

CHUYÊN ĐỀ: PHÂN TẬP ĐỒNG DƯ

Trung tâm luyện thi 29Edu

Ngày 8 tháng 9 năm 2026

Tóm tắt nội dung

Năm 1801, nhà toán học Carl Friedrich Gauss, khi ấy mới 24 tuổi, đã giới thiệu một kí hiệu mới trong cuốn *Disquisitiones Arithmeticae* của mình: $a \equiv b \pmod{m}$. Ba dấu gạch nhỏ nhưng mở ra một chủ đề nghiên cứu mới của số học: đồng dư thức. Và ý tưởng đằng sau nó là: **khi bài toán chỉ quan tâm tới tính chia hết, ta không cần biết chính xác các số là bao nhiêu, chỉ cần quan tâm xem chúng dư mấy.**

Cho một số nguyên dương m , mặc dù tập số tự nhiên $\mathbb{N}$ khổng lồ có vô hạn phần tử nhưng nếu xét số dư của chúng khi chia cho số m thì các số dư chỉ có thể là m số: $0, 1, 2, \dots, m-1$. Và tập hợp các số có cùng số dư khi chia cho m được gọi là các lớp thặng dư.

- Tập A_0 gồm các số chia m dư 0 (chia hết)
- Tập A_1 gồm các số chia m dư 1
- Tập A_2 gồm các số chia m dư 2
- ...
- Tập A_{m-1} gồm các số chia m dư $m-1$

Chuyên đề này khai thác chính ý tưởng ấy cho các bài toán tổ hợp xác suất: thay vì đếm trong tập gốc, ta phân chia tập dữ kiện thành các tập con có cùng số dư, rồi thực hiện đếm xem lấy *bao nhiêu phần tử từ mỗi tập con* để thỏa mãn bài toán. Kỹ thuật này ta có thể gọi là **phân tập đồng dư**.

Mục lục

1	Bài toán mở đầu	3
2	Cơ sở lý thuyết	4
2.1	Đồng dư thức và các phép toán	4
2.2	Phân tập đồng dư	4
2.3	Bổ đề cân bằng	5
2.4	Nguyên lí đếm trên các lớp thặng dư	6
2.5	Phương pháp giải	7
3	Các mô hình bài toán điển hình	8
3.1	Mô hình 1: Phân tập và đếm số phần tử mỗi lớp thặng dư	8
3.2	Mô hình 2: Chọn k phần tử có tổng chia hết cho m	8
3.3	Mô hình 3: Hai số có tổng (hoặc hiệu) chia hết cho m	9
3.4	Mô hình 4: Lập số có các chữ số đôi một khác nhau chia hết cho 3 hoặc 9	10
3.5	Mô hình 5: Kết hợp hai điều kiện chia hết	11
3.6	Mô hình 6: Kỹ thuật phần tử tự do (bổ đề cân bằng)	12
3.7	Mô hình 7: Điền số vào bảng với dữ kiện chia hết	12
4	Bài tập tự luyện	14
5	Đáp án	18

1 Bài toán mở đầu

(Đề thi chính thức TNTHPT 2026)

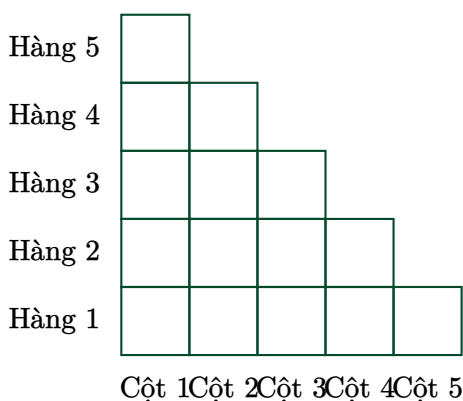
Trong một trò chơi, bạn Bình cần vượt qua một thử thách. Theo yêu cầu của thử thách, Bình cần điền tất cả 15 số thuộc tập hợp

$$\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 10; 11; 12; 15; 16; 20\}$$

vào 15 ô vuông trong hình dưới thỏa mãn đồng thời ba điều kiện sau:

- Mỗi ô điền đúng một số và mỗi số chỉ được sử dụng một lần;
- Hiệu hai số ở hai ô bất kì khác nhau trên cùng một hàng không chia hết cho 5;
- Hiệu hai số ở hai ô bất kì khác nhau trên cùng một cột không chia hết cho 5.

Hai cách điền gọi là giống nhau nếu số điền ở mỗi ô tương ứng trong 15 ô là giống nhau (không tính đến thứ tự điền các số vào 15 ô vuông). Gọi H là số cách điền khác nhau để bạn Bình vượt qua được thử thách. Giá trị của $\frac{H}{30}$ bằng bao nhiêu?



Trước hết hãy thấy rõ quy mô của bài toán: chỉ riêng việc xếp 15 số vào 15 ô đã có

$$15! = 1\,307\,674\,368\,000 \approx 1,3 \cdot 10^{12} \text{ cách.}$$

Tất nhiên đây là đếm không có điều kiện gì, và với điều kiện của đề bài "hiệu hai số trên một hàng/một cột không chia hết cho 5" thì ta có thể nghĩ đến tính chất "đồng dư":

$$a - b \text{ không chia hết cho } 5 \iff a \not\equiv b \pmod{5} \iff a \text{ và } b \text{ khác số dư khi chia cho } 5.$$

Vậy đề bài đang yêu cầu: **các số trên cùng một hàng phải đôi một khác số dư, các số trên cùng một cột cũng vậy**. Xếp 15 số đã cho theo số dư khi chia cho 5, ta được năm nhóm với số lượng rất đặc biệt:

Số dư	Các số trong tập hợp	Số lượng
0	0; 5; 10; 15; 20	5
1	1; 6; 11; 16	4
2	2; 7; 12	3
3	3; 8	2
4	4	1

Năm nhóm có kích thước 5, 4, 3, 2, 1 trùng khớp một cách đáng ngờ với số ô của năm hàng trong hình bậc thang. Ta sẽ quay lại giải trọn vẹn bài toán trên ở **Ví dụ 8**.

