NGÔ ĐỨC TÀI
GV chuyên luyện thi THPT Quốc Gia
Zalo 0889971004

Lý thuyết và phân dạng

TOÁN 11

HỌC KÌ I



NĂM HỌC 2026 - 2027

Chương I. Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác 3

§1. Giá trị lượng giác của góc lượng giác 3
§2. Công thức lượng giác 37
§3. Hàm số lượng giác 60
§4. Phương trình lượng giác 82
§5. Ôn tập chương 1 104

Chương II. Dãy số. Cấp số cộng và cấp số nhân 126

§1. Dãy số 126
§2. Cấp số cộng 143
§3. Cấp số nhân 167
§4. Ôn tập chương 2 187

Chương III. Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu ghép nhóm 201

§1. Mẫu số liệu ghép nhóm 201
§2. Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm 209
§3. Ôn tập chương 3 224

Chương IV. Quan hệ song song trong không gian 230

§1. Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian 230
§2. Hai đường thẳng song song 255
§3. Đường thẳng song song với mặt phẳng 277
§4. Hai mặt phẳng song song 290

§5. Phép chiếu song song 310
§6. Ôn tập chương 4 322

Chương V. Giới hạn. Hàm số liên tục 342

§1. Giới hạn của dãy số 342
§2. Giới hạn của dãy số 343
§3. Giới hạn của hàm số 364
§4. Hàm số liên tục 384
§5. Ôn tập chương 5 404

Chương I

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

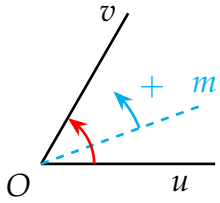
I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

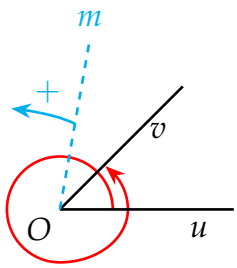
1) Góc lượng giác

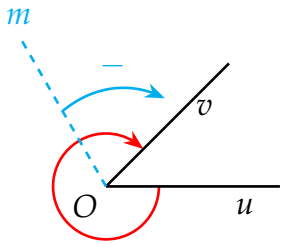
☼ **Góc lượng giác và số đo của góc lượng giác:** Trong mặt phẳng, cho hai tia Ou, Ov. Xét tia Om cùng nằm trong mặt phẳng này.

Ghi nhớ 1:

☆ Nếu tia Om quay quanh điểm O, theo một chiều nhất định từ Ou đến Ov, thì ta nói nó quét một góc lượng giác với tia đầu Ou, tia cuối Ov và kí hiệu là (Ou, Ov).



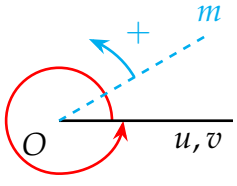




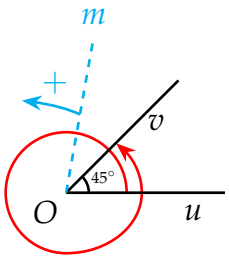
Ghi nhớ 2:

☆ Khi tia Om quay một góc α°, ta nói số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) bằng α°, kí hiệu sđ$(Ou, Ov) = \alpha^\circ$ hoặc $(Ou, Ov) = \alpha^\circ$.

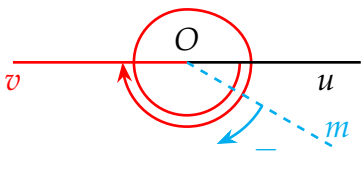
☆ Mỗi góc lượng giác gốc O được xác định bởi tia đầu Ou, tia cuối Ov và số đo α° của nó.



sđ$(Ou, Ov) = 360^\circ$



sđ$(Ou, Ov) = 405^\circ$



sđ$(Ou, Ov) = -540^\circ$

☆ Số đo của các góc lượng giác có cùng tia đầu Ou và tia cuối Ov sai khác nhau một bội nguyên của 360° nên có công thức tổng quát là

$$\boxed{\textbf{sđ}(Ou, Ov) = \alpha^\circ + k360^\circ, \ \textbf{với}\ k \in \mathbb{Z}}$$

Hệ thức Chasles: Với ba tia Ou, Ov, Ow bất kì, ta có

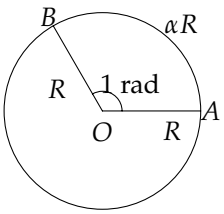
$$\text{sđ}(Ou, Ov) + \text{sđ}(Ov, Ow) = \text{sđ}(Ou, Ow) + k360^\circ \quad \text{với } k \in \mathbb{Z}.$$

2) ĐƠN VỊ ĐO GÓC VÀ ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

Đơn vị đo góc:

Trên đường tròn bán kính R tuỳ ý, góc ở tâm chắn một cung có độ dài đúng bằng R được gọi là một góc có số đo 1 radian (đọc là 1 ra-đi-an, viết tắt là 1rad).

Trên đường tròn bán kính R, một góc ở tâm có số đo α rad thì chắn một cung có độ dài αR (Hình bên). Vì góc bẹt (180°) chắn nửa đường tròn với độ dài là πR, nên góc bẹt có số đo theo đơn vị radian là π. Khi đó ta viết



$$180^\circ = \pi \,\text{rad}.$$

Suy ra, với $\pi \approx 3{,}14$, ta có $1^\circ = \dfrac{\pi}{180}\,\text{rad} \approx 0{,}0175\,\text{rad}$ và $1\,\text{rad} = \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57{,}3^\circ$ (hay $57^\circ 17' 45''$).

Do đó ta có công thức chuyển đổi số đo góc từ đơn vị radian sang độ và ngược lại như sau:

- $a^\circ = \dfrac{\pi a}{180}\,\text{rad}$
- $\alpha\,\text{rad} = \left(\dfrac{180\alpha}{\pi}\right)^\circ$

— Khi ghi số đo của một góc theo đơn vị radian, người ta thường bỏ đi chữ rad sau số đo. Ví dụ, $\dfrac{\pi}{2}$ rad được viết là $\dfrac{\pi}{2}$, $2\,\text{rad}$ được viết là 2 .

— Với đơn vị radian, công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Oa, Ob) là

$$(Oa, Ob) = \alpha + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}),$$

Trong đó α là số đo theo radian của một góc lượng giác bất kì có tia đầu Oa và tia cuối Ob. **Lưu ý:** không được viết $\alpha + k360^\circ$ hay $a^\circ + k2\pi$ (vì không cùng đơn vị đo).

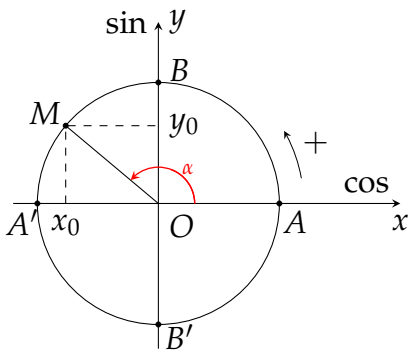
Độ dài cung tròn: Một cung của đường tròn bán kính R có số đo α rad thì sẽ có độ dài là $l = R\alpha$.

3) GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

☼ Đường tròn lượng giác:

☆ Trong mặt phẳng tọa độ, đường tròn tâm O bán kính 1, cùng với gốc $A(1;0)$ và chiều quay dương (như quy ước) gọi là đường tròn lượng giác.

☆ Cho góc lượng giác số đo α. Trên đường tròn lượng giác, tồn tại duy nhất điểm M sao cho góc lượng giác (OA, OM) bằng α (hình bên). Khi đó, M gọi là điểm biểu diễn của góc có số đo α trên đường tròn lượng giác.



☼ Các giá trị lượng giác của góc lượng giác

Ghi nhớ 1: Giả sử $M(x_0; y_0)$ trên đường tròn lượng giác biểu diễn cho góc lượng giác có số đo α thì

① Tung độ y_0 của điểm M gọi là sin của α và kí hiệu là $\sin\alpha$, hay $\sin\alpha = y_0$.

② Hoành độ x_0 của điểm M gọi là côsin của α và kí hiệu là $\cos\alpha$, hay $\cos\alpha = x_0$.

③ $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, với $\cos\alpha \neq 0$.

④ $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, với $\sin\alpha \neq 0$.

Ghi nhớ 2: Ta có các kết quả sau được suy ra từ định nghĩa

① Vì $-1 \leq x_0; y_0 \leq 1$ nên $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$; $\quad -1 \leq \cos\alpha \leq 1$.

② $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha$; $\quad \cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha$.

③ $\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$; $\quad \cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha$.

4) QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

☼ Công thức lượng giác cơ bản: Đối với các giá trị lượng giác, ta có các đẳng thức sau

① $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

② $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, với $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

③ $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$, với $\alpha \neq k\pi$.

④ $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$, với $\alpha \neq \dfrac{k\pi}{2}$.

☼ Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt:

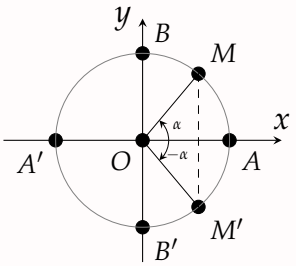
① Hai góc đối nhau: α và $-\alpha$:

☆ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

☆ $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

☆ $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

☆ $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$



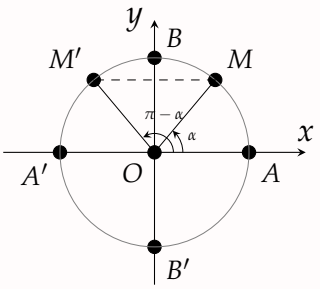
② Hai góc bù nhau: α và $\pi - \alpha$.

☆ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

☆ $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

☆ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$

☆ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$



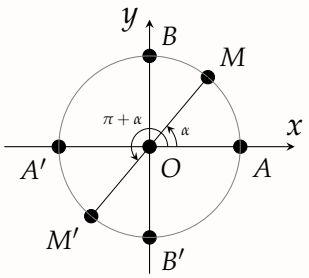
③ Hai góc hơn kém nhau π: α và $\alpha + \pi$

☆ $\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$

☆ $\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$

☆ $\tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha$

☆ $\cot(\alpha + \pi) = \cot\alpha$



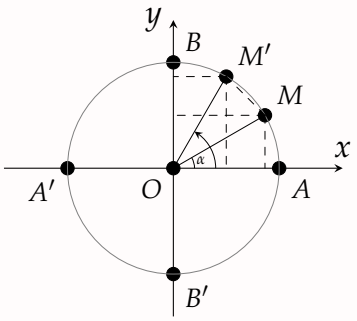
④ Hai góc phụ nhau: α và $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$

☆ $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$

☆ $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

☆ $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$

☆ $\cot\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$



II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Chuyển đổi đơn vị độ và radian

- $a^\circ = \dfrac{\pi a}{180}\,\text{rad}$
- $\alpha\,\text{rad} = \left(\dfrac{180\alpha}{\pi}\right)^\circ$

Ví dụ 1

a) Đổi từ độ sang rađian các số đo sau: $45^\circ; 150^\circ$.

b) Đổi từ rađian sang độ các số đo sau: $\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{4}$.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Hoàn thành bảng chuyển đổi số đo độ và số đo radian của một số góc đặc biệt sau

Độ	30°	?	60°	?	120°	?	180°
Radian	?	$\dfrac{\pi}{4}$	?	$\dfrac{\pi}{2}$	?	$\dfrac{3\pi}{4}$	?

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

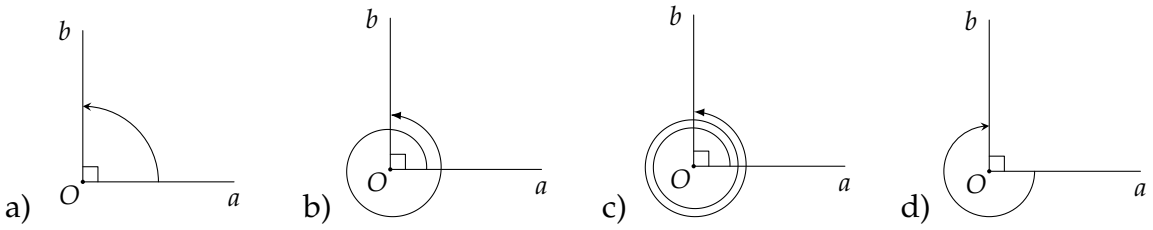
. . . . . .

Dạng 2 Số đo của một góc lượng giác

- Khi xác định số đo của góc lượng giác, ta cần chú ý đến chiều quay (chiều dương ngược kim đồng hồ, chiều âm cùng kim đồng hồ). Từ đó xác định chính xác số đo của góc lượng giác (Ou, Ov).
- Giả sử α° là một số đo của góc lượng giác (Ou, Ov). Suy ra số đo các góc lượng giác có cùng tia đầu Ou, tia cuối Ov có dạng $\alpha^\circ + k \cdot 360^\circ$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hệ thức Chasles: $\text{sđ}(Ov, Ow) = \text{sđ}(Ou, Ov) - \text{sđ}(Ou, Ow) + k360^\circ \quad$ với $k \in \mathbb{Z}$.

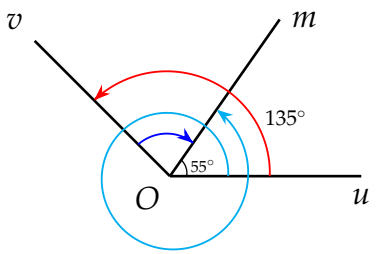
Ví dụ 2

Xác định số đo của các góc lượng giác (Oa, Ob) trong hình sau



Ví dụ 3

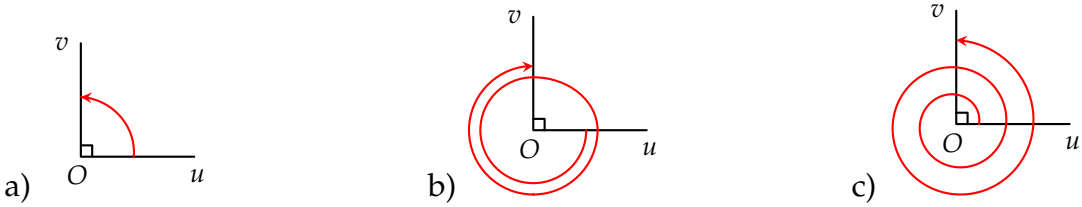
Xác định số đo các góc lượng giác (Ou, Ov), (Ov, Om) và (Ou, Om) được minh họa ở hình bên.



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 2 ☆

Xác định số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) được biểu diễn trong hình bên dưới.



Bài 3 ☆

Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $\frac{3\pi}{4}$, góc lượng giác (Ou, Ow) có số đo là $\frac{5\pi}{4}$. Tìm số đo các góc lượng giác (Ov, Ow).

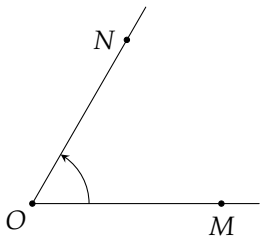
🔑 $\frac{\pi}{2} + k2\pi$

Bài 4 ☆

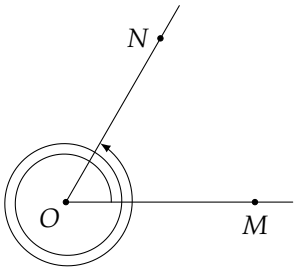
Cho $\widehat{MON} = 60°$. Xác định số đo của các góc lượng giác được biểu diễn trong hình vẽ và viết công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (OM, ON).

🔑 $60° + k360°$

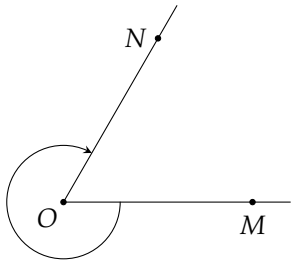
a)



b)



c)



Dạng 3 Độ dài cung tròn

Cung tròn bán kính R có số đo α $(0 \le \alpha \le 2\pi)$, có số đo $a°$ $(0 \le a \le 360)$ và có độ dài là l thì

$$l = R\alpha = \frac{\pi a}{180}.R$$

Ví dụ 4

Một đường tròn có bán kính 36 m. Tìm độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo là

a) $\frac{3\pi}{4}$; b) $51°$; c) $\frac{1}{3}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5 ☆

Một đường tròn có bán kính 20 cm. Tìm độ dài các cung trên đường tròn đó có số đo sau:

a) $\frac{\pi}{12}$; b) 1,5; c) 35°; d) 315°.

$\frac{5\pi}{3}; 30; \frac{7\pi}{36}; 35$

Dạng 4 Biểu diễn góc trên đường tròn lượng giác

Để biểu diễn các góc lượng giác trên đường tròn lượng giác ta thường sử dụng các kết quả sau:

- Góc α (a°) và cung có số đo $\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ $(a^\circ + k360^\circ)$ có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.
- Số điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác số đo có dạng $\alpha + \frac{k2\pi}{m}$ $\left(\text{hay } a^\circ + \frac{k360^\circ}{m}\right)$ (với k là số nguyên và m là số nguyên dương) là m. Từ đó để biểu diễn các góc lượng giác đó ta lần lượt cho k từ 0 tới $m-1$ rồi biểu diễn các góc đó.

Ví dụ 5

Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các góc lượng giác có số đo là

a) 865°; b) -1485°; c) $\frac{13}{3}\pi$; d) $-\frac{7}{3}\pi$.

Ví dụ 6

Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các góc lượng giác có số đo sau (với k là số nguyên tùy ý)

a) $\alpha = k\pi$;

b) $\alpha = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6 ☆

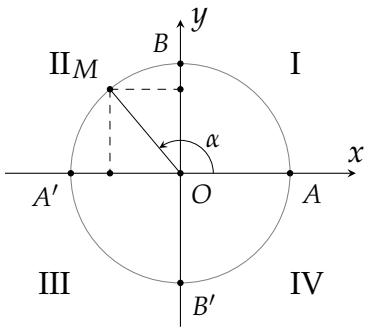
Xác định các điểm M và N trên đường tròn lượng giác lần lượt biểu diễn các góc lượng giác có số đo bằng $\dfrac{13\pi}{4}$ và -150°.

Dạng 5 Tính các giá trị lượng giác của một góc lượng giác

Phương pháp: Sử dụng nhóm công thức liên hệ giữa các giá trị lượng giác để tính toán.

Chú ý:

Nếu đề bài có giới hạn miền của góc α, thì ta cần xem trên miền đó, các tỉ số lượng giác tương ứng sẽ mang dấu như thế nào. Cụ thể:



	Góc phần tư			
Giá trị lượng giác	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−

Ví dụ 7

Tính các giá trị lượng giác của góc α, biết

a) $\cos\alpha = \dfrac{1}{5}$ và $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$;

b) $\sin\alpha = \dfrac{2}{5}$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

c) $\tan\alpha = \sqrt{5}$ và $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;

d) $\cot\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ và $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Ví dụ 8

Cho $\tan\alpha = 2$. Tính giá trị biểu thức $M = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

$-\frac{3}{5}$

Ví dụ 9

Cho $\cot\alpha = 3$. Tính giá trị biểu thức $M = \dfrac{2\sin\alpha - 3\cos\alpha}{5\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}$.

Ví dụ 10

Biết $\sin x = \dfrac{1}{3}$. Tính giá trị biểu thức $A = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x)$.

$-\frac{1}{3}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 7

Tính các giá trị lượng giác của góc α trong mỗi trường hợp sau

a) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ với $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

b) $\cos\alpha = -\dfrac{2}{3}$ với $-\pi < \alpha < 0$;

c) $\tan\alpha = 3$ với $-\pi < \alpha < 0$;

d) $\cot\alpha = -2$ với $0 < \alpha < \pi$.

Bài 8

Biết $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \dfrac{3\sin\alpha}{2\cos\alpha - \tan\alpha}$;

b) $B = \dfrac{\cot^2\alpha - \sin\alpha}{\tan\alpha + 2\cos\alpha}$.

a) $-\dfrac{36}{17}$, b) $-\dfrac{212}{423}$.

Bài 9 ☆

Tính

a) $A = \sin^2 5^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 15^\circ + \ldots + \sin^2 85^\circ$ (17 số hạng); 🔑 $\frac{17}{2}$

b) $B = \cos 5^\circ + \cos 10^\circ + \cos 15^\circ + \ldots + \cos 175^\circ$ (35 số hạng). 🔑 0

Dạng 6 Rút gọn biểu thức, chứng minh đẳng thức

Ví dụ 11

Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \tan^2 \alpha$;

b) $B = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha$;

c) $C = \dfrac{2\sin^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$;

d) $D = \dfrac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \dfrac{1}{1 + \cos \alpha}$.

Ví dụ 12

Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

b) $\dfrac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = 1 + 2\tan^2\alpha$.

c) $\dfrac{2+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = 3\tan^2\alpha + 2$.

d) $1 - \cot^4\alpha = \dfrac{2}{\sin^2\alpha} - \dfrac{1}{\sin^4\alpha}$.

Ví dụ 13

Rút gọn biểu thức $A = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x)$. $-\sin x$

Ví dụ 14

Cho tam giác ABC, chứng minh rằng $\sin(A + B + 2C) = -\sin C$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 10 ☆

Chứng minh các hệ thức sau

a) $\dfrac{1 + \sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{1 - \sin^6\alpha - \cos^6\alpha} = \dfrac{2}{3\cos^2\alpha}$;

b) $\dfrac{\sin^2\alpha(1 + \cos\alpha)}{\cos^2\alpha\,(1 + \sin\alpha)} = \dfrac{\sin\alpha + \tan\alpha}{\cos\alpha + \cot\alpha}$;

c) $\dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{\cot\beta - \cot\alpha} = \tan\alpha\tan\beta$;

d) $\dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cot^2\alpha - \tan^2\alpha} = \sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

e) $\dfrac{1 - 4\sin^2 x\cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = (\sin x - \cos x)^2$;

f) $\dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^4 x} = \tan^4 x$.

Bài 11

Chứng minh các hệ thức sau không phụ thuộc vào x.

a) $A = \dfrac{\sin^6 x + \cos^6 x + 2}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1}$; $\frac{3}{2}$

b) $B = \dfrac{1+\cot x}{1-\cot x} - \dfrac{2+2\cot^2 x}{(\tan x - 1)\left(\cot^2 x + 1\right)}$. 1

Bài 12 ☆

Cho A, B, C là các góc của tam giác. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin(A+B) = \sin C$.

b) $\cos(A+B) + \cos C = 0$.

c) $\sin\dfrac{A+B}{2} = \cos\dfrac{C}{2}$.

d) $\tan(A-B+C) = -\tan 2B$.

Dạng 7 Toán thực tế áp dụng giá trị lượng giác của góc lượng giác

Ví dụ 15

Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A, vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất, bán kính 9 000 km. Biết rằng vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong 2 giờ.

a) Hãy tính quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau 1 giờ; 3 giờ; 5 giờ.

b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 200 000 km sau bao nhiêu giờ (làm tròn đến kết quả hàng đơn vị)?

Ví dụ 16

Huyết áp của mỗi người thay đổi trong ngày. Giả sử huyết áp tâm trương (tức là áp lực máu lên thành động mạch khi tim giãn ra) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi tại thời điểm t được cho bởi công thức:

$$B(t) = 80 + 7\sin\frac{\pi t}{12}$$

trong đó t là số giờ tính từ lúc nửa đêm và $B(t)$ tính bằng mmHg (milimét thuỷ ngân). Tìm huyết áp tâm trương của người này vào các thời điểm sau:

a) 6 giờ sáng;

b) 10 giờ 30 phút sáng;

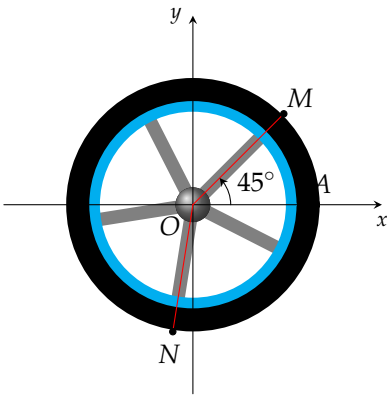
c) 12 giờ trưa;

d) 8 giờ tối.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 13

Trong hình vẽ bên, mâm bánh xe ô tô được chia thành năm phần bằng nhau. Viết công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Ox, ON).



$-99° + k360°$

Bài 14

Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây.

a) Tính góc (theo độ và theo radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây; $\frac{22\pi}{5}$(rad)

b) Tính độ dài quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính của xe đạp là 680 mm. 89760π

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Cho $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Kết quả đúng là

(A) $\sin a > 0, \cos a > 0$.
(B) $\sin a < 0, \cos a < 0$.
(C) $\sin a > 0, \cos a < 0$.
(D) $\sin a < 0, \cos a > 0$.

Câu 2. Khi đổi 70° sang đơn vị radian ta được kết quả là

Ⓐ $\dfrac{7\pi}{10}$. Ⓑ $\dfrac{7\pi}{15}$. Ⓒ $\dfrac{7\pi}{18}$. Ⓓ $\dfrac{7\pi}{12}$.

Câu 3. Số đo theo đơn vị rađian của góc 405° là

Ⓐ $\dfrac{9\pi}{4}$. Ⓑ $\dfrac{7\pi}{4}$. Ⓒ $\dfrac{5\pi}{4}$. Ⓓ $\dfrac{4\pi}{7}$.

Câu 4. Đổi số đo góc 105° sang rađian bằng

Ⓐ $\dfrac{5\pi}{12}$. Ⓑ $\dfrac{7\pi}{12}$. Ⓒ $\dfrac{9\pi}{12}$. Ⓓ $\dfrac{5\pi}{8}$.

Câu 5. Đổi số đo của góc 10 rad sang đơn vị độ, phút, giây, ta được

Ⓐ $572^\circ 57' 28''$. Ⓑ 1800°. Ⓒ $\dfrac{\pi}{18}$. Ⓓ $527^\circ 57' 28''$.

Câu 6. Đổi sang radian góc có số đo 108° ta được

Ⓐ $\dfrac{\pi}{4}$. Ⓑ $\dfrac{\pi}{10}$. Ⓒ $\dfrac{3\pi}{2}$. Ⓓ $\dfrac{3\pi}{5}$.

Câu 7. Khi đổi $\dfrac{5\pi}{3}$ rad sang đơn vị độ ta được kết quả là

Ⓐ 360°. Ⓑ 300°. Ⓒ 250°. Ⓓ 270°.

Câu 8. Góc có số đo 45° bằng bao nhiêu radian

Ⓐ $\dfrac{\pi}{4}$. Ⓑ $\dfrac{2\pi}{3}$. Ⓒ $\dfrac{\pi}{3}$. Ⓓ $\dfrac{\pi}{2}$.

Câu 9. Góc 70° có số đo bằng rađian là

Ⓐ $\dfrac{18\pi}{7}$. Ⓑ $\dfrac{7\pi}{18}$. Ⓒ $\dfrac{9\pi}{7}$. Ⓓ $\dfrac{7\pi}{9}$.

Câu 10. Nếu một cung tròn có số đo là a° thì số đo rađian của nó là

Ⓐ $180\pi a$. Ⓑ $\dfrac{180\pi}{a}$. Ⓒ $\dfrac{a\pi}{180}$. Ⓓ $\dfrac{\pi}{180a}$.

Câu 11. Một đường tròn có bán kính $R = 12$ cm. Tính độ dài của cung 60° trên đường tròn gần bằng

Ⓐ 2 cm. Ⓑ 4 cm. Ⓒ 6,28 cm. Ⓓ 12,56 cm.

Câu 12. Quy ước chọn chiều dương của một đường tròn định hướng là

Ⓐ Luôn cùng chiều quay kim đồng hồ.

Ⓑ Luôn ngược chiều quay kim đồng hồ.

Ⓒ Có thể cùng chiều quay kim đồng hồ cũng có thể là ngược chiều quay kim đồng hồ.

Ⓓ Không cùng chiều quay kim đồng hồ và cũng không ngược chiều quay kim đồng hồ.

Câu 13. Khẳng định nào sau đây là đúng khi nói về "đường tròn lượng giác"?

Ⓐ Mỗi đường tròn là một đường tròn lượng giác.

Ⓑ Mỗi đường tròn có bán kính $R = 1$ là một đường tròn lượng giác.

Ⓒ Mỗi đường tròn có bán kính $R = 1$, tâm trùng với gốc tọa độ là một đường tròn lượng giác.

Ⓓ Mỗi đường tròn định hướng có bán kính $R = 1$, tâm trùng với gốc tọa độ là một đường tròn lượng giác.

Câu 14. Cho bốn cung (trên một đường tròn định hướng): $\alpha = -\dfrac{5\pi}{6}$, $\beta = \dfrac{\pi}{3}$, $\gamma = \dfrac{25\pi}{3}$, $\delta = \dfrac{19\pi}{6}$. Các cung nào có điểm cuối trùng nhau?

Ⓐ α và β; γ và δ. Ⓑ β và γ; α và δ. Ⓒ α, β, γ. Ⓓ β, γ, δ.

Câu 15. Giả sử các đẳng thức đều có nghĩa. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

Ⓐ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = -1$. Ⓑ $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$.

Ⓒ $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$. Ⓓ $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

Câu 16. Trên đường tròn bán kính 7 cm, lấy cung có số đo 54°. Độ dài l của cung tròn bằng

Ⓐ $\dfrac{21}{10}\pi$ cm. Ⓑ $\dfrac{11}{20}\pi$ cm. Ⓒ $\dfrac{63}{20}\pi$ cm. Ⓓ $\dfrac{20}{11}\pi$ cm.

Câu 17. Cho đường tròn có bán kính 6 cm. Tìm số đo (rad) của cung có độ dài 3 cm.

Ⓐ 1. Ⓑ 0,5. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Câu 18. Trên đường tròn đường kính 8 cm, tính độ dài cung tròn có số đo bằng 1,5 rad.

Ⓐ 12 cm. Ⓑ 4 cm. Ⓒ 6 cm. Ⓓ 15 cm.

Câu 19. Cho góc lượng giác (OA, OB) có số đo bằng $\dfrac{\pi}{6}$. Hỏi trong các số đo góc sau, số đo nào là số đo của một góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc lượng giác (OA, OB)?

Ⓐ $\dfrac{-49\pi}{6}$. Ⓑ $-\dfrac{7\pi}{6}$. Ⓒ $\dfrac{7\pi}{6}$. Ⓓ $\dfrac{49\pi}{6}$.

Câu 20. Với mọi góc lượng giác α và số nguyên k. Khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha$. Ⓑ $\cos(\alpha + k\pi) = \cos\alpha$.

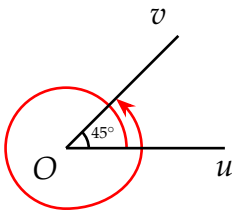
Ⓒ $\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$. Ⓓ $\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha$.

Câu 21. Cho các giá trị lượng giác của các cung góc liên quan đặc biệt. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $\tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha$. Ⓑ $\cos(-\alpha) = -\cos\alpha$.

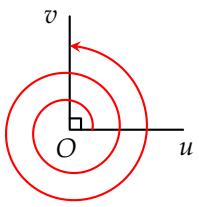
Ⓒ $\sin(\pi - \alpha) = -\sin\alpha$. Ⓓ $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$.

Câu 22. Xác định số đo của góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên.



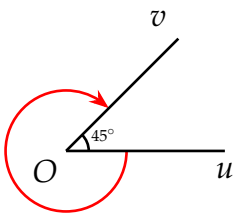
Ⓐ 405°. Ⓑ 385°. Ⓒ −405°. Ⓓ 45°.

Câu 23. Xác định số đo của góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên.



Ⓐ 450°. Ⓑ −450°. Ⓒ 810°. Ⓓ 90°.

Câu 24. Xác định số đo của góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên.



Ⓐ $45°$. Ⓑ $-315°$. Ⓒ $315°$. Ⓓ $405°$.

Câu 25. Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $-\dfrac{\pi}{4}$, góc lượng giác (Ou, Ow) có số đo là $\dfrac{3\pi}{4}$. Tìm số đo của các góc lượng giác (Ov, Ow).

Ⓐ $\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ⓑ $k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ⓒ $\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ⓓ $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 26. Cho α thuộc góc phần tư thứ nhất của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

Ⓐ $\sin\alpha > 0$. Ⓑ $\cos\alpha < 0$. Ⓒ $\tan\alpha < 0$. Ⓓ $\cot\alpha < 0$.

Câu 27. Cho α thuộc góc phần tư thứ ba của đường tròn lượng giác. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

Ⓐ $\sin\alpha > 0$. Ⓑ $\cos\alpha < 0$. Ⓒ $\tan\alpha > 0$. Ⓓ $\cot\alpha > 0$.

Câu 28. Cho điểm $M(x_0; y_0)$ trên đường tròn lượng giác biểu diễn cho góc lượng giác có số đo $\dfrac{26\pi}{3}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ M thuộc góc phần tư thứ I của đường tròn lượng giác.

Ⓑ M thuộc góc phần tư thứ II của đường tròn lượng giác.

Ⓒ M thuộc góc phần tư thứ III của đường tròn lượng giác.

Ⓓ M thuộc góc phần tư thứ IV của đường tròn lượng giác.

Câu 29. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

Ⓐ $\sin(\pi + \alpha) = \sin\alpha$. Ⓑ $\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$.

Ⓒ $\cos(-\alpha) = -\cos\alpha$. Ⓓ $\sin(-\alpha) = \sin\alpha$.

Câu 30. Trên đường tròn lượng giác, cung có số đo $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$ được biểu diễn bởi bao nhiêu điểm?

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

Câu 31. Cho đường tròn lượng giác gốc A và điểm M nằm trên đường tròn lượng giác sao cho $\widehat{MOx} = \widehat{MOy} = 45°$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

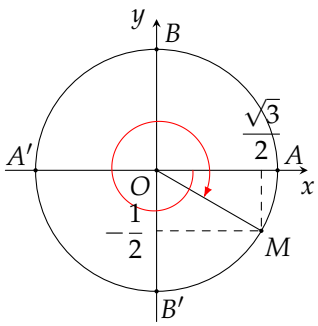
Ⓐ $\text{sđ}\widehat{AM} = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ⓑ $\text{sđ}\widehat{AM} = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ⓒ $\text{sđ}\widehat{AM} = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ⓓ $\text{sđ}\widehat{AM} = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 32. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

Ⓐ $\cos 150° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $\cot 150° = \sqrt{3}$. Ⓒ $\tan 150° = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Ⓓ $\sin 150° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

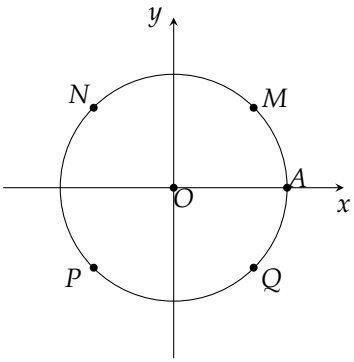
Câu 33. Cho góc lượng giác α được biểu diễn bởi điểm M trên đường tròn lượng giác như mô tả trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



Ⓐ $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $\cot\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

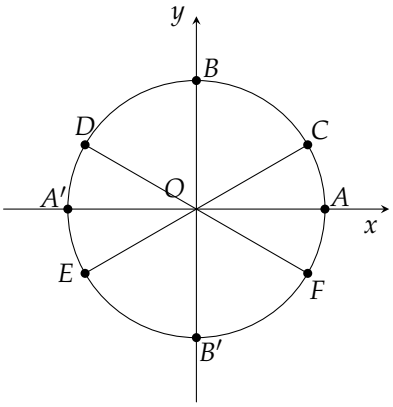
Ⓒ $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, trên đường tròn lượng giác như hình vẽ bên dưới. Góc lượng giác nào có số đo bằng $-45°$?



Ⓐ (OA, OM). Ⓑ (OA, OQ). Ⓒ (OA, ON). Ⓓ (OA, OP).

Câu 35. Góc lượng giác $\dfrac{5\pi}{6} + k\pi$ được biểu diễn trên đường tròn lượng giác ở hình bên là những điểm nào?



Ⓐ Điểm E, Điểm C. Ⓑ Điểm C, Điểm F.

Ⓒ Điểm D, Điểm C. Ⓓ Điểm D, Điểm F.

Câu 36. Giá trị của $\tan\dfrac{\pi}{6}$ là

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Ⓑ $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ $\sqrt{3}$. Ⓓ $-\sqrt{3}$.

Câu 37. Giá trị của biểu thức $S = 3 - \sin^2 90° + 2\cos^2 60° - 3\tan^2 45°$ bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $-\dfrac{1}{2}$. Ⓒ 1. Ⓓ 3.

Câu 38. Các đẳng thức nào sau đây đồng thời xảy ra ?

Ⓐ $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3}; \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Ⓑ $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{5}; \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Ⓒ $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}; \cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$. Ⓓ $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}; \cos\alpha = \dfrac{1}{4}$.

Câu 39. Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $\dfrac{3\pi}{4}$, góc lượng giác (Ou, Ow) có số đo là $\dfrac{5\pi}{4}$. Số đo của góc lượng giác (Ov, Ow) bằng

Ⓐ $\pi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Ⓑ $k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ⓒ $-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Ⓓ $\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Câu 40. Cho $(Ou, Ov) = 12^\circ + k360^\circ$ với giá trị nào của k thì số đo $(Ou, Ov) = \dfrac{61\pi}{15}$?

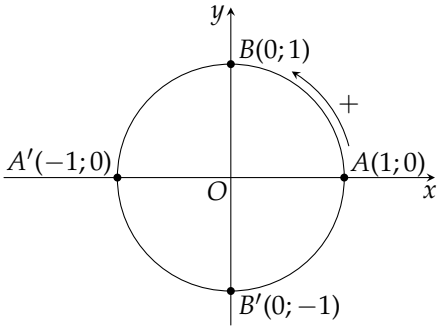
Ⓐ $k = -1$. Ⓑ $k = 2$. Ⓒ $k = -3$. Ⓓ $k = 4$.

Câu 41. Trên đường tròn lượng giác với gốc $A(1;0)$. Điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo nào dưới đây trùng với điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng $\dfrac{7\pi}{4}$?

Ⓐ $-\dfrac{\pi}{4}$. Ⓑ $\dfrac{\pi}{4}$. Ⓒ $\dfrac{3\pi}{4}$. Ⓓ $-\dfrac{3\pi}{4}$.

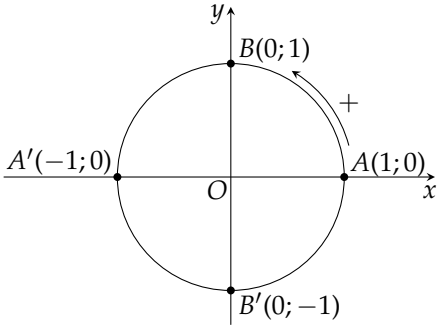
Câu 42. Trên đường tròn lượng giác, trong các số đo được cho bên dưới, số đo nào là số đo của góc lượng giác (OA, OB')?

Ⓐ $-\dfrac{\pi}{4}$. Ⓑ $-\dfrac{\pi}{2}$.
Ⓒ $\dfrac{\pi}{4}$. Ⓓ $\dfrac{\pi}{2}$.



Câu 43. Trên đường tròn lượng giác, trong các số đo được cho bên dưới, số đo nào là số đo của góc lượng giác (OA, OB')?

Ⓐ $\dfrac{5\pi}{2} + k2\pi$. Ⓑ $\dfrac{3\pi}{2} + k2\pi$.
Ⓒ $-\dfrac{3\pi}{2} + k2\pi$. Ⓓ $\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$.



Câu 44. Trên đường tròn lượng giác, cho góc lượng giác có số đo $\dfrac{\pi}{2}$ rad thì mọi góc lượng giác có cùng tia đầu và tia cuối với góc lượng giác trên đều có số đo dạng nào trong các dạng sau?

Ⓐ $-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$. Ⓑ $\dfrac{\pi}{2} + k\dfrac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$. Ⓒ $\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$. Ⓓ $\dfrac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 45. Cho $(Ou, Ov) = 25^\circ + k360^\circ$ $(k \in \mathbb{Z})$ với giá trị nào của k thì $(Ou, Ov) = -1055^\circ$?

Ⓐ $k = -1$. Ⓑ $k = 2$. Ⓒ $k = -3$. Ⓓ $k = 4$.

Câu 46. Nếu số đo góc lượng giác $(Ou, Ov) = \dfrac{2006\pi}{5}$ thì số đo góc hình học $\widehat{uOv}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{\pi}{5}$. Ⓑ $\dfrac{4\pi}{5}$. Ⓒ $\dfrac{6\pi}{5}$. Ⓓ $\dfrac{9\pi}{5}$.

Câu 47. Cho góc lượng giác $\alpha = (OA, OB) = \dfrac{\pi}{5}$. Trong các góc lượng giác sau, góc nào có tia đầu trùng với OA và tia cuối trùng với OB.

Ⓐ $\dfrac{6\pi}{5}$. Ⓑ $-\dfrac{11\pi}{5}$. Ⓒ $\dfrac{31\pi}{5}$. Ⓓ $\dfrac{9\pi}{5}$.

Câu 48. Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo bằng $\dfrac{\pi}{6}$ rad. Trong các số sau, số đo của góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc lượng giác đã cho là

Ⓐ $\dfrac{7\pi}{6}$. Ⓑ $\dfrac{-11\pi}{6}$. Ⓒ $\dfrac{19\pi}{6}$. Ⓓ $\dfrac{-25\pi}{6}$.

Câu 49. Trên đường tròn lượng giác gốc A cho các góc lượng giác có số đo như sau:

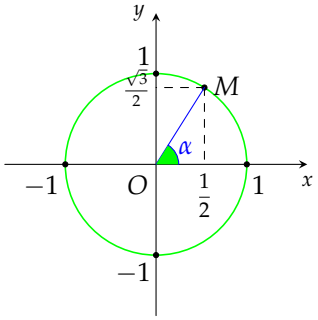
I. $\dfrac{\pi}{4}$. II. $-\dfrac{7\pi}{4}$. III. $\dfrac{13\pi}{4}$. IV. $-\dfrac{71\pi}{4}$.

Hỏi các góc lượng giác nào có điểm cuối trùng nhau?

Ⓐ Chỉ I và II. Ⓑ Chỉ I, II và III. Ⓒ Chỉ II, III và IV. Ⓓ Chỉ I, II và IV.

Câu 50. Trên đường tròn lượng giác, điểm M trong hình vẽ bên dưới biểu diễn góc α có số đo bằng bao nhiêu?

Ⓐ $\dfrac{\pi}{6}$. Ⓑ $\dfrac{\pi}{3}$. Ⓒ $\dfrac{\pi}{4}$. Ⓓ $\dfrac{\pi}{2}$.



Câu 51. Góc lượng giác (Ox, Ot) có một số đo là $\dfrac{\pi}{2} + 2025\pi$, số đo tổng quát của góc lượng giác (Ox, Ot) là

Ⓐ $\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$. Ⓑ $\dfrac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$. Ⓒ $\dfrac{3\pi}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$. Ⓓ $\dfrac{3\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 52. Cho hai góc nhọn α và β phụ nhau. Hệ thức nào sau đây là **sai**?

Ⓐ $\sin\alpha = -\cos\beta$. Ⓑ $\cos\alpha = \sin\beta$. Ⓒ $\cos\beta = \sin\alpha$. Ⓓ $\cot\alpha = \tan\beta$.

Câu 53. Cho $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$ với $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos\alpha$?

Ⓐ $\dfrac{1}{5}$. Ⓑ $\dfrac{3}{5}$. Ⓒ $-\dfrac{3}{5}$. Ⓓ $\dfrac{4}{5}$.

Câu 54. Cho $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Giá trị lượng giác nào sau đây luôn dương?

Ⓐ $\sin(\pi + \alpha)$. Ⓑ $\cot\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$. Ⓒ $\cos(-\alpha)$. Ⓓ $\tan(\pi + \alpha)$.

Câu 55. Cho $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

Ⓐ $\sin(\alpha - \pi) \geq 0$. Ⓑ $\sin(\alpha - \pi) \leq 0$. Ⓒ $\sin(\alpha - \pi) > 0$. Ⓓ $\sin(\alpha - \pi) < 0$.

Câu 56. Cho góc α thỏa mãn $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0$ và $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $P = \sin\alpha + \dfrac{1}{\cos\alpha}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{4+\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}$. Ⓒ $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Câu 57. Cho $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$, với $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của biểu thức $M = 10\sin\alpha + 5\cos\alpha$.

Ⓐ -10. Ⓑ 2. Ⓒ 1. Ⓓ $\dfrac{1}{4}$.

Câu 58. Cho $\tan\alpha = 3$, giá trị của biểu thức $M = \dfrac{2\sin\alpha - 5\cos\alpha}{3\sin\alpha + \cos\alpha}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{10}$. Ⓑ 0. Ⓒ $-\dfrac{13}{6}$. Ⓓ $-\dfrac{1}{10}$.

Câu 59. Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ thì $\tan(2017\pi + \alpha)$ bằng

Ⓐ $-\tan\alpha$. Ⓑ $\cot\alpha$. Ⓒ $\tan\alpha$. Ⓓ $-\cot\alpha$.

Câu 60. Với mọi số thực α, ta có $\sin\left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)$ bằng

Ⓐ $-\sin\alpha$. Ⓑ $\cos\alpha$. Ⓒ $\sin\alpha$. Ⓓ $-\cos\alpha$.

Câu 61. Cho góc α thỏa mãn $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ và $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. Tính $\tan\alpha$.

Ⓐ $\tan\alpha=-\frac{3}{\sqrt{5}}$. Ⓑ $\tan\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$. Ⓒ $\tan\alpha=-\frac{4}{\sqrt{5}}$. Ⓓ $\tan\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu 62. Tính $L=\tan 20^\circ\cdot\tan 45^\circ\cdot\tan 70^\circ$.

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ -1. Ⓓ 2.

Câu 63. Giá trị biểu thức $C=\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{2}+\tan\pi+\cot\frac{\pi}{4}$ bằng

Ⓐ $C=\frac{4-\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $C=\frac{6+\sqrt{3}}{2}$. Ⓒ $C=\frac{4+\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $C\approx 74{,}03$.

Câu 64. Góc lượng giác nào sau đây có các điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác gốc A tạo thành một hình vuông?

Ⓐ $\frac{k2\pi}{3}$. Ⓑ $\frac{k\pi}{2}$. Ⓒ $\frac{k\pi}{3}$. Ⓓ $k\pi$.

Câu 65. Góc lượng giác nào sau đây có các điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác gốc A tạo thành một tam giác đều?

Ⓐ $\frac{k\pi}{3}$. Ⓑ $k\pi$. Ⓒ $\frac{k2\pi}{3}$. Ⓓ $\frac{k\pi}{2}$.

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Trên đường tròn bán kính bằng 4, cung có số đo $\frac{\pi}{8}$ thì có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.

b) Trên đường tròn bán kính bằng 4, cung có số đo 45° thì có độ dài là π.

c) Trên đường tròn bán kính bằng 4, cung có số đo $\frac{\pi}{10}$ thì có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.

d) Trên đường tròn bán kính bằng 10, cung có số đo $\frac{\pi}{5}$ thì có độ dài là 2π.

Câu 2. Cho một góc lượng giác (Ox,Ou) có số đo 250° và một góc lượng giác (Ox,Ov) có số đo -270°. Xét tính đúng - sai của các phát biểu sau.

a) Số đo góc lượng giác (Ou,Ox) bằng $-250^\circ+k360^\circ, k\in\mathbb{Z}$.

b) Số đo góc lượng giác (Ov,Ox) bằng $270^\circ+k360^\circ, k\in\mathbb{Z}$.

c) Số đo một góc lượng giác (Ou,Ov) bằng -20°.

d) Số đo một góc lượng giác (Ou,Ov) theo đơn vị radian bằng $\frac{\pi}{9}$.

Câu 3. Cho góc α thỏa mãn $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ và $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$. Xét tính đúng - sai của các phát biểu sau.

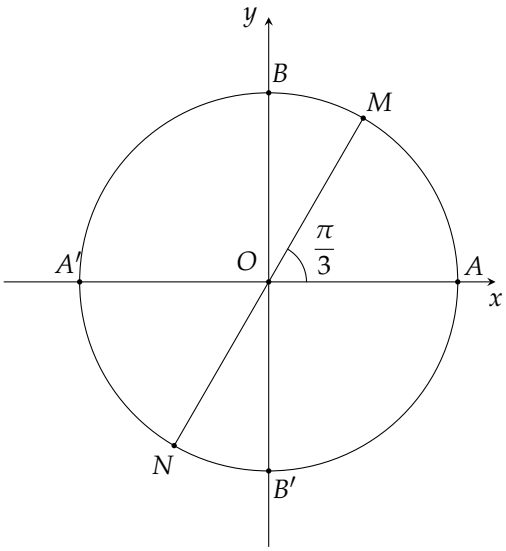
a) $\sin\alpha>0$.

b) $\tan\alpha<0$.

c) $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$.

d) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin(-\alpha)=\frac{7}{5}$.

Câu 4. Cho hình vẽ sau



Xét tính đúng - sai của các phát biểu sau

a) Số đo góc lượng giác (OM, OA) là sđ$(OM, OA) = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

b) sđ$(ON, OA) =$ sđ$(ON, OM) -$ sđ(OA, OM).

c) Độ dài cung tròn AM lớn là $l_{AM} = \dfrac{2\pi}{3}$.

d) Hai điểm M, N biểu diễn các cung có số đo là $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 5. Cho góc lượng giác α thỏa mãn $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}, 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Xét tính đúng - sai của các phát biểu sau.

a) Giá trị sin của góc lượng giác α âm.

b) Giá trị tan của góc lượng giác α dương.

c) Giá trị của biểu thức $\mathrm{P} = \sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha = \dfrac{2}{25}$.

d) Giá trị của biểu thức $Q = \tan\alpha + \cot\alpha > 2$.

Câu 6. Cho góc α, $(0° < \alpha < 180°)$ thỏa mãn $\tan\alpha = 3$.

a) $\cot\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

b) $\cos\alpha > 0$.

c) $\sin\alpha = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

d) $\mathrm{P} = \dfrac{2\sin\alpha - 3\cos\alpha}{3\sin\alpha + 2\cos\alpha} = \dfrac{-3}{11}$.

Câu 7. Cho $\tan\alpha = 2$. Xét tính đúng - sai của các phát biểu sau.

a) $\cot\alpha = \dfrac{1}{2}$.

b) Khi $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$ thì $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

c) Giá trị của biểu thức $B = \dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin^3\alpha + 3\cos^3\alpha + 2\sin\alpha} = \dfrac{5}{31}$.

d) Cho $\dfrac{\sin^4\alpha}{a} + \dfrac{\cos^4\alpha}{b} = \dfrac{1}{a+b}$. Giá trị của biểu thức $A = \dfrac{\sin^8\alpha}{a^3} + \dfrac{\cos^8\alpha}{b^3} = \dfrac{1}{a^3+b^3}$.

Câu 8. Cho $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}, \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, xét tính đúng - sai của các mệnh đề sau.

a) $\cos\alpha < 0$.

b) $\cos\alpha = \dfrac{-\sqrt{5}}{3}$.

c) $\sin\left(\dfrac{5\pi}{2} - \alpha\right) = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

d) Giá trị của biểu thức $P = \dfrac{\sqrt{5}\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ là $\dfrac{10}{9}$.

Câu 9. Cho điểm $M(x_0; y_0)$ trên đường tròn lượng giác biểu diễn cho góc lượng giác có số đo α thỏa $\cot\alpha = \dfrac{7}{3}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\tan\alpha = \dfrac{3}{7}$.

b) x_0 và y_0 cùng dấu.

c) $\sin^2\alpha = \dfrac{9}{58}$.

d) $\cos^2\alpha = \dfrac{49}{58}$.

Câu 10. Trên đường tròn lượng giác tâm O và hệ trục tọa độ Oxy cho điểm M sao cho $\widehat{AOM} = \dfrac{\pi}{5}$.

a) Số đo của góc lượng giác có tia đầu là OA tia cuối là OM bằng $\dfrac{\pi}{5} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) Góc lượng giác có số đo $\dfrac{11\pi}{5}$ có cùng tia đầu và tia cuối với góc lượng giác (OA, OM).

c) Trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo $\dfrac{\pi}{5} + \dfrac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ ta được 6 điểm.

d) Khi biểu diễn góc $\alpha = \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ lên đường tròn lượng giác ta được tập hợp điểm là một đa giác đều thì diện tích của đa giác đều đó bằng 4.

Câu 11. Trên đường tròn lượng giác tâm O và hệ trục tọa độ Oxy cho điểm M sao cho $\widehat{AOM} = \dfrac{\pi}{5}$.

a) Số đo của góc lượng giác có tia đầu là OA tia cuối là OM bằng $\dfrac{\pi}{5} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) Góc lượng giác có số đo $\dfrac{11\pi}{5}$ có cùng tia đầu và tia cuối với góc lượng giác (OA, OM).

c) Trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo $\dfrac{\pi}{5} + \dfrac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ ta được 6 điểm.

d) Khi biểu diễn góc $\alpha = \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ lên đường tròn lượng giác ta được tập hợp điểm là một đa giác đều thì diện tích của đa giác đều đó bằng 4.

Câu 12. Từ một vị trí ban đầu trong không gian, vệ tinh X chuyển động theo quỹ đạo là một đường tròn quanh Trái Đất và luôn cách tâm Trái Đất một khoảng bằng 9 200 km. Sau 2 giờ thì vệ tinh X hoàn thành hết một vòng di chuyển.

a) Quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1 giờ khoảng 28 902,65 (km).

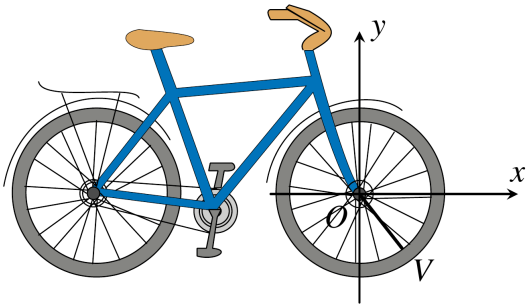
b) Quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1,5gi khoảng 43 353,98 (km).

c) Sau khoảng 5,3 giờ thì X di chuyển được quãng đường 240 000 (km).

d) Giả sử vệ tinh di chuyển theo chiều dương của đường tròn, sau 4,5 giờ thì vệ tinh vẽ nên một góc $\dfrac{9\pi}{2}$ rad?.

Câu 13. Trong chặng đua nước rút, bánh xe của một vận động viên đua xe đạp quay được 30 vòng trong 8 giây.Biết rằng bán kính của bánh xe là 35 cm. Chọn chiều quay của

bánh xe là chiều dương. Xét van V của bánh xe.



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

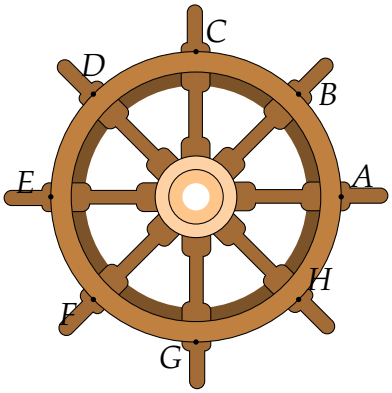
a) Sau 1 giây, van V của bánh xe quay được 4 vòng.

b) Sau 1 phút, van V của bánh xe quay được 225 vòng.

c) Sau 1 phút, van V của bánh xe quay được một góc có số đo là 450π.

d) Độ dài quãng đường mà vận động viên đua xe đạp đã đi được trong 1 phút là 494,8 m (làm tròn đến hàng phần chục).

Câu 14. Trong hình vẽ dưới đây, ta xem hình ảnh đường tròn trên một bánh lái tàu thuỷ tương ứng với một đường tròn lượng giác.



a) Công thức tổng quát biểu diễn góc lượng giác (OA, OB) theo đơn vị radian là $(OA, OB) = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) Công thức tổng quát chỉ ra góc lượng giác tương ứng với bốn điểm biểu diễn là A, C, E, G theo đơn vị radian là $k\dfrac{\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

c) Công thức tổng quát chỉ ra góc lượng giác tương ứng với hai điểm biểu diễn là A, E theo đơn vị độ là $k180^\circ$ $(k \in \mathbb{Z})$.

d) Công thức tổng quát biểu diễn góc lượng giác $(OA, OC) + (OC, OH)$ theo đơn vị radian là $\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

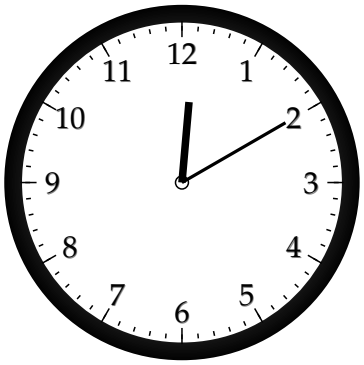
Câu 15. Xét tính đúng - sai của các mệnh đề sau.

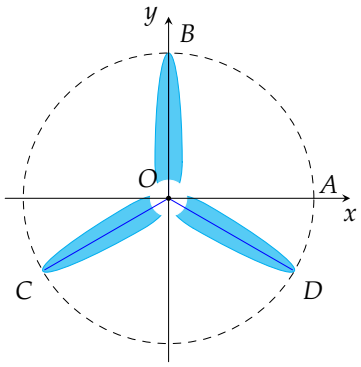
a) Cho góc hình học $\widehat{uOv} = 75^\circ$. Công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Ou, Ov) là $75^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

b) Cho một góc lượng giác (Ox, Ou) có số đo 50° và một góc lượng giác (Ox, Ov) có số đo -125°. Số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) bằng $175^\circ + k360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) Trên đồng hồ hình dưới đây, kim phút đang chỉ đúng số 2. Đến lúc 13 giờ 30 phút thì kim phút đã quay được một góc lượng giác có số đo bằng 480°.

d) Trong hình dưới, cánh quạt được chia thành 3 phần bằng nhau $\widehat{AOD} = 28°$. Công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Ox, OC) bằng $-148° + k \cdot 360°$.

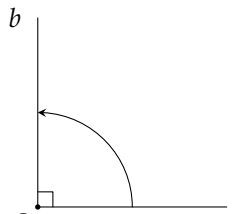




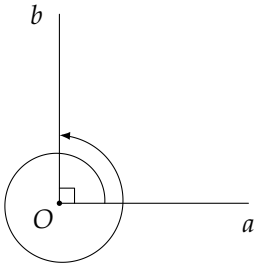
3 Tự luận.

Bài 1. Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $-\dfrac{11\pi}{4}$, góc lượng giác (Ou, Ow) có số đo là $\dfrac{3\pi}{4}$. Tìm số đo của góc lượng giác (Ov, Ow). $\dfrac{7\pi}{2} + k2\pi$

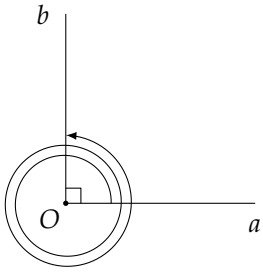
Bài 2. Xác định số đo của các góc lượng giác (Oa, Ob) trong hình sau

a) 

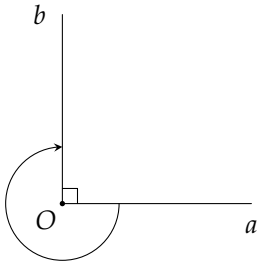
$90°$

b) 

$450°$

c) 

$810°$

d) 

$-270°$

Bài 3. Trong các khoảng thời gian từ 0 giờ đến 2 giờ 15 phút, kim phút quét một góc lượng giác là bao nhiêu độ? $-810°$

Bài 4. Cho đường tròn có đường kính $R = 20$ cm. Hãy tính độ dài cung tròn có số đo:

a) $\dfrac{\pi}{15}$; b) 1,5; c) $37°$.

Bài 5. Trên đường tròn lượng giác, xác định điểm M biểu diễn các góc lượng giác có số đo sau:

a) $\dfrac{2\pi}{3}$; b) $-\dfrac{11\pi}{4}$; c) $150°$; d) $-225°$.

Bài 6. Biểu diễn các giá trị lượng giác sau qua các giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0 đến $\dfrac{\pi}{4}$ hoặc từ $0°$ đến $45°$ và tính:

a) $\cos\dfrac{21\pi}{6}$; b) $\sin\dfrac{129\pi}{4}$; c) $\tan 1020°$.

Bài 7. Biểu diễn các góc lượng giác sau trên đường tròn lượng giác:

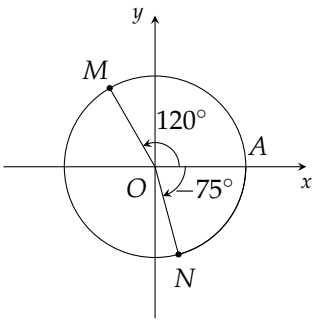
a) $\dfrac{-17\pi}{3}$; b) $\dfrac{13\pi}{4}$; c) -765°.

Bài 8. Góc lượng giác $\dfrac{31\pi}{7}$ có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác với góc lượng giác nào sau đây?

$$\frac{3\pi}{7};\ \frac{10\pi}{7};\ \frac{-25\pi}{7}.$$

$\dfrac{3\pi}{7};\ \dfrac{-25\pi}{7}$

Bài 9. Viết công thức số đo tổng quát của các góc lượng giác (OA, OM) và (OA, ON) trong hình bên.



Bài 10. Trên đường tròn lượng giác, hãy biểu diễn các góc lượng giác có số đo có dạng:

a) $\dfrac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$; b) $k\dfrac{\pi}{4}\ (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 11. Các đẳng thức sau có thể đồng thời xảy ra không?

a) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ và $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$; b) $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ và $\cot\alpha = \dfrac{1}{2}$; c) $\tan\alpha = 3$ và $\cot\alpha = \dfrac{1}{3}$.

Bài 12. Tính các giá trị lượng giác của mỗi góc sau: 225°; -225°; $-1\,035^\circ$; $\dfrac{5\pi}{3}$; $\dfrac{19\pi}{2}$; $-\dfrac{159\pi}{4}$.

Bài 13. Tính các giá trị lượng giác (nếu có) của mỗi góc sau

a) $\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$; b) $k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$; c) $\dfrac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$; d) $\dfrac{\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 14. Cho $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$ và $\cos\alpha = -\dfrac{5}{13}$. Tính $\sin\left(-\dfrac{15\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(13\pi + \alpha)$. $-\dfrac{10}{13}$

Bài 15. Tính các giá trị lượng giác của góc α, biết

a) $\cos\alpha = \dfrac{1}{5}$ và $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$;

b) $\sin\alpha = \dfrac{2}{5}$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

c) $\tan\alpha = \sqrt{5}$ và $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;

d) $\cot\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ và $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Bài 16. Tính các giá trị lượng giác của góc α trong mỗi trường hợp sau

a) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ với $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

b) $\cos\alpha = -\dfrac{2}{3}$ với $-\pi < \alpha < 0$;

c) $\tan\alpha = 3$ với $-\pi < \alpha < 0$;

d) $\cot\alpha = -2$ với $0 < \alpha < \pi$.

Bài 17. Cho góc lượng giác α sao cho $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0$ và $\tan\alpha = -2$. Tính $\cos\alpha$, $\sin\alpha$.

$-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Bài 18. Cho $\tan\alpha + \cot\alpha = 2$. Tính giá trị biểu thức $P = \cot^3\alpha + \tan^3\alpha$.

Bài 19. Cho $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ với $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \cos\left(\frac{9\pi}{2} - \alpha\right) + 2\tan\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right).$$

Bài 20. Cho $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$, tính giá trị của biểu thức $M = \dfrac{2\sin^2\alpha + 3\sin\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha}{5\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$.

$-\dfrac{8}{19}$

Bài 21. Cho $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$. Xét dấu các biểu thức sau:

a) $A = \sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) $B = \sin\left(\alpha + \dfrac{1119\pi}{2}\right)$.

Bài 22. Rút gọn biểu thức $A = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$.

0

Bài 23. Rút gọn biểu thức $C = (\tan x - \cot x)^2 - (\tan x + \cot x)^2$. 4

Bài 24. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\dfrac{1}{\tan\alpha + 1} + \dfrac{1}{\cot\alpha + 1}$; 1

b) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\pi + \alpha)$; $2\sin\alpha$

c) $\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right) + \cos(-\alpha + 6\pi) - \tan(\alpha + \pi)\cot(3\pi - \alpha)$. $1 - \sin\alpha + \cos\alpha$

Bài 25. Chứng minh các đẳng thức:

a) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$;

b) $\dfrac{\cos^2\alpha + \tan^2\alpha - 1}{\sin^2\alpha} = \tan^2\alpha$.

c) $\tan\alpha + \cot\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

Bài 26. Tính giá trị của biểu thức $N = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \dots \tan 45^\circ \dots \tan 89^\circ$. 1

Bài 27. Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A, vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất, bán kính 9 000 km. Biết rằng vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong 2 giờ.

a) Hãy tính quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau 1 giờ; 3 giờ; 5 giờ.

$9\,000\pi, 27\,000\pi, 45\,000\pi$

b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 200 000 km sau bao nhiêu giờ (làm tròn đến kết quả hàng đơn vị)? $\approx 11,1$

Bài 28. Một bánh xe có đường kính kể cả lốp xe là 55 cm. Nếu xe chạy với tốc độ 50 km/h thì trong một giây bánh xe quay được bao nhiêu vòng (Kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm)?

8,04

Bài 29. Kim giờ dài 6 cm và kim phút dài 11 cm của đồng hồ chỉ 4 giờ. Hỏi thời gian ít nhất để hai kim vuông góc với nhau là bao nhiêu? Lúc đó tổng quãng đường hai đầu mút kim giờ và kim phút đi được là bao nhiêu? (kết quả được tính bằng đơn vị cm và làm tròn đến hàng phần trăm).

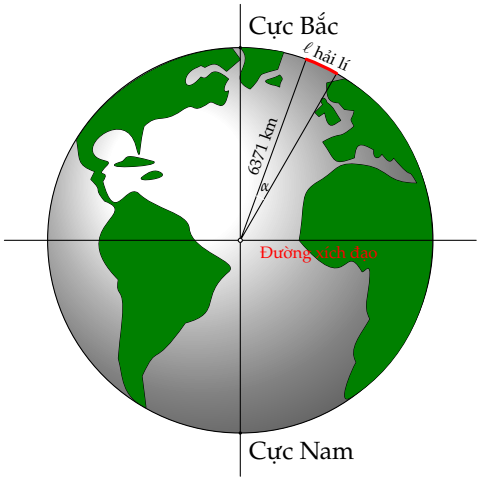
6,57

Câu 16. Một chiếc đồng hồ có kim giờ và kim phút được cho như trong hình vẽ sau. Xét tia Ou là kim giờ, Ov là kim phút. Xét chiều quay của góc là chiều kim đồng hồ, công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Ou, Ov) có dạng $(Ou, Ov) = \alpha^\circ + k \cdot \beta^\circ (k \in \mathbb{Z})$. Khi đó $\alpha + \beta$ có giá trị bằng bao nhiêu?



450

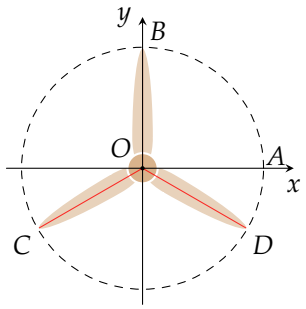
Bài 30. Hải lí là một đơn vị chiều dài hàng hải, được tính bằng độ dài một cung chắn một góc $\alpha = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ của đường kinh tuyến. Đổi số đo α sang radian và cho biết 1 hải lí bằng khoảng bao nhiêu kilômét, biết bán kính trung bình của Trái Đất là 6371 km. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



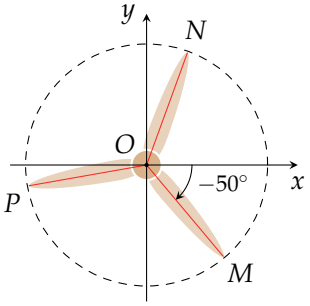
1,85

Bài 31. Vị trí các điểm B, C, D trên cánh quạt động cơ máy bay trong hình bên có thể được biểu diễn cho các góc lượng giác nào sau đây?

$$\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}); \frac{-\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}); \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$$

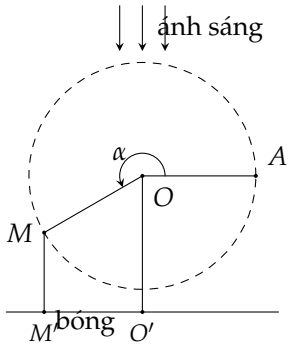


Bài 32. Trong hình bên, chiếc quạt có ba cánh được phân bố đều nhau. Viết công thức tổng quát đo số đo của các góc lượng giác (Ox, ON) và (Ox, OP).



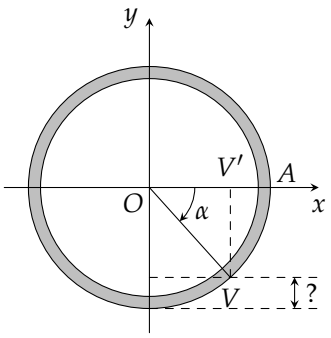
$(Ox, ON) = 70° + k360°; (Ox, OP) = -170° + k360°$

Bài 33. Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh trục O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như hình bên. Vị trí ban đầu của thanh là OA. Hỏi độ dài bóng $O'M'$ của OM khi thanh quay được $3\frac{1}{10}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là 15 cm? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



12,1

Bài 34. Khi xe đạp di chuyển, van V của bánh xe quay quanh trục O theo chiều kim đồng hồ với tốc độ góc không đổi là 11 rad/s (hình bên). Ban đầu van nằm ở vị trí A. Hỏi sau một phút di chuyển, khoảng cách từ van đến mặt đất là bao nhiêu, biết bán kính $OA = 58$ cm? Giả sử độ dày của lốp xe không đáng kể. Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



42,8

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	C	2	C	3	A	4	B	5	A	6	D	7	B	8	A	9	B	10	C
11	D	12	B	13	D	14	B	15	B	16	A	17	B	18	C	19	D	20	B
21	A	22	A	23	C	24	B	25	C	26	A	27	A	28	B	29	B	30	D
31	A	32	C	33	D	34	B	35	D	36	A	37	B	38	C	39	D	40	B
41	A	42	B	43	B	44	C	45	C	46	C	47	C	48	B	49	D	50	B
51	C	52	A	53	C	54	B	55	D	56	B	57	B	58	A	59	C	60	B
61	B	62	B	63	C	64	B	65	C										

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a Đ b Đ c S d Đ	Câu 2.	a Đ b Đ c S d S
Câu 3.	a S b Đ c Đ d S	Câu 4.	a S b Đ c S d Đ
Câu 5.	a S b Đ c S d Đ	Câu 6.	a S b Đ c Đ d S
Câu 7.	a Đ b S c Đ d S	Câu 8.	a Đ b Đ c S d S
Câu 9.	a Đ b Đ c Đ d Đ	Câu 10.	a S b Đ c Đ d S
Câu 11.	a S b Đ c Đ d S	Câu 12.	a Đ b Đ c S d Đ
Câu 13.	a S b Đ c Đ d Đ	Câu 14.	a Đ b S c Đ d S
Câu 15.	a Đ b S c S d Đ		

§2 CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Công thức cộng

- $\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b$
- $\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$
- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a.\tan b}$



sin thì sin cos cos sin
cos thì cos cos sin sin
cos thì đổi dấu hỡi nàng
sin thì giữ dấu xin chàng nhớ cho!

tan tổng thì lấy tổng tan
chia một trừ với tích tan, dễ òm.

2) Công thức nhân đôi

Công thức tính các giá trị lượng giác của góc $2a$ qua các giá trị lượng giác của góc a gọi là công thức nhân đôi.

a) $\sin 2a = 2\sin a.\cos a$.

b) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$.

c) $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$.

Lưu ý. Từ các công thức góc nhân đôi, ta có các công thức sau (gọi là công thức hạ bậc):

a) $\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$. b) $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$. c) $\tan^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$.

3) Công thức biến đổi tích thành tổng

- $\cos a.\cos b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]$.
- $\sin a.\sin b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$.
- $\sin a.\cos b = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right]$.

4) Công thức biến đổi tổng thành tích

- $\cos a+\cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}$
- $\cos a-\cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2}$
- $\sin a+\sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}$
- $\sin a-\sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2}$.

cos cộng cos=2cos cos
cos trừ cos=trừ 2 sin sin
sin cộng sin=2sin cos
sin trừ sin=2 cos sin.

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Áp dụng công thức cộng

① $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$.
② $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$.
③ $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$.
④ $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$.
⑤ $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$.
⑥ $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$.

Ví dụ 1

Tính $\sin\left(a+\dfrac{\pi}{4}\right)$, biết $\sin a=\dfrac{12}{13}$ và $0<a<\dfrac{\pi}{2}$.

$\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{17\sqrt{2}}{26}$.

Ví dụ 2

Không dùng máy tính, hãy tính

1 $\cos 75^\circ$; $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2 $\tan \frac{\pi}{12}$. $2-\sqrt{3}$

Ví dụ 3

Chứng minh rằng $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Tính

a) $\cos \frac{5\pi}{12}$. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b) $\cos 15^\circ$. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

c) $\tan \frac{7\pi}{12}$. $-2-\sqrt{3}$

d) $\tan 165^\circ$. $2-\sqrt{3}$

Bài 2 ☆

Cho $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$ và $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, khi đó giá trị của $\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$ là

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{2}}{34}$ Ⓑ $-\dfrac{\sqrt{2}}{26}$ Ⓒ $\dfrac{17\sqrt{2}}{26}$ Ⓓ $-\dfrac{7\sqrt{2}}{26}$

Chọn C

Bài 3 ☆

Chứng minh rằng:

a) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

b) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$ $\left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, x \neq \dfrac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$.

Dạng 2 Áp dụng công thức nhân đôi, hạ bậc

Công thức nhân đôi :

① $\sin 2a = 2\sin a\cos a$.

② $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.

③ $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$.

④ $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$.

Công thức hạ bậc:

① $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$.

② $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$.

③ $\tan^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$.

Ví dụ 4

Không dùng máy tính, tính $\cos\dfrac{\pi}{8}$.

$\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Ví dụ 5

Cho $\cos a = -\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\pi}{2} < a < \pi\right)$. Tính $\sin 2a$.

$\sin 2a = -\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

Ví dụ 6

Cho $\sin a + \cos a = \dfrac{1}{2}$. Tính

a) $\sin 2a$. $-\dfrac{3}{4}$

b) $\cos 4a$. $-\dfrac{1}{8}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4 ☆

Tính chính xác giá trị $\cos\dfrac{\pi}{12}$.

🔑 $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

Bài 5 ☆

Cho $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, với $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$. Tính giá trị của $\sin 2\alpha$ và $\tan 2\alpha$.

🔑 $\sin 2\alpha=\dfrac{16}{25}$, $\tan 2\alpha=\dfrac{24}{7}$

Dạng 3 Áp dụng công thức biến tổng thành tích và tích thành tổng

Công thức biến đổi tích thành tổng:

① $\cos a\cos b=\dfrac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$.

② $\sin a\sin b=-\dfrac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$.

③ $\sin a\cos b=\dfrac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$.

④ $\cos a\sin b=\dfrac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)]$.

Công thức biến đổi tổng thành tích:

① $\cos a+\cos b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$.

② $\cos a-\cos b=-2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$.

③ $\sin a+\sin b=2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$.

④ $\sin a-\sin b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$.

Ví dụ 7

Không dùng máy tính, tính giá trị của các biểu thức

$$A = \cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}; \quad B = \cos 75^\circ \sin 15^\circ.$$

$A = \frac{\sqrt{3}-2}{4}$ và $B = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

Ví dụ 8

Tính

a) $\sin\frac{11\pi}{12} - \sin\frac{5\pi}{12}$. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos 105^\circ + \cos 15^\circ$. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ví dụ 9

Rút gọn các biểu thức sau đây:

a) $A = \dfrac{\cos 4a - \cos 2a}{\sin 4a - \sin 2a}$

b) $B = \dfrac{\sin a - 2\sin 2a + \sin 3a}{\cos a - 2\cos 2a + \cos 3a}$

$A = -\tan 3a, B = \tan 2a$

Ví dụ 10

Cho $\sin 2x = -\dfrac{1}{3}$. Tính: $A = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$. $\frac{1}{3}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6 ☆

Tính $D = \dfrac{\sin\frac{7\pi}{9} + \sin\frac{\pi}{9}}{\cos\frac{7\pi}{9} - \cos\frac{\pi}{9}}$. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Bài 7 ☆

Cho $\cos a = \dfrac{2}{3}$. Tính: $B = \cos\dfrac{3a}{2}\cos\dfrac{a}{2}$. $\frac{5}{18}$

Bài 8 ☆

Chứng minh rằng $4\cos x\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) = \cos 3x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$

Bài 9 ☆

Cho $\tan 3a = 2023$. Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{\sin 2a - \sin 3a + \sin 4a}{\cos 2a - \cos 3a + \cos 4a}$.

🔑 2023

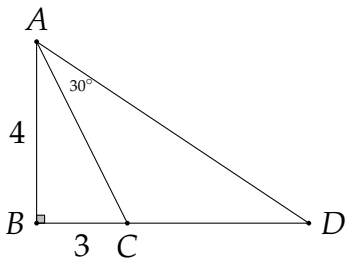
Bài 10 ☆

Chứng minh đẳng thức $\cos^3 a \cos 3a - \sin^3 a \sin 3a = \dfrac{3}{4}\cos 4a + \dfrac{1}{4}$.

Dạng 4 Toán thực tế áp dụng các công thức lượng giác

Ví dụ 11

Trong hình bên, tam giác ABC vuông tại B và có hai cạnh góc vuông là $AB = 4$, $BC = 3$. Vẽ điểm D nằm trên tia đối của tia CB thoả mãn $\widehat{CAD} = 30^\circ$. Tính $\tan \widehat{BAD}$, từ đó tính độ dài cạnh CD.



🔑 $\tan \widehat{BAD} = \dfrac{48 + 25\sqrt{3}}{39}$ và $CD = \dfrac{75 + 100\sqrt{3}}{39}$

Ví dụ 12

Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t, A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hoà có phương trình:

$$x_1(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (cm)},$$
$$x_2(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ (cm)}.$$

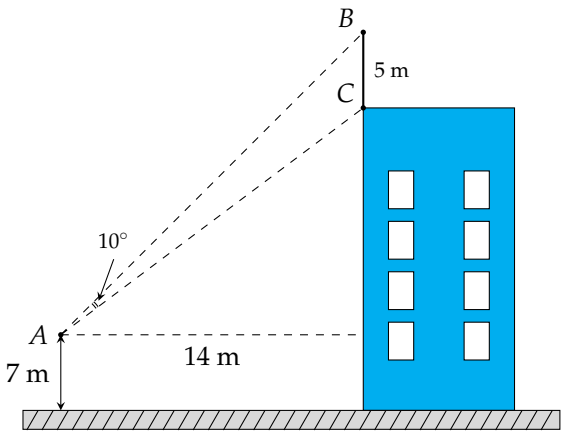
Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này. $A = 2\sqrt{2}$ và $\varphi = -\frac{\pi}{12}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 11 ☆

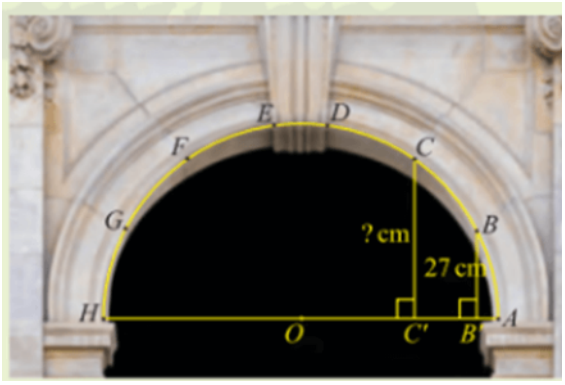
Trên nóc một tòa nhà thẳng đứng có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ một vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất và cách tòa nhà 14 m có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten với góc $\widehat{BAC} = 10°$. Tính chiều cao của tòa nhà (tính bằng mét và kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

19



Bài 12 ☆

Trong kiến trúc, các vòm cổng bằng đá thường có hình nửa đường tròn để có thể chịu lực tốt. Trong hình bên, vòm cổng được ghép bởi sáu phiến đá hai bên tạo thành các cung AB, BC, CD, EF, FG, GH bằng nhau và một phiến đá chốt ở đỉnh, cho biết vòm cổng rộng 120 cm và khoảng cách từ B đến đường kính AH là 27 cm. Tính $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$, từ đó tính khoảng cách từ điểm C đến đường kính AH. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười. 48,2



BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Giá trị của biểu thức $\cos\dfrac{37\pi}{12}$ bằng

Ⓐ $-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Câu 2. Rút gọn biểu thức: $\cos 54^\circ \cos 4^\circ - \cos 36^\circ \cos 86^\circ$, ta được:

Ⓐ $\cos 58^\circ$. Ⓑ $\sin 50^\circ$. Ⓒ $\sin 58^\circ$. Ⓓ $\cos 50^\circ$.

Câu 3. Biểu thức $\sin x \sin y + \cos x \cos y$ bằng

Ⓐ $\sin(x-y)$. Ⓑ $\cos(x+y)$. Ⓒ $\sin(x+y)$. Ⓓ $\cos(x-y)$.

Câu 4. Với mọi a, b khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$. Ⓑ $\cos(a+b) = \cos a \cdot \sin b - \sin a \cdot \cos b$.

Ⓒ $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$. Ⓓ $\sin(a+b) = \sin a \cdot \sin b + \cos a \cdot \cos b$.

Câu 5. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

Ⓐ $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.
Ⓑ $\cos 2a = 1 - 2\cos^2 a$.
Ⓒ $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$.
Ⓓ $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$.

Câu 6. Chọn công thức **sai** trong các công thức dưới đây

Ⓐ $\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$.
Ⓑ $\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$.
Ⓒ $\sin a + \sin b = 2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$.
Ⓓ $\cos a - \cos b = 2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$.

Câu 7. Công thức nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$.
Ⓑ $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{1+\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta}$.
Ⓒ $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$.
Ⓓ $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$.

Câu 8. Số khẳng định đúng trong các khẳng định sau là:

① $\cos a\cos b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$
② $\sin a\sin b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$
③ $\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$
④ $\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$

Ⓐ 0 .
Ⓑ 1 .
Ⓒ 2 .
Ⓓ 3 .

Câu 9. Giá trị của biểu thức $\tan 105^\circ$ bằng

Ⓐ $-\left(2+\sqrt{3}\right)$.
Ⓑ $2+\sqrt{3}$.
Ⓒ $2-\sqrt{3}$.
Ⓓ $-\left(2-\sqrt{3}\right)$.

Câu 10. Cho hai góc nhọn a và b. Biết $\cos a = \dfrac{1}{3}$, $\cos b = \dfrac{1}{4}$. Giá trị $\cos(a+b)\cos(a-b)$ bằng

Ⓐ $-\dfrac{113}{144}$.
Ⓑ $-\dfrac{115}{144}$.
Ⓒ $-\dfrac{117}{144}$.
Ⓓ $-\dfrac{119}{144}$.

Câu 11. Nếu biết $\sin a = \dfrac{8}{17}$; $\tan b = \dfrac{5}{12}$ và a, b đều là các góc nhọn và dương thì $\sin(a-b)$ bằng

Ⓐ $\dfrac{20}{220}$.
Ⓑ $-\dfrac{20}{220}$.
Ⓒ $\dfrac{21}{221}$.
Ⓓ $\dfrac{22}{221}$.

Câu 12. Nếu $\tan x = 0{,}5$; $\sin y = \dfrac{3}{5}$ với $0 < y < 90^\circ$ thì $\tan(x+y)$ bằng

Ⓐ 2.
Ⓑ 3.
Ⓒ 4.
Ⓓ 5.

Câu 13. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

Ⓐ $\sin a + \cos a = \sqrt{2}\sin\left(a - \dfrac{\pi}{4}\right)$.
Ⓑ $\sin a + \cos a = \sqrt{2}\sin\left(a + \dfrac{\pi}{4}\right)$.
Ⓒ $\sin a + \cos a = -\sqrt{2}\sin\left(a - \dfrac{\pi}{4}\right)$.
Ⓓ $\sin a + \cos a = -\sqrt{2}\sin\left(a + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Câu 14. Cho $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ với $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Khi đó, giá trị của $\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)$ bằng

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{3}}{3} - \dfrac{1}{2}$.
Ⓑ $\dfrac{\sqrt{3}}{6} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Ⓒ $\sqrt{6} - \dfrac{1}{2}$.
Ⓓ $\dfrac{\sqrt{3}}{6} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 15. Cho góc α thỏa mãn $\cos\alpha = \dfrac{3}{4}$ và $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

Ⓐ $\dfrac{3+\sqrt{21}}{8}$. Ⓑ $\dfrac{3-\sqrt{21}}{8}$. Ⓒ $\dfrac{3\sqrt{3}+\sqrt{7}}{8}$. Ⓓ $\dfrac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{8}$.

Câu 16. Biết $\sin a=\dfrac{5}{13}; \cos b=\dfrac{3}{5}; \dfrac{\pi}{2}<a<\pi; 0<b<\dfrac{\pi}{2}$. Tính $\sin(a+b)$.

Ⓐ $\dfrac{56}{65}$. Ⓑ $\dfrac{63}{65}$. Ⓒ $-\dfrac{33}{65}$. Ⓓ 0.

Câu 17. Cho $\tan\alpha=2$. Tính $\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Ⓐ $\dfrac{2}{3}$. Ⓑ $\dfrac{1}{3}$. Ⓒ 1. Ⓓ $-\dfrac{1}{3}$.

Câu 18. Cho $\sin\alpha=\dfrac{3}{4}$. Khi đó $\cos 2\alpha$ bằng

Ⓐ $\dfrac{3}{8}$. Ⓑ $\dfrac{-1}{8}$. Ⓒ $\dfrac{1}{8}$. Ⓓ $\dfrac{-31}{8}$.

Câu 19. Cho góc α thỏa mãn $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$ và $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$. Khi đó $\tan 2\alpha$ bằng

Ⓐ $P=-\dfrac{120}{119}$. Ⓑ $P=-\dfrac{119}{120}$. Ⓒ $P=\dfrac{120}{119}$. Ⓓ $P=\dfrac{119}{120}$.

Câu 20. Nếu $\sin x+\cos x=\dfrac{1}{2}$ thì $\sin 2x$ bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{4}$. Ⓑ $\dfrac{-3}{4}$. Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\dfrac{-1}{2}$.

Câu 21. Cho các góc lượng giác a, b và $T=\cos(a+b)\cos(a-b)-\sin(a+b)\sin(a-b)$. Mệnh đề sau đây đúng?

Ⓐ $T=\sin 2b$. Ⓑ $T=\cos 2a$. Ⓒ $T=\sin 2a$. Ⓓ $T=\cos 2b$.

Câu 22. Biết $\sin\alpha+\cos\alpha=m$. Tính $P=\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$ theo m.

Ⓐ $P=2m$. Ⓑ $P=\dfrac{m}{2}$. Ⓒ $P=\dfrac{m}{\sqrt{2}}$. Ⓓ $P=m\sqrt{2}$.

Câu 23. Tính giá trị của biểu thức $P=(1-2\cos 2\alpha)(2+3\cos 2\alpha)$ biết $\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$.

Ⓐ $P=\dfrac{49}{27}$. Ⓑ $P=\dfrac{50}{27}$. Ⓒ $P=\dfrac{48}{27}$. Ⓓ $P=\dfrac{47}{27}$.

Câu 24. Cho $\sin\alpha=\dfrac{3}{4}$. Khi đó, $\cos 2\alpha$ bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{8}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$. Ⓒ $-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$. Ⓓ $-\dfrac{1}{8}$.

Câu 25. Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{1-\sin^2 x}{\sin 2x}$ $(\sin 2x\neq 0)$ ta được

Ⓐ $P=\dfrac{1}{2}\tan x$. Ⓑ $P=\dfrac{1}{2}\cot x$. Ⓒ $P=2\cot x$. Ⓓ $P=2\tan x$.

Câu 26. Giá trị đúng của $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $-\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $\dfrac{1}{4}$. Ⓓ $-\dfrac{1}{4}$.

Câu 27. Tích số $\cos 10^\circ\cdot\cos 30^\circ\cdot\cos 50^\circ\cdot\cos 70^\circ$ bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{16}$. Ⓑ $\dfrac{1}{8}$. Ⓒ $\dfrac{3}{16}$. Ⓓ $\dfrac{1}{4}$.

Câu 28. Rút gọn biểu thức: $\sin(a-17^\circ)\cdot\cos(a+13^\circ)-\sin(a+13^\circ)\cdot\cos(a-17^\circ)$, ta được

Ⓐ $\sin 2a$. Ⓑ $\cos 2a$. Ⓒ $-\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\dfrac{1}{2}$.

Câu 29. Rút gọn biểu thức $M=\dfrac{\sin 3x-\sin x}{2\cos^2 x-1}$.

Ⓐ $\tan 2x$. Ⓑ $2\sin x$. Ⓒ $2\tan x$. Ⓓ $\sin 2x$.

Câu 30. Biểu thức $4\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)=m+n\sin^2\alpha$, với $m,\ n\in\mathbb{Z}$. Khi đó m^2-n^2 bằng

Ⓐ 7. Ⓑ 15. Ⓒ -7. Ⓓ -15.

Câu 31. Cho $\cos 2\alpha=\dfrac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\cos\alpha\cdot\cos 3\alpha$.

Ⓐ $P=\dfrac{7}{18}$. Ⓑ $P=\dfrac{7}{9}$. Ⓒ $P=\dfrac{5}{9}$. Ⓓ $\dfrac{5}{18}$.

Câu 32. Rút gọn biểu thức $P=\cos(120^\circ+x)+\cos(120^\circ-x)-\cos x$ ta được kết quả là

Ⓐ 0. Ⓑ $-\cos x$. Ⓒ $-2\cos x$. Ⓓ $\sin x-\cos x$.

Câu 33. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{1-\sin a-\cos 2a}{\sin 2a-\cos a}$.

Ⓐ 1. Ⓑ $\tan\alpha$. Ⓒ $\dfrac{5}{2}$. Ⓓ $2\tan\alpha$.

Câu 34. Với α là số thực bất kỳ, mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

Ⓐ $\cos 2\alpha+\cos 4a=2\cos 2\alpha\cdot\cos 6\alpha$. Ⓑ $\sin 2\alpha+\sin 4a=2\sin\alpha\cdot\cos 3\alpha$.

Ⓒ $\cos 2\alpha-\cos 4a=-2\sin 3\alpha\cdot\sin\alpha$. Ⓓ $\sin 2\alpha-\sin 4a=-2\cos 3\alpha\cdot\sin\alpha$.

Câu 35. Cho $\sin 2\alpha=-\dfrac{4}{5}$ và $\dfrac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$. Giá trị của $\sin\alpha$ là

Ⓐ $\dfrac{2}{5}$. Ⓑ $\dfrac{1}{5}$. Ⓒ $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 36. Gọi $M=\dfrac{\sin(y-x)}{\sin x\cdot\sin y}$. Rút gọn biểu thức M, ta được

Ⓐ $M=\tan x-\tan y$. Ⓑ $M=\cot x-\cot y$.

Ⓒ $M=\cot y-\cot x$. Ⓓ $M=\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\sin y}$.

Câu 37. Nếu $\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}$ thì giá trị của biểu thức $\dfrac{\sin x}{2-3\cos x}$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Câu 38. Cho số thực α thỏa mãn $\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$. Tính $(\sin 4\alpha+2\sin 2\alpha)\cos\alpha$.

Ⓐ $\dfrac{25}{128}$. Ⓑ $\dfrac{1}{16}$. Ⓒ $\dfrac{255}{128}$. Ⓓ $\dfrac{225}{128}$.

Câu 39. Rút gọn biểu thức $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, ta được

Ⓐ $\sqrt{2}\sin x$. Ⓑ $-\sqrt{2}\sin x$. Ⓒ $\sqrt{2}\cos x$. Ⓓ $-\sqrt{2}\cos x$.

Câu 40. Cho $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ với $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Biết giá trị của $\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{a\sqrt{5} - b\sqrt{15}}{10}$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $(a, b) = 1$. Tính $a + b$.

Ⓐ 4. Ⓑ 10. Ⓒ 7. Ⓓ 3.

Câu 41. Chọn đẳng thức đúng.

Ⓐ $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{1 - \sin a}{2}$. Ⓑ $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{1 + \sin a}{2}$.

Ⓒ $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{1 - \cos a}{2}$. Ⓓ $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{1 + \cos a}{2}$.

Câu 42. Biết rằng $\sin 18^\circ = \dfrac{a + b\sqrt{5}}{c}$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $c \neq 0$ và $\dfrac{a}{c}$, $\dfrac{b}{c}$ là các phân số tối giản. Giá trị của biểu thức $S = a + b + c$ là

Ⓐ $S = 2$. Ⓑ $S = 4$. Ⓒ $S = 3$. Ⓓ $S = 1$.

Câu 43. Công thức nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\cos 6a = \cos^2 3a - \sin^2 3a$. Ⓑ $\cos 6a = 1 - 2\sin^2 3a$.

Ⓒ $\cos 6a = 1 - 6\sin^2 a$. Ⓓ $\cos 6a = 2\cos^2 3a - 1$.

Câu 44. Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{\tan\alpha - \cot\alpha}{\tan\alpha + \cot\alpha} + \cos 2\alpha$.

Ⓐ 0. Ⓑ $2\cos^2 x$. Ⓒ 2. Ⓓ $\cos 2x$.

Câu 45. Biết rằng $\sin^6 x + \cos^6 x = a + b\sin^2 2x$, với a, b là các số thực. Tính $T = 3a + 4b$.

Ⓐ $T = -7$. Ⓑ $T = 1$. Ⓒ $T = 0$. Ⓓ $T = 7$.

Câu 46. Biểu thức $\dfrac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha}$ có kết quả rút gọn bằng

Ⓐ $\sin 2\alpha$. Ⓑ $\cos 2\alpha$. Ⓒ $\tan 2\alpha$. Ⓓ $\cot 2\alpha$.

Câu 47. Biểu thức $\dfrac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$ có kết quả rút gọn bằng

Ⓐ $-\tan^4\alpha$. Ⓑ $\tan^4\alpha$. Ⓒ $-\cot^4\alpha$. Ⓓ $\cot^4\alpha$.

Câu 48. Cho $\sin 2\alpha = \dfrac{3}{4}$. Tính giá trị biểu thức $A = \tan\alpha + \cot\alpha$.

Ⓐ $A = \dfrac{4}{3}$. Ⓑ $A = \dfrac{2}{3}$. Ⓒ $A = \dfrac{8}{3}$. Ⓓ $A = \dfrac{16}{3}$.

Câu 49. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\dfrac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \dfrac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b}$. Ⓑ $\dfrac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \dfrac{\sin a - \sin b}{\sin a + \sin b}$.

Ⓒ $\dfrac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \dfrac{\tan a + \tan b}{\tan a - \tan b}$. Ⓓ $\dfrac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \dfrac{\cot a + \cot b}{\cot a - \cot b}$.

Câu 50. Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2\cos^2 x + \cos x - 1}$.

Ⓐ $\cos x$. Ⓑ $2\cos x - 1$. Ⓒ $2\cos x$. Ⓓ $\cos x - 1$.

Câu 51. Rút gọn biểu thức $P = \dfrac{\cos a + 2\cos 3a + \cos 5a}{\sin a + 2\sin 3a + \sin 5a}$.

Ⓐ $P = \tan a$. Ⓑ $P = \cot a$. Ⓒ $P = \cot 3a$. Ⓓ $P = \tan 3a$.

Câu 52. Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x}$.

Ⓐ $A = \tan 6x$. Ⓑ $A = \tan 3x$.

Ⓒ $A = \tan 2x$. Ⓓ $A = \tan x + \tan 2x + \tan 3x$.

Câu 53. Biết rằng $\dfrac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} + \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \dfrac{\cos ax}{b - \sin ax}$, $(a, b \in \mathbb{R})$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$.

Ⓐ $P = 4$. Ⓑ $P = 1$. Ⓒ $P = 2$. Ⓓ $P = 3$.

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Cho biết $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

a) $\cos\alpha < 0$. **b)** $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$.

c) $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$. **d)** $\tan\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{48 - \sqrt{3}}{11}$.

Câu 2. Cho biết $\cos x = -\dfrac{12}{13}$ và $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$; khi đó

a) $\sin x > 0$. **b)** $\sin x = -\dfrac{5}{13}$.

c) $\cot x = \dfrac{5}{12}$. **d)** $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = \dfrac{5 - 12\sqrt{3}}{26}$.

Câu 3. Biết $\sin 2\alpha = -\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$. Khi đó

a) $\cos\alpha < 0$. **b)** $2\sin\alpha\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$.

c) $\cos\alpha = \dfrac{-2}{\sqrt{5}}, \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **d)** $\cos\alpha = \dfrac{-1}{\sqrt{5}}, \sin\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu 4. Cho $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\dfrac{1}{3}$, với $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) $\sin 2x = -\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$. **b)** $\cos 2x = -\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$. **c)** $\tan 2x = -\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$. **d)** $\sin x + \cos x = 1$.

Câu 5. Mỗi kết quả dưới đây đúng hay sai?

a) $\sin 3x + \sin x = \sin 4x$. **b)** $\sin 3x - \sin x = \cos 2x \sin x$.

c) $\cos 3x + \cos x = 2\cos 2x \cos x$. **d)** $\cos 3x - \cos x = 2\sin 2x \sin x$.

Câu 6. Biết $\cos 2\alpha = -\dfrac{7}{25}$ và $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\cos\alpha = \dfrac{9}{25}$. **b)** $\sin\alpha = \dfrac{16}{25}$. **c)** $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$. **d)** $\cot\alpha = \dfrac{4}{3}$.

Câu 7. Cho $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\cos\alpha = -\dfrac{5}{13}$. **b)** $\cos 2\alpha = -\dfrac{119}{169}$.

c) $\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{12 - 5\sqrt{3}}{26}$. **d)** $\tan\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{7}{17}$.

Câu 8. Biết $\sin a = \dfrac{8}{17}$, $\tan b = \dfrac{5}{12}$ và a, b là các góc nhọn. Khi đó.

a) $\tan a = \dfrac{8}{15}$.
b) $\sin(a-b) = \dfrac{21}{221}$.
c) $\cos(a+b) = \dfrac{14}{22}$.
d) $\tan 2(a+b) = \dfrac{171}{140}$.

Câu 9. Cho $\tan a = \dfrac{1}{2}, 0 < a < \dfrac{\pi}{2}$, $\tan b = \dfrac{1}{3}, 0 < b < \dfrac{\pi}{2}$. Xét tính đúng - sai của các phát biểu sau.

a) $\cot a = 2$.
b) $\tan(a+b) = 1$.
c) $\tan(a-b) = 7$.
d) $\sin(a-2b) = -\dfrac{2\sqrt{5}}{25}$.

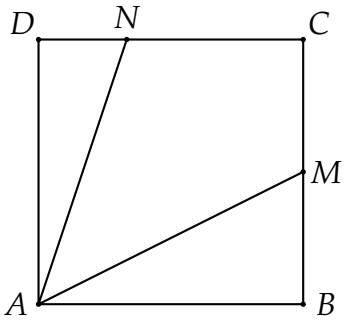
Câu 10. Xét tính đúng - sai của các đẳng thức sau.

a) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}\cos x$.
b) $4\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \sin 4x + \sin 2x - \sin 6x$.
c) $1 + \sin 2x + \cos 2x = 2\sqrt{2}\sin x \cdot \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.
d) $\sin^2 x + 2\sin(a-x)\cdot \sin x \cdot \cos a + \sin^2(a-x) = \cos^2 a$.

Câu 11. Cho $\cos x = -\dfrac{1}{5}$ và $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$.

a) $\sin\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$.
b) $\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.
c) $\tan\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.
d) $\cot\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 12. Trên một mảnh giấy hình vuông $ABCD$, bác An đặt một chiếc đèn pin tại vị trí A chiếu chùm sáng phân kì sang góc C. Bác An nhận thấy góc chiếu sáng của đèn pin giới hạn bởi hai tia AM và AN, ở đó các điểm M, N lần lượt thuộc BC, CD sao cho $BM = \dfrac{1}{2}BC, DN = \dfrac{1}{3}DC$ (Hình bên). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $\tan\widehat{BAM} = \dfrac{1}{2}$.
b) $\tan\widehat{DAN} = \dfrac{1}{3}$.
c) $\widehat{BAM} + \widehat{DAN} = 60^\circ$.
d) Góc chiếu sáng của đèn pin bằng 30°.

Câu 13. Phương trình dao động điều hòa của một vật tại thời điểm t giây được cho bởi công thức $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó $x(t)$ (cm) là li độ của vật tại thời điểm t giây, A là biên độ dao động ($A > 0$), $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động và ω là tần số góc. Xét hai dao động điều hòa có phương trình lần lượt là

$$x_1(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right)\text{ (cm) và } x_2(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right)\text{ (cm).}$$

Đặt $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ là phương trình tổng hợp của hai dao động này. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tần số góc của dao động tổng hợp là $\dfrac{\pi}{4}$.
b) Phương trình của dao động tổng hợp là $x(t) = 3\cos\left(\dfrac{\pi}{4}t + \dfrac{\pi}{12}\right)$.
c) Biên độ của dao động tổng hợp trên bằng 3.
d) Pha ban đầu của dao động tổng hợp trên là $\dfrac{\pi}{12}$.

3 Tự luận.

Bài 1. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{15}\cos\dfrac{\pi}{10}+\sin\dfrac{\pi}{10}\cos\dfrac{\pi}{15}}{\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{\pi}{5}-\sin\dfrac{2\pi}{15}\cdot\sin\dfrac{\pi}{5}}$; 1

b) $B=\sin\dfrac{\pi}{32}\cos\dfrac{\pi}{32}\cos\dfrac{\pi}{16}\cos\dfrac{\pi}{8}$. $\frac{\sqrt{2}}{16}$

Bài 2. Tính

a) $\cos\left(a+\dfrac{\pi}{6}\right)$, biết $\sin a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ và $\dfrac{\pi}{2}<a<\pi$; $\cos\left(a+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}$

b) $\tan\left(a-\dfrac{\pi}{4}\right)$, biết $\cos a=-\dfrac{1}{3}$ và $\pi<a<\dfrac{3\pi}{2}$. $\tan\left(a-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{9\sqrt{3}-8\sqrt{2}}{5}$

Bài 3. Tính $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\tan 2a$, biết:

a) $\sin a=\dfrac{1}{3}$ và $\dfrac{\pi}{2}<a<\pi$; $\sin 2a=-\frac{4\sqrt{2}}{9},\cos 2a=\frac{7}{9},\tan 2a=-\frac{4\sqrt{2}}{7}$

b) $\sin a+\cos a=\dfrac{1}{2}$ và $\dfrac{\pi}{2}<a<\dfrac{3\pi}{4}$. $\sin 2a=-\frac{3}{4},\cos 2a-\frac{\sqrt{7}}{4},\tan 2a=\frac{3\sqrt{7}}{7}$

Bài 4. Cho $\cos a=\dfrac{3}{5}$ với $0<a<\dfrac{\pi}{2}$. Tính: $\sin\left(a+\dfrac{\pi}{6}\right),\cos\left(a-\dfrac{\pi}{3}\right),\tan\left(a+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

$\sin\left(a+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3+4\sqrt{3}}{10},\cos\left(a-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3+4\sqrt{3}}{10},\tan\left(a+\frac{\pi}{4}\right)=-7$

Bài 5. Tính các giá trị lượng giác của góc 2α, biết:

a) $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ và $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$; $\sin 2\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3},\cos 2\alpha=\frac{1}{3},\tan 2\alpha=2\sqrt{2},\cot 2\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

b) $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{3}{4}$ và $\pi<\alpha<2\pi$. $\sin 2\alpha=\frac{\sqrt{63}}{32},\cos 2\alpha=-\frac{31}{32},\tan 2\alpha=-\frac{\sqrt{63}}{31},\cot 2\alpha=\frac{31}{\sqrt{63}}$

Bài 6. Tính các giá trị lượng giác của góc α, biết:

a) $\cos 2\alpha=\dfrac{2}{5}$ và $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$; $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{7}{10}},\sin\alpha=-\sqrt{\frac{3}{10}},\tan\alpha=-\sqrt{\frac{3}{7}},\cot\alpha=-\sqrt{\frac{7}{3}}$

b) $\sin 2\alpha=-\dfrac{4}{9}$ và $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{3\pi}{4}$. $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{9-\sqrt{65}}{18}},\sin\alpha=\sqrt{\frac{9+\sqrt{65}}{18}},\tan\alpha=-\sqrt{\frac{9+\sqrt{65}}{9-\sqrt{65}}}$

Bài 7. Cho $\tan(a+b)=3,\tan(a-b)=2$. Tính: $\tan 2a,\tan 2b$. $\tan 2a=-1,\tan 2b=\frac{1}{7}$

Bài 8. Cho $\cos 2x=\dfrac{1}{4}$. Tính

a) $A=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$. $A=\frac{3}{8}$

b) $B=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$. $B=-\frac{3}{8}$

Bài 9. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\alpha$; $\sin\alpha$

b) $(\cos\alpha+\sin\alpha)^2-\sin 2\alpha$. 1

Bài 10. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{1+\cos x}{\sin x}\left[1+\dfrac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}\right]$.

