

CHUYÊN ĐỀ CỰC TRỊ SỐ PHỨC

(TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM)

A. MỘT SỐ TÍNH CHẤT CẦN NHỚ.

1. Môđun của số phức: Số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ trên mặt phẳng Oxy. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là môđun của số phức z . Kí hiệu $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

□ Tính chất

$$\bullet |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |\overrightarrow{OM}| \bullet |z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$\bullet |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'| \bullet \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}, (z' \neq 0) \bullet ||z| - |z'|| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|$$

$$\square |kz| = |k| \cdot |z|, k \in \mathbb{R}$$

$$\square \text{Chú ý: } |z^2| = |a^2 - b^2 + 2abi| = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2} = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2 = z \cdot \bar{z}.$$

Lưu ý:

$$\square |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \text{ dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow z_1 = kz_2 (k \geq 0)$$

$$\square |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| \text{ dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow z_1 = kz_2 (k \leq 0).$$

$$\square |z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2|| \text{ dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow z_1 = kz_2 (k \geq 0)$$

$$\square |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2|| \text{ dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow z_1 = kz_2 (k \leq 0)$$

$$\square |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

$$\square |z|^2 = |\bar{z}| \cdot |z| = |\bar{z}|^2 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

2. Một số quỹ tích nên nhớ

Biểu thức liên hệ x, y	Quỹ tích điểm M
$ax + by + c = 0$ (1) $ z - a - bi = z - c - di $ (2)	(1) Đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ (2) Đường trung trực đoạn AB với $(A(a, b), B(c, d))$
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ hoặc $ z - a - bi = R$	Đường tròn tâm $I(a, b)$, bán kính R
$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2$ hoặc $ z - a - bi \leq R$	Hình tròn tâm $I(a, b)$, bán kính R
$r^2 \leq (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2$ hoặc $r \leq z - a - bi \leq R$	Hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn đồng tâm $I(a, b)$, bán kính lần lượt là r, R
$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ x = ay^2 + by + c \end{cases} (c \neq 0)$	Parabol
$\frac{(x + a)^2}{b^2} + \frac{(y + c)^2}{d^2} = 1$ (1) hoặc $ z - a_1 - b_1i + z - a_2 - b_2i = 2a$	(1) Elip (2) Elip nếu $2a > AB$, $A(a_1, b_1), B(a_2, b_2)$ Đoạn AB nếu $2a = AB$

$\frac{(x+a)^2}{b^2} - \frac{(y+c)^2}{d^2} = 1$	Hypebol
---	---------

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1: Quỹ tích điểm biểu diễn số phức là đường thẳng.

TQ1: Cho số phức z thỏa mãn $|z - a - bi| = |z|$, tìm $|z|_{Min}$. Khi đó ta có

- Quỹ tích điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z là đường trung trực đoạn OA với $A(a; b)$

$$\square \begin{cases} |z|_{Min} = \frac{1}{2}|z_0| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} \\ z = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}i \end{cases}$$

TQ2: Cho số phức thỏa mãn điều kiện $|z - a - bi| = |z - c - di|$. Tìm $|z|_{min}$. Ta có

- Quỹ tích điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z là đường trung trực đoạn AB với $A(a; b), B(c; d)$

$$\square |z|_{Min} = d(O, AB) = \frac{|a^2 + b^2 - c^2 - d^2|}{2\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}}$$

Lưu ý: Đề bài có thể suy biến bài toán thành 1 số dạng, khi đó ta cần thực hiện biến đổi để đưa về dạng cơ bản.

Ví dụ 1:

- Cho số phức thỏa mãn điều kiện $|\bar{z} - a - bi| = |z - c - di|$. Khi đó ta biến đổi

$$|\bar{z} - a - bi| = |z - c - di| \Leftrightarrow |z - a + bi| = |z - c - di|.$$

- Cho số phức thỏa mãn điều kiện $|iz - a - bi| = |z - c - di|$. Khi đó ta biến đổi

$$|iz - a - bi| = |z - c - di| \Leftrightarrow \left| z + \frac{-a - bi}{i} \right| = \left| z + \frac{-c - di}{i} \right| \Leftrightarrow |z + b + ai| = |z + d + ci|.$$

Dạng 2: Quỹ tích điểm biểu diễn số phức là đường tròn.

TQ: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - a - bi| = R > 0 (|z - z_0| = R)$. Tìm $|z|_{Max}, |z|_{Min}$. Ta có

- Quỹ tích điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(a; b)$ bán kính R

$$\square \begin{cases} |z|_{Max} = OI + R = \sqrt{a^2 + b^2} + R = |z_0| + R \\ |z|_{Min} = |OI - R| = \left| \sqrt{a^2 + b^2} - R \right| = \left| |z_0| - R \right| \end{cases}$$

Lưu ý: Đề bài có thể cho ở dạng khác, ta cần thực hiện các phép biến đổi để đưa về dạng cơ bản.

Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|iz - a - bi| = R \Leftrightarrow \left| z + \frac{-a - bi}{i} \right| = \frac{R}{|i|}$ (Chia hai vế cho $|i|$)

$$\Leftrightarrow |z + b + ai| = R$$

Ví dụ 2: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|\bar{z} - a - bi| = R \Leftrightarrow |z - a + bi| = R$ (Lấy liên hợp 2 vế)

Ví dụ 3: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|(c + di)z - a - bi| = R \Leftrightarrow \left| z + \frac{-a - bi}{c + di} \right| = \frac{R}{|c + di|} = \frac{R}{\sqrt{c^2 + d^2}}$

Hay viết gọn $|z_0 z - z_1| = R \Leftrightarrow \left| z - \frac{z_1}{z_0} \right| = \frac{R}{|z_0|}$ (Chia cả hai vế cho $|z_0|$)

Dạng 3: Quỹ tích điểm biểu diễn số phức là Elip.

TQ1: (Elip chính tắc). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-c|+|z+c|=2a, (a>c)$ Khi đó ta có

□ Quỹ tích điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z là Elip: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$

□ $\begin{cases} |z|_{Max} = a \\ |z|_{Min} = \sqrt{a^2 - c^2} \end{cases}$

TQ2: (Elip không chính tắc). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$

Thỏa mãn $2a > |z_1 - z_2|$.

Khi đó ta thực hiện phép biến đổi để đưa Elip về dạng chính tắc

Ta có

Khi đề cho Elip dạng không chính tắc $ z-z_1 + z-z_2 =2a, (z_1-z_2 <2a)$ và $z_1, z_2 \neq \pm c, \pm ci$. Tìm Max, Min của $P= z-z_0 $. Đặt $\begin{cases} z_1-z_2 =2c \\ b^2=a^2-c^2 \end{cases}$	
Nếu $\left z_0 - \frac{z_1+z_2}{2}\right = 0$	$\begin{cases} P_{Max} = a \\ P_{Min} = b \end{cases}$ (dạng chính tắc)
Nếu $\begin{cases} \left z_0 - \frac{z_1+z_2}{2}\right > a \\ z_0 - z_1 = k(z_0 - z_2) \end{cases}$	$\begin{cases} P_{Max} = \left z_0 - \frac{z_1+z_2}{2}\right + a \\ P_{Min} = \left z_0 - \frac{z_1+z_2}{2}\right - a \end{cases}$
Nếu $\begin{cases} \left z_0 - \frac{z_1+z_2}{2}\right < a \\ z_0 - z_1 = k(z_0 - z_2) \end{cases}$	$P_{Max} = \left z_0 - \frac{z_1+z_2}{2}\right + a$
Nếu $ z_0 - z_1 = z_0 - z_2 $	$P_{Min} = \left \left z_0 - \frac{z_1+z_2}{2}\right - b\right $

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Câu 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-3i|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|\bar{z}+1+i|$.

A. $\sqrt{13}+3$.

B. $\sqrt{13}+5$.

C. $\sqrt{13}+1$.

D. $\sqrt{13}+6$.

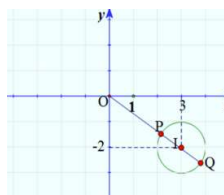
Lời giải

Chọn C

Ta có $1 = |z-2-3i|^2 = (z-2-3i) \cdot \overline{(z-2-3i)} = (z-2-3i)(\bar{z}-2+3i)$

$\Leftrightarrow 1 = |(z-2-3i)(\bar{z}-2+3i)| \Leftrightarrow |\bar{z}-2+3i| = 1 \Leftrightarrow |\bar{z}+1+i-3+2i| = 1(*)$.

+Đặt $w = \bar{z}+1+i$, khi đó $\Leftrightarrow |w-3+2i| = 1$



Nhận xét: Ở đây ta sử dụng kiến thức sau: $\bar{z.z} = |z|^2$, $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$

A. $M - n = 2$. **B.** $M - n = 4$. **C.** $M - n = 7$. **D.** $M - n = 14$.

* **Nhân xét:** Ở trên ta đã sử dụng định nghĩa (E) để nhận dạng được phung trình elip

A. $P = 8$ **B.** $P = 10$ **C.** $P = 4$ **D.** $P = 6$

Trang 4

Gọi E là trung điểm của AB, kéo dài EI cắt đường tròn tại D

Ta có: $Q^2 = MA^2 + MB^2 + 2MA \cdot MB$

$$\Leftrightarrow Q^2 \leq MA^2 + MB^2 + MA^2 + MB^2 = 2(MA^2 + MB^2)$$

Vì ME là trung tuyến trong $\triangle MAB$

$$\Rightarrow ME^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} \Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2ME^2 + \frac{AB^2}{2}$$

$$\Rightarrow Q^2 \leq 2 \left(2ME^2 + \frac{AB^2}{2} \right) = 4ME^2 + AB^2. \text{ Mặt khác } ME \leq DE = EI + ID = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow Q^2 \leq 4 \cdot (3\sqrt{5})^2 + 20 = 200$$

$$\Rightarrow Q \leq 10\sqrt{2} \Rightarrow Q_{\max} = 10\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} MA = MB \\ M \equiv D \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \overline{EI} = 2\overline{ID} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 2(x_D - 4) \\ 2 = 2(y_D - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 6 \\ y_D = 4 \end{cases} \Leftrightarrow M(6; 4) \Rightarrow P = a + b = 10$$

Cách 2: Đặt $z = a + bi$. Theo giả thiết ta có: $(a - 4)^2 + (b - 5)^2 = 5$.

Đặt $\begin{cases} a - 4 = \sqrt{5} \sin t \\ b - 3 = \sqrt{5} \cos t \end{cases}$. Khi đó:

$$\begin{aligned} Q &= |z + 1 - 3i| + |z - 1 + i| = \sqrt{(a+1)^2 + (b-3)^2} + \sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{5} \sin t + 5)^2 + 5 \cos^2 t} + \sqrt{(\sqrt{5} \sin t + 3)^2 + (\sqrt{5} \cos t + 4)^2} \\ &= \sqrt{30 + 10\sqrt{5} \sin t} + \sqrt{30 + 2\sqrt{5}(3 \sin t + 4 \cos t)} \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có:

$$\begin{aligned} Q &\leq \sqrt{2(60 + 8\sqrt{5}(2 \sin t + \cos t))} \leq \sqrt{2(60 + 8\sqrt{5} \cdot \sqrt{5})} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \\ \Rightarrow Q &\leq 10\sqrt{2} \Rightarrow Q_{\max} = 10\sqrt{2} \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \sin t = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos t = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow P = a + b = 10.$

Câu 4: (Đề Tham Khảo 2017) Xét số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z - 1 + i|$. Tính $P = m + M$.

A. $P = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$

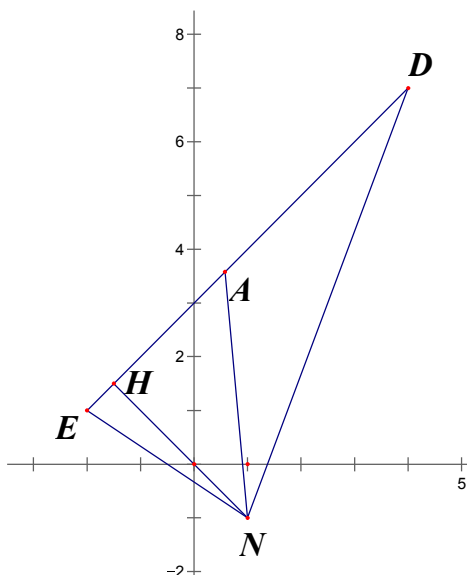
B. $P = 5\sqrt{2} + \sqrt{73}$

C. $P = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$

D. $P = \sqrt{13} + \sqrt{73}$

Lời giải

Chọn A



Gọi A là điểm biểu diễn số phức z , $E(-2;1)$, $F(4;7)$ và $N(1;-1)$.

Từ $AE + AF = |z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$ và $EF = 6\sqrt{2}$ nên ta có A thuộc đoạn thẳng EF .

Gọi H là hình chiếu của N lên EF , ta có $H\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Suy ra $P = NH + NF = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$.

Câu 5: (THPT Cẩm Giàng 2 2019) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 2i| = 1$. Số phức $z - i$ có môđun nhỏ nhất là:

A. $\sqrt{5} - 2$.

B. $\sqrt{5} - 1$.

C. $\sqrt{5} + 1$.

D. $\sqrt{5} + 2$.

Lời giải

Cách 1:

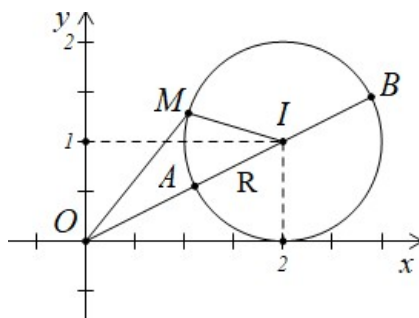
Đặt $w = z - i \Rightarrow z = w + i$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn hình học của số phức w .

Từ giả thiết $|z - 2 - 2i| = 1$ ta được:

$$|w + i - 2 - 2i| = 1 \Leftrightarrow |w - 2 - i| = 1 \Leftrightarrow |(x - 2) + (y - 1)i| = 1 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

Suy ra tập hợp những điểm $M(x; y)$ biểu diễn cho số phức w là đường tròn (C) có tâm $I(2; 1)$ bán kính $R = 1$.



Giả sử OI cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B với A nằm trong đoạn thẳng OI .

Ta có $|w| = OM$

$$\text{Mà } OM + MI \geq OI \Leftrightarrow OM + MI \geq OA + AI \Leftrightarrow OM \geq OA$$

Nên $|w|$ nhỏ nhất bằng $OA = OI - IA = \sqrt{5} - 1$ khi $M \equiv A$.

Cách 2:

Từ $|z - 2 - 2i| = 1 \Rightarrow (a - 2)^2 + (b - 2)^2 = 1$ với $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

$$a - 2 = \sin x; \quad b - 2 = \cos x \Rightarrow a = 2 + \sin x, \quad b = 2 + \cos x$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } |z - i| &= |2 + \sin x + (2 + \cos x)i - i| = \sqrt{(2 + \sin x)^2 + (1 + \cos x)^2} \\ &= \sqrt{6 + (4 \sin x + 2 \cos x)} \\ &\geq \sqrt{6 - \sqrt{(4^2 + 2^2)(\sin^2 x + \cos^2 x)}} = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = \sqrt{5} - 1 \end{aligned}$$

$$\text{Nên } |z - i| \text{ nhỏ nhất bằng } \sqrt{5} - 1 \text{ khi } \begin{cases} 4 \cos x = 2 \sin x \\ 4 \sin x + 2 \cos x = -2\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \cos x = \frac{-\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

$$\text{Ta được } z = \left(2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) + \left(2 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)i$$

Cách 3:

Sử dụng bất đẳng thức $\|z_1\| - \|z_2\| \leq \|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|$

$$|z - i| = |(z - 2 - 2i) + (2 + i)| \geq \|z - 2 - 2i\| - \|2 + i\| = \sqrt{5} - 1$$

Câu 6: (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019) Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = \left| \frac{2z + i}{z} \right|$ với z là số phức khác 0 và thỏa mãn $|z| \geq 2$. Tính tỉ số $\frac{M}{m}$.

A. $\frac{M}{m} = 3$.

B. $\frac{M}{m} = \frac{4}{3}$.

C. $\frac{M}{m} = \frac{5}{3}$.

D. $\frac{M}{m} = 2$.

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \left| \frac{2z + i}{z} \right| = \frac{|2z + i|}{|z|} \Rightarrow \frac{|2z| - |i|}{|z|} \leq P \leq \frac{|2z| + |i|}{|z|} \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{|z|} \leq P \leq 2 + \frac{1}{|z|} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq P \leq \frac{5}{2}.$$

$$\text{Vậy } \frac{M}{m} = \frac{5}{3}.$$

Câu 7: Xét tất cả các số phức z thỏa mãn $|z - 3i + 4| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z^2 + 7 - 24i|$ nằm trong khoảng nào?

A. $(0; 1009)$.

B. $(1009; 2018)$.

C. $(2018; 4036)$.

D. $(4036; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 1 = |z - 3i + 4| \geq \|z\| - \|3i - 4\| = \|z\| - 5 \Rightarrow -1 \leq \|z\| - 5 \leq 1 \Rightarrow 4 \leq \|z\| \leq 6.$$

$$\text{Đặt } z_0 = 4 - 3i \Rightarrow |z_0| = 5, z_0^2 = 7 - 24i.$$

$$\text{Ta có } A = |z^2 + 7 - 24i|^2 = |z^2 + z_0^2|^2 = (z^2 + z_0^2)(\overline{z^2 + z_0^2}) = |z|^4 + |z_0|^4 + (z\overline{z_0} + \overline{z}z_0)^2 - 2|z \cdot z_0|^2$$

$$\text{Mà } (z + z_o)(\bar{z} + \bar{z}_o) = 1 \Rightarrow z.\bar{z}_o + z_o.\bar{z} = 1 - |z|^2 - |z_o|^2$$

$$\text{Suy ra } A = |z|^4 + |z_o|^4 + \left(1 - |z|^2 - |z_o|^2\right)^2 - 2|z.z_o|^2 = 2|z|^4 - 2|z|^2 + 1201.$$

Hàm số $y = 2t^4 - 2t^2 + 1201$ đồng biến trên $[4; 6]$ nên $A \geq 2.4^4 - 2.4^2 + 1201 = 1681$.

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} |z| = 4 \\ |z + 4 - 3i| = 1 \end{cases}.$$

Do đó $|z^2 + 7 - 24i|$ nằm trong khoảng $(1009; 2018)$.

Câu 8: (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019) Cho số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = |z - 2 - 2i|$. Đặt $A = M + m$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. $A \in (\sqrt{34}; 6)$. **B.** $A \in (6; \sqrt{42})$. **C.** $A \in (2\sqrt{7}; \sqrt{33})$. **D.** $A \in (4; 3\sqrt{3})$.

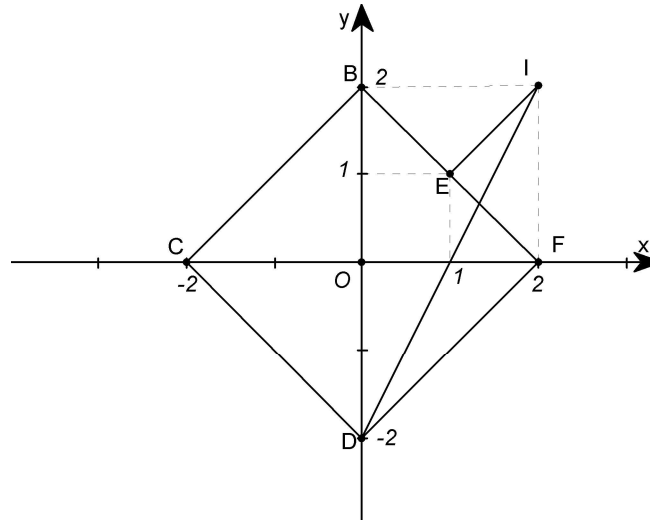
Lời giải

Chọn A

Giả sử: $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow N(x, y)$: điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

Ta có:

$$|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 4 \Leftrightarrow |x| + |y| = 2 \Rightarrow N \text{ thuộc các cạnh của hình vuông } BCDF \text{ (hình vẽ).}$$



$$P = |z - 2 - 2i| \Rightarrow P = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} \Rightarrow P = d(I; N) \text{ với } I(2; 2)$$

Từ hình ta có: $E(1; 1)$

$$M = P_{\max} = ID = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} \text{ và } m = P_{\min} = IE = \sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Vậy, } A = M + m = 2 + 2\sqrt{5} \in (\sqrt{34}; 6).$$

Câu 9: (THPT Quang Trung Đồng Đa Hà Nội 2019) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 4i| = 2$ và $w = 2z + 1 - i$. Khi đó $|w|$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $4 + \sqrt{74}$.