2 Cơ sở lý thuyết

2.1 Đồng dư thức và các phép toán

Định nghĩa: Đồng dư

Cho số nguyên dương $m \geq 2$. Hai số nguyên a, b được gọi là **đồng dư modulo m** , kí hiệu

$$a \equiv b \pmod{m},$$

nếu $a - b$ chia hết cho m ; nói cách khác, a và b có cùng số dư khi chia cho m .

Tính chất của đồng dư thức

Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ và $c \equiv d \pmod{m}$ thì

$$a + c \equiv b + d, \quad a - c \equiv b - d, \quad ac \equiv bd, \quad a^k \equiv b^k \pmod{m} \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

Hệ quả Gọi r_i là số dư của a_i khi chia cho m . Khi đó

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k : m \iff r_1 + r_2 + \dots + r_k \equiv 0 \pmod{m}.$$

Nói cách khác: *muốn biết một tổng có chia hết cho m hay không, ta có thể xét tổng các số dư.* Đây là toàn bộ cơ sở của chuyên đề.

2.2 Phân tập đồng dư

Định nghĩa: Lớp thặng dư và phân tập đồng dư

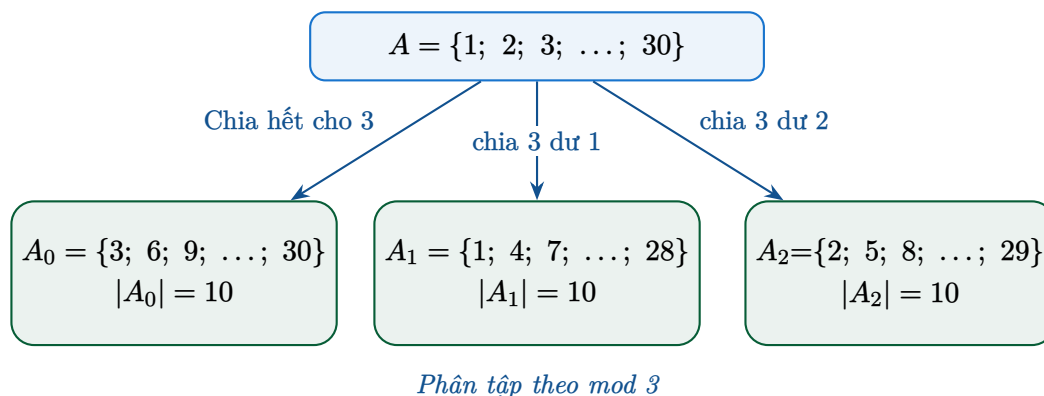
Cho tập hữu hạn $A \subset \mathbb{Z}$ và số nguyên $m \geq 2$. Với mỗi $r \in \{0; 1; \dots; m-1\}$, đặt

$$A_r = \{x \in A \mid x \equiv r \pmod{m}\}$$

và gọi A_r là **lớp thặng dư thứ r** của A theo modulo m . Khi đó các tập $A_0, A_1, \dots, A_{m-1}$ đôi một rời nhau và

$$A = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{m-1}.$$

Cách chia này được gọi là **phân tập đồng dư** (hay phân hoạch theo lớp thặng dư) của A theo modulo m .



Đếm số phần tử của mỗi lớp trên tập $\{1; 2; \dots; n\}$

Cho tập $A = \{1; 2; \dots; n\}$ và $m \geq 2$. Khi đó

$$|A_0| = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor, \quad |A_r| = \left\lfloor \frac{n-r}{m} \right\rfloor + 1 \quad (1 \leq r \leq m-1, r \leq n).$$

Đặc biệt, nếu m là ước của n thì **mọi lớp đều có đúng $\frac{n}{m}$ phần tử**.

Lưu ý: Kí hiệu $|A_r|$ là số phần tử của tập A_r . Kí hiệu $\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$ là lấy phần nguyên, số nguyên dương lớn nhất không vượt quá $\frac{n}{m}$.

Lưu ý 2: Tổng quát hơn, số các số nguyên thuộc đoạn $[a; b]$ và chia hết cho m bằng $\left\lfloor \frac{b}{m} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a-1}{m} \right\rfloor$. Công thức này rất tiện khi đếm trên các tập không bắt đầu từ 1.

Lưu ý 3: Nếu đề không cho tập A gồm các số nguyên liên tiếp thì ta cần phải đếm bằng tay, thường thì tập đó sẽ có ít phần tử.

2.3 Bổ đề cân bằng

Bổ đề cân bằng

Giả sử một tập hợp S được phân thành m nhóm đồng dư khi chia cho m (mỗi nhóm đều chứa đúng t phần tử).

Khi lập một tập hợp hoặc một dãy số từ tập S , nếu có **ít nhất một vị trí được chọn hoàn toàn tự do** (chạy khắp tập S và độc lập với các vị trí khác), thì số lượng các bộ có tổng chia hết cho m chiếm đúng $\frac{1}{m}$ tổng số các bộ có thể lập được.

Ta có thể hiểu đơn giản qua ví dụ sau: Có bao nhiêu cách chọn ra bộ 4 số từ tập $S = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$ để lập thành một số tự nhiên có 4 chữ số chia hết cho 3 (các số được chọn có thể giống nhau).

Giả sử số thỏa mãn yêu cầu có dạng $\overline{abcd}$

Tập S được phân thành 3 tập con theo mod 3: $S_0 = 3; 6; 9$; $S_1 = 1; 4; 7$; $S_2 = 2; 5; 8$. Mỗi tập có $t = 3$ phần tử.

