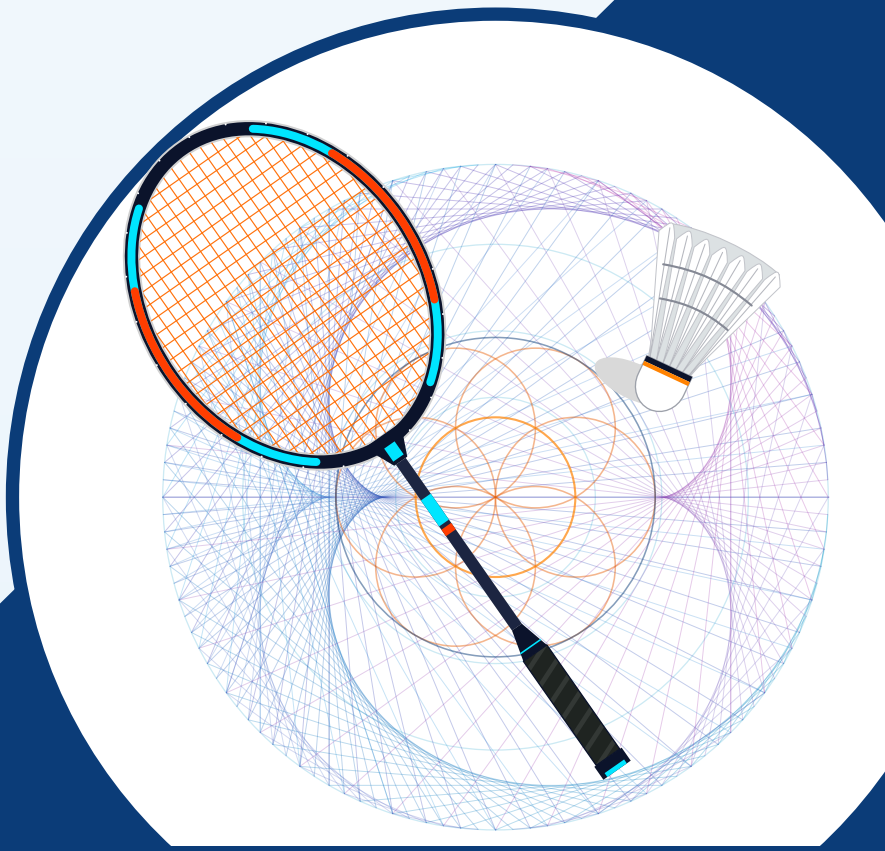
NGÔ ĐỨC TÀI - Zalo: 0889 971 004

Lý thuyết và phân dạng

TOÁN 12

HỌC KÌ II





NĂM HỌC 2026 – 2027

Chương IV. Nguyên hàm và tích phân 2

§1. Nguyên hàm 2
§2. Tích phân 30
§3. Ứng dụng hình học của tích phân 60
§4. Ôn tập chương 4 111

Chương V. Phương pháp tọa độ trong không gian 152

§1. Phương trình mặt phẳng 152
§2. Phương trình đường thẳng 184
§3. Công thức tính góc trong không gian 221
§4. Phương trình mặt cầu 246
§5. Ôn tập chương 5 274

Chương VI. Xác suất có điều kiện 307

§1. Xác suất có điều kiện 307
§2. Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes 325
§3. Ôn tập chương 6 344

Chương IV

NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

§1 NGUYÊN HÀM

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Khái niệm nguyên hàm

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng K. Hàm số $F(x)$ được gọi là **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi x thuộc K.

Chú ý. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K. Khi đó

- Với mỗi hằng số C, hàm số $F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.
- Nếu $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì tồn tại hằng số C sao cho $G(x)=F(x)+C$ với mọi $x\in K$.
- Như vậy, mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x)+C$, với C là hằng số. Ta gọi $F(x)+C, C\in\mathbb{R}$ là **họ** tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K, kí hiệu $\int f(x)\mathrm{d}x$ và $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$.
- Từ định nghĩa ta có $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$.

2) Các tính chất

① $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)'=f(x)$.

② $\int f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)+C$.

③ $\int k\cdot f(x)\,\mathrm{d}x=k\cdot\int f(x)\,\mathrm{d}x$, với $k\in\mathbb{R}, k\neq 0$.

④ $\int\left[f(x)\pm g(x)\right]\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x\pm\int g(x)\,\mathrm{d}x$.

3) Bảng công thức nguyên hàm của các hàm thường gặp

Đạo hàm	Nguyên hàm	Nguyên hàm mở rộng (đọc thêm)
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	$\int (ax+b)^\alpha \,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$\int \dfrac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{x} + C$	$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{(ax+b)^2} = -\dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{ax+b} + C$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$\int a^x \,\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{mx+n} \,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{m} \cdot \dfrac{a^{mx+n}}{\ln a} + C$
$(e^x)' = e^x$	$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C$	$\int e^{ax+b} \,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a} e^{ax+b} + C$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$\int \dfrac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \dfrac{1}{ax+b} \,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a} \ln\lvert ax+b\rvert + C$
$(\sin x)' = \cos x$	$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b) \,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
$(\cos x)' = -\sin x$	$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b) \,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \tan x + C$	$\int \dfrac{1}{\cos^2(ax+b)} \,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\int \dfrac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = -\cot x + C$	$\int \dfrac{1}{\sin^2(ax+b)} \,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{a} \cot(ax+b) + C$

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Định nghĩa nguyên hàm

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng K. Hàm số $F(x)$ được gọi là **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K.

Ví dụ 1

Chứng minh:

a) Hàm số $F(x) = x^4$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^3$ trên $\mathbb{R}$;

b) Hàm số $F(x) = \tan x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

. . . .

. . . .

Ví dụ 2

Biết $\int f(x)\mathrm{d}x = x^3 - e^{2x} + C$. Tìm $f(x)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Chứng minh rằng hàm số $F(x) = x + \cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 - \sin x$ trên $\mathbb{R}$.

....
....
....

Bài 2 ☆

Cho $\int f(x)\mathrm{d}x = \sin x + \cos x + C$. Tính $f(\pi)$.

....
....
....

Dạng 2 Nguyên hàm cơ bản hàm lũy thừa

Các công thức thường dùng:

① $\int 1\mathrm{d}x = x + C$

② Với $\alpha \neq -1$: $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.

③ Với $\alpha = -1$: $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$.

④ $\int \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{x} + C$.

Chú ý các công thức biến đổi lũy thừa:

- $\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$.
- $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.
- $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$.
- $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$.

Ví dụ 1

Tìm:

a) $\int x^4\mathrm{d}x$.

b) $\int \dfrac{1}{x^3}\mathrm{d}x$.

c) $\int \sqrt{x}\mathrm{d}x, x > 0$.

Ví dụ 2

Tìm họ nguyên hàm các hàm số sau:

a) $\int (2x^2-3x+5)\mathrm{d}x$;

b) $\int (2x-1)^2\mathrm{d}x$;

c) $\int \left(3x^3+\frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}\right)\mathrm{d}x$;

d) $\int \frac{2x+1}{x}\mathrm{d}x$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$, biết

a) $f(x)=x^2$.

b) $f(x)=x^4+x^{-3}$.

c) $f(x)=x^2+\frac{3}{x}$.

d) $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$.

e) $f(x)=x^2+\frac{3}{x}-2\sqrt{x}$.

f) $f(x)=3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Bài 2 ☆

Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$, biết

a) $f(x) = 2x(1+3x^3)$. b) $f(x) = (3x-2)^2$. c) $f(x) = \dfrac{2x^4+3}{x^2}$.

Bài 3 ☆

Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1+2x^2}{x}$ thỏa mãn $F(-1) = 3$. Tìm $F(x)$.

Dạng 3 Nguyên hàm của hàm số lượng giác

Công thức thường dùng:

① $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$ ② $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$

③ $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C$ ④ $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C$

Dạng 3 Phần tiếp theo

Các phép biến đổi lượng giác thường dùng:

- $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.
- $\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1$.
- $\cot^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}-1$.
- $\sin x=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$.
- $\cos x=\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}$.
- $\cos x=2\cos^2\dfrac{x}{2}-1=1-2\sin^2\dfrac{x}{2}$
- $\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{2}$.
- $\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+\cos x}{2}$.

Ví dụ 1

Tìm:

a) $\displaystyle\int\left(-\frac{\cos x}{4}\right)\mathrm{d}x$.

b) $\displaystyle\int 3(1+\cot^2 x)\mathrm{d}x$.

c) $\displaystyle\int 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x$.

Ví dụ 2

Tìm:

a) $\displaystyle\int(3x^2-\cos x)\mathrm{d}x$.

b) $\displaystyle\int\left(\frac{3}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$.

c) $\displaystyle\int\left(3\sin x-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathrm{d}x$.

d) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{x}-\frac{4}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$.

Ví dụ 3

Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\cos x$ thỏa $F(0)+F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$, biết

a) $f(x)=4x+3\cos x$.

b) $f(x)=2x+\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

c) $f(x)=\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2$.

Bài 2 ☆

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=2-5\sin x$ và $f(0)=10$. Tìm hàm $f(x)$.

Dạng 4 Nguyên hàm cơ bản hàm số mũ

Công thức thường dùng:

① $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$.

② $\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$.

Một số phép biến đổi thường gặp:

Dạng 4 Phần tiếp theo

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.
- $(a^x)^y = a^{xy}$.

Ví dụ 1

Tìm:

a) $\int 3^x \mathrm{d}x$. b) $\int e^{2x} \mathrm{d}x$. c) $\int \dfrac{1}{3^x} \mathrm{d}x$. d) $\int 2^{2x+1} \mathrm{d}x$.

Ví dụ 2

Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$, biết

a) $f(x) = 2024^x$. b) $f(x) = 5^x + 1$. c) $f(x) = e^{-x}$.

d) $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - \dfrac{1}{x^2}$ e) $f(x) = 8^x \cdot 2^{1-2x}$. f) $f(x) = \left(3^x - \dfrac{1}{3^x}\right)^2$.

Ví dụ 3

Tìm nguyên hàm $H(x)$ của hàm số $h(x)=7^x$, biết $H(0)=\dfrac{1}{\ln 7}+2$.

Dạng 5 Toán thực tế áp dụng nguyên hàm

Ví dụ 1

Người ta truyền nhiệt cho một bình nuôi cấy vi sinh vật từ 1°C. Tốc độ tăng nhiệt độ của bình tại thời điểm t phút $(0\le t\le 5)$ được cho bởi hàm số $f(t)=3t^2$ (°C/ phút). Biết rằng nhiệt độ của bình đó tại thời điểm t là một nguyên hàm của hàm số $f(t)$, tìm nhiệt độ của bình tại thời điểm 3 phút kể từ khi truyền nhiệt.

Ví dụ 2

Tốc độ tăng trưởng của một đàn gấu mèo tại thời điểm t tháng kể từ khi người ta thả 100 cá thể đầu tiên vào một khu rừng được ước lượng bởi công thức $P'(t)=8t+30$ (con/tháng), với $P(t)$ là số lượng cá thể trong đàn tại thời điểm t tháng tương ứng *(nguồn: Chris Kirkpatrick, Barbara Alldred, Crystal Chilvers, Beverly Farahani, Kristina Farentino, Angelo Lillo, Ian Macpherson, John Rodger, Susanne Trew, Advanced Function, Nelson 2012)*. Dựa vào tốc độ tăng trưởng đã cho, hãy ước tính số cá thể của đàn gấu mèo này tại thời điểm 3 tháng kể từ khi chúng được thả vào rừng.

Ví dụ 3

Một máy bay di chuyển ra đến đường băng và bắt đầu chạy đà để cất cánh. Giả sử vận tốc của máy bay khi chạy đà được cho bởi $v(t) = 5 + 3t$ (m/s), với t là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi máy bay bắt đầu chạy đà. Sau 30 giây thì máy bay cất cánh rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển kể từ khi bắt đầu chạy đà đến khi rời đường băng là bao nhiêu mét?

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Doanh thu bán hàng của một công ty khi bán một loại sản phẩn là số tiền $R(x)$ (triệu đồng) thu được khi x đơn vị sản phẩm được bán ra. Tốc độ biến động (thay đổi) của doanh thu khi x đơn vị sản phẩm đã được bán là hàm số $M_R(x) = R'(x)$. Một công ty công nghệ cho biết, tốc độ biến đổi của doanh thu khi bán một loại con chíp của hãng được cho bởi $M_R(x) = 300 - 0,1x$; ở đó x là số lượng chíp đã bán. Tìm doanh thu của công ty khi đã bán 1000 con chíp.

Bài 2 ☆

Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 3t + 2$, thời gian tính bằng giây, quãng đường tính bằng mét. Biết tại thời điểm $t = 2$ s thì vật đi được quãng đường 10 m. Tính từ lúc xuất phát đến thời điểm $t = 30$ s thì vật đã đi được quãng đường bao nhiêu mét?

Bài 3

☆

Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là $90\ \mathrm{m}^3$, sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504\ \mathrm{m}^3$. Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.

....
....
....
....
....
....
....

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

Ⓐ $\int \left[f(x) - g(x)\right] \mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x$.

Ⓑ $\int f(x).g(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x . \int g(x)\mathrm{d}x$.

Ⓒ $\int \left[f(x) + g(x)\right] \mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$.

Ⓓ $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x, k \in \mathbb{R}, k \neq 0$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K, $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của $f(x)$ với mọi $x \in K$ nếu

Ⓐ $F(x) = f(x)$. Ⓑ $F(x) = f'(x)$. Ⓒ $F'(x) = f(x)$. Ⓓ $F'(x) = f'(x)$.

Câu 3. $\int x^2\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $2x + C$. Ⓑ $\dfrac{x^3}{3} + C$. Ⓒ $x^3 + C$. Ⓓ $3x^3 + C$.

Câu 4. Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 4$ là

Ⓐ $2x^2 + 4x + C$. Ⓑ $x^2 + 4x + C$. Ⓒ $x^2 + C$. Ⓓ $2x^2 + C$.

Câu 5. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^3 - 2024$ là

Ⓐ $x^4 - 2024x + C$. Ⓑ $4x^3 - 2024x + C$. Ⓒ $12x^3 + C$. Ⓓ $x^4 + C$.

Câu 6. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x+1)(x+2)$ là

Ⓐ $2x + 3 + C$. Ⓑ $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2}{3}x^2 + 2x + C$.

Ⓒ $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{3}x^2+2x+C$. Ⓓ $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{2}x^2+2x+C$.

Câu 7. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x^2}$.

Ⓐ $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{x}+C$. Ⓑ $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{2}{x}+C$. Ⓒ $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1}{x}+C$. Ⓓ $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{x}+C$.

Câu 8. Cho hàm số $y=F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=x^2$. Tính $F'(25)$.

Ⓐ 25. Ⓑ 125. Ⓒ 5. Ⓓ 625.

Câu 9. Khẳng định nào đây **sai**?

Ⓐ $\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$. Ⓑ $\int \cos x\,\mathrm{d}x=-\sin x+C$.

Ⓒ $\int \cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$. Ⓓ $\int \cos x\,\mathrm{d}x=-\tan x+C$.

Câu 10. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+\sin x$ là

Ⓐ $x^3-\cos x+C$. Ⓑ $6x-\cos x+C$. Ⓒ x^3+C. Ⓓ $x^3+\sin x+C$.

Câu 11. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x+\cos x$ là

Ⓐ $\cos x-\sin x+C$. Ⓑ $-\cos x-\sin x+C$.

Ⓒ $\cos x+\sin x+C$. Ⓓ $-\cos x+\sin x+C$.

Câu 12. Nguyên hàm của hàm số $y=2^x$ là

Ⓐ $\int 2^x\mathrm{d}x=\dfrac{2^x}{\ln 2}+C$. Ⓑ $\int 2^x\mathrm{d}x=\ln 2\cdot 2^x+C$.

Ⓒ $\int 2^x\mathrm{d}x=2^x+C$. Ⓓ $\int 2^x\mathrm{d}x=\dfrac{2^x}{x+1}+C$.

Câu 13. Gọi $\int 2018^x\,\mathrm{d}x=F(x)+C$, với C là hằng số. Khi đó hàm số $F(x)$ bằng

Ⓐ $\dfrac{2018^{x+1}}{x+1}$. Ⓑ $\dfrac{2018^x}{\ln 2018}$. Ⓒ $\dfrac{x\cdot 2018^{x-1}}{\ln 2018}$. Ⓓ $2018^x\ln 2018$.

Câu 14. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x$ là

Ⓐ $\dfrac{e^{x+1}}{x+1}+C$. Ⓑ e^x+C. Ⓒ $\dfrac{e^x}{x}+C$. Ⓓ $x\cdot e^{x-1}+C$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x+3$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+3x+C$. Ⓑ $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$.

Ⓒ $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x-3}+C$. Ⓓ $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x-3x+C$.

Câu 16. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$.

Ⓐ $\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2x}+C$. Ⓑ $\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}^{2x+1}}{2x+1}+C$.

Ⓒ $\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^{2x}+C$. Ⓓ $\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)=2^x+\cos x$. Một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ là

Ⓐ $F(x)=\dfrac{2^x}{\ln 2}-\sin x$.
Ⓑ $F(x)=2^x\ln 2+\sin x$.
Ⓒ $F(x)=2^x+\sin x$.
Ⓓ $F(x)=\dfrac{2^x}{\ln 2}+\sin x$.

Câu 18. Tìm nguyên hàm $\int(2x^2+5x+3)\mathrm{d}x$.

Ⓐ $\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{5x^2}{2}+3x+C$.
Ⓑ $\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{5x^2}{2}+11x+C$.
Ⓒ $\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{23x^2}{2}+3x+C$.
Ⓓ $4x+5+C$.

Câu 19. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\pi^4$ là

Ⓐ $\dfrac{\pi^5}{5}+C$.
Ⓑ $\dfrac{\pi^5 x}{5}+C$.
Ⓒ $\dfrac{\pi^4 x}{4}+C$.
Ⓓ $\pi^4 x+C$.

Câu 20. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y=x^2-3^x+\dfrac{1}{x}$.

Ⓐ $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3^x}{\ln 3}-\dfrac{1}{x^2}+C$.
Ⓑ $\dfrac{x^3}{3}-3^x+\dfrac{1}{x^2}+C$.
Ⓒ $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3^x}{\ln 3}+\ln|x|+C$.
Ⓓ $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3^x}{\ln 3}-\ln|x|+C$.

Câu 21. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x+x$ là

Ⓐ $\mathrm{e}^x+\dfrac{x^2}{2}+C$.
Ⓑ e^x+x^2+C.
Ⓒ $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\ln 2}+x^2+C$.
Ⓓ $\mathrm{e}+\dfrac{x^2}{2}+C$.

Câu 22. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^{2024}$.

Ⓐ $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2023}\cdot x^{2023}+C$.
Ⓑ $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2024\cdot x^{2023}+C$.
Ⓒ $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2025}\cdot x^{2025}+C$.
Ⓓ $\int f(x)\,\mathrm{d}x=x^{2025}+C$.

Câu 23. Tìm nguyên hàm $\int(u^4+3u)\mathrm{d}u$.

Ⓐ $\dfrac{u^4}{4}+\dfrac{3}{2}u^2+C$.
Ⓑ $4u^3+3+C$.
Ⓒ $\dfrac{u^5}{5}+3u^2+C$.
Ⓓ $\dfrac{u^5}{5}+\dfrac{3u^2}{2}+C$.

Câu 24. Nếu $\int f(x)\mathrm{d}x=-\cos x+C$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $f(x)=-\sin x$.
Ⓑ $f(x)=-\cos x$.
Ⓒ $f(x)=\sin x$.
Ⓓ $f(x)=\cos x$.

Câu 25. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x}$ trên $(0;+\infty)$ và $F(\mathrm{e})=3$. Tính $F(5)$.

Ⓐ $F(5)=\ln 5+C$.
Ⓑ $F(5)=\ln 5$.
Ⓒ $F(5)=\ln 5+2$.
Ⓓ $F(5)=\ln 5+5$.

Câu 26. Trong các khẳng định sau khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$.
Ⓑ $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\alpha+1}\cdot x^{\alpha+1}+C;\quad \alpha\neq -1$.
Ⓒ $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{x+1}+C$.
Ⓓ $\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$.

Câu 27. Hàm số $F(x)=x^2+\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số

Ⓐ $f(x)=2x-\cos x$. Ⓑ $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\cos x$.

Ⓒ $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\cos x$. Ⓓ $f(x)=2x+\cos x$.

Câu 28. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\int 0\,\mathrm{d}x=C$. Ⓑ $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln|x|+C$.

Ⓒ $\int x^a\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^{a+1}}{a+1}+C$. Ⓓ $\int \mathrm{d}x=x+C$.

Câu 29. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là **sai**?

Ⓐ $\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C$. Ⓑ $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)'=f(x)$.

Ⓒ $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)'=f'(x)$. Ⓓ $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)'=F'(x)$.

Câu 30. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\sin x+\dfrac{3}{\sin^2 x}$ là

Ⓐ $-2\cos x-3\cot x+C$. Ⓑ $2\cos x-3\tan x+C$.

Ⓒ $-2\cos x+3\cot x+C$. Ⓓ $2\cos x-3\cot x+C$.

Câu 31. Hàm số nào sau đây có một nguyên hàm là hàm số $y=\sin 2x$?

Ⓐ $y=\cos 2x$. Ⓑ $y=\dfrac{\cos 2x}{2}$. Ⓒ $y=2\cos 2x$. Ⓓ $y=\dfrac{-\cos 2x}{2}$.

Câu 32. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{5+2x^4}{x^2}$.

Ⓐ $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{5}{x}+C$. Ⓑ $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{2x^3}{3}-\dfrac{5}{x}+C$.

Ⓒ $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{2x^3}{3}+5\ln x^2+C$. Ⓓ $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2x^3-\dfrac{5}{x}+C$.

Câu 33. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=2x+3\sqrt{x}$ thoả mãn $F(1)=0$.

Ⓐ $F(x)=x^2+3\sqrt{x^3}$. Ⓑ $F(x)=x^2+2\sqrt[3]{x^2}$.

Ⓒ $F(x)=x^2+3\sqrt[3]{x^2}-4$. Ⓓ $F(x)=x^2+2\sqrt{x^3}-3$.

Câu 34. Tìm hàm số $y=f(x)$, biết $f'(x)=3\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$, $(x>0)$ và $f(1)=1$.

Ⓐ $f(x)=2x\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x^2}-4$. Ⓑ $f(x)=2x\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x^2}+2$.

Ⓒ $f(x)=\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x^2}-3$. Ⓓ $f(x)=x\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}-3$.

Câu 35. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\mathrm{e}^x+1$ thoả mãn $F(0)=1$. Khi đó, khẳng định đúng là

Ⓐ $F(x)=2\mathrm{e}^x+x-1$. Ⓑ $F(x)=2\mathrm{e}^x+x+2$.

Ⓒ $F(x)=\mathrm{e}^{2x}+x$. Ⓓ $F(x)=2\mathrm{e}^x+x+1$.

Câu 36. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=4\mathrm{e}^{2x}+2x$ thỏa mãn $F(0)=1$. Tìm $F(x)$.

Ⓐ $F(x)=2\mathrm{e}^{2x}-x^2-1$.
Ⓑ $F(x)=2\mathrm{e}^{2x}+x^2-1$.
Ⓒ $F(x)=2\mathrm{e}^{2x}+x^2+1$.
Ⓓ $F(x)=4\mathrm{e}^{2x}+x^2-3$.

Câu 37. Một quả bóng được ném lên từ độ cao 20 m với vận tốc được tính bởi công thức $v(t)=-10t+16$ (m/s). Công thức nào sau đây tính độ cao của quả bóng theo thời gian t?

Ⓐ $h(t)=-5t^2+16t+C$.
Ⓑ $h(t)=-5t^2+16t+20$.
Ⓒ $h(t)=5t^2-16t+20$.
Ⓓ $h(t)=5t^2-16t+C$.

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:

a) Nếu $\int f(x)\,\mathrm{d}x=3x^2+2x+C$ thì $f(x)=x^3+x^2$.

b) Nếu $F(x)+C=\int(x^2+3x)\,\mathrm{d}x$ thì $F'(1)=4$.

c) Nếu $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\sqrt{x^2-2x+3}+C$ thì $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$.

d) Nếu $\int f(x)\,\mathrm{d}x=xe^x+C$ thì $f(x)=(x+1)e^x$.

Câu 2. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\int \pi^3\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi^4}{4}+C$.
b) $\int x^n\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C\quad(\forall n\in\mathbb{N})$.
c) $\int x(3x+2)\,\mathrm{d}x=x^3+x^2+C$.
d) $\int \sin^5 x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\sin^6 x}{6}+C$.

Câu 3. Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:

a) Nếu $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{x}+C$ thì $f(x)=\ln|x|$.

b) Nếu $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\cos 2x+C$ thì $f(x)=-\sin 2x$.

c) Nếu $f'(x)=x^2-4\cos x$ và $f(0)=3$ thì $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+4\sin x+3$.

d) Nếu $f'(x)=2\cos x-3\sin x$ và $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ thì $f(x)=2\sin x+3\cos x-2\sqrt{2}$.

Câu 4. Cho hàm số $F(x)=x^3-2x+1,\forall x\in\mathbb{R}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Xét tính đúng sai các khẳng định sau:

a) $F'(x)=f(x)$.

b) $\int f(x)\,\mathrm{d}x=x^3-2x+C$.

c) Nếu hàm số $G(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $G(-1)=3$ thì $G(x)=F(x)-1$.

d) Nếu hàm số $H(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $H(1)=-3$ thì $H(x)=F(x)-3$.

Câu 5. Biết hàm số $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện $f'(x)=2x+3$ và đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $M(0;1)$. Khi đó:

a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;\infty)$.

b) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm M là $y=3x+1$.

c) Giá trị $f(2)=11$.

d) $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{3}{2}x^2-x+C$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)=4x^3-6x$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0)=2$.

a) $F(x)=f'(x)$.
b) $F'(x)=f(x)$.
c) $F(x)=x^4-3x^2+2$.
d) $F(1)=3$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+2x-1$ và $F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

a) $F'(x)=x^3-3x^2+2x-1$.

b) Hàm số $y=\dfrac{1}{4}x^4-x^3+x^2-x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

c) $F(x)=\dfrac{1}{4}x^4-x^3+x^2-x$.

d) Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=1$. Khi đó $F(1)=\dfrac{5}{4}$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x)=\mathrm{e}^x+\sin x$.

a) Hàm số $f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)=\mathrm{e}^x+\sin x$.

b) Biết $f(0)=2$ hàm số $f(x)$ được xác định bởi $f(x)=\mathrm{e}^x-\cos x+2$.

c) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x-\cos x+2$ là $F(x)=\mathrm{e}^x-\sin x+2x+C$.

d) Biết $f(0)=2$, $F(x)$ là họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$, $F(0)=0$. Tổng $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}+\pi$.

Câu 9. Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm . Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi hàm số $v(t)=-0,1t^3+t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng centimét / tuần. Gọi $h(t)$ (tính bằng centimét) là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t. Khi đó

a) $h(t)=\dfrac{-t^4}{40}+\dfrac{t^3}{3}$,với $t\geq 0$.

b) Chiều cao tối đa của cây cà chua đó là $88,4$ cm (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

c) Giai đoạn tăng trưởng của cây cà chua đó kéo dài trong 9 tuần.

d) Vào thời điểm cây cà chua đó phát triển nhanh nhất thì chiều cao cây cà chua đạt $54,4$ cm (kết quả được làm tròn đến hàng phần mười).

Câu 10. Một quần thể vi khuẩn ban đầu gồm 500 vi khuẩn, sau đó bắt đầu tăng trưởng. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t, trong đó t tính theo ngày $(0\leq t\leq 10)$. Tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn đó cho bởi hàm số $P'(t)=k\sqrt{t}$, trong đó k là hằng số. Sau 1 ngày, số lượng vi khuẩn của quần thể đó đã tăng lên thành 600 vi khuẩn. Khi đó

a) $P(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(t)=k\sqrt{t}$.

b) $P(t)=\dfrac{2k}{3}\sqrt{t^3}+C$ với $0\leq t\leq 10$ và k,C là hằng số.

c) $P(t)=100\sqrt{t^3}+500$ với $0\leq t\leq 10$.

d) Số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 7 ngày là 3352 con.

Câu 11. Trong thí nghiệm nuôi cấy một loại vi sinh vật, kí hiệu $f(t)$ là tổng số lượng vi sinh vật sau t giờ. Biết rằng sau 3 giờ đầu tiên thì tổng số lượng vi sinh vật là 50 con. Trong 7 giờ tiếp theo, số lượng vi sinh vật thay đổi với tốc độ $f'(t)=t^2-8t$ (con/giờ). Xét tính đúng

sai của các mệnh đề sau:

a) Họ nguyên hàm của $f'(t)$ là $\dfrac{t^3}{3} - 8t^2 + C$, $(C \in \mathbb{R})$.

b) Số lượng vi khuẩn tăng liên tục trong khoảng từ 3 giờ đến 10 giờ sau thời điểm làm thí nghiệm.

c) Số lượng vi khuẩn là nhỏ nhất sau 8 giờ tính từ lúc bắt đầu làm thí nghiệm.

d) Sau 6 giờ thì số lượng vi khuẩn là 5 con.

Câu 12. Trong dây chuyền sản xuất sữa chua hiện đại của một nhà máy thực phẩm, từng giọt sữa chua âm thầm chuyển mình dưới tác động của hàng triệu vi khuẩn Lactic, những "nghệ nhân tí hon "kiến tạo vị chua thanh đặc trưng. Mật độ vi khuẩn (số triệu tế bào trên mỗi ml sữa chua) tại thời điểm t (giờ) được kí hiệu là $N(t)$. Ban đầu ($t = 0$ giờ), mật độ vi khuẩn đo được là $N(0) = 10$ triệu tế bào/ml. Do sự thay đổi về nguồn dinh dưỡng (đường lactose giảm) và độ pH (axit lactic tăng) nên tốc độ thay đổi mật độ vi khuẩn $N'(t)$ (đơn vị: triệu tế bào/ml mỗi giờ) được mô hình hóa bởi công thức $N'(t) = 18t - 3t^2$ (triệu tế bào/ml mỗi giờ) với t là thời gian tính bằng giờ $(0 \le t \le 7)$.

a) $N'(1) = 15$ triệu tế bào/ml giờ.

b) $N(t) = 9t^2 - t^3$.

c) So với lúc ban đầu ($t = 0$), mật độ vi khuẩn đã tăng thêm 108 triệu tế bào/ml khi đến thời điểm $t = 6$ giờ.

d) Tại thời điểm $t = 7$ giờ, mật độ vi khuẩn trong 1 ml sữa chua là 108 triệu tế bào/ml.

Câu 13. Một chiếc xe đang chuyển động đều với tốc độ $v_0 = 15$ m/s thì gặp chướng ngại vật rồi phanh gấp với gia tốc không đổi là $a = -3$ m/s^2 . Kí hiệu $v(t)$ là tốc độ của xe, $a(t)$ là gia tốc xe, $s(t)$ là quãng đường xe đi được cho đến thời điểm t giây kể từ lúc phanh xe.

a) $v(t) = a'(t)$.

b) $a(t) = s''(t)$.

c) Tính từ lúc phanh xe, sau 4 giây thì xe dừng hẳn.

d) Quãng đường xe đi được tính từ lúc phanh xe đến khi dừng hẳn nằm trong khoảng từ 35 mét đến 40 mét.

Câu 14. Tại một khu di tích vào ngày lễ hội hàng năm, tốc độ thay đổi lượng khách tham quan được biểu diễn bằng hàm số $Q'(t) = 4t^3 - 72t^2 + 288t$, trong đó t tính bằng giờ $(0 \le t \le 13)$, $Q'(t)$ tính bằng khách/giờ. Sau 2 giờ đã có 500 người có mặt. Khi đó

a) Lượng khách tham quan được biểu diễn bởi hàm số $Q(t) = t^4 - 24t^3 + 144t^2$.

b) Sau 5 giờ lượng khách tham quan là 1 325 người.

c) Lượng khách tham quan lớn nhất là 1 296 người.

d) Tốc độ thay đổi lượng khách tham quan lớn nhất tại thời điểm $t = 6$.

Câu 15. Một miếng thịt sống được lấy ra khỏi ngăn đá của tủ lạnh và để trên bàn để rã đông. Nhiệt độ của miếng thịt nó được lấy ra khỏi ngăn đá là $-4°$C và sau t giờ nhiệt độ của miếng thịt tăng với tốc độ $T'(t) = 7\mathrm{e}^{-0{,}35t}$ (°C/giờ) (tính từ thời điểm miếng thịt được lấy ra từ ngăn đá tủ lạnh). Miếng thịt này được rã đông khi nhiệt độ của nó đạt đến 10°C.

a) Tại thời điểm 2h tính từ lúc lấy thịt ra khỏi ngăn đá, tốc độ thay đổi nhiệt độ của miếng thịt khoảng 3,48°C/giờ (*làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*).

b) Nhiệt độ miếng thịt tính từ thời điểm được lấy khỏi ngăn đá là $T(t) = 7\mathrm{e}^{-0{,}35t} - 11$ (°C).

c) Tính từ lúc lấy thịt ra khỏi ngăn đá, cần 3,44 giờ để miếng thịt nướng được rã đông (*làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của giờ*).

d) Tính từ lúc lấy thịt ra khỏi ngăn đá, nhiệt độ của miếng thịt vào khoảng 0°C sau 36 phút (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của phút*).

Câu 16. Một xe ô tô đang chạy trên đường cao tốc với tốc độ 90 (km/h) thì tài xế nhìn thấy biển báo trạm thu phí ở phía trước cách đó 400 (m). Sau 4 giây, tài xế đạp nhẹ phanh, kể từ đó xe chạy chậm dần đều với gia tốc 2 (m/s^2) cho đến khi tốc độ xe giảm về tốc độ quy định khi qua các làn thu phí tự động là 30 (km/h). Gọi t (đơn vị giây) là thời gian kể từ lúc đạp phanh cho đến khi giảm về tốc độ 30 (km/h).

a) Vận tốc của ô tô kể từ lúc đạp phanh đến khi giảm về tốc độ 30 (km/h) là $v(t) = 25 - 2t$ (m/s).

b) Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi giảm về tốc độ 30 (km/h) là 9 giây.

c) Quãng đường xe đi được kể từ lúc đạp phanh đến khi giảm về tốc độ 30 (km/h) là 139 (m) (làm tròn đến hàng đơn vị).

d) Khi giảm về tốc độ 30 (km/h), khoảng cách giữa xe và trạm thu phí là 161 (m) (làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 17. Trong một nhà máy, tốc độ tiêu thụ điện năng của một dây chuyền sản xuất sau khi khởi động có xu hướng giảm dần theo thời gian và tiến về mức độ ổn định. Giả sử sau khi bắt đầu vận hành được t giờ, tốc độ tiêu thụ điện năng của dây chuyền sản xuất này được mô hình hóa bởi hàm số $E'(t) = A + \mathrm{e}^{-0,4t}$ (đơn vị kWh/h) $(0 \le t \le 8)$, trong đó $E(t)$ (kWh) là lượng điện năng tiêu thụ tính từ lúc bắt đầu vận hành. Biết rằng trong 8 giờ hoạt động, dây chuyền đã tiêu thụ tổng cộng 120 (kWh).

a) $E(t) = At - \dfrac{5}{2}\mathrm{e}^{-0,4t} + C$, với C là hằng số.

b) $A = 14$ (*kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*).

c) Lượng điện năng tiêu thụ của dây chuyền trong 4 giờ đầu lớn hơn 65 (kWh).

d) Tốc độ tiêu thụ điện năng trung bình của dây chuyền sản xuất trong khoảng thời gian từ a giờ đến b giờ được xác định bởi công thức $\overline{v} = \dfrac{E(b) - E(a)}{b - a}$ (kWh/h). Tốc độ tiêu thụ điện năng trung bình của dây chuyền sản xuất trong 4 giờ cuối bằng 14,6 (kWh/h) (*kết quả làm tròn đến hàng phần mười*).

3 Tự luận.

Bài 1. Trong mỗi trường hợp sau, hàm số $F(x)$ có phải là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng tương ứng không?Vì sao?

a) $F(x) = xe^x$ và $f(x) = (x+1)e^x$ trên $\mathbb{R}$.

b) $F(x) = e^{\sin x}$ và $f(x) = e^{\cos x}$ trên $\mathbb{R}$.

Bài 2. Tìm:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$. b) $\displaystyle\int \frac{3^x}{5^x}\,\mathrm{d}x$. c) $\displaystyle\int 3^{2x}\,\mathrm{d}x$.

Bài 3. Tìm:

a) $\int (2x^5+3)\mathrm{d}x$.

b) $\int (x-1)(3x+1)\mathrm{d}x$.

c) $\int (5\cos x-3\sin x)\mathrm{d}x$.

d) $\int \left(2x-\frac{1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$.

e) $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x$.

f) $\int \left(e^{x-2}-\frac{2}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$.

g) $\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

h) $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

i) $\int 2^{x-1}\cdot 5^{2x+1}\mathrm{d}x$.

Bài 4. Tìm:

a) $\int \left(e^x-e^{-x}\right)^2\mathrm{d}x$.

b) $\int \frac{x^2+7x+12}{x+3}\mathrm{d}x$.

c) $\int \frac{3^x+4^x+1}{5^x}\mathrm{d}x$.

Bài 5. Tìm:

a) $\int \frac{\cos^2 x}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

b) $\int 4\sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$.

c) $\int \left(1+3\sin^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$.

d) $\int \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x$.

e) $\int (x+\tan^2 x)\mathrm{d}x$.

f) $\int (2+\cot^2 x)\mathrm{d}x$.

g) $\int \frac{2\cos^3 x+3}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

h) $\int \left(\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$.

i) $\int (2\tan x+\cot x)^2\mathrm{d}x$.

Bài 6. Biết $F(x)=e^x+x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và hàm số $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tìm $\int f'(x)\mathrm{d}x$.

Bài 7. Tìm hàm số $f(x)$ biết rằng:

a) $f'(x)=2x^3-4x+1, f(1)=0$.

b) $f'(x)=5\cos x-\sin x, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

c) $f'(x)=3\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}, x>0, f(1)=1$.

Bài 8. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$. Biết rằng, $f'(x)=2x+\frac{1}{x^2}$ với mọi $x\in(0;+\infty)$ và $f(1)=1$. Tính giá trị $f(4)$.

Bài 9. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{khi } x\geq 1\\ 3x^2+2 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=2$. Tính giá trị $F(-1)+2F(2)$.

Bài 10. Với giá trị thực nào của tham số m để hàm số $F(x)=mx^3+(3m+2)x^2-4x+3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+10x-4$?

Bài 11. Tìm hệ số a,b,c để $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{2x-3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$.

Bài 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là (C). Xét điểm $M(x;f(x))$ thay đổi (C). Biết rằng, hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M là $k_M=(x-1)^2$ và điểm M trùng với gốc tọa độ khi nó nằm trên trục tung. Tìm biểu thức $f(x)$.

Bài 13. Trong một dịch cúm, tốc độ tăng số trường hợp mắc bệnh của một thành phố được ước lượng bởi $N'(t)=10\cdot e^{0,2t}$ (trường hợp/ngày), trong đó $N(t)$ là số trường hợp mắc bệnh sau thời gian t ngày, kể từ khi bắt đầu dịch. Biết rằng thời điểm bắt đầu dịch có 5 trường hợp mắc bệnh.

a) Xác định hàm số $N(t)$.

b) Ước lượng số trường hợp mắc bệnh của thành phố sau 10 ngày dịch bắt đầu.

Bài 14. Kí hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau năm đầu tiên cây cao 2 m. Trong 10 năm tiếp theo, cây phát triển với tốc độ $h'(x) = \dfrac{1}{x}$ (m/năm).

a) Xác định chiều cao của cây sau x năm $(1 \le x \le 11)$.

b) Sau bao nhiêu năm cây cao 3 m?

Bài 15. Một quần thể vi sinh vật có tốc độ tăng số lượng cá thể được ước lượng bởi

$$P'(t) = 150\sqrt{t} \text{ (cá thể /ngày với } 0 \le t \le 10),$$

trong đó $P(t)$ là số lượng cá thể vi sinh vật tại thời điểm t ngày kể từ thời điểm ban đầu. Biết rằng ban đầu quần thể có 1 000 cá thể.

a) Xác định hàm số $P(t)$.

b) Ước lượng số cá thể của quần thể sau 5 ngày kể từ thời điểm ban đầu (kết quả làm tròn đến hàng trăm).

Bài 16. Một viên đạn được bắn thẳng đứng lên trên từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi $t = 0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t) = 160 - 9,8t$ (m/s). Tìm độ cao của viên đạn (tính từ mặt đất):

a) Sau $t = 5$ giây.

b) Khi nó đạt độ cao lớn nhất (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Bài 17. Một chiếc xe đang chuyển động với tốc độ $v_0 = 10$ m/s thì tăng tốc với gia tốc không đổi $a = 2\text{m/s}^2$. Tính quãng đường xe đó đi được trong 3 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

Bài 18. Tại một nhà máy, gọi $C(x)$ là tổng chi phí (tính theo triệu đồng) để sản xuất x tấn sản phẩm A trong một tháng. Khi đó, đạo hàm $C'(x)$, gọi là chi phí cận biên, cho biết tốc độ gia tăng tổng chi phí theo lượng gia tăng sản phẩm sản xuất. Giả sử chi phí cận biên (tính theo triệu đồng/tấn) của nhà máy ước lượng bởi công thức

$$C'(x) = 5 - 0,06x + 0,00072x^2,$$

với $0 \le x \le 150$. Biết rằng $C(0) = 30$ triệu đồng, gọi là chi phí cố định. Tổng chi phí khi nhà máy sản xuất 100 tấn sản phẩm A trong tháng là bao nhiêu triệu đồng?

Bài 19. Đối với các dự án xây dựng, chi phí nhân công lao động được tính theo số ngày công. Gọi $m(t)$ là số lượng nhân công được sử dụng ở ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Gọi $M(t)$ là số ngày công nhân được tính đến hết ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Trong kinh tế xây dựng, người ta đã biết rằng $M'(t) = m(t)$. Một công trình xây dựng dự kiến hoàn thành trong 400 ngày. Số lượng công nhân được sử dụng cho bởi hàm số $m(t) = 800 - 2t$. Trong đó t tính theo ngày $(0 \le t \le 400)$, $m(t)$ tính theo người (Nguồn: A.Bigalke et al., Mathematik,Grundkurs ma-l, Cornelesen 2016). Đơn giá cho một ngày công lao động là 400 000 đồng. Tính chi phí nhân công lao động của công trình đó (cho đến lúc

hoàn thành).

Bài 20. Một chiếc cốc chứa nước ở 95°C được đặt trong phòng có nhiệt độ 20°C. Theo định luật làm mát của Newton, nhiệt độ của nước trong cốc sau t phút (xem $t = 0$ là thời điểm nước ở 95°C) là một hàm số $T(t)$. Tốc độ giảm nhiệt độ của nước trong cốc tại thời điểm t phút được xác định bởi $T' = -\frac{3}{2}e^{-\frac{t}{50}}$ (°C/phút). Tính nhiệt độ của nước tại thời điểm $t = 30$ phút.

Bài 21. Ở giai đoạn thải trừ, giai đoạn cuối sau khi một người uống một liều thuốc, nồng độ thuốc trong máu ký hiệu là $C(t)$ (đơn vị: mg/l), giảm dần sau t giờ kể từ khi giai đoạn này bắt đầu. Khi đó, tốc độ giảm nồng độ $C'(t)$ tỉ lệ với chính nồng độ hiện có, tức là $\frac{C'(t)}{C(t)} = -k$ (k là hằng số dương). Biết rằng khi bắt đầu giai đoạn thải trừ, nồng độ thuốc còn lại là 12 mg/l và sau 6 giờ kể từ lúc bắt đầu thải trừ, nồng độ đo được là 3 mg/l. Hỏi sau khoảng thời gian bao nhiêu giờ thì nồng độ còn lại bằng 1 mg/l? (*kết quả làm tròn đến hàng phần mười*).

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1 B	2 C	3 B	4 B	5 A	6 D	7 B	8 D	9 B	10 A
11 A	12 A	13 B	14 B	15 A	16 D	17 D	18 A	19 D	20 C
21 A	22 C	23 D	24 C	25 C	26 C	27 D	28 C	29 C	30 A
31 C	32 B	33 D	34 A	35 A	36 B	37 B			

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a S b Đ c Đ d Đ	Câu 2.	a S b S c Đ d S
Câu 3.	a S b S c Đ d Đ	Câu 4.	a Đ b Đ c S d S
Câu 5.	a Đ b Đ c Đ d S	Câu 6.	a S b Đ c Đ d S
Câu 7.	a Đ b Đ c S d S	Câu 8.	a Đ b Đ c Đ d S
Câu 9.	a S b S c S d Đ	Câu 10.	a Đ b Đ c Đ d S
Câu 11.	a S b S c Đ d Đ	Câu 12.	a Đ b S c Đ d Đ
Câu 13.	a S b Đ c S d Đ	Câu 14.	a S b Đ c S d S
Câu 15.	a Đ b S c Đ d S	Câu 16.	a Đ b S c Đ d Đ
Câu 17.	a Đ b S c S d S		

III. ĐỀ KIỂM TRA CUỐI BÀI

1) Đề 1

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Phát biểu nào đúng?

Ⓐ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = f'(x) + C$.
Ⓑ $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)$.
Ⓒ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = f'(x)$.
Ⓓ $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$.

Câu 2. Biết $\int \left(\dfrac{1}{2x} + x^5\right)\,\mathrm{d}x = a\ln|x| + bx^6 + C$ với $(a, b \in \mathbb{Q}, C \in \mathbb{R})$. Tính $a^2 + b$.

Ⓐ $\dfrac{5}{12}$.
Ⓑ 9.
Ⓒ $\dfrac{7}{13}$.
Ⓓ $\dfrac{7}{6}$.

Câu 3. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

Ⓐ $x^3 + C$.
Ⓑ $\dfrac{x^3}{3} + x + C$.
Ⓒ $x^3 + x + C$.
Ⓓ $6x + C$.

Câu 4. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^7$ là

Ⓐ $\dfrac{x^8}{8} + C$.
Ⓑ $7x^6 + C$.
Ⓒ $8x^8 + C$.
Ⓓ $\dfrac{x^7}{7} + C$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $f'(x)=F(x), \forall x\in K$. Ⓑ $F'(x)=f(x), \forall x\in K$.

Ⓒ $f'(x)=F(x)+C, \forall x\in K$. Ⓓ $F(x)=f(x), \forall x\in K$.

Câu 6. Phát biểu nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\int \cos x\,\mathrm{d}x=-\sin x+C$. Ⓑ $\int \cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$.

Ⓒ $\int \cos x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$. Ⓓ $\int \cos x\,\mathrm{d}x=\cos x+C$.

Câu 7. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+6^x$ là

Ⓐ $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2+6^x\ln 6+C$. Ⓑ $\int f(x)\,\mathrm{d}x=x^2+\dfrac{6^{x+1}}{x+1}+C$.

Ⓒ $\int f(x)\,\mathrm{d}x=x^2+\dfrac{6^x}{\ln 6}+C$. Ⓓ $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2x^2+6^x\ln 6+C$.

Câu 8. Cho $\int 5^x\,\mathrm{d}x=F(x)+C$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

Ⓐ $F'(x)=5^x\cdot\ln 5$. Ⓑ $F'(x)=-5^x$. Ⓒ $F'(x)=5^x$. Ⓓ $F'(x)=5^x+C$.

Câu 9. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\int 6^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{6^{x+1}}{x+1}+C$. Ⓑ $\int 6^x\,\mathrm{d}x=6^x\cdot\ln 6+C$.

Ⓒ $\int 6^x\,\mathrm{d}x=6^x+C$. Ⓓ $\int 6^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{6^x}{\ln 6}+C$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=4+\cos x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\int f(x)\mathrm{d}x=-\sin x+C$. Ⓑ $\int f(x)\mathrm{d}x=4x+\sin x+C$.

Ⓒ $\int f(x)\mathrm{d}x=4x-\sin x+C$. Ⓓ $\int f(x)\mathrm{d}x=4x+\cos x+C$.

Câu 11. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=6x^5+\dfrac{1}{x^3}$ thỏa mãn $F(1)=0$. Tìm $F(x)$.

Ⓐ $F(x)=x^6-\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $F(x)=x^6+\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{3}{2}$.

Ⓒ $F(x)=x^6-\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $F(x)=x^6-\dfrac{3}{x^2}+2$.

Câu 12. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=-2x$ biết $F(0)=5$.

Ⓐ $F(x)=5x^2+5$. Ⓑ $F(x)=-x^2+3x+30$.

Ⓒ $F(x)=5-x^2$. Ⓓ $F(x)=15-x^2$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+8}{x}$.

a) Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa $F(1)=2$. Khi đó ta có $F(x)=x^2-3x+8\ln|x|+4$.

b) Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt các trục tọa độ tại hai điểm $A(a;0)$ và $B(0;b)$. Khi đó $2a-b=6$.

c) Điểm cực đại của hàm số $y=f(x)$ là $x=2$.

d) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x)=\dfrac{2x^2-8}{x^2}$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)=\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2$.

a) $f(x)=1+\sin x$.

b) $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

c) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int \mathrm{d}x+\int(-\cos x)\,\mathrm{d}x$.

d) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=x+\cos x+C$.

Câu 3. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)=\mathrm{e}^x-2x$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=1$.

a) $F'(0)=0$.

b) $F(1)=\mathrm{e}-1$.

c) $\displaystyle\int F(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x-\frac{x^3}{3}+C$.

d) $\displaystyle\int \frac{f(x)}{x\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x=\ln|x|-2\mathrm{e}^x+C$.

Câu 4. Một bể chứa dầu ban đầu có 50000 lít dầu. Gọi $V(t)$ là thể tích dầu (lít) trong bể tại thời điểm t, trong đó t tính theo giờ $0\le t\le 24$. Trong quá trình bơm dầu vào bể, thể tích dầu tăng theo tốc độ được biểu diễn bởi hàm số $V'(t)=k\cdot\sqrt{t}$, với k là hằng số dương. Sau 4 giờ bơm liên tục, thể tích dầu trong bể đạt 58000 lít.

a) Hàm số $V(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(t)=k\cdot\sqrt{t}$.

b) $V(t)=\dfrac{2k}{3}t\sqrt{t}+C$, với $0\le t\le 24$ và k,C là các hằng số.

c) Sau 16 giờ bơm liên tục, thể tích dầu trong bể đạt được 148000 lít.

d) Trong quá trình bơm dầu, nếu sau mỗi giờ lượng dầu bị rò rỉ đều đặn với tốc độ 500 lít/giờ, thì tại thời điểm t bằng 9 giờ, thể tích dầu trong bể là 72500 lít.

Phần III. Trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6 vào ô kết quả.

Câu 1. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{\cos^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Tính $F(0)$.

KQ: | | | | |

Câu 2. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có $f'(x)=3x^2+2x-m+1$, $f(2)=1$. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $M(1;-3)$. Tính $f(-1)$.

KQ: | | | | |

Câu 3. Cho hàm số $f(x)=x^2+4x$. Biết $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=ax^3+bx^2+C$, trong đó $a,b\in\mathbb{R}$. Tính $3a+b$.

KQ: | | | | |

Câu 4. Cho $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\mathrm{e}^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x^2\cdot\mathrm{e}^{2x}$. Tính tổng $a+b+2c$.

KQ: | | | | |

Câu 5. Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 15 m/s thì nhìn thấy chướng ngại vật trên đường cách đó 50 m, người lái xe hãm phanh khẩn cấp. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-3t+15$ (m/s), trong đó t (giây). Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

KQ: | | | | |

Câu 6. Một gia đình sản xuất chiếu cói ở Nga Sơn mỗi ngày sản xuất được x chiếc chiếu $(0 \le x \le 20)$. Chi phí biên để sản xuất x chiếc chiếu (tính bằng nghìn đồng) cho bởi hàm số sau $C'(x) = 3x^2 - 4x + 10$. Biết rằng chi phí cố định ban đầu để sản xuất là 500 nghìn đồng. Giả sử gia đình này bán hết chiếu mỗi ngày với giá 270 nghìn đồng/chiếc chiếu. Tính lợi nhuận tối đa theo đơn vị nghìn đồng mà gia đình đó thu được. KQ: | | | | |

2) Đề 2

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$ là

Ⓐ $F(x) = -\cos x + C$. Ⓑ $F(x) = -\cot x + C$.

Ⓒ $F(x) = \cos x + C$. Ⓓ $F(x) = \cot x + C$.

Câu 2. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 2026$ là

Ⓐ $\dfrac{x^4}{4} + 2026x$. Ⓑ $\dfrac{x^4}{4} + 2026x + C$. Ⓒ $4x^4 + 2026x + C$. Ⓓ $3x^2 + C$.

Câu 3. Nguyên hàm của hàm số $y = 5^x$ là

Ⓐ $5^x \ln 5 + C$. Ⓑ $x \cdot 5^{x-1} + C$. Ⓒ $\dfrac{5^x}{\ln 5} + C$. Ⓓ $\dfrac{5^{x+1}}{x+1} + C$.

Câu 4. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $y = 2\sin x - 3\cos x$ là

Ⓐ $2\cos x - 3\sin x + C$. Ⓑ $-2\cos x - 3\sin x + C$.

Ⓒ $2\cos x + 3\sin x + C$. Ⓓ $-2\cos x + 3\sin x + C$.

Câu 5. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\displaystyle\int \frac{2x^2-3}{x}\,dx = x^2 - 3\ln x + C$. Ⓑ $\displaystyle\int \frac{2x^2-3}{x}\,dx = 2x^2 + 3\ln x + C$.

Ⓒ $\displaystyle\int \frac{2x^2-3}{x}\,dx = 2x^2 - 3\ln|x| + C$. Ⓓ $\displaystyle\int \frac{2x^2-3}{x}\,dx = x^2 - 3\ln|x| + C$.

Câu 6. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^7$ là

Ⓐ $7x^6 + C$. Ⓑ $8x^8 + C$. Ⓒ $\dfrac{x^7}{7} + C$. Ⓓ $\dfrac{x^8}{8} + C$.

Câu 7. Xác định nguyên hàm của hàm số $y = f(x) = 2x^2$

Ⓐ $x^3 + C$. Ⓑ $\dfrac{2x^3}{3} + C$. Ⓒ $\dfrac{x^3}{3} + C$. Ⓓ $6x^3 + C$.

Câu 8. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 6x^2 + \sin x$ là

Ⓐ $2x^3 - \cos x + C$. Ⓑ $2x^3 + \cos x + C$. Ⓒ $3x^2 - \cos x + C$. Ⓓ $12x + \cos x + C$.

Câu 9. Cho $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = F(x) + C$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $F'(x) = -\dfrac{\sin 2x}{\cos^4 x}$. Ⓑ $F'(x) = -\cot x$. Ⓒ $F'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$. Ⓓ $F'(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Câu 10. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x + x$ là

Ⓐ $\dfrac{2^x}{\ln 2} + x^2 + C$. Ⓑ $\dfrac{2^x}{\ln 2} + \dfrac{x^2}{2} + C$. Ⓒ $2^x + \dfrac{x^2}{2} + C$. Ⓓ $2^x + x^2 + C$.

Câu 11. Biết $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^2 + \cos x + C$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $f(x) = 2x - \sin x$. Ⓑ $f(x) = 2x + \sin x$.

Ⓒ $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \sin x + C$. Ⓓ $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \sin x + C$.

Câu 12. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x-3)^2$ thỏa $F(0) = \dfrac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $T = \log_2[3F(1) - 2F(2)]$.

Ⓐ $T = 10$. Ⓑ $T = 4$. Ⓒ $T = 2$. Ⓓ $T = -4$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + x^{\mathrm{e}}$.

a) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(x)+5$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$.

b) $F(x) = \mathrm{e}^x + x^{\mathrm{e}} + C$ là họ nguyên hàm của $f(x)$.

c) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = 1$ thì $F(1) = 2\mathrm{e}$.

d) Nếu $F(x)$, $G(x)$ lần lượt là các nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = 1$, $G(1) = \mathrm{e}$ thì ta luôn có $G(x) = F(x) + \mathrm{e}$.

Câu 2. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x - 2$, biết rằng $F(1) = 1$.

a) $F(x)$ luôn xác định trên $\mathbb{R}$. **b)** $F(x) = x^2 - 2x$.

c) $F(x) > 0$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. **d)** $F(-2) = 2$.

Câu 3. Cho các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ và $\int g(x)\,\mathrm{d}x = x + \ln|x| + C$. Khi đó

a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

b) $g(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + C$.

c) $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) + g(x)$ và thỏa mãn $F(-1) = 3$. Khi đó tìm được $F(x) = x^2 + 2\ln|x| - \dfrac{1}{2}$.

d) $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) + g(x)$. Biết $G(2) = 2\ln 2$ và $G(4) + G(-4) = 2$. Khi đó tìm được $G(-6) = a\ln 2 + b\ln 3 + c$, với a, b, c là các số thực. Vậy $a + b + c = -2$.

Câu 4. Một công ty A sở hữu một khu khai thác dầu, bắt đầu khai thác tại thời điểm $t = 0$. Dựa trên ước tính trữ lượng dầu, giả sử tốc độ khai thác dự kiến được cho bởi $Q'(t) = 3t^2(40-t)^2$, $0 \le t \le 40$, trong đó Q được đo bằng triệu thùng, t tính theo năm.

a) $Q''(t) = 6t(40-t)(40-2t)$.

b) $Q(t) = 2400t^3 - 60t^4 + \dfrac{3}{5}t^5$.

c) Tại thời điểm $t = 30$ năm thì tốc độ khai thác lớn nhất.

d) Lượng dầu được khai thác trong 30 năm đầu tiên là $Q(30) = 9180000$ thùng.

Phần III. Trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6 vào ô kết quả.

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ có nguyên hàm là $F(x)$ thỏa mãn $F(1) = 1$. Tính $F(\sqrt{\mathrm{e}})$.

KQ: | | | | |

Câu 2. Một nguyên hàm của hàm $f(x) = 5x^2 - 2x\sqrt{x} - \dfrac{1}{x}$ với $x > 0$ có dạng $F(x) = ax^3 + bx^{\frac{5}{2}} - \ln x + 2025$. Tính giá trị biểu thức $P = 6ab$. KQ: | | | | |

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = ax^2 + \dfrac{b}{x^3}$, $f(-1) = 2$, $f(1) = 3$, $f'(1) = 0$. Tính $a + 2b$.

KQ: | | | | |

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = -(2x^2 - 8x + 7)\mathrm{e}^{-2x}$ có một nguyên hàm là $F(x) = (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^{-2x}$. Tính $a + b + c$. KQ: | | | | |

Câu 5. Công ty A và công ty B cùng ra mắt sản phẩm cạnh tranh thị trường mới vào cùng thời điểm. Thị phần được đo bằng số lượng khách hàng lũy kế.

- Công ty A: Bắt đầu với 0 khách hàng. Trong giai đoạn đầu, chiến dịch marketing hiệu quả giúp tốc độ thu hút khách hàng mới của họ tăng dần theo thời gian, được mô tả bởi hàm $f(t) = 2t + 7$ (nghìn khách hàng/tháng), với t là số tháng kể từ khi ra mắt.
- Công ty B: Nhờ có uy tín từ trước, họ bắt đầu với 10 nghìn khách hàng đặt trước sản phẩm. Sau đó, họ duy trì một tốc độ thu hút khách hàng mới ổn định là 10 nghìn khách hàng/tháng.

Hỏi sau khoảng bao nhiêu tháng kể từ khi ra mắt, tổng số lượng khách hàng lũy kế của công ty A bằng tổng số lượng khách hàng lũy kế của công ty B (tính cả 10 nghìn khách hàng ban đầu)? KQ: | | | | |

Câu 6. Người ta quan sát một quần thể vi khuẩn đang tăng trưởng, ban đầu gồm 500 vi khuẩn. Sau một ngày và sau bốn ngày kể từ khi bắt đầu quan sát, số lượng vi khuẩn của quần thể đó tương ứng là 600 vi khuẩn, 1 300 vi khuẩn. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t ngày kể từ khi bắt đầu quan sát, $0 \le t \le 10$. Người ta ước tính tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn đó được mô tả bởi $P'(t) = at + b\sqrt{t}$ (vi khuẩn/ngày), trong đó a, b là hằng số. Hỏi số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 9 ngày kể từ khi bắt đầu quan sát là bao nhiêu? KQ: | | | | |

BẢNG ĐÁP ÁN ĐỀ KIỂM TRA CUỐI BÀI

ĐỀ SỐ 1

ĐÁP ÁN PHẦN I

1. D	2. A	3. C	4. A	5. B	6. B	7. C	8. C	9. D
10. B	11. C	12. C						

ĐÁP ÁN PHẦN II

Câu 1. a Đ b Đ c S d Đ	Câu 2. a Đ b Đ c S d S
Câu 3. a S b Đ c Đ d S	Câu 4. a Đ b Đ c S d Đ

ĐÁP ÁN PHẦN III

Câu 1.	Câu 2.	Câu 3.	Câu 4.	Câu 5.	Câu 6.
– 2	7	3	1	3 7 , 5	1 3 0 0

ĐỀ SỐ 2

ĐÁP ÁN PHẦN I

1. A	2. B	3. C	4. B	5. D	6. D	7. B	8. A	9. D
10. B	11. A	12. C						

ĐÁP ÁN PHẦN II

Câu 1. a Đ b S c Đ d S	Câu 2. a Đ b S c Đ d S
Câu 3. a Đ b S c S d Đ	Câu 4. a Đ b S c S d Đ

ĐÁP ÁN PHẦN III

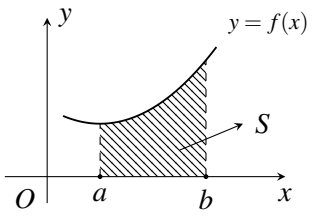
Câu 1.	Câu 2.	Câu 3.	Câu 4.	Câu 5.	Câu 6.
1 , 5	– 8	– 1 , 5	0	5	3 2 0 0

§2 TÍCH PHÂN

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Diện tích hình thang cong

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và không âm trên $[a;b]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ được gọi là *hình thang cong*.



Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ được tính bởi

$$S=F(b)-F(a),$$

trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

2) Khái niệm tích phân

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ thì hiệu số $F(b)-F(a)$ được gọi là ***tích phân*** từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Hiệu số $F(b)-F(a)$ còn được kí hiệu là $F(x)\Big|_a^b$. Như vậy:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

Ta gọi $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *là dấu tích phân, a và b là cận tích phân, a là cận dưới, b là cận trên,* $f(x)\mathrm{d}x$ *là biểu thức dưới dấu tích phân và* $f(x)$ *là hàm số dưới dấu tích phân.*

Lưu ý.

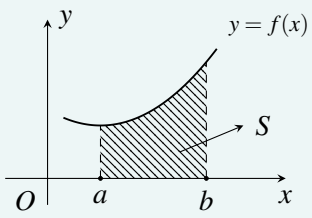
a) Trong trường hợp $a=b$ hoặc $a>b$, ta quy ước

$$\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x=0 \text{ và } \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

b) Tích phân chỉ phụ thuộc vào hàm số f và các cận mà không phụ thuộc vào biến số x hay t, nghĩa là $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

c) Ý nghĩa hình học của tích phân:

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$. Vậy $S = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.



3) Tính chất:

Cho các hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, $c \in [a;b]$. Ta có các tính chất sau:

① $\int\limits_a^b k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (k là hằng số).

② $\int\limits_a^b \left[f(x) + g(x)\right]\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

③ $\int\limits_a^b \left[f(x) - g(x)\right]\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

④ $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lưu ý.

a) Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì

$$f(b) - f(a) = \int\limits_a^b f'(x)\mathrm{d}x.$$

b) Ta đã biết rằng, đạo hàm của quãng đường di chuyển của vật theo thời gian bằng tốc độ của chuyển động tại mỗi thời điểm $v(t) = s'(t)$. Do đó, nếu biết tốc độ $v(t)$ tại mọi thời điểm $t \in [a;b]$ thì tính được quãng đường di chuyển trong

khoảng thời gian từ a đến b theo công thức

$$s = s(b) - s(a) = \int_a^b v(t)\mathrm{d}t.$$

Nhận xét. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Tính diện tích hình thang cong

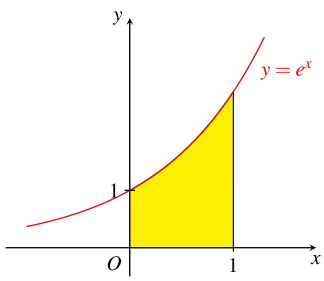
Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính bởi

$$S = F(b) - F(a),$$

trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

Ví dụ 1

Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = e^x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 1$ (hình vẽ).



. . . .

. . . .

. . . .

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 1, x = 4$.

. . . .

. . . .

. . . .

Dạng 2 Tính phân của một số hàm cơ bản

Các bước tính $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

① Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ (thường chọn $C=0$).

② Áp dụng công thức $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$.

Ví dụ 1

Tính các tích phân sau:

a) $\int\limits_0^{\ln 2} e^t\,\mathrm{d}t$.

b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos t\,\mathrm{d}t$.

c) $\int\limits_1^2 2^x\,\mathrm{d}x$.

Ví dụ 2

Sử dụng ý nghĩa hình học, tính tích phân $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Tính các tích phân sau:

a) $\int\limits_1^3 e^{2x}\,\mathrm{d}x$.

b) $\int\limits_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$.

d) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$.

Bài 2

☆

Sử dụng ý nghĩa hình học, tính tích phân $\displaystyle\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Dạng 3 Tính chất của tích phân

Cho các hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, $c\in[a;b]$. Ta có các tính chất sau:

① $\displaystyle\int_a^b k\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k\cdot\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (k là hằng số).

② $\displaystyle\int_a^b \left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

③ $\displaystyle\int_a^b \left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

④ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ví dụ 3

Tính các tích phân sau:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 4x^7\mathrm{d}x$. b) $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\frac{-3}{10x}\mathrm{d}x$. c) $\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{5^{x-1}}{2}\mathrm{d}x$. d) $\displaystyle\int_{1}^{4}3\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

Ví dụ 4

Tính các tích phân sau:

a) $I=\int\limits_{1}^{2}\dfrac{x-1}{x^2}\mathrm{d}x.$

b) $J=\int\limits_{0}^{\pi}\left(1+2\sin^2\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x.$

c) $K=\int\limits_{-2}^{1}(x-2)^2\mathrm{d}x+\int\limits_{-2}^{1}(4x-x^2)\mathrm{d}x.$

Ví dụ 5

Tính các tích phân sau:

a) $I=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}}(4x^3-5)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{\frac{1}{2}}(4x^3-5)\mathrm{d}x.$

b) $J=\int\limits_{0}^{3}|x-1|\mathrm{d}x.$

c) $K=\int\limits_{0}^{2}|x^2-x|\mathrm{d}x.$

d) $H=\int\limits_{0}^{\pi}|\cos x|\mathrm{d}x.$

Ví dụ 6

Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{khi } x\le 1\\ 2x-1 & \text{khi } x>1\end{cases}$. Biết $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính $\displaystyle\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

Ví dụ 7

Cho các hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$ và

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2},\quad \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2},\quad \int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x=-1$$

Tính:

a) $\displaystyle\int_1^3 [2f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$.

b) $\displaystyle\int_1^3 [5f(x)-4]\,\mathrm{d}x$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3 ☆

Tính các tích phân sau:

a) $I_1=\displaystyle\int_1^2\left(3^x-\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x$.

b) $I_2=\displaystyle\int_1^2\left(4x^3-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

c) $I_3=\displaystyle\int_0^1\frac{4^x-1}{2^x-1}\mathrm{d}x$.

d) $I_4=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x$.

Bài 4

Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^{2\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x$.

b) $\int_{-2}^{3} |x-2|\,\mathrm{d}x$.

c) $\int_{-3}^{2} |1-x^2|\,\mathrm{d}x$.

Bài 5

a) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;5]$ và $\int_{-1}^{5} [2x-3f(x)]\,\mathrm{d}x = 12$. Tính $\int_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Biết hàm số $f(x) = \begin{cases} x^3+2 & \text{khi } x > -1 \\ 2x+3 & \text{khi } x \le -1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính $\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Dạng 4 Toán thực tế áp dụng tích phân

Ví dụ 1

Giả sử nhiệt độ (tính bằng °C) tại thời điểm t giờ trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa ở một địa phương vào một ngày nào đó được mô hình hóa bởi hàm số $T(t) = 20 + 1,5(t-6), 6 \leqslant t \leqslant 12$. Tìm nhiệt độ trung bình vào ngày đó trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa.

Ví dụ 2

Tại một nhà máy sản xuất một loại phân bón, gọi $P(x)$ là lợi nhuận (tính theo triệu đồng) thu được từ việc bán x tấn sản phẩm trong một tuần. Khi đó, đạo hàm $P'(x)$, gọi là lợi nhuận cận biên, cho biết tốc độ tăng lợi nhuận theo lượng sản phẩn bán được. Giả sử lợi nhuận cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức $P'(x) = 16 - 0,02x$ với $0 \leqslant x \leqslant 100$. Tính lợi nhuận nhà máy thu được khi bán 90 tấn sản phẩm trong tuần. Biết rằng nhà máy lỗ 25 triệu đồng nếu không bán được lượng sản phẩm nào trong tuần.

Ví dụ 3

Sau khi xuất phát, ô tô di chuyển với tốc độ $v(t) = 2t - 0,03t^2$ $(0 \leq t \leq 10)$, trong đó $v(t)$ tính theo m/s, thời gian t tính theo giây với $t = 0$ là thời điểm xe xuất phát.

a) Tính quãng đường xe đi được sau 5 giây, sau 10 giây.

b) Tính tốc độ trung bình của xe trong khoảng thời gian $t = 0$ đến $t = 10$.

Ví dụ 4

Biết rằng tốc độ v (km/phút) của một ca nô cao tốc thay đổi theo thời gian t (phút) như sau: $v(t)=\begin{cases}0,5t, & 0\le t<2\\ 1, & 2\le t<15\\ 4-0,2t, & 15\le t\le 20\end{cases}$. Tính quãng đường ca nô di chuyển được trong khoảng thời gian từ 0 đến 20 phút.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Lợi nhuận biên của một sản phẩm được mô hình hoá bởi

$$P'(x)=-0,0005x+12,2$$

a) Tìm sự thay đổi lợi nhuận khi doanh số bán hàng tăng từ 100 lên 101 đơn vị.

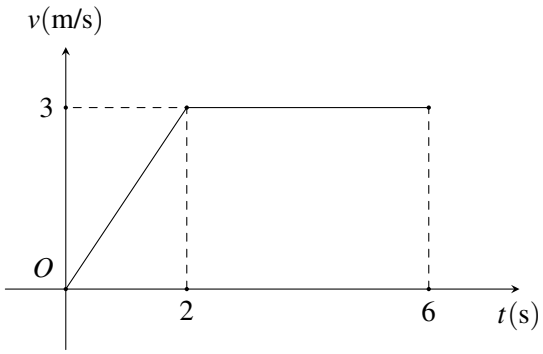
b) Tìm sự thay đổi lợi nhuận khi doanh số bán hàng tăng từ 100 lên 110 đơn vị.

Bài 2

Hình bên là đồ thị vận tốc $v(t)$ của một vật ($t = 0$ là thời điểm vật bắt đầu chuyển động).

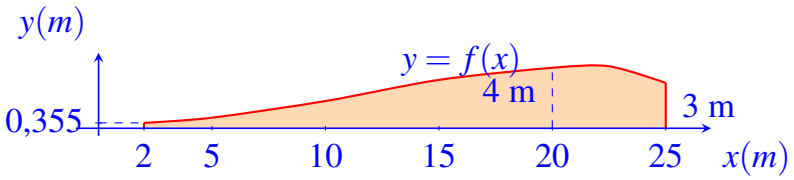
a) Viết công thức của hàm số $v(t)$ với $t \in [0;6]$.

b) Tính quãng đường vật di chuyển được trong 6 giây đầu tiên.



Bài 3

Năng lượng gió trên đất liền là một trong những công nghệ năng lượng tái tạo đang được phát triển ở quy mô toàn cầu. Năng lượng gió không trực tiếp phát thải khí nhà kính, không thải ra môi trường các chất ô nhiễm khác, cũng như không tiêu thụ nước để làm mát cho các nhà máy. Các turbine gió thường có ba cánh quay trên một trục ngang, lấy động năng từ quá trình di chuyển dòng không khí (gió) để chuyển đổi thành điện năng thông qua một máy phát điện được kết nối với lưới điện. Hình thang cong (tô màu vàng) trong *hình bên* mô tả một phần mặt cắt đứng của cánh turbine, được giới hạn bởi các đường thẳng $x = 2$, $x = 25$, trục Ox và đồ thị hàm số $y = f(x) = -\dfrac{1}{800}(x^3 - 33x^2 + 120x - 400)$.



BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[a;b]$. Tìm khẳng định đúng

Ⓐ $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$.

Ⓑ $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(b)-f(a)$.

Ⓒ $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(b)+f(a)$.

Ⓓ $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)+F(a)$.

Câu 2. Cho hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\int\limits_a^b f(x).g(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Ⓑ $\int\limits_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Ⓒ $\int\limits_a^b \Big[f(x)-g(x)\Big]\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Ⓓ $\int\limits_a^b \Big[f(x)+g(x)\Big]\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Câu 3. Tích phân $I=\int\limits_0^1 \left(3x^2+2x\right)\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ 4. Ⓒ 2. Ⓓ -6.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, $c\in(a;b)$. Mệnh đề nào **sai**?

Ⓐ $\int\limits_a^b k\,\mathrm{d}x = k(a-b), \forall k\in\mathbb{R}$.

Ⓑ $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓒ $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Ⓓ $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 5. Tính $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,\mathrm{d}x$ được kết quả là

Ⓐ -1. Ⓑ $-\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ 1.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, $c\in(a;b)$. Mệnh đề nào **sai**?

Ⓐ $\displaystyle\int_a^b k\,\mathrm{d}x=k(a-b),\ \forall k\in\mathbb{R}$.

Ⓑ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓒ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Ⓓ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 7. Kết quả phép tính $\displaystyle\int_1^2 3^x\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $\dfrac{2}{\ln 3}$. Ⓑ 6. Ⓒ $\dfrac{-6}{\ln 3}$. Ⓓ $\dfrac{6}{\ln 3}$.

Câu 8. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^1(2024x+2025)\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ 4049. Ⓑ -3037. Ⓒ 3037. Ⓓ -4049.

Câu 9. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^2(x^2+1)^2\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ $\dfrac{206}{15}$. Ⓑ $\dfrac{260}{15}$. Ⓒ $\dfrac{33}{4}$. Ⓓ $\dfrac{34}{3}$.

Câu 10. Tích phân $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos x\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 11. Tính $\displaystyle\int_1^3\frac{2x^2+1}{x}\,\mathrm{d}x$ được kết quả là

Ⓐ $8-\ln 3$. Ⓑ $8+2\ln 3$. Ⓒ $8+\ln 3$. Ⓓ $7+\ln 3$.

Câu 12. Biết $I=\displaystyle\int_{-2}^2|x+1|\,\mathrm{d}x$. Tìm mệnh đề đúng.

Ⓐ $I=\displaystyle\int_{-2}^2|x+1|\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^2(x+1)\,\mathrm{d}x+\int_{-2}^{-1}(x+1)\,\mathrm{d}x$.

Ⓑ $I=\displaystyle\int_{-2}^2|x+1|\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^{-1}(x+1)\,\mathrm{d}x-\int_{-1}^2(x+1)\,\mathrm{d}x$.

Ⓒ $I=\displaystyle\int_{-2}^2|x+1|\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^2(x+1)\,\mathrm{d}x$.

Ⓓ $I=\int\limits_{-2}^{2}|x+1|\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}(x+1)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{-2}^{-1}(x+1)\,\mathrm{d}x$.

Câu 13. Cho $I=\int\limits_{-1}^{3}|2x-4|\,\mathrm{d}x$. Chọn khẳng định đúng.

Ⓐ $I=\left|\int\limits_{-1}^{3}(2x-4)\,\mathrm{d}x\right|$.

Ⓑ $I=-\int\limits_{-1}^{2}(2x-4)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{3}(2x-4)\,\mathrm{d}x$.

Ⓒ $I=\int\limits_{-1}^{2}(2x-4)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{3}(2x-4)\,\mathrm{d}x$.

Ⓓ $I=\int\limits_{-1}^{2}(2x-4)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{2}^{3}(2x-4)\,\mathrm{d}x$.

Câu 14. Tích phân $\int\limits_{0}^{2018}2^x\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $2^{2018}-1$.

Ⓑ $\dfrac{2^{2018}-1}{\ln 2}$.

Ⓒ $\dfrac{2^{2018}}{\ln 2}$.

Ⓓ 2^{2018}.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có một nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ là $F(x)$. Biết $F(1)=3$ và $F(3)=-2$, giá trị của $I=\int\limits_{1}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $I=5$.

Ⓑ $I=1$.

Ⓒ $I=-1$.

Ⓓ $I=-5$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$, $f(1)=1$ và $f(2)=2$. Khi đó $I=\int\limits_{1}^{2}f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $I=-1$.

Ⓑ $I=1$.

Ⓒ $I=\dfrac{7}{2}$.

Ⓓ $I=3$.

Câu 17. Cho $\int\limits_{1}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x=10$. Tính $\int\limits_{2}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ -10.

Ⓑ 10.

Ⓒ 5.

Ⓓ -5.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_{0}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x=9$; $\int\limits_{2}^{4}f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int\limits_{0}^{4}f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ $I=5$.

Ⓑ $I=36$.

Ⓒ $I=\dfrac{9}{4}$.

Ⓓ $I=13$.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $\int\limits_{3}^{5}f(x)\,\mathrm{d}x=2$. Biểu thức $\int\limits_{5}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 2. Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. Ⓒ -2. Ⓓ $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 20. Cho $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=-1;\ \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=5$. Giá trị của $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 4. Ⓑ 1. Ⓒ 5. Ⓓ 6.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=12$, $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và $\displaystyle\int_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x=17$. Tính $f(4)$.

Ⓐ 29. Ⓑ 9. Ⓒ 26. Ⓓ 5.

Câu 22. Cho $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=3$ và $\displaystyle\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x=-5$, khi đó $\displaystyle\int_0^2 [3f(x)+4g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 29. Ⓑ -3. Ⓒ -11. Ⓓ 4.

Câu 23. Cho $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x=4$ và $\displaystyle\int_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}x=3$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_1^{-1}[2f(x)-5g(x)]\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ $I=-7$. Ⓑ $I=7$. Ⓒ $I=-14$. Ⓓ $I=14$.

Câu 24. Biết $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=a+b\sqrt{3}$, với a,b là các số hữu tỉ. Tính $T=2a+6b$.

Ⓐ $T=2$. Ⓑ $T=-1$. Ⓒ $T=-4$. Ⓓ $T=3$.

Câu 25. Tích phân $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{7}}^{\frac{\pi}{5}}\sin x\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $\sin\dfrac{\pi}{5}-\sin\dfrac{\pi}{7}$. Ⓑ $\sin\dfrac{\pi}{7}-\sin\dfrac{\pi}{5}$. Ⓒ $\cos\dfrac{\pi}{5}-\cos\dfrac{\pi}{7}$. Ⓓ $\cos\dfrac{\pi}{7}-\cos\dfrac{\pi}{5}$.

Câu 26. Tích phân $\displaystyle\int_a^b\frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$, với $a,b\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng

Ⓐ $\tan a-\tan b$. Ⓑ $\cot b-\cot a$. Ⓒ $\tan b-\tan a$. Ⓓ $\cot a-\cot b$.

Câu 27. Tìm số thực m sao cho $I=\displaystyle\int_1^m(x^2-2x+5)\,\mathrm{d}x=\frac{32}{3}$.

Ⓐ $m=3$. Ⓑ $m=4$. Ⓒ $m=5$. Ⓓ $m=2$.

Câu 28. Tích phân $\displaystyle\int_1^2 e^{3x-1}\,\mathrm{d}x$ bằng

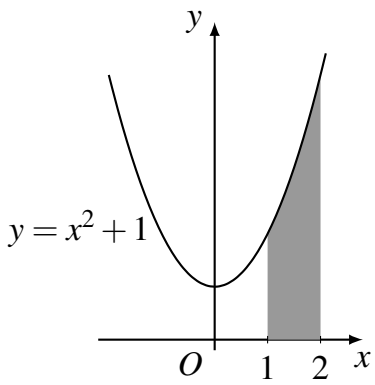
Ⓐ $\dfrac{1}{3}(e^5-e^2)$. Ⓑ $\dfrac{1}{3}e^5-e^2$. Ⓒ e^5-e^2. Ⓓ $\dfrac{1}{3}(e^5+e^2)$.

Câu 29. Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \mathrm{e}^x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 1$.

Ⓐ $\mathrm{e}+1$. Ⓑ $\mathrm{e}-2$. Ⓒ $\mathrm{e}-1$. Ⓓ $\mathrm{e}+2$.

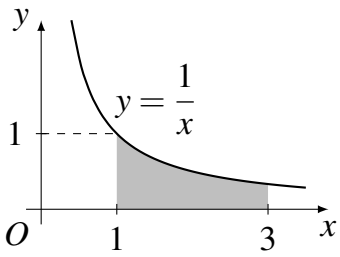
Câu 30. Diện tích hình thang cong được tô đậm trong hình vẽ bên bằng

Ⓐ $\frac{10}{3}$. Ⓑ $\frac{4}{3}$. Ⓒ 3. Ⓓ $\frac{8}{3}$.



Câu 31. Diện tích hình thang cong được tô đậm trong hình vẽ bên bằng

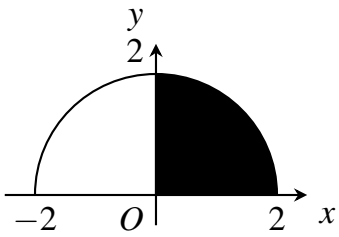
Ⓐ 2. Ⓑ 8. Ⓒ $\ln 3$. Ⓓ $\ln 2$.



Câu 32. Cho nửa đường tròn bán kính bằng 2 (xem hình vẽ). Diện tích phần tô đậm được tính bằng công thức

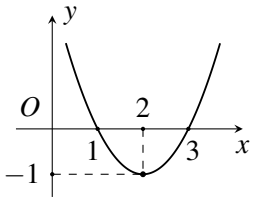
Ⓐ $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$. Ⓑ $\int_0^2 \sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Ⓒ $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$. Ⓓ $\int_{-2}^2 \sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x$.



Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là một parabol như hình bên. Tính $\int_0^3 (x-1)f(x)\,\mathrm{d}x$

Ⓐ $\frac{9}{4}$. Ⓑ $-\frac{9}{4}$. Ⓒ $\frac{135}{4}$. Ⓓ $-\frac{135}{4}$.



2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Các phép biến đổi tích phân dưới đây đúng hay sai?

a) $\int_1^2 x^3\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$.

b) $\int_0^{2025} 3^x\,\mathrm{d}x = \left.\frac{3^x}{\ln 3}\right|_0^{2025} = \frac{3^{2025}}{\ln 3} - \frac{3^0}{2025} = \frac{3^{2025}}{\ln 3}$.

c) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = -(\sin x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\left[\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) - \sin\frac{\pi}{2}\right] = 2$.

d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2}{3\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{-2}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}(\cot x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\left(\cot\frac{\pi}{2} - \cot\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{2}{3}$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	0	↗	-1	↘	$f(4)$	↗	$-\infty$

a) $\displaystyle\int_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

b) $\displaystyle\int_1^4 [3 + f'(x)]\,\mathrm{d}x = f(4) + 3$.

c) $\displaystyle\int_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - f(2)$.

d) Nếu $\displaystyle\int_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = 5$ thì $f(4) = 3$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{khi } x \geq 2 \\ x - 2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$.

a) $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 (x-2)\,\mathrm{d}x$.

b) $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^3 (x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x$.

c) $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_1^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_2^3$.

d) $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{6}$.

Câu 4. Cho $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$, $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$. Khi đó

a) $\displaystyle\int_2^0 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$.

b) $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$.

c) $\displaystyle\int_0^2 [f(x) - 2x]\,\mathrm{d}x = -1$.

d) Nếu $f(2) = 10$ thì $\displaystyle\int_0^2 x \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = 13$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)=x^2$. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

a) $F'(x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

b) $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+C$.

c) Biết $F(1)=0$. Giá trị của $F(0)$ bằng 0.

d) Với $a>1$, không có giá trị nào của a thỏa mãn $\displaystyle\int_1^a [3f(x)-1]\,\mathrm{d}x=0$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)=3x^2-2x+5$ có đạo hàm $f'(x)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} f'(x)\mathrm{d}x=3$. **b)** $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=7$. **c)** $\displaystyle\int_0^2 3f(x)\mathrm{d}x=42$. **d)** $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{31}{12}$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)=\mathrm{e}^x$.

a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) $f'(1)=\mathrm{e}$.

c) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} f'(x)\,\mathrm{d}x=1$.

d) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}+1$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=x^3+2x$ và hàm số $g(x)=x^2+x$.

a) Diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$, $x=3$ được tính bằng công thức $S=\displaystyle\int_1^3 (x^3+2x)\,\mathrm{d}x$.

b) Gọi $F(x)=\dfrac{x^4}{4}+2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $S=F(3)-F(1)$.

c) $I=10\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x+6\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x=356$.

d) $J=\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f(x)=x+5-\dfrac{6}{x}$.

a) $f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)=1+\dfrac{6}{x^2}$.

b) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+5x-6\ln x+C$.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(1)=5$. Khi đó $F(2)=5+\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $G(1)=4$ và $G(2)+G(-1)=5$. Khi đó $G(-6)=-13-6\ln 3$.

Câu 10. Giả sử rằng khi tăng t năm tuổi, một máy công nghiệp A tạo ra doanh thu với tốc độ $R'(t)=650-3t^2$ (triệu đồng/năm), thời điểm $t=0$ tính từ lúc máy A bắt đầu hoạt động.

Biết rằng chi phí biên cho vận hành và bảo trì là $C'(t) = 48 + 12t^2$ (triệu đồng/năm), ở đây $C(t)$ là chi phí vận hành và bảo trì của máy A khi nó được t năm tuổi.

a) Doanh thu sau 12 năm của máy A là $\int_0^{12} \left(650 - 3t^2\right) \mathrm{d}t$ (triệu đồng).

b) Tổng chi phí vận hành và bảo trì của máy A trong 6 năm là 1 152 (triệu đồng).

c) Tuổi thọ hữu ích của một máy là số năm T trước khi lợi nhuận (bằng doanh thu trừ chi phí) mà nó tạo ra bắt đầu giảm. Tuổi thọ hữu ích của máy A này là 8 năm.

d) Lợi nhuận do máy A tạo ra trong suốt thời gian tuổi thọ hữu ích của nó là 2 532 (triệu đồng).

Câu 11 (CT-THPTQG 2026). Một hệ thống pin năng lượng mặt trời gồm các tấm pin được kết nối với một bộ lưu trữ điện. Trong thời gian mặt trời chiếu sáng của một ngày, năng lượng điện thu được từ các tấm pin được lưu trong bộ lưu trữ điện. Gọi $F(t)$ là năng lượng điện (kWh) lưu trữ được kể từ thời điểm hệ thống bắt đầu hoạt động đến thời điểm t, trong đó t là thời gian tính theo giờ ($0 \le t \le 12$) và thời điểm hệ thống bắt đầu hoạt động ứng với $t = 0$. Biết rằng $F(0) = 0$. Tốc độ lưu trữ năng lượng điện (kW) của hệ thống này là hàm số $f(t) = F'(t)$ với $0 \le t \le 12$. Số liệu ghi nhận được ở một ngày cụ thể trong năm cho thấy $f(t) = -0,15t^2 + 1,8t$ với $0 \le t \le 12$.

a) $F(t) = -0,05t^3 + 0,9t^2$ với $0 \le t \le 12$.

b) Năng lượng điện (kWh) lưu trữ được kể từ thời điểm $t = a$ đến thời điểm $t = b, (0 \le a < b \le 12)$ là $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

c) Năng lượng điện lưu trữ được kể từ thời điểm $t = 1$ đến thời điểm $t = 5$ nhỏ hơn 15,3 kWh.

d) Năng lượng điện lưu trữ được kể từ thời điểm $t = 1$ đến thời điểm $t = 9$ gấp hai lần năng lượng điện lưu trữ được kể từ thời điểm $t = 1$ đến thời điểm $t = 5$.

Câu 12. Trong quá trình sản xuất giấy, việc kiểm soát bọt rất quan trọng để đảm bảo chất lượng sản phẩm. Giả sử $y(x)$ là nồng độ của một chất gây bọt còn dư trong bể xử lý (đơn vị mol/L) tại thời điểm x (giây), $y(x) > 0$ với $x \ge 0$. Sau khi thêm một lượng chất chống tạo bọt, nồng độ chất gây bọt giảm dần theo thời gian thỏa mãn hệ thức $y'(x) = -7 \cdot 10^{-4} y(x)$ với $x \ge 0$. Biết rằng tại thời điểm bắt đầu xử lý $x = 0$, nồng độ chất gây bọt là 0,05 mol/L. Xét hàm số $f(x) = \ln y(x)$ với $x \ge 0$.

a) $f'(x) = -7 \cdot 10^{-4}$.

b) $f(x) = -7 \cdot 10^{-4}x + \ln(0,05)$.

c) $y(30) - y(15) \approx 5,7 \cdot 10^{-4}$.

d) Cho biết giá trị trung bình của hàm số liên tục $g(x)$ trên đoạn $[a;b]$ được định nghĩa là $\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. Nồng độ trung bình của chất gây bọt trong khoảng thời gian từ giây thứ 20 đến giây thứ 30 bằng 0,03 mol/L.

Câu 13. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc $v(t) = \frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45}t$ (m/s). Chất điểm B xuất phát từ O chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc

không đổi a (m/s^2). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A.

a) Thời điểm chất điểm B đuổi kịp chất điểm A thì chất điểm B đi được 15 giây và A đi được 18 giây.

b) $a = 2$.

c) Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng 30 (m/s).

d) Sau khi B xuất phát 10 giây thì quãng đường A đi được không quá 100 (m).

Câu 14. Một hồ thủy lợi được vận hành an toàn khi thể tích nước bên trong nó nằm trong khoảng từ 20000 m^3 đến 60000 m^3. Sau một cơn mưa, người ta đo được lưu lượng nước (tốc độ thay đổi lượng nước) trong hồ là $Q(t) = 1000t^3 - 8000t^2 + 12000t$ (t tính bằng giờ, $Q(t)$ tính bằng m^3/ giờ). Tại thời điểm bắt đầu quan sát ($t = 0$), trong hồ có 50000 m^3 nước.

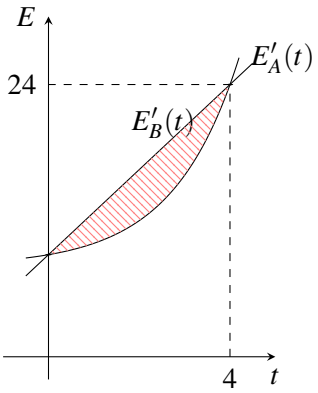
a) Sau 2 giờ quan sát, thể tích nước trong hồ là $50000 + \int_0^2 Q(t)\,\mathrm{d}t$ m^3.

b) Trong khoảng thời gian từ 0 đến 4 giờ, thể tích nước trong hồ luôn tăng.

c) Trong 6 giờ đầu quan sát, thể tích nước lớn nhất trong hồ là $\dfrac{170000}{3}$ m^3.

d) Trong 6 giờ đầu quan sát, hồ luôn vận hành an toàn.

Câu 15. Một chuyên gia kinh tế nghiên cứu tốc độ thay đổi lượng điện tiêu thụ của hai khu vực công nghiệp A và B từ đầu năm 2020 đến đầu năm 2024. Tốc độ thay đổi lượng điện tiêu thụ (đơn vị: triệu kWh/năm) của khu vực A và khu vực B lần lượt được mô tả bởi các hàm số: $E'_A(t) = 2^t + 8$ và $E'_B(t) = 3,75t + n$ (n là một hằng số), trong đó t là số năm kể từ đầu năm 2020 ($0 \le t \le 4$). Biết rằng tại thời điểm bắt đầu khảo sát ($t = 0$) và đầu năm 2024 ($t = 4$), tốc độ thay đổi lượng điện tiêu thụ của cả hai khu vực là bằng nhau (như hình vẽ).



a) Tại thời điểm $t = 3$, tốc độ thay đổi lượng điện tiêu thụ của khu vực A là 16 triệu kWh/năm.

b) Mốc thời gian t_0 mà tại đó tốc độ của khu vực A đạt 12 triệu kWh/năm là $t_0 = 2,5$.

c) Tổng lượng điện tiêu thụ tăng thêm của khu vực A sau 4 năm đầu khảo sát xấp xỉ bằng 53,64 triệu kWh.

d) Tổng lượng điện tiêu thụ tăng thêm của khu vực B nhiều hơn khu vực A một lượng xấp xỉ 10,93 triệu kWh.

3 Tự luận

Bài 1. Biết $F(x) = \sqrt{x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Tính $\int_1^4 [2 + f(x)]\,\mathrm{d}x$.

Bài 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ và thỏa mãn $\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = 7$ và $\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $P = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Bài 3. Tính các tích phân sau:

a) $\int\limits_0^2 (3x-2)(3x+2)\,\mathrm{d}x$;

b) $\int\limits_1^2 t^2(5t^2-2)\mathrm{d}t$;

c) $\int\limits_{-1}^1 (3x-1)^2\,\mathrm{d}x$;

d) $\int\limits_1^2 \dfrac{x^2-2x+1}{x}\,\mathrm{d}x$;

e) $\int\limits_1^2 \left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\,\mathrm{d}x$;

f) $\int\limits_1^4 \dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}\,\mathrm{d}x$.

Bài 4. Tính các tích phân sau:

a) $\int\limits_0^{\pi} (2\cos x+1)\,\mathrm{d}x$;

b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x+2\sin x)\,\mathrm{d}x$;

c) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$;

d) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$;

e) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{2\cos^3 x-3}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$;

f) $\int\limits_0^{\pi} (1+\cot x)\sin x\,\mathrm{d}x$;

g) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\dfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x$;

h) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,\mathrm{d}x$;

i) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2 x\,\mathrm{d}x$.

Bài 5. Tính các tích phân sau:

a) $\int\limits_0^2 3^x\,\mathrm{d}x$;

b) $\int\limits_1^2 2^{1-3x}\,\mathrm{d}x$;

c) $\int\limits_{-1}^0 e^{-x}\,\mathrm{d}x$;

d) $\int\limits_{-2}^1 e^{x+2}\,\mathrm{d}x$;

e) $\int\limits_0^1 (2^x-1)^2\,\mathrm{d}x$;

f) $\int\limits_1^4 \left(e^{3x-1}-3x\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

g) $\int\limits_0^1 \left(3\cdot 4^x-5e^{-x}\right)\mathrm{d}x$.

h) $\int\limits_0^1 \dfrac{4^x-1}{2^x-1}\,\mathrm{d}x$.

i) $\int\limits_0^1 \dfrac{(e^x-1)^2}{2e^x}\,\mathrm{d}x$.

Bài 6. Tính các tích phân sau:

a) $\int\limits_{-2}^1 |2x+2|\,\mathrm{d}x$;

b) $\int\limits_1^4 |5-3x|\,\mathrm{d}x$;

c) $\int\limits_0^4 |x^2-4|\,\mathrm{d}x$;

d) $\int\limits_{-1}^2 |x^2+x-2|\,\mathrm{d}x$;

e) $\int\limits_{-1}^1 |e^x-1|\,\mathrm{d}x$;

f) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\,\mathrm{d}x$.

Bài 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}, x>0$. Tính giá trị của $f(4)-f(1)$.

Bài 8. Biết $\int\limits_1^4 \dfrac{x^2+3}{x}\mathrm{d}x=\dfrac{a}{b}+c\ln 2$, với $(a,b,c\in\mathbb{Z})$. Tính $a+b-2c$.

Bài 9. Biết hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+1 & \text{khi } x>2 \\ 2x^2-x+1 & \text{khi } x\le 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính $\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

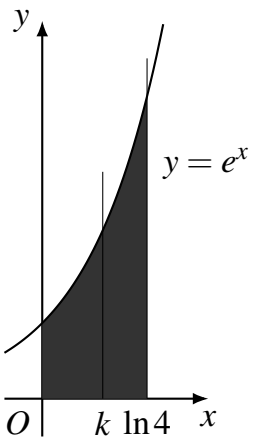
Bài 10. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_0^3 \left[x^2f'(x)+2xf(x)\right]\mathrm{d}x=18$. Tính $f(3)$.

Hướng dẫn: Hàm dưới dấu tích phân có dạng $(uv)'$.

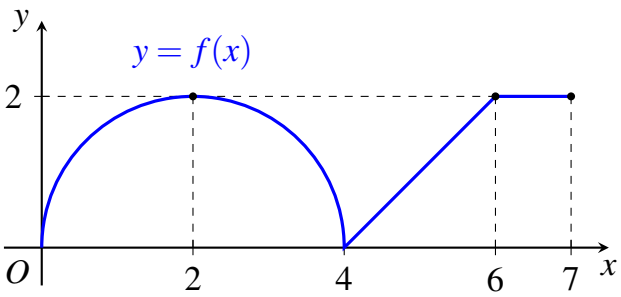
Bài 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)=x+\int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$. Tính $f(2)$.

Hướng dẫn: Đặt $\int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=a$ với $a\in\mathbb{R}$. Suy ra $f(x)=x+a$.

Bài 12. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0, x=0, x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k$ $(0<k<\ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích S_1 và S_2 như hình bên. Tìm k để $S_1=2S_2$.



Bài 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị trên $[0;7]$ như hình vẽ (một phần là nửa đường tròn, một phần là đường gấp khúc). Tính tích phân $\int\limits_0^7 f(x)\,\mathrm{d}x$.



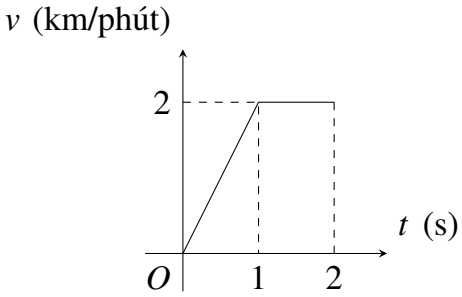
Bài 14. Khảo sát chuyển động của xe khách A trong 30 phút trên một quãng đường ta thu được kết quả: vận tốc v (m/phút) của xe khách theo thời gian t (phút) được biểu diễn bởi hàm số

$$v(t)=\begin{cases}100t, & 0\le t\le 10\\ 20t+800, & 10<t\le 20\\ -10t+1400, & 20<t\le 30.\end{cases}$$

Tính quãng đường chuyển động và vận tốc trung bình của xe khách trong 30 phút đã khảo sát.

Bài 15. Một người công nhân có thể sản xuất với tốc độ là $q(t)=100+\mathrm{e}^{-0,5t}$ đơn vị sản phẩm trong 1 giờ, với t (giờ) là thời gian tính từ khi bắt đầu làm việc. Biết rằng người công nhân bắt đầu làm việc từ lúc 8 giờ sáng, hỏi người đó sẽ sản xuất được bao nhiêu đơn vị sản phẩm trong khoảng thời gian từ 9 giờ sáng đến 11 giờ trưa (làm tròn đến hàng đơn vị)?

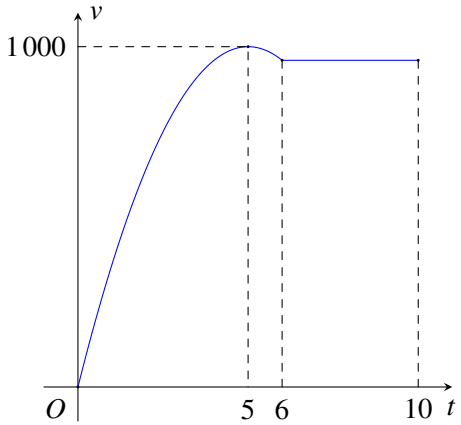
Bài 16. Một vật chuyển động với vận tốc được cho bởi đồ thị ở hình vẽ dưới đây:



a) Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 1 giây đầu tiên.

b) Tính quãng đường và vật di chuyển được trong 2 giây đầu tiên.

Bài 17. Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu chuyển động với vận tốc được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol như hình bên dưới. Biết rằng sau 5 phút thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 1 000 m/phút và bắt đầu giảm vận tốc, đi được 6 phút thì xe chuyển động đều. Hỏi quãng đường xe đã đi được trong khoảng 10 phút đầu tiên là bao nhiêu mét?



Bài 18. Một vật đang ở nhiệt độ 100°C thì được đặt vào môi trường có nhiệt độ 30°C. Kể từ đó, nhiệt độ của vật giảm dần theo tốc độ

$$T'(t) = -140e^{-2t} \quad (^\circ\text{C/phút}),$$

trong đó $T(t)$ là nhiệt độ tính theo °C tại thời điểm t phút kể từ khi được đặt vào môi trường. Xác định nhiệt độ của vật ở thời điểm 3 phút kể từ khi được đặt vào môi trường (kết quả làm tròn đến hàng phần mười của °C).

Bài 19. Giả sử tổng chi phí mua và bảo trì một thiết bị trong x năm có thể được mô hình hóa bởi công thức

$$C = 5000\left(25 + 3\int_0^x t^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}t\right).$$

Tính tổng chi phí sau:

a) 1 năm; b) 5 năm; c) 10 năm.

Bài 20. Mật độ khối lượng của một thanh kim loại có chiều dài 4 mét được cho bởi công thức $\rho(x) = 1000 + x - \sqrt{x}\ (\text{kg/m}^3)$, trong đó x là khoảng cách bằng mét tính từ một đầu của

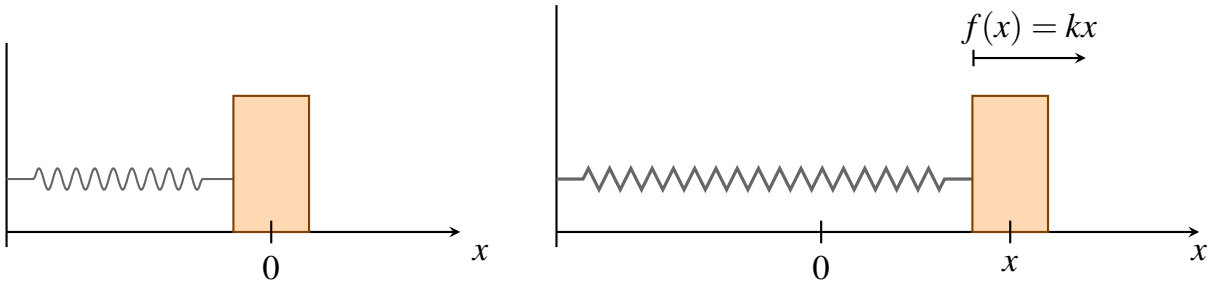
thanh. Mật độ khối lượng trung bình $\left(\text{kg/m}^3\right)$ trên toàn bộ chiều dài của thanh là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài 21. Ở 45°C, phản ứng hoá học phân huỷ N_2O_5 xảy ra theo phương trình hóa học $N_2O_5 \to 2NO_2 + \frac{1}{2}O_2$ với nồng độ $c(t)$ (mol/L) của N_2O_5 ($c(t) > 0$) tại thời điểm t giây ($t \geq 0$) thoả mãn $c'(t) = -0{,}0005c(t)$ (nguồn: James Stewart, *Calculus*, Cengage Learning). Biết khi $t = 0$, nồng độ ban đầu của N_2O_5 là 0,05 mol/L.

a) Xét hàm số $y(t) = \ln c(t)$ với $t \geq 0$. Tính $y'(t)$, từ đó tìm $y(t)$.

b) Biết rằng nồng độ trung bình của N_2O_5 (mol/L) từ thời điểm a giây đến thời điểm b giây ($a < b$) được cho bởi công thức $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b c(t)\mathrm{d}t$. Tính nồng độ trung bình của N_2O_5 từ thời điểm 10 giây đến thời điểm 20 giây.

Bài 22. Một lò xo có chiều dài tự nhiên là $l_0 = 10$ cm (Hình a). Để kéo giãn lò xo x (m) cần một lực có độ lớn $f(x) = kx$ (N), trong đó k là độ cứng của lò xo và có giá trị không đổi (Hình b).



a) Tìm k, biết dưới tác dụng của một lực 40 N, lò xo bị giãn và chiều dài của lò xo khi ấy là $l_1 = 15$cm.

b) Nếu một lực có độ lớn $f(x)$ (N) làm biến dạng lò xo từ độ giãn a (m) đến b (m) thì công của lực đó được cho bởi công thức $A = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (J). Tính công của một lực làm lò xo biến dạng từ chiều dài 15 cm đến 18 cm.

Bài 23. Hiệu suất của tim là lưu lượng máu được bơm bởi tim trên một đơn vị thời gian (lưu lượng máu chảy vào động mạch chủ). Để đo hiệu suất của tim, người ta bơm A (mg) chất chỉ thị màu vào tâm nhĩ phải, chảy qua tim rồi vào động mạch chủ và đo nồng độ chất chỉ thị màu còn lại ở tim đến thời điểm T (s) khi chất chỉ thị màu tan sạch. Gọi $c(t)$ là nồng độ (mg/l) chất chỉ thị màu tại thời điểm t (s) thì hiệu suất của tim được xác định bởi

$$F = \frac{A}{\displaystyle\int_0^T c(t)\,\mathrm{d}t}\ (\text{l/s}).$$

Tính hiệu suất của tim khi bơm 8 mg chất chỉ thị màu vào tâm nhĩ phải, cho biết rằng $c(t) = \frac{1}{4}t(12-t)$ với $0 \leq t \leq 12$.

Bài 24. Một chiếc xe ô tô đang chạy trên đường cao tốc với vận tốc 72 km/h thì tài xế bất ngờ đạp phanh làm cho chiếc ô tô chuyển động chậm với gia tốc $a(t) = -\dfrac{8}{5}t$ (m/s^2), trong đó t là thời gian tính bằng giây. Hỏi kể từ khi đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn thì ô tô đi chuyển bao nhiêu mét (m)? (Giả sử trên đường ô tô di chuyển không có gì bất thường. Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.)

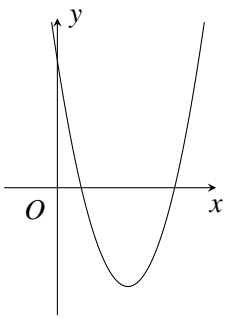
Bài 25. Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động mạch bán kính R không đổi, có thể được mô hình hóa bởi công thức $v(r) = k\left(R^2 - r^2\right)$, $0 \le r \le R$, trong đó k là một hằng số. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0 \le r \le R$. Vận tốc lớn nhất của dòng máu gấp bao nhiêu lần vận tốc trung bình?

Bài 26. Trong kinh tế học, người ta tính toán thu nhập của một khoản đầu tư thông qua công thức $FV = \displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-rt}\,\mathrm{d}t$ trong đó với khoảng thời gian t thì $f(t)$ là tốc độ sinh lời, T là thời gian đầu tư và r là lãi suất hàng kỳ. Bạn Nam đang cố gắng để cân nhắc giữa hai khoản đầu tư như sau

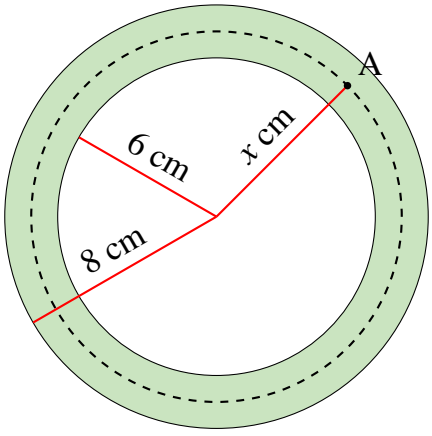
- Khoản đầu tư thứ nhất có giá 1 000 USD và dự kiến sẽ tạo ra một dòng thu nhập liên tục với tốc độ $f_1(t) = 3000\mathrm{e}^{0{,}03t}$ (USD) mỗi năm.
- Khoản đầu tư thứ hai có giá 4 000 USD và được ước tính sẽ tạo ra thu nhập với tốc độ không đổi là $f_2(t) = 4000\mathrm{e}^{0{,}03t}$ (USD) mỗi năm.

Giả sử lãi suất hằng năm hiện hành vẫn cố định ở mức 5% mỗi năm và được tính lãi kép liên tục. Em hãy giúp Nam chọn khoản đầu tư lời hơn bằng cách tính số Dollar chênh lệch giữa hai khoản đầu tư sau 5 năm. (Lấy giá trị dương và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Bài 27. Một vật chuyển động thẳng. Khi vật bắt đầu qua điểm O, người ta bắt đầu quan sát, đo đạc chuyển động của vật thì thấy vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t (s) là $v(t)$ (m/s), hàm vận tốc $v(t)$ có đồ thị phụ thuộc thời gian là một phần của đường parabol có đỉnh $I\left(\dfrac{4}{3};-\dfrac{7}{3}\right)$ như hình bên (với $t \ge 0$ và mốc tính thời gian là lúc bắt đầu quan sát chuyển động). Tính tổng quãng đường vật đi được từ lúc đầu đến lúc vật trở lại điểm O lần cuối cùng (*kết quả tính bằng mét và làm tròn đến hàng phần trăm*).



Bài 28. Mặt cắt ngang của một ống dẫn khí nóng là hình vành khuyên như hình bên. Khí bên trong ống được duy trì ở 150°C. Biết rằng nhiệt độ T (°C) tại điểm A trên thành ống là hàm số của khoảng cách x (cm) từ A đến tâm của mặt cắt và $T'(x) = -\dfrac{30}{x}$ $(6 \le x \le 8)$. (Nguồn: Y.A.Cengel, A.I.Gahjar, Heat and Mass Transfer, McGraw Hill, 2015) . Tìm nhiệt độ mặt ngoài của ống.



Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	A	2	A	3	C	4	A	5	C	6	A	7	D	8	C	9	A	10	A												
11	C	12	D	13	B	15	D	16	B	17	A	18	D	19	C	20	D	21	A												
22	C	23	B	24	B	25	C	26	D	27	A	28	A	29	C	30	A	31	C												
32	A																														

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	S	Câu 2.	a	S	b	S	c	S	d	S
Câu 3.	a	Đ	b	Đ	c	S	d	Đ	Câu 4.	a	S	b	Đ	c	Đ	d	S
Câu 5.	a	Đ	b	Đ	c	S	d	Đ	Câu 6.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	Đ
Câu 7.	a	Đ	b	Đ	c	Đ	d	S	Câu 8.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	Đ
Câu 9.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	S	Câu 10.	a	Đ	b	Đ	c	S	d	S
Câu 11.	a	Đ	b	Đ	c	S	d	S	Câu 12.	a	Đ	b	Đ	c	S	d	S
Câu 13.	a	Đ	b	Đ	c	Đ	d	S	Câu 14.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	S
Câu 15.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	S									

III. ĐỀ KIỂM TRA CUỐI BÀI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Nếu $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 8$ thì $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 16. (B) 4. (C) 10. (D) 6.

Câu 2. Giá trị của $\int\limits_0^2 (2x - \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $3 - \mathrm{e}^2$. (B) $3 - \mathrm{e}$. (C) $5 - \mathrm{e}^2$. (D) $5 - \mathrm{e}$.

Câu 3. Cho $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 5$ khi đó $\int\limits_0^1 [3f(x) - 2g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) -4. (B) 16. (C) -3. (D) 11.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(1) = -2$, $f(2) = 1$ và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$. Giá trị của tích phân $I = \int\limits_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$ là

(A) $I = -1$. (B) $I = 2$. (C) $I = -3$. (D) $I = 3$.

Câu 5. Cho $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ và $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -4$. Tích phân $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ -3. Ⓒ -5. Ⓓ 3.

Câu 6. Giá trị trung bình của hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ $(a<b)$ được định nghĩa là $\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Khi đó, giá trị trung bình của hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right]$ là

Ⓐ $\dfrac{3}{2\pi}$. Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $\dfrac{\pi}{3}$. Ⓓ $\dfrac{3}{2\pi}$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(2) = 16$ và $\int\limits_0^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = 12$. Giá trị của $f(0)$ bằng

Ⓐ -28. Ⓑ 28. Ⓒ -4. Ⓓ 4.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Nếu $\int\limits_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$ thì $\int\limits_2^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 6. Ⓑ -6. Ⓒ 18. Ⓓ -18.

Câu 9. Với a, b là các tham số thực thì giá trị tích phân $I = \int\limits_0^b \left(3x^2 - 2ax - 1\right)\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $b^3 - ba^2 - b$. Ⓑ $b^3 + b^2a + b$. Ⓒ $b^3 - b^2a - b$. Ⓓ $3b^2 - 2ab - 1$.

Câu 10. Biết $\int\limits_1^2 \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x}\,\mathrm{d}x = a + b\ln 2$. Đặt $S = 2a + b$, giá trị của S thuộc khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $S \in (-2;0)$. Ⓑ $S \in (-1;1)$. Ⓒ $S \in (0;2)$. Ⓓ $S \in (1;3)$.

Câu 11. Cho $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int\limits_1^5 \left[f(x) - \dfrac{x}{2}\right]\mathrm{d}x$.

Ⓐ $I = 1$. Ⓑ $I = 7$. Ⓒ $I = 5$. Ⓓ $I = -1$.

Câu 12. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $[-1;2]$ thoả mãn $\int\limits_{-1}^2 [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = 24$ và $\int\limits_{-1}^2 [2f(x) - 3g(x)]\,\mathrm{d}x = 3$. Khi đó $\int\limits_{-1}^2 g(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ -15. Ⓑ 15. Ⓒ 9. Ⓓ -9.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	0		1		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	$f(4)$	↘	$-\infty$

Biết $f'(x)$ là đạo hàm của hàm số đã cho và $\displaystyle\int_1^4 \left|f'(x)\right|\mathrm{d}x=5$.

a) $\displaystyle\int_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x=1$. **b)** $\displaystyle\int_1^2 \left|2f'(x)\right|\mathrm{d}x=2$. **c)** $\displaystyle\int_2^4 \left|f'(x)\right|\mathrm{d}x=3$. **d)** $f(4)=3$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $F(x)$, $G(x)$ lần lượt là hai nguyên hàm của nó. Biết $F(1)+G(1)=2$, $F(3)+G(3)=6$, $f(2)=0$, $f(3)=9$.

a) $\displaystyle\int_2^3 f'(x)\mathrm{d}x=-9$.

b) Nếu $\displaystyle\int_a^2 f'(x)\mathrm{d}x=-2024$ thì $f(a)=2024$.

c) $\displaystyle\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=4$.

d) $\displaystyle\int_1^3 (2x-f(x))\mathrm{d}x=8$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)=\sin x+\cos x$ và $g(x)=3-2\sin x$.

