

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

TRẮC NGHIỆM VD - VDC

KHỐI ĐA DIỆN

- * **CÓ ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT**
- * **PHÂN LOẠI CÁC DẠNG TOÁN**
- * **CHIA PHẦN BÀI TẬP VÀ LỜI GIẢI RIÊNG**



ÔN THI THPT QUỐC GIA

MỤC LỤC

DẠNG 1: THỂ TÍCH KHỐI CHÓP.....	8
DẠNG 2: THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ.....	11
DẠNG 3: TỈ LỆ THỂ TÍCH.....	15
DẠNG 4: CỰC TRỊ THỂ TÍCH	23
DẠNG 5: GÓC, KHOẢNG CÁCH LIÊN QUAN ĐẾN THỂ TÍCH.....	33
DẠNG 6: ỨNG DỤNG THỰC TẾ.....	36

THỂ TÍCH ĐA DIỆN

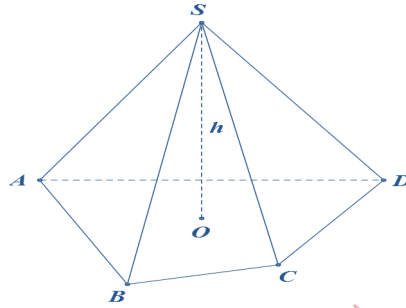
A – KIẾN THỨC CHUNG

1. Thể tích khối chóp

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} \cdot h$$

- $S_{\text{đáy}}$: Diện tích mặt đáy.
- h : Độ dài chiều cao khối chóp.

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} d_{(S, (ABCD))} \cdot S_{ABCD}$$



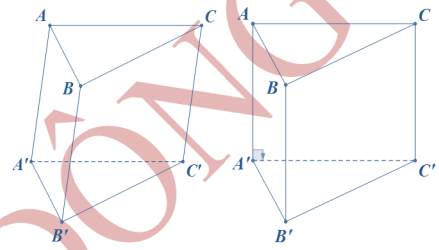
2. Thể tích khối lăng trụ

$$V = S_{\text{đáy}} \cdot h$$

- $S_{\text{đáy}}$: Diện tích mặt đáy.
- h : Chiều cao của khối lăng trụ.

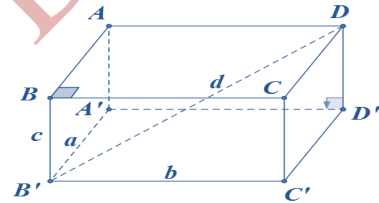
Lưu ý:

Lăng trụ đứng có chiều cao chính là cạnh bên.



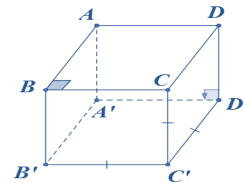
3. Thể tích khối hộp chữ nhật

$$V = abc$$



4. Thể tích khối lập phương

$$V = a^3$$



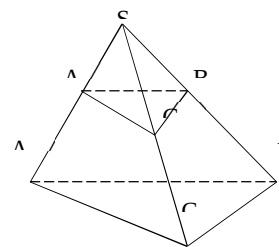
5. Tỷ số thể tích

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

Thể tích hình chóp cắt $ABC.A'B'C'$

$$V = \frac{h}{3} (B + B' + \sqrt{BB'})$$

Với B, B', h là diện tích hai đáy và chiều cao.

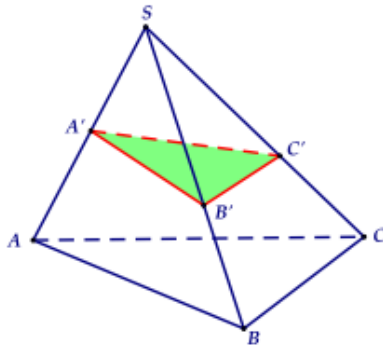


5.1. Hai khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ và $S.B_1B_2...B_m$ có chung đỉnh S và hai mặt đáy cùng nằm trên một mặt phẳng, ta có:

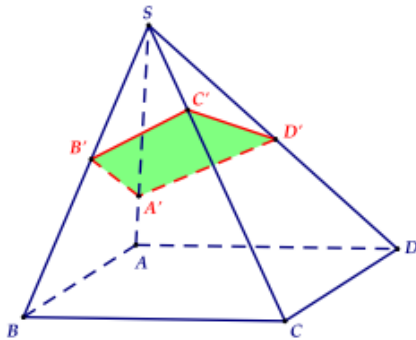
$$\frac{V_{S.A_1A_2...A_n}}{V_{S.B_1B_2...B_m}} = \frac{S_{A_1A_2...A_n}}{S_{B_1B_2...B_m}}$$

5.2. Hai khối chóp tam giác $S.ABC$ có $A' \in SA, B' \in SB, C' \in SC$ ta có:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

Hình chóp tam giác

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

Hình chóp tứ giác có đáy là hình bình hành

$$\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd} = \frac{\text{Tổng}}{4 \text{ Tích}}$$

Trong đó: $a = \frac{SA}{SA'}$; $b = \frac{SB}{SB'}$; $c = \frac{SC}{SC'}$; $d = \frac{SD}{SD'}$;
 A', B', C', D' đồng phẳng.

- Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và $\frac{SM}{SA} = x, \frac{SN}{SB} = y, \frac{SP}{SC} = z$. Mặt phẳng (MNP) cắt SD tại Q thì ta có đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{t}$ với $t = \frac{SQ}{SD}$ và $V_{S.MNPQ} = \frac{1}{4}xyz t \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) V$.

5.3. Kiến thức cần nhớ đối với khối lăng trụ tam giác và khối hộp.

$$\square V_{A'.ABC} = \frac{V}{3}, V_{A'.BCC'B'} = \frac{2V}{3}.$$

$$\square V_{A'.ABD} = \frac{V}{6}, V_{BDA'C'} = \frac{V}{3}.$$

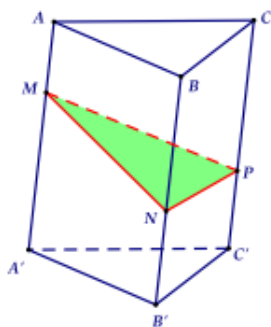
5.4. Một số công thức nhanh cho các trường hợp hay gặp

$$\square \text{ Tam giác } ABC \text{ vuông tại } A \text{ có đường cao } AH \text{ có } \frac{BH}{BC} = \left(\frac{AB}{BC} \right)^2, \frac{CH}{CB} = \left(\frac{AC}{BC} \right)^2.$$

- Mặt phẳng (α) song song với mặt đáy của khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ cắt SA_k tại điểm M_k thỏa mãn

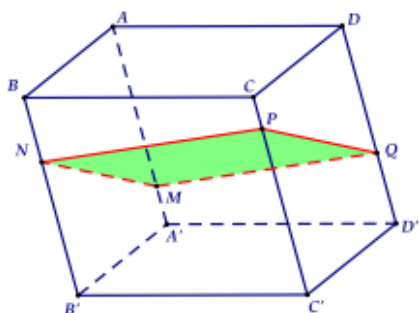
$$\frac{SM_k}{SA_k} = p, \text{ ta có } \frac{V_{S.M_1M_2...M_n}}{V_{S.A_1A_2...A_n}} = p^3.$$

$$\square \text{ Hình lăng trụ tam giác } ABC.A'B'C' \text{ có } \frac{AM}{AA'} = x, \frac{BN}{BB'} = y, \frac{CP}{CC'} = z \text{ có } V_{ABC.MNP} = \frac{x+y+z}{3} V.$$

Hình lăng trụ tam giác

$$\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3} \left(\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} \right)$$

□ Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $\frac{AM}{AA'} = x, \frac{BN}{BB'} = y, \frac{CP}{CC'} = z$. Mặt phẳng (MNP) cắt DD' tại Q thì ta có đẳng thức $x + z = y + t$ với $t = \frac{DQ}{DD'}$ và $V_{ABCD.MNPQ} = \frac{x + y + z + t}{4} V$.

Hình hộp

$$\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{4} \left(\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} + \frac{DQ}{DD'} \right)$$

$$\text{hay } \frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{2} \left(\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} \right)$$

M, N, P, Q đồng phẳng.

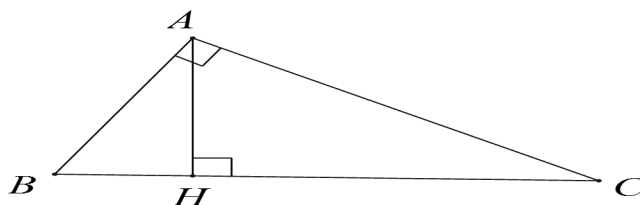
□ Định lí Meneleus cho 3 điểm thẳng hàng $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PA} = 1$ với MNP là một đường thẳng cắt ba đường thẳng AB, BC, CA lần lượt tại M, N, P .

6. Một số chú ý về độ dài các đường đặc biệt

- Đường chéo của hình vuông cạnh a là $a\sqrt{2}$
- Đường chéo của hình lập phương cạnh a là $a\sqrt{3}$
- Đường chéo của hình hộp chữ nhật có 3 kích thước a, b, c là $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- Đường cao của tam giác đều cạnh a là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

7. CÁC CÔNG THỨC HÌNH PHẪNG**7.1. Hệ thức lượng trong tam giác****7.1.1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH**

- $AB^2 + AC^2 = BC^2$
- $AB^2 = BH \cdot BC$
- $AC^2 = CH \cdot BC$
- $AH \cdot BC = AB \cdot AC$
- $AH^2 = BH \cdot HC$



$$\bullet \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

$$\bullet AB = BC \cdot \sin C = BC \cdot \cos B = AC \cdot \tan C = AC \cdot \cot B$$

7.1.2. Cho $\triangle ABC$ có độ dài ba cạnh là: a, b, c độ dài các trung tuyến là m_a, m_b, m_c bán kính đường tròn ngoại tiếp R ; bán kính đường tròn nội tiếp r nửa chu vi p .

- Định lí hàm số cosin:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A; b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B; c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

- Định lí hàm số sin:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

- Độ dài trung tuyến:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}; m_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}; m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

7.2. Các công thức tính diện tích

7.2.1. Tam giác

- $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$
- $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$
- $S = \frac{abc}{4R}$
- $S = pr$
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
- $\triangle ABC$ vuông tại A: $S = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{BC \cdot AH}{2}$
- $\triangle ABC$ đều, cạnh a : $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

7.2.2. Hình vuông

- $S = a^2$ (a : cạnh hình vuông)

7.2.3. Hình chữ nhật

- $S = ab$ (a, b : hai kích thước)

7.2.4. Hình bình hành

- $S = \text{đáy} \times \text{cao} = AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD}$

7.2.5. Hình thoi

- $S = AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$

7.2.6. Hình thang

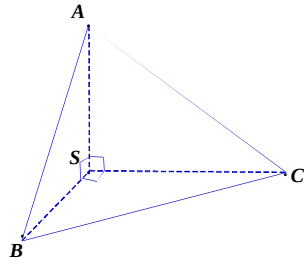
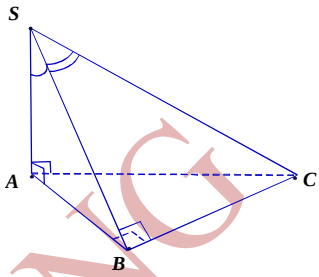
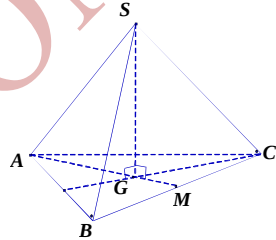
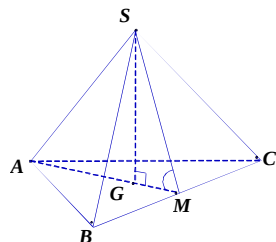
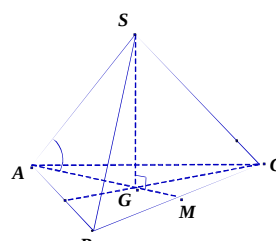
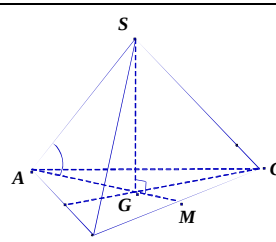
- $S = \frac{1}{2}(a+b)h$ (a, b : hai đáy, h : chiều cao)

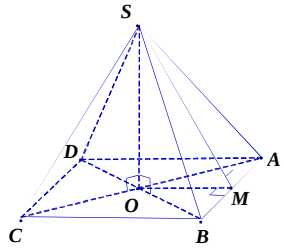
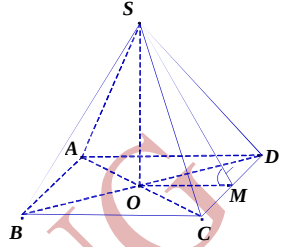
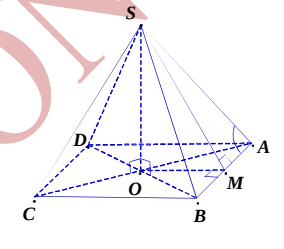
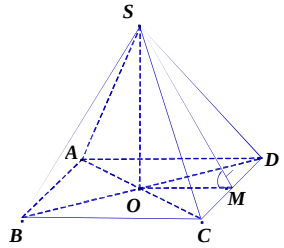
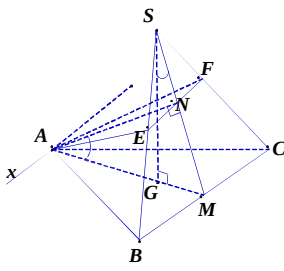
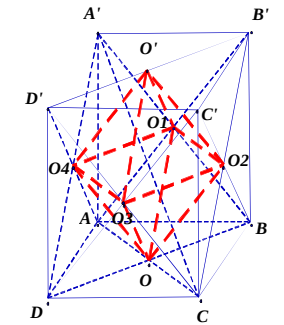
7.2.7. Tứ giác có hai đường chéo vuông góc AC & BD

- $S = \frac{1}{2}AC \cdot BD$

8. MỘT SỐ CÔNG THỨC TÍNH NHANH THỂ TÍCH KHỐI CHÓP THƯỜNG GẶP

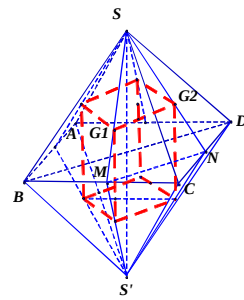
Nội dung	Hình vẽ
----------	---------

Cho hình chóp $SABC$ với các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SAC)$ vuông góc với nhau từng đôi một, diện tích các tam giác SAB, SBC, SAC lần lượt là S_1, S_2, S_3. Khi đó: $V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{2S_1 \cdot S_2 \cdot S_3}}{3}$	
Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC), hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau, $\widehat{BSC} = \alpha, \widehat{ASB} = \beta$. Khi đó: $V_{S.ABC} = \frac{SB^3 \cdot \sin 2\alpha \cdot \tan \beta}{12}$	
Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh bên bằng b. Khi đó: $V_{S.ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3b^2 - a^2}}{12}$	
Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với mặt phẳng đáy góc α. Khi đó: $V_{S.ABC} = \frac{a^3 \tan \alpha}{24}$	
Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên bằng b và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy góc β. Khi đó: $V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{3}b^3 \cdot \sin \beta \cos^2 \beta}{4}$	
Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh đáy bằng a, cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy góc β. Khi đó: $V_{S.ABC} = \frac{a^3 \cdot \tan \beta}{12}$	

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, và $SA = SB = SC = SD = b$. Khi đó: $V_{S.ABCD} = \frac{a^2 \sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6}$	
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc tạo bởi mặt bên và mặt phẳng đáy là α. Khi đó: $V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \cdot \tan \alpha}{6}$	
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, $\widehat{SAB} = \alpha$ với $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ Khi đó: $V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{\tan^2 \alpha - 1}}{6}$	
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng a, góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy là α với $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó: $V_{S.ABCD} = \frac{4a^3 \cdot \tan \alpha}{3\sqrt{(2 + \tan^2 \alpha)^3}}$	
Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A song song với BC và vuông góc với (SBC), góc giữa (P) với mặt phẳng đáy là α. Khi đó: $V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \cot \alpha}{24}$	
Khối tám mặt đều có đỉnh là tâm các mặt của hình lập phương cạnh a. Khi đó: $V = \frac{a^3}{6}$	

Cho khối tám mặt đều cạnh a . Nối tâm của các mặt bên ta được khối lập phương.

$$\text{Khi đó: } V = \frac{2a^3\sqrt{2}}{27}$$



9. CÁC CÔNG THỨC ĐẶC BIỆT THỂ TÍCH TỨ DIỆN

Công thức	Điều kiện tứ diện
$V_{S.ABC} = \frac{abc}{6} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \varphi + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \varphi}$ Công thức tính khi biết 3 cạnh, 3 góc ở đỉnh 1 tứ diện	$\begin{cases} SA = a, SB = b, SC = c \\ \widehat{ASB} = \alpha, \widehat{BSC} = \beta, \widehat{CSA} = \varphi \end{cases}$
$V_{ABCD} = \frac{1}{6} abd \sin \alpha$ Công thức tính khi biết 2 cạnh đối, khoảng cách và góc 2 cạnh đó	$\begin{cases} AB = a, CD = b \\ d(AB, CD) = d, \angle(AB, CD) = \alpha \end{cases}$
$V_{SABC} = \frac{2S_1 S_2 \sin \alpha}{3a}$ Công thức tính khi biết một cạnh, diện tích và góc giữa 2 mặt kề	$\begin{cases} S_{\triangle SAB} = S_1, S_{\triangle SAC} = S_2, SA = a \\ \angle((SAB), (SAC)) = \alpha \end{cases}$
$V_{S.ABC} = \frac{abc}{6} \sin \alpha \sin \beta \sin \varphi$ Công thức tính khi biết 3 cạnh, 2 góc ở đỉnh và 1 góc nhị diện	$\begin{cases} SA = a, SB = b, SC = c \\ \angle((SAB), (SAC)) = \alpha \\ \widehat{ASB} = \beta, \widehat{ASC} = \varphi \end{cases}$
$V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$	Tứ diện đều tất cả các cạnh bằng a
$V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)}$	Tứ diện gần đều $\begin{cases} AB = CD = a \\ AC = BD = b \\ AD = BC = c \end{cases}$

B – BÀI TẬP**DẠNG 1: THỂ TÍCH KHỐI CHÓP**

Câu 1: Cho khối tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của A qua D . Mặt phẳng qua CE và vuông góc với mặt phẳng (ABD) cắt cạnh AB tại điểm F . Tính thể tích V của khối tứ diện $AECF$.

A. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{30}$

B. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{60}$

C. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{40}$

D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{15}$

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm tam giác BCD . Tính thể tích của khối chóp $AGBC$.

A. $V = 3$.

B. $V = 4$.

C. $V = 6$.

D. $V = 5$.

Câu 3: Cho tứ diện đều cạnh a và điểm I nằm trong tứ diện. Tính tổng khoảng cách từ I đến các mặt của tứ diện.

A. $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{34}}{2}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a, BC = a\sqrt{2}$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng x . Tìm x biết thể tích khối chóp đã cho có thể tích bằng $\frac{a^3\sqrt{11}}{6}$.

A. $x = \frac{3a}{2}$.

B. $x = \frac{7a}{2}$.

C. $x = \frac{9a}{2}$.

D. $x = \frac{5a}{2}$.

Câu 5: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và song song BC và vuông góc với (SBC) , góc giữa (P) với mặt phẳng đáy là 30° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

C. $\frac{a^3}{8}$

D. $\frac{3a^3}{8}$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 4, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SD, CD, BC . Thể tích khối chóp $S.ABPN$ là x , thể tích khối tứ diện $CMNP$ là y . Giá trị x, y thỏa mãn bất đẳng thức nào dưới đây:

A. $x^2 + 2xy - y^2 > 160$

B. $x^2 - 2xy + 2y^2 < 109$

C. $x^2 + xy - y^4 < 145$

D. $x^2 - xy + y^4 > 125$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có chân đường cao nằm trong tam giác ABC ; các mặt phẳng $(SAB); (SAC); (SBC)$ cùng tạo với mặt phẳng (ABC) một góc bằng nhau. Biết $AB = 25, BC = 17, AC = 26$, đường thẳng SB tạo với đáy một góc bằng 45° . Tính thể tích V của khối chóp $SABC$.

A. $V = 680$

B. $V = 408$

C. $V = 578$

D. $V = 600$

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = 8, BC = 6$. Biết $SA = 6$ và vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) . Một điểm M thuộc phần không gian bên trong của hình chóp và cách đều tất cả các mặt của hình chóp. Tính thể tích của khối tứ diện $M.ABC$.

A. $V = 24$. B. $V = \frac{64}{3}$. C. $V = \frac{32}{3}$. D. $V = 12$.

Câu 9: Cho khối đa diện đều n mặt có thể tích V và diện tích mỗi mặt của nó bằng S . Khi đó, tổng các khoảng cách từ một điểm bất kì bên trong khối đa diện đó đến các mặt của nó bằng

A. $\frac{nV}{S}$. B. $\frac{V}{nS}$. C. $\frac{3V}{S}$. D. $\frac{V}{3S}$.

Câu 10: (ĐH Vinh Lần 1) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{11}$, cosin góc hợp bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng $\frac{1}{10}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $3a^3$. B. $9a^3$. C. $4a^3$. D. $12a^3$.

Câu 11: (THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , $SA = a\sqrt{3}$; $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SD ; mặt phẳng (AMN) cắt SC tại I . Tính thể tích khối đa diện $ABCDMNI$.

A. $V = \frac{5\sqrt{3}a^3}{18}$. B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{18}$. C. $V = \frac{5\sqrt{3}a^3}{6}$. D. $V = \frac{13\sqrt{3}a^3}{36}$.

Câu 12: (Chuyên Vinh Lần 3) Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh $SA = BC = 3$; $SB = AC = 4$; $SC = AB = 2\sqrt{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{\sqrt{390}}{12}$. B. $\frac{\sqrt{390}}{4}$. C. $\frac{\sqrt{390}}{6}$. D. $\frac{\sqrt{390}}{8}$.

Câu 13: (Phan Đình Tùng Hà Tĩnh) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với $AB = 2a, BC = CD = DA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Một mặt phẳng qua A vuông góc với SB và cắt SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P . Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp khối $ABCDMNP$

A. $\frac{32\pi a^3}{3}$. B. $\frac{4a^3\pi\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{4\pi a^3}{3}$. D. $\frac{4\pi a^3}{24}$.

Câu 14: (-Mai-Anh-Tuấn-Thanh-Hóa-lần-1-2018-2019) Cho tứ diện $OABC$ có $OA = a, OB = b, OC = c$ và đôi một vuông góc với nhau. Gọi r là bán kính mặt cầu tiếp xúc với cả bốn mặt của tứ diện. Giả sử $a \geq b, a \geq c$. Giá trị nhỏ nhất của $\frac{a}{r}$ là

A. $1 + \sqrt{3}$. B. $2 + \sqrt{3}$. C. $\sqrt{3}$. D. $3 + \sqrt{3}$.

Câu 15: (Nguyễn Khuyển) Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC = 4, BC = 2, SA = 4\sqrt{3}, \widehat{SAB} = \widehat{SAC} = 30^\circ$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng:

A. $V_{S.ABC} = 4$. B. $V_{S.ABC} = 6$. C. $V_{S.ABC} = 8$. D. $V_{S.ABC} = 12$.

Câu 16: (Chuyên-Thái-Nguyên-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3) Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC . Biết $(AMN) \perp (SBC)$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{26}}{24}$. B. $\frac{a^3\sqrt{5}}{24}$. C. $\frac{a^3\sqrt{5}}{8}$. D. $\frac{a^3\sqrt{13}}{18}$.

Câu 17: (KHTN Hà Nội Lần 3) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC . Biết rằng BM vuông góc với AN . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{14}}{8}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. D. $\frac{a^3\sqrt{14}}{24}$.

Câu 18: (Sở Ninh Bình Lần 1) Cho hình chóp đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng 2, điểm M thuộc cạnh SA sao cho $SA = 4SM$ và SA vuông góc với mặt phẳng (MBC) . Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ là

- A. $V = \frac{2}{3}$. B. $V = \frac{2\sqrt{5}}{9}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $V = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Câu 19: (Phan Đình Tùng Hà Tĩnh) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = \frac{a\sqrt{39}}{3}$. Tam giác ABC cân tại A có góc $A = 120^\circ$, $BC = 2a$. G là trọng tâm tam giác SAB . Thể tích khối chóp $G.ABC$ là

- A. $\frac{2a^3}{9}$. B. a^3 . C. $\frac{a^3}{3}$. D. $\frac{a^3}{9}$.

Câu 20: (THPT ĐÔ LƯƠNG 3 LẦN 2) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $\frac{\sqrt{6}}{4}$, từ B đến mặt phẳng (SAC) là $\frac{\sqrt{15}}{10}$, từ C đến mặt phẳng (SAB) là $\frac{\sqrt{30}}{20}$ và hình chiếu vuông góc của S xuống đáy nằm trong tam giác ABC . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{1}{36}$. B. $\frac{1}{48}$. C. $\frac{1}{12}$. D. $\frac{1}{24}$.

Câu 21: (Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi N là trung điểm SB , P thuộc đoạn SC sao cho $SP = 2PC$, M thuộc đoạn SA sao cho $SM = \frac{4}{5}MA$. Mặt phẳng (MNP) cắt SD tại Q . NP cắt BC tại E , CQ cắt DP tại R . Biết rằng thể tích khối chóp $EPQR$ bằng 18cm^3 . Thể tích khối chóp $SMNPQ$ bằng

- A. 65cm^3 . B. $\frac{260}{9}\text{cm}^3$. C. 75cm^3 . D. 70cm^3 .

Câu 22: (Nam Tiền Hải Thái Bình Lần1) Cho khối chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60^\circ$, $SA = a, SB = 2a, SC = 4a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .

- A. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. B. $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. C. $\frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$. D. $\frac{8\sqrt{2}a^3}{3}$.

DẠNG 2: THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ LĂNG TRỤ ĐỨNG

Câu 23: Cho lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A , $BC = 2a$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BB'C)$ bằng 60° . Tính thể tích lăng trụ $ABCA'B'C'$.

- A. $a^3\sqrt{2}$ B. $2a^3$ C. $a^3\sqrt{6}$ D. $\sqrt{3}a^3$

Câu 24: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt thuộc các cạnh bên AA', CC' sao cho $MA = MA'$ và $NC = 4NC'$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Trong bốn khối tứ diện $GA'B'C', BB'MN, ABB'C'$ và $A'BCN$, khối tứ diện nào có thể tích nhỏ nhất?

- A. Khối $A'BCN$ B. Khối $GA'B'C'$ C. Khối $ABB'C'$ D. Khối $BB'MN$

Câu 25: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, biết đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{6}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. B. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. C. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. D. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 26: (Chuyên-Thái-Nguyên-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3) Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB = AC = a$. Biết góc giữa hai đường thẳng AC' và BA' bằng 60° . Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

- A. a^3 . B. $2a^3$. C. $\frac{a^3}{3}$. D. $\frac{a^3}{2}$.

Câu 27: (KSCL-Lần-2-2019-THPT-Nguyễn-Đức-Cảnh-Thái-Bình) Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . M, N, P lần lượt là trung điểm của $CC', A'C', A'B'$. Biết thể tích của khối $GMNP$ bằng 5, tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. 72. B. 21. C. 18. D. 17.

Câu 28: (Chuyên Bắc Giang) Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài tất cả các cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và AC . Tính thể tích V của khối đa diện $AMNA'B'C'$.

- A. $V = \frac{7\sqrt{3}}{48}$. B. $V = \frac{5\sqrt{3}}{32}$. C. $V = \frac{7\sqrt{3}}{32}$. D. $V = \frac{5\sqrt{3}}{48}$.

Câu 29: (SỞ QUẢNG BÌNH NĂM 2019) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 1. Gọi M là trung điểm cạnh BB' . Mặt phẳng $(MA'D)$ cắt cạnh BC tại K . Thể tích của khối đa diện $A'B'C'D'MKCD$ bằng:

A. $\frac{7}{24}$.

B. $\frac{7}{17}$.

C. $\frac{1}{24}$.

D. $\frac{17}{24}$.

Câu 30: (Chuyên Quốc Học Huế Lần 1) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Biết tích của khoảng cách từ điểm B' và điểm D đến mặt phẳng $(D'AC)$ bằng $6a^2$ ($a > 0$). Giả sử thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là ka^2 . Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $k \in (20;30)$.

B. $k \in (100;120)$.

C. $k \in (50;80)$.

D. $k \in (40;50)$.

Câu 31: Cho khối hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = b, \widehat{BAD} = \alpha$; đường chéo AC' hợp với đáy góc β . Tính thể tích khối hộp đứng đã cho là:

A. $V = 4ab\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab.\cos\alpha}.\cos\alpha.\cos\beta$

B. $V = 2ab\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab.\cos\alpha}.\cos\alpha.\cos\beta$

C. $V = 3ab\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab.\cos\alpha}.\sin\alpha.\tan\beta$

D. $V = ab\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab.\cos\alpha}.\sin\alpha.\tan\beta$

Câu 32: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a , một mặt phẳng (α) cắt các cạnh AA' , BB' , CC' , DD' lần lượt tại M , N , P , Q . Biết $AM = \frac{1}{3}a$, $CP = \frac{2}{5}a$. Thể tích khối đa diện $ABCD.MNPQ$ là:

A. $\frac{11}{30}a^3$.

B. $\frac{a^3}{3}$.

C. $\frac{2a^3}{3}$.

D. $\frac{11}{15}a^3$.

Câu 33: (Phan Đình Tùng Hà Tĩnh) Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi và diện tích đáy bằng S_1 . Tứ giác $ACC'A'$ và $BDD'B'$ có diện tích lần lượt bằng S_2 và S_3 . M là một điểm bất kì thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Kí hiệu V là thể tích của khối chóp $M.A'B'C'D'$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $V = \sqrt{\frac{S_1 S_2 S_3}{6}}$.

B. $V = \frac{\sqrt{2S_1 S_2 S_3}}{3}$.

C. $V = \frac{\sqrt{2}}{6} \sqrt{S_1 S_2 S_3}$.

D. $V = \frac{\sqrt{3}}{9} \sqrt{S_1 S_2 S_3}$.

Câu 34: (Chuyên Thái Nguyên) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khoảng cách giữa AB và $B'C$ là $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$, khoảng cách giữa BC và AB' là $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$, khoảng cách giữa AC và BD' là $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích khối hộp.

A. $4a^3$.

B. $3a^3$.

C. $5a^3$.

D. $2a^3$.

Câu 35: (THĂNG LONG HN LẦN 2 NĂM 2019) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = BC = a$, $AA' = a\sqrt{3}$. Gọi I là giao điểm của AD' và $A'D$; H là hình chiếu của I trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$; K là hình chiếu của B lên mặt phẳng $(CA'B')$. Tính thể tích của khối tứ diện $IHBK$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 36: (Ngô Quyền Hà Nội) Một hình hộp chữ nhật có kích thước $a(\text{cm}) \times b(\text{cm}) \times c(\text{cm})$, trong đó a, b, c là các số nguyên và $1 \leq a \leq b \leq c$. Gọi $V(\text{cm}^3)$ và $S(\text{cm}^2)$ lần lượt là thể tích và diện tích toàn phần của hình hộp. Biết $V = S$, tìm số các bộ ba số (a, b, c) ?

A. 10.

B. 12.

C. 21.

D. 4.

LĂNG TRỤ XIÊN

Câu 37: (THANH CHƯƠNG 1 NGHỆ AN 2019 LẦN 3) Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác ABC đều cạnh a . Gọi M là trung điểm AC . Biết tam giác $A'MB$ cân tại A' và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Góc giữa $A'B$ với mặt phẳng (ABC) là 30° . Thể tích khối lăng trụ đã cho là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{48}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 38: (Thuan-Thanh-Bac-Ninh) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 39: (Nguyễn Tất Thành Yên Bái) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Biết khoảng cách giữa hai đường AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 40: (THPT-Toàn-Thắng-Hải-Phòng) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 41: (THẠCH THÀNH I - THANH HÓA 2019) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC .

Một mặt phẳng (P) chứa BC và vuông góc với AA' cắt hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo một thiết diện có diện tích bằng $\frac{3a^2}{8}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{10}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 42: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, góc giữa đường thẳng BB' và (ABC) bằng 60° , tam giác ABC vuông tại C và góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên (ABC) trùng với trọng tâm của $\triangle ABC$. Thể tích của khối tứ diện $A'.ABC$ theo a bằng

- A. $\frac{13a^3}{108}$. B. $\frac{7a^3}{106}$. C. $\frac{15a^3}{108}$. D. $\frac{9a^3}{208}$.

Câu 43: (Đặng Thành Nam Đề 6) Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = 1, BC = 2$. Góc $\widehat{CBB'} = 90^\circ, \widehat{ABB'} = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh AA' . Biết $d(AB', CM) = \frac{\sqrt{7}}{7}$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

- A. $2\sqrt{2}$. B. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$. C. $4\sqrt{2}$. D. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

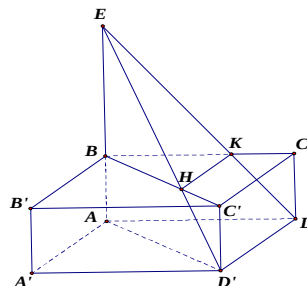
Câu 44: (Đặng Thành Nam Đề 9) Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V , đáy là tam giác cân, $AB = AC$. Gọi E là trung điểm cạnh AB và F là hình chiếu vuông góc của E lên BC . Mặt phẳng (CEF) chia khối lăng trụ đã cho thành hai khối đa diện. Tính thể tích khối đa diện chứa đỉnh A .

- A. $\frac{47}{72}V$. B. $\frac{25}{72}V$. C. $\frac{29}{72}V$. D. $\frac{43}{72}V$.

Câu 45: Cho hình lăng trụ có tất cả các cạnh đều bằng a , đáy là lục giác đều, góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy là 60° . Tính thể tích khối lăng trụ

- A. $V = \frac{27}{8}a^3$. B. $V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^3$. C. $V = \frac{3}{2}a^3$. D. $\frac{9}{4}a^3$.

Câu 46: (Cổ Loa Hà Nội) Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng V . Điểm E thỏa mãn $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$. Thể tích của khối đa diện là **phần chung** của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và khối tứ diện $EADD'$ bằng



A. $\frac{4V}{27}$.

B. $\frac{V}{2}$.

C. $\frac{19V}{54}$.

D. $\frac{25V}{54}$.

Câu 47: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên bằng 1.; đáy $ABCD$ là một hình chữ nhật có các cạnh $BA = \sqrt{3}, AD = \sqrt{7}$; các mặt bên $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ hợp với mặt đáy các góc theo thứ tự $45^\circ; 60^\circ$. Thể tích khối hộp là:

A. 4 (đvdt)

B. 3 (đvdt)

C. 2 (đvdt)

D. 6 (đvdt)

Câu 48: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bên bằng a ; đáy là hình thoi, diện tích của hai mặt chéo là S_1 và S_2 ; góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mặt chéo là α . Tính thể tích V của khối hộp đã cho.

A. $V = \frac{S_1 S_2 \cos \alpha}{a}$

B. $V = \frac{S_1 S_2 \cos \alpha}{3a}$.

C. $V = \frac{S_1 S_2 \cos \alpha}{4a}$

D. $V = \frac{S_1 S_2 \cos \alpha}{2a}$

Câu 49: (Hậu Lộc Thanh Hóa) Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD . Góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối tứ diện $ACB'D'$.

A. $\frac{a^3}{2}$.

B. $\frac{a^3}{6}$.

C. $\frac{a^3}{3}$.

D. $\frac{3a^3}{2}$.

Câu 50: (PHÂN TÍCH BL_PT ĐỀ ĐH VINH 3 -2019..) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng V . Gọi M, N, P, Q, E, F lần lượt là tâm các hình bình hành $ABCD, A'B'C'D', ABB'A', BCC'B', CDD'C', DAA'D'$. Thể tích khối đa diện có các đỉnh M, P, Q, E, F, N bằng

A. $\frac{V}{4}$.

B. $\frac{V}{2}$.

C. $\frac{V}{6}$.

D. $\frac{V}{3}$.

Câu 51: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bên bằng a và các góc $A'AB, BDA, A'AD$ đều bằng α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$). Tính thể tích V của khối hộp.

A. $V = a^3 \sin 2\alpha \sqrt{\cos^2 \frac{a}{2} - \cos^2 \alpha} \arcsin \theta$

B. $V = 2a^3 \sin \alpha \sqrt{\cos^2 \frac{a}{2} - \cos^2 \alpha}$

C. $V = 2a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{a}{2} - \cos^2 \alpha}$

D. Đáp số khác.

DẠNG 3: TỈ LỆ THỂ TÍCH

Câu 1: (THTT Lần 4) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V . Gọi M là trung điểm của SB . P là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SP = 2DP$. Mặt phẳng (AMP) cắt cạnh SC tại N . Tính thể tích của khối đa diện $ABCDMNP$ theo V

A. $V_{ABCDMNP} = \frac{23}{30}V$.

B. $V_{ABCDMNP} = \frac{19}{30}V$.

C. $V_{ABCDMNP} = \frac{2}{5}V$.

D. $V_{ABCDMNP} = \frac{7}{30}V$.

Câu 2: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = \sqrt{3}a$, $AD = a$, SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Mặt phẳng (α) qua A vuông góc với SC cắt SB , SC , SD lần lượt tại M , N , P . Tính thể tích khối chóp $S.AMNP$.

- A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{40}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{40}$. C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{10}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{30}$.

Câu 3: Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích V và đáy là hình bình hành. Điểm S' thỏa mãn $\overrightarrow{SS'} = k\overrightarrow{DC}$ ($k > 0$). Biết thể tích phần chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$ là $\frac{7}{25}V$. Tìm k .

- A. $k = 9$. B. $k = 6$. C. $k = 11$. D. $k = 4$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Một mặt phẳng (P) song song với mặt đáy (ABC) cắt các cạnh SA , SB , SC lần lượt tại M , N , P . Tính diện tích tam giác MNP biết (P) chia khối chóp đã cho thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau.

- A. $S_{\Delta MNP} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{8}$. B. $S_{\Delta MNP} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{16}$. C. $S_{\Delta MNP} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$. D. $S_{\Delta MNP} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4\sqrt[3]{4}}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = b$ và cạnh bên $SA = c$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là một điểm trên cạnh SA sao cho $AM = x$ ($0 < x < c$). Tìm x để mặt phẳng (MBC) chia khối chóp thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau.

- A. $x = \frac{(3 - \sqrt{2})c}{2}$. B. $x = \frac{(2 - \sqrt{3})ab}{2c}$. C. $x = \frac{(3 - \sqrt{5})c}{2}$. D. $x = \frac{(\sqrt{5} - 1)ab}{2c}$.

Câu 6: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD$ và $CD = 4AB$. Gọi M là 1 điểm trên cạnh SA sao cho $0 < AM < SA$. Tìm tỉ số $\frac{SM}{SA}$ sao cho mặt phẳng (CDM) chia khối chóp đã cho thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau:

- A. $\frac{SM}{SA} = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$. B. $\frac{SM}{SA} = \frac{-4 + \sqrt{26}}{2}$. C. $\frac{SM}{SA} = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$. D. $\frac{SM}{SA} = \frac{-3 + \sqrt{23}}{2}$.

Câu 7: Cho điểm M trên cạnh SA , điểm N trên cạnh SB của hình chóp tam giác $S.ABC$ có thể tích bằng V sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{1}{3}$, $\frac{SN}{SB} = x$. Mặt phẳng (P) qua MN và song song với SC chia khối chóp $S.ABC$ thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau. Tính x .

- A. $x = \frac{4 - \sqrt{5}}{3}$ B. $x = \frac{8 - \sqrt{10}}{6}$ C. $x = \frac{4 - \sqrt{5}}{6}$ D. $x = \frac{8 - \sqrt{10}}{9}$

Câu 8: (Hai Bà Trưng Huế Lần1) Cho hình chóp tam giác $S.ABC$. Gọi M là trung điểm của SA , lấy điểm N trên cạnh SB sao cho $\frac{SN}{SB} = \frac{2}{3}$. Mặt phẳng (α) qua MN và song song với SC chia khối chóp thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện chứa đỉnh A , V_2 là thể tích của khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{16}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{18}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{11}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{9}$.

Câu 9: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên hợp với đáy một góc 60° . Gọi M là điểm đối xứng của C qua D , N là trung điểm SC . Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần. Tỉ số thể tích giữa hai phần (phần lớn trên phần bé) bằng:

- A. $\frac{7}{5}$. B. $\frac{1}{7}$. C. $\frac{7}{3}$. D. $\frac{6}{5}$.

Câu 10: Cho khối tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a , Gọi M , N là trung điểm các cạnh AB , BC và E là điểm thuộc tia đối DB sao cho $\frac{BD}{BE} = k$. Tìm k để mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh B có thể tích là $\frac{11\sqrt{2}a^3}{294}$.

- A. $k = \frac{6}{5}$. B. $k = 6$. C. $k = 4$. D. $V = 5$.

Câu 11: (Hình học không gian) Cho tứ diện $ABCD$ và M, N, P lần lượt thuộc BC, BD, AC sao cho $BC = 4BM$, $BD = 2BN$, $AC = 3AP$. Mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q . Tính tỷ số thể tích hai phần khối tứ diện $ABCD$ bị chia bởi mặt phẳng (MNP) .

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{7}{13}$ C. $\frac{5}{13}$ D. $\frac{1}{3}$

Câu 12: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , góc giữa mặt bên và phẳng đáy là α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Mặt phẳng (P) qua AC và vuông góc với mặt phẳng (SAD) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Tỉ lệ thể tích hai khối đa diện là gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau:

- A. 0,11 B. 0,13 C. 0,7 D. 0,9

Câu 13: Cho tứ diện $S.ABC$, M và N là các điểm thuộc các cạnh SA và SB sao cho $MA = 2SM$, $SN = 2NB$, (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SC . Kí hiệu (H_1) và (H_2) là các khối đa diện có được khi chia khối tứ diện $S.ABC$ bởi mặt phẳng (α) , trong đó, (H_1) chứa điểm S , (H_2) chứa điểm A ; V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của (H_1) và (H_2) . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$

Câu 14: (Sở Quảng NamT) Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 1, đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD và $AD = 3BC$. Gọi M là trung điểm của cạnh SA , N là điểm thuộc CD sao cho $ND = 3NC$. Mặt phẳng (BMN) cắt SD tại P . Thể tích khối chóp $AMBNP$ bằng:

- A. $\frac{3}{8}$ B. $\frac{5}{12}$ C. $\frac{5}{16}$ D. $\frac{9}{32}$

Câu 15: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Mặt phẳng (P) chứa cạnh BC cắt cạnh AD tại E . Biết góc giữa hai mặt phẳng (P) và (BCD) có số đo là α thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{5\sqrt{2}}{7}$. Gọi thể tích của hai tứ diện $ABCE$ và tứ diện $BCDE$ lần lượt là V_1 và V_2 . Tính tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. $\frac{3}{8}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{5}{8}$

Câu 16: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = 6, SB = 2, SC = 4, AB = 2\sqrt{10}$ và $\angle SBC = 90^\circ, \angle ASC = 120^\circ$. Mặt phẳng (P) qua B và trung điểm N của SC và vuông góc với mặt phẳng (SAC) cắt cạnh SA tại M . Tính tỉ số thể tích $\frac{V_{S.MBN}}{V_{S.ABC}}$.

- A. $\frac{2}{9}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{4}$

Câu 17: (KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Điểm K thuộc đoạn SA . Biết mặt phẳng (MNK) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần, phần chứa đỉnh S có thể tích bằng $\frac{7}{13}$ lần phần còn lại. Tính tỉ số $t = \frac{KA}{KS}$.

- A. $t = \frac{1}{2}$ B. $t = \frac{3}{4}$ C. $t = \frac{1}{3}$ D. $t = \frac{2}{3}$

Câu 18: (Sở Đà Nẵng 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SD . Mặt phẳng (α) chứa MN và cắt các tia SB, SC lần lượt tại P và Q . Đặt $\frac{SP}{SB} = x$, V_1 là thể tích của khối chóp $S.MNPQ$ và V là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tìm x để $V = 2V_1$.

- A. $x = \frac{1}{2}$ B. $x = \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$ C. $x = \frac{-1+\sqrt{41}}{4}$ D. $x = \sqrt{2}$

Câu 19: (Đặng Thành Nam Đề 3) khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với hai đáy là AB và CD , $AB = 2CD$. Gọi E là một điểm trên cạnh SC . Mặt phẳng (ABE) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau. Tính tỉ số $\frac{SE}{SC}$.

A. $\frac{\sqrt{10}-2}{2}$. B. $\sqrt{6}-2$. C. $\sqrt{2}-1$. D. $\frac{\sqrt{26}-4}{2}$.

Câu 20: (Hàm Rộng) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Điểm I thuộc đoạn SA . Biết mặt phẳng (MNI) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần, phần chứa đỉnh S có thể tích bằng $\frac{7}{13}$ lần phần còn lại. Tính tỉ số $k = \frac{IA}{IS}$?

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

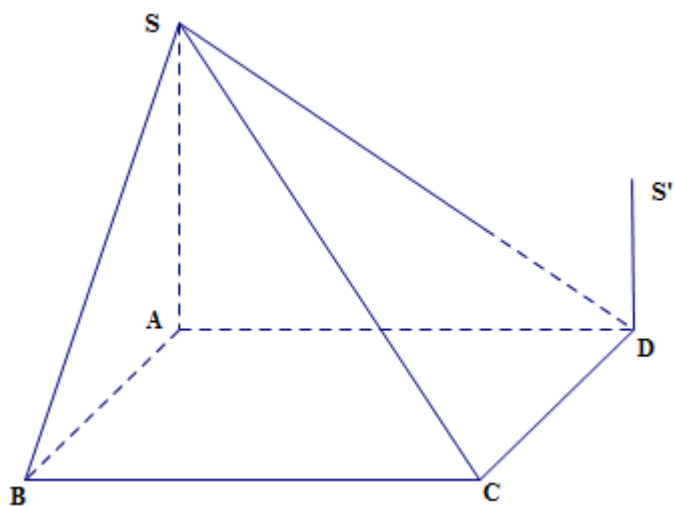
Câu 21: (Cụm 8 trường chuyên lần1) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên tạo với đường cao một góc 30° , O là trọng tâm tam giác ABC . Một hình chóp tam giác đều thứ hai $O.A'B'C'$ có S là tâm của tam giác $A'B'C'$ và cạnh bên của hình chóp $O.A'B'C'$ tạo với đường cao một góc 60° (hai hình chóp có chung chiều cao) sao cho mỗi cạnh bên SA, SB, SC lần lượt cắt các cạnh bên OA', OB', OC' . Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối chóp $S.ABC$ và $O.A'B'C'$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp $S.ABC$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{9}{16}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{27}{64}$. D. $\frac{9}{64}$.

Câu 22: (Cụm 8 trường chuyên lần1) 5 (Tổng quát câu 4) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, O là trọng tâm tam giác ABC . Một hình chóp tam giác đều thứ hai $O.A'B'C'$ có S là tâm của tam giác $A'B'C'$ và cạnh bên của hình chóp $O.A'B'C'$ và $A'B' = kAB$ (hai hình chóp có chung chiều cao) sao cho mỗi cạnh bên SA, SB, SC lần lượt cắt các cạnh bên OA', OB', OC' . Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối chóp $S.ABC$ và $O.A'B'C'$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp $S.ABC$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{k^3+k^2}{(k+1)^3}$. B. $\frac{k^3}{(k+1)^3}$. C. $\frac{1}{k+1}$. D. $\frac{k}{k+1}$.

Câu 23: (Cụm 8 trường chuyên lần1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại D lấy điểm S' thỏa mãn $S'D = \frac{1}{2}SA$ và S', S ở cùng phía đối với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng



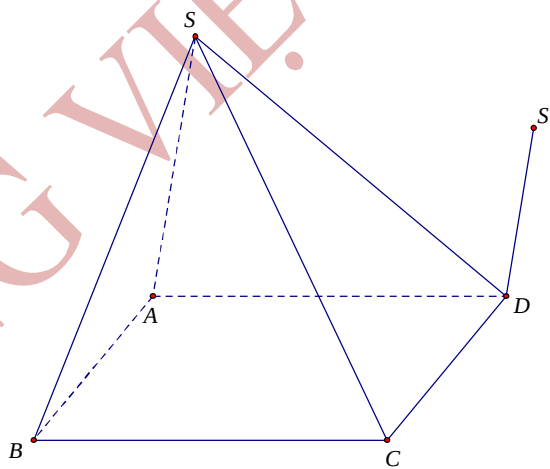
A. $\frac{4}{9}$.

B. $\frac{7}{9}$.

C. $\frac{7}{18}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Câu 24: (Cụm 8 trường chuyên lần 1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trên đường thẳng qua D và song song với SA lấy điểm S' thỏa mãn $\overrightarrow{S'D} = k\overrightarrow{SA}$ với $k > 0$. Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng



A. $\frac{2k^2 + k}{2(k+1)^2}$.

B. $\frac{3k+2}{2(k+1)^2}$.

C. $\frac{3k^2 + 2k}{2(k+1)^2}$.

D. $\frac{k}{k+1}$.

Câu 25: (THTT số 3) Cho khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ (với $n \geq 3$ là số nguyên dương). Gọi B_j là trung điểm của đoạn thẳng SA_j ($j = \overline{1, n}$). Kí hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ và $S.B_1B_2...B_n$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. 2.

B. 4.

C. 8.

D. 2^n .

Câu 26: Khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V , khối tứ diện $A_1B_1C_1D_1$ có thể tích V_1 , các đỉnh A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC . Khối tứ diện $A_2B_2C_2D_2$ có thể

tích V_2 , các đỉnh A_2, B_2, C_2, D_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác $B_1C_1D_1, C_1D_1A_1, D_1A_1B_1, A_1B_1C_1$. Cứ tiếp tục như thế ta được khối tứ diện $A_nB_nC_nD_n$ có thể tích V_n , các đỉnh A_n, B_n, C_n, D_n lần lượt là trọng tâm của các tam giác $B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}, C_{n-1}D_{n-1}A_{n-1}, D_{n-1}A_{n-1}B_{n-1}, A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$.
 Tính $S = V_1 + V_2 + \dots + V_{2018}$?

A. $S = \frac{(3^{2018} - 1)V}{2 \cdot 3^{2018}}$.

B. $S = \frac{(27^{2019} - 1)V}{26 \cdot 27^{2019}}$.

C. $S = \frac{(27^{2018} - 1)V}{26 \cdot 27^{2018}}$.

D. $S = \frac{(3^{2019} - 1)V}{2 \cdot 3^{2019}}$.

Câu 27: (KINH MÔN II LẦN 3 NĂM 2019) Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy bằng a , chiều cao bằng $2a$. Mặt phẳng (P) qua B' và vuông góc với $A'C$ chia lăng trụ thành hai khối. Biết thể tích của hai khối là V_1 và V_2 với $V_1 < V_2$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{1}{11}$.

B. $\frac{1}{23}$.

C. $\frac{1}{47}$.

D. $\frac{1}{7}$.

Câu 28: (THTT Lần 4) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, trên các cạnh AA', BB' lấy các điểm M, N sao cho $AA' = 3AM, BB' = 3BN$. Mặt phẳng (CMN) chia khối lăng trụ đã cho thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $C'.A'B'NM$, V_2 là thể tích của khối đa diện $ABCMNC'$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{7}$.

B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{7}$.

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{7}$.

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{7}$.

Câu 29: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt thuộc các cạnh bên AA', CC' sao cho $MA = MA', NC = 4NC'$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Hỏi trong bốn khối tứ diện $GA'B'C', BB'MN, ABB'C'$ và $A'BCN$, khối tứ diện nào có thể tích nhỏ nhất?

A. Khối $A'BCN$.

B. Khối $GA'B'C'$.

C. Khối $ABB'C'$.

D. Khối $BB'MN$.

Câu 30: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$, có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Lấy M, N lần lượt trên cạnh $AB', A'C$ sao cho $\frac{AM}{AB'} = \frac{A'N}{A'C} = \frac{1}{3}$. Tính thể tích V của khối $BMNC'C$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{108}$

B. $\frac{2a^3\sqrt{6}}{27}$

C. $\frac{3a^3\sqrt{6}}{108}$

D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{27}$

Câu 31: (Cụm THPT Vũng Tàu) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Trên các cạnh AA', BB' lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $AA' = kAE, BB' = kB'F$. Mặt phẳng $(C'EF)$ chia khối trụ đã cho thành hai khối đa diện bao gồm khối chóp $(C'.A'B'FE)$ có thể tích V_1 và khối đa diện $(ABCEFC')$ có thể tích V_2 . Biết rằng $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{7}$, tìm k

A. $k = 4$.

B. $k = 3$.

C. $k = 1$.

D. $k = 2$.

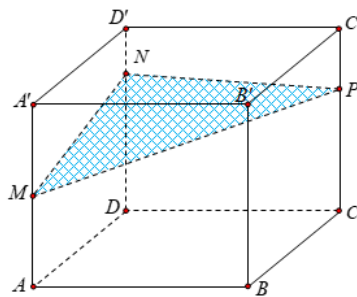
Câu 32: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$, có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Lấy M, N lần lượt trên cạnh $AB', A'C$ sao cho $\frac{AM}{AB'} = \frac{A'N}{A'C} = \frac{1}{3}$. Tính thể tích V của khối $BMNC'C$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{108}$ B. $\frac{2a^3\sqrt{6}}{27}$ C. $\frac{3a^3\sqrt{6}}{108}$ D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{27}$

Câu 33: (Trần Đại Nghĩa) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B', AC$ và P là điểm thuộc cạnh CC' sao cho $CP = 2C'P$. Tính thể tích khối tứ diện $BMNP$ theo V .

- A. $\frac{2V}{9}$ B. $\frac{V}{3}$ C. $\frac{5V}{24}$ D. $\frac{4V}{9}$

Câu 34: (Lý Nhân Tông) Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 2110. Biết $A'M = MA$, $DN = 3ND'$, $CP = 2C'P$ như hình vẽ. Mặt phẳng (MNP) chia khối hộp đã cho thành hai khối đa diện. Thể tích khối đa diện nhỏ hơn bằng



- A. $\frac{5275}{6}$ B. $\frac{5275}{12}$ C. $\frac{7385}{18}$ D. $\frac{8440}{9}$

Câu 35: (THTT lần 5) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $2a$. Gọi M là trung điểm của BB' và P thuộc cạnh DD' sao cho $DP = \frac{1}{4}DD'$. Biết mặt phẳng (AMP) cắt CC' tại N , thể tích của khối đa diện $AMNPBCD$ bằng

- A. $2a^3$ B. $3a^3$ C. $\frac{11a^3}{3}$ D. $\frac{9a^3}{4}$

Câu 36: Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Các điểm E và F lần lượt là trung điểm của $C'B'$ và $C'D'$. Mặt phẳng (AEF) cắt khối lập phương đã cho thành hai phần, gọi V_1 là thể tích khối chứa điểm A' và V_2 là thể tích khối chứa điểm C' . Khi đó $\frac{V_1}{V_2}$ là

- A. $\frac{25}{47}$ B. 1 C. $\frac{17}{25}$ D. $\frac{8}{17}$

Câu 37: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và BC . Mặt phẳng (DMN) chia khối lập phương đã cho thành hai khối đa diện. Gọi (H) là khối đa diện chứa đỉnh A , (H') là khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}}$.

A. $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \frac{37}{48}$

B. $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \frac{55}{89}$

C. $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \frac{2}{3}$

D. $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \frac{1}{2}$

Câu 38: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'$ và BC . Mặt phẳng (DMN) chia hình lập phương thành 2 phần. Gọi V_1 là thể tích của phần chứa đỉnh A , V_2 là thể tích của phần còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{55}{89}$.

C. $\frac{37}{48}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 39: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm $A'B'$. Mặt phẳng (P) qua BM đồng thời song song với $B'D'$. Biết mặt phẳng (P) chia khối hộp thành hai khối có thể tích là V_1, V_2 (Trong đó V_1 là thể tích khối chứa A). Tính tỉ số $F = \frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{7}{17}$.

B. 1.

C. $\frac{17}{25}$.

D. $\frac{8}{17}$.

Câu 40: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AA' và $B'C'$. Mặt phẳng (IJK) chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

A. $\frac{25}{47}$.

B. 1.

C. $\frac{49}{95}$.

D. $\frac{8}{17}$.

DẠNG 4: CỰC TRỊ THỂ TÍCH

CỰC TRỊ THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = 1$. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{1}{12}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = x, BC = y, AB = AC = SB = SC = 1$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất khi tổng $x + y$ bằng:

A. $\sqrt{3}$

B. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

C. $\frac{4}{\sqrt{3}}$

D. $4\sqrt{3}$

Câu 3: Nếu một tứ diện chỉ có đúng một cạnh có độ dài lớn hơn 1 thì thể tích tứ diện đó lớn nhất là bao nhiêu?

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{1}{8}$

D. $\frac{5}{8}$

Câu 4: (Sở Vĩnh Phúc) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi K là trung điểm của SC . Mặt phẳng qua AK cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M và N . Gọi V_1, V theo thứ tự là thể tích khối chóp $S.AMKN$ và khối chóp $S.ABCD$. Giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{3}{8}$.

Câu 5: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các điểm A', C' thỏa mãn $\overrightarrow{SA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC'} = \frac{1}{5}\overrightarrow{SC}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $A'C'$ cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D' và đặt $k = \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị nhỏ nhất của k là bao nhiêu?

- A. $\frac{1}{60}$. B. $\frac{1}{30}$. C. $\frac{4}{15}$. D. $\frac{\sqrt{15}}{16}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi C' là trung điểm cạnh SC . Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng AC' cắt các cạnh SB, SD tại B', D' . Đặt $m = \frac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị nhỏ nhất của m bằng:

- A. $\frac{2}{27}$. B. $\frac{4}{27}$. C. $\frac{1}{9}$. D. $\frac{2}{9}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích V và đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng qua A và trung điểm N cạnh SC cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M, P . Tính thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMNP$.

- A. $\frac{V}{8}$. B. $\frac{3V}{8}$. C. $\frac{V}{4}$. D. $\frac{V}{3}$.

Câu 8: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các điểm A', C' thỏa mãn $\overrightarrow{SA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC'} = \frac{1}{5}\overrightarrow{SC}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $A'C'$ cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D' và đặt $k = \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Tính giá trị lớn nhất của k là bao nhiêu?

- A. $\frac{4}{105}$. B. $\frac{1}{30}$. C. $\frac{4}{15}$. D. $\frac{4}{27}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích V . Gọi M, N thứ tự là các điểm di động trên các cạnh AB, AD sao cho $\frac{AB}{AM} + \frac{2AD}{AN} = 4$. Gọi V' là thể tích khối chóp $S.AMN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của V' .

- A. $\frac{1}{4}V$ B. $\frac{1}{6}V$ C. $\frac{1}{8}V$ D. $\frac{1}{3}V$

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích V . Gọi M, N thứ tự là các điểm di động trên các cạnh AB, AD sao cho $\frac{AB}{AM} + \frac{2AD}{AN} = 4$. Gọi V' là thể tích khối chóp $S.MBCDN$. Tìm giá trị lớn nhất của V' .

- A. $\frac{1}{4}V$ B. $\frac{2}{3}V$ C. $\frac{3}{4}V$ D. $\frac{1}{3}V$

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích V , đáy là hình bình hành. Mặt phẳng (α) đi qua A , trung điểm I của SO cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P . Tính thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMNP$.

- A. $\frac{V}{18}$. B. $\frac{V}{3}$. C. $\frac{V}{6}$. D. $\frac{3V}{8}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$, SA là đường cao, đáy là hình chữ nhật với $SA = a, AB = b, AD = c$. Trong mặt phẳng (SDB) lấy G là trọng tâm tam giác SDB , qua G kẻ đường thẳng d cắt cạnh BS tại M , cắt cạnh SD tại N , mp (AMN) cắt SC tại K . Xác định M thuộc SB sao cho V_{SAMKN} đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất đó.

- A. $V_{SAMKN \rightarrow \max} = \frac{abc}{8}, V_{SAMKN \rightarrow \min} = \frac{abc}{9}$ B. $V_{SAMKN \rightarrow \max} = \frac{abc}{8}, V_{SAMKN \rightarrow \min} = \frac{abc}{10}$
 C. $V_{SAMKN \rightarrow \max} = \frac{abc}{9}, V_{SAMKN \rightarrow \min} = \frac{abc}{10}$ D. $V_{SAMKN \rightarrow \max} = \frac{abc}{10}, V_{SAMKN \rightarrow \min} = \frac{abc}{11}$

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các điểm A', C' thỏa mãn $\overrightarrow{SA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC'} = \frac{1}{5}\overrightarrow{SC}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $A'C'$ cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D' và đặt $k = \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị lớn nhất của k là?

- A. $\frac{4}{105}$. B. $\frac{1}{30}$. C. $\frac{4}{15}$. D. $\frac{4}{27}$.

Câu 14: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q . Gọi M', N', P', Q' lần lượt là hình chiếu của M, N, P, Q trên mặt phẳng đáy. Tìm tỉ số $\frac{SM}{SA}$ để thể tích khối đa diện $MNPQ.M'N'P'Q'$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 15: Cho khối chóp $S.ABC$. Một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P . Gọi M', N', P' lần lượt là hình chiếu của M, N, P trên mặt phẳng đáy. Tìm tỉ số $\frac{SM}{SA}$ để thể tích khối đa diện $MNP.M'N'P'$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V . Điểm P là trung điểm của SC , một mặt phẳng qua AP cắt hai cạnh SD và SB lần lượt tại M và N . Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V}$?

- A. $\frac{1}{8}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{8}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSA = 30^\circ$ và $SA = SB = SC = a$. Mặt phẳng (P) qua A cắt hai cạnh SB, SC lần lượt tại B', C' sao cho chu vi tam giác $AB'C'$ nhỏ nhất. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích các khối chóp $S.AB'C', S.ABC$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = 3 - 2\sqrt{2}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{3} - 1$. C. $\frac{V_1}{V_2} = 4 - 2\sqrt{3}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{2} - 1$.

Câu 18: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 60^\circ$, $\widehat{BSC} = 90^\circ$, $\widehat{ASC} = 120^\circ$. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh AB và SC sao cho $\frac{CN}{SC} = \frac{AM}{AB}$. Khi khoảng cách giữa M và N nhỏ nhất, tính thể tích V của khối chóp $S.AMN$.

A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{72}$. B. $\frac{5\sqrt{2}a^3}{72}$. C. $\frac{5\sqrt{2}a^3}{432}$. D. $\frac{\sqrt{2}a^3}{432}$.

Câu 19: (Sở Bắc Ninh) Cho tứ diện $SABC$ có G là trọng tâm tứ diện, mặt phẳng quay quanh AG cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại M, N . Giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}$ là?

A. $\frac{4}{9}$. B. $\frac{3}{8}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 20: (Hoàng Hoa Thám Hưng Yên) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V . Gọi P là điểm trên cạnh SC sao cho $SC = 5SP$. Một mặt phẳng (α) qua AP cắt hai cạnh SB và SD lần lượt tại M và N . Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị lớn nhất của $\frac{V_1}{V}$.

A. $\frac{1}{15}$. B. $\frac{1}{25}$. C. $\frac{3}{25}$. D. $\frac{2}{15}$.

Câu 21: Khối tứ diện $ABCD$ có $AB > 1$ và tất cả các cạnh còn lại có độ dài không vượt quá 1. Hỏi thể tích lớn nhất của khối tứ diện đó là?

A. $\frac{3}{8}$. B. $\frac{1}{8}$. C. $\frac{1}{24}$. D. 3.

Câu 22: Khối tứ diện $ABCD$ có $AB = x (x > 1)$ và có tất cả các cạnh còn lại có độ dài không vượt quá 1. Tính x khi thể tích của khối tứ diện đó lớn nhất.

A. $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. B. $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$. C. $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. D. $x = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Câu 23: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 4a$, $CD = x$ và tất cả các cạnh còn lại bằng $3a$. Tìm x để khối tứ diện $ABCD$ có thể tích lớn nhất.

A. $x = 2\sqrt{10}a$. B. $x = \sqrt{10}a$. C. $x = 6a$. D. $3a$.

Câu 24: Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB = x$, tất cả các cạnh còn lại bằng nhau và bằng $2 - x$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của x để khối tứ diện đã cho có thể tích bằng $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

A. 1. B. 6. C. 4. D. 2.

Câu 25: Xét khối tứ diện $ABCD$ có $AB = x$ và các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = \sqrt{6}$. B. $x = \sqrt{14}$. C. $x = 3\sqrt{2}$. D. $x = 3\sqrt{3}$.

Câu 26: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = a\sqrt{2}$, $SC = a\sqrt{3}$. Thể tích lớn nhất của khối chóp là

A. $a^3\sqrt{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = 2$, đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = 1$. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{5}{8}$. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = BA = BC = 1$. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$?

A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{12}$. C. $\frac{1}{8}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Câu 29: (KINH MÔN II LẦN 3 NĂM 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ đều, có cạnh bên bằng 1. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{4}{27}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{4\sqrt{3}}{27}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Câu 30: (KINH MÔN HẢI DƯƠNG 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = x$, các cạnh còn lại của hình chóp đều bằng 2. Giá trị của x để thể tích khối chóp đó lớn nhất là

A. $2\sqrt{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{7}$. D. $\sqrt{6}$.

Câu 31: (CỤM TRẦN KIM HUNG - HÙNG YÊN NĂM 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Biết $SA = x$ với $(0 < x < 2\sqrt{3})$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng 2. Tìm x để thể tích của khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất?

A. 2. B. $2\sqrt{2}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. D. $\sqrt{6}$.

Câu 32: (CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG QUẢNG NAM LẦN 2 NĂM 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Một mặt phẳng không qua S và cắt các cạnh SA , SB , SC , SD lần lượt tại M , N , P , Q thỏa mãn $\overrightarrow{SA} = 2\overrightarrow{SM}$, $\overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SP}$. Tính tỉ số $\frac{SB}{SN}$ khi biểu

thức $T = \left(\frac{SB}{SN}\right)^2 + 4\left(\frac{SD}{SQ}\right)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $\frac{SB}{SN} = \frac{11}{2}$. B. $\frac{SB}{SN} = 5$. C. $\frac{SB}{SN} = 4$. D. $\frac{SB}{SN} = \frac{9}{2}$.

Câu 33: (Ba Đình Lần 2) Một kim tự tháp Ai Cập có hình dạng là một khối chóp tứ giác đều có độ dài cạnh bên là một số thực dương không đổi. Gọi α là góc giữa cạnh bên của kim tự tháp và mặt đáy. Khi thể tích của kim tự tháp lớn nhất, tính $\sin \alpha$.

A. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$. B. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$. D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 34: (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = 2x$ (trong đó a là hằng số và x thay đổi thuộc khoảng $\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$). Tính thể tích lớn nhất

$V_{\max}$ của hình chóp $S.ABC$

A. $\frac{a^3}{8}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. D. $\frac{a^3}{6}$.

Câu 35: (THPT Sơn Tây Hà Nội 2019) Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích $V = \frac{1}{6}$, góc $\widehat{ACB} = 45^\circ$ và

$AD + BC + \frac{AC}{\sqrt{2}} = 3$. Hỏi độ dài cạnh CD ?

A. $2\sqrt{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{2}$. D. 2.

Câu 36: (Cụm THPT Vũng Tàu) Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 2. Trên đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm M sao cho $AM = x$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của C lên AB, MB . Đường thẳng qua E, F cắt d tại N . Xác định x để thể tích khối tứ diện $BCM N$ nhỏ nhất.

- A. $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $x = 1$. C. $x = 2$. D. $x = \sqrt{2}$.

Câu 37: (CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3) Cho hình chóp $S.ABC$, trong đó $SA \perp (ABC)$, $SC = a$ và đáy ABC là tam giác vuông cân tại đỉnh C . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) . Khi thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất thì $\sin 2\alpha$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$. D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 38: (Chuyên Sơn La Lần 3 năm 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = x$, các cạnh còn lại của hình chóp đều bằng a . Để thể tích khối chóp lớn nhất thì giá trị x bằng

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. a .

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C , $SA = AB = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC . Tìm thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp $S.AHK$.

- A. $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. B. $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 40: Cho tam giác ABC vuông cân tại B , $AC = 2$. Trên đường thẳng qua A vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm M, N khác phía với mặt phẳng (ABC) sao cho $AM \cdot AN = 1$. Tìm thể tích nhỏ nhất của khối tứ diện $MNBC$?

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{12}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 41: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA = 1$. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$ là?

- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{12}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{12}$. D. $\frac{1}{12}$.

Câu 42: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh C và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SC = a$, $\hat{SCA} = \varphi$. Xác định góc φ để thể tích khối chóp $SABC$ lớn nhất.

- A. $\varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$. B. $\varphi = \arcsin \frac{2}{\sqrt{7}}$
C. $\varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}$. D. $\varphi = 3\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB = 1$, cạnh bên $SA = 1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Ký hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\widehat{MAN} = 45^\circ$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là?

- A. $\frac{\sqrt{2}+1}{9}$. B. $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}+1}{6}$. D. $\frac{\sqrt{2}-1}{9}$.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB = 1$, cạnh bên $SA = 1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Ký hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\widehat{MAN} = 60^\circ$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là

A. $\frac{2-\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{2+\sqrt{3}}{9}$. C. $\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$. D. $\frac{2\sqrt{3}-3}{9}$.

Câu 45: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc, I là tâm nội tiếp tam giác ABC . Mặt phẳng (P) thay đổi qua I , cắt các tia SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C' . Biết $SA = SB = \sqrt{2}$, $SC = \sqrt{7}$. Hỏi thể tích của khối chóp $S.A'B'C'$ có giá trị nhỏ nhất là?

A. $\frac{243\sqrt{7}}{256}$. B. $\frac{\sqrt{7}}{3}$. C. $\frac{81\sqrt{7}}{256}$. D. $\frac{27\sqrt{7}}{256}$.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh bằng 1, $SO \perp (ABCD)$ và $SC = 1$. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ là?

A. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$. B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{27}$. D. $\frac{4\sqrt{3}}{27}$.

Câu 47: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB = 1$, cạnh bên $SA = 1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Ký hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\widehat{MAN} = 45^\circ$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là?

A. $\frac{\sqrt{2}+1}{9}$. B. $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}+1}{6}$. D. $\frac{\sqrt{2}-1}{9}$.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB = 1$, cạnh bên $SA = 1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Ký hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\widehat{MAN} = 30^\circ$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là?

A. $\frac{1}{9}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{27}$. D. $\frac{4}{27}$.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB = 1$, cạnh bên $SA = 1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Ký hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\widehat{MAN} = 60^\circ$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là

A. $\frac{2-\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{2+\sqrt{3}}{9}$. C. $\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$. D. $\frac{2\sqrt{3}-3}{9}$.

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành với $AD = 4a$. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{6}$. Tìm thể tích $V_{\max}$ của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V_{\max} = \frac{8a^3}{3}$. B. $V_{\max} = \frac{4\sqrt{6}a^3}{3}$. C. $V_{\max} = 8a^3$. D. $V_{\max} = 4\sqrt{6}a^3$.

Câu 51: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và thể tích bằng V . Gọi M, N lần lượt là các điểm di động trên các cạnh AB và AD sao cho $\frac{AB}{AM} + 2\frac{AD}{AN} = 4$. Gọi V' là thể tích khối chóp $S.MBCDN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của V' .

A. $\frac{1}{4}V$. B. $\frac{2}{3}V$. C. $\frac{3}{4}V$. D. $\frac{1}{3}V$.

Câu 52: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các điểm A', C' thỏa mãn $\overrightarrow{SA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC'} = \frac{1}{5}\overrightarrow{SC}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $A'C'$ cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D'

và đặt $k = \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị nhỏ nhất của k là?

A. $\frac{1}{60}$. B. $\frac{1}{30}$. C. $\frac{3}{4}V$. D. $\frac{\sqrt{15}}{16}$.

Câu 53: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và góc giữa SC với mặt phẳng (SAB) bằng 30° . Gọi M là điểm di động trên cạnh CD và H là hình chiếu vuông góc của S trên đường thẳng BM . Khi điểm M di động trên cạnh CD thì thể tích của khối chóp $SABH$ đạt giá trị lớn nhất bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Câu 54: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có $SA = SB = SC = 2a$. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$ B. $\frac{32\sqrt{3}a^3}{9}$ C. $\frac{4\sqrt{6}a^3}{9}$ D. $\frac{32\sqrt{3}a^3}{27}$

Câu 55: Khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a . $SA = SB = SC = a$, Cạnh SD thay đổi. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $\frac{a^3}{8}$ B. $\frac{a^3}{4}$ C. $\frac{3a^3}{8}$ D. $\frac{a^3}{2}$

Câu 56: Cho hai đường thẳng Ax, By chéo nhau và vuông góc nhau, có AB là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó và $AB = a$. Hai điểm M và N lần lượt di động trên Ax và By sao cho $MN = b$. Xác định độ dài đoạn thẳng AM theo a và b sao cho thể tích tứ diện $ABMN$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $AM = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{3}}$ B. $AM = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}$ C. $AM = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2}$ D. $AM = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{3}$

Câu 57: (CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH PHÚ YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho x là các số thực dương. Xét các hình chóp $S.ABC$ có cạnh $SA = x$, các cạnh còn lại đều bằng 1. Khi thể tích khối chóp $S.ABC$ có giá trị lớn nhất, giá trị của x bằng.

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. 1.

Câu 58: (THPT QUANG TRUNG ĐỒNG ĐA HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích V . Điểm P là trung điểm của SC , một mặt phẳng qua AP cắt hai cạnh SD và SB lần lượt tại M và N . Gọi V_1 là thể tích khối chóp $S.AMPN$.

Giá trị lớn nhất của $\frac{V_1}{V}$ thuộc khoảng nào sau đây ?

A. $\left(0; \frac{1}{5}\right)$ B. $\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right)$ C. $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$

Câu 59: (Chuyên Hạ Long lần 2-2019) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = x$, $CD = y$, tất cả các cạnh còn lại bằng 2. Khi thể tích tứ diện $ABCD$ là lớn nhất tính xy .

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{16}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

Câu 60: (Sở Phú Thọ) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA = 2$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB, AD ($AN < AM$) sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC) . Khi thể tích

khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất thì giá trị của $\frac{1}{AN^2} + \frac{16}{AM^2}$ bằng:

- A. $\frac{17}{4}$. B. 5. C. $\frac{5}{4}$. D. 2.

Câu 61: (Sở Phú Thọ) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA = 2$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB, AD ($AN < AM$) sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC) . Khi thể tích khối

chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của $\frac{1}{AN^2} + \frac{16}{AM^2}$ bằng

- A. $\frac{17}{4}$. B. 5. C. $\frac{5}{4}$. D. 2.

Câu 62: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc cạnh BC, BD sao cho (AMN) luôn vuông góc với mặt phẳng (BCD) . Gọi V_1, V_2 lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $ABMN$. Tính $V_1 + V_2$.

- A. $\frac{17\sqrt{2}}{216}$. B. $\frac{17\sqrt{2}}{72}$. C. $\frac{17\sqrt{2}}{144}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

Câu 63: (KÊNH TRUYỀN HÌNH GIÁO DỤC QUỐC GIA VTV7 –2019) Cho tứ diện $ABCD$ có đáy BCD là tam giác đều cạnh a , trọng tâm G . Δ là đường thẳng qua G và vuông góc với (BCD) . A chạy trên Δ sao cho mặt cầu ngoại tiếp $ABCD$ có thể tích nhỏ nhất. Khi đó thể tích của khối $ABCD$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. B. $\frac{a^3}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 64: (THPT-Chuyên-Sơn-La-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a , $SA = SB = SC = a$. Khi đó thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất bằng

- A. $\frac{3a^3}{4}$. B. $\frac{a^3}{2}$. C. $\frac{a^3}{4}$. D. $\frac{3a^3}{2}$.

Câu 65: (Thuận Thành 2 Bắc Ninh) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$. Biết rằng $\widehat{ASB} = \widehat{ASD} = 90^\circ$, mặt phẳng chứa AB và vuông góc với $(ABCD)$ cắt SD tại N . Tính thể tích lớn nhất của tứ diện $DABN$.

- A. $\frac{2a^3}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. C. $\frac{4}{3}a^3$. D. $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 66: (Sở Điện Biên) Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N là hai điểm nằm trên hai cạnh SC, SD sao cho $\frac{SM}{SC} = \frac{1}{2}$ và $\frac{SN}{SD} = 2$, biết G là trọng tâm của tam giác SAB . Tỷ

số thể tích $\frac{V_{GMND}}{V_{S.ABCD}} = \frac{m}{n}$ (m, n là các số nguyên dương và $(m, n) = 1$). Giá trị của $m + n$ bằng

- A. 17. B. 19. C. 21. D. 7.

Câu 67: (PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH) Trong các khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ mà khoảng cách từ A đến mp (SBC) bằng $2a$, khối chóp có thể tích nhỏ nhất bằng

- A. $2\sqrt{3}a^3$. B. $2a^3$. C. $3\sqrt{3}a^3$. D. $4\sqrt{3}a^3$.

Câu 68: (PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH) Trong các khối chóp tam giác đều $S.ABC$ mà khoảng cách từ A đến mp (SBC) bằng $3a$, khối chóp có thể tích nhỏ nhất bằng

- A. $6\sqrt{3}a^3$. B. $\frac{9a^3}{2}$. C. $9a^3$. D. $12\sqrt{3}a^3$.

Câu 69: (THPT-Gia-Lộc-Hải-Dương-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA = 2$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$). Gọi M, N là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB, AD sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC). Tính tổng $T = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AM^2}$ khi thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $T = \frac{13}{9}$. B. $T = 2$. C. $T = \frac{5}{4}$. D. $T = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

CỰC TRỊ THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

Câu 70: (KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG) Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Tam giác ABC' có diện tích bằng $3\sqrt{3}$ và nằm trong mặt phẳng tạo với đáy một góc bằng $\alpha, \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Tìm α để thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$. B. $\tan \alpha = \sqrt{6}$. C. $\tan \alpha = \sqrt{2}$. D. $\tan \alpha = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Câu 71: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có tổng diện tích của tất cả các mặt là 36, độ dài đường chéo AC' bằng 6. Hỏi thể tích của khối hộp lớn nhất là bao nhiêu?

- A. 8. B. $8\sqrt{2}$. C. $16\sqrt{2}$. D. $24\sqrt{3}$.

Câu 72: Cho hình hộp chữ nhật có tổng diện tích các mặt bằng 36 và độ dài đường chéo bằng 6. Tìm thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của hình hộp chữ nhật đã cho?

- A. $V_{\max} = 8$. B. $V_{\max} = 12$. C. $V_{\max} = 8\sqrt{2}$. D. $V_{\max} = 6\sqrt{6}$.

Câu 73: Cho hình hộp chữ nhật có tổng độ dài tất cả các cạnh bằng 32, độ dài đường chéo bằng $2\sqrt{6}$. Tìm thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của hình hộp đã cho.

- A. $V_{\max} = 16\sqrt{2}$. B. $V_{\max} = 16$. C. $V_{\max} = 6\sqrt{6}$. D. $V_{\max} = 12\sqrt{3}$.

Câu 74: Tìm $V_{\max}$ là giá trị lớn nhất của thể tích các khối hộp chữ nhật có đường chéo bằng $3\sqrt{2}cm$ và diện tích toàn phần bằng $18cm^2$.

- A. $V_{\max} = 6cm^3$. B. $V_{\max} = 5cm^3$. C. $V_{\max} = 4cm^3$. D. $V_{\max} = 3cm^3$.

Câu 75: Cho hình hộp chữ nhật có tổng diện tích các mặt bằng 36 và độ dài đường chéo bằng 6. Tìm thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của hình hộp chữ nhật đã cho?

- A. $V_{\max} = 8$. B. $V_{\max} = 12$. C. $V_{\max} = 8\sqrt{2}$. D. $V_{\max} = 6\sqrt{6}$.

Câu 76: Cho hình hộp chữ nhật có tổng độ dài tất cả các cạnh bằng 32, độ dài đường chéo bằng $2\sqrt{6}$. Tìm thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của hình hộp đã cho.

- A. $V_{\max} = 16\sqrt{2}$. B. $V_{\max} = 16$. C. $V_{\max} = 6\sqrt{6}$. D. $V_{\max} = 12\sqrt{3}$.

Câu 77: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮK LẮK LẦN X NĂM 2019) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = x, AD = 1$. Biết rằng góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng ($ABB'A'$) bằng 30° . Tìm giá trị lớn nhất $V_{\max}$ của thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

- A. $V_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. B. $V_{\max} = \frac{1}{2}$. C. $V_{\max} = \frac{3}{2}$. D. $V_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 78: (Quỳnh Lưu Nghệ An) Nhân ngày quốc tế Phụ nữ 8 – 3 năm 2019. Ông A đã mua tặng vợ một món quà và đặt nó trong một chiếc hộp chữ nhật có thể tích là 32 (đvtt) có đáy là hình vuông và

không nắp. Để món quà trở nên đặc biệt và xứng tầm với giá trị của nó, ông quyết định mạ vàng chiếc hộp, biết rằng độ dày của lớp mạ trên mọi điểm của chiếc hộp là không đổi và như nhau. Gọi chiều cao và cạnh đáy của chiếc hộp lần lượt là h và x . Để lượng vàng trên hộp là nhỏ nhất thì giá trị của h và x là?

- A. $h = 2, x = 4$. B. $h = \frac{\sqrt{3}}{2}, x = 4$. C. $h = 2, x = 1$. D. $h = 4, x = 2$.

Câu 79: (Quỳnh Lưu Lần 1) Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Các điểm M, N lần lượt di động trên các tia $AC, B'D'$ sao cho $AM + B'N = a\sqrt{2}$. Thể tích khối tứ diện $AMNB'$ có giá trị lớn nhất là:

- A. $\frac{a^3}{12}$. B. $\frac{a^3}{6}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

DẠNG 5: GÓC, KHOẢNG CÁCH LIÊN QUAN ĐẾN THỂ TÍCH

Câu 1: (Gang Thép Thái Nguyên) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật; $AB = a; AD = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mp($ABCD$) bằng 45° . Gọi M là trung điểm của SD . Tính theo a khoảng cách d từ điểm M đến (SAC) .

- A. $d = \frac{a\sqrt{1513}}{89}$. B. $d = \frac{2a\sqrt{1315}}{89}$. C. $d = \frac{a\sqrt{1315}}{89}$. D. $d = \frac{2a\sqrt{1513}}{89}$.

Câu 2: (Sở Ninh Bình 2019 lần 2) Chóp $S.ABC$ có đường cao SA , tam giác ABC là tam giác cân tại A và $AB = a, \widehat{BAC} = 120^\circ$. Biết thể tích khối chóp là $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

- A. 45° . B. 90° . C. 60° . D. 30° .

Câu 3: (Sở Nam Định) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng AC và vuông góc với mặt phẳng (SCD) cắt đường thẳng SD tại E . Gọi V và V_1 lần lượt là thể tích khối chóp $S.ABCD$ và $D.ACE$, biết $V = 5V_1$. Tính cosin của góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy của hình chóp $S.ABCD$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. D. $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Câu 4: (Chuyên Lam Sơn Lần 2) Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thoi tâm O và $SO \perp ABCD$, $SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, $SB = BC = a$. Số đo góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là

- A. 90° . B. 60° . C. 30° . D. 45° .

Câu 5: (CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG QUẢNG NAM LẦN 2 NĂM 2019) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , $AB = a, AD = 2a, SA = SB = SC = SD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC . Biết góc giữa MN và mp($ABCD$) bằng 60° . Gọi α là góc tạo bởi MN và mp(SBD). Tính $\sin \alpha$.

- A. $\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{65}}$. B. $\sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{65}}$. C. $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{65}}$. D. $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{65}}$.

Câu 6: (CỔ LOA HÀ NỘI) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O , cạnh bằng $a\sqrt{3}$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 3a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SO và AD bằng

- A. $\frac{\sqrt{17}a}{17}$. B. $\frac{3\sqrt{17}a}{17}$. C. $\frac{\sqrt{5}a}{5}$. D. $\frac{3\sqrt{5}a}{5}$.

Câu 7: (-Mai-Anh-Tuấn-Thanh-Hóa-lần-1-2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với đáy, mặt bên (SCD) tạo với mặt đáy một góc bằng 60° , M là trung điểm BC . Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SCD) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 8: (KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG) Cho tứ diện đều cạnh 1 và điểm I nằm trong tứ diện. Tính tổng khoảng cách từ I đến các mặt của tứ diện.

- A. $\sqrt{6}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{9}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 9: (THPT SỐ 1 TƯ NGHĨA LẦN 2 NĂM 2019) Cho tứ diện $ABCD$ có điểm O nằm trong tứ diện và cách đều các mặt của tứ diện một khoảng bằng r . Khoảng cách từ A, B, C, D đến các mặt đối diện lần lượt là $\frac{7}{5}; \frac{3}{2}; \frac{5}{3}; \frac{4}{3}$. Khi đó r bằng:

- A. $\frac{10}{59}$. B. $\frac{59}{10}$. C. $\frac{420}{1147}$. D. $\frac{1147}{420}$.

Câu 10: (Sở Hưng Yên Lần 1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = 2a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB . Tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) .

- A. $\frac{4a\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{4a\sqrt{5}}{25}$. C. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{8a\sqrt{5}}{25}$.

Câu 11: (Đặng Thành Nam Đề 10) Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $AD = 4a$, $SA = SB = SC = SD = \sqrt{6}a$. Khi khối chóp $S.ABCD$ có thể tích đạt giá trị lớn nhất, sin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng

- A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$. B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 12: (CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG QUẢNG NAM LẦN 2 NĂM 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ với đáy ABC là tam giác vuông tại B có $AC = 2BC$, đường trung tuyến BM , đường phân giác trong CN và $MN = a$. Các mặt phẳng (SBM) và (SCN) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. Gọi I là trung điểm của SC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và IB bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{8}$. C. $\frac{3a}{4}$. D. $\frac{3a}{8}$.

- Câu 13: (Ba Đình Lần 2)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SD = \frac{a\sqrt{17}}{2}$. Hình chiếu vuông góc H của S lên mặt $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn AB . Gọi K là trung điểm của AD . Khoảng cách giữa hai đường SD và HK bằng
- A. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{7}$. C. $\frac{3a}{5}$. D. $\frac{a\sqrt{21}}{5}$.
- Câu 14: (Chuyên Hạ Long lần 2-2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 3a$, $AC = 2a$, $AD = 5a$; $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAB} = 60^\circ$. Tính $d(C, (ABD))$.
- A. $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{9}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{2a\sqrt{6}}{9}$.
- Câu 15: (Nguyễn Du Dak-Lak 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy bằng $\sqrt{2}$ và độ dài cạnh bên bằng $\sqrt{5}$. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$, có tâm O . Lấy G là trọng tâm tam giác SAD . Lấy điểm M bất kì trên (S) . Khoảng cách GM đạt giá trị nhỏ nhất bằng
- A. $\frac{17 + \sqrt{31}}{12}$. B. $\frac{17 - \sqrt{31}}{12}$. C. $\frac{15 + \sqrt{33}}{12}$. D. $\frac{15 - \sqrt{33}}{12}$.
- Câu 16: (Lê Quý Đôn Điện Biên Lần 3)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ đó.
- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.
- Câu 17: (THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $B'C$ là $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$, giữa hai đường thẳng BC và AB' là $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$, giữa hai đường thẳng AC và BD' là $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng
- A. $8a^3$. B. $4a^3$. C. $2a^3$. D. a^3 .
- Câu 18: (Nguyễn Trãi Hải Dương Lần 1)** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'B$ vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, góc giữa AA' và $(ABCD)$ bằng 45° . Khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và DD' bằng 1. Góc giữa mặt $(BB'C'C)$ và mặt phẳng $(CC'D'D)$ bằng 60° . Thể tích khối hộp đã cho là
- A. $2\sqrt{3}$. B. 2. C. $\sqrt{3}$. D. $3\sqrt{3}$.
- Câu 19: (CHUYÊN HUỖNH MÃN ĐẠT 2019 lần 1)** Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $AA' = A'D$, hình chiếu vuông góc của A' thuộc hình vuông $ABCD$, khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và AB' bằng $\frac{6a}{\sqrt{10}}$. Tính thể tích khối chóp $A'MNP$ trong đó M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh CD, CC', DD' .
- A. $12a^3$. B. a^3 . C. $2a^3$. D. $3a^3$.
- Câu 20: (CHUYÊN HUỖNH MÃN ĐẠT 2019 lần 1)** Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $AA' = A'D$, hình chiếu vuông góc của A' thuộc bên trong hình vuông

$ABCD$, khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và AB' bằng $\frac{6a}{\sqrt{10}}$. Tính thể tích khối chóp

$A'MNP$ trong đó M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh CD, CC', DD' .

A. $12a^3$.

B. a^3 .

C. $2a^3$.

D. $3a^3$.

DẠNG 6: ỨNG DỤNG THỰC TẾ

Câu 1: Kim tự tháp Cheops (có dạng hình chóp) là kim tự tháp cao nhất ở Ai Cập. Chiều cao của kim tự tháp này là $144m$, đáy của kim tự tháp là hình vuông có cạnh dài $230m$. Các lối đi và phòng bên trong chiếm 30% thể tích của kim tự tháp. Biết một lần vận chuyển gồm 10 xe, mỗi xe chở 6 tấn đá, và khối lượng riêng của đá bằng $2,5.10^3 kg/m^3$. Số lần vận chuyển đá để xây đủ dựng kim tự tháp là:

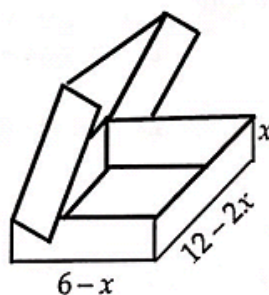
A. 740600.

B. 76040.

C. 7406.

D. 74060.

Câu 2: Một hộp đựng chocolate bằng kim loại có hình dạng lúc mở nắp như hình vẽ dưới đây. Một phần tư thể tích phía trên của hộp được dải một lớp bơ sữa ngọt, phần còn lại phía dưới chứa đầy chocolate nguyên chất. Với kích thước như hình vẽ, gọi $x = x_0$ là giá trị làm cho hộp kim loại có thể tích lớn nhất, khi đó thể tích chocolate nguyên chất có giá trị là V_0 . Tìm V_0 .



A. 48 đvtt

B. 16 đvtt

C. 64 đvtt

D. $\frac{64}{3}$ đvtt

Câu 3: Tính thể tích khối rubic mini (mỗi mặt của rubic có 9 ô vuông), biết chu vi mỗi ô (ô hình vuông trên một mặt) là 4cm.

A. $27 cm^3$.

B. $1728 cm^3$.

C. $1 cm^3$.

D. $9 cm^3$.

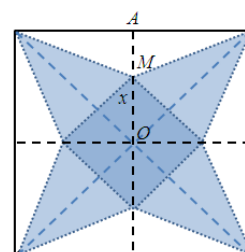
Câu 4: Cắt một miếng giấy hình vuông ở hình 1 và xếp thành một hình chóp tứ giác đều như hình 2. Biết cạnh hình vuông bằng $20cm$, $OM = x(cm)$. Tìm x để hình chóp đều ấy có thể tích lớn nhất?

A. $x = 9cm$.

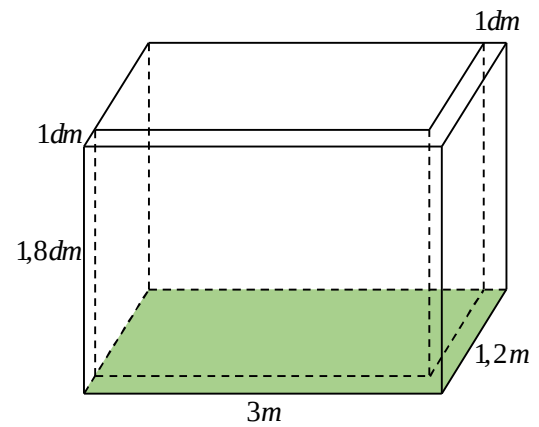
B. $x = 8cm$.