Ta chọn ra 1 phần tử "tự do" (được chọn tùy ý không ràng buộc), giả sử là d . Chọn tất cả các phần tử khác trước, tổng của chúng lúc này đang là $a + b + c$. Dù a, b, c là bao nhiêu thì tổng $a + b + c$ sẽ luôn có số dư rơi vào một trong 3 trường hợp 0, 1, 2. Lúc này, khi chọn ra d vì tập S có các phần tử rải đều ở mọi số dư, nên dù $a + b + c$ đang dư bao nhiêu thì luôn có đúng $t = 3$ giá trị của d để "bù phần dư", giúp tổng $(a + b + c + d)$ chia hết cho m .

Số dư của $(a + b + c)$ khi chia cho 3	Số dư cần thiết của d khi chia cho 3	Các giá trị $d \in S$ để "bù phần dư"	Số cách chọn d
0	0 (vì $0 + 0 = 0 \div 3$)	$d \in \{3; 6; 9\}$	3 cách
1	2 (vì $1 + 2 = 3 \div 3$)	$d \in \{2; 5; 8\}$	3 cách
2	1 (vì $2 + 1 = 3 \div 3$)	$d \in \{1; 4; 7\}$	3 cách

Vậy trong tổng số $|S| = t \cdot m$ cách chọn d , có đúng t cách thỏa mãn. Tỷ lệ luôn là $\frac{t}{t \cdot m} = \frac{1}{m}$.

Lưu ý:

Bổ đề này bắt buộc tập nguồn phải **cân bằng tuyệt đối** (các nhóm số dư phải có số lượng phần tử bằng nhau).

2.4 Nguyên lý đếm trên các lớp thặng dư

Đôi khi để xử lý một bài toán có yếu tố chia hết (hoặc chia dư r), ta phải chọn ra k phần tử phân biệt của A , sao cho tổng các phần tử đó đồng dư với r theo mod m . Khi đó ta có thể áp dụng định lý sau

Định lý về tổng số dư

Cho A có phân tập đồng dư $A_0, A_1, \dots, A_{m-1}$ theo mod m . Chọn ra k phần tử phân biệt của A , trong đó lấy k_r phần tử từ lớp A_r (với $k_0 + k_1 + \dots + k_{m-1} = k$). Khi đó:

- Tổng của k phần tử được chọn luôn đồng dư với $\sum_{r=0}^{m-1} r \cdot k_r$ theo modulo m – **không phụ thuộc vào việc chọn cụ thể phần tử nào**.
- Số cách chọn ứng với bộ $(k_0; k_1; \dots; k_{m-1})$, ta áp dụng quy tắc nhân:

$$C_{|A_0|}^{k_0} \cdot C_{|A_1|}^{k_1} \cdot C_{|A_2|}^{k_2} \cdot \dots \cdot C_{|A_{m-1}|}^{k_{m-1}} = \prod_{r=0}^{m-1} C_{|A_r|}^{k_r}.$$

Do đó số cách chọn k phần tử có tổng chia hết cho m bằng tổng của $\prod_{r=0}^{m-1} C_{|A_r|}^{k_r}$ lấy trên **mọi bộ** $(k_0; \dots; k_{m-1})$ thỏa mãn

$$k_0 + k_1 + \dots + k_{m-1} = k \quad \text{và} \quad \sum_{r=0}^{m-1} r \cdot k_r \equiv 0 \pmod{m}.$$

2.5 Phương pháp giải

a) Ba bước giải một bài toán đếm có yếu tố chia hết

Phương pháp: Ba bước

1. **Phân tập:** chia tập dữ kiện thành các lớp thặng dư theo mod m và đếm số phần tử mỗi lớp.
2. **Liệt kê bộ số dư:** tìm tất cả các bộ $(k_0; k_1; \dots; k_{m-1})$ hợp lệ.
3. **Đếm và cộng:** với mỗi bộ, nhân các tổ hợp (hoặc hoán vị nếu bài toán có thứ tự), rồi cộng tất cả lại theo quy tắc cộng.

b) Một số dấu chia hết thường dùng

Chia hết cho	Dấu hiệu
2	Chữ số tận cùng thuộc $\{0; 2; 4; 6; 8\}$
5	Chữ số tận cùng là 0 hoặc 5
4 (hoặc 25)	Số tạo bởi hai chữ số tận cùng chia hết cho 4 (hoặc 25)
8 (hoặc 125)	Số tạo bởi ba chữ số tận cùng chia hết cho 8 (hoặc 125)
3 (hoặc 9)	Tổng các chữ số chia hết cho 3 (hoặc 9)
11	Tổng đan dấu các chữ số (kể từ phải sang) chia hết cho 11

Lưu ý: nếu $m = m_1 m_2$ với m_1, m_2 nguyên tố cùng nhau thì

$$N : m \iff N : m_1 \text{ và } N : m_2.$$

Nhờ đó: $6 = 2 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$, $45 = 9 \cdot 5$, $12 = 4 \cdot 3$. Ngược lại, **không được** tách $8 = 2 \cdot 4$ vì 2 và 4 không nguyên tố cùng nhau.

c) Xét phân dư của bình phương và số mũ

Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ thì $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$.

Hoặc tùy vào m ta có thể thực hiện phân tập đồng dư như bình thường để được các tập chung số dư r . Sau đó, với mỗi $r \in \{0; 1; \dots; m-1\}$ ta bình phương lên để được r^2 rồi xét số dư khi chia cho m .

