

CHUYÊN ĐỀ 2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BPT BẬC NHẤT 2 ẨN

VẤN ĐỀ 1: BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT 2 ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khái niệm bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là bất phương trình có một trong các dạng

$ax + by + c < 0; ax + by + c > 0; ax + by + c \leq 0; ax + by + c \geq 0$, trong đó a, b, c là những số cho trước; a, b không đồng thời bằng 0 và x, y là các ẩn.

2. Nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Xét bất phương trình $ax + by + c < 0$. Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ thoả mãn $ax_0 + by_0 + c < 0$ gọi là một **nghiệm** của bất phương trình đã cho.

Chú ý: Nghiệm của các bất phương trình $ax + by + c > 0, ax + by + c \leq 0, ax + by + c \geq 0$ được định nghĩa tương tự.

3. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , tập hợp các điểm $(x_0; y_0)$ sao cho $ax_0 + by_0 + c < 0$ được gọi là **miền nghiệm** của bất phương trình $ax + by + c < 0$.

- Để biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy , ta làm như sau:

+ Bước 1: Trên mặt phẳng Oxy , vẽ đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$.

+ Bước 2: Lấy một điểm $(x_0; y_0)$ không thuộc Δ . Tính $ax_0 + by_0 + c$.

+ Bước 3: Kết luận

- Nếu $ax_0 + by_0 + c < 0$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng (không kể bờ Δ) chứa điểm $(x_0; y_0)$.

- Nếu $ax_0 + by_0 + c > 0$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng (không kể bờ Δ) không chứa điểm $(x_0; y_0)$.

Chú ý: Đối với các bất phương trình bậc nhất hai ẩn dạng $ax + by + c \leq 0$ (hoặc $ax + by + c \geq 0$) thì miền nghiệm là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$ (hoặc $ax + by + c > 0$) kể cả bờ.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Một gian hàng trưng bày bàn và ghế rộng $60m^2$. Diện tích để kê một chiếc ghế là $0,5m^2$, một chiếc bàn là $1,2m^2$. Gọi x là số chiếc ghế, y là số chiếc bàn được kê.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y cho phần mặt sàn để kê bàn và ghế, biết diện tích mặt sàn dành cho lưu thông tối thiểu là $12m^2$.

b) Chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình trên.

Câu 2 : Trong 1 lạng (100 g thịt bò chứa khoảng 26 g protein, 1 lạng cá rô phi chứa khoảng 20 g protein. Trung bình trong một ngày, một người phụ nữ cần tối thiểu 46 g protein. (Nguồn: <https://vinmec.com> và <https://thanhnien.vn>) Gọi x, y lần lượt là số lạng thịt bò và số lạng cá rô phi mà một người phụ nữ nên ăn trong một ngày. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng protein cần thiết cho một người phụ nữ trong một ngày và chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình đó.

Câu 3: Hà, Châu, Liên và Ngân cùng đi mua trà sữa. Cả bốn bạn có tất cả 185 nghìn đồng. Bốn bạn mua 4 cốc trà sữa với giá tiền 35 nghìn đồng một cốc. Các bạn gọi thêm trân châu cho vào trà sữa. Một phần

trân châu đen có giá 5 nghìn đồng, một phần trân châu trắng có giá 10 nghìn đồng. Gọi x, y lần lượt là số phần trân châu đen, trân châu trắng mà bốn bạn định mua thêm.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để thể hiện số tiền các bạn có đủ khả năng chi trả cho phần trân châu đen, trắng.

b) Chỉ ra một nghiệm nguyên của bất phương trình đó.

Câu 4: Anh An là nhân viên bán hàng tại siêu thị điện máy. Anh An kiếm được một khoản hoa hồng 600 nghìn đồng cho mỗi máy giặt và 1,3 triệu đồng cho mỗi tủ lạnh mà anh ấy bán được. Hỏi để nhận được từ 10 triệu đồng trở lên tiền hoa hồng thì anh An cần bán bao nhiêu máy giặt và tủ lạnh?

