

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ nhất

**Bài 1 (5,0 điểm).** Tìm tất cả các số thực  $a, b$  để tồn tại hàm  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  khác hằng và thỏa mãn

$$f(ax^3 + y^2) = f(by^3 + x^2), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

**Bài 2 (5,0 điểm).** Cho số nguyên dương  $n$ . Tìm tất cả các đa thức  $P(x) \in \mathbb{R}[x]$  khác hằng, chỉ có nghiệm thực và thỏa mãn đẳng thức sau với mọi  $x \in \mathbb{R}$  :

$$16^n P\left(\frac{x^3 + 3x}{4}\right) = (x^4 + 7x^2 + 16)^n P(x).$$

**Bài 3 (5,0 điểm).** Có 30 học sinh tham dự một khóa học gồm 100 tiết. Kết thúc khóa học, những học sinh đi học ít hơn 56 tiết sẽ không được dự thi cuối khóa. Biết rằng trong mỗi tiết học đều có nhiều hơn nửa số học sinh vắng mặt.

a) Chứng minh rằng có ít nhất một học sinh không được dự thi cuối khóa.

b) Tìm số nguyên  $N$  lớn nhất sao cho chắc chắn có ít nhất  $N$  học sinh không được dự thi cuối khóa.

**Bài 4 (5,0 điểm).** a) Giả sử  $a$  là một số nguyên dương và  $p$  là một số nguyên tố. Chứng minh rằng:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2} \Leftrightarrow a^{(p-1)^2} \equiv 1 \pmod{p^2}.$$

b) Tìm tất cả các số nguyên dương  $x, y$  và số nguyên tố  $p$  thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

$$i) 5^{(p-1)^2} - 1 \text{ không chia hết cho } p^2; \quad ii) p^x + 5 = y^p.$$

----- **Hết** -----

**Ghi chú:**

➤ Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay!

➤ Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm!

Họ và tên thí sinh: ..... Số báo danh: .....

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ hai

**Bài 5 (6,0 điểm).** Tìm số thực dương  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức

$$\sqrt{a^3 + ka} + \sqrt{b^3 + kb} + \sqrt{c^3 + kc} \geq \sqrt{3(k+1)(a+b+c)}$$

đúng với mọi bộ ba số thực dương  $(a, b, c)$  thỏa mãn điều kiện  $ab + bc + ca = 3$ .

**Bài 6 (7,0 điểm).** Cho tam giác nhọn  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ , đường kính  $CD$  của  $(O)$  cắt  $AB$  tại  $E$ . Tiếp tuyến tại  $A, B$  của  $(O)$  cắt nhau ở  $T$ ,  $CT$  cắt  $(O)$  tại điểm thứ hai là  $S$ . Gọi  $I$  là tâm của đường tròn  $(CME)$ .

a) Chứng minh rằng các đường thẳng  $CD, TI, SM$  đồng quy.

b) Đường tròn  $(CME)$  cắt  $(O)$  tại điểm thứ hai là  $K$ ,  $MK$  cắt  $CE$  tại  $F$ . Chứng minh rằng ba đường tròn  $(EFM)$ ,  $(DFS)$ ,  $(ABF)$  cùng đi qua một điểm khác  $F$ .

**Bài 7 (7,0 điểm).** Bé An có một bộ cờ gồm 32 quân cờ. An chơi trò chơi đặt lần lượt các quân cờ lên một bàn cờ kích thước  $n \times n$ . Trên bàn cờ, một ô gọi là *hợp lệ* nếu ô đó chưa có quân cờ nào đồng thời tổng số quân cờ đang có trên  $2n - 2$  ô cùng hàng hoặc cùng cột với ô đó là một số chẵn. Mỗi bước An đặt một quân cờ vào một ô hợp lệ.

a) Xét  $n = 8$  và bàn cờ được tô trắng đen như bàn cờ vua tiêu chuẩn. Chứng minh rằng An có thể đặt hết 32 quân cờ vào 32 ô trắng của bàn cờ.

b) Với  $n = 8$ , chứng minh rằng nếu với mỗi bước đặt quân cờ An chọn ngẫu nhiên một ô hợp lệ thì An luôn đặt được toàn bộ 32 quân cờ lên bàn cờ.

c) Với  $n = 7$ , hỏi nếu với mỗi bước đặt quân cờ An chọn ngẫu nhiên một ô hợp lệ thì có còn đảm bảo luôn đặt được toàn bộ 32 quân cờ lên bàn cờ hay không? Vì sao?