Ví dụ: Cho tập S cho trước có hữu hạn phần tử, khi đó khi xét số dư của một số $n \in S$ khi chia cho 3, ta được 3 dạng số là $3k; 3k+1; 3k+2$. Khi đó:

- $n = 3k \Rightarrow n^2 = 9k^2 \equiv 0 \pmod{3}$
- $n = 3k+1 \Rightarrow n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 \equiv 1 \pmod{3}$
- $n = 3k+2 \Rightarrow n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 \equiv 1 \pmod{3}$

Tổng quát: $a \equiv b \pmod{m} \implies a^n \equiv b^n \pmod{m} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

3 Các mô hình bài toán điển hình

3.1 Mô hình 1: Phân tập và đếm số phần tử mỗi lớp thặng dư

Ví dụ 1: Đếm phần tử của các lớp thặng dư

Cho tập $A = \{1; 2; 3; \dots; 2025\}$.

- Phân tập A theo modulo 4 và đếm số phần tử của mỗi lớp.
- A có bao nhiêu phần tử chia hết cho 9?
- A có bao nhiêu phần tử chia hết cho cả 3 và 5?

Lời giải:

a) Áp dụng công thức đếm:

$$|A_0| = \left\lfloor \frac{2025}{4} \right\rfloor = 506, \quad |A_1| = \left\lfloor \frac{2024}{4} \right\rfloor + 1 = 507,$$

$$|A_2| = \left\lfloor \frac{2023}{4} \right\rfloor + 1 = 506, \quad |A_3| = \left\lfloor \frac{2022}{4} \right\rfloor + 1 = 506.$$

Kiểm tra lại: $506 + 507 + 506 + 506 = 2025$ (đúng bằng $|A|$).

b) Số phần tử chia hết cho 9 là $\left\lfloor \frac{2025}{9} \right\rfloor = 225$.

c) Vì 3 và 5 nguyên tố cùng nhau nên "chia hết cho cả 3 và 5" $\iff$ "chia hết cho 15". Số phần tử cần tìm là $\left\lfloor \frac{2025}{15} \right\rfloor = 135$.

Nhận xét: Vì 2025 không chia hết cho 4 nên các lớp **không cân bằng** – lớp dư 1 nhiều hơn các lớp khác đúng 1 phần tử. Thói quen "chia đều $2025 : 4$ " là sai lầm phổ biến nhất ở mô hình này. Luôn kiểm tra lại bằng cách cộng các lớp.

3.2 Mô hình 2: Chọn k phần tử có tổng chia hết cho m

Ví dụ 2: Chọn 3 số có tổng chia hết cho 3

Chọn ngẫu nhiên 3 số phân biệt từ tập $A = \{1; 2; \dots; 30\}$. Tính xác suất để tổng ba số được chọn chia hết cho 3.

Lời giải:

Vì $30 = 3 \cdot 10$ nên ba lớp thặng dư theo mod 3 cân bằng:

$$|A_0| = |A_1| = |A_2| = 10.$$

Cần $(k_0; k_1; k_2)$ với $k_0 + k_1 + k_2 = 3$ và $0 \cdot k_0 + 1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 \equiv 0 \pmod{3}$. Thử trực tiếp, chỉ có bốn bộ thỏa mãn:

$$(3; 0; 0), \quad (0; 3; 0), \quad (0; 0; 3), \quad (1; 1; 1).$$

Nghĩa là: **ba số cùng lớp**, hoặc **mỗi lớp một số**.

Khi đó tổng số cách chọn ra bộ 3 số ở 4 trường hợp là:

$$n(A) = C_{10}^3 + C_{10}^3 + C_{10}^3 + 10 \cdot 10 \cdot 10 = 3 \cdot 120 + 1000 = \mathbf{1360} \text{ (cách).}$$

Không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{30}^3 = 4060$. Vậy

$$P(A) = \frac{1360}{4060} = \frac{68}{203} \approx 0,335.$$

3.3 Mô hình 3: Hai số có tổng (hoặc hiệu) chia hết cho m

Ví dụ 3: Tổng và hiệu của hai số được chọn

Chọn ngẫu nhiên 2 số phân biệt từ tập $A = \{1; 2; \dots; 100\}$. Tính xác suất của hai biến cố

- a) A: hiệu hai số đó chia hết cho 5;
- b) B: tổng hai số đó chia hết cho 5.

Lời giải:

Vì $100 = 5 \cdot 20$ nên năm lớp thặng dư theo mod 5 đều có 20 phần tử.

Không gian mẫu $n(\Omega) = C_{100}^2 = 4950$.

a) Hiệu hai số chia hết cho 5 $\iff$ hai số **cùng lớp**. Có 5 lớp mà mỗi lớp có 20 phần tử nên số cách chọn là:

$$n(A) = 5 \cdot C_{20}^2 = 5 \cdot 190 = 950$$

Xác suất xảy ra biến cố A là:

$$P(A) = \frac{950}{4950} = \frac{19}{99}.$$

b) Tổng hai số chia hết cho 5 $\iff$ bộ số dư của hai số được chọn là (0; 0), (1; 4) hoặc (2; 3). Số cách chọn tương ứng là: C_{20}^2 , $C_{20}^1 \cdot C_{20}^1$ và $C_{20}^1 \cdot C_{20}^1$, tổng số cách chọn thỏa mãn:

$$n(B) = C_{20}^2 + 20 \cdot 20 + 20 \cdot 20 = 190 + 400 + 400 = 990$$

Xác suất xảy ra biến cố B là:

$$P(B) = \frac{990}{4950} = \frac{1}{5}.$$

Nhận xét: điều kiện "hiệu chia hết" buộc hai số vào **cùng** một lớp, còn điều kiện "tổng chia hết" thường ghép từ **các lớp khác nhau** dựa trên tổng số dư.

3.4 Mô hình 4: Lập số có các chữ số đôi một khác nhau chia hết cho 3 hoặc 9

Ví dụ 4:

Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 3?

