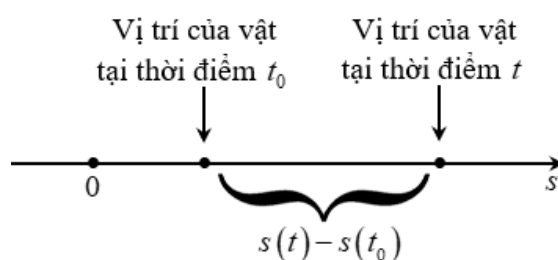


1 Một số bài toán dẫn đến khái niệm đạo hàm**a) Vận tốc tức thời của một vật chuyển động thẳng**

HĐ1. Một vật di chuyển trên một đường thẳng. Quãng đường s của chuyển động là một hàm số của thời gian t , $s = s(t)$ (được gọi là phương trình của chuyển động).



a) Tính vận tốc trung bình của vật trong khoảng thời gian từ t_0 đến t .

b) Giới hạn $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ cho ta biết điều gì?

Lời giải

a) Vận tốc trung bình của vật trong khoảng thời gian từ t_0 đến t là: $v_{av} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$

b) Giới hạn $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ cho ta biết $v = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$

b) Cường độ tức thời

HĐ2. Điện lượng Q truyền trong dây dẫn là một hàm số của thời gian t , có dạng $Q = Q(t)$.

a) Tính cường độ trung bình của dòng điện trong khoảng thời gian từ t_0 đến t .

b) Giới hạn $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$ cho ta biết điều gì?

Lời giải

a) Cường độ trung bình $I = \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$

b) Giới hạn này cho biết cường độ dòng điện tại thời điểm t_0 .



Nhận xét: Nhiều bài toán trong Vật lí, Hóa học, Sinh học,... đưa đến việc tìm giới hạn dạng

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ ở đó } y = f(x) \text{ là một hàm số đã cho.}$$

Giới hạn trên dẫn đến một khái niệm quan trọng trong Toán học, đó là khái niệm đạo hàm.

2 Đạo hàm của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$

tại điểm x_0 , kí hiệu bởi $f'(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$) tức là $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Chú ý: Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 \in (a; b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

1. Tính $f(x) - f(x_0)$.
2. Lập và rút gọn tỉ số $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ với $x \in (a; b), x \neq x_0$.
3. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Chú ý: Đặt $h = x - x_0$ khi đó đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm $x_0 = 1$ có thể tính như sau:

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(1+h)^2 + 2(1+h)] - (1^2 + 2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^2 + 4h + 3) - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 4) = 4.$$

Chú ý: $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

3 Đạo hàm của hàm số trên một khoảng

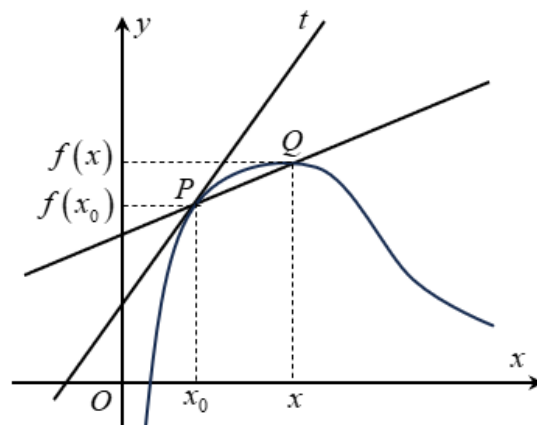
Chú ý: Nếu phương trình chuyển động của vật là $s = f(t)$ thì $v(t) = f'(t)$ là vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t .

4 Ý nghĩa hình học của đạo hàm

a) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Hệ số góc của đường thẳng đi qua hai điểm $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$

, với $x_1 \neq x_2$ là $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$





Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $P(x_0; f(x_0))$ là đường thẳng đi qua P với hệ số góc $k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ nếu giới hạn này tồn tại và hữu hạn, nghĩa là $k = f'(x_0)$. Điểm P gọi là tiếp điểm.

Nhận xét: Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $P(x_0; f(x_0))$ là đạo hàm $f'(x)$

b) Phương trình tiếp tuyến

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $P(x_0; y_0)$ là $y - y_0 = f'(x)(x - x_0)$, trong đó $y_0 = f(x_0)$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tính đạo hàm bằng định nghĩa

Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 \in (a; b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1:** Tính $f(x) - f(x_0)$.
- **Bước 2:** Lập và rút gọn tỉ số $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ với $x \in (a; b), x \neq x_0$.
- **Bước 3:** Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Ví dụ 1: Tính đạo hàm (bằng định nghĩa) của hàm số $y = 2x^2 + x + 1$ tại $x_0 = 2$.

Ví dụ 2: Tính đạo hàm (bằng định nghĩa) của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 3}$ tại $x; \forall x \in \mathbb{R}$

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ tại $x = 0$.

Ví dụ 4: Tìm a, b để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 1$.

Ví dụ 5: Tính đạo hàm của hàm số $y = x(x-1)(x-2)\dots(x-2021)$ tại điểm $x = 0$.

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x)$ xác định bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Giá trị $f'(0)$ bằng

**Dạng 2: Biến đổi, rút gọn, biểu diễn các biểu thức chứa lũy thừa**

Vận tốc tức thời tại thời điểm t_0 của chất điểm chuyển động với phương trình $s = s(t)$ là

$$v(t_0) = s'(t_0).$$

Cường độ tức thời tại thời điểm t_0 của một dòng điện với điện lượng $Q = Q(t)$ là

$$I(t_0) = Q'(t_0).$$

Ví dụ 7: Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là: $s = f(t) = t^2 + 4t + 6$ (t được tính bằng giây, s được tính bằng mét)

a) Tính đạo hàm của hàm số $f(t)$ tại điểm t_0 .

b) Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 5$.

Ví dụ 8: Cho biết điện lượng trong một dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q = 6t + 5$ (t được tính bằng giây, Q được tính bằng Coulomb). Tính cường độ của dòng điện trong dây dẫn tại thời điểm $t = 10$.

Ví dụ 9: Cho chuyển động được xác định bởi phương trình $s = 2t^3 + 6t^2 - t$, trong đó t được tính bằng giây và s được tính bằng mét. Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 3s$ là:

Ví dụ 10: Một chất điểm chuyển động có quãng đường được cho bởi phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 10$, trong đó $t > 0$ với t tính bằng giây (s) và s tính bằng mét (m). Hỏi tại thời điểm vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì quãng đường vật đi được bằng bao nhiêu?

**Dạng 3: Viết phương trình tiếp tuyến**

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Nếu tiếp tuyến có hệ số góc k thì ta giải phương trình $f'(x_0) = k$ tìm hoành độ tiếp điểm.

Ví dụ 11: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung.

Ví dụ 12: Cho hàm số $y = x^4 + 2x^2$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(1; 3)$ là

Ví dụ 13: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x + 1$ tại giao điểm của (C) với trục Oy có phương trình là:

Ví dụ 14: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ tại điểm có hoành độ $x = 1$.

Ví dụ 15: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ có phương trình là.

Ví dụ 16: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$.

Ví dụ 17: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ có đồ thị là (C) . Số tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 4x + 5$ của đồ thị hàm số là

Ví dụ 18: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm với trục tung.

Ví dụ 19: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x - 1$ tại điểm $M(1; 0)$ là

Ví dụ 20: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $N(0; 1)$ và hoành độ tiếp điểm là số thực âm.

**C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN**

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

B. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{f(x_0)}{x_0} \right)$.

C. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$.

D. $f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Câu 2: Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ nếu

A. $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 \in (a; b)$.

B. $y = f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (a; b)$.

C. $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x = a$ và $x = b$.

D. $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x = a$ hoặc $x = b$.

Câu 3: Nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị quãng đường di chuyển của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị điều gì?

A. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm t_0 .

B. Vị trí của chuyển động tại thời điểm t_0 .

C. Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 .

D. Quãng đường đã di chuyển của vật tại thời điểm t_0 .

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có $f'(2) = 5$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $M(2; 1)$ là

A. $y = 5x + 11$.

B. $y = 5x - 9$.

C. $y = 5x - 11$.

D. $y = 5x + 3$.

Câu 5: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là sai?

A. $(c)' = 0$ (với c là hằng số).

B. $(2x)' = 2$.

C. $(x^6)' = 6x^5$.

D. $(\sqrt{x})' = 2\sqrt{x}$ (với $x > 0$).

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2, & x > 0 \\ x + a, & x \leq 0 \end{cases}$. Khi hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 = 0$. Hãy tính

$T = a + b$.

A. $T = -4$.

B. $T = 0$.

C. $T = 3$.

D. $T = 4$.

Câu 7: Nếu $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 7$ thì ta kết luận



- A. $f'(3) = 3$. B. $f'(7) = 0$. C. $f'(7) = 3$. D. $f'(3) = 7$.

Câu 8: Hàm số $f(x) = x^2 - 5x$ có đạo hàm tại $x = 2$ là

- A. $f'(2) = -1$. B. $f'(2) = 9$. C. $f'(2) = -6$. D. $f'(2) = 10$.

Câu 9: Tính đạo hàm của hàm số $y = -x^2 + 2x$ tại $x_0 = 1$

- A. 2. B. -1. C. -2. D. 0.

Câu 10: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^3 + 1$ tại $x_0 = 2$

- A. 12. B. 13. C. 24. D. 9.

Câu 11: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ tại $x_0 = 1$

- A. Không tồn tại. B. 0 C. -1. D. -3.

Câu 12: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{4 - \sqrt{9-x}}{2} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Khi đó $f'(0)$ là kết quả nào sau đây?

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{16}$. C. $\frac{1}{32}$. D. $\frac{1}{12}$.

Câu 13: Đạo hàm của hàm số $y = 1$ là

- A. 1. B. 0. C. -1. D. Không xác định.

Câu 14: Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ trên $(0; +\infty)$ là

- A. $2\sqrt{x}$. B. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{x}}$. D. $\sqrt{x}$.

Câu 15: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{x+1}$ trên tập xác định là

- A. $-\frac{1}{(x+1)^2}$. B. $\frac{1}{x+1}$. C. $\frac{x}{x+1}$. D. $\frac{x}{(x+1)^2}$.

Câu 16: Đạo hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 5$ trên tập $\mathbb{R}$ là

- A. $f'(x) = 3x^2 + 6x + 1$. B. $f'(x) = x^2 + 3x + 1$.
C. $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$. D. $f'(x) = 9x + 1$.

Câu 17: Đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$ trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$ là

- A. $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$. B. $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{(x - 1)^2}$.
C. $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$. D. $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$.



- Câu 18:** Cho hàm số $f(x) = x^3 + 1$ có đồ thị (C) . Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x = 1$ là:
A. $f'(1) = 3$. B. $f'(1) = -3$. C. $f'(1) = 4$. D. $f'(1) = -4$.
- Câu 19:** Một chất điểm chuyển động có phương trình $S(t) = 4t^2 + 2$, với t tính bằng giây (s) và S là được tính bằng mét (m). Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t_0 = 4$ (s).
A. $v(4) = 32 \text{ m/s}$. B. $v(4) = 34 \text{ m/s}$.
C. $v(4) = 36 \text{ m/s}$. D. $v(4) = 8 \text{ m/s}$.
- Câu 20:** Cho hàm số $y = -x^3 + 2x^2 + 1$. Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $x_0 = -1$ của hàm số là
A. 7. B. 1. C. -1. D. -7.
- Câu 21:** Một vật chuyển động xác định bởi phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 3$ bằng bao nhiêu?
A. 4 m/s . B. 1 m/s . C. 3 m/s . D. 2 m/s .
- Câu 22:** Phương trình tiếp tuyến của hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là
A. $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$. B. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$. C. $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$. D. $y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$.
- Câu 23:** Cho hàm số $y = \sqrt{x-1}$. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ là?
A. $k = \frac{1}{4}$. B. $k = 2$. C. $k = \frac{1}{2}$. D. $k = \frac{1}{3}$.
- Câu 24:** Một chất điểm chuyển động có quãng đường được cho bởi phương trình $s(t) = \frac{1}{4}t^4 - t^3 + \frac{5}{2}t^2 + 10t$, trong đó $t > 0$ với t tính bằng giây (s) và s tính bằng mét (m). Hỏi tại thời điểm gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì vận tốc của vật bằng bao nhiêu?
A. 13. B. 11. C. 10. D. 12.
- Câu 25:** Chuyển động của một vật có phương trình $s = 5 + \sin\left(0,8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$, trong đó s tính bằng centimet và thời gian t tính bằng giây. Tính giá trị tuyệt đối của gia tốc của vật tại các thời điểm vận tốc bằng 0.
A. $0,64\pi^2$. B. $10,64\pi^2$. C. $0,32\pi^2$. D. $0,14\pi^2$.
- Câu 26:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với đường thẳng $y = -2$.
A. $y = -9x + 7$; $y = -2$. B. $y = -2$. C. $y = 9x + 7$; $y = -2$. D. $y = 9x + 7$; $y = 2$.
- Câu 27:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$.



A. $y = 9x + 7; y = 9x - 25$.

B. $y = 9x - 25$.

C. $y = 9x - 7; y = 9x + 25$.

D. $y = 9x + 25$.

Câu 28: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{45}x$.

A. $y = 45x - 173; y = 45x + 83$.

B. $y = 45x - 173$.

C. $y = 45x + 173; y = 45x - 83$.

D. $y = 45x - 83$.

Câu 29: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \frac{1}{x}$ biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$.

A. $x + 4y - 1 = 0; x + 4y + 1 = 0$.

B. $x + 4y - 4 = 0; x + 4y + 4 = 0$.

C. $y = -\frac{1}{4}x - 4; y = -\frac{1}{4}x + 4$.

D. $y = -\frac{1}{4}x$.

Câu 30: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết cosin góc tạo bởi tiếp tuyến và đường thẳng $\Delta: 4x - 3y = 0$ bằng $\frac{3}{5}$.

A. $y = 2; y = 1$.

B. $y = -2; y = 1$.

C. $y = -2; y = -1$.

D. $y = 2; y = -2$.

**D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI**

Câu 1: Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x) = x^2 + 2x$ tại điểm $x_0 = 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

b) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

c) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 4)$

d) $f'(1) = a \Rightarrow a > 5$

Câu 2: Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ tại điểm $x_0 = 0$ ta được $f'(0) = a$.

Khi đó:

a) $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

b) $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x+1}$

c) Phương trình $3^x = 3$ có nghiệm bằng $x = a - 2$

d) $\log_a 9 = 3$

Câu 3: Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2x^3$. Khi đó:

a) Với bất kì x_0 : $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

b) $f'(1) = -6$

c) $f'(0) = 0$

d) $f'(2) = 24$

Câu 4: Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{1-x}$ với $x \neq 1$. Khi đó:

a) Với bất kì $x_0 \neq 1$, ta có: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2}{(1-x)(1-x_0)}$

b) $f'(2) = 2$

c) $f'(3) = \frac{1}{3}$

d) $f'(2) + f'(3) = \frac{3}{2}$

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3$ có đồ thị (C) và điểm M thuộc (C) có hoành độ $x_0 = -1$. Khi đó:

a) Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M bằng 6

b) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M đi qua điểm $A(0; 4)$

c) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M cắt đường thẳng $d: y = 3x$ tại điểm có hoành độ bằng 4



d) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = -\frac{1}{6}x$

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \frac{2}{1-x}$ có đồ thị (C) và điểm $M(3; -1) \in (C)$. Khi đó:

a) Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M bằng $\frac{1}{2}$

b) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

c) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M vuông với đường thẳng $y = -2x - \frac{5}{2}$

d) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M đi qua điểm $A\left(0; -\frac{5}{2}\right)$

Câu 7: Tính được đạo hàm của mỗi hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra. Khi đó:

a) $y = x^2 - x$ tại $x_0 = 1$ có $f'(1) = 1$

b) $y = \sqrt{x}$ tại $x_0 = 1$ có $f'(1) = 1$

c) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ tại $x_0 = 0$ có $f'(0) = 0$

d) $y = \frac{1}{x+1}$ tại $x_0 = 2$ có $f'(2) = -\frac{1}{9}$

Câu 8: Cho hàm số $y = x^2 + 3x + 1$ có đồ thị (C) . Viết được phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung. Khi đó:

a) Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến bằng 3.

b) Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $A(1; 3)$

c) Phương trình tiếp tuyến cắt đường thẳng $y = 2x + 1$ tại điểm có hoành độ bằng 0

d) Phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + 1$

Câu 9: Viết được phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$. Khi đó:

a) Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến bằng 1.

b) Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1; 2)$

c) Phương trình tiếp tuyến cắt đường thẳng $y = 2x + 1$ tại điểm có hoành độ bằng $\frac{4}{3}$

d) Phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = x + 1$

Câu 10: Viết được phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+9}{x+1}$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x - 2y + 2 = 0$. Khi đó:

a) Có hai phương trình tiếp tuyến thỏa mãn.

b) Hệ số góc của tiếp tuyến bằng -2

c) Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $A(1; 5)$

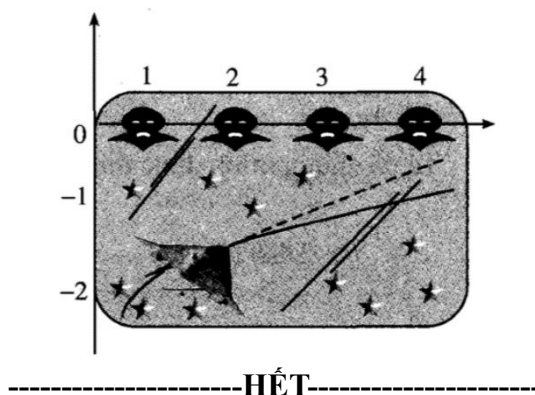
d) Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $B(1; -7)$

**E BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN**

- Câu 1:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-\sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.
- Câu 2:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.
- Câu 3:** Tìm tham số thực b để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ -\frac{x^2}{2} + bx - 6 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 2$.
- Câu 4:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} mx^2 + 2x + 2 & \text{khi } x > 0 \\ nx + 1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số m, n sao cho $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 0$.
- Câu 5:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số a, b sao cho $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 1$.
- Câu 6:** Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 2$ giây.
- Câu 7:** Một viên đạn được bắn lên cao theo phương trình $s(t) = 196t - 4,9t^2$ trong đó $t > 0$, t tính bằng giây kể từ thời điểm viên đạn được bắn lên cao và $s(t)$ là khoảng cách của viên đạn so với mặt đất được tính bằng mét. Tại thời điểm vận tốc của viên đạn bằng 0 thì viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét?
- Câu 8:** Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 9t + 2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Hỏi tại thời điểm nào thì vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất?
- Câu 9:** Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 8t + 3t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng mét/giây. Tìm gia tốc của chất điểm tại thời điểm mà vận tốc chuyển động là 11m/s
- Câu 10:** Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9,8\text{m/s}^2$ là gia tốc trọng trường. Tìm vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ t ($t = 5\text{s}$) đến $t + \Delta t$ với $\Delta t = 0,001\text{s}$.
- Câu 11:** Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = 6t^2 - 2t^3$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng 5 giây kể từ lúc vật bắt đầu chuyển động vận tốc lớn nhất của vật là bao nhiêu?



- Câu 12:** Một bình nuôi cấy vi sinh vật được giữ ở nhiệt độ 0°C . Tại thời điểm $t = 0$ (giây) người ta cung cấp nhiệt cho nó. Nhiệt độ tăng lên và được ước tính bởi hàm số $y = f(t) = t^2 + t + 1$ ($^{\circ}\text{C}$) với $f(t)$ là nhiệt độ của bình nuôi cấy ở thời điểm t . Hãy tính tốc độ tăng của bình tại thời điểm $t = 5$ giây.
- Câu 13:** Giả sử chi phí C (USD) để sản xuất Y máy tính là $C(Y) = Y^2 + 20Y + 300$. Ta gọi chi phí biên là chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ Y sản phẩm lên $Y + 1$ sản phẩm. Giả sử chi phí biên được xác định bởi hàm số $C'(Y)$. Nếu tăng số lượng sản phẩm từ 100 lên 101 thì chi phí tăng theo là bao nhiêu?
- Câu 14:** Giả sử chi phí C (nghìn đồng) để sản xuất X chiếc quạt điện là $C(X) = X^2 - 10X + 50$. Ta gọi chi phí biên là chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ X sản phẩm lên $X + 1$ sản phẩm. Giả sử chi phí biên được xác định bởi hàm số $C'(X)$. Nếu tăng số lượng sản phẩm từ 50 lên 51 thì chi phí tăng theo là bao nhiêu nghìn đồng?
- Câu 15:** Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = t^3 - 2t^2 + 30t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng 5 giây kể từ lúc vật bắt đầu chuyển động vận tốc nhỏ nhất của vật là bao nhiêu?
- Câu 16:** Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính quãng đường vật đi được từ lúc $t = 0$ đến lúc chuyển động có vận tốc bằng không.
- Câu 17:** Một vật di chuyển theo phương thẳng đứng lên trên từ độ cao 20m so với mặt đất với vận tốc ban đầu là 15m/s . Độ cao s của nó tính bằng mét sau t giây kể từ khi bắt đầu chuyển động $t = 0$ được cho bởi công thức $s = 20 + 15t - 5t^2$. Tìm vận tốc của vật khi nó chạm đất.
- Câu 18:** Trong một trò chơi điện tử, máy bay xuất hiện ở góc trái màn hình rồi bay sang phải theo quỹ đạo (C) là đồ thị của hàm số $y = -1 - \frac{1}{x}$, ($x > 0$). Biết rằng tên lửa được bắn ra từ máy bay tại một điểm thuộc (C) sẽ bay theo phương tiếp tuyến của (C) tại điểm đó. Tìm hoành độ x_0 thuộc (C) sao cho tên lửa bắn ra từ đó sẽ bắn trúng mục tiêu ở trên màn hình có tọa độ $(4, 0)$.





BÀI

02

CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Đạo hàm của một số hàm số thường gặp

Đạo hàm của hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$

Hàm số $y = x$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2 Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương

Giả sử các hàm số $u = u(x)$, $v = v(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$. Khi đó:

$$\oplus (u + v)' = u' + v'$$

$$\oplus (u - v)' = u' - v'$$

$$\oplus (uv)' = u'v + uv'$$

$$\oplus \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0)$$

Chú ý:

- Quy tắc tính đạo hàm của tổng, hiệu có thể áp dụng cho tổng, hiệu của hai hay nhiều hàm số.
- Với k là một hằng số, ta có: $(ku)' = ku'$.
- Đạo hàm của hàm số nghịch đảo: $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ ($v = v(x) \neq 0$).

3 Đạo hàm của hàm số hợp

Khái niệm hàm số hợp: Giả sử $u = g(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $(a; b)$, có tập giá trị chứa trong khoảng $(c; d)$ và $y = f(u)$ là hàm số xác định trên khoảng $(c; d)$. Hàm số $y = f(g(x))$ được gọi là hàm số hợp của hàm số $y = f(u)$ với $u = g(x)$.

Đạo hàm của hàm số hợp: Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm u'_x tại x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm y'_u tại u thì hàm số hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm y'_x tại x là $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

4 Đạo hàm của hàm số lượng giác

Đạo hàm của hàm số $y = \sin x$

- Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(\sin x)' = \cos x$.



- Đối với hàm số hợp $y = \sin u$, với $u = u(x)$, ta có: $(\sin u)' = u' \cdot \cos u$.

Đạo hàm của hàm số $y = \cos x$

- Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(\cos x)' = -\sin x$.
- Đối với hàm số hợp $y = \cos u$, với $u = u(x)$, ta có: $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$.

Đạo hàm của hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$

- Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- Đối với các hàm số hợp $y = \tan u$ và $y = \cot u$, với $u = u(x)$, ta có:

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}; (\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u} \text{ (giả thiết } \tan u \text{ và } \cot u \text{ có nghĩa).}$$

5 Đạo hàm của hàm số mũ và logarit

Giới hạn liên quan đến hàm số mũ và hàm số lôgarit

Nhận xét. Ta có các giới hạn sau:

$$\oplus \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\oplus \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\oplus \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Đạo hàm của hàm số mũ

- Hàm số $y = e^x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(e^x)' = e^x$.
- Đối với hàm số hợp $y = e^u$, với $u = u(x)$, ta có: $(e^u)' = u' \cdot e^u$.
- Hàm số $y = a^x (0 < a \neq 1)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.
- Đối với hàm số hợp $y = a^u$, với $u = u(x)$, ta có: $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$.

Đạo hàm của hàm số lôgarit

- Hàm số $y = \ln x$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- Đối với hàm số hợp $y = \ln u$, với $u = u(x)$, ta có: $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.
- Hàm số $y = \log_a x$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.
- Đối với hàm số hợp $y = \log_a u$, với $u = u(x)$, ta có: $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$.

Chú ý: Với $x < 0$, ta có: $\ln|x| = \ln(-x)$ và $[\ln(-x)]' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{1}{x}$. Từ đó ta có: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \forall x \neq 0$.

**B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN****Dạng 1: Đạo hàm của một số hàm số thường gặp**

Phương pháp: Sử dụng phối hợp các tính chất và công thức đạo hàm của các hàm số:

Đạo hàm của hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$

Hàm số $y = x$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Giả sử các hàm số $u = u(x)$, $v = v(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$. Khi đó:

$$\oplus (u + v)' = u' + v'$$

$$\oplus (u - v)' = u' - v'$$

$$\oplus (uv)' = u'v + uv'$$

$$\oplus \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0)$$

Chú ý:

- Quy tắc tính đạo hàm của tổng, hiệu có thể áp dụng cho tổng, hiệu của hai hay nhiều hàm số.
- Với k là một hằng số, ta có: $(ku)' = ku'$.
- Đạo hàm của hàm số nghịch đảo: $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ ($v = v(x) \neq 0$).

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = (1 - x^3)^5$

b) $f(x) = x^4 - x^2 + x + 200$

c) $f(x) = 3x^4 - x^3 + x - 2025$

d) $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{5}{x} + 7$

e) $f(x) = x - \frac{4}{x}$

f) $f(x) = -x^7 + 2x^5 + 3x^3$

g) $f(x) = (x+1)(x-2)$

h) $f(x) = \frac{3x+5}{-1+2x}$

i) $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

j) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

Bài tập 2: Tính đạo hàm của các hàm số sau đây:

a) $f(x) = -2x^2 + 3x$

b) $f(x) = x^4 - 3x^2 + \frac{1}{2}x + 3$

c) $f(x) = \frac{1}{6x-5}$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^6 - \frac{3}{x} + 2\sqrt{x}$



e) $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

f) $f(x) = -2x^5 + 4\sqrt{x}$

Bài tập 3: Cho hàm số $f(x) = 2^{3x+2}$.

a) Hàm số $f(x)$ là hàm hợp của các hàm số nào?

b) Tính đạo hàm của $f(x)$.

Bài tập 4: Một vật chuyển động rơi tự do có phương trình $h(t) = 100 - 4,9t^2$, ở đó độ cao h so với mặt đất tính bằng mét và thời gian t tính bằng giây. Tính vận tốc của vật:

a) Tại thời điểm $t = 5$ giây

b) Khi vật chạm đất

Bài tập 5: Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ ban đầu $v_0 = 196$ (m/s) (bỏ qua sức cản của không khí). Tìm thời điểm tại đó tốc độ của viên đạn bằng 0. Khi đó viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét (lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$) ?

**Dạng 2: Đạo hàm của hàm số lượng giác****Phương pháp:****Đạo hàm của hàm số $y = \sin x$**

- Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(\sin x)' = \cos x$.
- Đối với hàm số hợp $y = \sin u$, với $u = u(x)$, ta có: $(\sin u)' = u' \cdot \cos u$.

Đạo hàm của hàm số $y = \cos x$

- Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(\cos x)' = -\sin x$.
- Đối với hàm số hợp $y = \cos u$, với $u = u(x)$, ta có: $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$.

Đạo hàm của hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$

- Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- Đối với các hàm số hợp $y = \tan u$ và $y = \cot u$, với $u = u(x)$, ta có:

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}; (\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u} \text{ (giả thiết } \tan u \text{ và } \cot u \text{ có nghĩa).}$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính đạo hàm của các hàm số lượng giác sau:

- | | |
|---|---|
| a) $f(x) = \cot 2x$ | b) $f(x) = 3\sin x - 4\cos x + 2\tan x$ |
| c) $f(x) = 2\cos(x^2)$ | d) $f(x) = \sqrt{\cos 6x}$ |
| e) $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x - 2x + 2025$ | f) $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$ |

Bài tập 2: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

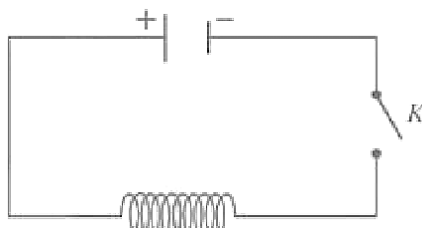
- | | |
|--|---|
| a) $y = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$ | b) $y = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)$ |
| c) $y = 2\cos x^2$ | d) $y = \tan \frac{x+1}{2}$ |
| e) $y = \sin \sqrt{2+x^2}$ | f) $y = \sin(\sin x)$ |
| g) $y = 2\sin^2 x - \cos 2x + x$ | h) $y = \cos^3(2x-1)$ |
| i) $y = \tan^3 x + \cot 2x$ | j) $y = \sin(x^2 - 3x + 2)$ |

Bài tập 3: Cho hàm số $f(x) = 2\sin^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$. Chứng minh rằng $|f'(x)| \leq 6$ với mọi x

Bài tập 4: Chuyển động của một hạt trên một dây rung được cho bởi $s(t) = 12 + 0,5\sin(4\pi t)$ trong đó s tính bằng cm và t tính bằng giây. Tính vận tốc của hạt sau t giây. Vận tốc cực đại của hạt là bao nhiêu?



Bài tập 5: Cho mạch điện như hình sau. Lúc đầu tụ điện có điện tích Q_0 . Khi đóng khóa K , tụ điện phóng điện qua cuộn dây; điện tích q của tụ điện phụ thuộc vào thời gian t theo công thức $q(t) = Q_0 \sin \omega t$, trong đó ω là tốc độ góc. Biết rằng cường độ $I(t)$ của dòng điện tại thời điểm t được tính theo công thức $I(t) = q'(t)$. Cho biết $Q_0 = 10^{-8} (C)$ và $\omega = 10^6 \pi (rad / s)$. Tính cường độ của dòng điện tại thời điểm $t = 6 s$ (tính chính xác đến $10^{-5} (mA)$)



**Dạng 3: Đạo hàm của hàm số mũ và hàm số logarit****Phương pháp:** Giới hạn liên quan đến hàm số mũ và hàm số logarit**Nhận xét.** Ta có các giới hạn sau:

$$\oplus \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\oplus \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\oplus \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Đạo hàm của hàm số mũ

- Hàm số $y = e^x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(e^x)' = e^x$.
- Đối với hàm số hợp $y = e^u$, với $u = u(x)$, ta có: $(e^u)' = u' \cdot e^u$.
- Hàm số $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$) có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.
- Đối với hàm số hợp $y = a^u$, với $u = u(x)$, ta có: $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$.

Đạo hàm của hàm số logarit

- Hàm số $y = \ln x$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- Đối với hàm số hợp $y = \ln u$, với $u = u(x)$, ta có: $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.
- Hàm số $y = \log_a x$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.
- Đối với hàm số hợp $y = \log_a u$, với $u = u(x)$, ta có: $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$.

Chú ý: Với $x < 0$, ta có: $\ln|x| = \ln(-x)$ và $[\ln(-x)]' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{1}{x}$. Từ đó ta có: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \forall x \neq 0$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN**Bài tập 1:** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \log_3(2x+1)$

b) $y = \log_3(1-2x)$

c) $y = 5^{2x-1}$

d) $y = 2025^{x-2025}$

e) $y = x + \ln(x+3)$

f) $y = e^{\sin x}$

g) $y = e^{2x-3} + e^{2025}$

h) $y = \log_2(x^2 - 2x)$

i) $y = \log_3(2x^2 - x + 1)$

j) $y = 3^x + \log_3(x - 2x^2)$

Bài tập 2: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x \cdot e^x$

b) $y = \log_2(x^2 + 1)$

c) $y = e^{-x^3 + x^2 + x}$

d) $y = 2024^{x^2 - 5x}$

e) $y = \log_{2024}(2x-1)$

f) $y = (-x^2 + 3x + 7)^7$

g) $y = x^2 e^x$

h) $y = \frac{x}{1 + \ln x}$

Dạng 4: Ứng dụng thực tế**Phương pháp:** Sử dụng phối kết hợp các kiến thức đã nêu**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

Bài tập 1: Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - t^2 + 3t - 4$, (t được tính bằng giây, s tính bằng mét). Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 5$ bằng bao nhiêu?

Bài tập 2: Nếu số lượng sản phẩm sản xuất được của một nhà máy là x (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là $P(x) = -150x^2 + 24000x - 35000$ (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 1000 sản phẩm.

Bài tập 3: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s = f(t)$ thỏa mãn $f''(t) = 2 + 3t$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Gia tốc tức thời tại điểm $t = 1$ giây của chuyển động bằng bao nhiêu?

Bài tập 4: Nhiệt độ cơ thể của một người trong thời gian bị bệnh được biểu diễn bởi công thức sau đây $T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6$ trong đó t là nhiệt độ (tính theo đơn vị đo nhiệt độ Fahrenheit) tại thời điểm t (tính theo ngày). Tìm tốc độ thay đổi của nhiệt độ (đơn vị: $^{\circ}F$ /ngày) ở thời điểm $t = 2$.

Bài tập 5: Dân số P (tính theo nghìn người) của một thành phố nhỏ được cho bởi công thức $P(t) = \frac{500t}{t^2 + 9}$ trong đó t là thời gian được tính bằng năm. Tìm tốc độ tăng dân số (đơn vị: nghìn người/năm) tại thời điểm $t = 7$ (làm tròn đến hàng phần chục).

Bài tập 6: Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 8t + 3t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng mét/giây. Tìm gia tốc của chất điểm tại thời điểm mà vận tốc chuyển động là 11 mét/giây.