----- Hết -----

**Ghi chú:** ➤ Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay!

➤ Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm!

Họ và tên thí sinh: ..... Số báo danh: .....

## CHỌN ĐTQG ĐẠI HỌC VINH 2026 - NGÀY 1

**Bài toán 0.1.** (Lim Olympic - Đại học Vinh TST - P1)

Tìm tất cả các số thực  $a, b$  để tồn tại hàm  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  khác hằng và thỏa mãn

$$f(ax^3 + y^2) = f(by^3 + x^2), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

 **Lời giải.**

Trước hết, nếu  $a = b = 0$  thì điều kiện trở thành  $f(y^2) = f(x^2), \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

Để ý hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  khác hằng sau thỏa mãn:  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases}$

Vậy  $(a, b) = (0, 0)$  thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Ta chứng minh mọi trường hợp còn lại đều buộc  $f$  là hàm hằng.

Nếu  $a = 0$  và  $b \neq 0$  thì  $f(y^2) = f(by^3 + x^2), \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

Thay  $y = 0$  cho ta  $f(x^2) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$  hay  $f(x) = 0$  với mọi  $x \geq 0$ .

Do đó  $f(by^3 + x^2) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ , thay  $x = 0$  thì  $f(by^3) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$ , và vì  $b \neq 0$  nên  $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Cuối cùng, giả sử  $ab \neq 0$ . Lấy  $u, v \in \mathbb{R}$  bất kì, ta sẽ chứng minh hệ phương trình sau có nghiệm  $(x, y)$ :

$$\begin{cases} ax^3 + y^2 = u \\ by^3 + x^2 = v \end{cases}$$

Ta có  $x = \sqrt[3]{\frac{u - y^2}{a}}$ , nên  $by^3 + \sqrt[3]{\frac{(u - y^2)^2}{a^2}} = v$ .

Xét hàm  $g(t) = bt^3 + \sqrt[3]{\frac{(u - t^2)^2}{a^2}}$  trên  $\mathbb{R}$ , ta sẽ chứng minh  $g$  là toàn ánh trên  $\mathbb{R}$ .

Để ý  $g$  là hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ , và khi  $x \rightarrow +\infty$  thì  $g$  cùng dấu với  $b$ , và khi  $x \rightarrow -\infty$  thì  $g$  ngược dấu với  $b$ , do đó theo định lý giá trị trung gian suy ra được  $g$  là toàn ánh trên  $\mathbb{R}$ .

Vì vậy phương trình  $g(y) = v$  luôn có nghiệm  $y \in \mathbb{R}$ , do đó hệ phương trình trên có nghiệm  $(x, y)$ .

Từ đó ta suy ra được  $f(u) = f(v)$  với mọi  $u, v \in \mathbb{R}$  nên  $f$  là hàm hằng.

Vậy tồn tại duy nhất cặp số thực  $(a, b) = (0, 0)$  để tồn tại hàm  $f$  khác hằng.

**Bài toán 0.2.** (Lim Olympic - Đại học Vinh TST - P2)

Cho số nguyên dương  $n$ . Tìm tất cả các đa thức  $P(x) \in \mathbb{R}[x]$  khác hằng, chỉ có nghiệm thực và thỏa mãn đẳng thức sau với mọi  $x \in \mathbb{R}$ :

$$16^n P\left(\frac{x^3 + 3x}{4}\right) = (x^4 + 7x^2 + 16)^n P(x).$$

 **Lời giải.**

**Cách 1.** Gọi  $m = \deg P \geq 1$  và  $c$  là hệ số cao nhất của  $P$ .

So sánh bậc hai vế của đẳng thức, ta được  $3m = m + 4n$  nên  $m = 2n$ .