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x=2$.

b) Tập giá trị của hàm số $g(x)=3-2\sin x$ là $T=[1;5]$.

c) $\displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x=3x-2\cos x+C$.

d) Số nghiệm phương trình $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x=3-2\sin x$ trên đoạn $[0;2\pi]$ là 2.

Câu 4. Hai chất điểm chuyển động ngược chiều nhau thì xảy ra va chạm, hai chất điểm tiếp tục di chuyển theo chiều ban đầu thêm một quãng đường nữa thì dừng hẳn. Biết rằng sau khi va chạm, một chất điểm di chuyển tiếp với vận tốc $v_1(t)=6-3t$ (m/s), chất điểm còn lại di chuyển với vận tốc $v_2(t)=12-4t$ (m/s). Khi đó

a) Quãng đường chất điểm thứ nhất di chuyển sau khi va chạm được biểu diễn bởi hàm số $s_1(t)=6t-\dfrac{3t^2}{2}+C$ (m).

b) Quãng đường chất điểm thứ hai di chuyển sau khi va chạm được biểu diễn bởi hàm số $s_2(t) = 12t - 2t^2 + C$ (m).

c) Quãng đường chất điểm thứ nhất di chuyển sau khi va chạm là 18 (m).

d) Khoảng cách hai chất điểm khi đã dừng hẳn 12 (m).

Phần III. Trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6 vào ô kết quả.

Câu 1. Biết rằng $\int_1^2 \left(6x^2 + \sqrt{x}\right) dx = \dfrac{a + b\sqrt{2}}{3}$ với a, b là các số nguyên. Tính $a + b$.

KQ: | | | | |

Câu 2. Biết $J = \int_0^2 \sqrt{e^{x+2}}\,\mathrm{d}x = 2ae^2 + be$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của $a^2 + b^2$.

KQ: | | | | |

Câu 3. Biết $\int_0^3 |2^x - 4|\,\mathrm{d}x = a + \dfrac{b}{c\ln 2}$, với $(a, b, c \in \mathbb{Z})$. Tính $a^2 + b^2 + c^2$.

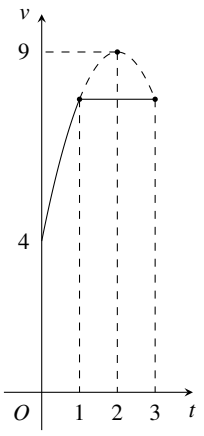
KQ: | | | | |

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x \le 1, \\ \dfrac{1}{x} + 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Biết rằng $\int_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{a}{b} + \ln c$ với $(a, b, c \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính abc.

KQ: | | | | |

Câu 5. Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của Parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần chục) là bao nhiêu?

KQ: | | | | |



Câu 6. Một trận dịch lây lan đến mức sau khi bùng phát t tuần số người nhiễm bệnh là $N_1(t) = 0{,}1t^2 + 0{,}5t + 150$, $0 \le t \le 50$. Hai mươi lăm tuần sau khi dịch bệnh bùng phát, một loại vắc xin đã được phát triển và tiêm cho công chúng. Khi đó, số người nhiễm bệnh được điều chỉnh theo mô hình $N_2(t) = -0{,}2t^2 + 6t + 200$, $25 \le t \le 50$. Hãy ước tính gần đúng số người mà vắc xin đã ngăn ngừa khỏi dịch bệnh trong thời gian xảy ra dịch bệnh.

KQ: | | | | |

BẢNG ĐÁP ÁN ĐỀ KIỂM TRA CUỐI BÀI

ĐÁP ÁN PHẦN I

1. C	2. C	3. A	4. D	5. C	6. D	7. D	8. B	9. C
10. B	11. A	12. C						

ĐÁP ÁN PHẦN II

Câu 1. a) S b) Đ c) S d) Đ	Câu 2. a) S b) Đ c) S d) S
Câu 3. a) Đ b) Đ c) S d) Đ	Câu 4. a) Đ b) Đ c) S d) S

ĐÁP ÁN PHẦN III

Câu 1.	Câu 2.	Câu 3.	Câu 4.	Câu 5.	Câu 6.
4 4	5	1 8	3 0	2 1 , 6	4 5 3 1

§3 ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Tính diện tích hình phẳng

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của một hàm số, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính bởi công thức:

$$S=\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

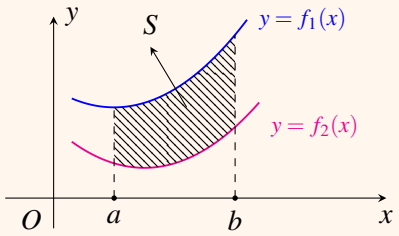
Lưu ý. Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên $[a;b]$ thì

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x=\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$

Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị của hai hàm số và hai đường thẳng $x=a, x=b$

Cho hai hàm số $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính bởi công thức

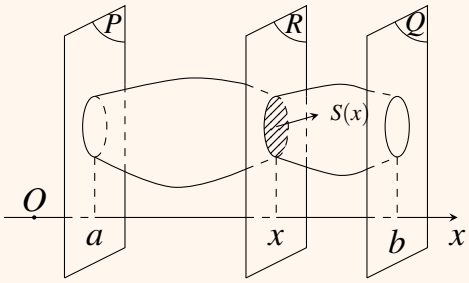
$$S=\int_a^b |f_1(x)-f_2(x)|\,\mathrm{d}x.$$



2) Tính thể tích hình khối

Thể tích vật thể

Cho một vật thể trong không gian $Oxyz$. Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b.

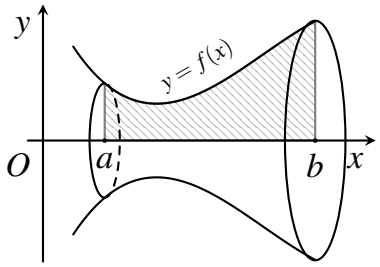


Khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x $(a \le x \le b)$ thì phần chung giữa mặt phẳng và vật thể có diện tích $S(x)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, thể tích V của B là

$$V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$

Thể tích khối tròn xoay

Cho $y = f(x)$ là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$.
Quay D quanh trục Ox tạo thành một hình khối gọi là *khối tròn xoay*. Cắt khối tròn xoay trên bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x với $x \in [a;b]$, ta được mặt cắt là hình tròn có bán kính bằng $f(x)$ và diện tích là $S(x) = \pi f^2(x)$.



Vậy khối tròn xoay có thể tích là

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$.

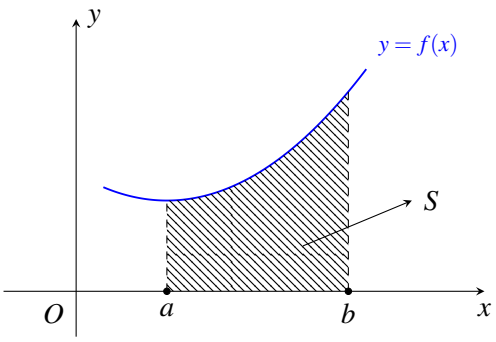
Công thức tính:

$$S_{(H)} = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

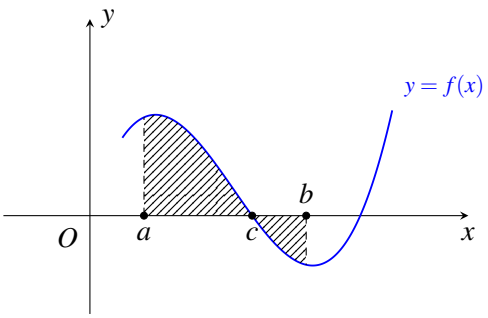
Lưu ý

- Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên $[a;b]$ thì
$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$
- Nếu đề chưa cho (*hoặc thiếu*) cận, thì ta giải phương trình $f(x) = 0$ để tìm cận.

Minh họa hình ảnh:



$$S=\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



$$S=\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x-\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, $y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$.

Công thức tính:

$$S_{(H)}=\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x.$$

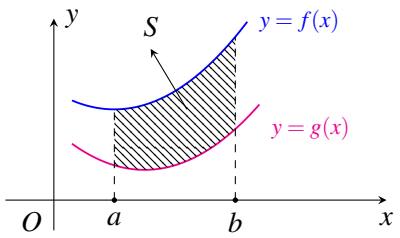
Lưu ý

- Nếu $f(x)-g(x)$ không đổi dấu trên $[a;b]$ thì

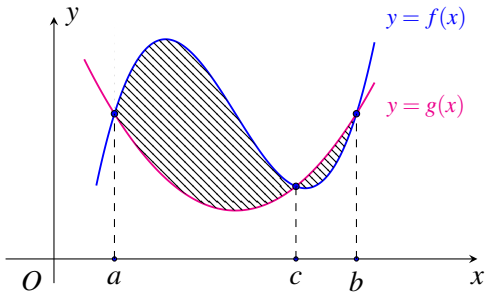
$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x=\left|\int_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x\right|.$$

- Nếu đề chưa cho (*hoặc thiếu*) cận, thì ta giải phương trình $f(x)=g(x)$ để tìm cận.

Minh họa hình ảnh:



$$S=\int_a^b \left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$$



$$S=\int_a^c \left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int_c^b \left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$$

Ví dụ 1

a) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 2x - x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3$.

b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = \cos x - 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = \pi$.

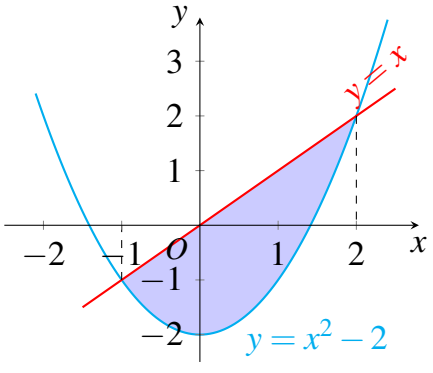
Ví dụ 2

a) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^2 - 2x - 1$, $y = x - 1$ và hai đường thẳng $x = 1, x = 4$.

b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x$ và $y = -x^2 + x$.

Ví dụ 3

Tính diện tích hình phẳng được tô đậm như hình bên.

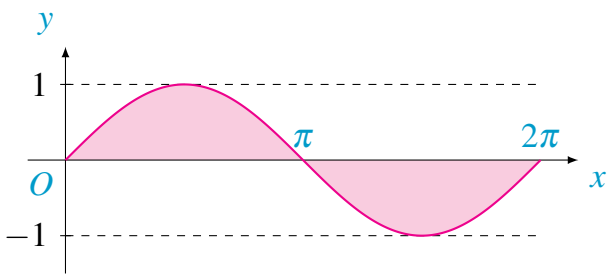


BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

a) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 - 4$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 3$.

b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 2\pi$.



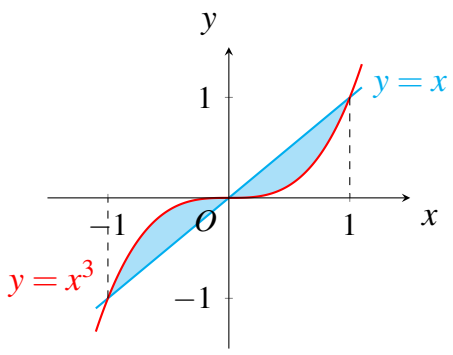
Bài 2

a) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = 5x - x^2, y = x^2 - x$ và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$.

b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = \sqrt{x}, y = x - 2$ và hai đường thẳng $x = 1, x = 4$.

Bài 3

Tính diện tích hình phẳng được tô màu trong hình vẽ bên.



Dạng 2 Thể tích giới hạn bởi các đồ thị(tròn xoay)

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$. Khi cho (H) quay quanh trục Ox, ta được một khối tròn xoay. Thể tích khối này được tính theo công thức sau:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Ví dụ 1

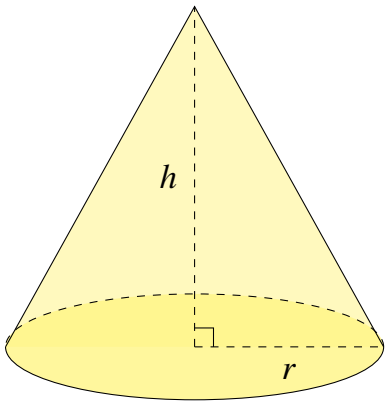
Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quanh trục hoành:

a) $y = \cos\dfrac{x}{2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$;

b) $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$.

Ví dụ 2

Sử dụng tích phân, tính thể tích khối nón có bán kính đáy r và chiều cao h.



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

☆

Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quanh trục hoành:

a) $y = x^2 - 2x$, $y = 0$ và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$.

b) $y = \mathrm{e}^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$.

c) $y = \sqrt{2 + \cos x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$;

....
....
....
....
....

Bài 2

☆

Sử dụng tích phân, tính thể tích khối cầu có bán kính R.

....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 3 Thể tích tính theo mặt cắt $S(x)$

Các bước giải:

① Xác định cận giới hạn $x = a$, $x = b$;

② Xác định và tính diện tích $S(x)$ của mặt cắt;

③ Tính thể tích theo công thức $V = \displaystyle\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$

Lưu ý:

① Công thức tính không có π.

② Công thức tính diện tích các hình thường gặp:

- Diện tích hình vuông: $S = (\text{ cạnh })^2$.

Dạng 3 Phần tiếp theo

- Diện tích hình chữ nhật: $S = (\text{ dài }) \cdot (\text{ rộng })$.
- Diện tích tam giác đều: $S = \dfrac{(\text{ cạnh })^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.
- Diện tích hình tròn: $S = \pi \cdot R^2$.

Ví dụ 1

Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 2$ và $x = 4$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(2 \le x \le 4)$ thì phần chung giữa mặt phẳng và vật thể là một hình vuông có độ dài cạnh bằng $\sqrt{x^2 - 2}$.

Ví dụ 2

Sử dụng tích phân, tính thể tích của khối trụ có chiều cao là h và bán kính đáy r.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

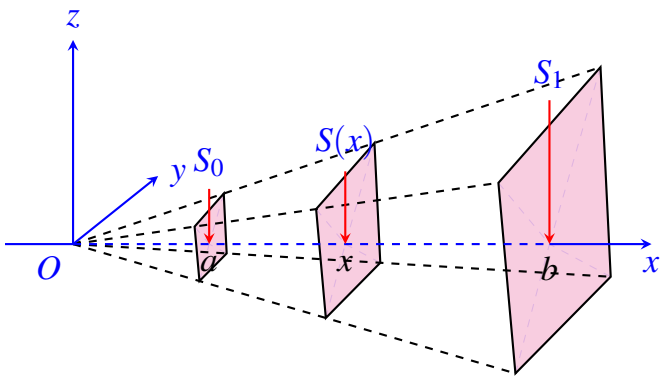
Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = \pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\,(0 \le x \le \pi)$ là một tam giác đều cạnh là $2\sqrt{\sin x}$.

Bài 2

Tính thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy bằng S và chiều cao bằng h.

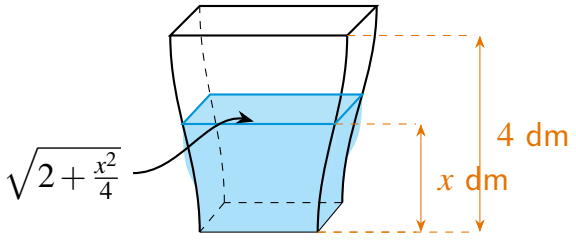
Bài 3

Tính thể tích của khối chóp cụt đều có diện tích hai đáy là S_0, S_1 và chiều cao bằng h (hình vẽ). Từ đó suy ra công thức tính thể tích khối chóp đều có diện tích đáy bằng S và chiều cao bằng h.



Bài 4

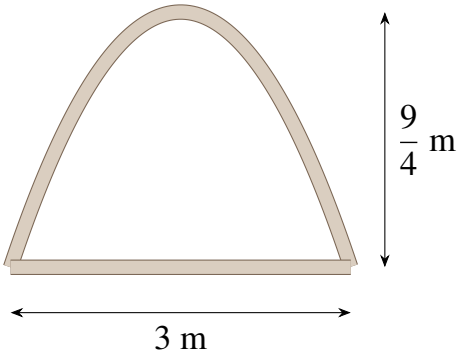
Một bình chứa nước có hình dạng như hình vẽ bên. Biết rằng khi nước trong bình có chiều cao x (dm) $(0 \le x \le 4)$ thì mặt nước là hình vuông có cạnh $\sqrt{2+\dfrac{x^2}{4}}$ (dm). Tính dung tích của bình.

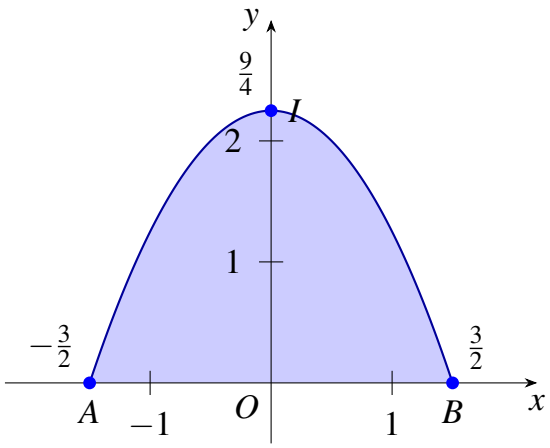


Dạng 4 Toán thực tế sử dụng diện tích hình phẳng

Ví dụ 1

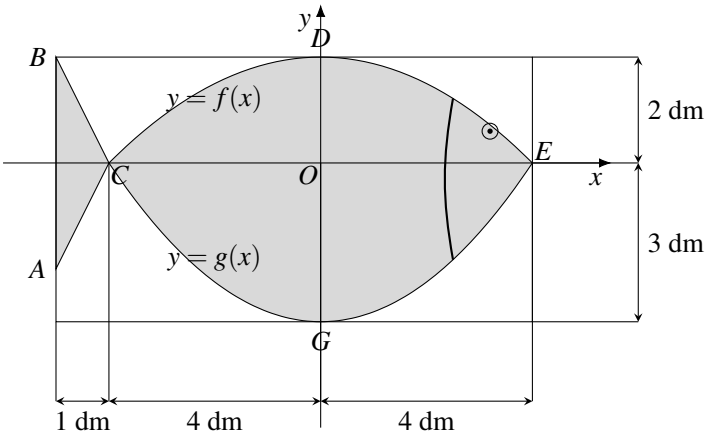
Cửa vòm lấy ánh sáng của một tòa nhà được thiết kế với kích thước như hình a). Cửa có hình dạng một parabol có đỉnh I và đi qua hai điểm A, B như hình b). Người ta dự định lắp kính cho cửa này. Tính diện tích kính cần lắp, biết rằng người ta chỉ sử dụng một lớp kính và bỏ qua diện tích khung cửa.





Ví dụ 2

Trên một cửa sổ có dạng hình chữ nhật, họa sĩ thiết kế logo hình con cá cho một doanh nghiệp kinh doanh hải sản. Logo là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol với các kích thước được cho trong hình bên (đơn vị trên mỗi trục là decimét).



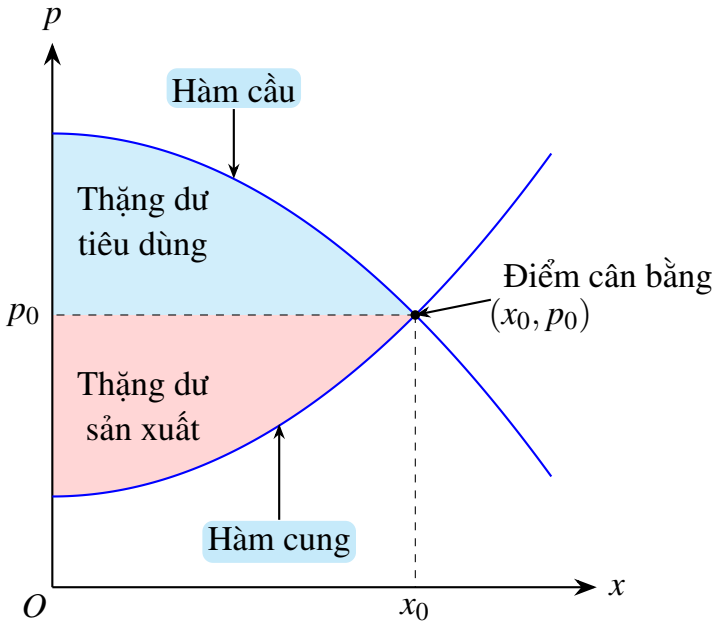
a) Lập các phương trình parabol $y = f(x), y = g(x)$.

b) Tính diện tích của logo.

c) Logo chỉ cho phép 50% lượng ánh sáng đi qua. Lượng ánh sáng đi qua toàn bộ cửa sổ sẽ giảm bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Ví dụ 3

Ta biết rằng hàm cầu liên quan đến giá p của một sản phẩm với nhu cầu của người tiêu dùng, hàm cung liên quan đến giá p của sản phẩm với mức độ sẵn sàng cung cấp sản phẩm của nhà sản xuất. Điểm cắt nhau $(x_0; p_0)$ của đồ thị hàm cầu $p = D(x)$ và đồ thị hàm cung $p = S(x)$ được gọi là điểm cân bằng.



Các nhà kinh tế gọi diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị hàm cầu, đường ngang $p = p_0$ và đường thẳng đứng $x = 0$ là thặng dư tiêu dùng. Tương tự, diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị của hàm cung, đường nằm ngang $p = p_0$ và đường thẳng đứng $x = 0$ được gọi là thặng dư sản xuất, như trong Hình bên. (Theo R. Larson, *Brief Calculus: An Applied Approach*, 8th edition, Cengage Learning, 2009).

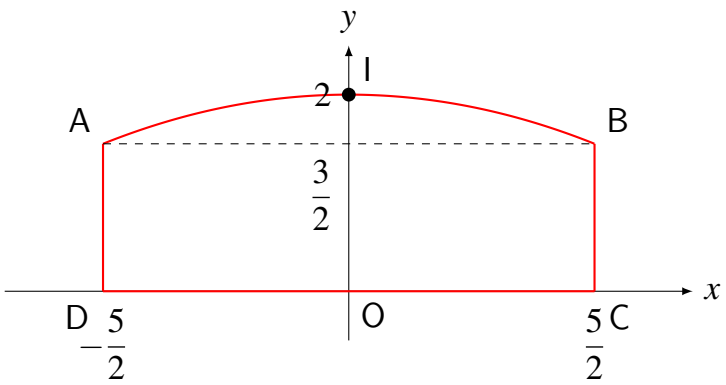
Giả sử hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm được mô hình hóa bởi: Hàm cầu: $p = -0,36x + 9$ và hàm cung: $p = 0,14x + 2$ trong đó x là số đơn vị sản phẩm. Tìm thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất cho sản phẩm này.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Một cái cổng có kích thước như hình 1. Vòm cổng có hình dạng một parabol có đỉnh $I(0;2)$ và đi qua điểm $B\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$ như Hình 2. Tính diện tích hai cánh cửa cổng.

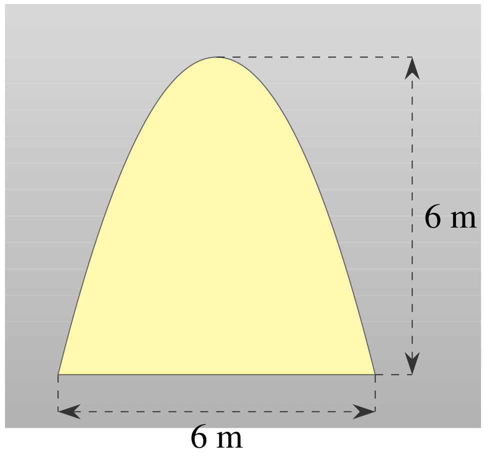




Bài 2

☆

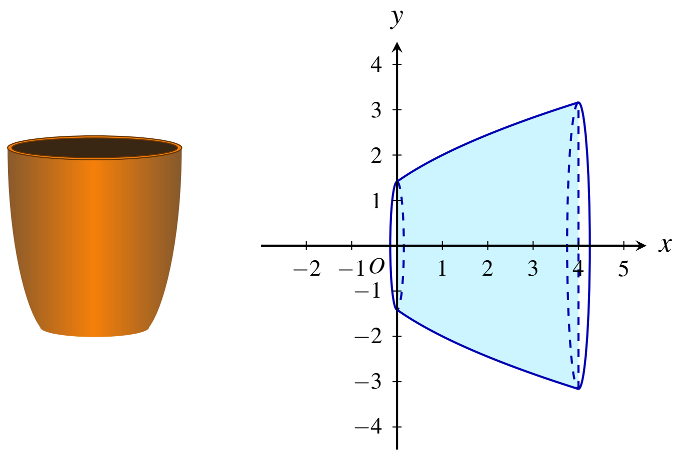
Mặt cắt của một cửa hầm có dạng là hình phẳng giới hạn bởi một parabol và đường thẳng nằm ngang như Hình bên. Tính diện tích của cửa hầm.



Dạng 5 Bài toán thực tế sử dụng thể tích khối tròn xoay và $S(x)$

Ví dụ 1

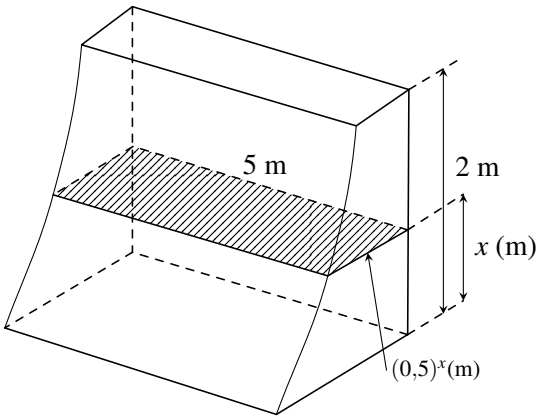
Hình bên dưới mô phỏng phần bên trong của một chậu cây có dạng khối tròn xoay tạo thành khi quay một phần của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}+\dfrac{3}{2}$ với $0 \le x \le 4$ quanh trục hoành. Tính thể tích phần bên trong (dung tích) của chậu cây, biết đơn vị trên các trục Ox, Oy là decimét.



a) b)

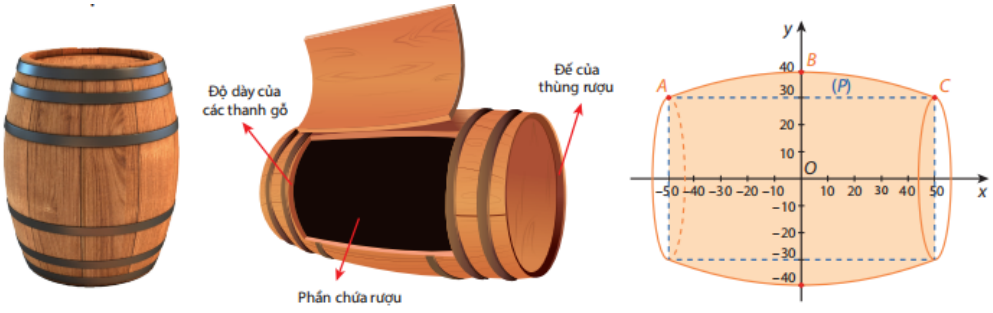
Ví dụ 2

Một khối bê tông cao 2 m được đặt trên mặt đất phẳng. Nếu cắt khối bê tông này bằng mặt phẳng nằm ngang, cắt mặt đất x (m) $(0 \le x \le 2)$ thì được mặt cắt là hình chữ nhật có chiều dài 5 m, chiều rộng $(0,5)^x$ (m). Tính thể tích của khối bê tông (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của mét khối).



Ví dụ 3

Một thùng rượu vang có dạng khối tròn xoay với bán kính mặt đáy và mặt trên là 33 cm, bán kính mặt cắt ở chính giữa thùng là 43 cm. Chiều cao toàn bộ thùng rượu là 112 cm, trong đó bao gồm phần thân thùng, hai đế đỡ (mỗi đế cao 3 cm) và thùng rượu được ghép từ các thanh gỗ sồi có độ dày mỗi thanh là 3 cm (Hình a, b). Hình c mô phỏng phần bên trong thùng rượu có dạng một khối tròn xoay tạo thành khi quay một phần của parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ quanh trục hoành.



a) b) c)

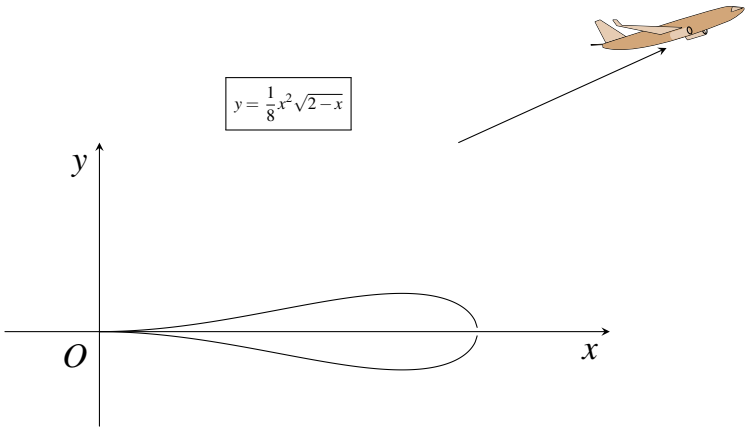
a) Tìm các hệ số a, b, c.

b) Hỏi thùng rượu chứa được tối đa bao nhiêu lít rượu? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

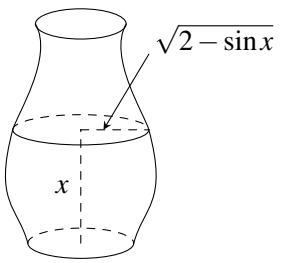
Bài 1

Bình chứa nhiên liệu của một chiếc máy bay phản lực được mô tả trong không gian là một khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{8}x^2\sqrt{2-x}$ với $(0 \le x \le 2)$ và trục Ox quanh trục Ox (x tính theo đơn vị m). Thể tích của bình chứa bằng $\frac{a\pi}{b}$ m^3 với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $a+b$ bằng bao nhiêu?

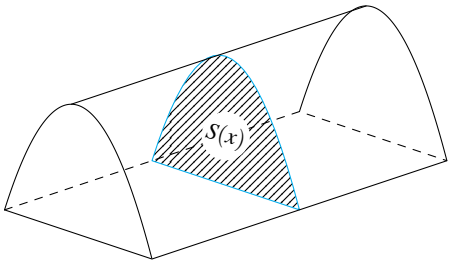


Bài 2

Một bình chứa nước dạng như Hình bên có chiều cao là $\frac{3\pi}{2}$ dm. Nếu lượng nước trong bình có chiều cao là x (dm) thì mặt nước là hình tròn có bán kính $\sqrt{2-\sin x}$ (dm) với $0 \le x \le \frac{3\pi}{2}$. Tính dung tích của bình (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của đêximét khối).

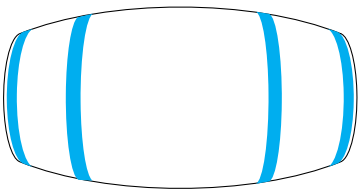


Bài 3



Để chuẩn bị cho hội trại do Đoàn trường tổ chức, lớp 12*A* dự định dựng một cái lều trại có dạng hình parabol như hình vẽ. Nền của lều trại là một hình chữ nhật có kích thước bề ngang 3 mét, chiều dài 6 mét, đỉnh trại cách nền 3 mét. Tính thể tích phần không gian bên trong lều trại.

Bài 4



Một thùng đựng rượu làm bằng gỗ là một hình tròn xoay (tham khảo hình bên). Bán kính các đáy là 30 cm, khoảng cách giữa hai đáy là 1 m, thiết diện qua trục vuông góc với trục và cách đều hai đáy có chu vi là 80π cm. Biết rằng mặt phẳng qua trục cắt mặt xung quanh của bình là các đường parabol. Thể tích của thùng rượu đó.

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính theo công thức

Ⓐ $\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. Ⓑ $\int\limits_b^a |f(x)|\,\mathrm{d}x$. Ⓒ $\left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$. Ⓓ $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 2. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và các đường thẳng $x=a$, $x=b$ bằng

Ⓐ $\left|\int\limits_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x\right|$. Ⓑ $\int\limits_a^b |f(x)+g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Ⓒ $\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$. Ⓓ $\int\limits_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$.

Câu 3. Cho một vật thể trong không gian $Oxyz$. Gọi β là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm có hoành độ $x=a$, $x=b$. Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích là $S(x)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó thể tích V của phần vật thể β tính bởi công thức là

Ⓐ $V=\pi\int\limits_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$. Ⓑ $V=\pi\int\limits_a^b S^2(x)\,\mathrm{d}x$. Ⓒ $V=S'(x)$. Ⓓ $V=\int\limits_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức nào?

Ⓐ $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. Ⓑ $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓒ $V=\pi^2\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Ⓓ $V=2\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 5. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-2x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=3$. Diện tích của hình phẳng (H) được tính bằng công thức nào dưới đây?

Ⓐ $S=\int\limits_2^3 (x^2-2x)\mathrm{d}x$. Ⓑ $S=\int\limits_0^3 (-x^2+2x)\mathrm{d}x$.

Ⓒ $S=\int\limits_2^3 \left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x$. Ⓓ $S=\int\limits_0^3 \left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x$.

Câu 6. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$, trục hoành Ox, các

đường thẳng $x=1$, $x=2$ là

Ⓐ $S=8$. Ⓑ $S=\dfrac{8}{3}$. Ⓒ $S=7$. Ⓓ $S=\dfrac{7}{3}$.

Câu 7. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-2x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=3$. Diện tích của hình phẳng (H) được tính bằng công thức nào dưới đây?

Ⓐ $S=\displaystyle\int_2^3 (x^2-2x)\mathrm{d}x$. Ⓑ $S=\displaystyle\int_0^3 (-x^2+2x)\mathrm{d}x$.

Ⓒ $S=\displaystyle\int_2^3 \left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x$. Ⓓ $S=\displaystyle\int_0^3 \left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x$.

Câu 8. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=7$ quay quanh trục Ox tạo thành khối tròn xoay có thể tích bằng

Ⓐ $\pi\displaystyle\int_0^7 2^x\ \mathrm{d}x$. Ⓑ $\displaystyle\int_0^7 |2^x|\ \mathrm{d}x$. Ⓒ $\pi\displaystyle\int_0^7 2^{2x}\ \mathrm{d}x$. Ⓓ $\displaystyle\int_0^7 2^{2x}\ \mathrm{d}x$.

Câu 9. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+6$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

Ⓐ $V=\pi\displaystyle\int_0^2 \left(x^2+6\right)^2\mathrm{d}x$. Ⓑ $V=\displaystyle\int_0^2 \left(x^2+6\right)\mathrm{d}x$.

Ⓒ $V=\displaystyle\int_0^2 \left(x^2+6\right)^2\mathrm{d}x$. Ⓓ $V=\pi\displaystyle\int_0^2 \left(x^2+6\right)\mathrm{d}x$.

Câu 10. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)=\sqrt{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$ quay quanh trục Ox là

Ⓐ $\displaystyle\int_0^2 x\mathrm{d}x$. Ⓑ $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{x}\mathrm{d}x$. Ⓒ $\pi\displaystyle\int_0^2 \sqrt{x}\mathrm{d}x$. Ⓓ $\pi\displaystyle\int_0^2 x\mathrm{d}x$.

Câu 11. Thể tích của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x$, $y=0$, $x=0$, $x=1$ quanh trục Ox là

Ⓐ $\dfrac{7\pi}{8}$. Ⓑ $\dfrac{8\pi}{15}$. Ⓒ $\dfrac{15\pi}{8}$. Ⓓ $\dfrac{8\pi}{7}$.

Câu 12. Khối tròn xoay do quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=\dfrac{1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$, $x=2$ có thể tích bằng

Ⓐ π. Ⓑ $\dfrac{\pi}{2}$. Ⓒ $\pi\ln 4$. Ⓓ $\pi\ln 2$.

Câu 13. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=\tan x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích bằng

Ⓐ π^2. Ⓑ $\frac{\pi^2}{4}+\pi$. Ⓒ $1-\frac{\pi}{4}$. Ⓓ $\pi-\frac{\pi^2}{4}$.

Câu 14. Vật thể B giới hạn bởi mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=2$. Cắt vật thể B với mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng x, $(0\le x\le 2)$ ta được thiết diện có diện tích bằng $x^2(2-x)$. Thể tích của vật thể B là

Ⓐ $V=\frac{2}{3}\pi$. Ⓑ $V=\frac{2}{3}$. Ⓒ $V=\frac{4}{3}$. Ⓓ $V=\frac{4}{3}\pi$.

Câu 15. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+x$; $y=x$; $x=4$ và trục tung.

Ⓐ $\frac{64}{3}\pi$. Ⓑ $\frac{64}{3}$. Ⓒ $\frac{128}{3}$. Ⓓ $\frac{128}{3}\pi$.

Câu 16. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=3x-x^2$ và trục hoành, quanh trục hoành.

Ⓐ $\frac{81\pi}{10}$ (đvtt). Ⓑ $\frac{85\pi}{10}$ (đvtt). Ⓒ $\frac{41\pi}{7}$ (đvtt). Ⓓ $\frac{8\pi}{7}$ (đvtt).

Câu 17. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=3x^2$, $y=2x+5$, $x=-1$ và $x=2$.

Ⓐ $S=27$. Ⓑ $S=\frac{256}{27}$. Ⓒ $S=\frac{269}{27}$. Ⓓ $S=9$.

Câu 18. Tính diện tích (S) của hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^2-x$, $y=2x+4$ và các đường thẳng thẳng $x=1$, $x=4$.

Ⓐ $S=\frac{1539}{10}$. Ⓑ $S=\frac{27}{2}$. Ⓒ $S=\frac{125}{6}$. Ⓓ $S=\frac{81}{2}$.

Câu 19. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-x$, $y=x+3$.

Ⓐ $\frac{32}{3}$. Ⓑ $\frac{16}{3}$. Ⓒ $\frac{16}{3}$. Ⓓ $\frac{2}{3}$.

Câu 20. Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x$, trục hoành. Quay hình phẳng (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là

Ⓐ $\frac{496\pi}{15}$. Ⓑ $\frac{32\pi}{15}$. Ⓒ $\frac{4\pi}{15}$. Ⓓ $\frac{16\pi}{15}$.

Câu 21. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=-x^2+x+6$ và $y=0$ bằng

Ⓐ $\frac{95\pi}{6}$. Ⓑ $\frac{95}{6}$. Ⓒ $\frac{125\pi}{6}$. Ⓓ $\frac{125}{6}$.

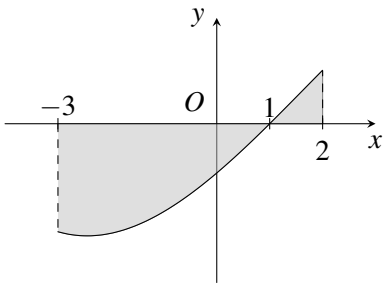
Câu 22. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=3$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0\le x\le 3)$ là một hình tròn có đường kính bằng $\sqrt{36-3x^2}$.

Ⓐ $V=\frac{81\pi}{4}$. Ⓑ $V=\frac{81}{4}$. Ⓒ $V=81\pi$. Ⓓ $V=81$.

Câu 23. Xét trong không gian $Oxyz$, tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=-1$ và $x=1$ biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-1\le x\le 1)$ là một hình vuông cạnh là $2\sqrt{1-x^2}$.

Ⓐ $V=\frac{16}{3}$. Ⓑ $V=\frac{16\pi}{3}$. Ⓒ $V=\frac{14}{3}$. Ⓓ $V=\frac{14\pi}{3}$.

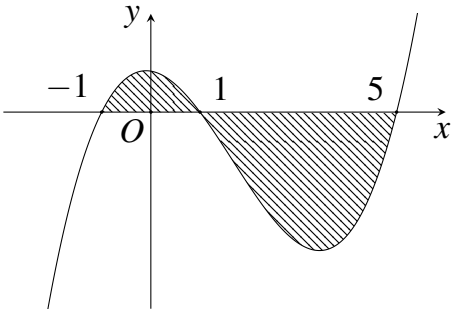
Câu 24. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-3, x=2$ (như hình vẽ). Đặt $a=\int\limits_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$, $b=\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$



Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $S=-a-b$. Ⓑ $S=a+b$. Ⓒ $S=a-b$. Ⓓ $S=b-a$.

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=-1$ và $x=5$ như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?



Ⓐ $S=-\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓑ $S=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

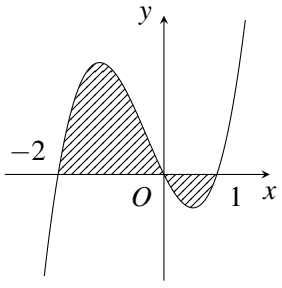
Ⓒ $S=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓓ $S=-\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 26. Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số $y=f(x)$. Gọi S là diện tích hình phẳng (phần gạch chéo trong hình), chọn khẳng định đúng.

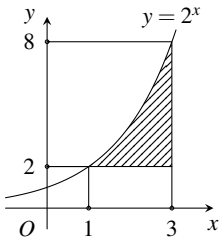
Ⓐ $S=\int\limits_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$. Ⓑ $S=\int\limits_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓒ $S=\int\limits_{0}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$. Ⓓ $S=\int\limits_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

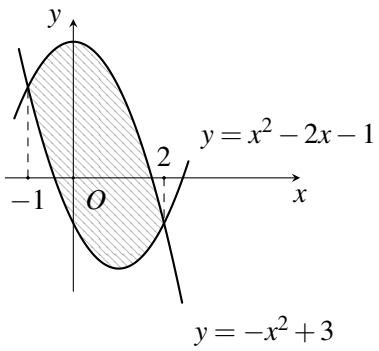


Câu 27. Diện tích hình phẳng gạch sọc trong hình vẽ bên bằng

Ⓐ $\int\limits_{3}^{1} 2^x\,\mathrm{d}x$. Ⓑ $\int\limits_{1}^{3} 2^x\,\mathrm{d}x$. Ⓒ $\int\limits_{3}^{1} (2^x-2)\,\mathrm{d}x$. Ⓓ $\int\limits_{1}^{3} (2^x-2)\,\mathrm{d}x$.

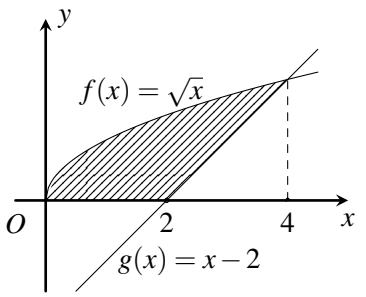


Câu 28. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



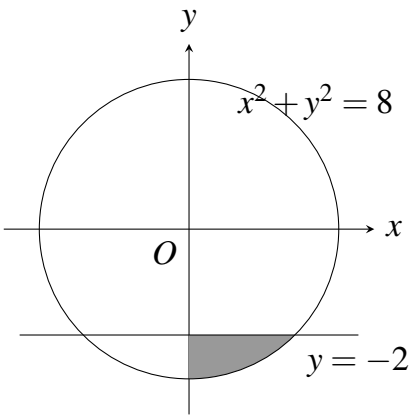
Ⓐ $\int_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)\mathrm{d}x$.
Ⓑ $\int_{-1}^{2}(-2x+2)\,\mathrm{d}x$.
Ⓒ $\int_{-1}^{2}(2x-2)\,\mathrm{d}x$.
Ⓓ $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$.

Câu 29. Cho $(\mathscr{H})$ là hình phẳng giới hạn bởi $y=\sqrt{x}$, $y=x-2$ và trục hoành (hình vẽ). Diện tích của $(\mathscr{H})$ bằng



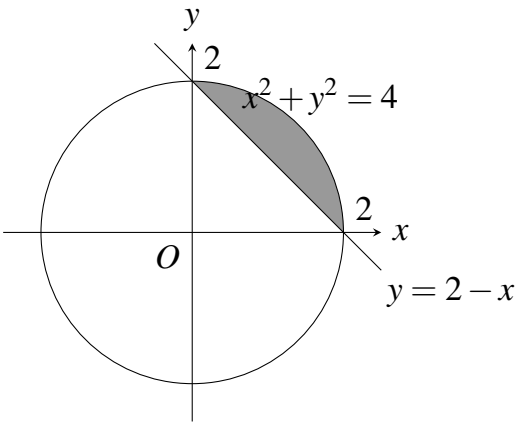
Ⓐ $\frac{16}{3}$.
Ⓑ $\frac{10}{3}$.
Ⓒ $\frac{7}{3}$.
Ⓓ $\frac{8}{3}$.

Câu 30. Diện tích phần tô đậm trong hình vẽ bên được tính bằng công thức nào?



Ⓐ $\int_{0}^{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{8-x^2}+2\right)\mathrm{d}x$.
Ⓑ $\int_{0}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}+2\right)\mathrm{d}x$.
Ⓒ $\int_{0}^{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{8-x^2}-2\right)\mathrm{d}x$.
Ⓓ $\int_{0}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-2\right)\mathrm{d}x$.

Câu 31. Diện tích phần tô đậm trong hình vẽ bên được tính bằng công thức nào?



Ⓐ $\int_{0}^{2}\left(\sqrt{4-x^2}+x-2\right)\mathrm{d}x$.
Ⓑ $\int_{0}^{2}\left(\sqrt{4-x^2}-x+2\right)\mathrm{d}x$.
Ⓒ $\int_{0}^{2}\left(2-x-\sqrt{4-x^2}\right)\mathrm{d}x$.
Ⓓ $\int_{0}^{2}\left(2-x+\sqrt{4-x^2}\right)\mathrm{d}x$.

Câu 32. Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi hai đồ thị $y=x^2+x$ và $y=2x$. Quay hình (H) quanh trục hoành, tính thể tích vật thể thu được

Ⓐ $\frac{3\pi}{10}$.
Ⓑ $\frac{5\pi}{6}$.
Ⓒ $\frac{\pi}{6}$.
Ⓓ $\frac{5}{6}$.

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Cho D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-x$, $x=-1$, $x=2$ và trục hoành. Gọi S là diện tích của D.

a) $S=\displaystyle\int_{-1}^{2}\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x$.

b) $S=\displaystyle\int_{-1}^{0}\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x$.

c) Thể tích của khối tròn xoay khi quay D quanh trục Ox là $V=\pi\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(x^2-x\right)^2\mathrm{d}x$.

d) $S=\dfrac{5}{6}$.

Câu 2. Cho hai hàm số $f(x)=x\sqrt{x}+8$, $g(x)=5^x-e^x$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

a) $\displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x=5^x\ln 5-e^x+C$.

b) $\displaystyle\int_{1}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x=F(3)-F(1)$.

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=g(x)$, trục Ox và các đường thẳng $x=1$, $x=2$ bằng 7,8 (làm tròn đến hàng phần chục).

d) Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox, $x=0$, $x=3$ quanh trục Ox bằng 312 (làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 3. Cho hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x-1$.

a) Họ nguyên hàm của hàm số là e^x-x+C (với C là hằng số).

b) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$, với $F(0)=3$ thì $F(x)=\mathrm{e}^x-x+2$.

c) Cho $\displaystyle\int_{0}^{1}g(x)\,\mathrm{d}x=7$, ta có $\displaystyle\int_{0}^{1}[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=7\mathrm{e}$.

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và đường thẳng $x=2$ bằng e^2-3.

Câu 4. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y=f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2$ và trục hoành.

a) $\displaystyle\int_{1}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x=-2$.

b) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{3}+C$.

c) Diện tích hình phẳng (H) bằng $\dfrac{9}{2}$.

d) Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox (làm tròn đến hàng phần chục) bằng 2,3 (đơn vị thể tích).

Câu 5. Cho hàm số $f(x)=x^2-3x+5$. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ và $F(1)=5$.

a) $F(4)=37$.

b) $\displaystyle\int_2^5 \left(x^2-3x+5\right)\mathrm{d}x=\frac{45}{2}$.

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $f(x)=x^2-3x+5$, $g(x)=x+2$ và hai đường thẳng $x=1$, $x=3$ bằng 4.

d) Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $f(x)=x^2-3x+5$, $g(x)=x+2$ và hai đường thẳng $x=1$, $x=3$ quanh trục Ox bằng $\dfrac{48}{5}\pi$.

Câu 6. Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{2}{x}$, $y=0$, $x=1$ và $x=4$.

a) $\displaystyle\int_1^m \frac{1}{x}\mathrm{d}x=2$ khi $m=\mathrm{e}^2$.

b) Diện tích hình (H) bằng $4\ln 2$.

c) Thể tích của khối tròn xoay khi quay hình (H) xung quanh trục hoành bằng 2π.

d) Gọi $x=k$ là đường thẳng chia hình (H) thành 2 phần có diện tích bằng nhau. Khi đó $k=1$.

Câu 7. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{x+1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=2, x=6$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

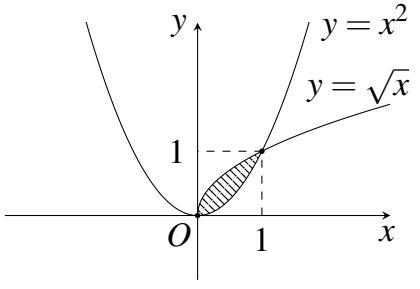
a) Diện tích hình phẳng (H) là $S=4+\ln 3$.

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=2; x=6$ là $S=2\ln 3$.

c) Thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox là $V=\dfrac{(13+6\ln 3)\pi}{3}$.

d) Thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và các đường thẳng $y=1, x=2, x=6$ quanh trục Ox là $V=\dfrac{1+6\ln 3}{3}$.

Câu 8. Cho hình phẳng được tô trong hình bên dưới.



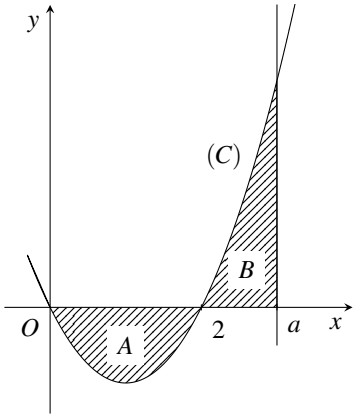
a) Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y=x^2$; $y=\sqrt{x}$.

b) Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\dfrac{1}{3}$.

c) Thể tích của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng trên quanh trục Ox là $\pi\displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x$.

d) Thể tích V của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $(P)\colon y=x^2$; $(C)\colon y=\sqrt{x}$ quanh trục Oy bằng $\dfrac{3\pi}{10}$.

Câu 9. Cho hàm số $y = x^2 - 2x$ có đồ thị (C). Kí hiệu A là hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$; B là hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành và hai đường thẳng $x = 2, x = a\,(a > 2)$. Gọi S_A, S_B lần lượt là diện tích của hình phẳng A, B. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



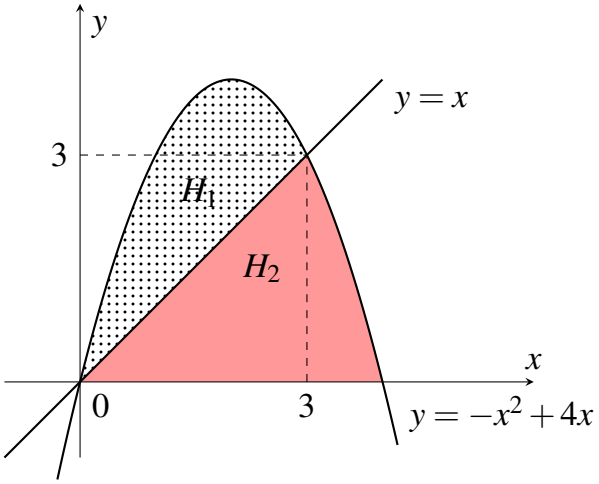
a) $S_A = \int\limits_0^2 \left(x^2 - 2x\right) \mathrm{d}x$.

b) $S_B = \int\limits_2^a \left(x^2 - 2x\right) \mathrm{d}x$.

c) Với $a = 3$ thì $S(A) = S(B)$.

d) $\int\limits_0^a \left(2x - x^2\right) \mathrm{d}x = S(A) + S(B)$.

Câu 10. Biết (H_1), (H_2) là hình phẳng được giới hạn bởi các đường như hình vẽ bên. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích các hình phẳng (H_1), (H_2). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $S_1 = \dfrac{9}{2}$.

b) $S_2 = \dfrac{19}{3}$.

c) Quay (H_1) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích bằng $\dfrac{81\pi}{10}$.

d) Quay (H_2) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích bằng $\dfrac{188\pi}{15}$.

3 Tự luận

Bài 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^3 - x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

Bài 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau:

a) $y = x^3 + 2x^2 - 3x, y = x^2 + 3x, x = 3, x = 0$;

b) $y = e^x, y = x^2 - 1, x = 1, x = -1$;

c) $y = \sin x, y = x, x = \dfrac{\pi}{2}, x = \pi$.

Bài 3. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường sau xung quanh trục Ox.

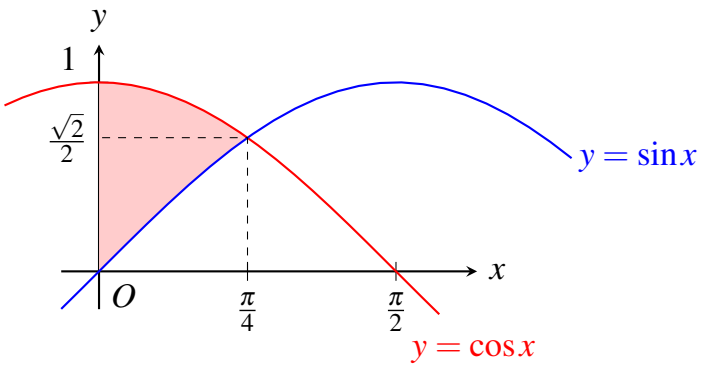
a) $y = 2x - x^2, y = 0, x = 0, x = 2$

b) $y = 2\sqrt{x}, y = 0, x = 1, x = 4$;

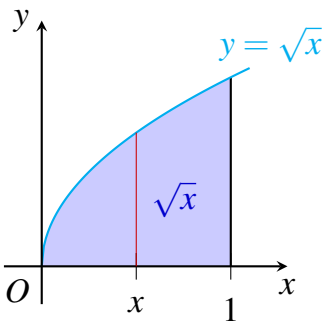
c) $y = \cos\dfrac{x}{2}, x = 0, x = \dfrac{\pi}{2}$;

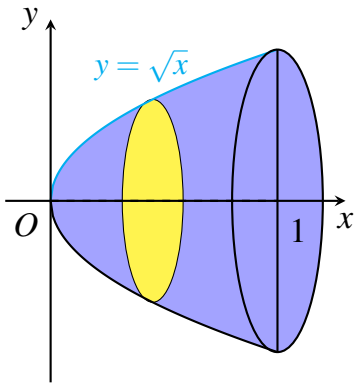
d) $y = 4x, y = x^3, x = 0, x = 2$.

Bài 4. Tính diện tích hình phẳng được tô đậm trong hình bên.



Bài 5. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 1$.



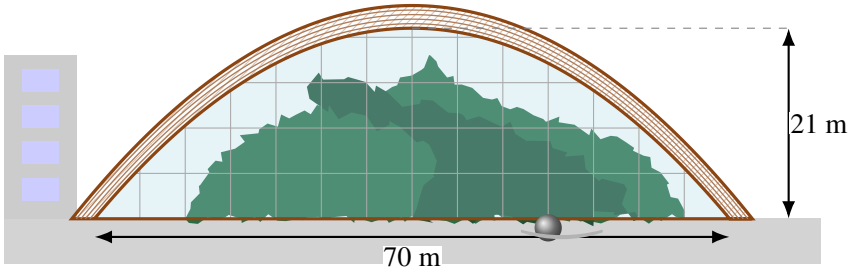


Bài 6. Xét hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}, y = \dfrac{x^2}{8}, x = 0, x = 4$.

a) Tính diện tích hình phẳng.

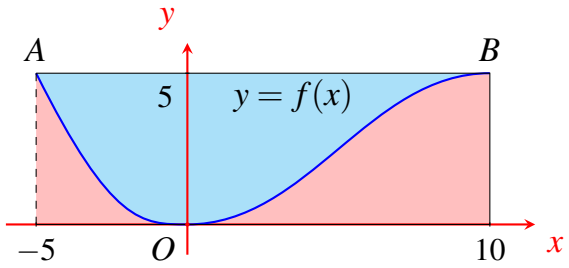
b) Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng quanh trục Ox.

Bài 7. Người ta dự định lắp kính cho cửa của một mái vòm có dạng hình parabol. Hãy tính diện tích mặt kính cần lắp vào, biết rằng vòm cửa cao 21 m và rộng 70 m.



Bài 8. Hình bên minh họa mặt cắt đứng của một con kênh đặt trong hệ trục tọa độ Oxy. Đáy của con kênh là một đường cong cho bởi phương trình

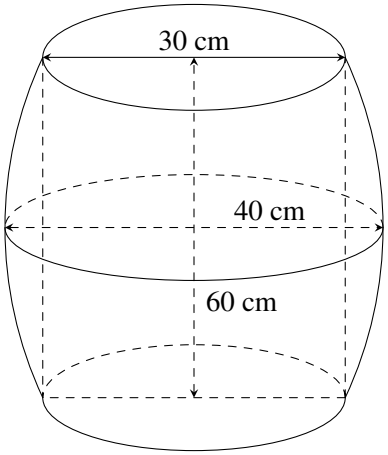
$$y = f(x) = \frac{3}{100}\left(-\frac{1}{3}x^3 + 5x^2\right).$$



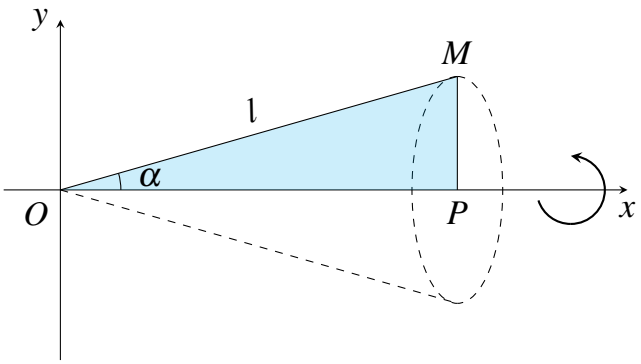
Hãy tính diện tích hình phẳng tô màu xanh trong Hình bên, biết đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét.

Bài 9. Người ta tạo ra mô hình một quả trứng ngỗng bằng cách quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{30}\sqrt{7569 - 400x^2}$ và trục hoành với $-4{,}35 \le x \le 4{,}35$ quanh trục hoành. Tính thể tích quả trứng, biết thể tích mô hình này xem như bằng thể tích quả trứng ngỗng và x, y tính theo centimét (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

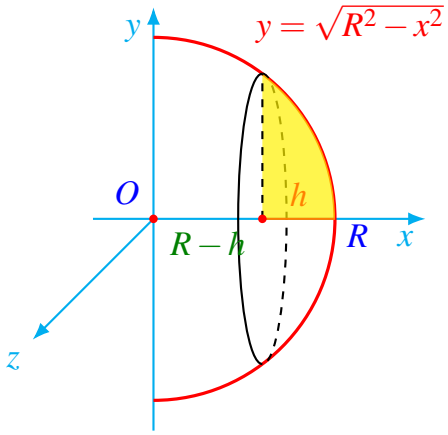
Bài 10. Một thùng đựng Bia hơi (có dạng như hình vẽ) có đường kính đáy là 30 cm, đường kính lớn nhất của thân thùng là 40 cm, chiều cao thùng là 60 cm, cạnh bên hông của thùng có hình dạng của một parabol. Tính thể tích của thùng Bia hơi (làm tròn đến hàng phần chục).

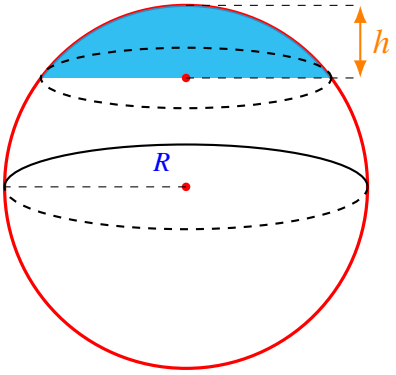


Bài 11. Cho tam giác vuông OPM có cạnh OP nằm trên trục Ox. Giả sử $\widehat{POM} = \alpha, OM = l$ $\left(0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{3}; l > 0\right)$. Gọi $\mathscr{N}$ là khối tròn xoay thu được khi quay tam giác đó xung quanh trục Ox (Hình bên). Tính thể tích của $\mathscr{N}$ theo α và l.

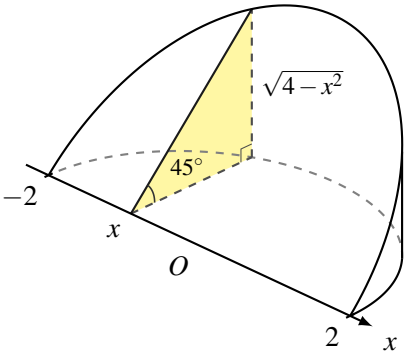


Bài 12. Khối chỏm cầu có bán kính R và chiều cao h $(0 < h \le R)$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = R - h, x = R$ xung quanh trục Ox (Hình vẽ bên dưới). Tính thể tích của khối chỏm cầu này.





Bài 13. Khi cắt một vật thể hình chiếc nêm bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-2 \le x \le 2)$, mặt cắt là tam giác vuông có một góc 45° và độ dài một cạnh góc vuông là $\sqrt{4-x^2}$ (dm) (Hình vẽ). Tính thể tích V của vật thể.



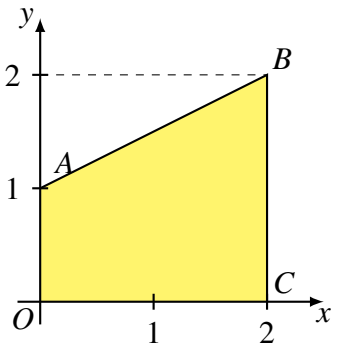
Bài 14. Các nhà kinh tế sử dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y = x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y = f(x)$, biểu thị sự phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0 \le x \le 100$, biểu thị "sự bất bình đẳng về thu nhập" của một quốc gia. Năm 2009, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hóa bởi hàm số

$$y = \left(0,00061x^2 + 0,0224x + 1,666\right)^2, 0 \le x \le 100$$

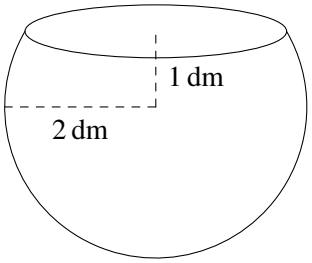
Trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất. Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì vào năm 2009 có giá trị gần nhất với giá trị là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

Bài 15. Chi phí nhiên liệu dự kiến C (tính bằng triệu đô la mỗi năm) khi sử dụng một loại xe tải của một công ty vận tải từ năm 2020 đến năm 2030 là $C_1 = 5,6 + 2,2t$, $0 \le t \le 10$, trong đó $t = 0$ tương ứng với năm 2020. Nếu công ty sử dụng một loại xe tải khác có động cơ hiệu quả hơn thì chi phí nhiên liệu dự kiến sẽ giảm và tuân theo hàm mô hình $C_2 = 4,7 + 2,04t$, $0 \le t \le 10$. Hỏi công ty có thể tiết kiệm được bao nhiêu khi sử dụng loại xe tải với động cơ hiệu quả hơn?

Bài 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang $OABC$ có $A(0;1)$, $B(2;2)$ và $C(2;0)$ (Hình vẽ). Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình thang $OABC$ quanh trục Ox.

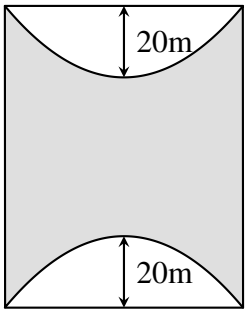


Bài 17. Một bể cá có dạng là một phần hình cầu được tạo thành khi cắt hình cầu bán kính 2 dm bằng mặt phẳng cách tâm của hình cầu 1 dm (Hình bên). Tính dung tích của bể cá (kết quả làm tròn đến hàng phần mười của đềximét khối).

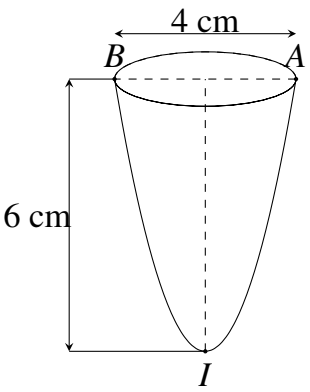


Bài 18. Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = F(3) - G(0) + a$ $(a > 0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x)$, $y = G(x)$, $x = 0$ và $x = 3$. Khi $S = 15$ tìm a.

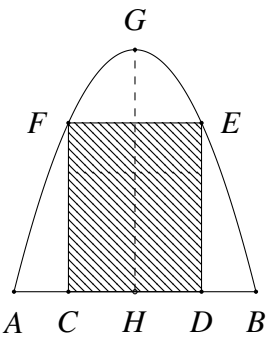
Bài 19. Kiến trúc sư thiết kế một khu sinh hoạt cộng đồng có dạng hình chữ nhật với chiều rộng và chiều dài lần lượt là 60 m và 80 m . Trong đó, phần được tô màu đậm là sân chơi, phần còn lại để trồng hoa. Mỗi phần trồng hoa có đường biên cong là một phần của parabol với đỉnh thuộc một trục đối xứng của hình chữ nhật và khoảng cách từ đỉnh đó đến trung điểm cạnh tương ứng của hình chữ nhật bằng $20m$ (xem hình minh họa). Diện tích của phần sân chơi là bao nhiêu mét vuông?



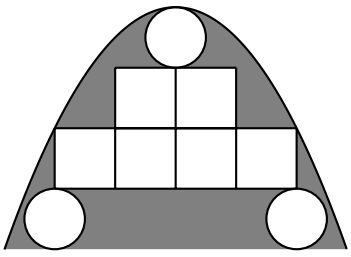
Bài 20. Có một vật thể là hình tròn xoay có dạng giống như một cái ly như hình vẽ dưới đây. Người ta đo được đường kính của miệng ly là 4 cm và chiều cao là 6 cm. Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một parabol. Tính thể tích V (cm^3) của vật thể đã cho.



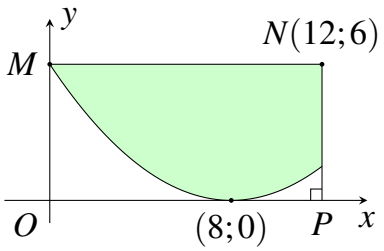
Bài 21. Một cánh cổng của một tòa nhà có dạng parabol gồm hai phần: phần hai cánh cửa hình chữ nhật $CDEF$, còn lại là phần xiên hoa trang trí. Biết rằng $GH = 4$ m, $AB = 4$ m và $AC = BD = 0{,}9$ m. Diện tích phần cổng làm xiên hoa trang trí (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) bằng bao nhiêu mét vuông?



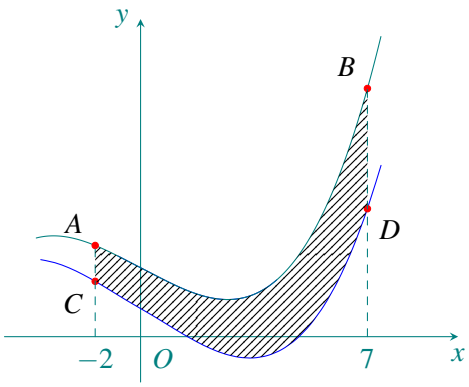
Bài 22. Một cửa vòm có dạng hình parabol được lắp các tấm kính hình tròn đường kính $1m$ và các tấm kính hình vuông có cạnh $1m$ như hình vẽ. Phần còn lại của cửa được sơn màu trang trí với mức giá 1,2 triệu đồng $/\mathrm{m}^2$. Chi phí sơn màu là bao nhiêu triệu đồng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?



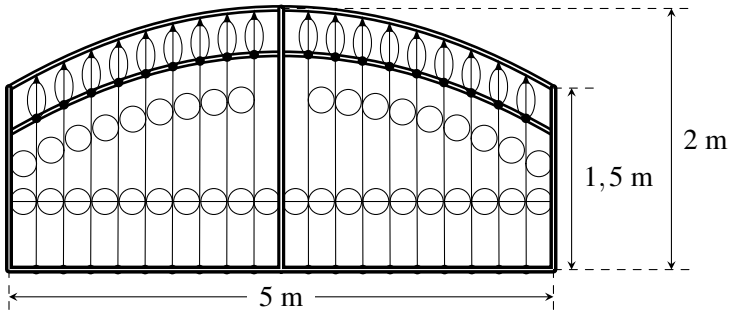
Bài 23. Một bể chứa nước có diện tích mặt cắt ngang được tô màu như hình bên, ở đó đơn vị trên các trục đo bằng mét. Trên mặt cắt ngang, phần đáy của bể chứa có phương trình $y = k(x-8)^2$. Tính diện tích của mặt cắt ngang theo mét vuông.



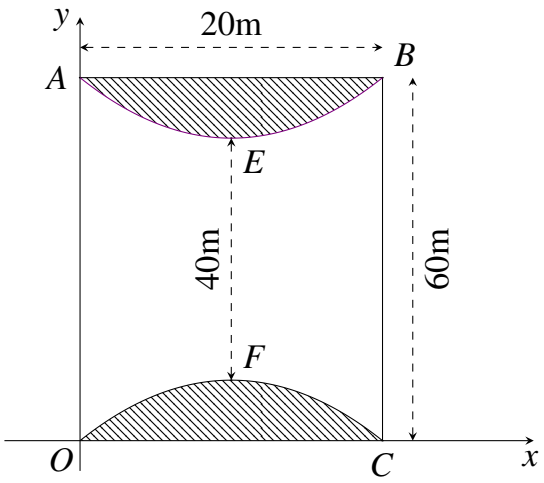
Bài 24. Hưởng ứng chính sách hiện đại hóa nông thôn, người dân ở khu phố A đồng lòng cùng nhau góp tiền đổ bê tông một đường đi trong khu phố (phần được tô đậm trong hình vẽ). Biết rằng khi chọn hệ trục tọa độ Oxy với đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 10 m, các đường cong AB, CD là mép đường được cho bởi đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{1}{32}x^2-\dfrac{3}{8}x+\dfrac{5}{2}$ và $g(x)=\dfrac{1}{32}x^2-\dfrac{5}{8}x+1$, đồng thời lớp bê tông được đổ dày 16 cm và giá tiền 1 m^3 bê tông là 1 080 000 đồng. Tính số tiền (đơn vị triệu đồng) cần dùng để đổ bê tông con đường đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



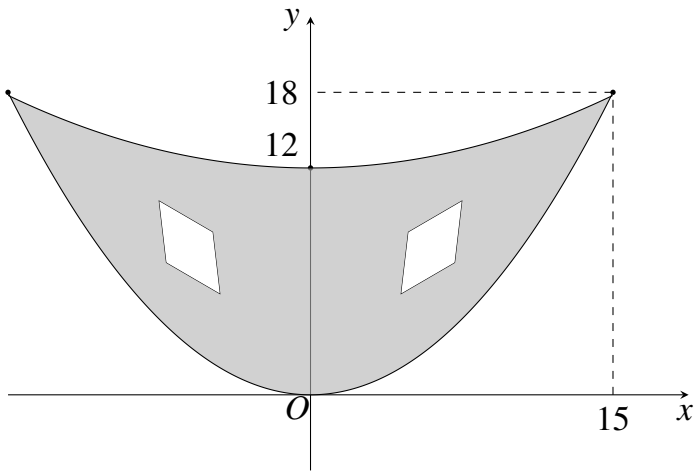
Bài 25. Ông Bình muốn làm một cổng sắt có hình dạng và kích thước giống hình vẽ, biết đường cong phía trên là một parabol. Nếu giá một mét vuông cổng sắt là 1 200 000 đồng thì ông Bình phải trả bao nhiêu tiền để làm cổng sắt như vậy (số tiền phải trả tính theo đơn vị là triệu đồng)?



Bài 26. Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài 60 m, chiều rộng 20 m. Người ta muốn trồng hoa ở hai đầu của mảnh đất hai hình bằng nhau giới hạn bởi hai đường parabol có hai đỉnh cách nhau 40 m và nhận đường trung bình của hình chữ nhật làm trục đối xứng (như hình vẽ bên dưới). Phần còn lại của mảnh đất người ta lát gạch. Tính diện tích phần lát gạch (m^2) (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

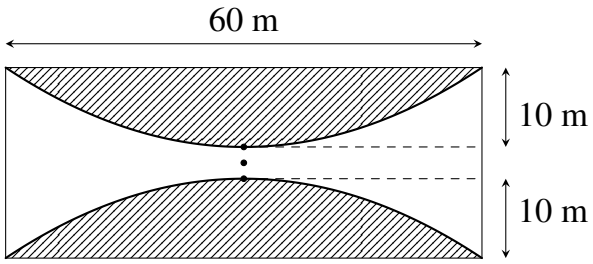


Bài 27. Để tham gia lễ hội hóa trang, Bạn An dự định làm một chiếc mặt nạ nửa mặt bằng chất liệu giấy cứng. Hình dạng của chiếc mặt nạ được bạn thiết kế trên mặt phẳng tọa độ Oxy là phần hình phẳng giới hạn bởi hai đường parabol (P_1), (P_2) lần lượt có đỉnh là gốc tọa độ O và điểm $I(0;12)$, cùng nhận trục Oy làm trục đối xứng và cùng đi qua điểm $M(15;18)$. Mỗi đơn vị trên các trục tọa độ có độ dài 1 cm. Sau đó, bạn vẽ hai hình thoi bằng nhau có độ dài các đường chéo là $2\sqrt{2}$ cm và $4\sqrt{2}$ cm để khoét làm mắt (minh họa như hình vẽ dưới đây).



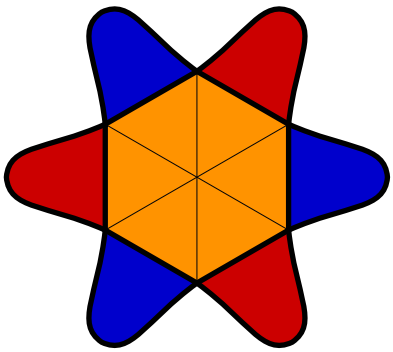
Công đoạn cuối cùng là tô màu xám cho một mặt của mặt nạ. Tính diện tích cần tô màu theo đơn vị cm^2.

Bài 28. Ông Minh sở hữu một mảnh vườn hình chữ nhật. Ông Minh dự định chia mảnh vườn đó thành 2 khu vực, phần gạch sọc là trồng hoa lan, phần còn lại là trồng hoa hồng (hai đường cong là parabol có đỉnh đối xứng qua tâm của mảnh vườn và có chung trục đối xứng).

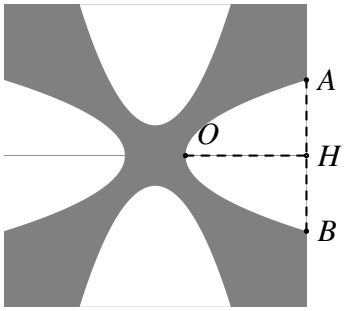


Biết tiền trả cho công nhân phần trồng hoa lan là 40 000 đồng/m^2, trồng hoa hồng là 50 000 đồng/m^2 và số tiền ông Minh trả cho công nhân trồng hoa ở hai khu vực của mảnh vườn là bằng nhau. Tính độ dài chiều còn lại của mảnh vườn đó.

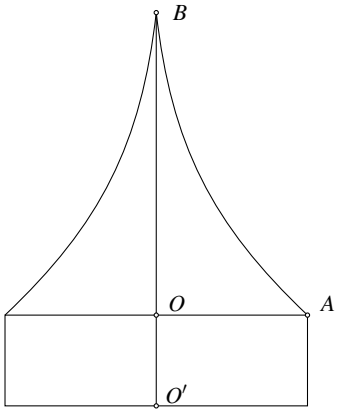
Bài 29. Một nghệ sĩ đang thực hiện vẽ tranh tường 3D nghệ thuật để trang trí nội thất. Mỗi bức tranh gồm một hình lục giác đều có cạnh bằng 30 cm , trên mỗi cạnh của hình lục giác đều có một cánh hoa hình parabol, đỉnh của parabol cách cạnh lục giác đều 30 cm và nằm phía ngoài hình lục giác, đường parabol đó đi qua hai đầu mút của mỗi cạnh (xem hình bên). Biết tổng giá vẽ tranh 3D (bao gồm công và vật tư) là 500 000 đồng $/\text{m}^2$. Hỏi nghệ sĩ nhận được bao nhiêu tiền sau khi hoàn thành bức tranh? (*Làm tròn đến nghìn* đồng *gần nhất*).



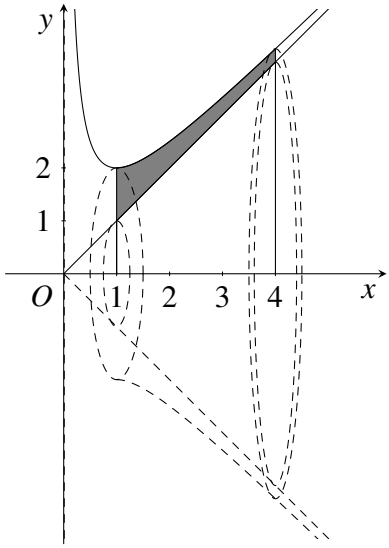
Bài 30. Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình vẽ bên. Biết $AB = 5$ cm, $OH = 4$ cm. Biết giá trang trí hoa văn 1cm^2 là 50.000 đồng, tính số tiền cần bỏ ra để trang trí hoa văn đó (đơn vị triệu đồng, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



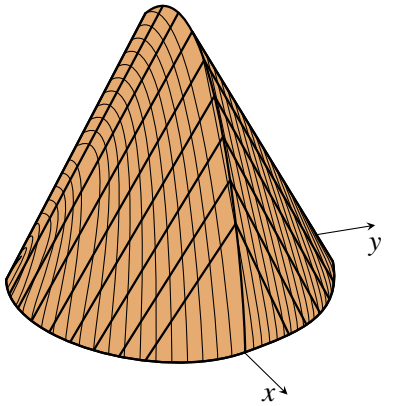
Bài 31. Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, nhóm bạn Lan đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên. Biết rằng $OO' = 6$ (cm), $OA = 10$ (cm), $OB = 20$ (cm), đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm B. Tính thể tích của chiếc mũ (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị*).



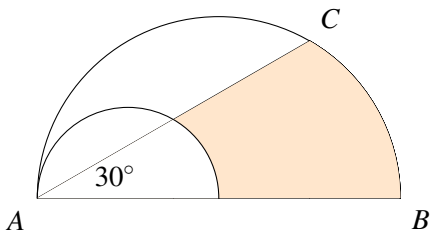
Bài 32. Một chiếc bát thủy tinh có bề dày của phần xung quanh là một khối tròn xoay, khi xoay hình phẳng D quanh một đường thẳng a bất kì nào đó mà khi gắn hệ trục tọa độ Oxy (đơn vị trên trục là decimet) vào hình phẳng D tại một vị trí thích hợp, thì đường thẳng a sẽ trùng với trục Ox. Khi đó hình phẳng D được giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x + \dfrac{1}{x}$, $y = x$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 4$ như hình dưới đây. Thể tích của bề dày chiếc bát thủy tinh đó bằng bao nhiêu decimet khối? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



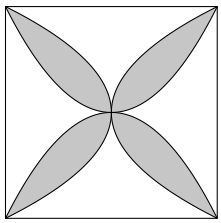
Bài 33. Cho vật thể có đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 (tham khảo hình vẽ). Khi cắt vật thể bằng mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-1 \le x \le 1)$ thì được thiết diện là một tam giác đều. Thể tích V của vật thể đó là bao nhiêu (*làm tròn đến hàng phần trăm*)?



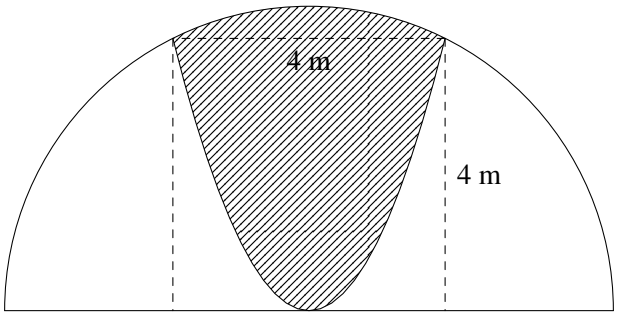
Bài 34. Cho hai nửa đường tròn như hình vẽ, biết đường kính của đường tròn lớn gấp đôi đường kính của đường tròn nhỏ. Nửa đường tròn đường kính AB có diện tích là 32π và $\widehat{BAC} = 30°$. Ký hiệu (H) là hình phẳng được tô màu như trong hình vẽ. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình (H) quay quanh trục AB. (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



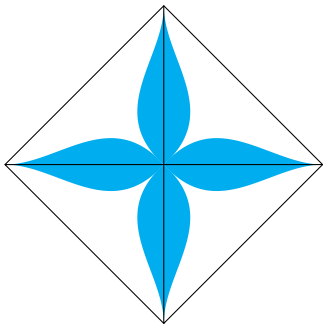
Bài 35. Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 60 (cm). Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô mầu sẫm như hình vẽ bên). Diện tích phần cánh hoa của viên gạch là bao nhiêu?



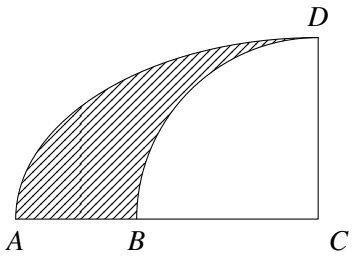
Bài 36. Một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính bằng $4\sqrt{5}$ (m). Trên đó người thiết kế hai phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm nửa hình tròn và hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần gạch sọc), cách nhau một khoảng bằng 4 m, phần còn lại của khuôn viên (phần không gạch sọc) dành để trang trí cỏ nhân tạo. Biết các kích thước cho như hình vẽ và kinh phí cỏ nhân tạo là 100 000 đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trang trí cỏ trên phần đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



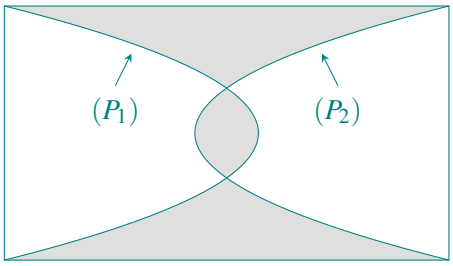
Bài 37. Một công ty có ý định thiết kế một logo hình vuông có độ dài nửa đường chéo bằng 4. Biểu tượng 4 chiếc lá (được tô màu) được tạo thành bởi các đường cong đối xứng với nhau qua tâm của hình vuông và qua các đường chéo. Một trong số các đường cong ở nửa bên phải của logo là một phần của đồ thị hàm số bậc ba dạng $y = ax^3 + bx^2 - x$ với hệ số $a < 0$. Để kỷ niệm ngày thành lập 2/3, công ty thiết kế để tỉ số diện tích được tô màu so với phần không được tô màu bằng $\frac{2}{3}$. Tính $2a + 2b$.



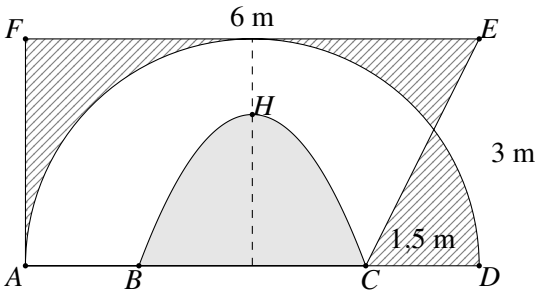
Bài 38. Một vật trang trí có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (H) (phần gạch sọc trong hình vẽ bên) quanh trục AC. Biết rằng $AC = 5$ cm, $BC = 3$ cm, miền (H) được giới hạn bởi đoạn thẳng AB, cung tròn BD có tâm C, đường cong elip AD có trục AC và CD. Thể tích của vật trang trí bằng bao nhiêu centimet khối (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



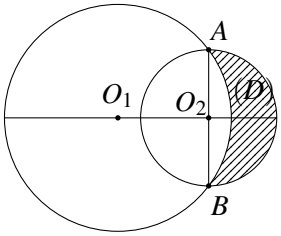
Bài 39. Trang trí một sân hình chữ nhật kích thước 28 m $\times$16 m, trong đó hai Parabol (P_1) đối xứng với (P_2) qua đường thẳng đi qua hai trung điểm của chiều dài sân (hình vẽ), khoảng cách giữa hai đỉnh Parabol bằng 4 m. Chi phí trang trí cho phần tô đậm là 180 nghìn đồng trên một mét vuông, phần trắng là 160 nghìn đồng trên một mét vuông. Tổng chi phí trang trí cho sân là bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Bài 40. Bác Bình muốn nhờ thợ trang trí một bức tường hình chữ nhật $ADEF$ với kích thước $EF = 6$ m, $DE = 3$ m sao cho cân xứng hai nửa. Phần gạch chéo là hình giới hạn bởi đường gấp khúc $AFED$ và nửa đường tròn đường kính AD, được thuê sơn với đơn giá 250000 đồng mỗi mét vuông. Phần màu trắng giới hạn bởi nửa đường tròn đường kính AD và một đường parabol (có đỉnh H cách đường thẳng AB một khoảng bằng 2 m và đi qua hai điểm B, C nằm trên cạnh AD thỏa mãn $AB = CD = 1{,}5$ m) được thuê trang trí bằng bức phù điêu đắp bằng xi măng với đơn giá 1950000 đồng mỗi mét vuông (tham khảo hình vẽ). Hỏi bác Bình phải trả bao nhiêu triệu đồng để trang trí bức tường như vậy (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

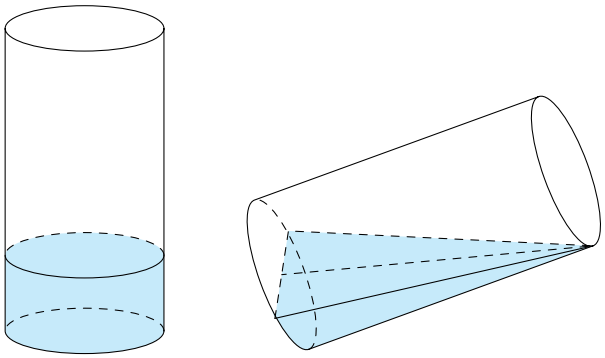


Bài 41. Cho hai đường tròn $(O_1;5)$ và $(O_2;3)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn (O_2). Gọi (D) là hình thẳng được giới hạn bởi hai đường tròn (phần ở ngoài đường tròn lớn, được gạch chéo như hình vẽ).

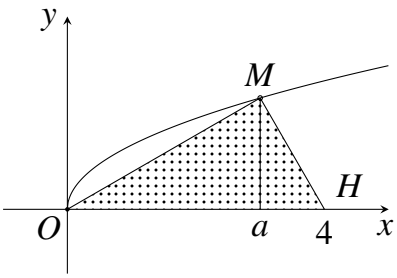


Một vật trang trí có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (D) quanh trục O_1O_2. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành có $V = \dfrac{a\pi}{b}$ ($\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì $a^2 + b^3$ bằng bao nhiêu?

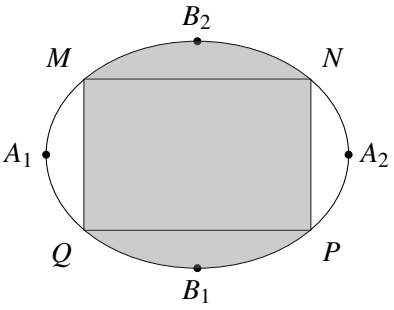
Bài 42. Có một cốc thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là 4 cm, chiều cao trong lòng cốc là 12 cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc (cm^3), biết rằng khi nghiêng cốc nước vừa lúc nước chạm miệng cốc, mực nước trùng với đường kính đáy.



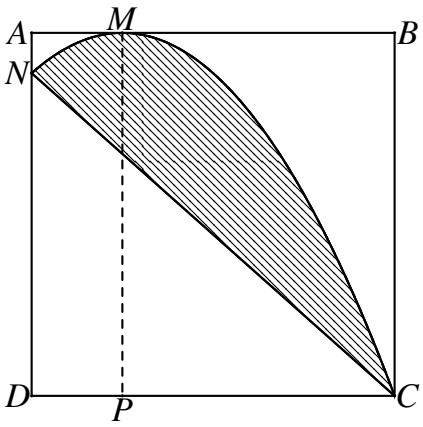
Bài 43. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=\sqrt{x}$, trục hoành Ox và hai đường thẳng $x=0, x=4$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quanh hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $x=0, x=4$ và trục Ox. Đường thẳng $x=a$ $(0<a<4)$ cắt đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ tại M. Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác MOH quanh trục Ox. Khi $V=2V_1$. Tìm a.



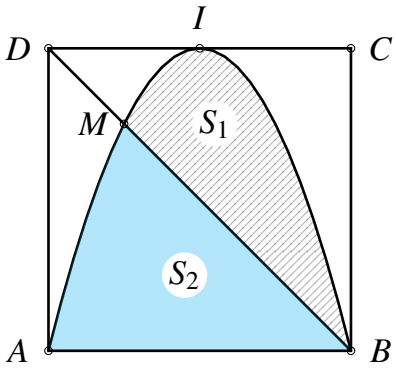
Bài 44. Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên dưới. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200.000 (đồng) và phần còn lại 100.000 (đồng). Biết $A_1A_2=8$ m, $B_1B_2=6$ m và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ=3$ m. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên (làm tròn đến hàng phần chục, đơn vị triệu đồng) bằng bao nhiêu?



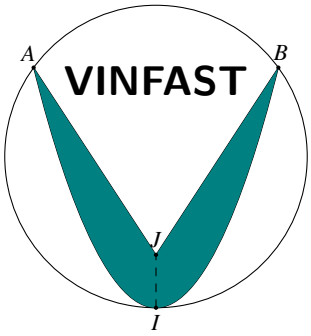
Bài 45. Ông Duy có một mảnh vườn hình vuông cạnh bằng 8 m. Ông dự định xây một cái bể bơi đặc biệt (phần kẻ sọc trong hình vẽ bên). Biết $AM=\dfrac{AB}{4}$, phần đường cong đi qua các điểm C, M, N là một phần của đường Parabol có trục đối xứng là $MP(MP/\!/AD)$ và chi phí để làm bể bơi là 5 triệu đồng /1 m^2. Số tiền ông Duy phải trả để xây cái bể bơi đó là bao nhiêu triệu đồng? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



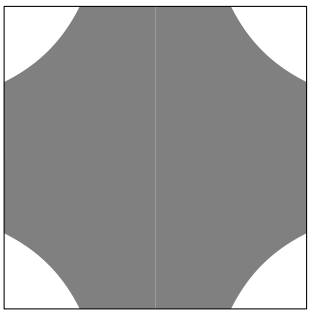
Bài 46. Một biển quảng cáo có dạng hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 4 m và I là trung điểm của đoạn thẳng CD. Trên tấm biển đó có đường parabol đỉnh I đi qua A, B và cắt đường chéo BD tại M (tham khảo hình vẽ). Chi phí sơn phần tô hình gạch sọc (có diện tích S_1) là 200000 đồng/m^2, chi phí sơn phần tô đậm (có diện tích S_2) là 150000 đồng/m^2 và phần còn lại là 120000 đồng/m^2. Số tiền cần chi trả để sơn tấm biển quảng cáo là bao nhiêu nghìn đồng?



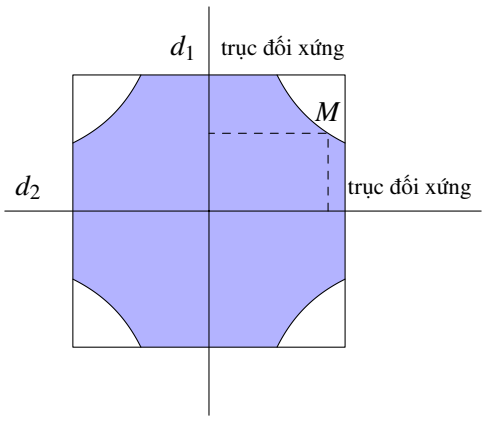
Bài 47. Lô gô gắn tại các Showroom của hãng ô tô VINFAST là một hình tròn. Phần tô đậm (nằm giữa parabol đỉnh I và đường gấp khúc AJB) được dát bạc với chi phí 10 triệu đồng/m^2. Phần còn lại của hình tròn được phủ sơn với chi phí 2 triệu đồng/m^2. Biết $AB = 2$ m, $IA = IB = \sqrt{5}$ m và $JA = JB = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$ m. Tính tổng số tiền (đơn vị: triệu đồng) để dát bạc và phủ sơn toàn bộ lô gô nói trên (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

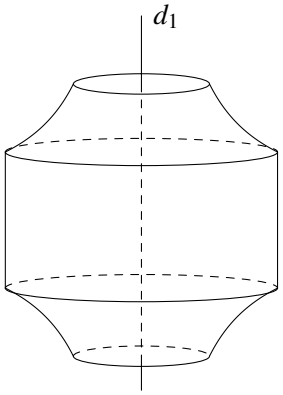


Bài 48. Người ta thiết kế một mẫu gạch lát nền nhà có dạng hình vuông cạnh 4 dm. Bốn góc viên gạch màu trắng, phần ở giữa màu xanh (Hình vẽ). Đường viền của phần màu xanh bao gồm bốn đoạn thẳng nằm trên các cạnh hình vuông và bốn đường cong có tính chất: Tích khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường cong đó đến hai trục đối xứng của viên gạch (hai đường thẳng đi qua tâm viên gạch và lần lượt song song với hai cạnh vuông góc) bằng 2 dm^2. Hãy cho biết phần màu xanh có diện tích bằng bao nhiêu decimét vuông (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười*)?

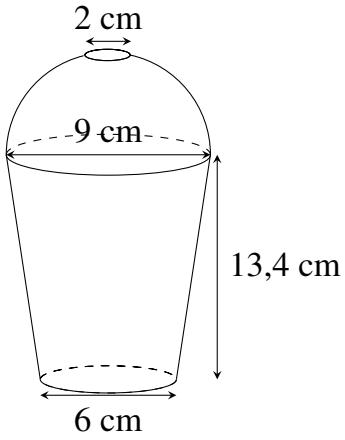


Bài 49. Có một hình phẳng (H) (phần tô đậm trong hình vẽ) được tạo ra bằng cách vẽ một hình vuông có cạnh bằng 4. Sau đó, ở bốn góc hình vuông đó vẽ bốn đường cong đều có tính chất là: tích khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mỗi đường cong đó đến hai trục đối xứng d_1, d_2 của hình vuông bằng 2. Khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục d_1 ta sẽ thu được một vật thể tròn xoay, thể tích vật thể tròn xoay đó bằng bao nhiêu *(không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần trăm)*

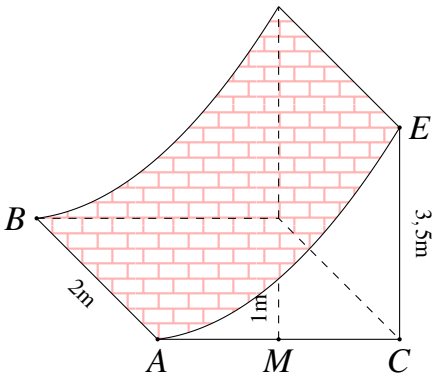




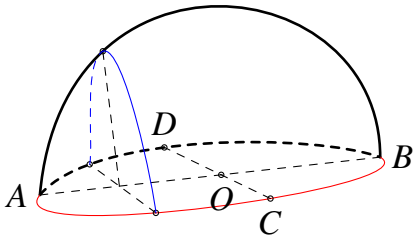
Bài 50. Một ly trà sữa dạng hình nón cụt, có đường kính đáy ly 6 (cm), đường kính miệng ly 9 (cm), chiều cao 13,4 (cm), ở miệng ly có sử dụng một nắp đậy có hình dạng nửa mặt cầu và ở đỉnh của nửa mặt cầu này có một hình tròn có đường kính 2 (cm) để cắm ống hút, mặt phẳng chứa hình tròn này song song với mặt phẳng chứa miệng ly (tham khảo hình vẽ sau). Tính thể tích bên trong của ly bao gồm cả thể tích của nắp (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị*).



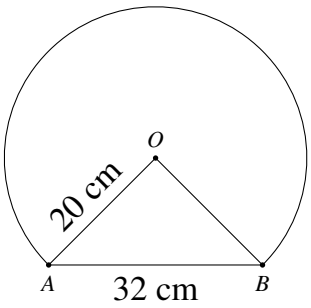
Bài 51. Chướng ngại vật "tường cong" trong một sân thi đấu X-Game là một khối bê tông có chiều cao từ mặt đất lên là 3,5 m. Giao của mặt tường cong và mặt đất là đoạn thẳng $AB = 2$ m. Thiết diện của khối tường cong cắt bởi mặt phẳng vuông góc với AB tại A là một hình tam giác vuông cong ACE với $AC = 4$ m, $CE = 3,5$ m và cạnh cong AE nằm trên một đường parabol có trục đối xứng vuông góc với mặt đất. Tại vị trí M là trung điểm của AC thì tường cong có độ cao 1 m (xem hình minh họa bên). Cần sử dụng bao nhiêu mét khối bê tông để tạo nên khối tường cong đó?



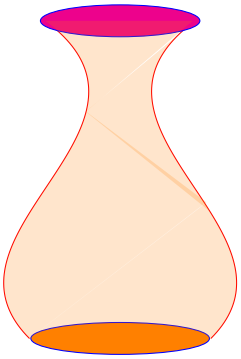
Bài 52. Khi thi công tuyến cao tốc Nghi Sơn - Bãi Vọt, đơn vị thi công cần san một ngọn núi nhỏ. Biết đường viền chân núi là một elip có trục lớn $AB = 400$ m và trục bé $CD = 200$ m; mặt cắt bởi mặt phẳng chứa AB và vuông góc với mặt đất là nửa hình tròn đường kính AB; mặt cắt bởi các mặt phẳng vuông góc với AB có dạng parabol với đỉnh thuộc nửa đường tròn đường kính AB (tham khảo hình vẽ). Tính thể tích ngọn núi đó theo đơn vị triệu m^3 (*làm tròn đến hàng phần trăm*).



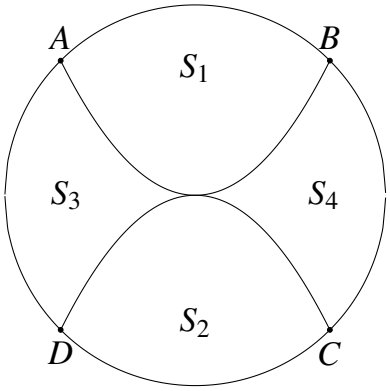
Bài 53. Hoạ sĩ thiết kế một chiếc mũ xe máy có dạng khối tròn xoay, mặt cắt đứng chứa tâm của khối tròn xoay có dạng một cung tròn bán kính 20 cm, với độ dài dây cung là 32 cm (hình bên). Thể tích của khối tròn xoay này là bao nhiêu dm^3 (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị*)?



Bài 54. Một bình hoa có dạng khối tròn xoay với chiều cao là 25 cm. Khi cắt bình hoa theo một mặt phẳng vuông góc với trục của nó thì ta luôn được thiết diện là một hình tròn có bán kính $R = \frac{4}{9}x^3 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{25}{36}$ (dm) với $x \in \left[0; \frac{5}{2}\right]$ là khoảng cách từ mặt cắt tới mặt đáy của bình hoa. Lượng nước cần đổ vào bình để mức nước trong bình cao bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của bình chiếm tỉ lệ bao nhiêu phần trăm so với thể tích của bình hoa? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

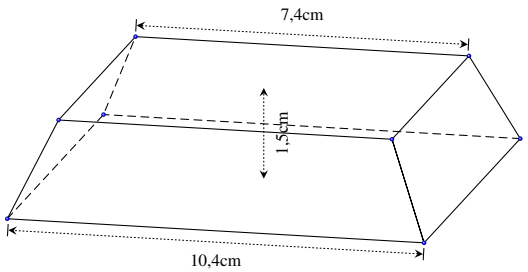


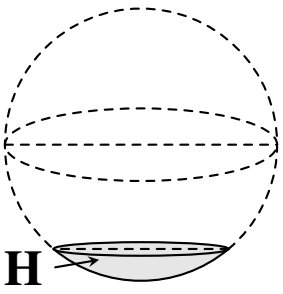
Bài 55. Sân trường có một bồn hoa hình tròn có tâm O. Một nhóm học sinh lớp 12 được giao thiết kế bồn hoa, nhóm này định chia bồn hoa thành bốn phần, bởi hai đường parabol có cùng đỉnh O và đối xứng nhau qua O. Hai đường parabol này cắt đường tròn tại bốn điểm A, B, C, D tạo thành một hình vuông có cạnh bằng 4 m (như hình vẽ).

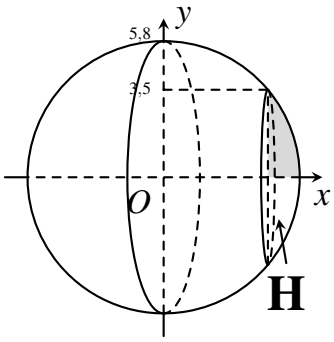


Phần diện tích S_1, S_2 dùng để trồng hoa, phần diện tích S_3, S_4 dùng để trồng cỏ (Diện tích làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai). Biết kinh phí để trồng hoa là 150 000 đồng/m^2, kinh phí để trồng cỏ là 100 000 đồng/m^2. Để trồng bồn hoa đó nhà trường cần số tiền là bao nhiêu nghìn đồng? (Số tiền làm tròn đến hàng chục nghìn).

Bài 56 (CT – THPTQG 2025). Để đặt một vật trang trí trên mặt bàn, người ta thiết kế một chân đế như sau. Lấy một khối gỗ có dạng khối chóp cụt tứ giác đều với độ dài hai cạnh đáy lần lượt bằng 7,4 cm và 10,4 cm, bề dày của khối gỗ bằng 1,5 cm. Sau đó khoét bỏ một phần của khối gỗ sao cho phần đó có dạng vật thể H, ở đó H nhận được bằng cách cắt khối cầu bán kính 5,5 cm bởi một mặt phẳng cắt mà mặt cắt là hình tròn có bán kính 3,5 cm (xem hình dưới).

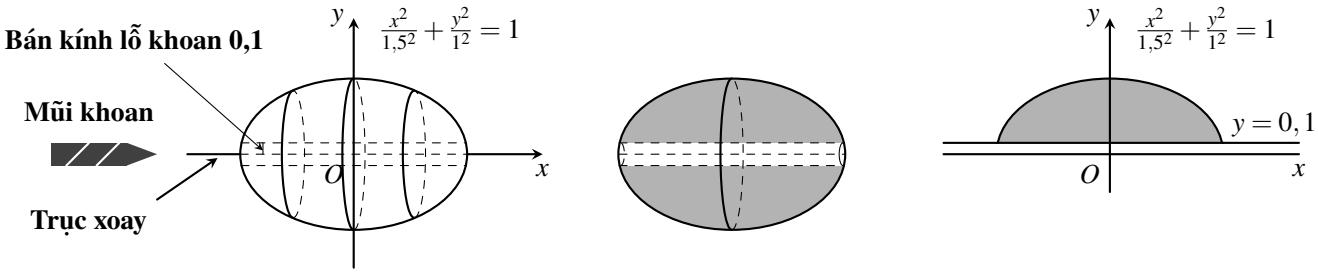






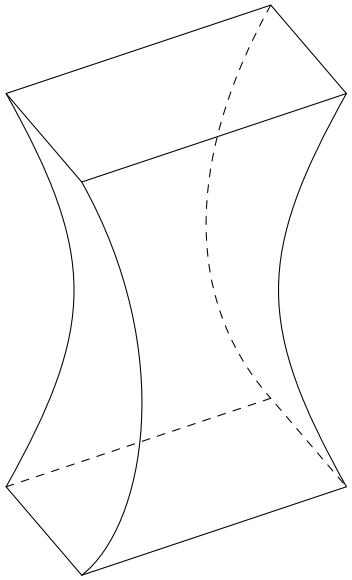
Thể tích của khối chân đế bằng bao nhiêu centimét khối (không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần mười)?

Bài 57 (CT - THPTQG 2026). Để chế tác một hạt cườm, người ta lấy một khối vật thể có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và nửa trên của elip $\dfrac{x^2}{1{,}5^2}+\dfrac{y^2}{1^2}=1$ (một đơn vị dài trên mỗi trục tọa độ tương ứng với một xăng-ti-mét trong thực tế) quanh trục Ox; sau đó khoan dọc theo trục xoay (xem hình dưới). Lỗ khoan có dạng hình trụ với bán kính 0,1 cm và có trục nằm trên trục xoay. Phần còn lại sau khi khoan là hạt cườm, có dạng một khối tròn xoay. Thể tích của hạt cườm đó bằng bao nhiêu xăng-ti-mét khối (không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần trăm)?

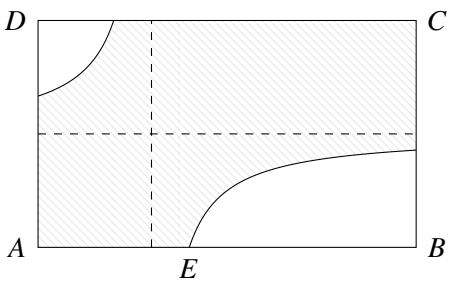


Lưu ý: Các kích thước trong hình minh họa có thể không đúng tỉ lệ thực tế.

Bài 58. Một kiến trúc sư chịu trách nhiệm thiết kế một tòa nhà cao 30 (m). Mặt cắt ngang tại mọi độ cao, vuông góc với trục thẳng đứng, luôn là một hình vuông (xem hình vẽ). Mặt đáy tòa nhà là hình vuông có cạnh $L_0=26$ (m), mặt đỉnh là hình vuông có cạnh $L_{30}=20$ (m). Mặt cắt ngang tại vị trí hẹp nhất của tòa nhà là hình vuông có cạnh $L_{\min}=13{,}75$ (m). Mặt cắt của tòa nhà theo mặt phẳng đứng chứa đường chéo đáy có dạng là hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong parabol đối xứng với nhau qua trục thẳng đứng đi qua tâm đáy của tòa nhà. Tính thể tích của tòa nhà đó (*làm tròn đến hàng đơn vị, đơn vị tính: mét khối*).

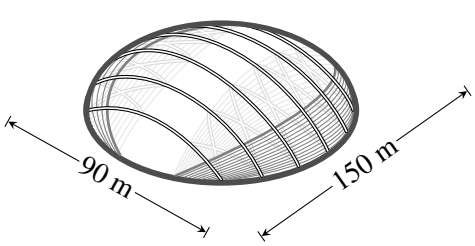


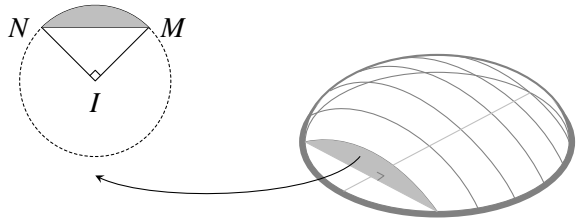
Bài 59. Một công ty thiết kế một bảng quảng cáo có dạng hình chữ nhật $ABCD$ có kích thước $AB=10$ m, $AD=6$ m. Nội dung quảng cáo được mô tả trong phần tô đậm với hai đường cong trong hình là một phần của đồ thị hàm số (C) có dạng $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ (hình minh họa).



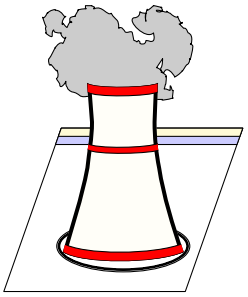
Khoảng cách từ điểm A đến đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (C) bằng 3 m. Đồ thị hàm số (C) cắt cạnh AB tại điểm E thỏa mãn $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{2}{5}$. Diện tích phần nội dung quảng cáo là bao nhiêu mét vuông? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

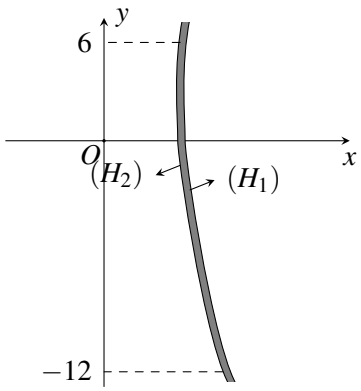
Bài 60. Sân vận động Sport Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip (E) có trục lớn dài 150 m, trục bé dài 90 m (hình vẽ). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt elip ở M, N (hình vẽ) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong hình dưới) với MN là một dây cung và góc $\widehat{MIN} = 90^\circ$. Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Biết rằng cách tính công suất cần đủ là 200 BTU/m^3. Hỏi cần bao nhiêu chiếc điều hòa công suất 50 000 BTU?





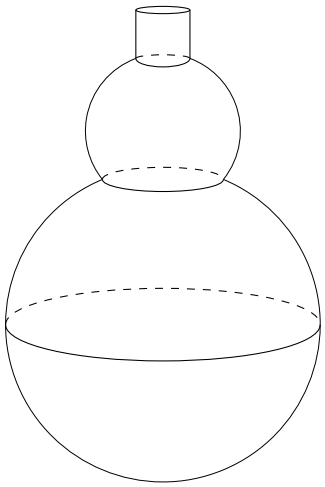
Bài 61. Lớp vỏ của một lò phản ứng hạt nhân bằng kim loại và được tạo bởi hình phẳng (S) giới hạn bởi nhánh bên phải trục tung của các đường hypebol (H_1), (H_2) và hai đường thẳng $y = -12$, $y = 6$ khi quay quanh trục Oy như hình vẽ sau:





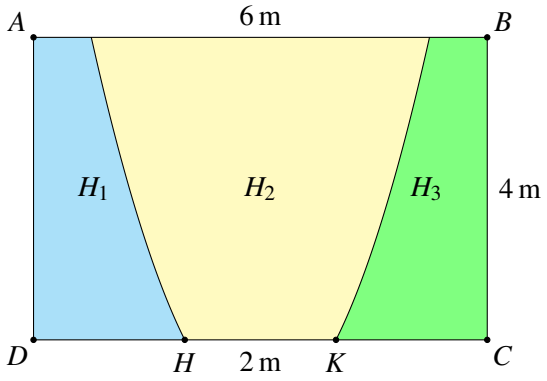
Biết (H_1) đi qua điểm $\left(\sqrt{30};0\right)$ có tiêu cự bằng $10\sqrt{6}$, (H_2) đi qua điểm $(5;0)$ có tiêu cự bằng $10\sqrt{5}$ và đơn vị trên các trục tọa độ đo bằng mét. Thể tích khối kim loại cần sử dụng để làm vỏ lò phản ứng hạt nhân bằng bao nhiêu mét khối (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

Bài 62. Người ta cắt hai hình cầu có bán kính lần lượt là $R = 13$ cm và $r = \sqrt{41}$ cm để làm hồ lô đựng rượu như hình vẽ bên. Biết đường tròn giao của hình cầu có bán kính $r' = 5$ cm và nút đựng rượu là một hình trụ có bán kính đáy bằng $\sqrt{5}$ cm, chiều cao bằng 4 cm. Giả sử độ dày vỏ hồ lô không đáng kể. Hỏi hồ lô đựng được bao nhiêu lít rượu? (kết quả làm tròn đến một chữ số thập phân sau dấu phẩy).



Bài 63. Một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 6m$, $BC = 4m$ được bạn An trang

trí bằng cách vẽ một Parabol có trục đối xứng là trục đối xứng của hình chữ nhật và đỉnh của Parabol cách CD một đoạn là $1\,m$, các nhánh Parabol chia hình chữ nhật thành ba phần H_1, H_2, H_3 như hình vẽ bên dưới ($HK = 2\,m$).



Phần H_1 được sơn màu xanh da trời, phần H_2 được sơn màu vàng, phần H_3 được sơn màu xanh lá cây. Biết rằng mỗi hộp sơn các màu chỉ sơn được $3\,(m^2)$ tường, đồng thời giá của hộp sơn màu xanh da trời là 120000 đồng/hộp, hộp sơn màu vàng là 130000 đồng/hộp, hộp sơn màu xanh lá cây là 110000 đồng/hộp. Tính giá tiền bạn An phải trả để sơn bức tường này. Biết rằng cửa hàng sơn chỉ bán số nguyên hộp (*đơn vị là triệu đồng và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*).

1 A	2 C	3 D	4 A	5 D	6 D	7 D	8 C	9 A	10 D
12 B	13 D	14 C	15 B	16 A	17 C	18 B	19 A	20 D	21 D
22 A	23 A	24 D	25 C	26 B	27 D	28 D	29 B	30 D	32 A

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a Đ b S c Đ d S	Câu 2.	a S b Đ c Đ d S
Câu 3.	a Đ b Đ c S d Đ	Câu 4.	a Đ b Đ c S d S
Câu 5.	a S b Đ c S d Đ	Câu 6.	a Đ b Đ c S d S
Câu 7.	a S b S c S d S	Câu 8.	a Đ b Đ c S d Đ
Câu 9.	a S b Đ c Đ d S	Câu 10.	a Đ b Đ c S d Đ

III. ĐỀ KIỂM TRA CUỐI BÀI

1) Đề 1

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$, $y = 0$. Quay (H) quanh trục hoành tạo thành khối tròn xoay có thể tích là

Ⓐ $\int_0^2 \left(2x-x^2\right)\mathrm{d}x$. Ⓑ $\pi\int_0^2 \left(2x-x^2\right)^2\mathrm{d}x$.

Ⓒ $\int_0^2 \left(2x-x^2\right)^2\mathrm{d}x$. Ⓓ $\pi\int_0^2 \left(2x-x^2\right)\mathrm{d}x$.

Câu 2. Gọi S là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sin x$, $y=0$, $x=0$, $x=2\pi$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

Ⓐ $S=\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$. Ⓑ $S=\int_0^{2\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x$. Ⓒ $S=\int_0^{2\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$. Ⓓ $S=\int_0^{2\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

Câu 3. Tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x=2$, đồ thị hàm số $y=x^2$ và trục hoành khi quay xung quanh trục Ox.

Ⓐ $\frac{4\pi}{5}$. Ⓑ $\frac{5\pi}{6}$. Ⓒ $\frac{32\pi}{5}$. Ⓓ $\frac{\pi}{6}$.

Câu 4. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x=1$ và $x=2$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 2)$ cắt vật thể đó có diện tích $S(x)=2024x$. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

Ⓐ $V=3036$. Ⓑ $V=3036\pi$. Ⓒ $V=1518$. Ⓓ $V=1518\pi$.