Bài tập 7: Một chuyển động theo qui luật là $s = -\frac{1}{2}t^3 + 3t^2 + 20$ với t giây là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Quãng đường vật đi được bắt đầu từ lúc vật chuyển động tới thời điểm vật đạt được vận tốc lớn nhất bằng.

Bài tập 8: Một công ty xác định rằng tổng chi phí của họ (tính theo nghìn đô-la), để sản xuất x mặt hàng là $H(x) = \sqrt{5x^2 + 60}$ và công ty lên kế hoạch nâng sản lượng trong t tháng kể từ nay theo hàm số $x(t) = 20t + 40$. Chi phí sẽ tăng với tốc độ bao nhiêu nghìn đô-la/tháng sau 5 tháng kể từ khi công ty thực hiện kế hoạch đó? (làm tròn đến hàng phần chục).

Bài tập 9: Cho một vật chuyển động theo phương trình $s(t) = t^2 + mt + 10$. Trong đó: s là quãng đường vật đi được (mét) và t là thời gian vật chuyển động (giây). Xác định giá trị của tham số m biết tại thời điểm $t = 3$ thì vận tốc tức thời của vật là 4,5 m/s.

Bài tập 10: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5}$ (đơn vị: nghìn người). Biết rằng đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (đơn vị: nghìn người/năm). Hỏi vào năm 2025, tốc độ tăng dân số của thị trấn này là bao nhiêu nghìn người/năm? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trên khoảng $(0; +\infty)$, hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm là

- A. $y' = \frac{2}{\sqrt{x}}$. B. $y' = \frac{1}{2}\sqrt{x}$. C. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. D. $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) > 0$ là

- A. $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$. B. $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. C. $(-3; 1)$. D. $(-1; 3)$.

Câu 3: Đạo hàm của hàm số $y = 1 - \cos 2x$ là

- A. $y' = -\sin 2x$. B. $y' = 2\sin x$. C. $y' = -2\sin 2x$. D. $y' = 2\sin 2x$.

Câu 4: Hàm số $y = \tan x + \sqrt{3}x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ là

- A. $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$. B. $y' = \frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{3}$. C. $y' = -\frac{1}{\cos^2 x}$. D. $y' = -\frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{3}$.

Câu 5: Hàm số $y = \cos^2 5x$ có đạo hàm là

- A. $y' = 2\cos 5x$. B. $y' = 10\cos 5x$. C. $y' = -5\sin 10x$. D. $y' = 10\sin 10x$.

Câu 6: Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $(2^x)' = 2^x \ln 2$. B. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. C. $(\log_3 x)' = \frac{1}{x \ln 3}$. D. $(e^{2x})' = e^{2x}$.

Câu 7: Đạo hàm của hàm số $y = 4^{x^2+3}$ là

- A. $y' = (x^2 + 3) \cdot 4^{x^2+3}$. B. $y' = \ln 4 \cdot 4^{x^2+3}$. C. $y' = 2x \cdot \ln 4 \cdot 4^{x^2+3}$. D. $y' = 2x \cdot \ln 2 \cdot 2^{2x^2+6}$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$. Giá trị $f'(2)$ bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $-\frac{2}{3}$. D. $-\frac{1}{3}$.

Câu 9: Một chất điểm chuyển động có phương trình $S = t^3 - 3t^2 - 9t + 5$, trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Gia tốc tại thời điểm vận tốc bị triệt tiêu là

- A. $12m/s^2$. B. $9m/s^2$. C. $-9m/s^2$. D. $-12m/s^2$.

Câu 10: Đạo hàm của hàm số $y = x^{-\frac{2}{3}}$ là

- A. $y' = \frac{-2}{3}x^{\frac{1}{3}}$. B. $y' = x^{\frac{-5}{3}}$. C. $y' = \frac{-2}{3}x^{\frac{-5}{3}}$. D. $y' = x^{\frac{1}{3}}$.

Câu 11: Đạo hàm của hàm số $y = [u(x)]^\alpha$ là

- A. $\alpha \cdot [u(x)]^{\alpha-1}$. B. $\alpha \cdot [u(x)]^{\alpha-1} \cdot u'(x)$. C. $\alpha \cdot [u(x)]^{\alpha+1} \cdot u'(x)$. D. $\alpha \cdot [u(x)]^{\alpha-1} \cdot u'(x)$.

Câu 12: Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{4x^2 - 3x + 1}$ là

- A. $\frac{1}{2\sqrt{4x^2 - 3x + 1}}$. B. $\frac{8x - 3}{\sqrt{4x^2 - 3x + 1}}$. C. $\frac{8x - 3}{2\sqrt{4x^2 - 3x + 1}}$. D. $\frac{4x - 3}{2\sqrt{4x^2 - 3x + 1}}$.

- Câu 13:** Có bao nhiêu giá trị của tham số m trong đoạn $[-2023; 2023]$ để hàm số $y = x^2 + \ln(x + m + 2)$ đồng biến trên tập xác định của nó.
 A. 2022. B. 2023. C. 4046. D. 4047.
- Câu 14:** Cho hàm số $(C): y = x^{\frac{\pi}{2}}$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là
 A. $y = \frac{\pi}{2}x + 1$. B. $y = \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} + 1$. C. $y = -\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} + 1$. D. $y = \pi x - \pi + 1$.
- Câu 15:** Cho hàm số $y = \frac{1}{x+1+\ln x}$ với $x > 0$. Khi đó $-\frac{y'}{y^2}$ bằng:
 A. $\frac{x}{x+1}$. B. $1 + \frac{1}{x}$. C. $\frac{x}{1+x+\ln x}$. D. $\frac{x+1}{1+x+\ln x}$.
- Câu 16:** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?
 A. 216 (m/s). B. 30 (m/s). C. 400 (m/s). D. 54 (m/s).
- Câu 17:** Tính đạo hàm $y = \sqrt{\cos 6x}$
 A. $y' = \frac{3\sin 6x}{2\sqrt{\sin 6x}}$. B. $y' = \frac{-3\sin 6x}{\sqrt{\sin 6x}}$. C. $y' = \frac{3\sin 6x}{\sqrt{\sin 6x}}$. D. $y' = \frac{-3\sin 6x}{2\sqrt{\sin 6x}}$.
- Câu 18:** Cho hàm số $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x - 2x + 2020$. Số nghiệm của phương trình $y' = 0$ trong đoạn $[0; 4\pi]$ là
 A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.
- Câu 19:** Cho hàm số $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$. Tính giá trị biểu thức $P = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) - f'\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.
 A. $P = \frac{4}{3}$. B. $P = \frac{4}{9}$. C. $P = \frac{4}{7}$. D. $P = \frac{8}{3}$.
- Câu 20:** Hàm số $y = 2x + \ln(x^2 - x + 1)$ có đạo hàm là
 A. $y' = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$. B. $y' = \frac{2x^2 + 2}{x^2 - x + 1}$. C. $y' = \frac{x^2 + x}{x^2 - x + 1}$. D. $y' = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$.
- Câu 21:** Cho hàm số $f(x) = e^x + e^{2x}$. Chọn khẳng định đúng
 A. $f'(0) = 3$. B. $f'(1) = 3e$. C. $f'(-1) = -3e$. D. $f'(2) = 5e^2$.
- Câu 22:** Cho $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ và $g(x) = e^x + x^2 + x + 1$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(1)x^2 - \frac{g'(0)}{2}x - 3g(0) \leq 0$ là
 A. $(-2; 3)$. B. $(-2; 3]$. C. $[-2; 3]$. D. $(0; 3]$.
- Câu 23:** Cho hàm số $f(x) = xe^x$. Chọn khẳng định sai
 A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 5)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 1)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-10; -4)$.

Câu 24: Cho hàm số $f(x) = \ln(x^2 + 2023)$. Biết rằng trên đoạn $[1; \sqrt{3}]$ hàm số đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất theo thứ tự bằng $\ln a$ và $\ln b$. Số các giá trị nguyên dương m thỏa mãn $m \leq a + b$ là

- A. 2049. B. 2050. C. 2051. D. 2048.

Câu 25: Cho hàm số $f(x) = \ln \frac{2023x}{x+1}$. Tính tổng $S = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2023)$.

- A. $\ln 2023$. B. 1. C. 2023. D. $\frac{2023}{2024}$.

Câu 26: Cho hàm số $y = \sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}} \cdot x^{\frac{1}{32}}$, ($x > 0$). Đạo hàm của hàm số trên là:

- A. $y' = e^{\frac{15}{16}} \cdot x^{-\frac{31}{32}}$. B. $y' = \frac{\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}}}{32 \cdot \sqrt[32]{x^{31}}}$. C. $y' = e^{\frac{15}{16}} \cdot x^{\frac{31}{32}}$. D. $y' = \frac{\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}}}{2\sqrt{x}}$.

Câu 27: Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + m}{x + m}$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến của đồ thị tại hai điểm đó vuông góc với nhau.

- A. 5. B. 2. C. 0. D. 1.

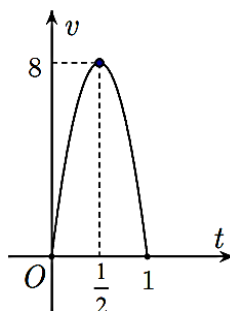
Câu 28: Một chuyển động theo qui luật là $s = -\frac{1}{2}t^3 + 3t^2 + 20$ với t giây là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Quãng đường vật đi được bắt đầu từ lúc vật chuyển động tới thời điểm vật đạt được vận tốc lớn nhất bằng

- A. $20m$. B. $28m$. C. $32m$. D. $36m$.

Câu 29: Một con lắc lò xo chuyển động điều hòa theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát, có phương trình chuyển động $x = 2\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) - 5$, trong đó t tính bằng giây (s) và x tính bằng centimet (cm). Tìm thời điểm mà vận tốc tức thời của con lắc lò xo bằng 0?

- A. $t = \frac{1}{3} + k$ (s); ($k \in \mathbb{Z}$). B. $t = 2 + k$ (s); ($k \in \mathbb{Z}$).
C. $t = \frac{2}{3} + k$ (s); ($k \in \mathbb{Z}$). D. $t = \frac{5}{3} + k$ (s); ($k \in \mathbb{Z}$).

Câu 30: Một vật chuyển động trong 1 giờ với vận tốc v phụ thuộc vào thời gian t có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(\frac{1}{2}; 8)$ và trục đối xứng song song với trục tung. Tính gia tốc của vật lúc $t = 0,25(h)$





- A. $16(km/h^2)$. B. $-16(km/h^2)$. C. $8(km/h^2)$. D. $-8(km/h^2)$.

Câu 31: Một chất điểm có phương trình chuyển động là $s(t) = \sin \frac{\pi}{3t+1} + 2t^2$ (m). Vận tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm $t = 1$ (s) gần bằng

- A. 3,48 (m/s). B. 3,58 (m/s). C. 4,36 (m/s). D. 4,28 (m/s).

Câu 32: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ biểu thức có dạng $\frac{ax+b}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. Khi đó $P = a.b$ bằng:

- A. $P = 1$. B. $P = -1$. C. $P = 2$. D. $P = -2$.

Câu 33: Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t) = 2t^4 + 6t^2 - 3t + 1$ với t tính bằng giây (s) và s tính bằng mét (m). Hỏi gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3$ (s) bằng bao nhiêu?

- A. $88(m/s^2)$. B. $228(m/s^2)$. C. $64(m/s^2)$. D. $76(m/s^2)$.

Câu 34: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 + 2t^2 - 5t - 1$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 2$ giây.

- A. $16 m/s^2$. B. $5 m/s^2$. C. $10 m/s^2$. D. $15 m/s^2$.

Câu 35: Đạo hàm của hàm số $y = x^{2023} + 2\sqrt{x}$ tại $x = 1$ bằng

- A. 2024. B. 2025. C. 3. D. $\frac{4047}{2}$.

Câu 36: Cho hàm số $y = 2x - \frac{1}{x}$. Tính giá trị của biểu thức $M = y'(-1) - 4y'(2)$.

- A. 3. B. $\frac{9}{4}$. C. -6. D. 12.

Câu 37: Vị trí của một vật chuyển động thẳng được cho bởi hàm số $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây là

- A. 6 m/s. B. 7 m/s. C. 8 m/s. D. 9 m/s.

Câu 38: Hàm số $y = \log_{\sqrt{2}} x + \log_{\sqrt[3]{2}} x + \log_{\sqrt[5]{2}} x + \dots + \log_{\sqrt[2024]{2}} x$ có đạo hàm là

- A. $\frac{1025156x}{\ln 2}$. B. $\frac{1025156}{x \ln 2}$. C. $1025156 \cdot \ln 2 \cdot x$. D. $\frac{1025156 \ln 2}{x}$.

Câu 39: Hàm số $y = \frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}}$ có đạo hàm là

- A. $\frac{\ln 3 \cdot 9^x}{(9^x - 1)^2}$. B. $\frac{\ln 81 \cdot 9^x}{(9^x - 1)^2}$. C. $-\frac{\ln 3 \cdot 9^x}{(9^x - 1)^2}$. D. $-\frac{\ln 81 \cdot 9^x}{(9^x - 1)^2}$.

Câu 40: Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay, doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe Honda Future Fi với chi phí mua vào một chiếc xe là 27 (triệu đồng) và bán với giá 31 (triệu đồng) một chiếc. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 (triệu đồng) mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để xe khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất?

- A. 29 triệu đồng. B. 30 triệu đồng. C. 29,5 triệu đồng. D. 30,5 triệu đồng.

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

Câu 1: Cho hai hàm số $f(x) = x^{2024}$ và $g(x) = 3x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f'(x) = x^{2023}$.

b) $g'(x) = 3$.

c) $[f(x) + g(x)]' = 2024x^{2023} + 3$.

d) $[g(x) - 2]' = 1$.

Câu 2: Cho hai hàm số $f(x) = \frac{3}{x+1}$ và $g(x) = \frac{x^2}{x+2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2}, \forall x \neq -1$.

b) $[g(x)]' = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}, \forall x \neq -2$.

c) $[f(x).g(x)]' = f'(x).g'(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; -2\}$.

d) $g'(1) = -1$.

Câu 3: Cho bốn hàm số $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \tan x$ và $k(x) = \cot x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f'(x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $g'(x) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$.

c) $[h(x)]' = \frac{1}{\cos^2 x}, \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

d) $[k(x)]' = \frac{1}{\sin^2 x}, \forall x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 4: Cho bốn hàm số $f(x) = \ln x$, $g(x) = e^x$, $h(x) = 2024^x$ và $k(x) = \log_3 x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f'(x) = -\frac{1}{x}, \forall x > 0$.

b) $g'(x) = x.e^{x-1}, \forall x \in \mathbb{R}$.

c) $[h(x)]' = 2024^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

d) $[k(x)]' = \frac{1}{x \ln 3}, \forall x > 0$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \log_2 x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $y' = \frac{\ln 2}{x}, \forall x > 0.$

b) $y' = \frac{1}{x \ln 2}, \forall x > 0.$

c) $y'(1) = \frac{1}{\ln 2}.$

d) $y'(4) = \frac{1}{\ln 8}.$

Câu 6: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x + 3$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.b) $y' < 0 \forall x \in \mathbb{R}.$ c) y' đạt giá trị lớn nhất tại $x = 0$.d) $y'(0) = 1.$

Câu 7: Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi công thức $s(t) = 10 + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi t\right)$, trong đó s tính bằng centimet và t được tính bằng giây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Gia tốc của hạt tại thời điểm $t = 3$ giây là $-16\pi^2 \text{ cm/s}^2$ b) Vận tốc của hạt tại thời điểm $t = 3$ giây là $2\pi \text{ cm/s}.$ c) Vận tốc lớn nhất của hạt đạt được là $4\pi\sqrt{2} \text{ cm/s}.$ d) Gia tốc nhỏ nhất của hạt đạt được là $-16\pi^2 \text{ cm/s}^2.$

Câu 8: Một tài xế đang lái xe ô tô, ngay khi phát hiện có vật cản phía trước đã phanh gấp lại nhưng vẫn xảy ra va chạm, chiếc ô tô để lại vết trượt dài 20,4 m (được tính từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi xảy ra va chạm). Trong quá trình đạp phanh, ô tô chuyển động theo phương trình $s(t) = 20t - \frac{5}{2}t^2$, trong đó s (đơn vị mét) là độ dài quãng đường đi được sau khi phanh, t (đơn vị giây) là thời gian tính từ lúc bắt đầu phanh ($0 \leq t \leq 4$). Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Vận tốc tức thời của ô tô ngay khi đạp phanh là 20 (m/s)

b) Xe ô tô trên chưa chạy quá tốc độ, (tốc độ giới hạn cho phép là 70 km/h.

c) Thời điểm xảy ra va chạm cách thời điểm bắt đầu đạp phanh 6,8 giây

d) Vận tốc tức thời của ô tô ngay khi xảy ra va chạm là 14(m/s)

Câu 9: Một viên đạn được bắn lên cao theo phương thẳng đứng có phương trình chuyển động $s(t) = 2 + 196t - 4,9t^2$, trong đó $t \geq 0$, t giây là thời gian chuyển động, s (m) là độ cao so với mặt đất. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Sau 20 giây kể từ khi bắn thì viên đạn đạt được độ cao 1962 m.

b) Vận tốc tức thời của viên đạn ngay khi viên đạn được bắn ra là 196(m/s)

c) Vận tốc tức thời của viên đạn khi viên đạn đạt được độ cao 1962 m là 5(m/s).



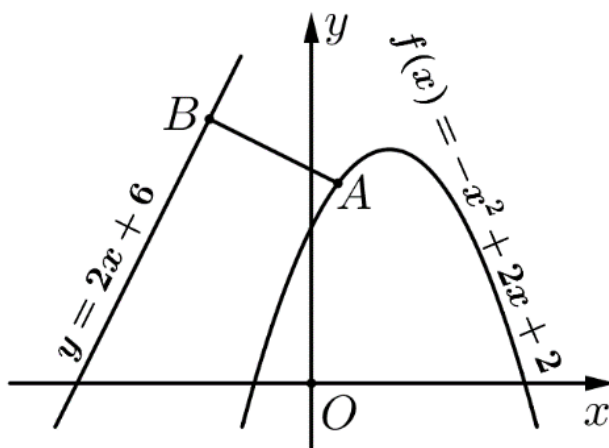
d) Tại thời điểm viên đạn đạt vận tốc tức thời bằng 98 m/s thì viên đạn đang ở độ cao 1472 m so với mặt đất

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{khi } x < 1 \\ -\frac{1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$.
- b) Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x=1$.
- c) Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$ và hàm số $f(x)$ cũng có đạo hàm tại $x=1$.
- d) Hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại $x=1$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Biết A, B là hai điểm di động trên Parabol $(P): f(x) = -x^2 + 2x + 2$ và đường thẳng $\Delta: y = 2x + 6$ (tham khảo hình bên). Độ dài AB nhỏ nhất bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



Câu 2: Một vật dao động điều hoà có phương trình $x = 5 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ trong đó li độ x tính bằng cm và thời gian t tính bằng giây. Xét thời điểm đầu tiên vật có gia tốc lớn nhất, li độ x khi đó bằng bao nhiêu?

Câu 3: Cân nặng trung bình của một bé gái trong độ tuổi từ 0 đến 36 tháng có thể được tính gần đúng bởi hàm số $w(t) = 0,000758t^3 - 0,0596t^2 + 1,82t + 8,15$, trong đó t được tính bằng tháng và w được tính bằng pound

(Nguồn: https://www.cde.gov/growthcharts/data/who/GrChrt_Boys).

Tính tốc độ thay đổi cân nặng của bé gái đó tại thời điểm 10 tháng tuổi.

Câu 4: Trong thuyết động học phân tử chất khí với một khối khí lí tưởng thì các đại lượng áp suất $p(Pa)$, thể tích $V(m^3)$, nhiệt độ $T(K)$, số mol $n(mol)$ liên hệ với nhau theo phương trình: $pV = nRT$, trong đó $R = 8,31(J / mol.K)$ là hằng số.

(Nguồn: James Stewart, Calculus)

Một bóng thám không chứa 8 mol khí hydrogen ở trạng thái lí tưởng có áp suất không đổi $p = 10^5 Pa$. Tính tốc độ thay đổi thể tích theo nhiệt độ của khối khí trong bóng thám không.

Câu 5: Nếu số lượng sản phẩm được của một nhà máy là x (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là $P(x) = -200x^2 + 12800x - 74000$ (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 1200 sản phẩm.

Câu 6: Nhiệt độ cơ thể của một người trong thời gian bị bệnh được cho bởi công thức

$$T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6$$

Trong đó T là nhiệt độ (tính theo đơn vị đo nhiệt độ Fahrenheit) tại thời điểm t (tính theo ngày). Tìm tốc độ thay đổi của nhiệt độ ở thời điểm $t = 1,5$.

(Nguồn: <https://www.algebra.com/algebra/homework/Trigonometry-basics/Trigonometry-basics.faq.question.1111985.html>)

Câu 7: Kính viễn vọng không gian Hubble được triển khai vào ngày 24 tháng 4 năm 1990, bởi tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong nhiệm vụ này từ khi xuất phát tại $t = 0$ (s) cho đến khi tên lửa đẩy nhiên liệu rắn bị loại bỏ ở $t = 126$ (s) được xác định theo phương trình sau: $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,61t - 3,083$ (f / s).

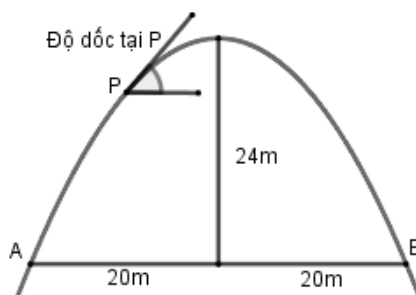
(Nguồn: James Stewan, Calculus)

Tính gia tốc tức thời của tàu con thoi trên tại thời điểm $t = 100$ (s) (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Câu 8: Một chất điểm chuyển động có quãng đường được cho bởi phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 10$, trong đó $t > 0$ với t tính bằng giây và s tính bằng mét. Hỏi tại thời điểm vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì quãng đường vật đi được bằng bao nhiêu?

Câu 9: Một đoàn tàu chuyển động thẳng khởi hành từ một nhà ga. Quãng đường đi được của đoàn tàu là một hàm số của thời gian t được cho bởi phương trình $s(t) = 10 + t + 9t^2 - t^3$ trong đó s tính bằng mét, t tính bằng giây. Trong 5 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, đoàn tàu đạt vận tốc lớn nhất bằng bao nhiêu?

Câu 10: Người ta xây một cổng chào hình Parabol biết khoảng cách giữa hai điểm A và B dưới chân cổng là $40m$, chiều cao từ đỉnh cổng đến mặt đất là $24m$. Độ dốc tối đa của cổng gần nhất với kết quả nào sau đây? (Độ dốc của cổng tại một điểm được xác định bởi góc giữa phương tiếp xúc với bề mặt Parabol và phương ngang).



Câu 11: Một doanh nghiệp sản xuất hàng hóa. Biết tổng chi phí sản xuất x đơn vị sản phẩm là: $C(x) = 2x^3 - 3x^2 + 400x + 5000$ (nghìn đồng). Tổng số tiền thu được khi bán x đơn vị sản phẩm đó là: $R(x) = 4000x - 33x^2$ (nghìn đồng). Sản lượng tối ưu và doanh thu lúc đó của doanh nghiệp tương ứng là

Câu 12: Sau khi uống đồ uống có cồn, nồng độ cồn trong máu tăng lên rồi giảm dần được xác định bằng hàm số $C(t) = 1,35te^{-2902t}$, trong đó C (mg / ml) là nồng độ cồn, t (h) là thời điểm đo tính từ ngay sau khi uống 15ml đồ uống có cồn.



(Nguồn: P. Wilkinson et al., *Pharmacokinetics of Ethanol after Ora' Administration in the Fasting State*, 1977)

Giả sử một người uống hết nhanh 15ml đồ uống có cồn. Tính tốc độ chuyển hoá nồng độ cồn trong máu của người đó tại thời điểm $t = 3$ (h) (làm tròn kết quả đến hàng phần triệu).

-----HẾT-----



BÀI

03

ĐẠO HÀM CẤP HAI

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Định nghĩa đạo hàm cấp hai

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mỗi điểm $x \in (a; b)$. Nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ tại x , kí hiệu là y'' hoặc $f''(x)$.

2 Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Một chuyển động có phương trình $s = f(t)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) của hàm số $f(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động. Ta có:

$$a(t) = f''(t)$$

**B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN****Dạng 1: Tính đạo hàm cấp hai**

Phương pháp: Cho hàm số $y = f(x)$, tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ ta thực hiện các bước sau:

- **Bước 1:** Tính đạo hàm cấp một: $y' = f'(x)$
- **Bước 2:** Lấy kết quả của đạo hàm cấp một đem đi đạo hàm: $(y')' = (f'(x))'$
- **Bước 3:** Kết luận: $y'' = f''(x)$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{1-x}$

b) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

c) $y = \tan x$

d) $y = \cos^2 x$

e) $y = \sin 5x \cos 2x$

f) $y = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$

g) $y = \frac{x}{x^2-1}$

h) $y = \frac{x-1}{x+2}$

i) $y = x^2 \sin x$

j) $y = x\sqrt{1+x^2}$

k) $y = (1-x^2) \cos x$

l) $y = \sqrt{x}$

m) $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$

n) $y = \frac{x^2}{1-x}$

p) $y = x \cos 2x$

q) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Bài tập 2: Cho $f(x) = (x-3)^6$. Tính $f''(2)$.

Bài tập 3: Đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ tại điểm $x = 2$ là:

Bài tập 4: Cho $f(x) = \sin 3x$. Giá trị của $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ bằng:

Bài tập 5: Thực hiện các yêu cầu sau:

a) Cho $f(x) = (x+10)^6$. Tính $f''(2)$.

b) Cho $f(x) = \sin 3x$. Tính $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $f''(0)$, $f''\left(\frac{\pi}{18}\right)$.

**Dạng 2: Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai**

Phương pháp: Một chuyển động có phương trình $s = f(t)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) của hàm số $f(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động. Ta có:

$$a(t) = f''(t)$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi $s(t) = 10 + 0,5 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right)$, trong đó s tính bằng centimét (cm) và t tính bằng giây (s). Tính gia tốc của hạt tại thời điểm $t = 5$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Bài tập 2: Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t) = t^4 - 4t^2 + 4$, trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$ là?

Bài tập 3: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = -t^3 + 3t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

Bài tập 4: Một chuyển động xác định bởi phương trình $S(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$. Trong đó t được tính bằng giây, S được tính bằng mét. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3$ s ?

Bài tập 5: Một chất điểm chuyển động có phương trình $S = 2t^4 + 6t^2 - 3t + 1$ với t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Hỏi gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3$ (s) bằng bao nhiêu?

Bài tập 6: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = -t^3 + 6t^2$ với t là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $s(t)$ là quang đường đi được trong thời gian t . Tính gia tốc tại thời điểm t mà tại đó vận tốc đạt giá trị lớn nhất.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Nếu $y = x^n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ thì y'' bằng

- A. $n(n+1)x^{n-2}$. B. $\frac{n}{n-1}x^{n-2}$. C. $n(n-1)x^{n-1}$. D. $n(n-1)x^{n-2}$.

Câu 2: Cho $f(x) = x^3$. Tính $f''(1)$.

- A. $f''(1) = 3$. B. $f''(1) = 2$. C. $f''(1) = 6$. D. $f''(1) = 1$.

Câu 3: Cho hàm số $y = -\frac{1}{x}$. Đạo hàm cấp hai của hàm số là

- A. $y'' = \frac{2}{x^3}$. B. $y'' = \frac{-2}{x^2}$. C. $y'' = \frac{-2}{x^3}$. D. $y'' = \frac{-1}{x^2}$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \sqrt{-x+5}$. Tính y'' .

- A. $y'' = \frac{1}{4\sqrt{(-x+5)^3}}$. B. $y'' = \frac{1}{2\sqrt{(-x+5)^3}}$. C. $y'' = \frac{-1}{4\sqrt{(-x+5)^3}}$. D. $y'' = \frac{-1}{8\sqrt{(-x+5)^3}}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+3}$. Tính y'' .

- A. $y'' = \frac{-5}{(x+3)^3}$. B. $y'' = \frac{10}{(x+3)^2}$. C. $y'' = \frac{-10}{(x+3)^3}$. D. $y'' = \frac{5}{(x+3)^3}$.

Câu 6: Cho hàm số $y = x \cos x$. Tìm hệ thức đúng trong các hệ thức sau:

- A. $y'' + y = \sin x + 2x \cos x$. B. $y'' + y = 2 \sin x$.
C. $y'' + y = -\sin x + x \cos x$. D. $y'' + y = -2 \sin x$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \sin 2x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $y^2 + (y')^2 = 4$. B. $y = y' \tan 2x$. C. $4y - y'' = 0$. D. $4y + y'' = 0$.

Câu 8: Cho hàm số $y = x^2 2^x$. Tính y'' .

- A. $(2 + 2x \ln 2 + x^2 \ln^2 2) 2^x$. B. $(2 + 4x \ln 2 + x^2 \ln 2) 2^x$.
C. $(2 + 4x \ln 2 + x^2 \ln^2 2) 2^x$. D. $(2 + 4x \ln 2 + x \ln^2 2) 2^x$.

Câu 9: Cho hàm số $y = \sin^3 x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $y'' + 9y - \sin x = 0$. B. $y'' + 9y - 6 \sin x = 0$.
C. $y'' + 9y - 6 \cos x = 0$. D. $y'' + 9y + 6 \sin x = 0$.

Câu 10: Phương trình chuyển động của một chất điểm được biểu thị bởi công thức $S(t) = 4 - 2t + 4t^2 + 2t^3$, trong đó $t > 0$ và t tính bằng giây (s), $S(t)$ tính bằng mét (m). Tìm gia tốc a của chất điểm tại thời điểm $t = 5(s)$.

- A. $a = 68(m/s^2)$. B. $a = 115(m/s^2)$. C. $a = 100(m/s^2)$. D. $a = 225(m/s^2)$.



Câu 11: Cho $f(x) = \frac{x^2}{-x+1}$. Tính $f''(x)$.

- A. $\frac{2}{(x-1)^3}$. B. $-\frac{2}{(x-1)^3}$. C. $-\frac{1}{(x-1)^3}$. D. $-\frac{2}{(x-1)^2}$

Câu 12: Cho chuyển động xác định bởi phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 - \frac{2}{5}t + 3(m), t(s)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Gia tốc của chuyển động bằng 0 khi $t = 0$.
B. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 4$ là $a = 18m/s^2$.
C. Vận tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$ là $v = 18m/s$.
D. Vận tốc của chuyển động bằng 0 khi $t = 0$.

Câu 13: Cho hàm số $y = \sin^2 x$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $2y' + y'' = 2\sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$. B. $4y - y'' = 2$.
C. $4y + y'' = 2$. D. $2y' + y'' \cdot \tan x = 0$.

Câu 14: Cho hàm số $y = x^4 - mx^3 + 3mx^2 - x + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số để $y'' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $m \in (0; 8)$. B. $m \in (0; 4)$. C. $m \in (0; 6)$. D. $m \in (0; 9)$

Câu 15: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = x^6 - 4x^3 + 2x + 2023$ với $x \in \mathbb{R}$ là

- A. $y'' = 30x^4 - 24x + 2$. B. $y'' = 30x^4 - 24x$. C. $y'' = 6x^5 - 12x^2 + 2$. D. $y'' = 6x^5 - 12x^2$.

Câu 16: Nếu $y = \frac{1}{x}$ thì y'' bằng

- A. $\frac{1}{x^3}$. B. $-\frac{1}{x^3}$. C. $\frac{-2}{x^3}$. D. $\frac{2}{x^3}$.

Câu 17: Nếu $y = \sqrt{x}, x > 0$ thì y'' bằng

- A. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. B. $-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$. C. $\frac{-2}{\sqrt{x^3}}$. D. $\frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$.

Câu 18: Nếu $y = e^{2x}$ thì y'' bằng

- A. $4e^{2x}$. B. $2e^{2x}$. C. e^{2x} . D. 1.

Câu 19: Nếu $y = \sin 2x$ thì y'' bằng

- A. $-4\sin 2x$. B. $4\sin 2x$. C. $4\cos 2x$. D. $\sin 2x$.

Câu 20: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2023$. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $y'' > 0$.

- A. $[1; +\infty)$. B. $[0; 2]$. C. $(0; 2)$. D. $(1; +\infty)$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x) = x^3 + 2x - 2024$, giá trị của $f''(1)$ bằng

- A. 6. B. 8. C. 3. D. 2.

Câu 22: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ Tính $f''(1)$



A. $f''(1) = 4$. B. $f''(1) = 2$. C. $f''(1) = \frac{1}{2}$. D. $f''(1) = -\frac{1}{4}$.

Câu 23: Cho hàm số $y = \sin x + x$. Khi đó đạo hàm cấp hai của hàm số tại $x = \frac{\pi}{2}$ có giá trị bằng:

A. $\frac{\pi}{2}$. B. 0. C. -1. D. 1.

Câu 24: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \frac{1}{x}$ là:

A. $y'' = -\frac{1}{x^2}$. B. $y'' = \frac{2}{x^3}$. C. $y'' = \frac{1}{x^2}$. D. $y'' = -\frac{2}{x^3}$.

Câu 25: Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - 3x^2 + x - 1$.

A. $f''(x) = 4x^2 - 6x + 1$. B. $f''(x) = 4x^2 - 6$.
C. $f''(x) = 4x^2$. D. $f''(x) = 4x^2 + 1$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x) = 2x^3 + 3x$. Khi đó giá trị $f''(-1)$ bằng:

A. -5. B. 9. C. 12. D. -12.

Câu 27: Cho hàm số $f(x) = x - e^x$. Khi đó giá trị $f''(2)$ bằng:

A. $-e^2$. B. $2 - e^2$. C. $1 - e^2$. D. $-e$.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x) = 3\sin x - 5\cos x$. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$.

