

Đề thi chính thức

Môn thi: **Toán**

Thời gian làm bài: **180 phút** (không kể thời gian phát đề)

Ngày thi: **10/9/2026**

Đề thi gồm: 06 câu, 01 trang

Câu 1 (3,0 điểm). Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} + \frac{1}{a+b+1} \geq 2 \left(\frac{1}{a+5} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+5} \right).$$

Câu 2 (3,0 điểm). Cho dãy số (a_n) : $\begin{cases} a_1 = 2026 \\ na_n = a_{n-1} + 1, \forall n \geq 2 \end{cases}$. Xác định giá trị nhỏ nhất của số nguyên dương k sao cho $2026a_k < 1$.

Câu 3 (4,0 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(yf(x+y) + f(x)) = 4x + 2yf(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 4 (3,0 điểm). Cho n số nguyên dương đôi một phân biệt $a_1, \dots, a_n$. Đặt

$$b_i = (a_i - a_1) \cdots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \cdots (a_i - a_n).$$

Chứng minh rằng $(n - 1)!$ là ước của $\text{lcm}(b_1, \dots, b_n)$, trong đó $\text{lcm}(b_1, \dots, b_n)$ là bội chung nhỏ nhất của các số nguyên $b_1, \dots, b_n$.

Câu 5 (4,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O . Đường phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt BC tại E và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là M . Đường tròn tâm E bán kính EM cắt cung nhỏ BC của đường tròn (O) và tia MO tại các điểm thứ hai tương ứng là D và Q . Lấy điểm P thuộc đoạn thẳng AD ($P \neq A, P \neq D$) sao cho $\widehat{ABP} = \widehat{ACP}$.

- Chứng minh rằng bốn điểm A, E, Q, D đồng viên.
- Gọi giao điểm của AM với BP, CP tương ứng là K, L . Chứng minh rằng OP là đường trung trực của đoạn thẳng KL .

Câu 6 (3,0 điểm). Cho số nguyên dương n và tập hợp A gồm $60n + 1$ số nguyên dương không vượt quá $210n$ và nguyên tố cùng nhau với 14. Chứng minh rằng trong A luôn tồn tại hai số mà một số chia hết cho ba lần số còn lại.

Hết

Chú yí:

- Thí sinh không được dùng tài liệu.
- Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

LỜI GIẢI:
Thực hiện bởi: THLM Team

Câu 1:

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} + \frac{1}{a+b+1} \geq 2 \left(\frac{1}{a+5} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+5} \right).$$

Từ giả thiết $a + b + c = 3$, ta có $b + c = 3 - a$. Thay vào đề, ta được:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4-a} + \frac{1}{4-b} + \frac{1}{4-c} &\geq \frac{2}{a+5} + \frac{2}{b+5} + \frac{2}{c+5} \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} \left(\frac{1}{4-a} - \frac{2}{a+5} \right) &\geq 0. \end{aligned}$$

Ta chứng minh bất đẳng thức sau với mọi $x \in (0; 3)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4-x} - \frac{2}{x+5} &\geq \frac{x-1}{6} \\ \Leftrightarrow \frac{3(x-1)}{(4-x)(x+5)} - \frac{x-1}{6} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2(x+2)}{6(4-x)(x+5)} &\geq 0 \quad (\text{đúng với mọi } x \in (0; 3)). \end{aligned}$$

Áp dụng lần lượt cho a, b, c , ta thu được:

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \left(\frac{1}{4-a} - \frac{2}{a+5} \right) &\geq \sum_{cyc} \frac{a-1}{6} \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} \left(\frac{1}{4-a} - \frac{2}{a+5} \right) &\geq \frac{a+b+c-3}{6} = 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. ĐTXR khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Câu 2:

Cho dãy số (a_n) : $\begin{cases} a_1 = 2026 \\ na_n = a_{n-1} + 1, \forall n \geq 2 \end{cases}$. Xác định giá trị nhỏ nhất của số nguyên dương k sao cho $2026a_k < 1$.

Ta có $na_n = a_{n-1} + 1, \forall n \geq 2$

$$\Rightarrow n!a_n = (n-1)!a_{n-1} + (n-1)!$$

Đặt $b_n = n!a_n$, ta có hệ thức $b_n = b_{n-1} + (n-1)!$ với $b_1 = 1! \cdot a_1 = 2026$.
Do đó, ta có:

$$b_k = b_1 + \sum_{i=1}^{k-1} i! = 2026 + \sum_{i=1}^{k-1} i!$$

Do đó, số hạng tổng quát của dãy số là:

$$a_k = \frac{2026 + \sum_{i=1}^{k-1} i!}{k!}$$

Bất đẳng thức $2026a_k < 1$ tương đương với:

$$2026^2 + 2026 \sum_{i=1}^{k-1} i! < k! \quad (*)$$

- Với $k \leq 2026$, do riêng số hạng $2026 \cdot (k-1)! \geq k!$ nên $(*)$ không thỏa mãn.
- Với $k = 2027$, $(*)$ trở thành:

$$2026^2 + 2026 \cdot 2026! + 2026 \sum_{i=1}^{2025} i! < 2027!$$

$$\Leftrightarrow 2026^2 + 2026 \sum_{i=1}^{2025} i! < 2026!$$

Dễ thấy vô lý vì vế trái chứa $2026 \cdot 2025! = 2026!$. Do đó $k = 2027$ không thỏa mãn.