Tính giá trị A nếu $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ và $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$. $A=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

Bài 11. Chứng minh $\dfrac{\sin^4 a+\cos^4 a-1}{\sin^6 a+\cos^6 a-1}=\dfrac{2}{3}$

Bài 12. Chứng minh đẳng thức sau:

$$\sin(a+b)\sin(a-b)=\sin^2 a-\sin^2 b=\cos^2 b-\cos^2 a.$$

Bài 13. Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta có $\sin A=\sin B\cos C+\sin C\cos B$.

Bài 14. Chứng minh các biểu thức sau đây không phụ thuộc x:

a) $A=2\cos^4 x-\sin^4 x+\sin^2 x\cos^2 x+3\sin^2 x$

b) $B=\dfrac{2}{\tan x-1}+\dfrac{\cot x+1}{\cot x-1}$

Bài 15. Rút gọn các biểu thức dưới đây:

a) $A=4\sin\dfrac{x}{3}\sin\dfrac{x+\pi}{3}\sin\dfrac{x-\pi}{3}$

b) $B=4\cos\dfrac{x}{3}\cos\dfrac{x+\pi}{3}\cos\dfrac{x-\pi}{3}$

c) $C=\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{x}{2}\right)$

d) $D=\dfrac{\sin x+\sin 4x+\sin 7x}{\cos x+\cos 4x+\cos 7x}$

e) $E=\dfrac{\cos x-\cos 2x+\cos 3x}{\sin x-\sin 2x+\sin 3x}$

f) $F=\dfrac{\sin^2 4x-\sin^2 2x}{\cos^2 x-\cos^2 2x}$

g) $G=\dfrac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\cos a+\cos b}$

h) $H=\dfrac{\cos^2 a-\cos^2 b}{\sin(a-b)}$

i) $I=\sin x\,(1+2\cos 2x+2\cos 4x+2\cos 6x)$

Bài 16. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến x

$$P=\frac{1-\cos 2x+\sin 2x}{1+\cos 2x+\sin 2x}\cdot\cot x.$$

Bài 17. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức say đây không phụ thuộc vào biến số x:

$$S=\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right).$$

Bài 18. Chứng minh các đẳng thức sau đây (trong điều kiện có nghĩa của biểu thức):

a) $\tan x=\dfrac{\sin x+\sin 2x}{1+\cos x+\cos 2x}$.

b) $\tan^2 x=\dfrac{2\sin 2x-\sin 4x}{2\sin 2x+\sin 4x}$.

c) $\sin^4 x+\cos^4 x-6\sin^2 x\cos^2 x=\cos 4x$.

Bài 19. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến số x.

a) $A=8\sin^4 x+4\cos 2x-\cos 4x-3$.

b) $B=\dfrac{\tan 2x}{\tan x}-\dfrac{1}{\cos 2x}$.

Bài 20. Chứng minh các đẳng thức sau đây:

a) $\cos 5x\cos 3x+\sin 7x\sin x=\cos 2x\cos 4x$

b) $\sin 5x-2\sin x(\cos 2x+\cos 4x)=\sin x$

c) $\cos 5x\cos x+\sin 3x\sin x=\cos 2x\cos 4x$

d) $2(\sin a\cos 2a-\sin 2a\cos 3a)+\sin 5a=\sin 3a$

e) $\sin 2\alpha-\sin 4\alpha+\sin 6\alpha=4\sin\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha$

Bài 21. Chứng minh các đẳng thức sau đây:

a) $\cos a + \cos b + \sin(a+b) = 4\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{a}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{b}{2}\right)$.

b) $\sin^2 a + \sin^2 b + 2\sin a \sin b \cos(a+b) = \sin^2(a+b)$.

c) $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right) - \cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right) = \cos x$.

Bài 22. Chứng minh giá trị của biểu thức

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)$$

không phụ thuộc vào biến số x:

Bài 23. Cho A, B, C là 3 đỉnh của một tam giác. Chứng minh rằng

a) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$.

b) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

c) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$.

d) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = -4\cos A \cos B \cos C$.

e) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A \cos B \cos C$.

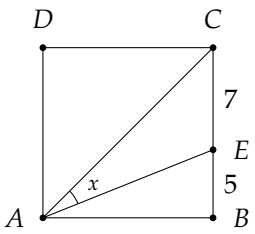
f) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$.

g) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$.

h) $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2} + \tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2} = 1$.

Câu 14. Cho hình vuông $ABCD$ như hình vẽ bên. Tính $\tan x$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

0,41



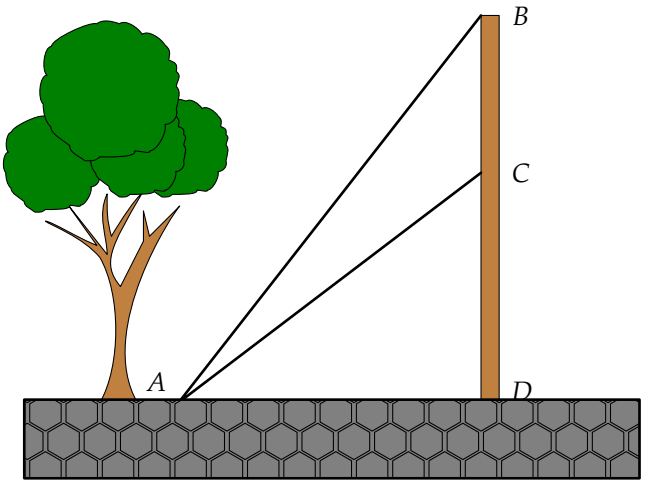
Bài 24. Một vận động viên bắn súng nằm trên mặt đất để ngắm bắn các mục tiêu khác nhau trên một bức tường thẳng đứng. Vận động viên bắn trúng một mục tiêu cách mặt đất 25 (m) tại một góc ngắm (góc hợp bởi phương ngắm với phương ngang). Nếu giảm góc ngắm đi một nửa thì vận động viên bắn trúng mục tiêu cách mặt đất 10 (m). Tính khoảng cách từ vận động viên đến bức tường? Kết quả làm tròn đến hàng phần chục. 22,4

Bài 25. Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t, A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hoà có phương trình:

$$x_1(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)\text{ (cm)},$$
$$x_2(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right)\text{ (cm)}.$$

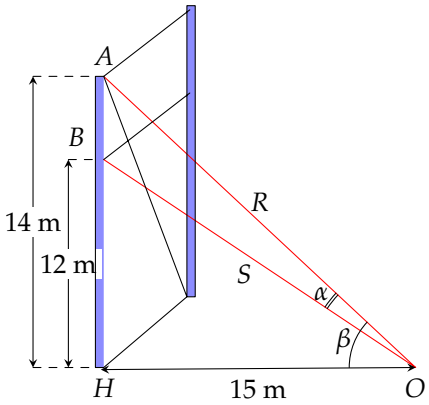
Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

Bài 26. Từ một vị trí A , người ta buộc hai sợi cáp AB và AC đến một cái trụ cao 15m, được dựng vuông góc với mặt đất, chân trụ ở vị trí D. Biết $CD = 9$m và $AD = 12$m. Tìm góc nhọn $\alpha = \widehat{BAC}$ tạo bởi hai sợi dây cáp đó, đồng thời tính gần đúng α (làm tròn đến hàng phần chục, đơn vị độ).



14,5

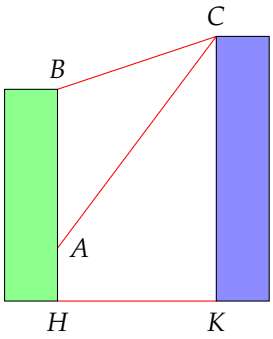
Bài 27. Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14 m. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12 m. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15 m.



a) Tính $\tan\alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên. $\frac{10}{131}$

b) Tìm góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ). $\approx 4°$

Bài 28. Có hai chung cư cao tầng xây cạnh nhau với khoảng cách giữa chúng là $HK = 20$ m. Để đảm bảo an ninh, trên nóc chung cư thứ hai người ta lắp camera ở vị trí C. Gọi A, B lần lượt là vị trí thấp nhất, cao nhất trên chung cư thứ nhất mà camera có thể quan sát được (Hình 19). Hãy tính số đo góc ACB (phạm vi camera có thể quan sát được ở chung cư thứ nhất). Biết rằng chiều cao của chung cư thứ hai là $CK = 32$ m, $AH = 6$ m, $BH = 24$ m (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị độ).



$\approx 30,6°$

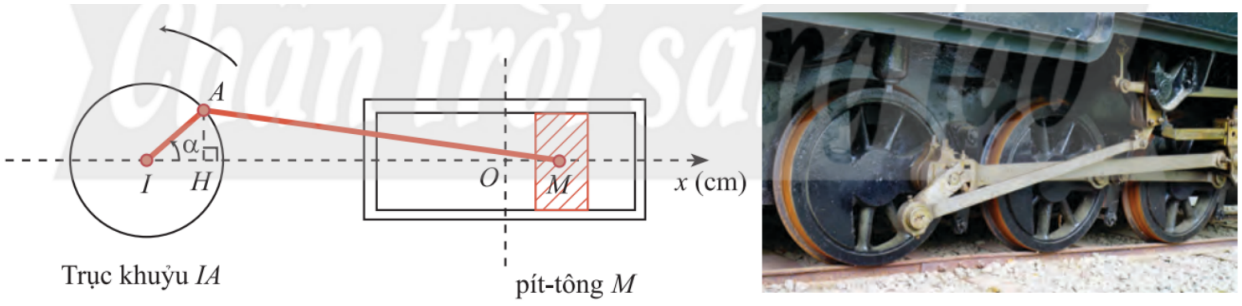
Bài 29. Trong Hình 4, pít-tông M của động cơ chuyển động tịnh tiến qua lại dọc theo xi-lanh làm quay trục khuỷu IA. Ban đầu I, A, M thẳng hàng. Cho α là góc quay của trục khuỷu, O là vị trí của pít-tông khi $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ và H là hình chiếu của A lên Ix. Trục khuỷu IA rất ngắn so với độ dài thanh truyền AM nên có thể xem như độ dài MH không đổi và gần bằng MA.

a) Biết $IA = 8$ cm, viết công thức tính tọa độ x_M của điểm M trên trục Ox theo α.

$x_M = 8\cos\alpha$

b) Ban đầu $\alpha = 0$. Sau 1 phút chuyển động, $x_M = -3$ cm. Xác định x_M sau 2 phút chuyển động. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

$\approx -5{,}8$



Hình 4

Bài 30. Trong Hình 5 , ba điểm M, N, P nằm ở đầu các cánh quạt của tua-bin gió. Biết các cánh quạt dài 31 m, độ cao của điểm M so với mặt đất là 30 m, góc giữa các cánh quạt là $\dfrac{2\pi}{3}$ và số đo góc (OA, OM) là α.

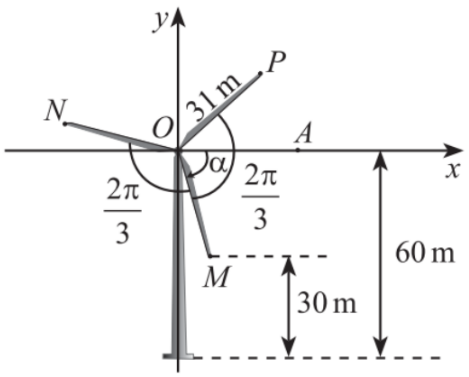
a) Tính $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$.

$\sin\alpha = -\dfrac{30}{31}, \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{61}}{31}$

b) Tính sin của các góc lượng giác (OA, ON) và (OA, OP), từ đó tính chiều cao của các điểm N và P so với mặt đất (theo đơn vị mét). Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

$\approx 68{,}24$





Hình 5

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	A	2	A	3	D	4	A	5	B	6	D	7	D	8	D	9	A	10	D		
11	C	12	A	13	B	14	B	15	B	16	C	17	B	18	B	19	C	20	B		
21	B	22	C	24	D	25	B	26	B	27	C	28	C	29	B	30	C	31	D		
32	C	33	B	34	D	35	D	36	B	37	D	38	D	39	B	40	D	41	A		
42	A	43	C	44	A	45	C	46	C	47	B	48	C	49	C	50	C	51	C		
52	C	53	D																		

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a Đ b Đ c S d S	Câu 2.	a S b Đ c S d Đ
Câu 3.	a Đ b Đ c Đ d S	Câu 4.	a Đ b S c Đ d S
Câu 5.	a S b S c Đ d S	Câu 6.	a S b S c S d S
Câu 7.	a Đ b Đ c Đ d Đ	Câu 8.	a Đ b Đ c S d S
Câu 9.	a Đ b Đ c S d Đ	Câu 10.	a S b Đ c S d S
Câu 11.	a S b S c Đ d Đ	Câu 12.	a Đ b Đ c S d S
Câu 13.	a Đ b S c S d Đ		

§3 HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Định nghĩa hàm số lượng giác

- Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\sin x$ được gọi là hàm số sin, kí hiệu là $y = \sin x$. Tập xác định của hàm số sin là $\mathbb{R}$.
- Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\cos x$ được gọi là hàm số côsin, kí hiệu là $y = \cos x$. Tập xác định của hàm số côsin là $\mathbb{R}$.
- Hàm số cho bằng công thức $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ được gọi là hàm số tang, kí hiệu là $y = \tan x$. Tập xác định của hàm số tang là $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Hàm số cho bằng công thức $y = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ được gọi là hàm số côtang, kí hiệu là $y = \cot x$. Tập xác định của hàm số côtang là $\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2) Hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn

Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathscr{D}$.

- Hàm số $f(x)$ được gọi là **hàm số chẵn** nếu $\forall x \in \mathscr{D}$ thì $-x \in \mathscr{D}$ và $f(-x) = f(x)$. Đồ thị của một hàm số chẵn nhận trục tung là trục đối xứng.
- Hàm số $f(x)$ được gọi là **hàm số lẻ** nếu $\forall x \in \mathscr{D}$ thì $-x \in \mathscr{D}$ và $f(-x) = -f(x)$. Đồ thị của một hàm số lẻ nhận gốc toạ độ là tâm đối xứng.

✎ **Nhận xét.** Để vẽ đồ thị của một hàm số chẵn (tương ứng, lẻ), ta chỉ cần vẽ phần đồ thị của hàm số với những x dương, sau đó lấy đối xứng phần đồ thị đã vẽ qua trục tung (tương ứng, qua gốc tọa độ), ta sẽ được đồ thị của hàm số đã cho.

Hàm số tuần hoàn

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathscr{D}$ được gọi là **hàm số tuần hoàn** nếu tồn tại số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in \mathscr{D}$ ta có:

a) $x + T \in \mathscr{D}$ và $x - T \in \mathscr{D}$; b) $f(x + T) = f(x)$.

Số T dương nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên (nếu có) được gọi là **chu kì** của hàm số tuần hoàn đó.

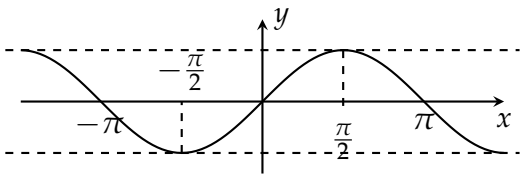
NHẬN XÉT.

- Các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì 2π. Các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì π.
- Để vẽ đồ thị của một hàm số tuần hoàn với chu kì T, ta chỉ cần vẽ đồ thị của hàm số này trên đoạn $[a; a+T]$, sau đó dịch chuyển song song với trục hoành phần đồ thị đã vẽ sang phải và sang trái các đoạn có độ dài lần lượt là T, $2T$, $3T$, ... ta được toàn bộ đồ thị của hàm số.

LƯU Ý. Tổng quát, người ta chứng minh được các hàm số $y = A\sin\omega x$ và $y = A\cos\omega x$ $(\omega > 0)$ là những hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

3) Hàm số $y = \sin x$

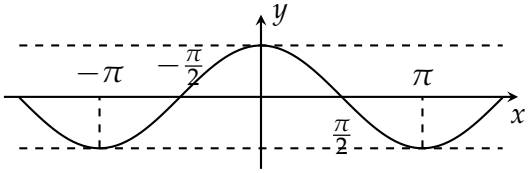
- Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $[-1;1]$, tức là
$$-1 \le \sin x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$



- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.
- Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$, nghĩa là $\sin(x + k2\pi) = \sin x$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

4) Hàm số $y = \cos x$

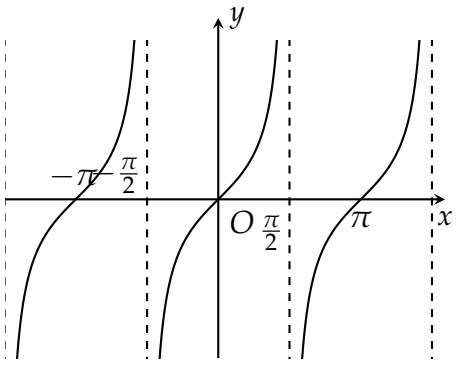
- Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $[-1;1]$, tức là
$$-1 \le \cos x \le 1, \forall x \in R.$$



- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$, nghĩa là $\cos(x + k2\pi) = \cos x$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

5) Hàm số $y = \tan x$

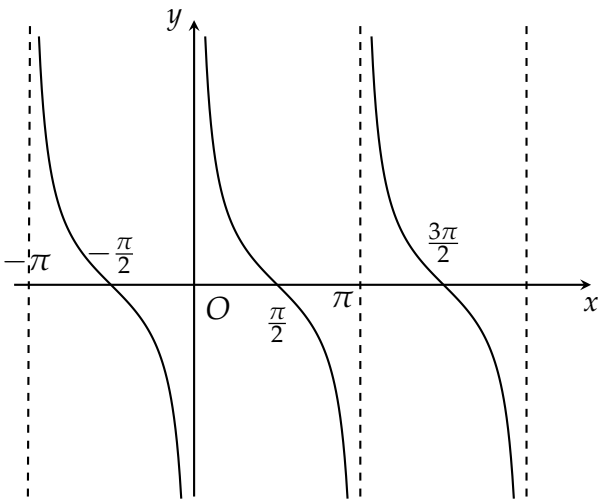
- Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$; Là hàm số lẻ.
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \pi$, nghĩa là $\tan(x + k\pi) = \tan x$, với $k \in \mathbb{Z}$.



- Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

6) Hàm số $y = \cot x$

- Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$.
- Là hàm số lẻ.
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \pi$, nghĩa là $\cot(x + k\pi) = \cot x$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.



II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Tìm tập xác định của hàm số lượng giác

Để tìm tập xác định của hàm số lượng giác ta cần nhớ:

- $y = \tan f(x) = \dfrac{\sin f(x)}{\cos f(x)} \xrightarrow{\text{ĐKXĐ}} \cos f(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $y = \cot f(x) = \dfrac{\cos f(x)}{\sin f(x)} \xrightarrow{\text{ĐKXĐ}} \sin f(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Một số trường hợp tìm tập xác định thường gặp:
  - $y = \dfrac{1}{P(x)} \xrightarrow{\text{ĐKXĐ}} P(x) \neq 0$.
  - $y = \sqrt[2n]{P(x)} \xrightarrow{\text{ĐKXĐ}} P(x) \geq 0$.
  - $y = \dfrac{1}{\sqrt[2n]{P(x)}} \xrightarrow{\text{ĐKXĐ}} P(x) > 0$.

Ví dụ 1

Tìm tập xác định của hàm số sau:

a) $y=\dfrac{1-3\cos x}{\sin x}$. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi\}$

b) $y=\dfrac{\tan 2x}{\cos x}$. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$; $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$

b) $y=\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2-\cos x}}$. $\mathscr{D}=\mathbb{R}$

Dạng 2 Xét tính chẵn lẻ

Ta thực hiện các bước sau:

① Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số – Tập $\mathscr{D}$ phải đối xứng.

② Tính $f(-x)$ (*chỗ nào có biến x, ta thay bởi $-x$*) và thu gọn kết quả. Khi đó

- Nếu $f(-x)=f(x)$: hàm số đã cho là hàm chẵn.
- Nếu $f(-x)=-f(x)$: hàm số đã cho là hàm lẻ.
- Nếu không rơi vào 2 trường hợp trên, ta kết luận hàm số không chẵn, không lẻ.

GHI NHỚ

① Hàm số $y=\sin x$ là hàm số lẻ.

② Hàm số $y=\cos x$ là hàm số chẵn.

③ Hàm số $y=\tan x$ là hàm số lẻ.

④ Hàm số $y=\cot x$ là hàm số lẻ.

Ví dụ 2

Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số:

a) $y = \sin x \cdot \cos x$; hàm số lẻ

b) $y = \tan x + \cot x$; hàm số lẻ

c) $y = \sin^2 x$. hàm số chẵn

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 2 ☆

Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

a) $y = 2x \sin x$; hàm số chẵn

b) $y = \cos x + \sin 2x$; không chẵn, không lẻ

c) $y = \dfrac{\cos 2x}{x}$; hàm số lẻ

d) $y = \tan^7 2x \cdot \sin 5x$. hàm số chẵn

Dạng 3 Xét tính tuần hoàn, tìm chu kì

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D.

Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại một số $T \neq 0$ sao cho

- Với mọi $x \in D$ thì $x \pm T \in D$.
- $f(x+T) = f(x)$.

Số $T > 0$ nhỏ nhất thỏa mãn các tính chất trên gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn.

Hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$.

Hàm số $y = \tan x$, $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.



Các hàm số $y = A\sin\omega x$ và $y = A\cos\omega x$ $(\omega > 0)$ là những hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Ví dụ 3

Tìm chu kì T_0 của hàm số sau:

a) $f(x) = \tan 2x$. $T_0 = \pi$

b) $y = \sin\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right)$. $T = \dfrac{2\pi}{5}$

c) $y = \cos 2x + \sin\dfrac{x}{2}$. $T = 4\pi$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3 ☆

Tìm chu kì của các hàm số sau:

a) $y = \cos(2x - 3)$. $T = \pi$

b) $y = \tan 3\pi x$. $T = \dfrac{1}{3}$

c) $y = \sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right)$. $T = 4\pi$

Dạng 4 Tìm min max và tập giá trị

Lưu ý. Nếu hàm số $y = f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là m, giá trị lớn nhất là M thì tập giá trị của hàm số là $[m; M]$.

Dựa vào tập giá trị của hàm số lượng giác.

- $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 \le |\sin x| \le 1 \\ 0 \le \sin^2 x \le 1 \end{vmatrix}$ hoặc $-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 \le |\cos x| \le 1 \\ 0 \le \cos^2 x \le 1. \end{vmatrix}$
- Biến đổi về dạng: $m \le y \le M$.

Kết luận: $\max y = M$ và $\min y = m$.

Khảo sát parabol.

Trong trường hợp hàm số có dạng bậc hai theo một hàm số lượng giác, ta có thể dụng phương pháp đặt ẩn phụ để đưa về hàm bậc hai, sau đó khảo sát hàm này và kết luận.

Kiến thức cơ bản về parabol:

- Đỉnh parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ là $I\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.
- Bảng biến thiên:

— $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
y		$\searrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	

— $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
y		$\nearrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	

Ví dụ 4

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = 5 - 3\cos 4x$.

$\min y = 2,\ \max y = 8$

b) $y = 3 - 2|\sin 2x|$.

$\min y = 1,\ \max y = 3$

c) $y = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x$.

$\min y = \dfrac{1}{2},\ \max y = 1$

d) $y = 4\sin^2 x - 4\sin x + 3$.

$\min y = 2,\ \max y = 11$

e) $y = \sqrt{5 - 4\sin x + \sin^2 x}$.

$\min y = \sqrt{2},\ \max y = \sqrt{10}$

f) $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ trên $[0; \pi]$.

$\min y = -1,\ \max y = \dfrac{1}{2}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4 ☆

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

$\min y = -2,\ \max y = 2$

b) $y = \sqrt{4 - 2\sin^5(2x)} - 8$.

$\min y = \sqrt{2} - 8,\ \max y = \sqrt{6} - 8$

c) $y = \sin^6 x + \cos^6 x$.

$\min y = \dfrac{1}{4},\ \max y = 1$

d) $y = \cos\left(2x + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \cos 2x$.

$\min y = -1,\ \max y = 1$

e) $y = \cos 2x + 4\sin x$.

$\min y = -5,\ \max y = 3$

f) $y = \sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x}$.

$\min y = -1,\ \max y = 1$

g) $y = 3\cos x + 2$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$\min y = 2,\ \max y = 5$

h) $y = \tan x, x \in \left[-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{6}\right]$.

$\min y = -\sqrt{3},\ \max y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

i) $y = \tan^2 x - \tan x + 2, x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

$\min y = \dfrac{7}{4},\ \max y = 4$

j) $y = 2\sin^2 x - \sin 2x + 7$.

$\min y = -2\sqrt{2} + 8,\ \max y = 2\sqrt{2} + 8$

Bài 5 ☆

Tìm tập giá trị của hàm số $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right).\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin 2x.$ $\left[-\sqrt{2} - \frac{1}{2}; \sqrt{2} - \frac{1}{2}\right]$

Dạng 5 Đồ thị của hàm số lượng giác

Ví dụ 5

Xét sự biến thiên của mỗi hàm số sau trên các khoảng tương ứng:

a) $y = \sin x$ trên khoảng $\left(-\dfrac{9\pi}{2}; -\dfrac{7\pi}{2}\right), \left(\dfrac{21\pi}{2}; \dfrac{23\pi}{2}\right)$;

b) $y = \cos x$ trên khoảng $(-20\pi; -19\pi), (-9\pi; -8\pi)$.

Ví dụ 6

Dùng đồ thị hàm số, tìm giá trị của x trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$ để

a) $y = \sin x$ nhận giá trị bằng 1;

b) $y = \sin x$ nhận giá trị bằng 0;

c) $y = \cos x$ nhận giá trị bằng -1;

d) $y = \cos x$ nhận giá trị bằng 0.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6 ☆

Dùng đồ thị hàm số, tìm giá trị của x trên khoảng $\left(-\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$ để

a) Hàm số $y=\tan x$ nhận giá trị bằng -1;

b) Hàm số $y=\tan x$ nhận giá trị bằng 0;

c) Hàm số $y=\cot x$ nhận giá trị bằng 1;

d) Hàm số $y=\cot x$ nhận giá trị bằng 0.

Dạng 6 Toán thực tế áp dụng hàm số lượng giác

Ví dụ 7

Nhiệt độ ngoài trời T (tính bằng °C) vào thời điểm t giờ trong một ngày ở một thành phố được tính bởi công thức $T=20+4\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t-\dfrac{5\pi}{6}\right)$. Để bảo quản các tác phẩm nghệ thuật, hệ thống điều hoà nhiệt độ của một bào tàng sẽ được tự động bật khi nhiệt độ ngoài trời từ 22°C trở lên. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy xác định khoảng thời gian t trong ngày ($0\le t\le 24$) hệ thống điều hoà được bật. (Theo https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0168192385900139)

Ví dụ 8

Guồng nước (hay còn gọi là cọn nước) không chỉ là công cụ phục vụ sản xuất nông nghiệp, mà đã trở thành hình ảnh quen thuộc của bản làng và là một nét văn hoá đặc trưng của đồng bào dân tộc miền núi phía Bắc. Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5 m; trục của nó đặt cách mặt nước 2 m. Khi guồng quay đều, khoảng cách h (m) từ một ống đựng nước gắn tại một điểm của guồng đến mặt nước được tính theo công thức $h = |y|$, trong đó $y = 2{,}5\sin\left(2\pi x - \dfrac{\pi}{2}\right) + 2$, với x (phút) là thời gian quay của guồng ($x \geq 0$). Hãy chỉ ra một số giá trị của x để ống đựng nước cách mặt nước 2 m.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 7 ☆

Giả sử khi một cơn sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số $h(t) = 90\cos\left(\dfrac{\pi}{10}t\right)$, trong đó $h(t)$ là độ cao tính bằng centimét trên mực nước biển trung bình tại thời điểm t giây. Tìm chiều cao của sóng (cm) (là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng). 180

Bài 8 ☆

Hằng ngày, Mặt Trời chiếu sáng, bóng của một tòa chung cư cao 40 (m) in trên mặt đất, độ dài bóng của tòa nhà này được tính bằng công thức $S(t) = 40\left|\cot\dfrac{\pi}{12}t\right|$, ở đó S được tính bằng mét, còn t là số giờ tính từ 6 giờ sáng. Tìm độ dài bóng của tòa nhà tại các thời điểm 8 giờ sáng (làm tròn đến hàng phần chục). 169, 3

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Đồ thị hàm số $y = \cos x$ đi qua điểm nào sau đây?

Ⓐ $Q(3\pi; 1)$. Ⓑ $P(-1; \pi)$. Ⓒ $N(0; 1)$. Ⓓ $M(\pi; 1)$.

Câu 2. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

Ⓐ Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì π.

Ⓑ Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì π.

Ⓒ Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì π.

Ⓓ Hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kì π.

Câu 3. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn. Ⓑ Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

Ⓒ Hàm số $y = \tan x$ là hàm số chẵn. Ⓓ Hàm số $y = \cot x$ là hàm số chẵn.

Câu 4. Hàm số $y = \sin 2x$ có chu kỳ tuần hoàn là

Ⓐ $T = 2\pi$. Ⓑ $T = \dfrac{\pi}{2}$. Ⓒ $T = \pi$. Ⓓ $T = 4\pi$.

Câu 5. Tập giá trị của hàm số $y = \cos x$ là tập hợp nào sau đây?

Ⓐ $\mathbb{R}$. Ⓑ $(-\infty; 0]$. Ⓒ $[0; +\infty]$. Ⓓ $[-1; 1]$.

Câu 6. Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x$ là

Ⓐ $[-2; 2]$. Ⓑ $[0; 2]$. Ⓒ $[-1; 1]$. Ⓓ $[0; 1]$.

Câu 7. Tìm tập xác định của hàm số $y = \cot x$.

Ⓐ $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\left\{k\dfrac{\pi}{2}|k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ⓑ $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{k\pi|k \in \mathbb{Z}\}$.

Ⓒ $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{k2\pi|k \in \mathbb{Z}\}$. Ⓓ $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi|k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 8. Điều kiện xác định của hàm số $y = \dfrac{1-3\cos x}{\sin x}$ là

Ⓐ $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Ⓑ $x \neq k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ⓒ $x \neq \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$. Ⓓ $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 9. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1+\cos 2x}$ là

Ⓐ $\varnothing$. Ⓑ $\mathbb{R}$. Ⓒ $[-1;+\infty)$. Ⓓ $\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Câu 10. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

Ⓐ $y = \cos x + 5$. Ⓑ $y = \tan x + \cot x$. Ⓒ $y = \sin(-x)$. Ⓓ $y = \sin x - \cos x$.

Câu 11. Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng

Ⓐ $(0;\pi)$. Ⓑ $(\pi;2\pi)$. Ⓒ $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$. Ⓓ $(-\pi;0)$.

Câu 12. Tìm mệnh đề đúng.

Ⓐ Hàm số $y = \cot x$ đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$.

Ⓑ Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{5\pi}{2}\right)$.

Ⓒ Hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên khoảng $(\pi;2\pi)$.

Ⓓ Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Câu 13. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

Ⓐ $y = x \cdot \sin x$. Ⓑ $y = \tan x$. Ⓒ $y = 1 - \sin x$. Ⓓ $y = \cos x \cdot \sin x$.

Câu 14. Cho hàm số $y = \sin x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

Ⓐ Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Ⓑ Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{3\pi}{2};-\dfrac{\pi}{2}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ⓒ Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)$.

Ⓓ Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Câu 15. Tìm tập xác định của hàm số $y = \dfrac{1-\sin x}{\cos x}$.

Ⓐ $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Ⓑ $x \neq -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$. Ⓒ $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$. Ⓓ $x \neq k\pi$.

Câu 16. Hàm số $y = 3 - 5\sin x$ có giá trị lớn nhất bằng

Ⓐ 2. Ⓑ 4. Ⓒ 6. Ⓓ 8.

Câu 17. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sin x + 5$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 5. Ⓓ 4.

Câu 18. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 1 + 3\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Ⓐ $\min y = -2, \max y = 4$. Ⓑ $\min y = 2, \max y = 4$.

Ⓒ $\min y = -2, \max y = 3$. Ⓓ $\min y = -1, \max y = 4$.

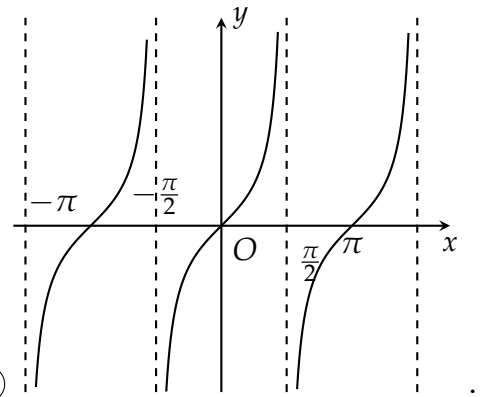
Câu 19. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 3 - 2\cos^2 3x$.

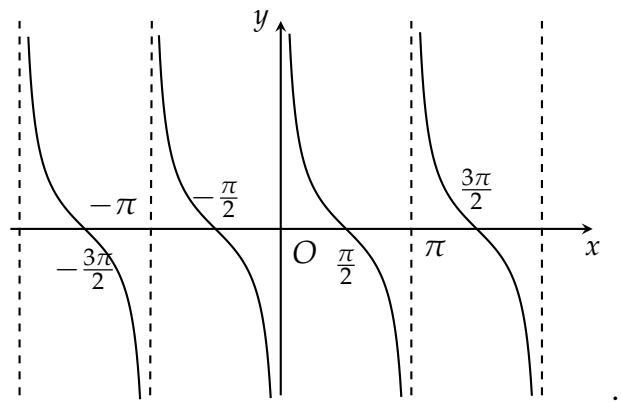
Ⓐ $\min y = 1, \max y = 2$.
Ⓑ $\min y = 1, \max y = 3$.
Ⓒ $\min y = 2, \max y = 3$.
Ⓓ $\min y = -1, \max y = 3$.

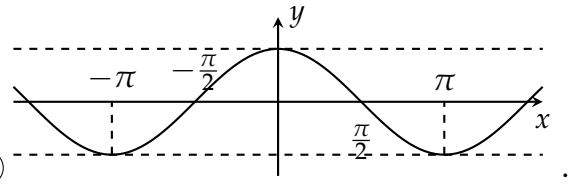
Câu 20. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \sqrt{2\sin x + 3}$.

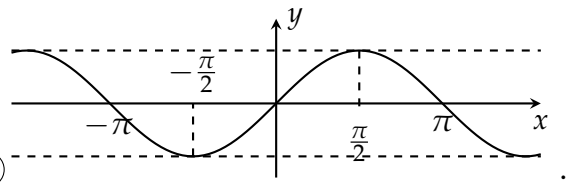
Ⓐ $\max y = \sqrt{5}, \min y = 1$.
Ⓑ $\max y = \sqrt{5}, \min y = 2\sqrt{5}$.
Ⓒ $\max y = \sqrt{5}, \min y = 2$.
Ⓓ $\max y = \sqrt{5}, \min y = 3$.

Câu 21. Đồ thị nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = \sin x$?

Ⓐ 

Ⓑ 

Ⓒ 

Ⓓ 

Câu 22. Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

Ⓐ $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
Ⓑ $(0; \pi)$.
Ⓒ $\left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.
Ⓓ $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$.

Câu 23. Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

Ⓐ $(0; 2\pi)$.
Ⓑ $\left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.
Ⓒ $(-\pi; 0)$.
Ⓓ $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Câu 24. Tìm tập giá trị của hàm số $y = \sin x - 1$

Ⓐ $[0;1]$. Ⓑ $[-1;0]$. Ⓒ $[-2;0]$. Ⓓ $[2;0]$.

Câu 25. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \dfrac{\tan x - 1}{\sin x} + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Ⓐ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Ⓑ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Ⓒ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ⓓ $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Câu 26. Tập xác định của hàm số $y = \tan 2x$ là

Ⓐ $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ⓑ $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Ⓒ $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\left\{k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ⓓ $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 27. Gọi M là giá trị lớn nhất, m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4\sin x \cos x + 1$. Tính $M + m$.

Ⓐ 2. Ⓑ 4. Ⓒ 3. Ⓓ -1.

Câu 28. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\cos^2 x - \sin x + 3$.

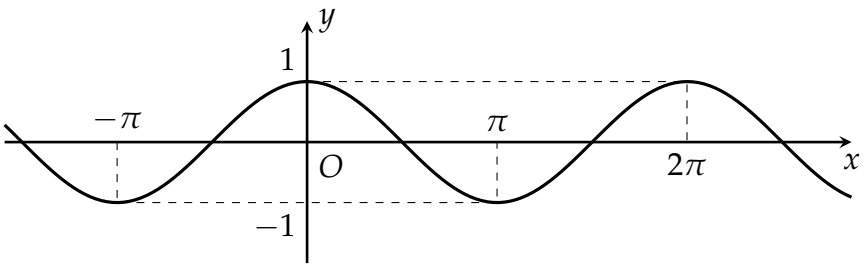
Ⓐ $\min\limits_{[-1;1]} y = 4; \max\limits_{[-1;1]} y = \dfrac{41}{8}$. Ⓑ $\min\limits_{[-1;1]} y = 2; \max\limits_{[-1;1]} y = 4$.

Ⓒ $\min\limits_{[-1;1]} y = -\dfrac{41}{8}; \max\limits_{[-1;1]} y = 2$. Ⓓ $\min\limits_{[-1;1]} y = 2; \max\limits_{[-1;1]} y = \dfrac{41}{8}$.

Câu 29. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{1 - \sin 2x}$ là

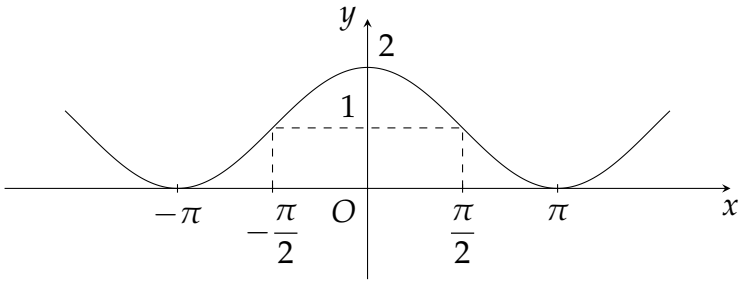
Ⓐ $\sqrt{2}$. Ⓑ 2. Ⓒ 0. Ⓓ 1.

Câu 30. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A,B,C,D. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



Ⓐ $y = 1 + \sin x$. Ⓑ $y = 1 - \sin x$. Ⓒ $y = \sin x$. Ⓓ $y = \cos x$.

Câu 31. Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án **A**, **B**, **C**, **D**. Hỏi đó là hàm số nào?



Ⓐ $y = \cos x + 1$. Ⓑ $y = 2 - \sin x$. Ⓒ $y = 2\cos x$. Ⓓ $y = \cos^2 x + 1$.

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Xét tính đúng - sai của các phát biểu sau.

a) Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π.

b) Hàm số $y = \cos x$ là hàm số lẻ.

c) Hàm số $y = \tan\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}\middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) Hàm số $y = -7\cos x + 5$ có giá trị lớn nhất là -2.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x) = 2\cos x + 3$. Xét tính đúng - sai của các phát biểu sau.

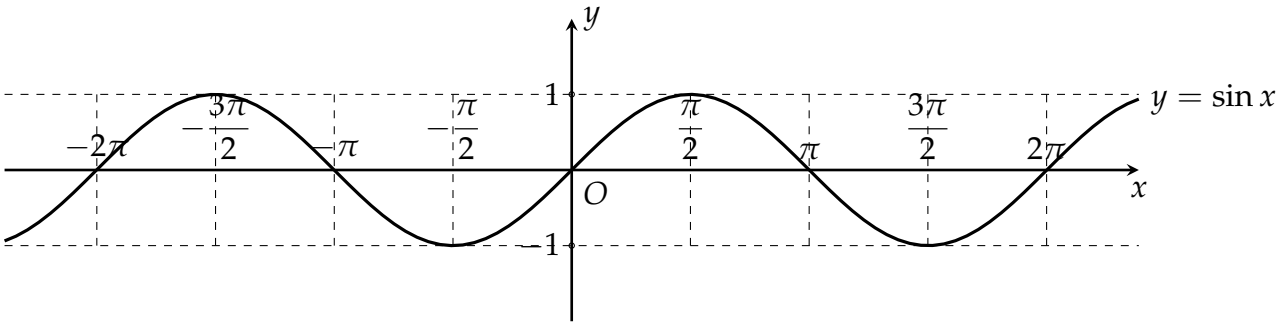
a) Tập xác định của hàm số trên là $\mathbb{R}$.

b) Hàm số trên là hàm số chẵn.

c) Tập giá trị của hàm số trên là $[-1;5]$.

d) Đồ thị hàm số trên cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3..

Câu 3. Hình bên vẽ đồ thị $y = \sin x$.



Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề.

a) Hàm số trên là hàm số chẵn, đối xứng qua trục Oy.

b) Hàm số trên tuần hoàn với chu kì 2π.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{5\pi}{2}; -\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

d) Trong khoảng từ $-\dfrac{5\pi}{6}$ đến $\dfrac{7\pi}{6}$, $\sin x \geq \dfrac{1}{2}$ khi và chỉ khi $\dfrac{\pi}{6} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{6}$.

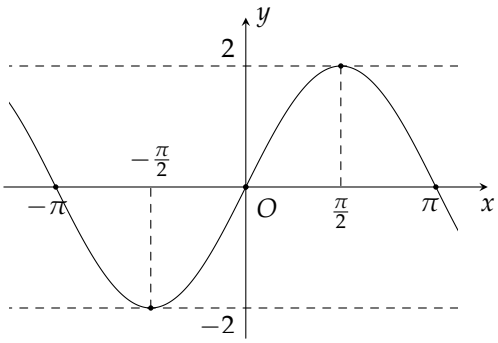
Câu 4. Cho hàm số $y = 2\sin x$ có đồ thị như hình bên. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

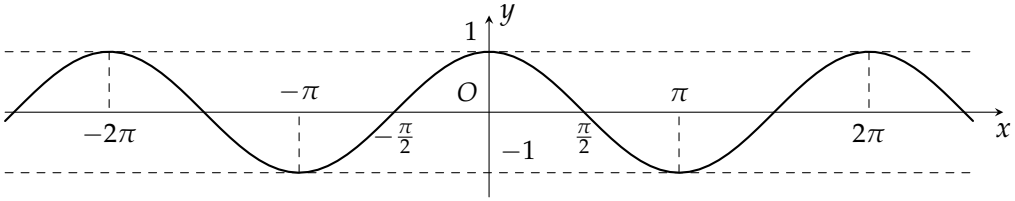
b) Tập giá trị của hàm số là $[-1;1]$.

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;2)$.

d) Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = -1$ tại đúng 2 điểm phân biệt.



Câu 5. Cho đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$ như hình bên dưới



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

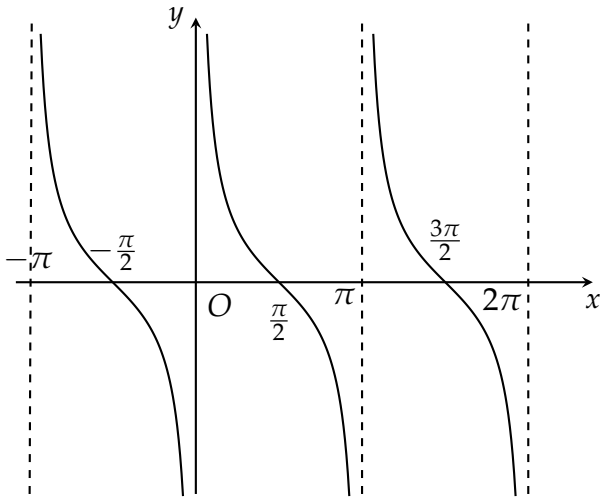
a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\pi;\pi)$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2\pi;-\pi)$.

c) Trên đoạn $[-2\pi;2\pi]$, hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1.

d) Trên đoạn $[-2\pi;2\pi]$, có đúng 3 giá trị của x để hàm số nhận giá trị bằng 0.

Câu 6. Cho hàm số $y=\cot x$ có đồ thị như hình bên dưới.



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ ..

b) Hàm số nghịch biến trên $(-\pi;\pi)$.

c) Trên $[-\pi;\pi]$ có đúng ba giá trị của x để $\cot x=0$.

d) Trên $[0;\pi]$, $\cot x<1$ khi và chỉ khi $x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\pi\right)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)=2\sin^2 x-5$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số tuần hoàn với chu kì 2π.

b) Hàm số là một hàm số chẵn.

c) Giá trị lớn nhất của hàm số đạt được khi $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, với $k\in\mathbb{Z}$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -3.

Câu 8. Giả sử vận tốc v (tính bằng lít/giây) của luồng khí trong một chu kì hô hấp (tức là thời gian từ lúc bắt đầu của một nhịp thở đến khi bắt đầu của nhịp thở tiếp theo) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi được cho bởi công thức $v=0{,}85\sin\dfrac{\pi t}{3}$, trong đó t là thời gian (tính bằng giây). Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Vận tốc của luồng khí tại giây thứ ba là 0 lít/giây.

b) Thời gian của một chu kì hô hấp đầy đủ là 3 giây.

c) Số chu kì hô hấp trong một phút của người đó là 10.

d) Thời điểm lần đầu vận tốc của luồng khí đạt giá trị lớn nhất là $t=0{,}5$ giây.

Câu 9. Giả sử khi một cơn sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hóa bởi hàm số $h(t)=90\cos\left(\dfrac{\pi}{10}t\right)$, trong đó $h(t)$ là độ cao tính bằng centimét trên mực nước biển trung bình tại thời điểm t giây.

a) Độ cao trên mực nước biển trung bình tại thời điểm $t=5$ giây là 0 (cm).

b) Chu kì của sóng là 20 (giây).

c) Chiều cao của sóng (khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng) là 90 (cm).

d) Số lần xuất hiện đỉnh sóng trong một phút là 3.

Câu 10. Chiều cao so với mực nước biển trung bình tại thời điểm t (giây) của mỗi cơn sóng được cho bởi hàm số $h(t) = 75\sin\left(\dfrac{\pi t}{8}\right)$, trong đó $h(t)$ được tính bằng centimét.

a) Chiều cao của sóng tại các thời điểm 5 giây bằng 69,3 (cm).

b) Chiều cao của sóng tại các thời điểm 20 giây bằng 75 (cm).

c) Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc $t = 0$ giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 6 giây.

d) Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc $t = 0$ giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 18 giây. (Tất cả kết quả được làm tròn đến hàng phần mười).

Câu 11. Chiều cao so với mực nước biển trung bình tại thời điểm t (giây) của mỗi cơn sóng được cho bởi hàm số $h(t) = 75\sin\left(\dfrac{\pi t}{8}\right)$, trong đó $h(t)$ được tính bằng centimét.

a) Chiều cao của sóng tại các thời điểm 5 giây bằng 69,3 cm.

b) Chiều cao của sóng tại các thời điểm 20 giây bằng 75 cm.

c) Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc $t = 0$ giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 6 giây.

d) Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc $t = 0$ giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 18 giây (Tất cả kết quả được làm tròn đến hàng phần mười).

Câu 12. Huyết áp là áp lực máu cần thiết tác động lên thành động mạch nhằm đưa máu đi nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Nhờ lực co bóp của tim và sức cản của động mạch mà huyết áp được tạo ra. Giả sử huyết áp của một người thay đổi theo thời gian được cho bởi công thức: $p(t) = 120 + 15\cos 150\pi t$, trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thủy ngân) và thời gian t tính theo đơn vị phút. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $p(t)$ tuần hoàn với chu kì $\dfrac{\pi}{75}$.

b) Thời điểm $t = 0$, huyết áp của người này là 120 mmHg.

c) Huyết áp tâm thu (huyết áp cao nhất) của người này là 135 mmHg.

d) Huyết áp tâm tương (huyết áp thấp nhất) của người này là 105 mmHg.

3 Tự luận.

Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$; $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{k\pi | k\in\mathbb{Z}\}$ b) $y = \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2-\cos x}}$. $\mathbb{R}$

Bài 2. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \sin 2x + \tan 2x$ hàm số lẻ b) $y = \cos x + \sin^2 x$; hàm số chẵn

c) $y = \sin x\cos 2x$ hàm số lẻ d) $y = \sin x + \cos x$. không chẵn, không lẻ

Bài 3. Tìm tập giá trị của các hàm số sau

a) $y = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1$; [−3; 1] b) $y = \sqrt{1 + \cos x} - 2$. [$-2; \sqrt{2} - 2$]

Bài 4. Xét sự biến thiên của mỗi hàm số sau trên các khoảng tương ứng:

a) $y = \sin x$ trên khoảng $\left(-\dfrac{9\pi}{2}; -\dfrac{7\pi}{2}\right), \left(\dfrac{21\pi}{2}; \dfrac{23\pi}{2}\right)$;

b) $y = \cos x$ trên khoảng $(-20\pi; -19\pi), (-9\pi; -8\pi)$.

Bài 5. Dựa vào đồ thị của hàm số $y = \sin x$, xác định các giá trị $x \in [-\pi; \pi]$ thoả mãn $\sin x = \dfrac{1}{2}$.

Bài 6. Dùng đồ thị hàm số, hãy cho biết:

a) Với mỗi $m \in [-1; 1]$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin\alpha = m$;

b) Với mỗi $m \in [-1; 1]$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in [0; \pi]$ sao cho $\cos\alpha = m$;

c) Với mỗi $m \in \mathbb{R}$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan\alpha = m$;

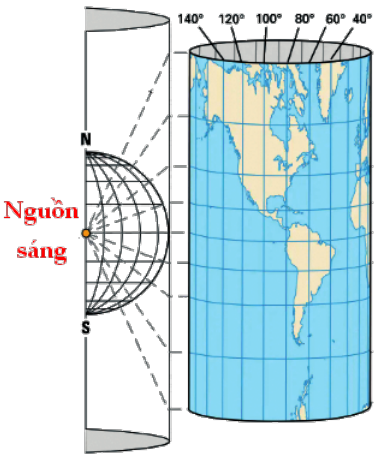
d) Với mỗi $m \in \mathbb{R}$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in (0; \pi)$ sao cho $\cot\alpha = m$.

Bài 7. Giả sử khi một cơn sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số $h(t) = 90\cos\left(\dfrac{\pi}{10}t\right)$, trong đó $h(t)$ là độ cao tính bằng centimét trên mực nước biển trung bình tại thời điểm t giây.

a) Tìm chu kì của sóng. 20 giây

b) Tìm chiều cao của sóng, tức là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng. 180 (cm)

Bài 8. Trong Địa lí, phép chiếu hình trụ được sử dụng để vẽ một bản đồ phẳng như trong hình bên. Trên bản đồ phẳng lấy đường xích đạo làm trục hoành và kinh tuyến 0° làm trục tung. Khi đó tung độ của một điểm có vĩ độ $\varphi°(-90 < \varphi < 90)$ được cho bởi hàm số $y = 20\tan\left(\dfrac{\pi}{180}\varphi\right)$ (cm). Sử dụng đồ thị hàm số tang, hãy cho biết những điểm ở vĩ độ nào nằm cách xích đạo không quá 20 (cm) trên bản đồ. (Theo https://geologyscience.com/geology/types-of-maps/)



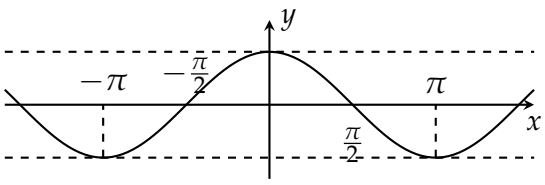
−45° đến 45°

Bài 9. Số giờ có ánh sáng của thành phố T ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3 \cdot \sin\left[\dfrac{\pi}{182}(t - 80)\right] + 12$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$. Bạn An muốn đi tham quan thành phố T nhưng lại không thích ánh sáng mặt trời, vậy bạn An nên chọn đi vào ngày nào trong năm để thành phố T có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

353

Bài 10. Hình chữ nhật $ABCD$ có hai đỉnh A, B thuộc trục Ox, hai đỉnh C, D thuộc đồ thị hàm số $y = \cos x$ (xem hình bên).

Biết rằng $AB = \dfrac{2\pi}{3}$. Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng bao nhiêu?

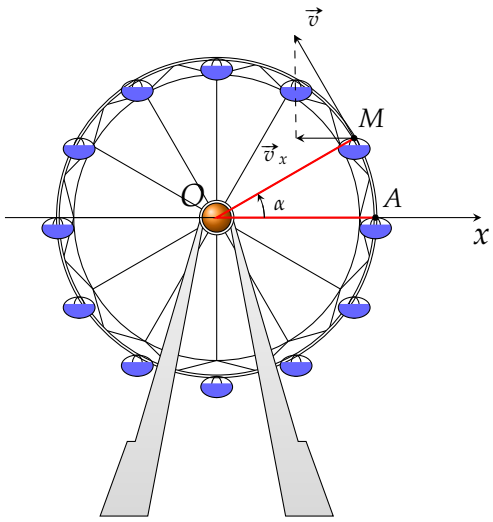


$\frac{\pi}{3}$

Bài 11. Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha = (Ox, OM)$ theo hàm số $v_x = 0{,}3\sin\alpha$ (m/s) (Hình vẽ bên).

a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x.

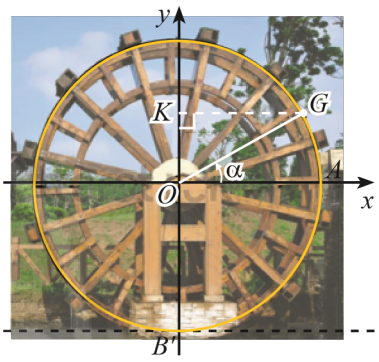
b) Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên ($0 \le \alpha \le 2\pi$), góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng?



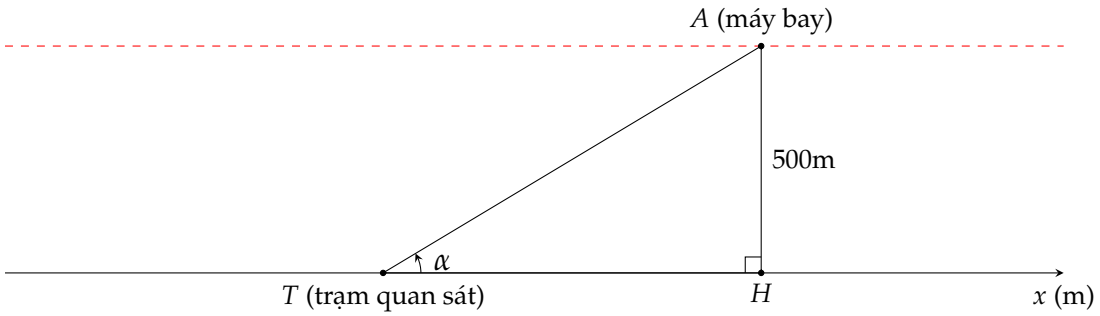
Bài 12. Khoảng cách từ tâm một guồng nước đến mặt nước và bán kính của guồng đều bằng 3 m. Xét gàu G của guồng. Ban đầu gàu G nằm ở vị trí A (Hình vẽ bên).

a) Viết hàm số h biểu diễn chiều cao (tính bằng mét) của gàu G so với mặt nước theo góc $\alpha = (OA, OG)$.

b) Guồng nước quay hết mỗi vòng trong 30 giây. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết ở các thời điểm t nào trong 1 phút đầu, khoảng cách của gàu đến mặt nước bằng 1,5 mét?



Bài 13. Trong hình vẽ bên dưới, một chiếc máy bay A bay ở độ cao 500 m theo một đường thẳng đi ngang qua phía trên trạm quan sát T ở mặt đất. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất là H, α là góc lượng giác (Tx, TA) $(0 < \alpha < \pi)$.



a) Biểu diễn tọa độ x_H của điểm H trên trục Tx theo α.

b) Dựa vào đồ thị hàm số côtang, hãy cho biết với $\dfrac{\pi}{6} < \alpha < \dfrac{2\pi}{3}$ thì x_H nằm trong khoảng nào? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	C	2	B	3	B	4	C	5	D	6	C	7	B	8	D	9	B	10	A
11	A	12	B	13	A	14	D	15	A	16	D	17	A	18	A	19	B	20	A
21	D	22	A	23	C	24	C	25	B	26	B	27	A	28	D	29	A	30	D
31	A																		

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	S	Câu 2.	a	Đ	b	Đ	c	S	d	S
Câu 3.	a	S	b	Đ	c	S	d	Đ	Câu 4.	a	Đ	b	S	c	S	d	S
Câu 5.	a	S	b	Đ	c	Đ	d	Đ	Câu 6.	a	Đ	b	S	c	S	d	Đ
Câu 7.	a	S	b	Đ	c	Đ	d	S	Câu 8.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	S
Câu 9.	a	Đ	b	Đ	c	S	d	Đ	Câu 10.	a	Đ	b	Đ	c	S	d	S
Câu 11.	a	Đ	b	Đ	c	S	d	S	Câu 12.	a	S	b	S	c	Đ	d	Đ

§4 PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Phương trình tương đương

Hai phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm.

2) Phương trình $\sin x = m$

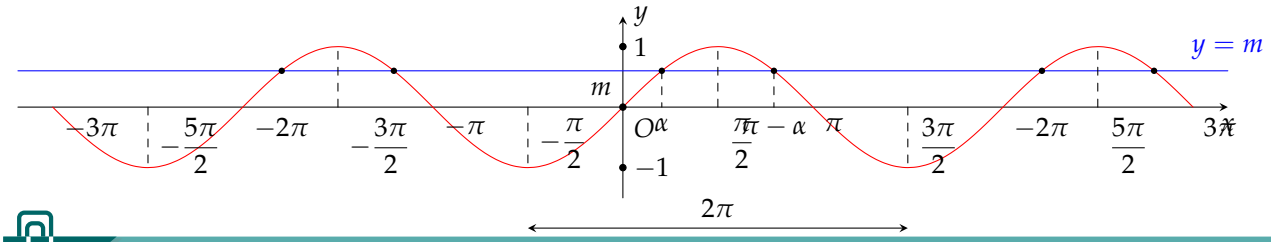
Xét phương trình $\sin x = m$.

- Nếu $|m| > 1$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $|m| \leq 1$ thì phương trình có nghiệm:

$$x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

và $x = \pi - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$,

với α là góc thuộc $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin\alpha = m$.



Lưu ý.

- Một số trường hợp đặc biệt

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

- $\sin u = \sin v \Leftrightarrow u = v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $u = \pi - v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x = \sin a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $x = 180^\circ - a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

3) Phương trình $\cos x = m$

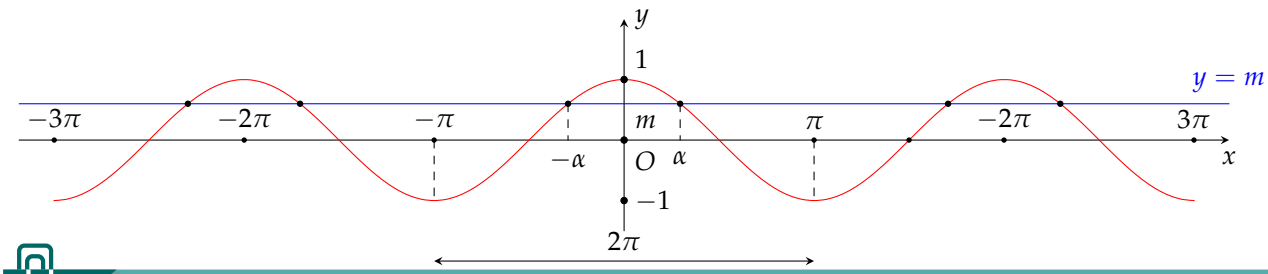
Xét phương trình $\cos x = m$.

- Nếu $|m| > 1$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $|m| \leq 1$ thì phương trình có nghiệm

$$x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

và $x = -\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$,

với α là góc thuộc $[0; \pi]$ sao cho $\cos\alpha = m$.



Lưu ý.

- Một số trường hợp đặc biệt

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

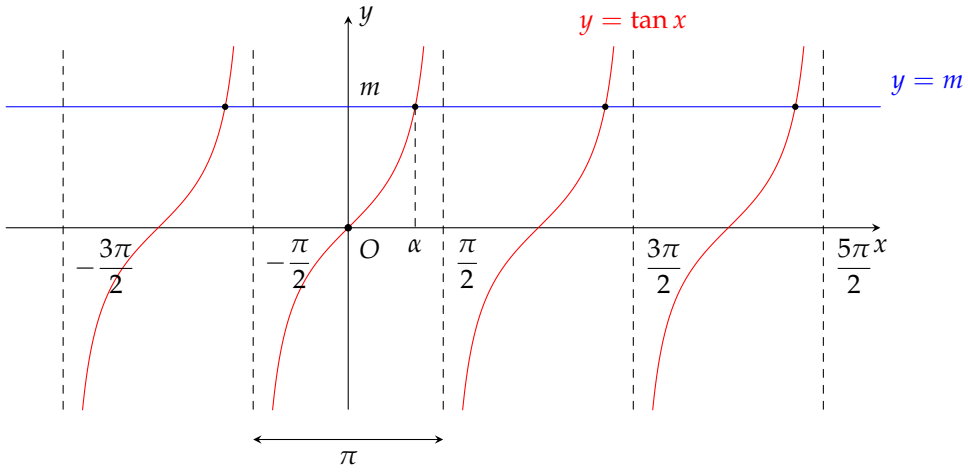
- $\cos u = \cos v \Leftrightarrow u = v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $u = -v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos x = \cos a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $x = -a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

4) Phương trình $\tan x = m$

Với mọi số thực m, phương trình $\tan x = m$ có nghiệm

$$x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

với α là góc thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan \alpha = m$.



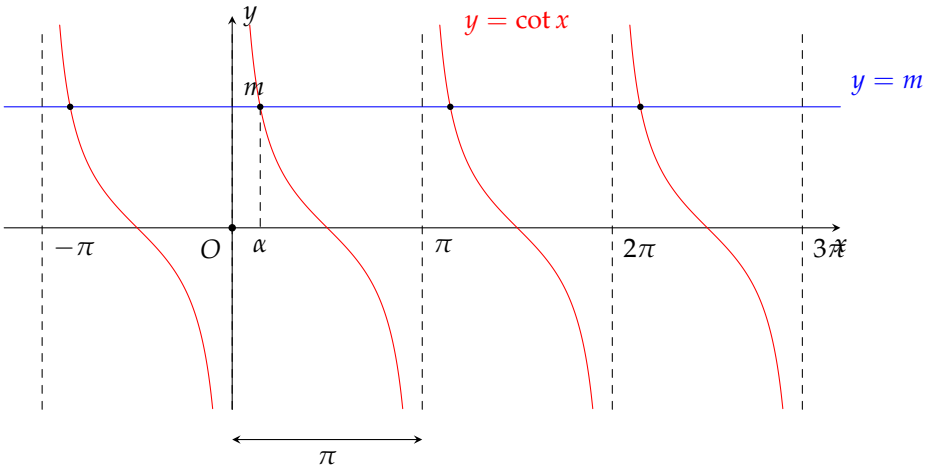
Lưu ý. $\tan x = \tan a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

5) Phương trình $\cot x = m$

Với mọi số thực m, phương trình $\cot x = m$ có nghiệm

$$x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

với α là góc thuộc $(0; \pi)$ sao cho $\cot \alpha = m$.



Lưu ý. $\cot x = \cot a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Để giải phương trình $\cot x = m (m \neq 0)$, ta giải phương trình $\tan x = \dfrac{1}{m}$.

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Phương trình lượng giác cơ bản dùng radian

- Phương trình $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.
- Phương trình $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.
- Phương trình $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Phương trình $\cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 1

Giải các phương trình sau:

1. $\sin 3x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   $S = \left\{\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{2\pi}{3} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$
2. $\sin 3x = -1$.
   $S = \left\{\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$
3. $\tan\left(x + \dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
   $S = \left\{\dfrac{\pi}{12} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$
4. $\cot\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$.
   $S = \left\{\dfrac{5\pi}{36} + k\dfrac{\pi}{3} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$
5. $2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$.
   $S = \left\{\dfrac{\pi}{6} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
6. $2\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = 0$.
   $S = \left\{\dfrac{7\pi}{12} + k\pi; -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Ví dụ 2

Giải các phương trình sau:

a) $\sin x = \dfrac{1}{3}$; b) $\cos x = 0{,}1$; c) $\tan x = 2$. d) $\cot x = 5$.

Ví dụ 3

Tìm số nghiệm của phương trình $\tan x = \tan \dfrac{3\pi}{11}$ trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4}; 2\pi\right)$. 2

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Giải các phương trình sau:

1. $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $S = \left\{-\dfrac{\pi}{3} + k2\pi; \dfrac{4\pi}{3} + k2\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$
2. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $S = \left\{\pm\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$
3. $\sin 2x = -\dfrac{1}{2}$. $S = \left\{-\dfrac{\pi}{12} + k\pi; \dfrac{7\pi}{12} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$
4. $\sin 3x = 0$. $S = \left\{k\dfrac{\pi}{3} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$
5. $\cot\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. $S = \left\{\dfrac{16\pi}{15} + k2\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$
6. $\tan\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$. $S = \left\{-\dfrac{\pi}{12} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Bài 2

Tìm nghiệm của phương trình $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ trên khoảng $(0; \pi)$. vô nghiệm

Dạng 2 Phương trình lượng giác cơ bản dùng độ

- $\sin x = \sin \alpha^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - \alpha^\circ + k360^\circ \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.
- $\cos x = \cos \alpha^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha^\circ + k360^\circ \\ x = -\alpha^\circ + k360^\circ \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.
- $\tan x = \tan \alpha^\circ \Leftrightarrow x = \alpha^\circ + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$.
- $\cot x = \cot \alpha^\circ \Leftrightarrow x = \alpha^\circ + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Ví dụ 4

Giải phương trình

1. $\sin x = \sin 55^\circ$.
   $S = \{55^\circ + k360^\circ;\ 125^\circ + k360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$
2. $\cos x = \cos(-87^\circ)$.
   $S = \{-87^\circ + k360^\circ;\ 87^\circ + k360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$
3. $\tan x = \tan 67^\circ$. $S = \{67^\circ + k180^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$
4. $\cot x = \cot(-83^\circ)$.
   $S = \{-83^\circ + k180^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Ví dụ 5

Giải các phương trình sau:

1. $\sin(x + 20^\circ) = \dfrac{1}{2}$.
   $S = \{10^\circ + k360^\circ;\ 130^\circ + k360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$
2. $\sin(x + 30^\circ) = \sin(x + 60^\circ)$.
   $S = \{45^\circ + k180^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3 ☆

Giải các phương trình sau:

1. $\cos(x-15^\circ)=-\dfrac{1}{2}$.
   $S=\{135^\circ+k360^\circ;\ -105^\circ+k360^\circ \mid k\in\mathbb{Z}\}$
2. $\tan(2x+15^\circ)=-1$.
   $S=\{-30^\circ+k90^\circ \mid k\in\mathbb{Z}\}$
3. $\sin(4x+45^\circ)=\sin 2x$.
   $S=\{-22{,}5^\circ+k180^\circ;\ 22{,}5^\circ+k60^\circ \mid k\in\mathbb{Z}\}$
4. $\sin 2x=\sin(60^\circ-3x)$.
   $S=\{12^\circ+k72^\circ;\ -120^\circ+k360^\circ \mid k\in\mathbb{Z}\}$
5. $\cos 2x=\cos(45^\circ-x)$.
   $S=\{15^\circ+k120^\circ;\ -45^\circ+k360^\circ \mid k\in\mathbb{Z}\}$
6. $\sqrt{3}\tan\left(\dfrac{x}{2}+15^\circ\right)=1$.
   $S=\{30^\circ+k360^\circ \mid k\in\mathbb{Z}\}$

Dạng 3 Phương trình đưa về phương trình lượng giác cơ bản

Lưu ý một số phương trình sau:

- $\sin u=-\sin v\Leftrightarrow \sin u=\sin(-v)$.
- $\sin u=\cos v\Leftrightarrow \sin u=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-v\right)$.
- $\sin u=-\cos v\Leftrightarrow \sin u=\sin\left(v-\dfrac{\pi}{2}\right)$.
- $\cos u=-\cos v\Leftrightarrow \cos u=\cos(\pi-v)$.
- $\cos u=\sin v\Leftrightarrow \cos u=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-v\right)$.
- $\cos u=-\sin v\Leftrightarrow \cos u=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+v\right)$.
- $\tan u=-\tan v\Leftrightarrow \tan u=\tan(-v)$.
- $\tan u=\cot v\Leftrightarrow \tan u=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-v\right)$.
- $\tan u=-\cot v\Leftrightarrow \tan u=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+v\right)$.

Ví dụ 6

Giải các phương trình sau:

1. $\sin 2x + \cos 4x = 0.$

$S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$

2. $\cos 3x = -\cos 7x.$

$S = \left\{ \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}; \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{4} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Ví dụ 7

Giải các phương trình lượng giác sau đây.

a) $\cos x \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$

$S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

b) $\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0.$

$S = \left\{ x = k2\pi; \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

c) $\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x.$

$S = \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

d) $\cot x + \sin x \left(1 + \tan x \cdot \tan\frac{x}{2}\right) = 4.$

$S = \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4

Giải các phương trình lượng giác sau đây.

a) $\sin 2x = \cos 3x$.

$S = \left\{\frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{5}; -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\sin 4x - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

$S = \left\{\frac{\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5}; \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $\sin x + \sin 2x = 0$.

$S = \left\{k\pi; \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $\cos^2 2x = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

$S = \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi; -\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Bài 5

Giải phương trình $\left(3\tan x + \sqrt{3}\right)(2\sin x - 1) = 0 \quad (1)$.

$x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$

Dạng 4 Toán thực tế áp dụng phương trình lượng giác

Ví dụ 8

Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số

$$d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12 \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

a) Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?

80 và 262

b) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

353.

c) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

171

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6 ☆

Hằng ngày, Mặt Trời chiếu sáng, bóng của một toà chung cư cao 40 m in trên mặt đất, độ dài bóng của toà nhà này được tính bằng công thức $S(t) = 40\left|\cot\frac{\pi}{12}t\right|$, ở đó S được tính bằng mét, còn t là số giờ tính từ 6 giờ sáng.

a) Tìm độ dài bóng của toà nhà tại các thời điểm 8 giờ sáng, 12 giờ trưa, 2 giờ chiều và 5 giờ 45 phút chiều.

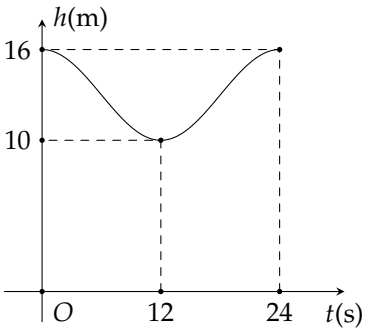
b) Tại thời điểm nào thì độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà?

c) Bóng toà nhà sẽ như thế nào khi thời gian tiến dần đến 6 giờ tối?

Bài 7

Mực nước cao nhất tại một cảng biển là 16 m khi thủy triều lên cao. Sau 12 giờ thủy triều xuống ở mức thấp nhất thì mực nước đo được là 10 m. Đồ thị ở hình bên mô tả sự thay đổi mực nước tại cảng biển đó trong vòng 24 giờ tính từ lúc nửa đêm. Biết chiều cao của mực nước tính theo thời gian t (giờ) $(0 \leq t < 24)$ được cho bởi công thức $h(t) = m + a\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ (m), với m, a là các số thực dương.

Gọi t_1, t_2 là hai thời điểm trong ngày khi chiều cao của mực nước đạt 11,5 m. Tính giá trị của $t_1 + t_2$.



24

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Nghiệm của phương trình $\sin x = -1$ là

Ⓐ $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ⓑ $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ⓒ $x = \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ⓓ $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 2. Tập nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1$ là

Ⓐ $\left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ⓑ $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Ⓒ $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Ⓓ $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 3. Tập nghiệm của phương trình $\sin x = 0$ là

Ⓐ $S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ⓑ $S = \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Ⓒ $S = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Ⓓ $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 4. Họ nghiệm của phương trình $\cos x = 1$ là

Ⓐ $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ⓑ $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ⓒ $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ⓓ $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 5. Tập nghiệm của phương trình $\sin 2x = -1$ là

Ⓐ $S = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ⓑ $S = \left\{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Ⓒ $S = \left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ⓓ $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 6. Tập nghiệm của phương trình $\cos x = -1$ là

Ⓐ $S = \{\pi + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Ⓑ $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Ⓒ $S = \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Ⓓ $S = \left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 7. Tập nghiệm của phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$ là

Ⓐ $\left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{2\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ⓑ $\left\{\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{5\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Ⓒ $\left\{\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{2\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ⓓ $\left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 8. Tập nghiệm của phương trình $\tan x = 1$ là

Ⓐ $S = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ⓑ $S = \left\{-\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Ⓒ $S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ⓓ $S = \left\{\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 9. Phương trình $\sin x = m$ vô nghiệm khi và chỉ khi

Ⓐ $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1. \end{array}\right.$ Ⓑ $-1 \le m \le 1$. Ⓒ $m < -1$. Ⓓ $m > 1$.

Câu 10. Nghiệm của phương trình $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ là

Ⓐ $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$. Ⓑ $x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

Ⓒ $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$. Ⓓ $x = \frac{25\pi}{6} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 11. Tập nghiệm của phương trình $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ là

Ⓐ $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ⓑ $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Ⓒ $S=\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$. Ⓓ $S=\left\{\frac{-\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 12. Trong các phương trình sau, phương trình nào vô nghiệm?

Ⓐ $\sin x-\cos x=1$. Ⓑ $\sin x=-\frac{3}{4}$. Ⓒ $\cot x=2018$. Ⓓ $\sin x=2$.

Câu 13. Khẳng định nào sau đây là đúng

Ⓐ $\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi; k\in\mathbb{Z}$. Ⓑ $\sin x=0\Leftrightarrow x=k2\pi; k\in\mathbb{Z}$.

Ⓒ $\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi; k\in\mathbb{Z}$. Ⓓ $\tan x=0\Leftrightarrow x=k2\pi; k\in\mathbb{Z}$.

Câu 14. Tập nghiệm của phương trình $\sin 2x=\sin x$ là

Ⓐ $S=\left\{k2\pi;\frac{\pi}{3}+k2\pi\,|k\in\mathbb{Z}\right\}$. Ⓑ $S=\left\{k2\pi;\frac{\pi}{3}+\frac{k2\pi}{3}\,|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Ⓒ $S=\left\{k2\pi;-\frac{\pi}{3}+k2\pi\,|k\in\mathbb{Z}\right\}$. Ⓓ $S=\{k2\pi;\pi+k2\pi\,|k\in\mathbb{Z}\}$.

Câu 15. Phương trình $\tan x=\tan\alpha, (\alpha\in\mathbb{R})$ có nghiệm là

Ⓐ $x=\alpha+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$. Ⓑ $x=\alpha+k2\pi; x=\pi-\alpha+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Ⓒ $x=\alpha+k\pi(k\in\mathbb{Z})$. Ⓓ $x=\alpha+k2\pi; x=-\alpha+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Câu 16. Phương trình $\sin 2x=\frac{1}{2}$ có tập nghiệm là

Ⓐ $S=\left\{\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$. Ⓑ $S=\left\{\frac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Ⓒ $C=\left\{\frac{\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$. Ⓓ $S=\left\{\frac{\pi}{18}+k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 17. Phương trình nào sau đây có nghiệm?

Ⓐ $\cos x=-\frac{3}{2}$. Ⓑ $\sin x=\sqrt{2}$. Ⓒ $\tan x=3$. Ⓓ $\cos^2 x-3=0$.

Câu 18. Tập nghiệm của phương trình $2\cos x+\sqrt{3}=0$ là

Ⓐ $\left\{\pm\frac{5\pi}{6}+k2\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$. Ⓑ $\left\{\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Ⓒ $\left\{\pm\frac{\pi}{6}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$. Ⓓ $\left\{\pm\frac{5\pi}{6}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 19. Nghiệm của phương trình $\sqrt{3}+3\tan x=0$ là

Ⓐ $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$. Ⓑ $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$. Ⓒ $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$. Ⓓ $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$.

Câu 20. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau

Ⓐ $\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$. Ⓑ $\cot x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Ⓒ $\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Ⓓ $\tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 21. Giải phương trình $\cot 2x=\cot 20^\circ$.

Ⓐ $x=10^\circ+k90^\circ, k\in\mathbb{Z}$. Ⓑ $x=10^\circ+k180^\circ, k\in\mathbb{Z}$.

Ⓒ $x=20^\circ+k90^\circ, k\in\mathbb{Z}$. Ⓓ $x=20^\circ+k180^\circ, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 22. Phương trình $\cot 3x=\cot x$ có các nghiệm là

Ⓐ $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$. Ⓑ $x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Ⓒ $x=\dfrac{k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$. Ⓓ $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Câu 23. Nghiệm của phương trình $\sin x=\sin\dfrac{\pi}{5}$ là

Ⓐ $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{5}+k\pi \\ x=\dfrac{4\pi}{5}+k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$. Ⓑ $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{5}+k2\pi \\ x=\dfrac{4\pi}{5}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$.

Ⓒ $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{5}+k2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{5}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$. Ⓓ $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{5}+k\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{5}+k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$.

Câu 24. Tập nghiệm của phương trình $\cot x=\sqrt{3}$ là

Ⓐ $\left\{\dfrac{-5\pi}{6}+k\pi; k\in\mathbb{Z}\right\}$. Ⓑ $\left\{\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi; k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Ⓒ $\left\{\dfrac{\pi}{3}+k\pi; k\in\mathbb{Z}\right\}$. Ⓓ $\left\{\dfrac{\pi}{6}+k2\pi; k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 25. Nghiệm của phương trình $\tan 3x=\tan x$ là

Ⓐ $x=\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$. Ⓑ $x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Ⓒ $x=k2\pi, k\in\mathbb{Z}$. Ⓓ $x=\dfrac{k\pi}{6}, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 26. Nghiệm của phương trình $\tan 2x+\sqrt{3}=0$ là

Ⓐ $x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Ⓑ $x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Ⓒ $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$. Ⓓ $x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 27. Tìm nghiệm của phương trình $\cot x=\sqrt{3}$.

Ⓐ $x=60^\circ+k180^\circ$. Ⓑ $x=60^\circ+k360^\circ$.

Ⓒ $x=30^\circ+k180^\circ$. Ⓓ $x=-60^\circ+k180^\circ$.

Câu 28. Số nghiệm của phương trình $\cot 20x=1$ trên đoạn $[-50\pi;0]$ là

Ⓐ 980. Ⓑ 1 001. Ⓒ 1 000. Ⓓ 981.

Câu 29. Số nghiệm của phương trình $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ thuộc đoạn $[\pi;2\pi]$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 0. Ⓓ 1.

Câu 30. Hỏi trên đoạn $[0;2\,018\pi]$, phương trình $\sqrt{3}\cot x-3=0$ có bao nhiêu nghiệm?

Ⓐ 2 018. Ⓑ 6 340. Ⓒ 6 339. Ⓓ 2 017.

Câu 31. Số nghiệm của phương trình $\sin 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ trong khoảng $(0;3\pi)$ là

Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 4. Ⓓ 6.

Câu 32. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cot x=\sqrt{3}$ trên đoạn $[0;2\pi]$ bằng

Ⓐ $\dfrac{\pi}{6}$. Ⓑ $\dfrac{7\pi}{6}$. Ⓒ $\dfrac{5\pi}{6}$. Ⓓ $\dfrac{4\pi}{3}$.

Câu 33. Tổng các nghiệm phương trình $\tan(2x-15^\circ)=1$ trên khoảng $(-90^\circ;90^\circ)$ bằng

Ⓐ 30°. Ⓑ -60°. Ⓒ 0°. Ⓓ -30°.

Câu 34. Tìm tổng các nghiệm của phương trình $\cos\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ trên $[0;\pi]$.

Ⓐ $\frac{47\pi}{18}$. Ⓑ $\frac{4\pi}{18}$. Ⓒ $\frac{45\pi}{18}$. Ⓓ $\frac{7\pi}{18}$.

Câu 35. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-m=2$ có nghiệm. Tính tổng T của các phần tử trong S.

Ⓐ $T=6$. Ⓑ $T=3$. Ⓒ $T=-2$. Ⓓ $T=-6$.

Câu 36. Phương trình $\sin 5x-\sin x=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-2018\pi;2018\pi]$?

Ⓐ 16145. Ⓑ 20181. Ⓒ 20179. Ⓓ 16144.

Câu 37. Đồ thị của các hàm số $y=\sin x$ và $y=\cos x$ cắt nhau tại bao nhiêu điểm có hoành độ thuộc đoạn $\left[-2\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$?

Ⓐ 5. Ⓑ 6. Ⓒ 4. Ⓓ 7.

Câu 38. Với giá trị của tham số m thì phương trình $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-2m=0$ vô nghiệm?

Ⓐ $\left[\begin{array}{l} m<-\frac{1}{2} \\ m>\frac{1}{2} \end{array}\right.$. Ⓑ $\left[\begin{array}{l} m\le-\frac{1}{2} \\ m\ge\frac{1}{2} \end{array}\right.$. Ⓒ $\left[\begin{array}{l} m\le-1 \\ m\ge 1 \end{array}\right.$. Ⓓ $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>1 \end{array}\right.$.

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Cho phương trình $\cos 2x=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $x=0$ là một nghiệm của phương trình.

b) Nghiệm của phương trình là $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, với $k\in\mathbb{Z}$..

c) Phương trình có cùng tập nghiệm với phương trình $\cos^2 x=\frac{1}{2}$.

d) Trên $(0;2\pi)$, phương trình có đúng 2 nghiệm.

Câu 2. Cho phương trình $\sin x=\cos x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $x=\frac{3\pi}{4}$ là một nghiệm của phương trình.

b) Nghiệm của phương trình là $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$, với $k\in\mathbb{Z}$..

c) Phương trình có cùng tập nghiệm với phương trình $\tan x=1$.

d) Trên $(0;2\pi)$, phương trình có đúng 2 nghiệm.

Câu 3. Cho phương trình lượng giác $\sin 2x=-\frac{1}{2}(*)$. Khi đó

a) Phương trình $(*)$ tương đương $\sin 2x=\sin\frac{\pi}{6}$.

b) Trong khoảng từ $(0;\pi)$ phương trình có 3 nghiệm.

c) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0;\pi)$ bằng $\frac{3\pi}{2}$.

d) Trong khoảng $(0;\pi)$ phương trình đã cho có nghiệm lớn nhất bằng $\frac{11\pi}{12}$.

Câu 4. Cho phương trình $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)(*)$. Khi đó

a) Phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=\pi+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

b) Trong khoảng $(0;\pi)$ phương trình có 2 nghiệm.

c) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0;\pi)$ bằng $\frac{7\pi}{6}$.

d) Trong khoảng $(0;\pi)$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng $\frac{5\pi}{6}$.

Câu 5. Cho phương trình lượng giác $2\sin x=\sqrt{2}$. Khi đó

a) Phương trình tương đương $\sin x=\sin\frac{\pi}{4}$.

b) Phương trình có nghiệm là $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi; x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$.

c) Phương trình đã cho có nghiệm dương nhỏ nhất bằng $\frac{\pi}{4}$.

d) Số nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ là hai nghiệm.

Câu 6. Cho phương trình lượng giác $\cot 3x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. (1)

a) Phương trình (1) tương đương với phương trình $\cot 3x=\cot\left(\frac{-\pi}{6}\right)$.

b) Phương trình (1) có nghiệm $x=\frac{\pi}{9}+k\frac{\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$.

c) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ bằng $\frac{-5\pi}{9}$.

d) Phương trình có nghiệm dương nhỏ nhất bằng $\frac{2\pi}{9}$.

Câu 7. Cho phương trình lượng giác $\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3} \\ x=\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$.

b) Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{2\pi}{9}$.

c) Trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ phương trình đã cho có 3 nghiệm.

d) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ bằng $\frac{7\pi}{9}$.

Câu 8. Cho phương trình lượng giác $2\cos x=\sqrt{3}$, khi đó

a) Phương trình có nghiệm $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

b) Trong đoạn $\left[0;\frac{5\pi}{2}\right]$ phương trình có 4 nghiệm.

c) Tổng các nghiệm của phương trình trong đoạn $\left[0;\frac{5\pi}{2}\right]$ bằng $\frac{25\pi}{6}$.

d) Trong đoạn $\left[0;\frac{5\pi}{2}\right]$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng $\frac{13\pi}{6}$.

Câu 9. Cho phương trình lượng giác $2\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\sqrt{3}=0$, khi đó

a) Phương trình tương đương $\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

b) Phương trình có nghiệm là: $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi; x = \dfrac{7\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

c) Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\dfrac{\pi}{4}$.

d) Số nghiệm của phương trình trong khoảng $(-\pi; \pi)$ là hai nghiệm.

Câu 10. Cho phương trình lượng giác $\tan\left(2x - 15^\circ\right) = 1$ $(*)$. Khi đó:

a) Phương trình $(*)$ có nghiệm $\tan(2x - 15^\circ) = 1 \Leftrightarrow x = 30^\circ + k90^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

b) Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng -30°.

c) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(-180^\circ; 90^\circ)$ bằng 180°.

d) Trong khoảng $(-180^\circ; 90^\circ)$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng 60°.

Câu 11. Phương trình $\sin 3x = \sin x$.

a) $x = 0$ là một nghiệm của phương trình.

b) Tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{4}$.

d) Tổng các nghiệm thuộc đoạn $\left[-\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình bằng $\dfrac{29\pi}{4}$.

Câu 12. Cho phương trình $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$.

a) $x = \dfrac{\pi}{4}$ là một nghiệm của phương trình.

b) Tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) Phương trình có ba nghiệm trong đoạn $[0; \pi]$.

d) Tổng các nghiệm của phương trình trong đoạn $[0; \pi]$ là $\dfrac{3\pi}{2}$.

Câu 13. Một vật dao động xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình $x = 1{,}5\cos\left(\dfrac{t\pi}{4}\right)$, trong đó t là thời gian được tính bằng giây và quãng đường $h = |x|$ được tính bằng mét là khoảng cách theo phương ngang của chất điểm đối với vị trí cân bằng. Khi đó

a) Vật ở xa vị trí cân bằng nhất khi $h = 1{,}5$ m.

b) Trong 10 giây đầu tiên, có hai thời điểm vật ở xa vị trí cân bằng nhất.

c) Khi vật ở vị trí cân bằng thì $\cos\left(\dfrac{t\pi}{4}\right) = 0$.

d) Trong khoảng từ 0 đến 20 giây thì vật đi qua vị trí cân bằng 4 lần.

Câu 14. Huyết áp là áp lực máu cần thiết tác động lên thành động mạch nhằm đưa máu đi nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Nhờ lực co bóp của tim và và sức cản của động mạch mà huyết áp được tạo ra. Giả sử huyết áp của một người thay đổi theo thời gian được cho bởi công thức $p(t) = 120 + 15\cos 150\pi t$, trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thủy ngân) và thời gian t tính theo đơn vị phút. Huyết áp cao nhất được gọi là huyết áp tâm thu và huyết áp thấp nhất được gọi là huyết áp tâm trương.

a) $-1 \leq \cos 150\pi t, \forall t \geq 0$.

b) Trong thời gian từ 0 giây đến 30 giây, huyết áp của một người có 75 lần đạt 120 mmHg.

c) $p(2) = 120$ mmHg.

d) Huyết áp tâm thu của người đó là 135 mmHg và huyết áp tâm trương của người đó là 105 mmHg.

3 Tự luận.

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $S = \left\{\dfrac{\pi}{3} + k2\pi;\ \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) $2\cos x = -\sqrt{2}$. $S = \left\{\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi;\ -\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) $\sqrt{3}\tan\left(\dfrac{x}{2} + 15°\right) = 1$. $S = \{30° + k360° \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

d) $\cot(2x - 1) = \cot\dfrac{\pi}{5}$. $S = \left\{\dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 2x = -1$. $S = \left\{-\dfrac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) $\cos 3x = \dfrac{1}{2}$. $S = \left\{\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3};\ -\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) $\tan\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$. $S = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

d) $\cot\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$. $S = \left\{\dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

e) $\sin 2x = \sin\dfrac{\pi}{2}$. $S = \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

f) $\cos(x - 30°) = \cos 45°$. $S = \{75° + k360°;\ -15° + k360° \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

g) $\tan(x + 1) = \tan\dfrac{\pi}{3}$. $S = \left\{\dfrac{\pi}{3} - 1 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

h) $\tan\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = \pi$. $S = \left\{\dfrac{\pi}{3} - \arctan\pi + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

i) $\tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \tan(-x)$. $S = \left\{-\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 2x + \cos 4x = 0$. $S = \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi;\ -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) $\cos 3x = -\cos 7x$. $S = \left\{\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{k\pi}{5};\ \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Bài 4. Tìm $x \in (-\pi; \pi)$ sao cho $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 0$. $-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}$

Bài 5. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin 2x - \sin x + 2\cos x = 1$. $S = \left\{\pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$. $S = \left\{\pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $\tan x + \cot x = 2(\sin 2x + \cos 2x)$. $S = \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $\left(1 + \sin^2 x\right)\cos x + \left(1 + \cos^2 x\right)\sin x = 1 + \sin 2x$. $S = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k2\pi, k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $\sin 2x + 2\sin^2 x = \sin x + \cos x$. $S = \left\{\pm\frac{5\pi}{6} + k2\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

f) $\cos 3x + \cos x = 2\sqrt{3}\cos 2x \sin x$. $S = \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

g) $\cos 3x - \cos x = 2\sin x \cos 2x$. $S = \left\{k\pi, -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

h) $2\sin^2 x - \sin 2x + \sin x + \cos x = 1$. $S = \left\{k2\pi, \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

i) $\cos x + \tan x = 1 + \tan x \sin x$. $S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

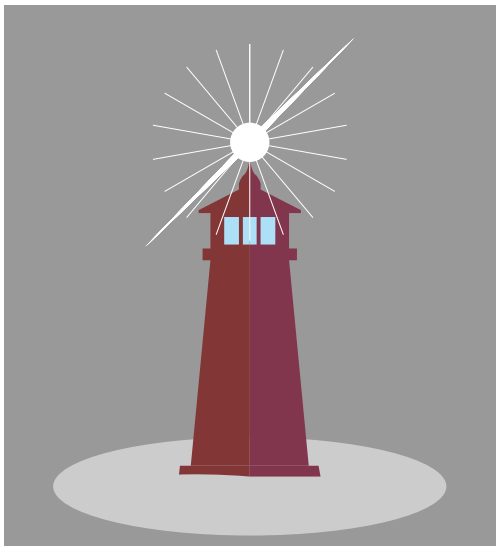
j) $\tan x = \sin 2x - 2\cot 2x$. $S = \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

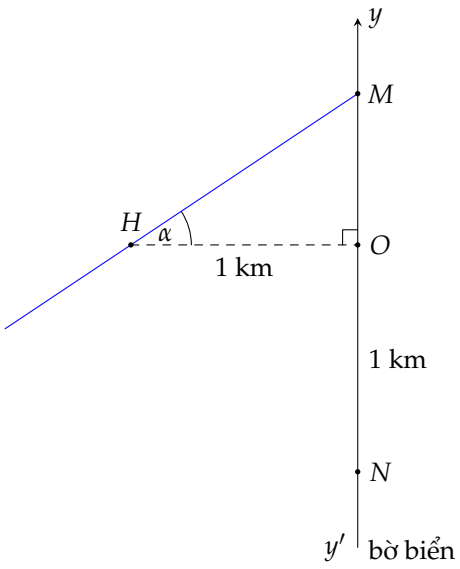
k) $4\cos^2 x - 2\sin x + 2\sin 2x - 4\cos x + 1 = 0$. $S = \left\{\pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, \pm\alpha - \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

l) $4\sin^2 x - 2\sqrt{3}\cos x + 2\sin 2x = 4\sqrt{3}\sin x - 3$.
$S = \left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{2\pi}{3} + k2\pi, -\frac{\pi}{4} + \alpha + k2\pi, \frac{3\pi}{4} - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Bài 6. Trong hình dưới, ngọn đèn trên hải đăng H cách bờ biển yy' một khoảng $HO = 1$ km. Đèn xoay ngược chiều kim đồng hồ với tốc độ $\frac{\pi}{10}$ rad/s và chiếu hai luồng ánh sáng về hai phía đối diện nhau. Khi đèn xoay, điểm M mà luồng ánh sáng của hải đăng rọi vào bờ biển chuyển động dọc theo bờ.

(Theo https://www:mnhs.org/splitrock/learn/technology)





a) Ban đầu luồng sáng trùng với đường thẳng HO. Viết hàm số biểu thị toạ độ y_M của điểm M trên trục Oy theo thời gian t. $y_M = \tan\left(\frac{\pi t}{10}\right)$

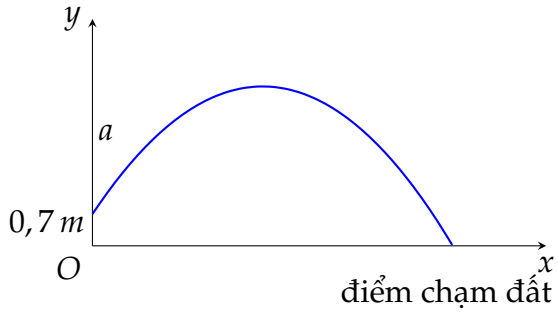
b) Ngôi nhà N nằm trên bờ biển với toạ độ $y_N = -1$ (km). Xác định các thời điểm t mà đèn hải đăng chiếu vào ngôi nhà. $-\frac{5}{2} + 10k\,(k \in \mathbb{N}^*)$

Bài 7. Khi một tia sáng truyền từ không khí vào mặt nước thì một phần tia sáng bị phản xạ trên bề mặt, phần còn lại bị khúc xạ. Góc tới i liên hệ với góc khúc xạ r bởi Định luật khúc xạ ánh sáng $\dfrac{\sin i}{\sin r} = \dfrac{n_2}{n_1}$. Với n_1, n_2 tương ứng là triết suất của môi trường (1) : không khí và môi trường (2) : nước. Biết góc tới $i = 50^\circ, n_1 = 1, n_2 = 1{,}33$, hãy tính góc khúc xạ (làm tròn đến hàng đơn vị độ). 35

Bài 8. Trong môn cầu lông, khi phát cầu thì người chơi cần đánh cầu qua khỏi lưới sang phía bên sân đối phương và không được để cầu rơi ngoài biên. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, chọn điểm có tọa độ $(O; y_0)$ là điểm xuất phát thì quỹ đạo của cầu lông khi rời khỏi mặt vợt được mô tả bởi hàm số $y = \dfrac{-g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \cdot x + y_0$; trong đó

- g là gia tốc trọng trường (lấy $g = 9{,}8\text{m/s}^2$);
- α là góc phát cầu (so với phương ngang của mặt đất);
- v_0 là vận tốc ban đầu của cầu;
- y_0 là khoảng cách từ vị trí phát cầu đến mặt đất.

Biết rằng quỹ đạo chuyển động của quả cầu là một parabol. Một người chơi sau khi phát cầu thì nhận thấy cầu rơi tại vị trí cách người chơi một khoảng 6,68m. Quan sát hình vẽ bên dưới, biết rằng $y_0 = 0{,}7\text{m}$, vận tốc ban đầu của cầu là $8/$. Bỏ qua sức cản của không khí, hỏi người chơi cần phát cầu lông ở góc nhỏ nhất là bao nhiêu (làm tròn đến hàng đơn vị độ)?



30

Bài 9. Chiều cao h (m) của một cabin trên vòng quay vào thời điểm t giây sau khi bắt đầu chuyển động được cho bởi công thức $h(t) = 30 + 20\sin\left(\dfrac{\pi}{25}t + \dfrac{\pi}{3}\right)$. Sau bao nhiêu giây thì cabin đạt độ cao 40 m lần đầu tiên?

12,5

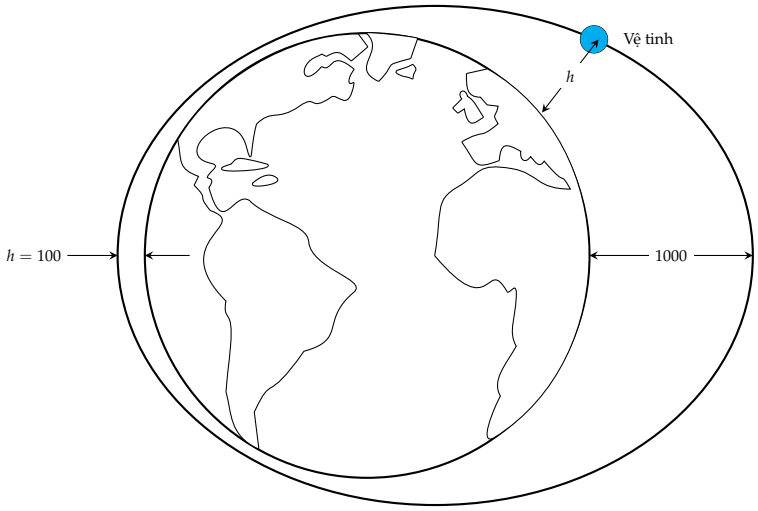
Bài 10. Hằng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (m) của mực nước trong kênh đó tính theo thời gian t giờ được cho bởi công thức $h = 2\cos\left(\dfrac{\pi t}{12} + \dfrac{\pi}{3}\right) + 12$ với $(0 \le t \le 24)$. Độ sâu của mực nước trong con kênh đó đạt 14 m lần đầu tiên trong ngày vào lúc mấy giờ? 20

Bài 11. Giả sử một vật dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình

$$x = 2\cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right).$$

Ở đây, thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tính bằng centimét. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần? 9

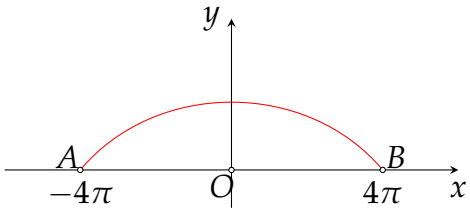
Bài 12. Một vệ tinh bay quanh Trái Đất theo một quỹ đạo hình Elip như hình vẽ



Độ cao h (tính bằng ki-lô-mét) của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất được xác định bởi công thức $h = 550 + 450 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{50}t\right)$. Trong đó t là thời gian tính bằng phút kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo. Người ta cần thực hiện một thí nghiệm khoa học khi vệ tinh cách mặt đất 250 km. Trong khoảng 60 phút đầu tiên kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo, hãy tìm thời điểm để có thể thực hiện thí nghiệm đó?(tính theo đơn vị phút, làm tròn đến hàng phần chục).

36,6

Bài 13. Một cây cầu có dạng cung AB của đồ thị hàm số $y = 4{,}2 \cdot \cos\frac{x}{8}$ và được mô tả trong hệ trục tọa độ với đơn vị trục là mét như ở *Hình 38*. Một sà lan chở khối hàng hóa được xếp thành hình hộp chự nhật với độ cao 3 m so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hóa đó phải nhỏ hơn 12,5 m.



Hình 38

Bài 14. Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) được tổ chức vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu.

Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng (*Hình 39*). Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách h (m) từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời gian t (s) (với $t \geq 0$) với hệ thức $h = |d|$ với $d = 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]$, trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại (*Nguồn: Đại số và giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2022*). Vào thời điểm t nào thì khoảng cách h là 3 m; 0 m?



Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1 D	2 B	3 C	4 C	5 A	6 A	7 D	8 C	9 A	10 C
11 B	12 D	13 C	14 B	15 C	16 A	17 C	18 A	19 C	20 C
21 A	22 D	23 B	24 A	25 B	26 D	27 C	28 C	29 D	30 A
31 D	32 D	33 D	34 A	35 D	36 A	37 A	38 A		

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a S b S c Đ d S	Câu 2.	a S b S c Đ d Đ
Câu 3.	a S b S c Đ d Đ	Câu 4.	a Đ b Đ c S d Đ
Câu 5.	a Đ b S c Đ d S	Câu 6.	a S b S c Đ d Đ
Câu 7.	a S b Đ c S d Đ	Câu 8.	a S b S c Đ d Đ
Câu 9.	a S b S c Đ d Đ	Câu 10.	a Đ b S c S d S
Câu 11.	a Đ b S c Đ d Đ	Câu 12.	a Đ b Đ c S d S
Câu 13.	a Đ b S c Đ d S	Câu 14.	a Đ b Đ c S d Đ

§5 ÔN TẬP CHƯƠNG 1

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Biểu diễn các góc lượng giác $\alpha = -\dfrac{5\pi}{6}$, $\beta = \dfrac{\pi}{3}$, $\gamma = \dfrac{25\pi}{3}$, $\delta = \dfrac{17\pi}{6}$ trên đường tròn lượng giác. Các góc nào có điểm biểu diễn trùng nhau?

Ⓐ β và γ. Ⓑ α, β, γ. Ⓒ β, γ, δ. Ⓓ α và β.

Câu 2. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là **sai**?

Ⓐ $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$. Ⓑ $\cos(\pi - \alpha) = \cos\alpha$.

Ⓒ $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$. Ⓓ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$.

Câu 3. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\cos(a - b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$. Ⓑ $\sin(a - b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$.

Ⓒ $\cos(a + b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$. Ⓓ $\sin(a + b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$.

Câu 4. Rút gọn biểu thức $M = \cos(a + b)\cos(a - b) - \sin(a + b)\sin(a - b)$, ta được

Ⓐ $M = \sin 4a$. Ⓑ $M = 1 - 2\cos^2 a$. Ⓒ $M = 1 - 2\sin^2 a$. Ⓓ $M = \cos 4a$.

Câu 5. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

Ⓐ Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Ⓑ Hàm số $y = \cos x$ có tập giá trị là $[-1; 1]$.

Ⓒ Hàm số $y = \cos x$ là hàm số lẻ.

Ⓓ Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì 2π.

Câu 6. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm tuần hoàn?

Ⓐ $y = \tan x + x$. Ⓑ $y = x^2 + 1$. Ⓒ $y = \cot x$. Ⓓ $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

Câu 7. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng

Ⓐ $(0; \pi)$. Ⓑ $\left(-\dfrac{3\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{2}\right)$. Ⓒ $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Ⓓ $(-\pi; 0)$.

Câu 8. Nếu $\cos a = \dfrac{1}{4}$ thì $\cos 2a$ bằng

Ⓐ $\dfrac{7}{8}$. Ⓑ $-\dfrac{7}{8}$. Ⓒ $\dfrac{15}{16}$. Ⓓ $-\dfrac{15}{16}$.

Câu 9. Nếu $\cos a = \dfrac{3}{5}$ và $\cos b = -\dfrac{4}{5}$ thì $\cos(a + b)\cos(a - b)$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 5.

Câu 10. Phương trình $\cot x = -1$ có nghiệm là

Ⓐ $-\dfrac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. Ⓑ $\dfrac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. Ⓒ $\dfrac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. Ⓓ $-\dfrac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 11. Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x$ là

Ⓐ $[-2; 2]$. Ⓑ $[0; 2]$. Ⓒ $[-1; 1]$. Ⓓ $[0; 1]$.

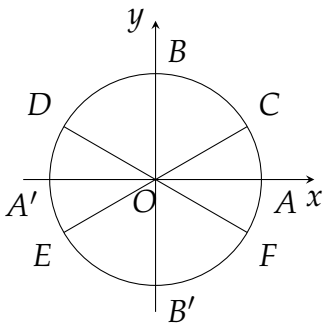
Câu 12. Tìm hàm số lẻ trong các hàm số sau:

Ⓐ $y = \sin^2 x$. Ⓑ $y = x\cos 2x$. Ⓒ $y = x\sin x$. Ⓓ $y = \cos x$.

Câu 13. Hàm số $y = \sin 2x$ có chu kỳ là

Ⓐ $T = 2\pi$. Ⓑ $T = \dfrac{\pi}{2}$. Ⓒ $T = \pi$. Ⓓ $T = 4\pi$.

Câu 14. Nghiệm của phương trình $\tan x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ được biểu diễn trên đường tròn lượng giác ở hình bên là những điểm nào?



Ⓐ Điểm F, điểm D.

Ⓑ Điểm C, điểm F.

Ⓒ Điểm C, điểm D, điểm E, điểm F.

Ⓓ Điểm E, điểm F.

Câu 15. Cho a là một góc tuỳ ý. Khẳng định nào sau đây **sai**?

Ⓐ $2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$. Ⓑ $\sin 2a = 2\sin a\cos a$.

Ⓒ $\cos 2a = 2\cos a - 1$. Ⓓ $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.

Câu 16. Trên đường tròn đường kính 10 cm, một cung tròn có số đo 2 rad thì có độ dài là

Ⓐ 10 cm. Ⓑ 20 cm. Ⓒ 2 cm. Ⓓ 5 cm.

Câu 17. Cho góc α thoả mãn $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\cos\alpha > 0$. Ⓑ $\cot\alpha > 0$. Ⓒ $\tan\alpha > 0$. Ⓓ $\sin\alpha > 0$.