A. $f''(x) = 3\cos x + 5\sin x$. B. $f''(x) = -3\sin x + 5\cos x$.
C. $f''(x) = 3\cos x - 5\sin x$. D. $f''(x) = 3\sin x - 5\cos x$.

Câu 29: Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \ln x$ với $x > 0$.

A. $y'' = -\frac{1}{x^2}$. B. $y'' = \frac{1}{x}$. C. $y'' = -\frac{1}{x}$. D. $y'' = \frac{1}{x^2}$.

Câu 30: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = e^{-2x+1}$ bằng:

A. e^{-2x+1} . B. $-e^{-2x+1}$. C. $-2x(-2x+1)e^{-2x-1}$. D. $4e^{-2x+1}$.

Câu 31: Biết đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \ln(3x-1)$ có dạng $\frac{a}{(3x-1)^b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Khi đó $2a+b$ bằng:

A. 0. B. -4. C. -16. D. 4.

Câu 32: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + 2023x - 2024$. Số các giá trị nguyên dương a thỏa mãn $f''(1) < 18$ là:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 33: Cho chuyển động có phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 6t$, trong đó s tính bằng mét (m) và t tính bằng giây (s). Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm vận tốc bằng 3 (m/s).

A. 0 (m/s²). B. -12 (m/s²). C. 12 (m/s²). D. -2 (m/s²).



Câu 34: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$. Tính $f''(1)$.

- A. -1. B. 1. C. $\frac{3}{2}$. D. 0.

Câu 35: Cho hàm số $y = \cos^2 x$. Khi đó $y''\left(\frac{\pi}{3}\right)$ bằng:

- A. -2. B. 2. C. 1. D. $-2\sqrt{3}$.

Câu 36: Hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ có đạo hàm cấp hai bằng

- A. $y'' = \frac{2}{(x+1)^3}$. B. $y'' = \frac{-2}{(x+1)^3}$. C. $y'' = \frac{3}{(x+1)^3}$. D. $y'' = \frac{6}{(x+1)^3}$.

Câu 37: Cho hàm số $y = (x+2)^{-2}$. Tìm hệ thức liên hệ giữa y và y'' không phụ thuộc vào x .

- A. $y'' - 4y = 0$. B. $y'' + 2y = 0$. C. $y'' - 6y^2 = 0$. D. $2y'' - 3y = 0$.

Câu 38: Tính tổng $S = 2.C_{2024}^2 + 3.2.9.C_{2024}^3 + 4.3.9^2.C_{2024}^4 + \dots + 2023.2024.9^{2022}.C_{2024}^{2024}$

- A. 2024.10^{2023} . B. $2023.2024.9^{2022}$.
C. $2023.2024.10^{2022}$. D. $2022.2023.2024.10^{2024}$

Câu 39: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \sin x + x^2$ bằng:

- A. $\cos x + 2x$. B. $\sin x + 2$. C. $-\sin x + 2$. D. $\cos x + 2$.

Câu 40: Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 3$. Đạo hàm cấp hai của hàm số là:

- A. $y'' = x^3 - 2x$. B. $y'' = 3x^2 - 2$. C. $y'' = 3x - 2$. D. $y'' = 3x^2 - 2x$.

Câu 41: Cho hàm số $f(x) = 4\sqrt{x}$. Giá trị của $f''(9)$ bằng:

- A. $\frac{2}{3}$. B. $-\frac{1}{27}$. C. $\frac{4}{27}$. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 42: Một chuyển động có phương trình $s = f(t)$. Đạo hàm cấp hai (nếu có) của hàm số $f(t)$ là:

- A. Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t .
B. Gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t .
C. Vận tốc trung bình của chuyển động tại thời điểm t .
D. Gia tốc trung bình của chuyển động tại thời điểm t .

Câu 43: Cho hàm số $y = 3e^x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $y'' = 3e^x$. B. $y'' = 3xe^{x-1}$. C. $y'' = 3$. D. $y'' = 3e^{2x}$.

Câu 44: Cho hàm số $y = 3^x$. Đạo hàm cấp hai của hàm số bằng:

- A. $y'' = 3^x (\ln 3)^2$. B. $y'' = 3^x \ln 3$. C. $y'' = 3^x$. D. $y'' = \frac{3^x}{(\ln 3)^2}$.

Câu 45: Cho hàm số $f(x) = \cos x$. Đạo hàm cấp hai của hàm số là:

- A. $f''(x) = -\cos x$. B. $f''(x) = \cos x$. C. $f''(x) = \sin x$. D. $f''(x) = -\sin x$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x) = x^2 \cdot e^{2x}$. Giá trị của $f''(1)$ bằng:



- A. e^2 . B. $8e^2$. C. $8e$. D. $14e^2$.

Câu 47: Cho hàm số $f(x) = \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x \cos x}$. Giá trị của $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(0;1)$. B. $(1;2)$. C. $(-1;0)$. D. $(-2;-1)$.

Câu 48: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + 2$ với a, b là các hằng số. Biết $f'(1) = 0$; $f''(2) = 2$, hãy xác định các hằng số a, b .

- A. $a = 1$; $b = 2$. B. $a = -1$; $b = -2$. C. $a = -1$; $b = 2$. D. $a = 1$; $b = -2$.

Câu 49: Cho hàm số $f(x) = (x+1)e^x$. Giá trị của $f''(0)$ bằng

- A. 3. B. 2. C. $3e$. D. $2e$.

Câu 50: Biết hàm số $y = f(x) - f(2x)$ có đạo hàm cấp hai $y''(2) = 0, y''(1) = 10$. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $g(x) = f(x) - f(4x)$ tại $x = 1$.

- A. 2024. B. 20. C. 10. D. -10.

Câu 51: Phương trình chuyển động của một con lắc được cho bởi công thức $s(t) = 2\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$, trong đó s tính bằng centimet (cm) và t tính bằng giây (s). Gia tốc của con lắc tại thời điểm $t = 5$ (s) bằng (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)

- A. $-19,1$ (cm/s²). B. $9,9$ (cm/s²). C. $9,8$ (cm/s²). D. $-9,8$ (cm/s²)

Câu 52: Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^3 + (2m+1)x^2 + 1$. Số giá trị nguyên của m để y'' nhận giá trị không âm với mọi số thực x là:

- A. 5. B. 2. C. 4. D. 7.

Câu 53: Một chất điểm chuyển động với phương trình $s(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 + 5t$ trong đó t được tính bằng giây (s), s tính bằng mét (m). Tìm gia tốc của chuyển động tại thời điểm vận tốc bằng 8(m/s)?

- A. 4(m/s²). B. 6(m/s²). C. 8(m/s²). D. 4(m/s²).

Câu 54: Biết $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ và thỏa mãn :

$$1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 + \dots + (n-2).(n-1).C_n^{n-1} + (n-1).n.C_n^n = 4090506.2^{2021}.$$

Khi đó giá trị n là:

- A. $n = 2021$. B. $n = 2023$. C. $n = 2022$. D. $n = 2024$.

Câu 55: Một vật giao động điều hòa có phương trình quãng đường phụ thuộc thời gian $s = A\sin(\omega t + \varphi)$. Trong đó A, ω, φ là hằng số, t là thời gian. Khi đó biểu thức gia tốc của vật là?

- A. $v = A\cos(\omega t + \varphi)$ B. $v = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$
C. $v = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$ D. $v = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$

Câu 56: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = -t^3 + 3t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

- A. 12m/s. B. 0m/s. C. 11m/s. D. 6m/s.



- Câu 57:** Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t) = t^3 + \frac{9}{2}t^2 - 6t$, trong đó t được tính bằng giây, s được tính bằng mét. Gia tốc của chất điểm tại thời điểm vận tốc bằng 24 (m/s) là
- A. 21 (m/s²). B. 12 (m/s²). C. 39 (m/s²). D. 20 (m/s²).
- Câu 58:** Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = t^3 + 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Xác định gia tốc của chuyển động khi $t = 3$.
- A. 14 m/s². B. 24 m/s². C. 12 m/s². D. 17 m/s².
- Câu 59:** Một chất điểm chuyển động trong 20 giây đầu tiên có phương trình $s(t) = \frac{1}{12}t^4 - t^3 + 6t^2 + 10t$, trong đó $t > 0$ với t tính bằng giây (s) và $s(t)$ tính bằng mét (m). Hỏi tại thời điểm gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì vận tốc của vật bằng bao nhiêu?
- A. 17(m/s). B. 18(m/s). C. 28(m/s). D. 13(m/s).
- Câu 60:** Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t = 3$ là:
- A. 24 m/s². B. 17 m/s². C. 14 m/s². D. 12 m/s².
- Câu 61:** Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$ (t tính bằng giây; s tính bằng mét). Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. Vận tốc của chuyển động bằng 0 khi $t = 0$ hoặc $t = 2$.
B. Vận tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$ là $v = 18$ m/s.
C. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3$ là $a = 12$ m/s².
D. Gia tốc của chuyển động bằng 0 khi $t = 0$.
- Câu 62:** Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2$ (t tính bằng giây; s tính bằng mét). Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4$ s là $a = 18$ m/s².
B. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4$ s là $a = 9$ m/s².
C. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3$ s là $v = 12$ m/s.
D. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3$ s là $v = 24$ m/s.
- Câu 63:** Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 4t + 5$ (t tính bằng giây (s); s tính bằng mét (m)). Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ là:
- A. 10 (m/s²). B. 37 (m/s²). C. 28 (m/s²). D. 18 (m/s²).
- Câu 64:** Phương trình chuyển động của một con lắc lò xo quanh vị trí cân bằng O là $x = 4\cos 2t$ (trong đó t tính bằng giây (s) và x tính bằng cm). Tính gia tốc của con lắc tại thời điểm t .
- A. $16\cos 2t$ (cm/s²). B. $-16\cos 2t$ (cm/s²). C. $\cos 2t$ (cm/s²). D. $10\sin 2t$ (cm/s²).
- Câu 65:** Cho hàm số $f(x) = x^4 - (m^2 + 2m - 3)x^2 + mx + 11$. Tính tổng S tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để $f''(1) \geq 0$.
- A. 10. B. 3. C. -7. D. 7.
- Câu 66:** Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây (s) và s tính bằng mét (m). Tính gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu.



A. $12 \text{ (m/s}^2\text{)}.$

B. $-12 \text{ (m/s}^2\text{)}.$

C. $6 \text{ (m/s}^2\text{)}.$

D. $18 \text{ (m/s}^2\text{)}.$

Câu 67: Cho hàm số $f(x) = \sin^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$. Biết đạo hàm cấp hai của hàm số có dạng:

$$f''(x) = \frac{a}{(1+x)^3} \cdot \sin\left(\frac{2-2x}{1+x}\right) + \frac{b}{(1+x)^4} \cdot \cos\left(\frac{2-2x}{1+x}\right).$$

Giá trị của biểu thức $T = \frac{b}{a}$ bằng:

A. 3.

B. 1.

C. 0

D. 2.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho y là hàm số của x thỏa mãn phương trình $y = \sin x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đạo hàm của hàm số y là $y' = \cos x$.

b) $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) Đạo hàm cấp hai của hàm số y là $y'' = -\sin^2 x$.

d) $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Câu 2: Cho y là hàm số của x thỏa mãn phương trình $y = x^3$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đạo hàm của hàm số y là $y' = 3x^3$.

b) $y'(2) = 12$

c) Đạo hàm cấp hai của hàm số y là $y'' = 6x$.

d) $y''(0) = 1$

Câu 3: Cho hàm số $y = \ln x$ với $x > 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đạo hàm của hàm số y là $y' = \frac{1}{x}$.

b) Đạo hàm cấp hai của hàm số y là $y'' = \frac{-1}{x^4}$ với $x > 0$

c) $y'(1) = 1$.

d) $y''(2) = \frac{-1}{4}$

Câu 4: Cho hàm số $y = 2\sin 2x - \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$.

b) $y'' = -8\sin 2x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.



c) $y''(0) = 1$.

d) $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2y''(0) = -2$.

Câu 5: Biết y là hàm số của x thỏa mãn phương trình $xy = 1 + \ln y$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đạo hàm của hàm số y là $y' = \frac{y^2}{1 + xy}$.

b) $y'(0) = \frac{1}{e^2}$.

c) Đạo hàm cấp hai của hàm số y là $y'' = \frac{2yy'(1 - xy) + y^2(y + xy')}{(1 - xy)^2}$.

d) $y''(0) = \frac{3}{e^3}$.

Câu 6: Một vật chuyển động trên đường thẳng được xác định bởi công thức $s(t) = t^3 - t^2 + 5t + 2$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s là quãng đường chuyển động của vật tính bằng mét. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ là 9(m/s).b) Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3$ là 16 9(m/s²).

c) Quãng đường chuyển động của vật tại thời điểm mà vận tốc của vật bằng 45 m/s là 70 m

d) Vận tốc của vật tại thời điểm mà gia tốc của vật bằng 34(m/s²) là 101 (m/s).

Câu 7: Một vật chuyển động trên đường thẳng được xác định bởi công thức $s(t) = t^3 - 3t^2 + 7t - 2$, trong đó $t > 0$ và tính bằng giây và s là quãng đường chuyển động được của vật trong t giây tính bằng mét. Khi đó:

a) Tốc độ của vật tại thời điểm $t = 2$ là 7 (m/s)b) Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ là 6 (m/s²)c) Gia tốc của vật tại thời điểm mà vận tốc của chuyển động bằng 16 (m/s²) là 10(m/s²)d) Thời điểm $t = 1$ (giây) tại đó vận tốc của chuyển động đạt giá trị nhỏ nhất

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^3 - mx^2 + x - 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m lớn hơn -10 để y'' không âm với mọi $x \in \mathbb{R}$?

Câu 2: Một chất điểm chuyển động trong 60 giây đầu tiên có phương trình $s(t) = \frac{1}{12}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + 6t^2 + 7t$, trong đó $t > 0$ với t tính bằng giây (s) và $s(t)$ tính bằng mét (m). Hỏi tại thời điểm gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì vận tốc của vật bằng bao nhiêu?

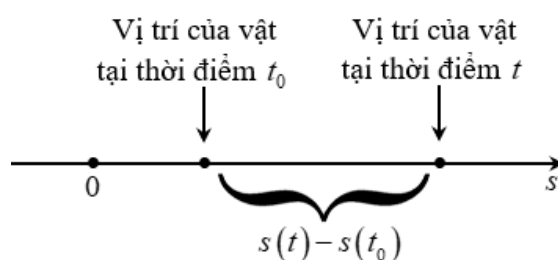


- Câu 3:** Biết hàm số $y = f(x) - f(3x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm cấp hai với mọi $x \in \mathbb{R}$, biết $y''(3) = 5, y''(1) = 10$. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $g(x) = f(x) - f(9x)$ tại $x = 1$.
- Câu 4:** Tính đạo hàm cấp hai của hàm số: $y = \frac{3x-1}{x+2}$ tại điểm $x = -1$
- Câu 5:** Một vật chuyển động có phương trình $S = t^4 - 3t^3 - 3t^2 + 2t + 1$ (m), t là thời gian tính bằng giây. Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3s$ là?
- Câu 6:** Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = -t^3 + t^2 + t + 4$ (t là thời gian tính bằng giây). Gia tốc của chuyển động tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất là
- Câu 7:** Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = -t^3 + 3t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu bằng bao nhiêu?
- Câu 8:** Một vật chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình $s(t) = t^3 - 2t^2 + 2t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính gia tốc của vật tại thời điểm mà vận tốc của vật bằng $17(m/s)$.
- Câu 9:** Một vật chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + 7t - 2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Vận tốc của vật đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

-----HẾT-----

1 Một số bài toán dẫn đến khái niệm đạo hàm**a) Vận tốc tức thời của một vật chuyển động thẳng**

HĐ1. Một vật di chuyển trên một đường thẳng. Quãng đường s của chuyển động là một hàm số của thời gian t , $s = s(t)$ (được gọi là phương trình của chuyển động).



a) Tính vận tốc trung bình của vật trong khoảng thời gian từ t_0 đến t .

b) Giới hạn $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ cho ta biết điều gì?

Lời giải

a) Vận tốc trung bình của vật trong khoảng thời gian từ t_0 đến t là: $v_{av} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$

b) Giới hạn $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ cho ta biết $v = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$

b) Cường độ tức thời

HĐ2. Điện lượng Q truyền trong dây dẫn là một hàm số của thời gian t , có dạng $Q = Q(t)$.

a) Tính cường độ trung bình của dòng điện trong khoảng thời gian từ t_0 đến t .

b) Giới hạn $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$ cho ta biết điều gì?

Lời giải

a) Cường độ trung bình $I = \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$

b) Giới hạn này cho biết cường độ dòng điện tại thời điểm t_0 .



Nhận xét: Nhiều bài toán trong Vật lí, Hóa học, Sinh học,... đưa đến việc tìm giới hạn dạng

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ ở đó } y = f(x) \text{ là một hàm số đã cho.}$$

Giới hạn trên dẫn đến một khái niệm quan trọng trong Toán học, đó là khái niệm đạo hàm.

2 Đạo hàm của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$

tại điểm x_0 , kí hiệu bởi $f'(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$) tức là $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Chú ý: Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 \in (a; b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

1. Tính $f(x) - f(x_0)$.
2. Lập và rút gọn tỉ số $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ với $x \in (a; b), x \neq x_0$.
3. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Chú ý: Đặt $h = x - x_0$ khi đó đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm $x_0 = 1$ có thể tính như sau:

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(1+h)^2 + 2(1+h)] - (1^2 + 2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^2 + 4h + 3) - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 4) = 4.$$

Chú ý: $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

3 Đạo hàm của hàm số trên một khoảng

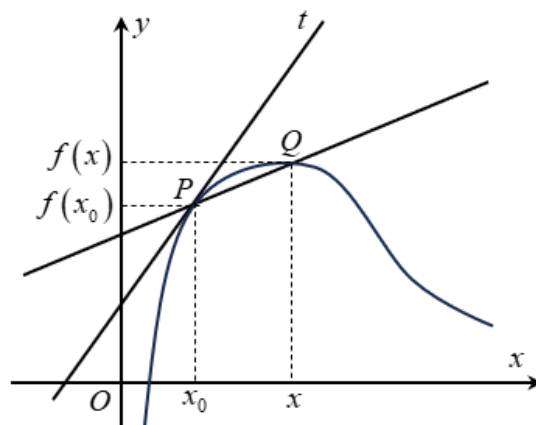
Chú ý: Nếu phương trình chuyển động của vật là $s = f(t)$ thì $v(t) = f'(t)$ là vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t .

4 Ý nghĩa hình học của đạo hàm

a) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Hệ số góc của đường thẳng đi qua hai điểm $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$

, với $x_1 \neq x_2$ là $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$





Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $P(x_0; f(x_0))$ là đường thẳng đi qua P với hệ số góc $k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ nếu giới hạn này tồn tại và hữu hạn, nghĩa là $k = f'(x_0)$. Điểm P gọi là tiếp điểm.

Nhận xét: Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $P(x_0; f(x_0))$ là đạo hàm $f'(x)$

b) Phương trình tiếp tuyến

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $P(x_0; y_0)$ là $y - y_0 = f'(x)(x - x_0)$, trong đó $y_0 = f(x_0)$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tính đạo hàm bằng định nghĩa

Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 \in (a; b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1:** Tính $f(x) - f(x_0)$.
- **Bước 2:** Lập và rút gọn tỉ số $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ với $x \in (a; b), x \neq x_0$.
- **Bước 3:** Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Ví dụ 1: Tính đạo hàm (bằng định nghĩa) của hàm số $y = 2x^2 + x + 1$ tại $x_0 = 2$.

Lời giải

Ta có: $f(x) - f(x_0) = f(x) - f(2) = 2x^2 + x + 1 - 11 = 2x^2 + x - 10$

$$\text{Khi đó: } \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{2x^2 + x - 10}{x - 2} = \frac{2(x-2)\left(x + \frac{5}{2}\right)}{x - 2} = 2x + 5$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 5) = 9. \text{ Vậy } f'(2) = 9$$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm (bằng định nghĩa) của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 3}$ tại $x; \forall x \in \mathbb{R}$

Lời giải

Với x_0 bất kì

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x_0^2 + 3}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{(x - x_0)[\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x_0^2 + 3}]} = \frac{2x_0}{2\sqrt{x_0^2 + 3}} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + 3}} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}.$$

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ tại $x = 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có : } f(0) = 0, \text{ do đó: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } f'(0) = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 4: Tìm a, b để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 1$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện cần: } f(1) = 2 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x) = 2; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b$$

Để hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$ thì $f(x)$ liên tục tại $x = 1$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a + b = 2$$

$$\text{Điều kiện đủ: } f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 2) = 3$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + b - (a + b)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax - a}{x - 1} = a$$

$$\text{Để hàm số } f(x) \text{ có đạo hàm tại } x = 1 \text{ thì } f'(1^+) = f'(1^-) \Leftrightarrow a = 3 \Rightarrow b = -1.$$

Ví dụ 5: Tính đạo hàm của hàm số $y = x(x-1)(x-2)\dots(x-2021)$ tại điểm $x = 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-2021)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (x-1)(x-2)\dots(x-2021) = (-1) \cdot (-2) \dots (-2021) = -2021!.$$

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x)$ xác định bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Giá trị $f'(0)$ bằng

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{x^2(\sqrt{4x^2 + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{\sqrt{4x^2 + 1} + 1} = 2$$

$$\text{Vậy } f'(0) = 2.$$

**Dạng 2: Biến đổi, rút gọn, biểu diễn các biểu thức chứa lũy thừa**

Vận tốc tức thời tại thời điểm t_0 của chất điểm chuyển động với phương trình $s = s(t)$ là

$$v(t_0) = s'(t_0).$$

Cường độ tức thời tại thời điểm t_0 của một dòng điện với điện lượng $Q = Q(t)$ là

$$I(t_0) = Q'(t_0).$$

Ví dụ 7: Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là: $s = f(t) = t^2 + 4t + 6$ (t được tính bằng giây, s được tính bằng mét)

a) Tính đạo hàm của hàm số $f(t)$ tại điểm t_0 .

b) Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 5$.

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{t^2 + 4t + 6 - (t_0^2 + 4t_0 + 6)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} (t + t_0 + 4) = 2t_0 + 4.$$

$$\text{Vậy } f'(t_0) = 2t_0 + 4.$$

b) Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 5$ là $v_t = f'(5) = 2 \cdot 5 + 4 = 14$ (m/s).

Ví dụ 8: Cho biết điện lượng trong một dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q = 6t + 5$ (t được tính bằng giây, Q được tính bằng Coulomb). Tính cường độ của dòng điện trong dây dẫn tại thời điểm $t = 10$.

Lời giải

Vì $Q'(t) = 6 \Rightarrow$ Cường độ của dòng điện trong dây dẫn tại thời điểm $t = 10$ là $I_t = Q'(10) = 6$

Ví dụ 9: Cho chuyển động được xác định bởi phương trình $s = 2t^3 + 6t^2 - t$, trong đó t được tính bằng giây và s được tính bằng mét. Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 3s$ là:

Lời giải

$$\text{Ta có } v(t) = S'(t) = 6t^2 + 12t - 1.$$

$$\text{Vận tốc tức thời của chuyển động khi } t = 3s \text{ là: } v(3) = 6 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 1 = 89 \text{ (m/s)}.$$

Ví dụ 10: Một chất điểm chuyển động có quãng đường được cho bởi phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 10$, trong đó $t > 0$ với t tính bằng giây (s) và s tính bằng mét (m). Hỏi tại thời điểm vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì quãng đường vật đi được bằng bao nhiêu?

Lời giải

Vận tốc của chuyển động là: $v(t) = 3t^2 - 6t + 5$. Dễ thấy: $v(t) = 3t^2 - 6t + 5 = 3(t-1)^2 + 2 \geq 2$ với mọi t .

Dấu “=” xảy ra khi $t = 1$. Khi đó, vận tốc của chuyển động là $s(1) = 13$ m.

**Dạng 3: Viết phương trình tiếp tuyến**

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Nếu tiếp tuyến có hệ số góc k thì ta giải phương trình $f'(x_0) = k$ tìm hoành độ tiếp điểm.

Ví dụ 11: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$.

Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm $A(x_0; y_0) \Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$.

Gọi tiếp tuyến (d) tiếp xúc đồ thị hàm số tại điểm $A(0; 1)$

$\Rightarrow$ Hệ số góc $k = y'(x_0) = y'(0) = -3$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến (d) : $y = -3(x - 0) + 1 \Leftrightarrow y = -3x + 1$.

Ví dụ 12: Cho hàm số $y = x^4 + 2x^2$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(1; 3)$ là

Lời giải

Ta có: $y' = 4x^3 + 4x \Rightarrow y'(1) = 8$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(1; 3)$ là $y = 8(x - 1) + 3 \Leftrightarrow y = 8x - 5$.

Ví dụ 13: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x + 1$ tại giao điểm của (C) với trục Oy có phương trình là:

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 3$.

Giao điểm M của đồ thị hàm số (C) với trục Oy là $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại $M(0; 1)$ là: $k = y'(0) = -3$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(0; 1)$ là: $y = k(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = -3x + 1$.

Ví dụ 14: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ tại điểm có hoành độ $x = 1$.

Lời giải

Ta có $y' = 12x^2 - 12x \Rightarrow y'(1) = 0$.

Ta có $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -1$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là $y = -1$.



Ví dụ 15: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ có phương trình là.

Lời giải

Ta có: $y' = -3x^2 + 3$; $y'(2) = -3 \cdot 2^2 + 3 = -9$; $y(2) = -2^3 + 3 \cdot 2 - 2 = -4$

Tiếp tuyến có dạng: $y = -9(x - 2) + 4 = -9x + 22$.

Ví dụ 16: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$.

Lời giải

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$ nên

$$f'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}.$$

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -2$. Phương trình tiếp tuyến là $y = 9(x + 1) - 2 \Leftrightarrow y = 9x + 7$ (Loại)

Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 2$. Phương trình tiếp tuyến là $y = 9(x - 3) + 2 \Leftrightarrow y = 9x - 25$ (thỏa mãn).

Ví dụ 17: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ có đồ thị là (C) . Số tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 4x + 5$ của đồ thị hàm số là

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x + 4$ suy ra hệ số góc của tiếp tuyến $y(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0 + 4$.

$$\text{Theo đề bài, ta có } 3x_0^2 + 6x_0 + 4 = 4 \Leftrightarrow x_0^2 + 2x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1 \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -3 \end{cases}.$$

Với $M(0; 1)$, phương trình tiếp tuyến là $y = 4x + 1$ (nhận).

Với $M(-2; -3)$, phương trình tiếp tuyến là $y = 4x + 5$ (loại).

Vậy có một tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) song song với đường thẳng $d: y = 4x + 5$.

Ví dụ 18: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm với trục tung.

Lời giải

Giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ với trục tung là điểm $M(0; 2)$.

$$y = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x.$$



Hệ số góc của tiếp tuyến tại $M(0;2)$ là $y'(0)=0$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(0;2)$ là: $y = y'(0) \cdot (x-0) + 2 \Leftrightarrow y = 2$.

Ví dụ 19: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x - 1$ tại điểm $M(1;0)$ là

Lời giải

Ta có $y'(1) = -1$ nên phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(1;0)$ có dạng

$$y = (-1)(x-1) + 0 \Leftrightarrow y = -x + 1.$$

Ví dụ 20: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $N(0;1)$ và hoành độ tiếp điểm là số thực âm.

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm (điều kiện: $x_0 < 0$)

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x - 6$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ có dạng:

$$y = (3x_0^2 + 6x_0 - 6)(x - x_0) + x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 + 1$$

Vì tiếp tuyến đi qua $N(0;1)$ nên ta có:

$$1 = (3x_0^2 + 6x_0 - 6)(-x_0) + x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 + 1 \Leftrightarrow 2x_0^3 + 3x_0^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \text{ (loại)} \\ x_0 = -\frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

$$\text{Với } x_0 = -\frac{3}{2} \Rightarrow y_0 = \frac{107}{8}, y'(x_0) = -\frac{33}{4}.$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: } y = -\frac{33}{4}\left(x + \frac{3}{2}\right) + \frac{107}{8} = -\frac{33}{4}x + 1.$$

$$\text{Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là } y = -\frac{33}{4}x + 1.$$

**C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN**

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

B. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{f(x_0)}{x_0} \right)$.

C. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$.

D. $f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Lời giải

Ta có: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Câu 2: Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ nếu

A. $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 \in (a; b)$.

B. $y = f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (a; b)$.

C. $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x = a$ và $x = b$.

D. $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x = a$ hoặc $x = b$.

Lời giải

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (a; b)$.

Câu 3: Nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị quãng đường di chuyển của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị điều gì?

A. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm t_0 .

B. Vị trí của chuyển động tại thời điểm t_0 .

C. Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 .

D. Quãng đường đã di chuyển của vật tại thời điểm t_0 .

Lời giải

Theo định nghĩa chọn C

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có $f'(2) = 5$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $M(2; 1)$ là

A. $y = 5x + 11$.

B. $y = 5x - 9$.

C. $y = 5x - 11$.

D. $y = 5x + 3$.

Lời giải



Ta có: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 5 \cdot (x - 2) + 1 = 5x - 9$.

Câu 5: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là **sai**?

A. $(c)' = 0$ (với c là hằng số).

B. $(2x)' = 2$.

C. $(x^6)' = 6x^5$.

D. $(\sqrt{x})' = 2\sqrt{x}$ (với $x > 0$).

Lời giải

Ta có: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (với $x > 0$).

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2, & x > 0 \\ x + a, & x \leq 0 \end{cases}$. Khi hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 = 0$. Hãy tính

$T = a + b$.

A. $T = -4$.

B. $T = 0$.

C. $T = 3$.

D. $T = 4$.

Lời giải

Ta có: $f(0) = a$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax^2 + bx + 2) = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + a) = a.$$

Để hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ thì hàm số phải liên tục tại $x_0 = 0$ nên

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0). \text{ Suy ra } a = 2.$$

$$\text{Khi đó } f(x) = \begin{cases} 2x^2 + bx + 2, & x > 0 \\ x + 2, & x \leq 0 \end{cases}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 + bx + 2 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + b) = b.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + 2 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1) = 1.$$

Hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ thì $b = 1$.

Vậy với $a = 2, b = 1$ thì hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ khi đó $T = 3$.

Câu 7: Nếu $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 7$ thì ta kết luận

A. $f'(3) = 3$.

B. $f'(7) = 0$.

C. $f'(7) = 3$.

D. $f'(3) = 7$.

Lời giải

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 7 \text{ nên } f'(3) = 7.$$

Câu 8: Hàm số $f(x) = x^2 - 5x$ có đạo hàm tại $x = 2$ là

A. $f'(2) = -1$.

B. $f'(2) = 9$.

C. $f'(2) = -6$.

D. $f'(2) = 10$.

**Lời giải**

Ta có: $f(x) - f(2) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

Với $x \neq 2$, $\frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = x-3$

Tính giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-3) = -1$

Vậy $f'(2) = -1$.

Câu 9: Tính đạo hàm của hàm số $y = -x^2 + 2x$ tại $x_0 = 1$

- A. 2. B. -1. C. -2. D. 0.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + 2x - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x^2 - 2x + 1)}{x-1}$

$= \lim_{x \rightarrow 1} [-(x-1)] = 0$

Vậy $f'(1) = 0$.

Câu 10: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^3 + 1$ tại $x_0 = 2$

- A. 12. B. 13. C. 24. D. 9.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 1 - 9}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x-2}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 12$

Vậy $f'(2) = 12$.

Câu 11: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ tại $x_0 = 1$

- A. Không tồn tại. B. 0 C. -1. D. -3.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x+1}{x-2} + 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{x-2} = -3$. Vậy $f'(1) = -3$

Câu 12: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{4 - \sqrt{9-x}}{2} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Khi đó $f'(0)$ là kết quả nào sau đây?



A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{16}$.

C. $\frac{1}{32}$.

D. $\frac{1}{12}$.

Lời giảiVới $x \neq 0$ xét:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4 - \sqrt{9 - x}}{2} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{9 - x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 - (9 - x)}{2x(3 + \sqrt{9 - x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(3 + \sqrt{9 - x})} = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } f'(0) = \frac{1}{12}$$

Câu 13: Đạo hàm của hàm số $y = 1$ là

A. 1.

B. 0.

C. -1.

D. Không xác định.

Lời giảiTa có: $y = f(x) = x$. Lấy x_0 bất kì thuộc $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1 - 1}{x - x_0} = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

$$\text{Vậy } y' = 0.$$

Câu 14: Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ trên $(0; +\infty)$ là

A. $2\sqrt{x}$.

B. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

D. $\sqrt{x}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = f(x) = \sqrt{x}$$

Xét Δx là số gia của đối số tại điểm x

Khi đó hàm số có số gia tương ứng:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$



$$\text{Vậy } y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Câu 15: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{x+1}$ trên tập xác định là

A. $-\frac{1}{(x+1)^2}.$

B. $\frac{1}{x+1}.$

C. $\frac{x}{x+1}.$

D. $\frac{x}{(x+1)^2}.$

Lời giải

$$y = f(x) = \frac{1}{x+1}. \text{ TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Xét Δx là số gia của đối số tại điểm x

Khi đó hàm số có số gia tương ứng:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x + 1} - \frac{1}{x + 1} \\ &= -\frac{\Delta x}{(x + \Delta x + 1)(x + 1)} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{(x + \Delta x + 1)(x + 1)}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x + \Delta x + 1)(x + 1)} = -\frac{1}{(x + 1)^2} \Rightarrow y' = -\frac{1}{(x + 1)^2}.$$

Câu 16: Đạo hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 5$ trên tập $\mathbb{R}$ là

A. $f'(x) = 3x^2 + 6x + 1.$

B. $f'(x) = x^2 + 3x + 1.$

C. $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1.$

D. $f'(x) = 9x + 1.$

Lời giải

$$\begin{aligned} \forall x_0 \in \mathbb{R}, \text{ ta có: } f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 + 3x^2 + x - x_0^3 - 3x_0^2 - x_0}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + x_0x + x_0^2 + 3x + 3x_0 + 1)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 + x_0x + x_0^2 + 3x + 3x_0 + 1) = 3x_0^2 + 6x_0 + 1. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } f'(x) = 3x^2 + 6x + 1.$$

Câu 17: Đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$ trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$ là

A. $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}.$

B. $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{(x - 1)^2}.$

C. $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}.$

D. $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}.$



Lời giải

Ta có: $f(x) = x - 1 - \frac{4}{x-1}$.

