

Câu 1 (1 điểm). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Câu 2 (1 điểm). Tìm m để hàm số $y = -x^4 + 2(m+1)x^2 - 2m - 1$ đạt cực đại tại $x = -1$.

Câu 3 (1 điểm). Giải phương trình mũ $6^x + 2 = 3^x + 2^{x+1}$.

Câu 4 (1 điểm). Tính $I = \int \frac{1}{\sin x} dx$.

Câu 5 (1 điểm). Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 1; 1)$, $B(-1; 0; 2)$, $C(2; 3; 0)$. Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua A, B, C và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oyz) .

Câu 6 (1 điểm).

a) Cho $5\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 3$. Tính giá trị của biểu thức $T = \sin^4\alpha - \sin^22\alpha - 5\cos^4\alpha$.

b) Một hộp đựng 10 viên bi, gồm 3 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ, 4 viên bi vàng. Bạn A lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp 10 viên bi đó. Sau đó bạn B lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ 8 viên bi còn lại trong hộp. Tính xác suất để A lấy được 2 viên bi cùng màu, đồng thời B cũng lấy được hai viên bi cùng màu.

Câu 7 (1 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $BC = 2a$, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm O của AC và BD , $SO = a$, G là trọng tâm tam giác SBO . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và CG .

Câu 8 (1 điểm). Trong mặt phẳng Oxy , cho tứ giác lồi $ABCD$ có chu vi bằng 12 và diện tích bằng 9, đỉnh $A(2; -1)$, đường phân giác trong của góc $\widehat{BAD}$ có phương trình $x - y - 3 = 0$. Tìm tọa độ các điểm B, C, D biết D có cả hoành độ và tung độ dương.

Câu 9 (1 điểm). Giải bất phương trình $2x^2 \cdot \sqrt{2x^3 + 24x} < x^2 + 24x + 12$.

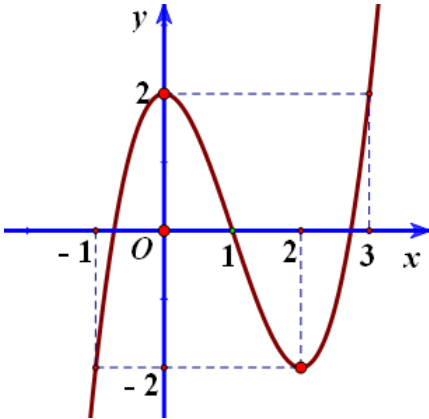
Câu 10 (1 điểm). Cho m_a, m_b, m_c là độ dài ba đường trung tuyến của một tam giác có chu vi bằng 1 và diện tích S . Chứng minh rằng $3\sqrt{3} \cdot S \leq m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 < \frac{3}{8}$.

————— HẾT —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

ĐÁP ÁN

Câu	Ý	Nội dung	Điểm																					
1		Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số ...	1,00																					
		• Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. • Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$.	0,25																					
		• Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6x$. Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$. Hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$, đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$. Cực trị: $x_{\text{CD}} = 0, y_{\text{CD}} = y(0) = 2$ và $x_{\text{CT}} = 2, y_{\text{CT}} = y(2) = -2$.	0,25																					
		• Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$</td><td>$\nearrow$</td><td>2</td><td>$\searrow$</td><td>-2</td><td>$\nearrow$</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$	0,25
	x	$-\infty$	0	2	$+\infty$																			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$																		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$																	
	• Đồ thị: Tâm đối xứng $I(1; 0)$. Bảng một số giá trị <table><tr><td>x</td><td>-1</td><td>0</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>y</td><td>-2</td><td>2</td><td>-2</td><td>2</td></tr></table> 	x	-1	0	2	3	y	-2	2	-2	2	0,25												
x	-1	0	2	3																				
y	-2	2	-2	2																				
2		Tìm m ...	1,00																					
		Ta có $y' = -4x^3 + 4(m + 1)x, y'' = -12x^2 + 4(m + 1)$.	0,25																					
		HS đạt cực đại tại $x = -1$ thì $y'(-1) = 0 \Leftrightarrow 4 - 4m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 0$.	0,50																					
		Với $m = 0$ thì $y''(-1) = -12 + 4(m + 1) = -8 < 0$ nên $x = -1$ là điểm cực đại của hàm số. Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.	0,25																					