B. $2 + \sqrt{130}$.

C. $4 + \sqrt{130}$.

D. $16 + \sqrt{74}$.

Lời giải

Chọn C

Theo bất đẳng thức tam giác ta có

$$|w| = |2z + 1 - i| = |(2z - 6 + 8i) + (7 - 9i)| \leq |2z - 6 + 8i| + |7 - 9i| = 4 + \sqrt{130}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của $|w|$ là $4 + \sqrt{130}$.

Câu 10: (THPT Quang Trung Đồng Đa Hà Nội 2019) Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M và M' . Số phức $z(4+3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là N và N' . Biết rằng M, M', N, N' là bốn đỉnh của hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z + 4i - 5|$.

A. $\frac{5}{\sqrt{34}}$.

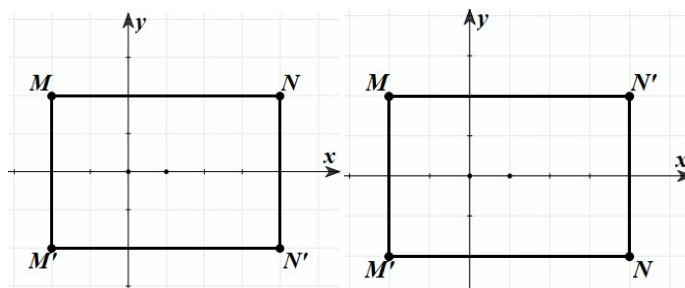
B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

D. $\frac{4}{\sqrt{13}}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $z = x + yi$, trong đó $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó $\bar{z} = x - yi$, $M(x; y)$, $M'(x; -y)$.

Ta đặt $w = z(4+3i) = (x+yi)(4+3i) = (4x-3y) + (3x+4y)i \Rightarrow N(4x-3y; 3x+4y)$. Khi đó

$$\bar{w} = \overline{z(4+3i)} = (4x-3y) - (3x+4y)i \Rightarrow N'(4x-3y; -3x-4y).$$

Ta có M và M' ; N và N' từng cặp đối xứng nhau qua trục Ox . Do đó, để chúng tạo thành một hình chữ nhật thì $y_M = y_N$ hoặc $y_M = y_{N'}$. Suy ra $y = 3x+4y$ hoặc $y = -3x-4y$. Vậy tập hợp các điểm M là hai đường thẳng: $d_1: x+y=0$ và $d_2: 3x+5y=0$.

Đặt $P = |z + 4i - 5| = \sqrt{(x-5)^2 + (y+4)^2}$. Ta có $P = MA$ với $A(5; -4)$.

$$P_{\min} \Leftrightarrow MA_{\min} \Leftrightarrow MA = d(A; d_1) \text{ hoặc } MA = d(A; d_2). \text{ Mà } d(A; d_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}, d(A; d_2) = \frac{5}{\sqrt{34}},$$

$$\text{vậy } P_{\min} = d(A; d_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 11: Biết số phức z thỏa mãn $|iz-3| = |z-2-i|$ và $|z|$ có giá trị nhỏ nhất. Phần thực của số phức z bằng:

A. $\frac{2}{5}$.

B. $\frac{1}{5}$.

C. $-\frac{2}{5}$.

D. $-\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Khi đó

$$|iz - 3| = |z - 2 - i| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (-y - 3)^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2} \Leftrightarrow x + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -2y - 1 \quad (1).$$

Lại có $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2).$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2y - 1)^2 + y^2} = \sqrt{5y^2 + 4y + 1} = \sqrt{5\left(y + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}} \geq \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $y + \frac{2}{5} = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{5}.$

Thay $y = -\frac{2}{5}$ vào (1) suy ra $x = -\frac{1}{5}.$

Vậy phần thực của số phức z là $-\frac{1}{5}.$

Câu 12: (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương -2019) Xét các số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 3i| = 2$. Số phức z mà $|z - 1|$ nhỏ nhất là

A. $z = 1 + 5i.$

B. $z = 1 + i.$

C. $z = 1 + 3i.$

D. $z = 1 - i.$

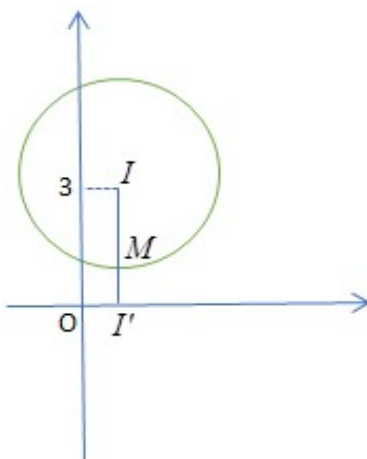
Lời giải

Gọi $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức z .

Theo bài ra ta có $|z - 1 - 3i| = 2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4.$

Suy ra tập hợp điểm M là đường tròn tâm $I(1; 3)$ bán kính $R = 2$.

Khi đó $|z - 1| = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = I'M$ với $I'(1; 0)$.



$|z - 1|$ nhỏ nhất khi $I'M$ ngắn nhất hay I, M, I' thẳng hàng, M nằm giữa I và I' .

Phương trình đường thẳng II' là $x = 1$.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng II' với đường tròn tâm I bán kính $R = 2$ là $M_1(1; 1)$ và $M_1(1; 5)$.

Thử lại ta thấy $M_1(1; 1)$ thỏa mãn. Vậy $z = 1 + i$.

Câu 13: (Chuyên Phan Bội Châu -2019) Cho số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = |z - 2 - 2i|$. Đặt $A = M + m$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.** $A \in (\sqrt{34}; 6)$. **B.** $A \in (6; \sqrt{42})$. **C.** $A \in (2\sqrt{7}; \sqrt{33})$. **D.** $A \in [4; 3\sqrt{3})$.

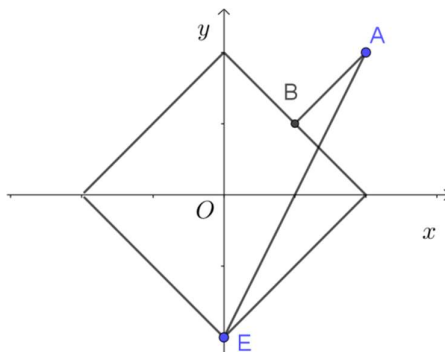
Lời giải

Chọn A

Đặt $z = x + iy$ và gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của $z = x + iy$

ta có: $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 4 \Leftrightarrow |x| + |y| = 2$

Gọi $A(2; 2)$ và $P = MA$



* Theo hình vẽ, $\min P = d(A, \Delta)$, với $\Delta: x + y = 2$

$$\text{và } \min P = \frac{|2 + 2 - 2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\max P = AE = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}, \text{ với } E(0; -2)$$

$$\text{Vậy } M + m = \sqrt{2} + 2\sqrt{5} \approx 5,88$$

Câu 14: (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019) Trong các số phức z thỏa mãn $|z - 1 + i| = |\bar{z} + 1 - 2i|$, số phức z có mô đun nhỏ nhất có phần ảo là

- A.** $\frac{3}{10}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $-\frac{3}{5}$. **D.** $-\frac{3}{10}$.

Lời giải

Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi điểm $M(x; y)$.

$$|z - 1 + i| = |\bar{z} + 1 - 2i| \Leftrightarrow |(x - 1) + (y + 1)i| = |(x + 1) - (y + 2)i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} = \sqrt{(x + 1)^2 + (y + 2)^2} \Leftrightarrow 4x + 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = -2x - \frac{3}{2}.$$

Cách 1:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \left(-2x - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{5x^2 + 6x + \frac{9}{4}} = \sqrt{5\left(x + \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{9}{20}} \geq \frac{3\sqrt{5}}{10}, \forall x.$$

Suy ra $\min|z| = \frac{3\sqrt{5}}{10}$ khi $x = -\frac{3}{5}; y = -\frac{3}{10}$.

Vậy phần ảo của số phức z có mô đun nhỏ nhất là $-\frac{3}{10}$.

Cách 2:

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng

$$d: 4x + 2y + 3 = 0.$$

Ta có $|z| = OM$. $|z|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow OM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của O trên d .

Phương trình đường thẳng OM đi qua O và vuông góc với d là: $x - 2y = 0$.

Tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4x + 2y + 3 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = -\frac{3}{10} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M\left(-\frac{3}{5}; -\frac{3}{10}\right). \text{ Hay } z = -\frac{3}{5} - \frac{3}{10}i.$$

Vậy phần ảo của số phức z có mô đun nhỏ nhất là $-\frac{3}{10}$.

Nhận xét: Ta có thể tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z như sau:

$$|z - 1 + i| = |\bar{z} + 1 - 2i| \Leftrightarrow |z - (1 - i)| = |z - (-1 - 2i)| \quad (*)$$

Gọi M biểu diễn số phức z , điểm $A(1; -1)$ biểu diễn số phức $1 - i$, điểm $B(-1; -2)$ biểu diễn số phức $-1 - 2i$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow MA = MB$. Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình $d: 4x + 2y + 3 = 0$.

Câu 15: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $\left|\frac{z_1 - i}{z_1 + 2 - 3i}\right| = 1; \left|\frac{z_2 + i}{z_2 - 1 + i}\right| = \sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ là

A. $2\sqrt{2}$.

B. $\sqrt{2}$.

C. 1.

D. $\sqrt{2} - 1$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $z_1 = x_1 + y_1i$ với $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$. Khi đó:

$$\left|\frac{z_1 - i}{z_1 + 2 - 3i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z_1 - i| = |z_1 + 2 - 3i| \Leftrightarrow |x_1 + (y_1 - 1)i| = |(x_1 + 2) + (y_1 - 3)i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + (y_1 - 1)^2} = \sqrt{(x_1 + 2)^2 + (y_1 - 3)^2} \Leftrightarrow x_1 - y_1 + 3 = 0.$$

$\Rightarrow$ Quỹ tích điểm M biểu diễn số phức z_1 là đường thẳng $\Delta: x - y + 3 = 0$.

Giả sử $z_2 = x_2 + y_2i$ với $x_2, y_2 \in \mathbb{R}$. Ta có:

$$\left|\frac{z_2 + i}{z_2 - 1 + i}\right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z_2 + i| = \sqrt{2}|z_2 - 1 + i| \Leftrightarrow |x_2 + (y_2 + 1)i| = \sqrt{2}|(x_2 - 1) + (y_2 + 1)i|$$

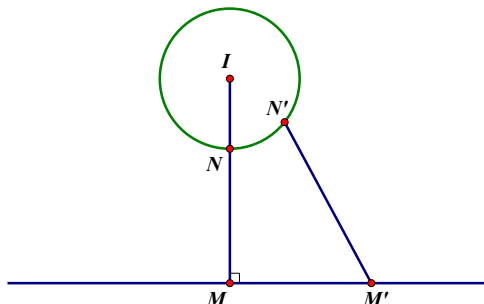
$$\Leftrightarrow \sqrt{x_2^2 + (y_2 + 1)^2} = \sqrt{2} \sqrt{(x_2 - 1)^2 + (y_2 + 1)^2} \Leftrightarrow x_2^2 + y_2^2 - 4x_2 + 2y_2 + 3 = 0.$$

$\Rightarrow$ Quỹ tích điểm N biểu diễn số phức z_2 là đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$ có tâm $I(2; -1)$ và bán kính $R = \sqrt{2^2 + (-1)^2 - 3} = \sqrt{2}$.

Khoảng cách từ I đến Δ là: $d(I; \Delta) = \frac{|2 - (-1) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 3\sqrt{2} > R \Rightarrow$ đường thẳng Δ và đường

tròn C không có điểm chung.

Quỹ tích các điểm biểu diễn số phức $z_1 - z_2$ là đoạn thẳng MN . $\Rightarrow |z_1 - z_2|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MN nhỏ nhất.



Để thấy $MN_{\min} = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Câu 16: (Sở Bình Phước 2019) Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn $|z - 1| = \sqrt{34}$ và $|z + 1 + mi| = |z + m + 2i|$, (trong đó $m \in \mathbb{R}$). Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc S sao cho $|z_1 - z_2|$ lớn nhất, khi đó giá trị của $|z_1 + z_2|$ bằng

A. 2

B. 10

C. $\sqrt{2}$

D. $\sqrt{130}$

Lời giải

Chọn A

Đặt $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó

$$|z - 1| = \sqrt{34} \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 34; |z + 1 + mi| = |z + m + 2i| \Leftrightarrow 2(m - 1)x + 2(2 - m)y + 3 = 0.$$

Do đó tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là giao điểm của đường tròn $(C): (x - 1)^2 + y^2 = 34$ và đường thẳng $d: 2(m - 1)x + 2(2 - m)y + 3 = 0$.

Gọi A, B là hai điểm biểu diễn z_1 và z_2 . Suy ra $(C) \cap d = \{A, B\}$.

Mặt khác $|z_1 - z_2| = AB \leq 2R = 2\sqrt{34}$ do đó $\max |z_1 - z_2| = 2\sqrt{34} \Leftrightarrow AB = 2R \Leftrightarrow I(1; 0) \in d$.

$$\text{Từ đó ta có } m = -\frac{1}{2} \text{ nên } d: 3x - 5y - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 6 + 3i \\ z_2 = -4 - 3i \end{cases}$$

Vậy $|z_1 + z_2| = 2$.

Câu 17: Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z - 3\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|w - 4\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$. Biết rằng $|z - w|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z = z_0$, $w = w_0$. Tính $|3z_0 - w_0|$.

A. $2\sqrt{2}$.

B. $4\sqrt{2}$.

C. 1.

D. $6\sqrt{2}$.

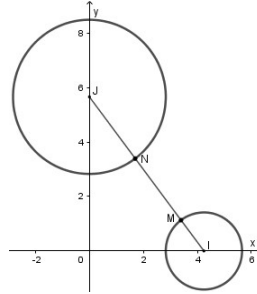
Lời giải

Ta có: $|z - 3\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn M biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I(3\sqrt{2}; 0)$, bán kính $r = \sqrt{2}$.

+ $|w - 4\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn N biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $J(0; 4\sqrt{2})$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Ta có $\min|z - w| = \min MN$.

+ $IJ = 5\sqrt{2}; IM = r = \sqrt{2}; NJ = R = 2\sqrt{2}$.



Mặt khác $IM + MN + NJ \geq IJ \Rightarrow MN \geq IJ - IM - NJ$ hay $MN \geq 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Suy ra $\min MN = 2\sqrt{2}$ khi I, M, N, J thẳng hàng và M, N nằm giữa I, J (Hình vẽ).

Cách 1:

Khi đó ta có: $|3z_0 - w_0| = |3\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}|$ và $IN = 3\sqrt{2} \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{IJ}; \overrightarrow{IN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$.

Mặt khác $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{OI} + \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$; $3\overrightarrow{OM} = 3(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}) = 3\left(\overrightarrow{OI} + \frac{1}{5}\overrightarrow{IJ}\right) = 3\overrightarrow{OI} + \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$.

Suy ra $|3z_0 - w_0| = |3\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}| = \left|3\overrightarrow{OI} + \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ} - \left(\overrightarrow{OI} + \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}\right)\right| = |2\overrightarrow{OI}| = 6\sqrt{2}$.

Cách 2:

Ta có $\overrightarrow{IN} = 3\overrightarrow{IM} \Rightarrow 3\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IN} = \vec{0}$.

Do đó $|3z_0 - w_0| = |3\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}| = |3(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}) - (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IN})| = |2\overrightarrow{OI}| = 2.OI = 2.3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

Cách 3:

$$+) \overrightarrow{IM} = \frac{IM}{IJ} \overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = \frac{1}{5} \overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{12\sqrt{2}}{5} \\ y_M = \frac{4\sqrt{2}}{5} \end{cases} \Rightarrow z_0 = \frac{12\sqrt{2}}{5} + \frac{4\sqrt{2}}{5}i.$$

$$+) \overline{IN} = \frac{IN}{IJ} \overline{IJ} \Leftrightarrow \overline{IN} = \frac{3}{5} \overline{IJ} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = \frac{6\sqrt{2}}{5} \\ y_N = \frac{12\sqrt{2}}{5} \end{cases} \Rightarrow w_0 = \frac{6\sqrt{2}}{5} + \frac{12\sqrt{2}}{5}i.$$

$$\text{Suy ra } |3z_0 - w_0| = |6\sqrt{2}| = 6\sqrt{2}.$$

Câu 18: Cho hai số phức z và w thỏa mãn $z + 2w = 8 - 6i$ và $|z - w| = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $|z| + |w|$ bằng

A. $4\sqrt{6}$.

B. $2\sqrt{26}$.

C. $\sqrt{66}$.

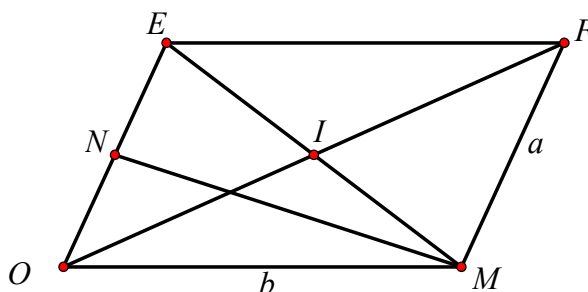
D. $3\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử M, N lần lượt là các điểm biểu diễn cho z và w . Suy ra $\overline{OM} + \overline{ON} = \overline{OF} = 2\overline{OI}$,
 $|z - w| = MN = 4$ và $OF = 2OI = 10$.

Đặt $|z| = ON = \frac{a}{2}$; $|w| = OM = b$. Dựng hình bình hành $OMFE$



$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{ME^2}{4} = 25 \\ \frac{b^2 + ME^2}{2} - \frac{a^2}{4} = 16 \end{cases} \Rightarrow a^2 + 2b^2 = \frac{264}{3}$$

$$(|z| + |w|)^2 = \left(\frac{a}{2} + b\right)^2 \leq (a^2 + 2b^2) \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = 66$$

$$\text{Suy ra } a + b \leq \sqrt{66}, \text{ dấu "}" xảy ra khi } a = b = \frac{2\sqrt{66}}{3}.$$

$$\text{Vậy } (a + b)_{\max} = \sqrt{66}.$$

Câu 19: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 1| + |z^2 - z + 1|$. Tính $M.m$

A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{39}{4}$.

C. $3\sqrt{3}$.

D. $\frac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Thay $|z|^2 = 1$ vào P ta có

$$P = |z+1| + |z^2 - z + 1| = |z+1| + |z^2 - z + |z|^2| = |z+1| + |z^2 - z + z\bar{z}| = |z+1| + |z||z + \bar{z} - 1|$$

$$= |z+1| + |z + \bar{z} - 1|.$$

Mặt khác $|z+1|^2 = (z+1)(\bar{z}+1) = 2 + z + \bar{z}$.

Đặt $t = z + \bar{z}$ do $|z| = 1$ nên điều kiện $t \in [-2; 2]$.

Suy ra $P = \sqrt{t+2} + |t-1|$.

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t+2} + |t-1|$ với $t \in [-2; 2]$.