$\forall x_0 \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, ta có:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - \frac{4}{x-1} - x_0 + \frac{4}{x_0-1}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{4}{(x-1)(x_0-1)} \right) \\ &= 1 + \frac{4}{(x_0-1)^2} = \frac{x_0^2 - 2x_0 + 5}{(x_0-1)^2}. \end{aligned}$$

Vậy $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{(x-1)^2}$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = x^3 + 1$ có đồ thị (C) . Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x=1$ là:

- A. $f'(1) = 3$. B. $f'(1) = -3$. C. $f'(1) = 4$. D. $f'(1) = -4$.

Lời giải

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$$

Câu 19: Một chất điểm chuyển động có phương trình $S(t) = 4t^2 + 2$, với t tính bằng giây (s) và S là được tính bằng mét (m). Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t_0 = 4$ (s).

- A. $v(4) = 32 \text{ m/s}$. B. $v(4) = 34 \text{ m/s}$.
C. $v(4) = 36 \text{ m/s}$. D. $v(4) = 8 \text{ m/s}$.

Lời giải

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t_0 = 4$ (s) là

$$v(4) = S'(4) = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{S(t) - S(4)}{t - 4} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{4t^2 + 2 - 66}{t - 4} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{4(t^2 - 16)}{t - 4} = \lim_{t \rightarrow 4} 4(t + 4) = 32.$$

Câu 20: Cho hàm số $y = -x^3 + 2x^2 + 1$. Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $x_0 = -1$ của hàm số là

A. 7. B. 1. C. -1. D. -7.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^3 + 2x^2 - 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(-x^2 + 3x - 3)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (-x^2 + 3x - 3) = -7 \end{aligned}$$



Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $x_0 = -1$ có hệ số góc: -7

- Câu 21:** Một vật chuyển động xác định bởi phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 3$ bằng bao nhiêu?
- A. $4m/s$. B. $1m/s$. C. $3m/s$. D. $2m/s$.

Lời giải

$$v(3) = S'(3) = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{S(t) - S(3)}{t - 3} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{3}t^3 - t^2 - 0}{t - 3} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{3}t^3 - t^2}{t - 3} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{3}t^2(t - 3)}{t - 3} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{1}{3}t^2 = 3.$$

Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 3$ bằng: $v(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 = 3 (m/s)$.

- Câu 22:** Phương trình tiếp tuyến của hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là
- A. $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$. B. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$. C. $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$. D. $y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x+1}{2x-1} - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x + 2}{(x - 2)(2x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(2x - 1)} = -\frac{1}{3}$$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 2$ là $-\frac{1}{3}$; $y(2) = 1$.

Phương trình tiếp tuyến của hàm số tại điểm có hoành độ $x = 2$ là:

$$y = -\frac{1}{3}(x - 2) + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}.$$

- Câu 23:** Cho hàm số $y = \sqrt{x-1}$. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ là?
- A. $k = \frac{1}{4}$. B. $k = 2$. C. $k = \frac{1}{2}$. D. $k = \frac{1}{3}$.

Lời giải

$$\text{Xét } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(\sqrt{x-1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x-1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Vậy hệ số góc của tiếp tuyến là $k = \frac{1}{2}$.

- Câu 24:** Một chất điểm chuyển động có quãng đường được cho bởi phương trình $s(t) = \frac{1}{4}t^4 - t^3 + \frac{5}{2}t^2 + 10t$, trong đó $t > 0$ với t tính bằng giây (s) và s tính bằng mét (m). Hỏi tại thời điểm gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì vận tốc của vật bằng bao nhiêu?

A. 13.

B. 11.

C. 10.

D. 12.

Lời giải

Vận tốc của chuyển động là: $v(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 10$.

Gia tốc của chuyển động là $a(t) = 3t^2 - 6t + 5$.

Dễ thấy: $a(t) = 3t^2 - 6t + 5 = 3(t-1)^2 + 2 \geq 2$ với mọi t . Dấu “=” xảy ra khi $t = 1$.

Khi đó, vận tốc của chuyển động là $v(1) = 13$ (m/s).

Câu 25: Chuyển động của một vật có phương trình $s = 5 + \sin\left(0,8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$, trong đó s tính bằng centimet và thời gian t tính bằng giây. Tính giá trị tuyệt đối của gia tốc của vật tại các thời điểm vận tốc bằng 0.

A. $0,64\pi^2$.B. $10,64\pi^2$.C. $0,32\pi^2$.D. $0,14\pi^2$.**Lời giải**

Ta có $v = s' = 0,8\pi \cos\left(0,8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ và $a = v' = -0,64\pi^2 \sin\left(0,8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$.

Thời điểm vận tốc bằng 0 tương đương với $\cos\left(0,8\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \left|\sin\left(0,8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\right| = 1$.

Khi đó, $|a| = 0,64\pi^2 \left|\sin\left(0,8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\right| = 0,64\pi^2$.

Câu 26: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với đường thẳng $y = -2$.

A. $y = -9x + 7$; $y = -2$.B. $y = -2$.C. $y = 9x + 7$; $y = -2$.D. $y = 9x + 7$; $y = 2$.**Lời giải**

Phương trình hoành độ giao điểm: $y = x^3 - 3x^2 + 2 = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Với $x = -1 \rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ k = y'(-1) = 9 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 9x + 7$.

Với $x = 2 \rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ k = y'(2) = 0 \end{cases}$. suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -2$.

Câu 27: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$.

A. $y = 9x + 7$; $y = 9x - 25$.B. $y = 9x - 25$.C. $y = 9x - 7$; $y = 9x + 25$.D. $y = 9x + 25$.

**Lời giải**

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta tính được $k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$. Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$ nên có

$$k = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}.$$

Với $x_0 = -1 \rightarrow \begin{cases} y_0 = -2 \\ k = 9 \end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 9x + 7$ (loại) (vì trùng với đường thẳng đã cho).

Với $x_0 = 3 \rightarrow \begin{cases} y_0 = 2 \\ k = 9 \end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 9x - 25$.

Câu 28: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{45}x$.

A. $y = 45x - 173$; $y = 45x + 83$.

B. $y = 45x - 173$.

C. $y = 45x + 173$; $y = 45x - 83$.

D. $y = 45x - 83$.

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta tính được $k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$. Do tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{45}x$ nên

$$\text{có } k \cdot \left(-\frac{1}{45}\right) = -1 \Leftrightarrow k = 45 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 45 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 5 \\ x_0 = -3 \end{cases}.$$

Với $x_0 = 5 \rightarrow \begin{cases} y_0 = 52 \\ k = 45 \end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 45x - 173$.

Với $x_0 = -3 \rightarrow \begin{cases} y_0 = -52 \\ k = 45 \end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 45x + 83$.

Câu 29: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \frac{1}{x}$ biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$.

A. $x + 4y - 1 = 0$; $x + 4y + 1 = 0$.

B. $x + 4y - 4 = 0$; $x + 4y + 4 = 0$.

C. $y = -\frac{1}{4}x - 4$; $y = -\frac{1}{4}x + 4$.

D. $y = -\frac{1}{4}x$.

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta tính được $k = y'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$.

Theo giả thiết ta có $k = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{x_0^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$.



Với $x_0 = 2 \rightarrow y_0 = \frac{1}{2}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -\frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + 4y - 4 = 0$.

Với $x_0 = -2 \rightarrow y_0 = -\frac{1}{2}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$$y = -\frac{1}{4}(x+2) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + 4y + 4 = 0.$$

Câu 30: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết cosin góc tạo bởi tiếp tuyến và đường thẳng $\Delta: 4x - 3y = 0$ bằng $\frac{3}{5}$.

A. $y = 2; y = 1$. B. $y = -2; y = 1$. C. $y = -2; y = -1$. **D.** $y = 2; y = -2$.

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm $\Rightarrow k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$.

Phương trình tiếp tuyến d có dạng $y + y_0 = k(x - x_0)$.

Suy ra tiếp tuyến d có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_d = (-k; 1)$.

Đường thẳng Δ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_\Delta = (4; -3)$.

$$\text{Theo đề bài ta có: } \cos(d, \Delta) = \frac{|-4k - 3|}{\sqrt{k^2 + 1}\sqrt{16 + 9}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = -\frac{24}{7} \end{cases}$$

Với $k = -\frac{24}{7} \Rightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = -\frac{24}{7}$: vô nghiệm.

$$\text{Với } k = 0 \Rightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{cases}.$$

Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$.

Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -2 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -2$.

**D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI**

Câu 1: Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x) = x^2 + 2x$ tại điểm $x_0 = 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

b) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

c) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 4)$

d) $f'(1) = a \Rightarrow a > 5$

Lời giải

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+3) = 4$$

Vậy $f'(1) = 4$.

a) Đúng: $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

b) Đúng: $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

c) Sai: $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 3)$

d) Sai: $f'(1) = a \Rightarrow a < 5$

Câu 2: Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ tại điểm $x_0 = 0$ ta được $f'(0) = a$.

Khi đó:

a) $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

b) $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x+1}$

c) Phương trình $3^x = 3$ có nghiệm bằng $x = a - 2$

d) $\log_a 9 = 3$

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x-2}{x+1} - (-2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x+1} = 3$$

Vậy $f'(0) = 3$.

a) Đúng: $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

b) Sai: $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x+1}$



- c) Đúng: Phương trình $3^x = 3$ có nghiệm bằng $x = a - 2$
 d) Sai: $\log_a 9 = 2$

Câu 3: Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2x^3$. Khi đó:

- a) Với bất kì x_0 : $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
 b) $f'(1) = -6$
 c) $f'(0) = 0$
 d) $f'(2) = 24$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Với bất kì } x_0 \text{ ta có: } f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^3 - 2x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2(x - x_0)(x^2 + x \cdot x_0 + x_0^2)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2(x^2 + x \cdot x_0 + x_0^2)}{1} = 6x_0^2 \end{aligned}$$

Vậy $f'(x) = (2x^3)' = 6x^2$ trên $\mathbb{R}$.

- a) Đúng: Với bất kì x_0 : $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
 b) Sai: $f'(1) = 6$
 c) Đúng: $f'(0) = 0$
 d) Đúng: $f'(2) = 24$

Câu 4: Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{1-x}$ với $x \neq 1$. Khi đó:

- a) Với bất kì $x_0 \neq 1$, ta có: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2}{(1-x)(1-x_0)}$
 b) $f'(2) = 2$
 c) $f'(3) = \frac{1}{3}$
 d) $f'(2) + f'(3) = \frac{3}{2}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Với bất kì } x_0 \neq 1, \text{ ta có: } f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{2}{1-x} - \frac{2}{1-x_0}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2(x - x_0)}{(1-x)(1-x_0)(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2}{(1-x)(1-x_0)} = \frac{2}{(1-x_0)^2} \end{aligned}$$



Vậy $f'(x) = \left(\frac{2}{1-x}\right)' = \frac{2}{(1-x)^2}$ trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

a) Đúng: Với bất kì $x_0 \neq 1$, ta có: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2}{(1-x)(1-x_0)}$

b) Đúng: $f'(2) = 2$

c) Sai: $f'(3) = \frac{1}{2}$

d) Đúng: $f'(2) + f'(3) = \frac{3}{2}$

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3$ có đồ thị (C) và điểm M thuộc (C) có hoành độ $x_0 = -1$. Khi đó:

a) Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M bằng 6

b) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M đi qua điểm $A(0; 4)$

c) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M cắt đường thẳng $d: y = 3x$ tại điểm có hoành độ bằng 4

d) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = -\frac{1}{6}x$

Lời giải

Ta có: $f'(x) = (2x^3)' = 6x^2$ nên tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc là:

$$f'(-1) = 6 \cdot (-1)^2 = 6; f(-1) = -2$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là:

$$y - f(-1) = 6(x + 1) \Leftrightarrow y + 2 = 6(x + 1) \Leftrightarrow y = 6x + 4$$

a) Đúng: Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M bằng 6

b) Đúng: Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M đi qua điểm $A(0; 4)$

c) Sai: Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M cắt đường thẳng $d: y = 3x$ tại điểm có hoành độ bằng $-\frac{4}{3}$

d) Đúng: Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = -\frac{1}{6}x$

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \frac{2}{1-x}$ có đồ thị (C) và điểm $M(3; -1) \in (C)$. Khi đó:

a) Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M bằng $\frac{1}{2}$

b) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$



- c) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M vuông với đường thẳng $y = -2x - \frac{5}{2}$
- d) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M đi qua điểm $A\left(0; -\frac{5}{2}\right)$

Lời giải

Ta có: $f'(x) = \left(\frac{2}{1-x}\right)' = \frac{2}{(1-x)^2}$ nên tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc là:

$$f'(3) = \frac{2}{(1-3)^2} = \frac{1}{2}.$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là: $y - (-1) = \frac{1}{2}(x - 3) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$.

a) Đúng: Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M bằng $\frac{1}{2}$

b) Sai:

c) Đúng: Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M vuông với đường thẳng $y = -2x - \frac{5}{2}$

d) Đúng: Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M đi qua điểm $A\left(0; -\frac{5}{2}\right)$

Câu 7: Tính được đạo hàm của mỗi hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra. Khi đó:

a) $y = x^2 - x$ tại $x_0 = 1$ có $f'(1) = 1$

b) $y = \sqrt{x}$ tại $x_0 = 1$ có $f'(1) = 1$

c) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ tại $x_0 = 0$ có $f'(0) = 0$

d) $y = \frac{1}{x+1}$ tại $x_0 = 2$ có $f'(2) = -\frac{1}{9}$

Lời giải

a) Đúng: $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1$.

b) Sai: $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$.

c) Đúng: $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2 + 1} - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2 + 1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x^2 + 1} = 0$.

d) Đúng: $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x+1} - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{3(x+1)} = -\frac{1}{9}$.



Câu 8: Cho hàm số $y = x^2 + 3x + 1$ có đồ thị (C) . Viết được phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung. Khi đó:

- a) Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến bằng 3.
- b) Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $A(1;3)$
- c) Phương trình tiếp tuyến cắt đường thẳng $y = 2x + 1$ tại điểm có hoành độ bằng 0
- d) Phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + 1$

Lời giải

Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$

$$\text{Ta có } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 3) = 3$$

Vậy phương trình tiếp tuyến là: $y = 3x + 1$

- a) Đúng: Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến bằng 3.
- b) Sai: Phương trình tiếp tuyến không đi qua điểm $A(1;3)$
- c) Đúng: Phương trình tiếp tuyến cắt đường thẳng $y = 2x + 1$ tại điểm có hoành độ bằng 0
- d) Đúng: Phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + 1$

Câu 9: Viết được phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$. Khi đó:

- a) Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến bằng 1.
- b) Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1;2)$
- c) Phương trình tiếp tuyến cắt đường thẳng $y = 2x + 1$ tại điểm có hoành độ bằng $\frac{4}{3}$
- d) Phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = x + 1$

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = -\frac{4}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(-1) = -1.$$

Vì $x_0 = -1$ nên $y_0 = -2 \Rightarrow$ Tiếp điểm $M(-1;-2)$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(-1;-2)$ là $y = -x - 3$.

- a) Sai: Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến bằng -1 .
- b) Sai: Phương trình tiếp tuyến không đi qua điểm $M(-1;2)$
- c) Đúng: Phương trình tiếp tuyến cắt đường thẳng $y = 2x + 1$ tại điểm có hoành độ bằng $\frac{4}{3}$
- d) Đúng: Phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = x + 1$



Câu 10: Viết được phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+9}{x+1}$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d : x - 2y + 2 = 0$. Khi đó:

- a) Có hai phương trình tiếp tuyến thỏa mãn.
- b) Hệ số góc của tiếp tuyến bằng -2
- c) Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $A(1;5)$
- d) Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $B(1;-7)$

Lời giải

Đường thẳng $d : x - 2y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$ nên đường thẳng d có hệ số góc là $k_d = \frac{1}{2}$.

Tiếp tuyến cần tìm có hệ số góc k vuông góc với đường thẳng d

$$\Rightarrow k \cdot k_d = -1 \Rightarrow k = -\frac{1}{k_d} = -2.$$

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình $y' = k \Rightarrow \frac{-8}{(x+1)^2} = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$.

Với $x = 1$, phương trình tiếp tuyến là $y = -2x + 7$.

Với $x = -3$, phương trình tiếp tuyến là $y = -2x - 9$.

Vậy có hai phương trình tiếp tuyến thỏa mãn là $d_1 : y = -2x + 7; y = -2x - 9$.

- a) Đúng: Có hai phương trình tiếp tuyến thỏa mãn.
- b) Đúng: Hệ số góc của tiếp tuyến bằng -2
- c) Đúng: Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $A(1;5)$
- d) Đúng: Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $B(1;-7)$

**E BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN**

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-\sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Xét } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3-\sqrt{4-x}}{4} - \frac{1}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-\sqrt{4-x}}{4x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2-\sqrt{4-x})(2+\sqrt{4-x})}{4x(2+\sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4x(2+\sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4(2+\sqrt{4-x})} = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Xét } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Câu 3: Tìm tham số thực b để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ -\frac{x^2}{2} + bx - 6 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 2$.

Lời giải

Để hàm số có đạo hàm tại $x = 2$ trước tiên hàm số phải liên tục tại $x = 2$, tức là

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(-\frac{x^2}{2} + bx - 6 \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 \Leftrightarrow -2 + 2b - 6 = 4 \Leftrightarrow b = 6.$$

Thử lại với $b = 6$, ta có

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-\frac{x^2}{2} + bx - 10}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-\frac{x^2}{2} + 6x - 10}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(10-x)}{2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{10-x}{2} = 4; \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4. \end{aligned}$$



Vì $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ nên hàm số có đạo hàm tại $x = 2$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} mx^2 + 2x + 2 & \text{khi } x > 0 \\ nx + 1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số m, n sao cho $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(0) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{mx^2 + 2x + 2 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{mx^2 + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (mx + 2) = 2. \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{nx + 2 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{nx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} n = n \end{cases}$$

Hàm số có đạo hàm tại $x = 0$ khi và chỉ khi tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow n = 2.$$

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số a, b sao cho $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 1$.

Lời giải

Hàm số có đạo hàm tại $x = 1$, do đó hàm số liên tục tại $x = 1 \Rightarrow a + b = \frac{1}{2}$. (1)

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + b - (a \cdot 1 + b)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} a = a \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+1)}{2} = 1 \end{cases}.$$

Hàm số có đạo hàm tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow a = 1$. (2)

Từ (1) và (2), ta có $a = 1, b = -\frac{1}{2}$.

Câu 6: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 2$ giây.

Lời giải

Ta tính được $s'(t) = 2t$.

Vận tốc của chất điểm $v(t) = s'(t) = 2t \Rightarrow v(2) = 2 \cdot 2 = 4\text{m/s}$.



Câu 7: Một viên đạn được bắn lên cao theo phương trình $s(t) = 196t - 4,9t^2$ trong đó $t > 0$, t tính bằng giây kể từ thời điểm viên đạn được bắn lên cao và $s(t)$ là khoảng cách của viên đạn so với mặt đất được tính bằng mét. Tại thời điểm vận tốc của viên đạn bằng 0 thì viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét?

Lời giải

Ta tính được $s'(t) = 196 - 9,8t$.

Vận tốc của viên đạn $v(t) = s'(t) = 196 - 9,8t \Rightarrow v(t) = 0 \Leftrightarrow 196 - 9,8t = 0 \Leftrightarrow t = 20$.

Khi đó viên đạn cách mặt đất một khoảng $h = s(20) = 196 \cdot 20 - 4,9 \cdot 20^2 = 1960\text{m}$.

Câu 8: Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 9t + 2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Hỏi tại thời điểm nào thì vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất?

Lời giải

Ta tính được $s'(t) = 3t^2 - 6t + 9$.

Vận tốc của chất điểm $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 9 = 3(t-1)^2 + 6 \geq 6$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t = 1$.

Câu 9: Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 8t + 3t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng mét/giây. Tìm gia tốc của chất điểm tại thời điểm mà vận tốc chuyển động là 11m/s

Lời giải

Ta tính được $v'(t) = 8 + 6t$.

Ta có $v(t) = 11 \Leftrightarrow 8t + 3t^2 = 11 \Leftrightarrow t = 1 \ (t > 0)$.

Gia tốc của chất điểm $a(t) = v'(t) = 8 + 6t \Rightarrow a(1) = v'(1) = 8 + 6 \cdot 1 = 14\text{m/s}^2$.

Câu 10: Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9,8\text{m/s}^2$ là gia tốc trọng trường. Tìm vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ t ($t = 5\text{s}$) đến $t + \Delta t$ với $\Delta t = 0,001\text{s}$.

Lời giải

Ta có $v_{tb} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}g(t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{\Delta t} = gt + \frac{1}{2}g\Delta t = 49,0049\text{m/s}$.

Câu 11: Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = 6t^2 - 2t^3$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng 5 giây kể từ lúc vật bắt đầu chuyển động vận tốc lớn nhất của vật là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi Δt là số gia của biến số tại t_0



$$\begin{aligned}
\Delta S &= 6(t_0 + \Delta t)^2 - 2(t_0 + \Delta t)^3 - (6t_0^2 - 2t_0^3) \\
&= 6(t_0^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2) - 2(t_0^3 + 3t_0^2\Delta t + 3t_0\Delta t^2 + \Delta t^3) - (6t_0^2 - 2t_0^3) \\
&= 12t_0\Delta t + 6\Delta t^2 - 6t_0^2\Delta t - 6t_0\Delta t^2 - \Delta t^3 \\
\frac{\Delta S}{\Delta t} &= 12t_0 + 6\Delta t - 6t_0^2 - 6t_0\Delta t - \Delta t^2.
\end{aligned}$$

$$v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (12t_0 + 6\Delta t - 6t_0^2 - 6t_0\Delta t - \Delta t^2) = 12t_0 - 6t_0^2 \text{ (m/s)}$$

Vận tốc của vật là: $v(t_0) = s'(t_0) = -6t_0^2 + 12t_0 = -6(t_0 - 1)^2 + 6 \leq 6$ dấu bằng khi $t_0 = 1$.

Vận tốc lớn nhất của vật là 6 (m/s).

Câu 12: Một bình nuôi cấy vi sinh vật được giữ ở nhiệt độ 0°C . Tại thời điểm $t = 0$ (giây) người ta cung cấp nhiệt cho nó. Nhiệt độ tăng lên và được ước tính bởi hàm số $y = f(t) = t^2 + t + 1$ ($^\circ\text{C}$) với $f(t)$ là nhiệt độ của bình nuôi cấy ở thời điểm t . Hãy tính tốc độ tăng của bình tại thời điểm $t = 5$ giây.

Lời giải

Gọi Δt là số gia của biến số tại t_0

$$\begin{aligned}
\Delta y &= ((t_0 + \Delta t)^2 + (t_0 + \Delta t) + 1) - (t_0^2 + t_0 + 1) \\
&= t_0^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2 + t_0 + \Delta t + 1 - t_0^2 - t_0 - 1 = 2t_0\Delta t + \Delta t^2 + \Delta t \\
\frac{\Delta y}{\Delta t} &= 2t_0 + \Delta t + 1.
\end{aligned}$$

$$f'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2t_0 + \Delta t + 1) = 2t_0 + 1 \text{ (}^\circ\text{C/s)}$$

Tốc độ tăng nhiệt tại thời điểm $t = 5$ giây là $f'(5) = 2.5 + 1 = 11$ ($^\circ\text{C/s}$).

Câu 13: Giả sử chi phí C (USD) để sản xuất Y máy tính là $C(Y) = Y^2 + 20Y + 300$. Ta gọi chi phí biên là chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ Y sản phẩm lên $Y + 1$ sản phẩm. Giả sử chi phí biên được xác định bởi hàm số $C'(Y)$. Nếu tăng số lượng sản phẩm từ 100 lên 101 thì chi phí tăng theo là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi ΔY là số gia của biến số tại điểm Y

$$\text{Ta có } \Delta C = C(Y + \Delta Y) - C(Y) = 2Y \cdot \Delta Y + (\Delta Y)^2 + 20\Delta Y$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta C}{\Delta Y} = \frac{2Y \cdot \Delta Y + (\Delta Y)^2 + 20\Delta Y}{\Delta Y} = 2Y + \Delta Y + 20 \Rightarrow C'(Y) = \lim_{\Delta Y \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta Y} = 2Y + 20.$$

$$\Rightarrow C'(100) = 2.100 + 20 = 220.$$

Nếu tăng số lượng sản phẩm từ 100 lên 101 thì chi phí tăng theo là 220 (USD).



Câu 14: Giả sử chi phí C (nghìn đồng) để sản xuất X chiếc quạt điện là $C(X) = X^2 - 10X + 50$. Ta gọi chi phí biên là chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ X sản phẩm lên $X + 1$ sản phẩm. Giả sử chi phí biên được xác định bởi hàm số $C'(X)$. Nếu tăng số lượng sản phẩm từ 50 lên 51 thì chi phí tăng theo là bao nhiêu nghìn đồng?

Lời giải

Gọi ΔX là số gia của biến số tại điểm X

$$\text{Ta có } \Delta C = C(X + \Delta X) - C(X) = 2X \cdot \Delta X + (\Delta X)^2 - 10\Delta X$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta C}{\Delta X} = \frac{2X \cdot \Delta X + (\Delta X)^2 - 10\Delta X}{\Delta X} = 2X + \Delta X - 10 \Rightarrow C'(X) = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta X} = 2X - 10.$$

$$\Rightarrow C'(50) = 2 \cdot 50 - 10 = 90.$$

Nếu tăng số lượng sản phẩm từ 50 lên 51 thì chi phí tăng theo là 90 nghìn đồng.

Câu 15: Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = t^3 - 2t^2 + 30t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng 5 giây kể từ lúc vật bắt đầu chuyển động vận tốc nhỏ nhất của vật là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi Δt là số gia của biến số tại t_0

$$\Delta s = (t_0 + \Delta t)^3 - 2(t_0 + \Delta t)^2 + 30(t_0 + \Delta t) - (t_0^3 - 2t_0^2 + 30t_0)$$

$$= (t_0^3 + 3t_0^2\Delta t + 3t_0(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3) - 2(t_0^2 + 2t_0\Delta t + (\Delta t)^2) + 30\Delta t - (t_0^3 - 2t_0^2)$$

$$= 3t_0^2\Delta t + 3t_0(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3 + 30\Delta t - 4t_0\Delta t - 2(\Delta t)^2$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 3t_0^2 + 3t_0\Delta t + (\Delta t)^2 + 30 - 4t_0 - 2\Delta t.$$

$$v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (3t_0^2 + 3t_0\Delta t + (\Delta t)^2 + 30 - 4t_0 - 2\Delta t) = 3t_0^2 - 4t_0 + 30 \text{ (m/s)}$$

$$\text{Vận tốc của vật là: } v(t_0) = s'(t_0) = 3t_0^2 - 4t_0 + 30 = 3\left(t_0 - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{86}{3} \geq \frac{86}{3}. \text{ Dấu bằng khi } t_0 = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Vận tốc nhỏ nhất của vật là } \frac{86}{3} \text{ (m/s).}$$

Câu 16: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính quãng đường vật đi được từ lúc $t = 0$ đến lúc chuyển động có vận tốc bằng không.

Lời giải

$$\text{Vận tốc của chuyển động chính là đạo hàm của quãng đường } v(t) = s'(t) = -t^2 + 8t + 9$$

$$\text{Vận tốc bằng không khi: } v(t) = s'(t) = -t^2 + 8t + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (ktm)} \\ t = 9 \text{ (tm)} \end{cases}$$

Quãng đường vật chuyển động được đến thời điểm $t = 9$ là: $s(t) = -\frac{1}{3}.9^3 + 4.9^2 + 9.9 = 162(m)$

Câu 17: Một vật di chuyển theo phương thẳng đứng lên trên từ độ cao $20m$ so với mặt đất với vận tốc ban đầu là $15m/s$. Độ cao s của nó tính bằng mét sau t giây kể từ khi bắt đầu chuyển động $t = 0$ được cho bởi công thức $s = 20 + 15t - 5t^2$. Tìm vận tốc của vật khi nó chạm đất.

Lời giải

Vận tốc của vật tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = 15 - 10t$

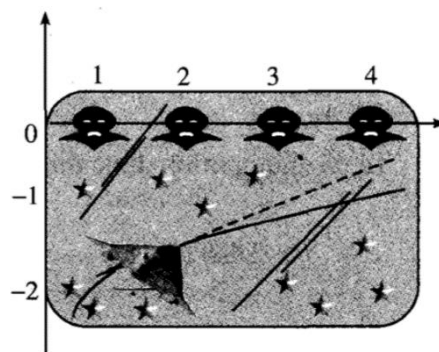
Khi vật chạm đất thì $s = 0 \Rightarrow 20 + 15t - 5t^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 4 \end{cases}$

Vật sau khi chuyển động sẽ chạm đất khi $t = 4$

Vậy vận tốc của vật khi nó chạm đất là $v(4) = s'(4) = 15 - 10.4 = -25(m/s)$.

Vậy tốc độ khi vật chạm đất là $-25(m/s)$.

Câu 18: Trong một trò chơi điện tử, máy bay xuất hiện ở góc trái màn hình rồi bay sang phải theo quỹ đạo (C) là đồ thị của hàm số $y = -1 - \frac{1}{x}, (x > 0)$. Biết rằng tên lửa được bắn ra từ máy bay tại một điểm thuộc (C) sẽ bay theo phương tiếp tuyến của (C) tại điểm đó. Tìm hoành độ x_0 thuộc (C) sao cho tên lửa bắn ra từ đó sẽ bắn trúng mục tiêu ở trên màn hình có tọa độ $(4, 0)$.



Lời giải

Với $x_0 > 0$ tùy ý, ta có

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-1 - \frac{1}{x} - \left(-1 - \frac{1}{x_0}\right)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x \cdot x_0 (x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x \cdot x_0} = \frac{1}{x_0^2}.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm x_0 là $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 = \frac{1}{x_0^2}(x - x_0) - 1 - \frac{1}{x_0}$.

Vì tiếp tuyến đi qua điểm $(4, 0)$ nên $\frac{1}{x_0^2}(4 - x_0) - 1 - \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 + \sqrt{5} \\ x_0 = -1 - \sqrt{5} \end{cases}$.

Đối chiếu với điều kiện $x_0 > 0$, khi đó ta được $x_0 = -1 + \sqrt{5}$.

-----HẾT-----

BÀI

02

CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Đạo hàm của một số hàm số thường gặp

Đạo hàm của hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$

Hàm số $y = x$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2 Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương

Giả sử các hàm số $u = u(x)$, $v = v(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$. Khi đó:

$$\oplus (u + v)' = u' + v'$$

$$\oplus (u - v)' = u' - v'$$

$$\oplus (uv)' = u'v + uv'$$

$$\oplus \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0)$$

Chú ý:

- Quy tắc tính đạo hàm của tổng, hiệu có thể áp dụng cho tổng, hiệu của hai hay nhiều hàm số.
- Với k là một hằng số, ta có: $(ku)' = ku'$.
- Đạo hàm của hàm số nghịch đảo: $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ ($v = v(x) \neq 0$).

3 Đạo hàm của hàm số hợp

Khái niệm hàm số hợp: Giả sử $u = g(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $(a; b)$, có tập giá trị chứa trong khoảng $(c; d)$ và $y = f(u)$ là hàm số xác định trên khoảng $(c; d)$. Hàm số $y = f(g(x))$ được gọi là hàm số hợp của hàm số $y = f(u)$ với $u = g(x)$.

Đạo hàm của hàm số hợp: Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm u'_x tại x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm y'_u tại u thì hàm số hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm y'_x tại x là $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

4 Đạo hàm của hàm số lượng giác

Đạo hàm của hàm số $y = \sin x$

- Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(\sin x)' = \cos x$.



- Đối với hàm số hợp $y = \sin u$, với $u = u(x)$, ta có: $(\sin u)' = u' \cdot \cos u$.

Đạo hàm của hàm số $y = \cos x$

- Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(\cos x)' = -\sin x$.
- Đối với hàm số hợp $y = \cos u$, với $u = u(x)$, ta có: $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$.

Đạo hàm của hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$

- Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- Đối với các hàm số hợp $y = \tan u$ và $y = \cot u$, với $u = u(x)$, ta có:

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}; (\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u} \text{ (giả thiết } \tan u \text{ và } \cot u \text{ có nghĩa).}$$

5 Đạo hàm của hàm số mũ và logarit

Giới hạn liên quan đến hàm số mũ và hàm số lôgarit

Nhận xét. Ta có các giới hạn sau:

$$\oplus \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\oplus \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\oplus \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Đạo hàm của hàm số mũ

- Hàm số $y = e^x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(e^x)' = e^x$.
- Đối với hàm số hợp $y = e^u$, với $u = u(x)$, ta có: $(e^u)' = u' \cdot e^u$.
- Hàm số $y = a^x (0 < a \neq 1)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.
- Đối với hàm số hợp $y = a^u$, với $u = u(x)$, ta có: $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$.

Đạo hàm của hàm số lôgarit

- Hàm số $y = \ln x$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- Đối với hàm số hợp $y = \ln u$, với $u = u(x)$, ta có: $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.
- Hàm số $y = \log_a x$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.
- Đối với hàm số hợp $y = \log_a u$, với $u = u(x)$, ta có: $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$.

Chú ý: Với $x < 0$, ta có: $\ln|x| = \ln(-x)$ và $[\ln(-x)]' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{1}{x}$. Từ đó ta có: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \forall x \neq 0$.