Lời giải:

Với bài toán chia hết cho 3 hoặc 9, ta luôn xét tổng các chữ số, từ đó có thể áp dụng định lý về tổng phần dư.

Bước 1 – Chuyển về bài toán chọn tập chữ số. Một số thỏa mãn bài toán được xác định bởi:

- chọn ra 5 chữ số từ 7 chữ số đã cho, sao cho tổng của chúng chia hết cho 3;
- sắp thứ tự 5 chữ số ấy sao cho chữ số đầu khác 0.

Bước 2 – Dùng phân bù. Tổng của cả 7 chữ số là $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 \div 3$. Do đó

$$(\text{tổng 5 chữ số được giữ}) \div 3 \iff (\text{tổng 2 chữ số bị loại}) \div 3.$$

Việc chọn 5 chữ số quy về việc **loại 2 chữ số**.

Bước 3 – Phân tập chữ số theo mod 3.

$$A_0 = \{0; 3; 6\}, \quad A_1 = \{1; 4\}, \quad A_2 = \{2; 5\}.$$

Cặp chữ số bị loại có tổng chia hết cho 3 khi và chỉ khi cả hai cùng thuộc A_0 , hoặc một thuộc A_1 và một thuộc A_2 . Số cặp:

$$C_3^2 + 2 \cdot 2 = 3 + 4 = 7 \text{ (cặp)}.$$

Cụ thể: $\{0; 3\}$, $\{0; 6\}$, $\{3; 6\}$, $\{1; 2\}$, $\{1; 5\}$, $\{4; 2\}$, $\{4; 5\}$.

Bước 4 – Đếm số hoán vị ứng với mỗi tập 5 chữ số còn lại. Phải tách hai trường hợp:

- **TH1:** Tập 5 chữ số **không chứa** 0: có $5! = 120$ số.
- **TH2:** Tập 5 chữ số **có chứa** 0: có $5! - 4! = 120 - 24 = 96$ số (trừ đi các trường hợp chữ số 0 đứng đầu).

Trong 7 cặp bị loại ở trên, hai cặp $\{0; 3\}$ và $\{0; 6\}$ đã lấy mất chữ số 0, nên tập còn lại không chứa 0; năm cặp còn lại đều giữ chữ số 0 ở lại.

Bước 5 – Kết luận.

$$2 \cdot 120 + 5 \cdot 96 = 240 + 480 = \mathbf{720} \text{ (số)}.$$

3.5 Mô hình 5: Kết hợp hai điều kiện chia hết

Ví dụ 5: Lập số chia hết cho 6

Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 6?

Lời giải:

Vì $6 = 2 \cdot 3$ với $(2; 3) = 1$ nên số cần đếm phải vừa chia hết cho 3, vừa chia hết cho 2.

Bước 1 – Chọn tập 4 chữ số có tổng chia hết cho 3. Tổng cả 6 chữ số là $0+1+2+3+4+5 = 15 : 3$, nên tổng hai chữ số bị loại phải chia hết cho 3. Phân tập:

$$B_0 = \{0; 3\}, \quad B_1 = \{1; 4\}, \quad B_2 = \{2; 5\}.$$

Cặp bị loại: cả hai thuộc B_0 , hoặc một thuộc B_1 và một thuộc B_2 , cho $C_2^2 + 2 \cdot 2 = 5$ cặp. Tương ứng ta có 5 tập chữ số:

$$\{1; 2; 4; 5\}, \quad \{0; 3; 4; 5\}, \quad \{0; 2; 3; 4\}, \quad \{0; 1; 3; 5\}, \quad \{0; 1; 2; 3\}.$$

Bước 2 – Với mỗi tập, đếm số chẵn có 4 chữ số khác nhau. Ta đếm theo chữ số tận cùng.

- $\{1; 2; 4; 5\}$ (không có 0): tận cùng là 2 hoặc 4, ba vị trí đầu hoán vị tự do: $2 \cdot 3! = 12$ số.
- $\{0; 3; 4; 5\}$: tận cùng 0 cho $3! = 6$ số; tận cùng 4 cho $3! - 2! = 4$ số (loại các số có chữ số 0 đứng đầu). Tổng 10 số.
- $\{0; 2; 3; 4\}$: tận cùng 0 cho 6 số; tận cùng 2 cho 4 số; tận cùng 4 cho 4 số. Tổng 14 số.
- $\{0; 1; 3; 5\}$: chỉ có thể tận cùng 0, cho 6 số.
- $\{0; 1; 2; 3\}$: tận cùng 0 cho 6 số; tận cùng 2 cho 4 số. Tổng 10 số.

Bước 3 – Kết luận.

$$12 + 10 + 14 + 6 + 10 = 52 \text{ (số)}.$$

Nhận xét: Với dạng "chia hết cho 6, 15, 45, 12...", tức là có dấu hiệu chia hết cho 3 và 9, ta nên dùng điều kiện tổng chữ số để lọc ra các tập chữ số trước, sau đó mới xét điều kiện về chữ số tận cùng trên từng tập. Làm ngược lại sẽ phải chia rất nhiều trường hợp.

3.6 Mô hình 6: Kỹ thuật phần tử tự do (bổ đề cân bằng)

Ví dụ 6: Đếm số chia hết cho 3 bằng cách chọn chữ số tận cùng

Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số, các chữ số đều thuộc tập $S = \{1; 2; \dots; 9\}$ (các chữ số có thể lặp lại) và số đó chia hết cho 3?

Lời giải:

Cách 1: Bài toán yêu cầu lập số có dạng $\overline{abcde}$ chia hết cho 3, nghĩa là tổng $(a+b+c+d+e) : 3$.

Bước 1 – Chọn 4 chữ số đầu tiên: Ta có thể chọn tự do 4 chữ số a, b, c, d từ tập S . Vì mỗi vị trí có 9 cách chọn, nên ta có tổng cộng 9^4 cách chọn 4 chữ số đầu.