Câu 5: Ông An muốn thuê một chiếc ô tô (có lái xe) trong một tuần. Giá thuê xe được cho như bảng sau:

	Phi cố định (nghìn đồng/ngày)	Phí tính theo quãng đường di chuyển (nghìn đồng/kilômét)
Từ thứ Hai đến thứ Sáu	900	8
Thứ Bảy và Chủ nhật	1500	10

a) Gọi x và y lần lượt là số kilômét ông An đi trong các ngày từ thứ Hai đến thứ Sáu và trong hai ngày cuối tuần. Viết bất phương trình biểu thị mối liên hệ giữa x và y sao cho tổng số tiền ông An phải trả không quá 14 triệu đồng.

b) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình ở câu a trên mặt phẳng tọa độ.

Câu 6: Một cửa hàng bán lẻ bán hai loại hạt cà phê. Loại thứ nhất giá 140 nghìn đồng/kg và loại thứ hai giá 180 nghìn đồng/kg. Cửa hàng trộn x kg loại thứ nhất và y kg loại thứ hai sao cho hạt cà phê đã trộn có giá không quá 170 nghìn đồng/kg.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y thỏa mãn điều kiện đề bài.

b) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình tìm được ở câu a trên mặt phẳng tọa độ.

Câu 7: Bạn Hoa để dành được 420 nghìn đồng. Trong một đợt ủng hộ trẻ em khuyết tật, Hoa đã ủng hộ x tờ tiền loại 10 nghìn đồng, y tờ tiền loại 20 nghìn đồng.

a) Tính tổng số tiền bạn Hoa đã ủng hộ theo x, y .

b) Giải thích tại sao ta lại có bất phương trình $10x + 20y \leq 420$.

Câu 8: Cho biết 226 g thịt bò chứa khoảng 59 g protein. Một quả trứng nặng 46 g có chứa khoảng 6 g protein (nguồn: Bộ Nông nghiệp Hoa Kỳ). Giả sử có một người mỗi ngày cần không quá 60 g protein. Gọi số gam thịt bò và số gam trứng mà người đó ăn trong một ngày lần lượt là x, y .

a) Lập bất phương trình theo x, y diễn tả giới hạn về lượng protein mà người đó cần mỗi ngày.

b) Dùng bất phương trình ở câu a) để trả lời hai câu hỏi sau:

- Nếu người đó ăn 150 g thịt bò và 2 quả trứng, mỗi quả 46 g, trong một ngày thì có phù hợp không?
- Nếu người đó ăn 200 g thịt bò và 2 quả trứng, mỗi quả 46 g, trong một ngày thì có phù hợp không?

Câu 9: Bạn Cúc muốn pha hai loại nước cam. Để pha một lít nước cam loại I cần 30 g bột cam, còn một lít nước cam loại II cần 20 g bột cam. Gọi x và y lần lượt là số lít nước cam loại I và II pha chế được. Biết rằng Cúc chỉ có thể dùng không quá 100 gam bột cam. Hãy lập các bất phương trình mô tả lít nước cam loại I và II mà bạn Cúc có thể pha chế được và biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình đó trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy.

Câu 10 : Bạn Nga muốn pha hai loại nước rửa xe. Để pha một lít loại I cần $600ml$ dung dịch chất tẩy rửa, còn loại II chỉ cần $400ml$. Gọi x và y lần lượt là số lít nước rửa xe loại I và II pha chế được và biết rằng Nga chỉ còn $2400ml$ chất tẩy rửa, hãy lập các bất phương trình mô tả số lít nước rửa xe loại I và II mà bạn Nga có thể pha chế được và biểu diễn miền nghiệm của từng bất phương trình đó trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

Câu 11 : Nhu cầu canxi tối thiểu cho một người đang độ tuổi trưởng thành trong một ngày là $1300mg$. trong 1 lạng đậu nành có $165mg$ canxi, 1 lạng thịt có $15mg$ canxi.

(Nguồn: <https://hongngochospital.vn>)

Gọi x, y lần lượt là số lạng đậu nành và số lạng thịt mà một người đang độ tuổi trưởng thành ăn trong một ngày

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng canxi cần thiết trong một ngày của một người trong độ tuổi trưởng thành.

b) Chỉ ra một nghiệm $(x_0; y_0)$ với $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ của bất phương trình đó.