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+2}} + 1 \text{ với } t > 1. \text{ Suy ra } f'(t) > 0 \text{ với } t > 1.$$

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+2}} - 1 \text{ với } t < 1. \text{ Suy ra } f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{7}{4}.$$

Ta có bảng biến thiên

t	-2	$-\frac{7}{4}$	1	2			
$f'(t)$		+	0	-		+	
$f(t)$	3	$\nearrow \frac{13}{4}$	$\searrow \sqrt{3}$	$\nearrow 3$			

Từ bảng biến thiên suy ra $M = \frac{13}{4}$ tại $t = -\frac{7}{4}$ và $m = \sqrt{3}$ tại $t = 2$.

Vậy $M.m = \frac{13\sqrt{3}}{4}$.

Câu 20: (THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019) Cho hai số phức z và $\omega = a + bi$ thỏa mãn $|z + \sqrt{5}| + |z - \sqrt{5}| = 6$; $5a - 4b - 20 = 0$. Giá trị nhỏ nhất của $|z - \omega|$ là

A. $\frac{3}{\sqrt{41}}$.

B. $\frac{5}{\sqrt{41}}$.

C. $\frac{4}{\sqrt{41}}$.

D. $\frac{3}{41}$.

Lời giải

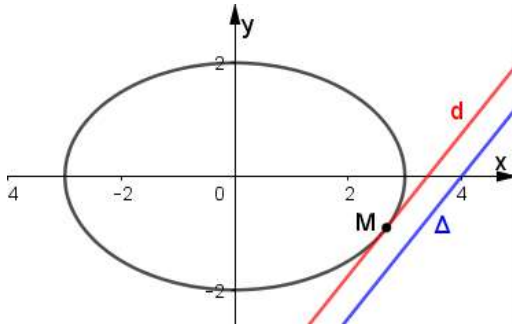
Chọn A

Đặt $F_1(-\sqrt{5}; 0)$, $F_2(\sqrt{5}; 0)$, vì $\sqrt{5} < 3$ nên tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thuộc elip

có $\begin{cases} a = 3 \\ c = \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 4$ suy ra $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Tập hợp các điểm N biểu diễn số phức ω thuộc đường thẳng $\Delta: 5x - 4y - 20 = 0$.

Yêu cầu bài toán trở thành tìm điểm $M \in (E)$ và $N \in \Delta$ sao cho MN nhỏ nhất.



Đường thẳng d song song với Δ có dạng $d: 5x - 4y + c = 0$, ($c \neq -20$).

d tiếp xúc với (E) khi và chỉ khi $c^2 = 5^2 \cdot 9 + (-4)^2 \cdot 4 = 289 \Rightarrow \begin{cases} c = 17 \\ c = -17 \end{cases}$.

$$\text{Với } c = 17 \Rightarrow d(d, \Delta) = \frac{|-20 - 17|}{\sqrt{5^2 + (-4)^2}} = \frac{37}{\sqrt{41}}.$$

$$\text{Với } c = -17 \Rightarrow d(d, \Delta) = \frac{|-20 + 17|}{\sqrt{5^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{\sqrt{41}}.$$

$$\text{Vậy } \min(MN) = \frac{3}{\sqrt{41}}.$$

Câu 21: (KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019) Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là số phức thỏa mãn điều kiện

$$|z - 1 - 2i| + |z + 2 - 3i| = \sqrt{10} \text{ và}$$

có mô đun nhỏ nhất. Tính $S = 7a + b$?

A. 7.

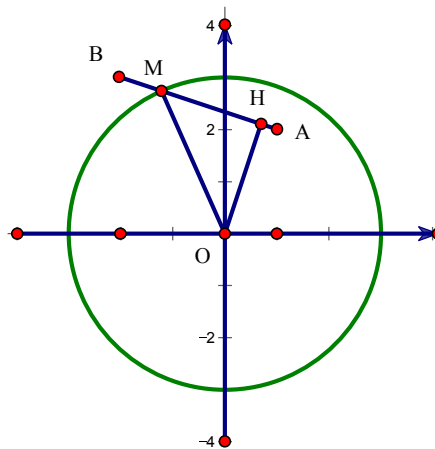
B. 0.

C. 5.

D. -12.

Lời giải

Chọn A



Gọi $M(a; b)$ là điểm biểu diễn số phức $z = a + bi$

$A(1; 2)$ là điểm biểu diễn số phức $(1 + 2i)$

$B(-2; 3)$ là điểm biểu diễn số phức $(-2 + 3i)$, $AB = \sqrt{10}$

$$|z-1-2i|+|z+2-3i|=\sqrt{10} \text{ trở thành } MA+MB=AB$$

$\Leftrightarrow M, A, B$ thẳng hàng và M ở giữa A và B

Gọi H là điểm chiếu của O lên AB , phương trình $(AB): x+3y-7=0$, $(OH): 3x-y=0$

$$\text{Tọa độ điểm } H\left(\frac{7}{10}; \frac{21}{10}\right), \text{ Có } \overrightarrow{AH}=\left(-\frac{3}{10}; \frac{1}{10}\right), \overrightarrow{BH}=\left(\frac{27}{10}; -\frac{9}{10}\right) \text{ và } \overrightarrow{BH}=-9\overrightarrow{AH}$$

Nên H thuộc đoạn AB

$|z|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow OM$ nhỏ nhất, mà M thuộc đoạn AB

$$\Leftrightarrow M \equiv H\left(\frac{7}{10}; \frac{21}{10}\right)$$

$$\text{Lúc đó } S=7a+b=\frac{49}{10}+\frac{21}{10}=7.$$

Câu 22: (KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019) Cho số phức z thỏa mãn $|z+\bar{z}|+2|z-\bar{z}|=8$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-3-3i|$. Tính $M+m$.

A. $\sqrt{10}+\sqrt{34}$.

B. $2\sqrt{10}$.

C. $\sqrt{10}+\sqrt{58}$.

D. $\sqrt{5}+\sqrt{58}$.

Giải:

Chọn D

Gọi $z=x+yi, x, y \in \mathbb{R}$, ta có $|z+\bar{z}|+2|z-\bar{z}|=8 \Leftrightarrow |x|+2|y|=4 \Rightarrow \begin{cases} |x| \leq 4 \\ |y| \leq 2 \end{cases}$, tập hợp

$K(x; y)$ biểu diễn số phức z thuộc cạnh các cạnh của trong hình thoi $ABCD$ như hình vẽ.

$P=|z-3-3i|$ đạt giá trị lớn nhất khi KM lớn nhất, theo hình vẽ ta có KM lớn nhất khi

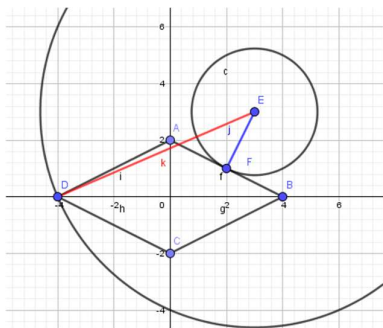
$$K \equiv D \text{ hay } K(-4; 0) \text{ suy ra } M=\sqrt{49+9}=\sqrt{58}$$

$P=|z-3-3i|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi KM nhỏ nhất, theo hình vẽ ta có KM nhỏ nhất khi

$K \equiv F$ (F là hình chiếu của E trên AB).

Suy ra $F(2; 1)$ do $AE=AB$ nên F là trung điểm của AB .

$$\text{Suy ra } m=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}. \text{ Vậy } M+m=\sqrt{58}+\sqrt{5}$$



Câu 23: (Chuyên Bắc Giang -2019) Cho số phức z có $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z^2-z|+|z^2+z+1|$.

A. $\frac{13}{4}$

B. 3

C. $\sqrt{3}$

D. $\frac{11}{4}$

Lời giải

Chọn A

$$P = |z^2 - z| + |z^2 + z + 1| = |z||z - 1| + |z^2 + z + 1| = |z - 1| + |z^2 + z + 1|$$

Do $|z| = 1$ nên ta đặt $z = \cos x + i \sin x$. Khi đó

$$\begin{aligned} P &= |z - 1| + |z^2 + z + 1| = |\cos x + i \sin x - 1| + |\cos 2x + i \sin 2x + \cos x + i \sin x + 1| \\ &= \sqrt{(\cos x - 1)^2 + \sin^2 x} + \sqrt{(\cos 2x + \cos x + 1)^2 + (\sin 2x + \sin x)^2} \\ &= \sqrt{2 - 2 \cos x} + \sqrt{3 + 4 \cos x + 2 \cos 2x} \\ &= \sqrt{2 - 2 \cos x} + \sqrt{4 \cos^2 x + 4 \cos x + 1} \\ &= \sqrt{2 - 2 \cos x} + |2 \cos x + 1| \end{aligned}$$

Đặt $t = \cos x$, $t \in [-1; 1]$. Xét hàm $y = \sqrt{2 - 2t} + |2t + 1|$

Với $t \geq -\frac{1}{2}$ thì $y = \sqrt{2 - 2t} + 2t + 1$, $y' = \frac{-1}{\sqrt{2 - 2t}} + 2$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{2 - 2t}} + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{7}{8}$$

$$y(1) = 3; y\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{13}{4}; y\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}$$

Với $t < -\frac{1}{2}$ thì $y = \sqrt{2 - 2t} - 2t - 1$, $y' = \frac{-1}{\sqrt{2 - 2t}} - 2$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{2 - 2t}} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2 - 2t} = \frac{-1}{2} \text{ (phương trình vô nghiệm)}$$

$$y(-1) = 3; y\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}$$

Vậy $\max_{[-1;1]} y = \frac{13}{4}$. Do đó giá trị lớn nhất của $P = |z^2 - z| + |z^2 + z + 1|$ là $\frac{13}{4}$.

Câu 24: (Chuyên Đại Học Vinh -2019) Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(z - 6)(8 + \bar{z}i)$ là số thực. Biết rằng $|z_1 - z_2| = 4$, giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + 3z_2|$ bằng

A. $5 - \sqrt{21}$

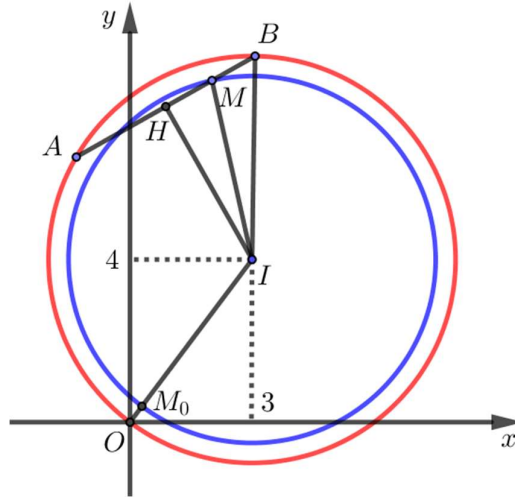
B. $20 - 4\sqrt{21}$

C. $20 - 4\sqrt{22}$

D. $5 - \sqrt{22}$

Lời giải

Chọn C



Giả sử $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức z_1, z_2 . Suy ra $AB = |z_1 - z_2| = 4$.

* Ta có $(z-6)(8+\bar{z}i) = [(x-6)+yi] \cdot [(8-y)-xi] = (8x+6y-48) - (x^2+y^2-6x-8y)i$.

Theo giả thiết $(z-6)(8+\bar{z}i)$ là số thực nên ta suy ra $x^2+y^2-6x-8y=0$. Tức là các điểm A, B thuộc đường tròn (C) tâm $I(3;4)$, bán kính $R=5$.

* Xét điểm M thuộc đoạn AB thỏa $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{OM}$. Gọi H là trung điểm AB . Ta tính được $HI^2 = R^2 - HB^2 = 21$; $IM = \sqrt{HI^2 + HM^2} = \sqrt{22}$, suy ra điểm M thuộc đường tròn (C') tâm $I(3;4)$, bán kính $r = \sqrt{22}$.

* Ta có $|z_1 + 3z_2| = |\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}| = |4\overrightarrow{OM}| = 4OM$, do đó $|z_1 + 3z_2|$ nhỏ nhất khi OM nhỏ nhất.

Ta có $(OM)_{\min} = OM_0 = |OI - r| = 5 - \sqrt{22}$.

Vậy $|z_1 + 3z_2|_{\min} = 4OM_0 = 20 - 4\sqrt{22}$.

Câu 25: Trong các số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=2$ có hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - z_2|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1|^2 - |z_2|^2$ bằng

A. -10

B. $-4-3\sqrt{5}$

C. -5

D. $-6-2\sqrt{5}$

Lời giải

Chọn A

Đặt $z_1 = x_1 + y_1i$, $(x_1, y_1 \in \mathbb{R})$ và $z_2 = x_2 + y_2i$, $(x_2, y_2 \in \mathbb{R})$.

Khi đó $\begin{cases} (x_1-3)^2 + (y_1-4)^2 = 4 \\ (x_2-3)^2 + (y_2-4)^2 = 4 \end{cases}$ và $(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 = 1$.

Ta có $(x_1-3)^2 + (y_1-4)^2 = (x_2-3)^2 + (y_2-4)^2 \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 - (x_2^2 + y_2^2) = 6(x_1-x_2) + 8(y_1-y_2)$.

Suy ra $||z_1|^2 - |z_2|^2| = 2|3(x_1-x_2) + 4(y_1-y_2)| \leq 2 \cdot \sqrt{(3^2+4^2)} \cdot \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} = 10$.

Do đó $-10 \leq |z_1|^2 - |z_2|^2 \leq 10$.

Câu 26: (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 2 - i| + |z_1 - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$ và $|iz_2 - 1 + 2i| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = |z_1 + z_2|$.

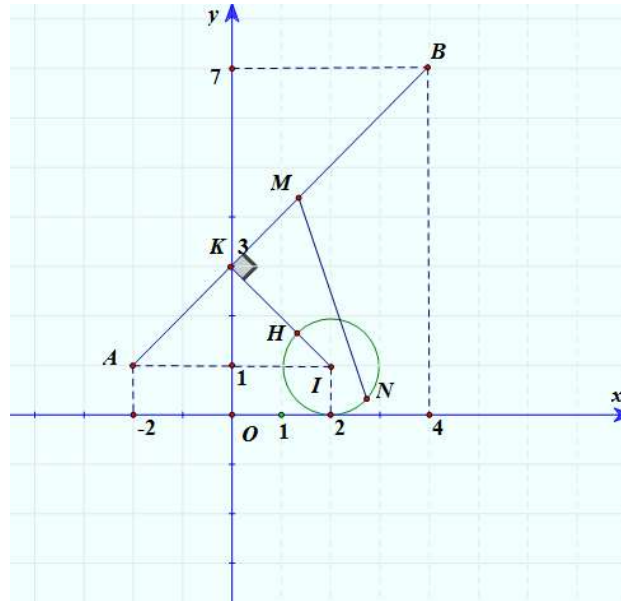
A. $\sqrt{2} - 1$.

B. $\sqrt{2} + 1$.

C. $2\sqrt{2} + 1$.

D. $2\sqrt{2} - 1$.

Lời giải



Gọi M là điểm biểu diễn số phức z_1 và $A(-2; 1)$; $B(4; 7)$ lần lượt là hai điểm biểu diễn hai số phức $-2 + i$, $4 + 7i$. Ta có $AB = 6\sqrt{2}$. Phương trình đường thẳng AB là $d: x - y + 3 = 0$.

+) $|z_1 + 2 - i| + |z_1 - 4 - 7i| = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow MA + MB = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow MA + MB = AB$. Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z_1 là đoạn thẳng AB .

+) $|iz_2 - 1 + 2i| = 1 \Leftrightarrow |iz_2 - 1 + 2i||i| = 1 \Leftrightarrow |-z_2 - 2 - i| = 1$.

Gọi N là điểm biểu diễn số phức $-z_2$ và $I(2; 1)$ là điểm biểu diễn số phức $2 + i$. Ta có $IN = 1$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức $-z_2$ là đường tròn (C) có phương trình:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

$d(I, AB) = 2\sqrt{2} > 1$, suy ra AB không cắt đường tròn.

Gọi K là hình chiếu của $I(2; 1)$ lên AB . Dễ thấy K nằm trên đoạn thẳng AB .

Gọi H là giao điểm của đoạn IK với đường tròn (C) .

Ta có $|z_1 + z_2| = MN \geq KH = d(I, AB) - R = 2\sqrt{2} - 1$.

Suy ra $\min|z_1 + z_2| = 2\sqrt{2} - 1$.

Câu 27: (Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019) Cho z là số phức thỏa mãn $|\overline{z}| = |z + 2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z - 1 + 2i| + |z + 1 + 3i|$ là

A. $5\sqrt{2}$.

B. $\sqrt{13}$.

C. $\sqrt{29}$.

D. $\sqrt{5}$.

Lời giải

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có: $|\bar{z}| = |z + 2i| \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (b+2)^2} \Leftrightarrow 4b + 4 = 0 \Leftrightarrow b = -1$

$\Rightarrow z = a - i$.

Xét: $|z - 1 + 2i| + |z + 1 + 3i| = |a - 1 + i| + |a + 1 + 2i| = \sqrt{(1-a)^2 + 1^2} + \sqrt{(1+a)^2 + 2^2}$.

Áp dụng BĐT Mincôpxki:

$$\sqrt{(1-a)^2 + 1^2} + \sqrt{(1+a)^2 + 2^2} \geq \sqrt{(1-a+1+a)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$$

Suy ra: $|z - 1 + 2i| + |z + 1 + 3i|$ đạt GTNN là $\sqrt{13}$ khi $2(1-a) = 1+a \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$.

Nhận xét: Bài toán trên có thể được giải quyết bằng cách đưa về bài toán hình học phẳng.

Câu 28: (Chuyên Hạ Long - 2018) Cho các số phức $z_1 = -2 + i$, $z_2 = 2 + i$ và số phức z thay đổi thỏa mãn $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = 16$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị biểu thức $M^2 - m^2$ bằng

A. 15.

B. 7.

C. 11.

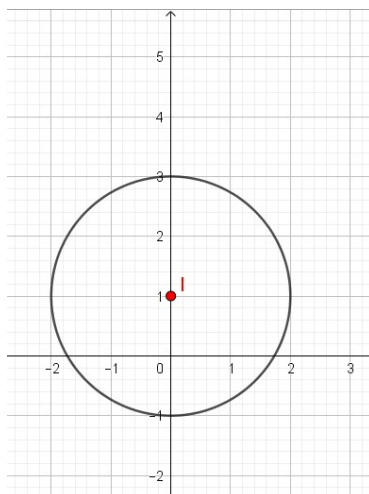
D. 8.

Lời giải

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có: $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = 16 \Leftrightarrow |x + yi + 2 - i|^2 + |x + yi - 2 - i|^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 4$.

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn của số phức z là đường tròn tâm số phức $I(0;1)$ bán kính $R = 2$.



Do đó $m = 1$, $M = 3$.

Vậy $M^2 - m^2 = 8$.

Câu 29: (Chuyên Quang Trung - 2018) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2i| \leq |z - 4i|$ và $|z - 3 - 3i| = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z - 2|$ là:

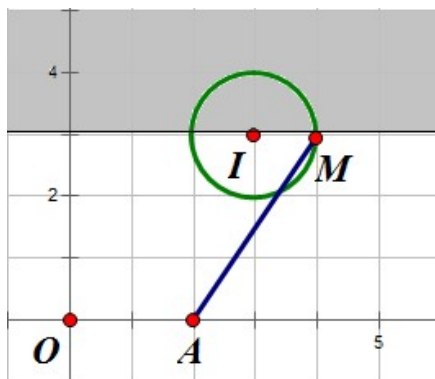
A. $\sqrt{13} + 1$.

B. $\sqrt{10} + 1$.

C. $\sqrt{13}$.

D. $\sqrt{10}$.

Lời giải



Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z ta có: $|z - 2i| \leq |z - 4i|$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 \leq x^2 + (y - 4)^2$$

$\Leftrightarrow y \leq 3$; $|z - 3 - 3i| = 1 \Leftrightarrow$ điểm M nằm trên đường tròn tâm $I(3;3)$ và bán kính bằng 1. Biểu

thức $P = |z - 2| = AM$ trong đó $A(2;0)$, theo hình vẽ thì giá trị lớn nhất của $P = |z - 2|$ đạt

được khi $M(4;3)$ nên $\max P = \sqrt{(4-2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13}$.