Bước 2 – Chọn chữ số cuối cùng e : Trong tập $S = \{1; 2; \dots; 9\}$, các chữ số được chia đều thành 3 nhóm theo số dư khi chia cho 3:

- Chia hết cho 3 (dư 0): $\{3; 6; 9\}$ (có 3 chữ số).
- Chia 3 dư 1: $\{1; 4; 7\}$ (có 3 chữ số).
- Chia 3 dư 2: $\{2; 5; 8\}$ (có 3 chữ số).

Dù tổng 4 chữ số đầu tiên $(a+b+c+d)$ có số dư khi chia cho 3 là bao nhiêu (0, 1 hay 2), ta luôn có **đúng 3 cách chọn** chữ số e từ nhóm tương ứng để bù trừ phần dư, giúp tổng 5 chữ số chia hết cho 3.

Bước 3 – Kết luận: Theo quy tắc nhân, tổng số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$$9^4 \times 3 = 6561 \times 3 = \mathbf{19683} \text{ (số)}.$$

Cách 2: Tổng số các số thỏa mãn phần đầu (bỏ điều kiện chia hết) là $9^5 = 59049$.

Tập $\{1; 2; \dots; 9\}$ có ba lớp thặng dư theo mod 3 là $\{3; 6; 9\}$, $\{1; 4; 7\}$, $\{2; 5; 8\}$, **mỗi lớp đúng 3 phần tử** – các lớp cân bằng.

Cố định bốn chữ số đầu, khi chữ số cuối chạy khắp tập S thì tổng năm chữ số nhận mỗi số dư 0, 1, 2 đúng 3 lần. Theo bổ đề cân bằng, đúng $\frac{1}{3}$ số thỏa mãn:

$$\frac{9^5}{3} = \mathbf{19683} \text{ (số)}.$$

3.7 Mô hình 7: Điền số vào bảng với dữ kiện chia hết

Ví dụ 7: Giải trọn vẹn bài toán mở đầu

Điền 15 số thuộc tập $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 10; 11; 12; 15; 16; 20\}$ vào 15 ô của hình bậc thang (hàng k có $6 - k$ ô), mỗi số dùng đúng một lần, sao cho hiệu hai số bất kì trên cùng một hàng và hiệu hai số bất kì trên cùng một cột đều không chia hết cho 5. Gọi H là số cách điền. Tính $\frac{H}{30}$.

Lời giải:

Bước 1 – Đưa bài toán về xét số dư. Với hai số a, b ta có

$$(a - b) \text{ không chia hết cho } 5 \iff a \not\equiv b \pmod{5}.$$

Do đó điều kiện đề bài tương đương: **các số trên cùng một hàng đôi một khác lớp thặng dư mod 5, các số trên cùng một cột cũng đôi một khác lớp.**

Bước 2 – Phân tập đồng dư. Kí hiệu L_r là lớp gồm các số của tập đã cho có số dư r khi chia cho 5:

$$L_0 = \{0; 5; 10; 15; 20\}, \quad L_1 = \{1; 6; 11; 16\}, \quad L_2 = \{2; 7; 12\}, \quad L_3 = \{3; 8\}, \quad L_4 = \{4\},$$

$$|L_0| = 5, \quad |L_1| = 4, \quad |L_2| = 3, \quad |L_3| = 2, \quad |L_4| = 1.$$

Vì phải dùng hết 15 số nên lớp L_r chiếm đúng $|L_r|$ ô của bảng, và **hai ô cùng lớp thì không được cùng hàng, cũng không được cùng cột.**

Bước 3 – Vị trí của lớp L_0 bị ép hoàn toàn. Lớp L_0 chiếm 5 ô đôi một khác hàng và khác cột. Bảng có đúng 5 hàng nên **mỗi hàng chứa đúng một ô của L_0 .** Từ đó:

- Hàng 5 chỉ có một ô duy nhất là ô (hàng 5; cột 1) $\Rightarrow$ ô này thuộc L_0 , và cột 1 đã bị chiếm.
- Hàng 4 có hai ô ở cột 1 và cột 2; cột 1 đã bị chiếm $\Rightarrow$ ô của L_0 là (hàng 4; cột 2).
- Tiếp tục như vậy: (hàng 3; cột 3), (hàng 2; cột 4), (hàng 1; cột 5).

Vậy L_0 chiếm đúng **đường chéo phụ** gồm các ô có tổng chỉ số hàng và cột bằng 6.

Bước 4 – Lập lại lập luận. Bỏ đi năm ô vừa xác định, phần còn lại vẫn là một hình bậc thang với các hàng có 4, 3, 2, 1 ô. Lớp L_1 có 4 phần tử, phải chiếm 4 ô đôi một khác hàng khác cột trong hình bậc thang mới này, nên bằng lập luận y hệt Bước 3, L_1 chiếm đường chéo phụ tiếp theo: (hàng 4; cột 1), (hàng 3; cột 2), (hàng 2; cột 3), (hàng 1; cột 4). Cứ thế, L_2, L_3, L_4 lần lượt chiếm các đường chéo phụ còn lại. Kết quả: **có duy nhất một cách phân bố các lớp thặng dư vào bảng**, mô tả bởi hình sau (số ghi trong ô là số dư của số được điền vào ô đó):

Hàng 5	0				
Hàng 4	1	0			
Hàng 3	2	1	0		
Hàng 2	3	2	1	0	
Hàng 1	4	3	2	1	0
	Cột 1	Cột 2	Cột 3	Cột 4	Cột 5

Kiểm tra lại: trên mỗi hàng và trên mỗi cột, các số dư đôi một khác nhau – thỏa mãn đề bài.