- Với $k = 2028$, $(*)$ trở thành:

$$2026^2 + 2026 \cdot 2027! + 2026 \sum_{i=1}^{2026} i! < 2028!$$

$$\Leftrightarrow \frac{2026^2}{2027!} + 2026 \sum_{i=1}^{2026} \frac{i!}{2027!} < 2028$$

$$\Leftrightarrow \frac{2026^2}{2027!} + \frac{2026}{2027} + 2026 \sum_{i=1}^{2025} \frac{i!}{2027!} < 2028 \quad (**)$$

Ta có đánh giá sau với mọi $1 \leq i \leq 2025$:

$$\begin{aligned} \frac{i!}{2027!} &= \frac{1}{(i+1)(i+2) \dots 2027} < \frac{1}{2^{2027-i}} \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{2025} \frac{i!}{2027!} &< \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2026}} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Khi đó vế trái của $(**)$ thỏa mãn:

$$VT_{(**)} < \frac{2026^2}{2027!} + \frac{2026}{2027} + 2026 \cdot \frac{1}{2} < 0 + 1 + 1013 = 1014 < 2028$$

Bất đẳng thức (**) đúng, đồng nghĩa $k = 2028$ thỏa mãn yêu cầu.

Vậy $k_{\min} = 2028$

Câu 3:

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(yf(x+y) + f(x)) = 4x + 2yf(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Cách 1:

Kí hiệu $P(x, y)$ là phép thế x, y vào phương trình (1).

$$P(x, 0) \Rightarrow f(f(x)) = 4x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó f là một đơn ánh trên $\mathbb{R}$.

Thế $x \rightarrow 0$ vào hệ thức trên, ta được $f(f(0)) = 0$. Đặt $f(0) = a$ thì $f(a) = 0$.

$$P(0, y) \Rightarrow f(yf(y) + f(0)) = 2yf(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Mặt khác, từ $f(f(x)) = 4x$, thay $x = a$ ta có:

$$f(f(a)) = 4a \Rightarrow f(0) = 4a \Rightarrow a = 4a \Rightarrow a = 0$$

Nên $a = 0$, tức là $f(0) = 0$.

Do đó:

$$f(yf(y)) = 2yf(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Thử với $y = \frac{1}{2}$, ta được $f\left(\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$. Vì f là đơn ánh nên:

$$\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Suy ra:

$$f(1) = f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$P(x, 1-x) \Rightarrow f((1-x)f(1) + f(x)) = 4x + 2(1-x)f(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(f(x) + 2(1-x)) = 4x + 4(1-x) = 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Mà $4 = f(f(1)) = f(2)$, do đó:

$$f(f(x) + 2 - 2x) = f(2) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vì f là đơn ánh nên:

$$f(x) + 2 - 2x = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{hay } f(x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Thử lại vào phương trình (1), ta thấy hàm số này thỏa mãn.

Kết luận: Vậy tất cả các hàm số cần tìm là $f(x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Cách 2:

Để ý

$$P(x, y-x) \Rightarrow f((y-x)f(y) + f(x)) = 4x + 2(y-x)f(y) \quad (*)$$

vì f toàn ánh nên tồn tại c sao cho $f(c) = 2$.

Thế $y \rightarrow c$ vào $(*)$ ta được:

$$\begin{aligned} f((c-x)f(c) + f(x)) &= 4x + 2(c-x)f(c) \\ \Rightarrow f(2(c-x) + f(x)) &= 4x + 4(c-x) = 4c = f(f(c)) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

vì f đơn ánh nên

$$\begin{aligned} 2(c-x) + f(x) &= f(c) = 2 \\ \Rightarrow f(x) &= 2x + 2 - 2c = 2x + k \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{với } k \text{ là h/số thực} \end{aligned}$$

Thử lại, ta được $k = 0$.

Kết luận: Vậy tất cả các hàm số cần tìm là $f(x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 4:

Cho n số nguyên dương đôi một phân biệt $a_1, \dots, a_n$. Đặt

$$b_i = (a_i - a_1) \cdots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \cdots (a_i - a_n).$$

Chứng minh rằng $(n-1)!$ là ước của $\text{lcm}(b_1, \dots, b_n)$, trong đó $\text{lcm}(b_1, \dots, b_n)$ là bội chung nhỏ nhất của các số nguyên $b_1, \dots, b_n$.