Câu 30: Xét số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 2i| = 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z - 1 - i| + |z - 5 - 2i|$ bằng

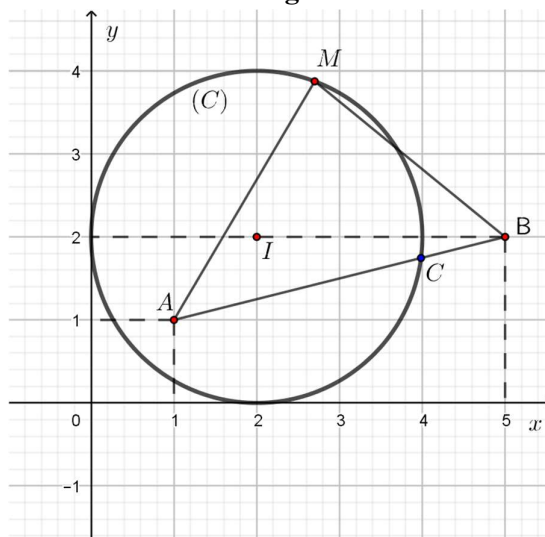
A. $1 + \sqrt{10}$.

B. 4.

C. $\sqrt{17}$

D. 5.

Lời giải



Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z . Do $|z - 2 - 2i| = 2$ nên tập hợp điểm M là đường tròn $(C): (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Các điểm $A(1;1)$, $B(5;2)$ là điểm biểu diễn các số phức $1 + i$ và $5 + 2i$. Khi đó, $P = MA + MB$.

Nhận thấy, điểm A nằm trong đường tròn (C) còn điểm B nằm ngoài đường tròn (C) , mà $MA + MB \geq AB = \sqrt{17}$. Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của đoạn AB với (C) .

Ta có, phương trình đường thẳng $AB: x - 4y + 3 = 0$.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng AB và đường tròn (C) là nghiệm của hệ với $1 < y < 5$

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ x-4y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4y-5)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ x=4y-3 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } (4y-5)^2 + (y-2)^2 = 4 \Leftrightarrow 17y^2 - 44y + 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{22+\sqrt{59}}{17} (N) \\ y = \frac{22-\sqrt{59}}{17} (L) \end{cases}$$

$$\text{Vậy min } P = \sqrt{17} \text{ khi } z = \frac{37+4\sqrt{59}}{17} + \frac{22+\sqrt{59}}{17}i$$

Câu 31: (SGD Cần Thơ - 2018) Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$. Môđun của số phức $w=M+mi$ là

A. $|w|=3\sqrt{137}$. **B.** $|w|=\sqrt{1258}$. **C.** $|w|=2\sqrt{309}$. **D.** $|w|=2\sqrt{314}$.

Lời giải

Chọn B

- Đặt $z=x+yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có: $|z-3-4i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow |(x-3)+(y-4)i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=5$, hay tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(3;4)$, bán kính $r=\sqrt{5}$.

- Khi đó: $P=|z+2|^2-|z-i|^2=(x+2)^2+y^2-x^2-(y-1)^2=4x+2y+3$

$\Rightarrow 4x+2y+3-P=0$, kí hiệu là đường thẳng Δ .

- Số phức z tồn tại khi và chỉ khi đường thẳng Δ cắt đường tròn (C)

$$\Leftrightarrow d(I; \Delta) \leq r \Leftrightarrow \frac{|23-P|}{2\sqrt{5}} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow |P-23| \leq 10 \Leftrightarrow 13 \leq P \leq 33$$

Suy ra $M=33$ và $m=13 \Rightarrow w=33+13i$.

Vậy $|w|=\sqrt{1258}$.

Câu 32: (THPT Hậu Lộc 2 - 2018) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+1-i|=2$ và $z_2=iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $|z_1-z_2|$?

A. $m=\sqrt{2}-1$. **B.** $m=2\sqrt{2}$. **C.** $m=2$. **D.** $m=2\sqrt{2}-2$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z_1=a+bi$; $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow z_2=-b+ai$

$\Rightarrow z_1-z_2=(a+b)+(b-a)i$.

Nên $|z_1-z_2|=\sqrt{(a+b)^2+(b-a)^2}=\sqrt{2} \cdot |z_1|$

Ta lại có $2=|z_1+1-i| \leq |z_1|+|1-i|=|z_1|+\sqrt{2}$

$\Rightarrow |z_1| \geq 2-\sqrt{2}$. Suy ra $|z_1-z_2|=\sqrt{2} \cdot |z_1| \geq 2\sqrt{2}-2$.

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{1}=\frac{b}{-1}<0$.

Vậy $m = \min |z_1 - z_2| = 2\sqrt{2} - 2$.

Câu 33: (SGD Bắc Giang - 2018) Hcho hai số phức z, w thỏa mãn $\begin{cases} |z - 3 - 2i| \leq 1 \\ |w + 1 + 2i| \leq |w - 2 - i| \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = |z - w|$.

A. $P_{\min} = \frac{3\sqrt{2} - 2}{2}$. **B.** $P_{\min} = \sqrt{2} + 1$. **C.** $P_{\min} = \frac{5\sqrt{2} - 2}{2}$. **D.** $P_{\min} = \frac{3\sqrt{2} - 2}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$|z - 3 - 2i| \leq 1 \Leftrightarrow (a - 3)^2 + (b - 2)^2 \leq 1 \quad (1)$$

$$|w + 1 + 2i| \leq |w - 2 - i| \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 2)^2 \leq (x - 2)^2 + (y - 1)^2.$$

Suy ra $x + y = 0$.

$$P = |z - w| = \sqrt{(a - x)^2 + (b - y)^2} = \sqrt{(a - x)^2 + (b + x)^2}.$$

Từ (1) ta có $I(3; 2)$, bán kính $r = 1$. Gọi H là hình chiếu của I trên $d: y = -x$.

$$\text{Đường thẳng } HI \text{ có PTTS } \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + t \end{cases}.$$

$$M \in HI \Rightarrow M(3 + t; 2 + t)$$

$$M \in (C) \Leftrightarrow 2t^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ t = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$t = 2 \Rightarrow M\left(3 + \frac{1}{\sqrt{2}}; 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right), MH = \frac{5 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$t = 3 \Rightarrow M\left(3 - \frac{1}{\sqrt{2}}; 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right), MH = \frac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \frac{5\sqrt{2} - 2}{2}.$$

Câu 34: (Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2018) Cho số phức z thỏa $|z| = 1$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z^5 + \bar{z}^3 + 6z| - 2|z^4 + 1|$. Tính $M - m$.

A. $m = -4, n = 3$. **B.** $m = 4, n = 3$ **C.** $m = -4, n = 4$. **D.** $m = 4, n = -4$.

Lời giải

$$\text{Vì } |z| = 1 \text{ và } z\bar{z} = |z|^2 \text{ nên ta có } \bar{z} = \frac{1}{z}.$$

$$\text{Từ đó, } P = |z^5 + \bar{z}^3 + 6z| - 2|z^4 + 1| = |z| |z^4 + \bar{z}^4 + 6| - 2|z^4 + 1| = |z^4 + \bar{z}^4 + 6| - 2|z^4 + 1|.$$

$$\text{Đặt } z^4 = x + iy, \text{ với } x, y \in \mathbb{R}. \text{ Do } |z| = 1 \text{ nên } |z^4| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \text{ và } -1 \leq x, y \leq 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } P &= |x + iy + x - iy + 6| - 2|x + iy + 1| = |2x + 6| - 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2} \\ &= 2x + 6 - 2\sqrt{2x + 2} = (\sqrt{2x + 2} - 1)^2 + 3. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } P \geq 3. \text{ Lại có } -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{2x + 2} \leq 2 \Rightarrow -1 \leq \sqrt{2x + 2} - 1 \leq 1 \Rightarrow P \leq 4.$$

$$\text{Vậy } M = 4 \text{ khi } z^4 = \pm 1 \text{ và } m = 3 \text{ khi } z^4 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i. \text{ Suy ra } M - m = 1.$$

Câu 35: (Chuyên Đh Vinh - 2018) Cho các số phức w, z thỏa mãn $|w + i| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w = (2 + i)(z - 4)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z - 1 - 2i| + |z - 5 - 2i|$ bằng

A. $6\sqrt{7}$.

B. $4 + 2\sqrt{13}$.

C. $2\sqrt{53}$.

D. $4\sqrt{13}$.

Lời giải

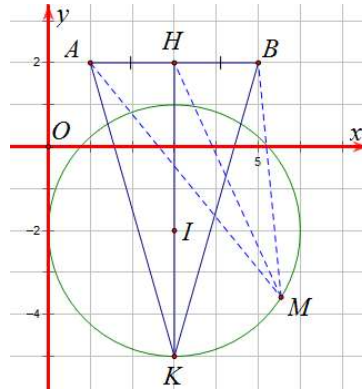
Chọn C

Gọi $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó $M(x; y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z .

Theo giả thiết, $5w = (2 + i)(z - 4) \Leftrightarrow 5(w + i) = (2 + i)(z - 4) + 5i \Leftrightarrow (2 - i)(w + i) = z - 3 + 2i$

$\Leftrightarrow |z - 3 + 2i| = 3$. Suy ra $M(x; y)$ thuộc đường tròn $(C): (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$.

Ta có $P = |z - 1 - 2i| + |z - 5 - 2i| = MA + MB$, với $A(1; 2)$ và $B(5; 2)$.



Gọi H là trung điểm của AB , ta có $H(3; 2)$ và khi đó:

$$P = MA + MB \leq \sqrt{2(MA^2 + MB^2)} \text{ hay } P \leq \sqrt{4MH^2 + AB^2}.$$

$$\text{Mặt khác, } MH \leq KH \text{ với mọi } M \in (C) \text{ nên } P \leq \sqrt{4KH^2 + AB^2} = \sqrt{4(IH + R)^2 + AB^2} = 2\sqrt{53}.$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = 2\sqrt{53} \text{ khi } \begin{cases} M \equiv K \\ MA = MB \end{cases} \text{ hay } z = 3 - 5i \text{ và } w = \frac{3}{5} - \frac{11}{5}i.$$

Câu 36: (Kim Liên - Hà Nội - 2018) Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 3 - 2i| = 2$.

Tính $a + b$ khi $|z + 1 - 2i| + 2|z - 2 - 5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$$\Leftrightarrow MI^2 + IA^2 + 2\overline{MI} \cdot \overline{IA} = 4(MI^2 + IK^2 + 2\overline{MI} \cdot \overline{IK}) \Leftrightarrow 2\overline{MI}(\overline{IA} - 4\overline{IK}) = 3R^2 + 4IK^2 - IA^2 (*)$$

$$(*) \text{ luôn đúng } \forall M \in (C) \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{IA} - 4\overline{IK} = \vec{0} \\ 3R^2 + 4IK^2 - IA^2 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{IA} - 4\overline{IK} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-3) = -4 \\ 4(y-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Thử trực tiếp ta thấy $K(2;2)$ thỏa mãn $3R^2 + 4IK^2 - IA^2 = 0$.

Vì $BI^2 = 1^2 + 3^2 = 10 > R^2 = 4$ nên B nằm ngoài (C) .

Vì $KI^2 = 1 < R^2 = 4$ nên K nằm trong (C) .

Ta có $MA + 2MB = 2MK + 2MB = 2(MK + MB) \geq 2KB$.

Dấu bằng trong bất đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi M thuộc đoạn thẳng BK .

Do đó $MA + 2MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của (C) và đoạn thẳng BK .

Phương trình đường thẳng $BK : x = 2$.

Phương trình đường tròn $(C) : (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$.

$$\text{Tọa độ điểm } M \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x = 2 \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + \sqrt{3} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Thử lại thấy $M(2; 2 + \sqrt{3})$ thuộc đoạn BK .

Vậy $a = 2, b = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow a + b = 4 + \sqrt{3}$.

Câu 37: (Liên Trường - Nghệ An - 2018) Biết rằng hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3 - 4i| = 1$ và $|z_2 - 3 - 4i| = \frac{1}{2}$. Số phức z có phần thực là a và phần ảo là b thỏa mãn $3a - 2b = 12$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z - z_1| + |z - 2z_2| + 2$ bằng:

$$\text{A. } P_{\min} = \frac{\sqrt{9945}}{11}. \quad \text{B. } P_{\min} = 5 - 2\sqrt{3}. \quad \text{C. } P_{\min} = \frac{\sqrt{9945}}{13}. \quad \text{D. } P_{\min} = 5 + 2\sqrt{5}.$$

Lời giải

Chọn C

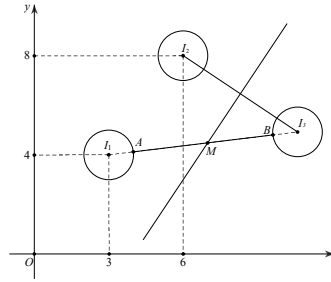
Gọi M_1, M_2, M lần lượt là điểm biểu diễn cho số phức $z_1, 2z_2, z$ trên hệ trục tọa độ Oxy .

Khi đó quỹ tích của điểm M_1 là đường tròn (C_1) tâm $I(3;4)$, bán kính $R = 1$;

quỹ tích của điểm M_2 là đường (C_2) tròn tâm $I(6;8)$, bán kính $R = 1$;

quỹ tích của điểm M là đường thẳng $d : 3x - 2y - 12 = 0$.

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $MM_1 + MM_2 + 2$.



Gọi (C_3) có tâm $I_3\left(\frac{138}{13}; \frac{64}{13}\right)$, $R=1$ là đường tròn đối xứng với (C_2) qua d . Khi đó

$$\min(MM_1 + MM_2 + 2) = \min(MM_1 + MM_3 + 2) \text{ với } M_3 \in (C_3).$$

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đoạn thẳng I_1I_3 với $(C_1), (C_3)$. Khi đó với mọi điểm $M_1 \in (C_1), M_3 \in (C_3), M \in d$ ta có $MM_1 + MM_3 + 2 \geq AB + 2$, dấu "=" xảy ra khi

$$M_1 \equiv A, M_3 \equiv B. \text{ Do đó } P_{\min} = AB + 2 = I_1I_3 - 2 + 2 = I_1I_3 = \frac{\sqrt{9945}}{13}.$$

Câu 38: (Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên - 2019) Trong các số phức thỏa mãn: $|z - 1 + i| = |\bar{z} + 1 - 2i|$, số phức z có mô đun nhỏ nhất có phần ảo là

A. $\frac{3}{10}$.

B. $\frac{3}{5}$.

C. $-\frac{3}{5}$.

D. $-\frac{3}{10}$.

Lời giải

Chọn D

+ Gọi số phức cần tìm là $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$.

$$\Rightarrow \bar{z} = a - bi$$

$$+ |z - 1 + i| = |\bar{z} + 1 - 2i|$$

$$\Rightarrow |a + bi - 1 + i| = |a - bi + 1 - 2i|$$

$$\Leftrightarrow |a - 1 + (b + 1)i| = |a + 1 - (b + 2)i|.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (b+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4a + 2b + 3 = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{4a+3}{2} = -2a - \frac{3}{2}$$

$$+ |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + \left(2a + \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{5a^2 + 6a + \frac{9}{4}} = \sqrt{5\left(a^2 + \frac{6}{5}a + \frac{9}{25}\right) + \frac{9}{20}}$$

$$= \sqrt{5\left(a + \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{9}{20}} \geq \sqrt{\frac{9}{20}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

$$|z| \text{ nhỏ nhất bằng } \frac{3\sqrt{5}}{10} \text{ khi } a = -\frac{3}{5} \Rightarrow b = -\frac{3}{10}.$$

Câu 39: (Chuyên Bắc Giang 2019) Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = |z^5 + \bar{z}^3 + 6z| - 2|z^4 + 1|$. Tính $M - m$.

A. $M - m = 1$.

B. $M - m = 7$.

C. $M - m = 6$.

D. $M - m = 3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $z\bar{z} = |z|^2 = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$.

Suy ra $P = \left| z^5 + \frac{1}{z^3} + 6z \right| - 2|z^4 + 1| = \frac{1}{|z|^3} |z^8 + 1 + 6z^4| - 2|z^4 + 1| = |z^8 + 6z^4 + 1| - 2|z^4 + 1|$

Đặt $w = z^4 \Rightarrow |w| = 1$, ta được $P = |w^2 + 6w + 1| - |2w + 2|$.

Gọi $w = x + yi$, vì $|w| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} |x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} P &= |x^2 + 6x + 1 - y^2 + 2y(x + 3)i| - 2|x + 1 + yi| = |2x^2 + 6x + 2y(x + 3)i| - 2|x + 1 + yi| \\ &= 2|(x + 3)(x + yi)| - 2\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = 2|(x + 3)||x + yi| - 2\sqrt{2x + 2} \\ &= 2(x + 3) - 2\sqrt{2x + 2} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = 2(x + 3) - 2\sqrt{2x + 2}$ trên đoạn $[-1; 1]$.

$$f'(x) = 2 - 2 \frac{1}{\sqrt{2x + 2}}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2 \frac{1}{\sqrt{2x + 2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x + 2} = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Ta có: $f(-1) = 4; f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3; f(1) = 4$

Vậy $M = 4, m = 3 \Rightarrow M - m = 1$.

Câu 40: (Bình Giang-Hải Dương 2019) Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức

$P = |1 + z| + 2|1 - z|$ bằng

A. $6\sqrt{5}$.

B. $4\sqrt{5}$.

C. $2\sqrt{5}$.

D. $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z = x + yi$; $(x, y \in \mathbb{R})$.

$|z| = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x \in [-1; 1]$.

Ta có: $P = |1 + z| + 3|1 - z| = \sqrt{(1 + x)^2 + y^2} + 3\sqrt{(1 - x)^2 + y^2} = \sqrt{2(1 + x)} + 2\sqrt{2(1 - x)}$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2(1 + x)} + 2\sqrt{2(1 - x)}$; $x \in [-1; 1]$.

Hàm số liên tục trên $[-1; 1]$ và với $x \in (-1; 1)$ ta có: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2(1 + x)}} - \frac{2}{\sqrt{2(1 - x)}}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2(1 + x)}} - \frac{2}{\sqrt{2(1 - x)}} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5} \in (-1; 1).$$

$f(1) = 2; f(-1) = 4; f\left(-\frac{3}{5}\right) = 2\sqrt{5}$.

$\Rightarrow \max_{x \in [-1; 1]} f(x) = 2\sqrt{5}$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |1+z| + 3|1-z|$ bằng $2\sqrt{5}$ khi $x = -\frac{3}{5}$, $y = \pm \frac{4}{5}$.

Câu 41: (SGD Hưng Yên 2019) Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+1| + |z^2 - z + 1|$. Tính $M.m$

A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{39}{4}$.

C. $3\sqrt{3}$.

D. $\frac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Thay $|z|^2 = 1$ vào P ta có

$$P = |z+1| + |z^2 - z + 1| = |z+1| + |z^2 - z + |z|^2| = |z+1| + |z^2 - z + z\bar{z}| = |z+1| + |z||z + \bar{z} - 1|$$

$$= |z+1| + |z + \bar{z} - 1|.$$

Mặt khác $|z+1|^2 = (z+1)(\bar{z}+1) = 2 + z + \bar{z}$.

Đặt $t = z + \bar{z}$ do $|z|=1$ nên điều kiện $t \in [-2; 2]$.

Suy ra $P = \sqrt{t+2} + |t-1|$.

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t+2} + |t-1|$ với $t \in [-2; 2]$.

$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+2}} + 1$ với $t > 1$. Suy ra $f'(t) > 0$ với $t > 1$.

$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+2}} - 1$ với $t < 1$. Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-7}{4}$.