Ta có  $x^4 + 7x^2 + 16 > 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Do đó từ đề bài ta có được:

$$P(x) = 0 \iff P\left(\frac{x^3 + 3x}{4}\right) = 0.$$

Đặt  $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{4}$  trên  $\mathbb{R}$ . Lấy một nghiệm thực  $r$  của  $P$ . Nếu  $f(r) > r$  thì, do  $f$  đồng biến nên

$$r < f(r) < f(f(r)) < \dots,$$

hay  $P$  có vô hạn nghiệm, vô lý. Tương tự, nếu  $f(r) < r$  cũng có điều vô lý, do đó  $f(r) = r$ . Ta có

$$\frac{r^3 + 3r}{4} = r \iff r(r^2 - 1) = 0,$$

nên mọi nghiệm của  $P$  đều thuộc  $\{-1, 0, 1\}$ .

Vì  $P$  chỉ có nghiệm thực và có bậc  $2n$ , tồn tại các số nguyên không âm  $\alpha, \beta, \gamma$  với  $\alpha + \beta + \gamma = 2n$  sao cho

$$P(x) = cx^\alpha(x-1)^\beta(x+1)^\gamma, \quad c \neq 0.$$

Thay vào đẳng thức ban đầu để suy ra được:

$$(x^2 + 3)^\alpha(x^2 + x + 4)^\beta(x^2 - x + 4)^\gamma = (x^4 + 7x^2 + 16)^n, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mà  $x^4 + 7x^2 + 16 = (x^2 + x + 4)(x^2 - x + 4)$ , và  $x^2 + 3, x^2 + x + 4, x^2 - x + 4$  là các đa thức đôi một bất khả quy trên  $\mathbb{R}[x]$ . Do đó  $\alpha = 0$  và  $\beta = \gamma = n$ . Vậy  $P(x) = c(x^2 - 1)^n$  với  $c \neq 0$ .

Thử lại để thấy được tất cả các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là  $P(x) \equiv c(x^2 - 1)^n$  với  $c \neq 0$ .

**Cách 2.** (không sử dụng điều kiện chỉ có nghiệm thực)

Đặt  $\deg P = k$ . Vì  $P$  khác hằng nên  $k > 0$ . So sánh bậc hai về suy ra  $k = 2n$ .

Gọi  $C \neq 0$  là hệ số cao nhất của  $P$  và đặt  $P(x) = C(x^2 - 1)^n + Q(x)$ .

Để ý  $Q \equiv 0$  thỏa mãn, xét  $Q \not\equiv 0$ , khi đó  $\deg Q = d < 2n$ .

Thay vào đẳng thức ban đầu suy ra  $16^n Q \left( \frac{x^3 + 3x}{4} \right) = (x^4 + 7x^2 + 16)^n Q(x)$ .

So sánh bậc hai về của đẳng thức trên, ta có  $3d = 4n + d$ , suy ra  $d = 2n$ , mâu thuẫn với  $\deg Q < 2n$ .

Thử lại suy ra tất cả các đa thức cần tìm là  $P(x) \equiv C(x^2 - 1)^n$  với  $C \neq 0$ .

### Bài toán 0.3. (Lim Olympic - Đại học Vinh TST - P3)

Có 30 học sinh tham dự một khóa học gồm 100 tiết. Kết thúc khóa học, những học sinh đi học ít hơn 56 tiết sẽ không được dự thi cuối khóa. Biết rằng trong mỗi tiết học đều có nhiều hơn nửa số học sinh vắng mặt.

- 1 Chứng minh rằng có ít nhất một học sinh không được dự thi cuối khóa.
- 2 Tìm số nguyên  $N$  lớn nhất sao cho chắc chắn có ít nhất  $N$  học sinh không được dự thi cuối khóa.

 **Lời giải.**

Trong mỗi tiết có nhiều hơn 15 học sinh vắng mặt, nên có nhiều nhất 14 học sinh đi học. Do đó tổng số lượt đi học của cả 30 học sinh trong 100 tiết không vượt quá

$$100 \cdot 14 = 1400.$$

Gọi  $t$  là số học sinh được dự thi cuối khóa. Mỗi học sinh trong số đó đi học ít nhất 56 tiết, nên

$$56t \leq 1400.$$

Suy ra  $t \leq 25$ . Vì có 30 học sinh nên có ít nhất  $30 - 25 = 5$  học sinh không được dự thi. Do đó  $N \geq 5$ .