Câu 5. Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{\mathrm{e}^x-x}$, $y=0$, $x=1$, $x=2$ xung quanh trục Ox là

Ⓐ $\pi\left(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}-\frac{3}{2}\right)$. Ⓑ $\mathrm{e}^2-\mathrm{e}-\frac{5}{2}$. Ⓒ $\pi\left(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}-\frac{5}{2}\right)$. Ⓓ $\mathrm{e}^2-\mathrm{e}-\frac{3}{2}$.

Câu 6. Cho các hàm số $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ là

Ⓐ $S=\int_b^a |f_1(x)-f_2(x)|\,\mathrm{d}x$. Ⓑ $S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]\,\mathrm{d}x$.

Ⓒ $S=\int_b^a [f_1(x)-f_2(x)]\,\mathrm{d}x$. Ⓓ $S=\int_a^b |f_1(x)-f_2(x)|\,\mathrm{d}x$.

Câu 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2^x+5$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=3$ được xác định bằng công thức

Ⓐ $S=\int_0^3 (2^x+5)^2\,\mathrm{d}x$. Ⓑ $S=\int_0^3 (2^x+5)\,\mathrm{d}x$.

Ⓒ $S=\pi\int_0^3 (2^x+5)\,\mathrm{d}x$. Ⓓ $S=\pi\int_0^3 (2^x+5)^2\,\mathrm{d}x$.

Câu 8. Tính diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^3-4x$, trục hoành, $x=-3$ và $x=4$.

Ⓐ 36. Ⓑ 44. Ⓒ $\frac{201}{4}$. Ⓓ $\frac{119}{4}$.

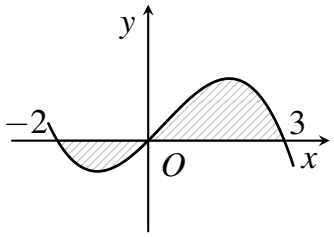
Câu 9. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $y=2x-x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh Ox.

Ⓐ $V=\frac{4}{3}$. Ⓑ $V=\frac{4}{3}\pi$. Ⓒ $V=\frac{16}{15}\pi$. Ⓓ $V=\frac{16}{15}$.

Câu 10. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=-x^2+2x$ và $y=-3x$.

Ⓐ $\frac{125}{2}$. Ⓑ $\frac{125}{3}$. Ⓒ $\frac{125}{6}$. Ⓓ $\frac{125}{8}$.

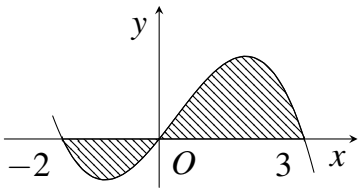
Câu 11. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$. Diện tích S của hình phẳng (*phần tô đậm của hình vẽ dưới*) là



Ⓐ $S=\int\limits_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$. Ⓑ $S=\int\limits_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓒ $S=\int\limits_{0}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$. Ⓓ $S=\int\limits_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 12. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ với trục Ox nằm phía trên và phía dưới trục Ox lần lượt là 3 và 1. Khi đó $\int\limits_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng



Ⓐ 2. Ⓑ -2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số $y=x^3-3x+2$ đồ thị là (C) và đường thẳng $y=-2x+8$ có đồ thị là (d) và các đường thẳng $x=1$, $x=3$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (d), trục hoành và đường thẳng $x=1$, $x=3$. Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (d), trục hoành và đường thẳng $x=5$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

a) Số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng (d) là 3.

b) Hàm số $y=x^3-3x+2$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

c) $S_1>S_2$.

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=x^3-3x+2$, $y=-2x+8$ và hai đường thẳng $x=1, x=3$ bằng 23.

Câu 2. Khối chỏm cầu có bán kính $R=5$ và chiều cao $h=1$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y=\sqrt{25-x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=4$, $x=5$ xung quanh trục Ox.

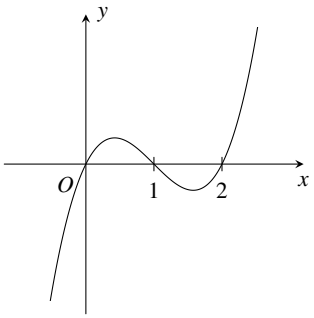
a) Khoảng cách từ tâm của khối cầu đến khối chỏm cầu bằng 3.

b) Thể tích của khối chỏm cầu V_1 được tính theo công thức $V_1 = \pi \int\limits_4^5 \left(25 - x^2\right) \mathrm{d}x$.

c) Thể tích của khối chỏm cầu $V_1 = \dfrac{14\pi}{3}$.

d) Gọi V_2 là thể tích của nửa khối cầu có bán kính bằng 5. Tỉ số thể tích $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{7}{125}$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ có đồ thị như hình dưới đây



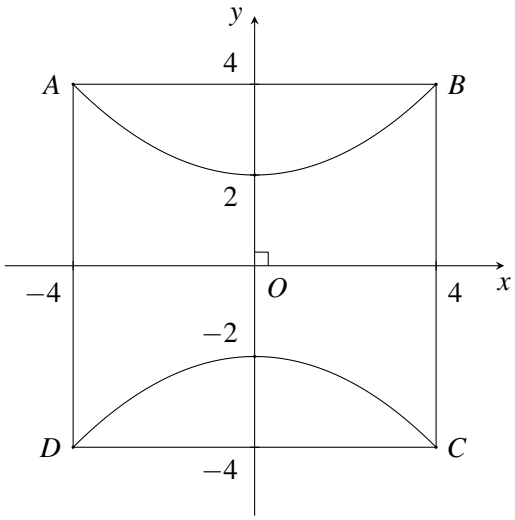
a) $\int\limits_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

b) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$, khi đó $F(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x$.

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$ là $S = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

d) Gọi (D) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 1$. Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành được tính theo công thức $V = \pi \int\limits_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 4. Một người nông dân có một mảnh đất hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 8 m. Ông ta định chia mảnh đất thành ba phần bởi các parabol đi qua các đỉnh của hình vuông như hình vẽ, biết rằng đỉnh của parabol cách cạnh hình vuông 2 m. Ông dự định trồng hoa trên hai phần diện tích nằm giữa mỗi parabol và cạnh tương ứng của hình vuông, trồng cỏ trên phần diện tích còn lại. Chọn hệ trục Oxy sao cho $A(-4;4), B(4;4), C(4;-4), D(-4;-4)$.



a) Phương trình của hai parabol lần lượt là $y = \dfrac{x^2}{8} + 2$ và $y = -\dfrac{x^2}{8} - 2$.

b) Diện tích trồng hoa bằng $\dfrac{64}{3}$ m^2.

c) Nếu chi phí mua cây giống hoa là 100 000 đồng/m^2, cỏ là 70 000 đồng/m^2 thì chi phí mua cây giống cho cả khu vườn là 5 120 000 đồng.

d) Tỉ số diện tích đất trồng hoa và trồng cỏ bằng $\frac{1}{3}$.

Phần III. Trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6 vào ô kết quả.

Câu 1. Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 1 - x^2$, $y = 0$ quanh trục Ox có kết quả dạng $\frac{a\pi}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $S = a + b$ bằng bao nhiêu?

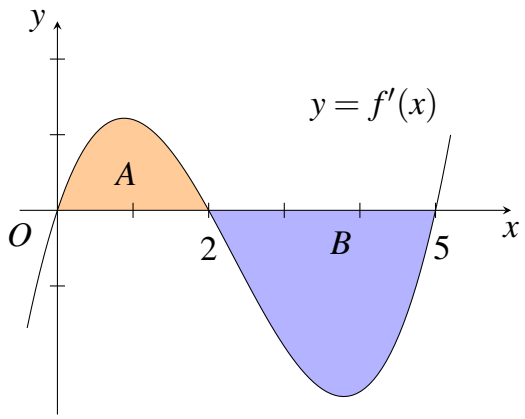
KQ: | | | | |

Câu 2. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường có phương trình $y = \frac{10}{3}x - x^2$, $y = \begin{cases} -x & \text{khi } x \le 1 \\ x - 2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Diện tích của (H) bằng bao nhiêu?

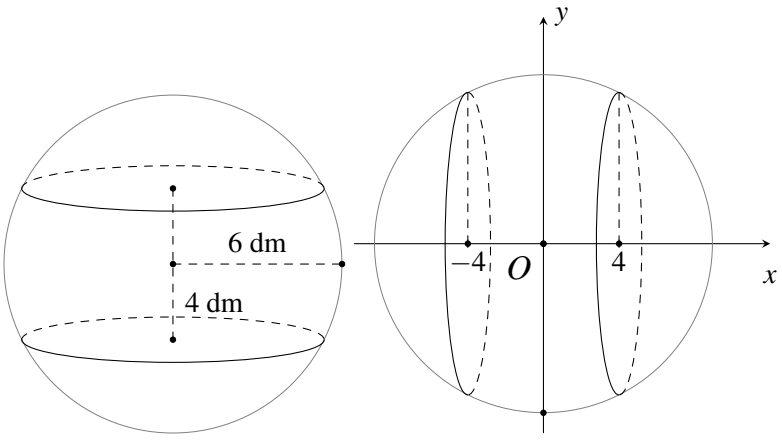
KQ: | | | | |

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ là đường cong trong Hình 2. Biết rằng diện tích của các phần hình phẳng A và B lần lượt là $S_A = 2$ và $S_B = 3$. Nếu $f(0) = 4$ thì giá trị của $f(5)$ bằng

KQ: | | | | |

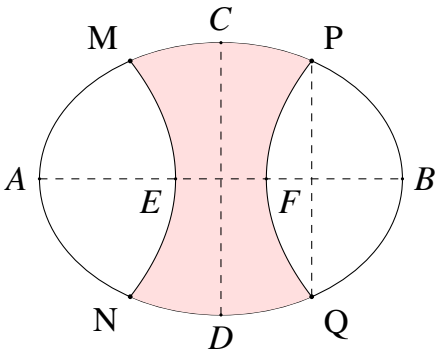


Câu 4. Một hình cầu có bán kính 6 dm, người ta cắt bỏ hai phần bằng hai mặt phẳng song song và cùng vuông góc với đường kính để làm mặt xung quanh của một chiếc lu chứa nước (như hình vẽ). Tính thể tích V (lít) mà chiếc lu chứa được biết mặt phẳng cách tâm mặt cầu 4 dm (làm tròn đến hàng đơn vị).



KQ: | | | | |

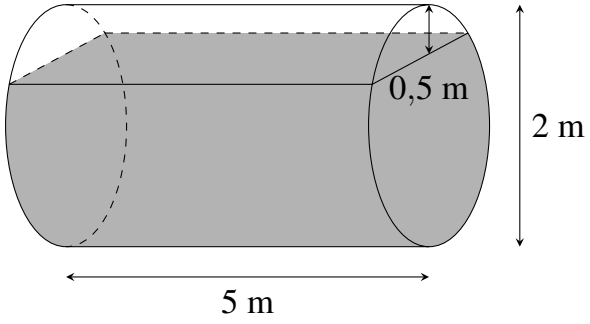
Câu 5. Vườn hoa của một trường học có hình dạng được giới hạn bởi một đường elip có bốn đỉnh A, B, C, D và hai đường parabol có các đỉnh lần lượt là E, F (phần tô đậm của hình vẽ). Hai đường parabol có cùng trục đối xứng AB, đối xứng nhau qua trục CD, hai parabol cắt elip tại các điểm M, N, P, Q.



Biết $AB = 8$ m, $CD = 6$ m, $MN = PQ = 3\sqrt{3}$ m, $EF = 2$ m. Chi phí để trồng hoa trên vườn là $300\,000/\text{m}^2$. Hỏi số tiền trồng hoa cho cả vườn là bao nhiêu triệu đồng. Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.

KQ: | | | | |

Câu 6. Một bể chứa nhiên liệu hình trụ đặt nằm ngang, có chiều dài 5 m, có bán kính đáy 1 m. Chiều cao của mực nhiên liệu là 1,5 m.



Tính thể tích phần nhiên liệu trong bể (theo đơn vị m^3, làm tròn đến hàng phần chục).

KQ: | | | | |

—Hết—

2) Đề 2

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 4$, trục hoành, $x = 0$, $x = 1$.

Ⓐ $\dfrac{13}{3}\pi$. Ⓑ $\dfrac{13}{3}$. Ⓒ $\dfrac{13}{6}$. Ⓓ $\dfrac{13}{6}\pi$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$. Thể tích V của vật thể tròn xoay được tạo ra khi cho D quay xung quanh trục Ox là

Ⓐ $V = \pi^2 \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. Ⓑ $V = \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓒ $V = \pi \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Ⓓ $V = \pi \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 3. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=7$ quay quanh trục Ox tạo thành khối tròn xoay có thể tích bằng

Ⓐ $\pi\int\limits_0^7 2^x\,\mathrm{d}x$. Ⓑ $\int\limits_0^7 |2^x|\,\mathrm{d}x$. Ⓒ $\pi\int\limits_0^7 2^{2x}\,\mathrm{d}x$. Ⓓ $\int\limits_0^7 2^{2x}\,\mathrm{d}x$.

Câu 4. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+x$; $y=x$; $x=4$ và trục tung.

Ⓐ $\frac{64}{3}\pi$. Ⓑ $\frac{64}{3}$. Ⓒ $\frac{128}{3}$. Ⓓ $\frac{128}{3}\pi$.

Câu 5. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x$, $y=0$, $x=0$ và $x=1$.

Ⓐ $V=\frac{8\pi}{15}$. Ⓑ $V=\frac{7\pi}{8}$. Ⓒ $V=\frac{8\pi}{7}$. Ⓓ $V=\frac{15\pi}{8}$.

Câu 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x-1$, $y=2x-4$, $x=2$, $x=3$ là

Ⓐ $\frac{4}{3}$. Ⓑ $-\frac{4}{3}$. Ⓒ $\frac{2}{3}$. Ⓓ $-\frac{2}{3}$.

Câu 7. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ và trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) quanh trục hoành bằng

Ⓐ $\frac{\pi}{6}$. Ⓑ $\frac{1}{6}$. Ⓒ $\frac{\pi}{30}$. Ⓓ $\frac{1}{30}$.

Câu 8. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-2x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=3$. Diện tích của hình phẳng (H) được tính bằng công thức nào dưới đây?

Ⓐ $S=\int\limits_2^3 (x^2-2x)\mathrm{d}x$. Ⓑ $S=\int\limits_0^3 (-x^2+2x)\mathrm{d}x$.

Ⓒ $S=\int\limits_2^3 \left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x$. Ⓓ $S=\int\limits_0^3 \left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x$.

Câu 9. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)=\sqrt{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$ quay quanh trục Ox là

Ⓐ $\int\limits_0^2 x\,\mathrm{d}x$. Ⓑ $\int\limits_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$. Ⓒ $\pi\int\limits_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$. Ⓓ $\pi\int\limits_0^2 x\,\mathrm{d}x$.

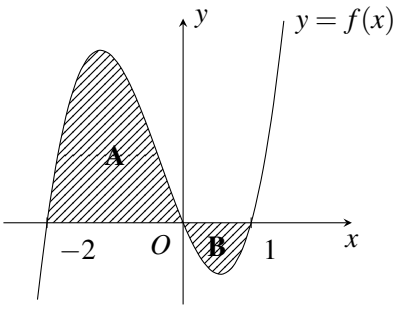
Câu 10. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x=0$ và $x=2$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0\le x\le 2)$ cắt vật thể đó có thiết diện là một hình vuông cạnh x^3. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

Ⓐ $V=\frac{128}{7}$. Ⓑ $V=\frac{128}{5}$. Ⓒ $V=\frac{18}{7}$. Ⓓ $V=\frac{28}{7}$.

Câu 11. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y=\sin x, y=\cos x$ và các đường thẳng $x=0, x=\pi$ bằng

Ⓐ $3\sqrt{2}$. Ⓑ $\sqrt{2}$. Ⓒ $2\sqrt{2}$. Ⓓ $-2\sqrt{2}$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới và diện tích hai phần A, B lần lượt bằng 11 và 2.



Tính tích phân $\int\limits_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ 13. Ⓑ -9. Ⓒ -13. Ⓓ 9.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)=2x+3$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

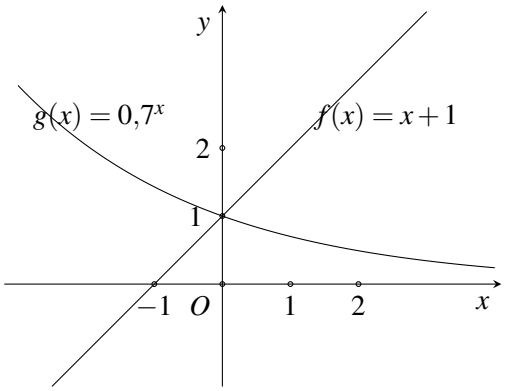
a) Biết $F(1)=2$ thì $F(x)=x^2+3x+2$.

b) Giá trị của $\int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{5}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng 42.

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và $x=-2$, $x=1$ bằng 6.

d) Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f(x)$ và $y=x^2-2x+6$ quanh trục Ox bằng $\dfrac{1\,556\pi}{15}$.

Câu 2. Cho đồ thị các hàm số $f(x)=x+1$ và $g(x)=0{,}7^x$ như hình vẽ



a) $\int\limits_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$.

b) Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$; $x=0$ quanh trục hoành bằng 9π.

c) Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=g(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0;\ x=2$ quanh trục hoành có giá trị xấp xỉ bằng 7,9 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

d) Khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=g(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1,\ x=2$ quanh trục hoành có thể tích xấp xỉ bằng 4,4 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

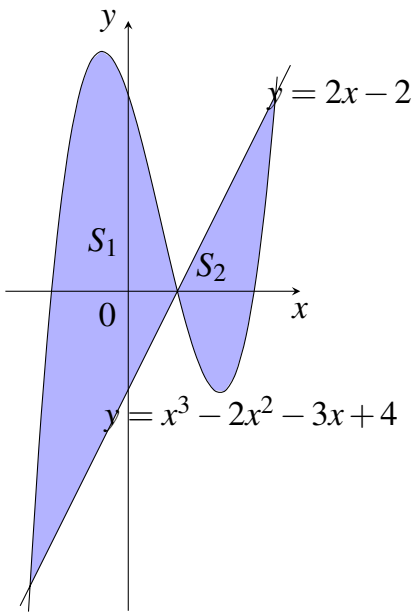
Câu 3. Cho hàm số $y=x^3-2x^2-3x+4$ có đồ thị (C) và đường thẳng $(d)\colon\ y=2x-2$.

a) Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm $A(-2;-6)$, $B(1;0)$, $C(3;4)$.

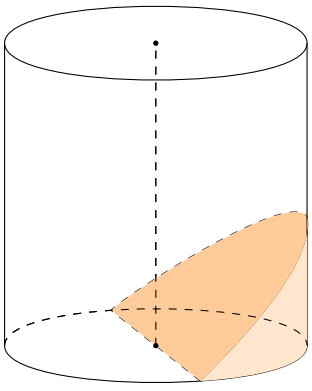
b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục hoành, đường thẳng $x=-1;x=2$ bằng $\dfrac{21}{4}$.

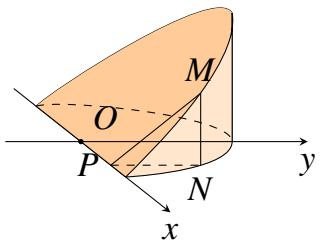
c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng d bằng $\dfrac{253}{12}$.

d) Biết đường thẳng d cắt đồ thị (C) thành hai miền S_1 và S_2. Khi đó tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{63}{16}$.



Câu 4. Cho một vật thể bằng gỗ có dạng hình trụ với chiều cao và bán kính đáy cùng bằng 1. Cắt khối gỗ đó bởi một mặt phẳng đi qua đường kính của một mặt đáy của khối gỗ và tạo với mặt phẳng đáy của khối gỗ một góc 30° ta thu được khối gỗ hình nêm (H) và đặt khối (H) vào hệ trục tọa độ như hình vẽ.





a) Nửa đường tròn đáy khối gỗ hình trụ có phương trình là $y=\sqrt{1+x^2},\ (-1\le x\le 1)$.

b) Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm M có hoành độ x, cắt hình nêm theo thiết diện là $\triangle MNP$ vuông tại N và có góc $\widehat{PMN}=30^\circ$. Lúc đó đoạn MN bằng $\sqrt{1-x^2}$.

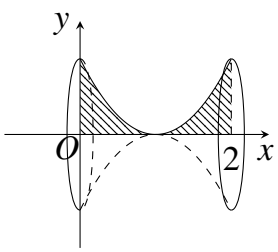
c) Diện tích tam giác MNP bằng $1-x^2$.

d) Thể tích hình nêm (H) bằng $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

Phần III. Trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6 vào ô kết quả.

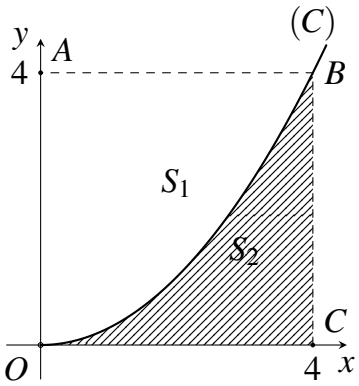
Câu 1. Biết thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=(1-x)^2, y=0, x=0$ $x=2$ có dạng $\dfrac{a\pi}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị biểu thức $S=24a+12b$.

KQ: | | | | |

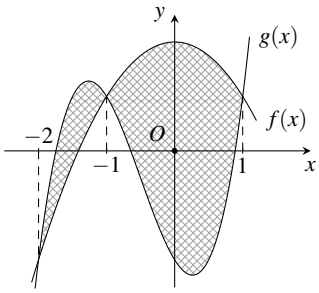


Câu 2. Cho hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y=0{,}25x^2$. Gọi S_1, S_2. lần lượt là diện tích của phần không bị gạch và phần bị gạch (như hình vẽ bên). Tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$ bằng

KQ: | | | | |

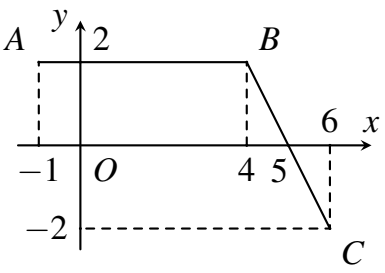


Câu 3. Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-2$ và $g(x)=dx^2+ex+2$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2;-1;1$ (tham khảo hình vẽ). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho *(làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)*?

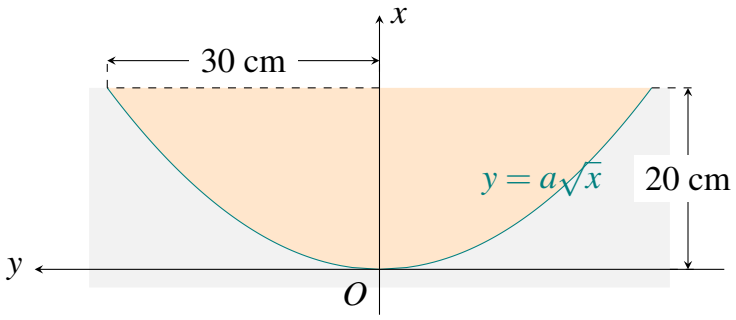


KQ: | | | | |

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC trong hình bên. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(-1)=-2$. Giá trị của $F(5)+F(6)$ bằng bao nhiêu? KQ: | | | | |

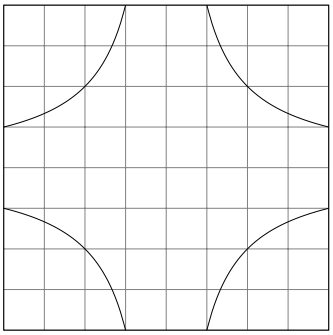


Câu 5. Một thùng làm kem có mặt cắt dạng parabol như hình. Biết phương trình đường biên có dạng $f(x)=a\sqrt{x}$, hỏi dung tích của thùng bằng bao nhiêu lít.

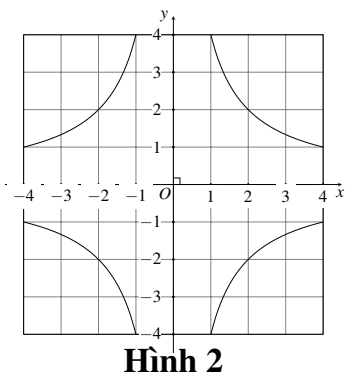


KQ: | | | | |

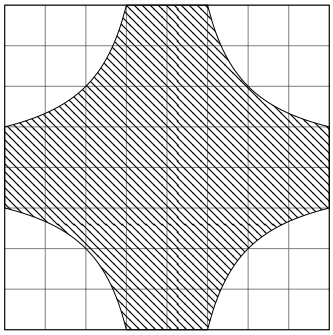
Câu 6. Họa sĩ thiết kế một loại gạch trang trí có dạng như **Hình 1**, gạch có dạng hình vuông cạnh 8 dm. Khi đặt bản vẽ trong hệ tọa độ (Oxy) với đơn vị của mỗi trục là 1 dm thì mỗi nét cong phía trong thuộc một trong hai đường hypebol $y = -\dfrac{4}{x}$ và $y = \dfrac{4}{x}$ (**Hình 2**), các cạnh của viên gạch lần lượt thuộc 4 đường thẳng $x = -4$, $x = 4$, $y = -4$, $y = 4$. Người ta sơn màu hồng vào phần hình được gạch chéo như **Hình 3**. Diện tích phần sơn màu hồng là bao nhiêu dm^2 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 1



Hình 2



Hình 3

KQ: | | | | |

—Hết—

BẢNG ĐÁP ÁN ĐỀ KIỂM TRA CUỐI BÀI

ĐỀ SỐ 1

ĐÁP ÁN PHẦN I

1. B	2. B	3. C	4. A	5. A	6. D	7. B	8. C	9. C
10. C	11. C	12. A						

ĐÁP ÁN PHẦN II

Câu 1. (a) S (b) S (c) Đ (d) S	Câu 2. (a) S (b) Đ (c) Đ (d) Đ
Câu 3. (a) Đ (b) S (c) S (d) Đ	Câu 4. (a) Đ (b) Đ (c) Đ (d) S

ĐÁP ÁN PHẦN III

Câu 1.	Câu 2.	Câu 3.	Câu 4.	Câu 5.	Câu 6.
3 1	6 , 5	3	7 7 1	4 , 8 1	1 2 , 6

ĐỀ SỐ 2

ĐÁP ÁN PHẦN I

1. B	2. D	3. C	4. B	5. A	6. C	7. C	8. D	9. D
10. A	11. C	12. D						

ĐÁP ÁN PHẦN II

Câu 1. (a) S (b) Đ (c) S (d) Đ	Câu 2. (a) Đ (b) S (c) S (d) Đ
Câu 3. (a) Đ (b) S (c) Đ (d) S	Câu 4. (a) S (b) Đ (c) S (d) Đ

ĐÁP ÁN PHẦN III

Câu 1.	Câu 2.	Câu 3.	Câu 4.	Câu 5.	Câu 6.
1 0 8	2	6 , 2	1 7	2 8 , 3	3 8 , 2

§4 ÔN TẬP CHƯƠNG 4

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Khi đó $F(0)-F(1)$ bằng

Ⓐ $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Ⓑ $\int\limits_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x$. Ⓒ $\int\limits_1^0 F(x)\,\mathrm{d}x$. Ⓓ $\int\limits_1^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 2. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=5^x$.

Ⓐ $\int f(x)\,\mathrm{d}x=5^x+C$. Ⓑ $\int f(x)\,\mathrm{d}x=5^x\ln 5+C$.

Ⓒ $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{5^x}{\ln 5}+C$. Ⓓ $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{5^{x+1}}{x+1}+C$.

Câu 3. Tìm $\int \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$.

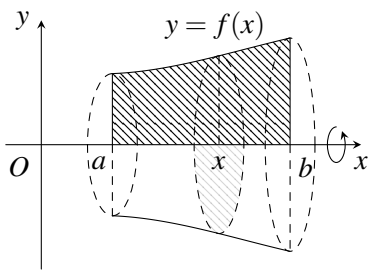
Ⓐ $\int \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{x}+C$. Ⓑ $\int \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{x}+C$.

Ⓒ $\int \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2x}+C$. Ⓓ $\int \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\ln x^2+C$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[0;2]$. Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$ là

Ⓐ $\int\limits_0^2 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$. Ⓑ $\pi\int\limits_0^2 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$. Ⓒ $\pi\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Ⓓ $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a;b]$ như hình vẽ. Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng



Ⓐ $V=\pi\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Ⓑ $V=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Ⓒ $V=\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. Ⓓ $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-3x$, trục hoành Ox và hai đường thẳng $x=-2$, $x=2$ bằng

Ⓐ $\dfrac{16}{3}$. Ⓑ $\dfrac{14}{3}$. Ⓒ 5. Ⓓ 6.

Câu 7. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x}+1$.

Ⓐ $F(x)=-\dfrac{1}{x^2}+x+C$. Ⓑ $F(x)=\ln|x|+x+C$.

Ⓒ $F(x)=\ln x+x+C$. Ⓓ $F(x)=\ln|x|+C$.

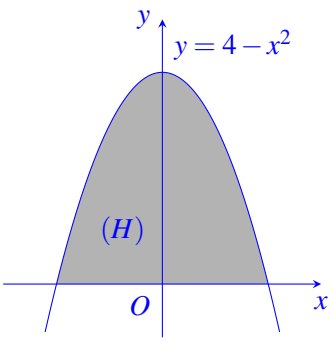
Câu 8. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=x^3-x$, $y=3x$ và hai đường thẳng $x=1$, $x=3$. Diện tích của hình (H) được tính bằng công thức:

Ⓐ $S=\displaystyle\int_1^3\left(4x-x^3\right)\mathrm{d}x$. Ⓑ $S=\displaystyle\int_1^3\left(x^3-4x\right)\mathrm{d}x$.

Ⓒ $S=\displaystyle\int_1^3\left(4x-x^3\right)^2\mathrm{d}x$. Ⓓ $S=\displaystyle\int_1^3\left|x^3-4x\right|\mathrm{d}x$.

Câu 9. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=4-x^2$ và trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng

Ⓐ $\dfrac{32\pi}{3}$. Ⓑ $\dfrac{512}{15}$. Ⓒ $\dfrac{512\pi}{15}$. Ⓓ $\dfrac{32}{3}$.



Câu 10. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x-\sin x$ là

Ⓐ $\dfrac{x^2}{2}-\cos x+C$. Ⓑ $x^2-\cos x+C$. Ⓒ $\dfrac{x^2}{2}+\cos x+C$. Ⓓ $2x^2+\cos x+C$.

Câu 11. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x-\dfrac{1}{x}$ trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $F(1)=1$. Tính $F(\mathrm{e})$.

Ⓐ $F(\mathrm{e})=\mathrm{e}^2-1$. Ⓑ $F(\mathrm{e})=\mathrm{e}$. Ⓒ $F(\mathrm{e})=-\mathrm{e}$. Ⓓ $F(\mathrm{e})=1-\mathrm{e}^2$.

Câu 12. Giá trị của tích phân $\displaystyle\int_0^1 2026x^{2025}\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2024. Ⓓ 2023.

Câu 13. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$ là

Ⓐ $x+\ln x+C$. Ⓑ $x-\ln x+C$. Ⓒ $x+\ln|x|+C$. Ⓓ $x-\ln|x|+C$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)=x^2-\dfrac{4}{x}$. Giá trị của $\displaystyle\int_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $\dfrac{7}{3}-\ln 2$. Ⓑ 3. Ⓒ $\dfrac{7}{3}$. Ⓓ 5.

Câu 15. Hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{3x}$ có họ các nguyên hàm là

Ⓐ $3\mathrm{e}^{3x}+C$. Ⓑ $\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^x+C$. Ⓒ $\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}+C$. Ⓓ $3\mathrm{e}^x+C$.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x=6$, $\int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x=2$. Giá trị của biểu thức $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ là

Ⓐ 8. Ⓑ 4. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

Câu 17. Biết $\int f(x)\,\mathrm{d}x=x^2+\cos x+C$, khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $f(x)=2x-\sin x$. Ⓑ $f(x)=2x+\sin x$.

Ⓒ $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+\sin x+C$. Ⓓ $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\sin x+C$.

Câu 18. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$, $x=1$, có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0\le x\le 1)$ là một tam giác đều có cạnh bằng x.

Ⓐ $V=\dfrac{12\pi}{5}$. Ⓑ $V=\dfrac{12}{5}$. Ⓒ $V=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$. Ⓓ $V=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

Câu 19. Nếu $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=5$ thì $\int\limits_1^3 2f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $\dfrac{5}{2}$. Ⓑ 7. Ⓒ 4. Ⓓ 10.

Câu 20. Nếu $\int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x=2$ thì $\int\limits_5^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ -2. Ⓑ 2. Ⓒ -5. Ⓓ 5.

Câu 21. Trên khoảng $(0;+\infty)$, họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^{-\frac{4}{5}}$ là

Ⓐ $-\dfrac{5}{9}x^{-\frac{9}{5}}+C$. Ⓑ $\dfrac{1}{5}x^{\frac{1}{5}}+C$. Ⓒ $5x^{\frac{1}{5}}+C$. Ⓓ $-\dfrac{9}{5}x^{-\frac{9}{5}}+C$.

Câu 22. Tính $\int\limits_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ biết rằng $\int\limits_{-1}^1 [f(x)-x]\,\mathrm{d}x=3$.

Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

Câu 23. Biết $\int\limits_2^4 8f(x)\,\mathrm{d}x=3$, $\int\limits_2^3 4f(y)\,\mathrm{d}y=7$. Tính $\int\limits_3^4 f(z)\,\mathrm{d}z$.

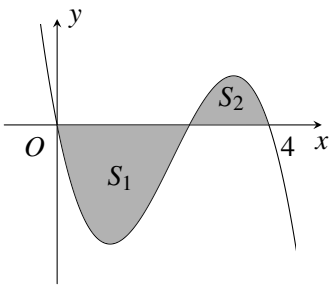
Ⓐ $-\dfrac{7}{4}$. Ⓑ $-\dfrac{11}{8}$. Ⓒ $-\dfrac{3}{2}$. Ⓓ $-\dfrac{9}{8}$.

Câu 24. Hàm số $F(x)=5^x+2025$ là nguyên hàm của hàm số

Ⓐ $f(x)=5^x\ln 5+2025x$. Ⓑ $f(x)=5^x\ln 5$.

Ⓒ $f(x)=\dfrac{5^x}{\ln 5}+2025x$. Ⓓ $f(x)=\dfrac{5^x}{\ln 5}+2025x+C$.

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng các diện tích S_1, S_2 thỏa mãn $S_1=2S_2=3$. Tích phân $\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x$ bằng



Ⓐ 3. Ⓑ $\dfrac{3}{2}$. Ⓒ $-\dfrac{3}{2}$. Ⓓ $\dfrac{9}{2}$.

Câu 26. Biết $F(x)=\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} 2f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ -1. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ $\sqrt{3}$.

Câu 27. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x^3+\dfrac{1}{\cos^2 x}$ là

Ⓐ $x^4-\cot x+C$. Ⓑ $x^4+\cot x+C$. Ⓒ $x^4+\tan x+C$. Ⓓ $x^4-\tan x+C$.

Câu 28. Cho $\int\limits_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x=8$ và $\int\limits_{-2}^{5} g(x)\,\mathrm{d}x=-3$. Tính $I=\int\limits_{-2}^{5}[f(x)-4g(x)-1]\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ $I=3$. Ⓑ $I=13$. Ⓒ $I=-11$. Ⓓ $I=27$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)=x^2+\sin x+1$. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(0)=1$. Khi đó, $F(x)$ bằng

Ⓐ $F(x)=x^3-\cos x+x+2$. Ⓑ $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-\cos x+x+2$.

Ⓒ $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+\cos x+x$. Ⓓ $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+\cos x+2$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_0^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x=6$, $\int\limits_0^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=8$. Khi đó giá trị $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{f(x)}{2}\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 14. Ⓑ 1. Ⓒ 4. Ⓓ 2.

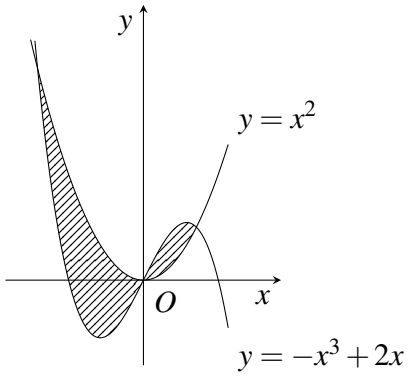
Câu 31. Nếu $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}[\sin x-3f(x)]\,\mathrm{d}x=6$ thì $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $\dfrac{13}{2}$. Ⓑ $-\dfrac{11}{2}$. Ⓒ $-\dfrac{13}{4}$. Ⓓ $-\dfrac{11}{6}$.

Câu 32. Biết $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\cos x+C$ thì $\int f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $\sin x+C$. Ⓑ $\cos x+C$. Ⓒ $-\sin x+C$. Ⓓ $-\cos x+C$.

Câu 33. Diện tích của phần hình phẳng gạch chéo trong hình bên bằng

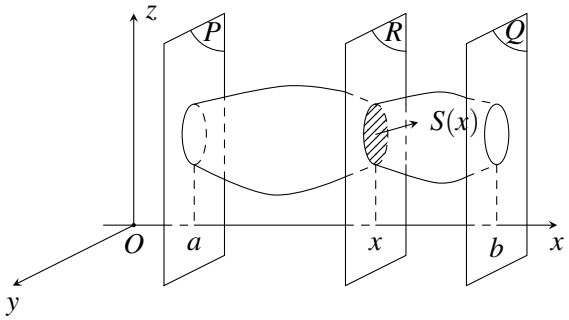


Ⓐ $\dfrac{55}{12}$.
Ⓑ $\dfrac{37}{12}$.
Ⓒ $\dfrac{9}{4}$.
Ⓓ $\dfrac{15}{4}$.

Câu 34. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[-1;3]$ và thỏa mãn $F(-1)=2$, $F(3)=\dfrac{11}{2}$. Giá trị của $\displaystyle\int_{-1}^{3}[2f(x)-x]\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 11.
Ⓑ $\dfrac{7}{2}$.
Ⓒ $\dfrac{19}{2}$.
Ⓓ 3.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho vật thể T giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=a$ và $x=b$ $(a<b)$. Cắt vật thể T bởi một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng x $(a\le x\le b)$, ta được thiết diện có diện tích bằng $S(x)$. Khi $S(x)$ là một hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$, thể tích V của vật thể T được tính theo công thức nào sau đây?



Ⓐ $V=\displaystyle\int_{a}^{b}S(x)\,\mathrm{d}x$.
Ⓑ $V=\pi\displaystyle\int_{a}^{b}S(x)\,\mathrm{d}x$.
Ⓒ $V=\displaystyle\int_{b}^{a}S(x)\,\mathrm{d}x$.
Ⓓ $V=\pi\displaystyle\int_{a}^{b}[S(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

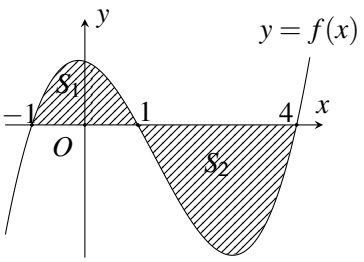
Câu 36. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}4-x & \text{khi } 0\le x\le 1\\ 3x^2 & \text{khi } 1\le x\le 2\end{cases}$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{0}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ $\dfrac{21}{2}$.
Ⓑ $\dfrac{7}{2}$.
Ⓒ 7.
Ⓓ $\dfrac{5}{2}$.

Câu 37. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là **sai**?

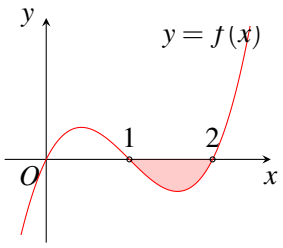
Ⓐ $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C$.
Ⓑ $\left(\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)'=f(x)$.
Ⓒ $\left(\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)'=F'(x)$.
Ⓓ $\left(\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)'=f'(x)$.

Câu 38. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số bậc ba và trục hoành được chia thành hai phần có diện tích lần lượt là S_1 và S_2 (như hình vẽ). Biết $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{8}{3}$ và $\int\limits_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{63}{8}$. Khi đó diện tích S của hình phẳng (H) bằng



Ⓐ $\dfrac{125}{24}$. Ⓑ $\dfrac{8}{3}$. Ⓒ $\dfrac{253}{24}$. Ⓓ $\dfrac{63}{8}$.

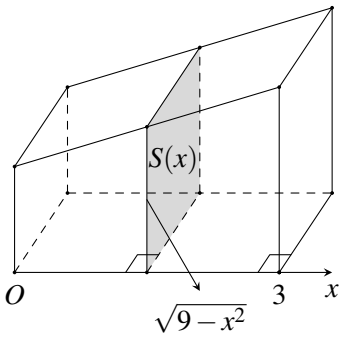
Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Diện tích của hình phẳng tô đậm được tính bằng công thức nào?



Ⓐ $S = \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$. Ⓑ $S = -\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓒ $S = \pi\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$. Ⓓ $S = \pi\int\limits_{1}^{2} f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 40. Khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x $(0 \le x \le 3)$, ta được mặt cắt là một hình vuông có cạnh là $\sqrt{9-x^2}$ (được mô hình hóa bởi hình vẽ bên dưới). Thể tích của vật thể đó bằng



Ⓐ 171π. Ⓑ 171. Ⓒ 18π. Ⓓ 18.

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng K. Gọi $F(x)$ là họ nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

a) $F'(x) = f(x)$.

b) Nếu $f(x) = \dfrac{1}{x}$ thì $F(x) = \ln x + C$.

c) Nếu $f(x) = \cos x$ thì $F(x) = \sin x$.

d) Nếu $f(x) = \mathrm{e}^x$ thì $F(x) = \mathrm{e}^x + C$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó

a) Nếu $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ thì $\int\limits_{-1}^{1} 4f(x)\,\mathrm{d}x = 6$.

b) Nếu $\int\limits_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ và $\int\limits_{1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ thì $\int\limits_{3}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = -2$.

c) Nếu $f(x) = x^2 - 2x$, $F(0) = 1$ thì $F(2) = 11$.

d) Nếu $f(x) = x^2 - 2x$ thì $\int\limits_{0}^{3} \left|x^2 - 2x\right| \mathrm{d}x = \dfrac{8}{3}$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)=4x^3+x$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó

a) $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x=552.$

b) Biết $F(1)=4$ thì $F(2)=\dfrac{41}{2}$.

c) $\displaystyle\int_0^2 (1+2x+f(x))\,\mathrm{d}x=20.$

d) Biết $\displaystyle\int_{-2}^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x=\frac{39}{2}$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)=3$. Khi đó

a) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=3x+C.$

b) $\displaystyle\int [f(x)+x]^2\,\mathrm{d}x=x^3-\frac{1}{2}x^2+2x+C.$

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1)=1$ thì $F(x)=3x-1$.

d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(1)+F(2)+\cdots+F(100)=14590$ khi $F(1)=1$.

Câu 5. Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f(x)=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$. Khi đó

a) $f(x)=1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}$.

b) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=x-2\ln|x|+\frac{1}{x}+C.$

c) $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(3)=5$. Khi đó $F(x)=x-2\ln|x|-\dfrac{1}{x}+5$.

d) $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, biết $G(1)=5$ và $G(2)+G(-4)=2025$. Khi đó $G(-8)=\dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Vậy $a+b=16123$.

Câu 6. Cho hàm số $y=\sqrt{4-x^2}$. Khi đó

a) $y=\sqrt{4-x^2}$, $x\in[0;2]$ là phương trình một phần tư của đường tròn tâm tại gốc toạ độ O, bán kính bằng 2 và nằm ở góc phần tư thứ I.

b) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$ là một phần hai diện tích hình tròn tâm O bán kính 2.

c) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2.$

d) $\displaystyle\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=2\pi.$

Câu 7. Xét tính đúng sai của các phép tính tích phân sau.

a) $I=\displaystyle\int_0^2 |x-1|\,\mathrm{d}x=\int_0^1 (x-1)\,\mathrm{d}x+\int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x.$

b) $I=\displaystyle\int_0^2 |x-1|\,\mathrm{d}x=1.$

c) Cho a là số thực dương thì tích phân $I=\int\limits_{-1}^{a}|x|\,\mathrm{d}x=\dfrac{a^2+1}{2}$.

d) Nếu $I=\int\limits_{0}^{3}|2^x-4|\,\mathrm{d}x=a+\dfrac{b}{c\ln 2}$ với $a,\,b,\,c\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản thì khi đó ta có giá trị của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2=3$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}$.

a) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin x+C$.

b) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ và thỏa mãn $F(0)=3$ thì $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{11}{4}$.

c) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=a+b\pi\ (a,b\in\mathbb{Q})$, trong đó $a^2+b=\dfrac{1}{2}$.

d) Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, $y=x^2-4+\cos^2\dfrac{x}{2}$ và hai đường thẳng $x=0, x=3$ bằng $\dfrac{23}{3}$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)=2x^3-3x^2+1$.

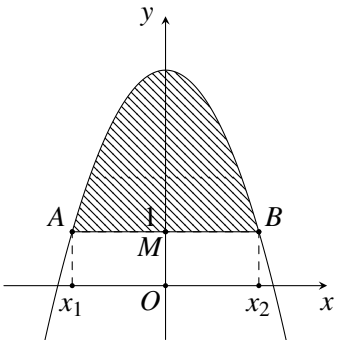
a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số đã cho, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$ bằng 2.

b) Hàm số đã cho có một nguyên hàm là hàm số $G(x)=\dfrac{x^4}{2}-x^3+x$.

c) $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số đã cho thoả mãn $F(2)=2$, khi đó $F(-1)=\dfrac{1}{2}$.

d) Với $a\in[-1;2]$, hàm số $H(a)=\displaystyle\int\limits_{-1}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x$ đạt giá trị lớn nhất tại $a=1$.

Câu 10. Một kiến trúc sư thiết kế bồn hoa trong công viên trên hệ trục tọa độ Oxy (đơn vị: mét). Bồn hoa là hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P)\colon y=-x^2+4$ và trục hoành Ox. Kiến trúc sư bố trí một dải đèn LED thẳng, được mô phỏng bởi đường thẳng d đi qua điểm $M(0;1)$, cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A và B (có hoành độ lần lượt là x_1, x_2). Dải đèn chia bồn hoa thành hai phần riêng biệt: Phần hình phẳng nằm phía trên dây cung AB được dùng để trồng Hoa Hồng, phần còn lại của bồn hoa (nằm phía dưới dây cung AB) được dùng để trồng Cỏ Nhật.



a) Diện tích toàn bộ bồn hoa (tổng diện tích trồng Hoa Hồng và Cỏ Nhật) bằng 16 m^2.

b) Tích các hoành độ giao điểm của đường thẳng d và parabol (P) luôn bằng 3.

c) Diện tích trồng Hoa Hồng đạt giá trị nhỏ nhất khi dải đèn LED được thiết kế nằm ngang (song song với trục hoành).

d) Khi diện tích trồng Hoa Hồng gấp đôi diện tích trồng Cỏ Nhật, chiều dài của dải đèn LED (tính bằng độ dài đoạn thẳng AB) xấp xỉ 3,84 mét *(làm tròn đến hàng phần trăm)*.

Câu 11. Một địa phương A bị thiệt hại do lũ lụt được trợ cấp số tiền 2 tỷ đồng. Số tiền này sẽ được giải ngân toàn bộ trong 100 ngày kể từ khi bắt đầu giải ngân. Kết quả theo dõi cho thấy tốc độ giải ngân tiền trợ cấp $M'(t)$ (đơn vị: triệu đồng/ngày) tại thời điểm t ngày $(0 \leq t \leq 100)$ kể từ khi bắt đầu giải ngân được cho bởi công thức $M'(t) = k(100-t)^2$ $(0 \leq t \leq 100)$, trong đó $M(t)$ (đơn vị: triệu đồng) là số tiền đã giải ngân sau t ngày $(0 \leq t \leq 100)$ kể từ khi bắt đầu giải ngân và k là hằng số khác không.

a) $M(t) = k\left(10\,000t - 100t^2 + \dfrac{t^3}{3}\right) + C.$

b) $C = 2\,000.$

c) $k = 0{,}6.$

d) Số tiền còn lại chưa giải ngân sau 40 ngày kể từ khi bắt đầu giải ngân là 432 triệu đồng.

Câu 12. Vào năm 2014, dân số nước ta khoảng 90,7 triệu người. Giả sử, dân số nước ta sau t năm được xác định bởi hàm số $S(t)$ (đơn vị: triệu người), trong đó tốc độ gia tăng dân số được cho bởi $S'(t) = 1{,}2698\mathrm{e}^{0{,}014t}$, với t là số năm kể từ năm 2014, $S'(t)$ tính bằng triệu người/năm.

a) $S(t)$ là một nguyên hàm của $S'(t)$.

b) $S(t) = 90{,}7\mathrm{e}^{0{,}014t} + 90{,}7.$

c) Theo công thức trên, tốc độ tăng dân số nước ta năm 2034 (làm tròn đến hàng phần mười của triệu người/năm) khoảng 1,7 triệu người/năm.

d) Theo công thức trên, dân số nước ta năm 2034 (*làm tròn đến hàng đơn vị của triệu người*) là khoảng 120 triệu người.

Câu 13. Mực nước trong hồ chứa của nhà máy điện thủy triều thay đổi trong suốt một ngày do nước chảy ra (khi thủy triều xuống) và nước chảy vào (khi thủy triều lên). Tốc độ thay đổi của mực nước trong hồ chứa được cho bởi hàm số $h'(t) = \dfrac{1}{216}\left(5t^2 - 120t + 480\right)$ (mét/giờ), trong đó $h(t)$ (mét) là mực nước trong hồ chứa tại thời điểm t giờ $(0 \leq t \leq 24)$. Tại thời điểm $t = 0$ giờ, mực nước trong hồ chứa là 6 mét.

(Nguồn: A.Bigalk et al, Mathematik, Grundkrurs ma-1, Cornelsen 2016).

a) Giá trị của hàm số $h(t)$ bằng 6 tại $t = 0$.

b) $h(t) = \dfrac{5}{648}t^3 - \dfrac{5}{18}t^2 + \dfrac{20}{9}t + C$ $(0 \leq t \leq 24)$ với C là một hằng số xác định.

c) Tại thời điểm $t = 18$ giờ, mực nước trong hồ chứa là 1 mét.

d) Mực nước trong hồ chứa không thể vượt quá 11 mét.

Câu 14. Một ô tô đang chạy thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc thay đổi theo hàm số $v = -5t + 20$ (m/s), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh.

a) Khi xe dừng hẳn thì vận tốc bằng 0 (m/s).

b) Thời gian từ lúc người lái xe đạp phanh cho đến khi xe dừng hẳn là 5 s.

c) $\displaystyle\int (-5t + 20)\,\mathrm{d}t = \frac{-5t^2}{2} + 20t + C.$

d) Quãng đường từ lúc đạp phanh cho đến khi xe dừng hẳn là 400 m.

Câu 15. Một xe ô tô đang chạy với vận tốc 72 (km/h) thì người lái xe bất ngờ phát hiện chướng ngại vật trên đường cách đó 50 (m). Người lái xe phản ứng một giây, sau đó đạp phanh khẩn cấp. Kể từ thời điểm này, ô tô chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t) = -10t + 20$ (m/s), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong t (giây) kể từ lúc đạp phanh. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Quãng đường $s(t)$ mà xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) là một nguyên hàm của hàm số $v(t)$.

b) $s(t) = -5t^2 + 20t$.

c) Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi xe ô tô dừng hẳn là 20 giây.

d) Xe ô tô đó không va vào chướng ngại vật ở trên đường.

Câu 16. Cây KEO LAI là một trong các loài cây không chỉ là nguyên liệu giấy quan trọng mà còn là loài cây cung cấp gỗ nguyên liệu cho các ngành khác như chế biến ván nhân tạo, chế biến đồ mộc xuất khẩu, gỗ bao bì, gỗ xây dựng. Cây phát triển với tốc độ nhanh. Kí hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau năm đầu tiên cây cao 8 m. Trong 10 năm tiếp theo cây phát triển với tốc độ $h'(x) = \dfrac{9}{x}$ (m/năm).

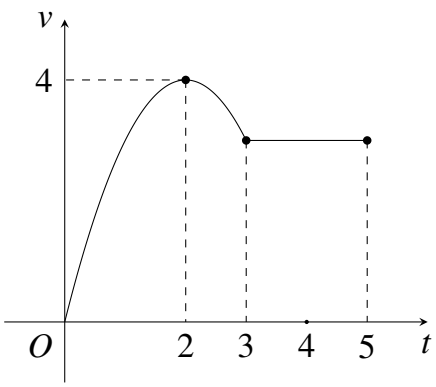
a) Biểu thức của $h(x)$ là $h(x) = 9\ln(x) + C$.

b) Sau 3 năm cây cao 20 m.

c) Tốc độ phát triển của cây trong 10 năm đầu sẽ giảm dần.

d) Người ta thường thu hoạch cây KEO LAI khi nó có độ cao trong khoảng từ 26 m đến 28 m sau 8 hoặc 9 năm sau khi trồng.

Câu 17. Một vật chuyển động với vận tốc $y = v(t)$ (m/s) được cho bởi đồ thị như hình vẽ bên dưới. Trong thời gian 3 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;4)$, khoảng thời gian còn lại đồ thị là đoạn thẳng song song trục hoành.



a) Vận tốc không đổi trong khoảng thời gian từ 3 giây đến 5 giây.

b) Trong 3 giây đầu tiên thì $v(t) = -t^2 + 4t$.

c) Quãng đường mà vật di chuyển trong 3 giây đầu được tính bởi công thức $\displaystyle\int_0^3 \left(-t^2 + 4t\right) \mathrm{d}t$.

d) Quãng đường mà vật di chuyển trong 5 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động bằng $\dfrac{250}{3}$ (m).

Câu 18. Tại một nhà máy sản xuất một loại phân bón. Gọi $P(x)$ là lợi nhuận (tính theo triệu đồng) thu được từ việc bán x (tấn) sản phẩm trong một tuần. Khi đó đạo hàm $P'(x)$ gọi là lợi nhuận cận biên, cho biết tốc độ tăng lợi nhuận theo lượng sản phẩm bán được. Giả sử lợi nhuận cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức $P'(x) = 17 - 0{,}025x$ với $0 \le x \le 1\,000$. Biết nhà máy lỗ 24 triệu đồng nếu không bán được lượng sản phẩm nào trong tuần.

a) Nếu nhà máy bán được 1,3 tấn sản phẩm trên tuần thì nhà máy bắt đầu có lãi.

b) Lợi nhuận nhà máy thu được khi bán 80 tấn sản phẩm trong tuần là 1 tỉ 256 triệu đồng.

c) Công thức lợi nhuận (tính theo triệu đồng) thu được từ việc bán x (tấn) sản phẩm trong một tuần là $P(x) = 17x - 0{,}012\,5x^2 + C$ với C là một hằng số bất kỳ.

d) Phương trình $P'(x) = 0$ có tập nghiệm là $S = \{680\}$.

Câu 19. Một bồn chứa nước đang chứa 200 lít nước. Người ta bắt đầu bơm nước vào bồn qua một đường ống. Tại thời điểm t (phút), tốc độ dòng chảy của nước vào bồn được xác định bởi hàm số $v(t) = 6t^2 + 8t$ (lít/phút). Gọi $V(t)$ là thể tích nước có trong bồn tại thời điểm t.

a) Tốc độ dòng chảy tăng theo thời gian.

b) Sau 10 phút bơm, nếu bồn có dung tích 2 500 lít thì nước sẽ tràn ra ngoài.

c) Tốc độ dòng chảy của nước vào bồn tại thời điểm $t = 5$ (phút) là 190 (lít/phút).

d) Hàm số thể tích $V(t)$ là một nguyên hàm của hàm tốc độ dòng chảy $v(t)$ và có dạng tổng quát là $V(t) = 6t^3 + 4t^2 + C$ (C là hằng số).

Câu 20 (CT-THPTQG 2025). Đối với ngành nuôi trồng thủy sản, việc kiểm soát lượng thuốc tồn dư trong nước là một nhiệm vụ quan trọng nhằm đáp ứng các tiêu chuẩn an toàn về môi trường. Khi nghiên cứu một loại thuốc trị bệnh trong nuôi trồng thủy sản, người ta sử dụng thuốc đó một lần và theo dõi nồng độ thuốc tồn dư trong nước kể từ lúc sử dụng thuốc. Kết quả cho thấy nồng độ thuốc $y(t)$ (đơn vị: mg/lít) tồn dư trong nước tại thời điểm t ngày ($t \geqslant 0$) kể từ lúc sử dụng thuốc, thỏa mãn $y(t) > 0$ và $y'(t) = k.y(t)$ ($t \geqslant 0$), trong đó k là hằng số khác không. Đo nồng độ thuốc tồn dư trong nước tại các thời điểm $t = 6$ (ngày); $t = 12$ (ngày) nhận được kết quả lần lượt là 2 mg/lít; 1 mg/lít. Cho biết $y(t) = e^{g(t)}$ ($t \geqslant 0$).

a) $g(t) = kt + C$ ($t \geqslant 0$) với C là một hằng số xác định.

b) $k = -\dfrac{\ln 2}{6}$.

c) $C = 4\ln 2$.

d) Nồng độ thuốc tồn dư trong nước tại thời điểm $t = 21$ (ngày) kể từ lúc sử dụng thuốc lớn hơn $0{,}4$ mg/lít.

Câu 21. Một quần thể vi khuẩn ban đầu có 1000 con. Sau 2 giờ, số lượng vi khuẩn tăng lên thành 4000 con. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn tại thời điểm t (giờ). Biết rằng tốc độ tăng trưởng của quần thể tỉ lệ thuận với số lượng vi khuẩn hiện có, tức là $P'(t) = k \cdot P(t)$, với k là hằng số khác 0 và $P(t) > 0$ với $t \geq 0$.

a) Hằng số tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn là $k = \ln 2$.

b) Sau 5 giờ kể từ thời điểm ban đầu, số lượng vi khuẩn là 32000 con.

c) Công thức tính số lượng vi khuẩn tại thời điểm t là $P(t) = 4000\mathrm{e}^{kt}$ với $t \geq 0$.

d) Để số lượng vi khuẩn đạt 64000 con, cần đúng 8 giờ kể từ thời điểm ban đầu.

Câu 22. Trong một bể xử lý nước thải, số lượng vi khuẩn gây hại tại thời điểm t được kí hiệu bằng $N(t)$ (đơn vị: con). Người ta nhận thấy rằng trong giai đoạn đầu (khi môi trường chưa bị hạn chế), tốc độ biến thiên của số lượng vi khuẩn tuân theo quy luật hàm mũ và được mô hình hóa bởi hàm số $N'(t) = A \cdot \mathrm{e}^{kt}$, trong đó: A, k là các hằng số dương, t là thời gian (đơn vị: giờ). Từ các nghiên cứu thực nghiệm (sau khi xử lý và làm tròn số liệu), người ta ước lượng được $A = 1000\ln 2$ và tại thời điểm $t = 1$ giờ có 3000 vi khuẩn; $N'(1) = 2000\ln 2$. Biết rằng mức độ an toàn cho phép là không quá 129 000 con.

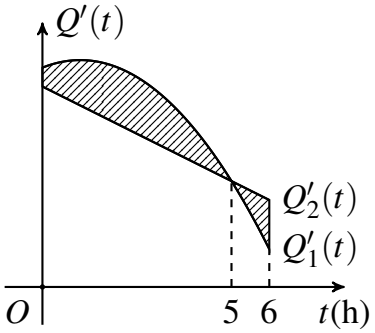
a) $k = \ln 2$.

b) Số vi khuẩn tại thời điểm $t = 6$ giờ là 63 000 con.

c) Số lượng vi khuẩn bắt đầu vượt ngưỡng an toàn từ sau thời điểm $t = 7$ giờ.

d) Tại thời điểm $t = 7$ giờ người ta tiến hành xử lý để giảm số lượng vi khuẩn theo quy luật: $M(t) = 129\,000 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5(t-7)}$ với $M(t)$ là số con vi khuẩn ở thời điểm t giờ ($t \geq 7$). Khi đó, sau $3\ln 2$ giờ kể từ khi bắt đầu xử lý, số vi khuẩn còn lại 64 500 con.

Câu 23. Hình vẽ bên mô tả hiệu suất làm việc của hai công nhân tại một nhà máy trong thời gian 6 giờ. Công nhân A đang sản xuất với hiệu suất $Q_1'(t) = -2t^2 + 4t + 58$ sản phẩm mỗi giờ, trong khi công nhân B đang sản xuất với hiệu suất $Q_2'(t) = 53 + at$ sản phẩm mỗi giờ ($a \in \mathbb{R}$). Biết rằng hàm $Q_1(t)$ và $Q_2(t)$ mô phỏng số lượng sản phẩm làm được của công nhân A và công nhân B sau t giờ.



a) Hiệu suất làm việc cực đại của công nhân A là 60 sản phẩm mỗi giờ.

b) Giá trị $a = -3$.

c) Sau 6 giờ làm việc, công nhân B hoàn thành được 228 sản phẩm.

d) Sau 6 giờ làm việc, số sản phẩm hoàn thành của công nhân A nhiều hơn số sản phẩm hoàn thành của công nhân B.

Câu 24. Một nghiên cứu khả năng ghi nhớ kiến thức của người học sau khi kết thúc khóa học chỉ ra rằng càng về lâu thì khả năng ghi nhớ kiến thức càng giảm. Nếu xem $f(t)$ là phần trăm kiến thức người học còn nhớ sau t tháng thì $f'(t)$ thể hiện là tốc độ thay đổi kiến thức của người học. Nghiên cứu cho thấy $f'(t) < 0$, điều này thể hiện càng về lâu thì khả năng ghi nhớ kiến thức càng giảm. Độ lớn của $f'(t)$ chính là tốc độ giảm sút kiến thức của người học. Hai bạn Thành và Công cùng tham gia một khóa học. Sau khi kết thúc khóa học, phần trăm kiến thức bạn Thành còn nhớ sau t tháng được mô hình hóa bởi hàm số $f(t) = 94 - 12\ln(3t+1)$, với $0 \leq t \leq 24$.

a) Tại thời điểm khóa học vừa kết thúc, bạn Thành nhớ được 94% kiến thức.

b) Tốc độ thay đổi kiến thức của bạn Thành ở thời điểm sau t tháng kết thúc khóa học là $f'(t) = -\dfrac{12}{3t+1}$.

c) Tại thời điểm sau 3 tháng khóa học kết thúc, tốc độ giảm sút kiến thức của bạn Thành là 1,2%/tháng.

d) Biết rằng tại mọi thời điểm, tốc độ thay đổi kiến thức của bạn Thành luôn gấp 3 lần tốc độ thay đổi kiến thức của bạn Công. Tại thời điểm kết thúc khóa học, bạn Công nhớ được 96% kiến thức. Sau 3 tháng, lượng kiến thức bạn Công còn nhớ được hơn 85%.

Câu 25 (MH - THPTQG 2025). Một người điều khiển ô tô đang ở đường dẫn muốn nhập làn vào đường cao tốc. Khi ô tô cách điểm nhập làn 200 m , tốc độ của ô tô là 36 km/h. Hai giây sau đó, ô tô bắt đầu tăng tốc với tốc độ $v(t) = at + b (a, b \in \mathbb{R}, a > 0)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc. Biết rằng ô tô nhập làn cao tốc sau 12 giây và duy trì sự tăng tốc trong 24 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

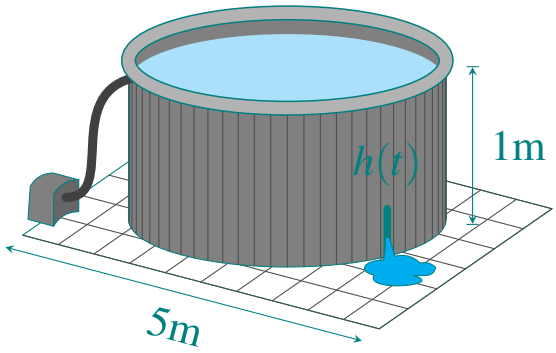
a) Quãng đường ô tô đi được từ khi bắt đầu tăng tốc đến khi nhập làn là 180 m .

b) Giá trị của b là 10 .

c) Quãng đường $S(t)$ (đơn vị: mét) mà ô tô đi được trong thời gian t giây $(0 \le t \le 24)$ kể từ khi tăng tốc được tính theo công thức $S(t) = \int_0^{24} v(t), \mathrm{d}t$.

d) Sau 24 giây kể từ khi tăng tốc, tốc độ của ô tô không vượt quá tốc độ tối đa cho phép là 100 km/h.

Câu 26. Một bể bơi hình trụ có đường kính 5 m và chiều cao 1 m; bể được bơm nước vào với tốc độ không đổi v_0. Sau khi nước được bơm đầy, bể bơi bị thủng một lỗ ở đáy và nước chảy ra ngoài và bể bị chảy hết nước trong 8 giờ. Biết tốc độ giảm chiều cao của bể bơi khi nước chảy ra ngoài vào thời điểm t giờ (tính từ lúc nước đầy bể và ngừng bơm) được cho bởi hàm số $h'(t) = at + b$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Lúc nước chảy hết ra ngoài thì tốc độ giảm chiều cao bằng 0.



a) Thể tích của bể bơi sau khi nước được làm đầy là $6{,}25\pi$ m^3.

b) $32a + 1 = 0$ và $4b - 1 = 0$.

c) Sau 4 giờ kể từ lúc bể bị rò, lượng nước bị mất đi bằng $\dfrac{75\pi}{16}$ m^3.

d) Lượng nước bị rò rỉ ra ngoài một nửa sau $8 - 4\sqrt{2}$ giờ.

Câu 27. Một khinh khí cầu bay với độ cao (so với mực nước biển) tại thời điểm t $(0 \le t \le 29)$ là $h(t)$, trong đó t tính bằng phút, $h(t)$ tính bằng mét. Tốc độ bay của khinh khí cầu được cho bởi hàm số $v(t) = at^2 + bt$, $(a, b \in \mathbb{R})$, với t tính bằng phút, $v(t)$ tính bằng mét/phút. Tại thời điểm xuất phát, khinh khí cầu ở độ cao 520 m và 5 phút sau khi xuất phát, khinh khí cầu đã ở độ cao 530 m. Khinh khí cầu sẽ trở lại độ cao khi xuất phát sau 15 phút.

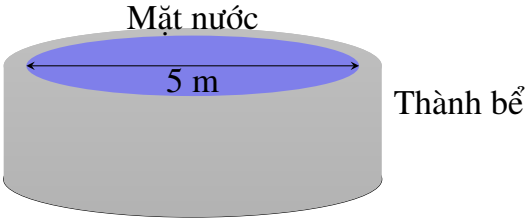
a) $h(0) = 520$ m.

b) Độ cao của khinh khí cầu tại thời điểm t $(0 \le t \le 29)$ là $h(t) = \int_0^t v(t)\,\mathrm{d}t$.

c) Giai đoạn khinh khí cầu tăng độ cao kéo dài trong 10 phút kể từ thời điểm xuất phát.

d) Độ cao tối đa của khinh khí cầu là 540 m.

Câu 28. Một bể bơi hình trụ trên mặt đất có đường kính 5 m, được bơm nước vào với tốc độ v_0, không đổi cho đến khi mực nước cao 1 m.



Sau khi được làm đầy 1 m, bể bơi bị thủng ở đáy và nước rò rỉ ra ngoài. Bể bơi rò hết toàn bộ nước trong 8 giờ. Biết rằng lượng nước còn lại trong hồ được mô phỏng bởi hàm $h(t)$ và tốc

độ nước chảy ra ngoài vào thời điểm t giờ (tính từ lúc bắt đầu đỗ) được xác định bởi hàm số $h'(t) = at + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Lúc nước chảy hết ra ngoài thì vận tốc nước chảy bằng 0.

a) Thể tích của bể bơi sau khi được làm đầy 1 m là $6,25$ m^3.

b) Tốc độ nước chảy ra ngoài tại thời điểm 8 giờ kể từ lúc bể bị rò bằng 0.

c) $a = \dfrac{25}{128}$.

d) Sau 4 giờ kể từ lúc bể bị rò, lượng nước bị mất đi bằng $4,6875$ m^3.

Câu 29. Một quần thể vi khuẩn (A) có số lượng cá thể là $P(t)$ sau t phút quan sát được phát hiện thay đổi với tốc độ là $P'(t) = a\mathrm{e}^{0,1t} + 150\mathrm{e}^{-0,03t}$ (vi khuẩn/phút) $(a \in \mathbb{R})$. Biết rằng lúc bắt đầu quan sát, quần thể có 200 000 vi khuẩn và đạt tốc độ tăng trưởng là 350 vi khuẩn/phút. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

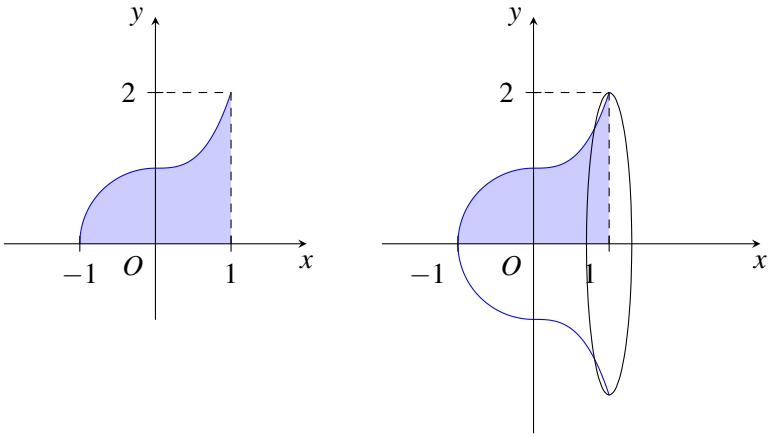
a) Giá trị của $a = 200$.

b) $P(t) = 2\,000\mathrm{e}^{0,1t} - 5\,000\mathrm{e}^{-0,03t} + 200\,000$.

c) Sau 12 phút số lượng vi khuẩn trong quần thể là 206 152 con (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

d) Sau 12 phút, một quần thể vi khuẩn (B) có tốc độ tăng trưởng là $G'(t) = 500\mathrm{e}^{0,2t}$ (vi khuẩn/phút) bắt đầu cạnh tranh nguồn thức ăn trực tiếp với quần thể (A), một cá thể tại quần thể (B) triệt tiêu một cá thể tại quần thể (A). Sau 5 phút cạnh tranh quần thể (A) bị triệt tiêu hoàn toàn. Số lượng vi khuẩn của quần thể (B) ở thời điểm bắt đầu cạnh tranh là 191 967 con (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 30. Chiếc mũ rộng vành được mô hình hóa khi cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & , \quad -1 \le x \le 0 \\ x^3 + 1 & , \quad 0 < x < 1 \end{cases}$, trục Ox và các đường thẳng $x = -1$, $x = 1$ quay xung quanh trục Ox (tham khảo hình vẽ). Biết đơn vị trên mỗi trục là dm.



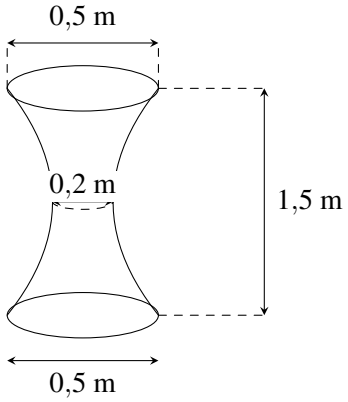
a) Diện tích của hình phẳng (H) là $S = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left| \sqrt{1-x^2} + x^3 + 1 \right| \mathrm{d}x$.

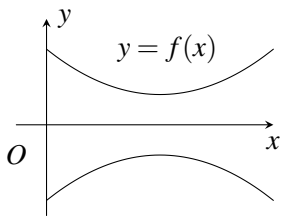
b) Thể tích của khối tròn xoay trên là $\dfrac{97}{42}\pi$ dm^3.

c) Giá trị của hàm số $f(x)$ khi $x = 1$ bằng 2.

d) Vành của chiếc mũ (giao tuyến của mặt tròn xoay cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1$) có diện tích bằng 2π dm^2.

Câu 31. Một chậu nước có dạng một khối tròn xoay với thiết diện qua trục của chậu (mặt cắt đi qua hai tâm của hai đường tròn đáy) là hai đường parabol đối xứng nhau qua trục đó. Biết hai đường tròn đáy chậu cùng có bán kính 0,5 (m); thiết diện nhỏ nhất vuông góc với trục của chậu có bán kính 0,2 (m); chiều cao của chậu nước bằng 1,5 (m).





Người ta bơm nước vào chậu với tốc độ 5 (lít/phút). Xét hệ trục tọa độ Oxy với gốc O trùng với tâm đường tròn đáy của chậu nước, tia Ox chứa trục của chậu nước (đơn vị trên mỗi trục là mét). Mặt phẳng qua trục của chậu nước cho ta hai nhánh parabol như hình vẽ, gọi $y = f(x)$ là parabol nằm trên trục hoành.

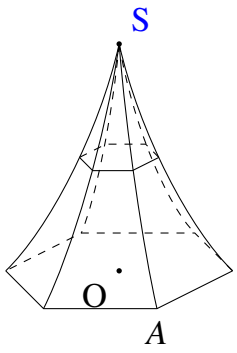
a) $f(x) = \dfrac{8}{15}x^2 - \dfrac{4}{5}x + \dfrac{1}{2}$.

b) Sức chứa tối đa của chậu nước bằng 0,5 m^3 *(làm tròn kết quả đến hàng phần chục của mét khối)*.

c) Sau 1,5 giờ bơm nước *(làm tròn kết quả đến hàng phần chục của giờ)* thì chậu đầy nước.

d) Nếu bơm từ đầu như thế thì đến phút thứ 20, tốc độ dâng lên của nước bằng 0,01 (m/phút).

Câu 32. Có một cái chòi hình "chóp cong", trong đó mái chòi (H) có dạng hình "chóp lục giác cong đều" như hình vẽ bên. Đáy của (H) là một hình lục giác đều tâm O, đường chéo qua tâm O có độ dài là 10 m, chiều cao $SO = 10$ m (SO vuông góc với mặt phẳng đáy). Các "cạnh bên" của (H) là các sợi dây thép nằm trên các đường parabol có trục đối xứng song song với SO. Giả sử hình tạo bởi các đoạn giao tuyến của (H) với mặt phẳng (α) vuông góc với SO là một lục giác đều. Biết rằng khi mặt phẳng (α) đi qua trung điểm của SO thì lục giác đều có cạnh $l = 2$ m.



a) Diện tích hình lục giác đều nói trên khi (α) đi qua trung điểm của SO là $6\sqrt{3}$ m^2.

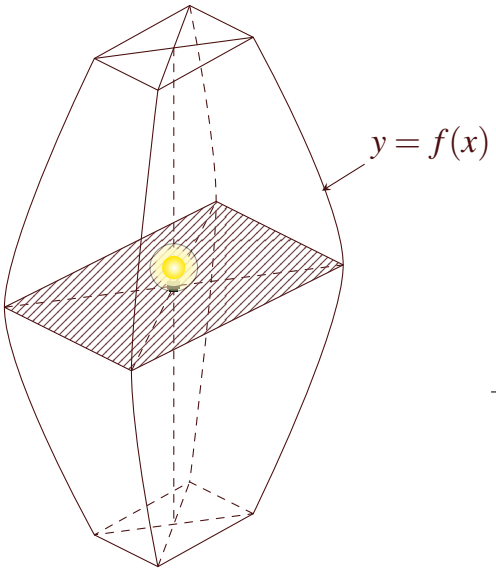
b) Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho gốc tọa độ là điểm O trên hình vẽ, S thuộc tia Oy, đỉnh A của lục giác đều thuộc tia Ox thì "cạnh bên" SA nằm trên đường parabol có phương trình $y = \dfrac{1}{6}x^2 - \dfrac{17}{6}x + 10$.

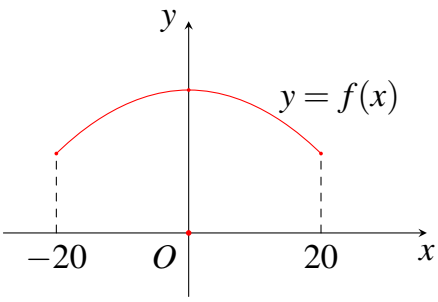
c) Nếu (α) cắt SO và "cạnh bên" SA lần lượt tại M và B, mà $OM = t$ thì độ dài đoạn BM là $\dfrac{17}{2} - \sqrt{t + \dfrac{49}{4}}$.

d) Thể tích phần không gian nằm bên trong mái chòi (H) là 171,4 m^3.

Câu 33. Cận kề ngày Tết Nguyên Đán. Bác Nghĩa muốn thiết kế một đèn lồng cao 40 cm để treo lên ở hiên nhà. Mặt cắt ngang tại mọi độ cao vuông góc với trục thẳng đứng của đèn

lồng luôn là một hình vuông (*xem hình vẽ*). Mặt đáy và đỉnh của đèn lồng là hình vuông có cạnh $L_0 = 10\sqrt{2}$ cm. Mặt cắt ngang tại vị trí rộng nhất của đèn lồng là hình vuông (hình vuông có diện tích lớn nhất) có cạnh $L_{\max} = 14\sqrt{2}$ cm. Mặt cắt của đèn lồng theo mặt phẳng đứng chứa đường chéo đáy có dạng là hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong Parabol đối xứng nhau qua trục thẳng đứng đi qua tâm đáy của đèn lồng. Một đường cong Parabol $y = f(x)$ trong bốn đường cong để tạo ra **khung** đèn lồng được gắn trong hệ trục Oxy với trục Ox biểu diễn chiều cao của chiếc đèn lồng (*đơn vị mỗi trục là* 1 cm).





a) Diện tích lớn nhất của mặt cắt ngang hình vuông, vuông góc với trục thẳng đứng bằng 196 cm^2.

b) Phương trình của đường cong parabol $y = f(x) = \dfrac{-1}{100}x^2 + 14$.

c) Tính thể tích của chiếc đèn lồng đó là 12,95 lít (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

d) Để đảm bảo an toàn, bác Nghĩa treo một chiếc bóng đèn sợi đốt hình cầu có tâm (được xem là một điểm) đặt trên trục thẳng đứng của lồng đèn và cách đáy 22 cm. Bác quy định rằng để tránh làm cháy lớp giấy dán, khoảng cách từ mặt bóng đèn đến bất kỳ điểm nào trên lồng đèn phải ít nhất là 7 cm. Bác có thể chọn chiếc bóng đèn có bán kính lớn nhất là 2,8666 cm *(làm tròn đến bốn số sau dấu phẩy)*.

Câu 34. Một con sư tử đang đuổi theo một con ngựa vằn và chúng cùng chạy trên một đường thẳng. Ngựa vằn đã nhận ra sư tử khi sư tử cách nó khoảng 40 m. Từ thời điểm này, sư tử đuổi theo ngựa vằn với tốc độ $v_1(t) = 15\mathrm{e}^{-0,1t}$ m/s và ngựa vằn bỏ chạy với tốc độ $v_2(t) = 20 - 20\mathrm{e}^{-0,1t}$ m/s (t tính bằng giây, $0 \le t \le 60$).

a) Tại thời điểm ban đầu $t = 0$ giây, vận tốc của con ngựa vằn là 20 m/s.

b) Tốc độ của sư tử giảm dần theo thời gian, trong khi tốc độ của ngựa vằn tăng dần theo thời gian.

c) Sư tử ở gần ngựa vằn nhất khi $v_1'(t) = v_2'(t)$ và khoảng cách ngắn nhất giữa chúng là 1,72 m (làm tròn đến hàng phần trăm theo đơn vị mét).

d) Sư tử sẽ không bắt được ngựa vằn và khoảng cách ngắn nhất giữa chúng là 1,92 m (làm tròn đến hàng phần trăm theo đơn vị mét).

Câu 35. Một người đang bơm khí vào một quả bong bóng với tốc độ 100 cm^3/s. Quả bóng ngày càng to dần nhưng luôn có hình cầu. Đây là loại bong bóng mà nếu người bơm để bán kính vượt quá 30 cm thì bong bóng sẽ bể.

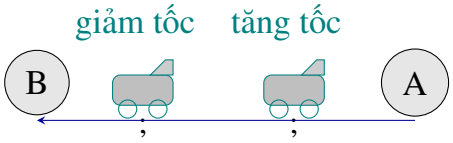
a) Sau 10 giây, bán kính quả bong bóng bằng 6,4 cm (kết quả làm tròn đến hàng phần chục của cm).

b) Người bơm không thể làm cho thể tích quả bóng vượt quá 113 lít (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của lít).

c) Khi đường kính quả bong bóng là 50 cm thì bán kính của quả bóng đang tăng với tốc độ 0,01 cm/s (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của cm/s).

d) Nếu sau khi bơm được 4 giây, người bơm tăng tốc độ bơm thêm 5 cm^3/s thì sau 189 giây (làm tròn đến hàng đơn vị của giây), bong bóng sẽ bể.

Câu 36. Một robot tự hành ở một cảng vận chuyển công nghệ cao bắt đầu di chuyển từ vị trí nghỉ tại điểm A. Robot di chuyển như sau: Trong giai đoạn đầu, robot tăng tốc đều từ vận tốc 0 (m/s) đến 10 (m/s) trong thời gian chưa biết t_1 giây theo hàm số vận tốc $v_1(t) = at$, a gọi là gia tốc trong giai đoạn này, a (m/s^2).



Sau đó, robot tiếp tục di chuyển với vận tốc không đổi trong 40 giây. Cuối cùng, robot giảm tốc đều từ 10 (m/s) và dừng lại đúng tại băng chuyền điểm B với thời gian t_2 giây theo hàm vận tốc $v_2(t) = 10 - bt$, (b gọi là gia tốc trong giai đoạn này, b (m/s^2). Toàn bộ quá trình vận chuyển diễn ra trong tổng thời gian là 70 giây.

a) Nếu gia tốc $a = 0{,}5$ (m/s^2), thời gian tăng tốc t_1 bé hơn 21 giây.

b) Nếu gia tốc $b = 0{,}8$ (m/s^2), thời gian giảm tốc t_2 lớn hơn 13 giây.

c) $a + b \le \dfrac{5}{2}$ m/s^2.

d) Tổng quãng đường mà robot đã di chuyển từ A đến B là 550 m.

Câu 37. Một lon sữa cho trẻ em được lấy ra khỏi tủ lạnh và đặt trên bàn để rã đông. Nhiệt độ của lon sữa tại thời điểm lấy ra khỏi tủ lạnh là $-4°\text{C}$, và sau t giờ, tốc độ tăng nhiệt độ của lon sữa được cho bởi công thức $T'(t) = 7\text{e}^{-0{,}35t}$ ($°\text{C}/\text{giờ}$) cho đến khi lon sữa đạt nhiệt độ môi trường là $10°\text{C}$.

a) Sau 2 giờ, tốc độ thay đổi nhiệt độ của lon sữa bằng $3{,}48°\text{C}/\text{giờ}$ *(làm tròn kết quả đến hai chữ số thập phân).*

b) Nhiệt độ của lon sữa tính từ thời điểm lấy ra khỏi tủ lạnh cho đến khi lon sữa đạt nhiệt độ môi trường được tính bởi công thức $T(t) = -20\text{e}^{-0{,}35t}$.

c) Thời gian để lon sữa đạt nhiệt độ môi trường là 3,44 giờ *(làm tròn kết quả đến hai chữ số thập phân của giờ).*

d) Ngay sau khi đạt nhiệt độ môi trường, lon sữa được đưa vào máy hâm sữa. Tốc độ tăng nhiệt độ của lon sữa trong máy sau t giờ được xác định bởi $L'(t) = k\text{e}^{-0{,}22t}$, ($k$ là hằng số). Lon sữa được coi là đạt yêu cầu khi nhiệt độ lon sữa bằng $70°\text{C}$. Biết rằng thời gian cần thiết để hâm nóng lon sữa là 5 phút thì hằng số $k \in (720; 730)$.

Câu 38. Một người điều khiển xe Taxi xuất phát từ trạm thu phí muốn nhập làn vào đường cao tốc, chuyển động tăng tốc với tốc độ $v(t) = -\dfrac{1}{180}t^2 + \dfrac{116}{135}t$ (m/s) (trong đó, t là thời gian

tính bằng giây kể từ khi Taxi chuyển động rời trạm thu phí). Từ trạm thu phí đó, một xe Cứu thương cũng xuất phát, chuyển động thẳng cùng hướng với xe Taxi nhưng chậm hơn 1 giây so với xe Taxi và có gia tốc bằng $a\left(\mathrm{m/s^2}\right)$ (a là hằng số). Sau khi xe Cứu thương xuất phát được 17 giây thì đuổi kịp xe Taxi. Biết rằng, xe Taxi nhập làn cao tốc sau 20 giây và cả hai xe duy trì sự tăng tốc trong 28 giây kể từ khi Taxi rời trạm thu phí.

a) Quãng đường (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị) xe Taxi đi được từ trạm thu phí đến khi nhập làn khoảng 187 m.

b) Xe cứu thương chuyển động với gia tốc $a=\dfrac{300}{289}\left(\mathrm{m/s^2}\right)$.

c) Vận tốc (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị) của xe Cứu thương tại thời điểm đuổi kịp xe Taxi khoảng 16 (m/s).

d) Trong khoảng thời gian kể từ lúc hai xe gặp nhau cho đến giây thứ 28 (kể từ khi Taxi chuyển động rời trạm thu phí) vận tốc trung bình của xe Cứu thương lớn hơn vận tốc trung bình của xe Taxi.

Câu 39. Một người đang điều khiển xe máy với vận tốc là 36 (km/h) thì phát hiện đèn tín hiệu giao thông chuyển đỏ cách vị trí xe 80 (m). Ba giây sau đó, xe máy bắt đầu giảm tốc với vận tốc được cho bởi $v_1(t)=at+b$ (m/s) và $(a,b\in\mathbb{R},a<0)$, trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi xe bắt đầu giảm tốc. Khi xe máy đến vị trí đèn tín hiệu, đèn vẫn còn đỏ và xe dừng hẳn. Sau khi đèn chuyển xanh, xe tiếp tục di chuyển với vận tốc được cho bởi $v_2(t)=mt^2+nt$ (m/s) và $(m,n\in\mathbb{R},m<0)$, trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ lúc đèn chuyển xanh. Cuối cùng, xe máy dừng hẳn lại tại một quán ăn trên đường. Biết rằng thời gian xe máy đi từ vị trí đèn tín hiệu đến quán ăn là 20 giây và vận tốc lớn nhất trên đoạn đường này là 54 (km/h).

a) Quãng đường xe máy đi được từ lúc bắt đầu giảm tốc lần thứ nhất đến khi dừng hẳn tại vị trí đèn tín hiệu là 80 (m).

b) Giá trị của hệ số b là 10.

c) Xe máy dừng hẳn tại vị trí đèn tín hiệu sau 10 giây kể từ khi bắt đầu giảm tốc lần thứ nhất.

d) Khoảng cách từ vị trí đèn tín hiệu đến vị trí quán ăn là 200 (m).

3 Tự luận.

Bài 1. Tìm:

a) $\displaystyle\int \sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x;$

b) $\displaystyle\int (e^{2x}-2x^5+5)\mathrm{d}x;$

c) $\displaystyle\int \left(3x-\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x;$

d) $\displaystyle\int (3^{2x}-1)^2\mathrm{d}x;$

e) $\displaystyle\int \left(7x\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)\mathrm{d}x;$

f) $\displaystyle\int \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x.$

Bài 2. Tính các tích phân sau:

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2}\mathrm{d}x;$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{xe^x+1}{x}\mathrm{d}x;$

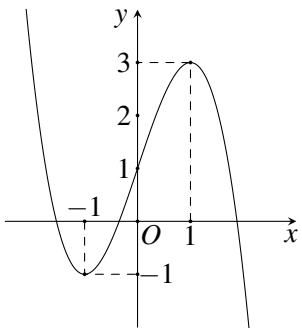
c) $\displaystyle\int_1^2 2^x\cdot 3^{x-1}\mathrm{d}x;$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{8^x+1}{2^x+1}\mathrm{d}x;$

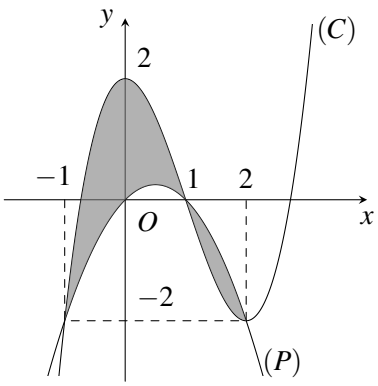
e) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin^2 x}{1-\cos^2 x}\mathrm{d}x;$

f) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x;$

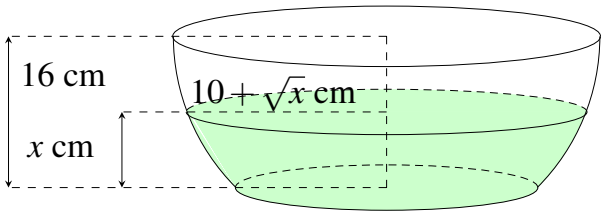
Bài 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết rằng đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính $\displaystyle\int_{-1}^{1} f'(x)\,\mathrm{d}x$.



Bài 4. Cho đồ thị (C) của hàm đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành như hình vẽ bên. Biết phần hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) (phần tô đậm của hình vẽ) có diện tích bằng $\dfrac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbb{N}$; $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản). Tính $m+n$.



Bài 5. Nếu cắt chậu nước có hình dạng như hình vẽ bằng mặt phẳng song song và cách mặt đáy x (cm), $(0 \le x \le 16)$ thì mặt cắt là hình tròn có bán kính $(10+\sqrt{x})$ (cm). Tính dung tích của chậu. Viết kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của centimet khối.



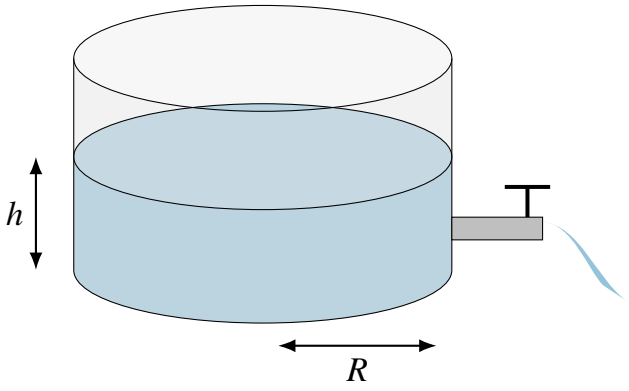
Bài 6. Tốc độ tăng dân số của một thành phố trong một số năm được ước lượng bởi công thức $P'(t) = 20 \cdot (1{,}106)^t$ với $0 \le t \le 7$, trong đó t là thời gian tính theo năm và $t = 0$ ứng với đầu năm 2015, $P(t)$ là dân số của thành phố tính theo nghìn người. Cho biết dân số của thành phố đầu năm 2015 là 1008 nghìn người.

a) Tính dân số của thành phố ở thời điểm đầu năm 2020 (làm tròn đến nghìn người).

b) Tính tốc độ tăng dân số trung bình hằng năm của thành phố trong giai đoạn từ đầu năm 2015 đến đầu năm 2020.

Bài 7. Một bồn chứa nước có dạng hình trụ với chiều cao 4 m và bán kính đáy 0,5 m. Lúc đầu bình chứa đầy nước. Kể từ khi bắt đầu xả nước, tốc độ thay đổi chiều cao của mực nước trong bồn theo thời gian t được xác định bởi công thức:

$$h'(t) = \frac{t}{50} - \frac{2}{5} \quad \text{(m/phút)}.$$



Sau khi xả 5 phút, trong bồn còn bao nhiêu lít nước? Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.

Bài 8. Nghệ thuật làm gốm có lịch sử phát triển lâu đời và vẫn còn tồn tại cho đến ngày nay. Giả sử một bình gốm có mặt trong của bình là một mặt tròn xoay sinh ra khi cho phần

đồ thị của hàm số $y = \dfrac{1}{175}x^2 + \dfrac{3}{35}x + 5 \quad (0 \le x \le 30)$ (x, y tính theo cm) quay tròn quanh bệ gốm có trục trùng với trục Ox. Hỏi để hoàn thành bình gốm đó ta cần sử dụng bao nhiêu cm^3 đất sét, biết rằng bình gốm đó có độ dày không đổi là 1 cm.

Bài 9. Trong kinh tế, nếu hàm số $C(x)$ là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hóa nào đó thì tốc độ thay đổi tức thời của chi phí theo số lượng sản phẩm được sản xuất $C'(x)$ được gọi là chi phí biên. Chi phí biên $C'(n)$ là chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ n sản phẩm lên $n+1$ sản phẩm. Giả sử chi phí biên khi sản xuất x sản phẩm của một công ty là $C'(x) = 2x + 80$ (USD/sản phẩm) thì tổng chi phí sản xuất tăng lên bao nhiêu nếu sản phẩm sản xuất ra tăng từ 40 sản phẩm lên 50 sản phẩm?

Bài 10. Tốc độ tăng cân nặng của một bé gái trong độ tuổi từ 0 đến 36 tháng được ước tính bởi hàm số $f'(t) = 0,00093t^2 - 0,04792t + 0,76806$ (kg/tháng) với $f(t)$ là cân nặng của bé gái lúc t tháng tuổi. Hãy ước tính cân nặng của một bé gái 5 tháng tuổi, biết cân nặng trung bình của bé gái khi mới sinh là $3,3$ kg.

Bài 11. Trọng lực của Trái Đất tác dụng lên một vệ tinh trong quá trình vệ tinh này được phóng lên từ mặt đất tới vị trí cách tâm Trái Đất r (m) xác định bởi công thức $F(r) = G \cdot \dfrac{Mm}{r^2}$, trong đó $M = 6 \cdot 10^{24}$ (kg) là khối lượng Trái Đất, m (kg) là khối lượng vệ tinh và $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$ là hằng số hấp dẫn. Trọng lực này sinh công $W = \displaystyle\int_a^b F(h)\,\mathrm{d}h$ (J) khi vệ tinh thay đổi từ vị trí cách tâm Trái Đất a (m) lên vị trí cách tâm Trái Đất b (m) . Công tối thiểu để phóng một vệ tinh nặng $m = 1\,000$ kg từ mặt đất lên độ cao $35\,780$ km so với mặt đất là $a \cdot 10^{10}$ (J), biết bán kính Trái Đất là $6\,370$ km. Tìm giá trị của a (làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài 12. Trong bài này, ta xét một tình huống giả định có một học sinh sau kỳ nghỉ đã mang virus cúm quay trở lại khuôn viên trường học biệt lập. Sau khi có sự tiếp xúc giữa các học sinh, virus cúm lây lan trong khuôn viên trường. Giả thiết hệ thống chống dịch chưa được khởi động và virus cúm được lây lan tự nhiên. Gọi $P(t)$ là số học sinh bị nhiễm virus cúm ở ngày thứ t tính từ ngày học sinh mang virus cúm quay trở lại khuôn viên trường. Biết rằng tốc độ lây lan của virus cúm cho bởi công thức $P'(t) = -0,02Ce^{-0,02t}$, trong đó C là hằng số khác 0. Số học sinh bị nhiễm vius cúm sau 4 ngày là 55 học sinh. Xác định số học sinh bị nhiễm virus cúm sau 10 ngày? Làm tròn đến hàng đơn vị.

Bài 13. Giả sử tốc độ tăng trưởng của một quần thể muỗi thỏa mãn công thức

$$N'(t) = 0,2N(t), 0 \le t \le 5,$$

trong đó t là thời gian tính theo ngày, $N(t)$ là số cá thể muỗi tại thời điểm t. Biết rằng ban đầu quần thể muỗi có 2000 cá thể.

a) Đặt $y(t) = \ln N(t)$, $0 \le t \le 5$. Chứng tỏ rằng $y'(t) = 0,2$. Từ đó, tìm $N(t)$ với $0 \le t \le 5$.

b) Tìm số lượng cá thể của quần thể muỗi sau 3 ngày (kết quả làm tròn đến hàng trăm).

Bài 14. Chủ một trung tâm thương mại muốn cho thuê một số gian hàng như nhau. Người

đó muốn tăng giá cho thuê của mỗi gian hàng thêm x (triệu đồng) ($x \geq 0$). Tốc độ thay đổi doanh thu từ các gian hàng đó được biểu diễn bởi hàm số $T'(x) = -20x + 300$, trong đó $T(x)$ tính bằng triệu đồng. Biết rằng nếu người đó tăng giá thuê cho mỗi gian hàng thêm 10 triệu đồng thì doanh thu là 12 000 triệu đồng. Tìm giá trị của x (triệu đồng) để người đó có doanh thu là cao nhất?

Bài 15. Một người bình thường với chiều cao h cm, nặng w kilogram có diện tích bề mặt cơ thể S được mô hình hoá bởi công thức $S = \dfrac{1}{60} \cdot w^{0,5} \cdot h^{0,5}$ (m^2) (công thức Mosteller). Một đối tượng có chiều cao bằng 168 cm, nặng 62 kg tham gia một cuộc nghiên cứu về sức khỏe trong 5 năm. Người ta nhận thấy cân nặng của đối tượng quan sát thay đổi với tốc độ $w'(t) = 0,02t^2 + 0,2t$ kg/năm ($0 \leq t \leq 5$) và chiều cao tăng đều mỗi năm 0,5 cm. Sau 5 năm quan sát, diện tích bề mặt cơ thể của đối tượng trên tăng thêm bao nhiêu centimet vuông so với ban đầu? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bài 16. Trong một số mô hình sinh học, phản ứng của cơ thể người đối với một loại thuốc cụ thể được đo bởi một hàm số bậc ba $y = F(M)$ trong đó M là lượng thuốc được hấp thụ vào máu, đơn vị là mg, $F(M)$ là tỉ lệ đáp ứng tính theo phần trăm. Độ nhạy cảm của cơ thể đối với thuốc đó (phần trăm mỗi mg) được tính bằng đạo hàm $S = F'(M)$. Cơ thể đáp ứng tốt nhất là 100% khi nồng độ thuốc trong máu là 200 mg và độ nhạy cảm lớn nhất là 0,75% mỗi mg khi nồng độ trong máu đạt 100 mg. Tỉ lệ đáp ứng của bệnh nhân khi nồng độ thuốc trong máu đạt 240 mg bằng bao nhiêu phần trăm?

Bài 17. Một học sinh đang điều khiển xe đạp điện chuyển động thẳng đều với vận tốc k (m/s). Khi phát hiện có chướng ngại vật phía trước học sinh đó thực hiện phanh xe. Sau khi phanh, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = k - 2t$ (m/s), thời gian tính bằng giây. Tìm giá trị lớn nhất của k để quãng đường xe đạp điện đi được sau khi phanh không vượt quá $9m$.

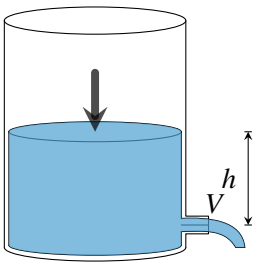
Bài 18. Trong một chương trình giao lưu âm nhạc đón tết vui xuân, ban đầu với sự tham dự của 1 700 khán giả. Ban tổ chức đã thống kê được số lượng khán giả ở lại sân khấu xem âm nhạc theo thời gian, được mô tả bởi một hàm số liên tục trên $[0;+\infty)$: $\begin{cases} 1\,700 - 400t, & 0 \leq t \leq 2 \\ a(t-2)^2 + b, & t > 2 \end{cases}$
(trong đó $f'(t)$ là số khán giả, t là số giờ kể từ khi chương trình bắt đầu, a, b là tham số thực), với hàm số $f(t)$ mô tả tổng sự hiện diện của khán giả theo thời gian t. Sau 2 giờ 30 phút số lượng khán giả ở lại sân khấu là 875. Hỏi từ khi bắt đầu cho đến khi khán giả ra về hết, trung bình mỗi giờ còn bao nhiêu khán giả ở lại tham gia chương trình âm nhạc?

Bài 19. Trong một nghiên cứu của V.A.Tucker và K.Schmidt-Koenig, người ta đã xác định rằng năng lượng E tiêu thụ bởi một con chim trong chuyến bay thay đổi theo tốc độ v (km/h) của con chim. Đối với một loài vẹt đuôi dài, mức tiêu hao năng lượng thay đổi theo tốc độ được cho bởi $E'(v) = \dfrac{0,31v^2 - 471,51}{v^2}$ với $v > 0$, trong đó E được tính bằng Jun. Quan sát cho thấy vẹt đuôi dài có xu hướng bay với tốc độ v_0 để làm giảm tiêu hao năng lượng xuống còn tối thiểu $E_{\min} = 24(J)$. Trong 4 giờ quan sát con vẹt bay với vận tốc tăng đều đặn từ 30 km/h đến 46 km/h. Tại thời điểm sau đúng một giờ quan sát, mức năng lượng tiêu hao của con vẹt đo được bằng là bao nhiêu Jun? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

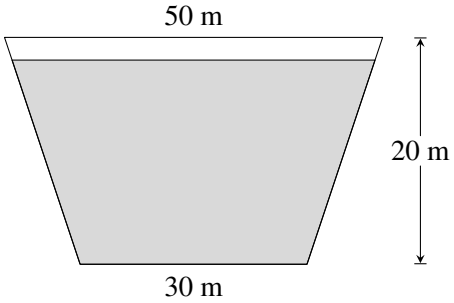
Bài 20. Vệ tinh Van Allen Probes được phóng lên không gian để nghiên cứu các vành đai bức xạ bao quanh Trái Đất. Vệ tinh này bay theo một quỹ đạo có chu kỳ 10 giờ-nghĩa là mỗi vòng bay quanh Trái Đất kéo dài đúng 10 giờ. Cứ mỗi vòng bay, vệ tinh lại xuyên qua vùng bức xạ mạnh và tích lũy thêm *liều bức xạ*. Biết rằng đơn vị của bức xạ là Gray (Gy) và khi tổng liều bức xạ chiếu vào vệ tinh đạt 1 000 Gray thì vệ tinh hỏng hoàn toàn. Khoảng cách từ tâm Trái Đất đến vệ tình được mô hình hóa bằng hàm số $R(T) = 7000 + 3000T$ (km), trong đó T là thời gian tính bằng giờ, $0 \leq T \leq 10$, kể từ đầu vòng bay. Công thức *suất liều bức xạ*-tức là lượng bức xạ vệ tinh nhận được trong 1 giờ, phụ thuộc vào khoảng cách R (km) từ vệ tính tới tâm Trái Đất, là $D(R) = 60 \cdot \left(\dfrac{R}{25\,000}\right)^2$ milliGray/giờ. Biết rằng do tính đối xứng và chu kỳ của quỹ đạo bay, tổng liều bức xạ vệ tịnh nhận được trong một vòng bay 10 giờ được tính bằng công thức $L = 2 \cdot \displaystyle\int_0^5 D(R(T))\,\mathrm{d}T$ và 1 Gray $= 1\,000$ milliGray. Tính số năm hoạt động của vệ tinh từ lúc bắt đầu hoạt động tới khi hỏng hoàn toàn *(không làm tròn các bước trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng tới hai chữ số thập phân sau dấu phẩy, coi một năm có* 365 *ngày, mỗi ngày có* 24 *giờ).*

Bài 21. Trên một mặt hồ phẳng rộng 470 mét vuông, một đợt tảo lam độc hại phát triển với tốc độ tỷ lệ thuận với căn bậc hai kích thước hiện tại của nó. Nếu ta gọi $S(t)$ là diện tích của đợt tảo này sau t ngày thì $S'(t) = k \cdot \sqrt{S(t)}$ (trong đó k là hằng số thực). Khi mới phát hiện, đợt tảo này bao phủ 16 m^2 mặt hồ. Diện tích của nó tăng gấp đôi trong 3 ngày tiếp theo, hỏi sau bao ngày tính từ lúc phát hiện đợt tảo này phủ kín mặt hồ? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

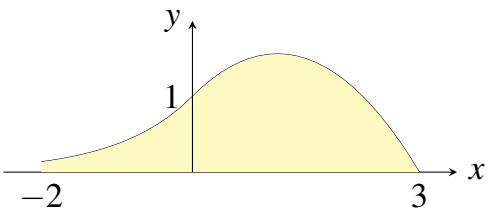
Bài 22. Theo định luật Torricelli, tốc độ nước chảy ra từ bể tỷ lệ thuận với căn bậc hai độ sâu của nước so với miệng cống: nếu $y(t)$ là độ cao mực nước và $V(t)$ là thể tích nước còn lại trong bể tại thời điểm t, thì tốc độ thoát ra $V'(t) = -k\sqrt{y(t)}$ với $k > 0$. Xét bể hình trụ cao 9 m, bán kính $R = 2$ m, ban đầu đầy nước. Biết sau 15 phút, $y(15) = 4$ m. Hỏi sau 42 phút, thể tích nước còn lại trong bể bằng bao nhiêu lít? (làm tròn đến đơn vị).



Bài 23. Một cái đập có mặt cắt ngang có dạng hình thang cân cao 20 mét, đáy lớn rộng 50 mét, đáy nhỏ rộng 30 mét. Nước cách đỉnh đập 4 mét (*tham khảo hình vẽ*). Áp suất thuỷ tĩnh tác dụng lên đập được tính theo công thức $F = 9\,800 \displaystyle\int_0^{h_0} h(x) \cdot k(x)\,\mathrm{d}x$ (N), trong đó $h(x)$ và $k(x)$ lần lượt là chiều dài và độ sâu của lớp nước tại vị trí cách đáy x mét, h_0 là độ cao của nước trong hồ. Biết $F = a \cdot 10^7$ (N), tính a (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười*).

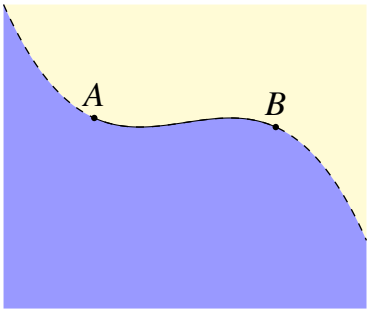


Bài 24. Ở bể bơi thành phố sẽ xây một cầu trượt nước mới. Cầu trượt dài 5 m và có thể trượt từ cả hai phía. Những người thận trọng trượt về bên trái, nơi mép trượt được cho bởi $f(x) = \mathrm{e}^x$ (trên đoạn $[-2;0]$).



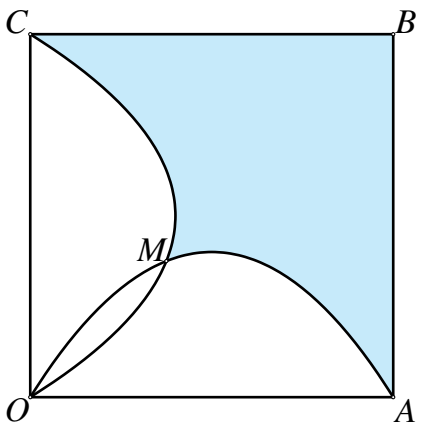
Những người ưa mạo hiểm trượt về bên phải, nơi mép trượt cao và dốc hơn, mô hình bởi $g(x) = -\dfrac{4}{9}x^2 + x + 1$ (trên đoạn $[0;3]$). Tại $x = 0$ hai đường cong nối trơn với nhau. (Đơn vị x, y tính bằng mét). Hai thành bên của cầu trượt được ốp nhựa. Cần bao nhiêu m^2 nhựa? (Tính tổng diện tích hai mặt bên).

Bài 25. Một phần của bề mặt phía trên của các gợn sóng của nước biển có hình dạng đồ thị hàm số bậc ba khi gắn hệ trục tọa độ Oxy. Biết rằng đồ thị hàm số bậc ba có các điểm cực trị lần lượt là $M(-2;1)$ và $N(0;1{,}2)$, đơn vị trên hệ trục tọa độ là mét.



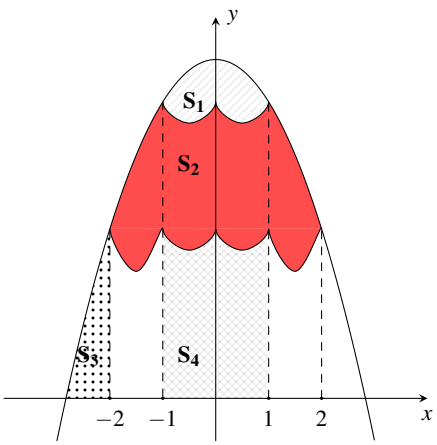
Hai vị trí A và B có hoành độ lần lượt là -3 và 1 nằm trên đường cong của các gợn sóng đó. Tính độ dài đường cong AB *(kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)*. Biết rằng độ dài đường cong có phương trình $y = f(x)$ từ điểm $C(c;f(c))$ tới điểm $D(d;f(d))$ với $c < d$ được tính bởi công thức $T = \displaystyle\int_c^d \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$.

Bài 26. Cho hình vuông $OABC$ cạnh bằng 8, điểm M nằm trong hình vuông sao cho khoảng cách từ M đến các cạnh OA, OC cùng bằng 3. Parabol (P_1) đi qua các điểm O, A, M, Parabol (P_2) đi qua các điểm O, C, M. Tính diện tích phần tô đậm (hình vẽ bên) (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị*).

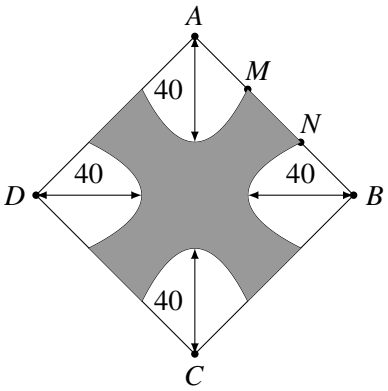


Bài 27. Vì nước và dầu không hoà tan vào nhau nên nếu dầu đổ vào nước sẽ tạo thành một mảng hình trụ trên bề mặt nước. Bán kính $r(t)$ của mảng này lan ra với tốc độ tỉ lệ thuận với chiều cao $h(t)$ của mảng dầu. Giả sử một lít dầu bị đổ trên mặt hồ tĩnh lặng. Bán kính ban đầu của vết tràn là 20 cm và sau 2 giây nó tăng lên 50 cm. Hỏi sau bao nhiêu phút (làm tròn đến hàng phần mười) thì bán kính vết tràn đạt 5 mét?

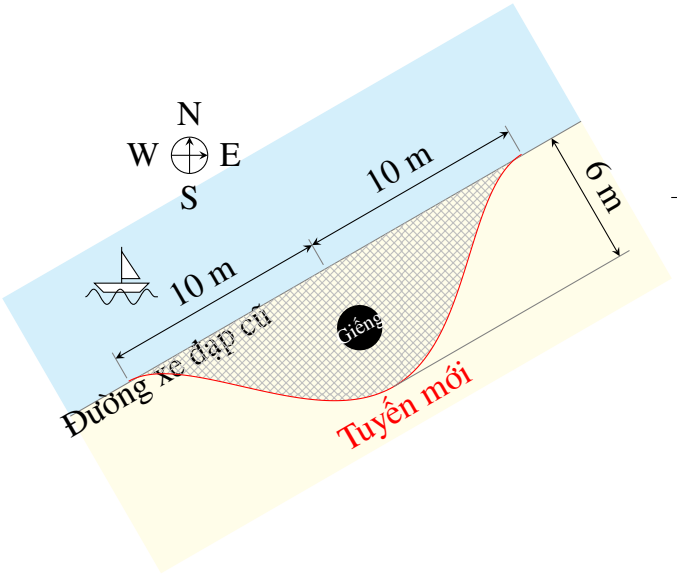
Bài 28. Một học sinh muốn tô màu cho mô hình trang trí dạng parabol có đỉnh thuộc trục tung, hai đường cong của hàm số $y = f(x)$ và $y = f(x) + 3$ giao với parabol tại các điểm có hoành độ $x = 1, x = -1, x = 2, x = -2$ như hình vẽ. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 lần lượt là các phần diện tích được kí hiệu như hình vẽ. Biết rằng $S_1 + S_4 = 30\,\text{m}^2$, $S_3 = \dfrac{105}{71}\,\text{m}^2$. Xác định diện tích S_2 (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

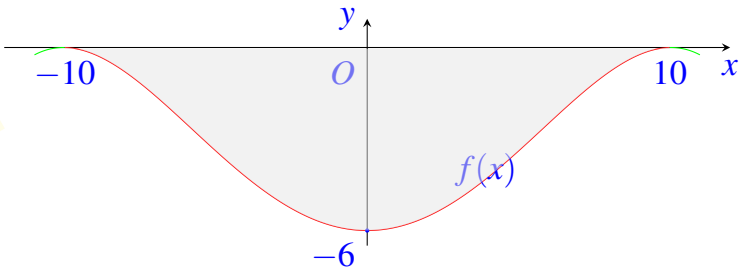


Bài 29. Kiến trúc sư thiết kế một khu sinh hoạt cộng đồng có dạng hình vuông $ABCD$ có độ dài đường chéo $AC = 120$ m. Trong đó, phần được tô màu đậm là sân chơi, phần còn lại để trồng hoa. Mỗi phần trồng hoa có đường biên cong là một phần của đường parabol với đỉnh thuộc một trục đối xứng của hình vuông, khoảng cách từ đỉnh đó đến đỉnh tương ứng của hình vuông bằng 40 m và $AM = MN = NB$ (xem hình minh họa). Diện tích của phần sân chơi là bao nhiêu mét vuông? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



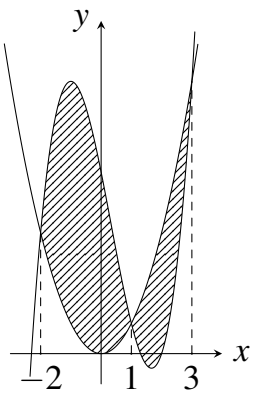
Bài 30. Dọc bờ nước có một đường xe đạp. Trên một đoạn dài 20 m, người ta muốn thay bằng tuyến mới đi vòng một cái giếng (đường kính 2 m). Các đoạn nối phải trơn (chuyển tiếp êm).





Đặt hệ trục Oxy thuận tiện như hình; do hình dạng đối xứng qua trục Oy và cần chuyển tiếp trơn vào trục Ox, ta chọn đa thức bậc 4: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Diện tích phần tô màu cần lát giữa bờ và tuyến mới là bao nhiêu mét vuông *(làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)*?