Ta có bảng biến thiên

t	-2	$-\frac{7}{4}$	1	2			
$f'(t)$		+	0	-		+	
$f(t)$	3 $\nearrow \frac{13}{4}$ $\searrow \sqrt{3}$ 3						

Từ bảng biến thiên suy ra $M = \frac{13}{4}$ tại $t = \frac{-7}{4}$ và $m = \sqrt{3}$ tại $t = 2$.

Vậy $M.m = \frac{13\sqrt{3}}{4}$.

Câu 42: (Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019) Cho số phức z thỏa mãn : $|\bar{z}| = |z+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z-i| + |z-4|$ là

A. 5.

B. 4.

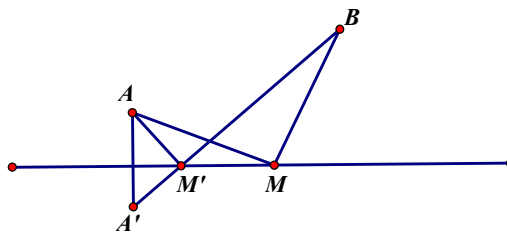
C. $3\sqrt{3}$.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z . Ta có $|\bar{z}| = |z + 2i| \Leftrightarrow y + 1 = 0$, tức biểu diễn hình học của số phức thỏa mãn giả thiết là đường thẳng $y + 1 = 0$. Xét điểm $A(0; 1)$ và $B(4; 0)$ thì $P = |z - i| + |z - 4| = MA + MB$. Dễ thấy A, B cùng phía với đường thẳng $y + 1 = 0$ nên $MA + MB$ nhỏ nhất bằng BA' trong đó $A'(0; -3)$ đối xứng với A qua đường thẳng $y + 1 = 0$.



Do đó $MA + MB$ nhỏ nhất bằng $BA' = 5$.

Câu 43: (SGD Bến Tre 2019) Cho các số phức $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = -5 - 3i$. Tìm điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z_3 , biết rằng trong mặt phẳng phức điểm M nằm trên đường thẳng $x - 2y + 1 = 0$ và mô đun số phức $w = 3z_3 - z_2 - 2z_1$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $M\left(-\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right)$. B. $M\left(\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right)$. C. $M\left(-\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right)$. D. $M\left(\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Trắc nghiệm: Thay tọa độ điểm M vào vế trái phương trình đường thẳng kết quả bằng 0 thỏa ta được đáp án A

Tự luận:

Ta có $w = 3z_3 - z_2 - 2z_1 = 3z_3 + 3 - 3i = 3(z_3 + 1 - i) \rightarrow |w| = 3|z_3 + 1 - i| = 3AM$ với $A(-1; 3)$

$M(x; y)$ biểu diễn số phức z_3 nằm trên đường thẳng $d: x - 2y + 1 = 0$ và $A(-1; 3) \notin d$.

Khi đó $|w| = 3|z_3 + 1 - i| = 3AM$ đạt giá trị nhỏ nhất khi AM ngắn nhất $\Leftrightarrow AM \perp d$

$AM \perp d$ nên AM có phương trình: $2x + y + 1 = 0$.

Khi đó $M = AM \cap d$ nên $M\left(-\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

Câu 44: (SGD Cần Thơ 2019) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5}$. Giá trị lớn nhất của $|z + 1 + i|$ bằng

- A. $\sqrt{5}$. B. $5\sqrt{2}$. C. 20. D. $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

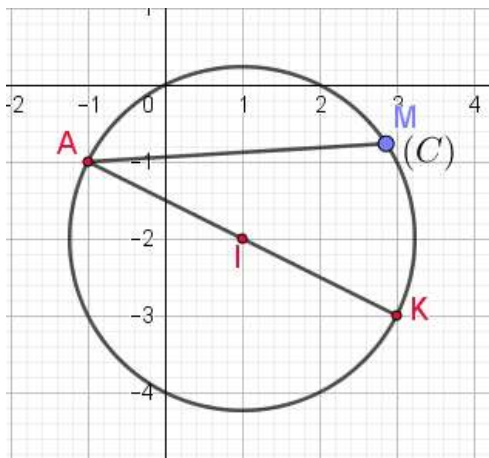
Cách 1.

Ta có $|z + 1 + i| = |z - 1 + 2i + 2 - i| \leq |z - 1 + 2i| + |2 - i| = 2\sqrt{5}$.

Đẳng thức xảy ra khi $z = 3 - 3i$.

Vậy $\max|z + 1 + i| = 2\sqrt{5}$.

Cách 2.



Đặt $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) thì từ điều kiện ta có: $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn cho z và $A(-1; -1)$ là điểm biểu diễn cho số phức $-1-i$, khi đó $|z+1+i| = AM$ với M thuộc đường tròn (C) tâm $I(1; -2)$ bán kính $R = \sqrt{5}$.

Dễ thấy $A \in (C)$, do đó $AM \leq 2R = 2\sqrt{5}$.

Suy ra $\max |z+1+i| = 2\sqrt{5}$, đẳng thức xảy ra khi $M \equiv K$.

Cách 3.

$$|z-1+2i| = \sqrt{5} \quad (*)$$

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), khi ấy, ta có $(*) \Leftrightarrow |x + yi - 1 + 2i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |(x-1) + (y+2)i| = \sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x-1 = \sqrt{5} \sin a \\ y+2 = \sqrt{5} \cos a \end{cases}. \text{ Ta có } |z+1+i| = |(x+1) + (y+1)i| = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{5} \sin a + 2)^2 + (\sqrt{5} \cos a - 1)^2} = \sqrt{10 + 4\sqrt{5} \sin a - 2\sqrt{5} \cos a}$$

$$= \sqrt{10 + 10 \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \sin a - \frac{\sqrt{5}}{5} \cos a \right)} = \sqrt{10 + 10 \sin(a - \varphi)} \text{ với } \begin{cases} \cos \varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \sin \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}.$$

$$\text{Vì } -1 \leq \sin(a - \varphi) \leq 1 \text{ với mọi } a; \varphi \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{10-10} \leq |z+1+i| \leq \sqrt{10+10}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq |z+1+i| \leq 2\sqrt{5}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của $|z+1+i|$ là $2\sqrt{5}$. Dấu "=" xảy ra khi $\sin(a - \varphi) = 1 \Leftrightarrow a - \varphi = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos a = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi + \varphi\right) = -\sin \varphi = -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \sin a = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi + \varphi\right) = \cos \varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = \sqrt{5} \sin a \\ y+2 = \sqrt{5} \cos a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 2 \\ y+2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = 3 - 3i.$$

Câu 45: (Thi thử hội 8 trường chuyên 2019) Cho số phức z thỏa mãn $(2-i)z - (2+i)\bar{z} = 2i$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ bằng

- A. 1. B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. C. 2. D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$\begin{aligned}(2-i)z - (2+i)\bar{z} &= 2i \Leftrightarrow (2-i)(x+yi) - (2+i)(x-yi) = 2i \\ \Leftrightarrow (2x+y) + (2y-x)i - [(2x+y) + (-2y+x)i] &= 2i \Leftrightarrow (4y-2x)i = 2i \Leftrightarrow 4y-2x = 2 \\ \Leftrightarrow x &= 2y-1.\end{aligned}$$

$$\text{Do đó } |z|^2 = x^2 + y^2 = (2y-1)^2 + y^2 = 5y^2 - 4y + 1 = \left(\sqrt{5}y - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{1}{5} \geq \frac{1}{5}, \forall y \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Suy ra } \min|z| = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ khi } y = \frac{2}{5}, x = -\frac{1}{5}.$$

Câu 46: (Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019) Số phức z có môđun nhỏ nhất thỏa mãn $|-2-3i+\bar{z}| = |z-i|$ là

- A. $\frac{6}{5} - \frac{3}{5}i$. B. $\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$. C. $\frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$. D. $\frac{6}{5} + \frac{3}{5}i$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$.

$$\begin{aligned}\text{Khi đó } |-2-3i+\bar{z}| &= |z-i| \Leftrightarrow |(x-2)-(y+3)i| = |x+(y-1)i| \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2} &= \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \Leftrightarrow x-2y-3 = 0.\end{aligned}$$

Do đó tập hợp điểm biểu diễn của z là đường thẳng $\Delta: x-2y-3=0$.

Ta có $\min|z| = d(O, \Delta)$. Gọi d là đường thẳng qua O và vuông góc với $\Delta \Rightarrow d: 2x+y=0$.

$$\text{Gọi } H = d \cap \Delta \Rightarrow H: \begin{cases} 2x+y=0 \\ x-2y-3=0 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{3}{5}; -\frac{6}{5}\right).$$

Khi đó z có môđun nhỏ nhất thỏa mãn có điểm biểu diễn là H , tức là $z = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$.

Câu 47: (Sở GD Nam Định - 2019) Trong các số phức z thỏa mãn $\left|\frac{(12-5i)z+17+7i}{z-2-i}\right| = 13$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

- A. $\frac{3\sqrt{13}}{26}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $z \neq 2+i$.

$$\text{Phương trình đã cho } \Leftrightarrow |12-5i| \cdot \left|z + \frac{17+7i}{12-5i}\right| = 13|z-2-i| \Leftrightarrow |z+1+i| = |z-2-i| \quad (1).$$

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$. Vì $z \neq 2 + i$ nên $M \neq N(2; 1)$.

Khi đó, $(1) \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow 6x + 4y - 3 = 0$.

Ta thấy đường thẳng $d: 6x + 4y - 3 = 0$ không đi qua điểm $N(2; 1)$ nên tập hợp điểm M là đường thẳng d .

Ngoài ra, $|z| = OM$ nên $|z|$ nhỏ nhất khi OM nhỏ nhất, tức là

$$OM = d(O, d) = \frac{3}{\sqrt{6^2 + 4^2}} = \frac{3\sqrt{13}}{26}.$$

$$\text{Vậy } \min |z| = \frac{3\sqrt{13}}{26}.$$

Câu 48: (Chuyên Nguyễn Huệ-HN-2019) Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - 2z + 5| = |(z-1+2i)(z+3i-1)|$.
Tính $\min |w|$, với $w = z - 2 + 2i$.

A. $\min |w| = \frac{1}{2}$. **B.** $\min |w| = 1$. **C.** $\min |w| = \frac{3}{2}$. **D.** $\min |w| = 2$.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết, $|z^2 - 2z + 5| = |(z-1+2i)(z+3i-1)|$

$$\Leftrightarrow |(z-1+2i)(z-1-2i)| = |(z-1+2i)(z+3i-1)|$$

$$\Leftrightarrow |z-1+2i| \cdot (|z-1-2i| - |z-1+3i|) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z-1+2i| = 0 & (1) \\ |z-1-2i| = |z-1+3i| & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow z-1+2i=0 \Leftrightarrow z=1-2i. \text{ Khi đó, } |w| = |1-2i-2+2i| = 1 \quad (3).$$

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó, $(2) \Leftrightarrow |(x-1)+(y-2)i| = |(x-1)+(y+3)i|$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-1)^2 + (y+3)^2 \Leftrightarrow (y-2)^2 = (y+3)^2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} \Rightarrow z = x - \frac{1}{2}i.$$

$$\Rightarrow |w| = \left| (x-2) + \frac{3}{2}i \right| = \sqrt{(x-2)^2 + \frac{9}{4}} \geq \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4).$$

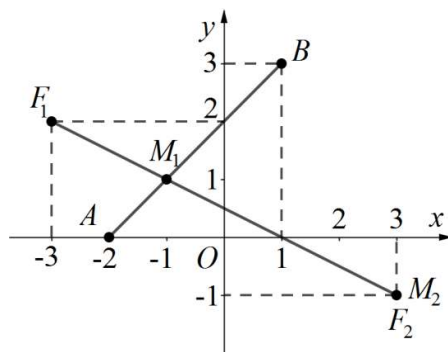
Từ (3) và (4) $\Rightarrow \min |w| = 1$.

Câu 49: (Kim Liên - Hà Nội 2019) Xét các số phức z thỏa mãn $|z+3-2i| + |z-3+i| = 3\sqrt{5}$. Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+2| + |z-1-3i|$. Tìm M , m .

A. $M = \sqrt{17} + \sqrt{5}$; $m = 3\sqrt{2}$. **B.** $M = \sqrt{26} + 2\sqrt{5}$; $m = \sqrt{2}$.
C. $M = \sqrt{26} + 2\sqrt{5}$; $m = 3\sqrt{2}$. **D.** $M = \sqrt{17} + \sqrt{5}$; $m = \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là điểm biểu diễn số phức z , $F_1(-3;2)$, $F_2(3;-1)$, $A(-2;0)$ và $B(1;3)$.

Ta có $|z+3-2i|+|z-3+i|=3\sqrt{5}$ và $F_1F_2=3\sqrt{5} \Rightarrow MF_1+MF_2=F_1F_2$.

Do đó tập hợp các điểm M là đoạn thẳng F_1F_2 .

Dựa vào hình vẽ, ta thấy:

$$+ M = P_{\max} = M_2A + M_2B = \sqrt{26} + 2\sqrt{5}.$$

$$+ m = P_{\min} = M_1A + M_1B = AB = 3\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } M = \sqrt{26} + 2\sqrt{5}; m = 3\sqrt{2}.$$

Câu 50: (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019) Xét các số phức z thỏa mãn $|z-1-3i|=2$. Số phức z mà $|z-1|$ nhỏ nhất là

A. $z=1+5i$.

B. $z=1+i$.

C. $z=1+3i$.

D. $z=1-i$.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $z=x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có } |z-1-3i|=2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}=2 \Leftrightarrow (x-1)^2=-y^2+6y-5$$

$$\text{Vì } (x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow -y^2+6y-5 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 5$$

$$|z-1|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{6y-5}$$

$$\text{Vì } 1 \leq y \leq 5 \Leftrightarrow 1 \leq 6y-5 \leq 25 \Leftrightarrow 1 \leq |z-1| \leq 5$$

$$\text{Vậy } |z-1| \text{ nhỏ nhất khi } \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \text{ khi đó } z=1+i$$

Câu 51: (Chuyên Ngữ Hà Nội 2019) Cho các số phức z, z_1, z_2 thay đổi thỏa mãn các điều kiện sau:

$|iz+2i+4|=3$, phần thực của z_1 bằng 2, phần ảo của z_2 bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=|z-z_1|^2+|z-z_2|^2$.

A. 9.

B. 2.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z=x+yi, x, y \in \mathbb{R}$, ta có $M(z)=M(x, y)$

$$\text{Khi đó: } |iz+2i+4|=3 \Leftrightarrow |i(x+yi)+2i+4|=3 \Leftrightarrow |(-y+4)+(x+2)i|=3$$

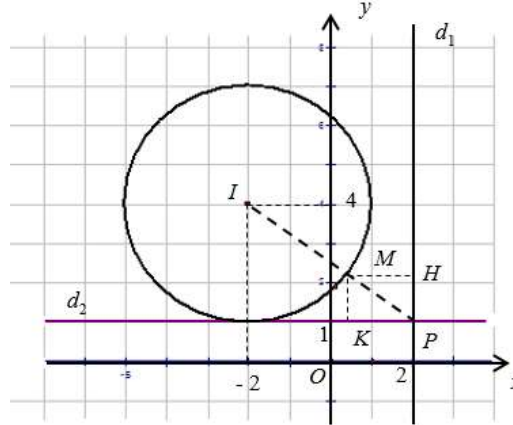
$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-4)^2 = 9$$

Suy ra tập hợp điểm M là đường tròn (C) tâm $I(-2;4)$, bán kính $R=3$.

Mặt khác: $z_1 = 2+bi \Rightarrow A(z_1) = A(2;b) \Rightarrow$ Tập hợp điểm A là đường thẳng $d_1: x=2$.

$z_2 = a+i \Rightarrow B(z_2) = B(a;1) \Rightarrow$ Tập hợp điểm B là đường thẳng $d_2: y=1$.

Giao điểm của d_1 và d_2 là $P(2;1)$.



Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của M trên d_1 và d_2 .

$$\text{Ta có: } T = |z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = MA^2 + MB^2 \geq MH^2 + MK^2 = MP^2.$$

T đạt giá trị nhỏ nhất khi $A \equiv H, B \equiv K$ và I, M, P thẳng hàng (theo thứ tự đó).

$$\text{Phương trình đường thẳng } IP: \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 - 3t \end{cases} \Rightarrow M(2 + 4t; 1 - 3t) \text{ (vì } M \in IP \text{)}.$$

$$\text{Mà } M \in (C) \text{ nên ta có } (4 + 4t)^2 + (-3 - 3t)^2 = 9 \Leftrightarrow (1 + t)^2 = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{2}{5} \\ t = -\frac{8}{5} \end{cases}$$

$$\text{- Với } t = -\frac{8}{5} \Rightarrow M\left(-\frac{22}{5}; \frac{29}{5}\right) \text{ (loại)}$$

$$\text{- Với } t = -\frac{2}{5} \Rightarrow M\left(\frac{2}{5}; \frac{11}{5}\right) \Rightarrow z = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i \Rightarrow z_1 = 2 + \frac{11}{5}i, z_2 = \frac{2}{5} + i.$$

$$\text{Suy ra } MP_{\min} = IP - IM = IP - R = \sqrt{4^2 + (-3)^2} - 3 = 2.$$

$$\text{Vậy } T_{\min} = 2^2 = 4 \text{ khi } z = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i, z_1 = 2 + \frac{11}{5}i, z_2 = \frac{2}{5} + i.$$

Câu 52: (Chuyên Bắc Giang 2019) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|z + i|$.

A. $5\sqrt{3}$.

B. $\sqrt{41}$.

C. $\sqrt{61}$.

D. $3\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

+) Ta có: $|z-3-4i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=5 \quad (1).$

+) $P=|z+2|^2-|z-i|^2=\left[(x+2)^2+y^2\right]-\left[x^2+(y-1)^2\right]=4x+2y+3$

$=4(x-3)+2(y-4)+23 \leq \sqrt{(4^2+2^2)}\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}+23=33.$

$P=33 \Leftrightarrow \frac{x-3}{4}=\frac{y-4}{2} \Leftrightarrow x-3=2(y-4) \quad (2).$

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} x=5 \\ y=5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}.$

Với $\begin{cases} x=5 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow P=33$; Với $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow P=13.$

Vậy số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$ và biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất là $z=5+5i$. Khi đó $|z+i|=\sqrt{61}.$

Câu 53: (Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa –2019) Cho số phức $z=a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z-1-i|=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|a+b-5|$ là

A. $3-\sqrt{2}.$

B. $2-\sqrt{2}.$

C. $3-2\sqrt{2}.$

D. $2+\sqrt{2}.$

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Theo giả thiết ta có $|z-1-i|=1 \Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2=1.$

Đặt $a=1+\sin t$, $b=1+\cos t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

Khi đó $P=|a+b-5|=|\sin t+\cos t-3|=\left|\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-3\right|=3-\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right).$

Ta có: $-1 \leq \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq -\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow 3-\sqrt{2} \leq P \leq 3+\sqrt{2}.$

Do đó giá trị nhỏ nhất của P là $3-\sqrt{2}.$

Cách 2:

Theo giả thiết ta có $|z-1-i|=1 \Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2=1 \Rightarrow a, b \in [0; 2].$

Khi đó $P=|a+b-5|=5-a-b=3-[(a-1)+(b-1)].$

Theo BĐT Bunhia ta có:

$$(a-1)+(b-1) \leq \sqrt{(1^2+1^2)} \cdot \sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2} = \sqrt{2}$$

Do đó $P \geq 3-\sqrt{2}.$

Câu 54: (Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa 2019) Cho số phức $z=a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z|=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=|z+2|+2|z-2|.$

A. 10.

B. $5\sqrt{2}.$

C. $10\sqrt{2}.$

D. 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $|z+2|^2 = (a+2)^2 + b^2$; $|z-2|^2 = (a-2)^2 + b^2$.

Suy ra: $|z+2|^2 + |z-2|^2 = 2(a^2 + b^2) + 8 = 2|z|^2 + 8 = 10$.

Ta có: $A^2 = (|z+2| + 2|z-2|)^2 \leq (1^2 + 2^2)(|z+2|^2 + |z-2|^2) = 50$.