Câu 18. Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{-2\sin x + 9}{\cos x - 1}$ là

Ⓐ $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ⓑ $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Ⓒ $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Ⓓ $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 19. Cho $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Khi đó $\cos\alpha$ bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{5}$. Ⓑ $\dfrac{3}{5}$. Ⓒ $-\dfrac{4}{5}$. Ⓓ $-\dfrac{3}{5}$.

Câu 20. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{15}\right)$. Khi đó $M - m$ bằng

Ⓐ $2\sqrt{2}$. Ⓑ 4. Ⓒ $\sqrt{2}$. Ⓓ 2.

Câu 21. Cho α là một góc tuỳ ý. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\sin^2 2\alpha = \dfrac{1 - \cos 4\alpha}{2}$. Ⓑ $\sin^2 2\alpha = \dfrac{1 + \cos 4\alpha}{2}$.

Ⓒ $\sin^2 2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$. Ⓓ $\sin^2 2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$.

Câu 22. Với mọi $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\tan(3\pi + \alpha)$ bằng

Ⓐ $-\tan\alpha$. Ⓑ $\cot\alpha$. Ⓒ $\tan\alpha$. Ⓓ $-\cot\alpha$.

Câu 23. Cho $\sin a = \dfrac{2}{5}$. Khi đó $\cos 2a$ bằng

Ⓐ $\dfrac{17}{25}$. Ⓑ $\dfrac{17}{5}$. Ⓒ $-\dfrac{3}{5}$. Ⓓ $\dfrac{3}{5}$.

Câu 24. Trong các công thức lượng giác dưới đây, công thức nào đúng?

Ⓐ $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$. Ⓑ $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.

Ⓒ $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{\tan a - \tan b}$. Ⓓ $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{\tan a + \tan b}$.

Câu 25. Nghiệm của phương trình $\cos x = 0$ là

Ⓐ $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ⓑ $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ⓒ $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ⓓ $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 26. Tập xác định của hàm số $y = \cot x$ là

Ⓐ $\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Ⓑ $\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Ⓒ $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Ⓓ $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 27. Góc có số đo $\dfrac{2\pi}{5}$(rad) đổi sang độ là

Ⓐ $135°$. Ⓑ $240°$. Ⓒ $270°$. Ⓓ $72°$.

Câu 28. Kết quả $120°$ đổi theo radian bằng

Ⓐ $\dfrac{2\pi}{3}$. Ⓑ $\dfrac{3\pi}{4}$. Ⓒ $\dfrac{4\pi}{3}$. Ⓓ $\dfrac{\pi}{3}$.

Câu 29. Tìm tập xác định của hàm số $y = \dfrac{10\sin x + 6}{\cos x}$.

Ⓐ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$. Ⓑ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Ⓒ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Ⓓ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 30. Cho góc lượng giác x. Đẳng thức lượng nào dưới đây **sai**?

Ⓐ $\sin(\pi - x) = \sin x$. Ⓑ $\tan(\pi + x) = \tan x$.

Ⓒ $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$. Ⓓ $\cos(-x) = -\cos x$.

Câu 31. Nghiệm của phương trình $\cos \dfrac{x}{3} = 0$ là

Ⓐ $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ⓑ $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ⓒ $x = \dfrac{3\pi}{2} + k6\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ⓓ $x = \dfrac{3\pi}{2} + k3\pi, k \in \mathbb{Z}$.

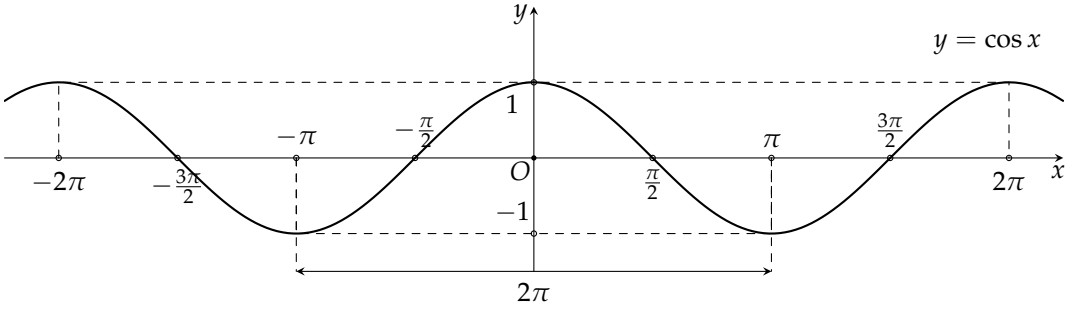
Câu 32. Rút gọn biểu thức $M = \dfrac{\cos 2x}{\sin x} + \dfrac{\sin 2x}{\cos x}$ ta được kết quả là

Ⓐ $M = \dfrac{1}{\cos x}$. Ⓑ $M = 1$. Ⓒ $M = \dfrac{1}{\sin x}$. Ⓓ $M = \dfrac{\cos 3x}{\sin x \cdot \cos x}$.

Câu 33. Một bánh xe có đường kính kể cả lốp xe là 55 cm. Nếu xe chạy với tốc độ 50 km/h thì trong một giây bánh xe quay được bao nhiêu vòng? (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm)

Ⓐ 9,04 (vòng). Ⓑ 7,04 (vòng). Ⓒ 10,04 (vòng). Ⓓ 8,04 (vòng).

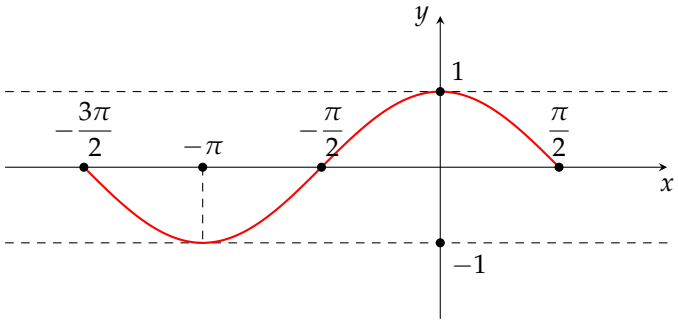
Câu 34. Cho hàm số $y = \cos x$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(0;\pi)$. Ⓑ $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Ⓒ $(-\pi;0)$. Ⓓ $\left(-\pi;\frac{3\pi}{4}\right)$.

Câu 35. Từ đồ thị của hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ trong hình vẽ, suy ra hàm số $y = \cos x$ nhận giá trị dương khi



Ⓐ $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Ⓑ $x \in \left(-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right)$. Ⓒ $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Ⓓ $x \in (-\pi;0)$.

Câu 36. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **SAI**?

Ⓐ $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$. Ⓑ $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) - \sin(a+b)]$.

Ⓒ $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$. Ⓓ $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$.

Câu 37. Hàm số nào dưới đây là hàm số có chu kì 2π ?

Ⓐ $y = \sin x$. Ⓑ $y = \cos 2x$. Ⓒ $y = \tan x$. Ⓓ $y = \cot x$.

Câu 38. Cho $\tan x = 4$. Giá trị của $\cot x$ là

Ⓐ $\frac{1}{4}$. Ⓑ $\frac{1}{2}$. Ⓒ $-\frac{1}{2}$. Ⓓ $-\frac{1}{4}$.

Câu 39. Giải phương trình $\cos x + 1 = 0$ ta được tập nghiệm là

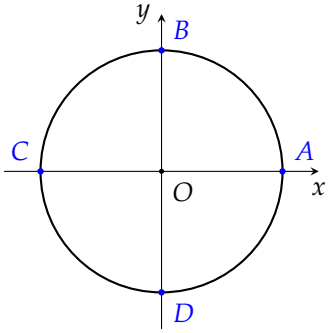
Ⓐ $S = \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Ⓑ $S = \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Ⓒ $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ⓓ $S = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 40. Đồ thị hàm số $f(x) = \cos x + 1$ đi qua điểm nào sau đây?

Ⓐ $(0;2)$. Ⓑ $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$. Ⓒ $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$. Ⓓ $(0;1)$.

Câu 41. Trong hệ tọa độ Oxy, cho bốn điểm A; B; C; D nằm trên đường tròn lượng giác như hình vẽ. Khi đó, điểm B biểu diễn các góc lượng giác nào?

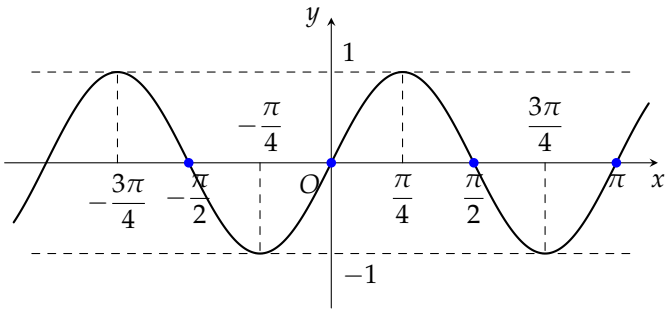


Ⓐ $-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$. Ⓑ $-\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$. Ⓒ $\dfrac{\pi}{2}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$. Ⓓ $\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Câu 42. Tập xác định của hàm số $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ là

Ⓐ $\mathbb{R}$. Ⓑ $[0;1]$. Ⓒ $[-2;2]$. Ⓓ $[-1;1]$.

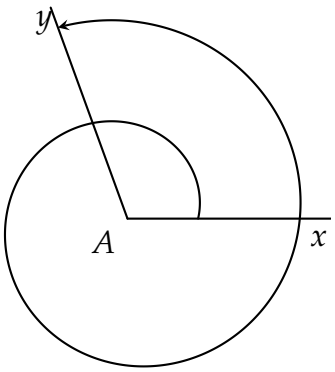
Câu 43. Hình vẽ dưới đây là đồ thị hàm lượng giác $y=\sin 2x$.



Hàm số $y=\sin 2x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

Ⓐ $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$. Ⓑ $\left(-\dfrac{3\pi}{4};-\dfrac{\pi}{2}\right)$. Ⓒ $(-1;0)$. Ⓓ $\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Câu 44. Xác định số đo của góc lượng giác (Ax, Ay) được biểu diễn ở hình vẽ dưới đây, biết $\widehat{xAy}=110^\circ$.



Ⓐ 470°. Ⓑ -470°. Ⓒ -250°. Ⓓ 480°.

Câu 45. Tập xác định của hàm số $y=2-\cot 3x$ là

Ⓐ $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Ⓑ $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{\pi}{3},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Ⓒ $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}\right\}$. Ⓓ $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.

Câu 46. Họ nghiệm của phương trình $\cos 2x=-\dfrac{1}{2}$ là

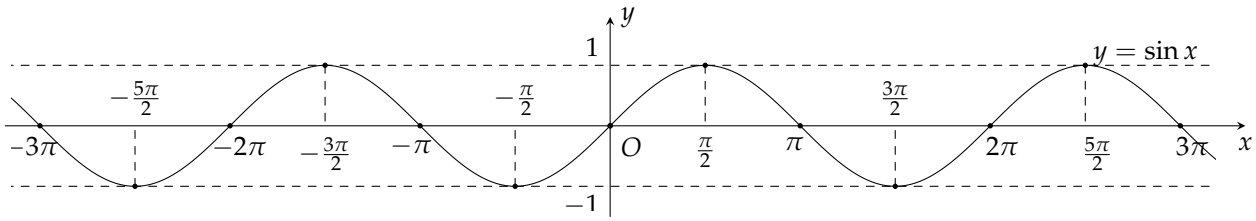
Ⓐ $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Ⓑ $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Ⓒ $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Ⓓ $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 47. Dựa vào đồ thị của hàm số $y = \sin x$ (như hình vẽ). Có bao nhiêu giá trị của $x \in [-\pi; \pi]$ thỏa mãn $\sin x = 0$.

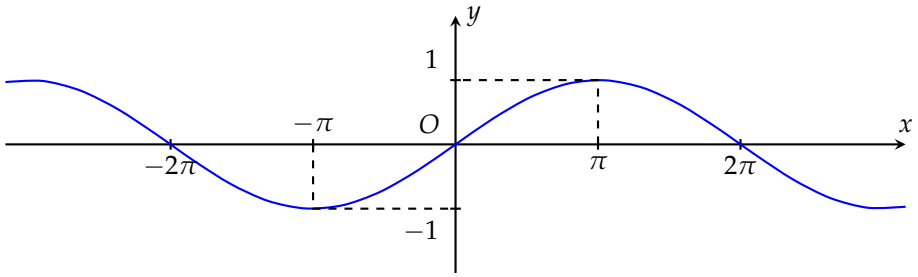


Ⓐ 2. Ⓑ 4. Ⓒ 1. Ⓓ 3.

Câu 48. Cho $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$. Giá trị $\cos 2\alpha$ bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $\dfrac{3}{2}$. Ⓒ $-\dfrac{3}{2}$. Ⓓ $-\dfrac{1}{2}$.

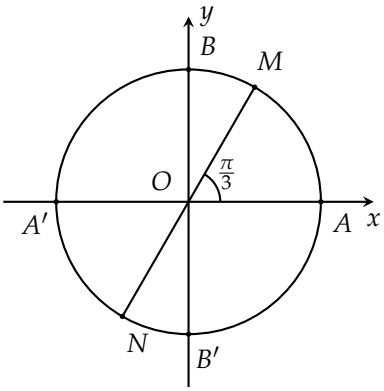
Câu 49. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D?



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

Ⓐ $y = -\cos\dfrac{x}{4}$. Ⓑ $y = \sin\dfrac{x}{2}$. Ⓒ $y = \sin\left(-\dfrac{x}{2}\right)$. Ⓓ $y = \cos\dfrac{x}{2}$.

Câu 50. Trên đường tròn lượng giác sau, hai điểm M, N là hai điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo là



Ⓐ $x = \dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{\pi}{2}$. Ⓑ $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$. Ⓒ $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$. Ⓓ $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Câu 51. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x$. Ⓑ $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x$.

Ⓒ $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}\cos x$. Ⓓ $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x$.

Câu 52. Giá trị của tham số m để phương trình $\sin 3x=m$ có nghiệm là

Ⓐ $-\dfrac{1}{3}\le m\le\dfrac{1}{3}$. Ⓑ $0\le m\le 1$. Ⓒ $-3\le m\le 3$. Ⓓ $-1\le m\le 1$.

Câu 53. Tập xác định của hàm số $y=\tan 2x$ là

Ⓐ $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$. Ⓑ $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Ⓒ $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$. Ⓓ $\mathbb{R}$.

Câu 54. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$ là

Ⓐ $-\dfrac{2\pi}{3}$. Ⓑ $-\dfrac{\pi}{3}$. Ⓒ $-\dfrac{\pi}{6}$. Ⓓ $-\dfrac{\pi}{4}$.

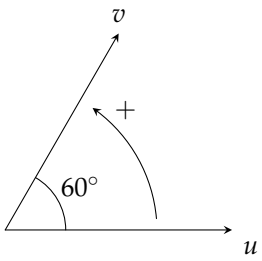
Câu 55. Cho $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $P=\dfrac{\cos 3\alpha+\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$ (với điều kiện biểu thức có nghĩa) bằng

Ⓐ $-\dfrac{2}{3}$. Ⓑ $\dfrac{1}{3}$. Ⓒ $\dfrac{2}{3}$. Ⓓ $-\dfrac{1}{3}$.

Câu 56. Một bánh xe có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là

Ⓐ 60°. Ⓑ 30°. Ⓒ 40°. Ⓓ 50°.

Câu 57. Cho góc hình học uOv có số đo bằng 60° như hình vẽ. Số đo của các góc lượng giác (Ou,Ov) là



Ⓐ sđ $(Ou,Ov)=60^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbb{Z}$. Ⓑ sđ $(Ou,Ov)=60^\circ+k\cdot 180^\circ,\ k\in\mathbb{Z}$.

Ⓒ sđ $(Ou,Ov)=-60^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbb{Z}$. Ⓓ sđ $(Ou,Ov)=60^\circ-k\cdot 180^\circ,\ k\in\mathbb{Z}$.

Câu 58. Trong các phương trình sau, phương trình nào **vô nghiệm**?

Ⓐ $\cos x=\dfrac{2025}{2026}$. Ⓑ $\sin x=\pi$. Ⓒ $\cot x=2025$. Ⓓ $\tan x=2026$.

Câu 59. Rút gọn biểu thức $y=\dfrac{\sin 3x-\sin x}{2\cos^2 x-1}$.

Ⓐ $2\sin x$. Ⓑ $2\tan x$. Ⓒ $\tan 2x$. Ⓓ $\sin x$.

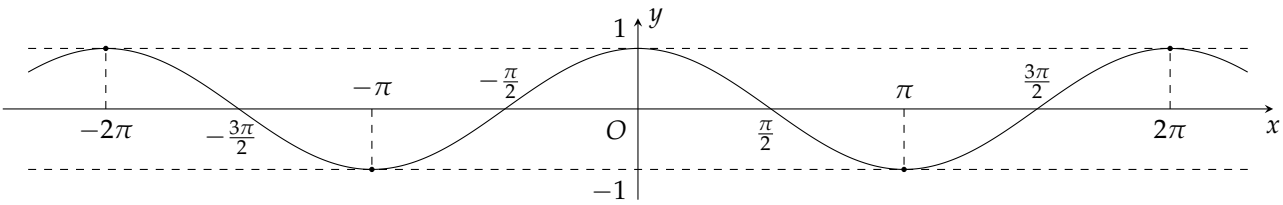
Câu 60. Tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{3}\tan\dfrac{x}{3}+3=0$.

Ⓐ $S=\left\{-\dfrac{\pi}{9}+k3\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$.
Ⓑ $S=\left\{-\dfrac{\pi}{3}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$.
Ⓒ $S=\{-\pi+k3\pi;k\in\mathbb{Z}\}$.
Ⓓ $S=\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 61. Cho $\pi<x<\dfrac{3\pi}{2}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\tan x<0$. Ⓑ $\cos x>0$. Ⓒ $\cot x<0$. Ⓓ $\sin x<0$.

Câu 62. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên dưới.



Chu kì tuần hoàn của hàm số trên bằng

Ⓐ π. Ⓑ 4π. Ⓒ $\frac{\pi}{2}$. Ⓓ 2π.

Câu 63. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\sin x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.
Ⓑ $\sin x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.
Ⓒ $\sin x=0\Leftrightarrow x=k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.
Ⓓ $\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

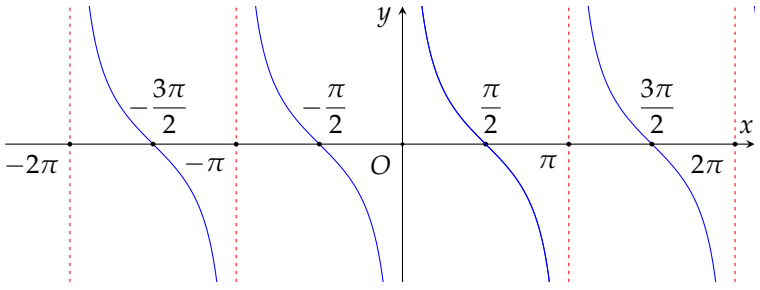
Câu 64. Cho $\cos x=\dfrac{4}{5}$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)$. Giá trị của $\sin 2x$ là

Ⓐ $\dfrac{1}{5}$. Ⓑ $\dfrac{24}{25}$. Ⓒ $-\dfrac{24}{25}$. Ⓓ $-\dfrac{1}{5}$.

Câu 65. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$.

Ⓐ $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k2\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$.
Ⓑ $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$.
Ⓒ $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.
Ⓓ $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 66. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



Ⓐ $y=\cot x$. Ⓑ $y=\cos x$. Ⓒ $y=\sin x$. Ⓓ $y=\tan x$.

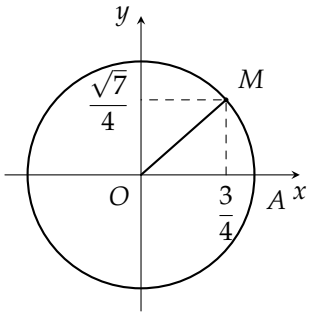
Câu 67. Cho $\tan\alpha=2$. Tính $\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Ⓐ $\dfrac{1}{3}$. Ⓑ $-\dfrac{1}{3}$. Ⓒ 1. Ⓓ $\dfrac{2}{3}$.

Câu 68. Cho hàm số $y=\cos x$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

Ⓐ Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
Ⓑ Hàm số đã cho là hàm số lẻ.
Ⓒ Hàm số tuần hoàn với chu kì 2π.
Ⓓ Tập giá trị của hàm số là $[-1;1]$.

Câu 69. Trên đường tròn lượng giác cho điểm $M\left(\frac{3}{4};\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$. Tính sin của góc lượng giác $(OA;OM)$.



Ⓐ $\frac{\sqrt{7}}{4}$. Ⓑ $\frac{3}{\sqrt{7}}$. Ⓒ $\frac{3}{4}$. Ⓓ $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

Câu 70. Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{\cos 3x+\cos x}{\cos x}$ (với điều kiện biểu thức có nghĩa), ta được $P=a\cos 2x$. Khi đó

Ⓐ $a=4$. Ⓑ $a=-4$. Ⓒ $a=-2$. Ⓓ $a=2$.

Câu 71. Số nghiệm của phương trình $\cos x=\frac{1}{2}$ thuộc đoạn $[-2\pi;2\pi]$ là

Ⓐ 4. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

Câu 72. Số nghiệm thực của phương trình $\sin 2x+1=0$ trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2};10\pi\right]$ là

Ⓐ 12. Ⓑ 11. Ⓒ 20. Ⓓ 21.

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Cho $\sin a=\frac{5}{13}$; $\tan b=\frac{3}{4}$, với a, b là các góc nhọn.

a) $\cos a=\frac{7}{13}$. **b)** $\sin 2a=\frac{110}{169}$. **c)** $\tan a=\frac{5}{12}$. **d)** $\tan(a+b)=\frac{56}{33}$.

Câu 2. Cho hàm số $y=3-\sin(2x)$, khi đó

a) Tập giá trị của hàm số là $T=[2;3]$.
b) Hàm số có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
c) Chu kỳ của hàm số $T=\pi$.
d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{10}{3\cos x+5}$.

a) Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.
b) Hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.
c) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ bằng 5.
d) Nếu $f(x)=3$ thì $\cos 2x=-\frac{31}{18}$.

Câu 4. Cho góc lượng giác α thỏa mãn $\tan\alpha=3$.

a) $\cot\alpha=\frac{1}{3}$.
b) $\tan(\alpha+3\pi)=3+3\pi$.
c) $\tan(-\alpha)=-3$.
d) $\cot 2\alpha=-\frac{4}{3}$.

Câu 5. Cho hàm số $g(x)=\sin x+\cos x$.

a) $g(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),\forall x\in\mathbb{R}$.
b) Với $\forall x\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$ thì $g(x)<0$.
c) Phương trình $g(x)=0$ có 2 nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ bằng 2.

Câu 6. Cho hàm số $g(x) = \sin x$.

a) Tập xác định cùa $g(x)$ là $\mathbb{R}$.

b) Hàm số $g(x)$ là hàm chẵn.

c) Giá trị lớn nhất của $g(x)$ là 2.

d) Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $g(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ có dạng $\dfrac{a}{b}\pi$ trong đó $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản, $a; b \in \mathbb{N}^*$ thoả mãn $a^2 + b^2 = 10$.

Câu 7. Cho biểu thức $A = (\sin x + \cos x)^2$.

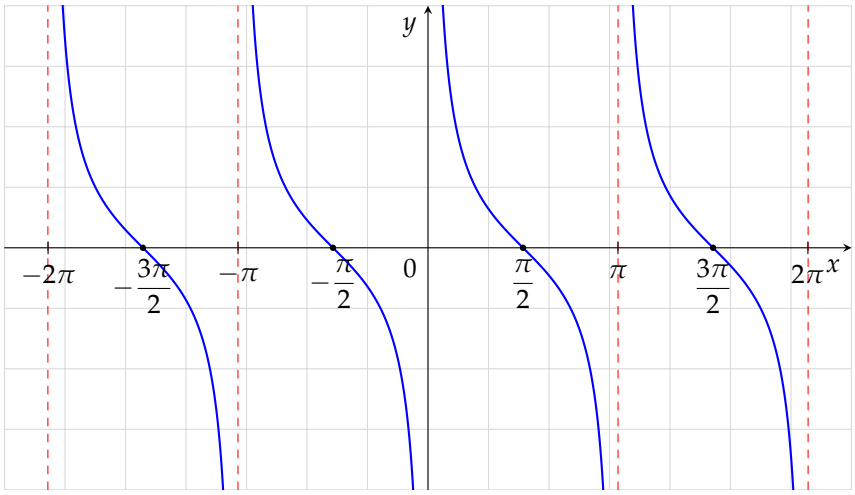
a) $A = 1 + \sin 2x$.

b) Khi $x = 0$ thì $A = 0$.

c) $A \in [-2; 0]$.

d) Nếu $\cos 2x = 1$ thì $A = 1$.

Câu 8. Đồ thị của một hàm số $y = f(x)$ được biểu diễn như sau



a) Đồ thị hàm số này là của hàm số $y = \tan x$.

b) Hàm số là hàm số lẻ.

c) Tất cả các nghiệm của phương trình $y = 0$ có thể được biểu diễn là $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

d) Số nghiệm của phương trình $f(x) = m$ trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$ là 6 với mọi số thực m.

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \cos(-x)$ xác định trên tập D.

a) Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) $y = -\cos x, \forall x \in \mathscr{D}$.

c) $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

d) Tổng các nghiệm của phương trình $f(x) = 1$ trên khoảng $[-\pi; 6\pi]$ là 12π.

Câu 10. Cho $\cos\alpha = -\dfrac{3}{4}$, với $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$. Khi đó

a) $\cos 2\alpha = 2\cos\alpha = -\dfrac{3}{2}$.

b) $\sin\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

c) $\sin\alpha > 0$.

d) $\tan\alpha = -\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

Câu 11. Cho hai hàm số $y = f(x) = \sin x$ và $y = g(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

a) Hàm số $= f(x)$ có tập xác định là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

b) Giá trị $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = g\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

c) Phương trình $f(x) = g(x)$ có đúng 4 nghiệm trong khoảng $[0; 2\pi]$.

d) Phương trình $g(x) = 1$ có tập nghiệm $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 12. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau

a) Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Khi đó $\sin\alpha > 0, \cos\alpha > 0$.

b) Cho $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Biết giá trị của $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1 - a\sqrt{6}}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$ thì $a + b = 8$.

c) Phương trình lượng giác $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

d) Trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ phương trình $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ có 3 nghiệm.

Câu 13. Cho $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Khi đó, các mệnh đề sau đúng hay sai

a) $\cos\alpha < 0$.

b) $\cos 2\alpha = -\frac{7}{9}$.

c) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1 + 2\sqrt{6}}{6}$.

d) $\frac{2\cot\alpha + 3\tan\alpha}{5\cot\alpha - 4\tan\alpha} = \frac{7}{12}$.

Câu 14. Cho các hàm số $f(x) = \sin x$ và $g(x) = \cos 2x$. Khi đó, các mệnh đề sau đúng hay sai

a) Hàm số $g(x) = \cos 2x$ có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.

b) Hàm số $f(x) = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

c) Đồ thị hai hàm số $f(x) = \sin x$ và $g(x) = \cos 2x$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ thuộc khoảng $(0; \pi)$.

d) Tổng nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình $f(x) = g(x)$ là $-\frac{\pi}{6}$.

Câu 15. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

a) Hàm số $y = 2\tan x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$.

b) Tập giá trị của hàm số $y = -2\sin\left(\frac{5\pi}{2} - 2x\right) + 11$ là $S = [9; 13]$.

c) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2x$.

d) $\sin\alpha > 0$ với mọi $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Câu 16. Cho phương trình lượng giác $2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} = 0$ (*). Khi đó

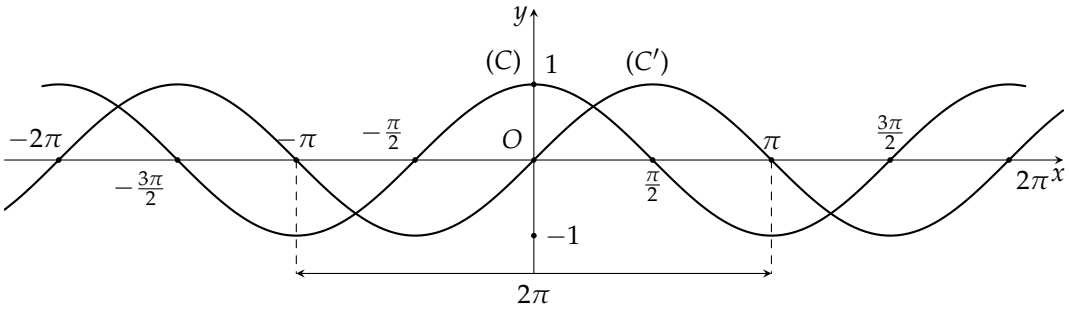
a) Phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$.

b) Phương trình (*) tương đương $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

c) Nghiệm của phương trình (*) là $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{12}+k2\pi \\ x=\dfrac{7\pi}{12}+k2\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

d) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(-\pi;\pi)$ bằng $\dfrac{3\pi}{2}$.

Câu 17. Cho hai hàm số lượng giác $y=f(x)=\sin x$ và $y=g(x)=\cos x$ và các đường cong (C), (C') như hình bên dưới. Khi đó, các mệnh đề sau đúng hay sai?



a) $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Đồ thị hàm số $y=\sin x$, $y=\cos x$ lần lượt là các đường cong (C), (C') ở hình vẽ trên.

c) Trên $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right]$, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)=\sin x$ là -1.

d) Tổng hoành độ các giao điểm của (C), (C') trên $[-6\pi;6\pi]$ là -3π.

Câu 18. Cho hàm số lượng giác $f(x)=2\sin x-\sqrt{2}$, xét trên đoạn $[0;4\pi]$.

a) Số nghiệm của phương trình $f(x)=0$ trong đoạn $[0;4\pi]$ bằng 5.

b) Hàm số đã cho là hàm số lẻ.

c) Phương trình $f(x)+\sqrt{2}=0$ có nghiệm là $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

d) Cho $f(x)=0$ khi đó $\cos^2 x=\dfrac{1}{2}$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)=\tan 2x$.

a) Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b) Hàm số tuần hoàn với chu kì $T=\pi$.

c) Tập giá trị của hàm số là $[-1;1]$.

d) Phương trình $f(x)=1$ có tập nghiệm là $S=\left\{\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-1$.

a) $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}+3}{2}$.

b) Phương trình $f(x)=-1$ có nghiệm là $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

c) Tập giá trị của hàm số $f(x)$ là $S=\left[-\sqrt{2}-1;\sqrt{2}-1\right]$.

d) Số nghiệm của phương trình $f(x)=1$ trên đoạn $[0;3\pi]$ là 3.

Câu 21. Cho hai hàm số $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ và $g(x)=\sin x$, khi đó:

a) Nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ là $x = \dfrac{3\pi}{8} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) Hàm số $g(x) = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π.

c) $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) + g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

d) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin x = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right)$.

Câu 22. Biết $\sin a = \dfrac{4}{5}$ với $\dfrac{\pi}{2} < a < \pi$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) < 0$.

b) $\cos a = \dfrac{3}{5}$.

c) $\sin 2a = -\dfrac{24}{25}$.

d) $\cos\left(a + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$.

Câu 23. Cho góc α thỏa mãn $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, khi đó

a) $\sin 2\alpha = -\dfrac{12}{25}$.

b) Giá trị lớn nhất $y = \sin(x + \alpha)$ là 1.

c) $\sin\left(\alpha + \dfrac{121\pi}{12}\right) \cdot \cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{12}\right) = -\dfrac{23}{100}$.

d) $\cos\alpha > 0$.

Câu 24.

a) Cho $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Xét được dấu của biểu thức $A = \cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) > 0$.

b) Cho $\cos x = \dfrac{4}{5}$ và $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$. Khi đó, $\cos 2x = -\dfrac{7}{25}$.

c) Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) được cho bởi công thức $h(t) = 2\sin\left(\dfrac{\pi t}{4} + \dfrac{\pi}{6}\right) + 15$. Chiều sâu của mực nước cao nhất là 17 m.

d) Góc có số đo 270° đổi ra radian là $\dfrac{3\pi}{2}$.

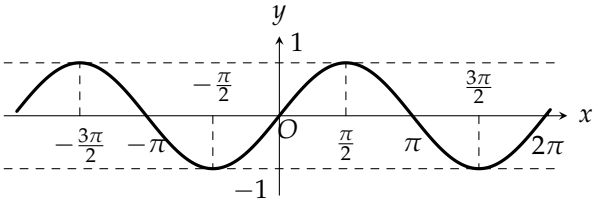
Câu 25. Cho hàm số $f(x) = \sin x$.

a) Hàm số $g(x) = f(x) \cdot x^3$ là hàm số lẻ.

b) Hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên .

c) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(\pi; 2\pi)$.

d) Hàm số $f(x)$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$.



Câu 26. Cho góc α thỏa mãn $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$.

a) $\cot\alpha > 0$.

b) $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$.

c) $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(\pi - \alpha) = -\dfrac{11}{15}$.

d) $\dfrac{5\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos^3\alpha - 2\sin^2\alpha + \cos\alpha} = \dfrac{425}{126}$.

Câu 27. Cho hai hàm số $f(x) = \tan x$ và $g(x) = \cot x$

a) Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) Đồ thị của hàm số $y = f(x) + g(x)$ đi qua điểm $\left(\dfrac{\pi}{4}; 1\right)$.

c) Hàm số $y = f(x) + g(x)$ là hàm số chẵn và có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.

d) Phương trình $f(x) = 1$ có đúng 10 nghiệm thuộc $(0; 10\pi]$.

Câu 28. Cho một dao động điều hòa có được mô tả dưới dạng một hàm số là $y = 50\cos 2x$.

a) Giá trị của hàm số tại $x = \dfrac{\pi}{2}$ bằng 0.

b) Tập giá trị của hàm số này là $T = [-50; 50]$.

c) Hàm số này có thể viết lại dưới dạng $y = 50\left(1 - 2\cos^2 x\right)$.

d) Một dao động điều hòa khác cùng phương với dao động điều hòa ban đầu là $y = 50\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$. Khi đó tổng hợp hai dao động điều hòa này có thể mô tả bằng hàm số $y = 50\sqrt{3}\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Câu 29. Hằng ngày, mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tại thời điểm $t(h)(0 \le t \le 24)$ được cho bởi công thức

$$h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12.$$

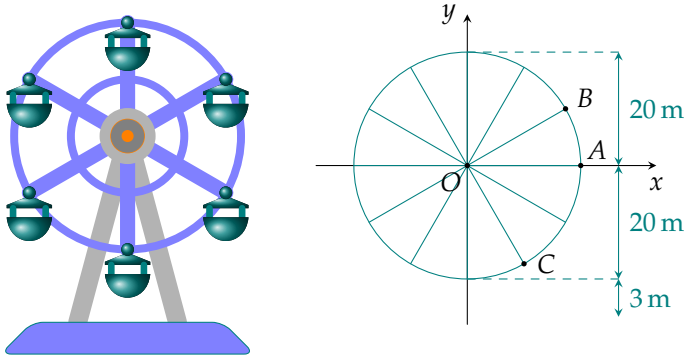
a) Độ sâu của mực nước trong kênh nhỏ nhất bằng 9 m.

b) Độ sâu của mực nước trong kênh lớn nhất bằng 15 m.

c) Trong 1 ngày có đúng 3 thời điểm mà độ sâu của mực nước trong kênh đạt giá trị lớn nhất.

d) Độ sâu của mực nước trong kênh tại thời điểm 12 (h) bằng 13 m.

Câu 30. Một mô hình trò chơi vòng quay ở công viên có chiều cao tối đa 23 m so với mặt đất, bán kính vòng quay là 20 m. Hai bạn Hoa và Mai cùng chơi chung lượt quay và ngồi trong hai ca-bin B, C mà góc $\widehat{BOC} = 90^\circ$ (hình vẽ); α là một góc lượng giác hợp bởi tia đầu OA, tia cuối OB.



a) Chiều cao của B so với mặt đất là $h_B = 23 + 20\sin\alpha$ (m).

b) Khi $\alpha = 45^\circ$ thì chiều cao của B so với mặt đất là 37,14 (m) (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

c) Chiều cao của C so với mặt đất là $h_C = 23 - 20\cos\alpha$ (m).

d) Khi B ở vị trí có độ cao 33 m thì C ở độ cao 13 m so với mặt đất.

Câu 31. Số giờ có ánh sáng mặt trời của thành phố A ở vĩ độ 40° Bắc trong ngày thứ t của hàm số $d(t) = 3\sin\left[\dfrac{\pi}{182}(t - 80)\right] + 12$ với $t \in \mathbb{N}$ và $0 < t \le 365$.

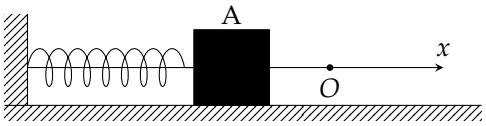
a) Ngày thứ 80 trong năm cộng đúng 10 giờ có ánh sáng mặt trời.

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $d'(t) = \dfrac{3\pi}{182}\cos\left[\dfrac{\pi}{182}(t-80)\right]$.

c) Nghiệm của phương trình $d'(t) = 0$ trên đoạn $[1;171]$ là $t = 171$.

d) Ngày thứ 160 có số giờ ánh sáng lớn nhất trong năm.

Câu 32. Trong hình vẽ sau đây, khi kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O. Tọa độ s (centimét) của A trên trục Ox vào thời điểm t (giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s = 10\sin\left(10t - \dfrac{\pi}{2}\right)$.



a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $s = 10\sin\left(10t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng -1.

b) Thời điểm đầu tiên tọa độ của vật A trên trục bằng 5 là $t = \dfrac{2\pi}{15}$ (giây).

c) Tập xác định của hàm số $s = 10\sin\left(10t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ là $\mathbb{R}$.

d) Trong 3 giây đầu tiên vật đi qua vị trí cân bằng 10 lần.

3 Tự luận.

Bài 1. Cho bất kì góc α. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$;

b) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$.

Bài 2. Tìm tập giá trị của các hàm số sau

a) $y = 2\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) - 1$; $[-3;1]$

b) $y = \sin x + \cos x$. $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 2x + \cos 3x = 0$ $S = \left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi;\ -\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2k\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) $\sin x\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$; $S = \left\{\dfrac{\pi}{8} + k\pi;\ \dfrac{3\pi}{8} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) $\sin x + \sin 2x = 0$. $S = \left\{k\pi;\ \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi;\ -\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Bài 4. Giải các phương trình sau

a) $\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $S = \left\{\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3};\ -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) $2\sin^2 x - 1 + \cos 3x = 0$; $S = \left\{k2\pi;\ \dfrac{2k\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) $\tan\left(2x + \dfrac{\pi}{5}\right) = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$. $S = \left\{-\dfrac{11\pi}{30} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Bài 5. Tìm tập xác định của các hàm số sau Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = \dfrac{2\sin x + \tan x}{\sin 3x - 1}$. $\mathscr{D} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ x \neq \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $y = \dfrac{5\cot x + 1}{\sqrt{1 - \sin 2x}}$. $\mathscr{D} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi,\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

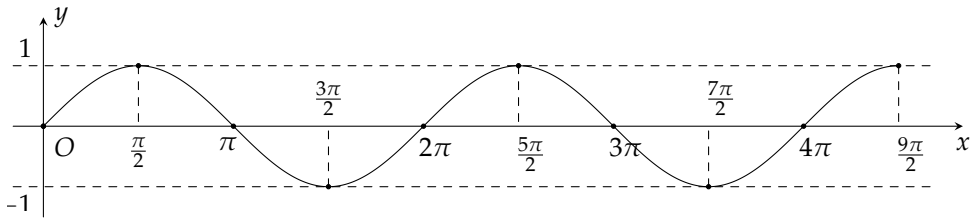
Bài 6. Cho $\cot x = 2$. Tính giá trị biểu thức $A = \dfrac{2\sin x + 3\cos x}{3\sin x - 2\cos x}$.

-8

Bài 7. Giá trị biểu thức $A = (\tan a + \tan b)\cdot \cot(a+b) + \tan a \cdot \tan b + 2024$ bằng bao nhiêu?

2025

Bài 8. Xét hàm số $y = \sin x$ trên nửa khoảng $\left[0; \dfrac{9\pi}{2}\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hãy tính khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ O đến một điểm M thuộc đồ thị có tung độ bằng 1 (*kết quả làm tròn đến hàng phần chục*).



7,9

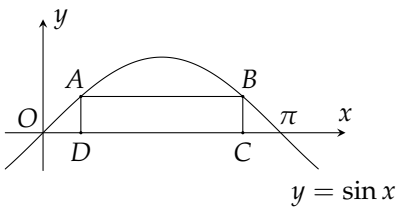
Bài 9. Cho $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ và $-\pi < x < -\dfrac{\pi}{2}$. Giá trị của biểu thức

$$T = 9\sin(x + 2025\pi) + \sqrt{3}\tan(2025\pi - x)$$

bằng bao nhiêu (*làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*)?

4,9

Câu 33. Cho hai điểm A, B thuộc đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0;\pi]$, các điểm C, D thuộc trục Ox thỏa mãn $ABCD$ là hình chữ nhật và $CD = \dfrac{2\pi}{3}$. Tính độ dài đoạn BC *(Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).*



0,5

Câu 34. Cho α là góc tù thỏa mãn $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$. Giá trị biểu thức $A = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha + \sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha$ bằng $\dfrac{a}{b}$ ($\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản, $a, b \in \mathbb{Z}$). Tổng $a+b$ bằng bao nhiêu?

110

Bài 10. Giải phương trình:

$$\frac{4\cos^3 x + 2\cos^2 x(2\sin x - 1) - \sin 2x - 2(\sin x + \cos x)}{\cos 2x} = 0.$$

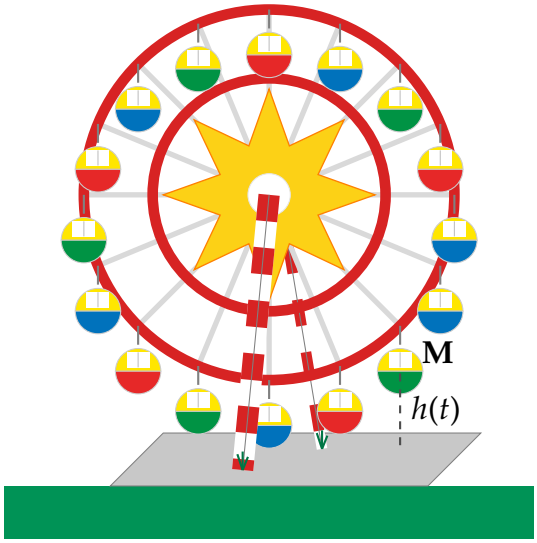
Bài 11. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{3}\sin 4x + 2\sin^2 2x - 1$.

Bài 12 (0,5 điểm). Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện: $\cos A + \cos B + \cos C = \dfrac{3}{2}$. Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều.

Bài 13. Cho biết $\tan x$, $\tan y$ là hai nghiệm của phương trình bậc hai $2027t^2 + 2026t - 2025 = 0$. Tính giá trị của biểu thức

$$T = 2027\sin^2(x+y) + 2026\sin(x+y)\cdot\cos(x+y) - 2025\cos^2(x+y).$$

Bài 14. Một vòng quay Mặt Trời quay quanh trục mỗi vòng hết 15 phút. Khi vòng quay quay đều, khoảng cách h m từ một cabin M trên vòng quay đến mặt đất được tính bởi công thức $h(t) = a\sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + b; a > 0$. Với t là thời gian quay của vòng quay tính bằng phút ($t \geq 0$). Biết rằng khi lên đến vị trí cao nhất cabin M cách mặt đất 114,5 m và khi xuống đến vị trí thấp nhất cabin M cách mặt đất 0,5 m. Trong vòng quay đầu tiên tính từ thời điểm $t = 0$ (phút), những thời điểm nào cabin M đạt được độ cao 86 m so với mặt đất?



$t = 5$ phút hoặc $t = 10$ phút

Bài 15. Một thiết bị đo nhiệt độ môi trường ghi nhận sự thay đổi nhiệt độ theo ngày. Nhiệt độ T (tính bằng độ C, so với nhiệt độ trung bình) được mô hình hóa bởi hàm số theo thời gian t (tính bằng ngày) như sau $T(t) = 15\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$. Hỏi sau bao nhiêu ngày thì chu kỳ biến đổi nhiệt độ này lại lặp lại hoàn toàn? 24

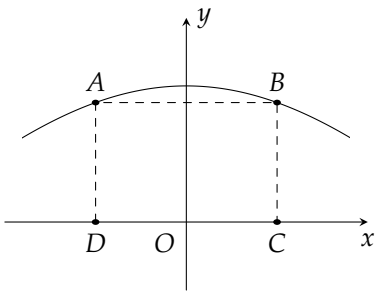
Bài 16. Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu lần lượt được gọi là **huyết áp tâm thu** và **huyết áp tâm trương**. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết dưới dạng **huyết áp tâm thu/ huyết áp tâm trương** (ví dụ: chỉ số huyết áp 120/80 là một chỉ số khá thông thường). Giả sử một người có nhịp tim là 70 lần trong một phút và sự biến thiên huyết áp của người đó được mô hình hoá bởi hàm số $P(t) = 100 + 20\sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)$, trong đó $P(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thuỷ ngân), còn t là thời gian (tính theo giây). Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy cho biết huyết áp đạt 110 mmHg tại những thời điểm t bằng bao nhiêu (đơn vị giây, làm tròn đến hàng phần trăm)?

Bài 17. Hằng ngày mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Chiều cao của mực nước trong kênh được mô hình hóa bởi hàm số $h(t) = 3\cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right) + 10$, trong đó $h(t)$ là độ cao tính bằng centimet của mực nước trong kênh tính trung bình tại thời điểm t (giờ) trong một ngày. Hỏi tại thời điểm nào trong ngày thì mực nước của con kênh đạt độ cao lớn nhất? 20 giờ

Bài 18. Hằng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thuỷ triều. Độ sâu h (m) của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày ($0 \leq t < 24$) cho bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) + 12$ (*Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2021*). Tìm t để độ sâu của mực nước là:

a) 15 m; b) 9 m; c) 10,5 m.

Bài 19. Một cái cổng vào một trung tâm thương mại có hình dạng là một phần của đồ thị hàm số $y = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 2$ (*tham khảo hình vẽ bên*). Gọi A, B là hai điểm nằm trên cổng và C, D là hai điểm nằm trên mặt nền của cổng sao cho $ABCD$ là hình chữ nhật. Người quản lí trung tâm thương mại muốn lắp một cái cửa kính tự động vào vị trí của hình chữ nhật $ABCD$. Tính diện tích của cái cửa kính cần lắp (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười*), biết chiều cao của cửa kính là $AD =$ 3 mét.

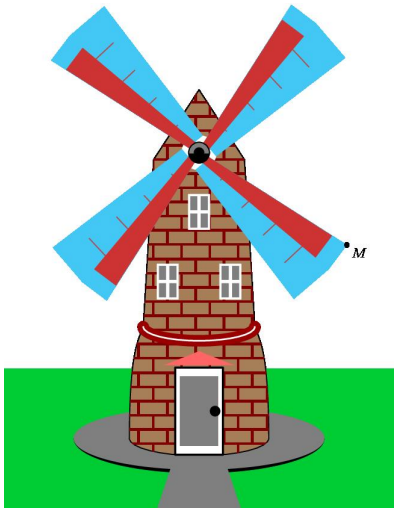


12,6

Bài 20. Giả sử số lượng N của một loài hươu sau t năm được xác định bởi công thức $N = 30\,000 + 20\,000\sin\left(\frac{\pi t}{10}\right)$ (con). Xác định số năm để số lượng của loài hươu này bằng 50 nghìn con lần đầu tiên theo công thức trên.

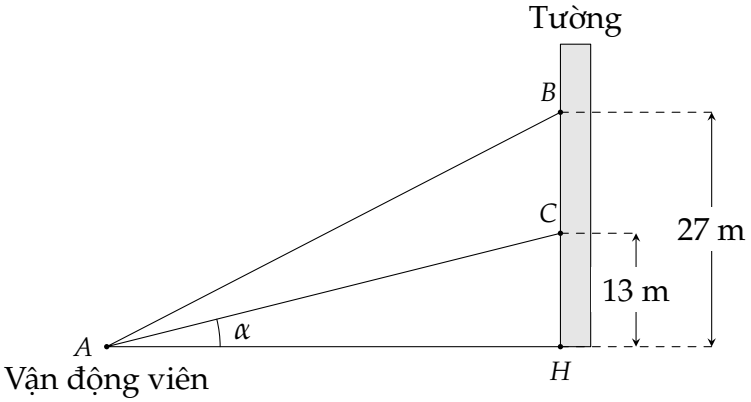
5

Bài 21. Cối xay gió là một loại máy chạy bằng sức gió. Máy này được thiết kế để biến năng lượng gió thành các dạng năng lượng khác hữu dụng hơn. Một điểm M nằm trên cánh của cối xay gió như hình vẽ. Khi cánh quạt quay thuận chiều kim đồng hồ, vị trí thấp nhất và cao nhất của M so với mặt đất lần lượt là 8 m và 22 m. Xét vòng quay của M bắt đầu từ vị trí thấp nhất tương ứng thời điểm $t = 0$. Khi cánh quay đều, khoảng cách h (mét) từ M đến mặt đất được tính theo công thức $h = A\cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right) + C$, với t (giây) là thời gian quay của điểm M ($t \geq 0$). Hỏi lần thứ 2025 điểm M cách mặt đất 18,5 m là vào thời điểm bao nhiêu giây (*làm tròn đến hàng đơn vị*)?



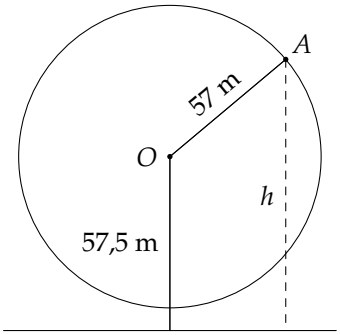
5062

Bài 22. Một vận động viên bắn súng nằm trên mặt đất để ngắm bắn các mục tiêu khác nhau trên một bức tường thẳng đứng. Vận động viên bắn trúng một mục tiêu cách mặt đất 12 m tại một góc ngắm α (góc hợp bởi phương bắn và phương ngang). Nếu vận động viên tăng góc ngắm đó lên hai lần thì bắn trúng mục tiêu cách mặt đất 25 m. Hỏi vị trí vận động viên nằm bắn cách bức tường bao nhiêu mét?



60

Câu 35. Một vòng quay trò chơi có bán kính 57 m, trục quay cách mặt đất 57,5 m, quay đều mỗi vòng hết 15 phút. Khi vòng quay quay đều, khoảng cách h (m) từ một cabin gắn tại điểm A của vòng quay đến mặt đất được tính bởi công thức: $h(t) = 57\sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + 57{,}5$ với t là thời gian quay của vòng quay tính bằng phút ($t \geq 0$) như hình bên.



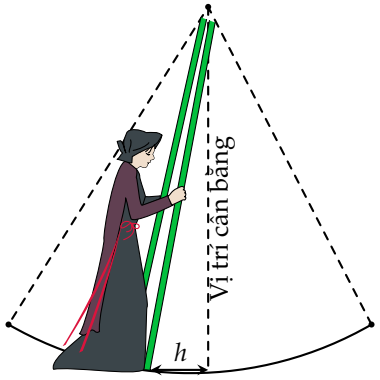
a) Tính chu kì của hàm số $h(t)$? 15 phút.

b) Khi $t = 0$ (phút) thì khoảng cách từ cabin đến mặt đất bằng bao nhiêu? 0,5 mét

c) Khi quay một vòng lần thứ nhất tính từ thời điểm $t = 0$ (phút), tại thời điểm nào của t thì cabin ở vị trí cao nhất? Ở vị trí đạt được chiều cao là 86 m?

cao nhất khi $t = 7{,}5$ phút, đạt được chiều cao là 86 m khi $t = 5$

Bài 23. Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) là lễ hội mùa xuân nổi tiếng có trò chơi đánh đu truyền thống. Khi người chơi nhún đều, cây đu sẽ đưa người đu dao động quanh vị trí cân bằng. Giả sử khoảng cách h (m) từ người chơi đu đến vị trí cân bằng theo thời gian t (s) (với $t \geq 0$) được mô tả bởi công thức $h = |d|$ với $d(t) = 3{,}5\cos\left(\frac{2\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right)$, trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại. Tìm khoảng cách lớn nhất của người đu so với vị trí cân bằng.



3,5

Bài 24. Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu được gọi tương ứng là huyết áp tâm thu và tâm trương. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là huyết áp tâm thu/ huyết áp tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử huyết áp của một người nào đó được mô hình hóa bởi hàm số

$$p(t) = 115 + 25\sin(160\pi t)$$

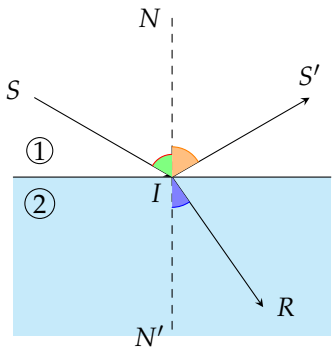
trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimet thủy ngân) và thời gian t tính theo phút.

a) Tìm chu kì của hàm số $p(t)$. $\frac{1}{80}$

b) Tìm số nhịp tim mỗi phút. 140/90

c) Tìm số chỉ huyết áp. So sánh huyết áp của người này với huyết áp bình thường. 140/90

Bài 25. Khi một tia sáng truyền từ không khí vào mặt nước thì một phần tia sáng bị phản xạ trên bề mặt, phần còn lại bị khúc xạ như hình bên. Góc tới i liên hệ với góc khúc xạ r bởi Định luật khúc xạ ánh sáng

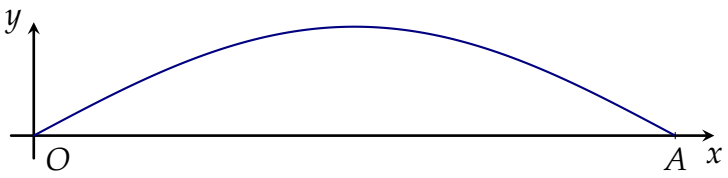


$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Ở đây, n_1 và n_2 tương ứng với chiết suất của môi trường 1 (không khí) và môi trường 2 (nước). Cho biết góc tới $i = 50°$, hãy tính góc khúc xạ, biết rằng chiết suất của không khí bằng 1 còn chiết suất của nước là 1,33.

35,17°

Bài 26. Một cây cầu có dạng cung OA của đồ thị hàm số $y = 4{,}8 \cdot \sin\dfrac{x}{9}$ và được mô tả trong hệ trục toạ độ với đơn vị trục là mét như ở hình bên.



a) Giả sử chiều rộng của con sông là độ dài đoạn thẳng OA. Tìm chiều rộng đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

28,3

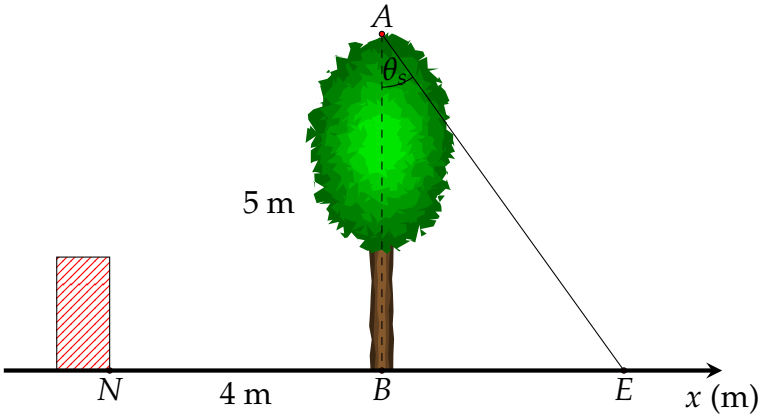
b) Một sà lan chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao 3,6 m so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn 13,1 m.

c) Một sà lan khác cũng chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với chiều rộng của khối hàng hoá đó là 9 m sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều cao của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn 4,3 m.

Bài 27. Trong hình vẽ, cây xanh AB nằm trên đường xích đạo được trồng vuông góc với mặt đất và có chiều cao 5 m. Bóng của cây là BE. Vào ngày xuân phân và hạ phân, điểm E di chuyển trên đường thẳng Bx. Góc thiên đỉnh $\theta_s = (AB, AE)$ phụ thuộc vào vị trí của Mặt Trời và thay đổi theo thời gian trong ngày theo công thức

$$\theta_s(t) = \frac{\pi}{12}(t - 12)\,\text{rad}$$

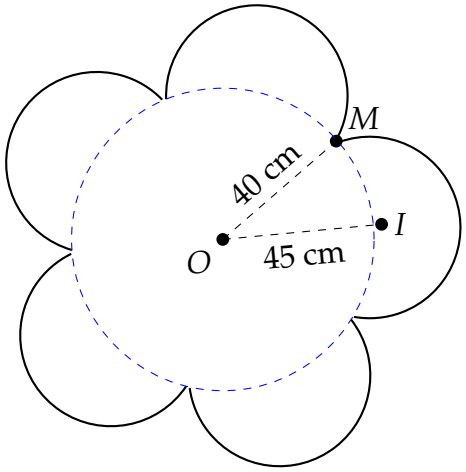
với t là thời gian trong ngày (theo đơn vị giờ, $6 < t < 18$).



a) Viết hàm số biểu diễn toạ độ của điểm E trên trục Bx theo t.

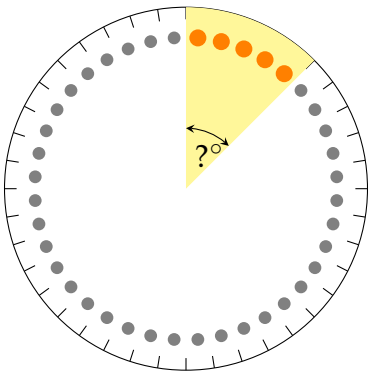
b) Dựa vào đồ thị hàm số tang, hãy xác định các thời điểm mà tại đó bóng cây phủ qua vị trí tường rào N biết N nằm trên trục Bx với toạ độ là $x_N = -4$ (m). Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Bài 28. Trên bức tường của một trường mẫu giáo có vẽ hình phiếu bé ngoan như hình vẽ bên dưới. Cô giáo muốn mua dây kim tuyến bao quanh phần cánh hoa (phần nét liền), biết rằng các cánh hoa là các cung tròn có bán kính bằng nhau và có tâm cách điểm O một khoảng 45 cm, các giao điểm của các cung tròn cách O một khoảng 40 cm. Em hãy giúp cô tính xem cần mua bao nhiêu mét dây kim tuyến? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



5,51

Bài 29. Một chiếc đèn trang trí hình tròn được chia thành 40 phần bằng nhau, mỗi phần có một bóng đèn LED nhỏ. Khi bật chế độ hiệu ứng, các bóng đèn này sẽ sáng lần lượt. Nếu hiệu ứng làm sáng 5 bóng đèn liên tiếp, thì tổng số đo góc (tính theo độ) mà 5 bóng đèn đó chiếm trên vòng tròn là bao nhiêu?



45

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1 A	2 B	3 A	4 C	5 C	6 C	7 C	8 B	9 A	10 A
11 C	12 B	13 C	14 A	15 C	16 A	17 D	18 B	19 C	20 B
21 A	22 C	23 A	24 A	25 C	26 C	27 D	28 A	29 A	30 D
31 D	32 C	33 D	34 C	35 C	36 B	37 A	38 A	39 A	40 A
41 C	42 A	43 B	44 A	45 C	46 B	47 D	48 D	49 B	50 C
51 C	52 D	53 A	54 B	55 C	56 D	57 A	58 B	59 A	60 C
61 D	62 D	63 A	64 C	65 C	66 A	67 A	68 B	69 A	70 D
71 A	72 A								

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a S b S c Đ d Đ	Câu 2.	a S b Đ c Đ d Đ
Câu 3.	a Đ b S c S d S	Câu 4.	a Đ b S c Đ d Đ
Câu 5.	a Đ b Đ c S d S	Câu 6.	a Đ b S c S d Đ
Câu 7.	a Đ b S c S d Đ	Câu 8.	a S b Đ c S d S
Câu 9.	a S b S c Đ d Đ	Câu 10.	a S b S c Đ d Đ
Câu 11.	a Đ b S c Đ d S	Câu 12.	a S b Đ c S d S
Câu 13.	a Đ b S c S d S	Câu 14.	a Đ b Đ c Đ d S
Câu 15.	a S b Đ c Đ d S	Câu 16.	a Đ b S c S d Đ
Câu 17.	a Đ b S c S d Đ	Câu 18.	a S b S c S d Đ
Câu 19.	a Đ b S c S d Đ	Câu 20.	a S b S c Đ d S
Câu 21.	a S b S c S d S	Câu 22.	a Đ b S c S d S
Câu 23.	a S b Đ c Đ d S	Câu 24.	a S b S c Đ d Đ
Câu 25.	a S b Đ c S d S	Câu 26.	a S b S c Đ d Đ
Câu 27.	a Đ b S c S d Đ	Câu 28.	a S b Đ c S d Đ
Câu 29.	a Đ b Đ c S d S	Câu 30.	a Đ b S c Đ d S
Câu 31.	a S b Đ c Đ d S	Câu 32.	a S b S c S d Đ

Chương II

DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

§1 DÃY SỐ

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Định nghĩa dãy số

Dãy số vô hạn

- Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^\star$ được gọi là một ***dãy số vô hạn*** (gọi tắt là dãy số), kí hiệu là $u = u(n)$.
- Ta thường viết u_n thay cho $u(n)$ và kí hiệu dãy số $u = u(n)$ bởi (u_n), do đó dãy số (u_n) được viết dưới dạng khai triển $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$
- Số u_1 gọi là ***số hạng đầu***, u_n là số hạng thứ n và gọi là ***số hạng tổng*** quát của dãy số.

Lưu ý. Nếu $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = c$ thì (u_n) được gọi là dãy số không đổi.

Dãy số hữu hạn

- Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1; 2; 3; \ldots, m\}$ với $m \in \mathbb{N}^\star$ được gọi là một ***dãy số hữu hạn***.
- Dạng khai triển của dãy số hữu hạn là $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Số u_1 gọi là ***số hạng đầu***, số u_m gọi là ***số hạng cuối***.

2) Các cách cho dãy số

Một dãy số có thể cho bằng

- Liệt kê các số hạng (chỉ dùng cho các dãy hữu hạn và có ít số hạng);
- Công thức của số hạng tổng quát;
- Phương pháp mô tả;
- Phương pháp truy hồi.

3) Dãy số tăng, giảm và bị chặn

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Chú ý

- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho
$$u_n \leq M \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$
- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho
$$u_n \geq m \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$
- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m, M sao cho $m \leq u_n \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Số hạng tổng quát, biểu diễn dãy số

Để tìm số hạng tổng quát của một dãy bất kỳ khi biết một vài số hạng đầu của dãy số ta làm như sau

- Phân tích các số hạng sau theo các số hạng đã biết theo một quy luật nào đó.
- Dự đoán số hạng tổng quát.

Ví dụ 1

Xác định số hạng đầu và số hạng tổng quát của mỗi dãy số sau

a) Dãy số (u_n) các số tự nhiên lẻ: $1, 3, 5, 7 \ldots$

b) Dãy số (v_n) các số nguyên dương chia hết cho 5 : $5, 10, 15, 20, \ldots$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Ví dụ 2

Viết số hạng tổng quát của dãy số số tăng gồm tất cả các số nguyên dương mà mỗi số hạng của nó:

a) Đều chia hết cho 4;

b) Khi chia cho 7 dư 3.

Dạng 2 Tìm số hạng cụ thể của dãy số

Để tìm số hạng cụ thể của dãy số ta làm như sau

- Với trường hợp dãy số đã cho biết công thức tổng quát của dãy số thì ta chỉ cần thay giá trị tương ứng của số hạng đó vào công thức tổng quát.
- Với trường hợp dãy số cho bởi công thức truy hồi hoặc dưới dạng thì ta phải tìm lần lượt từ những số hạng đầu tiên cho đến số đứng trước số cần tìm trong dãy.

Ví dụ 3

Cho dãy số (u_n), được xác định bởi $u_n = \dfrac{2n+1}{3^n}$ với $n \geq 1$

a) Viết 5 số hạng đầu tiên của dãy số. $\dfrac{11}{243}$

b) Viết số hạng thứ 20 của dãy số. $\dfrac{41}{3^{20}}$

Ví dụ 4

Cho dãy số xác định bằng hệ thức truy hồi: $u_1 = 1$, $u_n = 3u_{n-1} + 2$, với $n \geq 2$. Viết ba số hạng đầu của dãy số số này. $u_1 = 1, u_2 = 5, u_3 = 17$

Ví dụ 5

Cho dãy số (u_n) có $u_1 = 3$ và $u_{n+1} = u_n + 5$ với mọi $n \geq 1$.

a) Tìm 5 số hạng đầu của dãy số số trên.

b) Dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{3n+5}{n+1}$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số số.

b) Tìm số hạng thứ 50 và 100.

c) Số $\dfrac{454}{151}$ là số hạng thứ mấy?

d) Dãy số có bao nhiêu số hạng là số nguyên?

Bài 2 ☆

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số (u_n) với số hạng tổng quát $u_n = n!$.

b) Viết năm số hạng đầu của dãy số Fibonacci (F_n) cho bởi hệ thức truy hồi
$$\begin{cases} F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, (n \geq 3). \end{cases}$$

Bài 3 ☆

Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3 \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số.

b) Dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Dạng 3 Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số

- Phương pháp 1: Xét dấu của hiệu số $u_{n+1} - u_n$.
  - Nếu $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số tăng.
  - Nếu $u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số giảm.
- Phương pháp 2: Nếu $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta có thể so sánh thương $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1.
  - Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.
  - Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

  Nếu $u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta có thể so sánh thương $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1.
  - Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.
  - Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.
- Để chứng minh dãy số (u_n) bị chặn trên bởi M, ta chứng minh $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Để chứng minh dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi m, ta chứng minh $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Để chứng minh dãy số bị chặn ta chứng minh nó bị chặn trên và bị chặn dưới.
- Nếu dãy số (u_n) tăng thì bị chặn dưới bởi u_1.
- Nếu dãy số (u_n) giảm thì bị chặn trên bởi u_1.

Ví dụ 6

Xét tính tăng, giảm của các dãy số sau

a) (a_n) với $a_n = \dfrac{1}{n}$; dãy số giảm

b) (b_n) với $b_n = n^2$; dãy số tăng

c) (c_n) với $c_n = (-2)^n$. dãy số không tăng, không giảm

Ví dụ 7

Xét tính bị chặn của các dãy số sau

a) (a_n) với $a_n = \cos\dfrac{\pi}{n}$; bị chặn

b) (b_n) với $b_n = \dfrac{n}{n+1}$. bị chặn

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4 ☆

Xét tính tăng, giảm của các dãy số sau

a) (a_n) với $a_n = \dfrac{n}{n+1}$; dãy số tăng

b) (b_n) với $b_n = n - n^2$. dãy số giảm

Bài 5 ☆

Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn trên, bị chặn dưới và bị chặn?

a) $u_n = 3n^2 - 1$; bị chặn dưới

b) $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$; bị chặn

c) $u_n = 2\sin n + 3\cos n$; bị chặn

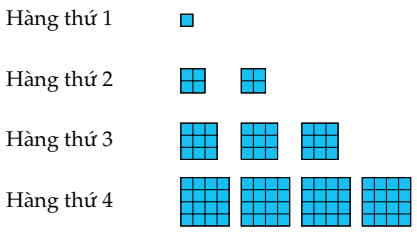
d) $u_n = \dfrac{1-n^2}{n}$; bị chặn trên

e) $u_n = (-2)^n$. bị chặn trên

Dạng 4 Toán thực tế áp dụng dãy số

Ví dụ 8

Gọi v_n là tổng diện tích của các hình tô màu ở hàng thứ n trong hình bên (mỗi ô vuông nhỏ là một đơn vị diện tích). Dự đoán công thức của số hạng tổng quát cho dãy số (v_n).



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6 ☆

Người ta nuôi cấy 5 con vi khuẩn ecoli trong môi trường nhân tạo. Cứ 30 phút thì vi khuẩn ecoli sẽ nhân đôi 1 lần.

1. Tính số lượng vi khuẩn thu được sau 1, 2, 3 lần nhân đôi.
2. Dự đoán công thức tính số lượng vi khuẩn sau n giờ.

....
....
....
....
....

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Cho dãy số (u_n), với $u_n = (n-1)^{2023}$. Tìm số hạng u_{n+1}.

(A) $u_{n+1} = (n+1)^{2023}$. (B) $u_{n+1} = (n+1)^{2022}$.
(C) $u_{n+1} = (n-1)^{2023}$. (D) $u_{n+1} = n^{2023}$.

Câu 2. Cho dãy số có các số hạng đầu là 2; 5; 10; 17; 26. Số hạng tổng quát của dãy số này là?

(A) $u_n = n^2$. (B) $u_n = n^3$. (C) $u_n = n^2 + 1$. (D) $u_n = n^3 + 1$.

Câu 3. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{n^2 - n - 2}{n+1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $u_7 = 5$. (B) $u_7 = \dfrac{40}{7}$. (C) $u_7 = 8$. (D) $u_7 = \dfrac{21}{4}$.

Câu 4. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{2n^2 - 1}{n^2 + 3}$. Tìm số hạng u_5.

(A) $u_5 = \dfrac{1}{4}$. (B) $u_5 = \dfrac{17}{12}$. (C) $u_5 = \dfrac{7}{4}$. (D) $u_5 = \dfrac{71}{39}$.

Câu 5. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = 7n + 1$. Số hạng đầu và số hạng thứ năm của dãy số đó

(A) $u_1 = 8, u_5 = 36$. (B) $u_1 = 7, u_5 = 35$. (C) $u_1 = 8, u_5 = 12$. (D) $u_1 = 7, u_5 = 11$.

Câu 6. Cho dãy số (u_n) có các số hạng đầu là $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2^2}, \dfrac{1}{2^3}, \dfrac{1}{2^4}, \dfrac{1}{2^5}, \ldots$ Số hạng tổng quát của dãy số này là

(A) $u_n = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2^{n+1}}$. (B) $u_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}$. (C) $u_n = \dfrac{1}{2^n}$. (D) $u_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Câu 7. Cho (u_n) là dãy các số tự nhiên chia hết cho 5 viết theo thứ tự tăng dần và $u_1 = 5$. Dạng khai triển của dãy số (u_n) là

(A) $0, 5, 10, \ldots, 5n, \ldots$. (B) $5, 10, 15, \ldots, 5n, \ldots$.
(C) $5, 15, 25, \ldots, 5n, \ldots$. (D) $1, 5, 10, \ldots, 5n, \ldots$.

Câu 8. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{n}{2^n}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $u_4 = \dfrac{1}{4}$. (B) $u_4 = \dfrac{1}{16}$. (C) $u_4 = \dfrac{1}{8}$. (D) $u_4 = \dfrac{1}{32}$.

Câu 9. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{n^2 - n - 2}{n+1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $u_7 = 5$. Ⓑ $u_7 = \dfrac{40}{7}$. Ⓒ $u_7 = 8$. Ⓓ $u_7 = \dfrac{21}{4}$.

Câu 10. Cho dãy số có các số hạng đầu là 2; 5; 10; 17; 26. Số hạng tổng quát của dãy số này là?

Ⓐ $u_n = n^2$. Ⓑ $u_n = n^3$. Ⓒ $u_n = n^2 + 1$. Ⓓ $u_n = n^3 + 1$.

Câu 11. Cho các dãy số sau. Dãy số nào là dãy số tăng?

Ⓐ $1; 1; 1; 1; 1; 1; \ldots$. Ⓑ $1; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{8}; \dfrac{1}{16}; \ldots$.

Ⓒ $1; -\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; -\dfrac{1}{8}; \dfrac{1}{16}; \ldots$. Ⓓ $1; 3; 5; 7; 9; \ldots$.

Câu 12. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = (-1)^n \cdot \dfrac{2^n}{n}$. Tìm số hạng u_3.

Ⓐ $u_3 = -\dfrac{8}{3}$. Ⓑ $u_3 = 2$. Ⓒ $u_3 = -2$. Ⓓ $u_3 = \dfrac{8}{3}$.

Câu 13. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 1) \end{cases}$. Tìm số hạng u_4.

Ⓐ $u_4 = \dfrac{2}{3}$. Ⓑ $u_4 = 1$. Ⓒ $u_4 = \dfrac{14}{27}$. Ⓓ $u_4 = \dfrac{5}{9}$.

Câu 14. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{-n}{n+1}$. Năm số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

Ⓐ $\dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{4}{5}; \dfrac{5}{6}; \dfrac{6}{7}$. Ⓑ $-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{2}{3}; -\dfrac{3}{4}; -\dfrac{4}{5}; -\dfrac{5}{6}$.

Ⓒ $-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{3}{4}; -\dfrac{4}{5}; -\dfrac{5}{6}; -\dfrac{6}{7}$. Ⓓ $\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{4}{5}; \dfrac{5}{6}$.

Câu 15. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{n}{3^n - 1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

Ⓐ $\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{16}$. Ⓑ $\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{4}$. Ⓒ $\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{3}{26}$. Ⓓ $\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{8}$.

Câu 16. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-2; 0; 2; 4; 6; \ldots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là công thức nào dưới đây?

Ⓐ $u_n = -2(n+1)$. Ⓑ $u_n = -2n$. Ⓒ $u_n = 2n - 4$. Ⓓ $u_n = n - 2$.

Câu 17. Dãy số có các số hạng cho bởi: $0; \dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{4}{5}; \ldots$ có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

Ⓐ $u_n = \dfrac{n+1}{n}$. Ⓑ $u_n = \dfrac{n-1}{n}$. Ⓒ $u_n = \dfrac{n^2 - n}{n+1}$. Ⓓ $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Câu 18. Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

Ⓐ $u_n = 2^n$. Ⓑ $u_n = 2^{n+1}$. Ⓒ $u_n = 2$. Ⓓ $u_n = n^{n-1}$.

Câu 19. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

Ⓐ $u_n = \dfrac{1}{n}$. Ⓑ $u_n = \dfrac{1}{2^n}$. Ⓒ $u_n = \dfrac{n+5}{3n+1}$. Ⓓ $u_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$.

Câu 20. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{3n-1}{3n+1}$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $\dfrac{1}{3}$. Ⓒ 1. Ⓓ 0.

Câu 21. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{2n+5}{5n-4}$. Số $\dfrac{7}{12}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

Ⓐ 9. Ⓑ 6. Ⓒ 10. Ⓓ 8.

Câu 22. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$. Số $\dfrac{8}{15}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

Ⓐ 7. Ⓑ 6. Ⓒ 5. Ⓓ 8.

Câu 23. Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là dãy giảm?

Ⓐ $u_n = \dfrac{1}{n} - 1$. Ⓑ $u_n = n^2 - 1$. Ⓒ $u_n = 2n$. Ⓓ $u_n = n^3$.

Câu 24. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$?

Ⓐ Bị chặn trên. Ⓑ Bị chặn dưới. Ⓒ Bị chặn. Ⓓ Không bị chặn.

Câu 25. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \sqrt{3n+2}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ Dãy số tăng. Ⓑ Dãy số giảm.
Ⓒ Dãy số không tăng, không giảm. Ⓓ Mọi số hạng đều âm.

Câu 26. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 1$ và $u_n = 2u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$. Viết ba số hạng đầu của dãy số trên?

Ⓐ $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3$. Ⓑ $u_1 = 1, u_2 = 4, u_3 = 8$.
Ⓒ $u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 4$. Ⓓ $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 4$.

Câu 27. Xét tính bị chặn của dãy số sau $u_n = (-1)^n$.

Ⓐ Bị chặn. Ⓑ Không bị chặn.
Ⓒ Bị chặn trên nhưng không bị chặn dưới. Ⓓ Bị chặn dưới nhưng không bị chặn trên.

Câu 28. Dãy số (u_n) được cho bởi hệ thức truy hồi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ với mọi $n \geq 2$. Số hạng thứ ba của dãy số bằng?

Ⓐ 2. Ⓑ 4. Ⓒ 5. Ⓓ 6.

Câu 29. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 1) \end{cases}$, $(n \geq 1)$. Tìm số hạng u_4.

Ⓐ $\dfrac{5}{9}$. Ⓑ 1. Ⓒ $\dfrac{2}{3}$. Ⓓ $\dfrac{14}{27}$.

Câu 30. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 3, u_{n+1} = u_n + n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Giá trị $u_1 + u_2 + u_3$ bằng

Ⓐ 10. Ⓑ 11. Ⓒ 12. Ⓓ 13.

Câu 31. Dãy số (u_n) có số hạng tổng quát: $(u_n) = 3n + n^2$. Hỏi số 40 là số hạng thứ mấy của dãy số đã cho?

Ⓐ u_{10}. Ⓑ u_8. Ⓒ u_5. Ⓓ u_{40}.

Câu 32. Dãy số nào có công thức số hạng tổng quát dưới đây là dãy số tăng?

Ⓐ $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Ⓑ $u_n = (-3)^n$. Ⓒ $u_n = 2020 - 3n$. Ⓓ $u_n = 2018 + 2n$.

Câu 33. Trong các dãy số (u_n) sau đây, hãy chọn dãy số giảm.

Ⓐ $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. Ⓑ $u_n = \sin n$.

Ⓒ $u_n = \frac{n^2+1}{n}$. Ⓓ $(-1)^n(2^n + 1)$.

Câu 34. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào là dãy số bị chặn?

Ⓐ $u_n = \frac{n}{n+1}$. Ⓑ $u_n = \sqrt{n^2+1}$. Ⓒ $u_n = 2^n + 1$. Ⓓ $u_n = n + \frac{1}{n}$.

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Cho dãy số (u_n), với $u_n = 2024^n$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\frac{u_2}{u_1} = 2024$.

b) Số hạng thứ $n+1$ là $u_{n+1} = 2024^n + 1$.

c) Dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

d) Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

Câu 2. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{4}\right]$.

a) Số hạng đầu tiên của dãy là $u_1 = 1$.

b) Dãy (u_n) là dãy số tăng.

c) $u_{n+4} = u_n$, với mọi $n \geq 1$.

d) Tổng 12 số hạng đầu của dãy số bằng 0.

Câu 3. Cho dãy số (u_n), biết $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ với $n \geq 1$.

a) Bốn số hạng đầu tiên của dãy số lần lượt là $-1; 2; 5; 8$.

b) Số hạng thứ năm của dãy là 13.

c) Công thức số hạng tổng quát của dãy số là $u_n = 2n - 3$.

d) 101 là số hạng thứ 35 của dãy số đã cho.

Câu 4. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

a) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}}$.

b) $\frac{u_{2\,024}}{u_{2\,023}} < 1$.

c) $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

d) Dãy số (u_n) là dãy số giảm.

Câu 5. Cho dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = u_{n-1} + 5 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

a) Dãy số có số hạng thứ 2 là $u_2 = 8$.

b) Dãy số (u_n) có tất cả các số hạng đều bằng nhau.

c) Dãy số (u_n) là dãy tăng.

d) Dãy số (u_n) bị chặn trên.

Câu 6. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{2n-13}{3n-2}$.

a) Dãy số (u_n) có số hạng thứ mười là $\dfrac{1}{4}$.

b) Dãy số (u_n) là dãy không tăng, không giảm.

c) Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi $\dfrac{1}{3}$.

d) Dãy số (u_n) là dãy bị chặn.

Câu 7. Cho dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = u_{n-1} + 5 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$

a) Dãy số có số hạng thứ 2 là $u_2 = 8$.

b) Dãy số (u_n) có tất cả các số hạng đều bằng nhau.

c) Dãy số (u_n) là dãy tăng.

d) Dãy số (u_n) bị chặn trên.

Câu 8. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Số hạng $u_1 = \dfrac{1}{2}$.

b) Số hạng $u_3 = \dfrac{3}{4}$.

c) $\dfrac{10}{11}$ là số hạng thứ 11 của dãy số.

d) $u_{2023} + u_{2024} > 2$.

Câu 9. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = n^2 + 2n, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Số hạng đầu tiên của dãy số là $u_1 = 3$.

b) Dãy số (u_n) là một dãy số giảm.

c) Số 143 là số hạng thứ 13 trong dãy số (u_n).

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \dfrac{1}{u_3} + \cdots \ldots + \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{3n^2 + 5n}{2(n+1)(n+2)}$.

Câu 10. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{9}{u_n} \end{cases}$.

a) Dãy số (u_n) có số hạng thứ 2 là $u_2 = \dfrac{9}{u_1} = 3$.

b) Giá trị của $u_4 - u_2 = 3$.

c) Công thức tổng quát (u_n) là $u_n = 3n$.

d) Dãy số (u_n) là dãy không tăng không giảm.

Câu 11. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Hai số hạng đầu lần lượt là $u_1 = 1; u_2 = \dfrac{5}{3}$.

b) Dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

c) Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi $\dfrac{33}{17}$.

d) Dãy số (u_n) có duy nhất một số hạng nguyên.

Câu 12. Cho dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 2u_{n-1} - 5 \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$

a) Dãy số có số hạng thứ 3 là $u_3 = 10$.

b) Công thức tổng quát của dãy số (u_n) là $u_n = -3 \cdot 2^{n-1}$.

c) Dãy số (u_n) bị chặn trên.
d) Dãy số (u_n) là dãy tăng.

Câu 13. Bà Hoa gửi vào một ngân hàng số tiền 200 triệu đồng với lãi suất 5% một năm theo hình thức lãi kép, kì hạn 1 tháng. Số tiền(triệu đồng) của bà Hoa sau n tháng được tính theo công thức $T_n = 200\left(1+\dfrac{0{,}05}{12}\right)^n$.

a) Sau 1 tháng, số tiền bà Hoa nhận được là khoảng 200,83 (triệu đồng).
b) Sau 2 tháng, số tiền bà nhận được là khoảng 201,67 (triệu đồng).
c) Sau 14 tháng, số tiền bà nhận được là khoảng 211,99 (triệu đồng).
d) Sau 17 tháng, số tiền bà nhận được là khoảng 215,65 (triệu đồng).

Câu 14. Vi khuẩn E. Coli sinh sản thông qua một quá trình gọi là quá trình phân đôi. Vi khuẩn E. Coli phân chia làm đôi cứ sau 20 phút. Giả sử tốc độ phân chia này được duy trì trong 12 giờ kể từ khi vi khuẩn ban đầu xâm nhập vào cơ thể. Ban đầu có 1 vi khuẩn E. Coli.

a) Sau 1 giờ, số lượng vi khuẩn là 6 con.
b) Sau 2 giờ, số lượng vi khuẩn là 64 con.
c) Sau 12 giờ, số lượng vi khuẩn là 2^{12} con.
d) Giả sử có một nguồn dinh dưỡng vô hạn để vi khuẩn E. Coli duy trì tốc độ phân chia như cũ trong 48 giờ kể từ khi vi khuẩn ban đầu xâm nhập vào cơ thể. Sau 48 giờ, số lượng vi khuẩn là 2^{144} con.

Câu 15. Giá của một chiếc máy photocopy lúc mới mua là 50 triệu đồng. Biết rằng giá trị của nó sau mỗi năm sử dụng chỉ còn 75% giá trị trong năm liền trước đó. Gọi T_n (triệu đồng) là giá trị còn lại của chiếc máy photocopy đó sau n năm kể từ khi mua.

a) $T_1 = 37{,}5$ triệu đồng.
b) $T_2 = 28{,}125$ triệu đồng.
c) $T_4 \approx 11{,}87$ triệu đồng.
d) $T_n = 50 \cdot 0{,}75^n$ triệu đồng.

3 Tự luận.

Bài 1. Tìm năm số hạng đầu và số hạng thứ 100 của dãy số số cho bởi công thức sau $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Bài 2. Cho (u_n) là dãy các số tự nhiên lẻ viết theo thứ tự tăng dần và $u_1 = 1$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy (u_n).

b) Dự đoán số hạng tổng quát và viết dạng khai triển của dãy số (u_n). $u_n = 2n-1$

Bài 3. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát: $u_n = 2n + \sqrt{n^2+4}$.

a) Viết 6 số hạng đầu của dãy số số.

b) Tính u_{20}, u_{2010}.

c) Dãy số đã cho có bao nhiêu số hạng là số nguyên. 0

Bài 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = -1, u_2 = 3 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} \forall n \geq 2 \end{cases}$. Viết 4 số hạng tiếp theo của dãy số. $u_3 = 21, u_4 = 87, u_5 = 309, u_6 = 1023, u_7 = 3261$

Bài 5. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}, \forall n \geq 1 \end{cases}$

a) Tìm 4 số hạng đầu của dãy số. $u_1 = 2; u_2 = \frac{3}{2}; u_3 = \frac{5}{4}; u_4 = \frac{9}{8}$

b) Dự đoán công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n). $u_n = \frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}$

Bài 6. Xét tính tăng, giảm của các dãy số sau

a) (u_n) với $u_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$; dãy tăng

b) (x_n) với $x_n = \dfrac{n+2}{4^n}$; dãy giảm

c) (t_n) với $t_n = (-1)^n \cdot n^2$. dãy không tăng, không giảm

Bài 7. Xét tính tăng giảm của các dãy số sau:

a) $u_n = \dfrac{2n-1}{n+3}$. Dãy tăng.

b) $u_n = n^3 - 2n + 1$. Dãy tăng.

c) $u_n = \dfrac{1}{n} - 2$. Dãy giảm.

d) $u_n = \dfrac{n^2+n+1}{2n^2+1}$. Dãy giảm.

e) $u_n = 2n - \sqrt{4n^2-1}$. Dãy giảm.

f) $u_n = 2n + \cos\dfrac{1}{n}$. Dãy tăng.

g) $u_n = n + \cos^2 n$. Dãy tăng.

h) $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$. Dãy tăng.

Bài 8. Xét tính tăng, giảm của mỗi dãy số (u_n), biết

a) $u_n = \dfrac{n-3}{n+2}$; dãy tăng

b) $u_n = \dfrac{3^n}{2^n \cdot n!}$; dãy giảm

c) $u_n = (-1)^n \cdot (2^n + 1)$. dãy không tăng, không giảm

Bài 9. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn trên, bị chặn dưới và bị chặn?

a) $u_n = n^2 + 5$. Bị chặn dưới, không bị chặn trên.

b) $u_n = \dfrac{3n+1}{2n+5}$. Bị chặn.

c) $u_n = (-1)^n \cos\dfrac{\pi}{2n}$. Bị chặn.

d) $u_n = \dfrac{n^2+2n}{n^2+n+1}$. Bị chặn.

e) $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$. Bị chặn.

Bài 10. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn dưới, bị chặn trên, bị chặn?

a) $u_n = n - 1$; Bị chặn dưới.

b) $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$; Bị chặn.

c) $u_n = \sin n$; Bị chặn.

d) $u_n = (-1)^{n-1} n^2$. Không bị chặn.

Bài 11. Trong các dãy số (u_n) được xác định như sau, dãy số nào bị chặn dưới, bị chặn trên, bị chặn?

a) $u_n = n^2 + 2$; Bị chặn dưới.

b) $u_n = -2n + 1$; Bị chặn trên.

c) $u_n = \dfrac{1}{n^2+n}$. Bị chặn.

Bài 12. Xét tính bị chặn của các dãy số sau

a) (a_n) với $a_n = \sin^2 \dfrac{n\pi}{3} + \cos \dfrac{n\pi}{4}$; Dãy bị chặn.

b) (u_n) với $u_n = \dfrac{6n-4}{n+2}$. Dãy bị chặn.

Bài 13. Xét tính tăng giảm của dãy số số (u_n) với $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+3}$. dãy tăng

Bài 14. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{na+2}{n+1}$. Tìm giá trị của a để

a) (u_n) là dãy số tăng; $a > 2$.

b) (u_n) là dãy số giảm. $a < 2$.

Bài 15. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{b.2n^2+1}{n^2+3}$ và $b \in \mathbb{R}$. Hãy xác định b để

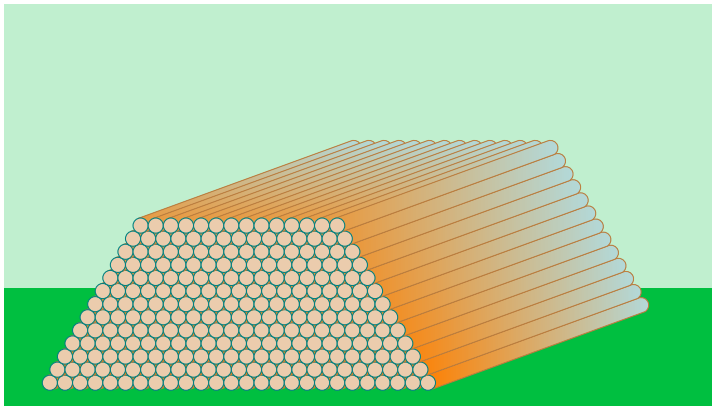
a) (u_n) là dãy số giảm. $b < \dfrac{1}{6}$.

b) (u_n) là dãy số tăng. $b > \dfrac{1}{6}$.

Bài 16. Một chồng cột gỗ được xếp thành các lớp, hai lớp liên tiếp hơn kém nhau 1 cột gỗ.

a) Gọi $u_1 = 25$ là số cột gỗ có ở hàng dưới cùng của chồng cột gỗ, u_n là số cột gỗ có ở hàng thứ n tính từ dưới lên trên. Xét tính tăng, giảm của dãy số này. dãy giảm

b) Gọi $v_1 = 14$ là số cột gỗ có ở hàng trên cùng của chồng cột gỗ, v_n là số cột gỗ có ở hàng thứ n tính từ trên xuống dưới. Xét tính tăng, giảm của dãy số này. dãy tăng



Bài 17. Ông An gửi tiết kiệm 100 triệu đồng kì hạn 1 tháng với lãi suất 6% một năm theo hình thức tính lãi kép. Số tiền (triệu đồng) của ông An thu được sau n tháng được cho bởi công thức

$$A_n = 100\left(1 + \frac{0{,}06}{12}\right)^n.$$

a) Tìm số tiền ông An nhận được sau tháng thứ nhất, sau tháng thứ hai.

$A_1 = 100,5; A_2 = 101,0025$

b) Tìm số tiền ông An nhận được sau 1 năm. $A_{12} = 106{,}1678$

Bài 18. Chị Hương vay trả góp một khoản tiền 100 triệu đồng và đồng ý trả dần 2 triệu đồng mỗi tháng với lãi suất 0,8% số tiền còn lại của mỗi tháng. Gọi A_n, $(n \in \mathbb{N})$ là số tiền còn nợ (triệu đồng) của chị Hương sau n tháng.

a) Tìm lần lượt A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 để tính số tiền còn nợ của chị Hương sau 6 tháng.

b) Dự đoán hệ thức truy hồi đối với dãy số (A_n). $A_n = A_{n-1}(1+0{,}8\%) - 2.000.000$

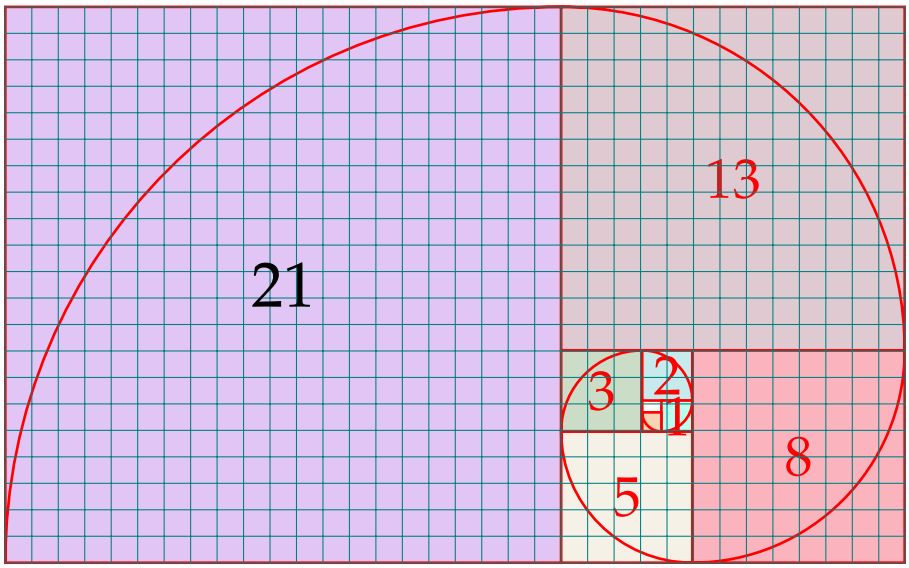
Bài 19. Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép như sau: Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là 0,5% một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.

a) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng. 106 500 000 đồng

b) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng. 119 597 662 đồng

c) Dự đoán công thức của P_n tính theo n. $P_n = 100 \cdot 1{,}005^n + \dfrac{6 \cdot 1{,}005^n - 6}{0{,}005}$

Bài 20. Trên lưới ô vuông, mỗi ô cạnh 1 đơn vị, người ta vẽ 8 hình vuông và tô màu khác nhau như Hình vẽ . Tìm dãy số biểu diễn độ dài cạnh của 8 hình vuông đó từ nhỏ đến lớn. Có nhận xét gì về dãy số trên?



Bài 21. Bác Thanh gửi tiết kiệm A triệu đồng kì hạn 1 tháng với lãi suất 6,5% một năm theo hình thức lãi kép. Số tiền (triệu đồng) của bác Thanh thu được sau n tháng được cho bởi công thức $A_n = A\left(1 + \dfrac{0{,}065}{12}\right)^n$. Hỏi bác Thanh cần gửi vào ngân hàng số A là bao nhiêu để sau 4 tháng bác Thanh nhận được 204,37 triệu đồng (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

200

Bài 22. Biết rằng trong một hồ sen, số lá sen ngày hôm sau sẽ bằng 3 lần số lá sen ngày hôm trước. Biết rằng ngày đầu có 1 lá sen thì tới ngày thứ 10 hồ sẽ đầy lá sen. Hỏi nếu ngày đầu có 9 lá sen thì tới ngày thứ mấy hồ sẽ đầy lá sen? 8

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	D	2	C	3	A	4	C	5	A	6	C	7	B	8	A	9	A	10	C
11	D	12	A	13	D	14	B	15	C	16	C	17	B	18	A	19	D	20	C
21	D	22	A	23	A	24	C	25	A	26	D	27	A	28	C	29	A	30	D
31	C	32	D	33	A	34	A												

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	S	Câu 2.	a	S	b	S	c	Đ	d	Đ
Câu 3.	a	Đ	b	S	c	S	d	Đ	Câu 4.	a	S	b	Đ	c	Đ	d	Đ
Câu 5.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	S	Câu 6.	a	Đ	b	S	c	S	d	Đ
Câu 7.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	S	Câu 8.	a	Đ	b	Đ	c	S	d	S
Câu 9.	a	Đ	b	S	c	S	d	S	Câu 10.	a	Đ	b	S	c	S	d	Đ
Câu 11.	a	S	b	Đ	c	S	d	Đ	Câu 12.	a	S	b	S	c	Đ	d	S
Câu 13.	a	Đ	b	Đ	c	Đ	d	S	Câu 14.	a	S	b	Đ	c	S	d	Đ
Câu 15.	a	Đ	b	Đ	c	S	d	Đ									

§2 CẤP SỐ CỘNG

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Cấp số cộng

Cấp số cộng là một dãy số (vô hạn hoặc hữu hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số d không đổi, nghĩa là:

$$u_{n+1} = u_n + d \quad \text{với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Số d được gọi là ***công sai*** của cấp số cộng.

Nhận xét. Nếu (u_n) là cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \ (k \geq 2).$$

Lưu ý. Để chứng minh (u_n) là cấp số cộng, hãy chứng minh hiệu hai số hạng liên tiếp $u_n - u_{n-1}$ không đổi. Ta có công sai d được tính bởi công thức $d = u_n - u_{n-1}$.

2) Số hạng tổng quát của cấp số cộng

Nếu một cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1 + (n-1)d, \ n \geq 2.$$

3) Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng

Giả sử (u_n) là một cấp số cộng có công sai d. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, khi đó

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} \quad \text{hay} \quad S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}.$$

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Nhận diện cấp số cộng, công sai d

Cấp số cộng (CSC) là dãy số mà hiệu của hai số hạng liên tiếp luôn không đổi:

$$u_{n+1} = u_n + d \quad (n \in \mathbb{N}^*),$$

trong đó d là **công sai**.

Để chứng minh (u_n) là cấp số cộng, hãy chứng minh hiệu hai số hạng liên tiếp $u_n - u_{n-1}$

Dạng 1 Phần tiếp theo

không đổi. Ta có công sai d được tính bởi công thức $d = u_n - u_{n-1}$.

Ví dụ 1

Tìm năm số hạng đầu và số hạng thứ 100 của cấp số cộng (u_n) : $10, 5, \ldots$

Ví dụ 2

Cho dãy số (u_n) với $u_n = -2n + 3$. Chứng minh rằng (u_n) là một cấp số cộng. Tìm số hạng đầu và công sai d của cấp số cộng này.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào là cấp số cộng?

a) $u_n = 3n + 2$

b) $u_n = 3^n - 1$

c) $u_n = (n+2)^2 - n^2$

d) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3 - u_n, \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$

Bài 2 ☆

Cho dãy số (u_n):

$$\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 3, \text{ với } n \geq 2. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số (v_n) với $v_n = u_{n+1} - u_n$ là một cấp số cộng.

Dạng 2 Tìm số hạng cụ thể của cấp số cộng

Nếu một cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1 + (n-1)d, \ n \geq 2.$$

Ví dụ 3

Xác định số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n), biết $\begin{cases} u_7 = 8 \\ d = 2. \end{cases}$

$u_n = 2n - 6$

Ví dụ 4

Cho cấp số cộng (u_n), biết $u_1 = -15$ và $d = 18$.

a) Tìm $u_5, u_{10}, u_{15}, u_{20}, u_{25}$.

b) Số 1209 là số hạng thứ bao nhiêu ?

$u_5 = 57, u_{10} = 147, u_{15} = 237, u_{20} = 327, u_{25} = 417$; 1209 là số hạng thứ 69

Ví dụ 5

Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n), biết:

$$\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}. \quad (1)$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3 ☆

Xác định công thức tổng quát của cấp số cộng (u_n), biết: $\begin{cases} u_{11} = 5 \\ d = -6 \end{cases}$.

🔑 $u_n = -6n + 71$

Bài 4 ☆

Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 4$ và công sai $d = 3$.

a) Viết công thức số hạng tổng quát u_n. 🔑 $u_n = u_1 + (n-1)d = 3n + 1$

b) Số 832 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng trên? 🔑 277

c) Số 2024 có là số hạng nào của cấp số cộng trên không? 🔑 không

Bài 5 ☆

Viết sáu số xen giữa hai số 3 và 24 để được cấp số cộng có tám số hạng. Tìm cấp số cộng đó.

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24.

Bài 6 ☆

Số hạng thứ 10 của một cấp số cộng (u_n) bằng 48 và số hạng thứ 18 bằng 88. Tìm số hạng thứ 100 của cấp số cộng đó.

498

Bài 7 ☆

Tổng ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng bằng 2 và tổng các bình phương của ba số đó bằng $\frac{14}{9}$. Xác định ba số đó và tính công sai của cấp số cộng.

$1; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}$ ứng với $d = -\frac{1}{3}$ hoặc $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1$ ứng với $d = \frac{1}{3}$

Dạng 3 Tính tổng của cấp số cộng

Giả sử (u_n) là một cấp số cộng có công sai d. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, khi đó

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} \quad \text{hay} \quad S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}.$$



Ngoài ra ta cũng có thể dùng công thức

$$S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)d}{2}.$$

Ví dụ 6

Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$. Tính tổng S_{100} của 100 số hạng đầu tiên.

$S_{100} = 15050$

Ví dụ 7

Tìm số hạng đầu, công sai và tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số (u_n), biết rằng

$$\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26. \end{cases}$$

$u_1 = 1$, $d = 3$, $u_{20} = 58$, $S_{20} = 590$

Ví dụ 8

Tính tổng $S = 100 + 105 + 110 + \cdots + 995$.

98 550

Ví dụ 9

Giải phương trình: $2+7+12+17+\ldots+x=245$. $x=47$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 8 ☆

Cho dãy số (u_n), với $u_n=2n-3$.

a) Chứng minh rằng (u_n) là cấp số cộng.

b) Tính tổng của 30 số hạng đầu. 840

c) Biết $S_n=195$, tìm n. $n=15$

Bài 9 ☆

Cần lấy tổng của bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng 2, 5, 8, ... để được kết quả bằng 345? 15

Bài 10

Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$. Tính tổng S_{10} của 10 số hạng đầu.

🔑 270

Bài 11

Cho cấp số cộng (u_n) có $\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$ và công sai $d > 0$. Tính tổng S_{2017} của 2017 số hạng đầu.

🔑 6 099 408

Bài 12

Tính tổng $S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \cdots + 2^2 - 1^2$.

🔑 5050

Bài 13 ☆

Giải phương trình: $1+6+11+16+21+\ldots+x=970$. $x=96$.

Dạng 4 Điều kiện để dãy số là cấp số cộng

Nếu (u_n) là cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là

$$u_k=\frac{u_{k-1}+u_{k+1}}{2}\ (k\geq 2).$$

Ví dụ 10

Cho biết bốn số 5; x; 15; y theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tính giá trị của biểu thức $3x+2y$. 70

Ví dụ 11

Ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Tìm ba góc đó. $\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}$

Ví dụ 12

Cho ba số dương a, b, c. Đặt $A = \dfrac{1}{b+c}, B = \dfrac{1}{c+a}, C = \dfrac{1}{a+b}$. Chứng minh rằng C, A, B theo thứ tự lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi c^2, a^2, b^2 theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

Ví dụ 13

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 + mx + 2 - m = 0$ có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng. $m \leq 3$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 14 ☆

Tìm x biết ba số $10 - 3x, 3x^2 + 5, 5 - 4x$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng. $-\frac{5}{3}$

Bài 15 ☆

Cho tam giác ABC có số đo ba góc lập thành một cấp số cộng và một góc có số đo bằng $25°$. Tính số đo hai góc còn lại.

🔑 $95°$

Bài 16 ☆

Cho ba số a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh rằng ba số

$$a^2 + ab + b^2; a^2 + ac + c^2; b^2 + bc + c^2$$

cũng lập thành cấp số cộng.

Dạng 5 Toán thực tế áp dụng cấp số cộng

Ví dụ 14

Người ta trồng cây theo hình tam giác với quy luật: ở hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây,... ở hàng thứ n có n cây. Biết đã trồng hết 4950 cây. Hỏi có mấy hàng?

🔑 99 hàng.

Ví dụ 15

Bà chủ quán trà sữa X muốn trang trí quán cho đẹp nên quyết định thuê nhân công xây một bức tường gạch với xi măng, biết hàng dưới cùng có 500 viên, mỗi hàng tiếp theo đều có ít hơn hàng trước 1 viên và hàng trên cùng có 1 viên. Hỏi số gạch cần dùng để hoàn thành bức tường trên là bao nhiêu viên gạch?

125250 viên gạch.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 17 ☆

Trong sân vận động của câu lạc bộ quận Tân Phú, có tất cả 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 15 ghế, các dãy liền sau nhiều hơn dãy trước 4 ghế, hỏi sân vận động có tất cả bao nhiêu ghế?

2190 ghế.

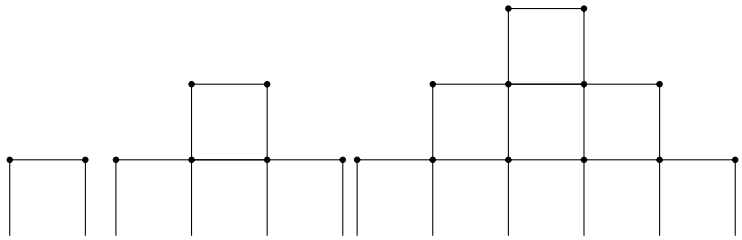
Bài 18 ☆

Một công ty trách nhiệm hữu hạn thực hiện việc trả lương cho các kỹ sư theo phương thức sau: Mức lương của quý làm việc đầu tiên cho công ty là 4,5 triệu đồng/quý, và kể từ quý làm việc thứ hai, mức lương được tăng thêm 0,3 triệu đồng mỗi quý. Tính tổng tiền lương nhận được sau 3 năm.

73,8 triệu đồng.

Bài 19

Bạn An chơi trò chơi xếp que diêm thành tháp theo quy tắc thể hiện như hình vẽ. Để xếp được tháp có 10 tầng thì bạn An cần đúng bao nhiêu? 210



BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Dãy nào sau đây là cấp số cộng?

Ⓐ 1; 5; 9; 5; 1. Ⓑ 1; 3; 5; 7; 11. Ⓒ 2; 5; 8; 11. Ⓓ 3; 7; 3; 7.

Câu 2. Trong các dãy số sau, dãy nào là một cấp số cộng?

Ⓐ $1; -3; -6; -9; -12$. Ⓑ $1; -3; -7; -11; -15$.

Ⓒ $1; -3; -5; -7; -9$. Ⓓ $1; -2; -4; -6; -8$.