Câu 12: Bạn Danh để dành được 900 nghìn đồng. Trong một đợt ủng hộ trẻ em mồ côi, Danh đã lấy ra x tờ tiền loại 50 nghìn đồng, y tờ tiền loại 100 nghìn đồng để trao tặng. Một bất phương trình mô tả điều kiện ràng buộc đối với x, y là:

A. $50x + 100y \leq 900$;

B. $50x + 100y \geq 900$

C. $100x + 50y \leq 900$;

D. $x + y = 900$.

VẤN ĐỀ 2: HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khái niệm hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y . Mỗi nghiệm chung của tất cả các bất phương trình đó được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm $(x_0; y_0)$ có tọa độ là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn được gọi là miền nghiệm của hệ bất phương trình đó.

2. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Để **biểu diễn miền nghiệm** của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng tọa độ Oxy , ta thực hiện như sau:

- Trên cùng mặt phẳng tọa độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình của hệ.
- Phần giao của các miền nghiệm là miền nghiệm của hệ bất phương trình.

Chú ý: Miền mặt phẳng tọa độ bao gồm một đa giác lồi và phần nằm bên trong đa giác đó được gọi là một **miền đa giác**.

3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = ax + by$ trên một miền đa giác

Hệ bất phương trình giúp ta mô tả được nhiều bài toán thực tế để tìm ra cách giải quyết tối ưu, các bài toán này thường được đưa về việc tìm giá trị lớn nhất (GTLN) hoặc giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức $F = ax + by$ trên một miền đa giác.

Ví dụ. Một người dùng ba loại nguyên liệu A, B, C để sản xuất ra hai loại sản phẩm P và Q . Để sản xuất 1kg mỗi loại sản phẩm P hoặc Q phải dùng một số kilôgam nguyên liệu khác nhau. Tổng số kilôgam nguyên liệu mỗi loại mà người đó có và số kilôgam từng loại nguyên liệu cần thiết để sản xuất ra 1kg sản phẩm mỗi loại được cho trong bảng sau:

Loại nguyên liệu	Số kilôgam nguyên liệu đang có	Số kilôgam từng loại nguyên liệu cần để sản xuất 1kg sản phẩm	
		P	Q
A	10	2	2
B	4	0	2
C	12	4	4

Biết 1kg sản phẩm P lãi 3 triệu đồng và 1kg sản phẩm Q lãi 5 triệu đồng. Hãy lập phương án sản xuất hai loại sản phẩm trên sao cho có lãi cao nhất.

Phương pháp giải

Để giải bài toán tìm phương án tối ưu ở trên, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Đặt biến số x, y cho các đối tượng cần tìm.

Đặt x là số kilôgam sản phẩm P và y là số kilôgam sản phẩm Q cần sản xuất.

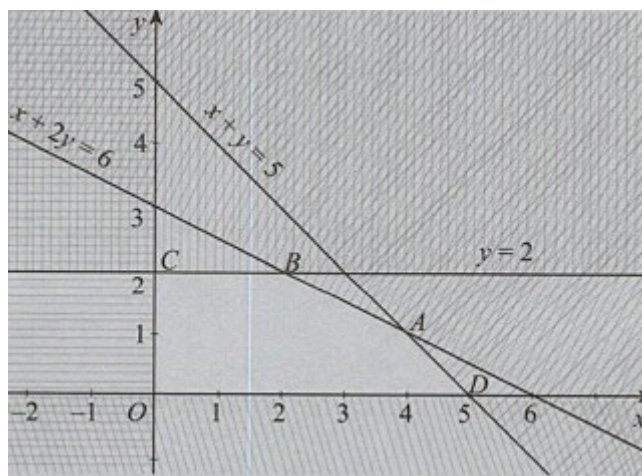
Bước 2. Lập các hệ bất phương trình mô tả các điều kiện ràng buộc.

$$\begin{cases} 2x + 2y \leq 10 \\ 2y \leq 4 \\ 2x + 4y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leq 5 \\ y \leq 2 \\ x + 2y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Bước 3. Xây dựng hàm mục tiêu cho giá trị mà ta muốn đạt giá trị tối ưu.