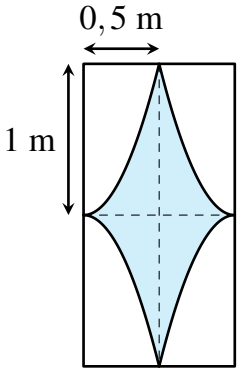
Bài 31. Người ta dự định trồng hoa để trang trí vào phần tô đậm trong hình vẽ dưới đây. Biết rằng phần tô đậm là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số



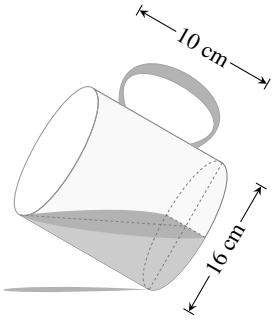
$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 6 \quad \text{và} \quad y = g(x) = -bx^2 + mx + n$$

trong đó a, b, c, m, $n \in \mathbb{R}$. Biết đồ thị hai hàm số đã cho cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt bằng -2; 1; 3. Chi phí để trồng hoa là 150 000 đồng/m^2 và đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét. Tổng chi phí để trồng hoa theo dự định là bao nhiêu nghìn đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

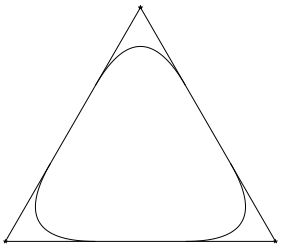
Bài 32. Nhà bác An có tất cả 8 cánh cửa sắt hình chữ nhật với chiều dài 2 m và chiều rộng 1 m. Hai mặt của mỗi cánh cửa được thiết kế như hình vẽ dưới đây. Trong đó, phần được tô đậm được sơn màu xanh, phần còn lại được sơn màu trắng. Mỗi phần sơn màu trắng có đường biên cong là một phần của parabol có đỉnh nằm trên cạnh của hình chữ nhật. Biết rằng chi phí để sơn màu xanh là 120 nghìn đồng/m^2 và chi phí sơn màu trắng là 110 nghìn đồng/m^2. Hỏi để sơn toàn bộ số cửa sắt trên, bác An phải trả bao nhiêu triệu đồng (*làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị triệu đồng*)?

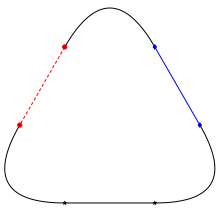


Bài 33. Một cốc thuỷ tinh có dạng hình trụ đang đựng một lượng nước, bán kính trong lòng đáy cốc là 8 (cm) và chiều cao trong lòng cốc là 10 (cm). Tính thể tích lượng nước trong cốc (đơn vị cm^3), biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy cốc mực nước trùng với đường kính của đáy cốc (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị*).



Bài 34. Một tấm kính làm mặt bàn có hình dáng tam giác đều với 3 đỉnh được làm cong. Biết cạnh tấm kính tam giác ban đầu bằng 16 dm. Để cắt góc được đẹp thì người ta dùng đường Parabol $(P)\colon y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \dfrac{15\sqrt{3}}{2}$ có hai nhánh tiếp xúc với hai cạnh của tam giác. Biết diện tích mặt kính là $a\sqrt{b}$ dm^2, (với a là số nguyên dương và b là số nguyên tố). Giá trị của $a+b$ bằng bao nhiêu?



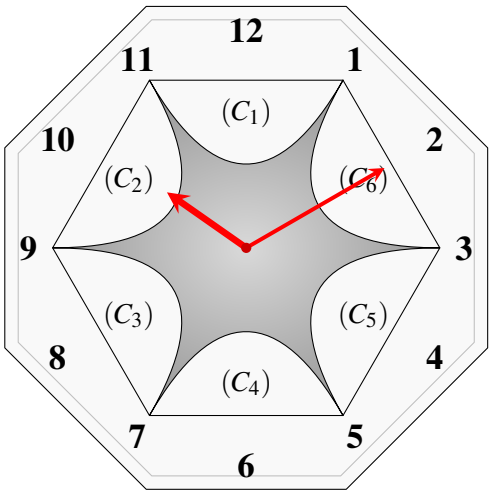


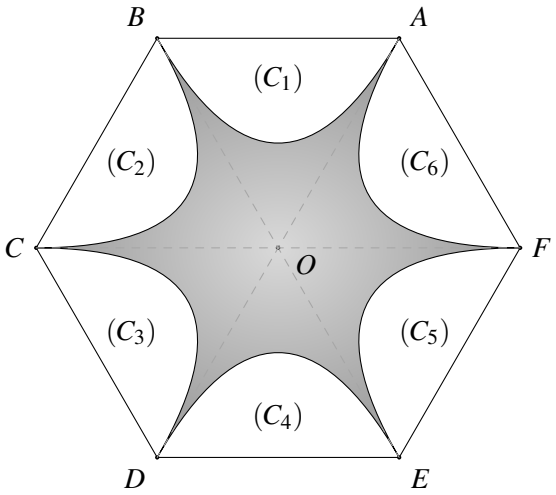
Bài 35. Trong hình bên là một chiếc đồng hồ treo tường cao cấp được thiết kế có phần ở giữa (phần tô đậm) dát vàng. Phần này được thiết kế như sau:

- Vẽ hình lục giác đều $ABCDEF$ tâm O và có cạnh bằng 4 cm;

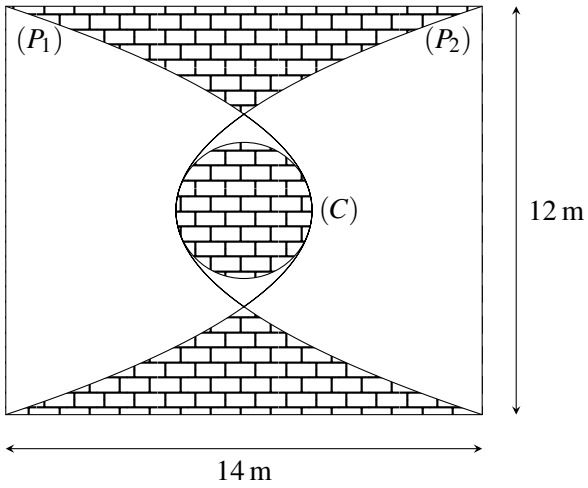
- Vẽ parabol (C_1) tiếp xúc với các đường thẳng OA, OB lần lượt tại A và B;
- Tương tự vẽ parabol (C_2) tiếp xúc với các đường thẳng OB, OC lần lượt tại B và C; parabol (C_3) tiếp xúc với các đường thẳng OC, OD lần lượt tại C và D; ...; parabol (C_6) tiếp xúc với các đường thẳng OF, OA lần lượt tại F và A.

Hình phẳng (H) được giới hạn bởi sáu parabol (C_1), (C_2), (C_3), (C_4), (C_5), (C_6) (phần tô đậm) là phần sẽ được dát vàng. Hỏi phần dát vàng này có diện tích bằng bao nhiêu centimét vuông (không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần chục)?



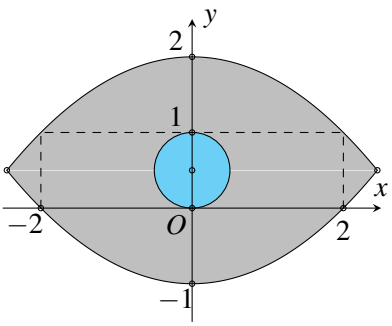


Bài 36. Người ta lát gạch trang trí một mảnh sân hình chữ nhật có kích thước 14 m $\times$ 12 m như hình vẽ bên dưới, trong đó (P_1), (P_2) là hai parabol đối xứng trục với nhau qua trục đối xứng vuông góc với chiều dài của mảnh sân, (C) là đường tròn có tâm trùng với tâm của mảnh sân và lần lượt có duy nhất một điểm chung với các parabol đó (tham khảo hình vẽ biết phần gạch đậm là phần lát gạch).



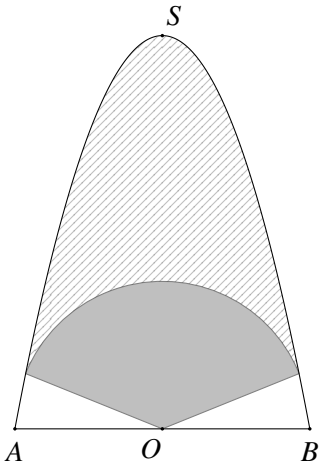
Chi phí cho phần lát gạch là 240 nghìn đồng một mét vuông. Trong trường hợp hình tròn (C) có diện tích lớn nhất thì chi phí lát gạch là bao nhiêu triệu đồng? (kết quả làm tròn tới hàng phần chục).

Bài 37. Bạn An thực hiện thiết kế một logo hình con mắt cho một phòng khám nhãn khoa. Logo là một hình phẳng giới hạn bởi hai parabol $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có các kích thước như hình vẽ dưới đây (phần được tô màu đen) và một hình tròn có bán kính bằng 0,5 dm ở giữa là phần con ngươi (phần được tô màu xanh), đơn vị trên mỗi trục tọa độ là decimet.

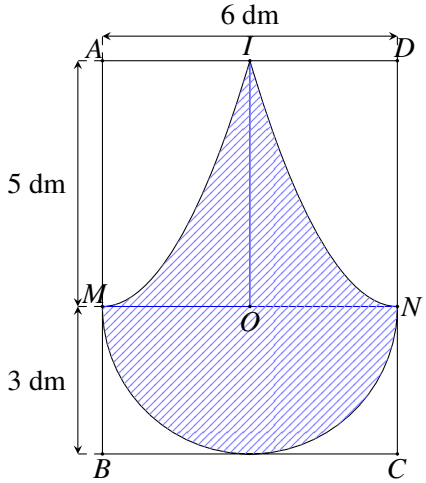


Biết rằng chi phí để sơn phần con ngươi hình tròn màu xanh là 25 000 đồng/dm^2 và chi phí để sơn phần còn lại màu đen là 20 000 đồng/dm^2. Chi phí để sơn logo trên là bao nhiêu nghìn đồng (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị*)?

Bài 38. Để chuẩn bị quảng bá sản phẩm, người ta trang trí tấm pano dạng parabol như hình vẽ, biết $OS = 8$ m, $AB = 6$ m với O là trung điểm của AB. Tấm pano được chia thành ba phần để trang trí với mức chi phí khác nhau: phần trên là phần kẻ sọc giá 100 000 đồng/m^2, phần giữa là hình quạt tâm O bán kính 3 m được tô đậm giá 200 000 đồng/m^2, phần còn lại giá 150 000 đồng/m^2. Tính tổng chi phí để trang trí tấm pano (đơn vị triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



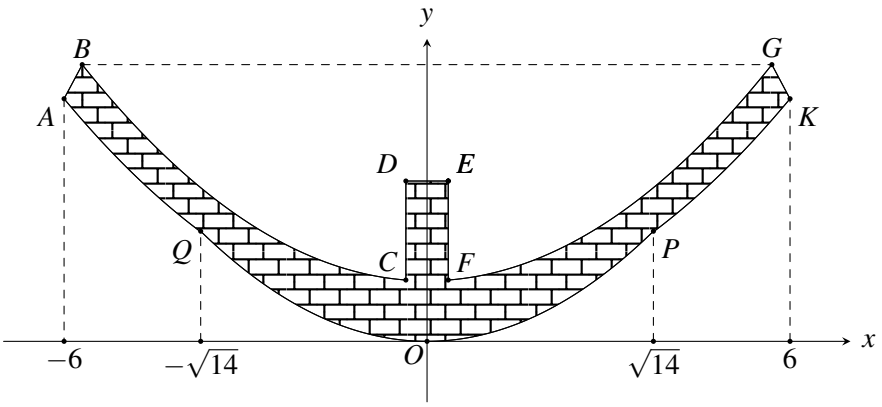
Bài 39. Để trang trí một bảng gỗ hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 8$ dm và chiều rộng $AD = 6$ dm, người ta thiết kế một logo là hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn đường kính $MN = 6$ dm, tiếp xúc với BC; hai đường cong IM, IN là một phần của các đường parabol lần lượt có đỉnh là các điểm M, N và parabol có trục đối xứng lần lượt là AB, CD, với I là trung điểm của AD (tham khảo hình vẽ). Phần logo được sơn màu xanh với chi phí 50 000 đồng/dm^2 và phần còn lại của bảng gỗ được sơn màu trắng với chi phí 30 000 đồng/dm^2. Hỏi cần bỏ ra bao nhiêu nghìn đồng để trang trí bảng gỗ trên (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Bài 40. Dự án "Công viên Thiên văn học" được khởi công năm 2017 do Tập đoàn Nam Cường đầu tư và đưa vào sử dụng từ đầu năm 2024. Để tạo điểm nhấn, các kỹ sư đã thiết kế

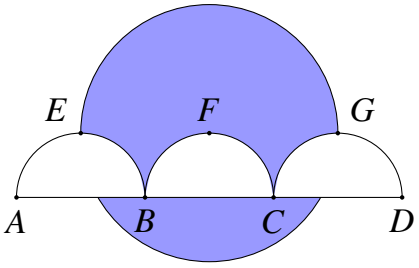
một con đường và Vọng Lâu giữa hồ. Theo một tỉ lệ nhất định, con đường ở giữa công viên được mô phỏng như hình vẽ, biết rằng trên hệ trục tọa độ tương ứng của hình vẽ thì:

- Các đường cong BC, FG là 2 phần của Parabol có phương trình $y = f(x) = 0{,}11x^2 + 1$.
- Các đường cong AQ, PK là 2 phần của Parabol có phương trình $y = g(x) = 0{,}1x^2 + 0{,}41$.
- Đường cong qua 3 điểm Q, O, P là một phần của Parabol có phương trình là $y = h(x) = 0{,}13x^2$.
- Các điểm C, D có cùng hoành độ là $-0{,}35$. Các điểm E, F có cùng hoành độ là $0{,}35$.
- Các điểm D, E có cùng tung độ là $2{,}65$.
- Các điểm A, Q, P, K có hoành độ lần lượt là -6; $-\sqrt{14}$; $\sqrt{14}$; 6.
- Điểm B, G có hoành độ lần lượt là $-5{,}7$ và $5{,}7$.



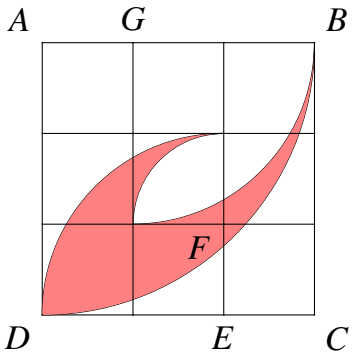
Dựa theo số liệu ở mô tả, tính diện tích phần con đường được tô hình viên gạch trong hình vẽ (*kết quả làm tròn đến hàng phần mười*).

Bài 41. Trong hình vẽ bên, đoạn AD được chia làm 3 bởi các điểm B và C sao cho $AB = BC = CD = 2$. Ba nửa đường tròn có bán kính bằng 1 là $\overset{\frown}{AEB}$, $\overset{\frown}{BFC}$ và $\overset{\frown}{CGD}$ có đường kính tương ứng là AB, BC và CD. Các điểm E, F, G lần lượt là tiếp điểm của tiếp tuyến chung EG với 3 nửa đường tròn.

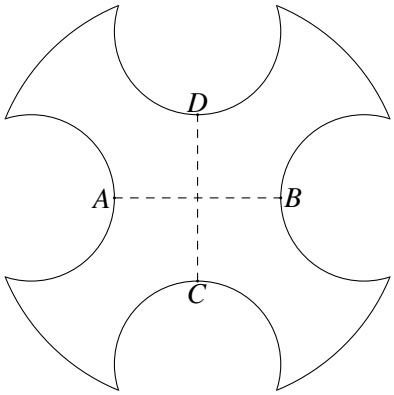


Một đường tròn tâm F, bán kính bằng 2. Diện tích miền bên trong đường tròn tâm F và bên ngoài 3 nửa đường tròn (miền gạch sọc) bằng bao nhiêu? (*Kết quả làm tròn đến hàng phần mười*).

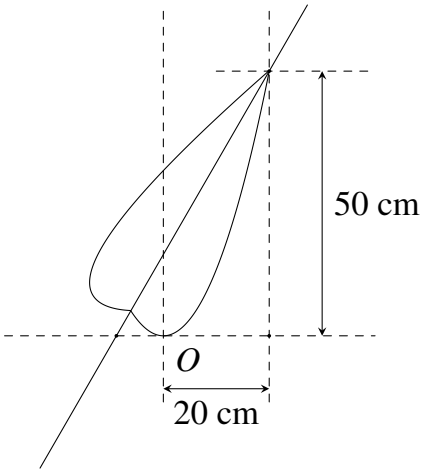
Bài 42. "Bài toán tính diện tích hình càng cua". Từ bảng gỗ hình vuông $ABCD$ độ dài 12 cm, người ta chia hình vuông này thành 9 hình vuông nhỏ bằng nhau rồi vẽ một hình càng cua được giới hạn bởi các cung phần tư của các đường tròn tâm A, E, F, G (xem hình vẽ). Tính diện tích hình càng cua theo đơn vị cm^2 (phần tô đậm trong hình vẽ). Viết kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.



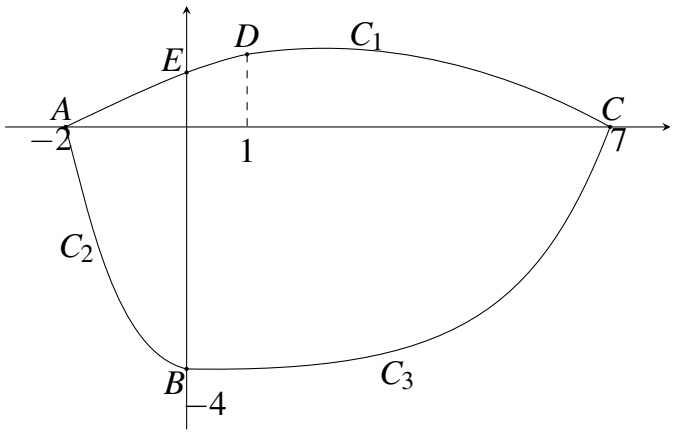
Bài 43. Trong cơ khí chế tạo, một chi tiết máy hình đĩa tròn có dạng như hình vẽ, nhận AB và CD làm các trục đối xứng. Người ta cần phủ sơn cả hai mặt của chi tiết. Biết rằng đường tròn lớn có bán kính 5 dm, các đường tròn nhỏ đều có bán kính 2 dm, $AB = CD = 4$ dm và chi phí sơn là 82 000 đồng/m^2. Chi phí để sơn hoàn thiện chi tiết máy bằng bao nhiêu nghìn đồng *(kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)*.



Bài 44. Sau khi đọc xong truyện ngắn rất cảm động "Chiếc lá cuối cùng" của nhà văn O.Henry, bạn An muốn thiết kế hình ảnh một chiếc lá để gửi đến chị em Johnsy và Sue. Chiếc lá là một hình phẳng được giới hạn bởi hai phần parabol giống nhau. Biết một parabol có đỉnh là điểm O và trục đối xứng của hình phẳng này là một đường thẳng tạo với phương ngang góc 60°. Với các kích thước được cho như hình vẽ, hãy tính diện tích của chiếc lá. (*Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của* cm^2)



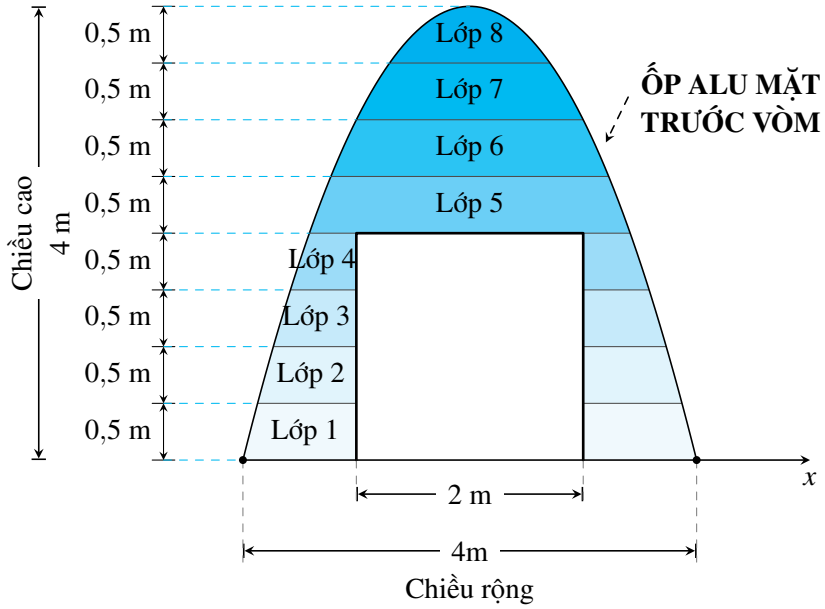
Bài 45. Một công ty thiết kế tròng kính sao cho mỗi phần đường viền của tròng kính là một phần đồ thị của hàm số bậc hai hoặc một phần đồ thị của hàm số bậc bốn rồi ghép chúng lại với nhau như hình vẽ bên cạnh (sau đó họ sẽ điều chỉnh theo tỷ lệ phù hợp). Xét hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ bên đưới, biết rằng $A(-2;0)$, $B(0;-4)$, $C(7;0)$ và $D(1;k)$ với $k > 0$.



Cho biết đường cong (C_1) đi qua các điểm A, D, C là một phần của đồ thị hàm số bậc hai nào đó, đường cong (C_2) ứng với đường viền nối A với B là một phần của đồ thị hàm số $y = bx^2 + c$, còn đường cong (C_3) ứng với đường viền nối B với C là một phần của đồ thị hàm số $y = mx^4 + n$. Biết $k = \dfrac{k_1}{k_2}$ với $(k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{k_1}{k_2}$ là phân số tối giản). Diện tích trong kính bằng $\dfrac{836}{25}$ (đơn vị diện tích). Tính $k_1 + k_2$.

Bài 46. Để chuẩn bị cho lễ hội, một đơn vị thi công dựng một cổng chào dạng vòm Parabol có chiều cao 4 m và chiều rộng chân cổng là 4 m. Ở chính giữa cổng, người ta thiết kế một lối đi hình chữ nhật cao 2 m và rộng 2 m. Phần diện tích mặt trước của cổng Parabol (*sau khi đã*

trừ lối đi hình chữ nhật) được chia thành 8 lớp ngang, mỗi lớp cao 0,5 m để ốp tấm nhôm Alu trang trí có màu khác nhau (*như bản vẽ thiết kế hình bên dưới*).

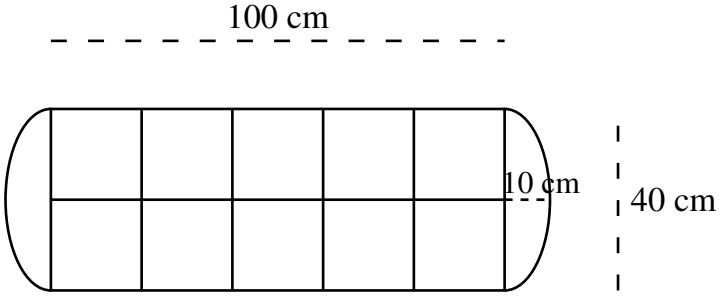


Đơn giá thi công lắp tấm nhôm Alu cho cổng được tính như sau

- Lớp dưới cùng có giá là 400 nghìn đồng/m^2.
- Càng lên cao, giá thi công mỗi lớp tiếp theo tăng thêm 50 nghìn đồng/m^2 so với lớp ngay dưới nó.

Tổng chi phí ốp Alu cho phần diện tích còn lại của cổng sau khi đã loại bỏ lối đi bằng bao nhiêu nghìn đồng (*không làm tròn kết quả các phép toán trung gian, chỉ làm tròn kết quả phép toán cuối cùng đến hàng đơn vị*)?

Bài 47. Một xưởng mộc tại Mai Sơn sản xuất những chiếc bàn cờ Ô quan bằng gỗ nguyên khối. Mặt trên của bàn cờ là một mặt phẳng được thiết kế và có kích thước như hình vẽ gồm ba phần: phần chính giữa là một hình chữ nhật có chiều dài 100 cm và chiều rộng 40 cm; hai "ô quan" ở hai đầu trái và phải là hai hình phẳng bằng nhau được ghép nối liền mạch với hai cạnh chiều rộng của hình chữ nhật. Biết rằng đường bao ngoài của mỗi "ô quan" là một cung tròn. Xưởng mộc tiến hành phủ một lớp keo bảo vệ bóng lên toàn bộ bề mặt trên của chiếc bàn cờ này. Biết chi phí vật tư và nhân công để phủ keo là 100000 đồng/m^2. Tính tổng chi phí x (nghìn đồng) để hoàn thiện việc phủ keo cho mặt bàn cờ (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

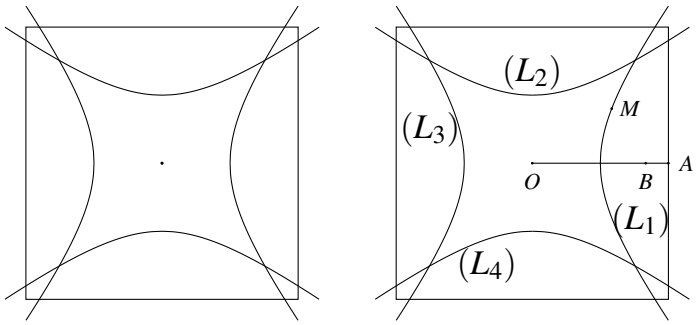


Bài 48. Một nhóm học sinh lớp 12 đã lên bản thiết kế mẫu hoa văn cho một loại gạch men lát nền nhà. Các em vẽ 4 đường cong như hình, từ đó tạo thành một hình (H) khép kín ở giữa

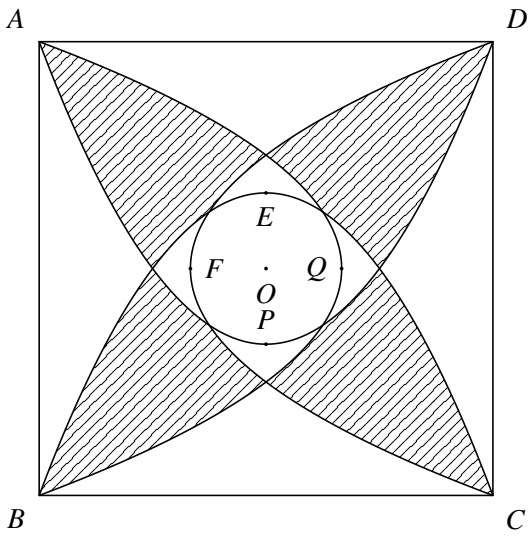
viên gạch để tạo điểm nhấn. Cụ thể cách dựng hình được thực hiện như sau:

- Dựng hệ trục Oxy với điểm O là tâm của viên gạch, tia Ox hướng sang phải và tia Oy hướng lên trên, đơn vị trên mỗi trục là 5 cm.
- Các em lấy O là tâm viên gạch và A là trung điểm một cạnh viên gạch, xác định được điểm B thỏa mãn $\overrightarrow{OB} = \frac{5}{6}\overrightarrow{OA}$.
- Dựng đường thẳng $\Delta\colon 5x - 9 = 0$. Đường cong (L_1) là tập hợp các điểm M thỏa mãn $3MB = 5\mathrm{d}(M,\Delta)$.
- Lấy đối xứng đường cong (L_1) qua tâm O và qua các đường chéo của viên gạch thì được các đường cong còn lại.

Biết viên gạch là hình vuông có kích thước 60 cm; hỏi diện tích hình (H) là bao nhiêu centimét vuông (làm tròn đến hàng đơn vị)?

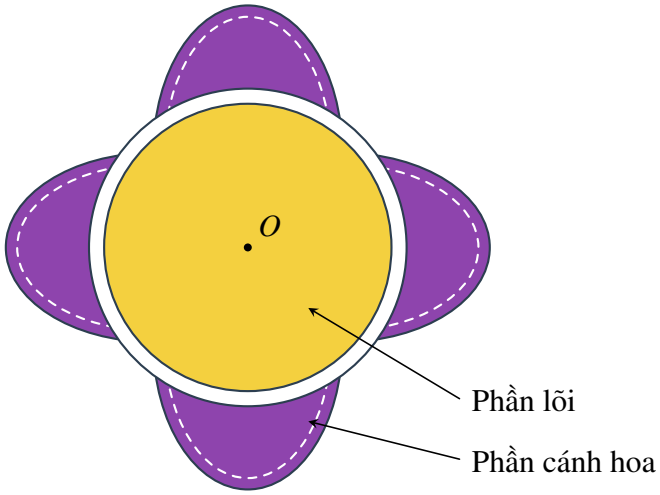


Bài 49. Bác Tuấn trang trí bức tường hình vuông $ABCD$ có $AB = 4m$ như hình vẽ bằng cách sơn màu. Trong đó, bốn đường cong AQB, APD, BEC, CFD đều là đường parabol có các đỉnh lần lượt là Q, P, E, F. Biết rằng trục đối xứng của mỗi Parabol trùng với một trục đối xứng của hình vuông $ABCD$. Cho biết $OE = OF = OP = OQ = 1m$. Phần diện tích giới hạn bởi bốn đường Parabol nêu trên (phần gạch chéo) được sơn màu đỏ với chi phí 500 nghìn đồng cho mỗi mét vuông. Phần diện tích còn lại của bức tường được sơn màu trắng với chi phí 300 nghìn đồng cho mỗi mét vuông. Tính tổng số tiền (đơn vị: nghìn đồng) bác Tuấn cần để hoàn thành việc sơn bức tường đó. (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

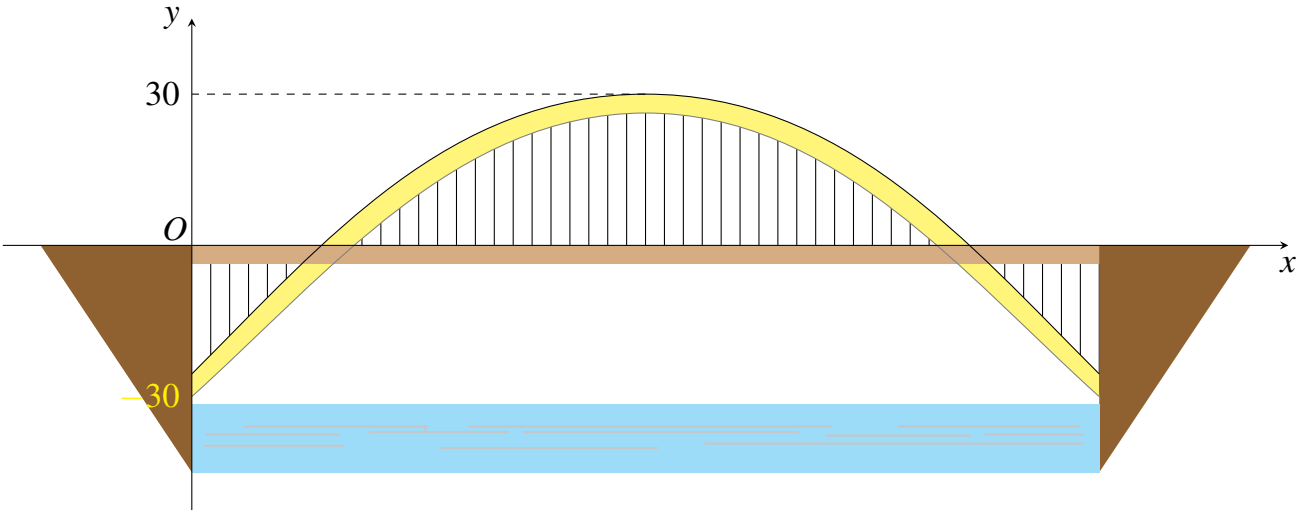


Bài 50. Để chuẩn bị quà tặng sinh nhật đặc biệt cho các thành viên trong câu lạc bộ nghệ thuật, người ta đặt hàng chế tác một vật phẩm chặn giấy bằng hợp kim cao cấp. Bề mặt của vật phẩm có dạng hai hình elip bằng nhau xếp chồng lên nhau. Biết mỗi elip có độ dài trục lớn bằng 8 cm, độ dài trục nhỏ bằng $\frac{8}{\sqrt{3}}$ cm; trục lớn của elip này vuông góc với trục lớn của elip

kia tại giao điểm O của chúng. Đường tròn (O) đi qua các giao điểm của hai elip được vẽ lên bề mặt để phân chia các khu vực trang trí (như hình vẽ). Phần lõi bên trong đường tròn được dát đồng để khắc tên và lời chúc sinh nhật với chi phí 5.000 đồng/cm^2. Các phần cánh hoa nằm phía ngoài đường tròn được đính đá Sapphire nhân tạo với chi phí 15.000 đồng/cm^2. Hỏi tổng chi phí nguyên vật liệu để chế tác một vật phẩm quà tặng này là bao nhiêu nghìn đồng? (Không làm tròn các kết quả trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng đơn vị).

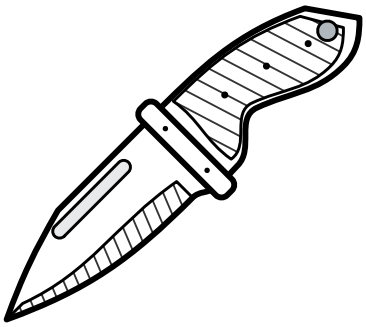


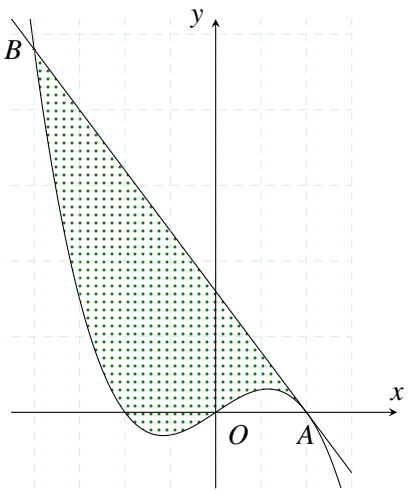
Bài 51. Một nhóm các kĩ sư muốn xây dựng một cây cầu vòm dàn thép với giá đỡ dưới bằng thép cao cấp có hình dáng là một parabol nối từ 2 cột trụ A và B nằm bên dưới cây cầu. Biết hai cột trụ cách nhau 400 m, khoảng cách từ trụ A đến cây cầu là 50 m và AB song song với mặt đường.



Gắn hệ trục Oxy vào cây cầu với đơn vị trục tọa độ là 10 m. Giá đỡ dưới bằng thép là đường cong parabol tạo với hai trục tọa độ các hình phẳng có diện tích S_1, S_2 như hình vẽ bên. Biết rằng $S_2 - 2S_1 = \dfrac{2200}{21}$. Điểm cao nhất của giá đỡ dưới bằng thép cao cấp cách mặt đường cây cầu bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng phần mười)

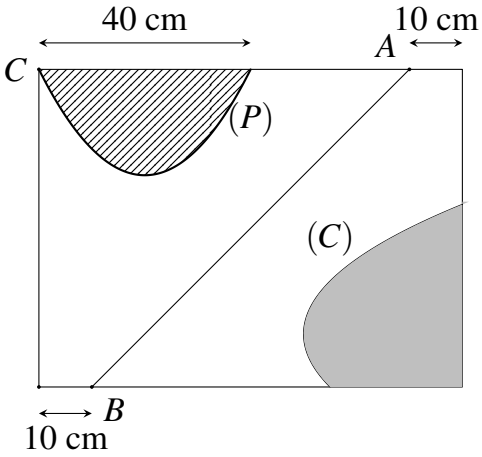
Bài 52. Hình bên minh hoạ một con dao với phần lưỡi dao được cho bởi một phần của đồ thị hàm số $y = 4x - x^3$ (x, y đo bằng centimét), phần sống dao AB nằm trên tiếp tuyến của đồ thị nói trên tại điểm $A(2;0)$ và B là giao điểm của tiếp tuyến với đồ thị.





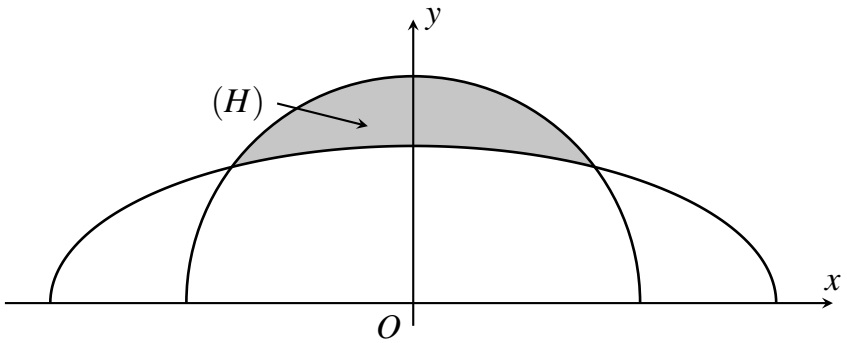
Tính diện tích của bề mặt dao theo centimét vuông. (*Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*).

Bài 53. Để trang trí một ô hình chữ nhật với kích thước 80 cm $\times$ 60 cm trên tường căn phòng của mình, anh Bình đã tô màu 2 hoạ tiết giới hạn bởi các parabol (P), parabol (C) và các cạnh của ô chữ nhật bằng màu vàng (kí hiệu sọc nghiêng) và màu xanh (vùng tô đậm) (như hình vẽ). Biết rằng các parabol (P) và (C) đối xứng nhau qua đường thẳng AB và diện tích phần màu vàng bằng $\dfrac{1600}{3}$ cm^2.

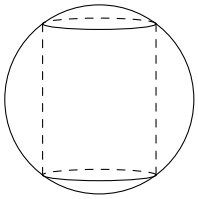


Tính tổng số tiền (*đơn vị:* triệu đồng) mà anh Bình cần phải trả để mua sơn trang trí. Biết mỗi lọ sơn, sơn được tối đa 30 cm^2. Cho biết giá của một lọ sơn vàng là 50 000 đồng, giá của một lọ sơn xanh là 30 000 đồng (*biết rằng mỗi lọ sơn không được bán lẻ*).

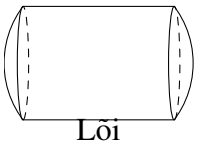
Bài 54 (THPTQG 2026 - L2). Người ta cần tính thể tích của một vật thể được chế tác như sau. Trên mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy (một đơn vị độ dài trên mỗi trục tương ứng với một xăng-ti-mét trong thực tế), gọi (H) là hình phẳng được tô đậm, giới hạn bởi đường elip $\dfrac{x^2}{256} + \dfrac{y^2}{48} = 1$ và đường tròn tâm O có bán kính 10 (xem hình minh họa bên dưới). Vật thể có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) quanh trục hoành. Thể tích của vật thể nói trên bằng bao nhiêu xăng-ti-mét khối (không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả phép tính cuối cùng đến hàng đơn vị)?



Bài 55. Từ một quả cầu bằng đá trắng bán kính bằng 1 dm người ta khoan rút lõi ngay "chính giữa" quả cầu, trục đối xứng của lõi và quả cầu trùng nhau, đường kính lõi là 1 dm. Tính thể tích còn lại của quả cầu bằng bao nhiêu dm^3 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

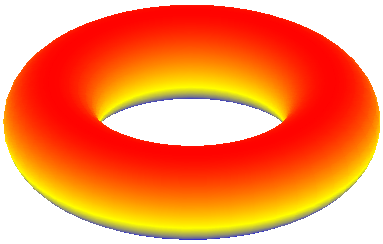


Quả cầu đá

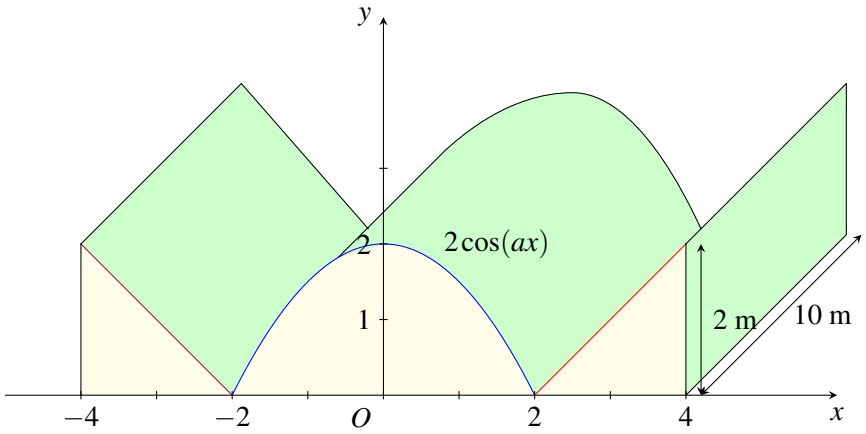


Lõi

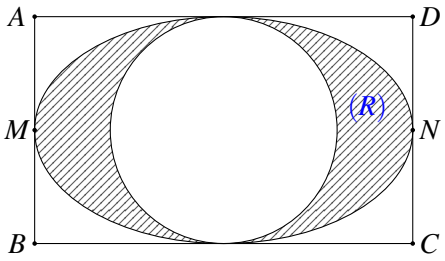
Bài 56. Trong các làng nghề chế tạo đá mỹ nghệ, người ta làm được nhiều đồ trang sức bằng đá rất đẹp. Một người thợ thủ công chế tạo vòng đeo tay hình tròn bằng đá xanh, biết rằng bán kính vòng ngoài của vòng là 7 (cm), bán kính vòng trong là 5 (cm) (hình vẽ). Tính thể tích của chiếc vòng (theo đơn vị đo là cm^3 và làm tròn đến hàng đơn vị).



Bài 57. Một rào chắn bê tông có hình dạng như trong hình, mỗi đơn vị tương ứng với 1 mét. Khối lượng của hàng rào là bao nhiêu tấn bê tông, nếu mật độ của bê tông là $\rho = 2{,}3$ g/cm^3? (làm tròn đến hàng đơn vị)

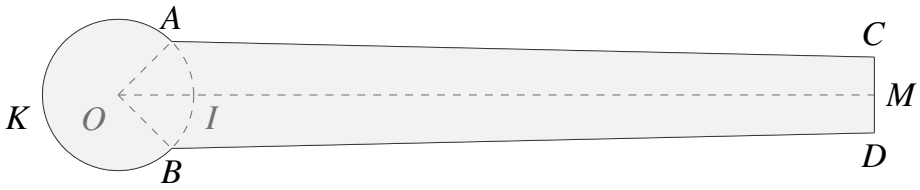


Bài 58. Một vật trang trí có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) (phần gạch chéo trong hình vẽ) quanh trục MN. Biết rằng $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 6$ cm, $AD = 10$ cm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Hai đường cong là hình elip có hình chữ nhật cơ sở là $ABCD$ và đường tròn tiếp xúc với hai cạnh AD và BC (tham khảo hình vẽ). Tính thể tích của vật trang trí đó (kết quả làm tròn đến hàng phần chục theo đơn vị cm^3).



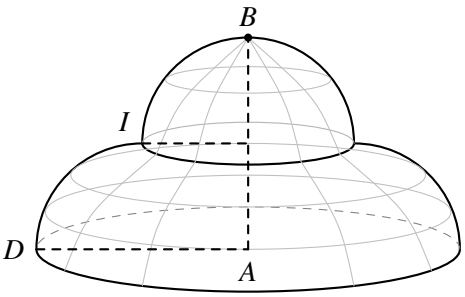
Bài 59. Hoạ sĩ thiết kế một micro có dạng khối tròn xoay, mặt cắt đứng chứa trục của khối tròn xoay có dạng như hình sau, trong đó $OA = OB = OI = 2$ cm, $MC = MD = 1$ cm, đường

thẳng OM là đường trung trực của đoạn thẳng CD, $OM = 20$ cm, $\widehat{AOB} = 90°$.

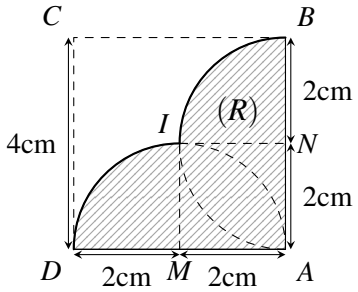


Thể tích của micro này là bao nhiêu cm^3? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Bài 60. Một vật thể dùng để trang trí nội thất có dạng như hình (H1) bên dưới. Đây là một khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (R) (phần gạch chéo trong hình (H2) quanh trục AB. Hình phẳng (R) được giới hạn bởi các cạnh AB, AD của hình vuông $ABCD$ tâm I, độ dài cạnh 4 cm và các cung phần tư $\overset{\frown}{DI}$, $\overset{\frown}{IB}$ của các đường tròn bán kính bằng 2 cm với tâm lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, AB. Thể tích của vật thể (H1) bằng bao nhiêu centimét khối *(không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần chục)*?

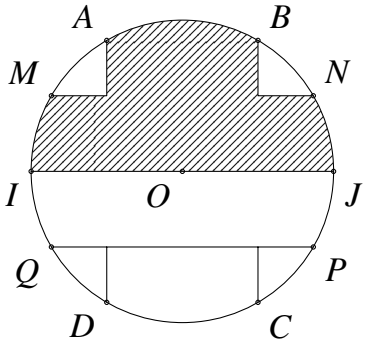


(H1)

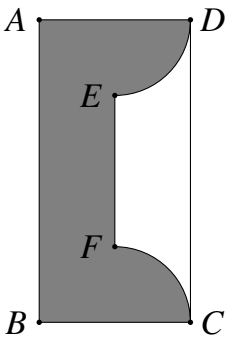


(H2)

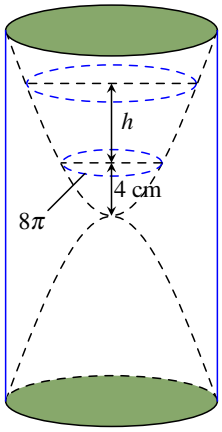
Bài 61. Cho đường tròn tâm (O) có bán kính bằng 5 m và đường kính IJ. Các hình chữ nhật $ABCD$, $MNPQ$ nội tiếp hình tròn như hình vẽ với $AB = MQ = 5$ m và I là điểm chính giữa của cung nhỏ MQ. Người ta cần sản xuất một sản phẩm là vật thể tròn xoay khi cho hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ quay quanh IJ và chi phí để làm sản phẩm này là 1,2 triệu/m^3. Số tiền phải chi trả để làm sản phẩm này là bao nhiêu (Đơn vị: triệu đồng và kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?



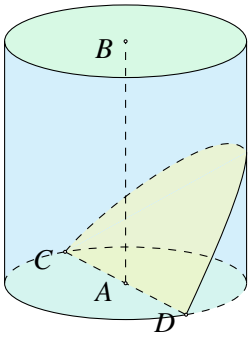
Bài 62. Một vật trang trí có dạng khối tròn xoay tạo thành khi quay miền (R) (phần tô đậm trong hình vẽ) quay xung quanh trục AB. Miền (R) được giới hạn bởi các cạnh AD, AB, BC, EF và các cung phần tư của các đường tròn bán kính bằng 2 cm với tâm lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết $ABCD$ là hình chữ nhật có cạnh $AB = 8$ cm, $AD = 4$ cm; điểm E cách AD một đoạn bằng 2 cm; điểm F cách BC một đoạn bằng 2 cm. Thể tích của vật thể trang trí trên là bao nhiêu centimetkhối? *(quy tròn đến hàng phần mười)*.



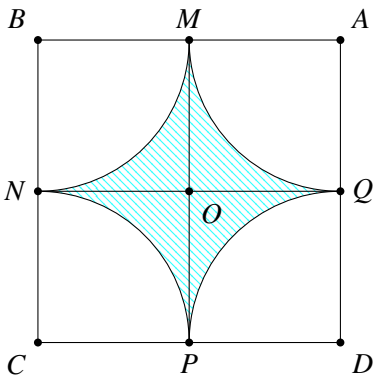
Bài 63. Một chiếc đồng hồ cát như hình vẽ, gồm hai phần đối xứng nhau qua mặt phẳng nằm ngang và đặt trong một hình trụ. Thiết diện thẳng đứng qua trục của nó là hai Parabol chung đỉnh và đối xứng nhau qua mặt phẳng nằm ngang. Ban đầu lượng cát dồn hết ở phần trên của đồng hồ thì chiều cao của mực cát bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của bên đó. Cát chảy từ trên xuống dưới với tốc độ $v(t) = 0{,}2t + 13$ (cm^3/phút). Khi chiều cao của cát còn 4 cm thì bề mặt trên cùng của cát tạo thành một đường tròn có chu vi bằng 8π cm. Biết sau 20 phút thì cát chảy hết xuống phần bên dưới của đồng hồ. Tính chiều cao của khối trụ bên ngoài theo cen-ti-mét (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười*).



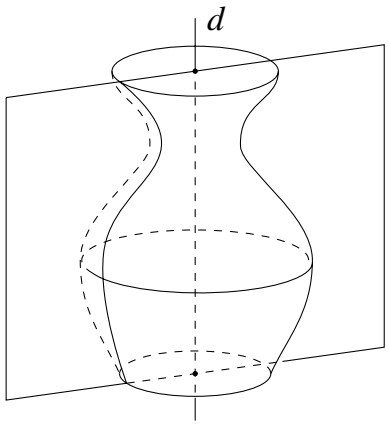
Bài 64. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 3. Tính thể tích vật thể tạo thành bởi đáy của hình trụ và mặt phẳng qua đường kính đáy, biết mặt phẳng tạo với đáy góc 45°.



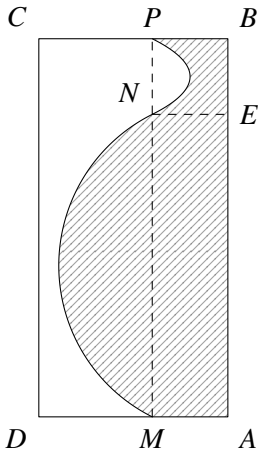
Bài 65. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của các đoạn AB,BC,CD và DA. Các cung $\overset{\frown}{QM},\overset{\frown}{MN},\overset{\frown}{NP},\overset{\frown}{PQ}$ lần lượt là các cung tròn của các đường tròn tâm A,B,C,D với bán kính bằng nhau (tham khảo hình vẽ). Biết diện tích "tứ giác cong" $MNPQ$ (miền bị gạch chéo trong hình vẽ) bằng $25(4-\pi)$ dm^2. Hỏi khi cho "tứ giác cong" $MNPQ$ quay quanh trục NQ ta thu được vật thể có thể tích bằng bao nhiêu đềximét khối (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?



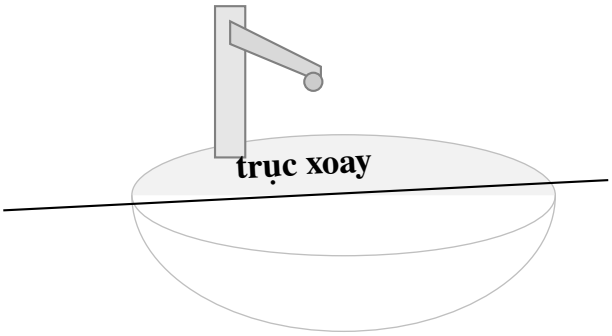
Bài 66. Xét phần đựng nước bên trong một lục bình có dạng mặt tròn xoay trong đó đường sinh là đường cong (C) quay quanh trục (d) như hình bên. Biết rằng (C) là đường cong bậc ba; chiều cao phần đựng nước là 35 cm; bán kính đáy phần đựng nước là 10 cm; bán kính miệng phần đựng nước là 14,375 cm; chỗ rộng nhất của phần đựng nước có bán kính 30 cm; độ cao của phần đựng nước tính từ đáy đến chỗ rộng nhất là 10 cm. Thể tích tối đa mà chiếc bình này đựng được là bao nhiêu lít? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

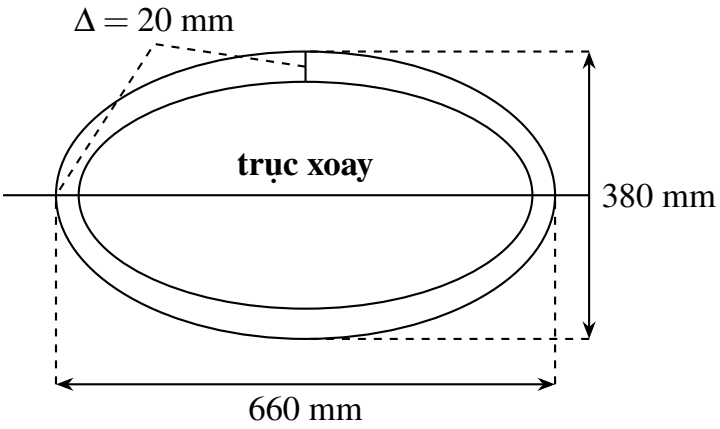


Bài 67. Một xưởng thủy tinh mỹ nghệ cần sản xuất những chiếc bình thủy tinh cỡ lớn để ngâm một loại sâm. Chiếc bình được tạo hình bằng cách quay hình phẳng (H) (phần gạch chéo trong hình vẽ) quanh trục AB. Hình (H) nằm trong hình chữ nhật $ABCD$, giới hạn bởi các đoạn thẳng AM, BP (với M, P lần lượt thuộc các cạnh AD, BC, $MP \parallel AB$), cung tròn MN (có tâm I là trung điểm của đoạn thẳng AE nằm trên trục AB) và cung parabol NP. Biết $AB = 5$ dm, $AM = 1{,}5$ dm, $BP = 1{,}5$ dm, $BE = 1$ dm. Tiếp tuyến của cung tròn và cung parabol tại điểm tiếp giáp N là trùng nhau để đảm bảo thành bình mượt mà, chịu lực tốt và đảm bảo tính thẩm mỹ. Giả sử bề dày của thành thủy tinh không đáng kể. Hỏi chiếc bình ngâm sâm này có sức chứa tối đa khoảng bao nhiêu lít nước? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

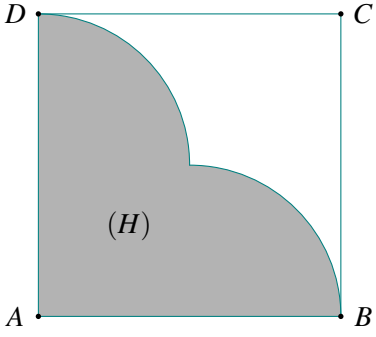


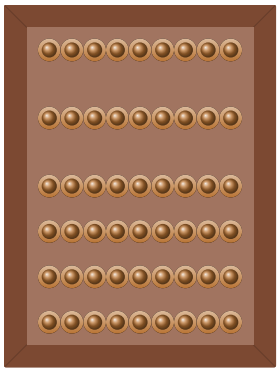
Bài 68. Hình elip được ứng dụng nhiều trong thực tiễn, đặc biệt là kiến trúc, xây dựng, thiết bị nội thất. Mặt trong (lọt lòng) và ngoài (phủ bì) của một bồn rửa (lavabo) bằng sứ có hình dạng là một nửa khối tròn xoay khi quay quanh một trục của 2 elip có chung các trục đối xứng (hình minh họa). Thông số kĩ thuật mặt trên của bồn rửa: dài $\times$ rộng là 660×380 mm (phủ bì) và elip (lọt lòng) có trục lớn, trục nhỏ ít hơn elip phủ bì một khoảng 40 mm. Tính thể tích chứa nước của bồn rửa (*đơn vị: lít và làm tròn kết quả đến hàng phần mười*).





Bài 69. Trên cánh cửa được trang trí các núm có dạng một khối tròn xoay được đúc bằng chất liệu đồng, khuôn đúc của nó được tạo thành khi quay miền (H) (phần được tô màu trong hình vẽ bên) quanh trục AB. Miền (H) được giới hạn bởi các cạnh AB, AD của hình vuông $ABCD$ và các cung phần tư của các đường tròn bán kính bằng 1 cm với tâm lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, AB.

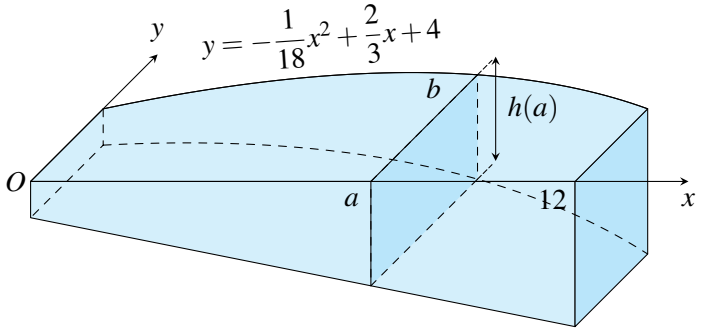




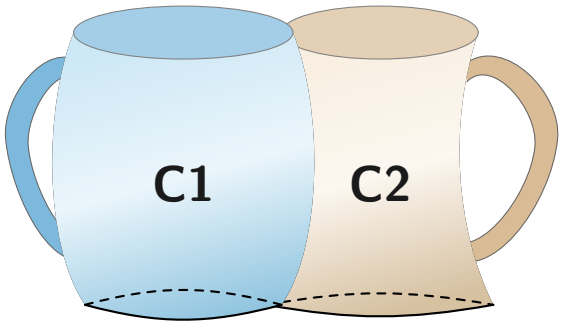
Biết công thức tính khối lượng của một vật là $P = VD$, trong đó P là khối lượng của vật (đơn vị g), V là thể tích của vật (đơn vị cm^3) và D là khối lượng riêng của vật (đơn vị g/cm^3), khối

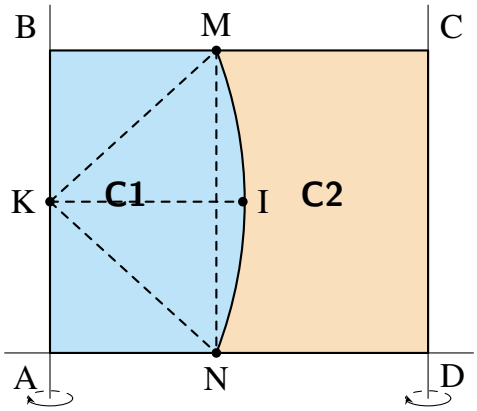
lượng riêng của đồng là $D = 8{,}96\ \text{g/cm}^3$. Giá đồng trên thị trường là 200 000 đồng/kg. Giá tiền vật liệu để đúc một núm đồng trên là bao nhiêu nghìn đồng? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bài 70. Một kiến trúc sư thiết kế một hồ bơi vô cực có mặt trên của bể bơi nằm trong mặt phẳng Oxy (đơn vị trên trục là mét). Một cạnh của hồ bơi dài 12 m nằm trên trục Ox; hai cạnh bên lần lượt nằm trên trục Oy và đường thẳng $x = 12$; cạnh còn lại (mặt vô cực) là một phần đồ thị của hàm số $y = -\dfrac{1}{18}x^2 + \dfrac{2}{3}x + 4$. Đáy hồ bơi không phẳng mà độ sâu tại điểm $(a;b)$ được tính theo công thức $h(a) = \dfrac{1}{4}a + 1$ (mét). Thể tích nước tối đa mà hồ bơi có thể chứa bằng bao nhiêu m^3?



Bài 71. Giả sử bạn Tài có hai chiếc cốc cà phê C_1 và C_2 như hình minh họa, một chiếc phình ra ngoài và một chiếc lõm vào trong. Bạn Tài nhận thấy rằng chúng có cùng chiều cao và hình dạng của chúng khớp nhau hoàn hảo. Bạn Tài tự hỏi tỉ lệ thể tích của hai chiếc cốc $\dfrac{V_{C_1}}{V_{C_2}}$ bằng bao nhiêu? Tất nhiên, bạn có thể đổ đầy nước vào một chiếc cốc rồi rót sang chiếc còn lại để so sánh, nhưng với tư cách là một học sinh vừa học xong các ứng dụng của tích phân, bạn quyết định tiếp cận theo hướng toán học hơn. Bỏ qua phần tay cầm, coi độ dày của cốc không đáng kể, bạn Tài nhận thấy rằng phần bên trong của cả hai chiếc cốc đều tạo bởi các mặt quay quanh trục.

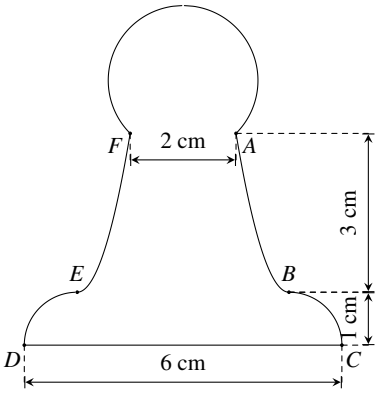




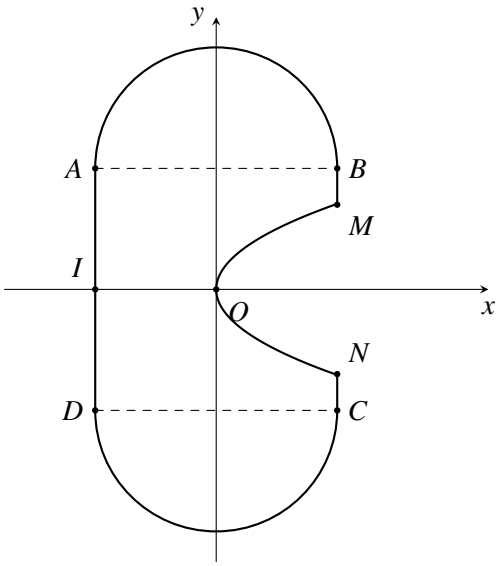
Cụ thể, C_1 do hình phẳng $ABMIN$ quay quanh AB, C_2 do hình phẳng $DCMIN$ quay quanh CD. Biết rằng $ABCD$ là hình vuông cạnh 10 cm, M, N lần lượt thuộc hai cạnh BC, AD sao cho $MN \parallel AB, BM = 4$ cm. Điểm K là trung điểm của AB và I là tâm của hình vuông $ABCD$. Cung $\overset{\frown}{MIN}$ là một phần của parabol nhận I là đỉnh. Tỉ số $\dfrac{V_{C_1}}{V_{C_2}}$ bằng $\dfrac{a}{b}$, trong đó $a, b \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a + b$.

Bài 72. Mô hình của quân tốt trong bàn cờ vua là một khối tròn xoay với mặt cắt qua trục như sau: đầu của quân cờ là một phần của hình cầu có bán kính bằng $\sqrt{2}$ cm; đường cong AB và EF là một phần của parabol đỉnh B và đỉnh E; DE và BC là một góc phần tư của đường tròn có bán kính 1 cm. Tính thể tích của mô hình quân tốt *(đơn vị cm^3 và kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).*





Bài 73. Bút viết của một bảng vẽ điện tử được để trong một chiếc giá là một khối tròn xoay có mặt cắt qua trục là một hình phẳng có hình dạng và các kích thước gắn với hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

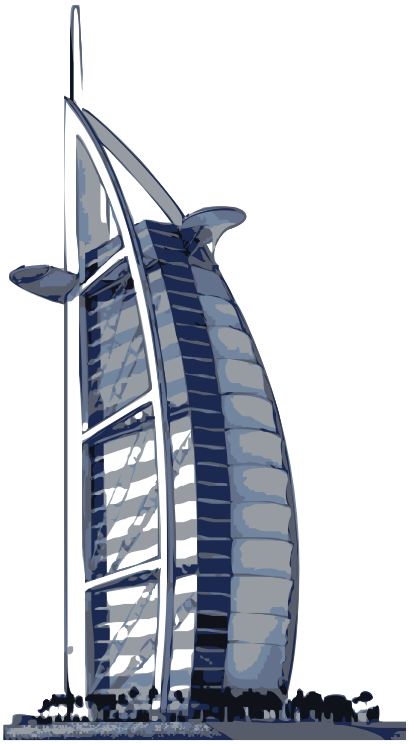


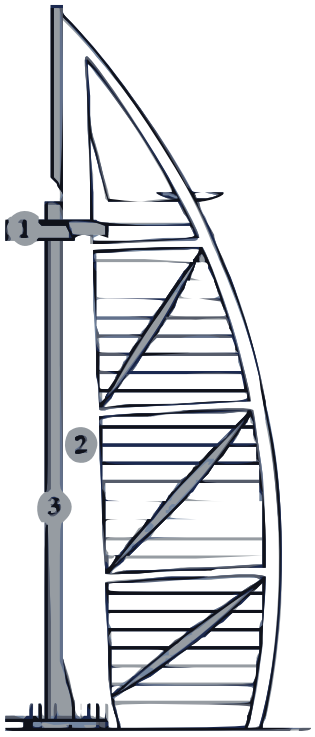


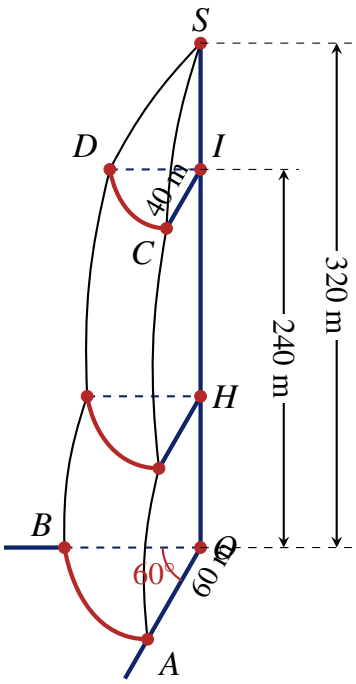
Biết biên của mặt cắt gồm hai nửa đường tròn đường kính AB, CD và một cung của parabol đỉnh O nhận Ox là trục đối xứng; cho $AB = CD = 3$ cm, $OI = 1$ cm, $AD = 3$ cm, $MN = 2$ cm, đơn vị trên hệ trục là 1 cm. Tính thể tích của toàn bộ giá bút, làm tròn tới hàng phần chục.

Bài 74. Một tòa nhà hình cánh buồm được minh họa bởi hình vẽ bên, tòa nhà có chiều cao $SO = 320m$ (m là ký hiệu của mét), gồm 56 tầng có tổng chiều cao là $OI = 240m$ và phần còn lại phía trên là không gian sân thượng. Mặt trước hình cánh buồm, được căng bởi hai cung parabol SCA và SDB giống hệt nhau có trục đối xứng vuông góc với đường thẳng SO, các parabol này nằm trong mỗi mặt bên của tòa nhà. Hai mặt bên SOA và SOB tạo với nhau một góc $60°$. Mặt sàn tầng một có dạng hình quạt tròn tâm O với bán kính $OA = 60m$, mái của tầng 56 có dạng hình quạt tròn tâm I với bán kính $IC = 40m$. Thiết diện ngang của tòa nhà đi

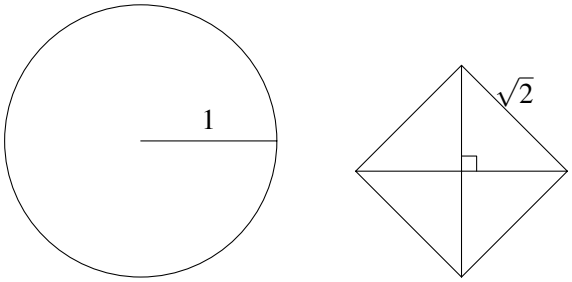
qua một điểm H bất kỳ trên đoạn OI luôn là hình quạt có tâm là H. Tính thể tích của tòa nhà (chỉ tính phần chứa 56 tầng) với đơn vị là nghìn mét khối và kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.



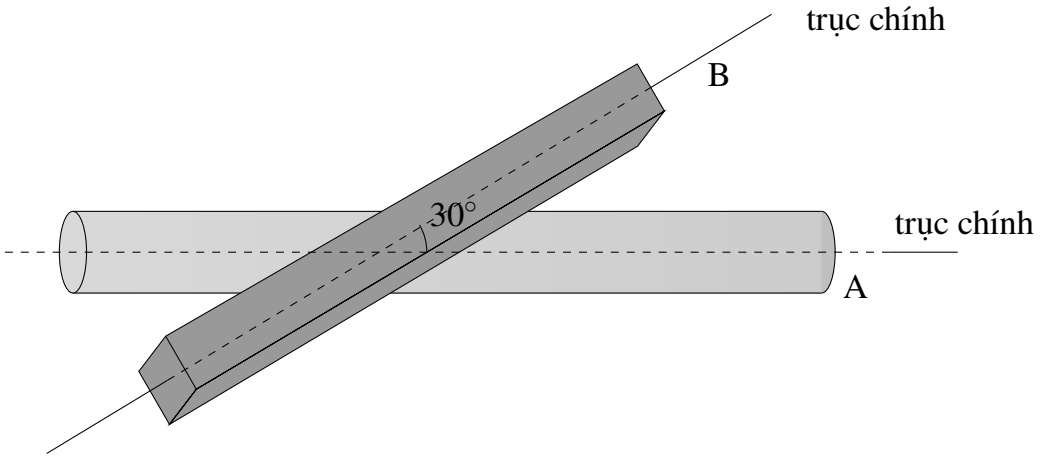




Bài 75. Cho một thanh gỗ hình trụ A có đáy là hình tròn bán kính 1, và một thanh gỗ hình lăng trụ đứng B có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{2}$ như hình vẽ.



Hai thanh gỗ có trục chính cắt nhau và tạo với nhau một góc 30°.



Trong hai đường chéo của tiết diện vuông góc với trục của thanh gỗ B, có một đường chéo vuông góc với mặt phẳng chứa trục của cả hai thanh gỗ, còn đường chéo còn lại thì nằm trong mặt phẳng đó. Khi đó, phần thể tích chung của hai thanh gỗ là $a\pi + b$. Hãy tính giá trị của

biểu thức $10a+3b$, biết rằng a và b là các số hữu tỉ.

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	D	2	C	3	B	4	B	5	D	6	C	7	B	8	D	9	C	11	A
12	B	13	D	14	D	15	C	16	B	17	A	18	C	19	D	20	A	21	C
22	D	23	B	24	B	25	C	26	A	27	C	28	B	29	B	30	B	31	D
32	C	33	B	34	D	35	A	36	A	37	D	38	C	39	B	40	D		

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a	Đ	b	S	c	S	d	Đ	Câu 2.	a	S	b	Đ	c	S	d	Đ
Câu 3.	a	Đ	b	Đ	c	S	d	Đ	Câu 4.	a	Đ	b	S	c	S	d	S
Câu 5.	a	Đ	b	S	c	S	d	Đ	Câu 6.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	Đ
Câu 7.	a	S	b	Đ	c	Đ	d	S	Câu 8.	a	S	b	S	c	Đ	d	Đ
Câu 9.	a	Đ	b	Đ	c	Đ	d	S	Câu 10.	a	S	b	S	c	Đ	d	Đ
Câu 11.	a	Đ	b	S	c	S	d	Đ	Câu 12.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	Đ
Câu 13.	a	Đ	b	Đ	c	Đ	d	S	Câu 14.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	S
Câu 15.	a	Đ	b	Đ	c	S	d	Đ	Câu 16.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	Đ
Câu 17.	a	Đ	b	Đ	c	Đ	d	S	Câu 18.	a	S	b	Đ	c	S	d	Đ
Câu 19.	a	Đ	b	Đ	c	Đ	d	S	Câu 20.	a	Đ	b	Đ	c	S	d	S
Câu 21.	a	Đ	b	Đ	c	S	d	S	Câu 22.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	S
Câu 23.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	Đ	Câu 24.	a	Đ	b	S	c	S	d	Đ
Câu 25.	a	Đ	b	Đ	c	S	d	S	Câu 26.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	S
Câu 27.	a	Đ	b	Đ	c	S	d	S	Câu 28.	a	S	b	Đ	c	S	d	S
Câu 29.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	S	Câu 30.	a	S	b	Đ	c	Đ	d	S
Câu 31.	a	Đ	b	Đ	c	Đ	d	S	Câu 32.	a	Đ	b	Đ	c	Đ	d	Đ
Câu 33.	a	S	b	Đ	c	Đ	d	Đ	Câu 34.	a	S	b	Đ	c	S	d	Đ
Câu 35.	a	S	b	Đ	c	S	d	S	Câu 36.	a	Đ	b	S	c	S	d	Đ
Câu 37.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	Đ	Câu 38.	a	Đ	b	Đ	c	S	d	Đ
Câu 39.	a	S	b	Đ	c	Đ	d	Đ									

Chương V

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

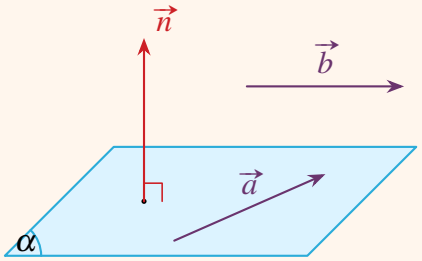
§1 PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Vectơ pháp tuyến và cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

Cho mặt phẳng (α).

- Nếu vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với (α) thì $\vec{n}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của (α).
- Nếu hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương, có giá song song hoặc nằm trong (α) thì $\vec{a}$, $\vec{b}$ được gọi là cặp vectơ chỉ phương của (α).



Lưu ý.

a) Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến của nó hoặc biết một điểm và một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng đó.

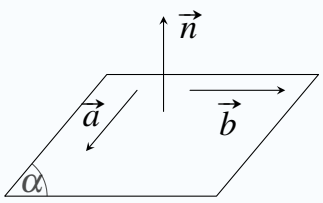
b) Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) thì $k\vec{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của (α).

2) Xác định vectơ pháp tuyến của mặt phẳng khi biết một cặp vectơ chỉ phương

Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt phẳng (α) nhận hai vectơ $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b} = (b_1;b_2;b_3)$ làm cặp vectơ chỉ phương thì (α) nhận vectơ

$$\vec{n} = \left(a_2b_3 - a_3b_2;\ a_3b_1 - a_1b_3;\ a_1b_2 - a_2b_1\right)$$

làm vectơ pháp tuyến.



Lưu ý.

a) Vectơ $\vec{n}=\left(a_2b_3-a_3b_2;\ a_3b_1-a_1b_3;\ a_1b_2-a_2b_1\right)$ được gọi là tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$, kí hiệu là $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

b) Biểu thức $a_1b_2-a_2b_1$ thường được kí hiệu là $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$.

Tương tự, $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}=a_2b_3-a_3b_2$, $\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}=a_3b_1-a_1b_3$. Như vậy, ta có thể viết

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right).$$

c) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\iff \left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$.

d) Nếu $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ thì $\vec{n}\perp\vec{a}$ và $\vec{n}\perp\vec{b}$.

3) Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Khái niệm phương trình tổng quát của mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, mỗi mặt phẳng đều có phương trình dạng $Ax+By+Cz+D=0$ trong đó A,B,C không đồng thời bằng 0, được gọi là ***phương trình tổng quát của mặt phẳng***.

Nhận xét:

a) Mỗi phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ (trong đó A,B,C không đồng thời bằng 0) đều xác định một mặt phẳng nhận $\vec{n}=(A;B;C)$ làm vectơ pháp tuyến.

b) Cho mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát $Ax+By+Cz+D=0$. Khi đó

$$N(x_0;y_0;z_0)\in(\alpha)\Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.$$

Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và biết vectơ pháp tuyến

Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ là:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

hay

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \text{với} \quad D=-Ax_0-By_0-Cz_0.$$

Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và biết cặp vectơ chỉ phương

Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}, \vec{b}$, ta thực hiện như sau:

Bước 1. Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

Bước 2. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng

Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A,B,C không thẳng hàng, ta thực hiện như sau: Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A,B,C không thẳng hàng, ta thực hiện như sau:

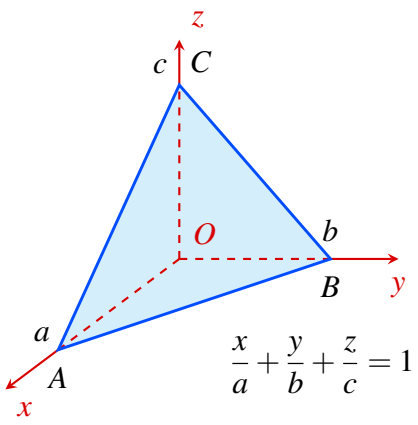
Bước 1. Tìm cặp vectơ chỉ phương, chẳng hạn $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Bước 2. Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$.

Bước 3. Viết phương trình (α) đi qua A và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Nhận xét:

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a,b,c đều khác 0. Khi đó, phương trình mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Phương trình này được gọi là **phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn**.



4) Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc

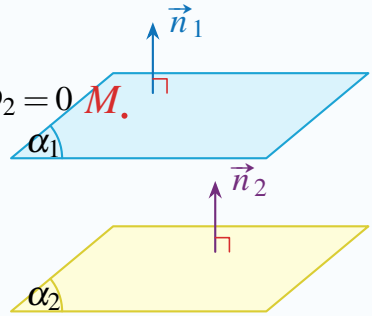
Điều kiện để hai mặt phẳng song song

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng

$(\alpha_1): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(\alpha_2): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

có các vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$, $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$. Khi đó:

$$(\alpha_1)\parallel(\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2, \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases} \qquad (k\in\mathbb{R}).$$



Lưu ý.

a) $(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2, \\ D_1 = kD_2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$.

b) (α_1) cắt $(\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương.

Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\alpha_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Khi đó:

$$(\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

5) Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính theo công thức:

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Lưu ý. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (α) và (β), kí hiệu $d\Big((\alpha), (\beta)\Big)$ bằng khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Xác định vectơ pháp tuyến, cặp vectơ chỉ phương

Cho mặt phẳng (α).

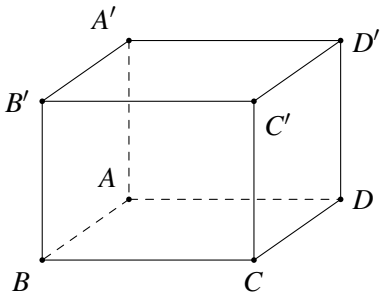
- Nếu vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với (α) thì $\vec{n}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của (α).
- Nếu hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương, có giá song song hoặc nằm trong (α) thì $\vec{a}$, $\vec{b}$ được gọi là cặp vectơ chỉ phương của (α).

Ví dụ 1

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Tìm một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng $(ABB'A')$.

b) Tìm một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABB'A')$.



Ví dụ 2

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;5)$.

a) Tìm tọa độ của một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (ABC).

b) Tìm tọa độ của một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (OAB).

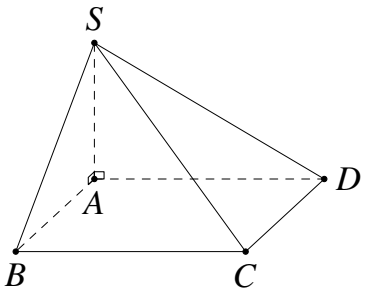
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$.

a) Tìm một vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng $(ABCD)$, (SAB), (SAD) và (SAC).

b) Tìm hai cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (SCD).



Bài 2

☆

Chỉ ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) biết (α) đi qua

a) $A(-1;3;5)$, $B(3;2;-2)$ và $C(0;3;0)$;

b) $M(0;3;1)$, $N(-3;2;5)$ và $P(-2;0;0)$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 2 Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng

Mỗi phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ (trong đó A,B,C không đồng thời bằng 0) đều xác định một mặt phẳng nhận $\vec{n}=(A;B;C)$ làm vectơ pháp tuyến.

Công thức: Cho (P) qua điểm $M(x_0,y_0,z_0)$ và một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(a,b,c)$. Khi đó, phương trình (P) là

$$(P): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

Một số cách xác định vec tơ pháp tuyến thường gặp:

① Nếu $(P)\perp AB$ thì $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{AB}$;

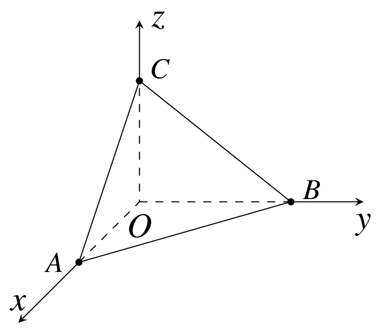
② Nếu (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB thì (P) qua trung điểm I của AB và $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{AB}$;

③ Nếu (P) có cặp vectơ chỉ phương $\vec{u}$, $\vec{v}$ thì $\overrightarrow{n_P}=[\vec{u},\vec{v}]$ là một vectơ pháp tuyến của (P).

④ Nếu (P) qua ba điểm A,B,C phân biệt và không thẳng hàng thì $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$;

Phương trình theo đoạn chắn:

Cho (P) đi qua $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $abc\neq 0$ thì phương trình $(P): \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ (phương trình theo đoạn chắn)



Ví dụ 1

Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình tổng quát của một mặt phẳng?

a) $x^2+2y^2+3z^2-1=0$; b) $\frac{x}{2}-y+\frac{z}{3}+5=0$; c) $xy+5=0$.

Ví dụ 2

Cho hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ có phương trình tổng quát là

$$(\alpha): 2x+2y-3z-4=0 \quad \text{và} \quad (\beta): x+4z-12=0.$$

a) Tìm một vectơ pháp tuyến của mỗi mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$.

b) Tìm điểm thuộc mặt phẳng (α) trong số các điểm $M(1;0;1)$, $N(1;1;0)$.

Ví dụ 3

Viết phương trình mặt phẳng (P) trong mỗi trường hợp sau:

a) (P) đi qua điểm $A(2;0;-1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(5;-2;7)$.

b) (P) đi qua điểm $B(-2;3;0)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;2;-1)$, $\vec{v}=(3;1;0)$.

c) (P) đi qua ba điểm $A(2;1;5)$, $B(3;2;7)$, $C(4;1;6)$.

d) (P) đi qua ba điểm $M(7;0;0)$, $N(0;-2;0)$, $P(0;0;9)$.

Ví dụ 4

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(1;3;5)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

Ⓐ $y-2z-6=0$. Ⓑ $y-2z+2=0$. Ⓒ $y-3z+4=0$. Ⓓ $y+2z-8=0$.

Ví dụ 5

Viết phương trình của mặt phẳng

a) Chứa trục Ox và điểm $M(-4;1;2)$;

b) Chứa trục Oz và điểm $P(3;0;-7)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

a) Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(1;-2;3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(-2;1;4)$.

b) Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua điểm $N(3;1;-2)$ và có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{a}=(0;2;1)$, $\vec{b}=(-1;4;0)$.

c) Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình của mặt phẳng (α) đi qua ba đi qua ba điểm $A(2;-1;3)$, $B(4;0;1)$, $C(-10;5;3)$.

Bài 2 ☆

Mặt phẳng (α) đi qua $A(-1;4;-6)$ và chứa trục Oy có phương trình là

Ⓐ $-2x+y+z=0$. Ⓑ $6x+z=0$.

Ⓒ $3x-y-6z+1=0$. Ⓓ $6x-z=0$.

Bài 3 ☆

Cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB?

Ⓐ $3x-y-z+1=0$. Ⓑ $3x+y+z-6=0$.

Ⓒ $3x-y-z=0$. Ⓓ $6x-2y-2z-1=0$.

Bài 4 ☆

Cho tứ diện $ABCD$ có các đỉnh $A(5;1;3)$, $B(1;6;2)$, $C(5;0;4)$, $D(4;0;6)$.

a) Hãy viết phương trình của các mặt phẳng (ACD) và (BCD);

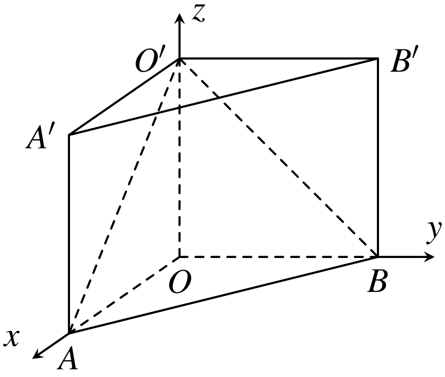
b) Hãy viết phương trình mặt phẳng (α) chứa cạnh AB và song song với cạnh CD;

c) Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên các trục Ox, Oy, Oz. Hãy viết phương trình mặt phẳng $(A'B'C')$.

Bài 5

☆

Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ $OAB.O'A'B'$. Biết O là gốc tọa độ, $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $O'(0;0;5)$. Viết phương trình các mặt phẳng $(O'AB)$ và $(O'A'B')$.



Dạng 3 Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Phương pháp: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ và $(Q)\colon a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$.

① Nếu $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}=k\cdot\overrightarrow{n_2}\\ d_1=k\cdot d_2\end{cases}$ thì (P) trùng (Q).

② Nếu $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}=k\cdot\overrightarrow{n_2}\\ d_1\neq k\cdot d_2\end{cases}$ thì (P) song song (Q).

③ Nếu $\overrightarrow{n_1}$ không cùng phương với $\overrightarrow{n_2}$ thì (P) cắt (Q).

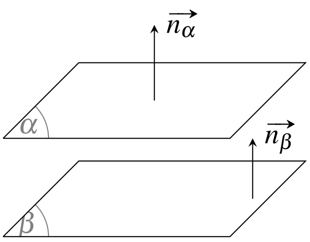
④ Nếu $\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$ hay $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$ thì $(P)\perp(Q)$.

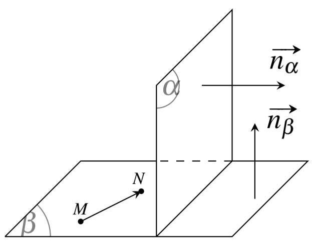
Chú ý:

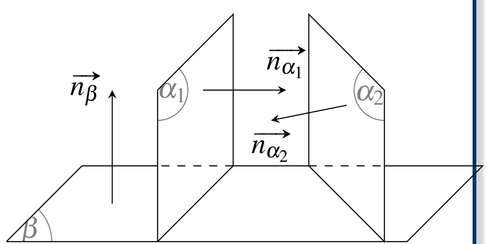
① Nếu (β) song song với $(\alpha)\colon ax+by+cz+d=0$ thì (β) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_\beta}=\overrightarrow{n_\alpha}=(a;b;c)$ hay (β) có dạng $ax+by+cz+m=0$, với $m\neq d$.

② Nếu (β) qua hai điểm phân biệt M, N và vuông góc với (α) thì (β) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_\beta}=\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{n_\alpha}\right]$.

③ Nếu (β) vuông góc với hai mặt phẳng phân biệt (α_1) và (α_2) thì (β) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_\beta}=\left[\overrightarrow{n_{\alpha_1}},\overrightarrow{n_{\alpha_2}}\right]$.







Ví dụ 1

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x-3y+z+5=0$.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng $(\alpha_1): -4x+6y-2z+7=0$ song song với (α).

b) Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua điểm $M(1;-2;3)$ và song song với (α).

Ví dụ 2

Trong không gian $Oxyz$, tìm các cặp mặt phẳng vuông góc với nhau trong ba mặt phẳng sau: $(\alpha_1): 3x-2y-z-1=0$; $(\alpha_2): 2x+4y-2z+3=0$; $(\alpha_3): x+2y-z=0$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua $A(-3;2;-1)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(P): 2x-y+3z-1=0$ và $(Q): x+2y-2z+3=0$.

Bài 2 ☆

Cho hai mặt phẳng $(Q): x+y+3z=0$, $(R): 2x-y+z=0$.

a) Xét vị trí tương đối của (Q) và (R);

b) Viết trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$, đồng thời vuông góc với (Q) và (R).

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Bài 3 ☆

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;4;-1)$, $B(1;1;3)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x-3y+2z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B đồng thời vuông góc với mặt phẳng (P).

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Dạng 4 Khoảng cách từ điểm tới mặt phẳng

Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng: Cho điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz+d=0$. Khi đó

$$\mathrm{d}(M,(P))=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song: Cho hai mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz+d_1=0$ và $(Q)\colon ax+by+cz+d_2=0$ song song nhau. Khi đó

$$\mathrm{d}((P),(Q))=\frac{\left|d_1-d_2\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Ví dụ 1

Tính khoảng cách từ điểm $A(1;2;3)$ đến các mặt phẳng sau

a) $(P)\colon 3x+4z+10=0$;

b) $(Q)\colon 2x-10=0$;

c) $(R)\colon 2x+2y+z-3=0$.

Ví dụ 2

Cho hai mặt phẳng $(P): 2x+y+2z+12=0$, $(Q): 4x+2y+4z-6=0$.

a) Chứng minh $(P)/\!/(Q)$.

b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

Ví dụ 3

Tính chiều cao của hình chóp $S.ABC$ có tọa độ các đỉnh là $S(5;0;1)$, $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$, $C(5;2;3)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Trong không gian $Oxyz$, cho $(\alpha): 2x+3y-6z-7=0$, $(\beta): 2x+3y-6z+14=0$.

a) Tính khoảng cách từ gốc tọa độ và từ điểm $M(1;-2;3)$ đến (α).

b) Chứng minh $(\alpha)/\!/(\beta)$ và tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β).

Bài 2

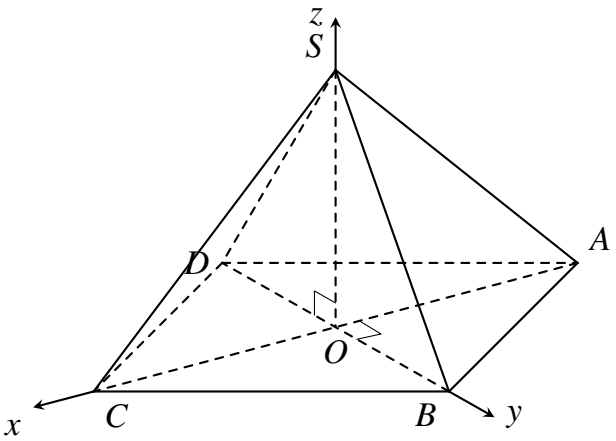
Trong không gian $Oxyz$

a) Tính chiều cao của hình chóp $O.MNP$ với tọa độ các đỉnh là $O(0;0;0)$, $M(2;1;2)$, $N(3;3;3)$, $P(4;5;6)$.

b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(R)\colon 8x+6y+70=0$ và $(S)\colon 16x+12y-2=0$.

Bài 3

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, chiều cao bằng $2a$ và O là tâm của đáy. Bằng cách thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như Hình bên, tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB).



Dạng 5 Toán thực tế áp dụng phương trình mặt phẳng

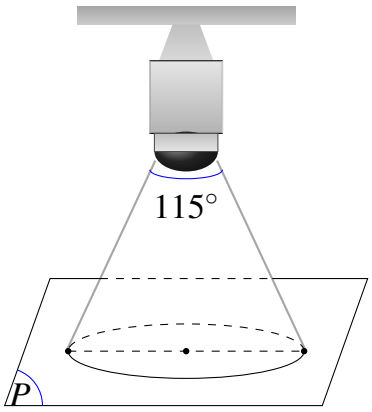
Ví dụ 1

Trên bản thiết kế đồ họa 3D của một cánh đồng điện mặt trời trong không gian $Oxyz$, một tấm pin nằm trên mặt phẳng $(P)\colon 6x+5y+z+2=0$; một tấm pin khác nằm trên mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M(1;1;1)$ và song song với (P). Viết phương trình mặt phẳng (Q).



Ví dụ 2

Góc quan sát ngang của một camera là $115°$. Trong không gian $Oxyz$, camera được đặt tại điểm $C(4;2;3)$ và chiếu thẳng về phía mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z-3=0$. Biết vùng quan sát được trên mặt phẳng (P) của camera là hình tròn. Tính diện tích của vùng quan sát đó (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

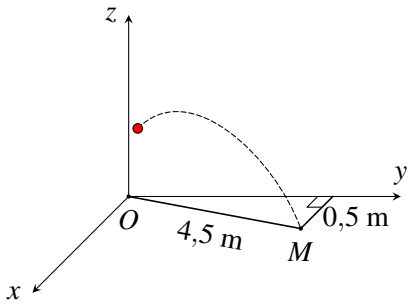


KQ: | | | | |

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

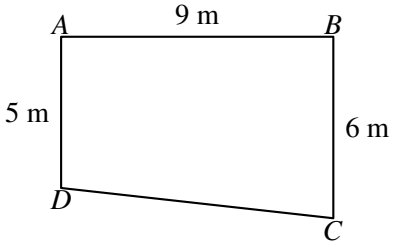
Trong tiết thể dục học về kĩ thuật chuyền bóng hơi, Nam và An đang tập chuyền bóng cho nhau, Nam ném bóng cho An đỡ, quả bóng bay lên cao nhưng lại lệch sang phải của Nam và rơi xuống vị trí cách An 0,5m và cách Nam 4,5m được mô tả bằng hình vẽ. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng nằm trong mặt phẳng (α) và vuông góc với mặt đất. Viết phương trình mặt phẳng (α).



Bài 2

Một phần sân nhà bác An có dạng hình thang $ABCD$ vuông tại A và B với độ dài $AB = 9$ m, $AD = 5$ m và $BC = 6$ m như Hình bên dưới. Theo thiết kế ban đầu thì mặt sân bằng phẳng và A, B, C, D có độ cao như nhau. Sau đó bác An thay đổi thiết kế để nước có thể thoát về phía góc sân ở vị trí C bằng cách giữ nguyên độ cao ở A, giảm độ cao của sân ở vị trí B và D xuống thấp hơn độ cao ở A lần lượt là 6 cm và 3,6 cm. Để mặt sân sau khi lát gạch vẫn là bề mặt phẳng thì bác An cần phải giảm độ cao ở C xuống bao nhiêu centimét so với độ cao ở A?





BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(3;2;1)$, $\vec{b}=(3;2;5)$. Tính $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

Ⓐ $(8;-12;5)$. Ⓑ $(8;-12;0)$. Ⓒ $(0;8;12)$. Ⓓ $(0;8;-12)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+3y+z+2=0$. Vectơ nào dưới đây là một Vectơ pháp tuyến của (P)?

Ⓐ $\vec{n}_1(2;3;1)$. Ⓑ $\vec{n}_2(2;3;2)$. Ⓒ $\vec{n}_3(2;3;0)$. Ⓓ $\vec{n}_4(2;0;3)$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z-5=0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?

Ⓐ $P(0;0;-5)$. Ⓑ $M(1;1;6)$. Ⓒ $Q(2;-1;5)$. Ⓓ $N(-5;0;0)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào sau đây **không** phải là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)\colon x+3y-5z+2=0$.

Ⓐ $\vec{n}_1=(-1;-3;5)$. Ⓑ $\vec{n}_2=(-2;-6;-10)$.

Ⓒ $\vec{n}_3=(-3;-9;15)$. Ⓓ $\vec{n}_4=(2;6;-10)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng tọa độ (Oxy) có một vectơ pháp tuyến là

Ⓐ $\vec{n}=(0;1;0)$. Ⓑ $\vec{n}=(0;0;1)$. Ⓒ $\vec{n}=(1;0;0)$. Ⓓ $\vec{n}=(1;1;0)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của (P). Biết $\vec{u}=(1;-2;0)$, $\vec{v}=(0;2;-1)$ là cặp vectơ chỉ phương của (P).

Ⓐ $\vec{n}=(1;2;0)$. Ⓑ $\vec{n}=(2;1;2)$. Ⓒ $\vec{n}=(2;-1;2)$. Ⓓ $\vec{n}=(0;1;2)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;-3;0)$, $C(0;0;6)$. Tọa độ một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là

Ⓐ $\vec{n}=(1;-2;3)$. Ⓑ $\vec{n}=(3;2;1)$. Ⓒ $\vec{n}=(3;-2;1)$. Ⓓ $\vec{n}=(2;-3;6)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;3)$, $B(4;0;1)$ và $C(-10;5;3)$. vectơ nào dưới đây là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC)?

Ⓐ $\vec{n}=(1;2;0)$. Ⓑ $\vec{n}=(1;-2;2)$. Ⓒ $\vec{n}=(1;8;2)$. Ⓓ $\vec{n}=(1;2;2)$.

Câu 9. Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(-2;0;1)$ là

Ⓐ $-2x+z+1=0$. Ⓑ $-2y+z-1=0$. Ⓒ $-2x+z-1=0$. Ⓓ $-2x+y-1=0$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (Oyz) có phương trình là

Ⓐ $x=0$. Ⓑ $y=0$. Ⓒ $z=0$. Ⓓ $x-y=0$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (Oxz) có phương trình là

Ⓐ $x=0$. Ⓑ $y=0$. Ⓒ $z=0$. Ⓓ $x-y=0$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (Oxy) có phương trình là

Ⓐ $x=0$. Ⓑ $y=0$. Ⓒ $z=0$. Ⓓ $x-y=0$.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P): \frac{x}{-2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=1$ là

Ⓐ $\vec{n}=(3;6;-2)$. Ⓑ $\vec{n}=(2;-1;3)$.

Ⓒ $\vec{n}=(-3;-6;-2)$. Ⓓ $\vec{n}=(-2;-1;3)$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng qua $A(-1;1;-2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-2;-2)$ là

Ⓐ $-x+y-2z+1=0$. Ⓑ $x-2y-2z-1=0$.

Ⓒ $x-2y-2z+7=0$. Ⓓ $-x+y-2z-1=0$.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của mặt phẳng

Ⓐ $x^2+y+z+2=0$. Ⓑ $2x+y^2+z+1=0$.

Ⓒ $2x+y+z+3=0$. Ⓓ $2x+y+z^2+4=0$.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (α) cắt ba trục tọa độ tại ba điểm $M(8;0;0)$, $N(0;-2;0)$ và $P(0;0;4)$. Phương trình của mặt phẳng (α) là

Ⓐ (α): $x-4y+2z=0$. Ⓑ (α): $\frac{x}{8}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{4}=0$.

Ⓒ (α): $\frac{x}{4}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=1$. Ⓓ (α): $x-4y+2z-8=0$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1;1;4)$, $B(2;7;9)$, $C(0;9;13)$.

Ⓐ $2x+y+z+1=0$. Ⓑ $x-y+z-4=0$.

Ⓒ $2x+y-z-2=0$. Ⓓ $7x-2y+z-9=0$.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;0)$ và $B(3;0;2)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

Ⓐ $x+y+z-3=0$. Ⓑ $2x-y+z+2=0$. Ⓒ $2x+y+z-4=0$. Ⓓ $2x-y+z-2=0$.

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;1;1)$, $B(2;1;0)$, $C(1;-1;2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình là

Ⓐ $3x+2z+1=0$. Ⓑ $x+2y-2z+1=0$.

Ⓒ $x+2y-2z-1=0$. Ⓓ $3x+2z-1=0$.

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;4)$ và mặt phẳng (P): $3x-2y+z+1=0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (P) là

Ⓐ $2x-2y+4z-21=0$. Ⓑ $3x-2y+z-12=0$.

Ⓒ $2x-2y+4z+21=0$. Ⓓ $3x-2y+z+12=0$.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;2;1)$, $B(3;0;1)$, $C(1;0;0)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

Ⓐ $2x-3y-4z+2=0$. Ⓑ $4x+6y-8z+2=0$.

Ⓒ $2x+3y-4z-2=0$. Ⓓ $2x-3y-4z-2=0$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2;-1;0)$, $B(1;1;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q)\colon x+y+2z-3=0$ là

Ⓐ $2x+4y-3z-8=0$. Ⓑ $2x+4y-3z=0$.

Ⓒ $2x+4y-3z+8=0$. Ⓓ $2x-4y-3z=0$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;1;-2)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(Q)\colon x+y+2z-3=0$ và $(R)\colon x-y-z+4=0$ là

Ⓐ $x+3y-2z+9=0$. Ⓑ $2x+y-2z-9=0$.

Ⓒ $x+3y-2z-9=0$. Ⓓ $2x+y-2z+9=0$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(5;1;3)$, $B(1;6;2)$, $C(5;0;4)$, $D(4;0;6)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B và song song với CD.

Ⓐ $4x-5y+z+24=0$. Ⓑ $x-2z+1=0$.

Ⓒ $10x+9y+5z-74=0$. Ⓓ $10x+9y+5z+74=0$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+z-2=0$ song song với mặt phẳng nào dưới đây?

Ⓐ $x+\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{2}z-1=0$. Ⓑ $x-y-z-2=0$.

Ⓒ $4x+2y+2z+4=0$. Ⓓ $2x+y+z-2=0$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Mặt phẳng chứa điểm A và trục Oz có phương trình là

Ⓐ $2x-y=0$. Ⓑ $x+y-z=0$. Ⓒ $3y-2z=0$. Ⓓ $3x-z=0$ vô số.

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $A(1;1;0)$ đến mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+2y+z-1=0$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ $\dfrac{4}{3}$. Ⓒ $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Ⓓ $2\sqrt{2}$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng chứa trục Ox và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-3y+4z-5=0$ có phương trình là

Ⓐ $2x-3y+4z-5=0$. Ⓑ $4y-3z=0$.

Ⓒ $3x+4y=0$. Ⓓ $4y+3z=0$.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon 2x-3y+4z+20=0$ và $(Q)\colon 4x-13y-6z+40=0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $(P)\mathbin{/\!/}(Q)$. Ⓑ $(P)\equiv(Q)$. Ⓒ (P) cắt (Q). Ⓓ $(P)\perp(Q)$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-3z-2024=0$ và $(Q)\colon x+my+z+2025=0$ với m là tham số. Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) khi và chỉ khi

Ⓐ $m=5$. Ⓑ $m=1$. Ⓒ $m=-5$. Ⓓ $m=-1$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$ khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y+3z-1=0$ và $(Q)\colon x+2y+3z+6=0$ là

Ⓐ $\dfrac{7}{\sqrt{14}}$. Ⓑ $\dfrac{8}{\sqrt{14}}$. Ⓒ 14. Ⓓ $\dfrac{5}{\sqrt{14}}$.

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(4;0;-3)$, $B(3;2;3)$ và $C(4;-1;-5)$.

a) Mặt phẳng (P) có một cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}=(-1;2;6), \overrightarrow{AC}=(0;-1;-2)$.

b) Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-2;1)$.

c) Mặt phẳng (P) có phương trình là $2x-2y+z-5=0$.

d) Khoảng cách từ điểm $M(0;0;11)$ đến mặt phẳng P bằng 3.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;-2)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z-3=0$.

a) Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng $(Q)\colon x+2y-3=0$.

b) Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) bằng 2.

c) Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;1;2)$.

d) Mặt phẳng đi qua điểm M và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là $2x+y+2z+1=0$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;3)$, $B(4;5;6)$, $C(1;0;2)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y-z+1=0$.

a) (P) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;2;-1)$.

b) Điểm A thuộc mặt phẳng (P).

c) Mặt phẳng (ABC) có phương trình $x+y-2z+3=0$.

d) Mặt phẳng (Q) qua A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là $3x-2y-z+4=0$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;0)$, $B(1;0;2)$, $C(2;1;3)$, và mặt phẳng $(P)\colon x-y+2z+7=0$.

a) Mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là $(2;1;1)$.

b) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $M(3;1;5)$.

c) Mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P).

d) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng 6.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 10x+7y-26z+2=0$.

a) $\vec{n}=(10;7;-26)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

b) Khoảng cách từ điểm $M(0;1;-1)$ đến mặt phẳng (P) bằng $\dfrac{7\sqrt{33}}{33}$.

c) Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng $(Q)\colon 10x+7y-26z+2=0$.

d) Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(-2;-2;-2)$, $B(0;-2;-1)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình dạng $ax+by+cz-138=0$. Khi đó $a+b+c=-69$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $B(3;-2;1)$ và ba mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-y+4z-5=0$, $(\beta)\colon x+3y-2z+4=0$, $(\gamma)\colon 5x-y+z-6=0$. Khi đó

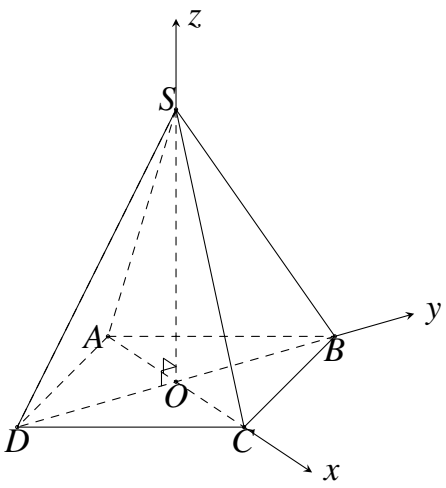
a) Mặt phẳng (γ) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(5;-1;1)$.

b) Mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β).

c) Mặt phẳng (β) vuông góc với mặt phẳng (γ).

d) Mặt phẳng (P) đi qua điểm B và vuông góc với hai mặt phẳng (α), (γ) có phương trình tổng quát là $7x+13y-2z+21=0$.

Câu 7. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, chiều cao bằng $2a$ và O là tâm của đáy. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ bên.



a) $\overrightarrow{SO} = (0;0;-2a)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).

b) Mặt phẳng (SAB) có phương trình là $-2x+2y+z-2a=0$.

c) Mặt phẳng (P) đi qua O và song song với mp (SAB) có phương trình là $-2x+2y+z=0$.

d) Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) bằng $\dfrac{2}{3}a$.

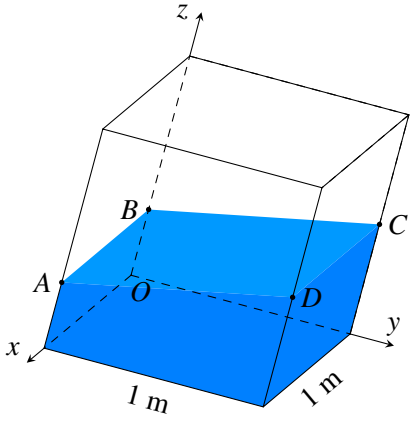
Câu 8. Trong một bể hình lập phương cạnh 1 m có chứa một ít nước. Người ta đặt đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang. Biết rằng lúc đó mặt nước có dạng hình bình hành $ABCD$ và khoảng cách từ các điểm A, B, C đến đáy bể tương ứng là 38 cm, 46 cm, 50 cm. Trong không gian $Oxyz$, gốc tọa độ là góc của đáy bể, mỗi đơn vị trên hệ trục tọa độ tương ứng với 1 cm.

a) Điểm A có tọa độ là $(100;0;38)$.

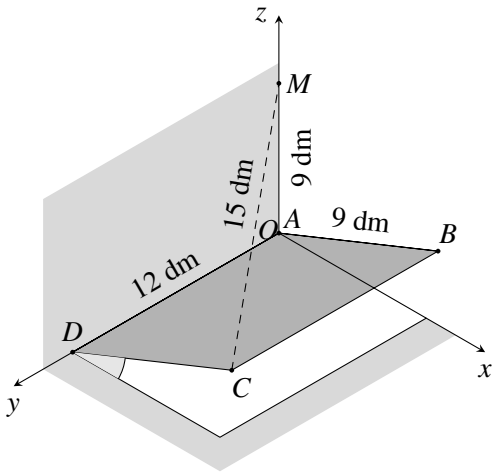
b) Mặt phẳng đáy của bể nước có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2;-1;-25)$.

c) Khoảng cách từ điểm D đến đáy bể là 42 cm.

d) Góc giữa mặt nước và mặt phẳng đáy của bể nước là $5{,}1^\circ$ (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



Câu 9. Một nắp bể nước hình chữ nhật $ABCD$ nằm cạnh bờ tường có kích thước $9\,\text{dm} \times 12\,\text{dm}$ được kéo ra từ mặt sàn. Do tác dụng của trọng lực nên nắp bể không thể mở ra được nếu không có người giữ. Người ta dùng một sợi dây xích dài 15 dm và kéo căng nối đỉnh C của hình chữ nhật với điểm M nằm phía trên bờ tường sao cho $AM = 9\,\text{dm}$ và AM vuông góc với mặt sàn. Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ, khi đó nắp bể mở ra với mặt sàn một góc α (đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính bằng dm). Bỏ qua độ dày của nắp bể.



a) Điểm M thuộc mặt phẳng có phương trình $z=0$.

b) Tọa độ điểm C là $C(9\sin\alpha;12;9\cos\alpha)$.

c) Góc giữa nắp bể và mặt sàn sau khi kéo lên là $\alpha = 60^\circ$.

d) Phương trình mặt phẳng chứa nắp bể nước sau khi kéo bởi dây xích là $x-\sqrt{3}z=0$.

Câu 10. Mô hình toán học sau đây được sử dụng trong quan sát chuyển động của một vật: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ có $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz và độ dài của mỗi vectơ đơn vị đó bằng 1 kilômét. Một tên lửa phóng từ vị trí gốc toạ độ O theo hướng và vận tốc không đổi. Tên lửa bay từ điểm $O(0;0;0)$ đến điểm $A(140;60;6)$ trong 8 phút.

a) Sau 8 phút kể từ lúc phóng, tên lửa bay được quãng đường 152,4 km (*làm tròn kết quả đến hàng phần chục*).

b) Sau đúng 4 phút kể từ lúc phóng, độ cao của tên lửa là 3 km.

c) Toạ độ của tên lửa sau 12 phút kể từ lúc phóng là $(210;90;12)$.

d) Gọi (P) là mặt phẳng chứa quỹ đạo bay của tên lửa và vuông góc với mặt phẳng (Oxy). Phương trình mặt phẳng (P) là $3x-8y=0$.

3 Tự luận.

Bài 1. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng trong các trường hợp sau:

a) Đi qua điểm $A(2;0;0)$ và nhận $\vec{n}=(2;1;-1)$ làm vectơ pháp tuyến.

b) Đi qua điểm $B(1;2;3)$ và có giá song song với giá của mỗi vectơ $\vec{u}=(1;2;3)$ và $\vec{v}=(-2;0;1)$.

c) Đi qua ba điểm $A(1;0;-3), B(2;1;0)$ và $C(3;2;1)$.

d) Đi qua ba điểm $A(1;0;0), B(0;2;0)$ và $C(0;0;4)$.

e) Đi qua điểm $M(1;2;-1)$ và vuông góc với trục Ox.

Bài 2. Viết phương trình của mặt phẳng:

a) Chứa trục Ox và điểm $M(-4;1;2)$;

b) Chứa trục Oy và điểm $N(0;4;-3)$;

c) Chứa trục Oz và điểm $P(3;0;-7)$.

Bài 3. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng trong các trường hợp sau:

a) Đi qua điểm $C(1;-5;0)$ và song song với mặt phẳng $(P): 3x-5y+4z-2026=0$.

b) Đi qua điểm $I(-2;4;-1)$ và song song với mặt phẳng (Oxz).

c) Đi qua hai điểm $A(1;0;1), B(5;2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): 2x-y+z-7=0$.

d) Đi qua điểm $A(1;2;-1)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(P): 4x-2y+6z-1=0$, $(Q): 2x+2y+2z-7=0$.

e) Đi qua điểm $M(2;3;-1)$, song song với trục Ox và vuông góc với mặt phẳng $(R): x+2y-3z+1=0$.

Bài 4. Xét tính song song, vuông góc giữa hai mặt phẳng sau:

a) $(\alpha_1): x+2y-3z+2=0$ và $(\alpha_2): -2x-4y+6z-5=0$

b) $(\beta_1): x+2z-5=0$ và $(\beta_2): 4x-3y-2z+1=0$

c) $(\gamma_1): x-2y+z+3=0$ và $(\gamma_2): 2x-4y+3z+2=0$

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $G(1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua G và cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho G là trọng tâm của tam giác ABC.

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(3;2;4)$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm H và trục Oy.

b) Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua điểm H và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (với A, B, C đều không trùng với gốc tọa độ O) sao cho H là trực tâm tam giác ABC.

Bài 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x+3y-z=0$ và $(Q): x-y-2z+1=0$.

a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau.

b) Tìm điểm M thuộc trục Ox và cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q).

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $S(-3;2;6)$, $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$, $C(7;7;5)$.

a) Viết phương trình mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt phẳng (SCD).

b) Tính chiều cao của hình chóp $S.ABCD$.

Bài 9. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.EFD$ với $A(2;-1;6)$, $B(-3;-1;-4)$, $C(5;-1;0)$, $D(1;2;1)$.

a) Viết phương trình các mặt phẳng $(BCDF)$, $(ABFE)$ và (DEF).

b) Tính khoảng cách từ A đến các mặt phẳng $(BCDF)$ và (DEF).

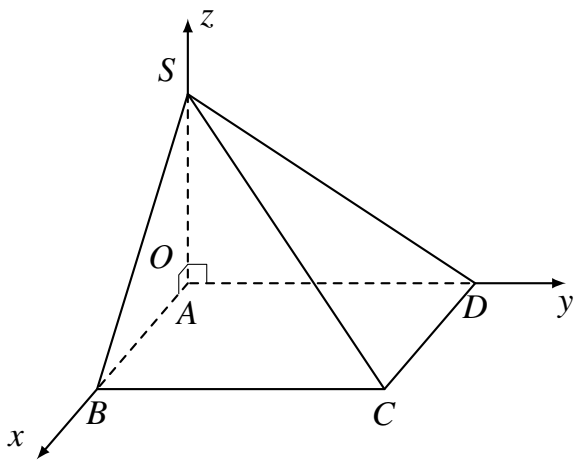
Bài 10. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$.

a) Viết phương trình các mặt phẳng $(ABCD)$, $(A'B'C'D')$ và $(ADD'A')$.

b) Tính chiều cao của hình hộp.

Bài 11. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=2a$, $AD=3a$, $AA'=4a$ $(a>0)$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thuộc các tia AB, AD, AA' sao cho $AM=a$, $AN=2a$, $AP=3a$. Tính khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng (MNP).

Bài 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=2a$, $AD=5a$, $SA=3a$ và $SA\perp(ABCD)$. Bằng cách thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như Hình bên, tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).



Bài 13. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;-1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Oy sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất. Viết phương trình mặt phẳng (P).

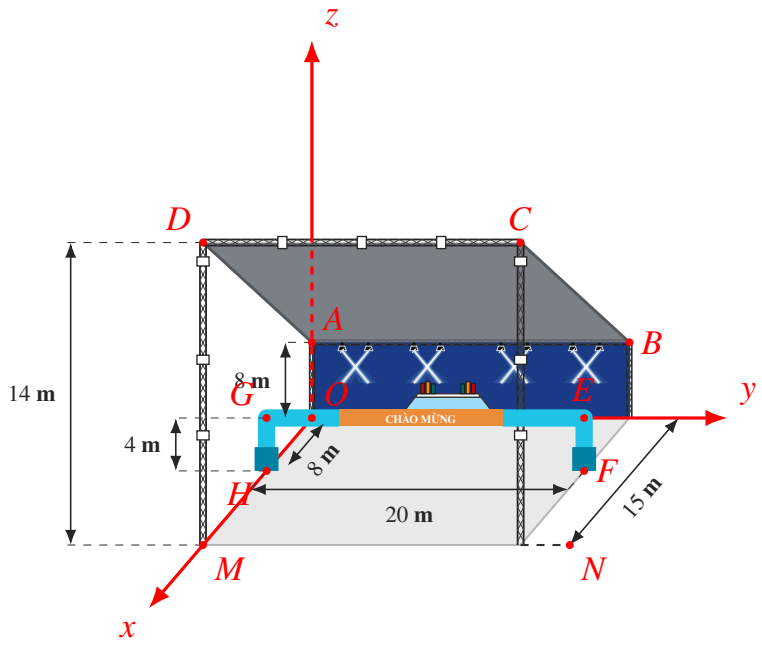
Bài 14. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x+my+3z-5=0$ và $(Q): nx-8y-6z+2=0$. Tìm giá trị của m và n để $(P)/\!/(Q)$.