**B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN****Dạng 1: Đạo hàm của một số hàm số thường gặp**

Phương pháp: Sử dụng phối hợp các tính chất và công thức đạo hàm của các hàm số:

Đạo hàm của hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$

Hàm số $y = x$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Giả sử các hàm số $u = u(x)$, $v = v(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$. Khi đó:

$$\oplus (u + v)' = u' + v'$$

$$\oplus (u - v)' = u' - v'$$

$$\oplus (uv)' = u'v + uv'$$

$$\oplus \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0)$$

Chú ý:

- Quy tắc tính đạo hàm của tổng, hiệu có thể áp dụng cho tổng, hiệu của hai hay nhiều hàm số.
- Với k là một hằng số, ta có: $(ku)' = ku'$.
- Đạo hàm của hàm số nghịch đảo: $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ ($v = v(x) \neq 0$).

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = (1 - x^3)^5$

b) $f(x) = x^4 - x^2 + x + 200$

c) $f(x) = 3x^4 - x^3 + x - 2025$

d) $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{5}{x} + 7$

e) $f(x) = x - \frac{4}{x}$

f) $f(x) = -x^7 + 2x^5 + 3x^3$

g) $f(x) = (x+1)(x-2)$

h) $f(x) = \frac{3x+5}{-1+2x}$

i) $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

j) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

Lời giải

a) Ta có $f'(x) = 5(1 - x^3)^4 (1 - x^3)' = -15x^2(1 - x^3)^4$

b) Ta có $f'(x) = (x^4 - x^2 + x + 200)' = (x^4)' - (x^2)' + x' + 200' = 4x^3 - 2x + 1$



c) Ta có $f'(x) = (3x^4 - x^3 + x - 2025)' = 12x^3 - 3x^2 + 1$

d) Ta có $f'(x) = \left(x^3 - 2x^2 + \frac{5}{x} + 7\right)' = (x^3)' + (-2x^2)' + \left(\frac{5}{x}\right)' + (7)' = 3x^2 - 4x - \frac{5}{x^2}$

e) Ta có $f'(x) = \left(x - \frac{4}{x}\right)' = 1 + \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 + 4}{x^2}$.

f) Ta có $f'(x) = (-x^7 + 2x^5 + 3x^3)' = -7x^6 + 10x^4 + 9x^2$

g) Ta có $f'(x) = (x+1)'(x-2) + (x+1)(x-2)' = x-2 + x+1 = 2x-1$

h) Ta có $f'(x) = \frac{(3x+5)' \cdot (2x-1) - (3x+5)(2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{3(2x-1) - 2(3x+5)}{(2x-1)^2} = \frac{-13}{(2x-1)^2}$

i) Ta có: $f'(x) = \left(\frac{x-2}{x-1}\right)' = \frac{(x-2)'(x-1) - (x-2)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x+2}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}$

j) Ta có $f'(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{(x-1)'(x+1) - (x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$

Bài tập 2: Tính đạo hàm của các hàm số sau đây:

a) $f(x) = -2x^2 + 3x$

b) $f(x) = x^4 - 3x^2 + \frac{1}{2}x + 3$

c) $f(x) = \frac{1}{6x-5}$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^6 - \frac{3}{x} + 2\sqrt{x}$

e) $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

f) $f(x) = -2x^5 + 4\sqrt{x}$

Lời giải

a) $f'(x) = (-2x^2 + 3x)' = -2(x^2)' + 3x' = -4x + 3$

b) $f'(x) = \left(x^4 - 3x^2 + \frac{1}{2}x + 3\right)' = (x^4)' - (3x^2)' + \left(\frac{1}{2}x\right)' + (3)' = 4x^3 - 6x + \frac{1}{2}$

c) Ta có $f'(x) = \left(\frac{1}{6x-5}\right)' = -\frac{(6x-5)'}{(6x-5)^2} = -\frac{6}{(6x-5)^2}$

d) $f'(x) = 3x^5 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

e) $f'(x) = \frac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$

f) $f'(x) = -10x^4 + \frac{2}{\sqrt{x}}$.



Bài tập 3: Cho hàm số $f(x) = 2^{3x+2}$.

- Hàm số $f(x)$ là hàm hợp của các hàm số nào?
- Tính đạo hàm của $f(x)$.

Lời giải

- Hàm số $f(x)$ là hàm hợp của các hàm số a^u với $u = 3x + 2$.
- $f'(x) = (2^{3x+2})' = (3x+2)' \cdot 2^{3x+2} \cdot \ln 2 = 3 \cdot 2^{3x+2} \cdot \ln 2$

Bài tập 4: Một vật chuyển động rơi tự do có phương trình $h(t) = 100 - 4,9t^2$, ở đó độ cao h so với mặt đất tính bằng mét và thời gian t tính bằng giây. Tính vận tốc của vật:

- Tại thời điểm $t = 5$ giây
- Khi vật chạm đất

Lời giải

- Ta có $v(t) = h'(t) = (100 - 4,9t^2)' = -9,8t$ là vận tốc của vật tại thời điểm t giây. Do đó tại thời điểm $t = 5$ giây vận tốc của vật là $v = |v(5)| = |-9,8 \cdot 5| = 49 \text{ m/s}$.

Khi vật chạm đất độ cao $h = 0$ nên ta có phương trình $100 - 4,9t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{10\sqrt{10}}{7} (\text{nhan}) \\ t = -\frac{10\sqrt{10}}{7} (\text{loai}) \end{cases}$

- Vật chạm đất tạo thời điểm $t = \frac{10\sqrt{10}}{7} \text{ s}$, khi đó vận tốc của vật là:

$$v = \left| v\left(\frac{10\sqrt{10}}{7}\right) \right| = \left| -9,8 \cdot \frac{10\sqrt{10}}{7} \right| = 14\sqrt{10} \text{ m/s}$$

Bài tập 5: Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ ban đầu $v_0 = 196 \text{ (m/s)}$ (bỏ qua sức cản của không khí). Tìm thời điểm tại đó tốc độ của viên đạn bằng 0. Khi đó viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét (lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$) ?

Lời giải

Gia tốc $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ nên suy ra $a = -9,8 \text{ m/s}^2$

Công thức tính quãng đường của chuyển động: $s(t) = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 = 196t - 4,9t^2 \text{ (m)}$.

Công thức tính vận tốc của chuyển động: $v(t) = v_0 + a \cdot t = 196 - 9,8t \text{ (m/s)}$.

Vận tốc của viên đạn bằng 0 $\Leftrightarrow v(t) = 0 \Leftrightarrow 196 - 9,8t = 0 \Leftrightarrow t = 20$ giây.

Với $t = 20 \Rightarrow s(20) = 196 \cdot 20 - 4,9 \cdot 20^2 = 1960 \text{ m}$.

Vậy viên đạn đạt tốc độ bằng 0 tại thời điểm $t = 20 \text{ (s)}$ và viên đạn cách mặt đất 1960 (m) .

**Dạng 2: Đạo hàm của hàm số lượng giác****Phương pháp:****Đạo hàm của hàm số $y = \sin x$**

- Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(\sin x)' = \cos x$.
- Đối với hàm số hợp $y = \sin u$, với $u = u(x)$, ta có: $(\sin u)' = u' \cdot \cos u$.

Đạo hàm của hàm số $y = \cos x$

- Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(\cos x)' = -\sin x$.
- Đối với hàm số hợp $y = \cos u$, với $u = u(x)$, ta có: $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$.

Đạo hàm của hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$

- Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- Đối với các hàm số hợp $y = \tan u$ và $y = \cot u$, với $u = u(x)$, ta có:

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}; (\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u} \text{ (giả thiết } \tan u \text{ và } \cot u \text{ có nghĩa).}$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN**Bài tập 1:** Tính đạo hàm của các hàm số lượng giác sau:

- | | |
|---|---|
| a) $f(x) = \cot 2x$ | b) $f(x) = 3\sin x - 4\cos x + 2\tan x$ |
| c) $f(x) = 2\cos(x^2)$ | d) $f(x) = \sqrt{\cos 6x}$ |
| e) $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x - 2x + 2025$ | f) $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$ |

Lời giải

- a) $f'(x) = (\cot 2x)' = -\frac{(2x)'}{\sin^2 2x} = -\frac{2}{\sin^2 2x}$
- b) $f'(x) = (3\sin x - 4\cos x + 2\tan x)' = y' = 3\cos x + 4\sin x + \frac{2}{\cos^2 x}$
- c) $y' = -2 \cdot 2x \cdot \sin(x^2) = -4x \sin(x^2)$
- d) $f'(x) = (\sqrt{\cos 6x})' = \frac{(\cos 6x)'}{2\sqrt{\cos 6x}} = \frac{-6\sin 6x}{2\sqrt{\cos 6x}} = \frac{-3\sin 6x}{\sqrt{\sin 6x}}$
- e) $f'(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x - 2$
- f) $f'(x) = \frac{(\cos x)'(1 - \sin x) - (1 - \sin x)' \cos x}{(1 - \sin x)^2} = \frac{-\sin x(1 - \sin x) + \cos^2 x}{(1 - \sin x)^2} = \frac{1}{1 - \sin x}$



Bài tập 2: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$

b) $y = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)$

c) $y = 2\cos x^2$

d) $y = \tan \frac{x+1}{2}$

e) $y = \sin \sqrt{2+x^2}$

f) $y = \sin(\sin x)$

g) $y = 2\sin^2 x - \cos 2x + x$

h) $y = \cos^3(2x-1)$

i) $y = \tan^3 x + \cot 2x$

j) $y = \sin(x^2 - 3x + 2)$

Lời giải

a) $y' = \left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)' \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) = -3\cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$

b) $y' = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)' \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right) = -\frac{1}{2} \cdot (-2x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right) = x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)$

c) $y' = 2 \cdot (x^2)' \cdot (-\sin x^2) = -4x \cdot \sin x^2$

d) $y' = \left(\frac{x+1}{2}\right)' \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x+1}{2}} = \left(\frac{x+1}{2}\right)' \cdot \left(1 + \tan^2 \frac{x+1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x+1}{2}\right)$

e) $y' = \left(\sqrt{2+x^2}\right)' \cdot \cos \sqrt{2+x^2} = \frac{2x}{2\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2} = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$

f) $y' = (\sin x)' \cdot \cos(\sin x) = \cos x \cdot \cos(\sin x)$

g) $y' = 2 \cdot 2 \cdot \cos x \cdot \sin x + 2 \sin 2x + 1 = 2 \sin 2x + 2 \sin 2x + 1 = 4 \sin 2x + 1$

h) $y' = 3 \cdot (\cos(2x-1))' \cdot \cos^2(2x-1) = 3 \cdot 2 \cdot (-\sin(2x-1)) \cdot \cos^2(2x-1) = -6 \sin(2x-1) \cos^2(2x-1)$

i) $y' = (\tan^3 x + \cot 2x)' = 3 \cdot (\tan x)' \cdot \tan^2 x - \frac{2}{\sin^2 2x} = 3 \frac{1}{\cos^2 x} \tan^2 x - \frac{2}{\sin^2 2x}$

j) $y' = (x^2 - 3x + 2)' \cdot \cos(x^2 - 3x + 2) = (2x - 3) \cos(x^2 - 3x + 2)$

Bài tập 3: Cho hàm số $f(x) = 2\sin^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$. Chứng minh rằng $|f'(x)| \leq 6$ với mọi x

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } f'(x) &= 2 \cdot 2 \cdot \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\right)' \\ &= 6 \cdot 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 6 \sin\left(6x - \frac{\pi}{2}\right) = -6 \cos(6x) \end{aligned}$$

$$\text{Vì } -1 \leq \cos(6x) \leq 1$$

$$\text{Suy ra } |f'(x)| = |-6 \cos 6x| = 6 |\cos 6x| \leq 6 \text{ với mọi } x.$$



Bài tập 4: Chuyển động của một hạt trên một dây rung được cho bởi $s(t) = 12 + 0,5 \sin(4\pi t)$ trong đó s tính bằng cm và t tính bằng giây. Tính vận tốc của hạt sau t giây. Vận tốc cực đại của hạt là bao nhiêu?

Lời giải

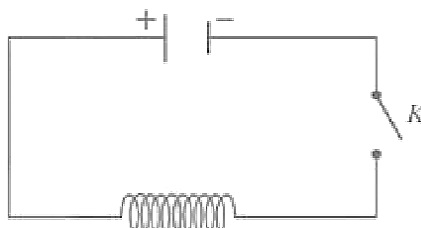
a) Vận tốc của hạt sau t giây là: $v(t) = s'(t) = (12 + 0,5 \sin(4\pi t))' = 2\pi \cos(4\pi t)$

b) Do $-1 \leq \cos(4\pi t) \leq 1 \Leftrightarrow -2\pi \leq 2\pi \cos(4\pi t) \leq 2\pi$.

Suy ra vận tốc cực đại của hạt là $v_{\max} = 2\pi$ cm/s đạt tại thời điểm

$$\cos(4\pi t) = 1 \Leftrightarrow 4\pi t = k2\pi \Leftrightarrow t = \frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Bài tập 5: Cho mạch điện như hình sau. Lúc đầu tụ điện có điện tích Q_0 . Khi đóng khóa K , tụ điện phóng điện qua cuộn dây; điện tích q của tụ điện phụ thuộc vào thời gian t theo công thức $q(t) = Q_0 \sin \omega t$, trong đó ω là tốc độ góc. Biết rằng cường độ $I(t)$ của dòng điện tại thời điểm t được tính theo công thức $I(t) = q'(t)$. Cho biết $Q_0 = 10^{-8}$ (C) và $\omega = 10^6 \pi$ (rad/s). Tính cường độ của dòng điện tại thời điểm $t = 6$ s (tính chính xác đến 10^{-5} (mA))



Lời giải

Ta có: $q(t) = Q_0 \sin \omega t \Rightarrow I(t) = q'(t) = Q_0 \cdot \omega \cdot \cos \omega t$

$$\Rightarrow I(t) = 10^{-8} \cdot 10^6 \pi \cdot \cos(10^6 \pi t) = \frac{\pi}{100} \cdot \cos(10^6 \pi t).$$

Tại thời điểm $t = 6$ s ta có $I(t) = \frac{\pi}{100} \cdot \cos(10^6 \pi \cdot 6) = \frac{\pi}{100}$ (A).

**Dạng 3: Đạo hàm của hàm số mũ và hàm số logarit****Phương pháp:** Giới hạn liên quan đến hàm số mũ và hàm số logarit**Nhận xét.** Ta có các giới hạn sau:

$$\oplus \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\oplus \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\oplus \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Đạo hàm của hàm số mũ

- Hàm số $y = e^x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(e^x)' = e^x$.
- Đối với hàm số hợp $y = e^u$, với $u = u(x)$, ta có: $(e^u)' = u' \cdot e^u$.
- Hàm số $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$) có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.
- Đối với hàm số hợp $y = a^u$, với $u = u(x)$, ta có: $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$.

Đạo hàm của hàm số logarit

- Hàm số $y = \ln x$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- Đối với hàm số hợp $y = \ln u$, với $u = u(x)$, ta có: $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.
- Hàm số $y = \log_a x$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.
- Đối với hàm số hợp $y = \log_a u$, với $u = u(x)$, ta có: $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$.

Chú ý: Với $x < 0$, ta có: $\ln|x| = \ln(-x)$ và $[\ln(-x)]' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{1}{x}$. Từ đó ta có: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \forall x \neq 0$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN**Bài tập 1:** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \log_3(2x+1)$

b) $y = \log_3(1-2x)$

c) $y = 5^{2x-1}$

d) $y = 2025^{x-2025}$

e) $y = x + \ln(x+3)$

f) $y = e^{\sin x}$

g) $y = e^{2x-3} + e^{2025}$

h) $y = \log_2(x^2 - 2x)$

i) $y = \log_3(2x^2 - x + 1)$

j) $y = 3^x + \log_3(x - 2x^2)$

Lời giải

a) Ta có $y' = \frac{(2x+1)'}{(2x+1)\ln 3} = \frac{2}{(2x+1)\ln 3}$.

b) Ta có $y' = \frac{(1-2027x)'}{(1-2027x)\ln 3} = \frac{-2027}{(1-2027x)\ln 3}$.

c) Ta có $y' = (2x-1)' \cdot 5^{2x-1} \cdot \ln 5 = 2 \cdot 5^{2x-1} \cdot \ln 5$.



d) Ta có $y' = (2025^{x-2025})' \Leftrightarrow y' = 2025^{x-2025} \cdot \ln 2025$.

e) Ta có $y' = 1 + \frac{(x+3)'}{x+3} = 1 + \frac{1}{x+3}$.

f) Ta có $y' = (\sin x)' \cdot e^{\sin x} = \cos x \cdot e^{\sin x}$.

g) Ta có $y' = (e^{2x-3} + e^{2025})' = (2x-3)' \cdot e^{2x-3} = 2 \cdot e^{2x-3}$.

h) Ta có $y' = \frac{(x^2 - 2x)'}{(x^2 - 2x) \ln 2} = \frac{2x - 2}{(x^2 - 2x) \ln 2}$.

i) Ta có $y' = (\log_3(2x^2 - x + 1))' = \frac{(2x^2 - x + 1)'}{(2x^2 - x + 1) \ln 3} = \frac{2x - 1}{(2x^2 - x + 1) \ln 3}$.

j) Ta có $y' = (3^x + \log_3(x - 2x^2))' = 3^x \ln 3 + \frac{(x - 2x^2)'}{(x - 2x^2) \ln 3} = 3^x \ln 3 + \frac{1 - 4x}{(x - 2x^2) \ln 3}$.

Bài tập 2: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x \cdot e^x$

b) $y = \log_2(x^2 + 1)$

c) $y = e^{-x^3 + x^2 + x}$

d) $y = 2024^{x^2 - 5x}$

e) $y = \log_{2024}(2x - 1)$

f) $y = (-x^2 + 3x + 7)^7$

g) $y = x^2 e^x$

h) $y = \frac{x}{1 + \ln x}$

Lời giải

a) Ta có: $y' = x' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' = e^x + x \cdot e^x = (1 + x)e^x$

b) Ta có: $y' = \frac{2x}{(x^2 + 1) \ln 2}$

c) Ta có: $y' = (-3x^2 + 2x + 1) \cdot e^{-x^3 + x^2 + x}$

d) Ta có: $y' = (x^2 - 5x)' \cdot 2024^{x^2 - 5x} \ln 2024 = (2x - 5) \cdot 2024^{x^2 - 5x} \ln 2024$

e) Ta có: $y' = \frac{(2x - 1)'}{(2x - 1) \ln 2024} = \frac{2}{(2x - 1) \ln 2024}$

f) Ta có: $y' = 7(-x^2 + 3x + 7)^6 \cdot (-x^2 + 3x + 7)' = 7(-2x + 3)(-x^2 + 3x + 7)^6$

g) Ta có: $y' = (x^2)' e^x + x^2 (e^x)' = 2x e^x + x^2 e^x = (2 + x)x e^x$

h) Ta có: $y' = \frac{x'(1 + \ln x) - x(1 + \ln x)'}{(1 + \ln x)^2} = \frac{1 + \ln x - 1}{(1 + \ln x)^2} = \frac{\ln x}{(1 + \ln x)^2}$

**Dạng 4: Ứng dụng thực tế****Phương pháp:** Sử dụng phối kết hợp các kiến thức đã nêu**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

Bài tập 1: Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - t^2 + 3t - 4$, (t được tính bằng giây, s tính bằng mét). Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 5$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{Ta có: } v(t) = s'(t) = 2t^2 - 2t + 3;$$

$$s'(5) = 2.5^2 - 2.5 + 3 = 43.$$

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 5$ là: 43(m/s).

Bài tập 2: Nếu số lượng sản phẩm sản xuất được của một nhà máy là x (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là $P(x) = -150x^2 + 24000x - 35000$ (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 1000 sản phẩm.

Lời giải

$$\text{Ta có: } P'(x) = -300x + 24000$$

Tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 1000 sản phẩm là

$$P'(10) = -300.10 + 24000 = 21000.$$

Bài tập 3: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s = f(t)$ thỏa mãn $f''(t) = 2 + 3t$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Gia tốc tức thời tại điểm $t = 1$ giây của chuyển động bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{Ta có } a(t) = s''(t) = f''(t) = 2 + 3t.$$

Vậy gia tốc tức thời tại điểm $t = 1$ giây của chuyển động là $a(1) = 2 + 3.1 = 5 \text{ m/s}^2$.

Bài tập 4: Nhiệt độ cơ thể của một người trong thời gian bị bệnh được biểu diễn bởi công thức sau đây $T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6$ trong đó t là nhiệt độ (tính theo đơn vị đo nhiệt độ Fahrenheit) tại thời điểm t (tính theo ngày). Tìm tốc độ thay đổi của nhiệt độ (đơn vị: $^{\circ}\text{F}$ /ngày) ở thời điểm $t = 2$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6 \text{ nên } T'(t) = -0,2t + 1,2.$$

$$\text{Ở thời điểm } t = 2 \text{ thì } T'(2) = -0,2.2 + 1,2 = 0,8 \text{ (}^{\circ}\text{F /ngày)}$$

Bài tập 5: Dân số P (tính theo nghìn người) của một thành phố nhỏ được cho bởi công thức $P(t) = \frac{500t}{t^2 + 9}$ trong đó t là thời gian được tính bằng năm. Tìm tốc độ tăng dân số (đơn vị: nghìn người/năm) tại thời điểm $t = 7$ (làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

$$\text{Ta có: } P(t) = \frac{500t}{t^2 + 9} \text{ nên } P'(t) = 500 \cdot \frac{-t^2 + 9}{(t^2 + 9)^2}.$$



Ở thời điểm $t = 7$ thì $P'(7) = 500 \cdot \frac{-7^2 + 9}{(7^2 + 9)^2} \approx -5,9$ (nghìn người/năm).

Bài tập 6: Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 8t + 3t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng mét/giây. Tìm gia tốc của chất điểm tại thời điểm mà vận tốc chuyển động là 11 mét/giây.

Lời giải

Ta tính được $v'(t) = 8 + 6t$.

Ta có $v(t) = 11 \Leftrightarrow 8t + 3t^2 = 11 \Leftrightarrow t = 1$ ($t > 0$).

Gia tốc của chất điểm $a(t) = v'(t) = 8 + 6t \longrightarrow a(1) = v'(1) = 8 + 6.1 = 14 \text{ m/s}^2$.

Bài tập 7: Một chuyển động theo qui luật là $s = -\frac{1}{2}t^3 + 3t^2 + 20$ với t giây là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi chuyển được trong khoảng thời gian đó. Quãng đường vật đi được bắt đầu từ lúc vật chuyển động tới thời điểm vật đạt được vận tốc lớn nhất bằng.

Lời giải

Ta có: $s = -\frac{1}{2}t^3 + 3t^2 + 20 \Rightarrow v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 6t$

$$\Leftrightarrow v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}(t^2 - 4t + 4 - 4) = -\frac{3}{2}[(t-2)^2 - 4] = \frac{-3}{2}(t-2)^2 + 6 \leq 6$$

Vậy vận tốc đạt được giá trị lớn nhất tại thời điểm $t = 2$ (s).

Khi đó quãng đường vật đi được là: $s = s(2) = -4 + 12 + 20 = 28$ (m).

Bài tập 8: Một công ty xác định rằng tổng chi phí của họ (tính theo nghìn đô-la), để sản xuất x mặt hàng là $H(x) = \sqrt{5x^2 + 60}$ và công ty lên kế hoạch nâng sản lượng trong t tháng kể từ nay theo hàm số $x(t) = 20t + 40$. Chi phí sẽ tăng với tốc độ bao nhiêu nghìn đô-la/tháng sau 5 tháng kể từ khi công ty thực hiện kế hoạch đó? (làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

Ta có: $H'(x) = \frac{5x}{\sqrt{5x^2 + 60}}$; $x'(t) = 20$; $x(5) = 20.5 + 40 = 140$.

Mà $H'(x(t)) = H'(x) \cdot x'(t)$ hay $H'(x(5)) = H'(140) \cdot x'(5)$

Do đó $H'(x(5)) = \frac{5.140}{\sqrt{5.140^2 + 60}} \cdot 20 \approx 44,7$ nghìn đô-la/ tháng.

Bài tập 9: Cho một vật chuyển động theo phương trình $s(t) = t^2 + mt + 10$. Trong đó: s là quãng đường vật đi được (mét) và t là thời gian vật chuyển động (giây). Xác định giá trị của tham số m biết tại thời điểm $t = 3$ thì vận tốc tức thời của vật là 4,5 m/s.

Lời giải

Vận tốc của vật tại thời điểm t là: $v(t) = s'(t) = 2t + m$.

Vận tốc tức thời của vật là 4,5 m/s khi $v(3) = 4,5 \Leftrightarrow 2.3 + m = 4,5 \Leftrightarrow m = -1,5$.

Bài tập 10: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5}$ (đơn vị: nghìn người). Biết rằng đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (đơn vị:



nghìn người/năm). Hỏi vào năm 2025, tốc độ tăng dân số của thị trấn này là bao nhiêu nghìn người/năm? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Tốc độ tăng dân số của thị trấn tại thời điểm t năm kể từ năm 1970 là: $f'(t) = \frac{120}{(t+5)^2}$ (nghìn người/năm).

Vào năm 2025, $t = 2025 - 1970 = 55$ nên tốc độ tăng dân số của thị trấn tại thời điểm này là

$$f'(55) = \frac{120}{(5+55)^2} \approx 0,03 \text{ (nghìn người/năm)}.$$

**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trên khoảng $(0; +\infty)$, hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm là

- A. $y' = \frac{2}{\sqrt{x}}$. B. $y' = \frac{1}{2}\sqrt{x}$. C. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. D. $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Lời giải

Nhắc lại được kiến thức, hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}, x > 0$ và $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) > 0$ là

- A. $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$. B. $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. C. $(-3; 1)$. D. $(-1; 3)$.

Lời giải

Ta có $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ suy ra $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 9 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty).$$

Câu 3: Đạo hàm của hàm số $y = 1 - \cos 2x$ là

- A. $y' = -\sin 2x$. B. $y' = 2\sin x$. C. $y' = -2\sin 2x$. D. $y' = 2\sin 2x$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = (1 - \cos 2x)' = 1' - (\cos 2x)' = (2x)' \cdot \sin 2x = 2\sin 2x.$$

Câu 4: Hàm số $y = \tan x + \sqrt{3}x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ là

- A. $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$. B. $y' = \frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{3}$. C. $y' = -\frac{1}{\cos^2 x}$. D. $y' = -\frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{3}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ nên } y' = (\tan x + \sqrt{3}x)' = (\tan x)' + (\sqrt{3}x)' = \frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{3}.$$

Câu 5: Hàm số $y = \cos^2 5x$ có đạo hàm là

- A. $y' = 2\cos 5x$. B. $y' = 10\cos 5x$. C. $y' = -5\sin 10x$. D. $y' = 10\sin 10x$.

Lời giải

Đặt $u = \cos 5x$, ta có $y = u^2$. Khi đó: $y'_u = 2u$; $u'_x = -5\sin 5x$.

Theo công thức tính đạo hàm của hàm hợp, ta có:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = 2u \cdot (-5\sin 5x) = 2 \cdot \cos 5x \cdot (-5\sin 5x) = -5 \cdot (2\sin 5x \cdot \cos 5x) = -5\sin 10x.$$

Câu 6: Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $(2^x)' = 2^x \ln 2$. B. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. C. $(\log_3 x)' = \frac{1}{x \ln 3}$. D. $(e^{2x})' = e^{2x}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } (e^{2x})' = (2x)' \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2x} = 2 \cdot e^{2x}.$$

Câu 7: Đạo hàm của hàm số $y = 4^{x^2+3}$ là



A. $y' = (x^2 + 3) \cdot 4^{x^2+3}$. B. $y' = \ln 4 \cdot 4^{x^2+3}$. C. $y' = 2x \cdot \ln 4 \cdot 4^{x^2+3}$. D. $y' = 2x \cdot \ln 2 \cdot 2^{2x^2+6}$.

Lời giải

Đặt $u = x^2 + 3$ ta có $y = 4^u$. Khi đó $y'_u = (4^u)' = 4^u \cdot \ln 4$; $u'_x = 2x$

Theo công thức tính đạo hàm của hàm hợp, ta có:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = 4^u \cdot \ln 4 \cdot 2x = 4^{x^2+3} \cdot \ln 4 \cdot 2x = 2x \cdot \ln 4 \cdot 4^{x^2+3}.$$

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$. Giá trị $f'(2)$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $-\frac{2}{3}$. D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = \frac{(e^{-x} + xe^{-x})'}{e^{-x} + xe^{-x}} = \frac{-e^{-x} + e^{-x} - xe^{-x}}{e^{-x} + xe^{-x}} = -\frac{x}{1+x}$.

Suy ra $f'(2) = -\frac{2}{1+2} = -\frac{2}{3}$.

Câu 9: Một chất điểm chuyển động có phương trình $S = t^3 - 3t^2 - 9t + 5$, trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Gia tốc tại thời điểm vận tốc bị triệt tiêu là

A. $12m/s^2$. B. $9m/s^2$. C. $-9m/s^2$. D. $-12m/s^2$.

Lời giải

Vận tốc tại thời điểm t của chất điểm được tính theo công thức $v(t) = S'(t) = 3t^2 - 6t - 9$.

Gia tốc tức thời t là $g(t) = v'(t) = 6t - 6$.

Vận tốc triệt tiêu nên $3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -1(l) \end{cases}$

Suy ra gia tốc tại thời điểm đó là: $g(3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12(m/s^2)$.

Câu 10: Đạo hàm của hàm số $y = x^{\frac{-2}{3}}$ là

A. $y' = \frac{-2}{3}x^{\frac{1}{3}}$. B. $y' = x^{\frac{-5}{3}}$. C. $y' = \frac{-2}{3}x^{\frac{-5}{3}}$. D. $y' = x^{\frac{1}{3}}$.

Lời giải

Ta có $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \Rightarrow \left(x^{\frac{-2}{3}}\right)' = \frac{-2}{3}x^{\frac{-2}{3}-1} = \frac{-2}{3}x^{\frac{-5}{3}}$.

Câu 11: Đạo hàm của hàm số $y = [u(x)]^\alpha$ là

A. $\alpha \cdot [u(x)]^{\alpha-1}$. B. $\alpha \cdot [u(x)]^{\alpha-1} \cdot u'(x)$. C. $\alpha \cdot [u(x)]^{\alpha+1} \cdot u'(x)$. D. $\alpha \cdot [u(x)]^{\alpha-1} \cdot u'(x)$.

Lời giải

Ta có $y'_x = y'_u \cdot u'_x = \alpha \cdot [u(x)]^{\alpha-1} \cdot u'(x)$.

Câu 12: Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{4x^2 - 3x + 1}$ là

A. $\frac{1}{2\sqrt{4x^2 - 3x + 1}}$. B. $\frac{8x - 3}{\sqrt{4x^2 - 3x + 1}}$. C. $\frac{8x - 3}{2\sqrt{4x^2 - 3x + 1}}$. D. $\frac{4x - 3}{2\sqrt{4x^2 - 3x + 1}}$.

Lời giải



$$y = \sqrt{4x^2 - 3x + 1} = (4x^2 - 3x + 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Suy ra } y' = \frac{1}{2}(4x^2 - 3x + 1)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (4x^2 - 3x + 1)' = \frac{1}{2}(4x^2 - 3x + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (8x - 3) = \frac{8x - 3}{2\sqrt{4x^2 - 3x + 1}}.$$

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị của tham số m trong đoạn $[-2023; 2023]$ để hàm số $y = x^2 + \ln(x + m + 2)$ đồng biến trên tập xác định của nó.

A. 2022.

B. 2023.

C. 4046.

D. 4047.

Lời giải

Tập xác định $D = (-m - 2; +\infty)$.

Để hàm số $y = x^2 + \ln(x + m + 2)$ đồng biến trên tập xác định D thì

$$y' = 2x + \frac{1}{x + m + 2} = \frac{2x^2 + 2(m + 2)x + 1}{x + m + 2} > 0, \forall x \in D.$$

Vì $x + m + 2 > 0, \forall x \in D$ nên $y' > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow g(x) = 2x^2 + 2(m + 2)x + 1 > 0, \forall x \in D$

Trường hợp 1: $\Delta' = (m + 2)^2 - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 - \sqrt{2} \leq m \leq -2 + \sqrt{2}$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-3; -2; -1\}$.

Trường hợp 2: $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 không lớn hơn $-m - 2$.

$$\text{Điều này xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (x_1 + m + 2)(x_2 + m + 2) \geq 0 \Rightarrow m < -2 - \sqrt{2} \\ \frac{S}{2} < -m - 2 \end{cases}$$

Vì $m \in \mathbb{Z}, m \in [-2023; 2023]$ nên $m \in \{-2023; -2022; \dots; -4\}$.

Vậy từ hai TH trên thì có 2023 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 14: Cho hàm số $(C): y = x^{\frac{\pi}{2}}$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là

A. $y = \frac{\pi}{2}x + 1$.

B. $y = \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} + 1$.

C. $y = \frac{-\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} + 1$.

D. $y = \pi x - \pi + 1$.

Lời giải

Tập xác định $D = (0; +\infty)$

$$\text{Ta có } y' = \frac{\pi}{2}x^{\frac{\pi}{2}-1} \Rightarrow \begin{cases} y'(x_0) = y'(1) = \frac{\pi}{2} \\ y_0 = y(1) = 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ có dạng:

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} + 1.$$

Câu 15: Cho hàm số $y = \frac{1}{x + 1 + \ln x}$ với $x > 0$. Khi đó $-\frac{y'}{y^2}$ bằng:

A. $\frac{x}{x + 1}$.

B. $1 + \frac{1}{x}$.

C. $\frac{x}{1 + x + \ln x}$.

D. $\frac{x + 1}{1 + x + \ln x}$.

Lời giải

$$y = \frac{1}{x+1+\ln x} \Rightarrow \frac{1}{y} = x+1+\ln x \Rightarrow \left(\frac{1}{y}\right)' = (x+1+\ln x)' \Leftrightarrow -\frac{y'}{y^2} = 1 + \frac{1}{x},$$

Câu 16: Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. 216 (m/s). B. 30 (m/s). C. 400 (m/s). **D. 54 (m/s).**

Lời giải

Vận tốc tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 18t$ với $t \in [0; 10]$.