C. $x = 6cm$.

D. $x = 7cm$.



Câu 5: Người ta muốn xây một bể chứa nước dạng khối hộp chữ nhật trong một phòng tắm. Biết chiều dài, chiều rộng, chiều cao của khối hộp đó lần lượt là $3m$; $1,2m$; $1,8m$ (người ta chỉ xây hai mặt thành bể như hình vẽ bên). Biết mỗi viên gạch có chiều dài $20cm$, chiều rộng $10cm$, chiều cao $5cm$. Hỏi người ta sử dụng ít nhất bao nhiêu viên gạch để xây bể đó và thể tích thực của bể chứa bao nhiêu lít nước? (Giả sử lượng xi măng và cát không đáng kể).



A. 738 viên, 5742 lít.

B.

730 viên, 5742 lít.

C. 738 viên, 5740 lít.

D. 730 viên, 5740 lít.

Câu 6: Cho một cây nến hình lăng trụ lục giác đều có chiều cao và độ dài cạnh đáy lần lượt là $15cm$ và $5cm$. Người ta xếp cây nến trên vào trong một hộp có dạng hình hộp chữ nhật sao cho cây nến nằm khít trong hộp. Thể tích của chiếc hộp đó bằng

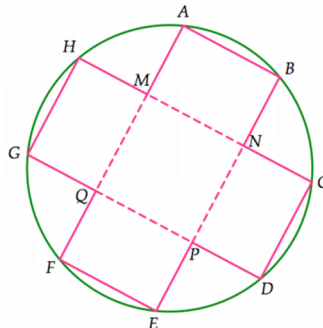
A. 1500 ml.

B. $600\sqrt{6}$ ml.

C. 1800 ml.

D. $750\sqrt{3}$ ml.

Câu 7: Một miếng bìa hình tròn có bán kính là $20cm$. Trên biên của miếng bìa, ta xác định 8 điểm A, B, C, D, E, F, G, H theo thứ tự chia đường tròn thành 8 phần bằng nhau. Cắt bỏ theo các nét liền như hình vẽ để có được hình chữ thập $ABNCDEPFGHM$ rồi gấp lại theo các nét đứt MN, NP, PQ, QM tạo thành một khối hộp không nắp. Thể tích của khối hộp thu được là:



A. $\frac{4000(2-\sqrt{2})\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$

B. $\frac{4000(\sqrt{2}-\sqrt{2})^3}{\sqrt{2}}$

C. $4000(2-\sqrt{2})\sqrt{4-2\sqrt{2}}$

D. $4000(\sqrt{2}-\sqrt{2})^3$

Câu 8: Cho một tấm nhôm hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 60cm$, $AB = 40cm$. Ta gấp tấm nhôm theo hai cạnh MN và PQ vào phía trong cho đến khi AB và DC trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Khi đó có thể tạo được khối lăng trụ với thể tích lớn nhất bằng

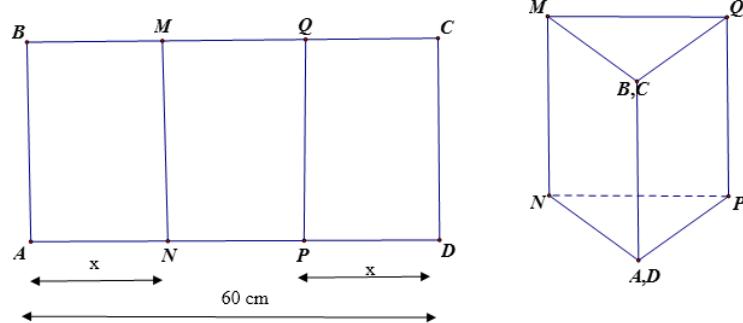
A. $4000\sqrt{3} (cm^3)$

B. $2000\sqrt{3} (cm^3)$

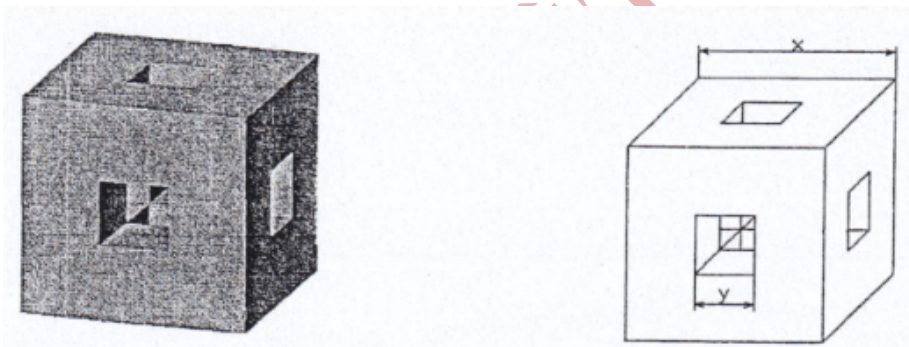
C. $400\sqrt{3} (cm^3)$

D. $4000\sqrt{2} (cm^3)$

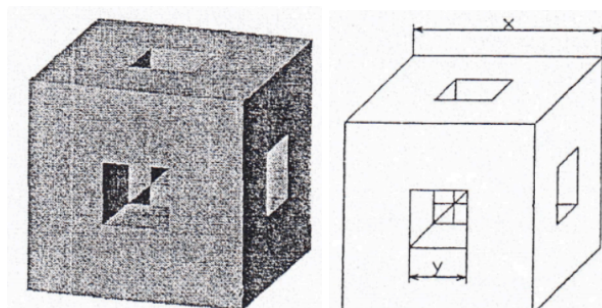
Câu 9: Cho một tấm nhôm hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 60\text{cm}$. Ta gấp tấm nhôm theo 2 cạnh MN và PQ vào phía trong đến khi AB và DC trùng nhau như hình vẽ dưới đây để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Tìm x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất?

A. $x = 20$.B. $x = 15$.C. $x = 25$.D. $x = 30$.

Câu 10: Một khối gỗ hình lập phương có độ dài cạnh bằng $x(\text{cm})$. Ở chính giữa mỗi mặt của hình lập phương, người ta đục một lỗ hình vuông thông sang mặt đối diện, tâm của lỗ hình vuông là tâm của mặt hình lập phương, các cạnh lỗ hình vuông song song với các cạnh của hình lập phương và có độ dài $y(\text{cm})$ như hình vẽ bên. Tìm thể tích V của khối gỗ sau khi đục biết rằng $x = 80\text{ cm}$; $y = 20\text{ cm}$.

A. 490000 cm^3 .B. 432000 cm^3 .C. 400000 cm^3 .D. 390000 cm^3 .

Câu 11: Một khối gỗ hình lập phương có độ dài cạnh bằng $x(\text{cm})$. Ở chính giữa mỗi mặt của hình lập phương, người ta đục một lỗ hình vuông thông sang mặt đối diện, tâm của lỗ hình vuông là tâm của mặt hình lập phương, các cạnh lỗ hình vuông song song với cạnh của hình lập phương và có độ dài $y(\text{cm})$ (như hình vẽ bên). Tính tỉ số $\frac{S}{V}$, trong đó V của khối gỗ sau khi đục và S là tổng diện tích mặt (trong và ngoài) khối gỗ sau khi đục.



$$\text{A. } \frac{S}{V} = \frac{6(x+3y)}{(x-y)(x+2y)}.$$

$$\text{B. } \frac{S}{V} = \frac{3(x+3y)}{(x-y)(x+2y)}.$$

$$\text{C. } \frac{S}{V} = \frac{2(x+3y)}{(x-y)(x+2y)}.$$

$$\text{D. } \frac{S}{V} = \frac{9(x+3y)}{(x-y)(x+2y)}.$$

Câu 12: Cần phải xây dựng một hồ ga, dạng hình hộp chữ nhật có thể tích $V(m^3)$, hệ số k cho trước (k - tỉ số giữa chiều cao của hồ và chiều rộng của đáy). Gọi $x, y, h > 0$ lần lượt là chiều rộng, chiều dài và chiều cao của hồ ga. Hãy xác định $x, y, h > 0$ xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất. x, y, h lần lượt là

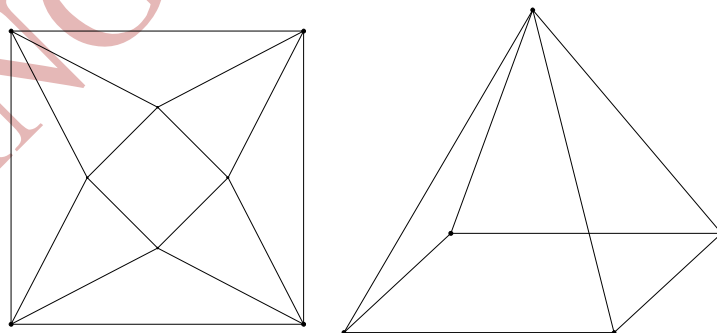
$$\text{A. } x = 2\sqrt[3]{\frac{(2k+1)V}{4k^2}}; y = \sqrt[3]{\frac{2kV}{(2k+1)^2}}; h = \sqrt[3]{\frac{k(2k+1)V}{4}}.$$

$$\text{B. } x = \sqrt[3]{\frac{(2k+1)V}{4k^2}}; y = \sqrt[3]{\frac{2kV}{(2k+1)^2}}; h = 2\sqrt[3]{\frac{k(2k+1)V}{4}}.$$

$$\text{C. } x = \sqrt[3]{\frac{(2k+1)V}{4k^2}}; y = 2\sqrt[3]{\frac{2kV}{(2k+1)^2}}; h = \sqrt[3]{\frac{k(2k+1)V}{4}}.$$

$$\text{D. } x = \sqrt[3]{\frac{(2k+1)V}{4k^2}}; y = 6\sqrt[3]{\frac{2kV}{(2k+1)^2}}; h = \sqrt[3]{\frac{k(2k+1)V}{4}}.$$

Câu 13: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 1m như hình vẽ dưới đây. Người ta cắt bỏ các tam giác cân bên ngoài của tấm nhôm, phần còn lại gập thành một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $x(m)$, sao cho bốn đỉnh của hình vuông gập lại thành đỉnh của hình chóp. Tìm x để khối chóp nhận được có thể tích lớn nhất.



$$\text{A. } x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

$$\text{B. } x = \frac{1}{2}$$

$$\text{C. } x = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{D. } x = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Câu 14: Một viên đá có dạng khối chóp tứ diện đều và tất cả các cạnh đều bằng a , người ta cưa viên đá theo mặt phẳng song song với mặt đáy của khối chóp để chia viên đá thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính diện tích thiết diện của viên đá bị cưa bởi mặt phẳng nói trên.

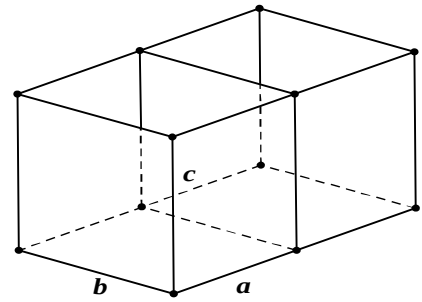
$$\text{A. } \frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}.$$

$$\text{B. } \frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}.$$

$$\text{C. } \frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}.$$

$$\text{D. } \frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}.$$

Câu 15: Người thợ cần làm một bể cá hai ngăn, không có nắp ở phía trên với thể tích $1,296m^3$. Người thợ này cắt các tấm kính ghép lại một bể cá dạng hình hộp chữ nhật với ba kích thước a, b, c như hình vẽ. Hỏi người thợ phải thiết kế các kích thước a, b, c bằng bao nhiêu để đỡ tốn kính nhất, giả sử độ dày của kính không đáng kể.



A. $a = 3,6m; b = 0,6m; c = 0,6m$

B. $a = 2,4m; b = 0,9m; c = 0,6m$

C. $a = 1,8m; b = 1,2m; c = 0,6m$

D. $a = 1,2m; b = 1,2m; c = 0,9m$

Câu 16: Khi xây nhà, chủ nhà cần làm một hồ nước bằng gạch và xi măng có dạng hình hộp đứng đáy là hình chữ nhật có chiều dài gấp ba lần chiều rộng và không nắp, có chiều cao là h và có thể tích là . Hãy tính chiều cao của hồ nước sao cho chi phí xây dựng là thấp nhất?

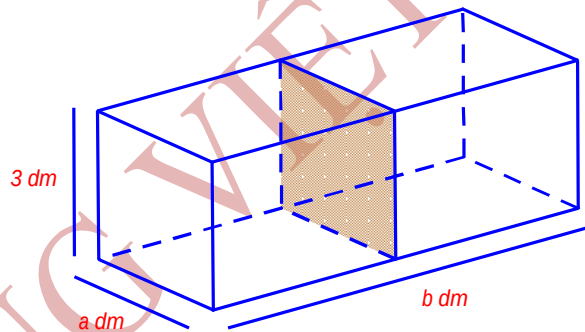
A. m

B. $h = 2m$

C. $h = \frac{3}{2}m$

D. $h = \frac{5}{2}m$

Câu 17: Người ta muốn thiết kế một bể cá bằng kính không có nắp với thể tích $72dm^3$ và chiều cao là $3dm$. Một vách ngăn (cùng bằng kính) ở giữa, chia bể cá thành hai ngăn, với các kích thước a, b (đơn vị dm) như hình vẽ.



Tính a, b để bể cá tốn ít nguyên liệu nhất (tính cả tấm kính ở giữa), coi bề dày các tấm kính như nhau và không ảnh hưởng đến thể tích của bể.

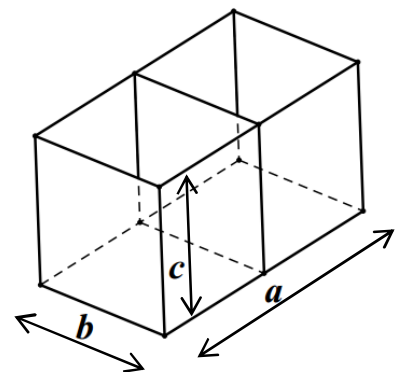
A. $a = \sqrt{24}, b = \sqrt{24}$.

B. $a = 3, b = 8$.

C. $a = 3\sqrt{2}, b = 4\sqrt{2}$.

D. $a = 4, b = 6$.

Câu 18: Người thợ cần làm một bể cá hai ngăn, không có nắp ở phía trên với thể tích $1,296 m^3$. Người thợ này cắt các tấm kính ghép lại một bể cá dạng hình hộp chữ nhật với 3 kích thước a, b, c như hình vẽ. Hỏi người thợ phải thiết kế các kích thước a, b, c bằng bao nhiêu để đỡ tốn kính nhất, giả sử độ dày của kính không đáng kể.



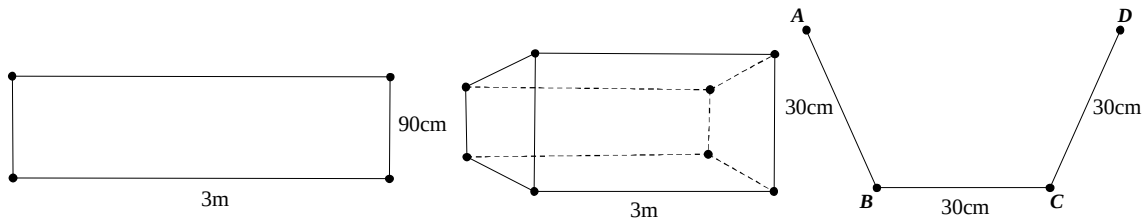
A. $a = 3,6m; b = 0,6m; c = 0,6m$

B. $a = 2,4m; b = 0,9m; c = 0,6m$

C. $a = 1,8m; b = 1,2m; c = 0,6m$

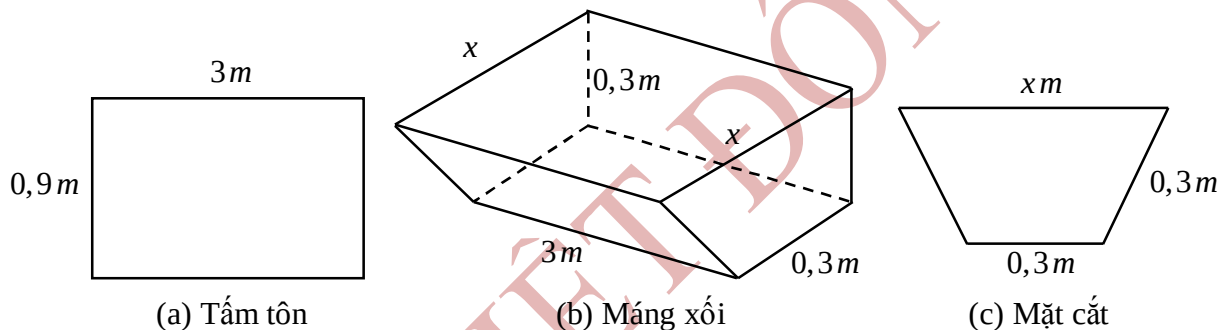
D. $a = 1,2m; b = 1,2m; c = 0,9m$

Câu 19: Từ một tấm tôn có kích thước $90\text{cm} \times 3\text{m}$ người ta làm một máng xối nước trong đó mặt cắt là hình thang $ABCD$ có hình dưới. Tính thể tích lớn nhất của máng xối.



- A. $40500\sqrt{3}\text{cm}^3$ B. $40500\sqrt{2}\text{cm}^3$ C. $40500\sqrt{6}\text{cm}^3$ D. $40500\sqrt{5}\text{cm}^3$

Câu 20: Để làm một máng xối nước, từ một tấm tôn kích thước $0,9\text{m} \times 3\text{m}$ người ta gấp tấm tôn đó như hình vẽ dưới. Biết mặt cắt của máng xối (bị cắt bởi mặt phẳng song song với hai mặt đáy) là một hình thang cân và máng xối là một hình lăng trụ có chiều cao bằng chiều dài của tấm tôn. Hỏi $x(\text{m})$ bằng bao nhiêu thì thể tích máng xối lớn nhất?



- A. $x = 0,5\text{m}$. B. $x = 0,65\text{m}$. C. $x = 0,4\text{m}$. D. $x = 0,6\text{m}$.

Câu 21: Khi xây dựng nhà, chủ nhà cần làm một bể nước bằng gạch có dạng hình hộp có đáy là hình chữ nhật chiều dài $d(\text{m})$ và chiều rộng $r(\text{m})$ với $d = 2r$. Chiều cao bể nước là $h(\text{m})$ và thể tích bể là 2m^3 . Hỏi chiều cao bể nước như thế nào thì chi phí xây dựng là thấp nhất?

- A. $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(\text{m})$. B. $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}(\text{m})$. C. $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}(\text{m})$. D. $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}(\text{m})$.

Câu 22: Một người dự định làm một thùng đựng đồ hình lăng trụ tứ giác đều có thể tích là V . Để làm thùng hàng tồn ít nguyên liệu nhất thì chiều cao của thùng đựng đồ bằng

- A. $x = V^{\frac{2}{3}}$ B. $x = \sqrt[3]{V}$ C. $x = V^{\frac{1}{4}}$ D. $x = \sqrt{V}$

Câu 23: Nhân ngày quốc tế phụ nữ 8-3 năm 2017, ông A quyết định mua tặng vợ một món quà và đặt nó vào trong một chiếc hộp có thể tích là 32 (đvtt) có đáy hình vuông và không có nắp. Để món quà trở nên thật đặc biệt và xứng đáng với giá trị của nó ông quyết định mạ vàng cho chiếc hộp, biết rằng độ dày lớp mạ tại mọi điểm trên hộp là như nhau. Gọi chiều cao và cạnh đáy của chiếc hộp lần lượt là $h; x$. Để lượng vàng trên hộp là nhỏ nhất thì giá trị của $h; x$ phải là?

- A. $x = 2; h = 4$ B. $x = 4; h = 2$ C. $x = 4; h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $x = 1; h = 2$

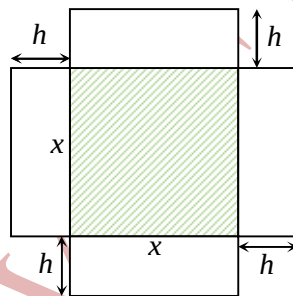
Câu 24: Một ngôi nhà có nền dạng tam giác đều ABC cạnh dài $10(m)$ được đặt song song và cách mặt đất $h(m)$. Nhà có 3 trụ tại A, B, C vuông góc với (ABC) . Trên trụ A người ta lấy hai điểm M, N sao cho $AM = x, AN = y$ và góc giữa (MBC) và (NBC) bằng 90° để là mái và phần chứa đồ bên dưới. Xác định chiều cao thấp nhất của ngôi nhà.

- A. $5\sqrt{3}$. B. $10\sqrt{3}$. C. 10. D. 12.

Câu 25: Một nhà sản xuất sữa có hai phương án làm hộp sữa. Hộp sữa có dạng khối hộp chữ nhật hoặc hộp sữa có dạng khối trụ. Nhà sản xuất muốn chi phí bao bì càng thấp càng tốt (tức diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất), nhưng vẫn phải chứa được một thể tích xác định là V cho trước. Khi đó diện tích toàn phần của hộp sữa bé nhất trong hai phương án là

- A. $\sqrt[3]{2\pi V^2}$. B. $6\sqrt[3]{V^2}$. C. $3\sqrt[3]{6V^2}$. D. $3\sqrt[3]{2\pi V^2}$.

Câu 26: Một bác thợ gò hàn làm một chiếc thùng hình hộp chữ nhật (không nắp) bằng tôn thể tích $665,5 dm^3$. Chiếc thùng này có đáy là hình vuông cạnh $x(dm)$, chiều cao $h(dm)$. Để làm chiếc thùng, bác thợ phải cắt một miếng tôn như hình vẽ. Tìm x để bác thợ sử dụng ít nguyên liệu nhất.

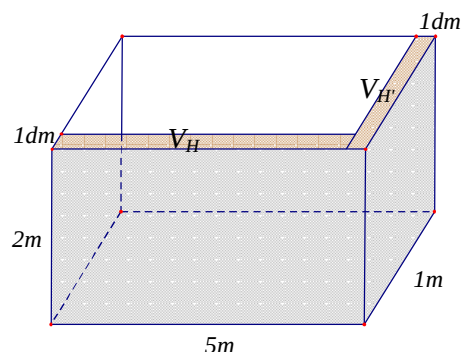


- A. $10,5(dm)$. B. $12(dm)$. C. $11(dm)$. D. $9(dm)$.

Câu 27: Một người dự định làm một thùng đựng đồ hình lăng trụ tứ giác đều có thể tích là V . Để làm thùng hàng tốn ít nguyên liệu nhất thì chiều cao của thùng đựng đồ bằng

- A. $x = V^{\frac{2}{3}}$ B. $x = \sqrt[3]{V}$ C. $x = V^{\frac{1}{4}}$ D. $x = \sqrt{V}$

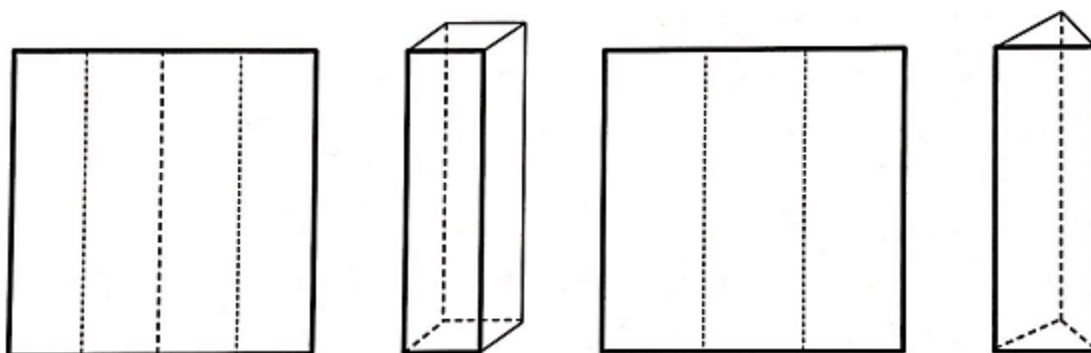
Câu 28: Người ta muốn xây một bồn chứa nước dạng khối hộp chữ nhật trong một phòng tắm. Biết chiều dài, chiều rộng, chiều cao của khối hộp đó lần lượt là 5m, 1m, 2m (hình vẽ bên). Biết mỗi viên gạch có chiều dài 20cm, chiều rộng 10cm, chiều cao 5cm. Hỏi người ta sử dụng ít nhất bao nhiêu viên gạch để xây bồn đó và thể tích thực của bồn chứa bao nhiêu lít nước? (Giả sử lượng xi măng và cát không đáng kể)



- A. 1180 viên, 8820 lít B. 1180 viên, 8800 lít
C. 1182 viên, 8820 lít D. 1180 viên, 8800 lít

Câu 29: Từ một mảnh giấy hình vuông cạnh là a , người ta gấp nó thành 4 phần đều nhau rồi dựng lên thành một hình lăng trụ tứ giác đều (như hình vẽ). Từ một mảnh giấy hình vuông khác cũng có cạnh là a , người ta gấp nó thành 3 phần đều nhau rồi dựng lên thành một hình lăng trụ tam giác

đều (như hình vẽ). Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của lăng trụ tứ giác đều và lăng trụ tam giác đều. So sánh V_1 và V_2 .



A. $V_1 > V_2$

B. $V_1 = V_2$

C. $V_1 < V_2$

D. Không so sánh được

Câu 30 (Lương Thế Vinh Đồng Nai) Cho một cái hộp hình chữ nhật có kích thước ba cạnh lần lượt là 4 cm , 6 cm , 9 cm như hình vẽ. Một con kiến ở vị trí A muốn đi đến vị trí B . Biết rằng con kiến chỉ có thể bò trên cạnh hay trên bề mặt của hình hộp đã cho. Gọi $x\text{ cm}$ là quãng đường ngắn nhất con kiến đi từ A đến B . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $x \in (15; 16)$.

B. $x \in (13; 14)$.

C. $x \in (12; 13)$.

D. $x \in (14; 15)$.

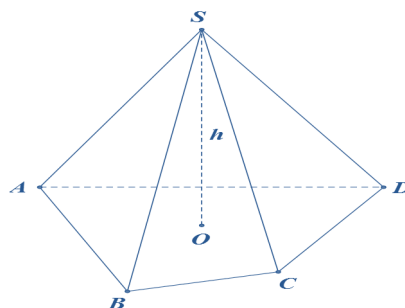
THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

1. Thể tích khối chóp

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} \cdot h$$

- $S_{\text{đáy}}$: Diện tích mặt đáy.
- h : Độ dài chiều cao khối chóp.

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} d_{(S,(ABCD))} \cdot S_{ABCD}$$



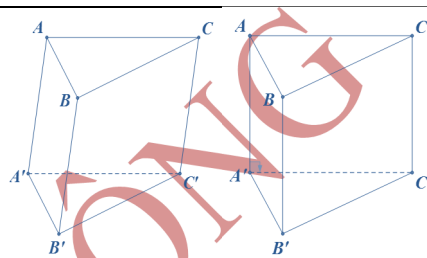
2. Thể tích khối lăng trụ

$$V = S_{\text{đáy}} \cdot h$$

- $S_{\text{đáy}}$: Diện tích mặt đáy.
- h : Chiều cao của khối chóp.

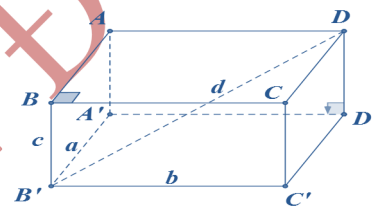
Lưu ý:

Lăng trụ đứng có chiều cao chính là cạnh bên.



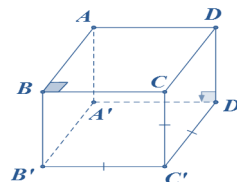
3. Thể tích khối hộp chữ nhật

$$V = abc$$



4. Thể tích khối lập phương

$$V = a^3$$



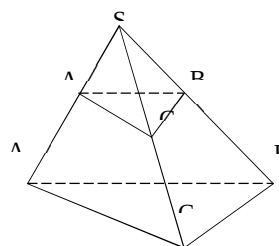
5. Tỷ số thể tích

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

Thể tích hình chóp cắt $ABC.A'B'C'$

$$V = \frac{h}{3} (B + B' + \sqrt{BB'})$$

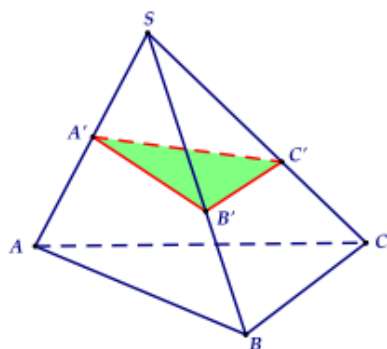
Với B, B', h là diện tích hai đáy và chiều cao.



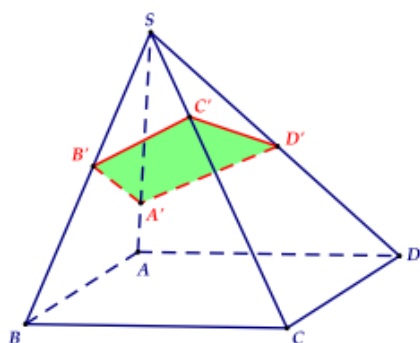
5.1. Hai khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ và $S.B_1B_2...B_m$ có chung đỉnh S và hai mặt đáy cùng nằm trên một mặt

phẳng, ta có: $\frac{V_{S.A_1A_2...A_n}}{V_{S.B_1B_2...B_m}} = \frac{S_{A_1A_2...A_n}}{S_{B_1B_2...B_m}}$

5.2. Hai khối chóp tam giác $S.ABC$ có $A' \in SA, B' \in SB, C' \in SC$ ta có: $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$

Hình chóp tam giác

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

Hình chóp tứ giác có đáy là hình bình hành

$$\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd} = \frac{\text{Tổng}}{4 \text{ Tích}}$$

Trong đó: $a = \frac{SA}{SA'}$; $b = \frac{SB}{SB'}$; $c = \frac{SC}{SC'}$; $d = \frac{SD}{SD'}$;
 A', B', C', D' đồng phẳng.

□ Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và $\frac{SM}{SA} = x, \frac{SN}{SB} = y, \frac{SP}{SC} = z$. Mặt phẳng (MNP) cắt SD tại Q thì ta có đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{t}$ với $t = \frac{SQ}{SD}$ và $V_{S.MNPQ} = \frac{1}{4}xyz t \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) V$.

5.3. Kiến thức cần nhớ đối với khối lăng trụ tam giác và khối hộp.

□ $V_{A'.ABC} = \frac{V}{3}, V_{A'.BCC'B'} = \frac{2V}{3}$.

□ $V_{A'.ABD} = \frac{V}{6}, V_{BDA'C'} = \frac{V}{3}$.

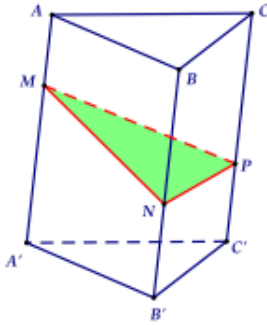
5.4. Một số công thức nhanh cho các trường hợp hay gặp

□ Tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH có $\frac{BH}{BC} = \left(\frac{AB}{BC} \right)^2, \frac{CH}{CB} = \left(\frac{AC}{BC} \right)^2$.

□ Mặt phẳng (α) song song với mặt đáy của khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ cắt SA_k tại điểm M_k thỏa mãn

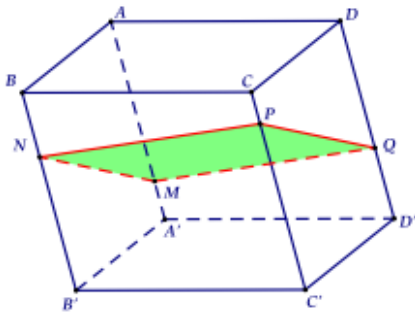
$\frac{SM_k}{SA_k} = p$, ta có $\frac{V_{S.M_1M_2...M_n}}{V_{S.A_1A_2...A_n}} = p^3$.

□ Hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\frac{AM}{AA'} = x, \frac{BN}{BB'} = y, \frac{CP}{CC'} = z$ có $V_{ABC.MNP} = \frac{x+y+z}{3} V$.

Hình lăng trụ tam giác

$$\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3} \left(\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} \right)$$

□ Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $\frac{AM}{AA'} = x, \frac{BN}{BB'} = y, \frac{CP}{CC'} = z$. Mặt phẳng (MNP) cắt DD' tại Q thì ta có đẳng thức $x + z = y + t$ với $t = \frac{DQ}{DD'}$ và $V_{ABCD.MNPQ} = \frac{x + y + z + t}{4} V$.

Hình hộp

$$\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{4} \left(\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} + \frac{DQ}{DD'} \right)$$

$$\text{hay } \frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{2} \left(\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} \right)$$

M, N, P, Q đồng phẳng.

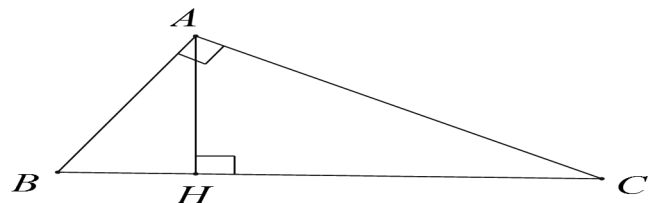
□ Định lí Meneleus cho 3 điểm thẳng hàng $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PA} = 1$ với MNP là một đường thẳng cắt ba đường thẳng AB, BC, CA lần lượt tại M, N, P .

6. Một số chú ý về độ dài các đường đặc biệt

- Đường chéo của hình vuông cạnh a là $a\sqrt{2}$
- Đường chéo của hình lập phương cạnh a là $a\sqrt{3}$
- Đường chéo của hình hộp chữ nhật có 3 kích thước a, b, c là $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- Đường cao của tam giác đều cạnh a là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

7. CÁC CÔNG THỨC HÌNH PHẪNG**7.1. Hệ thức lượng trong tam giác****7.1.1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH**

- $AB^2 + AC^2 = BC^2$
- $AB^2 = BH \cdot BC$
- $AC^2 = CH \cdot BC$
- $AH \cdot BC = AB \cdot AC$
- $AH^2 = BH \cdot HC$



$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

$$\bullet AB = BC \cdot \sin C = BC \cdot \cos B = AC \cdot \tan C = AC \cdot \cot B$$

7.1.2. Cho $\triangle ABC$ có độ dài ba cạnh là: a, b, c độ dài các trung tuyến là m_a, m_b, m_c bán kính đường tròn ngoại tiếp R ; bán kính đường tròn nội tiếp r nửa chu vi p .

- Định lí hàm số cosin:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A; b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B; c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

- Định lí hàm số sin:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

- Độ dài trung tuyến:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}; m_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}; m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

7.2. Các công thức tính diện tích

7.2.1. Tam giác

- $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$
- $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$
- $S = \frac{abc}{4R}$
- $S = pr$
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
- $\triangle ABC$ vuông tại A: $S = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{BC \cdot AH}{2}$
- $\triangle ABC$ đều, cạnh a : $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

7.2.2. Hình vuông

- $S = a^2$ (a : cạnh hình vuông)

7.2.3. Hình chữ nhật

- $S = ab$ (a, b : hai kích thước)

7.2.4. Hình bình hành

- $S = \text{đáy} \times \text{cao} = AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD}$

7.2.5. Hình thoi

- $S = AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$

7.2.6. Hình thang

- $S = \frac{1}{2}(a+b)h$ (a, b : hai đáy, h : chiều cao)

7.2.7. Tứ giác có hai đường chéo vuông góc AC & BD

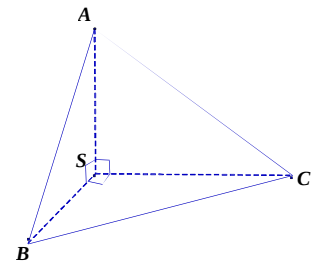
- $S = \frac{1}{2}AC \cdot BD$

8. MỘT SỐ CÔNG THỨC TÍNH NHANH THỂ TÍCH KHỐI CHÓP THƯỜNG GẶP

Nội dung	Hình vẽ
----------	---------

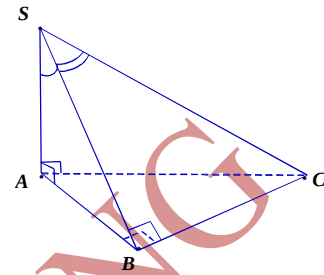
Cho hình chóp $SABC$ với các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SAC)$ vuông góc với nhau từng đôi một, diện tích các tam giác SAB, SBC, SAC lần lượt là S_1, S_2, S_3 .

$$\text{Khi đó: } V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{2S_1 \cdot S_2 \cdot S_3}}{3}$$



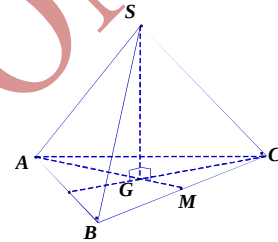
Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC) , hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau, $\widehat{BSC} = \alpha, \widehat{ASB} = \beta$.

$$\text{Khi đó: } V_{S.ABC} = \frac{SB^3 \cdot \sin 2\alpha \cdot \tan \beta}{12}$$



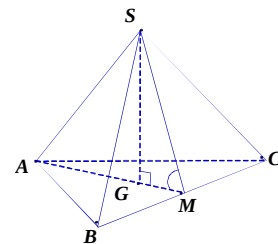
Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a , cạnh bên bằng b .

$$\text{Khi đó: } V_{S.ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3b^2 - a^2}}{12}$$



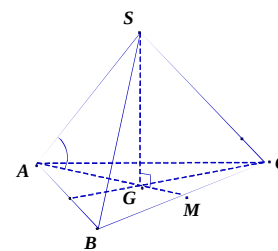
Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với mặt phẳng đáy góc α .

$$\text{Khi đó: } V_{S.ABC} = \frac{a^3 \tan \alpha}{24}$$



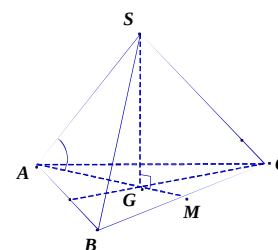
Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên bằng b và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy góc β .

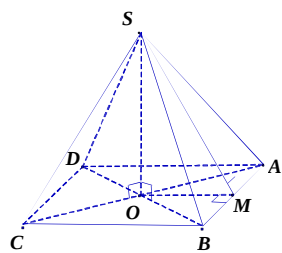
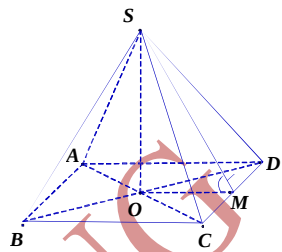
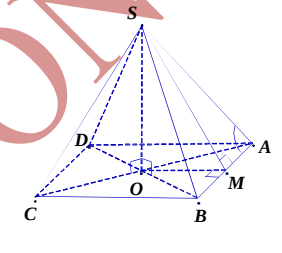
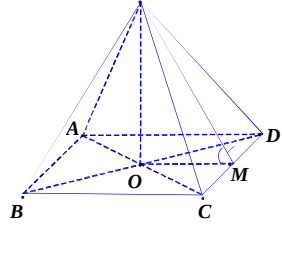
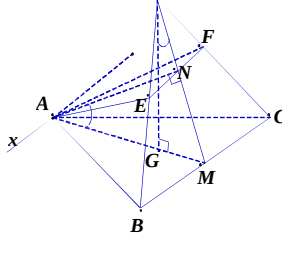
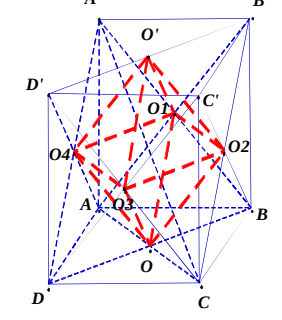
$$\text{Khi đó: } V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{3}b^3 \cdot \sin \beta \cos^2 \beta}{4}$$



Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh đáy bằng a , cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy góc β .

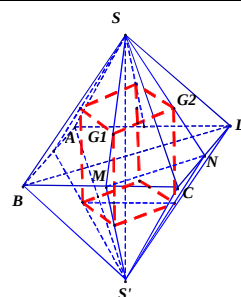
$$\text{Khi đó: } V_{S.ABC} = \frac{a^3 \cdot \tan \beta}{12}$$



Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, và $SA = SB = SC = SD = b$. Khi đó: $V_{S.ABCD} = \frac{a^2 \sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6}$	
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc tạo bởi mặt bên và mặt phẳng đáy là α. Khi đó: $V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \cdot \tan \alpha}{6}$	
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, $\widehat{SAB} = \alpha$ với $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ Khi đó: $V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{\tan^2 \alpha - 1}}{6}$	
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng a, góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy là α với $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó: $V_{S.ABCD} = \frac{4a^3 \cdot \tan \alpha}{3\sqrt{(2 + \tan^2 \alpha)^3}}$	
Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A song song với BC và vuông góc với (SBC), góc giữa (P) với mặt phẳng đáy là α. Khi đó: $V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \cot \alpha}{24}$	
Khối tám mặt đều có đỉnh là tâm các mặt của hình lập phương cạnh a. Khi đó: $V = \frac{a^3}{6}$	

Cho khối tám mặt đều cạnh a . Nối tâm của các mặt bên ta được khối lập phương.

$$\text{Khi đó: } V = \frac{2a^3\sqrt{2}}{27}$$



9. CÁC CÔNG THỨC ĐẶC BIỆT THỂ TÍCH TỨ DIỆN

Công thức	Điều kiện tứ diện
$V_{S,ABC} = \frac{abc}{6} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \varphi + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \varphi}$ Công thức tính khi biết 3 cạnh, 3 góc ở đỉnh 1 tứ diện	$\begin{cases} SA = a, SB = b, SC = c \\ \widehat{ASB} = \alpha, \widehat{BSC} = \beta, \widehat{CSA} = \varphi \end{cases}$
$V_{ABCD} = \frac{1}{6} abd \sin \alpha$ Công thức tính khi biết 2 cạnh đối, khoảng cách và góc 2 cạnh đó	$\begin{cases} AB = a, CD = b \\ d(AB, CD) = d, \angle(AB, CD) = \alpha \end{cases}$
$V_{SABC} = \frac{2S_1 S_2 \sin \alpha}{3a}$ Công thức tính khi biết một cạnh, diện tích và góc giữa 2 mặt kề	$\begin{cases} S_{\triangle SAB} = S_1, S_{\triangle SAC} = S_2, SA = a \\ \angle((SAB), (SAC)) = \alpha \end{cases}$
$V_{S,ABC} = \frac{abc}{6} \sin \alpha \sin \beta \sin \varphi$ Công thức tính khi biết 3 cạnh, 2 góc ở đỉnh và 1 góc nhị diện	$\begin{cases} SA = a, SB = b, SC = c \\ \angle((SAB), (SAC)) = \alpha \\ \widehat{ASB} = \beta, \widehat{ASC} = \varphi \end{cases}$
$V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$	Tứ diện đều tất cả các cạnh bằng a
$V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)}$	Tứ diện gần đều $\begin{cases} AB = CD = a \\ AC = BD = b \\ AD = BC = c \end{cases}$

DẠNG 1: THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

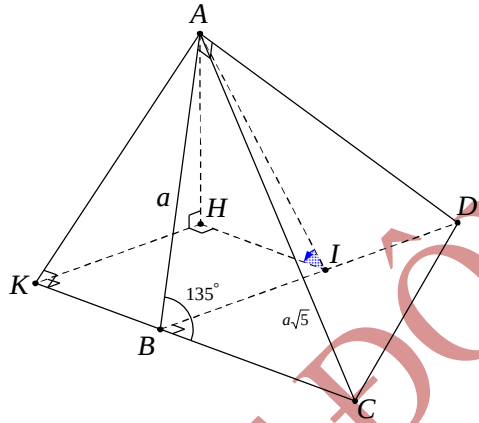
Câu 1. (Sở Bắc Ninh 2019) Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{DAB} = \widehat{CBD} = 90^\circ$, $AB = a$, $AC = a\sqrt{5}$ và $\widehat{ABC} = 135^\circ$; Góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (BCD) bằng 30° . Thể tích của tứ diện $ABCD$ là

A. $\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$.

B. $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$.

C. $\frac{a^3}{3\sqrt{2}}$.

D. $\frac{a^3}{6}$.

Lời giải**Chọn D**

Trong tam giác ABC có $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 135^\circ \Leftrightarrow BC^2 + BC \cdot a\sqrt{2} - 4a^2 = 0$
 $\Rightarrow BC = a\sqrt{2}$.

Gọi K là hình chiếu của A lên BC ta có $\widehat{ABC} = 135^\circ$ nên $\widehat{ABK} = 45^\circ$. Suy ra tam giác AKB vuông cân tại K . Do đó $AK = BK = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi I, H lần lượt là hình chiếu của A lên BD và $(ABCD)$, ta có $KBIH$ là hình chữ nhật.

Khi đó $(\widehat{(ABD); (BCD)}) = \widehat{AIIH} = 30^\circ$. Suy ra $AH = HI \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Từ đó ta tính được $BI = KH = \sqrt{AK^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác ABD vuông tại A , đường cao AI nên $AB^2 = BI \cdot BD \Rightarrow BD = \frac{AB^2}{BI} = a\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối chóp $ABCD$ là $V = \frac{1}{6} AH \cdot BD \cdot BC = \frac{a^3}{6}$.

Câu 1: Cho khối tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của A qua D . Mặt phẳng qua CE và vuông góc với mặt phẳng (ABD) cắt cạnh AB tại điểm F . Tính thể tích V của khối tứ diện $AECF$.

A. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{30}$

B. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{60}$

C. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{40}$

D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{15}$

Lời giải

Áp dụng định lý Menelaus: $\frac{HB}{HM} \cdot \frac{FA}{FB} \cdot \frac{EM}{EA} = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{FA}{FB} \cdot \frac{3}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{FA}{FB} = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow AF = \frac{2}{5}AB \text{ và } AE = 2AD. \text{ Ta có: } \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{AE}{AD} \cdot \frac{AF}{AB} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow V_{AECF} = \frac{4}{5}V_{ABCD} = \frac{4}{5} \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{a^3\sqrt{2}}{15}.$$

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm tam giác BCD . Tính thể tích của khối chóp $AGBC$.

A. $V = 3$.

B. $V = 4$.

C. $V = 6$.

D. $V = 5$.

Lời giải

Chọn B

□ **Cách 1:**

Phân tích: tứ diện $ABCD$ và khối chóp $AGBC$ có cùng đường cao là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) . Do G là trọng tâm tam giác BCD nên ta có $S_{\triangle BGC} = S_{\triangle BGD} = S_{\triangle CGD}$

$\Rightarrow S_{\triangle BCD} = 3S_{\triangle BGC}$ (xem phần chứng minh).

Áp dụng công thức thể tích hình chóp ta có:

$$\left. \begin{aligned} V_{ABCD} &= \frac{1}{3}h.S_{\triangle BCD} \\ V_{AGBC} &= \frac{1}{3}h.S_{\triangle BGC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{V_{ABCD}}{V_{AGBC}} = \frac{\frac{1}{3}h.S_{\triangle BCD}}{\frac{1}{3}h.S_{\triangle BGC}} = \frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle BGC}} = 3$$

$$\Rightarrow V_{AGBC} = \frac{1}{3}V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4.$$

Chứng minh: Đặt $DN = h$; $BC = a$.

Từ hình vẽ có:

+)

$$MF \parallel ND \Rightarrow \frac{MF}{DN} = \frac{CM}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow MF = \frac{1}{2}DN \Rightarrow MF = \frac{h}{2}$$

+)

$$GE \parallel MF \Rightarrow \frac{GE}{MF} = \frac{BG}{BM} = \frac{2}{3} \Rightarrow GE = \frac{2}{3}MF = \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{h}{3}$$

$$+) \frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle BGC}} = \frac{\frac{1}{2}DN \cdot BC}{\frac{1}{2}GE \cdot BC} = \frac{\frac{1}{2}DN}{\frac{1}{2}GE} = \frac{DN}{GE} = \frac{h}{\frac{h}{3}} = 3 \Rightarrow S_{\triangle BCD} = 3S_{\triangle BGC}$$

+) Chứng minh tương tự có $S_{\triangle BCD} = 3S_{\triangle BGD} = 3S_{\triangle CGD}$

$$\Rightarrow S_{\triangle BGC} = S_{\triangle BGD} = S_{\triangle CGD}.$$

□ **Cách 2:**

□

$$\frac{d(G; (ABC))}{d(D; (ABC))} = \frac{GI}{DI} = \frac{1}{3} \Rightarrow d(G; (ABC)) = \frac{1}{3}d(D; (ABC)).$$

$$\text{Nên } V_{G.ABC} = \frac{1}{3}d(G; (ABC)) \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}V_{D.ABC} = 4.$$

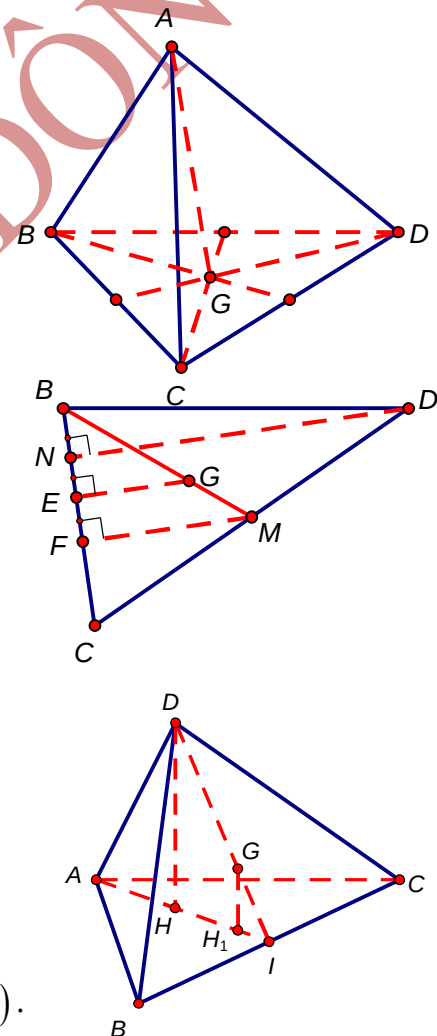
Câu 3: Cho tứ diện đều cạnh a và điểm I nằm trong tứ diện. Tính tổng khoảng cách từ I đến các mặt của tứ diện.

A. $\frac{a}{\sqrt{2}}.$

B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}.$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}.$

D. $\frac{a\sqrt{34}}{2}.$



Lời giải

Chọn B

$$AH = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

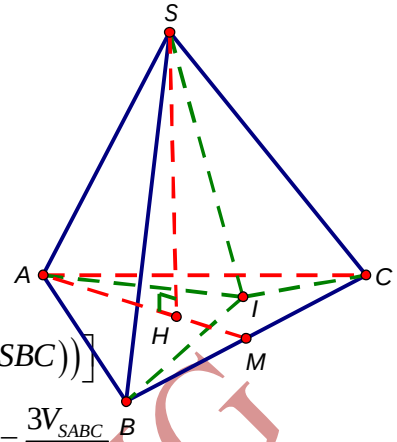
$$\text{Ta có } V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

$$\text{Mặt khác, } V_{SABC} = V_{ISAB} + V_{IABC} + V_{ISAC} + V_{ISBC}$$

$$= \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot [d(I; (SAB)) + d(I; (ABC)) + d(I; (SAC)) + d(I; (SBC))]$$

$$\Leftrightarrow d(I; (SAB)) + d(I; (ABC)) + d(I; (SAC)) + d(I; (SBC)) = \frac{3V_{SABC}}{S_{ABC}}$$

$$= \frac{3 \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{12}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$



Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a, BC = a\sqrt{2}$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng x . Tìm x biết thể tích khối chóp đã cho có thể tích bằng $\frac{a^3\sqrt{11}}{6}$.

A. $x = \frac{3a}{2}$.

B. $x = \frac{7a}{2}$.

C. $x = \frac{9a}{2}$.

D. $x = \frac{5a}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SA .

Khi đó ta có $FE \perp SA, FE \perp BC$ và $BC \perp (SAE)$ nên $BC \perp SA$.

$$\text{Và } FE^2 = AE^2 - FA^2 = AB^2 - BE^2 - FA^2$$

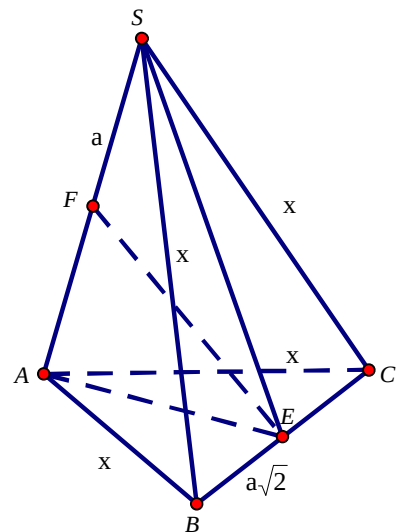
$$= x^2 - \frac{2a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{4x^2 - 3a^2}{4}$$

Áp dụng công thức:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{6} \cdot SA \cdot BC \cdot d(SA; BC) \cdot \sin(SA; BC)$$

$$\text{Suy ra: } V = \frac{1}{6} \cdot a \cdot a\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{4x^2 - 3a^2}{4}} \cdot \sin 90^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{a^3\sqrt{11}}{6} = \frac{1}{12} \cdot a \cdot a\sqrt{2} \cdot \sqrt{4x^2 - 3a^2} \Leftrightarrow x = \frac{5a}{2}.$$



Câu 5: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và song song BC và vuông góc với (SBC) , góc giữa (P) với mặt phẳng đáy là 30° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

C. $\frac{a^3}{8}$

D. $\frac{3a^3}{8}$

Lời giải

Tổng quát: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$

có cạnh đáy bằng a . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và song song BC và vuông góc với (SBC) ,

góc giữa (P) với mặt phẳng đáy là α

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

$$V_{S.ABC} = \frac{a^3 \cot \alpha}{24}$$

$$\text{Áp dụng bài này: } V_{S.ABC} = \frac{a^3 \cot 30^\circ}{24} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{24}$$

$$+ \Delta ABC \text{ đều} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

+ Gọi G là trọng tâm

+ Gọi $(P) \cap (SBC) = EF \Rightarrow EF // BC \Rightarrow (P) \cap (SBC) = Ax$ với $Ax // EF // BC$

+ Gọi M là trung điểm BC , $SM \cap EF = N$.

Ta có: $AM \perp BC, SG \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow AN \perp BC \Rightarrow AN \perp Ax$

Mà $AM \perp BC, BC // Ax \Rightarrow AM \perp Ax \Rightarrow ((P), (ABC)) = \widehat{NAM} = 30^\circ$

Ta có: $\widehat{GSM} = \widehat{NAM} = \alpha$ (cùng phụ với $\widehat{SMA}$)

$$\text{Xét } \Delta SGM \text{ vuông tại } G \text{ có: } SG = GM \cdot \cot \widehat{GSM} = \frac{1}{3} AM \cdot \cot 30^\circ = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}$$

$$\text{Vậy: } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot SG = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{24}.$$

Chọn A

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 4, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SD, CD, BC . Thể tích khối chóp $S.ABPN$ là x , thể tích khối tứ diện $CMNP$ là y . Giá trị x, y thỏa mãn bất đẳng thức nào dưới đây:

A. $x^2 + 2xy - y^2 > 160$

B. $x^2 - 2xy + 2y^2 < 109$

C. $x^2 + xy - y^4 < 145$

D. $x^2 - xy + y^4 > 125$

Lời giải

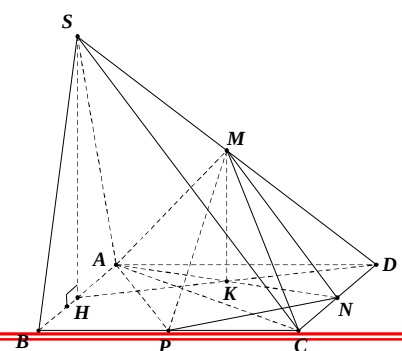
+ Gọi H là trung điểm AB .

Do ΔABC đều và $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

$$\text{Xét } \Delta ABC \text{ đều: } SH = \frac{\sqrt{3}AB}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$+ \text{Ta có: } S_{ABPN} = S_{ABCD} - S_{ADN} - S_{CND}$$

$$= AB^2 - \frac{AD \cdot DN}{2} - \frac{CN \cdot CP}{2} = 4^2 - \frac{4 \cdot 2}{2} - \frac{2 \cdot 2}{2} = 10$$



$$\Rightarrow V_{S.ABPN} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABPN} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 2\sqrt{3} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

+ Gọi $AN \cap HD = \{K\}$ ta có MK là đường trung bình của ΔDHS

$$\Rightarrow HK = \frac{1}{2}SH \Rightarrow V_{CMNP} = \frac{1}{3} \cdot S_{CMNP} \cdot MK = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot CN \cdot CP \cdot \frac{1}{2} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Thay vào các đáp án.

Chọn C.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có chân đường cao nằm trong tam giác ABC ; các mặt phẳng $(SAB); (SAC); (SBC)$ cùng tạo với mặt phẳng (ABC) một góc bằng nhau. Biết $AB = 25, BC = 17, AC = 26$, đường thẳng SB tạo với đáy một góc bằng 45° . Tính thể tích V của khối chóp $SABC$.

A. $V = 680$

B. $V = 408$

C. $V = 578$

D. $V = 600$

Lời giải

Gọi J là chân đường cao của hình chóp $S.ABC$; H, K và L lần lượt là hình chiếu của J trên các cạnh AB, BC và CA .

Suy ra $\widehat{SHJ}, \widehat{SLJ}$ và $\widehat{SKJ}$ lần lượt là góc tạo bởi mặt phẳng (ABC) với các mặt phẳng $(SAB), (SAC), (SBC)$.

Theo giả thiết ta có: $\widehat{SHJ} = \widehat{SLJ} = \widehat{SKJ}$, suy ra các tam giác vuông SJH, SJL, SJK bằng nhau.

Từ đó, $JH = JL = JK$. Mà J nằm trong tam giác nên J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Áp dụng công thức Hê-rông, ta tính được diện tích của tam giác ABC là $S = 204$. Kí hiệu P là nửa chu vi tam giác ABC , r là bán kính đường tròn

nội tiếp của ABC . Ta có $r = \frac{S}{P} = \frac{204}{34} = 6$.

Đặt

$$x = BH = BL, y = CL = CK, z = AH = AK.$$

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} x + y = 7 \\ x + z = 25 \\ y + z = 26 \end{cases}$$

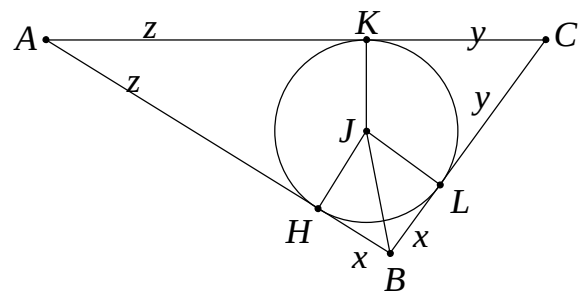
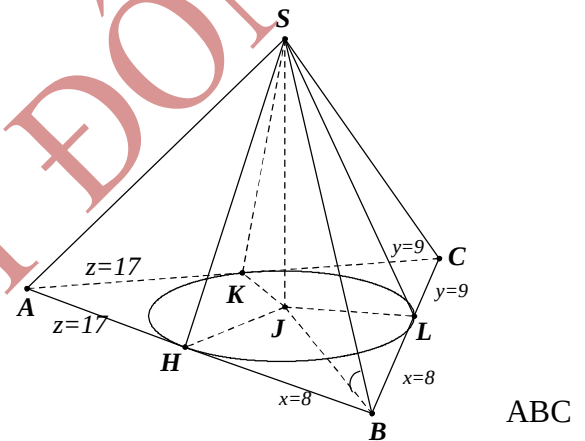
Giải hệ phương trình ta được $(x; y; z) = (8; 9; 17)$

$$JB = \sqrt{JH^2 + BH^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

Ta có $\widehat{SBJ} = (\widehat{SB}, (\widehat{ABC})) = 45^\circ$, suy ra SJB là tam giác vuông cân tại J . $SJ = JB = 10$.

$$\text{Thể tích } V \text{ của khối chóp } S.ABC \text{ là } V = \frac{1}{3} SJ \cdot S_{\Delta ABC} = 680$$

Chọn A



Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = 8$, $BC = 6$. Biết $SA = 6$ và vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Một điểm M thuộc phần không gian bên trong của hình chóp và cách đều tất cả các mặt của hình chóp. Tính thể tích của khối tứ diện $M.ABC$.

- A. $V = 24$. B. $V = \frac{64}{3}$. C. $V = \frac{32}{3}$. D. $V = 12$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Vì } \begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB. \text{ Khi đó } S_{SAB} = \frac{1}{2} SA \cdot AB = 24,$$

$$S_{SAC} = \frac{1}{2} SA \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{8^2 + 6^2} = 30,$$

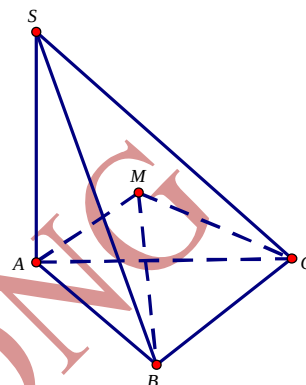
$$S_{SBC} = \frac{1}{2} SB \cdot BC = \frac{1}{2} \sqrt{8^2 + 6^2} \cdot 6 = 30, \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24.$$

$$\text{Thể tích khối chóp đã cho là: } V = \frac{1}{3} SA \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BC = 48.$$

Theo bài ra điểm M thuộc phần không gian bên trong của hình chóp và cách đều tất cả các mặt của hình chóp nên ta gọi khoảng cách từ điểm M đến các mặt của hình chóp là d thì:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} d \cdot (S_{SAB} + S_{SAC} + S_{SBC} + S_{ABC}) \Leftrightarrow d = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{SAB} + S_{SAC} + S_{SBC} + S_{ABC}}$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{3 \cdot 48}{30 + 30 + 24 + 24} = \frac{4}{3}. \text{ Khi đó: } V_{M.ABC} = \frac{1}{3} \cdot d \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot 24 = \frac{32}{3}.$$



Câu 9: Cho khối đa diện đều n mặt có thể tích V và diện tích mỗi mặt của nó bằng S . Khi đó, tổng các khoảng cách từ một điểm bất kì bên trong khối đa diện đó đến các mặt của nó bằng

- A. $\frac{nV}{S}$. B. $\frac{V}{nS}$. C. $\frac{3V}{S}$. D. $\frac{V}{3S}$.

Lời giải

Chọn C.

Xét trong trường hợp khối tứ diện đều.
Các trường hợp khác hoàn toàn tương tự.

$$V_{H.ABC} = \frac{1}{3} h_1 \cdot S; \quad V_{H.SBC} = \frac{1}{3} h_2 \cdot S; \quad V_{H.SAB} = \frac{1}{3} h_3 \cdot S; \quad V_{H.SAC} = \frac{1}{3} h_4 \cdot S$$

$$h_1 = \frac{3V_1}{S}; \quad h_2 = \frac{3V_2}{S}; \quad h_3 = \frac{3V_3}{S}; \quad h_4 = \frac{3V_4}{S}$$

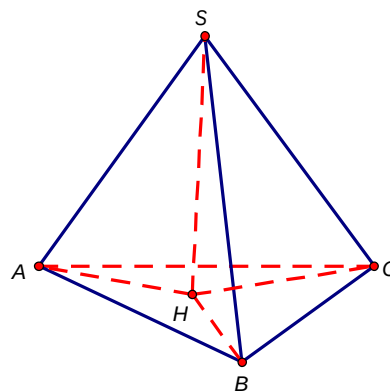
$$\Rightarrow h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = \frac{3(V_1 + V_2 + V_3 + V_4)}{S} = \frac{3V}{S}$$

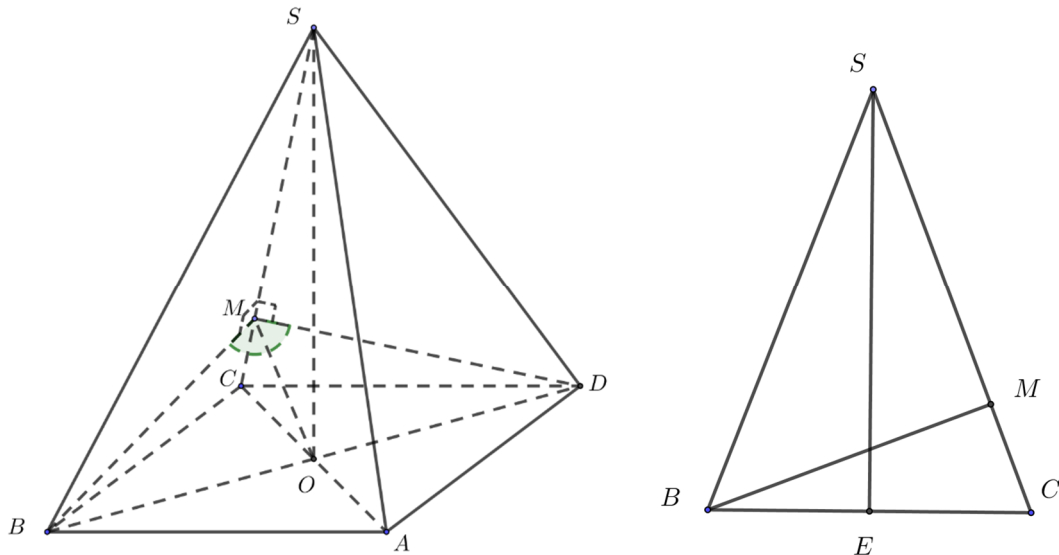
Câu 10: (ĐH Vinh Lần 1) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{11}$, cosin góc hợp bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng $\frac{1}{10}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $3a^3$. B. $9a^3$. C. $4a^3$. D. $12a^3$.

Lời giải

Chọn C





Có $BD \perp AC$; $BD \perp SO \Rightarrow BD \perp SC$. Trong tam giác SBC kẻ đường cao BM
 $\Rightarrow DM \perp SC$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) chính là góc giữa hai đường thẳng MB và MD .

Trong tam giác vuông OMC có $OM < OC = OB \Rightarrow 2OM < BD \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{D} < \widehat{M}$
 $\Rightarrow 180^\circ - \widehat{M} < \widehat{M} \Rightarrow \widehat{M} > 90^\circ$. Hay góc $\widehat{BMD}$ tù $\Rightarrow \cos \widehat{BMD} = -\frac{1}{10}$.

Đặt $AB = x$, SE là đường cao trong tam giác SBC nên $SE \cdot BC = BM \cdot SC$

$$\Leftrightarrow \sqrt{11a^2 - \frac{x^2}{4}} \cdot x = BM \cdot a\sqrt{11} \Leftrightarrow BM = \frac{x}{a\sqrt{11}} \cdot \sqrt{11a^2 - \frac{x^2}{4}}.$$

Áp dụng định lí cosin trong tam giác BMD có

$$\begin{aligned} BD^2 &= BM^2 + DM^2 - 2BM \cdot DM \cdot \cos \widehat{BMD} \Leftrightarrow BD^2 = 2BM^2 - 2BM^2 \cos \widehat{BMD} \\ &\Leftrightarrow BD^2 = 2BM^2 (1 - \cos \widehat{BMD}) \Leftrightarrow (x\sqrt{2})^2 = 2 \left(\frac{x}{a\sqrt{11}} \cdot \sqrt{11a^2 - \frac{x^2}{4}} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{10} \right) \\ &\Leftrightarrow 2x^2 = \frac{2x^2}{11a^2} \left(11a^2 - \frac{x^2}{4} \right) \frac{11}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{10} = \frac{x^2}{40a^2} \Leftrightarrow x = 2a. \end{aligned}$$

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

$$V = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \sqrt{SC^2 - OC^2} \cdot (4a)^2 = \frac{\sqrt{11a^2 - 2a^2}}{3} \cdot 4a^2 = 4a^3.$$

Cách 2: Cách nhìn khác tìm yếu tố cạnh đáy.

Đặt $x = OB$, $2\alpha = \widehat{BMD}$

Ta

$$\frac{-1}{10} = \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{20} \Leftrightarrow \frac{OM^2}{OM^2 + OB^2} = \frac{9}{20} \Leftrightarrow \frac{11}{9} = \frac{x^2}{OM^2} = x^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{11a^2 - x^2} \right) \quad \text{có}$$

Hay $\frac{2}{9} = \frac{x^2}{11a^2 - x^2}$ đến đây OK.

Câu 11: (THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , $SA = a\sqrt{3}$; $SA \perp (ABCD)$. Gọi M , N lần lượt là trung

điểm của các cạnh SB, SD ; mặt phẳng (AMN) cắt SC tại I . Tính thể tích khối đa diện $ABCDMNI$.

A. $V = \frac{5\sqrt{3}a^3}{18}$.

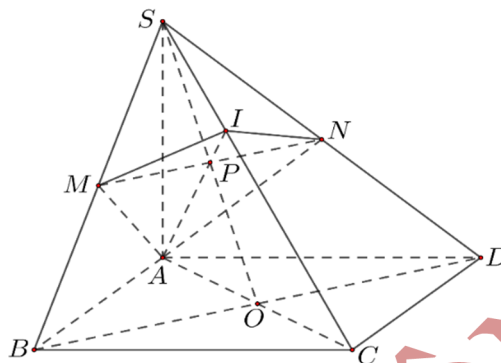
B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{18}$.

C. $V = \frac{5\sqrt{3}a^3}{6}$.

D. $V = \frac{13\sqrt{3}a^3}{36}$.

Lời giải

Chọn A



Trong mp (SBD) , gọi P là giao điểm của MN và SO .

Trong mp (SAC) , gọi I là giao điểm của AP và SC .

Theo định lý menelaus ta có:

$$\frac{AC}{AO} \cdot \frac{PO}{PS} \cdot \frac{IS}{IC} = 1 \Rightarrow \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{IS}{IC} = 1 \Rightarrow \frac{IS}{IC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{IS}{SC} = \frac{1}{3}.$$

Ta có :

$$\frac{V_{SMNI}}{V_{SBD C}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SI}{SC} \cdot \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \Rightarrow V_{SMNI} = \frac{1}{12} V_{SBD C} = \frac{1}{24} V_{SABCD}.$$

$$\frac{V_{SMNA}}{V_{SBD A}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SA}{SA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{SMNA} = \frac{1}{4} V_{SBD A} = \frac{1}{8} V_{SABCD}.$$

$$\Rightarrow V_{SAMNI} = V_{SMNI} + V_{SMNA} = \frac{1}{6} V_{SABCD}.$$

$$\Rightarrow V_{MNIABCD} = \frac{5}{6} V_{SABCD}.$$

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} a \sqrt{3} \cdot a^2 = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}.$$

$$\Rightarrow V_{ABCDMIN} = \frac{5}{6} V_{SABCD} = \frac{5}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} a^3 = \frac{5\sqrt{3}}{18} a^3.$$

Câu 12: (Chuyên Vinh Lần 3) Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh $SA = BC = 3$; $SB = AC = 4$; $SC = AB = 2\sqrt{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{\sqrt{390}}{12}$.

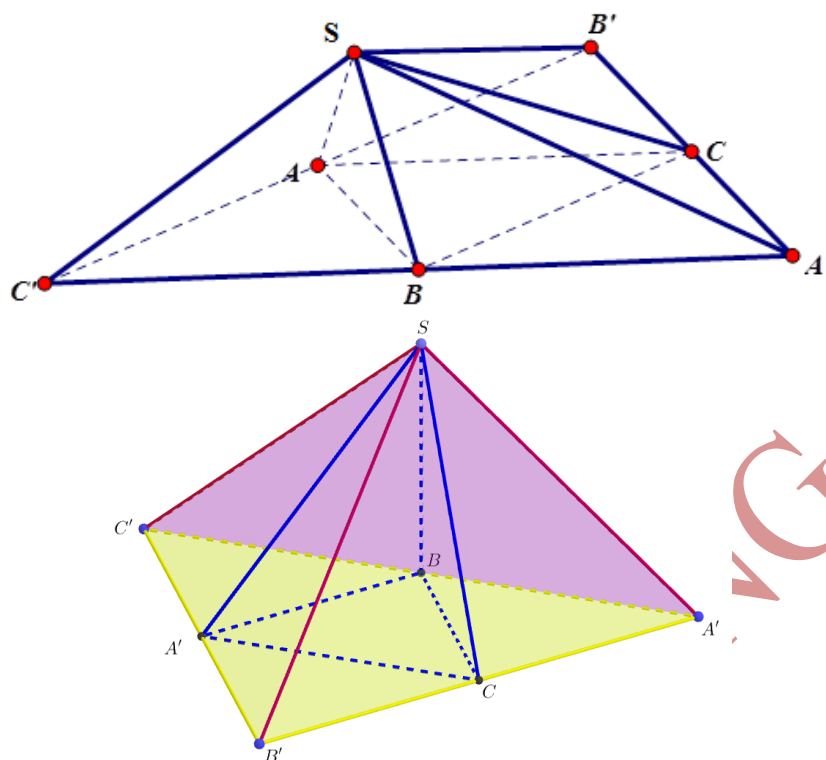
B. $\frac{\sqrt{390}}{4}$.

C. $\frac{\sqrt{390}}{6}$.

D. $\frac{\sqrt{390}}{8}$.

Lời giải.

Chọn B



+ Dựng hình chóp $S.A'B'C'$ sao cho A là trung điểm $B'C'$, B là trung điểm $A'C'$, C là trung điểm $A'B'$.

+ Khi đó $SB = AC = BA' = BC' = 4$ nên $\triangle SA'C'$ vuông tại S và $SA'^2 + SC'^2 = (2.SB)^2 = 64$ (1).

+ Tương tự $\triangle SB'C'$, $\triangle SA'B'$ vuông tại S và $\begin{cases} SA'^2 + SB'^2 = 80 & (2) \\ SB'^2 + SC'^2 = 36 & (3) \end{cases}$.

+ Từ (1); (2); (3) ta suy ra $SC' = \sqrt{10}$; $SB' = \sqrt{26}$; $SA' = \sqrt{54}$.

+ Ta tính được $V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{3} SC' \cdot \frac{1}{2} SA' \cdot SB' = \sqrt{390}$ và $V_{S.ABC} = \frac{1}{4} V_{S.A'B'C'} = \frac{\sqrt{390}}{4}$ (đvtt).

Câu 13: (Phan Đình Tùng Hà Tĩnh) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với $AB = 2a$, $BC = CD = DA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Một mặt phẳng qua A vuông góc với SB và cắt SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P . Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp khối $ABCDMNP$

A. $\frac{32\pi a^3}{3}$.

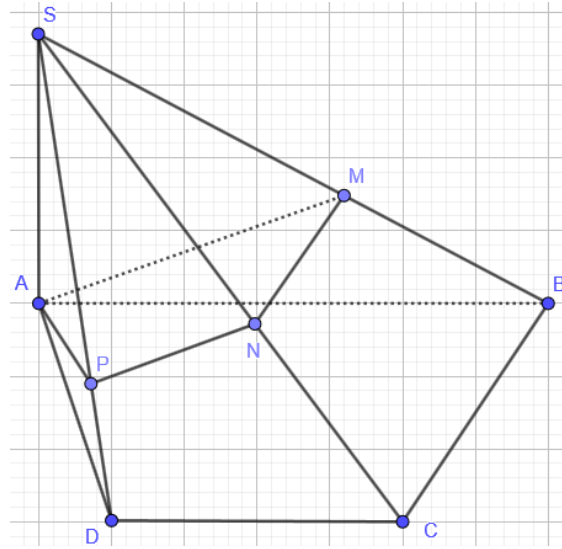
B. $\frac{4a^3\pi\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{4\pi a^3}{3}$.

D. $\frac{4\pi a^3}{24}$.

Lời giải

Chọn C



Do hình thang $ABCD$ cân và $AB = 2BC = 2CD = 2DA$ nên $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 90^\circ$. Mặt phẳng qua A vuông góc với SB nên AM vuông góc với SB .

Ta có $BC \perp AC, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AN$. Mặt khác $AN \perp SB$ nên

$AN \perp (SBC)$. Do đó $AN \perp BN$. Tương tự $AP \perp SB, AP \perp BD \Rightarrow AP \perp (SBD) \Rightarrow AP \perp BP$

Suy ra các điểm C, D, P, N và M đều nhìn đoạn AB dưới một góc vuông. Do đó, tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện $ABCDMPN$ là trung điểm đoạn AB (trong đó AB là đường kính mặt cầu). Vì vậy, bán kính khối cầu ngoại tiếp hình đa diện $ABCDMPN$ là $r = \frac{AB}{2} = a$.

Vậy thể tích khối cầu là $V = \frac{4a^3\pi}{3}$

Câu 14: (-Mai-Anh-Tuấn-Thanh-Hóa-lần-1-2018-2019) Cho tứ diện $OABC$ có $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ và đôi một vuông góc với nhau. Gọi r là bán kính mặt cầu tiếp xúc với cả bốn mặt của tứ diện. Giả sử $a \geq b, a \geq c$. Giá trị nhỏ nhất của $\frac{a}{r}$ là

A. $1 + \sqrt{3}$.

B. $2 + \sqrt{3}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $3 + \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $V_{OABC} = \frac{abc}{6}$, $S_p = \frac{1}{2}(ab + bc + ac + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2})$.

Gọi T là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$, ta có:

$V_{OABC} = V_{TOAB} + V_{TOAC} + V_{TOBC} + V_{TABC} = \frac{1}{3}r(S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC} + S_{ABC}) = \frac{1}{3}r.S_p$ (r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$)

$$\Rightarrow r = \frac{3V_{OABC}}{S_p} = \frac{abc}{ab + bc + ac + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{r} = \frac{ab + bc + ac + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}{bc} = \frac{a}{c} + 1 + \frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{c^2} + 1 + \frac{a^2}{b^2}}$$

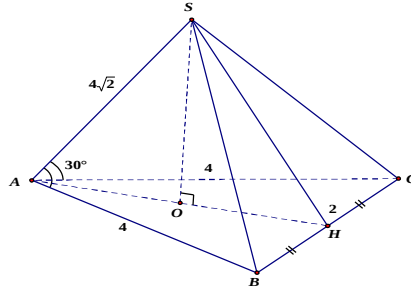
$$\geq 1 + 1 + 1 + \sqrt{1 + 1 + 1} = 3 + \sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } \left(\frac{a}{r}\right)_{\min} = 3 + \sqrt{3} \Leftrightarrow a = b = c.$$

- Câu 15:** (Nguyễn Khuyển) Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC = 4$, $BC = 2$, $SA = 4\sqrt{3}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SAC} = 30^\circ$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng:
- A.** $V_{S.ABC} = 4$. **B.** $V_{S.ABC} = 6$. **C.** $V_{S.ABC} = 8$. **D.** $V_{S.ABC} = 12$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm BC , ta có $AB = AC$ nên $AH \perp BC$, $SH \perp BC$, suy ra $BC \perp (SAH)$. Do đó $(SAH) \perp (ABC)$. Trong mặt phẳng (SAH) , kẻ $SO \perp AH \Rightarrow SO \perp (ABC)$.

Trong $\triangle ABC$, $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$.

Xét $\triangle SAB$, ta có $SB^2 = SA^2 + AB^2 - 2SA \cdot AB \cdot \cos 30^\circ = 16 \Rightarrow SB = 4$.

Tương tự ta có: $SC = 4$; $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$.

$$S_{SAH} = \sqrt{p(p-SA)(p-SH)(p-AH)},$$

$$S_{SAH} = \sqrt{p(p-SA)(p-SH)(p-AH)}, p = \frac{1}{2}(SA+AH+SH) = \sqrt{15} + 2\sqrt{3}.$$

$$SO = \frac{2S_{SAH}}{AH} = \frac{4\sqrt{15}}{5}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} SO \cdot \frac{1}{2} AH \cdot BC$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} SO \cdot \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{3} \cdot \frac{4\sqrt{15}}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{15} \cdot 2 = 4.$$

Cách 2: Đặt $AS = a$, $AB = b$, $AC = c$, $\widehat{SAB} = \alpha$, $\widehat{SAC} = \beta$, $\widehat{BAC} = \gamma$.

Sử dụng công thức tính nhanh:

$$V_{SABC} = \frac{1}{6} abc \sqrt{1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma}.$$

$$\text{Áp dụng: } a = 4\sqrt{3}, b = c = 4, \cos \alpha = \cos \beta = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos \gamma = \cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{4^2 + 4^2 - 2^2}{2 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{7}{8}.$$

$$\text{Ta có } V_{SABC} = \frac{1}{6} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{7}{8} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \frac{49}{64}} = 4.$$

- Câu 16:** (Chuyên-Thái-Nguyên-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3) Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Gọi M , N lần lượt là trung điểm của SB , SC . Biết $(AMN) \perp (SBC)$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

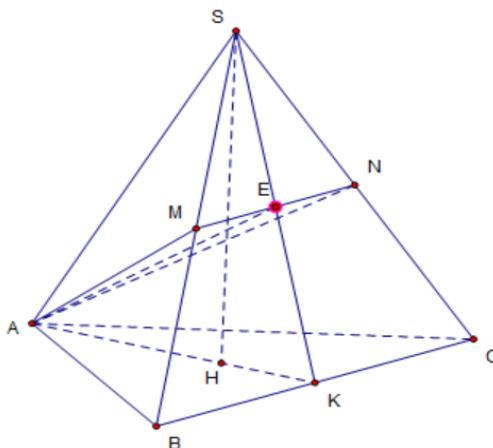
A. $\frac{a^3 \sqrt{26}}{24}$.

B. $\frac{a^3 \sqrt{5}}{24}$.

C. $\frac{a^3 \sqrt{5}}{8}$.

D. $\frac{a^3 \sqrt{13}}{18}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi E là trung điểm MN , K là trung điểm BC , H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Ta có: S, E, K thẳng hàng và A, H, K thẳng hàng.

Ta có: $\triangle SAB = \triangle SAC \Rightarrow AM = AN \Rightarrow$ tam giác AMN cân tại $A \Rightarrow AE \perp MN$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (AMN) \perp (SBC) \\ (AMN) \cap (SBC) = MN \\ AE \perp MN \\ AE \subset (AMN) \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SBC)$$

$$\Rightarrow AE \perp SK$$

$$\text{Ta có: } \frac{SE}{SK} = \frac{SM}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow E \text{ là trung điểm } SK \Rightarrow \text{tam giác } SAK \text{ cân tại } A$$

$$\Rightarrow AS = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Ta có: } SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{15}}{6}, S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Suy ra: } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a^3\sqrt{5}}{24}.$$

Câu 17: (KHTN Hà Nội Lần 3) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC . Biết rằng BM vuông góc với AN . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{14}}{8}.$

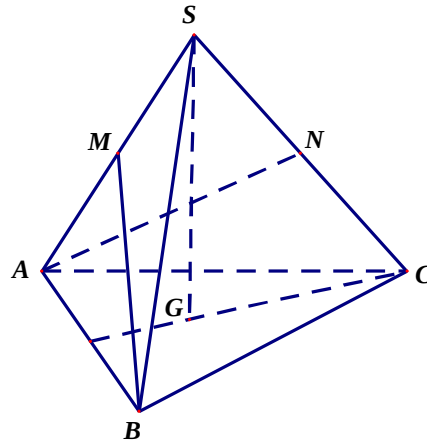
B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}.$

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$

D. $\frac{a^3\sqrt{14}}{24}.$

Lời giải

Chọn D



Vì $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASC} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$, do đó $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SA}$.

Ta có $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{SN} - \overrightarrow{SA} = \frac{1}{2} \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}$; $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB}$.

Theo giả thiết $BM \perp AN \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \right) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{SA}^2 - \frac{1}{2} \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SA} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} - 2 \overrightarrow{SA}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot SA \cdot SC \cdot \cos \widehat{ASC} - 2 SA^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \widehat{ASC} = \frac{2}{3}$$

Xét tam giác ASC , theo định lý côsin ta có

$$AC^2 = SA^2 + SC^2 - 2SA \cdot SC \cdot \cos \widehat{ASC} = SA^2 + SA^2 - 2 \cdot SA^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} SA^2$$

$$\Rightarrow SA = \frac{AC \cdot \sqrt{6}}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{6}}{2}$$

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC ta có $SG \perp (ABC)$ và

$$SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2} \right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} \right)^2} = \frac{a\sqrt{42}}{6}.$$

$$\text{Vậy, } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SG = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{42}}{6} = \frac{a^3 \sqrt{14}}{24}.$$

Câu 18: (Sở Ninh Bình Lần 1) Cho hình chóp đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng 2, điểm M thuộc cạnh SA sao cho $SA = 4SM$ và SA vuông góc với mặt phẳng (MBC) . Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ là

A. $V = \frac{2}{3}$.

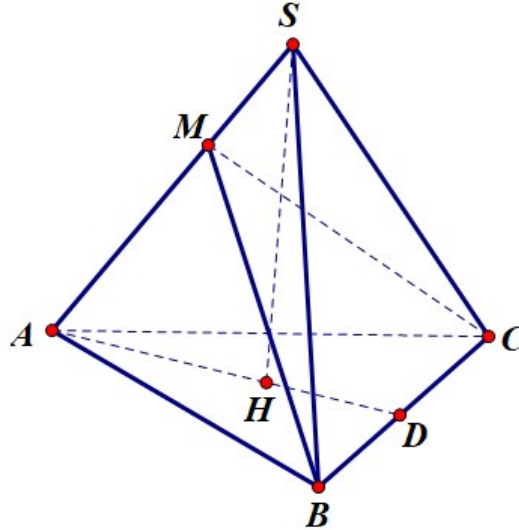
B. $V = \frac{2\sqrt{5}}{9}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $V = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi D là trung điểm BC , H là chân đường cao khối chóp hạ từ S .
Ta có tứ giác $SMHD$ nội tiếp đường tròn đường kính SD . Theo tính chất cát tuyến

$$AS \cdot AM = AH \cdot AD \Leftrightarrow \frac{3}{4} SA^2 = \frac{2}{3} AD^2 \Leftrightarrow SA^2 = \frac{8}{3} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Nên } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \frac{2}{3}.$$

Câu 19: (Phan Đình Tùng Hà Tĩnh) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = \frac{a\sqrt{39}}{3}$. Tam giác ABC cân tại A có góc $A = 120^\circ$, $BC = 2a$. G là trọng tâm tam giác SAB . Thể tích khối chóp $G.ABC$ là

A. $\frac{2a^3}{9}$.

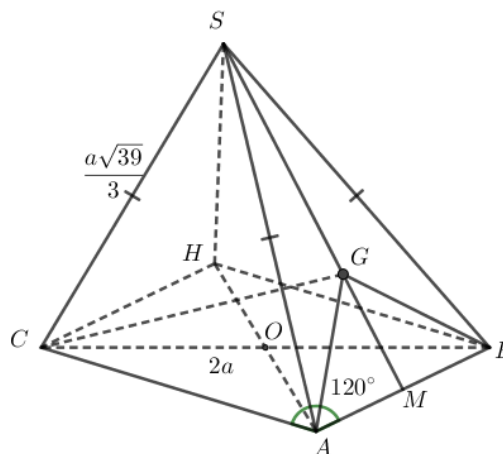
B. a^3 .

C. $\frac{a^3}{3}$.

D. $\frac{a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu của S trên mặt đáy, vì $SA = SB = SC$ nên $HA = HB = HC$ hay H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Rightarrow HA = HB = HC = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Gọi O là trung điểm BC , tam giác ABC cân tại A nên $\begin{cases} AO \perp BC \\ \widehat{BAO} = \widehat{CAO} = 60^\circ \end{cases}$

$$\text{Suy ra } AB = AC = \frac{BO}{\sin \widehat{BAO}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Đường cao của khối chóp là } SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{39a^2}{9} - \frac{12a^2}{9}} = a\sqrt{3}$$

$$\text{Thể tích khối chóp } S.ABC \text{ là } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{3} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3}{3}$$

$$\text{Do } G \text{ là trọng tâm tam giác } SAB \text{ nên } GM = \frac{1}{3} SM \Rightarrow d(G, (ABC)) = \frac{1}{3} d(S, (ABC))$$

$$\Rightarrow V_{G.ABC} = \frac{1}{3} V_{S.ABC} = \frac{a^3}{9}.$$

Cách 2:

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt đáy (ABC) , vì $SA = SB = SC$ nên $HA = HB = HC$.

Gọi O là trung điểm $BC \Rightarrow HO \perp BC$

Tam giác ABC cân tại A nên $\begin{cases} AO \perp BC \\ \widehat{BAO} = \widehat{CAO} = 60^\circ \end{cases}$.

Vậy H nằm trên đường thẳng AO và $\triangle HAB$ đều.

$$\text{Ta có } BO = \frac{AH \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{2BO}{\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3} = AB.$$

$$\text{Đường cao của khối chóp là } SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{39a^2}{9} - \frac{12a^2}{9}} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Thể tích khối chóp } S.ABC \text{ là } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{3} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3}{3}$$

$$\Rightarrow V_{G.ABC} = \frac{1}{3} V_{S.ABC} = \frac{a^3}{9}.$$

Câu 20: (THPT ĐÔNG LƯƠNG 3 LẦN 2) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng

1. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $\frac{\sqrt{6}}{4}$, từ B đến mặt phẳng (SAC) là $\frac{\sqrt{15}}{10}$,

từ C đến mặt phẳng (SAB) là $\frac{\sqrt{30}}{20}$ và hình chiếu vuông góc của S xuống đáy nằm trong tam giác ABC . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{1}{36}$.

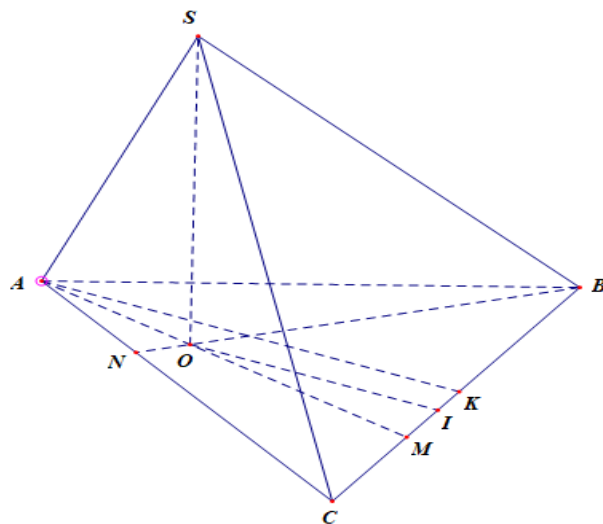
B. $\frac{1}{48}$.

C. $\frac{1}{12}$.

D. $\frac{1}{24}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là chân đường cao hạ từ S xuống mặt phẳng (ABC) .

Đặt $d(O, BC) = a$, $d(O, AC) = b$, $d(O, AB) = c$, $SO = h$.

Ta có $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OAC} + S_{\Delta OAB} \Rightarrow a + b + c = \frac{\sqrt{3}}{2}(1)$ (vì ΔABC đều cạnh bằng 1).

Mặt khác $\frac{d(O, (SBC))}{d(A, (SBC))} = \frac{OM}{AM} = \frac{OI}{AK} = \frac{2a}{\sqrt{3}} \Rightarrow d(O, (SBC)) = \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $\frac{2}{a^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{a^2} \Rightarrow a = h$.

Tương tự $\frac{d(O, (SAC))}{d(B, (SAC))} = \frac{d(O, AC)}{d(B, AC)} = \frac{2b}{\sqrt{3}} \Rightarrow d(O, (SAC)) = \frac{2b}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{15}}{10} = \frac{b}{\sqrt{5}}$.

Suy ra $\frac{5}{b^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{b^2} \Rightarrow b = 2h$.

Tương tự $\frac{d(O, (SAB))}{d(C, (SAB))} = \frac{d(O, AB)}{d(C, AB)} = \frac{2c}{\sqrt{3}} \Rightarrow d(O, (SAB)) = \frac{2c}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{30}}{20} = \frac{c}{\sqrt{10}}$.

Suy ra $\frac{10}{c^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{c^2} \Rightarrow c = 3h$.

(1) $\Rightarrow h + 2h + 3h = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{12} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{48}$.

Câu 21: (Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi N là trung điểm SB , P thuộc đoạn SC sao cho $SP = 2PC$, M thuộc đoạn SA sao cho $SM = \frac{4}{5}MA$. Mặt phẳng (MNP) cắt SD tại Q . NP cắt BC tại E , CQ cắt DP tại R .