Bước 5 – Đếm số cách điền. Vị trí của từng lớp đã cố định, nhưng trong mỗi lớp các số vẫn được hoán vị tự do trên đúng những ô dành cho lớp đó (mọi hoán vị đều hợp lệ vì các ô này đã khác hàng khác cột). Theo quy tắc nhân:

$$H = 5! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! = 120 \cdot 24 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1 = 34\,560.$$

Vậy

$$\frac{H}{30} = \frac{34\,560}{30} = 1152.$$

4 Bài tập tự luyện

Câu 1. Từ tập $A = \{1; 2; \dots; 45\}$, có bao nhiêu cách chọn 3 số phân biệt sao cho hiệu của hai số bất kì trong chúng đều chia hết cho 5?

Câu 2. Từ tập $A = \{1; 2; \dots; 30\}$, có bao nhiêu cách chọn 2 số phân biệt sao cho tổng của chúng chia hết cho 5?

Câu 3. Từ tập $A = \{1; 2; \dots; 25\}$, có bao nhiêu cách chọn 2 số phân biệt sao cho tổng của chúng chia hết cho 4?

Câu 4. Một hộp có 15 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 15. Có bao nhiêu cách rút đồng thời 2 thẻ sao cho tổng hai số ghi trên hai thẻ chia hết cho 3?

Câu 5. Một hộp có 20 tấm thẻ được đánh số từ 0 đến 19. Có bao nhiêu cách rút đồng thời 3 thẻ sao cho tổng hai số ghi trên hai thẻ chia hết cho 2?

Câu 6. Một hộp có 35 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 35. Người ta bốc ngẫu nhiên 5 phiếu từ hộp. Tính xác suất để tổng bình phương các số ghi trên phiếu được bốc chia hết cho 4? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.)

Câu 7. Chọn ngẫu nhiên 4 số phân biệt a, b, c, d thuộc tập hợp $S = \{1; 2; \dots; 2025\}$. Tính xác suất để 4 số chọn ra thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ chia hết cho 5. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.)

Câu 8. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn ra ba số tự nhiên phân biệt từ tập $S = \{1, 2, 3, \dots, 16\}$ để tích của chúng chia hết cho 128?

Câu 9. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn ra ba số tự nhiên khác nhau từ tập $S = \{1, 2, 3, \dots, 25\}$ để tích của chúng chia hết cho 500?

Câu 10. Có 48 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 48. Người ta thực hiện, rút ngẫu nhiên 3 thẻ. Tính xác suất để tổng các số ghi trên ba thẻ chia hết cho 3. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.)

Câu 11. Có 50 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 50. Người ta thực hiện, rút ngẫu nhiên 3 thẻ. Tính xác suất để tổng các số ghi trên ba thẻ chia hết cho 3. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.)

Câu 12. Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối và đồng chất (hai con xúc xắc được phân biệt với nhau). Có bao nhiêu kết quả mà tổng bình phương số chấm xuất hiện trên hai con chia hết cho 5?

Câu 13. Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số, các chữ số đều thuộc tập $\{1; 2; \dots; 9\}$ (các chữ số có thể lặp lại) và số đó chia hết cho 3?

Câu 14. Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 3?

Câu 15. Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 5?

Câu 16. Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 6?

Câu 17. Điền tất cả 6 số thuộc tập $\{0; 1; 2; 3; 4; 6\}$ vào 6 ô của hình dưới sao cho hiệu hai số ở hai ô bất kì khác nhau trên cùng một hàng và hiệu hai số ở hai ô bất kì khác nhau trên cùng một cột đều không chia hết cho 3. Có bao nhiêu cách điền khác nhau?

Hàng 3			
Hàng 2			
Hàng 1			
	Cột 1	Cột 2	Cột 3

Câu 18. Điền tất cả 10 số thuộc tập $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 10; 13\}$ vào 10 ô của hình dưới sao cho hiệu hai số ở hai ô bất kì khác nhau trên cùng một hàng và hiệu hai số ở hai ô bất kì khác nhau trên cùng một cột đều không chia hết cho 4. Có bao nhiêu cách điền khác nhau?

Hàng 4				
Hàng 3				
Hàng 2				
Hàng 1				
	Cột 1	Cột 2	Cột 3	Cột 4

Câu 19. Điền tất cả 8 số thuộc tập $\{1; 2; \dots; 8\}$ vào bảng gồm 2 hàng và 4 cột dưới đây sao cho hiệu hai số ở hai ô bất kì khác nhau trên cùng một hàng và hiệu hai số ở hai ô bất kì khác nhau trên cùng một cột đều không chia hết cho 4. Gọi H là số cách điền khác nhau. Tính $\frac{H}{24}$.

Hàng 2				
Hàng 1				
	Cột 1	Cột 2	Cột 3	Cột 4

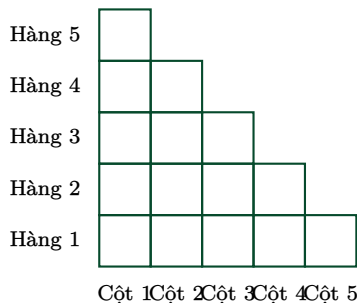
Câu 20. Điền tất cả 9 số thuộc tập $\{1; 2; \dots; 9\}$ vào bảng vuông 3×3 dưới đây sao cho hiệu hai số ở hai ô bất kì khác nhau trên cùng một hàng và hiệu hai số ở hai ô bất kì khác nhau trên cùng một cột đều không chia hết cho 3. Gọi H là số cách điền khác nhau. Tính $\frac{H}{12}$.