Ta có : $v'(t) = -3t + 18 = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

Suy ra: $v(0) = 0; v(10) = 30; v(6) = 54$. Vậy vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng 54 (m/s).

Câu 17: Tính đạo hàm $y = \sqrt{\cos 6x}$

- A. $y' = \frac{3\sin 6x}{2\sqrt{\sin 6x}}$. **B. $y' = \frac{-3\sin 6x}{\sqrt{\sin 6x}}$.** C. $y' = \frac{3\sin 6x}{\sqrt{\sin 6x}}$. D. $y' = \frac{-3\sin 6x}{2\sqrt{\sin 6x}}$.

Lời giải

Ta có $y = \sqrt{\cos 6x} \Rightarrow y' = (\sqrt{\cos 6x})' = \frac{(\cos 6x)'}{2\sqrt{\cos 6x}} = \frac{-6\sin 6x}{2\sqrt{\cos 6x}} = \frac{-3\sin 6x}{\sqrt{\sin 6x}}$

Câu 18: Cho hàm số $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x - 2x + 2020$. Số nghiệm của phương trình $y' = 0$ trong đoạn $[0; 4\pi]$ là

- A. 1. **B. 2.** C. 0. D. 3.

Lời giải

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x - \sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sin x - \sqrt{3}\cos x = -2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = -1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Vì } x \in [0; 4\pi] \Rightarrow 0 \leq -\frac{\pi}{6} + k2\pi \leq 4\pi \Leftrightarrow \frac{1}{12} \leq k \leq \frac{25}{12} \text{ mà } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{1; 2\}.$$

Câu 19: Cho hàm số $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$. Tính giá trị biểu thức $P = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) - f'\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

- A. $P = \frac{4}{3}$.** B. $P = \frac{4}{9}$. C. $P = \frac{4}{7}$. D. $P = \frac{8}{3}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{(\cos x)'(1 - \sin x) - (1 - \sin x)' \cos x}{(1 - \sin x)^2}$$



$$= \frac{-\sin x(1 - \sin x) + \cos^2 x}{(1 - \sin x)^2} = \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)^2} = \frac{1}{1 - \sin x}.$$

$$\text{Suy ra } P = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) - f'\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{1 - \sin \frac{\pi}{6}} - \frac{1}{1 - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}.$$

Câu 20: Hàm số $y = 2x + \ln(x^2 - x + 1)$ có đạo hàm là

A. $y' = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$. **B.** $y' = \frac{2x^2 + 2}{x^2 - x + 1}$. **C.** $y' = \frac{x^2 + x}{x^2 - x + 1}$. **D.** $y' = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = \left(2x + \ln(x^2 - x + 1)\right)' = 2 + \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - x + 1}.$$

Câu 21: Cho hàm số $f(x) = e^x + e^{2x}$. Chọn khẳng định đúng

A. $f'(0) = 3$. **B.** $f'(1) = 3e$. **C.** $f'(-1) = -3e$. **D.** $f'(2) = 5e^2$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = (e^x + e^{2x})' = e^x + 2e^{2x} \Rightarrow f'(0) = 3.$$

Câu 22: Cho $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ và $g(x) = e^x + x^2 + x + 1$. Tập nghiệm của bất phương trình

$$f'(1)x^2 - \frac{g'(0)}{2}x - 3g(0) \leq 0 \text{ là}$$

A. $(-2; 3)$. **B.** $(-2; 3]$. **C.** $[-2; 3]$. **D.** $(0; 3]$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } g(0) = 2.$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(1) = 1 \text{ và } g'(x) = e^x + 2x + 1 \Rightarrow g'(0) = 2.$$

$$\text{Bất phương trình: } f'(1)x^2 - \frac{g'(0)}{2}x - 3g(0) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $[-2; 3]$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x) = xe^x$. Chọn khẳng định sai

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 5)$. **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 1)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-10; -4)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x + 1).$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -1; \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1.$$

Suy ra các khẳng định A, B, D đều đúng, khẳng định sai là C



Câu 24: Cho hàm số $f(x) = \ln(x^2 + 2023)$. Biết rằng trên đoạn $[1; \sqrt{3}]$ hàm số đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất theo thứ tự bằng $\ln a$ và $\ln b$. Số các giá trị nguyên dương m thỏa mãn $m \leq a + b$ là

- A. 2049. **B.** 2050. C. 2051. **D.** 2048.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 2023}$ suy ra $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Do đó trên đoạn $[1; \sqrt{3}]$ hàm số $f(x) = \ln(x^2 + 2023)$ đồng biến.

$$\Rightarrow \min_{[1; \sqrt{3}]} f(x) = f(1) = \ln 2024, \max_{[1; \sqrt{3}]} f(x) = f(\sqrt{3}) = \ln 2026.$$

Theo yêu cầu bài toán ta có: $0 < m \leq a + b \Leftrightarrow 0 < m \leq 2050$.

Vậy có 2050 giá trị nguyên dương m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 25: Cho hàm số $f(x) = \ln \frac{2023x}{x+1}$. Tính tổng $S = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2023)$.

- A. $\ln 2023$. B. 1. C. 2023. **D.** $\frac{2023}{2024}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = \left(\ln \frac{2023x}{x+1} \right)' = \frac{1}{\frac{2023x}{x+1}} \cdot \left(\frac{2023x}{x+1} \right)' = \frac{x+1}{2023x} \cdot \frac{2023}{(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)}$$

$$\text{Vậy } S = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2023)$$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2023 \cdot 2024} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024} = 1 - \frac{1}{2024} = \frac{2023}{2024}.$$

Câu 26: Cho hàm số $y = \sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}} \cdot x^{\frac{1}{32}}$, ($x > 0$). Đạo hàm của hàm số trên là:

- A. $y' = e^{\frac{15}{16}} \cdot x^{-\frac{31}{32}}$. **B.** $y' = \frac{\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}}}{32 \cdot \sqrt[32]{x^{31}}}$. C. $y' = e^{\frac{15}{16}} \cdot x^{\frac{31}{32}}$. **D.** $y' = \frac{\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}}}{2\sqrt{x}}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = \sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}} \cdot x^{\frac{1}{32}} \Rightarrow y' = \frac{1}{32} \sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}} \cdot x^{\frac{1}{32}-1} = \frac{1}{32} \sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}} \cdot x^{-\frac{31}{32}} = \frac{\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}}}{32 \cdot \sqrt[32]{x^{31}}}.$$

Câu 27: Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + m}{x + m}$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến của đồ thị tại hai điểm đó vuông góc với nhau.

- A. 5. B. 2. C. 0. **D.** 1.

Lời giải

$$y = \frac{x^2 - 2mx + m}{x + m} = x - 3m + \frac{3m^2 + m}{x + m} \Rightarrow y' = 1 - \frac{3m^2 + m}{(x + m)^2}.$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục Ox .



$$\frac{x^2 - 2mx + m}{x + m} = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2mx + m = 0 \quad (*) \quad (x \neq -m).$$

Để đồ thị hàm số đã cho cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến tại hai điểm đó vuông góc với nhau thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ khác $-m$ và

$$y'(x_1).y'(x_2) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m > 0 \\ f(-m) = 3m^2 + m \neq 0 \\ y'(x_1).y'(x_2) = \left(1 - \frac{3m^2 + m}{(x_1 + m)^2}\right) \left(1 - \frac{3m^2 + m}{(x_2 + m)^2}\right) = -1 \quad (*) \end{cases}$$

Giải phương trình $(*)$

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{3m^2 + m}{(x_1 + m)^2}\right) \left(1 - \frac{3m^2 + m}{(x_2 + m)^2}\right) = -1 \\ \Leftrightarrow & \frac{(x_1 + m)^2 - (3m^2 + m)}{(x_1 + m)^2} \cdot \frac{(x_2 + m)^2 - (3m^2 + m)}{(x_2 + m)^2} = -1 \\ \Leftrightarrow & \frac{[(x_1 + m)(x_2 + m)]^2 - (3m^2 + m)[(x_1 + m)^2 + (x_2 + m)^2] + (3m^2 + m)^2}{[(x_1 + m)(x_2 + m)]^2} = -1 \quad (**) \end{aligned}$$

Áp dụng hệ thức Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x_1 + m)(x_2 + m) = x_1 x_2 + m(x_1 + x_2) + m^2 = m + m.2m + m^2 = 3m^2 + m \\ (x_1 + m)^2 + (x_2 + m)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2m(x_1 + x_2) + 2m^2 = 4m^2 - 2m + 2m.2m + 2m^2 = 10m^2 - 2m \end{cases}$$

Thay vào $(**)$

$$\begin{aligned} (**) & \Rightarrow (3m^2 + m)^2 - (3m^2 + m)(10m^2 - 2m) + (3m^2 + m)^2 = -(3m^2 + m)^2 \\ \Leftrightarrow & 3(3m^2 + m)^2 - (3m^2 + m)(10m^2 - 2m) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (3m^2 + m)(-m^2 + 5m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -\frac{1}{3} \\ m = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m > 0 \\ f(-m) = 3m^2 + m \neq 0 \\ y'(x_1).y'(x_2) = \left(1 - \frac{3m^2 + m}{(x_1 + m)^2}\right) \left(1 - \frac{3m^2 + m}{(x_2 + m)^2}\right) = -1 \quad (*) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \\ m \neq 0 \\ m \neq -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = 5. \quad \begin{cases} m = 0 \\ m = 5 \\ m = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Câu 28: Một chuyển động theo qui luật là $s = -\frac{1}{2}t^3 + 3t^2 + 20$ với t giây là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi chuyển được trong khoảng thời gian đó. Quãng đường vật đi được bắt đầu từ lúc vật chuyển động tới thời điểm vật đạt được vận tốc lớn nhất bằng

- A. 20m. **B. 28m.** C. 32m. D. 36m.

Lời giải

$$\text{Ta có: } s = -\frac{1}{2}t^3 + 3t^2 + 20 \Rightarrow v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 6t$$

$$v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}(t^2 - 4t + 4 - 4) = -\frac{3}{2}[(t-2)^2 - 4] = -\frac{3}{2}(t-2)^2 + 6 \leq 6$$

Vậy vận tốc đạt được giá trị lớn nhất tại thời điểm $t = 2(s)$.

Khi đó quãng đường vật đi được là: $s = s(2) = -4 + 12 + 20 = 28(m)$.

Câu 29: Một con lắc lò xo chuyển động điều hòa theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát, có phương trình chuyển động $x = 2\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) - 5$, trong đó t tính bằng giây (s) và x tính bằng centimet (cm). Tìm thời điểm mà vận tốc tức thời của con lắc lò xo bằng 0?

- A.** $t = \frac{1}{3} + k(s); (k \in \mathbb{Z})$. **B.** $t = 2 + k(s); (k \in \mathbb{Z})$.
C. $t = \frac{2}{3} + k(s); (k \in \mathbb{Z})$. **D.** $t = \frac{5}{3} + k(s); (k \in \mathbb{Z})$.

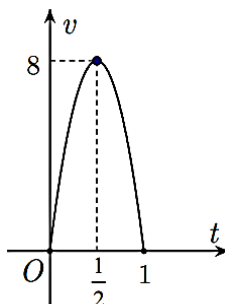
Lời giải

$$\text{Vận tốc tức thời của con lắc: } v(t) = x' = -2\pi \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right).$$

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow -2\pi \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \pi t - \frac{\pi}{3} = k\pi; (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{3} + k; (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 30: Một vật chuyển động trong 1 giờ với vận tốc v phụ thuộc vào thời gian t có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung. Tính gia tốc của vật lúc $t = 0,25(h)$



- A.** $16(km/h^2)$. **B.** $-16(km/h^2)$. C. $8(km/h^2)$. **D.** $-8(km/h^2)$.



Lời giải

Gọi $v(t) = p.t^2 + q.t + r$ đi qua $O(0;0)$; $I(\frac{1}{2};8)$ và $M(1;0)$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} r = 0 \\ \frac{1}{4}p + \frac{1}{2}q + r = 8 \\ p + q + r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \\ q = 32 \\ p = -32 \end{cases} \text{ . Vậy } v(t) = -32t^2 + 32t$$

Gia tốc vật là $a = v'(t) = -64t + 32$

Lúc $t = 0,25(h)$ thì gia tốc là $a = 16(km / h^2)$.

- Câu 31:** Một chất điểm có phương trình chuyển động là $s(t) = \sin \frac{\pi}{3t+1} + 2t^2$ (m). Vận tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm $t = 1$ (s) gần bằng
- A.** 3,48 (m/s). **B.** 3,58 (m/s). **C.** 4,36 (m/s). **D.** 4,28 (m/s).

Lời giải

Vận tốc của chất điểm là $v(t) = s'(t) = \left(\frac{\pi}{3t+1} \right)' \cos \frac{\pi}{3t+1} + 4t = -\frac{3\pi}{(3t+1)^2} \cos \frac{\pi}{3t+1} + 4t$.

Do đó vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 1$ là $v(1) = -\frac{3\pi}{16} \cos \frac{\pi}{4} + 4 \approx 3,58$ (m/s).

- Câu 32:** Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ biểu thức có dạng $\frac{ax+b}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. Khi đó $P = a.b$ bằng:
- A.** $P = 1$. **B.** $P = -1$. **C.** $P = 2$. **D.** $P = -2$.

Lời giải

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} \right)' = \frac{(x-1)' \cdot \sqrt{x^2+1} - (\sqrt{x^2+1})' \cdot (x-1)}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{2x(x-1)}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2} \\ &= \frac{1+x}{(\sqrt{x^2+1})^3} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a.b = 1 \end{aligned}$$

- Câu 33:** Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t) = 2t^4 + 6t^2 - 3t + 1$ với t tính bằng giây (s) và s tính bằng mét (m). Hỏi gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3(s)$ bằng bao nhiêu?
- A.** $88(m / s^2)$. **B.** $228(m / s^2)$. **C.** $64(m / s^2)$. **D.** $76(m / s^2)$.

Lời giải

Ta có $a(t) = s''(t) = (2t^4 + 6t^2 - 3t + 1)'' = 24t^2 + 12$.

Vậy tại thời điểm $t = 3$ thì gia tốc của chuyển động bằng: $a(3) = 24.3^2 + 12 = 228$ (m / s²).

Câu 34: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 + 2t^2 - 5t - 1$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 2$ giây.

- A.** 16 m/s^2 . **B.** 5 m/s^2 . **C.** 10 m/s^2 . **D.** 15 m/s^2 .

Lời giải

Ta có: $s'(t) = 3t^2 + 4t - 5 \Rightarrow s''(t) = 6t + 4$.

Gia tốc của chất điểm $a(t) = s''(t) = 6t + 4 \Rightarrow a(2) = 6 \cdot 2 + 4 = 16 \text{ m/s}^2$.

Câu 35: Đạo hàm của hàm số $y = x^{2023} + 2\sqrt{x}$ tại $x = 1$ bằng

- A.** 2024. **B.** 2025. **C.** 3. **D.** $\frac{4047}{2}$.

Lời giải

Ta có: $y' = 2023 \cdot x^{2022} + \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow y'(1) = 2024$.

Câu 36: Cho hàm số $y = 2x - \frac{1}{x}$. Tính giá trị của biểu thức $M = y'(-1) - 4y'(2)$.

- A.** 3. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** -6. **D.** 12.

Lời giải

Ta có: $y' = 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow y'(-1) = 3; y'(2) = \frac{9}{4}$ nên khi đó $M = 3 - 4 \cdot \frac{9}{4} = -6$.

Câu 37: Vị trí của một vật chuyển động thẳng được cho bởi hàm số $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây là

- A.** 6 m/s. **B.** 7 m/s. **C.** 8 m/s. **D.** 9 m/s.

Lời giải

Vận tốc tức thời của vật: $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 9$

Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây: $v(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 9 \text{ m/s}$

Câu 38: Hàm số $y = \log_{\sqrt{2}} x + \log_{\sqrt[4]{2}} x + \log_{\sqrt[6]{2}} x + \dots + \log_{\sqrt[2024]{2}} x$ có đạo hàm là

- A.** $\frac{1025156x}{\ln 2}$. **B.** $\frac{1025156}{x \ln 2}$. **C.** $1025156 \cdot \ln 2 \cdot x$. **D.** $\frac{1025156 \ln 2}{x}$.

Lời giải

Ta có: $y = \log_{\sqrt{2}} x + \log_{\sqrt[4]{2}} x + \log_{\sqrt[6]{2}} x + \dots + \log_{\sqrt[2024]{2}} x$

$= \log_{\frac{1}{2^2}} x + \log_{\frac{1}{2^4}} x + \log_{\frac{1}{2^6}} x + \dots + \log_{\frac{1}{2^{2024}}} x = 2\log_2 x + 4\log_2 x + 6\log_2 x + \dots + 2024\log_2 x$

$= (2 + 4 + 6 + \dots + 2024)\log_2 x$

Ta có dãy: 2; 4; 6; ...; 2024 là một cấp số cộng với $u_1 = 2; d = 2$ và 2024 là số hạng thứ 1012.

Do đó $2 + 4 + 6 + \dots + 2024 = \frac{1012(2 + 2024)}{2} = 1025156$

Vậy $y = 1025156\log_2 x$ suy ra $y' = \frac{1025156}{x \ln 2}$

Câu 39: Hàm số $y = \frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}}$ có đạo hàm là

- A. $\frac{\ln 3 \cdot 9^x}{(9^x - 1)^2}$. B. $\frac{\ln 81 \cdot 9^x}{(9^x - 1)^2}$. C. $-\frac{\ln 3 \cdot 9^x}{(9^x - 1)^2}$. D. $-\frac{\ln 81 \cdot 9^x}{(9^x - 1)^2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } y &= \frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = \frac{3^x + \frac{1}{3^x}}{3^x - \frac{1}{3^x}} = \frac{9^x + 1}{9^x - 1} \Rightarrow y' = \left(\frac{9^x + 1}{9^x - 1} \right)' = \frac{(9^x + 1)'(9^x - 1) - (9^x + 1)(9^x - 1)'}{(9^x - 1)^2} \\ &= \frac{9^x \ln 9 (9^x - 1) - 9^x \ln 9 (9^x + 1)}{(9^x - 1)^2} = \frac{-2 \cdot \ln 9 \cdot 9^x}{(9^x - 1)^2} = -\frac{\ln 81 \cdot 9^x}{(9^x - 1)^2} \end{aligned}$$

Câu 40: Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay, doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe Honda Future Fi với chi phí mua vào một chiếc xe là 27 (triệu đồng) và bán với giá 31 (triệu đồng) một chiếc. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 (triệu đồng) mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để xe khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất?

- A. 29 triệu đồng. B. 30 triệu đồng. C. 29,5 triệu đồng. D. 30,5 triệu đồng.

Lời giải

Gọi x (triệu đồng) là số tiền mà doanh nghiệp A dự định giảm giá ($0 \leq x \leq 4$). Khi đó:

Giá bán mới của một chiếc xe là: $30 - x$ (triệu đồng)

Lợi nhuận thu được khi bán một chiếc xe là: $31 - x - 27 = 4 - x$ (triệu đồng)

Số xe mà doanh nghiệp sẽ bán được trong một năm là: $600 + 200x$ (chiếc)

Lợi nhuận mà doanh nghiệp thu được trong một năm là:

$$(4 - x) \cdot (600 + 200x) = -200x^2 + 200x + 2400$$

Xét hàm số $f(x) = -200x^2 + 200x + 2400$ trên đoạn $[0; 4]$

Ta có $f'(x) = -400x + 200$ và cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{1}{2}$	4
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	2400	2450	0

Từ bảng biến thiên ta có $\max f(x) = 2450 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Vậy giá bán mới của một chiếc xe là: $31 - \frac{1}{2} = 30,5$ triệu đồng thì lợi nhuận thu được là cao nhất.

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.****Câu 1:** Cho hai hàm số $f(x) = x^{2024}$ và $g(x) = 3x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f'(x) = x^{2023}$.

b) $g'(x) = 3$.

c) $[f(x) + g(x)]' = 2024x^{2023} + 3$.

d) $[g(x) - 2]' = 1$.

Lời giải

a) Sai: $f'(x) = 2024x^{2023}$.

b) Đúng: $g'(x) = 3$.

c) Đúng: $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x) = 2024x^{2023} + 3$.

d) Sai: $[g(x) - 2]' = g'(x) - 2' = 3$.

Câu 2: Cho hai hàm số $f(x) = \frac{3}{x+1}$ và $g(x) = \frac{x^2}{x+2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2}, \forall x \neq -1$.

b) $[g(x)]' = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}, \forall x \neq -2$.

c) $[f(x).g(x)]' = f'(x).g'(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; -2\}$.

d) $g'(1) = -1$.

Lời giải

a) Đúng: $f'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2}, \forall x \neq -1$.

b) Đúng: $[g(x)]' = \frac{2x.(x+2) - x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}, \forall x \neq -2$.

c) Sai: $[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; -2\}$.

d) Sai: $g'(1) = \frac{5}{9}$.



Câu 3: Cho bốn hàm số $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \tan x$ và $k(x) = \cot x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f'(x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $g'(x) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$.

c) $[h(x)]' = \frac{1}{\cos^2 x}, \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

d) $[k(x)]' = \frac{1}{\sin^2 x}, \forall x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải

a) Đúng vì $f'(x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Sai vì $g'(x) = -\sin x, \forall x \in \mathbb{R}$.

c) Đúng vì $[h(x)]' = \frac{1}{\cos^2 x}, \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

d) Sai vì $[k(x)]' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \forall x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 4: Cho bốn hàm số $f(x) = \ln x$, $g(x) = e^x$, $h(x) = 2024^x$ và $k(x) = \log_3 x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f'(x) = -\frac{1}{x}, \forall x > 0$.

b) $g'(x) = x.e^{x-1}, \forall x \in \mathbb{R}$.

c) $[h(x)]' = 2024^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

d) $[k(x)]' = \frac{1}{x \ln 3}, \forall x > 0$.

Lời giải

a) Sai: $f'(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 0$.

b) Sai: $g'(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

c) Sai: $[h(x)]' = 2024^x \cdot \ln 2024, \forall x \in \mathbb{R}$.

d) Đúng: $[k(x)]' = \frac{1}{x \ln 3}, \forall x > 0$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \log_2 x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $y' = \frac{\ln 2}{x}, \forall x > 0$.



b) $y' = \frac{1}{x \ln 2}, \forall x > 0.$

c) $y'(1) = \frac{1}{\ln 2}.$

d) $y'(4) = \frac{1}{\ln 8}.$

Lời giải

a) Sai: $y' = (\log_2 x)' = \frac{1}{x \ln 2}, \forall x > 0.$

b) Đúng: $y' = \frac{1}{x \ln 2}, \forall x > 0.$

c) Đúng: $y' = \frac{1}{x \ln 2} \Rightarrow y'(1) = \frac{1}{\ln 2}.$

d) Sai: $y' = \frac{1}{x \ln 2} \Rightarrow y'(4) = \frac{1}{4 \ln 2} = \frac{1}{\ln 16}.$

Câu 6: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x + 3$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

b) $y' < 0 \forall x \in \mathbb{R}.$

c) y' đạt giá trị lớn nhất tại $x = 0$.

d) $y'(0) = 1.$

Lời giải

Ta có $y = -x^3 + 3x + 3 \Rightarrow y' = -3x^2 + 3.$

a) Đúng: $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$

b) Sai: vì $y'(0) > 0.$

c) Đúng: $y' = -3x^2 + 3 \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$ nên GTLN của y' bằng 3 khi $x = 0$.

d) Sai: $y'(0) = 3$

Câu 7: Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi công thức $s(t) = 10 + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi t\right)$, trong đó s tính bằng centimet và t được tính bằng giây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Gia tốc của hạt tại thời điểm $t = 3$ giây là $-16\pi^2 \text{ cm/s}^2$

b) Vận tốc của hạt tại thời điểm $t = 3$ giây là $2\pi \text{ cm/s}.$

c) Vận tốc lớn nhất của hạt đạt được là $4\pi\sqrt{2} \text{ cm/s}.$



d) Gia tốc nhỏ nhất của hạt đạt được là $-16\pi^2 \text{ cm/s}^2$.

Lời giải

Vận tốc của hạt tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = 4\pi\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi t\right)$.

Gia tốc của hạt tại thời điểm t là $a(t) = s''(t) = -16\pi^2\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi t\right)$.

a) Sai: Tại thời điểm $t = 3$ giây thì gia tốc của hạt là $a = -16\pi^2\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + 12\pi\right) = -8\pi^2 \text{ cm/s}^2$.

b) Đúng: Tại thời điểm $t = 3$ giây thì vận tốc của hạt là $v = 4\pi\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi \cdot 3\right) = 2\pi \text{ cm/s}$.

c) Đúng: Ta có $-4\pi\sqrt{2} \leq 4\pi\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi t\right) \leq 4\pi\sqrt{2}$ nên vận tốc lớn nhất của hạt đạt được là $4\pi\sqrt{2} \text{ cm/s}$.

d) Sai: Ta có $-16\pi^2\sqrt{2} \leq -16\pi^2\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi t\right) \leq 16\pi^2\sqrt{2}$ nên gia tốc nhỏ nhất của hạt đạt được là $-16\pi^2\sqrt{2} \text{ cm/s}^2$.

Câu 8: Một tài xế đang lái xe ô tô, ngay khi phát hiện có vật cản phía trước đã phanh gấp lại nhưng vẫn xảy ra va chạm, chiếc ô tô để lại vết trượt dài 20,4 m (được tính từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi xảy ra va chạm). Trong quá trình đạp phanh, ô tô chuyển động theo phương trình $s(t) = 20t - \frac{5}{2}t^2$, trong đó s (đơn vị mét) là độ dài quãng đường đi được sau khi phanh, t (đơn vị giây) là thời gian tính từ lúc bắt đầu phanh ($0 \leq t \leq 4$). Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Vận tốc tức thời của ô tô ngay khi đạp phanh là 20 (m/s)

b) Xe ô tô trên chưa chạy quá tốc độ, (tốc độ giới hạn cho phép là 70 km/h.

c) Thời điểm xảy ra va chạm cách thời điểm bắt đầu đạp phanh 6,8 giây

d) Vận tốc tức thời của ô tô ngay khi xảy ra va chạm là 14 (m/s)

Lời giải

a) Đúng: Vận tốc tức thời của ô tô tại thời điểm $t(s)$ là: $v(t) = s'(t) = 20 - 5t$

Vận tốc tức thời của ô tô ngay khi đạp phanh ($t = 0$) là: $v(0) = 20 - 5 \cdot 0 = 20 \text{ (m/s)}$

b) Sai: Ta có: $20 \text{ m/s} = 72 \text{ km/h} > 70 \text{ km/h}$ suy ra ô tô trên đã chạy quá tốc độ giới hạn cho phép.

c) Sai: Khi xảy ra va chạm, ô tô đã đi được 20,4 m kể từ khi đạp phanh nên

$$20,4 = 20t - \frac{5}{2}t^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1,2 \\ t = 6,8 \end{cases} \text{ do } 0 \leq t \leq 4 \text{ nên } t = 1,2 \text{ giây}$$

d) Đúng: Vận tốc tức thời của ô tô ngay khi xảy ra va chạm ($t = 1,2$) là:

$$v(1,2) = 20 - 5 \cdot 1,2 = 14 \text{ (m/s)}$$



Câu 9: Một viên đạn được bắn lên cao theo phương thẳng đứng có phương trình chuyển động $s(t) = 2 + 196t - 4,9t^2$, trong đó $t \geq 0$, t giây là thời gian chuyển động, s (m) là độ cao so với mặt đất. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Sau 20 giây kể từ khi bắn thì viên đạn đạt được độ cao 1962 m.
- b) Vận tốc tức thời của viên đạn ngay khi viên đạn được bắn ra là 196 (m/s)
- c) Vận tốc tức thời của viên đạn khi viên đạn đạt được độ cao 1962 m là 5 (m/s).
- d) Tại thời điểm viên đạn đạt vận tốc tức thời bằng 98 m/s thì viên đạn đang ở độ cao 1472 m so với mặt đất

Lời giải

a) Đúng: Khi viên đạn đạt được độ cao 1962 m, ta có phương trình:

$$1962 = 2 + 196t - 4,9t^2 \Leftrightarrow t = 20$$

Vậy sau 20 s kể từ lúc bắn thì viên đạn đạt được độ cao 1962 m.

b) Đúng: Vận tốc tức thời của viên đạn tại thời điểm t là: $v(t) = s'(t) = 196 - 9,8t$.

Vận tốc tức thời của viên đạn ngay khi viên đạn được bắn ra ($t = 0$) là: $v(0) = 196$ (m/s)

c) Sai. Viên đạn đạt được độ cao 1962 m vào thời điểm $t = 20$ giây kể từ lúc bắn, khi đó vận tốc tức thời của viên đạn là: $v(20) = 196 - 9,8 \cdot 20 = 0$ (m/s)

d) Đúng. Viên đạn có vận tốc tức thời bằng 98 m/s thì ta có phương trình:

$$v(t) = 196 - 9,8t = 98 \Leftrightarrow t = 10$$

Khi đó viên đạn đang ở độ cao là: $s(10) = 2 + 196 \cdot 10 - 4,9 \cdot 10^2 = 1472$ (m)

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{khi } x < 1 \\ -\frac{1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.
- b) Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$.
- c) Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ và hàm số $f(x)$ cũng có đạo hàm tại $x = 1$.
- d) Hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại $x = 1$.

Lời giải

a) Đúng: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x - 3) = -1$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{1}{x} = -1$.

Do đó hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

b) Sai vì $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 = 2$ và



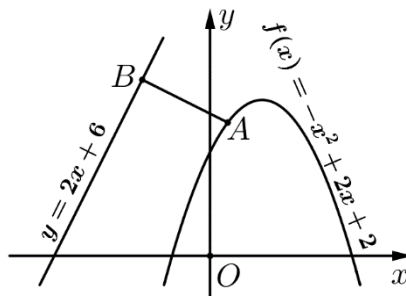
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1 + x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1. \text{ Do đó, hàm số } f(x) \text{ không có đạo hàm tại } x = 1.$$

c) Sai

d) Đúng

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Biết A, B là hai điểm di động trên Parabol $(P): f(x) = -x^2 + 2x + 2$ và đường thẳng $\Delta: y = 2x + 6$ (tham khảo hình bên). Độ dài AB nhỏ nhất bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

**Lời giải**

Gọi $M(x_0; y_0) \in (P)$ và d là tiếp tuyến của (P) tại M có phương song song với Δ . Khi đó $AB_{\min} = d[d, \Delta]$. Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến của (P) tại M là

$$k = y'(x_0) = -2x_0 + 2.$$

Tiếp tuyến này song song với Δ nên suy ra $k = 2 \Leftrightarrow -2x_0 + 2 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 0$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến $d: y = 2(x - 0) + 2 = 2x + 2$.

$$\text{Vậy } AB_{\min} = d[d, \Delta] = d[M(0; 2), \Delta] = \frac{|4|}{\sqrt{4+1}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \approx 1,79$$

Nhận xét. Điểm $A \equiv M(0; 2)$ và B là hình chiếu vuông góc của A trên Δ .

Câu 2: Một vật dao động điều hoà có phương trình $x = 5\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ trong đó li độ x tính bằng cm và thời gian t tính bằng giây. Xét thời điểm đầu tiên vật có gia tốc lớn nhất, li độ x khi đó bằng bao nhiêu?

Lời giải

Hàm gia tốc $a(t)$ là đạo hàm cấp hai của hàm li độ $x(t)$.

$$\text{Ta có: } x'(t) = -5\pi \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right); a(t) = x''(t) = -5\pi^2 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Vì $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên ta có $-5\pi^2 \leq a(t) \leq 5\pi^2$



$$\max a(t) = 5\pi^2 \text{ đạt được khi } \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \pi t + \frac{\pi}{2} = \pi + k2\pi \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} + 2k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vì thời gian $t \geq 0$ nên thời điểm đầu tiên vật có gia tốc lớn nhất là $t = \frac{1}{2}$ (giây) (ứng với $k = 0$)

$$\text{Khi đó li độ } x = 5\cos\left(\pi \cdot \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -5 \text{ (cm).}$$

Câu 3: Cân nặng trung bình của một bé gái trong độ tuổi từ 0 đến 36 tháng có thể được tính gần đúng bởi hàm số $w(t) = 0,000758t^3 - 0,0596t^2 + 1,82t + 8,15$, trong đó t được tính bằng tháng và w được tính bằng pound

(Nguồn: https://www.cde.gov/growthcharts/data/who/GrChrt_Boys).

Tính tốc độ thay đổi cân nặng của bé gái đó tại thời điểm 10 tháng tuổi.

Lời giải

Tốc độ thay đổi cân nặng của bé gái là: $w'(t) = 0,002274t^2 - 0,1192t + 1,82$

Khi $t = 10$, ta có: $w'(10) = 0,002274 \cdot 10^2 - 0,1192 \cdot 10 + 1,82 = 0,8554$

Câu 4: Trong thuyết động học phân tử chất khí với một khối khí lí tưởng thì các đại lượng áp suất p (Pa), thể tích V (m^3), nhiệt độ T (K), số mol n (mol) liên hệ với nhau theo phương trình: $pV = nRT$, trong đó $R = 8,31$ (J / mol.K) là hằng số.

(Nguồn: James Stewart, Calculus)

Một bóng thám không chứa 8 mol khí hydrogen ở trạng thái lí tưởng có áp suất không đổi $p = 10^5$ Pa. Tính tốc độ thay đổi thể tích theo nhiệt độ của khối khí trong bóng thám không.

Lời giải

Thay $p = 10^5$, $n = 8$, $R = 8,31$ vào phương trình trên ta có: $10^5 V = 8 \cdot 8,31 T \Leftrightarrow V = 6,648 \cdot 10^{-4} T$

Khi đó $V(t) = 6,648 \cdot 10^{-4} \cdot t$.