Biết rằng thể tích khối chóp $EPQR$ bằng 18cm^3 . Thể tích khối chóp $SMNPQ$ bằng

A. 65cm^3 .

B. $\frac{260}{9}\text{cm}^3$.

C. 75cm^3 .

D. 70cm^3 .

Lời giải

Chọn A



Do $\overline{MIP}$ nên $\overline{SI} = x\overline{SP} + (1-x)\overline{SM} = x\frac{2}{3}\overline{SC} + (1-x)\frac{4}{9}\overline{SA}$

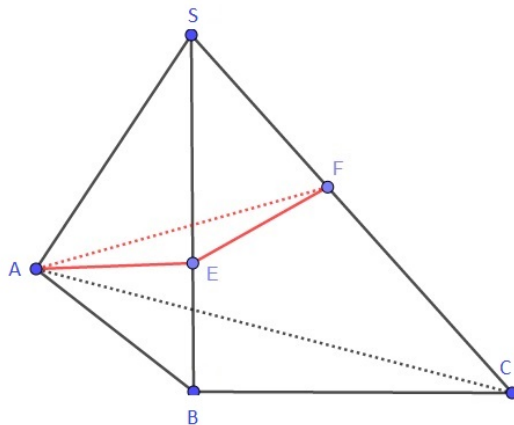
Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác SCQ với cát tuyến $\overline{PRD}$, ta được $\frac{RQ}{RC} = \frac{6}{7}$ (3)

$$S_{PRQ} = \frac{6}{13} S_{PQC} = \frac{6}{13} \cdot \frac{1}{3} S_{SQC} = \frac{2}{13} \cdot \frac{4}{7} S_{SDC} = \frac{8}{91} S_{SDC}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } V_{SMNPQ} &= V_{SMNP} + V_{SMPQ} = \left(\frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} + \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SP}{SC} \cdot \frac{SQ}{SD} \right) \frac{V_{SABCD}}{2} \\ &= \left(\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{7} \right) \cdot \frac{V_{SABCD}}{2} = 65 \text{cm}^3 \end{aligned}$$

A. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$ **C.** $\frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$ **D.** $\frac{8\sqrt{2}a^3}{3}$

Chon A



Lấy $E \in SB, F \in SC$, thỏa mãn: $SE = SF = a$. Suy ra $\frac{SE}{SB} = \frac{1}{2}, \frac{SF}{SC} = \frac{1}{4}$.

Theo giả thiết $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60^\circ$, suy ra $S.AEF$ là khối tứ diện đều cạnh a .

Suy ra $V_{S.AEF} = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}$. Mặt khác: $\frac{V_{S.AEF}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SE}{SB} \cdot \frac{SF}{SC} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{S.ABC} = 8V_{S.AEF} = \frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

DẠNG 2: THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ LĂNG TRỤ ĐỨNG

Câu 23: Cho lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A , $BC=2a$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BB'C)$ bằng 60° . Tính thể tích lăng trụ $ABCA'B'C'$.

A. $a^3\sqrt{2}$

B. $2a^3$

C. $a^3\sqrt{6}$

D. $\sqrt{3}a^3$

Lời giải

Từ A kẻ $AI \perp BC \Rightarrow I$ là trung điểm BC

$AI \perp (BCC'B') \Rightarrow AI \perp B'C$ (1)

Từ I kẻ $IM \perp B'C$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow B'C \perp (IAM)$

Vậy góc giữa $(AB'C)$ và $(B'CB)$ là

$$\widehat{AMI} = 60^\circ$$

Ta có $AI = \frac{1}{2}BC = a$; $IM =$

$$\frac{AI}{\tan 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$BH = 2IM = \frac{2a}{\sqrt{3}};$$

$$\frac{1}{B'B^2} = \frac{1}{BH^2} - \frac{1}{BC^2} = \frac{3}{4a^2} - \frac{1}{4a^2} = \frac{1}{2a^2}.$$

Suy ra $BB' = a\sqrt{2}$; $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AI \cdot BC = \frac{1}{2}a \cdot 2a = a^2$

$$V_{ABCA'B'C'} = a\sqrt{2} \cdot a^2 = a^3\sqrt{2}$$

Chọn A.

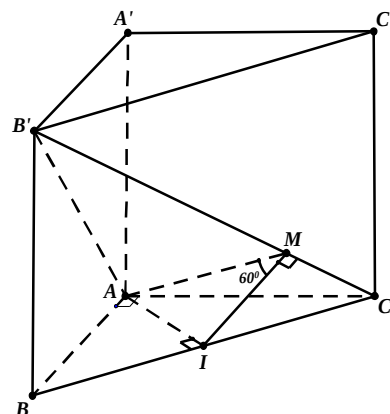
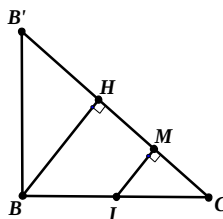
Câu 24: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt thuộc các cạnh bên AA', CC' sao cho $MA = MA'$ và $NC = 4NC'$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Trong bốn khối tứ diện $GA'B'C'$, $BB'MN$, $ABB'C'$ và $A'BCN$, khối tứ diện nào có thể tích nhỏ nhất?

A. Khối $A'BCN$

B. Khối $GA'B'C'$

C. Khối $ABB'C'$

D. Khối $BB'MN$



Lời giải

+ Nhận thấy khoảng cách từ G và A xuống mặt phẳng $(A'B'C')$ là bằng nhau (do G, A thuộc mặt phẳng $(ABC) // (A'B'C')$)

$$V_{GA'B'C'} = V_{AA'B'C'}$$

Mà $V_{AA'B'C'} = V_{ABB'C'}$ (Do 2 hình chóp này có 2 đáy $AA'B'$ và ABB' diện tích bằng nhau; chung đường cao hạ từ C')

$$\Rightarrow V_{GA'B'C'} = V_{ABB'C'}$$

$\Rightarrow$ Không thể khối chóp $GA'B'C'$ hoặc $ABB'C'$ thể thích nhỏ nhất $\rightarrow$ Loại B, C

+ So sánh Khối $A'BCN$ và Khối $BB'MN$

Nhận thấy khoảng cách từ M và A' xuống mặt $BBCC'$ là bằng nhau $\rightarrow$ Khối $A'BCN$ và Khối $BB'MN$ có đường cao hạ từ M và A' bằng nhau. Mặt khác Diện tích đáy $BNB' >$ Diện tích đáy BCN

$\Rightarrow$ Khối $A'BCN <$ Khối $BB'MN$.

$\Rightarrow$ Khối $A'BCN$ có diện tích nhỏ hơn.

Chọn A.

Câu 25: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, biết đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{6}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

B. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{28}$.

C. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$.

D. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm của BC , ta có $(A'M) \perp (A'BC)$ theo giao tuyến $A'M$.

Trong $(A'M)$ kẻ $OH \perp A'M$ ($H \in A'M$).

$\Rightarrow OH \perp (A'BC)$

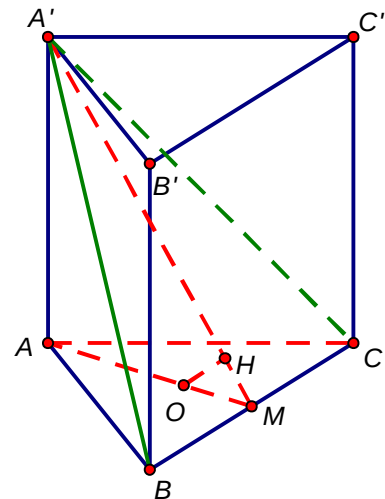
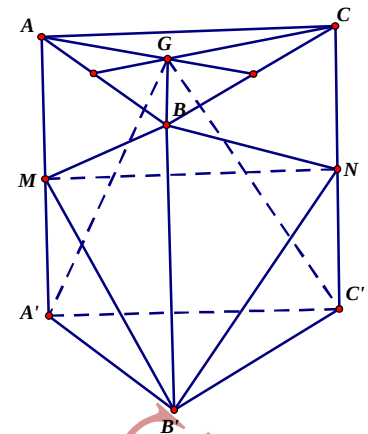
Suy ra: $d(O, (A'BC)) = OH = \frac{a}{6}$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Xét hai tam giác vuông $A'M$ và OHM có góc $\widehat{M}$ chung nên chúng đồng dạng.

$$\text{Suy ra: } \frac{OH}{A'A} = \frac{OM}{A'M} \Rightarrow \frac{\frac{a}{6}}{A'A} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{A'A^2 + AM^2}} \Rightarrow \frac{1}{A'A} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{A'A^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow A'A = \frac{a\sqrt{6}}{4}. \text{ Thể tích: } V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot A'A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{16}.$$



Câu 26: (Chuyên-Thái-Nguyên-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3) Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB = AC = a$. Biết góc giữa hai đường thẳng AC' và BA' bằng 60° . Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. a^3 .

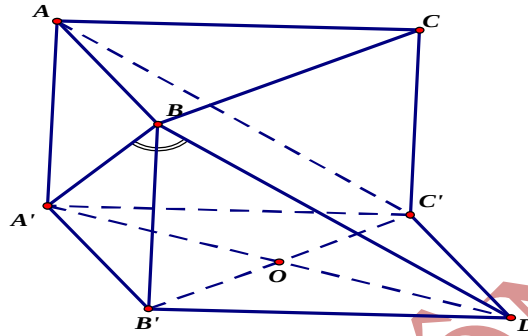
B. $2a^3$.

C. $\frac{a^3}{3}$.

D. $\frac{a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $A'B'DC'$.

Khi đó góc giữa AC' và BA' bằng góc giữa BA' và BD và bằng 60° .

+ Trường hợp 1: Góc $\widehat{A'BD} = 60^\circ$.

Ta gọi O là tâm của hình bình hành $A'B'DC'$.

Ta có $A'D = 2A'O = B'C' = a\sqrt{2}$.

Tam giác $A'BD$ có $A'B = \sqrt{A'B'^2 + BB'^2} = \sqrt{DB'^2 + BB'^2} = BD$ nên $\Delta A'BD$ cân tại B .

Do $\widehat{A'BD} = 60^\circ$ nên tam giác $\Delta A'BD$ đều suy ra $A'B = A'D = a\sqrt{2}$.

Từ đó tính được $B'B = \sqrt{A'B^2 - A'B'^2} = a$.

Thể tích lăng trụ là $V = BB'.S_{ABC} = \frac{a^3}{2}$.

+ Trường hợp 2: Góc $\widehat{A'BD} = 120^\circ$.

Lập luận như trường hợp 1 ta cũng có $\Delta A'BD$ cân tại B . Do đó BO là tia phân giác cũng đồng thời là đường cao.

Tính được $BO = \frac{A'O}{\tan 60^\circ} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6} < \frac{a\sqrt{2}}{2} = B'O$ là điều vô lý vì BO là cạnh huyền trong tam giác vuông $BB'O$.

Câu 27: (KSCL-Lần-2-2019-THPT-Nguyễn-Đức-Cảnh-Thái-Bình) Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . M, N, P lần lượt là trung điểm của $CC', A'C', A'B'$. Biết thể tích của khối $GMNP$ bằng 5, tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

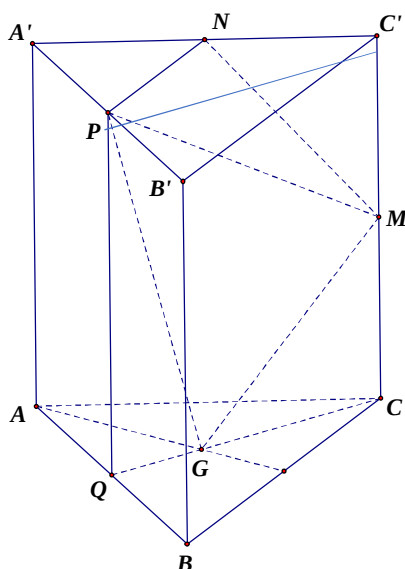
A. 72.

B. 21.

C. 18.

D. 17.

Lời giải

**Chọn A**Gọi Q là trung điểm của AB .Đặt $S = S_{PQCC'}$; $h = d(A', (PQCC'))$.Theo giả thiết $V_{N.GMP} = \frac{1}{3} S_{GMP} \cdot d(N, (GMP)) = 5 \Rightarrow S_{GMP} \cdot d(N, (GMP)) = 15$.Ta có $S_{MPG} = S_{PQCC'} - S_{PQG} - S_{PMC'} - S_{MGC} = S - \frac{S}{6} - \frac{S}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} S = \frac{5S}{12}$.Lại có $d(N, (GMP)) = \frac{1}{2} d(A', (GMP))$.Suy ra: $S_{GMP} \cdot d(N, (GMP)) = \frac{5S}{12} \cdot \frac{h}{2} \Rightarrow S \cdot h = 72$.Mặt khác, vì $V_{A'.PQCC'} = \frac{2}{3} \cdot \frac{V_{ABC.A'B'C'}}{2}$ nên $V_{ABC.A'B'C'} = S \cdot h = 72$.

Câu 28: (Chuyên Bắc Giang) Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài tất cả các cạnh bằng 1. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và AC . Tính thể tích V của khối đa diện $AMNA'B'C'$.

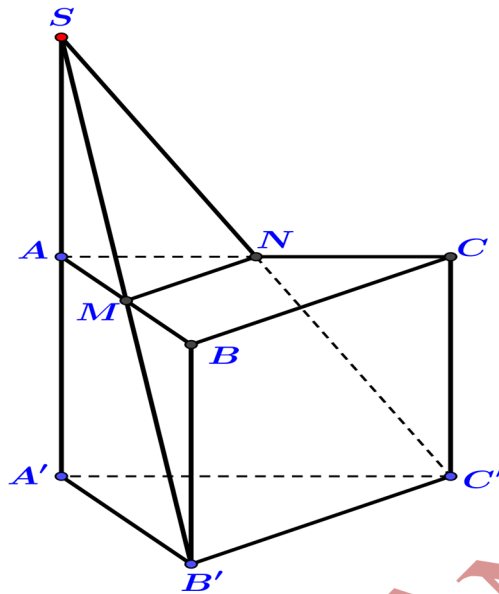
A. $V = \frac{7\sqrt{3}}{48}$.

B. $V = \frac{5\sqrt{3}}{32}$.

C. $V = \frac{7\sqrt{3}}{32}$.

D. $V = \frac{5\sqrt{3}}{48}$.

Lời giải**Chọn A**



Trong mặt phẳng $(ABB'A')$: $AA' \cap B'M = S$.

Ta có M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và AC nên MN là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow MN \parallel BC$. Do đó, $MN \parallel B'C'$.

Ta có: ba điểm S, N, C' cùng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng $(MNC'B')$ và $(ACC'A') \Rightarrow S, N, C'$ thẳng hàng.

Ta có $AM \parallel A'B'$ nên $\frac{SA}{SA'} = \frac{AM}{A'B'} = \frac{1}{2} \Rightarrow A$ là trung điểm của SA' .

Do đó, $SA' = 2$ và $SA = 1$. Mặt khác: $S_{\triangle AMN} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{16}$.

Kí hiệu V_1, V_2 tương ứng là thể tích của các khối chóp $S.A'B'C'$ và $S.AMN$.

Thể tích của khối đa diện $AMNA'B'C'$ là

$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3} \cdot SA' \cdot S_{\triangle A'B'C'} - \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\triangle AMN} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{7\sqrt{3}}{48} \text{ (đvtt)}.$$

Câu 29: (SỞ QUẢNG BÌNH NĂM 2019) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 1. Gọi M là trung điểm cạnh BB' . Mặt phẳng $(MA'D)$ cắt cạnh BC tại K . Thể tích của khối đa diện $A'B'C'D'MKCD$ bằng:

A. $\frac{7}{24}$.

B. $\frac{7}{17}$.

C. $\frac{1}{24}$.

D. $\frac{17}{24}$.

Lời giải

Chọn D

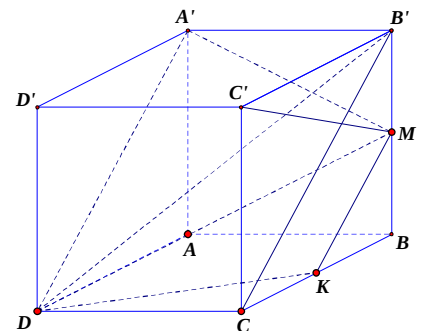
*Ta có $S_{A'MBA} = \frac{(A'A + MB) \cdot AB}{2} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot 1}{2} = \frac{3}{4}$

Nên $V_{D.A'ABM} = \frac{1}{3} \cdot S_{A'MBA} \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$

* Dễ thấy $\frac{V_{B.MKD}}{V_{B.CBD}} = \frac{BM}{BB'} \cdot \frac{BK}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Suy

$$V_{B.MKD} = \frac{1}{4} V_{B.CBD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{DBC} \cdot BB' = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot DC \cdot BC \cdot BB' = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{24}$$



$$* \text{Vậy } V_{A'B'C'D', MKCD} = 1 - V_{D, A'ABM} - V_{B, MKD} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{17}{24}$$

Câu 30: (Chuyên Quốc Học Huế Lần1) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Biết tích của khoảng cách từ điểm B' và điểm D đến mặt phẳng $(D'AC)$ bằng $6a^2$ ($a > 0$). Giả sử thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là ka^2 . Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $k \in (20; 30)$.

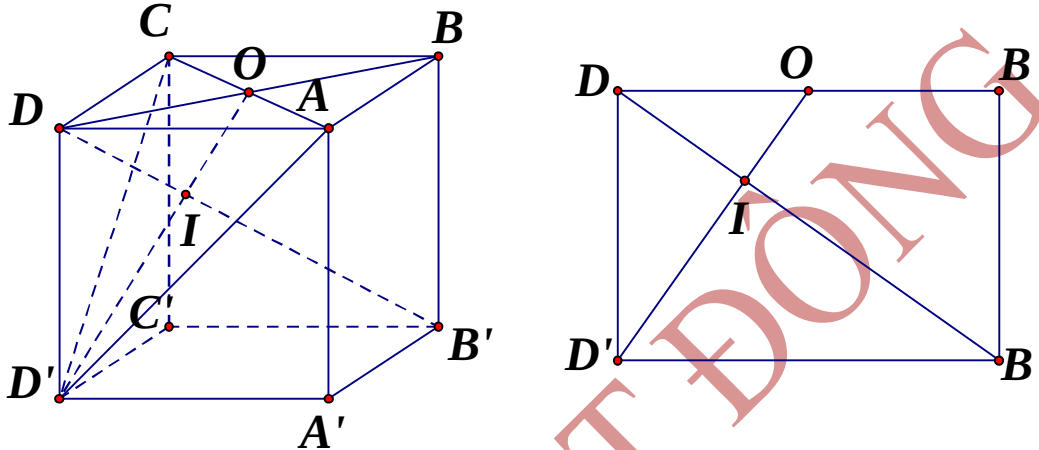
B. $k \in (100; 120)$.

C. $k \in (50; 80)$.

D. $k \in (40; 50)$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là giao điểm của AC và BD , I là giao điểm của DB' và $D'O$. Vì AC vuông góc với BD và CC' nên $AC \perp (BDD'B')$.

Gọi x là độ dài cạnh hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, khi đó hình chữ nhật $BDD'B'$ có

$$BD = B'D' = x\sqrt{2}; DO = \frac{x\sqrt{2}}{2}; OD' = \frac{x\sqrt{6}}{2}; BD' = x\sqrt{3}$$

Vì $\frac{DO}{B'D'} = \frac{DI}{B'I} = \frac{OI}{D'I} = \frac{1}{2}$ suy ra $DI = \frac{x\sqrt{3}}{3}; OI = \frac{x\sqrt{6}}{6}$ do đó tam giác $\triangle DIO; \triangle D'I B'$ là các tam giác vuông.

Do $AC \perp (BDD'B')$ và $DB' \perp D'O$ nên

$$d(B', (ACD')) \times d(D, (ACD')) = B'I \cdot DI = \frac{2}{3} x^2 = 6a^2 \text{ nên } x = 3a$$

Lại có thể tích của $ABCD.A'B'C'D'$ là ka^3 nên $ka^3 = 27a^3 \Leftrightarrow k = 27$

Câu 31: Cho khối hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = b, \widehat{BAD} = \alpha$; đường chéo AC' hợp với đáy góc β . Tính thể tích khối hộp đứng đã cho là:

A. $V = 4ab\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab.\cos\alpha}.\cos\alpha.\cos\beta$

B. $V = 2ab\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab.\cos\alpha}.\cos\alpha.\cos\beta$

C. $V = 3ab\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab.\cos\alpha}.\sin\alpha.\tan\beta$

D. $V = ab\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab.\cos\alpha}.\sin\alpha.\tan\beta$

Lời giải

$$V = ab\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab.\cos\alpha}.\sin\alpha.\tan\beta$$

Ta có: $CC' \perp (ABCD)$

$\Rightarrow \widehat{CAC'} = \beta$ là góc của AC' và mặt đáy $(ABCD)$.

Xét $\triangle ABC$, ta có:
 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$
 $= a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \alpha.$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \alpha}$$

Do đó ta có:

$$CC' = AC \cdot \tan \beta = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \alpha} \cdot \tan \beta.$$

Thể tích của hình hộp đứng:

$$V = S_{ABCD} \cdot CC' = ab \sin \alpha \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \alpha} \cdot \tan \beta$$

$$V = ab \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \alpha} \cdot \sin \alpha \cdot \tan \beta$$

Chọn D.

Câu 32: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a , một mặt phẳng (α) cắt các cạnh AA' , BB' , CC' , DD' lần lượt tại M , N , P , Q . Biết $AM = \frac{1}{3}a$, $CP = \frac{2}{5}a$. Thể tích khối đa diện $ABCD.MNPQ$ là:

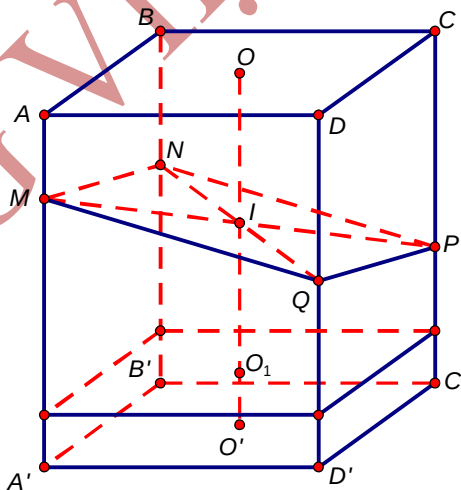
A. $\frac{11}{30}a^3$.

B. $\frac{a^3}{3}$.

C. $\frac{2a^3}{3}$.

D. $\frac{11}{15}a^3$.

Lời giải



Tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành có tâm là I thuộc đoạn OO' .

$$\text{Ta có: } OI = \frac{AM + CP}{2} = \frac{11}{30}a < \frac{a}{2}$$

Gọi O_1 là điểm đối xứng O qua I thì:

$$OO_1 = 2OI = \frac{11}{15}a < a. \text{ Vậy } O_1 \text{ nằm trong đoạn } OO'.$$

Vẽ mặt phẳng qua O_1 song song với $(ABCD)$ cắt các cạnh AA' ; BB' ; CC' ; DD' lần lượt tại A_1 , B_1 , C_1 , D_1 . Khi đó I là tâm của hình hộp

$$ABCD.A_1B_1C_1D_1. \text{ Vậy } V(ABCD.MNPQ) = V(MNPQ.A_1B_1C_1D_1) = \\ \frac{1}{2}V(ABCD.A_1B_1C_1D_1) = \frac{1}{2}a^2OO_1 = \frac{11}{30}a^3$$

Câu 33: (Phan Đình Tùng Hà Tĩnh) Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi và diện tích đáy bằng S_1 . Tứ giác $ACC'A'$ và $BDD'B'$ có diện tích lần lượt bằng S_2 và S_3 . M là một điểm bất kì thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Kí hiệu V là thể tích của khối chóp $M.A'B'C'D'$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $V = \sqrt{\frac{S_1 S_2 S_3}{6}}$.

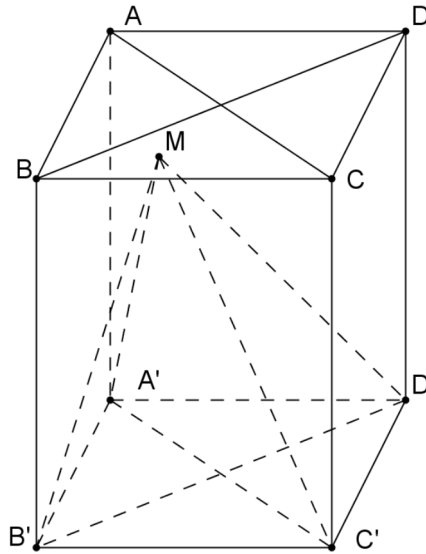
B. $V = \frac{\sqrt{2S_1 S_2 S_3}}{3}$.

C. $V = \frac{\sqrt{2}}{6} \sqrt{S_1 S_2 S_3}$.

D. $V = \frac{\sqrt{3}}{9} \sqrt{S_1 S_2 S_3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $S_1 = \frac{1}{2} A'C' \cdot B'D'$; $S_2 = A'C' \cdot AA'$; $S_3 = B'D' \cdot AA'$.

Vì M thuộc mặt phẳng $(ABCD)$ nên khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(A'B'C'D')$ bằng AA' . Do đó:

$$V = \frac{1}{3} AA' \cdot S_{A'B'C'D'} = \frac{1}{3} AA' \cdot \frac{1}{2} A'C' \cdot B'D' = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{4} (A'C' \cdot B'D') \cdot (A'C' \cdot AA') \cdot (B'D' \cdot AA')} \\ = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} A'C' \cdot B'D' \right) \cdot (A'C' \cdot AA') \cdot (B'D' \cdot AA')} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{2} S_1 S_2 S_3} = \frac{\sqrt{2}}{6} \sqrt{S_1 S_2 S_3}.$$

Câu 34: (Chuyên Thái Nguyên) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khoảng cách giữa AB và $B'C$ là $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$, khoảng cách giữa BC và AB' là $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$, khoảng cách giữa AC và BD' là $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích khối hộp.

A. $4a^3$.

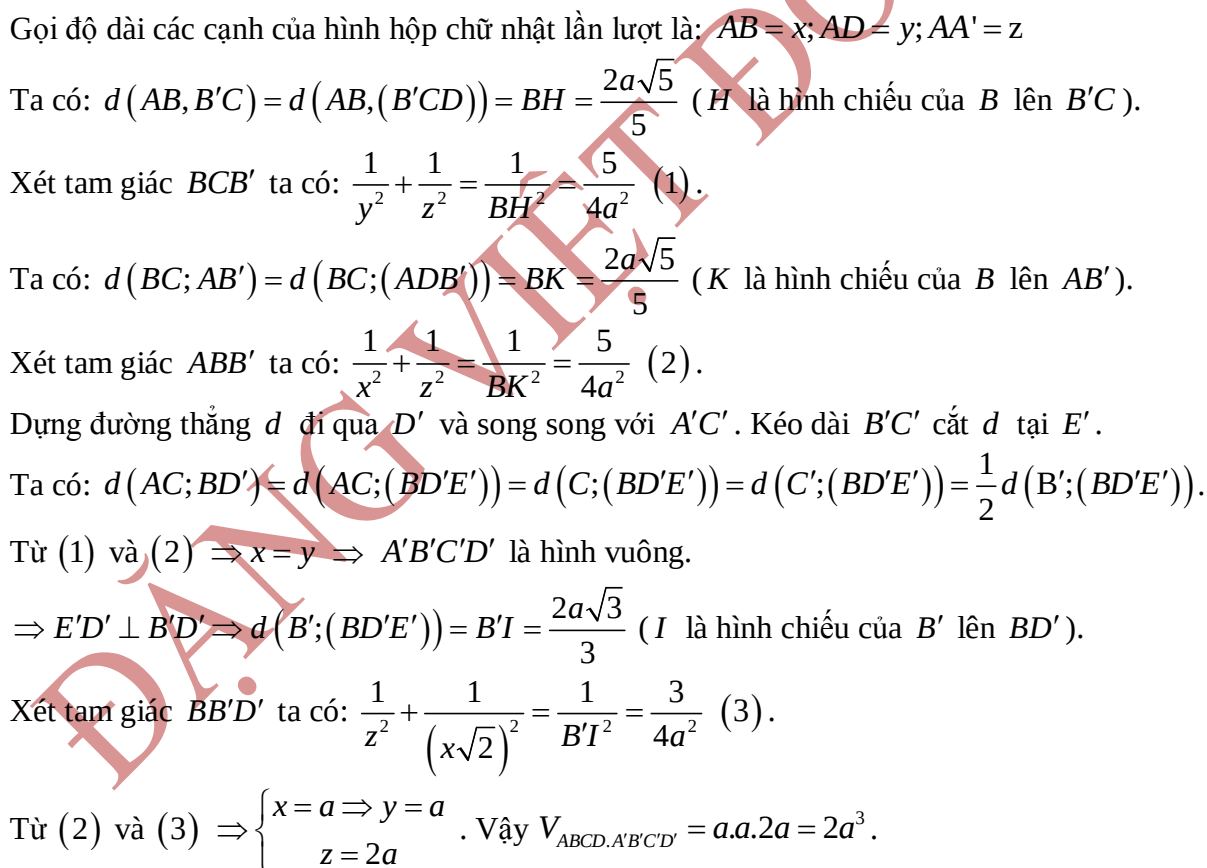
B. $3a^3$.

C. $5a^3$.

D. $2a^3$.

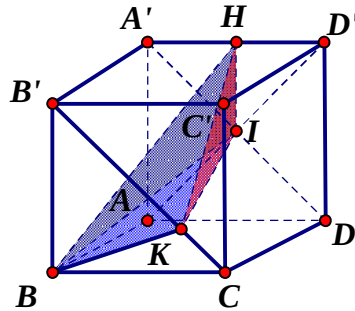
Lời giải

Chọn D



D. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{8}$.

Trang 32

Chọn C

Gọi H là trung điểm của $A'D' \Rightarrow IH \parallel AA' \Rightarrow IH \perp (A'B'C'D')$ và $IH = \frac{AA'}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi K là hình chiếu của B lên $CB' \Rightarrow BK \perp CB'$, mà $BK \perp A'B'$ nên $BK \perp (CA'B')$.

$$\Delta BB'C \text{ có } BK = \frac{\sqrt{B'B^2 \cdot BC^2}}{\sqrt{B'B^2 + BC^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$d(IH, BK) = d(IH, (BB'C'C)) = d(AA', (BB'C'C)) = d(A, (BB'C'C)) = AB = a.$$

Gọi α là góc giữa IH và BK , mà $IH \parallel BB'$ nên $\alpha = \angle B'BK$ (do $\Delta B'BK$ vuông tại K).

$$\text{Khi đó } \cos \alpha = \frac{BK}{BB'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ta có } V_{IHBK} = \frac{1}{6} \cdot IH \cdot BK \cdot d(IH, BK) \cdot \sin \alpha = \frac{a^3 \sqrt{3}}{16}.$$

Câu 36: (Ngô Quyền Hà Nội) Một hình hộp chữ nhật có kích thước $a(\text{cm}) \times b(\text{cm}) \times c(\text{cm})$, trong đó a, b, c là các số nguyên và $1 \leq a \leq b \leq c$. Gọi $V(\text{cm}^3)$ và $S(\text{cm}^2)$ lần lượt là thể tích và diện tích toàn phần của hình hộp. Biết $V = S$, tìm số các bộ ba số (a, b, c) ?

A. 10.**B. 12.****C. 21.****D. 4.****Lời giải****Chọn A**

Ta có điều kiện: $1 \leq a \leq b \leq c$

$$\text{Vì } V = S \Leftrightarrow abc = 2(ab + bc + ca) \Leftrightarrow bc(a - 2) = 2a(b + c) > 0 \Rightarrow a - 2 > 0$$

$$bc(a - 2) = 2a(b + c) \Leftrightarrow \frac{a - 2}{a} = 2\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a}\right) \Leftrightarrow \frac{a - 2}{a} \leq \frac{4}{a} \Leftrightarrow a \leq 6 \Rightarrow a \in \{3; 4; 5; 6\}$$

$$\text{Với } a = 3 \Rightarrow 3bc = 6(b + c) + 2bc \Leftrightarrow bc = 6(b + c) \Leftrightarrow (b - 6)(c - 6) = 36$$

$$\Rightarrow (b; c) = (7; 42), (8; 24), (9; 18), (10; 15), (12; 12)$$

$$\text{Với } a = 4 \Rightarrow 4bc = 8(b + c) + 2bc \Leftrightarrow bc = 4(b + c) \Leftrightarrow (b - 4)(c - 4) = 16$$

$$\Rightarrow (b; c) = (5; 20), (6; 12), (8; 8)$$

$$\text{Với } a = 5 \Rightarrow 5bc = 10(b + c) + 2bc \Leftrightarrow 3bc = 10(b + c) \Leftrightarrow (3b - 10)(3c - 10) = 100$$

$$\Rightarrow (b; c) = (5; 10)$$

$$\text{Với } a = 6 \Rightarrow 6bc = 12(b + c) + 2bc \Leftrightarrow bc = 3(b + c) \Leftrightarrow (b - 3)(c - 3) = 9$$

$$\Rightarrow (b; c) = (6; 6)$$

Vậy, có tất cả 10 bộ số nguyên (a, b, c) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

LĂNG TRỤ XIÊN

Câu 37: (THANH CHUÔNG 1 NGHỆ AN 2019 LẦN 3) Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác ABC đều cạnh a . Gọi M là trung điểm AC . Biết tam giác $A'MB$ cân tại A' và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Góc giữa $A'B$ với mặt phẳng (ABC) là 30° . Thể tích khối lăng trụ đã cho là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

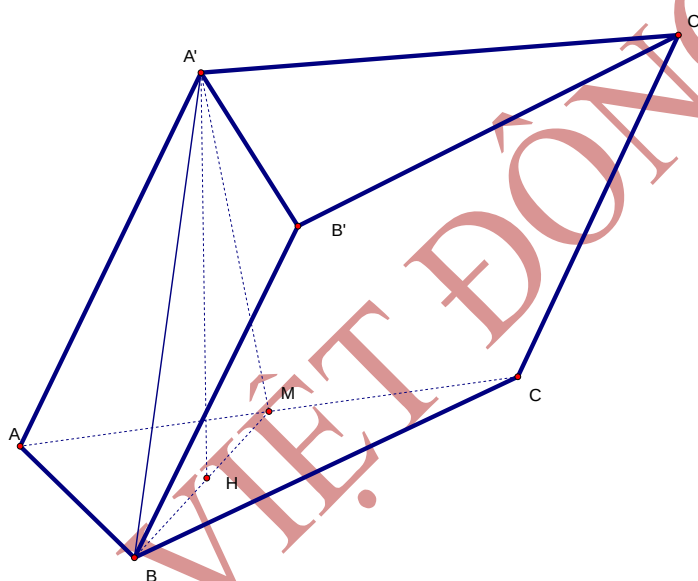
B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{48}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm BM , tam giác $A'BM$ cân tại A' nên $A'H \perp BM$

Ta có:
$$\begin{cases} (A'BM) \perp (ABC) \\ (A'BM) \cap (ABC) = BM \Rightarrow A'H \perp (ABC). \\ A'H \perp BM \end{cases}$$

Tam giác ABC đều cạnh a nên ta có:
$$\begin{cases} BM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{4} \\ S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$A'B$ có hình chiếu vuông góc trên (ABC) là HB

Góc tạo bởi $A'B$ với mặt phẳng (ABC) là góc $A'BH$ (vì góc $A'BH$ là góc nhọn)

Xét tam giác $A'BH$ vuông tại H , ta có:

$$\widehat{A'BH} = 30^\circ, \tan \widehat{A'BH} = \frac{A'H}{BH} \Rightarrow A'H = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{4},$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a}{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}.$$

Câu 38: (Thuan-Thanh-Bac-Ninh) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Biết

khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

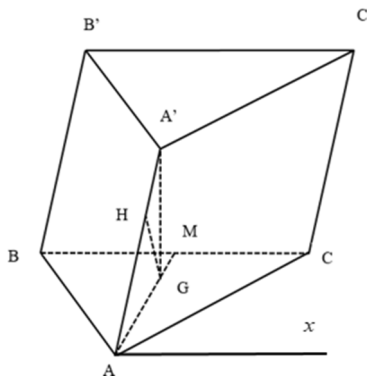
B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow AM \perp BC, AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Kẻ $Ax \parallel BC \Rightarrow BC \parallel (A'Ax)$. Kẻ $GH \perp AA' \Rightarrow GH \perp (A'Ax)$.

$$\Rightarrow d(BC, AA') = d(BC, (A'Ax)) = d(M, (A'Ax)) = \frac{3}{2}d(G, (A'Ax)).$$

$$\Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}GH \Leftrightarrow GH = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{GH^2} = \frac{1}{GA'^2} + \frac{1}{GA^2} \Leftrightarrow \frac{1}{GA'^2} = \frac{27}{3a^2} \Leftrightarrow GA' = \frac{a}{3}.$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = A'G \cdot S_{ABC} = \frac{a}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12} \text{ (đvtt)}$$

Câu 39: (Nguyễn Tất Thành Yên Bái) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC .

Biết khoảng cách giữa hai đường AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

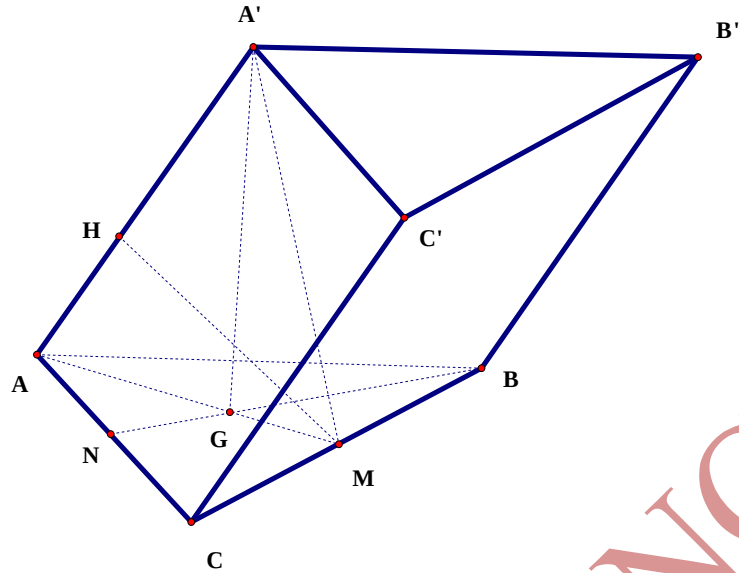
B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC .

Dễ thấy $AM \perp BC$, $A'G \perp BC \Rightarrow BC \perp (A'AM)$.

Gọi H là hình chiếu của M lên AA' .

Từ đó suy ra khoảng cách giữa hai đường AA' và BC bằng $MH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, A'G = x, A'A = \sqrt{A'G^2 + AG^2} = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{3}}.$$

$$\text{Ta có } A'G \cdot AM = HM \cdot A'A \Rightarrow x \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{3}} \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}.$$

$$\text{Thể tích } V \text{ của khối lăng trụ } ABC.A'B'C' \text{ là: } V = A'G \cdot S_{ABC} = \frac{a}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

Câu 40: (THPT-Toàn-Thắng-Hải-Phòng) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

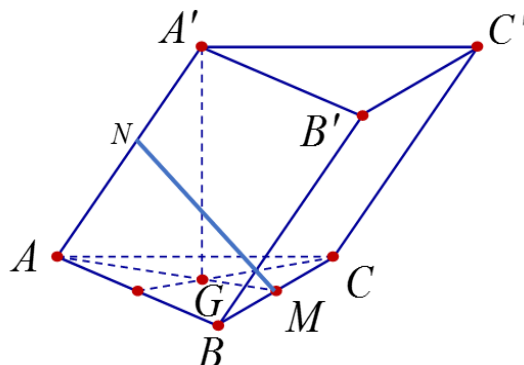
B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm BC .

Kẻ $MN \perp AA'$ ($N \in AA'$).

Ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp A'G \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'M) \Rightarrow BC \perp MN$.

Đặt $A'G = x$ ($x > 0$).

Trong $\triangle AA'G$ có $AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Có $AA' = \sqrt{A'G^2 + AG^2} = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{3}}$.

Trong $\triangle AA'M$ có $A'G \cdot AM = MN \cdot AA' \Leftrightarrow 2x = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{3}} \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{9} \Rightarrow x = \frac{a}{3}$ (vì $a > 0$).

Thể tích $V = S_{ABC} \cdot A'G = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 41: (THẠCH THÀNH I - THANH HÓA 2019) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Một mặt phẳng (P) chứa BC và vuông góc với AA' cắt hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo một thiết diện có diện tích bằng $\frac{3a^2}{8}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

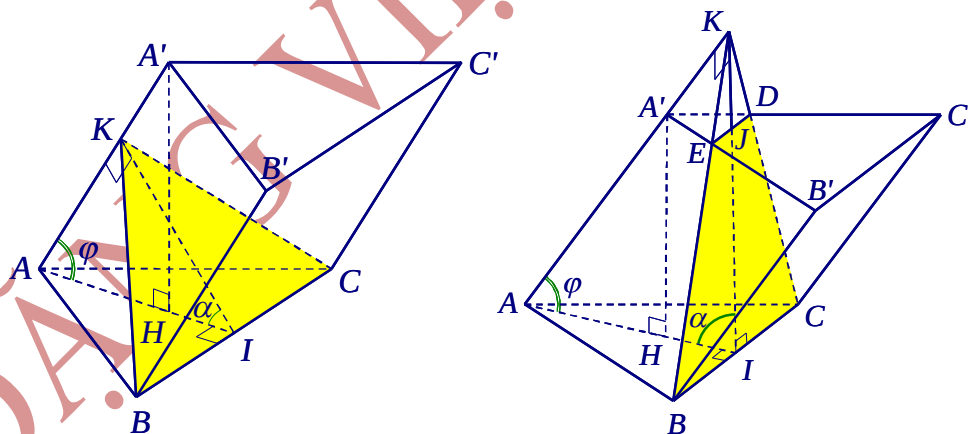
A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{10}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Chọn A



Gọi H là trọng tâm tam giác ABC , ta có $A'H \perp (ABC)$.

$AH \cap BC = I \Rightarrow I$ là trung điểm của BC và $AI \perp BC$.

Ta có $AI = AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AH = \frac{2}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AI = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Gọi K là hình chiếu của I trên đường thẳng AA' . Khi đó $AA' \perp (BCK)$. Hay $(P) \equiv (BCK)$.

Ta có hình chiếu của tam giác ABC trên mặt phẳng (P) là tam giác BCK .

Ta có hai khả năng về vị trí điểm K .

Khả năng 1: K nằm trong đoạn AA' thì thiết diện của (P) và lăng trụ là tam giác cân BCK .

Khả năng 2: K nằm ngoài đoạn AA' thì thiết diện của (P) và lăng trụ là hình thang cân $BCDE$ (hình vẽ).

Trong cả hai khả năng trên ta đều có $S_{\text{thiết diện}} \leq S_{BCK}$.

Gọi $\alpha = \widehat{AIK}$ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (ABC) .

$$\text{Ta có } \cos \alpha = \frac{S_{BCK}}{S_{ABC}} \geq \frac{S_{\text{thiết diện}}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{3a^2}{8}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha \leq 30^\circ \Rightarrow \varphi = \widehat{A'AI} = 90^\circ - \alpha \geq 60^\circ$$

$$\Rightarrow \cos \varphi \leq \frac{1}{2} \Rightarrow AA' = \frac{AH}{\cos \varphi} \geq 2AH = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \text{ và } AK = AI \cos \varphi \leq \frac{AI}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Do đó $AK < AA'$ hay K phải nằm giữa A và A' (Nghĩa là thiết diện là tam giác BCK).

$$\text{Ta có } S_{BCK} = \frac{1}{2} BC \cdot KI = \frac{1}{2} a \cdot KI = \frac{3a^2}{8} \Rightarrow KI = \frac{3a}{4}. \text{ Suy ra } \sin \widehat{A'AI} = \frac{IK}{AI} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{A'AI} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow A'H = AH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a.$$

$$\text{Do đó thể tích khối lăng trụ } ABC.A'B'C' \text{ là: } V = S_{ABC} \cdot A'H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 42: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, góc giữa đường thẳng BB' và (ABC) bằng 60° , tam giác ABC vuông tại C và góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên (ABC) trùng với trọng tâm của $\triangle ABC$. Thể tích của khối tứ diện $A'.ABC$ theo a bằng

A. $\frac{13a^3}{108}$.

B. $\frac{7a^3}{106}$.

C. $\frac{15a^3}{108}$.

D. $\frac{9a^3}{208}$.

Lời giải

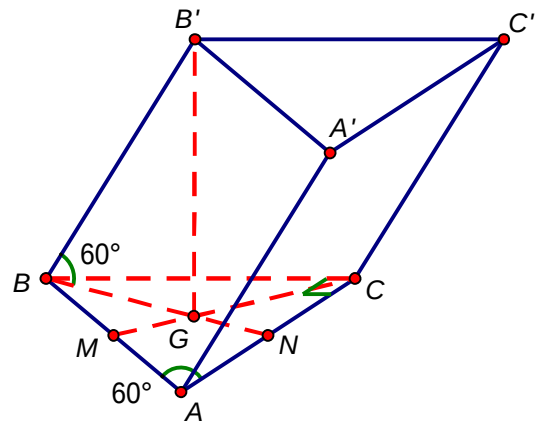
Gọi M, N là trung điểm của AB, AC và G là trọng tâm của $\triangle ABC$.

$$B'G \perp (ABC) \Rightarrow (\widehat{BB', (ABC)}) = \widehat{B'BG} = 60^\circ.$$

$$V_{A'.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot B'G = \frac{1}{6} \cdot AC \cdot BC \cdot B'G$$

Xét $\triangle B'BG$ vuông tại G , có $\widehat{B'BG} = 60^\circ$

$$\Rightarrow B'G = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ (nửa tam giác đều)}$$



Đặt $AB = 2x$. Trong $\triangle ABC$ vuông tại C có $\widehat{BAC} = 60^\circ$

$$\Rightarrow \text{tam giác } ABC \text{ là nửa tam giác đều} \Rightarrow AC = \frac{AB}{2} = x, BC = x\sqrt{3}$$

$$\text{Do } G \text{ là trọng tâm } \triangle ABC \Rightarrow BN = \frac{3}{2} BG = \frac{3a}{4}.$$

$$\text{Trong } \triangle BNC \text{ vuông tại } C: BN^2 = NC^2 + BC^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{9a^2}{16} = \frac{x^2}{4} + 3x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9a^2}{52} \Rightarrow x = \frac{3a}{2\sqrt{13}} \Rightarrow \begin{cases} AC = \frac{3a}{2\sqrt{13}} \\ BC = \frac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} \end{cases}$$

$$\text{Vậy, } V_{A'ABC} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3a}{2\sqrt{13}} \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{9a^3}{208}.$$

Câu 43: (Đặng Thành Nam Đề 6) Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB=1, BC=2$. Góc $\widehat{CBB'}=90^\circ, \widehat{ABB'}=120^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh AA' . Biết $d(AB', CM) = \frac{\sqrt{7}}{7}$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

A. $2\sqrt{2}$.

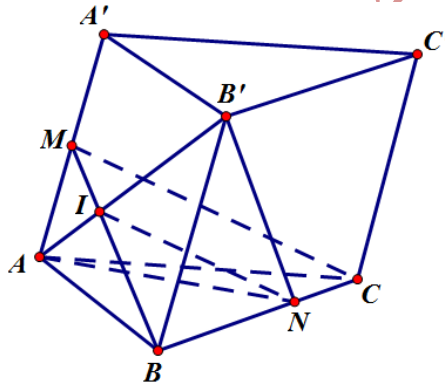
B. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

C. $4\sqrt{2}$.

D. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $I = BM \cap AB'; IN \parallel CM (N \in BC)$. Khi đó: $CM \parallel (AB'N)$

$$\Rightarrow d(CM, A'B) = d(C, (AB'N)) = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{IM}{IB} = \frac{AM}{BB'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{NC}{NB} = \frac{IM}{IB} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(B, (AB'N)) = 2d(C, (AB'N)) = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

Ta có: $\cos \widehat{ABN} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$. Đặt $BB' = x$, áp dụng công thức thể tích khối chóp tam giác khi biết ba cạnh chung đỉnh và ba góc tại đỉnh đó. Ta được:

$$V_{B.AB'N} = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} \cdot x \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0^2} = \frac{x\sqrt{2}}{9}.$$

Ta có:

$$AB' = \sqrt{x^2 + x + 1}, BN = \frac{4}{3} \Rightarrow NB' = \sqrt{x^2 + \frac{16}{9}}, AN = \sqrt{AB^2 + BN^2 - 2AB \cdot BN \cdot \cos \widehat{ABN}} = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

$$\cos \widehat{B'AN} = \frac{x^2 + x + 1 + \frac{13}{9} - \left(x^2 + \frac{16}{9}\right)}{2\sqrt{13(x^2 + x + 1)}} = \frac{3x + 2}{2\sqrt{13(x^2 + x + 1)}} \Rightarrow \sin \widehat{B'AN} = \sqrt{1 - \frac{(3x + 2)^2}{52(x^2 + x + 1)}}.$$

$$S_{AB'N} = \frac{\sqrt{13(x^2 + x + 1)}}{6} \cdot \sqrt{1 - \frac{(3x + 2)^2}{52(x^2 + x + 1)}} = \sqrt{\frac{43x^2 + 40x + 48}{12}}.$$

$$\text{Do đó: } d(B, (ANB')) = \frac{3V_{B.ANB'}}{S_{ANB'}} = \frac{\frac{x\sqrt{2}}{3}}{\frac{\sqrt{43x^2 + 40x + 48}}{12}} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \Leftrightarrow x = 4 (x > 0).$$

$$\text{Vậy } V_{B.ANB'} = \frac{4\sqrt{2}}{9} \text{ và } V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{B'.ABC} = 3\left(\frac{3}{2}V_{B.ANB'}\right) = \frac{9}{2} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{9} = 2\sqrt{2}.$$

Câu 44: (Đặng Thành Nam Đề 9) Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V , đáy là tam giác cân, $AB = AC$. Gọi E là trung điểm cạnh AB và F là hình chiếu vuông góc của E lên BC . Mặt phẳng $(C'EF)$ chia khối lăng trụ đã cho thành hai khối đa diện. Tính thể tích khối đa diện chứa đỉnh A .

A. $\frac{47}{72}V$.

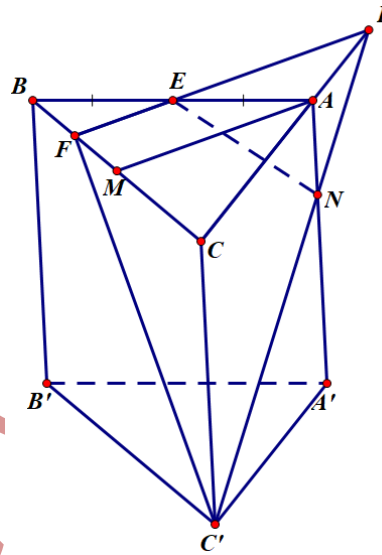
B. $\frac{25}{72}V$.

C. $\frac{29}{72}V$.

D. $\frac{43}{72}V$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của BC , vì $\triangle ABC$ cân tại A nên $AM \perp BC$. Lại có $EF \perp BC \Rightarrow EF \parallel AM$.

$\triangle ABC$ có E là trung điểm của AB , $EF \parallel AM \Rightarrow F$ là trung điểm của $BM \Rightarrow EF$ là đường trung bình của $\triangle BAM$.

Kéo dài FE cắt tia CA tại I . Nối $C'I$ cắt $A'A$ tại N . Khi đó $(C'EF)$ cắt lăng trụ theo thiết diện là tứ giác $EFC'N$.

Gọi thể tích khối đa diện chứa đỉnh A là V_1 .

$$\text{Ta có: } AM \parallel FI \Rightarrow \frac{AM}{FI} = \frac{CM}{CF} = \frac{2}{3}, \text{ mà } AM = 2EF \Rightarrow \frac{EF}{FI} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{IE}{IF} = \frac{2}{3} \quad (1).$$

$$\text{Lại có: } \frac{IA}{IC} = \frac{FM}{FC} = \frac{1}{3} \quad (2); \quad \frac{IN}{IC'} = \frac{IA}{IC} \quad (\text{do } AN \parallel CC') \text{ nên } \frac{IN}{IC'} = \frac{1}{3} \quad (3).$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) suy ra } \frac{V_{I.EAN}}{V_{I.FCC'}} = \frac{IE}{IF} \cdot \frac{IA}{IC} \cdot \frac{IN}{IC'} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}.$$

$$\text{Do đó } \frac{V_1}{V_{I.FCC'}} = 1 - \frac{2}{27} = \frac{25}{27} \quad (4).$$

$$\text{Dễ thấy } \frac{IC}{AC} = \frac{3}{2} \text{ và } \frac{S_{FCC'}}{S_{BCC'B'}} = \frac{3}{8}, \text{ do đó}$$

$$\frac{V_{I.FCC'}}{V_{A.BCC'B'}} = \frac{\frac{1}{3}d(I, (FCC')) \cdot S_{FCC'}}{\frac{1}{3}d(A, (BCC'B')) \cdot S_{BCC'B'}} = \frac{IC}{AC} \cdot \frac{S_{FCC'}}{S_{BCC'B'}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{16} \quad (5).$$

$$\text{Lại có } \frac{V_{A.BCC'B'}}{V} = 1 - \frac{V_{A.A'B'C'}}{V} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad (6).$$

$$\text{Từ (4), (5) và (6), ta suy ra } \frac{V_1}{V} = \frac{25}{27} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{2}{3} = \frac{25}{72} \Rightarrow V_1 = \frac{25}{72} V.$$

Chọn B

Câu 45: Cho hình lăng trụ có tất cả các cạnh đều bằng a , đáy là lục giác đều, góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy là 60° . Tính thể tích khối lăng trụ

A. $V = \frac{27}{8} a^3$.

B. $V = \frac{\sqrt{3}}{4} a^3$.

C. $V = \frac{3}{2} a^3$.

D. $\frac{9}{4} a^3$.

Lời giải**Chọn D.**

Ta có $ABCDEF$ là lục giác đều nên góc ở đỉnh bằng 120° .

ABC là tam giác cân tại B , DEF là tam giác cân tại E .

$$S_{ABC} = S_{DEF} = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B}$$

$$= \sqrt{a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = a\sqrt{3}$$

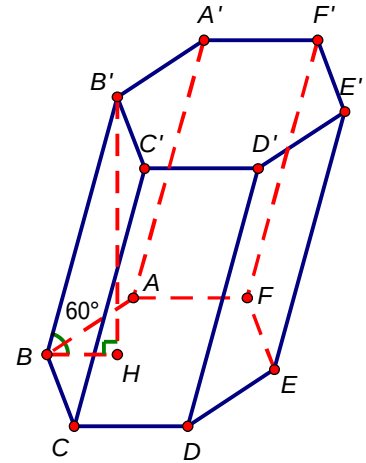
$$S_{ACDF} = AC \cdot AF = a\sqrt{3} \cdot a = a^2 \sqrt{3}$$

$$S_{ABCDEF} = S_{ABC} + S_{ACDF} + S_{DEF} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + a^2 \sqrt{3} + \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$\widehat{B' BH} = 60^\circ \Rightarrow B'H = BB' \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$V = B'H \cdot S_{ABCDEF} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{9}{4} a^3$$

Suy ra



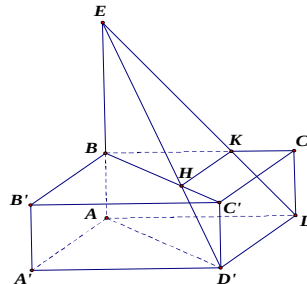
Câu 46: (**Cổ Loa Hà Nội**) Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng V . Điểm E thỏa mãn $\overline{AE} = 3\overline{AB}$. Thể tích của khối đa diện là **phần chung** của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và khối tứ diện $EADD'$ bằng

A. $\frac{4V}{27}$.

B. $\frac{V}{2}$.

C. $\frac{19V}{54}$.

D. $\frac{25V}{54}$.

**Lời giải**

Chọn C

Cách 1: Gọi h là chiều cao của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ kẻ từ điểm B , khi đó:

$$V_{BAD'D} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{AD'D} = \frac{1}{6} \cdot h \cdot S_{AA'D'D} = \frac{1}{6} V.$$

Từ giả thiết ta thấy chiều cao của hình chóp $E.AD'D$ là $3h$ nên $V_{E.AD'D} = \frac{1}{3} \cdot 3h \cdot S_{AD'D} = \frac{1}{2} V.$

Gọi $H = BC' \cap ED'$, theo định lý 3 giao tuyến suy ra $(ED'D) \cap (BB'C'C) = HK$ trong đó $HK // CC'$ với $K = BC \cap ED$.

Theo định lý ta - lét, ta được:

$$\frac{EH}{ED'} = \frac{EB}{EA} = \frac{2}{3} \text{ và } \frac{EK}{ED} = \frac{EB}{EA} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Do đó } \frac{V_{EBHK}}{V_{EAD'D}} = \frac{EB}{EA} \cdot \frac{EH}{ED'} \cdot \frac{EK}{ED} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}.$$

$$\text{Khi đó thể tích khối chóp } EBHK \text{ là: } V_{EBHK} = \frac{8}{27} V_{EAD'D} = \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{2} V = \frac{4}{27} V.$$

Thể tích phần chung của khối chóp $ABCD.A'B'C'D'$ và khối tứ diện $EADD'$ là:

$$V_{EAD'D} - V_{EBHK} = \frac{1}{2} V - \frac{4}{27} V = \frac{19}{54} V.$$

Cách 2: Gọi h là chiều cao của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ kẻ từ điểm B và diện tích của đáy $S_{AA'D'D} = S$. Theo giả thiết $V = S \cdot h$.

Gọi $H = BC' \cap ED'$, theo định lý 3 giao tuyến suy ra $(ED'D) \cap (BB'C'C) = HK$ trong đó $HK // CC'$ với $K = BC \cap ED$. Theo định lý ta - lét, ta được:

$$\frac{EH}{ED'} = \frac{EB}{EA} = \frac{2}{3} \text{ và } \frac{EK}{ED} = \frac{EB}{EA} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Khi đó, } S_{AD'D} = \frac{1}{2} S \text{ và } \frac{S_{BHK}}{S_{BC'C}} = \frac{BH}{BC'} \cdot \frac{BK}{BC} = \frac{4}{9} \Rightarrow S_{BHK} = \frac{4}{9} S_{BC'C} = \frac{2}{9} S.$$

Diện tích phần chung của hình chóp $E.ADD'$ với hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là hình chóp cắt $BHK.ADD'$.

Theo công thức thể tích khối chóp cắt, ta được:

$$V_{BHK.ADD'} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(S_{BHK} + S_{AD'D} + \sqrt{S_{BHK} \cdot S_{AD'D}} \right) = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(\frac{2}{9} S + \frac{1}{2} S + \sqrt{\frac{2}{9} S \cdot \frac{1}{2} S} \right) = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \frac{19}{18} S = \frac{19}{54} V.$$

Câu 47: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên bằng 1.; đáy $ABCD$ là một hình chữ nhật có các cạnh $BA = \sqrt{3}, AD = \sqrt{7}$; các mặt bên $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ hợp với mặt đáy các góc theo thứ tự $45^\circ; 60^\circ$. Thể tích khối hộp là:

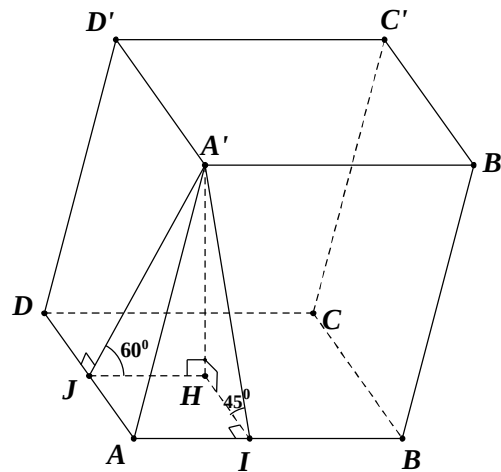
A. 4 (đvdt)

B. 3 (đvdt)

C. 2 (đvdt)

D. 6 (đvdt)

Lời giải



Dựng $A'H \perp (ABCD)$ và $A'I \perp AB, A'J \perp AD \Rightarrow HI \perp AB, HJ \perp AD$.

Ta có $\widehat{A'IH} = 45^\circ$; $\widehat{A'JH} = 60^\circ$.

Đặt $A'H = h$.

Tam giác $HA'J$ vuông có $\widehat{A'JH} = 60^\circ$ nên là nửa tam giác đều có cạnh $A'J$, đường cao $A'H, HJ$ là nửa cạnh

$$\Rightarrow A'J = \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{2h\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'J^2 = AA'^2 - A'H^2 = 1 - \frac{12h^2}{9} = \frac{9-12h^2}{9}$$

$$\Rightarrow AJ = \frac{\sqrt{9-12h^2}}{3} \text{ với } 0 < h < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Tam giác $HA'I$ vuông cân tại $H \Rightarrow IH = A'H = h$
 $A'IHJ$ là hình chữ nhật.

$$AJ = IH \Leftrightarrow \frac{\sqrt{9-12h^2}}{3} = h \Leftrightarrow 9-12h^2 = 9h^2 \Leftrightarrow h = \frac{3}{\sqrt{21}}$$

$$\text{Thể tích khối hộp } ABCD.A'B'C'D': V = S_{ABCD} \cdot A'H = \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \frac{3}{\sqrt{21}} = 3 \text{ (đvdt)}$$

Chọn B.

Câu 48: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bên bằng a ; đáy là hình thoi, diện tích của hai mặt chéo là S_1 và S_2 ; góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mặt chéo là α . Tính thể tích V của khối hộp đã cho.

A. $V = \frac{S_1 S_2 \cos \alpha}{a}$

B. $V = \frac{S_1 S_2 \cos \alpha}{3a}$

C. $V = \frac{S_1 S_2 \cos \alpha}{4a}$

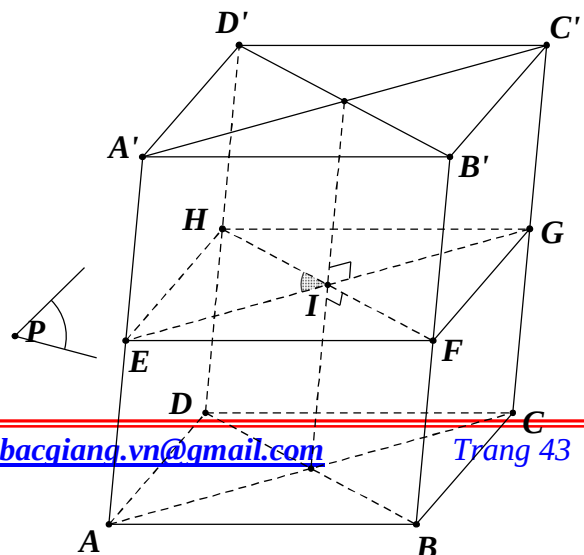
D. $V = \frac{S_1 S_2 \cos \alpha}{2a}$

Lời giải

Gọi O và O' theo thứ tự là tâm của hai mặt đáy $ABCD, A'B'C'D'$.

Hai mặt chéo $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$ có giao tuyến là OO' , có diện tích theo thứ tự S_1, S_2 .

Dựng mặt phẳng (P) vuông góc với OO' tại I , cắt các cạnh bên AA', BB', CC', DD'



theo thứ tự tại E, F, G, H ($(P) \perp$ các cạnh bên).

Ta có: $EG, HF \perp OO'$ tại $I \Rightarrow \widehat{EIH} = \alpha$ là góc giữa hai mặt phẳng chéo ($ACC'A'$) và ($BDD'B'$).

- $EFGH$ là một thiết diện thẳng của hình hộp và là một hình bình hành.

Do đó, ta có thể tích V của hình hộp là:

$$V = S_{EFGH} \cdot AA' = \frac{1}{2} \cdot EG \cdot HF \cdot AA' \cdot \sin \alpha$$

$$\text{Ta lại có: } S_1 = S_{ACC'A'} = EG \cdot AA' \Leftrightarrow EG = \frac{S_1}{a}; \quad S_2 = S_{BDD'B'} = HF \cdot BB' \Leftrightarrow HF = \frac{S_2}{a}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2} \cdot \frac{S_1}{a} \cdot \frac{S_2}{a} \cdot a \cdot \sin \alpha = \frac{S_1 S_2 \cos \alpha}{2a}.$$

Chọn D.

Câu 49: (Hậu Lộc Thanh Hóa) Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD . Góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối tứ diện $ACB'D'$.

A. $\frac{a^3}{2}$.

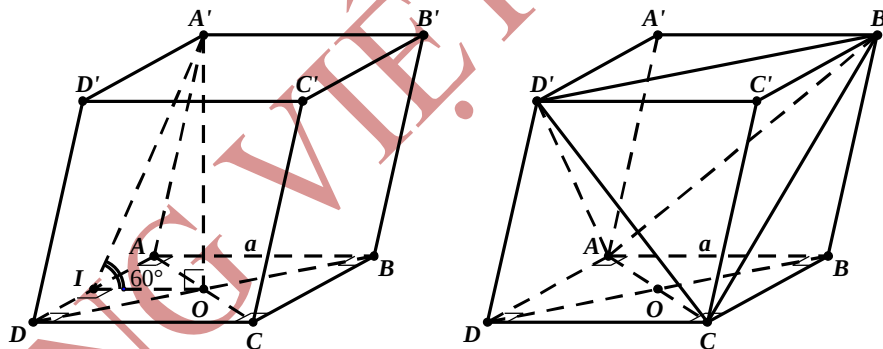
B. $\frac{a^3}{6}$.

C. $\frac{a^3}{3}$.

D. $\frac{3a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O = AC \cap BD$ và I là trung điểm của AD .

Ta có $(ADD'A') \cap (ABCD) = AD$, $OI \perp AD$ và $A'O \perp (ABCD)$ nên góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(ABCD)$ là $\widehat{A'IO} = 60^\circ$.

Tam giác $A'IO$ vuông tại O nên $A'O = IO \tan \widehat{A'IO} = \frac{a}{2} \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = AB \cdot AD \cdot A'O = a \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{2}$.

Dễ thấy $V_{CC'B'D'} = V_{B'ABC} = V_{AA'B'D'} = V_{D'ACD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC \cdot A'O = \frac{1}{6} \cdot a\sqrt{3} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{4}$.

Vậy thể tích khối tứ diện $ACB'D'$ là

$$V_{ACB'D'} = V - V_{CC'B'D'} - V_{B'ABC} - V_{AA'B'D'} - V_{D'ACD} = V - 4V_{D'ACD} = \frac{3a^3}{2} - 4 \cdot \frac{a^3}{4} = \frac{a^3}{2}.$$

Câu 50: (PHÂN TÍCH BL_PT ĐỀ ĐH VINHL3 -2019..) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng V . Gọi M, N, P, Q, E, F lần lượt là tâm các hình bình hành

$ABCD, A'B'C'D', ABB'A', BCC'B', CDD'C', DAA'D'$. Thể tích khối đa diện có các đỉnh M, P, Q, E, F, N bằng

A. $\frac{V}{4}$.

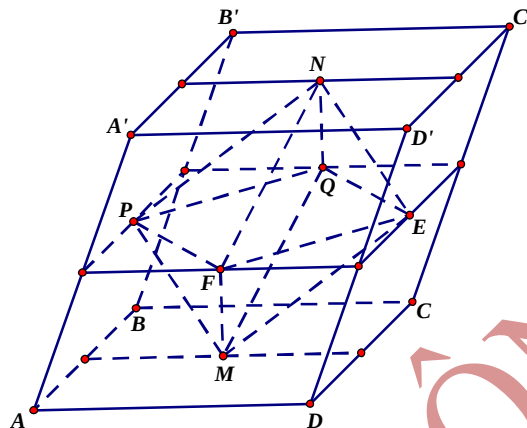
B. $\frac{V}{2}$.

C. $\frac{V}{6}$.

D. $\frac{V}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi V_1 là thể tích khối đa diện có các đỉnh M, P, Q, E, F, N .

Gọi S, h lần lượt là diện tích đáy và chiều cao của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

$$\text{Ta có } S_{PQEF} = \frac{1}{2} PE \cdot QF \cdot \sin(\angle PEQ) = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin(\angle ABC) = \frac{S}{2}.$$

$$(\text{Hoặc cách khác } S_{PQEF} = S - 4 \cdot \frac{S}{8} = \frac{S}{2})$$

$$\text{Suy ra } V_1 = \frac{1}{3} S_{PQEF} (d(M, (PQEF)) + d(N, (PQEF))) = \frac{1}{3} \frac{S}{2} h = \frac{V}{6}.$$

Phân tích:

+ Kiến thức trọng tâm của bài toán là công thức tính thể tích hình lăng trụ, hình chóp, diện tích hình bình hành và khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

+ Sử dụng quan hệ song song để tính tỷ số khoảng cách, tỷ số diện tích.

Câu 51: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bên bằng a và các góc $A'AB, BDA, A'AD$ đều bằng α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$). Tính thể tích V của khối hộp.

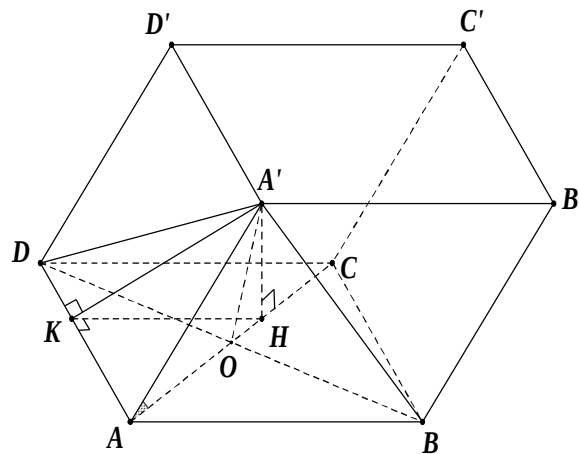
A. $V = a^3 \sin 2\alpha \sqrt{\cos^2 \frac{a}{2} - \cos^2 \alpha} \arcsin \theta$

B. $V = 2a^3 \sin \alpha \sqrt{\cos^2 \frac{a}{2} - \cos^2 \alpha}$

C. $V = 2a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{a}{2} - \cos^2 \alpha}$

D. Đáp số khác.

Lời giải



Dựng $A'H \perp AC; A'K \perp AD \Rightarrow \Delta A'BD$ cân tại $A' \Rightarrow A'O \perp BD$

Ta có $\begin{cases} A'O \perp BD \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (A'AC) \Rightarrow BD \perp AH$
 $\Rightarrow AH \perp (ABCD) \Rightarrow HK \perp AD$

Đặt $\widehat{A'AO} = \beta$. $\Delta HAA'$ vuông tại $H \Rightarrow \cos \beta = \frac{AH}{AA'}$

$ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AC$ là phân giác góc $\widehat{BAD} = \alpha$, ΔKAH vuông tại K

$$\Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{AK}{AH} \Rightarrow \cos \beta \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{AH}{AA'} \cdot \frac{AK}{AH} = \frac{AK}{AA'} = \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{\cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow A'H = AA' \cdot \sin \beta = a \cdot \sin \beta \Rightarrow A'H = a \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \alpha}$$

Do đó ta có: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'H = a^2 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \alpha}$

$$= 2a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{a}{2} - \cos^2 \alpha}.$$

Chọn C.

DẠNG 3: TỈ LỆ THỂ TÍCH

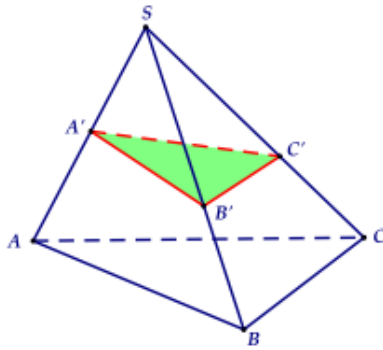
A- LÝ THUYẾT CHUNG

1. Hai khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ và $S.B_1B_2...B_m$ có chung đỉnh S và hai mặt đáy cùng nằm trên một mặt

phẳng, ta có: $\frac{V_{S.A_1A_2...A_n}}{V_{S.B_1B_2...B_m}} = \frac{S_{A_1A_2...A_n}}{S_{B_1B_2...B_m}}$

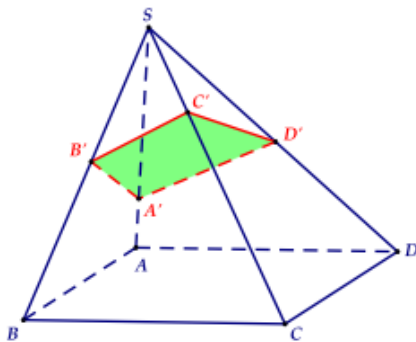
2. Hai khối chóp tam giác $S.ABC$ có $A' \in SA, B' \in SB, C' \in SC$ ta có: $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$

Hình chóp tam giác



$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

Hình chóp tứ giác có đáy là hình bình hành



$$\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd} = \frac{\text{Tổng}}{4 \text{ Tích}}$$

Trong đó: $a = \frac{SA}{SA'}$; $b = \frac{SB}{SB'}$; $c = \frac{SC}{SC'}$; $d = \frac{SD}{SD'}$;
 A', B', C', D' đồng phẳng.

□ Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và $\frac{SM}{SA} = x, \frac{SN}{SB} = y, \frac{SP}{SC} = z$. Mặt phẳng (MNP) cắt SD tại Q thì ta có đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{t}$ với $t = \frac{SQ}{SD}$ và $V_{S.MNPQ} = \frac{1}{4}xyz t \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) V$.

3. Kiến thức cần nhớ đối với khối lăng trụ tam giác và khối hộp.

□ $V_{A'.ABC} = \frac{V}{3}, V_{A'.BCC'B'} = \frac{2V}{3}.$

□ $V_{A'.ABD} = \frac{V}{6}, V_{BDA'C'} = \frac{V}{3}.$

4. Một số công thức nhanh cho các trường hợp hay gặp

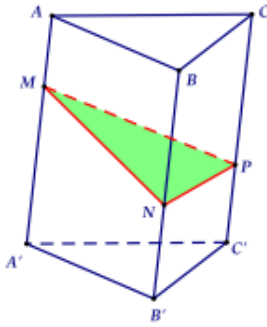
□ Tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH có $\frac{BH}{BC} = \left(\frac{AB}{BC} \right)^2, \frac{CH}{CB} = \left(\frac{AC}{BC} \right)^2.$

□ Mặt phẳng (α) song song với mặt đáy của khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ cắt SA_k tại điểm M_k thỏa mãn

$\frac{SM_k}{SA_k} = p$, ta có $\frac{V_{S.M_1M_2...M_n}}{V_{S.A_1A_2...A_n}} = p^3.$

□ Hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\frac{AM}{AA'} = x, \frac{BN}{BB'} = y, \frac{CP}{CC'} = z$ có $V_{ABC.MNP} = \frac{x+y+z}{3}V$.

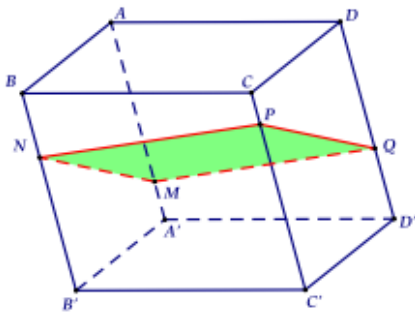
Hình lăng trụ tam giác



$$\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3} \left(\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} \right)$$

□ Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $\frac{AM}{AA'} = x, \frac{BN}{BB'} = y, \frac{CP}{CC'} = z$. Mặt phẳng (MNP) cắt DD' tại Q thì ta có đẳng thức $x+z = y+t$ với $t = \frac{DQ}{DD'}$ và $V_{ABCD.MNPQ} = \frac{x+y+z+t}{4}V$.

Hình hộp



$$\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{4} \left(\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} + \frac{DQ}{DD'} \right)$$

$$\text{hay } \frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{2} \left(\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} \right)$$

M, N, P, Q đồng phẳng.

□ Định lí Meneleus cho 3 điểm thẳng hàng $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PA} = 1$ với MNP là một đường thẳng cắt ba đường thẳng AB, BC, CA lần lượt tại M, N, P .

B – BÀI TẬP

TỈ LỆ KHỐI CHÓP

Câu 1: (TTHT Lần 4) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V . Gọi M là trung điểm của SB . P là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SP = 2DP$. Mặt phẳng (AMP) cắt cạnh SC tại N . Tính thể tích của khối đa diện $ABCDMNP$ theo V

A. $V_{ABCDMNP} = \frac{23}{30}V$.

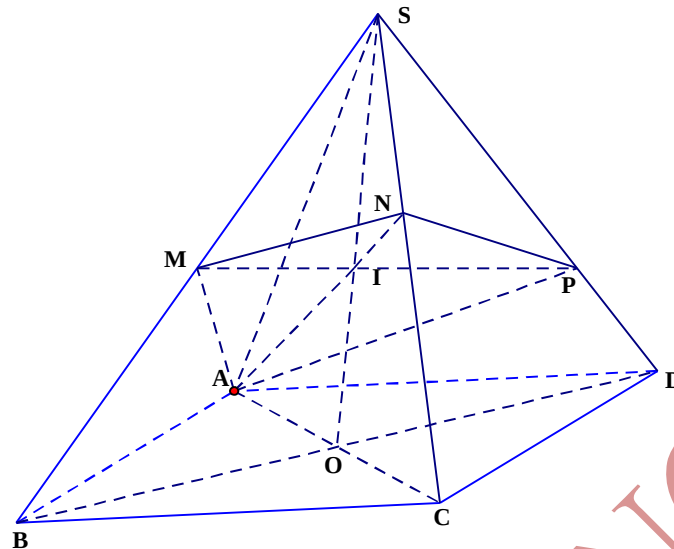
B. $V_{ABCDMNP} = \frac{19}{30}V$.

C. $V_{ABCDMNP} = \frac{2}{5}V$.

D. $V_{ABCDMNP} = \frac{7}{30}V$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O = AC \cap BD$, $I = MP \cap SO$, $N = AI \cap SC$ Khi đó

$$V_{ABCDMNP} = V_{S.ABCD} - V_{S.AMNP}$$

Đặt $a = \frac{SA}{SA} = 1$, $b = \frac{SB}{SM} = 2$, $c = \frac{SC}{SN}$, $d = \frac{SD}{SP} = \frac{3}{2}$ ta có

$$a + c = b + d \Rightarrow c = \frac{5}{2}.$$

$$\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a + b + c + d}{4abcd} = \frac{1 + 2 + \frac{5}{2} + \frac{3}{2}}{4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{7}{30}$$

$$\Rightarrow V_{ABCDMNP} = V_{S.ABCD} - V_{S.AMNP} = V - \frac{7}{30}V = \frac{23}{30}V.$$

Câu 2: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = \sqrt{3}a$, $AD = a$, SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Mặt phẳng (α) qua A vuông góc với SC cắt SB , SC , SD lần lượt tại M , N , P .

Tính thể tích khối chóp $S.AMNP$.

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{40}$.

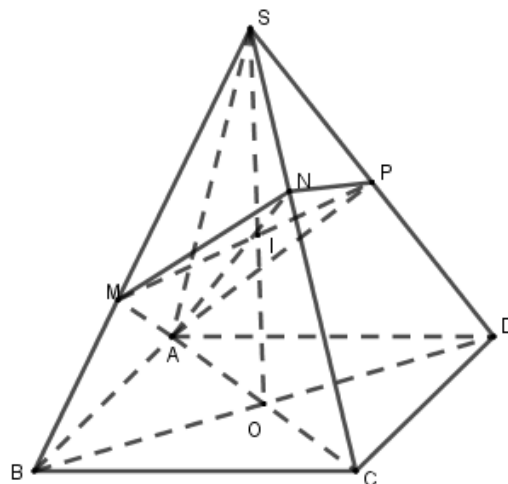
B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{40}$.

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{10}$.

D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{30}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $SC \perp (\alpha) \Rightarrow SC \perp AM, SC \perp AN, SC \perp AP$.

Mặt khác $CB \perp (SAB) \Rightarrow AM \perp CB \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SB$. Tương tự ta có $AP \perp SD$.

Thể tích khối chóp ban đầu là $V = \frac{1}{3} \sqrt{3} a^2 \cdot a = \frac{\sqrt{3} a^3}{3}$.

Tính các tỉ số $x = \frac{SA}{SA} = 1, y = \frac{SM}{SB} = \left(\frac{SA}{SB}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2 + 3a^2} = \frac{1}{4},$

$z = \frac{SN}{SC} = \left(\frac{SA}{SC}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2 + 3a^2 + a^2} = \frac{1}{5}, t = \frac{SP}{SD} = \left(\frac{SA}{SD}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2 + a^2} = \frac{1}{2}.$

Vậy $V' = \frac{xyzt}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) V = \frac{3}{40} V = \frac{\sqrt{3} a^3}{40}.$

Câu 3: Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích V và đáy là hình bình hành. Điểm S' thỏa mãn $\overrightarrow{SS'} = k\overrightarrow{DC} (k > 0)$. Biết thể tích phần chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$ là $\frac{7}{25}V$.

Tìm k .

A. $k = 9$.

B. $k = 6$.

C. $k = 11$.

D. $k = 4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $AB \parallel CD \parallel SS'$ nên $B' = S'A \cap SB, C' = S'D \cap SC$.

Theo Thales ta cũng có

$$\frac{B'S}{B'B} = \frac{C'S}{C'C} = \frac{S'S}{DC} = k \Rightarrow \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \frac{k}{k+1}, t = \frac{SD}{SD} = 1.$$

$$\text{Do đó } V_{S.ADC'B'} = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k}{k+1} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{k}{k+1}} + \frac{1}{\frac{k}{k+1}} \right) V = \frac{k^2(2k+1)}{2k(k+1)^2} V.$$

$$\text{Vậy thể tích phần chung là } V' = V - V_{S.ADC'B'} = \left(1 - \frac{k^2(2k+1)}{2k(k+1)^2} \right) V = \frac{7}{25} V \Leftrightarrow k = 4 (k > 0).$$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Một mặt phẳng (P) song song với mặt đáy (ABC) cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P . Tính diện tích tam giác MNP biết (P) chia khối chóp đã cho thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau.

A. $S_{\Delta MNP} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{8}.$

B. $S_{\Delta MNP} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{16}.$

C. $S_{\Delta MNP} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}.$

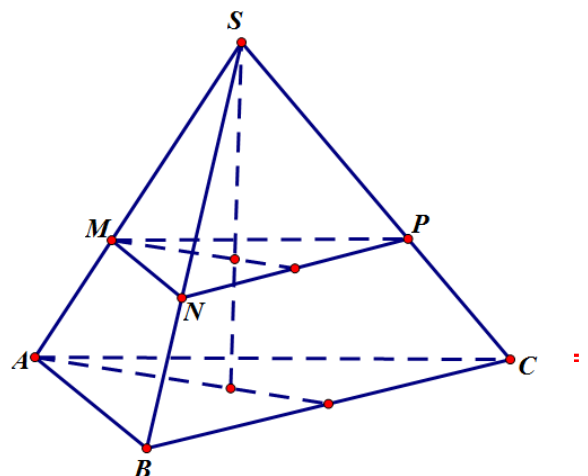
D. $S_{\Delta MNP} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4\sqrt{4}}.$

Lời giải

Chọn D

$$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} = \left(\frac{SM}{SA} \right)^3 \quad (1)$$

$$\text{Theo bài ra: } \frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{2} \quad (2)$$



Từ (1), (2) ta có $\left(\frac{SM}{SA}\right)^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{SM}{SA} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Lại có: $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{\frac{1}{3}d(S, (MNP)).S_{\Delta MNP}}{\frac{1}{3}d(S, (ABC)).S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2}$ (3)

Mà $\frac{d(S, (MNP))}{d(S, (ABC))} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (4)

Từ (3), (4) ta có được $\frac{S_{\Delta MNP}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \Rightarrow S_{\Delta MNP} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot \sqrt[3]{4}}$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = b$ và cạnh bên $SA = c$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là một điểm trên cạnh SA sao cho $AM = x (0 < x < c)$. Tìm x để mặt phẳng (MBC) chia khối chóp thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau.

A. $x = \frac{(3 - \sqrt{2})c}{2}$.

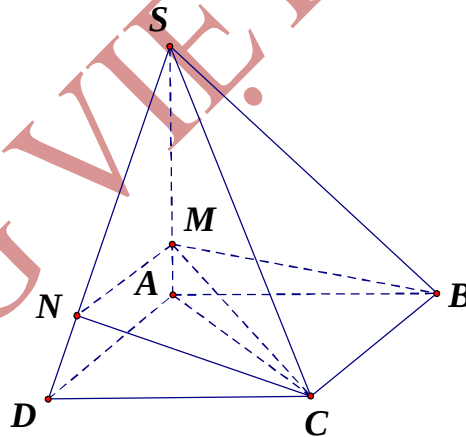
B. $x = \frac{(2 - \sqrt{3})ab}{2c}$.

C. $x = \frac{(3 - \sqrt{5})c}{2}$.

D. $x = \frac{(\sqrt{5} - 1)ab}{2c}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SD} = \frac{c-x}{c}$

Vì vậy $\frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} = \frac{c-x}{c} \Rightarrow V_{S.MBC} = \frac{c-x}{2c} V_{S.ABCD}$

Và $\frac{V_{SMNC}}{V_{SADC}} = \frac{SM \cdot SN}{SA \cdot SD} = \frac{(c-x)^2}{c^2} \Rightarrow V_{S.MNC} = \frac{(c-x)^2}{2c^2} V_{S.ABCD}$

Vậy $V_{SMNC} = \left(\frac{(c-x)^2}{2c^2} + \frac{c-x}{c} \right) V_{S.ABCD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} \cdot \frac{(c-x)^2 + c^2 - cx}{c^2}$

Từ giả thiết ta có $\frac{(c-x)^2 + c^2 - cx}{c^2} = 1 \Leftrightarrow c^2 - 3cx + x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{(3 - \sqrt{5})c}{2}$.

Câu 6: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB // CD$ và $CD = 4AB$. Gọi M là 1 điểm trên cạnh SA sao cho $0 < AM < SA$. Tìm tỉ số $\frac{SM}{SA}$ sao cho mặt phẳng (CDM) chia khối chóp đã cho thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau:

- A. $\frac{SM}{SA} = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$. B. $\frac{SM}{SA} = \frac{-4 + \sqrt{26}}{2}$. C. $\frac{SM}{SA} = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$. D. $\frac{SM}{SA} = \frac{-3 + \sqrt{23}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } x = \frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB}, 0 < x < 1.$$

$$\frac{V_{SADC}}{V_{SABC}} = \frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = \frac{AD}{AB} = 4$$

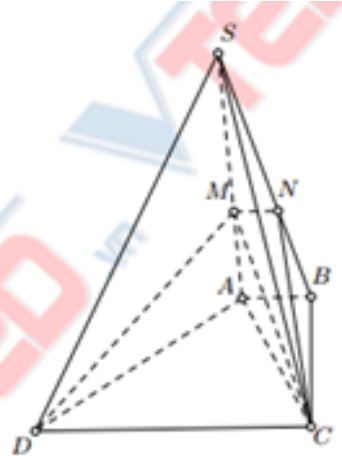
$$\Rightarrow V_{SADC} = \frac{4}{5} V_{SABDC}, V_{SABC} = \frac{1}{5} V_{SABDC}$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{SMCD}}{V_{SACD}} = \frac{SM}{SA} \Rightarrow V_{SMCD} = \frac{4x}{5} V_{SABDC}$$

$$\frac{V_{SMNC}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} = x^2 \Rightarrow V_{SMNC} = \frac{x^2}{5} V_{SABDC}$$

$$\text{Vậy } V_{SMNCD} = \left(\frac{4x}{5} + \frac{x^2}{5} \right) V_{SABDC} = \frac{V_{SABDC}}{2}$$

$$\text{Suy ra } \frac{4x}{5} + \frac{x^2}{5} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-4 + \sqrt{26}}{2}.$$



Câu 7: Cho điểm M trên cạnh SA , điểm N trên cạnh SB của hình chóp tam giác $S.ABC$ có thể tích bằng V sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{1}{3}$, $\frac{SN}{SB} = x$. Mặt phẳng (P) qua MN và song song với SC chia khối chóp $S.ABC$ thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau. Tính x .

- A. $x = \frac{4 - \sqrt{5}}{3}$ B. $x = \frac{8 - \sqrt{10}}{6}$ C. $x = \frac{4 - \sqrt{5}}{6}$ D. $x = \frac{8 - \sqrt{10}}{9}$

Lời giải

Chọn B

Trong (ABS) : $MN \cap AB = E$, trong

(SAC) : $MQ // SC$, $Q \in AC$, trong (ABC) : $EQ \cap BC = P$.

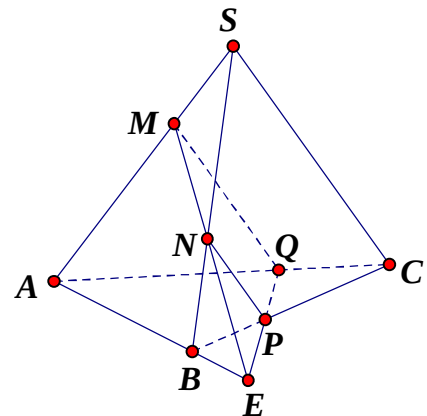
$$\text{Khi đó } NP // SC // MQ \Rightarrow \frac{SM}{SA} = \frac{CQ}{CA} = \frac{1}{3}, \frac{SN}{SB} = \frac{CP}{CB} = x.$$

Trong tam giác

$$SAB: \frac{NB}{NS} \cdot \frac{MS}{MA} \cdot \frac{EA}{EB} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{EA}{EB} = 1 \Rightarrow \frac{EA}{EB} = \frac{2x}{1-x} \Rightarrow \frac{AB}{EB} = \frac{3x-1}{1-x}$$

Ta có



$$\frac{V_{EAMQ}}{V_{S.ABC}} = \frac{AM}{AS} \cdot \frac{AQ}{AC} \cdot \frac{EA}{BA} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2x}{3x-1} = \frac{8x}{9(3x-1)} \Rightarrow V_{EAMQ} = \frac{8x}{9(3x-1)} V$$

$$\frac{V_{EBNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{BN}{BS} \cdot \frac{BP}{BC} \cdot \frac{EB}{AB} = (1-x)^2 \cdot \frac{1-x}{3x-1} = \frac{(1-x)^3}{3x-1} \Rightarrow V_{EBNP} = \frac{(1-x)^3}{3x-1} V$$

$$\Rightarrow V_{AMQBNP} = \frac{8x}{9(3x-1)} V - \frac{(1-x)^3}{3x-1} V = \frac{1}{2} V \Rightarrow \frac{8x}{9(3x-1)} - \frac{(1-x)^3}{3x-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{8-\sqrt{10}}{6}$$

Câu 8: (Hai Bà Trưng Huế Lần 1) Cho hình chóp tam giác $S.ABC$. Gọi M là trung điểm của SA , lấy điểm N trên cạnh SB sao cho $\frac{SN}{SB} = \frac{2}{3}$. Mặt phẳng (α) qua MN và song song với SC chia khối chóp thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện chứa đỉnh A , V_2 là thể tích của khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{16}$.

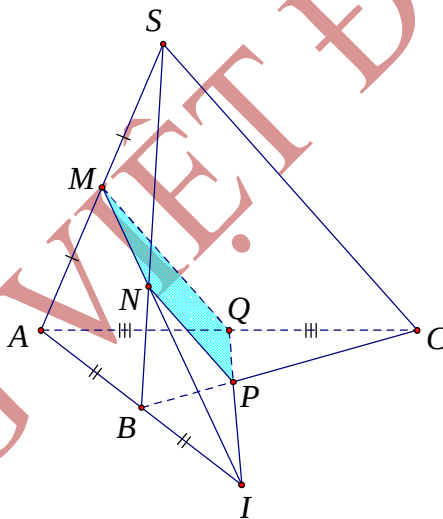
B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{18}$.

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{11}$.

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Kẻ $MQ \parallel SC, NP \parallel SC$ ta được $(MNPQ)$ chính là mặt phẳng (α) .

Ba mặt phẳng $(\alpha), (SAB), (ABC)$ giao nhau theo ba giao tuyến MN, AB, PQ đồng quy tại I .

Xét trong tam giác SAB có $\frac{MS}{MA} \cdot \frac{IA}{IB} \cdot \frac{NB}{NS} = 1 \Leftrightarrow 1 \cdot \frac{IA}{IB} \cdot \frac{1}{2} = 1$ nên B là trung điểm của IA .