$F = 3x + 5y$ (Tiền lãi của phương án sản xuất mà ta muốn đạt lớn nhất).

Bước 4. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình (1) trên hệ trục tọa độ Oxy ta được một đa giác. Tìm tọa độ các đỉnh của đa giác.



Miền nghiệm là ngũ giác $OCBAD$, trong đó $O(0;0); C(0;2); B(2;2); A(4;1); D(5;0)$.

Bước 5. Do người ta đã chứng minh được F đạt GTLN hoặc GTNN tại một trong các đỉnh của đa giác nên ta chỉ cần tính các giá trị của hàm mục tiêu F tại các đỉnh của đa giác. Tìm ra đỉnh tại đó F đạt GTLN hoặc GTNN. Toạ độ của đỉnh này là phương án tối ưu cần tìm.

Tính giá trị của F tại các đỉnh:

$$\text{Tại } O(0;0): F = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0;$$

$$\text{Tại } C(0;2): F = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 2 = 10;$$

$$\text{Tại } B(2;2): F = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 16;$$

$$\text{Tại } A(4;1): F = 3 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 17;$$

$$\text{Tại } D(5;0): F = 3 \cdot 5 + 5 \cdot 0 = 15.$$

Tại đỉnh $A(4;1)$, F đạt giá trị lớn nhất là 17.

Bước 6. Nêu kết luận dựa trên ngôn ngữ thực tế của bài toán.

Vậy phương án sản xuất tối ưu là làm ra 4kg sản phẩm P và 1kg sản phẩm Q . Khi đó sẽ có lãi cao nhất là 17 triệu đồng.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Một phân xưởng sản xuất hai kiểu mũ. Thời gian để làm ra một chiếc mũ kiểu thứ nhất nhiều gấp hai lần thời gian làm ra một chiếc mũ kiểu thứ hai. Nếu chỉ sản xuất toàn kiểu mũ thứ hai thì trong 1 giờ phân xưởng làm được 60 chiếc. Phân xưởng làm việc 8 tiếng mỗi ngày và thị trường tiêu thụ tối đa trong một ngày là 200 chiếc mũ kiểu thứ nhất và 240 chiếc mũ kiểu thứ hai. Tiền lãi khi bán một chiếc mũ kiểu thứ nhất là 24 nghìn đồng, một chiếc mũ kiểu thứ hai là 15 nghìn đồng. Tính số lượng mũ kiểu thứ nhất và kiểu thứ hai trong một ngày mà phân xưởng cần sản xuất để tiền lãi thu được là cao nhất.

Câu 2: Một phân xưởng sản xuất hai kiểu mũ. Thời gian để làm ra một chiếc mũ kiểu thứ nhất nhiều gấp hai lần thời gian làm ra một chiếc mũ kiểu thứ hai. Nếu chỉ sản xuất toàn kiểu mũ thứ hai thì trong 1 giờ phân xưởng làm được 60 chiếc. Phân xưởng làm việc 8 tiếng mỗi ngày và thị trường tiêu thụ tối đa trong một ngày là 200 chiếc mũ kiểu thứ nhất và 240 chiếc mũ kiểu thứ hai. Tiền lãi khi bán một chiếc mũ kiểu thứ nhất là 24 nghìn đồng, một chiếc mũ kiểu thứ hai là 15 nghìn đồng. Tính số lượng mũ kiểu thứ nhất và kiểu thứ hai trong một ngày mà phân xưởng cần sản xuất để tiền lãi thu được là cao nhất.

Câu 3: Anh Trung có kế hoạch đầu tư 400 triệu đồng vào hai khoản X và Y . Để đạt được lợi nhuận thì khoản X phải đầu tư ít nhất 100 triệu đồng và số tiền đầu tư cho khoản Y không nhỏ hơn số tiền cho khoản X . Viết hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn để mô tả hai khoản đầu tư đó và biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình vừa tìm được.