Câu 3. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_n = 3n - 5$. Số hạng đầu và công sai của cấp số cộng là

Ⓐ $u_1 = -5, d = 3$. Ⓑ $u_1 = 3, d = -5$. Ⓒ $u_1 = -2, d = 3$. Ⓓ $u_1 = 3, d = -2$.

Câu 4. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 4$ và $d = 2$. Số hạng thứ 50 của cấp số cộng đó là

Ⓐ $u_{50} = 100$. Ⓑ $u_{50} = 102$. Ⓒ $u_{50} = 104$. Ⓓ $u_{50} = 198$.

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = -3; u_8 = 18$. Công sai của cấp số cộng đó là

Ⓐ $d = 3$. Ⓑ $d = -3$. Ⓒ $d = 2$. Ⓓ $d = -2$.

Câu 6. Viết ba số xen giữa 2 và 22 để ta được một cấp số cộng có 5 số hạng?

Ⓐ 6, 12, 18. Ⓑ 8, 13, 18. Ⓒ 7, 12, 17. Ⓓ 6, 10, 14.

Câu 7. Cho cấp số cộng $1,\ 8,\ 15,\ 22,\ 29,\ldots$ Công sai của cấp số cộng này là

Ⓐ 9. Ⓑ 1. Ⓒ 8. Ⓓ 7.

Câu 8. Cho cấp số cộng $u_1 = -3; u_6 = 27$. Công sai của cấp số cộng đó là

Ⓐ $d = 6$. Ⓑ $d = 7$. Ⓒ $d = 8$. Ⓓ $d = 5$.

Câu 9. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2; d = 9$. Khi đó số 2018 là số hạng thứ mấy?

Ⓐ 226. Ⓑ 225. Ⓒ 223. Ⓓ 224.

Câu 10. Cho cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu $u_1 = -1$ và số hạng thứ chín $u_9 = -17$. Số hạng thứ 100 của cấp số cộng đó là

Ⓐ $u_{100} = -199$. Ⓑ $u_{100} = -201$. Ⓒ $u_{100} = -197$. Ⓓ $u_{100} = -200$.

Câu 11. Tìm số hạng thứ 11 của cấp số cộng có số hạng đầu bằng 3 và công sai $d = -2$.

Ⓐ -21. Ⓑ 23. Ⓒ -17. Ⓓ -19.

Câu 12. Dãy số nào sau đây là một cấp số cộng?

Ⓐ (u_n): $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3,\ \forall n \geq 1 \end{cases}$. Ⓑ (u_n): $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 4,\ \forall n \geq 1 \end{cases}$.

Ⓒ (u_n): $1; -3; 6; 7; 15; \ldots$. Ⓓ (u_n): $-1; 1; -1; 1; -1; \ldots$.

Câu 13. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng thứ hai $u_2 = 5$ và số hạng thứ ba là $u_3 = 8$. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng đó?

Ⓐ $u_1 = 1; d = 3$. Ⓑ $u_1 = 2; d = 3$. Ⓒ $u_1 = 3; d = 2$. Ⓓ $u_1 = 2; d = -3$.

Câu 14. Cho cấp số cộng (u_n), biết $u_1 = -5; d = 2$. Số 81 là số hạng thứ bao nhiêu?

Ⓐ 100. Ⓑ 50. Ⓒ 75. Ⓓ 44.

Câu 15. Cho cấp số cộng có $u_1 = 1, u_2 = 3$. Hãy tìm công sai d của cấp số cộng đó.

Ⓐ $d = 2$. Ⓑ $d = -2$. Ⓒ $d = 3$. Ⓓ $d = 4$.

Câu 16. Trong các dãy số nào sau đây, dãy số nào là cấp số cộng?

Ⓐ $u_n = 3n^2 + 2017$. Ⓑ $u_n = 3n + 2018$. Ⓒ $u_n = 3^n$. Ⓓ $u_n = (-3)^{n+1}$.

Câu 17. Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là một cấp số cộng?

Ⓐ $u_n = n^2 + 1,\ n \geq 1$. Ⓑ $u_n = 2^n,\ n \geq 1$.

Ⓒ $u_n = \sqrt{n+1},\ n \geq 1$. Ⓓ $u_n = 2n - 3,\ n \geq 1$.

Câu 18. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -3$ và $d = \dfrac{1}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $u_n = -3 + \dfrac{1}{2}(n+1)$. Ⓑ $u_n = -3 + \dfrac{1}{2}n - 1$.

Ⓒ $u_n = -3 + \dfrac{1}{2}(n-1)$. Ⓓ $u_n = -3 + \dfrac{1}{4}(n-1)$.

Câu 19. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$ và $u_2 = -1$. Khi đó

Ⓐ $u_3 = 4$. Ⓑ $u_3 = 2$. Ⓒ $u_3 = -5$. Ⓓ $u_3 = 7$.

Câu 20. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -3, u_6 = 27$. Tính công sai d .

Ⓐ $d = 7$. Ⓑ $d = 5$. Ⓒ $d = 8$. Ⓓ $d = 6$.

Câu 21. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 8$ và công sai $d = 3$. Giá trị của u_2 bằng

Ⓐ $\frac{8}{3}$. Ⓑ 24. Ⓒ 5. Ⓓ 11.

Câu 22. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 4$. Giá trị u_{2019} bằng

Ⓐ 8074. Ⓑ 4074. Ⓒ 8078. Ⓓ 4078.

Câu 23. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và $d = -2$. Tổng của 20 số hạng đầu của cấp số cộng đó là

Ⓐ $S_{20} = -380$. Ⓑ $S_{20} = -214$. Ⓒ $S_{20} = -640$. Ⓓ $S_{20} = -320$.

Câu 24. Viết 5 số xen giữa hai số 25 và 1 để được cấp số cộng có bảy số hạng với số hạng đầu 25.

Ⓐ 21; 17; 13; 9; 5. Ⓑ 21; −17; 13; −9; 5. Ⓒ −21; 17; 13; 9; −5. Ⓓ 21; 25; 29; 32; 36.

Câu 25. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_3 = 5$ và $u_6 = 29$. Tổng 30 số hạng đầu của cấp số cộng đó là

Ⓐ $S_{30} = 6300$. Ⓑ $S_{30} = 3150$. Ⓒ $S_{30} = 7260$. Ⓓ $S_{30} = 3630$.

Câu 26. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 5$ và tổng của 50 số hạng đầu bằng 5150. Tìm công thức của số hạng tổng quát u_n.

Ⓐ $u_n = 1 + 4n$. Ⓑ $u_n = 5n$. Ⓒ $u_n = 3 + 2n$. Ⓓ $u_n = 2 + 3n$.

Câu 27. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$, $u_{14} = 18$. Tính tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này.

Ⓐ $S_{16} = -24$. Ⓑ $S_{16} = 26$. Ⓒ $S_{16} = -25$. Ⓓ $S_{16} = 24$.

Câu 28. Cho cấp số cộng có công sai $d = -2$ và tổng của 8 số hạng đầu là $S_8 = 72$. Tìm u_1.

Ⓐ -32. Ⓑ 32. Ⓒ -16. Ⓓ 16.

Câu 29. Cho cấp số cộng có $u_2 + u_{22} = 60$. Tổng của 23 số hạng đầu tiên là

Ⓐ 1380. Ⓑ 690. Ⓒ 120. Ⓓ 180.

Câu 30. Tính tổng $T = 15 + 20 + 25 + \cdots + 7515$.

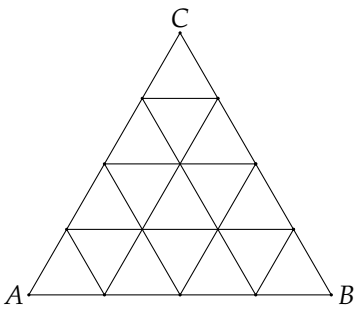
Ⓐ $T = 5651265$. Ⓑ $T = 5651256$. Ⓒ $T = 5651625$. Ⓓ $T = 5651526$.

Câu 31. Một tam giác vuông có chu vi bằng $3a$ và ba cạnh lập thành một cấp số cộng. Tính độ dài ba cạnh của tam giác theo a.

Ⓐ $\frac{3a}{4}, a, \frac{5a}{4}$. Ⓑ $\frac{a}{4}, 2a, \frac{a}{4}$. Ⓒ $\frac{a}{2}, a, \frac{a}{4}$. Ⓓ $\frac{a}{4}, \frac{a}{2}, \frac{a}{4}$.

Câu 32. An định xếp một hình tháp bởi các mảnh ghép tam giác (hình vẽ minh họa). Tầng dưới cùng An xếp 35 hình và tầng tiếp theo ít hơn tầng dưới nó hai hình. An xếp cho đến khi không xếp lên được nữa. Hỏi An cần bao nhiêu mảnh ghép hình tam giác để xếp xong tháp?

Ⓐ $S = 322$. Ⓑ $S = 324$. Ⓒ $S = 234$. Ⓓ $S = 332$.



2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = 7n - 3$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số hạng đầu của cấp số cộng (u_n) là $u_1 = 4$.

b) Công sai của cấp số cộng (u_n) là $d = -3$.

c) $u_{2012} = 14081$.

d) $S_{100} = 697$.

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_1 = 5$ và $d = 3$.

a) $u_{99} = 299$.

b) Số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) là $u_n = 3n + 5$.

c) Số 1502 là số hạng thứ 500 của cấp số cộng (u_n).

d) Tổng của 150 số hạng đầu bằng 34275.

Câu 3. Cho (u_n) là cấp số cộng có $u_2 + u_4 = 22$, $u_1 \cdot u_5 = 21$ và công sai d dương.

a) Số hạng đầu là $u_1 = 1$.

b) Công sai là $d = 4$.

c) $S_{100} = 24850$.

d) $u_1 + u_5 + u_9 + \cdots + u_{101} = 6520$.

Câu 4. Cho dãy cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 4$. Biết tổng 20 số hạng đầu tiên bằng 460.

a) Dãy số (u_n) có $d = 2$.

b) Dãy số (u_n) có $u_4 = 8$.

c) Dãy số (u_n) có $S_{10} = 120$.

d) Dãy số (u_n) có hiệu $S_8 - S_4 = 60$.

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$, $u_3 - u_{15} = 84$.

a) Số hạng thứ 17 của cấp số cộng là $u_{17} = 11$.

b) Công sai của cấp số cộng là $d = -7$.

c) Số hạng thứ 2 của cấp số cộng là $u_2 = 130$.

d) Tổng 17 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là $S_{17} = 1130$.

Câu 6. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$, $u_{14} = 18$.

a) Công sai của cấp số cộng là $d = 3$.

b) Số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 21$.

c) Số hạng thứ 9 của cấp số cộng là $u_9 = 3$.

d) Tổng 5 số hạng đầu của cấp số cộng là $S_5 = -60$.

Câu 7. Một cấp số cộng có năm số hạng mà tổng số hạng đầu và số hạng thứ tư bằng 36, tổng của số hạng thứ hai và số hạng cuối bằng 44.

a) Dãy cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 11$.

b) Dãy cấp số cộng có tổng $u_1 + u_5 = 40$.

c) Dãy cấp số cộng có $u_2 = 16$.

d) Tổng của 3 số hạng đầu tiên trong dãy cấp số cộng bằng 45.

Câu 8. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -5$, công sai $d = 3$.

a) Số 100 là số hạng thứ 36 của cấp số cộng.

b) Số hạng thứ 3 của cấp số cộng bằng 5.

c) Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng bằng 250.

d) Kể từ số hạng thứ 3 thì các số hạng của cấp số cộng đều nhận giá trị dương.

Câu 9. Một cấp số cộng có năm số hạng mà tổng số hạng đầu và số hạng thứ tư bằng 36, tổng của số hạng thứ hai và số hạng cuối bằng 44. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Dãy cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 11$.

b) Dãy cấp số cộng có tổng $u_1 + u_5 = 40$.

c) Dãy cấp số cộng có $u_2 = 16$.

d) Tổng của 3 số hạng đầu tiên trong dãy cấp số cộng bằng 45.

Câu 10. Cho cấp số cộng có tổng n số hạng đầu là $S_n = -4n^2 + 17n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 13$.

b) Công sai của cấp số cộng là $d = 5$.

c) Số hạng tổng quát của cấp số cộng là $u_n = -8n + 15$.

d) Tổng $S = u_{10} + u_{12} + u_{14} + \ldots + u_{98} + u_{100}$ có giá trị là $S = -19274$.

Câu 11. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 6$.

a) Công sai của cấp số cộng đã cho là $d = 4$.

b) Số hạng thứ năm của cấp số cộng là $u_5 = 22$.

c) Tổng của 10 số hạng đầu của cấp số cộng là $S_{10} = 200$.

d) Số 130 là số hạng thứ 30 trong cấp số cộng.

Câu 12. Cho cấp số cộng (u_n), biết $\begin{cases} u_2 - 3u_5 + 2u_7 = 3 \\ u_1 + 2u_4 - 2u_6 = -7 \end{cases}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Cấp số cộng có $u_1 = 5$.

b) Cấp số cộng có công sai $d = -3$.

c) Số hạng tổng quát của (u_n) là $u_n = 3n - 2$.

d) Tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng bằng 670.

Câu 13. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 = -2$, công sai $d = 2$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Số hạng đầu u_1 bằng 4.

b) Số hạng u_7 bằng 8.

c) Số hạng tổng quát $u_n = 2n - 6$.

d) Tổng 20 số hạng đầu của cấp số cộng bằng 400.

Câu 14. Cho cấp số cộng (u_n) biết $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Cấp số cộng có $u_1 = -1$, công sai $d = 3$.

b) Số hạng u_4 bằng 8.

c) Số hạng tổng quát $u_n = 3n - 2$.

d) Tổng 15 số hạng đầu của cấp số cộng bằng 330.

Câu 15. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 3n - 2$.

a) Số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 1$.

b) Công sai d của cấp số cộng là $d = -2$.

c) Tổng của 20 số hạng đầu của cấp số cộng là $S_{20} = 590$.

d) Số 313 là số hạng thứ 100 trong cấp số cộng.

Câu 16. Cho cấp số cộng (u_n) biết $\begin{cases} u_3 + u_7 = 22 \\ u_9 - u_2 = 28 \end{cases}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Cấp số cộng có số hạng đầu bằng -5.

b) Cấp số cộng có công sai $d = -4$.

c) Số hạng $u_5 = 11$.

d) Tổng 15 số hạng đầu của cấp số cộng bằng 350.

Câu 17. Người ta trồng 3240 cây theo một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ ba trồng 3 cây,... Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Số cây mỗi hàng lập thành một cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu là $u_1 = 1$.

b) Số cây mỗi hàng lập thành một cấp số cộng (u_n) có công sai là $d = 2$.

c) Có tất cả 80 hàng cây.

d) Hàng thứ 20 trồng được 40 cây.

Câu 18. Một nhà hát có 25 hàng ghế với 16 ghế ở hàng thứ nhất, 18 ghế ở hàng thứ hai, 20 ghế ở hàng thứ ba và cứ tiếp tục theo quy luật đó, tức là hàng sau nhiều hơn hàng liền trước nó 2 ghế. Gọi u_n (ghế) là tổng số ghế ở hàng thứ n.

a) Dãy số (u_n) là cấp số cộng có công sai $d = 2$.

b) $u_2 = 18$.

c) Số ghế ở hàng thứ 20 nhỏ hơn 54.

d) Tổng số ghế trong nhà hát nhiều hơn 1 000.

Câu 19. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi mệnh đề dưới đây?

a) Giá của một chiếc xe ô tô lúc mới mua là 680 triệu đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá của chiếc xe ô tô giảm 55 triệu đồng. Giá còn lại của chiếc xe sau 5 năm sử dụng là 450 triệu đồng.

b) Mai làm việc ở công ty X với mức lương năm đầu tiên là 60 triệu đồng. Sau mỗi năm lương của Mai được tăng thêm 5 triệu đồng. Tổng lương của Mai sau 20 năm làm việc ở công ty X là 2200 triệu đồng .

c) Hùng đang tiết kiệm để mua một cây guitar. Trong tuần đầu tiên, anh ta để dành 42 đô la, và trong mỗi tuần tiếp theo, anh ta đã thêm 8 đô la vào tài khoản tiết kiệm của mình. Cây guitar Hùng cần mua có giá 400 đô la. Tuần thứ 46 thì anh ấy có đủ tiền để mua guitar đó.

d) Người ta trồng 3003 cây theo hình một tam giác như sau: hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây,... Có tất cả 77 hàng cây được trồng.

Câu 20. Giá của một chiếc xe ô tô lúc mới mua là 680 triệu đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá của chiếc xe ô tô giảm 50 triệu đồng. Gọi u_n là giá của chiếc ô tô trong năm thứ n sử dụng. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $u_2 = 630$.

b) Dãy số (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = 50$.

c) Giá của chiếc ô tô sau 3 năm sử dụng lớn hơn 500 triệu đồng.

d) Sau ít nhất 8 năm sử dụng thì giá của chiếc ô tô nhỏ hơn một nửa giá trị ban đầu của nó.

Câu 21. Do nhu cầu đi lại của gia đình, anh Bình quyết định thực hiện tích góp tiền để mua một chiếc ôtô HONDA CRV trị giá 1,259 tỉ đồng.
Đợt thứ nhất: anh Bình đã tích góp theo nguyên tắc tháng sau tích góp nhiều hơn tháng ngay trước đó số tiền là 2 triệu đồng và cứ như thế đến tháng thứ 10 anh phải góp 21 triệu đồng. Đến hết đợt thứ nhất anh Bình có tất cả 624 triệu đồng.
Đợt thứ hai kế tiếp: do muốn rút ngắn thời gian mua xe thì số tiền còn lại anh tiếp tục tích góp với tháng đầu là 5 triệu đồng và mỗi tháng tiếp theo số tiền gấp đôi tháng kề trước nó.

a) Đợt thứ nhất anh Bình tích lũy tiền theo dãy số với cấp số cộng có công sai là $d = 2$ triệu và $u_1 = 3$ triệu.

b) Anh Bình tích lũy tiền hết đợt thứ nhất trong 25 tháng.

c) Đợt thứ hai anh Bình tích lũy tiền theo dãy số với cấp số nhân có công bội là $q = 2$ triệu và $u_1 = 5$ triệu.

d) Để đủ tiền mua ôtô thì anh Bình thì anh Bình tích góp ít nhất 31 tháng.

Câu 22. Trên một bàn cờ có nhiều ô vuông, người ta đặt 8 hạt dẻ vào ô đầu tiên, sau đó đặt tiếp vào ô thứ hai số hạt nhiều hơn ô thứ nhất là 3, tiếp tục đặt vào ô thứ ba số hạt nhiều hơn ô thứ hai là 3, ... và cứ thế tiếp tục đến ô thứ n. Biết rằng đặt hết số ô trên bàn cờ người ta phải sử dụng 18 865 hạt ?

a) Số hạt dẻ ở mỗi ô trên bàn cờ lập thành một cấp số cộng với $u_1 = 8$ và $d = 3$.

b) Số hạt dẻ ở ô thứ 5 là 20.

c) Bàn cờ đó có 111 ô vuông.

d) Tổng số hạt dẻ ở 10 ô cuối là 215.

Câu 23. Một sinh viên sau khi ra trường và xin vào làm cho một trung tâm với mức lương khởi điểm là 100 triệu đồng một năm. Cứ sau mỗi năm, trung tâm trả thêm cho sinh viên 20 triệu đồng. Gọi u_n (triệu đồng) là số tiền lương mà sinh viên đó nhận được ở năm thứ n. Hỏi các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Số tiền lương sinh viên nhận được ở năm thứ hai là 120 triệu đồng.

b) Số tiền lương sinh viên nhận được ở năm thứ 10 là 300 triệu đồng.

c) Dãy số (u_n) là cấp số cộng có $u_1 = 120$ và công sai $d = 20$.

d) Giả sử, mỗi năm bạn sinh viên chi tiêu tiết kiệm hết 70 triệu đồng. Vậy sau ít nhất 12 năm thì sinh viên đó mua được căn chung cư 2 tỉ đồng.

Câu 24. Trong hội chợ tết, một công ty sữa muốn xếp 1 000 hộp sữa theo thứ tự từ trên xuống dưới như sau: Hàng thứ nhất có 1 hộp sữa, hàng thứ hai có 3 hộp sữa, hàng thứ ba có 5 hộp sữa, ... cứ như thế, số lượng hộp sữa của hàng sau lớn hơn số lượng hộp sữa của hàng trước nó là 2 hộp sữa (mô hình như hình dưới).



a) Gọi u_n là số hộp sữa ở hàng thứ n thì (u_n) là một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = 2$.

b) Số hộp sữa của hàng thứ 10 là 20 hộp sữa.

c) Để xếp được 20 hàng thì cần 400 hộp sữa.

d) Hàng cuối cùng có 900 hộp sữa.

Câu 25. Khi kí kết hợp đồng lao động với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau

Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu.

Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

a) Trong phương án 1: dãy số tiền lương là cấp số cộng có số hạng đầu tiên là $u_1 = 120$, công sai $d_1 = 18$.

b) Trong phương án 1: tiền lương người lao động nhận được trong năm thứ ba là 174 triệu.

c) Trong phương án 1: tổng tiền lương người lao động nhận được trong ba năm là 414 triệu.

d) Nếu kí hợp đồng lao động trong ba năm, với mong muốn nhận được tổng số tiền lương cao nhất thì người lao động nên chọn phương án 1.

3 Tự luận.

Bài 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số cộng? Vì sao?

a) $10; -2; -14; -26; -38$.

b) $\frac{1}{2}; \frac{5}{4}; 2; \frac{11}{4}; \frac{7}{2}$.

c) $\sqrt{1}; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{4}; \sqrt{5}$.

d) $1, 4, 7, 10, 13$.

Bài 2. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào là cấp số cộng? Tính số hạng đầu và công sai nếu dãy số là cấp số cộng.

a) $u_n = 2.3^n + 1$ b) $u_n = \frac{1-2n}{3}$ c) $u_n = \frac{2}{n+1} - 1$ d) $u_n = \frac{2n-1}{2} - 3$.

Bài 3. Cho (u_n) là cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 4$ và công sai $d = -10$. Viết công thức số hạng tổng quát u_n. $u_n = -10n + 14$

Bài 4. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -3$ và công sai $d = 2$.

a) Tìm u_{12}. 9

b) Số 195 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng đó? số hạng thứ 100

Bài 5. Tìm x để ba số a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng, biết.

a) $a = 10 - 3x, b = 2x^2 + 3, c = 7 - 4x$; $x = -\frac{11}{4}$

b) $a = x + 1, b = 3x - 2, c = x^2 - 1$. $x = 1, x = 4$

Bài 6. Chứng minh rằng ba số dương a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi các số $\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

Bài 7. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n), biết

a) $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5. \end{cases}$ $u_1 = 3, d = 4$

b) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 7. \end{cases}$ $u_1 = 36, d = -13$

Bài 8. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n), biết:

a) $\begin{cases} u_3 - u_1 = 20 \\ u_2 + u_5 = 54; \end{cases}$ $u_1 = 2, d = 10$

b) $\begin{cases} u_2 + u_3 = 0 \\ u_2 + u_5 = 80; \end{cases}$ $u_1 = -60, d = 40$

c) $\begin{cases} u_5 - u_2 = 3 \\ u_8 \cdot u_3 = 24. \end{cases}$ $\begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} u_1 = -10 \\ d = 1. \end{cases}$

Bài 9. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết

a) $\begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59. \end{cases}$ $u_1 = 3,\ d = 4$

b) $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5. \end{cases}$ $u_1 = 3,\ d = 4$

c) $\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4. \end{cases}$ $u_1 = -5,\ d = 2$

d) $\begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75. \end{cases}$ $u_1 = 3,\ d = 2$ hoặc $u_1 = -17,\ d = 2$

e) $\begin{cases} u_6 + u_7 = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170. \end{cases}$ Không tồn tại cấp số cộng thỏa mãn

Bài 10. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -3$, công sai $d = 5$.

a) Viết công thức của số hạng tổng quát u_n. $u_n = -8 + 5n$

b) Số 492 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng trên? 100

c) Số 300 có là số hạng nào của cấp số cộng trên không? không

Bài 11. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = \dfrac{1}{3}$ và $u_1 + u_2 + u_3 = -1$.

a) Tìm công sai d và viết công thức của số hạng tổng quát u_n. $u_n = u_1 + (n-1)d = 1 - \dfrac{2n}{3}$

b) Số -67 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng trên? 102

c) Số 7 có phải là một số hạng của cấp số cộng trên không? không

Bài 12. Một cấp số cộng có số hạng thứ 5 bằng 18 và số hạng thứ 12 bằng 32. Tìm số hạng thứ 50 của cấp số cộng này. 108

Bài 13. Một cấp số cộng có số hạng đầu bằng 5 và công sai bằng 2. Hỏi phải lấy tổng của bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng này để có tổng bằng 2700? 50

Bài 14. Tìm x, biết:

a) $2 + 5 + 8 + 11 + \cdots + x = 155$. 29

b) $\dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x-2}{x} + \cdots + \dfrac{1}{x} = 3 \quad (x \in \mathbb{Z}^+)$. 7

Bài 15. Biết $u_4 + u_8 + u_{12} + u_{16} = 224$. Tính u_{10}. 56

Bài 16. Một dãy số có các số hạng đầu tiên là $1, 8, 22, 43, \ldots$ Hiệu của hai số hạng liên tiếp của dãy số đó lập thành một cấp số cộng: $7, 14, 21, \cdots, 7n$. Hỏi số 35351 là số hạng thứ mấy của dãy số đã cho? 101

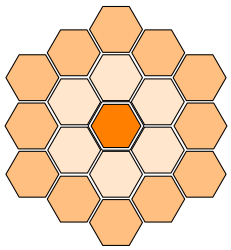
Bài 17. Số các số hạng của một cấp số cộng là một số chẵn. Tổng các số hạng có chỉ số lẻ và tổng các số hạng có chỉ số chẵn lần lượt là 24 và 30. Biết hiệu của số hạng cuối và số hạng đầu tiên là 10,5. Hỏi cấp số cộng trên có bao nhiêu số hạng? 8

Bài 18. Một chiếc đồng hồ đánh chuông, số tiếng chuông được đánh bằng số giờ mà đồng hồ chỉ tại thời điểm đánh chuông. Hỏi một ngày đồng hồ đó đánh bao nhiêu tiếng chuông báo giờ (mỗi ngày 24 tiếng)? 156

Bài 19. Hùng đang tiết kiệm để mua một cây guitar. Trong tuần đầu tiên, anh ta để dành 42 đô la, và trong mỗi tuần tiếp theo anh ta đã thêm 8 đô la vào tài khoản tiết kiệm của mình. Cây guitar Hùng cần mua có giá 400 đô la. Hỏi vào tuần thứ bao nhiêu thì anh ấy có đủ tiền để mua cây guitar đó? 46

Bài 20. Sinh nhật bạn của An vào ngày 01 tháng năm. An muốn mua một món quà sinh nhật cho bạn nên quyết định bỏ ống heo 100 đồng vào ngày 01 tháng 01 năm 2016, sau đó cứ liên tục ngày sau hơn ngày trước 100 đồng. Hỏi đến ngày sinh nhật của bạn, An đã tích lũy được bao nhiêu tiền? (thời gian bỏ ống heo tính từ ngày 01 tháng 01 năm 2016 đến ngày 30 tháng 04 năm 2016). 738 100 đồng.

Bài 21. Mặt cắt của một tổ ong có hình lưới tạo bởi các ô hình lục giác đều. Từ một ô đầu tiên, bước thứ nhất, các ong thợ tạo ra vòng 1 gồm 6 ô lục giác; bước thứ hai, các ong thợ sẽ tạo ra vòng 2 có 12 ô bao quanh vòng 1; bước thứ ba, các ong thợ sẽ tạo ra 18 ô bao quanh vòng 2; cứ thế tiếp tục như hình vẽ bên dưới. Tính số ô trên vòng thứ 108 mà ong thợ tạo ra?



648

Bài 22. Litva sẽ tham gia vào cộng đồng chung châu Âu sử dụng đồng Euro là đồng tiền chung vào ngày 01 tháng 01 năm 2015. Để kỷ niệm thời khắc lịch sử này, chính quyền đất nước này quyết định dùng 122550 đồng tiền xu Litas Lithuania cũ của đất nước để xếp một mô hình kim tự tháp. Biết rằng tầng dưới cùng có 4901 đồng và cứ lên thêm một tầng thì số đồng xu giảm đi 100 đồng. Hỏi mô hình Kim tự tháp này có tất cả bao nhiêu tầng? 50

Bài 23. Bạn A muốn mua món quà tặng mẹ và chị nhân ngày Quốc tế phụ nữ 8/3. Do đó A quyết định tiết kiệm từ ngày 1/1 của năm đó với ngày đầu là 500 đồng/ngày, ngày sau cao hơn ngày trước 500 đồng. Hỏi đúng đến ngày 8/3 bạn A có đủ tiền để mua quà cho mẹ và chị không? Giả sử rằng món quà A dự định mua khoảng 800 ngàn đồng và từ ngày 1/1 đến ngày 8/3 có số ngày ít nhất là 67 ngày. đủ

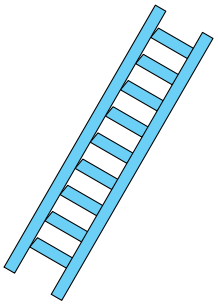
Bài 24. Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước. Biết giá của mét khoan đầu tiên là 80000 đồng, kể từ mét khoan thứ hai giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống $50m$ mới có nước. Hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó? 10 125 000 đồng

Bài 25. Vào năm 2020, dân số của một thành phố là khoảng 1,2 triệu người. Giả sử mỗi năm, dân số của thành phố này tăng thêm khoảng 30 nghìn người. Hãy ước tính dân số của thành phố này vào năm 2030. 1,5 triệu người

Bài 26. Một cầu thang bằng gạch có tổng cộng 30 bậc. Bậc dưới cùng cần 100 viên gạch. Mỗi bậc tiếp theo cần ít hơn hai viên gạch so với bậc ngay trước đó. Hỏi cần bao nhiêu viên gạch để xây cầu thang?

2130

Bài 27. Một người muốn mua một thanh gỗ đủ để cắt ra làm các thanh ngang của một cái thang. Biết rằng chiều dài các thanh ngang của cái thang đó (từ bậc dưới cùng) lần lượt là 45 cm, 43 cm, 41 cm, . . ., 31 cm.



a) Cái thang đó có bao nhiêu bậc? 8 bậc

b) Tính chiều dài thanh gỗ mà người đó cần mua, giả sử chiều dài các mối nối (phần gỗ bị cắt thành mùn cưa) là không đáng kể. 304 cm

Bài 28. Ở một loài thực vật lưỡng bội, tính trạng chiều cao cây do hai gene không alen là A và B cùng quy định theo kiểu tương tác cộng gộp. Trong kiểu gene nếu cứ thêm một alen trội A hay B thì chiều cao cây tăng thêm 5 cm. Khi trưởng thành, cây thấp nhất của loài này với kiểu gene $aabb$ có chiều cao 100 cm. Hỏi cây cao nhất với kiểu gene $AABB$ có chiều cao bao nhiêu? 120 cm

Bài 29. Chiều cao (đơn vị: centimét) của một đứa trẻ n tuổi phát triển bình thường được cho bởi công thức $x_n = 75 + 5 \cdot (n-1)$. (Nguồn: https://bibabo.vn).

a) Một đứa trẻ phát triển bình thường có chiều cao năm 3 tuổi là bao nhiêu centimét?

85 centimét

b) Dãy số (x_n) có là một cấp số cộng không? Trung bình một năm. chiều cao mỗi đứa trẻ phát triển bình thường tăng lên bao nhiêu centimét? 5 centimét

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	C	2	B	3	C	4	B	5	A	6	C	7	D	8	A	9	B	10	A
11	C	12	A	13	B	14	D	15	A	16	B	17	D	18	C	19	C	20	D
21	D	22	A	23	D	24	A	25	B	26	A	27	D	28	D	29	B	31	A
32	B																		

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	S	Câu 2.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	Đ
Câu 3.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	S	Câu 4.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	Đ
Câu 5.	a	Đ	b	Đ	c	S	d	S	Câu 6.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	S
Câu 7.	a	S	b	Đ	c	Đ	d	S	Câu 8.	a	Đ	b	S	c	S	d	Đ
Câu 9.	a	S	b	Đ	c	Đ	d	S	Câu 10.	a	Đ	b	S	c	S	d	Đ
Câu 11.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	S	Câu 12.	a	Đ	b	Đ	c	S	d	Đ
Câu 13.	a	S	b	Đ	c	Đ	d	S	Câu 14.	a	S	b	S	c	Đ	d	Đ
Câu 15.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	S	Câu 16.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	S
Câu 17.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	S	Câu 18.	a	Đ	b	Đ	c	S	d	S
Câu 19.	a	S	b	S	c	Đ	d	Đ	Câu 20.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	S
Câu 21.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	Đ	Câu 22.	a	Đ	b	Đ	c	S	d	S
Câu 23.	a	Đ	b	S	c	S	d	S	Câu 24.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	S
Câu 25.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	Đ											

§3 CẤP SỐ NHÂN

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Cấp số nhân

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số q không đổi, nghĩa là

$$u_{n+1} = u_n \cdot q \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Số q được gọi là ***công bội*** của cấp số nhân.

Lưu ý. Dãy số (u_n) là cấp số nhân thì $u_n^2 = u_{n-1} \cdot u_{n+1}$ với $n \geq 2$.

2) Số hạng tổng quát của cấp số nhân

Nếu một cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1},\ n \geq 2.$$

3) Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân

Giả sử (u_n) là một cấp số nhân có công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, khi đó

$$S_n = \frac{u_1\left(1 - q^n\right)}{1 - q}.$$

Lưu ý. Chú ý: Khi $q = 1$ thì $S_n = n \cdot u_1$.

Dạng 1 Nhận diện cấp số nhân, công bội q

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số q không đổi, nghĩa là

$$u_{n+1} = u_n \cdot q \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Số q được gọi là ***công bội*** của cấp số nhân.

Ví dụ 1

Trong các dãy số sau dãy nào là cấp số nhân? Hãy xác định công bội của cấp số nhân đó.

a) $1; 4; 16; 64; 256$.

b) $2; -2; 3; -3; 4; -4$.

c) $-1; \frac{1}{3}; -\frac{1}{9}; \frac{1}{27}; -\frac{1}{81}$.

Ví dụ 2

Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?

a) Dãy số (x_n), với $x_n = n^2$.

b) Dãy số (y_n), với $y_n = \sqrt{5}^{2n-3}$.

c) Dãy số (z_n), với $z_n = \dfrac{2}{n}$.

d) Dãy số (w_n), với $w_n = \dfrac{3^n + 1}{3^{n+1}}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân? Tìm số hạng đầu và công bội của các cấp số nhân đó.

a) $1; 11; 121; 12321; 1234321$.

🔑 là cấp số nhân với $u_1 = 1$ và công bội $q = 11$.

b) $1; -1; 1; -1; 1$.

🔑 là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = -1$

c) $4; 8; 12; 16$.

🔑 không là cấp số nhân

Bài 2 ☆

Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?

a) Dãy số (a_n), với $a_n = (-1)^n.3^{n+1} + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Dãy số (b_n), với $b_1 = 1$, $b_{n+1} = b_n + \frac{2017}{2018} b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) Dãy số (c_n), với $c_n = n.5^{2n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

d) Dãy số (d_n), với $d_1 = 3$, $d_{n+1} = d_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

🔑 b) là cấp số nhân

Dạng 2 Tìm số hạng cụ thể trong cấp số nhân

Nếu một cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1},\ n \geq 2.$$

Ví dụ 3

Cho cấp số nhân (u_n) với công bội q.

a) Biết $u_1 = 3, u_6 = 3072$. Tìm q. q=4

b) Biết $q = \dfrac{2}{3}, u_4 = \dfrac{8}{25}$. Tìm u_1. $u_1 = \dfrac{27}{25}$

c) Biết $u_1 = 3, q = 2$. Hỏi 192 là số hạng thứ mấy? số hạng thứ 7

Ví dụ 4

Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân (u_n), biết : $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72, \\ u_5 - u_3 = 144. \end{cases}$

$q = \dfrac{144}{72} = 2, u_1 = 12$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3

Tìm số hạng đầu, công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases} u_3 = 40 \\ u_6 = 160. \end{cases}$

$u_1 = \frac{40}{9}$, $q = 3$ và $u_n = 40 \cdot 3^{n-3}$.

Bài 4

Tìm số hạng đầu, công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases} u_1 + u_6 = 30 \\ u_2 + u_7 = 120. \end{cases}$

$u_1 = \frac{6}{205}$, $q = 4$ và $u_n = \frac{6}{205} \cdot 4^{n-1}$.

Dạng 3 Tính tổng của cấp số nhân

Giả sử (u_n) là một cấp số nhân có công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, khi đó

$$S_n = \frac{u_1 (1 - q^n)}{1 - q}.$$

Ví dụ 5

Cho cấp số nhân (u_n) với $u_n = 12.2^{n-1}$.

a) Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q. $u_1 = 12; q = 2.$

b) Tính tổng của 10 số hạng đầu tiên. 12 276.

Ví dụ 6

Tìm công bội của một cấp số nhân có số hạng đầu là 7, số hạng cuối là 448 và tổng số các số hạng là 889. $q = 2.$

Ví dụ 7

Tính tổng sau: $A = 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{512}$. $\frac{638}{512}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5 ☆

Cho cấp số nhân (u_n) với công bội dương, biết $u_1 = 3$ và $u_5 = 48$

a) Tính u_8. 384

b) Hỏi số 1536 là số hạng thứ mấy? 8

c) Tính tổng của 12 số hạng đầu. 12 285

Bài 6 ☆

Cho một cấp số nhân (u_n) có các số hạng đều không âm và thỏa mãn $u_2 = 6$ và $u_4 = 24$. Tính tổng của 12 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó.7

🔑 12285

Bài 7 ☆

Giá trị của tổng $A = 4 + 44 + 444 + \cdots + 44\ldots4$ (tổng đó có 2018 số hạng) bằng bao nhiêu?

🔑 $\frac{4}{9} \cdot \left(\frac{10^{2019} - 10}{9} - 2018 \right)$

Dạng 4 Điều kiện để dãy số là cấp số nhân

Dãy số (u_n) là cấp số nhân thì $u_n^2 = u_{n-1} \cdot u_{n+1}$ với $n \geq 2$.

Ví dụ 8

Tìm a để ba số $a-2$; $a-4$; $a+2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

🔑 $a = \frac{5}{2}$

Ví dụ 9

Tìm 4 góc của một tứ giác, biết rằng các góc đó lập thành một cấp số nhân và góc cuối gấp 9 lần góc thứ hai.

$9°, 27°, 81°, 243°$

Ví dụ 10

Chứng minh rằng nếu 3 số $\frac{2}{y-x}, \frac{1}{y}, \frac{2}{y-z}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì 3 số x, y, z lập thành một cấp số nhân.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 8 ☆

Tìm b để ba số $-\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{b}; \sqrt{2}$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

$b = -1$

Bài 9 ☆

Cho ba số tự nhiên m, n, p theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh ba số $2^m, 2^n, 2^p$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

Bài 10 ☆

Ba số x, y, z theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Ba số $x, y-4, z$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân. Đồng thời các số $x, y-4, z-9$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Tìm x, y, z.

$x=1, y=2, z=4$ hay $x=4, y=2, z=1$.

Dạng 5 Toán thực tế áp dụng cấp số nhân

Ví dụ 11

Một quốc gia có dân số năm 2011 là P triệu người. Trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm dân số tăng $a\%$. Chứng minh rằng dân số các năm từ năm 2011 đến năm 2021 của quốc gia đó tạp thành cấp số nhân. Tìm công bội của cấp số nhân này. $q=1+\frac{a}{100}$

Ví dụ 12

Chu kì bán rã của nguyên tố phóng xạ poloni 210 là 138 ngày, nghĩa là sau 138 ngày, khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa (theo https://vi.wikipedia.org/wiki/Poloni-210). Tính khối lượng còn lại của 20 gam poloni 210 sau:

a) 690 ngày; 1,25 b) 7 314 ngày (khoảng 20 năm). $4,4.10^{-15}$

Ví dụ 13

Giả sử anh Tuấn kí hợp đồng lao động trong 10 năm với điều khoản về tiền lương như sau: Năm thứ nhất, tiền lương của anh Tuấn là 60 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương của anh Tuấn được tăng lên 8%. Tính tổng số tiền lương anh Tuấn lĩnh được trong 10 năm đi làm (đơn vị: triệu đồng, làm tròn đến hàng phần nghìn).

869,194 (triệu đồng)

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 11



Tần số của ba phím liên tiếp Sol, La, Si trên một cây đàn organ tạo thành cấp số nhân. Biết tần số của hai phím Sol và Si lần lượt là 415 Hz và 466 Hz *(theo: https://vi.wikipedia.org/wiki/Đô_(nốt nhạc))*. Tính tần số của phím La (làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài 12



Ban đầu, một quả lắc đồng hồ dao động theo một cung tròn dài 46 cm (hình bên). Sau mỗi lần lắc liên tiếp, độ dài của cung tròn bằng 0,98 độ dài cung tròn ở ngay lần trước đó.

a) Độ dài của cung tròn ở lần thứ 10 là bao nhiêu?

b) Sau 15 lần dao động, quả lắc sẽ đi được quãng đường tổng cộng là bao nhiêu?

(*Kết quả tính theo centimet và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai.*)

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu là $u_1 \neq 0$ và công bội $q \neq 0$. Số hạng tổng quát của cấp số nhân bằng

Ⓐ $u_n = u_1 + (n-1)\,q$. Ⓑ $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.

Ⓒ $u_n = u_1 \cdot q^n$. Ⓓ $u_n = u_1 \cdot q^{n+1}$.

Câu 2. Trong các dãy số hữu hạn sau, dãy số nào là cấp số nhân?

Ⓐ $2; 4; 8; 16; 32; 63$. Ⓑ $1; -2; 4; -8; 16; -32$.

Ⓒ $1; 3; 9; 27; 54; 162$. Ⓓ $4; 2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}$.

Câu 3. Trong các dãy số hữu hạn sau, dãy nào là cấp số nhân?

Ⓐ $3; 9; 27; 54; 162$. Ⓑ $81; 27; -9; -3; 1$. Ⓒ $81; -27; 9; -3; 1$. Ⓓ $3; 6; 9; 12; 15$.

Câu 4. Dãy số nào sau đây **không** phải là cấp số nhân?

Ⓐ $1; -3; 9; -27; 54$. Ⓑ $1; 2; 4; 8; 16$. Ⓒ $1; -1; 1; -1; 1$. Ⓓ $1; -2; 4; -8; 16$.

Câu 5. Dãy số nào sau đây **không** phải là cấp số nhân?

Ⓐ $1; 2; 4; 8; \ldots$. Ⓑ $3; 3^2; 3^3; 3^4; \ldots$.

Ⓒ $4; 2; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \ldots$. Ⓓ $\frac{1}{\pi}; \frac{1}{\pi^2}; \frac{1}{\pi^4}; \frac{1}{\pi^6}; \ldots$.

Câu 6. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -2$ và $q = -5$. Viết bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

Ⓐ $-2; 10; 50; -250$. Ⓑ $-2; 10; -50; 250$.

Ⓒ $-2; -10; -50; -250$. Ⓓ $-2; 10; 50; 250$.

Câu 7. Tìm công bội của cấp số nhân (u_n) biết số hạng tổng quát $u_n = 3^{2n}$.

Ⓐ $q = 9$. Ⓑ $q = 2$. Ⓒ $q = 3$. Ⓓ $q = 6$.

Câu 8. Trong các dãy số (u_n) có công thức của số hạng tổng quát u_n sau đây, dãy số nào là cấp số nhân?

Ⓐ $u_n = 7 - 3n$. Ⓑ $u_n = 7 - 3^n$. Ⓒ $u_n = \frac{7}{3n}$. Ⓓ $u_n = 7 \cdot 3^n$.

Câu 9. Cho cấp số nhân (u_n), biết $u_1 = 1$, $q = 2$. Hỏi số 1 024 là số hạng thứ mấy?

Ⓐ Số hạng thứ 11. Ⓑ Số hạng thứ 9. Ⓒ Số hạng thứ 8. Ⓓ Số hạng thứ 10.

Câu 10. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 7 \cdot 2^n$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ (u_n) không phải là cấp số nhân.

Ⓑ (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 7$ và số hạng đầu $u_1 = 14$.

Ⓒ (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 2$ và số hạng đầu $u_1 = 14$.

Ⓓ (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 14$ và số hạng đầu $u_1 = 14$.

Câu 11. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$ và $q = 3$. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên S_{10} của cấp số nhân đã cho.

Ⓐ $S_{10} = -3\,069$. Ⓑ $S_{10} = -59\,048$. Ⓒ $S_{10} = 3\,069$. Ⓓ $S_{10} = 59\,048$.

Câu 12. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và $q = \dfrac{2}{3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $u_5 = -\dfrac{16}{27}$. Ⓑ $u_5 = -\dfrac{27}{16}$. Ⓒ $u_5 = \dfrac{27}{16}$. Ⓓ $u_5 = \dfrac{16}{27}$.

Câu 13. Cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$, $q = 2$. Tìm u_2.

Ⓐ $u_2 = 6$. Ⓑ $u_2 = 5$. Ⓒ $u_2 = -6$. Ⓓ $u_2 = 1$.

Câu 14. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 = 3$ và công bội $q = -2$. Tìm u_7.

Ⓐ $u_7 = 192$. Ⓑ $u_7 = -9$. Ⓒ $u_7 = -192$. Ⓓ $u_7 = 384$.

Câu 15. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n), biết $u_1 = -3$ và công bội $q = -2$.

Ⓐ $S_{10} = -1023$. Ⓑ $S_{10} = 1025$. Ⓒ $S_{10} = -1025$. Ⓓ $S_{10} = 1023$.

Câu 16. Một cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -5$, $u_2 = 10$. Tổng của 15 số hạng đầu của cấp số nhân đó là

Ⓐ 2. Ⓑ $\dfrac{4}{3}$. Ⓒ $\dfrac{2}{3}$. Ⓓ 0.

Câu 17. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_2 = 2$ và $u_3 = 5$. Khi đó u_1 và q lần lượt bằng

Ⓐ $\dfrac{5}{4}$ và $\dfrac{5}{2}$. Ⓑ $\dfrac{2}{5}$ và $\dfrac{5}{2}$. Ⓒ $\dfrac{4}{5}$ và $\dfrac{5}{2}$. Ⓓ $\dfrac{4}{5}$ và 2.

Câu 18. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_7 = 6$ và $u_8 = 12$. Tìm công bội q cấp số nhân đã cho.

Ⓐ $q = -6$. Ⓑ $q = 6$. Ⓒ $q = \dfrac{1}{2}$. Ⓓ $q = 2$.

Câu 19. Tìm công bội q của một cấp số nhân (u_n) có $u_1 = \dfrac{1}{2}$ và $u_6 = 16$.

Ⓐ $q = -\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $q = 2$. Ⓒ $q = -2$. Ⓓ $q = \dfrac{1}{2}$.

Câu 20. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và $u_2 = 15$. Công bội của cấp số nhân đã cho là

Ⓐ 5. Ⓑ 12. Ⓒ $\dfrac{1}{5}$. Ⓓ 4.

Câu 21. Tìm x để các số 2; 8; x; 128 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân

Ⓐ $x = 14$. Ⓑ $x = 32$. Ⓒ $x = 64$. Ⓓ $x = 68$.

Câu 22. Cho cấp số nhân $\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{8}; \ldots; \dfrac{1}{4096}$. Hỏi số $\dfrac{1}{4096}$ là số hạng thứ mấy trong cấp số nhân đã cho?

Ⓐ 13. Ⓑ 10. Ⓒ 11. Ⓓ 12.

Câu 23. Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{2}; 1; \ldots; 2048$. Tính tổng S của tất cả các số hạng của cấp số nhân đã cho.

Ⓐ $S = 4096{,}75$. Ⓑ $S = 2049{,}75$. Ⓒ $S = 2047{,}75$. Ⓓ $S = 4095{,}75$.

Câu 24. Dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$ với $n \geq 1$. Tính tổng $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_{10}$.

Ⓐ $S = \dfrac{5}{2}$. Ⓑ $S = \dfrac{1023}{2048}$. Ⓒ $S = 2$. Ⓓ $S = \dfrac{1023}{512}$.

Câu 25. Với giá trị x dương nào dưới đây thì các số -4; x; -9 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân?

Ⓐ $x = 36$. Ⓑ $x = \dfrac{13}{2}$. Ⓒ $x = 6$. Ⓓ $x = -6$.

Câu 26. Giá trị của tổng $7 + 77 + 777 + \ldots + \underbrace{77\ldots7}_{2\,018 \text{ số } 7}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{70}{9}\left(10^{2\,018} - 1\right) + 2\,018$. Ⓑ $\dfrac{7}{9}\left(\dfrac{10^{2\,018} - 10}{9} - 2\,018\right)$.

Ⓒ $\dfrac{7}{9}\left(\dfrac{10^{2019} - 10}{9} - 2\,018\right)$. Ⓓ $\dfrac{7}{9}\left(10^{2\,018} - 1\right)$.

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và $q = -2$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Số hạng thứ 2 của cấp số nhân đã cho là $u_2 = 6$.

b) Số 192 là số hạng hạng thứ 7.

c) Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho $S_{10} = 1023$.

d) Số hạng tổng quát của cấp số nhân đã cho là $u_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$.

Câu 2. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = 6$ và $u_3 = 18$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Công bội của cấp số nhân là $q = 3$.

b) $u_{k-1} + u_{k+1} = u_k^2, 2 \leq k \in \mathbb{N}^*$.

c) Số hạng đầu của cấp số nhân là $u_1 = 1$.

d) Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho $S_{10} = 59048$.

Câu 3. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}, (\forall n \in \mathbb{N}^*)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) (u_n) là cấp số nhân có cộng bội là $q = 3$. **b)** $u_n = 2 \cdot 3^n$.

c) $S_7 = 2189$. **d)** 39366 là số hạng thứ 10 của cấp số nhân.

Câu 4. Cho dãy số (u_n), biết $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 4u_n - 1 \end{cases}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Số hạng thứ năm của dãy số là 685.

b) Đặt $v_n = u_n - \dfrac{1}{3}$ Ta có (v_n) là cấp số nhân.

c) Số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{8}{3}4^{n-1} + \dfrac{1}{3}$.

d) Ta có $S_8 = 58256$.

Câu 5. Cho cấp số nhân (u_n) với số hạng đầu $u_1 = -5$, công bội $q = 2$.

a) $u_9 = 1280$. **b)** $u_n = -5 \cdot 2^n$.

c) 160 là một số hạng của cấp số nhân trên. **d)** Tổng của 10 số hạng đầu bằng -5115.

Câu 6. Cho một cấp số nhân (u_n) có các số hạng đều không âm và thoả mãn $u_2 = 6$ và $u_4 = 24$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Công bội của cấp số nhân là $q = \pm 2$. **b)** Số hạng thứ ba của cấp số nhân bằng 12.

c) $S_{12} = 12285$. **d)** 3072 là một số hạng của cấp số nhân.

Câu 7. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi mệnh đề dưới đây?

a) Cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3, q = 2$. Khi đó $u_2 = 6$.

b) Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3, q = \dfrac{1}{2}$. Khi đó $u_5 = \dfrac{3}{32}$.

c) Dãy số (u_n) là cấp số nhân có 10 số hạng. Biết số hạng đầu $u_1 = 7$ và công bội $q = -3$. Số hạng cuối của cấp số nhân bằng -19683.

d) Cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3, \dfrac{u_8}{u_5} = 125$. Khi đó $u_3 = -75$.

Câu 8. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q < 0$ và $u_2 = 4, u_4 = 9$. Khi đó

a) Số hạng đầu $u_1 = -\dfrac{8}{3}$.

b) Số hạng $u_5 = \dfrac{27}{2}$.

c) $-\dfrac{2187}{32}$ là số hạng thứ 8.

d) Cấp số nhân có công bội $q = -\dfrac{3}{2}$.

Câu 9. Cho tứ giác $ABCD$ có bốn góc tạo thành một cấp số nhân có công bội bằng 2.

a) Số đo góc nhỏ nhất bằng $24°$.

b) Số đo góc lớn nhất bằng $196°$.

c) Tổng số đo góc lớn nhất với góc nhỏ nhất bằng $220°$.

d) Số đo góc lớn nhất trừ cho số đo góc nhỏ nhất bằng $168°$.

Câu 10. Aladin nhặt được cây đèn thần, chàng miết tay vào cây đèn và gọi Thần đèn ra. Thần đèn cho chàng 3 điều ước. Aladin ước 2 điều đầu tiên tùy thích, nhưng điều ước thứ 3 của chàng là "Ước gì ngày mai tôi lại nhặt được cây đèn và Thần cho tôi số điều ước gấp đôi số điều ước ngày hôm nay". Thần đèn chấp thuận và mỗi ngày Aladin đều thực hiện theo quy tắc như trên: ước hết các điều đầu tiên và luôn chừa lại điều ước cuối cùng để kéo dài thỏa thuận với Thần đèn cho ngày hôm sau. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

a) Ngày thứ hai Aladin ước 6 điều.

b) Ngày thứ ba Aladin ước 12 điều.

c) Ngày thứ tư Aladin ước 48 điều.

d) Sau 10 ngày gặp Thần đèn, Aladin ước tất cả 3269 điều ước.

Câu 11. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp.

a) Diện tích tầng 11 là 4 (m^2).

b) Diện tích các tầng lập thành cấp số nhân có công bội $q = \dfrac{1}{2}$.

c) Diện tích các tầng lập thành cấp số cộng có công sai $d = \dfrac{1}{2}$.

d) Cần bao nhiêu m^2 gạch để lát nền từ tầng 1 đến hết tầng 11.

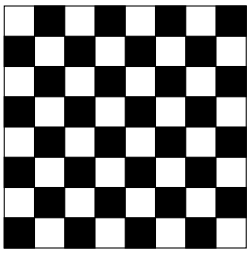
Câu 12. Để tích lũy cho việc học đại học của cậu con trai đầu lòng, cô Lan quyết định hằng tháng bỏ ra 600 nghìn đồng vào tài khoản tiết kiệm, được trả lãi 0,5% cộng dồn hằng tháng. Cô bắt đầu chương trình tích lũy này khi cậu con trai tròn ba tuổi và gửi tiền vào đầu mỗi tháng. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Đến lần gửi khoản tiền thứ 180 thì cậu con trai tròn 18 tuổi.

b) Số tiền của cô Lan có trong chương trình ở đầu tháng thứ 2 là $0{,}6(1 + 0{,}5\%)$ triệu đồng.

c) Số tiền của cô Lan có trong chương trình ở đầu tháng thứ 5 là $3 \cdot 30.000$ đồng.

d) Số tiền của cô Lan có trong chương trình vào thời điểm cậu con trai đầu lòng tròn 18 tuổi nhỏ hơn 160 triệu đồng.



Câu 13. Tương truyền rằng nhà vua Ấn Độ cho phép người phát minh ra bàn cờ vua được lựa chọn phần thưởng tùy theo sở thích. Người đó xin nhà vua "Bàn cờ có 64 ô, với ô thứ nhất thần xin nhận 1 hạt thóc, ô thứ hai thì gấp đôi ô đầu, ô thứ ba thì lại gấp đôi ô thứ hai,... cứ như vậy ô sau nhận số hạt thóc gấp đôi phần thưởng dành cho ô liền trước và thần xin nhận tổng số các hạt thóc ở 64 ô". Biết rằng khối lượng của 100 hạt thóc là 20 gam.

a) Số hạt thóc ở 64 ô là một cấp số nhân có $u_1 = 1; q = 2$.

b) Số hạt thóc ở ô thứ tám là 2^8.

c) Tổng khối lượng thóc của 64 ô trên bàn cờ là 364 tỉ tấn.

d) Giả sử người đó muốn chở số thóc ở trên 32 ô đầu tiên về bằng tàu thủy, biết rằng mỗi chuyến tàu chở tối đa 10 tấn hàng hóa. Khi đó, người đó cần tối thiểu 85 chuyến tàu để chở hết số thóc đó.

Câu 14. Do nhu cầu đi lại của gia đình, anh Bình quyết định thực hiện tích góp tiền để mua một chiếc ôtô trị giá 1,259 tỉ đồng.

Đợt thứ nhất: anh Bình đã tích góp theo nguyên tắc tháng sau tích góp nhiều hơn tháng ngay trước đó số tiền là 2 triệu đồng và cứ như thế đến tháng thứ 10 anh phải góp 21 triệu đồng. Đến hết đợt thứ nhất anh Bình có tất cả 624 triệu đồng.

Đợt thứ hai kế tiếp: do muốn rút ngắn thời gian mua xe thì số tiền còn lại anh tiếp tục tích góp với tháng đầu là 5 triệu đồng và mỗi tháng tiếp theo số tiền gấp đôi tháng kề trước nó.

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Đợt thứ nhất anh Bình tích lũy tiền theo dãy số với cấp số cộng có công sai là $d = 2$ triệu và $u_1 = 3$ triệu.

b) Anh Bình tích lũy tiền hết đợt thứ nhất trong 25 tháng.

c) Đợt thứ hai anh Bình tích lũy tiền theo dãy số với cấp số nhân có công bội là $q = 2$ triệu và $u_1 = 5$ triệu.

d) Để đủ tiền mua ôtô thì anh Bình thì anh Bình tích góp ít nhất 31 tháng.

Câu 15. Khi kí kết hợp đồng lao động với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau

- **Phương án 1:** Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu.
- **Phương án 2:** Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu.

a) Trong phương án 1: dãy số tiền lương là cấp số cộng có số hạng đầu tiên là $u_1 = 120$, công sai $d_1 = 18$.

b) Trong phương án 1: tiền lương người lao động nhận được trong năm thứ ba là 174 triệu.

c) Trong phương án 1: tổng tiền lương người lao động nhận được trong ba năm là 414 triệu.

d) Nếu kí hợp đồng lao động trong ba năm, với mong muốn nhận được tổng số tiền lương cao nhất thì người lao động nên chọn phương án 1.

Câu 16. Vào năm con gái được 4 tuổi, một người chuẩn bị gửi tiết kiệm đầu mỗi năm một số tiền x (triệu đồng) ($x \in \mathbb{N}$) để đến năm 18 tuổi sẽ có được 200 triệu cho con gái đi học đại học. Hiện tại lãi suất tiền gửi hàng năm là 4,8%/năm. Giả sử lãi suất này được giữ ổn định

a) Số tiền người đó nhận được sau năm thứ nhất là $A_1 = x(1 + 4{,}8\%)$.

b) Tổng số tiền thu về sau 14 năm là một cấp số nhân có $u_1 = x$, $q = 1 + 4{,}8\%$.

c) $x = 10$ (triệu đồng).

d) Đến năm con gái được 10 tuổi, người này dự định khi con gái được 18 tuổi sẽ mua thêm cho con gái một chiếc xe máy trị giá 50 triệu đồng. Do đó, kể từ thời điểm đầu năm con gái được 10 tuổi người này cần gửi tiết kiệm y triệu đồng đến khi con gái 18 tuổi ($y \in \mathbb{N}$). Giá trị nhỏ nhất của $y = 15$.

Câu 17. Anh Bình là nhân viên của một công ty A. Từ ngày 1/2/2024 anh Bình được nâng lương lên bậc 4, mức lương anh hiện hưởng là 11.718.750 đồng mỗi tháng. Theo quy định của công ty, nếu không bị kỉ luật, không có khen thưởng đặc biệt thì cứ sau 3 năm anh Bình sẽ được nâng một bậc lương, tăng thêm 25% so với bậc lương trước, tối đa là bậc 7. Khi hết bậc 7 sẽ chuyển sang vượt khung. Lương vượt khung năm sau cao hơn năm trước 1% và vẫn nhận hàng tháng. Lương bậc 1 sẽ được tính sau khi hết đúng 1 năm tập sự. Anh Bình là người rất nghiêm túc, không vi phạm kỉ luật. Anh dự định sẽ làm việc 30 năm ở công ty này rồi nghỉ hưu. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Lương bậc 5 của anh Bình sẽ là 14.500.000 đồng.

b) Lương bậc 1 của anh Bình là 6.000.000 đồng.

c) Lương bậc 7 anh Bình là 23.250.000 đồng.

d) Tổng tiền lương anh Bình nhận được kể từ khi hết tập sự đến khi nghỉ hưu là $= 5 \cdot 554 \cdot 357.709$.

Câu 18. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt sàn của mỗi tầng bằng $\frac{4}{5}$ diện tích của mặt sàn của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt sàn của tầng 1 bằng $\frac{4}{5}$ diện tích của đế tháp (đế tháp có diện tích là 75 m^2). Tiền công thuê thợ xây cho bởi bảng

	Đế tháp	Tầng 1 đến tầng 5	Tầng 6 đến tầng 10	Tầng 11
Giá tiền trên 1 m^2 (nghìn đồng)	1000	850	900	950

a) Tiền công xây tầng 1 là 51 triệu.

b) Tiền công xây tầng 11 (làm tròn đến hàng nghìn) là 7650000 đồng.

c) Tổng tiền công xây tòa tháp (làm tròn đến hàng nghìn) là 312044000 đồng.

d) Diện tích mặt sàn tầng 2 là 60 m^2.

3 Tự luận.

Bài 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân?

a) $u_n = 3(-2)^n$; b) $u_n = (-1)^{n+1} \cdot 7^n$; c) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3. \end{cases}$

a),b) là cấp số nhân

Bài 2. Cho cấp số nhân (u_n) với số hạng đầu $u_1 = -5$, công bội $q = 2$.

a) Tìm u_9. -1280

b) Số -320 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số nhân trên? 7

c) Số 160 có phải là một số hạng của cấp số nhân trên không?

không là một số hạng của cấp số nhân trên

Bài 3. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$, $u_3 = \dfrac{27}{4}$.

a) Tìm công bội q và viết năm số hạng đầu của cấp số nhân trên. $q = \pm\frac{3}{2}$

b) Tính tổng 10 số hạng đầu của cấp số nhân trên. daps $\frac{174075}{512}$ hoặc $-\frac{34815}{512}$

Bài 4. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n), biết: Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n), biết:

a) $\begin{cases} u_5 - u_1 = 15 \\ u_4 - u_2 = 6; \end{cases}$ $u_1 = 1$, $q = 2$ hoặc $u_1 = \frac{80}{203}$, $q = \frac{5}{2}$

b) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325. \end{cases}$ $u_1 = 5$, $q = 2$ hoặc $u_1 = 5$, $q = -2$

Bài 5. Giữa các số 243 và 1 hãy đặt thêm 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân. Tìm công bội của cấp số nhân đó.

$q = \frac{1}{3}$

Bài 6. Tính các tổng sau:

a) $S_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{3^n}$; $\frac{3^{n+1}-1}{2 \cdot 3^n}$

b) $S_n = 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ chữ số } 9}$. $\frac{10^{n+1} - 9n - 10}{9}$

Bài 7. Một cấp số nhân có số hạng thứ 6 bằng 96 và số hạng thứ 3 bằng 12. Tìm số hạng thứ 50 của cấp số nhân này. $3 \cdot 2^{49}$

Bài 8. Cho cấp số nhân thỏa $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102. \end{cases}$

a) Tìm số hạng đầu và công bội. $u_1 = 3, q = 2$

b) Hỏi tổng của bao nhiêu số hạng đầu tiên bằng 3069. 10

c) Số 12288 là số hạng thứ bao nhiêu? 13

Bài 9. Ba số $\dfrac{2}{b-a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{2}{b-c}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh rằng ba số a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

Bài 10.

a) Số đo bốn góc của một tứ giác lập thành cấp số nhân. Tìm số đo của bốn góc đó biết rằng số đo của góc lớn nhất gấp 8 lần số đo của góc nhỏ nhất. $24°; 48°; 96°; 192°$.

b) Viết sáu số xen giữa các số -2 và 256 để được cấp số nhân có tám số hạng. Nếu viết tiếp thì số hạng thứ 15 là bao nhiêu? 4; -8; 16; -32; 64; -128

Bài 11. Một cấp số nhân có số hạng đầu bằng 5 và công bội bằng 2. Hỏi phải lấy tổng của bao nhiêu số hạng đầu của cấp số nhân này để có tổng bằng 5115? 10

Bài 12. Một công ty xây dựng mua một chiếc máy ủi với giá 3 tỉ đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá trị của chiếc máy ủi này lại giảm 20% so với giá trị của nó trong năm liền trước đó. Tìm giá trị còn lại của chiếc máy ủi đó sau 5 năm sử dụng. 480

Bài 13. Một loại thuốc được dùng mỗi ngày một lần. Lúc đầu nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân tăng nhanh, nhưng mỗi liều kế tiếp có tác dụng ít hơn liều trước đó. Lượng thuốc trong máu ở ngày thứ nhất là 50 mg, và mỗi ngày sau đó giảm chỉ còn một nửa so với ngày kề trước đó. Tính tổng lượng thuốc (tính bằng mg) trong máu của bệnh nhân sau khi dùng thuốc 10 ngày liên tiếp. 99,902

Bài 14. Một tỉnh có 2 triệu dân vào năm 2020 với tỉ lệ tăng dân số là 1 %/năm. Gọi u_n là số dân của tỉnh đó sau n năm. Giả sử tỉ lệ tăng dân số là không đổi.

a) Viết công thức tính số dân của tỉnh đó sau n năm kể từ năm 2020. $u_n = 2 \cdot 1{,}01^{n-1}$

b) Tính số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020. 2,187 (triệu dân)

Bài 15. Một gia đình mua một chiếc ô tô giá 800 triệu đồng. Trung bình sau mỗi năm sử dụng, giá trị còn lại của ô tô giảm đi 4% (so với năm trước đó).

a) Viết công thức tính giá trị của ô tô sau 1 năm, 2 năm sử dụng. $u_1 = 768, u_2 = 737{,}28$

b) Viết công thức tính giá trị của ô tô sau n năm sử dụng. $u_n = 768 \cdot 0{,}96^{n-1}$

c) Sau 10 năm, giá trị của ô tô ước tính còn bao nhiêu triệu đồng? 531,87 triệu đồng

Bài 16. Giả sử một thành phố có dân số năm 2022 là khoảng 2,1 triệu người và tốc độ gia tăng dân số trung bình mỗi năm là 0,75%.

a) Dự đoán dân số của thành phố đó vào năm 2032; ≈ 2262924 (người)

b) Nếu tốc độ gia tăng dân số vẫn giữ nguyên như trên thì ước tính vào năm nào dân số của thành phố đó sẽ tăng gấp đôi so với năm 2022? 2116

Bài 17. Một ngân hàng quy định như sau đối với việc gửi tiết kiệm theo thể thức có kỳ hạn: "Khi kết thúc kỳ hạn gửi tiền mà người gửi không đến rút tiền thì toàn bộ số tiền (bao gồm cả vốn và lãi) sẽ được chuyển gửi tiếp với kỳ hạn như kỳ hạn mà người gửi đã gửi". Giả sử có một người gửi 50 triệu đồng với kỳ hạn 1 tháng vào ngân hàng nói trên và giả sử lãi suất của loại kỳ hạn này là 0, 4%.

a) Hỏi nếu 2 năm sau, kể từ ngày gửi, người đó mới đến ngân hàng để rút tiền thì số tiền rút được (gồm cả vốn và lãi) là bao nhiêu ? $\approx 55\,027\,415$ đồng

b) Cũng câu hỏi như trên, với giả thiết thời điểm rút tiền là 5 năm sau, kể từ ngày gửi ? $\approx 63\,532\,035$ đồng

Bài 18. Anh An mua nhà trị giá 500 triệu đồng theo phương thức trả góp.

a) Nếu cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh An trả 6000000 và chịu lãi số tiền

chưa trả là 0,5%/tháng thì sau bao lâu anh An trả hết số tiền trên ? 108 tháng

b) Nếu anh An muốn trả hết nợ trong 3 năm và phải trả lãi với mức 6%/năm thì mỗi tháng anh phải trả bao nhiêu tiền ? (Làm tròn đến nghìn đồng) ≈ 15 588 000 đồng

Bài 19. Bố bạn An tặng bạn ấy một máy vi tính trị giá 15 triệu đồng bằng cách cho bạn ấy tiền hàng tháng theo phương thức: tháng đầu tiên cho 300000 đồng, các tháng từ tháng thứ 2 trở đi mỗi tháng nhận được số tiền nhiều hơn tháng trước 50000 đồng.

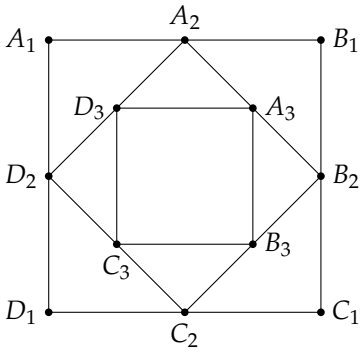
a) Nếu chọn cách gửi tiết kiệm số tiền được nhận hàng tháng với lãi suất 0,6%/tháng thì bạn An gửi bao nhiêu tháng mới đủ mua máy vi tính. 48 tháng

b) Nếu bạn An muốn có ngay máy vi tính để học bằng phương thức mua trả góp hàng tháng bằng số tiền bố cho với lãi suất ngân hàng là 0,7%/tháng thì bạn An mất bao nhiêu tháng để trả đủ số tiền và tháng cuối cùng trả bao nhiêu ?

50 tháng; tháng cuối trả ≈ 132 590 đồng

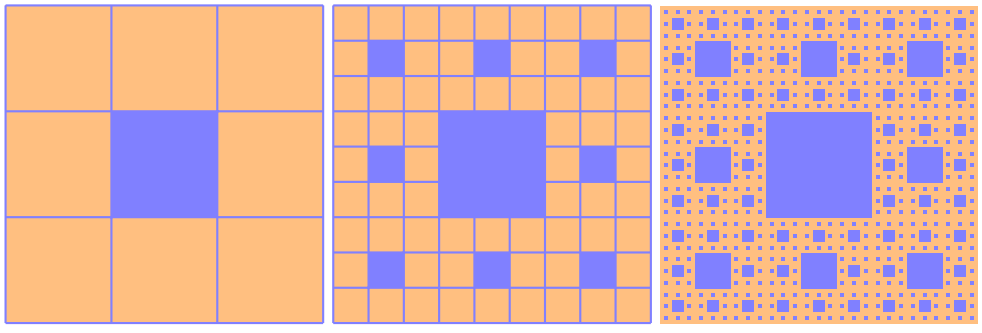
Bài 20. Số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân. Biết thể tích của khối hộp là 125 cm^3 và diện tích toàn phần là 175 cm^2. Tính tổng số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật đó. 17,5

Bài 21. Cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng 1. Gọi A_{k+1}, B_{k+1}, C_{k+1}, D_{k+1} thứ tự là trung điểm các cạnh A_kB_k, B_kC_k, C_kD_k, D_kA_k (với $k = 1,2,...$). Chu vi của hình vuông $A_{2018}B_{2018}C_{2018}D_{2018}$ bằng bao nhiêu? $\frac{\sqrt{2}}{2^{1007}}$.



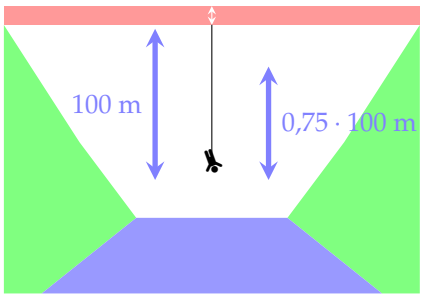
Bài 22. Trong một hồ sen, số lá sen ngày hôm sau bằng 3 lần số lá sen ngày hôm trước. Biết rằng ngày đầu có 1 lá sen thì tới ngày thứ 10 hồ sẽ đầy lá sen. Hỏi nếu ngày đầu có 9 lá sen thì tới ngày thứ mấy hồ sẽ đầy lá sen? 8

Bài 23. Một hình vuông màu vàng có cạnh 1 đơn vị dài được chia thành chín hình vuông nhỏ hơn và hình vuông ở chính giữa được tô màu xanh như hình bên dưới. Mỗi hình vuông màu vàng nhỏ hơn lại được chia thành chín hình vuông con, và mỗi hình vuông con ở chính giữa lại được tô màu xanh. Nếu quá trình này được tiếp tục lặp lại năm lần, thì tổng diện tích các hình vuông được tô màu xanh bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



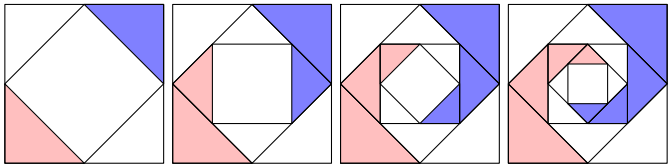
0,4

Bài 24. Một người nhảy bungee (một trò chơi mạo hiểm mà người chơi nhảy từ một nơi có địa thế cao xuống với dây đai an toàn buộc xung quanh người) từ một cây cầu và căng một sợi dây dài 100 m. Sau mỗi lần rơi xuống, nhờ sự đàn hồi của dây, người nhảy được kéo lên một quãng đường có độ dài bằng 75% so với lần rơi trước đó và lại bị rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên (Hình bên). Tính tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần kéo lên và lại rơi xuống. (*kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*)



666

Bài 25. Một thợ thủ công muốn vẽ trang trí trên một hình vuông kích thước 4 m × 4 m bằng cách vẽ một hình vuông mới với các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình vuông ban đầu, và tô kín màu lên hai tam giác đối diện (tham khảo hình vẽ). Quá trình vẽ và tô theo quy luật đó được lặp lại 5 lần. Tính số tiền (nghìn đồng) nước sơn để người thợ thủ công đó hoàn thành trang trí hình vuông như trên. Biết tiền nước sơn để sơn 1 m^2 là 50 000 đ.



375

Bài 26. Quang Hải là một cầu thủ bóng đá chuyên nghiệp. Giả sử năm 2023, anh vừa kí hợp đồng 5 năm với CLB Công An Hà Nội với mức lương năm khởi điểm là 300 triệu đồng. Chủ tịch CLB đưa ra cho Quang Hải ba phương án về lương như sau:

- Phương án 1: Mỗi năm ngoài mức lương cố định như trên, sẽ được thưởng thêm 50 triệu đồng.
- Phương án 2: Mỗi năm lương sẽ tăng thêm 10% so với lương năm trước đó, bắt đầu kể từ năm thứ hai.
- Phương án 3: Mỗi năm lương sẽ tăng thêm 30 triệu so với lương năm trước đó, bắt đầu kể từ năm thứ hai.

Em hãy tính giúp Quang Hải xem với phương án lương nào thì tổng lương sau 5 năm của Quang Hải là lớn nhất?

phương án 2

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1 B	2 B	3 C	4 A	5 D	6 B	7 A	8 D	9 A	10 C
11 D	12 A	13 A	14 A	15 D	16 A	17 C	18 D	19 B	20 A
21 B	22 D	23 C	24 D	25 C	26 C				

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a Đ b S c Đ d Đ	Câu 2.	a Đ b S c S d Đ
Câu 3.	a Đ b S c S d Đ	Câu 4.	a S b Đ c Đ d Đ
Câu 5.	a S b S c S d Đ	Câu 6.	a S b Đ c Đ d Đ
Câu 7.	a Đ b S c S d Đ	Câu 8.	a Đ b S c S d Đ
Câu 9.	a Đ b S c S d Đ	Câu 10.	a Đ b Đ c S d S
Câu 11.	a S b Đ c S d Đ	Câu 12.	a Đ b S c Đ d S
Câu 13.	a Đ b S c S d S	Câu 14.	a Đ b S c Đ d Đ
Câu 15.	a Đ b S c Đ d Đ	Câu 16.	a Đ b S c Đ d Đ
Câu 17.	a S b Đ c S d Đ	Câu 18.	a Đ b S c Đ d S

§4 ÔN TẬP CHƯƠNG 2

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$. Số $\dfrac{8}{15}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

Ⓐ 8. Ⓑ 6. Ⓒ 5. Ⓓ 7.

Câu 2. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 1) \end{cases}$. Tìm số hạng u_2.

Ⓐ $u_2 = 1$. Ⓑ $u_2 = 2$. Ⓒ $u_2 = \dfrac{2}{3}$. Ⓓ $u_2 = \dfrac{1}{3}$.

Câu 3. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

Ⓐ $u_n = \dfrac{1}{2^n}$. Ⓑ $u_n = \dfrac{1}{n}$. Ⓒ $u_n = \dfrac{n+5}{3n+1}$. Ⓓ $u_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$.

Câu 4. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_3 = -5$, công sai của cấp số cộng $d = 1$. Số hạng thứ nhất u_1 bằng

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ -7. Ⓓ 6.

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 = -7$ và $u_4 = -4$. Công sai d của cấp số cộng là

Ⓐ $d = 3$. Ⓑ $d = \dfrac{4}{7}$. Ⓒ $d = -11$. Ⓓ $d = -3$.

Câu 6. Cho một cấp số nhân có $u_1 = 5$, $u_6 = 160$. Tìm công bội của cấp số nhân.

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ ± 2.

Câu 7. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3,\ \forall n \geq 2 \end{cases}$. Viết năm số hạng đầu của dãy.

Ⓐ 1; 5; 13; 28; 61. Ⓑ 1; 5; 13; 29; 61. Ⓒ 1; 5; 17; 29; 61. Ⓓ 1; 5; 14; 29; 61.

Câu 8. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

Ⓐ Một dãy số tăng thì bị chặn dưới.

Ⓑ Một dãy số giảm thì bị chặn trên.

Ⓒ Một dãy số bị chặn thì phải tăng hoặc giảm.

Ⓓ Một dãy số không đổi thì bị chặn.

Câu 9. Cho dãy số $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \cdots$ (số hạng sau bằng một nửa số hạng liền trước nó). Công thức tổng quát của dãy số đã cho là

Ⓐ $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Ⓑ $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2^{n-1}}$. Ⓒ $u_n = \dfrac{1}{2n}$. Ⓓ $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Câu 10. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$ và $u_2 = -1$. Khi đó

Ⓐ $u_3 = 4$. Ⓑ $u_3 = 2$. Ⓒ $u_3 = -5$. Ⓓ $u_3 = 7$.

Câu 11. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 3n + 6$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ Dãy số (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = 3$.

Ⓑ Dãy số (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = 6$.

Ⓒ Dãy số (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 3$.

Ⓓ Dãy số (u_n) là cấp số nhân với cộng bội $q = 6$.

Câu 12. Trong các dãy số cho bởi công thức truy hồi sau, dãy số nào là cấp số nhân?

Ⓐ $u_1 = -1, u_{n+1} = u_n^2$.

Ⓑ $u_1 = -1, u_{n+1} = 2u_n$.

Ⓒ $u_1 = -1, u_{n+1} = u_n + 2$.

Ⓓ $u_1 = -1, u_{n+1} = u_n - 2$.

Câu 13. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số cộng?

Ⓐ $21, -3, -27, -51, -75$.

Ⓑ $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 2, \frac{11}{4}, \frac{15}{4}$.

Ⓒ $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$.

Ⓓ $\frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{40}, \frac{1}{50}, \frac{1}{60}$.

Câu 14. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$. Phát biểu nào sau đây đúng?

Ⓐ Dãy số tăng và bị chặn.

Ⓑ Dãy số giảm và bị chặn.

Ⓒ Dãy số giảm và bị chặn dưới.

Ⓓ Dãy số giảm và bị chặn trên.

Câu 15. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -1$ và công sai $d = 3$. Khi đó S_5 bằng

Ⓐ 11.

Ⓑ 50.

Ⓒ 10.

Ⓓ 25.

Câu 16. Cho biết ba số $1; x; 5$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng. Giá trị nào dưới đây của số thực x thỏa mãn?

Ⓐ $x = 1$.

Ⓑ $x = 3$.

Ⓒ $x = 0$.

Ⓓ $x = 2$.

Câu 17. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q. Với $n \geq 2$, số hạng tổng quát của nó được xác định bởi công thức nào dưới đây?

Ⓐ $u_n = u_1 \cdot q^n$.

Ⓑ $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.

Ⓒ $u_n = q^n$.

Ⓓ $u_n = u_1 \cdot q^{n+1}$.

Câu 18. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n), biết $u_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $v_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ Dãy số (u_n) bị chặn dưới và dãy số (v_n) bị chặn trên.

Ⓑ Cả hai dãy số (u_n) và (v_n) đều bị chặn dưới.

Ⓒ Cả hai dãy số (u_n) và (v_n) đều bị chặn trên.

Ⓓ Dãy số (u_n) bị chặn trên và dãy số (v_n) bị chặn dưới.

Câu 19. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$ và công sai $d = 2$. Công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng đó là

Ⓐ $u_n = 3n + 2$.

Ⓑ $u_n = 2n - 2$.

Ⓒ $u_n = 2n + 1$.

Ⓓ $u_n = 3n - 2$.

Câu 20. Cho dãy số (u_n), biết rằng $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = (u_n)^2 + 1. \end{cases}$ Ba số hạng đầu tiên trong dãy số này là

Ⓐ $-2; 5; 26$.

Ⓑ $2; 5; 26$.

Ⓒ $-2; -1; 0$.

Ⓓ $-2; 4; 16$.

Câu 21. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = 3n + 5$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ Dãy số giảm. Ⓑ Dãy số tăng.

Ⓒ Dãy số không tăng, không giảm. Ⓓ Dãy số vừa tăng, vừa giảm.

Câu 22. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -5$ và công sai $d = 3$. Số 94 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng đó?

Ⓐ 33. Ⓑ 35. Ⓒ 34. Ⓓ 32.

Câu 23. Cho các dãy số sau. Dãy số nào là dãy số tăng?

Ⓐ $1; 3; 3; 4; 5$. Ⓑ $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$. Ⓒ $2; 4; -6; 8$. Ⓓ $-\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 7$.

Câu 24. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2022$ và công sai $d = 7$. Giá trị của u_5 bằng

Ⓐ 2064. Ⓑ 2057. Ⓒ 2043. Ⓓ 2050.

Câu 25. Trong các dãy số sau, dãy số nào **không** phải là cấp số cộng?

Ⓐ $1; 1; 1; 1; 1$. Ⓑ $3; 1; -1; -2; -4$. Ⓒ $\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}; \frac{9}{2}$. Ⓓ $-8; -6; -4; -2; 0$.

Câu 26. Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đầu lần lượt là 4; 7; 10; 13; 16; .... Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng.

Ⓐ $u_n = 3n + 1$. Ⓑ $u_n = 3n - 4$. Ⓒ $u_n = 3n + 4$. Ⓓ $u_n = 3n - 1$.

Câu 27. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 3n - 2$. Tìm công sai d của cấp số cộng.

Ⓐ $d = 3$. Ⓑ $d = 2$. Ⓒ $d = -2$. Ⓓ $d = -3$.

Câu 28. Trong các dãy số (u_n) với số hạng tổng quát sau, dãy số nào là cấp số cộng

Ⓐ $u_n = 2^n + 3$. Ⓑ $u_n = 3 \cdot 2^n$. Ⓒ $u_n = 3 - 2n$. Ⓓ $u_n = 2 + n^3$.

Câu 29. Dãy số (u_n) với $u_n = 2^{n-1}$ là một cấp số nhân với

Ⓐ Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 2. Ⓑ Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 1.

Ⓒ Công bội là 4 và số hạng đầu tiên là 2. Ⓓ Công bội là 3 và số hạng đầu tiên là 1.

Câu 30. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = 2^n$. Tìm số hạng u_{n+1}

Ⓐ $u_{n+1} = 2^n \cdot 2$. Ⓑ $u_{n+1} = 2^n + 1$. Ⓒ $u_{n+1} = 2(n + 1)$. Ⓓ $u_{n+1} = 2^n + 2$.

Câu 31. Cho cấp số nhân (u_n) biết số hạng đầu bằng 18, số hạng thứ hai bằng 54. Tính tổng 8 số hạng đầu tiên của một cấp số nhân.

Ⓐ 49 520. Ⓑ 54 090. Ⓒ 51 200. Ⓓ 59 040.

Câu 32. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$, $u_2 = 4$. Số hạng thứ tư là

Ⓐ $u_4 = 5$. Ⓑ $u_4 = 10$. Ⓒ $u_4 = 12$. Ⓓ $u_4 = 13$.

Câu 33. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 1$ và $u_2 = 2$. Công bội của cấp số nhân đã cho là

Ⓐ $q = -\frac{1}{2}$. Ⓑ $q = 2$. Ⓒ $q = \frac{1}{2}$. Ⓓ $q = -2$.

Câu 34. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

Ⓐ $1; 2; 3; 4; 5$. Ⓑ $1; -1; 1; -1; 1$. Ⓒ $1; -2; 4; -8; 16$. Ⓓ $1; 2; 4; 8; 16$.

Câu 35. Xét dãy số (u_n) là dãy số tăng gồm tất cả các số nguyên dương mà mỗi số hạng của nó khi chia cho 5 dư 1. Viết 3 số hạng đầu của dãy số.

Ⓐ $0;6;11$. Ⓑ $1;6;12$. Ⓒ $1;5;11$. Ⓓ $1;6;11$.

Câu 36. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_2 = 1$ và công sai $d = -2$. Tổng 20 số hạng đầu của cấp số cộng đó là

Ⓐ $S_{20} = -320$. Ⓑ $S_{20} = -380$. Ⓒ $S_{20} = -214$. Ⓓ $S_{20} = -640$.

Câu 37. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{3n-1}{3n+1}$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $\dfrac{1}{3}$. Ⓒ 1. Ⓓ 0.

Câu 38. Cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 5$ và công bội $q = -2$. Số -160 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân?

Ⓐ 10. Ⓑ 6. Ⓒ 12. Ⓓ 22.

Câu 39. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$; $u_3 = 18$ và công bội $q < 0$. Công bội của cấp số nhân đó là

Ⓐ $q = -9$. Ⓑ $q = -3$. Ⓒ $q = 3$. Ⓓ $q = 9$.

Câu 40. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = 5^n - 1$. Số hạng thứ hai u_2 của cấp số nhân đó là

Ⓐ $u_2 = 19$. Ⓑ $u_2 = 24$. Ⓒ $u_2 = 25$. Ⓓ $u_2 = 20$.

Câu 41. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_6 = -4$ và $u_{14} = -36$. Tìm số hạng đầu u_1.

Ⓐ $u_1 = -20$. Ⓑ $u_1 = -4$. Ⓒ $u_1 = -32$. Ⓓ $u_1 = 16$.

Câu 42. Xác định x dương để $2x-3$; x; $2x+3$ lập thành cấp số nhân.

Ⓐ $x = \sqrt{3}$. Ⓑ $x = \pm\sqrt{3}$.

Ⓒ không có giá trị nào của x. Ⓓ $x = 3$.

Câu 43. Cho (u_n) là cấp số cộng có $u_4 + u_{16} = 48$. Số hạng u_{10} bằng

Ⓐ 48. Ⓑ 24. Ⓒ 72. Ⓓ 96.

Câu 44. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$, $u_{14} = 18$. Tính tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này.

Ⓐ $S_{16} = 26$. Ⓑ $S_{16} = -25$. Ⓒ $S_{16} = -24$. Ⓓ $S_{16} = 24$.

Câu 45. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và $u_{10} = 19$. Tổng $S_{10} = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{10}$?

Ⓐ 110. Ⓑ 100. Ⓒ 21. Ⓓ 19.

Câu 46. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai d; S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của (u_n). Biết $S_5 = 25$; $S_{16} = 160$. Khi đó (u_n) có

Ⓐ $d = 1$. Ⓑ $u_1 = 3$. Ⓒ $d = \dfrac{10}{11}$. Ⓓ $u_1 = \dfrac{83}{11}$.

Câu 47. Cho cấp số nhân (u_n): $\begin{cases} u_4 - u_2 = 42 \\ u_5 - u_3 = 84 \end{cases}$. Tính tổng 15 số hạng đầu của cấp số nhân.

Ⓐ $7(1-2^{16})$. Ⓑ $7(1-2^{15})$. Ⓒ $7(2^{16}-1)$. Ⓓ $7(2^{15}-1)$.

Câu 48. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{an+2}{3n+1}$. Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số tăng.

Ⓐ $a = 6$. Ⓑ $a > 6$. Ⓒ $a < 6$. Ⓓ $a \geq 6$.

Câu 49. Cho cấp số cộng có tổng n số hạng đầu là $S_n = 3n^2 + 4n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Giá trị của số hạng thứ 10 của cấp số cộng là

Ⓐ $u_{10} = 55$. Ⓑ $u_{10} = 67$. Ⓒ $u_{10} = 61$. Ⓓ $u_{10} = 59$.

Câu 50. Một cấp số nhân hữu hạn có công bội $q = 2$, số hạng thứ bốn bằng -24 và số hạng cuối bằng $-1\,572\,864$. Hỏi cấp số nhân đó có bao nhiêu số hạng?

Ⓐ 18. Ⓑ 19. Ⓒ 20. Ⓓ 21.

Câu 51. Một rạp hát có 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 25 ghế. Mỗi dãy sau có hơn dãy trước 3 ghế. Hỏi rạp hát có tất cả bao nhiêu ghế?

Ⓐ 1635. Ⓑ 1792. Ⓒ 2055. Ⓓ 3125.

Câu 52. Năm 2022, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là 750 000 000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2027 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

Ⓐ 675 000 000 đồng. Ⓑ 664 382 000 đồng. Ⓒ 677 941 000 đồng. Ⓓ 691 776 000 đồng.

Câu 53. Một loại lợi khuẩn được nuôi cấy trong phòng thí nghiệm, cứ cách hai phút số lượng lại tăng lên gấp đôi so với số lượng đang có. Từ một lợi khuẩn ban đầu, hãy tính tổng số lợi khuẩn có trong ống nghiệm sau 30 phút.

Ⓐ 16 384. Ⓑ 16 383. Ⓒ 32 767. Ⓓ 32 768.

Câu 54. Số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân. Biết thể tích của khối hộp là 3375 cm^3 và diện tích toàn phần là 1950 cm^2. Tính tổng số đo kích thước của hình hộp chữ nhật đó.

Ⓐ 50 cm. Ⓑ 65 cm. Ⓒ 55 cm. Ⓓ 60 cm.

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Cho dãy số hữu hạn gồm các số hạng: $-1; 2; 5; 8; 11; 14; 17$. Khi đó

a) Dãy số đã cho là một cấp số cộng với công sai của cấp số cộng là $d = 2$.

b) Dãy số đã cho không phải là cấp số nhân.

c) Số hạng $u_1 = -1$.

d) Tổng tất cả các số hạng của dãy số bằng 55.

Câu 2. Cho cấp số nhân (u_n) có: $u_2 = -6$ và $u_3 = 18$.

a) Cấp số nhân (u_n) có công bội $q = 3$.

b) Cấp số nhân đã cho có số hạng tổng quát là $u_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$.

c) Số hạng thứ 6 của cấp số nhân đã cho là -486.

d) Tổng năm số hạng đầu của cấp số nhân (u_n) là -121.

Câu 3. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$, công sai $d = -4$.

a) Số hạng thứ tư của cấp số cộng (u_n) là -10.

b) Số hạng thứ hai của cấp số cộng (u_n) là một số dương.
c) Số -40 là số hạng thứ 11 của cấp số cộng (u_n).
d) Công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) là $u_n = 6 - 4n$, $n \geq 1$.

Câu 4. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$. Khi đó
a) Số hạng đầu tiên của dãy số là $\dfrac{1}{2}$.
b) Dãy số trên có số hạng $u_2 = 1; u_3 = \dfrac{5}{3}$.
c) Số $\dfrac{301}{152}$ là số hạng thứ 152 của dãy số (u_n).
d) Dãy số trên là dãy bị chặn.

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) biết số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = -3$.
a) Số hạng thứ hai của cấp số cộng là $u_2 = -6$.
b) Số $-6\,076$ là số hạng thứ $2\,025$ của cấp số cộng.
c) Tổng của hai mươi số hạng đầu tiên của cấp số cộng là $S_{20} = -530$.
d) Số hạng tổng quát của cấp số cộng là $u_n = 5 - 3n$.

Câu 6. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$, công sai $d = -2$. Khi đó
a) Số hạng thứ 2 của cấp số cộng đã cho là $u_2 = 5$.
b) Công thức của số hạng tổng quát là $u_n = 2n - 5$.
c) Tổng $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$.
d) -25 là một số hạng của cấp số cộng đã cho.

Câu 7. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 9 \end{cases}$ với mọi $n \geq 1$. Khi đó, các mệnh đề sau đúng hay sai
a) Số hạng thứ hai $u_2 = 17$.
b) Công thức của số hạng tổng quát là $u_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 2$.
c) Tổng 10 số hạng đầu của dãy số đã cho là $S_{10} = 1\,747\,595$.
d) Dãy số (u_n) là một dãy số giảm.

Câu 8. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2 + u_5 = 35 \\ u_3 + u_{10} = 53 \end{cases}$.
a) Công sai của cấp số cộng trên là số âm.
b) Số 305 là số hạng thứ 100 của cấp số cộng trên.
c) $\dfrac{3}{u_1u_2} + \dfrac{3}{u_2u_3} + \dfrac{3}{u_3u_4} + \cdots + \dfrac{3}{u_{24}u_{25}} = \dfrac{18}{205}$.
d) Số hạng đầu tiên của cấp số cộng là $u_1 = 10$.

Câu 9. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = -2, \\ u_n = 3u_{n-1} \end{cases}$, với $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
a) $u_3 = 18$.
b) Số hạng đầu của dãy số là -2.
c) $118\,098$ là số hạng thứ 11 của dãy số đã cho.
d) Dãy số đã cho là cấp số nhân có công bội $q = 3$.

Câu 10. Cho cấp số cộng (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = n^2 + 3n$.

a) $S_1 = 4; S_2 = 8$.

b) Cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 4$ và công sai $d = 2$.

c) Số hạng tổng quát của cấp số cộng là $u_n = 2 + 2n$.

d) Số 46 là số hạng thứ 20 của cấp số cộng.

Câu 11. Xét các khẳng định sau:

a) Cho dãy số (u_n) với $u_n = 3n - 4$ thì ta có $u_5 = 15$.

b) Cấp số cộng: $3; -2; -7; \ldots$ có số hạng thứ 15 là -67.

c) Cấp số cộng hữu hạn $2; 5; 8; \ldots; 86$ có 29 số hạng.

d) Cho cấp số cộng (u_n) có tổng n số hạng đầu là $S_n = \dfrac{3n^2}{2} - \dfrac{n}{2}$. Giá trị biểu thức $T = u_{15} + u_{16} + \cdots + u_{100}$ nhỏ hơn 14 000.

Câu 12. Cho cấp số cộng (u_n) biết số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$.

a) Đặt $S = u_{10} + u_{11} + \cdots + u_{20} + u_{30} + u_{31} + \cdots + u_{50} + u_{60} + u_{61} + \cdots + u_{80}$. Khi đó $S = 7\,372$.

b) Số 610 là tổng của n số hạng đầu của cấp số cộng (u_n). Khi đó $n \in [18; 22]$.

c) Số 152 là số hạng thứ n của cấp số cộng (u_n). Khi đó $n \in [45; 50]$.

d) Số hạng tổng quát của cấp số cộng là $u_n = -1 + 3n$.

Câu 13. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -5$, công sai $d = 3$.

a) 11 là số hạng thứ 5 của cấp số cộng trên.

b) Số hạng tổng quát của cấp số cộng trên là $u_n = 3n - 8$.

c) Số 2025 là một số hạng của cấp số cộng trên.

d) $S = u_{26} + u_{27} + \ldots + u_{50} = 2660$.

Câu 14. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 3n + 1$.

a) Dãy số đã cho là một cấp số cộng với công sai $d = 3$.

b) Dãy số đã cho là một cấp số nhân với công bội $q = 1$.

c) Số hạng đầu $u_1 = 4$.

d) Tổng của 2 024 số hạng đầu bằng 6 149 924.

Câu 15. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = 6; u_5 = 1$.

a) Công sai của cấp số cộng là $d = -5$.

b) Ba số hạng đầu tiên của cấp số lần lượt là 21; 16; 11.

c) Tổng của 10 số hạng đầu tiên là -15.

d) Luôn có $2u_{10} = u_7 + u_8$.

Câu 16. Cho cấp số nhân (u_n) biết rằng $u_1 + u_2 + u_3 = 21$ và $u_4 + u_5 + u_6 = 168$.

a) Công bội $q = 2$.

b) Số hạng $u_1 = 9$.

c) Số 12 là số hạng thứ 3 của cấp số nhân.

d) Tổng của 10 số hạng đầu tiên là 3 069.

Câu 17. Cho cấp số cộng (u_n) thoả mãn $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 15 \\ u_1 + u_6 = 27 \end{cases}$. Khi đó

a) Số hạng $u_1 = 21$.

b) Công sai của cấp số cộng bằng -2.

c) Số hạng $u_{11} = -9$.

d) Số -6048 là số hạng thứ 2024.

Câu 18. Xét tính đúng sai các khẳng định sau:

a) Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $1;4;16;64;\ldots$ Tổng của n số hạng đầu của cấp số nhân đó là $S_n = \dfrac{4^n - 1}{3}$.

b) Trong một lọ nuôi cấy vi khuẩn, ban đầu có 5000 con vi khuẩn và số lượng vi khuẩn tăng lên thêm 8% mỗi giờ. Sau 5 giờ thì số lượng vi khuẩn là 6802 con.

c) Một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = \dfrac{1}{2}$. Năm số hạng đầu của cấp số nhân này là $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}$.

d) Một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 3$ và $u_2 = -6$. Khi đó $u_5 = 84$.

Câu 19. Cho dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n$.

a) $u_8 = 65$.

b) Số 5 800 là một số hạng của dãy số (u_n).

c) (u_n) là dãy số tăng.

d) Dãy số (S_n) với $S_n = \dfrac{5}{u_1} + \dfrac{5}{u_2} + \ldots + \dfrac{5}{u_n}$ bị chặn trên tại $\dfrac{49}{10}$.

Câu 20. Cho cấp số nhân (u_n) thoả mãn $\begin{cases} u_4 + u_6 = -540 \\ u_3 + u_5 = 180. \end{cases}$

a) Số hạng đầu của cấp số nhân (u_n) là $u_1 = 2$.

b) Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n), thì ba số $q;1;3$ tạo thành một cấp số cộng.

c) Số -486 là số hạng thứ 6 của cấp số nhân (u_n).

d) Cấp số cộng (v_n) có số hạng đầu là số hạng đầu của cấp số nhân (u_n) và công sai $d = 3$ thì số hạng thứ 10 của cấp số cộng có giá trị là $v_{10} = 30$.

Câu 21. Em P sau khi học bài "Cấp số cộng"đã về nhà lấy đậu để chơi trò xếp hạt đậu thành các hàng sao cho số hạt đậu ở các hàng tạo thành dãy cấp số cộng (u_n). Biết ở hàng đầu tiên P xếp 5 hạt đậu, hàng thứ hai P xếp 9 hạt đậu.

a) Công sai của cấp số cộng $d = 6$.

b) Số hạt đậu ở hàng thứ 10 là 42 hạt.

c) Số hạt đậu ở hàng thứ 85 là 341 hạt.

d) Để xếp được 85 hàng đầu tiên, P cần 14 705 hạt đậu.

Câu 22. Một công ty taxi điện thống kê như sau: Khi mua một chiếc xe ô tô điện Vinfast VF5 với giá 600 triệu đồng thì sau một năm sử dụng giá trị chiếc xe giảm so với năm liền trước đó là 15%. Mặt khác, lợi nhuận kinh doanh vận tải mà một chiếc xe mang lại trung bình là 20 triệu đồng/tháng.

a) Sau một năm sử dụng, giá trị chiếc xe còn lại là 510 triệu đồng.

b) Nếu đặt $u_1, u_2, u_3, \ldots$ lần lượt là giá trị của chiếc xe từ khi mới mua, sau năm thứ nhất, sau năm thứ 2... thì ta được một cấp số nhân có $u_1 = 510$ và công bội $q = 0{,}85$.

c) Giá trị chiếc xe còn lại sau n năm sử dụng được tính theo công thức $T_n = 600 \cdot (0{,}15)^n$ triệu đồng.

d) Sau 5 năm sử dụng xe kinh doanh, công ty lãi được 934 triệu đồng/xe (làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 23. Chị Bình dự định trồng một vườn hoa có 24 hàng với 15 cây hoa ở hàng thứ nhất, 18 cây hoa ở hàng thứ hai, 21 cây hoa ở hàng thứ 3 và cứ tiếp tục theo qui luật đó, tức là hàng sau nhiều hơn hàng liền trước nó 3 cây hoa.

a) Số cây hoa ở mỗi hàng theo thứ tự lập thành một cấp số cộng có công sai $d = 3$.

b) Số cây ở hàng thứ 10 là 45 cây hoa.

c) Số cây ở hàng cuối cùng là 84 cây hoa.

d) Tổng số cây hoa chị Bình phải trồng là 1188 cây hoa.

Câu 24. Một sinh viên sau khi ra trường và xin vào làm cho một trung tâm với mức lương khởi điểm là 100 triệu đồng một năm. Cứ sau mỗi năm, trung tâm trả thêm cho sinh viên 20 triệu đồng. Gọi u_n là số tiền lương mà sinh viên đó nhận được ở năm thứ n. Hỏi các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Số tiền lương sinh viên nhận được ở năm thứ hai là 120 triệu đồng.

b) Số tiền lương sinh viên nhận được ở năm thứ 10 là 300 triệu đồng.

c) Dãy số (u_n) là cấp số cộng có $u_1 = 120$ và công sai $d = 20$.

d) Giả sử, mỗi năm bạn sinh viên chi tiêu tiết kiệm hết 70 triệu đồng. Vậy sau ít nhất 12 năm thì sinh viên đó mua được căn chung cư 2 tỉ đồng.

Câu 25. Một công ty có chế độ đãi ngộ cho nhân viên gắn bó với công ty, quy tắc trả tiền lương như sau, tháng đầu tiên vào làm việc bất kì nhân viên nào cũng được trả mức lương cơ bản 400$ một tháng, các tháng làm việc tiếp theo, ngoài lương cơ bản này, nhân viên còn nhận được một khoảng tiền thưởng 20$ nhiều hơn số tiền mà họ nhận được ở tháng trước đó. Gọi u_n ($) là số tiền lương và thưởng mà nhân viên nhận được ở tháng thứ n. Khi đó:

a) Dãy số (u_n) là cấp số cộng có $u_1 = 400$ và $d = 20$.

b) Lương và thưởng người này nhận được ở tháng thứ sáu là 500$.

c) Nhân viên A của công ty vào làm đủ 6 tháng thì tổng số tiền mà anh ta nhận được là 3 000$.

d) Nhân viên B của công ty này vào làm ở tháng 1, anh ta đã kí cam kết xin ứng trước tiền lương 4 tháng, tuy nhiên đến hết tháng 12 thì anh ta mới được phép nhận tất cả tiền lương thưởng còn lại, anh ta nhẩm tính rằng mình sẽ nhận được 4 400$.

Câu 26. Trung tâm Trải nghiệm sáng tạo trường Nguyễn Bỉnh Khiêm – Hà Nội lên kế hoạch cho học sinh trồng cây trên các bậc thang đã được cải tạo và bồi đất dọc theo sườn đồi từ thấp lên cao, trong đó có giống xoài mới. Đối với giống xoài mới, theo thiết kế, hàng thứ nhất (mặt đất) sẽ trồng 1 cây và từ hàng trên liền kề sẽ trồng số lượng cây gấp đôi hàng dưới. Để đảm bảo tính thẩm mĩ cho vườn cây thì nhất thiết ở mỗi hàng phải trồng đủ số cây theo thiết kế (hàng trên gấp đôi hàng dưới), nếu hàng cuối chưa đủ sẽ phải mua bổ sung. Hiện trong vườn cây giống, trung tâm đã có 2 000 cây xoài. Gọi $a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n; \ldots$ lần lượt là số cây xoài ở hàng thứ $1; 2; 3; \ldots; n; \ldots$

a) Hàng thứ 4 phải trồng số cây xoài là $a_4 = 4$.

b) Số lượng cây xoài ở mỗi hàng lần lượt lập thành cấp số nhân với công bội $q = \dfrac{1}{2}$.

c) Số lượng cây xoài ở hàng thứ n được tính bởi công thức: $a_n = 2^{n-1} (n \in \mathbb{N})$.

d) Trung tâm cần phải mua và trồng bổ sung tối thiểu 347 cây xoài giống nữa ở hàng cuối mới đảm bảo tính thẩm mĩ.

Câu 27. Người ta trồng 2 380 cây theo một hình tam giác như sau:

- Hàng thứ nhất trồng 1 cây. 
- Hàng thứ hai trồng 4 cây. 
- Hàng thứ ba trồng 7 cây. 
- ... ...

Cứ tiếp tục như thế cho đến hàng cuối cùng. Khi đó

a) Số cây mỗi hàng lập thành một cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu là $u_1 = 1$.

b) Số cây mỗi hàng lập thành một cấp số cộng (u_n) có công sai là $d = 2$.

c) Có tất cả 35 hàng cây.

d) Hàng thứ 20 trồng được 58 cây.