Các tam giác SAI, IAC lần lượt có các trọng tâm là N, P .

Gọi thể tích khối chóp $IAMQ$ là V .

Ta có: $\frac{V_{IBNP}}{V_{IAMQ}} = \frac{IB}{IA} \cdot \frac{IN}{IM} \cdot \frac{IP}{IQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{7}{9} \Rightarrow V_1 = \frac{7}{9} V$ (1)

$\frac{V_{ABSC}}{V_{AIMQ}} = \frac{AB}{AI} \cdot \frac{AS}{AM} \cdot \frac{AC}{AQ} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2 \Rightarrow V_{S.ABC} = 2V \Rightarrow V_1 + V_2 = 2V$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $V_2 = 2V - \frac{7}{9} V = \frac{11}{9} V$

Từ đó suy ra $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{11}$.

Câu 9: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên hợp với đáy một góc 60° . Gọi M là điểm đối xứng của C qua D , N là trung điểm SC . Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần. Tỷ số thể tích giữa hai phần (phần lớn trên phần bé) bằng:

A. $\frac{7}{5}$.

B. $\frac{1}{7}$.

C. $\frac{7}{3}$.

D. $\frac{6}{5}$.

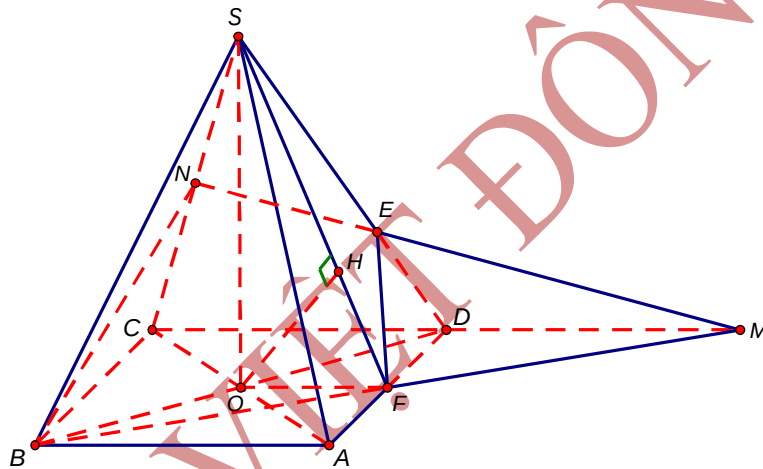
Lời giải

Chọn A

Giả sử các điểm như hình vẽ.

 $E = SD \cap MN \Rightarrow E$ là trọng tâm tam giác SCM , $DF \parallel BC \Rightarrow F$ là trung điểm BM .

$$\begin{aligned} \widehat{(SD, (ABCD))} &= \widehat{SDO} = 60^\circ \\ \text{Ta có: } \Rightarrow SO &= \frac{a\sqrt{6}}{2}, \quad SF = \sqrt{SO^2 + OF^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$



$$\Rightarrow d(O, (SAD)) = OH = h = \frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{7}}; S_{SAD} = \frac{1}{2} SF \cdot AD = \frac{a^2\sqrt{7}}{4}$$

$$\frac{V_{MEFD}}{V_{MNBC}} = \frac{ME}{MN} \cdot \frac{MF}{MB} \cdot \frac{MD}{MC} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow V_{BFDCNE} = \frac{5}{6} V_{MNBC} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot d(M, (SAD)) \cdot \frac{1}{2} S_{SBC} = \frac{5}{18} \cdot 4h \cdot \frac{1}{2} S_{SAD} = \frac{5a^3\sqrt{6}}{72}$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6} \Rightarrow V_{SABFEN} = V_{S.ABCD} - V_{BFDCNE} = \frac{7a^3\sqrt{6}}{36}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{V_{SABFEN}}{V_{BFDCNE}} = \frac{7}{5}$$

Câu 10: Cho khối tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a , Gọi M , N là trung điểm các cạnh AB , BC và E là điểm thuộc tia đối DB sao cho $\frac{BD}{BE} = k$. Tìm k để mặt phẳng (MNE) chia khối tứ

diện thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh B có thể tích là $\frac{11\sqrt{2}a^3}{294}$.

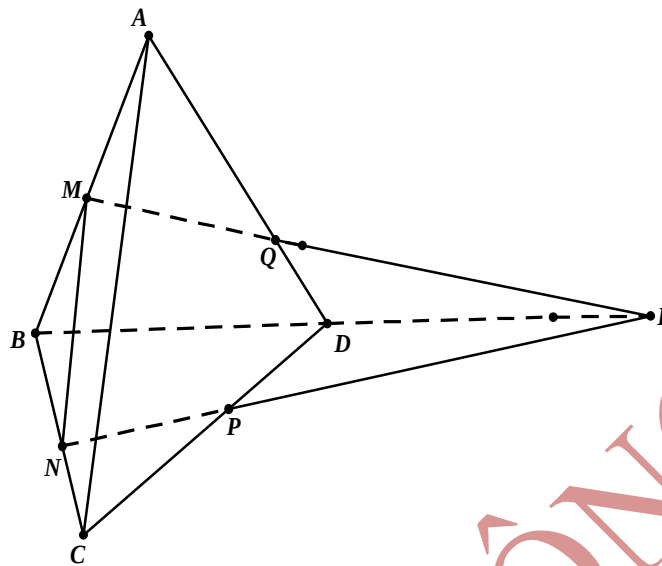
A. $k = \frac{6}{5}$.

B. $k = 6$.

C. $k = 4$.

D. $V = 5$.

Lời giải

Chọn C

Ta có diện tích khối tứ diện đều cạnh a bằng $V_0 = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$

$$\frac{V_{BMNE}}{V_{ABCD}} = \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BN}{BC} \cdot \frac{BE}{BD} \Rightarrow V_{BMNE} = \frac{1}{4} V_0$$

Theo ta let ta có:

$$\frac{EP}{EN} = \frac{EQ}{EM} = \frac{k-1}{k-1+\frac{1}{2}} = \frac{2(k-1)}{2k-1}$$

$$\Rightarrow V_{EDPQ} = \frac{EP}{EN} \cdot \frac{EQ}{EM} \cdot \frac{DE}{BE} V_{BMNE} = \frac{4(k-1)^2}{(2k-1)^2} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{4} V_0$$

$$\text{Do đó } V_{BMNPQD} = \frac{k}{4} V_0 - \frac{4(k-1)^2}{(2k-1)^2} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{4} V_0 = \frac{k}{4} V_0 \left(1 - \frac{4(k-1)^3}{k(2k-1)^2} \right)$$

$$V_{BMNPQD} = \frac{22}{49} V_0 \text{ hay } \frac{k}{4} V_0 = \frac{k}{4} V_0 \left(1 - \frac{4(k-1)^3}{k(2k-1)^2} \right) \Leftrightarrow k = 4$$

Câu 11: (Hình học không gian) Cho tứ diện $ABCD$ và M, N, P lần lượt thuộc BC, BD, AC sao cho $BC = 4BM, BD = 2BN, AC = 3AP$. Mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q . Tính tỷ số thể tích hai phần khối tứ diện $ABCD$ bị chia bởi mặt phẳng (MNP) .

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{7}{13}$

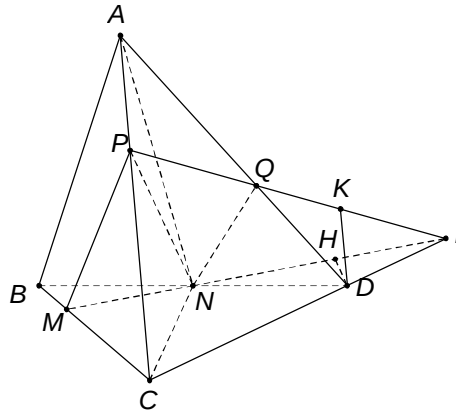
C. $\frac{5}{13}$

D. $\frac{1}{3}$

Lời giải

Gọi $I = MN \cap CD, Q = PI \cap AD$,

kẻ $DH \parallel BC (H \in IM), DK \parallel AC (K \in IP)$.



$$\triangle NMB = \triangle NDH \Rightarrow \frac{ID}{IC} = \frac{DH}{CM} = \frac{BM}{CM} = \frac{1}{3}.$$

$$\frac{IK}{IP} = \frac{DK}{CP} = \frac{ID}{IC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{DK}{2AP} = \frac{1}{3} \Rightarrow DK = \frac{2}{3}$$

$$\triangle APQ \sim \triangle DKQ.$$

$$\text{Suy ra } \Rightarrow \frac{AQ}{DQ} = \frac{AP}{DK} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AQ}{AD} = \frac{3}{5}$$

$$\text{Đặt } V = V_{ABCD}. \text{ Ta có: } \frac{V_{ANPQ}}{V_{ANCD}} = \frac{AP}{AC} \cdot \frac{AQ}{AD} = \frac{1}{5};$$

$$\frac{V_{ANCD}}{V_{ABCD}} = \frac{V_{DACN}}{V_{DABC}} = \frac{DN}{DB} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{ANPQ} = \frac{1}{10}V$$

$$\frac{V_{CDMP}}{V_{CDBA}} = \frac{CM}{CB} \cdot \frac{CP}{CA} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{CDMP} = \frac{1}{2}V$$

$$\Rightarrow V_{V.ABMP} = \frac{1}{2}V_{DABMP} = \frac{1}{2}V - V_{CDMP} = \frac{1}{4}V$$

$$\Rightarrow V_{ABMNQP} = V_{ANPQ} + V_{N.ABMP} = \frac{7}{20}V \Rightarrow \frac{V_{ABMNQP}}{V_{CDMNQP}} = \frac{7}{13}$$

Vậy mặt phẳng (MNP) chia khối chóp thành hai phần với tỉ lệ thể tích $\frac{7}{13}$.

Chọn B

Câu 12: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , góc giữa mặt bên và phẳng đáy là α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Mặt phẳng (P) qua AC và vuông góc với mặt phẳng (SAD) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Tỉ lệ thể tích hai khối đa diện là gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau:

A. 0,11

B. 0,13

C. 0,7

D. 0,9

Lời giải

$S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều $SO \perp (ABCD)$.

$$\begin{aligned} \text{Gọi } N \text{ là trung điểm } CD &\Rightarrow \begin{cases} CD \perp SN, CD \perp ON \\ (SCD) \cap (ABCD) = CD \end{cases} \\ &\Rightarrow \overline{((SCD), (ABCD))} = \widehat{SNO} \end{aligned}$$

Kẻ $CM \perp SD$. Ta có:

$$\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$$

$$\Rightarrow AC \perp SD \Rightarrow SD \perp (ACM) \Rightarrow (ACM) \perp (SAD)$$

nên mặt phẳng (P) là (ACM) .

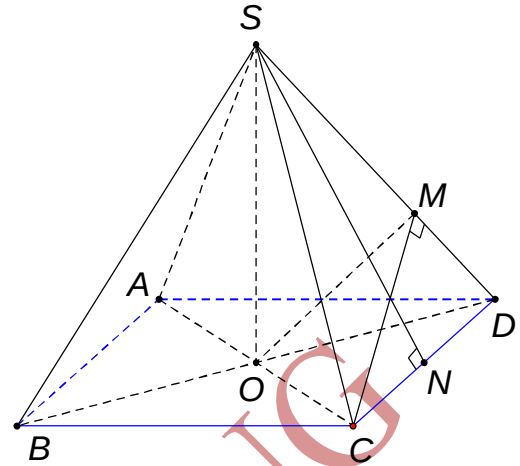
+ Xét tam giác SON vuông tại N có:

$$SN = \frac{ON}{\cos \widehat{SNO}} = \frac{3a}{2}.$$

$$SO = \sqrt{SN^2 - ON^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{2}.$$

+ Xét tam giác SOD vuông tại O có:

$$SD = \sqrt{SO^2 + OD^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$



$$\text{Ta có: } S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2} CM \cdot SD = \frac{1}{2} SN \cdot CD \Rightarrow CM = \frac{SN \cdot CD}{SD} = \frac{3a\sqrt{10}}{10}.$$

$$\text{Xét tam giác } MCD \text{ vuông tại } M \text{ có: } DM = \sqrt{CD^2 - CM^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{3a\sqrt{10}}{10}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{10}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{V_{M.ACD}}{V_{SABCD}} = \frac{V_{MACD}}{2V_{SACD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{DM}{DS} \cdot \frac{DA}{DA} \cdot \frac{DC}{DC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{a\sqrt{10}}{10}}{\frac{a\sqrt{10}}{2}} = \frac{1}{10} \Rightarrow V_{MACD} = \frac{1}{10} V_{SABCD}$$

Mặt phẳng (P) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối $M.ACD$ và

$$S.ABCM \Rightarrow V_{SABCD} = V_{MACD} + V_{SABCM} \Rightarrow V_{SABCM} = \frac{9}{10} V_{SABCD}$$

$$\text{Do đó: } \frac{V_{MACD}}{V_{SABCM}} = \frac{1}{9} \approx 0,11$$

Chọn A

Câu 13: Cho tứ diện $S.ABC$, M và N là các điểm thuộc các cạnh SA và SB sao cho $MA = 2SM$, $SN = 2NB$, (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SC . Kí hiệu (H_1) và (H_2) là các khối đa diện có được khi chia khối tứ diện $S.ABC$ bởi mặt phẳng (α) , trong đó, (H_1) chứa điểm S , (H_2) chứa điểm A ; V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của (H_1) và (H_2) . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{4}{5}$

B. $\frac{5}{4}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{4}{3}$

Lời giải

Kí hiệu V là thể tích khối tứ diện $SABC$.

Gọi P , Q lần lượt là giao điểm của (α) với các đường thẳng BC , AC .

Ta có $NP \parallel MQ \parallel SC$. Khi chia khối (H_1) bởi mặt phẳng (QNC) , ta được hai khối chóp $N.SMQC$ và $N.QPC$.

$$\text{Ta có: } \frac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}} = \frac{d(N, (SAC))}{d(B, (SAC))} \cdot \frac{S_{SMQC}}{S_{SAC}};$$

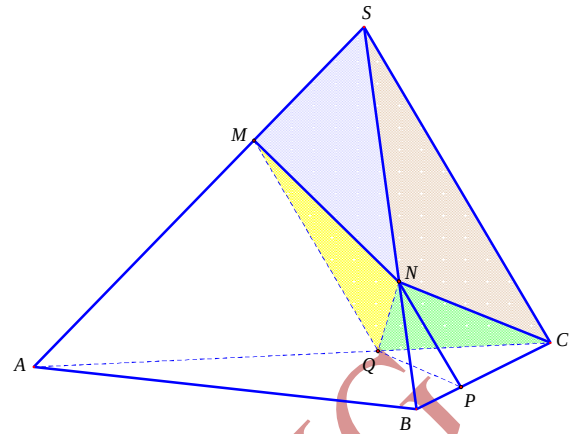
$$\frac{d(N, (SAC))}{d(B, (SAC))} = \frac{NS}{BS} = \frac{2}{3};$$

$$\frac{S_{AMQ}}{S_{ASC}} = \left(\frac{AM}{AS}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{S_{SMQC}}{S_{ASC}} = \frac{5}{9}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{9} = \frac{10}{27}$$

$$\frac{V_{N.QPC}}{V_{S.ABC}} = \frac{d(N, (QPC))}{d(S, (ABC))} \cdot \frac{S_{QPC}}{S_{ABC}} \\ = \frac{NB}{SB} \cdot \frac{CQ}{CA} \cdot \frac{CP}{CB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$$

$$\frac{V_1}{V} = \frac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}} + \frac{V_{N.QPC}}{V_{S.ABC}} = \frac{10}{27} + \frac{2}{27} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{V_1}{V_1 + V_2} = \frac{4}{9} \Rightarrow 5V_1 = 4V_2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{5}$$



Câu 14: (Sở Quảng NamT) Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 1, đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD và $AD = 3BC$. Gọi M là trung điểm của cạnh SA , N là điểm thuộc CD sao cho $ND = 3NC$. Mặt phẳng (BMN) cắt SD tại P . Thể tích khối chóp $AMBNP$ bằng:

A. $\frac{3}{8}$

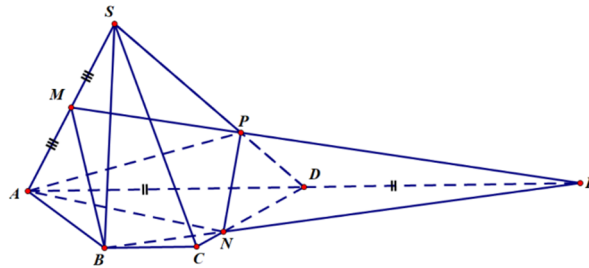
B. $\frac{5}{12}$

C. $\frac{5}{16}$

D. $\frac{9}{32}$

Lời giải

Chọn A



Gọi E là giao điểm của BN và AD . Đặt $V_1 = V_{AMBNP}$.

$$\text{Ta có: } BC \parallel AD \text{ nên } \frac{DE}{BC} = \frac{ND}{NC} = 3 \Rightarrow DE = 3BC = AD \Rightarrow$$

$$D \text{ là trung điểm của } AE \Rightarrow P \text{ là trọng tâm của tam giác } SAE \Rightarrow \frac{EP}{EM} = \frac{2}{3}, \frac{EN}{EB} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{E.DNP}}{V_{E.MAB}} = \frac{ED}{EA} \cdot \frac{EP}{EM} \cdot \frac{EN}{EB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Mặt khác, } V_{E.DNP} = \frac{1}{3} d_{(P, (DEN))} \cdot S_{DEN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} d_{(S, (ABCD))} \cdot S_{DNE} = \frac{1}{9} d_{(S, (ABCD))} \cdot S_{DNE}$$

$$S_{AND} = S_{DNE} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot d_{(N, AD)} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \frac{3}{4} h = \frac{3}{8} AD \cdot h \quad (h \text{ là đường cao của hình thang})$$

$$\text{Ta lại có: } S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} AD \cdot h = \frac{2}{3} AD \cdot h \Rightarrow AD \cdot h = \frac{3}{2} S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow S_{AND} = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{2} S_{ABCD} = \frac{9}{16} S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow V_{E,NDP} = \frac{1}{9} d_{(S,(ABCD))} \cdot \frac{9}{16} S_{ABCD} = \frac{3}{16} \Rightarrow V_{AENP} = \frac{3}{8};$$

$$V_{E,ABM} = 4 \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{4} \Rightarrow V_{A,BMPC} = \frac{3}{4} - \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

Câu 15: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Mặt phẳng (P) chứa cạnh BC cắt cạnh AD tại E. Biết góc giữa hai mặt phẳng (P) và (BCD) có số đo là α thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{5\sqrt{2}}{7}$. Gọi thể tích của hai tứ diện ABCE và tứ diện BCDE lần lượt là V_1 và V_2 . Tính tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{3}{8}$

B. $\frac{1}{8}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{5}{8}$

Lời giải

+) Gọi M là trung điểm BC.
 Khi đó $BC \perp (MAD)$ nên $(P) \perp (AMD)$;
 $(P) \cap (AMD) = ME$.
 Kẻ $AH \perp ME$ thì $AH \perp (BCE)$ (do $AH \subset (AMD)$)
 Kẻ $DK \perp ME$ nên $DK \perp (BCE)$ (do $DK \subset (AMD)$). Hiển nhiên AH song song DK
 Khi đó $\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_{A,BCE}}{V_{D,BCE}} = \frac{AH}{DK}$

+) Gọi β là góc giữa (P) và (ABC) ($0 < \beta < \frac{\pi}{2}$). Hiển nhiên $\widehat{DME} = \alpha$;

$$\widehat{AME} = \beta.$$

Vì AM = DM nên:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{AH}{DK} \Rightarrow \sin \beta = \frac{V_1}{V_2} \cdot \sin \alpha = t \cdot \sin \alpha \quad (1)$$

+) Trong tam giác OMA: $\cos(\alpha + \beta) = \frac{MO}{MA} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{3} \quad (2)$

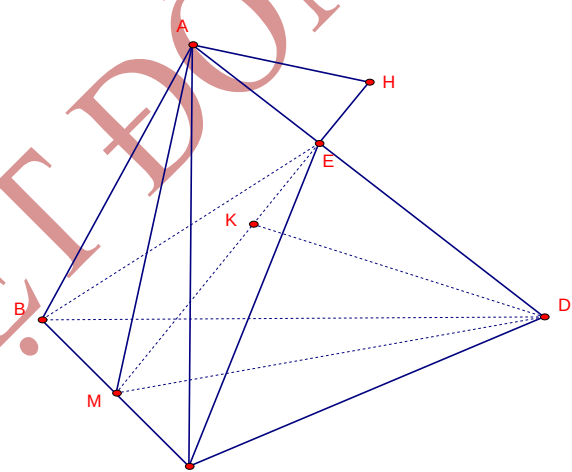
Từ (1) có: $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - t^2 \cdot \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - t^2 \cdot x}$; với $x = \sin^2 \alpha$.

Thay vào (2) ta có: $\sqrt{1 - t^2 x} \cdot \sqrt{1 - x} - t \cdot x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{(1 - t^2 x)(1 - x)} = t \cdot x + \frac{1}{3}$.

+) Giải phương trình có: $x = \frac{8}{(9t^2 + 6t + 9)}$.

Vì $\sin^2 \alpha = x \rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{x}{1-x} = \frac{8}{9t^2 + 6t + 9} \cdot \frac{9t^2 + 6t + 9}{9t^2 + 6t + 1} = \frac{8}{9t^2 + 6t + 1}$

Theo giả thiết suy ra $\frac{8}{9t^2 + 6t + 1} = \frac{50}{49} \Leftrightarrow 9t^2 + 6t + 1 = \frac{196}{25} \Leftrightarrow 9t^2 + 6t - \frac{171}{25} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{5} \\ t = \frac{-19}{15} \end{cases}$



$$\text{Vậy } \frac{V_{ABCE}}{V_{DBCE}} = \frac{3}{5}$$

Chọn C

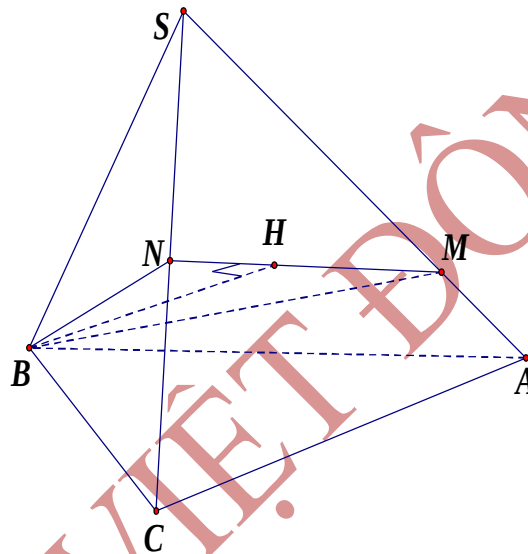
Câu 16: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = 6, SB = 2, SC = 4, AB = 2\sqrt{10}$ và $\angle SBC = 90^\circ, \angle ASC = 120^\circ$. Mặt phẳng (P) qua B và trung điểm N của SC và vuông góc với mặt phẳng (SAC) cắt cạnh SA tại M . Tính tỉ số thể tích $\frac{V_{S.MBN}}{V_{S.ABC}}$.

A. $\frac{2}{9}$.

B. $\frac{2}{5}$.

C. $\frac{1}{6}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải**Chọn C**

$$\text{Ta có: } \frac{V_{S.MBN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{2}k \text{ với } k = \frac{SM}{SA}.$$

Áp dụng định lý hàm số cosin ta có: $\angle ASB = 90^\circ; \angle BSC = 60^\circ; \angle ASC = 120^\circ$

$$\text{Đặt } \overrightarrow{SA} = \vec{a}; \overrightarrow{SB} = \vec{b}; \overrightarrow{SC} = \vec{c} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 4 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 0; \vec{b} \cdot \vec{c} = 4; \vec{a} \cdot \vec{c} = -12 \end{cases}$$

Vì $(BMN) \perp (SAC)$ nên kẻ $BH \perp MN, H \in MN \Rightarrow BH \perp (SAC)$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } \overrightarrow{BH} &= x \cdot \overrightarrow{BM} + (1-x) \cdot \overrightarrow{BN} = x(\overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SB}) + (1-x)(\overrightarrow{SN} - \overrightarrow{SB}) \\ &= x(k\vec{a} - \vec{b}) + (1-x)\left(\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b}\right) = kx\vec{a} - \vec{b} + \frac{1-x}{2}\vec{c}. \end{aligned}$$

$$\text{Lại có: } BH \perp (SAC) \Rightarrow \begin{cases} BH \perp SA \\ BH \perp SC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BH} \cdot \vec{a} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \vec{c} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \left(kx\vec{a} - \vec{b} + \frac{1-x}{2}\vec{c}\right) = 0 \\ \vec{c} \cdot \left(kx\vec{a} - \vec{b} + \frac{1-x}{2}\vec{c}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 36kx - 6(1-x) = 0 \\ -12kx - 4 + 8(1-x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \frac{V_{S.MBN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{2}k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Câu 17: (KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Điểm K thuộc đoạn SA . Biết mặt phẳng (MNK) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần, phần chứa đỉnh S có thể tích bằng $\frac{7}{13}$ lần phần còn lại. Tính tỉ số $t = \frac{KA}{KS}$.

A. $t = \frac{1}{2}$.

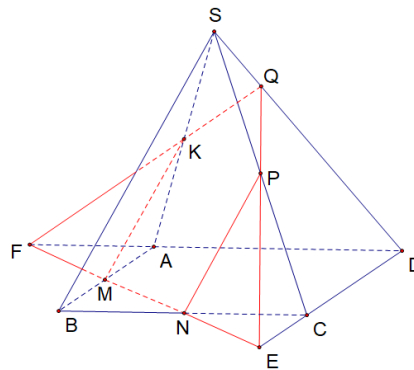
B. $t = \frac{3}{4}$.

C. $t = \frac{1}{3}$.

D. $t = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kéo dài MN cắt DA, DC lần lượt tại F, E .

Trong mặt phẳng (SAD) , gọi $FK \cap SD = Q$. Trong mặt phẳng (SCD) , gọi $QE \cap SC = P$.

Suy ra thiết diện là ngũ giác $MNPQK$ và $MN \parallel AC \parallel PK$.

Đặt $h = d(S, (ABCD))$

$$\frac{KA}{KS} = t \Rightarrow \frac{KA}{SA} = \frac{t}{t+1} \Rightarrow d(K, (ABCD)) = d(P, (ABCD)) = \frac{t}{t+1}h$$

$$\text{Ta có: } FA = BN = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \frac{FD}{FA} = 3.$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác SAD , suy ra

$$\frac{QS}{QD} \cdot \frac{FD}{FA} \cdot \frac{KA}{KS} = 1 \Leftrightarrow \frac{QS}{QD} \cdot 3 \cdot t = 1 \Rightarrow \frac{QS}{QD} = \frac{1}{3t} \Rightarrow \frac{QD}{SD} = \frac{3t}{3t+1} \Rightarrow d(Q, (ABCD)) = \frac{3t}{3t+1}h$$

$$\text{Mặt khác: } S_{FAM} = S_{NCE} = S_{BMN} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{8}S_{ABCD} \Rightarrow S_{DEF} = \frac{9}{8}S_{ABCD}$$

Suy ra thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S là

$$V = V_{QDEF} - V_{KAMF} - V_{PECN} = \frac{1}{3} \left(\frac{3t}{3t+1}h \cdot \frac{9}{8}S - \frac{t}{t+1} \cdot \frac{1}{8}S - \frac{t}{t+1} \cdot \frac{1}{8}S \right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{27t}{8(3t+1)} - \frac{2t}{8(t+1)} \right) \cdot h \cdot S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow V = \left(\frac{27t}{8(3t+1)} - \frac{2t}{8(t+1)} \right) V_{ABCD}$$

Phần thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S bằng $\frac{7}{13}$ phần còn lại suy ra thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S bằng $\frac{13}{20}$ thể tích khối chóp $S.ABCD$

$$\Rightarrow \frac{27t}{8(3t+1)} - \frac{2t}{8(t+1)} = \frac{13}{20} \Rightarrow t = \frac{2}{3}.$$

Câu 18: (Sở Đà Nẵng 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SD . Mặt phẳng (α) chứa MN và cắt các tia SB, SC lần lượt tại P và Q . Đặt $\frac{SP}{SB} = x$, V_1 là thể tích của khối chóp $S.MNQP$ và V là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tìm x để $V = 2V_1$.

A. $x = \frac{1}{2}$.

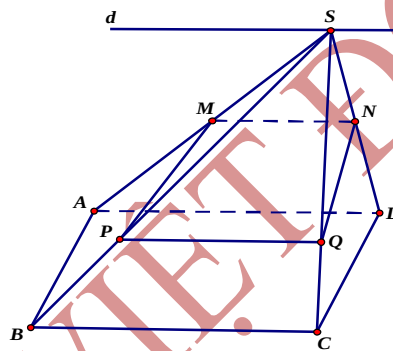
B. $x = \frac{-1 + \sqrt{33}}{4}$.

C. $x = \frac{-1 + \sqrt{41}}{4}$.

D. $x = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta chứng minh $PQ \parallel BC$.

Giải sử $(SBC) \cap (SAD) = d$ khi đó ta có:
$$\begin{cases} (SBC) \cap (SAD) = d \\ (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ (SAD) \cap (ABCD) = AD \\ BC \parallel AD \end{cases} \Rightarrow d \parallel BC, d \parallel AD.$$

M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SD nên ta có $MN \parallel AD, MN \parallel d$.

Ta lại có:
$$\begin{cases} (SBC) \cap (SAD) = d \\ (SBC) \cap (\alpha) = PQ \\ (SAD) \cap (\alpha) = MN \\ d \parallel MN \end{cases} \Rightarrow PQ \parallel MN \Rightarrow PQ \parallel BC.$$

Xét tam giác SBC có $PQ \parallel BC$, $\frac{SP}{SB} = x \Rightarrow \frac{SQ}{SC} = \frac{SP}{SB} = x$.

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V} &= \frac{V_{S.MNQP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.MNP} + V_{S.NQP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.MNP}}{2V_{S.ABD}} + \frac{V_{S.NQP}}{2V_{S.DCB}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SM \cdot SN \cdot SP}{SA \cdot SB \cdot SD} + \frac{1}{2} \cdot \frac{SN \cdot SQ \cdot SP}{SD \cdot SC \cdot SB} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot x = \frac{x + 2x^2}{8}. \end{aligned}$$

$$\text{Theo bài ra: } V = 2V_1 \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x+2x^2}{8} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{33}}{4} \\ x = \frac{-1-\sqrt{33}}{4} \end{cases}$$

$$\text{Mà } \frac{SP}{SB} = x \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x = \frac{-1+\sqrt{33}}{4}.$$

Cách 2

Sử dụng công thức tính nhanh tỉ lệ thể tích của khối chóp tứ giác như sau:

Cho chóp $S.ABCD$ và mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD của khối chóp tại các

điểm M, P, Q, N với $\frac{SQ}{SC} = \frac{SP}{SB} = x, \frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2}.$

$$\text{Thì ta có: } \frac{V_1}{V} = \frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{x \cdot x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + 2 + 2 \right) = \frac{x+2x^2}{8}.$$

$$\text{Theo bài ra: } V = 2V_1 \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x+2x^2}{8} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{33}}{4} \\ x = \frac{-1-\sqrt{33}}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Mà } \frac{SP}{SB} = x \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x = \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$$

Câu 19: (Đặng Thành Nam Đề 3) khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với hai đáy là AB và CD , $AB = 2CD$. Gọi E là một điểm trên cạnh SC . Mặt phẳng (ABE) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau. Tính tỉ số $\frac{SE}{SC}$.

A. $\frac{\sqrt{10}-2}{2}.$

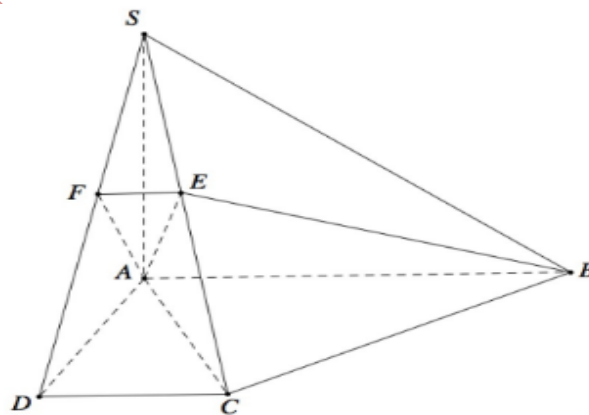
B. $\sqrt{6}-2.$

C. $\sqrt{2}-1.$

D. $\frac{\sqrt{26}-4}{2}.$

Lời giải

Chọn A



$$\text{Ta có: } \begin{cases} (ABE) \cap (SDC) = Ex \\ AB \parallel DC \end{cases} \Rightarrow Ex \parallel DC \parallel AB.$$

$$\text{Gọi } F = Ex \cap SD, \frac{SE}{SC} = x, (0 < x < 1) \Rightarrow \frac{SF}{SD} = \frac{SE}{SC} = x.$$

Do $ABCD$ là hình thang (đáy AB và CD) có $AB = 2CD$ nên

$$S_{\triangle ACB} = 2S_{\triangle ADC} \Rightarrow S_{\triangle ADC} = \frac{1}{3}S_{\square ABCD}; S_{\triangle ACB} = \frac{2}{3}S_{\square ABCD} \dots$$

Ta có:

$$\frac{V_{S.ACD}}{V_{S.ABCD}} = \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\square ABCD}} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.ACD} = \frac{1}{3}V_{S.ABCD} \quad (1)$$

$$\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.ABCD}} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\square ABCD}} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{2}{3}V_{S.ABCD} \quad (2).$$

$$\text{Lại có: } \frac{V_{S.AEF}}{V_{S.ACD}} = \frac{SE}{SC} \cdot \frac{SF}{SD} = x^2 \Rightarrow V_{S.AEF} = x^2 \cdot V_{S.ACD} = \frac{1}{3}x^2 \cdot V_{S.ABCD} \quad (\text{theo (1)})$$

$$\frac{V_{S.ABE}}{V_{S.ABC}} = \frac{SE}{SC} = x \Rightarrow V_{S.ABE} = x \cdot V_{S.ABC} = \frac{2}{3}x \cdot V_{S.ABCD} \quad (\text{theo (2)}).$$

Theo bài ra mặt phẳng (ABE) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện có thể tích bằng

$$\text{nhau nên } V_{S.ABEF} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD}$$

$$\Leftrightarrow V_{S.AEF} + V_{S.ABE} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x\right) \cdot V_{S.ABCD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{-2 - \sqrt{10}}{2} \end{cases} \cdot \text{Do } 0 < x < 1 \Rightarrow x = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2}.$$

Câu 20: (Hàm Rồng) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Điểm I thuộc đoạn SA . Biết mặt phẳng (MNI) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần, phần chứa đỉnh S có thể tích bằng $\frac{7}{13}$ lần phần còn lại.

Tính tỉ số $k = \frac{IA}{IS}$?

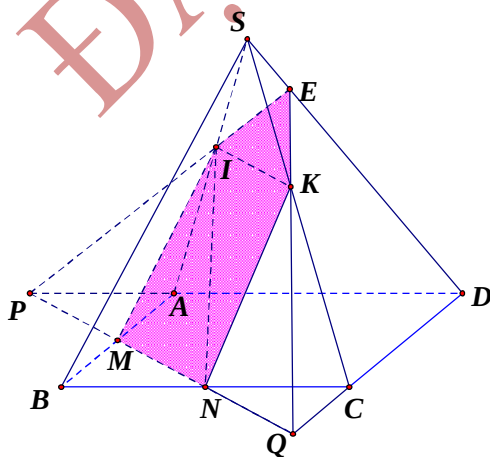
A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{3}{4}$.

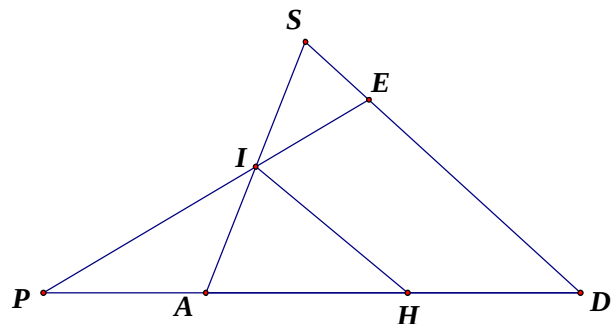
C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Hình 1



Hình 2

Mặt phẳng (MNI) cắt khối chóp theo thiết diện như hình 1. Đặt $V_{S.ABCD} = V$.

$$\text{Ta có } S_{\triangle APM} = S_{\triangle BMN} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{8} S_{ABCD} \Rightarrow \frac{S_{\triangle APM}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{8}.$$

$$\frac{d(I, (ABCD))}{d(S, (ABCD))} = \frac{IA}{SA} = \frac{k}{k+1}.$$

$$\Rightarrow \frac{V_{I.APM}}{V_{S.ABCD}} = \frac{S_{\triangle APM}}{S_{ABCD}} \cdot \frac{d(I, (ABCD))}{d(S, (ABCD))} = \frac{k}{8(k+1)} \Rightarrow V_{I.APM} = \frac{k}{8(k+1)} V.$$

Do $MN \parallel AC \Rightarrow IK \parallel AC \Rightarrow IK \parallel (ABCD) \Rightarrow d(I, (ABCD)) = d(K, (ABCD))$.

$$\text{Mà } S_{\triangle APM} = S_{\triangle NCQ} \Rightarrow V_{I.APM} = V_{K.NCQ} = \frac{k}{8(k+1)} V.$$

$$\text{Kẻ } IH \parallel SD \text{ (} H \in SD \text{) như hình 2. Ta có: } \frac{IH}{SD} = \frac{AH}{AD} = \frac{AI}{AS} = \frac{k}{k+1}.$$

$$\frac{IH}{ED} = \frac{PH}{PD} = \frac{PA}{PD} + \frac{AH}{PD} = \frac{PA}{PD} + \frac{2AH}{3AD} = \frac{1}{3} + \frac{2k}{3(k+1)} = \frac{3k+1}{3(k+1)}.$$

$$\Rightarrow \frac{ED}{SD} = \frac{IH}{SD} \cdot \frac{ID}{ED} = \frac{3k}{3k+1} \Rightarrow \frac{d(E, (ABCD))}{d(S, (ABCD))} = \frac{ED}{SD} = \frac{3k}{3k+1}.$$

$$\frac{S_{\triangle PQD}}{S_{ABCD}} = \frac{9}{8} \Rightarrow \frac{V_{E.PQD}}{V_{S.ABCD}} = \frac{27k}{24k+8} \Rightarrow V_{E.PQD} = \frac{27k}{24k+8} V.$$

$$V_{EIKAMNCQ} = \frac{13}{20} V \Leftrightarrow V_{E.PDC} - V_{I.APM} - V_{K.NCQ} = \frac{13}{20} V$$

$$\Leftrightarrow \frac{27k}{8(3k+1)} V - \frac{k}{8(k+1)} V - \frac{k}{8(k+1)} V = \frac{13}{20} V \Leftrightarrow \frac{27k}{2(3k+1)} - \frac{k}{k+1} = \frac{13}{5} \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}.$$

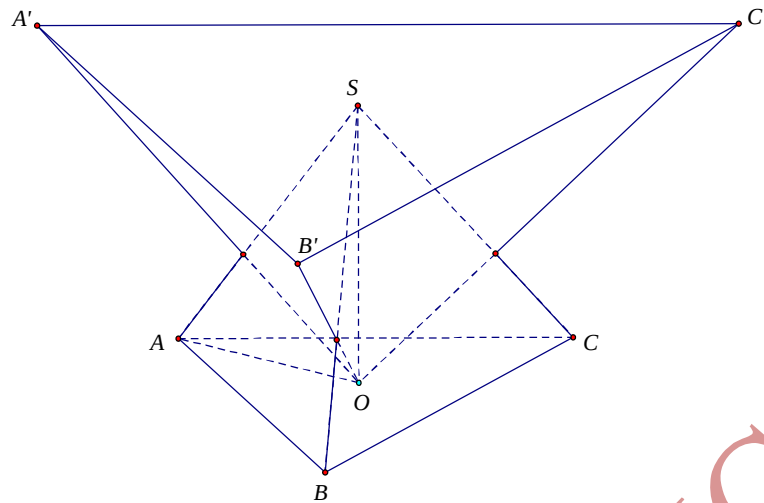
Câu 21: (Cụm 8 trường chuyên lần 1) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên tạo với đường cao một góc 30° , O là trọng tâm tam giác ABC . Một hình chóp tam giác đều thứ hai $O.A'B'C'$ có S là tâm của tam giác $A'B'C'$ và cạnh bên của hình chóp $O.A'B'C'$ tạo với đường cao một góc 60° (hai hình chóp có chung chiều cao) sao cho mỗi cạnh bên SA, SB, SC lần lượt cắt các cạnh bên OA', OB', OC' . Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối chóp $S.ABC$ và $O.A'B'C'$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp $S.ABC$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{9}{16}$.

B. $\frac{1}{4}$.

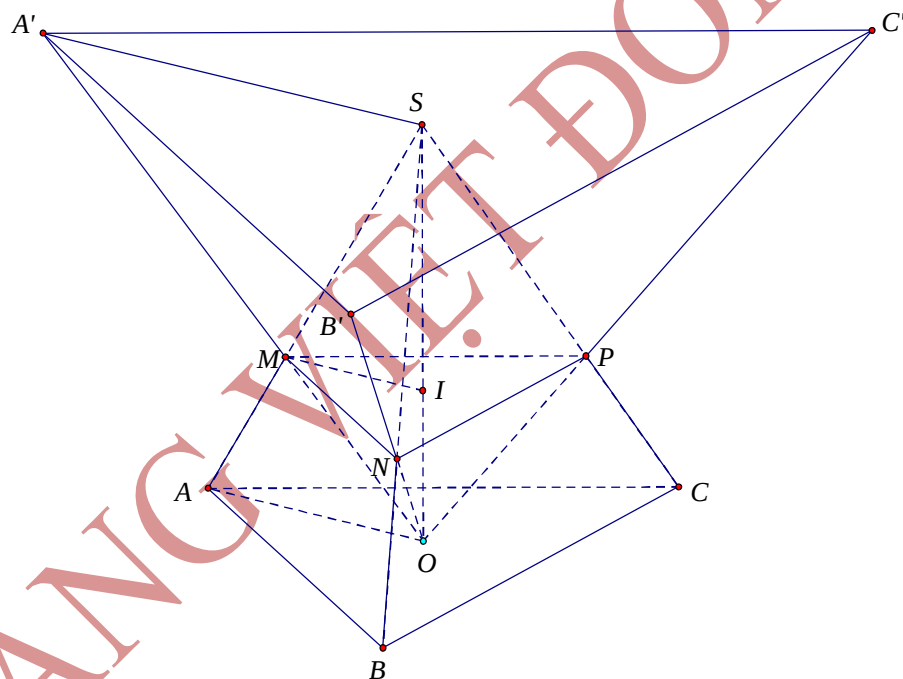
C. $\frac{27}{64}$.

D. $\frac{9}{64}$.



Lời giải

Chọn A



Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của mỗi cạnh bên SA, SB, SC tương ứng với các cạnh bên OA', OB', OC' . Phần chung của hai khối chóp $S.ABC$ và $O.A'B'C'$ là khối đa diện $SMNPO$. Từ giả thiết ta có $(ABC) \parallel (A'B'C')$ mà ta có $MN \parallel AB \parallel A'B', NP \parallel AC \parallel A'C'$ do đó $(ABC) \parallel (MNP), (A'B'C') \parallel (MNP)$ và ΔMNP đều.

Xét các tam giác vuông SMI và OMI ta có $SI = \frac{MI}{\tan 30^\circ} = MI\sqrt{3}, OI = \frac{MI}{\tan 60^\circ} = \frac{MI}{\sqrt{3}}$ suy ra

$$\frac{SI}{OI} = 3 \text{ suy ra } \frac{SI}{SO} = \frac{MN}{AB} = \frac{3}{4}, \frac{OI}{OS} = \frac{MN}{A'B'} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{A'B'}{AB} = 3 \text{ hay } \frac{V_{O.A'B'C'}}{V_2} = 3^2 = 9 \Rightarrow V_{O.A'B'C'} = 9V_2$$

$$\text{Do đó } \frac{V_{S.MNP}}{V_2} = \left(\frac{SI}{SO}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

$$\frac{V_{O.MNP}}{V_{O.A'B'C'}} = \left(\frac{OI}{OS}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} \Rightarrow \frac{V_{O.MNP}}{V_2} = \frac{9}{64}$$

$$\text{Từ đó } \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_{OMNP} + V_{SMNP}}{V_2} = \frac{27}{64} + \frac{9}{64} = \frac{9}{16}.$$

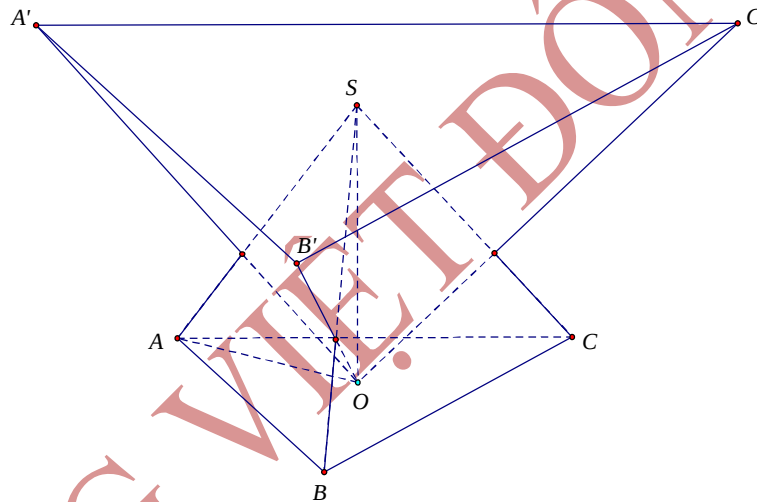
Câu 22: (Cụm 8 trường chuyên lần 1) 5 (Tổng quát câu 4) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, O là trọng tâm tam giác ABC . Một hình chóp tam giác đều thứ hai $O.A'B'C'$ có S là tâm của tam giác $A'B'C'$ và cạnh bên của hình chóp $O.A'B'C'$ và $A'B' = kAB$ (hai hình chóp có chung chiều cao) sao cho mỗi cạnh bên SA, SB, SC lần lượt cắt các cạnh bên OA', OB', OC' . Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối chóp $S.ABC$ và $O.A'B'C'$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp $S.ABC$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{k^3 + k^2}{(k+1)^3}.$

B. $\frac{k^3}{(k+1)^3}.$

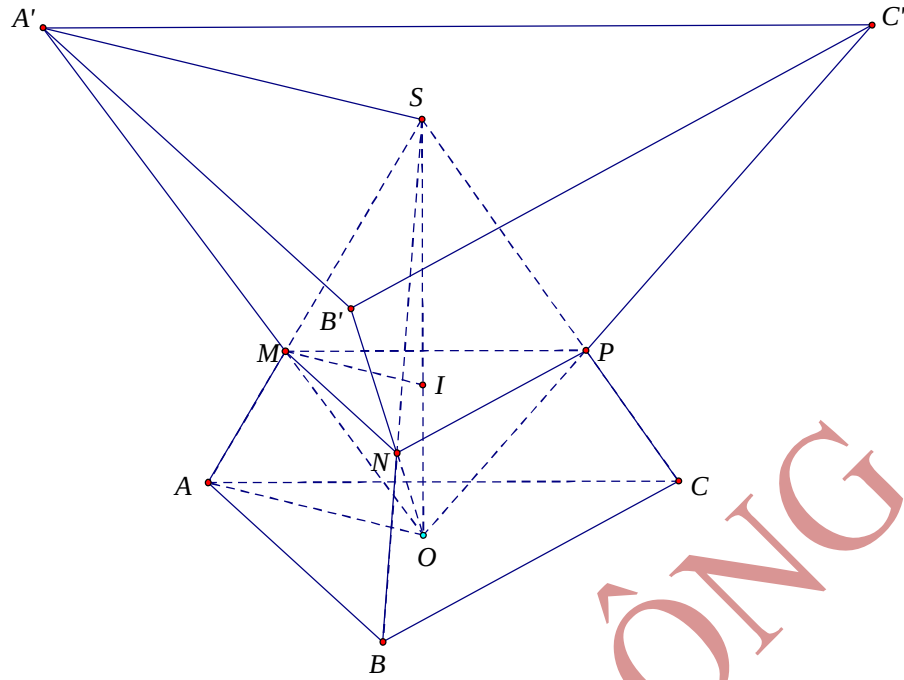
C. $\frac{1}{k+1}.$

D. $\frac{k}{k+1}.$



Lời giải

Chọn A



Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của mỗi cạnh bên SA, SB, SC tương ứng với các cạnh bên OA', OB', OC' . Phần chung của hai khối chóp $S.ABC$ và $O.A'B'C'$ là khối đa diện $SMNPO$. Từ giả thiết ta có $(ABC) \parallel (A'B'C')$ và $MN \parallel AB \parallel A'B', NP \parallel AC \parallel A'C'$ do đó $(ABC) \parallel (MNP), (A'B'C') \parallel (MNP)$ và ΔMNP đều.

$$\text{Suy ra } \frac{A'B'}{AB} = k \text{ hay } \frac{V_{O.A'B'C'}}{V_2} = k^2.$$

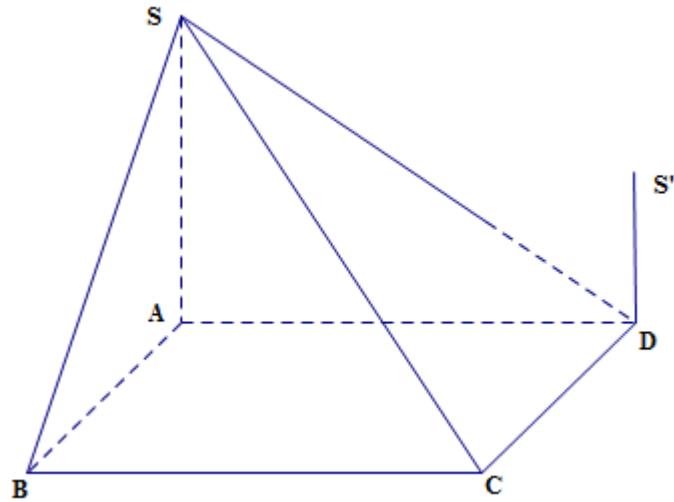
$$\text{Ta có } \frac{SI}{SO} = \frac{MN}{AB}, \frac{OS}{OI} = \frac{A'B'}{MN} \text{ suy ra } \frac{SI}{OI} = \frac{A'B'}{AB} = k \text{ từ đó } \frac{OI}{SO} = \frac{1}{k+1}, \frac{SI}{SO} = \frac{k}{k+1}.$$

$$\text{Do đó } \frac{V_{S.MNP}}{V_2} = \left(\frac{SI}{SO} \right)^3 = \left(\frac{k}{k+1} \right)^3 = \frac{k^3}{(k+1)^3}$$

$$\frac{V_{O.MNP}}{V_{O.A'B'C'}} = \left(\frac{OI}{OS} \right)^3 = \left(\frac{1}{k+1} \right)^3 \Rightarrow \frac{V_{O.MNP}}{V_2} = \frac{k^2}{(k+1)^3}$$

$$\text{Từ đó } \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_{OMNP} + V_{SMNP}}{V_2} = \frac{k^3 + k^2}{(k+1)^3}.$$

Câu 23: (Cụm 8 trường chuyên lần 1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại D lấy điểm S' thỏa mãn $S'D = \frac{1}{2}SA$ và S', S ở cùng phía đối với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng



A. $\frac{4}{9}$.

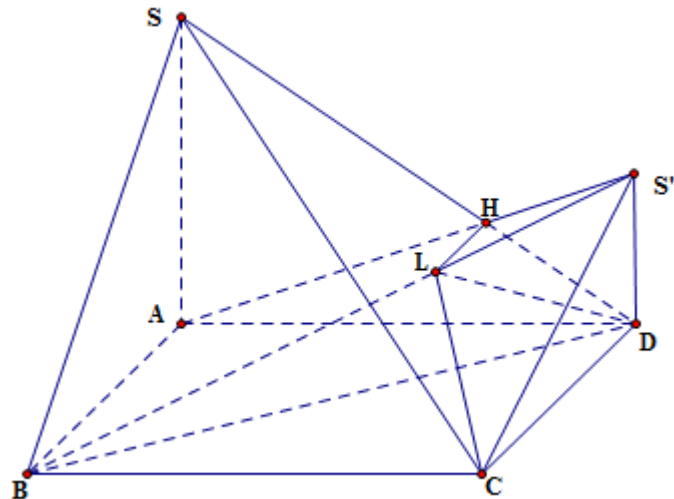
B. $\frac{7}{9}$.

C. $\frac{7}{18}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $V_2 = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD}$, $V_{S'.ABCD} = \frac{1}{3} S'D \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{2} V_2$.

Gọi $H = S'A \cap SD$, $L = S'B \cap (SCD)$ khi đó thể tích chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$ là thể tích khối $HLCDA$. Do $AB \parallel CD$ nên giao tuyến HL của hai mặt $(S'AB)$ và (SCD) phải song song với AB .

$$V_1 = V_{HLCDA} = V_{S'.ABCD} - V_{S'.HLCD}.$$

$$\frac{S'H}{HA} = \frac{S'D}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S'H}{S'A} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{V_{S'.HLD}}{V_{S'.ABD}} = \frac{S'H \cdot S'L}{SA \cdot SB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \Rightarrow V_{S'.HLD} = \frac{1}{9} V_{S'.ABD} = \frac{1}{18} V_{S'.ABCD}$$

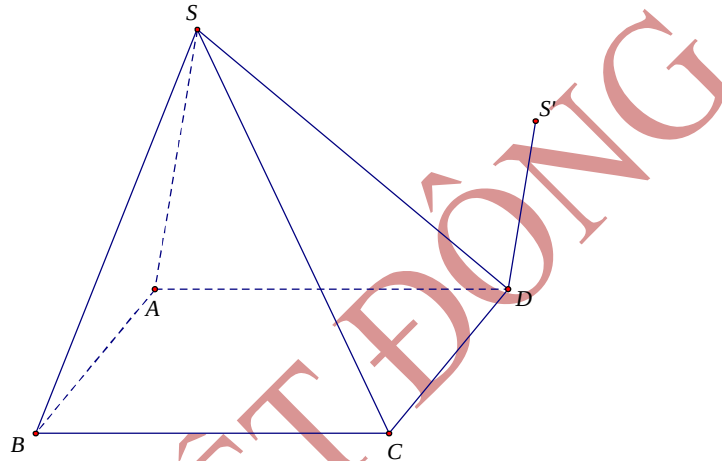
$$\frac{V_{S'.LCD}}{V_{S'.BCD}} = \frac{S'L}{S'B} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S'.LCD} = \frac{1}{3} V_{S'.BCD} = \frac{1}{6} V_{S'.ABCD}$$

$$V_{S'.HLCD} = V_{S'.HLD} + V_{S'.LCD} = \frac{1}{18} V_{S'.ABCD} + \frac{1}{6} V_{S'.ABCD} = \frac{2}{9} V_{S'.ABCD}$$

$$\Rightarrow V_1 = V_{S'.ABCD} - V_{S'.HLCD} = \frac{7}{9} V_{S'.ABCD} = \frac{7}{18} V_2$$

$$\text{Vậy } \frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{18}$$

Câu 24: (Cụm 8 trường chuyên lần 1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trên đường thẳng qua D và song song với SA lấy điểm S' thỏa mãn $\overline{S'D} = k\overline{SA}$ với $k > 0$. Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng



A. $\frac{2k^2 + k}{2(k+1)^2}$.

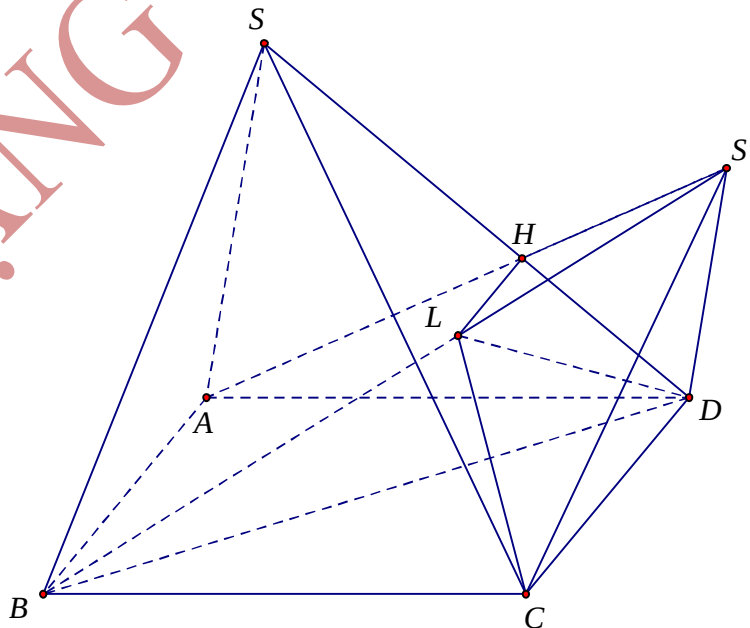
B. $\frac{3k+2}{2(k+1)^2}$.

C. $\frac{3k^2 + 2k}{2(k+1)^2}$.

D. $\frac{k}{k+1}$.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Ta có } \frac{V_{S'.ABCD}}{V_2} = \frac{S'D}{SA} = k.$$

Gọi $H = S'A \cap SD$, $L = S'B \cap (SCD)$ khi đó thể tích chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$ là thể tích khối $HLCDAB$. Do $AB // CD$ nên giao tuyến HL của hai mặt $(S'AB)$ và (SCD) phải song song với AB .

$$V_1 = V_{HLCDAB} = V_{S'.ABCD} - V_{S'.HLCD}.$$

$$\frac{S'H}{HA} = \frac{S'D}{SA} = k \Rightarrow \frac{S'H}{S'A} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow \frac{S'L}{S'B} = \frac{k}{k+1}$$

$$\frac{V_{S'.HLD}}{V_{S'.ABD}} = \frac{S'H.S'L}{SA.SB} = \frac{k^2}{(k+1)^2} \Rightarrow V_{S'.HLD} = \frac{k^2}{(k+1)^2} V_{S'.ABD} = \frac{k^2}{2(k+1)^2} V_{S'.ABCD}$$

$$\frac{V_{S'.LCD}}{V_{S'.BCD}} = \frac{S'L}{S'B} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow V_{S'.LCD} = \frac{k}{k+1} V_{S'.BCD} = \frac{k}{2(k+1)} V_{S'.ABCD}$$

$$V_{S'.HLCD} = V_{S'.HLD} + V_{S'.LCD} = \frac{k^2}{2(k+1)^2} V_{S'.ABCD} + \frac{k}{2(k+1)} V_{S'.ABCD} = \frac{2k^2 + k}{2(k+1)^2} V_{S'.ABCD}$$

$$\Rightarrow V_1 = V_{S'.ABCD} - V_{S'.HLCD} = \frac{3k+2}{2(k+1)^2} V_{S'.ABCD} = \frac{3k^2 + 2k}{2(k+1)^2} V_2$$

$$\text{Vậy } \frac{V_1}{V_2} = \frac{3k^2 + 2k}{2(k+1)^2}.$$

Câu 25: (THTT số 3) Cho khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ (với $n \geq 3$ là số nguyên dương). Gọi B_j là trung điểm của đoạn thẳng SA_j ($j = \overline{1, n}$). Kí hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ và $S.B_1B_2...B_n$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. 2.

B. 4.

C. 8.

D. 2^n .

Lời giải

Chọn C

Khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ có diện tích mặt đáy $A_1A_2...A_n$: β_1 , độ dài đường cao h_1

Khối chóp $S.B_1B_2...B_n$ có diện tích mặt đáy $B_1B_2...B_n$: β_2 , độ dài đường cao h_2

Do mặt phẳng $(B_1B_2...B_n) // (A_1A_2...A_n)$ cắt khối chóp theo thiết diện $B_1B_2...B_n$ nên ta có 2 đáy là 2 đa giác đồng dạng: $A_1A_2...A_n$ & $B_1B_2...B_n$.

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V_2} &= \frac{\frac{1}{3}\beta_1 h_1}{\frac{1}{3}\beta_2 h_2} = \frac{\frac{1}{2}A_1A_2.A_1A_3.\sin(B_2) + \frac{1}{2}A_1A_3.A_1A_4.\sin(B_3) + \dots + \frac{1}{2}A_1A_{n-1}.A_1A_n.\sin(B_1)}{\frac{1}{2}B_1B_2.B_1B_3.\sin(B_2) + \frac{1}{2}B_1B_3.B_1B_4.\sin(B_3) + \dots + \frac{1}{2}B_1B_{n-1}.B_1B_n.\sin(B_1)} \cdot \frac{h_1}{h_2} \\ &= \frac{2B_1B_2.2B_1B_3.\sin(B_2) + 2B_1B_3.2B_1B_4.\sin(B_3) + \dots + 2B_1B_{n-1}.2B_1B_n.\sin(B_1)}{B_1B_2.B_2B_3.\sin(B_2) + B_2B_3.B_3B_4.\sin(B_3) + \dots + B_nB_1.B_1B_2.\sin(B_1)} \cdot \frac{2h_1}{h_2} \\ &= 4.2 = 8. \end{aligned}$$

Câu 26: Khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V , khối tứ diện $A_1B_1C_1D_1$ có thể tích V_1 , các đỉnh A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC . Khối tứ diện $A_2B_2C_2D_2$ có thể tích V_2 , các đỉnh A_2, B_2, C_2, D_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác $B_1C_1D_1, C_1D_1A_1, D_1A_1B_1, A_1B_1C_1$. Cứ tiếp tục như thế ta được khối tứ diện $A_nB_nC_nD_n$ có thể tích V_n , các đỉnh

A_n, B_n, C_n, D_n lần lượt là trọng tâm của các tam giác $B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}, C_{n-1}D_{n-1}A_{n-1}, D_{n-1}A_{n-1}B_{n-1}, A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Tính $S = V_1 + V_2 + \dots + V_{2018}$?

A. $S = \frac{(3^{2018} - 1)V}{2 \cdot 3^{2018}}$.

B. $S = \frac{(27^{2019} - 1)V}{26 \cdot 27^{2019}}$.

C. $S = \frac{(27^{2018} - 1)V}{26 \cdot 27^{2018}}$.

D. $S = \frac{(3^{2019} - 1)V}{2 \cdot 3^{2019}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$V_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 V = \frac{1}{27} V$$

$$V_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 V_1 = \frac{1}{27} V_1 = \left(\frac{1}{27}\right)^2 V$$

...

$$V_{2018} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 V_{2017} = \left(\frac{1}{27}\right)^{2018} V$$

$$\Rightarrow S = V \left[\frac{1}{27} + \left(\frac{1}{27}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{27}\right)^{2018} \right] = V \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{27}\right)^{2018}}{1 - \frac{1}{27}} = \frac{(27^{2018} - 1)V}{26 \cdot 27^{2018}}$$

TỈ LỆ KHỐI LĂNG TRỤ

Câu 27: (KINH MÔN II LẦN 3 NĂM 2019) Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy bằng a , chiều cao bằng $2a$. Mặt phẳng (P) qua B' và vuông góc với $A'C$ chia lăng trụ thành hai khối. Biết thể tích của hai khối là V_1 và V_2 với $V_1 < V_2$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{1}{11}$.

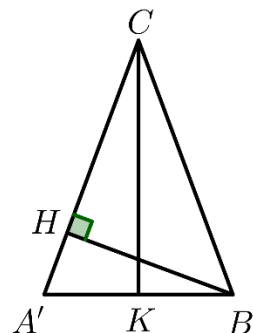
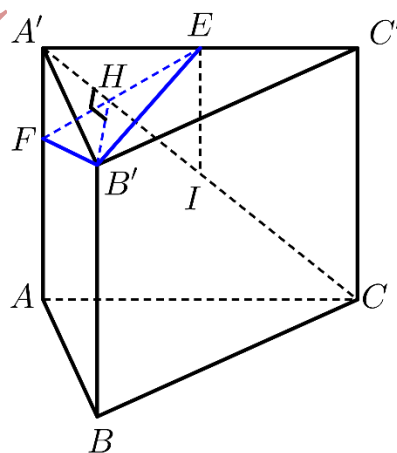
B. $\frac{1}{23}$.

C. $\frac{1}{47}$.

D. $\frac{1}{7}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi E, I, K lần lượt là trung điểm $A'C', A'C$ và $A'B'$.

Ta có: $B'E \perp (ACC'A') \Rightarrow B'E \perp A'C$ (1)

Trong $(A'B'C)$: từ B' kẻ $B'H \perp A'C$ tại H .

Trong $(AA'C'C)$: gọi $F = HE \cap AA'$.

$$\text{Ta lại có } \begin{cases} B'H \perp A'C \\ B'E \perp A'C \end{cases} \Rightarrow (B'HF) \perp A'C \Rightarrow A'C \perp B'F \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra tam giác $B'EF$ là thiết diện của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ khi cắt bởi mặt phẳng (P) .

$$\text{Tam giác } CA'B' \text{ cân tại } C, \text{ ta có } CK \cdot A'B' = B'H \cdot A'C \Rightarrow B'H = \frac{CK \cdot A'B'}{A'C} = \frac{\frac{a\sqrt{19}}{2} \cdot a}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{19}}{2\sqrt{5}}$$

Tam giác $B'HC$ vuông tại H , ta có

$$CH = \sqrt{B'C^2 - B'H^2} = \frac{9a}{2\sqrt{5}} \Rightarrow CH = \frac{9}{10}CA' \Rightarrow A'H = \frac{1}{4}HI$$

$$\Delta HAF \sim \Delta HIE \Rightarrow \frac{AF}{IE} = \frac{AH}{IH} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{AF}{AA'} = \frac{1}{8}.$$

$$\text{Khi đó } \frac{V_{A'B'EF}}{V_{A'B'C'A}} = \frac{A'B'}{A'B'} \cdot \frac{AE}{A'C'} \cdot \frac{AF}{AA'} = \frac{1}{16} \Rightarrow V_{A'B'EF} = \frac{1}{16} V_{A'B'C'A} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{48} V_{ABC.A'B'C'}.$$

$$\text{Nên } \frac{V_1}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{48} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{47}.$$

Câu 28: (TTHT Lần 4) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, trên các cạnh AA' , BB' lấy các điểm M , N sao cho $AA' = 3A'M$, $BB' = 3B'N$. Mặt phẳng $(C'MN)$ chia khối lăng trụ đã cho thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $C'.A'B'NM$, V_2 là thể tích của khối đa diện $ABCMNC'$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$

bằng:

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{7}.$

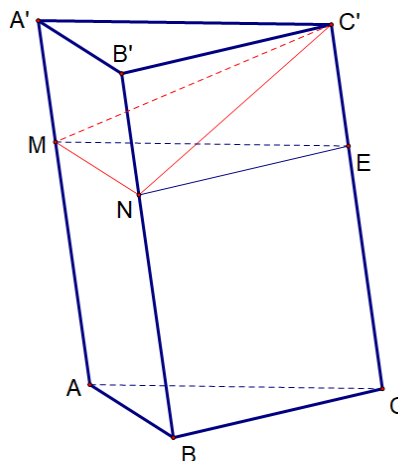
B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{7}.$

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{7}.$

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{7}.$

Lời giải

Chọn B



Đặt $V = V_{ABC.A'B'C'}$. Lấy điểm E trên CC' sao cho $CC' = 3C'E$.

$$\text{Suy ra } \frac{A'M}{AA'} = \frac{B'N}{BB'} = \frac{C'E}{CC'} = \frac{1}{3} \Rightarrow (MNE) \parallel (ABC).$$

Ta có: $V_{C'.MNE} = \frac{1}{3}V_{A'B'C'.MNE}$ (chóp và lăng trụ có chung đáy và đường cao)

$$\Rightarrow V_1 = \frac{2}{3}V_{A'B'C'.MNE}.$$

Mặt khác: $V_{A'B'C'.MNE} = \frac{1}{3}V$ (hai lăng trụ có chung đáy và tỉ lệ đường cao bằng

$$\frac{d(M, (A'B'C'))}{d(A, (A'B'C'))} = \frac{MA'}{AA'} = \frac{1}{3}).$$

$$\text{Suy ra } V_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}V = \frac{2}{9}V \Rightarrow V_2 = V - \frac{2}{9}V = \frac{7}{9}V \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{7}.$$

Tổng quát: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, trên các cạnh AA', BB' lấy các điểm M, N sao cho $AA' = k.A'M$, $BB' = k.B'N$ ($k > 1$). Mặt phẳng $(C'MN)$ chia khối lăng trụ đã cho thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $C'.A'B'MN$, V_2 là thể tích của khối đa diện $ABCMNC'$.

Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{3k-2}.$

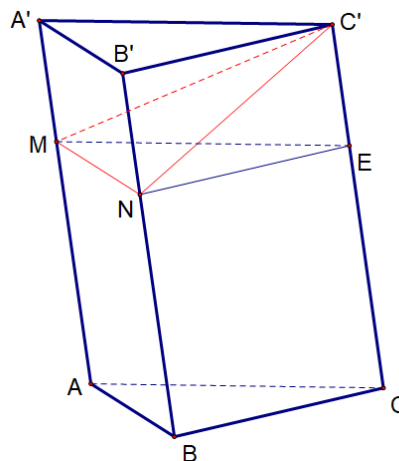
B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3k-2}.$

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3k-2}.$

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{3k-2}.$

Lời giải

Chọn B



Đặt $V = V_{ABC.A'B'C'}$. Lấy điểm E trên CC' sao cho $CC' = k.C'E$.

$$\text{Suy ra } \frac{A'M}{AA'} = \frac{B'N}{BB'} = \frac{C'E}{CC'} = \frac{1}{k} \Rightarrow (MNE) \parallel (ABC).$$

Ta có: $V_{C'.MNE} = \frac{1}{3}V_{A'B'C'.MNE}$ (chóp và lăng trụ có chung đáy, đường cao) $\Rightarrow V_1 = \frac{2}{3}V_{A'B'C'.MNE}.$

Mặt khác: $V_{A'B'C'.MNE} = \frac{1}{k}V$ (hai lăng trụ có chung đáy và tỉ lệ đường cao bằng

$$\frac{d(M, (A'B'C'))}{d(A, (A'B'C'))} = \frac{MA'}{AA'} = \frac{1}{k}).$$

$$\text{Suy ra } V_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k}V = \frac{2}{3k}V \Rightarrow V_2 = V - \frac{2}{3k}V = \frac{3k-2}{3k}V \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3k-2}.$$

Câu 29: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt thuộc các cạnh bên AA', CC' sao cho $MA = MA'; NC = 4NC'$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Hỏi trong bốn khối tứ diện $GA'B'C', BB'MN, ABB'C'$ và $A'BCN$, khối tứ diện nào có thể tích nhỏ nhất?

A. Khối $A'BCN$. B. Khối $GA'B'C'$. C. Khối $ABB'C'$. D. Khối $BB'MN$.

Lời giải

Chọn A

Gọi V là thể tích khối lăng trụ đã cho.

$$\text{Ta có: } V_{M.BB'C'C} = V_{A.BB'C'C} = V_{A'BB'C'C} = \frac{2}{3}V$$

Và

$$S_{BB'N} = S_{CBB'} = \frac{1}{2}S_{BB'C'C} \Rightarrow V_{A.BB'C'} = \frac{1}{2}V_{A.BB'C'C} = \frac{1}{3}V$$

Và

$$S_{BB'N} = S_{CBB'} = \frac{1}{2}S_{BB'C'C} \Rightarrow V_{BB'MN} = \frac{1}{2}V_{M.BB'C'C} = \frac{1}{3}V$$

Chú

$$S_{BCN} = \frac{4}{5}S_{BCC'} = \frac{2}{3}S_{BB'C'C} \Rightarrow V_{A'.BCN} = \frac{2}{3}V_{A'.BB'C'C} = \frac{4}{15}V$$

Chọn A

Câu 30: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$, có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Lấy M, N lần lượt trên cạnh $AB', A'C$ sao cho $\frac{AM}{AB'} = \frac{A'N}{A'C} = \frac{1}{3}$. Tính thể tích V của khối $BMNC'C$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{108}$

B. $\frac{2a^3\sqrt{6}}{27}$

C. $\frac{3a^3\sqrt{6}}{108}$

D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{27}$

Lời giải

Gọi G, K lần lượt tâm các hình chữ nhật $ABB'A'$ và $AA'C'C$.

$$\text{Ta có: } \frac{AM}{AB'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AM}{AG} = \frac{2}{3}$$

(Do G trung điểm AB')

Xét tam giác ABA' có AG là trung

tuyến và $\frac{AM}{AG} = \frac{2}{3}$. Suy ra M là trọng

tâm tam giác ABA' . Do đó BM đi qua trung điểm I của AA' .

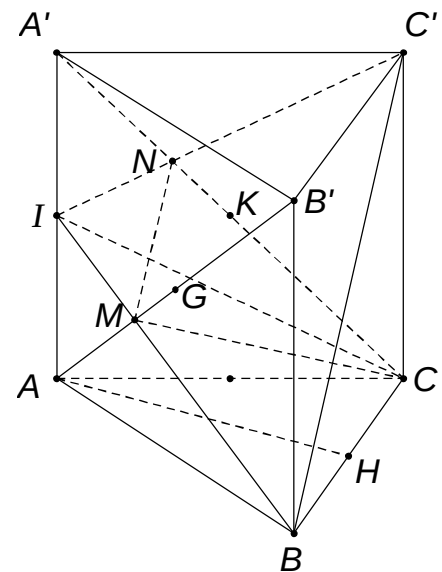
$$\text{Ta có: } \frac{A'N}{A'C} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{A'N}{A'K} = \frac{2}{3}$$

(Do K là trung điểm $A'C$)

Xét tam giác $AA'C'$ có $A'K$ là trung tuyến

và $\frac{A'N}{A'K} = \frac{2}{3}$. Suy ra N là trọng tâm của tam giác

$AA'C'$. Do đó $C'N$ đi qua trung điểm I của AA' .



Từ M là trọng tâm tam giác ABA' và N trọng tâm của tam giác $AA'C'$. Suy ra:

$$\frac{IM}{IB} = \frac{IN}{IC'} = \frac{1}{3}.$$

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích các khối chóp $IMNC; IBCC'$. Ta có: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{IM}{IB} \cdot \frac{IN}{IC'} \cdot \frac{IC}{IC} = \frac{1}{9}$

$$\text{Mà } V_1 + V = V_2 \Rightarrow V = \frac{8}{9} V_2.$$

Hạ AH vuông góc với BC tại H thuộc BC. Ta được AH vuông góc với mặt phẳng $(BB'C'C)$. AA' song song với mặt phẳng $(BB'C'C)$ nên khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(BB'C'C)$ bằng khoảng cách từ A đến $(BB'C'C)$ và bằng AH.

$$\text{Ta có: } AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad V_2 = \frac{1}{3} d[I, (BB'C'C)] \cdot S_{\Delta BCC'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}.$$

$$\text{Suy ra: } V = \frac{8}{9} V_2 = \frac{2a^3\sqrt{6}}{27}.$$

Chọn B

Câu 31: (Cụm THPT Vũng Tàu) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Trên các cạnh AA', BB' lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $AA' = kA'E, BB' = kB'F$. Mặt phẳng $(C'EF)$ chia khối trụ đã cho thành hai khối đa diện bao gồm khối chóp $(C'.A'B'FE)$ có thể tích V_1 và khối đa diện $(ABCEFC')$ có thể tích V_2 . Biết rằng $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{7}$, tìm k

A. $k = 4$.

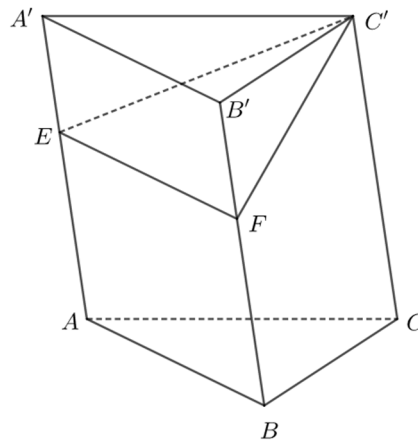
B. $k = 3$.

C. $k = 1$.

D. $k = 2$.

Lời giải

Chọn B



+) Do khối chóp $C'.A'B'FE$ và khối chóp $C'.A'B'BA$ có chung đường cao hạ từ C' nên

$$\frac{V_{C'.A'B'FE}}{V_{C'.A'B'BA}} = \frac{S_{A'B'FE}}{S_{A'B'BA}} = \frac{2S_{A'B'E}}{2S_{A'B'A}} = \frac{A'E}{A'A} = \frac{1}{k} \quad (1)$$

+) Do khối chóp $C'.ABC$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chung đường cao hạ từ C' và đáy là ΔABC nên

$$\frac{V_{C'.ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_{C'.A'B'BA}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{V_{C'.A'B'FE}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{2}{3k} \Rightarrow \frac{V_1}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{2}{3k} \Rightarrow V_1 = \frac{2}{3k} V_{ABC.A'B'C'}$$

$$+) \text{ Đặt } V = V_{ABC.A'B'C'} \text{ Khi đó } \begin{cases} V_1 = \frac{2}{3k} \cdot V \\ V_2 = V - V_1 = V - \frac{2}{3k} \cdot V \end{cases}$$

$$\text{Mà } \frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{7} \text{ nên}$$

$$\frac{2}{3k} \cdot V = \frac{2}{7} \left(V - \frac{2}{3k} \cdot V \right) \Leftrightarrow \frac{2}{3k} = \frac{2}{7} \left(1 - \frac{2}{3k} \right) \Leftrightarrow \frac{6}{7k} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow 2k = 6 \Leftrightarrow k = 3$$

Câu 32: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$, có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Lấy M, N lần lượt trên cạnh $AB', A'C$ sao cho $\frac{AM}{AB'} = \frac{A'N}{A'C} = \frac{1}{3}$. Tính thể tích V của khối $BMNC'C$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{108}$

B. $\frac{2a^3\sqrt{6}}{27}$

C. $\frac{3a^3\sqrt{6}}{108}$

D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{27}$

Lời giải

Gọi G, K lần lượt là tâm các hình chữ nhật $ABB'A'$ và $AA'C'C$.

Ta có: $\frac{AM}{AB'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AM}{AG} = \frac{2}{3}$ (Do G trung điểm AB').

Xét tam giác ABA' có AG là trung tuyến và $\frac{AM}{AG} = \frac{2}{3}$.

Suy ra M là trọng tâm tam giác ABA' . Do đó BM đi qua trung điểm I của AA' .

Ta có: $\frac{A'N}{A'C} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{A'N}{A'K} = \frac{2}{3}$ (Do K là trung điểm $A'C$).

Xét tam giác $AA'C'$ có $A'K$ là trung tuyến và $\frac{A'N}{A'K} = \frac{2}{3}$.

Suy ra N là trọng tâm của tam giác $AA'C'$. Do đó $C'N$ đi qua trung điểm I của AA' .

Từ M là trọng tâm tam giác ABA' và N là trọng tâm của tam giác $AA'C'$. Suy ra:

$$\frac{IM}{IB} = \frac{IN}{IC'} = \frac{1}{3}.$$

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích các khối chóp $IMNC$; $IBCC'$. Ta có:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{IM}{IB} \cdot \frac{IN}{IC'} \cdot \frac{IC}{IC} = \frac{1}{9}. \text{ Mà } V_1 + V = V_2. \text{ Suy ra } V = \frac{8}{9}V_2.$$

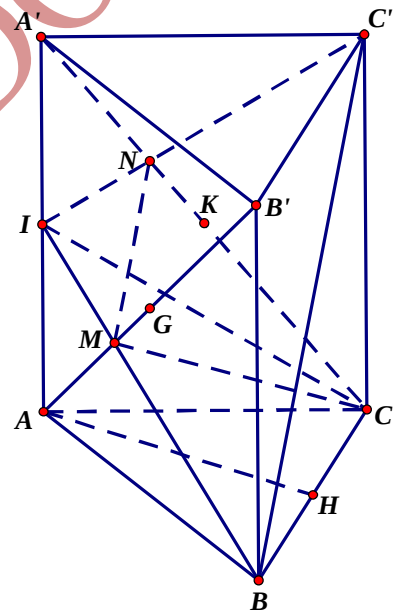
Hạ AH vuông góc với BC tại H thuộc BC . Ta được AH vuông góc với mặt phẳng $(BB'C'C)$.

AA' song song với mặt phẳng $(BB'C'C)$ nên khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(BB'C'C)$ bằng

khoảng cách từ A đến $(BB'C'C)$ và bằng AH . Ta có: $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$V_2 = \frac{1}{3} d[I; (BB'C'C)] \cdot S_{\triangle BCC'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}. \text{ Suy ra } V = \frac{8}{9}V_2 = \frac{2a^3\sqrt{6}}{27}.$$

Chọn B



Câu 33: (Trần Đại Nghĩa) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B', AC$ và P là điểm thuộc cạnh CC' sao cho $CP = 2C'P$. Tính thể tích khối tứ diện $BMNP$ theo V .

A. $\frac{2V}{9}$.

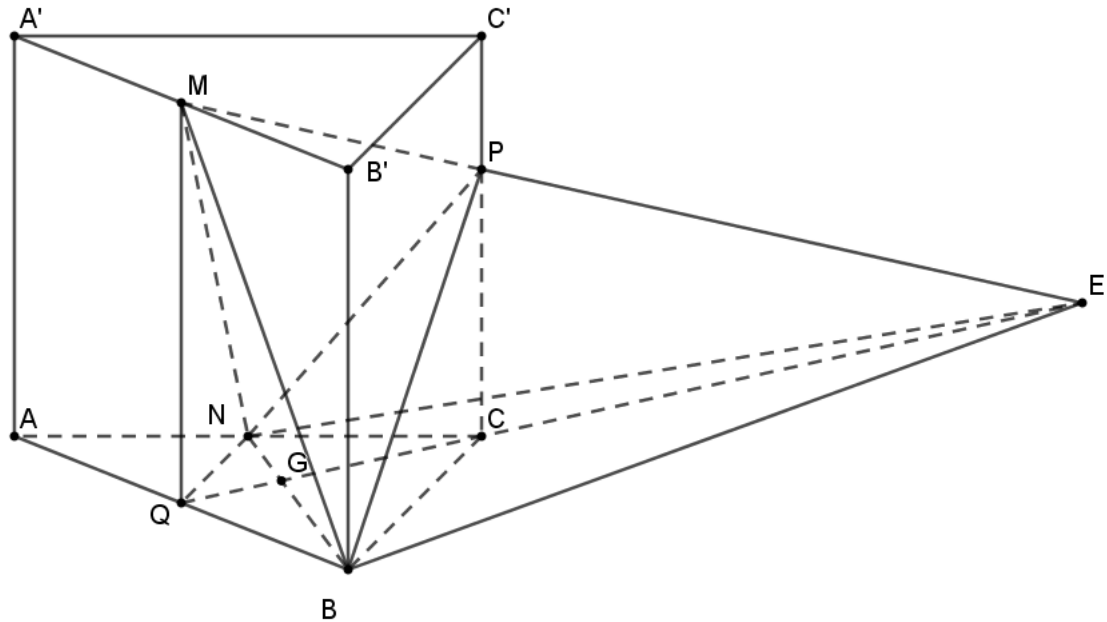
B. $\frac{V}{3}$.

C. $\frac{5V}{24}$.

D. $\frac{4V}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi B là diện tích tam giác ABC , h là độ dài đường cao của hình lăng trụ, suy ra $V = B.h$. Gọi Q là trung điểm AB , G là trọng tâm tam giác ABC . Gọi V_1 là thể tích khối chóp $BMNP$, V_2 là thể tích khối chóp $MBNE$ với $E = QC \cap MP$.

Ta có $\frac{PE}{ME} = \frac{CE}{QF} = \frac{PC}{MQ} = \frac{2}{3}$ do $PC \parallel MQ$ và $PC = 2PC'$ nên $\frac{PC}{MQ} = \frac{PC}{CC'} = \frac{2}{3}$.

Ta có $\frac{V_1}{V_2} = \frac{MP}{ME} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3}V_2$.

Do $GC = \frac{2}{3}QC, CE = 2QC \Rightarrow GE = GC + CE = \frac{8}{3}QC$.

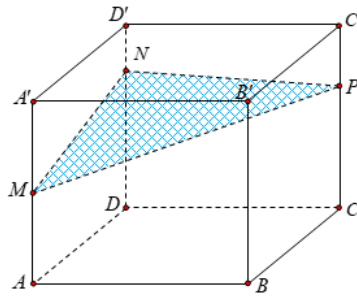
Ta lại có $V_2 = \frac{1}{3}S_{BNE}.h$. Ta tính diện tích tam giác BNE theo diện tích tam giác ABC ta có

$$S_{BNE} = S_{BGE} + S_{NGE} = \frac{8}{3}(S_{NQC} + S_{BQC}) = \frac{8}{3}S_{QBNC}.$$

Mà $\frac{S_{AQN}}{S_{ABC}} = \frac{AQ}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{QBNC} = \frac{3}{4}S_{ABC}$ do đó $S_{BNE} = \frac{8}{3}S_{QBNC} = 2B$.

Nên $V_2 = \frac{1}{3}S_{BNE}.h = \frac{1}{3}.2B.h = \frac{2V}{3} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3}V_2 = \frac{2V}{9}$.

Câu 34: (Lý Nhân Tông) Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 2110. Biết $A'M = MA$, $DN = 3ND'$, $CP = 2C'P$ như hình vẽ. Mặt phẳng (MNP) chia khối hộp đã cho thành hai khối đa diện. Thể tích khối đa diện nhỏ hơn bằng



A. $\frac{5275}{6}$.

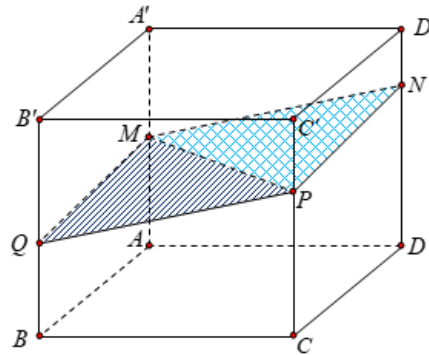
B. $\frac{5275}{12}$.

C. $\frac{7385}{18}$.

D. $\frac{8440}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi Q là giao điểm của mặt phẳng (MNP) với BB' .

Giả sử $\frac{A'M}{AA'} = x$, $\frac{C'P}{CC'} = y$, $\frac{D'N}{DD'} = z$, $\frac{B'Q}{BB'} = t$. Khi đó $x + y = z + t$.

$$\frac{V_{A'B'D'.MQN}}{V_{A'B'D'.ABD}} = \frac{x + z + t}{3} \Rightarrow \frac{V_{A'B'D'.MQN}}{V_{A'B'C'D'.ABCD}} = \frac{x + z + t}{6}.$$

$$\frac{V_{C'B'D'.PQN}}{V_{C'B'D'.CBD}} = \frac{y + z + t}{3} \Rightarrow \frac{V_{C'B'D'.PQN}}{V_{A'B'C'D'.ABCD}} = \frac{y + z + t}{6}.$$

$$\Rightarrow \frac{V_{MNPQ.A'D'C'B'}}{V_{ABCD.A'D'C'B'}} = \frac{1}{2}(x + y).$$

$$\frac{V_{MNPQ.A'D'C'B'}}{V_{ABCD.A'D'C'B'}} = \frac{1}{2}\left(\frac{A'M}{AA'} + \frac{C'P}{CC'}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{12}.$$

$$\Rightarrow V_{MNPQ.A'D'C'B'} = \frac{5}{12} \cdot V_{ABCD.A'D'C'B'} = \frac{5275}{6}.$$

Câu 35: (THTT lần 5) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $2a$. Gọi M là trung điểm của BB' và P thuộc cạnh DD' sao cho $DP = \frac{1}{4}DD'$. Biết mặt phẳng (AMP) cắt CC' tại N , thể tích của khối đa diện $AMNPBCD$ bằng

A. $2a^3$.

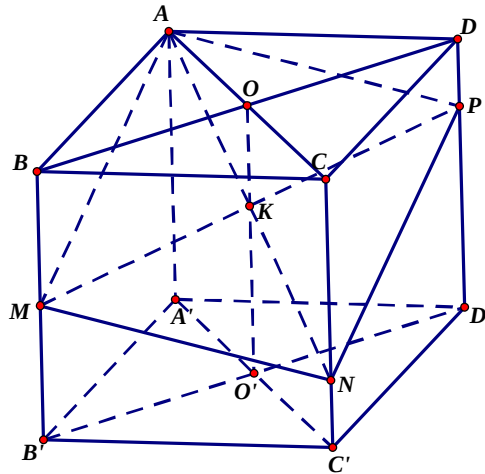
B. $3a^3$.

C. $\frac{11a^3}{3}$.

D. $\frac{9a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O, O' lần lượt là tâm hai hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

Trong mặt phẳng $(BDD'B')$: gọi $K = OO' \cap MP$.

Trong mặt phẳng $(ACC'A')$: gọi $N = AK \cap CC'$. Khi đó $N = CC' \cap (AMP)$.

Ta có $OK = \frac{1}{2}(DP + BM) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right) = \frac{3a}{4}$. Do đó $CN = 2OK = \frac{3a}{2}$.

Diện tích hình thang $BMNC$ là: $S_{BMNC} = \frac{1}{2}(BM + CN) \cdot BC = \frac{1}{2}\left(a + \frac{3a}{2}\right) \cdot 2a = \frac{5a^2}{2}$.

Thể tích khối chóp $A.BMNC$ là: $V_{A.BMNC} = \frac{1}{3} \cdot S_{BMNC} \cdot AB = \frac{1}{3} \cdot \frac{5a^2}{2} \cdot 2a = \frac{5a^3}{3}$.

Diện tích hình thang $DPNC$ là: $S_{DPNC} = \frac{1}{2}(DP + CN) \cdot CD = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{3a}{2}\right) \cdot 2a = 2a^2$.

Thể tích khối chóp $A.DPNC$ là: $V_{A.DPNC} = \frac{1}{3} \cdot S_{DPNC} \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot 2a^2 \cdot 2a = \frac{4a^3}{3}$.

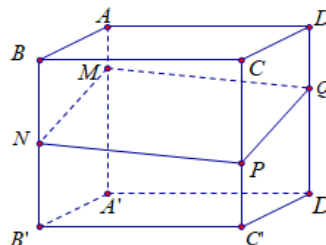
Thể tích khối đa diện $AMNPBCD$ bằng: $V = V_{A.BMNC} + V_{A.DPNC} = \frac{5a^3}{3} + \frac{4a^3}{3} = 3a^3$.

Chú ý: Công thức tính nhanh

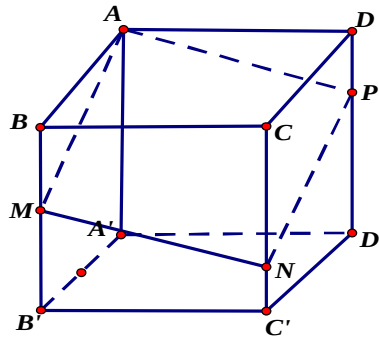
Cho mặt phẳng (α) cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P, Q . Khi đó, ta có

$$\frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{4} \left(\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} + \frac{DQ}{DD'} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} \right)$$

$$\text{và } \frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} = \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'}.$$



Áp dụng,



Áp dụng, ta có $\frac{V_{ABCD.MNP}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{2} \left(\frac{BM}{BB'} + \frac{DP}{DD'} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{8}$

và $\frac{AA'}{AA'} + \frac{CN}{CC'} = \frac{BM}{BB'} + \frac{DP}{DD'}$

Thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = (2a)^3 = 8a^3$.

Suy ra $V_{ABCD.MNP} = 3a^3$.

Câu 36: Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Các điểm E và F lần lượt là trung điểm của $C'B'$ và $C'D'$. Mặt phẳng (AEF) cắt khối lập phương đã cho thành hai phần, gọi V_1 là thể tích khối chứa điểm A' và V_2 là thể tích khối chứa điểm C' . Khi đó $\frac{V_1}{V_2}$ là

A. $\frac{25}{47}$.

B. 1.

C. $\frac{17}{25}$.

D. $\frac{8}{17}$.

Lời giải

Đường thẳng EF cắt $A'D'$ tại N , cắt $A'B'$ tại M , AN cắt DD' tại P , AM cắt BB' tại Q . Từ đó mặt phẳng (AEF) cắt khối lăng trụ thành hai khối đó là $ABCD.C'QEP$ và $AQEPB'A'D'$.