Câu 4: Một phân xưởng may áo vest và quần âu để chuẩn bị cho dịp cuối năm. Biết may 1 áo vest hết 2m vải và cần 20 giờ; 1 quần âu hết 1,5m vải và cần 5 giờ. Xí nghiệp được giao sử dụng không quá 900m vải và số giờ công không vượt quá 6000 giờ. Theo khảo sát thị trường, số lượng quần bán ra không nhỏ hơn số lượng áo và không vượt quá 2 lần số lượng áo. Khi xuất ra thị trường, 1 chiếc áo lãi 350 nghìn đồng, 1 chiếc quần lãi 100 nghìn đồng. Phân xưởng cần may bao nhiêu áo vest và quần âu để thu được tiền lãi cao nhất (biết thị trường tiêu thụ luôn đón nhận sản phẩm của xí nghiệp)?

Câu 5: Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kilogram thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipid. Mỗi kilogram thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất là 1,6kg thịt bò và 1,1kg thịt lợn; giá tiền 1kg thịt bò là 250 nghìn đồng; 1kg thịt lợn là 160 nghìn đồng. Giả sử gia đình đó mua x kilogram thịt bò và y kilogram thịt lợn.

a) Viết các bất phương trình biểu thị các điều kiện của bài toán thành một hệ bất phương trình rồi xác định miền nghiệm của hệ đó.

b) Gọi F (nghìn đồng) là số tiền phải trả cho x kilôgam thịt bò và y kilôgam thịt lợn. Hãy biểu diễn F theo x và y .

c) Tìm số kilôgam thịt mỗi loại mà gia đình cần mua để chi phí là ít nhất.

Câu 6 : Người ta dự định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 280kg chất A và 18kg chất B . Với một tấn nguyên liệu loại I, người ta có thể chiết xuất được 40kg chất A và $1,2\text{kg}$ chất B . Với một tấn nguyên liệu loại II, người ta có thể chiết xuất được 20kg chất A và 3kg chất B . Giá mỗi tấn nguyên liệu loại I là 4 triệu đồng và loại II là 3 triệu đồng. Hỏi người ta phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất mà vẫn đạt được mục tiêu đề ra? Biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp tối đa 10 tấn nguyên liệu loại I và 9 tấn nguyên liệu loại II.

Câu 7: Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 12g hương liệu, 9 lít nước và 315g đường để pha chế hai loại nước A và B . Để pha chế 1 lít nước A cần 45g đường, 1 lít nước và $0,5\text{g}$ hương liệu; để pha chế 1 lít nước B cần 15g đường, 1 lít nước và 2g hương liệu. Mỗi lít nước A nhận được 60 điểm thưởng, mỗi lít nước B nhận được 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước mỗi loại để đội chơi được số điểm thưởng là lớn nhất?

Câu 8: Bác Năm dự định trồng khoai lang và khoai mì trên mảnh đất có diện tích 8 ha . Nếu trồng 1 ha khoai lang thì cần 10 ngày công và thu được 20 triệu đồng. Nếu trồng 1 ha khoai mì thì cần 15 ngày công và thu được 25 triệu đồng. Bác Năm cần trồng bao nhiêu hecta cho mỗi loại cây để thu được nhiều tiền nhất? Biết rằng, bác Năm chỉ có thể sử dụng được không quá 90 ngày công cho việc trồng khoai lang và khoai mì.

Câu 9: Một người bán nước giải khát đang có 25g bột nho và 100g đường để pha chế hai loại nước nho A và B . Để pha chế 1 lít nước nho loại A cần 10g đường và 1g bột nho; để pha chế 1 lít nước nho loại B cần 10g đường và 4g bột nho. Mỗi lít nước nho loại A khi bán lãi được 30 nghìn đồng, mỗi lít nước nho loại B khi bán lãi được 40 nghìn đồng. Hỏi người đó nên pha chế bao nhiêu lít nước nho mỗi loại để có lợi nhuận cao nhất?