3		<i>Giải phương trình mũ...</i>	1,00
		$6^x + 2 = 3^x + 2^{x+1} \Leftrightarrow (2^x - 1)(3^x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \log_3 2.$	1,00
4		<i>Tính tích phân bất định (họ các nguyên hàm)...</i>	1,00
		$I = \int \frac{\sin x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(\cos x - 1)}{\cos x - 1} - \frac{1}{2} \int \frac{d(\cos x + 1)}{\cos x + 1} =$ $= \frac{1}{2} \ln \left \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right + C.$	1,00
5		<i>Viết phương trình mặt cầu ...</i>	1,00
		Gọi $I(0; b; c) \in (Oyz)$ là tâm của mặt cầu (S) . Ta có $IA = IB = IC \Leftrightarrow 2b - 2c = -3$ và $3b - 2c = 4$. Tìm ra $b = 7, c = \frac{17}{2}$. Vậy $I\left(0; 7; \frac{17}{2}\right)$.	0,50
		Bán kính mặt cầu (S) là $R = IA = \sqrt{\frac{369}{4}}$. Vậy $(S) : x^2 + (y - 7)^2 + \left(z - \frac{17}{2}\right)^2 = \frac{369}{4}$.	0,50
6			1,00
	a	<i>Tính giá trị của biểu thức lượng giác...</i>	0,50
		Ta có $5\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 3$ và $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ nên $\sin^2\alpha = \frac{2}{3}, \cos^2\alpha = \frac{1}{3}$.	0,25
		Vậy $T = (\sin^2\alpha)^2 - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 5(\cos^2\alpha)^2 = -1$.	0,25
	b	<i>Tính xác suất ...</i>	0,50
		$n(\Omega) = C_{10}^2 \times C_8^2 = 45.28 = 1260$. Gọi M là biến cố cần tính xác suất. <u>TH1</u> : A lấy 2 bi xanh, còn B lấy 2 bi đỏ hoặc 2 bi vàng, có $C_3^2 (C_3^2 + C_4^2) = 27$ cách. <u>TH2</u> : A lấy 2 bi đỏ, B lấy 2 bi xanh hoặc 2 bi vàng, có $C_3^2 (C_3^2 + C_4^2) = 27$ cách.	0,25
7		<i>Tính thể tích và khoảng cách ...</i>	1,00
		Ta có $OA = OC = a, OB = OD = a\sqrt{3}, V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SO.S_{ABCD} = \frac{2a^3.\sqrt{3}}{3}$.	0,25
		Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia OD, OC, OS thì $O(0; 0; 0), A(0; -a; 0), B(-a\sqrt{3}; 0; 0), C(0; a; 0), D(a\sqrt{3}; 0; 0), S(0; 0; a), G(-\frac{a\sqrt{3}}{3}; 0; \frac{a}{3})$.	0,25
		Từ đó tính được $\overrightarrow{AD} = (a\sqrt{3}; a; 0), \overrightarrow{CG} = (-\frac{a\sqrt{3}}{3}; -a; \frac{a}{3}), [\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CG}] = (\frac{a^2}{3}; -\frac{a^2\sqrt{3}}{3}; -\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}), \overrightarrow{AC} = (0; 2a; 0)$.	0,25
		Vậy $d(AD, CG) = \frac{ \overrightarrow{AC} \cdot [\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CG}] }{ [\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CG}] } = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.	0,25
8		<i>Tìm tọa độ điểm B, C, D ...</i>	1,00