Gọi $V = V_{ABCD.A'B'C'D'}$, $V_3 = V_{A.A'MN}$, $V_4 = V_{PFD'N}$, $V_4 = V_{QMB'E}$.

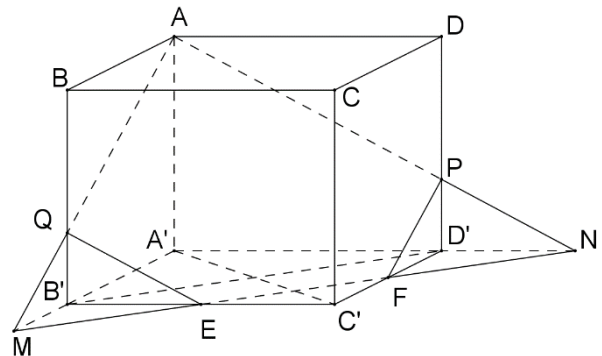
Do tính đối xứng của hình lập phương nên ta có $V_4 = V_5$.

$V_3 = \frac{1}{6} AA'.A'M.A'N = \frac{1}{6} a \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3a^3}{8}$,

$V_4 = \frac{1}{6} PD'.D'F.D'N = \frac{1}{6} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{72}$

$V_1 = V_3 - 2V_4 = \frac{25a^3}{72}$,

$V_2 = V - V_1 = \frac{47a^3}{72}$. Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{25}{47}$.



Chọn A

Câu 37: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và BC . Mặt phẳng (DMN) chia khối lập phương đã cho thành hai khối đa diện. Gọi (H) là khối đa diện chứa đỉnh A , (H') là khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}}$.

A. $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \frac{37}{48}$

B. $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \frac{55}{89}$

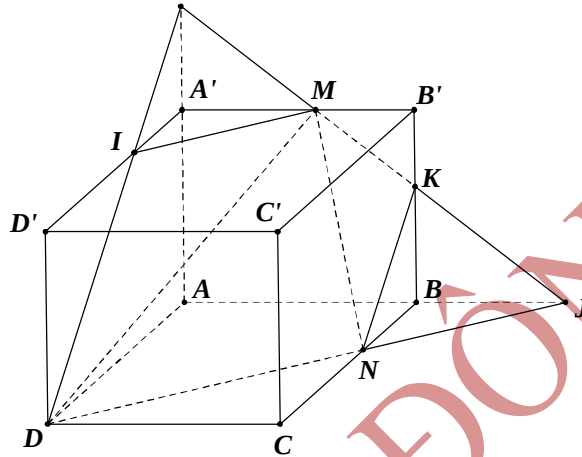
C. $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \frac{2}{3}$

D. $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \frac{1}{2}$

Lời giải

$AN \cap ND = J, JM \cap BB' = K$. Ta có: $BK = 2B'K; I \in A'D'$.

Ta có: $A'I = \frac{1}{4}D'D'$. Suy ra thiết diện là $KMIDN$



$$V_{(H)} = V_{ABA'KMIDN} = V_{D.ABKMA'} + V_{D.BKN} + V_{D.MA'I}$$

$$= \frac{1}{3}a \cdot \left(a^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{2} \right) + \frac{1}{3}a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2a}{3} + \frac{1}{3}a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} = \frac{55a^3}{144}$$

$$\Rightarrow V_{(H')} = a^3 - \frac{55a^3}{144} = \frac{89a^3}{144} \Rightarrow \frac{V_H}{V_{H'}} = \frac{55}{89}.$$

Chọn B

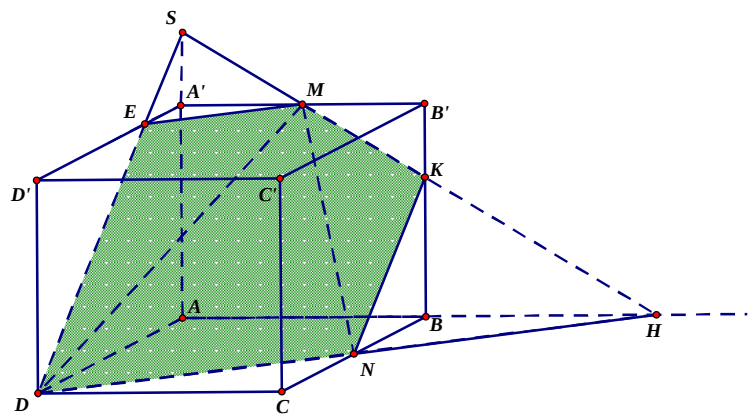
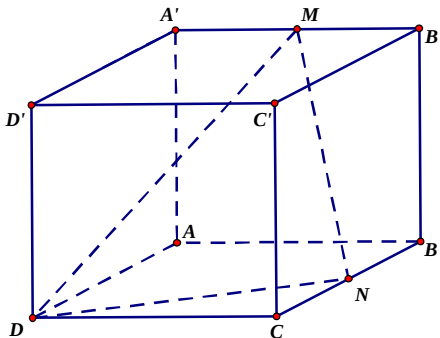
Câu 38: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'$ và BC . Mặt phẳng (DMN) chia hình lập phương thành 2 phần. Gọi V_1 là thể tích của phần chứa đỉnh A , V_2 là thể tích của phần còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{55}{89}$.

C. $\frac{37}{48}$.

D. $\frac{1}{2}$.



Lời giải

Gọi $H = AB \cap DN$; MH cắt $B'B$ tại K , cắt $A'A$ tại S ; SD cắt $A'D'$ tại E .

$$\frac{EB}{EB'} = \frac{EM}{EK} = \frac{FA'}{FB'} = \frac{1}{3}. \text{ Lại từ đó suy ra } \frac{FN}{FK} = \frac{1}{2}.$$

Ta có: $d(K, A'B') = (1/2)d(C', A'B')$, $FB' = (3/2)A'B'$. Suy ra $S_{KFB'} = (3/4)S_{A'B'C'}$.

Mặt khác vì $\frac{EB}{EB'} = \frac{1}{3}$ nên suy ra $d(E, (KFB')) = (3/2)h$ (h là

chiều cao lăng trụ).

Do đó $V_{EKFB'} = (3/8)V$ (V là thể tích lăng trụ).

$$\frac{V_{EBIM}}{V_{EB'FK}} = \frac{EI}{EF} \cdot \frac{EM}{EK} \cdot \frac{EB}{EB'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27} \text{ nên } V_{EBIM} =$$

$$\frac{1}{27} \cdot \frac{3}{8}V = \frac{1}{72}V.$$

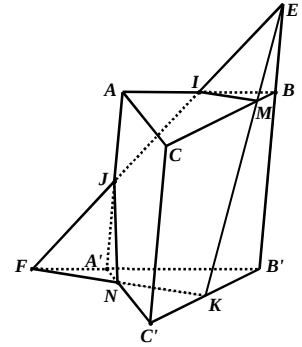
$$\frac{V_{FA'JN}}{V_{FB'EK}} = \frac{FJ}{FE} \cdot \frac{FA'}{FB'} \cdot \frac{FN}{FK} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18} \text{ nên } V_{FA'JN} = \frac{1}{18} \cdot \frac{3}{8}V = \frac{1}{48}V.$$

Mặt phẳng (IJK) chia khối lăng trụ thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích phần chứa điểm B' và V_2 là thể tích phần chứa điểm C .

Ta có $V_1 = (3/8 - 1/72 - 1/48)V = (49/144)V$ nên $V_2 = (95/144)V$.

$$\text{Do đó } \frac{V_1}{V_2} = \frac{49}{95}.$$

Chọn C



DẠNG 4: CỰC TRỊ THỂ TÍCH

CỰC TRỊ THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = 1$. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{6}$.

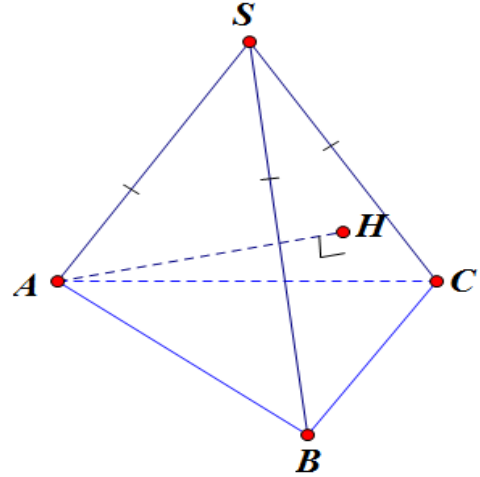
C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{1}{12}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng SBC .
Ta có



$$V = \frac{1}{3} \cdot AH \cdot S_{SBC} = \frac{1}{6} \cdot AH \cdot SB \cdot SC \cdot \sin \widehat{BSC} \leq \frac{1}{6} \cdot AS \cdot SB \cdot SC = \frac{1}{6}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} AH = AS \\ \sin \widehat{BSC} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AS \perp (SBC) \\ SB \perp SC \end{cases} \Leftrightarrow SA \perp SB, SB \perp SC, SC \perp SA.$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = x, BC = y, AB = AC = SB = SC = 1$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất khi tổng $x + y$ bằng:

A. $\sqrt{3}$

B. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

C. $\frac{4}{\sqrt{3}}$

D. $4\sqrt{3}$

Lời giải

Ta gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC .
Dễ chứng minh được $SA \perp (MBC)$ và $\triangle MBC$ cân tại M .
Tính được:

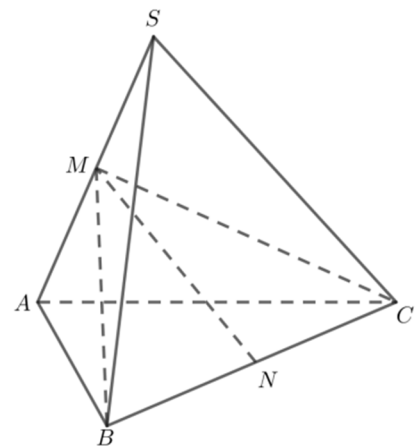
$$MN^2 = MB^2 - \frac{BC^2}{4} = AB^2 - \frac{SA^2}{4} - \frac{BC^2}{4} = 1 - \frac{x^2 + y^2}{4}.$$

$$\text{Do đó: } V = V_{S.ABC} = \frac{1}{6} xy \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{4}}.$$

Vì $x^2 + y^2 \geq 2xy$ nên

$$V \leq \frac{1}{6} xy \sqrt{1 - \frac{xy}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(xy)^2 \cdot (2 - xy)}. \text{ Dấu bằng xảy ra}$$

khi $x = y$. Đến đây, có hai hướng xử lý:



Thứ nhất, sử dụng BĐT Côsi: $(xy)^2(2-xy) = 4 \cdot \frac{xy}{2} \cdot \frac{xy}{2} (2-xy) \leq 4 \cdot \left(\frac{\frac{xy}{2} + \frac{xy}{2} + 2-xy}{3} \right)^3 = \frac{32}{27}$.

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \frac{xy}{2} = 2-xy \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow x+y=\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Thứ hai, đặt $t = xy$ và xét $f(t) = t^2(2-t)$, đạt GTLN khi $t = \frac{4}{3}$, suy ra

$$x=y=\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow x+y=\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Câu 3: Nếu một tứ diện chỉ có đúng một cạnh có độ dài lớn hơn 1 thì thể tích tứ diện đó lớn nhất là bao nhiêu?

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{1}{8}$

D. $\frac{5}{8}$

Lời giải

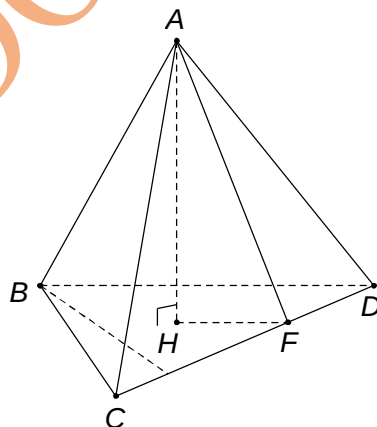
Giả sử tứ diện $ABCD$ có cạnh lớn nhất là AB , suy ra các tam giác ACD và BCD có tất cả các cạnh đều không lớn hơn 1. Các chiều cao AF và BE của chúng không lớn hơn

$$\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}, \text{ trong đó } CD = a \leq 1.$$

$$\text{Chiều cao hình tứ diện } AH \leq AF \leq \sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$$

(do tam giác AHF vuông tại H có AF là cạnh huyền)

Thể tích của khối tứ diện là:



$$V = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot BE \cdot CD \cdot AH \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{1}{24} a(4-a^2)$$

Để tìm giá trị lớn nhất của V ta xét biểu thức $a(4-a^2)$.

$$\text{Vì } 0 \leq a \leq 1 \text{ nên } a(4-a^2) \leq 3 \text{ và } V \leq \frac{1}{24} a(4-a^2) \leq \frac{1}{8}.$$

Chọn C.

Câu 4: (Sở Vĩnh Phúc) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi K là trung điểm của SC . Mặt phẳng qua AK cắt các cạnh SB , SD lần lượt tại M và N . Gọi V_1 , V theo thứ tự là thể tích khối chóp $S.AMKN$ và khối chóp $S.ABCD$. Giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

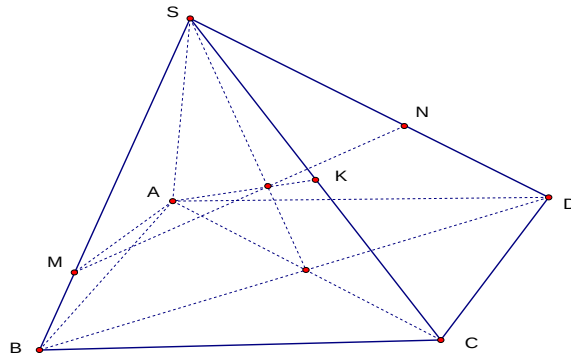
B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn C



Đặt $a = \frac{SA}{SA'} = 1$, $b = \frac{SB}{SB'}$, $c = \frac{SC}{SC'}$, $d = \frac{SD}{SD'}$, có $a + c = 3$.

Áp dụng công thức tính nhanh tỉ lệ thể tích: $\frac{V_1}{V} = \frac{V_{S.AMKN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd}$, với $a+c = b+d$.

Suy ra: $b+d = 3$. Khi đó $\frac{V_1}{V} = \frac{6}{8bd} = \frac{3}{4bd} \geq \frac{3}{4\left(\frac{b+d}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}$, dấu bằng xảy ra khi $b = d = \frac{3}{2}$.

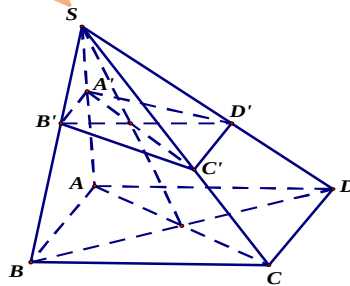
Vậy giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$ bằng $\frac{1}{3}$ khi $\frac{SB}{SM} = \frac{SD}{SN} = \frac{3}{2}$.

Chứng minh bài toán:

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Các điểm A' , B' , C' , D' lần lượt nằm trên các cạnh SA , SB , SC , SD . Đặt $a = \frac{SA}{SA'}$, $b = \frac{SB}{SB'}$, $c = \frac{SC}{SC'}$, $d = \frac{SD}{SD'}$.

Chứng minh rằng: $\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd}$ và $a+c = b+d$.

Lời giải



Ta có: $ABCD$ là hình bình hành nên: $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABD} \Rightarrow V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABD}$.

Khi đó: $\frac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABD}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{abd} \Rightarrow V_{S.A'B'D'} = \frac{1}{abd} \cdot V_{S.ABD} = \frac{1}{2abd} \cdot V_{S.ABCD}$.

$\frac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.BCD}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{bcd} \Rightarrow V_{S.B'C'D'} = \frac{1}{bcd} \cdot V_{S.BCD} = \frac{1}{2bcd} \cdot V_{S.ABCD}$.

Suy ra: $V_{S.A'B'C'D'} = V_{S.A'B'D'} + V_{S.B'C'D'} = \frac{1}{2abd} \cdot V_{S.ABCD} + \frac{1}{2bcd} \cdot V_{S.ABCD} = \frac{(a+c)V_{S.ABCD}}{2abcd}$ (1).

Chứng minh tương tự như trên ta cũng có: $V_{S.A'B'C'D'} = \frac{(b+d)V_{S.ABCD}}{2abcd}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $a+c = b+d$.

$$V_{S.A'B'C'D'} = \frac{(b+d)V_{S.ABCD}}{2abcd} = \frac{2(b+d)V_{S.ABCD}}{4abcd} = \frac{(a+b+c+d)V_{S.ABCD}}{4abcd}.$$

$$\text{Vậy: } \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd}.$$

Câu 5: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các điểm A', C' thỏa mãn $\overrightarrow{SA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC'} = \frac{1}{5}\overrightarrow{SC}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $A'C'$ cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D' và đặt $k = \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị nhỏ nhất của k là bao nhiêu?

A. $\frac{1}{60}$.

B. $\frac{1}{30}$.

C. $\frac{4}{15}$.

D. $\frac{\sqrt{15}}{16}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $V = V_{S.ABCD}$, ta có: $\frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = 3 + 5 = 8$.

Đặt $x = \frac{SB'}{SB} > 0, y = \frac{SD'}{SD} > 0 \Rightarrow (x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{\frac{1}{2}V} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{15}x \Rightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{30}xV.$$

$$\frac{V_{S.A'D'C'}}{\frac{1}{2}V} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{15}y \Rightarrow V_{S.A'D'C'} = \frac{1}{30}yV.$$

Do đó $k = \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{30}(x+y) \Rightarrow x+y \geq \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow k \geq \frac{1}{60}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi C' là trung điểm cạnh SC . Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng AC' cắt các cạnh SB, SD tại B', D' . Đặt $m = \frac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị nhỏ nhất của m bằng:

A. $\frac{2}{27}$.

B. $\frac{4}{27}$.

C. $\frac{1}{9}$.

D. $\frac{2}{9}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $V = V_{S.ABCD} \Rightarrow \frac{V_{S.B'C'D'}}{\frac{1}{2}V} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{2}xy$.

$$m = \frac{1}{2}xy \left(x = \frac{SB'}{SB}; y = \frac{SD'}{SD} \right); \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{SA'}{SA} + \frac{SC'}{SC} = 1 + 2 = 3.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} \Rightarrow xy \geq \frac{4}{9} \Rightarrow m \geq \frac{1}{9}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích V và đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng qua A và trung điểm N cạnh SC cắt cạnh SB, SD lần lượt tại M, P . Tính thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMNP$.

A. $\frac{V}{8}$.

B. $\frac{3V}{8}$.

C. $\frac{V}{4}$.

D. $\frac{V}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $x = \frac{SA}{SA} = 1, y = \frac{SM}{SB}, z = \frac{SN}{SC} = \frac{1}{2}, t = \frac{SP}{SD}$.

Và $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{t} = 1 + 2 = 3$.

Do đó $V_{S.AMNP} = \frac{xyzt}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) V = \frac{1}{4} (3+3) yt \cdot 1 \cdot \frac{V}{2} = \frac{3}{4} ytV$.

Mặt khác $yt = \frac{y+t}{3} \geq \frac{2\sqrt{yt}}{3} \Rightarrow yt \geq \frac{4}{9} \Rightarrow V_{S.AMNP} \geq \frac{V}{3}$.

Câu 8: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các điểm A', C' thỏa mãn $\overrightarrow{SA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC'} = \frac{1}{5}\overrightarrow{SC}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $A'C'$ cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D' và đặt $k = \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Tính giá trị lớn nhất của k là bao nhiêu?

A. $\frac{4}{105}$.

B. $\frac{1}{30}$.

C. $\frac{4}{15}$.

D. $\frac{4}{27}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $V = V_{S.ABCD}$, ta có: $\frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = 3 + 5 = 8$.

Đặt $x = \frac{SB'}{SB} > 0, y = \frac{SD'}{SD} > 0$.

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{\frac{1}{2}V} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{15}x \Rightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{30}xV$$

$$\frac{V_{S.A'D'C'}}{\frac{1}{2}V} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{15}y \Rightarrow V_{S.A'D'C'} = \frac{1}{30}yV$$

Do đó $k = \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{30}(x+y)$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 8$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \leq \frac{1}{4} \Rightarrow y \geq \frac{1}{4}$, từ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 8 \Rightarrow x = \frac{y}{8-y}$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{30}(x+y) = \frac{1}{30}\left(\frac{y}{8-y} + y\right) \text{ với } \frac{1}{4} \leq y \leq 1. \text{ Ta có } k' = \frac{1}{30}\left(\frac{8}{(8-y)^2} + 1\right) > 0, \forall y \in \left[\frac{1}{4}; 1\right].$$

Vậy $k_{\max} = k(1) = \frac{1}{30}\left(\frac{1}{7} + 1\right) = \frac{4}{105}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích V . Gọi M, N thứ tự là các điểm di động trên các cạnh AB, AD sao cho $\frac{AB}{AM} + \frac{2AD}{AN} = 4$. Gọi V' là thể tích khối chóp $S.AMN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của V' .

A. $\frac{1}{4}V$

B. $\frac{1}{6}V$

C. $\frac{1}{8}V$

D. $\frac{1}{3}V$

Lời giải

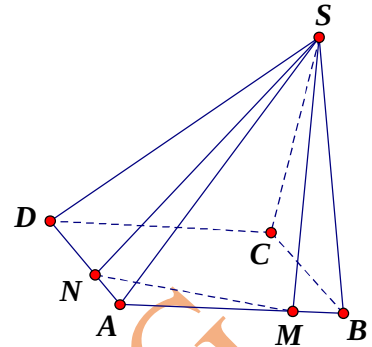
Chọn A

Đặt

$$\frac{AB}{AM} = \frac{1}{x}; \frac{AD}{AN} = \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 4 \Rightarrow y = \frac{2x}{4x-1} \Rightarrow \frac{1}{4} < x < 1$$

$$\frac{V_{SAMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AD} = \frac{1}{2}xy = \frac{x^2}{4x-1} \Rightarrow V' = \frac{x^2}{4x-1}V$$

$$\min_{\left(\frac{1}{4}; 1\right)} \left(\frac{x^2}{4x-1} \right) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$



Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích V . Gọi M, N thứ tự là các điểm di động trên các cạnh AB, AD sao cho $\frac{AB}{AM} + \frac{2AD}{AN} = 4$. Gọi V' là thể tích khối chóp $S.MBCDN$. Tìm giá trị lớn nhất của V' .

A. $\frac{1}{4}V$

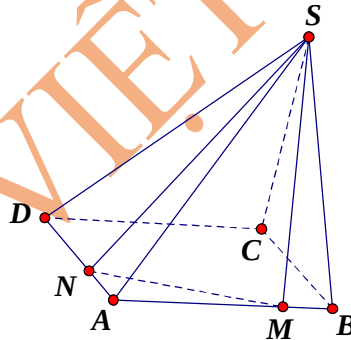
B. $\frac{2}{3}V$

C. $\frac{3}{4}V$

D. $\frac{1}{3}V$

Lời giải

Chọn C



$$\text{Đặt } \frac{AB}{AM} = \frac{1}{x}; \frac{AD}{AN} = \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 4 \Rightarrow y = \frac{2x}{4x-1} \Rightarrow \frac{1}{4} < x < 1$$

$$\frac{V_{SAMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AD} = \frac{1}{2}xy = \frac{x^2}{4x-1} \Rightarrow V' = \left(1 - \frac{x^2}{4x-1}\right)V$$

$$\max_{\left(\frac{1}{4}; 1\right)} \left(1 - \frac{x^2}{4x-1}\right) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích V , đáy là hình bình hành. Mặt phẳng (α) đi qua A , trung điểm I của SO cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P . Tính thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMNP$.

A. $\frac{V}{18}$

B. $\frac{V}{3}$

C. $\frac{V}{6}$

D. $\frac{3V}{8}$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Với } x = \frac{SA}{SA} = 1, y = \frac{SM}{SB} = \frac{2}{3}, z = \frac{SN}{SC} = \frac{1}{2},$$

$$t = \frac{SP}{SD} \text{ ta có } \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{t}. \text{ Xét tam giác } SAC$$

ta có

$$\overrightarrow{SO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}) \Rightarrow \frac{SO}{SI} \overrightarrow{SI} = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{SA} + \frac{SC}{SN} \overrightarrow{SN} \right)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SI} = \frac{1}{4} \left(\overrightarrow{SA} + \frac{1}{z} \overrightarrow{SN} \right)$$

Mặt khác 3 điểm A, I, N thẳng hàng nên

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4z} = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{3}.$$

Vậy

$$V_{S.AMNP} = \frac{xyzt}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) V = f(t) = \frac{2t^2}{3(4t-1)} V \geq \min_{\left[\frac{1}{4}; 1\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{V}{6} \text{ Dấu bằng xảy ra}$$

khi $t = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{2}$ tức (α) đi qua trung điểm của SB, SD .

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$, SA là đường cao, đáy là hình chữ nhật với $SA = a, AB = b, AD = c$. Trong mặt phẳng (SDB) lấy G là trọng tâm tam giác SDB , qua G kẻ đường thẳng d cắt cạnh BS tại M , cắt cạnh SD tại N , mp (AMN) cắt SC tại K . Xác định M thuộc SB sao cho V_{SAMKN} đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất đó.

A. $V_{SAMKN \rightarrow \max} = \frac{abc}{8}, V_{SAMKN \rightarrow \min} = \frac{abc}{9}$

B. $V_{SAMKN \rightarrow \max} = \frac{abc}{8}, V_{SAMKN \rightarrow \min} = \frac{abc}{10}$

C. $V_{SAMKN \rightarrow \max} = \frac{abc}{9}, V_{SAMKN \rightarrow \min} = \frac{abc}{10}$

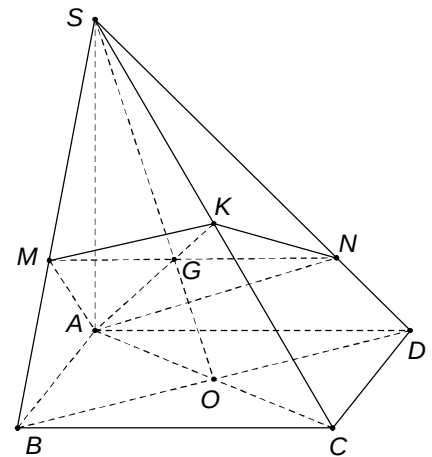
D. $V_{SAMKN \rightarrow \max} = \frac{abc}{10}, V_{SAMKN \rightarrow \min} = \frac{abc}{11}$

Lời giải

Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD$.

Ta có: $SG = \frac{2}{3}SO$ và $K = AG \cap SC$ và K là trung điểm

SC



$$\frac{V_{SMAK}}{V_{SBAC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SK}{SC} \Rightarrow V_{SMAK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot V_{SBAC} = \frac{1}{4} \frac{SM}{SB} \cdot V_{SBAC} = \frac{1}{12} \frac{SM}{SB} \cdot a.b.c$$

$$\text{Tương tự } V_{SNAK} = \frac{1}{12} \frac{SN}{SC} \cdot a.b.c.$$

$$\text{Do đó: } V_{SAMKN} = \frac{1}{12} \left(\frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SC} \right) a.b.c$$

Trong mp (SBD):

$$\frac{S_{SMN}}{S_{SBD}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{S_{SMG} + S_{SGN}}{2S_{SBO}} = \frac{S_{SMG}}{2S_{SBO}} + \frac{S_{SGN}}{2S_{SBO}} = \frac{SG \cdot SM}{2 \cdot SO \cdot SB} + \frac{SG \cdot SN}{2 \cdot SO \cdot SC} \Rightarrow \frac{SM \cdot SN}{SB \cdot SC} = \frac{1}{3} \left(\frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SC} \right)$$

Do M, N lần lượt nằm trên cạnh SB, SD nên: $\frac{SB}{2} \leq SM \leq SB \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{SM}{SB} \leq 1$

Đặt $t = \frac{SM}{SB}$, $\left(\frac{1}{2} \leq t \leq 1 \right)$ thì

$$t \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{3} \left(t + \frac{SN}{SC} \right) \Leftrightarrow \frac{SN}{SC} = \frac{t}{3t-1}.$$

Nhận thấy V_{SAMKN} đạt GTLN, GTNN nếu:

$$f(t) = \frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SC} = t + \frac{t}{3t-1} \text{ với } \frac{1}{2} \leq t \leq 1.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 1 - \frac{1}{(3t-1)^2} = \frac{9t^2 - 6t}{(3t-1)^2}$$

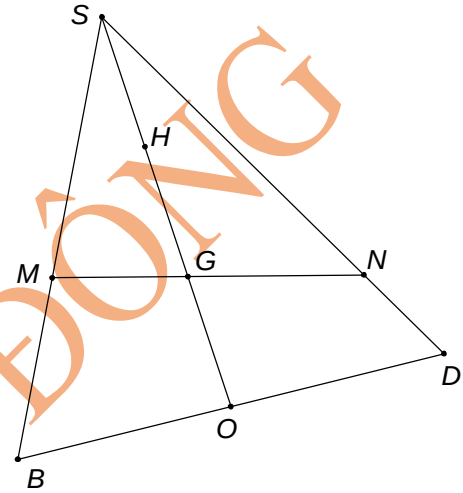
$$\text{Nên } f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}, t = 0 \text{ (loại).}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}, f(1) = \frac{3}{2}, f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

Do vậy $V_{SAMKN} = \frac{abc}{8}$ là GTLN khi M là trung điểm SB hoặc M trùng với B.

$V_{SAMKN} = \frac{abc}{9}$ là GTNN khi MB chiếm 1 phần SB.

Chọn A



Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các điểm A', C' thỏa mãn $\overrightarrow{SA'} = \frac{1}{3} \overrightarrow{SA}$

, $\overrightarrow{SC'} = \frac{1}{5} \overrightarrow{SC}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $A'C'$ cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D'

và đặt $k = \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị lớn nhất của k là?

A. $\frac{4}{105}$.

B. $\frac{1}{30}$.

C. $\frac{4}{15}$.

D. $\frac{4}{27}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } V = V_{S.ABCD}, \text{ ta có } \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = 3 + 5 = 8$$

$$\text{Mặt khác } \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{\frac{1}{2}V} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{15}x \Rightarrow V_{S.A'B'C'D'} = \frac{1}{30}xV$$

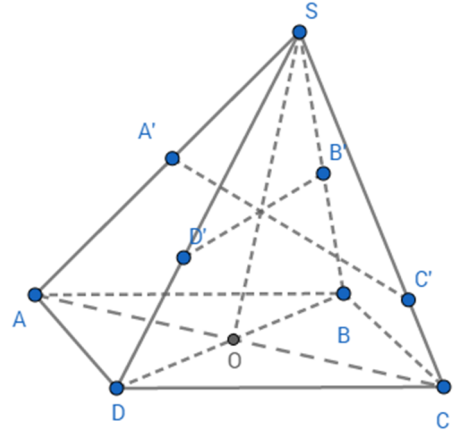
$$\frac{V_{S.A'C'D'}}{\frac{1}{2}V} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{15}y$$

$$\Rightarrow V_{S.A'C'D'} = \frac{1}{30}yV$$

$$\text{Do đó } k = \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{30}(x+y), \text{ trong đó}$$

$$x = \frac{SB'}{SB}, y = \frac{SD'}{SD}$$

Và



$$k = f(x) = \frac{1}{30} \left(x + \frac{x}{8x-1} \right) \leq \max_{\left[\frac{1}{8}, 1 \right]} f(x) = f(1) = \frac{4}{105}.$$

Câu 14: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q . Gọi M', N', P', Q' lần lượt là hình chiếu của M, N, P, Q trên mặt phẳng đáy. Tìm tỉ số $\frac{SM}{SA}$ để thể tích khối đa diện $MNPQ.M'N'P'Q'$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\frac{SM}{SA} = x$ ($0 < x < 1$), kí hiệu V, h lần lượt

là thể tích và chiều cao của khối chóp đã cho,

theo Thales ta có: $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{SM}{SA} = x$;

$$\text{và } \frac{d(M, (ABCD))}{d(S, (ABCD))} = \frac{AM}{SA} = 1 - x$$

$$\Rightarrow d(M, (ABCD)) = (1 - x)h.$$

$$\text{Vì vậy: } V_{MNPQ.M'N'P'Q'} = MN.MQ.d(M, (ABCD)) = x^2(1-x).AB.AD.h = 3x^2(1-x)V.$$

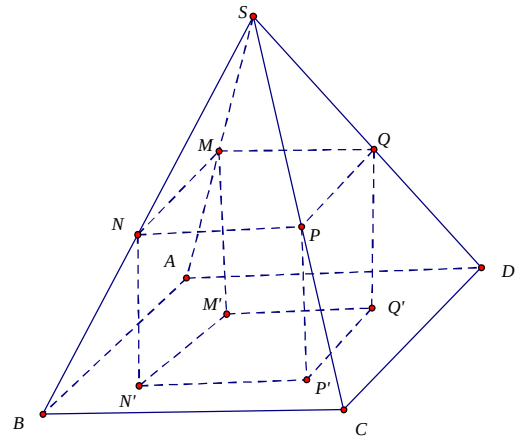
Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có:

$$x^2(1-x) = \frac{1}{2}x.x.(2-2x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x+x+2-2x}{3} \right)^3 = \frac{4}{27}.$$

$$\text{Do đó } V_{MNPQ.M'N'P'Q'} \leq \frac{4}{9}V. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = 2 - 2x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Chọn B

Câu 15: Cho khối chóp $S.ABC$. Một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P . Gọi M', N', P' lần lượt là hình chiếu của M, N, P trên mặt phẳng đáy. Tìm tỉ số $\frac{SM}{SA}$ để thể tích khối đa diện $MNP.M'N'P'$ đạt giá trị lớn nhất.



A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\frac{SM}{SA} = x$ ($0 < x < 1$), kí hiệu V , h lần lượt

là thể tích và chiều cao của khối chóp đã cho,

theo Thales ta có: $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{MP}{CA} = \frac{SM}{SA} = x$;

$$\text{và } \frac{d(M, (ABC))}{d(S, (ABC))} = \frac{AM}{SA} = 1 - x$$

$$\Rightarrow d(M, (ABC)) = (1 - x)h; S_{MNP} = x^2 S_{ABC}.$$

$$\text{Vì vậy: } V_{MNP.M'N'P'} = S_{MNP} \cdot d(M, (ABC))$$

$$= x^2 (1 - x) \cdot S_{ABC} \cdot h = 3x^2 (1 - x)V.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$x^2 (1 - x) = \frac{1}{2} x \cdot x \cdot (2 - 2x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x + x + 2 - 2x}{3} \right)^3 = \frac{4}{27}.$$

$$\text{Do đó } V_{MNPQM'N'P'} \leq \frac{4}{9}V. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = 2 - 2x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Chọn B

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V . Điểm P là trung điểm của SC , một mặt phẳng qua AP cắt hai cạnh SD và SB lần lượt tại M và N . Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V}$?

A. $\frac{1}{8}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{3}{8}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

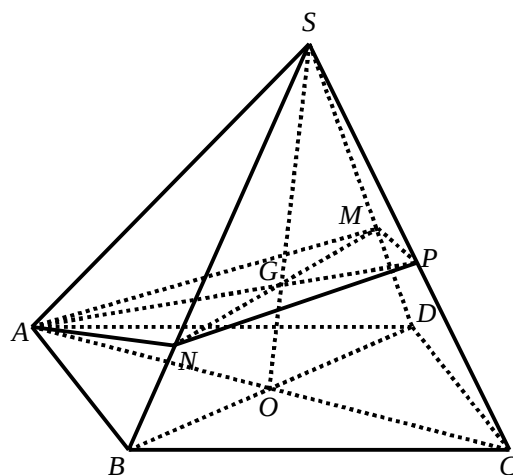
Chọn D

Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$. G là trọng tâm tam giác SAC .

Ta có M, G, N thẳng hàng. Do $ABCD$ là hình

$$\text{bình hành nên } V_{S.ADC} = V_{S.ABC} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD}.$$

Theo công thức tỉ số thể tích ta có:



$$\frac{V_{S.AMP}}{V_{S.ADC}} = \frac{SM}{SD} \cdot \frac{SP}{SC} \Leftrightarrow \frac{V_{S.AMP}}{\frac{1}{2} V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2} \frac{SM}{SD} \Leftrightarrow \frac{V_{S.AMP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{4} \frac{SM}{SD}$$

$$\text{Tương tự } \frac{V_{S.ANP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} \Leftrightarrow \frac{V_{S.ANP}}{\frac{1}{2}V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2} \frac{SN}{SB} \Leftrightarrow \frac{V_{S.ANP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{4} \frac{SN}{SB}$$

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{V_{S.AMP}}{V_{S.ABCD}} + \frac{V_{S.ANP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{4} \left(\frac{SM}{SD} + \frac{SN}{SB} \right) \Rightarrow \frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{4} \left(\frac{SM}{SD} + \frac{SN}{SB} \right)$$

$$\text{Hay } \frac{V_1}{V} = \frac{1}{4} \left(\frac{SM}{SD} + \frac{SN}{SB} \right)$$

$$\text{Ta chứng minh } \frac{SD}{SM} + \frac{SB}{SN} = 3.$$

Thật vậy, qua B, D kẻ các đường song song với MN cắt SO lần lượt tại E, F .

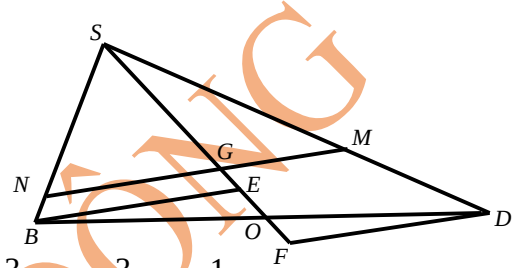
$$\text{Ta có: } \frac{SD}{SM} = \frac{SF}{SG}; \frac{SB}{SN} = \frac{SE}{SG} \Rightarrow \frac{SD}{SM} + \frac{SB}{SN} = \frac{SE + SF}{SG}$$

$$\Rightarrow \frac{SD}{SM} + \frac{SB}{SN} = \frac{2SO}{SG} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$$

$$\text{Đặt } \frac{SD}{SM} = x; \frac{SB}{SN} = y. \text{ Ta có } x + y = 3$$

$$\text{Mặt khác } \frac{V_1}{V} = \frac{1}{4} \left(\frac{SM}{SD} + \frac{SN}{SB} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{x+y}{4xy} = \frac{3}{4xy} \geq \frac{3}{(x+y)^2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } \frac{V_1}{V} \text{ nhỏ nhất bằng } \frac{1}{3}.$$



Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSA = 30^\circ$ và $SA = SB = SC = a$. Mặt phẳng (P) qua A cắt hai cạnh SB, SC lần lượt tại B', C' sao cho chu vi tam giác $AB'C'$ nhỏ nhất. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích các khối chóp $S.AB'C', S.ABC$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = 3 - 2\sqrt{2}.$

B. $\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{3} - 1.$

C. $\frac{V_1}{V_2} = 4 - 2\sqrt{3}.$

D. $\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{2} - 1.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \frac{SB'}{SB} = x, \frac{SC'}{SC} = y \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = x \cdot y.$$

Khi đó:

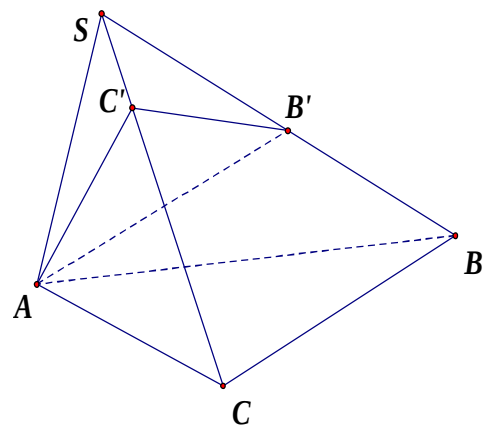
$$AB'^2 = SA^2 + SB'^2 - 2 \cdot SA \cdot SB' \cdot \cos \angle ASB$$

$$= a^2 + (ax)^2 - 2 \cdot a \cdot ax \cdot \cos 30^\circ = a^2 (1 - \sqrt{3}x + x^2)$$

$$\Rightarrow AB' = a\sqrt{1 - \sqrt{3}x + x^2}$$

$$\text{Tương tự: } AC' = a\sqrt{1 - \sqrt{3}y + y^2},$$

$$B'C' = a\sqrt{x^2 - \sqrt{3}xy + y^2}$$



$$\begin{aligned}
2p &= AB' + AC' + B'C' \\
\text{Ta có: } &= a \left[\sqrt{1 - \sqrt{3}x + x^2} + \sqrt{1 - \sqrt{3}y + y^2} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}xy + y^2} \right] \\
&= a \left[\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2} + \sqrt{1 - \sqrt{3}x + x^2} \right] \\
&\geq a \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right)^2} + a\sqrt{1 - \sqrt{3}x + x^2} = a(\sqrt{1 - x + x^2} + \sqrt{1 - \sqrt{3}x + x^2}) \\
&= a \left(\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \right) \geq a \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = a\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi: $x = \frac{y - \frac{\sqrt{3}}{2}x}{\frac{\sqrt{3}}{2} - y}, x = \sqrt{3} - 1 \Leftrightarrow x = y = \sqrt{3} - 1 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = (\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3}.$

Câu 18: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 60^\circ$, $\widehat{BSC} = 90^\circ$, $\widehat{ASC} = 120^\circ$. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh AB và SC sao cho $\frac{CN}{SC} = \frac{AM}{AB}$. Khi khoảng cách giữa M và N nhỏ nhất, tính thể tích V của khối chóp $S.AMN$.

- A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{72}$. B. $\frac{5\sqrt{2}a^3}{72}$. C. $\frac{5\sqrt{2}a^3}{432}$. D. $\frac{\sqrt{2}a^3}{432}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_0 = \frac{a^3}{6} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}.$

Đặt $\frac{CN}{SC} = \frac{AM}{AB} = m (0 \leq m \leq 1)$, ta có

$$\overrightarrow{SA} = \vec{a}, \overrightarrow{SB} = \vec{b}, \overrightarrow{SC} = \vec{c}, |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a, \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{a^2}{2}, \vec{b} \cdot \vec{c} = 0, \vec{a} \cdot \vec{c} = -\frac{a^2}{2}.$$

Theo đẳng thức trên ta có đẳng thức vector

$$\overrightarrow{SN} = (1-m)\vec{c}, \overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AM} = \vec{a} + m\overrightarrow{AB} = \vec{a} + m(\vec{b} - \vec{a}).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{SN} - \overrightarrow{SM} = (1-m)\vec{c} - [\vec{a} + m(\vec{b} - \vec{a})]$$

$$= (m-1)\vec{a} - m\vec{b} + (1-m)\vec{c}$$

Do đó

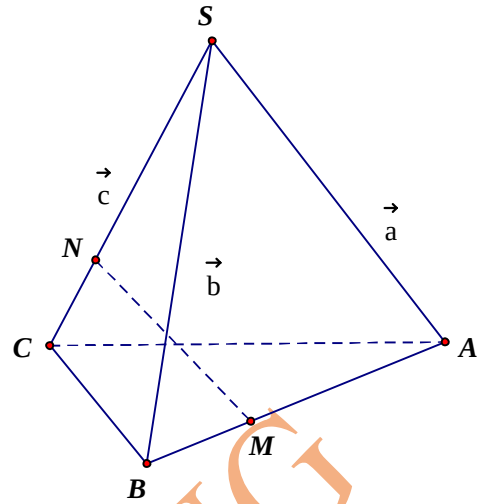
$$MN^2 = ((m-1)\vec{a} - m\vec{b} + (1-m)\vec{c})^2$$

$$= (3m^2 - 5m + 3)a^2 \geq \frac{11a^2}{12}$$

Dấu bằng xảy ra tại

$$m = \frac{5}{6} \Rightarrow V = \frac{SN}{SC} \cdot V_{S.AMC} = \frac{SN}{SC} \cdot \frac{AM}{AB} \cdot V_0$$

$$= m(1-m)V_0 = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{2}a^3}{12} = \frac{5\sqrt{2}a^3}{432}$$



Câu 19: (Sở Bắc Ninh) Cho tứ diện $SABC$ có G là trọng tâm tứ diện, mặt phẳng quay quanh AG cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại M, N . Giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}$ là?

A. $\frac{4}{9}$.

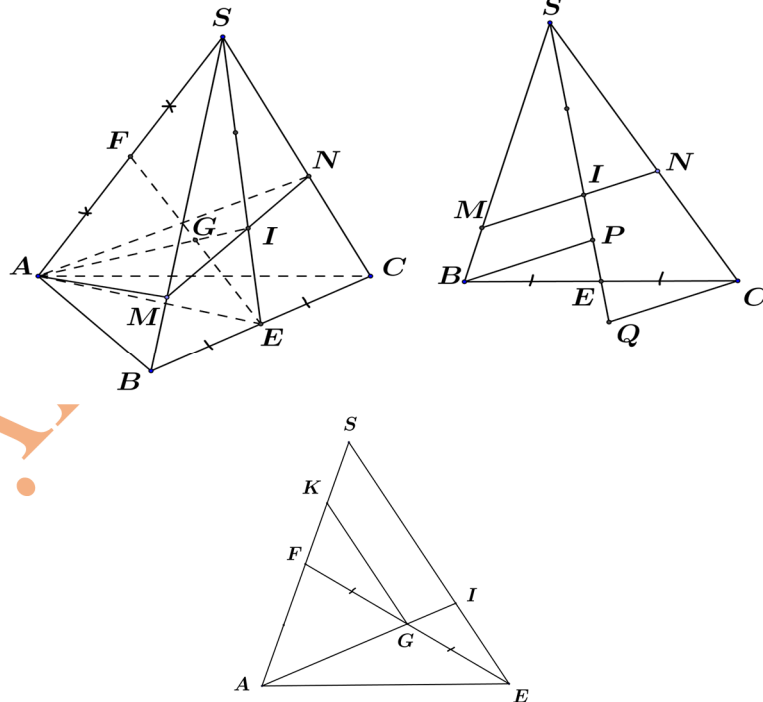
B. $\frac{3}{8}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm BC, SA, EF suy ra G là trọng tâm tứ diện $SABC$. Điểm I là giao điểm của AG và SE . Qua I dựng đường thẳng cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại M, N . Suy ra (AMN) là mặt phẳng quay quanh AG thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Kẻ $GK \parallel SE, (K \in SA)$ suy ra K là trung điểm FS .

$$\Rightarrow \frac{KG}{SI} = \frac{AK}{AS} = \frac{3}{4}. \text{ Mà } \frac{KG}{SE} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SI}{SE} = \frac{2}{3}.$$

Cách 1:

Kẻ $BP \parallel MN, CQ \parallel MN$; ($P, Q \in SE$).

Ta có: $\frac{SM}{SB} = \frac{SI}{SP}; \frac{SN}{SC} = \frac{SI}{SQ}$.

$\Rightarrow \triangle BEP = \triangle CEQ \Rightarrow E$ là trung điểm $PQ \Rightarrow SP + SQ = 2SE$ (đúng cả trong trường hợp $P \equiv Q \equiv E$).

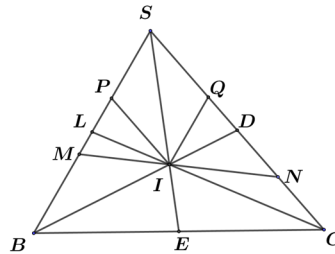
Ta có: $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = 1 \cdot \frac{SI}{SP} \cdot \frac{SI}{SQ} \stackrel{AM-GM}{\geq} \frac{SI^2}{(SP+SQ)^2} = \frac{SI^2}{SE^2} = \left(\frac{SI}{SE}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $SP = SQ = SE$. Hay $P \equiv Q \equiv E \Leftrightarrow MN \parallel BC$.

Vậy tỉ số nhỏ nhất là $\frac{4}{9}$.

Cách 2:

Ta chứng minh được $\frac{SB}{SM} + \frac{SC}{SN} = 3$.



Thật vậy, qua I kẻ các đường thẳng lần lượt song song SB, SC cắt SC, SB tương ứng tại D, L .

Ta có: $\left. \begin{array}{l} \frac{SB}{IQ} = \frac{DB}{DI} = 3 \\ \frac{IQ}{SM} = \frac{NI}{NM} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{SB}{IQ} \cdot \frac{IQ}{SM} = 3 \cdot \frac{NI}{NM} \Leftrightarrow \frac{SB}{SM} = \frac{3NI}{NM}, (1).$

Lại có: $\left. \begin{array}{l} \frac{SC}{IP} = \frac{LC}{LI} = 3 \\ \frac{IP}{SN} = \frac{MI}{MN} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{SC}{IP} \cdot \frac{IP}{SN} = 3 \cdot \frac{MI}{MN} \Leftrightarrow \frac{SC}{SN} = \frac{3MI}{MN}, (2).$

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{SB}{SM} + \frac{SC}{SN} = 3 \left(\frac{NI}{NM} + \frac{MI}{MN} \right) = 3$.

Đặt $x = \frac{SB}{SM}; y = \frac{SC}{SN}$. Suy ra $x + y = 3$.

Ta có: $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{xy} \stackrel{AM-GM}{\geq} \frac{1}{\frac{(x+y)^2}{4}} = \frac{4}{9}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{3}{2} \Leftrightarrow MN \parallel BC$.

Vậy tỉ số nhỏ nhất là $\frac{4}{9}$.

Cách 3:

Đặt $\frac{SB}{SM} = x$; $\frac{SC}{SN} = y$, với $x > 0$, $y > 0$.

Ta có $\vec{SI} = \frac{2}{3}\vec{SE} = \frac{1}{3}(\vec{SB} + \vec{SC}) = \frac{1}{3}(x\vec{SM} + y\vec{SN}) = \frac{x}{3}\vec{SM} + \frac{y}{3}\vec{SN}$.

Do I , M , N thẳng hàng nên $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow x + y = 3$.

Ta có $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{xy} \geq \frac{1}{(\frac{x+y}{2})^2} = \frac{4}{9}$.

Vậy $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{4}{9}$ khi $x = y$, hay MN đi qua I và song song với BC .

Câu 20: (Hoàng Hoa Thám Hưng Yên) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V . Gọi P là điểm trên cạnh SC sao cho $SC = 5SP$. Một mặt phẳng (α) qua AP cắt hai cạnh SB và SD lần lượt tại M và N . Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị lớn nhất của $\frac{V_1}{V}$.

A. $\frac{1}{15}$.

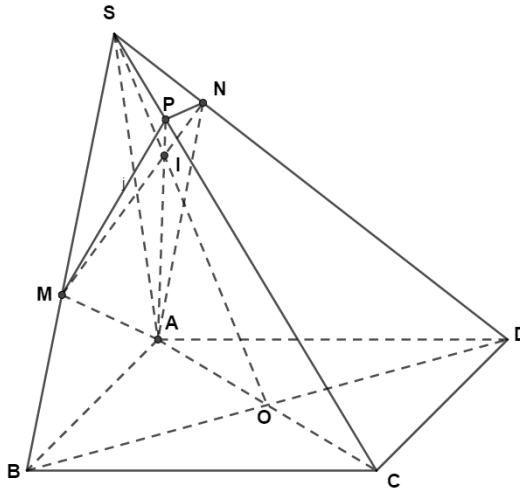
B. $\frac{1}{25}$.

C. $\frac{3}{25}$.

D. $\frac{2}{15}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\frac{V_1}{V} = \frac{V_{S.AMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.APN} + V_{S.APM}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.APN}}{2V_{S.ACD}} + \frac{V_{S.APM}}{2V_{S.ABC}} = \frac{1}{2} \left(\frac{SP}{SC} \cdot \frac{SN}{SD} + \frac{SP}{SC} \cdot \frac{SM}{SB} \right)$
 $= \frac{1}{10} \left(\frac{SN}{SD} + \frac{SM}{SB} \right)$. Đặt $a = \frac{SM}{SB}$, $b = \frac{SN}{SD}$, $0 < a, b \leq 1$.

Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$.

Trong mặt phẳng (SAC) , $AP \cap SO = I$.

Xét tam giác SOC có $\frac{PS}{PC} \cdot \frac{AC}{AO} \cdot \frac{IO}{IS} = 1 \Leftrightarrow \frac{IO}{IS} = 2 \Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{1}{3}$.

Xét tam giác SBD có $\frac{S_{SMN}}{S_{SBD}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} = a \cdot b$.

Mặt khác, $\frac{S_{SMN}}{S_{SBD}} = \frac{S_{SMI} + S_{SNI}}{S_{SBD}} = \frac{S_{SMI}}{2S_{SBO}} + \frac{S_{SNI}}{2S_{SDO}} = \frac{1}{2} \left(\frac{SM}{SB} \cdot \frac{SI}{SO} + \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SI}{SO} \right) = \frac{1}{6}(a + b)$

Vậy, $\frac{1}{6}(a+b) = ab$, do $a = \frac{1}{6}$ không thỏa mãn hệ thức nên $b = \frac{a}{6a-1}$, do $0 < b \leq 1$ nên

$$0 < \frac{a}{6a-1} \leq 1 \Leftrightarrow a \geq \frac{1}{5}. \text{ Từ đó, } \frac{V_1}{V} = \frac{1}{10}(a+b) = \frac{1}{10}\left(a + \frac{a}{6a-1}\right) \text{ với } \frac{1}{5} \leq a \leq 1.$$

Xét hàm số $y = f(x) = x + \frac{x}{6x-1}$ với $x \in \left[\frac{1}{5}; 1\right]$. $y' = 1 - \frac{1}{(6x-1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow (6x-1)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0(1) \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}. \text{ Ta có } f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{6}{5}, f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}, f(1) = \frac{6}{5}. \text{ Vậy } \max_{x \in \left[\frac{1}{5}; 1\right]} f(x) = f(1) = \frac{6}{5}.$$

Từ đó, giá trị lớn nhất của $\frac{V_1}{V}$ bằng $\frac{3}{25}$ khi M trùng B hoặc N trùng D .

Cách 2:

* Đặt $a = \frac{SA}{SA} = 1$; $b = \frac{SB}{SM}$; $c = \frac{SC}{SP} = 5$; $d = \frac{SD}{SN}$.

* Ta có $a+c=b+d \Leftrightarrow 1+5=b+d \Leftrightarrow d=6-b$.

* $\frac{V_{S.AMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd} = \frac{1+b+5+6-b}{4 \cdot 1 \cdot b \cdot 5 \cdot (6-b)} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{-b^2+6b}$.

* Xét $f(b) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{-b^2+6b}$; $b \in [1; 5]$ (do $b, d \geq 1$).

$f'(b) = -\frac{3}{5} \cdot \frac{-2b+6}{(-b^2+6b)^2}$; $f'(b) = 0 \Leftrightarrow b=3$.

Bảng biến thiên:

b	1	3	5
$f'(b)$	-	0	+
$f(b)$	$\frac{3}{25}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{25}$

Kết luận: Giá trị lớn nhất của $\frac{V_1}{V} = \frac{3}{25}$.

Câu 21: Khối tứ diện $ABCD$ có $AB > 1$ và tất cả các cạnh còn lại có độ dài không vượt quá 1. Hỏi thể tích lớn nhất của khối tứ diện đó là?

A. $\frac{3}{8}$.

B. $\frac{1}{8}$.

C. $\frac{1}{24}$.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Tứ diện $ABCD$ có $AB > 1$, các cạnh còn lại đều không lớn hơn 1. Đặt $CD = a, x \in (0;1]$

Gọi M là trung điểm của BC , K là hình chiếu của B lên CD và H là hình chiếu của A trên $mp(BCD)$. Khi đó ta có

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} AH \cdot S_{BCD} = \frac{1}{6} x \cdot BK \cdot AH \quad (1)$$

Có

$$BM^2 = \frac{BC^2 + BD^2}{2} - \frac{CD^2}{4} \leq 1 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow BM \leq \frac{1}{2} \sqrt{4-x^2}$$

$$\text{Tương tự ta cũng có } AM \leq \frac{1}{2} \sqrt{4-x^2}$$

$$\text{Mà } BK \leq BM \Rightarrow BK \leq \frac{1}{2} \sqrt{4-x^2} \quad (2), \quad AH \leq AM \leq \frac{1}{2} \sqrt{4-x^2} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) suy ra } V_{ABCD} \leq \frac{1}{24} x (4-x^2); x \in (0;1]$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{1}{24} x \sqrt{4-x^2}, x \in (0;1] \text{ là hàm đồng biến nên } f(x) \leq f(1) = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{ABCD} \leq \frac{1}{8}$$

(Dấu bằng xảy ra khi hai tam giác ACD, BCD là hai tam giác đều có cạnh bằng 1 và H, K

trùng với M . Khi đó $AB = \sqrt{\frac{3}{2}} > 1$)

Chọn B

Câu 22: Khối tứ diện $ABCD$ có $AB = x (x > 1)$ và có tất cả các cạnh còn lại có độ dài không vượt quá 1. Tính x khi thể tích của khối tứ diện đó lớn nhất.

A. $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

B. $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

C. $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

D. $x = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Tứ diện $ABCD$ có $AB = x > 1$, các cạnh còn lại đều không lớn hơn 1. Đặt $CD = a, y \in (0;1]$

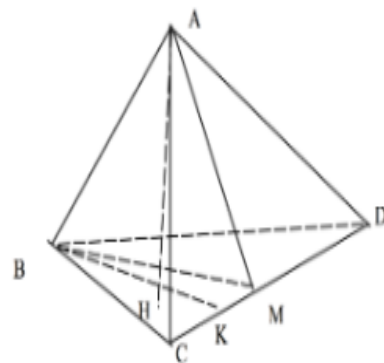
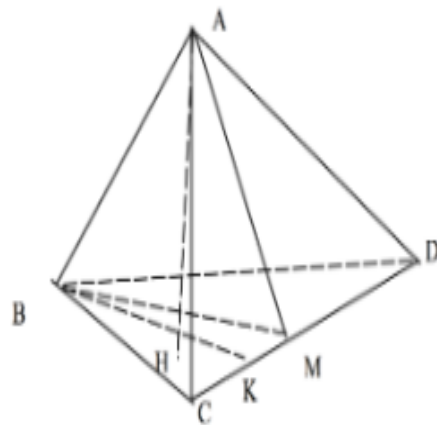
Gọi M là trung điểm của BC , K là hình chiếu của B lên CD và H là hình chiếu của A trên $mp(BCD)$. Khi

$$\text{đó ta có } V_{ABCD} = \frac{1}{3} AH \cdot S_{BCD} = \frac{1}{6} y \cdot BK \cdot AH \quad (1)$$

Có

$$BM^2 = \frac{BC^2 + BD^2}{2} - \frac{CD^2}{4} \leq 1 - \frac{y^2}{4} \Rightarrow BM \leq \frac{1}{2} \sqrt{4-y^2}$$

$$\text{Tương tự ta cũng có } AM \leq \frac{1}{2} \sqrt{4-y^2}$$



$$\text{Mà } BK \leq BM \Rightarrow BK \leq \frac{1}{2}\sqrt{4-y^2} \quad (2), \quad AH \leq AM \leq \frac{1}{2}\sqrt{4-y^2} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) suy ra } V_{ABCD} \leq \frac{1}{24}y(4-y^2); y \in (0;1]$$

$$\text{Xét hàm số } f(y) = \frac{1}{24}y\sqrt{4-y^2}, y \in (0;1] \text{ là hàm đồng biến nên } f(y) \leq f(1) = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{ABCD} \leq \frac{1}{8}$$

Dấu bằng xảy ra khi hai tam giác ACD, BCD là hai tam giác đều có cạnh bằng 1 và H, K

$$\text{trùng với } M. \text{ Khi đó } x = AB = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Câu 23: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 4a$, $CD = x$ và tất cả các cạnh còn lại bằng $3a$. Tìm x để khối tứ diện $ABCD$ có thể tích lớn nhất.

A. $x = 2\sqrt{10}a$.

B. $x = \sqrt{10}a$.

C. $x = 6a$.

D. $3a$.

Lời giải

Chọn B

Gọi I là trung điểm AB , H là hình chiếu của C lên mặt (ABD) ,

K là trung điểm CD .

$$DI = \sqrt{BD^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{9a^2 - 4a^2} = a\sqrt{5} = CI.$$

$$IK = \sqrt{DI^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2} = \sqrt{5a^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{20a^2 - x^2}}{2}.$$

$$CH = \frac{IK \cdot CD}{ID} = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{20a^2 - x^2}}{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{x\sqrt{20a^2 - x^2}}{2a\sqrt{5}}.$$

Thể tích khối tứ diện lớn nhất khi CH lớn nhất.

$$x\sqrt{20a^2 - x^2} \leq \frac{x^2 + 20a^2 - x^2}{2} = 10a^2 \Rightarrow CD \leq a\sqrt{5}.$$

$$\text{Đạt được khi } x^2 = 20a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = a\sqrt{10}.$$

Câu 24: Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB = x$, tất cả các cạnh còn lại bằng nhau và bằng $2-x$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của x để khối tứ diện đã cho có thể tích bằng $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

A. 1.

B. 6.

C. 4

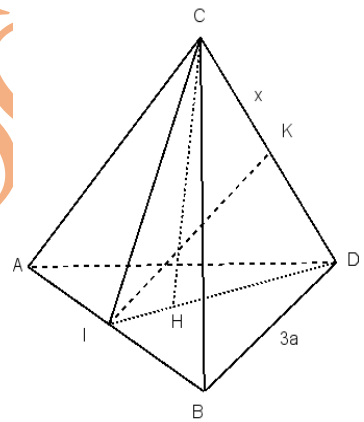
D. 2.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} CA = CB = CD = 2-x \\ \cos \widehat{ACB} = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2CA \cdot CB} = 1 - \frac{x^2}{2(2-x)^2}, \cos \widehat{BCD} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{(2-x)^3}{6} \sqrt{1 + 2 \left(1 - \frac{x^2}{2(2-x)^2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2(2-x)^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}.$$



$$= \frac{x(2-x)}{6} \sqrt{\frac{x^2-6x+6}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x \approx 0,275842 \end{cases}$$

Câu 25: Xét khối tứ diện $ABCD$ có $AB = x$ và các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = \sqrt{6}$.

B. $x = \sqrt{14}$.

C. $x = 3\sqrt{2}$.

D. $x = 3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi E là trung điểm của AB , ta có các tam giác CAB, DAB lần lượt cân tại C, D nên $CE \perp AB, DE \perp AB \Rightarrow AB \perp (ECD)$. Suy ra

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} AB \cdot S_{CDE}$$

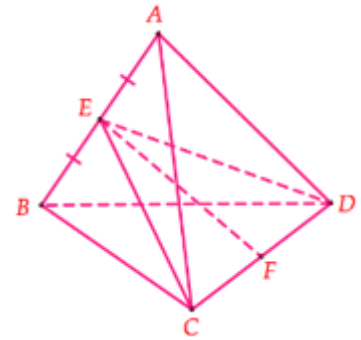
$$\text{Ta có } CE = DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{12 - \frac{x^2}{4}}$$

Gọi F là trung điểm của CD , ta có $EF \perp CD$ và

$$FE = \sqrt{DE^2 - DF^2} = \sqrt{12 - \frac{x^2}{4} - \frac{12}{4}} = \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}}, \text{ Suy ra}$$

$$S_{CDE} = \frac{1}{2} FE \cdot CD = \sqrt{3} \cdot \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}}$$

$$\text{Khi đó } V = \frac{\sqrt{3}}{3} x \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{6} x \sqrt{36 - x^2} \leq \frac{\sqrt{3}}{6} \left(\frac{x^2 + 36 - x^2}{2} \right) = 3\sqrt{3}.$$



Câu 26: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = a\sqrt{2}$, $SC = a\sqrt{3}$. Thể tích lớn nhất của khối chóp là

A. $a^3\sqrt{6}$.

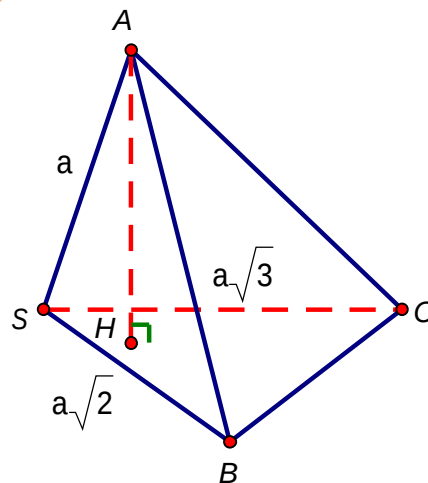
B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Chọn D



$$\text{Gọi } H \text{ là hình chiếu của } A \text{ lên } (SBC) \Rightarrow V = \frac{1}{3} AH \cdot S_{SBC}.$$

Ta có $AH \leq SA$; dấu “=” xảy ra khi $AS \perp (SBC)$.

$$S_{SBC} = \frac{1}{2} SB \cdot SC \cdot \sin \widehat{SBC} \leq \frac{1}{2} SB \cdot SC, \text{ dấu "=" xảy ra khi } SB \perp SC.$$

$$\text{Khi đó, } V = \frac{1}{3} AH \cdot S_{SBC} \leq \frac{1}{3} AS \cdot \frac{1}{2} SB \cdot SC = \frac{1}{6} SA \cdot SB \cdot SC.$$

Dấu "=" xảy ra khi SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau.

$$\text{Suy ra thể tích lớn nhất của khối chóp là } V = \frac{1}{6} SA \cdot SB \cdot SC = \frac{a^3 \sqrt{6}}{6}.$$

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = 2$, đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = 1$. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{5}{8}$.

B. $\frac{5}{4}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC) . Khi đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Hay H là trung điểm BC .

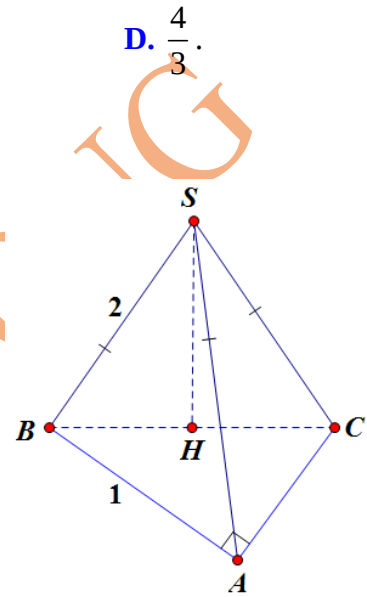
$$\text{Đặt } AC = x. \text{ Khi đó } BC = \sqrt{x^2 + 1}, SH = \frac{\sqrt{15 - x^2}}{2}.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{6} \cdot SH \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{15 - x^2}}{2} \cdot x.$$

Ta có:

$$\leq \frac{1}{12} \cdot \frac{(15 - x^2 + x^2)}{2} = \frac{5}{8}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } 15 - x^2 = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{15}{2}}.$$



Câu 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = BA = BC = 1$. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$?

A. $\frac{1}{6}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

C. $\frac{1}{8}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC) . Khi đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Vì $\triangle ABC$ cân tại B nên H thuộc đường trung trực BM của AC .

Đặt $AC = x$.

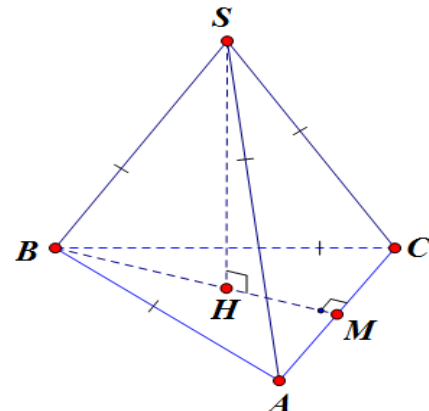
Ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{4} \text{ và}$$

$$R = \frac{abc}{4S_{ABC}} = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Mặt khác chiều cao của khối chóp:

$$SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{SB^2 - R^2} = \sqrt{\frac{3 - x^2}{4 - x^2}}.$$



$$\text{Thể tích khối chóp: } V = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{3-x^2}{4-x^2}} \cdot \frac{x\sqrt{4-x^2}}{4} = \frac{\sqrt{x^2(3-x^2)}}{12} \leq \frac{1}{8}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = 3 - x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Cách 2:

Gọi K, I lần lượt là hình chiếu của C lên (SAB) và SB .

$$\text{Thể tích khối chóp: } V = \frac{1}{3} \cdot CK \cdot S_{SAB} \leq \frac{1}{3} \cdot CI \cdot S_{SAB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{8}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi hình chiếu của C lên (SAB) trùng trung điểm SB .

Câu 29: (KINH MÔN II LẦN 3 NĂM 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ đều, có cạnh bên bằng 1. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{4}{27}$.

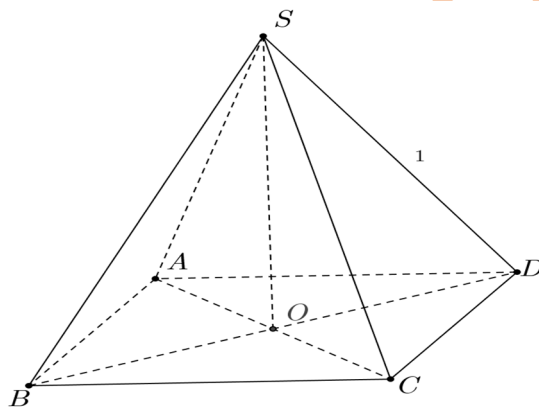
B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{4\sqrt{3}}{27}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn C



• Gọi O là giao điểm của AC và $BD \Rightarrow SO \perp (ABCD) \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD}$.

Đặt $AB = x$ ($x > 0$).

$$\Rightarrow BD = x\sqrt{2} \Rightarrow OD = \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Tam giác } SOD \text{ vuông tại } O \Rightarrow SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} = \frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2}}.$$

$$\Rightarrow x \in (0; \sqrt{2}) \text{ (do } SO > 0)$$

$$\text{Khi đó: } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2}} \cdot x^2 = \frac{\sqrt{2}}{6} x^2 \cdot \sqrt{2-x^2}.$$

• Xét hàm số $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{2-x^2}$ với $x \in (0; \sqrt{2})$.

$$f'(x) = 2x \cdot \sqrt{2-x^2} + x^2 \cdot \frac{-x}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{2x(2-x^2) - x^3}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{-3x^3 + 4x}{\sqrt{2-x^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (l) \\ x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} & (l) \\ x = \frac{2\sqrt{3}}{3} & (TM) \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên

x	0	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{4\sqrt{6}}{9}$	0

Vậy thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{4\sqrt{6}}{9} = \frac{4\sqrt{3}}{27}$.

Câu 30: (KINH MÔN HẢI DƯƠNG 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = x$, các cạnh còn lại của hình chóp đều bằng 2. Giá trị của x để thể tích khối chóp đó lớn nhất là

A. $2\sqrt{2}$.

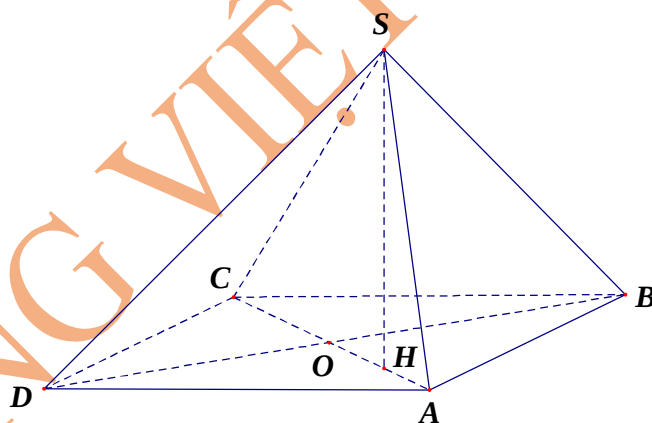
B. $\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{7}$.

D. $\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn D



Vì $SB = SC = SD = 2$ nên hình chiếu H của S lên $ABCD$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Mà tứ giác $ABCD$ có các cạnh bằng nhau nên tứ giác $ABCD$ là hình thoi, do đó $H \in AC$; $\triangle SBD$; $\triangle CBD$; $\triangle ABD$ có các cạnh tương ứng bằng nhau nên $SO = AO = CO$
 $\Rightarrow \triangle SAC$ vuông tại S .

$$\Rightarrow AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = \sqrt{x^2 + 4}.$$

$$\triangle SAC \text{ vuông tại } S, \text{ có đường cao } SH \text{ nên } \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SC^2} \Rightarrow SH = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}}.$$

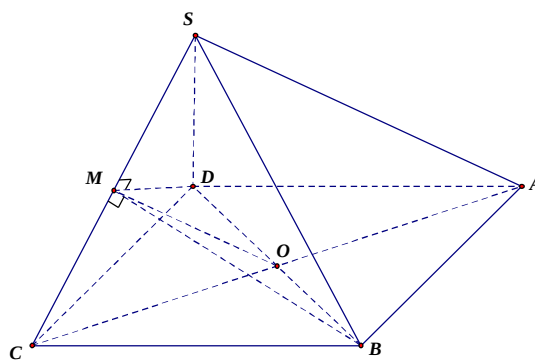
$$\text{Lại có } OB^2 + OC^2 = BC^2 \Rightarrow OB^2 = BC^2 - \frac{AC^2}{4} = 4 - \frac{4 + x^2}{4} = \frac{12 - x^2}{4} \Rightarrow OB = \frac{\sqrt{12 - x^2}}{2}.$$

$$S_{ABCD} = AC \cdot OB = \frac{1}{2} \sqrt{(x^2 + 4)(12 - x^2)}.$$

$$\text{Ta có } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot x \cdot \sqrt{12 - x^2} \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2 + 12 - x^2}{2} = 2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = 12 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \sqrt{6}$.

Cách 2.



Theo giả thiết ta có hai tam giác SBC , SCD là hai tam giác đều bằng nhau.

Gọi M là trung điểm của SC suy ra $\begin{cases} BM \perp MC \\ DM \perp MC \end{cases} \Rightarrow MC \perp (MBD)$.

Ta có $V_{S.ABCD} = 2.V_{S.BCD} = 4.V_{C.MBD}$.

Ta lại có $V_{C.MBD} = \frac{1}{3}.MC.S_{\triangle MBD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} MB.MD.\sin \widehat{BMD} = \frac{1}{2} \sin \widehat{BMD}$,
 $(MC = 1, MB = MD = \sqrt{3})$.

Do đó để $V_{S.ABCD}$ lớn nhất $\Leftrightarrow V_{C.MBD}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \sin \widehat{BMD} = 1 \Leftrightarrow \widehat{BMD} = 90^\circ$.

Xét $\triangle MBD$ vuông tại M , khi đó $x = SA = 2.MO = BD = \sqrt{MD^2 + MB^2} = \sqrt{6}$.

Câu 31: (CỤM TRẦN KIM HÙNG - HÙNG YÊN NĂM 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Biết $SA = x$ với $(0 < x < 2\sqrt{3})$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng 2. Tìm x để thể tích của khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất?

A. 2.

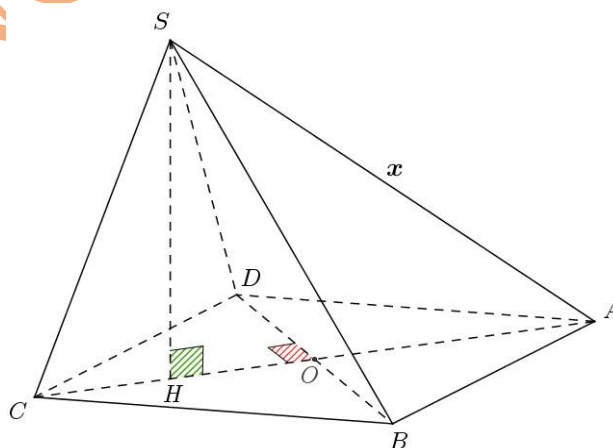
B. $2\sqrt{2}$.

C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

D. $\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm hình thoi $ABCD$ và H là hình chiếu vuông góc của S lên AC

Ta có $\triangle ABD = \triangle CBD = \triangle SBD$ (c - c - c) $\Rightarrow SO = OA = OC = \frac{1}{2} AC$

Mà SO là trung tuyến của $\triangle SAC$ nên $\triangle SAC$ vuông tại S .

Lại có $\left. \begin{array}{l} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (ABCD) \perp (SAC), (1)$

Và $(SAC) \cap (ABCD) = AC; SH \perp AC, (2).$

Từ (1) và (2) ta có $SH \perp (ABCD).$

Trong ΔSAC vuông tại S có $AC = \sqrt{x^2 + 4}; \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4} \Rightarrow SH = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}}.$

Trong ΔOAB vuông tại O có $OB = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{3 - \frac{x^2}{4}}.$

Thể tích hình chóp là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot 2 \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot AC \cdot OB$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}} \cdot \sqrt{x^2 + 4} \cdot \sqrt{3 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{3} \sqrt{x^2(12 - x^2)} \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2 + 12 - x^2}{2} = 2.$$

$V_{S.ABCD}$ lớn nhất bằng 2 khi và chỉ khi $x^2 = 12 - x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{6}.$

Câu 32: (CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG QUẢNG NAM LẦN 2 NĂM 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Một mặt phẳng không qua S và cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q thỏa mãn $\overline{SA} = 2\overline{SM}, \overline{SC} = 3\overline{SP}$. Tính tỉ số $\frac{SB}{SN}$ khi biểu

thức $T = \left(\frac{SB}{SN}\right)^2 + 4\left(\frac{SD}{SQ}\right)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $\frac{SB}{SN} = \frac{11}{2}.$

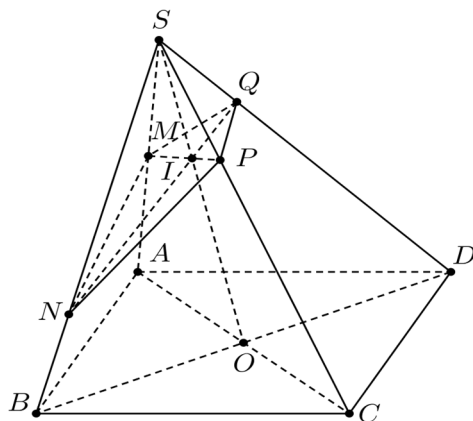
B. $\frac{SB}{SN} = 5.$

C. $\frac{SB}{SN} = 4.$

D. $\frac{SB}{SN} = \frac{9}{2}.$

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$, gọi $I = MP \cap AC$. Lấy điểm $N \in SB$, $NI \cap SD = Q$. Do đáy $ABCD$ là hình bình hành nên ta chứng minh được hệ thức sau:

$$\frac{SA}{SM} + \frac{SC}{SP} = \frac{SB}{SN} + \frac{SD}{SQ} \quad (1).$$

Đặt $x = \frac{SB}{SN}, y = \frac{SD}{SQ}$ với $x > 0; y > 0$. Theo bài ta được $x + y = 2 + 3 = 5$.

Theo bài, ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x^2 + 4y^2$ với $x > 0, y > 0$ và $x + y = 5$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta được:

$5^2 = \left(1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 2y\right)^2 \leq \left(1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)(x^2 + 4y^2)$ suy ra $x^2 + 4y^2 \geq 20$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ

$$\text{khi } \begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{2y}{\frac{1}{2}} \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 20 đạt được khi $x = 4$, $y = 1$ hay $\frac{SB}{SN} = 4$.

Câu 33: (Ba Đình Lần 2) Một kim tự tháp Ai Cập có hình dạng là một khối chóp tứ giác đều có độ dài cạnh bên là một số thực dương không đổi. Gọi α là góc giữa cạnh bên của kim tự tháp và mặt đáy. Khi thể tích của kim tự tháp lớn nhất, tính $\sin \alpha$.

A. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

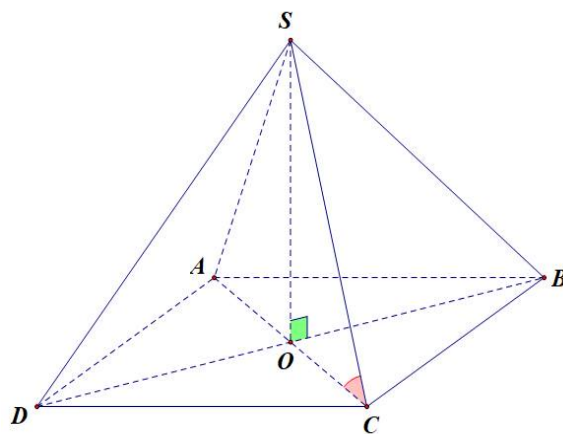
B. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



* Đặt $SC = a$ với $a > 0$.

* $\begin{cases} SO \perp (ABCD) \\ SC \cap (ABCD) = C \end{cases}$ suy ra $\widehat{SCO} = \alpha$.

* $OC = a \cdot \cos \alpha$; $SO = a \cdot \sin \alpha$.

* $AC = 2OC = 2a \cdot \cos \alpha$; $AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2} \cdot \cos \alpha$.

* $S_{ABCD} = AB^2 = 2a^2 \cdot \cos^2 \alpha$.

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{2}{3} a^3 \cdot \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \frac{2}{3} a^3 \cdot \sin \alpha \cdot (1 - \sin^2 \alpha)$$

* Xét hàm $y = t(1 - t^2)$ với $\begin{cases} t = \sin \alpha \\ 0 < t < 1 \end{cases}$

* Lập bảng biến thiên ta tìm được $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ thì hàm số y đạt giá trị lớn nhất.

Câu 34: (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và

$BC = 2x$ (trong đó a là hằng số và x thay đổi thuộc khoảng $\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$). Tính thể tích lớn nhất

$V_{\max}$ của hình chóp $S.ABC$

A. $\frac{a^3}{8}$.

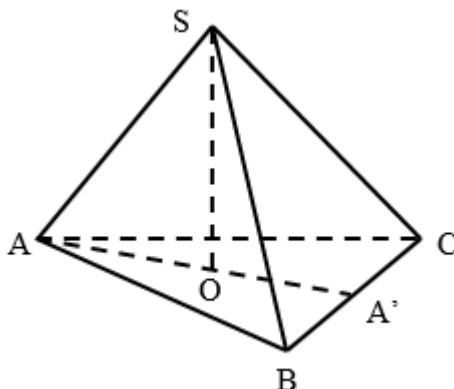
B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

D. $\frac{a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) .

Vì $SA = SB = SC$ nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Tam giác ABC cân tại A . Gọi A' là trung điểm của BC . Khi đó AA' là đường trung trực của tam giác ABC nên điểm O nằm trên đường thẳng AA' .

$$\text{Ta có: } AA' = \sqrt{AB^2 - BA'^2} = \sqrt{a^2 - x^2} \text{ nên } S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AA' = \frac{1}{2} 2x \sqrt{a^2 - x^2} = x \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$\text{Lại có: } S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R} \Rightarrow OA = R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{ABC}} = \frac{a^2 \cdot 2x}{4x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$\text{Trong tam giác vuông } SAO, \text{ ta có: } SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{4(a^2 - x^2)}} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{3a^2 - 4x^2}{(a^2 - x^2)}}.$$

$$\text{Thể tích } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \frac{a}{2} \sqrt{\frac{3a^2 - 4x^2}{a^2 - x^2}} \cdot x \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a}{12} \cdot 2x \sqrt{3a^2 - 4x^2}.$$

$$\text{Mặt khác: } 2x \sqrt{3a^2 - 4x^2} \leq \frac{4x^2 + 3a^2 - 4x^2}{2} = \frac{3a^2}{2}.$$

$$\text{Do đó: } V_{S.ABC} \leq \frac{a}{12} \cdot \frac{3}{2} a^2 = \frac{a^3}{8}. \text{ Vậy } V_{\max} = \frac{a^3}{8} \text{ khi } 2x = \sqrt{3a^2 - 4x^2} \Leftrightarrow x = a \sqrt{\frac{3}{8}}.$$

Câu 35: (THPT Sơn Tây Hà Nội 2019) Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích $V = \frac{1}{6}$, góc $\widehat{ACB} = 45^\circ$ và

$$AD + BC + \frac{AC}{\sqrt{2}} = 3. \text{ Hỏi độ dài cạnh } CD ?$$

A. $2\sqrt{3}$.

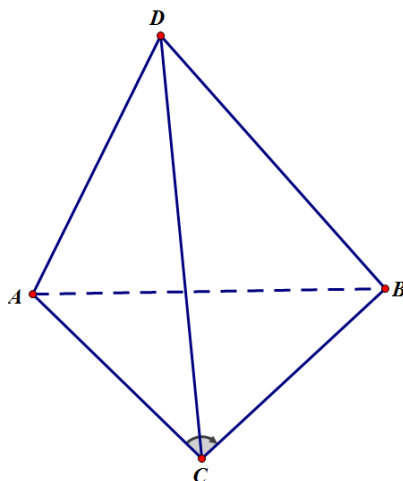
B. $\sqrt{3}$.

C. $\sqrt{2}$.

D. 2.

Lời giải

Chọn B



$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot d(D, (ABC)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CB \cdot \sin 45^\circ \cdot d(D, (ABC))$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot CA \cdot CB \cdot d(D, (ABC)) \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{CA \cdot CB \cdot AD}{\sqrt{2}} \quad (1).$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho 3 số dương AD , BC , $\frac{AC}{\sqrt{2}}$, ta có $\frac{AC}{\sqrt{2}} \cdot BC \cdot AD \leq \left(\frac{\frac{AC}{\sqrt{2}} + BC + AD}{3} \right)^3$.

$$\text{Do đó, } V \leq \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{\frac{AC}{\sqrt{2}} + BC + AD}{3} \right)^3 = \frac{1}{6} \quad (2).$$

Mặt khác ta có $V = \frac{1}{6}$, do đó để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì từ (1) và (2), đẳng thức phải xảy

$$\text{ra, tức là } \begin{cases} DA \perp (ABC) \\ \frac{AC}{\sqrt{2}} = BC = AD = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CD = \sqrt{AC^2 + DA^2} \\ BC = 1, AD = 1, AC = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow CD = \sqrt{3}.$$

Câu 36: (Cụm THPT Vũng Tàu) Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 2. Trên đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm M sao cho $AM = x$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của C lên AB, MB . Đường thẳng qua E, F cắt d tại N . Xác định x để thể tích khối tứ diện $BCMN$ nhỏ nhất.

A. $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

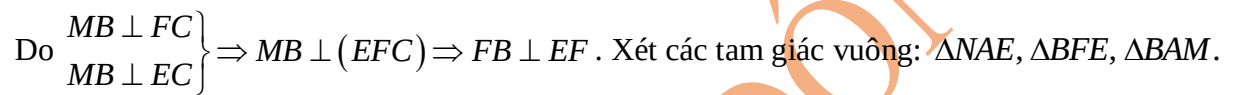
B. $x = 1$.

C. $x = 2$.

D. $x = \sqrt{2}$.

Lời giải

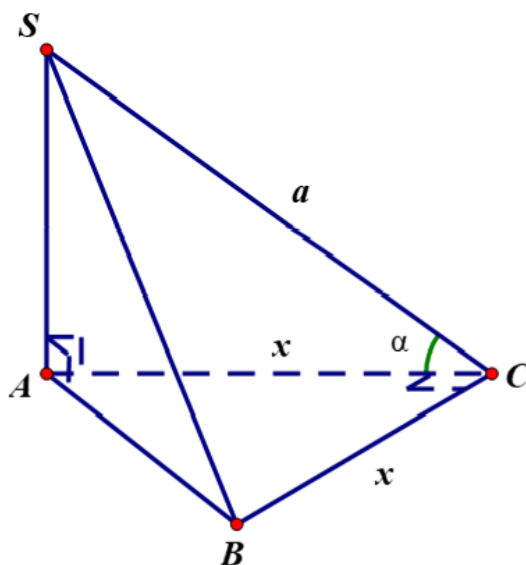
Chọn D


$$V_{BCMN} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot (AM + AN) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^2 \sqrt{3}}{4} \cdot (AM + AN) \geq \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{AM \cdot AN} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 37: (CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3) Cho hình chóp $S.ABC$, trong đó $SA \perp (ABC)$, $SC = a$ và đáy ABC là tam giác vuông cân tại đỉnh C . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) . Khi thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất thì $\sin 2\alpha$ bằng

- ## Lời giải

Chọn D



Đặt $AC = BC = x$, $SA = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Ta có thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 = \frac{1}{6} \sqrt{a^2 x^4 - x^6}$.

Xét hàm số $f(x) = a^2 x^4 - x^6$ với $0 < x < a$. $f'(x) = 4a^2 x^3 - 6x^5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{a\sqrt{6}}{3} \end{cases}$.

	x	0	$\frac{a\sqrt{6}}{3}$	a
	$f'(x)$	+	0	-
	$f(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên, ta có thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi

$$x = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \text{ Khi đó } \sin \alpha = \frac{SA}{SC} = \frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cos \alpha = \frac{AC}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Vậy } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 38: (Chuyên Sơn La Lần 3 năm 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = x$, các cạnh còn lại của hình chóp đều bằng a . Để thể tích khối chóp lớn nhất thì giá trị x bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

B. $\frac{a}{2}$.

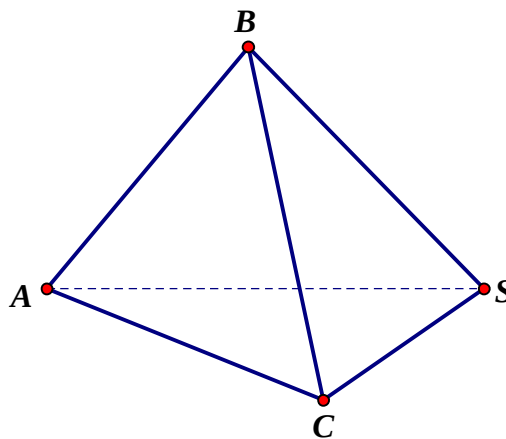
C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. a .

Lời giải

Chọn A

Cách 1:



Đặt $\alpha = \widehat{ABS}$; $\beta = \widehat{ABC} = 60^\circ$; $\gamma = \widehat{CBS} = 60^\circ$.

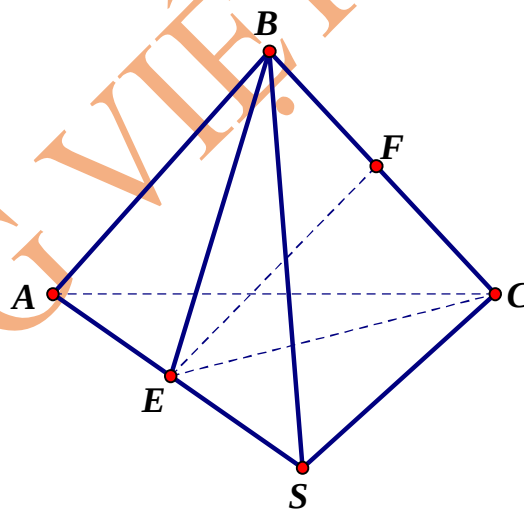
Ta có

$$V_{B.SAC} = \frac{BA \cdot BC \cdot BS}{6} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} = \frac{a^3}{6} \sqrt{\frac{1}{2} - \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha}$$

$V_{B.SAC}$ đạt GTLN khi $\frac{1}{2} - \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha$ đạt GTLN $\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{4}$.

Với $\cos \alpha = \frac{1}{4}$ ta được $x = \sqrt{BA^2 + BS^2 - 2BA \cdot BS \cdot \cos \alpha} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Cách 2:



Gọi E, F lần lượt là trung điểm SA và BC .

Vì $\triangle BAS$ và $\triangle CAS$ lần lượt cân tại B và C nên $\begin{cases} BE \perp SA \\ CE \perp SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (BEC)$

Ta có

$$BE = CE = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}}$$

$$EF = \frac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2}$$

$$\text{Suy ra } S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2} BC \cdot EF = \frac{a\sqrt{3a^2 - x^2}}{4}.$$

$$\text{Vậy } V_{SABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\triangle BEC} = \frac{1}{3} x \frac{a\sqrt{3a^2 - x^2}}{4} \leq \frac{a}{12} \frac{x^2 + (3a^2 - x^2)}{2} = \frac{a^3}{8}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } x = \sqrt{3a^2 - x^2} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C , $SA = AB = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC . Tìm thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp $S.AHK$.