Vì $A \geq 0$ nên từ đó suy ra $A \leq \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của A là $5\sqrt{2}$.

Câu 55: (THPT Thăng Long-Hà Nội- 2019) Cho số thực a thay đổi và số phức z thỏa mãn $\frac{z}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{i-a}{1-a(a-2i)}$. Trên mặt phẳng tọa độ, gọi M là điểm biểu diễn số phức z . Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai điểm M và $I(-3;4)$ (khi a thay đổi) là

A. 6.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

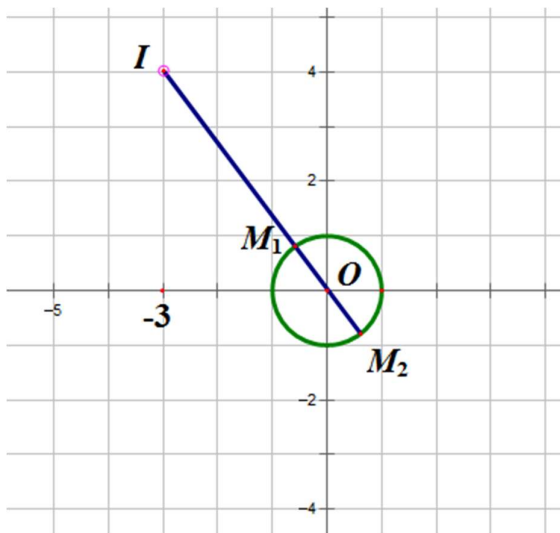
Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \frac{z}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{i-a}{1-a(a-2i)} \Leftrightarrow \frac{z}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{(i-a)(1-a^2-2ai)}{(a^2+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{a^3+a+(a^2+1)i}{(a^2+1)^2} \Leftrightarrow z = \frac{a+i}{\sqrt{a^2+1}} \Rightarrow |z|=1.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là đường tròn tâm O bán kính $R=1$.



Ta có: $OI = 5$. Do đó: $OM_{\min} = OM_1 = OI - R = 5 - 1 = 4$.

Câu 56: (Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định- 2019) Xét số phức z thỏa mãn $|z-2-4i| = \sqrt{5}$. Gọi a và b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị biểu thức $a^2 - b^2$ bằng

A. 40.

B. $4\sqrt{5}$.

C. 20.

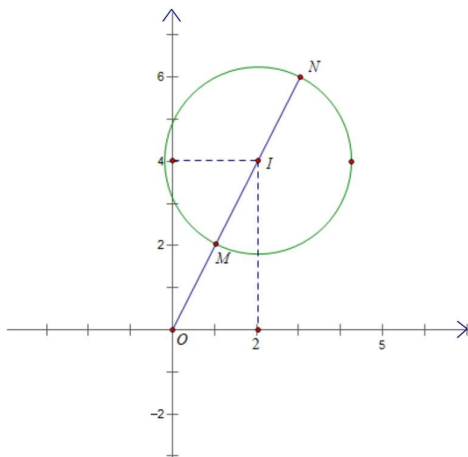
D. $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $|z - 2 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 5 \Rightarrow$ tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm $I(2; 4)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.



Kẻ đường thẳng đi qua 2 điểm O và I cắt đường tròn tại 2 điểm M và N như hình vẽ.

$$OI = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}; \quad IM = IN = R = \sqrt{5}.$$

Từ hình vẽ ta thấy:

$$|z|_{\min} = OM = OI - IM = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5} = b.$$

$$|z|_{\max} = ON = OI + IN = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5} = a.$$

$$\text{Vậy } a^2 - b^2 = 40.$$

Câu 57: (Hậu Lộc 2-Thanh Hóa- 2019) Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $|z - 3 + \sqrt{3}i| = 2$ và $|z_1 - z_2| = 4$. Giá trị lớn nhất của $|z_1| + |z_2|$ bằng

A. 8.

B. $4\sqrt{3}$.

C. 4.

D. $2 + 2\sqrt{3}$.

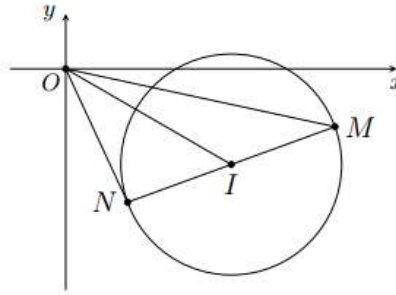
Lời giải

Chọn A

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của hai số phức z_1, z_2 .

$$\text{Do } \begin{cases} |z_1 - 3 + \sqrt{3}i| = |z_2 - 3 + \sqrt{3}i| = 2 \\ |z_1 - z_2| = 4 \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} M, N \in (C) : (x - 3)^2 + (y + \sqrt{3})^2 = 2^2 \\ MN = 4 = 2.2 \end{cases}.$$

Như vậy MN là đường kính của đường tròn (C) với tâm $I(3; -\sqrt{3})$, bán kính $R = 2$, do đó I là trung điểm MN , $OI = \sqrt{12}$.



Ta có $|z_1| + |z_2| = OM + ON \leq \sqrt{(1+1)(OM^2 + ON^2)} = \sqrt{2\left(2OI^2 + \frac{MN^2}{2}\right)} = 8$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $OM = ON \Leftrightarrow MN$ là đường kính của (C) vuông góc với OI .

Câu 58: (Chuyên Đại học Vinh - 2019) Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(z-6)(8+\bar{z}i)$ là số thực. Biết rằng $|z_1 - z_2| = 4$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + 3z_2|$ bằng

A. $5 - \sqrt{21}$.

B. $20 - 4\sqrt{21}$.

C. $20 - 4\sqrt{22}$.

D. $5 - \sqrt{22}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử số phức $z = x + yi$ thỏa mãn $(z-6)(8+\bar{z}i)$ là số thực. Ta có:

$$(z-6)(8+\bar{z}i) = (x+yi-6)(8+(x-yi)i) = (x-6)(8-y) + 8xy + [-8x(x-6) + y(8-y)]i$$

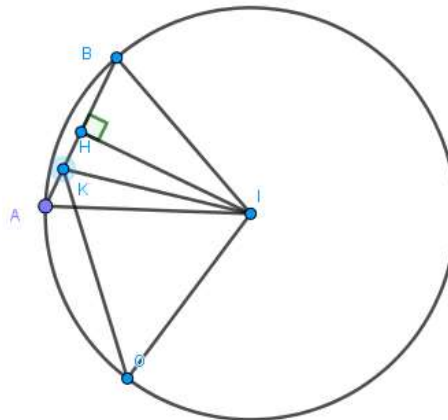
Để là $(z-6)(8+\bar{z}i)$ số thực thì $-8x(x-6) + y(8-y) = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2$

Vậy điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 thuộc đường tròn tâm $I(3, 4)$, bán kính $R = 5$

Giả sử $z_1 = x_1 + y_1i$ có điểm biểu diễn $A(x_1, y_1)$; $z_2 = x_2 + y_2i$ có điểm biểu diễn $B(x_2, y_2)$.

Vì $|z_1 - z_2| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 4 \Leftrightarrow AB = 4$

Ta xét $|z_1 + 3z_2| = |\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}|$



Gọi H là trung điểm AB , K là trung điểm IB , khi đó ta có:

$$|z_1 + 3z_2| = |\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}| = |2(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OB})| = |4\overrightarrow{OK}| = 4OK$$

Ta có $OI = IB = IA = 5$; $AB = 4$; $AH = HB = 2$; $HK = 1$ Suy ra $IH = \sqrt{21} \Rightarrow IK = \sqrt{22}$.

Theo bất đẳng thức tam giác ta có $OK + KI \geq OI \Leftrightarrow OK \geq OI - KI \Leftrightarrow OK \geq 5 - \sqrt{22}$.

Suy ra $|z_1 + 3z_2| = 4OK \geq 20 - 4\sqrt{22}$

Câu 59: (Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình-2019) Trong các số phức z thỏa mãn $|z^2 + 1| = 2|z|$ gọi z_1 và z_2 lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất. Giá trị của biểu thức $|z_1|^2 + |z_2|^2$ bằng

- A. 6. B. $2\sqrt{2}$. C. $4\sqrt{2}$. D. 2.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng bất đẳng thức môđun : $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$. Dấu bằng xảy ra $z_1 = kz_2, (k \leq 0)$.

Ta có: $2|z| = |z^2 + 1| \geq ||z^2| - 1| \Leftrightarrow -2|z| \leq |z^2| - 1 \leq 2|z|$

Với $|z^2| - 1 \leq 2|z| \Leftrightarrow |z^2| - 2|z| - 1 \leq 0 \Rightarrow |z| \leq 1 + \sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} |z| = 1 + \sqrt{2} \\ z^2 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 - 2\sqrt{2} \\ z = \pm(1 + \sqrt{2})i \end{cases} \Rightarrow |z|_{\max} = 1 + \sqrt{2} = |z_2|$

Với $|z^2| - 1 \geq -2|z| \Leftrightarrow |z^2| + 2|z| - 1 \geq 0 \Rightarrow |z| \geq -1 + \sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} |z| = \sqrt{2} - 1 \\ z^2 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 + 2\sqrt{2} \\ z = \pm(\sqrt{2} - 1)i \end{cases} \Rightarrow |z|_{\min} = \sqrt{2} - 1 = |z_1|$

Vậy $|z_1|^2 + |z_2|^2 = (\sqrt{2} - 1)^2 + (\sqrt{2} + 1)^2 = 6$.

Câu 60: (SGD Đà Nẵng 2119) Gọi z là số phức có môđun nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - 8i| = \sqrt{17}$. Biết $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$, tính $m = 2a^2 - 3b$

- A. $m = -18$. B. $m = 54$. C. $m = -10$. D. $m = 14$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(a; b)$ là điểm biểu diễn số phức $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$.

Ta có: $|z - 2 - 8i| = \sqrt{17} \Leftrightarrow \sqrt{(a - 2)^2 + (b - 8)^2} = \sqrt{17} \Leftrightarrow IM = \sqrt{17}$ với $I(2; 8)$.

Suy ra: M thuộc đường tròn (C) có tâm I bán kính $R = \sqrt{17}$.

Lại có: $OI = \sqrt{2^2 + 8^2} = 2\sqrt{17} > R$ nên O nằm ngoài (C) .

GTNN của môđun z là $|z|_{\min} = OM_{\min} = OI - R = \sqrt{17}$ (1).

Đẳng thức xảy ra khi $M = OI \cap (C)$ và M nằm giữa O và I (2).

Từ (1) và (2) ta có M là trung điểm OI nên $M(1; 4)$.

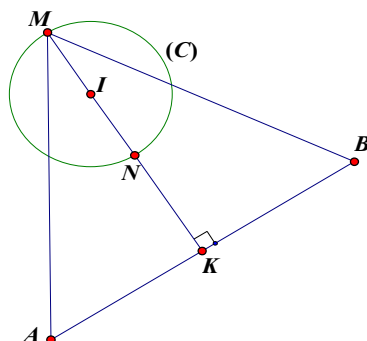
Suy ra $a = 1; b = 4$. Khi đó: $m = 2a^2 - 3b = 2 - 12 = -10$.

Câu 61: (Nho Quan A - Ninh Bình - 2019) Xét các số phức $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z + 2 - 3i| = 2\sqrt{2}$. Tính $P = 2a + b$ khi $|z + 1 + 6i| + |z - 7 - 2i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P=3$.B. $P=-3$.C. $P=1$.D. $P=7$.

Lời giải

Chọn B



Đặt $A(-1; -6), B(7; 2) \Rightarrow \overline{AB} = (8; 8)$ và trung điểm của AB là $K(3; -2)$.

Gọi $M(a; b)$ là điểm biểu diễn số phức z ta có: $(a+2)^2 + (b-3)^2 = 8$.

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn (C) có tâm $I(-2; 3)$, bán kính $R = \sqrt{8}$.

Ta thấy $\overline{IK} = (5; -5) \Rightarrow \overline{IK} \cdot \overline{AB} = 0 \Rightarrow I$ nằm trên đường thẳng trung trực của AB .

Xét tam giác $MAB \Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2MK^2 + \frac{AB^2}{2}$.

$\Rightarrow 2(MA^2 + MB^2) = 4MK^2 + AB^2 \geq (MA + MB)^2 \Rightarrow MA + MB \leq \sqrt{4MK^2 + AB^2}$.

Ta có $|z+1+6i| + |z-7-2i|$ là tổng khoảng cách từ điểm M trên đường tròn (C) tới hai điểm A và B .

Vậy $MA + MB$ lớn nhất khi: $\begin{cases} MA = MB \\ MK \text{ max} \end{cases}$. Điều này xảy ra khi M là giao điểm của IK với

đường tròn (C) và M nằm ngoài đoạn IK .

Ta có phương trình của đường thẳng IK : $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 - t \end{cases}$.

Tọa độ giao điểm của IK với đường tròn (C) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 - t \\ (x+2)^2 + (y-3)^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow 2t^2 = 8 \Rightarrow t = \pm 2.$$

Vậy điểm M cần tìm ứng với $t = -2$ khi đó

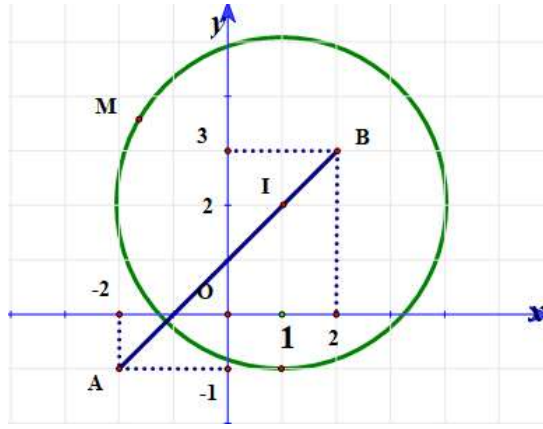
$$M(-4; 5) \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow P = 2a + b = -8 + 5 = -3$$

Câu 62: (SGD Bắc Ninh 2019) Cho số phức z thỏa mãn $|(1+i)z + 1 - 3i| = 3\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z + 2 + i| + \sqrt{6}|z - 2 - 3i|$ bằng

A. $5\sqrt{6}$.B. $\sqrt{15}(1 + \sqrt{6})$.C. $6\sqrt{5}$.D. $\sqrt{10} + 3\sqrt{15}$.

Lời giải

Chọn C



Cách 1

$$|(1+i)z + 1 - 3i| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \left|1+i\right| \left|z + \frac{1-3i}{1+i}\right| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow |z - (1+2i)| = 3 \quad (1).$$

Gọi $\overrightarrow{OM} = (x; y)$, $\overrightarrow{OI} = (1; 2)$ là vec-tơ biểu diễn cho các số phức $z = x + iy$, $w = 1 + 2i$.

Từ (1) có $|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OI}| = 3 \Leftrightarrow MI = 3$.

Suy ra M thuộc đường tròn (C) tâm $I(1; 2)$ bán kính $R = 3$, $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$

Gọi $\overrightarrow{OA} = (-2; -1)$, $\overrightarrow{OB} = (2; 3)$ lần lượt là vec-tơ biểu diễn cho số phức $a = -2 - i$, $b = 2 + 3i$.

Có $\overrightarrow{IA} = (-3; -3)$, $\overrightarrow{IB} = (1; 1)$. Suy ra $\overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

$$\text{Lúc đó } P = MA + \sqrt{6}MB = MA + \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}MB \leq \sqrt{3(MA^2 + 3MB^2)}.$$

$$\text{Có } MA^2 + 3MB^2 = (\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IM})^2 + 3(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IM})^2 = 4IM^2 + IA^2 + 3IB^2.$$

Có $IM^2 = 9$, $IA^2 = 18$, $IB^2 = 2$, nên $MA^2 + 3MB^2 = 60$.

Suy ra $P \leq \sqrt{3 \cdot 60} = 6\sqrt{5}$.

$$\text{Có } P = 6\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{MA}{1} = \frac{\sqrt{3}MB}{\sqrt{2}}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $P = 6\sqrt{5}$.

Cách 2.

Giả sử $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức z khi đó

$$|(1+i)z + 1 - 3i| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow |x - y + 1 + (x + y - 3)i| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$. Do đó M thuộc đường tròn tâm $I(1; 2)$, bán kính $R = 3$.

Đặt $\begin{cases} a = x-1 \\ b = y-2 \end{cases}$ Ta có $a^2 + b^2 = 9$. Gọi $A = (-2; -1)$, $B = (2; 3)$

$$P = |z + 2 + i| + \sqrt{6}|z - 2 - 3i| = MA + \sqrt{6}MB = \sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{6[(x-2)^2 + (y-3)^2]}$$

$$= \sqrt{(a+3)^2 + (b+3)^2} + \sqrt{6[(a-1)^2 + (b-1)^2]} = \sqrt{6(a+b)+27} + \sqrt{6(-2)(a+b)+11}$$

$$= \sqrt{6(a+b)+27} + \sqrt{2} \sqrt{(-6)(a+b)+33} \leq \sqrt{(1+2)(27+33)} = 6\sqrt{5}.$$

Câu 63: (Lô-môn-ô-xốp - Hà Nội 2019) Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z+1-i|=3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=2|z-4+5i|+|z+1-7i|$ bằng $a\sqrt{b}$ (với a, b là các số nguyên tố). Tính $S=a+b$?

A. 20.

B. 18.

C. 24.

D. 17.

Lời giải**Chọn B**

Gọi $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

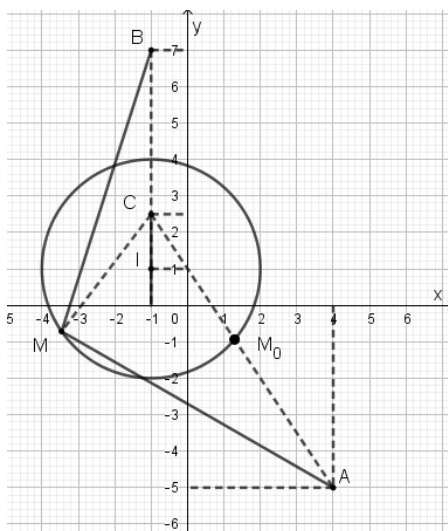
Ta có:

$$|z+1-i|=3 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 9(C);$$

Suy ra, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) , có tâm là $I(-1;1)$ và bán kính $R=3$.

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= 2|z-4+5i|+|z+1-7i| = 2\sqrt{(x-4)^2 + (y+5)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y-7)^2} \\ &= 2\sqrt{(x-4)^2 + (y+5)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y-7)^2 + 3((x+1)^2 + (y-1)^2 - 9)} \\ &= 2\sqrt{(x-4)^2 + (y+5)^2} + \sqrt{4x^2 + 8x + 4y^2 - 20y + 29} \\ &= 2\sqrt{(x-4)^2 + (y+5)^2} + 2\sqrt{x^2 + 2x + y^2 - 10y + \frac{29}{4}} \\ &= 2\left(\sqrt{(x-4)^2 + (y+5)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + \left(y-\frac{5}{2}\right)^2}\right). \end{aligned}$$



Gọi $M(x; y) \in (C)$.

$$\Rightarrow A = 2|z-4+5i|+|z+1-7i| = 2MA + MB, A(4; -5); B(-1; 7).$$

$$\Rightarrow A = 2MA + MB = 2(MA + MC), C\left(-1; \frac{5}{2}\right).$$

$$\text{Ta có: } \overline{IC} = \left(0; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow |\overline{IC}| = \frac{3}{2} < R_{(C)}.$$

Suy ra, điểm C nằm trong đường tròn (C) .

Vậy, đường thẳng AC cắt đường tròn (C) tại hai điểm.

Do đó, để $A = 2(MA + MC)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì M phải nằm giữa hai điểm A và C .

$$\Rightarrow A = 2(MA + MC) \geq 2AC, AC = \frac{5\sqrt{13}}{2}.$$

$$\Rightarrow A \geq 5\sqrt{13} = a\sqrt{b}.$$

Vậy, $a + b = 18$.