Ta dựng một cách điểm danh có đúng 5 học sinh không được dự thi.

Đánh số 25 học sinh đầu tiên bởi các số  $0, 1, 2, \dots, 24$ . Chia 100 tiết thành 4 vòng, mỗi vòng gồm 25 tiết.

Trong tiết thứ  $j$  của mỗi vòng, cho đúng 14 học sinh

$$j, j+1, \dots, j+13 \pmod{25}$$

đi học, 5 học sinh còn lại luôn vắng mặt. Trong mỗi vòng, mỗi học sinh thuộc nhóm đầu đi học đúng 14 tiết, nên sau 4 vòng mỗi em đi học đúng 56 tiết và được dự thi. Chỉ có 5 học sinh cuối không được dự thi.

Vậy  $N = 5$

**Bài toán 0.4.** (Lim Olympic - Đại học Vinh TST - P4)

- ① Giả sử  $a$  là một số nguyên dương và  $p$  là một số nguyên tố. Chứng minh rằng:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2} \Leftrightarrow a^{(p-1)^2} \equiv 1 \pmod{p^2}.$$

- ② Tìm tất cả các số nguyên dương  $x, y$  và số nguyên tố  $p$  thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

- ◇  $5^{(p-1)^2} - 1$  không chia hết cho  $p^2$ ;
- ◇  $p^x + 5 = y^p$ .

 **Lời giải.**

- ① Chiều thuận là hiển nhiên, giờ ta chứng minh chiều đảo. Giả sử  $a^{(p-1)^2} \equiv 1 \pmod{p^2}$ .

Khi đó  $p \nmid a$ . Vì  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  nên tồn tại số nguyên  $k$  sao cho  $a^{p-1} = 1 + kp$ .

$$1 \equiv a^{(p-1)^2} = (1 + kp)^{p-1} \equiv 1 + kp(p-1) \pmod{p^2}.$$

Vì  $(p, p-1) = 1$ , suy ra  $p \mid k$ . Do đó  $a^{p-1} = 1 + kp \equiv 1 \pmod{p^2}$ .

- ② Theo ý 1, điều kiện đầu tương đương với  $5^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$ .

Ta có  $p = 2$  không thỏa mãn, còn  $p = 5$  thì  $y^5 = 5^x + 5$ , để ý  $5v_5(y) = v_5(5^x + 5) = 1$  nên vô lý.

Bây giờ giả sử  $p$  là số nguyên tố lẻ và  $p \neq 5$ . Theo định lý Fermat nhỏ ta có  $v_p(5^{p-1} - 1) = 1$ .

Từ  $p^x + 5 = y^p$ , xét modulo  $p$  suy ra  $y \equiv 5 \pmod{p}$ .

Giả sử  $x \geq 2$ . Ta có  $y^p - 5^p = p^x - 5(5^{p-1} - 1)$ . Khi đó ta có được:

$$1 = v_p(p^x - 5(5^{p-1} - 1)) = v_p(y^p - 5^p) = v_p(y - 5) + v_p(p) \geq 2,$$

mâu thuẫn. Vậy  $x = 1$ . Khi đó  $y^p = p + 5$ .

Nếu  $p = 3$  thì  $y^3 = 8$ , do đó  $y = 2$ . Nếu  $p \geq 7$  thì  $y \geq 2$  và  $y^p \geq 2^p > p + 5$ , vô lý.

Thử lại để thấy được nghiệm duy nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài là  $(x, y, z) = (1, 2, 3)$

**Bài toán 0.5.** (Lim Olympic - Đại học Vinh TST - P5)

Tìm số thực dương  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức

$$\sqrt{a^3 + ka} + \sqrt{b^3 + kb} + \sqrt{c^3 + kc} \geq \sqrt{3(k+1)(a+b+c)}$$

đúng với mọi bộ ba số thực dương  $(a, b, c)$  thỏa mãn điều kiện  $ab + bc + ca = 3$ .

**Lời giải.**

Với  $b = c = t$  thì  $a = \frac{3-t^2}{2t}$  với  $0 < t < \sqrt{3}$ .