A. $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

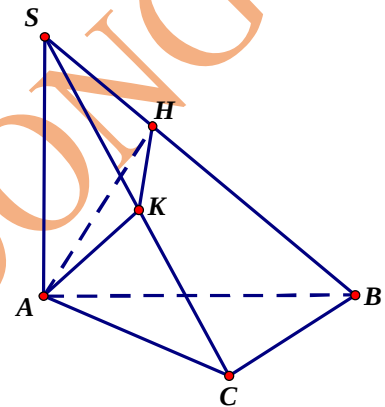
Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } AC = x \Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{4a^2 - x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } V_{SABC} &= \frac{1}{6} \cdot SA \cdot BC \cdot AC = \frac{1}{6} \cdot 2a \cdot x \sqrt{4a^2 - x^2} \\ &= \frac{ax\sqrt{4a^2 - x^2}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vì vậy } V_{S.AHK} &= \frac{SH}{SB} \cdot \frac{SK}{SC} V_{S.ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SA^2}{SC^2} \cdot \frac{ax\sqrt{4a^2 - x^2}}{3} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{a^3 x \sqrt{4a^2 - x^2}}{4a^2 + x^2} \leq \frac{a^3\sqrt{2}}{6} \Rightarrow V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}. \end{aligned}$$



Câu 40: Cho tam giác ABC vuông cân tại B , $AC = 2$. Trên đường thẳng qua A vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm M, N khác phía với mặt phẳng (ABC) sao cho $AM \cdot AN = 1$. Tìm thể tích nhỏ nhất của khối tứ diện $MNBC$?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{12}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

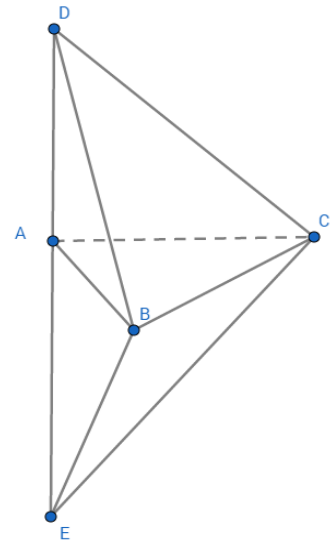
Lời giải

Chọn D

Tam giác ABC vuông cân tại B ,

$$AC = 2 \Rightarrow AB = BC = \sqrt{2}.$$

Ta có



$$V_{MNBC} = \frac{1}{3} (AM + AN) \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} (AM + AN) \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{3} (AM + AN)$$

Sử dụng BĐT cauchy ta có $AM + AN \geq 2\sqrt{AM \cdot AN} = 2 \Rightarrow V_{MNBC} \geq \frac{2}{3}$.

Câu 41: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA = 1$. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$ là?

- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{12}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{12}$. D. $\frac{1}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi O là tâm của tam giác đều ABC . Gọi $R = OA = x$ ($0 < x < 1$)

Ta tính được

$$SO = \sqrt{SA^2 - R^2} = \sqrt{1 - x^2}$$

Cạnh của tam giác đều ABC là

$$a = 2R \sin 60^\circ = \sqrt{3}x \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}a^2 \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SO \cdot S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \sqrt{1 - x^2}$$

Vậy

$$= \frac{\sqrt{3}}{8} \sqrt{x^4(1 - x^2)} = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{x^4 - x^6}$$

Cách 1: Dùng Cauchy: Có

$$1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + 1 - x^2 \geq 3\sqrt{\frac{1}{4}x^4(1 - x^2)} \Rightarrow x^4(1 - x^2) \leq \frac{4}{27} \Rightarrow V_{S.ABC} \leq \frac{1}{6}.$$

Cách 2: Dùng hàm $f(x) = x^4 - x^6$ ($0 < x < 1$) $\Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 6x^5$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Dùng

bảng biến thiên thì $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ khi đó $\max_{0 < x < 1} f(x) = \frac{4}{27} \Rightarrow V_{S.ABC} \leq \frac{1}{6}$

Câu 42: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh C và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SC = a$, $\widehat{SCA} = \varphi$. Xác định góc φ để thể tích khối chóp $SABC$ lớn nhất.

- A. $\varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$ B. $\varphi = \arcsin \frac{2}{\sqrt{7}}$
C. $\varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}$ D. $\varphi = 3 \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$

Lời giải

$$BC = AC = a \cos \varphi; SA = a \sin \varphi$$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{6} \cdot AC \cdot BC \cdot SA = \frac{1}{6}a^3 \sin \varphi \cos^2 \varphi$$

$$= \frac{1}{6}a^3 \sin \varphi (1 - \sin^2 \varphi)$$

Xét hàm số: $f(x) = x - x^3$ trên khoảng $(0; 1)$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 1 - 3x^2, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Từ đó ta thấy trên khoảng $(0; 1)$ hàm số $f(x)$ liên tục và có một điểm cực trị là điểm cực đại, nên tại đó hàm số đạt GTLN hay:

$$\max_{x \in (0;1)} f(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ hay } \varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}, \left(\forall 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$$

Chọn A

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB=1$, cạnh bên $SA=1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$). Ký hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\widehat{MAN} = 45^\circ$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là?

A. $\frac{\sqrt{2}+1}{9}$. B. $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}+1}{6}$. D. $\frac{\sqrt{2}-1}{9}$.

Lời giải**Chọn B**

Đặt $DM = x, BN = y$ ta có

$$\tan 45^\circ = \tan(\widehat{DAM} + \widehat{BAN}) = \frac{\tan \widehat{DAM} + \tan \widehat{BAN}}{1 - \tan \widehat{DAM} \cdot \tan \widehat{BAN}} = \frac{x+y}{1-xy}. \text{ Suy ra } y = \frac{1-x}{1+x}.$$

$$\text{và } AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = \sqrt{x^2 + 1}, AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{1+y^2} = \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{2(x^2+1)}}{x+1}.$$

$$\text{Vì vậy } V = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\triangle AMN} = \frac{1}{6} SA \cdot AM \cdot AN \sin 45^\circ = f(x) = \frac{x^2+1}{6(x+1)} \geq f(\sqrt{2}-1) = \frac{\sqrt{2}-1}{3}.$$

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB=1$, cạnh bên $SA=1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$). Ký hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\widehat{MAN} = 60^\circ$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là

A. $\frac{2-\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{2+\sqrt{3}}{9}$. C. $\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$. D. $\frac{2\sqrt{3}-3}{9}$.

Lời giải**Chọn C**

Đặt $DM = x, BN = y$. Ta có:

$$\tan 60^\circ = \tan(\widehat{DAM} + \widehat{BAN}) = \frac{\tan \widehat{DAM} + \tan \widehat{BAN}}{1 - \tan \widehat{DAM} \cdot \tan \widehat{BAN}} = \frac{x+y}{1-xy} \Rightarrow y = \frac{1-\sqrt{3}x}{\sqrt{3}+x}.$$

$$AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = \sqrt{x^2 + 1}, AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{y^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{3}x}{\sqrt{3}+x}\right)^2 + 1}.$$

$$\text{Vì vậy } V_{S.AMN} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\triangle AMN} = \frac{1}{6} \cdot SA \cdot AM \cdot AN \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}(x^2+1)}{6(\sqrt{3}+x)}.$$

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{\sqrt{3}(x^2+1)}{6(\sqrt{3}+x)} \geq f(2-\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}.$$

Câu 45: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc, I là tâm nội tiếp tam giác ABC . Mặt phẳng (P) thay đổi qua I , cắt các tia SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C' . Biết $SA=SB=\sqrt{2}$, $SC=\sqrt{7}$. Hỏi thể tích của khối chóp $S.A'B'C'$ có giá trị nhỏ nhất là?

A. $\frac{243\sqrt{7}}{256}$. B. $\frac{\sqrt{7}}{3}$. C. $\frac{81\sqrt{7}}{256}$. D. $\frac{27\sqrt{7}}{256}$.

Lời giải**Chọn A**

- Ta có

$$V_{S.A'B'C'} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot V_{S.ABC}$$

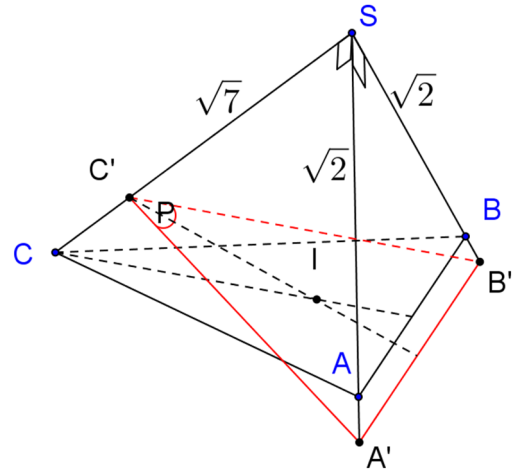
- Ta có $SA = SB = \sqrt{2}, SC = \sqrt{7}$

$$\Rightarrow V_{S.ACB} = \frac{1}{6} SA \cdot SB \cdot SC = \frac{1}{3} \sqrt{7}$$

- Từ $SA = SB = \sqrt{2}, SC = \sqrt{7} \Rightarrow AB = 2, BC = 3 = AC$

- Do I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên:

$$BC \cdot \vec{IA} + CA \cdot \vec{IB} + AB \cdot \vec{IC} = \vec{0}$$



$$\Rightarrow BC(\vec{SA} - \vec{SI}) + CA(\vec{SB} - \vec{SI}) + AB(\vec{SC} - \vec{SI}) = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{SI} &= \frac{BC}{AB+BC+CA} \vec{SA} + \frac{CA}{AB+BC+CA} \vec{SB} + \frac{AB}{AB+BC+CA} \vec{SC} \\ &= \frac{BC}{AB+BC+CA} \cdot \frac{SA}{SA'} \vec{SA'} + \frac{CA}{AB+BC+CA} \cdot \frac{SB}{SB'} \vec{SB'} + \frac{AB}{AB+BC+CA} \cdot \frac{SC}{SC'} \vec{SC'} \end{aligned}$$

- Do bốn điểm A', B', C', I đồng phẳng nên

$$\frac{BC}{AB+BC+CA} \cdot \frac{SA}{SA'} + \frac{CA}{AB+BC+CA} \cdot \frac{SB}{SB'} + \frac{AB}{AB+BC+CA} \cdot \frac{SC}{SC'} = 1$$

- Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{BC}{AB+BC+CA} \cdot \frac{SA}{SA'} + \frac{CA}{AB+BC+CA} \cdot \frac{SB}{SB'} + \frac{AB}{AB+BC+CA} \cdot \frac{SC}{SC'} \\ &\geq 3 \sqrt[3]{\frac{AB \cdot BC \cdot CA}{(AB+BC+CA)^3} \cdot \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1 \geq 3 \sqrt[3]{\frac{AB \cdot BC \cdot CA}{(AB+BC+CA)^3} \cdot \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'}} \Rightarrow \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \geq \frac{27 \cdot AB \cdot BC \cdot CA}{(AB+BC+CA)^3}$$

$$\cdot V_{S.A'B'C'} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} V_{S.ABC} \geq \frac{27 \cdot AB \cdot BC \cdot CA}{(AB+BC+CA)^3} V_{S.ABC} = \frac{27 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3}{(2+3+3)^3} \cdot \frac{1}{3} \sqrt{7} = \frac{81\sqrt{7}}{256}$$

Dấu bằng xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{BC}{AB+BC+CA} \cdot \frac{SA}{SA'} + \frac{CA}{AB+BC+CA} \cdot \frac{SB}{SB'} + \frac{AB}{AB+BC+CA} \cdot \frac{SC}{SC'} = 1 \\ \frac{BC}{AB+BC+CA} \cdot \frac{SA}{SA'} = \frac{CA}{AB+BC+CA} \cdot \frac{SB}{SB'} = \frac{AB}{AB+BC+CA} \cdot \frac{SC}{SC'} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{SB}{SB'} = \frac{SA}{SA'} = \frac{8}{9} \\ \frac{SC}{SC'} = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SA' = SB' = \frac{9}{8} \sqrt{2} \\ SC' = \frac{3}{4} \sqrt{7} \end{cases}$$

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh bằng 1, $SO \perp (ABCD)$ và $SC = 1$. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ là?

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{27}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{27}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } OC = x \Rightarrow OB = \sqrt{BC^2 - OC^2} = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow S_{ABCD} = 4S_{OBC} = 2x\sqrt{1 - x^2}$$

$$\text{và } SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{1 - x^2} \text{ vì vậy}$$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{2x(1 - x^2)}{3} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2x^2(1 - x^2)(1 - x^2)}}{3} \leq \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\left(\frac{2x^2 + 1 - x^2 + 1 - x^2}{3}\right)^3} \leq \frac{4\sqrt{3}}{27}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } 2x^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Câu 47: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB = 1$, cạnh bên $SA = 1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Kí hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\widehat{MAN} = 45^\circ$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là?

- A. $\frac{\sqrt{2} + 1}{9}$ B. $\frac{\sqrt{2} - 1}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2} + 1}{6}$ D. $\frac{\sqrt{2} - 1}{9}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $DM = x$, $BN = y$ ta có

$$\tan 45^\circ = \tan(\widehat{DAM} + \widehat{BAN}) = \frac{\tan \widehat{DAM} + \tan \widehat{BAN}}{1 - \tan \widehat{DAM} \cdot \tan \widehat{BAN}} = \frac{x + y}{1 - xy}. \text{ Suy ra } y = \frac{1 - x}{1 + x}.$$

$$\text{và } AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = \sqrt{x^2 + 1}, AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{1 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{2(x^2 + 1)}}{x + 1}.$$

$$\text{Vì vậy } V = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\triangle AMN} = \frac{1}{6} SA \cdot AM \cdot AN \sin 45^\circ = f(x) = \frac{x^2 + 1}{6(x + 1)} \geq f(\sqrt{2} - 1) = \frac{\sqrt{2} - 1}{3}.$$

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB = 1$, cạnh bên $SA = 1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Kí hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\widehat{MAN} = 30^\circ$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là?

- A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{27}$ D. $\frac{4}{27}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $DM = x$, $BN = y$. Ta có:

$$\tan 30^\circ = \tan(\widehat{DAM} + \widehat{BAN}) = \frac{\tan \widehat{DAM} + \tan \widehat{BAN}}{1 - \tan \widehat{DAM} \cdot \tan \widehat{BAN}} = \frac{x + y}{1 - xy} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3} - x}{1 + \sqrt{3}x}.$$

$$AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = \sqrt{x^2 + 1}, AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{y^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3} - x}{1 + \sqrt{3}x}\right)^2 + 1}.$$

$$\text{Vì vậy } V_{S.AMN} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\triangle AMN} = \frac{1}{6} \cdot SA \cdot AM \cdot AN \cdot \sin 30^\circ = \frac{x^2 + 1}{6(\sqrt{3}x + 1)}.$$

Ta có $f(x) = \frac{x^2 + 1}{6(\sqrt{3}x + 1)} \geq f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{9}$.

- Câu 49:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB=1$, cạnh bên $SA=1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$). Ký hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\widehat{MAN} = 60^\circ$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là
- A. $\frac{2-\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{2+\sqrt{3}}{9}$. C. $\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$. D. $\frac{2\sqrt{3}+3}{9}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $DM = x, BN = y$. Ta có:

$$\tan 60^\circ = \tan(\widehat{DAM} + \widehat{BAN}) = \frac{\tan \widehat{DAM} + \tan \widehat{BAN}}{1 - \tan \widehat{DAM} \cdot \tan \widehat{BAN}} = \frac{x+y}{1-xy} \Rightarrow y = \frac{1-\sqrt{3}x}{\sqrt{3}+x}.$$

$$AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = \sqrt{x^2 + 1}, AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{y^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{3}x}{\sqrt{3}+x}\right)^2 + 1}.$$

Vì vậy $V_{S.AMN} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\triangle AMN} = \frac{1}{6} \cdot SA \cdot AM \cdot SN \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}(x^2 + 1)}{6(\sqrt{3} + x)}.$

Ta có $f(x) = \frac{\sqrt{3}(x^2 + 1)}{6(\sqrt{3} + x)} \geq f(2 - \sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3} - 3}{3}.$

- Câu 50:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành với $AD = 4a$. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{6}$. Tìm thể tích $V_{\max}$ của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V_{\max} = \frac{8a^3}{3}$. B. $V_{\max} = \frac{4\sqrt{6}a^3}{3}$. C. $V_{\max} = 8a^3$. D. $V_{\max} = 4\sqrt{6}a^3$.

Lời giải

Chọn A

Do $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{6}$ nên hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng ($ABCD$) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đáy, do vậy $ABCD$ là một hình chữ nhật và H là giao điểm của AC và BD .

Đặt $AB = x > 0$ ta có:

$$AC = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{x^2 + 16a^2}, SH = \sqrt{SA^2 - \frac{AC^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{8a^2 - x^2}.$$

Vì vậy $S.ABCD = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot AB \cdot AD = \frac{2ax\sqrt{8a^2 - x^2}}{3}.$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$x\sqrt{8a^2 - x^2} \leq \frac{x^2 + 8a^2 - x^2}{2} = 4a^2 \Rightarrow V \leq \frac{8a^3}{3} \Rightarrow V_{\max} = \frac{8a^3}{3}.$$

- Câu 51:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và thể tích bằng V . Gọi M, N lần lượt là các điểm di động trên các cạnh AB và AD sao cho $\frac{AB}{AM} + 2\frac{AD}{AN} = 4$. Gọi V' là thể tích khối chóp $S.MBCDN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của V' .

A. $\frac{1}{4}V$. B. $\frac{2}{3}V$. C. $\frac{3}{4}V$. D. $\frac{1}{3}V$.

Lời giải

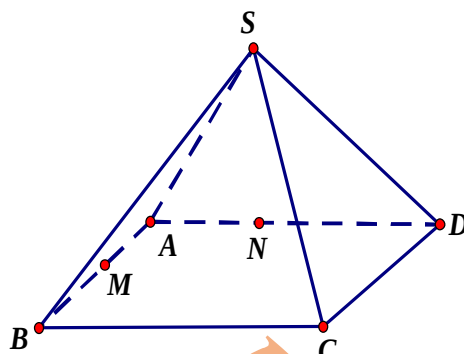
Chọn B

$$\text{Ta có } V' = \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AD}\right) V = \left(1 - \frac{xy}{2}\right) V$$

$$\text{Trong đó } \begin{cases} x = \frac{AM}{AB}, y = \frac{AN}{AD} & 0 < x, y < 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2x}{4x-1} \quad \left(\frac{1}{4} < x < 1\right)$$

$$\text{Vì vậy } V' = \left(1 - \frac{x^2}{4x-1}\right) V \geq \frac{2}{3} V \Rightarrow V'_{\min} = \frac{2}{3} V.$$



Câu 52: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các điểm A', C' thỏa mãn $\overrightarrow{SA'} = \frac{1}{3} \overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC'} = \frac{1}{5} \overrightarrow{SC}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $A'C'$ cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D' và đặt $k = \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị nhỏ nhất của k là?

A. $\frac{1}{60}$.

B. $\frac{1}{30}$.

C. $\frac{3}{4} V$.

D. $\frac{\sqrt{15}}{16}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } V = V_{S.ABCD}, \text{ ta có } \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'}$$

$$= 3 + 5 = 8$$

$$\text{Mặt khác } \frac{V_{S.A'B'C'}}{\frac{1}{2}V} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{15} x$$

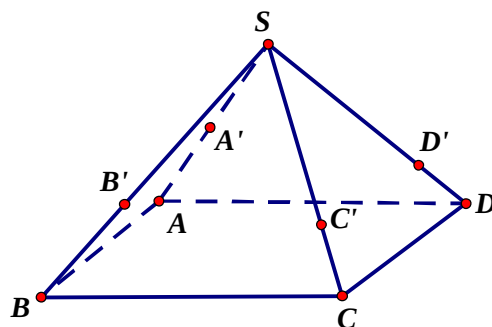
$$\Rightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{30} x V$$

$$\frac{V_{S.A'C'D'}}{\frac{1}{2}V} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{15} y \Rightarrow V_{S.A'C'D'} = \frac{1}{30} y V$$

$$\Rightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{30} x V$$

$$\text{Do đó } k = \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{30} (x + y), \text{ trong đó } x = \frac{SB'}{SB}, y = \frac{SD'}{SD}$$

$$\text{Và } (x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq 4 \Rightarrow x + y \geq \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow k \geq \frac{1}{60}.$$



Câu 53: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và góc giữa SC với mặt phẳng (SAB) bằng 30° . Gọi M là điểm di động trên cạnh CD và H là hình chiếu vuông góc của S trên đường thẳng BM . Khi điểm M di động trên cạnh CD thì thể tích của khối chóp $SABH$ đạt giá trị lớn nhất bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Lời giảiTa có góc giữa SC và mặt phẳng (SAB) là $\widehat{CSB} = 30^\circ$ Trong tam giác SBC có $SB = BC \cdot \cot 30^\circ = a\sqrt{3}$ Trong tam giác SAB có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$ Thể tích khối chóp S.ABH là: $V_{S.ABH} = \frac{1}{3} S_{ABH} SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} HA.HB.a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{6} HA.HB$ Ta có $HA^2 + HB^2 = AB^2 = a^2$ và theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$a^2 = HA^2 + HB^2 \geq 2HA.HB \Rightarrow HA.HB \leq \frac{a^2}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $HA = HB \Leftrightarrow \widehat{ABM} = 45^\circ \Leftrightarrow M \equiv D$

$$\text{Khi đó } V_{S.ABH} = \frac{a\sqrt{2}}{6} HA.HB \leq \frac{a\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Chọn D**Câu 54:** Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có $SA = SB = SC = 2a$. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp S.ABCD.

A. $\frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$

B. $\frac{32\sqrt{3}a^3}{9}$

C. $\frac{4\sqrt{6}a^3}{9}$

D. $\frac{32\sqrt{3}a^3}{27}$

Lời giải**Chọn D**Ta có: $SA = SB = SC = SD \Rightarrow ABCD$ nội tiếp đường tròn bán kính R.

Ta có:

$$h = \sqrt{cb^2 - R^2} = \sqrt{4a^2 - R^2} \text{ và}$$

$$S = \frac{AC.BD \sin(AC, BD)}{2} = \frac{(2R \sin \widehat{ABC})(2R \sin \widehat{BAD}) \sin(AC, BD)}{2} \leq 2R^2$$

$$V = \frac{Sh}{3} = f(R) = \frac{2R^2 \sqrt{4a^2 - R^2}}{3} \leq \max_{(0; 2a)} f(R) = f\left(\frac{2\sqrt{6}a}{3}\right) = \frac{32\sqrt{3}a^3}{27}$$

Câu 55: Khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a. $SA = SB = SC = a$, Cạnh SD thay đổi. Thể tích lớn nhất của khối chóp S.ABCD là:

A. $\frac{a^3}{8}$

B. $\frac{a^3}{4}$

C. $\frac{3a^3}{8}$

D. $\frac{a^3}{2}$

Lời giải**Chọn D**

Gọi $O = AC \cap BD$.

$$\Rightarrow H \in BO.$$

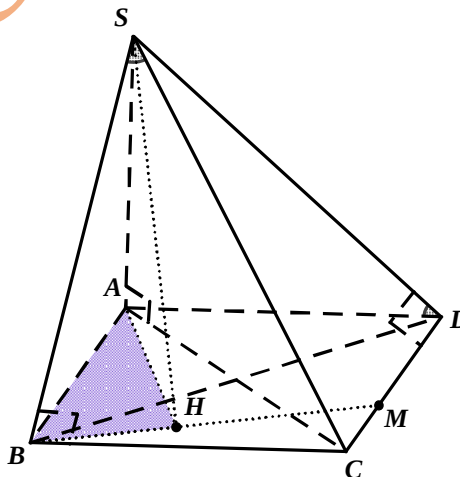
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} OB.AC = \frac{1}{2} x. \frac{\sqrt{4a^2 - x^2}}{2} = \frac{x\sqrt{4a^2 - x^2}}{4}$$

$$SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{4a^2 - x^2}} = \frac{a\sqrt{3a^2 - x^2}}{\sqrt{4a^2 - x^2}}$$

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Chon D

Lời giải



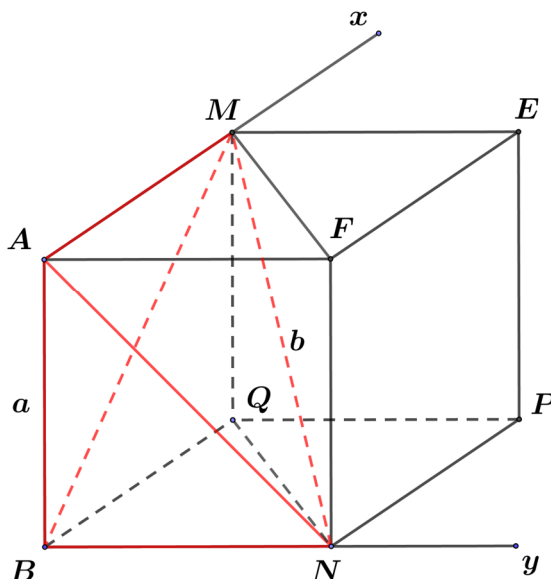
Ta có $\tan \widehat{CSB} = \frac{BC}{SB} \Rightarrow SB = a\sqrt{3}; SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$

Đặt $CM = x, (0 \leq x \leq a) \Rightarrow DM = a - x,$

Ta có

Thể tích của khối chóp $S.ABH$ là

Lời giải



Dựng hình hộp chữ nhật $AMEF.BQPN$ sao cho $M \in Ax, N \in By$. Khi đó MN là đường chéo của hình hộp và $b > a > 0$.

Đặt $AM = m > 0$.

Có tam giác ABM vuông tại A suy ra $BM^2 = AM^2 + AB^2 = m^2 + a^2$.

Lại có tam giác BMN vuông tại B nên $BN = \sqrt{MN^2 - BM^2} = \sqrt{b^2 - m^2 - a^2}$.

Ta có: $V_{ABMN} = V_{M.ABN} = \frac{1}{6} \cdot a \cdot m \cdot \sqrt{b^2 - m^2 - a^2}$.

Đặt $f(m) = m\sqrt{b^2 - m^2 - a^2}$, $m \in \left(0; \sqrt{b^2 - a^2}\right]$.

Có: $f'(m) = \frac{b^2 - a^2 - 2m^2}{\sqrt{b^2 - m^2 - a^2}} \Rightarrow f'(m) = 0 \Rightarrow m = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}$.

Bảng biến thiên:

m	0	$\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}$	$\sqrt{b^2 - a^2}$
$f'(m)$	—	0	—
$f(m)$	—	$\frac{b^2 - a^2}{2}$	—

Vậy ta có: $\max_{\left(0; \sqrt{b^2 - a^2}\right]} f(x) = \frac{b^2 - a^2}{2}$ khi $m = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}$.

$\Rightarrow \max V_{ABMN} = \frac{a(b^2 - a^2)}{12}$ khi $m = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}$ hay $AM = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}$.

Nhận xét: Ta có thể đánh giá $V_{\max}$ bằng cách sử dụng bất đẳng thức sau: $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$.

Ta có: $V_{ABMN} = \frac{1}{6} \cdot a \cdot m \cdot \sqrt{b^2 - m^2 - a^2} \leq \frac{a}{6} \cdot \frac{m^2 + (b^2 - m^2 - a^2)}{2}$

$\Leftrightarrow V_{ABMN} \leq \frac{a(b^2 - a^2)}{12}$.

$\Rightarrow \max V_{ABMN} = \frac{a(b^2 - a^2)}{12} \Leftrightarrow m = \sqrt{b^2 - m^2 - a^2} \Leftrightarrow m = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}$ hay $AM = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}$.

Câu 57: (CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH PHÚ YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho x là các số thực dương. Xét các hình chóp $S.ABC$ có cạnh $SA = x$, các cạnh còn lại đều bằng 1. Khi thể tích khối chóp $S.ABC$ có giá trị lớn nhất, giá trị của x bằng.

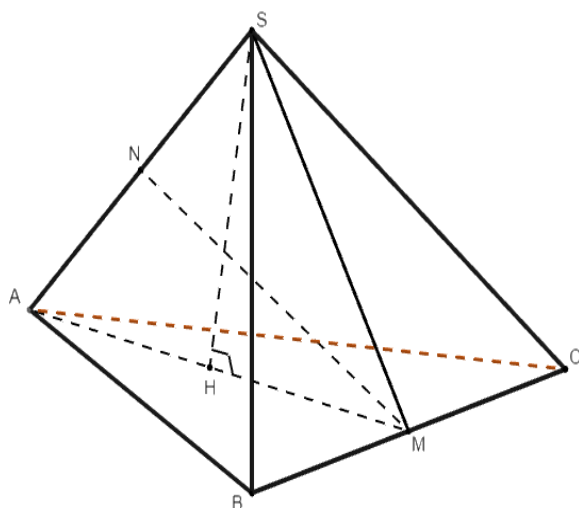
A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. 1.

Lời giải



Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC, SA.

H là hình chiếu vuông góc của S lên AM.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SM \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow (ABC) \perp (SAM) ..$

Mà $SH \perp AM$; $AM = (SAM) \cap (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$

Do $\triangle SBC$; $\triangle ABC$ là hai tam giác đều cạnh bằng 1 nên $SM = AM = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác SMN vuông tại N có $MN = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3-x^2}$; $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

$$SH = \frac{MN \cdot SA}{AM} = \frac{x\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3}}$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{12} \cdot x\sqrt{3-x^2} \leq \frac{1}{12} \cdot \frac{x^2 + 3 - x^2}{2} = \frac{1}{8}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = \sqrt{3-x^2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 58: (THPT QUANG TRUNG ĐÔNG ĐA HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích V . Điểm P là trung điểm của SC , một mặt phẳng qua AP cắt hai cạnh SD và SB lần lượt tại M và N . Gọi V_1 là thể tích khối chóp $S.AMPN$.

Giá trị lớn nhất của $\frac{V_1}{V}$ thuộc khoảng nào sau đây ?

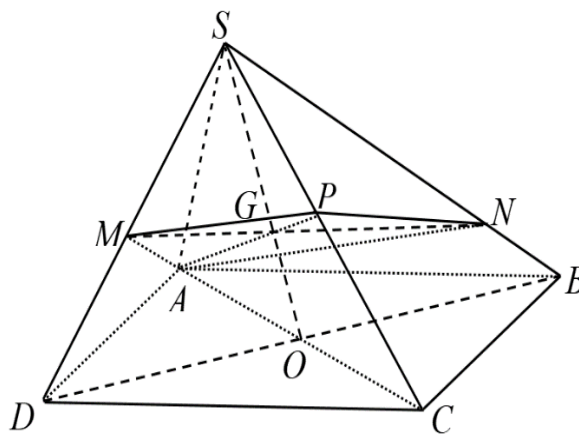
A. $\left(0; \frac{1}{5}\right)$.

B. $\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right)$.

C. $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

D. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$, $G = AP \cap SO$, suy ra G là trọng tâm tam giác SAC .

Gọi (P) là mặt phẳng qua AP cắt hai cạnh SD và SB lần lượt tại M và N .

Để thấy: $\begin{cases} (P) \cap (SBD) = MN \\ (P) \cap (SAC) = AP \\ (SBD) \cap (SAC) = SO \end{cases} \Rightarrow MN, AP, SO \text{ đồng quy hay } M, N, G \text{ thẳng hàng.}$

Đặt: $x = \frac{SM}{SD}$ ($0 < x \leq 1$) và $y = \frac{SN}{SB}$ ($0 < y \leq 1$).

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{1}{2} \left(\frac{V_{S.AMP}}{V_{S.ADC}} + \frac{V_{S.ANP}}{V_{S.ABP}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SD} \cdot \frac{SP}{SC} + \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} \right) = \frac{1}{4} (x + y).$$

$$\text{Từ tỷ lệ: } \frac{S_{\Delta SMN}}{S_{\Delta SBD}} = \frac{1}{2} \left(\frac{S_{\Delta SMG}}{S_{\Delta SDO}} + \frac{S_{\Delta SNG}}{S_{\Delta SBO}} \right) \Leftrightarrow \frac{SM}{SD} \cdot \frac{SN}{SB} = \frac{1}{2} \left(\frac{SM}{SD} \cdot \frac{SG}{SO} + \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SG}{SO} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{SM}{SD} + \frac{SN}{SB} \right).$$

$$\Rightarrow xy = \frac{1}{3} (x + y). \text{ Lại có: } (x-1)(y-1) \geq 0 \Rightarrow xy - (x+y) + 1 \geq 0.$$

Từ đó suy ra: $-\frac{2}{3}(x+y) + 1 \geq 0$ hay $x+y \leq \frac{3}{2}$. Vậy $\frac{V_1}{V}$ lớn nhất bằng $\frac{3}{8}$.

Câu 59: (Chuyên Hạ Long lần 2-2019) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = x$, $CD = y$, tất cả các cạnh còn lại bằng 2. Khi thể tích tứ diện $ABCD$ là lớn nhất tính xy .

A. $\frac{2}{3}$.

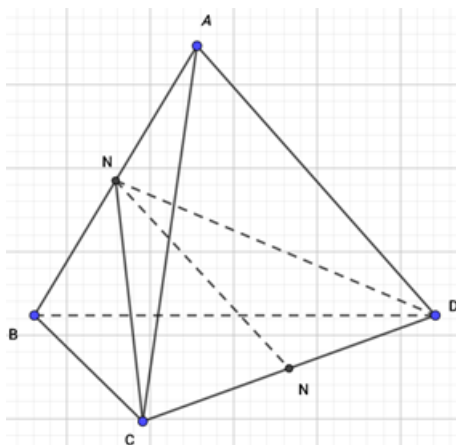
B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{16}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD .

Tam giác ADB, CAB là hai tam giác cân cạnh đáy AB nên $DM \perp AB$ và $CM \perp AB$. Suy ra $AB \perp (MCD)$.

$$V_{ABCD} = V_{B.MCD} + V_{A.MCD} = \frac{1}{3} \cdot BM \cdot S_{MCD} + \frac{1}{3} \cdot AM \cdot S_{MCD} = \frac{x}{3} \cdot S_{MCD}.$$

Tam giác $\triangle ABC = \triangle ABD$ (c.c.c) nên $CM = DM \Rightarrow MN \perp CD$.

$$S_{MCD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot MN = \frac{1}{2} y \cdot \sqrt{MC^2 - CN^2} = \frac{1}{2} y \cdot \sqrt{(BC^2 - BM^2) - CN^2} = \frac{1}{2} y \sqrt{4 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}}$$

$$= \frac{1}{4} y \sqrt{16 - (x^2 + y^2)}.$$

$$V_{ABCD} = \frac{xy}{12} \sqrt{16 - (x^2 + y^2)} \leq \frac{xy}{12} \sqrt{16 - 2xy} = \frac{1}{12} \sqrt{xy \cdot xy \cdot (16 - 2xy)}$$

$$\leq \frac{1}{12} \sqrt{\left(\frac{xy + xy + (16 - 2xy)}{3} \right)^3} = \frac{1}{12} \sqrt{\left(\frac{16}{3} \right)^3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x = y \\ xy = 16 - 2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ xy = \frac{16}{3} \end{cases}$.

Vậy thể tích $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất khi $xy = \frac{16}{3}$.

Câu 60: (Sở Phú Thọ) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA = 2$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB, AD ($AN < AM$) sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC) . Khi thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất thì giá trị của $\frac{1}{AN^2} + \frac{16}{AM^2}$ bằng:

A. $\frac{17}{4}$.

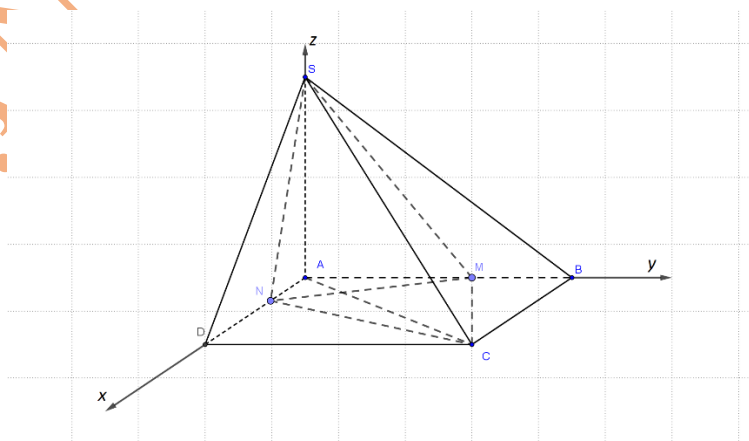
B. 5.

C. $\frac{5}{4}$.

D. 2.

Lời giải

Chọn B



Đặt $AM = x, AN = y$ ($0 < y < x < 2$)

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ tương ứng như hình vẽ. Ta có: $A(0;0;0), S(0;0;2), M(x;0;0), N(0;y;0), C(2;2;0)$.

Ta có: $\overrightarrow{SM} = (x; 0; -2)$, $\overrightarrow{SC} = (2; 2; -2)$, $\overrightarrow{SN} = (0; y; -2)$.

$$\vec{n}_{(SMC)} = [\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SC}] = (4; 2x - 4; 2x).$$

$$\text{Lại có } \vec{n}_{(SNC)} = [\overrightarrow{SN}, \overrightarrow{SC}] = (-2y + 4; -4; -2y)$$

Do $(SMC) \perp (SNC)$ nên $\vec{n}_{(SMC)} \cdot \vec{n}_{(SNC)} = 0$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot (-2y + 4) + (2x - 4) \cdot (-4) + 2x \cdot (-2y) = 0.$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y + xy - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2 + \frac{12}{y+2} \quad (1 \leq y < -2 + 2\sqrt{3})$$

$$\text{Ta có } V_{S.AMNC} = \frac{1}{3} \cdot S_{AMNC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot (S_{AMN} + S_{CMN}) \cdot SA.$$

$$\text{Mà } SA = 2, S_{AMN} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}] \right| = \frac{x \cdot y}{2}, S_{CMN} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CN}] \right| = \frac{2(x+y) - x \cdot y}{2}.$$

$$\text{Suy ra } V_{S.AMNC} = \frac{1}{3} \left(\frac{xy}{2} + \frac{2(x+y) - xy}{2} \right) \cdot 2 = \frac{2}{3} (x+y).$$

Để $V_{S.AMNC}$ đạt giá trị lớn nhất thì $(x+y)$ đạt giá trị lớn nhất.

$$\text{Xét } P = x + y = y - 2 + \frac{12}{y+2}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{y^2 + 2y - y - 4 + 12}{y+2} = \frac{y^2 + y + 8}{y+2}$$

$$P'(y) = \frac{(y+2)(2y+1) - (y^2 + y + 8)}{(y+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow P'(y) = \frac{2y^2 + y + 4y + 2 - y^2 - y - 8}{(y+2)^2} \Leftrightarrow P'(y) = \frac{y^2 + 4y - 6}{(y+2)^2}.$$

$$\Rightarrow P'(y) = 0 \Leftrightarrow y^2 + 4y - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 + \sqrt{10} \\ y = -2 - \sqrt{10} \end{cases}$$

So điều kiện ta nhận $y = -2 + \sqrt{10} \Rightarrow x = 2 + 2\sqrt{10}$.

$$\Rightarrow \underset{[1; -2+2\sqrt{3})}{\text{Max}} P(y) = P(1) = 11 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ (thỏa yêu cầu đề bài).}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{y^2} + \frac{16}{x^2} = 5.$$

Câu 61: (Sở Phú Thọ) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA = 2$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M , N là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB , AD ($AN < AM$) sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC) . Khi thể tích khối

chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của $\frac{1}{AN^2} + \frac{16}{AM^2}$ bằng

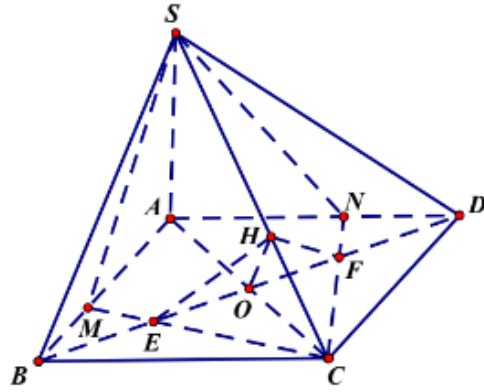
A. $\frac{17}{4}$.

B. 5.

C. $\frac{5}{4}$. D. 2.

Lời giải

Chọn B



Cách 1: Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $D(0;2;0)$, $S(0;0;2)$.

Suy ra $C(2;2;0)$. Đặt $AM = x$, $AN = y$, $x, y \in [0;2]$, $x > y$; suy ra $M(x;0;0)$, $N(0;y;0)$.

$$\overrightarrow{SM} = (x;0;-2), \overrightarrow{SC} = (2;2;-2), \overrightarrow{SN} = (0;y;-2).$$

$$\Rightarrow \vec{n}_1 = [\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SC}] = (4; 2x-4; 2x), \vec{n}_2 = [\overrightarrow{SN}, \overrightarrow{SC}] = (4-2y; -4; -2y).$$

Do $(SMC) \perp (SNC)$ nên $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow 4(4-4y) - 4(2x-4) - 4xy = 0 \Leftrightarrow xy + 2(x+y) = 8$.

$$\Leftrightarrow y = \frac{8-2x}{x+2}, \text{ do } y \leq 2 \text{ nên } \frac{8-2x}{x+2} \leq 2 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

$$S_{AMCN} = S_{ABCD} - S_{BMC} - S_{DNC} = 4 - (2-x) - (2-y) = x+y.$$

$$\text{Do đó } V_{S.AMCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{AMCN} = \frac{2}{3}(x+y) = \frac{2}{3} \left(x + \frac{8-2x}{x+2} \right) = \frac{2}{3} \frac{x^2+8}{x+2}.$$

$$\text{Xét } f(x) = \frac{2}{3} \frac{x^2+8}{x+2} \text{ với } x \in [1;2], f'(x) = \frac{2}{3} \frac{x^2+4x-8}{(x+2)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2 + 2\sqrt{3}; x = -2 - 2\sqrt{3}.$$

Lập BBT ta suy ra $\max_{[1;2]} f(x) = f(1) = f(2) = 2$.

$$\text{Vậy } \max V_{S.AMCD} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \text{ (do } x > y)$$

$$\Rightarrow \frac{16}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{16}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 5.$$

Cách 2: Đặt $AM = x$, $AN = y$ $x, y \in [0;2]$, $x > y$.

Gọi $O = AC \cap DB$; $E = BD \cap CM$; $F = BD \cap CN$.

H là hình chiếu vuông góc của O trên SC , khi đó: $HO = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} SC \perp OH \\ SC \perp BD \end{cases} \Rightarrow SC \perp (HBD) \Rightarrow \begin{cases} SC \perp HE \\ SC \perp HF \end{cases}.$$

Do đó góc giữa (SCM) và (SCN) bằng góc giữa HE và HF . Suy ra $HE \perp HF$.

$$\text{Mặt khác } V_{S.AMCN} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{AMCN} = \frac{2}{3}(x+y).$$

Tính OE , OF :

Ta có: $x > 0$, $y > 0$ và nếu $x \neq 2$, $y \neq 2$ thì gọi K là trung điểm của AM , khi đó:

$$\frac{OE}{EB} = \frac{KM}{MB} = \frac{x}{4-2x} \Rightarrow \frac{OE}{x} = \frac{EB}{4-2x} = \frac{OB}{4-x} \Rightarrow OE = \frac{x\sqrt{2}}{4-x}.$$

$$\text{Tương tự: } OF = \frac{y\sqrt{2}}{4-y}. \text{ Mà } OE \cdot OF = OH^2 \Leftrightarrow (x+2)(y+2) = 12.$$

Nếu $x=2$ hoặc $y=2$ thì ta cũng có $OE \cdot OF = OH^2 \Leftrightarrow (x+2)(y+2) = 12$.

Tóm lại: $(x+2)(y+2) = 12$.

$$\text{Suy ra: } V_{S.AMCN} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{AMCN} = \frac{2}{3}(x+y) = \frac{2}{3}[(x+2)+(y+2)-4] = \frac{2}{3}\left[(x+2) + \frac{12}{x+2} - 4\right].$$

$$\text{Khảo sát hàm số ta được: } \max V_{S.AMCN} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ x=2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \text{ (do } x > y)$$

$$\Rightarrow \frac{16}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{16}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 5.$$

Cách 3. Đặt $AM = m$, $AN = n$ ($0 \leq n < m \leq 2$)

Dựng $AP \perp CM$, $AQ \perp CN$ ($P \in CM$, $Q \in CN$).

$$\text{Ta có } \frac{AP}{BC} = \frac{AM}{CM} \Rightarrow AP = \frac{2m}{\sqrt{4+(2-m)^2}}.$$

$$\text{Tương tự } AQ = \frac{2n}{\sqrt{4+(2-n)^2}}.$$

Trong mặt phẳng (SAP) dựng $AL \perp SP$ ($L \in SP$), $AV \perp SQ$ ($V \in SQ$). Mặt phẳng (ALV) cắt SC tại H .

Dựa vào điều kiện bài toán dễ dàng chứng minh được tứ giác $ALHV$ là hình chữ nhật và $AH \perp SC$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{3}{8} \Rightarrow AH^2 = \frac{8}{3}.$$

$$\frac{1}{AL^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SP^2} = \frac{m^2 - 2m + 4}{2m^2} \Rightarrow AL^2 = \frac{2m^2}{m^2 - 2m + 4} \text{ và } AV^2 = \frac{2n^2}{n^2 - 2n + 4}.$$

Do hình chữ nhật nên

$$AV^2 + AL^2 = AH^2 \Rightarrow \frac{2n^2}{n^2 - 2n + 4} + \frac{2m^2}{m^2 - 2m + 4} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow (mn - m - n + 4)(mn + 2(m+n) - 8) = 0$$

Do $mn - m - n + 4 = mn + 2 - m + 2 - n > 0$ nên $mn + 2(m+n) = 8$.

Do $0 < n < m \leq 2 \Rightarrow (m-2)(n-2) \geq 0 \Leftrightarrow mn - 2(m+n) + 4 \geq 0 \Rightarrow 12 - 4(m+n) \geq 0 \Rightarrow m+n \leq 3$.

$$\text{Ta có: } S_{ANCM} = S_{ABCD} - S_{BMC} - S_{DNC} = 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2-m) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2-n) = m+n.$$

$$\text{Suy ra } V_{S.AMCN} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{AMCN} = \frac{2}{3}(m+n) \leq 2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m=2, n=1$.

Khi đó $\frac{1}{AN^2} + \frac{16}{AM^2} = 5$.

Bài tập tương tự:

Câu 62: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc cạnh BC, BD sao cho (AMN) luôn vuông góc với mặt phẳng (BCD) . Gọi V_1, V_2 lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $ABMN$. Tính $V_1 + V_2$.

A. $\frac{17\sqrt{2}}{216}$.

B. $\frac{17\sqrt{2}}{72}$.

C. $\frac{17\sqrt{2}}{144}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

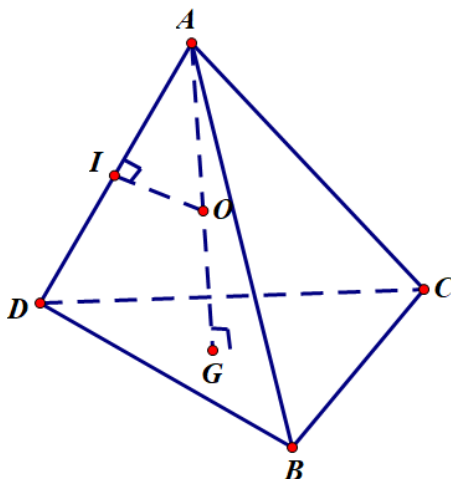
Câu 63: (KÊNH TRUYỀN HÌNH GIÁO DỤC QUỐC GIA VTV7 –2019) Cho tứ diện $ABCD$ có đáy BCD là tam giác đều cạnh a , trọng tâm G . Δ là đường thẳng qua G và vuông góc với (BCD) . A chạy trên Δ sao cho mặt cầu ngoại tiếp $ABCD$ có thể tích nhỏ nhất. Khi đó thể tích của khối $ABCD$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

B. $\frac{a^3}{12}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải**Chọn B**

Gọi I là trung điểm AD , O là giao điểm của mặt phẳng trung trực AD với AG , khi đó O chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Gọi $AD = x; x > 0$. Từ đó ta tính được bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là:

$$R = OA = \frac{AD^2}{2AG} = \frac{x^2}{2\sqrt{x^2 - DG^2}} = \frac{x^2}{2\sqrt{x^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \frac{x^2}{2\sqrt{x^2 - \frac{a^2}{3}}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{a^2}{3} \cdot \frac{1}{x^4}}}.$$

Thể tích khối cầu nhỏ nhất khi R nhỏ nhất hay $y = \frac{1}{x^2} - \frac{a^2}{3} \cdot \frac{1}{x^4}$ lớn nhất. Đặt $t = \frac{1}{x^2}, t > 0$.

$$\Rightarrow y = -\frac{a^2}{3} \cdot t^2 + t. \text{ Đây là tam thức bậc hai đạt giá trị lớn nhất khi } t = \frac{-1}{2 \cdot \left(-\frac{a^2}{3}\right)} = \frac{3}{2a^2}.$$

$$\Rightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{3} \text{ hay } AG = \sqrt{\frac{2a^2}{3} - \frac{a^2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Lúc đó thể tích } ABCD \text{ bằng } V = \frac{1}{3} AG \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{12}.$$

Chú thích:

Đề gốc không cho a là độ dài cạnh nào, nhưng với đáp án B nên dự đoán thêm đề vào a là độ dài cạnh tam giác đều BCD.

Do lúc đầu nhầm tưởng tích thể tích khối cầu ABCD nhỏ nhất nên đặt $AD = x$, bạn đọc có thể đặt $AG = x$ để việc tính toán thuận tiện và nhanh hơn.

Câu 64: (THPT-Chuyên-Sơn-La-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a , $SA = SB = SC = a$. Khi đó thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất bằng

A. $\frac{3a^3}{4}$.

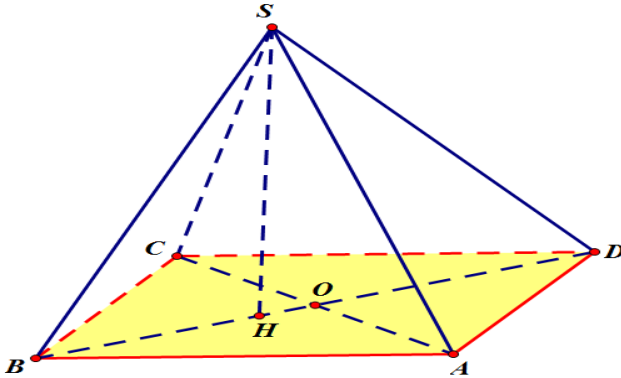
B. $\frac{a^3}{2}$.

C. $\frac{a^3}{4}$.

D. $\frac{3a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp của $\triangle ABC$. Mà $SA = SB = SC$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Đặt $OC = x (a > x > 0) \Rightarrow AC = 2x$.

$$\triangle COB \text{ vuông tại } O \Rightarrow BO = \sqrt{BC^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow BD = 2\sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$\text{Ta có: } S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4BH}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{2} BO \cdot AC = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4BH} \Rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a^2}{4BH} \Leftrightarrow BH = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\triangle SHB \text{ vuông tại } H \Rightarrow SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{4(a^2 - x^2)}} = \frac{a\sqrt{3a^2 - 4x^2}}{2\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Ta có:

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \frac{a\sqrt{3a^2 - 4x^2}}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \left(\frac{1}{2} 4x\sqrt{a^2 - x^2} \right) = \frac{1}{3} ax\sqrt{3a^2 - 4x^2} = \frac{1}{3} a\sqrt{x^2(3a^2 - x^2)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương ta có:

$$x^2 + (3a^2 - x^2) \geq 2\sqrt{x^2(3a^2 - x^2)} \Leftrightarrow 3a^2 \geq 2\sqrt{x^2(3a^2 - x^2)} \Leftrightarrow \frac{a^3}{2} \geq \frac{1}{3} a\sqrt{x^2(3a^2 - x^2)}$$

$$\Leftrightarrow V_{SABCD} \leq \frac{a^3}{2}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x^2 = 3a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất bằng $\frac{a^3}{2}$.

Câu 65: (Thuận Thành 2 Bắc Ninh) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$. Biết rằng $\widehat{ASB} = \widehat{ASD} = 90^\circ$, mặt phẳng chứa AB và vuông góc với $(ABCD)$ cắt SD tại N . Tính thể tích lớn nhất của tứ diện $DABN$.

A. $\frac{2a^3}{3}$.

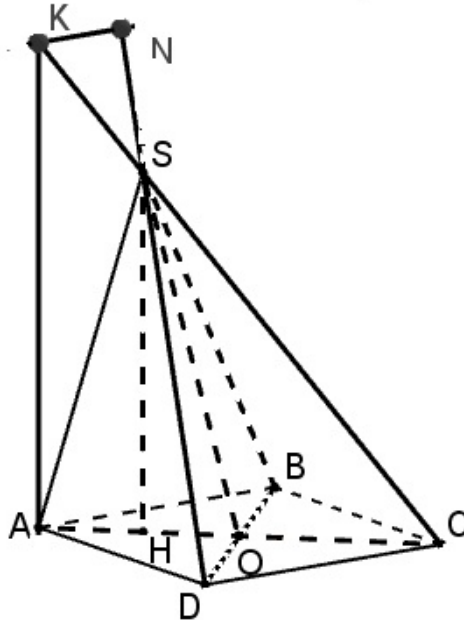
B. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

C. $\frac{4}{3}a^3$.

D. $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Dựng mặt phẳng chứa AB và vuông góc với $(ABCD)$.

Ta có $\widehat{ASB} = \widehat{ASD} = 90^\circ \Rightarrow \triangle SAB = \triangle SAD$ (ch - cv)

$\Rightarrow SB = SD \Rightarrow SO \perp BD$

Mà $AC \perp BD \Rightarrow BD \perp (SAC)$

Trong (SAC) hạ $SH \perp AC \Rightarrow SH \perp (ABCD)$. Khi đó trong (SAC) qua A kẻ đường thẳng song song với SH và cắt SC tại K

Vậy mặt phẳng cần dựng là (KAB)

Dựng giao điểm N của (KAB) và SD

Qua K kẻ đường thẳng song song với $AB // CD$ và cắt SD tại N

*) Tính $V_{D.ABN}$

Ta có $\left. \begin{array}{l} AD \perp AK \left(AK \perp (ABCD) \right) \\ AD \perp AB(gt) \end{array} \right\} \Rightarrow AD \perp (ABN) \Rightarrow V_{D.ABN} = \frac{1}{3} AD \cdot S_{ABN} = \frac{1}{3} 2a \cdot S_{ABN}$

Lại có $S_{ABN} = \frac{1}{2} AB \cdot AK = a \cdot AK \Rightarrow V_{D.ABN} = \frac{2a^2}{3} \cdot AK$

Vậy $V_{D.ABN} \max \Leftrightarrow AK \max$

Đặt $SA = x$ ta có $SB = SD = \sqrt{4a^2 - x^2}$

Lại có trong hình vuông $ABCD$ thì $AC = BD = 2a\sqrt{2} \Rightarrow OA = OB = OC = OD = a\sqrt{2}$

Xét $\triangle SOB$ vuông tại O ta có $SO = \sqrt{2a^2 - x^2}$

Xét $\triangle SAO$ có $SO = \sqrt{2a^2 - x^2}$, $SA = x$, $OA = a\sqrt{2}$ nên $\triangle SAO$ vuông tại S

Áp dụng hệ thức lượng trong ΔSAO vuông tại S , SH là đường cao ta có

$$\begin{cases} SH = \frac{x\sqrt{2a^2 - x^2}}{a\sqrt{2}} \\ OH = \frac{SO^2}{OA} = \frac{2a^2 - x^2}{a\sqrt{2}} \end{cases}$$

Khi đó $CH = OH + OC = \frac{4a^2 - x^2}{a\sqrt{2}}$

Xét ΔKAC có $SH \parallel AK$ nên theo định lý Talet ta có

$$\frac{AK}{SH} = \frac{AC}{CH} \Rightarrow AK = \frac{AC}{CH} \cdot SH = \frac{2\sqrt{2}a \cdot x \cdot \sqrt{2a^2 - x^2}}{4a^2 - x^2}$$

Cách 1: Tìm AK max, coi $a=1$, sử dụng Casio, **mode 7**

$$f(x) = \frac{2\sqrt{2}x \cdot \sqrt{2-x^2}}{4-x^2}$$

start ? 0

end ? $\sqrt{2}$

Ta thấy $f(x)_{\max} = 1 \Rightarrow AK_{\max} = a$

Khi đó $V_{\max} = \frac{2a^3}{3}$. Vậy **chọn đáp án A.**

Cách 2: Coi $a=1$, xét hàm số $f(x) = \frac{x\sqrt{2-x^2}}{4-x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{8-6x^2}{\sqrt{2-x^2}(4-x^2)^2}$ trên $(0; \sqrt{2})$

Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$			$\frac{\sqrt{2}}{4}$		

Vậy $f(x)_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow AK_{\max} = 2a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = a$

Khi đó $V_{\max} = \frac{2a^3}{3}$.

Câu 66: (Sở Điện Biên) Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N là hai điểm nằm trên hai cạnh SC, SD sao cho $\frac{SM}{SC} = \frac{1}{2}$ và $\frac{SN}{SD} = 2$, biết G là trọng tâm của tam giác SAB . Tỷ

số thể tích $\frac{V_{GMND}}{V_{S.ABCD}} = \frac{m}{n}$ (m, n là các số nguyên dương và $(m, n) = 1$). Giá trị của $m+n$ bằng

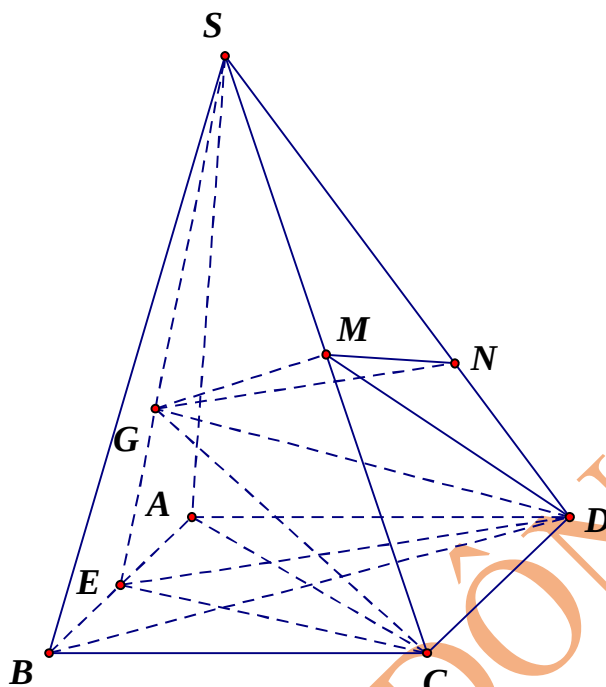
A. 17.

B. 19.

C. 21.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

$$\frac{V_{S.GMN}}{V_{S.GMD}} = \frac{SN}{SD} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{GMND} = \frac{1}{3} V_{S.GMD}.$$

$$\frac{V_{S.GMD}}{V_{S.GCD}} = \frac{SM}{SC} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.GMD} = \frac{1}{2} V_{S.GCD}$$

$$\frac{V_{S.GCD}}{V_{S.ECD}} = \frac{SG}{SE} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Suy ra } V_{GMND} = \frac{1}{3} V_{S.GMD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} V_{S.ECD} = \frac{1}{9} V_{S.ECD} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{18} V_{S.ABCD}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{V_{S.GMND}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{18}. \text{ Do đó } m=1; n=18 \Rightarrow m+n=19.$$

Câu 67: (PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH) Trong các khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ mà khoảng cách từ A đến mp (SBC) bằng $2a$, khối chóp có thể tích nhỏ nhất bằng

A. $2\sqrt{3}a^3$.

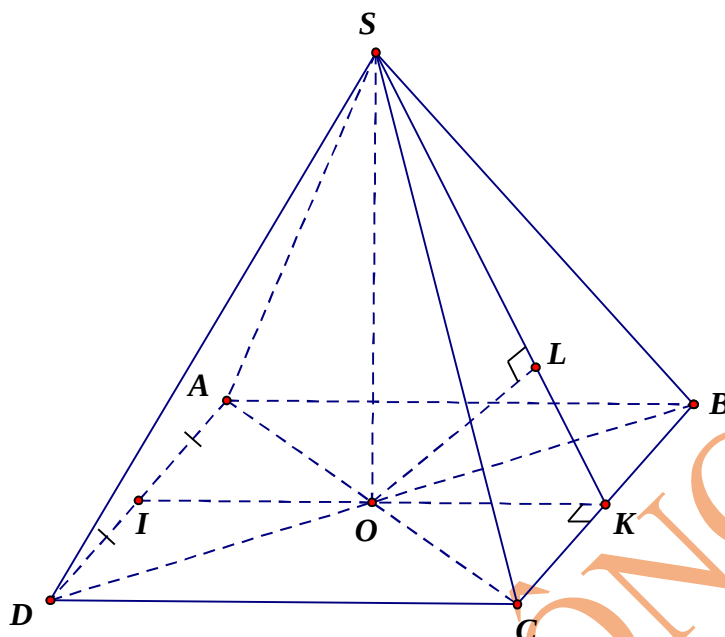
B. $2a^3$.

C. $3\sqrt{3}a^3$.

D. $4\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của AD ; K là trung điểm của CB , O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$. Trong tam giác SOK kẻ đường cao OL .

Ta có $d(O; (SBC)) = OL$ và $d(O; (SBC)) = \frac{1}{2} d(I; (SBC)) = \frac{1}{2} d(A; (SBC)) = a$.

Suy ra $OL = a$.

Đặt $OK = x$, $x > a$ suy ra độ dài cạnh đáy hình chóp đều $S.ABCD$ là $2x$.

Xét trong tam giác SOK vuông tại O có OL là đường cao, ta có

$$\frac{1}{OS^2} = \frac{1}{OL^2} - \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - a^2}{a^2 x^2} \Rightarrow OS = \frac{\sqrt{a^2 x^2}}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ax}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

Suy ra thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3} 4x^2 \cdot \frac{ax}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{4a}{3} \cdot \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{4a}{3} \cdot \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$f'(x) = \frac{4a}{3} \cdot \frac{3x^2 \sqrt{x^2 - a^2} - x^3 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}}{x^2 - a^2} = \frac{4a}{3} \cdot \frac{x^2 (2x^2 - 3a^2)}{(x^2 - a^2) \sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Bảng biến thiên:

x	a	$\frac{a\sqrt{6}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$			

$$\text{Suy ra } \min V = \min_{x \in (a; +\infty)} f(x) = f\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right) = \sqrt{12}a^3 = 2\sqrt{3}a^3$$

Câu 68: PT 47.1. [2H1-3.6-4] (PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH) Trong các khối chóp tam giác đều $S.ABC$ mà khoảng cách từ A đến mp(SBC) bằng $3a$, khối chóp có thể tích nhỏ nhất bằng

A. $6\sqrt{3}a^3$.

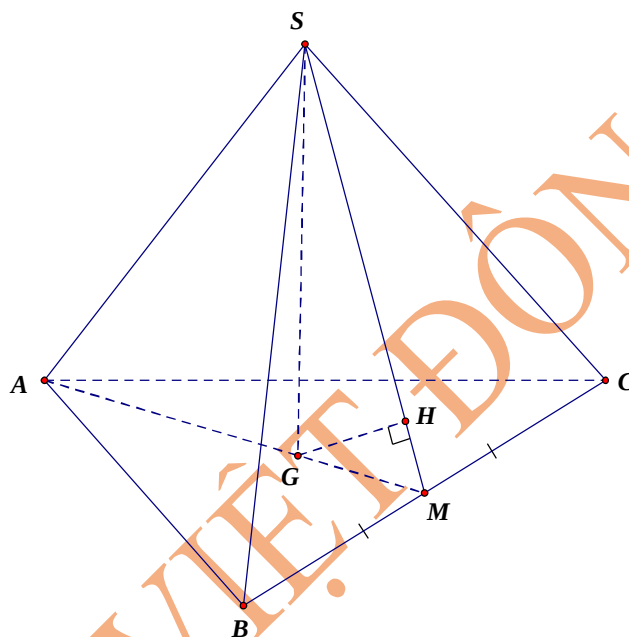
B. $\frac{9a^3}{2}$.

C. $9a^3$.

D. $12\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của BC ; G là trọng tâm tam giác đều ABC . Trong tam giác SGM kẻ đường cao GH .

Ta có $d(G; (SBC)) = GH$ và $d(G; (SBC)) = \frac{1}{3}d(A; (SBC)) = a$. Suy ra $GH = a$.

Gọi $GM = x$, $x > a$ suy ra độ dài cạnh đáy của tam giác ABC là $3x \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2x\sqrt{3}$.

Xét trong tam giác SGM vuông tại G có GH là đường cao, ta có

$$\frac{1}{GS^2} = \frac{1}{GH^2} + \frac{1}{GM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - a^2}{a^2 x^2} \Rightarrow SG = \sqrt{\frac{a^2 x^2}{x^2 - a^2}} = \frac{ax}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\text{Suy ra thể tích khối chóp } S.ABC \text{ là } V = \frac{1}{3} \cdot (2x\sqrt{3})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{ax}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{3}a \cdot \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\text{Đặt } f(x) = \sqrt{3}a \cdot \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$f'(x) = \sqrt{3}a \cdot \frac{3x^2 \sqrt{x^2 - a^2} - x^3 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}}{x^2 - a^2} = \sqrt{3}a \cdot \frac{x^2(2x^2 - 3a^2)}{(x^2 - a^2)\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Bảng biến thiên:

x	a	$\frac{a\sqrt{6}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$			

Suy ra $\text{Min} V = \text{Min}_{x \in (a; +\infty)} f(x) = f\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{9a^3}{2}$

Câu 69: (THPT-Gia-Lộc-Hải-Dương-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA = 2$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi M, N là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB, AD sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC) . Tính tổng $T = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AM^2}$ khi thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $T = \frac{13}{9}$.

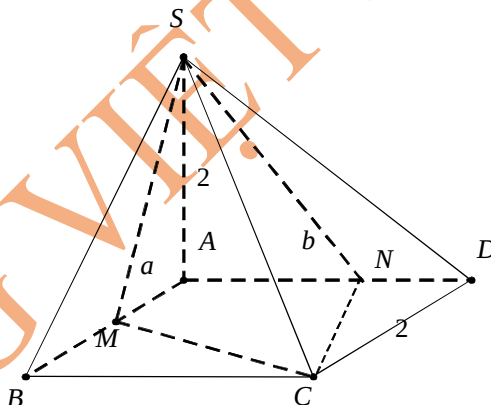
B. $T = 2$.

C. $T = \frac{5}{4}$.

D. $T = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ với:

$$A(0;0;0), S(0;0;2), B(2;0;0), C(2;2;0), D(0;2;0), M(a;0;0), N(0;b;0) \quad (a, b \in [0;2])$$

$$\overrightarrow{AC} = (2;2;0), \overrightarrow{AM} = (a;0;0), \overrightarrow{AN} = (0;b;0)$$

$$\overrightarrow{SC} = (2;2;-2), \overrightarrow{SM} = (a;0;-2), \overrightarrow{SN} = (0;b;-2)$$

$$[\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SC}] = (4; 2a - 4; 2a) \Rightarrow \vec{n}_1 = (2; a - 2; a) \text{ là VTPT của mp}(SCM)$$

$$[\overrightarrow{SN}, \overrightarrow{SC}] = (4 - 2b; -4; -2b) \Rightarrow \vec{n}_2 = (2 - b; -2; -b) \text{ là VTPT của mp}(SCN)$$

$$(SCM) \perp (SCN) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow 2(2 - b) - 2(a - 2) - ab = 0 \Leftrightarrow 8 - 2b - 2a - ab = 0$$

$$\Leftrightarrow 8 - 2a - b(2 + a) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{8 - 2a}{a + 2}$$

$$\text{Mà: } 0 \leq b = \frac{8 - 2a}{a + 2} \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8 - 2a}{a + 2} \geq 0 \\ \frac{8 - 2a}{a + 2} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-2; 4] \\ \frac{4 - 4a}{a + 2} \leq 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -2) \cup [1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow a \in [1; 4]$$

Do đó: $a \in [1; 2]$

$$S_{AMCN} = S_{\triangle AMC} + S_{\triangle ACN} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}] \right| + \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AC}] \right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2a + \frac{1}{2} \cdot 2b = a + b = a + \frac{8-2a}{a+2} = \frac{a^2+8}{a+2}$$

Xét hàm số $f(a) = \frac{a^2+8}{a+2}$ trên $[1; 2]$

$$f'(a) = \frac{a^2+4a-8}{(a+2)^2}; f'(a) = 0 \Leftrightarrow a^2+4a-8=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2-2\sqrt{3} \notin [1; 2] \\ a = -2+2\sqrt{3} \end{cases}$$

Ta có: $f(1) = 3$ khi $a = 1, b = 2$

$f(2) = 3$ khi $a = 2, b = 1$

$f(-2+\sqrt{3}) = -4+4\sqrt{3}$ khi $a = -2+2\sqrt{3}, b = -2+2\sqrt{3}$

Khi đó: $\max_{a \in [0; 2]} f(a) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, b = 1 \\ a = 1, b = 2 \end{cases}$

$V_{S.AMCN} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{AMCN}$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow S_{AMCN}$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, b = 1 \\ a = 1, b = 2 \end{cases}$

* $a = 2, b = 1$

$\overrightarrow{AM} = (2; 0; 0) \Rightarrow AM = 2, \overrightarrow{AN} = (0; 1; 0) \Rightarrow AN = 1$

Vậy: $T = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$.

* $a = 1, b = 2$

$\overrightarrow{AM} = (1; 0; 0) \Rightarrow AM = 1, \overrightarrow{AN} = (0; 2; 0) \Rightarrow AN = 2$

Vậy: $T = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$.

Kết luận: $T = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{5}{4}$.

CỰC TRỊ THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

Câu 70: (KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG) Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Tam giác ABC' có diện tích bằng $3\sqrt{3}$ và nằm trong mặt phẳng tạo với đáy một góc bằng α , $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Tìm α để thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

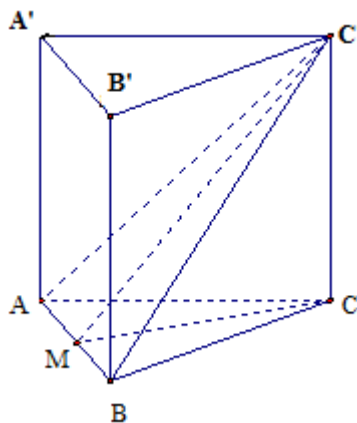
B. $\tan \alpha = \sqrt{6}$.

C. $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

D. $\tan \alpha = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của AB . Khi đó $AB \perp (MCC')$

$\Rightarrow$ Góc giữa (ABC') và (ABC) là $\widehat{CMC'} = \alpha$

Đặt $AB = x$, $x > 0$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}, \quad CC' = CM \cdot \tan \alpha = \frac{x\sqrt{3}}{2} \tan \alpha$$

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} \tan \alpha = \frac{3x^3}{8} \tan \alpha$$

Ta lại có $S_{ABC} = S_{ABC'} \cos \alpha = 3\sqrt{3} \cos \alpha$

$$\Rightarrow \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3} \cos \alpha \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3} \cos \alpha$$

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{8} \cdot 24 \cos \alpha \sqrt{3} \cos \alpha \cdot \tan \alpha = 9\sqrt{3} \sin \alpha \sqrt{\cos \alpha}$$

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = 9\sqrt{3} \sqrt{\cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}$$

Xét hàm số $f(t) = t(1 - t^2) = t - t^3$, $t \in (0; 1)$

Ta có $f'(t) = 1 - 3t^2$

$$\Rightarrow \text{Hàm số đạt giá trị lớn nhất khi } t = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ và } \max f(t) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\text{Khi đó } \max V_{ABC.A'B'C'} = 6 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{2}.$$

Câu 71: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có tổng diện tích của tất cả các mặt là 36, độ dài đường chéo AC' bằng 6. Hỏi thể tích của khối hộp lớn nhất là bao nhiêu?

A. 8.

B. $8\sqrt{2}$.

C. $16\sqrt{2}$.

D. $24\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi chiều dài 3 cạnh của hình hộp chữ nhật lần lượt là: $a, b, c > 0$

Ta có $AC'^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 36$; $S = 2ab + 2bc + 2ca = 36 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 72 \Rightarrow a + b + c = 6\sqrt{2}$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \left(\frac{6\sqrt{2}}{3}\right)^3 = 16\sqrt{2}. \text{ Vậy } V_{\max} = 16\sqrt{2}$$

Câu 72: Cho hình hộp chữ nhật có tổng diện tích các mặt bằng 36 và độ dài đường chéo bằng 6. Tìm thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của hình hộp chữ nhật đã cho?

A. $V_{\max} = 8.$

B. $V_{\max} = 12.$

C. $V_{\max} = 8\sqrt{2}.$

D. $V_{\max} = 6\sqrt{6}.$

Lời giải**Chọn C**

Gọi a, b, c là các kích thước của hình hộp chữ nhật. Ta có

* Độ dài đường chéo $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 6.$

* Tổng diện tích các mặt $S = 2(ab + bc + ca) = 36.$

Ta tìm giá trị lớn nhất của $V = abc.$

Ta có $a + b + c = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + ab + bc + ac = 6\sqrt{2}.$

Mà $(b + c)^2 \geq 4bc \Leftrightarrow (6\sqrt{2} - a)^2 \geq 4(18 - a(b + c)) = 4(18 - a(6\sqrt{2} - a)) \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 4\sqrt{2}.$

Khi đó $V = abc = a(18 - a(6\sqrt{2} - a)) = a^3 - 6\sqrt{2}a^2 + 18a = f(a).$

Khảo sát hàm số $y = f(a)$ trên $[0; 4\sqrt{2}]$.

Ta có $f'(a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ a = 3\sqrt{2} \end{cases}.$

So sánh $f(0) = 0, f(\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}, f(3\sqrt{2}) = 0, f(4\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}$ ta được $V_{\max} = 8\sqrt{2}.$

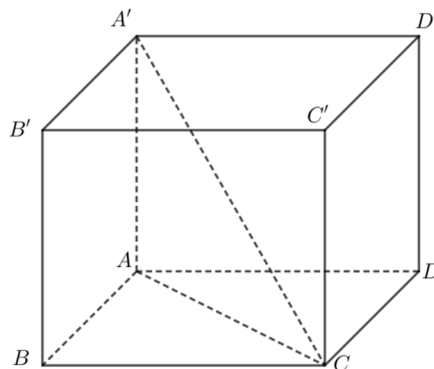
Câu 73: Cho hình hộp chữ nhật có tổng độ dài tất cả các cạnh bằng 32, độ dài đường chéo bằng $2\sqrt{6}$. Tìm thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của hình hộp đã cho.

A. $V_{\max} = 16\sqrt{2}.$

B. $V_{\max} = 16.$

C. $V_{\max} = 6\sqrt{6}.$

D. $V_{\max} = 12\sqrt{3}.$

Lời giải**Chọn B**

Gọi a, b, c là kích thước của hình hộp chữ nhật, ta có

$$\begin{cases} 4(a + b + c) = 32 \\ \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 2\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 8 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 24 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } ab + bc + ca = \frac{(a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2} = 20$$

$$(b+c)^2 \geq 4bc \Leftrightarrow (8-a)^2 \geq 4[20 - a(8-a)] \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 4.$$

$$V = abc = a[20 - a(8-a)] = f(a) = a(a^2 - 8a + 20).$$

$$\text{Suy ra } V_{\max} = \max_{[0;4]} f(a) = f(2) = f(4) = 16$$

Câu 74: Tìm $V_{\max}$ là giá trị lớn nhất của thể tích các khối hộp chữ nhật có đường chéo bằng $3\sqrt{2}cm$ và diện tích toàn phần bằng $18cm^2$.

A. $V_{\max} = 6cm^3$.

B. $V_{\max} = 5cm^3$.

C. $V_{\max} = 4cm^3$.

D. $V_{\max} = 3cm^3$.

Lời giải

Chọn C.

Đặt a, b, c là kích thước của hình hộp thì ta có hệ $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 18 \\ ab + bc + ac = 9 \end{cases}$.

Suy ra $a + b + c = 6$. Cần tìm GTLN của $V = abc$.

Ta có $b + c = 6 - a \Rightarrow bc = 9 - a(b + c) = 9 - a(6 - a)$.

Do $(b+c)^2 \geq 4bc \Rightarrow (6-a)^2 \geq 4[9 - a(6-a)] \Leftrightarrow 0 < a \leq 4$.

Tương tự $0 < b, c \leq 4$.

Ta lại có $V = a[9 - a(6-a)]$. Khảo sát hàm số này tìm được GTLN của V là 4.

Câu 75: Cho hình hộp chữ nhật có tổng diện tích các mặt bằng 36 và độ dài đường chéo bằng 6. Tìm thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của hình hộp chữ nhật đã cho?

A. $V_{\max} = 8$.

B. $V_{\max} = 12$.

C. $V_{\max} = 8\sqrt{2}$.

D. $V_{\max} = 6\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi a, b, c là các kích thước của hình hộp chữ nhật. Ta có

* Độ dài đường chéo $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 6$.

* Tổng diện tích các mặt $S = 2(ab + bc + ca) = 36$.

Ta tìm giá trị lớn nhất của $V = abc$.

Ta có $a + b + c = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac} = 6\sqrt{2}$.

Mà $(b+c)^2 \geq 4bc \Leftrightarrow (6\sqrt{2} - a)^2 \geq 4(18 - a(b+c)) = 4(18 - a(6\sqrt{2} - a)) \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 4\sqrt{2}$.

Khi đó $V = abc = a(18 - a(6\sqrt{2} - a)) = a^3 - 6\sqrt{2}a^2 + 18a = f(a)$.

Khảo sát hàm số $y = f(a)$ trên $[0; 4\sqrt{2}]$.

Ta có $f'(a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ a = 3\sqrt{2} \end{cases}$.

So sánh $f(0) = 0, f(\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}, f(3\sqrt{2}) = 0, f(4\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}$ ta được $V_{\max} = 8\sqrt{2}$.

Câu 76: Cho hình hộp chữ nhật có tổng độ dài tất cả các cạnh bằng 32, độ dài đường chéo bằng $2\sqrt{6}$. Tìm thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của hình hộp đã cho.

A. $V_{\max} = 16\sqrt{2}$.

B. $V_{\max} = 16$.

C. $V_{\max} = 6\sqrt{6}$.

D. $V_{\max} = 12\sqrt{3}$.

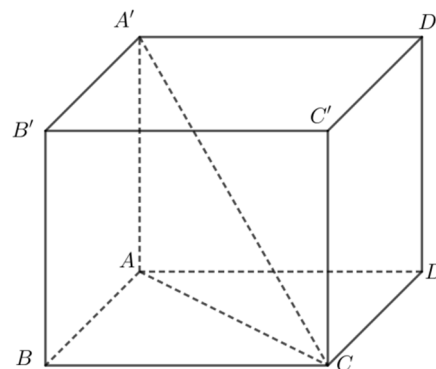
Lời giải

Chọn B

Gọi a, b, c là kích thước của hình hộp chữ nhật, ta có

$$\begin{cases} 4(a+b+c) = 32 \\ \sqrt{a^2+b^2+c^2} = 2\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = 8 \\ a^2+b^2+c^2 = 24 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } ab+bc+ca = \frac{(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)}{2} = 20$$



$$(b+c)^2 \geq 4bc \Leftrightarrow (8-a)^2 \geq 4[20-a(8-a)] \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 4.$$

$$V = abc = a[20-a(8-a)] = f(a) = a(a^2-8a+20).$$

$$\text{Suy ra } V_{\max} = \max_{[0;4]} f(a) = f(2) = f(4) = 16$$

Câu 77: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮK LẮK LẦN X NĂM 2019) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=x$, $AD=1$. Biết rằng góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng 30° . Tìm giá trị lớn nhất $V_{\max}$ của thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$

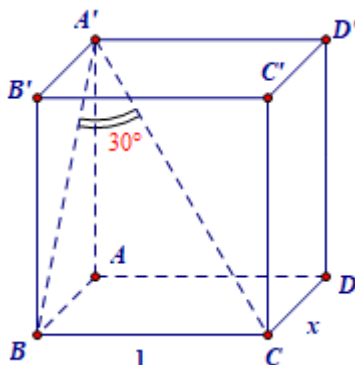
B. $V_{\max} = \frac{1}{2}.$

C. $V_{\max} = \frac{3}{2}.$

D. $V_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$

Lời giải

Chọn C



Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên $BC \perp (ABB'A')$.

$$\text{Suy ra: } (\widehat{A'C; (ABB'A')}) = (\widehat{A'C; A'B}) = \widehat{BA'C} = 30^\circ.$$

$$\Delta A'BC \text{ vuông tại } B \text{ nên } A'B = \frac{BC}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}.$$

$$\Delta A'AB \text{ vuông tại } A \text{ nên } AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = \sqrt{3-x^2}.$$

$$\text{Thể tích khối hộp: } V(x) = AB \cdot BC \cdot AA' = x\sqrt{3-x^2} \text{ với } x \in (0; \sqrt{3}).$$

$$\text{Có: } V'(x) = \sqrt{3-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{3-x^2}} = \frac{3-2x^2}{\sqrt{3-x^2}}.$$

$$\text{Cho } V'(x) = 0 \Leftrightarrow 3-2x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2}, (x > 0).$$

Có bảng biến thiên:

x	0	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\sqrt{3}$	
$V'(x)$		+	0	-
$V(x)$	0	$\frac{3}{2}$	0	

Vậy $V_{\max} = \frac{3}{2}$ khi $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 78: (Quỳnh Lưu Nghệ An) Nhân ngày quốc tế Phụ nữ 8 – 3 năm 2019. Ông A đã mua tặng vợ một món quà và đặt nó trong một chiếc hộp chữ nhật có thể tích là 32 (đvtt) có đáy là hình vuông và không nắp. Để món quà trở nên đặc biệt và xứng tầm với giá trị của nó, ông quyết định mạ vàng chiếc hộp, biết rằng độ dày của lớp mạ trên mọi điểm của chiếc hộp là không đổi và như nhau. Gọi chiều cao và cạnh đáy của chiếc hộp lần lượt là h và x . Để lượng vàng trên hộp là nhỏ nhất thì giá trị của h và x là?

- A.** $h = 2, x = 4$. **B.** $h = \frac{\sqrt{3}}{2}, x = 4$. **C.** $h = 2, x = 1$. **D.** $h = 4, x = 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có thể tích chiếc hộp: $V = x^2 h = 32$ (đvtt), với $x, h > 0$. Suy ra $h = \frac{32}{x^2}$.

Phần mạ vàng của chiếc hộp: $S = 2x^2 + 8xh = 2x^2 + 8x \cdot \frac{32}{x^2} = 2x^2 + \frac{256}{x}$.

Cách 1

Ta có $2x^2 + \frac{256}{x} = 2x^2 + \frac{128}{x} + \frac{128}{x} \geq 3\sqrt[3]{2x^2 \cdot \frac{128}{x} \cdot \frac{128}{x}} = 96$ (BĐT AM-GM).

Đẳng thức xảy ra khi $2x^2 = \frac{128}{x}$ hay $x = 4$, khi đó $h = 2$.

Cách 2.

Xét hàm số $f(x) = 2x^2 + \frac{256}{x}$ với $x > 0$.

Ta có $f'(x) = 4x - \frac{256}{x^2} = \frac{4x^3 - 256}{x^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 256 \Leftrightarrow x = 4$; $f(4) = 96$.

BBT

x	0	4	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$		96		$+\infty$

Dựa vào BBT ta thấy hàm số đạt GTNN tại $x = 4$, khi đó $h = 2$.

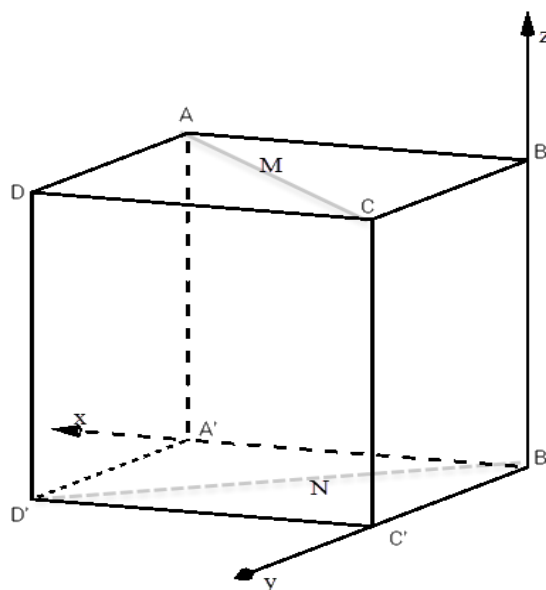
Vậy phương án A đúng.

Câu 79: (Quỳnh Lưu Lần 1) Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Các điểm M, N lần lượt di động trên các tia $AC, B'D'$ sao cho $AM + B'N = a\sqrt{2}$. Thể tích khối tứ diện $AMNB'$ có giá trị lớn nhất là:

- A.** $\frac{a^3}{12}$. **B.** $\frac{a^3}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó ta có: $B'(0;0;0)$, $B(0;0;a)$, $A(a;0;a)$, $C(0;a;a)$, $C'(0;a;0)$, $D'(a;a;0)$.

Giả sử $B'N = x$, $0 \leq x \leq a\sqrt{2}$. Ta có: $\overrightarrow{B'N} = \frac{x}{a\sqrt{2}}\overrightarrow{B'D'} \Rightarrow N\left(\frac{x}{\sqrt{2}}; \frac{x}{\sqrt{2}}; 0\right)$.

Do $AM + B'N = a\sqrt{2}$ nên $AM = a\sqrt{2} - x$. Ta có: $\overrightarrow{AM} = \left(1 - \frac{x}{a\sqrt{2}}\right)\overrightarrow{AC} \Rightarrow M\left(\frac{x}{\sqrt{2}}; a - \frac{x}{\sqrt{2}}; a\right)$

$$V_{AMB'N} = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{B'M}; \overrightarrow{B'N}] \cdot \overrightarrow{B'A} \right| = \frac{1}{6} |ax^2 - \sqrt{2}a^2x|, 0 \leq x \leq a\sqrt{2}.$$

$\Rightarrow$ Giá trị lớn nhất của thể tích là $\frac{a^3}{12}$.

DẠNG 5: GÓC, KHOẢNG CÁCH LIÊN QUAN ĐẾN THỂ TÍCH

Câu 1: (Gang Thép Thái Nguyên) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật; $AB = a$; $AD = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mp($ABCD$) bằng 45° . Gọi M là trung điểm của SD . Tính theo a khoảng cách d từ điểm M đến (SAC) .

A. $d = \frac{a\sqrt{1513}}{89}$.

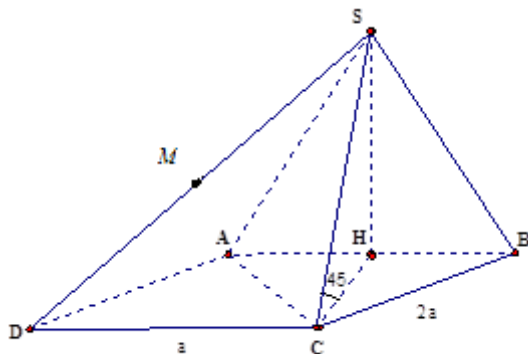
B. $d = \frac{2a\sqrt{1315}}{89}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{1315}}{89}$.

D. $d = \frac{2a\sqrt{1513}}{89}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm đoạn $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Xét $\triangle BCH$ vuông tại B , có: $CH = \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{17}}{2}$.

Xét $\triangle SHC$ vuông cân tại H , có: $SH = \frac{a\sqrt{17}}{2}$; $SC = \frac{a\sqrt{34}}{2}$.

Xét $\triangle SAH$ vuông tại H , có: $SA = \sqrt{\frac{17a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B , có: $AC = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$.

$$\Rightarrow S_{\triangle SAC} = \frac{\sqrt{89}}{4}a^2.$$

Ta có: $V_{S.ABCD} = V = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{17}}{3}$; $V_{S.ACD} = \frac{1}{2}V = \frac{a^3\sqrt{17}}{6}$.

$$V_{S.ACM} = \frac{1}{2}V_{S.ACD} = \frac{a^3\sqrt{17}}{12}. \text{ Mà } V_{S.ACM} = \frac{1}{3} \cdot d \cdot S_{\triangle SAC} = \frac{\sqrt{89}}{12}a^2 \cdot d \Rightarrow d = \frac{a\sqrt{1513}}{89}.$$

Câu 2: (Sở Ninh Bình 2019 lần 2) Chóp $S.ABC$ có đường cao SA , tam giác ABC là tam giác cân tại A và $AB = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Biết thể tích khối chóp là $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

A. 45° .

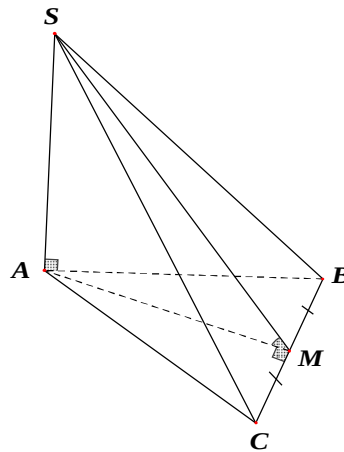
B. 90° .

C. 60° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn A



Diện tích tam giác ABC là: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

Đường cao SA là: $h = \frac{3V}{S} = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{24} a^3}{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2} = \frac{a}{2}$.

Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB$ và $SA \perp AC$.

$\Rightarrow SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{SA^2 + AB^2} = SB \Rightarrow \triangle SBC$ là tam giác cân tại S .

Gọi M là trung điểm BC .

Trong $\triangle ABC$: $AM \perp BC$.

Trong $\triangle SBC$: $SM \perp BC$.

$\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SMA}$.

Trong tam giác vuông ABM ta có: $\cos \widehat{BAM} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow AM = \frac{a}{2}$.

Trong tam giác vuông SAM có $AM = SA = \frac{a}{2} \Rightarrow$ tam giác SAM vuông cân tại S

$\Rightarrow \widehat{SMA} = 45^\circ$.

Câu 3: (Sở Nam Định) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng AC và vuông góc với mặt phẳng (SCD) cắt đường thẳng SD tại E . Gọi V và V_1 lần lượt là thể tích khối chóp $S.ABCD$ và $D.ACE$, biết $V = 5V_1$. Tính cosin của góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy của hình chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{1}{2}$.

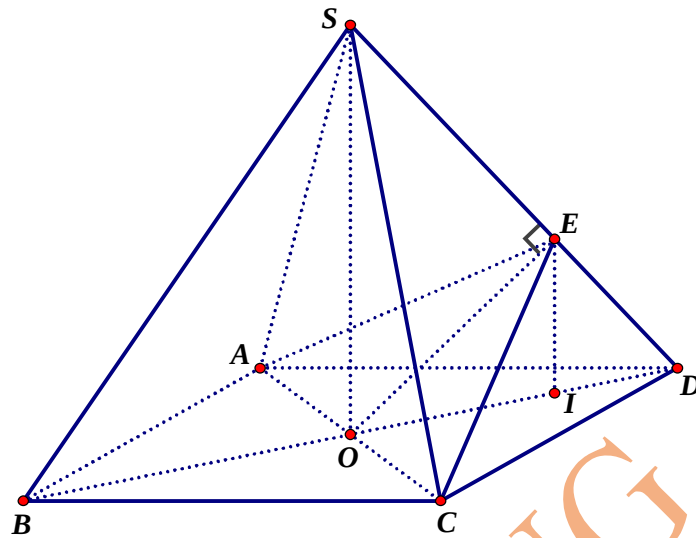
B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

D. $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm của hình vuông ABCD $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$ (S,ABCD là hình chóp đều)
 Về OH vuông góc với SD tại H.

Ta có: $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SD$ mà $OH \perp SD$

nên $SD \perp (ACH) \Rightarrow (SCD) \perp (ACH) \Rightarrow H$ trùng với E.