3 Tự luận.

Bài 1. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của mỗi dãy số (u_n) sau, biết số hạng tổng quát:

a) $u_n = \dfrac{n^2}{n+1}$; bị chặn dưới b) $u_n = \dfrac{2}{n^5}$; bị chặn c) $u_n = (-1)^n.n^2$. không tăng không giảm

Bài 2. Cho cấp số cộng (u_n). Tìm số hạng đầu u_1, công sai d trong mỗi trường hợp sau:

a) $u_2 + u_5 = 42$ và $u_4 + u_9 = 66$; $u_1 = 11, d = 4$ b) $u_2 + u_4 = 22$ và $u_1.u_5 = 21$. $u_1 = 1, d = 5$ hoặc $u_1 = 21, d = -5$

Bài 3. Cho cấp số nhân (u_n). Tìm số hạng đầu u_1, công bội q trong mỗi trường hợp sau:

a) $u_6 = 192$ và $u_7 = 384$; $u_1 = 6, q = 2$ b) $u_1 + u_2 + u_3 = 7$ và $u_5 - u_2 = 14$. $u_1 = 1, q = 2$; hoặc $u_1 = 7, q = -1$

Bài 4. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) biết:

a) $\begin{cases} 5u_1 + 10u_5 = 0 \\ S_4 = 14; \end{cases}$ $u_1 = 8,\ d = -3$ b) $\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170. \end{cases}$ $u_1 = 0,\ d = 3$ hoặc $u_1 = 36,\ d = -\dfrac{3}{5}$

Bài 5. Tìm số hạng đầu u_1 và cộng bội q của cấp số nhân (u_n) biết:

a) $\begin{cases} u_5 = 96 \\ u_6 = 192; \end{cases}$ $u_1 = 6,\ q = 2$ b) $\begin{cases} u_4 + u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144. \end{cases}$ $u_1 = 12,\ q = 2$

Bài 6. Mặt sàn tầng một (tầng trệt) của một ngôi nhà cao hơn mặt sân 0,5 m. Cầu thang đi từ tầng một lên tầng hai gồm 25 bậc, mỗi bậc cao 16 cm.

a) Viết công thức để tìm độ cao của bậc cầu thang thứ n so với mặt sân. $h_n = (0{,}5 + 0{,}16n)$

b) Tính độ cao của sân tầng hai so với mặt sân. 4,5

Bài 7. Từ 0 giờ đến 12 giờ trưa, chuông của một chiếc đồng hồ quả lắc sẽ đánh bao nhiêu tiếng, biết rằng nó chỉ đánh chuông báo giờ và số tiếng chuông bằng số giờ? 78

Bài 8. Một cây đàn organ có tần số âm thanh các phím liên tiếp tạo thành một cấp số nhân. Cho biết tần số phím La trung là 400 Hz và tần số của phím La cao cao hơn 12 phím là 800 Hz (nguồn: https://vi.wikipedia.org/wikiOrgan). Tìm công bội của cấp số nhân nói trên (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn). ±1,414

Bài 9. Ông An vay ngân hàng 1 tỉ đồng với lãi suất 12%/năm. Ông đã trả nợ theo cách: Bắt đầu từ tháng thứ nhất sau khi vay, cuối tháng ông trả ngân hàng số tiền là a (đồng) và đã trả hết nợ sau đúng 2 năm kể từ ngày vay. Hỏi số tiền mỗi tháng mà ông An phải trả là bao nhiêu đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)? 47073500

Bài 10. Giả sử quần thể động vật này ở thời điểm ban đầu có 110000 cá thể, quần thể này có tỉ lệ sinh là 12%/năm, xuất cư 2%/năm, tử vong 8%/năm. Dự đoán số cá thể của quần thể đó sau 2 năm. 11220 cá thể

Bài 11. Tế bào E.Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Hỏi sau 24 giờ, tế bào ban đầu sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào? 2^{72}

Bài 12. Tiền điện phải trả hàng tháng trong năm 2024 của một hộ gia đình luôn tăng với quy luật tháng sau luôn nhiều hơn tháng liền trước 3%. Tính tổng tiền điện hộ gia đình đó phải trả trong cả năm 2024 (làm tròn đến đơn vị nghìn đồng), biết tiền điện của tháng 01/2024 là 850 nghìn đồng. 12 063

Bài 13. Một công ty khởi nghiệp công nghệ nhận được 120 (triệu đồng) vốn đầu tư ban đầu. Công ty đặt mục tiêu tăng trưởng doanh thu ròng hàng tháng được tính bằng tỉ lệ thu về trừ đi tỉ lệ chi tiêu cố định cho hoạt động.

- Dự kiến tỉ lệ thu về hàng tháng là 15%.
- Dự kiến tỉ lệ chi tiêu cố định hàng tháng là 5%.

Nếu công ty duy trì mức tăng trưởng vốn đầu tư này trong 3 quý (9 tháng), hãy tính số tiền (cả vốn) mà công ty sẽ đạt được sau 3 quý (9 tháng) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị triệu đồng). ≈ 283 (triệu đồng)

Bài 14. Một du khách vào trường đua chó ở Phú Quốc và tham gia vào đặt cược, biết rằng nếu thắng anh ta sẽ nhận được số tiền bằng đúng số tiền cược bỏ ra. Anh ta đã nghĩ ra một chiến lược, đó là lần đầu anh ta đặt cược 8 USD, nếu thua cược anh ta sẽ cược gấp đôi số tiền cược so với lần trước đó đến khi nào thắng cược thì thôi. Du khách đó đã thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần cược thứ 10. Hỏi tổng cộng trong 10 lần cược, du khách đó đã thắng được bao nhiêu USD? 8

Bài 15. Minh để các quả óc chó vào 20 cái giỏ theo quy luật: Số quả ở giỏ sau luôn hơn số quả của giỏ ngay trước nó một lượng quả không đổi. Minh nhận thấy tổng số quả ở hai giỏ thứ 4 và thứ 17 là 42 quả. Hỏi Minh đã bỏ tất cả bao nhiêu quả óc chó vào các giỏ?



420

Bài 16. Một giáo viên mầm non hạng III nhận lương mỗi tháng bằng lương cơ sở nhân với bậc lương. Biết rằng một giáo viên mới ra trường có bậc lương là 2,1; sau 3 năm bậc lương đều sẽ được tăng thêm 0,31 và lương cơ sở trung bình của 25 năm công tác là 5 triệu đồng mỗi tháng. Hỏi giáo viên đó sẽ nhận được tất cả bao nhiêu triệu đồng sau 25 năm công tác (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)? 4861

Bài 17. Nam đậu đại học ở một trường thành phố, bạn phải đi làm thêm để có thể giảm gánh nặng kinh tế cho bố mẹ. Tháng đầu tiên đi làm, bạn được ông chủ trả 3 triệu đồng, nhờ siêng năng làm việc nên cứ mỗi tháng ông chủ lại tăng 5% so với tháng trước. Mỗi khi lĩnh lương bạn Nam đều cất đi phần lương tăng so với tháng trước. Hỏi sau 5 năm thì bạn Nam tiết kiệm được bao nhiêu tiền (làm tròn đến triệu đồng)? 50

Bài 18. Trong năm đầu tiên đi làm, anh Huy nhận được lương là 10 triệu đồng mỗi tháng. Cứ hết một năm, anh Huy lại được tăng lương, mỗi tháng năm sau tăng 12% so với mỗi tháng năm trước. Kể từ năm thứ 2 mỗi khi lĩnh lương anh Huy đều cất đi phần tăng lương so với năm ngay trước để tiết kiệm mua ô tô. Hỏi tính từ khi đi làm sau ít nhất bao nhiêu năm thì anh Huy mua được ô tô giá 500 triệu biết rằng anh Huy được gia đình hỗ trợ 32% giá trị chiếc xe? 13

Bài 19. Anh Tài vừa tốt nghiệp đại học và được nhận vào làm việc tại tập đoàn dược mỹ phẩm *PBC* với một trong hai phương án lương như sau

- **Phương án 1:** Lương khởi điểm 10 triệu đồng một tháng, cứ sau tròn 3 năm thì tăng lương mỗi tháng 6 triệu đồng so với mỗi tháng của 3 năm trước đó.
- **Phương án 2:** Lương khởi điểm 10 triệu đồng một tháng, cứ sau tròn 3 năm thì tăng lương mỗi tháng 40%, so với mỗi tháng của 3 năm trước đó.

Nếu anh Tài kí hợp đồng làm việc 20 năm thì sau 20 năm đi làm, tổng tiền lương anh nhận được theo phương án 2 nhiều hơn phương án 1 bao nhiêu triệu đồng *(làm tròn đến hàng đơn vị)*. 1180

Bài 20. Trong một buổi sinh hoạt trải nghiệm của học sinh trường THPT Ngọc Tảo, học sinh được tham gia trò chơi mang tên: ĐI TÌM TỪ KHÓA và trò chơi sẽ kết thúc khi có học sinh nói đúng từ khoá. Học sinh sẽ trả lời từ khoá sau mỗi gợi ý của Ban tổ chức. Quy tắc của trò chơi:

- Học sinh nào trả lời đúng đáp án sau gợi ý thứ nhất sẽ được nhận nửa số kẹo Ban tổ chức đang có.
- Nếu học sinh trả lời đúng đáp án sau gợi ý thứ hai thì số kẹo nhận được sẽ bị giảm một nửa.

Tiếp tục quy luật đó: mỗi lần thêm một gợi ý, số kẹo nhận được sẽ bị giảm một nửa. Sau mỗi lượt gợi ý, nếu không có học sinh nào nói đúng từ khoá thì sẽ chuyển số kẹo ở lượt đó cho câu lạc bộ Olympia. Biết rằng trong buổi sinh hoạt này, học sinh trả lời đúng đáp án sau 6 gợi ý và Ban tổ chức chỉ còn lại 1 cái kẹo sau khi kết thúc trò chơi. Tính số kẹo mà câu lạc bộ Olympia nhận được từ Ban tổ chức. 62

Bài 21. Một bệnh nhân có vấn đề về thận, hàng ngày phải uống một viên thuốc 100 mg. Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%. Tuy nhiên, kể từ ngày thứ 11 trở đi do khả năng đào thải của cơ thể thay đổi nên trước mỗi lần uống thuốc, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể còn 2%. Ước lượng thuốc trong cơ thể nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài. $\approx 107{,}41$ (mg)

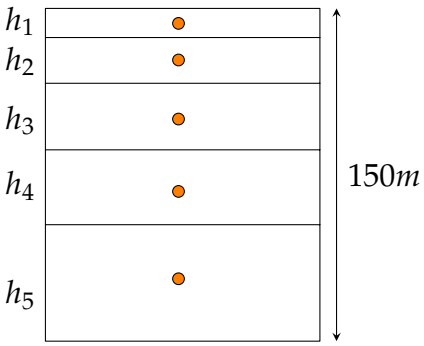
Bài 22. Công ty Z dự định thực hiện chiến dịch quảng bá livestream cho sản phẩm mới trên nền tảng Tiktok. Nếu doanh số bán hàng theo ngày đều bằng nhau thì mục tiêu là trong 20 ngày sẽ bán được hết số sản phẩm trong kho. Theo kế hoạch, trong 5 ngày đầu tiên, mỗi ngày công ty thuê các KOL (nhà sáng tạo nội dung và bán hàng trên Tiktok) tích cực livestream bán hàng và dự kiến doanh số theo ngày đều đạt chỉ tiêu. Kể từ ngày thứ 6 trở đi, công ty quyết định tăng chi phí quảng bá và dự kiến doanh số tăng đều x% cố định mỗi ngày so với ngày kề trước. Biết rằng sau đúng 2 tuần thì công ty sẽ bán hết hàng, tìm giá trị của x (làm tròn kết quả đến hàng phần mười). 10,1

Bài 23. Anh An gửi ngân hàng 288 triệu với kì hạn 1 năm và hưởng lãi suất 6,3% năm theo thể thức lãi kép. Sau khi gửi được tròn 8 tháng, anh cần dùng đến 288 triệu trên để mua đồ nội thất. Nhân viên ngân hàng đã đề xuất cho anh hai phương án

- **Phương án 1.** Anh rút hết tiền trước kì hạn. Khi đó toàn bộ số tiền anh đã gửi được tính lãi với lãi suất không kì hạn là 0,2 % năm *(tính theo thể thức lãi kép với kì hạn 1 tháng)*.
- **Phương án 2.** Anh thế chấp sổ tiết kiệm đó để vay ngân hàng 300 triệu. Khi đó toàn bộ số tiền vay sẽ phải chịu lãi suất 15% năm *(tính theo thể thức lãi kép với kì hạn 1 tháng)*. Đủ kì hạn 1 năm của khoản tiền gửi, anh sẽ rút hết tiền và trả hết nợ cho ngân hàng.

Nếu thực hiện theo phương án 2 thì anh được lợi bao nhiêu triệu đồng so với phương án 1 *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)*? 2,48

Bài 24. Tỉ lệ vàng $\varphi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ là một khái niệm phổ biến trong toán học và có nhiều ứng dụng trong thực tế. Trong thiết kế nội thất, người ta thường áp dụng tỉ lệ vàng để có được sự cân bằng hài hòa và tính thẩm mĩ cao. Một người thợ mộc thiết kế một cái tủ đựng quần áo bằng gỗ như hình vẽ bên dự vào tỉ lệ vàng này. Biết rằng, chiều cao của cái tủ này là 150 cm và nếu gọi h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 cm là chiều cao của các ngăn đựng quần áo thì $\dfrac{h_2}{h_1} = \dfrac{h_3}{h_2} = \dfrac{h_4}{h_3} = \dfrac{h_5}{h_4} = \varphi$. Hỏi chiều cao



h_1 của ngăn đựng quần áo trên cùng bằng bao nhiêu xentimét *(làm tròn kết quả đến hàng phần chục của đơn vị centimét)*? 9,2

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1 D	2 A	3 D	4 C	5 A	6 B	7 B	8 C	9 D	10 C
11 A	12 B	13 A	14 A	15 D	16 B	17 B	18 A	19 C	20 A
21 B	22 C	23 D	24 D	25 B	26 A	27 A	28 C	29 B	30 A
31 D	32 B	33 B	34 A	35 D	36 A	37 C	38 B	39 B	40 D
41 D	42 A	43 B	44 D	45 B	46 C	47 D	48 B	49 C	50 C
51 C	52 C	53 C	54 B						

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a S b S c Đ d S	Câu 2.	a S b Đ c Đ d S
Câu 3.	a Đ b S c S d Đ	Câu 4.	a Đ b S c S d Đ
Câu 5.	a S b S c Đ d Đ	Câu 6.	a S b S c Đ d Đ
Câu 7.	a Đ b S c Đ d S	Câu 8.	a S b S c Đ d Đ
Câu 9.	a S b Đ c S d Đ	Câu 10.	a S b Đ c Đ d S
Câu 11.	a S b Đ c Đ d S	Câu 12.	a Đ b Đ c S d Đ
Câu 13.	a S b Đ c S d S	Câu 14.	a Đ b S c Đ d Đ
Câu 15.	a Đ b Đ c Đ d S	Câu 16.	a Đ b S c Đ d Đ
Câu 17.	a Đ b S c Đ d Đ	Câu 18.	a Đ b S c Đ d S
Câu 19.	a S b S c Đ d S	Câu 20.	a Đ b S c Đ d S
Câu 21.	a S b S c Đ d Đ	Câu 22.	a Đ b S c S d S
Câu 23.	a Đ b S c Đ d Đ	Câu 24.	a Đ b S c S d S
Câu 25.	a Đ b Đ c S d Đ	Câu 26.	a S b S c Đ d S
Câu 27.	a Đ b S c S d Đ		

Chương III

CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

§1 MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Giới thiệu về mẫu số liệu ghép nhóm

Mẫu số liệu ghép nhóm là mẫu số liệu cho dưới dạng bảng tần số của các nhóm số liệu. Mỗi nhóm số liệu là tập hợp gồm các giá trị của số liệu được ghép nhóm theo một tiêu chí xác định. Nhóm số liệu thường được cho dưới dạng $(a;b]$, trong đó a là đầu mút trái, b là đầu mút phải.

Nhận xét

- Mẫu số liệu ghép nhóm được dùng khi ta không thể thu thập được số liệu chính xác hoặc do yêu cầu của bài toán mà ta phải biểu diễn mẫu số liệu dưới dạng ghép nhóm để thuận lợi cho việc tổ chức, đọc và phân tích số liệu.
- Trong một số trường hợp, nhóm số liệu cuối cùng có thể lấy đầu mút bên phải.

Định nghĩa: Mẫu số liệu ghép nhóm thường được trình bày dưới dạng bảng tần số ghép nhóm có dạng như sau:

Nhóm	$[u_1;u_2)$	$[u_1;u_2)$	$\cdots$	$[u_k;u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

Chú ý:

- Bảng trên gồm k nhóm $[u_j; u_{j+1})$ với $1 \le j \le k$, mỗi nhóm gồm một số giá trị được ghép theo một tiêu chí xác định. Trong một số trường hợp, nhóm số liệu cuối cùng có thể lấy đầu mút bên phải.
- Cỡ mẫu $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.
- Giá trị chính giữa mỗi nhóm được dùng làm giá trị đại diện cho nhóm ấy. Ví dụ nhóm $[u_1; u_2)$ có giá trị đại diện là $\frac{1}{2}(u_1 + u_2)$.
- Hiệu $u_{j+1} - u_j$ được gọi là độ dài của nhóm $[u_j; u_{j+1})$. Ta thường phân chia các chóm có độ dài L bằng nhau và $L > \frac{R}{k}$, với R là khoảng biến thiên, k là số nhóm.

2) Ghép nhóm mẫu số liệu

Để chuyển mẫu số liệu không ghép nhóm sang mẫu số liệu ghép nhóm, ta làm như sau:

- *Bước 1:* Chia miền giá trị của mẫu số liệu thành một số nhóm theo tiêu chí cho trước.
- *Bước 2:* Đếm số giá trị của mẫu số liệu thuộc nhóm (tần số) và lập bảng thống kê cho mẫu số liệu ghép nhóm.

Dạng 1 Nhận dạng mẫu số liệu ghép nhóm

Ví dụ 1

Mẫu số liệu sau cho biết phân bố theo độ tuổi của dân số Việt Nam năm 2019.

Độ tuổi	Dưới 15 tuổi	Từ 15 đến dưới 65 tuổi	Từ 65 tuổi trở lên
Số người	23 371 882	65 420 451	7 416 651

1. Mẫu số liệu đã cho có là mẫu số liệu ghép nhóm hay không?
2. Nêu các nhóm và tần số tương ứng. Dân số Việt Nam năm 2019 là bao nhiêu?

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Mẫu số liệu sau cho biết kết quả kiểm tra môn Toán của lớp 11A năm 2022.

Điểm số	[3;5)	[5;7)	[7;9)	[9;11)
Số học sinh	5	18	10	7

1. Mẫu số liệu đã cho có là mẫu số liệu ghép nhóm hay không?
2. Nêu các nhóm và tần số tương ứng. Số học sinh của lớp 11A là bao nhiêu?

Bài 2 ☆

Trong các mẫu số liệu sau, mẫu nào là mẫu số liệu ghép nhóm? Đọc và giải thích mẫu số liệu ghép nhóm đó.

1. Số tiền lương mà giáo viên nhận được mỗi tháng tại một trường.

Số tiền (triệu đồng)	[2;4)	[4;6)	[6;8)	[8;10)	[10;12)
Số giáo viên	10	50	23	12	5

2. Thống kê thời gian giải một bài toán khó của 40 học sinh, ta có bảng số liệu sau

Thời gian (phút)	[5;9)	[9;13)	[13;17)	[17;21)
Số học sinh	3	12	10	15

Dạng 2 Chuyển mẫu số liệu không ghép nhóm sang mẫu số liệu ghép nhóm

Ví dụ 2

Bảng thống kê sau cho biết thời gian chạy (phút) của 30 vận động viên (VĐV) trong một giải chạy Marathon.

Thời gian	129	130	133	134	135	136	138	141	142	143	144	145
Số VĐV	1	2	1	1	1	2	3	3	4	5	2	5

Hãy chuyển mẫu số liệu trên sang mẫu số liệu ghép nhóm gồm sáu nhóm có độ dài bằng nhau và bằng 3.

Ví dụ 3

Một công ty may quần áo đồng phục học sinh cho biết cỡ áo theo chiều cao của học sinh được tính như sau:

Chiều cao (cm)	[150;160)	[160;167)	[167;170)	[170;175)	[175;180)
Cỡ áo	S	M	L	XL	XXL

Công ty muốn ước lượng tỉ lệ các cỡ áo khi may cho học sinh lớp 11 đã đo chiều cao của 36 học sinh nam khối 11 của một trường và thu được mẩu số liệu sau (đơn vị là centimét):

160 161 161 162 162 162 163 163 163 164 164 164 164
165 165 165 165 165 166 166 166 166 167 167 168 168
168 168 169 169 170 171 171 172 172 174

a) Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu với các nhóm đã cho ở bảng trên.

b) Công ty may 500 áo đồng phục cho học sinh lớp 11 thì nên may số lượng áo theo mỗi cỡ là bao nhiêu chiếc?

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3 ☆

Cân nặng (kg) của 35 người trưởng thành tại một khu dân cư được cho như sau:

43 51 47 62 48 40 50 62 53 56 40 48 56 53 50 42 55
52 48 46 45 54 52 50 47 44 54 55 60 63 58 55 60 58 53.

Chuyển mẫu số liệu trên thành dạng ghép nhóm, các nhóm có độ dài bằng nhau, trong đó có nhóm [40;45).

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Thống kê chiều cao của học sinh lớp 11A ta có bảng số liệu như hình bên. Hỏi lớp có bao nhiêu học sinh có chiều cao từ 168 cm trở lên?

Ⓐ 11. Ⓑ 20. Ⓒ 31. Ⓓ 8.

Chiều cao (cm)	Số học sinh
[150; 156)	8
[156; 162)	12
[162; 168)	11
[168; 174)	8
[174; 180)	3

Câu 2. Cho độ dài của 60 là dương xỉ trưởng thành được cho bằng mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Độ dài của lá (cm)	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)
Số lá	9	17	24	10

Tần số của nhóm [30; 40)

Ⓐ 9. Ⓑ 17. Ⓒ 24. Ⓓ 10.

Câu 3. Cho bảng khảo sát về cân nặng học sinh trong lớp.

Cân nặng (kg)	[45;50)	[50;55)	[55;60)	[60;65)	[65;70)
Số học sinh	2	14	11	10	3

Khoảng cân nặng mà số học sinh chiếm nhiều nhất là

Ⓐ [60; 65). Ⓑ [55; 60). Ⓒ [50; 55). Ⓓ [60; 65).

Câu 4. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian (phút) đi từ nhà đến nơi làm việc của các nhân viên một công ty như sau

Thời gian	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)	[45; 50)
Số nhân viên	6	14	25	37	21	13	9

Mẫu số liệu được chia thành bao nhiêu nhóm?

Ⓐ 6 nhóm. Ⓑ 5 nhóm. Ⓒ 7 nhóm. Ⓓ 8 nhóm.

Câu 5. Cho bảng số liệu ghép nhóm về độ dài của 60 lá dương xỉ trưởng thành như sau

Độ dài (cm)	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)
Số lá dương xỉ	8	18	24	10

Số lá có chiều dài từ 30 cm đến dưới 40 cm là

Ⓐ 18. Ⓑ 34. Ⓒ 10. Ⓓ 24.

Câu 6. Một trường trung học cơ sở chọn 36 học sinh nam của khối 9 để đo chiều cao của

các bạn học sinh đó và thu được mẫu số liệu theo bảng sau (đơn vị là centimet)

160	161	161	162	162	162	163	163	163	164
164	164	164	165	165	165	165	165	166	166
166	166	167	167	168	168	168	168	169	169
170	171	171	172	172	174				

Từ mẫu số liệu không ghép nhóm trên, hãy ghép các số liệu thành 5 nhóm theo các nửa khoảng có độ dài bằng nhau. Các nhóm đó là

Ⓐ $[160;163);[163;165);[165;170);[170;172);[172;175)$.

Ⓑ $[160;165);[165;168);[168;170);[170;172);[172;175)$.

Ⓒ $[160;163);[163;166);[166;169);[169;172);[172;175)$.

Ⓓ $[160;162);[162;166);[166;168);[168;170);[172;175)$.

Câu 7. Một vườn thú ghi lại tuổi thọ (đơn vị năm) của 20 con hổ và thu được mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau

Nhóm	$[14;15)$	$[15;16)$	$[16;17)$	$[17;18)$	$[18;19)$
Tần số	1	2	7	5	5

Giá trị đại diện của nhóm $[16;17)$ là

Ⓐ 16. Ⓑ 17. Ⓒ 16,5. Ⓓ 1.

Câu 8. Tuổi thọ của 35 bóng đèn (đơn vị: giờ)

1120	1150	1121	1170	1136	1150	1140
1130	1165	1142	1133	1157	1115	1132
1162	1179	1109	1131	1147	1168	1152
1134	1116	1177	1145	1164	1111	1125
1144	1160	1155	1103	1127	1166	1101

Từ mẫu số liệu không ghép nhóm trên, ghép các số liệu thành 4 nhóm theo các nửa khoảng có độ dài bằng nhau. Độ dài của mỗi nhóm là

Ⓐ 20. Ⓑ 22. Ⓒ 23. Ⓓ 25.

Câu 9. Nhóm số liệu ghép nhóm thường được cho dưới dạng

Ⓐ $(a;b]$, trong đó a là đầu mút trái, b là đầu mút phải.

Ⓑ $(a;b)$, trong đó a là đầu mút trái, b là đầu mút phải.

Ⓒ $(a;b]$, trong đó a là đầu mút trái, b là đầu mút phải.

Ⓓ $[a;b)$, trong đó a là đầu mút trái, b là đầu mút phải.

Câu 10. Khảo sát tổng thời gian truy cập internet mỗi tối (đơn vị: phút) của một số học sinh thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau

Thời gian (phút)	$[0;30)$	$[30;60)$	$[60;90)$	$[90;120)$	$[120;150)$	$[150;180)$
Số học sinh	11	25	36	15	8	5

Xác định cỡ mẫu của mẫu số liệu trên

Ⓐ 90. Ⓑ 100. Ⓒ 105. Ⓓ 110.

Câu 11. Cho số liệu về chiều cao của 45 học sinh nữ lớp 11 ở một trường THPT (đơn vị: *cm*) như sau

150	160	151	156	154	158	155	157	157
155	153	159	163	161	151	163	164	160
156	161	158	152	153	161	157	159	154
158	157	155	160	164	160	160	161	161
162	159	162	156	159	164	154	150	157

Bạn C quyết định lập bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau

Chiều cao	[150; 152]	[153; 155]	[156; 158]	[159; 161]	[162; 164]
Tần số					

Lúc này tần số của nhóm [159; 161] là bao nhiêu?

Ⓐ 12. Ⓑ 13. Ⓒ 14. Ⓓ 15.

Câu 12. Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng):

Doanh thu	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15)
Số ngày	2	7	7	3	1

Các nhóm có độ dài bằng

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 5.

2 Tự luận.

Bài 1. Trong các mẫu số liệu sau, mẫu nào là mẫu số liệu ghép nhóm? Đọc và giải thích mẫu số liệu ghép nhóm đó.

1. Số tiền mà sinh viên chi cho thanh toán cước điện thoại trong tháng.

Số tiền (nghìn đồng)	[0; 50)	[50; 100)	[100; 150)	[150; 200)	[200; 250)
Số sinh viên	5	12	23	17	3

2. Thống kê nhiệt độ tại một điểm trong 40 ngày, ta có bảng số liệu sau

Nhiệt độ (° C)	[19; 22)	[22; 25)	[25; 28)	[28; 31)
Số ngày	7	15	12	6

Bài 2. Anh Văn ghi lại cự li 30 lần ném lao của mình ở bảng sau (đơn vị: mét):

72,1	72,9	70,2	70,9	72,2	71,5	72,5	69,3	72,3	69,7
72,3	71,5	71,2	69,8	72,3	71,1	69,5	72,2	71,9	73,1
71,6	71,3	72,2	71,8	70,8	72,2	72,2	72,9	72,7	70,7

Tổng hợp lại kết quả ném của anh Văn vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Cự li (m)	[69,2;70)	[70;70,8)	[70,8;71,6)	[71,6;72,4)	[72,4;73,2)
Số lần	?	?	?	?	?

Bài 3. Một cửa hàng đã thống kê số ba lô bán được mỗi ngày trong tháng 9 với kết quả cho như sau:

12 29 12 19 15 21 19 29 28 12 15 25 16 20 29

21 12 24 14 10 12 10 23 27 28 18 16 10 20 21

Hãy chuyển mẫu số liệu trên sang mẫu số liệu ghép nhóm gồm 5 nhóm có độ dài bằng nhau.

Bài 4. Một trường trung học phổ thông chọn 36 học sinh nam của khối 11, đo chiều cao của các bạn học sinh đó và thu được mẫu số liệu sau (đơn vị: centimét):

160 161 161 162 162 162 163 163 163 164 164 164

164 165 165 165 165 165 166 166 166 166 167 167

168 168 168 168 169 169 170 171 171 172 172 174

Lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên có 5 nhóm ứng với 5 nửa khoảng:

$[160;163)$, $[163;169)$, $[166;169)$, $[169;172)$, $[172;175)$.

Bài 5. Mẫu số liệu dưới đây ghi lại tốc độ của 40 ô tô khi đi qua một trạm đo tốc độ (đơn vị: km/h):

48,5 43 50 55 45 60 53 55,5 44 65

51 62,5 41 44,5 57 57 68 49 46,5 53,5

61 49,5 54 62 59 56 47 50 60 61

49,5 52,5 57 47 60 55 45 47,5 48 61,5

Hãy chuyển mẫu số liệu trên sang dạng ghép nhóm với 6 nhóm có độ dài bằng nhau.

Bài 6. Mẫu số liệu sau ghi lại cân nặng của 30 bạn học sinh (đơn vị: kilôgam):

17 40 39 40,5 42 51 41,5 39 41 30

40 42 40,5 39,5 41 40,5 37 39,5 40 41

38,5 39,5 40 41 39 40,5 40 38,5 39,5 41,5

Hãy chuyển mẫu số liệu trên sang dạng ghép nhóm với 8 nhóm có độ dài bằng nhau.

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	A	2	C	3	C	4	C	5	D	6	C	7	C	8	A	9	D	10	B	11	C	12	A

§2 CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

Cho mẫu số liệu ghép nhóm

Nhóm	$[a_1;a_2)$	...	$[a_i;a_{i+1})$	...	$[a_k;a_{k+1})$
Tần số	m_1	...	m_i	...	m_k

Bảng 3.2

1) Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm kí hiệu là $\overline{x}$.

$$\overline{x} = \frac{m_1x_1 + \ldots + m_kx_k}{n}$$

trong đó, $n = m_1 + \ldots + m_k$ là cỡ mẫu và $x_i = \dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}$ (với $i = 1, \ldots, k$) là giá trị đại diện của nhóm $[a_i;a_{i+1})$.

Ý nghĩa: Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho số trung bình của mẫu số liệu gốc, nó cho biết vị trí trung tâm của mẫu số liệu và có thể dùng đại diện cho mẫu số liệu.

2) Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như trong bảng 3.2.

Để tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm, ta làm như sau:

- Xác định nhóm chứa trung vị. Giả sử đó là nhóm thứ p : $[a_p;a_{p+1})$.
- Trung vị là $M_e = a_p + \dfrac{\dfrac{n}{2} - (m_1 + \cdots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p)$.

Trong đó n là cỡ mẫu, m_p là tần số nhóm p.

Với $p = 1$, ta quy ước $m_1 + \cdots + m_{p-1} = 0$.

Ý nghĩa. Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho trung vị của mẫu số liệu gốc, nó chia mẫu số liệu thành hai phần, mỗi phần chứa 50% giá trị.

3) Tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như trong bảng 3.2.

Để tính tứ phân vị thứ nhất Q_1 của mẫu số liệu ghép nhóm, trước hết ta xác định nhóm chứa Q_1, giả sử đó là nhóm thứ $p : [a_p; a_{p+1})$. Khi đó

$$Q_1 = a_p + \frac{\frac{n}{4} - (m_1 + \cdots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p).$$

trong đó, n là cỡ mẫu, m_p là tần số nhóm p.
Với $p = 1$, ta quy ước $m_1 + \cdots + m_{p-1} = 0$.
Để tính tứ phân vị thứ ba Q_3 của mẫu số liệu ghép nhóm, trước hết ta xác định nhóm chứa Q_3, giả sử đó là nhóm thứ $p : [a_p; a_{p+1})$. Khi đó

$$Q_3 = a_p + \frac{\frac{3n}{4} - (m_1 + \cdots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p).$$

Trong đó n là cỡ mẫu, m_p là tần số nhóm p.
Với $p = 1$, ta quy ước $m_1 + \cdots + m_{p-1} = 0$.
Tứ phân vị thứ hai Q_2 chính là trung vị M_e.

Nhận xét: Ta cũng có thể xác định nhóm chứa tứ phân vị thứ r nhờ tính chất: có khoảng $\left(\frac{r \cdot n}{4}\right)$ giá trị nhỏ hơn tứ phân vị này.

Ý nghĩa. Các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho các tứ phân vị của mẫu số liệu gốc, chúng chia mẫu số liệu gồm 4 phần, mỗi phần chứa 25% giá trị.

4) Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như trong bảng 3.2.

Để tìm mốt của mẫu số liệu ghép nhóm, ta thực hiện theo các bước sau:

- Xác định nhóm có tần số lớn nhất (gọi là nhóm chứa mốt), giả sử là nhóm $j : [a_j; a_{j+1})$.
- Mốt được xác định là $M_o = a_j + \frac{m_i - m_{j-1}}{(m_i - m_{j-1}) + (m_i - m_{j+1})} \cdot h.$

trong đó, m_j là tần số nhóm j (quy ước $m_0 = m_{k+1} = 0$) và h là độ dài của nhóm.

Lưu ý. Người ta chỉ định nghĩa mốt cho mẫu ghép nhóm có độ dài các nhóm bằng nhau. Một mẫu có thể không có mốt hoặc có nhiều hơn một mốt.



Ý nghĩa. Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho mốt của mẫu số liệu gốc, nó được dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm

Cho bảng số liệu bên dưới

Nhóm	$[a_1;a_2)$	...	$[a_i;a_{i+1})$	...	$[a_k;a_{k+1})$
Tần số	m_1	...	m_i	...	m_k

Bảng 3.2

Khi đó

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm kí hiệu là $\overline{x}$.

$$\overline{x} = \frac{m_1x_1 + \ldots + m_kx_k}{n}$$

trong đó, $n = m_1 + \ldots + m_k$ là cỡ mẫu và $x_i = \dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}$ (với $i = 1, \ldots, k$) là giá trị đại diện của nhóm $[a_i;a_{i+1})$.

Ví dụ 1

Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả cam ở mỗi lô hàng A và B được cho ở bảng sau:

Cân nặng (g)	[150;155)	[155;160)	[160;165)	[165;170)	[170;175)
Số quả cam ở lô hàng A	2	6	12	4	1
Số quả cam ở lô hàng B	1	3	7	10	4

a) Hãy ước lượng cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng A và lô hàng B.

b) Nếu so sánh theo số trung bình thì cam ở lô hàng nào nặng hơn?

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Một thư viện thống kê số lượng sách được mượn mỗi ngày trong ba tháng ở bảng sau:

Số sách	[16;20]	[21;25]	[26;30]	[31;35]	[36;40]	[41;45]	[46;50]
Số ngày	3	6	15	27	22	14	5

Hãy ước lượng số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm trên. $\approx 34{,}58$

Dạng 2 Số trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

- Gọi n là cỡ mẫu.
- Giả sử nhóm $[u_m; u_{m+1})$ chứa trung vị;
- n_m là tần số của nhóm chứa trung vị;
- $C = n_1 + n_2 + \cdots + n_{m-1}$.

Khi đó

$$M_e = u_m + \frac{\frac{n}{2} - C}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m).$$

Ví dụ 2

Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả bơ ở một lô hàng cho trong bảng sau:

Cân nặng (g)	[150;155)	[155;160)	[160;165)	[165;170)	[170;175)
Số quả bơ	1	7	12	3	2

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên. $161{,}875$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 2

☆

Trong một hội thao, thời gian chạy 200 m của một nhóm các vận động viên được ghi lại ở bảng sau:

Thời gian (giây)	[21; 21,5)	[21,5; 22)	[22; 22,5)	[22,5; 23)	[23; 23,5)
Số vận động viên	5	12	32	45	30

Dựa vào bảng số liệu trên, ban tổ chức muốn chọn ra khoảng 50% số vận động viên chạy nhanh nhất để tiếp tục thi vòng 2. Ban tổ chức nên chọn các vận động viên có thời gian chạy không quá bao nhiêu giây?

....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 3 Tứ phân vị

Tứ phân vị Q_1, Q_2, Q_3 được xác định như sau

$$Q_1 = a_p + \frac{\frac{n}{4} - (m_1 + \ldots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p)\,;$$

$$Q_3 = a_p + \frac{\frac{3n}{4} - (m_1 + \ldots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p)\,;$$

$$Q_2 = M_e = a_p + \frac{\frac{n}{2} - (m_1 + \ldots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p)\,.$$

Ví dụ 3

Tìm tứ phân vị thứ nhất Q_1 và tứ phân vị thứ ba Q_3 của mẫu số liệu ghép nhóm cho trong bảng sau

Thời gian (phút)	[9,5; 12,5)	[12,5; 15,5)	[15,5; 18,5)	[18,5; 21,5)	[21,5; 24,5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

....
....

Ví dụ 4

Thời gian luyện tập trong một ngày (tính theo giờ) của một số vận động viên được ghi lại ở bảng sau:

Thời gian luyện tập (giờ)	[0;2)	[2;4)	[4;6)	[6;8)	[8;10)
Số vận động viên	3	8	12	12	4

a) Hãy xác định các tứ phân vị của mẫu số liệu đã cho.

b) Huấn luyện viên muốn xác định nhóm gồm 25% các vận động viên có số giờ luyện tập cao nhất. Hỏi huấn luyện viên nên chọn các vận động viên có thời gian luyện tập từ bao nhiêu giờ trở lên vào nhóm này?

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3 ☆

Giáo viên chủ nhiệm chia thời gian sử dụng Internet trong một ngày của 40 học sinh thành năm nhóm (đơn vị: phút) và lập bảng tần số ghép nhóm như sau. Tìm tứ phân vị của mẫu số liệu đó.

$Q_1 \approx 78,46; Q_2 \approx 124,62; Q_3 \approx 170,77$

Nhóm (phút)	[0;60)	[60;120)	[120;180)	[180;240)	[240;300)
Số học sinh	6	13	13	6	2

Ví dụ 5

Một phòng khám thống kê số bệnh nhân đến khám bệnh mỗi ngày trong tháng 4 năm 2022 ở bảng sau:

Số bệnh nhân	[1;10]	[11;20]	[21;30]	[31;40]	[41;50]
Số ngày	7	8	7	6	2

a) Hãy ước lượng các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

$Q_1 =\approx 11{,}125, Q_2 \approx 20{,}5, Q_3 \approx 31{,}33$

b) Quản lý phòng khám cho rằng có khoảng 25% số ngày khám có nhiều hơn 35 bệnh nhân đến khám. Nhận định trên có hợp lý không?

Dạng 4 Mốt

Để tìm mốt của mẫu số liệu ghép nhóm, ta thực hiện theo các bước sau:

- Bước 1. Xác định nhóm có tần số lớn nhất (gọi là nhóm chứa mốt), giả sử là nhóm j: $[a_j; a_{j+1})$.
- Bước 2. Mốt được xác định là

$$M_0 = a_j + \frac{m_j - m_{j-1}}{(m_j - m_{j-1}) + (m_j - m_{j+1})} \cdot h$$

trong đó m_j là tần số của nhóm j (quy ước $m_0 = m_{k+1} = 0$) và h là độ dài của nhóm.

Ví dụ 6

Bảng số liệu ghép nhóm sau cho biết chiều cao (cm) của 50 học sinh lớp 11A.

Khoảng chiều cao (cm)	[145;150)	[150;155)	[155;160)	[160;165)	[165;170)
Só học sinh	7	14	10	10	9

Tính mốt của mẫu số liệu ghép nhóm này. Có thể kết luận gì từ giá trị tính được?

$\approx 153{,}18$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4

Một công ty xây dựng khảo sát khách hàng xem họ có nhu cầu mua nhà ở mức giá nào. Kết quả khảo sát được ghi lại ở bảng sau

Mức giá (triệu đồng/m^2)	[10; 14)	[14; 18)	[18; 22)	[22; 26)	[26; 30)
Số khách hàng	54	78	120	45	12

a) Tìm mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên. ≈ 19,4

b) Công ty nên xây nhà ở mức giá nào để nhiều người có nhu cầu mua nhấdong

.....

.....

.....

.....

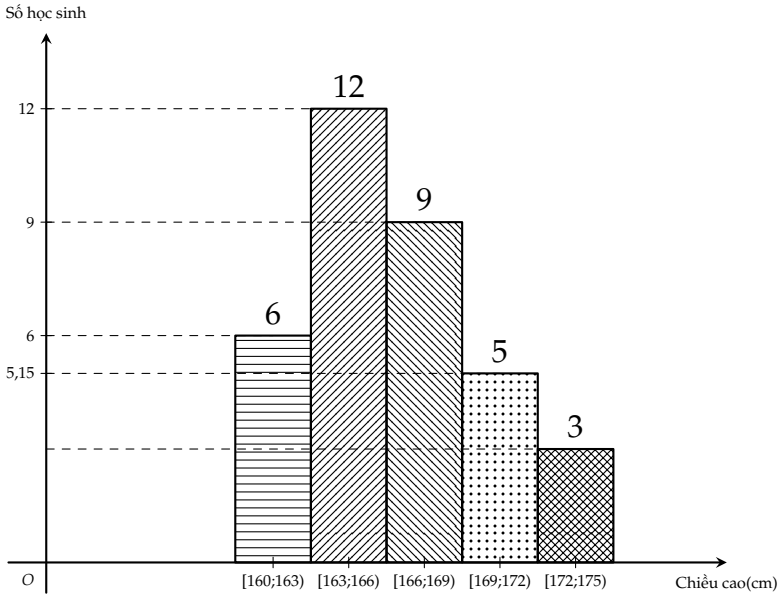
.....

.....

Bài 5

Kết quả điều tra chiều cao của học sinh (đơn vị: cm) trong trường THPT được biểu diễn ở biểu đồ dưới đây.

Chiều cao của 35 học sinh trong trường THPT



Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu? (Đáp án làm tròn đến hàng đơn vị). 164

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Khảo sát thời gian xem ti vi trong một ngày của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau

Thời gian (phút)	[0;20)	[20;40)	[40;60)	[60;80)	[80;100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu này là

Ⓐ [80;100). Ⓑ [20;40). Ⓒ [40;60). Ⓓ [60;80).

Câu 2. Khảo sát thời gian xem ti vi trong một ngày của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau

Thời gian (phút)	[0;20)	[20;40)	[40;60)	[60;80)	[80;100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Nhóm chứa trung vị là

Ⓐ [80;100). Ⓑ [20;40). Ⓒ [40;60). Ⓓ [60;80).

Câu 3. Khảo sát thời gian xem ti vi trong một ngày của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau

Thời gian (phút)	[0;20)	[20;40)	[40;60)	[60;80)	[80;100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là

Ⓐ [80;100). Ⓑ [20;40). Ⓒ [40;60). Ⓓ [60;80).

Câu 4. Tìm hiểu thời gian hoàn thành một bài tập (đơn vị: phút) của một số học sinh thu được kết quả sau

Thời gian (phút)	[0;4)	[4;8)	[8;12)	[12;16)	[16;20)
Số học sinh	2	4	7	4	3

Thời gian trung bình (phút) để hoàn thành bài tập của các em học sinh là

Ⓐ 7. Ⓑ 11,3. Ⓒ 10,4. Ⓓ 12,5.

Câu 5. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của 25 cây dừa giống như sau

Chiều cao (cm)	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40)	[40;50)
Số cây	4	6	7	5	3

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm này là

Ⓐ $M_o = \frac{70}{3}$. Ⓑ $M_o = \frac{50}{3}$. Ⓒ $M_o = \frac{70}{2}$. Ⓓ $M_o = \frac{80}{3}$.

Câu 6. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của 25 cây dừa giống như sau

Chiều cao (cm)	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40)	[40;50)
Số cây	4	6	7	5	3

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm này là

Ⓐ $M_e = \frac{175}{7}$. Ⓑ $M_e = \frac{165}{5}$. Ⓒ $M_e = \frac{165}{7}$. Ⓓ $M_e = \frac{165}{3}$.

Câu 7. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của 25 cây dừa giống như sau

Chiều cao (cm)	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40)	[40;50)
Số cây	4	6	7	5	3

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm này là

Ⓐ $Q_1 = 13{,}5$. Ⓑ $Q_1 = 13{,}9$. Ⓒ $Q_1 = 15{,}75$. Ⓓ $Q_1 = 13{,}75$.

Câu 8. Tìm hiểu thời gian hoàn thành một bài tập (đơn vị: phút) của một số học sinh thu được kết quả sau

Thời gian (phút)	[0;4)	[4;8)	[8;12)	[12;16)	[16;20)
Số học sinh	2	4	7	4	3

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm này là

Ⓐ $Q_3 = 13$. Ⓑ $Q_3 = 14$. Ⓒ $Q_3 = 15$. Ⓓ $Q_3 = 12$.

Câu 9. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thống kê thời gian hoàn thành (phút) một bài kiểm tra trực tuyến của 100 học sinh, ta có bảng số liệu sau

Thời gian (phút)	[33;35)	[35;37)	[37;39)	[39;41)	[41;43)	[43;45)
Số học sinh	4	13	38	27	14	4

Thời gian trung bình để 100 học sinh hoàn thành bài kiểm tra là

Ⓐ 38,92 phút. Ⓑ 38,29 phút. Ⓒ 39,28 phút. Ⓓ 39,82 phút.

Câu 10. Cân nặng của các em học sinh lớp 11*A* được thống kê trong bảng sau

Cân nặng	[45;49)	[49;53)	[53;57)	[57;61)	[61;65)
Số học sinh	4	5	7	7	5

Cỡ mẫu của bảng thống kê là

Ⓐ 29. Ⓑ 27. Ⓒ 16. Ⓓ 28.

Câu 11. Lợi nhuận bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên trong tháng 8 tại một cửa hàng được ghi lại trong bảng sau (đơn vị: triệu đồng)

Doanh thu	[7;10)	[10;13)	[13;16)	[16;19)	[19;22)
Số học sinh	3	4	6	5	2

Trung vị của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

Ⓐ [10;13). Ⓑ [13;16). Ⓒ [16;19). Ⓓ [19;22).

Câu 12. Lợi nhuận bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên trong tháng 8 tại một cửa hàng được ghi lại trong bảng sau (đơn vị: triệu đồng)

Doanh thu	[7;10)	[10;13)	[13;16)	[16;19)	[19;22)
Số học sinh	3	4	6	5	2

Mốt của mẫu số liệu thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

Ⓐ [10;13). Ⓑ [13;16). Ⓒ [16;19). Ⓓ [19;22).

Câu 13. Trong một hội thao, thời gian chạy 200m của một nhóm các vận động viên được ghi lại ở bảng sau

Thời gian (giây)	[21;21,5)	[21,5;22)	[22;22,5)	[22,5;23)	[23;23,5)
Số vận động viên	10	17	35	44	29

Tứ phân vị của bảng số liệu trên là

Ⓐ $Q_1 = 22{,}1; Q_2 = 22{,}56; Q_3 = 22{,}95.$ Ⓑ $Q_1 = 22{,}17; Q_2 = 22{,}56; Q_3 = 23{,}06.$

Ⓒ $Q_1 = 22{,}1; Q_2 = 22{,}62; Q_3 = 22{,}97.$ Ⓓ $Q_1 = 22{,}3; Q_2 = 22{,}56; Q_3 = 23{,}34.$

Câu 14. Khảo sát thời gian tập thể dục của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian (Phút)	[0;20)	[20;40)	[40;60)	[60;80)	[80;100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu trên là

Ⓐ [40;60). Ⓑ [20;40). Ⓒ [60;80). Ⓓ [80;100).

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Cho mẫu số liệu điểm môn Toán của một nhóm học sinh như sau

Điểm	[6;7)	[7;8)	[8;9)	[9;10)
Số học sinh	8	7	10	5

a) Mẫu số liệu đã cho là mẫu số liệu ghép nhóm.
b) Cỡ mẫu của số liệu là 30.
c) Điểm trung bình của các học sinh là 7,9.
d) Mốt của mẫu số liệu là 10.

Câu 2. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về lương của nhân viên trong một công ty như sau

Lương (triệu đồng)	[9;12)	[12;15)	[15;18)	[18;21)	[21;24)
Số nhân viên	6	12	4	2	1

a) Giá trị đại diện của nhóm [9;12) là 10,5.
b) Trung bình lương nhân viên là 16,5 triệu đồng.
c) Nhóm chứa trung vị là [15;18).
d) Tứ phân vị thứ ba là 15,56.

Câu 3. Điều tra về chiều cao của học sinh lớp 10, ta có kết quả sau

Chiều cao (cm)	[150; 152)	[152; 154)	[154; 156)	[156; 158)	[158; 160)	[160; 162)
Số học sinh	5	18	40	26	8	3

a) Tổng số học sinh điều tra là 100.
b) Chiều cao trung bình của các em học sinh là 155,46.
c) Số trung vị của mẫu số liệu là 156,35.
d) Tứ phân vị thứ nhất là 154,1.

Câu 4. Số người đến thư viện đọc sách trong 30 ngày của tháng 4 ở một thư viện được thống kê trong bảng dưới đây

Lượng người	[24; 30)	[30; 36)	[36; 42)	[42; 48)	[48; 54)
Tần số	3	7	10	6	4

a) Độ dài của mỗi nhóm là 5.
b) Giá trị đại diện của nhóm [30; 36) là 33.
c) Số người đến đọc trung bình mỗi ngày (làm tròn đến hàng đơn vị) là 40 người.
d) Mốt của mẫu số liệu (làm tròn đến hàng đơn vị) là 36.

Câu 5. Phỏng vấn một số học sinh khối 11 về thời gian (giờ) ngủ của một buổi tối, thu được bảng số liệu sau:

Thời gian	Số học sinh nam	Số học sinh nữ
[4; 5)	8	4
[5; 6)	10	6
[6; 7)	13	12
[7; 8)	15	18
[8; 9)	7	8

a) Độ dài của nhóm bằng 1.
b) Thời gian ngủ trung bình của các bạn học sinh nam nhiều hơn các bạn học sinh nữ.
c) Phần lớn học sinh được khảo sát trong khối 11 ngủ nhiều hơn 6,5 giờ.
d) 75% học sinh được khảo sát trong khối 11 ngủ ít nhất 5,5 giờ.

Câu 6. Số lượng người đi xem bộ phim Lật Mặt 7 của Lý Hải theo độ tuổi trong một rạp chiếu phim (sau những ngày đầu được công chiếu) được ghi lại theo bảng số liệu sau:

Độ tuổi	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)
Số người	19	28	16	7	4

a) Cỡ mẫu của mẫu số liệu là 74.
b) Độ tuổi được dự báo là ít xem phim Lật Mặt 7 nhất là thuộc nhóm [50; 60).
c) Trung vị của mẫu số liệu là 26,42 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).
d) Độ tuổi được dự báo là thích xem phim Lật Mặt 7 nhiều nhất là 29 tuổi.

Câu 7. Khảo sát thời gian tập thể dục của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau

Thời gian (phút)	[0;20)	[20;40)	[40;60)	[60;80)	[80;100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

a) Nhóm chứa trung vị của mẫu số liệu trên là [40;60).
b) Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu bằng 70.
c) Thời gian trung bình học sinh tập thể dục thuộc khoảng (50;53).
d) Mốt của mẫu số liệu trên là 52.

Câu 8. Dưới đây là hai bảng thống kê doanh số bán hàng của 20 nhân viên tại một cửa hàng điện thoại trong tháng 9 với hai nhãn hàng là Oppo và Samsung.
Bảng thống kê doanh số diện thoại bán được của Oppo trong tháng 9

Doanh số	[18;20]	[21;23]	[24;26]	[27;29]	[30;32]
Số nhân viên	2	5	8	3	2

Bảng thống kê doanh số diện thoại bán được của Samsung trong tháng 9

Doanh số	[15;19]	[20;24]	[25;29]	[30;34]	[35;39]
Số nhân viên	5	8	5	1	1

Chủ cửa hàng điện thoại muốn dành phần thưởng khích lệ cho các nhân viên bán được doanh số cao. Điều kiện được nhận quà là phải nằm trong Top 5 nhân viên đạt doanh số điện thoại Samsung cao nhất và đồng thời phải nằm trong Top 10 nhân viên đạt doanh số điện thoại Oppo cao nhất.
a) Đối với 20 nhân viên bán hàng được khảo sát thì bảng thống kê cho thấy điện thoại của nhãn hàng Oppo dễ bán hơn so với điện thoại của hãng Samsung. (so sánh dựa trên giá trị trung bình của 2 bảng thống kê).
b) Đối với điện thoại của hãng Samsung, khả năng một nhân viên bán được 26 chiếc là cao nhất.
c) Anh An nghĩ mình sẽ nhận được thưởng vì anh An bán được 25 chiếc điện thoại Oppo và 26 chiếc điện thoại Samsung.
d) Chị Bình nghĩ mình cũng sẽ nhận được thưởng dù chị chỉ bán được 24 chiếc điện thoại Oppo nhưng chị bán được tới 27 chiếc điện thoại Samsung.

3 Tự luận.

Bài 1. Mẫu số liệu dưới đây ghi lại tốc độ của 40 ô tô khi đi qua một trạm đo tốc độ (đơn vị: km/h):

48,5 43 50 55 45 60 53 55,5 44 65
51 62,5 41 44,5 57 57 68 49 46,5 53,5
61 49,5 54 62 59 56 47 50 60 61
49,5 52,5 57 47 60 55 45 47,5 48 61,5

a) Lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên có sáu nhóm ứng với sáu nửa khoảng:

$$[40;45),[45;50),[50;55),[55;60),[60;65),[65;70).$$

b) Xác định số trung bình cộng, trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

c) Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?

Bài 2. Bảng bên cho ta bảng tần số ghép nhóm số liệu thống kê chiều cao của 40 mẫu cây ở một vườn thực vật (đơn vị: centimét).

a) Xác định số trung bình cộng, trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?

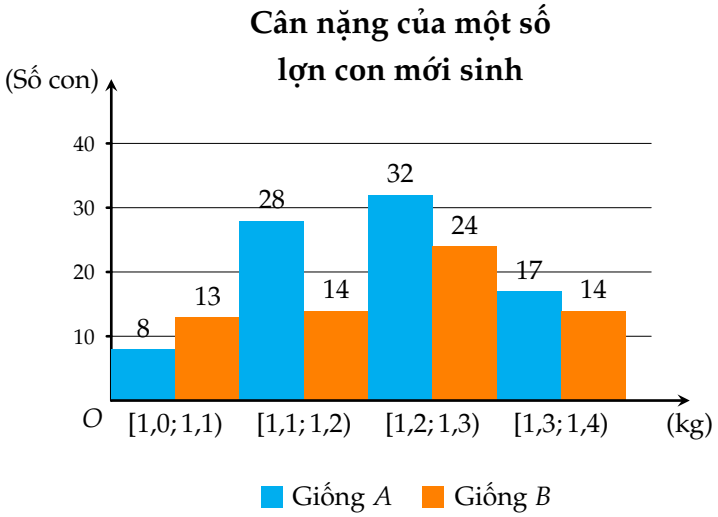
Nhóm	Tần số
[30; 40)	4
[40; 50)	10
[50; 60)	14
[60; 70)	6
[70; 80)	4
[80; 90)	2
	$n = 40$

Bài 3. Kiểm tra điện lượng của một số viên pin tiểu do một hãng sản xuất thu được kết quả như sau:

Điện lượng (nghìn mAh)	[0,9; 0,95)	[0,95; 1,0)	[1,0; 1,05)	[1,05; 1,1)	[1,1; 1,15)
Số viên pin	10	20	35	15	5

Hãy ước lượng số trung bình, mốt và tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Bài 4. Cân nặng của một số lợn con mới sinh thuộc hai giống A và B được cho ở biểu đồ dưới đây (đơn vị: kg).



a) Hãy so sánh cân nặng của lợn con mới sinh giống A và giống B theo số trung bình và trung vị.

b) Hãy ước lượng tứ phân vị thứ nhất và thứ ba của cân nặng lợn con mới sinh giống A và của cân nặng lợn con mới sinh giống B.

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	C	2	C	3	B	4	C	5	A	6	C	7	D	8	B	9	A	10	D
11	C	12	D	13	A	14	C												

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a	Đ	b	Đ	c	Đ	d	S	Câu 2.	a	Đ	b	S	c	S	d	Đ
Câu 3.	a	Đ	b	Đ	c	S	d	Đ	Câu 4.	a	S	b	Đ	c	S	d	Đ
Câu 5.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	S	Câu 6.	a	Đ	b	Đ	c	S	d	Đ
Câu 7.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	Đ	Câu 8.	a	Đ	b	S	c	S	d	S

§3 ÔN TẬP CHƯƠNG 3

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Khảo sát thời gian chạy bộ trong một ngày của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là

Ⓐ [60; 80). Ⓑ [0; 20). Ⓒ [20; 40). Ⓓ [40; 60).

Câu 2. Các bảng thống kê sau cho biết chiều cao (đơn vị cm) của 30 bạn học sinh:

Chiều cao (cm)	Dưới 150	[150; 160)	[160; 170)	[170; 180)	[180; 190]
Số học sinh	4	6	15	4	1

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là

Ⓐ 164,5. Ⓑ 15. Ⓒ 165. Ⓓ 160.

Câu 3. Thời gian truy cập Internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[9,5; 12,5)	[12,5; 15,5)	[15,5; 18,5)	[18,5; 21,5)	[21,5; 24,5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

Tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm này.

Ⓐ 18,1. Ⓑ 18,5. Ⓒ 17,2. Ⓓ 15,6.

Câu 4. Điều tra về số tiền mua đồ dùng học tập trong một tháng của 40 học sinh, ta có mẫu số liệu sau (đơn vị: nghìn đồng)

Giá trị (x)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)
Tần số (n)	2	5	15	8	9	1

Số trung bình của mẫu số liệu là

Ⓐ 28. Ⓑ 23. Ⓒ 32. Ⓓ 25.

Câu 5. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thống kê nhiệt độ tại một địa điểm trong 30 ngày, ta có bảng số liệu sau

Nhiệt độ (°C)	[18; 21)	[21; 24)	[24; 27)	[27; 30)
Số ngày	6	12	9	3

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là

Ⓐ [27; 30). Ⓑ [21; 24). Ⓒ [24; 27). Ⓓ [18; 21).

Câu 6. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thống kê huyết áp của 20 người, ta có bảng số liệu sau:

Huyết áp (mmHg)	[70;80)	[80;90)	[90;100)	[100;110)	[110;120)	[120;130)
Số người	4	2	3	4	5	2

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm này là

Ⓐ 74. Ⓑ 85. Ⓒ 96. Ⓓ 101.

Câu 7. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của 25 cây dừa giống như sau:

Chiều cao (cm)	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40)	[40;50)
Số cây	4	6	7	5	3

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm này là

Ⓐ $M_e = \frac{175}{7}$. Ⓑ $M_e = \frac{175}{6}$. Ⓒ $M_e = \frac{165}{7}$. Ⓓ $M_e = \frac{165}{3}$.

Câu 8. Khi đo mắt cho học sinh khối 11 ở một trường THPT Hưng Yên nhân viên y tế ghi nhận lại ở bảng sau

Thời gian	[0,25;0,75)	[0,75;1,25)	[1,25;1,75)	[1,75;2,25)	[2,25;2,75)
Số lần	25	32	14	12	4

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là (làm tròn đến hàng phần trăm)

Ⓐ $M_o = 0{,}84$. Ⓑ $M_o = 0{,}86$. Ⓒ $M_o = 0{,}78$. Ⓓ $M_o = 0{,}89$.

Câu 9. Khảo sát thời gian tập thể dục của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau

Thời gian (phút)	[0;20)	[20;40)	[40;60)	[60;80)	[80;100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Giá trị đại diện của nhóm [20;40) là

Ⓐ 10. Ⓑ 40. Ⓒ 20. Ⓓ 30.

Câu 10. Thống kê điểm trung bình môn Toán của một số học sinh lớp 11 được cho ở bảng sau:

Điểm	[6,5;7)	[7;7,5)	[7,5;8)	[8;8,5)	[8,5;9)	[9;9,5)
Số học sinh	9	11	17	26	15	8

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu trên *(làm tròn đến hàng phần mười)* bằng

Ⓐ 7,5. Ⓑ 7,6. Ⓒ 7,7. Ⓓ 7,3.

Câu 11. Thống kê số người đi xem một bộ phim mới (theo độ tuổi) trong một rạp chiếu phim sau 1 giờ đầu công chiếu được ghi lại ở bảng sau

Độ tuổi	[10;20)	[20;30)	[30;40)	[40;50)	[50;60)
Số người	6	12	16	7	2

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là

Ⓐ 25,2. Ⓑ 40,96. Ⓒ 23,96. Ⓓ 21,5.

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Thống kê điểm trung bình môn Toán của một số hoc sinh lớp 11 được cho ở bảng sau

Khoảng điểm	[6,5;7)	[7;7,5)	[7,5;8)	[8;8,5)	[8,5;9)	[9;9,5)	[9,5;10)
Tần số	8	10	16	24	13	7	4

a) Điểm trung bình môn Toán là 8,12.
b) Tứ phân vị thứ nhất bằng 8,15.
c) Tứ phân vị thứ hai bằng 7,58.
d) Mốt của mẫu số liệu bằng 8,21.

Câu 2. Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một của hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng)

Doanh thu	[5;7)	[7;9)	[9;11)	[11;13)	[13;15)
Số ngày	2	7	7	3	1

a) Số ngày doanh thu bán hàng ít hơn 9 triệu là 7 ngày.
b) Số ngày doanh thu vượt quá 11 triệu là 4 ngày.
c) Doanh thu trung bình trong 20 ngày bán hàng là 9,4 triệu.
d) Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu (làm tròn đến hàng phần trăm) là 7,87.

Câu 3. Kiểm tra điện lượng của một số viên pin do một hãng sản xuất thu được kết quả sau:

Điện lượng (nghìn mAh)	[0,9;0,95)	[0,95;1,0)	[1,0;1,05)	[1,05;1,1)	[1,1;1,15)
Số pin	10	20	35	15	5

a) Số trung bình của dãy số liệu là 1,02 (làm tròn đến hàng phần trăm).
b) Nhóm chứa mốt của dãy số liệu là [1,05;1,1).
c) Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu nhóm là $Q_1 = 0{,}98$ (làm tròn đến hàng phần trăm).
d) Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu nhóm là $Q_3 = 1{,}148$.

Câu 4. Một công ty cung cấp nước sạch thống kê lượng nước các hộ gia đình trong một khu vực tiêu thụ trong một tháng ở bảng sau

Lượng nước tiêu thụ (m^3)	[3;6)	[6;9)	[9;12)	[12;15)	[15;18)
Số hộ gia đình	24	57	42	29	8

a) Cỡ mẫu của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là 160.
b) Mốt của mẫu số liệu là $M_o = 8{,}0625$.
c) Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là 9,375.
d) Công ty muốn gửi một thông báo khuyến nghị tiết kiệm nước đến 25% các hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ cao nhất. Khi đó công ty nên gửi thông báo tiết kiệm nước đến các hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ từ 14,79m^3 nước trở lên? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 5. Người ta đo đường kính của 61 cây gỗ được trồng sau 12 năm (đơn vị: cm), thu được bảng số liệu sau:

Đường kính	[20;25)	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)
Số cây	4	12	26	13	6

a) Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu là nhóm [30;35).
b) Đường kính trung bình của cây xấp xỉ 32,8 cm (làm tròn đến hàng phần mười).
c) Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu trên xấp xỉ 29,6 cm (làm tròn đến hàng phần mười).
d) Khoảng cách giữa tứ phân vị thứ nhất và tứ phân vị thứ ba không vượt quá 6,9 cm.

Câu 6. Thời gian học bài mỗi ngày (phút) của 80 học sinh lớp 11 được thống kê trong bảng sau

Nhóm	[40;60)	[60;80)	[80;100)	[100;120)	[120;140)
Số học sinh	5	15	35	20	5

a) Số học sinh học bài mỗi ngày từ 80 phút đến dưới 120 phút là 55 học sinh.
b) Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng 91,25 phút.
c) Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên nằm trong khoảng (88;89).
d) Thống kê cho thấy có dưới 75% số học sinh có thời gian học bài nhiều hơn 75 phút mỗi ngày.

3 Tự luận.

Bài 1. Cơ cấu dân số Việt Nam năm 2020 theo độ tuổi được cho trong bảng sau

Độ tuổi	Dưới 5 tuổi	5 – 14	15 – 24	25 – 64	Trên 65
Số người (triệu)	7,89	14,68	13,32	53,78	7,66

Chọn 80 là giá trị đại diện cho nhóm trên 65 tuổi. Tính tuổi trung bình của người Việt Nam năm 2020. $\approx 35{,}19$

Bài 2. Người ta ghi lại tuổi thọ của một số con ong cho kết quả như sau

Tuổi thọ (ngày)	[0;20)	[20;40)	[40;60)	[60;80)	[80;100)
Số lượng	5	12	23	31	29

Tìm mốt của mẫu số liệu. Giải thích ý nghĩa của giá trị nhận được. $M_O = 76$

Bài 3. Một bảng xếp hạng đã tính điểm chuẩn hoá cho chỉ số nghiên cứu của một số trường đại học ở Việt Nam và thu được kết quả như sau

Điểm	Dưới 20	[20;30)	[30;40)	[40;60)	[60;80)	[80;100)
Số lượng	4	19	6	2	3	1

Xác định điểm ngưỡng để đưa ra danh sách 25% trường đại học có chỉ số nghiên cứu tốt nhất Việt Nam. $\approx 35{,}42$

Bài 4. Thống kê điểm trung bình môn Toán của một số học sinh lớp 11 được cho ở bảng sau:

Khoảng điểm	[6,5; 7)	[7; 7,5)	[7,5; 8)	[8; 8,5)	[8,5; 9)	[9; 9,5)	[9,5; 10)
Tần số	8	10	16	24	13	7	4

Hãy ước lượng số trung bình, tứ phân vị và mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

$\bar{x} \approx 8{,}12; Q_1 \approx 7{,}58; Q_2 = 8{,}15; Q_3 \approx 8{,}63; M_0 \approx 8{,}21$

Bài 5. Để kiểm tra thời gian sử dụng pin của một chiếc điện thoại mới, chị An thống kê thời gian sử dụng điện thoại của mình từ lúc sạc đầy pin cho đến khi hết pin ở bảng sau:

Thời gian sử dụng (giờ)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13, 15)	[15; 17)
Số lần	2	5	7	6	3

a) Hãy ước lượng thời gian sử dụng trung bình từ lúc chị An sạc đầy pin điện thoại cho tới khi hết pin. $\bar{x} \approx 12{,}26.$

b) Chị An cho rằng có khoảng 25% số lần sạc điện thoại chỉ dùng được 10 giờ. Nhận định của chị An có hợp lí không? $Q_1 = 10{,}5$. Nhận định hợp lí

Bài 6. Tổng số lượng mưa trong tháng 8 đo được tại một trạm quan trắc đặt tại Vũng Tàu từ năm 2002 đến năm 2020 được ghi lại như dưới đây (đơn vị: mm)

121,8 158,3 334,9 200,9 165,6 161,5 194,3 220,7 189,8 243,2

165,9 165,9 134 173 169, 189, 254 168 255

a) Xác định số trung bình, tứ phân vị và mốt của mẫu số liệu trên.

b) Hoàn thiện bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Tổng lượng mưa trong tháng 8 (mm)	[120; 175)	[175; 230)	[230; 285)	[285; 340)
Số năm	?	?	?	?

c) Hãy ước lượng số trung bình, tứ phân vị và mốt của mẫu số liệu ở bảng tần số ghép nhóm trên.

Bài 7. Mẫu số liệu dưới đây ghi lại độ dài quãng đường di chuyển trong một tuần (đơn vị: kilômét) của 40 chiếc ô tô:

100	105	115	116	130	135	138	132	135	120
125	128	120	124	140	140	146	145	142	142
145	148	150	150	159	155	151	156	155	151
154	152	153	160	162	175	176	165	188	198

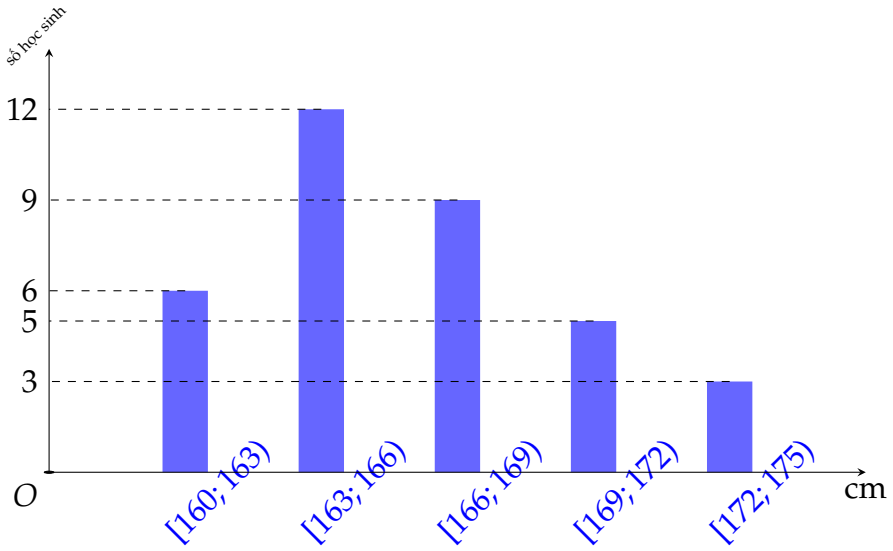
a) Lập bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy với năm nhóm ứng với năm nửa khoảng: [100; 120), [120; 140), [140; 160), [160; 180), [180; 200).

b) Xác định số trung bình cộng, trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

$\bar{x} = 143{,}25; Q_1 = 132; Q_2 \approx 146{,}32; Q_3 \approx 156{,}84$

c) Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu? $M_o \approx 146{,}92$

Bài 8. Kết quả điều tra chiều cao của học sinh (đơn vị: cm) trong trường THPT được biểu diễn ở biểu đồ dưới đây.



Chiều cao của 35 học sinh trong trường THPT

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)? 169

Bài 9. Một công ty bất động sản khảo sát khách hàng xem họ có nhu cầu mua căn hộ ở mức giá nào. Kết qua khảo sát được ghi lại ở bảng sau

Mức giá (triệu đồng/m^2)	[28;32)	[32;36)	[36;40)	[40;44)	[44;48)
Số khách hàng	40	78	120	51	11

Công ty nên xây nhà ở mức giá nào để có nhiều người có nhu cầu mua nhất? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười của triệu đồng). 37,5

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	C	2	A	3	A	4	D	5	B	6	B	7	C	8	D	9	D	10	A		
11	C																				

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a Đ b S c S d Đ	Câu 2.	a S b Đ c Đ d S
Câu 3.	a Đ b S c Đ d S	Câu 4.	a Đ b Đ c Đ d S
Câu 5.	a Đ b S c S d Đ	Câu 6.	a Đ b Đ c S d S

Chương IV

QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

§1 ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

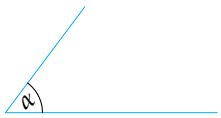
I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Các khái niệm mở đầu

☼ **Mặt phẳng:** Để biểu diễn mặt phẳng, người ta dùng hình bình hành hay một miền góc



Kí hiệu (P) hoặc mp(P)

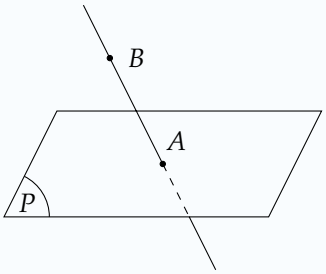


Kí hiệu (α) hoặc mp(α)

☼ **Điểm thuộc mặt phẳng:** Cho điểm A, B và mặt phẳng (α).

① Khi A thuộc mặt phẳng (α), ta kí hiệu $A \in (\alpha)$.

② Khi B không thuộc mặt phẳng (α), ta kí hiệu $B \notin (\alpha)$.



Dấu hiệu nhận biết $A \in (\alpha)$ là điểm A thuộc một đường thẳng nằm trong (α)

☼ **Biểu diễn hình không gian lên một mặt phẳng:**

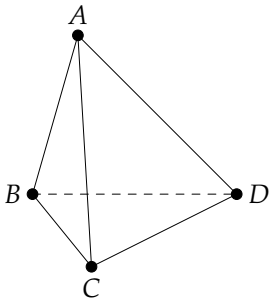
① Dùng nét vẽ liền để biểu diễn cho những đường trông thấy và dùng nét đứt đoạn (- - - -) để biểu diễn cho những đường bị che khuất.

② Quan hệ thuộc, song song được giữ nguyên, nghĩa là

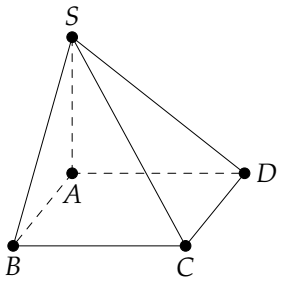
☆ Nếu hình thực tế điểm A thuộc đường thẳng Δ thì hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ đó.

☆ Nếu hình thực tế hai đường thẳng song song thì hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ đó.

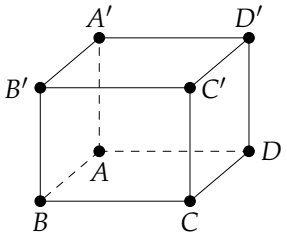
Hình biểu diễn của các mô hình không gian thường gặp:



Hình tứ diện



Hình chóp tứ giác đáy hình bình hành



Hình lập phương, hộp chữ nhật

2) CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN

Xét trong không gian, ta thừa nhận các tính chất sau:

- **Tính chất 1:** Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.
- **Tính chất 2:** Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- **Tính chất 3:** Tồn tại 4 điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

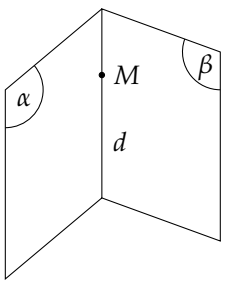
> Một mặt phẳng hoàn toàn xác định nếu biết ba điểm không thẳng hàng thuộc mặt phẳng đó. Ta kí hiệu mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C là (ABC). Nếu có nhiều điểm cùng thuộc một mặt phẳng thì ta nói những điểm đó đồng phẳng. Nếu *không* có mặt phẳng nào chứa các điểm đó thì ta nói những điểm đó *không đồng phẳng*.

- **Tính chất 4:** Nếu một đường thẳng có hai điểm thuộc một mặt phẳng thì tất cả các điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

> Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α).
> ① Khi d nằm trong (α), ta kí hiệu $d \subset (\alpha)$ hoặc $(P) \supset d$.
> ② Khi d không nằm trong (α), ta kí hiệu $d \not\subset (\alpha)$.
>
> Dấu hiệu nhận biết $d \subset (\alpha)$ là trên d có hai điểm phân biệt thuộc (α)

- **Tính chất 5:**

Nếu hai mặt phẳng phân biệt có điểm chung thì các điểm chung của hai mặt phẳng là một đường thẳng đi qua điểm chung đó.



> Đường thẳng chung d (nếu có) của hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng đó và kí hiệu là $d = (P) \cap (Q)$.

- **Tính chất 6:** Trên mỗi mặt phẳng các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

3) CÁCH XÁC ĐỊNH MỘT MẶT PHẲNG

- Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng của mặt phẳng, kí hiệu (ABC).
- Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua một đường thẳng d và một điểm A không thuộc d, kí hiệu (A, d).
- Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua hai đường thẳng a, b cắt nhau, kí hiệu (a, b).

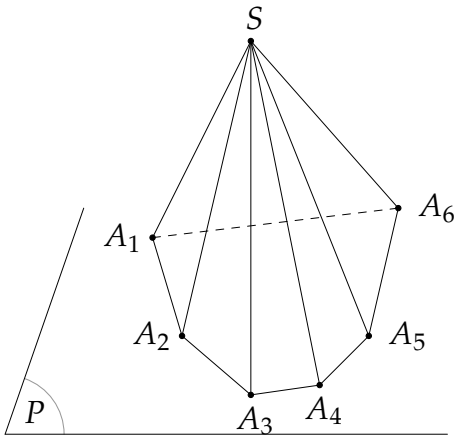
4) HÌNH CHÓP VÀ HÌNH TỨ DIỆN

Hình chóp:

Định nghĩa: Cho đa giác $A_1A_2\dots A_n$ và cho điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác đó. Nối S với các đỉnh $A_1, A_2, \dots, A_n$ ta được n miền đa giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_{n-1}A_n$. Hình gồm n tam giác đó và đa giác $A_1A_2A_3\dots A_n$ được gọi là hình chóp $S.A_1A_2A_3\dots A_n$.

Các tên gọi:

- Điểm S gọi là đỉnh của hình chóp.
- Đa giác $A_1A_2\dots A_n$ gọi là mặt đáy của hình chóp.
- Các đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ gọi là các cạnh đáy của hình chóp.
- Các đoạn thẳng $SA_1, SA_2, \dots, SA_n$ gọi là các cạnh bên của hình chóp.
- Các miền tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_{n-1}A_n$ gọi là các mặt bên của hình chóp.

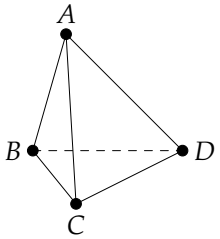


Hình tứ diện:

Định nghĩa: Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD, BCD được gọi là hình tứ diện và được kí hiệu là $ABCD$.

Chú ý:

- Hai cạnh không có đỉnh chung gọi là hai cạnh đối diện, đỉnh không nằm trên một mặt được gọi là đỉnh đối diện với mặt đó.
- Hình chóp tam giác còn được gọi là hình tứ diện.
- Hình tứ diện có bốn mặt là những tam giác đều hay có tất cả các cạnh bằng nhau được gọi là hình tứ diện đều.



Hình tứ diện

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau. Để xác định giao tuyến của chúng, ta đi tìm hai điểm chung phân biệt. Cụ thể, ta thường gặp một trong ba trường hợp sau:

① Hai mặt phẳng (α) và (β) có sẵn hai điểm chung phân biệt: Khi đó giao tuyến là đường thẳng qua hai điểm chung đó.

② Hai mặt phẳng (α) và (β) thấy trước một điểm chung A:

- A là điểm chung thứ nhất hay $A \in (\alpha) \cap (\beta)$.
- Ta tìm điểm chung thứ 2: Trong (α) tìm một đường thẳng d_1, trong (β) tìm một đường thẳng d_2 sao cho chúng có thể cắt nhau (đồng phẳng). Gọi $B = d_1 \cap d_2$, suy ra $B \in (\alpha) \cap (\beta)$. Vậy $AB = (\alpha) \cap (\beta)$.

③ Hai mặt phẳng (α) và (β) chưa thấy điểm chung: Ta mở rộng mặt phẳng để tìm điểm chung tương tự như cách tìm điểm chung ở mục số ②.

Ví dụ 1

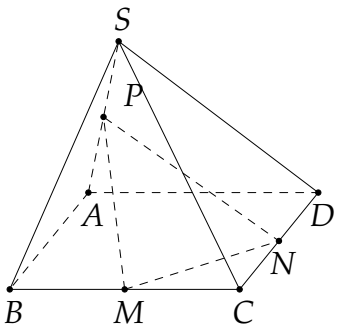
Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của cạnh BC, CD, SA. Tìm giao tuyến của

a) (MNP) và (SAB).

b) (MNP) và (SBC).

c) (MNP) và (SAD).

d) (MNP) và (SCD).



Ví dụ 2

Cho tứ diện $SABC$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên cạnh AB và BC sao cho MN không song song với AC. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:

a) (SMN) và (SAC)

b) (SAN) và (SCM).

c) (SMC) và (ADN). Với D là trung điểm của SB.

Ví dụ 3

Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (KAD).

b) Gọi M, N là hai điểm lần lượt lấy trên hai đoạn thẳng AB và AC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (DMN).

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Cho bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D. Trên hai đoạn AB và AC lấy hai điểm M, N sao cho $\dfrac{AM}{BM} = 1$ và $\dfrac{AN}{NC} = 2$. Hãy xác định giao tuyến của mặt phẳng (DMN) với mặt phẳng (BCD).

Bài 2

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD, trên cạnh AD lấy điểm P không trùng với trung điểm của AD. Gọi E là giao điểm của đường thẳng MP và đường thẳng BD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (PMN) và (BCD)

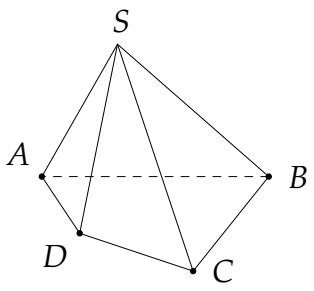
Bài 3

Cho tứ giác $ABCD$ sao cho các cạnh đối không song song với nhau. Lấy một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định giao tuyến của

a) Mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SBD).

b) Mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SCD).

c) Mặt phẳng (SAD) và mặt phẳng (SBC).



Bài 4

Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là tứ giác $ABCD$ có hai cạnh đối diện AB và CD không song song. Lấy điểm M thuộc miền trong của tam giác SCD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:

a) (SBM) và (SCD); b) (ABM) và (SCD); c) (ABM) và (SAC).

Dạng 2 Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

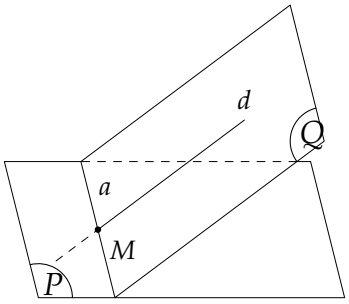
Muốn tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) (phân biệt, không song song), ta tìm giao điểm của d với một đường thẳng a nằm trong (P). Xét hai khả năng:

① Nếu đường thẳng a dễ tìm, nghĩa là có sẵn $a \subset (P)$ và a cắt được d. Khi đó

- Gọi $M = d \cap a$ thì $\begin{cases} M \in d \\ M \in a \subset (P) \end{cases}$.
- Vậy $M = d \cap (P)$.

② Nếu đường thẳng a khó tìm, ta thực hiện các bước sau:

- Tìm một mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và dễ tìm giao tuyến với (P);
- Tìm $(Q) \cap (P) = a$.
- Tìm $M = d \cap a$, suy ra $M = d \cap (P)$.



Ví dụ 4

Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và M là trung điểm của SA. Tìm giao điểm của đường thẳng SG và mặt phẳng (MBC). $I = SG \cap (MBC)$

Ví dụ 5

Cho tứ diện $SABC$ có hai điểm M, N lần lượt thuộc hai cạnh SA, SB và O là điểm nằm trong tam giác ABC. Hãy tìm

a) Giao điểm của đường thẳng AB và (SOC). $AB \cap (SOC) = D$

b) Giao điểm của đường thẳng MN và (SOC). $MN \cap (SOC) = E$

c) Giao điểm của đường thẳng SO và (CMN). $SO \cap (CMN) = I$

Ví dụ 6

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SD.

a) Tìm $I = BM \cap (SAC)$. Chứng minh rằng: $BI = 2BM$. $I = BM \cap (SAC)$

b) Tìm $E = SA \cap (BCM)$. Chứng minh rằng: E là trung điểm SA. $E = SA \cap (BCM)$

Ví dụ 7

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AC và BC. Trên cạnh BD lấy điểm K sao cho $BK = 2KD$.

a) Tìm $E = CD \cap (IJK)$. Chứng minh: $DE = DC$. $E = CD \cap (IJK)$

b) Tìm $F = AD \cap (IJK)$. Chứng minh: $FA = 2FD$ và $FK // IJ$. $F = AD \cap (IJK)$

c) Gọi M và N là hai điểm bất kỳ lần lượt nằm trên hai cạnh AB và CD. Tìm giao điểm của MN và (IJK). $L = MN \cap (IJK)$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5 ☆

Cho tứ diện $ABCD$. Trên AC và AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho MN không song song với CD. Gọi P là điểm thuộc miền trong của tam giác BCD. Hãy tìm

a) Giao điểm của đường thẳng MN và (BCD). $MN \cap (BCD) = E$ với $E = MN \cap CD$

b) Giao điểm của đường thẳng AP và (BMN). $AP \cap (BMN) = K$ với $F = BP \cap CD$

Bài 6

Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm lấy trên cạnh SB, N là điểm thuộc miền trong của tam giác SCD. Hãy tìm giao điểm của

a) Đường thẳng MN và $(ABCD)$. $MN \cap (ABCD) = F$

b) Đường thẳng SC và (MAN). $SC \cap (AMN) = I$

c) Đường thẳng SD và (MAN). $SD \cap (AMN) = J$

d) Đường thẳng SA và (CMN). $SA \cap (CMN) = K$

Bài 7

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB và $AB = 2CD$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, AB, BC.

a) Tìm giao điểm giữa IK và (SBD). $N = IK \cap (SBD)$

b) Tìm giao điểm F giữa SD và (IJK). Tính tỉ số $\dfrac{FS}{FD}$. $F = NP \cap (IJK)$, $\dfrac{FS}{FD} = \dfrac{1}{2}$

c) Tìm giao điểm G giữa SC và (IJK). Tính tỉ số $\dfrac{GS}{GC}$. $G = SC \cap (IJK)$, $\dfrac{GS}{GC} = 1$

Bài 8 ☆

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O. Gọi M là trung điểm của SB, N là điểm thuộc đoạn SD sao cho $SN = 2ND$.

a) Tìm giao tuyến của (SBD) và (SAC). 🔑 SO

b) Tìm giao điểm E của đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$. Tính $\dfrac{EN}{EM}$. 🔑 $\dfrac{EN}{EM} = \dfrac{2}{3}$

Dạng 3 Xác định thiết diện

Ta tìm các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau của mặt phẳng (α) với các mặt của hình chóp cho đến khi khép kín thành một đa giác phẳng. Đa giác đó là thiết diện cần tìm và các đoạn giao tuyến chính là các cạnh của thiết diện.

Ví dụ 8

Cho tứ diện $ABCD$. Trên các đoạn CA, CB, BD cho lần lượt các điểm M, N, P sao cho MN không song song với AB. Gọi (α) là mặt phẳng xác định bởi ba điểm M, N, P. Dựng thiết diện tạo bởi (α) và tứ diện $ABCD$.

Ví dụ 9

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB//CD, AB > CD$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm SB và SC.

a) Xác định giao tuyến của (SAD) và (SBC).

b) Tìm giao điểm của đường thẳng SD với (AIJ).

c) Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (AIJ).

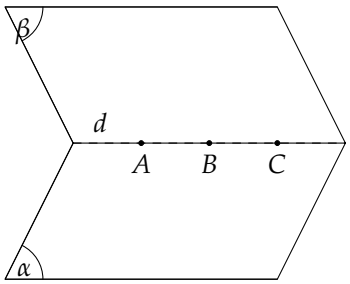
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 9 ☆

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh CB, CD, SA. Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) và hình chóp.

Dạng 4 Chứng minh ba điểm thẳng hàng

Để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng, ta cần chứng minh ba điểm này lần lượt thuộc hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β). Nghĩa là chúng cùng thuộc giao tuyến d của hai mặt phẳng (α) và (β).



Ví dụ 10

Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD, Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD.

a) Tìm giao tuyến của (AND) và (ABP).

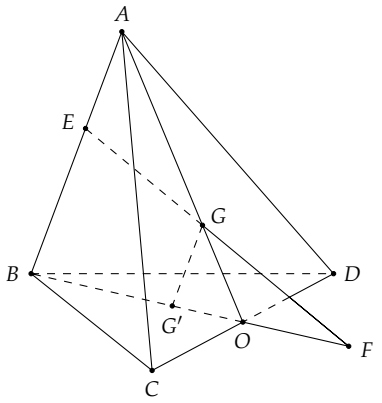
b) Gọi $I = AG \cap MP$, $J = CM \cap AN$. Chứng minh D, I, J thẳng hàng.

Ví dụ 11

Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trên một mặt phẳng.

a) Gọi O là trung điểm của CD, G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ACD và BCD. Chứng minh $GG' // AB$.

b) Cho điểm E trên AB sao cho EG cắt mặt phẳng đi qua ba điểm B, C, D tại F. Chứng minh bốn điểm B, G', O, F thẳng hàng.



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 10 ☆

Cho tứ diện $SABC$. Trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho MN cắt AB tại I, NP cắt BC tại J và MP cắt AC tại K. Chứng minh rằng ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Bài 11 ☆

Cho hình chóp $S.ABCD$ có AD không song song với BC. Lấy M thuộc SB và O là giao điểm AC với BD.

a) Tìm giao điểm N của SC với (ADM).

b) Gọi $I = AN \cap DM$. Chứng minh S, I, O thẳng hàng.

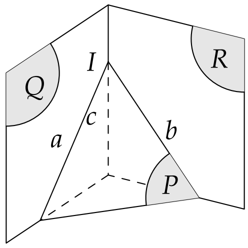
Dạng 5 Chứng minh ba đường thẳng đồng quy

Để chứng minh ba đường thẳng a, b, c đồng quy ta làm theo các bước sau:

- Chọn mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a và b.
- Tìm mặt phẳng (Q) chứa a và (R) chứa b sao cho $(Q) \cap (R) = c \Rightarrow I \in c$.

Suy ra: a, b, c đồng quy tại I.

Nghĩa là: $\begin{cases} a \subset (P), b \subset (P), I = a \cap b \\ a = (P) \cap (Q) \\ b = (P) \cap (R) \\ c = (Q) \cap (R) \end{cases} \Rightarrow a, b, c$ đồng quy tại I.



Ví dụ 12

Cho hình chóp $S.ABCD$ có AB không song song CD. Gọi M là trung điểm SC và O là giao điểm AC với BD.

a) Tìm giao điểm N của SD với (MAB).

b) Chứng minh ba đường thẳng SO, AM, BN đồng quy.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 12 ☆

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Lấy M trên cạnh SC. Gọi N là giao điểm của SB và (ADM). Gọi O là giao điểm AC và BD. Chứng minh rằng SO, AM, DN đồng qui.

....
....
....

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Bài 13 ☆

Cho tứ diện $ABCD$. Lấy M, N, P lần lượt trên các cạnh AB, AC, BD sao cho MN cắt BC tại I, MP cắt AD tại J. Chứng minh: PI, NJ, CD đồng quy.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định nếu biết nó thoả điều kiện nào sau đây?

Ⓐ Đi qua ba điểm bất kỳ.

Ⓑ Đi qua một đường thẳng và một điểm.

Ⓒ Đi qua hai đường thẳng cắt nhau.

Ⓓ Đi qua bốn điểm bất kỳ trong không gian.

Câu 2. Một hình chóp có đáy là ngũ giác có số mặt và số cạnh lần lượt là

Ⓐ 6 mặt, 8 cạnh. Ⓑ 6 mặt, 12 cạnh. Ⓒ 6 mặt, 10 cạnh. Ⓓ 5 mặt, 10 cạnh.

Câu 3. Cho điểm A thuộc mặt phẳng (P), cách viết nào dưới đây là đúng?

Ⓐ $(P) \in A$. Ⓑ $A \notin (P)$. Ⓒ $A \subset (P)$. Ⓓ $A \in (P)$.

Câu 4. Hình tứ diện có số cạnh là

Ⓐ 3. Ⓑ 6. Ⓒ 5. Ⓓ 4.

Câu 5. Hình chóp lục giác có bao nhiêu mặt?

Ⓐ 10. Ⓑ 6. Ⓒ 8. Ⓓ 7.

Câu 6. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

Ⓐ Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

Ⓑ Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm phân biệt.

Ⓒ Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.

Ⓓ Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.

Câu 7. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

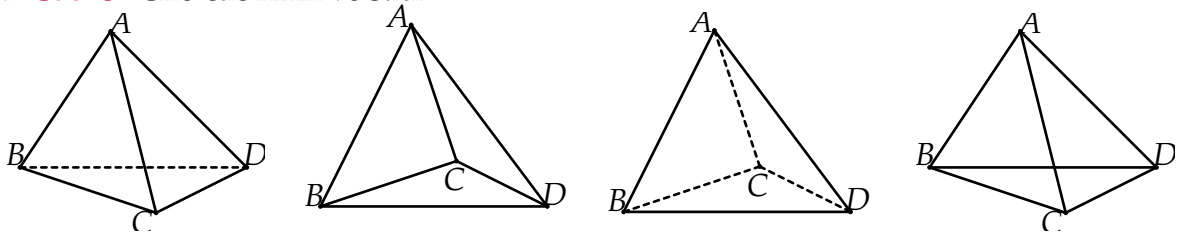
Ⓐ Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

Ⓑ Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác nữa.

Ⓒ Nếu ba điểm phân biệt cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì chúng thẳng hàng.

Ⓓ Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

Câu 8. Cho các hình vẽ sau:



Hình (1) Hình (2) Hình (3) Hình (4)

Trong các hình trên, những hình nào biểu diễn cho tứ diện?

Ⓐ Hình (1) và hình (2). Ⓑ Hình (1), hình (2) và hình (3).

Ⓒ Hình (1) và hình (3). Ⓓ Hình (1), hình (3) và hình (4).

Câu 9. Trong không gian, mệnh đề nào sau đây là đúng?

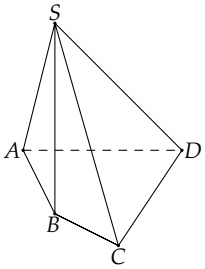
Ⓐ Qua bốn điểm phân biệt xác định một mặt phẳng duy nhất.

Ⓑ Qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng xác định một mặt phẳng duy nhất.

Ⓒ Qua một điểm và một đường thẳng xác định một mặt phẳng duy nhất.

Ⓓ Qua hai đường thẳng bất kì xác định một mặt phẳng duy nhất.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ như hình vẽ. Hỏi hình chóp đó có bao nhiêu mặt phẳng?

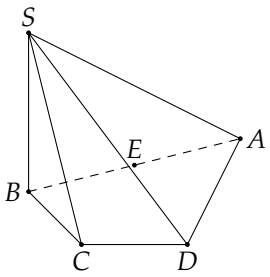


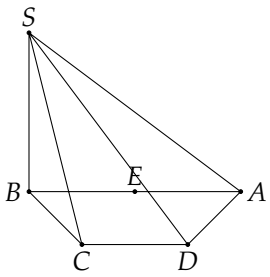
Ⓐ 4. Ⓑ 5. Ⓒ 1. Ⓓ 8.

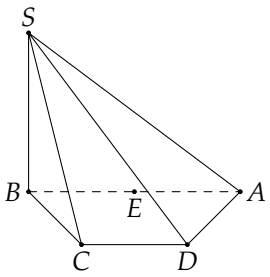
Câu 11. Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) được kí hiệu là

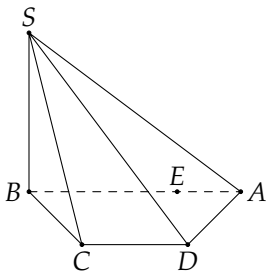
Ⓐ $d \not\subset (P)$. Ⓑ $d \notin (P)$. Ⓒ $d \subset (P)$. Ⓓ $d \in (P)$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB gấp đôi đáy nhỏ CD, E là trung điểm của đoạn AB. Hình vẽ nào sau đây đúng quy tắc?

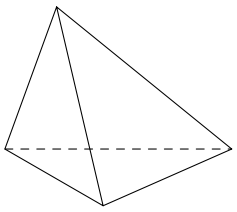
Ⓐ 

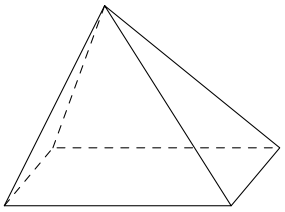
Ⓑ 

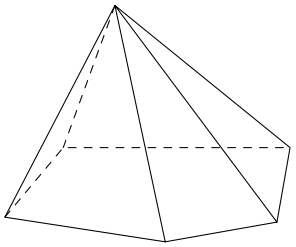
Ⓒ 

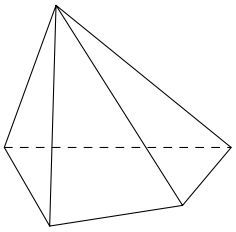
Ⓓ 

Câu 13. Trong các hình vẽ sau đâu là hình biểu diễn của hình tứ diện?

Ⓐ 
Hình 1

Ⓑ 
Hình 2

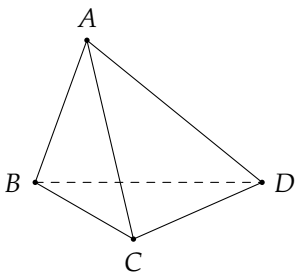
Ⓒ 
Hình 3

Ⓓ 
Hình 4

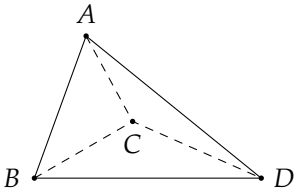
Câu 14. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Điểm M thuộc cạnh SO (M khác S và M khác O). Trong các mặt phẳng sau, điểm M nằm trên mặt phẳng nào?

Ⓐ $(ABCD)$. Ⓑ (SBD). Ⓒ (SAB). Ⓓ (SCD).

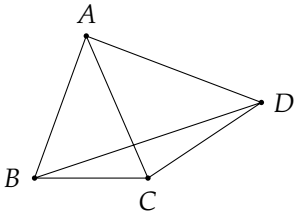
Câu 15. Trong các hình vẽ sau hình nào là hình biểu diễn của một hình tứ diện?



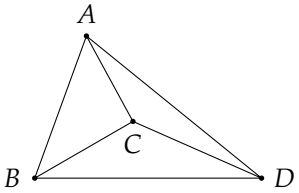
Hình 1



Hình 2



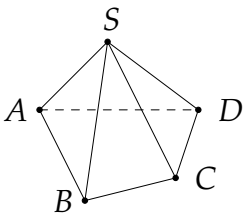
Hình 3

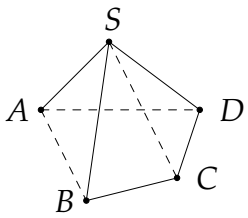


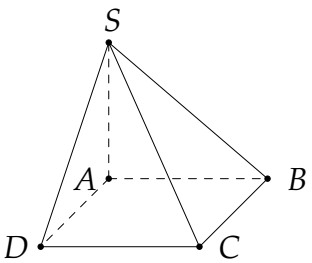
Hình 4

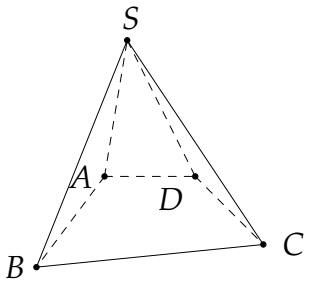
Ⓐ Hình 1, Hình 2, Hình 4.
Ⓑ Hình 1, Hình 2, Hình 3, Hình 4.
Ⓒ Hình 1.
Ⓓ Hình 1, Hình 2, Hình 3.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$, trong các cách vẽ sau cách vẽ nào **sai**?

Ⓐ 

Ⓑ 

Ⓒ 

Ⓓ 

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là đường thẳng nào trong các đường thẳng sau?

Ⓐ SA. Ⓑ SB. Ⓒ SD. Ⓓ AC.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AC \cap BD = M$ và $AB \cap CD = N$. Giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SBD) là đường thẳng nào trong các đường thẳng sau?

Ⓐ SN. Ⓑ SM. Ⓒ SB. Ⓓ SC.

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (CDA) là đường thẳng

Ⓐ AC. Ⓑ CD. Ⓒ AB. Ⓓ BD.

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (GAB) là

Ⓐ AM, M là trung điểm AB.
Ⓑ AN, N là trung điểm CD.
Ⓒ AH, H là hình chiếu của B trên CD.
Ⓓ AK, K là hình chiếu của C trên BD.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ $(AD//BC)$. Gọi M là trung điểm CD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là

Ⓐ SI, I là giao điểm AC và BM.
Ⓑ SJ, J là giao điểm AM và BD.
Ⓒ SO, O là giao điểm AC và BD.
Ⓓ SP, P là giao điểm AB và CD.

Câu 22. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và AB. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

Ⓐ $(ABM) \cap (ACD) = AM$.
Ⓑ $(ABM) \cap (DCN) = MN$.
Ⓒ $(AMN) \cap (ACD) = AB$.
Ⓓ $(ACD) \cap (BDC) = CD$.

Câu 23. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình thang $(AD//BC)$. Gọi H là trung điểm AB. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SHD) và (SAC) là

Ⓐ SI (I là giao điểm của HD và AC). Ⓑ SK (K là giao điểm của AB và CD).
Ⓒ SO (O là giao điểm của AC và BD). Ⓓ SA.

Câu 24. Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$. Giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của

Ⓐ CD và NP. Ⓑ CD và MN. Ⓒ CD và MP. Ⓓ CD và AP.

Câu 25. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. O là giao điểm của AC và BD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAO) và (SBC) là đường thẳng

Ⓐ SA. Ⓑ SB. Ⓒ SC. Ⓓ SO.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ ($AD//BC$). Gọi M là trung điểm CD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là

Ⓐ SI (I là giao điểm của AC và BM). Ⓑ SJ (J là giao điểm của AM và BD).
Ⓒ SO (O là giao điểm của AC và BD). Ⓓ SP (P là giao điểm của AB và CD).

Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC, điểm G là trọng tâm của tam giác BCD. Tìm giao điểm của đường thẳng MG và mặt phẳng (ABC).

Ⓐ Giao điểm của MG và BC. Ⓑ Giao điểm của MG và AC.
Ⓒ Giao điểm của MG và AN. Ⓓ Giao điểm của MG và AB.

Câu 28. Cho tứ diện $ABCD$, M là trung điểm của CD, điểm P thuộc tia đối của tia BD sao cho $PD = 3PB$, mặt phẳng (APM) cắt BC tại Q. Tính tỉ số $\dfrac{CQ}{QB}$.

Ⓐ $\dfrac{7}{3}$. Ⓑ 2. Ⓒ $\dfrac{5}{2}$. Ⓓ 3.

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC, M là một điểm trên cạnh AB, N là một điểm trên cạnh AC.

a) IJ là giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (JAD).
b) ND là giao tuyến của hai mặt phẳng (MND) và (ADC).
c) BI là giao tuyến của hai mặt phẳng (BCI) và (ABD).
d) Giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (DMN) song song với đường thẳng IJ.

Câu 2. Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$, $E = CD \cap NP$.

a) NM là giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ABC).
b) DC là giao tuyến của hai mặt phẳng (BCD) và (ADC).
c) Giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP) là điểm E.
d) Giao điểm của đường thẳng AD và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của đường thẳng AD với đường thẳng MP.

Câu 3. Cho hình bình hành $ABCD$ và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$, các

điểm M, N lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AB, SC. Gọi $O = AC \cap BD$.

a) SO giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

b) Giao điểm của I của đường thẳng AN và mặt phẳng (SBD) là điểm nằm trên đường thẳng SO.

c) Giao điểm của J của đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) là điểm nằm trên đường thẳng SD.

d) Ba điểm I, J, B thẳng hàng.

Câu 4. Cho tứ giác $ABCD$ có AC và BD giao nhau tại O và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn SC lấy một điểm M không trùng với S và C, $K = AM \cap SO$.

a) SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (ABC).

b) SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

c) Giao điểm của đường thẳng SO với mặt phẳng (ABM) là điểm K.

d) Giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM) là điểm N thuộc đường thẳng AK.

3 Tự luận.

Bài 1. Cho tam giác ABC và điểm S không thuộc mặt phẳng (ABC). Lấy D, E là các điểm lần lượt thuộc các cạnh SA, SB và D, E khác S.

a) Đường thẳng DE có nằm trong mặt phẳng (SAB) không?

b) Giả sử DE cắt AB tại F. Chứng minh rằng F là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (CDE).

Bài 2. Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng phân biệt a, b nằm trong (P). Một đường thẳng c cắt hai đường thẳng a và b tại hai điểm phân biệt. Chứng minh rằng đường thẳng c nằm trong mặt phẳng (P).

Bài 3. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ và M là một điểm thuộc cạnh SC (M khác S, C). Giả sử hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại N. Chứng minh rằng đường thẳng MN là giao tuyến của hai mặt phẳng (ABM) và (SCD).

Bài 4. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ và lấy một điểm E thuộc cạnh SA của hình chóp (E khác S, A). Trong mặt phẳng $(ABCD)$ vẽ một đường thẳng d cắt các cạnh CB, CD lần lượt tại M, N và cắt các tia AB, AD lần lượt tại P, Q.

a) Xác định giao điểm của mp(E, d) với các cạnh SB, SD của hình chóp.

b) Xác định giao tuyến của mp(E, d) với các mặt của hình chóp.