	Đặt $a = AB, b = BC, c = CD, d = DA, a + b + c + d = 12$. Ta có $9 = S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{CDA} = \frac{1}{2}.ab. \sin \widehat{ABC} + \frac{1}{2}cd. \sin \widehat{ADC} \leq \frac{1}{2}(ab + cd),$ $9 = S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}.ad. \sin \widehat{DAB} + \frac{1}{2}bc. \sin \widehat{BCD} \leq \frac{1}{2}(ad + cb),$ $\Rightarrow 36 \leq (ab + bc + cd + da) \quad (1).$ Đẳng thức ở (1) xảy ra khi $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = \widehat{DAB} = \widehat{BCD} = 90^\circ$ hay $ABCD$ là hình chữ nhật.	0,25
	Hơn nữa ta có $ab + bc + cd + da \leq \left(\frac{a + b + c + d}{2}\right)^2$ (2). Thật vậy, (2) $\Leftrightarrow (a - b + c - d)^2 \geq 0$. Đẳng thức ở (2) xảy ra khi $a + c = b + d$. Thay $a + b + c + d = 12$ vào (2) được $ab + bc + cd + da \leq 36$ (3). Từ (1) và (3) suy ở (1) và (3) cùng phải xảy ra đẳng thức, tức là $ABCD$ là hình chữ nhật thỏa mãn $a + c = b + d, a + b + c + d = 12$, dẫn tới $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng 3. Khi đó đường thẳng AC có phương trình $x - y - 3 = 0$.	0,25
	Gọi $C(t + 3; t)$, ta có $AC = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow 2(t + 1)^2 = 18 \Leftrightarrow t = 2, t = -4$. - Với $t = 2$ thì $C(5; 2)$. Trung điểm của AC là $I(\frac{7}{2}; \frac{1}{2})$. Đường thẳng BD vuông góc với AC tại I nên BD có phương trình $x + y - 4 = 0$. Gọi $D(m; 4 - m)$. Ta có $ID = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2(m - \frac{7}{2})^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow m = 5, m = 2$.	0,25
	Nhưng điểm D có cả hoành độ và tung độ là số dương nên ta lấy $m = 2$ và được $D(2; 2)$, suy ra $B(5; -1)$. - Với $t = -4$ thì $C(-1; -4)$, và $D(2; -4)$ hoặc $D(-1; -1)$, không thỏa mãn. Vậy $B(5; -1), C(5; 2), D(2; 2)$.	0,25
9	<i>Giải bất phương trình ...</i>	1,00
	Giải bất phương trình $2x^2\sqrt{2x^3 + 24x} < x^2 + 24x + 12$. (1) Xét phương trình $2x^2\sqrt{2x^3 + 24x} = x^2 + 24x + 12$ (2). Điều kiện $2x^3 + 24x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. Thấy $x = 0$ không là nghiệm của (2). Với $x > 0$ ta đặt $y = \sqrt{\frac{x^2 + 12}{2x}}$ thì $y > 0$ và $x^2 + 12 = 2xy^2$ (3).	0,25
	Từ (2) và (3) ta có $2x^2\sqrt{2x.2xy^2} = 2xy^2 + 24x, \Leftrightarrow 12 + y^2 = 2x^2y$ (4) (do $x > 0, y > 0$). Từ (3) và (4) suy ra $x^2 - y^2 = 2xy^2 - 2x^2y \Leftrightarrow (x - y)(x + y + 2xy) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (do $x > 0, y > 0$).	0,25
	Thế $y = x$ vào (3) ta được $12 + x^2 = 2x^3 \Leftrightarrow x = 2$, suy ra $y = 2$ (thỏa mãn $x > 0, y > 0$). Thử lại thấy $x = 2$ thỏa mãn phương trình (2). Như vậy (2) có nghiệm duy nhất $x = 2$.	0,25

	Bây giờ, ta xét hàm số liên tục $f(x) = 2x^2\sqrt{2x^3 + 24x} - x^2 - 24x - 12$ với $x \in [0; +\infty)$. Nhờ lập luận ở trên, ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Do đó trên mỗi tập $[0; 2)$, $(2; +\infty)$ hàm $f(x)$ không đổi dấu. Kiểm tra thấy $f(0) = -12 < 0$ nên $f(x) < 0$ với mọi $x \in [0; 2)$, và $f(3) = 18\sqrt{126} - 93 > 0$ nên $f(x) > 0$ với mọi $x \in (2; +\infty)$. Vậy $(1) \Leftrightarrow 0 \leq x < 2$.	0,25
10	Chứng minh bất đẳng thức ...	1,00
	Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác đã cho, $p = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}$. Chứng minh được $\left(\frac{a + b + c}{3}\right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$ (1). Suy ra $p^2 = \left(\frac{a + b + c}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$ (2). Ta lại có $S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c) \leq p\left(\frac{(p - a) + (p - b) + (p - c)}{3}\right)^3 = \frac{p^4}{27}$ nên $3\sqrt{3}S \leq p^2$ (3). Từ (2) và (3) suy ra $3\sqrt{3}S \leq m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$ (4). Đẳng thức ở (4) xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.	0,50
	Chỉ ra được $0 < a < \frac{1}{2}$, $0 < b < \frac{1}{2}$, $0 < c < \frac{1}{2}$. Dẫn tới $\frac{4}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = a^2 + b^2 + c^2 < \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}$ hay $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 < \frac{3}{8}$ (5). Từ (4) và (5) ta có điều phải chứng minh.	0,50