Đặt $OA = OB = OC = OD = x$, $SO = y \Rightarrow SD = \sqrt{x^2 + y^2}$

Về $EI \parallel SO$ (I thuộc BD) $\Rightarrow EI \perp (ABCD)$ và $\frac{DE}{DS} = \frac{EI}{SO}$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} V = V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot AD \cdot CD \\ V_1 = V_{D.ACE} = \frac{1}{3} EI \cdot S_{ACD} = \frac{1}{3} EI \cdot \frac{1}{2} AD \cdot CD \\ V = 5V_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{5}{2} EI \Rightarrow \frac{EI}{SO} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{DS} = \frac{2}{5} \Rightarrow DE = \frac{2}{5} \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Ta có: } DO^2 = DE \cdot DS \Rightarrow x^2 = \frac{2}{5} \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow y = \frac{x\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Ta có: } OE \cdot SD = OS \cdot OD \Rightarrow OE = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x\sqrt{15}}{5}; CE = \frac{2x\sqrt{10}}{5}; SD = \frac{x\sqrt{10}}{2}$$

$$\text{Ta có: } S_{OCD} = S_{SCD} \cdot \cos((SCD), (ABCD))$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} OC \cdot OD = \frac{1}{2} CE \cdot SD \cdot \cos((SCD), (ABCD))$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{2x\sqrt{10}}{5} \cdot \frac{x\sqrt{10}}{2} \cdot \cos((SCD), (ABCD))$$

$$\Rightarrow \cos((SCD), (ABCD)) = \frac{1}{2}.$$

Câu 4: (Chuyên Lam Sơn Lần 2) Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thoi tâm O và $SO \perp ABCD$,

$SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, $SB = BC = a$. Số đo góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là

A. 90° .

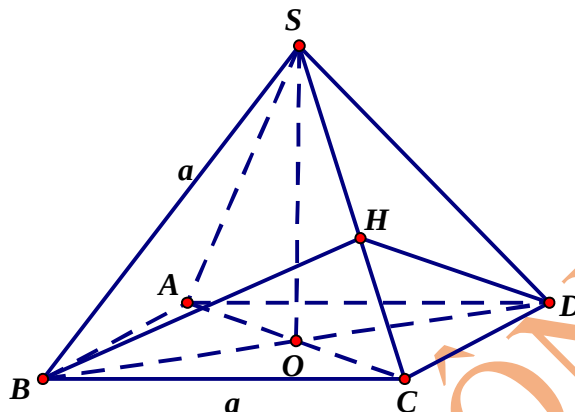
B. 60° .

C. 30° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn A



Ta có: $(SBC) \cap (SCD) = SC$. Gọi H là trung điểm của SC . ΔSBC cân tại B , suy ra $BH \perp SC$.

Ta có: $SO \perp BD$ tại trung điểm O nên $SB = SD = CD = a$.

ΔSBC cân tại B , có H là trung điểm của $SC \Rightarrow BH \perp SC$.

Suy ra góc giữa (SBC) và (SCD) chính là góc giữa hai đường thẳng BH và DH .

Xét ΔSOB vuông tại O : $OB^2 = SB^2 - SO^2 = a^2 - \frac{6a^2}{9} = \frac{a^2}{3} \Rightarrow OB = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Xét ΔBOC vuông tại O : $OC^2 = BC^2 - BO^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$.

Xét ΔSOC vuông tại O : $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{9}{6a^2} + \frac{3}{2a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Suy ra $\tan \widehat{BHO} = \frac{BO}{HO} = \frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = 1 \Rightarrow \widehat{BHO} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BHD} = 90^\circ$.

Vậy góc giữa (SBC) và (SCD) là 90° .

Câu 5: (CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG QUẢNG NAM LẦN 2 NĂM 2019) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , $AB = a$, $AD = 2a$, $SA = SB = SC = SD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC . Biết góc giữa MN và mp $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi α là góc tạo bởi MN và mp (SBD) . Tính $\sin \alpha$.

A. $\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{65}}$.

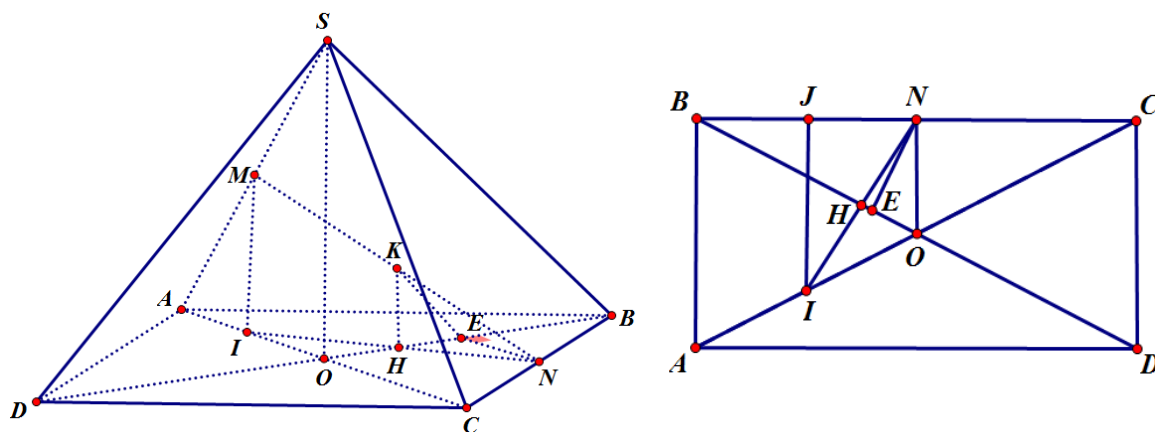
B. $\sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{65}}$.

C. $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{65}}$.

D. $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{65}}$.

Lời giải

Chọn A



□ $SA = SB = SC = SD$, $OA = OB = OC = OD$ nên suy ra SO là đường trung tuyến và cũng là đường cao của tam giác cân SAC và SBD . Khi đó: $SO \perp (ABCD)$.

□ Gọi I là trung điểm của $OA \Rightarrow MI \parallel SO \Rightarrow MI \perp (ABCD)$.

Suy ra $(\widehat{MN}; (ABCD)) = \widehat{MNI} = 60^\circ$.

Gọi $H = IN \cap BD$. Kẻ $HK \parallel MI$, ($K \in MN$). Khi đó $K = MN \cap (SBD)$ và E là hình chiếu của N trên BD . Suy ra $NE \perp (SBD) \Rightarrow (\widehat{MN}, (SBD)) = \widehat{NKE}$

□ Ta có $NJ = \frac{1}{4}BC = \frac{a}{2}$ và $\frac{IJ}{AB} = \frac{JC}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow IJ = \frac{3a}{4}$

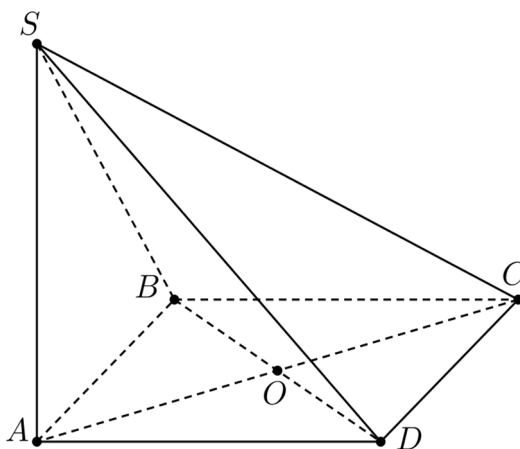
Ta có $NI = \sqrt{NJ^2 + IJ^2} = \frac{a\sqrt{13}}{4} \Rightarrow MN = \frac{NI}{\cos 60^\circ} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$

□ Ta lại có $\frac{1}{NE^2} = \frac{1}{BN^2} + \frac{1}{NO^2} \Rightarrow NE = \frac{a\sqrt{5}}{5}$

Xét $\triangle NKE$ vuông tại E có $NE = \frac{a\sqrt{5}}{5}$ và $NK = \frac{1}{2}NM = \frac{a\sqrt{13}}{4}$

Suy ra $\sin \widehat{NKE} = \frac{NE}{NK} = \frac{a\sqrt{5}}{5} : \frac{a\sqrt{13}}{4} = \frac{4}{\sqrt{65}}$.

Câu 6: (Cổ Loa Hà Nội) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O , cạnh bằng $a\sqrt{3}$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 3a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SO và AD bằng



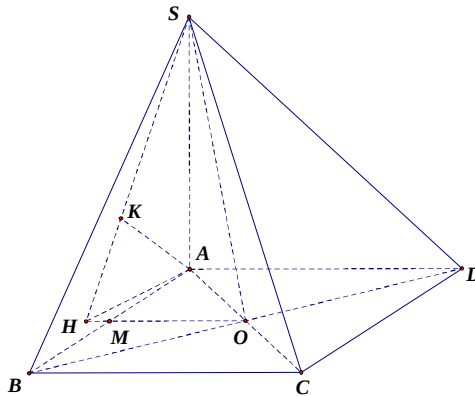
A. $\frac{\sqrt{17}a}{17}$.

B. $\frac{3\sqrt{17}a}{17}$.

C. $\frac{\sqrt{5}a}{5}$.

D. $\frac{3\sqrt{5}a}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi M là trung điểm AB , khi đó $OM \parallel AD$ và $AD \not\subset (SOM) \Rightarrow AD \parallel (SOM)$.

Khi đó $d(AD, SO) = d(AD, (SOM)) = d(A, (SOM))$.

Gọi H là hình chiếu A trên OM .

K là hình chiếu của A trên SH .

Ta có $OH \perp AH$ và $SA \perp OH$, nên $OH \perp (SAH) \Rightarrow OH \perp AK$ (do $AK \subset (SAH)$)

Mà $AK \perp SH$ nên $AK \perp (SOH)$ hay $AK \perp (SOM)$. Khi đó $AK = d(A, (SOM))$.

Ta có $\widehat{HMA} = \widehat{BMO} = \widehat{BAD} = 60^\circ$.

Xét tam giác AHM vuông tại H .

$$\sin 60^\circ = \frac{AH}{AM} \Rightarrow AH = AM \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} a \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4} a$$

Xét tam giác SAH vuông tại A , AK đường cao.

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow AK = \sqrt{\frac{AH^2 \cdot SA^2}{AH^2 + SA^2}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{3}{4}a\right)^2 \cdot (3a)^2}{\left(\frac{3}{4}a\right)^2 + (3a)^2}} = \frac{3a\sqrt{17}}{17}.$$

$$\text{Vậy } d(AD, SO) = AK = \frac{3a\sqrt{17}}{17}.$$

Câu 7: (-Mai-Anh-Tuấn-Thanh-Hóa-lần-1-2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với đáy, mặt bên (SCD) tạo với mặt đáy một góc bằng 60° , M là trung điểm BC . Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

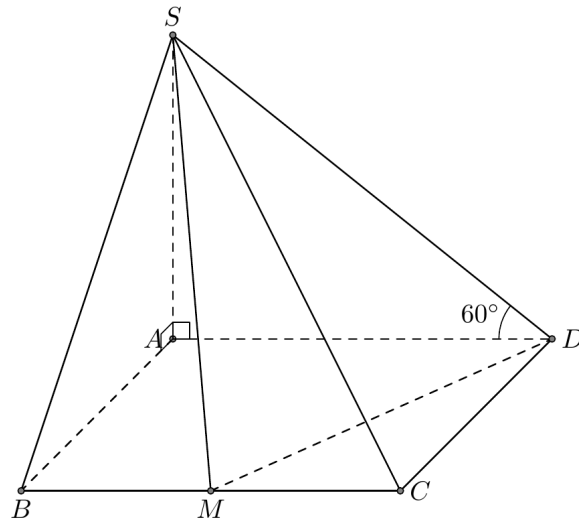
B. $a\sqrt{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD.$

Do $\begin{cases} CD = (SCD) \cap (ABCD) \\ AD \subset (ABCD), AD \perp CD \Rightarrow \left[\overline{(SCD)}, \overline{(ABCD)} \right] = \left[\overline{SD}, \overline{AD} \right] = 60^\circ. \\ SD \subset (SCD), SD \perp CD \end{cases}$

$$\Rightarrow SA = AD \tan 60^\circ = AD\sqrt{3}.$$

$$\text{Mà } SA = \frac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}} = \frac{a^3\sqrt{3}}{AD^2} \Leftrightarrow AD\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{AD^2} \Leftrightarrow AD = a$$

$$\Rightarrow SA = a\sqrt{3}.$$

Trong tam giác vuông SAD có $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a.$

$$\Rightarrow S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a = a^2.$$

$$\text{Mặt khác } V_{M.SCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\Delta MCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

$$\Rightarrow d[M, (SCD)] = \frac{3V_{M.SCD}}{S_{\Delta SCD}} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 8: (KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG) Cho tứ diện đều cạnh 1 và điểm I nằm trong tứ diện. Tính tổng khoảng cách từ I đến các mặt của tứ diện.

A. $\sqrt{6}.$

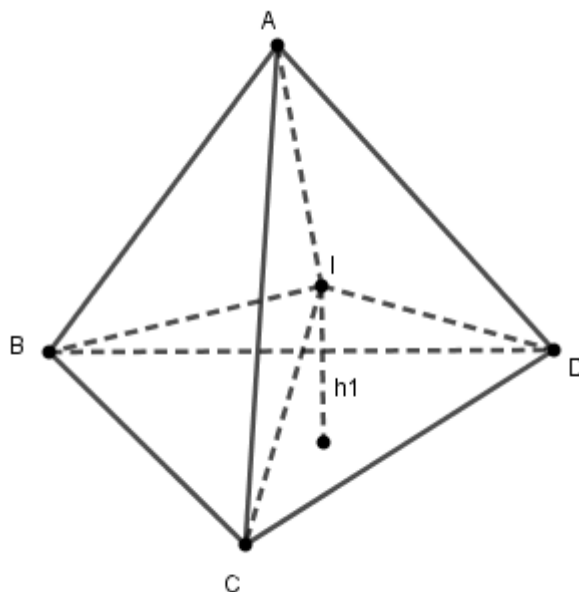
B. $\frac{\sqrt{6}}{9}.$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}.$

D. $\frac{\sqrt{6}}{3}.$

Lời giải

Chọn D



Gọi V là thể tích tứ diện đều $ABCD$ và gọi h_1, h_2, h_3, h_4 lần lượt là khoảng cách từ I đến các mặt $(BCD), (ACD), (ABD), (ABC)$.

Đặt $V_1 = V_{IBCD}, V_2 = V_{IACD}, V_3 = V_{IABD}, V_4 = V_{IABC}$.

Ta có $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$.

$$V_1 = \frac{1}{3} h_1 \cdot S_{BCD} \Rightarrow h_1 = \frac{3V_1}{S_{BCD}}$$

$$\text{Tương tự } h_2 = \frac{3V_2}{S_{ACD}}, h_3 = \frac{3V_3}{S_{ABD}}, h_4 = \frac{3V_4}{S_{ABC}}.$$

$$\text{Vậy } h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = \frac{3V_1}{S_{BCD}} + \frac{3V_2}{S_{ACD}} + \frac{3V_3}{S_{ABD}} + \frac{3V_4}{S_{ABC}}.$$

Lại có tứ diện $ABCD$ là tứ diện đều nên $S_{BCD} = S_{ACD} = S_{ABD} = S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$$\text{Suy ra } h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = \frac{3(V_1 + V_2 + V_3 + V_4)}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{3V}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Cách trắc nghiệm: Chọn đặc biệt $I \equiv A$. Khi đó tổng khoảng cách từ I đến các mặt của tứ diện bằng khoảng cách từ A đến mp (BCD) và bằng $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 9: (THPT SỐ 1 TƯ NGHĨA LẦN 2 NĂM 2019) Cho tứ diện $ABCD$ có điểm O nằm trong tứ diện và cách đều các mặt của tứ diện một khoảng bằng r . Khoảng cách từ A, B, C, D đến các mặt đối diện lần lượt là $\frac{7}{5}; \frac{3}{2}; \frac{5}{3}; \frac{4}{3}$. Khi đó r bằng:

A. $\frac{10}{59}$.

B. $\frac{59}{10}$.

C. $\frac{420}{1147}$.

D. $\frac{1147}{420}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \frac{V_{O.ABC}}{V_{ABCD}} = \frac{d(O;(ABC))}{d(D;(ABC))} = \frac{r}{4} = \frac{3r}{4}; \quad \frac{V_{O.ABD}}{V_{ABCD}} = \frac{d(O;(ABD))}{d(C;(ABD))} = \frac{r}{5} = \frac{3r}{5};$$

$$\frac{V_{O.ACD}}{V_{ABCD}} = \frac{d(O;(ACD))}{d(B;(ACD))} = \frac{r}{3} = \frac{2r}{3}; \quad \frac{V_{O.BCD}}{V_{ABCD}} = \frac{d(O;(BCD))}{d(A;(BCD))} = \frac{r}{7} = \frac{5r}{7}.$$

$$\text{Suy ra } 1 = \frac{V_{ABCD}}{V_{ABCD}} = \frac{V_{O.ABC}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{O.ABD}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{O.ACD}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{O.BCD}}{V_{ABCD}} = r \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{2}{3} + \frac{5}{7} \right) = \frac{1147}{420} r.$$

$$\text{Vậy } r = \frac{420}{1147}.$$

Câu 10: (Sở Hưng Yên Lần 1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = 2a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB . Tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) .

A. $\frac{4a\sqrt{5}}{5}$.

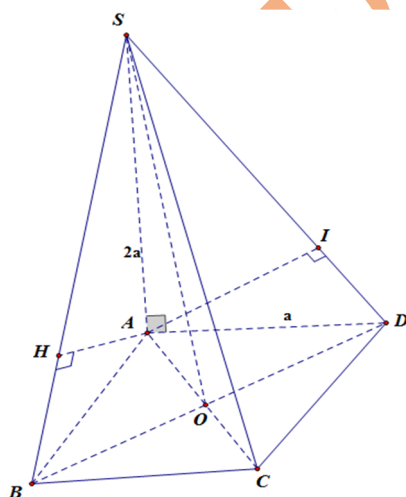
B. $\frac{4a\sqrt{5}}{25}$.

C. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{8a\sqrt{5}}{25}$.

Lời giải

Chọn D



$$\text{Ta có } SH.SB = SA^2 \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{4a^2}{4a^2 + a^2} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{d(H,(SCD))}{d(B,(SCD))} = \frac{SH}{SB} = \frac{4}{5}.$$

$$\Rightarrow d(H,(SCD)) = \frac{4}{5}.d(B,(SCD)) = \frac{4}{5}.d(A,(SCD)), \text{ (do } AB \parallel (SCD)).$$

Gọi I là hình chiếu vuông góc của A trên SD .

$$\text{Ta có } CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AI.$$

$$\text{Vì } \begin{cases} AI \perp SD \\ AI \perp CD \end{cases} \Rightarrow AI \perp (SCD) \Rightarrow d(A,(SCD)) = AI.$$

$$\text{Ta có } AI.SD = SA.AD \Rightarrow AI = \frac{SA.AD}{SD} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Vậy } d(H,(SCD)) = \frac{4}{5}.AI = \frac{8a\sqrt{5}}{25}.$$

Câu 11: (Đặng Thành Nam Đề 10) Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $AD = 4a$, $SA = SB = SC = SD = \sqrt{6}a$. Khi khối chóp $S.ABCD$ có thể tích đạt giá trị lớn nhất, sin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng

A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

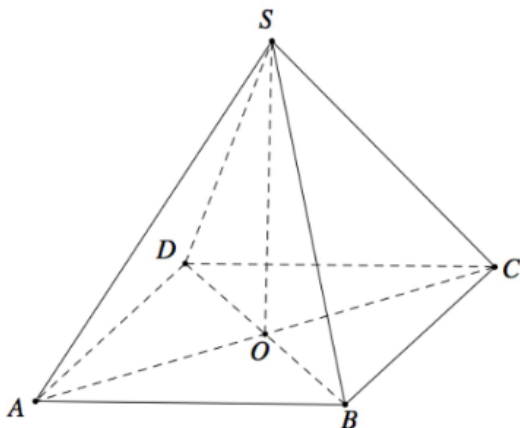
B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Vì $SA = SB = SC = SD \Rightarrow ABCD$ là tứ giác nội tiếp và hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$. Kết hợp với $ABCD$ là hình bình hành suy ra $ABCD$ phải là hình chữ nhật tâm O và $SO \perp (ABCD)$.

Đặt $AB = x (x > 0)$.

$$\text{Khi đó } OB = \frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AD^2}}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + 16a^2}}{2}$$

$$\Rightarrow SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{6a^2 - \frac{x^2 + 16a^2}{4}} = \frac{\sqrt{8a^2 - x^2}}{2}.$$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \frac{4ax \cdot \frac{\sqrt{8a^2 - x^2}}{2}}{3} = \frac{2ax \cdot \sqrt{8a^2 - x^2}}{3} \leq \frac{2a}{3} \left(\frac{x^2 + 8a^2 - x^2}{2} \right) = \frac{8a^3}{3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi: $x = \sqrt{8a^2 - x^2} \Leftrightarrow x = 2a$.

Vậy $\max V_{S.ABCD} = \frac{8a^3}{3} \Leftrightarrow x = 2a$. Khi đó:

$$\sin(\widehat{(SBC), (SCD)}) = \frac{3SC \cdot V_{S.BCD}}{2S_{SBC} \cdot S_{SCD}} = \frac{3\sqrt{6} \cdot \frac{4a^3}{3}}{2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \sqrt{5}a \right) \left(\frac{1}{2} \cdot 4a \cdot \sqrt{2}a \right)} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

$$\text{Cách 2: Ta có thể tính } \sin(\widehat{(SBC), (SCD)}) = \frac{d(B, (SCD))}{d(B, SC)} = \frac{2d(O, (SCD))}{d(B, SC)}.$$

Câu 12: (CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG QUẢNG NAM LẦN 2 NĂM 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ với đáy ABC là tam giác vuông tại B có $AC = 2BC$, đường trung tuyến BM , đường phân giác trong CN và $MN = a$. Các mặt phẳng (SBM) và (SCN) cùng vuông góc với mặt phẳng

(ABC). Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. Gọi I là trung điểm của SC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và IB bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{8}$.

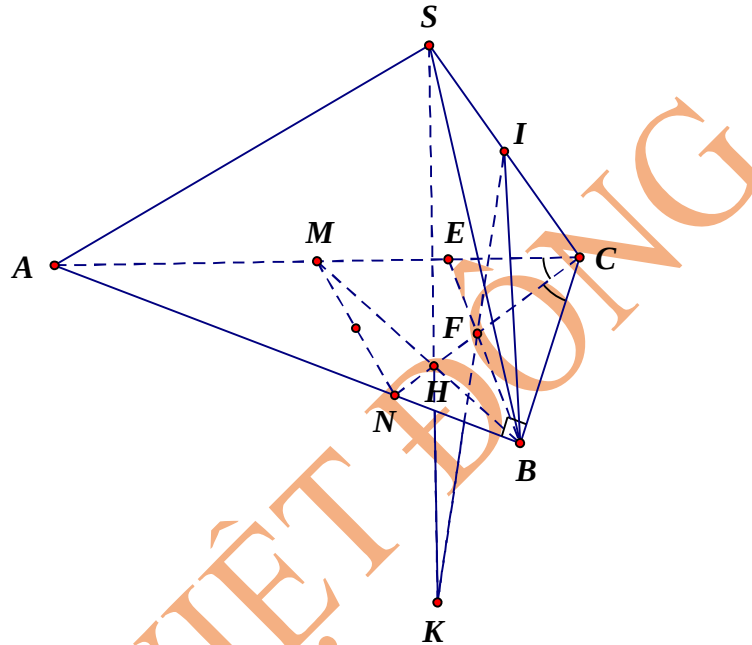
C. $\frac{3a}{4}$.

D. $\frac{3a}{8}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:



Gọi H là giao điểm của CN và BM . Ta có $SH \perp (ABC)$.

Đặt $BC = x$ (với $x > 0$).

Ta có $CB = CM = BM = \frac{AC}{2} \Rightarrow \triangle BCM$ đều.

Xét $\triangle BCM$ đều có đường phân giác CH cũng là đường cao nên $CH \perp BM$

$\Rightarrow CN \perp BM$ tại $H \Rightarrow$ tứ giác $BCM N$ nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{CMN} = 90^\circ$, hay $MN \perp CA$.

Suy ra hai tam giác MNA và BCA đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{\sqrt{3}x} \Rightarrow x = a\sqrt{3}; AC = 2a\sqrt{3}.$$

Lấy E là trung điểm của CM .

$$\text{Ta có } \frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AE} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN \parallel BE \Rightarrow MN \parallel (BEI).$$

$$\Rightarrow d(MN, BI) = d(MN, (BEI)) = d(M, (BEI)) = 2d(H, (BEI)).$$

$$\text{Nên } SH = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3}{4}a.$$

$$\text{Ta có } HB = \frac{a\sqrt{3}}{2}; HC = \sqrt{BC^2 - HB^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{3a}{2} \Rightarrow HF = \frac{1}{3}HC = \frac{a}{2}.$$

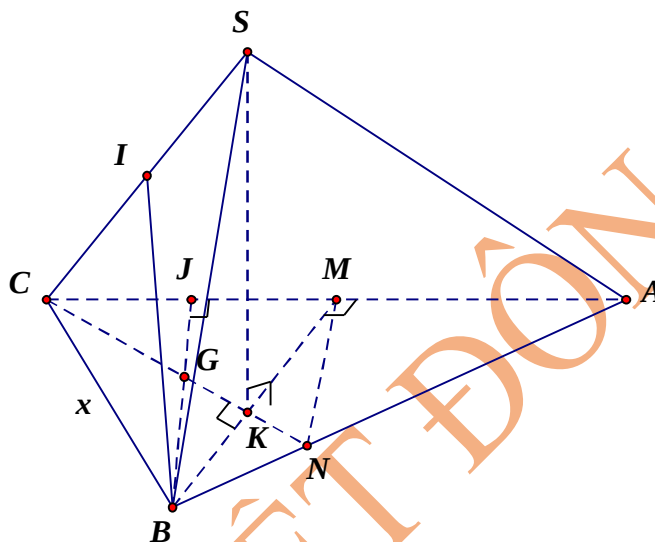
$$\text{Đặt } y = d(H, (BEI)).$$

Xét tam diện vuông đỉnh H với ba cạnh HB , HC , HS ta có mặt phẳng (IEB) cắt HB tại B ; cắt HC tại F và cắt HS tại K , ta có

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{HF^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{3a}{4}\right)^2} = \frac{64}{9a^2} \Rightarrow y = \frac{3}{8}a.$$

Do đó $d(MN, BI) = 2 \cdot \frac{3}{8}a = \frac{3a}{4}$.

Cách 2:



Đặt $BC = x$ (với $x > 0$).

Dễ thấy $x = a\sqrt{3}$. Gọi K là giao điểm của BM và CN .

Gọi J là trung điểm của CM , G là giao điểm của CN và BJ .

Ta có $(IJB) \parallel (SMN) \Rightarrow d[BI, MN] = d(G, (SMN)) = \frac{1}{2}d(C, (SMN))$.

Mà $V_{S.CMN} = \frac{1}{3}V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{3}a^3}{8}$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}d(C, (SMN)) \cdot S_{\triangle SMN} = \frac{\sqrt{3}a^3}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{3}d(C, (SMN)) \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}a^3}{8}.$$

$$\Rightarrow d(C, (SMN)) = \frac{3}{2}a \Rightarrow d(BI, MN) = \frac{3a}{4}.$$

Câu 13: (Ba Đình Lần 2) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SD = \frac{a\sqrt{17}}{2}$. Hình chiếu

vuông góc H của S lên mặt $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn AB . Gọi K là trung điểm của AD . Khoảng cách giữa hai đường SD và HK bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$.

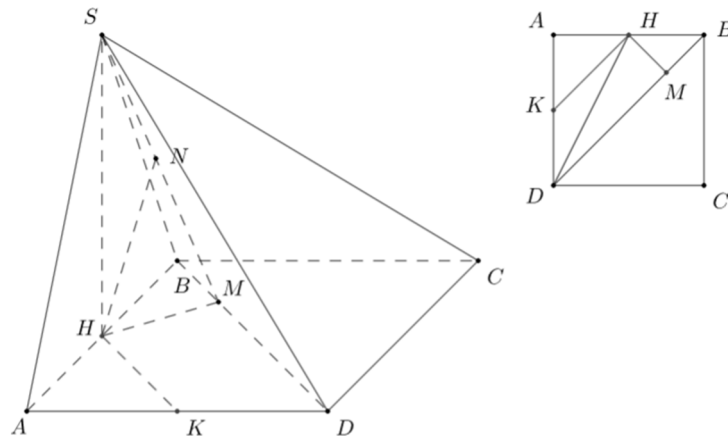
B. $\frac{a\sqrt{3}}{7}$.

C. $\frac{3a}{5}$.

D. $\frac{a\sqrt{21}}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Trong $(ABCD)$ có HK là đường trung bình của $\triangle ABD$ nên $HK \parallel BD$; vẽ $HM \perp BD$.

$$\text{Vì } \begin{cases} HK \parallel BD \\ BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow HK \parallel (SBD), \text{ mà } SD \subset (SBD) \Rightarrow d(HK, SD) = d(HK, (SBD))$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} HM \perp BD \\ SH \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SHM), \text{ mà } BD \subset (SBD) \Rightarrow (SBD) \perp (SHM).$$

Trong mặt (SHM) vẽ $HN \perp SM$ tại $N \in SM$.

$$\begin{cases} (SBD) \perp (SHM) \\ (SBD) \cap (SHM) = SM \Rightarrow HN \perp (SBD). \\ HN \perp SM \end{cases}$$

Vậy khoảng cách từ $d(HK, (SBD)) = d(H, (SBD)) = HN$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD .

$$\text{Ta thấy } HM = \frac{AO}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}; MD = \frac{3}{4}BD = \frac{3a\sqrt{2}}{4} \text{ nên } HD = \sqrt{HM^2 + MD^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Do } \triangle SHD \text{ vuông tại } H \text{ nên } SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = a\sqrt{3}.$$

$$\triangle SHM \text{ vuông tại } H, \text{ đường cao } HN: \frac{1}{HN^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2} \Rightarrow HN = \frac{SH \cdot HM}{\sqrt{SH^2 + HM^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{5}.$$

Câu 14: (Chuyên Hạ Long lần 2-2019) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 3a$, $AC = 2a$, $AD = 5a$; $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAB} = 60^\circ$. Tính $d(C, (ABD))$.

A. $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

B. $\frac{a\sqrt{6}}{9}$.

C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

D. $\frac{2a\sqrt{6}}{9}$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= \frac{AB \cdot AC \cdot AD}{6} \sqrt{1 + 2 \cos \widehat{BAC} \cos \widehat{CAD} \cos \widehat{DAB} - \cos^2 \widehat{BAC} - \cos^2 \widehat{CAD} - \cos^2 \widehat{DAB}} \\ &= \frac{3a \cdot 2a \cdot 5a}{6} \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} a^3. \end{aligned}$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 5a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4} a^2.$$

$$V_{C.ABD} = \frac{1}{3}d(C, (ABD)).S_{ABD} \Rightarrow d(C, (ABD)) = \frac{3V_{C.ABD}}{S_{ABD}} = \frac{3 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2}a^2}{\frac{15\sqrt{3}}{4}a^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}a /$$

Câu 15: (Nguyễn Du Dak-Lak 2019) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy bằng $\sqrt{2}$ và độ dài cạnh bên bằng $\sqrt{5}$. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$, có tâm O . Lấy G là trọng tâm tam giác SAD . Lấy điểm M bất kì trên (S) . Khoảng cách GM đạt giá trị nhỏ nhất bằng

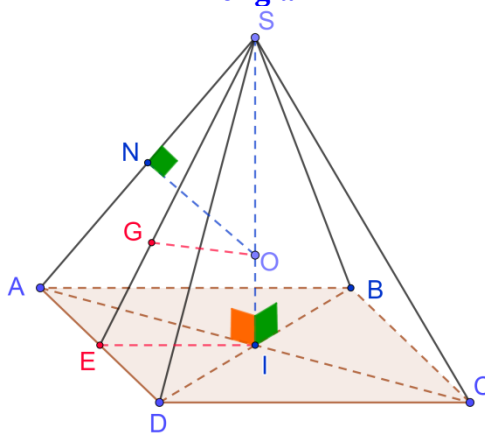
A. $\frac{17 + \sqrt{31}}{12}$.

B. $\frac{17 - \sqrt{31}}{12}$.

C. $\frac{15 + \sqrt{33}}{12}$.

D. $\frac{15 - \sqrt{33}}{12}$

Lời giải



Chon B

+ Gọi I là tâm của $ABCD \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.

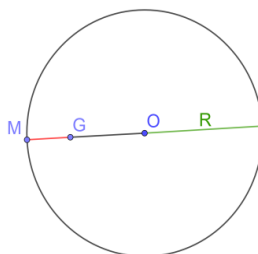
Dựng mặt phẳng trung trực của cạnh SA tại N cắt SI tại O .

Vậy O là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ và bán kính bằng $R = SO$.

+ Theo giả thiết ta suy ra: $AC = 2 \Rightarrow AI = 1 \Rightarrow SI = \sqrt{SA^2 - AI^2} = 2$ và

$$\Delta SNO \propto \Delta SIA \Rightarrow \frac{SN}{SI} = \frac{SO}{SA} \Rightarrow SO = \frac{SA}{\frac{SI}{2}} \cdot SA = \frac{SA^2}{2 \cdot SI} = \frac{5}{4} = R.$$

+ Vì trọng tâm G cố định, M là điểm di động trên (S) nên để có khoảng cách GM nhỏ nhất thì M, G, O thẳng hàng, khi đó: $GM_{\min} = R - OG$ (quan sát hình vẽ).



+ Gọi E là trung điểm của $AD \Rightarrow IE = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SE = \sqrt{SI^2 + IE^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SG = \sqrt{2}$.

+ Tam giác vuông SIE có $\cos \widehat{ISE} = \frac{SI}{SE} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

+ Trong tam giác SOG , áp dụng định lí cô sin ta có:

$$OG^2 = SO^2 + SG^2 - 2.SO.SG.\cos \widehat{ISM} = \frac{11}{48} \Rightarrow OG = \frac{\sqrt{33}}{12}.$$

$$\text{Vậy } GM_{\min} = R - OG = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{33}}{12} = \frac{15 - \sqrt{33}}{12}.$$

* **Nhận xét:** Nếu bài toán yêu cầu $GM_{\max} = R + OG$.

Câu 16: (Lê Quý Đôn Điện Biên Lần 3) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ đó.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

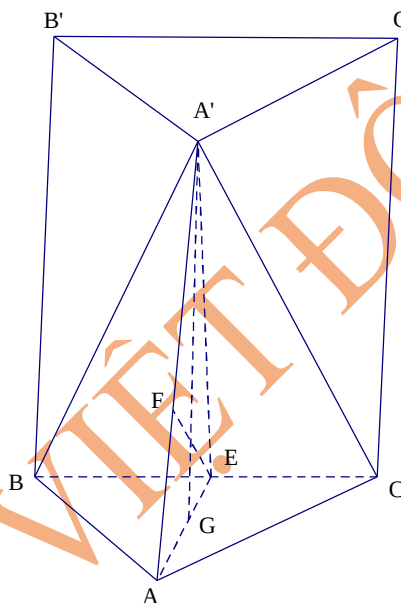
B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải

Chọn A
Cách 1:



Gọi E là trung điểm BC , G là trọng tâm tam giác ABC , ta có $BC \perp AE$ và $BC \perp A'G$
 $\Rightarrow BC \perp (EA'A)$.

Trong $(EA'A)$ kẻ $EF \perp AA' \Rightarrow EF$ là đoạn vuông góc chung của AA' và BC

$$\Rightarrow d(AA'; BC) = EF = \frac{a\sqrt{3}}{4}. \text{ Xét } \triangle ABC \text{ có } AE = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AG = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

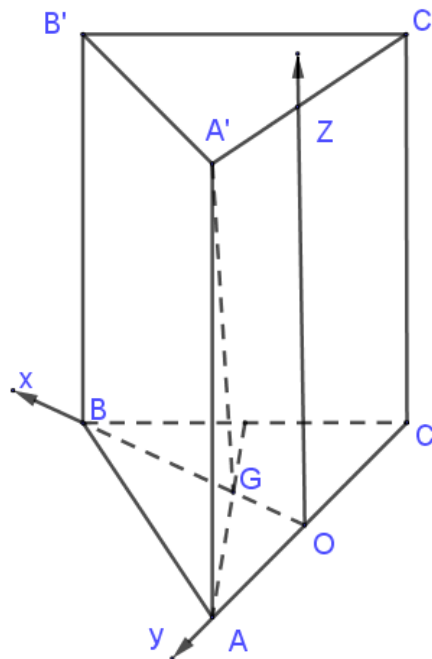
Trong tam giác vuông $AA'G$ có $AA'^2 = A'G^2 + AG^2 = A'G^2 + \frac{a^2}{3}$ (*).

$$\text{Ta có } S_{\triangle AA'E} = \frac{1}{2} A'G \cdot AE = \frac{1}{2} EF \cdot AA' \Leftrightarrow A'G \cdot AE = EF \cdot AA' \Leftrightarrow A'G \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot AA'$$

$$\Leftrightarrow AA' = 2A'G \text{ thay vào (*) ta được } 4A'G^2 = A'G^2 + \frac{a^2}{3} \Leftrightarrow A'G = \frac{a}{3}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot A'G = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

Cách 2:



Gọi O là trung điểm của AC . Ta gán hệ $Oxyz$ như hình vẽ. Đặt $A'G = h$ ($h > 0$).

Ta có $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right); C\left(0; \frac{-a}{2}; 0\right); A\left(0; \frac{a}{2}; 0\right); A'\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; h\right)$

$\overrightarrow{CB} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$ cùng phương $\vec{u}(\sqrt{3}; 1; 0)$.

$\overrightarrow{AA'} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; \frac{-a}{2}; h\right)$ cùng phương $\vec{v} = (a\sqrt{3}; -3a; 6h)$.

$[\vec{u}; \vec{v}] = (6h; -6\sqrt{3}h; -4\sqrt{3}a)$ và $\overrightarrow{AC} = (0; -a; 0)$.

$$+ d(AA'; BC) = \frac{|\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AC}|}{\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{|6\sqrt{3}ha|}{\sqrt{144h^2 + 48a^2}} = \frac{6\sqrt{3}ha}{\sqrt{144h^2 + 48a^2}}.$$

$$+ d(AA'; CB) = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \frac{6\sqrt{3}ha}{\sqrt{144h^2 + 48a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow h = \frac{a}{3}$$

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = h.S_{\triangle ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

Câu 17: (THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hình hộp chữ nhật

$ABCD.A'B'C'D'$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $B'C$ là $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$, giữa hai đường

thẳng BC và AB' là $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$, giữa hai đường thẳng AC và BD' là $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Thể tích khối hộp

$ABCD.A'B'C'D'$ bằng

A. $8a^3$.

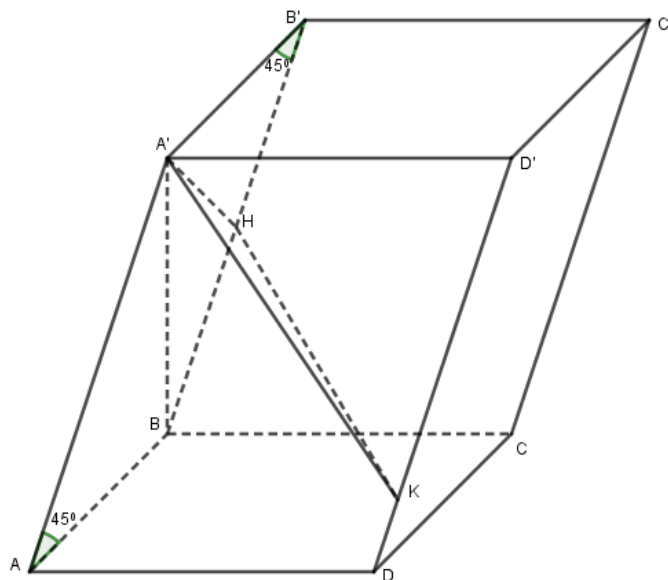
B. $4a^3$.

C. $2a^3$.

D. a^3 .

Lời giải

Chọn C



Gọi H , K lần lượt là các hình chiếu vuông góc của A' trên các đường thẳng BB' và DD' .
Ta có: $d(A; BB') = d(A'; BB') = A'H = 1$, $d(A; DD') = d(A'; DD') = A'K = 1$.

$$\begin{cases} \widehat{(AA', (ABCD))} = 45^\circ \\ A'B \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow \widehat{A'AB} = 45^\circ \quad (1).$$

$$A'B \perp (ABCD) \Rightarrow A'B \perp AB \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $\triangle A'AB$ là tam giác vuông cân tại $B \Rightarrow A'B = AB$

$\Rightarrow A'B = A'B' \Rightarrow H$ là trung điểm BB' .

Mặt khác, góc giữa hai mặt phẳng $(BB'C'C)$ và $(CC'D'D)$ bằng góc giữa hai mặt phẳng $(AA'D'D)$ và $(BB'A'A)$ nên ta suy ra $\widehat{HAK} = 60^\circ$, mà $A'H = A'K = 1$ (chứng minh trên)

$$\Rightarrow \triangle A'HK \text{ là tam giác đều} \Rightarrow S_{A'HK} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$A'H = 1 \Rightarrow BB' = 2.$$

$$\text{Lại có: } \begin{cases} A'H \perp BB' \\ A'K \perp BB' \\ A'H \cap A'K = \{A'\} \end{cases} \Rightarrow BB' \perp (A'HK).$$

$$\text{Do đó: } V_{A'B'D'.ABD} = BB' \cdot S_{A'HK} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2V_{A'B'D'.ABD} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Cách 2:

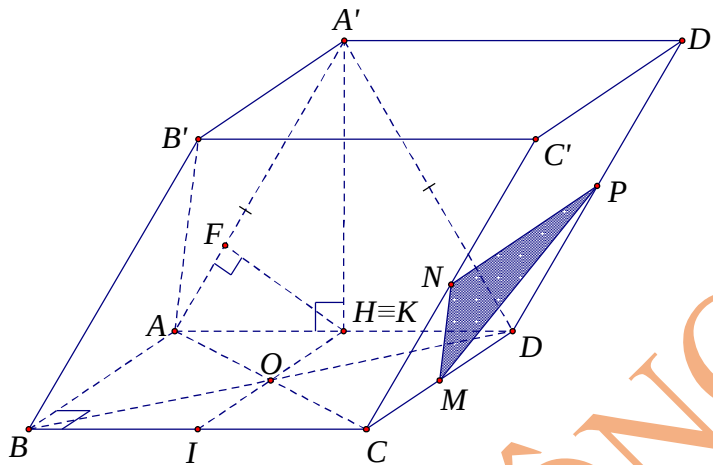
Với các giả thiết ta suy ra được $\triangle A'BB'$ vuông cân tại A' và $BB' = 2A'H = 2$. Từ đây ta tính được $S_{ABB'A'} = A'H \cdot BB' = 2$.

$$*\forall \begin{cases} A'H \perp BB' \\ A'K \perp BB' \text{ (do } BB' \parallel DD') \end{cases} \Rightarrow BB' \perp (A'HK) \Rightarrow (ABB'A') \perp (A'HK).$$

Mà $OK \perp AD$ nên suy ra ba điểm H, O, K thẳng hàng và theo giả thiết ta được H thuộc đoạn IK .

Theo giả thiết H thuộc hình vuông $ABCD$ nên H trùng K hoặc H trùng I .

Trường hợp 1: H trùng với K .



*) Kẻ $HF \perp AA'$, với F thuộc đoạn $A'A$.

Dễ thấy: $HA = \frac{BC}{2} = a$ và $AB \perp (A'AH) \Rightarrow AB \perp HF$ nên $HF \perp (ABB'A')$

$\Rightarrow d(H, (ABB'A')) = HF$.

Ta có $d(CD, AB') = d(CD, (ABB'A'))$ (do $CD \parallel (ABB'A')$)

$= d(C, (ABB'A')) = \frac{DA}{DH} \cdot d(H, (ABB'A')) = 2HF$. Nên $HF = \frac{3a}{\sqrt{10}}$.

*) Xét tam giác $AA'H$ có $\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{A'H^2} \Rightarrow \frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{HF^2} - \frac{1}{AH^2} = \frac{10}{9a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{9a^2}$
 $\Rightarrow A'H = 3a$.

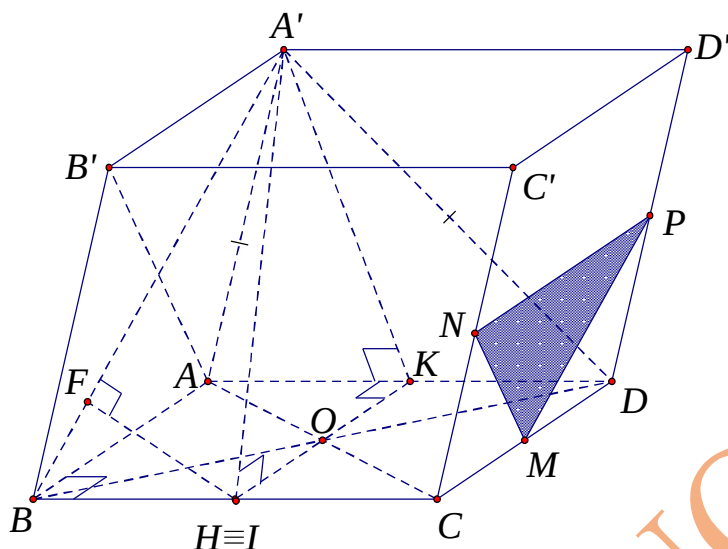
*) Ta có $V_{ABCD.A'B'CC'D'} = A'H \cdot S_{ABCD} = 3a \cdot (2a)^2 = 12a^3$

Lại có $V_{ABCD.A'B'CC'D'} = d(A', (CDD'C')) \cdot S_{CDD'C'}$

$= 4 \cdot d(A', (CDD'C')) \cdot S_{MNP}$ (do $S_{CDD'C'} = 4S_{MNP}$) $= 12 \cdot \frac{1}{3} d(A', (CDD'C')) \cdot S_{MNP} = 12V_{A'MNP}$.

Từ đó suy ra $12a^3 = 12V_{A'MNP} \Rightarrow V_{A'MNP} = a^3$.

Trường hợp 2: $H \equiv I$, tương tự trường hợp 1, kết quả $V_{A'MNP} = a^3$.



Thêm một câu tương tự của câu 47, thay đổi đề bài là H thuộc bên trong hình vuông $ABCD$.

Câu 20: (CHUYÊN HUỖNH MÃN ĐẠT 2019 lần 1) Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $AA' = A'D$, hình chiếu vuông góc của A' thuộc bên trong hình vuông $ABCD$, khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và AB' bằng $\frac{6a}{\sqrt{10}}$. Tính thể tích khối chóp $A'MNP$ trong đó M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh CD, CC', DD' .

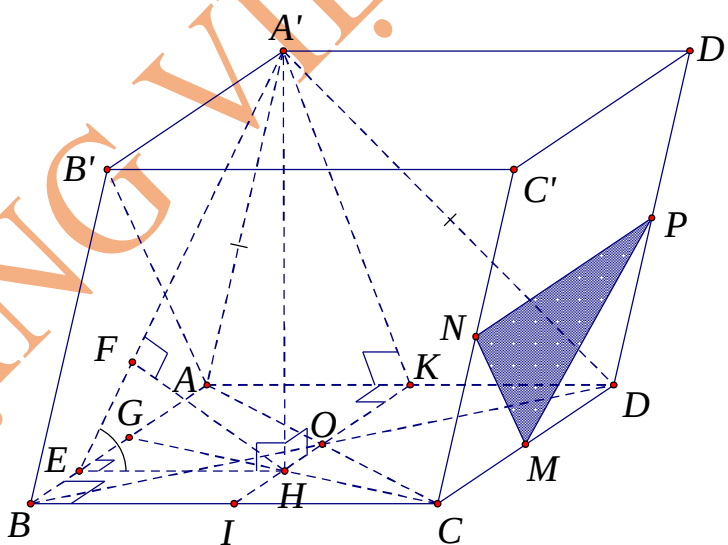
A. $12a^3$.

B. a^3 .

C. $2a^3$.

D. $3a^3$.

Lời giải



*) Gọi H là hình chiếu của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$; I, K lần lượt là trung điểm của AD, BC .

Ta có $A'H \perp AD, A'K \perp AD$ (Do $A'H \perp (ABCD)$ và $A'A = A'D$) nên $HK \perp AD$

Mà $OK \perp AD$ nên suy ra ba điểm H, O, K thẳng hàng và theo giả thiết ta được H thuộc bên trong đoạn thẳng IK .

*) Kẻ $HE \perp AB, HF \perp A'E$, với E thuộc đoạn AB và F thuộc đoạn $A'E$.

Dễ thấy: $HE = \frac{BC}{2} = a$ và $AB \perp (A'EH) \Rightarrow AB \perp HF$ nên $HF \perp (ABB'A')$

$$\Rightarrow d(H, (ABB'A')) = HF.$$

Ta có $d(CD, AB') = d(CD, (ABB'A'))$ (do $CD \parallel (ABB'A')$)

$$= d(C, (ABB'A')) = \frac{CG}{CH} \cdot d(H, (ABB'A')) \quad (\text{Do } H \text{ thuộc đoạn } IK \text{ nên nếu kẻ } CH \text{ cắt } AB \text{ tại}$$

$$G \text{ thì } \frac{CG}{CH} = 2) = 2HF. \text{ Nên } HF = \frac{3a}{\sqrt{10}}.$$

$$*) \text{ Xét tam giác } HEF \text{ có } \sin \widehat{HEF} = \frac{HF}{HE} = \frac{3a}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{HEF} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \tan \widehat{HEF} = 3 \quad (\text{do } \widehat{A'EH} \text{ là góc nhọn}).$$

Xét tam giác $A'EH$ có $A'H = EH$, $\tan \widehat{HEA'} = 3$.

$$*) \text{ Ta có } V_{ABCD.A'B'CC'D'} = A'H \cdot S_{ABCD} = 3a \cdot (2a)^2 = 12a^3$$

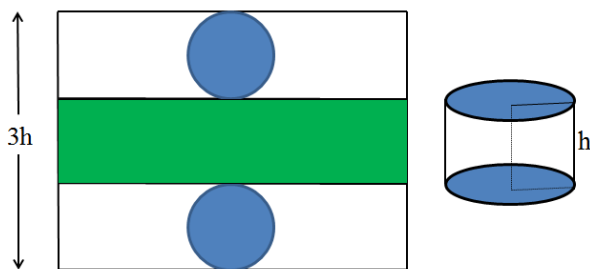
$$\text{Lại có } V_{ABCD.A'B'CC'D'} = d(A', (CDD'C')) \cdot S_{CDD'C'}$$

$$= 4 \cdot d(A', (CDD'C')) \cdot S_{MNP} \quad (\text{do } S_{CDD'C'} = 4S_{MNP}) = 12 \cdot \frac{1}{3} d(A', (CDD'C')) \cdot S_{MNP} = 12V_{A'MNP}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } 12a^3 = 12V_{A'MNP} \Rightarrow V_{A'MNP} = a^3.$$

ỨNG DỤNG THỰC TẾ

Câu 1: (Ba Đình Lần 2) Từ một tấm thép phẳng hình chữ nhật, người ta muốn làm một chiếc thùng đựng dầu hình trụ bằng cách cắt ra hai hình tròn bằng nhau và một hình chữ nhật (phần tô đậm) sau đó hàn kín lại, như hình vẽ dưới đây.



Hai hình tròn làm hai mặt đáy, hình chữ nhật làm thành mặt xung quanh của thùng đựng dầu (vừa đủ). Biết thùng đựng dầu có thể tích bằng 50,24 lít (các mối ghép nối khi gò hàn chiếm diện tích không đáng kể. Lấy $\pi = 3,14$). Tính diện tích của tấm thép hình chữ nhật ban đầu?

A. 1,8062 m².

B. 2,2012 m².

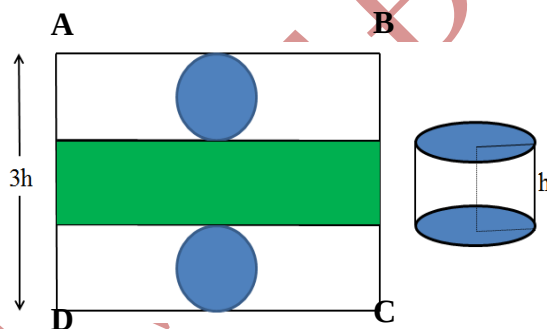
C. 1,5072 m².

D. 1,2064 m².

Lời giải

Chọn C

Gọi tấm thép hình chữ nhật ban đầu là $ABCD$ (Hình vẽ dưới), r là bán kính của hình tròn đáy.



Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là: $S = AB \cdot AD$.

Ta có $3h = 4r + h \Leftrightarrow h = 2r$.

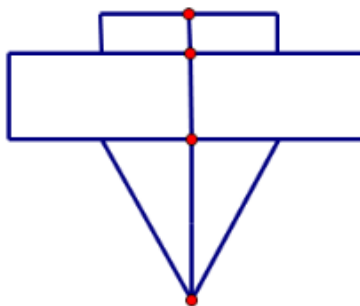
Thể tích của khối trụ $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot r^2 \cdot 2r = 6,28r^3$.

Theo bài ra $V = 50,24 \Leftrightarrow 6,28r^3 = 50,24 \Leftrightarrow r^3 = 8 \Leftrightarrow r = 2$.

Do $r = 2 \text{ dm} = 0,2 \text{ m} \Rightarrow AD = 3h = 6r = 1,2 \text{ m}$; $AB = 2\pi \cdot r = 1,256 \text{ m}$.

Vậy $S = 1,2 \cdot 1,256 = 1,5072 (\text{m}^2)$.

Câu 2: (Trung Tâm Thanh Trường Nghệ An Lần 2) Một con xoay được thiết kế gồm hai khối trụ (T_1), (T_2) chồng lên khối nón (N) (Tham khảo mặt cắt ngang qua trục như hình vẽ). Khối trụ (T_1) có bán kính đáy $r(\text{cm})$, chiều cao $h_1(\text{cm})$. Khối trụ (T_2) có bán kính đáy $2r(\text{cm})$, chiều cao $h_2 = 2h_1(\text{cm})$. Khối nón (N) có bán kính đáy $r(\text{cm})$, chiều cao $h_n = 4h_1(\text{cm})$. Biết rằng thể tích toàn bộ con xoay bằng $31(\text{cm}^3)$. Thể tích khối nón (N) bằng

A. $5(\text{cm}^3)$.B. $3(\text{cm}^3)$.C. $4(\text{cm}^3)$.D. $6(\text{cm}^3)$.

Lời giải

Chọn C

Theo bài ta có $h_n = 4h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{1}{4}h_n; h_2 = 2h_1 = \frac{1}{2}h_n$.

Thể tích toàn bộ con xoay là

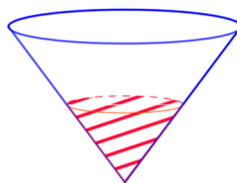
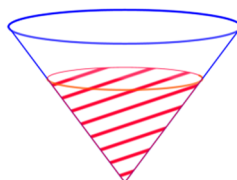
$$V = V_{(T_1)} + V_{(T_2)} + V_{(N)} = \pi \cdot r^2 \cdot h_1 + \pi \cdot (2r)^2 \cdot h_2 + \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h_n$$

$$\Leftrightarrow 31 = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{1}{4}h_n + \pi \cdot 4r^2 \cdot \frac{1}{2}h_n + \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h_n$$

$$\Leftrightarrow 31 = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h_n \right) + 6 \left(\frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h_n \right) + \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h_n \Leftrightarrow 31 = \frac{31}{4} \left(\frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h_n \right) \Leftrightarrow \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h_n = 4$$

Vậy thể tích khối nón (N) là: $V_{(N)} = 4(\text{cm}^3)$.

Câu 3: (Đặng Thành Nam Đề 5) Hai hình nón bằng nhau có chiều cao bằng 2 dm, được đặt như hình vẽ bên (mỗi hình đều đặt thẳng đứng với đỉnh nằm phía dưới). Lúc đầu, hình nón trên chứa đầy nước và hình nón dưới không chứa nước. Sau đó, nước được chảy xuống hình nón dưới thông qua lỗ trống ở đỉnh của hình nón trên. Hãy tính chiều cao của nước trong hình nón dưới tại thời điểm khi mà chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm.

A. $\sqrt[3]{7}$.B. $\frac{1}{3}$.C. $\sqrt[3]{5}$.D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi bán kính đáy của hình nón là r .

Khi đó thể tích nước trong khối nón phía trên lúc ban đầu là: $\frac{\pi r^2 \cdot 2}{3}$

Thể tích nước trong khối nón phía trên sau khi chảy xuống nón dưới tại thời điểm khi mà chiều

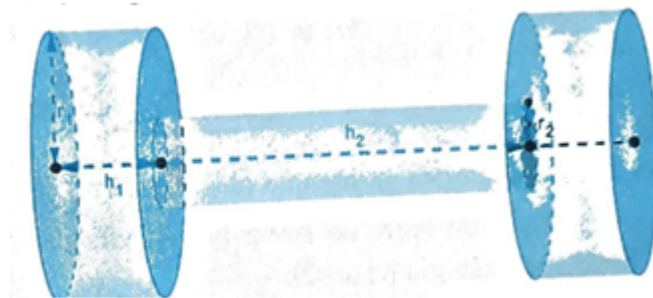
cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm là: $\frac{\pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot 1}{3} = \frac{\pi r^2}{12}$

Thể tích nước trong nón phía dưới sau khi nón trên chảy xuống là: $\frac{2\pi r^2}{3} - \frac{\pi r^2}{12} = \frac{7\pi r^2}{12}$.

Gọi chiều cao nước trong nón dưới là h , bán kính đáy nước trong nón dưới là r' , khi đó: $\frac{h}{2} = \frac{r'}{r} \Leftrightarrow r' = \frac{rh}{2}$.

Thể tích nước trong nón phía dưới là: $\frac{\pi (r')^2 h}{3} = \frac{7\pi r^2}{12} \Leftrightarrow \frac{\pi \left(\frac{rh}{2}\right)^2 \cdot h}{3} = \frac{7\pi r^2}{12} \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{7}$.

Câu 4: (THTT lần 5) Một quả tạ tập tay gồm ba khối trụ (H_1) , (H_2) , (H_3) gắn liền nhau lần lượt có bán kính và chiều cao tương ứng là r_1, h_1 , r_2, h_2 , r_3, h_3 thỏa mãn $r_1 = r_3$, $h_1 = h_3$; $r_2 = \frac{1}{3}r_1$ (xem hình vẽ). Biết thể tích của toàn bộ quả tạ bằng 60π và chiều dài quả tạ bằng 9. Thể tích khối trụ (H_2) bằng?



(H_1)

A. $\pi \frac{16(9-2h_1)}{4h_1+9}$ B. $\pi \frac{36(9-2h_1)}{4h_1+9}$ C. $\pi \frac{60(9-2h_1)}{4h_1+9}$ D. $\pi \frac{46(9-2h_1)}{4h_1+9}$

Lời giải

Chọn C

Chiều dài quả tạ là $l = h_1 + h_2 + h_3 = 2h_1 + h_2 = 9 \Rightarrow h_2 = 9 - 2h_1$

Thể tích quả tạ là $V = V_{(H_1)} + V_{(H_2)} + V_{(H_3)} = \pi r_1 h_1 + \pi r_2 h_2 + \pi r_3 h_3 = 2\pi r_1 h_1 + \pi r_2 h_2 = 60\pi$

$\Leftrightarrow 2r_1 h_1 + r_2 h_2 = 60 \Leftrightarrow 6r_2 h_1 + r_2 (9 - 2h_1) = 60 \Leftrightarrow r_2 (9 + 4h_1) = 60 \Leftrightarrow r_2 = \frac{60}{9 + 4h_1}$

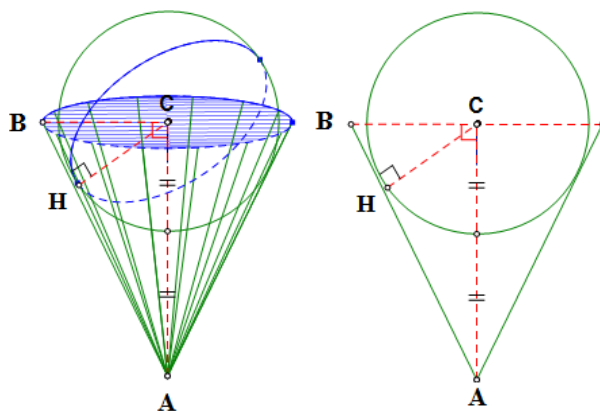
Thể tích $V_{(H_2)} = \pi r_2 h_2 = \pi \frac{60}{9 + 4h_1} (9 - 2h_1) = \pi \frac{60(9 - 2h_1)}{9 + 4h_1}$.

Câu 5: (Chuyên Thái Nguyên) Một bình đựng nước dạng hình nón (không có đáy) đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $18\pi \text{ dm}^3$. Biết khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đứng một nửa khối cầu chìm trong nước. Tính thể tích nước còn lại trong bình.

A. $27\pi \text{ dm}^3$ B. $6\pi \text{ dm}^3$ C. $9\pi \text{ dm}^3$ D. $24\pi \text{ dm}^3$.

Lời giải

Chọn B



Vì đúng một nửa khối cầu chìm trong nước nên thể tích khối cầu gấp 2 lần thể tích nước tràn ra ngoài.

Gọi bán kính khối cầu là R , lúc đó: $\frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi \Leftrightarrow R^3 = 27$.

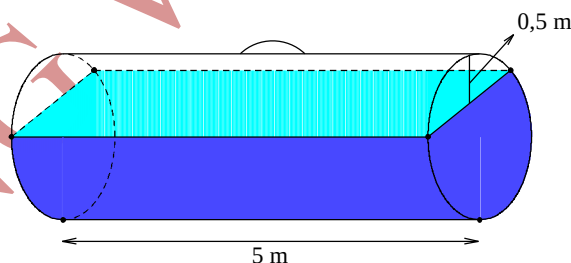
Xét tam giác ABC có AC là chiều cao bình nước nên $AC = 2R$ (Vì khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước)

Trong tam giác ABC có: $\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CA^2} + \frac{1}{CB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{R^2} = \frac{1}{4R^2} + \frac{1}{CB^2} \Leftrightarrow CB^2 = \frac{4R^2}{3}$.

Thể tích khối nón: $V_n = \frac{1}{3}\pi.CB^2.AC = \frac{1}{3}\pi.\frac{4R^2}{3}.2R = \frac{8\pi}{9}.R^3 = 24\pi \text{ dm}^3$.

Vậy thể tích nước còn lại trong bình: $24\pi - 18\pi = 6\pi \text{ dm}^3$

Câu 6: (THPT PHỤ DỤC – THÁI BÌNH) Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5 m, có bán kính đáy 1 m, với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với 0,5 m của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn (theo đơn vị m^3).



A. 23,562 m^3 .

B. 12,637 m^3 .

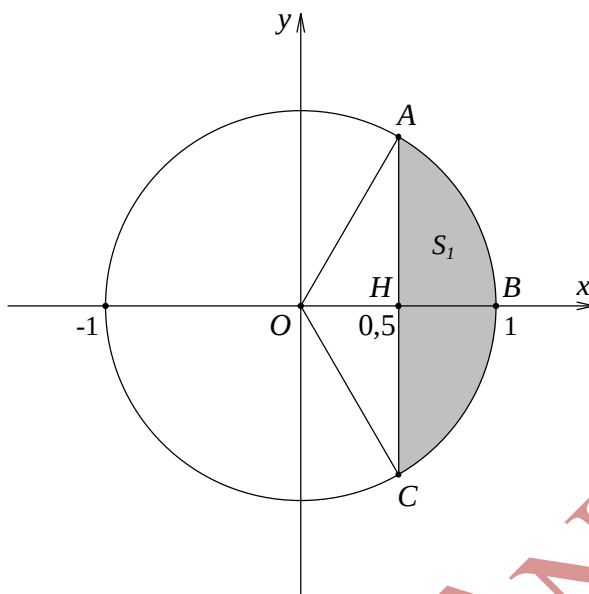
C. 6,319 m^3 .

D. 11,781 m^3 .

Lời giải

Chọn B

Gắn hệ trục tọa độ Oxy vào đáy hình trụ như hình vẽ sau



Ta có H là trung điểm OB nên $\triangle OAB$ là tam giác đều. Suy ra $\widehat{AOB} = 60^\circ$ và $\widehat{AOC} = 120^\circ$ nên hình quạt chứa cung nhỏ $\widehat{AC}$ có diện tích là $S = \frac{1}{3}\pi r^2 = \frac{\pi}{3}$.

Khi đó diện tích phần tô đậm trên hình vẽ là $S_1 = S - S_{OAC} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

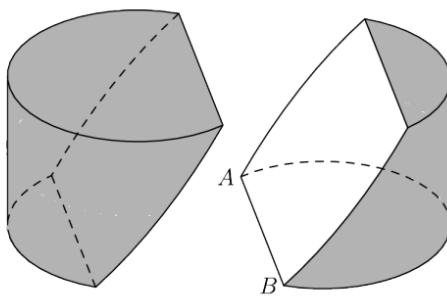
Và thể tích dầu được rút ra là $V_1 = h \cdot S_1 = 5 \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$.

Thể tích bồn chứa dầu hình trụ là $V = \pi r^2 h = 5\pi$.

Thể tích dầu còn lại trong bồn là $V_2 = V - V_1 = 5\pi - 5 \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{10\pi}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{4} \approx 12,637 \text{ (m}^3\text{)}$.

Cách khác: Có thể tính diện tích phần tô đậm bằng tích phân $S_1 = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Câu 7: [THPT chuyên Vĩnh Phúc lần 5] Một khối gỗ có hình trụ với bán kính đáy bằng 6 và chiều cao bằng 8. Trên một đường tròn đáy nào đó ta lấy hai điểm A, B sao cho cung AB có số đo 120° . Người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua A, B và tâm của hình trụ (tâm của hình trụ là trung điểm của đoạn nối tâm hai đáy) để được thiết diện như hình vẽ. Tính diện tích S của thiết diện thu được.



A. $S = 20\pi$.

B. $S = 20\pi + 30\sqrt{3}$.

C. $S = 12\pi + 18\sqrt{3}$.

D. $S = 20\pi + 25\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi giao tuyến của mặt phẳng cắt với đáy còn lại là đoạn CD .
Kẻ các đường sinh CC', DD' . Khi đó $ABD'C'$ là hình chữ nhật.

$$\text{Góc } OC'D' = 120^\circ \Rightarrow C'D' = 6\sqrt{3}; BD' = 6; \widehat{AOC'} = 60^\circ.$$

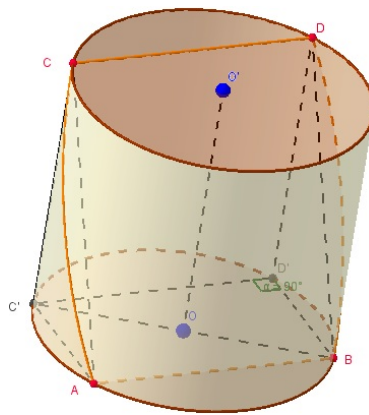
Gọi φ là góc giữa mặt cắt và mặt đáy.

$$\cos \varphi = \cos \widehat{DBD'} = \frac{8}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{3}{5}.$$

Thiết diện cần tìm có hình chiếu xuống đường tròn đáy tâm O là phần hình nằm giữa cung

$C'D'$ và cung AB . Áp dụng công thức hình chiếu $S = \frac{S_{H\text{Chiếu}}}{\cos \alpha}$; Và

$$S_{H\text{Chiếu}} = 2(S_{AOB} + S_{\widehat{AOC'}}) = 2\left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{60}{360} \cdot \pi \cdot 36\right) = 18\sqrt{3} + 12\pi. \text{ Do đó } S = 20\pi + 30\sqrt{3}.$$



Câu 8: (Cầu Giấy Hà Nội 2019 Lần 1) Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ có thể tích là V , các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon sữa bò là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ bằng V và diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy bằng bao nhiêu?

A. $r = \sqrt[3]{\frac{V\pi}{2}}$.

B. $r = \sqrt[3]{V}$.

C. $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

D. $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $S_{\text{đáy}} = \pi r^2$; $S_{\text{xq}} = 2\pi rh$.

Thể tích khối trụ $V = S_{\text{đáy}} \cdot h \Rightarrow h = \frac{V}{S_{\text{đáy}}} = \frac{V}{\pi r^2}$.

$$S_{\text{tp}} = 2S_{\text{đáy}} + S_{\text{xq}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Xét hàm số $f(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$, có $f'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}$; $f'(r) = 0 \Leftrightarrow 4\pi r = \frac{2V}{r^2} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

r	0	$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$+\infty$
$f'(r)$		0	
$f(r)$		f_{CT}	

Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số đạt tại $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Vậy khi $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ thì diện tích toàn phần hình trụ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 9: (Trần Đại Nghĩa) Nam muốn xây một bình chứa hình trụ có thể tích 72m^3 . Đáy làm bằng bê tông giá 100 nghìn đồng/ m^2 , thành làm bằng tôn giá 90 nghìn đồng/ m^2 , nắp bằng nhôm giá 140 nghìn đồng/ m^2 . Vậy đáy của hình trụ có bán kính bằng bao nhiêu để chi phí xây dựng là thấp nhất?

A. $\frac{3}{2\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$.

B. $\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$.

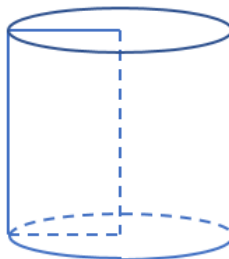
C. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$.

D. $\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Như Hưng; Fb: Nguyen Hung

Chọn B



Gọi bán kính đáy của hình trụ là R (m) và chiều cao là h (m).

Do thể tích khối trụ là 72 nên $\pi R^2 h = 72 \Leftrightarrow h = \frac{72}{\pi R^2}$.

Diện tích đáy là πR^2 .

Diện tích xung quanh là $2\pi R h = 2\pi R \cdot \frac{72}{\pi R^2} = \frac{144}{R}$.

Chi phí làm bình là:

$$T = 100 \cdot \pi R^2 + 90 \cdot \frac{144}{R} + 140 \cdot \pi R^2 = 240\pi R^2 + \frac{12960}{R}$$

$$= 240\pi R^2 + \frac{6480}{R} + \frac{6480}{R} \geq 3\sqrt[3]{240\pi R^2 \cdot \frac{6480}{R} \cdot \frac{6480}{R}} = 6480\sqrt[3]{\pi}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } 240\pi R^2 = \frac{6480}{R} = \frac{6480}{R} \Leftrightarrow R = \frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}.$$

Câu 10: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NĂM 2018-2019) Tại trung tâm một thành phố người ta tạo điểm nhấn bằng cột trang trí hình nón có kích thước như sau: đường sinh $l = 10\text{m}$, bán kính đáy $R = 5\text{m}$. Biết rằng tam giác SAB là thiết diện qua trục của hình nón và C là trung điểm của SB . Trang trí một hệ thống đèn điện tử chạy từ A đến C trên mặt nón. Định giá trị ngắn nhất của chiều dài dây đèn điện tử.

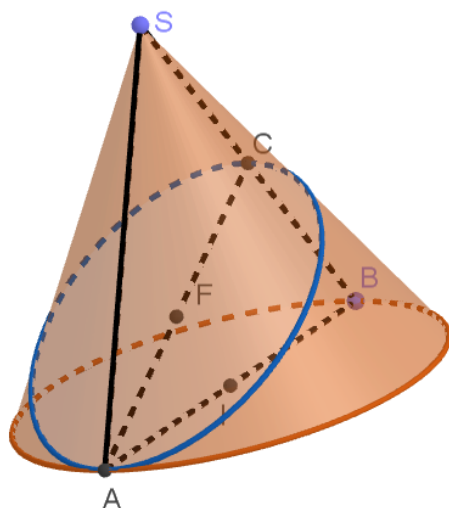
A. 15m .

B. 10m .

C. $5\sqrt{3}\text{m}$.

D. $5\sqrt{5}\text{m}$.

Lời giải



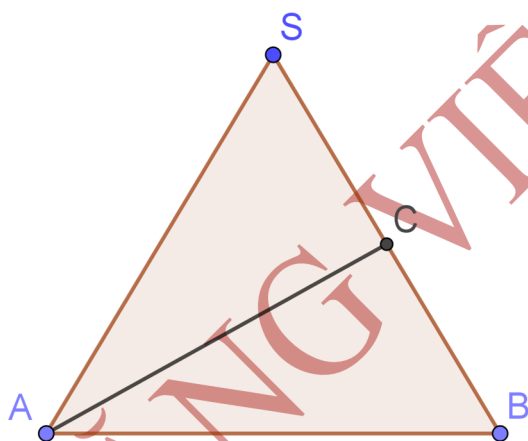
Ta có: $\triangle SAB$ cân và $SB = AB \Rightarrow \triangle SAB$ đều

Diện tích xung quanh hình nón là $S_{xq} = \pi Rl = 50\pi (m^2)$

Vẽ (P) đi qua C và vuông góc với AB . Mặt phẳng (P) cắt hình nón theo thiết diện là một Elip

Khi đó, chiều dài dây đèn điện tử ngắn nhất chính là chiều dài dây cung AC trên Elip.

* Ta dùng phương pháp trái hình ra sẽ thấy ngay như sau

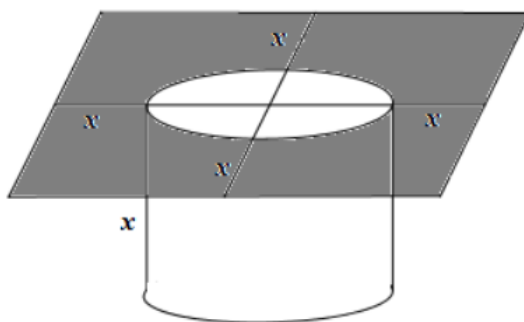


Hình trái dài là một hình quạt với AB là độ dài nửa đường tròn và $AB = R \cdot \pi = 5\pi (m)$

$$S_{ABS} = \frac{1}{2} S = 25\pi \Leftrightarrow \frac{\widehat{ASB} \cdot \pi R_1^2}{360} = 25\pi \Leftrightarrow \widehat{ASB} = \frac{360 \cdot 25\pi}{\pi \cdot 10^2} = 90^\circ$$

Vậy $\triangle SAC$ vuông tại S và $AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = 5\sqrt{5}$.

Câu 11: (THPT CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 01 NĂM 2018-2019) Trên một mảnh đất hình vuông có diện tích $81m^2$ người ta đào một cái ao nuôi cá hình trụ (như hình vẽ) sao cho tâm của hình tròn đáy trùng với tâm của mảnh đất. Ở giữa mép ao và mép mảnh đất người ta để lại một khoảng đất trống để đi lại, biết khoảng cách nhỏ nhất giữa mép ao và mép mảnh đất là $x(m)$. Giả sử chiều sâu của ao cũng là $x(m)$. Tính thể tích lớn nhất V của ao.



A. $V = 13,5\pi (m^3)$.

B. $V = 27\pi (m^3)$.

C. $V = 36\pi (m^3)$.

D. $V = 72\pi (m^3)$.

Lời giải

Chọn A.

Phương pháp

Xác định bán kính đáy và chiều cao của hình trụ, sử dụng công thức $V = \pi R^2 h$ tính thể tích của hình trụ.

+) Lập BBT tìm GTLN của hàm thể tích.

Cách giải

Ta có: Đường kính đáy của hình trụ là $9 - 2x \Rightarrow$ Bán kính đáy hình trụ là $\frac{9-2x}{2}$.

Khi đó ta có thể tích ao là $V = \pi \left(\frac{9-2x}{2} \right)^2 x = \frac{\pi}{4} (9-2x)^2 x = \frac{\pi}{4} f(x)$

Xét hàm số $f(x) = (9-2x)^2 x = 4x^3 - 36x^2 + 81x$ với $0 < x < \frac{9}{2}$ ta có:

$$f'(x) = 12x^2 - 72x + 81 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

BBT:

x	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$		
$f'(x)$		+	0	-	0
$f(x)$	0	54	0		

Dựa vào BBT ta thấy $f(x)_{\max} = 54 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. Khi đó $V_{\max} = \frac{\pi}{4} \cdot 54 = \frac{27\pi}{2} = 13,5\pi (m^3)$.

Câu 12: Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón có thể tích $27cm^3$ với chiều cao là h và bán kính đáy là r để lượng giấy tiêu thụ là ít nhất thì giá trị của r là:

A. $r = \sqrt[4]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$.

B. $r = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$.

C. $r = \sqrt[4]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$.

D. $r = \sqrt[6]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Thể tích của cốc: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = 27 \Rightarrow r^2 h = \frac{81}{\pi} \Rightarrow h = \frac{81}{\pi} \cdot \frac{1}{r^2}$

Lượng giấy tiêu thụ ít nhất khi và chỉ khi diện tích xung quanh nhỏ nhất.

$$\begin{aligned}
S_{xq} &= 2\pi r l = 2\pi r \sqrt{r^2 + h^2} = 2\pi r \sqrt{r^2 + \frac{81^2}{\pi^2} \frac{1}{r^4}} = 2\pi \sqrt{r^4 + \frac{81^2}{\pi^2} \frac{1}{r^2}} \\
&= 2\pi \sqrt{r^4 + \frac{81^2}{2\pi^2} \frac{1}{r^2} + \frac{81^2}{2\pi^2} \frac{1}{r^2}} \geq 2\pi \sqrt{3 \sqrt[3]{r^4 \cdot \frac{81^2}{2\pi^2} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{81^2}{2\pi^2} \frac{1}{r^2}}} \\
&= 2\sqrt{3}\pi \sqrt[6]{\frac{81^4}{4\pi^4}} \quad (\text{theo BĐT Cauchy}) \\
S_{xq} \text{ nhỏ nhất} &\Leftrightarrow r^4 = \frac{81^2}{2\pi^2} \frac{1}{r^2} \Leftrightarrow r^6 = \frac{3^8}{2\pi^2} \Leftrightarrow r = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}.
\end{aligned}$$

Câu 13: Một phễu đựng kem hình nón bằng giấy bạc có thể tích 12π (cm³) và chiều cao là 4cm. Muốn tăng thể tích kem trong phễu hình nón lên 4 lần, nhưng chiều cao không thay đổi, diện tích miêng giấy bạc cần thêm là.

A. $(12\sqrt{13} - 15)\pi$ (cm²).

B. $12\pi\sqrt{13}$ (cm²).

C. $\frac{12\sqrt{13}}{15}$ (cm²).

D. $(12\sqrt{13} + 15)\pi$ (cm²).

Hướng dẫn giải:

Gọi R_1 là bán kính đường tròn đáy hình nón lúc đầu; h_1 là chiều cao của hình nón lúc đầu.
Gọi R_2 là bán kính đường tròn đáy hình nón sau khi tăng thể tích; h_2 là chiều cao của hình nón sau khi tăng thể tích.

Ta có: $V_1 = \frac{1}{3}\pi R_1^2 h_1 \Rightarrow 12\pi = \frac{1}{3}\pi R_1^2 4 \Rightarrow R_1 = 3$

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3}\pi R_1^2 h_1 \\ V_2 &= \frac{1}{3}\pi R_2^2 h_2 \\ h_2 &= h_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{R_2^2}{R_1^2} = 4 \Rightarrow R_2 = 2R_1 = 6$$

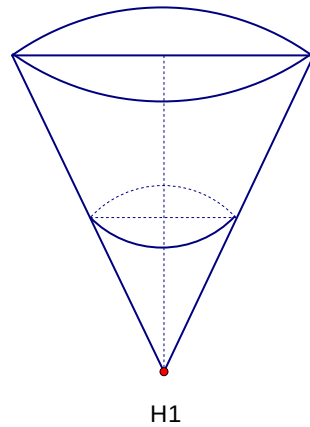
Diện tích xung quanh hình nón lúc đầu: $S_{xp1} = \pi R_1 l_1 = \pi 3\sqrt{16+9} = 15\pi$ (cm²)

Diện tích xung quanh hình nón sau khi tăng thể tích:
 $S_{xp2} = \pi R_2 l_2 = \pi 6\sqrt{16+36} = 12\pi\sqrt{13}$ (cm²)

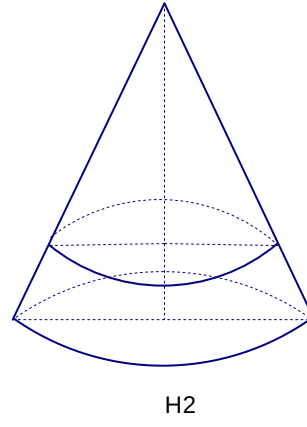
Diện tích phần giấy bạc cần tăng thêm là: $S = (12\sqrt{13} - 15)\pi$ (cm²)

Chọn A.

Câu 14: Một cái phễu có dạng hình nón chiều cao của phễu là 30cm. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của cột nước trong phễu bằng 15cm (hình H_1). Nếu bịt kín miệng phễu rồi lật ngược phễu lên (hình H_2) thì chiều cao của cột nước trong phễu gần với giá trị nào sau đây?



H1



H2

A. 1,553(cm).

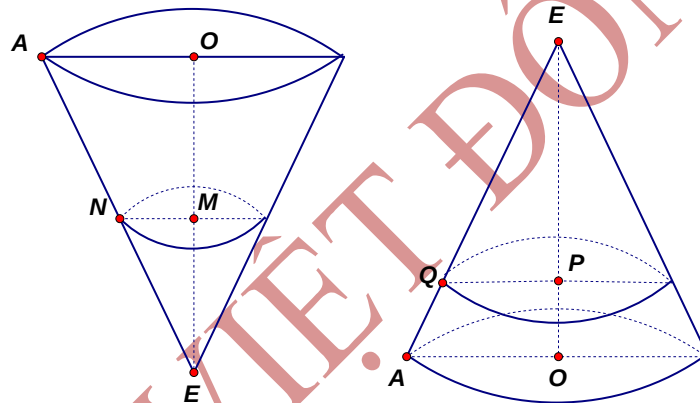
B. 1,306(cm).

C. 1,233(cm)

D. 15(cm).

Chọn B

Lời giải



Phễu có dạng hình nón, gọi E là đỉnh, đáy là đường tròn tâm O , bán kính OA chiều cao $OE = 30\text{cm}$.

Gọi V là thể tích của khối nón có đỉnh E , đáy là đường tròn tâm O , bán kính OA .

$$\text{Ta có } V = \frac{1}{3} \pi \cdot OA^2 \cdot OE = 10\pi OA^2$$

Gọi M là trung điểm của đoạn OE , N là trung điểm của đoạn EA . Khi đổ nước vào phễu chiều cao của cột nước là $EM = 15\text{cm}$.

Gọi V_1 là thể tích của khối nón có đỉnh E , đáy là đường tròn tâm M , bán kính MN .

$$\Rightarrow \text{Thể tích nước là } V_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot MN^2 \cdot EM = 5\pi \cdot MN^2 = \frac{5}{4} \pi \cdot OA^2 \Rightarrow V_1 = \frac{1}{8} V$$

Khi bịt kín miệng phễu rồi lật ngược phễu lên, chiều cao của cột nước là OP .

Gọi V_2 là thể tích của khối nón có đỉnh E , đáy là đường tròn tâm P , bán kính PQ

$$\text{Ta có } V_2 = V - V_1 = \frac{7}{8} V \Leftrightarrow \frac{V_2}{V} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{3} \pi \cdot PQ^2 \cdot PE}{\frac{1}{3} \pi \cdot OA^2 \cdot OE} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \frac{PQ^2 \cdot PE}{OA^2 \cdot OE} = \frac{7}{8} \quad (1)$$

Ta có $\triangle PEQ$ vuông tại P và $\triangle OEA$ vuông tại O có $\widehat{OEA} = \widehat{PEQ}$

$$\Rightarrow \triangle PEQ \text{ và } \triangle OEA \text{ đồng dạng} \Rightarrow \frac{PQ}{OA} = \frac{PE}{OE}$$

$$\text{Do đó (1)} \Leftrightarrow \left(\frac{PE}{OE}\right)^3 = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \frac{PE}{OE} = \frac{\sqrt[3]{7}}{2} \Leftrightarrow \frac{OE-OP}{OE} = \frac{\sqrt[3]{7}}{2}$$

$$\Leftrightarrow OP = OE \left(1 - \frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right) = 30 \left(1 - \frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right) \approx 1,306 \text{ cm}$$

Câu 15: Cho một đồng hồ cát như hình vẽ (gồm hai hình nón chung đỉnh ghép lại) trong đó đường sinh bất kỳ của hình nón tạo với đáy một góc 60° . Biết rằng chiều cao của đồng hồ là 30 cm và tổng thể tích của đồng hồ là $1000\pi (\text{cm}^3)$. Nếu cho đầy lượng cát vào phần trên thì khi chảy hết xuống dưới. khi đó tỷ lệ thể tích lượng cát chiếm chỗ và thể tích phần phía dưới là bao nhiêu

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{27}$
C. $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ D. $\frac{1}{64}$

$$\text{Đặt } \begin{cases} OE = x > 0 \\ OH = y > 0 \Rightarrow x + y = 60 \\ x < y \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{1}{3} \pi \cdot EL^2 \cdot x + \frac{1}{3} \pi \cdot HM^2 \cdot y = 1000\pi \\ \tan 60^\circ = \frac{x}{EL} = \frac{y}{HM} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} EL^2 \cdot x + HM^2 \cdot y = 3000 \\ EL = \frac{x}{\sqrt{3}}; HM = \frac{y}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 = 9000 \quad (2). \text{ Từ (1), (2)} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 (\text{cm}) \\ y = 20 (\text{cm}) \end{cases} \text{ Khi cát chảy hết xuống dưới}$$

$$\frac{V_{\text{cat chiếm chỗ}}}{V_{\text{dưới}}} = \left(\frac{x}{y}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Câu 16: Cho một miếng tôn hình tròn có bán kính 50 cm . Biết hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích miếng tôn ở trên. Khi đó hình nón có bán kính đáy là

- A. $10\sqrt{2} \text{ cm}$ B. 20 cm C. $50\sqrt{2} \text{ cm}$ D. 25 cm

Hướng dẫn giải:

Đặt $a = 50 \text{ cm}$. Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình nón lần lượt là $x, y (x, y > 0)$. Ta có

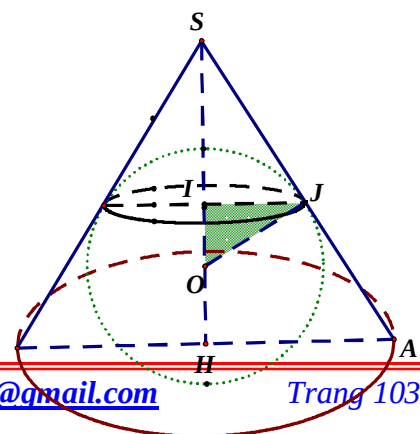
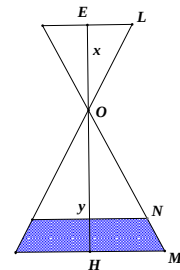
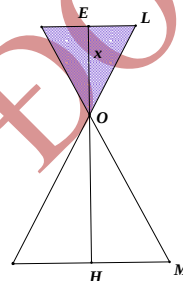
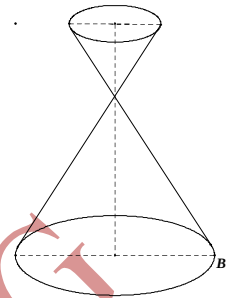
$$SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Khi đó diện tích toàn phần của hình nón là

$$S_p = \pi x^2 + \pi x \sqrt{x^2 + y^2}$$

Theo giả thiết ta có:

$$\pi x^2 + \pi x \sqrt{x^2 + y^2} = \pi a^2 \Leftrightarrow x \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 = a^2$$



$$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2 + y^2} = a^2 - x^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2(x^2 + y^2) = a^4 + x^4 - 2a^2x^2, (DK: x < a) \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^4}{y^2 + 2a^2}$$

$$\text{Khi đó thể tích khối nón là: } V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a^4}{y^2 + 2a^2} \cdot y = \frac{1}{3}\pi a^4 \cdot \frac{y}{y^2 + 2a^2}$$

V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{y^2 + 2a^2}{y}$ đạt giá trị nhỏ nhất

$$\text{Ta có } \frac{y^2 + 2a^2}{y} = y + \frac{2a^2}{y} \geq 2\sqrt{y \cdot \frac{2a^2}{y}} = 2\sqrt{2}a$$

Vậy V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $y = \frac{2a^2}{2\sqrt{2}a} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, tức là $y = a\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{a}{2} = 25\text{cm}$

Chọn D.

Câu 17: Một kem ốc quế gồm hai phần, phần kem có dạng hình cầu, phần ốc quế có dạng hình nón, giả sử hình cầu và hình nón có bán kính bằng nhau, biết rằng nếu kem tan chảy hết sẽ làm đầy phần ốc quế. Biết thể tích kem sau khi tan chảy bằng 75% thể tích kem đóng băng ban đầu, gọi h, r lần lượt là chiều cao và bán kính của phần ốc quế. Tính tỷ số $\frac{h}{r}$

A. $\frac{h}{r} = 3$

B. $\frac{h}{r} = 2$

C. $\frac{h}{r} = \frac{4}{3}$

D. $\frac{h}{r} = \frac{16}{3}$

Hướng dẫn giải:

Thể tích kem ban đầu: $V_{\text{kem}(bd)} = \frac{4}{3}\pi R^3$

Thể tích phần ốc quế: $V_{\text{oc que}} = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot h$

Ta có $V_{\text{oc que}} = \frac{3}{4}V_{\text{kem}(bd)} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot h = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \Leftrightarrow \frac{h}{R} = 3$

Câu 18: Cắt một hình nón bằng một mặt phẳng song song với đáy thì phần hình nón nằm giữa mặt phẳng và đáy gọi là hình nón cụt. Một chiếc cốc có dạng hình nón cụt cao 9cm, bán kính của đáy cốc và miệng cốc lần lượt là và 4cm. Hỏi chiếc cốc có thể chứa được lượng nước tối đa là bao nhiêu trong số các lựa chọn sau:

A. 250ml

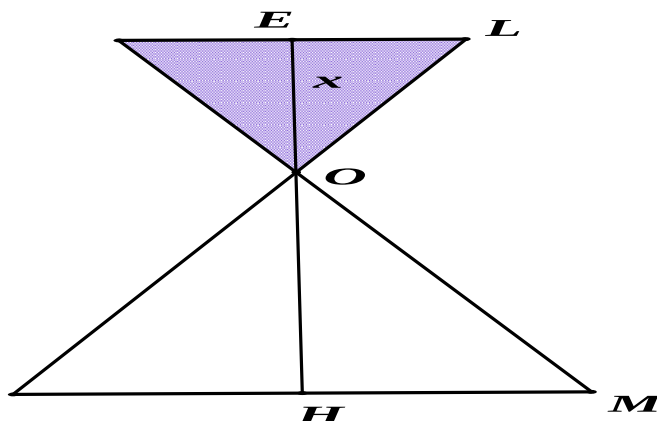
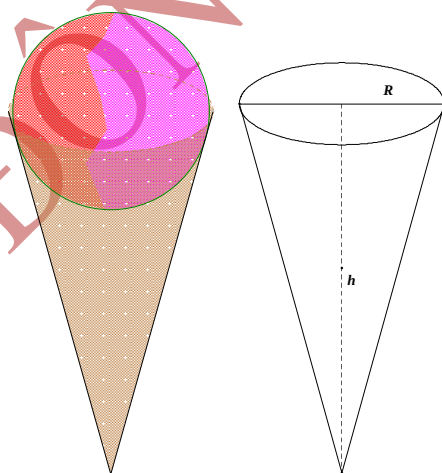
B. 300ml

C. 350ml

D. 400ml

Hướng dẫn giải:

$$\Delta AGC \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AG}{AB} = \frac{GC}{BD} = \frac{3}{4} \Rightarrow AG = \frac{3}{4}AB$$



$$\Leftrightarrow \frac{AG}{AG+9} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow AG = 27$$

Suy ra $V_{coc} = V_{nonlon} - V_{nonrho}$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot (27+9) - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 27 = 111\pi \approx 348,72ml$$

Vậy lượng nước tối đa là 300ml.

Chọn B.

Câu 19: Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật với các kích thước như hình vẽ. Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không kể viền, mép, phần thừa).