Bài 15. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y+z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P), cách (P) một khoảng bằng 3 và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương.

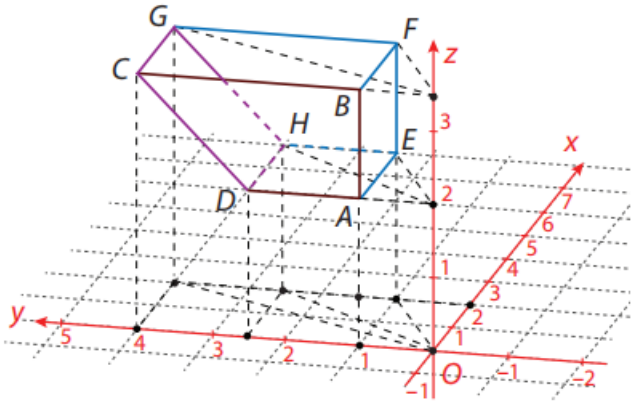
Bài 16. Người ta thiết kế một mái che hình chữ nhật $ABCD$ phía trên sân khấu.

a) Với hệ trục $Oxyz$ (đơn vị trên trục là mét) và các kích thước được cho như Hình vẽ, hãy viết phương trình mặt phẳng chứa mái che.

b) Một cổng chào hình chữ nhật $EFHG$ cao 4 m được dựng vuông góc với mặt đất. Người ta muốn làm các đoạn dây nối thanh ngang GE với mái che để gắn hoa và đèn led. Tính độ dài ngắn nhất của mỗi đoạn dây này.



Bài 17. Thùng của một máy nông nghiệp được thiết kế mô phỏng trong hệ trục $Oxyz$ là một hình lăng trụ tứ giác $ABCD.EFGH$ với các đỉnh: $A(0;1;2)$, $B(0;1;3{,}5)$, $C(0;4;3{,}5)$, $D(0;2{,}5;2)$, $E(2;1;2)$ (Hình vẽ).





a) Viết phương trình mặt phẳng $(EFGH)$ và tính chiều cao của hình lăng trụ $ABCD.EFGH$.

b) Viết phương trình mặt phẳng $(CDHG)$ và tính khoảng cách từ điểm F đến mặt phẳng $(CDHG)$.

III. BÀI KIỂM TRA CUỐI BÀI

1) Đề số 1

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng nhận $\vec{n}=(a;b;c)$ là vectơ pháp tuyến và đi qua điểm $I(x_0;y_0;z_0)$ có phương trình là

Ⓐ $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z+z_0)=0$. Ⓑ $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$.

Ⓒ $a(x-x_0)+b(y-y_0)-c(z-z_0)=0$. Ⓓ $a(x-x_0)+c(y-y_0)+b(z-z_0)=0$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào sau đây **không** phải là phương trình tổng quát của một mặt phẳng?

Ⓐ $x-3y+z^2=0$. Ⓑ $z-1=0$.

Ⓒ $6x-y+3z-1=0$. Ⓓ $2x-z=0$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ nào là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABCD)$?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}$. Ⓑ $\overrightarrow{AC}$. Ⓒ $\overrightarrow{AD}$. Ⓓ $\overrightarrow{AA'}$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào sau đây là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)\colon x+3y-4z+5=0$?

Ⓐ $\vec{n}_1=(3;4;5)$. Ⓑ $\vec{n}_2=(1;3;-4)$. Ⓒ $\vec{n}_3=(1;3;4)$. Ⓓ $\vec{n}_4=(3;-4;5)$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z-5=0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?

Ⓐ $P(0;0;-5)$. Ⓑ $M(1;1;6)$. Ⓒ $Q(2;-1;5)$. Ⓓ $N(-5;0;0)$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, khoảng cách từ $M(1;2;-3)$ đến mặt phẳng $(P)\colon x+2y+2z-10=0$ là

Ⓐ 3. Ⓑ $\dfrac{2}{3}$. Ⓒ $\dfrac{4}{3}$. Ⓓ $\dfrac{11}{3}$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(5;1;2)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-2;3)$ là

Ⓐ $5x+y+2z+9=0$. Ⓑ $x-2y+3z+9=0$.

Ⓒ $x-2y+3z-9=0$. Ⓓ $5x+y+2z-9=0$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(1;1;1)$ và $C(3;0;2)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC là

Ⓐ $2x-y+z-3=0$. Ⓑ $2x-y+z=0$.

Ⓒ $x+2y+3z-1=0$. Ⓓ $x+2y+3z-7=0$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;2;1)$, $B(3;0;1)$, $C(1;0;0)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

Ⓐ $2x-3y-4z+2=0$. Ⓑ $4x+6y-8z+2=0$.

Ⓒ $2x+3y-4z-2=0$. Ⓓ $2x-3y-4z-2=0$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-3y-z-1=0$. Điểm nào dưới đây **không** thuộc mặt phẳng (α)?

Ⓐ $M(-2;1;-8)$. Ⓑ $Q(1;2;-5)$. Ⓒ $N(4;2;1)$. Ⓓ $P(3;1;3)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của (P). Biết $\vec{u}=(1;-2;0)$, $\vec{v}=(0;2;-1)$ là cặp vectơ chỉ phương của (P).

Ⓐ $\vec{n}=(1;2;0)$. Ⓑ $\vec{n}=(2;1;2)$. Ⓒ $\vec{n}=(2;-1;2)$. Ⓓ $\vec{n}=(0;1;2)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(7;6;7)$, $B(12;13;6)$, mặt phẳng (P) chứa AB và song song với Ox có phương trình là

Ⓐ $-y-7z+55=0$. Ⓑ $-y-7z+53=0$. Ⓒ $-y-7z+56=0$. Ⓓ $-y-7z+35=0$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;-3)$ và các vectơ $\vec{u}=(-1;-2;5)$, $\vec{v}=(3;-1;-2)$. Mặt phẳng (α) đi qua A và nhận $\vec{u}$, $\vec{v}$ làm cặp vectơ chỉ phương.

a) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}=(9;13;7)$.

b) Phương trình mặt phẳng $(\alpha)\colon 9x+13y+7z-2=0$.

c) Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;-2;-3)$.

d) Mặt phẳng (R) đi qua M song song với (α) có phương trình $x+2y+5z+18=0$.

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có phương trình là $(P)\colon x-2y+3z+1=0$ và $(Q)\colon 2x-4y+6z+1=0$.

a) Các vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng trên cùng phương.

b) Hai mặt phẳng (P) và (Q) đều đi qua điểm $M(1;1;2)$.

c) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng $\dfrac{\sqrt{14}}{14}$.

d) Phương trình mặt phẳng (R) cách đều hai mặt phẳng (P) và $(Q)\colon 4x+8y+12z-5=0$.

Câu 3. Cho các điểm $A(1;-2;0)$; $B(2;-1;1)$; $C(1;1;2)$.

a) Phương trình mặt phẳng (ABC) là $x+2y-3z-3=0$.

b) Phương trình mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với BC là $x-2y-z-5=0$.

c) Phương trình mặt phẳng trung trực (β) của đoạn AC là $6y+4z-1=0$.

d) Phương trình mặt phẳng (γ) chứa trục Ox và điểm C là $2y+z=0$.

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;1)$, $B(0;1;-3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-y-3=0$.

a) Điểm A thuộc mặt phẳng (P).

b) Mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P), cách (P) một khoảng bằng $2\sqrt{2}$ và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương có phương trình $(Q)\colon x-y-1=0$.

c) Mặt phẳng (P) song song với trục Oz.

d) Mặt phẳng (α) đi qua A, B vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình $2x+2y+z-1=0$.

Phần III. Trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6 vào ô kết quả.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;-1)$, $B(-1;0;4)$, $C(0;-2;-1)$. Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với BC có dạng $x+by+cz+d=0$. Tính $b+c+d$.

KQ: | | | | |

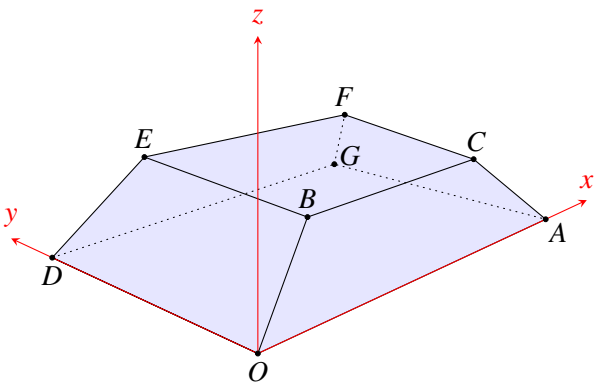
Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;0)$, $B(1;1;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y+3z-5=0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua hai điểm A, B, đồng thời vuông góc (P) là $2x-ay-bz+c=0$. Giá trị của biểu thức $a+2b+3c$ bằng

KQ: | | | | |

Câu 3. Bản vẽ thiết kế của một công trình được vẽ trong hệ trục tọa độ $Oxyz$. Sàn nhà thuộc mặt phẳng Oxy, đường ống nước thẳng đi qua hai điểm $A(1;2;-1)$ và $B(5;6;-2)$. Trên đường ống nước gắn một cái khóa tại trung điểm của AB. Tính khoảng cách từ cái khóa đến mặt sàn nhà

KQ: | | | | |

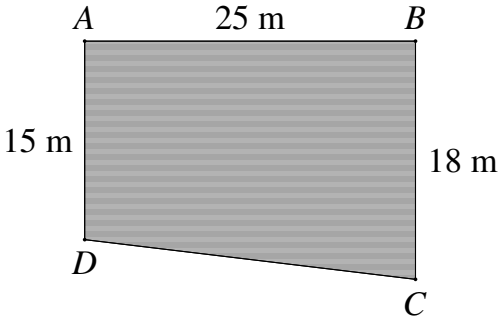
Câu 4. Một sân vận động được xây dựng theo mô hình là hình chóp cụt $OAGD\cdot BCFE$ có hai đáy song song với nhau. Mặt sân $OAGD$ là hình chữ nhật và được gắn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Mặt sân $OAGD$ có chiều dài $OA=100$ m, chiều rộng $OD=60$ m và tọa độ điểm $B(10;10;8)$. Giả sử phương trình tổng quát của mặt phẳng $(OACB)$ có dạng $ax+y+cz+d=0$. Tính giá trị biểu thức $4(a+c+d)$.



KQ: | | | | |

Câu 5. Khi gắn hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là decimét) vào một ngôi nhà 1 tầng, người ta thấy rằng mặt trên và mặt dưới của mái nhà thuộc các mặt phẳng vuông góc với trục Oz. Biết rằng các vị trí $A(3;4;33)$, $D(9;8;35)$ lần lượt thuộc mặt dưới, mặt trên của mái nhà. Độ dày của mái nhà được tính bằng khoảng cách giữa mặt trên và mặt dưới của mái nhà đó. Hãy cho biết độ dày của mái nhà đó là bao nhiêu decimét? KQ: | | | | |

Câu 6. Một phần sân trường được định vị bởi các điểm A, B, C, D, như hình vẽ bên. Bước đầu chúng được lấy "thăng bằng" để có cùng độ cao, biết $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B với độ dài $AB=25$ m, $AD=15$ m, $BC=18$ m. Do yêu cầu kĩ thuật, khi lát phẳng phần sân trường phải thoát nước về góc sân ở C nên người ta lấy độ cao ở các điểm B, C, D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là 10 cm, a cm, 6 cm tương ứng. Giá trị của a bằng bao nhiêu?



KQ: | | | | |

2) Đề số 2

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Cặp vectơ nào là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng $(ABCD)$?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD'}$. Ⓒ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}$. Ⓓ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}$.

Câu 2. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là một phương trình tổng quát của mặt phẳng?

Ⓐ $x^2-4y+5z-6=0$. Ⓑ $3x-y^4+5z-6=0$.

Ⓒ $3x-4y+5z-6=0$. Ⓓ $3x-4y+z^5-6=0$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-1=0$ có một vectơ pháp tuyến là

Ⓐ $\vec{n}_1=(-1;1;1)$. Ⓑ $\vec{n}_2=(1;-1;1)$. Ⓒ $\vec{n}_3=(1;1;1)$. Ⓓ $\vec{n}_4=(1;1;-1)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z-5=0$. Điểm nào dưới đây **không** thuộc (P)?

Ⓐ $A(2;-1;-5)$. Ⓑ $B(0;0;5)$. Ⓒ $C(5;0;0)$. Ⓓ $D(1;1;6)$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ đến mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz+d=0$ là

Ⓐ $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}$. Ⓑ $\dfrac{|ax_0+by_0-cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Ⓒ $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. Ⓓ $\dfrac{|ax_0+cy_0+bz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(1;1;1)$ và $C(3;0;2)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC là

Ⓐ $2x-y+z-3=0$. Ⓑ $2x-y+z=0$.

Ⓒ $x+2y+3z-1=0$. Ⓓ $x+2y+3z-7=0$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng (Oyz)?

Ⓐ $y=0$. Ⓑ $z=0$. Ⓒ $x=0$. Ⓓ $x+3=0$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $A(1;1;0)$ đến mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+2y+z-1=0$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ $\dfrac{4}{3}$. Ⓒ $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Ⓓ $2\sqrt{2}$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua gốc tọa độ và nhận $\vec{n}=(-1;0;3)$ làm một vectơ pháp tuyến có phương trình tổng quát là.

Ⓐ $-y+3z=0$. Ⓑ $-x+3z=0$. Ⓒ $-x+3y=0$. Ⓓ $-x-3z=0$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) có phương trình $x-y+2z-1=0$ song song với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?

Ⓐ $x+y+2z+3=0$. Ⓑ $2x-2y+4z-2=0$.
Ⓒ $x+2y-z=0$. Ⓓ $x-y+2z+6=0$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(-1;0;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y-z+1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua A, B và vuông góc với (P).

Ⓐ $(Q)\colon 3x-y+z=0$. Ⓑ $(Q)\colon x+z=0$.
Ⓒ $(Q)\colon 2x-y+3=0$. Ⓓ $(Q)\colon -x+y+z=0$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho (α) song song với giá của hai vectơ $\vec{a}=(1;-2;-3)$, $\vec{b}=(-4;2;0)$. Vectơ nào dưới đây **không phải** là vectơ pháp tuyến của (α)?

Ⓐ $\vec{n_1}=(6;12;-6)$. Ⓑ $\vec{n_2}=(1;2;-1)$.
Ⓒ $\vec{n_3}=(-2;-4;2)$. Ⓓ $\vec{n_4}=(-3;-6;-3)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-2;-1)$, $B(4;1;2)$, $C(2;3;1)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(3;3;3)$.

b) Ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

c) Mặt phẳng đi qua ba điểm A,B,C có vectơ pháp tuyến là $\vec{a}=(3;1;-4)$.

d) Mặt phẳng (α) đi qua A đồng thời song song với Oy và đường thẳng BC có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;0;2)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;3;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y-3z+1=0$.

a) Véctơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)\colon x+2y-3z+1=0$ là $\vec{n}=(1;2;-3)$.

b) Phương trình mặt phẳng (Q) qua điểm $M(2;3;-1)$ và song song với mặt phẳng (P) là $x+2y-3z+11=0$.

c) Phương trình mặt phẳng (R) đi qua $M(2;3;-1)$, song song với trục Oy và vuông góc với mặt phẳng (P) là $3x+z-5=0$.

d) Cho mặt phẳng α đi qua $M(2;3;-1)$ cắt trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại 3 điểm A, B, C sao cho điểm M là trực tâm của tam giác ABC. Phương trình mặt phẳng (α) là $2x+3y+z+14=0$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;5)$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x+2y+2z-6=0$.

a) Vectơ $\vec{n}=(1;2;2)$ là một vectơ pháp tuyến của (α).

b) Phương trình mặt phẳng (β) đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (α) có phương trình $x+2y+2z+15=0$.

c) Phương trình mặt phẳng (γ) đi qua hai điểm O và A đồng thời vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình $2x-y=0$.

d) Điểm $M\in(\alpha)$ sao cho A,O,M thẳng hàng thì tọa độ $M\left(\frac{2}{5};\frac{4}{5};2\right)$.

Câu 4. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;1)$ và hai mặt phẳng $(Q)\colon x+y-3z-5=0$, $(R)\colon x+2y-z-1=0$.

a) Mặt phẳng (R) đi qua điểm M.

b) Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (Q) bằng $\dfrac{7}{\sqrt{11}}$.

c) Mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (Q) có phương trình là $x+y-3z-2=0$.

d) Mặt phẳng đi qua điểm $A(1;-2;0)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(Q)\colon\ x+y-3z-5=0$, $(R)\colon\ x+2y-z-1=0$ có phương trình là $5x-2y+z-9=0$.

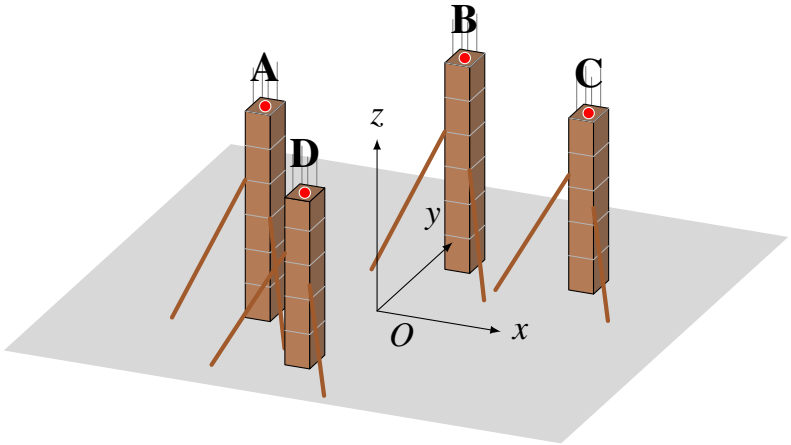
Phần III. Trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6 vào ô kết quả.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(2;3;-1)$ đồng thời song song với giá của hai vec tơ $\vec{u}=(1;1;0)$ và $\vec{v}=(1;2;-3)$ có dạng $ax+by+cz+2=0$. Tính $a-b+c$. KQ: | | | | |

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;4)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho độ dài OA, OB, OC theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội bằng 2. Biết mặt phẳng (P) có dạng $(P)\colon\ 4x+my+nz+p=0$ với m, n, $p\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị biểu thức $T=m+n+p$. KQ: | | | | |

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon\ 3x-y+mz-4=0$ và $(Q)\colon\ 6x+ny+2z-2=0$. Biết (P) và (Q) là hai mặt phẳng song song. Giá trị của $m+n$ bằng bao nhiêu? KQ: | | | | |

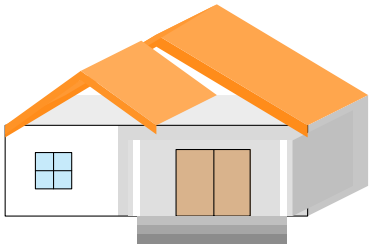
Câu 4. Hình vẽ minh họa một khu nhà đang xây dựng được gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét). Mỗi cột bê tông có dạng hình lăng trụ tứ giác đều và tâm của mặt đáy trên lần lượt là các điểm $A(2;1;3)$, $B(4;3;3)$, $C(6;3;2,5)$, $D(4k;0;3k)$. Biết rằng 4 điểm A, B, C, D đồng phẳng, tính giá trị của k *(viết kết quả làm tròn đến hàng phần mười)*.



KQ: | | | | |

Câu 5. Trong một trò chơi mô phỏng bắn súng, một người chơi đặt điểm ngắm tại điểm O là giao điểm của AC và BD trong căn phòng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có kích thước $AB=15\,(\text{m})$, $AD=20\,(\text{m})$, $AA'=25\,(\text{m})$. Người chơi di chuyển trên đoạn BD có nhiệm vụ bắn trúng một mục tiêu di động trên mặt phẳng $(CB'D')$. Tính khoảng cách ngắn nhất từ điểm ngắm đó đến mục tiêu *(làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)*. KQ: | | | | |

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét), một ngôi nhà (xem hình vẽ) có sàn nhà nằm ngang trên mặt phẳng $(\alpha): y-z-5=0$. Hai mái nhà (coi như là hai phần mặt phẳng) lần lượt nằm trên các mặt phẳng $(P): 2x-3y+z-6=0$, $(Q): 2x+y-3z+10=0$. Hỏi chiều cao ngôi nhà tính từ nóc nhà (điểm cao nhất của mái nhà) đến sàn nhà là bao nhiêu mét *(không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần trăm)*?



KQ: | | | | |

—Hết—

BẢNG ĐÁP ÁN BÀI TẬP CUỐI BÀI

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1 B	2 A	3 B	4 B	5 B	6 B	7 C	9 C	10 A	11 B
12 C	13 A	14 B	15 C	16 D	17 B	18 D	19 B	20 B	21 C
22 B	23 C	24 C	25 C	26 A	27 A	28 D	29 C	30 B	31 A

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a Đ b Đ c Đ d S	Câu 2.	a Đ b Đ c S d S
Câu 3.	a Đ b S c Đ d S	Câu 4.	a S b Đ c S d S
Câu 5.	a Đ b Đ c S d S	Câu 6.	a Đ b S c Đ d S
Câu 7.	a Đ b Đ c Đ d S	Câu 8.	a Đ b S c Đ d Đ
Câu 9.	a S b S c S d Đ	Câu 10.	a Đ b Đ c S d S

BẢNG ĐÁP ÁN ĐỀ KIỂM TRA CUỐI BÀI

ĐỀ SỐ 1

ĐÁP ÁN PHẦN I

1. B	2. A	3. D	4. B	5. B	6. D	7. C	8. A	9. C
10. D	11. B	12. A						

ĐÁP ÁN PHẦN II

Câu 1.	a Đ b S c S d S	Câu 2.	a Đ b S c S d Đ
Câu 3.	a S b Đ c Đ d S	Câu 4.	a Đ b S c Đ d S

ĐÁP ÁN PHẦN III

Câu 1.	Câu 2.	Câu 3.	Câu 4.	Câu 5.	Câu 6.
-9	24	$1,5$	-5	2	$17,2$

ĐỀ SỐ 2

ĐÁP ÁN PHẦN I

1. A	2. C	3. C	4. A	5. C	6. A	7. C	8. A	9. B
10. D	11. B	12. D						

ĐÁP ÁN PHẦN II

Câu 1. a) Đ b) Đ c) Đ d) S	Câu 2. a) Đ b) S c) Đ d) S
Câu 3. a) Đ b) S c) Đ d) Đ	Câu 4. a) S b) S c) Đ d) Đ

ĐÁP ÁN PHẦN III

Câu 1.	Câu 2.	Câu 3.	Câu 4.	Câu 5.	Câu 6.
5	-9	-1	$0,8$	$10,8$	$6,36$

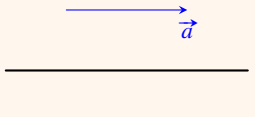
§2 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Phương trình đường thẳng trong không gian

Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d được gọi là ***vectơ chỉ phương*** của d.



Lưu ý. Nếu $\vec{a}$ là vectơ chỉ phương của d thì $k\vec{a}$ $(k \neq 0)$ cũng là vectơ chỉ phương của d.

Phương trình tham số của đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và nhận $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ làm vectơ chỉ phương có dạng:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \quad \text{với } t \in \mathbb{R} \text{ (t được gọi là tham số)}$$

Lưu ý.

a) Trong phương trình tham số của đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$, mỗi giá trị của tham số t xác định duy nhất một điểm M trên d và ngược lại.

b) Từ nay để cho gọn, trong phương trình tham số của đường thẳng, ta không viết $t \in \mathbb{R}$.

Phương trình chính tắc của đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$. Nếu a_1, a_2, a_3 đều khác 0 thì hệ phương trình

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

được gọi là ***phương trình chính tắc*** của đường thẳng d.

2) Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng. Điều kiện để hai đường thẳng vuông góc

Điều kiện để hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau

Gọi $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{a'}=(a'_1;a'_2;a'_3)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của hai đường thẳng d và d'. Gọi $M(x_0;y_0;z_0)$ là một điểm trên d.

$$d\parallel d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}=k\vec{a'},\ k\in\mathbb{R} \\ M\notin d' \end{cases}$$

$$d\equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}=k\vec{a'},\ k\in\mathbb{R} \\ M\in d' \end{cases}$$

Lưu ý. Cho đường thẳng d đi qua điểm M và có vectơ chỉ phương $\vec{a}$, đường thẳng d' đi qua điểm M' và có vectơ chỉ phương $\vec{a'}$.

a) Nếu ba vectơ $\vec{a},\vec{a'},\overrightarrow{MM'}$ cùng phương thì $d\equiv d'$.

b) Nếu hai vectơ $\vec{a},\vec{a'}$ cùng phương và hai vectơ $\vec{a},\overrightarrow{MM'}$ không cùng phương thì $d\parallel d'$.

Điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau hoặc chéo nhau

Cho hai đường thẳng d và d' có phương trình tham số lần lượt là:

$$d:\begin{cases} x=x_0+a_1t \\ y=y_0+a_2t \\ z=z_0+a_3t \end{cases} \quad \text{và} \quad d':\begin{cases} x=x'_0+a'_1t' \\ y=y'_0+a'_2t' \\ z=z'_0+a'_3t' \end{cases}$$

Gọi $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{a}'=(a'_1;a'_2;a'_3)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d và d'.

Xét hệ phương trình ẩn t và t': $\begin{cases} x_0+a_1t=x'_0+a'_1t' \\ y_0+a_2t=y'_0+a'_2t' \\ z_0+a_3t=z'_0+a'_3t' \end{cases}$

- d và d' cắt nhau khi và chỉ khi hệ trên có đúng một nghiệm.
- d và d' chéo nhau khi và chỉ khi $\vec{a},\vec{a}'$ không cùng phương và hệ trên vô nghiệm.

Lưu ý.

1. Khi xét vị trí tương đối của hai đường thẳng, người ta thường xét tính *cùng phương* của hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng đó:
   - Nếu hai vectơ chỉ phương cùng phương thì hai đường thẳng đó **song song hoặc trùng nhau**.
   - Nếu hai vectơ chỉ phương không cùng phương thì hai đường thẳng đó **cắt nhau hoặc chéo nhau**.
2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm M, có vectơ chỉ phương $\vec{a}$, và đường thẳng d' đi qua điểm M', có vectơ chỉ phương $\vec{a'}$. Trong trường hợp $\vec{a}, \vec{a'}$ không cùng phương, nghĩa là $\left[\vec{a}, \vec{a'}\right] \neq \vec{0}$:
   - Nếu $\left[\vec{a}, \vec{a'}\right] \cdot \overrightarrow{MM'} = 0$ thì d và d' **cắt nhau**.
   - Nếu $\left[\vec{a}, \vec{a'}\right] \cdot \overrightarrow{MM'} \neq 0$ thì d và d' **chéo nhau**.

Điều kiện để hai đường thẳng vuông góc

Cho hai đường thẳng d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{a'} = (a'_1; a'_2; a'_3)$. Ta có

$$d \perp d' \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{a'} = 0 \Leftrightarrow a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + a_3 a'_3 = 0.$$

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định vectơ chỉ phương của đường thẳng và điểm thuộc đường thẳng

Cho đường thẳng d.

① Nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với d thì $\vec{u}$ là vec tơ chỉ phương của d.

② Nếu d qua hai điểm A và B thì d có một vec tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

③ Nếu d vuông góc với giá của hai vec tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương thì d có một vec tơ chỉ phương là $\vec{u} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

④ Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ thì

- Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ (hệ số của t).
- Muốn xác định tọa độ một điểm thuộc d, ta chỉ cần cho trước giá trị cụ thể của tham số t, thay vào hệ phương trình tính x, y và z.

Ví dụ 1

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, đường thẳng d đi qua A và C. Tìm bốn vectơ có điểm đầu và điểm cuối trong các đỉnh của hình hộp đã cho và là vectơ chỉ phương của d.

Ví dụ 2

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 3-3t \\ z = 5+4t \end{cases}$.

a) Hãy tìm toạ độ một vectơ chỉ phương của d.

b) Hãy tìm toạ độ của các điểm thuộc d ứng với các giá trị $t = 0, t = -1, t = 2$.

Ví dụ 3

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình chính tắc $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z}{6}$.

a) Tìm toạ độ một vectơ chỉ phương của d.

b) Trong hai điểm $A(1;-5;-6)$ và $B(3;-2;1)$, điểm nào thuộc d?

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+3t \\ z = 2+t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$. Tìm một vectơ chỉ phương và hai điểm thuộc đường thẳng d.

Bài 2

Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $O.ABC$ có $A(2;0;0), B(0;4;0)$ và $C(0;0;7)$.

a) Tìm tọa độ một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB, AC.

b) Vectơ $\vec{v} = (-1;2;0)$ có là vectơ chỉ phương của đường thẳng AB không?

Bài 3

Cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{2}$. Điểm nào trong các điểm dưới đây nằm trên đường thẳng d?

Ⓐ $P(5;2;5)$. Ⓑ $Q(1;0;0)$. Ⓒ $M(3;2;2)$. Ⓓ $N(1;-1;2)$.

Dạng 2 Viết phương trình tham số, chính tắc của đường thẳng

- **Phương pháp chung:** Ta cần xác định véc tơ chỉ phương $\vec{u}$ và một điểm M thuộc đường thẳng.
- **Một số kiểu xác định véc tơ $\vec{u}$ thường gặp:**
  ① d qua hai điểm A, B thì $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
  ② d song song với Δ thì $\vec{u} = \vec{u_\Delta}$.
  ③ d vuông góc với (P) thì $\vec{u} = \vec{n}_P$.
  ④ d vuông góc với giá của hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ (không cùng phương) thì $\vec{u} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

Ví dụ 1

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(2;-2;1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1;-1;2)$.

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng d.

b) Trong hai điểm $A(3;-3;3)$ và $B(1;-1;1)$, điểm nào thuộc d?

Ví dụ 2

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình chính tắc của đường thẳng d, biết:

a) Đường thẳng d đi qua điểm $M(4;2;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(-1;-4;3)$.

b) Đường thẳng d có phương trình tham số là $\begin{cases} x=2-t \\ y=-1+2t \\ z=3-3t \end{cases}$.

Ví dụ 3

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua $A(6;-2;3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(2;2;-1)$.

a) Viết phương trình tham số của d.

b) Tìm điểm M thuộc d biết $OM=7$.

Ví dụ 4

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;2;-1)$ và $B(2;4;0)$.

Ví dụ 5

Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình tham số và phương trình chính tắc (nếu có) của đường thẳng d trong các trường hợp sau:

a) d đi qua điểm M và song song với đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$

b) d qua điểm $M(3;2;-1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon x+z-2=0$.

c) d đi qua điểm $M(1;2;1)$, đồng thời vuông góc với cả hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$ và $\Delta_2\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau

a) Δ đi qua điểm $A(-1;3;2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-2;3;4)$;

b) Δ đi qua hai điểm $M(2;-1;3)$ và $N(3;0;4)$.

Bài 2 ☆

Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác OAB với $A(2;-3;4), B(-4;5;0)$. Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc (nếu có) của đường thẳng AB và đường thẳng chứa đường trung tuyến kẻ từ O của tam giác OAB.

Dạng 3 Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho d qua điểm M và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}$; d' qua điểm N và có véc tơ chỉ phương $\vec{v}$.

① Nếu $\vec{u}$ cùng phương $\vec{v}$ ($\vec{u}=k\vec{v}$) và $M\notin d'$ thì $d\parallel d'$.

② Nếu $\vec{u}$ cùng phương $\vec{v}$ ($\vec{u}=k\vec{v}$) và $M\in d'$ thì d trùng với d'.

③ Nếu $[\vec{u},\vec{v}]\cdot\overrightarrow{MN}\neq 0$ thì d và d' chéo nhau.

④ Nếu $[\vec{u},\vec{v}]\cdot\overrightarrow{MN}=0$ thì d và d' cắt nhau.

⑤ Nếu $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ thì d và d' vuông góc nhau.

Ví dụ 1

Trong không gian $Oxyz$, xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d và d' trong mỗi trường hợp sau. Nếu chúng cắt nhau, hãy xác định tọa độ giao điểm.

a) $d:\begin{cases}x=2+3t\\y=3+2t\\z=4+2t\end{cases}$ và $d':\begin{cases}x=8+9t'\\y=7+6t'\\z=8+6t';\end{cases}$

b) $d:\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-1}{2}$ và $d':\dfrac{x-5}{8}=\dfrac{y-5}{6}=\dfrac{z-3}{4}$;

c) $d:\begin{cases}x=2\\y=3+2t\\z=1-t\end{cases}$ và $d':\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-5}{5}$;

d) $d:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-2}{3}$ và $d':\begin{cases}x=5\\y=7+2t\\z=5-t.\end{cases}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Trong không gian $Oxyz$, xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d và d' trong mỗi trường hợp sau. Nếu chúng cắt nhau, hãy xác định tọa độ giao điểm.

a) $d:\begin{cases}x=7+4t\\y=3-2t\\z=2-2t\end{cases}$ và $d':\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z-4}{-1}$;

b) $d:\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{4}$ và $d':\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-5}{4}$.

c) $d:\begin{cases}x=2t\\y=1-t\\z=2-3t\end{cases}$ và $d':\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y}{7}=\dfrac{z+1}{11}$;

d) $d:\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{2}$ và $d':\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{9}$;

e) $d:\begin{cases}x=5-t\\y=-3+2t\\z=4t\end{cases}$ và $d':\dfrac{x-9}{2}=\dfrac{y-13}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Bài 2 ☆

Cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-m}=\dfrac{z-2}{-3}$ và $d_2:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để d_1 vuông góc d_2.

Ⓐ $m=5$. Ⓑ $m=1$. Ⓒ $m=-5$. Ⓓ $m=-1$.

Dạng 4 Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Xét đường thẳng $d:\begin{cases}x=x_0+u_1t\\y=y_0+u_2t\\z=z_0+u_3t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):Ax+By+Cz+D=0.$

Phương pháp: Xét $d\cap(P)\Rightarrow A(x_0+u_1t)+B(y_0+u_2t)+C(z_0+u_3t)+D=0\quad(*)$

- Nếu (*) có đúng 1 nghiệm t thì d cắt (P);
- Nếu (*) vô nghiệm thì d song song (P);
- Nếu (*) nghiệm đúng với mọi t thì d nằm trong (P).

Đặc biệt: Với $\vec{u}$ là véc tơ chỉ phương của d và $\vec{n}$ là véc tơ pháp tuyến của (P) thì

$$d\perp(P)\Leftrightarrow\vec{u}\text{ cùng phương với }\vec{n}\text{ hay }\vec{u}=k\cdot\vec{n}$$

Ví dụ 1

Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng được chỉ ra ở các câu sau:

a) $(\alpha):y+2z=0$ và $d:\begin{cases}x=2-t\\y=4+2t\\z=1\end{cases}$.

b) $(P):3x-3y+2z-5=0$ và $d:\begin{cases}x=-1+2t\\y=3+4t\\z=3t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$.

c) $(P):3x-3y+2z+1=0$ và $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$. Tìm tọa độ giao điểm M của đường thẳng d với mặt phẳng (Oxy).

Ⓐ $M(-1;2;0)$. Ⓑ $M(1;0;0)$. Ⓒ $M(2;-1;0)$. Ⓓ $M(3;-2;0)$.

Bài 2 ☆

Tìm điều kiện của tham số m để

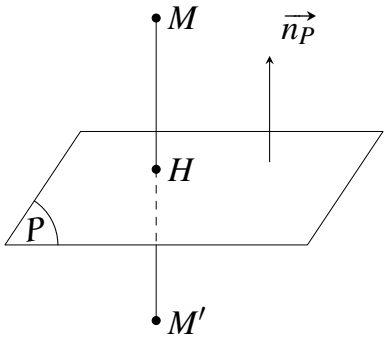
a) $\Delta: \dfrac{x-10}{5}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+2}{1}$ vuông góc với $(P): 10x+2y+mz+11=0$.

b) $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$ song song với $(\alpha): -x+m^2y+mz+1=0$.

Dạng 5 Hình chiếu, đối xứng

Bài toán 1:Tìm hình chiếu vuông góc của điểm M trên (P):

- Viết phương trình đường thẳng MH qua M và nhận $\vec{n_P}$ làm véc tơ chỉ phương;
- Giải hệ giữa đường MH với mặt phẳng (P), tìm t. Từ đó, suy ra tọa độ H.

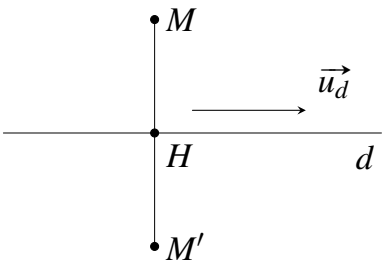


Lưu ý: Gọi M' đối xứng với M qua mặt phẳng (P) thì

$$\begin{cases} x'_M = 2x_M - x_H \\ y'_M = 2y_M - y_H \\ z'_M = 2z_M - z_H \end{cases}.$$

Bài toán 2: Tìm hình chiếu vuông góc của điểm M trên d:

- Tham số điểm $H \in d$ theo ẩn t;
- Giải $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u_d} = 0$, tìm t. Từ đó, suy ra tọa độ H.



Lưu ý: Gọi M' đối xứng với M qua mặt phẳng d thì

$$\begin{cases} x'_M = 2x_M - x_H \\ y'_M = 2y_M - y_H \\ z'_M = 2z_M - z_H \end{cases}.$$

Ví dụ 1

Cho điểm $M(2;-3;1)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{2}$.

a) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M lên d.

b) Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với điểm M qua d.

Ví dụ 2

Cho điểm $M(2;7;-9)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y-3z-1=0$.

a) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (P).

b) Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với điểm M qua (P).

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $A(2;-1;0)$ lên mặt phẳng $(P)\colon 3x-2y+z+6=0$ là

Ⓐ $(5;-3;1)$. Ⓑ $(-1;1;-1)$. Ⓒ $(1;1;1)$. Ⓓ $(3;-2;1)$.

Bài 2 ☆

Cho mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+9=0$ và điểm $A(-7;-6;1)$. Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (P).

Ⓐ $A'(1;2;-3)$. Ⓑ $A'(1;2;1)$. Ⓒ $A'(5;4;9)$. Ⓓ $A'(9;0;9)$.

Dạng 6 Toán thực tế áp dụng phương trình đường thẳng

Ví dụ 1

Trên phần mềm thiết kế chiếc cầu treo, cho đường thẳng d trên trụ cầu và đường thẳng d' trên sàn cầu có phương trình lần lượt là:

$$d:\begin{cases}x=0\\y=0\\z=50+t\end{cases} \quad \text{và} \quad d':\begin{cases}x=20\\y=t'\\z=50\end{cases}.$$

Xét vị trí tương đối d và d'.



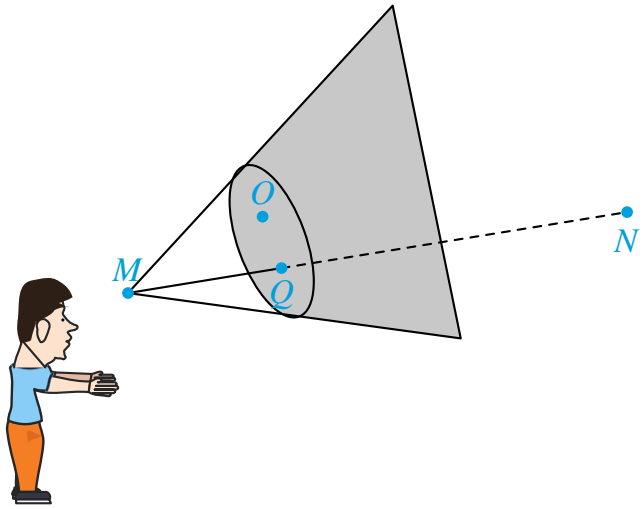
Ví dụ 2

Trong không gian $Oxyz$, mắt một người quan sát ở điểm $M(2;3;-4)$ và vật cần quan sát đặt tại điểm $N(-1;0;8)$. Một tấm bìa chắn đường truyền của ánh sáng có dạng hình tròn với tâm $O(0;0;0)$, bán kính bằng 3 và đặt trong mặt phẳng Oxy.

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng MN.

b) Tính tọa độ giao điểm D của đường thẳng MN với mặt phẳng Oxy.

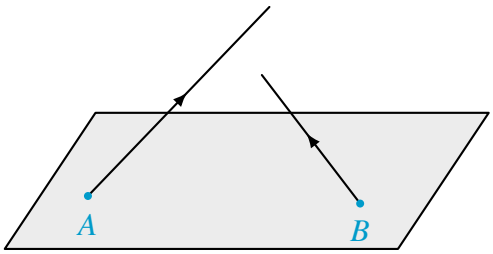
c) Hỏi điểm D có nằm giữa hai điểm M và N hay không?



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

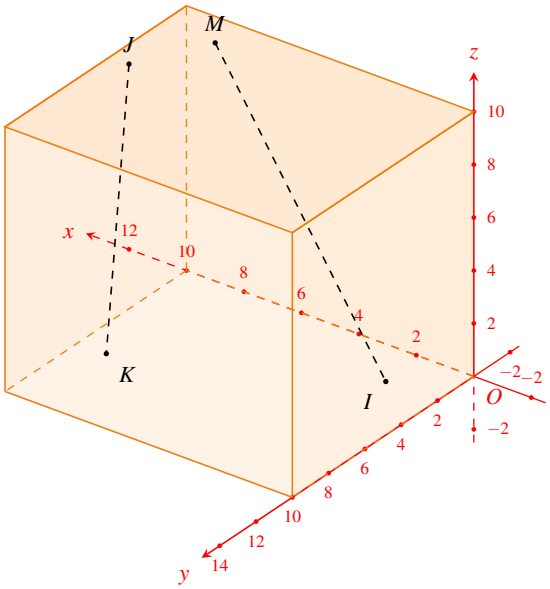
Bài 1 ☆

Trong không gian $Oxyz$, có hai vật thể lần lượt xuất phát từ $A(1;2;0)$ và $B(3;5;0)$ với vận tốc không đổi tương ứng là $\vec{v}_1=(2;1;3)$, $\vec{v}_2=(1;2;1)$. Hỏi trong quá trình chuyển động, hai vật thể trên có va chạm vào nhau không?



Bài 2

Trong không gian $Oxyz$ cho trước (1 đơn vị=1cm), có một chú kiến vàng và một chú kiến đen bò trên hai sợi dây thẳng khác nhau. Giả sử tại thời điểm t (tính bằng phút), kiến vàng ở tại vị trí $(6+t;8-t;3+t)$ trên đường thẳng d_1. Cùng thời điểm đó, kiến đen ở tại vị trí $(1+t;2+t;2t)$ trên đường thẳng d_2.



a) Chứng minh rằng hai chú kiến bò trên hai đường thẳng chéo nhau.

b) Tính khoảng cách giữa hai chú kiến tại các thời điểm $t=0$ và $t=10$.

c) Hỏi tại thời điểm nào thì khoảng cách giữa hai chú kiến là nhỏ nhất? Tính khoảng cách đó.

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 8-t \\ z = 6t \end{cases}$ trong đó $t \in \mathbb{R}$. Một vectơ chỉ phương của d là

Ⓐ $\vec{u}_2 = (3;-1;6)$. Ⓑ $\vec{u}_1 = (1;8;6)$. Ⓒ $\vec{u}_3 = (1;8;0)$. Ⓓ $\vec{u}_4 = (3;-1;0)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+2}{3}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d?

Ⓐ $\vec{u}_3 = (3;-1;-2)$. Ⓑ $\vec{u}_4 = (4;2;3)$. Ⓒ $\vec{u}_2 = (4;-2;3)$. Ⓓ $\vec{u}_1 = (3;1;2)$.

Câu 3. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của đường thẳng?

Ⓐ $\dfrac{x-9}{3} = \dfrac{y-1}{11} = \dfrac{z+7}{14}$. Ⓑ $\dfrac{x-1}{4y} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z+3}{6}$.

Ⓒ $\dfrac{x+7}{10} = \dfrac{y+8}{11z} = \dfrac{z+9}{12}$. Ⓓ $\dfrac{x-13}{16} = \dfrac{y-14}{17} = \dfrac{z-15}{18z}$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây có dạng là phương trình tham số của đường thẳng?

Ⓐ $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -3+4t \\ z = 5-7t. \end{cases}$ Ⓑ $\begin{cases} x = 3+t^2 \\ y = 9+2t \\ z = -6+11t. \end{cases}$ Ⓒ $\begin{cases} x = 9+17t \\ y = 8+2t \\ z = -12+t^2. \end{cases}$ Ⓓ $\begin{cases} x = 15+t \\ y = 25+\sqrt{t} \\ z = 35-t. \end{cases}$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-4}{-5} = \dfrac{z+5}{3}$. Điểm nào sau đây thuộc đường thẳng d?

Ⓐ $M(3;4;-5)$. Ⓑ $N(2;-5;3)$. Ⓒ $P(-3;-4;5)$. Ⓓ $Q(2;5;-3)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua $M(1;2;-3)$ và nhận vectơ $\vec{u} = (-1;2;1)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình chính tắc là

Ⓐ $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+3}{1}$. Ⓑ $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{1}$.

Ⓒ $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{-1}$. Ⓓ $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+3}{1}$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(2;3;-1)$ và $B(2;3;-2)$ là

Ⓐ $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3+t \\ z = -1 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$. Ⓑ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = -1-t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Ⓒ $\begin{cases} x=2 \\ y=3+t \\ z=-1+t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

Ⓓ $\begin{cases} x=2+t \\ y=3 \\ z=-1+t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(2;-3;1)$ là

Ⓐ $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3 \\ z=1-t \end{cases}$.

Ⓑ $\begin{cases} x=-2+4t \\ y=-6t \\ z=1+2t \end{cases}$.

Ⓒ $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+1t \end{cases}$.

Ⓓ $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-3t \\ z=1+t \end{cases}$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào sau đây là một vectơ chỉ phương của trục Oy ?

Ⓐ $\vec{i}=(1;0;0)$. Ⓑ $\vec{j}=(0;1;0)$. Ⓒ $\vec{k}=(0;0;1)$. Ⓓ $\vec{u}=(1;1;1)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $\begin{cases} x=1+2t \\ y=3-t \\ z=1-t \end{cases}$ **không** đi qua điểm nào?

Ⓐ $Q(3;2;0)$. Ⓑ $N(5;1;-1)$. Ⓒ $A(1;3;1)$. Ⓓ $P(0;1;2)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng đi qua điểm $P(1;1;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;3)$ là

Ⓐ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{3}$.

Ⓑ $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+2}{3}$.

Ⓒ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Ⓓ $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+1}{2}$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=2-t \\ y=-1+2t \\ z=3-3t \end{cases}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

Ⓐ $Q(1;-2;3)$. Ⓑ $P(-1;2;-3)$. Ⓒ $M(2;-1;3)$. Ⓓ $N(-2;1;-3)$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình $x+2z+3=0$. Một vectơ chỉ phương của d là

Ⓐ $\vec{a}=(1;0;2)$. Ⓑ $\vec{a}=(2;-1;0)$. Ⓒ $\vec{a}=(1;2;3)$. Ⓓ $\vec{a}=(2;0;-1)$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$. Phương trình tham số của đường thẳng d là

Ⓐ $\begin{cases} x=1+3t \\ y=-3+2t \\ z=2-t \end{cases}$.

Ⓑ $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=3+2t \\ z=-2-t \end{cases}$.

Ⓒ $\begin{cases} x=3-t \\ y=2+3t \\ z=-1-2t \end{cases}$.

Ⓓ $\begin{cases} x=-3+t \\ y=-2-3t \\ z=1+2t \end{cases}$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-7}{1}=\dfrac{z-3}{4}$ và $d_2:\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+4}{1}$ cắt nhau tại điểm M có tọa độ bằng

Ⓐ $M(0;3;-4)$. Ⓑ $M(1;7;3)$. Ⓒ $M(-3;5;-5)$. Ⓓ $M(3;-5;5)$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua $A(3;5;7)$ và song song với đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$ là

Ⓐ $\begin{cases}x=1+3t\\y=2+5t\\z=3+7t\end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases}x=2+3t\\y=3+5t\\z=4+7t\end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases}x=-3+2t\\y=-5+3t\\z=-7+4t\end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases}x=3+2t\\y=5+3t\\z=7+4t\end{cases}$.

Câu 17. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình là $2x+y-5z+6=0$. Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(1;-2;7)$ và vuông góc với (P) là

Ⓐ $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+7}{-5}$. Ⓑ $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-7}{-5}$.

Ⓒ $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-7}{-5}$. Ⓓ $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+5}{7}$.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$ và $d':\begin{cases}x=-1+2t\\y=1+t\\z=3\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

Ⓐ d và d' chéo nhau. Ⓑ d song song với d'.

Ⓒ d trùng với d'. Ⓓ d cắt d' tại điểm $A(0;1;-2)$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng $B(-1;1;3)$, $C(-1;-1;2)$, $D(1;0;-2)$, $D'(2;-2;-3)$. Tìm một vectơ chỉ phương của đường thẳng AA'.

Ⓐ $\vec{u}=(1;-2;1)$. Ⓑ $\vec{u}=(1;2;1)$. Ⓒ $\vec{u}=(-1;-2;1)$. Ⓓ $\vec{u}=(1;-2;-1)$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=2-2t\\z=t\end{cases}$ và $d':\begin{cases}x=-2t'\\y=-5+3t'\\z=4+t'\end{cases}$.

Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng d và d'?

Ⓐ Cắt nhau. Ⓑ Song song. Ⓒ Trùng nhau. Ⓓ Chéo nhau.

Câu 21. Cho $d_1:\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-4}{3}$ và $d_2:\begin{cases}x=-1+t\\y=-t\\z=2+mt\end{cases}$. Tìm m để d_1 và d_2 vuông góc với nhau

Ⓐ -1. Ⓑ 1. Ⓒ -2. Ⓓ 2.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho d là đường thẳng đi qua điểm $A(1;2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha):4x+3y-7z+1=0$. Phương trình chính tắc của d là

Ⓐ $\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-7}$. Ⓑ $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{-7}$.

Ⓒ $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+7}{3}$. Ⓓ $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+3}{-7}$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, một viên đạn được bắn ra từ điểm $A(2;1;-1)$ và trong 3 giây đầu đạn đi với vận tốc không đổi, vectơ vận tốc (trên giây) là $\vec{v}=(1;3;-2)$. Hỏi viên đạn bắn trúng mục tiêu nằm ở điểm nào sau đây?

Ⓐ $M(4;0;-2)$. Ⓑ $N(-1;1;-3)$. Ⓒ $P(4;7;-5)$. Ⓓ $Q(3;9;-6)$.

Câu 24. Cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(P):2x+y-2z+9=0$. Tìm toạ độ giao điểm của d và (P).

Ⓐ $(2;1;1)$. Ⓑ $(0;-1;4)$. Ⓒ $(1;-3;3)$. Ⓓ $(2;-5;1)$.

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$.

a) Điểm $M(1;3;2)$ nằm trên đường thẳng d.

b) Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(1;3;2)$.

c) Đường thẳng d song song với đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=3-t\\z=2+2t\end{cases}$.

d) Đường thẳng d và đường thẳng $d':\begin{cases}x=-3t\\y=t\\y=-1-3t\end{cases}$ là hai đường chéo nhau.

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt có phương trình là $\Delta_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+3}{2}$ và $\Delta_2:\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-4}{-1}$.

a) Đường thẳng Δ_1 có một vectơ chỉ phương là $\vec{u_1}=(1;-1;2)$ và đi qua điểm $A(-1;4;-5)$.

b) Đường thẳng Δ_2 không cắt trục tọa độ Oz.

c) Đường thẳng Δ_1 song song với đường thẳng Δ_2.

d) Đường thẳng Δ_1 và đường thẳng Δ_2 là hai đường thẳng chéo nhau.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\begin{cases}x=1+2t\\y=3+t\\z=4-5t\end{cases}$.

a) Một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}=(1;3;4)$.

b) Điểm $A(5;5;-6)$ thuộc đường thẳng Δ.

c) Đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+3t\\y=4t\\z=3+2t\end{cases}$ vuông góc với đường thẳng Δ.

d) Đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm $M(-5;0;19)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;3;4)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=1-2u\\y=2+u\\z=1-u\end{cases}$, $u\in\mathbb{R}$.

a) Điểm $M(1;2;1)$ thuộc đường thẳng d.

b) Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1;1)$.

c) Đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với đường thẳng d có phương trình tham số là $\begin{cases} x=2+2t \\ y=3+t \\ z=4+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

d) Đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với đường thẳng d có phương trình chính tắc là $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+2}{2}$ và điểm $A(3;2;0)$.

a) Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(3;2;0)$.

b) Đường thẳng (d) có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(-1;-3;-2)$.

c) $H(1;1;2)$ là hình chiếu của A lên đường thẳng d.

d) $A'(-1;0;4)$ là điểm đối xứng với A qua đường thẳng d.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+3=0$ và điểm $A(2;1;2)$.

a) Khoảng cách từ điểm A đến (P) bằng $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

b) Đường thẳng d đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình tham số là $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-2t \\ z=2 \end{cases}$.

c) Mặt phẳng (Q) qua 2 điểm $B(1;1;0)$, $C(-2;1;1)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình $(Q)\colon 2x+y=0$.

d) Đường thẳng d' là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) có phương trình tham số là $\begin{cases} x=-3+4t \\ y=2t \\ z=\dfrac{3}{2}-t \end{cases}$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;1;2)$, $B(1;5;-2)$ và mặt phẳng (P) có phương trình tổng quát là $2x-4y+4z+3=0$.

a) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng $\dfrac{1}{6}$.

b) Gọi đường thẳng d đi qua A và vuông góc với (P). Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x=-3+t \\ y=1-2t \\ z=2+2t \end{cases}, (t\in\mathbb{R})$.

c) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua hai điểm A, B đồng thời vuông góc với mặt phẳng (P). Mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là $5x-4y+z+17=0$.

d) Cho điểm $M\left(-\dfrac{3}{2};0;0\right)$ thuộc mặt phẳng (P). Gọi đường thẳng Δ là hình chiếu của đường thẳng BM lên (P). Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_{\Delta}=(68;44;10)$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-5)$, $B(-1;0;2)$, mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$.

a) Đường thẳng d vuông góc mặt phẳng (P).

b) Đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với (P) có phương trình là $\Delta\colon \begin{cases} x=2+t \\ y=1+2t \\ z=-1-2t \end{cases}$.

c) Tọa độ giao điểm của d và (P) là điểm $C\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{-5}{3};6\right)$.

d) Gọi $M\in d$ sao cho biểu thức $T=|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất là $T_{\max}$. Khi đó, $T_{\max}=\sqrt{57}$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$, $d_2\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-2}{4}$, mặt phẳng $(P)\colon 2x-3y+z-2025=0$ và điểm $M(0;-1;2)$.

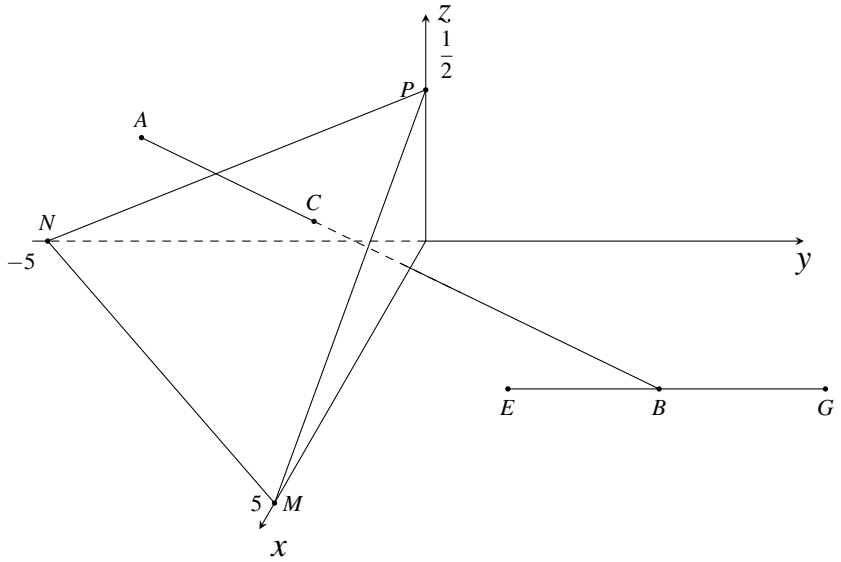
a) Hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau.

b) Đường thẳng đi qua $M(0;-1;2)$ vuông góc với d_1 đồng thời song song với mặt phẳng (P) có phương trình là $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{-1}$.

c) Mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 là có phương trình $(P)\colon -4x+2z+5=0$.

d) Phương trình đường thẳng đi qua điểm M và cắt cả d_1 và d_2 là $\dfrac{x}{9}=\dfrac{y+1}{-9}=\dfrac{z-2}{16}$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là kilômét), một máy bay đang ở vị trí $A\left(\dfrac{7}{2};-2;\dfrac{2}{5}\right)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{11}{2};0\right)$ trên đường băng EG. Biết rằng có một lớp mây được mô phỏng bởi một mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $M(5;0;0)$, $N(0;5;0)$, $P\left(0;0;\dfrac{1}{2}\right)$, điểm C là vị trí mà máy bay xuyên qua đám mây để hạ cánh và theo quy định an toàn bay, người phi công phải nhìn thấy điểm đầu $E\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{9}{2};0\right)$ của đường băng ở độ cao tối thiểu là 120 m (được mô phỏng bởi hình vẽ bên dưới). (*Nguồn: R.Larson and B.Edwards, Calculus 10e, Cengage, 2014*).



a) Đường thẳng AB có phương trình tham số là $\begin{cases} x = \dfrac{7}{2} \\ y = -2 + \dfrac{15}{2}t \\ z = \dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{5}t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

b) Tọa độ của điểm $C\left(\dfrac{7}{2}; 0; \dfrac{28}{115}\right)$.

c) Khi máy bay đạt được độ cao 120 m so với đường băng thì máy bay đang ở vị trí điểm D trên đoạn thẳng AB có tọa độ là $D\left(\dfrac{7}{2}; \dfrac{13}{4}; \dfrac{3}{25}\right)$.

d) Nếu tầm nhìn xa của người phi công sau khi ra khỏi đám mây là 900 m thì người phi công đó đạt được quy định an toàn bay.

Câu 11. Tại một sân bay, chọn hệ trục $Oxyz$ có gốc tọa độ O trùng với phòng bán vé của sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất sao cho trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía tây, trục Oz hướng thẳng đứng. Một máy bay đang ở tại điểm A cách mặt đất 120 km, cách 75 km về phía đông và cách 66 km về phía nam so với phòng vé của sân bay. Biết rằng máy bay chuyển động thẳng đều với vận tốc là 240 km/h sẽ hạ cánh tại điểm $B(2;1;0)$ trong sân bay.

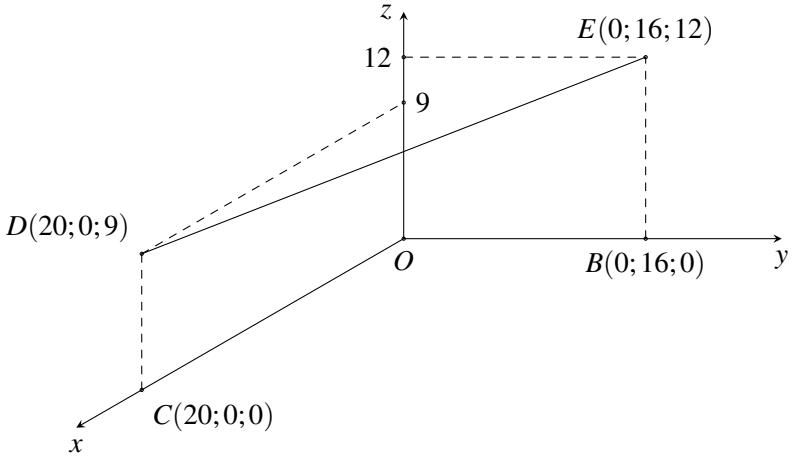
a) Tọa độ của điểm $A(66;-75;120)$.

b) Thời gian mà máy bay sẽ bay từ điểm A đến điểm B là 39 phút.

c) Giả sử có một lớp mây được mô phỏng bởi mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $M(25;0;0)$, $N(0;25;0)$, $P_0(0;0;30)$. Độ cao của máy bay khi máy bay xuyên qua đám mây là 18 km.

d) Đài quan sát không lưu đặt tại điểm $S(0;-124;0{,}1)$ có phạm vi theo dõi là 125 km. Khi tiếp đất máy bay sẽ di chuyển thêm 2 km về phía tây rồi mới dừng hẳn. Lúc này đài quan sát sẽ **không** nhìn thấy máy bay.

Câu 12. Một chiếc máy bay thương mại Vietnam Airlines đang bay trên bầu trời theo một đường thẳng từ D đến E có hình chiếu trên mặt đất là đoạn CB. Tại vị trí D thì máy bay bay cách mặt đất 9000 m, tại vị trí E thì máy bay cách mặt đất 12000 m . Một ra đa được đặt trên mặt đất tại vị trí O cách C khoảng 20000 m , cách B khoảng 16000 m và góc $BOC = 90°$; phạm vi theo dõi của ra đa là 20 km . Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là 1000 m) với O là vị trí đặt ra đa, B thuộc tia Oy, C thuộc tia Ox.



a) Tại D, máy bay cách ra đa 21 000 m (*làm tròn đến hàng nghìn theo đơn vị mét*).

b) Khi máy bay bay đến điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{DI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DE}$, máy bay cách mặt đất 9750 m.

c) Trên hành trình bay từ D đến E, máy bay sẽ đi qua điểm có tọa độ $P(16;3{,}2;9{,}6)$.

d) Khoảng cách giữa vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng mà máy bay bay trong phạm vi theo dõi của ra đa là 22 500 m (*làm tròn đến hàng trăm theo đơn vị mét).*

3 Tự luận.

Bài 1. Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau:

a) Đi qua điểm $M(5;4;1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(2;-3;1)$.

b) Đi qua hai điểm $P(1;2;3)$ và $Q(5;4;4)$.

c) Đi qua điểm $B(2;0;-3)$ và song song với đường thẳng $d:\begin{cases}x=4+t\\y=1-2t\\z=3+3t\end{cases}$.

d) Đi qua điểm $A(-2;3;1)$ và song song với đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{4}$.

e) Đi qua điểm $B(3;2;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P):2x-5y+6z-7=0$.

Bài 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $B(3;0;0)$, $D(0;5;1)$, $B'(5;0;5)$, $C'(5;5;6)$. Viết phương trình đường thẳng BD, DD', AB'.

Bài 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+3t\\y=-1-t\\z=-3+2t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):x-y-z=0$.

a) Tìm tọa độ giao điểm I của đường thẳng d và mặt phẳng (P).

b) Viết phương trình đường thẳng d' nằm trên mặt phẳng (P) sao cho d' cắt và vuông góc với d.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$\Delta_1:\begin{cases}x=1+2t\\y=3-t\\z=2+3t\end{cases}\quad\text{và}\quad\Delta_2:\frac{x-8}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{2}.$$

a) Chứng minh rằng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau.

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ_1 và Δ_2.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$\Delta_1:\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{2}\quad\text{và}\quad\Delta_2:\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{2}.$$

a) Chứng minh rằng Δ_1 và Δ_2 song song với nhau.

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ_1 và Δ_2.

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x-3y+z=0$ và $(\beta): x+y-z+4=0$. Viết phương trình tham số của đường thẳng d.

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;3)$ và hai mặt phẳng $(P): 2x+2y+z+1=0$, $(Q): 2x-y+2z-1=0$. Gọi d là đường thẳng đi qua A, song song với cả (P) và (Q). Tìm giao điểm đường thẳng d và mặt phẳng (Oxz).

Bài 8. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=2-2t \\ y=3+3t \\ z=6+4t \end{cases}$.

a) Tìm tọa độ điểm A thuộc d, biết $OA=7$.

b) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên d và tính khoảng cách từ O đến d.

Bài 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y-z+1=0$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$. Tính khoảng cách giữa Δ và (P).

Bài 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x=11-3t \\ y=-5+4t \\ z=mt \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x=-4+5s \\ y=2+3s \\ z=2s \end{cases}$ với m là tham số thực; s,t là tham số của đường thẳng. Tìm m để hai đường thẳng đó vuông góc với nhau.

Bài 11. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$ và mặt phẳng $(P): mx+10y+nz-11=0$. Biết rằng mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d, tính $m+n$.

Bài 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=3+2t \end{cases}$ và $d_2: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-m}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$ với m là tham số. Tìm giá trị của m để hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau.

Bài 13. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;2;-1)$ trên mặt phẳng $(P): x+y-z=0$ là $M(a;b;c)$. Tính $a^2+b^2+c^2$.

Bài 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;3;-1)$, $B(0;-1;2)$, $C(1;0;3)$. Viết phương trình đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC.

Bài 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1-t \\ z=2t \end{cases}$ và điểm

$A(1;-2;-5)$. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua đường thẳng d. Tính khoảng cách từ A' đến mặt phẳng $(P): x+2y+2z-12=0$.

Bài 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z+3=0$. Gọi M là điểm có hoành độ âm thuộc d sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng 2. Tìm tung độ điểm M.

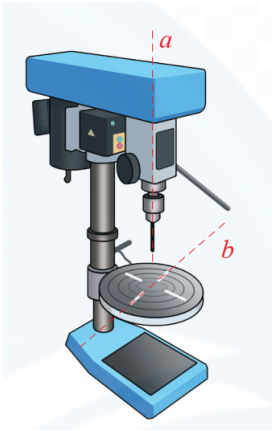
Bài 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;4)$ và hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{-1}$ và $d_2: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-5}{-1}$. Đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với d_1 và cắt d_2 tại điểm B. Tính AB^2.

Bài 18. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-4;-3;3)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A cắt trục Oz tại B và song song với (P). Tính OB.

Bài 19. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P): x+y-2z+5=0$ và điểm $A(1;-1;2)$. Gọi Δ là đường thẳng cắt d và (P) tại M và N sao cho A là trung điểm của MN. Biết rằng Δ cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm E. Tính OE^2.

Bài 20. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+7}{-2}$ và điểm $A(1;2;3)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A, vuông góc với d và cắt trục Ox.]

Bài 21. Trên phần mềm mô phỏng 3D một máy khoan trong không gian $Oxyz$, cho biết phương trình trục a của mũi khoan và một đường rãnh b trên vật cần khoan (tham khảo hình vẽ bên) lần lượt là



$$a:\begin{cases}x=1\\y=2\\z=3t\end{cases} \text{ và } b:\begin{cases}x=1+4t'\\y=2+2t'\\z=6.\end{cases}$$

a) Chứng minh a, b vuông góc và cắt nhau.

b) Tìm giao điểm của a và b.

Bài 22. Anh Bình là một nhiếp ảnh gia chuyên săn ảnh chim hoang dã. Giả sử với hệ trục $Oxyz$ cho trước, anh Bình đang ngắm và ống kính ở vị trí A có toạ độ $(200;685;436)$ thì có một con gà lôi tía xuất hiện ở vị trí B có toạ độ $(640;550;474)$.



a) Viết phương trình tham số của đường thẳng chứa đoạn thẳng nối hai vị trí ống kính ngắm của anh Bình và con gà lôi tía.

b) Nếu một quả đồi có toạ độ đỉnh C là $(420;617,5;450)$. Hỏi C có thuộc đường ngắm AB không? Anh Bình có ngắm thấy con gà lôi tía này không?

Bài 23. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=-1+t \\ y=3+2t \\ z=-1-t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=7+3s \\ y=1-s \\ z=5-s \end{cases}$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng đã cho bằng bao nhiêu?

Bài 24. Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh. Với hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị: mét), toạ độ của A và B lần lượt là $(3;2,5;15)$ và $(21;27,5;10)$.



Hình 5.23

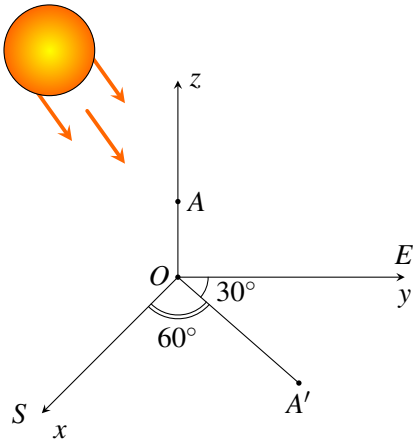
a) Viết phương trình đường thẳng chứa đường trượt zipline này.

b) Xác định toạ độ của du khách khi ở độ cao 12 mét.

Bài 25. Trong không gian $Oxyz$, có hai vật thể lần lượt xuất phát từ $A(1;2;-3)$ và $B(-2;1;-2)$ với vận tốc không đổi tương ứng là $\vec{v}_1=(1;-3;4)$, $\vec{v}_2=(4;-2;3)$. Trong quá trình chuyển động, hai vật thể trên va chạm vào nhau tại điểm $C(a;b;c)$. Tính $2a+b+2c$.

Bài 26. Người ta thiết kế một dây cáp chạy thẳng từ điểm X ở trên mặt đất tới đỉnh T của một tòa tháp. Giả sử tọa độ các điểm là $T(40;60;150)$ và $X(100;-40;0)$ trong hệ tọa độ không gian $Oxyz$, với O là gốc tọa độ tại mặt đất. Người ta muốn nối điểm $A(40;30;-20)$ nằm dưới một cái hố tới một điểm $M(a;b;c)$ nằm trên dây cáp sao cho khoảng cách MA này nhỏ nhất. Tính $a+b+c$.

Bài 27. Trên mặt đất phẳng, người ta dựng một cây cột thẳng cao 6 m vuông góc với mặt đất, có chân cột đặt tại vị trí O trên mặt đất. Tại một thời điểm, dưới ánh nắng mặt trời cách chân cột 3 m về hướng $S60°E$ (hướng tạo với hướng nam góc $60°$ và tạo với hướng đông góc $30°$) (hình bên dưới). Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tọa độ là O, tia Ox chỉ hướng nam, tia Oy chỉ hướng đông, tia Oz chứa cây cột, đơn vị đo là mét. Viết phương trình đường thẳng chứa tia nắng mặt trời đi qua đỉnh cột tại thời điểm đang xét.



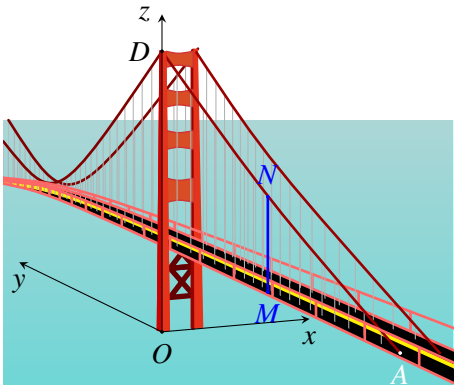
Bài 28. Trong không gian, có một chiếc máy bay không người lái tại điểm $M(3;-1;4)$. Cho biết quỹ đạo bay của máy bay này là đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $(-1;b;c)$ và biết rằng quỹ đạo phải song song với mặt đất (mặt phẳng (Oxy)) đồng thời vuông góc với hướng của một chiếc máy bay khác theo đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{3}$. Tính $b+c$.

Bài 29. Trong không gian $Oxyz$, một viên đạn được bắn ra từ điểm $A(1;2;3)$ và trong 3 giây, đầu đạn đi với vận tốc không đổi; vectơ vận tốc (trên giây) là $\vec{v}=(2;1;5)$. Khi viên đạn trúng mục tiêu tại điểm $B(-5;a;b)$ thì giá trị của biểu thức b^a bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

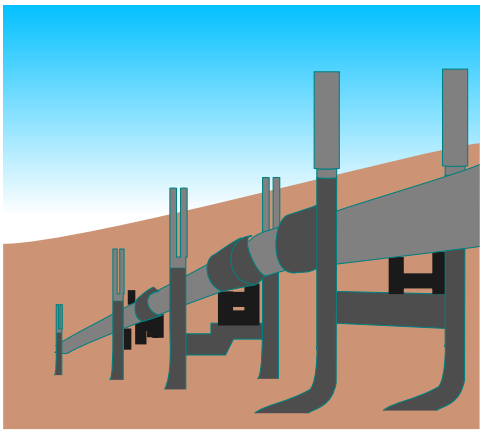
Bài 30. Hình vẽ là hình ảnh Cầu Cổng Vàng (The Golden Gate Bridge) ở Mỹ. Xét hệ trục toạ độ $Oxyz$ với O là bệ của chân cột trụ tại mặt nước, trục Oz trùng với cột trụ, mặt phẳng Oxy là mặt nước và xem như trục Oy cùng phương với cầu như Hình vẽ. Dây cáp AD (xem như là một đoạn thẳng) đi qua đỉnh D thuộc trục Oz và điểm A thuộc mặt phẳng Oyz, trong đó điểm D là đỉnh cột trụ cách mặt nước 227 m, điểm A cách mặt nước 75 m và cách trục Oz 343 m. Giả sử ta dùng một đoạn dây nối điểm N trên dây cáp AD và điểm M trên thành cầu, biết M cách mặt nước 75 m và MN song song với cột trụ.

a) Tính độ dài MN, biết điểm M cách trục Oz một khoảng bằng 230 m.

b) Người ta có thể dùng đoạn dây dài 100 m để nối dây cáp AD với thành cầu tại vị trí điểm M cách trục Oz một khoảng bằng 148 m không? Vì sao?



Bài 31. Đường ống dẫn trên không là hệ thống đường ống được treo trên các giá đỡ hoặc cột cao, dùng để vận chuyển dầu thô hoặc các sản phẩm dầu mỏ từ nơi này đến nơi khác mà không cần chôn dưới lòng đất. Hệ thống này thường được sử dụng trong các khu vực có địa hình khó khăn, vùng băng giá, rừng rậm,...những nơi mà việc đào đường ống ngầm không khả thi.



Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ thích hợp, đơn vị trên mỗi trục là mét, người ta thiết lập một đường ống dẫn dầu trên không dọc theo đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 16 \end{cases}$ (t là tham số). Vì địa hình phức tạp, người ta đành chọn điểm $A(12;10;15)$ cạnh vách núi để làm điểm trung chuyển từ mặt đất (mặt phẳng (Oxy)) đến đường ống này. Dựa vào kinh nghiệm của mình họ phải chọn vị trí B thuộc đường ống và vị trí C thuộc mặt đất sao cho tổng độ dài các đoạn đường AB, BC, AC là bé nhất, tìm giá trị bé nhất đó theo đơn vị mét, làm tròn đến hàng phần chục.

Bài 32. Cho ba điểm $A(0;-2;-1)$, $B(-2;-4;3)$, $C(1;3;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-2z-3=0$. Gọi $M(a;b;c) \in (P)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $a-b+2c$.

Bài 33. Cho đường thẳng $\Delta : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$ và hai điểm $A(1;0;1)$, $B(-1;1;2)$. Biết điểm $M(a;b;c)$ thuộc Δ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, tổng $a+2b+4c$ bằng bao nhiêu?

III. ĐỀ KIỂM TRA CUỐI BÀI

1) Đề số 1

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+8}{4}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z}{1}$. Khi đó, một vectơ chỉ phương của đường thẳng d có tọa độ là

Ⓐ $(4;-2;-1)$. Ⓑ $(4;-2;1)$. Ⓒ $(4;2;-1)$. Ⓓ $(-8;5;0)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{3}$?

Ⓐ $N(-1;4;3)$. Ⓑ $P(1;2;-1)$. Ⓒ $(1;2;1)$. Ⓓ $Q(1;-2;2)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases}x=2t\\y=1-t\\z=-2+3t\end{cases}$.

Một vectơ chi phương của đường thẳng d là

Ⓐ $\vec{u}=(-4;2;-6)$. Ⓑ $\vec{u}=(6;-3;6)$. Ⓒ $\vec{u}=(0;1;-2)$. Ⓓ $\vec{u}=(2;1;3)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua $M(1;2;-3)$ và nhận vectơ $\vec{u}=(-1;2;1)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình chính tắc là

Ⓐ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$. Ⓑ $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$.

Ⓒ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$. Ⓓ $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{1}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(2;-3;1)$ là

Ⓐ $\begin{cases}x=2+2t\\y=-3\\z=1-t\end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases}x=-2+4t\\y=-6t\\z=1+2t\end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases}x=2+2t\\y=-3t\\z=-1+1t\end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases}x=-2+2t\\y=-3t\\z=1+t\end{cases}$.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{-1}$ và $d'\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-5}{-2}$. Chọn khẳng định **đúng**.

Ⓐ d cắt d'. Ⓑ d và d' chéo nhau.

Ⓒ d song song với d'. Ⓓ d trùng với d'.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, $M(a;b;c)$ là giao điểm của mặt phẳng $(P)\colon x+2y-z+2=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}$. Khi đó

Ⓐ $a+b+c=-1$. Ⓑ $a+b+c=2$. Ⓒ $a+b+c=-2$. Ⓓ $a+b+c=7$.

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=-1+t\\y=1+3t\\z=-3-t\end{cases}$.

Điểm nào dưới đây thuộc d?

Ⓐ $M(1;-1;3)$. Ⓑ $N(0;-2;-2)$. Ⓒ $Q(0;4;-4)$. Ⓓ $P(0;-4;4)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon -5x+2y+z+2025=0$. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $A(2;1;-5)$ và vuông góc với mặt phẳng (α) là

Ⓐ $\begin{cases} x=2-5t \\ y=1+2t \\ z=-5+t \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x=5t \\ y=-2t \\ z=-t \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} x=-5+2t \\ y=2+t \\ z=1-5t \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x=-5-2t \\ y=2-t \\ z=1+5t \end{cases}$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d đi qua hai điểm $M(1;-1;3)$, $N(3;0;2)$ có phương trình tham số là

Ⓐ $\begin{cases} x=3+2t \\ y=t \\ z=2-t \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=3+t \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=-1+3t \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=3-t \end{cases}$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;3)$, $B(1;1;1)$, $C(3;4;0)$. Đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với BC có phương trình là

Ⓐ $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+3}{-1}$. Ⓑ $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Ⓒ $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z-3}{1}$. Ⓓ $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y+2}{5}=\dfrac{z+3}{1}$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của trục Oz là

Ⓐ $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-2}$ và điểm $A(-3;-1;3)$. Mặt phẳng (P) đi qua A và chứa đường thẳng d.

a) Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{a}=(1;2;-2)$.

b) Đường thẳng d qua điểm $M(3;11;-9)$.

c) Phương trình tham số của d có dạng $\begin{cases} x=-2-t \\ y=1-2t \\ z=2t \end{cases}$.

d) Phương trình mặt phẳng (P) là $x+2y-2z+11=0$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+3z-1=0$.

a) Vectơ $\vec{u}=(2;1;-1)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d.

b) Gốc tọa độ cách mặt phẳng (P) một đoạn bằng 10.

c) Đường thẳng d song song mặt phẳng (P).

d) Mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và vuông góc mặt phẳng (P) có phương trình là $x-4y-2z+1=0$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(4;-2;-1)$ và đường thẳng $(d)\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{1}$.

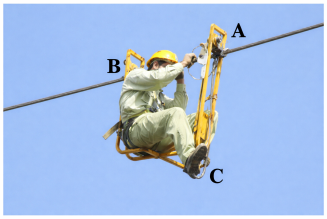
a) $A\notin(d)$.

b) Mặt phẳng (P) qua điểm A và vuông góc với đường thẳng (d) có phương trình là $4x-2y-z+11=0$.

c) Gọi điểm $H(a;b;c)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng (d). Ta có $a+b+c=4$.

d) Gọi (q) là đường thẳng đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng (d) và cắt đường thẳng (d). Một vectơ chỉ phương của (q) là $\vec{u}(a;b;1)$. Ta có $a+b=0$.

Câu 4. Năm 2011, kỹ sư Nguyễn Trí Hiếu, người Quảng Ngãi, đã sáng chế ra chiếc xe đu dây phục vụ công nhân điện lực di chuyển trên dây điện cao thế. Khi ở vị trí cân bằng, chiếc xe và đường dây điện sẽ cùng nằm trên một mặt phẳng vuông góc với mặt đất. Xe được cấu tạo bởi khung xe có gắn hai Puly tại vị trí A và B cách mặt đất lần lượt là 20 m và 19,9 m (như hình vẽ). Xe đu dây di chuyển giống xe đạp, được kết hợp dây xích, líp, đĩa, bàn đạp, phanh; bàn đạp đặt tại vị trí C.



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (mỗi đơn vị độ dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 1 m trên thực tế); tọa độ các điểm A, B, C lần lượt là $(7;5;20)$, $(7;5{,}5;19{,}9)$, $(7;5;19)$.

a) Một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là $\vec{u}=(0;5;1)$.

b) Khi người thợ điện di chuyển đến vị trí điểm D cách mặt đất 18 m thì tọa độ điểm D là $D(7;-5;18)$.

c) Phương trình mặt phẳng (ABC) là $x=7$.

d) Khoảng cách từ Puly tại A đến bàn đạp tại C là 1,03 m (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Phần III. Trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6 vào ô kết quả.

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+5}{-5}$. Biết rằng $\vec{u}=(a;b;5)$ là một vectơ chỉ phương của Δ. Giá trị của $a+b$ bằng bao nhiêu?

KQ: | | | | |

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$. đường thẳng đi qua 2 điểm A, B có phương trình dạng $\Delta\colon \begin{cases} x=2t \\ y=y_0+bx \\ z=z_0+ct \end{cases}$. Tính y_0+z_0+b+c.

KQ: | | | | |

Câu 3. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{4}$ và $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{4}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa d và Δ có dạng $ax+by+z+c=0$. Tính giá trị của $a+b+c$.

KQ: | | | | |

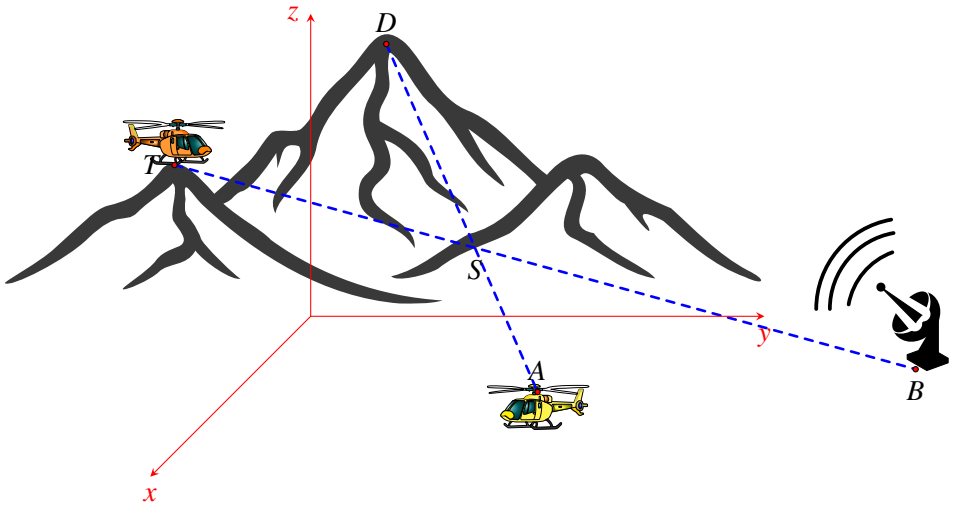
Câu 4. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$ và điểm $A(2;1;-1)$. Gọi $M(a;b;c)$ là hình chiếu của A lên d. Tính $T=a+b+c$ (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KQ: | | | | |

Câu 5. Tại một nút giao thông có 2 con đường khác mức. Trên thiết kế, trong không gian $Oxyz$ hai con đường đó thuộc hai đường thẳng lần lượt có phương trình là $d_1\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}$ và $d_2\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-3}$. Người ta muốn tạo một con đường Δ cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B sao cho AB nhỏ nhất. Tính độ dài AB (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ: | | | | |

Câu 6. Trực thăng cứu hộ Alpha cất cánh lúc 10 giờ 00 từ điểm xuất phát Adlerhorst $A(10;6;0)$. Nó bay thẳng với vận tốc 300 km/h tới đỉnh núi Mount Devil $D(4;-3;3)$, nơi xảy ra tai nạn. (Tọa độ tính bằng km). Cùng lúc đó, trực thăng Beta cất cánh từ đỉnh núi Tempelberg $T(7;-8;3)$ để đưa du khách về điểm $B(4;16;0)$, vận tốc của nó là 350 km/h. Người ta chứng minh được rằng hai trực thăng có đường bay giao nhau tại S. Khi Alpha tới S thì Beta đã đi qua trước đó một khoảng thời gian (tính bằng giây), hãy tìm khoảng thời gian đó? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



KQ: | | | | |

—Hết—

2) Đề số 2

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(4;-6;2)$. Phương trình tham số của Δ là

Ⓐ $\begin{cases}x=-2+2t\\y=-3t\\z=1+t.\end{cases}$ Ⓑ $\begin{cases}x=2+2t\\y=-3t\\z=-1+t.\end{cases}$ Ⓒ $\begin{cases}x=4+2t\\y=-6-3t\\z=2+t.\end{cases}$ Ⓓ $\begin{cases}x=-2+4t\\y=-6t\\z=1+2t.\end{cases}$

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d đi qua hai điểm $M(1;-1;3)$, $N(3;0;2)$ có phương trình tham số là

Ⓐ $\begin{cases}x=3+2t\\y=t\\z=2-t\end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t.\\z=3+t\end{cases}$ Ⓒ $\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\\z=-1+3t\end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases}x=1+2t\\y=1+t\\z=3-t\end{cases}$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$. Đường thẳng đi qua $H(3;-1;0)$ và vuông góc với mặt phẳng (Oxz) có phương trình là

Ⓐ $\begin{cases}x=3\\y=-1\\z=t.\end{cases}$ Ⓑ $\begin{cases}x=3+t\\y=-1\\z=0.\end{cases}$ Ⓒ $\begin{cases}x=3\\y=-1+t\\z=t.\end{cases}$ Ⓓ $\begin{cases}x=3\\y=-1+t\\z=0.\end{cases}$

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng đi qua điểm $P(1;1;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;3)$ là

Ⓐ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{3}$. Ⓑ $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+2}{3}$.

Ⓒ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$. Ⓓ $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+1}{2}$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=0\\y=t\\z=2-t\end{cases}$. Vectơ nào dưới đây là vecto chỉ phương của đường thẳng d ?

Ⓐ $\vec{u}=(1;0;-1)$. Ⓑ $\vec{u}=(0;1;-1)$. Ⓒ $\vec{u}=(0;0;2)$. Ⓓ $\vec{u}=(0;1;2)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=2-t\\y=-1+2t\\z=3-3t\end{cases}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

Ⓐ $Q(1;-2;3)$. Ⓑ $P(-1;2;-3)$. Ⓒ $M(2;-1;3)$. Ⓓ $N(-2;1;-3)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+2y-3z+4=0$ và điểm $A(1;-2;-3)$. Phương trình đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) là

Ⓐ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+3}{-3}$. Ⓑ $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{-3}$.

Ⓒ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+3}{-3}$. Ⓓ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+3}{-3}$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-5}=\dfrac{z-4}{1}$. Trong các điểm sau đây, điểm nào **không** thuộc đường thẳng Δ?

Ⓐ $M(4;-7;-2)$. Ⓑ $N(7;-12;6)$. Ⓒ $P(10;-17;7)$. Ⓓ $Q(13;-22;8)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-7}{1}=\dfrac{z-3}{4}$ và $d_2\colon \dfrac{x}{3}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+4}{1}$ cắt nhau tại điểm M có tọa độ bằng

Ⓐ $M(0;3;-4)$. Ⓑ $M(1;7;3)$. Ⓒ $M(-3;5;-5)$. Ⓓ $M(3;-5;5)$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;-1;2)$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-5}{-5}=\dfrac{z+2}{-4}$. Gọi d là đường thẳng đi qua M và song song với đường thẳng Δ. Phương trình nào sau đây là phương trình tham số của đường thẳng d?

Ⓐ $\begin{cases}x=3+2t\\y=-1-5t\\z=2-4t\end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases}x=2+3t\\y=-5-t\\z=-4+2t\end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases}x=3+t\\y=-1+5t\\z=2-2t\end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases}x=3+2t\\y=-1+5t\\z=2-4t\end{cases}$.

Câu 11. Cho tam giác ABC với $A(1;0;-2)$, $B(2;-3;-4)$, $C(3;0;-3)$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Vectơ nào sau đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng OG?

Ⓐ $(-2;1;3)$. Ⓑ $(3;-2;1)$. Ⓒ $(2;1;3)$. Ⓓ $(-1;-3;2)$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, vị trí tương đối của hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ và $\Delta_2\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{1}$ là

Ⓐ Trùng nhau . Ⓑ Chéo nhau. Ⓒ Song song. Ⓓ Cắt nhau.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;3)$ và $B(3;5;9)$.

a) Một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là $\vec{u}=(1;1;3)$.

b) Phương trình tham số của đường thẳng AB là $\begin{cases}x=3+t\\y=5+3t\\z=9+3t\end{cases}$, $(t\in\mathbb{R})$.

c) Điểm $M(4;6;9)$ thuộc đường thẳng AB.

d) Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $C(2;0;-3)$ và song song với đường thẳng AB là $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{3}$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases}x=-1+2t\\y=1+t\\z=3-2t.\end{cases}$

a) Giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng $(P)\colon x+2y-3z+2=0$ là $I(0;1;2)$.

b) Véc-tơ $\vec{a}=(4;2;-3)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d.

c) Đường thẳng d đi qua điểm $A(-1;1;3)$.

d) Phương trình chính tắc của đường thẳng d là $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;0)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$.

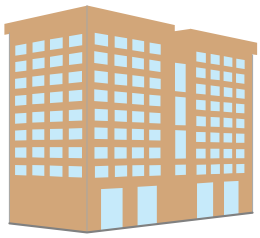
a) Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;-1)$.

b) Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và vuông góc với d có phương trình tổng quát là $2x+by+cz+d=0$. Khi đó $b+c+d=-5$.

c) Gọi M' là điểm đối xứng với M qua d. Khi đó $M'(1;0;-2)$.

d) Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M cắt và vuông góc với đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{a}=\dfrac{z}{b}$. Khi đó $a+b=-6$.

Câu 4. Một tòa nhà văn phòng có dạng là khối hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với chiều cao $AA'=50$ m. Đáy $ABCD$ của tòa nhà là một hình chữ nhật trên mặt đất với chiều dài $AB=40$ m và chiều rộng $AD=30$ m. Để tạo điểm nhấn và thuận tiện cho việc di chuyển, người ta lắp đặt một thang máy kính trong suốt. Đường đi của thang máy được thiết kế là đường thẳng d đi qua trung điểm I của đường chéo AC và song song với chiều cao AA' của tòa nhà.



Trên mặt đất $(ABCD)$ thì khu vực chờ thang máy được quy hoạch là một hình tròn có tâm I và bán kính r. Từ một vị trí M bất kỳ trên đường tròn khu vực chờ này, người ta ngước nhìn lên đỉnh C' của tòa nhà để chiêm ngưỡng kiến trúc. Chọn gốc tọa độ đặt tại đỉnh A tức $A\equiv O(0;0;0)$, $B\in Ox$; $D\in Oy$.

a) Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AC là $I(20;15;0)$.

b) Phương trình tham số của đường thẳng d (đường đi của thang máy) là $\begin{cases}x=20\\y=15\\x=t\end{cases}$.

c) Khoảng cách từ điểm B' đến đường đi của thang máy là 35 m.

d) Bán kính lớn nhất $r_{\max}$ của khu vực chờ thang máy để đảm bảo góc nhìn $\widehat{CMC'}$ không nhỏ hơn 45° là 25 m.

Phần III. Trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6 vào ô kết quả.

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2-t\\y=2t\\z=1-t\end{cases}$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-6}{2}=\dfrac{z+3}{-2}$. Gọi giao điểm của hai đường thẳng Δ và d là $M(a;b;c)$. Tính $a+b+c$.

KQ: | | | | |

Câu 2. Trong không gian, cho hai đường thẳng có phương trình $d_1:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+3}{2}$ và $d_2:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-7}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$. Đường thẳng d cắt d_1 và d_2 đồng thời đi qua điểm $M(3;10;1)$ có

một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a;b;2)$. Khi đó, $a-7b$ bằng bao nhiêu? KQ: | | | | |

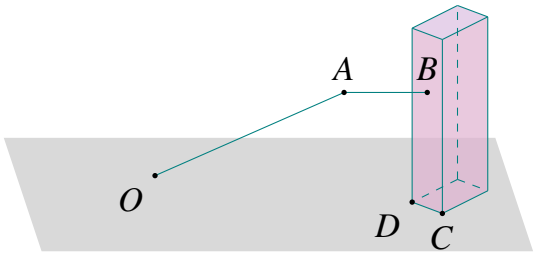
Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$, đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$ và mặt phẳng $(P):x+y-2z+2=0$. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua A, song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng d có dạng $\dfrac{x+a}{b}=\dfrac{y-5}{c}=\dfrac{z+d}{3}$. Giá trị của biểu thức $M=a+b+c+d$ bằng bao nhiêu?

KQ: | | | | |

Câu 4. Một phần mềm mô phỏng vận động viên tập bắn bia mục tiêu có kích thước nhỏ 42 cm×42 cm bằng súng tiểu liên AK trong không gian $Oxyz$. Cho biết vận động viên đó sử dụng thước ngắm 3 và đứng cách xa bia mục tiêu là 100 m, trục d của nòng súng và cọc đỡ bia d' lần lượt có phương trình $d:\begin{cases}x=t\\y=2\\z=4\end{cases}$ và $d':\begin{cases}x=1\\y=2\\z=1+3t'\end{cases}$. Để bắn trúng hồng tâm (điểm 10) thì vận động viên phải ngắm bắn vào điểm $N(a;b;c)\in d'$ và cách giao điểm của d và d' một khoảng 6 cm. Khi $c<0$, tính giá trị biểu thức $a-b+c$.

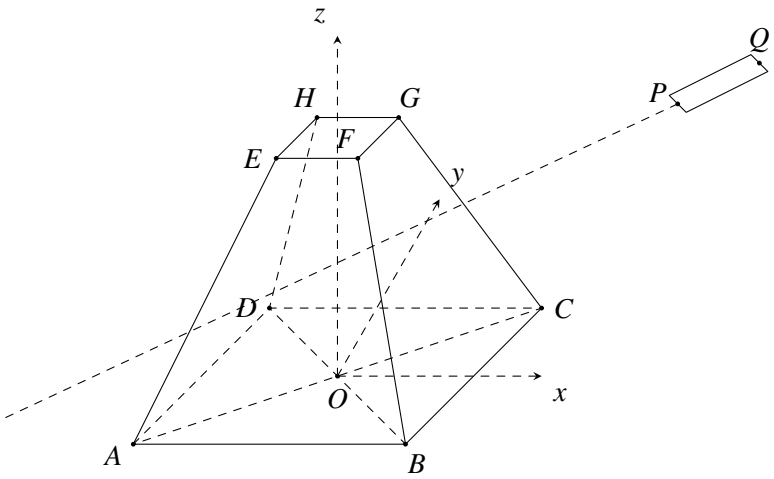
KQ: | | | | |

Câu 5. Một công ty logistics đang thử nghiệm hệ thống giao hàng tự động bằng máy bay không người lái (drone). Trong không gian $Oxyz$, mỗi đơn vị trên các trục tương ứng với 1 mét trên thực tế. Mặt ngoài của một tòa nhà cao tầng được xem là một phần của mặt phẳng (P) thẳng đứng, đi qua hai điểm $C(10;50;0)$ và $D(30;10;0)$.



Vị trí giao hàng là điểm B nằm trên mặt phẳng (P). Drone bắt đầu bay từ kho hàng tại gốc tọa độ $O(0;0;0)$. Ban đầu, nó bay theo một đường thẳng đến vị trí $A(30;40;120)$. Từ vị trí A, drone thay đổi đường bay, di chuyển theo phương vuông góc với mặt phẳng (P) đến vị trí giao hàng B. Tính khoảng cách từ O đến B (làm tròn đến hàng đơn vị). KQ: | | | | |

Câu 6. Một khối thép không gỉ có dạng hình chóp cụt tứ giác đều. Độ dài cạnh đáy lớn 8 cm. Độ dài cạnh đáy nhỏ 4 cm. Chiều cao 8 cm.



Gốc tọa độ $O(0;0;0)$ đặt tại tâm đáy lớn. Tia laser khoan theo đoạn PQ với $P(-3,5;9,5;6)$ $Q(-6;16;8)$. Tính độ dài kênh khoan biết đầu vào nằm trong mặt $(CDHG)$ và đầu ra nằm trong mặt $(ABFE)$. KQ: | | | | |

—Hết—

BẢNG ĐÁP ÁN BÀI TẬP CUỐI BÀI

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1 A	2 C	3 A	4 A	5 A	6 D	7 B	8 C	9 B	10 D
11 A	12 C	13 A	14 A	15 C	16 D	17 C	18 A	19 D	20 D
21 B	22 B	23 C	24 B						

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a Đ b S c S d Đ	Câu 2.	a Đ b S c S d S
Câu 3.	a S b Đ c Đ d Đ	Câu 4.	a Đ b Đ c S d S
Câu 5.	a S b S c Đ d Đ	Câu 6.	a Đ b Đ c S d S
Câu 7.	a S b S c S d S	Câu 8.	a S b S c S d Đ
Câu 9.	a Đ b Đ c S d Đ	Câu 10.	a Đ b S c Đ d S
Câu 11.	a Đ b Đ c S d Đ	Câu 12.	a S b Đ c Đ d S

BẢNG ĐÁP ÁN ĐỀ KIỂM TRA CUỐI BÀI

ĐỀ SỐ 1

ĐÁP ÁN PHẦN I

1. B	2. B	3. A	4. D	5. C	6. C	7. A	8. C	9. A
10. A	11. B	12. C						

ĐÁP ÁN PHẦN II

Câu 1.	a Đ b S c Đ d S	Câu 2.	a Đ b S c Đ d Đ
Câu 3.	a Đ b S c S d Đ	Câu 4.	a S b S c Đ d S

ĐÁP ÁN PHẦN III

Câu 1.				Câu 2.				Câu 3.				Câu 4.				Câu 5.				Câu 6.			
–	1			2				–	2			0	,	7		2	,	4	5	6	,	4	

ĐỀ SỐ 2

ĐÁP ÁN PHẦN I

1. B	2. A	3. B	4. A	5. A	6. C	7. A	8. A	9. C
10. A	11. A	12. B						

ĐÁP ÁN PHẦN II

Câu 1. a) Đ b) S c) S d) Đ	Câu 2. a) S b) S c) Đ d) Đ
Câu 3. a) Đ b) Đ c) S d) Đ	Câu 4. a) Đ b) Đ c) S d) Đ

ĐÁP ÁN PHẦN III

Câu 1.	Câu 2.	Câu 3.	Câu 4.	Câu 5.	Câu 6.
3	– 8	– 4	– 3	1 2 6	7 , 2 5

§3 CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Góc giữa hai đường thẳng

Góc giữa hai đường thẳng d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{a'}=(a'_1;a'_2;a'_3)$ được tính bởi công thức

$$\cos(d,d')=\left|\cos(\vec{a},\vec{a'})\right|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{a'}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{a'}|}=\frac{|a_1a'_1+a_2a'_2+a_3a'_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{a'^2_1+a'^2_2+a'^2_3}}.$$

Lưu ý.

- $0^\circ\le(d,d')\le 90^\circ$;
- Nếu $d\parallel d'$ hoặc $d\equiv d'$ thì $(d,d')=0^\circ$;
- $d\perp d'\Leftrightarrow(d,d')=90^\circ$.

2) Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Góc giữa đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(n_1;n_2;n_3)$ được tính bởi công thức:

$$\sin(d,(P))=|\cos(\vec{a},\vec{n})|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{n}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{|a_1n_1+a_2n_2+a_3n_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}.$$

Lưu ý.

- $0^\circ\le(d,(\alpha))\le 90^\circ$;
- Nếu $d\parallel(\alpha)$ hoặc $d\subset(\alpha)$ thì $(d,(\alpha))=0^\circ$;
- d vuông góc với (α) khi và chỉ khi $(d,(\alpha))=90^\circ$.

3) Góc giữa hai mặt phẳng

Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P') có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}=(n_1;n_2;n_3)$ và $\vec{n'}=(n'_1;n'_2;n'_3)$ được tính bởi:

$$\cos\big((P),(P')\big)=\left|\cos(\vec{n},\vec{n'})\right|=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{n'}|}{|\vec{n}|\,|\vec{n'}|}=\frac{|n_1n'_1+n_2n'_2+n_3n'_3|}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}\,\sqrt{n'^2_1+n'^2_2+n'^2_3}}.$$

Lưu ý.

- $0^\circ \le ((\alpha),(\beta)) \le 90^\circ$;
- Nếu $(\alpha)//(\beta)$ hoặc $(\alpha) \equiv (\beta)$ thì $((\alpha),(\beta)) = 0^\circ$;
- $(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow ((\alpha),(\beta)) = 90^\circ$.

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Tính góc trong không gian

- Xác định véc tơ chỉ phương (vec tơ pháp tuyến);
- Áp dụng đúng công thức.

Ví dụ 1

Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng:

$$d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 3-t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x = t' \\ y = 1+2t' \\ z = 3-t' \end{cases}.$$

Ví dụ 2

Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa đường thẳng $d: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y-2z+1=0$.

Ví dụ 3

Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai mặt phẳng:

$$(\alpha): 2x+2y-4z+1=0 \quad \text{và} \quad (\beta): x-z-5=0.$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai mặt phẳng sau:

a) $(P): x+y+4z-2=0$ và $(Q): 2x-2z+7=0$.

b) $(P): 2x-y-2z-9=0$ và $(Q): x-y-6=0$.

Bài 2 ☆

Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng sau:

a) $d: \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$ và $d': \dfrac{x}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$.

b) $d_1: \begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=3 \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=1-t' \\ y=2 \\ z=-2+t' \end{cases}$.

Bài 3 ☆

Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng sau:

a) $d: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$ và $(P): x-y+2z+1=0$.

b) $d: \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-6}{3}=\dfrac{z+4}{1}$ và $(P): 4x+3y-z+1=0$

Dạng 2 Tọa độ hóa hình không gian

Ví dụ 1

Cho hình lăng trụ đứng $OBC.O'B'C'$ có đáy là tam giác OBC vuông tại O và có $OB = 3a$, $OC = a$, $OO' = 2a$. Tính góc giữa

a) hai đường thẳng BO' và $B'C$;

b) hai mặt phẳng $(O'BC)$ và (OBC);

c) đường thẳng $B'C$ và mặt phẳng $(O'BC)$.

Ví dụ 2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Biết rằng $AB = 1$; $AD = 2$ và $SA = 3$. Gọi M là trung điểm AB. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và DM (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Ví dụ 3

Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 6 và cạnh bên bằng 12. Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(AB'C')$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Cho biết $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;5;0)$, $A'(0;0;3)$. Tính góc giữa:

a) hai đường thẳng AC và BA';

b) hai mặt phẳng $(BB'D'D)$ và $(AA'C'C)$;

c) đường thẳng AC' và mặt phẳng $(A'BD)$.

Bài 2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 4. Mặt bên SAB là tam giác cân tại S có chiều cao bằng 6 và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.

a) Tính góc α giữa hai đường thẳng SD và BC;

b) Tính góc β giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD).

Bài 3

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, biết $SA = AC = 4\sqrt{2}$; $AB = 4$ và SA vuông góc với mặt đáy (tham khảo hình vẽ). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

Bài 4 ☆

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh bằng 1. Tam giác ABC đều, hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Đường thẳng SD hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 30°. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SCD) (*làm tròn đến chữ số hàng phần trăm*).

Bài 5 ☆

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng 1. Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30°. Hình chiếu H của A' lên mặt phẳng (ABC) thuộc đường thẳng BC. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(ACC'A')$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Dạng 3 Toán thực tế liên quan đến tính góc trong không gian $Oxyz$

Ví dụ 1

Trên một mặt sàn sân khấu đã thiết lập sẵn một hệ toạ độ $Oxyz$. Tính góc giữa tia sáng có phương trình

$$d:\begin{cases} x=2 \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$$

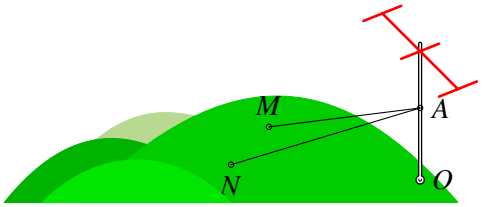
và mặt sàn sân khấu có phương trình $z=0$.



Hình 13

Ví dụ 2

Người ta muốn dựng một cột ăng-ten trên một sườn đồi. Ăng-ten được dựng thẳng đứng trong không gian $Oxyz$ với độ dài đơn vị trên mỗi trục bằng 1 m. Gọi O là gốc cột, A là điểm buộc dây cáp vào cột ăng-ten và M, N là hai điểm neo dây cáp xuống mặt sườn đồi (hình vẽ). Cho biết toạ độ các điểm nói trên lần lượt là $O(0;0;0)$, $A(0;0;6)$, $M(3;-4;3)$, $N(-5;-2;2)$.



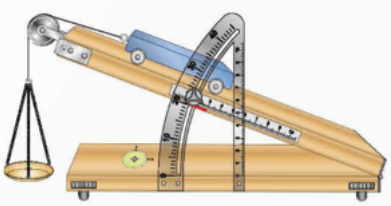
a) Tính độ dài các đoạn dây cáp MA và NA.

b) Tính góc tạo bởi các sợi dây cáp MA, NA với mặt phẳng sườn đồi.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Để làm thí nghiệm về chuyển động trong mặt phẳng nghiêng, người làm thí nghiệm đã thiết lập sẵn một hệ tọa độ $Oxyz$. Tính góc giữa mặt phẳng nghiêng $(P)\colon 4x+11z+5=0$ và mặt sàn $(Q)\colon z-1=0$.

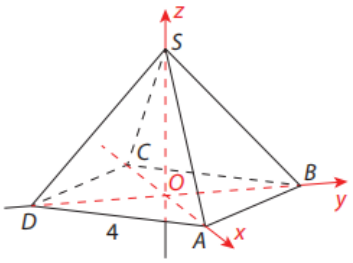


Hình 16

Bài 2

Để chuẩn bị cho chuyến đi dã ngoại, nhóm bạn Đức thiết kế lều cắm trại dạng hình chóp tứ giác đều có đáy là hình vuông cạnh 4 m. Theo bản vẽ thiết kế thì góc giữa hai mặt bên của lều bằng $60°$. Bằng phương pháp toạ độ, hãy tính chiều cao của lều này.

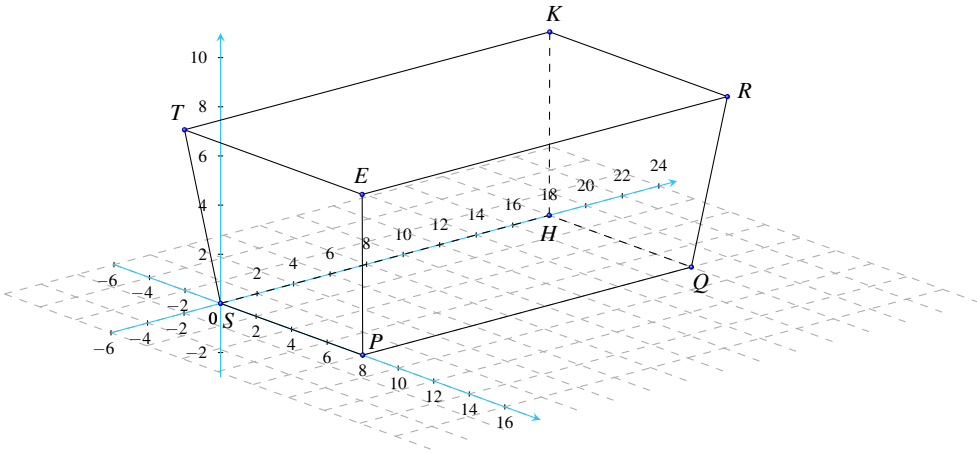




Bài 3 ☆

Một khuôn nướng bánh mì được mô phỏng trong không gian $Oxyz$ như Hình vẽ với $S(0;0;0)$, $P(8;0;0)$, $Q(8;18;0)$, $T(-1;-1;7)$, $R(9;19;7)$. Tính góc giữa hai cạnh kề nhau, giữa cạnh bên và mặt đáy, giữa mặt bên và mặt đáy của khuôn.





BÀI TẬP

1 **Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.**

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$. Công thức nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\sin(\Delta,(P))=\dfrac{a\cdot A+b\cdot B+c\cdot C}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Ⓑ $\cos(\Delta,(P))=\dfrac{|a\cdot A+b\cdot B+c\cdot C|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Ⓒ $\sin(\Delta,(P))=\dfrac{|a\cdot A+b\cdot B+c\cdot C|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Ⓓ $\cos(\Delta,(P))=\dfrac{a\cdot A+b\cdot B+c\cdot C}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-2}$ và $d_2\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=-2t \\ z=-3+t \end{cases}$ bằng

Ⓐ $30°$. Ⓑ $90°$. Ⓒ $45°$. Ⓓ $60°$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(0;3;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-y+2z-1=0$. Góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (P) bằng

Ⓐ $0°$. Ⓑ $180°$. Ⓒ $90°$. Ⓓ $45°$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, hãy tính số đo góc α giữa đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 5x+11y+2z-4=0$.

Ⓐ $120°$. Ⓑ $30°$. Ⓒ $60°$. Ⓓ $45°$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+1=0$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+2}{2}$. Gọi φ là góc giữa d và (P). Tính $\cos\varphi$.

Ⓐ $\dfrac{6}{9}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{65}}{9}$. Ⓒ $\dfrac{9\sqrt{65}}{65}$. Ⓓ $\dfrac{4}{9}$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa trục Oy và mặt phẳng (Oxz) bằng

Ⓐ $45°$. Ⓑ $60°$. Ⓒ $90°$. Ⓓ $120°$.

Câu 7. Gọi φ là góc giữa đường thẳng $d\colon \dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x+4y+5z-2025=0$. Khi đó

Ⓐ $\alpha=90°$. Ⓑ $\alpha=45°$. Ⓒ $\alpha=60°$. Ⓓ $\alpha=30°$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+2y+z=0$ và $(\beta)\colon x+z+\sqrt{3}=0$. Góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là

Ⓐ $30°$. Ⓑ $90°$. Ⓒ $45°$. Ⓓ $60°$.

Câu 9. Cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{1}$; $d_2:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-5}{4}$. Số đo góc giữa hai đường thẳng $d_1;d_2$ bằng

Ⓐ $90°$. Ⓑ $60°$. Ⓒ $30°$. Ⓓ $45°$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;2;1)$. Gọi α là góc giữa d và trục Ox. Tính $\cos\alpha$.

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $\dfrac{2}{3}$. Ⓒ $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Ⓓ $\dfrac{1}{3}$.

Câu 11. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-z-5=0$. Hãy tính côsin góc tạo bởi đường thẳng (d) và mặt phẳng (P).

Ⓐ $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$. Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi φ là góc giữa mặt phẳng (Oxz) và mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y-10z+2025=0$. Khi đó $\cos\varphi$ là

Ⓐ 0. Ⓑ $\dfrac{1}{\sqrt{102}}$. Ⓒ $\dfrac{1}{10}$. Ⓓ $\dfrac{1}{\sqrt{120}}$.

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+2z-2=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

a) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(2;0;2)$.

b) Một vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}=(3;2;-1)$.

c) Điểm $M(1;3;-1)$ thuộc đường thẳng d.

d) Góc tạo bởi đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng $30{,}3^0$ (làm tròn đến hàng phần mười).

Câu 2. Cho đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=3+t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y+z-4=0$.

a) $\vec{u}=(-1;1;-1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

b) $M(0;3;-2)$ không thuộc đường thẳng Δ.

c) Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P).

d) Đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (P) tại $N(-1;4;1)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua hai điểm $A(1;2;1)$ và $B(3;0;1)$, mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $M(0;1;0)$, $N(2;1;3)$, $P(4;1;1)$.

a) Véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ không là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d.

b) $\overrightarrow{MN}=(2;0;3)$, $\overrightarrow{MP}=(4;0;1)$.

c) Mặt phẳng (α) có một véc-tơ pháp tuyến có tọa độ là $(0;-1;0)$.

d) Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng 45°.

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=t \\ y=2-3t \\ z=1+2t \end{cases}$ và $d\colon \dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{2}$.

a) Điểm $A(0;2;1)$ không thuộc đường thẳng Δ.

b) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d=(3;2;2)$.

c) Hai đường thẳng Δ và d chéo nhau.

d) Gọi α là góc giữa Δ và d. Khi đó $\cos\alpha=\dfrac{5}{\sqrt{38}}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $B(1;2;-1)$, $C(0;2;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+3y-2z+1=0$.

a) Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;3;-2)$.

b) Mặt phẳng (P) đi qua điểm B.

c) Mặt phẳng (Q) qua C và song song với (P) có phương trình là $x+3y-2z-12=0$.

d) Góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{2}$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị, theo đơn vị độ) bằng 27°.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-7}{5}=\dfrac{z-15}{6}$, $d_1\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{1}$.