Để chứng minh $(n-1)!$ là ước của $\text{lcm}(b_1, \dots, b_n)$, ta cần chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p , số mũ của p trong phân tích tiêu chuẩn của $(n-1)!$ không vượt quá số mũ của p trong $\text{lcm}(b_1, \dots, b_n)$.

Ta có:

$$v_p((n-1)!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n-1}{p^k} \right\rfloor$$

Mặt khác, ta có:

$$v_p(\text{lcm}(b_1, \dots, b_n)) = \max_{1 \leq i \leq n} v_p(b_i)$$

Do đó, bài toán quy về chứng minh tồn tại $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho:

$$v_p(b_i) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n-1}{p^k} \right\rfloor \quad (*)$$

Đặt tập hợp ban đầu là $A_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, rõ ràng số phần tử $|A_0| = n$.

- **Xét modulo p :** Chia n phần tử của A_0 vào p lớp thặng dư modulo p .

Theo nguyên lý Dirichlet, lớp thặng dư chứa nhiều phần tử nhất sẽ có ít nhất $\left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil$ phần tử.

Gọi A_1 là tập hợp các phần tử thuộc lớp thặng dư có nhiều phần tử nhất này. Ta có:

$$|A_1| \geq \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil \implies |A_1| - 1 \geq \left\lfloor \frac{n-1}{p} \right\rfloor$$

- **Xét modulo p^2 :** Ta chỉ chia các phần tử của tập A_1 vào các lớp thặng dư modulo p^2 . Gọi A_2 là tập hợp các phần tử thuộc lớp thặng dư modulo p^2 có nhiều phần tử nhất được rút ra từ A_1 . Theo nguyên lý Dirichlet, ta có:

$$|A_2| - 1 \geq \left\lfloor \frac{|A_1| - 1}{p} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{\lfloor (n-1)/p \rfloor}{p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-1}{p^2} \right\rfloor$$

- **Tổng quát modulo p^k :** Tiếp tục quá trình này, ta xây dựng được dãy các tập hợp con lồng nhau $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_k \supset \dots$ sao cho mọi phần tử trong A_k đều đồng dư với nhau modulo p^k , và số lượng phần tử luôn thỏa mãn:

$$|A_k| - 1 \geq \left\lfloor \frac{n-1}{p^k} \right\rfloor$$

Chọn phần tử a_i là phần tử nằm trong giao của tất cả các tập hợp này ($a_i \in \bigcap_{k \geq 1} A_k$).

Đánh giá giá trị $v_p(b_i)$:

Theo định nghĩa của b_i , ta tính được $v_p(b_i)$ như sau:

$$v_p(b_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\text{Số lượng } j \neq i \text{ sao cho } a_j \equiv a_i \pmod{p^k} \right)$$

Do cách chọn $a_i \in A_k$, nên tất cả các phần tử khác thuộc tập A_k đều đồng dư với a_i modulo p^k . Số lượng các phần tử này chính là $|A_k| - 1$. Do đó:

$$v_p(b_i) \geq \sum_{k=1}^{\infty} (|A_k| - 1) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n-1}{p^k} \right\rfloor$$

Bất đẳng thức (*) được chứng minh. Từ đó ta suy ra:

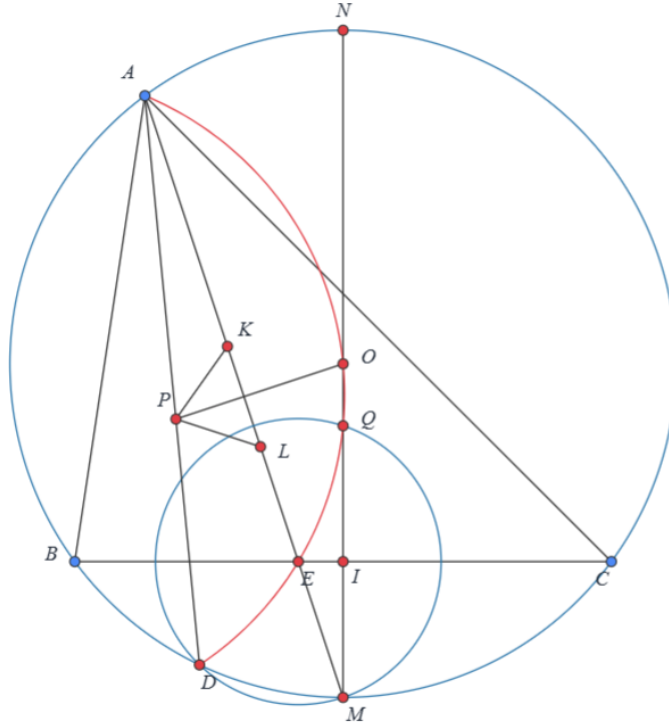
$$\max_{1 \leq i \leq n} v_p(b_i) \geq v_p((n-1)!) \implies v_p(\text{lcm}(b_1, \dots, b_n)) \geq v_p((n-1)!)$$