Thay vào bất đẳng thức ta được  $\sqrt{a^3 + ka} + 2\sqrt{t^3 + kt} \geq \sqrt{3(k+1)(a+2t)}$ .

Cho  $t \rightarrow (\sqrt{3})^-$ , tức  $a \rightarrow 0^+$  thì

$$2 \cdot 3^{1/4} \sqrt{k+3} \geq 3^{1/4} \sqrt{6(k+1)} \iff 2\sqrt{k+3} \geq \sqrt{6(k+1)} \iff k \leq 3$$

Ta sẽ chứng minh  $k = 3$  thỏa mãn, tức với mọi  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $ab + bc + ca = 3$  thì

$$\sqrt{a^3 + 3a} + \sqrt{b^3 + 3b} + \sqrt{c^3 + 3c} \geq \sqrt{12(a+b+c)}$$

Ta có  $\left( \sum_{cyc} \sqrt{a^3 + 3a} \right)^2 = \sum_{cyc} (a^3 + 3a) + 2 \sum_{cyc} \sqrt{(a^3 + 3a)(b^3 + 3b)}$ .

Đặt  $p = a + b + c$ ,  $q = ab + bc + ca = 3$ ,  $r = abc$  thì

$$\sum_{cyc} (a^3 + 3a) = (a^3 + b^3 + c^3) + 3(a + b + c) = (p^3 - 3pq + 3r) + 3p = p^3 - 6p + 3r$$

Hơn thế nữa

$$\sqrt{(a^3 + 3a)(b^3 + 3b)} = \sqrt{a(a+b)(a+c) \cdot b(a+b)(b+c)} = (a+b) \sqrt{ab(a+c)(b+c)} \geq (a+b)(ab + c\sqrt{ab})$$

$$\text{Do đó } 2 \sum_{cyc} \sqrt{(a^3 + 3a)(b^3 + 3b)} \geq 2 \sum_{cyc} ab(a+b) + 2 \sum_{cyc} c(a+b)\sqrt{ab}.$$

Để ý thêm  $a + b \geq 2\sqrt{ab} \implies c(a+b)\sqrt{ab} \geq 2abc$  nên

$$2 \sum_{cyc} \sqrt{(a^3 + 3a)(b^3 + 3b)} \geq (6p - 6r) + 12r = 6p + 6r$$

$$\text{Vì vậy } \left( \sum_{cyc} \sqrt{a^3 + 3a} \right)^2 \geq (p^3 - 6p + 3r) + (6p + 6r) = p^3 + 9r.$$

Theo bất đẳng thức Schur ta có:

$$p^3 - 4pq + 9r \geq 0 \implies p^3 - 12p + 9r \geq 0 \implies p^3 + 9r \geq 12p = 12(a+b+c)$$

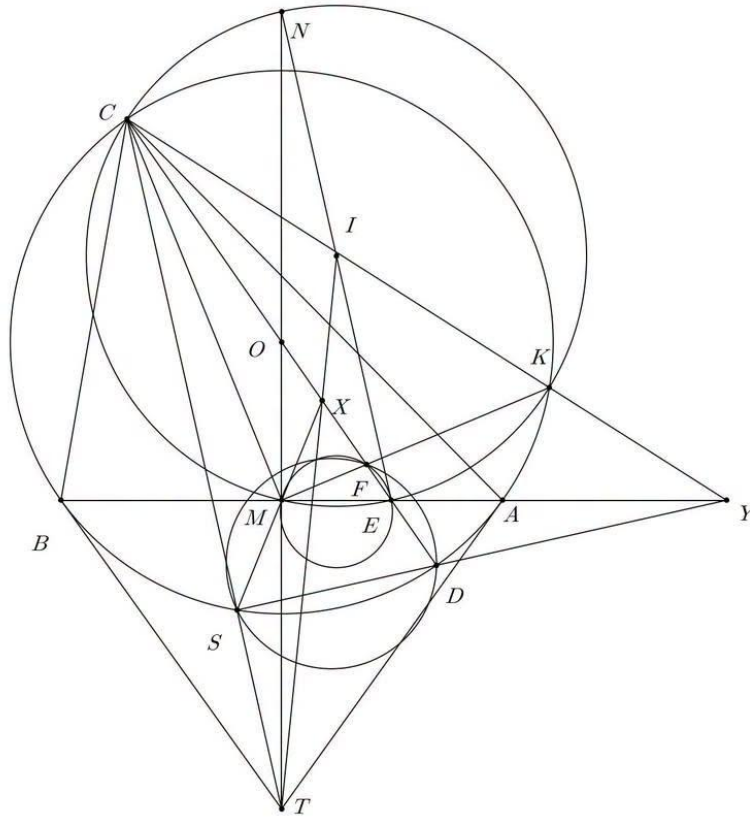
Vì vậy  $\sqrt{a^3 + 3a} + \sqrt{b^3 + 3b} + \sqrt{c^3 + 3c} \geq \sqrt{12(a+b+c)}$  nên  $k = 3$  thỏa mãn.