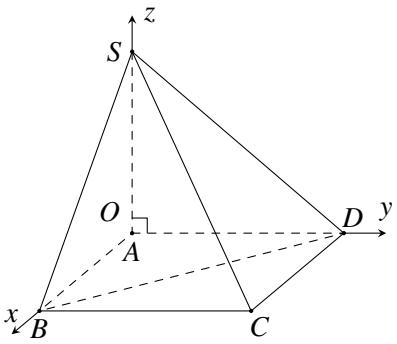
a) Phương trình tham số của d là $\begin{cases} x=3+2t \\ y=7+5t \\ z=15+6t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

b) Phương trình tham số của d_1 là $\begin{cases} x=1+t_1 \\ y=2+t_1 \\ z=3+t_1 \end{cases}, t_1\in\mathbb{R}$.

c) Hai đường thẳng d và d_1 cắt nhau.

d) Góc giữa d và d_1 là 35°.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=1$, $BC=\sqrt{3}$, $SA=1$ và SA vuông góc với mặt đáy. Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



a) Tọa độ các điểm B, C là $B(1;0;0)$, $C\left(1;\sqrt{3};0\right)$.

b) Một vectơ chỉ phương của đường thẳng SB là $\vec{u}=(1;-1;1)$.

c) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBD) là $\vec{n}=\left(\sqrt{3};1;\sqrt{3}\right)$.

d) Gọi α là góc giữa hai đường thẳng BD và (SBC). Khi đó $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 8. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $D(0;3;0)$, $D'(0;3;-3)$.

a) Tọa độ điểm $C(3;-3;0)$.

b) Phương trình đường thẳng $A'C$ có dạng là : $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=-3+t \end{cases}$.

c) $\cos(A'C;(A'BD))=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

d) $\cos((C'BD);(A'BD))=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 9. Trong không gian, cho mặt phẳng $(P)\colon x-y+3z-1=0$ và đường thẳng $(d)\colon \begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=t. \end{cases}$

a) Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}(1;-2;1)$ và mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(1;-1;3)$.

b) $\cos(d,(P))=\sqrt{\dfrac{6}{11}}$.

c) Gọi (Q) là mặt phẳng song song với (P), khi đó giá trị sin của góc giữa d và (Q) bằng $\dfrac{\sqrt{66}}{11}$.

d) Có đúng một mặt phẳng đi qua gốc toạ độ, vuông góc với (P) và tạo với d một góc 30°.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho $\Delta_1:\begin{cases}x=1+t\\y=2+3t\\z=3-t\end{cases}$ và $\Delta_2:\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{3}$.

a) Điểm $M(1;2;3)\in\Delta_1$ và $N(2;-2;1)\in\Delta_2$.

b) $\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\dfrac{2\sqrt{154}}{77}$.

c) Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

d) Đường thẳng d đi qua $N(2;3;-1)$, cắt và vuông góc với Δ_2 có phương trình $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{-71}=\dfrac{z+1}{25}$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10;3;0)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-2;1)$ với tốc độ 4,5 m/s (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

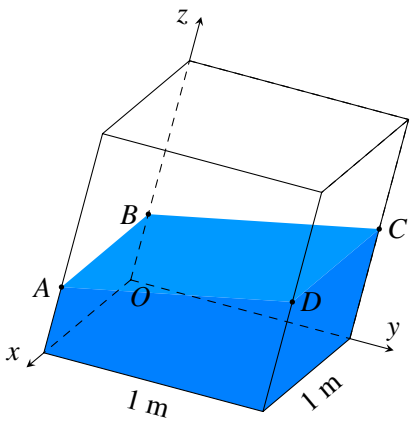
a) Phương trình tham số của đường cáp là: $\begin{cases}x=10+2t\\y=3-2t\\z=t\end{cases}$, $(t\in\mathbb{R})$.

b) Giả sử sau thời gian t (s) kể từ lúc xuất phát $(t\geq 0)$ thì cabin đến điểm M có tọa độ $M\left(3t+10;\ -3t+3;\ \dfrac{3t}{2}\right)$.

c) Cabin dừng ở điểm B có hoành độ $x_B=550$, khi đó quãng đường AB dài 800 m.

d) Đường cáp AB tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc 30°.

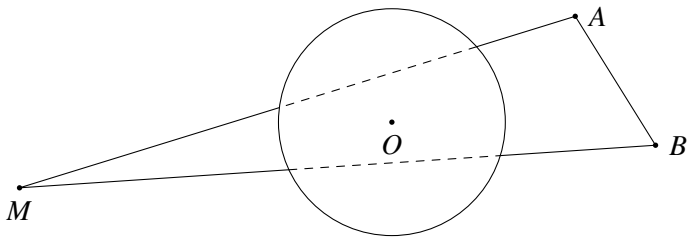
Câu 12. Trong một bể hình lập phương cạnh 1 m có chứa một ít nước. Người ta đặt đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang. Biết rằng lúc đó mặt nước có dạng hình bình hành $ABCD$ và khoảng cách từ các điểm A, B, C đến đáy bể tương ứng là 38 cm, 46 cm, 50 cm. Trong không gian $Oxyz$, gốc tọa độ là góc của đáy bể, mỗi đơn vị trên hệ trục tọa độ tương ứng với 1 cm.



a) Điểm A có tọa độ là $(100;0;38)$.
b) Mặt phẳng đáy của bể nước có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-1;-25)$.
c) Khoảng cách từ điểm D đến đáy bể là 42 cm.
d) Góc giữa mặt nước và mặt phẳng đáy của bể nước là $5{,}1^\circ$ (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, một viên đạn được bắn ra từ vị trí $A(1;2;3)$ hướng đến vị trí $B(0;1;-6)$, bia chắn là mặt phẳng $(P)\colon 4x-y+2z+13=0$, đơn vị là kilômet.
a) Điểm B thuộc mặt phẳng (P).
b) Giả sử viên đạn chuyển động thẳng đều theo hướng vectơ $\vec{v}(-2;-2;-18)$ với vận tốc 800 m/s (bỏ qua mọi lực cản và chướng ngại vật), sau một phút viên đạn bắn ra đi qua điểm B.
c) Góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (P) (làm tròn đến hàng đơn vị) là 60°.
d) Hình chiếu vuông góc của A trên (Oxy) là $H(0;2;3)$.

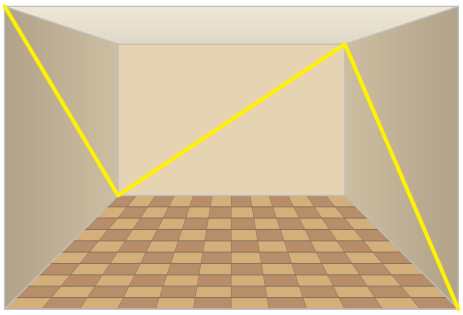
Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mắt một người quan sát đặt tại điểm $M(1;2;3)$ và quan sát một thanh AB với $A(7;8;-3)$, $B(2;3;-3)$. Một tấm bìa cứng có dạng hình tròn thuộc mặt phẳng (Oxy) có tâm $O(0;0;0)$, bán kính R và che khuất hoàn toàn thanh AB đối với người quan sát tại điểm M.
a) Vectơ $\overrightarrow{MA}=(6;6;-6)$.
b) Đường thẳng AB tạo với mặt phẳng chứa tấm bìa một góc 30°.
c) Phương trình đường thẳng $MA\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=3-t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.
d) Tấm bìa có bán kính nhỏ nhất bằng $\sqrt{41}$.

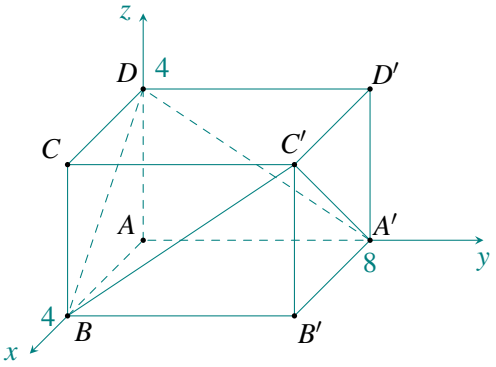


Câu 15. Trong một thành phố đang trong quá trình mở rộng, chính quyền địa phương quyết định cải thiện hạ tầng giao thông để đáp ứng nhu cầu ngày càng tăng của cư dân. Một trong những kế hoạch quan trọng là xây dựng hai con đường chính, nhằm kết nối các khu vực dân cư với các trung tâm thương mại và dịch vụ. Hai con đường này cắt nhau tại một giao lộ quan trọng, nơi sẽ được trang bị các tiện ích như đèn tín hiệu giao thông, vạch kẻ đường và khu vực dành riêng cho người đi bộ. Xét trong không gian $Oxyz$, hai con đường lần lượt có phương trình là $d\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z+4}{1}$ và $d'\colon \begin{cases} x=3-t \\ y=-2+4t \\ z=-1+2t \end{cases}$.
a) Đường thẳng d đi qua điểm $M(-1;4;4)$.
b) Hai đường thẳng cắt nhau tại điểm có tọa độ $(4;-6;-3)$.
c) Hai con đường tạo với nhau một góc lớn hơn 60°.

d) Để thiết kế giao lộ này một cách hiệu quả và an toàn, các kỹ sư cần xác định bề mặt đường nơi hai con đường gặp nhau, tức là mặt phẳng chứa d và d'. Mặt phẳng này có phương trình $8x+7y-10z+20=0$.

Câu 16. Trong một căn phòng có chiều ngang 4 m, chiều rộng 8 m và chiều cao 4 m, người chủ đã thiết kế 4 dãy đèn LED chạy dọc theo các đường chéo của hình chữ nhật tương ứng với các bức tường căn phòng sao cho chúng có tính liên tục. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với căn phòng là hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, trong đó điểm A là gốc tọa độ, đơn vị trên mỗi trục là mét. Chủ căn phòng quyết định sử dụng loại đèn LED neon Flex (không chói mắt) với giá thi trường khoảng 85 nghìn đồng/mét.





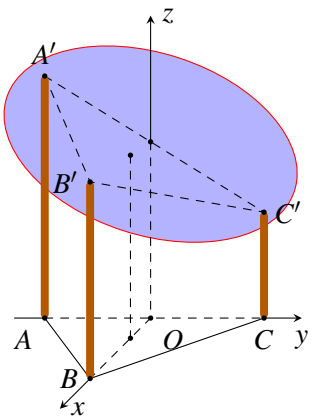
a) Phương trình cạnh BD là $\begin{cases} x=0 \\ y=4+t \\ z=t \end{cases}$, ($t$ là tham số).

b) Số tiền để mua đèn LED trang trí trong căn phòng là 2482 nghìn đồng (làm tròn đến hàng đơn vị của nghìn đồng).

c) Khoảng cách từ D đến mặt phẳng $(A'BC')$ bằng 5,2 m (làm tròn đến hàng phần chục).

d) Biết đèn LED có điểm sáng M chạy từ B đến D với tốc độ 0,2 m/s, đèn LED có điểm sáng N chạy từ A' đến C' với tốc độ 0,3 m/s. Sau 9,1 giây (làm tròn đến hàng phần chục) kể từ khi mở nguồn thì hai điểm sáng M, N có khoảng cách ngắn nhất trước khi có ít nhất một điểm sáng về đích.

Câu 17. Một mái nhà hình tròn được đặt trên 3 cây cột trụ. Các cây cột trụ vuông góc với mặt sàn nhà phẳng và có độ cao lần lượt là 8m, 9m, 10m. Ba chân cột là ba đỉnh của một tam giác đều trên mặt sàn nhà với cạnh dài 8m. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, với B thuộc tia Ox, C thuộc tia Oy, tia Oz cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AA'}$; gốc tọa độ O trùng với trung điểm của AC và mỗi đơn vị trên trục có độ dài 1 mét (xem hình vẽ).



a) Tọa độ các điểm $A'(0;-4;10)$, $B'(4\sqrt{3};0;9)$, $C'(0;4;8)$.

b) Phương trình mặt phẳng $(A'B'C')$ là $y+4z-36=0$.

c) Biết độ dốc của máy nhà đạt tiêu chuẩn khoảng 27° đến 35° thì mái nhà trên ở mức đạt tiêu chuẩn.

d) Biết rằng bề mặt mái nhà là hình tròn có tâm I trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$. Khi đó điểm I cách mặt sàn khoảng 9 mét .

3 Tự luận.

Bài 1. Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau:

a) $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=3+4t\end{cases}$ và $d':\begin{cases}x=2-s\\y=-1+3s\\z=4+2s\end{cases}$;

b) $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{2}$ và $d':\begin{cases}x=3+t\\y=-1+t\\z=1\end{cases}$;

c) $d:\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{6}$ và $d':\dfrac{x}{12}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$.

Bài 2. Tính góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α):

a) $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{2}$ và $(\alpha):2x+2y+1=0$;

b) $d:\begin{cases}x=3+7t\\y=1-8t\\z=1-15t\end{cases}$ và $(\alpha):2x+2y+1=0$;

c) $d:\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$ và $(\alpha):6x-2y+4z=0$.

Bài 3. Tính góc giữa các cặp mặt phẳng sau:

a) $(\alpha):3x+4y+5z-1=0$ và $(\beta):2x+y+z-3=0$

b) $(\alpha):x-y+2z-1=0$ và $(\beta):x+2y-z+3=0$

c) $(\alpha):x+3y-2z-1=0$ và $(\beta):4x+2y+5z-3=0$

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x+my+mz-1=0$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z}{5}$. Tìm m để góc tạo bởi d và (P) bằng 60°.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+3t\\y=1+4t\\z=1\end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1;1;1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;2)$. Viết phương trình đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ.

Bài 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-y+z-2=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{2}$ và điểm $A(2;1;1)\in(P)$. Đường thẳng Δ qua A, nằm trong (P) và tạo với d một góc nhỏ nhất. Biết $\Delta\cap(Oxy)=B(m;n;p)$. Tính giá trị $T=7m+7n+p$.

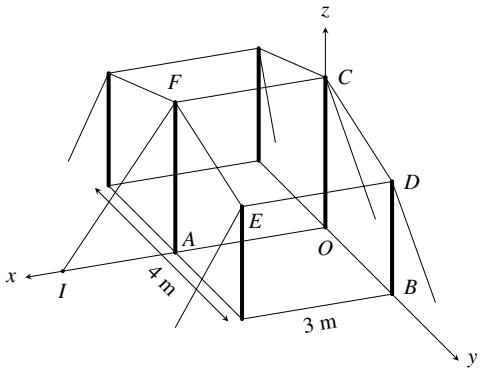
Bài 7. Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, với mặt phẳng (Oxy) là mặt đất, một máy bay cất cánh từ vị trí $A(0;10;0)$ với vận tốc $\vec{v}=(150;150;40)$.



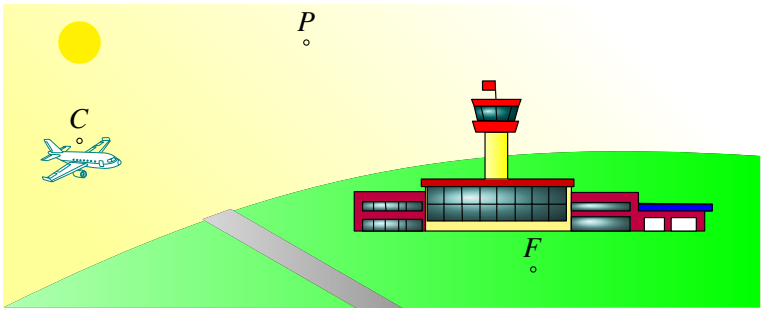
a) Viết công thức tính toạ độ của máy bay trong 2 giờ đầu tiên.

b) Tính góc nâng của máy bay (góc giữa hướng chuyển động bay lên của máy bay với đường băng và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

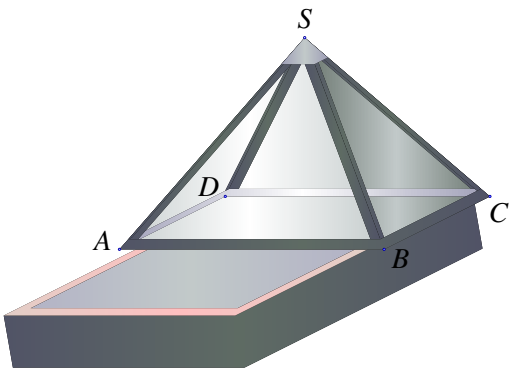
Bài 8. Một lều trại có mặt trước và mặt sau rộng 4 m, hai mặt bên rộng 3 m gồm sáu thanh cọc tre, vải bạt chống thấm nước, dây dù hoặc dây thừng để cố định lều tại sáu cọc sắt cắm sát đất như Hình vẽ. Biết rằng, hai thanh AF, OC có chiều dài 2,2 m; bốn thanh còn lại có chiều dài 1,7 m và đoạn dây thừng $IF=3$ m. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ và cho biết góc giữa đường thẳng chứa dây thừng IF và mặt phẳng chứa tấm bạt $(CDEF)$ là a°. Tính giá trị của a. Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ.



Bài 9. Máy bay Beta hướng tới điểm $C(10;-10;5)$. Khi qua điểm C, máy bay Beta nhận lệnh từ đài kiểm soát bay đổi hướng bay theo vectơ $\vec{w}=(-5;4;-1)$. Ở điểm P có độ cao 1 000 m, máy bay Beta sẽ thực hiện một lần đổi hướng cuối cùng theo vectơ $\vec{u}$ để hạ cánh xuống sân bay $F(-12;7;0)$. Tính cosin góc của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{w}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười). Sân bay F nằm trên mặt phẳng (Oxy). Mỗi đơn vị trong hệ tọa độ tương ứng 1 km.

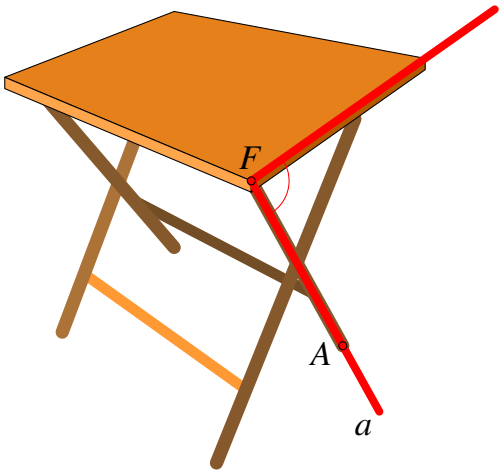


Bài 10. Ông An thiết kế một mái che giếng trời hình chóp di động để có thể tùy thích lấy ánh sáng cho ngôi nhà của mình. Biết rằng đáy của hình chóp là hình chữ nhật có độ dài 2 cạnh đáy là 3 m và 4 m và độ cao của giếng trời là 2 m (hình vẽ minh hoạ). Hỏi hai mặt bên kề nhau tạo với nhau góc bao nhiêu độ (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

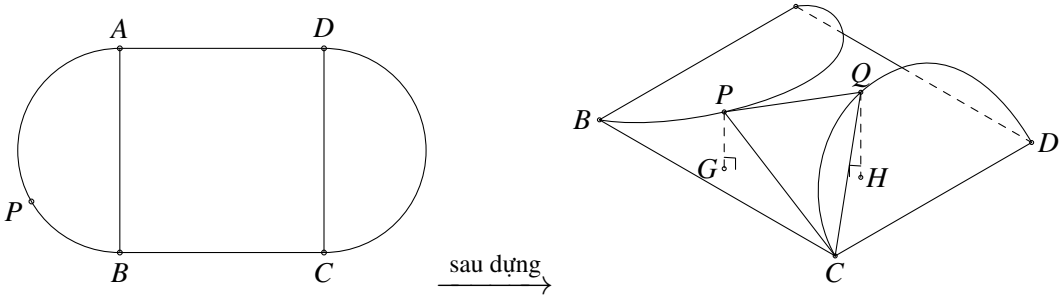


Bài 11. Trong một khung lưới ô vuông gồm các hình lập phương, xét các đường thẳng đi qua hai nút lưới (mỗi nút lưới là đỉnh của hình lập phương), người ta đưa ra một cách kiểm tra độ lệch về phương của hai đường thẳng bằng cách gắn hệ tọa độ $Oxyz$ vào khung lưới ô vuông và tìm vector chỉ phương của hai đường thẳng đó. Giả sử, đường thẳng a đi qua hai nút lưới $M(1;1;2)$ và $N(0;3;0)$, đường thẳng b đi qua hai nút lưới $P(1;0;3)$ và $Q(3;3;9)$. Sau khi làm tròn đến hàng đơn vị của độ thì góc giữa hai đường thẳng a và b bằng n° (n là số tự nhiên). Giá trị của n bằng bao nhiêu?

Bài 12. Một chiếc bàn gấp gọn đã được thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$. Điểm A là chân bàn tiếp xúc với mặt đất thuộc đường thẳng $a\colon \begin{cases} x=-3+t \\ y=1+t \\ z=-2+4t \end{cases}$ cắt mặt bàn là mặt phẳng $(P)\colon x+y-2z+6=0$ tại điểm F. Độ dài chân bàn $FA=40\sqrt{3}$ cm, khi đó độ cao của mặt bàn tính từ mặt đất là là bao nhiêu cm?



Bài 13. Cho tờ giấy có hình dạng như sau: một hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 8, ở hai cạnh đối diện AB và CD lần lượt gắn hai nửa đường tròn có đường kính là mỗi cạnh ấy. Trên cung tròn AB lấy 2 điểm chia thành ba đoạn bằng nhau, lấy điểm gần B là P. Trên cung tròn CD, lấy điểm Q chia cung tròn CD thành hai đoạn bằng nhau. Gấp tờ giấy lên theo hai đường thẳng AB và CD sao cho hai nửa đường tròn dựng đứng (cùng phía) lên khỏi mặt phẳng $ABCD$. Khi đó, từ hai điểm P và Q ta hạ các đường vuông góc xuống mặt phẳng $(ABCD)$ được các hình chiếu là G và H.



Người ta cho biết G và H nằm bên trong hình vuông $ABCD$ sao cho $PG=\sqrt{3}; QH=2\sqrt{3}$. Gọi θ là góc giữa mặt phẳng (PCQ) và mặt phẳng $(ABCD)$. Hỏi giá trị của $70\cos^2\theta$ bằng bao nhiêu?

Giải các bài toán sau bằng phương pháp tọa độ.

Bài 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCM) (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 15 (CT - THPTQG 2025). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với $AB = 6$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trọng tâm H của tam giác ABC và $SH = 3\sqrt{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD bằng bao nhiêu? (Không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần trăm)

Bài 16 (CT - THPTQG 2026). Cho hình lập phương $ABCD.MNPQ$ có cạnh bằng 14. Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng AB. Khoảng cách từ điểm P đến mặt phẳng (MED) bằng bao nhiêu (không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần mười)?

Bài 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và SA vuông góc với đáy, $SA = 3$, $AB = 2$. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) *(làm tròn đến hàng phần trăm)*.

Bài 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $SA = \sqrt{5}, AB = \sqrt{2}, BC = 2, \widehat{ABC} = 135^\circ$. Số đo của góc nhị diện $[A, SC, B]$ bằng m°. Giá trị của m bằng bao nhiêu? (*Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*).

Bài 19. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1 và cạnh bên $SA = 2$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AB. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Bài 20. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2$, $BC = 3$ và $CC' = 6$. Gọi I là trung điểm của AA' và G là trọng tâm tam giác BCD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'D'$ và IG bằng bao nhiêu (*không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần trăm*)?

Bài 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB = 2a$, $AD = DC = CB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3a$. Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và DM bằng $\dfrac{xa}{y}$ (với $x, y \in \mathbb{N}$, tối giản). Tính $x + y + xy$.

Bài 22. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 4, khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD bằng 2. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Bài 23. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh là $\sqrt{2}$, $A'B = \sqrt{6}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD.

Bài 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh bằng 6 và góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm G của tam giác ABC và số đo góc nhị diện $[S, AC, G]$ bằng 60°. Khi đó, khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AC bằng $\dfrac{b}{\sqrt{a}}$ (với $a, b \in \mathbb{Z}$). Giá trị của $a^2 - b^2$ bằng bao nhiêu?

III. ĐỀ KIỂM TRA CUỐI BÀI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x=-2t \\ y=6+t \\ z=1-3t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+3z+12=0$. Tìm sin của góc giữa d và (P)?

Ⓐ $0°$. Ⓑ 1. Ⓒ 0. Ⓓ $90°$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, hãy tính số đo góc α giữa đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 5x+11y+2z-4=0$.

Ⓐ $-30°$. Ⓑ $30°$. Ⓒ $60°$. Ⓓ $45°$.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$ và $d_2\colon \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{1}$. Góc giữa hai đường thẳng đó bằng

Ⓐ $90°$. Ⓑ $45°$. Ⓒ $30°$. Ⓓ $60°$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;1;0)$, góc giữa đường thẳng OA và mặt phẳng (Oxz) bằng

Ⓐ $60°$. Ⓑ $45°$. Ⓒ $90°$. Ⓓ $0°$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-2}$ và $d_2\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=-2t \\ z=-3+t \end{cases}$ bằng

Ⓐ $30°$. Ⓑ $90°$. Ⓒ $45°$. Ⓓ $60°$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính góc giữa mặt phẳng $(P)\colon 2x-3y-4=0$ và mặt phẳng (Oxy).

Ⓐ $30°$. Ⓑ $90°$. Ⓒ $60°$. Ⓓ $0°$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, góc giữa đường thẳng d chứa trục Ox và mặt phẳng $(P)\colon 3y-z+5=0$ bằng

Ⓐ $90°$. Ⓑ $60°$. Ⓒ $0°$. Ⓓ $30°$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x=2-t \\ y=1+t \\ z=5 \end{cases}$ và $d_2\colon \begin{cases} x=-2t' \\ y=-3+t' \\ z=1-2t'. \end{cases}$

Ⓐ $60°$. Ⓑ $45°$. Ⓒ $30°$. Ⓓ $90°$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y-3z+5=0$ và $(Q)\colon 2x+y-3z-1=0$ bằng (kết quả làm tròn đến độ)

Ⓐ $20°$. Ⓑ $22°$. Ⓒ $25°$. Ⓓ $27°$.

Câu 10. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \begin{cases} x=-2+t \\ y=-4+2t \\ z=-1+2t \end{cases}$ và $\Delta_2\colon \begin{cases} x=2-2m \\ y=2-2m \\ z=3+m \end{cases}$.

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng. Tính $\cos\varphi$?

Ⓐ $\dfrac{5}{6}$. Ⓑ $\dfrac{1}{9}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $\dfrac{4}{9}$.

Câu 11. Tính góc α giữa mặt $(P)\colon x+z-4=0$ và mặt phẳng (Oxy).

Ⓐ $45°$. Ⓑ $30°$. Ⓒ $90°$. Ⓓ $60°$.

Câu 12. Cho mặt phẳng $(P)\colon x+y-\sqrt{2}z+5=0$. Tính góc φ giữa mặt phẳng (P) và trục Oy.

Ⓐ $\varphi=60°$. Ⓑ $\varphi=45°$. Ⓒ $\varphi=90°$. Ⓓ $\varphi=30°$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=3 \end{cases}$ và $d_2\colon \begin{cases} x=1-t \\ y=2 \\ z=-2+t \end{cases}$.

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

a) Đường thẳng d_1 có một vectơ chỉ phương là $\vec{u_1}=(1;1;3)$.

b) Góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 bằng $60°$.

c) Đường thẳng d_2 có một vectơ chỉ phương là $\vec{u_2}=(-1;0;1)$.

d) Giá trị cosin của góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 bằng $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+2z-1=0$ và hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(0;1;-1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

a) Giá trị cosin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (P) bằng $\dfrac{2}{\sqrt{21}}$.

b) Đường thẳng AB vuông góc với mặt phẳng (P).

c) Mặt phẳng (OAB) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-1;1;1)$.

d) Giá trị cosin của góc giữa mặt phẳng (OAB) và mặt phẳng (P) bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 5x+11y+2z-4=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

a) Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;-2;1)$.

b) Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-5;-11;2)$.

c) Giá trị cosin của góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng $\dfrac{1}{2}$.

d) Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng bằng 30°.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x+4y+5z+2=0$ và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x-2y+1=0$ và $(\beta): x-2z-3=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

a) Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;4;5)$.

b) Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng 30°.

c) Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-1;1)$.

d) Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại $A\left(\frac{7}{15};\frac{11}{15};-\frac{19}{15}\right)$.

Phần III. Trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6 vào ô kết quả.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+3}{1}$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x+2y-z+7=0$. Góc giữa d và (P) bằng bao nhiêu độ?

KQ: | | | | |

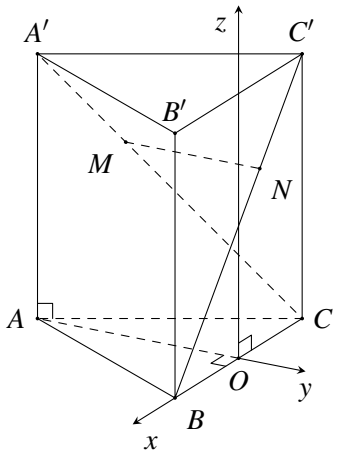
Câu 2. Cho hai điểm $A(1;-1;1)$, $B(2;-2;4)$. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa A,B và tạo với mặt phẳng $(\alpha): x-2y+z-7=0$ một góc 60°. KQ: | | | | |

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=-2-t \end{cases}$ và $(P): -x+2y+2z+5=0$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(-1;0;-1)$ cắt đường thẳng Δ và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất. vectơ chỉ phương $\vec{u_d}=(a;b;c)$. Tính tổng $a+2b-3c$. KQ: | | | | |

Câu 4. Khi gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (*đơn vị mỗi trục tính theo km*) vào mỗi sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay ở vị trí $A\left(7;-4;\frac{4}{5}\right)$ sẽ hạ cánh ở vị trí $B(7;11;0)$ trên đường băng. Góc giữa đường bay (một phần của đường thẳng AB) và sân bay (một phần của mặt phẳng (Oxy)) bằng bao nhiêu độ (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị*)?

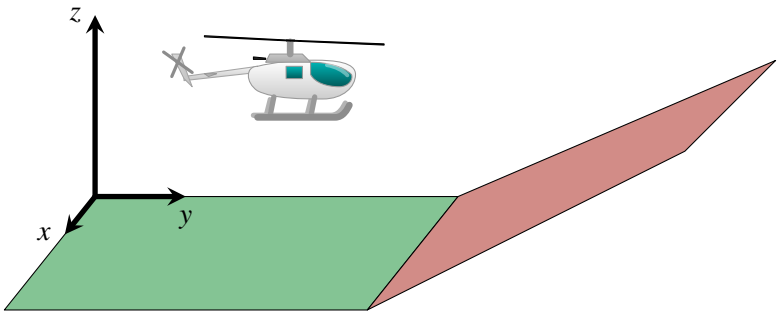
KQ: | | | | |

Câu 5. Một kiến trúc sư muốn xây dựng một tòa nhà biểu tượng độc lạ cho thành phố. Trên bản thiết kế tòa nhà có hình dạng là một khối lăng trụ tam giác đều, có cạnh bên bằng cạnh đáy và dài 320 mét (tham khảo hình vẽ). Kiến trúc sư muốn xây dựng một cây cầu MN bắc xuyên tòa nhà (điểm đầu thuộc cạnh $A'C$, điểm cuối thuộc cạnh BC') và cây cầu này sẽ được dát vàng với đơn giá 4 tỷ đồng trên 1 mét dài. Vì vậy để đáp ứng bài toán kinh tế, kiến trúc sư phải chọn vị trí cây cầu sao cho MN ngắn nhất. Khi đó giá xây cây cầu này hết bao nhiêu tỉ đồng (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?



KQ: | | | | |

Câu 6. Một chiếc trực thăng bay trong điều kiện tầm nhìn kém tiến về phía một sườn núi dốc lên, được mô tả bởi các điểm $P(0;5;0)$, $Q(5;10;2)$, $R(10;10;2)$.



Trực thăng bay qua các điểm $A(1;6;1)$ và $B(2;7;1)$ (đơn vị km).
Nếu trực thăng tiếp tục giữ nguyên hướng bay hiện tại, sẽ va vào sườn núi. Vì thế để tránh tai nạn, tại điểm B phi công giữ nguyên hướng theo phương $x-y$ nhưng bay lên với góc nâng sao cho đường bay song song với sườn núi. Tính góc mà phi công đã thay đổi hướng bay tại điểm B (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười, đơn vị độ*). KQ: | | | | |

—Hết—

BẢNG ĐÁP ÁN BÀI TẬP CUỐI BÀI

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	C	2	D	3	C	4	B	5	B	6	C	7	C	8	C	9	A	10	B		
11	C	12	B																		

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a S b Đ c Đ d S	Câu 2.	a Đ b Đ c S d S
Câu 3.	a S b Đ c Đ d Đ	Câu 4.	a S b S c Đ d S
Câu 5.	a Đ b S c S d Đ	Câu 6.	a Đ b Đ c S d S
Câu 7.	a Đ b S c Đ d Đ	Câu 8.	a S b Đ c Đ d S
Câu 9.	a Đ b S c Đ d S	Câu 10.	a S b S c S d S
Câu 11.	a Đ b Đ c S d Đ	Câu 12.	a Đ b S c Đ d Đ
Câu 13.	a Đ b Đ c S d S	Câu 14.	a Đ b S c Đ d Đ
Câu 15.	a S b Đ c S d S	Câu 16.	a S b Đ c S d S
Câu 17.	a Đ b Đ c S d Đ		

BẢNG ĐÁP ÁN ĐỀ KIỂM TRA CUỐI BÀI

ĐÁP ÁN PHẦN I

1. B	2. B	3. A	4. C	5. D	6. B	7. C	8. B	9. B
10. D	11. A	12. D						

ĐÁP ÁN PHẦN II

Câu 1.	a S b Đ c Đ d S	Câu 2.	a S b S c Đ d Đ
Câu 3.	a Đ b S c S d Đ	Câu 4.	a Đ b S c S d Đ

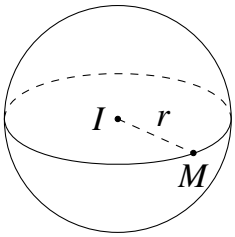
ĐÁP ÁN PHẦN III

Câu 1.				Câu 2.				Câu 3.				Câu 4.				Câu 5.				Câu 6.			
3	0			2				9				3				5	7	2		1	5	,	8

§4 PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Khái niệm mặt cầu



- Trong không gian, cho điểm I và số dương R. Mặt cầu tâm I, bán kính R, kí hiệu $S(I;R)$ là tập hợp các điểm M trong không gian thỏa mãn $IM=R$. Đoạn thẳng nối hai điểm thuộc mặt cầu và đi qua tâm I gọi là đường kính của mặt cầu.
- Cho mặt cầu $S(I;R)$.
  - ☆ Nếu $IM=r$ thì M nằm trên mặt cầu.
  - ☆ Nếu $IM<r$ thì M nằm trong mặt cầu.
  - ☆ Nếu $IM>r$ thì M nằm ngoài mặt cầu.

2) Phương trình mặt cầu

Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$, bán kính R có phương trình

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Nhận xét: Phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình của mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Xác định tâm và bán kính của mặt cầu cho trước

- **Loại 1.** Cho (S): $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$. Khi đó
  - ① Tâm $I(a;b;c)$ (đổi dấu số trong dấu ngoặc);
  - ② Bán kính r (Rút căn vế phải).
- **Loại 2.** Cho (S): $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$. Khi đó
  - ① Tâm $I(a,b,c)$ (đổi dấu hệ số của x, y, z và chia đôi);
  - ② Bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Ví dụ 1

Xác định tâm và bán kính của mặt cầu có phương trình:

a) $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=81$;

b) $(S):(x+1)^2+(y-5)^2+(z+12)^2=19$;

c) $(S):x^2+y^2+z^2=16$.

Ví dụ 2

Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình mặt cầu? Xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

a) $x^2+y^2+z^2-2y+2z-7=0$.

b) $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z+7=0$.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Xác định tâm và bán kính của mặt cầu có phương trình:

a) $(S):(x-1)^2+(y-5)^2+z^2=144$;

b) $(S):(x+2)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=23$;

c) $(S):x^2+y^2+(z-9)^2=36$.

Bài 2 ☆

Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình mặt cầu? Xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

a) $x^2+y^2+2z^2-12x-4y-6z+1=0$;

b) $x^2+y^2-2x+y+4z+2=0$;

c) $x^2+y^2+z^2+4x-2y-2z-11=0$;

d) $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+9=0$.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Bài 3 ☆

Trong không gian $Oxyz$, tìm tất cả giá trị của tham số m để các phương trình sau là phương trình mặt cầu.

a) $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my-2mz+5m^2+9=0$;

b) $x^2+y^2+z^2+2(m+2)x-2(m-1)z+3m^2-5=0$.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Dạng 2 Viết phương trình mặt cầu

Phương pháp chung: Cần xác định được tọa độ tâm $I(a;b;c)$ và độ dài bán kính r.

Các bài toán cơ bản:

① Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và đi qua điểm $A(x_A;y_A;z_A)$ thì bán kính

$$r = IA = \sqrt{(x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2 + (z_A - z_I)^2}.$$

② Mặt cầu (S) có đường kính AB thì

- Tâm $I(a;b;c)$ là trung điểm của AB hay $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.
- Bán kính $r = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}{2}$.

③ Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ thì bán kính

$$r = \mathrm{d}(I,(\alpha)) = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

④ Mặt cầu qua bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng (ngoại tiếp tứ diện $ABCD$)
Gọi (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (*)
Thay tọa độ 4 điểm A, B, C, D vào (*), ta được hệ phương trình 4 ẩn số a, b, c, d; Giải tìm a, b, c, d. Suy ra tâm $I(a,b,c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Ví dụ 1

Viết phương trình mặt cầu (S):

a) Có tâm $I(3;-2;-4)$, bán kính $R = 10$;

b) Có đường kính EF với $E(3;-1;8)$ và $F(7;-3;0)$;

c) Có tâm $M(-2;1;3)$ và đi qua điểm $N(2;-3;-4)$.

d) Đi qua bốn điểm $A(1;1;0)$, $B(1;0;1)$, $C(0;1;1)$, $D(1;2;3)$.

e) Có tâm $I(2;1;-1)$, tiếp xúc với mặt phẳng tọa độ (Oyz).

Ví dụ 2

Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua $A(-1;2;0)$, $B(-2;1;1)$ và có tâm nằm trên trục Oz.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

a) Có tâm $I(2;-3;-4)$, bán kính bằng 4;

b) Có tâm $I(2;-1;0)$ và đi qua điểm $M(4;1;-2)$;

c) Có đường kính AB với $A(0;1;3)$, $B(4;-5;-1)$;

d) Có tâm $I(1;-2;3)$ và tiếp xúc với trục Oy;

e) Có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với $(P)\colon x-2y-2z-8=0$.

Bài 2 ☆

Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$, biết $A(1;2;-4)$; $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$, $D(1;0;4)$.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Dạng 3 Vị trí tương đối của điểm, của mặt phẳng với mặt cầu

Bài toán 1: Xét điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và mặt cầu S: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0$ (1). Thay tọa độ điểm M vào vế trái của (1), nếu

① Kết quả bằng 0 thì $M \in (S)$.

② Kết quả ra số âm thì M nằm trong (S).

③ Kết quả ra số dương thì M nằm trong (S).

Bài toán 2: Cho mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$, bán kính r và mặt phẳng (P): $Ax+By+Cz+D=0$.

① Nếu $\mathrm{d}(I,(P)) = \dfrac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} > r$ thì (P) và (S) không có điểm chung.

② Nếu $\mathrm{d}(I,(P)) = \dfrac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = r$ thì (P) tiếp xúc (S).

③ Nếu $\mathrm{d}(I,(P)) = \dfrac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} < r$ thì (P) cắt (S).

Ví dụ 1

Trong không gian $Oxzy$, cho mặt cầu (S) : $(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=5$. Hỏi gốc tọa độ $O(0;0;0)$ nằm trong, nằm ngoài hay thuộc mặt cầu (S)?

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Ví dụ 2

Cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+y^2+(z+1)^2=9$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-2z-3=0$.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S).

b) Biết mặt cầu (S) cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn (C). Tính bán kính r của đường tròn (C).

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;4)$ và bán kính $R=5$. Các điểm $A(3;1;5)$, $B(-1;11;14)$, $C(6;2;4)$ nằm trong, nằm trên hay nằm ngoài mặt cầu (S)?

Bài 2 ☆

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y+z-m^2+4m-5=0$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-6=0$. Giá trị của m để (P) tiếp xúc (S) là

Ⓐ $m=5$ Ⓑ $m=-1$

Ⓒ $m=-1$ hoặc $m=5$ Ⓓ $m=1$ hoặc $m=-5$

Bài 3 ☆

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1)$ và cắt mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+7=0$ theo một đường tròn có đường kính bằng 8. Phương trình mặt cầu (S) là

Ⓐ $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$ Ⓑ $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=81$

Ⓒ $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=9$ Ⓓ $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=5$

Dạng 4 Toán thực tế áp dụng mặt cầu

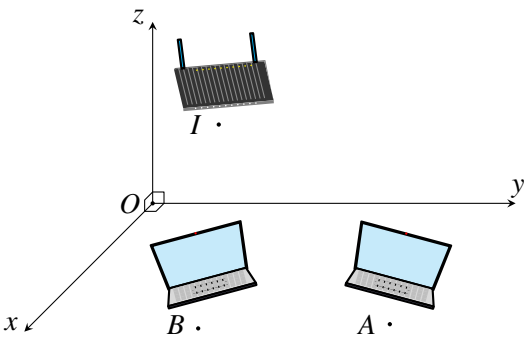
Ví dụ 1

Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một router phát sóng wifi có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(4;2;10)$.

a) Cho biết bán kính phủ sóng wifi là 40 m. Viết phương trình mặt cầu (S) biểu diễn ranh giới của vùng phủ sóng.

b) Một người sử dụng máy tính tại điểm $M(6;12;0)$. Hãy cho biết điểm M nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu (S) và người đó có thể sử dụng được sóng wifi của router nói trên hay không?

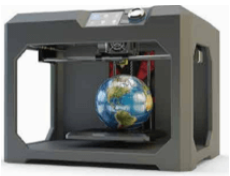
c) Câu hỏi tương tự đối với người sử dụng máy tính ở điểm $N(14;6;50)$.



Ví dụ 2

Đầu in phun của một máy in 3D đang in bề mặt của một mặt cầu như *Hình 8* có phương trình

$$x^2+y^2+z^2+\frac{1}{8}x-\frac{1}{8}y-z+\frac{1}{16}=0.$$



Hình 8

Tính khoảng cách từ đầu in phun đến tâm mặt cầu.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Trong hệ trục $Oxyz$ cho trước (đơn vị trên trục là mét), một trạm thu phát sóng 5G có bán kính vùng phủ sóng ở ngưỡng 600 m được đặt ở vị trí $I(200;450;60)$.

a) Lập phương trình mặt cầu mô tả ranh giới ngoài và biểu diễn vùng phủ sóng (phía trong).

b) Nếu người dùng điện thoại đang ở vị trí $A(-100;50;10)$ thì người đó có thể sử dụng dịch vụ của trạm này không? Vì sao?



. . . . . .

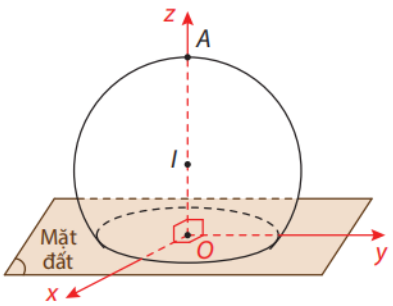
. . . . . .

. . . . . .

Bài 2 ☆

Giả sử người ta biểu diễn mô phỏng của toà nhà Ericsson Globe trong hệ trục toạ độ $Oxyz$ bởi một mặt cầu có tâm I, đường kính 110 m và $OA = 85$ m như hình vẽ (đơn vị trên trục là mét). Hãy viết phương trình của mặt cầu này.





BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16$. Bán kính của mặt cầu bằng

Ⓐ 16. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 8.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

Ⓐ $I(-2;1;-1)$, $R=3$. Ⓑ $I(2;-1;1)$, $R=9$.

Ⓒ $I(2;-1;1)$, $R=3$. Ⓓ $I(-2;1;-1)$, $R=9$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-6=0$. Tâm của mặt cầu có tọa độ là

Ⓐ $(1;-2;-3)$. Ⓑ $(-2;4;0)$. Ⓒ $(-1;2;-3)$. Ⓓ $(-1;2;3)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-\sqrt{2}x+y-z-1=0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S).

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ $R=\sqrt{2}$. Ⓓ $R=\sqrt{3}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu đã cho lần lượt là

Ⓐ $I(1;-2;3)$, $R=5$. Ⓑ $I(1;2;-3)$, $R=5$.

Ⓒ $I(-1;-2;3)$, $R=5$. Ⓓ $I(1;-2;-3)$, $R=5$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của một mặt cầu?

Ⓐ $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$. Ⓑ $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+3=0$.

Ⓒ $x^2+y^2-z^2-2x-2y-2z-1=0$. Ⓓ $x^2+y^2+2z^2-2x-2y-2z-1=0$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hỏi trong các phương trình sau phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

Ⓐ $x^2+y^2-z^2-2x+4y+4z+5=0$. Ⓑ $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-2=0$.

Ⓒ $x^2+y^2+z^2+x-2y+3=0$. Ⓓ $x^2-y^2+z^2-2x+6y-8z+1=0$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=6$. Điểm nào dưới đây thuộc mặt cầu (S)?

Ⓐ $B(3;1;1)$. Ⓑ $A(3;-2;2)$. Ⓒ $C(3;-2;3)$. Ⓓ $D(1;0;4)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(2;1;-1)$ bán kính bằng 3 có phương trình là

Ⓐ $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=3$. Ⓑ $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=36$.

Ⓒ $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$. Ⓓ $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=9$.

Câu 10. Phương trình của mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;3)$, bán kính $R=4$ là

Ⓐ $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=16$. Ⓑ $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=16$.
Ⓒ $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=4$. Ⓓ $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(-7;8;9)$ đi qua $A(-5;6;10)$ có phương trình là

Ⓐ $(x+7)^2+(y-8)^2+(z-9)^2=9$. Ⓑ $(x+7)^2+(y-8)^2+(z-9)^2=81$.
Ⓒ $(x+7)^2+(y-8)^2+(z-9)^2=3$. Ⓓ $(x-7)^2+(y+8)^2+(z+9)^2=9$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;2)$ và $B(3;1;0)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình là

Ⓐ $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=8$. Ⓑ $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$.
Ⓒ $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=8$. Ⓓ $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=2$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(-3;0;5)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

Ⓐ $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=26$. Ⓑ $(x+1)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=6$.
Ⓒ $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=6$. Ⓓ $(x+1)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=24$.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z-1=0$. Mặt cầu (S) tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) có phương trình

Ⓐ $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$. Ⓑ $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=3$.
Ⓒ $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$. Ⓓ $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=3$.

Câu 15. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Hãy viết phương trình mặt cầu có tâm $I(2;2;3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz).

Ⓐ $(x+2)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=4$. Ⓑ $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=13$.
Ⓒ $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$. Ⓓ $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=2$.

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;-1)$, $B(3;2;-4)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y+z-6=0$.

a) Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB là $\vec{a}=(1;0;-1)$.

b) Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;2;1)$.

c) Đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình chính tắc là $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$.

d) Mặt cầu đường kính AB có phương trình là $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2+\left(z-\dfrac{5}{2}\right)^2=18$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có đường kính AB với tọa độ các điểm $A(1;2;-4)$, $B(3;-2;0)$ và mặt cầu $(S')\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0$.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(2;0;-2)$.

b) Phương trình mặt cầu $(S)\colon (x+2)^2+y^2+(z-2)^2=9$.

c) Điểm $M(0;1;-5)$ nằm trong mặt cầu (S).

d) Mặt cầu (S') có cùng bán kính với mặt cầu (S).

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$ mặt cầu $(S')\colon (x-2)^2+y^2+(z+1)^2=16$, điểm $A(3;1;1)$.

a) Mặt cầu (S) có tâm là $I(1;2;3)$.

b) Mặt cầu (S) bán kính $R=25$.

c) Mặt cầu (S') có bán kính $R'=4$.

d) Mặt cầu tâm A và có bán kính bằng 6 có phương trình $(x-3)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(4;-1;2)$; mặt phẳng $(P)\colon x-y+z-1=0$ và mặt cầu (S) có tâm là A và đi qua điểm O

a) Một véctơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(1;-1;1)$.

b) Đường thẳng (d) đi qua A và vuông góc với (P) có phương trình chính tắc là $\dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$.

c) Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (Oxy) và (P), ta có $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

d) (S) có phương trình là $(x-4)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=21$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$ có tâm I và bán kính R.

a) Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$, bán kính $R=3$.

b) Điểm $A(0;2;-3)$ nằm trong mặt cầu.

c) Điểm $J(1;2;3)$ nằm ngoài mặt cầu và khoảng cách từ tâm I đến điểm J bằng $\sqrt{10}$.

d) Khoảng cách từ tâm I đến tâm mặt cầu $(S')\colon x^2+y^2+(z-1)^2=3$ bằng $\sqrt{2}$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$, $B(-4;7;5)$. Gọi (S) là mặt cầu có đường kính AB.

a) Tâm của mặt cầu (S) có tọa độ là $(-3;4;4)$.

b) Bán kính của mặt cầu (S) là $2\sqrt{19}$.

c) Phương trình của mặt cầu (S) là $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=19$.

d) Điểm M bất kỳ thuộc mặt cầu (S) thì $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

a) Tọa độ tâm I của mặt cầu là $(1;0;-2)$.

b) Diện tích mặt cầu bằng 16π (đvdt).

c) Điểm $A(1;2;3)$ nằm trong mặt cầu.

d) Số điểm chung của đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt cầu (S) bằng 0.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$.

a) (S) có tâm $I(1;-2;0)$ và bán kính $R=3$.

b) (S) đi qua gốc tọa độ O.

c) Điểm $M(1;-2;4)$ nằm trong mặt cầu (S).

d) (S) cắt trục Oz tại các điểm có tọa độ $(0;0;2)$ và $(0;0;-2)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+2}{2}$ và mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;0)$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB=8$. Xét

tính đúng sai của các khẳng định sau

a) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(3;2;0)$ và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là $x+2y+2z-7=0$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông của I lên d. Khi đó $H(1;-1;2)$.

c) Mặt cầu (S) có bán kính $R=5$.

d) Phương trình mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y-2)^2+z^2=25$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon x+2y+2z-3=0$. Khi đó

a) Phương trình (β) đi qua $M(2;-3;1)$ và song song với (α) là $x+2y+2z+2=0$.

b) Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1;-2;3)$ và vuông góc với (α) là $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=3+2t \end{cases}$.

c) Phương trình mặt cầu tâm $I(1;1;-3)$ tiếp xúc với (α) là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=2$.

d) Phương trình mặt cầu $(S)\colon (x+2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=25$ cắt (α) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 4.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;2), B(1;1;0)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z-1)^2=\dfrac{1}{4}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$.

b) Điểm A nằm trong mặt cầu (S).

c) Mặt cầu tâm A và đi qua B có bán kính bằng $\sqrt{6}$.

d) Điểm M thay đổi thuộc (S), giá trị nhỏ nhất của biểu thức MA^2+2MB^2 bằng 5.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;1)$, bán kính $R=3$.

b) Điểm $M(1;3;5)$ nằm trong mặt cầu.

c) Mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z+8=0$ cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r=2$.

d) Đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=3-t \end{cases}$ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B. Khi đó, diện tích tam giác IAB là $\dfrac{\sqrt{182}}{3}$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+\dfrac{9}{2}=0$ và hai điểm $A\,(0;2;0)$, $B\,(2;-6;-2)$. Điểm $M\,(a;b;c)$ thuộc (S) thỏa mãn $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ có giá trị nhỏ nhất.

a) Tâm của mặt cầu (S) là $I\,(-1;2;1)$.

b) Điểm A nằm trong mặt cầu (S).

c) Phương trình mặt cầu (S') tâm A đi qua điểm B là $x^2+(y-2)^2+z^2=72$.

d) Tổng $a+b+c$ bằng 1.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(10;20;30)$ với bán kính phủ sáng là 3 km.

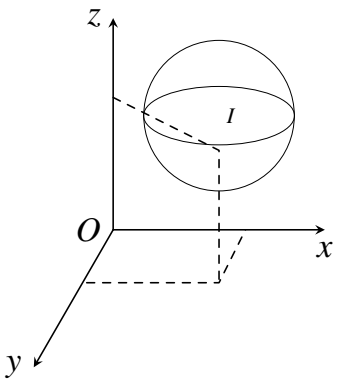
a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là $(x-10)^2+(y-20)^2+(z-30)^2=3000^2$.

b) Người đi biển ở vị trí $A(50;20;0)$ nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

c) Người đi biển ở vị trí $B(4030;50;40)$ nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

d) Nếu hai người đi biển có thể nhìn thấy ánh sáng của ngọn hải đăng thì khoảng cách giữa hai người đó không quá 6 km.

Câu 15. Hình vẽ mô phỏng một trạm thu phát sóng điện thoại di động đặt ở vị trí $I(1;2;2)$ trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) và được thiết kế với đường kính phủ sóng là 10000 m.



a) Bán kính vùng phủ sóng của trạm phát sóng điện thoại là 5 km.

b) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới miền bên trong và bên ngoài vùng phủ sóng của trạm phát sóng điện thoại là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=25$.

c) Điểm $A(1;2;6)$ nằm trong vùng phủ sóng của trạm phát sóng điện thoại.

d) Nhà bạn Mai và bạn Nam có vị trí tọa độ lần lượt là $M(1;2;7)$ và $N(5;5;5)$. Nếu cả hai bạn Mai và Nam dùng điện thoại tại nhà thì đều có thể sử dụng dịch vụ của trạm phát sóng điện thoại này.

Câu 16. Một tiểu hành tinh nhỏ (coi như một hạt) được phát hiện đang bay theo chuyển động thẳng đều trong không gian $Oxyz$ với O là tâm Trái Đất. Tại thời điểm $t=0$, tiểu hành tinh ở vị trí $A(10000;5000;8000)$ (km), bay theo hướng vectơ $\vec{v}=(-300;-100;-160)$ (km/h). Coi bề mặt Trái Đất là mặt cầu bán kính 6371 (km).

a) Phương trình mặt cầu biểu diễn bề mặt Trái Đất là $x^2+y^2+z^2=40589641$.

b) Phương trình đường thẳng mô tả quỹ đạo của tiểu hành tinh là $\begin{cases} x=10000-300t \\ y=5000-100t \\ z=8000-160t \end{cases}$, $t\geq 0$.

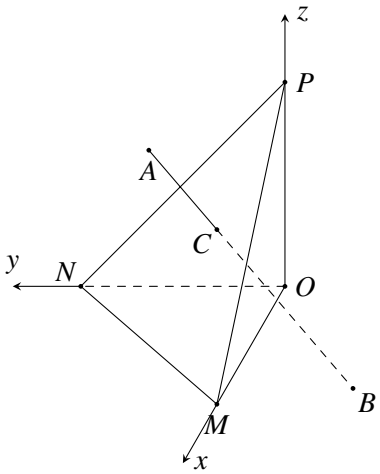
c) Tại thời điểm 5 giờ kể từ khi phát hiện, tiểu hành tinh ở vị trí có tọa độ $(8500;4500;7200)$ (km).

d) Thời điểm tiểu hành tinh va chạm với Trái Đất là sau 21 giờ 43 phút (làm tròn đến đơn vị phút).

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo trên các trục là km), một máy bay phản lực đang bay thẳng theo lộ trình Δ là đường thẳng có phương trình $\Delta\colon \dfrac{x-50}{3}=\dfrac{y+20}{-4}=\dfrac{z-10}{1}$. Radar tại trạm kiểm soát không lưu phát hiện một khối mây dông tích điện nguy hiểm có dạng hình cầu (S) với tâm $C(200;-300;60)$ và bán kính $R=80$ km. Tại thời điểm quan sát, máy bay đang ở vị trí $A(50;-20;10)\in\Delta$.

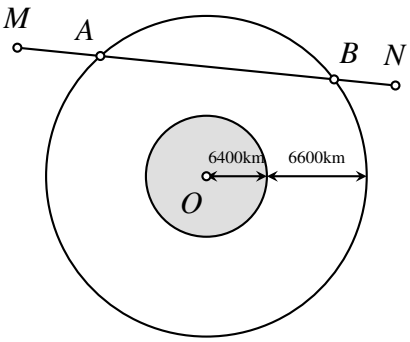
a) Một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}=(5;-2;1)$.
b) Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng $(P)\colon 4x+3y=140$.
c) Nếu tiếp tục giữ nguyên lộ trình Δ thì máy bay phản lực sẽ bay xuyên qua (bay vào bên trong) khối mây dông có dạng hình cầu (S).
d) Gọi M là điểm trên đường thẳng Δ mà tại đó máy bay phản lực gần tâm C của hình cầu (S) nhất. Biết rằng tốc độ máy bay phản lực không đổi là 500 km/h. Thời gian máy bay phản lực đó di chuyển từ vị trí điểm A đến điểm M nhỏ hơn 30 phút.

Câu 18. Trong không gian cho hệ tọa độ $Oxyz$, các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz và độ dài của mỗi vectơ đơn vị đó bằng 1 kilômét. Máy bay bắt đầu quá trình hạ cánh tại điểm $A(3;3;4)$ ở thời điểm ban đầu và chuyển động thẳng đều hướng về vị trí $B(3;0;0)$ trên đường băng. Tại gốc tọa độ O, sân bay thiết lập một trạm radar cảnh báo thiên tai có vùng phủ sóng được mô phỏng bởi một mặt cầu (S) bán kính $R=5$ km. Trong quá trình hạ cánh, máy bay phải xuyên qua một lớp mây dày đặc được mô phỏng bởi mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $M(5;0;0)$, $N(0;10;0)$ và $P(0;0;10)$. Gọi C là vị trí máy bay bắt đầu xuyên qua đám mây.



a) Phương trình mặt phẳng (α) mô phỏng lớp mây là $2x+y+z-10=0$.
b) Phương trình mặt cầu (S) mô phỏng vùng phủ sóng của radar là $x^2+y^2+z^2=25$.
c) Tại vị trí điểm C, máy bay không nằm trong vùng phủ sóng hiệu quả của radar.
d) Tổng độ dài quãng đường máy bay di chuyển trong vùng phủ sóng của radar nhỏ hơn 4 km.

Câu 19(MH-THPTQG2025). Các thiên thạch có đường kính lớn hơn $140m$ và có thể lại gần Trái Đất ở khoảng cách nhỏ hơn 7500000 km được coi là những vật thể có khả năng va chạm gây nguy hiểm cho Trái Đất. Để theo dõi những thiên thạch này, người ta đã thiết lập các trạm quan sát các vật thể bay gần Trái Đất.



Giả sử có một hệ thống quan sát có khả năng theo dõi các vật thể ở độ cao không vượt quá 6600 km so với mực nước biển. Coi Trái Đất là khối cầu có bán kính 6400 km . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian có gốc O tại tâm Trái Đất và đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 1000 km . Một thiên thạch (coi như một hạt) chuyển động với tốc độ không đổi theo một đường thẳng từ điểm $M(6;20;0)$ đến điểm $N(-6;-12;16)$.

a) Đường thẳng MN có phương trình tham số là $\begin{cases} x=6+3t \\ y=20+8t \\ z=-4t \end{cases}, (t\in\mathbb{R})$.
b) Vị trí đầu tiên thiên thạch di chuyển vào phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là điểm $A(-3;-4;12)$.

c) Khoảng cách giữa vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng mà thiên thạch di chuyển trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 18900 km (kết quả làm tròn đến hàng trăm theo đơn vị ki-lô-mét).

d) Nếu thời gian di chuyển của thiên thạch trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 3 phút thì thời gian nó di chuyển từ M đến N là 6 phút.

Câu 20 (CT - THPTQG 2026 L2). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một trạm thu phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I(2;1;12)$, trong đó một đơn vị độ dài trên mỗi trục tương ứng với 10 mét trên thực tế. Trạm thu phát sóng đó có bán kính phủ sóng là 130 mét. Vùng phủ sóng của trạm thu phát được quy ước là tập hợp tất cả các điểm P trên mặt đất và trong không gian sao cho khoảng cách IP không vượt quá 130 mét. Mặt đất được coi là một phần của mặt phẳng (Oxy) và mỗi người trên mặt đất được coi như một chất điểm.

a) Vùng phủ sóng của trạm thu phát là một phần của hình cầu giới hạn bởi mặt cầu (S) có phương trình $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-12)^2=169$.

b) Giả sử một người cầm điện thoại đang ở vị trí điểm $M(3;1;0)$ và chuyển động thẳng đều trên mặt đất với tốc độ 3,6 km/h. Khi đó, tại giây thứ 40 tính từ lúc xuất phát ở vị trí điểm $M(3;1;0)$, người đó đã đi được ra ngoài vùng phủ sóng của trạm thu phát.

c) Khoảng cách ngắn nhất để một người cầm điện thoại đang ở vị trí có tọa độ $N(8;9;0)$ di chuyển trên mặt đất tới được vùng phủ sóng (theo đơn vị mét) là 100 m.

d) Giả sử một người cầm điện thoại chuyển động thẳng đều trên mặt đất từ vị trí $A(6;9;0)$ đến vị trí $B(-4;b;0)$ với tốc độ 3,6 km/h sao cho khoảng thời gian người đó thuộc vùng phủ sóng đúng bằng 60 giây. Khi đó $b=\dfrac{3}{2}$.

3 Tự luận.

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+(y-2)^2+(z-5)^2=4$. Tính diện tích mặt cầu (S) và thể tích khối cầu (S).

Bài 2. Cho hai điểm $A(1;0;0)$ và $B(5;0;0)$. Chứng minh rằng nếu điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ thì M thuộc mặt cầu (S). Tìm tâm và bán kính của (S).

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$ và $B(-1;-2;3)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc trục Ox và (S) đi qua hai điểm A và B.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=9$ và đường thẳng có phương trình Δ: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$. Tìm vị trí tương đối của đường thẳng Δ và mặt cầu (S).

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1+t\\y=3+2t\\z=2+t\end{cases}$ và điểm $I(1;1;-2)$. Mặt cầu có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A,B sao cho tam giác IAB vuông. Tìm bán kính của mặt cầu (S).

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=0 \end{cases}$. Biết đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B. Tính độ dài đoạn AB.

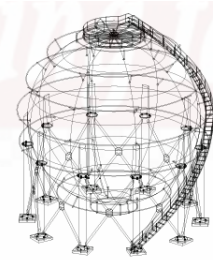
Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ và hai điểm $A(1;3;4)$, $B(4;1;9)$; M là điểm thay đổi trên (S). Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2MA^2-MB^2$. Xác định $m+n$.

Bài 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z+3}{-5}$ và $d_2: \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+1}{-1}$. Trong các mặt cầu tiếp xúc với cả d_1 và d_2, gọi (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất, viết phương trình của (S).

Bài 9. Trong không gian $Oxyz$, giả sử bề mặt Trái Đất (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2=1$. Từ vị trí $A\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, người ta dự định đào một đường hầm xuyên qua lòng đất theo hướng $\vec{v}=(2;2;-3)$. Tính độ dài đường hầm cần đào.

Bài 10. Người ta muốn thiết kế một bồn chứa khí hoá lỏng hình cầu bằng phần mềm 3D (tham khảo hình vẽ). Cho biết phương trình bề mặt của bồn chứa là $(S): (x-2)^2+y^2+(z+1)^2=1$. Phương trình mặt phẳng chứa nắp là $(P): z-6=0$. Tính khoảng cách từ tâm bồn chứa đến mặt phẳng chứa nắp.





Bài 11. Người ta muốn thiết kế một quả địa cầu trong không gian $Oxyz$ bằng phần mềm 3D. Biết phương trình mặt cầu là

$$(S): (x-24)^2+(y-24)^2+(z-24)^2=100.$$

(đơn vị cm) và phương trình đường thẳng trục xoay là

$$d: \frac{x-24}{1}=\frac{y-24}{1}=\frac{z-24}{3,25}.$$

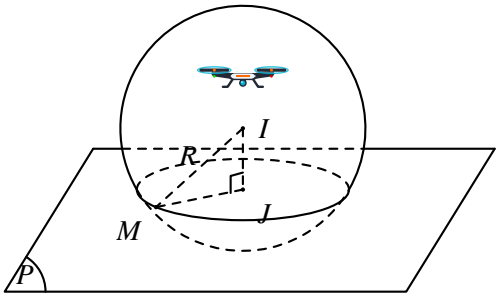


a) Tìm tọa độ giao điểm của d và (S).

b) Tính số đo góc giữa d và trục Oz. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ.

Bài 12. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(21;35;50)$ và ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sáng là 4 km. Nếu người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí $I(21;35;50)$ đến vị trí $D(5\,121;658;0)$. Hãy tìm vị trí cuối cùng trên đoạn ID sao cho người đi biển có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng (kết quả làm tròn tới chữ số thập phân thứ hai).

Bài 13. Một khu vực đã được thiết lập một hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét). Một flycam đang phát sóng wifi bao phủ một vùng không gian bên trong mặt cầu $(S)\colon (x-20)^2+(y-30)^2+(z-10)^2=400$. Một người đang sử dụng máy tính tại điểm M nằm trên điểm giao của mặt cầu (S) và mặt đất $(P)\colon z=0$.



a) Xác định tọa độ âm I và bán kính của mặt cầu (S). Tính khoảng cách IJ của đoạn vuông góc từ I đến (P).

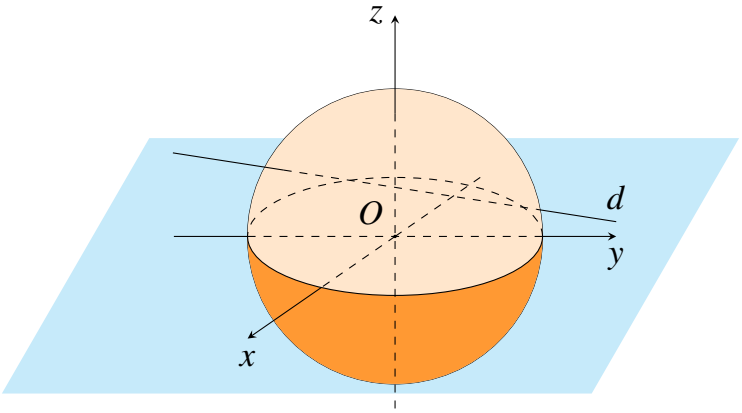
b) Tính độ dài đoạn thẳng JM. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét.

Bài 14. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay có toạ độ $O(0;0;0)$, mỗi đơn vị trên trục ứng với 1 km. Máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát 417 km sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Một máy bay đang ở vị trí $A(-688;-185;8)$, chuyển động theo đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(91;75;0)$ và hướng về đài kiểm soát không lưu (Hình vẽ).

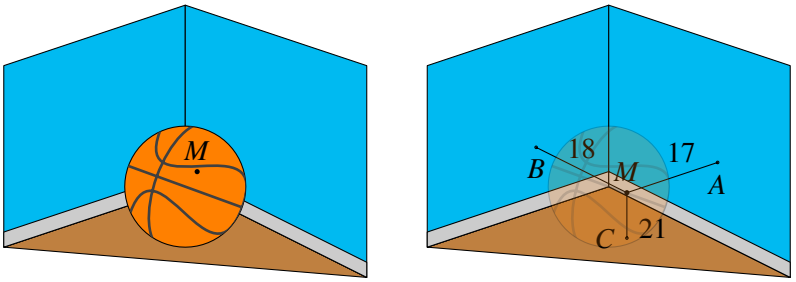
a) Xác định toạ độ của vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa.

b) Xác định toạ độ của vị trí mà máy bay bay gần đài kiểm soát không lưu nhất. Tính khoảng cách giữa máy bay và đài kiểm soát không lưu lúc đó.

c) Xác định toạ độ của vị trí mà máy bay ra khỏi màn hình ra đa.



Bài 15. Bạn Bình đố bạn Nam tìm được đường kính của quả bóng rổ, biết rằng nếu đặt quả bóng ở một góc căn phòng hình hộp chữ nhật, sao cho quả bóng chạm (tiếp xúc) với hai bức tường và nền nhà của căn phòng đó (khoảng cách từ tâm quả bóng đến hai bức tường và nền nhà đều bằng bán kính của quả bóng) thì có một điểm M trên quả bóng với khoảng cách lần lượt đến hai bức tường và nền nhà là 17 cm, 18 cm và 21 cm (Hình bên). Hãy giúp Nam xác định đường kính của quả bóng rổ. Biết rằng loại bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm.



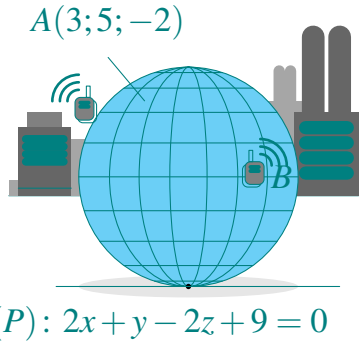
Bài 16. Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là: Global Positioning System, viết tắt là GPS) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể trong không gian (Hình 42). Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống GPS trong không gian như sau:



Vệ tinh GPS đang bay trên quỹ đạo quanh Trái Đất.
(Nguồn: https://vi.wikipedia.org)
Hình 42

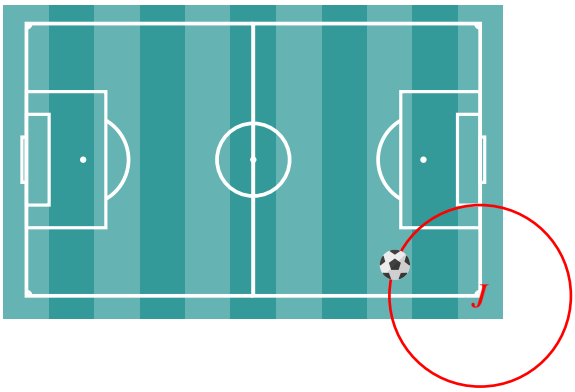
Trong cùng một thời điểm, vị trí M của một vật sẽ được xác định bằng 4 vệ tinh cho trước, các vệ tinh này có gắn máy thu tín hiệu, bằng cách so sánh thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận tín hiệu phản hồi thì sẽ xác định được khoảng cách từ các vệ tinh đến vị trí M. Như vậy, vị trí M là giao điểm của 4 mặt cầu có tâm là 4 vệ tinh đã cho. Giả sử trong không gian $Oxyz$, 4 vệ tinh có tọa độ là $A(-1;6;3)$, $B(4;8;1)$, $C(9;6;7)$, $D(-15;18;7)$. Tìm vị trí M của vật biết khoảng cách từ M đến các vệ tinh lần lượt là $MA=6$, $MB=7$, $MC=12$, $MD=24$.

Bài 17. Một công ty xây dựng một hệ thống Giám sát môi trường tại khu công nghiệp. Hai cảm biến không dây được đặt tại hai vị trí A, B trong không gian 3 chiều để thu thập dữ liệu không khí. Để đảm bảo tín hiệu truyền giữa hai cảm biến ổn định, công ty thiết kế một bóng bảo vệ tín hiệu hình ảnh cầu di động nhưng luôn đi qua cả hai cảm biến A và B. Bóng này cần tiếp xúc với mặt đất để đảm bảo tính ổn định.

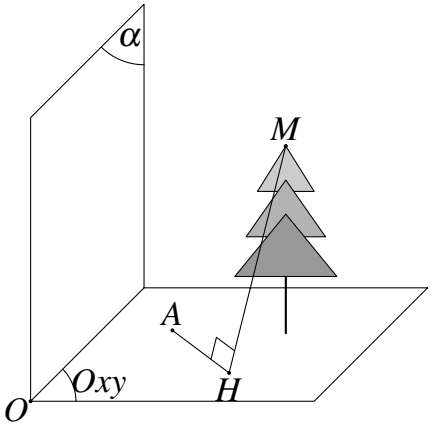


Giả sử trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, toạ độ các điểm là $A(3;5;-2)$, $B(-1;3;2)$ và mặt đất được mô tả bằng mặt phẳng $P(x)\colon 2x+y-2z+9=0$. Trong quá trình mô phỏng, điểm tiếp xúc giữa bóng bảo vệ và mặt đất (gọi là C) thay đổi. Kỹ sư cần xác định khoảng cách giữa gốc toạ độ $O(0;0;0)$ đến điểm tiếp xúc C để đánh giá mức độ ảnh hưởng từ vị trí đặt thiết bị. Gọi m_1 là giá trị lớn nhất và m_2 là giá trị nhỏ nhất của độ dài OC. Tính giá trị $m_1^2+m_2^2$.

Bài 18. Công nghệ hỗ trợ trọng tài VAR (Video Assistant Referee) thiết lập một hệ tọa độ $Oxyz$ để theo dõi vị trí của quả bóng M. Cho biết M đang nằm trên mặt sân có phương trình $z=0$, đồng thời thuộc mặt cầu (S) có phương trình $(x-22)^2+(y-4)^2+(z-13)^2=194$ (đơn vị độ dài tính theo mét). Gọi J là hình chiếu tâm I của mặt cầu (S) xuống mặt sân bóng. Khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J là

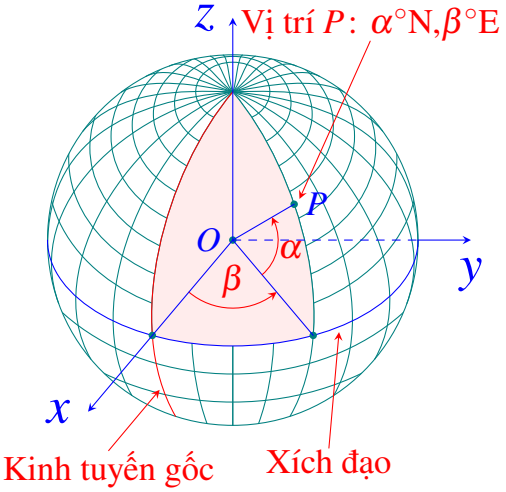


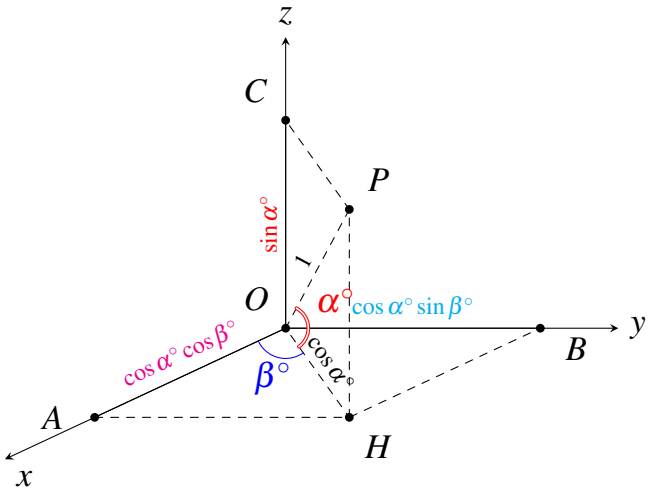
Bài 19. Tại một khu quảng trường, người ta muốn trang trí dải đèn led để chào mừng một sự kiện. Từ đỉnh M của một cái cây cao, người ta kéo dây đèn led thẳng xuống một vị trí H nào đó trên mặt đất, rồi tiếp tục kéo dây đèn led thẳng từ H đến một vị trí A cố định trên mặt đất sao cho MH luôn vuông góc với HA. Sau đó, từ vị trí H, người ta sẽ đi dây điện thẳng đến công tắc nằm trên một bức tường vuông góc với mặt đất.



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét), người ta xác định được $M(4;-2;3)$, $A(-2;6;0)$ và bức tường chứa công tắc nằm trên mặt phẳng $(\alpha)\colon 3x+4y+89=0$. Để độ dài đường dây điện phải đi là ngắn nhất, người ta đã tính toán khoảng cách nhỏ nhất từ vị trí H đến bức tường bằng a (m). Giá trị của a bằng bao nhiêu?

Bài 20. Trong trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, bề mặt Trái Đất có phương trình $x^2+y^2+z^2=1$, (1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 6371 km trên thực tế); vị trí P có vĩ độ, kinh độ tương ứng là α° N, β° E, $(0<\alpha<90,\ 0<\beta<180)$ có toạ độ $P(\cos\alpha^\circ\cos\beta^\circ;\cos\alpha^\circ\sin\beta^\circ;\sin\alpha^\circ)$. Ứng dụng Google Maps cho phép xác định khoảng cách giữa hai vị trí trên bề mặt Trái Đất khi biết vĩ độ và kinh độ của chúng. Khoảng cách giữa hai vị trí P và Q trên bề mặt Trái Đất là độ dài cung nhỏ PQ của đường tròn có tâm O và đi qua hai điểm P, Q. Tính khoảng cách trên mặt đất giữa hồ Hoàn Kiếm (Hà Nội) ở vị trí $21^\circ02'$ N, $105^\circ51'$ E và đảo Trường Sa ở vị trí $8^\circ39'$ N, $111^\circ56'$ E (đơn vị: km, *kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*)





III. ĐỀ KIỂM TRA CUỐI BÀI

1) Đề số 1

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon (x+2)^2+(y-1)^2+z^2=4$ có tâm I và bán kính R lần lượt là

Ⓐ $I(2;-1;0)$, $R=2$. Ⓑ $I(2;-1;0)$, $R=4$. Ⓒ $I(-2;1;0)$, $R=4$. Ⓓ $I(-2;1;0)$, $R=2$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-25=0$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S)?

Ⓐ $I(1;-2;2)$, $R=6$. Ⓑ $I(-1;2;-2)$, $R=5$.

Ⓒ $I(1;-2;2)$, $R=\sqrt{34}$. Ⓓ $I(-2;4;-4;R=\sqrt{29}$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(2;-3;-1)$. Mặt cầu (S) tâm I, bán kính $R=3$ có phương trình là

Ⓐ $(x-2)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=3$. Ⓑ $(x-2)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=9$.

Ⓒ $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=6$. Ⓓ $(x-2)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=6$.

Câu 4. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm là $K(4;\ -2;\ 1)$ và đi qua điểm $B(3;\ -4;\ -1)$. Phương trình của mặt cầu (S) là

Ⓐ $x^2+y^2+z^2-8x+4y-2z-21=0$. Ⓑ $x^2+y^2+z^2+8x-4y+2z+12=0$.

Ⓒ $x^2+y^2+z^2-4x+2y-z+21=0$. Ⓓ $x^2+y^2+z^2-8x+4y-2z+12=0$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình của một mặt cầu?

Ⓐ $(S)\colon x^2+y^2-z^2-4x+2y+2z-3=0$.

Ⓑ $(S)\colon x^2+2y^2+z^2-4x+2y+2z-10=0$.

Ⓒ $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+2=0$.

Ⓓ $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+8=0$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, tâm của mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$ có tọa độ là

Ⓐ $(-1;2;-1)$. Ⓑ $(1;-2;1)$. Ⓒ $(1;-2;-1)$. Ⓓ $(-1;2;1)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ là phương trình của một mặt cầu khi và chỉ khi

Ⓐ $a^2+b^2+c^2-d>0$. Ⓑ $a^2+b^2+c^2+d\geq 0$.

Ⓒ $a^2+b^2+c^2+d>0$. Ⓓ $a^2+b^2+c^2-d\geq 0$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $M(1;2;4)$ tiếp xúc mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-2z+1=0$ có bán kính bằng

Ⓐ $\dfrac{4}{3}$. Ⓑ 1. Ⓒ $\dfrac{3}{4}$. Ⓓ 2.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;-4)$ và điểm $B(3;-1;0)$. Mặt cầu (S) có đường kính AB có phương trình là

Ⓐ $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=3$. Ⓑ $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$.

Ⓒ $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$. Ⓓ $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=3$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là km), một thiết bị phát sóng đặt ở vị trí $I(-1;2;4)$ và được thiết kế bán kính phủ sóng là 4000 m. Máy thu sóng của thiết bị đó ở vị trí nào sau đây thì thu được sóng?

Ⓐ $M(1;-2;3)$. Ⓑ $N(1;4;5)$. Ⓒ $P(3;1;-1)$. Ⓓ $Q(-1;3;-1)$.

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Hãy viết phương trình mặt cầu có tâm $I(2;2;3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz).

Ⓐ $(x+2)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=4$. Ⓑ $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=13$.

Ⓒ $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$. Ⓓ $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=2$.

Câu 12. Cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$. Mặt cầu (S) có thể tích bằng

Ⓐ $V=36\pi$. Ⓑ $V=14\pi$. Ⓒ $V=4\pi$. Ⓓ $V=16\pi$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=49$.

a) Mặt cầu (S) có bán kính $R=7$.

b) Điểm $A(1;4;2)$ nằm trên mặt cầu (S).

c) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;3;2)$.

d) Mặt cầu (S) còn có phương trình: $x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-49=0$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(4;-1;2)$; mặt phẳng $(P)\colon x-y+z-1=0$ và mặt cầu (S) có tâm là A và đi qua điểm O

a) Một véctơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(1;-1;1)$.

b) Đường thẳng (d) đi qua A và vuông góc với (P) có phương trình chính tắc là $\dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$.

c) Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (Oxy) và (P), ta có $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

d) (S) có phương trình là $(x-4)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=21$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+y^2+(z+1)^2=1$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y-z+1=0$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) bằng $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

b) Mặt cầu (S) có tâm $I(2;0;-1)$ và bán kính $R=1$.

c) Mặt phẳng (P) tiếp xúc mặt cầu (S).

d) Phương trình mặt cầu tâm $I(2;0;-1)$ và tiếp xúc mặt phẳng (P) là: $(S')\colon x^2+y^2+z^2-4x+2z+\dfrac{7}{3}=0$.

Câu 4. Một tàu cứu hộ đang ở vị trí $A(1;-2;2)$ (đơn vị km) và di chuyển theo đường thẳng với vectơ vận tốc $\vec{v}=(-2;4;1)$ (km/giờ). Một cơn bão đang hình thành biết vùng nguy hiểm được mô tả bởi một hình cầu có tâm bão tại $B(-3;0;4)$ (đơn vị km) và bán kính $R=6$ km. Khi đó

a) Phương trình mô tả ranh giới vùng nguy hiểm của cơn bão là $(x+3)^2+y^2+(z-4)^2=6$.

b) Phương trình tham số của đường thẳng biểu diễn quỹ đạo di chuyển của tàu cứu hộ là
$$\begin{cases} x=1-2t \\ y=-2+4t \\ z=2+t \end{cases}, t\geq 0.$$

c) Khoảng thời gian mà tàu ở trong vùng nguy hiểm là 2 giờ.

d) Khoảng cách ngắn nhất từ tàu cứu hộ đến tâm bão là 3 km (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của km).

Phần III. Trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6 vào ô kết quả.

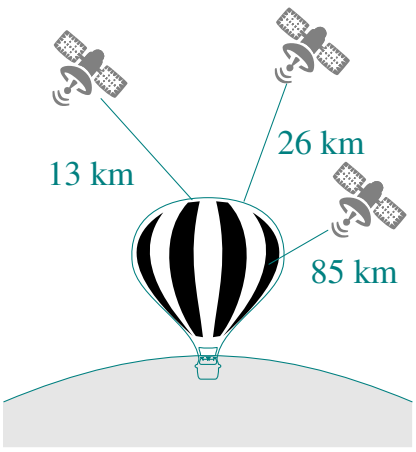
Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết phương trình mặt cầu (S) đi qua 4 điểm A, B, C, D, biết rằng $A(-3;0;0)$, $B(0;0;8)$, $C(0;-9;0)$ và $D(0;0;0)$ có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$. Tính $4\cdot\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)$. KQ: | | | | |

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (S) là mặt cầu đi qua hai điểm $A(3;-1;2)$, $B(1;1;-2)$ và có tâm thuộc trục Oz. Bán kính của mặt cầu (S) là R. Giá trị R^2 bằng? KQ: | | | | |

Câu 3. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$, mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-z-3=0$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-6x-4y-10z+2=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A, nằm trong mặt phẳng (P) và cắt (S) tại hai điểm M, N. Độ dài đoạn MN nhỏ nhất bằng a. Tính giá trị a^2.
KQ: | | | | |

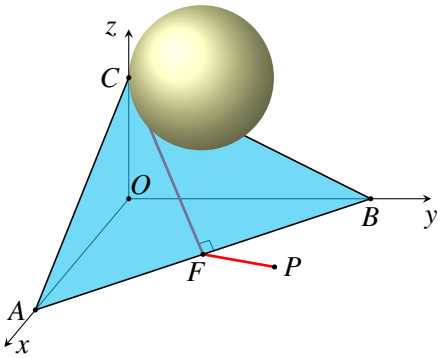
Câu 4. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là mét), một thiết bị phát sóng wifi đặt tại vị trí $A(3;1;1)$. Vùng phủ sóng tốt nhất của thiết bị có bán kính bằng 11 (m). Hỏi số giá trị nguyên của tham số m để một người sử dụng điện thoại tại điểm $E(-3;8;m)$ có thể bắt được tín hiệu wifi của thiết bị nói trên. KQ: | | | | |

Câu 5. Một khinh khí cầu nghiên cứu khí tượng được phóng lên để thu thập dữ liệu trong tầng bình lưu. Khinh khí cầu này có thiết bị định vị sử dụng tín hiệu từ các vệ tinh của công ty S để xác định vị trí trong không gian. Tại thời điểm quan sát, khí cầu đang bay ở độ cao 50 km và nhận được tín hiệu từ ba vệ tinh S có toạ độ trong không gian $Oxyz$ (đơn vị: km) như sau: Vệ tinh A tại vị trí $A(103;204;62)$, vệ tinh B tại vị trí $B(106;208;74)$, vệ tinh C tại vị trí $C(105;212;134)$. Từ thời gian truyền tín hiệu, hệ thống xác định rằng khoảng cách từ vị trí M của khinh khí cầu đến các vệ tinh là $MA=13$ km, $MB=26$ km, $MC=85$ km. Tính khoảng cách từ khinh khí cầu đến gốc toạ độ O (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của km).



KQ: | | | | |

Câu 6. Một nhà sản xuất ổ bi đã đặt một mô hình quả cầu khổng lồ trên mái nghiêng của nhà xưởng. Mặt mái có thể được mô tả bằng mặt phẳng $(E)\colon x+2y+2z=10$. Trong đó A, B, C là giao điểm của mặt phẳng (E) với các trục tọa độ. Một mô hình quả cầu bán kính $r=3$ được đặt tiếp xúc với mặt phẳng (E) tại điểm C.



Từ C kẻ đường vuông góc với AB tại F. Khi thay thế quả cầu, nó lăn trên đường thẳng CF cho đến khi quả cầu vừa tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại $P(a;b;0)$ thì dừng lại. Tính $a+b$.

KQ: | | | | |

—Hết—

2) Đề số 2

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình của một mặt cầu?

Ⓐ $-(x-1)^2+(y+1)^2+(z-10)^2=225$. Ⓑ $(x-1)^2-(y+1)^2+(z-10)^2=225$.
Ⓒ $(x-1)^2+(y+1)^2-(z-10)^2=225$. Ⓓ $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-10)^2=225$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, trong các mặt cầu dưới đây, mặt cầu nào có bán kính $R=2$?

Ⓐ $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-3=0$. Ⓑ $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-10=0$.
Ⓒ $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+2=0$. Ⓓ $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+5=0$.

Câu 3. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu?

Ⓐ $x^2+y^2-z^2+4x-2y+6z+5=0$. Ⓑ $x^2+y^2+z^2+4x-2y+6z+15=0$.
Ⓒ $x^2+y^2+z^2+4x-2y+z-1=0$. Ⓓ $x^2+y^2+z^2-2x+2xy+6z-5=0$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm là điểm $I(a;b;c)$ và bán kính R. Phương trình của (S) là

Ⓐ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$. Ⓑ $(x+a)^2+(y+b)^2+(z+c)^2=R^2$.
Ⓒ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R$. Ⓓ $(x+a)^2+(y+b)^2+(z+c)^2=R$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$. Xác định tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

Ⓐ $I(3;-1;2)$, $R=2$. Ⓑ $I(-3;1;-2)$, $R=2$.
Ⓒ $I(-3;1;-2)$, $R=4$. Ⓓ $I(3;-1;2)$, $R=4$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, điểm nào trong các điểm sau đây thuộc mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=50$?

Ⓐ $M(3;4;6)$. Ⓑ $N(4;4;5)$. Ⓒ $P(3;4;-5)$. Ⓓ $Q(-3;3;-5)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-10=0$. Tâm và bán kính của mặt cầu (S) là

Ⓐ $I(-2;4;2)$, $R=4$. Ⓑ $I(1;-2;-1)$, $R=4$.

Ⓒ $I(2;-4;-2)$, $R=\sqrt{10}$. Ⓓ $I(-1;2;1)$, $R=\sqrt{34}$.

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-2=0$. Đường kính của mặt cầu (S) bằng

Ⓐ 8. Ⓑ 16. Ⓒ $2\sqrt{14}$. Ⓓ 4.

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;2)$ và bán kính $R=3$.

Ⓐ $(S)\colon (x+2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=9$. Ⓑ $(S)\colon (x+2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=3$.

Ⓒ $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=3$. Ⓓ $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$.

Câu 10. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;3)$ và $B(5;4;7)$. Phương trình mặt cầu nhận AB làm đường kính là

Ⓐ $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=17$. Ⓑ $(x-3)^2+(y-1)^2+(z-5)^2=17$.

Ⓒ $(x-5)^2+(y-4)^2+(z-7)^2=17$. Ⓓ $(x-6)^2+(y-2)^2+(z-10)^2=17$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $I(1;0;-1)$ và $A(2;2;-3)$. Mặt cầu (S) tâm I và đi qua điểm A có phương trình là

Ⓐ $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9$. Ⓑ $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=3$.

Ⓒ $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=9$. Ⓓ $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=3$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm I, tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) là

Ⓐ $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$. Ⓑ $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=13$.

Ⓒ $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=14$. Ⓓ $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=1$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x+8y+1=0$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;4;0)$.

b) Mặt cầu (S) còn có phương trình: $(S)\colon (x+1)^2+(y+4)^2+z^2=16$.

c) Điểm $M(0;3;4)$ nằm bên ngoài mặt cầu (S).

d) Mặt cầu (S) có bán kính $R=4$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$.

a) Bán kính của mặt cầu (S_4) đi qua ba điểm A, B, C và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) là $R=\sqrt{26}$.

b) Mặt cầu (S_1) tâm A, bán kính $R=1$ có phương trình là: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=1$.

c) Bán kính của mặt cầu (S_2) có tâm là A và đi qua điểm C là $\sqrt{50}$.

d) Mặt cầu (S_3) nhận AB làm đường kính có phương trình là: $(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(z+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-z+2=0$ và hai điểm $A(1;1;0)$, $B(2;1;3)$.

a) Một vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(2;2;1)$.

b) Đường thẳng d qua A và vuông góc với (P) có phương trình là $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$.

c) Mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) có phương trình $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=4$.

d) Gọi α là góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (P). Khi đó, $\sin\alpha=\frac{1}{2\sqrt{10}}$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, một thiết bị phát sóng đặt tại vị trí $A(4;0;0)$. Vùng phủ sóng của thiết bị có bán kính bằng 4.

a) Điểm $M(4;2;2)$ thuộc vùng phủ sóng.

b) Tập hợp tất cả các điểm thuộc vùng phủ sóng của thiết bị được giới hạn bởi mặt cầu có phương trình $(x-2)^2+y^2+z^2=4$.

c) Một bức tường được xây gần đó có phương trình $(P)\colon x+y-z=6$ sẽ chắn sóng của thiết bị.

d) Vùng nhận được tín hiệu trên mặt phẳng (P) là hình tròn có bán kính bằng 4.

Phần III. Trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6 vào ô kết quả.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(-1;2;-1)$ và $B(1;1;-2)$ có phương trình dạng $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$. Tính $a+b+c+R^2$.

KQ: | | | | |

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0$ (m là tham số) và đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=4+2t \\ y=3+t \\ z=3+2t \end{cases}$. Biết đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB=8$. Tính giá trị của m.

KQ: | | | | |

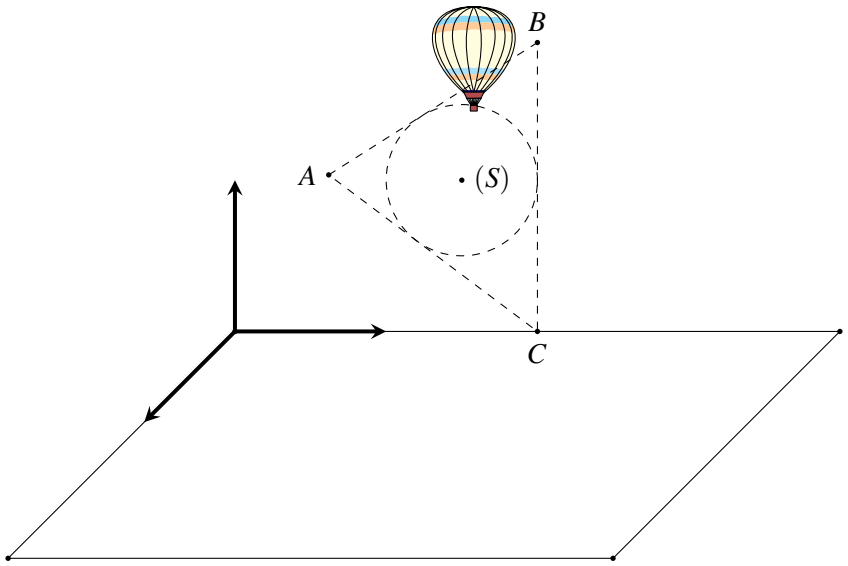
Câu 3. Khi đặt hệ toạ độ $Oxyz$ vào không gian với đơn vị trên trục tính theo ki-lô-mét, người ta thấy rằng một không gian phủ sóng điện thoại có dạng một hình cầu (S) (tập hợp những điểm nằm trong và nằm trên mặt cầu tương ứng). Biết mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$. Khoảng cách xa nhất giữa hai điểm thuộc vùng phủ sóng là bao nhiêu ki-lô-mét?

KQ: | | | | |

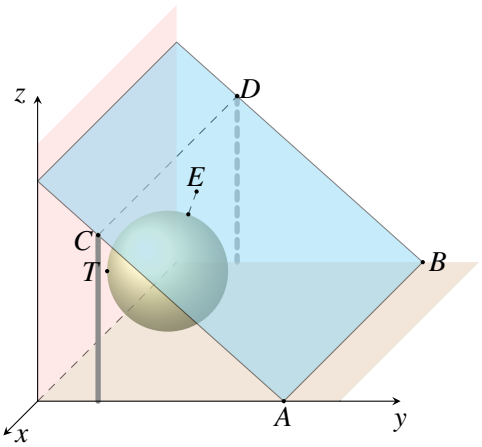
Câu 4. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là ki–lô-mét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu đặt tại điểm $I(1;2;2)$ biết rằng bán kính phủ sóng của trạm là 3 km. Hai người sử dụng điện thoại lần lượt tại $M(4;-4;2)$ và $N(6;0;6)$. Gọi $E(a;b;c)$ với $a<0$ là một điểm thuộc ranh giới vùng phủ sóng của trạm sao cho tổng khoảng cách từ E đến vị trí M và N lớn nhất. Tính $T=a+b+c$.

KQ: | | | | |

Câu 5. Tại lễ Tri ân và trưởng thành của học sinh khối 12 của một trường THPT CPV. Kết thúc buổi lễ, một học sinh khối 12 đại diện cho các bạn thả một khinh khí cầu với khát vọng bay cao và vươn xa. Trong không gian $Oxyz$, mỗi đơn vị ứng với 1 m, giả sử khinh khí cầu đang ở vị trí có phương trình là $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-10)^2=2$. Cùng thời điểm đó có ba chiếc flycam A, B, C cách nhau 3 km, 4 km, 5 km và tạo thành một tam giác ABC có ba cạnh tiếp xúc với mặt cầu (S), biết rằng mặt phẳng (ABC) song song với mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z-17=0$ và có phương trình dạng $2x+ay+bz+c=0$. Tổng giá trị của $T=a+b+c$ bằng bao nhiêu? KQ: | | | | |



Câu 6. Một bồn chứa khí hình cầu (K) có đường kính 10 m tiếp xúc trực tiếp với một bức tường thẳng đứng tại điểm $T(-6;0;5)$. Bồn được che chắn bằng một tấm chắn nghiêng, cố định xuống mặt đất tại các điểm $A(0;16{,}25;0)$ và $B(12;16{,}25;0)$, đồng thời được chống đỡ bởi các thanh thẳng đứng tại các điểm $C(0;5;15)$ và $D(12;5;15)$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính khoảng cách an toàn giữa tấm chắn E và mặt cầu (K) (đơn vị mét). KQ: | | | | |



—Hết—

BẢNG ĐÁP ÁN BÀI TẬP CUỐI BÀI

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1 C	2 C	3 A	4 C	5 A	6 A	7 B	8 C	9 C	10 A
11 A	13 B	14 A	15 C						

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a Đ b Đ c Đ d S	Câu 2.	a Đ b S c S d Đ
Câu 3.	a Đ b S c Đ d S	Câu 4.	a Đ b S c S d Đ
Câu 5.	a S b Đ c S d S	Câu 6.	a S b S c Đ d Đ
Câu 7.	a Đ b Đ c S d Đ	Câu 8.	a Đ b S c S d Đ
Câu 9.	a Đ b S c Đ d Đ	Câu 10.	a Đ b S c S d Đ
Câu 11.	a Đ b S c Đ d S	Câu 12.	a Đ b S c S d Đ
Câu 13.	a Đ b S c Đ d Đ	Câu 14.	a Đ b Đ c Đ d Đ
Câu 15.	a Đ b Đ c Đ d S	Câu 16.	a Đ b Đ c Đ d Đ
Câu 17.	a S b Đ c Đ d Đ	Câu 18.	a Đ b Đ c S d S
Câu 19.	a Đ b S c Đ d Đ	Câu 20.	a Đ b S c S d S

BẢNG ĐÁP ÁN ĐỀ KIỂM TRA CUỐI BÀI

ĐỀ SỐ 1

ĐÁP ÁN PHẦN I

1. D	2. C	3. B	4. D	5. C	6. D	7. A	8. B	9. B
10. B	11. C	12. A						

ĐÁP ÁN PHẦN II

Câu 1.	a Đ b Đ c S d S	Câu 2.	a Đ b S c S d Đ
Câu 3.	a S b Đ c S d Đ	Câu 4.	a S b Đ c Đ d Đ

ĐÁP ÁN PHẦN III

Câu 1.	Câu 2.	Câu 3.	Câu 4.	Câu 5.	Câu 6.
1 5 4	1 1	2 0	1 3	2 2 9	7 , 8

ĐỀ SỐ 2

ĐÁP ÁN PHẦN I

1. D	2. C	3. C	4. A	5. A	6. C	7. B	8. A	9. D
10. B	11. B	12. D						

ĐÁP ÁN PHẦN II

Câu 1. (a) S (b) Đ (c) Đ (d) Đ	Câu 2. (a) Đ (b) S (c) Đ (d) Đ
Câu 3. (a) S (b) Đ (c) Đ (d) S	Câu 4. (a) Đ (b) S (c) Đ (d) S

ĐÁP ÁN PHẦN III

Câu 1.	Câu 2.	Câu 3.	Câu 4.	Câu 5.	Câu 6.
1 , 5	– 1 2	6	4	– 2 2	1

§5 ÔN TẬP CHƯƠNG 5

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-3z-5=0$. Vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

Ⓐ $\vec{u}=(2;0;-3)$. Ⓑ $\vec{a}=(2;-3;-5)$. Ⓒ $\vec{v}=(2;-3;0)$. Ⓓ $\vec{b}=(-2;3;0)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=1-2t \\ y=-1 \\ z=3+t \end{cases}$. Vectơ nào sau đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ?

Ⓐ $(-2;-1;1)$. Ⓑ $(1;-1;3)$. Ⓒ $(-2;0;1)$. Ⓓ $(2;0;1)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{3-y}{5}=\dfrac{z+2}{3}$. Vectơ nào dưới đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng d?

Ⓐ $\vec{u}=(1;3;-2)$. Ⓑ $\vec{u}=(2;5;3)$. Ⓒ $\vec{u}=(2;-5;3)$. Ⓓ $\vec{u}=(1;3;2)$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z-5=0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?

Ⓐ $P(0;0;-5)$. Ⓑ $M(1;1;6)$. Ⓒ $Q(2;-1;5)$. Ⓓ $N(-5;0;0)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(-1;2;4)$ và nhận vectơ $\vec{n}=(1;-2;3)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là

Ⓐ $x-2y+3z+7=0$. Ⓑ $x-2y+3z-7=0$.

Ⓒ $-x+2y+4z+7=0$. Ⓓ $-x+2y+4z-7=0$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(0;2;1)$ và $C(1;-1;2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC có phương trình là

Ⓐ $x-3y+z+1=0$. Ⓑ $x+3y+z-1=0$. Ⓒ $x-3y+z-1=0$. Ⓓ $x+3y-z+1=0$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z}{1}$. Phương trình tham số của Δ là

Ⓐ $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-1-3t \\ z=t \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x=3-2t \\ y=-1-3t \\ z=t \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-1+3t \\ z=t \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-1-3t \\ z=-t \end{cases}$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(\alpha)\colon x+2y+3z-6=0$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

Ⓐ 2. Ⓑ 6. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua hai điểm $P(1;-1;2)$ và $Q(2;0;1)$ có phương trình tham số là

Ⓐ $\begin{cases} x=2+t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+t \\ z=2+t \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} x=2-t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1-t \\ z=2+t \end{cases}$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-3;1)$ có phương trình tham số là

Ⓐ $\begin{cases} x=4+2t \\ y=-6 \\ z=2-t \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=3t \\ z=-1+t \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} x=-2+4t \\ y=-6t \\ z=1+2t \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t \end{cases}$.

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua hai điểm $A(1;3;2)$, $B(2;1;1)$ là

Ⓐ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$. Ⓑ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$.

Ⓒ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$. Ⓓ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(-1;5;2)$ đồng thời có cặp vectơ chỉ phương $\vec{u}=(0;1;1)$ và $\vec{v}=(-3;-5;1)$ có phương trình là

Ⓐ $y+z-7=0$. Ⓑ $2x-y+z+5=0$.

Ⓒ $-x+5y+2z+5=0$. Ⓓ $2x+y+z-5=0$.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;2;1)$, $B(3;0;1)$, $C(1;0;0)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

Ⓐ $2x-3y-4z+2=0$. Ⓑ $4x+6y-8z+2=0$.

Ⓒ $2x+3y-4z-2=0$. Ⓓ $2x-3y-4z-2=0$.

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình của đường thẳng đi qua điểm $M(1;-3;5)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}(2;-1;1)$ là

Ⓐ $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-5}{1}$. Ⓑ $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+5}{1}$.

Ⓒ $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-5}{1}$. Ⓓ $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-5}{1}$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, xác định tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=9$ là

Ⓐ $I(1;4;-2), R=3$. Ⓑ $I(-1;-4;2), R=3$.

Ⓒ $I(1;4;-2), R=9$. Ⓓ $I(-1;-4;2), R=9$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua $A(3;2;-1)$ và vuông góc với mặt phẳng (α): $x-2y+z-1=0$ có phương trình chính tắc là

Ⓐ $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$. Ⓑ $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$.

Ⓒ $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$. Ⓓ $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$ và bán kính $R=5$. Phương trình của (S) là

Ⓐ $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$. Ⓑ $x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$.

Ⓒ $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=5$. Ⓓ $x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=5$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1-t \\ y=2+2t \\ z=3+t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P)\colon x-y+3=0$. Tính số đo góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P).

Ⓐ 60°. Ⓑ 45°. Ⓒ 120°. Ⓓ 30°.

Câu 19. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+7}{-2}$. Đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng d có phương trình là

Ⓐ $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$. Ⓑ $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{2}$.

Ⓒ $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$. Ⓓ $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$.

Câu 20. Trong không gian $(Oxyz)$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+4y-2z-7=0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của (S) lần lượt là

Ⓐ $I(-2;2;-1)$, $R=4$. Ⓑ $I(-2;2;-1)$, $R=8$.

Ⓒ $I(2;-2;1)$, $R=4$. Ⓓ $I(2;-2;1)$, $R=8$.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(1;0;1)$ đến mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z-3=0$ bằng

Ⓐ $\dfrac{4}{3}$. Ⓑ $\dfrac{2}{3}$. Ⓒ 1. Ⓓ $\dfrac{1}{3}$.

Câu 22. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(3;-1;0)$, bán kính $R=5$ có phương trình là

Ⓐ $(x+3)^2+(y-1)^2+z^2=5$. Ⓑ $(x-3)^2+(y+1)^2+z^2=5$.

Ⓒ $(x-3)^2+(y+1)^2+z^2=25$. Ⓓ $(x+3)^2+(y-1)^2+z^2=25$.

Câu 23. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \begin{cases} x=-2+t \\ y=-4+2t \\ z=-1+2t \end{cases}$ và $\Delta_2\colon \begin{cases} x=2-2m \\ y=2-2m \\ z=3+m \end{cases}$.

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng. Tính $\cos\varphi$?

Ⓐ $\dfrac{5}{6}$. Ⓑ $\dfrac{1}{9}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $\dfrac{4}{9}$.

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hỏi trong các phương trình sau phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

Ⓐ $x^2+y^2+z^2-x+6z+16=0$. Ⓑ $x^2+y^2+z^2+4x-6y+8z-1=0$.

Ⓒ $x^2+y^2+z^2+2x-4y+4z+13=0$. Ⓓ $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+9=0$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$. Đường thẳng d đi qua điểm nào dưới đây?

Ⓐ $A(2;-1;2)$. Ⓑ $B(-2;1;2)$. Ⓒ $C(2;1;2)$. Ⓓ $D(2;-1;-2)$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng qua $A\,(1;2;-1)$ và vuông góc với các mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+3z-2=0$; $(Q)\colon x+y+z-1=0$ có phương trình là

Ⓐ $x+y+2z-1=0$. Ⓑ $4x-y+z-1=0$.

Ⓒ $4x-y-3z-5=0$. Ⓓ $x-y+z+2=0$.

Câu 27. Trong không gian $(Oxyz)$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;2;3)$ và song song với mặt phẳng $(Q)\colon 2x+3y-4z-5=0$ có phương trình là

Ⓐ $2x+3y+4z-14=0$. Ⓑ $2x-3y-4z+6=0$.

Ⓒ $2x+3y-4z-4=0$. Ⓓ $2x+3y-4z+4=0$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $I(1;-2;1)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua A là

Ⓐ $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=20$. Ⓑ $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=5$.

Ⓒ $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=20$. Ⓓ $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=5$.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, trục Oy có phương trình tham số là

Ⓐ $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=t.\end{cases}$ Ⓑ $\begin{cases}x=0\\y=2+t\\z=0.\end{cases}$ Ⓒ $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=t.\end{cases}$ Ⓓ $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=0.\end{cases}$

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(2;-1;0)$ và có đường kính bằng 8 là

Ⓐ $(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=8$. Ⓑ $(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=16$.

Ⓒ $(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=64$. Ⓓ $(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=64$.

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, góc giữa trục Oz và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$ bằng (kết quả làm tròn đến độ)

Ⓐ $30°$. Ⓑ $48°$. Ⓒ $60°$. Ⓓ $132°$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $A(3;-2;4)$ đến mặt phẳng (Oxz) bằng

Ⓐ 4. Ⓑ 5. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$. Mặt phẳng (P) đi qua A và chứa trục Oy có phương trình là

Ⓐ $x-z=0$. Ⓑ $x-2z=0$. Ⓒ $y=2$. Ⓓ $x+z=0$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;0)$ và $B(1;-6;2)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

Ⓐ $(x+1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=44$. Ⓑ $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=44$.

Ⓒ $x^2+(y-3)^2+(z+1)^2=11$. Ⓓ $x^2+(y+3)^2+(z-1)^2=11$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y-z-8=0$ có phương trình là

Ⓐ $(S)\colon (x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$. Ⓑ $(S)\colon (x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$.

Ⓒ $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$. Ⓓ $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz-9=0$ chứa hai điểm $A(3;2;1)$, $B(-3;5;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q)\colon 3x+y+z+4=0$. Tính tổng $S=a+b+c$.

Ⓐ $S=-12$. Ⓑ $S=2$. Ⓒ $S=-4$. Ⓓ $S=-2$.

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y-z-1=0$ và $(Q)\colon 2x+4y-2z+5=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đã cho là

Ⓐ 6. Ⓑ 3. Ⓒ $\dfrac{7}{2\sqrt{6}}$. Ⓓ 1.

Câu 38. Trong không gian $(Oxyz)$, một thiết bị phát sóng đặt tại vị trí $I(1;0;-1)$. Vùng phủ sóng của thiết bị có ranh giới là một mặt cầu bán kính bằng $\sqrt{2}$. Điểm nào sau đây thuộc vùng phủ sóng của thiết bị?

Ⓐ $A(1;0;1)$. Ⓑ $B(1;1;-1)$. Ⓒ $C(-2;0;1)$. Ⓓ $D(1;-2;-1)$.

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;6;2)$, $B(5;1;3)$, $C(4;0;6)$.

a) Hình chiếu vuông góc của B lên (Oxz) là $(0;1;0)$.

b) Tọa độ trọng tâm tam giác ABC là $\left(\dfrac{10}{3};\dfrac{7}{3};\dfrac{11}{3}\right)$.

c) Một vectơ chỉ phương của AB là $(4;-5;1)$.

d) Phương trình mặt phẳng (ABC) là $14x+13y+9z-110=0$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y-z+3=0$ và điểm $A(1;1;2)$.

a) Tọa độ của một véc-tơ pháp tuyến của (P) là $(1;2;-1)$.

b) Điểm A thuộc mặt phẳng (P).

c) Phương trình mặt cầu tâm A và bán kính bằng khoảng cách từ A đến (P) là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=8$.

d) Mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với (P) có phương trình $x+2y-z-1=0$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon -x+2y+z-3=0$.

a) Điểm $A(1;-1;-2)$ nằm trên đường thẳng d.

b) Mặt phẳng (Q) song song với đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $(1;1;-1)$.

c) Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng 30°.

d) Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-3;1;2)$, song song với mặt phẳng (P) và cắt đường thẳng d tại điểm $N(a;b;c)$. Giá trị $a+b+c$ bằng 3.

Câu 4. Cho các điểm $A(1;-2;0)$; $B(2;-1;1)$; $C(1;1;2)$.

a) Phương trình mặt phẳng (γ) chứa trục Ox và điểm C là $2y+z=0$.
b) Phương trình mặt phẳng trung trực (β) của đoạn AC là $6y+4z-1=0$.
c) Phương trình mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với BC là $x-2y-z-5=0$.
d) Phương trình mặt phẳng (ABC) là $x+2y-3z-3=0$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$. và điểm $M(1;2;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với Δ.
a) Đường thẳng Δ có một véc tơ chỉ phương là: $\vec{a}=(2;-1;1)$.
b) Mặt phẳng (P) phương trình là: $2x+y-z-1=0$.
c) Mặt cầu tâm $I(2;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P) có phương trình là $(S):(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=6$.
d) Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ bằng 5.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$; $B(3;0;0)$; $D(0;2;0)$; $A'(0;0;5)$.
a) Điểm C có tọa độ là $(3;2;0)$.
b) Khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 5.
c) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng 2.
d) Cosin góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(CB'D')$ bằng $\dfrac{289}{361}$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{2}$ và $d_2: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{-1}$.
a) Đường thẳng d_1 đi qua điểm $A(2;4;4)$.
b) Đường thẳng vuông góc với cả d_1 , d_2 có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;1;1)$.
c) Đường thẳng d_1 và đường thẳng d_2 chéo nhau.
d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 là $3\sqrt{2}$.

Câu 8. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$, $d_2: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-2}{4}$, mặt phẳng $(P): 2x-3y+z-2025=0$ và điểm $M(0;-1;2)$.
a) Hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau.
b) Đường thẳng đi qua $M(0;-1;2)$ vuông góc với d_1 đồng thời song song với mặt phẳng (P) có phương trình là $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{-1}$.
c) Mặt phẳng (P) cách đều d_1 và d_2 là $(P): -4x+2z+5=0$.
d) Phương trình đường thẳng qua M và cắt cả d_1 và d_2 là $\dfrac{x}{9}=\dfrac{y+1}{-9}=\dfrac{z-2}{16}$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+2}{2}$ và điểm $A(3;2;0)$.
a) Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(3;2;0)$.
b) Đường thẳng (d) có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(-1;-3;-2)$.
c) $H(1;1;2)$ là hình chiếu của A lên đường thẳng d.
d) $A'(-1;0;4)$ là điểm đối xứng với A qua đường thẳng d.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;2;0)$, $B(2;0;-2)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-z-1=0$. Xét điểm M thuộc (P) sao cho $MA=MB$ và số đo góc $\widehat{AMB}$ lớn nhất. Gọi (Q) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

a) Mặt phẳng trung trực của đoạn AB có phương trình $(Q): y+z=0$.

b) Khi đó toạ độ của M là $\left(\frac{14}{11};\frac{1}{11};\frac{1}{11}\right)$.

c) Giao tuyến (d) của hai mặt phẳng (P) và (Q) có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3,-1,1)$.

d) Góc $\widehat{AMB}$ đạt lớn nhất khi $\cos\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}\right)$ đạt lớn nhất.

Câu 11 (CT - THPTQG 2025). Mô hình toán học sau đây được sử dụng trong quan sát chuyển động của một vật. Trong không gian cho hệ toạ độ $Oxyz$ có $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz và độ dài của mỗi vectơ đơn vị đó bằng 1 mét. Cho hai điểm A và B, trong đó điểm A có tọa độ là $(7;7;0)$. Một vật (coi như là một hạt) chuyển động thẳng với tốc độ phụ thuộc thời gian t (giây) theo công thức $v(t)=\beta t+300$ (m/giây), trong đó β là hằng số dương và $0\leqslant t\leqslant 6$. Ở thời điểm ban đầu $(t=0)$ vật đi qua điểm A với tốc độ 300 m/giây và hướng tới B. Sau 2 giây kể từ thời điểm ban đầu, vật đi được quãng đường 606 mét. Gọi $\vec{u}=(a;b;c)$ là vectơ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AB}$. Biết rằng $|\vec{u}|=1$ và góc giữa vectơ $\vec{u}$ lần lượt với các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ có số đo tương ứng bằng $60^\circ, 60^\circ, 45^\circ$.

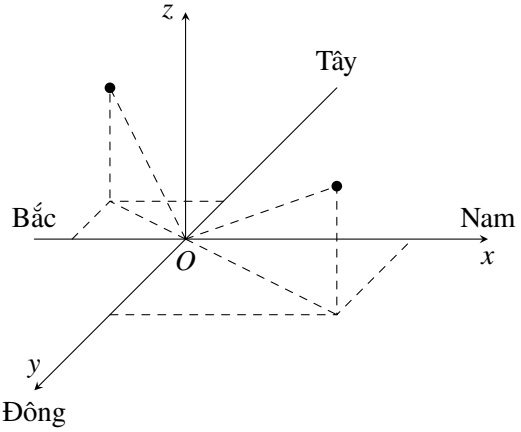
a) $a=\cos 60^\circ$.

b) Phương trình đường thẳng AB là $\frac{x-7}{1}=\frac{y-7}{1}=\frac{z}{2}$.

c) $\beta=3$.

d) Giả sử sau 5 giây kể từ thời điểm ban đầu, vật đến điểm $B(x_B;y_B;z_B)$. Khi đó $x_B>776$.