Bài 5. Cho hình tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AC, BC, BD lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $AM = CM$, $BN = CN$, $BP = 2DP$.

a) Xác định giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP).

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (MNP).

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi K là trọng tâm của tam giác SAC và I, J lần lượt là trung điểm của CD và SD.

a) Tìm giao điểm H của đường thẳng IK với mặt phẳng (SAB).

b) Xác định thiết diện tạo bởi mặt phẳng (IJK) với hình chóp.

Bài 7. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD.

a) Tìm giao tuyến của (ADN) và (ABP).

b) Gọi $I = AG \cap MP$ và $J = CM \cap AN$ Chứng minh D, I, J thẳng hàng.

Bài 8. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thuộc cạnh AB, AC, BD và $MN \cap BC = I$, $MP \cap AD = J$, $NJ \cap IP = K$. Chứng minh: C, D, K thẳng hàng.

Bài 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AB \cap CD = E$ và $AD \cap BC = K$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC.

a) Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD).

b) Tìm giao tuyến của (MNP) và (SBD).

c) Tìm giao điểm của Q của SD và (MNP).

d) Gọi $H = MN \cap PQ$. Chứng minh: S, H, E thẳng hàng.

e) Chứng minh: SK, QM, NP đồng quy.

Bài 10. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và K là trung điểm của AB và CD. Gọi J là một điểm trên đoạn AD sao cho $AD = 3JD$.

a) Tìm giao điểm F của IJ và (BCD).

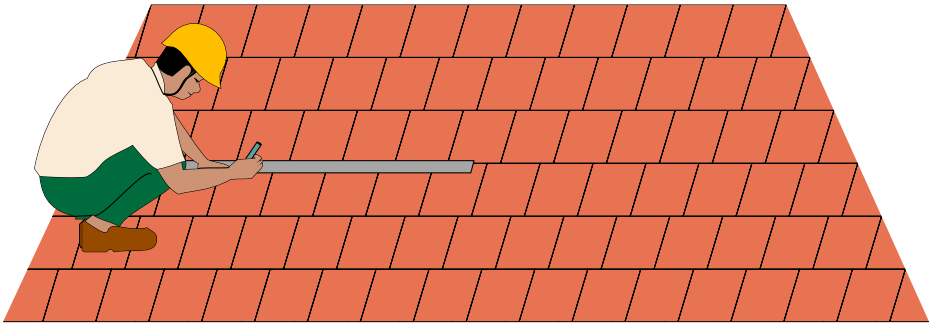
b) Tìm giao điểm E của (IJK) và đường thẳng BC. Tính tỉ số: $\dfrac{EB}{EC}$. 2

c) Chứng minh ba đường thẳng AC, KJ, IE đồng quy tại điểm H. Tính $\dfrac{HC}{HA}$. $\frac{1}{2}$

d) Chứng minh $EJ // HF$ và đường thẳng IK đi qua trung điểm của đoạn HF.

e) Gọi O là trung điểm IK và G là trọng tâm của tam giác BCD. Chứng minh ba điểm A, O, G thẳng hàng. Tính tỉ số: $\dfrac{OA}{OG}$. 3

Bài 11. Hình bên dưới minh họa người thợ đang kiểm tra độ phẳng của mặt sàn nhà. Hãy cho biết người thợ kiểm tra độ phẳng của mặt sàn nhà bằng cách nào?



Bài 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Hai điểm M, N thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, SC. Gọi I, J theo thứ tự là giao điểm của AN, MN với mặt phẳng (SBD). Tính $k = \dfrac{IN}{IA} + \dfrac{JN}{JM}$. 1,5

Bài 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên cạnh BD lấy điểm K sao cho $BK = 2KD$. Gọi F là giao điểm của AD với mặt phẳng (IJK). Tính tỉ số $\dfrac{FA}{FD}$.

2

Bài 14. Tại các nhà hàng, khách sạn, nhân viên phục vụ bàn thường xuyên phải bưng bê nhiều khay, đĩa đồ ăn khác nhau. Một trong những nguyên tắc nhân viên cần nhớ là khay phải được bưng bằng ít nhất 3 ngón tay. Hãy giải thích tại sao.



Bài 15. Bàn cắt giấy là một dụng cụ được sử dụng thường xuyên ở các cửa hàng photo-copy. Bàn cắt giấy gồm hai phần chính: phần bàn hình chữ nhật có chia kích thước giấy và phần dao cắt có một đầu được cố định vào bàn. Hãy giải thích tại sao khi sử dụng bàn cắt giấy thì các đường cắt luôn là đường thẳng.



Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	C	2	C	3	D	4	B	5	D	6	B	7	D	8	B	9	B	10	B		
11	C	12	C	14	B	15	A	16	B	17	B	18	B	19	A	20	B	21	A		
22	C	23	A	24	A	25	C	26	A	27	C	28	D								

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a Đ b Đ c Đ d S	Câu 2.	a Đ b Đ c Đ d S
Câu 3.	a Đ b Đ c Đ d S	Câu 4.	a S b Đ c Đ d S

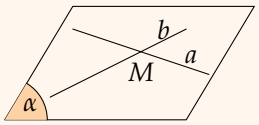
§2 HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

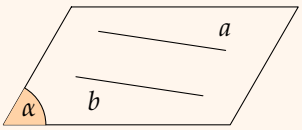
1) Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian.

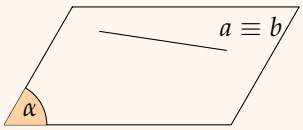
- Nếu a và b cùng nằm trong một mặt phẳng thì ta nói a và b đồng phẳng. Khi đó, a và b có thể cắt nhau, song song với nhau hoặc trùng nhau.
- Nếu a và b không cùng nằm trong bất kì mặt phẳng nào thì ta nói a và b chéo nhau. Khi đó, ta cũng nói a chéo với b, hoặc b chéo với a.



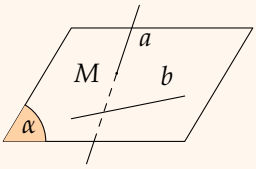
$a \cap b = \{M\}$
a cắt b tại M



$a // b$
a song song với b



$a \equiv b$
a trùng với b



a và b chéo nhau

Lưu ý.

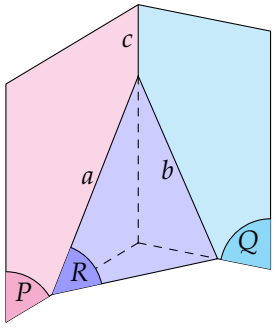
- Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng đồng phẳng và không có điểm chung.
- Có đúng một mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song.

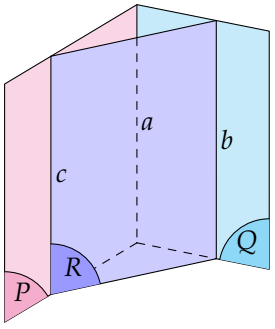
2) Tính chất của hai đường thẳng song song

Tính chất. *Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có đúng một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.*

Tính chất. *Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.*

Tính chất. *Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.*





Từ kết quả trên ta có thể suy ra rằng: Nếu hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song với nhau thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Hai đường thẳng song song

Phương pháp giải: Ta sẽ sử dụng một trong các cách sau

- Chứng minh hai đường thẳng đó đồng phẳng rồi áp dụng phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng (Đường trung bình, Định lí Ta-lét đảo,...)
- Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song với một đường thẳng thứ ba.

$$\begin{cases} a//b \\ a//c \\ b \neq c \end{cases} \Rightarrow b//c.$$

- Áp dụng định lí về giao tuyến song song.
- Áp dụng hệ quả: Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

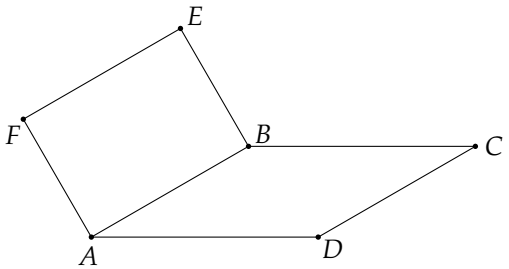
$$\begin{cases} d' \subset (\alpha) \\ d'' \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \\ d'//d'' \end{cases} \Rightarrow d//d'', d//d'$$

Ví dụ 1

Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a) Quan sát bốn đường thẳng AB, BC, CD, DA. Chỉ ra các cặp đường thẳng cắt nhau, các cặp đường thẳng song song.

b) Trong ba đường thẳng AB, AF, BE có hai đường thẳng nào chéo nhau hay không?



Ví dụ 2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA, SB, SC, SD. Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Ví dụ 3

Cho tứ diện $ABCD$ có I, J lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và ABD. Chứng minh rằng $IJ//CD$.

Ví dụ 4

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD. Chứng minh

a) $MN//AD$ và $MN//BC$.

b) $MO//SC$ và $NO//SB$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và DBC. Chứng minh $MN//AD$.

Bài 2 ☆

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AB, AC sao cho $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$; I, J lần lượt là trung điểm của BD, CD.

a) Chứng minh rằng $MN//BC$.

b) Tứ giác $MNJI$ là hình gì? Tìm điều kiện để tứ giác $MNJI$ là hình bình hành.

Bài 3 ☆

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD. Gọi I, J, G lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SAD, AOD. Chứng minh

a) $IJ//MN$.

b) $IJ//BD$ và $GJ//SO$.

Bài 4 ☆

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AD. Gọi I và J lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAD và SBC. Mặt phẳng (ADJ) cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Mặt phẳng (BCI) cắt SA, SD tại P, Q.

a) Chứng minh MN song song với PQ.

b) Gọi E là giao điểm của AM và BP; F là giao điểm của CQ và DN. Chứng minh EF song song với MN và PQ.

Dạng 2 Tìm giao tuyến bằng cách kẻ song song

Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng, ngoài phương pháp "Tìm hai điểm chung của hai mặt phẳng", ta còn có thể tìm bằng cách sau:

- **Bước 1** . Chỉ ra rằng mặt phẳng α, β lần lượt chứa hai đường thẳng song song a và b.
- **Bước 2.** Tìm một điểm chung M của hai mặt phẳng.
- **Bước 3.** Khi đó $(\alpha) \cap (\beta) = Mx // a // b$.

Ví dụ 5

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Ví dụ 6

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB//CD)$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SD.

a. Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MAB) và (SCD).

b. Gọi N là giao điểm của đường thẳng SC và mặt phẳng (MAB). Chứng minh rằng MN là đường trung bình của tam giác SCD.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5 ☆

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD và P là một điểm thuộc cạnh AC. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (BPD) và chứng minh giao tuyến đó song song với BD.

Bài 6 ☆

Cho tứ diện $ABCD$, M là điểm thuộc cạnh AC. Gọi (P) là mặt phẳng qua M song song với AB và CD. Tìm giao tuyến của (P) với mặt phẳng (BCD).

Bài 7 ☆

Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm hai đường chéo; M là trung điểm của SC.

a. Chứng minh đường thẳng OM song song với hai mặt phẳng (SAD) và (SBA).

b. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMD) và (SAD).

Dạng 3 Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

◈ **Cách 1. Tìm giao điểm trực tiếp**

Bước 1. Tìm đường thẳng $\Delta \subset (\alpha)$ mà d cắt Δ.

Bước 2. Tìm giao điểm $I = d \cap \Delta$.

Bước 3. Kết luận $I = d \cap (\alpha)$

◈ **Cách 2. Tìm giao điểm qua mặt phẳng phụ**

Bước 1. Tìm $(\beta) \supset d$ mà $(\alpha) \cap (\beta) = \Delta$.

Bước 2. Tìm giao điểm $I = d \cap \Delta$.

Bước 3. Kết luận $I = d \cap (\alpha)$

Ví dụ 7

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Trên cạnh BC, AD, SD lần lượt lấy các điểm I, J, K sao cho $\dfrac{BI}{BC} = \dfrac{AJ}{AD} = \dfrac{SK}{SD}$. Tìm giao điểm của SC với mặt phẳng (IJK).

Ví dụ 8

Cho hình chóp $S.ABCD$. Mặt đáy là hình thang có cạnh đáy lớn AD, AB cắt CD tại K, điểm M thuộc cạnh SD.

a. Xác định giao tuyến (d) của (SAD) và (SBC).

b. Tìm giao điểm N của KM và (SBC).

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 8 ☆

Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của AC, BC. Điểm $P \in BD$ với $PB = \frac{1}{4}BD$. Xác định giao điểm của AD với mặt phẳng (MNP).

Bài 9 ☆

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB. Điểm H thuộc đoạn SD thỏa mãn $\dfrac{SH}{SD} = \dfrac{3}{4}$. Tìm giao điểm của đường thẳng SC và mp(HMN).

Bài 10 ☆

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC và CD.

a. Tìm giao tuyến của (SBD) và (SIK).

b. Cho M là trung điểm của SB. Tìm giao điểm F của DM và (SIK).

Dạng 4 Tìm thiết diện bằng cách kẻ song song

Ví dụ 9

Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AB, BC, CD lần lượt lấy các điểm P, Q, R sao cho $AP = \frac{1}{3}AB$, $BC = 3QC$ và R không trùng với C, D. Gọi $PQRS$ là thiết diện của mặt phẳng (PQR) với tứ diện $ABCD$. Khi đó $PQRS$ là hình gì?

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 11 ☆

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC, E là điểm trên cạnh CD sao cho $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là hình gì?

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

Ⓐ Hai đường thẳng chéo nhau thì chúng có điểm chung.

Ⓑ Hai đường thẳng không có điểm chung là hai đường thẳng song song hoặc chéo nhau.

Ⓒ Hai đường thẳng song song với nhau khi chúng ở trên cùng một mặt phẳng.

Ⓓ Khi hai đường thẳng ở trên hai mặt phẳng phân biệt thì hai đường thẳng đó chéo nhau.

Câu 2. Trong các khẳng định sau khẳng định nào sai?

Ⓐ Nếu hai đường thẳng song song thì chúng cùng nằm trên một mặt phẳng.

Ⓑ Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyền ấy đồng qui.

Ⓒ Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì nó song song với một đường thẳng nào đó trong mặt phẳng.

Ⓓ Có một mặt phẳng duy nhất đi qua hai đường thẳng cắt nhau cho trước.

Câu 3. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Giả sử $a//b$ và $b//(\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $a//(\alpha)$. Ⓑ $a \subset (\alpha)$.

Ⓒ a cắt (α). Ⓓ $a//(\alpha)$ hoặc $a \subset (\alpha)$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi A', B' lần lượt là trung điểm của SA, SB. Đường thẳng $A'B'$ song song với mặt phẳng nào dưới đây?

Ⓐ (SAB). Ⓑ $(ABCD)$. Ⓒ (SAD). Ⓓ (SBC).

Câu 5. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Mặt phẳng (β) chứa a và cắt mặt phẳng (α) theo giao tuyến d. Kết luận nào sau đây đúng?

Ⓐ a và d cắt nhau. Ⓑ a và d trùng nhau.

Ⓒ a và d chéo nhau. Ⓓ a và d song song.

Câu 6. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa đường thẳng a và song song với đường thẳng b?

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ Vô số.

Câu 7. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O không nằm trong Δ. Qua O có mấy đường thẳng song song với Δ?

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ Vô số.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy lớn AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB. Khẳng định nào sau đây là đúng nhất

Ⓐ MN song song với CD.
Ⓑ MN chéo với CD.
Ⓒ MN cắt với CD.
Ⓓ MN trùng với CD.

Câu 9.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào không song song với IJ?

Ⓐ EF. Ⓑ DC. Ⓒ AD. Ⓓ AB.

Câu 10. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

Ⓐ Hai đường thẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác.
Ⓑ Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không điểm chung.
Ⓒ Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.
Ⓓ Hai đường thẳng chéo nhau khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.

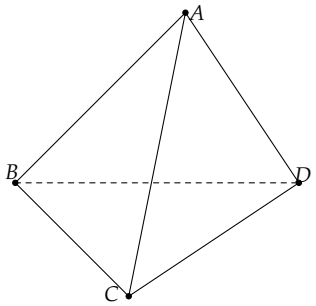
Câu 11. Trong không gian, xét các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

Ⓐ Hai đường thẳng không có điểm chung thì song song.
Ⓑ Hai đường thẳng nếu không cắt nhau, không trùng nhau thì song song.
Ⓒ Hai đường không có điểm chung thì chéo nhau.
Ⓓ Hai đường thẳng được gọi là chéo nhau nếu chúng không đồng phẳng.

Câu 12. Ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau từng đôi một thì ba giao tuyến của chúng sẽ có bao nhiêu vị trí tương đối?

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N là hai điểm phân biệt nằm trên đường thẳng AB, M' và N' là hai điểm phân biệt nằm trên đường thẳng CD. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?



Ⓐ Hai đường thẳng MM' và NN' có thể cắt nhau.
Ⓑ Hai đường thẳng MM' và NN' có thể song song với nhau.
Ⓒ Hai đường thẳng MM' và NN' hoặc cắt nhau hoặc song song với nhau.
Ⓓ Hai đường thẳng MM' và NN' chéo nhau.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $AB//CD$. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (ASB) và (SCD). Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $d//AB$. Ⓑ d cắt AB. Ⓒ d cắt AD. Ⓓ d cắt CD.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, T lần lượt là trung điểm AC, BD, BC, CD, SA, SD. Cặp đường thẳng nào sau đây song song với nhau?

Ⓐ MP và RT. Ⓑ MQ và RT. Ⓒ MN và RT. Ⓓ PQ và RT.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi G_1; G_2 lần lượt là trọng tâm của $\triangle SAB$; $\triangle SAD$. Khi đó G_1G_2 song song với đường thẳng nào sau đây?

Ⓐ CD. Ⓑ BD. Ⓒ AD. Ⓓ AB.

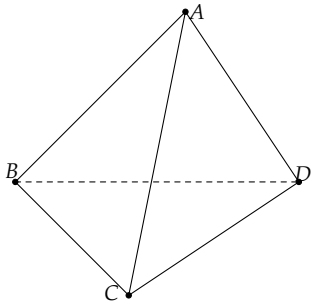
Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G và E lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và ABC. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

Ⓐ $GE//CD$.
Ⓑ GE cắt AD.
Ⓒ GE cắt CD.
Ⓓ GE và CD chéo nhau.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC). Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ d qua S và song song với DC.
Ⓑ d qua S và song song với BD.
Ⓒ d qua S và song song với BC.
Ⓓ d qua S và song song với AB.

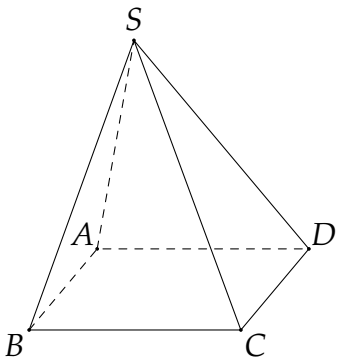
Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$ có P, Q lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và BCD. Xác định giao tuyến của mặt phẳng (ABQ) và mặt phẳng (CDP).



Ⓐ Giao tuyến là đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh AB và CD.
Ⓑ Giao tuyến là đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh AB và AD.
Ⓒ Giao tuyến là đường thẳng PQ.
Ⓓ Giao tuyến là đường thẳng QA.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

Ⓐ AB.
Ⓑ AC.
Ⓒ AD.
Ⓓ BD.



Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC và G là trọng tâm của tam giác SAB. Giao tuyến của (SAB) và (IJG) là

Ⓐ đường thẳng qua S và song song với AB.
Ⓑ đường thẳng qua G và song song với DC.
Ⓒ SC.
Ⓓ đường thẳng qua G và cắt BC.

Câu 22. Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm BD, AD. Các điểm H, G lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD; ACD. Đường thẳng HG chéo với đường thẳng

Ⓐ MN.
Ⓑ CD.
Ⓒ CN.
Ⓓ AB.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SBC) là một đường thẳng song song với đường thẳng

Ⓐ AC.
Ⓑ BC.
Ⓒ AB.
Ⓓ SA.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD. Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (CMN) và $(ABCD)$ là

Ⓐ đường thẳng CI, với $I = MN \cap BD$. Ⓑ đường thẳng MN.

Ⓒ đường thẳng BD. Ⓓ đường thẳng d đi qua C và $d // BD$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$, với $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD. Đường thẳng nào sau đây **không** song song với đường thẳng MN?

Ⓐ CD. Ⓑ AB. Ⓒ PQ. Ⓓ CS.

Câu 26. Cho tứ diện $ABCD$, gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, BD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (IJK) là

Ⓐ KI.

Ⓑ IJ.

Ⓒ Đường thẳng đi qua K và song song với AB.

Ⓓ KJ.

Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng AB; P, Q là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng CD. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng MP, NQ.

Ⓐ $MP // NQ$. Ⓑ $MP \equiv NQ$.

Ⓒ MP cắt NQ. Ⓓ MP và NQ chéo nhau.

Câu 28. Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và tam giác ABD. Đường thẳng MN song song với mặt phẳng nào dưới đây?

Ⓐ (ABC). Ⓑ (ABD). Ⓒ (BCD). Ⓓ (AMN).

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

Ⓐ Tam giác. Ⓑ Hình thang.

Ⓒ Hình thang vuông. Ⓓ Hình bình hành.

Câu 30. Cho tứ diện $ABCD$, gọi I và J lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và tam giác ABD. Đường thẳng IJ song song với đường nào dưới đây?

Ⓐ AB. Ⓑ CD. Ⓒ BC. Ⓓ AD.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và M là trung điểm SC. Gọi K là giao điểm của SD với mặt phẳng (AGM). Tính tỉ số $\dfrac{KS}{KD}$.

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $\dfrac{1}{3}$. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Câu 32. Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M thuộc cạnh BC sao cho $MC = 2MB$, các điểm N, P lần lượt là trung điểm của BD, AD. Gọi Q là giao điểm của AC với mặt phẳng (MNP), tính tỉ số $\dfrac{QC}{QA}$.

Ⓐ $\dfrac{QC}{QA}=\dfrac{3}{2}$. Ⓑ $\dfrac{QC}{QA}=\dfrac{5}{2}$. Ⓒ $\dfrac{QC}{QA}=2$. Ⓓ $\dfrac{QC}{QA}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD. Gọi I là một điểm trên cạnh B. Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (IMN) là hình gì?

Ⓐ Tam giác MNQ. Ⓑ Tam giác MNI.

Ⓒ Hình thang $MNIJ$. Ⓓ Hình bình hành $MNIJ$.

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, AD là đáy lớn và $AD=2BC$. Gọi E là giao điểm của AB và CD, F là trung điểm AD.

a) Giao tuyến của (SAC) và (SAD) là đường thẳng SA.

b) Giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng SE.

c) Giao tuyến của (SAD) và (SBC) là đường thẳng d đi qua S và song song cạnh CD.

d) Giao tuyến của (SAB) và (SFC) là đường thẳng d' đi qua S và song song cạnh CD.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, AC và BD cắt nhau tại O. Gọi I là trung điểm SO. Mặt phẳng (ICD) cắt SA, SB lần lượt tại M, N. Trong mặt phẳng $(CDMN)$, gọi K là giao điểm của CN và DM.

a) Giao điểm của ID với mặt phẳng (SBC) là điểm N.

b) OI song song với SC.

c) $SN=\dfrac{2}{3}SB$.

d) Hai đường thẳng SK và BC chéo nhau.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

a) Giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng đi qua S và song song với AB.

b) Giao tuyến (SAD) và (SBC) là đường thẳng đi qua S và song song với AB.

c) Gọi $M\in SC$, giao tuyến của (ABM) và (SCD) là đường thẳng đi qua M và song song với AB.

d) Gọi $N\in SB$, giao tuyến của (SAB) và (NCD) là đường thẳng đi qua N và song song với AB.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang (AD là đáy lớn, BC là đáy nhỏ). Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA và SD. K là giao điểm của các đường thẳng AB và CD.

a) Giao điểm M của đường thẳng SB và mặt phẳng (CDE) là điểm thuộc đường thẳng KE.

b) Đường thẳng SC cắt mặt phẳng (EFM) tại N. Tứ giác $EFNM$ là hình bình hành.

c) Các đường thẳng AM, DN, SK cùng đi qua một điểm.

d) Cho biết $AD=2BC$. Tỉ số diện tích của hai tam giác KMN và KEF bằng $\dfrac{S_{\triangle KMN}}{S_{\triangle KEF}}=\dfrac{2}{3}$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn AB. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AD, BC, SB. Khi đó

a) Giao tuyến của mặt phẳng (IJK) với mặt phẳng (SBC) là JK.
b) Giao tuyến của mặt phẳng (SAB) và (SCD) là Sx thỏa mãn điều kiện song song với AB, song song với BC.
c) Giao điểm của SA và (IJK) là N, với N là giao điểm của Kx với SA $(Kx//AB//DC)$.
d) Diện tích thiết diện cắt bởi mặt phẳng (IJK) và hình chóp là 5,5 (biết thiết diện có chiều cao bằng 2, $SA = SB = SC = SD = 4$, $AB = 2DC = 4$).

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là một hình bình hành tâm O. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của SB và SD. Khi đó
a) SO là giao tuyến của (SAC) và $(SBD$.
b) Giao điểm J của SA với (CKB) thuộc đường thẳng đi qua K và song song với DC.
c) Giao tuyến của (OIA) và (SCD) là đường thẳng đi qua C và song song với SD.
d) $CD//IJ$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi I, J lần lượt là trung điểm SA, SB; M là giao điểm của IC và JD; $d = (OIJ) \cap (ABCD)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:
a) M là trọng tâm tam giác SAC.
b) $ID//JC$.
c) $IJ//CD$.
d) $d//BC$.

Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$, M, N, P lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD. Gọi d là giao tuyến của (ABD) và (MNP), d cắt AD tại Q. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:
a) $MP//CD$.
b) $MN//CD$.
c) $MN//d$.
d) $MNPQ$ là hình thoi khi và chỉ khi $AB = CD$.

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J theo thứ tự là trung điểm của AD và AC, G là trọng tâm tam giác BCD.
a) $IG//AC$.
b) $IJ//CD$.
c) Giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng qua G và song song với CD.
d) Thiết diện của hình tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (GIJ) là hình bình hành.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AB đáy nhỏ CD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SA. Gọi P là giao điểm của SC và (AMD). Gọi I là giao điểm của AM và DP. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:
a) $(DMN) \cap (ABCD) = DB$.
b) $MN//CD$.
c) $SI//AB$.
d) Tứ giác $SABI$ là hình bình hành.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn AB. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AD, BC, SB. Khi đó
a) Giao tuyến của mặt phẳng (IJK) với mặt phẳng (SBC) là JK.
b) Giao tuyến của mặt phẳng (SAB) và (SCD) là Sx thỏa mãn điều kiện song song với AB, song song với BC.

c) Giao điểm của SA và (IJK) là N, với N là giao điểm của Kx với SA ($Kx // AB // DC$).

d) Diện tích thiết diện cắt bởi mặt phẳng (IJK) và hình chóp là 5,5 (biết thiết diện có chiều cao bằng 2, $SA = SB = SC = SD = 4$, $AB = 2DC = 4$).

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là một hình bình hành tâm O. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của SB và SD. Khi đó

a) SO là giao tuyến của (SAC) và $(SBD$.

b) Giao điểm J của SA với (CKB) thuộc đường thẳng đi qua K và song song với DC.

c) Giao tuyến của (OIA) và (SCD) là đường thẳng đi qua C và song song với SD.

d) $CD // IJ$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB, O là giao điểm của AC và BD.

a) Giao điểm của đường thẳng SA và $(ABCD)$ là điểm D.

b) Giao điểm của đường thẳng BD và (SAC) là trung điểm của đoạn thẳng AC.

c) Giao điểm của đường thẳng SO và $(ABNM)$ là điểm D.

d) Gọi E giao điểm của DM và mặt phẳng (SBC). Khi đó $SE = 2BC$.

3 Tự luận.

Bài 1. Cho hai đường thẳng song song a và b. Mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Một đường thẳng c cắt a thì cũng cắt b.

b) Một đường thẳng c chéo với a thì cũng chéo với b.

Bài 2. Trong không gian, cho ba đường thẳng a, b, c. Những mệnh đề nào sau đây là đúng?

a) Nếu a và b không cắt nhau thì a và b song song.

b) Nếu b và c chéo nhau thì b và c không cùng thuộc mặt phẳng.

c) Nếu a và b cùng song song với c thì a song song với b.

d) Nếu a và b cắt nhau, b và c cắt nhau thì a và c cắt nhau.

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Trong các cặp đường thẳng sau, cặp đường thẳng nào cắt nhau, cặp đường thẳng nào song song, cặp đường thẳng nào chéo nhau?

a) AB và CD. b) AC và BD. c) SB và CD.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA, SB, SC, SD. Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

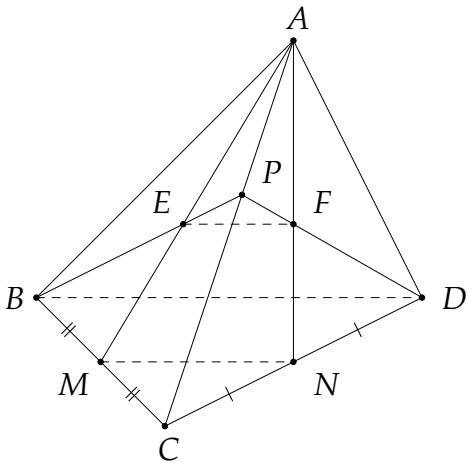
Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB // CD$). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA, SB, SC, SD. Chứng minh rằng tứ giác $MNCD$ là hình thang.

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB//CD$). Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SD.

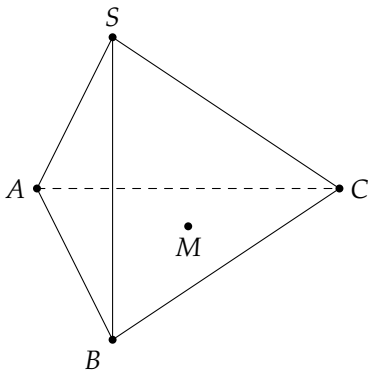
a) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MAB) và (SCD).

b) Gọi N là giao điểm của đường thẳng SC và mặt phẳng (MAB). Chứng minh rằng MN là đường trung bình của tam giác SCD.

Bài 7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD và P là một điểm thuộc cạnh AC. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (BPD) và chứng minh giao tuyến đó song song với BD.



Bài 8. Cho hình chóp $S.ABC$ và điểm M thuộc miền trong tam giác ABC. Qua M, vẽ đường thẳng d song song với SA, cắt (SBC) tại N. Trên hình vẽ, hãy chỉ rõ vị trí của điểm N và xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (CMN).



Bài 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SCD) và (SAB).

b) Lấy một điểm M trên đoạn SA (M khác S và A), mặt phẳng (BCM) cắt SD tại N. Tứ giác $CBMN$ là hình gì?

Bài 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, AC và BD cắt nhau tại O. Gọi I là trung điểm của SO. Mặt phẳng (ICD) cắt SA, SB lần lượt tại M, N.

a) Hãy nói cách xác định hai điểm M và N. Cho $AB = a$. Tính MN theo a.

b) Trong mặt phẳng $(CDMN)$, gọi K là giao điểm của CN và DM. Chứng minh $SK//BC//AD$.

Bài 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi I là trung điểm của SD. Hai mặt phẳng (IAC) và (SBC) cắt nhau theo giao tuyến Cx. Chứng minh rằng $Cx//SB$.

Bài 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, AB, SD. Xác định giao tuyến của mỗi cặp mặt phẳng sau: (SAD) và (SBC); (MNP) và $(ABCD)$.

Bài 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và ABD. Chứng minh rằng đường thẳng G_1G_2 song song với đường thẳng CD.

Bài 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AB là đáy lớn và $AB = 2CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và SB. Chứng minh rằng đường thẳng NC song song với đường thẳng MD.

Bài 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA; I, J, K, L lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SM, SN, SP, SQ.

a) Chứng minh rằng bốn điểm I, J, K, L đồng phẳng và tứ giác $IJKL$ là hình bình hành.

b) Chứng minh rằng $IK // BC$.

c) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng $(IJKL)$ và (SBC).

Bài 16. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD. Trên cạnh AC lấy điểm K. Gọi M là giao điểm của BK và AI, N là giao điểm của DK và AJ. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với đường thẳng BD.

Bài 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD và SO. Gọi H là giao điểm của SC với (MNP). Tính tỉ số $\dfrac{SH}{SC}$.

0,25

Bài 18. Trong mặt phẳng (P), cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ các tia Bx, Cy, Dz song song với nhau, nằm cùng phía với mặt phẳng $(ABCD)$, đồng thời không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Một mặt phẳng đi qua A, cắt Bx, Cy, Dz tương ứng tại B', C', D' sao cho $BB' = 2$, $DD' = 4$. Tính CC'.

6

Bài 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi M, N theo thứ tự là trọng tâm $\triangle SAB$ và $\triangle SCD$. Gọi I là giao điểm của các đường thẳng BM và CN. Tính tỉ số $\dfrac{SI}{CD}$.

1

Bài 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh SB, SD. Gọi K là giao điểm của mặt phẳng (AMN) và đường thẳng SC. Tính tỉ số $\dfrac{SK}{SC}$ (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

0,33

Bài 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $AD // BC$. Gọi E là điểm thuộc cạnh SA sao cho $\dfrac{SE}{SA} = \dfrac{2}{3}$. Mặt phẳng (BCE) cắt SD tại G. Biết $SD = x \cdot GD$. Tìm x.

3

Bài 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với cạnh đáy AB và CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm các cạnh AD, BC. Biết G là trọng tâm của $\triangle SAB$. Mặt phẳng (IJG) cắt SA, SB lần lượt tại N và M. Biết rằng $AB = x \cdot CD$ thì tứ giác $MNIJ$ là hình bình

hành. Tìm x. 3

Bài 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD và G là trọng tâm tam giác SBD. Mặt phẳng (MNG) cắt SC tại điểm H. Tính $\dfrac{SH}{SC}$. 0,4

Bài 24. Cho tứ diện $ABCD$, M là điểm thuộc BC sao cho $MC = 3MB$. Gọi N, P lần lượt là trung điểm của BD và AD. Điểm Q là giao điểm của AC với (MNP). Tính $\dfrac{QC}{QA}$. 3

Bài 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi N là trung điểm của cạnh SC. Lấy điểm M đối xứng với B qua A. Gọi giao điểm G của đường thẳng MN với mặt phẳng (SAD). Tính tỉ số $\dfrac{GM}{GN}$. 2

Bài 26. Cho hình chóp $S.ABC$. Bên trong tam giác ABC ta lấy một điểm O bất kỳ. Từ O ta dựng các đường thẳng lần lượt song song với SA, SB, SC và cắt các mặt phẳng (SBC), (SCA), (SAB) theo thứ tự tại A', B', C'. Khi đó giá trị $T = \dfrac{OA'}{SA} + \dfrac{OB'}{SB} + \dfrac{OC'}{SC}$ bằng bao nhiêu? 1

Bài 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD và G là trọng tâm tam giác SBD. Mặt phẳng (MNG) cắt SC tại điểm H. Tính $\dfrac{SH}{SC}$. 0,4

Bài 28. Cho tứ diện $ABCD$, M là điểm thuộc BC sao cho $MC = 3MB$. Gọi N, P lần lượt là trung điểm của BD và AD. Điểm Q là giao điểm của AC với (MNP). Tính $\dfrac{QC}{QA}$. 3

Bài 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi N là trung điểm của cạnh SC. Lấy điểm M đối xứng với B qua A. Gọi giao điểm G của đường thẳng MN với mặt phẳng (SAD). Tính tỉ số $\dfrac{GM}{GN}$. 2

Bài 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi A' là điểm trên SA sao cho $A'A = \dfrac{1}{2}A'S$. Qua A' kẻ đường thẳng song song với AC cắt SC tại C'. Mặt phẳng (α) chứa $A'C'$ cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D'. Tính giá trị của biểu thức $T = \dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SD}{SD'}$. 3

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	B	2	B	3	D	4	B	5	D	6	A	7	C	8	A	9	C	10	D
11	D	12	B	13	D	14	A	15	B	16	B	17	A	18	C	19	A	20	C
21	B	22	B	23	B	24	D	25	D	26	B	27	D	28	C	29	D	30	B
31	A	32	C	33	C														

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a	Đ	b	Đ	c	S	d	S	Câu 2.	a	Đ	b	S	c	S	d	S
Câu 3.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	Đ	Câu 4.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	S
Câu 5.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	S	Câu 6.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	Đ
Câu 7.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	S	Câu 8.	a	S	b	S	c	Đ	d	Đ
Câu 9.	a	S	b	Đ	c	Đ	d	S	Câu 10.	a	S	b	Đ	c	Đ	d	Đ
Câu 11.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	S	Câu 12.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	Đ
Câu 13.	a	S	b	Đ	c	S	d	S									

§3 ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

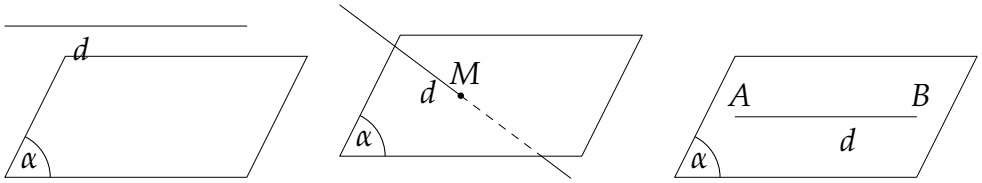
1) Đường thẳng song song với mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α). Nếu d và mặt phẳng α không có điểm chung thì ta nói d song song với (α) hay (α) song song d. Kí hiệu là $d//(\alpha)$ hay $(\alpha)//d$.

Ngoài ra

a) Nếu d và (α) có một điểm chung duy nhất M thì ta nói d và (α) cắt nhau tại điểm M và kí hiệu $d \cap (\alpha) = \{M\}$ hay $d \cap (\alpha) = M$.

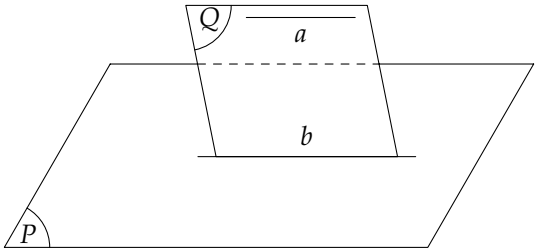
b) Nếu d và (α) có nhiều hơn một điểm chung thì ta nói d nằm trong (α) hay (α) chứa d và kí hiệu $d \subset (\alpha)$ hay $(\alpha) \supset d$.



$d//(\alpha)$ $\qquad$ $d \cap (\alpha) = M$ $\qquad$ $d \subset (\alpha)$

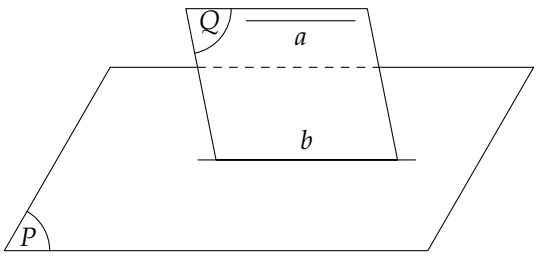
2) Điều kiện và tính chất của đường thẳng song song với mặt phẳng

Tính chất. *Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) thì a song song với (P).*



3) Điều kiện và tính chất của đường thẳng song song với mặt phẳng

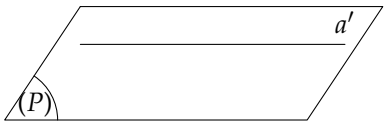
Tính chất. *Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) thì a song song với (P).*



II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Đường thẳng song song với mặt phẳng

Với $a \notin (P)$ thì nếu $a // d, d \subset (P) \Rightarrow a // (P)$.



Ví dụ 1

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Chứng minh rằng $AB // (SCD)$.

Ví dụ 2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD.

a) Chứng minh $MN // (SBC)$ và $MN // (SAD)$.

b) Gọi E là trung điểm của SA. Chứng minh $SB // (MNE)$ và $SC // (MNE)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD. Chứng minh rằng MN song song với các mặt phẳng (ABC) và (ABD).

Bài 2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, CD và SA.

a) Chứng minh $MN//(SAD)$ và $SB//(MNP)$.

b) Gọi G, I là trọng tâm của tam giác ABC và SBC. Chứng minh $GI//(SAB)$.

Dạng 2 Xác định thiết diện bằng cách kẻ song song

Để tìm thiết diện của mặt phẳng (P) qua điểm M và song song với hai cạnh a, b của hình chóp ta làm như sau

- Xét các mặt của hình chóp chứa cạnh a.
- Trong mặt phẳng đang xét, từ M vẽ đường thẳng song song với a.
- Xét các mặt của hình chóp chứa cạnh b.
- Trong mặt phẳng đang xét, từ M vẽ đường thẳng song song với b.

Nối các đoạn giao tuyến lại ta được thiết diện của mặt phẳng (P) với hình chóp.

Ví dụ 3

Cho hình chóp $S.ABCD$. M, N là hai điểm trên AB, CD. Mặt phẳng (P) qua MN và song song với SA. Xác định thiết diện của (P) với hình chóp.

Ví dụ 4

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Mặt phẳng (P) đi qua một điểm M trên đoạn IJ và song song với AB và CD. Xác định thiết diện của (P) với tứ diện $ABCD$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3 ☆

Cho hình chóp $S.ABCD$. M, N là hai điểm trên SB, CD. Mặt phẳng (P) qua MN và song song với SC. Xác định thiết diện của (P) với hình chóp.

Bài 4 ☆

Cho tứ diện $ABCD$, điểm E nằm giữa hai điểm A và C. Gọi P là mặt phẳng qua E và song song với hai đường thẳng AB, CD. Xác định các giao tuyến của (P) và các mặt của tứ diện. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?

Bài 5 ☆

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành. Một mặt phẳng (P) qua O đồng thời song song với SA và CD. Tìm thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp.

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là **đúng**?

Ⓐ Nếu đường thẳng d song song mặt phẳng (P) thì trong (P) có duy nhất một đường thẳng a song song với d.

Ⓑ Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) thì d song song với mọi đường thẳng nằm trong (P).

Ⓒ Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) thì trong (P) tồn tại đường thẳng a song song với d.

Ⓓ Nếu đường thẳng d song song mặt phẳng (P), đường thẳng a bất kỳ nằm trong (P) thì a và d chéo nhau.

Câu 2. Trong không gian cho mặt phẳng (α) và A không thuộc (α). Qua điểm A có thể dựng được bao nhiêu đường thẳng song song với (α)?

Ⓐ Duy nhất. Ⓑ Vô số . Ⓒ 2. Ⓓ 1.

Câu 3. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O không nằm trong Δ. Qua điểm O cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng song song với đường thẳng Δ?

Ⓐ Vô số. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Câu 4. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Khẳng định nào sau đây **sai**?

Ⓐ Có duy nhất một mặt phẳng song song với a và b.

Ⓑ Có vô số đường thẳng song song với a và cắt b.

Ⓒ Có duy nhất một mặt phẳng qua a và song song với b.

Ⓓ Có duy nhất một mặt phẳng qua điểm M, song song với a và b (với M là điểm cho trước).

Câu 5. Cho $d//(\alpha)$, mặt phẳng (β) qua d cắt (α) theo giao tuyến d'. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ d cắt d'. Ⓑ $d//d'$. Ⓒ d và d' chéo nhau. Ⓓ $d \equiv d'$.

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACD, điểm M nằm trên cạnh AB sao cho $AM = 2MB$. Đường thẳng MG song song với mặt phẳng

Ⓐ (ACD). Ⓑ (ABD). Ⓒ (BCD). Ⓓ (ABC).

Câu 7. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $MN//(ABCD)$. Ⓑ $MN//(SAB)$. Ⓒ $MN//(SCD)$. Ⓓ $MN//(SBC)$.

Câu 8. Trong không gian, đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) nếu

Ⓐ $a \not\subset (P)$. Ⓑ $\begin{cases} a//b \\ b \subset (P) \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} a//b \\ b \not\subset (P) \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} a//b \\ b \subset (P) \\ a \not\subset (P) \end{cases}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của BC, CD. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $HK//(SBD)$. Ⓑ $HK//(SAD)$. Ⓒ $HK//(SCD)$. Ⓓ $HK//(SBC)$.

Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm $\triangle ABD$ và M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM = 2MC$. Đường thẳng MG song song với mặt phẳng nào sau đây?

Ⓐ (ACD). Ⓑ (ABC). Ⓒ (ABD). Ⓓ (BCD).

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, M là trung điểm SA. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $OM//(SCD)$. Ⓑ $OM//(SBD)$. Ⓒ $OM//(SAB)$. Ⓓ $OM//(SAD)$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

Ⓐ $JI//(SAC$. Ⓑ $JI//(SAB)$. Ⓒ $JI//(SBC$. Ⓓ $JI//(SCD$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Gọi I là trung điểm của BC, K thuộc cạnh SD sao cho $SK = \dfrac{1}{2}KD$, M là giao điểm của của BD và AI. Khẳng định nào sau đây là đúng

Ⓐ $MK//(SCD)$. Ⓑ $MK//(SBD)$. Ⓒ $MK//(ABCD)$. Ⓓ $MK//(SAB)$.

Câu 14. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình bình hành. M, N lần lượt là trung điểm của SC và SD. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

Ⓐ $MN//(SBD)$. Ⓑ $MN//(SAB)$. Ⓒ $MN//(SAC)$. Ⓓ $MN//(SCD)$.

Câu 15. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $MN//(ABCD)$. Ⓑ $MN//(SAB)$. Ⓒ $MN//(SCD)$. Ⓓ $MN//(SBC)$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M và N là hai điểm trên SA, SB sao cho $\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{SN}{SB}=\dfrac{1}{3}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

Ⓐ $MN//(SAB)$. Ⓑ $MN\cap(ABCD)$. Ⓒ $MN//(SCD)$. Ⓓ $MN\cap(SCD)$.

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Đường thẳng MN song song với mặt phẳng

Ⓐ (ACD). Ⓑ (ABD). Ⓒ (BCD). Ⓓ (ABC).

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Các điểm I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác và SAB và SAD. Gọi M là trung điểm CD. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

Ⓐ $IJ//(SBD)$. Ⓑ $IJ//(SBM)$. Ⓒ $IJ//(SCD)$. Ⓓ $IJ//(SBC)$.

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm tam giác ABD. Trên đoạn BC lấy điểm M sao cho $MB=2MC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $MG//(ACD)$. Ⓑ $MG//(ABD)$. Ⓒ $MG//(ACB)$. Ⓓ $MG//(BCD)$.

Câu 20. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $MN//(ABCD)$. Ⓑ $MN//(SAB)$. Ⓒ $MN//(SCD)$. Ⓓ $MN//(SBC)$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Gọi I là trung điểm của BC, K thuộc cạnh SD sao cho $SK=\dfrac{1}{2}KD$. M là giao điểm của BD và AI. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

Ⓐ $MK//(ABCD)$. Ⓑ $MK//(SBD)$. Ⓒ $MK//(SBC)$. Ⓓ $MK//(SCD)$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Các điểm I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác và SAB và SAD. Gọi M là trung điểm CD. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

Ⓐ $IJ//(SBD)$. Ⓑ $IJ//(SBM)$. Ⓒ $IJ//(SCD)$. Ⓓ $IJ//(SBC)$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. I là trung điểm SB. J, K là điểm thuộc BC, AD sao cho $\dfrac{BJ}{BC}=\dfrac{DK}{DA}=\dfrac{1}{3}$, M là trung điểm SA. Hỏi SC song song với mặt phẳng nào sau đây?

Ⓐ (MJK). Ⓑ (IJK). Ⓒ (IBK). Ⓓ (IJA).

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi A', B' lần lượt là trung điểm của SA, SB. Đường thẳng $A'B'$ song song với mặt phẳng nào dưới đây?

Ⓐ (SAB). Ⓑ $(ABCD)$. Ⓒ (SAD). Ⓓ (SBC).

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M là trung điểm của SC. Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (SAD) cắt đường thẳng SA tại N. Khẳng

định nào sau đây là **sai**?

Ⓐ $BCMN$ là hình bình hành. Ⓑ $AD = 2MN$.

Ⓒ $MN // AD$. Ⓓ $AD // (MBC)$.

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD, P là trung điểm cạnh SA. Khi đó:

a) $MN // (SBC)$. **b)** $MN // (SAD)$.

c) SB cắt với mặt phẳng (MNP). **d)** SC cắt với mặt phẳng (MNP).

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy điểm M trên cạnh AD sao cho $AD = 3AM$. Gọi G, N theo thứ tự là trọng tâm các tam giác SAB, ABC.

a) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng đi qua S và song song với AC, BD.

b) $\dfrac{DN}{DB} = \dfrac{1}{3}$.

c) MN song song với mặt phẳng (SCD).

d) NG cắt với mặt phẳng (SAC).

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA, điểm E và F lần lượt là trung điểm của AB và BC. Khi đó

a) $EF // AC$.

b) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng qua S và song song với AC.

c) Giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (SAD) đường thẳng qua M và song song với BC.

d) Giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (SAC) là đường thẳng qua M và song song với AC.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm của SC, SA và SD. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $CD // (SAB)$.

b) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng d đi qua S và song song với AB, CD.

c) Giao tuyến của hai mặt phẳng (BMN) và $(ABCD)$ là đường thẳng Δ đi qua B và song song với AC.

d) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (BMN) với các đường thẳng AD, CD. Khi đó $\dfrac{MN}{EF} = \dfrac{1}{4}$.

Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, Q thuộc cạnh AB sao cho $AQ = 2QB$, P là trung điểm của AB, M là trung điểm của BD. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

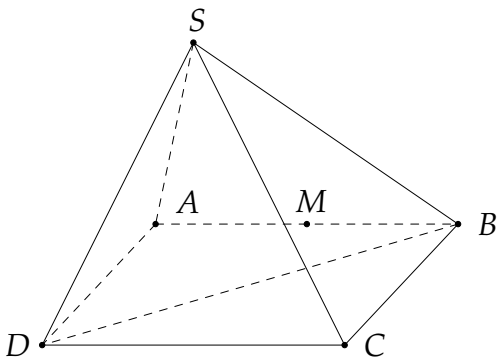
a) $Q \in (CDP)$. **b)** QG cắt (BCD). **c)** $MP // (BCD)$. **d)** $GQ // (BCD)$.

Câu 6. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng.

Gọi O, O_1 lần lượt là tâm của $ABCD$, $ABEF$; M là trung điểm của CD. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $OO_1 // (BEC)$. **b)** $OO_1 // (EFM)$. **c)** MO_1 cắt (BEC). **d)** $OO_1 // (AFD)$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua trung điểm M của cạnh AB và song song với BD, SA.



a) DM song song với (SBC).

b) Giao tuyến của (α) với (SAB) là đường thẳng qua M và song song với SB.

c) Giao tuyến của (α) với (SBD) là đường thẳng qua M và song song với BD.

d) Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α) là hình bình hành.

Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$. Giả sử M thuộc đoạn thẳng BC. Mặt phẳng (α) qua M song song với AB và CD. Khi đó

a) Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (ABC) là đường thẳng đi qua M và song song với AB.

b) Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (BCD) là đường thẳng đi qua M và song song với CD.

c) Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (ABD) là đường thẳng đi qua N và song song với AB.

d) Hình tạo bởi các giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt của tứ diện (ta gọi là thiết diện) là hình thang.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và BC. Gọi H, K lần lượt là trọng tâm của $\triangle SAB$ và $\triangle SBC$. Khi đó

a) $AC // (SIJ)$.

b) HK cắt IJ.

c) $HK // (SAC)$.

d) Giao tuyến của (BHK) và (ABC) là đường thẳng đi qua B và song song với AC.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi G là trọng tâm tam giác SAD và E là điểm trên cạnh DC sao cho $DC = 3DE$, I là trung điểm AD. Khi đó

a) $OI // (SAB)$. **b)** $OI // (SCD)$. **c)** $IE // AC$. **d)** $GE // (SBC)$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, AB là đáy lớn, O là giao điểm của AC và BD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD. Khi đó

a) $CD // (SAB)$.

b) Giao tuyến của hai mặt phẳng (CMN) và $(ABCD)$ là đường thẳng đi qua C và song song với BD.

c) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng đi qua S và song song với AD, BC.

d) Gọi P là trung điểm của SC, I là giao điểm của OP và (CMN). Khi đó $\dfrac{IP}{IO} = \dfrac{1}{4}$.

3 Tự luận.

Bài 1. Trong không gian, cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P). Những mệnh đề nào sau đây là đúng?

1. Nếu a và (P) có điểm chung thì a không song song với (P).
2. Nếu a và (P) có điểm chung thì a và (P) cắt nhau.
3. Nếu a song song với b và b nằm trong (P) thì a song song với (P).
4. Nếu a và b song song với (P) thì a song song với b.

Bài 2. Cho hai tam giác ABC và ABD không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, AD.

a) Đường thẳng AM có song song với mặt phẳng (BCD) hay không? Tại sao.

b) Đường thẳng MN có song song với mặt phẳng (BCD) hay không? Tại sao.

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh BC, CD. Chứng minh rằng đường thẳng BD song song với mặt phẳng (AMN).

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $(AB//CD)$. Gọi E là một điểm nằm giữa S và A. Gọi (P) là mặt phẳng qua E và song song với hai đường thẳng AB, AD. Xác định giao tuyến của (P) và các mặt bên của hình chóp. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?

Bài 5. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác ABD. Trên đoạn BC lấy điểm M sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng đường thẳng MG song song với mặt phẳng (ACD).

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SD, CD, BC.

a) Chứng minh đường thẳng OM song song với các mặt phẳng (SAB), (SBC).

b) Chứng minh đường thẳng SP song song với mặt phẳng (OMN).

Bài 7. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên hai đường chéo AC, BF lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{BN}{BF} = k$ $(k \neq 0, k \neq 1)$. Mặt phẳng (α) chứa đường thẳng MN, song song với đường thẳng AB, cắt AD và AF lần lượt tại M' và N'. Chứng minh rằng đường thẳng $M'N'$ song song với mặt phẳng (DEF).

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O, M là trung điểm của OC, mặt phẳng (α) đi qua M và song song với SA và BD. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α).

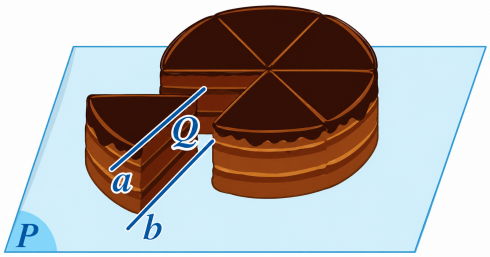
Bài 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi (α) là mặt phẳng qua trung điểm của cạnh AC, song song với AB và CD. Tìm thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi (α).

Bài 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA, SB. Điểm M bất kì thuộc cạnh BC. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi (MEF).

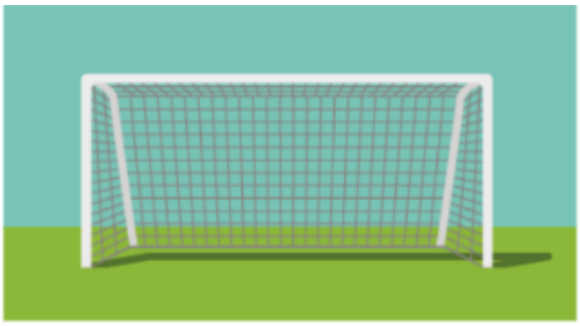
Bài 11. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O. Gọi S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng $(ABCD)$ sao cho $SB = SD$. Gọi M là điểm tùy ý trên AO với $AM = x$. Mặt phẳng (α) đi qua

M song song với SA, BD và cắt SO, SB, AB lần lượt tại N, P, Q. Cho $SA = a$, tính diện tích $MNPQ$ theo a và x, biết $NM \perp MQ$.

Bài 12. Trong Hình bên, khi cắt bánh sinh nhật, mặt cắt và mặt khay đựng bánh lần lượt gợi nên hình ảnh hai mặt phẳng (Q) và (P); mép trên và mép dưới của lát cắt lần lượt gợi nên hình ảnh hai đường thẳng a và b, trong đó $a // (P)$. Cho biết hai đường thẳng a và b có song song với nhau hay không.



Bài 13. Trong giờ học bóng đá, khi hai bạn Nam và Mai lại gần khung thành thủ môn, bạn Nam khẳng định thanh ngang trên cùng của khung thành và bóng của nó là hình ảnh của hai đường thẳng song song. Bạn Mai cho rằng hai đường thẳng này chưa chắc song song vì còn phụ thuộc vào ảnh hưởng của ánh sáng Mặt Trời nữa. Hãy cho biết ai đúng, ai sai. Vì sao? Biết rằng, Mặt Trời cách xa Trái Đất nên các tia sáng có thể xem là những đường thẳng song song.



Bài 14. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AC, BC. Gọi K là một điểm trên cạnh BD sao cho $KB = 2KD$. Mặt phẳng (IJK) cắt AD tại H. Tính $\dfrac{AH}{HD}$. 2

Bài 15. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6, CD = 8$. Mặt phẳng (P) song song với AB, CD cắt các cạnh BC, BD, AD, AC lần lượt tại M, N, I, K. Khi tứ giác $MNIK$ là một hình thoi, thì cạnh của hình thoi đó bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) 3,43

Bài 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm cạnh BC, (α) là mặt phẳng qua A, M và song song với SD. Mặt phẳng (α) cắt SB tại N, tính tỉ số $\dfrac{SN}{SB}$. 0,67

Bài 17. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh 3, G là trọng tâm tam giác BDC. Mặt phẳng qua A, G và song song với BC cắt DB, DC lần lượt tại M, N. Tính diện tích tam giác AMN. 2,45

Bài 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AB là đáy lớn. Biết $AB = 5a, CD = 2a$. Gọi E là điểm thuộc cạnh SB thỏa mãn $\dfrac{ES}{EB} = \dfrac{m}{n}$ với $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Biết rằng CE song song với mặt phẳng (SAD). Giá trị của $2m + 3n$ bằng bao nhiêu? 13

Bài 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và E là điểm thuộc cạnh SA thỏa mãn $SE = \dfrac{m}{n}.SA$ với $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Biết rằng GE song song với mặt phẳng (SCD). Giá trị của $m \cdot n$ bằng bao nhiêu? 6

Bài 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AD song song với BC và $AD = 2BC$. Gọi E là điểm thuộc cạnh BC sao cho $BC = 4BE$. Lấy F thuộc cạnh SA sao cho $FA = k \cdot FS$. Biết rằng EF song song với mặt phẳng (SCD). Khi đó giá trị của k bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) 1,67

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1 C	2 B	3 A	4 A	5 B	6 C	7 A	8 D	9 A	10 A
11 A	12 B	13 D	14 B	15 A	16 C	17 C	18 A	19 A	20 A
21 C	22 A	23 A	24 B	25 A					

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

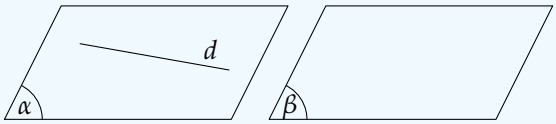
Câu 1. a Đ b Đ c S d S	Câu 2. a S b Đ c Đ d S
Câu 3. a Đ b S c Đ d Đ	Câu 4. a Đ b S c Đ d Đ
Câu 5. a S b S c S d Đ	Câu 6. a Đ b Đ c S d Đ
Câu 7. a S b S c Đ d Đ	

§4 HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Hai mặt phẳng song song

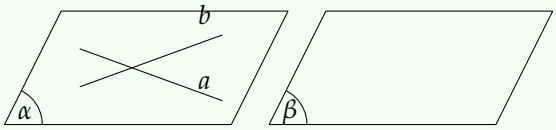
Hai mặt phẳng (α) và (β) được gọi là **song song** với nhau nếu chúng không có điểm chung.
Kí hiệu $(\alpha)//(\beta)$ hay $(\beta)//(\alpha)$



Nhận xét. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau và đường thẳng d nằm trong (α) thì d và (β) không có điểm chung, tức là d song song với (β). Như vậy, nếu một đường thẳng nằm trong một trong hai mặt phẳng song song thì đường thẳng đó song song với mặt phẳng còn lại.

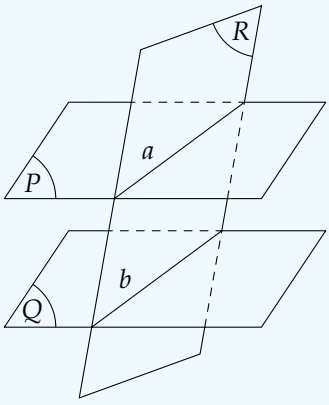
2) Điều kiện và tính chất hai mặt phẳng song song

Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau và hai đường thẳng này song song với mặt phẳng (β) thì (α) và (β) song song với nhau.



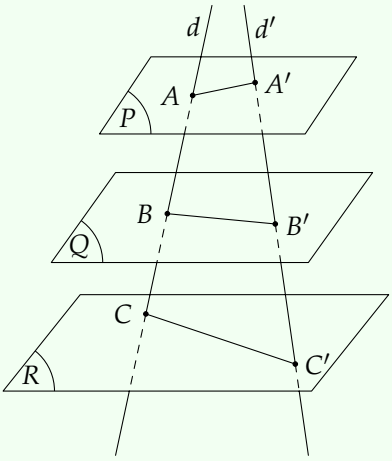
Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.



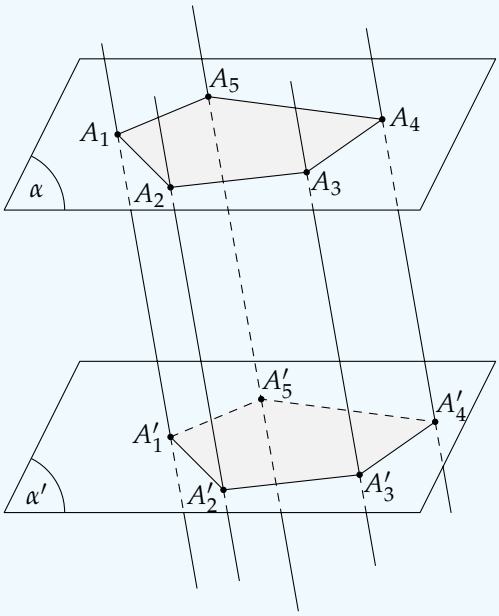
3) Định lí Thalès trong không gian

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến phân biệt bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.
Trong hình vẽ bên, ta có $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$.



4) Hình lăng trụ và hình hộp

Cho hai mặt phẳng song song (α) và (α'). Trên (α) cho đa giác lồi $A_1A_2\dots A_n$. Qua các đỉnh A_1, A_2, …, A_n vẽ các đường thẳng đôi một song song và cắt mặt phẳng (α') tại A'_1, A'_2, …, A'_n. Hình gồm hai đa giác $A_1A_2\dots A_n$, $A'_1A'_2\dots A'_n$ và các tứ giác $A_1A'_1A_2A'_2$, $A_2A'_2A_3A'_3$, …, $A_nA'_nA_1A'_1$ được gọi là **hình lăng trụ** và kí hiệu là $A_1A_2\dots A_n.A'_1A'_2\dots A'_n$.



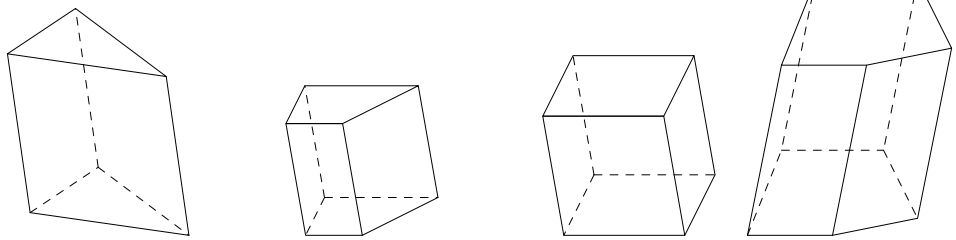
- Các điểm A_1, A_2, …, A_n và A'_1, A'_2, …, A'_n được gọi là các *đỉnh*, các đoạn thẳng $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, …, $A_nA'_n$ được gọi là các *cạnh bên*, các đoạn thẳng A_1A_2, A_2A_3, …, A_nA_1 và $A'_1A'_2$, $A'_2A'_3$, …, $A'_nA'_1$ được gọi là các *cạnh đáy* của hình lăng trụ.
- Hai đa giác $A_1A_2\dots A_n$, $A'_1A'_2\dots A'_n$ được gọi là *mặt đáy* của hình lăng trụ.
- Các tứ giác $A_1A'_1A_2A'_2$, $A_2A'_2A_3A'_3$, …, $A_nA'_nA_1A'_1$ được gọi là các **mặt bên** của hình lăng trụ.

Tên của hình lăng trụ được gọi dựa theo tên của đa giác đáy.

Hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ có hai đáy là hình bình hành được gọi là **hình hộp**.

- Các cặp điểm A và C', B và D', C và A', D và B' được gọi là các đỉnh đối diện của hình hộp.
- Các đoạn thẳng AC', BD', CA' và DB' được gọi là các đường chéo của hình hộp.
- Các cặp tứ giác $ABCD$, $A'B'C'D'$, $ADD'A'$ và $BCC'B'$, $ABB'A'$ và $CDD'C'$ được gọi là hai mặt đối diện của hình hộp.

Minh họa vài mô hình thường gặp:

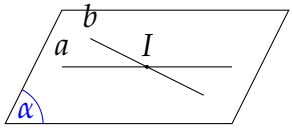


* Lăng trụ tam giác * Lăng trụ tứ giác * Hình hộp * Lăng trụ ngũ giác

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Chứng minh hai mặt phẳng song song

Để chứng minh hai mặt phẳng $(\alpha)//(\beta)$, ta chứng minh mặt phẳng (α) có hai đường thẳng *cắt nhau* và lần lượt song song với mặt phẳng (β).



Cụ thể

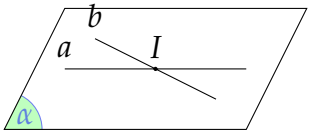
$$\begin{cases} a//(\beta) \\ b//(\beta) \\ a,b\subset(\alpha) \\ a\cap b=I \end{cases} \Rightarrow (\alpha)//(\beta).$$

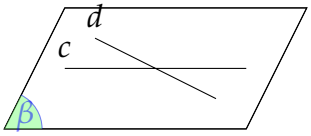


Ngoài ra, dựa vào phương pháp chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng, ta còn có thể chứng minh hai mặt phẳng song song như sau: **chứng minh hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng này, song song với hai đường thẳng (cắt nhau) nằm trong mặt phẳng kia.**

Cụ thể

$$\begin{cases} a//c \\ b//d \\ a,\ b\subset(\alpha) \\ c,\ d\subset(\beta) \\ a\cap b=I \end{cases} \Rightarrow (\alpha)//(\beta).$$





Ví dụ 1

Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC và K là điểm bất kỳ trên cạnh MN. Chứng minh rằng $(MNP)//(ABC)$. Từ đó suy ra $PK//(ABC)$.

Ví dụ 2

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ABD. Chứng minh mặt phẳng $(G_1G_2G_3)$ song song với mặt phẳng (BCD).

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB.

a) Chứng minh $(OMN)//(SCD)$.

b) Gọi K là điểm bất kỳ trên MN. Chứng minh $OK//(SCD)$.

Bài 2 ☆

Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang mà $AD//BC$ và $AD = 2BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và AD. Chứng minh: $(BMN)//(SCD)$, từ đó suy ra $BM//(SCD)$.

Bài 3 ☆

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn AD gấp đôi đáy bé BC. Gọi $O = AC \cap BD$, M thuộc cạnh SA sao cho $AM = 2MS$ và N thuộc cạnh SB sao cho $2BN = NS$.

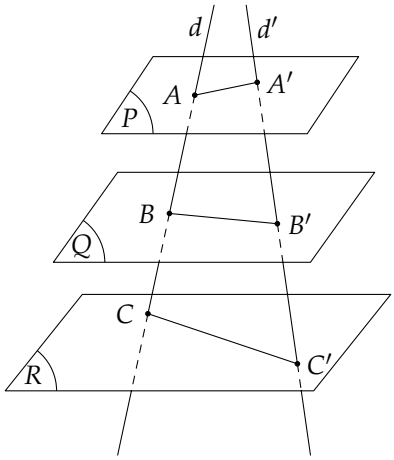
a) Chứng minh rằng $(OMN)//(SCD)$.

b) Gọi $d = (OMN) \cap (ABCD)$, $P = d \cap AD$, $Q = d \cap BC$. Chứng minh tứ giác $PQCD$ là hình bình hành.

Dạng 2 Áp dụng định lý Thales trong không gian

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến phân biệt bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Trong hình vẽ bên, ta có $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$.

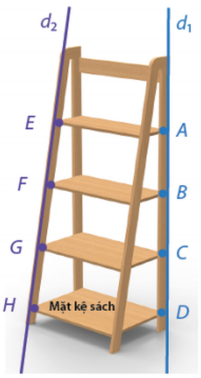


Ví dụ 3

Cho hình chóp $S.ABC$, trên cạnh SA lấy hai điểm A_1, A_2 sao cho $A_2A_1 = 2A_1A$. Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng lần lượt đi qua A_1, A_2, đồng thời cùng song song với (ABC). Mặt phẳng (P) cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại B_1, C_1; mặt phẳng (Q) lần lượt cắt các cạnh SB, SC tại B_2, C_2. Chứng minh $B_2B_1 = 2B_1B$ và $C_2C_1 = 2C_1C$.

Ví dụ 4

Hình bên là kệ sách gỗ có bốn mặt kệ, với thanh gỗ đứng (xem như đường thẳng d_1) và thanh gỗ xiên (xem như đường thẳng d_2). Giả sử các mặt kệ xuất hiện ở các vị trí A, B, C, D, E, F, G, H. Biết rằng $EF = 32\,\text{cm}$ và các điểm A, B, C, D cách đều nhau. Các mặt kệ đặt song song với mặt đất. Tính độ dài HE. 96



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 9$, $SB = 12$, $SC = 15$. Trên cạnh SA lấy các điểm M, N sao cho $SM = 4$, $MN = 3$, $NA = 2$. Vẽ hai mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC), lần lượt đi qua M, N, cắt SB theo thứ tự tại M', N' và cắt SC theo thứ tự tại M'', N''. Tính độ dài các đoạn thẳng SM', $M'N'$, $M''N''$, $N''C$.

$SM' = \frac{16}{3}, M'N' = 4, M''N'' = 5, N''C = \frac{10}{3}$

Bài 5

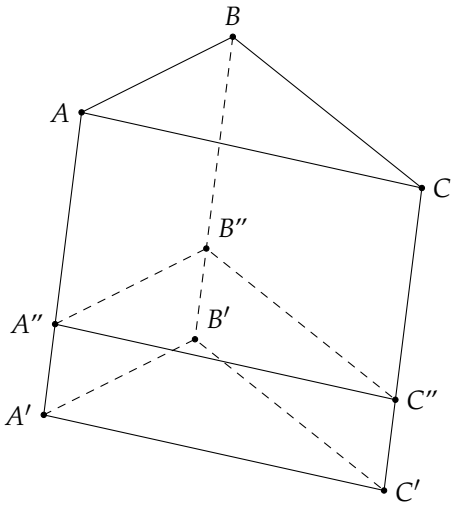
Các kệ trong ngăn mát của tủ lạnh có thể xem là hình ảnh của các mặt phẳng (Hình vẽ). Thông tin từ nhà sản xuất là các kệ này được lắp song song với nhau. Bề mặt bên trái và bên phải của tủ lạnh có các giá đỡ bên dưới các kệ. Nếu các giá đỡ ở mặt bên trái cách đều nhau một khoảng 15 cm thì các giá đỡ ở mặt bên phải cách nhau bao nhiêu? Vì sao?



Dạng 3 Các bài toán liên quan đến hình lăng trụ và hình hộp

Ví dụ 5

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ (hình vẽ bên). Một mặt phẳng song song với mặt đáy của hình lăng trụ cắt các cạnh bên của hình lăng trụ lần lượt tại A'', B'', C''. Chứng minh rằng $ABC.A''B''C''$ là hình lăng trụ.



Ví dụ 6

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, M' lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC và $A'B'$.

a) Chứng minh $(MNM')//(BCC'B')$.

b) Tìm giao điểm N' của $A'C'$ và (MNM'). Tứ giác $MNN'M'$ là hình gì?

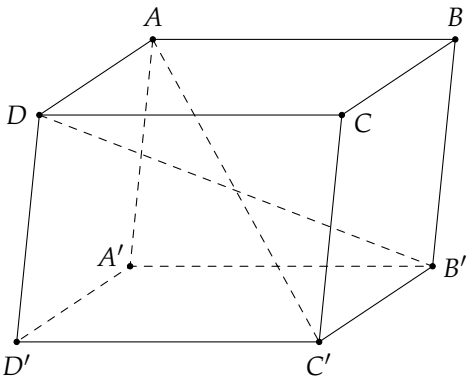
Ví dụ 7

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AD, $A'D'$. Xác định giao tuyến của (MNP) và các mặt $(A'B'C'D')$, $(AA'B'B)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6 ☆

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (hình vẽ bên). Chứng minh rằng các đường chéo AC', BD', CA' và DB' của hình hộp cùng đi qua trung điểm của mỗi đường.



Bài 7 ☆

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của $A'B'$. Tìm thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua M và song song với mặt phẳng $(A'C'C)$. Thiết diện là hình gì?

. . . .

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

Ⓐ Nếu hai mặt phẳng song song với nhau thì chúng không có điểm chung.

Ⓑ Nếu hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

Ⓒ Nếu hai mặt phẳng song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này đều song song với mặt phẳng kia.

Ⓓ Nếu một mặt phẳng cắt hai mặt phẳng song song với nhau cho trước theo hai giao tuyến thì hai giao tuyến này song song với nhau.

Câu 2. Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α). Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua d và song song với (α)?

Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ 2. Ⓓ Vô số.

Câu 3. Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β)?

Ⓐ $(\alpha)//(\gamma)$ và $(\beta)//(\gamma)$ (với (γ) là mặt phẳng nào đó).

Ⓑ $(\alpha)//a$ và $(\alpha)//b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt thuộc (β).

Ⓒ $(\alpha)//a$ và $(\alpha)//b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt cùng song song với (β).

Ⓓ $(\alpha)//a$ và $(\alpha)//b$ với a, b là hai đường thẳng cắt nhau thuộc (β).

Câu 4. Cho các mệnh đề sau:

① Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.

② Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

③ Bất kì đường thẳng nào cắt một trong hai mặt phẳng song song thì nó cũng cắt mặt phẳng còn lại.

Số mệnh đề **sai** là

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Câu 5. Cho đường thẳng a thuộc mặt phẳng (P) và đường thẳng b thuộc mặt phẳng (Q). Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $(P)//(Q) \Rightarrow a//(Q)$ và $b//(P)$.
Ⓑ a và b chéo nhau.
Ⓒ $(P)//(Q) \Rightarrow a//b$.
Ⓓ $a//b \Rightarrow (P)//(Q)$.

Câu 6. Hình lăng trụ tam giác có tất cả bao nhiêu cạnh?

Ⓐ 6. Ⓑ 9. Ⓒ 12. Ⓓ 3.

Câu 7. Đặc điểm nào sau đây là đúng với hình lăng trụ?

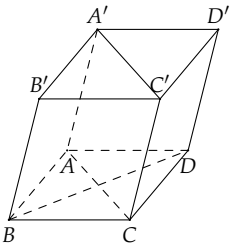
Ⓐ Đáy của hình lăng trụ là hình bình hành.
Ⓑ Hình lăng trụ có tất cả các mặt song song với nhau.
Ⓒ Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên là hình bình hành.
Ⓓ Hình lăng trụ có tất cả các mặt là hình bình hành.

Câu 8. Trong không gian, cho đường thẳng d và hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ Nếu (P) và (Q) cùng cắt d thì (P) song song với (Q).
Ⓑ Nếu (P) và (Q) cùng song song với d thì (P) song song với (Q).
Ⓒ Nếu (P) song song với (Q) và d nằm trong mp (P) thì d song song với (Q).
Ⓓ Nếu (P) song song với (Q) và d cắt (P) thì d song song với (Q).

Câu 9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

Ⓐ $(ABCD)//(A'B'C'D')$.
Ⓑ $(AA'D'D)//(BCC'B')$.
Ⓒ $(BDD'B')//(ACC'A')$.
Ⓓ $(ABB'A')//(CDD'C')$.



Câu 10. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(AB'D')$ song song với mặt phẳng

Ⓐ (BCA'). Ⓑ (BDA'). Ⓒ $(A'C'C)$. Ⓓ $(BC'D)$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC, SD. Chọn khẳng định đúng.

Ⓐ $(CMN)//(BPQ)$. Ⓑ $(CMQ)//(DMN)$. Ⓒ $(MNP)//(BCD)$. Ⓓ $(PQD)//(MNB)$.

Câu 12. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $MN//(ABCD)$. Ⓑ $MN//(SAB)$. Ⓒ $MN//(SAD)$. Ⓓ $MN//(SCD)$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $(AB//CD)$ và $AB = 2CD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SB và AB. Mặt phẳng nào song song với mặt phẳng (SAD)?

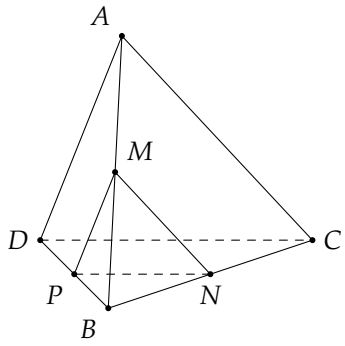
Ⓐ (BCI). Ⓑ (BIJ). Ⓒ (CIJ). Ⓓ (SJC).

Câu 14. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, ACC' và $AB'C'$. Mặt phẳng nào sau đây song song với (IJK)?

Ⓐ $(BC'A)$. Ⓑ $(AA'B)$. Ⓒ $(BB'C)$. Ⓓ $(CC'A)$.

Câu 15. Cho tứ diện $ABCD$, Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, BD. Mặt phẳng (MNP) song song với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?

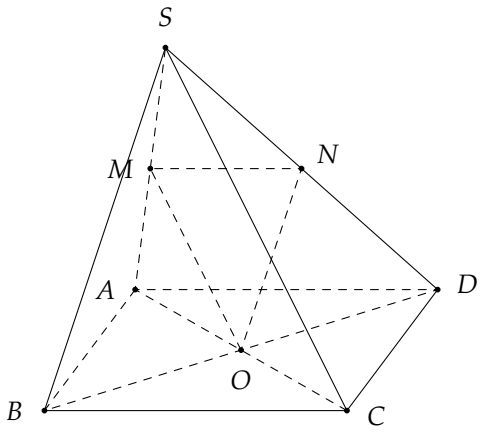
Ⓐ (BCD). Ⓑ (ABD). Ⓒ (ABC). Ⓓ (ACD).



Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, SB. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây.

Ⓐ $(MNK)//(SAC)$. Ⓑ $(MNK)//(SAD)$. Ⓒ $(MNK)//(SCD)$. Ⓓ $(MNK)//(SAB)$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD.



Mặt phẳng (OMN) song song với mặt phẳng nào sau đây?

Ⓐ (SBC). Ⓑ (SCD). Ⓒ $(ABCD)$. Ⓓ (SAB).

Câu 18. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây là sai?

Ⓐ $(BDD'B')//(ACC'A')$. Ⓑ $(ABCD)//(A'B'C'D')$.

Ⓒ $(ABB'A')//(CDD'C')$. Ⓓ $(AA'D'D)//(BCC'B')$.

Câu 19. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, AA', $A'C'$, BC. Ta có

Ⓐ $(MNP)//(BCA)$. Ⓑ $(MNQ)//(A'B'C')$.

Ⓒ $(NQP)//(CAB)$. Ⓓ $(MPQ)//(ABA')$.

Câu 20. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây sai?

Ⓐ $(BA'D')//(ADC')$. Ⓑ $(ABB')//(CDD')$.

Ⓒ $(ABO')//(OC'D')$. Ⓓ $(B'AC)//(DA'C')$.

Câu 21. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không thuộc cùng một mặt phẳng, có cạnh chung AB. Kết quả nào sau đây đúng?

Ⓐ $BC//(AEF)$. Ⓑ $FD//(BEF)$. Ⓒ $(CEF)//(ABD)$. Ⓓ $(AFD)//(BCE)$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $(AB//CD)$ và $AB = 2CD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm SB và AB. Mặt phẳng nào song song với mặt phẳng (SAD)?

Ⓐ (SJC). Ⓑ (ICB). Ⓒ (IJB). Ⓓ (IJC).

Câu 23. Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành $ABCD$, qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn đường thẳng a, b, c, d đôi một song song với nhau và không nằm trên (P). Mặt phẳng song song với mặt phẳng (b, c) là

Ⓐ (a, b). Ⓑ (a, c). Ⓒ (a, d). Ⓓ (d, b).

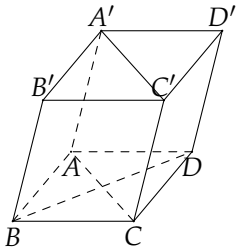
Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình bình hành. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

Ⓐ $A'C'//BD$. Ⓑ $A'B'//(SAD)$. Ⓒ $(A'C'D')//(ABC)$. Ⓓ $A'B'//(SBD)$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD. Mặt phẳng (OMN) song song với mặt phẳng nào sau đây?

Ⓐ $(ABCD)$. Ⓑ (SCD). Ⓒ (SBC). Ⓓ (SAB).

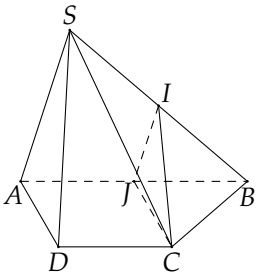
Câu 26. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(BC'D)$ song song với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?



Ⓐ $(AB'D')$. Ⓑ $(A'C'C)$.

Ⓒ (BDA'). Ⓓ (BCA').

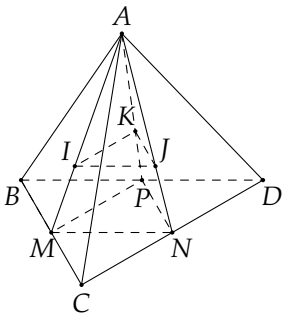
Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $(AB//CD)$ và $AB = 2CD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SB và AB. Mặt phẳng nào song song với mặt phẳng (SAD)?



Ⓐ (BCI). Ⓑ (BIJ).

Ⓒ (SJC). Ⓓ (CIJ).

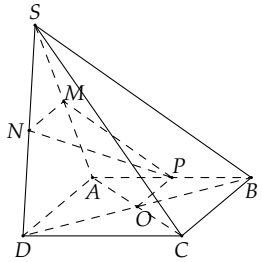
Câu 28. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACD, ABD và M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD. Khẳng định nào đúng?



Ⓐ $(DIJ)//(ABC)$. Ⓑ $(KMN)//(ABC)$.

Ⓒ $(IJK)//(BCD)$. Ⓓ $(IJK)//(KMD)$.

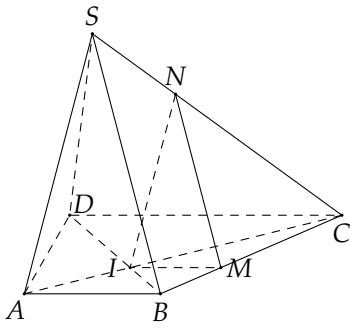
Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và AB. Khẳng định nào sau đây đúng?



Ⓐ $(NOM)//(SAC)$. Ⓑ $(MNO)//(SBC)$.

Ⓒ $(PON)//(SAD)$. Ⓓ $(NMP)//(SBD)$.

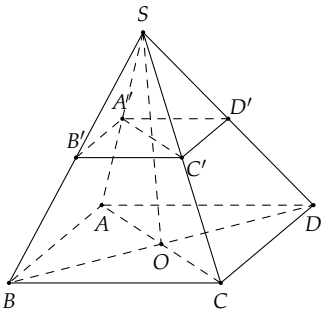
Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang, $AB//CD$, $AB=a; CD=2a$, gọi I là giao điểm của AC và BD. Qua I kẻ đường thẳng song song CD cắt BC tại M. Trên cạnh SC lấy điểm N sao cho: $CN=2NS$. Khẳng định nào sau đây đúng?



Ⓐ $(IMN)//(SAB)$. Ⓑ $(IMN)//(SAD)$.

Ⓒ $(IMN)//(SAC)$. Ⓓ $(IMN)//(SBD)$.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:



Ⓐ $A'C'//(SBD)$. Ⓑ $(A'B'C')//(ABC)$.

Ⓒ $A'B'//(SAD)$. Ⓓ $A'C'//BD$.

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

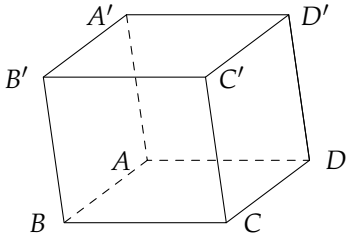
a) Các mặt đối diện của một hình hộp nằm trên những cặp mặt phẳng song song.

b) Các mặt của một hình hộp là những hình chữ nhật.

c) Các mặt đối diện của một hình lăng trụ tứ giác nằm trên những mặt phẳng song song với nhau.

d) Các mặt bên của một hình lăng trụ tứ giác là những hình bình hành.

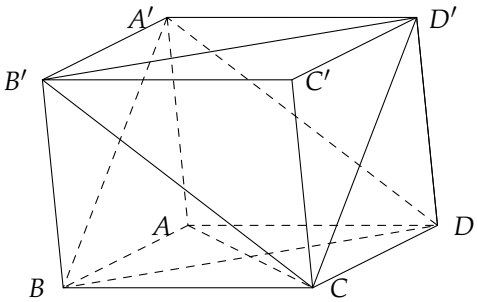
Câu 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $(ABCD)//(A'B'C'D')$. **b)** $(ABB'A')//(CDD'C')$.

c) $(AA'D'D)//(BCC'B')$. **d)** $(BDD'B')//(ACC'A')$.

Câu 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác BDA' và $B'D'C$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $(BDA')//(B'D'C)$.

b) $BG//(B'D'C)$.

c) $CG'//(ADD'A')$.

d) G và G' chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

Câu 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' cắt (DBA') và $(D'B'C)$ lần lượt tại H, K. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Các trung điểm của sáu cạnh $BC, CD, DD', D'A', A'B', B'B$ không thuộc cùng một mặt phẳng.

b) $(BDA')//(B'D'C)$.

c) $AH = HK = KC'$.

d) H, K lần lượt là trọng tâm của các tam BDA' và $B'D'C$.

Câu 5. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có I, K, G lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, $A'B'C'$, ACC'. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của $BC, B'C'$.

a) $AMM'A'$ là hình bình hành.

b) $\dfrac{AI}{AM} = \dfrac{AG}{AN} = \dfrac{1}{3}$.

c) (IKG) cắt $(BCC'B')$.

d) $(A'KG)//(AIB')$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC. Gọi M là giao điểm của AI và KD, N là giao điểm của DH và CI.

a) $HI//(ABCD)$.

b) $(HIK)//(ABCD)$.

c) SM và HI chéo nhau.

d) (SMN) cắt (HIK).

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SD.

a) $MN//(SBC)$.

b) $(OMN)//(SBC)$.

c) Gọi E là trung điểm đoạn AB và F là một điểm thuộc đoạn ON. Khi đó EF cắt với mặt phẳng $(SBC$.

d) Gọi G là một điểm trên mặt phẳng $(ABCD)$ cách đều AB và CD. Khi đó GN cắt (SAB).

Câu 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G_1, G_2 là trọng tâm của các tam giác $A'BD$, $B'D'C$.

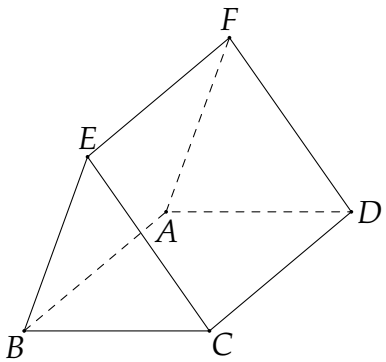
a) $A'D'CB$ là hình bình hành.

b) $(A'BD)//(B'D'C)$.

c) G_1, G_2 cùng thuộc AC'.

d) $G_1G_2 = \dfrac{2}{3}AC'$.

Câu 9. Cho hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm ở hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M là trọng tâm $\triangle ABE$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt (ADF). Lấy N là giao điểm của (P) và AC.



a) $EFDC$ là hình thang.

b) $FD//EC$.

c) $(ADF)//(BCE)$.

d) $\dfrac{AN}{NC} = 3$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SD. Khi đó

a) ON chéo nhau với SB.

b) $(OMN)//(SBC)$.

c) Gọi P và Q là trung điểm của AB và ON. Khi đó PQ cắt (SBC).

d) Gọi R là trung điểm AD. Khi đó $(MOR)//(SCD)$.

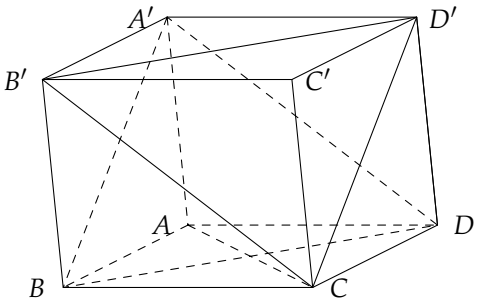
Câu 11. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi I và I' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$.

a) $II' // BB'$.
b) $AA'I'I$ là hình bình hành.
c) IA' song song $(AB'C')$.
d) Giao tuyến của $(AB'C')$ và $(A'BC')$ là đường thẳng đi qua giao điểm của hai đường thẳng AI', $A'I$.

Câu 12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh AA', BB', CC', DD' song song với nhau.
a) $(BDA')//(B'D'C')$.
b) Đường chéo AC' đi qua trọng tâm G_1, G_2 của tam giác BDA' và $B'D'C$.
c) $AG_1 = 2G_1G_2$.
d) Mặt phẳng $(A'B'G_2)$ cắt hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tạo thành một tứ giác là hình bình hành.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là điểm của SA và SD. Khi đó
a) ON chéo nhau với SB.
b) $(OMN)//(SBC)$.
c) Gọi P và Q là trung điểm của AB và ON. Khi đó PQ cắt (SBC).
d) Gọi R là trung điểm AD. Khi đó $(MOR)//(SCD)$.

Câu 14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác BDA' và $B'D'C$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:
a) $(BDA')//(B'D'C)$.
b) $BG//(B'D'C)$.
c) $CG'//(ADD'A')$.
d) G và G' chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.



3 Tự luận.

Bài 1. Trong không gian cho ba mặt phẳng phân biệt (P), (Q), (R). Những mệnh đề nào sau đây là đúng?

1. Nếu (P) chứa một đường thẳng song song với (Q) thì (P) song song với (Q).
2. Nếu (P) chứa hai đường thẳng song song với (Q) thì (P) song song với (Q).
3. Nếu (P) và (Q) song song với (R) thì (P) song song với (Q).
4. Nếu (P) và (Q) cắt (R) thì (P) và (Q) song song với nhau.

Bài 2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', BB', CC'. Chứng minh rằng mặt phẳng (MNP) song song với mặt phẳng (ABC).

Bài 3. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AB và CD. Qua các điểm A, D lần lượt vẽ các đường thẳng m, n song song với nhau và không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh rằng $\text{mp}(B, m)$ và $\text{mp}(C, n)$ song song với nhau.

Bài 4. Cho hình tứ diện $SABC$. Trên cạnh SA lấy các điểm A_1, A_2 sao cho $AA_1 = A_1A_2 = A_2S$. Gọi (P), (Q) là hai mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) và lần lượt đi qua A_1, A_2. Mặt phẳng (P) cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại B_1, C_1. Mặt phẳng (Q) cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại B_2, C_2. Chứng minh $BB_1 = B_1B_2 = B_2S$ và $CC_1 = C_1C_2 = C_2S$.

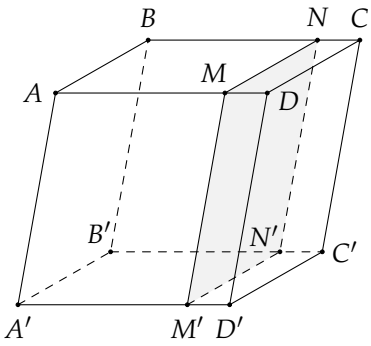
Bài 5. Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng song song với mặt phẳng $(A'B'C'D')$ cắt các cạnh bên của hình lăng trụ lần lượt tại A'', B'', C'', D''. Hỏi hình tạo bởi các điểm A, B, C, D, A'', B'', C'', D'' là hình gì?

Bài 6. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và $A'B'C'$.

a) Chứng minh rằng tứ giác $AGG'A'$ là hình bình hành.

b) Chứng minh rằng $AGC.A'G'C'$ là hình lăng trụ.

Bài 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng song song với mặt bên $(ABB'A')$ của hình hộp và cắt các cạnh AD, BC, $A'D'$, $B'C'$ lần lượt tại M, N, M', N'. Chứng minh rằng $ABNM.A'B'N'M'$ là hình hộp.



Bài 8. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M và N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N'. Chứng minh

a) $(ADF)//(BCE)$.

b) $M'N'//DF$.

c) $(DEF)//(MM'N'N)$ và $MN//(DEF)$.

Bài 9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên ba cạnh AB, DD', $C'B'$ lần lượt lấy ba điểm M, N, P không trùng với các đỉnh sao cho $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{D'N}{D'D} = \dfrac{B'P}{B'C'}$ (*).

Chứng minh rằng hai mặt phẳng (MNP) và $(AB'D')$ song song với nhau.

Bài 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm H. Mặt phẳng (P) đi qua H và song song với (SAB). Tìm giao tuyến của

a) Mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(ABCD)$. b) Mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SBC).

Bài 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm bất kỳ trên AB. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với (SBC). Tìm giao tuyến của (α) với các mặt của hình chóp.

Bài 12. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AD, $A'D'$. Xác định giao tuyến của (MNP) và các mặt $(A'B'C'D')$, $(AA'B'B)$.

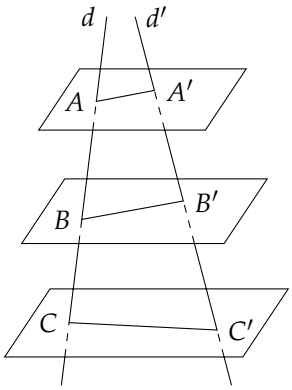
Bài 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O có $AC = a$, $BD = b$. Tam giác SBD là tam giác đều. Một mặt phẳng (α) di động song song với mặt phẳng (SBD) và đi qua điểm I trên đoạn AC.

a) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α).

b) Tính diện tích thiết diện theo a, b và $x = AI$.

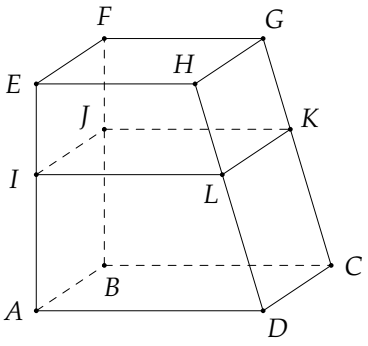
Bài 14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AD, CC' sao cho $\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{CN}{NC'}$. Xác định thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng qua MN và song song với (ACB')

Bài 15. Cho ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ đôi một song song. Hai đường thẳng d, d' cắt ba mặt phẳng lần lượt tại A, B, C và A', B', C'. Biết rằng $AB = 2$cm, $BC = 6$ cm và $A'B' = 3$ cm, tính $B'C'$. 9



Bài 16. Một kệ để đồ bằng gỗ có mâm tầng dưới $(ABCD)$ và mâm tầng trên $(EFGH)$ song song với nhau. Bác thợ mộc đo được $AE = 80$ cm, $CG = 90$ cm và muốn đóng thêm một mâm tầng giữa $(IJKL)$ song song với hai mâm tầng trên và dưới sao cho khoảng cách $EI = 36$ cm (tham khảo hình vẽ). Hãy giúp bác thợ mộc tính độ dài GK để đặt mâm tầng giữa cho kệ để đồ đúng vị trí.

40,5



Bài 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Trên các cạnh SB, SD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SN}{SD} = \dfrac{2}{3}$. Mặt phẳng (α) đi qua điểm O và song song với mặt phẳng (AMN) cắt SC tại J. Tính tỉ số $\dfrac{SJ}{SC}$? 0,75

Bài 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, E là trung điểm của SB. Biết rằng $\triangle EAC$ đều, $BD = 2AC = 2$. Lấy I trên đoạn OD với $DI = x$ $(0 < x < 1)$. Gọi (α) là mặt phẳng qua I và song song với (ACE). Mặt phẳng (α) cắt AD, CD, SC, SB, SA lần lượt tại M, N, P, Q, R. Tìm diện tích lớn nhất của ngũ giác $MNPQR$? (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*). 0,58

Bài 19. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N, P lần lượt là trung điểm của $A'B', BC, DD'$. Gọi E, F, G lần lượt là giao điểm của AC' với các mặt phẳng $(A'BD), (MNP), (CB'D')$. Tính tỉ số $\dfrac{EG}{EF}$. 2

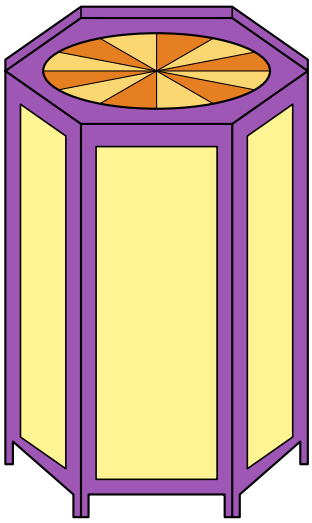


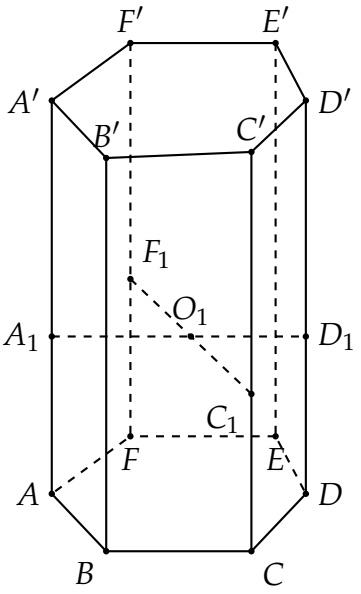
Bài 20. Sau khi gắn kệ treo tường bằng gỗ (Hình vẽ), bạn Nam chuẩn bị đặt đồ trang trí lên nhưng lại lo lắng kệ bị nghiêng, các đồ đạc sẽ bị rơi vỡ. Bạn Bình đề xuất với bạn Nam: "Chỉ cần dùng một viên bi đặt lên vài vị trí trên kệ, nếu viên bi đứng yên thì yên tâm, nếu viên bi lăn xuống thì phải chỉnh lại kệ". Xem mặt kệ và mặt đất lần lượt là hình ảnh của mặt phẳng (P) và (Q). Với cách làm của bạn Bình, nếu viên bi lăn xuống đất thì (P) và (Q) có song song với nhau không? Vì sao?

Bài 21. Để làm một khung lồng đèn kéo quân hình lăng trụ lục giác $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$, Bình gắn hai thanh tre A_1D_1, F_1C_1 song song với mặt phẳng đáy và cắt nhau tại O_1.

a) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (A_1D_1, F_1C_1) với các mặt bên của lăng trụ.

b) Cho biết $A'A_1 = 6AA_1$ và $AA' = 70$ cm. Tính CC_1 và C_1C'.





Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1 B	2 A	3 D	4 C	5 A	6 B	7 C	8 C	9 C	10 D
11 C	12 A	13 C	14 C	15 D	16 A	17 A	18 A	19 D	20 A
21 D	22 D	23 C	24 C	25 C	26 A	27 D	28 C	29 B	30 A
31 B									

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a Đ b S c S d Đ	Câu 2.	a Đ b Đ c Đ d S
Câu 3.	a Đ b Đ c S d Đ	Câu 4.	a S b Đ c Đ d Đ
Câu 5.	a Đ b S c S d Đ	Câu 6.	a Đ b Đ c S d S
Câu 7.	a Đ b Đ c S d S	Câu 8.	a Đ b Đ c Đ d S
Câu 9.	a S b Đ c Đ d S	Câu 10.	a S b Đ c S d Đ
Câu 11.	a Đ b Đ c S d Đ	Câu 12.	a Đ b Đ c S d Đ
Câu 13.	a S b Đ c S d Đ	Câu 14.	a Đ b Đ c S d Đ

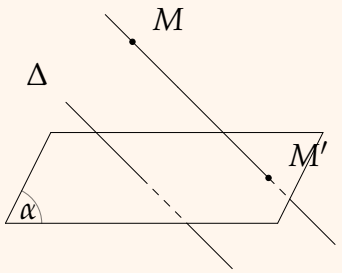
§5 PHÉP CHIẾU SONG SONG

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Phép chiếu song song

Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ cắt (α). Với mỗi điểm M trong không gian, ta xác định điểm M' như sau:

- Nếu M thuộc Δ thì M' là giao điểm của (α) và Δ.
- Nếu M không thuộc Δ thì M' là giao điểm của (α) và đường thẳng qua M song song với Δ.



Điểm M' được gọi là hình chiếu song song của điểm M trên mặt phẳng (α) theo phương Δ. Phép đặt tương ứng mỗi điểm M với hình chiếu M' của nó được gọi là phép chiếu song song lên (α) theo phương Δ.
Mặt phẳng (α) được gọi là mặt phẳng chiếu, phương Δ được gọi là phương chiếu.

Cho hình $\mathcal{H}$. Tập hợp $\mathcal{H}'$ các hình chiếu M' của các điểm M thuộc $\mathcal{H}$ qua phép chiếu song song được gọi là hình chiếu của $\mathcal{H}$ qua phép chiếu song song đó.

Lưu ý. Nếu một đường thẳng song song với phương chiếu thì hình chiếu của đường thẳng đó là một điểm.

Kể từ đây, nếu không nói gì thêm ta chỉ xét các phép chiếu mà phương chiếu không song song với mặt phẳng chiếu.

2) Tính chất của phép chiếu song song

- Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó. Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, tia thành tia, đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.
- Phép chiếu song song giữ nguyên tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng cùng nằm trên một đường thẳng hoặc nằm trên hai đường thẳng song song.

3) Hình biểu diễn của một hình không gian

Hình biểu diễn của một hình trong không gian là hình chiếu song song của hình đó trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

Khi hình phẳng nằm trong mặt phẳng không song song với phương chiếu thì hình biểu diễn của hình phẳng đó có các tính chất sau:

- Hình biểu diễn của một tam giác (cân, đều, vuông) là một tam giác.
- Hình biểu diễn của hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành là hình bình hành.
- Hình biểu diễn của hình thang $ABCD$ với $AB//CD$ là một hình thang $A'B'C'D'$ với $A'B'//C'D'$ thoả mãn $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{A'B'}{C'D'}$.

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Hình biểu diễn của một hình không gian

- Xác định các yếu tố song song của hình.
- Xác định tỉ số điểm chia đoạn thẳng.
- Hình biểu diễn phải thỏa mãn
  - Bảo đảm tính song song trên hình cho trước;
  - Bảo đảm tỉ số của điểm chia đoạn thẳng

Ví dụ 1

Trong không gian, cho tam giác ABC. Biết rằng, tam giác $A'B'C'$ có các đỉnh A', B', C' tương ứng là hình chiếu song song của các điểm A, B, C. Chứng minh rằng trung điểm các cạnh của tam giác $A'B'C'$ là hình chiếu song song của trung điểm các cạnh tam giác ABC.

Ví dụ 2

Hình thang có thể là hình biểu diễn của hình bình hành không?

Ví dụ 3

Vẽ hình biểu diễn của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ theo phương chiếu song song với BD'.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Vẽ hình biểu diễn của hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có mặt đáy $ABCD$ là hình thang, AB song song với CD và $AB = 2CD$.

Bài 2 ☆

Cho hình bình hành $ABCD$ và gọi $A'B'C'D'$ là hình chiếu của $ABCD$ trên mặt phẳng (P) theo phương d. Chứng minh rằng tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

Bài 3 ☆

Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC. Một phép chiếu song song biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$, biến M thành M'. Chứng minh rằng $A'M'$ là đường trung tuyến của tam giác $A'B'C'$.

Dạng 2 Sử dụng phép chiếu song song để chứng minh song song

Chứng minh minh đường thẳng song song với đường thẳng, đường thẳng song song với mặt phẳng và mặt phẳng song song với mặt phẳng, hoặc các vấn đề liên quan đến song song như: chứng minh một tứ giác là hình bình hành, hình thang, tính chất của hình.
Chú ý:
Khi chứng minh các yếu tố song song ta có thể sử dụng tính chất hoặc định của phép chiếu song song.
Đôi khi sẽ thuận lợi hoặc gặp khó khăn nhiều hơn song với cách chứng minh trực tiếp.

Ví dụ 4

Cho tứ diện diện $ABCD$. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của AB, AD, MN và L là một điểm nằm trên đoạn BD sao cho $BL = \frac{1}{4}BD$. Chứng minh $KL // AB$.

Ví dụ 5

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, M', N' lần lượt là trung điểm của $AC, BC, A'C', B'C'$.