Câu 64: (Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019) Cho z_1, z_2 là nghiệm phương trình $|6 - 3i + iz| = |2z - 6 - 9i|$ và thỏa mãn $|z_1 - z_2| = \frac{8}{5}$. Giá trị lớn nhất của $|z_1 + z_2|$ bằng

A. $\frac{56}{5}$.

B. $\frac{28}{5}$.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i$, với $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$.

$$\text{Do } |z_1 - z_2| = \frac{8}{5} \Rightarrow |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i| = \frac{8}{5} \Rightarrow \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \frac{8}{5}$$

$$\text{Gọi } M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2) \Rightarrow M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \frac{8}{5}.$$

Mà z_1 là nghiệm phương trình $|6 - 3i + iz| = |2z - 6 - 9i|$

$$\Rightarrow |(6 - y_1) + (x_1 - 3)i| = |(2x_1 - 6) + (2y_1 - 9)i|$$

$$\Rightarrow \sqrt{(6 - y_1)^2 + (x_1 - 3)^2} = \sqrt{(2x_1 - 6)^2 + (2y_1 - 9)^2} \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 - 6x_1 - 8y_1 + 24 = 0$$

$$\Rightarrow M_1(x_1; y_1) \in \text{đường tròn } (C): x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0.$$

Tương tự $M_2(x_2; y_2) \in (C)$.

Đường tròn (C) có tâm $I(3; 4)$, bán kính $R = 1$.

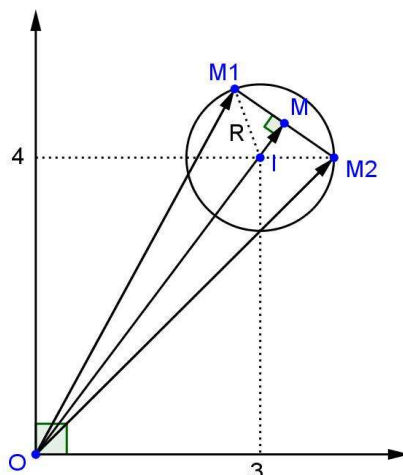
$$\text{Gọi } M \text{ là trung điểm } M_1M_2 \Rightarrow IM \perp M_1M_2, IM = \sqrt{R^2 - M_1M_2^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}, \text{ và}$$

$$|z_1 + z_2| = 2OM.$$

Mà $OM \leq OI + IM$, dấu bằng xảy ra khi O, I, M thẳng hàng. Khi đó $OM \perp M_1M_2$, và

$$OM = OI + IM = \frac{28}{5}.$$

$\Rightarrow |z_1 + z_2|$ đạt giá trị lớn nhất bằng $2(OI + IM)$, bằng $\frac{56}{5}$.



Hoặc đánh giá chọn đáp án như sau:

Gọi $N(-x_2; -y_2) \Rightarrow NM_1 = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} = |z_1 + z_2|$

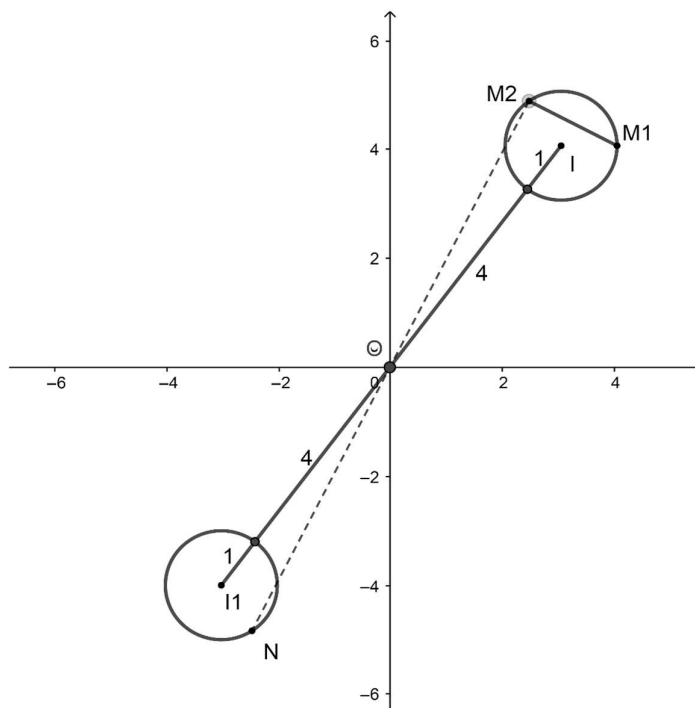
Và N đối xứng với M_2 qua gốc tọa độ O , $N \in$ đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 + 6x + 8y + 24 = 0$.

(C_1) có tâm $I_1(-3; -4)$, bán kính $R_1 = 1$, (C_1) đối xứng với (C) qua gốc tọa độ O .

Có $I_1I = 10 \Rightarrow I_1I - R - R_1 = 8$.

Nhận xét: với mọi điểm $M_1 \in (C)$, $N \in (C_1)$ thì $M_1N \geq I_1I - R - R_1$. Loại các đáp án B, C, D

$\Rightarrow |z_1 + z_2| = M_1N$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{56}{5}$.



Câu 65: Cho các số phức z và w thỏa mãn $(3-i)|z| = \frac{z}{w-1} + 1-i$. Tìm giá trị lớn nhất $T = |w+i|$

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

C. 2.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$(3-i)|z| = \frac{z}{w-1} + 1 - i \Leftrightarrow \frac{z}{w-1} = 3|z| - 1 + (1-|z|)i \Rightarrow \left| \frac{z}{w-1} \right| = \sqrt{(3|z|-1)^2 + (1-|z|)^2} \dots$$

Đặt $t = |z|$; $t > 0$ (vì $|z| = 0$ không thỏa phương trình trên).

$$(1) \text{ trở thành: } \frac{t}{|w-1|} = \sqrt{(3t-1)^2 + (1-t)^2} \Leftrightarrow |w-1| = \frac{t}{\sqrt{10t^2 - 8t + 2}} \dots$$

$$\Leftrightarrow |w-1| = \frac{1}{\sqrt{10 - \frac{8}{t} + \frac{2}{t^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{1}{t} - 2\right)^2 + 2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}; \forall t > 0 \dots$$

$$\text{Ta luôn có: } |w+i| \leq |w-1| + |1+i| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \Rightarrow |w+i| \leq \frac{3\sqrt{2}}{2} \dots$$

$$\text{Đấu = xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} t = |z| = \frac{1}{2} \\ w-1 = k(1+i) \\ |w+i| = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2}i \\ w = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \end{cases}.$$

$$\text{Vậy: Giá trị lớn nhất của } T = \frac{3\sqrt{2}}{2} \dots$$

Câu 66: Cho các số phức z thỏa mãn $|z - \sqrt{2}| + |z + \sqrt{2}| = 2\sqrt{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = |z + 2\sqrt{3} + i| + |z - 3\sqrt{3} + 2i| + |z - 3i|.$$

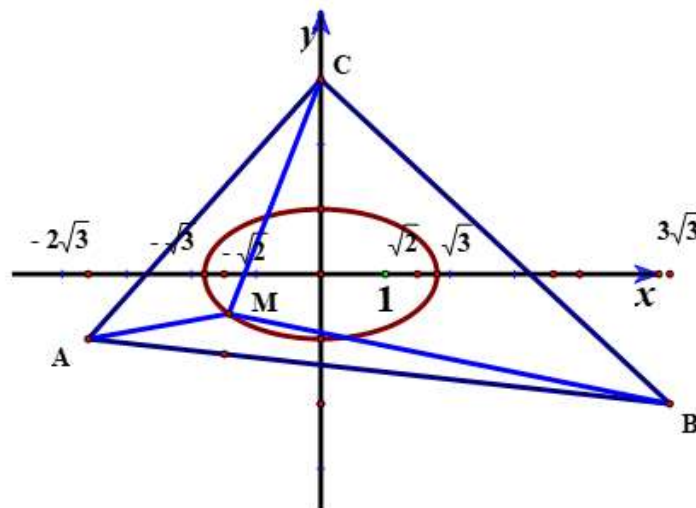
A. 12.

B. 6.

C. 8.

D. 10.

Lời giải



Chọn A

Gọi $M(x; y)$, $F_1(-\sqrt{2}; 0)$, $F_2(\sqrt{2}; 0)$, lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức $z = x + yi$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$.

Có $|z - \sqrt{2}| + |z + \sqrt{2}| = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2\sqrt{3}$, có $2\sqrt{3} > F_1F_2 = 2\sqrt{2}$.

Suy ra $M(x; y)$ chạy trên (E) có tiêu cự $2c = 2\sqrt{2}$, độ dài trục lớn $2a = 2\sqrt{3}$, độ dài trục nhỏ $2b = 2$ và phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{1} = 1$.

Có $M(x; y) \in (E) \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \text{Có } P &= |z + 2\sqrt{3} + i| + |z - 3\sqrt{3} + 2i| + |z - 3i| \\ &= \sqrt{(x + 2\sqrt{3})^2 + (y + 1)^2} + \sqrt{(x - 3\sqrt{3})^2 + (y + 2)^2} + \sqrt{x^2 + (y - 3)^2} \\ &\geq \sqrt{(x + 2\sqrt{3})^2 + (y + 1)^2} + \sqrt{(3\sqrt{3} - x)^2 + (y + 2)^2} + \sqrt{(y - 3)^2} \\ &\geq \sqrt{(x + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - x)^2 + (2y + 3)^2} + |y - 3| \quad (\text{Bất đẳng thức tam giác}) \\ &= \sqrt{4y^2 + 12y + 84} + 3 - y. \end{aligned}$$

Đặt $f(y) = 2\sqrt{y^2 + 3y + 21} + 3 - y$, với $-1 \leq y \leq 1$.

Có $f'(y) = \frac{2y + 3}{\sqrt{y^2 + 3y + 21}} - 1$.

$f'(y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 3y + 21} = 2y + 3 \quad (1)$,

Có $-1 \leq y \leq 1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 3y^2 + 9y - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 & (\text{nhận}) \\ y = -4 & (\text{loại}) \end{cases}$.

Có $f(-1) = 4 + 2\sqrt{19}$, $f(1) = 12$.

Suy ra $\min_{y \in [-1; 1]} f(y) = 12 \Rightarrow P \geq 12$.

Đẳng thức (1) xảy ra khi $\begin{cases} x = 0, y = 1 \\ \frac{x + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3} - x} = \frac{y + 1}{y + 2} > 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 1$.

Thử lại: Khi $x = 0, y = 1$ có $P = 12$.

Vậy $\min P = 12$ khi $x = 0, y = 1$.

Câu 67: Cho số phức $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $|z|^2 + 3y^2 = 16$. Biểu thức $P = \|z - i\| - \|z - 2\|$ đạt giá trị lớn nhất tại $(x_0; y_0)$ với $x_0 < 0, y_0 > 0$. Khi đó: $x_0^2 + y_0^2$ bằng

A. $\frac{20 - 3\sqrt{6}}{2}$.

B. $\frac{20 + 3\sqrt{7}}{2}$.

C. $\frac{20 + 3\sqrt{6}}{2}$.

D. $\frac{20 - 3\sqrt{7}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $|z|^2 + 3y^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 16$.

$$P = \left| \sqrt{x^2 + (y-1)^2} - \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \right| = \left| \sqrt{x^2 + (y-1)^2} - \sqrt{(2-x)^2 + (-y)^2} \right|$$

$$\leq \sqrt{(x+2-x)^2 + (y-1-y)^2} = \sqrt{5}.$$

$$P_{\max} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot (-y) = (2-x)(y-1) \\ x \cdot (2-x) < 0 \\ (y-1) \cdot (-y) < 0 \\ x^2 + 4y^2 = 16 \\ x < 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ x(2-x) < 0 \\ (y-1) \cdot (-y) < 0 \\ x^2 + 4y^2 = 16 \\ x < 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2y \\ (2-2y)^2 + 4y^2 - 16 = 0 \\ x(2-x) < 0 \\ (y-1) \cdot (-y) < 0 \\ x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1+\sqrt{7}}{2} \\ x = 1-\sqrt{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1-\sqrt{7} \\ y_0 = \frac{1+\sqrt{7}}{2} \end{cases} \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = \frac{20-3\sqrt{7}}{2}.$$

Nhận xét: Bài này ta dùng bất đẳng thức véc tơ như sau

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2), \vec{b} = (b_1; b_2) \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$, ta có:

$$|\vec{a} + \vec{b}| \geq \left| |\vec{a}| - |\vec{b}| \right| \Leftrightarrow \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} \geq \left| \sqrt{a_1^2 + a_2^2} - \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \right|.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ ngược hướng} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 b_2 = a_2 b_1 \\ a_1 b_1 < 0 \\ a_2 b_2 < 0 \end{cases}.$$

Câu 68: Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z+4| + |z-4| = 10$ và $|z-6|$ lớn nhất. Tính $S = a + b$.

A. $S = 11$.

B. $S = -5$.

C. $S = -3$.

D. $S = 5$.

Lời giải**Chọn B**

Trong mp tọa độ Oxy , Ta gọi các điểm biểu diễn của các số phức:

$z = x + yi$ là $M(x; y)$; $z = -4 + 0i$ là $F_1(-4; 0)$; $z = 4 + 0i$ là $F_2(4; 0)$.

Ta có: $|z+4| + |z-4| = 10 \Rightarrow MF_1 + MF_2 = 10$. (1)

$$\begin{cases} MF_1^2 = (x+4)^2 + y^2 \\ MF_2^2 = (x-4)^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow MF_1^2 - MF_2^2 = 16x \Rightarrow MF_1 - MF_2 = \frac{8x}{5}. (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $MF_1 = 5 + \frac{4x}{5}$.

$$\text{Mặt khác } MF_1^2 = (x+4)^2 + y^2 \Rightarrow \left(5 + \frac{4x}{5}\right)^2 = (x+4)^2 + y^2 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Vậy, tập hợp các điểm biểu diễn của số phức thỏa mãn $|z+4| + |z-4| = 10$ là Elip có phương

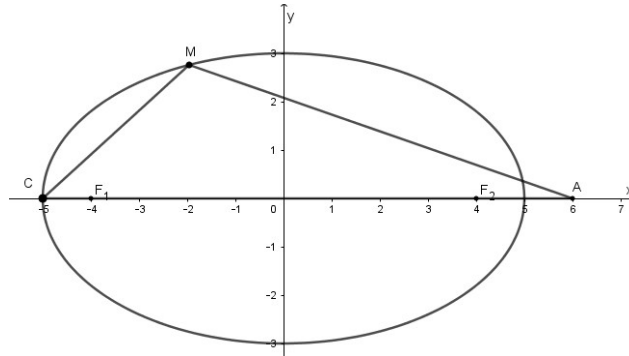
$$\text{trình (E): } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Theo đề, ta cần tìm điểm thuộc (E) sau cho $|z-6|$ lớn nhất.

Ta gọi các điểm biểu diễn số phức: $z = 6 + 0i$ là $A(6;0)$; $z = a + bi$ là $M(a;b) \in (E)$;

$z = -5 + 0i$ là $C(-5;0)$.

Do đó, $|z-6|$ lớn nhất khi và chỉ khi MA lớn nhất.



Dựa, vào hình vẽ trên ta thấy để MA lớn nhất khi $M \equiv C(-5;0) \Rightarrow a = -5; b = 0 \Rightarrow S = -5$.

Câu 69: Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa $|z+4| + |z-4| = 10$ và $|z-6|$ lớn nhất. Tính $S = a + b$?

A. $S = -3$.

B. $S = 5$.

C. $S = -5$.

D. $S = 11$.

Lời giải

Chọn C

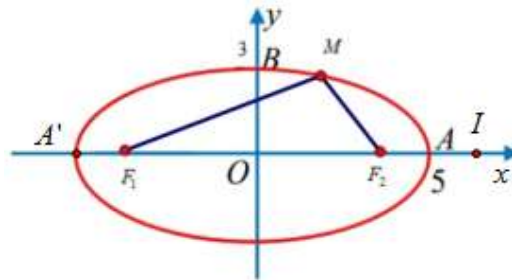
Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$|z-4| + |z+4| = 10 \Leftrightarrow |(a-4) + bi| + |(a+4) + bi| = 10$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a-4)^2 + b^2} + \sqrt{(a+4)^2 + b^2} = 10 (*)$$

Xét $F_1(-4;0)$ và $F_2(4;0)$. Khi đó $(*) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 10$

$$\text{Suy ra } M \text{ thuộc Elip có } \begin{cases} c = 4 \\ 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \end{cases} \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = 3$$



Ta có: $|z-6| = \sqrt{(a-6)^2 + b^2} = IM, I(6;0)$, suy ra $\max |z-6| = IA'$ hay điểm

$M \equiv A'(-5;0) \Rightarrow z = -5 + 0i \Rightarrow S = -5$.

Câu 70: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$, M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |1+z| + 2|1-z|$. Giá trị của biểu thức $M + m$ bằng

A. $2\sqrt{5} + 2$.

B. 6.

C. $2\sqrt{5} + 4$.

D. 7.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. $|z| = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

$$\Rightarrow A = |1+z| + 2|1-z| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + 2\sqrt{(1-x)^2 + y^2} = \sqrt{2+2x} + 2\sqrt{2-2x}.$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2+2x} + 2\sqrt{2-2x}$ với $x \in [-1; 1]$.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 1]$ và $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2+2x}} - \frac{2}{\sqrt{2-2x}} = \frac{\sqrt{1-x} - 2\sqrt{1+x}}{\sqrt{2(1-x^2)}}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} - 2\sqrt{1+x} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5} \in [-1; 1].$$

$$\text{Khi đó } f(-1) = 4; f\left(-\frac{3}{5}\right) = 2\sqrt{5}; f(1) = 2.$$

Do đó $M = \max_{[-1;1]} f(x) = f\left(-\frac{3}{5}\right) = 2\sqrt{5}; m = \min_{[-1;1]} f(x) = f(1) = 2$. Suy ra $M + m = 2\sqrt{5} + 2$.

Câu 71: Xét tập hợp S các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn điều kiện $|3z - \bar{z}| = |(1+i)(2+2i)|$.

Biểu thức $Q = |z - \bar{z}|(2-x)$ đạt giá trị lớn nhất là M và đạt được tại $z_0 = x_0 + y_0i$ (khi z thay đổi trong tập S). Tính giá trị $T = M \cdot x_0 y_0^2$.

$$\text{A. } T = -\frac{9\sqrt{3}}{2}. \quad \text{B. } T = \frac{9\sqrt{3}}{4}. \quad \text{C. } T = \frac{9\sqrt{3}}{2}. \quad \text{D. } T = -\frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

Lời giải**Chọn D**

$$\text{Ta có: } |3z - \bar{z}| = |(1+i)(2+2i)| \Leftrightarrow 4x^2 + 16y^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 4 \Leftrightarrow 4y^2 = 4 - x^2$$

$$\text{Do đó, } Q = |z - \bar{z}|(2-x) = \sqrt{4y^2}(2-x) = \sqrt{4-x^2}(2-x) = f(x), \quad (-2 \leq x \leq 2).$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x - 4}{\sqrt{4-x^2}}, \quad (-2 < x < 2).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \notin (-2; 2) \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

$$\text{Mặt khác, } f(-2) = 0, f(2) = 0, f(-1) = 3\sqrt{3}.$$

$$\text{Suy ra } M = 3\sqrt{3} \text{ tại } x_0 = -1, y_0^2 = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Vậy } T = \frac{-9\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 72: (THPT Hậu Lộc 2 2019) Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $|z - 3 + \sqrt{3}i| = 2$ và

$|z_1 - z_2| = 4$. Giá trị lớn nhất của $|z_1| + |z_2|$ bằng

$$\text{A. } 8. \quad \text{B. } 4\sqrt{3}. \quad \text{C. } 4. \quad \text{D. } 2 + 2\sqrt{3}.$$

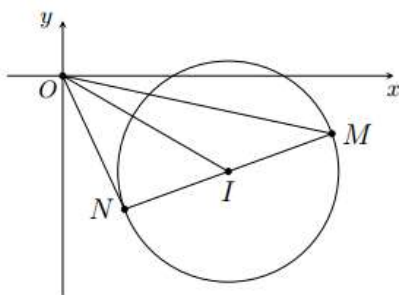
Lời giải

Chọn A

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của hai số phức z_1, z_2 .

$$\text{Do } \begin{cases} |z_1 - 3 + \sqrt{3}i| = |z_2 - 3 + \sqrt{3}i| = 2 \\ |z_1 - z_2| = 4 \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} M, N \in (C) : (x-3)^2 + (y+\sqrt{3})^2 = 2^2 \\ MN = 4 = 2.2 \end{cases}.$$

Như vậy MN là đường kính của đường tròn (C) với tâm $I(3; -\sqrt{3})$, bán kính $R = 2$, do đó I là trung điểm MN , $OI = \sqrt{12}$.



$$\text{Ta có } |z_1| + |z_2| = OM + ON \leq \sqrt{(1+1)(OM^2 + ON^2)} = \sqrt{2\left(2OI^2 + \frac{MN^2}{2}\right)} = 8.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $OM = ON \Leftrightarrow MN$ là đường kính của (C) vuông góc với OI .