Hàng 3			
Hàng 2			
Hàng 1			
	Cột 1	Cột 2	Cột 3

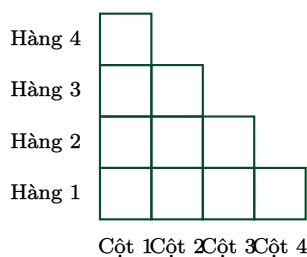
Câu 21. Điền tất cả 12 số thuộc tập $\{1; 2; \dots; 12\}$ vào bảng gồm 3 hàng và 4 cột dưới đây sao cho hiệu hai số ở hai ô bất kì khác nhau trên cùng một hàng không chia hết cho 3. Có bao nhiêu cách điền khác nhau?

Hàng 3				
Hàng 2				
Hàng 1				
	Cột 1	Cột 2	Cột 3	Cột 4

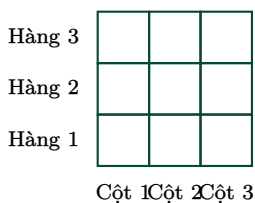
Câu 22. Điền tất cả 15 số thuộc tập $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 11; 12; 13; 16; 17; 21\}$ vào 15 ô của hình dưới sao cho hiệu hai số ở hai ô bất kì khác nhau trên cùng một hàng và hiệu hai số ở hai ô bất kì khác nhau trên cùng một cột đều không chia hết cho 5. Gọi H là số cách điền khác nhau. Tính $\frac{H}{24}$.



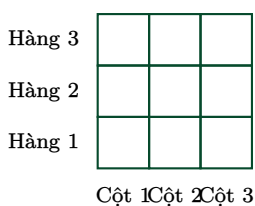
Câu 23. Cho tập số $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 10; 13\}$, có bao nhiêu cách điền 10 số trong tập trên vào 10 ô vuông trong hình bậc thang như hình vẽ, sao cho hiệu hai số ở hai ô bất kì khác nhau trên cùng một hàng không chia hết cho 4. Gọi H là số cách điền khác nhau. Tính $\frac{H}{144}$.



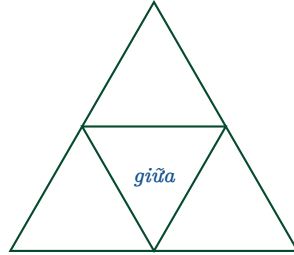
Câu 24. Điền tất cả 9 số thuộc tập $\{1; 2; \dots; 9\}$ vào bảng vuông 3×3 (xem hình vẽ) sao cho tổng ba số trên mỗi hàng đều chia hết cho 3. Gọi H là số cách điền khác nhau. Tính $\frac{H}{24}$.



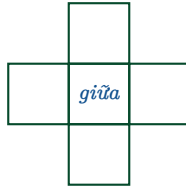
Câu 25. Điền tất cả 9 số thuộc tập $\{1; 2; \dots; 9\}$ vào bảng vuông 3×3 (xem hình vẽ) sao cho tổng ba số trên mỗi hàng và mỗi cột đều chia hết cho 3. Gọi H là số cách điền khác nhau. Tính $\frac{H}{24}$.



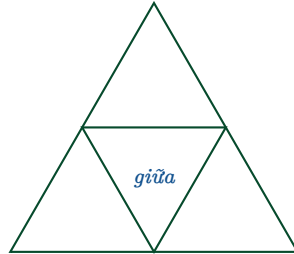
Câu 26. Cho hình vẽ dưới đây gồm 4 tam giác: ba tam giác ở ba góc và một tam giác ở giữa. Người ta chọn 3 số phân biệt từ tập hợp $S = \{1; 2; \dots; 26\}$ để xếp vào 3 tam giác ở 3 góc, sau đó tính tổng bình phương của 3 số đó rồi ghi kết quả vào tam giác ở giữa. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho số ghi ở tam giác giữa là một số chia hết cho 5?



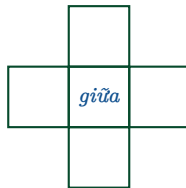
Câu 27. Cho hình vẽ dưới đây gồm 5 ô vuông xếp thành hình dấu cộng: bốn ô ở bốn nhánh và một ô ở giữa. Người ta chọn 4 số phân biệt từ tập hợp $S = \{1; 2; \dots; 10\}$ để xếp vào 4 ô ở bốn nhánh, sau đó tính tổng bình phương của 4 số đó rồi ghi kết quả vào ô ở giữa. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho số ghi ở ô giữa là một số chia hết cho 5?



Câu 28. Cho hình vẽ dưới đây gồm 4 tam giác: ba tam giác ở ba góc và một tam giác ở giữa. Người ta chọn 3 số phân biệt từ tập hợp $S = \{1; 2; \dots; 20\}$ để xếp vào 3 tam giác ở 3 góc, sau đó ghi tổng bình phương của 3 số đó vào tam giác ở giữa. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho số ghi ở tam giác giữa là một số chia hết cho 3?



Câu 29. Cho hình vẽ dưới đây gồm 5 ô vuông xếp thành hình dấu cộng: bốn ô ở bốn nhánh và một ô ở giữa. Người ta chọn 4 số phân biệt từ tập hợp $S = \{1; 2; \dots; 12\}$ để xếp vào 4 ô ở bốn nhánh, sau đó ghi **tổng lập phương** của 4 số đó vào ô ở giữa. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho số ghi ở ô giữa là một số chia hết cho 9?



5 Đáp án

Các câu hỏi xác suất được làm tròn đến hàng phần trăm theo yêu cầu của đề.

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	420	87	72	35	570	0,18	0,23	24	46	0,33

Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	0,33	13	2187	48	108	360	12	288	144	216

Câu	21	22	23	24	25	26	27	28	29
Đáp án	0	1440	576	1998	216	3360	1248	2304	3192

—————**HẾT**—————

Mọi đóng góp, ý kiến vui lòng gửi về fanpage: Trung tâm luyện thi 29Edu.