Điều này đúng với mọi số nguyên tố p , do đó $(n-1)!$ là ước của $\text{lcm}(b_1, \dots, b_n)$. (đpcm)

Câu 5:

Cho tam giác ABC nhọn, không cân ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O . Đường phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt BC tại E và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là M . Đường tròn tâm E bán kính EM cắt cung nhỏ BC của đường tròn (O) và tia MO tại các điểm thứ hai tương ứng là D và Q . Lấy điểm P thuộc đoạn thẳng AD ($P \neq A, P \neq D$) sao cho $\widehat{ABP} = \widehat{ACP}$.

- Chứng minh rằng bốn điểm A, E, Q, D đồng viên.
- Gọi giao điểm của AM với BP, CP tương ứng là K, L . Chứng minh rằng OP là đường trung trực của đoạn thẳng KL .



a) Gọi MO cắt BC , (O) tại I , N

Ta có $ME \cdot MA = MB^2 = MI \cdot MN = MI \cdot 2MO = MO \cdot MQ$

Do đó A, E, Q, O đồng viên (1)

Vì (E, EM) cắt (O) tại D , M nên OE là trung trực DM

$$\Rightarrow \angle DOE = \frac{\angle DOM}{2} = \angle DAM = \angle DAE$$

Do đó A, E, D, O đồng viên (2)

Từ (1) và (2) suy ra A, E, Q, D đồng viên.

b) Gọi Q' là điểm liên hợp đẳng giác với P trong tam giác ABC .

Do AP và AQ đối xứng với nhau qua phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ nên Q' thuộc đường thẳng AQ .

Mà Q' lại thuộc đường trung trực của $BC \Rightarrow Q \equiv Q'$.

Chứng minh được $\triangle AKB \sim \triangle ALC$ nên:

$$\widehat{PKL} = \widehat{PLK} \Rightarrow PL = PK$$

Có Q và M đối xứng với nhau qua BC nên dễ dàng chứng minh được:

$$\widehat{KBM} = \widehat{ABC} = \widehat{AMC} \quad \text{và} \quad \widehat{KMB} = \widehat{ACB}$$

Suy ra $\triangle KMB \sim \triangle ACB$ và $\triangle KMB \sim \triangle LMC$.

Mà $MB = MC \Rightarrow \triangle KMB = \triangle LMC$, từ đó dẫn tới:

$$\frac{ML}{MK} = \frac{BK}{MK} = \frac{AB}{AC} = \frac{AK}{AL}$$

Suy ra KL và AM có chung trung điểm $\Rightarrow OK = OL$ (đpcm)

Câu 6:

Cho số nguyên dương n và tập hợp A gồm $60n + 1$ số nguyên dương không vượt quá $210n$ và nguyên tố cùng nhau với 14. Chứng minh rằng trong A luôn tồn tại hai số mà một số chia hết cho ba lần số còn lại.

Nhận xét: Với mọi $x \in \mathbb{N}^*$, ta luôn viết được dưới dạng $x = 3^k \cdot m$ (trong đó $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}^*$ và $\gcd(m, 3) = 1$).

Ta gọi nhóm các số có cùng giá trị m : $\{m, 3m, 9m, 27m, \dots\}$ là một chuỗi.

Dễ dàng thấy rằng với 2 số bất kỳ trong cùng một chuỗi thì luôn có 1 số chia hết cho 3 lần số còn lại.

Số lượng chuỗi chính là số lượng các số đại diện $m \leq 210n$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} \gcd(m, 14) = 1 \\ \gcd(m, 3) = 1 \end{cases} \implies \gcd(m, 42) = 1$$

Áp dụng công thức phi hàm Euler, số lượng các số m thỏa mãn trên đoạn $[1, 210n]$ là:

$$210n \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 210n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} = 60n$$

Vậy có tất cả $60n$ chuỗi. Mà tập hợp A gồm có $60n + 1$ phần tử.

Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất 1 chuỗi chứa từ 2 phần tử trở lên thuộc tập A .

Từ đó, ta có điều phải chứng minh (đpcm).

ĐÔI LỜI: Rất cảm ơn các bạn đọc luôn ủng hộ nhóm THLM Team trong suốt thời gian qua. Nhóm rất mong tiếp tục nhận được sự ủng hộ, góp ý từ thầy cô, bạn đọc và cộng đồng yêu thích Toán học để nhóm càng ngày hoàn thiện hơn. Chân thành cảm ơn!

THLM Team