

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ nhất

Bài 1 (6,0 điểm). Cho tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường tròn (T) thay đổi đi qua B, C cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại điểm thứ hai là D, E . Gọi I là giao điểm của BE và CD , F là giao điểm của DE và BC , K là giao điểm thứ hai của AF và (O) , J là trung điểm AF . Đường thẳng IJ cắt (T) tại M, N (M nằm giữa J và N). Tiếp tuyến của (T) tại N cắt AF tại S .

a) Chứng minh rằng đường tròn (SKI) đi qua trung điểm của MN .

b) Gọi (ω) là đường tròn đi qua F, M và tiếp xúc với (T) . Chứng minh rằng (ω) luôn đi qua một điểm cố định khi (T) thay đổi.

Bài 2 (7,0 điểm). Trên bàn cờ kích thước 2026×2026 được chia thành các ô vuông, có một quân mã. Cho biết rằng quân mã này có thể nhảy giữa hai ô nằm ở hai góc đối diện nhau trên các hình chữ nhật con kích thước 3×2 hoặc 2×3 của bàn cờ.

a) Giả sử quân mã xuất phát từ một ô nào đó, nhảy 2025 bước qua 2025 ô phân biệt của bàn cờ. Chứng minh rằng quân mã không thể dừng lại ở ô có đúng một đỉnh chung với ô mà nó xuất phát.

b) Tính số cách mà quân mã có thể nhảy từ ô góc dưới bên trái lên ô góc trên bên phải, mỗi bước chỉ đi theo hướng sang phải và lên trên.

Bài 3 (7,0 điểm). Ký hiệu $\{a\}$ là phần lẻ của số thực a .

a) Tìm số thực $c > 0$ nhỏ nhất sao cho $\{x\} + \{y\} < c + xy$ với mọi số thực $x, y > 0$.

b) Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$\{x\} + \{y\} + \{z\} < \frac{5}{2}.$$

----- Hết -----

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ hai

Bài 4 (6,0 điểm). Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

- i) $f(f(x) + y) = 3x + f(y)$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$;
ii) Với mọi $x \in \mathbb{R}^+$ tồn tại $y \in \mathbb{R}^+$ sao cho $f(y) = x$.

Bài 5 (7,0 điểm). Với mỗi số nguyên dương n , đặt $A_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$.

- a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương k , tồn tại vô hạn n để $A_n : 5^k$.
b) Tìm tất cả các số nguyên dương n để A_n có tận cùng gồm đúng hai chữ số 0.

Bài 6 (7,0 điểm). Cho hai đường tròn (ω) và (ω') có bán kính khác nhau, cắt nhau tại A và B . Đường tròn (A, AB) cắt (ω) , (ω') tại điểm thứ hai lần lượt là E , F . Tiếp tuyến của (A, AB) tại B cắt (ω) , (ω') lần lượt tại M , N (khác B). Giả sử tia ME và tia NF cắt nhau tại I , H là trực tâm của tam giác BEF .

- a) Chứng minh rằng đường thẳng AH đi qua tâm đường tròn (MNI) .
b) Tiếp tuyến tại E của (ω) cắt (A, AB) tại điểm thứ hai là P , tiếp tuyến tại F của (ω') cắt (A, AB) tại điểm thứ hai là Q . Gọi J là giao điểm của EF và PQ , K là giao điểm của PE và QF , S là giao điểm của IK và MN . Chứng minh rằng HS vuông góc với BJ .

----- Hết -----