Vậy giá trị lớn nhất của  $k$  bằng 3.

**Bài toán 0.6.** (Lim Olympic - Đại học Vinh TST - P6)

Cho tam giác nhọn  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ , đường kính  $CD$  của  $(O)$  cắt  $AB$  tại  $E$ . Tiếp tuyến tại  $A, B$  của  $(O)$  cắt nhau ở  $T$ ,  $CT$  cắt  $(O)$  tại điểm thứ hai là  $S$ . Gọi  $I$  là tâm của đường tròn  $(CME)$ .

- ① Chứng minh rằng các đường thẳng  $CD, TI, SM$  đồng quy.
- ② Đường tròn  $(CME)$  cắt  $(O)$  tại điểm thứ hai là  $K$ ,  $MK$  cắt  $CE$  tại  $F$ . Chứng minh rằng ba đường tròn  $(EFM), (DFS), (ABF)$  cùng đi qua một điểm khác  $F$ .



**Lời giải.**

- ① Kẻ đường kính  $EN$  của  $(I) \Rightarrow T, M, N$  thẳng hàng.

Ta có  $OM \cdot OT = OC^2 \Rightarrow \angle OTA = \angle OCM = \angle MNE \Rightarrow EN \parallel CT$ .

Gọi  $MS$  cắt  $OC$  tại  $X$ , theo hàng điểm tiếp tuyến cát tuyến ta có  $-1 = M(BTSC) = M(EOXC) = T(EOXC) = T(ENXC)$ , mà  $TC \parallel EN \Rightarrow TX$  chia đôi  $EN \Rightarrow T, X, I$  thẳng hàng.

- ② Do tứ giác  $OMSC$  nội tiếp nên  $\angle SME = 90^\circ + \angle SMT = 90^\circ + \angle OCS = 180^\circ - \angle CDS \Rightarrow MEDS$  nội tiếp. Gọi  $SD$  cắt  $AB$  tại  $Y \Rightarrow YA \cdot YB = YS \cdot YD = YM \cdot YE \Rightarrow Y$  nằm trên trục đẳng phương của  $(EFM), (DFS), (ABF)$ . Mà 3 đường tròn này cùng đi qua  $F$  nên 3 đường tròn này đồng trục, điều phải chứng minh.

**Bài toán 0.7.** (Lim Olympic - Đại học Vinh TST - P7)

Bé An có một bộ cờ gồm 32 quân cờ. An chơi trò chơi đặt lần lượt các quân cờ lên một bàn cờ kích thước  $n \times n$ . Trên bàn cờ, một ô gọi là hợp lệ nếu ô đó chưa có quân cờ nào đồng thời tổng số quân cờ đang có trên  $2n - 2$  ô cùng hàng hoặc cùng cột với ô đó là một số chẵn. Mỗi bước An đặt một quân cờ vào một ô hợp lệ.

- ① Xét  $n = 8$  và bàn cờ được tô trắng đen như bàn cờ vua tiêu chuẩn. Chứng minh rằng An có thể đặt hết 32 quân cờ vào 32 ô trắng của bàn cờ.
- ② Với  $n = 8$ , chứng minh rằng nếu với mỗi bước đặt quân cờ An chọn ngẫu nhiên một ô hợp lệ thì An luôn đặt được toàn bộ 32 quân cờ lên bàn cờ.
- ③ Với  $n = 7$ , hỏi nếu với mỗi bước đặt quân cờ An chọn ngẫu nhiên một ô hợp lệ thì có còn đảm bảo luôn đặt được toàn bộ 32 quân cờ lên bàn cờ hay không? Vì sao?