Vậy tốc độ thay đổi thể tích của khối khí lúc có nhiệt độ T là: $6,648 \cdot 10^{-4} \left(m^3 / K\right)$.

Câu 5: Nếu số lượng sản phẩm được của một nhà máy là x (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là $P(x) = -200x^2 + 12800x - 74000$ (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 1200 sản phẩm.

Lời giải

Ta có $P'(x) = -2 \cdot 200x + 12800 = -400x + 12800$

Tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 1200 sản phẩm là

$$P'(12) = -400 \cdot 12 + 12800 = 8000$$

Câu 6: Nhiệt độ cơ thể của một người trong thời gian bị bệnh được cho bởi công thức

$$T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6$$



Trong đó T là nhiệt độ (tính theo đơn vị đo nhiệt độ Fahrenheit) tại thời điểm t (tính theo ngày).
 Tìm tốc độ thay đổi của nhiệt độ ở thời điểm $t = 1,5$.

(Nguồn: <https://www.algebra.com/algebra/homework/Trigonometry-basics/Trigonometry-basics.faq.question.1111985.html>)

Lời giải

Tốc độ thay đổi của nhiệt độ là: $T'(t) = -0,2t + 1,2$ Khi $t = 1,5$ thì $T'(1,5) = -0,2 \cdot 1,5 + 1,2 = 0,9$

Câu 7: Kính viễn vọng không gian Hubble được triển khai vào ngày 24 tháng 4 năm 1990, bởi tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong nhiệm vụ này từ khi xuất phát tại $t = 0$ (s) cho đến khi tên lửa đẩy nhiên liệu rắn bị loại bỏ ở $t = 126$ (s) được xác định theo phương trình sau:
 $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,61t - 3,083$ (ft / s).

(Nguồn: James Stewan, Calculus)

Tính gia tốc tức thời của tàu con thoi trên tại thời điểm $t = 100$ (s) (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Lời giải

Gia tốc tức thời của tàu con thoi tại thời điểm t (s) là:

$$a(t) = v'(t) = 0,003906t^2 - 0,18058t + 23,61 \text{ (ft / s}^2\text{)}.$$

Gia tốc tức thời của tàu con thoi tại thời điểm $t = 100$ (s) là:

$$a(100) = 0,003906 \cdot 100^2 - 0,18058 \cdot 100 + 23,61 = 44,612 \text{ (ft / s}^2\text{)}.$$

Câu 8: Một chất điểm chuyển động có quãng đường được cho bởi phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 10$, trong đó $t > 0$ với t tính bằng giây và s tính bằng mét. Hỏi tại thời điểm vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì quãng đường vật đi được bằng bao nhiêu?

Lời giải

Vận tốc của chuyển động là: $v(t) = 3t^2 - 6t + 5$.

Dễ thấy: $v(t) = 3t^2 - 6t + 5 = 3(t-1)^2 + 2 \geq 2$ với mọi t . Dấu “=” xảy ra khi $t = 1$.

Khi đó, vận tốc của chuyển động là $s(1) = 13$ m.

Câu 9: Một đoàn tàu chuyển động thẳng khởi hành từ một nhà ga. Quãng đường đi được của đoàn tàu là một hàm số của thời gian t được cho bởi phương trình $s(t) = 10 + t + 9t^2 - t^3$ trong đó s tính bằng mét, t tính bằng giây. Trong 5 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, đoàn tàu đạt vận tốc lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$v(t) = s'(t) = -3t^2 + 18t + 1.$$

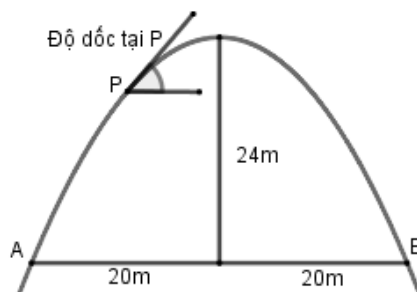
Dễ thấy hàm số $v(t)$ là hàm bậc hai có đồ thị dạng parabol với hệ số $a = -3 < 0$.

Ta có hoành độ đỉnh của parabol là $t = 3 \in [0; 5]$. Do đó $v_{\max} = v(3) = 28$.



Vậy giá trị lớn nhất của vận tốc đoàn tàu chuyển động trong 5 giây đầu là $28m/s$.

Câu 10: Người ta xây một cổng chào hình Parabol biết khoảng cách giữa hai điểm A và B dưới chân cổng là $40m$, chiều cao từ đỉnh cổng đến mặt đất là $24m$. Độ dốc tối đa của cổng gần nhất với kết quả nào sau đây? (Độ dốc của cổng tại một điểm được xác định bởi góc giữa phương tiếp xúc với bề mặt Parabol và phương ngang).



Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Với O là trung điểm của AB , tia Ox trùng với tia OA , C là đỉnh của Parabol, tia Oy trùng với tia OC .

Gọi Parabol có dạng $(P): y = ax^2 + c$ ($a < 0$).

Do (P) đi qua các điểm $A(20;0); C(0;24)$ nên ta có hệ:
$$\begin{cases} 20^2 a + c = 0 \\ c = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{50} \\ c = 24 \end{cases}$$

Vậy Parabol có phương trình $(P): y = -\frac{3}{50}x^2 + 24$.

Hệ số góc k của tiếp tuyến tại một điểm bất kì của Parabol xác định độ dốc của Parabol.

Ta có: $k = -\frac{3}{25}x$, $-20 \leq x \leq 20$ do đó: $|k| = \left| -\frac{3}{25}x \right| \leq \frac{3}{25} \cdot 20 = \frac{12}{5}$.

Vậy độ dốc lớn nhất là α với $\tan \alpha = \frac{12}{5} \Rightarrow \alpha \approx 67^\circ 23'$. Khi đó $\alpha \approx 67^\circ 23'$.

Câu 11: Một doanh nghiệp sản xuất hàng hóa. Biết tổng chi phí sản xuất x đơn vị sản phẩm là: $C(x) = 2x^3 - 3x^2 + 400x + 5000$ (nghìn đồng). Tổng số tiền thu được khi bán x đơn vị sản phẩm đó là: $R(x) = 4000x - 33x^2$ (nghìn đồng). Sản lượng tối ưu và doanh thu lúc đó của doanh nghiệp tương ứng là

Lời giải

Điều kiện: $x > 0, x \in \mathbb{N}$.

Doanh nghiệp thu được lợi nhuận là:

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) = (4000x - 33x^2) - (2x^3 - 3x^2 + 400x + 5000) \\ &= -2x^3 - 30x^2 + 3600x - 5000 \end{aligned}$$

Lợi nhuận biên là: $P'(x) = -6x^2 - 60x + 3600$.



Lợi nhuận tối đa đạt được tại một trong các điểm x_0 mà $P'(x_0) = 0$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -30 \text{ (loại)} \\ x = 20 \text{ (Thỏa mãn)} \end{cases}$$

Lập bảng xét dấu của $P'(x)$:

Khi $x < 20$ thì $P'(x) > 0$ nên nếu tiếp tục sản xuất thì lợi nhuận tăng.

Khi $x > 20$ thì $P'(x) < 0$ nên nếu tiếp tục sản xuất thì lợi nhuận giảm.

Vậy mức sản lượng tối ưu là 20.

Doanh thu lúc đó là: $P(20) = 39000$ nghìn đồng hay 39 triệu đồng.

Câu 12: Sau khi uống đồ uống có cồn, nồng độ cồn trong máu tăng lên rồi giảm dần được xác định bằng hàm số $C(t) = 1,35te^{-2,802t}$, trong đó $C(\text{mg/ml})$ là nồng độ cồn, $t(\text{h})$ là thời điểm đo tính từ ngay sau khi uống 15ml đồ uống có cồn.

(Nguồn: P. Wilkinson et al., *Pharmacokinetics of Ethanol after Ora' Administration in the Fasting State*, 1977)

Giả sử một người uống hết nhanh 15ml đồ uống có cồn. Tính tốc độ chuyển hoá nồng độ cồn trong máu của người đó tại thời điểm $t = 3$ (h) (làm tròn kết quả đến hàng phần triệu).

Lời giải

Ta có: $C'(t) = 1,35e^{-2,802t} - 3,7827te^{-2,802t}$.

Vậy tốc độ chuyển hoá nồng độ cồn tức thời trong máu của người đó tại thời điểm $t = 3$ (h) là:

$$C'(3) = 1,35e^{-2,802 \cdot 3} - 3,7827 \cdot 3e^{-2,802 \cdot 3} \approx -0,002235 \left(\frac{\text{mg}}{\text{ml}} \right).$$

-----HẾT-----



BÀI

03

ĐẠO HÀM CẤP HAI

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Định nghĩa đạo hàm cấp hai

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mỗi điểm $x \in (a; b)$. Nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ tại x , kí hiệu là y'' hoặc $f''(x)$.

2 Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Một chuyển động có phương trình $s = f(t)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) của hàm số $f(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động. Ta có:

$$a(t) = f''(t)$$

**B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN****Dạng 1: Tính đạo hàm cấp hai**

Phương pháp: Cho hàm số $y = f(x)$, tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ ta thực hiện các bước sau:

- **Bước 1:** Tính đạo hàm cấp một: $y' = f'(x)$
- **Bước 2:** Lấy kết quả của đạo hàm cấp một đem đi đạo hàm: $(y')' = (f'(x))'$
- **Bước 3:** Kết luận: $y'' = f''(x)$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{1-x}$

b) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

c) $y = \tan x$

d) $y = \cos^2 x$

e) $y = \sin 5x \cos 2x$

f) $y = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$

g) $y = \frac{x}{x^2-1}$

h) $y = \frac{x-1}{x+2}$

i) $y = x^2 \sin x$

j) $y = x\sqrt{1+x^2}$

k) $y = (1-x^2)\cos x$

l) $y = \sqrt{x}$

m) $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$

n) $y = \frac{x^2}{1-x}$

p) $y = x \cos 2x$

q) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Lời giải

a) Ta có: $y' = \frac{1}{(1-x)^2}$ và $y'' = \frac{-2}{(1-x)^3}$.

b) Ta có: $y' = \frac{1}{2(1-x)\sqrt{1-x}}$ và $y'' = \frac{3}{4(1-x)^2\sqrt{1-x}}$.

c) Ta có: $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$ và $y'' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$.

d) Ta có: $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$. Khi đó: $y' = -\cos 2x$ và $y'' = -2 \cos 2x$.

e) Ta có: $y = \sin 5x \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 7x + \sin 3x)$



Khi đó: $y' = \frac{1}{2}(7\cos 7x + 3\cos 3x)$ và $y'' = -\frac{1}{2}(49\sin 7x + 9\sin 3x)$

f) Ta có: $y = \frac{2x+1}{x^2+x-2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}$

Khi đó: $y' = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2}$ và $y'' = \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x+2)^3}$

g) Ta có: $y = \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right)$

Khi đó: $y' = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{-1}{(x-1)^2}\right)$ và $y'' = \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x-1)^3}$

h) Ta có: $y = \frac{x-1}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2}$

Khi đó: $y' = \frac{3}{(x+2)^2}$ và $y'' = -\frac{6}{(x+2)^3}$

i) Ta có: $y' = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$ và $y'' = (2 - x^2)\sin x + 4x \cos x$

j) Ta có: $y' = \frac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}$ và $y'' = \frac{2x^3+3x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

k) Ta có: $y' = -2x \cos x - (1-x^2)\sin x$ và $y'' = (x^2-3)\cos x + 4x \sin x$

l) Ta có: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ và $y'' = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$

m) Ta có: $y = \sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 6x$

Khi đó: $y' = \frac{1}{2}\cos 2x + \cos 4x - \frac{3}{2}\cos 6x$ và $y'' = -\sin 2x - 4\sin 4x + 9\sin 6x$

m) Ta có: $y = \frac{x^2}{1-x} = -x - 1 + \frac{1}{1-x}$

Khi đó: $y' = -1 + \frac{1}{(1-x)^2}$ và $y'' = \frac{-2}{(1-x)^3}$

p) Ta có: $y' = \cos 2x - 2x \sin 2x$ và $y'' = -4\sin 2x - 4x \cos 2x$

q) Ta có: $y' = -\frac{1}{x\sqrt{x}}$ và $y'' = \frac{3}{4\sqrt{x^5}}$



Bài tập 2: Cho $f(x) = (x-3)^6$. Tính $f''(2)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 6(x-3)^5$ suy ra $f''(x) = 6.5.(x-3)^4 = 30(x-3)^4$

Từ đó: $f''(2) = 30.(2-3)^4 = 30$.

Bài tập 3: Đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ tại điểm $x = 2$ là:

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 2x$ suy ra: $f''(x) = 6x - 2$

Nên: $f''(2) = 10$

Bài tập 4: Cho $f(x) = \sin 3x$. Giá trị của $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ bằng:

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 3\cos 3x$ suy ra $f''(x) = -9\sin 3x$

Do đó: $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -9\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 9$.

Bài tập 5: Thực hiện các yêu cầu sau:

a) Cho $f(x) = (x+10)^6$. Tính $f''(2)$.

b) Cho $f(x) = \sin 3x$. Tính $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $f''(0)$, $f''\left(\frac{\pi}{18}\right)$.

Lời giải

a) Ta có: $f'(x) = 6(x+10)^5$

Suy ra $f''(x) = 6.5.(x+10)^4 = 30(x+10)^4$

Từ đó: $f''(2) = 30.(2+10)^4 = 622080$.

b) Ta có $f'(x) = 3\cos 3x$ và $f''(x) = -9\sin 3x$

Khi đó: $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -9\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -9$; $f''(0) = -9\sin(0) = 0$ và $f''\left(\frac{\pi}{18}\right) = -9\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{9}{2}$.

**Dạng 2: Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai**

Phương pháp: Một chuyển động có phương trình $s = f(t)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) của hàm số $f(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động. Ta có:

$$a(t) = f''(t)$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi $s(t) = 10 + 0,5 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right)$, trong đó s tính bằng centimét (cm) và t tính bằng giây (s). Tính gia tốc của hạt tại thời điểm $t = 5$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

$$\text{Ta có: } v(t) = s'(t) = \pi \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right)$$

$$\text{Khi đó: } a(t) = v'(t) = -2\pi^2 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right).$$

$$\text{Thay } t = 5 \text{ vào phương trình trên ta được: } a(5) = -2\pi^2 \sin\left(2\pi \cdot 5 + \frac{\pi}{5}\right) \approx -11,6 \text{ (cm/s}^2\text{)}.$$

Bài tập 2: Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t) = t^4 - 4t^2 + 4$, trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$ là?

Lời giải

Ta có gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t bằng đạo hàm cấp hai của phương trình chuyển động tại thời điểm t .

$$\text{Ta có: } S'(t) = (t^4 - 4t^2 + 4)' = 4t^3 - 8t$$

$$\Rightarrow a(t) = S''(t) = (4t^3 - 8t)' = 12t^2 - 8$$

$$\text{Vậy gia tốc của chuyển động tại thời điểm } t = 2 \text{ là } a(2) = 12 \cdot 2^2 - 8 = 40 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

Bài tập 3: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = -t^3 + 3t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

Lời giải

$$\text{Vận tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp một của quãng đường: } v = S' = -3t^2 + 6t + 9$$

$$\text{Gia tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp hai của quãng đường: } a = S'' = -6t + 6$$

$$\text{Gia tốc triệt tiêu khi } S'' = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

$$\text{Khi đó vận tốc của chuyển động là } S'(1) = 12 \text{ m/s}.$$

Bài tập 4: Một chuyển động xác định bởi phương trình $S(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$. Trong đó t được tính bằng giây, S được tính bằng mét. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3$ s?

Lời giải

$$\text{Vận tốc của chuyển động tại thời điểm } t \text{ có phương trình là } v(t) = S'(t) = 3t^2 - 6t - 9.$$



Gia tốc của chuyển động tại thời điểm t có phương trình là $a(t) = v'(t) = 6t - 6$.

Tại thời điểm $t = 3s$ ta có $a(3) = 6.3 - 6 = 12 \text{ m/s}^2$.

Bài tập 5: Một chất điểm chuyển động có phương trình $S = 2t^4 + 6t^2 - 3t + 1$ với t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Hỏi gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3(s)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có vận tốc tức thời của chuyển động được tính theo công thức:

$$v(t) = (S(t))' = 8t^3 + 12t - 3.$$

Khi đó gia tốc tức thời của chuyển động được tính theo công thức:

$$a(t) = 24t^2 + 12 \Rightarrow a(3) = 24.3^2 + 12 = 228 (\text{m/s}^2).$$

Vậy gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3(s)$ là $228 (\text{m/s}^2)$.

Bài tập 6: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = -t^3 + 6t^2$ với t là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $s(t)$ là quang đường đi được trong thời gian t . Tính gia tốc tại thời điểm t mà tại đó vận tốc đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Theo bài ra ta có: $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t$.

Ta thấy:

$$v(t) \text{ là hàm số bậc hai có hệ số } a < 0 \text{ nên đạt giá trị lớn nhất tại } t = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2.(-3)} = 2.$$

Khi đó $a(t) = v'(t) = -6t + 12 \Rightarrow a(2) = v'(2) = 0$.

**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Nếu $y = x^n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ thì y'' bằng

- A. $n(n+1)x^{n-2}$. B. $\frac{n}{n-1}x^{n-2}$. C. $n(n-1)x^{n-1}$. D. $n(n-1)x^{n-2}$.

Lời giải

Ta có: $y' = (x^n)' = n.x^{n-1}$ nên $y'' = (n.x^{n-1})' = n.(n-1)x^{n-2}$.

Câu 2: Cho $f(x) = x^3$. Tính $f''(1)$.

- A. $f''(1) = 3$. B. $f''(1) = 2$. C. $f''(1) = 6$. D. $f''(1) = 1$.

Lời giải

$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f''(x) = 3.2x = 6x$ nên $f''(1) = 6.1 = 6$.

Câu 3: Cho hàm số $y = -\frac{1}{x}$. Đạo hàm cấp hai của hàm số là

- A. $y'' = \frac{2}{x^3}$. B. $y'' = \frac{-2}{x^2}$. C. $y'' = \frac{-2}{x^3}$. D. $y'' = \frac{-1}{x^2}$

Lời giải

Ta có: $y' = \frac{1}{x^2}$ nên $y^{(2)} = -\frac{(x^2)'}{x^4} = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \sqrt{-x+5}$. Tính y'' .

- A. $y'' = \frac{1}{4\sqrt{(-x+5)^3}}$. B. $y'' = \frac{1}{2\sqrt{(-x+5)^3}}$. C. $y'' = \frac{-1}{4\sqrt{(-x+5)^3}}$. D. $y'' = \frac{-1}{8\sqrt{(-x+5)^3}}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = (-\infty; 5]$.

Có $y' = (\sqrt{-x+5})' = \frac{-1}{2\sqrt{-x+5}} \Rightarrow y'' = \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{-x+5}} \right)' = \frac{-1}{2} \left[(-x+5)^{-\frac{1}{2}} \right]' = \frac{-1}{4\sqrt{(-x+5)^3}}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+3}$. Tính y'' .

- A. $y'' = \frac{-5}{(x+3)^3}$. B. $y'' = \frac{10}{(x+3)^2}$. C. $y'' = \frac{-10}{(x+3)^3}$. D. $y'' = \frac{5}{(x+3)^3}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Có $y' = \frac{5}{(x+3)^2} \Rightarrow y'' = 5 \cdot \frac{-2(x+3)}{(x+3)^4} = \frac{-10}{(x+3)^3}$.



Câu 6: Cho hàm số $y = x \cdot \cos x$. Tìm hệ thức đúng trong các hệ thức sau:

A. $y'' + y = \sin x + 2x \cos x$.

B. $y'' + y = 2 \sin x$.

C. $y'' + y = -\sin x + x \cos x$.

D. $y'' + y = -2 \sin x$.

Lời giải

Ta có $y' = \cos x - x \sin x \Rightarrow y'' = -2 \sin x - x \cos x$.

Khi đó $y'' + y = -2 \sin x - x \cos x + x \cos x = -2 \sin x$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \sin 2x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $y^2 + (y')^2 = 4$.

B. $y = y' \cdot \tan 2x$.

C. $4y - y'' = 0$.

D. $4y + y'' = 0$.

Lời giải

Ta có $y' = 2 \cos 2x \Rightarrow y'' = -4 \sin 2x$ nên $4y + y'' = 4 \sin 2x - 4 \sin 2x = 0$.

Câu 8: Cho hàm số $y = x^2 2^x$. Tính y'' .

A. $(2 + 2x \ln 2 + x^2 \ln^2 2) 2^x$.

B. $(2 + 4x \ln 2 + x^2 \ln 2) 2^x$.

C. $(2 + 4x \ln 2 + x^2 \ln^2 2) 2^x$.

D. $(2 + 4x \ln 2 + x \ln^2 2) 2^x$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ có $y' = (x^2 2^x)' = (2x + x^2 \ln 2) 2^x$.

$\Rightarrow y'' = [(2x + x^2 \ln 2) 2^x]' = (2 + 2x \ln 2) 2^x + (2x + x^2 \ln 2) 2^x \ln 2 = (2 + 4x \ln 2 + x^2 \ln^2 2) 2^x$.

Câu 9: Cho hàm số $y = \sin^3 x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $y'' + 9y - \sin x = 0$.

B. $y'' + 9y - 6 \sin x = 0$.

C. $y'' + 9y - 6 \cos x = 0$.

D. $y'' + 9y + 6 \sin x = 0$.

Lời giải

Ta có $y = \sin^3 x \Rightarrow y' = 3 \sin^2 x \cdot \cos x$ và $y'' = 6 \sin x \cdot \cos^2 x - 3 \sin^3 x$.

Khi đó $y'' + 9y = 6 \sin x \cdot \cos^2 x - 3 \sin^3 x + 9 \sin^3 x = 6 \sin x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 6 \sin x$.

Câu 10: Phương trình chuyển động của một chất điểm được biểu thị bởi công thức $S(t) = 4 - 2t + 4t^2 + 2t^3$, trong đó $t > 0$ và t tính bằng giây (s), $S(t)$ tính bằng mét (m). Tìm gia tốc a của chất điểm tại thời điểm $t = 5(s)$.

A. $a = 68(m/s^2)$.

B. $a = 115(m/s^2)$.

C. $a = 100(m/s^2)$.

D. $a = 225(m/s^2)$.

Lời giải

Theo ứng dụng đạo hàm của hàm số có:

$v(t) = S'(t) = -2 + 8t + 6t^2$ và $a(t) = v'(t) = 8 + 12t \Rightarrow a(5) = 68(m/s^2)$.

Câu 11: Cho $f(x) = \frac{x^2}{-x+1}$. Tính $f''(x)$.

A. $\frac{2}{(x-1)^3}$.

B. $-\frac{2}{(x-1)^3}$.

C. $-\frac{1}{(x-1)^3}$.

D. $-\frac{2}{(x-1)^2}$.

Lời giải



Ta có $f(x) = \frac{x^2}{-x+1} = -x-1 - \frac{1}{x-1}$

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{(x-1)^2}; \quad f''(x) = -\frac{2}{(x-1)^3}.$$

Câu 12: Cho chuyển động xác định bởi phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 - \frac{2}{5}t + 3(m), t(s)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** Gia tốc của chuyển động bằng 0 khi $t = 0$.
B. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 4$ là $a = 18m/s^2$.
C. Vận tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$ là $v = 18m/s$.
D. Vận tốc của chuyển động bằng 0 khi $t = 0$.

Lời giải

Ta có vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t lần lượt là:

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t - \frac{2}{5}; \quad a(t) = v'(t) = 6t - 6$$

Câu 13: Cho hàm số $y = \sin^2 x$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A.** $2y' + y'' = 2\sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.
B. $4y - y'' = 2$.
C. $4y + y'' = 2$.
D. $2y' + y'' \cdot \tan x = 0$.

Lời giải

Ta có: $y' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$ và $y'' = 2\cos 2x$

$$\text{Xét } 2y' + y'' = 2\sin 2x + 2\cos 2x = 2(\sin 2x + \cos 2x) = 2\sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Câu 14: Cho hàm số $y = x^4 - mx^3 + 3mx^2 - x + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số để $y'' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A.** $m \in (0; 8)$.
B. $m \in (0; 4)$.
C. $m \in (0; 6)$.
D. $m \in (0; 9)$

Lời giải

Ta có: $y' = (x^4 - mx^3 + 3mx^2 - x + m)' = 4x^3 - 3mx^2 + 6mx - 1$

$$\Rightarrow y'' = (4x^3 - 3mx^2 + 6mx - 1)' = 12x^2 - 6mx + 6m > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9m^2 - 72m < 0 \Rightarrow 0 < m < 8$$

Câu 15: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = x^6 - 4x^3 + 2x + 2023$ với $x \in \mathbb{R}$ là

- A.** $y'' = 30x^4 - 24x + 2$.
B. $y'' = 30x^4 - 24x$.
C. $y'' = 6x^5 - 12x^2 + 2$.
D. $y'' = 6x^5 - 12x^2$.

Lời giải

Ta có $y' = 6x^5 - 12x^2 + 2$ suy ra $y'' = 30x^4 - 24x$.



Câu 16: Nếu $y = \frac{1}{x}$ thì y'' bằng

A. $\frac{1}{x^3}$.

B. $\frac{-1}{x^3}$.

C. $\frac{-2}{x^3}$.

D. $\frac{2}{x^3}$.

Lời giải

Ta có: $y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$ nên $y'' = \left(\frac{-1}{x^2}\right)' = (-x^{-2})' = \frac{2}{x^3}$.

Câu 17: Nếu $y = \sqrt{x}, x > 0$ thì y'' bằng

A. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

B. $\frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$.

C. $\frac{-2}{\sqrt{x^3}}$.

D. $\frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$.

Lời giải

Ta có: $y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ nên $y'' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)' = \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$.

Câu 18: Nếu $y = e^{2x}$ thì y'' bằng

A. $4e^{2x}$.

B. $2e^{2x}$.

C. e^{2x} .

D. 1.

Lời giải

Ta có: $y' = (e^{2x})' = 2e^{2x}$ nên $y'' = (2e^{2x})' = 4e^{2x}$.

Câu 19: Nếu $y = \sin 2x$ thì y'' bằng

A. $-4\sin 2x$.

B. $4\sin 2x$.

C. $4\cos 2x$.

D. $\sin 2x$.

Lời giải

Ta có: $y' = (\sin 2x)' = 2\cos 2x$ nên $y'' = (2\cos 2x)' = -4\sin 2x$.

Câu 20: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2023$. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $y'' > 0$.

A. $[1; +\infty)$.

B. $[0; 2]$.

C. $(0; 2)$.

D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x, y'' = 6x - 6$ suy ra $y'' > 0 \Leftrightarrow 6x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $y'' > 0$ là $S = (1; +\infty)$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x) = x^3 + 2x - 2024$, giá trị của $f''(1)$ bằng

A. 6.

B. 8.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

$f'(x) = 3x^2 + 2, f''(x) = 6x \Rightarrow f''(1) = 6$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ Tính $f''(1)$

A. $f''(1) = 4$.

B. $f''(1) = 2$.

C. $f''(1) = \frac{1}{2}$.

D. $f''(1) = -\frac{1}{4}$.



Lời giải

Ta có $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$ nên $f''(x) = -\frac{1}{4}$.

Câu 23: Cho hàm số $y = \sin x + x$. Khi đó đạo hàm cấp hai của hàm số tại $x = \frac{\pi}{2}$ có giá trị bằng:

- A. $\frac{\pi}{2}$. B. 0. C. -1. D. 1.

Lời giải

Với $y = \sin x + x \Rightarrow y' = \cos x + 1 \Rightarrow y'' = -\sin x$. Khi đó $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$.

Câu 24: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \frac{1}{x}$ là:

- A. $y'' = -\frac{1}{x^2}$. B. $y'' = \frac{2}{x^3}$. C. $y'' = \frac{1}{x^2}$. D. $y'' = -\frac{2}{x^3}$.

Lời giải

Với $y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow y'' = \frac{2}{x^3}$.

Câu 25: Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - 3x^2 + x - 1$.

- A. $f''(x) = 4x^2 - 6x + 1$. B. $f''(x) = 4x^2 - 6$.
C. $f''(x) = 4x^2$. D. $f''(x) = 4x^2 + 1$.

Lời giải

Với $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - 3x^2 + x - 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{3}x^3 - 6x + 1 \Rightarrow f''(x) = 4x^2 - 6$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x) = 2x^3 + 3x$. Khi đó giá trị $f''(-1)$ bằng:

- A. -5. B. 9. C. 12. D. -12.

Lời giải

Với $f(x) = 2x^3 + 3x \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 3 \Rightarrow f''(x) = 12x$. Khi đó $f''(-1) = 12 \cdot (-1) = -12$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x) = x - e^x$. Khi đó giá trị $f''(2)$ bằng:

- A. $-e^2$. B. $2 - e^2$. C. $1 - e^2$. D. $-e$.

Lời giải

Với $f(x) = x - e^x \Rightarrow f'(x) = 1 - e^x \Rightarrow f''(x) = -e^x$. Khi đó $f''(2) = -e^2$.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x) = 3\sin x - 5\cos x$. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$.

- A. $f''(x) = 3\cos x + 5\sin x$. B. $f''(x) = -3\sin x + 5\cos x$.
C. $f''(x) = 3\cos x - 5\sin x$. D. $f''(x) = 3\sin x - 5\cos x$.

Lời giải



Với $f(x) = 3\sin x - 5\cos x \Rightarrow f'(x) = 3\cos x + 5\sin x \Rightarrow f''(x) = -3\sin x + 5\cos x$.

Câu 29: Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \ln x$ với $x > 0$.

- A.** $y'' = -\frac{1}{x^2}$. **B.** $y'' = \frac{1}{x}$. **C.** $y'' = -\frac{1}{x}$. **D.** $y'' = \frac{1}{x^2}$.

Lời giải

Với $y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2}$.

Câu 30: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = e^{-2x+1}$ bằng:

- A.** e^{-2x+1} . **B.** $-e^{-2x+1}$. **C.** $-2x(-2x+1)e^{-2x-1}$. **D.** $4e^{-2x+1}$.

Lời giải

Ta có: $y = e^{-2x+1} \Rightarrow y' = -2e^{-2x+1} \Rightarrow y'' = 4e^{-2x+1}$.

Câu 31: Biết đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \ln(3x-1)$ có dạng $\frac{a}{(3x-1)^b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Khi đó $2a+b$

bằng:

- A.** 0. **B.** -4. **C.** -16. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $y = \ln(3x-1) \Rightarrow y' = \frac{3}{3x-1} \Rightarrow y'' = 3 \cdot \left(-\frac{3}{(3x-1)^2} \right) = \frac{-9}{(3x-1)^2}$.

Khi đó: $2a+b = 2 \cdot (-9) + 2 = -16$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + 2023x - 2024$. Số các giá trị nguyên dương a thỏa mãn $f''(1) < 18$ là:

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $f(x) = ax^3 + 2023x - 2024 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2023 \Rightarrow f''(x) = 6ax$.

Theo giả thiết ta có: $f''(1) < 18 \Rightarrow 6a < 18 \Rightarrow a < 3$.

Do a nguyên dương nên $a \in \{1; 2\}$. Vậy có 2 giá trị a thỏa yêu cầu.

Câu 33: Cho chuyển động có phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 6t$, trong đó s tính bằng mét (m) và t tính bằng giây (s). Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm vận tốc bằng 3 (m/s).

- A.** 0 (m/s²). **B.** -12 (m/s²). **C.** 12 (m/s²). **D.** -2 (m/s²).

Lời giải

Ta có: $s(t) = t^3 - 3t^2 + 6t \Rightarrow v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 6 \Rightarrow a(t) = s''(t) = 6t - 6$.

Theo bài ra: $v(t) = 3 \Rightarrow 3t^2 - 6t + 6 = 3 \Leftrightarrow t = 1$.

Khi đó: $a(1) = 0$ (m/s²).



Câu 34: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$. Tính $f''(1)$.

A. -1.

B. 1.

C. $\frac{3}{2}$.

D. 0.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(x) = \sqrt{2x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x-1)'}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = -\frac{(\sqrt{2x-1})'}{2x-1} = -\frac{1}{(2x-1)\sqrt{2x-1}} = -\frac{1}{\sqrt{(2x-1)^3}}$$

$$\text{Vậy } f''(1) = -1.$$

Câu 35: Cho hàm số $y = \cos^2 x$. Khi đó $y''\left(\frac{\pi}{3}\right)$ bằng:

A. -2.

B. 2.

C. 1.

D. $-2\sqrt{3}$.

Lời giải

$$y' = 2\cos x \cdot (-\sin x) = -\sin 2x$$

$$y'' = -2\cos 2x \Rightarrow y''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1.$$

Câu 36: Hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ có đạo hàm cấp hai bằng

A. $y'' = \frac{2}{(x+1)^3}$.

B. $y'' = \frac{-2}{(x+1)^3}$.

C. $y'' = \frac{3}{(x+1)^3}$.

D. $y'' = \frac{6}{(x+1)^3}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y = x + \frac{1}{x+1} \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow y'' = \frac{2}{(x+1)^3}.$$

Câu 37: Cho hàm số $y = (x+2)^{-2}$. Tìm hệ thức liên hệ giữa y và y'' không phụ thuộc vào x .