A. $700\pi (cm^2)$ **B.** $754,25\pi (cm^2)$

C. $750,25\pi (cm^2)$ **D.** $756,25\pi (cm^2)$

Hướng dẫn giải:

$$S_{hinhton} = \pi R^2 = \pi \left(\frac{35}{2} \right)^2;$$

$$S_{xqlangtru} = 2\pi rl = 2\pi \left(\frac{35-20}{2} \right) \cdot 30 = 450\pi$$

$$S = \pi \left[\left(\frac{35}{2} \right)^2 + 450 \right] = 756,25\pi.$$

Chọn D.

Câu 20: Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích của khối trụ đó bằng 2 và diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy gần số nào nhất?

A. 0,68.

B. 0,6.

C. 0,12.

D. 0,52.

Hướng dẫn giải:

Gọi x ($x > 0$) là bán kính đáy của lon sữa.

$$\text{Khi đó } V = \pi x^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi x^2}.$$

Diện tích toàn phần của lon sữa là

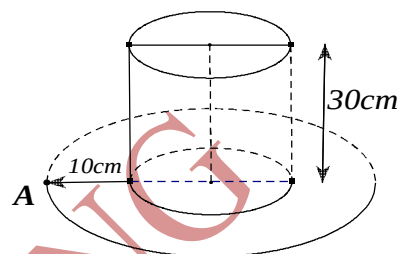
$$S(x) = 2\pi x^2 + 2\pi xh = 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{V}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + 2 \frac{V}{x} = 2\pi x^2 + \frac{4}{x}, \quad x > 0$$

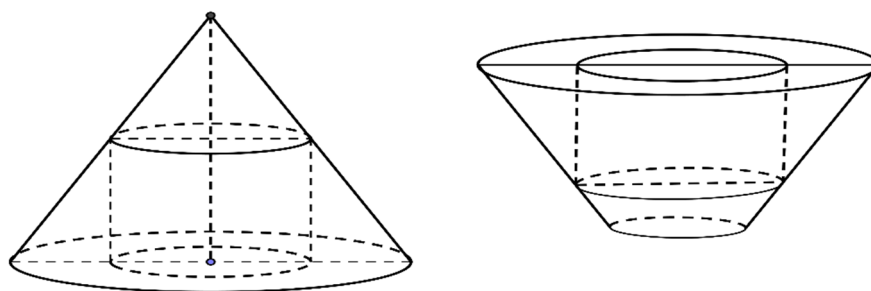
Bài toán quy về tìm GTNN của hàm số $S(x) = 2\pi x^2 + \frac{4}{x}, \quad x > 0$

$$S'(x) = 4\pi x - \frac{4}{x^2}$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} \approx 0,6827$$

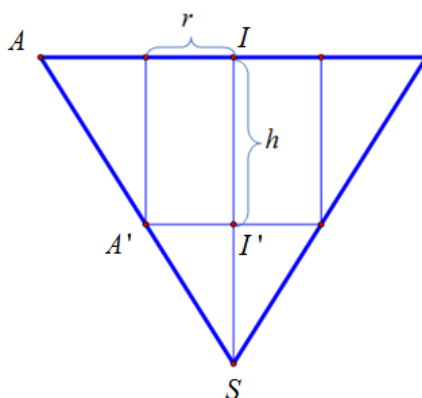
Câu 21: (THPT-Phúc-Trạch-Hà-Tĩnh-lần-2-2018-2019-thi-tháng-4) Khi sản xuất hộp mì tôm các nhà sản xuất luôn để một khoảng trống dưới đáy hộp. Hình vẽ dưới mô tả cấu trúc của hộp mì tôm. Thớ mì tôm có dạng hình trụ, hộp mì có dạng hình nón cụt được cắt ra bởi hình nón có chiều cao 9cm và bán kính đáy 6cm. Nhà sản xuất tìm cách sao cho thớ mì tôm có được thể tích lớn nhất vì mục đích thu hút khách hàng. Tìm thể tích lớn nhất đó.



A. 48π .B. $\frac{81}{2}\pi$.C. 36π .D. 54π .

Lời giải

Chọn A



- Ta có mặt cắt qua trục hình nón như hình vẽ.
Đặt r là bán kính đáy hình trụ, h là chiều cao của hình trụ.
Thở vì tìm có được thể tích lớn nhất khi khối trụ có thể tích lớn nhất.
Thể tích khối trụ là: $V = \pi r^2 h$.

Ta có hai tam giác SAI và $SA'I'$ đồng dạng.

$$\Rightarrow \frac{SI}{SI'} = \frac{AI}{A'I'} \Leftrightarrow \frac{9}{9-h} = \frac{6}{r} \Rightarrow h = 9 - \frac{3r}{2}.$$

$$\text{Khi đó } V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot \left(9 - \frac{3r}{2}\right) = \pi \left(-\frac{3r^3}{2} + 9r^2\right).$$

- Khảo sát hàm số V , biến số r ($0 < r < 6$).

$$V' = \pi \left(-\frac{9r^2}{2} + 18r\right).$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow \pi \left(-\frac{9r^2}{2} + 18r\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \text{ (l)} \\ r = 4 \text{ (n)} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

r	$-\infty$	0		4		6	$+\infty$
V'		0	+	0	-		
V		0		48π		0	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $V_{\max} = 48\pi$ khi $r = 4$.

Vậy thớ mì tôm có thể tích lớn nhất là 48π .

Câu 22: Một cái ly có dạng hình nón được rót nước vào với chiều cao mực nước bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao hình nón. Hỏi nếu bịch kính miệng ly rồi úp ngược ly xuống thì tỷ số chiều cao mực nước và chiều cao hình nón xấp xỉ bằng bao nhiêu?

A. 0,33.

B. 0,11.

C. 0,21.

D. 0,08

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi chiều cao và bán kính đường tròn đáy của cái ly lần lượt là h và R . Khi để cốc theo chiều xuôi thì lượng nước trong cốc là hình nón có chiều cao và bán kính đường tròn đáy lần lượt là $\frac{2h}{3}$ và $\frac{2R}{3}$.

Do đó thể tích lượng nước trong bình là $\frac{8V}{27} \Rightarrow$ Phần không chứa nước chiếm $\frac{19}{27}V$.

Khi úp ngược ly lại thì phần thể tích nước trong ly không đổi và lúc đó phần không chứa nước là hình nón và ta gọi h' và R' lần lượt là chiều cao và bán kính đường tròn đáy của phần hình nón không chứa nước đó.

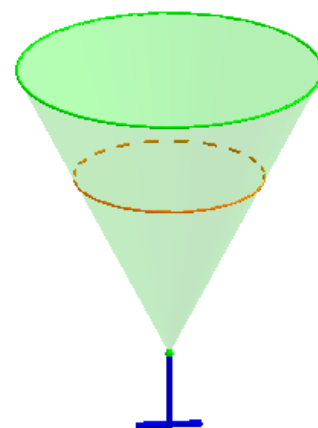
Ta có $\frac{R'}{R} = \frac{h'}{h}$ và phần thể tích hình nón không chứa

nước là $\frac{19}{27}V$

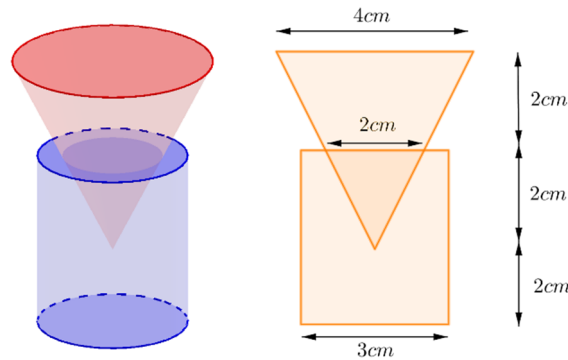
$$\Rightarrow \frac{h'}{3} \cdot \pi R'^2 = \frac{19}{27} \cdot \frac{h}{3} \cdot \pi R^2 \Leftrightarrow \left(\frac{h'}{h}\right)^3 = \frac{19}{27} \Rightarrow \frac{h'}{h} = \frac{\sqrt[3]{19}}{3}.$$

Do đó tỷ lệ chiều cao của phần chứa nước và chiều cao của cái ly trong trường hợp úp ngược ly là

$$1 - \frac{h'}{h} = \frac{3 - \sqrt[3]{19}}{3}.$$



Câu 23: Một nút chai thủy tinh là một khối tròn xoay (H) , một mặt phẳng chứa trục của (H) cắt (H) theo một thiết diện như trong hình vẽ bên. Tính thể tích của (H) (đơn vị cm^3).



A. $V_{(H)} = 23\pi$.

B. $V_{(H)} = 13\pi$.

C. $V_{(H)} = \frac{41\pi}{3}$.

D. $V_{(H)} = 17\pi$.

Hướng dẫn giải:**Chọn C.**

Thể tích khối trụ là $V_{tru} = Bh = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 54\pi$. Thể tích khối nón là $V_{non} = \frac{1}{3} \pi \cdot 2^2 \cdot 2 = \frac{8\pi}{3}$.

Thể tích phần giao là: $V_{p.giao} = \frac{1}{3} \pi \cdot 2^2 \cdot 2 = \frac{8\pi}{3}$. Vậy $V_{(H)} = 54\pi - \frac{8\pi}{3} = \frac{162\pi - 8\pi}{3} = \frac{154\pi}{3}$.

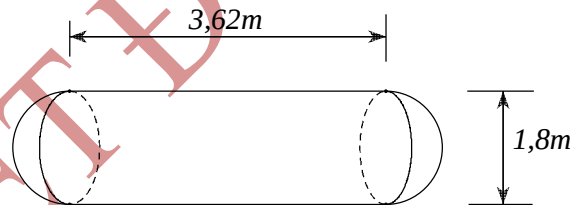
Câu 24: Một bồn chứa xăng có cấu tạo gồm 1 hình trụ ở giữa và 2 nửa hình cầu ở 2 đầu, biết rằng hình cầu có đường kính 1,8m và chiều dài của hình trụ là 3,62m. Hỏi bồn đó có thể chứa tối đa bao nhiêu lít xăng trong các giá trị sau đây?

A. 10905l

B. 23650l

C. 12265l

D. 20201l

**Hướng dẫn giải:**Ta có: $V_{tru} = \pi R^2 h$

Vì thể tích của 2 nửa hình cầu bằng nhau nên tổng thể tích của 2 nửa hình cầu là 1 khối cầu có

$$V_c = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

$$\text{Vậy } V_H = V_{tru} + V_c = \pi R^2 h + \frac{4}{3} \pi R^3 = 12,265m^3$$

Vậy bồn xăng chứa: 12265l.

Chọn C.

Câu 25: Một hình hộp chữ nhật kích thước $4 \times 4 \times h$ chứa một khối cầu lớn có bán kính bằng 2 và tám khối cầu nhỏ có bán kính bằng 1 sao cho các khối lớn tiếp xúc với tám khối cầu nhỏ và các khối cầu đều tiếp xúc với các mặt hình hộp. Thể tích khối hộp là:

A. $32 + 32\sqrt{7}$

B. $48 + 32\sqrt{5}$

C. $64 + 32\sqrt{7}$

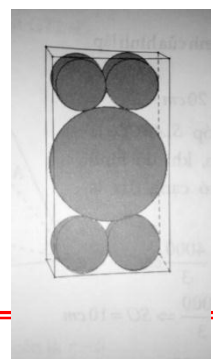
D. $64\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải:

Gọi tâm hình cầu lớn là I và tâm bốn hình cầu nhỏ tiếp xúc với đáy là ABCD. Khi đó ta có

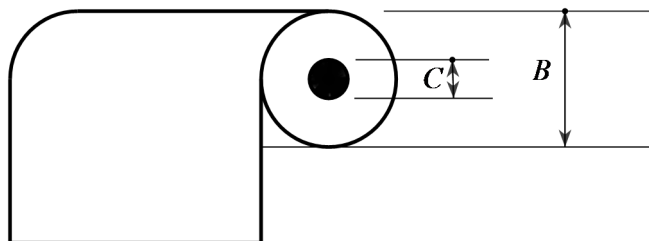
$I.ABCD$ là hình chóp đều với cạnh bên $IA = 3$ và cạnh đáy $AB = 2$ do đó chiều cao hình chóp là $\sqrt{7}$. Suy ra khoảng cách từ tâm I đến mặt đáy là $1 + \sqrt{7}$ hay chiều cao hình hộp chữ nhật là:

$$2(1 + \sqrt{7}) \text{ suy ra thể tích hình hộp là } 32(1 + \sqrt{7}).$$



Chọn A.

Câu 26: Một băng giấy dài được cuộn chặt lại thành nhiều vòng xung quanh một ống lõi hình trụ rỗng có đường kính $C = 12,5\text{mm}$. Biết độ dày của giấy cuộn là $0,6\text{mm}$ và đường kính cả cuộn giấy là $B = 44,9\text{mm}$.



Tính chiều dài l của cuộn giấy.

A. $L \approx 44\text{m}$

B. $L \approx 38\text{m}$

C. $L \approx 4\text{m}$

D. $L \approx 24\text{m}$

Hướng dẫn giải:

Gọi chiều rộng của băng giấy là r , chiều dài băng giấy là L độ dày của giấy là m khi đó ta có thể tích của băng giấy: $V = r.m.L$ (1)

$$\text{Khi cuộn lại ta cũng có thể tích: } V = \pi \left(\frac{B}{2} \right)^2 .m - \pi \left(\frac{C}{2} \right)^2 .m = \frac{\pi}{4} r (B^2 - C^2) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra: } m.r.L = \frac{\pi}{4} r (B^2 - C^2) \Rightarrow L = \frac{\pi}{4m} (B^2 - C^2)$$

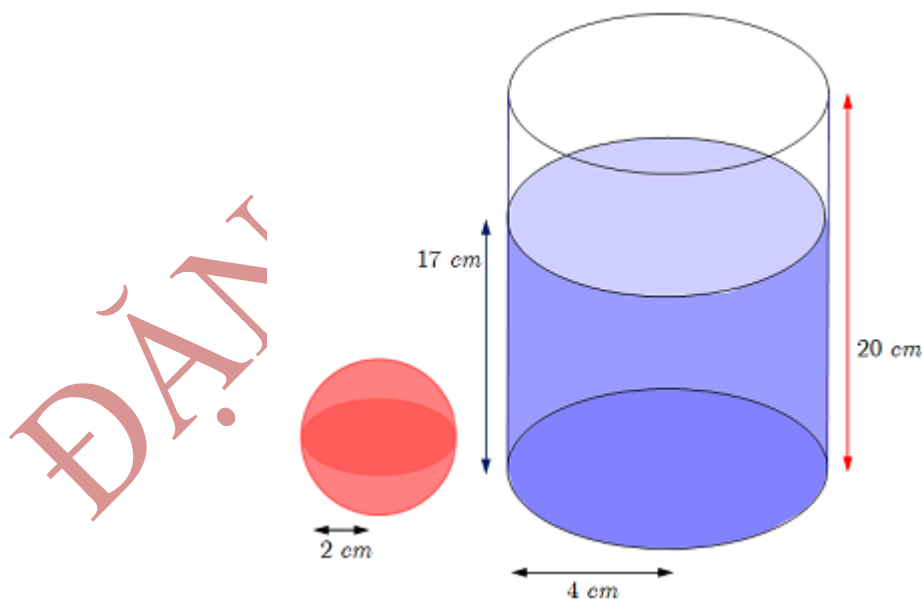
Câu 27: (Thị Xã Quảng Trị) Một ly nước hình trụ có chiều cao 20 cm và bán kính đáy bằng 4 cm . Bạn Nam đổ nước vào ly cho đến khi mực nước cách đáy ly 17 cm thì dừng lại. Sau đó, Nam lấy các viên đá lạnh hình cầu có cùng bán kính 2 cm thả vào ly nước. Bạn Nam cần dùng ít nhất bao nhiêu viên đá để nước trào ra khỏi ly?

A. 4.

B. 7.

C. 5.

D. 6.

**Lời giải****Chọn C**

Ta có thể tích phần không chứa nước $V_1 = 3.\pi.4^2 = 48\pi$. Như vậy để nước trào ra ngoài thì số bi thả vào cốc có tổng thể tích lớn hơn 48π .

Gọi n là số viên bi tối thiểu thả vào cốc khi đó tổng thể tích của n viên bi là

$$V_2 = n.\frac{4}{3}\pi.2^3 = \frac{32\pi n}{3}. \text{ Theo bài ra } \frac{32\pi n}{3} > 48\pi \Leftrightarrow n > \frac{9}{2}. \text{ Vậy } n = 5.$$

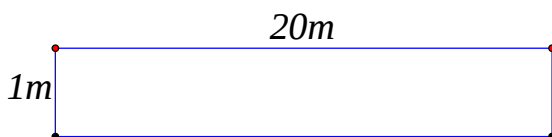
Câu 28: Một thầy giáo dự định xây dựng bể bơi di động cho học sinh nghèo miền núi từ 15 tấm tôn có kích thước $1m \times 20cm$ (biết giá $1m^2$ tôn là 90000 đồng) bằng 2 cách:

Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành 1 hình trụ như hình 1.

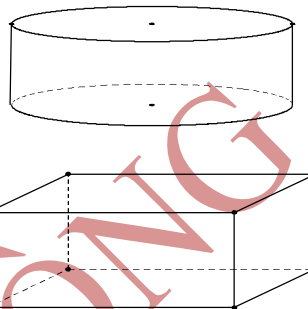
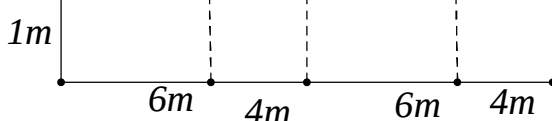
Cách 2: Chia chiều dài tấm tôn thành 4 phần rồi gò tấm tôn thành 1 hình hộp chữ nhật như hình 2.

Biết sau khi xây xong bể theo dự định, mức nước chỉ đổ đến $0,8m$ và giá nước cho đơn vị sự nghiệp là $9955\text{dong} / m^3$. Chi phí trong tay thầy hiệu trưởng là 2 triệu đồng. Hỏi thầy giáo sẽ chọn cách làm nào để không vượt quá kinh phí (giả sử chỉ tính đến các chi phí theo dữ kiện trong bài toán).

Hình 1



Hình 2



A. Cả 2 cách như nhau

C. Cách 2

Hướng dẫn giải:

Ở cách 2:

$$1m^2 \rightarrow 90.000$$

$$20m^2 \rightarrow 1.800.000$$

$$\text{Ta có } V_{\text{nước}} = 0,8 \cdot 6 \cdot 4 = 19,2m^3$$

$$\text{Do đó tổng tiền ở phương án 2 là } 19,2 \cdot 9955 + 20 \cdot 90000 = 1.991.136.$$

Ở cách 1:

$$20m^2 \rightarrow 1.800.000$$

$$\text{Ta có } 20 = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{10}{\pi} \Rightarrow V_{\text{nước}} = h\pi r^2 = 0,8 \cdot \pi \cdot \left(\frac{10}{\pi}\right)^2 \approx 25,46m^3$$

$$\text{Do đó tiền nước: } 253.454 \text{ đồng}$$

$$\text{Tổng tiền: } 2.053.454 \text{ đồng.}$$

Vậy thầy nên chọn cách 2.

Chọn C.

Câu 29: Một bình đựng nước dạng hình nón (không có nắp đáy), đựng đầy nước. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào bình đó một khối trụ và đo được thể tích nước trào ra ngoài là $\frac{16\pi}{9}(dm^3)$

. Biết rằng một mặt của khối trụ nằm trên mặt đáy của hình nón và khối trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón (như hình vẽ dưới). Tính bán kính đáy R của bình nước.

A. $R = 3(dm)$.

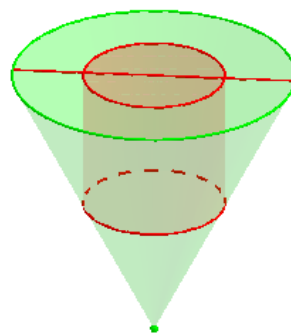
B. $R = 4(dm)$.

C. $R = 2(dm)$.

D. $R = 5(dm)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Gọi h, h' lần lượt là chiều cao của khối nón và khối trụ.

R, r lần lượt là bán kính của khối nón và khối trụ.

Theo đề ta có: $h = 3R, h' = 2R$.

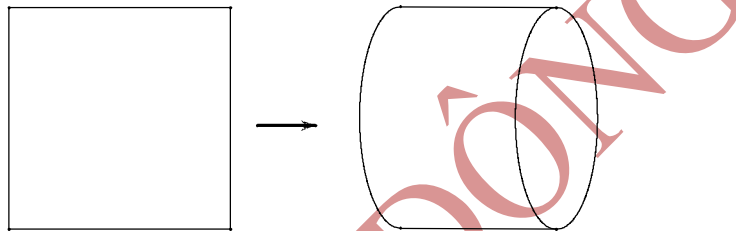
Xét tam giác SOA ta có: $\frac{r}{R} = \frac{IM}{OA} = \frac{SI}{SO} = \frac{h-h'}{h} = \frac{3R-2R}{3R} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{3}R. \text{ Ta lại có: } V_{\text{trụ}} = \pi r^2 h' = \pi \cdot \frac{R^2}{9} \cdot 2R = \frac{2\pi R^3}{9} = \frac{16\pi}{9}$$

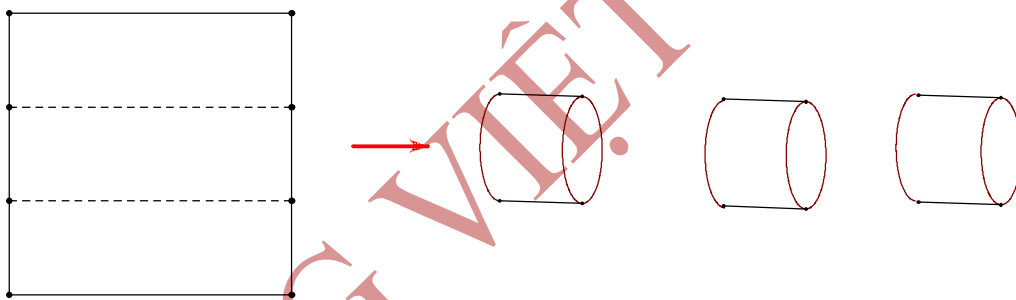
$$\Rightarrow R^3 = 8 \Leftrightarrow R = 2 \text{ dm.}$$

Câu 30: Có một miếng nhôm hình vuông, cạnh là 3dm , một người dự định tính tạo thành các hình trụ (không đáy) theo hai cách sau:

Cách 1: Gò hai mép hình vuông để thành mặt xung quanh của một hình trụ, gọi thể tích của khối trụ đó là V_1 .



Cách 2: Cắt hình vuông ra làm ba và gò thành mặt xung quanh của ba hình trụ, gọi tổng thể tích của chúng là V_2 .



Khi đó, tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là:

A. 3

B. 2

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{3}$

Hướng dẫn giải:

Gọi R_1 là bán kính đáy của khối trụ thứ nhất, có: $2\pi R_1 = 3 \Leftrightarrow R_1 = \frac{3}{2\pi} \Rightarrow V_1 = \pi R_1^2 h = \frac{27}{4\pi}$

Gọi R_2 là bán kính đáy của khối trụ thứ hai, có: $2\pi R_2 = 1 \Leftrightarrow R_2 = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow V_2 = \pi R_2^2 h = \frac{9}{4\pi}$

Chọn A.

Câu 31: Một chiếc hộp hình lập phương cạnh a bị khoét một khoảng trống có dạng là một khối lăng trụ với hai đáy là hai đường tròn nội tiếp của hai mặt đối diện của hình hộp. Sau đó, người ta dùng bìa cứng dán kín hai mặt vừa bị cắt của chiếc hộp lại như cũ, chỉ chừa lại khoảng trống bên trong. Tính thể tích của khoảng trống tạo bởi khối trụ này.

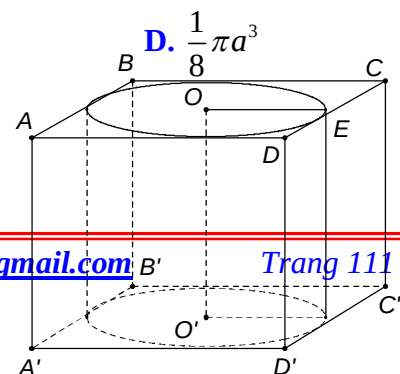
A. πa^3

B. $\frac{1}{2}\pi a^3$

C. $\frac{1}{4}\pi a^3$

D. $\frac{1}{8}\pi a^3$

Hướng dẫn giải:



$$\text{Ta có } OE = \frac{1}{2} BC = \frac{a}{2};$$

$$OO' = a$$

Thể tích là:

$$V = \pi.OE^2.OO' = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi.a = \frac{\pi a^3}{4}.$$

Chọn C.

Câu 32: Người ta dùng một loại vải vintage để bọc quả khối khí của khinh khí cầu, biết rằng quả khối này có dạng hình cầu đường kính $2m$. Biết rằng $1m^2$ vải có giá là 200.000 đồng. Hỏi cần tối thiểu bao nhiêu tiền mua vải để làm khinh khí cầu này?

A. 2.500.470 đồng

B. 3.150.342 đồng

C. 2.513.274 đồng

D. 2.718.920 đồng

Hướng dẫn giải:

$$S_{\text{mat cau}} = 4\pi R^2$$

$$\text{Với } R = \frac{d}{2} = 1(m). \text{ Vậy } S_{\text{mat cau}} = 4\pi.1^2 = 4\pi(m^2)$$

$$\text{Vậy cần tối thiểu số tiền: } 4\pi.200000 = 2.513.274 \text{ đồng.}$$

Chọn C.

Câu 33: Cho biết rằng hình chòm cầu có công thức thể tích là $\frac{\pi h(3r^2 + h^2)}{6}$, trong đó h là chiều cao chòm cầu và r là

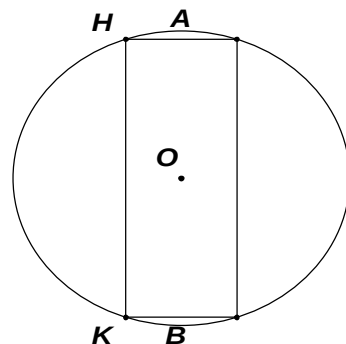
bán kính đường tròn bề mặt chòm cầu (bán kính này khác với bán kính hình cầu). Bài hỏi đặt ra là với một quả dưa hấu hình cầu, người ta dùng một cái ống khoét thủng một lỗ hình trụ chưa rõ bán kính xuyên qua trái dưa như hình vẽ (trong hình có AB là đường kính trái dưa). Biết rằng chiều cao của lỗ là $12cm$ (trong hình trên, chiều cao này chính là độ dài HK). Tính thể tích của phần dưa còn lại.

A. $200\pi cm^3$

B. $96\pi cm^3$

C. $288\pi cm^3$

D. $144\pi cm^3$



Hướng dẫn giải:

Đặt r là bán kính của hình cầu.

Chiều cao của lỗ là 12 nên chiều cao của chòm cầu là $r - 6$.

Bán kính của chòm cầu, cũng là bán kính đáy của hình trụ và là: $\sqrt{r^2 - 36}$

Thể tích hình trụ là $12\pi(r^2 - 36)$.

$$\text{Thể tích 2 chòm cầu: } \frac{2\pi(r-6)\left[3(r^2-36)+(r-6)^2\right]}{6} = \frac{\pi(r-6)(4r^2-12r-72)}{3}$$

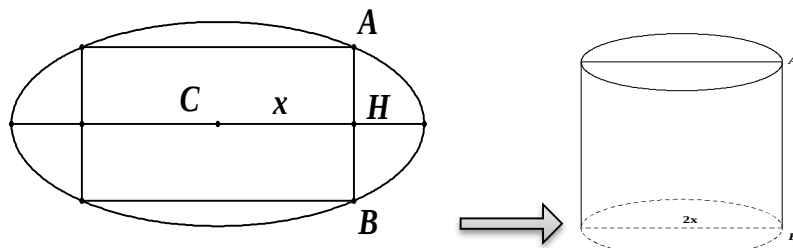
$$\text{Thể tích cái lỗ là: } 12\pi(r^2-36) + \frac{\pi(r-6)(4r^2-12r-72)}{3}$$

$$= \pi(r-6)\left[12(r+6) + \frac{4r^2-12r-72}{3}\right] = \frac{\pi(r-6)(4r^2+24r+144)}{3} = \frac{4\pi(r^3-6^3)}{3} = \frac{4\pi r^3}{3} - 288\pi$$

Thể tích hình cầu là $\frac{4\pi r^3}{3}$ nên thể tích cần tìm là: $V = 288\pi$.

Chọn C.

Câu 34: người ta cần cắt một tấm tôn có hình dạng một elip với độ dài trục lớn bằng 8 độ dài trục bé bằng 4 để được một tấm tôn có dạng hình chữ nhật nội tiếp elip. Người ta gò tấm tôn hình chữ nhật thu được thành một hình trụ không có đáy như hình bên. Tính thể tích lớn nhất có thể thu được của khối trụ đó



A. $\frac{128\sqrt{3}}{\pi} (cm^3)$

B. $\frac{64}{3\sqrt{2}\pi} (cm^3)$

C. $\frac{64}{3\sqrt{3}\pi} (cm^3)$

D. $\frac{128}{3\sqrt{2}\pi} (cm^3)$

Hướng dẫn giải:

Ta có (E): $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}$. Chu vi 1 đáy của hình trụ $2\pi R = 2x \Leftrightarrow R = \frac{x}{\pi}$

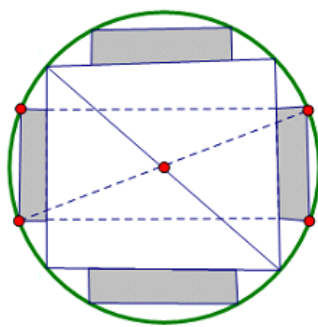
Ta có $AH = \frac{1}{2}\sqrt{16-x^2} \Rightarrow h = \sqrt{16-x^2} \Rightarrow V_{tru} = \pi \cdot R^2 \cdot h = \pi \left(\frac{x}{\pi}\right)^2 \cdot \sqrt{16-x^2} = \frac{x^2}{\pi} \sqrt{16-x^2}$

Đặt $f(x) = x^2 \sqrt{16-x^2} \quad (-4 < x < 4) \Rightarrow f'(x) = \frac{-32x^3 + 32x}{\sqrt{16-x^2}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\frac{32}{3}} \end{cases}$

$\Rightarrow \max f(x) = f\left(\pm\sqrt{\frac{32}{3}}\right) = \frac{128\sqrt{3}}{9} \Rightarrow V_{\max} = \frac{128\sqrt{3}}{9\pi}$

TỔNG QUÁT: Elip có độ dài trục lớn $2a$, trục bé $2b$ khi đó $(V_{tru})_{\max} = \frac{4a^2b}{3\sqrt{3}\pi}$

Câu 35: Từ một khúc gỗ tròn hình trụ có đường kính bằng 40 cm, cần xẻ thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và bốn miếng phụ được tô màu xám như hình vẽ dưới đây. Tìm chiều rộng x của miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất.



A. $x = \frac{3\sqrt{34} - 17\sqrt{2}}{2} (cm)$

B. $x = \frac{3\sqrt{34} - 19\sqrt{2}}{2} (cm)$

C. $x = \frac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2} (cm)$

D. $x = \frac{5\sqrt{34} - 13\sqrt{2}}{2} (cm)$

Hướng dẫn giải:

Diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là $S = S_{MNPQ} + 4xy$

Cạnh hình vuông $MN = \frac{MP}{\sqrt{2}} = \frac{40}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2} (cm)$

$$\Rightarrow S = (20\sqrt{2})^2 + 4xy = 800 + 4xy \quad (1)$$

$$\text{Ta có } 2x = AB - MN = AB - 20\sqrt{2} < BD - 20\sqrt{2} = 40 - 20\sqrt{2} \Rightarrow 0 < x < 20 - 10\sqrt{2}$$

$$\text{Lại có } AB^2 + AD^2 = BD^2 = 40^2 \Rightarrow (2x + 20\sqrt{2})^2 + y^2 = 1600$$

$$\Rightarrow y^2 = 800 - 80x\sqrt{2} - 4x^2 \Rightarrow y = \sqrt{800 - 80x\sqrt{2} - 4x^2}$$

$$\text{Thế vào (1)} \Rightarrow S = 800 + 4x\sqrt{800 - 80x\sqrt{2} - 4x^2} = 800 + 4\sqrt{800x^2 - 80x^3\sqrt{2} - 4x^4}$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = 800x^2 - 80x^3\sqrt{2} - 4x^4, \text{ với } x \in (0; 20 - 10\sqrt{2}) \text{ có}$$

$$f'(x) = 1600x - 240x^2\sqrt{2} - 16x^3 = 16x(100 - 15x\sqrt{2} - x^2)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} x \in (0; 20 - 10\sqrt{2}) \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; 20 - 10\sqrt{2}) \\ 16x(100 - 15x\sqrt{2} - x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Khi đó } x = \frac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2} \text{ chính là giá trị thỏa mãn bài toán.}$$

Chọn C.

Câu 36: Người ta thiết kế một thùng chứa hình trụ có thể tích V nhất định. Biết rằng giá của vật liệu làm mặt đáy và nắp của thùng bằng nhau và đắt gấp 3 lần so với giá làm vật liệu xung quanh của thùng (chi phí cho mỗi đơn vị diện tích). Gọi h là chiều cao của thùng và bán kính đáy là R .

Tính tỷ số $\frac{h}{R}$ sao cho chi phí làm thùng là nhỏ nhất

A. $\frac{h}{R} = 2$

B. $\frac{h}{R} = \sqrt{2}$

C. $\frac{h}{R} = 3\sqrt{2}$

D. $\frac{h}{R} = 6$

Hướng dẫn giải:

Gọi V là thể tích của khối trụ, T là giá tiền cho một đơn vị S_{xq}

$$\text{Ta có } V_{tru} = \pi \cdot R^2 \cdot h \Leftrightarrow h = \frac{V_{tru}}{\pi R^2}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} S_{2day} = 2\pi R^2 \\ S_{xq} = 2\pi R \cdot h = 2\pi R \cdot \frac{V_{tru}}{\pi R^2} = \frac{2V_{tru}}{R} \end{cases}$$

Giá vật liệu để làm 2 đáy là: $G_{2d} = 2\pi R^2 \cdot 3T = 6\pi T \cdot R^2$, Giá vật liệu làm xung quanh thùng

$$G_{xq} = \frac{2V_{tru}}{R} \cdot T$$

Giá vật liệu làm thùng là:

$$G_{thung} = \frac{2V_{tru} \cdot T}{R} + 6\pi T \cdot R^2 = \frac{V_{tru} \cdot T}{R} + \frac{V_{tru} \cdot T}{R} + 6\pi T \cdot R^2 \geq 3\sqrt{6V_{tru}^2} \cdot T \quad (const)$$

$$\Rightarrow (G_{thung})_{\min} = 3\sqrt{6V_{tru}^2} \cdot T \Leftrightarrow \frac{V_{tru} \cdot T}{R} = 6\pi T \cdot R^2 \Leftrightarrow V_{tru} = 6\pi R^3 \Rightarrow \frac{h}{R} = 6$$

Câu 37: Một nhà máy sản xuất cần thiết kế một thùng sơn dạng hình trụ có nắp đáy với dung tích 1000 cm^3 . Bán kính của nắp đáy để nhà sản xuất tiết kiệm nguyên vật liệu nhất bằng

A. $\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \text{ cm}.$

B. $10 \cdot \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}} \text{ cm}.$

C. $\frac{500}{\pi} \text{ cm}.$

D. $10 \cdot \sqrt{\frac{5}{\pi}} \text{ cm}.$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi h (cm) là chiều cao hình trụ và R (cm) là bán kính nắp đáy.

Ta có: $V = \pi R^2 h = 1000$. Suy ra $h = \frac{1000}{\pi R^2}$.

Để nhà sản xuất tiết kiệm nguyên vật liệu nhất thì diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ nhỏ nhất.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S_{tp} &= 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot \frac{1000}{\pi R^2} \\ &= 2\pi R^2 + \frac{1000}{R} + \frac{1000}{R} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{2\pi R^2 \cdot \frac{1000}{R} \cdot \frac{1000}{R}} = 3\sqrt[3]{2\pi \cdot 1000^2} \end{aligned}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } 2\pi R^2 = \frac{1000}{R} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}.$$

Câu 38: Một viên phấn bảng có dạng một khối trụ với bán kính đáy bằng 0,5cm, chiều dài 6cm. Người ta làm một hình hộp chữ nhật bằng carton đựng các viên phấn đó với kích thước $6\text{cm} \times 5\text{cm} \times 6\text{cm}$. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu hộp kích thước như trên để xếp 460 viên phấn?

A. 17.

B. 15.

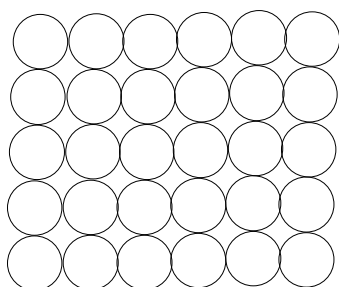
C. 16.

D. 18.

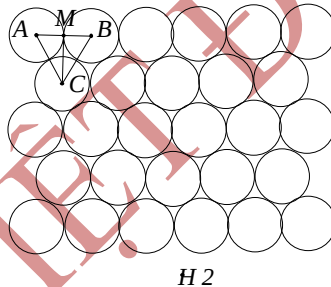
Hướng dẫn giải:

Chọn C.

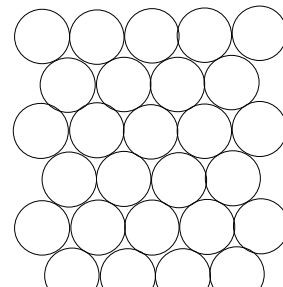
Có 3 cách xếp phấn theo hình vẽ dưới đây:



H 1



H 2



H 3

- ☐ Nếu xếp theo hình H1: vì đường kính viên phấn là $2 \cdot 0,5 = 1\text{cm}$ nên mỗi hộp xếp được tối đa số viên phấn là: $6 \cdot 5 = 30$.
- ☐ Nếu xếp theo hình H2: hàng 6 viên xen kẽ hàng 5 viên. Gọi số hàng xếp được là $n+1, n \in \mathbb{Z}_+$.

$$\text{Ta có } \triangle ABC \text{ đều cạnh bằng } 1 \Rightarrow CM = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ta phải có $2 \cdot 0,5 + n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \leq 5 \Rightarrow n \leq \frac{8}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ xếp tối đa được 5 hàng $\Rightarrow$ mỗi hộp xếp được tối đa số viên phấn là: $3 \cdot 6 + 2 \cdot 5 = 28$.

- ☐ Nếu xếp theo hình H3: hàng 5 viên xen kẽ hàng 4 viên. Gọi số hàng xếp được là $m+1, m \in \mathbb{Z}_+$.

$$\text{Ta phải có } 2 \cdot 0,5 + m \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \leq 6 \Rightarrow m \leq \frac{10}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{ xếp tối đa được 6 hàng} \Rightarrow \text{ nên mỗi hộp xếp được tối đa số viên phấn là: } 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 27.$$

Vậy, xếp theo hình H1 thì xếp được nhiều phấn nhất, nên cần ít hộp nhất.

Ta có $460 : 30 \approx 15,3 \Rightarrow$ cần ít nhất 16 hộp để xếp hết 460 viên phấn.

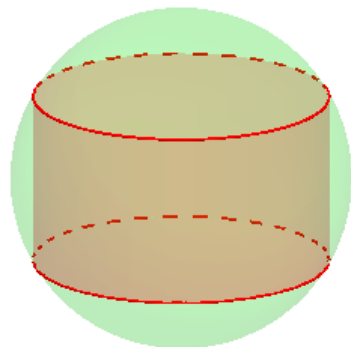
Câu 39: Một khối cầu có bán kính là 5(dm), người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng 3(dm) để làm một chiếc lu đựng nước (như hình vẽ). Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.

A. $\frac{100}{3}\pi (dm^3)$

B. $\frac{43}{3}\pi (dm^3)$

C. $41\pi (dm^3)$

D. $132\pi (dm^3)$

**Hướng dẫn giải:****Chọn D.**

Cách 1: Trên hệ trục tọa độ Oxy, xét đường tròn (C): $(x-5)^2 + y^2 = 25$. Ta thấy nếu cho nửa trên trục Ox của (C) quay quanh trục Ox ta được mặt cầu bán kính bằng 5. Nếu cho hình phẳng (H) giới hạn bởi nửa trên trục Ox của (C), trục Ox, hai đường thẳng $x=0$, $x=2$ quay xung quanh trục Ox ta sẽ được khối tròn xoay chính là phần cắt đi của khối cầu trong đề bài.

$$\text{Ta có } (x-5)^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{25 - (x-5)^2}$$

$$\Rightarrow \text{Nửa trên trục Ox của (C) có phương trình } y = \sqrt{25 - (x-5)^2} = \sqrt{10x - x^2}$$

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể tròn xoay khi cho (H) quay quanh Ox là:

$$V_1 = \pi \int_0^2 (10x - x^2) dx = \pi \left(5x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{52\pi}{3}$$

$$\text{Thể tích khối cầu là: } V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = \frac{500\pi}{3}$$

$$\text{Thể tích cần tìm: } V = V_2 - 2V_1 = \frac{500\pi}{3} - 2 \cdot \frac{52\pi}{3} = 132\pi (dm^3)$$

Câu 40: Một cái trục lăn sơn nước có dạng một hình trụ. Đường kính của đường tròn đáy là 5cm, chiều dài lăn là 23cm (hình bên). Sau khi lăn tròn 15 vòng thì trục lăn tạo nên sân phẳng một diện tích tích là

A. $1725\pi cm^2$.

B. $3450\pi cm^2$.

C. $1725\pi cm^2$.

D. $862,5\pi cm^2$.

Hướng dẫn giải:**Chọn B.**

Diện tích xung quanh của mặt trụ là

$$S_{xq} = 2\pi Rl = 2\pi \cdot 5 \cdot 23 = 230\pi cm^2.$$

Sau khi lăn 15 vòng thì diện tích phần sơn được là:

$$S = 230\pi \cdot 15 = 3450\pi cm^2.$$

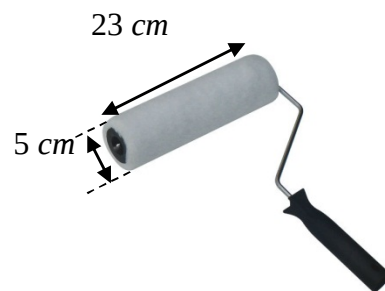
Câu 41: Một quả bóng bàn và một chiếc chén hình trụ có cùng chiều cao. Người ta đặt quả bóng lên chiếc chén thấy phần ở ngoài của quả bóng có chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao của nó. Gọi V_1 , V_2 lần lượt là thể tích của quả bóng và chiếc chén, khi đó:

A. $9V_1 = 8V_2$.

B. $3V_1 = 2V_2$.

C. $16V_1 = 9V_2$.

D. $27V_1 = 8V_2$.

Hướng dẫn giải:**Chọn A.**

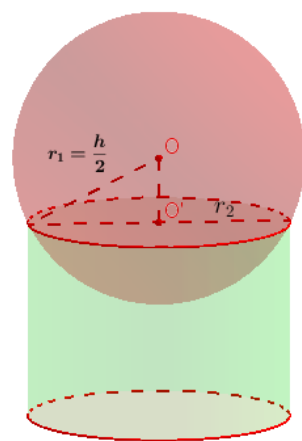
Gọi r_1 là bán kính quả bóng, r_2 là bán kính chiếc chén, h là chiều cao chiếc chén.

Theo giả thiết ta có $h = 2r_1 \Rightarrow r_1 = \frac{h}{2}$ và $OO' = \frac{r_1}{2} = \frac{h}{4}$.

Ta có $r_2^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 - \left(\frac{h}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}h^2$.

Thể tích của quả bóng là $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi h^3$

và thể tích của chén nước là $V_2 = B.h = \pi r_2^2 h = \frac{3}{16}\pi h^3 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{8}{9}$.



Câu 42: Phần không gian bên trong của chai nước ngọt có hình dạng như hình bên. Biết bán kính đáy bằng $R = 5\text{cm}$, bán kính cổ $r = 2\text{cm}$, $AB = 3\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$, $CD = 16\text{cm}$. Thể tích phần không gian bên trong của chai nước ngọt đó bằng:

A. $495\pi (\text{cm}^3)$. B. $462\pi (\text{cm}^3)$.

C. $490\pi (\text{cm}^3)$. D. $412\pi (\text{cm}^3)$.

Hướng dẫn giải:

Thể tích khối trụ có đường cao CD : $V_1 = \pi R^2 \cdot CD = 400\pi (\text{cm}^3)$.

Thể tích khối trụ có đường cao AB : $V_2 = \pi r^2 \cdot AB = 12\pi (\text{cm}^3)$.

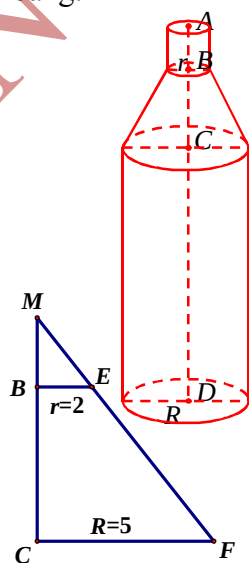
Ta có $\frac{MC}{MB} = \frac{CF}{BE} = \frac{5}{2} \Rightarrow MB = 4$

Thể tích phần giới hạn giữa BC :

$V_3 = \frac{\pi}{3} (R^2 \cdot MC - r^2 \cdot MB) = 78\pi (\text{cm}^3)$.

Suy ra: $V = V_1 + V_2 + V_3 = 490\pi (\text{cm}^3)$.

Chọn C.



Câu 43: Nhà Nam có một chiếc bàn tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$ m. Nam muốn mắc một bóng điện ở phía trên và chính giữa chiếc bàn sao cho mép bàn nhận được nhiều ánh sáng nhất. Biết rằng cường độ sáng C của bóng điện được biểu thị bởi công thức $C = c \frac{\sin \alpha}{l^2}$ (α là góc tạo bởi tia sáng tới mép bàn và mặt bàn, c - hằng số tỷ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng, l khoảng cách từ mép bàn tới bóng điện). Khoảng cách nam cần treo bóng điện tính từ mặt bàn là

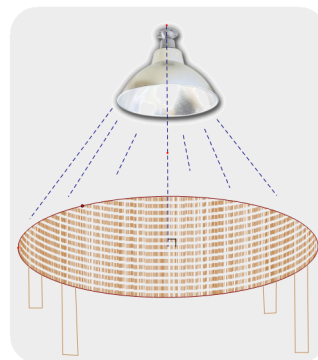
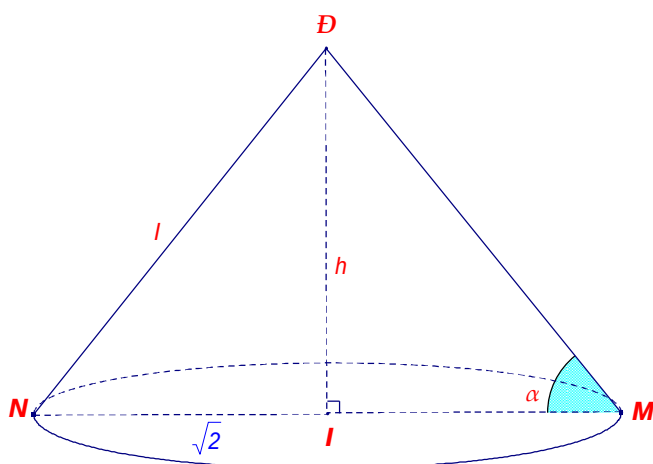
A. 1m

B. 1,2m

C. 1.5 m

D. 2m

Hướng dẫn giải:



Gọi h là độ cao của bóng điện so với mặt bàn ($h > 0$); Đ là bóng điện; I là hình chiếu của Đ lên mặt bàn. MN là đường kính của mặt bàn. (như hình vẽ)

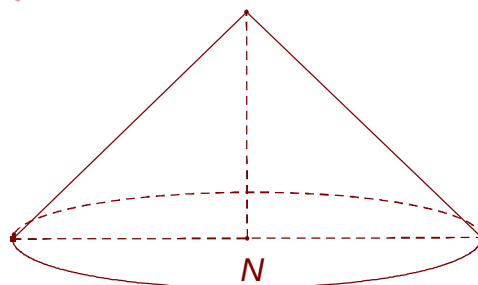
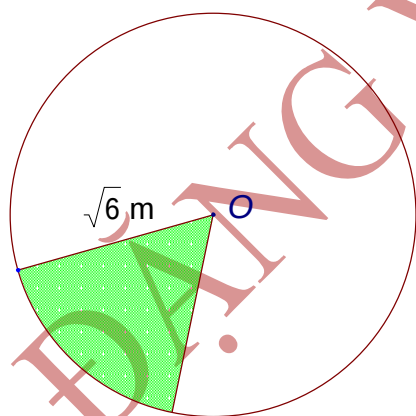
Ta có $\sin \alpha = \frac{h}{l}$ và $h^2 = l^2 - 2$, suy ra cường độ sáng là: $C(l) = c \frac{\sqrt{l^2 - 2}}{l^3}$ ($l > \sqrt{2}$).

$$C'(l) = c \cdot \frac{6 - l^2}{l^4 \cdot \sqrt{l^2 - 2}} > 0 \quad (\forall l > \sqrt{2})$$

$$C'(l) = 0 \Leftrightarrow l = \sqrt{6} \quad (l > \sqrt{2})$$

Lập bảng biến thiên ta thu được kết quả C lớn nhất khi $l = \sqrt{6}$, khi đó

Câu 44: Với một đĩa tròn bằng thép tráng có bán kính $R = \sqrt{6}m$ phải làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của đĩa này và gấp phần còn lại thành hình tròn. Cung tròn của hình quạt bị cắt đi phải bằng bao nhiêu độ để hình nón có thể tích cực đại?



A. $\approx 66^\circ$

B. $\approx 294^\circ$

C. $\approx 12,56^\circ$

D. $\approx 2,8^\circ$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có thể nhận thấy đường sinh của hình nón là bán kính của đĩa tròn. Còn chu vi đáy của hình nón chính là chu vi của đĩa trừ đi độ dài cung tròn đã cắt. Như vậy ta tiến hành giải chi tiết như sau:

Gọi $x(m)$ là độ dài đáy của hình nón (phần còn lại sau khi cắt cung hình quạt của đĩa).

$$\text{Khi đó } x = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$$

Chiều cao của hình nón tính theo định lí PITAGO là $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$

Thể tích khối nón sẽ là: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \frac{x^2}{4\pi^2} \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$

Đến đây các em đạo hàm hàm $V(x)$ tìm được GTLN của $V(x)$ đạt được khi $x = \frac{2\pi}{3} R\sqrt{6} = 4\pi$

Suy ra độ dài cung tròn bị cắt đi là: $2\pi R - 4\pi \Rightarrow \alpha = \frac{2\sqrt{6}\pi - 4\pi}{2\sqrt{6}\pi} 360^\circ \approx 66^\circ$

Câu 45: Một công ty nhận làm những chiếc thùng phi kín hay đáy với thể tích theo yêu cầu là $2\pi m^3$ mỗi chiếc yêu cầu tiết kiệm vật liệu nhất. Hỏi thùng phải có bán kính đáy R và chiều cao h là bao nhiêu?

A. $R = 2m, h = \frac{1}{2}m$. **B.** $R = \frac{1}{2}m, h = 8m$. **C.** $R = 4m, h = \frac{1}{8}m$. **D.** $R = 1m, h = 2m$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi R là bán kính đáy thùng (m), h : là chiều cao của thùng (m). ĐK: $R > 0, h > 0$

Thể tích của thùng là: $V = \pi R^2 h = 2\pi \Leftrightarrow R^2 h = 2 \Leftrightarrow h = \frac{2}{R^2}$

Diện tích toàn phần của thùng là:

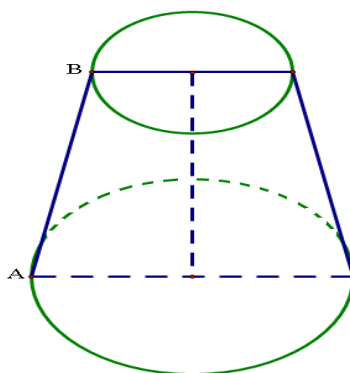
$$S_{tp} = 2\pi R h + 2\pi R^2 = 2\pi R \left(\frac{2}{R^2} + R \right) = 2\pi \left(\frac{2}{R} + R^2 \right)$$

Đặt $f(t) = 2\pi \left(\frac{2}{t} + t^2 \right) (t > 0)$ với $t = R$

$$f'(t) = 4\pi \left(t - \frac{1}{t^2} \right) = \frac{4\pi(t^3 - 1)}{t^2}, f'(1) = 0 \Leftrightarrow t^3 = 1 \Leftrightarrow t = 1$$

Từ bảng biến thiên..... ta cần chế tạo thùng với kích thước $R = 1m, h = 2m$

Câu 46: Có một cái cốc làm bằng giấy, được úp ngược như hình vẽ. Chiều cao của chiếc cốc là $20cm$, bán kính đáy cốc là $4cm$, bán kính miệng cốc là $5cm$. Một con kiến đang đứng ở điểm A của miệng cốc dự định sẽ bò hai vòng quanh thân cốc để lên đến đáy cốc ở điểm B . Quãng đường ngắn nhất để con kiến có thể thực hiện được dự định của mình gần đúng nhất với kết quả nào dưới đây?



A. $59,98cm$

B. $59,93cm$

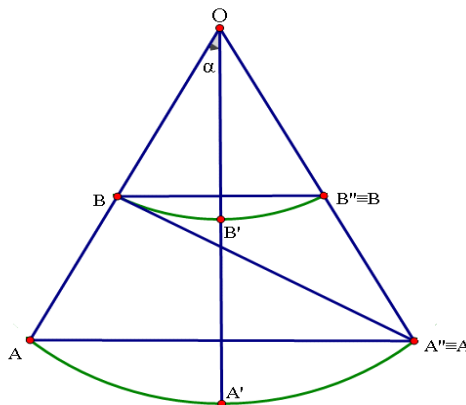
C. $58,67cm$

D. $58,80cm$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Đặt b, a, h lần lượt là bán kính đáy cốc, miệng cốc và chiều cao của cốc, α là góc kí hiệu như trên hình vẽ. Ta “trả” hai lần mặt xung quanh cốc lên mặt phẳng sẽ được một hình quạt của một khuyên với cung nhỏ $BB'' = 4\pi b$ và cung lớn $AA'' = 4\pi a$.



Độ dài ngắn nhất của đường đi của con kiến là độ dài đoạn thẳng BA'' . Áp dụng định lí hàm số cosin ta được:

$$l = \sqrt{BO^2 + OA''^2 - 2BO \cdot OA'' \cdot \cos 2\alpha} \quad (1).$$

$$B''A'' = AB = \sqrt{(a-b)^2 + h^2}. \quad \frac{a}{b} = \frac{4\pi a}{4\pi b} = \frac{l(BB'')}{l(AA'')} = \frac{OA}{OB} = \frac{OB + AB}{OB} = 1 + \frac{AB}{2\pi b} = 1 + \frac{AB \cdot \alpha}{2\pi b}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2\pi(a-b)}{AB} = \frac{2\pi(a-b)}{\sqrt{(a-b)^2 + h^2}} \quad (a). \quad \frac{AB}{OB} = \frac{a}{b} - 1 = \frac{a-b}{b} \Rightarrow OB = \frac{b\sqrt{(a-b)^2 + h^2}}{a-b} \quad (b).$$

$$OA'' = OB + BA = \frac{b\sqrt{(a-b)^2 + h^2}}{a-b} + \sqrt{(a-b)^2 + h^2} \quad (c).$$

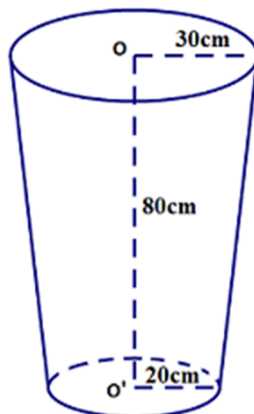
Thay (a), (b), (c) vào (1) ta tìm được l .

$$l \approx 58,79609\text{cm} \approx 58,80$$

Ghi chú. Để tồn tại lời giải trên thì đoạn BA'' phải không cắt cung BB'' tại điểm nào khác B, tức là BA'' nằm dưới tiếp tuyến của BB'' tại B. Điều này tương đương với $2\alpha < \cos^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$.

Tuy nhiên, trong lời giải của thí sinh không yêu cầu phải trình bày điều kiện này (và đề bài cũng đã cho thỏa mãn yêu cầu đó).

Câu 47: Học sinh A sử dụng 1 xô đựng nước có hình dạng và kích thước giống như hình vẽ, trong đó đáy xô là hình tròn có bán kính 20 cm, miệng xô là đường tròn bán kính 30 cm, chiều cao xô là 80 cm. Mỗi tháng A dùng hết 10 xô nước. Hỏi A phải trả bao nhiêu tiền nước mỗi tháng, biết giá nước là 20000 đồng/1 m³ (số tiền được làm tròn đến đơn vị đồng)?



A. 35279 đồng.

B. 38905 đồng.

C. 42116 đồng.

D. 31835 đồng.

Hướng dẫn giải:**Chọn D.**

Ta xét hình nón đỉnh A, đường cao $h > 80$ cm đáy là đường tròn tâm O, bán kính bằng 30 cm. Mặt phẳng (α) cách mặt đáy 80 cm cắt hình nón theo giao tuyến là đường tròn tâm O' có bán kính bằng 20 cm. Mặt phẳng (α) chia hình nón thành 2 phần. Phần I là phần chứa đỉnh A, phần II là phần không chứa đỉnh A (Như hình vẽ)

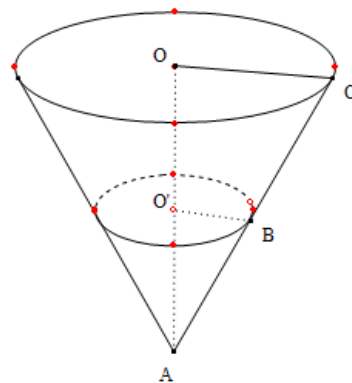
$$\text{Ta có } \frac{O'B}{OC} = \frac{AO'}{AO} \Leftrightarrow \frac{AO'}{AO' + O'O} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow AO' = 160 \text{ cm}$$

$$\text{Thể tích hình nón } V = \frac{1}{3} AO \cdot \pi \cdot 30^2 = 72000\pi \text{ cm}^3$$

$$\text{Thể tích phần I là } V_1 = \frac{1}{3} AO' \cdot \pi \cdot 20^2 = \frac{64000}{3} \pi \text{ cm}^3$$

$$\text{Vậy thể tích cái xô là thể tích phần II là } V_2 = V - V_1 = \frac{152000}{3} \pi \text{ cm}^3 = \frac{19}{375} \pi \text{ (m}^3\text{)}$$

$$\text{Vậy số tiền phải trả là } T = \frac{19\pi}{375} \cdot 10 \cdot 20000 \approx 31835 \text{ đồng.}$$



Câu 48: Một cốc nước hình trụ có chiều cao 9cm, đường kính 6cm. Mặt đáy phẳng và dày 1cm, thành cốc dày 0,2cm. Đổ vào cốc 120ml nước sau đó thả vào cốc 5 viên bi có đường kính 2cm. Hỏi mặt nước trong cốc cách mép cốc bao nhiêu cm. (Làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

A. 3,67 cm.

B. 2,67 cm.

C. 3,28 cm.

D. 2,28 cm.

Hướng dẫn giải:**Chọn D.**

Thành cốc dày 0,2cm nên bán kính đáy trụ bằng 2,8cm. Đáy cốc dày 1cm nên chiều cao hình trụ bằng 8cm. Thể tích khối trụ là $V = \pi \cdot (2,8)^2 \cdot 8 = 197,04 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Đổ 120ml vào cốc, thể tích còn lại là $197,04 - 120 = 77,04 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Thả 5 viên bi vào cốc, thể tích 5 viên bi bằng $V_{bi} = 5 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 = 20,94 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Thể tích cốc còn lại $77,04 - 20,94 = 56,1 \text{ (cm}^3\text{)}$.

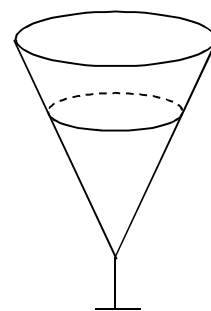
Ta có $56,1 = h' \cdot \pi \cdot (2,8)^2 \Rightarrow h' = 2,28 \text{ cm}$.

Cách khác: Dùng tỉ số thể tích

$$\frac{V_{Tr}}{V_{nuoc} + V_{bi}} = \frac{h_{coc}}{h_{nuoc+bi}} \Leftrightarrow \frac{8 \cdot (2,8)^2 \cdot \pi}{120 + 5 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi} = \frac{8}{h_{nuoc+bi}} \Rightarrow h_{nuoc+bi} = 5,72$$

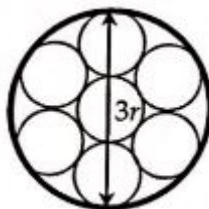
Chiều cao còn lại của trụ là $8 - 5,72 = 2,28$.

Vậy mặt nước trong cốc cách mép cốc là 2,28cm.



Câu 49: Người ta xếp 7 hình trụ có cùng bán kính đáy r và cùng chiều cao h vào một cái lọ hình trụ cũng có chiều cao h, sao cho tất cả các hình tròn đáy của hình trụ nhỏ đều tiếp xúc với đáy của hình trụ lớn, hình trụ nằm chính giữa tiếp xúc với sáu hình trụ xung quanh, mỗi hình trụ xung quanh đều tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ lớn. Khi thể tích của lọ hình trụ lớn là:

A. $16\pi r^2 h$ B. $18\pi r^2 h$ C. $9\pi r^2 h$ D. $36\pi r^2 h$ **Hướng dẫn giải:**

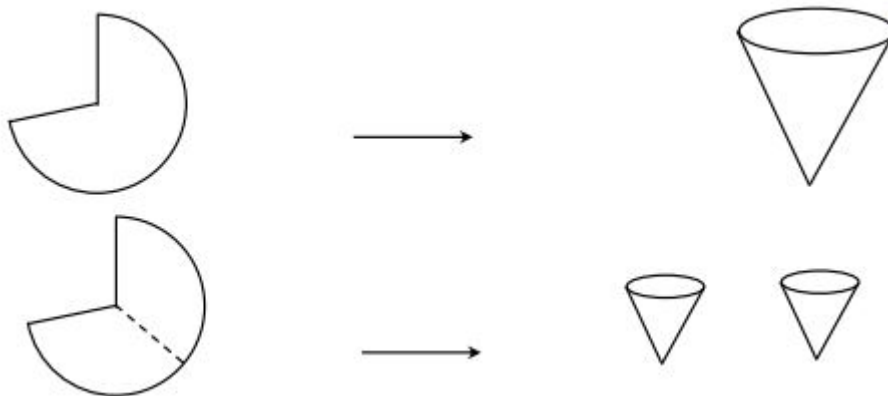


Ta có hình vẽ minh họa mặt đáy của hình đã cho như trên, khi đó ta rõ ràng nhận ra rằng $R = 3r$, đề bài thì có vẻ khá phức tạp, tuy nhiên nếu để ý kỹ thì lại rất đơn giản. Vậy khi đó $V = B.h = (3r)^2 \cdot \pi \cdot h = 9\pi r^2 h$.

Câu 50: Từ cùng một tấm kim loại dẻo hình quạt như hình vẽ có kích thước bán kính $R = 5$ và chu vi của hình quạt là $P = 8\pi + 10$, người ta gò tấm kim loại thành những chiếc phễu theo hai cách:

Câu 51: Gò tấm kim loại ban đầu thành mặt xung quanh của một cái phễu

Câu 52: Chia đôi tấm kim loại thành hai phần bằng nhau rồi gò thành mặt xung quanh của hai cái phễu
Gọi V_1 là thể tích của cái phễu thứ nhất, V_2 là tổng thể tích của hai cái phễu ở cách 2. Tính $\frac{V_1}{V_2}$?



A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{21}{\sqrt{7}}$

B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{\sqrt{6}}$

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Do chu vi của hình quạt tròn là $P = \text{độ dài cung} + 2R$. Do đó độ dài cung tròn là $l = 8\pi$

Theo cách thứ nhất: 8π chính là chu vi đường tròn đáy của cái phễu. Tức là $2\pi r = 8\pi \Rightarrow r = 4$

Khi đó $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \cdot 3\pi \cdot 4^2$

Theo cách thứ hai: Thì tổng chu vi của hai đường tròn đáy của hai cái phễu là $8\pi \Leftrightarrow$ chu vi của một đường tròn đáy là $4\pi \Rightarrow 4\pi = 2\pi r \Rightarrow r = 2$

Khi đó $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$

$\Rightarrow V_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{21} \cdot 2^2 \cdot \pi$

Khi đó $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4^2}{\frac{8\sqrt{21}}{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$

Câu 53: Cho một miếng tôn hình tròn có bán kính 50cm . Biết hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích miếng tôn ở trên. Khi đó hình nón có bán kính đáy là

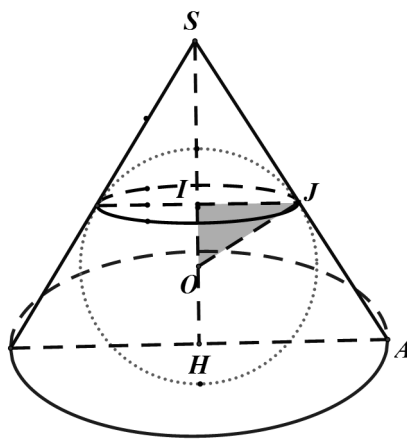
A. $10\sqrt{2}\text{cm}$

B. 20cm

C. $50\sqrt{2}\text{cm}$

D. 25cm

Hướng dẫn giải:



Đặt $a = 50\text{cm}$

Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình nón lần lượt là $x, y (x, y > 0)$. Ta có

$$SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Khi đó diện tích toàn phần của hình nón là $S_{tp} = \pi x^2 + \pi x \sqrt{x^2 + y^2}$

Theo giả thiết ta có

$$\pi x^2 + \pi x \sqrt{x^2 + y^2} = \pi a^2 \Leftrightarrow x \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow x \sqrt{x^2 + y^2} = a^2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 (x^2 + y^2) = a^4 + x^4 - 2a^2 x^2, (DK : x < a) \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^4}{y^2 + 2a^2}$$

Khi đó thể tích khối nón là

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{a^4}{y^2 + 2a^2} \cdot y = \frac{1}{3} \pi a^4 \cdot \frac{y}{y^2 + 2a^2}$$

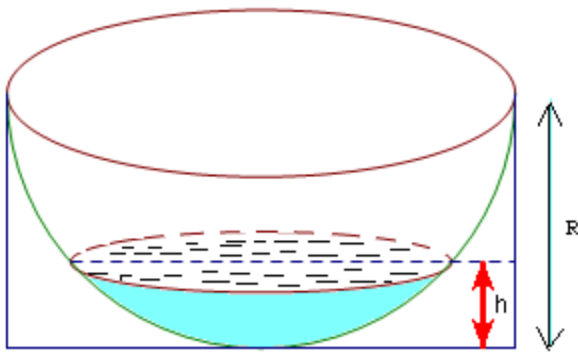
V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{y^2 + 2a^2}{y}$ đạt giá trị nhỏ nhất

$$\text{Ta có } \frac{y^2 + 2a^2}{y} = y + \frac{2a^2}{y} \geq 2 \sqrt{y \cdot \frac{2a^2}{y}} = 2\sqrt{2}a$$

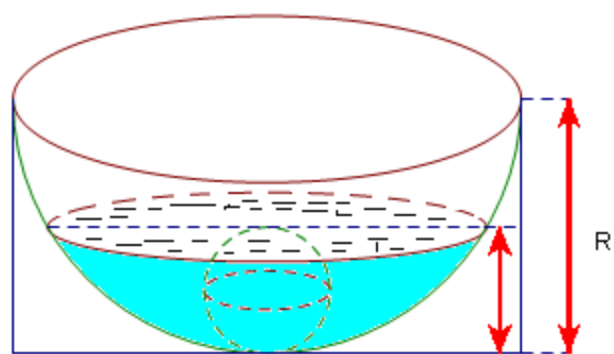
Vậy V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $y = \frac{2a^2}{y}$, tức là $y = a\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{a}{2} = 25\text{cm}$

Lưu ý: Bài trên các em xét hàm số và lập bảng biến thiên cũng được nhé

Câu 54: Một chậu nước hình bán cầu bằng nhôm có bán kính $R = 10\text{cm}$, đặt trong một khung hình hộp chữ nhật (hình 1). Trong chậu có chứa sẵn một khối nước hình chòm cầu có chiều cao $h = 4\text{cm}$. Người ta bỏ vào chậu một viên bi hình cầu bằng kim loại thì mặt nước dâng lên vừa phủ kín viên bi (hình 2). Bán kính của viên bi gần số nguyên nào sau đây. (Cho biết thể tích khối chòm cầu là $V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)$)



A. 2



B. 4

C. 7

D. 10

Hướng dẫn giải:

Gọi x là bán kính viên bi hình cầu. Điều kiện: $0 < 2x < 10 \Leftrightarrow 0 < x < 5$

- Thể tích viên bi là $V_{bi} = \frac{4}{3}\pi x^3$.

- Thể tích khối nước hình chỏm cầu khi chưa thả viên bi vào

$$V_1 = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) = 16\pi \left(10 - \frac{4}{3} \right) = \frac{416\pi}{3}$$

- Khi thả viên bi vào thì khối chỏm cầu gồm khối nước và viên bi có

$$\text{thể tích là: } V_2 = \pi (2x)^2 \left(R - \frac{2x}{3} \right) = \frac{4\pi x^2 (30 - 2x)}{3}$$

- Ta có phương trình:

$$V_2 - V_1 = V_{bi} \Leftrightarrow \frac{4\pi x^2 (30 - 2x)}{3} - \frac{416\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi x^3 \Leftrightarrow 4\pi x^2 (30 - 2x) - 416\pi = 4\pi x^3$$

$$\Leftrightarrow 3x^3 - 30x^2 + 104 = 0$$

- Giải phương trình ta có các nghiệm: $x_1 \approx 9,6257 > 5$ (loại)

$x_2 \approx 2,0940 < 5$ (thỏa mãn), và $x_3 \approx -1,8197$ (loại).

Vậy bán kính viên bi là: $r \approx 2,09$ (cm).

Câu 55: Một người có một dải duy băng dài 130 cm, người đó cần bọc dải duy băng đỏ đó quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà, người này dùng 10 cm của dải duy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp (như hình vẽ minh họa). Hỏi dải duy băng có thể bọc được hộp quà có thể tích lớn nhất là bao nhiêu?

A. $4000\pi \text{ cm}^3$ B. $32000\pi \text{ cm}^3$ C. $1000\pi \text{ cm}^3$ D. $16000\pi \text{ cm}^3$ **Hướng dẫn giải:**

Một bài toán thực tế khá hay trong ứng dụng của việc tìm giá trị lớn nhất của hàm số. Ta nhận thấy, dải duy băng tạo thành hai hình chữ nhật quanh cái hộp, do đó chiều dài của dải duy băng chính là tổng chu vi của hai hình chữ nhật đó. Tất nhiên chiều dải duy băng đã phải trừ đi phần duy băng dùng để thắt nơ, có nghĩa là: $22(2r + h) = 120 \Leftrightarrow h = 30 - 2r$

Khi đó thể tích của hộp quà được tính bằng công thức:

$$V = B.h = \pi.r^2 (30 - 2r) = \pi(-2r^3 + 30r^2)$$

Xét hàm số $f(r) = -2r^3 + 30r^2$ trên $(0;15)$

$$f'(r) = -6r^2 + 60r; f'(r) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0(1) \\ r = 10 \end{cases}$$

Khi đó vẽ BBT ta nhận ra $\underset{(0;10)}{Max} f(r) = f(10)$. Khi đó thể tích của hộp quả

$$V = B.h = \pi.10^2.10 = 1000\pi$$

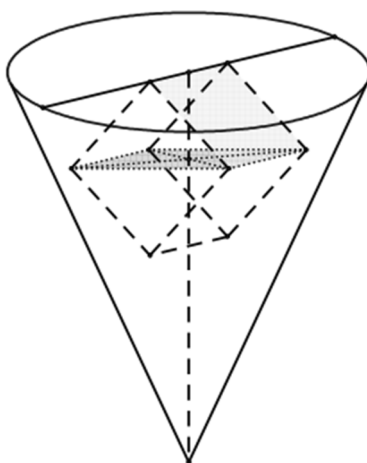
Câu 56: Một khối gạch hình lập phương (không thấm nước) có cạnh bằng 2 được đặt vào trong một chiếc phễu hình nón tròn xoay chứa đầy nước theo cách như sau: Một cạnh của viên gạch nằm trên mặt nước (nằm trên một đường kính của mặt này); các đỉnh còn lại nằm trên mặt nón; tâm của viên gạch nằm trên trục của hình nón. Tính thể tích nước còn lại ở trong phễu (làm tròn 2 chữ số thập phân).

A. $V = 22,27$

B. $V = 22,30$

C. $V = 23,10$

D. 20,64



Hướng dẫn giải:

Gọi R, h lần lượt là bán kính và chiều cao của hình nón (phễu).

Thiết diện của hình nón song song với đáy của hình nón, qua tâm của viên gạch là hình tròn có

bán kính $R_1 = \sqrt{3}$ thỏa mãn $\frac{R_1}{R} = \frac{h - \sqrt{2}}{h} \Rightarrow \frac{h - \sqrt{2}}{h} \cdot R = \sqrt{3} \quad (1)$

Thiết diện của hình nón song song với đáy hình nón, chứa cạnh đối diện với cạnh nằm trên đáy

của hình nón là hình tròn có bán kính $R_2 = 1$ thỏa mãn $\frac{R_2}{R} = \frac{h - 2\sqrt{2}}{h} \Rightarrow \frac{h - 2\sqrt{2}}{h} \cdot R = 1 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{h - \sqrt{2}}{h - 2\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$ và $R = 2\sqrt{3} - 1$

Thể tích lượng nước còn lại trong phễu là $V = V_{\text{nón}} - V_{\text{gạch}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h - 2^3 \approx 22,2676$

Câu 57: (CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG QUẢNG NAM LẦN 2 NĂM 2019) Người ta xếp ba viên bi có bán kính bằng nhau và bằng $\sqrt{3}$ vào một cái lọ hình trụ sao cho các viên bi đều tiếp xúc với hai đáy của lọ hình trụ và các viên bi này đôi một tiếp xúc nhau và cùng tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ. Tính bán kính đáy của lọ hình trụ.

A. $1 + 2\sqrt{3}$.

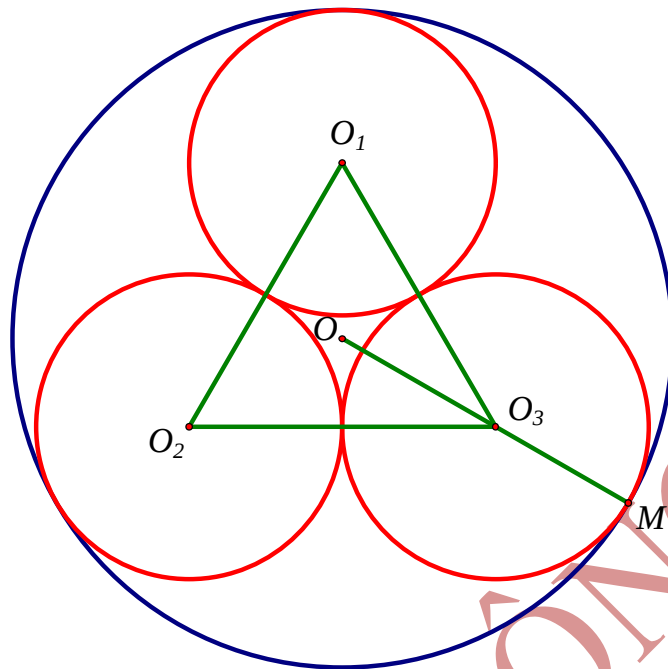
B. $2\sqrt{3}$.

C. $\frac{3 + 2\sqrt{3}}{2}$.

D. $2 + \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



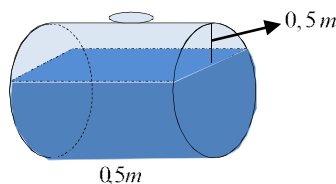
Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm của ba viên bi và $r_1 = r_2 = r_3 = \sqrt{3}$ là bán kính của ba viên bi đó. Theo giả thiết thì ba đường tròn lớn của ba viên bi đôi một tiếp xúc với nhau, khi đó ba điểm O_1, O_2, O_3 tạo thành một tam giác đều cạnh $2\sqrt{3}$. Gọi O là trọng tâm của tam giác $O_1O_2O_3$ thì

$$OO_1 = OO_2 = OO_3 = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2.$$

Cũng theo giả thiết thì ba viên bi tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ tại 3 điểm nằm trên một đường tròn bằng đường tròn đáy của lọ hình trụ (tham khảo hình vẽ trên).

Vậy bán kính đáy của lọ hình trụ là $OM = OO_3 + O_3M = 2 + \sqrt{3}$.

Câu 58: Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là $5m$, có bán kính đáy $1m$, với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với $0,5m$ của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn (theo đơn vị m^3)



A. $12,637m^3$.

B. $114,923m^3$.

C. $11,781m^3$.

D. $8,307m^3$.

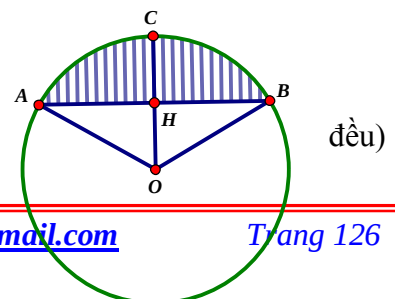
Hướng dẫn giải:

Nhận xét $OH = CH = 0,5 = \frac{R}{2} = \frac{OB}{2}$ suy ra $\triangle OHB$ là tam giác nửa đều

$$\Rightarrow \widehat{HOB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ$$

Suy ra diện tích hình quạt OAB là: $S = \frac{1}{3} \pi R^2 = \frac{1}{3} \pi$

$$\text{Mặt khác: } S_{\triangle AOB} = 2S_{\triangle HOB} = S_{\triangle BOC} = \frac{OB^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (\triangle BOC \text{ đều})$$



Vậy diện tích hình viên phân cung AB là $\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$

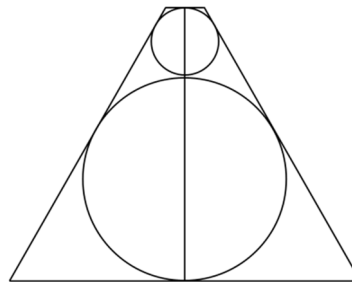
Suy ra thể tích dầu được rút ra: $V_1 = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$

Thể tích dầu ban đầu: $V = 5 \cdot \pi \cdot 1^2 = 5\pi$

Vậy thể tích còn lại: $V_2 = V - V_1 \approx 12,637m^3$.

Chọn A.

Câu 59: (Chuyên Vinh Lần 2) Người ta sản xuất một vật lưu niệm (N) bằng thủy tinh trong suốt có dạng khối tròn xoay mà thiết diện qua trục là hình thang cân. Bên trong (N) có hai khối cầu ngũ sắc với bán kính lần lượt là $R = 3cm$ và $r = 1cm$ tiếp xúc với nhau và tiếp xúc với mặt xung quanh của (N) đồng thời hai khối cầu tiếp xúc với hai đáy của (N). Tính thể tích của vật lưu niệm đó.



A. $\frac{485}{6}\pi (cm^3)$.

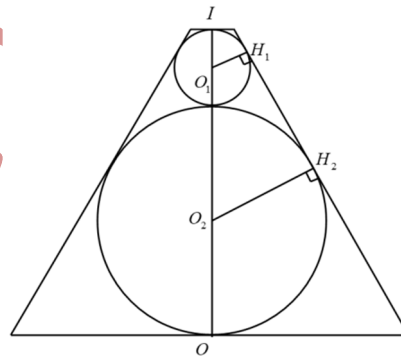
B. $81\pi (cm^3)$.

C. $72\pi (cm^3)$.

D. $\frac{728}{9}\pi (cm^3)$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\triangle IO_1H_1 \sim \triangle IO_2H_2 \Rightarrow \frac{IO_1}{IO_2} = \frac{O_1H_1}{O_2H_2} = \frac{1}{3}$

Mà $IO_2 - IO_1 = 4$ nên $IO_2 = 6cm$; $IO_1 = 2cm$; $IK = 1cm$; $IO = 9cm$

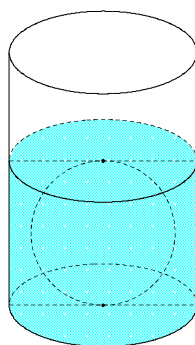
(N) là khối nón cụt có bán kính đáy lớn và đáy bé là r_1 và r_2

Trong $\triangle IO_1H_1$ có $\sin \widehat{O_1IH_1} = \frac{1}{2}$ nên $r_1 = 3\sqrt{3}$; $r_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy thể tích của (N) là $V = \frac{1}{3}\pi (r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2)h = \frac{728}{9}\pi (cm^3)$

Câu 60: (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên Lần 2) Người ta thả một viên billiards snooker có dạng hình cầu với bán kính nhỏ hơn 4,5cm vào một chiếc cốc hình trụ đang chứa nước thì viên billiards đó tiếp xúc với đáy cốc và tiếp xúc với mặt nước sau khi dâng (tham khảo hình vẽ bên). Biết

rằng bán kính của phần trong đáy cốc bằng 5,4cm và chiều cao của mực nước ban đầu trong cốc bằng 4,5cm. Bán kính của viên billiards đó bằng?



A. 4,2cm.

B. 3,6cm.

C. 2,7cm.

D. 2,6cm.

Lời giải

Chọn C

Gọi V_1 là thể tích của viên billiards snooker và r là bán kính của nó (ĐK: $0 < r < 4,5$).

Gọi V_2, V lần lượt là thể tích của khối trụ trước và sau khi thả viên billiards snooker vào.

Khi đó: $V = V_1 + V_2$ (1).

Ta có $V_1 = \frac{4}{3}\pi.r^3$; $V_2 = \pi.5,4^2.4,5 = 131,22\pi$; $V = \pi.5,4^2.2r = 58,32\pi.r$. Thay vào (1) ta có phương trình:

$$\frac{4}{3}\pi.r^3 + 131,22\pi = 58,32\pi.r \Leftrightarrow \frac{4}{3}.r^3 - 58,32.r + 131,22 = 0 \quad (2).$$

Giải phương trình (2) ta được $r_1 \approx 4,83$ (loại); $r_2 \approx -7,53$ (loại); $r_3 = 2,7$ (Thỏa mãn).

Vậy $r = 2,7$ cm.

Câu 61: (THPT-Ngô-Quyên-Hải-Phòng-Lần-2-2018-2019) Một hộp đựng bóng tennis có dạng hình trụ. Biết rằng hộp chứa vừa khít ba quả bóng tennis được xếp theo chiều dọc, các quả bóng tennis có kích thước như nhau. Thể tích phần không gian còn trống trong hộp chiếm tỉ lệ $a\%$ so với thể tích của hộp bóng tennis. Số a gần nhất với số nào sau đây?

A. 50.

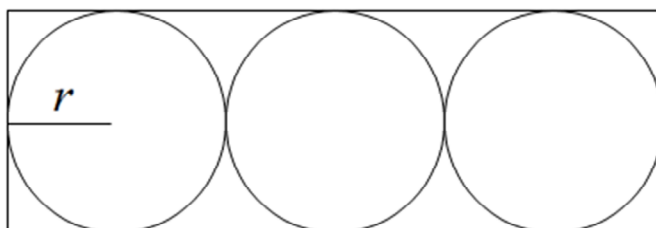
B. 66.

C. 30.

D. 33.

Lời giải

Chọn D



Gọi r là bán kính của quả bóng tennis.

Khi đó bán kính đáy hộp bằng r và chiều cao hộp bằng $6r$.

Khi đó thể tích hộp bóng hình trụ: $V = \pi r^2 h = \pi r^2 6r = 6\pi r^3$.

Thể tích một quả bóng tennis: $V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3$.

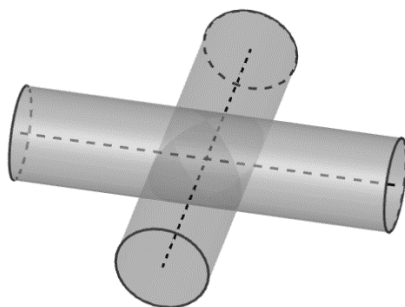
Suy ra thể tích ba quả bóng tennis là $3V_1 = 4\pi r^3$.

Thể tích phần không gian còn trống trong hộp là $V_2 = V - 3V_1 = 6\pi r^3 - 4\pi r^3 = 2\pi r^3$.

Ta có: $\frac{V_2}{V} = a\% \Leftrightarrow \frac{2\pi r^3}{6\pi r^3} = a\% \Leftrightarrow \frac{1}{3} = a\%.$

Suy ra $a \approx 33.$

Câu 62: Cho hai mặt trụ có cùng bán kính bằng 4 được đặt lồng vào nhau như hình vẽ. Tính thể tích phần chung của chúng biết hai trục của hai mặt trụ vuông góc và cắt nhau.



A. $256\pi.$

B. 512.

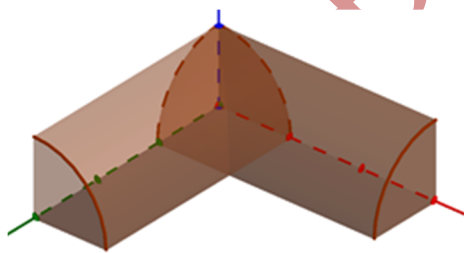
C. $\frac{256}{3}\pi.$

D. $\frac{1024}{3}.$

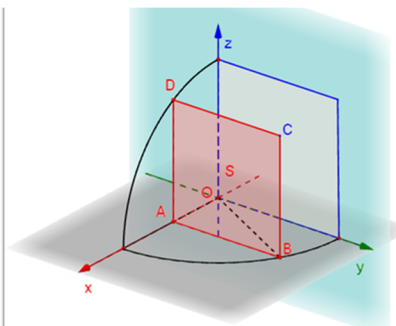
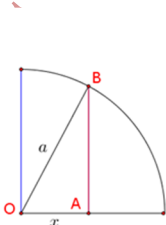
Hướng dẫn giải

Chọn D.

Cách 1. Ta xét $\frac{1}{8}$ phần giao của hai trụ như hình.



Ta gọi trục tọa độ Oxyz như hình vẽ.



Khi đó phần giao (H) là một vật thể có đáy là một phần tư hình tròn tâm O bán kính 4, thiết diện của mặt phẳng vuông góc với trục Ox là một hình vuông có diện tích $S(x) = 4^2 - x^2.$

Thể tích khối (H) là $\int_0^4 S(x) dx = \int_0^4 (16 - x^2) dx = \frac{128}{3}.$ Vậy thể tích phần giao là $\frac{1024}{3}.$

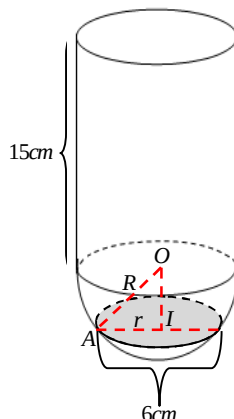
Cách 2. Dùng công thức tổng quát giao hai trụ $V = \frac{16}{3} R^3 = \frac{1024}{3}.$

Câu 63. (Nguyễn Du Dak-Lak 2019) Một cốc nước có hai phần: phần thân và phần đế. Phần thân để chứa nước có hình trụ cao 15 ml, chứa được đúng 750 ml nước. Phần đế là một phần của bán cầu làm bằng thủy tinh đặc. Mặt trên của đế là hình tròn lớn của bán cầu vừa khít với hình tròn đáy của thân cốc, mặt dưới của đế là hình tròn đường kính 6 ml. Thể tích của phần đế là (tính chính xác đến hàng phần trăm)

A. 112,44 cm³.**B.** 101,73 cm³.**C.** 132,98 cm³.**D.** 152,08 cm³.**Lời giải****Chọn A**

+ Ta có 750 ml = 750 cm³, suy ra $V = \pi R^2 h \Rightarrow R = \sqrt{\frac{V}{\pi h}} = \sqrt{\frac{750}{15\pi}} \approx 3,99$ cm.

+ Theo bài ta có hình vẽ bên.



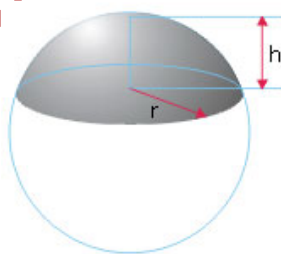
Gọi O là tâm mặt trên của đế, I là tâm mặt dưới của đế nên OA = R là bán kính hình tròn mặt trên (cũng là bán kính của bán cầu); IA = r = 3 cm là bán kính đường tròn mặt dưới của đế.

OI là chiều cao của phần đế, suy ra chiều cao của chòm cầu bỏ đi là

$$h = R - OI = R - \sqrt{R^2 - r^2} = 1,36 \text{ cm (Vì } OI = \sqrt{R^2 - r^2} \text{)}.$$

+ Thể tích của bán cầu, bán kính R là: $V_1 = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{2\pi R^3}{3} = 133,04 \text{ cm}^3$.

+ Thể tích của chòm cầu có bán kính hình tròn nhỏ r là: $V_2 = \frac{\pi h}{6} (3r^2 + h^2) = 20,54 \text{ cm}^3$.



Vậy thể tích phần đế là: $V' = V_1 - V_2 = 133,04 - 20,54 = 112,5 \text{ cm}^3$.

Câu 64. (Cấp Giàng) Một nhà máy cần thiết kế một chiếc bể đựng nước hình trụ bằng tôn có nắp, có thể tích là 64π (m³). Tìm bán kính đáy r của hình trụ sao cho hình trụ được làm ra tốn ít nguyên liệu nhất.

A. r = 3(m).**B.** r = $\sqrt[3]{16}$ (m).**C.** r = $\sqrt[3]{32}$ (m).**D.** r = 4(m).**Lời giải****Chọn C****Cách 1:**

Chiều cao của bể nước hình trụ là: $h = \frac{V}{\pi \cdot r^2} = \frac{64\pi}{\pi \cdot r^2} = \frac{64}{r^2}$ (m).

Bể đựng nước hình trụ bằng tôn có nắp nên diện tích tôn cần dùng là diện tích toàn phần của hình trụ.

Ta có: $S_{tp} = 2\pi r.h + 2\pi r^2 = 2\pi \left(\frac{64}{r} + r^2 \right) (\text{m}^2)$.

Hàm số $f(r) = \frac{64}{r} + r^2$ có $f'(r) = -\frac{64}{r^2} + 2r$ nên $f'(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{2r^3 - 64}{r^2} = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{32}$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(r)$:

r	0	$\sqrt[3]{32}$	$+\infty$
$f'(r)$		0	
$f(r)$	$+\infty$	$3\sqrt[3]{1024}$	$+\infty$

Hàm số $f(r)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $r = \sqrt[3]{32}$ nên bán kính đáy r của hình trụ sao cho hình trụ được làm ra tốn ít nguyên liệu nhất là $r = \sqrt[3]{32} (\text{m})$.

Cách 2:

Chiều cao của bể nước hình trụ là: $h = \frac{V}{\pi.r^2} = \frac{64\pi}{\pi.r^2} = \frac{64}{r^2} (\text{m})$.

Bể đựng nước hình trụ bằng tôn có nắp nên diện tích tôn cần dùng là diện tích toàn phần của hình trụ.

Ta có: $S_{tp} = 2\pi r.h + 2\pi r^2 = 2\pi \left(\frac{64}{r} + r^2 \right) (\text{m}^2)$.

Do đó: $S_{tp} = 2\pi \left(\frac{32}{r} + \frac{32}{r} + r^2 \right) \geq 2\pi.3\sqrt[3]{\frac{32}{r} \cdot \frac{32}{r} \cdot r^2} \Rightarrow S_{tp} \geq 6\pi\sqrt[3]{1024}$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\frac{32}{r} = r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{32}$.

Vậy bán kính đáy r của hình trụ sao cho hình trụ được làm ra tốn ít nguyên liệu nhất là $r = \sqrt[3]{32} (\text{m})$.