Câu 73: (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 2 - i| + |z_1 - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$ và $|iz_2 - 1 + 2i| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = |z_1 + z_2|$.

A. $2\sqrt{2} + 1$.

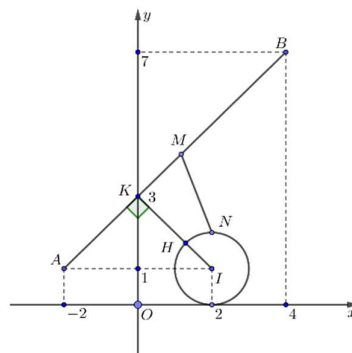
B. $\sqrt{2} - 1$.

C. $2\sqrt{2} - 1$.

D. $\sqrt{2} + 1$.

Lời giải

Chọn C



Trên mặt phẳng Oxy , gọi $M(a; b)$ là điểm biểu diễn cho số phức z_1 ; $A(-2; 1)$, $B(4; 7)$ lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức $-2 + i$ và $4 + 7i \Rightarrow AB = 6\sqrt{2}$.

Từ đó ta được $MA + MB = 6\sqrt{2} = AB$ nên tập hợp các điểm M biểu diễn cho số phức z_1 là đoạn thẳng AB nằm trên đường thẳng $d: x - y + 3 = 0$.

Đặt $z_3 = -z_2$, khi đó

$|iz_2 - 1 + 2i| = 1 \Leftrightarrow |-iz_3 - 1 + 2i| = 1 \Leftrightarrow |z_3 - 2 - i| = 1$. Gọi $N(c; d)$ là điểm biểu diễn cho z_3 ; $I(2; 1)$ là điểm biểu diễn cho số phức $2 + i$, khi đó $IN = 1$ nên tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z_3 là đường tròn $(C): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

$$|z_1 + z_2| = |z_1 - z_3| = MN.$$

Để thấy hình chiếu vuông góc của điểm $I(2; 1)$ trên đường thẳng (d) là điểm $K(0; 3)$ thuộc đoạn AB suy ra $MN \geq KH$ với H là giao điểm của IK với (C) và thuộc đoạn IK .

Do đó $\min MN = KH = d(I, AB) - R = 2\sqrt{2} - 1$. Vậy $\min |z_1 + z_2| = 2\sqrt{2} - 1$

Câu 74: (Trường THPT Hàm Rồng 2019) Cho số phức z, z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 4 - 5i| = |z_2 - 1| = 1$ và $|\bar{z} + 4i| = |z - 8 + 4i|$. Tính $|z_1 - z_2|$ khi $P = |z - z_1| + |z - z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất

A. 8

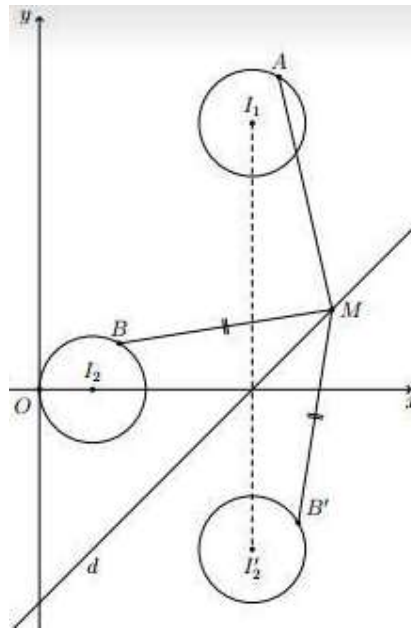
B. 6.

C. $\sqrt{41}$.

D. $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi A là điểm biểu diễn của số phức z_1 . Suy ra A thuộc đường tròn (C_1) tâm $I_1(4; 5), R = 1$.

Gọi B là điểm biểu diễn của số phức z_2 . Suy ra B thuộc đường tròn (C_2) tâm $I_2(1; 0), R = 1$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$

Theo giả thiết $|\bar{z} + 4i| = |z - 8 + 4i| \Leftrightarrow x - y = 4$. Suy ra M thuộc đường thẳng $(d) x - y - 4 = 0$

Gọi (C_2') có tâm $I_2'(4; -3), R = 1$ là đường tròn đối xứng với đường tròn (C_2) tâm $I_2(1; 0), R_2 = 1$ qua đường thẳng d . Gọi B' là điểm đối xứng với B qua đường

thẳng d . Ta có $P = |z - z_1| + |z - z_2| = MA + MB = MA + MB' \geq AB' = I_1I_2' - R_1 - R_2 = 6$.

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi A, B', I_1, I_2', M thẳng hàng. Khi đó $\overline{I_1 A} = \frac{1}{8} \overline{I_1 I_2'}$ suy ra $A(4; 4)$ và $\overline{I_2 B'} = \frac{1}{8} \overline{I_2' I_1}$ suy ra $B'(4; -2) \Rightarrow B(2; 0)$. $AB = 2\sqrt{5}$.
 Vậy $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{5}$.

Câu 75: (Chuyên ĐH Vinh- 2019) Cho các số phức z và ω thỏa mãn $(2+i)|z| = \frac{z}{\omega} + 1 - i$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = |\omega + 1 - i|$

A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

D. $\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn A

$$(2+i)|z| = \frac{z}{\omega} + 1 - i \Leftrightarrow \frac{z}{\omega} = (2+i)|z| - 1 + i.$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{\omega} = (2|z| - 1) + (|z| + 1)i \Rightarrow \left| \frac{z}{\omega} \right| = \sqrt{(2|z| - 1)^2 + (|z| + 1)^2} \Leftrightarrow |\omega| = \sqrt{\frac{|z|^2}{5|z|^2 - 2|z| + 2}}$$

$$f(t) = \frac{t^2}{5t^2 - 2t + 2} (t \geq 0) \Rightarrow f'(t) = \frac{-2t^2 + 4t}{(5t^2 - 2t + 2)^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 2$$

Bảng biến thiên

t	0	2	$+\infty$
f'(t)	0	+	0
f(t)	0	$\frac{2}{9}$	-

$$\text{Ta có } T = |\omega + 1 - i| \leq |z| + |1 - i| \leq \sqrt{\frac{2}{9}} + \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Câu 76: Cho số phức z và gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 8i = 0$ (z_1 có phần thực dương). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z - z_1| + |z_2 - z| + \left| \bar{z} + 2z_1 + \frac{z_2}{2} \right|$ được viết dưới dạng $m\sqrt{n} + p\sqrt{q}$ (trong đó $n, p \in \mathbb{N}$; m, q là các số nguyên tố). Tổng $m + n - p - q$ bằng

A. 3.

B. 4.

C. 0.

D. 2.

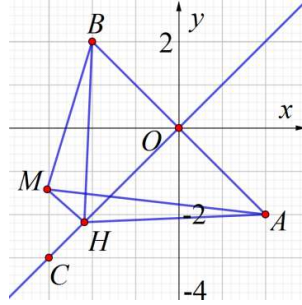
Lời giải

Chọn A

$$z^2 + 8i = 0 \Rightarrow z_1 = 2 - 2i \text{ và } z_2 = -2 + 2i.$$

$$P = |z - z_1| + |z_2 - z| + \left| \bar{z} + 2z_1 + \frac{z_2}{2} \right| = |z - z_1| + |z - z_2| + \left| z + 2\bar{z}_1 + \frac{\bar{z}_2}{2} \right| = MA + MB + MC.$$

Trong đó M , $A(2; -2)$, $B(-2; 2)$, $C(-3; -3)$ lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức z , z_1 , z_2 , $\omega = -2\bar{z}_1 - \frac{\bar{z}_2}{2} = -3 - 3i$.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên OC .

Ta có $MA + MB \geq HA + HB \Rightarrow MA + MB + MC \geq HA + HB + HC$.

Do đó $P_{\min} = (MA + MB + MC)_{\min} = HA + HB + HC \Leftrightarrow M \equiv H \Rightarrow M \in OC: y = x$.

Giả sử $M(x; x)$ ($x \in [-3; 0]$) $\Rightarrow P = MA + MB + MC = \sqrt{2}(x + 3) + 2\sqrt{2}(x^2 + 4)$

$$\Rightarrow P' = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \Rightarrow P' = 0 \Rightarrow x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \in [-3; 0].$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \sqrt{2} \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} + 3 \right) + 2\sqrt{2} \left[2 \left[\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} \right)^2 + 4 \right] \right] = 2\sqrt{6} + 3\sqrt{2}.$$

Suy ra $m = 2$, $n = 6$, $p = 3$, $q = 2 \Rightarrow m + n - p - q = 3$.

Câu 77: Trong các số phức z thỏa mãn $|z^2 + 1| = 2|z|$ gọi z_1 và z_2 lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất. Giá trị của biểu thức $|z_1|^2 + |z_2|^2$ bằng

A. 6.

B. $2\sqrt{2}$.

C. $4\sqrt{2}$.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z = a + bi$; $a, b \in \mathbb{R}$.

$$|z^2 + 1| = |a^2 - b^2 + 1 + 2abi| = \sqrt{(a^2 - b^2 + 1)^2 + 4a^2b^2}; \quad 2|z| = 2\sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\text{Ta có } |z^2 + 1| = 2|z| \Rightarrow (a^2 - b^2 + 1)^2 + 4a^2b^2 = 4(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2 + 2(a^2 - b^2) + 1 - 4(a^2 + b^2) = 0 \Leftrightarrow (a^2 + b^2)^2 - 2a^2 - 6b^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2)^2 - 6(a^2 + b^2) + 1 = -4a^2.$$

$$\text{Vì } -4a^2 \leq 0, \forall a \in \mathbb{R} \text{ nên } (a^2 + b^2)^2 - 6(a^2 + b^2) + 1 \leq 0 \Rightarrow 3 - 2\sqrt{2} \leq a^2 + b^2 \leq 3 + 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{2}-1 \leq \sqrt{a^2+b^2} \leq \sqrt{2}+1 \Rightarrow \begin{cases} m = \sqrt{2}-1 \\ M = \sqrt{2}+1 \end{cases} \Rightarrow m^2 + M^2 = 6.$$

$$M = \sqrt{2}+1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a^2 + b^2 = 3 + 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \pm(1 + \sqrt{2}) \end{cases}.$$

$$m = \sqrt{2}-1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a^2 + b^2 = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \pm(\sqrt{2}-1) \end{cases}.$$

Câu 78: (Sở Nam Định - 2019) Xét các số phức w, z thỏa mãn $|w+i| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w = (2+i)(z-4)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z-2i| + |z-6-2i|$.

A. 7.

B. $2\sqrt{53}$.

C. $2\sqrt{58}$.

D. $4\sqrt{13}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1.

$$\text{Ta có: } 5w = (2+i)(z-4) \Leftrightarrow 5w+5i = (2+i)(z-4)+5i$$

$$\Rightarrow |5w+5i| = |(2+i)(z-4)+5i| \Rightarrow 5|w+i| = |(1+2i)(z-4+1+2i)| = \sqrt{5}|z-3+2i|$$

$$\Rightarrow 5 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}|z-3+2i| \Rightarrow |z-3+2i| = 3.$$

Ta có:

$$|z+z_1|^2 + |z-z_1|^2 = 2(|z|^2 + |z_1|^2); \forall z, z_1. (1)$$

$$|z|^2 + |z_1|^2 \geq \frac{(|z|+|z_1|)^2}{2}; \forall z, z_1. (2)$$

$$\text{Ta có: } P = |z-2i| + |z-6-2i| = |z-3-2i+3| + |z-3-2i-3|.$$

Áp dụng (1) và (2), ta có:

$$|z-3-2i+3|^2 + |z-3-2i-3|^2 = 2(|z-3-2i|^2 + 9).$$

$$|z-3-2i+3|^2 + |z-3-2i-3|^2 \geq \frac{(|z-3-2i+3| + |z-3-2i-3|)^2}{2} = \frac{(|z-2i| + |z-6-2i|)^2}{2}$$

.

Vậy, ta có:

$$\frac{(|z-2i| + |z-6-2i|)^2}{2} \leq 2(|z-3-2i|^2 + 9) \Rightarrow (|z-2i| + |z-6-2i|)^2 \leq 4(|z-3-2i|^2 + 9).$$

$$\Rightarrow P^2 \leq 4(|z-3-2i|^2 + 9).$$

$$\text{Do } 4(|z-3-2i|^2 + 9) = 4(|z-3+2i-4i|^2 + 9) \text{ nên } P^2 \leq 4(|z-3+2i| + |-4i|)^2 + 9$$

$$\Rightarrow P^2 \leq 4(7^2 + 9) = 232 \Rightarrow P \leq 2\sqrt{58}.$$

Cách 2.

$$\text{Ta có: } 5w = (2+i)(z-4) \text{ thay } |w+i| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\Rightarrow |z-3+2i| = 3.$$

Suy ra, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$.

Gọi $M \in (C)$.

$$\text{Ta có: } P = |z-2i| + |z-6-2i| = AM + BM; A(0;2), B(6;2).$$

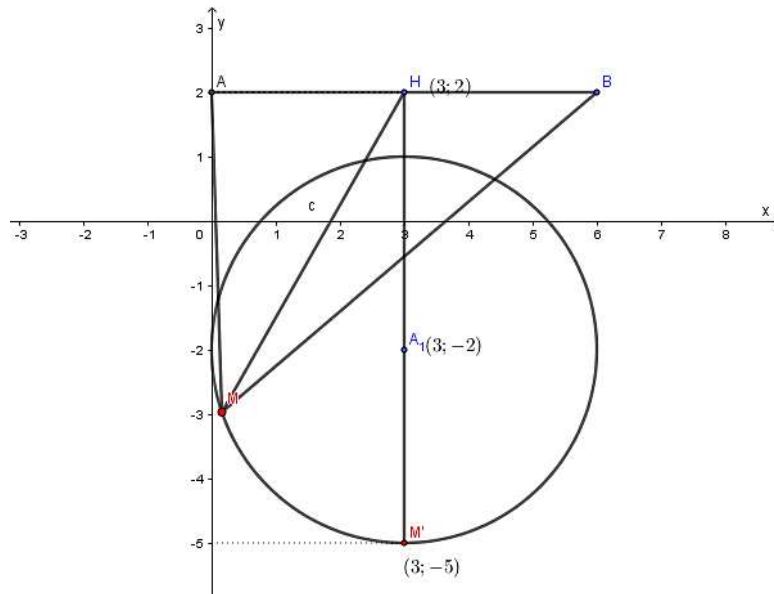
$$\text{Suy ra } P \leq \sqrt{2(AM^2 + BM^2)}.$$

Gọi H là trung điểm của cạnh AB .

$$\text{Ta có: } P \leq \sqrt{2(AM^2 + BM^2)} = \sqrt{2\left(2MH^2 + \frac{AB^2}{2}\right)} = \sqrt{4MH^2 + AB^2}.$$

Vậy, $P = |z-2i| + |z-6-2i|$ đạt giá trị lớn nhất khi MH^2 đạt giá trị lớn nhất.

Dựa vào hình vẽ sau



Suy ra, MH^2 đạt giá trị lớn nhất khi $M \equiv M' \Rightarrow P^2 \leq 232 \Rightarrow P = 2\sqrt{58}$.

Câu 79: Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2$.

A. $P = 9$.

B. $P = 10$.

C. $P = 8$.

D. $P = 12$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2); C(x_3; y_3)$ là các điểm lần lượt biểu diễn các số phức $z_1; z_2; z_3$.

vì $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ suy ra $A; B; C$ thuộc đường tròn tâm O bán kính bằng 1.

Ta có $|z_1 - z_2| = AB; |z_2 - z_3| = BC; |z_3 - z_1| = AC$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } P &= |z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2 = AB^2 + BC^2 + AC^2 \\ &= (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC})^2 = 6 - 2(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}) \\ &= 9 - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})^2 = 9 - (3\overrightarrow{OG})^2 = 9 - 9OG^2 \leq 9 \text{ (với } G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC\text{).} \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $G \equiv O$, hay ΔABC đều.

Câu 80: Cho số phức z thỏa mãn $3|z + \bar{z}| + 2|z - \bar{z}| \leq 12$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $|z - 4 + 3i|$. Giá trị của $M.m$ bằng:

A. 28.

B. 24.

C. 26.

D. 20.

Lời giải

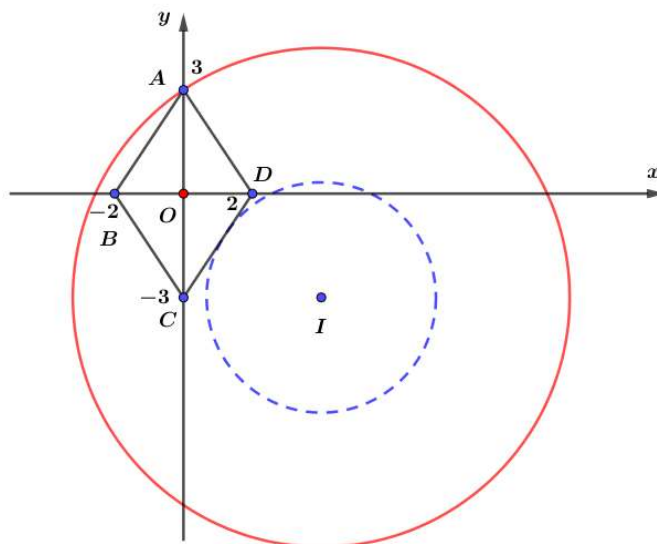
Chọn B

Gọi $z = x + yi; \quad x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Xét } 3|z + \bar{z}| + 2|z - \bar{z}| \leq 12 \Leftrightarrow 3|x| + 2|y| \leq 6. \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } P = |z - 4 + 3i| = \sqrt{(x - 4)^2 + (y + 3)^2} \quad (2)$$

Tập hợp những điểm biểu diễn $z = x + yi; \quad x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn (1) là miền trong (tính cả biên) của hình thoi $ABCD$ với $A(0;3); B(-2;0); C(0;-3); D(2;0)$ tạo bởi 4 đường thẳng $3|x| + 2|y| = 6$. Điểm biểu diễn z thỏa mãn (2) là đường tròn tâm $I(4;-3)$ bán kính $R = P \geq 0$.



P đạt min, max khi bán kính đường tròn đạt min, max khi xét sự tương giao với miền hình thoi $ABCD$.

Ta có đường tròn giao với miền hình thoi điểm gần tâm nhất khi đường tròn tiếp xúc cạnh CD :

$$3x - 2y - 6 = 0 \text{ tương ứng có } m = \frac{|3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 - 6|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{12}{\sqrt{13}}. \text{ Điểm giao xa nhất là đỉnh } A(0; 3)$$

của hình thoi. Do đó $M = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$.

$$\Rightarrow M.m = 24.$$