A. $y'' - 4y = 0$.

B. $y'' + 2y = 0$.

C. $y'' - 6y^2 = 0$.

D. $2y'' - 3y = 0$.

Lời giải

$$\text{Tập xác định: } \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

$$\text{Ta có: } y' = \left[(x+2)^{-2}\right]' = -2(x+2)^{-3}(x+2)' = -2(x+2)^{-3}.$$

$$y'' = \left[-2(x+2)^{-3}\right]' = 6(x+2)^{-4}(x+2)' = 6(x+2)^{-4} = 6y^2.$$

$$\text{Vậy } y'' - 6y^2 = 0.$$

Câu 38: Tính tổng $S = 2.C_{2024}^2 + 3.2.9.C_{2024}^3 + 4.3.9^2.C_{2024}^4 + \dots + 2023.2024.9^{2022}.C_{2024}^{2024}$

A. 2024.10^{2023} .

B. $2023.2024.9^{2022}$.

C. $2023.2024.10^{2022}$.

D. $2022.2023.2024.10^{2024}$

**Lời giải**

Với n là số nguyên dương, xét hàm số $f(x) = (1+x)^n$

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1}, \quad f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$$

Mặt khác: $f(x) = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^{n-2} x^{n-2} + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$

$$f'(x) = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \dots + (n-2)C_n^{n-2} x^{n-3} + (n-1)C_n^{n-1} x^{n-2} + nC_n^n x^{n-1}$$

$$f''(x) = 2C_n^2 + 3 \cdot 2C_n^3 x + \dots + (n-2) \cdot (n-3)C_n^{n-2} x^{n-4} + (n-1) \cdot (n-2)C_n^{n-1} x^{n-3} + n \cdot (n-1)C_n^n x^{n-2}$$

Thay $n = 2024$, $x = 9$ vào biểu thức $f''(x)$ ta được $S = 2023 \cdot 2024 \cdot 10^{2022}$

Câu 39: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \sin x + x^2$ bằng:

- A. $\cos x + 2x$. B. $\sin x + 2$. C. $-\sin x + 2$. D. $\cos x + 2$.

Lời giải

Ta có: $y = \sin x + x^2 \Rightarrow y' = \cos x + 2x \Rightarrow y'' = -\sin x + 2$.

Câu 40: Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 3$. Đạo hàm cấp hai của hàm số là:

- A. $y'' = x^3 - 2x$. B. $y'' = 3x^2 - 2$. C. $y'' = 3x - 2$. D. $y'' = 3x^2 - 2x$.

Lời giải

Ta có: $y = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 3 \Rightarrow y' = x^3 - 2x \Rightarrow y'' = 3x^2 - 2$.

Câu 41: Cho hàm số $f(x) = 4\sqrt{x}$. Giá trị của $f''(9)$ bằng:

- A. $\frac{2}{3}$. B. $-\frac{1}{27}$. C. $\frac{4}{27}$. D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Ta có: $f(x) = 4\sqrt{x}$ nên $f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow f''(x) = 2 \cdot \left[-\frac{(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} \right] = -\frac{1}{x\sqrt{x}}$.

Từ đó: $f''(9) = -\frac{1}{27}$.

Câu 42: Một chuyển động có phương trình $s = f(t)$. Đạo hàm cấp hai (nếu có) của hàm số $f(t)$ là:

- A. Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t .
B. Gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t .
 C. Vận tốc trung bình của chuyển động tại thời điểm t .
 D. Gia tốc trung bình của chuyển động tại thời điểm t .

Lời giải

Theo ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai



Câu 43: Cho hàm số $y = 3e^x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $y'' = 3e^x$. **B.** $y'' = 3xe^{x-1}$. **C.** $y'' = 3$. **D.** $y'' = 3e^{2x}$.

Lời giải

Ta có: $y = 3e^x \Rightarrow y' = 3e^x \Rightarrow y'' = 3e^x$.

Câu 44: Cho hàm số $y = 3^x$. Đạo hàm cấp hai của hàm số bằng:

- A.** $y'' = 3^x (\ln 3)^2$. **B.** $y'' = 3^x \ln 3$. **C.** $y'' = 3^x$. **D.** $y'' = \frac{3^x}{(\ln 3)^2}$.

Lời giải

Ta có: $y = 3^x \Rightarrow y' = 3^x \ln 3 \Rightarrow y'' = 3^x (\ln 3)^2$.

Câu 45: Cho hàm số $f(x) = \cos x$. Đạo hàm cấp hai của hàm số là:

- A.** $f''(x) = -\cos x$. **B.** $f''(x) = \cos x$. **C.** $f''(x) = \sin x$. **D.** $f''(x) = -\sin x$.

Lời giải

Ta có: $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x \Rightarrow f''(x) = -\cos x$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x) = x^2 \cdot e^{2x}$. Giá trị của $f''(1)$ bằng:

- A.** e^2 . **B.** $8e^2$. **C.** $8e$. **D.** $14e^2$.

Lời giải

Ta có: $f(x) = x^2 \cdot e^{2x} \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot e^{2x} + x^2 \cdot 2e^{2x} = (2x + 2x^2) \cdot e^{2x}$

$\Rightarrow f''(x) = (2 + 4x) \cdot e^{2x} + (2x + 2x^2) \cdot 2e^{2x} = (4x^2 + 8x + 2) \cdot e^{2x}$.

Khi đó: $f''(1) = (4 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 + 2) \cdot e^{2 \cdot 1} = 14e^2$.

Câu 47: Cho hàm số $f(x) = \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x \cos x}$. Giá trị của $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A.** $(0; 1)$. **B.** $(1; 2)$. **C.** $(-1; 0)$. **D.** $(-2; -1)$.

Lời giải

Ta có: $f(x) = \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x \cos x} = \frac{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x)}{1 - \sin x \cos x}$

$= \frac{(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)}{1 - \sin x \cos x} = \sin x + \cos x$

$\Rightarrow f'(x) = \cos x - \sin x \Rightarrow f''(x) = -\sin x - \cos x$.

Khi đó: $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$.

Câu 48: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + 2$ với a, b là các hằng số. Biết $f'(1) = 0$; $f''(2) = 2$, hãy xác định các hằng số a, b .

- A.** $a = 1; b = 2$. **B.** $a = -1; b = -2$. **C.** $a = -1; b = 2$. **D.** $a = 1; b = -2$.

Lời giải



Ta có: $f(x) = ax^2 + bx + 2 \Rightarrow f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f''(x) = 2a$.

Theo đề bài ta có: $f''(2) = 2 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$.

Lại có: $f'(1) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow 2.1 + b = 0 \Rightarrow b = -2$.

Câu 49: Cho hàm số $f(x) = (x+1)e^x$. Giá trị của $f''(0)$ bằng

- A. 3. B. 2. C. $3e$. D. $2e$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 2e^x + xe^x \Rightarrow f''(x) = 3e^x + xe^x$. Vậy $f''(0) = 3$.

Câu 50: Biết hàm số $y = f(x) - f(2x)$ có đạo hàm cấp hai $y''(2) = 0, y''(1) = 10$. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $g(x) = f(x) - f(4x)$ tại $x = 1$.

- A. 2024. B. 20. C. 10. D. -10.

Lời giải

Đặt $h(x) = f(x) - f(2x); g(x) = f(x) - f(4x)$.

Ta có $h'(x) = f'(x) - 2f'(2x) \Rightarrow h''(x) = f''(x) - 4f''(2x)$;

$g'(x) = f'(x) - 4f'(4x) \Rightarrow g''(x) = f''(x) - 16f''(4x) \Rightarrow g''(1) = f''(1) - 16f''(4)$.

Ta có: $\begin{cases} h''(2) = f''(2) - 4f''(4) = 0 & (1) \\ h''(1) = f''(1) - 4f''(2) = 10 & (2) \end{cases}$.

$(1) \Leftrightarrow 4f''(2) - 16f''(4) = 0 \quad (3)$

Cộng từng vế (2) và (3) suy ra $g''(1) = f''(1) - 16f''(4) = 10$.

Câu 51: Phương trình chuyển động của một con lắc được cho bởi công thức $s(t) = 2\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$, trong

đó s tính bằng centimet (cm) và t tính bằng giây (s). Gia tốc của con lắc tại thời điểm $t = 5$ (s) bằng (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)

- A. $-19,1$ (cm/s²). B. $9,9$ (cm/s²). C. $9,8$ (cm/s²). D. $-9,8$ (cm/s²)

Lời giải

Ta có: $s(t) = 2\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow s'(t) = -2\pi \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow s''(t) = -2\pi^2 \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$.

Khi đó: $a(5) = s''(5) = -2\pi^2 \cos\left(\pi.5 - \frac{\pi}{3}\right) \approx 9,9$ (cm/s²).

Câu 52: Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^3 + (2m+1)x^2 + 1$. Số giá trị nguyên của m để y'' nhận giá trị không âm với mọi số thực x là:

- A. 5. B. 2. C. 4. D. 7.

Lời giải



$$y' = 4x^3 + 6mx^2 + 2(2m+1)x.$$

$$y'' = 12x^2 + 12mx + 4m + 2.$$

$$\Delta' = 36m^2 - 48m - 24.$$

$$y'' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 > 0 \\ 36m^2 - 48m - 24 \leq 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow 36m^2 - 48m - 24 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{10}}{3} \leq m \leq \frac{2 + \sqrt{10}}{3}.$$

$$\text{Mà } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1\}.$$

- Câu 53:** Một chất điểm chuyển động với phương trình $s(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 + 5t$ trong đó t được tính bằng giây (s), s tính bằng mét (m). Tìm gia tốc của chuyển động tại thời điểm vận tốc bằng 8(m/s)?
- A.** 4(m/s²). **B.** 6(m/s²). **C.** 8(m/s²). **D.** 4(m/s²).

Lời giải

$$\text{Ta có: } v(t) = s'(t) = t^2 - 2t + 5; a(t) = s''(t) = 2t - 2;$$

$$v(t) = 8 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 5 = 8 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases} \xrightarrow{t > 0} t = 3.$$

$$\text{Gia tốc của chuyển động tại thời điểm là } t = 3 \text{ là } a(3) = 4(\text{m/s}^2).$$

- Câu 54:** Biết $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ và thỏa mãn :

$$1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 + \dots + (n-2).(n-1).C_n^{n-1} + (n-1).n.C_n^n = 4090506.2^{2021}.$$

Khi đó giá trị n là:

- A.** $n = 2021$. **B.** $n = 2023$. **C.** $n = 2022$. **D.** $n = 2024$.

Lời giải

$$\text{Xét hàm số } f(x) = (1+x)^n = C_n^0 + x.C_n^1 + x^2.C_n^2 + \dots + x^{n-1}.C_n^{n-1} + x^n.C_n^n.$$

$$\text{Suy ra: } f'(x) = n.(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2.x.C_n^2 + \dots + (n-1).x^{n-2}.C_n^{n-1} + n.x^{n-1}.C_n^n;$$

$$f''(x) = n.(n-1).(1+x)^{n-2} = 1.2.C_n^2 + 2.3.x.C_n^3 + \dots + (n-1).(n-2).x^{n-3}.C_n^{n-1} + n.(n-1).x^{n-2}.C_n^n$$

Thay $x = 1$ vào $f''(x)$ ta được

$$f''(1) = n.(n-1).2^{n-2} = 1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 + \dots + (n-1).(n-2).C_n^{n-1} + n.(n-1).C_n^n.$$

$$\Rightarrow 1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 + \dots + (n-1).(n-2).C_n^{n-1} + n.(n-1).C_n^n = 4090506.2^{2021}$$

$$\Leftrightarrow n.(n-1).2^{n-2} = 4090506.2^{2021} \Leftrightarrow n.(n-1)2^{n-2} = 2023.2022.2^{2021} \Leftrightarrow n = 2023.$$

Vậy $n = 2023$.

- Câu 55:** Một vật giao động điều hòa có phương trình quãng đường phụ thuộc thời gian $s = A \sin(\omega t + \varphi)$. Trong đó A, ω, φ là hằng số, t là thời gian. Khi đó biểu thức gia tốc của vật là?



A. $v = A\cos(\omega t + \varphi)$

B. $v = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$

C. $v = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$

D. $v = -A\omega \cos(\omega t + \varphi)$

Lời giải

Ta có vận tốc của vật đó là

$$v = s' = (A\sin(\omega t + \varphi))' = A(\omega t + \varphi)' \cos(\omega t + \varphi) = A\omega \cos(\omega t + \varphi).$$

$$a = v' = A\omega \cos(\omega t + \varphi)' = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi).$$

Câu 56: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = -t^3 + 3t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

A. 12m/s.

B. 0m/s.

C. 11m/s.

D. 6m/s.

Lời giảiVận tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp một của quãng đường: $v = S' = -3t^2 + 6t + 9$ Gia tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp hai của quãng đường: $a = S'' = -6t + 6$ Gia tốc triệt tiêu khi $S'' = 0 \Leftrightarrow t = 1$.Khi đó vận tốc của chuyển động là $S'(1) = 12\text{m/s}$.**Câu 57:** Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t) = t^3 + \frac{9}{2}t^2 - 6t$, trong đó t được tính bằng giây, s được tính bằng mét. Gia tốc của chất điểm tại thời điểm vận tốc bằng 24 (m/s) là

A. 21 (m/s²).

B. 12 (m/s²).

C. 39 (m/s²).

D. 20 (m/s²).

Lời giải

$$\text{Ta có } v(t) = s'(t) = 3t^2 + 9t - 6 = 24 \Rightarrow t = 2 \text{ (s)}.$$

$$\text{Lại có } a(t) = s''(t) = 6t + 9 \Rightarrow a(2) = 21 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

Câu 58: Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = t^3 + 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Xác định gia tốc của chuyển động khi $t = 3$.

A. 14 m/s².

B. 24 m/s².

C. 12 m/s².

D. 17 m/s².

Lời giải

$$\text{Ta có } S' = 3t^2 + 6t + 5 \Rightarrow S'' = 6t + 6.$$

$$\text{Vậy gia tốc của chuyển động khi } t = 3 \text{ là } S''(3) = 6.3 + 6 = 24 \text{ m/s}^2.$$

Câu 59: Một chất điểm chuyển động trong 20 giây đầu tiên có phương trình $s(t) = \frac{1}{12}t^4 - t^3 + 6t^2 + 10t$, trong đó $t > 0$ với t tính bằng giây (s) và $s(t)$ tính bằng mét (m). Hỏi tại thời điểm gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì vận tốc của vật bằng bao nhiêu?

A. 17(m/s).

B. 18(m/s).

C. 28(m/s).

D. 13(m/s).

Lời giải



Vận tốc của chuyển động là $v(t) = s'(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 12t + 10$.

Gia tốc của chuyển động là $a(t) = v'(t) = t^2 - 6t + 12 = (t - 3)^2 + 3$.

Vậy gia tốc đạt giá trị nhỏ nhất khi $t = 3$. Khi đó vận tốc của vật bằng $v(3) = 28(m/s)$.

Câu 60: Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t = 3$ là:

- A. 24 m/s^2 . B. 17 m/s^2 . C. 14 m/s^2 . D. 12 m/s^2 .

Lời giải

Ta có gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t bằng đạo hàm cấp hai của phương trình chuyển động tại thời điểm t .

$$s' = (t^3 - 3t^2 + 5t + 2)' = 3t^2 - 6t + 5 \Rightarrow s'' = 6t - 6 \Rightarrow s''(3) = 12$$

Câu 61: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$ (t tính bằng giây; s tính bằng mét). Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Vận tốc của chuyển động bằng 0 khi $t = 0$ hoặc $t = 2$.
 B. Vận tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$ là $v = 18 \text{ m/s}$.
C. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3$ là $a = 12 \text{ m/s}^2$.
 D. Gia tốc của chuyển động bằng 0 khi $t = 0$.

Lời giải

Ta có gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t bằng đạo hàm cấp hai của phương trình chuyển động tại thời điểm t .

$$s' = (t^3 - 3t^2 + 5t + 2)' = 3t^2 - 6t + 5 \Rightarrow s'' = 6t - 6 \Rightarrow s''(3) = 12$$

Câu 62: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2$ (t tính bằng giây; s tính bằng mét). Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4 \text{ s}$ là $a = 18 \text{ m/s}^2$.
 B. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4 \text{ s}$ là $a = 9 \text{ m/s}^2$.
 C. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3 \text{ s}$ là $v = 12 \text{ m/s}$.
 D. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3 \text{ s}$ là $v = 24 \text{ m/s}$.

Lời giải

$$s' = 3t^2 - 6t \Rightarrow s'' = 6t - 6 \Rightarrow s''(4) = 18.$$

Câu 63: Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 4t + 5$ (t tính bằng giây (s); s tính bằng mét (m)). Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ là:

- A. $10 \text{ (m/s}^2\text{)}$. B. $37 \text{ (m/s}^2\text{)}$. C. $28 \text{ (m/s}^2\text{)}$. D. $18 \text{ (m/s}^2\text{)}$.

Lời giải

Ta có gia tốc tức thời tại thời điểm t bằng đạo hàm cấp hai của phương trình chuyển động tại thời điểm t .



Ta có: $s' = 3t^2 - 6t + 4 \Rightarrow s'' = 6t - 6$.

Khi đó phương trình gia tốc của chuyển động là: $a(t) = s''(t) = 6t - 6$.

Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ là: $a(4) = 6.4 - 6 = 18 \text{ (m/s}^2\text{)}$.

Câu 64: Phương trình chuyển động của một con lắc lò xo quanh vị trí cân bằng O là $x = 4\cos 2t$ (trong đó t tính bằng giây (s) và x tính bằng cm). Tính gia tốc của con lắc tại thời điểm t .

A. $16\cos 2t \text{ (cm/s}^2\text{)}$. **B.** $-16\cos 2t \text{ (cm/s}^2\text{)}$. **C.** $\cos 2t \text{ (cm/s}^2\text{)}$. **D.** $10\sin 2t \text{ (cm/s}^2\text{)}$.

Lời giải

Ta có gia tốc tức thời tại thời điểm t bằng đạo hàm cấp hai của phương trình chuyển động tại thời điểm t .

Ta có: $x = 4\cos 2t$

$\Rightarrow x' = -4.2.\sin 2t = -8.\sin 2t \Rightarrow x'' = -8.2.\cos 2t = -16.\cos 2t$.

Vậy, gia tốc của con lắc tại thời điểm t bằng $-16\cos 2t \text{ (cm/s}^2\text{)}$.

Câu 65: Cho hàm số $f(x) = x^4 - (m^2 + 2m - 3)x^2 + mx + 11$. Tính tổng S tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để $f''(1) \geq 0$.

A. 10.

B. 3.

C. -7.

D. 7.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 2(m^2 + 2m - 3)x + m \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 2(m^2 + 2m - 3)$.

Khi đó $f''(1) = -2m^2 - 4m + 18$

$f''(1) \geq 0 \Leftrightarrow -2m^2 - 4m + 18 \geq 0 \Leftrightarrow -1 - \sqrt{10} \leq m \leq -1 + \sqrt{10}$

Ta có: $\begin{cases} m \in \mathbb{Z}^+ \\ -1 - \sqrt{10} \leq m \leq -1 + \sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$.

Vậy $S = 1 + 2 = 3$.

Câu 66: Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây (s) và s tính bằng mét (m). Tính gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu.

A. $12 \text{ (m/s}^2\text{)}$.

B. $-12 \text{ (m/s}^2\text{)}$.

C. $6 \text{ (m/s}^2\text{)}$.

D. $18 \text{ (m/s}^2\text{)}$.

Lời giải

Vận tốc của chuyển động tại thời điểm t là: $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t - 9$.

Vận tốc triệt tiêu: $v(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases}$. Vì $t > 0$ nên $t = -1$ (loại), còn $t = 3$ (thỏa mãn).

Gia tốc của chuyển động khi t là: $a(t) = v'(t) = 6t - 6$.

Gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu là: $a(3) = 6.3 - 6 = 12$.

Câu 67: Cho hàm số $f(x) = \sin^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$. Biết đạo hàm cấp hai của hàm số có dạng:



$$f''(x) = \frac{a}{(1+x)^3} \cdot \sin\left(\frac{2-2x}{1+x}\right) + \frac{b}{(1+x)^4} \cdot \cos\left(\frac{2-2x}{1+x}\right).$$

Giá trị của biểu thức $T = \frac{b}{a}$ bằng:

- A. 3. B. 1. C. 0 D. 2.

Lời giải

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos 2 \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2-2x}{1+x} \right) \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{2x-2}{x+1} \right);$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{2x-2}{x+1} \right) \right]' = \frac{1}{2} \left(\frac{2x-2}{x+1} \right)' \cdot \sin \left(\frac{2x-2}{x+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{(1+x)^2} \cdot \sin \left(\frac{2x-2}{x+1} \right) = \frac{2}{(1+x)^2} \cdot \sin \left(\frac{2x-2}{x+1} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[\frac{2}{(x+1)^2} \right]' \cdot \sin \left(\frac{2x-2}{x+1} \right) + \left[\sin \left(\frac{2x-2}{x+1} \right) \right]' \cdot \frac{2}{(x+1)^2} \\ &= 2 \cdot \left[\frac{1}{(x+1)^2} \right]' \cdot \sin \left(\frac{2x-2}{x+1} \right) + \frac{2}{(x+1)^2} \cdot \left(\frac{2x-2}{x+1} \right)' \cdot \cos \left(\frac{2x-2}{x+1} \right) \\ &= 2 \cdot \frac{-[(x+1)^2]'}{(x+1)^4} \cdot \sin \left(\frac{2x-2}{x+1} \right) + \frac{2}{(x+1)^2} \cdot \left[\frac{4}{(x+1)^2} \right] \cdot \cos \left(\frac{2x-2}{x+1} \right) \\ &= 2 \cdot \frac{-2 \cdot (x+1)' \cdot (x+1)}{(x+1)^4} \cdot \sin \left(\frac{2x-2}{x+1} \right) + \frac{8}{(x+1)^4} \cdot \cos \left(\frac{2x-2}{x+1} \right) \\ &= \frac{-4}{(x+1)^3} \cdot \sin \left(\frac{2x-2}{x+1} \right) + \frac{8}{(x+1)^4} \cdot \cos \left(\frac{2x-2}{x+1} \right) \\ &= \frac{4}{(1+x)^3} \cdot \sin \left(\frac{2-2x}{1+x} \right) + \frac{8}{(1+x)^4} \cdot \cos \left(\frac{2-2x}{1+x} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a = 4 \\ b = 8 \end{cases}. \text{ Vậy } T = \frac{b}{a} = \frac{8}{4} = 2.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho y là hàm số của x thỏa mãn phương trình $y = \sin x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đạo hàm của hàm số y là $y' = \cos x$.

b) $y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) Đạo hàm cấp hai của hàm số y là $y'' = -\sin^2 x$.



d) $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Lời giảia) Đúng: Đạo hàm của hàm số y là $y' = \cos x$.b) Đúng. Ta có $y' = \cos x$ nên $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) Sai. Ta có $y' = \cos x$; $y'' = -\sin x$ d) Sai. Ta có $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$ **Câu 2:** Cho y là hàm số của x thỏa mãn phương trình $y = x^3$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:a) Đạo hàm của hàm số y là $y' = 3x^3$.b) $y'(2) = 12$ c) Đạo hàm cấp hai của hàm số y là $y'' = 6x$.d) $y''(0) = 1$ **Lời giải**a) Sai: Ta có $y' = 3x^2$ b) Đúng: Ta có $y' = 3x^2$ nên $y'(2) = 3.2^2 = 12$ c) Đúng: Ta có $y'' = 6x$ d) Sai: Ta có $y''(0) = 6.0 = 0$ **Câu 3:** Cho hàm số $y = \ln x$ với $x > 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:a) Đạo hàm của hàm số y là $y' = \frac{1}{x}$.b) Đạo hàm cấp hai của hàm số y là $y'' = \frac{-1}{x^4}$ với $x > 0$ c) $y'(1) = 1$.d) $y''(2) = \frac{-1}{4}$ **Lời giải**a) Đúng: Ta có $y = \ln x$; $y' = \frac{1}{x}$ với $x > 0$ b) Sai: Ta có $y = \ln x$; $y' = \frac{1}{x}$; $y'' = \frac{-1}{x^2}$ với $x > 0$ c) Đúng: Ta có $y'(1) = 1$



d) Đúng: $y''(2) = \frac{-1}{4}$

Câu 4: Cho hàm số $y = 2\sin 2x - \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$.

b) $y'' = -8.\sin 2x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

c) $y''(0) = 1$.

d) $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2y''(0) = -2$.

Lời giải

Đạo hàm: $y' = 4.\cos 2x + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

a) Sai: $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4.\cos \frac{2\pi}{3} + \sin 0 = -2$.

b) Đúng: $y'' = -8.\sin 2x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

c) Sai: $y''(0) = \frac{1}{2}$.

d) Sai: $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2y''(0) = -2 - 2.\frac{1}{2} = -3$.

Câu 5: Biết y là hàm số của x thỏa mãn phương trình $xy = 1 + \ln y$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đạo hàm của hàm số y là $y' = \frac{y^2}{1 + xy}$.

b) $y'(0) = \frac{1}{e^2}$.

c) Đạo hàm cấp hai của hàm số y là $y'' = \frac{2yy'(1 - xy) + y^2(y + xy')}{(1 - xy)^2}$.

d) $y''(0) = \frac{3}{e^3}$.

Lời giải



a) Sai: Ta có: $xy = 1 + \ln y \Rightarrow y + xy' = \frac{y'}{y} \Rightarrow y' = \frac{y^2}{1 - xy}$.

b) Đúng: Thay $x = 0$ vào phương trình $xy = 1 + \ln y$ ta được $1 + \ln y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{e}$

Vậy $y'(0) = \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^2}{1 - 0 \cdot \frac{1}{e}} = \frac{1}{e^2}$

c) Đúng: Ta có $y'' = \left(\frac{y^2}{1 - xy}\right)' = \frac{2yy'(1 - xy) + y^2(y + xy')}{(1 - xy)^2}$

d) Đúng: Thay $y = \frac{1}{e}; x = 0; y' = \frac{1}{e^2}$ vào y'' ta được $y''(0) = \frac{2 \cdot \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^2} \cdot \frac{1}{e}}{1} = \frac{3}{e^3}$.

Câu 6: Một vật chuyển động trên đường thẳng được xác định bởi công thức $s(t) = t^3 - t^2 + 5t + 2$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s là quãng đường chuyển động của vật tính bằng mét. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ là 9(m/s).

b) Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3$ là 16 9(m/s²).

c) Quãng đường chuyển động của vật tại thời điểm mà vận tốc của vật bằng 45 m/s là 70 m

d) Vận tốc của vật tại thời điểm mà gia tốc của vật bằng 34(m/s²) là 101 (m/s).

Lời giải

a) Sai: Vận tốc của vật tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 2t + 5$.

Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ là $v(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 5 = 13$ (m/s)

b) Đúng: Gia tốc của vật tại thời điểm t là $a(t) = s''(t) = 6t - 2$.

Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 3$ là $a(3) = 6 \cdot 3 - 2 = 16$ (m/s²)

c) Đúng: Vận tốc của vật bằng 45(m/s) tại thời điểm t suy ra

$$v(t) = 45 \Leftrightarrow 3t^2 - 2t + 5 = 45 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \text{ (tm)} \\ t = -\frac{10}{3} \text{ (l)} \end{cases}$$

Quãng đường chuyển động của vật tại thời điểm $t = 4$ là $s(4) = 4^3 - 4^2 + 5 \cdot 4 + 2 = 70$ m.

d) Đúng: Gia tốc của vật bằng 34(m/s²) tại thời điểm t suy ra $a(t) = 34 \Leftrightarrow 6t - 2 = 34 \Leftrightarrow t = 6$

Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 6$ là $v(6) = 3 \cdot 6^2 - 2 \cdot 6 + 5 = 101$ (m/s)



Câu 7: Một vật chuyển động trên đường thẳng được xác định bởi công thức $s(t) = t^3 - 3t^2 + 7t - 2$, trong đó $t > 0$ và tính bằng giây và s là quãng đường chuyển động được của vật trong t giây tính bằng mét. Khi đó:

- Tốc độ của vật tại thời điểm $t = 2$ là 7 (m/s)
- Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ là $6 \text{ (m/s}^2\text{)}$
- Gia tốc của vật tại thời điểm mà vận tốc của chuyển động bằng $16 \text{ (m/s}^2\text{)}$ là $10 \text{ (m/s}^2\text{)}$
- Thời điểm $t = 1$ (giây) tại đó vận tốc của chuyển động đạt giá trị nhỏ nhất

Lời giải

Ta có: $s'(t) = 3t^2 - 6t + 7$ và $s''(t) = 6t - 6$.

a) Đúng: Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ là: $v(2) = s'(2) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 7 = 7 \text{ (m/s)}$.

b) Đúng: Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ là: $a(2) = v'(2) = s''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 \text{ (m/s}^2\text{)}$.

c) Sai: Vận tốc của chuyển động bằng $16 \text{ (m/s}^2\text{)}$ tại thời điểm t nghĩa là:

$$v(t) = s'(t) = 16 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t + 7 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \text{ (tm)} \\ t = -1 \text{ (l)} \end{cases}$$

Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3$ là: $a(3) = v'(3) = s''(3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12 \text{ (m/s}^2\text{)}$.

d) Đúng: Vận tốc của chuyển động có phương trình $v(t) = 3t^2 - 6t + 7$ là một parabol, có đỉnh

$$S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow S(1; 4) \text{ và hệ số } a = 3 > 0 \text{ nên hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng } 4 \text{ tại } t = 1.$$

(hoặc sử dụng máy tính Casio để tìm min)

Vậy tại thời điểm $t = 1$ thì vận tốc của chuyển động đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4 (m/s) .

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^3 - mx^2 + x - 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m lớn hơn -10 để y'' không âm với mọi $x \in \mathbb{R}$?

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 - 6x^2 - 2mx + 1$; $y'' = 12x^2 - 12x - 2m$.

$$\text{Để } y'' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên } \Delta' = 36 + 12 \cdot 2m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{3}{2}.$$

Vì m nguyên lớn hơn -10 nên $m \in \{-9; -8; \dots; -3; -2\}$

Vậy có 8 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 2: Một chất điểm chuyển động trong 60 giây đầu tiên có phương trình $s(t) = \frac{1}{12}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + 6t^2 + 7t$, trong đó $t > 0$ với t tính bằng giây (s) và $s(t)$ tính bằng mét (m). Hỏi tại thời điểm gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì vận tốc của vật bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

Vận tốc của chuyển động là $v(t) = s'(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 12t + 7$.

Gia tốc của chuyển động là $a(t) = v'(t) = t^2 - 4t + 12 = (t - 2)^2 + 8$.

Vậy gia tốc đạt giá trị nhỏ nhất khi $t = 2$. Khi đó vận tốc của vật bằng $v(2) = \frac{77}{3} (m/s)$.

Câu 3: Biết hàm số $y = f(x) - f(3x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm cấp hai với mọi $x \in \mathbb{R}$, biết $y''(3) = 5, y''(1) = 10$. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $g(x) = f(x) - f(9x)$ tại $x = 1$.

Lời giải

Đặt $h(x) = f(x) - f(3x); g(x) = f(x) - f(9x)$.

Ta có $h'(x) = f'(x) - 3f'(3x) \Rightarrow h''(x) = f''(x) - 9f''(3x)$;

$g'(x) = f'(x) - 9f'(9x) \Rightarrow g''(x) = f''(x) - 81f''(9x) \Rightarrow g''(1) = f''(1) - 81f''(9)$.

Ta có: $\begin{cases} h''(3) = f''(3) - 9f''(9) = 5 & (1) \\ h''(1) = f''(1) - 9f''(3) = 10 & (2) \end{cases}$ khi đó $(1) \Leftrightarrow 9f''(3) - 81f''(9) = 45(3)$

Cộng từng vế (2) và (3) suy ra $g''(1) = f''(1) - 81f''(9) = 55$.

Câu 4: Tính đạo hàm cấp hai của hàm số: $y = \frac{3x-1}{x+2}$ tại điểm $x = -1$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Ta có: $y' = \frac{3(x+2) - (3x-1)}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2} \Rightarrow y'' = \frac{-14(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{-14}{(x+2)^3}$

Do đó: $y''(-1) = -14$.

Câu 5: Một vật chuyển động có phương trình $S = t^4 - 3t^3 - 3t^2 + 2t + 1$ (m), t là thời gian tính bằng giây. Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3s$ là?

Lời giải

Ta có: $S = f(t) = t^4 - 3t^3 - 3t^2 + 2t + 1 \Rightarrow f'(t) = 4t^3 - 9t^2 - 6t + 2$

$\Rightarrow a(t) = f''(t) = 12t^2 - 18t - 6$

Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3s$ là $a(3) = 12 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 - 6 = 48 \text{ m/s}^2$.

Câu 6: Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = -t^3 + t^2 + t + 4$ (t là thời gian tính bằng giây). Gia tốc của chuyển động tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất là

Lời giải



Vận tốc của chất điểm có phương trình là: $v = s' = -3t^2 + 2t + 1$.

Vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất khi $t = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{3}$.

Gia tốc của chất điểm có phương trình là: $s'' = -6t + 2$.

Tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất thì gia tốc bằng $s''\left(\frac{1}{3}\right) = 0$.

Câu 7: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = -t^3 + 3t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu bằng bao nhiêu?

Lời giải

Vận tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp một của quãng đường: $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 6t + 9$

Gia tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp hai của quãng đường: $a(t) = s''(t) = -6t + 6$

Gia tốc triệt tiêu khi $s''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Khi đó vận tốc của chuyển động là $s'(1) = 12 \text{ m/s}$. Đáp án: 12

Câu 8: Một vật chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình $s(t) = t^3 - 2t^2 + 2t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính gia tốc của vật tại thời điểm mà vận tốc của vật bằng 17 (m/s) .

Lời giải

Vận tốc của vật tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 4t + 2$.

Gia tốc của vật tại thời điểm t là $a(t) = s''(t) = 6t - 4$.

Vận tốc của vật bằng 17 (m/s) tại thời điểm t suy ra

$$v(t) = 17 \Leftrightarrow 3t^2 - 4t + 2 = 17 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \text{ (tm)} \\ t = -\frac{5}{3} \text{ (l)} \end{cases}$$

Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3$ là $a(3) = 6 \cdot 3 - 4 = 14 \text{ (m/s}^2\text{)}$.

Câu 9: Một vật chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + 7t - 2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Vận tốc của vật đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: Vận tốc của vật tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = -t^2 + 6t + 7$.

Khi đó ta có $v(t) = -(t-3)^2 + 16 \leq 16$ suy ra hàm số $v(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 16 khi và chỉ khi $t-3=0 \Leftrightarrow t=3$. Vậy vận tốc của vật đạt giá trị lớn nhất bằng 16 tại $t=3$.

-----HẾT-----