**Lời giải.**

Gọi  $r_i$  là số quân cờ trên hàng  $i$  và  $c_j$  là số quân cờ trên cột  $j$ . Vì ô  $(i, j)$  đang trống nên tổng số quân cờ trên các ô cùng hàng hoặc cùng cột với nó bằng  $r_i + c_j$ . Do đó

$$(i, j) \text{ hợp lệ} \iff r_i + c_j \equiv 0 \pmod{2},$$

Gọi  $u$  là số hàng chứa lẻ quân và  $v$  là số cột chứa lẻ quân. Ban đầu  $u = v = 0$ . Mỗi nước đi hợp lệ có đúng một trong hai dạng:

- ◇ Đặt tại giao của một hàng chẵn và một cột chẵn, khi đó  $u, v$  cùng tăng 1;
- ◇ Đặt tại giao của một hàng lẻ và một cột lẻ, khi đó  $u, v$  cùng giảm 1.

Vì thế, trong suốt trò chơi ta luôn có bất biến là  $u = v$ .

- ① Gọi  $M_0$  là các ô màu xanh nước biển,  $M_1$  là các ô màu xanh lá cây,  $M_2$  là các ô màu cam,  $M_3$  là các ô màu đỏ. An lần lượt đặt hết các quân trong  $M_0, M_1, M_2, M_3$  và để ý mọi bước đều hợp lệ.

|    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  |    | 9  |    | 17 |    | 25 |    |
|    | 2  |    | 10 |    | 18 |    | 26 |
| 27 |    | 3  |    | 11 |    | 19 |    |
|    | 28 |    | 4  |    | 12 |    | 20 |
| 21 |    | 29 |    | 5  |    | 13 |    |
|    | 22 |    | 30 |    | 6  |    | 14 |
| 15 |    | 23 |    | 31 |    | 7  |    |
|    | 16 |    | 24 |    | 32 |    | 8  |

- ② Giả sử An bị kẹt sau khi đã đặt  $m$  quân. Khi đó không còn ô trống hợp lệ. Theo bất biến, có cùng  $u$  hàng lẻ và  $u$  cột lẻ. Do không còn ô hợp lệ nên mọi giao điểm của hai cột với hàng cùng tính chẵn lẻ đều đã có quân. Vì vậy

$$m \geq u^2 + (8 - u)^2 = 2(u - 4)^2 + 32 \geq 32.$$

Suy ra trước khi đặt đủ 32 quân, An không thể bị kẹt, ta có điều phải chứng minh.

- 3 Câu trả lời là **không**. Ban đầu An điền các ô như sau:

|   |   |   |    |
|---|---|---|----|
| 1 | 4 | 7 |    |
| 8 | 2 | 5 |    |
| 6 | 9 | 3 |    |
|   |   |   | 10 |
|   |   |   | 14 |
|   |   |   | 18 |
|   |   |   | 22 |
|   |   |   | 23 |
|   |   |   | 11 |
|   |   |   | 15 |
|   |   |   | 19 |
|   |   |   | 20 |
|   |   |   | 24 |
|   |   |   | 12 |
|   |   |   | 16 |
|   |   |   | 17 |
|   |   |   | 21 |
|   |   |   | 25 |
|   |   |   | 13 |

Sau khi điền xong, An đã đặt 25 quân. Ba hàng và ba cột của khối  $3 \times 3$  đều lẻ; bốn hàng và bốn cột còn lại đều chẵn. Vì thế mọi ô trống đều nối một hàng lẻ với một cột chẵn hoặc ngược lại, nên không hợp lệ. An bị kẹt và còn thừa 7 quân; do đó câu trả lời là **không**.

#### Nhận xét.

Ngoài ra với bảng  $n \times n$  tổng quát, An có thể luôn đặt được tối đa  $\frac{n^2 + 1}{2}$  quân với  $n$  lẻ, và  $\frac{n^2 + 2n}{2}$  quân với  $n$  chẵn. Bạn đọc có thể thử sức để chỉ ra điều này.