1. Chứng minh rằng: $(MNN'M')//(AA'B'B)$.
2. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh rằng:$GG'//(MNN'M')$
3. Gọi I, I' lần lượt là trung điểm của AN' và AN. Chứng minh rằng:$II'//GG'$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4 ☆

Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $BCC'B'$ nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Tìm điểm M trên đoạn DB', và điểm N trên đường chéo AC sao cho $MN//BC'$.

Bài 5 ☆

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và CC'.

1. Xác định đường thẳng d qua M cắt AN và cắt $A'B$
2. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của d với AN và $A'B$. Tính $\dfrac{EM}{EF}$

Bài 6 ☆

Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$.

1. Chứng minh rằng hai đường chéo AC' và $A'C$ cắt nhau, hai đường chéo BD' à $B'D$ cắt nhau tại trung điểm M, N của mỗi đường.
2. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AC và BD. Chứng minh $MN = EF$.

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

Ⓐ Phép chiếu song song bảo toàn thứ tự ba điểm thẳng hàng.

Ⓑ Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng.

Ⓒ Hình chiếu của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

Ⓓ Hình chiếu song song của đường thẳng là đường thẳng.

Câu 2. Hình chiếu của hình chữ nhật không thể là hình nào trong các hình sau?

Ⓐ Hình bình hành. Ⓑ Hình chữ nhật. Ⓒ Hình thoi. Ⓓ Hình thang.

Câu 3. Qua phép chiếu song song, tính chất nào không được bảo toàn?

Ⓐ Chéo nhau. Ⓑ Đồng quy. Ⓒ Song song. Ⓓ Thẳng hàng.

Câu 4. Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành

Ⓐ hai đường thẳng song song.

Ⓑ hai đường thẳng trùng nhau.

Ⓒ hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

Ⓓ hai đường thẳng chéo nhau.

Câu 5. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

Ⓐ Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

Ⓑ Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song.

Ⓒ Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không thay đổi thứ tự của ba điểm đó.

Ⓓ Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một mặt phẳng.

Câu 6. Khẳng định nào sau đây **sai**?

Ⓐ Phép chiếu song song có thể biến đường tròn thành đường elip.

Ⓑ Phép chiếu song song có thể biến đường tròn thành một điểm.

Ⓒ Phép chiếu song song có thể biến đường tròn thành đoạn thẳng.

Ⓓ Phép chiếu song song có thể biến đường tròn thành đường tròn.

Câu 7. Cho tam giác ABC ở trong mp (α) và phương l. Biết hình chiếu của tam giác ABC lên mp (P) là một đoạn thẳng. Khẳng định nào sau đây đúng ?

Ⓐ $(\alpha)//(P)$. Ⓑ $(\alpha) \equiv (P)$.

Ⓒ $(\alpha)//l$ hoặc $(\alpha)\supset l$.
Ⓓ $A;B;C$ đều sai.

Câu 8. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, qua phép chiếu song song đường thẳng CC', mặt phẳng chiếu $(A'B'C')$ biến M thành M', trong đó M là trung điểm của BC. Chọn mệnh đề **đúng**?

Ⓐ M' là trung điểm của $A'B'$.
Ⓑ M' là trung điểm của $B'C'$.
Ⓒ M' là trung điểm của $A'C'$.
Ⓓ M' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$.

Câu 9. Qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P), hai đường thẳng a và b có hình chiếu là hai đường thẳng song song a' và b'. Khi đó

Ⓐ a và b phải song song với nhau.
Ⓑ a và b phải cắt nhau.
Ⓒ a và b có thể chéo nhau hoặc song song với nhau.
Ⓓ a và b không thể song song.

Câu 10. Chọn tính chất đúng của phép chiếu song song.

Ⓐ Phép chiếu song song giữ nguyên tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng cùng nằm trên một đường thẳng hoặc nằm trên hai đường thẳng song song.
Ⓑ Phép chiếu song song giữ nguyên tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên đường thẳng song song.
Ⓒ Phép chiếu song song giữ nguyên độ dài của đoạn thẳng.
Ⓓ Phép chiếu song song giữ nguyên tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng bất kì.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, gọi M là trung điểm của SC. Hình chiếu song song của điểm M theo phương AC lên mặt phẳng (SAD) là điểm nào sau đây?

Ⓐ Trung điểm của SB.
Ⓑ Trung điểm của SD.
Ⓒ Điểm D.
Ⓓ Trung điểm của SA.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Hình chiếu song song của điểm A theo phương AB lên mặt phẳng (SBC) là điểm nào sau đây?

Ⓐ S.
Ⓑ Trung điểm của BC.
Ⓒ B.
Ⓓ C.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M là trung điểm của SC. Hình chiếu song song của điểm M theo phương AB lên mặt phẳng (SAD) là điểm nào sau đây?

Ⓐ S.
Ⓑ Trung điểm của SD.
Ⓒ A.
Ⓓ D.

Câu 14. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, qua phép chiếu song song đường thẳng CC', mặt phẳng chiếu $(A'B'C')$ biến M thành M'. Trong đó M là trung điểm của BC. Chọn mệnh đề **đúng**?

Ⓐ M' là trung điểm của $A'B'$.
Ⓑ M' là trung điểm của $B'C'$.

Ⓒ M' là trung điểm của $A'C'$. Ⓓ MM' song song với AC.

Câu 15. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, gọi O, O' lần lượt là tâm của hai đáy $ABCD$, $A'B'C'D'$. Hình chiếu song song của cạnh AB lên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ theo phương OO' là

Ⓐ $B'C'$. Ⓑ $A'B'$. Ⓒ $A'D'$. Ⓓ $A'C'$.

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của AD. Hình chiếu song song của điểm M theo phương AC lên mặt phẳng (BCD) là điểm nào sau đây?

Ⓐ D. Ⓑ Trung điểm của CD.

Ⓒ Trung điểm của BD. Ⓓ Trọng tâm tam giác BCD.

Câu 17. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, gọi I, I' lần lượt là trung điểm của AB, $A'B'$. Qua phép chiếu song song đường thẳng AI', mặt phẳng chiếu $(A'B'C')$ biến I thành

Ⓐ A'. Ⓑ C'. Ⓒ B'. Ⓓ I'.

Câu 18. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của AC. Khi đó hình chiếu song song của điểm M lên $(AA'B')$ theo phương chiếu CB là

Ⓐ Trung điểm BC. Ⓑ Trung điểm AB. Ⓒ Điểm A. Ⓓ Điểm B.

Câu 19. Giả sử tam giác ABC là hình biểu diễn của một tam giác đều. Hình biểu diễn của tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều là

Ⓐ Giao điểm của hai đường trung tuyến của tam giác ABC.

Ⓑ Giao điểm của hai đường trung trực của tam giác ABC.

Ⓒ Giao điểm của hai đường cao của tam giác ABC.

Ⓓ Giao điểm của hai đường phân giác của tam giác ABC.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $SA \perp (ABCD)$, $AD = 2a$, $AB = BC = a$. Hình chiếu song song của điểm C theo phương AB lên mặt phẳng (SAD) là điểm nào sau đây?

Ⓐ S. Ⓑ Trung điểm của AD.

Ⓒ A. Ⓓ D.

Câu 21. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, O' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$. Điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Qua phép chiếu song song theo phương AO' lên mặt phẳng $(ABCD)$ thì hình chiếu của tam giác $C'MN$ là

Ⓐ Đoạn thẳng MN. Ⓑ Điểm O. Ⓒ Tam giác CMN. Ⓓ Đoạn thẳng BD.

Câu 22. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, gọi M là trung điểm của AC. Khi đó hình chiếu song song của điểm M lên $(AA'B')$ theo phương chiếu CB là

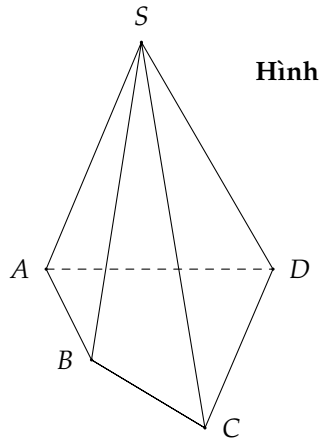
Ⓐ Trung điểm BC. Ⓑ Trung điểm AB. Ⓒ Điểm A. Ⓓ Điểm B.

Câu 23. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định các điểm M, N tương ứng trên các đoạn AC', $B'D'$ sao cho MN song song với BA' và tính tỉ số $\dfrac{MA}{MC'}$.

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 1.

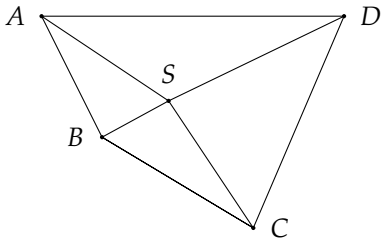
Câu 24. Hình vẽ nào sau đây **không phải** hình biểu diễn của hình chóp tứ giác $S.ABCD$?

Hình I



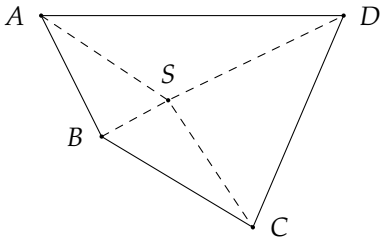
Ⓐ .

Hình II



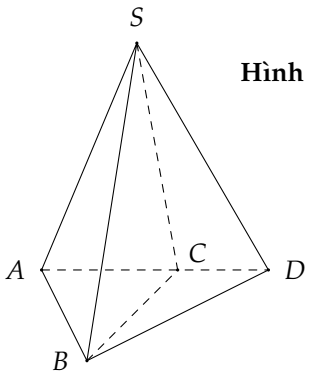
Ⓑ .

Hình III



Ⓒ .

Hình IV



Ⓓ .

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $MA = 2MS$. Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$. Một phép chiếu song song theo phương MO lên mặt phẳng $(ABCD)$ biến điểm S thành điểm N. Khi đó

a) N là hình chiếu song song của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương OM.

b) $\dfrac{AO}{AN} = \dfrac{1}{3}$.

c) $\dfrac{AN}{AC} = 4$.

d) $\dfrac{CN}{CA} = \dfrac{1}{4}$.

Câu 2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Điểm I và I' lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AB và $A'B'$.

a) $AI' // IB'$.

b) Hình chiếu song song của I trên mặt phẳng $(A'B'C')$ phương $A'I$ là điểm C'.

c) Trong mặt phẳng $(A'B'C')$ vẽ hình bình hành $A'C'MI'$, suy ra $ACMI'$ là hình bình hành.

d) M là hình chiếu song song của C theo phương AI' trên mặt phẳng $(A'B'C')$.

Câu 3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ gọi I và I' lần lượt là trung điểm của đoạn AB và $A'B'$. Khi đó

a) $AI' // IB'$.

b) Hình chiếu song song của I trên mặt phẳng $(A'B'C')$ phương $A'I$ là điểm C'.

c) Trong mặt phẳng $(A'B'C')$, vẽ hình bình hành $A'C'MI'$. Suy ra $ACMI'$ là hình bình hành.

d) M là hình chiếu song song của C theo phương AI' trên mặt phẳng $(A'B'C')$.

3 Tự luận.

Bài 1. Những mệnh đề nào trong các mệnh đề sau đây là đúng?

1. Phép chiếu song song biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
2. Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng cắt nhau.
3. Phép chiếu song song biến tam giác đều thành tam giác cân.
4. Phép chiếu song song biến hình vuông thành hình bình hành.

Bài 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

1. Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu của nó.
2. Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu của nó.
3. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.
4. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau.

Bài 3. Vẽ hình biểu diễn của một lục giác đều.

Bài 4. Vẽ hình biểu diễn của một hình vuông nội tiếp trong một hình tròn.

Bài 5. Vẽ hình biểu diễn của

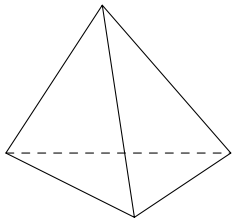
a) Một tam giác vuông nội tiếp trong một đường tròn;

b) Một lục giác đều.

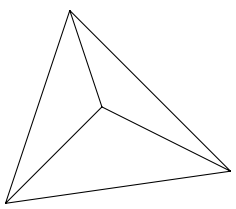
Bài 6. Nếu tam giác $A'B'C'$ là hình chiếu của tam giác ABC qua một phép chiếu song song thì tam giác ABC có phải là hình chiếu của tam giác $A'B'C'$ qua một phép chiếu song song hay không? Hãy giải thích.

Bài 7. Phép chiếu song song biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng phép chiếu đó biến trọng tâm của tam giác ABC thành trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.

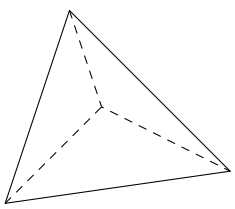
Bài 8. Trong các Hình $a)$, $b)$, $c)$, hình nào là hình biểu diễn cho hình tứ diện?



$a)$

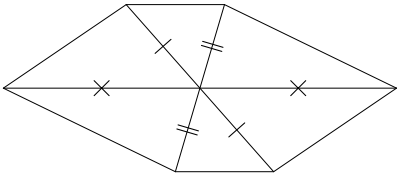


$b)$



$c)$

Bài 9. Hình bên có thể là hình biểu diễn của một hình lục giác đều hay không? Vì sao?



Bài 10. Cho hai điểm A, B nằm ngoài mặt phẳng (α) và đường thẳng d cắt (α). Giả sử đường thẳng AB cắt (α) tại điểm O. Gọi A' và B' lần lượt là hình chiếu song song của A và B trên (α) theo phương của đường thẳng d. Ba điểm O, A', B' có thẳng hàng không? Vì sao? Chọn d sao cho

a) $A'B' = AB$.

b) $A'B' = 2AB$.

Bài 11. Vẽ hình biểu diễn của

a) Hình lăng trụ có đáy là tam giác đều.

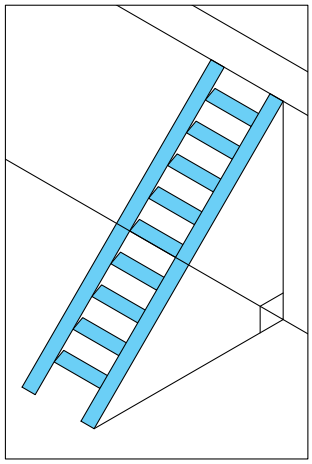
b) Hình lăng trụ có đáy là lục giác đều.

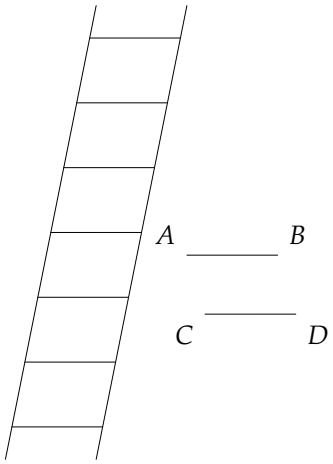
c) Hình hộp.

Bài 12. Vẽ hình biểu diễn của hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, AB song song với CD và $AB = 2$ cm, $CD = 6$ cm.

Bài 13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định ảnh của tam giác $A'C'D'$ qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương $A'B$.

Bài 14. Trong hình bên dưới, AB và CD là bóng của hai thanh chắn của một chiếc thang dưới ánh mặt trời. Hãy giải thích tại sao AB song song với CD.





Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1 B	2 D	3 A	4 C	5 B	6 B	7 C	8 B	9 C	10 A
11 D	12 C	13 B	14 B	15 B	16 B	17 C	18 B	19 B	20 B
21 A	22 B	23 A	24 D						

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a Đ b S c S d Đ
Câu 2.	a Đ b S c Đ d Đ
Câu 3.	a Đ b S c Đ d Đ

§6 ÔN TẬP CHƯƠNG 4

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Trong không gian, khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất

Ⓐ Qua 3 điểm phân biệt bất kì, có duy nhất một mặt phẳng.

Ⓑ Qua 4 điểm phân biệt bất kì, có duy nhất một mặt phẳng.

Ⓒ Qua 3 điểm không thẳng hàng, có duy nhất một mặt phẳng.

Ⓓ Qua 2 điểm phân biệt bất kì, có duy nhất một mặt phẳng.

Câu 2. Một hình chóp với đáy là một ngũ giác có số mặt và số cạnh là

Ⓐ 6 mặt, 5 cạnh. Ⓑ 6 mặt, 10 cạnh. Ⓒ 5 mặt, 5 cạnh. Ⓓ 5 mặt, 10 cạnh.

Câu 3. Trong không gian cho hai đường thẳng a, b cùng thuộc một mặt phẳng và không có điểm chung. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ a và b trùng nhau. Ⓑ a và b chéo nhau. Ⓒ a và b song song. Ⓓ a và b cắt nhau.

Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ AB và CD chéo nhau. Ⓑ AB và CD song song với nhau.

Ⓒ Tồn tại một mặt phẳng chứa AB và CD. Ⓓ AB và CD cắt nhau.

Câu 5. Khẳng định nào sau đây **sai**?

Ⓐ Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

Ⓑ Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm phân biệt.

Ⓒ Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.

Ⓓ Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.

Câu 6. Trong không gian, hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Tổng số mặt bên và mặt đáy bằng

Ⓐ 4. Ⓑ 5. Ⓒ 6. Ⓓ 7.

Câu 7. Cho hai đường thẳng a, b chéo nhau. Một đường thẳng c song song với a. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ b và c song song. Ⓑ b và c chéo nhau hoặc cắt nhau.

Ⓒ b và c cắt nhau. Ⓓ b và c chéo nhau.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ ($AB//CD$). Khẳng định nào sau đây **sai**?

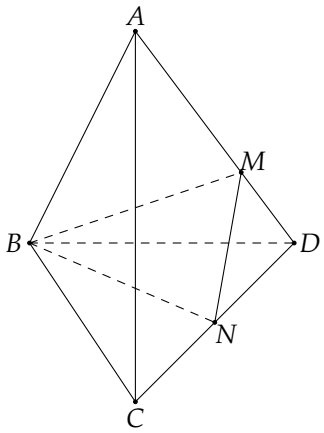
Ⓐ Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên.

Ⓑ Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO (O là giao điểm của AC và BD).

Ⓒ Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là SI (I là giao điểm của AD và BC).

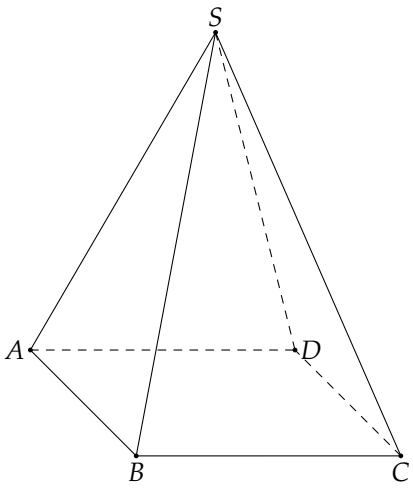
Ⓓ Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là đường trung bình của hình thang $ABCD$.

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD và CD lấy hai điểm M và N sao cho $AM = 2MD$ và $CN = ND$. Giao tuyến của mặt phẳng (BMN) và mặt phẳng (ABD) là đường thẳng nào dưới đây?



Ⓐ BN. Ⓑ MN. Ⓒ AN. Ⓓ BM.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).



Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ d qua S và song song với BC. Ⓑ d qua S và song song với DC.

Ⓒ d qua S và song song với BD. Ⓓ d qua S và song song với AB.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$, biết AC cắt BD tại M và AB cắt CD tại O. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là

Ⓐ SO. Ⓑ SM. Ⓒ SA. Ⓓ SC.

Câu 12. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

Ⓐ Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác nữa.

Ⓑ Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

Ⓒ Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

Ⓓ Hai mặt phẳng cùng đi qua 3 điểm A, B, C không thẳng hàng thì hai mặt phẳng đó trùng nhau.

Câu 13. Các yếu tố nào sau đây xác định một mặt phẳng duy nhất?

Ⓐ Ba điểm phân biệt. Ⓑ Một điểm và một đường thẳng.

Ⓒ Hai đường thẳng cắt nhau. Ⓓ Bốn điểm phân biệt.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AB cắt CD tại N; AC cắt BD tại E. Gọi M là trung điểm của SA. Giao tuyến của hai mặt phẳng (MCD) và (SAB) là

Ⓐ SN. Ⓑ SM. Ⓒ MN. Ⓓ ME.

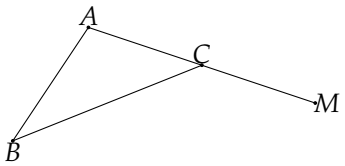
Câu 15. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng a và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường thẳng b. Vị trí tương đối của hai đường thẳng a và b là

Ⓐ chéo nhau. Ⓑ cắt nhau. Ⓒ song song. Ⓓ trùng nhau.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh SD. Đường thẳng SB song song với mặt phẳng

Ⓐ (CDM). Ⓑ (ACM). Ⓒ (ADM). Ⓓ (ACD).

Câu 17. Cho tam giác ABC. Lấy điểm M trên cạnh AC kéo dài (Hình bên). Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?



Ⓐ $M \in (ABC)$. Ⓑ $C \in (ABM)$.

Ⓒ $A \in (MBC)$. Ⓓ $B \in (ACM)$.

Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$ với I và J lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ Bốn điểm I, J, B, C đồng phẳng. Ⓑ Bốn điểm I, J, A, C đồng phẳng.

Ⓒ Bốn điểm I, J, B, D đồng phẳng. Ⓓ Bốn điểm I, J, C, D đồng phẳng.

Câu 19. Cho hình bình hành $ABCD$ và một điểm S không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là một đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

Ⓐ AB. Ⓑ AC. Ⓒ BC. Ⓓ SA.

Câu 20. Quan hệ song song trong không gian có tính chất nào trong các tính chất sau?

Ⓐ Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (P) đều song song với (Q).

Ⓑ Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (P) đều song song với mọi đường thẳng nằm trong (Q).

Ⓒ Nếu hai đường thẳng song song với nhau lần lượt nằm trong hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) thì (P) và (Q) song song với nhau.

Ⓓ Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng cho trước ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với mặt phẳng cho trước đó.

Câu 21. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, AA', $A'C'$, BC. Ta có

Ⓐ $(MNP)//(BCA)$. Ⓑ $(MNQ)//(A'B'C')$.

Ⓒ $(NQP)//(CAB)$. Ⓓ $(MPQ)//(ABA')$.

Câu 22. Trong không gian, hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi

Ⓐ Hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.

Ⓑ Hai đường thẳng không có điểm chung.

Ⓒ Hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng.

Ⓓ Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba.

Câu 23. Cho hai đường thẳng phân biệt a và b trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa a và b?

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Câu 24. Trong không gian, đường thẳng song song với mặt phẳng khi và chỉ khi

Ⓐ Đường thẳng đó song song với một đường thẳng thuộc mặt phẳng.

Ⓑ Đường thẳng và mặt phẳng không có điểm chung.

Ⓒ Đường thẳng đó không có điểm chung với một đường thẳng thuộc mặt phẳng.

Ⓓ Đường thẳng đó không có điểm chung với hai đường thẳng thuộc mặt phẳng.

Câu 25. Trong không gian, hai mặt phẳng song song với nhau khi và chỉ khi

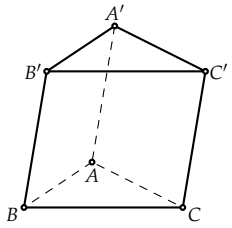
Ⓐ Có một mặt phẳng chứa hai đường thẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng còn lại.

Ⓑ Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng.

Ⓒ Hai mặt phẳng cùng song song với mặt phẳng thứ ba.

Ⓓ Hai mặt phẳng không có điểm chung.

Câu 26. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ (xem hình dưới). Đường thẳng $B'C'$ song song với mặt phẳng nào sau đây?



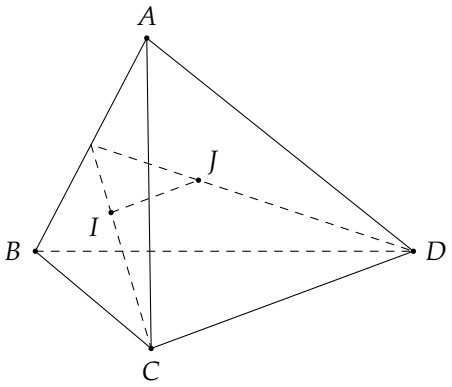
Ⓐ $(A'B'C')$. Ⓑ (ABC).

Ⓒ $(AB'C')$. Ⓓ $(BB'C')$.

Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và tam giác ABD. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $IJ//CD$. Ⓑ $IJ//AB$.

Ⓒ IJ chéo CD. Ⓓ IJ cắt AB.



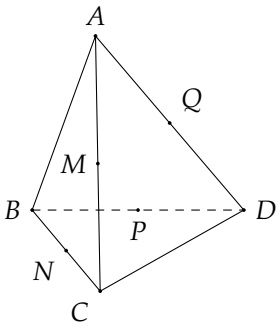
Câu 28. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD; G là trọng tâm tam giác BCD. Giao điểm của đường thẳng EG và mặt phẳng (ACD) là

Ⓐ Điểm F. Ⓑ Giao điểm của đường thẳng EG và AF.

Ⓒ Giao điểm của đường thẳng EG và AD. Ⓓ Giao điểm của đường thẳng EG và CD.

Câu 29. Cho tứ diện $ABCD$ với M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD. Tìm điều kiện để $MNPQ$ là hình thoi.

Ⓐ $AB = BC$. Ⓑ $BC = AD$. Ⓒ $AC = BD$. Ⓓ $AB = CD$.



Câu 30. Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$. Giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng MNP là giao điểm của

Ⓐ CD và NP. Ⓑ CD và MN. Ⓒ CD và MP. Ⓓ CD và AP.

Câu 31. Cho tứ diện $ABCD$ có I, J là trung điểm AD, AC. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng

Ⓐ qua I và song song với AB. Ⓑ qua J và song song với BD.

Ⓒ qua G và song song với CD. Ⓓ qua G và song song với BC.

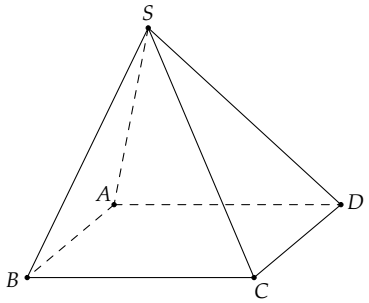
Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB//CD$ và $AB = 2CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $AB//MC$. Ⓑ $MD//NC$. Ⓒ $MN//AC$. Ⓓ $MC//ND$.

Câu 33. Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên AB, AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho MN cắt BD tại I. Điểm I không thuộc mặt phẳng nào sau đây?

Ⓐ (ABD). Ⓑ (BCD). Ⓒ (CMN). Ⓓ (ACD).

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành (như hình vẽ).



Hai đường thẳng SB và CD là hai đường thẳng

Ⓐ Song song. Ⓑ Cắt nhau. Ⓒ Chéo nhau. Ⓓ Trùng nhau.

Câu 35. Trong không gian, cho 2 đường thẳng a, b phân biệt. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\begin{cases} a//(\alpha) \\ b//(\alpha) \end{cases} \Rightarrow a//b.$ Ⓑ $\begin{cases} a//(\alpha) \\ b \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a//b.$

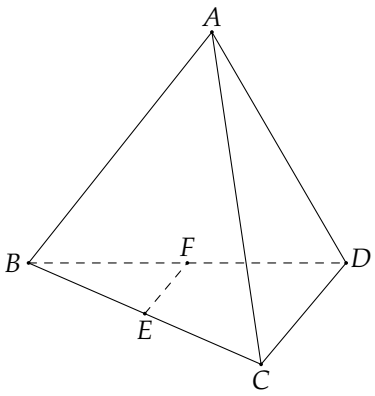
Ⓒ $\begin{cases} a \not\subset (\alpha) \\ a // b \\ b \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a // (\alpha)$.

Ⓓ $\begin{cases} a // (\alpha) \\ b // (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a$ cắt b.

Câu 36. Cho tứ diện $ABCD$ có E, F lần lượt là trung điểm cạnh BC, BD. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $EF // (ACD)$. Ⓑ $EF // (BCD)$.

Ⓒ $EF // (ABC)$. Ⓓ $EF // (ABD)$.



Câu 37. Trong không gian cho bốn điểm không đồng phẳng. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ các điểm đã cho?

Ⓐ 2. Ⓑ 4. Ⓒ 3. Ⓓ 6.

Câu 38. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Đường thẳng AG cắt đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây?

Ⓐ Đường thẳng MN. Ⓑ Đường thẳng CM.

Ⓒ Đường thẳng DN. Ⓓ Đường thẳng CD.

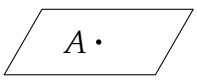
Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi E là trung điểm của SA. Mặt phẳng nào dưới đây chứa đường thẳng OE?

Ⓐ (SBC). Ⓑ $(ABCD)$. Ⓒ (CDE). Ⓓ (SAC).

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là đường thẳng

Ⓐ SC. Ⓑ SO. Ⓒ SA. Ⓓ SB.

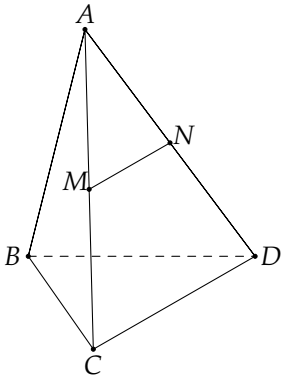
Câu 41. Cho hai điểm A, B và mặt phẳng (P) như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



Ⓐ $A \subset (P)$. Ⓑ $A \in (P)$. Ⓒ $B \in (P)$. Ⓓ $B \not\subset (P)$.

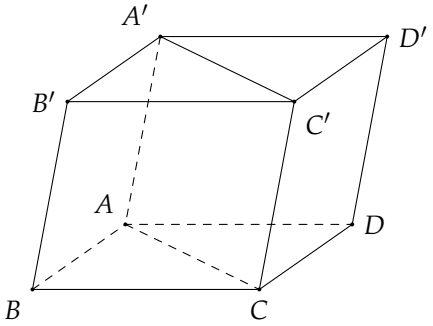
Câu 42. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M và N lần lượt là trung điểm của AC và AD. Đường thẳng MN song song với đường nào?

Ⓐ AB. Ⓑ BC. Ⓒ AD. Ⓓ CD.



Câu 43. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng $A'C'$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

Ⓐ $(A'AC)$. Ⓑ (BDB'). Ⓒ $(C'AC)$. Ⓓ $(B'AC)$.



Câu 44. Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α). Giả sử $b \not\subset (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ Nếu $b//(\alpha)$ thì $b//a$.
Ⓑ Nếu b cắt (α) thì b cắt a.
Ⓒ Nếu b cắt (α) thì $b//a$.
Ⓓ Nếu $b//a$ thì $b//(\alpha)$.

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của ΔSCD; M là trung điểm của cạnh BC; $H = AC \cap DM$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

Ⓐ $HG//(SAD)$. Ⓑ $HG//(SBC)$. Ⓒ $HG//(SBD)$. Ⓓ $HG//(SAB)$.

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác SAB và SBC. Khi đó, đường thẳng MN song song với đường thẳng nào dưới đây?

Ⓐ BC. Ⓑ AC. Ⓒ AB. Ⓓ SB.

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn BC. Gọi M là trung điểm SA. $O = AC \cap BD$. Giao tuyến của (MBC) và (SAD) là

Ⓐ CN, với N là trung điểm SD.
Ⓑ SO.
Ⓒ MQ.
Ⓓ MN, với N là trung điểm SD.

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ $(AD//BC)$. Gọi M là trung điểm của CD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMB) và (SAC) là đường thẳng

Ⓐ SP (P là giao điểm của đường thẳng AB và đường thẳng CD).
Ⓑ SJ (J là giao điểm của đường thẳng AM và đường thẳng BD).
Ⓒ SI (I là giao điểm của đường thẳng AC và đường thẳng BM).
Ⓓ SO (O là giao điểm của đường thẳng AC và đường thẳng BD).

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Lấy điểm M nằm trên cạnh SB sao cho $SB = 4SM$. Giao điểm của đường thẳng SD và mặt phẳng (ACM) nằm trên đường thẳng nào sau đây?

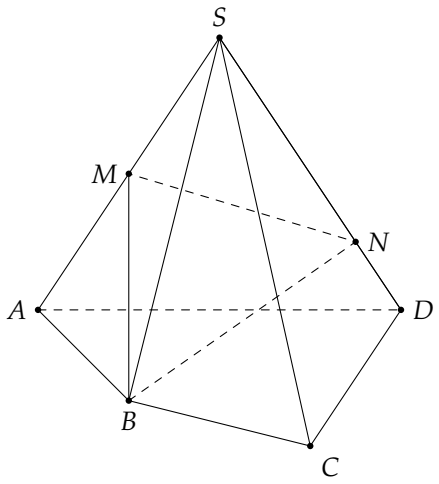
Ⓐ OM. Ⓑ CM. Ⓒ AM. Ⓓ AC.

Câu 50. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AB và CD. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Giao điểm của đường thẳng EG và mặt phẳng (ACD) là

Ⓐ Giao điểm của đường thẳng EG và đường thẳng CD.
Ⓑ Điểm F.
Ⓒ Giao điểm của đường thẳng EG và đường thẳng AC.

Ⓓ Giao điểm của đường thẳng EG và đường thẳng AF.

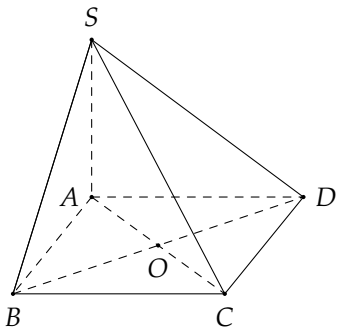
Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi M là trung điểm của SA, N là điểm trên đoạn SD sao cho $SN = \dfrac{3}{4}SD$ *(minh họa hình dưới)*. Các điểm nào sau đây đồng phẳng?



Ⓐ S, B, M, N. Ⓑ S, A, B, C. Ⓒ A, M, N, D. Ⓓ S, A, B, D.

Câu 52. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi I và J lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và SCD. Đường thẳng IJ song song với đường thẳng nào?

Ⓐ AC. Ⓑ SB. Ⓒ BC. Ⓓ BD.



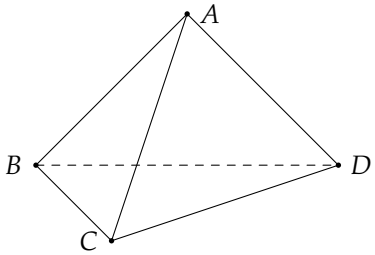
Câu 53. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và AB. Giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (DMN) là đường thẳng

Ⓐ BC.

Ⓑ MN.

Ⓒ d qua D và song song với MN.

Ⓓ d qua A và song song với BC.



Câu 54. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (OMN) và (ABC) là

Ⓐ Đường thẳng đi qua M và song song với AB.

Ⓑ Đường thẳng đi qua N và song song với BD.

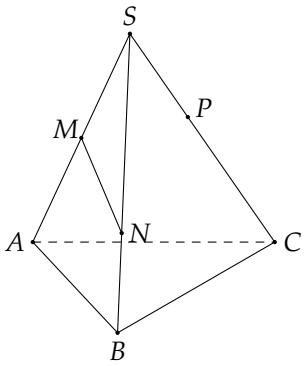
Ⓒ Đường thẳng đi qua O và song song với AD.

Ⓓ Đường thẳng đi qua S và song song với BC.

Câu 55. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA và SC. Đường thẳng IJ song song với đường thẳng nào?

Ⓐ AC. Ⓑ BC. Ⓒ BD. Ⓓ SO.

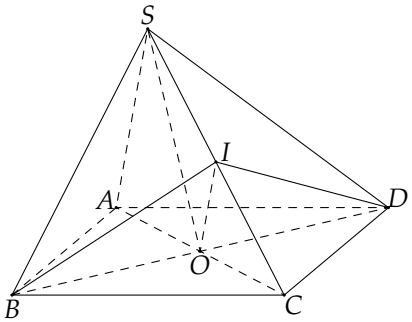
Câu 56. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M là trung điểm SA; N và P lần lượt là điểm bất kì trên cạnh SB, SC và không trùng với trung điểm của cạnh SB, SC (như hình vẽ). Giao điểm của MN với (ABC) là



Ⓐ Giao điểm của MN với BC. Ⓑ Giao điểm của MP với BC.

Ⓒ Giao điểm của MP với AC. Ⓓ Giao điểm của MN với AB.

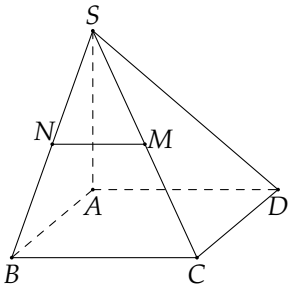
Câu 57. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, gọi I là trung điểm của SC (hình vẽ bên). Khẳng định nào sau đây **sai**?



Ⓐ $SA//(IBD)$. Ⓑ $CD//(IAB)$.

Ⓒ $OI//(SAD)$. Ⓓ $ID//(SAB)$.

Câu 58. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thoi. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC và SB. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?



Ⓐ MN trùng với CD. Ⓑ MN cắt với CD.

Ⓒ MN song song với CD. Ⓓ MN chéo với CD.

Câu 59. Cho biết mệnh đề nào sau đây là **sai**?

Ⓐ Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua hai đường thẳng song song.

Ⓑ Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua một đường thẳng và một điểm không thuộc nó.

Ⓒ Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua hai đường thẳng cho trước.

Ⓓ Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.

Câu 60. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AD, AC. Điểm G là trọng tâm tam giác BCD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng

Ⓐ qua I và song song với AB. Ⓑ qua J và song song với BD.

Ⓒ qua G và song song với CD. Ⓓ qua G và song song với BC.

Câu 61. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

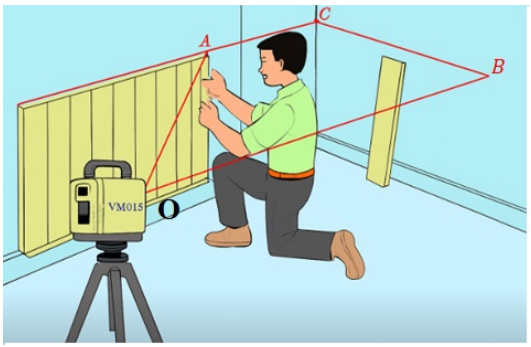
Ⓐ Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau.

Ⓑ Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cùng song song với mặt phẳng (Q) thì $(P)//(Q)$.

Ⓒ Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng (P) đều song song với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (Q).

Ⓓ Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song. Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (Q) và a song song với (P) thì a song song với (Q).

Câu 62. Trong xây dựng, người ta thường dùng máy quét tia laser để kẻ các đường thẳng trên tường như hình vẽ sau. Các đoạn thẳng nào sau đây nằm trên giao tuyến của mặt phẳng chứa hai tia laser OA và OB với hai mặt tường trong hình vẽ?



Ⓐ OA, OB. Ⓑ AO, AC. Ⓒ AC, BC. Ⓓ AB, AC.

Câu 63. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm SB. Mặt phẳng (P) chứa DM và song song với AC; cắt SA, SC lần lượt tại H và K. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\dfrac{SH}{SA}=\dfrac{3}{4}$. Ⓑ $\dfrac{SH}{SA}=\dfrac{SK}{SC}=\dfrac{1}{3}$. Ⓒ $\dfrac{KC}{SC}=\dfrac{1}{3}$. Ⓓ $\dfrac{SK}{SC}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 64. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, CD, BC. Phát biểu nào sau đây **sai**?

Ⓐ MP và NQ là hai đường thẳng chéo nhau.

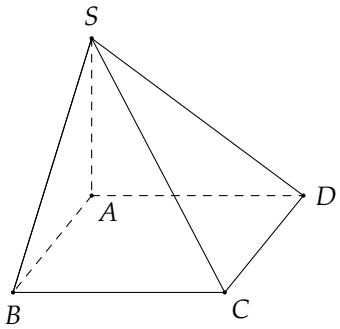
Ⓑ Tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Ⓒ $MN//BD$ và $MN=\dfrac{1}{2}BD$.

Ⓓ $MN//PQ$ và $MN=PQ$.

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC. Gọi Q là giao điểm của đường thẳng DN và AC.



a) $MN//SB$.

b) Giao tuyến của hai mặt phẳng (DMN) và (SAC) là đường thẳng MQ.

c) Điểm N là giao điểm của đường thẳng DQ và mặt phẳng (SBC).

d) $MN\subset(SAC)$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, khi đó:

a) SC và AB cắt nhau.

b) Giao tuyến giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là SA.

c) Giao tuyến giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng đi qua S và song song với AB và CD.

d) Giao điểm của BD và (SAC) là tâm của hình bình hành $ABCD$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Hai điểm E và F lần lượt là trung điểm của SB và SD. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $EF \subset (SBD)$.

b) EF cắt SA.

c) Giao tuyến (AEF) và $(ABCD)$ là đường thẳng d đi qua A và song song EF.

d) EF song song mặt phẳng $(ABCD)$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm AB và G là trọng tâm tam giác SBM.

a) $OM//(SAD)$.

b) Đường thẳng MG cắt mặt phẳng (SAD).

c) Nếu $d = (SOM) \cap (SAD)$ thì $d//AD$.

d) Đường thẳng OG cắt mặt phẳng (SAD).

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn DC. Gọi M là trọng tâm tam giác SCD, HK với $(H \in SD, K \in SC)$ đi qua M song song với DC. Khi đó

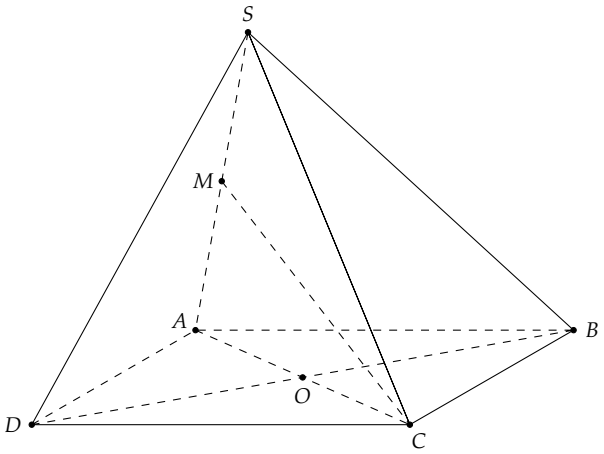
a) Hai đường thẳng SA và CD là hai đường thẳng cắt nhau.

b) Tứ giác $ABKH$ là hình bình hành khi và chỉ khi $DC = \dfrac{3}{2}AB$.

c) Mặt phẳng (MAB) giao (SCD) theo giao tuyến HK.

d) Mặt phẳng (SAC) giao (SBD) theo giao tuyến SO với O là giao điểm của AC và BD.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của AC và BD, M là trung điểm của cạnh SA (tham khảo hình vẽ).



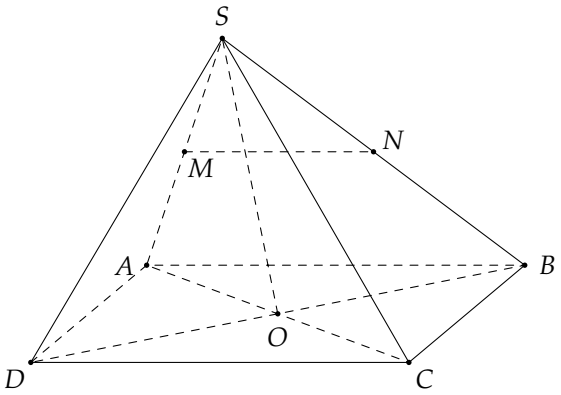
a) Đường thẳng MC đi qua trọng tâm của tam giác SBD.

b) Đường thẳng SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

c) Nếu $(MBC) \cap (SAD) = d$ thì d đi qua trung điểm của cạnh SD.

d) Hai đường thẳng BC và SD cắt nhau.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA và SB. Khi đó



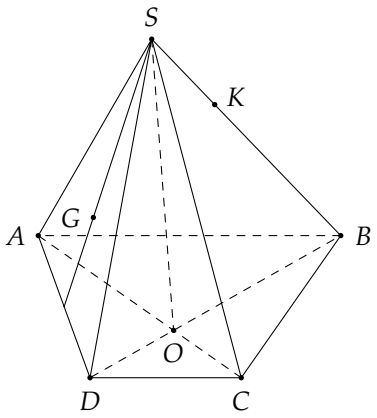
a) $MN//CD$.

b) Giao tuyến của hai mặt phẳng (MCD) và (SAB) là đường thẳng MN.

c) Giao điểm của đường thẳng SB và mặt phẳng (MCD) là giao điểm của SB và CD.

d) Ba điểm H, D, N thẳng hàng với H là giao điểm của SO và mặt phẳng (MCD).

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang có $AB//CD$ và $AB = 2CD$. Gọi G là trọng tâm tam giác SAD, điểm K thuộc cạnh SB sao cho $\dfrac{SK}{SB} = \dfrac{1}{3}$, điểm O là giao điểm của AC và BD.



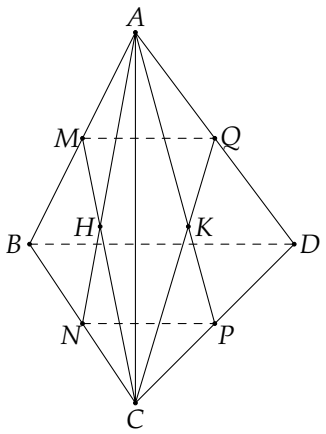
a) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là đường thẳng SO.

b) Đường thẳng OK song song với SD.

c) Gọi I là giao điểm của GK và $(ABCD)$. Khi đó I là giao điểm của GK và BD.

d) Giao tuyến của hai mặt phẳng (KCD) và (SAB) là đường thẳng qua K và song song AB.

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Gọi $H = AN \cap MC, K = AP \cap CQ$.



a) $M \in (BCD)$.

b) HK là giao tuyến giữa (ANP) và (MCQ).

c) $HK//BD$.

d) $\dfrac{HK}{BD} = \dfrac{2}{3}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CB, CD và G là trọng tâm của $\triangle SBD$. Biết H là giao điểm của đường thẳng SA và mặt phẳng (GMN).

a) $S \in (ABCD)$.

b) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO.

c) Giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC) là trung điểm của OC.

d) Tỉ số $\dfrac{SH}{SA} = \dfrac{3}{7}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của SB, SD.

a) SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

b) Giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (OIA) là C.

c) Giao điểm J của SA với (CKB) thuộc đường thẳng đi qua K và song song với CD.

d) $CD//IJ$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có CD là đáy lớn và O là giao điểm của AC và BD, M là trung điểm của SD.

a) $AB//CD$.

b) Giao tuyến của mặt phẳng (SAB) và (SCD) là SO.
c) Giao tuyến của mặt phẳng (MAB) và (SCD) qua M và song song CD.
d) SB và DC chéo nhau.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của AC và BD; M, N, G lần lượt là trung điểm của AB, AD, SO.
a) SO là giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và (SBD).
b) MN song song với SA.
c) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SBD) và (GMN) là đường thẳng GM.
d) Đường thẳng SA song song với mặt phẳng (MNG).

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB, O là giao điểm của AC và BD. Khi đó
a) Giao điểm của đường thẳng BD và (SAC) là trung điểm của đoạn thẳng AC.
b) Giao điểm của đường thẳng SA và $(ABCD)$ là điểm D.
c) Giao điểm của đường thẳng SO và $(ABNM)$ là điểm D.
d) Gọi I giao điểm của SO và mặt phẳng $(MNCD)$. Khi đó $SI = 2IO$.

Câu 15. Cho tứ giác $ABCD$ có AC và BD giao nhau tại O và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn SC lấy một điểm M không trùng với S và C.
a) SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (ABC).
b) SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).
c) Giao điểm của đường thẳng SO với mặt phẳng (ABM) là điểm K với $K = AM \cap SO$.
d) Giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM) là điểm N thuộc đường thẳng AK.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của cạnh SB và SD. Khi đó
a) Giao tuyến của hai mặt phẳng (OIA) và (SCD) là đường thẳng đi qua C và song song với đường thẳng SD.
b) Giao điểm J của đường thẳng SA và mặt phẳng (CKB) thuộc đường thẳng đi qua K và song song với đường thẳng DC.
c) Đường thẳng CD song song với đường thẳng IJ trong đó J là giao điểm của đường thẳng SA và mặt phẳng (CKB).
d) Đường thẳng SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Câu 17. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M là trung điểm CD. G là trọng tâm tam giác SCD, E là giao điểm của AM và BD, F là điểm trên cạnh AB sao cho $AB = 3AF$. Khi đó:
a) G là điểm chung của 2 mặt phẳng (SCD) và (GEF).
b) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là một đường thẳng song song với AB.
c) EF song song mặt phẳng (SAD).
d) Gọi K là giao điểm của SC và mặt phẳng (EFG), tỉ số $\dfrac{KS}{KC} = \dfrac{3}{5}$.

Câu 18. Cho hình tứ diện $ABCD$. Lấy E, F, G lần lượt là các điểm thuộc cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại I và EG cắt AD tại J.

a) Bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng.
b) Giao điểm của đường thẳng EG và mặt phẳng (ACD) là điểm I.
c) Giao tuyến của hai mặt phẳng (EFG) và (BCD) là đường thẳng GI.
d) Ba đường thẳng JF, CD và IG đồng quy.

Câu 19. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G_1, G_2 là trọng tâm của các tam giác $A'BD$, $B'D'C$.

a) $A'D'CB$ là hình bình hành.
b) $(A'BD)//(B'D'C)$.
c) G_1, G_2 cùng thuộc AC'.
d) $G_1G_2 = \dfrac{2}{3}AC'$.

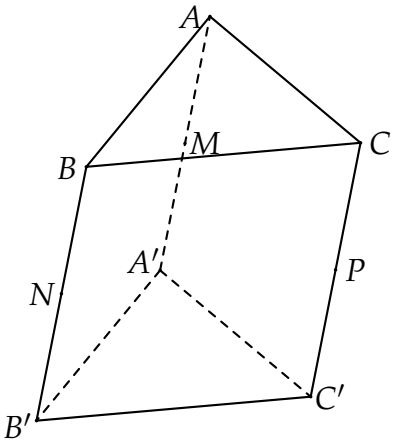
Câu 20. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có I, K, G lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, $A'B'C'$, ACC'. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của BC, $B'C'$.

a) $AMM'A'$ là hình bình hành.
b) IG cắt mặt phẳng $(BCC'B')$.
c) (IKG) cắt $(BCC'B')$.
d) $(A'KG)//(AIB')$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy AD và BC. Gọi M là trọng tâm tam giác SAD; N là điểm thuộc đoạn AC sao cho $NA = \dfrac{NC}{2}$; P là điểm thuộc đoạn CD sao cho $PD = \dfrac{PC}{2}$.

a) $(MNP)//(SAD)$.
b) $NP//(SBC)$.
c) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (MNP) là một đường thẳng đi qua M song song với BC và MN.
d) $(MNP)//(SBC)$.

Câu 22. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh bên AA', BB' và CC'(tham khảo hình vẽ)



a) Đường thẳng MN song song với đường thẳng AC.
b) Đường thẳng AP song song với mặt phẳng $(MB'C')$.
c) Mặt phẳng (ANP) song song với mặt phẳng $(MB'C')$.
d) Giả sử tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A với $AB = \sqrt{2}$. Gọi E, E' lần lượt thuộc các cạnh AB và $A'B'$ sao cho $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{A'E'}{A'B'} = \dfrac{1}{3}$. Mặt phẳng qua EE' và song song với BC cắt MN, MP lần lượt tại I, J. Khi đó $IJ = \dfrac{5}{3}$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt nằm trên cạnh SB, BC sao cho $SB = 3SM, BN = 2NC$ và G là trọng tâm tam giác ABC.

a) $GN // SB$.

b) AC cắt (SGN) tại giao điểm của AC và GN.

c) Giao tuyến của (MAC) và (SBC) là SM.

d) $(GMN) // (SAC)$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, tam giác SAD cân tại S. Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh SB, SC; E là điểm đối xứng với B qua A; G là giao điểm của NE và mặt phẳng (SAD); K là giao điểm của OE và AD. Khi đó:

a) $MN // (ABCD)$. **b)** $(MNO) // (SAD)$. **c)** $GK // ON$. **d)** $GK = \frac{1}{4}SD$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O. Gọi các điểm M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. I là giao điểm của DN và (SAC). Khi đó

a) $MN // (SDC)$.

b) $(NPQ) // (ABCD)$.

c) $(MBC) \cap (SAD)$ là đường qua M song song AB.

d) $SI = \frac{3}{4}SO$.

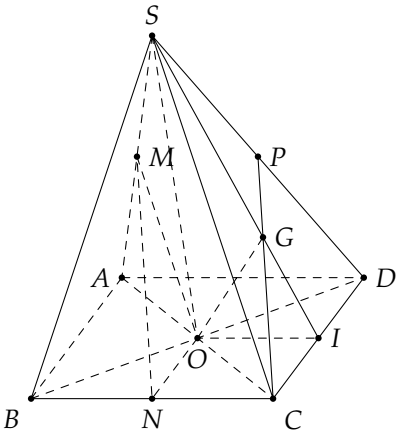
Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, BC, SD. Gọi G là trọng tâm $\triangle SCD$.

a) Điểm O thuộc mặt phẳng (MNO).

b) Hai đường thẳng MN và CP song song.

c) OG song song với mặt phẳng (SBC).

d) $(MNO) // (PGD)$.



Câu 27. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G_1, G_2 là trọng tâm của các tam giác $A'BD$, $B'D'C$. Khi đó

a) $A'D'CB$ là hình bình hành.

b) $(A'BD) // (B'D'C)$.

c) AC là đường chéo của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

d) G_1, G_2 không cùng thuộc AC'.

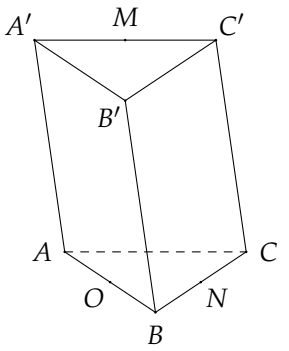
Câu 28. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. M, N là trung điểm $A'C'$, BC.

a) Gọi O là trung điểm AB. Khi đó $(B'ON) // (AA'C)$.

b) $MN // (ABB'A')$.

c) $B'C' // (ABC)$.

d) MN và $B'C'$ cắt nhau.



3 Tự luận.

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AB//CD$ và $AB < CD$. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng sau

a) (SAD) và (SBC). b) (SAB) và (SCD). c) (SAC) và (SBD).

Bài 2. Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM = 3AM$. Mặt phẳng (P) đi qua M song song với hai đường thẳng AD và BC.

a) Xác định giao điểm K của mặt phẳng (P) với đường thẳng CD.

b) Tính tỉ số $\dfrac{KC}{CD}$.

$\dfrac{KC}{CD} = \dfrac{3}{4}$

Bài 3. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và AA'.

a) Xác định giao điểm của mặt phẳng (MNP) và đường thẳng $B'C$.

b) Gọi K là giao điểm của của mặt phẳng (MNP) với đường thẳng $B'C$. Tính tỉ số $\dfrac{KB'}{KC}$.

$\dfrac{KB'}{KC} = 3$

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAD, SCD.

a) Chứng minh $GK//(ABCD)$.

b) Mặt phẳng chứa đường thẳng GK và song song với mặt phẳng $(ABCD)$ cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, E, F. Chứng minh rằng tứ giác $MNEF$ là hình bình hành.

Bài 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AD, $A'B'$. Chứng minh rằng

a) $BD//B'D'$, $(A'BD)//(CB'D')$ và $MN//(BDD'B')$

b) Đường thẳng AC' đi qua trọng tâm G của tam giác $A'BD$.

Bài 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BD. Điểm P thuộc cạnh AC sao cho $PA = 2PC$.

a) Xác định giao điểm E của đường thẳng MP với mặt phẳng (BCD).

b) Xác định giao điểm Q của đường thẳng CD với mặt phẳng (MNP).

c) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (ACD) với mặt phẳng (MNP).

d) Gọi I là giao điểm của MQ và NP, G là trọng tâm của tam giác ABD. Chứng minh C, I, G thẳng hàng.

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SD. Xác định giao tuyến của mặt phẳng (AMN) với mỗi mặt phẳng sau

a) (SCD);

b) (SBC).

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB//CD)$ và $AB = 2CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB. Chứng minh rằng

a) $MN//(SCD)$; b) $DM//(SBC)$;

c) Lấy điểm I thuộc cạnh SD sao cho $\dfrac{SI}{SD} = \dfrac{2}{3}$. Chứng minh rằng $SB//(AIC)$.

Bài 9. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Lấy M, M' lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BC, $B'C'$; lấy các điểm G, G', K lần lượt thuộc các đoạn AM, $A'M'$, $A'B$ sao cho $\dfrac{AG}{AM} = \dfrac{A'G'}{A'M'} = \dfrac{A'K}{A'B} = \dfrac{2}{3}$.

a) Chứng minh rằng $C'M//(A'BM')$.

b) Chứng minh rằng $G'K//(BCC'B')$.

c) Chứng minh rằng $(GG'K)//(BCC'B')$.

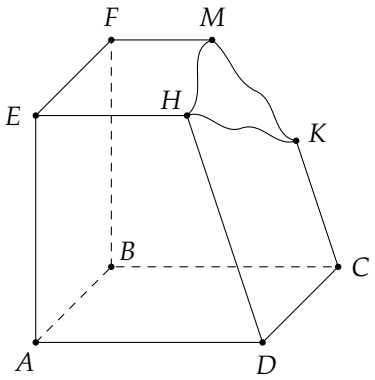
d) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua K và song song với mặt phẳng (ABC). Mặt phẳng (α) cắt cạnh CC' tại điểm I. Tính $\dfrac{IC}{IC'}$.

Bài 10. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, $C'D'$.

a) Chứng minh rằng $(A'DN)//(B'CM)$.

b) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của đường thẳng $D'B$ với các mặt phẳng $(A'DN)$, $(B'CM)$. Chứng minh rằng $D'E = BF = \dfrac{1}{2}EF$.

Bài 11. Một khối gỗ có các mặt đều là một phần của mặt phẳng với $(ABCD)//(EFMH)$, $CK//DH$. Khối gỗ bị hỏng một góc (hình bên). Bác thợ mộc muốn làm đẹp khối gỗ bằng cách cắt khối gỗ theo mặt phẳng (R) đi qua K và song song với mặt phẳng $(ABCD)$.



a) Hãy giúp bác thợ mộc xác định giao tuyến của mặt phẳng (R) với các mặt của khối gỗ để cắt được chính xác.

b) Gọi I, J lần lượt là giao điểm DH, BF với mặt phẳng (R). Biết $BF = 60$ cm, $DH = 75$ cm, $CK = 40$ cm. Tính FJ. $FJ = 28$ (cm).

Bài 12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và $A'B'$ và O là một điểm thuộc miền trong của mặt bên $CC'D'D$. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (OMN) với các mặt của hình hộp.

Bài 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình thoi cạnh a, tam giác SAD đều, M là điểm trên cạnh AB, (α) là mặt phẳng qua M và $(\alpha)//(SAD)$ cắt CD, SC, SB lần lượt tại N, P, Q.

a) Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình thang cân.

b) Đặt $AM = x$, tính diện tích $MNPQ$ theo a và x.

Bài 14. Cho mặt phẳng (α) và hai đường thẳng chéo nhau a, b cắt (α) tại A và B. Gọi d là đường thẳng thay đổi luôn luôn song song với (α) và cắt a tại M, cắt b tại N. Qua điểm N dựng đường thẳng song song với a cắt (α) tại điểm C.

a) Tứ giác $MNCA$ là hình gì?

b) Chứng minh rằng điểm C luôn luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

Bài 15. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Lấy các điểm M, N lần lượt thuộc các đường chéo AC và BF sao cho $MC = 2MA$; $NF = 2NB$. Qua M, N kẻ các đường thẳng song song với AB, cắt các cạnh AD, AF lần lượt tại M_1, N_1. Chứng minh rằng

a) $MN//DE$;

b) $M_1N_1//(DEF)$;

c) $(MNN_1M_1)//(DEF)$.

Bài 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Gọi H là trung điểm của AB và G là trọng tâm của tam giác SAB. Lấy điểm M trên cạnh AD, điểm N trên cạnh HC sao cho $AD = 3AM, HC = 3HN$.

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và (SBD).

b) Gọi P là giao điểm của NG và mặt phẳng (SAD). Chứng minh G là trung điểm của PN.

Bài 17. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là tứ giác, AB không song song CD.

a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD).

b) Gọi F là một điểm ở miền trong tam giác SCD, tìm giao điểm I của SC và (ABF).

Bài 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD, G là trong tâm tam giác SBD. Mặt phẳng (MNG) cắt SC tại H. Tính tỉ số $\dfrac{HC}{HS}$. 1,5

Bài 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của SA, CD.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBI) và (SAC).

b) Tìm giao điểm E của đường thẳng SD và mặt phẳng (MBI).

c) Tính tỉ số $\dfrac{SE}{ED}$. 2

Bài 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, G là trọng tâm tam giác SCD và điểm M thuộc cạnh SA sao cho $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{1}{4}$. Gọi I là giao điểm của MG và mặt phẳng $(ABCD)$. Tính tỉ số $\dfrac{IG}{IM}$ (*làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*). 0,44

Bài 21. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng 4 cm. AC và BD cắt nhau tại O. $\triangle SBD$ vuông cân tại S. Lấy điểm I nằm trên SO sao cho $SI = 2IO$. Đường thẳng IB cắt mặt phẳng (SAD) tại điểm M. Độ dài của MD là bao nhiêu? 2

Bài 22. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang $(AB//CD)$. Gọi E và F lần lượt là trọng tâm của $\triangle SAD$ và $\triangle SBC$.

a) Lấy M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Chứng minh rằng $EF//MN$. Từ đó chứng minh $EF//AB$.

b) Xác định giao tuyến d của mặt phẳng (AEF) và (SCD). Chứng minh $d//EF$.

Bài 23. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm cạnh AB; N, P lần lượt là điểm thuộc cạnh AC, BD sao cho $AN = 2NC$ không song song với $BD = 3PD$.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (BCD).

b) Gọi Q là giao điểm của CD với (MNP). Tính tỉ số $\dfrac{QC}{QD}$. 1

Bài 24. Cho hình tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 6. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CA, CB và P là điểm trên cạnh BD sao cho $BP = 2PD$. Mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q diện tích của tứ giác $MNPQ$ bằng bao nhiêu (*làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*)?

8,93

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1 C	2 B	3 D	4 A	5 B	6 B	7 B	8 D	9 D	10 A
11 A	12 B	13 C	14 C	15 C	16 B	17 D	18 D	19 A	20 A
21 D	22 A	23 C	24 B	25 D	26 B	27 A	28 B	29 D	30 A
31 C	32 B	33 D	34 C	35 C	36 A	37 B	38 A	39 D	40 B
41 B	42 D	43 D	44 D	45 A	46 B	47 D	48 C	49 A	50 D
51 C	52 C	53 D	54 C	55 A	56 D	57 D	58 D	59 C	60 C
61 D	62 C	63 C	64 A						

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a S b Đ c Đ d S	Câu 2.	a S b Đ c Đ d Đ
Câu 3.	a Đ b S c Đ d Đ	Câu 4.	a Đ b S c Đ d S
Câu 5.	a S b Đ c Đ d Đ	Câu 6.	a Đ b Đ c Đ d S
Câu 7.	a Đ b Đ c S d Đ	Câu 8.	a Đ b Đ c S d Đ
Câu 9.	a S b Đ c Đ d S	Câu 10.	a S b S c S d S
Câu 11.	a Đ b Đ c S d Đ	Câu 12.	a Đ b S c S d Đ
Câu 13.	a Đ b S c S d Đ	Câu 14.	a Đ b S c S d Đ
Câu 15.	a S b Đ c Đ d S	Câu 16.	a Đ b S c Đ d Đ
Câu 17.	a Đ b Đ c Đ d S	Câu 18.	a S b S c Đ d Đ
Câu 19.	a Đ b Đ c Đ d S	Câu 20.	a Đ b S c S d Đ
Câu 21.	a S b Đ c Đ d Đ	Câu 22.	a S b Đ c Đ d S
Câu 23.	a S b S c S d Đ	Câu 24.	a Đ b Đ c Đ d S
Câu 25.	a Đ b Đ c S d S	Câu 26.	a Đ b Đ c S d Đ
Câu 27.	a Đ b Đ c S d S	Câu 28.	a S b Đ c Đ d S

Chương V

GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

§1 GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

§2 GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Giới hạn hữu hạn của dãy số

Giới hạn 0 của dãy số

Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Từ định nghĩa dãy số có giới hạn 0, ta có các kết quả sau:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ với k là một số nguyên dương;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$;
- Nếu $|u_n| \le v_n$ với mọi $n \ge 1$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Giới hạn hữu hạn của dãy số

2) Định nghĩa. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là số thực a khi n dần tới dương vô cực nếu

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - a) = 0,$$

kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ hay $u_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

- Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = c$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - a) = 0$.

3) Định lí về giới hạn hữu hạn của dãy số

Các quy tắc tính giới hạn

a) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$ thì

- $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = a + b$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \cdot v_n) = a \cdot b$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = a - b$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$ (nếu $b \ne 0$).

b) Nếu $u_n \ge 0$ với mọi n và $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ thì $a \ge 0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

4) Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q với $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn. Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) với công bội q. Khi đó $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q}$.
Vì $|q| < 1$ nên $q^n \to 0$ khi $n \to +\infty$. Do đó, ta có

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{u_1}{1-q} - \left(\frac{u_1}{1-q}\right)q^n\right] = \frac{u_1}{1-q}.$$

Giới hạn này được gọi là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n), và kí hiệu là

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

Như vậy

$$\boxed{S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \frac{u_1}{1-q} \quad (|q| < 1).}$$

5) Giới hạn vô cực của dãy số

- Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn $+\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ hay $u_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.
- Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn $-\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(-u_n) = +\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ hay $u_n \to -\infty$ khi $n \to +\infty$.

Theo định nghĩa trên, ta có

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$, với k là số nguyên dương;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, với $q > 1$.

Liên quan đến giới hạn vô cực của dãy số, ta có một số quy tắc sau đây:

- Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (hoặc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$) thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.
- Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$.
- Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a > 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$.

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Phương pháp đặt thừa số chung

Rút lũy thừa bậc cao nhất của tử và mẫu, rồi sử dụng các công thức.
Phương pháp giải:

Dạng 1 Phần tiếp theo

- $\lim \dfrac{c}{n^k} = 0, \quad (k \in \mathbb{N}^*, c \in \mathbb{R}).$
- $\lim n^k = +\infty, \quad (k \in \mathbb{N}^*).$

Ví dụ 1

Tìm giới hạn sau $\lim \dfrac{2n^3 - 2n + 3}{1 - 4n^3}$.

$-\frac{1}{2}$

Ví dụ 2

Tìm giới hạn sau $\lim \dfrac{\sqrt{n^4 + 2n + 2}}{n^2 + 1}$.

1

Ví dụ 3

Tìm giới hạn sau $\lim \dfrac{3^{n+1} - 4^n}{4^{n-1} + 3}$.

-4

Ví dụ 4

Tính giới hạn $L = \lim \dfrac{1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2n + 1)}{3n^2 + 4}$.

$L = \frac{1}{3}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{n^2-2n+1}{2-3n^2}$.

b) $\lim \dfrac{2n^2+n-3}{n^3+5}$.

c) $\lim \dfrac{\sqrt{9n^2+1}}{n}$.

d) $\lim \left(\dfrac{1+3^n}{3\cdot 3^n+2^n}\right)$.

e) $\lim \dfrac{1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+\cdots+2^n}{5\cdot 2^n+1}$.

Dạng 2 Phương pháp lượng liên hợp

Nếu giới hạn của dãy số ở dạng vô định thì ta sử dụng các phép biến đổi để đưa về dạng cơ bản.
Một số phép biến đổi liên hợp:

$$f(n)-g(n)=\frac{(f(n))^2-(g(n))^2}{f(n)+g(n)}$$
$$\sqrt{f(n)}-\sqrt{g(n)}=\frac{f(n)-g(n)}{\sqrt{f(n)}+\sqrt{g(n)}}$$
$$\sqrt{f(n)}-g(n)=\frac{f(n)-(g(n))^2}{\sqrt{f(n)}+g(n)}$$
$$\sqrt[3]{f(n)}-\sqrt[3]{g(n)}=\frac{f(n)-g(n)}{\sqrt[3]{(f(n))^2}+\sqrt[3]{f(n)g(n)}+\sqrt[3]{(g(n))^2}}$$

Lưu ý. Dấu hiệu nhận dạng liên hợp $(+\infty\cdot 0)$ là sau khi rút ra n có mũ cao nhất trong căn và nhóm thừa số, xuất hiện số 0. Chẳng hạn:

- Tính giới hạn dãy $u_n=\sqrt{n^2+3n+5}-n$: biểu thức trong căn có n^2 là lũy thừa cao nhất và ta quan tâm đến "nó ", những thừa số sau bỏ hết, có nghĩa ta xem $u_n=\sqrt{n^2}-n=n-n=0$ nên cần liên hợp.
- Tính giới hạn dãy $u_n=\sqrt{2n^2+3n+5}-n$: biểu thức trong căn có $2n^2$ là lũy thừa cao nhất nên nháp $\sqrt{2n^2}-n=n\sqrt{2}-n=n(\sqrt{2}-1)$ có $\sqrt{2}-1\neq 0$ nên ta không cần liên hợp lòng vòng mà rút ra giải trực tiếp.

Ví dụ 5

Tính giới hạn $I=\lim\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)$. -1

Ví dụ 6

Tính giới hạn $I=\lim\left(\sqrt{n^2+7}-\sqrt{n^2+5}\right)$. 0

Ví dụ 7

Tính giới hạn $I=\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\right)$. 2

Ví dụ 8

Tính giới hạn $I=\lim\left(n-\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}\right)$. -1

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 2 ☆

Tính giới hạn: $\lim\left(\sqrt{4n^2+3n+1}-2n\right)$. $\frac{3}{4}$

Bài 3 ☆

Tính giới hạn $I=\lim\left(\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2}\right)$.

🔑 $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Bài 4 ☆

Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}\right)$.

🔑 $L=0$

Dạng 3 Giới hạn vô cực

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty}n^k=+\infty$ với k là số nguyên dương;
- $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=+\infty$ nếu $q>1$.

Định lý:

- Nếu $\lim u_n=a>0$ và $\lim v_n=0$ với $v_n>0$ thì $\lim\dfrac{u_n}{v_n}=+\infty$;
- Nếu $\lim u_n=+\infty$ và $\lim v_n=a>0$ thì $\lim u_nv_n=+\infty$.

Ví dụ 9

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim(n^2+3n-5)$. $+\infty$

b) $\lim\dfrac{n^2+7}{1-2n}$. $-\infty$

c) $\lim(3^n-2^n)$. $+\infty$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5 ☆

Tìm giới hạn

a) $\lim(n^3+n^2+n+1)$. $+\infty$

b) $\lim\left(n^2-n\sqrt{n}+1\right)$. $+\infty$

Bài 6 ☆

Tìm giới hạn

a) $\lim\dfrac{n^5+n^4-n-2}{4n^3+6n^2+9}$. $+\infty$

b) $\lim\dfrac{\sqrt[3]{n^6-7n^3-5n+8}}{n+12}$. $+\infty$

c) $\lim\left(n+\sqrt{n^2-n+1}\right)$. $+\infty$

Dạng 4 Tính tổng cấp số nhân lùi vô hạn

Cấp số nhân vô hạn $u_1, u_1q, ..., u_1q^{n-1}, ...$ có công bội q thỏa mãn $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn đã cho là

$$S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + ... = \frac{u_1}{1-q}.$$

Ví dụ 10

Tính tổng $T = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots$ $\frac{2}{3}$

Ví dụ 11

Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn $2,(12) = 2{,}121212\ldots$ thành phân số. $\frac{70}{33}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 7 ☆

Tính tổng $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots$. $\frac{2}{3}$

Bài 8 ☆

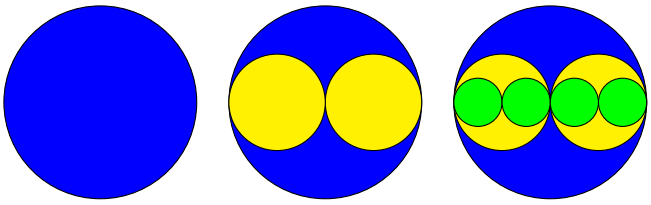
Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn 2,222... dưới dạng phân số. $\frac{20}{9}$

Dạng 5 Toán thực tế áp dụng dãy số

Ví dụ 12

Từ tờ giấy, cắt một hình tròn bán kính R (cm) như Hình *a*.

Tiếp theo, cắt hai hình tròn bán kính $\frac{R}{2}$ rồi chồng lên hình tròn đầu tiên như Hình *b*. Tiếp theo, cắt bốn hình tròn bán kính $\frac{R}{4}$ rồi chồng lên các hình trước như Hình *c*. Cứ thế tiếp tục mãi. Tính tổng diện tích của các hình tròn. $2\pi R^2$



a) *b*) *c*)

Ví dụ 13

Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe của con người (T được gọi là *chu kì bán rã*).

(*Nguồn: Đại số và giải tích 11, NXB GD Việt Nam, 2021*)

Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì thứ n.

a) Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số (u_n). $u_n = \frac{1}{2^n}$

b) Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn là 0.

c) Từ kết quả câu 2, chứng tỏ rằng sau một số năm nào đó khối lượng phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g.

720000 năm

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

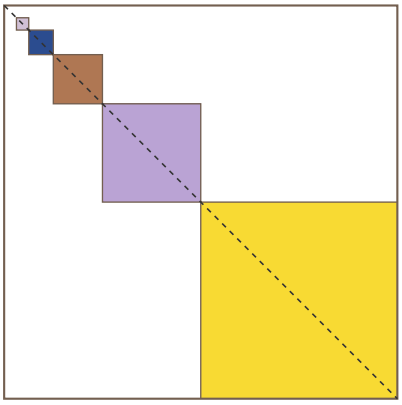
Bài 9 ☆

Một bệnh nhân hàng ngày phải uống một viên thuốc 150 mg. Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%. Tính lượng thuốc có trong cơ thể sau khi uống viên thuốc của ngày thứ 5 . Ước tính lượng thuốc trong cơ thể nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài. $\approx 7{,}89$ (gam)

Bài 10

Một nhà thầu nhận được hợp đồng sơn màu trang trí một bức tường hình vuông màu trắng kích thước 4m $\times$ 4m của một trường mẫu giáo. Hai điều kiện của hợp đồng như sau:

- Các hình vuông cần sơn màu như hình vẽ. Hình vuông lớn nhất có diện tích bằng một phần tư diện tích bức tường được sơn màu tùy ý khác màu trắng. Mỗi hình vuông tiếp theo có diện tích bằng một phần tư diện tích hình vuông trước nó, được sơn màu khác với hình vuông trước đó và màu trắng;
- Một phần ba bức tường phải được sơn màu.



Sau khi xem các điều kiện của hợp đồng thì nhà thầu từ chối vì cho rằng không thể thực hiện theo yêu cầu của nhà trường. Hãy giải thích lí do vì sao họ từ chối hợp đồng.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào **sai**?

Ⓐ Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a > 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty$.

Ⓑ Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \pm\infty$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = 0$.

Ⓒ Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a > 0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = +\infty$.

Ⓓ Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a < 0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = -\infty$.

Câu 2. Cho dãy số (u_n) có $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$, dãy số (v_n) có $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 5$. Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n)$ bằng

Ⓐ 15. Ⓑ 8. Ⓒ 5. Ⓓ 3.

Câu 3. Cho $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -3$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$. Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n)$ bằng

Ⓐ -5. Ⓑ -1. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Câu 4. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+3)=0$. Giá trị $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ bằng

Ⓐ 3. Ⓑ -3. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Câu 5. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là số a khi $n\to+\infty$, nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-a)=0$.

Ⓑ Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới vô cực, nếu $|u_n|$ có thể lớn hơn một số dương tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Ⓒ Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n\to+\infty$, nếu u_n có thể nhỏ hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Ⓓ Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n\to+\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Câu 6. Cho các dãy số (u_n), (v_n) và $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a$, $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$. Giá trị $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ $-\infty$. Ⓓ $+\infty$.

Câu 7. Trong các khẳng định dưới đây, có bao nhiêu khẳng định đúng?

(I) $\lim\limits_{n\to+\infty}n^k=+\infty$ với k nguyên dương.

(II) $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=+\infty$ nếu $|q|<1$.

(III) $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=+\infty$ nếu $q>1$.

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

Câu 8. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

Ⓐ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=c$ với $u_n=c$ là hằng số. Ⓑ $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0$ với $|q|>1$.

Ⓒ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$. Ⓓ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^k}=0$ với $k>1$.

Câu 9. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

Ⓐ $\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^n$. Ⓑ $\left(\dfrac{5}{3}\right)^n$. Ⓒ $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$. Ⓓ $\left(-\dfrac{5}{3}\right)^n$.

Câu 10. Giá trị $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}$ bằng

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ 1. Ⓒ $-\infty$. Ⓓ 0.

Câu 11. Dãy số nào có giới hạn khác 0?

Ⓐ $\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$. Ⓑ $2+\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$. Ⓒ $\dfrac{1}{2n}$. Ⓓ $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Câu 12. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

Ⓐ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n=+\infty$. Ⓑ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{5}{n^3}\right)^n=-\infty$.

Ⓒ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{4}{3}\right)^n=0$.

Câu 13. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) thỏa mãn $u_n \geq 0$, $v_n < 0$, $\forall n$. Biết $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

Ⓐ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = a$. Ⓑ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$. Ⓒ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{v_n} = b$. Ⓓ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{v_n} = \sqrt{b}$.

Câu 14. Cho hai dãy số không âm (u_n) và (v_n) thỏa mãn $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

Ⓐ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = 2$. Ⓑ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n + 7v_n} = 5$.

Ⓒ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n + 7v_n} = 2 + \sqrt{21}$. Ⓓ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{v_n} = \sqrt{3}$.

Câu 15. Tìm công bội của cấp số nhân lùi vô hạn, biết $S = -6$; $u_1 = -3$.

Ⓐ $\frac{1}{2}$. Ⓑ $\frac{1}{3}$. Ⓒ $-\frac{1}{2}$. Ⓓ $-\frac{1}{3}$.

Câu 16. Tính tổng $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$.

Ⓐ $\frac{1}{2}$. Ⓑ $\frac{3}{2}$. Ⓒ $\frac{2}{3}$. Ⓓ 1.

Câu 17. Giới hạn $\lim(-n^4 - 5n + 11)$ bằng

Ⓐ $-\infty$. Ⓑ $+\infty$. Ⓒ 1. Ⓓ -1.

Câu 18. Tính tổng $S = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \cdots + \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \cdots$

Ⓐ $\frac{6}{5}$. Ⓑ $\frac{4}{5}$. Ⓒ $\frac{5}{6}$. Ⓓ $\frac{5}{4}$.

Câu 19. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+3}{n-1}$?

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ -3. Ⓒ $-\infty$. Ⓓ 2.

Câu 20. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{4n^2+5n+2}+n}{n+1}$

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ $+\infty$. Ⓓ 5.

Câu 21. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+9} - \sqrt{n+4}\right)$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 3. Ⓒ 5. Ⓓ 0.

Câu 22. Biểu diễn số $1{,}33\ldots$ dưới dạng phân số tối giản có dạng $\frac{a}{b}$. Tính $a + b$?

Ⓐ 21. Ⓑ 30. Ⓒ 39. Ⓓ 48.

Câu 23. Giá trị của $\lim \frac{n^3 - 2n + 5}{3 + 5n}$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ $\frac{2}{5}$. Ⓒ $-\infty$. Ⓓ $+\infty$.

Câu 24. Tìm $I = \lim \frac{7n^2 - 2n^3 + 1}{3n^3 + 2n^2 + 1}$

Ⓐ $\frac{7}{3}$. Ⓑ $-\frac{2}{3}$. Ⓒ 0. Ⓓ 1.

Câu 25. Tìm $\lim\left(\frac{2024}{2025}\right)^n$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ $+\infty$. Ⓒ $\frac{1}{2}$. Ⓓ $\frac{2024}{2025}$.

Câu 26. Tính $L=\lim\frac{n^3+n^2+1}{2\,018-3n^3}$.

Ⓐ $\frac{1}{2\,018}$. Ⓑ -3. Ⓒ $+\infty$. Ⓓ $-\frac{1}{3}$.

Câu 27. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n=\frac{1}{n+1}$ và $v_n=\frac{1}{n+2}$. Khi đó $\lim\frac{v_n}{u_n}$ có giá trị bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 0. Ⓓ 3.

Câu 28. $\lim\frac{1}{2n+7}$ bằng

Ⓐ $\frac{1}{7}$. Ⓑ $+\infty$. Ⓒ $\frac{1}{2}$. Ⓓ 0.

Câu 29. Giới hạn $L=\lim\frac{(2n-3)(3n+1)}{6n^2+n+1}$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ $-\infty$. Ⓓ $+\infty$.

Câu 30. Cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) có $u_1=-2;q=\frac{1}{2}$. Khi đó tổng S của cấp số nhân đã cho bằng

Ⓐ 4. Ⓑ $-\frac{4}{3}$. Ⓒ -4. Ⓓ $\frac{4}{3}$.

Câu 31. Giới hạn $\lim\frac{2n+1}{n^2+3n+2}$ bằng

Ⓐ 2. Ⓑ $+\infty$. Ⓒ 0. Ⓓ $-\infty$.

Câu 32. Tính $A=\lim\left(3+\frac{1}{n^2}\right)$.

Ⓐ $A=3$. Ⓑ $A=-\infty$. Ⓒ $A=+\infty$. Ⓓ $A=0$.

Câu 33. Tính giới hạn $\lim\frac{3\cdot2^{n+1}-2\cdot3^{n+1}}{4+3^n}$.

Ⓐ $\frac{3}{2}$. Ⓑ 0. Ⓒ $\frac{6}{5}$. Ⓓ -6.

Câu 34. Tính giới hạn $\lim\frac{\sqrt{3n^2+1}+n}{1-2n^2}$.

Ⓐ -2. Ⓑ $-\frac{3}{2}$. Ⓒ $+\infty$. Ⓓ 0.

Câu 35. Tính $\lim\left(n-\sqrt{n^2-4n+1}\right)$.

Ⓐ $-\infty$. Ⓑ -2. Ⓒ $+\infty$. Ⓓ 2.

Câu 36. Tính $L=\lim\frac{2n+1}{n^2+n+3}$.

Ⓐ $L=2$. Ⓑ $L=\frac{2}{3}$. Ⓒ $L=0$. Ⓓ $L=\frac{1}{3}$.

Câu 37. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\lim(u_n+3)=0$. Giá trị của $\lim u_n$ bằng

Ⓐ 3. Ⓑ -3. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Câu 38. Cho các dãy số (u_n), (v_n) và $\lim u_n = a$, $\lim v_n = +\infty$ trong đó a hữu hạn thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n}$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ $-\infty$. Ⓓ $+\infty$.

Câu 39. Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt{9n^2+2n-1}-\sqrt{4n^2+1}\right)$.

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ 1. Ⓒ $-\infty$. Ⓓ $\dfrac{9}{4}$.

Câu 40. Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+3n^2-2}+\sqrt[3]{5n^2-8n^3}\right)$.

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ -7. Ⓒ $\dfrac{53}{2}$. Ⓓ $\dfrac{2}{3}$.

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n=4n^2-n+3$; $v_n=3n^2+7$.

a) $\lim\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{4}{3}$.

b) $\lim\dfrac{u_n}{(v_n)^2}=\dfrac{4}{9}$.

c) $\lim\dfrac{(u_n)^2}{v_n}=\dfrac{16}{3}$.

d) $\lim\dfrac{u_n+an^2+7}{v_n}=8$ khi đó $a=20$.

Câu 2. Biết giới hạn $\lim\dfrac{5n^3-2n+1}{n-2n^3}=a$. Khi đó:

a) Giá trị a nhỏ hơn 0.

b) $x=a$ là trục đối xứng của parabol $(P)\colon y=x^2+5x+2$.

c) Phương trình lượng giác $\sin x=a$ vô nghiệm.

d) Cho cấp số cộng (u_n) với công sai $d=3$ và $u_1=a$, thì $u_3=6$.

Câu 3. Biết giới hạn $\lim\left(-2n^3-5n+9\right)=a$ và $\lim\dfrac{4^n+3}{1+3\cdot4^{n+1}}=b$. Khi đó:

a) Tích $a\cdot b=3$.

b) Hàm số $y=\sqrt{1-x}$ có tập xác định là $\mathscr{D}=(a;1]$.

c) Giá trị b là số lớn hơn 0.

d) Phương trình lượng giác $\cos x=b$ vô nghiệm.

Câu 4. Biết giới hạn $\lim\dfrac{5n^3-2n+1}{n-2n^3}=a$. Khi đó:

a) Giá trị a nhỏ hơn 0.

b) $x=a$ là trục đối xứng của parabol $(P)\colon y=x^2+5x+2$.

c) Phương trình lượng giác $\sin x=a$ vô nghiệm.

d) Cho cấp số cộng (u_n) với công sai $d=3$ và $u_1=a$, thì $u_3=6$.

Câu 5. Cho $u_n=\dfrac{7^n+2^{2n-1}+3^{n+1}}{7^{n+1}+5^{n-1}}$. Biết $\lim u_n=\dfrac{a}{b}$ (với $a,b\in\mathbb{Z}$; $\dfrac{a}{b}$ tối giản). Khi đó:

a) $a+b=8$.

b) $a-b=-7$.

c) Bộ ba số a; b; 13 tạo thành một cấp số cộng có công sai $d=7$.

d) Bộ ba số $a; b; 49$ tạo thành một cấp số nhân có công bội $q = 7$.

Câu 6. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) với $u_n = \dfrac{2n^2 - 4n + 7}{8n^2 + 3n + 1}$, $v_n = \dfrac{\sqrt{4n^2 + 5}}{8n}$.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(v_n - \dfrac{1}{4}\right) = 0$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} (2u_n - 4v_n) = 0$.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{2v_n} = 1$.

Câu 7. Một bệnh nhân hàng ngày phải uống một viên thuốc 100 mg. Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn tồn dư 5%. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

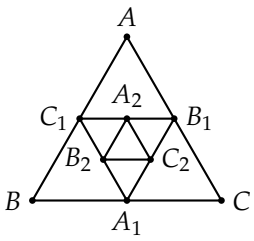
a) Ngay trước khi uống viên thuốc ngày thứ 2, hàm lượng thuốc trong cơ thể là 100 mg.

b) Ngay sau khi uống viên thuốc ngày thứ 2, hàm lượng thuốc trong cơ thể là 105 mg.

c) Hàm lượng thuốc trong cơ thể sau khi uống viên thuốc ngày thứ 4 là 105,2625 mg.

d) Nếu sử dụng thuốc lâu ngày thì hàm lượng thuốc trong cơ thể hằng ngày được ước tính theo công thức $100 \cdot (1 + 5\%)$ mg.

Câu 8. Cho tam giác đều ABC có độ dài cạnh bằng 1. Nối các trung điểm A_1, B_1, C_1 của các cạnh BC, CA, AB ta được tam giác đều $A_1B_1C_1$. Tiếp tục nối các trung điểm A_2, B_2, C_2 của các cạnh B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 ta được tam giác đều $A_2B_2C_2$, thực hiện quá trình này đến vô hạn. Gọi S_n lần là diện tích của tam giác đều $A_nB_nC_n$.



a) Tam giác $A_1B_1C_1$ có độ dài các cạnh bằng $\dfrac{1}{2}$.

b) Biết rằng tam giác đều có cạnh bằng a thì có diện tích là $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Diện tích tam giác $A_3B_3C_3$ là $S_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{64}$.

c) Đặt $u_n = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n$. Khi đó $\lim u_n = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

d) Đặt $h_1 = AA_1$, $h_2 = A_1A_2$, $h_3 = A_2A_3$, …, $h_n = A_{n-1}A_n$ và $v_n = h_1 + h_2 + \cdots + h_n$. Khi đó $\lim v_n = \sqrt{3}$.

3 Tự luận.

Bài 1. Cho hai dãy số $(u_n), (v_n)$ với $u_n = 3 + \dfrac{1}{n}; v_n = 5 - \dfrac{2}{n^2}$. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim u_n, \lim v_n$. $\lim u_n = 3, \lim v_n = 5$

b) $\lim (u_n + v_n), \lim (u_n - v_n), \lim (u_n \cdot v_n), \lim \dfrac{u_n}{v_n}$.

$\lim (u_n + v_n) = 8, \lim (u_n - v_n) = -2, \lim (u_n \cdot v_n) = 15, \lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{3}{5}$

Bài 2. Cho hai dãy số không âm (u_n) và (v_n) với $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n^2}{v_n - u_n}$; 4

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n + 2v_n}$. $2\sqrt{2}$

Bài 3. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+n+1}{2n^2+1}$. $\frac{1}{2}$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)$. 1

Bài 4. Tìm giới hạn của các dãy số cho bởi

a) $u_n=\dfrac{n^2+1}{2n-1}$. $+\infty$ b) $v_n=\sqrt{2n^2+1}-n$. $+\infty$

Bài 5. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\dfrac{-2n+1}{n}$. 2 b) $\lim\dfrac{\sqrt{16n^2-2}}{n}$. 4 c) $\lim\dfrac{4}{2n+1}$. 0 d) $\lim\dfrac{n^2-2n+3}{2n^2}$. $\frac{1}{2}$

Bài 6. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\dfrac{5n+1}{2n}$ $\frac{5}{2}$; b) $\lim\dfrac{6n^2+8n+1}{5n^2+3}$ $\frac{6}{5}$; c) $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+5n+3}}{6n+2}$ $\frac{1}{6}$;

d) $\lim\left(2-\dfrac{1}{3^n}\right)$ 2; e) $\lim\dfrac{3^n+2^n}{4\cdot 3^n}$ $\frac{1}{4}$; f) $\lim\dfrac{2+\dfrac{1}{n}}{3^n}$ 0.

Bài 7. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau đây dưới dạng phân số

a) $1,(12)=1,121212\ldots$; $\frac{37}{33}$. b) $3,(102)=3,102102102\ldots$ $\frac{1033}{333}$

Bài 8. Tính tổng của các cấp số nhân lùi vô hạn sau

a) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\cdots+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+\cdots$. $-\frac{1}{3}$ b) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{64}+\cdots+\left(\dfrac{1}{4}\right)^n+\cdots$. $\frac{1}{3}$

Bài 9. Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,444\ldots$ dưới dạng một phân số.

Bài 10. Cho $u_n=\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$ với a,b là các số thực thỏa mãn $|a|<1,|b|<1$. Tính $\lim u_n$. $\frac{1-b}{1-a}$

Bài 11. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{2n^2-n+9}$. $\frac{1}{4}$

b) $\lim\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n^2+3n+1}$. 1

c) $\lim\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n(n+1)(n+2)}$. $\frac{1}{3}$

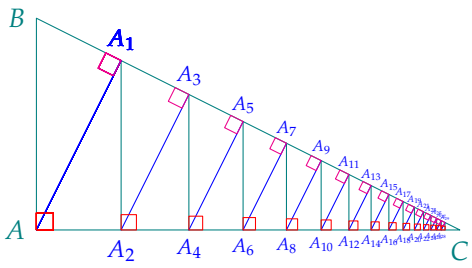
d) $\lim\dfrac{2+4+\cdots+2^n}{3.2^n+1}$. $\frac{1}{3}$

e) $\lim\left[\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$ 1

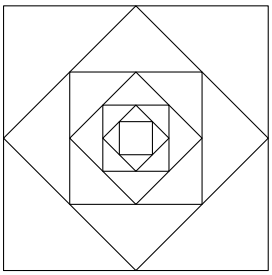
f) $\lim\left[\dfrac{1}{1.4}+\dfrac{1}{4.7}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right]$ $\frac{1}{3}$

Bài 12. Cho dãy số u_n với $u_n=\dfrac{\cos n}{n^2}$. Tính $\lim u_n$. 0

Bài 13. Cho tam giác vuông ABC vuông tại A, có $AB = h$ và góc B bằng α (Hình vẽ bên). Từ A kẻ $AA_1 \perp BC$, từ A_1 kẻ $A_1A_2 \perp AC$, sau đó lại kẻ $A_2A_3 \perp BC$. Tiếp tục quá trình trên, ta được đường gấp khúc vô hạn $AA_1A_2A_3\ldots$ Tính độ dài đường gấp khúc này theo h và α. $\frac{h\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$



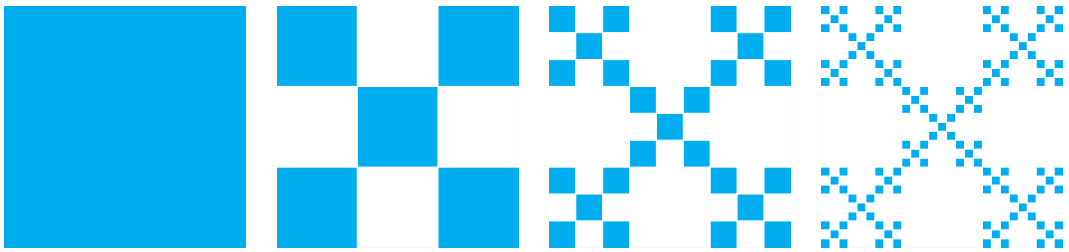
Bài 14. Từ hình vuông đầu tiên có cạnh bằng 1 (đơn vị độ dài), nối các trung điểm của bốn cạnh để có hình vuông thứ hai. Tiếp tục nối các trung điểm của bốn cạnh của hình vuông thứ hai để được hình vuông thứ ba. Cứ tiếp tục làm như thế, nhận được một dãy hình vuông.



a) Kí hiệu a_n là diện tích của hình vuông thứ n và S_n là tổng diện tích của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính a_n, S_n $(n = 1,2,3,\ldots)$ và tìm $\lim S_n$ (giới hạn này nếu có được gọi là tổng diện tích của các hình vuông). 2

b) Kí hiệu p_n là chu vi của hình vuông thứ n và Q_n là tổng chu vi của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính p_n và Q_n $(n = 1,2,3,\ldots)$ và tìm $\lim Q_n$ (giới hạn này nếu có được gọi là tổng chu vi của các hình vuông). $8+4\sqrt{2}$

Bài 15. Xét quá trình tạo ra hình có chu vi vô cực và diện tích bằng 0 như sau:
Bắt đầu bằng một hình vuông H_0 cạnh bằng 1 đơn vị độ dài (xem Hình *a*). Chia hình vuông H_0 thành chín hình vuông bằng nhau, bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_1 (xem Hình *b*). Tiếp theo, chia mỗi hình vuông của H_1 thành chín hình vuông, rồi bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_2 (xem Hình *c*). Tiếp tục quá trình này, ta nhận được một dãy hình H_n $(n = 1,2,3,\ldots)$.



H_0 *a)* H_1 *b)* H_2 *c)* H_3 *d)*

Ta có: H_1 có 5 hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3}$;

H_2 có $5\cdot 5 = 5^2$ hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}$; ....

Từ đó, nhận được H_n có 5^n hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3^n}$.

a) Tính diện tích S_n của H_n và tính $\lim S_n$. $S_n = \left(\frac{5}{9}\right)^n$, $\lim S_n = 0$

b) Tính chu vi p_n của H_n và tính $\lim p_n$. $p_n = 4\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n$, $\lim p_n = +\infty$

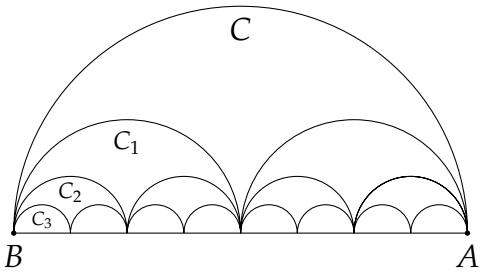
(Quá trình trên tạo nên một hình, gọi là một fractal, được coi là có diện tích $\lim S_n$ và chu vi $\lim p_n$).

Bài 16. Gọi C là nữa đường tròn đường kính $AB = 2R$.
C_1 là đường gồm hai nửa đường tròn đường kính $\dfrac{AB}{2}$,
C_2 là đường gồm bốn nửa đường tròn đường kính $\dfrac{AB}{4}, \cdots$
C_n là đường gồm 2^n nửa đường tròn đường kính $\dfrac{AB}{2^n}, \cdots$

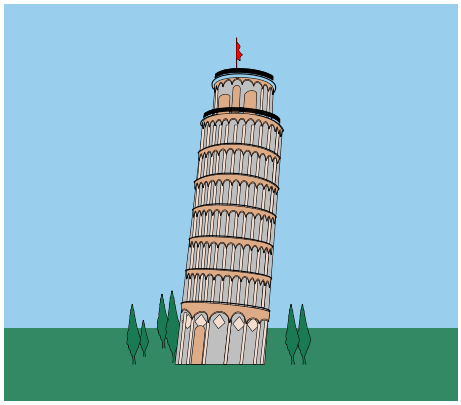
Gọi p_n là độ dài của C_n, S_n là diện tích hình phẳng giới hạn bởi C_n và đoạn thẳng AB.

a) Tính p_n, S_n. $p_n = \pi R, S_n = \dfrac{\pi R^2}{2^{n+1}}$

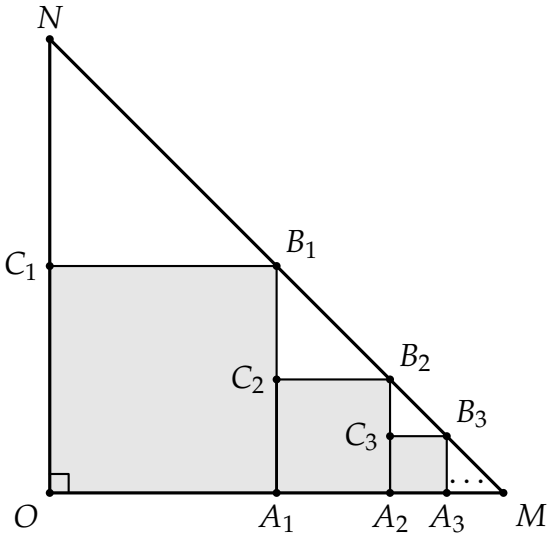
b) Tính giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n).
$\lim p_n = \pi R, \lim S_n = +\infty$



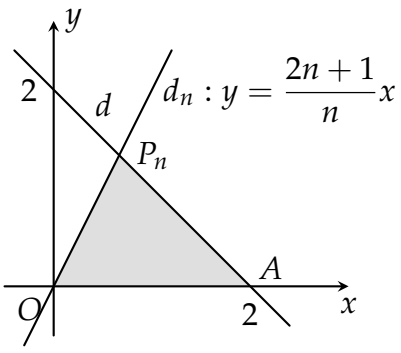
Bài 17. Từ độ cao 55,8 m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất hình bên dưới. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\dfrac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần. Tính $\lim S_n$. 68,2



Bài 18. Cho tam giác OMN vuông cân tại O, $OM = ON = 1$. Trong tam giác OMN, vẽ hình vuông $OA_1B_1C_1$ sao cho các đỉnh A_1, B_1, C_1 lần lượt nằm trên các cạnh OM, MN, ON. Trong tam giác A_1MB_1, vẽ hình vuông $A_1A_2B_2C_2$ sao cho các đỉnh A_2, B_2, C_2 lần lượt nằm trên các cạnh A_1M, MB_1, A_1B_1. Tiếp tục quá trình đó, ta được một dãy các hình vuông (Hình vẽ). Tính tổng diện tích các hình vuông này. $\dfrac{1}{3}$



Bài 19. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, đường thẳng $d : x + y = 2$ cắt trục hoành tại điểm A và cắt đường thẳng $d_n : y = \dfrac{2n+1}{n}x$ tại điểm P_n $(n \in \mathbb{N}^*)$. Kí hiệu S_n là diện tích của tam giác OAP_n. Tìm $\lim S_n$. $\dfrac{4}{3}$



Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	C	2	A	3	A	4	B	5	A	6	B	7	D	8	B	9	C	10	D
11	B	12	C	13	B	14	C	15	A	16	C	17	A	18	C	19	D	20	B
21	D	22	D	23	D	24	B	25	A	26	D	27	A	28	D	29	A	30	C
31	C	32	A	33	D	34	D	35	D	36	C	37	B	38	B	39	A	40	D

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a	Đ	b	S	c	S	d	Đ	Câu 2.	a	Đ	b	Đ	c	Đ	d	S
Câu 3.	a	S	b	Đ	c	Đ	d	S	Câu 4.	a	Đ	b	Đ	c	Đ	d	S
Câu 5.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	Đ	Câu 6.	a	S	b	Đ	c	S	d	S
Câu 7.	a	S	b	Đ	c	Đ	d	S	Câu 8.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	Đ

§3 GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

Định nghĩa: Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \text{ hay } f(x) \to L \text{ khi } x \to x_0$$

Nhận xét: $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$; $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$ với c là hằng số.

Định lí về giới hạn hữu hạn:

(1) Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$. Khi đó:

① $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) + g(x)\right] = L + M$;

② $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) - g(x)\right] = L - M$;

③ $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot g(x)\right] = L \cdot M$;

④ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$).

(2) Nếu $f(x) \geqslant 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, thì $L \geqslant 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

Giới hạn một bên:

☆ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(x_0; b)$. Số L được gọi là giới hạn bên phải của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$.
Kí hiệu:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L.$$

☆ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; x_0)$. Số L được gọi là giới hạn bên trái của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$.
Kí hiệu:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L.$$

Điều kiện để tồn tại giới hạn:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

2) Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

Định nghĩa:

☆ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; +\infty)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \to +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L.$$

☆ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(-\infty; a)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \to -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \to -\infty$, ta có $f(x_n) \to L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$

Chú ý:

☆ Với c, k là hằng số và k nguyên dương, ta luôn có:

① $\lim\limits_{x\to+\infty} c = c$ ② $\lim\limits_{x\to-\infty} c = c$

③ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0$ ④ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0.$

☆ Định lí về giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \to x_0$ vẫn còn đúng khi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$.

3) Giới hạn vô cực của hàm số

Định nghĩa : Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; +\infty)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $-\infty$ khi $x \to +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to -\infty$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \big(-f(x)\big) = -\infty$.

Một vài giới hạn đặc biệt:

☆ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$, với k nguyên dương.

☆ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = \begin{cases} +\infty \text{ nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty \text{ nếu } k \text{ lẻ.} \end{cases}$

Một vài quy tắc về giới hạn vô cực:

- Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x) \cdot g(x)$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \big[f(x) \cdot g(x)\big]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$

- Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L>0$	0	$+$	$+\infty$
$L>0$	0	$-$	$-\infty$
$L<0$	0	$+$	$-\infty$
$L<0$	0	$-$	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng khi thay $x\to x_0$ bởi $x\to x_0^+$, $x\to x_0^-$ hoặc $x\to+\infty$, $x\to-\infty$.

Dạng 1 Thay số trực tiếp

$\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$; $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$ với c là hằng số. Ngoài ra áp dụng các quy tắc sau:

1. Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$. Khi đó:

① $\lim\limits_{x\to x_0}\big[f(x)+g(x)\big]=L+M$;

② $\lim\limits_{x\to x_0}\big[f(x)-g(x)\big]=L-M$;

③ $\lim\limits_{x\to x_0}\big[f(x)\cdot g(x)\big]=L\cdot M$;

④ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}$ (nếu $M\neq 0$).

2. Nếu $f(x)\geqslant 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$, thì $L\geqslant 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$.

Ví dụ 1

Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-4x+2)$;

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-2}{2x+1}$.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 ☆

Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+5x-2)$.

b) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{5x^2+x+4}$.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Dạng 2 Phương pháp đặt thừa số chung - kết quả hữu hạn

- Nếu $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.
- $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.
- $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c=c$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{c}{x^k}=0$ với c là hằng số và $k\in\mathbb{N}$.
- $a\sqrt{b}=\begin{cases}\sqrt{a^2b} & a\geq 0\\ -\sqrt{a^2b} & a<0.\end{cases}$

Ví dụ 2

Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$.

$I=6$.

Ví dụ 3

Tính giới hạn $I=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$.

$I=-1$.

Ví dụ 4

Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4+7}{x^4+1}$.

1.

Ví dụ 5

Tìm giá trị của các tham số a và b biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=4$. $a=2, b=-3$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 2 ☆

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$. 2 b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+x^3}{1-x^2}$. $\frac{3}{2}$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2+x-6}$. $\frac{3}{5}$

Bài 3 ☆

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1-3x^2}{x^2+2x}$. -3 b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2}{x+1}$. 0 c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. -1

Bài 4 ☆

Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{2x^4+x^2-3}}$.

🔑 0.

Bài 5 ☆

Cho m, n là các số thực khác 0. Nếu giới hạn $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2+mx+n}{x+5}=3$, hãy tìm mn. 🔑 $mn=520$.

Bài 6 ☆

Tìm số thực a thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a\sqrt{2x^2+3}+2024}{2x+2023}=\dfrac{1}{2}$.

🔑 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Dạng 3 Phương pháp đặt thừa số chung - kết quả vô cực

Để tìm giới hạn của hàm số ta cần nhớ

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = \begin{cases} +\infty, k = 2n \\ -\infty, k = 2n+1. \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c = c$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$.