Câu 12. Xét hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một điểm trong cùng một ngày. Lúc 9 giờ sáng, chiếc thứ nhất đang ở vị trí A cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc thứ hai đang ở vị trí B nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,5 km về phía tây đồng thời cách mặt đất 0,8 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (như hình vẽ). Lấy đơn vị đo trên mỗi trục là km.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Tọa độ của khinh khí cầu thứ nhất lúc 9 giờ sáng là $A(2;1;0{,}5)$.

b) Phương trình chính tắc của đường thẳng AB là $\frac{x-2}{30}=\frac{y-1}{25}=\frac{z-0{,}5}{3}$.

c) Lúc 9 giờ sáng, khoảng cách giữa hai chiếc khinh khí cầu là 3,92 km (làm tròn đến hàng phần trăm).

d) Từ 9 giờ sáng đến 9 giờ 10 phút sáng, khinh khí cầu thứ nhất đi thẳng về hướng Nam với vận tốc 50 km/h và độ cao không đổi để đến điểm M, khinh khí cầu thứ hai chuyển động thẳng đến điểm N với vận tốc 60 km/h, biết vectơ $\overrightarrow{BN}$ cùng hướng với vectơ $\vec{u}=(2;2;1)$. Bỏ qua lực cản của gió, khoảng cách MN là 4,66 km (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 13 (CT - THPTQG 2026). Trong không gian xét hệ tọa độ $Oxyz$ có một đơn vị dài trên các trục tương ứng với 10 mét trên thực tế. Một mục tiêu cần được bảo vệ có vị trí ở gốc tọa độ O. Người ta thiết lập một vành đai bảo vệ quanh mục tiêu theo một đường tròn tâm O có bán kính bằng 6 đơn vi (tương ứng 60 mét trên thực tế) nằm trong mặt phẳng (Oxy). Một máy bay không người lái (được coi như một hạt) bay theo một đường thẳng từ vi trí $M(2;11;3)$ đến vi trí $N(14;2;3)$. Tại mỗi vi trí của máy bay, khoảng cách từ máy bay đến vành đai bảo vệ là độ dài ngắn nhất của các đoạn thẳng nối từ vị trí đó đến một điểm bất kì trên vành đai.

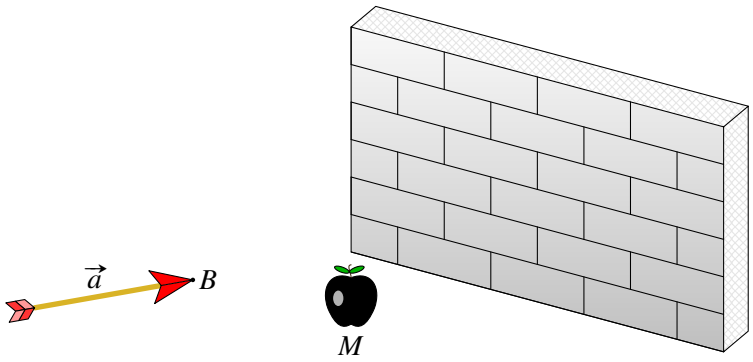
a) $\overrightarrow{MN}=(12;-9;0)$.

b) Phương trình tham số của đường thẳng MN là $\begin{cases} x=2+4t \\ y=11-3t \\ z=0 \end{cases}$ với $t\in\mathbb{R}$.

c) Trong quá trình bay từ M đến N, khoảng cách ngắn nhất từ máy bay đến vành đai bảo vệ là 100 mét.

d) Trong quá trình bay từ M đến N, khoảng cách từ máy bay đến vành đai bảo vệ là ngắn nhất khi máy bay ở vị trí có tọa độ là $(6;8;3)$.

Câu 14. Một bức tường được tọa độ hóa trong không gian $Oxyz$ với đơn vị là mét bởi mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-3=0$ và điểm $M(1;-3;4)$ là tọa độ của một quả táo. Khi đó



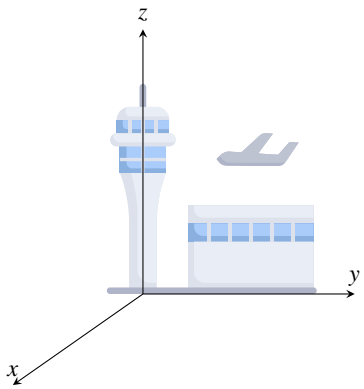
a) Quả táo cách bức tường 4 m.

b) Một người bắn một mũi tên với đầu mũi tên là $B(2;-1;4)$ theo hướng $\vec{a}=(2;4;0)$ thì mũi tên bay xuyên qua trái táo.

c) Mũi tên cắm vào bức tường tại điểm $C(5;5;4)$.

d) Mặt đất được tọa độ hóa là mặt phẳng $(Q)\colon y+z-2=0$. Vào 12h trưa (khi bóng của vật trên mặt đất là hình chiếu thẳng đứng từ vật xuống mặt đất) sau khi mũi tên cắm vào bức tường thì bóng của mũi tên trên mặt đất dài 50 cm (*làm tròn đến hàng đơn vị*), biết mũi tên dài $\dfrac{\sqrt{39}}{10}$ cm.

Câu 15. Một tháp kiểm soát không lưu ở sân bay cao 109 m đặt một đài kiểm soát không lưu ở độ cao 105 m. Máy bay trong phạm vi cách đài kiểm soát 450 km sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí chân tháp, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất sao cho trục Ox là hướng Tây, trục Oy là hướng Nam và trục Oz là trục thẳng đứng (Hình vẽ), đơn vị trên mỗi trục là kilômét.



Một máy bay đang ở vị trí A cách mặt đất 8 km, cách 268 km về phía Đông, 185 km về phía Nam so với tháp kiểm soát không lưu và đang chuyển động theo đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (82;76;0)$ hướng về đài kiểm soát không lưu.

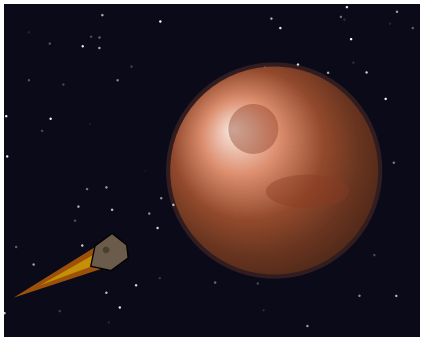
a) Vị trí A có tọa độ là $(268;-185;-8)$.

b) Đài kiểm soát không lưu có phát hiện được máy bay tại vị trí A.

c) Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x = -268 + 82t \\ y = 185 + 76t \\ z = 8 \end{cases}$ (t là tham số).

d) Khoảng cách gần nhất giữa máy bay và đài kiểm soát không lưu là 217,98 km (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục là nghìn kilômét, quỹ đạo chuyển động của hai tiểu hành tinh lần lượt được mô hình hóa là phương trình các đường thẳng $d_1: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z}{1}$; $d_2: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$. Ta xem vùng khí quyển của sao Hỏa là mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2 = 3{,}5^2$.



a) Tiểu hành tinh thứ nhất đi qua điểm $A(-1;-2;0)$, vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (-1;-2;-1)$.

b) Sao Hỏa có tâm là gốc tọa độ, bán kính tính từ tâm sao Hỏa đến điểm ngoài cùng của khí quyển là khoảng 350 km.

c) Tiểu hành tinh thứ nhất có thể đi vào vùng khí quyển của sao Hỏa.

d) Hai tiểu hành tinh không có nguy cơ va chạm nhau.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục là mét, có hai chiếc chiến đấu cơ từ hai vị trí $A(40;-15;15)$, $B(55;-10;65)$ cần đáp xuống hai vị trí thuộc tàu sân bay hải quân để nạp nhiên liệu. Bề mặt chứa các đường băng trên tàu là mặt phẳng (P) có phương trình $3x-y+2z-25=0$.

a) Đường thẳng qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là $\dfrac{x-40}{3} = \dfrac{y+15}{1} = \dfrac{z-15}{-2}$.

b) Tổng khoảng cách từ hai vị trí chiến đấu cơ đến mặt phẳng chứa đường băng là 110 m (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

c) Tọa độ điểm đối xứng của điểm A qua mặt phẳng (P) là $A'(-20;5;-25)$.

d) Người chỉ huy ở tàu sân bay phát tín hiệu để hai chiến đấu cơ đáp xuống các vị trí M, N cách nhau $5\sqrt{6}$ m. Tổng đường bay ngắn nhất $AM+BN$ bằng 115 m (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 18. Để thực hiện công tác bảo trì cầu Mỹ Thuận 2, các kỹ sư sử dụng hệ thống máy bay không người lái (UAV) tích hợp công nghệ Bathymetric LiDAR. Hệ thống này phát ra các xung laser xanh lá (green laser) theo đường thẳng từ điểm $C(20;60;50)$ nằm trên đỉnh tháp cầu, đi qua phao tiêu quan trắc $B(a;b;c)$ trên mặt nước và chiếu đến mục tiêu $A(15;10;-50)$ nằm trên bề mặt lớp cát bồi lắng ở chân trụ cầu. Hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O tại mặt nước, mặt phẳng (Oxy) là mặt nước sông, trục Oz hướng thẳng đứng lên trên (đơn vị: mét).

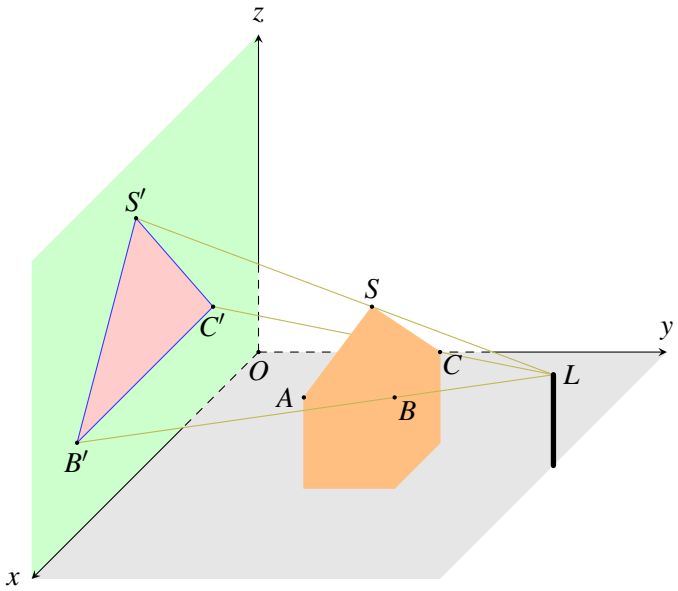
a) Đường thẳng AC biểu diễn quỹ đạo của tia laser có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-20}{1}=\dfrac{y-60}{10}=\dfrac{z-50}{20}$.

b) Tọa độ phao tiêu B thỏa mãn $a+b+c=52{,}5$.

c) Khi xung laser truyền trong nước, vận tốc của nó thay đổi theo thời gian t (đơn vị: ns) bởi hàm số $v(t)=0{,}22+0{,}01t$ (m/ns), với $t\geq 0$ là thời gian tính từ thời điểm xung laser chạm mặt nước. Khi đó, quãng đường tia laser đã đi được trong nước sau 10 ns kể từ khi chạm mặt nước là 2,475 mét.

d) Sau khi xác định mục tiêu A, các kỹ sư vận hành một robot dò tìm chạy trên một thanh ray bảo trì d nằm song song với mặt nước, cách mặt nước 5 m. Biết rằng hình chiếu vuông góc của thanh ray d lên mặt nước là một đường thẳng đi qua phao tiêu B và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;0)$. Để nhận được tín hiệu mạnh nhất từ mục tiêu A, robot cần di chuyển đến vị trí $M(a';b';c')$ trên thanh ray d sao cho khoảng cách AM ngắn nhất. Khi đó $a'+b'-c'=34$.

Câu 19. Trong cảnh dựng phim có một ngôi nhà, mái nhà là hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có chiều cao 2 mét. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo trên các trục bằng mét) với các điểm ở đáy là $A(6;4;2)$, $B(6;6;2)$, $C(4;6;2)$ và $D(4;4;2)$, trong đó S là đỉnh của mái nhà.



a) Mặt nghiêng của mái nhà (SBC) tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ góc α thì $\tan\alpha=2$.

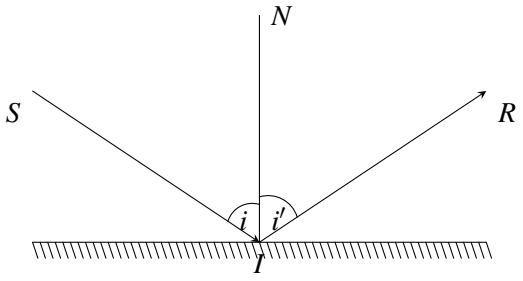
b) Tọa độ đỉnh của mái nhà là $S(5;4;5)$.

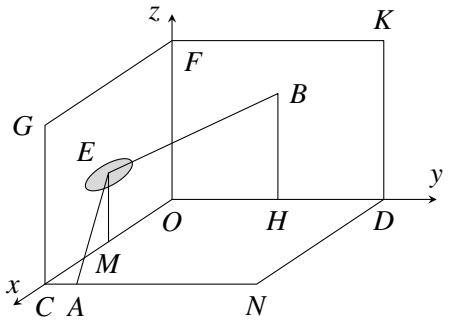
c) Một đèn chiếu sáng được đặt tại vị trí $L(5;10;2)$ để chiếu sáng mái nhà từ bên phải. Một màn chắn trùng với mặt phẳng Oxz, trên đó sẽ suất hiện bóng của mái nhà và bóng của mái nhà đó có diện tích bằng 10 (m^2).

d) Đáy của mái nhà nằm trên mặt phẳng có phương trình là $z-2=0$.

Câu 20. Nguyên lí phản xạ ánh sáng: Khi ánh sáng bị phản xạ, tia phản xạ sẽ nằm trong mặt phẳng chứa tia tới và pháp tuyến của gương ở điểm tới. Góc phản xạ cũng sẽ bằng góc tới, tức là $i=i'$.

Chú ý. Khi ta lấy đối xứng tia SI qua gương thì tia IS' là tia đối của tia IR.





Trong căn phòng có dạng hình hộp chữ nhật, có gương phẳng tròn tâm E với độ dày không đáng kể, được treo trên tường là mặt phẳng (FOC). Biết rằng $OCGF$, $OCND$, $OFKD$ là các hình chữ nhật; $OC=5$ m; $OD=OF=4$ m; $OM=3$ m; $EM=1{,}5$ m; $CA=1$ m. Một tia sáng được chiếu từ vị trí điểm A tới E, tia sáng phản xạ qua gương phẳng tới điểm B trên tường (*tham khảo hình vẽ*). Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, mỗi đơn vị có độ dài 1 m.

a) Phương trình mặt phẳng (ACE) là $3x+4z-15=0$.

b) Đường thẳng AE đi qua điểm $J(1;3;3)$.

c) Gọi (d) là đường thẳng đối xứng với đường thẳng AE qua mặt phẳng $(OCGF)$. Góc giữa đường thẳng (d) và mặt phẳng $(OCGF)$ là 41° (*kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*).

d) Gọi tọa độ điểm B là $B(x_0;y_0;z_0)$ thì $2y_0+4z_0=18$.

Câu 21. Bay Flycam trái phép là hành vi tiềm ẩn nguy cơ uy hiếp trực tiếp an toàn hàng không, lĩnh vực liên quan đến tính mạng của hàng trăm hành khách trên mỗi chuyến bay. Một cảng hàng không quốc tế thiết lập hệ thống radar giám sát được đặt tại gốc tọa độ $O(0;0;0)$ trong không gian $Oxyz$ (đơn vị: 1km, mặt phẳng Oxy là mặt đất). Tại thời điểm $t=0$, radar quét được tín hiệu một Flycam xâm nhập tại điểm $A(4;2;2)$ và đang bay theo đường thẳng với vectơ vận tốc $\vec{v}_1=(-1;0;0)$ (đơn vị: km/phút). Cùng lúc đó, một máy bay chở khách A321 đang chờ lệnh cất cánh tại điểm $B(0;-2;0)$. Nếu được cấp phép, quỹ đạo cất cánh dự kiến của máy bay là một đường thẳng với vectơ vận tốc $\vec{v}_2=(0;4;3)$ (đơn vị: km/phút). Kiểm soát viên không lưu không được phép cấp lệnh cất cánh cho máy bay thương mại nếu hệ thống dự báo có bất kì thời điểm nào khoảng cách giữa máy bay và vật thể lạ nhỏ hơn 5km.

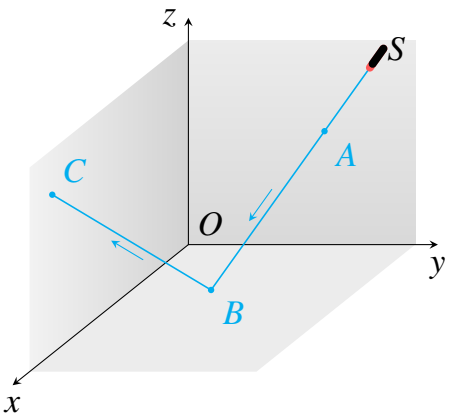
a) Khoảng cách từ vị trí ban đầu của máy bay đến Flycam tại thời điểm phát hiện lớn hơn 5km.

b) Phương trình đường thẳng mô tả quỹ đạo máy bay cất cánh là $\begin{cases} x=0 \\ y=-2+4t \\ z=3t \end{cases}$.

c) Tốc độ của Flycam là 1 km/h và tốc độ cất cánh dự kiến của máy bay A321 là 300 km/h.

d) Nếu máy bay A321 được phép cất cánh, khoảng cách ngắn nhất giữa nó và chiếc Flycam sẽ đạt được vào thời điểm 1 phút kể từ lúc rời đường băng.

Câu 22. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị mỗi trục là mét, mặt sàn là mặt (Oxy), trục Oz hướng lên trên, hai bức tường (1) và (2) nằm lần lượt trên các mặt phẳng (Oyz) và (Oxz). Một tia Laze được chiếu từ điểm S xuyên qua một lỗ nhỏ tại $A(0;6;5)$ trên bức tường (1), tia sáng này phản xạ tại điểm B trên mặt sàn rồi đến bức tường (2) tại điểm $C(12;0;7)$. Theo tính chất phản xạ, ta có AB và BC cùng tạo với mặt sàn các góc bằng nhau.



a) Tung độ điểm B là $y_B = 5$.

b) Nếu $B(x_B;y_B;0)$ thì $\overrightarrow{AB} = (x_B;y_B-6;-5)$.

c) Hình chiếu vuông góc của điểm C trên mặt sàn (Oxy) là điểm $C'(0;0;7)$.

d) Biết điểm S cách lỗ A một khoảng là $SA = 3$ (mét) và $S(a;b;c)$ thì $a+b+c = 12$.

Câu 23. Trong một khu vực khai thác mỏ, người ta đặt hệ tọa độ $Oxyz$ để mô phỏng vị trí các điểm trong không gian (tính theo mét). Vị trí của trạm quan sát nằm tại $A(0;0;10)$. Vị trí của giếng khoan nằm tại $B(4;3;0)$. Một máy bay không người lái M đang bay trên đường thẳng $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$.

a) Tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của giếng khoan B trên đường thẳng d là $H(1;-1;2)$.

b) Góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (Oxy) là $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

c) Khoảng cách nhỏ nhất từ máy bay M đến giếng khoan B là 5.

d) Nếu từ A, người quan sát nhìn thấy máy bay M dưới một góc lớn nhất (góc nhìn được tạo bởi đường thẳng AM và đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (Oxy)), vị trí của M để góc này lớn nhất có tổng của các thành phần tọa độ là $\dfrac{34}{45}$.

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo trên các trục là km), một máy bay phản lực đang bay thẳng theo lộ trình Δ là đường thẳng có phương trình Δ: $\dfrac{x-50}{3} = \dfrac{y+20}{-4} = \dfrac{z-10}{1}$. Radar tại trạm kiểm soát không lưu phát hiện một khối mây dông tích điện nguy hiểm có dạng hình cầu (S) với tâm $C(200;-300;60)$ và bán kính $R = 80$ km. Tại thời điểm quan sát, máy bay đang ở vị trí $A(50;-20;10) \in \Delta$.

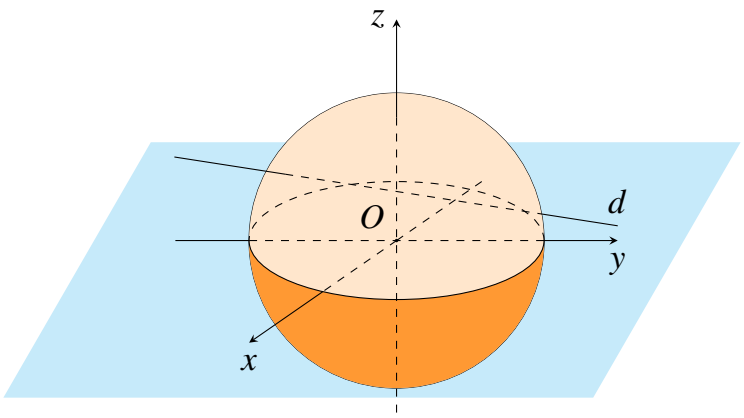
a) Một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u} = (5;-2;1)$.

b) Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P): $4x+3y = 140$.

c) Nếu tiếp tục giữ nguyên lộ trình Δ thì máy bay phản lực sẽ bay xuyên qua (bay vào bên trong) khối mây dông có dạng hình cầu (S).

d) Gọi M là điểm trên đường thẳng Δ mà tại đó máy bay phản lực gần tâm C của hình cầu (S) nhất. Biết rằng tốc độ máy bay phản lực không đổi là 500 km/h. Thời gian máy bay phản lực đó di chuyển từ vị trí điểm A đến điểm M nhỏ hơn 30 phút.

Câu 25. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu của một sân bay ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa 600 km. Một máy bay đang chuyển động với vận tốc 900 km/h theo đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = -1000 + 100t \\ y = -300 + 80t \\ z = 100\sqrt{11} \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ).



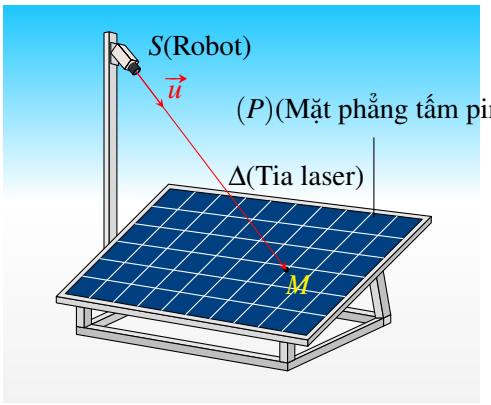
a) Ranh giới vùng phát sóng bên ngoài của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu có bán kính bằng 300 km.

b) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là $x^2 + y^2 + z^2 = 360000$.

c) Máy bay đang chuyển động theo đường thẳng d đến vị trí điểm $M\left(-500;\ 100;\ 100\sqrt{11}\right)$. Vị trí này nằm ngoài vùng kiểm soát không lưu của đài kiểm soát không lưu sân bay.

d) Thời gian kể từ khi đài kiểm soát không lưu phát hiện máy bay đến khi máy bay ra khỏi vùng kiểm soát không lưu là $\frac{4}{3}$ giờ.

Câu 26. Trong một mô hình nông nghiệp công nghệ cao, một tấm pin năng lượng mặt trời phẳng được lắp đặt nghiêng sao cho bề mặt của nó nằm trên mặt phẳng $(P)\colon 2x + 2y + z - 6 = 0$ (xét trong hệ không gian tọa độ $Oxyz$ với đơn vị đo là mét, mặt phẳng (Oxy) được xem là mặt đất phẳng). Người ta lắp đặt một robot cố định ở trên cao để kiểm tra bụi bẩn. Robot có mắt phát tia laser tại điểm $S(1;1;6)$. Robot thực hiện quét tia laser trên bề mặt tấm pin. Tại một thời điểm tia laser được chiếu theo đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;-2;-2)$ và chạm vào bề mặt tấm pin tại điểm M.



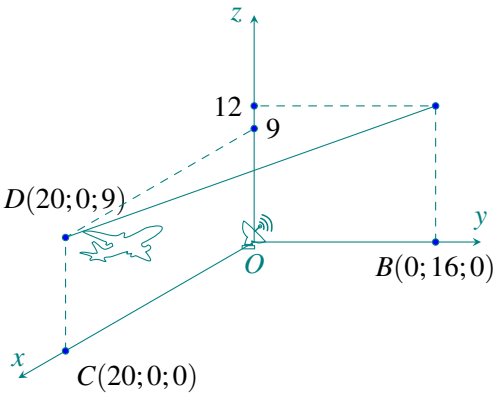
a) Khoảng cách từ mắt phát tia laser S đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{4}{3}$ mét.

b) Điểm M có tọa độ là $(1;1;2)$.

c) Góc α hợp bởi tia laser Δ và mặt phẳng (P) thỏa mãn hệ thức $\sin\alpha = \dfrac{4}{9}$.

d) Khi vệ sinh, nước được phun trúng điểm chạm của tia laser trên tấm pin sẽ tạo thành dòng nước chảy trên bề mặt pin xuống đất theo hướng dốc nhất, quỹ đạo chảy của dòng nước nằm trên một đường thẳng. Đường thẳng đó có một vectơ chỉ phương là $\vec{v} = (1;1;3)$.

Câu 27. Một chiếc máy bay thương mại Comac C919 đang bay trên bầu trời theo một đường thẳng từ D đến E có hình chiếu trên mặt đất là đoạn CB. Tại vị trí D thì máy bay bay cách mặt đất 9 000 m, tại vị trí E thì máy bay cách mặt đất 12 000 m.



Một ra đa được đặt trên mặt đất tại vị trí O cách C khoảng 20 000 m, cách B khoảng 16 000 m và $\widehat{BOC} = 90°$; phạm vi theo dõi của rađa là 20 km. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là 1 000 m) với O là vị trí đặt ra đa, B thuộc tia Oy, C thuộc tia Ox.

a) Tại D, máy bay cách ra đa 23 000 m (làm tròn đến hàng nghìn đơn vị mét).

b) Khi máy bay bay đến điểm I (là trung điểm của DE), máy bay cách mặt đất 10 500 m.

c) Trên hành trình bay từ D đến E, máy bay sẽ đi qua điểm có tọa độ $P(16;3{,}2;9{,}6)$.

d) Khoảng cách giữa vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng mà máy bay bay trong phạm vi theo dõi của ra đa là 22 000 m (làm tròn đến hàng trăm theo đơn vị mét).

Câu 28. Ngày nay, nhờ vào hệ thống định vị toàn cầu GPS (Global Positioning System), việc di chuyển của con người hết sức thuận lợi dù bằng đường bộ, đường sắt hay đường hàng không hay đường biển. Nếu có thiết bị bắt sóng GPS, bạn luôn có thể kết nối được đến bốn vệ tinh GPS dù ở bất kì đâu trên Trái Đất. Khi thiết bị của bạn biết khoảng từ ít nhất ba vệ tinh đến nó, máy sẽ tính toán ra vị trí hiện tại của bạn bằng một quy trình gọi là Trolateration. Cho biết trái đất có dạng hình cầu bán kính bằng $\sqrt{41}\cdot 10^3$ km. Bạn An đang đứng trên mặt đất. Có ba vệ tinh báo về máy chủ tiếp nhận thông tin rằng vệ tinh thứ nhất đang cách An $3\cdot 10^3$ km, vệ tinh thứ hai đang cách An $5\cdot 10^3$ km, vệ tinh thứ ba đang cách An $4\cdot 10^3$ km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O là tâm trái đất và đơn vị độ dài trên mỗi trục là 10^3 km. Tại thời điểm vệ tinh thông báo về máy chủ thì tọa độ của các vệ tinh lần lượt là $I_1(4;4;6)$, $I_2(4;9;3)$ và $I_3(8;4;3)$. Xem vị trí An là điểm A và An cần di chuyển thẳng đến nhà Bình là điểm $B(4;4;3{,}01)$ với tốc độ không đổi 20 km/h.

a) Điểm A đang nằm trên mặt cầu tâm O bán kính $\sqrt{41}\cdot 10^3$ km.

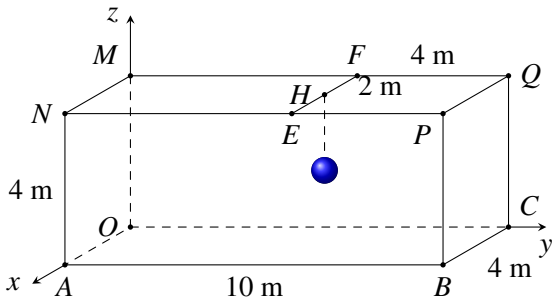
b) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên trong và bên ngoài Trái Đất là $x^2+y^2+z^2 = \sqrt{41}$.

c) Điểm A chính là giao điểm của bốn mặt cầu: Trái Đất và ba mặt cầu tâm lần lượt là I_1, I_2, I_3 có bán kính lần lượt là khoảng cách từ các vệ tinh đến An.

d) Thời gian An đi đến nhà Bình là 30 phút.

Câu 29. Một căn phòng khách có hình dạng là một hình hộp chữ nhật được gắn trong hệ trục toạ độ $Oxyz$ với các thông số như hình bên (đơn vị trên mỗi trục là mét). Coi mặt sàn nằm

trên mặt phẳng (Oxy). Theo thiết kế, chủ nhà muốn trang trí một đèn pha lê hình cầu có bán kính 15 cm được nối với trần nhà ở vị trí điểm H bởi một dây dài 1 m (H là trung điểm của EF, biết $EF /\!/ PQ$ và $QF = 4$ m, hình bên).



a) Cao độ tâm I của đèn pha lê hình cầu là 3.
b) Phương trình mặt cầu của đèn pha lê là $(x-2)^2+(y-6)^2+(z-3)^2=0{,}0225$.
c) Một người cao 1,8 m thì khi đi ngang qua phía dưới sẽ cách đèn ít nhất là 60 cm.
d) Tia sáng từ tâm đèn chiếu ra cắt sàn nhà tại K. Khoảng cách xa nhất từ K tới B là khoảng 10,77 m (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

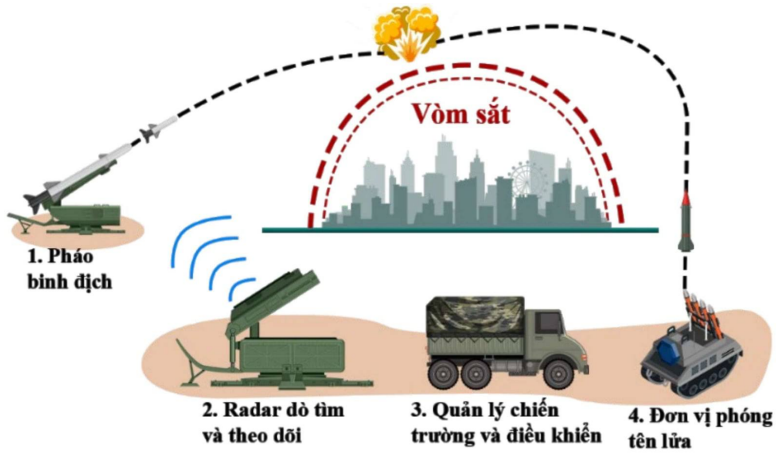
Câu 30. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là ki-lô-mét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I(3;-2;5)$ trên một ngôi làng ven biển và được thiết kế với bán kính phủ sóng là 6 km.



a) Nếu sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian thì phương trình mặt cầu là $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-5)^2=36$.
b) Một người đi tàu đến vị trí có tọa độ $M(-2;5;3)$ thì tại vị trí này vẫn có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng này.
c) Một hòn đảo nhỏ có dạng hình tam giác với các đỉnh có toạ độ là $A(5;7;2)$, $B(-6;2;3)$, $C(2;-5;-3)$. Hòn đảo đó nằm trên mặt phẳng cách trạm thu phát sóng một khoảng 5,89 km (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).
d) Từ vị trí $N\left(2;1;\dfrac{55}{49}\right)$ trên hòn đảo, một người chèo thuyền di chuyển với vectơ vận tốc $\vec{v}=(2;3;0)$. Sau nửa giờ, người đó chưa thể sử dụng được dịch vụ của trạm thu phát sóng này.

Câu 31. Hệ thống phòng không "*Vòm sắt*" là một trong những hệ thống đánh chặn tên lửa xa rất nổi tiếng của Israel. Để "*Vòm sắt*" hoạt động được chính xác người ta trang bị một

Radar có khả năng phát hiện tên lửa với bán kính 417 km.



Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ một hệ thống "*Vòm sắt*", Radar đang ở vị trí $O(0;0;0)$ và một quả tên lửa đang ở vị trí $A(688;185;-8)$ được phóng lên và bay theo một quỹ đạo là đường thẳng có vector chỉ phương là $\vec{u}=(-91;-75;0)$.

a) Phương trình mặt cầu thể hiện vùng phủ sóng của Radar là $x^2+y^2+z^2=417$.

b) Radar phát hiện quả tên lửa ngay tại vị trí được phóng lên.

c) Nếu hệ thống "*Vòm sắt*" gặp trục trặc không thể bắn hạ tên lửa thì khoảng cách gần nhất từ hệ thống "*Vòm sắt*" đến quả tên lửa khoảng 300 km (sai số không quá 10 km).

d) Nếu hệ thống gặp trục trặc không bắn hạ được tên lửa, biết từ khi tên lửa phóng đến khi Radar phát hiện là 3 phút, thời gian tên lửa xuất hiện trên Radar là 5 phút (coi tên lửa chuyển động đều).

Câu 32. Trong một mô hình game 3D, với hệ trục tọa độ thích hợp, người chơi cùng với khẩu súng của anh ta được mô phỏng như một chất điểm di chuyển trên mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-3=0$ và nhắm bắn các mục tiêu di động trên mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Người chơi vẫn có thể bắn trúng mục tiêu nếu nó di chuyển trên bán cầu khuất phía sau tầm nhìn. Sau khi trò chơi bắt đầu, anh ta quyết định nhắm bắn theo phương véc-tơ $\vec{u}=(1;0;1)$.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và bán kính $R=1$.

b) Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung.

c) Người chơi đứng ở vị trí giao điểm của (P) và Ox, khoảng cách từ tâm mặt cầu (S) đến đường bay viên đạn bằng $\dfrac{\sqrt{66}}{2}$.

d) Khoảng cách lớn nhất từ vị trí người bắn (trên (P) và đường bắn có phương $\vec{u}$) đến mục tiêu (trên (S)) bằng $3\sqrt{2}$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$ thuộc hệ thống định vị GPS, bề mặt Trái Đất được mô hình hoá bởi mặt cầu $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9$. Hai vệ tinh truyền tín hiệu có vị trí $M(4;-4;2)$, $N(6;0;6)$.

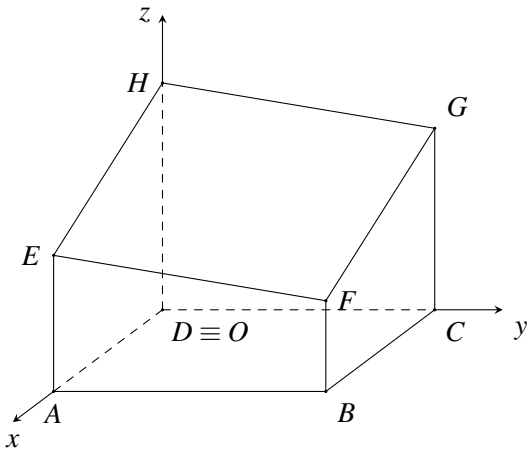
a) Vệ tinh ở vị trí M gần tâm mặt cầu hơn so với vệ tinh ở vị trí N.

b) Một tín hiệu được truyền đi từ vệ tinh ở M đến vệ tinh ở N là đường thẳng có phương trình chính tắc $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z-2}{2}$.

c) Mặt phẳng đi qua tâm Trái Đất và hai điểm M, N có phương trình $2x+y-2z=0$.

d) Giả sử đơn vị trên mỗi trục là 2 100 km, một tín hiệu có tốc độ $3 \cdot 10^5$ km/s được truyền từ vệ tinh M đến điểm gần nhất thuộc bề mặt Trái Đất mất khoảng 0,026 giây (*làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn của giây*).

Câu 34. Sau nhà ông Sơn có mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều rộng $AB = 5$ (mét) và chiều dài $AD = 6$ (mét). Ông Sơn dự định dùng mảnh đất này để trồng rau sạch nên thiết kế mái che phẳng và dốc về góc đỉnh F.



Mái lợp $EFGH$ đặt trên bốn trụ AE, BF, CG và DH đều vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ trong đó $DH = 5$ (mét), $CG = 4$ (mét) và $AE = 3$ (mét). Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có đơn vị trên mỗi trục là mét (m) như hình vẽ.

a) Điểm $A(6;0;0)$.

b) Phương trình mặt phẳng (EFG) có dạng $ax + by + cz - 150 = 0$. Khi đó $a + b + c = 23$.

c) Giá một m^2 lưới chống nắng là 12 000 đồng. Khi đó, số tiền ông Sơn mua lưới lợp mái $EFGH$ là 386 nghìn đồng (*kết quả làm tròn đến hàng nghìn đồng*).

d) Ông Sơn cần lắp đặt dây từ điểm I nằm trên cạnh AB và cách B một mét, đến điểm M nằm trên cạnh BC, đến điểm N nằm trên cạnh CG, đến điểm P nằm trên cạnh DH và đến điểm E. Biết dây luôn áp sát vào các mặt, độ dài ngắn nhất của dây là $\sqrt{305}$ (m).

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu (S_1) và (S_2) có tâm lần lượt là $I(-4;-5;0)$ và $J(6;8;3)$. Mặt cầu (S_2) cắt mặt phẳng (Oxy) theo thiết diện là một đường tròn có bán kính $r_2 = 4$. Mặt cầu (S_1) có bán kính $R_1 = 4$. Một điểm M có tọa độ cố định $M(1;0;10)$. Một điểm C di chuyển từ M đến một điểm bất kỳ thuộc mặt cầu (S_1) hoặc (S_2). Năng lượng tiêu hao khi di chuyển của điểm C được xác định bởi hàm số $E(s) = \dfrac{1}{12} \cdot s^2$ (đơn vị năng lượng), trong đó s là độ dài quãng đường di chuyển. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

a) Bán kính của mặt cầu (S_2) bằng 5.

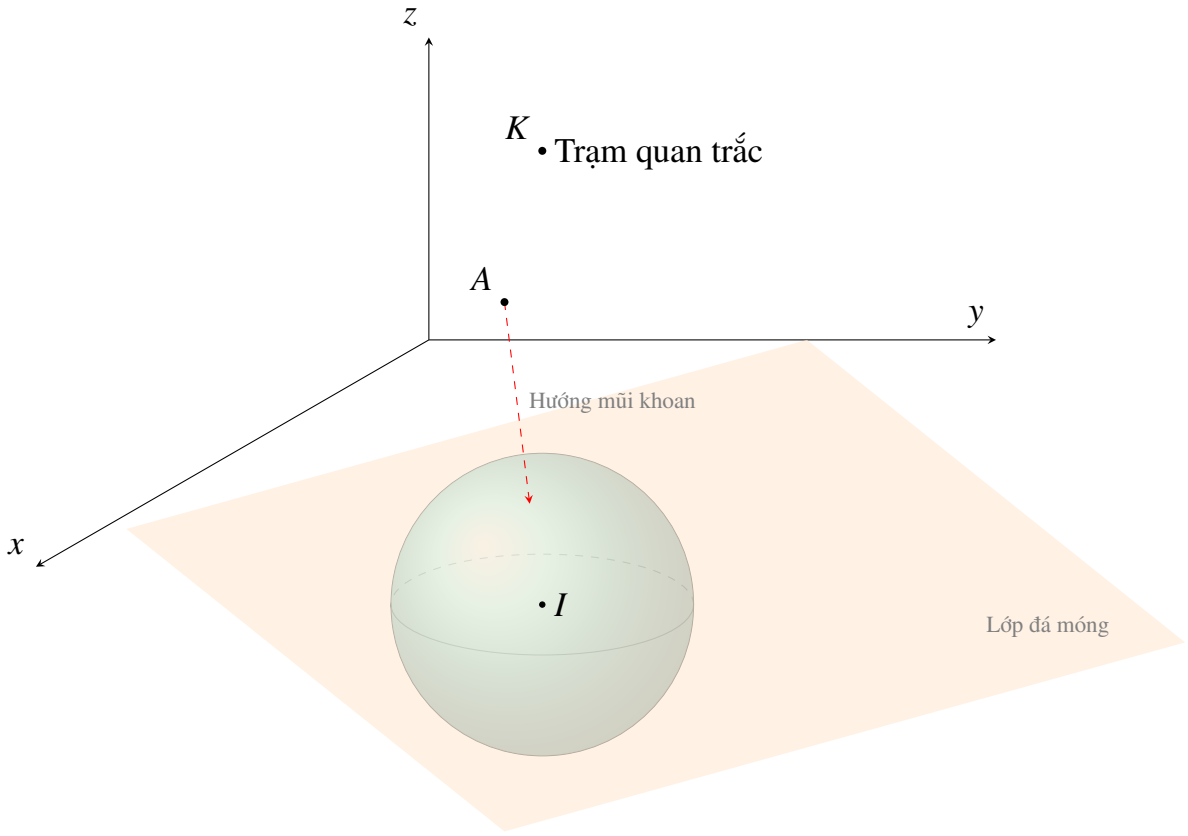
b) Năng lượng tối thiểu để điểm C di chuyển từ M đến bề mặt khối cầu tâm I là $\dfrac{175 - 50\sqrt{6}}{12}$ (đơn vị năng lượng).

c) Gọi A và B lần lượt là hai điểm bất kỳ thuộc mặt cầu (S_1) và (S_2). Độ dài lớn nhất của đoạn AB có giá trị lớn hơn 25.

d) Năng lượng tối thiểu để điểm C di chuyển vào bên trong khối cầu (S_2) nhỏ hơn năng lượng tối thiểu để điểm C di chuyển vào bên trong khối cầu (S_1).

Câu 36. Trong một dự án khảo sát địa chất thăm dò tài nguyên, các nhà khoa học phát hiện một túi khí tự nhiên trong lòng đất được xác định có dạng hình cầu (S), một lớp đá móng ngăn cách các địa tầng (P). Với hệ trục $Oxyz$ phù hợp, đơn vị trên mỗi trục là chục mét. Mặt

cầu (S) có phương trình $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+7)^2=16$. Lớp đá móng là mặt phẳng (P) có phương trình $x+y+z-15=0$. Để thực hiện việc khai thác, các nhà khoa học đặt mũi khoan được định hướng bắt đầu từ vị trí $A(1;2;1)$ và tiến tới liên tục theo phương của vectơ $\vec{u}=(1;1;-8)$. Ngoài ra, một trạm quan trắc địa chấn được đặt cố định tại vị trí $K(2;3;5)$ để theo dõi các biến động cơ học trong quá trình khoan.



a) Túi khí (S) bị lớp đá móng (P) chia thành hai phần có thể tích bằng nhau.

b) Quỹ đạo của mũi khoan được mô tả bởi một phần đường thẳng d có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{-8}$.

c) Trên quỹ đạo chuyển động của mình, mũi khoan sẽ đi xuyên qua túi khí (S) tạo thành một đoạn đường ống trong lòng túi khí có độ dài là 80 m.

d) Khi mũi khoan bắt đầu chạm vào túi khí (S) thì tín hiệu địa chấn nhận được là mạnh nhất. Khi đó khoảng cách từ trạm quan trắc đến điểm nhận được tín hiệu mạnh nhất bằng 79 m (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

3 Tự luận.

Bài 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(3;-2;-1)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x-2y-2z+3=0$.

a) Tính khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (P).

b) Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc (P).

c) Viết phương trình đường thẳng d đi qua I và d vuông góc với (P).

Bài 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = -1-2t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+z+5=0$.

a) Tìm tọa độ giao điểm I của đường thẳng Δ và mặt phẳng (P).

b) Viết phương trình đường thẳng Δ' nằm trên mặt phẳng (P) đồng thời cắt Δ và vuông góc với Δ.

c) Tính góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P).

Bài 3. Cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = t \\ y = -1-4t \\ z = 6+6t \end{cases}$ và $d_2: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{-5}$.

Viết phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua $A(1;-1;2)$, đồng thời vuông góc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$\Delta: \begin{cases} x = 3+2t \\ y = -2+t \\ z = 1+3t \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta': \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{-2}.$$

a) Chứng minh rằng hai đường thẳng Δ và Δ' chéo nhau.

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ và song song với đường thẳng Δ'.

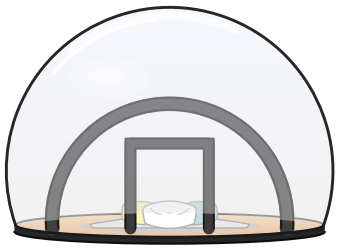
Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9$ và điểm $A(2;-1;1)$.

a) Tìm tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

b) Chứng minh rằng điểm A nằm trong mặt cầu (S).

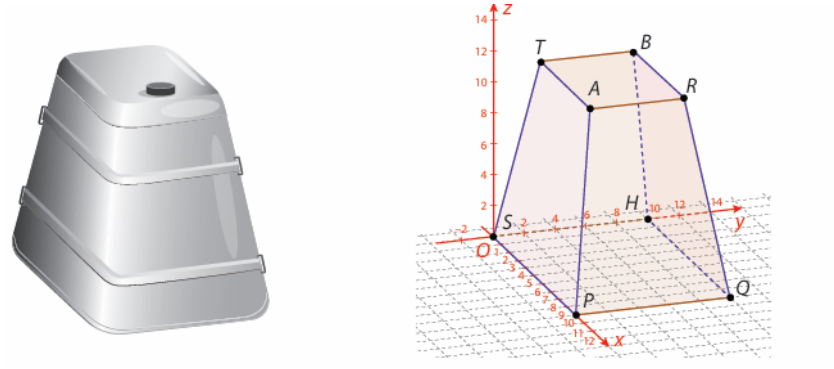
c) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A sao cho khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P) là lớn nhất.

Bài 6. Người ta muốn thiết kế một lều cắm trại có dạng là một phần mặt cầu bằng phần mềm 3D. Cho biết phương trình bề mặt của lều là $(S): (x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9$, phương trình mặt phẳng chứa cửa lều là $(P): x=2$, phương trình chứa sàn lều là $(Q): z=0$. Tìm tâm và bán kính đường tròn cửa lều và đường tròn sàn lều.



Bài 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một thiết bị phát sóng wifi được đặt tại vị trí $I(3;4;2)$. Vùng phủ sóng của thiết bị là một hình cầu có bán kính $R=10$ m. Một người sử dụng điện thoại đứng ở vị trí $K(x-7;7;1)$. Sau đó, người đó di chuyển đến vị trí $H(x+11;7;1)$. Tìm giá trị nguyên của x sao cho cả hai vị trí K và H đều có thể bắt được tín hiệu wifi từ thiết bị.

Bài 8. Người ta mô phỏng thiết kế của một bình chứa nhiên liệu có dạng một hình chóp cụt tứ giác đều trong hệ trục $Oxyz$ như Hình vẽ với $S(0;0;0)$, $P(10;0;0)$, $Q(10;10;0)$, $R(8;8;12)$, $T(2;2;12)$.

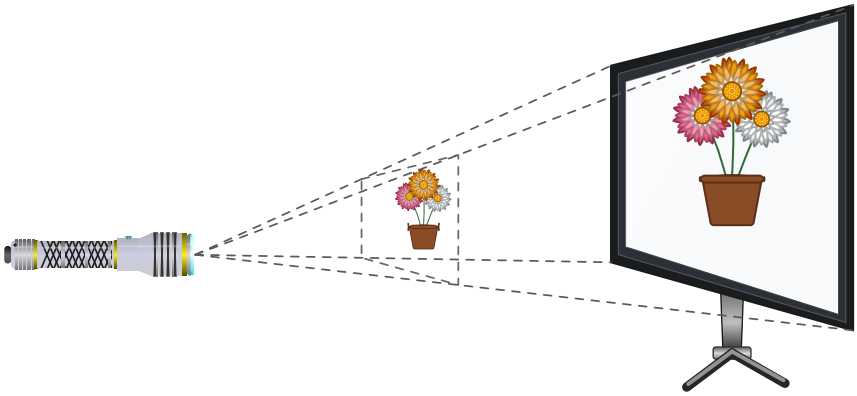


a) Viết phương trình các mặt phẳng chứa các mặt bên của bình.

b) Tính sin của góc giữa cạnh bên và mặt đáy.

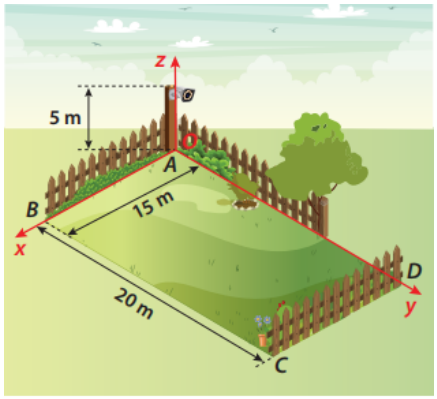
c) Tính cos của góc giữa các mặt bên.

Bài 9. Trong các chương trình đồ hoạ máy tính, để tạo ảo giác theo đúng phối cảnh, các vật ở càng gần thì càng lớn hơn các vật ở xa, các hình ảnh ba chiều trong bộ nhớ của máy tính được chiếu lên một màn hình hình chữ nhật từ điểm nhìn của mắt hoặc máy chiếu.



Không gian quan sát, một phần của không gian được nhìn thấy là vùng nằm trong bốn mặt phẳng đi qua điểm nhìn và một đường biên của màn hình. Nếu vật trong cảnh vật mở rộng vượt quá bốn mặt phẳng này thì chúng phải được cắt xén trước khi dữ liệu điểm ảnh được gửi đến màn hình. Vì vậy các mặt phẳng này được gọi là mặt phẳng cắt. Giả sử màn hình được biểu diễn bởi hình chữ nhật trong mặt phẳng (Oyz) với các đỉnh $(0;400;0)$, $(0;-400;0)$, $(0;400;600)$, $(0;-400;600)$ và máy quay được đặt tại $(1000;0;0)$. Tính góc giữa màn hình và các mặt phẳng cắt.

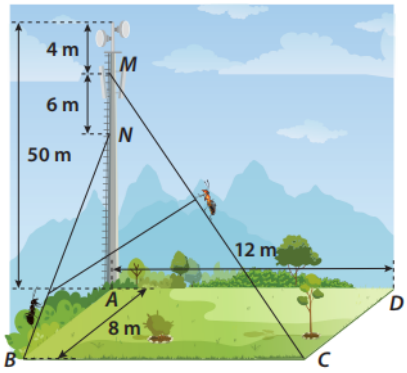
Bài 10. Một sân hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AD = 20$ m, chiều rộng $AB = 15$ m. Người ta đặt một cái camera ở độ cao 5 m trên một cây cột vuông góc với mặt sân tại A, biết camera có bán kính quan sát là 25 m. Xét hệ trục toạ độ $Oxyz$ với gốc toạ độ O trùng với điểm A chân cột, các tia Ox, Oy lần lượt chứa các cạnh AB, AD của sân và tia Oz chứa cây cột.



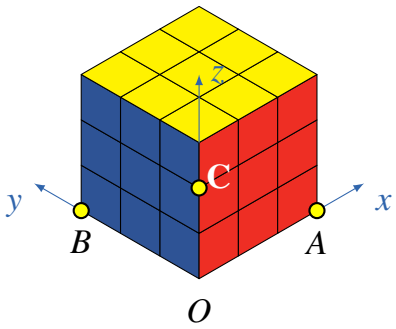
a) Hãy viết phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài và bên trong của vùng quan sát được.

b) Hỏi camera có thể quan sát toàn bộ sân hay không? Vì sao?

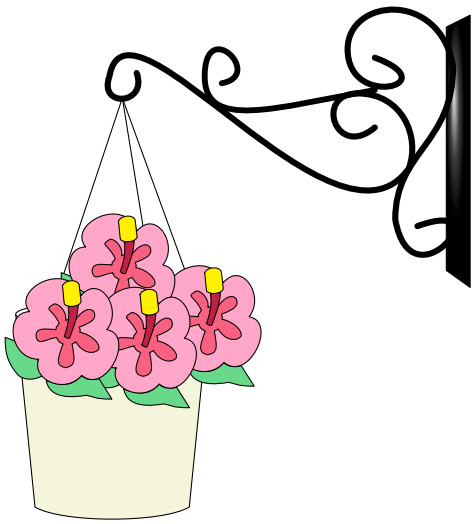
Bài 11. Một tháp phát sóng cao 50 m đặt ở góc A của sân hình chữ nhật $ABCD$. Để giữ cho tháp không bị đổ, người ta có cột rất nhiều dây cáp quanh tháp và cố định tại các vị trí trên mặt đất. Hai chú kiến vàng và kiến đen bắt đầu leo lên hai dây cáp CM và BN (từ C và B) với vận tốc lần lượt là 3 m/phút và 2,5 m/phút. Hỏi sau 10 phút thì hai chú kiến cách nhau bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



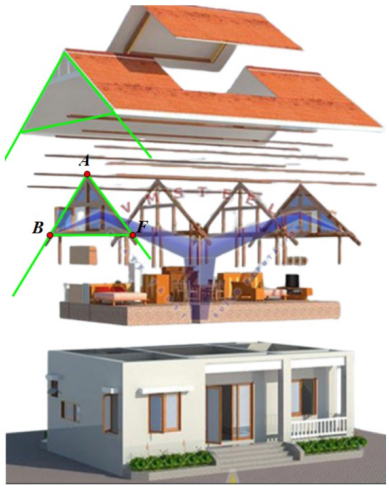
Bài 12. Khối rubik được gắn với hệ tọa độ $Oxyz$ có đơn vị bằng độ dài cạnh của hình lập phương nhỏ (hình vẽ). Xét bốn điểm $A(3;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;2)$, $D(3k;3k;2k)$ với $k>0$ đồng phẳng. Biết rằng tọa độ điểm $D(a;b;c)$. Khi đó giá trị $a+2b+3c$ bằng bao nhiêu?



Bài 13. Để treo một chậu cây người ta cần lấy trên miệng của chậu cây đó 3 điểm và sử dụng 3 đoạn dây có độ dài bằng nhau để nối 3 điểm đó với một điểm treo (xem hình minh hoạ). Giả sử trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, ba điểm trên miệng của chậu cây là $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$; điểm treo $M(a;b;c)$ nằm trên mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+2y+z-3=0$. Bình phương khoảng cách từ điểm M đến gốc toạ độ O bằng bao nhiêu?

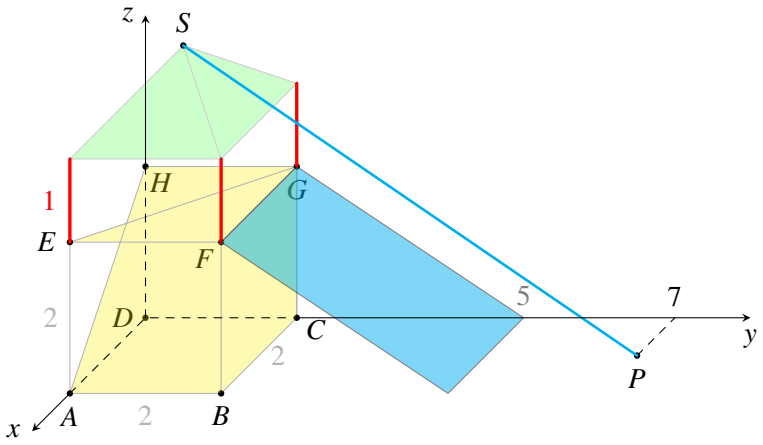


Bài 14. Một kỹ sư thiếp lập một hệ tọa độ $Oxyz$ để theo dõi vị trí lắp đặt của 2 mái nhà đã được gắn với nhau tạo thành hình chữ V vào các thanh đà sao cho chuẩn xác nhất. Biết phương trình mặt phẳng chứa 2 mái là $(P)\colon x+2y-2z+6=0$ và $(Q)\colon x+2y+z-5=0$, điểm A là nóc ngói, 2 điểm B, F là rìa đuôi ngói của mỗi mái tiếp xúc giữa mái và thanh đà như hình vẽ (các thanh đà dài như nhau) khi cố định phần dưới của ngôi nhà. Khoảng cách $BF=20$ m, khi đó tỉ số độ dài của thanh đà AF và khoảng cách BF bằng bao nhiêu (*làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai*)?



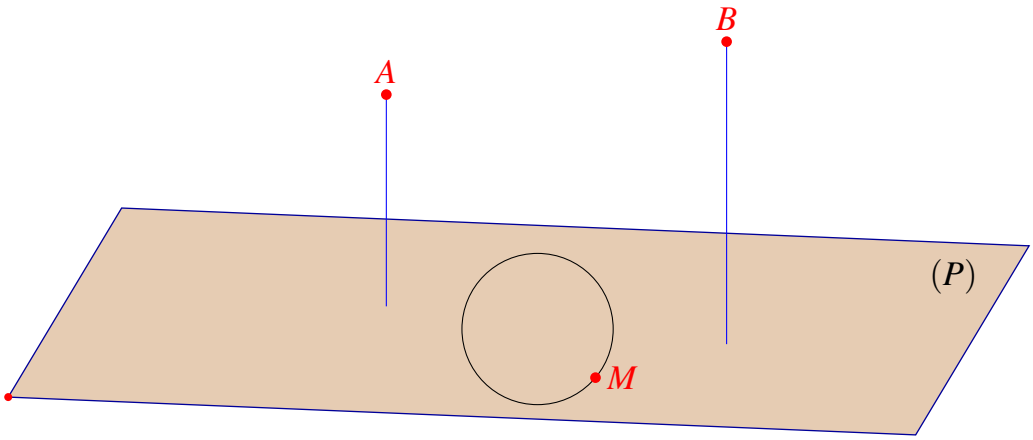
Bài 15. Tháp gồm một khối lập phương, trên đó gắn thêm một khung hộp chữ nhật, và phía trên là một khối chóp tứ giác đều. Tại độ cao bằng chiều cao khối lập phương, có gắn một

mặt phẳng trượt hình chữ nhật (xem hình, các kích thước tính bằng mét).



Từ đỉnh S có buộc một sợi dây xuống điểm $P(1;7;0)$ làm dây leo.
Trên mặt phẳng trượt, có một đứa trẻ đứng thẳng tại vị trí chính giữa tấm trượt và với thẳng tay (vuông góc với mặt đất) nắm được dây leo. Tính chiều cao tay vịn của đứa trẻ tính từ mặt đất.

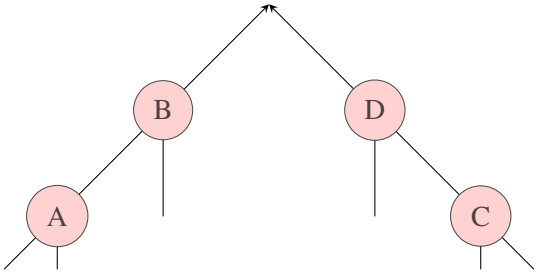
Bài 16. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục tính là mét), một vườn hoa nằm trên mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-z-12=0$. Có hai bóng đèn chiếu sáng cố định được đặt tại các điểm $A(40;-40;12)$, $B(-40;50;38)$. Để đảm bảo kĩ thuật chiếu sáng, các kỹ sư muốn thiết kế trên mặt vườn một đường ray để lắp đặt một đèn chiếu sáng M di động trên đường ray ấy. Yêu cầu kĩ thuật đặt ra là góc tạo bởi MA với mặt vườn và góc tạo bởi MB với mặt vườn phải luôn bằng nhau. Độ dài đường ray là bao nhiêu mét *(kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)*?



Bài 17. Để xác định vị trí của máy bay khi đang bay, người ta gắn một hệ trục toạ độ $Oxyz$ với gốc toạ độ đặt tại một sân bay để xác định toạ độ của sân bay. Biết rằng cao độ của toạ độ máy bay chính là độ cao của máy bay đối với mặt đất. Đơn vị độ dài trên mỗi trục toạ độ là 100 m. Một máy bay đang bay với quỹ đạo là một đường thẳng trong không gian với vận tốc bay không đổi. Tại một thời điểm nào đó, máy bay đang ở vị trí có toạ độ $(200;70;118)$. Sau 50 giây, độ cao của máy bay so với mặt đất giảm 400 m. Hỏi sau 25 giây nữa, khoảng cách từ sân bay tới máy bay là bao nhiêu km, biết rằng trong suốt quá trình bay này, máy bay có đi qua điểm có toạ độ $(80;105;113)$?

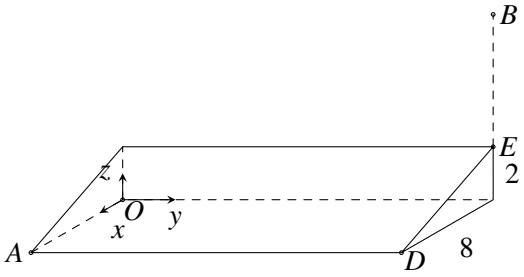
Bài 18. Trong một đợt diễn tập quốc phòng, hai người ở vị trí khác nhau cùng ngắm bắn

một mục tiêu cố định trên không. Người ta gắn một hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét), mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất. Người thứ nhất bắn một viên đạn đi qua hai điểm $A(5;7;10)$ và $B(6;9;12)$. Người thứ hai bắn một viên đạn đi qua hai điểm $C(15;17;5)$ và D (điểm D ở độ cao 26m so với mặt đất). Biết rằng sau một thời gian rời khỏi nòng súng, hai viên đạn chạm với nhau tại vị trí cách điểm A một khoảng 150m (tham khảo hình vẽ)

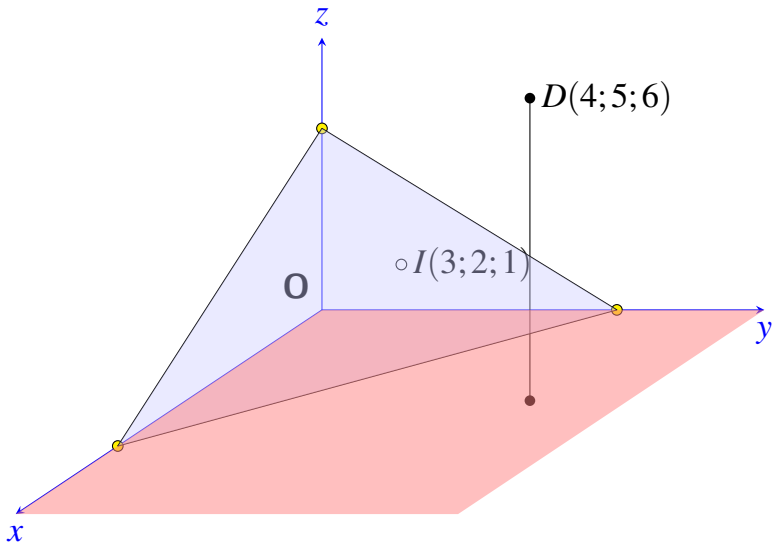


Hỏi điểm D cách điểm C một khoảng bao nhiêu mét? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

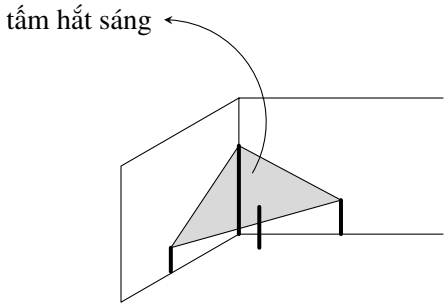
Bài 19. Một buổi biểu diễn sân khấu diễn ra trên một sân khấu nghiêng về phía khán giả. Cuối buổi biểu diễn, nữ diễn viên chính rời sân khấu trong một chiếc ghế treo trên dây, di chuyển từ điểm $A(8;0;0)$ đến điểm $B(0;20;10)$. Sau khi đi được $\dfrac{3}{4}$ quãng đường, cô ấy dừng lại để thực hiện động tác cuối. Hãy tính khoảng cách của cô ấy đến mặt phẳng sân khấu tại thời điểm đó (*làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*).



Bài 20. Một nhóm chuyên gia đang nghiên cứu dựng một tấm kính cường lực hình tam giác để đặt vào một góc tường. Biết ba mặt của góc tường đôi một vuông góc và giao tuyến của chúng lần lượt là các tia Ox, Oy, Oz sao cho (Oxy) trùng với mặt phẳng sàn nhà, mỗi đơn vị trong hệ trục tọa độ ứng với 1m thực tế. Mặt phẳng kính luôn đi qua điểm I, điểm này cách các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Oxz) lần lượt là 1 m, 3 m, 2 m. Khi khoảng cách từ chiếc đèn có tọa độ $D(4;5;6)$ tới mặt phẳng kính lớn nhất, tính diện tích tấm kính cường lực theo m^2 (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?

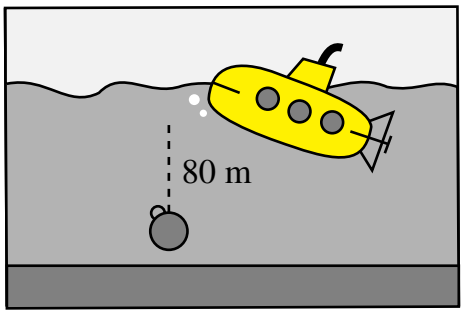


Bài 21. Trong hoạt động quay phim và chụp ảnh chuyên nghiệp, tấm hắt sáng là một công cụ không thể thiếu. Một ê-kíp nhận dự án chụp hình cho một căn hộ phục vụ cho mục đích quảng cáo. Tấm hắt sáng được đặt trên một bề mặt gỗ mỏng hình tam giác, mỗi đỉnh của mặt gỗ đặt trên một chiếc cọc lần lượt cao 2 m, 1 m và 0,5 m. Cọc cao nhất đặt ở góc tường, cọc cao 1 m sẽ đặt ở tường sau nhà, cách tường trái 2 m, cọc còn lại đặt ở tường bên trái, cách tường sau 1 m. Để đảm bảo sự chắc chắn, người ta chống một chiếc cọc vuông góc mặt đất và đỡ phía dưới mặt gỗ, cách mỗi bức tường 0,5 m (*chân cọc chống đỡ ở mặt đất*).



Hỏi chiếc cọc chống đỡ này có chiều dài bao nhiêu mét?

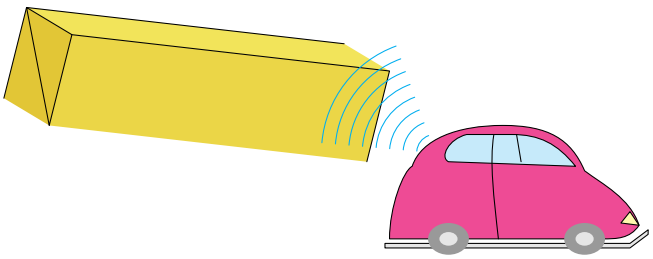
Bài 22. Xét trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ với đơn vị trên mỗi trục là mét, một tàu ngầm bắt đầu lặn tại điểm $P(100;200;0)$ với vận tốc $v_1 = 11{,}1$ hải lí/giờ hướng thẳng đến mục tiêu $Z(500;600;-80)$ ở độ sâu 80 m. Sau đó, tàu tiếp tục di chuyển ngang hướng theo vectơ $\vec{u} = (1;1;0)$ với vận tốc $v_2 = 11$ hải lí/giờ.



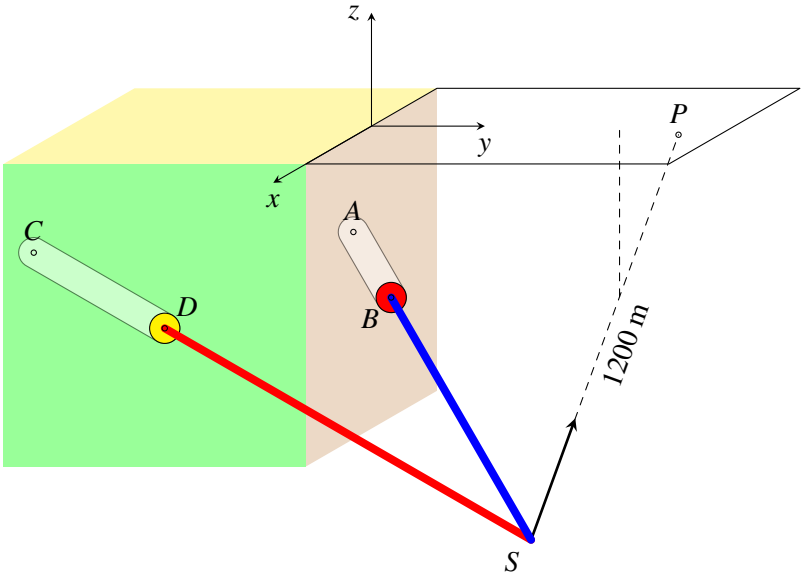
Cùng thời điểm tàu ngầm bắt đầu lặn, một quả cầu T được thả từ tàu nghiên cứu ở tọa độ $S(700;800;0)$ và rơi thẳng đứng xuống với vận tốc 0,5 m/s. Khoảng cách giữa tàu ngầm với quả cầu khi tàu ngầm đi đến thẳng dưới S bằng bao nhiêu, biết 1 hải lí bằng 1,852 km? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bài 23.

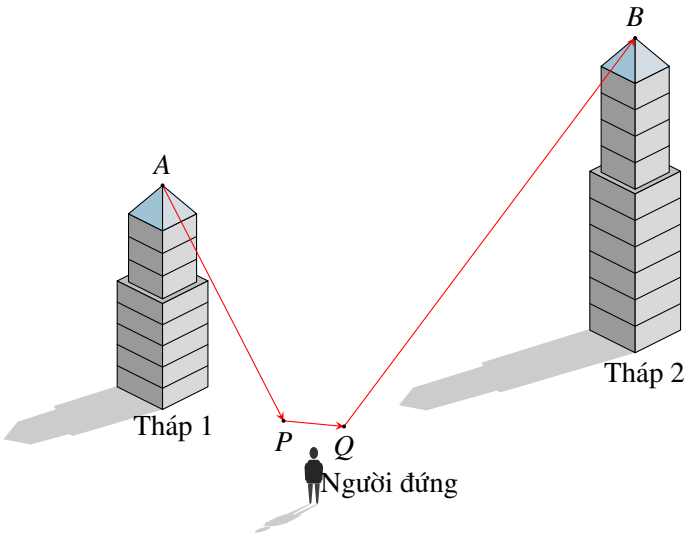
Khi phát triển hệ thống hỗ trợ đỗ xe ô tô, các nhà nghiên cứu sinh học đã sao chép hệ thống định vị của loài dơi và tích hợp các cảm biến tương ứng vào cán sau của xe. Các cảm biến được cài đặt sao cho chúng sẽ phát tín hiệu khi khoảng cách đến vật cản nhỏ hơn 3,05 m. Một người lái xe đang lùi thẳng về phía một mặt phẳng nghiêng, được cho bởi phương trình mặt phẳng có phương trình là $(E)\colon 6x+2y+3z=49$. Xác định được điểm $R(a;b;c)$ trên đoạn PQ, trong đó $P(6;3;1)$ và $Q(6;4;1)$ mà tại đó cảm biến bắt đầu báo động. Tính $a-b+c$ (*làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*).



Bài 24. Xét trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ với đơn vị trên mỗi trục là 100 m, người ta đào từ điểm $A(-7;-3;-8)$ qua điểm $B(-2;0;-9)$ một đường hầm thẳng xuyên núi có tên là Kuckucksloch. Tương tự, từ điểm $C(4;-6;-6)$ đến điểm $D(7;-1;-8)$ một đường hầm thẳng tên là Morgenstern cũng sẽ được xây dựng. Sau khi khoan xong 2 đường hầm sẽ gặp nhau tại điểm S. Từ điểm S, đường hầm Kuckucksloch tiếp tục đào theo hướng vectơ $\vec{v} = (2;1;2)$ cho đến khi đến điểm P trên mặt đất mà đường hầm sẽ chạm tới. Trên đoạn SP, cách P một khoảng 1 200 m sẽ đào một lối thoát hiểm thẳng đứng. Độ sâu cần đào của lối thoát hiểm bằng bao nhiêu mét, biết mặt đất là mặt phẳng (Oxy)?

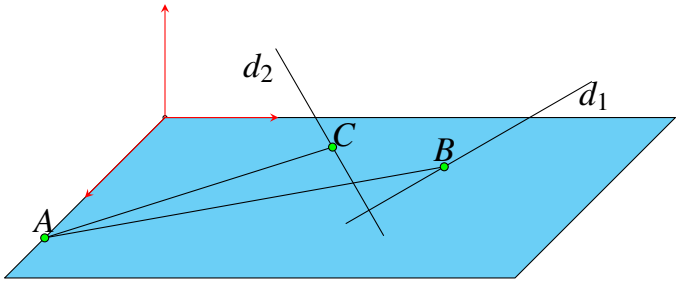


Bài 25. Một nhân viên cứu hộ đứng ở mặt đất, điều khiển một drone chở vật tư y tế, dự kiến bay thẳng từ đỉnh A của tháp thứ nhất đến đỉnh B của tháp thứ hai. Tuy nhiên, do gặp một khu vực nhiễu sóng an ninh nên drone phải bay thẳng từ A đến một điểm P trên mặt đất để hạ cánh. Nhân viên đó mang drone từ điểm P dọc theo hướng Tây 40 m đến điểm Q và sau đó drone bay thẳng từ điểm Q lên đỉnh B của tháp thứ hai (hình vẽ). Biết đỉnh A cao 100 m và có hình chiếu lên mặt đất cách vị trí người đứng ban đầu 200 m về phía Đông và 100 m về phía Nam. Đỉnh B cao 300 m và có hình chiếu lên mặt đất cách vị trí người đứng ban đầu 140 m về phía Tây và 200 m về phía Nam.



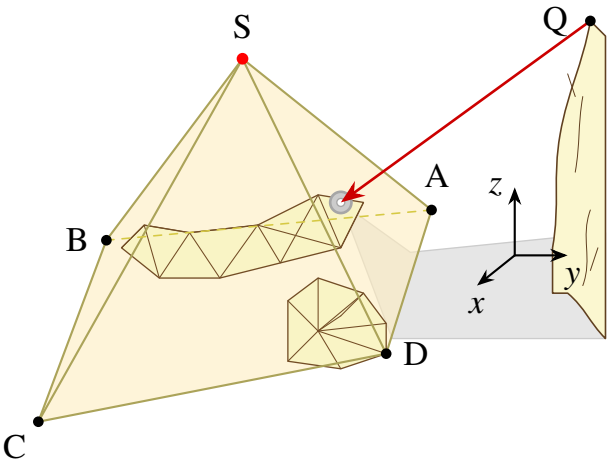
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tại vị trí người đứng ban đầu, mặt phẳng (Oxy) là mặt đất, trục Ox hướng Đông, trục Oy hướng Nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trên (đơn vị trên các trục là 100 m). Để hoàn thành nhiệm vụ, người đó chọn vị trí điểm $P(a;b;c)$ trên mặt đất sao cho tổng quãng đường bay là ngắn nhất. Giá trị của biểu thức $S=2a+4b+c$ bằng bao nhiêu?

Bài 26. Trạm tàu cứu hộ được đặt tại vị trí $A(5;0;0)$ trên một hòn đảo nhỏ trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục được tính bằng km), được sử dụng làm trạm cứu hộ, cứu nạn trên biển.



Tàu du lịch B đang di chuyển (vận tốc không đổi) trên tuyến đường được mô tả bởi đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=2+t\\y=1-2t\\z=0\end{cases}$. Tàu chở hàng C đang di chuyển (vận tốc không đổi) trên tuyến đường vận tải được mô tả bởi đường thẳng $d_2:\begin{cases}x=2-s\\y=11+s\\z=0\end{cases}$. Do thời tiết xấu, nên hai tàu B và C gặp sự cố và cần được tiếp cận khẩn cấp. Trạm cứu hộ điều một tàu cứu hộ xuất phát từ A để lần lượt tiếp cận tàu du lịch B trước, sau đó đến tàu chở hàng C. Xét vị trí tối ưu của tàu du lịch B dừng lại và tàu chở hàng C dừng lại sao cho tổng quãng đường tàu cứu hộ cần đi $T=AB+BC+CA$ là nhỏ nhất. Khi đó $P_{\min}=\sqrt{a}$ (km), hãy tính $a+2025$?

Bài 27. Trong không gian $Oxyz$, các điểm $A(0;-1;0), B(1;-4;0)$ và $C(4;-3;0)$ là các đỉnh thu được của đáy một kim tự tháp khối chóp tứ giác đều đã bị sụp một phần và cần được phục dựng. Mỗi đơn vị trong hệ tọa độ ứng với 100 m.

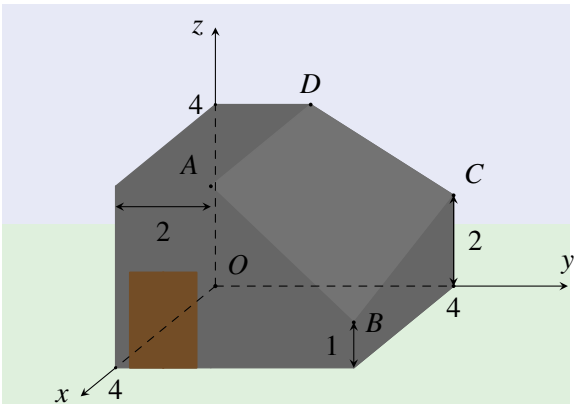


Gọi tâm M của hình vuông và tọa độ đỉnh D còn thiếu. Trên đỉnh M theo phương thẳng đứng là đỉnh S của kim tự tháp, với chiều cao 200 m. Theo mô tả, ánh sáng mặt trời vuông góc với

mặt bên (SAD) chiếu qua điểm $Q\left(\frac{1}{2};\frac{5}{3};\frac{7}{2}\right)$ vào một lối bí mật của kim tự tháp. Xác định được tọa độ điểm $P(a;b;c)$ là vị trí ban đầu của lối vào bí mất này. Tính $2a+3b+c$.

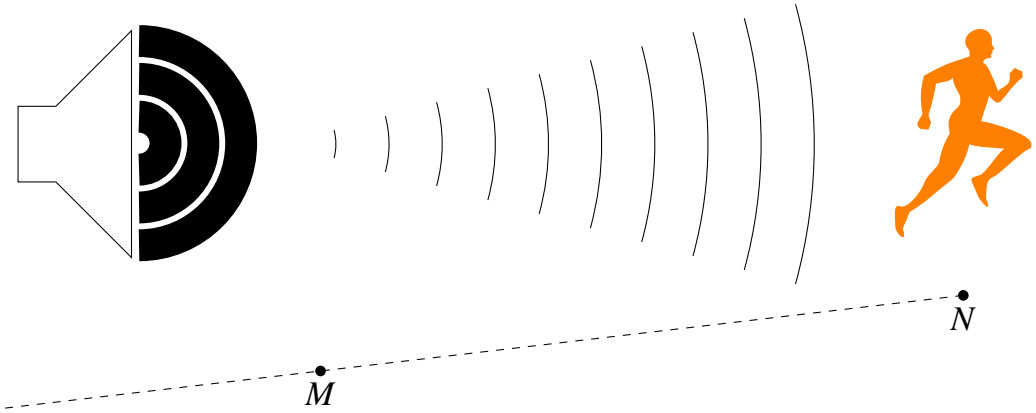
Bài 28. Một ngôi nhà được thiết kế 1 mặt kính có dạng là hình tứ giác $ABCD$ ở ngầm cạnh bên ngoài. Ngôi nhà cao 4 mét được đặt vuông góc với mặt đất, sàn nhà là hình vuông có cạnh bằng 4 mét, trên hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục tính bằng mét, mặt kính $ABCD$ được thiết kế như hình vẽ. Để gia cố chắc chắn cho mặt kính, người chủ nhà dự định dùng hai thanh xà gỗ lắp đặt như sau.

- Thanh thứ nhất một đầu cố định vào trung điểm của BC, dựng vuông góc với mặt kính, đầu còn lại cố định dưới sàn nhà.
- Thanh thứ hai một đầu cố định vào điểm $P(2;3;0)$ dưới sàn nhà, dựng vuông góc với mặt đất, đầu còn lại cố định vào mặt kính.

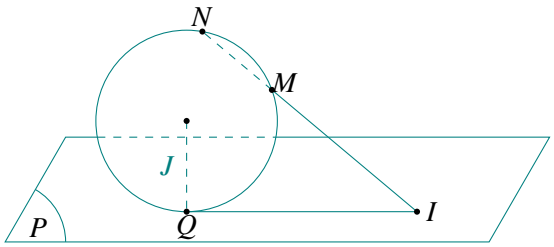


Hỏi tổng độ dài của hai thanh xà gỗ là bao nhiêu mét *(không làm tròn các bước tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần trăm)*?

Bài 29. Một nguồn âm phát ra sóng âm là sóng cầu (mặt đầu sóng là mặt cầu). Khi gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với đơn vị trên mỗi trục là mét, vị trí nguồn âm có tọa độ $(0;-3;-1)$, cường độ âm chuẩn phát ra có bán kính là 10 mét. Một bạn học sinh di chuyển theo phương thẳng từ vị trí $N(7;10;-4)$ đến vị trí $M(5;0;2)$ để nhận nguồn âm. Khi bạn học sinh đó di chuyển từ N đến M thì vị trí đầu tiên nhận được nguồn âm là $A\,(x_0;y_0;z_0)$. Tính tổng $x_0+y_0+z_0$.

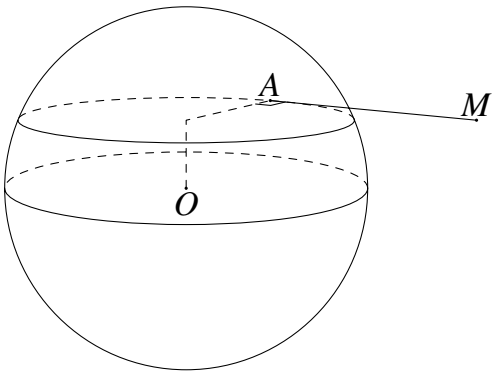


Bài 30. Một robot khảo sát không gian hoạt động trong môi trường 3D có một cảm biến hình cầu, được lập trình để di chuyển sao cho cảm biến này tiếp xúc tại một điểm Q trên một bức tường nghiêng có phương trình là mặt phẳng $x+y-z-3=0$ để đo đạc.



Trong lúc khảo sát, cảm biến luôn phải đi qua hai điểm chuẩn đã cố định sẵn trong không gian là điểm $M(1;1;1)$ - *vị trí cảm biến tại lần đo đầu tiên* và điểm $N(-3;-3;-3)$ *vị trí cảm biến tại lần đo tiếp theo*. Để tối ưu hoá phần mềm điều hướng, kỹ sư muốn xác định rằng: Dù cảm biến (hình cầu) có di chuyển sao cho tiếp xúc ở đâu trên bức tường, điểm tiếp xúc đó luôn nằm trên một đường tròn cố định. Tính bán kính của đường tròn cố định đó, từ đó giúp lập trình robot dò tìm tiếp điểm dễ dàng hơn trong các lần đo tiếp theo.

Bài 31. Bán kính Trái Đất lấy bằng 6400 km, khi gắn hệ trục toạ độ $Oxyz$ thì bề mặt Trái Đất là mặt cầu có phương trình $x^2+y^2+z^2=64$, đường xích đạo nằm trên mặt phẳng (Oxy). Một tàu vũ trụ X rời khỏi bề mặt Trái Đất theo phương tiếp tuyến với đường tròn vĩ tuyến tại điểm $A(5;\sqrt{23};4)$, với giả thiết rằng sau khi rời khỏi bề mặt Trái Đất tàu vũ trụ X bay theo quỹ đạo thẳng với tốc độ không đổi bằng 8 km/s.



Hỏi sau đúng 20 phút kể từ khi rời khỏi bề mặt Trái Đất thì khoảng cách từ tàu vũ trụ đến một điểm trên đường tròn xích đạo ngắn nhất bằng bao nhiêu kilomet (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

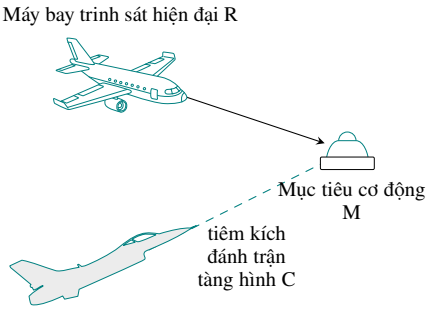
Bài 32. Nhân dịp kỷ niệm ngày 30/4 lịch sử, một màn trình diễn ánh sáng nghệ thuật bằng drone quy mô lớn được tổ chức trên bầu trời TP. Hồ Chí Minh. Hàng trăm chiếc drone được lập trình để tạo thành những hình ảnh ánh ý nghĩa. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét), mặt đất được coi là mặt phẳng (Oxy).



- **Giai đoạn 1: Hình thành chữ "V" trong "VIỆT NAM"**
  Ba drone D_1, D_2, D_3 được điều khiển để giữ ổn định các vị trí cố định lần lượt là $A(18;22;50)$, $B(30;12;50)$, $C(18;12;50)$. Các vị trí này tạo thành một phần của chữ "V" khổng lồ.
- **Giai đoạn 2: Drone đặc nhiệm di chuyển**
  Một drone đặc nhiệm D_0, ban đầu đang ở vị trí $M_0(5,45,30)$, nhận được lệnh di chuyển thẳng đến một vị trí M trên mặt phẳng $(P): x+y+z=80$. Mặt phẳng (P) là mặt phẳng chính nơi các drone sẽ sắp xếp thành dòng chữ "TÔI YÊU" sau đó. Vị trí M này được chọn sao cho nó cách đều ba drone D_1, D_2, D_3 (tức là $MA=MB=MC$). Drone D_0 được lập trình bay với vận tốc không đổi là $v=10$ m/s.

Để duy trì tín hiệu ổn định, quỹ đạo bay thẳng M_0M của drone D_0 phải hoàn toàn nằm ngoài khối cầu nhiễu sóng (S) có tâm $I(15;25;40)$ và bán kính $R = 4$ m (được phép tiếp xúc). Hãy tính tổng thời gian (tính bằng giây, làm tròn đến hàng phần chục) di chuyển của drone D_0 từ vị trí ban đầu M_0 đến vị trí M theo quỹ đạo thẳng đã định, biết rằng quỹ đạo này thỏa mãn điều kiện an toàn.

Bài 33. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, một kịch bản tác chiến phức tạp diễn ra như sau:



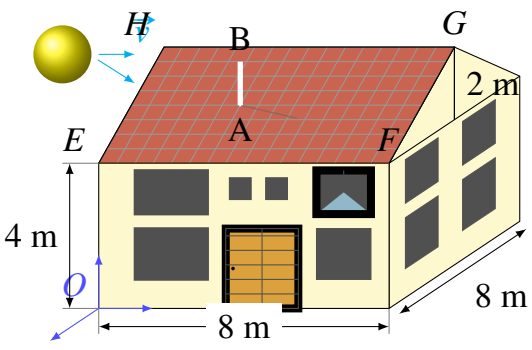
- **Máy bay trinh sát hiện đại R:** Xuất phát từ vị trí $R_0(200;100;20)$ (đơn vị km), di chuyển thẳng đều với véc-tơ vận tốc không đổi $\vec{v}_R = (-20;-10;0)$.
- **Mục tiêu cơ động cao M:** Xuất phát từ vị trí $M_0(10;20;15)$ km, di chuyển thẳng đều với véc-tơ vận tốc không đổi $\vec{v}_M = (30;40;0)$.
- **Tiêm kích đánh chặn tàng hình C:** Xuất phát từ căn cứ mặt đất tại vị trí $C_0(0;0;1)$ km vào thời điểm $t = 0$. Tiêm kích C bay theo một đường thẳng với tốc độ không đổi v_C để thực hiện nhiệm vụ đặc biệt.

Nhiệm vụ đặc biệt của tiêm kích C: Tiêm kích C phải đạt được đồng thời ba điều kiện sau tại cùng một thời điểm $t > 0$:

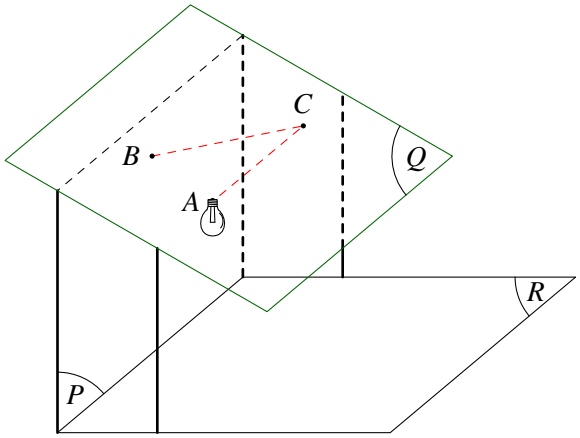
- **Khóa mục tiêu tối ưu:** Ba điểm gồm tiêm kích C, mục tiêu M, và máy bay trinh sát R phải thẳng hàng.
- **Kích hoạt vũ khí chính xác:** Tại thời điểm thẳng hàng nói trên, tiêm kích C phải nằm trên bề mặt của một "khối cầu chiến thuật" có tâm chính là mục tiêu M và bán kính $S_M = 5$ km. Điều này đảm bảo vũ khí có hiệu quả tối đa.
- **An toàn hành lang bay:** Véc-tơ chỉ phương của quãng đường bay của tiêm kích C phải vuông góc với véc-tơ pháp tuyến của một mặt phẳng an toàn $(\alpha)\colon x - y + 2z - 10 = 0$.

Hãy tính tốc độ không đổi v_C (km/phút) mà tiêm kích C phải duy trì từ lúc xuất phát cho đến khi đồng thời thoả mãn cả ba điều kiện trên, biết thời điểm $t > 0$ là sớm nhất (*làm tròn đến hàng phần mười*).

Bài 34. Cho ngôi nhà như hình bên phải (các kích thước tính theo mét). Một ăng-ten trên mái nhà có hai điểm đầu mút $A(-2;2;5)$, $B(-2;2;6)$ Chiếu ánh sáng song song theo hướng của vectơ $\vec{v} = (2;8;-3)$ vào ăng-ten, bóng của ăngten sẽ đổ xuống mặt phẳng mái $EFGH$. Chiều dài bóng của ăng-ten trên mái nhà bằng bao nhiêu mét? (*làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.*)

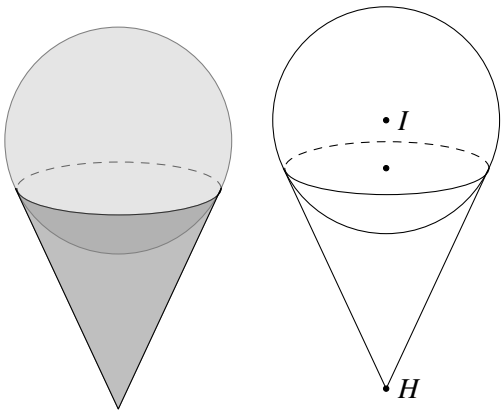


Bài 35. Mái nhà tranh của ông F được đặt vào trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ với đơn vị trên mỗi trục là mét với mặt phẳng $(R)\colon z+1=0$ là mặt đất. Một bức tường là mặt phẳng $(P)\colon x+y-2\sqrt{2}=0$ và mái nhà lợp lá của ông là mặt phẳng $(Q)\colon x-z+\sqrt{2}=0$.



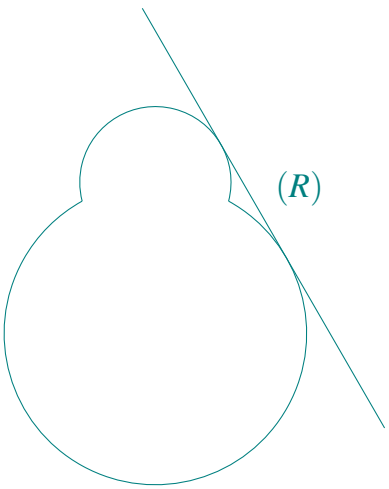
Ông F muốn đặt một bóng đèn tròn để chiếu sáng ban đêm, sau khi cố định bóng đèn tại vị trí $A(1;-1;1)$, ông nối dây điện thẳng dài từ bóng đèn đến vị trí một khoen móc đặt tại C trên mái nhà (Q) rồi luồn dây điện thẳng đến cắm tại vị trí B nằm trên bức tường (P). Sau khi hoàn thành và đo đạc thì ông F thấy tam giác ABC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q). Tính chiều cao mét của khoen móc C so với mặt đất (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười*).

Bài 36. Một cơ sở sản xuất Kem làm một mô hình Kem ốc quế lớn gồm 2 phần: Phần Kem có dạng hình cầu, phần ốc quế có dạng hình nón (như hình vẽ bên). Chủ cơ sở sản xuất muốn gắn một chiếc đèn Led lớn chiếu thẳng cây kem vào buổi tối, biết rằng chiếc đèn nằm trên mặt phẳng chứa đường tròn (C) là phần tiếp xúc giữa phần Kem và phần ốc quế.



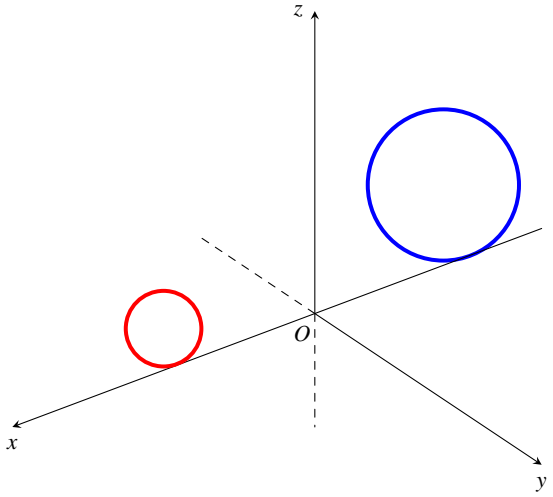
Chọn hệ trục tọa độ Oxy trong không gian thỏa mãn phần Kem hình cầu có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R_C=3$ và phần đỉnh của hình nón là điểm $H(0;1;-2)$ đáy là đường tròn có bán kính $R_N=\sqrt{6}$. Để tối ưu hóa lượng ánh sáng chiếc đèn có thể chiếu vào cây kem người ta tính toán rằng chiếc đèn Led sẽ phải ở vị trí $M(a;b;2)$, $a\in\mathbb{Z}$ và từ điểm M kẻ được 2 tiếp tuyến với đường tròn (C) sao cho góc giữa 2 tiếp tuyến đó không bé hơn 60°. Có bao nhiêu vị trí đặt chiếc đèn Led thỏa mãn yêu cầu của chủ cơ sở.

Bài 37. Ở trung tâm nghiên cứu X có một thiết bị được đặt trên một quả đồi thuộc vùng rừng núi để đo các thông số về thời tiết khí tượng của vùng đó (nhiệt độ, áp suất khí quyển, độ ẩm, mây, gió, mưa...). Cấu tạo bên ngoài của thiết bị gồm hai mặt cầu cắt nhau là (S_1) có tâm I, bán kính bằng 4 m và mặt cầu (S_2) có tâm J, bán kính bằng 2 m. Để đo các thông số cần thiết, người ta lắp đặt một tấm thiết bị điện tử hình chữ nhật (R) luôn tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1), (S_2) và có thể di chuyển quanh các chỏm cầu để truyền tín hiệu tới hộp điều hành (đường truyền không dây).

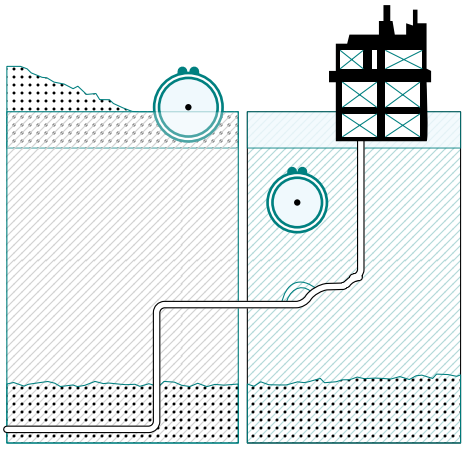


Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ trong không gian với độ dài đơn vị trên mỗi trục toạ độ là 1 m và $O(0;0;0)$ là vị trí hộp điều hành thiết bị thì $I(2;1;1)$ và $J(2;1;5)$. Khi khoảng cách từ O đến tấm thiết bị điện tử (R) ngắn nhất là lúc đường truyền tín hiệu tốt nhất. Khoảng cách ngắn nhất này bằng bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm, tham khảo mô tả thiết bị như hình vẽ).

Bài 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai viên bi xanh và đỏ ban đầu dạng hai mặt cầu lần lượt có phương trình là $(S_{\text{đỏ}}): (x-10)^2+y^2+(z-3)^2=9$ và $(S_{\text{xanh}}): (x+12)^2+y^2+(z-4)^2=16$. Biết mặt đất trùng với mặt phẳng Oxy và hai mặt cầu này tiếp xúc với mặt phẳng Oxy với điểm tiếp xúc nằm trên trục Ox. Truyền cho hai viên bi đỏ và xanh lần lượt các tốc độ không đổi $v_{\text{đỏ}}=5$ (m/s) và $v_{\text{xanh}}=3$ (m/s) thì hai viên bi lăn thẳng về phía nhau dọc theo trục Ox (điểm tiếp xúc luôn nằm trên Ox). Sau khoảng thời gian bằng bao nhiêu giây thì hai viên bi va chạm lần đầu tiên (Đơn vị trên hệ trục tọa độ là mét và kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



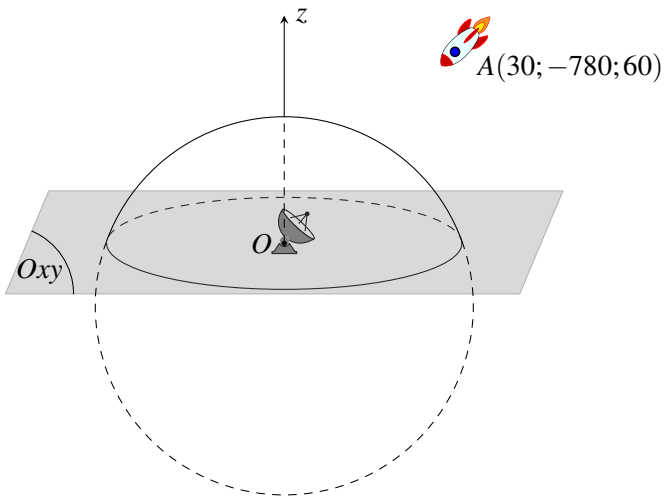
Bài 39. Trong một dự án khai thác dầu khí ngoài thềm lục địa, các kỹ sử đang lên kế hoạch lắp đặt một đoạn đường ống dẫn dầu d đặc biệt. Đường ống này cần phải tiếp xúc với hai vòm đá ngầm lớn hình cầu để có điểm tựa gia cố. Vòm đá ngầm thứ nhất (A) được xác định vị trí và kích thước trong hệ trục $Oxyz$ bởi mặt cầu $(S): (x-1)^2+y^2+(z-3)^2=36$.



Vòm đá ngầm thứ hai (B) được xác định bởi mặt cầu $(S'): (x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=81$. Tuy nhiên, gần khu vực thi công có một nguồn địa nhiệt ngầm $M(4;-1;-7)$ rất không ổn định, có khả năng gây ảnh hưởng đến vật liệu và hoạt động của đường ống. Để đảm bảo an toàn và tuổi thọ tối đa cho công trình, các kỹ sư phải chọn phương án lắp đặt đường ống d sao cho nó nằm xa nhất có thể với với nguồn địa nhiệt M. Sau khi được lắp đặt, đường ống d sẽ được nối vào một trạm điều phối trung tâm E. Trạm E này nằm trên một mặt phẳng kỹ

thuật (P) đã được gia cố sẵn dưới đáy biển, có phương trình $2x-y+z-17=0$. Việc xác định chính xác tọa độ $E(m;n;p)$ là cực kì quan trọng để đồng bộ hóa toàn bộ hệ thống. Yêu cầu: bạn hãy giúp đội ngũ kỹ sư tính toán giá trị của $T=m+n+p$ từ tọa độ điểm E, nhằm phục vị cho việc lập trình hệ thống điều khiển và giám sát đường ống.

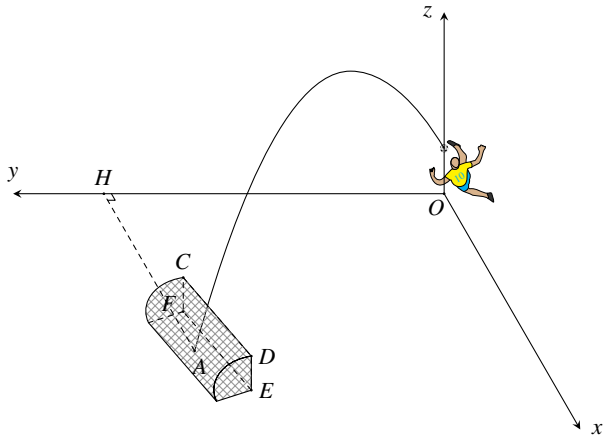
Bài 40. Hình chỏm cầu có một đáy là một phần của hình cầu bị chia bởi một mặt phẳng. Một rađa có thể phát hiện các mục tiêu trong khu vực của một hình chỏm cầu với chiều rộng trên mặt đất là một hình tròn với bán kính 450 (km) và chiều cao 30 (km).



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với mặt phẳng Oxy là mặt đất (xem mặt đất là mặt phẳng), trục Oz hướng lên cao và gốc tọa độ O trùng với vị trí của rađa (tham khảo hình vẽ bên), mỗi đơn vị trên trục là 1 (km). Một tên lửa bắt đầu từ vị trí điểm $A(30;-780;60)$, dự định bay thẳng với vận tốc không đổi 7 (km)/giây hướng thẳng đến vị trí của rađa. Thời gian dự kiến từ khi tên lửa bị rađa phát hiện đến khi nó bắn trúng rađa là bao nhiêu giây (*làm tròn đến hàng đơn vị*)?

Bài 41. Trong trận đấu giữa Thụy Điển và Anh tại giải vô địch bóng đá thế giới, khi thời gian trận đấu sắp kết thúc, Zlatan Ibrahimović đã thực hiện một cú xe đạp chổng ngược móc bóng từ khoảng cách xa vào lưới đội tuyển Anh. Đây được coi là một trong những bàn thắng đẹp nhất lịch sử bóng đá thế giới với khoảng cách xa nhất từng được ghi bằng kỹ thuật này.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét) sao cho (Oxy) trùng với mặt đất. Tại thời điểm Zlatan Ibrahimović tung người móc bóng quả bóng thuộc tia Oz và có độ cao 2 m, bay theo quỹ đạo của một *Parabol* thuộc mặt phẳng vuông góc với mặt đất rơi xuống đất tại vị trí điểm A nằm trong khung thành.



Biết $\mathrm{d}(A,Oy)=AH=8$ $(H\in Oy)$ và $OH=15$. Sau khi bay lên không trung quả bóng đạt độ cao lớn nhất tại điểm có hoành độ $x=3$. Tại thời điểm bóng bắt đầu bay vào khung thành (tức là bóng nằm trên vạch kẻ ngang của khung thành) thì độ cao của quả bóng so với mặt đất là bao nhiêu mét? Biết rằng khung thành $CDEF$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đất và đi qua hai điểm $M(4;15;-2)$, $N(8;14;6)$ *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).*

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1 A	2 C	3 C	4 B	5 B	6 A	7 A	8 C	9 A	10 D
11 A	12 B	13 C	14 C	15 A	16 B	17 A	18 A	19 A	20 C
21 D	22 C	23 D	24 B	25 D	26 C	27 D	28 A	29 B	30 B
31 B	32 D	33 D	34 D	35 D	36 C	37 C	38 B		

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a S	b Đ	c Đ	d Đ	Câu 2.	a Đ	b S	c S	d Đ
Câu 3.	a S	b Đ	c Đ	d S	Câu 4.	a S	b Đ	c Đ	d S
Câu 5.	a S	b Đ	c Đ	d S	Câu 6.	a Đ	b S	c S	d Đ
Câu 7.	a S	b Đ	c Đ	d S	Câu 8.	a Đ	b Đ	c S	d Đ
Câu 9.	a S	b S	c Đ	d Đ	Câu 10.	a Đ	b S	c Đ	d S
Câu 11.	a Đ	b S	c Đ	d S	Câu 12.	a Đ	b S	c Đ	d S
Câu 13.	a Đ	b S	c S	d Đ	Câu 14.	a Đ	b S	c Đ	d S
Câu 15.	a S	b Đ	c Đ	d S	Câu 16.	a Đ	b S	c Đ	d Đ
Câu 17.	a S	b S	c Đ	d Đ	Câu 18.	a S	b S	c S	d S
Câu 19.	a Đ	b S	c Đ	d Đ	Câu 20.	a Đ	b S	c S	d Đ
Câu 21.	a Đ	b Đ	c S	d Đ	Câu 22.	a S	b Đ	c S	d Đ
Câu 23.	a Đ	b S	c S	d S	Câu 24.	a S	b Đ	c Đ	d Đ
Câu 25.	a S	b Đ	c Đ	d S	Câu 26.	a Đ	b S	c Đ	d S
Câu 27.	a S	b Đ	c Đ	d Đ	Câu 28.	a Đ	b S	c Đ	d S
Câu 29.	a S	b S	c S	d Đ	Câu 30.	a Đ	b S	c Đ	d S
Câu 31.	a S	b S	c Đ	d Đ	Câu 32.	a Đ	b Đ	c Đ	d Đ
Câu 33.	a S	b Đ	c Đ	d Đ	Câu 34.	a Đ	b S	c Đ	d Đ
Câu 35.	a Đ	b S	c Đ	d Đ	Câu 36.	a S	b Đ	c Đ	d S

Chương VI

XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

§1 XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Xác suất có điều kiện

Cho hai biến cố A và B. Xác suất của biến cố B khi biến cố A đã xảy ra được gọi là xác suất của B với điều kiện A, kí hiệu $\mathrm{P}(B|A)$.

2) Công thức tính xác suất có điều kiện

Cho A và B là hai biến cố, trong đó $\mathrm{P}(B) > 0$. Khi đó

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Lưu ý.

a) Ta cũng kí hiệu biến cố giao của hai biến cố A và B là AB.

b) Trong thực tế, người ta thường dùng tỉ lệ phần trăm để mô tả xác suất. Chẳng hạn, phát biểu "Khả năng xảy ra một sự kiện là 20%" cũng có nghĩa là "Xác suất xảy ra sự kiện đó là 0,2", phát biểu "Tỉ lệ phế phẩm của một lô hàng là 5%" cũng có nghĩa là "Nếu chọn ra ngẫu nhiên 1 sản phẩm từ lô hàng, xác suất sản phẩm đó là phế phẩm là 0,05".

c) Từ công thức xác suất có điều kiện, với $\mathrm{P}(B) > 0$, ta có

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A \mid B).$$

d) Trong trường hợp tổng quát, người ta chứng minh được rằng với A, B là hai biến

cố bất kì thì

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A \mid B).$$

Công thức trên được gọi là công thức nhân xác suất cho hai biến cố.

e) Với mọi biến cố A và B, trong đó $\mathrm{P}(B) > 0$, ta có

$$\mathrm{P}(\overline{A} \mid B) = 1 - \mathrm{P}(A \mid B).$$

f) Với A và B là hai biến cố độc lập, trong đó $0 < \mathrm{P}(B) < 1$, ta chứng minh được rằng

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A \mid \overline{B}) = \mathrm{P}(A).$$

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Tính xác suất có điều kiện bằng công thức

Cho hai biến cố A và B. Xác suất của biến cố A khi biến cố B đã xảy ra được gọi là xác suất của A với điều kiện B, kí hiệu $\mathrm{P}(A|B)$. Cho A và B là hai biến cố, trong đó $\mathrm{P}(B) > 0$. Khi đó

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Ví dụ 1

Một hộp có 20 viên bi trắng và 10 viên bi đen, các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Bình lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp, không trả lại. Sau đó bạn An lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp đó.

Gọi A là biến cố: "An lấy được viên bi trắng"; B là biến cố: "Bình lấy được viên bi trắng".

Tính $\mathrm{P}(A \mid B)$ bằng định nghĩa và bằng công thức tính $\mathrm{P}(A \mid B)$ ở trên.

Ví dụ 2

Một công ty vừa ra mắt sản phẩm X và tổ chức ngày trải nghiệm sản phẩm. Họ thống kê được trong 200 người đến tham quan ngày trải nghiệm có 60 người là nam giới và 140 người là nữ giới. Trong số những người được thống kê này, có 120 người mua sản phẩm X, gồm 40 khách hàng nam và 80 khách hàng nữ, còn lại là không mua sản phẩm X. Chọn ngẫu nhiên một người trong số 200 người được thống kê. Tính xác suất để người này mua sản phẩm X, biết rằng người này là nữ giới (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Ví dụ 3

Cho hai biến cố A và B có $\mathrm{P}(A)=0{,}3$; $\mathrm{P}(B)=0{,}5$ và $\mathrm{P}(A\mid B)=0{,}4$. Tính $\mathrm{P}(A\cap B)$ và $\mathrm{P}(\overline{A}\cap B)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Một nhóm 5 học sinh nam và 4 học sinh nữ tham gia lao động trên sân trường. Cô giáo chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 bạn trong nhóm đi tưới cây. Tính xác suất để hai bạn được chọn có cùng giới tính, biết rằng có ít nhất 1 bạn nam được chọn.

Bài 2

Xét phép thử gieo một con xúc xắc cân đối đồng chất hai lần, quan sát số chấm xuất hiện trong mỗi lần gieo. Tính xác suất để tổng số chấm trong hai lần gieo là 7, biết rằng lần gieo đầu tiên xuất hiện mặt 5 chấm.

Bài 3

a) Cho $\mathrm{P}(A)=0,5;\mathrm{P}(B)=0,6;\mathrm{P}(B\mid A)=0,9$. Tính $\mathrm{P}(A\mid B)$ và $\mathrm{P}(\overline{A}\mid B)$.

b) Cho $\mathrm{P}(A)=0,4;\mathrm{P}(B)=0,8;\mathrm{P}(AB)=0,3$. Tính $\mathrm{P}(A\mid B)$ và $\mathrm{P}(A\mid \overline{B})$.

Bài 4

Một kho hàng chứa 80 sản phẩm cùng loại, bao gồm 30 sản phẩm do nhà máy I sản xuất (trong đó có 25 sản phẩm tốt, 5 sản phẩm kém chất lượng) và 50 sản phẩm do nhà máy II sản xuất (trong đó có 43 sản phẩm tốt, 7 sản phẩm kém chất lượng) như bảng dưới:

Sản phẩm / Nhà máy	Sản phẩm tốt	Sản phẩm kém chất lượng
Nhà máy I sản xuất	25	5
Nhà máy II sản xuất	43	7

Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm trong các sản phẩm này. Tính xác suất để lấy được sản phẩm tốt, biết rằng sản phẩm lấy được do nhà máy II sản suất.

Bài 5 ☆

Kết quả khảo sát những bệnh nhân bị tai nạn xe máy về mối liên hệ giữa việc đội mũ bảo hiểm và khả năng bị chấn thương vùng đầu cho thấy:

- Tỉ lệ bệnh nhân bị chấn thương vùng đầu khi gặp tai nạn là 80%;
- Tỉ lệ bệnh nhân đội mũ bảo hiểm đúng cách khi gặp tai nạn là 90%;
- Tỉ lệ bệnh nhân đội mũ bảo hiểm đúng cách và bị chấn thương vùng đầu là 18%.

Hỏi theo kết quả điều tra trên, việc đội mũ bảo hiểm đúng cách sẽ làm giảm khả năng bị chấn thương vùng đầu bao nhiêu lần?

....

....

....

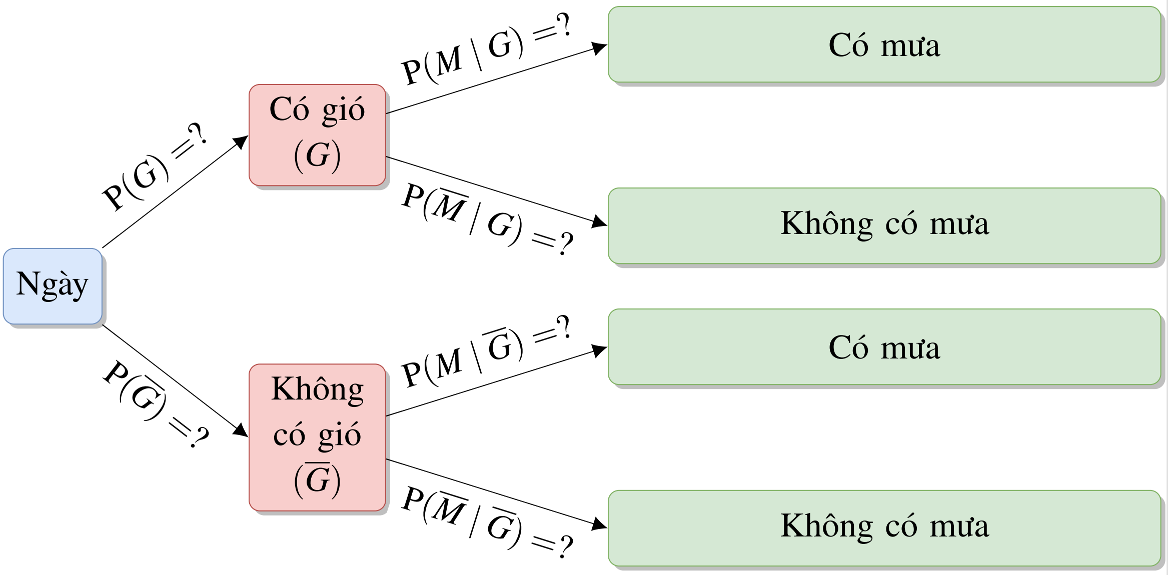
....

Dạng 2 Tính xác suất có điều kiện bằng sơ đồ hình cây

Ví dụ 1

Theo kết quả từ trạm nghiên cứu khí hậu tại địa phương T, xác suất để một ngày có gió là $0,6$; nếu ngày có gió thì xác suất mưa là $0,4$; nếu ngày không có gió thì xác suất mưa là $0,2$. Gọi G là biến cố "Ngày có gió "và M là biến cố "Ngày có mưa "

a) Tìm số thích hợp vào dấu ?



b) Tính xác suất $P(GM)$ và $P(G\overline{M})$.

Nhận xét: Xác suất ở mỗi nhánh kể từ đỉnh thứ hai của sơ đồ hình cây là các xác suất có điều kiện.

....

....

....

Ví dụ 2

Hộp thứ nhất có 4 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ. Hộp thứ hai có 5 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai. Sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ hai. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của các biến cố: A : "Viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất có màu xanh và viên bi lấy ra từ hộp thứ hai có màu đỏ"; B : "Hai viên bi lấy ra có cùng màu".