Ví dụ 6

Tính $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3+3x+1\right)$. $-\infty$

Ví dụ 7

Kết quả của $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3+5x^2-3}{x^2+6x+3}$ là $+\infty$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 7 ☆

Tính $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-4x^5-3x^3+x+1\right)$. $+\infty$

Bài 8 ☆

Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+2}{(x+3)^2}$.

🔑 $-\infty$

Dạng 4 Phương pháp lượng liên hợp

Ví dụ 8

Cho $P=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$. Tính P.

🔑 $P=\dfrac{1}{4}$

Ⓐ $P=\dfrac{1}{4}$. Ⓑ $P=\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $P=1$. Ⓓ $P=0$.

Ví dụ 9

Biết $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x+1\right)=a$. Tính $2a+1$.

🔑 3

Ⓐ -1. Ⓑ -3. Ⓒ 0. Ⓓ 3.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 9 ☆

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$. 🔑 $\frac{1}{6}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x-1\right)$. 🔑 -1

Dạng 5 Giới hạn một bên

Ví dụ 10

Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{2-x}}$.

🔑 $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{2-x}}=0$

Ví dụ 11

Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^3+1}{x^3+2x^2+x}$.

🔑 $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^3+1}{x^3+2x^2+x}=-\infty$

Ví dụ 12

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{1-x} & \text{khi } x<1\\ x^3-2x^2+3 & \text{khi } x\geq 1\end{cases}$. Tính $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-2;\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 10 ☆

Tính giới hạn của các hàm số sau:

a) $I_1=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{-x^2+5}{x-3}$; $-\infty$

b) $I_2=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x^2+\sqrt{3-x}}{x-3}$; $-\infty$

c) $I_3=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{|x^2-4|}{x+2}$. 4

d) $I_4=\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{\sqrt{x+7}-2}{|x^2-9|}$. $\dfrac{1}{24}$

Bài 11 ☆

Cho hàm số

$$f(x)=\begin{cases} x+m & \text{nếu } x<0,\\ x^2-1 & \text{nếu } x\geq 0, \end{cases}$$

với m là tham số.

Biết hàm số $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi $x\to 0$. Tìm m. $m=-1$

Dạng 6 Toán thực tế áp dụng giới hạn hàm số

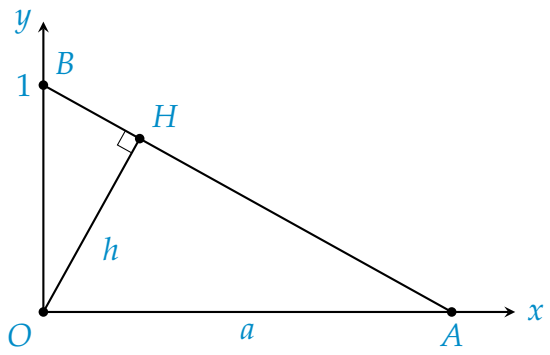
Ví dụ 13

Cho tam giác vuông OAB với $A=(a;0)$ và $B=(0;1)$ như Hình vẽ. Đường cao OH có độ dài là h.

a) Tính h theo a.

b) Khi điểm A dịch chuyển về O, điểm H thay đổi thế nào? Tại sao?

c) Khi A dịch chuyển ra vô cực theo chiều dương của trục Ox, điểm H thay đổi thế nào? Tại sao?



Ví dụ 14

Một cái hồ đang chứa 200 m^3 nước mặn với nồng độ muối 10 kg/m^3. Người ta ngọt hóa nước hồ bằng cách bơm nước ngọt vào hồ với tốc độ 2 $\text{m}^3/\text{phút}$.

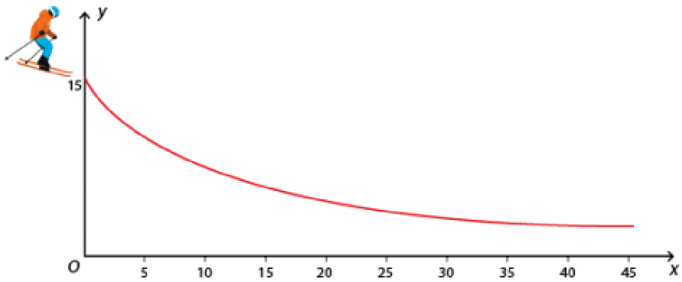
a) Viết biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối trong hồ sau t phút từ khi bắt đầu bơm.

b) Tìm giới hạn $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)$ và giải thích ý nghĩa.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 12 ☆

Trong một cuộc thi các môn thể thao trên tuyết, người ta muốn thiết kế một đường trượt bằng bang cho nội dung đổ dốc tốc độ đường dài.



Vận động viên sẽ xuất phát từ vị trí $(0;15)$ cao 15 m so với mặt đất (trục Ox). Đường trượt phải thỏa mãn yêu cầu là càng ra xa thì càng gần mặt đất để tiết kiệm lượng tuyết nhân tạo. Một nhà thiết kế đề nghị sử dụng đường cong là đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{150}{x+10}$ với $x \geq 0$. Hãy kiểm tra xem hàm số $y = f(x)$ có thỏa mãn các điều kiện dưới đây hay không:

a) Có đồ thị đi qua điểm $(0;15)$.

b) Giảm trên $[0;+\infty)$.

c) Càng ra xa (x càng lớn), đồ thị càng gần trục Ox với khoảng cách nhỏ tùy ý.

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$. Phát biểu nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right] = L+M$.

Ⓑ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right] = L-M$.

Ⓒ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = L\cdot M$.

Ⓓ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. Phát biểu nào đúng?

Ⓐ Nếu với dãy (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to L$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$.

Ⓑ Nếu với dãy (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to L$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$.

Ⓒ Nếu với dãy (x_n) bất kì, $x_n > a$, ta có $f(x_n) \to L$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$.

Ⓓ Nếu với dãy (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to L$, ta có $f(x_n) \to +\infty$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$.

Câu 3. Với c, k là các hằng số và k nguyên dương thì

Ⓐ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{c}{x^k} = 0$. Ⓑ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{c}{x^k} = +\infty$. Ⓒ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{c}{x^k} = -\infty$. Ⓓ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{c}{x^k} = \pm\infty$.

Câu 4. Phát biểu nào sau đây là đúng?

Ⓐ Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

Ⓑ Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$.

Ⓒ Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

Ⓓ Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

Câu 5. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^k}$ (với k nguyên dương) là

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ $-\infty$. Ⓒ x. Ⓓ 0.

Câu 6. Giới hạn nào dưới đây có kết quả bằng 3?

Ⓐ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x}{x-2}$. Ⓑ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-3x}{2-x}$. Ⓒ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-3x}{x-2}$. Ⓓ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2}{x-2}$.

Câu 7. Giá trị của $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2-3x+1\right)$ bằng

Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 0. Ⓓ $+\infty$.

Câu 8. Tính $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ bằng

Ⓐ 3. Ⓑ -3. Ⓒ 6. Ⓓ $+\infty$.

Câu 9. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x+1}{-x+1}$ bằng

Ⓐ -4. Ⓑ 4. Ⓒ 2. Ⓓ 1.

Câu 10. Tính $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3+2x}{-x+7}$.

Ⓐ -2. Ⓑ 3. Ⓒ $\dfrac{3}{7}$. Ⓓ $\dfrac{-2}{7}$.

Câu 11. Tính $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x-3\right)$.

Ⓐ $\dfrac{-3}{2}$. Ⓑ -3. Ⓒ 0. Ⓓ $\dfrac{-7}{2}$.

Câu 12. Kết quả của $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-15}{x-2}$ là

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ $-\infty$. Ⓒ $\dfrac{-15}{2}$. Ⓓ 1.

Câu 13. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng $+\infty$?

Ⓐ $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-3x+4}{x-2}$. Ⓑ $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-3x+4}{x-2}$. Ⓒ $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-3x+4}{x-2}$. Ⓓ $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-3x+4}{x-2}$.

Câu 14. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2-2x+1\right)$.

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ $-\infty$. Ⓒ 0. Ⓓ -1.

Câu 15. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(2x^5-3x^2+1\right)$.

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ $-\infty$. Ⓒ 0. Ⓓ 2.

Câu 16. Kết quả của $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-15}{x-2}$ là

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ $-\infty$. Ⓒ $\dfrac{-15}{2}$. Ⓓ 1.

Câu 17. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-4x+3}{|x-3|}$ bằng

Ⓐ -2. Ⓑ 2. Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 18. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3+5x^2-3}{x^2+6x+3}$ là

Ⓐ -2. Ⓑ $+\infty$. Ⓒ $-\infty$. Ⓓ 2.

Câu 19. Giá trị của $I=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-4x+7}{x+1}\right)$

Ⓐ $I=-4$. Ⓑ $I=5$. Ⓒ $I=4$. Ⓓ $I=2$.

Câu 20. Giá trị của $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+4x}$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ -1. Ⓒ $\dfrac{5}{4}$. Ⓓ $-\dfrac{5}{4}$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{khi } x\geq 1 \\ 2x+1 & \text{khi } x<1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

Ⓐ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0$. Ⓑ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=3$. Ⓒ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-1$. Ⓓ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$.

Câu 22. Giá trị của $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x+7}{x-3}$ là

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ $-\infty$. Ⓒ 0. Ⓓ 2.

Câu 23. Giá trị của $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1-3x}{2x+3}$

Ⓐ -3. Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $-\dfrac{3}{2}$. Ⓓ $-\infty$.

Câu 24. Giá trị của $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x}{x^2+1}$ bằng

Ⓐ $-\infty$. Ⓑ 1. Ⓒ $+\infty$. Ⓓ 0.

Câu 25. Giá trị đúng của $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^4+7}{x^4+1}$ là

Ⓐ -1. Ⓑ 1. Ⓒ 7. Ⓓ $+\infty$.

Câu 26. Giá trị của $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ -2. Ⓒ $-\infty$. Ⓓ 2.

Câu 27. Giá trị của $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-x+1}{x^2-1}$ bằng

Ⓐ $-\infty$. Ⓑ -1. Ⓒ 1. Ⓓ $+\infty$.

Câu 28. Chọn kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)$

Ⓐ $-\infty$. Ⓑ 0. Ⓒ $+\infty$. Ⓓ Không tồn tại.

Câu 29. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}|x^2-4|$ là

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Câu 30. Tìm $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+x}+2x)$.

Ⓐ 2. Ⓑ $-\infty$. Ⓒ 1. Ⓓ $+\infty$.

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Cho $f(x)=x^2-6x+5$, $g(x)=10-2x$.

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$.

b) $\lim\limits_{x\to 2}\left[2f(x)-g(x)\right]=12$.

c) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{f(x)}{g(x)}=3$.

d) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\left[f(x)\right]^2}{g(x)}=0$.

Câu 2. Cho 2 hàm số $f(x)=\dfrac{x}{|x-2|}$ và $g(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$.

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x}{x-2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=+\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=-\infty$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+1}$ và $g(x)=\dfrac{2x}{2x+3}$.

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=1$.

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=1$.

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=-2$.

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-1$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=-2$ và $g(x)=(x-3)^3$.

a) $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x)=0$.

b) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{g(x)}=-\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{f(x)\cdot g(x)}=+\infty$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}1-x^2 \text{ khi } x<2\\ \sqrt{x+2} \text{ khi } x\geq 2.\end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=-8$.

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-3$.

c) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2$.

d) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x-2 & \text{khi } x<-1\\ \sqrt{x^2+1} & \text{khi } x\geq -1\end{cases}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\sqrt{5}$.

b) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-3$.

c) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\sqrt{2}$.

d) Hàm số tồn tại giới hạn khi $x\to -1$.

Câu 7. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^2-10x\right)=+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{2x^2+x+1}=\dfrac{3}{2}$.

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-3x}{2-3x}=\dfrac{5}{4}$.

d) Để $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}+ax\right)=+\infty$ thì $a<\sqrt{2}$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{x+1}$ và $g(x)=\dfrac{2x}{x+1}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ và $\lim\limits_{x\to -2} g(x)=-2$.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=2$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\sqrt{3}$.

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}[f(x)-g(x)]=\sqrt{3}-2$.

d) $\lim\limits_{x\to -1}[f(x)-g(x)]=\dfrac{1}{2}$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+1 \text{ khi } x\leq 1\\ \sqrt{x^2+a} \text{ khi } x>1\end{cases}$. Khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

a) $\lim\limits_{x\to -5} f(x)=-9$.

b) $\lim\limits_{x\in 1} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=a$.

c) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)}{1-x}=+\infty$.

d) Để tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ thì $a=8$.

Câu 10. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 2000 được mô tả bởi hàm số $f(t) = \dfrac{27t+10}{t+5}, t > 0$, trong đó $f(t)$ được tính bằng nghìn người. Tốc độ tăng dân số của thị trấn vào năm thứ t_0 kể từ năm 2000 là $v(t_0) = \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ (tính bằng nghìn người/năm).

a) $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 27$.

b) Khi thời gian t càng lớn thì số dân của thị trấn sẽ tiến gần đến 27 nghìn người.

c) Tốc độ tăng dân số của thị trấn vào năm 2024 là 0,135 nghìn người/năm.

d) Từ sau năm 2000, có 6 năm tốc độ tăng dân số của thị trấn lớn hơn 1000 người/năm.

Câu 11. Nhà anh Bình có một hồ hình chữ nhật rộng 10 hecta và có độ sâu trung bình 1,5 m. Trong hồ có chứa 5000 m^3 nước ngọt. Để nuôi tôm, anh Bình bơm nước biển có nồng độ muối là 30 gam/lít vào hồ với tốc độ 10 m^3/phút. Theo nghiên cứu, đánh giá, độ mặn đo bằng các máy kiểm tra nước thích hợp trong ao nuôi tôm thẻ chân trắng nằm trong khoảng từ $2-40\%$. Tôm sống và phát triển tốt nhất với chỉ số từ $10-25\%$.

a) Sau t phút thì lượng muối trong hồ là $300t$ (kg).

b) Sau t phút, lượng nước trong hồ là $5000+10t$ (m^3).

c) Nồng độ muối của nước trong trong hồ tại thời điểm t phút kể từ khi bơm là $C(t) = \dfrac{500+t}{30t}$ (g/l).

d) Khi t đủ lớn thì nước trong hồ sẽ thích hợp để tôm phát triển.

3 Tự luận.

Bài 1. Cho hai hàm số $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ và $g(x) = x+1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

a) $f(x) = g(x)$.

b) $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} g(x)$.

Bài 2. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{(x+2)^2-4}{x}$. 4

b) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$. $\frac{1}{6}$

Bài 3. Cho hàm số $H(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t<0 \\ 1 & \text{nếu } t\geq 0 \end{cases}$ (hàm Heaviside, thường được dùng để mô tả việc chuyển trạng thái tắt/mở của dòng điện tại thời điểm $t=0$). Tính $\lim\limits_{t\to0^+} H(t)$ và $\lim\limits_{t\to0^-} H(t)$. $\lim\limits_{t\to0^+} H(t) = 1, \lim\limits_{t\to0^-} H(t) = 0$

Bài 4. Tính các giới hạn một bên:

a) $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x-2}{x-1}$. $-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to4^-} \dfrac{x^2-x+1}{4-x}$. $+\infty$

Bài 5. Cho hàm số $g(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{|x-2|}$. Tìm $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$ và $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$.

$\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=-1,\ \lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=1$

Bài 6. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-2x}{\sqrt{x^2+1}}$. -2

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}-x\right)$. $\frac{1}{2}$

Bài 7. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2+3ax-4a}{x-1} & \text{khi } x<1\\ 2bx+1 & \text{khi } x\geq 1\end{cases}$. Biết rằng a,b là các số thực thỏa mãn hàm số $f(x)$ có giới hạn tại $x=1$.

a) Tìm mối quan hệ giữa a và b. $-3a=2b+1$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2$. $\frac{1}{13}$

Câu 12. Giới hạn sau $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+7}-5}{2x-2}=\dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b$. 31

Bài 8. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$. $\frac{13}{12}$

Bài 9. Tìm các giá trị a,b biết rằng

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{ax+b}{x-2}=5$. $a=2,b=-3$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-ax+1}{x^2-3x+2}=b$. $a=3,b=-1$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=3$. $a=6,b=-6$

Bài 10. Biết rằng $a+b=4$; $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^3}\right)$ hữu hạn. Tính giới hạn

$$L=\lim_{x\to 1}\left(\frac{b}{1-x^3}-\frac{a}{1-x}\right).$$

1

Bài 11. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-16}{x-2}=12$. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{5f(x)-16}-4}{x^2+2x+8}$. $\frac{5}{24}$

Bài 12. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên biến đổi theo một hàm số thời gian (tính theo ngày) là $g(t)=45t^2-t^3$ (người). Tốc độ trung bình gia tăng người bệnh giữa hai thời điểm t_1,t_2 là $V_{tb}=\dfrac{g(t_2)-g(t_1)}{t_2-t_1}$. Tính $\lim\limits_{t\to 10}\dfrac{g(t)-g(10)}{t-10}$, cho biết ý nghĩa kết quả tìm được. 600

Bài 13. Trong hồ có chứa 6 000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 30 gam/lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút.

a) Chứng tỏ rằng nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là $C(t)=\dfrac{30t}{400+t}$ (gam/lít).

b) Nồng độ muối như thế nào nếu $t\to+\infty$? 30

Bài 14. Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t) = \dfrac{50t}{t+4}$ $(t \geq 0)$ bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

$\lim\limits_{t\to+\infty} N(t) = 50$

Bài 15. Số lượng xe ô tô vào một đường hầm cho bởi công thức $f(v) = \dfrac{290,4v}{0,36v^2 + 13,2v + 264}$, trong đó v(m/s) là vận tốc trung bình của các xe khi đi vào đường hầm. Tính $\lim\limits_{v\to 20} f(v)$ và cho biết ý nghĩa (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

$\lim\limits_{v\to 20} f(v) \approx 9$

Bài 16. Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số: $C(x) = 50\,000 + 105x$.

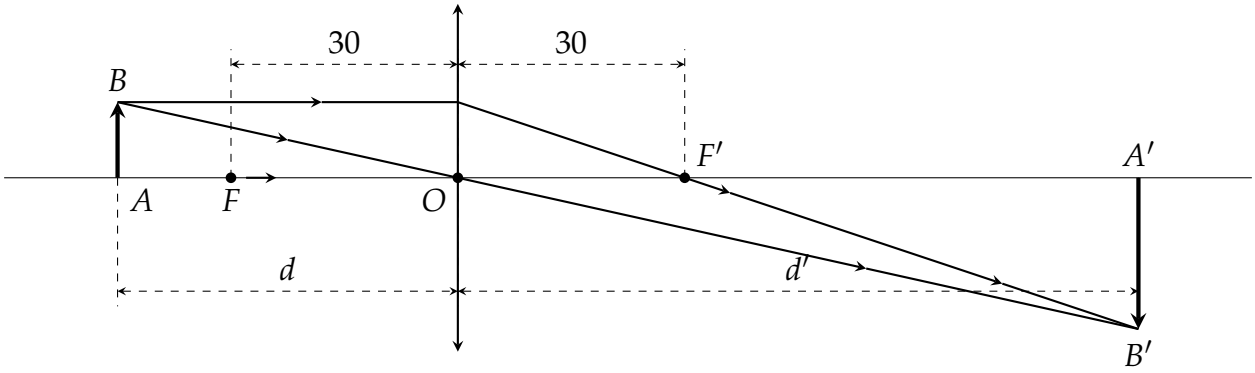
a) Tính chi phí trung bình $\overline{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm.

$\overline{C}(x) = \dfrac{50000 + 105x}{x}$

b) Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} \overline{C}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \overline{C}(x) = 105$

Bài 17. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự $f = 30$ cm. Trong Vật lí, ta biết rằng nếu đặt vật thật AB cách quang tâm của thấu kính một khoảng d (cm) > 30 (cm) thì được ảnh thật $A'B'$ của thấu kính cách quang tâm một khoảng $d'(cm)$ (Hình vẽ). Ngược lại, nếu $0 < d < 30$, ta có ảnh ảo. Công thức của thấu kính là $\dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{d'} = 30$.



a) Từ công thức của thấu kính, hãy tìm biểu thức xác định hàm số $d' = h(d)$.

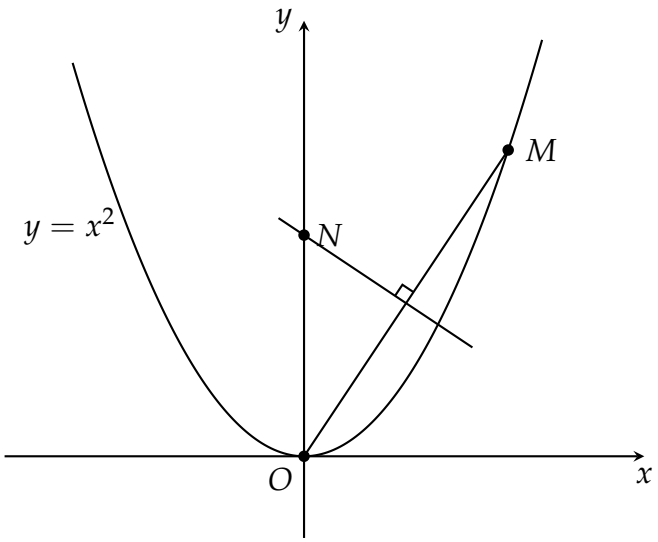
$d' = \dfrac{30d}{d-30}$

b) Tính các giới hạn $\lim\limits_{d\to 30^+} h(d)$, $\lim\limits_{d\to 30^-} h(d)$, $\lim\limits_{d\to+\infty} h(d)$. Sử dụng các kết quả này để giải thích ý nghĩa đã biết trong Vật lí.

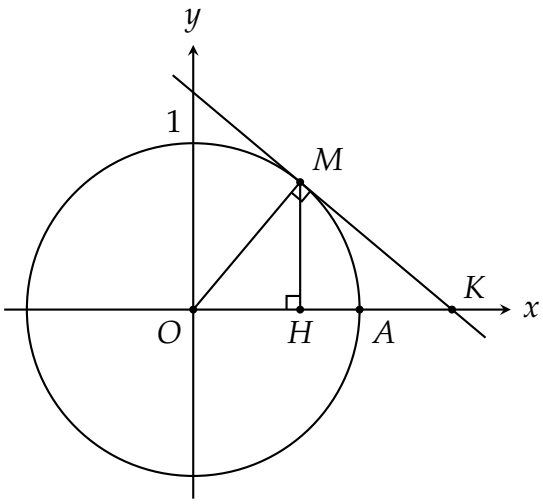
$\lim\limits_{d\to 30^+} h(d) = +\infty$, $\lim\limits_{d\to 30^-} h(d) = -\infty$, $\lim\limits_{d\to+\infty} h(d) = 30$

Bài 18. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $M(t, t^2), t > 0$, nằm trên đường parabol $y = x^2$. Đường trung trực của đoạn thẳng OM cắt trục tung tại N. Điểm N dần đến điểm nào khi điểm M dần đến điểm O?

$A\left(0; \frac{1}{2}\right)$



Bài 19. Cho điểm $M\left(t,\sqrt{1-t^2}\right), 0<t<1$ nằm trên đường tròn đơn vị $(C): x^2+y^2=1$, điểm $A(1;0)$ là một giao điểm của (C) với trục hoành. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên trục hoành, K là giao điểm của tiếp tuyến của (C) tại M với trục hoành. Khi điểm M dần đến điểm A thì tỉ số $\dfrac{HK}{HA}$ dần đến giá trị nào? 2



Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	D	2	A	3	A	4	C	5	D	6	C	7	C	8	C	9	A	10	A
11	A	12	B	13	B	14	A	15	B	16	B	17	A	18	C	19	D	20	C
21	B	22	A	23	C	24	D	25	B	26	B	27	D	28	A	29	B	30	B

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a	Đ	b	S	c	S	d	Đ	Câu 2.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	Đ		
Câu 3.	a	S	b	Đ	c	Đ	d	S	Câu 4.	a	Đ	b	S	c	Đ	d	S		
Câu 5.	a	S	b	Đ	c	Đ	d	S	Câu 6.	a	S	b	Đ	c	Đ	d	S		
Câu 7.	a	Đ	b	Đ	c	S	d	Đ	Câu 8.	a	S	b	Đ	c	S	d	Đ		
Câu 9.	a	Đ	b	S	c	S	d	Đ	Câu 10.	a	Đ	b	Đ	c	S	d	Đ		
Câu 11.	a	Đ	b	Đ	c	S	d	Đ											

§4 HÀM SỐ LIÊN TỤC

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Hàm số liên tục tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.
Hàm số $y = f(x)$ được gọi là *liên tục tại điểm* x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Để hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 thì phải có cả ba điều sau:

1. Hàm số xác định tại x_0.
2. Tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

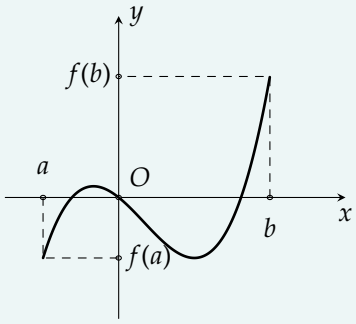
Lưu ý. Khi hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại điểm x_0 thì ta nói $f(x)$ gián đoạn tại điểm x_0 và x_0 được gọi là điểm gián đoạn của hàm số $f(x)$.

2) Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$.
  Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên khoảng $(a;b)$ nếu $f(x)$ liên tục tại mọi điểm trong khoảng ấy.
- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[a;b]$.
  Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu $f(x)$ liên tục tại trên khoảng $(a;b)$ và $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Nhận xét.

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ là một đường liền, có điểm đầu, điểm cuối như hình vẽ bên. Nếu hai điểm này nằm về hai phía so với trục hoành thì đường liền nói trên luôn cắt trục hoành tại ít nhất một điểm. Điều này có thể được phát biểu dưới dạng như sau:
Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì luôn tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho $f(c) = 0$.



3) Tính liên tục của hàm số sơ cấp

- Hàm số đa thức $P(x)$, các hàm số lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số phân thức $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, hàm số căn thức $y = \sqrt{P(x)}$, các hàm số lượng giác $y = \tan x$, $y = \cot x$ liên tục trên các khoảng của tập xác định của chúng. Trong đó, $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức.

✎ **Nhận xét.** Hàm số thuộc những loại trên được gọi chung là hàm số sơ cấp. Khi nói xét tính liên tục của một hàm số mà không nói gì thêm thì ta xét tính liên tục của hàm số đó trên những khoảng của tập xác định của chúng.

4) Tổng, hiệu, tích, thương của hàm số liên tục

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục tại điểm x_0. Khi đó:

- Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0.
- Hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

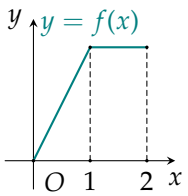
Dạng 1. Dựa vào đồ thị xét tính liên tục của hàm số tại một điểm, một khoảng.

Để xét tính liên tục của hàm số khi biết đồ thị, ta cần nhớ:

- Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một đường liền nét trên khoảng đó.
- Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Ví dụ 1

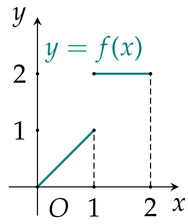
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(0;2)$.



Hàm số liên tục trên khoảng $(0;2)$.

Ví dụ 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(0; 2)$.

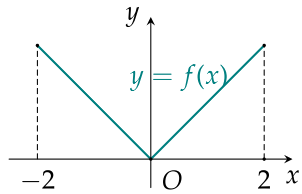


Hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(0, 1)$, $(1, 2)$ và gián đoạn tại $x = 1$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(-2; 2)$.



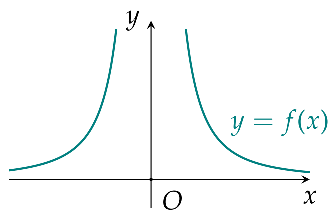
Hàm số liên tục trên khoảng $(-2; 2)$.

....

....

Bài 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có đồ thị như hình bên. Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathscr{D}$.



Hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$. Gián đoạn tại điểm $x = 0$.

....

....

....

Dạng 2 Hàm số liên tục tại một điểm

Để kiểm tra tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = x_0$ ta cần làm như sau:

- Bước 1: Tính $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
- Bước 2: Tính $= f(x_0)$. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ thì kết luận hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = x_0$. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ thì kết luận hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = x_0$.

Ví dụ 3

Xét tính liên tục của các hàm số:

a) $f(x)=1-x^2$ tại điểm $x_0=3$.

liên tục

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{nếu } x\neq 1\\ 2 & \text{nếu } x=1\end{cases}$ tại điểm $x_0=1$.

liên tục

c) $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{khi } x>1\\ -x & \text{khi } x\leq 1\end{cases}$ tại điểm $x_0=1$.

gián đoạn

Ví dụ 4

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & \text{nếu } x\leq 1\\ mx+1 & \text{nếu } x>1\end{cases}$ với m là tham số. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm $x_0=1$.

$m=2$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3 ☆

Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}1-\cos x & \text{khi } x\leq 0\\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x>0\end{cases}$ tại $x=0$?

Hàm số $y=f(x)$ gián đoạn tại $x=0$.

Bài 4 ☆

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{nếu } x<2 \\ -x+a & \text{nếu } x\geq 2 \end{cases}$ với a là tham số. Tìm a để hàm số liên tục tại điểm $x_0=2$.

$a=3$

Dạng 3 Hàm số liên tục trên khoảng, đoạn

- Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.
- Hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm phân thức hữu tỉ, hàm lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

Ví dụ 5

Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-4}$.

Ví dụ 6

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2x}{x} & \text{khi } x\neq 0 \\ a & \text{khi } x=0 \end{cases}$. Tìm a để hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$a=-2$

Ví dụ 7

Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

① $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{khi } x\geq -2\\ 2-x & \text{khi } x<-2.\end{cases}$

② $f(x)=\begin{cases}3x-2 & \text{khi } x>-1\\ 1 & \text{khi } x=-1\\ x^2-6 & \text{khi } x<-1.\end{cases}$

③ $f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{khi } x\geq 3\\ x^2 & \text{khi } 1\leq x<3\\ 4x^2-3 & \text{khi } x<1.\end{cases}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5 ☆

Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ trên đoạn $[-1;1]$.

Bài 6 ☆

Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x^2-4} & \text{khi } x\neq 2\\ 1 & \text{khi } x=2\end{cases}$.

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3 & \text{khi } x=1\end{cases}$.

Dạng 4 Bài toán phương trình có nghiệm

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì luôn tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Ví dụ 8

Chứng minh rằng phương trình:

a) $x^3 + 3x - 1 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(0;1)$.

b) $x = \cos x$ có nghiệm trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 7 ☆

Chứng minh rằng phương trình $x^5 + x^3 - 10 = 0$ có ít nhất một nghiệm.

Bài 8 ☆

Chứng minh rằng phương trình $x + 1 + \cos x = 0$ có nghiệm.

Dạng 5 Toán thực tế áp dụng hàm số liên tục

Ví dụ 9

Tại một xưởng sản xuất bột đá thạch anh, giá bán (tính theo nghìn đồng) của x (kg) bột đá thạch anh được tính theo công thức sau:

$$P(x)=\begin{cases}4,5x & \text{khi } 0<x\leq 400\\ 4x+k & \text{khi } x>400\end{cases}\quad (k \text{ là một hằng số}).$$

a) Với $k=0$, xét tính liên tục của hàm số $P(x)$ trên $(0;+\infty)$.

b) Với giá trị nào của k thì hàm số $P(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$? $k=200$

....

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 9 ☆

Một hãng taxi đưa ra giá cước $T(x)$ (đồng) khi đi quãng đường x (km) cho loại xe 4 chỗ như sau:

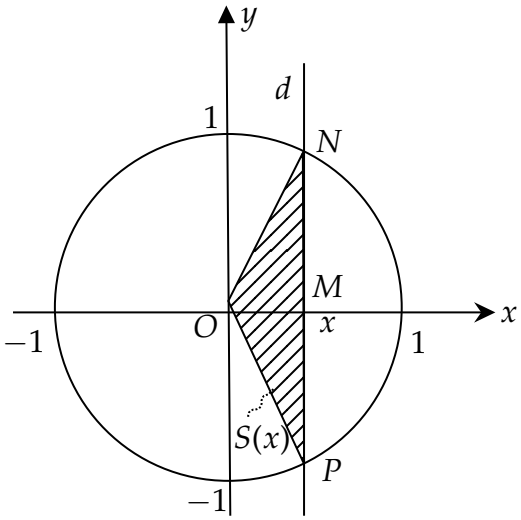
$$T(x)=\begin{cases}10\,000 & \text{khi } 0<x\leq 0,7\\ 10\,000+(x-0,7)\cdot 14\,000 & \text{khi } 0,7<x\leq 20\\ 280\,200+(x-20)\cdot 12\,000 & \text{khi } x>20\end{cases}.$$

Xét tính liên tục của hàm số $T(x)$.

....

Bài 10

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) tâm O, bán kính bằng 1. Một đường thẳng d thay đổi, luôn vuông góc với trục hoành, cắt trục hoành tại điểm M có hoành độ $x(-1 < x < 1)$ và cắt đường tròn (C) tại các điểm N và P (xem hình vẽ).



a) Viết biểu thức $S(x)$ biểu thị diện tích của tam giác ONP. $S(x) = \sqrt{1-x^2} \cdot |x|$

b) Hàm số $y = S(x)$ có liên tục trên $(-1;1)$ không? Giải thích.

c) Tính các giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^-} S(x)$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} S(x)$. $\lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1^+} S(x) = 0$

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Hàm số nào sau đây không liên tục tại $x = 3$?

Ⓐ $y = \sqrt{x+2}$. Ⓑ $y = \sin x$. Ⓒ $y = \dfrac{x^2}{x-3}$. Ⓓ $y = x^2 + 1$.

Câu 2. Hàm số nào dưới đây liên tục trên tập $\mathbb{R}$?

Ⓐ $f(x) = x^2 + 1$. Ⓑ $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$. Ⓒ $f(x) = \dfrac{2-x}{x+2}$. Ⓓ $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Câu 3. Hàm số nào sau đây không liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$?

Ⓐ $y=x^2-2x+2$. Ⓑ $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$. Ⓒ $y=\sqrt{x-1}$. Ⓓ $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x-2}$.

Câu 4. Hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-3}$ gián đoạn tại điểm x_0 bằng

Ⓐ $x_0=1$. Ⓑ $x_0=-2$. Ⓒ $x_0=-1$. Ⓓ $x_0=3$.

Câu 5. Hàm số nào trong các hàm số dưới đây **không** liên tục trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y=|x+1|$. Ⓑ $y=\tan x$. Ⓒ $y=\sin x$. Ⓓ $y=\dfrac{x}{|x|+1}$.

Câu 6. Hàm số nào trong các hàm số dưới đây không liên tục trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y=|x+1|$. Ⓑ $y=\cot x$. Ⓒ $y=\sin x$. Ⓓ $y=\dfrac{x}{|x|+1}$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a)\cdot f(b)<0$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

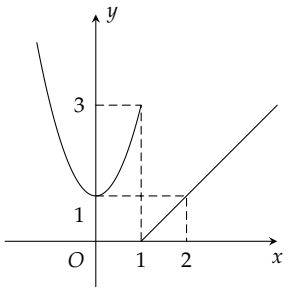
Ⓐ Phương trình $f(x)=0$ có một nghiệm trên $(a;b)$.

Ⓑ Phương trình $f(x)=0$ có nhiều nhất một nghiệm trên $(a;b)$.

Ⓒ Đồ thị $y=f(x)$ cắt trục hoành tại một điểm trên $(a;b)$.

Ⓓ Phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên $(a;b)$.

Câu 8. Hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào **đúng**?



Ⓐ Hàm số liên tục trên $(-\infty;1)$.

Ⓑ Hàm số liên tục trên $(-\infty;2)$.

Ⓒ Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ⓓ Hàm số liên tục trên $(0;+\infty)$.

Câu 9. Hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2}$ liên tục trên khoảng nào sau đây?

Ⓐ $(-\infty;2)$. Ⓑ $(-1;2)$. Ⓒ $(1;2)$. Ⓓ $(1;+\infty)$.

Câu 10. Hàm số nào dưới đây gián đoạn tại điểm $x=1$?

Ⓐ $y=\dfrac{x-1}{x^2+x+1}$. Ⓑ $y=\dfrac{x^2-x+1}{x+1}$.

Ⓒ $y=(x-1)(x^2+x+1)$. Ⓓ $y=\dfrac{x^2+2}{x-1}$.

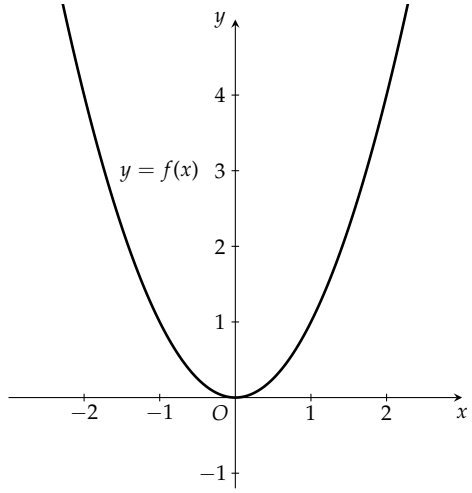
Câu 11.

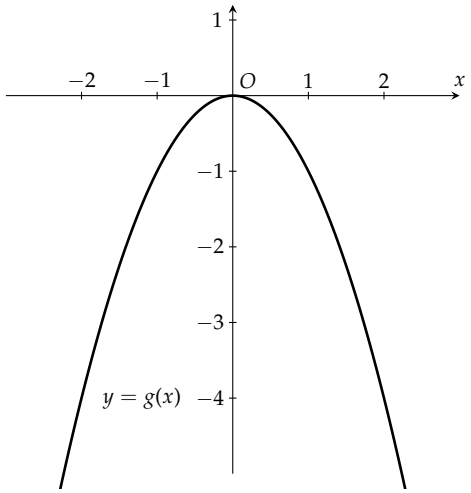
Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng K chứa a. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=a$ nếu

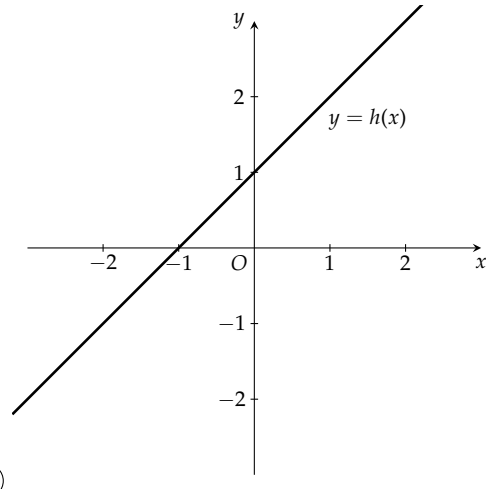
Ⓐ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$. Ⓑ $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=a$.

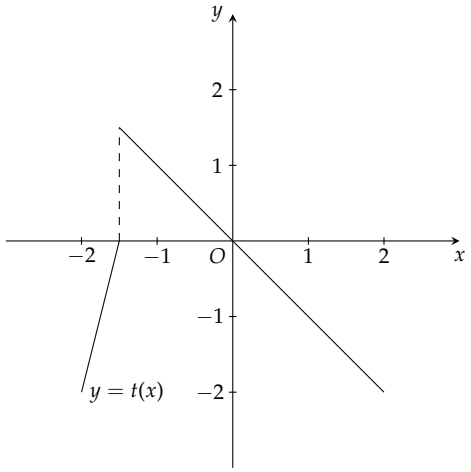
Ⓒ $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi $x\to a$. Ⓓ $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=+\infty$.

Câu 12. Các đồ thị của các hàm số $y=f(x), y=g(x), y=h(x), y=t(x)$ như hình vẽ bên dưới. Đồ thị nào thể hiện hàm số không liên tục trên khoảng $(-2;2)$?

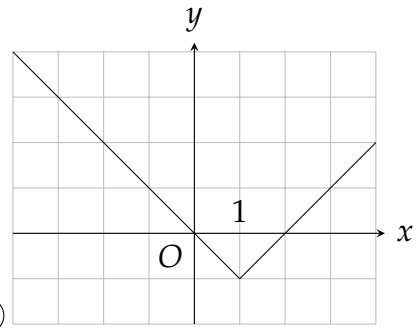
Ⓐ 

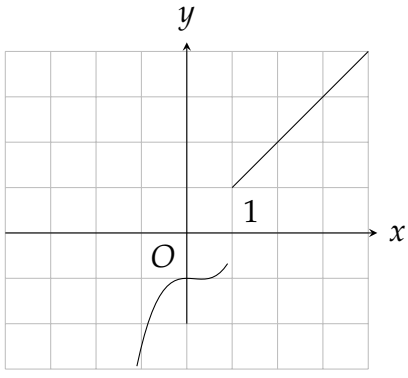
Ⓑ 

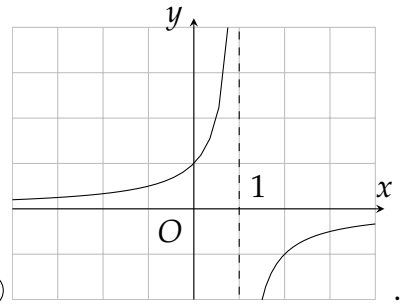
Ⓒ 

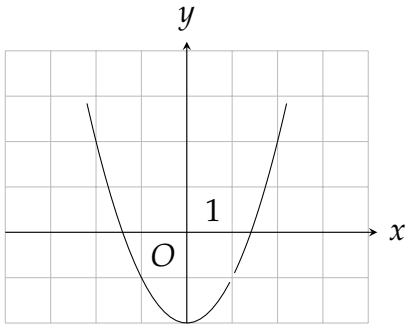
Ⓓ 

Câu 13. Hàm số f liên tục tại $x_0 = 1$. Đồ thị của f có thể là hình nào dưới đây?

Ⓐ 

Ⓑ 

Ⓒ 

Ⓓ 

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(a;b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên $[a;b]$ là

Ⓐ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) = f(b)$.

Ⓑ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

Ⓒ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)$. Ⓓ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

Câu 15. Hàm số $y=\dfrac{1}{x(x^2-9)}$ liên tục tại điểm nào dưới đây?

Ⓐ 0. Ⓑ 3. Ⓒ -3. Ⓓ 1.

Câu 16. Hàm số $y=\dfrac{1}{4x-4}$ gián đoạn tại điểm nào dưới đây?

Ⓐ $x=1$. Ⓑ $x=0$. Ⓒ $x=2$. Ⓓ $x=-1$.

Câu 17. Hàm số nào sau đây **không** liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y=\dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{9}$. Ⓑ $y=4x+\dfrac{7}{9}$. Ⓒ $y=\sin 2x$. Ⓓ $y=3x^2+\sqrt{5}$.

Câu 18. Hàm số nào sau đây **không** liên tục tại $x=2$?

Ⓐ $y=\sin x$. Ⓑ $y=\dfrac{x^2}{x-2}$. Ⓒ $y=x^2-3x+2$. Ⓓ $y=\sqrt{x+2}$.

Câu 19. Hàm số $y=\dfrac{3}{x(x+1)(x+2)}$ liên tục tại điểm nào dưới đây?

Ⓐ $x=-1$. Ⓑ $x=-2$. Ⓒ $x=3$. Ⓓ $x=0$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+8}{4x+8} & \text{khi } x\neq -2\\ 3 & \text{khi } x=-2\end{cases}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

Ⓐ Hàm số $f(x)$ không liên tục trên tập $\mathbb{R}$.

Ⓑ Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Ⓒ Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x=2$.

Ⓓ Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=-2$.

Câu 21. Số điểm gián đoạn của hàm số $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^3+3x^2-2x-2}$ là

Ⓐ 1. Ⓑ 3. Ⓒ 0. Ⓓ 2.

Câu 22. Trong các hàm số sau, hàm số nào liên tục trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ $f(x)=\cot 2x$. Ⓑ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{10-2x}{\sqrt{x+11}-4} & \text{khi } x\neq 5\\ -16 & \text{khi } x=5\end{cases}$.

Ⓒ $f(x)=\begin{cases}4x+3 & \text{khi } x<-2\\ 3x^2-7 & \text{khi } x\geq -2\end{cases}$. Ⓓ $f(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{1+5x}$.

Câu 23. Cho bốn hàm số $f_1(x)=2x^3-3x+1$, $f_2(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$, $f_3(x)=\cos x+3$ và $f_4(x)=\tan x$. Hỏi có bao nhiêu hàm số liên tục trên tập $\mathbb{R}$?

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Câu 24. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục tại $x=3$. Biết $f(3)=4$ và $\lim\limits_{x\to 3}\left[3f(x)-g(x)\right]=6$. Tính $g(3)$.

Ⓐ $g(3)=6$. Ⓑ $g(3)=0$. Ⓒ $g(3)=2$. Ⓓ $g(3)=-6$.

Câu 25. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

Ⓐ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ thì $f(x)$ cũng liên tục trên mọi khoảng con của $(a;b)$.

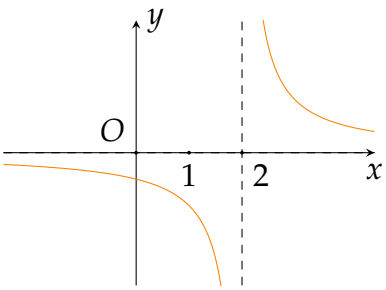
Ⓑ Mọi hàm số đa thức đều liên tục trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Ⓒ Mọi hàm số phân thức hữu tỉ đều liên tục trên mọi khoảng mà nó xác định.

Ⓓ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên hai khoảng liên tiếp $(a;b)$ và $(b;c)$ thì $f(x)$ cũng liên tục trên khoảng $(a;c)$.

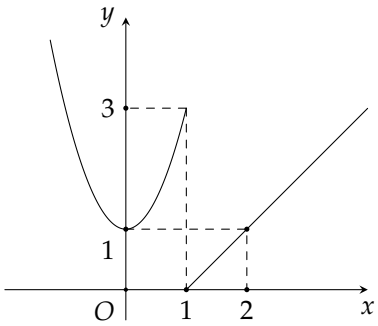
Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y=f(x)$ không liên tục tại

Ⓐ $x=0$. Ⓑ $x=2$. Ⓒ $x=1$. Ⓓ $x=4$.



Câu 27. Hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số gián đoạn tại điểm có hoành độ bằng bao nhiêu?

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 0. Ⓓ 1.



Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục tại $x=1$ và thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$. Khi đó $f(1)$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ $f(1)=-5$. Ⓑ $f(1)=-1$. Ⓒ $f(1)=1$. Ⓓ $f(1)=5$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;4]$ sao cho $f(-1)=2$, $f(4)=7$. Có thể kết luận gì về số nghiệm của phương trình $f(x)=5$ trên đoạn $[-1;4]$.

Ⓐ Vô nghiệm. Ⓑ Có ít nhất một nghiệm.

Ⓒ Có đúng một nghiệm. Ⓓ Có đúng hai nghiệm.

Câu 30. Hàm số nào dưới đây liên tục trên khoảng $(0;5)$?

Ⓐ $y=\dfrac{3x-2}{x-3}$. Ⓑ $y=\dfrac{x+1}{x+2}$. Ⓒ $y=\dfrac{5x+1}{x-4}$. Ⓓ $y=\dfrac{1}{x^2-1}$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x+4}$ với $x\neq -4$. Để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=-4$ thì ta cần bổ sung giá trị $f(-4)$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ 5. Ⓑ -5. Ⓒ 3. Ⓓ 0.

Câu 32. Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

Ⓐ $a=-1$. Ⓑ $a=2$. Ⓒ $a=1$. Ⓓ $a=0$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ mx+1 & \text{khi } x=2\end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x=2$.

Ⓐ $m=\dfrac{15}{2}$. Ⓑ $m=\dfrac{11}{2}$. Ⓒ $m=\dfrac{17}{2}$. Ⓓ $m=\dfrac{13}{2}$.

Câu 34. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & x<1\\ -2x & x\geq 1\end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

Ⓐ $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$. Ⓑ $f(x)$ không liên tục trên $(0;2)$.

Ⓒ $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$. Ⓓ $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 35. Chọn khẳng định đúng về số nghiệm của phương trình $4x^3-6x^2+x+1=0$.

Ⓐ Phương trình có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-1;0)$.

Ⓑ Phương trình vô nghiệm.

Ⓒ Phương trình không có nghiệm âm.

Ⓓ Phương trình có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(2;3)$.

Câu 36. Sự ảnh hưởng khi sử dụng một loại độc tố với vi khuẩn X được mô tả bởi hàm số $P(t)=\dfrac{t+1}{t^2+t+4}$, trong đó $P(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t sử dụng độc tố. Hàm số $P(t)$ liên tục trên khoảng nào sau đây?

Ⓐ $(0;4)$. Ⓑ $(2;+\infty)$. Ⓒ $(0;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;+\infty)$.

Câu 37. Một chất điểm chuyển động với tốc độ được cho bởi hàm số

$$v(t)=\begin{cases}10 & \text{khi } 0\leq t\leq 5\\ t^2-5t+10 & \text{khi } t>5\end{cases}$$

, trong đó $v(t)$ được tính theo đơn vị m/s và t được tính theo giây. Tìm khẳng định **đúng**

Ⓐ Hàm số $v(t)$ bị gián đoạn tại $t=0$. Ⓑ Hàm số $v(t)$ bị gián đoạn tại $t=5$.

Ⓒ Hàm số $v(t)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Ⓓ Hàm số $v(t)$ liên tục trên $[0;+\infty)$.

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Cho các hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ 4{,}5 & \text{khi } x=2\end{cases}$ và $g(x)=\dfrac{2}{x-1}$. Khi đó

a) Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0=2$.

b) Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$.

c) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0=2$.

d) Hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại điểm $x_0=2$.

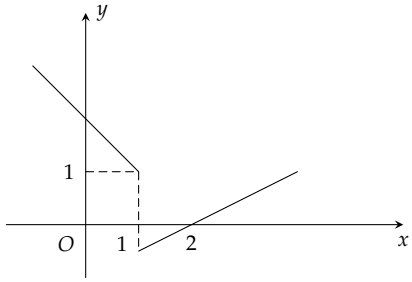
Câu 2. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ x+1 & \text{khi } x=1.\end{cases}$ và $g(x)=4x^2-x+1$. Khi đó

a) $f(1)=2$.
b) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$.
c) Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$.
d) Hàm số $y=f(x)-g(x)$ không liên tục tại điểm $x_0=1$.

Câu 3. Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập tương ứng.
a) $f(x)=x^3-x^2+8x$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
b) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-3x}$ là hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.
c) $f(x)=\dfrac{\sin x+1}{x+1}$ là hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty;0),(0;+\infty)$.
d) $f(x)=\sqrt{x-2}$ là hàm số liên tục trên nửa khoảng $[2;+\infty)$.

Câu 4. Cho các hàm số sau: $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{2} & \text{khi } x\le 1\\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & \text{khi } x>1\end{cases}$, $g(x)=x^2-3x+1$ và $h(x)=\sin\dfrac{\pi x}{4}$.
a) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$.
b) Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$.
c) Hàm số $h(x)$ không liên tục tại điểm $x_0=2$.
d) Hàm số $y=f(x)\cdot g(x)$ không liên tục tại điểm $x_0=1$.

Câu 5. Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ.
a) Hàm số đã cho liên tục tại điểm $x=0$.
b) Hàm số đã cho không liên tục tại điểm $x=2$.
c) Hàm số đã cho liên tục tại điểm $x=1$.
d) Hàm số đã cho không liên tục tại điểm $x=1$.



Câu 6. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{2} & x\le 1\\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & x>1\end{cases}$ và $g(x)=x^2-3x+1$.
a) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$.
b) Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$.
c) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\dfrac{1}{2}$.
d) Hàm số $y=f(x)+g(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+x+1 & x\le -1\\ x+2 & -1<x<1\\ 2x+3 & x\ge 1.\end{cases}$
a) Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm $x=-2$.
b) Hàm số $y=f(x)$ không liên tục tại điểm $x=0$.
c) Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm $x=-1$.
d) Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm $x=1$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2x - 1 & \text{khi } x = 2. \end{cases}$

a) Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

b) Hàm số liên tục tại điểm $x = 2$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

c) Hàm số gián đoạn tại điểm $x = 2$.

d) Hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 9. Một bãi đậu xe ô tô đưa ra giá $T(x)$ (đồng) khi thời gian đậu xe là x (giờ) như sau

$$T(x) = \begin{cases} 50\,000 & \text{khi } 0 < x \leq 2 \\ 120\,000 & \text{khi } 2 < x < 4 \\ 35\,000x & \text{khi } x \geq 4 \end{cases}$$

a) $T(2) = 50\,000$.

b) $\lim\limits_{x \to 4^-} T(x) = 120\,000$.

c) Hàm số $T(x)$ liên tục tại $x = 4$.

d) Hàm số $T(x)$ liên tục trên $[4; +\infty)$.

Câu 10. Một bãi đỗ xe ô-tô tính phí 60 000 cho giờ đầu tiên (hoặc một phần của giờ đầu tiên) và thêm 40 000 đồng cho mỗi giờ (hoặc một phần của mỗi giờ) tiếp theo, tối đa là 200 000 đồng. Gọi $C = C(t)$ là hàm số biểu thị chi phí theo thời gian đỗ xe.

a) Số tiền đỗ xe của một người với thời gian 2,5 giờ là 140 000 đồng.

b) Hàm số $C(t)$ liên tục trên $[0; +\infty)$.

c) $\lim\limits_{t \to 3} C(t) = 140\,000$.

d) Khi một người có thời gian đỗ xe tăng dần đến 3 giờ và một người có thời gian đỗ xe giảm dần đến 3 giờ thì chênh lệch chi phí giữa hai người là không thay đổi.

Câu 11. Chi phí sản xuất C phụ thuộc lượng đầu ra của sản phẩm Q, chẳng hạn:

$$C = f(Q) = \begin{cases} 2000 & \text{nếu } 0 < Q \leq 4 \\ Q^3 - 6Q^2 + 140Q + 1500 & \text{nếu } Q > 4. \end{cases}$$

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

a) Hàm số liên tục tại $Q = 4$.

b) Hàm số gián đoạn tại $Q = 4$.

c) $\lim\limits_{Q \to 4^-} f(Q) = \lim\limits_{Q \to 4^+} f(Q)$.

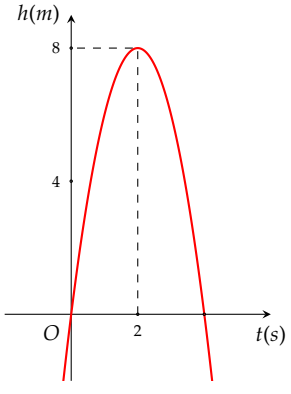
d) $\lim\limits_{Q \to 4^-} f(Q) = 2000$.

3 Tự luận.

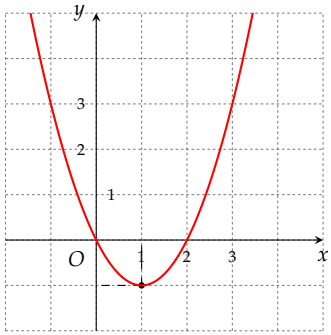
Bài 1. Hình bên cạnh biểu thị độ cao h (m) của một quả bóng được đá lên thời gian t (s), trong đó $h(t) = -2t^2 + 8t$.

a) Chứng tỏ hàm số $h(t)$ liên tục trên tập xác định.

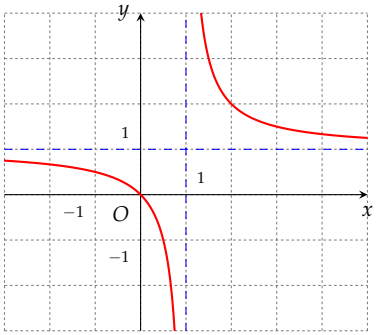
b) Dựa và đồ thì hãy xác định $\lim\limits_{t \to 2} \left(-2t^2 + 8t\right)$.



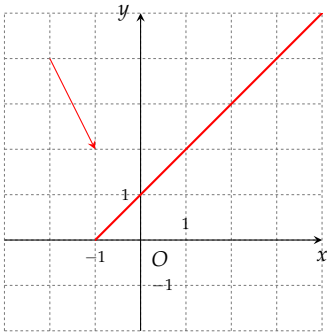
Bài 2. Trong các hàm số có đồ thị ở *Hình a, b, c* hàm số nào liên tục trên tập xác định của hàm số đó? Giải thích.



a) Đồ thị hàm số $f(x) = x^2 - 2x$



b) Đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$



c) Đồ thị hàm số $h(x) = \begin{cases} -2x \text{ nếu } x < -1 \\ x+1 \text{ nếu } x \geq 1 \end{cases}$

Bài 3. Bạn Nam cho rằng: "Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm x_0, còn hàm số $y = g(x)$ không liên tục tại x_0, thì hàm số $y = f(x) + g(x)$ không liên tục tại x_0". Theo em, ý kiến của bạn Nam đúng hay sai? Giải thích.

ý kiến trên là đúng

Bài 4. Xét tính liên tục của các hàm số sau

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$.

b) $g(x) = \sqrt{9-x^2}$.

c) $h(x) = \cos x + \tan x$.

Bài 5. Cho hàm số $f(x) = 2x - \sin x$, $g(x) = \sqrt{x-1}$. Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x) \cdot g(x)$ và $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Bài 6. Xét tính liên tục của mỗi hàm số sau trên tập xác định của hàm số đó

a) $f(x) = x^2 + \sin x$.

b) $g(x) = x^4 - x^2 + \dfrac{6}{x-1}$.

c) $h(x) = \dfrac{2x}{x-3} + \dfrac{x-1}{x+4}$.

Bài 7. Dùng định nghĩa xét tính liên tục của hàm số $f(x) = 2x^3 + x + 1$ tại điểm $x = 2$.

Bài 8. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số liên tục tại $x = 1$. Biết $f(1) = 2$ và $\lim\limits_{x\to 1}[2f(x) - g(x)] = 3$. Tính $g(1)$.

$g(1) = 1$

Bài 9. Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+5x+6}$;

b) $f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{nếu } x < 1 \\ 4-x & \text{nếu } x \geq 1. \end{cases}$

Bài 10. Xét tính liên tục của hàm số:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 1-x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ tại $x = 0$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{khi } x \geq 1 \\ x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ tại $x = 1$.

Bài 11. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2+x+1 & \text{nếu } x \neq 4 \\ 2a+1 & \text{nếu } x = 4. \end{cases}$

a) Với $a = 0$, xét lính liên tục của hàm số tại $x = 4$.

b) Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục tại $x = 4$. $a = 10$

c) Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục trên tập xác định của nó? $a = 10$

Bài 12. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{khi } x \neq -2 \\ a & \text{khi } x = -2 \end{cases}$. Tìm a để hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. $a = -4$

Bài 13. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ a+5 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Tìm a để hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 2$. $a = \dfrac{1}{4}$

Bài 14. Cho hai hàm số $f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{khi } x < 1 \\ x^2+x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ và $g(x) = \begin{cases} 2x-x^2 & \text{khi } x < 1 \\ -x^2+a & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$

Tìm giá trị của tham số a sao cho hàm số $h(x) = f(x) + g(x)$ liên tục tại $x = 1$. $a = 1$

Bài 15. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2+ax+b & \text{khi } |x| < 2 \\ x(2-x) & \text{khi } |x| \geq 2 \end{cases}$

Tìm giá trị của các tham số a và b sao cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. $a = 2, b = -8$

Bài 16. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3 & \text{nếu } x \leq 1 \\ ax+b & \text{nếu } 1 < x < 2 \\ 5 & \text{nếu } x \geq 2 \end{cases}$ Tìm giá trị của các tham số a và b sao cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. $a = 2, b = 1$

Bài 17. Chứng minh rằng phương trình:

a) $x^3 + 2x - 1 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(-1; 1)$.

b) $\sqrt{x^2+x} + x^2 = 1$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

Bài 18. Một bảng giá cước taxi được cho như sau:

Giá mở cửa (0,5 km đầu)	Giá cước các km tiếp theo đến 30 km	Giá cước từ km thứ 31
10 000 đồng	13 500 đồng	11 000 đồng

a) Viết công thức hàm số mô tả số tiền khách phải trả theo quãng đường di chuyển.

$f(x) = \begin{cases} 10000 & \text{nếu } 0 \leq x \leq 0{,}5 \\ 10000 + 13500(x-0{,}5) & \text{nếu } 0{,}5 < x \leq 30 \\ 408250 + 11000(x-30) & \text{nếu } x > 30. \end{cases}$

b) Xét tính liên tục của hàm số ở câu a.

Bài 19. Một bãi đậu xe ô-tô đưa ra giá $C(x)$ (đồng) khi thời gian đậu xe là x (giờ) như sau:

$$C(x) = \begin{cases} 60.000 & \text{khi } 0 < x \leq 2 \\ 100.000 & \text{khi } 2 < x \leq 4 \\ 200.000 & \text{khi } 4 < x \leq 24. \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $C(x)$.

Bài 20. Lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một đơn vị khối lượng ở khoảng cách r tính từ tâm của nó là $F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{khi } 0 < r \le R \\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{khi } r \ge R \end{cases}$, trong đó M là khối lượng, R là bán kính của Trái Đất, G là hằng số hấp dẫn. Hàm số $F(r)$ có liên tục trên $(0;+\infty)$ không?

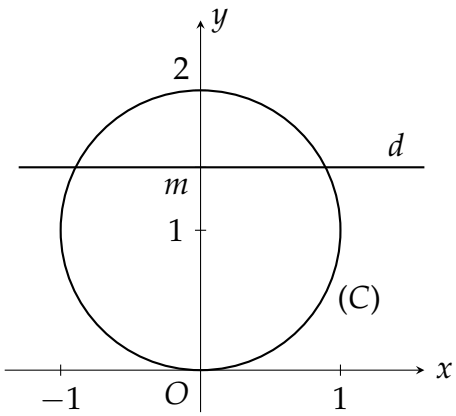
Bài 21. Theo quyết định số 2019/QĐ-BĐVN ngày 01/11/2018 của Tổng công ty Bưu điện Việt Nam, giá cước dịch vụ Bưu chính phổ cập đối với dịch vụ thư cơ bản và bưu thiếp trong nước có khối lượng đến 250 g như trong bảng sau:

Khối lượng đến 250 g	Mức cước (đồng)
Đến 20 g	4 000
Trên 20 g đến 100 g	6 000
Trên 100 g đến 250 g	8 000

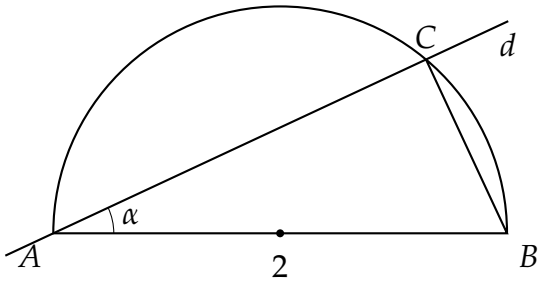
a) Hãy biểu diễn số tiền phải trả khi sử dụng dịch vụ thư cơ bản và bưu thiếp theo khối lượng của thư cơ bản và bưu thiếp.

b) Hàm số trên có liên tục trên tập xác định hay không?

Bài 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + (y-1)^2 = 1$. Với mỗi số thực m, gọi $Q(m)$ là số giao điểm của đường thẳng $d: y = mx$ với đường tròn (C). Viết công thức xác định hàm số $y = Q(m)$. Hàm số này không liên tục tại các điểm nào?



Bài 23. Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2$. Đường thẳng d thay đổi luôn đi qua điểm A, cắt nửa đường tròn tại C và tạo với đường thẳng AB góc có số đo $\widehat{CAB} = \alpha \quad \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$. Kí hiệu diện tích tam giác ABC là $S(\alpha)$ (phụ thuộc vào α). Xét tính liên tục của hàm số $S(\alpha)$ trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ và tính các giới hạn $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} S(\alpha)$ và $\lim\limits_{\alpha\to \frac{\pi}{2}} S(\alpha)$.

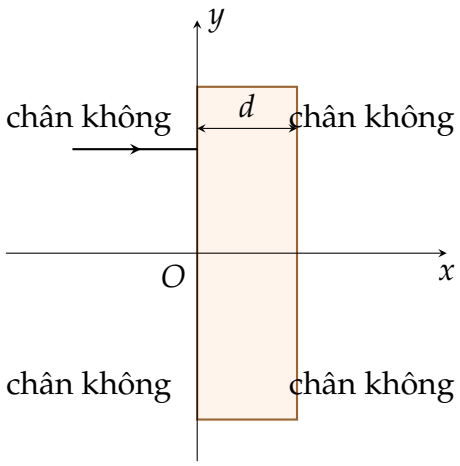


Bài 24. Trong Vật lí, tỉ số giữa tốc độ c của ánh sáng trong chân không và tốc độ v của ánh sáng trong một môi trường được gọi là chiết suất của môi trường đó. Chiết suất của một môi trường đồng nhất là không đổi. Ngày nay, với công nghệ nano, người ta tạo ra được các bản thuỷ tinh mà chiết suất của nó thay đổi theo một phương nào đó.

Xét sự truyền của ánh sáng vào bản thuỷ tinh dọc theo trục Ox như Hình dưới. Biết chiết suất của bản thuỷ tinh này thay đổi theo hoành độ x cho bởi:

$$n(x) = \frac{a}{a-x} \quad \text{với } 0 \le x \le d$$

trong đó a là một hằng số có giá trị lớn hơn bề dày d của bản thuỷ tinh.



a) Chứng minh rằng tốc độ của ánh sáng cho bởi:

$$v(x) = \begin{cases} c & \text{nếu } x < 0 \\ c\left(1 - \dfrac{x}{a}\right) & \text{nếu } 0 \le x \le d \\ c & \text{nếu } x > d \end{cases}$$

b) Xét tính liên tục của hàm số $y = v(x)$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	C	2	A	3	D	4	D	5	B	6	B	7	D	8	A	9	C	10	D
11	A	12	D	13	A	14	B	15	D	16	A	17	A	18	B	19	C	20	D
21	B	22	B	23	B	24	A	25	D	26	B	27	D	28	D	29	B	30	B
31	B	32	B	33	B	34	D	35	A	36	D	37	D						

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a Đ b Đ c S d S	Câu 2.	a Đ b Đ c Đ d S
Câu 3.	a Đ b S c S d Đ	Câu 4.	a Đ b Đ c S d S
Câu 5.	a Đ b S c S d Đ	Câu 6.	a Đ b Đ c S d Đ
Câu 7.	a Đ b S c Đ d S	Câu 8.	a S b Đ c S d S
Câu 9.	a Đ b S c S d Đ	Câu 10.	a S b S c S d Đ
Câu 11.	a S b Đ c S d Đ		

§5 ÔN TẬP CHƯƠNG 5

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng 0?

Ⓐ $\lim(n^3-3n+1)$. Ⓑ $\lim\dfrac{n^2+n}{n^3+1}$. Ⓒ $\lim\dfrac{n^2+n+1}{4n+1}$. Ⓓ $\lim\dfrac{2^n-3^n}{3^n+2}$.

Câu 2. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$.

Ⓑ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^k}=0$ với k nguyên dương.

Ⓒ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

Ⓓ Nếu $u_n=c$ (c là hằng số) thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim c=c$.

Câu 3. Giá trị của $\lim\limits_{x\to-2}\left(x^3-x^2+1\right)$ bằng

Ⓐ -11. Ⓑ 12. Ⓒ 5. Ⓓ 0.

Câu 4. Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)$ là

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ $-\infty$. Ⓒ 1. Ⓓ 0.

Câu 5. Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{x+2}$ là

Ⓐ $-\infty$. Ⓑ $+\infty$. Ⓒ -2. Ⓓ 1.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$. Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu điều kiện nào sau đây xảy ra?

Ⓐ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)$. Ⓑ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

Ⓒ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=b$. Ⓓ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=b$.

Câu 7. Trong các hàm số sau, hàm số nào liên tục tại điểm $x=0$?

Ⓐ $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x}$. Ⓑ $y=x^3-2x^2-x+1$.

Ⓒ $y=\cot x$. Ⓓ $y=\sqrt{2x^2-1}$.

Câu 8. Tổng $S=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\cdots+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots$ bằng

Ⓐ 2. Ⓑ $\dfrac{2}{3}$. Ⓒ $\dfrac{3}{4}$. Ⓓ $\dfrac{3}{2}$.

Câu 9. Giới hạn $\lim\dfrac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{3}{4}$. Ⓑ $+\infty$. Ⓒ 0. Ⓓ $\dfrac{5}{7}$.

Câu 10. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x-15}{x-2}$ là

Ⓐ $-\infty$. Ⓑ $+\infty$. Ⓒ $-\dfrac{15}{2}$. Ⓓ 1.

Câu 11. Hàm số nào sau đây liên tục tại điểm $x_0 = 1$?

Ⓐ $y = \dfrac{2x}{x^2 - 3x + 2}$.

Ⓑ $y = 2x + \sqrt{x - 4}$.

Ⓒ $y = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$.

Ⓓ $y = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

Ⓐ Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ⓑ Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 thì tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Ⓒ Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 thì hàm số $y = f(x)$ xác định tại x_0.

Ⓓ Nếu hàm số $y = f(x)$ có giới hạn tại x_0 thì hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0.

Câu 13. Cho các giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 2$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -3$. Giá trị của $\lim\limits_{x \to x_0} [3f(x) - 4g(x)]$ bằng

Ⓐ -1. Ⓑ 18. Ⓒ 5. Ⓓ -6.

Câu 14. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

Ⓐ $\lim q^n = 0, |q| > 1$.

Ⓑ $\lim \dfrac{1}{n} = 0$.

Ⓒ $\lim c = c$.

Ⓓ $\lim n = +\infty$.

Câu 15. Cho $P = \lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{5}{x - 4}$. Mệnh đề đúng là

Ⓐ $P = 5$. Ⓑ $P = -\infty$. Ⓒ $P = +\infty$. Ⓓ $P = 0$.

Câu 16. Dãy số nào trong các dãy số sau đây có giới hạn bằng 0?

Ⓐ (x_n) với $x_n = \dfrac{3n + 11}{7n + 1}$.

Ⓑ (v_n) với $v_n = \dfrac{1}{n}$.

Ⓒ (y_n) với $y_n = \dfrac{2n^2}{n - 1}$.

Ⓓ (u_n) với $u_n = 3n^2$.

Câu 17. Cho dãy số (u_n) với $u_n = -n^3 + 2n + 1$. Chọn phát biểu đúng.

Ⓐ $\lim u_n = -\infty$. Ⓑ $\lim u_n = +\infty$. Ⓒ $\lim u_n = -1$. Ⓓ $\lim u_n = 1$.

Câu 18. Hàm số nào sau đây **gián đoạn** tại $x = 45$?

Ⓐ $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 45}$. Ⓑ $y = \dfrac{x + 3}{x - 45}$. Ⓒ $y = x - 45$. Ⓓ $y = \dfrac{1}{x^2 + 2\,025}$.

Câu 19. Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x^3 - x^2 + 1)$.

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ $-\infty$. Ⓒ 0. Ⓓ 2.

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^3 - 4x}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = -2$.

Ⓑ Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 2$.

Ⓒ Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 1$.

Ⓓ Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 0$.

Câu 21. Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x-1}$

Ⓐ 1. Ⓑ -1. Ⓒ -2. Ⓓ 2.

Câu 22. Hàm số nào sau đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ $f(x)=x^3-2x+1$. Ⓑ $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$.

Ⓒ $f(x)=\tan x$. Ⓓ $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2}$.

Câu 23. Giá trị giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{9x^2+1}}{2x+3}$ bằng

Ⓐ $-\infty$. Ⓑ -1. Ⓒ $+\infty$. Ⓓ 1.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{1-x} & \text{với } x<1\\ \sqrt{2x-2} & \text{với } x\geq 1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$ là

Ⓐ $-\infty$. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ $+\infty$.

Câu 25. Tìm $I=\lim\dfrac{7n^2-5n^3+1}{3n^3+2n^2+1}$.

Ⓐ 0. Ⓑ $\dfrac{7}{3}$. Ⓒ $-\dfrac{5}{3}$. Ⓓ 1.

Câu 26. Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2+x-3\right)$.

Ⓐ 1. Ⓑ -1. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Câu 27. Tính giới hạn $B=\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-1)$.

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ 5. Ⓒ $-\infty$. Ⓓ 4.

Câu 28. Tính $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x-2}$.

Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ 2. Ⓓ $+\infty$.

Câu 29. Kết quả $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x+2}{x-1}$ bằng

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ $-\infty$. Ⓒ 3. Ⓓ 0.

Câu 30. Giới hạn nào dưới đây bằng 0?

Ⓐ $\lim\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$. Ⓑ $\lim\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$. Ⓒ $\lim 2^n$. Ⓓ $\lim n^2$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{khi} x\geq 3\\ x^2-4 & \text{khi} x<3\end{cases}$. Chọn phát biểu đúng.

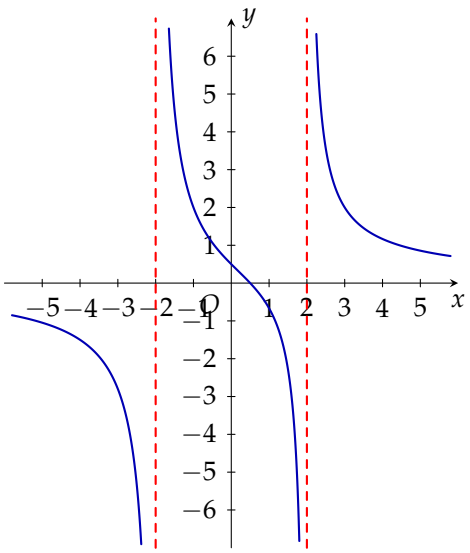
Ⓐ $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=7$. Ⓑ $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=5$.

Ⓒ $f(3)=7$. Ⓓ Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x=3$.

Câu 32. Cho m là số thực dương, nếu $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+mx-3m-9}{x-3}=10$ thì giá trị của m bằng

Ⓐ 6. Ⓑ 8. Ⓒ 4. Ⓓ 10.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Khi đó $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ $-\infty$. Ⓒ $+\infty$. Ⓓ 1.

Câu 34. Hàm số $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ liên tục trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

Ⓐ $(-\infty;2)$. Ⓑ $(2;5)$. Ⓒ $(0;+\infty)$. Ⓓ $(-3;3)$.

Câu 35. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^4-2n+2}{4n^4+2n+5}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{2}{11}$. Ⓑ $+\infty$. Ⓒ 0. Ⓓ $\dfrac{1}{2}$.

Câu 36. Hàm số nào sau đây liên tục tại $x = 2$?

Ⓐ $f(x) = \dfrac{x+5}{x-2}$. Ⓑ $f(x) = \dfrac{2x+1}{x}$. Ⓒ $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$. Ⓓ $f(x) = \dfrac{x^2-3}{\sqrt{x-2}}$.

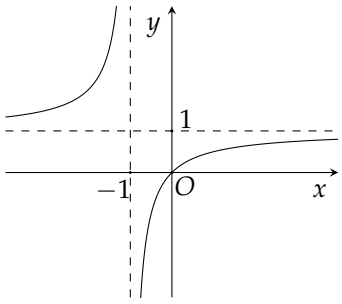
Câu 37. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{3^n-1}{2^n-2\cdot 3^n+1}$ bằng

Ⓐ $-\dfrac{1}{2}$. Ⓑ -1. Ⓒ $\dfrac{3}{2}$. Ⓓ $\dfrac{1}{2}$.

Câu 38. Tính $L = \lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{1}{x-5}$.

Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ $-\infty$. Ⓓ $+\infty$.

Câu 39. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Khẳng định nào sau đây **sai**?

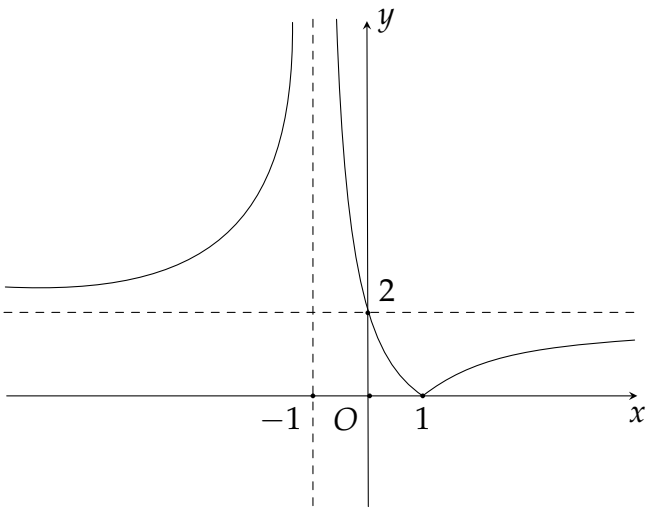
Ⓐ $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$.

Ⓑ $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$.

Ⓒ Hàm số liên tục tại điểm $x = 1$.

Ⓓ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

Câu 40. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên dưới. Chọn khẳng định **sai**?



Ⓐ Hàm số gián đoạn tại $x = -1$.

Ⓑ Hàm số không liên tục tại $x = -1$.

Ⓒ Hàm số bị gián đoạn tại 1.

Ⓓ Hàm số liên tục tại $x = 0$.

Câu 41. Gọi S là tập hợp các tham số nguyên a thỏa mãn $\lim\left(\dfrac{6n+1}{n+2} + a^2 - 5a\right) = 0$. Tổng các phần tử của S bằng

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 2. Ⓓ 5.

Câu 42. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2}+5 & \text{khi } x \geq 2 \\ ax - 1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tìm a để tồn tại $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Ⓐ $a = 4$. Ⓑ $a = 5$. Ⓒ $a = 1$. Ⓓ $a = 3$.

Câu 43. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2+x-4}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a+1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$ thì a bằng

Ⓐ 8. Ⓑ 4. Ⓒ 6. Ⓓ 3.

Câu 44. Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{4n^2-3n+1}$.

Ⓐ $\dfrac{1}{8}$. Ⓑ 0. Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\dfrac{1}{4}$.

Câu 45. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x^2+2}-2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m^2-6m-7 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để hàm số liên tục tại $x = 1$. Tổng các phần tử của S bằng

Ⓐ 6. Ⓑ 8. Ⓒ 11. Ⓓ -9.

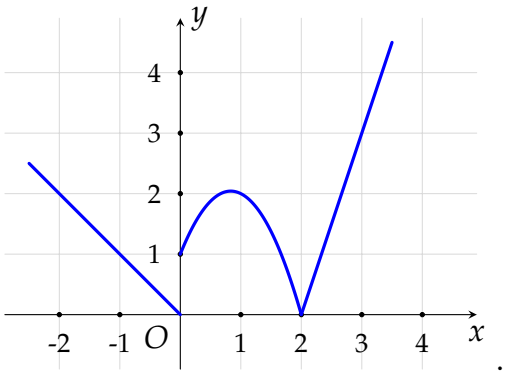
Câu 46. Trong một phòng thí nghiệm, nhiệt độ trong tủ sấy được điều khiển tăng từ 10°C, mỗi phút tăng 2°C trong 60 phút, sau đó giảm mỗi phút 3°C trong 40 phút. Hàm số biểu thị nhiệt độ (tính theo °C) trong tủ theo thời gian t (tính theo phút) có dạng

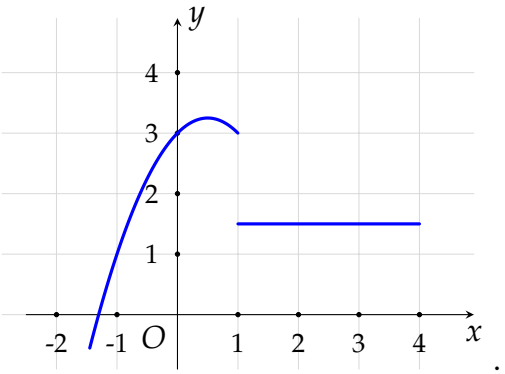
$$T(t) = \begin{cases} 10 + 2t & \text{khi } 0 \leq t \leq 60 \\ k - 3t & \text{khi } 60 < t \leq 100 \end{cases}$$

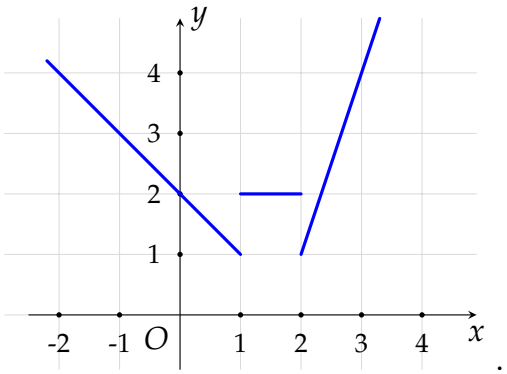
trong đó $T(t)$ là hàm số liên tục trên tập xác định và k là hằng số. Tìm giá trị của k.

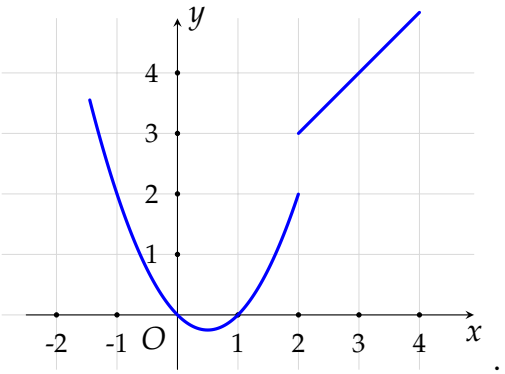
Ⓐ 330. Ⓑ 340. Ⓒ 310. Ⓓ 300.

Câu 47. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số liên tục trên khoảng $(0;3)$?

Ⓐ 

Ⓑ 

Ⓒ 

Ⓓ 

2 Trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{khi } x \neq 2 \\ -k^2+2kx, & \text{khi } x = 2. \end{cases}$

a) $f(2) = -k^2 + 4k$.

b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$.

c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$.

d) Có 2 giá trị của k để $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Câu 2. Cho hai hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2+18}}{x-3}$ và $g(x) = x - 3$.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{6}{g(x)} = +\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to 4}[f(x)\cdot g(x) + x] = m\sqrt{2} + n$ với $m, n \in \mathbb{Z}$. Khi đó $m = n + 1$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) + \dfrac{g(x)}{x}\right] = a\sqrt{2} + b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Khi đó $a + b = 0$.

Câu 3. Xét các khẳng định sau:

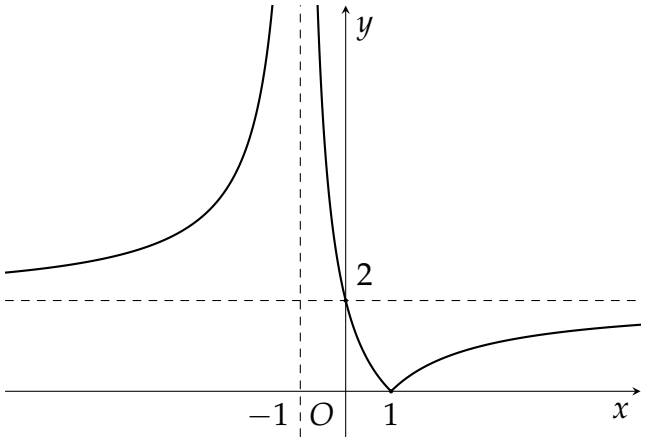
a) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^3 - 2x + 1) = 21$.

b) Hàm số $y = f(x) = \sqrt{2x-3}$ liên tục tại $x_0 = 1$.

c) Cho $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2\,025x^2+ax+1} + bx) = -\dfrac{1}{90}$. Khi đó $a - b = 44$.

d) Cho $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 5$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1}[3f(x) - 2g(x) + 2\,025] = 2\,009$.

Câu 4. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.



Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau

a) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(-1;0)$.

b) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2a^2 - 3a - 2 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ (với a là tham số).

a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$.

b) $f(2)$ không xác định.

c) Có 10 giá trị nguyên của a thuộc khoảng $(-5;7)$ để hàm số bị gián đoạn tại $x = 2$.

d) Tổng các giá trị thực của tham số a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ là $S = \dfrac{3}{2}$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 4x - 12}{x^2 - 4} & \text{khi } x > 2 \\ x \text{ khi } x \leq 2. \end{cases}$

a) $f(2) = 2$.

b) $f(3) = \dfrac{4}{5}$.

c) Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 3$.

d) Hàm số $f(x)$ không liên tục tại $x = 2$.

Câu 7. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4 - \sqrt{3x + 4}}{4 - x}, & \text{khi } x > 4, \\ 2x - 4, & \text{khi } x \leq 4. \end{cases}$$

a) $f(4) = 4$.

b) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 4$.

c) $y = f(x)$ liên tục tại $x = 4$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f^2(x) - 2f(x)}{x^2 - 5x + 12} = 4$.

Câu 8. Các phát biểu sau đúng hay sai?

a) Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) với $\lim u_n = 1$ và $\lim v_n = 4$. Khi đó $\lim(3u_n + v_n) = 13$.

b) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{5}{x-3} = +\infty$.

c) Hàm số $y = \dfrac{2x-5}{x-2}$ liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$.

d) Cho $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2\,025x-2\,026}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ ax+2 & \text{khi } x \le 1 \end{cases}$. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $a = 2025$.

Câu 9. Cho hàm số $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{khi } x < 2 \\ 2x-m & \text{khi } x \ge 2 \end{cases}$ với m là tham số.

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x) = 4$.

b) $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = 4-m$.

c) Giá trị của hàm số $h(2) = 4$.

d) Hàm số $h(x)$ liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi $m = 0$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{khi } x < -1 \\ \sqrt{x^2+1} & \text{khi } x \ge -1 \end{cases}$. Khi đó

a) $f(-2) = \sqrt{5}$.

b) Giới hạn $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = -3$.

c) Giới hạn $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = \sqrt{2}$.

d) Không tồn tại $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

Câu 11. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n = 4n^2+3$; $v_n = 3n^2+7$.

a) $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{4}{3}$.

b) $\lim \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{4}$.

c) $\lim \dfrac{(u_n)^2}{v_n} = \dfrac{16}{3}$.

d) $\lim \dfrac{u_n + an^2 + 7}{v_n} = 8$ khi đó $a = 20$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+5}+2x}{x+1} & \text{khi } x > -1 \\ -xm^2 + \dfrac{5}{4}m & \text{khi } x \le -1 \end{cases}$.

a) $f(-1) = -\dfrac{9}{4}$.

b) $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = -\dfrac{9}{4}m$.

c) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = \dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $a+b = 13$.

d) Tổng tất cả các giá trị m để hàm số liên tục tại $x = -1$ là $-\dfrac{5}{4}$.

Câu 13. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n), biết $u_n = \dfrac{4n^2+1}{3n}$ và $v_n = \dfrac{1-2n}{n+2}$.

a) Dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn.

b) $\lim v_n = -2$.

c) $\lim \dfrac{4u_n}{3n} = \dfrac{4}{3}$.

d) Giả sử u_n (triệu đồng) là chi phí sản xuất n sản phẩm. Chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm sẽ tiến về 1,5 triệu đồng khi n rất lớn.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{16x^2+x}-x}{x+1}$ và $g(x)=\dfrac{60x}{200+2x}$.

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-5$.

c) $\lim\limits_{x\to 2}[(x-2)\cdot g(x)]=10$.

d) Giả sử hàm số $g(x)$ xác định trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ biểu diễn nồng độ chất tan (gam/lít) theo thời gian x (phút). Nồng độ sẽ không bao giờ vượt quá 30 gam/lít khi thời gian x càng lớn.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-4} & \text{khi } x<-2\\ x+5 & \text{khi } x\geq -2\end{cases}$ (a, b là tham số).

a) $f(-2)=3$.

b) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=0$.

c) Nếu $a=2$, $b=8$ thì hàm số gián đoạn tại $x=-2$.

d) Để hàm số liên tục tại $x=-2$ thì $2a-b=4$.

Câu 16. Cho các hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ 5 & \text{khi } x=2\end{cases}$ và $g(x)=\dfrac{2}{x-1}$.

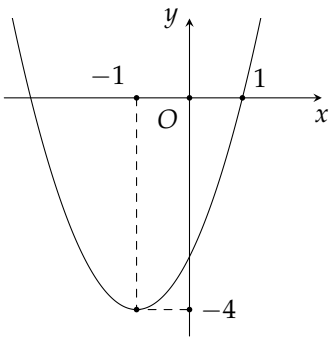
a) Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0=3$.

b) Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$.

c) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0=2$.

d) Hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại điểm $x_0=2$.

Câu 17. Cho hàm số bậc hai $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



a) Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$.

c) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=10$.

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x+1-\sqrt{2x-1}}{f(x)-4x+4}=2$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{2} & \text{khi } x\leq 1\\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & \text{khi } x>1\end{cases}$ và $g(x)=x^2-3x+1$.

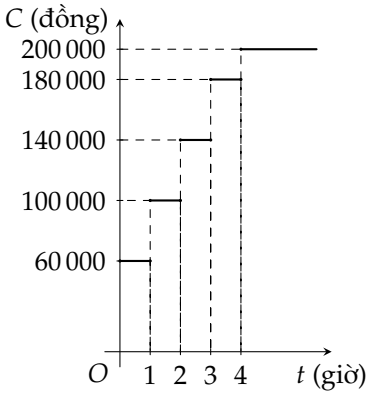
a) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

b) Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

c) Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\dfrac{1}{2}$.

d) Hàm số $y = f(x) + g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Câu 19. Một bãi đỗ xe tính phí 60 000 đồng cho giờ đầu tiên (hoặc một phần của giờ đầu tiên) và thêm 40 000 đồng cho mỗi giờ (hoặc một phần của mỗi giờ) tiếp theo, tối đa là 200 000 đồng.



a) Đồ thị hàm số $C = C(t)$ biểu thị chi phí theo thời gian đỗ xe.
b) Hàm số $C = C(t)$ liên tục trên $[0; +\infty)$.
c) Từ đồ thị ta thấy $\lim\limits_{t\to 3} C(t) = 180\,000$.
d) Một người có thời gian đỗ xe tăng dần đến 3 giờ và một người có thời gian đỗ xe giảm dần đến 3 giờ thì chênh lệch chi phí giữa hai người là 20 000 đồng.

3 Tự luận.

Bài 1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \dfrac{3n-1}{n}$. 3 b) $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+2}}{n}$. 1 c) $\lim \dfrac{2}{3n+1}$. 0 d) $\lim \dfrac{(n+1)(2n+2)}{n^2}$. 2

Bài 2. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{2n^2+6n+1}{8n^2+5}$; $\frac{1}{4}$ b) $\lim \dfrac{4n^2-3n+1}{-3n^3+5n^2-2}$; 0 c) $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2-n+3}}{8n-5}$; $\frac{1}{4}$

d) $\lim \left(4 - \dfrac{2^{n+1}}{3^n}\right)$; 4 e) $\lim \dfrac{4.5^n + 2^{n+2}}{6.5^n}$; $\frac{2}{3}$ f) $\lim \dfrac{2+\frac{4}{n^3}}{6^n}$. 0

Bài 3. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau đây dưới dạng phân số.

a) 1,(01); $\frac{100}{99}$ b) 5,(132). $\frac{1709}{333}$

Bài 4. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$; $\frac{1}{6}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$; $\frac{3}{2}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2-x}{(1-x)^2}$; $+\infty$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x+2}{\sqrt{4x^2+1}}$. $-\frac{1}{2}$

Bài 5. Tính các giới hạn một bên:

a) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-9}{|x-3|}$ 6 b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$. $+\infty$

Bài 6. Chứng minh rằng giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ không tồn tại.

Bài 7. Tìm tập xác định của các hàm số sau và giải thích tại sao các hàm này liên tục trên các khoảng xác định của chúng.

a) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2+5x+6}$; b) $g(x) = \dfrac{x-2}{\sin x}$.

Bài 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+a & \text{nếu } x<2 \\ 4 & \text{nếu } x=2 \\ -3x+b & \text{nếu } x>2 \end{cases}$

a) Với $a=0, b=1$, xét tính liên tục của hàm số tại $x=2$.

b) Với giá trị nào của a, b thì hàm số liên tục tại $x=2$? $a=0, b=10$

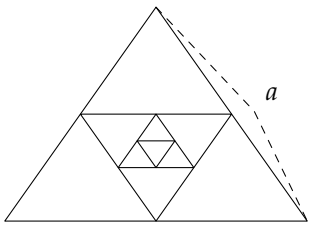
c) Với giá trị nào của a, b thì hàm số liên tục trên tập xác định? $a=0, b=10$

Bài 9. Tính $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sqrt{1+x}+\sqrt{x+4}-4}{x}$. 1,25

Bài 10. Một công ty dịch vụ theo dõi hiệu suất xử lý hồ sơ của nhân viên mới. Tốc độ xử lý hồ sơ trong một giờ của một nhân viên sau x ngày làm việc là $f(x) = \dfrac{48x}{6+4x}$ (hồ sơ/giờ). Hỏi sau một thời gian đủ dài, nhân viên này có thể xử lý bao nhiêu hồ sơ trong một giờ?

12

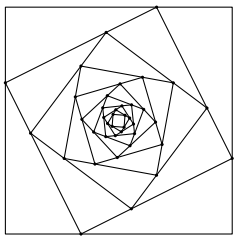
Bài 11. Cho một tam giác đều ABC cạnh a. Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC, tam giác $A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1, \ldots$, tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n, \ldots$ Gọi $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ và $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ theo thứ tự là chu vi và diện tích của các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \ldots, A_nB_nC_n, \ldots$.



a) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n). $\lim p_n = 0; \lim S_n = 0$

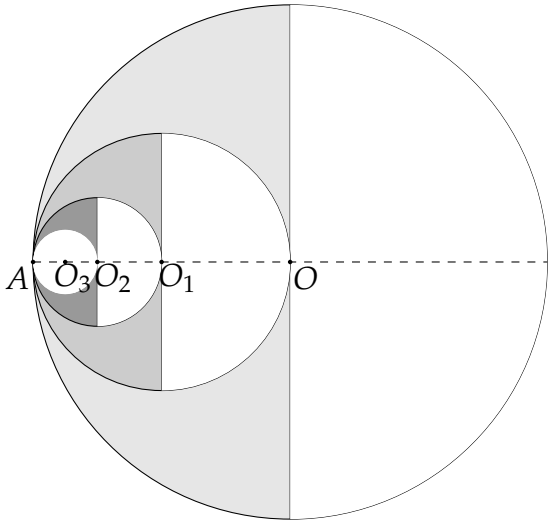
b) Tìm các tổng $p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots$ và $S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots$. $3a$ và $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$

Bài 12. Cho hình vuông (C_1) có cạnh bằng 2. Người ta chia mỗi cạnh của hình vuông thành ba phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông (C_2) (tham khảo hình vẽ bên). Từ hình vuông (C_2) lại tiếp tục làm như trên ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n, \ldots$. Gọi S_i là diện tích của hình vuông C_i ($i \in \{1,2,3,\ldots\}$). Tính $T = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n + \ldots$.



36

Bài 13. Trong hình vẽ bên, cho đường tròn (C) tâm O, bán kính $r = 20\,\text{cm}$. Vẽ đường tròn (C_1) đi qua tâm O và tiếp xúc với (C). Đường tròn (C_1) có bán kính bằng một nửa bán kính của (C), tức là $r_1 = \dfrac{r}{2} = 10\,\text{cm}$. Tiếp tục, vẽ đường tròn (C_2) đi qua tâm của (C_1) và tiếp xúc với (C_1), với bán kính $r_2 = \dfrac{r_1}{2} = \dfrac{10}{2} = 5\,\text{cm}$. Quá trình này tiếp tục đến vô hạn, với mỗi đường tròn mới có bán kính bằng một nửa bán kính của đường tròn trước đó. Tính diện tích phần tô màu (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



419

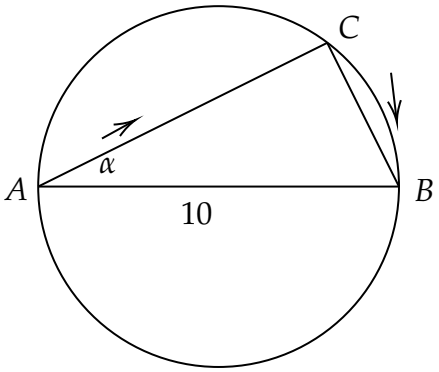
Bài 14. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1} - \sqrt{1-x}}{x}$. Phải bổ sung thêm giá trị $f(0)$ bằng bao nhiêu để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

Không tồn tại $f(0)$

Bài 15. Tìm a là số thực thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{x^2+2x+3} + a^2 + 3a\right) = 0$.

$a \in \{-1; -2\}$

Bài 16. Tại một bể bơi có dạng hình tròn có đường kính $AB = 10$ m, một người xuất phát từ A bơi thẳng theo dây cung AC tạo với đường kính AB một góc $\alpha\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ rồi chạy bộ theo cung nhỏ CB đến điểm B (Hình vẽ). Gọi $S(\alpha)$ là quãng đường người đó đã di chuyển.



a) Viết công thức tính $S(\alpha)$ theo $\alpha\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) Xét tính liên tục của hàm số $y = S(\alpha)$ trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

c) Tính các giới hạn $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} S(\alpha)$ và $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}^+} S(\alpha)$.

Bài 17. Một cái hồ đang chứa 200 m^3 nước mặn với nồng độ muối 10 kg/m^3. Người ta ngọt hóa nước hồ bằng cách bơm nước ngọt vào hồ với tốc độ 3 m^3/phút. Biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm. Giả sử thời gian bơm nước ngọt vào hồ là vô hạn, khi đó nồng độ muối trong hồ sẽ đạt bao nhiêu kg/m^3?

0

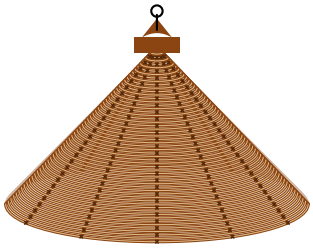
Bài 18. Một điểm dịch vụ trông giữ xe ô tô thu phí 30 nghìn đồng trong giờ đầu tiên và thu thêm 20 nghìn đồng cho mỗi giờ tiếp theo.

a) Viết hàm số $f(x)$ mô tả số tiền phí theo thời gian trông giữ.

$$f(x) = \begin{cases} 30 & \text{khi } 0 < x \le 1 \\ 10 + 20x & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

b) Xét tính liên tục của hàm số này.

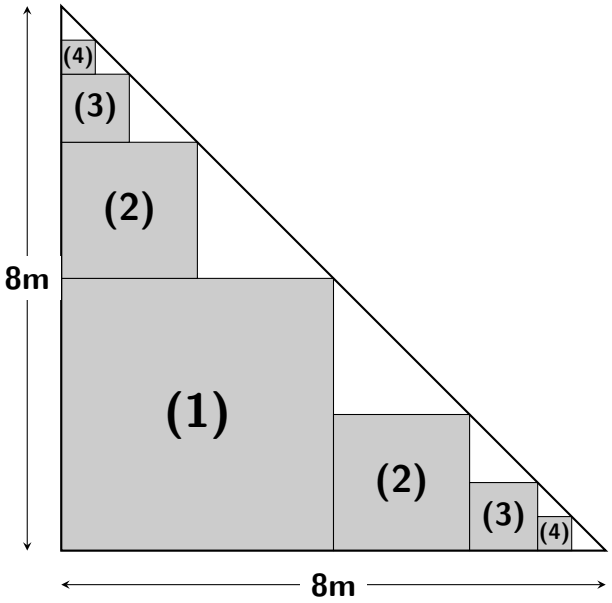
Bài 19. Người ta làm đèn tre như hình bên, các hình tròn chồng lên nhau. Trong đó tính từ dưới lên hình tròn lớn nhất C_1 có bán kính $R = 200$ cm, hình tròn C_2 có bán kính bằng $\frac{9}{10}$ bán kính của đường tròn C_1, hình tròn C_3 có bán kính bằng $\frac{9}{10}$ bán kính của đường tròn C_2. Cứ tiếp tục như vậy, nhận được dãy hình tròn $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n, \ldots$. Tính tổng chiều dài các thanh tre đã làm chiếc đèn tre (đơn vị mét, làm tròn đến hàng đơn vị).



126

Bài 20. Bạn Nhi muốn trang trí một góc cầu thang bằng cách tô màu các hình vuông như hình vẽ bên dưới. Biết góc cầu thang có dạng một tam giác vuông cân có cạnh 8 m và bạn trang trí như sau:

- Lấy trung điểm cạnh huyền dựng đoạn thẳng song song hai cạnh tạo hình vuông (1) và tô màu nó.
- Phần trắng trên cùng và dưới cùng là 2 tam giác vuông cân và bạn lại tiếp tục thực hiện như ban đầu dựng hai hình vuông (2) và tô màu nó.
- Phần trắng trên cùng và dưới cùng là 2 tam giác vuông cân và bạn lại tiếp tục thực hiện như ban đầu dựng hai hình vuông (3) và tô màu nó.

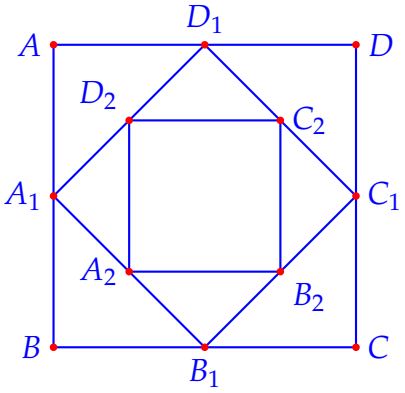


Bạn Nhi tiếp tục quá trình như thế đến khi các hình vuông không thể tô được nữa thì tổng diện tích đã được tô màu là bao nhiêu mét vuông? *(kết quả làm tròn đến hàng phần mười).*

26,7

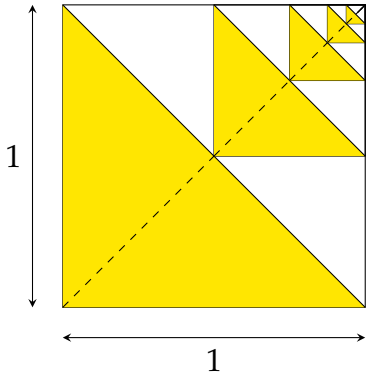
Bài 21. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4 và có diện tích S_1. Nối 4 trung điểm A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự của 4 cạnh AB, BC, CD, DA ta được hình vuông thứ hai có diện tích S_2. Tiếp tục làm như thế, ta được hình vuông thứ ba là $A_2B_2C_2D_2$ có diện tích $S_3, \ldots$ và cứ tiếp tục làm như thế, ta tính được các hình vuông lần lượt có diện tích S_4, S_5, $\ldots$, S_{100}. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{100}$.

$32 - \frac{1}{2^{95}}$



Bài 22. Cho một hình vuông lớn có cạnh bằng 1. Từ hình vuông này, ta thực hiện quá trình tô màu như sau:

- Bước 1: Tô màu tam giác vuông có 2 cạnh là cạnh của hình vuông ban đầu (như hình vẽ).
- Bước 2: Ở tam giác vuông còn lại chưa được tô màu, ta dựng hình vuông mới có 3 trong 4 đỉnh là trung điểm của các cạnh của tam giác. Sau đó lặp lại như bước 1.



Bước 2 được lặp lại liên tục.
Tính tổng diện tích phần tô màu (làm tròn đến hàng phần trăm).

0,67

Bài 23. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị là (C) xác định trên $[-5;6]$ bởi công thức

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}x+\dfrac{11}{4} & \text{khi } -5\le x<-1\\ \sqrt{13-(x-2)^2} & \text{khi } -1\le x\le 4\\ 3 & \text{khi } 4<x\le 6.\end{cases}$$

Một con kiến bò từ điểm A có hoành độ bằng -5 và nó chỉ di chuyển trên (C). Gọi $B\in(C)$ là điểm có hoành độ lớn nhất mà con kiến có thể tới được, con kiến sẽ dừng lại nếu đường đi bị gián đoạn. Tính quãng đường kiến di chuyển từ A đến B (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười*).

12,7

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1 B	2 A	3 A	4 A	5 A	6 B	7 B	8 B	9 B	10 A
11 C	12 D	13 B	14 A	15 C	16 B	17 A	18 B	19 B	20 C
21 A	22 A	23 D	24 B	25 C	26 D	27 A	28 C	29 A	30 B
31 C	32 C	33 B	34 B	35 D	36 B	37 A	38 D	39 D	40 C
41 D	42 D	43 C	44 B	45 A	46 C				

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a Đ b Đ c S d S
Câu 2.	a Đ b S c Đ d Đ
Câu 3.	a Đ b S c Đ d Đ
Câu 4.	a Đ b Đ c S d Đ
Câu 5.	a Đ b S c Đ d Đ
Câu 6.	a Đ b S c Đ d S
Câu 7.	a Đ b Đ c S d Đ
Câu 8.	a S b Đ c S d S
Câu 9.	a Đ b Đ c S d Đ
Câu 10.	a S b Đ c Đ d Đ
Câu 11.	a Đ b S c S d Đ
Câu 12.	a S b S c Đ d S
Câu 13.	a S b Đ c S d S
Câu 14.	a S b Đ c S d Đ
Câu 15.	a Đ b S c Đ d S
Câu 16.	a Đ b Đ c S d S
Câu 17.	a Đ b Đ c S d S
Câu 18.	a Đ b Đ c S d S
Câu 19.	a Đ b S c S d S