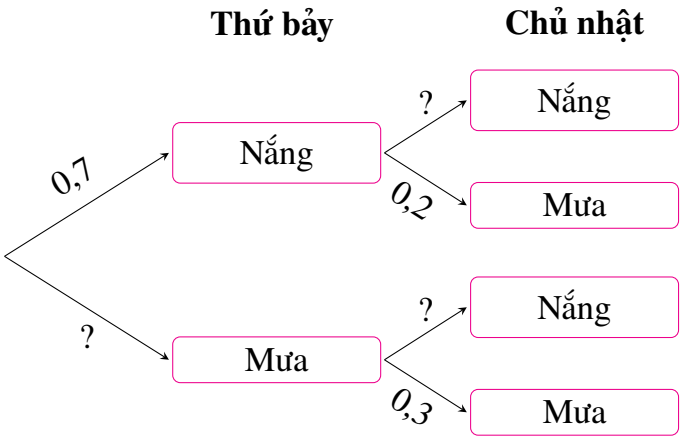
Ví dụ 3

Một trường đại học tiến hành khảo sát tình trạng việc làm sau khi tốt nghiệp của sinh viên. Kết quả khảo sát cho thấy tỉ lệ người tìm được việc làm đúng chuyên ngành là 85% đối với sinh viên tốt nghiệp loại giỏi và 70% đối với sinh viên tốt nghiệp loại khác. Tỉ lệ sinh viên tốt nghiệp loại giỏi là 30%. Gặp ngẫu nhiên một sinh viên đã tốt nghiệp của trường. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của biến cố: C: "Sinh viên tốt nghiệp loại giỏi và tìm được việc làm đúng chuyên ngành "; D: "Sinh viên không tốt nghiệp loại giỏi và tìm được việc làm đúng chuyên ngành".

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Bạn Việt chuẩn bị đi tham quan một hòn đảo trong hai ngày thứ Bảy và Chủ nhật. Ở hòn đảo đó, mỗi ngày chỉ có nắng hoặc mưa, nếu một ngày là nắng thì khả năng xảy ra mưa ở ngày tiếp theo là 20%, còn nếu một ngày là mưa thì khả năng ngày hôm sau vẫn mưa là 30%. Theo dự báo thời tiết, xác suất trời sẽ nắng vào thứ Bảy là 0,7. Hãy tìm các giá trị thích hợp thay vào ? ở sơ đồ hình cây sau:



Bài 2 ☆

Một hộp có 8 bi màu đỏ và 5 viên bi màu vàng; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Có 5 viên bi trong hộp được đánh số, trong đó có 3 viên bi màu đỏ và 2 viên bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp. Dùng sơ đồ hình cây, tính xác suất để viên bi được lấy ra, có màu đỏ, biết rằng viên bi đó được đánh số.

Bài 3

Ở một sân bay, người ta sử dụng một loại máy soi tự động phát hiện hàng cấm trong hành lí kí gửi. Máy phát chuông cảnh báo với 95% các kiện hành lí có chứa hàng cấm và 2% các kiện hành lí không chứa hàng cấm. Tỉ lệ các kiện hành lí có chứa hàng cấm là 1%.
Chọn ngẫu nhiên một kiện hành lí để soi bằng máy trên. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của các biến cố:

- M : "Kiện hành lí có chứa hàng cấm và máy phát chuông cảnh báo ";
- N : "Kiện hành lí không chứa hàng cấm và máy phát chuông cảnh báo".

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Cho hai biến cố A và B bất kì, với $\mathrm{P}(B) > 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\mathrm{P}(A|B) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cup B)}{\mathrm{P}(B)}$. Ⓑ $\mathrm{P}(A|B) = \dfrac{\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)}$.

Ⓒ $\mathrm{P}(A|B) = \dfrac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)}$. Ⓓ $\mathrm{P}(A|B) = \dfrac{\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)}$.

Câu 2. Nếu hai biến cố A, B thỏa mãn $\mathrm{P}(B) = 0{,}7$; $\mathrm{P}(AB) = 0{,}2$ thì $\mathrm{P}(A \mid B)$ bằng

Ⓐ $\dfrac{5}{7}$. Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $\dfrac{7}{50}$. Ⓓ $\dfrac{2}{7}$.

Câu 3. Nếu hai biến cố A, B thỏa mãn $\mathrm{P}(A) = 0{,}4$; $\mathrm{P}(B \mid A) = 0{,}6$ thì $\mathrm{P}(AB)$ bằng

Ⓐ $\dfrac{6}{25}$. Ⓑ $\dfrac{2}{3}$. Ⓒ $\dfrac{1}{5}$. Ⓓ 1.

Câu 4. Cho hai biến cố A và B có $P(A) = 0{,}3; P(B) = 0{,}6; P(A \cap B) = 0{,}2$. Xác suất $\mathrm{P}(A \mid B)$ là

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $\dfrac{1}{3}$. Ⓒ $\dfrac{2}{3}$. Ⓓ $\dfrac{1}{6}$.

Câu 5. Cho hai biến cố A và B có $\mathrm{P}(B) > 0$ và $\mathrm{P}(A \mid B) = 0{,}7$. Tính $\mathrm{P}\left(\overline{A} \mid B\right)$.

Ⓐ $\mathrm{P}\left(\overline{A} \mid B\right) = 0{,}5$. Ⓑ $\mathrm{P}\left(\overline{A} \mid B\right) = 0{,}6$. Ⓒ $\mathrm{P}\left(\overline{A} \mid B\right) = 0{,}3$. Ⓓ $\mathrm{P}\left(\overline{A} \mid B\right) = 0{,}4$.

Câu 6. Cho hai biến cố A và B là hai biến cố độc lập, với $\mathrm{P}(A)=0{,}2024$; $\mathrm{P}(B)=0{,}2025$. Tính $\mathrm{P}(A \mid B)$.

Ⓐ $0{,}7976$. Ⓑ $0{,}2024$. Ⓒ $0{,}2025$. Ⓓ $0{,}7975$.

Câu 7. Nếu hai biến cố A, B thỏa mãn $\mathrm{P}(B)=0{,}5$; $\mathrm{P}(AB)=0{,}3$ thì $\mathrm{P}(\overline{A}B)$ bằng

Ⓐ $\dfrac{3}{20}$. Ⓑ $\dfrac{4}{5}$. Ⓒ $\dfrac{1}{5}$. Ⓓ $\dfrac{3}{5}$.

Câu 8. Cho hai biến cố A và B với $\mathrm{P}(B)=0{,}5$, $\mathrm{P}(AB)=0{,}2$. Tính $\mathrm{P}(\overline{A} \mid B)$.

Ⓐ $0{,}4$. Ⓑ $0{,}1$. Ⓒ $0{,}6$. Ⓓ $0{,}3$.

Câu 9. Cho hai biến độc lập A, B với $\mathrm{P}(A)=0{,}8$; $\mathrm{P}(B)=0{,}3$. Khi đó, $\mathrm{P}(A \mid B)$ bằng

Ⓐ $0{,}8$. Ⓑ $0{,}3$. Ⓒ $0{,}4$. Ⓓ $0{,}6$.

Câu 10. Cho hai biến cố A, B với $\mathrm{P}(B)=0{,}8$; $\mathrm{P}(A \mid B)=0{,}5$. Tính $\mathrm{P}(AB)$

Ⓐ $\dfrac{3}{7}$. Ⓑ $0{,}4$. Ⓒ $0{,}8$. Ⓓ $0{,}5$.

Câu 11. Một hộp chứa 8 bi xanh, 2 bi đỏ. Lần lượt bốc từng bi. Giả sử lần đầu tiên bốc được bi xanh. Xác định xác suất lần thứ 2 bốc được bi đỏ.

Ⓐ $\dfrac{1}{10}$. Ⓑ $\dfrac{2}{9}$. Ⓒ $\dfrac{8}{9}$. Ⓓ $\dfrac{2}{5}$.

Câu 12. Lớp 12A có 30 học sinh, trong đó có 17 bạn nữ còn lại là nam. Có 3 bạn tên Hiền, trong đó có 1 bạn nữ và 2 bạn nam. Thầy giáo gọi ngẫu nhiên 1 bạn lên bảng. Xác suất để có tên Hiền, nhưng với điều kiện bạn đó nữ là

Ⓐ $\dfrac{1}{17}$. Ⓑ $\dfrac{3}{17}$. Ⓒ $\dfrac{17}{30}$. Ⓓ $\dfrac{13}{30}$.

Câu 13. Một lớp học có 40 học sinh, mỗi học sinh giỏi ít nhất một trong hai môn Văn hoặc môn Toán. Biết rằng có 30 học sinh giỏi môn Toán và 15 học sinh giỏi môn Văn. Chọn ngẫu nhiên một học sinh. Tính xác suất để học sinh đó học giỏi môn Toán, biết rằng học sinh đó giỏi môn Văn.

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $\dfrac{1}{6}$. Ⓒ $\dfrac{1}{3}$. Ⓓ $\dfrac{1}{5}$.

Câu 14. Gieo ngẫu nhiên một con xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo bằng 8 biết rằng lần gieo thứ nhất xuất hiện mặt 5 chấm.

Ⓐ $\dfrac{1}{36}$. Ⓑ $\dfrac{1}{6}$. Ⓒ $\dfrac{1}{3}$. Ⓓ $\dfrac{5}{6}$.

Câu 15. Một công ty xây dựng đấu thầu hai dự án độc lập. Khả năng thắng của dự án thứ nhất là 0,5 và dự án thứ hai là 0,6. Tính xác suất để công ty thắng thầu dự án thứ hai biết công ty thắng thầu dự án thứ nhất.

Ⓐ $0{,}3$. Ⓑ $0{,}7$. Ⓒ $0{,}5$. Ⓓ $0{,}6$.

Câu 16. Lớp 10A có 45 học sinh trong đó có 20 học sinh nam và 25 học sinh nữ. Trong bài kiểm tra môn Toán cả lớp có 22 học sinh đạt điểm giỏi (trong đó có 10 học sinh nam và 12 học sinh nữ). Giáo viên chọn ngẫu nhiên một học sinh từ danh sách lớp. Tính xác suất để giáo viên chọn được một học sinh đạt điểm giỏi môn Toán biết học sinh đó là học sinh nam.

Ⓐ $\frac{1}{2}$. Ⓑ $\frac{4}{5}$. Ⓒ $\frac{3}{5}$. Ⓓ $\frac{4}{15}$.

Câu 17. Gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất số chấm trên con xúc xắc không nhỏ hơn 4, biết rằng con xúc xắc xuất hiện mặt lẻ.

Ⓐ $\frac{1}{6}$. Ⓑ $\frac{2}{3}$. Ⓒ $\frac{1}{3}$. Ⓓ $\frac{1}{2}$.

Câu 18. Một cửa hàng thời trang ước lượng rằng có 86% khách hàng đến cửa hàng mua quần áo là phụ nữ, và có 25% số khách mua hàng là phụ nữ cần nhân viên tư vấn. Biết một người mua quần áo là phụ nữ, tính xác suất người đó cần nhân viên tư vấn.

Ⓐ $\frac{1}{4}$. Ⓑ 0,86. Ⓒ $\frac{30}{43}$. Ⓓ $\frac{25}{86}$.

Câu 19. Trong một hộp có 4 viên bi màu trắng và 9 viên bi màu đen, các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy lần lượt mỗi lần một viên bi trong hộp, không trả lại. Xác suất để viên bi lấy lần thứ hai là màu đen, biết rằng viên bi lấy lần thứ nhất cũng là màu đen là

Ⓐ $\frac{5}{9}$. Ⓑ $\frac{3}{5}$. Ⓒ $\frac{2}{3}$. Ⓓ $\frac{9}{11}$.

Câu 20. Gieo con xúc xắc 1 lần. Gọi A là biến cố xuất hiện mặt 2 chấm, B là biến cố xuất hiện mặt chẵn. Xác suất $\mathrm{P}(A \mid B)$ là

Ⓐ $\frac{1}{2}$. Ⓑ $\frac{1}{3}$. Ⓒ $\frac{2}{3}$. Ⓓ $\frac{1}{6}$.

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Cho hai biến cố A, B có xác suất lần lượt là $\mathrm{P}(A) = \frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{3}{5}$ và $\mathrm{P}(AB) = \frac{1}{5}$.

a) Xác suất của biến cố $\overline{A}$ là $\mathrm{P}(\overline{A}) = \frac{3}{5}$.

b) Xác suất của biến cố B với điều kiện A là $\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{1}{3}$.

c) Xác suất của biến cố $A \cup B$ là $\mathrm{P}(A \cup B) = 1$.

d) Xác suất của biến cố $\overline{A}$ với điều kiện $\overline{B}$ là $\mathrm{P}(\overline{A} \mid \overline{B}) = \frac{1}{2}$.

Câu 2. Lớp 12A1 có 40 học sinh, trong đó có 25 học sinh tham gia câu lạc bộ cầu lông, 16 học sinh tham gia câu lạc bộ đá bóng, 12 học sinh tham gia cả câu lạc bộ cầu lông và câu lạc bộ đá bóng. Chọn ngẫu nhiên một học sinh.

Gọi A là biến cố "Học sinh được chọn tham gia câu lạc bộ cầu lông";

B là biến cố "Học sinh được chọn tham gia câu lạc bộ đá bóng".

a) $\mathrm{P}(A) = 0{,}4$. **b)** $\mathrm{P}(B) = 0{,}625$. **c)** $\mathrm{P}(A \mid B) = 0{,}75$. **d)** $\mathrm{P}(B \mid A) = 0{,}48$.

Câu 3. Một công ty truyền thông đấu thầu 2 dự án. Khả năng thắng thầu của dự án 1 là 0,5 và dự án 2 là 0,6. Khả năng thắng thầu của 2 dự án là 0,4. Gọi A: "công ty thắng thầu dự án 1", B: "công ty thắng thầu dự án 2".

a) Xác suất $\mathrm{P}(\overline{A}) = 0{,}5$ và $\mathrm{P}(\overline{B}) = 0{,}4$.

b) Xác suất công ty thắng thầu đúng 1 dự án là 0,3.

c) Biết công ty thắng thầu dự án 1, xác suất công ty thắng thầu dự án 2 là 0,4.

d) Biết công ty không thắng thầu dự án 1, xác suất công ty thắng thầu dự án 2 là 0,8.

Câu 4. Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố "Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc là số chẵn", B là biến cố "Có đúng một con xúc xắc xuất hiện mặt 3 chấm".

a) $\mathrm{P}(AB)=\dfrac{1}{6}$. **b)** $\mathrm{P}(B)=\dfrac{11}{36}$. **c)** $\mathrm{P}(A\mid B)=\dfrac{5}{6}$. **d)** $\mathrm{P}(\overline{A}\mid B)=\dfrac{4}{11}$.

Câu 5. Theo một số liệu thống kê của dự án Plan, tại một xã của một tỉnh Miền núi phía Bắc chỉ có 2 dân tộc Mông và Dao sinh sống có số trẻ em dưới 5 tuổi là 300 em, kết quả điều tra năm 2023 được cho như bảng dưới đây.

Kết quả điều tra	Mông	Dao
Suy dinh dưỡng	27	24
Không suy dinh dưỡng	153	96

Chọn ngẫu nhiên một trẻ em dưới 5 tuổi của xã.
Gọi A là biến cố "chọn được một trẻ em dưới 5 tuổi của xã bị suy dinh dưỡng".
Gọi B là biến cố "chọn được một trẻ em dưới 5 tuổi của xã là dân tộc Mông".
Khi đó $\overline{B}$ là biến cố "chọn được một trẻ em dưới 5 tuổi của xã là dân tộc Dao".

a) $\mathrm{P}(B)=0{,}6$.
b) $\mathrm{P}(AB)=0{,}102$.
c) Tỉ lệ trẻ em người Mông bị suy dinh dưỡng là 15%.
d) Tỉ lệ trẻ em người Dao bị suy dinh dưỡng là 85%.

Câu 6. Khi kiểm tra sức khỏe tổng quát của bệnh nhân ở một bệnh viện, người ta được kết quả như sau

- Có 40% bệnh nhân bị đau dạ dày.
- Có 30% bênh nhân thường xuyên bị stress.
- Trong số các bệnh nhân thường xuyên bị stress có 80% bệnh nhân bị đau dạ dày.

Chọn ngẫu nhiên một bệnh nhân.

a) Xác suất chọn được bệnh nhân bị đau dạ dày, biết bệnh nhân đó thường xuyên stress là 0,8.
b) Xác suất chọn được bệnh nhân thường xuyên bị stress, biết bệnh nhân đó không bị đau dạ dày là 0,6.
c) Xác suất chọn được bệnh nhân vừa thường xuyên bị stress vừa bị đau dạ dày là 0,24.
d) Xác suất chọn được bệnh nhân thường xuyên bị stress là 0,7.

Câu 7. Trong một hộp có 18 quả bóng bàn loại I và 2 quả bóng bàn loại II, các quả bóng bàn có hình dạng và kích thước như nhau. Một học sinh lấy ngẫu nhiên lần lượt 2 quả bóng bàn (lấy không hoàn lại) trong hộp.

a) Xác suất để lần thứ nhất lấy được quả bóng bàn loại II là $\dfrac{9}{10}$.
b) Xác suất để lần thứ hai lấy được quả bóng bàn loại II, biết lần thứ nhất lấy được quả bóng bàn loại II là $\dfrac{1}{19}$.
c) Xác suất để cả hai lần đều lấy được quả bóng bàn loại II là $\dfrac{9}{190}$.

d) Xác suất để ít nhất 1 lần lấy được quả bóng bàn loại I là $\dfrac{189}{190}$.

Câu 8. Một công ty kim cương thống kê có 60% người mua kim cương là nam, có 40% số người mua kim cương là nam trên 50 tuổi và 30% số người mua kim cương là nữ trên 50 tuổi (giả sử chỉ có 2 giới tính nam và nữ).

a) Xác suất một người nữ mua kim cương của công ty trên là 0,4.

b) Biết một người mua kim cương là nam, xác suất người đó trên 50 tuổi là $\dfrac{1}{3}$.

c) Biết một người mua kim cương là nữ, xác suất người đó trên 50 tuổi là $\dfrac{3}{4}$.

d) Trong số những người mua kim cương tại công ty này thì tỉ lệ người trên 50 tuổi trong số những người nam cao hơn tỉ lệ người trên 50 tuổi trong số những người nữ là 2 lần..

Câu 9. Bạn Lan chuẩn bị đi thăm nhà ngoại tại một thành phố A trong hai ngày thứ sáu và thứ bảy. Tại thành phố này mỗi ngày chỉ có nắng hoặc sương mù, nếu một ngày là nắng thì khả năng ngày tiếp theo có sương mù là 30%, nếu một ngày ngày là sương mù thì khả năng ngày tiếp theo có sương mù là 40%. Theo dự báo thời tiết, xác suất trời sẽ nắng vào thứ sáu là 0,8. Khi đó

a) Xác suất trời sẽ có sương mù vào ngày thứ sáu là 0,2.

b) Xác suất trời sẽ có sương mù vào cả hai ngày là 0,32.

c) Xác suất trời sẽ có nắng vào cả hai ngày là 0,16.

d) Xác suất trời sẽ có sương mù vào ngày thứ sáu và có nắng vào ngày thứ bảy là 0,12.

Câu 10. Lớp 12A có 30 học sinh, trong đó có 17 bạn nữ, còn lại là nam. Có 3 bạn tên Hiền, trong đó có 1 bạn nữ và 2 bạn nam. Thầy giáo gọi ngẫu nhiên 1 bạn lên bảng.

a) Xác suất để bạn lên bảng có tên Hiền là $\dfrac{1}{10}$.

b) Xác suất để bạn lên bảng có tên Hiền, nhưng với điều kiện bạn đó nữ là $\dfrac{3}{17}$.

c) Xác suất để bạn lên bảng có tên Hiền, nhưng với điều kiện bạn đó nam là $\dfrac{2}{13}$.

d) Nếu thầy giáo gọi 1 bạn có tên là Hiền lên bảng thì xác xuất để bạn đó là bạn nữ là $\dfrac{3}{17}$.

3 Tự luận.

Bài 1. Cho hai biến cố A và B có $\mathrm{P}(A)=0{,}4$, $\mathrm{P}(B)=0{,}8$ và $\mathrm{P}(A\mid\overline{B})=0{,}5$. Tính $\mathrm{P}(A\overline{B})$ và $\mathrm{P}(A\mid B)$.

Bài 2. Cho hai biến cố A,B có $\mathrm{P}(A)=0{,}4$, $\mathrm{P}(B)=0{,}8$, $\mathrm{P}(A\cup B)=0{,}9$. Tính $\mathrm{P}(A\mid B)$, $\mathrm{P}(A\mid\overline{B})$, $\mathrm{P}(\overline{A}\mid B)$, $\mathrm{P}(\overline{A}\mid\overline{B})$.

Bài 3. Cho hai biến cố độc lập A và B có $\mathrm{P}(A)=0{,}4$, $\mathrm{P}(B)=0{,}8$. Tính $\mathrm{P}(A\mid A\cup B)$. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Bài 4. Một thư viện có 35% tổng số sách là sách khoa học, 14% tổng số sách là sách khoa học tự nhiên. Chọn ngẫu nhiên một quyển sách của thư viện. Tính xác suất để quyển sách được chọn là sách khoa học tự nhiên, biết rằng đó là quyển sách về khoa học.

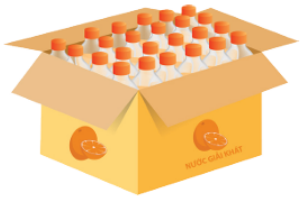
Bài 5. Một hộp kín đựng 20 tấm thẻ giống hệt nhau đánh số từ 1 đến 20. Một người rút ngẫu nhiên ra một tấm thẻ từ trong hộp. Người đó được thông báo rằng thẻ rút ra mang số chẵn. Tính xác suất để người đó rút được thẻ số 10.

Bài 6. Gieo hai con xúc xắc cân đối, đồng chất. Tính xác suất để:

a) Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 7 nếu biết rằng ít nhất có một con xúc xắc xuất hiện mặt 5 chấm;

b) Có ít nhất có một con xúc xắc xuuất hiện mặt 5 chấm nếu biết rằng tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 7.

Bài 7. Công ty nước giải khát X tổ chức một chương trình khuyến mại như sau: Trong mỗi thùng 24 chai nước giải khát đều có hai chai trúng thưởng (giải thưởng được viết ở dưới nắp chai), người tham gia chương trình được mở nắp một cách ngẫu nhiên lần lượt hai chai trong một thùng. Tính xác suất để một người tham gia chương trình mở được cả hai chai đều trúng thưởng.



Bài 8. Bạn An phải thực hiện hai thí nghiệm liên tiếp. Thí nghiệm thứ nhất có xác suất thành công là 0,7. Nếu thí nghiệm thứ nhất thành công thì xác suất thành công của thí nghiệm thứ hai là 0,9. Nếu thí nghiệm thứ nhất không thành công thì xác suất thành công của thí nghiệm thứ hai chỉ là 0,4. Tính xác suất để:

a) Cả hai thí nghiệm đều thành công;

b) Cả hai thí nghiệm đều không thành công;

c) Thí nghiệm thứ nhất thành công và thí nghiệm thứ hai không thành công.

Bài 9. Mỗi bạn học sinh trong lớp của Minh lựa chọn học một trong hai ngoại ngữ là tiếng Anh hoặc tiếng Nhật. Xác suất chọn tiếng Anh của mỗi bạn học sinh nữ là 0,6 và của mỗi bạn học sinh nam là 0,7. Lớp Minh có 25 bạn nữ và 20 bạn nam. Chọn ra ngẫu nhiên một bạn trong lớp. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của các biến cố: A: "Bạn được chọn là nam và học tiếng Nhật"; B: "Bạn được chọn là nữ và học tiếng Anh".

Bài 10. Máy tính và thiết bị lưu điện (UPS) được kết nối như Hình 5. Khi xảy ra sự cố điện, UPS bị hỏng với xác suất 0,02. Nếu UPS bị hỏng khi xảy ra sự cố điện máy tính sẽ bị hỏng với xác suất 0,1; ngược lại, nếu UPS không bị hỏng, máy tính sẽ không bị hỏng.



Hình 5

a) Tính xác suất để cả UPS và máy tính đều không bị hỏng khi xảy ra sự cố điện.

b) Tính xác suất để cả UPS và máy tính đều bị hỏng khi xảy ra sự cố điện.

Bài 11. Một gia đình có 3 đứa trẻ. Biết rằng có ít nhất 2 đứa trẻ là con trai và xác suất sinh con trai và con gái là như nhau ở mỗi lần sinh. Xác suất để gia đình có 2 đứa trẻ là con trai và 1 đứa trẻ là con gái bằng bao nhiêu?

Bài 12. Năm bạn A, B, C, D, E xếp thành một hàng ngang theo thứ tự ngẫu nhiên. Tính xác suất để A đứng cạnh C, biết rằng A không đứng cạnh E.

Bài 13. Các sản phẩm của một phân xưởng được đóng thành hộp, mỗi hộp gồm 10 sản phẩm. Các hộp sản phẩm được kiểm tra như sau: người ta lấy ra ngẫu nhiên 1 sản phẩm từ hộp, nếu sản phẩm đó xấu, hộp sẽ bị loại; nếu sản phẩm đó tốt, người ta sẽ chọn ngẫu nhiên thêm 1 sản phẩm khác từ hộp để kiểm tra. Hộp sẽ chỉ được chấp nhận nếu không có sản phẩm xấu nào trong các sản phẩm được chọn kiểm tra. Biết có một hộp chứa 2 sản phẩm xấu. Tính xác suất để hộp đó không được chấp nhận. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Bài 14. Trong một túi có một số chiếc kẹo cùng loại, chỉ khác màu, trong đó có 6 cái kẹo màu cam, còn lại là kẹo màu vàng. Hà lấy ngẫu nhiên một cái kẹo từ trong túi, không trả lại. Sau đó Hà lại lấy ngẫu nhiên thêm một cái kẹo khác từ trong túi. Biết rằng xác suất Hà lấy được cả hai cái kẹo màu cam là $\frac{1}{3}$. Hỏi ban đầu trong túi có bao nhiêu cái kẹo?

III. ĐỀ KIỂM TRA CUỐI BÀI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hai biến cố A và B có $\mathrm{P}(A)=0{,}5$, $\mathrm{P}(B)=0{,}8$ và $\mathrm{P}(AB)=0{,}2$. Xác suất có điều kiện $\mathrm{P}(B|A)$ bằng

Ⓐ $0{,}5$. Ⓑ $0{,}4$. Ⓒ $0{,}4$. Ⓓ $0{,}25$.

Câu 2. Cho hai biến cố A và B có $\mathrm{P}(A)=0{,}76$, $\mathrm{P}(B)=0{,}28$, $\mathrm{P}(A\,|\,B)=0{,}50$. Tính xác suất $\mathrm{P}(A\overline{B})$.

Ⓐ $0{,}14$. Ⓑ $0{,}62$. Ⓒ $0{,}38$. Ⓓ $0{,}11$.

Câu 3. Cho $P(A)=\frac{1}{4}, P(A\cup B)=\frac{1}{2}$. Biết A, B là hai biến cố xung khắc, thì $P(B)$ bằng

Ⓐ $\frac{1}{8}$. Ⓑ $\frac{1}{4}$. Ⓒ $\frac{3}{4}$. Ⓓ $\frac{1}{3}$.

Câu 4. Cho A và B là hai biến cố độc lập. Biết $\mathrm{P}(A)=0,4$ và $\mathrm{P}(AB)=0,2$. Xác suất của biến cố $A\cup B$ là

Ⓐ $0,6$. Ⓑ $0,7$. Ⓒ $0,8$. Ⓓ $0,9$.

Câu 5. Một hộp chứa 4 quả bóng được đánh số từ 1 đến 4 . An lấy ngẫu nhiên một quả bóng, bỏ ra ngoài, rồi lấy tiếp một quả bóng nữa. Xét các biến cố:

- A : "Quả bóng lấy ra lần đầu là số chẵn"
- B: "Quả bóng lấy ra lần hai là số lẻ".

Xác định biến cố $C=B\,|\,A$: "biến cố B với điều kiện biết A đã xảy ra".

Ⓐ $B\,|\,A=\{(2,1),(2,3),(4,1),(4,3)\}$.

Ⓑ $B\,|\,A=\{(2,1),(2,3),(2,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$.

Ⓒ $B\,|\,A=\{(1,1),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,3),(4,1),(4,3)\}$.

Ⓓ $B\,|\,A=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$.

Câu 6. Trong hộp có 20 nắp khoen bia Tiger, trong đó có 2 nắp ghi "Chúc mừng bạn đã trúng thưởng xe Camry". Bạn Minh Hiền được chọn lên rút thăm lần lượt hai nắp khoen, xác suất để cả hai nắp đều trúng thưởng là

Ⓐ $\frac{1}{20}$. Ⓑ $\frac{1}{19}$. Ⓒ $\frac{1}{190}$. Ⓓ $\frac{1}{10}$.

Câu 7. Áo sơ mi An Phước trước khi xuất khẩu sang Mỹ phải qua 2 lần kiểm tra, nếu cả hai lần đều đạt thì chiếc áo đó mới đủ tiêu chuẩn xuất khẩu. Biết rằng bình quân 98% sản phẩm làm ra qua được lần kiểm tra thứ nhất, và 95% sản phẩm qua được lần kiểm tra đầu sẽ tiếp tục qua được lần kiểm tra thứ hai. Tìm xác suất để 1 chiếc áo sơ mi đủ tiêu chuẩn xuất khẩu?

Ⓐ $\frac{95}{98}$. Ⓑ $\frac{931}{1000}$. Ⓒ $\frac{95}{100}$. Ⓓ $\frac{98}{100}$.

Câu 8. Trong cuộc khảo sát trên một nhóm học sinh gồm các bạn thích trà sữa hoặc kem, người ta có được kết quả sau: Có 68% số học sinh thích kem, 56% số học sinh thích trà sữa, 24% số học sinh thích cả trà sữa và kem. Chọn ngẫu nhiên một bạn học sinh trong nhóm được khảo sát này. Tính xác suất để chọn được học sinh thích kem, biết rằng học sinh đó thích trà sữa (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Ⓐ 0,42. Ⓑ 0,38. Ⓒ 0,43. Ⓓ 0,35.

Câu 9. Cho hai biến cố A, B có $\mathrm{P}(A)=0{,}6$; $\mathrm{P}(B)=0{,}8$; $\mathrm{P}(AB)=0{,}48$. Tính $\mathrm{P}\left(\overline{B} \mid A\right)$.

Ⓐ 0,48. Ⓑ 0,6. Ⓒ 0,75. Ⓓ 0,2.

Câu 10. Để được chọn vào đội tuyển học sinh giỏi môn Toán cấp thành phố, mỗi thí sinh phải vượt qua hai vòng thi. Bạn Hà tham dự cuộc tuyển chọn này. Xác suất để Hà qua được vòng thứ nhất là 0,8. Nếu qua được vòng thứ nhất thì xác suất để Hà qua được vòng thứ hai là 0,7. Xác suất để bạn Hà được chọn vào đội tuyển này là

Ⓐ 0,06. Ⓑ 0,24. Ⓒ 0,56. Ⓓ 0,875.

Câu 11. Một mảnh đất chia thành 2 khu vườn; Khu A có 300 cây ăn quả, khu B có 400 cây ăn quả. Trong đó, số cây cam ở khu A và khu B lần lượt là 200 cây và 250 cây. Chọn ngẫu nhiên 1 cây trong mảnh đất. Xác suất để cây được chọn là cây cam ở khu B bằng bao nhiêu?

Ⓐ $\frac{5}{14}$. Ⓑ $\frac{5}{9}$. Ⓒ $\frac{5}{8}$. Ⓓ $\frac{1}{2}$.

Câu 12. Gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất số chấm trên con xúc xắc không nhỏ hơn 4, biết rằng con xúc xắc xuất hiện mặt lẻ.

Ⓐ $\frac{1}{6}$. Ⓑ $\frac{2}{3}$. Ⓒ $\frac{1}{3}$. Ⓓ $\frac{1}{2}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Bạn Ngọc phải thực hiện hai thí nghiệm liên tiếp. Thí nghiệm thứ nhất có xác suất thành công là 0,8 . Nếu thí nghiệm thứ nhất thành công thì xác suất thành công của thí nghiệm thứ hai là 0,9 . Nếu thí nghiệm thứ nhất không thành công thì xác suất thành công của thí nghiệm thứ hai chỉ là 0,5 . Xét các biến cố sau: Gọi A là biến cố "Thí nghiệm thứ nhất thành công".

Gọi B là biến cố "Thí nghiệm thứ hai thành công".

a) $\mathrm{P}(B \mid A) = 0{,}9$. **b)** $\mathrm{P}\left(\overline{B} \mid A\right) = 0{,}5$. **c)** $\mathrm{P}(AB) = 0{,}72$. **d)** $\mathrm{P}\left(\overline{A}\,\overline{B}\right) = 0{,}1$.

Câu 2. Trong một kỳ thi tốt nghiệp trung học phổ thông, một Thành phố X có 80% học sinh lựa chọn tổ hợp D01 (gồm các môn Toán, Ngữ Văn và Tiếng Anh). Biết rằng, nếu một học sinh chọn tổ hợp D01 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,6; còn nếu một học sinh không chọn tổ hợp D01 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,7. Gọi

- A là biến cố "Học sinh đó chọn tổ hợp D01";
- B là biến cố "Học sinh đó đỗ đại học".

a) $\mathrm{P}(A) = 0{,}08$.

b) Xác suất để một học sinh đó đỗ đại học với điều kiện học sinh đó chọn tổ hợp D01 là 0,6.

c) Xác suất để một học sinh đó đỗ đại học đồng thời học sinh đó chọn tổ hợp D01 là $\dfrac{12}{25}$.

d) Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong kỳ thi tốt nghiệp trung học phổ thông như trên. Biết rằng học sinh này đã đỗ đại học. Xác suất để học sinh đó chọn tổ hợp D01 là $\dfrac{24}{31}$.

Câu 3. Khi kiểm tra thị lực của 240 học sinh khối 12 ở một trường phổ thông, người ta được kết quả như bảng ở hình bên. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh.

	Nữ	Nam
Có tật khúc xạ	47	42
Không có tật khúc xạ	85	66

a) Xác suất của biến cố chọn được học sinh bị tật khúc xạ là $\dfrac{89}{240}$.

b) Xác suất của biến cố chọn được học sinh nữ là $\dfrac{132}{240}$.

c) Xác suất của biến cố chọn được học sinh bị tật khúc xạ, biết học sinh đó là nữ bằng $\dfrac{47}{89}$.

d) Xác suất của biến cố chọn được học sinh nữ, biết học sinh đó bị tật khúc xạ bằng $\dfrac{47}{132}$.

Câu 4. Để thử nghiệm tác dụng điều trị bệnh mất ngủ của hai loại thuốc X và thuốc Y, người ta tiến hành thử nghiệm 5000 bệnh nhân. Kết quả cho trong bảng thống kê 2×2 sau

Dùng thuốc / Kết quả	X	Y
Khỏi bệnh	2000	1500
Không khỏi bệnh	500	1000

Chọn ngẫu nhiên một bệnh nhân trong 5000 bệnh nhân trên. Gọi A là biến cố: "Bệnh nhân khỏi bệnh"; B là biến cố: "Bệnh nhân dùng thuốc X".

a) Số phần tử của biến cố B là $n(B) = 3500$.

b) Số phần tử của biến cố A giao B là $n(AB) = 2000$.

c) Xác suất của biến cố A với điều kiện B là $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{4}{5}$.

d) Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A)=\dfrac{7}{10}$.

Phần III. Trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6 vào ô kết quả.

Câu 1. Cho 2 biến cố A và B có $\mathrm{P}(A)=0{,}5$; $\mathrm{P}(B)=0{,}8$; $\mathrm{P}\left(A|\overline{B}\right)=0{,}6$. Tìm $\mathrm{P}(A|B)$.

KQ: | | | | |

Câu 2. Một linh kiện điện tử trước khi lắp đặt phải trải qua hai lần kiểm tra, nếu cả hai lần đạt yêu cầu thì được lắp đặt. Biết rằng khoảng 90% sản phẩm qua được lần kiểm tra thứ nhất, và 80% sản phẩm qua được lần kiểm tra thứ hai thì sẽ qua được lần kiểm tra thứ hai. Tính xác suất để một linh kiện đủ tiêu chuẩn lắp đặt. KQ: | | | | |

Câu 3. Trong kì kiểm tra môn Toán của một trường THPT có 400 học sinh tham gia, trong đó có 190 học sinh nam và 210 học sinh nữ. Khi công bố kết quả của kì kiểm tra đó, có 100 học sinh đạt điểm giỏi, trong đó có 48 học sinh nam và 52 học sinh nữ. Chọn ra ngẫu nhiên một học sinh trong số 400 học sinh đó. Tính xác suất để học sinh được chọn ra đạt điểm giỏi, biết rằng học sinh đó là nữ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm). KQ: | | | | |

Câu 4. Có hai chiếc hộp, hộp I có 6 quả bóng màu đỏ và 4 quả bóng màu vàng, hộp II có 7 quả bóng màu đỏ và 3 quả bóng màu vàng, các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp I bỏ vào hộp II. Sau đó, lấy ra ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp II. Tính xác suất để quả bóng được lấy ra từ hộp II là quả bóng được chuyển từ hộp I sang, biết rằng quả bóng đó có màu đỏ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
KQ: | | | | |

Câu 5. Một lớp có 16 học sinh nữ, còn lại là học sinh nam. Trong giờ giáo dục thể chất thầy giáo khảo sát kết quả rèn luyện thể lực của học sinh bằng cách bốc thăm trong danh sách lớp để chọn hai bạn chạy tiếp sức. Biết xác suất để chọn được hai bạn tham gia khảo sát đều là nữ bằng $\dfrac{15}{62}$. Hỏi lớp đó có bao nhiêu học sinh?. KQ: | | | | |

Câu 6. Ba cầu thủ sút phạt đền $11m$, mỗi người đá một lần với xác suất làm bàn tương ứng là a; b và 0,7 (với $0<b<a<1$). Biết xác suất ghi bàn để ít nhất một trong ba cầu thủ ghi bàn là 0,982 và xác suất để ba cầu thủ ghi bàn là 0,392. Tính xác suất để có đúng hai cầu thủ ghi bàn (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm). KQ: | | | | |

—Hết—

BẢNG ĐÁP ÁN BÀI TẬP CUỐI BÀI

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1 C	2 D	3 A	4 B	5 C	6 B	7 C	8 C	9 A	10 B
11 B	12 A	13 C	14 B	15 D	16 A	17 C	18 D	19 C	20 B

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. a Đ b S c S d Đ	Câu 2. a S b S c Đ d Đ
Câu 3. a Đ b Đ c S d S	Câu 4. a Đ b Đ c S d Đ
Câu 5. a Đ b S c Đ d S	Câu 6. a Đ b S c Đ d S
Câu 7. a S b Đ c S d Đ	Câu 8. a Đ b S c Đ d S
Câu 9. a Đ b S c S d Đ	Câu 10. a Đ b S c Đ d S

BẢNG ĐÁP ÁN ĐỀ KIỂM TRA CUỐI BÀI

ĐÁP ÁN PHẦN I

1. C	2. B	3. B	4. B	7. B	8. C	9. D	10. C	11. C	12. C

ĐÁP ÁN PHẦN II

Câu 1. a Đ b S c Đ d Đ	Câu 2. a S b Đ c Đ d Đ
Câu 3. a Đ b Đ c S d S	Câu 4. a S b Đ c Đ d Đ

ĐÁP ÁN PHẦN III

Câu 1.	Câu 2.	Câu 3.	Câu 4.	Câu 5.	Câu 6.
0 , 4 8	0 , 7 2	0 , 2 5	0 , 0 8	3 2	0 , 4 3

§2 CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN VÀ CÔNG THỨC BAYES

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Công thức xác suất toàn phần

Cho hai biến cố A và B với $0 < \mathrm{P}(B) < 1$. Khi đó

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A \mid B) + \mathrm{P}(\overline{B}) \cdot \mathrm{P}(A \mid \overline{B})$$

gọi là ***công thức xác suất toàn phần***.

Lưu ý. Công thức xác suất toàn phần cũng đúng với biến cố B bất kì.

2) Công thức Bayes

Giả sử A và B là hai biến cố ngẫu nhiên thỏa mãn $\mathrm{P}(A) > 0$ và $0 < \mathrm{P}(B) < 1$. Khi đó

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A \mid B)}{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A \mid B) + \mathrm{P}(\overline{B}) \cdot \mathrm{P}(A \mid \overline{B})}$$

gọi là công thức Bayes.

Lưu ý.

a) Công thức Bayes vẫn đúng với biến cố B bất kì.

b) Với $\mathrm{P}(A) > 0$, công thức $\mathrm{P}(B \mid A) = \dfrac{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A \mid B)}{\mathrm{P}(A)}$ cũng được gọi là công thức Bayes.

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Tính xác suất bằng công thức xác suất toàn phần

Cho hai biến cố A và B là hai biến cố tùy ý. Khi đó

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}(\overline{B}) \cdot \mathrm{P}(A|\overline{B})$$

Ví dụ 1

Cho hai biến cố A, B với $\mathrm{P}(B) = 0{,}6$; $\mathrm{P}(A|B) = 0{,}7$ và $\mathrm{P}\left(A|\overline{B}\right) = 0{,}4$. Tính $\mathrm{P}(A)$.

Ví dụ 2

Người ta khảo sát khả năng chơi nhạc cụ của một nhóm học sinh tại trường X. Nhóm này có 60% học sinh là nam. Kết quả khảo sát cho thấy có 20% học sinh nam và 15% học sinh nữ biết chơi ít nhất một nhạc cụ. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong nhóm này. Tính xác suất để chọn được học sinh biết chơi ít nhất một nhạc cụ.

Ví dụ 3

Có hai hộp đựng các viên bi cùng kích thước và khối lượng. Hộp thứ nhất chứa 5 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh, hộp thứ hai chứa 6 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai, sau đó lấy ra ngẫu nhiên một viên bi từ hộp thứ hai. Tính xác suất để viên bi được lấy ra từ hộp thứ hai là viên bi đỏ.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Cho hai biến cố A, B sao cho $\mathrm{P}(A) = 0{,}6$; $\mathrm{P}(B) = 0{,}4$; $\mathrm{P}(B \mid \overline{A}) = 0{,}3$. Tính $\mathrm{P}(B|A)$.

Bài 2 ☆

Vào mỗi buổi sáng ở tuyến phố H, xác suất xảy ra tắc đường khi trời mưa và không mưa lần lượt là 0,7 và 0,2. Xác suất có mưa vào một buổi sáng là 0,1. Tính xác suất để sáng đó tuyến phố H bị tắc đường.

Bài 3 ☆

Một hộp có 5 quả cầu trắng và 10 quả cầu đen cùng kích thước và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên lần lượt hai quả cầu (không hoàn lại) từ hộp. Tính xác suất để lần thứ hai lấy được quả cầu trắng.

Bài 4 ☆

Ở một địa phương, tỉ lệ nam và nữ là 2: 3. Số người mắc bệnh bạch tạng của địa phương này chiếm tỉ lệ 0,45% dân cư. Tính tỉ lệ nam giới mắc bệnh bạch tạng của địa phương đó, biết tỉ lệ này ở nữ là 0,35%.

Dạng 2 Tính xác suất bằng công thức Bayes

Cho hai biến cố A và B với $\mathrm{P}(A) > 0$. Khi đó

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A|B)}{\mathrm{P}(A)}$$

Công thức Bayes còn được viết dưới dạng $\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A \mid B)}{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) \cdot \mathrm{P}\left(A|\overline{B}\right)}$.

Ví dụ 1

Cho hai biến cố A, B sao cho $\mathrm{P}(A) = 0{,}6$; $\mathrm{P}(B) = 0{,}4$; $\mathrm{P}(A|B) = 0{,}3$. Tính $\mathrm{P}(B|A)$.

Ví dụ 2

Trong một kì thi tốt nghiệp trung học phổ thông, một tỉnh X có 80% học sinh lựa chọn tổ hợp A00 (gồm các môn Toán, Vật lí, Hoá học). Biết rằng, nếu một học sinh chọn tổ hợp A00 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,6; còn nếu một học sinh không chọn tổ hợp A00 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,7. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của tỉnh X đã tốt nghiệp trung học phổ thông trong kì thi trên. Biết rằng học sinh này đã đỗ đại học. Tính xác suất để học sinh đó chọn tổ hợp A00.

Ví dụ 3

Kết quả khảo sát tại một xã cho thấy có 20% cư dân hút thuốc lá. Tỉ lệ cư dân thường xuyên gặp các vấn đề sức khoẻ về đường hô hấp trong số những người hút thuốc lá và không hút thuốc lá lần lượt là 70%, 15%.

a) Nếu ta gặp một cư dân của xã thì xác suất người đó thường xuyên gặp các vấn đề sức khoẻ về đường hô hấp là bao nhiêu?

b) Nếu ta gặp một cư dân của xã thường xuyên gặp các vấn đề sức khoẻ về đường hô hấp thì xác suất người đó có hút thuốc lá là bao nhiêu?

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Khi phát hiện một vật thể bay, xác suất một hệ thống radar phát cảnh báo là 0,9 nếu vật thể bay đó là mục tiêu thật và là 0,05 nếu mục tiêu giả. Có 99% các vật thể bay là mục tiêu giả. Biết rằng hệ thống radar đang phát cảnh báo khi phát hiện một vật thể bay. Tính xác suất vật thể đó là mục tiêu thật.



Hình 3

Bài 2 ☆

Người ta điều tra thấy ở một địa phương nọ có 2% tài xế sử dụng điện thoại di động khi lái xe. Trong các vụ tai nạn ở địa phương đó, người ta nhận thấy rằng có 10% là do tài xế có sử dụng điện thoại khi lái xe gây ra. Hỏi việc sử dụng điện thoại di động khi lái xe làm tăng xác suất gây tai nạn lên bao nhiêu lần?



Hình 4

....
....
....
....
....

Bài 3

☆

Một nghiên cứu đã chỉ ra rằng tỉ lệ người bị lao phổi trong nhóm X những người mắc phải hội chứng suy giảm miễn dịch H là 15,2%. Kết quả nghiên cứu về một số triệu chứng lâm sàng như có ho trong vòng bốn tuần, hoặc có bị sốt trong vòng bốn tuần, hoặc ra mồ hôi ban đêm từ ba tuần trở lên của nhóm X cho thấy:

- Trong số những người mắc bệnh lao phổi, có 93,2% trường hợp có ít nhất một triệu chứng;
- Trong số những người không mắc bệnh lao phổi, có 35,8% trường hợp không có triệu chứng nào.

(Nguồn: *https: timmachhoc.vn/din-gii-kt-qu-nghien-cu-bng-nh-li-bayes/*).

Nếu bác sĩ gặp một bệnh nhân thuộc nhóm X và bệnh nhân đó có ít nhất một triệu chứng trên thì xác suất bệnh nhân này mắc bệnh lao phổi là bao nhiêu?

....
....
....
....
....

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Giả sử A và B là hai biến cố ngẫu nhiên thỏa mãn $\mathrm{P}(A) > 0$ và $0 < \mathrm{P}(B) < 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A|B)}{\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}(\overline{B})\mathrm{P}(A|\overline{B})}$.

Ⓑ $\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)}{\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B) - \mathrm{P}(\overline{B})\mathrm{P}(A|\overline{B})}$.

Ⓒ $\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)}{\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|\overline{B}) + \mathrm{P}(\overline{B})\mathrm{P}(A|B)}$.

Ⓓ $\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)}{\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}(\overline{B})\mathrm{P}(A|\overline{B})}$.

Câu 2. Cho hai biến cố A và B, với $0 < \mathrm{P}(B) < 1$. Đẳng thức nào sau đây đúng.

Ⓐ $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B) \cdot \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A \mid \overline{B}) \cdot \mathrm{P}(A)$.

Ⓑ $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B) \cdot \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A \mid \overline{B}) \cdot \mathrm{P}(\overline{B})$.

Ⓒ $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B) \cdot \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\overline{A} \mid B) \cdot \mathrm{P}(\overline{A})$.

Ⓓ $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \mid B) \cdot \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A \mid \overline{B}) \cdot \mathrm{P}(\overline{B})$.

Câu 3. Cho hai biến cố A và B, với $\mathrm{P}(B) = 0{,}8$, $\mathrm{P}(A \mid B) = 0{,}7$, $\mathrm{P}(A \mid \overline{B}) = 0{,}45$. Giá trị $\mathrm{P}(B \mid A)$ bằng

Ⓐ 0,25. Ⓑ $\dfrac{56}{65}$. Ⓒ 0,65. Ⓓ 0,5.

Câu 4. Cho hai biến cố A và B với $\mathrm{P}(B)=0{,}8$; $\mathrm{P}(A\mid B)=0{,}7$; $\mathrm{P}\left(A\mid \overline{B}\right)=0{,}45$. Giá trị $\mathrm{P}(A)$ bằng

Ⓐ 0,25. Ⓑ 0,65. Ⓒ 0,55. Ⓓ 0,5.

Câu 5. Cho hai biến cố A, B sao cho $\mathrm{P}(A)=0{,}5$; $\mathrm{P}(B)=0{,}6$; $\mathrm{P}(A\mid B)=0{,}7$. Giá trị $\mathrm{P}(B\mid A)$ bằng

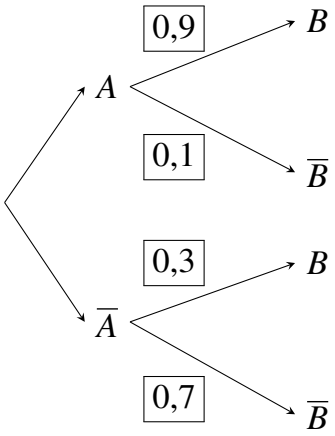
Ⓐ 0,86. Ⓑ 0,68. Ⓒ 0,84. Ⓓ 0,48.

Câu 6. Cho hai biến cố A, B sao cho $\mathrm{P}(B)=0{,}7$; $\mathrm{P}(A\mid B)=0{,}6$; $\mathrm{P}\left(A\mid \overline{B}\right)=0{,}8$. Giá trị $\mathrm{P}(B\mid A)$ bằng

Ⓐ $\dfrac{7}{11}$. Ⓑ $\dfrac{9}{25}$. Ⓒ $\dfrac{17}{25}$. Ⓓ $\dfrac{19}{50}$.

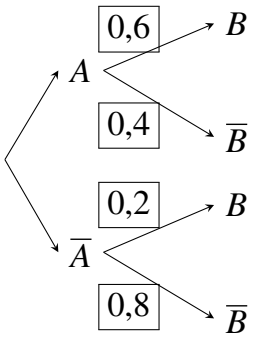
Câu 7. Cho sơ đồ hình cây như hình bên. Biết $\mathrm{P}(A)=0{,}6$. Tính $\mathrm{P}(A\mid B)$.

Ⓐ $\dfrac{6}{11}$. Ⓑ $\dfrac{7}{11}$. Ⓒ $\dfrac{8}{11}$. Ⓓ $\dfrac{9}{11}$.



Câu 8. Cho sơ đồ hình cây như hình bên. Biết $\mathrm{P}(A)=0{,}72$. Xác suất của biến cố A với điều kiện B không xảy ra là

Ⓐ $\dfrac{9}{16}$. Ⓑ $\dfrac{16}{25}$. Ⓒ $\dfrac{9}{25}$. Ⓓ $\dfrac{3}{16}$.



Câu 9. Một bộ lọc được sử dụng để chặn thư rác trong các tài khoản thư điện tử. Tuy nhiên, vì bộ lọc không tuyệt đối hoàn hảo nên một thư rác bị chặn với xác suất 0,95 và một thư đúng (không phải là thư rác) bị chặn với xác suất 0,01. Thống kê cho thấy tỉ lệ thư rác là 3%. Chọn ngẫu nhiên một thư bị chặn. Tính xác suất để đó là thư rác (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

Ⓐ 0,095. Ⓑ 0,746. Ⓒ 0,476. Ⓓ 0,003.

Câu 10. Giả sử tỉ lệ người dân của tỉnh X nghiện thuốc lá là 20%; tỉ lệ người bị bệnh phổi trong số người nghiện thuốc lá là 70%, trong số người không nghiện thuốc lá là 15%. Khi ta gặp ngẫu nhiên một người dân của tỉnh X, xác suất mà người đó là nghiện thuốc lá khi biết bị bệnh phổi là

Ⓐ $\dfrac{7}{13}$. Ⓑ $\dfrac{6}{13}$. Ⓒ $\dfrac{4}{13}$. Ⓓ $\dfrac{9}{13}$.

Câu 11. Có hai đội thi đấu môn bơi lội. Đội I có 4 vận động viên, đội II có 6 vận động viên. Xác suất đạt huy chương bạc của mỗi vận động viên đội I và đội II tương ứng là 0,7 và 0,6. Chọn ngẫu nhiên một vận động viên. Giả sử vận động viên được chọn đạt huy chương bạc. Tính xác suất để vận động viên này thuộc đội I.

Ⓐ $\frac{8}{11}$. Ⓑ $\frac{11}{16}$. Ⓒ $\frac{3}{16}$. Ⓓ $\frac{7}{16}$.

Câu 12. Một ứng dụng được sử dụng để chặn cuộc gọi rác trong điện thoại. Tuy nhiên, vì ứng dụng không tuyệt đối hoàn hảo nên một cuộc gọi rác bị chặn với xác suất 0,8 và một cuộc gọi đúng (không phải là cuộc gọi rác) bị chặn với xác suất 0,01. Thống kê cho thấy tỉ lệ cuộc gọi rác là 10%. Chọn ngẫu nhiên một cuộc gọi không bị chặn. Xác suất để đó là cuộc gọi đúng là

Ⓐ $\frac{891}{911}$. Ⓑ $\frac{891}{911}$. Ⓒ $\frac{123}{892}$. Ⓓ $\frac{213}{911}$.

Câu 13. Một bệnh viện sử dụng một xét nghiệm để phát hiện một loại bệnh với độ chính xác là 95% (nghĩa là 95% bệnh nhân mắc bệnh sẽ có kết quả dương tính). Xét nghiệm này cũng có tỷ lệ dương tính giả là 2% (nghĩa là 2% bệnh nhân không mắc bệnh cũng có kết quả dương tính). Biết rằng 1% dân số thực sự mắc bệnh này. Nếu một người nhận kết quả xét nghiệm dương tính, xác suất thực sự người đó mắc bệnh là bao nhiêu?

Ⓐ Khoảng 32%. Ⓑ Khoảng 47%. Ⓒ Khoảng 83%. Ⓓ Khoảng 95%.

Câu 14. Công ty X tổ chức buổi trình diễn ánh sáng với 1 000 drone, điều khiển từ trạm trung tâm để tạo hình khối 3D đẹp mắt, sử dụng hệ thống định vị RTK (Real Time Kinematic) đảm bảo độ chính xác. Trong quá trình bay, drone có thể gặp sự cố mất tín hiệu kết nối do nhiễu sóng, và khi đó, nó tự động phát tín hiệu cảnh báo qua kênh dự phòng. Tuy nhiên, hệ thống cảnh báo không hoàn hảo, có thể báo nhầm ngay cả khi drone hoạt động bình thường. Dựa trên thống kê từ những buổi trình diễn trước đó: Xác suất một drone gặp sự cố mất kết nối là 0,005; xác suất drone bình thường bị báo nhầm phát tín hiệu cảnh báo là 0,001; xác suất drone gặp sự cố tín hiệu phát tín hiệu cảnh báo là 0,99. Trong buổi trình diễn, một drone được ghi nhận phát tín hiệu cảnh báo. Xác suất để drone này thực sự gặp sự cố mất tín hiệu kết nối là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến phần trăm). (Drone chuyên trình diễn ánh sáng)

Ⓐ 0,06. Ⓑ 0,83. Ⓒ 0,79. Ⓓ 0,33.

Câu 15. Tỉ lệ người dân đã tiêm vắc xin phòng bệnh A ở một địa phương là 65%. Trong số những người đã tiêm phòng, tỉ lệ mắc bệnh A là 5% còn trong số những người chưa tiêm, tỉ lệ mắc bệnh A là 17%. Gặp ngẫu nhiên một người ở địa phương đó. Xác suất người đó mắc bệnh A là

Ⓐ 0,0325. Ⓑ 0,018. Ⓒ 0,092. Ⓓ 0,0525.

Câu 16. Một công ty may có hai chi nhánh cùng sản xuất một loại áo, trong đó có 56% áo ở chi nhánh I và 44% áo ở chi nhánh II. Tại chi nhánh I có 75% áo chất lượng cao và tại chi nhánh II có 68% áo chất lượng cao (kích thước và hình dáng bề ngoài của các áo là như nhau). Chọn ngẫu nhiên 1 áo. Xác suất chọn được áo chất lượng cao là (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Ⓐ 0,72. Ⓑ 0,35. Ⓒ 0,82. Ⓓ 0,55.

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Chạy Marathon là môn thể thao mà tại đó, người chơi sẽ hoàn thành quãng đường 42,195 km trong khoảng thời gian nhất định. FM sub 4 là thành tích dành cho những người chơi hoàn thành quãng đường Marathon dưới 4 giờ. Trong CLB AKR, tỷ lệ thành viên nam là 72%, tỷ lệ thành viên nữ là 28%. Đối với nam, tỷ lệ Vận động viên hoàn thành Marathon sub 4 là 32%; đối với nữ tỷ lệ Vận động viên hoàn thành sub 4 là 3%. Chọn ngẫu nhiên 1 thành viên từ CLB AKR.

a) Khi Vận động viên được chọn là nam, xác suất để Vận động viên này chưa hoàn thành sub 4 cự ly Marathon là 68%.

b) Xác suất để thành viên được chọn đã hoàn thành sub 4 là 22%.

c) Xác suất để thành viên được chọn là nữ đã hoàn thành sub 4 là 2%.

d) Biết rằng Vận động viên được chọn đã hoàn thành sub 4, xác suất để Vận động viên đó là nam bằng 96%.

Câu 2. Một hộp có 4 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ, các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy lần lượt hai viên bi, không hoàn lại.

a) Xác suất lần 1 lấy được bi xanh là $\frac{1}{4}$.

b) Xác suất lần 2 lấy được bi xanh biết lần 1 lấy được bi đỏ là $\frac{1}{3}$.

c) Xác suất lần 2 lấy được bi xanh biết lần 1 lấy được bi xanh là $\frac{4}{9}$.

d) Xác suất lần 2 lấy được bi xanh là $\frac{2}{5}$.

Câu 3. Một cửa hàng có hai loại bóng đèn LED, trong đó có 65% bóng đèn LED là màu trắng và 35% bóng đèn LED là màu xanh, các bóng đèn có kích thước như nhau. Các bóng đèn LED màu trắng có tỉ lệ hỏng là 2% và các bóng đèn LED màu xanh có tỉ lệ hỏng là 3%. Một khách hàng chọn mua ngẫu nhiên 1 bóng đèn LED từ cửa hàng. Xét các biến cố:
A: "Khách hàng chọn được bóng đèn LED màu trắng";
B: "Khách hàng chọn được bóng đèn LED không hỏng".

a) $\mathrm{P}(\overline{A}) = 0{,}65$. **b)** $\mathrm{P}(B \mid A) = 0{,}02$. **c)** $\mathrm{P}(B \mid \overline{A}) = 0{,}3$. **d)** $\mathrm{P}(B) = 0{,}9765$.

Câu 4 (MH – THPTQG 2025). Trước khi đưa một loại sản phẩm ra thị trường, người ta đã phỏng vấn ngẫu nhiên 200 khách hàng về sản phẩm đó. Kết quả thống kê như sau: có 105 người trả lời "sẽ mua"; có 95 người trả lời "không mua". Kinh nghiệm cho thấy tỉ lệ khách hàng thực sự sẽ mua sản phẩm tương ứng với những cách trả lời "sẽ mua" và "không mua" lần lượt là 70% và 30%. Gọi A là biến cố "Người được phỏng vấn thực sự sẽ mua sản phẩm". Gọi B là biến cố "Người được phỏng vấn trả lời sẽ mua sản phẩm".

a) Xác suất $P(B) = \frac{21}{40}$ và $P(\bar{B}) = \frac{19}{40}$.

b) Xác suất có điều kiện $P(A \mid B) = 0{,}3$.

c) Xác suất $P(A) = 0{,}51$.

d) Trong số những người được phỏng vấn thực sự sẽ mua sản phẩm có 70% người đã trả lời "sẽ mua" khi được phỏng vấn (kết quả tính theo phần trăm được làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 5 (CT – THPTQG 2025). Một phầm mềm nhận dạng tin nhắn quảng cáo trên điện thoại bằng cách dựa theo từ khóa để đánh dấu một số tin nhắn được gửi đến. Qua một thời gian dài sử dụng, người ta thấy rằng trong số tất cả tin nhắn gửi đến, có 20% số tin nhắn bị đánh dấu. Trong số các tin nhắn bị đánh dấu, có 10% số tin nhắn không phải quảng cáo. Trong các tin nhắn không bị đánh dấu, có 10% số tin nhắn là quảng cáo. Chọn ngẫu nhiên một tin nhắn được gửi đến điện thoại.

a) Xác suất để tin nhắn đó không bị đánh dấu là 0,8.

b) Xác suất để tin nhắn đó không phải là quảng cáo, biết rằng nó không bị đánh dấu, bằng 0,95.

c) Xác suất để tin nhắn đó không phải là quảng cáo bằng 0,76.

d) Xác suất để tin nhắn đó không bị đánh dấu, biết rằng nó không phải là quảng cáo, nhỏ hơn 0,95.

Câu 6 (CT – THPTQG 2026 Lần 1). Nhằm đưa ra cảnh báo sớm về tình trạng sức khỏe của cư dân, người ta sử dụng một ứng dụng trí tuệ nhân tạo để sàng lọc nguy cơ mắc bệnh dựa trên hồ sơ y tế được lưu trữ. Khi phát hiện nguy cơ mắc bệnh, ứng dụng này sẽ gửi cảnh báo để giúp người dân đi khám bệnh kịp thời. Người ta dùng ứng dụng này để tầm soát nguy cơ mắc một loại bệnh.

Kết quả thu được khi quét thử nghiệm hồ sơ y tế của 10000 người như sau: Có 1000 người nhận được cảnh báo và 9000 người còn lại không nhận được cảnh báo từ ứng dụng. Trong số 1000 người nhận được cảnh báo thì có 600 người có bệnh và 400 người không có bệnh. Trong số 9000 người không nhận được cảnh báo thì có 200 người có bệnh và 8800 người không có bệnh.

Chọn ngẫu nhiên một người trong số 10000 người nói trên.

a) Xác suất để người đó không nhận được cảnh báo từ ứng dụng bằng 0,9.

b) Xác suất để người đó không có bệnh, biết rằng người đó không nhận được cảnh báo từ ứng dụng, lớn hơn 0,97.

c) Xác suất để người đó không có bệnh bằng 0,9.

d) Xác suất để người đó không nhận được cảnh báo từ ứng dụng, biết rằng người đó không có bệnh, lớn hơn 0,95.

Câu 7 (CT -THPTQG 2026 Lần 2). Một trường đại học trao hai loại học bổng A và B cho sinh viên trong trường, một sinh viên có thể được nhận cả hai loại học bổng A và B. Trong số các sinh viên được trao học bổng loại A có 12% số bạn được trao loại B và trong số các sinh viên không được trao học bổng loại A có 10% số bạn được trao học bổng loại B. Có 10,2% số sinh viên toàn trường được trao học bổng loại B. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên trong trường.

a) Xác suất để sinh viên đó không được trao học bổng loại B là 0,898.

b) Xác suất để sinh viên đó không được trao học bổng loại B, biết sinh viên đó không được trao học bổng loại A, là 0,88.

c) Xác suất để sinh viên đó không được trao học bổng loại A là 0,89.

d) Xác suất để sinh viên đó không được trao học bổng loại A, biết sinh viên đó không được trao học bổng loại B, lớn hơn 0,9.

Câu 8. Lớp 12A có 70% học sinh thích chơi thể thao. Biết rằng, nếu một học sinh thích chơi thể thao thì xác xuất học sinh đó biết chơi cầu lông là 0,8; học sinh không thích chơi thể thao thì xác suất học sinh đó biết chơi cầu lông là 0,1. Chọn ngẫu nhiên một học sinh.

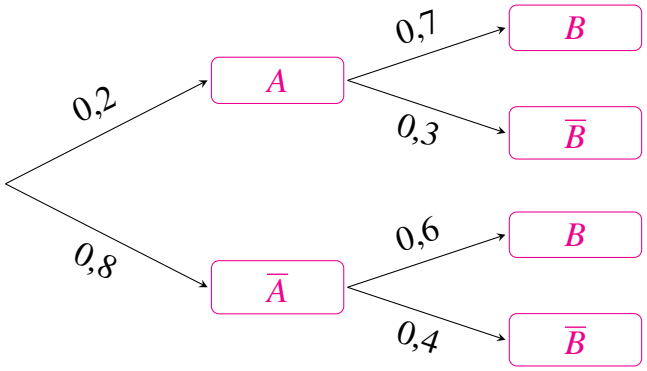
a) Xác suất học sinh này không thích chơi thể thao là 0,3.

b) Xác suất học sinh này không biết chơi cầu lông với điều kiện không thích chơi thể thao là 0,41.

c) Xác suất học sinh này biết chơi cầu lông là 0,59.

d) Xác suất học sinh này thích chơi thể thao với điều kiện biết chơi cầu lông là 0,95 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Câu 9. Cho sơ đồ hình cây như hình bên. Khi đó



a) $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B\mid A)+\mathrm{P}\left(\overline{A}\right)\cdot\mathrm{P}\left(B\mid\overline{A}\right)$. **b)** $\mathrm{P}(B\mid A)=0{,}6$.

c) $\mathrm{P}(B)=0{,}62$. **d)** $\mathrm{P}\left(\overline{B}\right)=0{,}4$.

Câu 10. Một kho hàng có 85% sản phẩm loại I và 15% sản phẩm loại II, trong đó có 1% sản phẩm loại I bị hỏng, 4% sản phẩm loại II bị hỏng. Các sản phẩm có kích thước và hình dạng như nhau. Một khách hàng chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm.

a) Xác suất để không chọn được sản phẩm loại I là 0,85.

b) Xác suất để chọn được sản phẩm không bị hỏng trong số các sản phẩm loại I là 0,99.

c) Xác suất chọn được sản phẩm không bị hỏng là 0,9855.

d) Xác suất chọn được sản phẩm loại I mà không bị hỏng là 0,95.

Câu 11. Trong kỳ kiểm tra môn Toán của một trường THPT có 400 học sinh tham gia, trong đó có 180 học sinh nam và 220 học sinh nữ. Khi công bố kết quả kỳ kiểm tra đó, tỉ lệ học sinh đạt điểm giỏi tương ứng với nam và nữ lần lượt là 25% và 30%. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong số 400 học sinh đó.

Gọi A là biến cố "Học sinh được chọn ra đạt điểm giỏi ", B là biến cố "Học sinh được chọn ra là học sinh nữ ".

a) Xác suất $\mathrm{P}(B)=\dfrac{9}{20}$ và $\mathrm{P}(\overline{B})=\dfrac{11}{20}$.

b) Xác suất có điều kiện $\mathrm{P}(A\mid\overline{B})=0{,}3$.

c) Xác suất $\mathrm{P}(\overline{A})=0{,}7225$.

d) Trong số học sinh đạt điểm giỏi có 59% học sinh nữ đạt điểm giỏi trong kì kiểm tra môn Toán (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 12. Trong cuộc khảo sát ngẫu nhiên 600 học sinh về việc "thích học" hay "không thích học" môn toán. Kết quả thống kê như sau: có 400 học sinh trả lời "thích học" và 200 học sinh trả lời "không thích học"Thực tế cho thấy tỉ lệ học sinh "giỏi toán" tương ứng với những cách trả lời "thích học" và "không thích học" lần lượt là 70% và 10%. Gọi T là biến cố "Học sinh được phỏng vấn trả lời thích học môn toán". Gọi G là biến cố "Học sinh được phỏng vấn giỏi toán".

a) Xác suất $\mathrm{P}(T)=\dfrac{2}{3}$ và $\mathrm{P}(\overline{T})=\dfrac{1}{3}$.

b) Xác suất có điều kiện $\mathrm{P}(G|T)=0{,}3$, $\mathrm{P}(G|\overline{T})=0{,}9$.

c) Xác suất $\mathrm{P}(G)=0{,}5$.

d) Trong số những người được phỏng vấn giỏi toán có 80% người đã trả lời thích học môn toán khi được phỏng vấn (kết quả tính theo phần trăm làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 13. Xác suất để công ty X thuê một trong hai công ty vệ sinh A và B tư vấn lần lượt là 0,4 và 0,6. Theo kinh nghiệm khả năng X phát sinh thêm chi phí khi sử dụng dịch vụ tư vấn của công ty A và B lần lượt là 0,05 và 0,03.

a) Xác suất để X có phát sinh thêm chi phí khi sử dụng dịch vụ tư vấn là 0,038.

b) Biết X có phát sinh thêm chi phí khi sử dụng dịch vụ tư vấn. Xác suất để X thuê công ty A tư vấn là 0,4737.

c) Biết X có phát sinh thêm chi phí khi sử dụng dịch vụ tư vấn. Xác suất để X thuê công ty B tư vấn là 0,5263.

d) Biết X không phát sinh thêm chi phí khi sử dụng dịch vụ tư vấn. Xác suất để X thuê công ty A tư vấn là 0,395.

3 Tự luận.

Bài 1. Cho hai biến cố A và B có $P(A)=0{,}4$, $P(B|\overline{A})=0{,}2$, $P(B|A)=0{,}3$. Tính $P(A|\overline{B})$.

Bài 2. Hộp thứ nhất có 3 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ. Hộp thứ hai có 3 viên bi xanh và 7 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai. Sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp thứ hai.

a) Tính xác suất để hai viên bi lấy ra từ hộp thứ hai là bi đỏ.

b) Biết rằng 2 viên bi lấy ra từ hộp thứ hai là bi đỏ, tính xác suất viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất cũng là bi đỏ.

Bài 3. Trong quân sự, một máy bay chiến đấu của đối phương có thể xuất hiện ở vị trí X với xác suất 0,55. Nếu máy bay đó không xuất hiện ở vị trí X thì nó xuất hiện ở vị trí Y. Để phòng thủ, các bệ phóng tên lửa được bố trí tại các vị trí X và Y. Khi máy bay đối phương xuất hiện ở vị trí X hoặc Y thì tên lửa sẽ được phóng để hạ máy bay đó. Xét phương án tác chiến sau: Nếu máy bay xuất hiện tại X thì bắn 2 quả tên lửa và nếu máy bay xuất hiện tại Y thì bắn 1 quả tên lửa. Biết rằng, xác suất bắn trúng máy bay của mỗi quả tên lửa là 0,8 và các bệ phóng tên lửa hoạt động độc lập. Máy bay bị bắn hạ nếu nó trúng ít nhất 1 quả tên lửa. Tính xác suất bắn hạ máy bay đối phương trong phương án tác chiến nêu trên.

Bài 4. Trong một trường học, tỉ lệ học sinh nữ là 52%. Tỉ lệ học sinh nữ và tỉ lệ học sinh nam tham gia câu lạc bộ nghệ thuật lần lượt là 18% và 15%. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh của trường.

a) Tính xác suất học sinh được chọn có tham gia câu lạc bộ nghệ thuật.

b) Biết rằng học sinh được chọn có tham gia câu lạc bộ nghệ thuật. Tính xác suất học sinh đó là nam.

Bài 5. Tỉ lệ người dân đã tiêm vắc xin phòng bệnh A ở một địa phương là 65%. Trong số những người đã tiêm phòng, tỉ lệ mắc bệnh A là 5%; trong số những người chưa tiêm phòng tỉ lệ mắc bệnh A là 17%. Chọn ngẫu nhiên một người ở địa phương đó.

a) Tính xác suất người được chọn mắc bệnh A.

b) Biết rằng người được chọn mắc bệnh A. Tính xác suất người đó chưa tiêm vắc xin phòng bệnh A.

Bài 6. Ở một khu rừng nọ có 7 chú lùn, trong đó có 4 chú luôn nói thật, 3 chú còn lại nói thật với xác suất 0,5. Bạn Tuyết gặp ngẫu nhiên một chú lùn và hỏi xem chú ý ấy có phải là người nói thật không. Gọi A là biến cố "Chú lùn đó luôn nói thật" và B là biến cố "Chú lùn đó nhận mình là người luôn nói thật".

a) Tính xác suất của các biến cố A và B.

b) Biết rằng chú lùn mà bạn Tuyết gặp tự nhận mình là người luôn nói thật. Tính xác suất để chú lùn đó luôn nói thật.

Bài 7. Một loại linh kiện do hai nhà máy số I, số II cùng sản xuất. Tỉ lệ phế phẩm của các nhà máy I, II lần lượt là: 4%; 3%. Trong một lô linh kiện để lẫn lộn 80 sản phẩm của nhà máy số I và 120 sản phẩm của nhà máy số II. Một khách hàng lấy ngẫu nhiên một linh kiện từ lô hàng đó.

a) Tính xác suất để linh kiện được lấy ra là linh kiện tốt.

b) Giả sử linh kiện được lấy ra là linh kiện phế phẩm. Xác suất linh kiện đó do nhà máy nào sản xuất là cao hơn?

Bài 8. Năm 2001, Cộng đồng châu Âu có làm một đợt kiểm tra rất rộng rãi các con bò để phát hiện những con bị bệnh bò điên. Không có xét nghiệm nào cho kết quả chính xác 100%. Một loại xét nghiệm, mà ở đây ta gọi là xét nghiệm A, cho kết quả như sau: Khi con bò bị bệnh bò điên thì xác suất để có phản ứng dương tính trong xét nghiệm A là 70%, còn khi con bò không bị bệnh thì xác suất để có phản ứng dương tính trong xét nghiệm A là 10%. Biết rằng tỉ lệ bò bị mắc bệnh bò điên ở Hà Lan là 13 con trên 1 000 000 con (Nguồn: *F. M. Dekking et al., A modern introduction to probability and statistics – Understanding why and how, Springer, 2005*). Hỏi khi một con bò ở Hà Lan có phản ứng dương tính với xét nghiệm A thì xác suất để nó bị mắc bệnh bò điên là bao nhiêu?

Bài 9. Một bộ lọc được sử dụng để chặn thư rác trong các tài khoản thư điện tử. Tuy nhiên, vì bộ lọc không tuyệt đối hoàn hảo nên một thư rác bị chặn với xác suất 0,95 và một thư đúng (không phải là thư rác) bị chặn với xác suất 0,01. Thống kê cho thấy tỉ lệ thư rác là 3%.

a) Chọn ngẫu nhiên một thư bị chặn. Tính xác suất để đó là thư rác.

b) Chọn ngẫu nhiên một thư không bị chặn. Tính xác suất để đó là thư đúng.

c) Trong số các thư bị chặn, có bao nhiêu phần trăm là thư đúng? Trong số các thư không bị chặn, có bao nhiêu phần trăm là thư rác?

Bài 10. Có hai chuồng thỏ. Chuồng I có 12 con thỏ trắng và 13 con thỏ nâu. Chuồng II có 14 con thỏ trắng và 11 con thỏ nâu. Tung một con xúc xắc cân đối. Nếu xuất hiện 6 chấm thì ta chọn chuồng I, nếu trái lại ta chọn chuồng II. Từ chuồng chọn được bắt ngẫu nhiên một con thỏ.

a) Giả sử bắt được con thỏ trắng. Tính xác suất để đó là con thỏ của chuồng II.

b) Giả sử bắt được con thỏ nâu. Tính xác suất để đó là con thỏ của chuồng I.

Bài 11. Có hai túi kẹo. Túi I có 3 chiếc kẹo sô cô la đen và 2 chiếc kẹo sô cô la trắng. Túi II có 4 chiếc kẹo sô cô la đen và 3 chiếc kẹo sô cô la trắng. Từ túi I lấy ngẫu nhiên một chiếc kẹo. Nếu là chiếc kẹo sô cô la đen thì thêm 2 chiếc kẹo sô cô la đen vào túi II. Nếu là chiếc kẹo sô cô la trắng thì thêm hai chiếc kẹo sô cô la trắng vào túi II. Sau đó từ túi II lấy ngẫu nhiên một chiếc kẹo. Tính xác suất để lấy được chiếc kẹo sô cô la trắng.

Bài 12. Giá sách của Dũng có hai ngăn. Ngăn trên có 3 cuốn tiểu thuyết của các nhà văn Việt Nam và 2 cuốn tiểu thuyết của các nhà văn nước ngoài. Ngăn dưới chứa 4 cuốn tiểu thuyết của các nhà văn Việt Nam và 1 cuốn tiểu thuyết của các nhà văn nước ngoài. Dũng chọn một cuốn sách để mang đi khi du lịch theo cách sau: Tung một con xúc xắc cân đối. Nếu số chấm xuất hiện là 1 hoặc 2 thì chọn ngăn trên, nếu trái lại thì chọn ngăn dưới. Sau đó từ ngăn đã chọn lấy ngẫu nhiên một cuốn sách. Biết rằng cuốn sách Dũng chọn được là cuốn tiểu thuyết của nhà văn nước ngoài. Tính xác suất để cuốn sách thuộc ngăn trên.

Bài 13. Tại nhà máy X sản xuất linh kiện điện tử tỉ lệ sản phẩm đạt tiêu chuẩn là 80%. Trước khi xuất xưởng ra thị trường, các linh kiện điện tử đều phải qua khâu kiểm tra chất lượng để đóng dấu OTK. Vì sự kiểm tra không tuyệt đối hoàn hảo nên nếu một linh kiện điện tử đạt tiêu chuẩn thì nó có xác suất 0,99 được đóng dấu OTK; nếu một linh kiện điện tử không đạt tiêu chuẩn thì nó có xác suất 0,95 không được đóng dấu OTK. Chọn ngẫu nhiên một linh kiện điện tử của nhà máy X trên thị trường. Tính xác suất để linh kiện điện tử được chọn không được đóng dấu OTK.

Bài 14. Có hai cái hộp. Hộp thứ nhất có 4 bi trắng và 5 bi đen. Hộp thứ hai có 5 bi trắng và 4 bi đen. Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi ở hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ hai rồi sau đó chọn ngẫu nhiên 1 viên bi ở hộp thứ hai. Tính xác suất để lấy được bi trắng.

III. ĐỀ KIỂM TRA CUỐI BÀI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hai biến cố A và B với $0 < \mathrm{P}(B) < 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A \mid B) + \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) \cdot \mathrm{P}\left(A \mid \overline{B}\right)$.

Ⓑ $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(A \mid B) + \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) \cdot \mathrm{P}\left(A \mid \overline{B}\right)$.

Ⓒ $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}\left(A \mid \overline{B}\right) + \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) \cdot \mathrm{P}(A \mid B)$.

Ⓓ $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A \mid B) - \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) \cdot \mathrm{P}\left(A \mid \overline{B}\right)$.

Câu 2. Cho hai biến cố A, B thoả mãn $\mathrm{P}(A)=0{,}4$; $\mathrm{P}(B)=0{,}3$; $\mathrm{P}(A\mid B)=0{,}25$. Khi đó, $P(B\mid A)$ bằng

Ⓐ 0,333. Ⓑ 0,1875. Ⓒ 0,48. Ⓓ 0,95.

Câu 3. Cho hai biến cố A và B, với $\mathrm{P}(B)=0{,}8$; $\mathrm{P}(A|B)=0{,}7$; $\mathrm{P}\left(A|\overline{B}\right)=0{,}45$. Tính $\mathrm{P}(B|A)$.

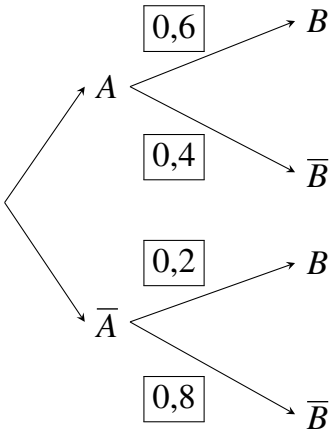
Ⓐ 0,25. Ⓑ $\dfrac{56}{65}$. Ⓒ 0,65. Ⓓ 0,5.

Câu 4. Cho hai biến cố A và B, với $\mathrm{P}(B)=0{,}4$; $\mathrm{P}(A\mid B)=0{,}5$; $\mathrm{P}\left(A\mid\overline{B}\right)=0{,}3$. Tính $\mathrm{P}(A)$.

Ⓐ 0,2. Ⓑ 0,38. Ⓒ 0,8. Ⓓ 0,12.

Câu 5. Cho sơ đồ hình cây như hình bên. Biết $\mathrm{P}(A)=0{,}48$. Tính $\mathrm{P}(A\mid B)$ là

Ⓐ $\dfrac{26}{49}$. Ⓑ $\dfrac{36}{49}$. Ⓒ $\dfrac{15}{39}$. Ⓓ $\dfrac{36}{59}$.



Câu 6. Được biết có 5% đàn ông bị mù màu, và 0,25% phụ nữ bị mù màu (Nguồn: F. M. Dekking et al., A modern introduction to probability and statistics-Understanding why and how, Springer, 2005). Giả sử số đàn ông bằng số phụ nữ. Chon một người bị mù màu. Xác suất để người đó là đàn ông là bao nhiêu?

Ⓐ $\dfrac{19}{21}$. Ⓑ $\dfrac{20}{21}$. Ⓒ $\dfrac{24}{25}$. Ⓓ $\dfrac{18}{25}$.

Câu 7. Có hai đội thi đấu môn bơi lội. Đội I có 4 vận động viên, đội II có 6 vận động viên. Xác suất đạt huy chương bạc của mỗi vận động viên đội I và đội II tương ứng là 0,7 và 0,6. Chọn ngẫu nhiên một vận động viên. Giả sử vận động viên được chọn đạt huy chương bạc. Tính xác suất để vận động viên này thuộc đội I.

Ⓐ $\dfrac{8}{11}$. Ⓑ $\dfrac{11}{16}$. Ⓒ $\dfrac{3}{16}$. Ⓓ $\dfrac{7}{16}$.

Câu 8. Kết quả khảo sát tại một xã cho thấy có 25% cư dân hút thuốc lá. Tỉ lệ cư dân thường xuyên gặp các vấn đề sức khoẻ về đường hô hấp trong số những người hút thuốc lá và không hút thuốc lá lần lượt là 60% và 25%. Nếu ta gặp một cư dân của xã thường xuyên gặp các vấn đề sức khoẻ về đường hô hấp thì xác suất người đó có hút thuốc lá là bao nhiêu?

Ⓐ $\dfrac{4}{9}$. Ⓑ $\dfrac{5}{9}$. Ⓒ $\dfrac{7}{9}$. Ⓓ $\dfrac{8}{9}$.

Câu 9. Có 2 xạ thủ loại I và 8 xạ thủ loại II, xác suất bắn trúng đích của các loại xạ thủ loại I là 0,9 và loại II là 0,7. Chọn ngẫu nhiên ra một xạ thủ và xạ thủ đó bắn một viên đạn. Tìm xác suất để viên đạn đó trúng đích.

Ⓐ 0,74. Ⓑ 0,86. Ⓒ 0,56. Ⓓ 0,68.

Câu 10. Một thùng có 60 quả sầu riêng, 40 quả mít; các quả có khối lượng như nhau. Sau khi thống kê người ta thấy có 50% số quả sầu riêng có dán tem xuất khẩu và 75% số quả mít có dán tem xuất khẩu; những quả còn lại không dán tem xuất khẩu. Lấy ngẫu nhiên trong thùng một quả, xác suất để quả lấy ra có dán tem xuất khẩu là

Ⓐ 0,4. Ⓑ 0,65. Ⓒ 0,615. Ⓓ 0,6.

Câu 11. Một cuộc thi khoa học có 36 bộ câu hỏi, trong đó có 20 bộ câu hỏi về chủ đề tự nhiên và 16 bộ câu hỏi về chủ đề xã hội. Bạn An lấy ngẫu nhiên 1 bộ câu hỏi (lấy không hoàn lại), sau đó bạn Bình lấy ngẫu nhiên 1 bộ câu hỏi. Xác suất bạn bình lấy được bộ câu hỏi về chủ đề xã hội bằng

Ⓐ 9. Ⓑ 7. Ⓒ 13. Ⓓ 12.

Câu 12. Một hộp có 80 viên bi, trong đó có 50 viên bi màu đỏ và 30 viên bi màu vàng; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Sau khi kiểm tra, người ta thấy có 60% số viên bi màu đỏ đánh số và 50% số viên bi màu vàng có đánh số, những viên bi còn lại không đánh số. Lấy ra ngẫu nhiên một viên bi trong hộp. Xác suất để viên bi được lấy ra có đánh số bằng

Ⓐ $\frac{3}{5}$. Ⓑ $\frac{1}{2}$. Ⓒ $\frac{4}{13}$. Ⓓ $\frac{9}{16}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Một kho hàng có 1000 thùng hàng với bề ngoài giống hệt nhau, trong đó có 480 thùng hàng loại *I* và 520 thùng hàng loại *II*. Trong số các thùng hàng đó, có 80% thùng hàng loại *I* và 85% thùng hàng loại *II* đã được kiểm định. Chọn ngẫu nhiên một thùng hàng trong kho.

a) Xác suất chọn được thùng hàng loại *I* bằng 48%.

b) Xác suất chọn được thùng hàng loại *II* đã được kiểm định bằng 38,4%.

c) Xác suất chọn được thùng hàng chưa kiểm định bằng 17,4%.

d) Giả sử thùng hàng được lấy ra là thùng hàng chưa được kiểm định, xác suất thùng hàng đó là thùng loại *I* thấp hơn xác suất thùng hàng đó là thùng loại *II* .

Câu 2. Có hai đội thi đấu môn Bóng bàn. Đội *I* có 6 vận động viên, đội *II* có 8 vận động viên. Xác suất đạt huy chương đồng của mỗi vận động viên đội *I* và đội *II* tương ứng là 0,8 và 0,65. Chọn ngẫu nhiên một vận động viên.

a) Xác suất để vận động viên này thuộc đội *I* là 0,8.

b) Xác suất để vận động viên được chọn đạt huy chương đồng là $\frac{5}{7}$.

c) Giả sử vận động viên được chọn đạt huy chương đồng. Xác suất để vận động viên đó thuộc đội *II* là 0,48.

d) Giả sử vận động viên được chọn đạt huy chương đồng. Xác suất để vận động viên đó thuộc đội *I* là $\frac{12}{25}$.

Câu 3. Khảo sát dân cư của thành phố Huế cho thấy có 1% dân số mắc căn bệnh lạ. Các nhà khoa học đã tìm ra một phương pháp xét nghiệm để chẩn đoán căn bệnh này. Tuy nhiên, xét nghiệm có sai số nên khi xét nghiệm 96% người bị bệnh có kết quả dương tính và 92% người không bị bệnh có kết quả âm tính. Một người đi xét nghiệm. Gọi A là biến cố người được xét nghiệm bị bệnh còn B là biến cố người được xét nghiệm có kết quả xét nghiệm dương tính. Khi đó:

a) $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(B \mid A)}{\mathrm{P}(A)}$.

b) Xác suất để người đi xét nghiệm bị bệnh là 1%.

c) Xác suất để người đó có kết quả dương tính khi người đó không bị bệnh là 8%.

d) Một người đi xét nghiệm và có kết quả xét nghiệm dương tính. Xác suất để người đó bị bệnh lớn hơn xác suất để người đó không bị bệnh.

Câu 4. Một công ty có hai chi nhánh. Sản phẩm của chi nhánh I chiếm 60% còn chi nhánh II chiếm 40% tổng sản phẩm của công ty. Tỉ lệ sản phẩm bị lỗi của chi nhánh I chiếm 1% còn của chi nhánh II chiếm 2% tổng sản phẩm công ty. Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm của công ty. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a) Xác suất để sản phẩm của chi nhánh I được chọn là 0,4.

b) Xác suất để lấy ra sản phẩm bị lỗi ở chi nhánh II là 0,02.

c) Xác suất lấy ra sản phẩm bị lỗi là 0,015.

d) Biết rằng sản phẩm bị lỗi. Xác suất sản phẩm đó do chi nhánh I sản xuất là $\dfrac{4}{7}$.

Phần III. Trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6 vào ô kết quả.

Câu 1. Một nhà máy có hai phân xưởng I và II. Phân xưởng I sản xuất 40% số sản phẩm và phân xưởng II sản xuất 60% số sản phẩm. Tỉ lệ sản phẩm bị lỗi của phần xưởng I là 3% và của phân xưởng II là 2%. Kiểm tra ngẫu nhiên 1 sản phẩm của nhà máy và tính xác suất để sản phẩm đó bị lỗi là $\dfrac{t}{100}$. Khi đó t bằng bao nhiêu?

KQ: | | | | |

Câu 2. Thống kê hồ sơ 250 học sinh khối 10 trong đó có 150 học sinh nữ và 100 học sinh nam. Sau khi thống kê, kết quả có 60% học sinh nữ là đoàn viên, 50% học sinh nam là đoàn viên; những học sinh còn lại không là đoàn viên. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong 250 học sinh khối 10. Xác suất để học sinh được chọn là đoàn viên bằng bao nhiêu?

KQ: | | | | |

Câu 3. Một huyện đang triển khai chương trình sàng lọc phát hiện bệnh hiểm nghèo X cho người dân. Không có loại xét nghiệm nào cho kết quả chính xác 100%. Một loại xét nghiệm, ta gọi là xét nghiệm A, cho kết quả như sau: Khi một người bị bệnh X thì tỉ lệ có phản ứng dương tính trong xét nghiệm A là 95%, còn người không mắc bệnh X thì tỉ lệ có phản ứng âm tính trong xét nghiệm A là 97%. Biết rằng tỉ lệ người mắc bệnh X của huyện này là 0,7%. Hỏi khi một người ở huyện X có xét nghiệm dương tính với xét nghiệm A thì xác suất để người đó mắc bệnh hiểm nghèo X là bao nhiêu *(kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)*?

KQ: | | | | |

Câu 4. Một cơ sở sản xuất sữa giả mua các thùng sữa thật giống nhau (48 hộp / thùng), rồi thay thế một số hộp sữa thật thành các hộp sữa giả nhằm thu lợi bất chính. Trong quá trình sản xuất, cơ sở phân ra làm hai loại: Loại I để lẫn mỗi thùng 5 hộp sữa giả và loại II để lẫn mỗi thùng 3 hộp sữa giả. Biết rằng số thùng sữa loại I gấp 1,5 lần số thùng sữa loại II. Chọn ngẫu nhiên một thùng sữa từ cơ sở sản xuất và từ thùng đó lấy ngẫu nhiên 10 hộp. Tính xác suất để trong 10 hộp lấy ra có đúng 2 hộp sữa là giả (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
KQ: | | | | |

Câu 5. Có 40 tấm thẻ kích thước như nhau và đánh số thứ tự lần lượt từ 1 đến 40 (mỗi tấm thẻ chỉ ghi một số nguyên dương, hai thẻ khác nhau ghi hai số khác nhau). Một người lần lượt rút hai thẻ (rút không hoàn lại). Tính xác suất lần thứ hai rút được thẻ ghi số nguyên tố.
KQ: | | | | |

Câu 6. Xác suất bé An được mẹ dẫn theo khi đi mua sắm là $\frac{2}{5}$. Khi bé An được đi theo mẹ thì 70% bé sẽ được mua đồ chơi. Khi bé không đi theo mẹ, có thể mẹ vẫn mua đồ chơi cho bé. Xác suất bé được đi theo mẹ biết rằng bé được mẹ mua cho đồ chơi là $\frac{14}{23}$. Khi bé không đi theo mẹ, xác suất bé được mẹ mua cho đồ chơi là bao nhiêu? KQ: | | | | |

—Hết—

BẢNG ĐÁP ÁN BÀI TẬP CUỐI BÀI

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1 D	2 B	3 B	4 B	5 C	6 A	7 D	8 A	9 B	10 A
11 D	12 B	13 A	14 B	15 C	16 A				

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a Đ b S c S d Đ	Câu 2.	a S b S c S d Đ
Câu 3.	a S b S c S d Đ	Câu 4.	a Đ b S c Đ d S
Câu 5.	a Đ b S c S d S	Câu 6.	a Đ b Đ c S d Đ
Câu 7.	a Đ b S c S d Đ	Câu 8.	a Đ b S c Đ d Đ
Câu 9.	a Đ b S c Đ d S	Câu 10.	a S b Đ c Đ d S
Câu 11.	a Đ b S c Đ d Đ	Câu 12.	a Đ b S c Đ d S
Câu 13.	a Đ b S c S d Đ		

BẢNG ĐÁP ÁN ĐỀ KIỂM TRA CUỐI BÀI

ĐÁP ÁN PHẦN I

1. A	2. B	3. B	4. B	5. B	6. B	7. D	8. A	9. A
10. D	11. C	12. D						

ĐÁP ÁN PHẦN II

Câu 1.	a Đ b S c Đ d S	Câu 2.	a S b Đ c S d Đ
Câu 3.	a S b Đ c Đ d S	Câu 4.	a S b Đ c S d S

ĐÁP ÁN PHẦN III

Câu 1.	Câu 2.	Câu 3.	Câu 4.	Câu 5.	Câu 6.
2 , 4	0 , 5 6	0 , 1 8	0 , 1 7	0 , 3	0 , 3

§3 ÔN TẬP CHƯƠNG 6

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Cho hai biến cố A, B sao cho $\mathrm{P}(A)=0{,}5$; $\mathrm{P}(B)=0{,}4$; $\mathrm{P}(A\mid B)=0{,}3$. Khi đó $\mathrm{P}(B\mid A)$ bằng

Ⓐ $\frac{3}{25}$. Ⓑ $\frac{4}{25}$. Ⓒ $\frac{6}{25}$. Ⓓ $\frac{1}{5}$.

Câu 2. Cho $\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B)>0$. Công thức xác suất có điều kiện của biến cố A khi biết biến cố B đã xảy ra là

Ⓐ $\mathrm{P}(A\mid B)=\dfrac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(A)}$. Ⓑ $\mathrm{P}(A\mid B)=\dfrac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}$.

Ⓒ $\mathrm{P}(A\mid B)=\dfrac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)}$. Ⓓ $\mathrm{P}(A\mid B)=\dfrac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}$.

Câu 3. Cho hai biến cố A, B với $\mathrm{P}(B)=0{,}6$, $\mathrm{P}(A\mid B)=0{,}7$ và $\mathrm{P}\left(A\mid \overline{B}\right)=0{,}4$. Khi đó $\mathrm{P}(A)$ bằng

Ⓐ $0{,}7$. Ⓑ $0{,}4$. Ⓒ $0{,}58$. Ⓓ $0{,}52$.

Câu 4. Gieo ngẫu nhiên một con xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo bằng 8 biết rằng lần gieo thứ nhất xuất hiện mặt 5 chấm.

Ⓐ $\frac{1}{3}$. Ⓑ $\frac{5}{6}$. Ⓒ $\frac{1}{36}$. Ⓓ $\frac{1}{6}$.

Câu 5. Để được chọn vào đội tuyển học sinh giỏi môn Toán cấp thành phố, mỗi thí sinh phải vượt qua hai vòng thi. Bạn An tham dự cuộc tuyển chọn này. Xác suất để An qua được vòng thứ nhất là 0,8. Nếu qua được vòng thứ nhất thì xác suất để An qua được vòng thứ hai là 0,7. Xác suất để bạn An được chọn vào đội tuyển này là

Ⓐ $0{,}06$. Ⓑ $0{,}24$. Ⓒ $0{,}56$. Ⓓ $0{,}875$.

Câu 6. Một động cơ có hai van bảo hiểm cùng hoạt động. Xác suất hoạt động tốt của van I là 0,9, của van II là 0,72. Xác suất hoạt động tốt của van I, biết van II hoạt động tốt là 0,96. Giả sử van I hoạt động tốt, xác suất hoạt động tốt của van II là

Ⓐ $0{,}675$. Ⓑ $0{,}768$. Ⓒ $0{,}66$. Ⓓ $0{,}78$.

Câu 7. Cho hai biến cố A, B thỏa mãn $\mathrm{P}(A)=0{,}4$; $\mathrm{P}(A\mid B)=0{,}5$; $\mathrm{P}\left(A\mid \overline{B}\right)=0{,}1$. Khi đó, $\mathrm{P}(B)$ bằng

Ⓐ $0{,}9$. Ⓑ $0{,}25$. Ⓒ $0{,}2$. Ⓓ $0{,}75$.

Câu 8. Nếu hai biến cố A, B thỏa mãn $\mathrm{P}(B)=0{,}5; \mathrm{P}(AB)=0{,}3$ thì $\mathrm{P}\left(\overline{A}B\right)$ bằng:

Ⓐ $\frac{3}{20}$. Ⓑ $\frac{4}{5}$. Ⓒ $\frac{1}{5}$. Ⓓ $\frac{3}{5}$.

Câu 9. Một hộp chứa 8 bi xanh, 2 bi đỏ. Lần lượt bốc từng bi. Giả sử lần đầu tiên bốc được bi xanh. Xác định xác suất lần thứ 2 bốc được bi đỏ.

Ⓐ $\frac{1}{10}$. Ⓑ $\frac{2}{9}$. Ⓒ $\frac{8}{9}$. Ⓓ $\frac{2}{5}$.

Câu 10. Gieo ngẫu nhiên một con xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo bằng 8 biết rằng lần gieo thứ nhất xuất hiện mặt 5 chấm.

Ⓐ $\frac{1}{36}$. Ⓑ $\frac{1}{6}$. Ⓒ $\frac{1}{3}$. Ⓓ $\frac{5}{6}$.

Câu 11. Hai máy tự động sản xuất cùng một loại chi tiết, trong đó máy *I* sản xuất 35%, máy *II* sản xuất 65% tổng sản lượng. Tỉ lệ phế phẩm của các máy lần lượt là 0,3% và 0,7%. Chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm từ kho. Tính xác suất để chọn được phế phẩm?

Ⓐ 0,0056. Ⓑ 0,0065. Ⓒ 0,065. Ⓓ 0,056.

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Một lớp có 70% học sinh là nữ. Tỉ lệ học sinh nữ đạt danh hiệu học sinh giỏi là 35%, tỉ lệ học sinh nam đạt danh hiệu học sinh giỏi là 60%. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của lớp đó. Gọi *A* là biến cố "Học sinh được chọn là nữ"và *B* là biến cố "Học sinh được chọn đạt danh hiệu học sinh giỏi".

a) Xác suất của biến cố $\overline{A}$ là 0,7.

b) Xác suất của biến cố *B* là 0,425.

c) *A* và *B* là hai biến cố độc lập.

d) Xác suất của biến cố *A* với điều kiện *B* bằng $\frac{5}{7}$.

Câu 2. Một lớp học có 40 học sinh, trong đó có 24 học sinh nam. Biết tỷ lệ học sinh biết đá bóng trong số học sinh nam là 50% và tỷ lệ học sinh biết đá bóng trong số học sinh nữ là 25%. Chọn ngẫu nhiên một học sinh. Khi đó

a) Xác suất học sinh được chọn là nữ bằng $\frac{2}{5}$.

b) Xác suất học sinh được chọn là học sinh biết đá bóng, biết học sinh này là nam bằng $\frac{1}{2}$.

c) Biết học sinh được chọn là học sinh biết đá bóng thì xác suất học sinh đó là học sinh nam bằng $\frac{2}{3}$.

d) Xác suất để học sinh được chọn là nam khi biết học sinh đó không biết đá bóng là $\frac{3}{4}$.

Câu 3. Trong một khu vực đô thị, cảnh sát giao thông ghi nhận các trường hợp vi phạm tốc độ trong giờ cao điểm. Thống kê cho thấy:

- Tỉ lệ nam giới tham gia giao thông trong giờ cao điểm là 60%, tỉ lệ nữ giới là 40%.
- Trong số các lái xe nam, tỉ lệ vi phạm tốc độ là 10%.
- Trong số các lái xe nữ, tỉ lệ vi phạm tốc độ là 3%.

a) Xác suất một lái xe được chọn ngẫu nhiên trong giờ cao điểm là nam giới và vi phạm tốc độ là 0,06.

b) Xác suất một lái xe được chọn ngẫu nhiên trong giờ cao điểm vi phạm tốc độ là 0,13.

c) Nếu một lái xe được chọn ngẫu nhiên vi phạm tốc độ, khả năng cao người đó là nam giới.

d) Giả sử cảnh sát chỉ dừng xe của những người vi phạm tốc độ để xử phạt. Biết một người đã bị dừng xe, xác suất người đó là nữ giới lớn hơn 0,2.

Câu 4. Một xưởng máy sử dụng một loại linh kiện được sản xuất từ hai cơ sở X và Y. Số linh kiện do cơ sở X sản xuất chiếm 61%, số linh kiện do cơ sở Y sản xuất chiếm 39%. Tỉ lệ linh kiện đạt tiêu chuẩn của cơ sở X, cơ sở Y lần lượt là 93%, 82%. Kiểm tra ngẫu nhiên một linh kiện ở xưởng máy. Xét các biến cố sau :

- A_1 : " Linh kiện được kiểm tra do cơ sở X sản xuất".
- A_2 : " Linh kiện được kiểm tra do cơ sở Y sản xuất".
- A_3 : " Linh kiện được kiểm tra đạt chuẩn".

a) Xác suất $P(A_1) = 0,61$.

b) Xác suất có điều kiện $P(A_3|A_2) = 0,82$.

c) Xác suất $P(A_3) = 0,8871$.

d) Xác xuất có điều kiện $P(A_1|A_3) = 0,55$.

Câu 5. Điểm kiểm tra cuối kì môn Toán của một học sinh phụ thuộc vào việc học sinh đó có chăm chỉ làm bài tập về nhà hay không. Nếu bạn An chăm chỉ làm bài tập về nhà môn Toán thì xác suất đạt điểm tốt kiểm tra cuối kì là 0,9. Còn nếu bạn An không chăm chỉ làm bài tập về nhà thì xác suất đạt điểm không tốt kiểm tra cuối kì là 0,85. Xác suất An chăm chỉ làm bài tập về nhà môn Toán là 0,75.

a) Nếu An chăm chỉ làm bài tập về nhà môn Toán thì xác suất An được điểm không tốt kiểm tra cuối kì là 0,1.

b) Nếu An không chăm chỉ làm bài tập về nhà môn Toán thì xác suất An được điểm tốt kiểm tra cuối kì là 0,2.

c) Xác suất để An đạt điểm không tốt kiểm tra cuối kì là 0,35.

d) Xác suất để An đạt điểm tốt kiểm tra cuối kì là 0,7125.

Câu 6. Một gian thương đã trà trộn các sản phẩm sữa kém chất lượng (sữa giả) với các sản phẩm sữa chất lượng. Trong một lô hàng có 10 hộp sữa chất lượng và 20 hộp sữa giả. Sau khi một khách hàng đến mua 1 hộp sữa từ lô hàng trên thì lực lượng quản lý thị trường đến và lấy ngẫu nhiên 3 hộp sữa từ lô hàng đó đi kiểm tra.

a) Xác suất khách hàng mua phải hộp sữa giả là $\dfrac{1}{3}$.

b) Xác suất để lực lượng quản lý thị trường phát hiện lô hàng có hộp sữa giả là $\dfrac{197}{203}$.

c) Nếu biết khách hàng đó đã mua phải hộp sữa giả, xác suất để quản lý thị trường phát hiện lô hàng có hộp sữa giả là $\dfrac{589}{1\,827}$.

d) Nếu biết quản lý thị trường sau khi kiểm tra đã phát hiện lô hàng có hộp sữa giả, xác suất để khách hàng đó mua phải hộp sữa giả là $\dfrac{1\,178}{1\,773}$.

Câu 7. Trong một sảnh lớn của một công ty, có một lối đi vào khu làm việc. Công ty đang thử nghiệm tại lối đi này một hệ thống cửa tự động có sử dụng công nghệ nhận diện gương mặt. Khi nhận diện gương mặt là nhân viên thì hệ thống mới mở cửa để người đó vào.

- Đối với nhân viên công ty, hệ thống nhận diện đúng với xác suất 99%.

- Đối với khách, hệ thống nhận diện nhầm là nhân viên với xác suất 15%.

Biết rằng trong sảnh của công ty, tỉ lệ nhân viên công ty là 90%, còn lại là khách

a) Xác suất hệ thống từ chối mở cửa cho một khách là 0,85.

b) Xác suất hệ thống mở cửa cho một người bất kỳ đi vào là 0,9.

c) Một người được hệ thống mở cửa cho vào, xác suất người đó là khách nhỏ hơn 0,02.

d) Giả sử tất cả mọi người trong sảnh đã được hệ thống quét nhận diện gương mặt, chọn ngẫu nhiên một người trong số đó. Xác suất để người đó đã bị hệ thống nhận diện nhầm là 0,024.

Câu 8. Khi tìm hiểu về các hồ sơ bệnh án liên quan đến các bệnh nhân bị bỏng, các bác sĩ đã rút ra 50 hồ sơ bệnh án của 50 bệnh nhân. Trong đó có 35 bệnh nhân bị bỏng do nhiệt và 15 bệnh nhân bị bỏng do hóa chất. Trong quá trình diễn biến của bệnh thì trong số 35 bệnh nhân bị bỏng nhiệt có 30% bệnh nhân bị biến chứng và trong số 15 bệnh nhân bị bỏng do hóa chất thì có 50% bệnh nhân bị biến chứng.

Gọi A là biến cố "Hồ sơ rút ra bệnh nhân bị bỏng do nhiệt";

B là biến cố "Hồ sơ rút ra bệnh nhân bị bỏng do hóa chất ";

C là biến cố "Hồ sơ rút ra bệnh nhân bị biến chứng ".

a) $\mathrm{P}(B)=\dfrac{3}{10}$, $\mathrm{P}\left(\overline{B}\right)=\dfrac{7}{10}$.

b) Xác suất có điều kiện $\mathrm{P}\left(C \mid A\right)=0{,}3$.

c) $\mathrm{P}(C)=0{,}85$.

d) Trong số các bệnh nhân bị biến chứng có 25% bệnh nhân bị bỏng do nhiệt (*kết quả tính theo phần trăm được làm tròn đến hàng đơn vị*).

Câu 9. Một trường học áp dụng hai phương pháp giảng dạy mới cho môn Toán, phương pháp P và phương pháp Q. Để đánh giá hiệu quả, trường thực hiện một thử nghiệm trên học sinh lớp 10. Biết rằng

- 40% học sinh lớp 10 được phân ngẫu nhiên vào nhóm học phương pháp P, 30% vào nhóm học phương pháp Q và 30% học theo phương pháp truyền thống PT.
- Tỷ lệ học sinh đạt điểm giỏi môn Toán cuối năm trong nhóm phương pháp P là 40%, trong nhóm phương pháp Q là 35% và trong nhóm phương pháp PT là 25%.

Một học sinh lớp 10 được chọn ngẫu nhiên từ trường và biết rằng học sinh này đạt điểm giỏi môn Toán cuối năm (Kết quả làm trong đến hàng phần trăm)

a) Xác suất học sinh này học theo phương pháp P là 9,45 .

b) Phương pháp Q có hiệu quả hơn phương pháp PT trong việc giúp học sinh đạt điểm giỏi.

c) Tỷ lệ học sinh đạt điểm giỏi chung của toàn khối lớp 10 là $33,3\%$.

d) Nếu muốn tăng tỷ lệ học sinh đạt điểm giỏi lên cao nhất, trường nên áp dụng phương pháp P cho tất cả học sinh.

Câu 10. Một hộp có 12 viên bi gồm 5 bi xanh, 6 bi đỏ và 1 bi vàng. Hai bạn tên là Xanh và Đỏ được trọng tài mời chơi trò chơi bốc bi ngẫu nhiên từ hộp (*bi đã lấy ra không bỏ lại vào hộp*). Đầu tiên trọng tài bốc một viên bi, nếu là bi xanh hoặc bi đỏ thì dừng bốc, nếu là bi vàng thì trọng tài bốc thêm một viên nữa rồi dừng bốc. Sau khi trọng tài dừng bốc, viên bi trọng tài bốc màu nào thì bạn có tên màu đó sẽ được bốc một viên và ngay sau đó trò chơi dừng lại.

Người chơi bốc được viên bi có màu trùng với tên của mình sẽ là người thắng cuộc, còn nếu bốc được viên bi có màu khác với tên của mình sẽ bị thua cuộc.

a) Xác suất để trọng tài bốc được bi vàng trong lần bốc đầu tiên là $\frac{1}{12}$.

b) Giả sử rằng ở lần bốc đầu tiên trọng tài bốc được bi xanh. Khi đó xác suất để bạn Xanh thắng là $\frac{5}{11}$.

c) Giả sử rằng ở lần bốc đầu tiên trọng tài bốc được bi vàng và bốc tiếp thì được bi đỏ. Khi đó xác suất để bạn Xanh thắng là $\frac{1}{2}$.

d) Xác suất để bạn Đỏ thắng là $\frac{6}{11}$.

3 Tự luận.

Bài 1. Một loại vaccine được tiêm ở địa phương X. Người có bệnh nền thì với xác suất 0,35 có phản ứng phụ sau tiêm; người không có bệnh nền thì chỉ có phản ứng phụ sau tiêm với xác suất 0,16. Chọn ngẫu nhiên một người được tiêm vaccine và người này có phản ứng phụ. Tính xác suất để người này có bệnh nền, biết rằng tỉ lệ người có bệnh nền ở địa phương X là 18%.

Bài 2. Chuồng I có 5 con gà mái, 2 con gà trống. Chuồng II có 3 con gà mái, 5 con gà trống. Bác Mai bắt một con gà trong số đó theo cách sau: "Bác tung một con xúc xắc cân đối, đồng chất. Nếu số chấm chia hết cho 3 thì bác chọn chuồng I. Nếu số chấm không chia hết cho 3 thì bác chọn chuồng II. Sau đó, từ chuồng đã chọn bác bắt ngẫu nhiên một con gà". Tính xác suất để bác Mai bắt được con gà mái.

Bài 3. Có hai cái hộp giống nhau, hộp thứ nhất chứa 5 quả bóng bàn màu trắng và 3 quả bóng bàn màu vàng, hộp thứ hai chứa 4 quả bóng bàn màu trắng và 6 quả bóng bàn màu vàng. Các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Minh lấy ra ngẫu nhiên 1 quả bóng từ hộp thứ nhất. Nếu quả bóng đó là bóng vàng thì Minh lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 quả bóng từ hộp thứ hai; nếu quả bóng đó màu trắng thì Minh lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 3 quả bóng từ hộp thứ hai.

a) Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất để có đúng 1 quả bóng màu vàng trong các quả bóng lấy ra từ hộp thứ hai.

b) Biết rằng các quả bóng lấy ra từ hộp thứ hai đều có màu trắng. Tính xác suất để quả bóng lấy ra từ hộp thứ nhất có màu vàng.

Bài 4. Một cặp trẻ sinh đôi có thể do cùng một trứng sinh ra (gọi đó là cặp song sinh cùng trứng) hay do hai trứng khác nhau sinh ra (gọi là cặp song sinh khác trứng). Cặp song sinh cùng trứng luôn có cùng giới tính. Cặp song sinh khác trứng có xác suất $\frac{1}{2}$ là cùng giới tính. Thống kê cho thấy 34% cặp song sinh cùng là trai và 30% cặp song sinh cùng là gái.

a) Chọn ngẫu nhiên một cặp trẻ sinh đôi. Tính xác suất để cặp trẻ sinh đôi được chọn là cặp song sinh cùng trứng.

b) Chọn ngẫu nhiên một cặp sinh đôi ta được một cặp sinh đôi có cùng giới tính. Tính xác suất để cặp sinh đôi này là cặp song sinh cùng trứng.

Bài 5. Cho hai chuồng thỏ, chuồng thứ nhất có 12 con thỏ trắng và 3 con thỏ đen, chuồng thứ hai có 9 con thỏ trắng và 4 con thỏ đen, các con thỏ có cùng khối lượng. Bắt ngẫu nhiên một con thỏ từ chuồng thứ nhất bỏ vào chuồng thứ hai. Sau đó, bắt ngẫu nhiên hai con thỏ từ chuồng thứ hai. Tính xác suất để hai con thỏ bắt ra từ chuồng thứ hai có một con thỏ từ chuồng thứ nhất mang sang, biết rằng hai con thỏ đó có màu trắng (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 6. Có hai chiếc hộp, hộp I có 6 quả bóng màu đỏ và một số quả bóng màu xanh, hộp II có 7 quả bóng màu đỏ và 3 quả bóng màu xanh, các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp I bỏ vào hộp II. Sau đó, lấy ra ngẫu nhiên hai quả bóng từ hộp II. Xác suất lấy được ít nhất một quả bóng đỏ từ hộp II bằng $\frac{32}{35}$. Tính xác suất để quả bóng được lấy ra từ hộp I là quả bóng đỏ, biết rằng hai quả bóng lấy ra từ hộp II có ít nhất một quả bóng đỏ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bài 7. Một người tham gia trò chơi với ba hộp quà đặc biệt: Hộp màu vàng có 2 điện thoại iPhone và 3 tai nghe, hộp màu bạc có 4 điện thoại iPhone và 1 tai nghe và hộp màu đồng có 3 điện thoại iPhone và 2 tai nghe. Luật chơi được thực hiện qua 2 bước sau:

- Bước 1: Người chơi chọn ngẫu nhiên một hộp.
- Bước 2: Từ hộp đã chọn, người chơi lấy ngẫu nhiên 1 món quà:
  - Nếu quà là điện thoại iPhone, người chơi được giữ nó và lấy thêm 1 quà nữa từ cùng hộp.
  - Nếu quà là tai nghe, trò chơi kết thúc.

Biết rằng người chơi lấy được hai điện thoại iPhone, tính xác suất để người đó lấy từ hộp màu bạc (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Bài 8. Theo dõi thời tiết hai xã kề nhau A và B người ta nhận thấy trong cùng một ngày, nếu xã B không mưa thì khả năng xã A không mưa là 65%, còn nếu xã A không mưa thì khả năng xã B không mưa là 60%. Hơn nữa, xác suất cả hai xã A và B có mưa trong cùng một ngày là 10%. Hãy tính xác suất để ít nhất một trong hai xã có mưa trong một ngày (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1 C	2 C	3 C	4 D	5 C	6 B	7 D	8 C	9 B	10 B
11 A									

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a S b Đ c S d S	Câu 2.	a Đ b Đ c S d S
Câu 3.	a Đ b S c Đ d S	Câu 4.	a Đ b Đ c Đ d S
Câu 5.	a Đ b S c S d Đ	Câu 6.	a S b Đ c S d Đ
Câu 7.	a Đ b S c Đ d Đ	Câu 8.	a Đ b Đ c S d S
Câu 9.	a Đ b Đ c S d Đ	Câu 10.	a Đ b S c Đ d S