Câu 10 : Một nhà máy sản xuất hai loại thuốc trừ sâu nông nghiệp là A và

B . Cứ sản xuất mỗi thùng loại A thì nhà máy thải ra $0,25\text{ kg}$ khí carbon dioxide (CO_2) và $0,60\text{kg}$ khí sulfur dioxide (SO_2), sản xuất mỗi thùng loại B thì thải ra $0,50\text{ kg}$ CO_2 và $0,20\text{kg}$ SO_2 . Biết rằng, quy định hạn chế sản lượng CO_2 của nhà máy tối đa là 75 kg và SO_2 tối đa là 90kg mỗi ngày.

a) Tìm hệ bất phương trình mô tả số thùng của mỗi loại thuốc trừ sâu mà nhà máy có thể sản xuất mỗi ngày để đáp ứng các điều kiện hạn chế trên. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đó trên mặt phẳng tọa độ.

b) Việc nhà máy sản xuất 100 thùng loại A và 80 thùng loại B mỗi ngày có phù hợp với quy định không?

c) Việc nhà máy sản xuất 60 thùng loại A và 160 thùng loại B mỗi ngày có phù hợp với quy định không?

Câu 11: Bạn Lan thu xếp được không quá 10 giờ để làm hai loại đèn trung thu tặng cho các trẻ em khuyết tật. Loại đèn hình con cá cần 2 giờ để làm xong 1 cái, còn loại đèn ông sao chỉ cần 1 giờ để làm xong 1 cái. Gọi x, y lần lượt là số đèn hình con cá và đèn ông sao bạn Lan sẽ làm. Hãy lập hệ bất phương trình mô tả điều kiện của x, y và biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đó.

Câu 12: Một học sinh dự định vẽ các tấm thiệp xuân làm bằng tay để bán trong một hội chợ Tết. Cần 2 giờ để vẽ một tấm thiệp loại nhỏ có giá 10 nghìn đồng và 3 giờ để vẽ một tấm thiệp loại lớn có giá 20 nghìn đồng. Học sinh này chỉ có 30 giờ để vẽ và ban tổ chức hội chợ yêu cầu phải vẽ ít nhất 12 tấm. Hãy cho biết bạn ấy cần vẽ bao nhiêu tấm thiệp mỗi loại để có được nhiều tiền nhất.

Câu 13: Trong một tuần, bạn Mạnh có thể thu xếp được tối đa 12 giờ để tập thể dục giảm cân bằng hai môn: đạp xe và tập cử tạ tại phòng tập. Cho biết mỗi giờ đạp xe sẽ tiêu hao 350 calo và không tốn chi phí, mỗi giờ tập cử tạ sẽ tiêu hao 700 calo với chi phí 50000 đồng/giờ. Mạnh muốn tiêu hao nhiều calo nhưng không được vượt quá 7000 calo một tuần. Hãy giúp bạn Mạnh tính số giờ đạp xe và số giờ tập tạ một tuần trong hai trường hợp sau:

a) Mạnh muốn chi phí luyện tập là ít nhất.

b) Mạnh muốn số calo tiêu hao là nhiều nhất.

Câu 14: Bạn Bích có 500 g bột gạo để pha hai loại nước hồ tráng bánh đa và bánh xèo. Một lít nước hồ tráng bánh đa cần 200 g bột gạo, còn một lít nước hồ tráng bánh xèo chỉ cần 100 g bột gạo. Gọi x, y lần lượt là số lít nước hồ tráng bánh đa và bánh xèo. Hãy lập hệ bất phương trình mô tả điều kiện của x, y và biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đó.

Câu 15: Một bãi đậu xe ban đêm có diện tích đậu xe là $150m^2$ (không tính lối đi cho xe ra vào). Cho biết xe du lịch cần diện tích $3m^2$ /chiếc và phải trả phí 40 nghìn đồng, xe tải cần diện tích $5m^2$ / chiếc và phải trả phí 50 nghìn đồng. Nhân viên quản lý không thể phục vụ quá 40 xe một đêm. Hãy tính số lượng xe mỗi loại mà chủ bãi xe có thể cho đăng kí đậu xe để có doanh thu cao nhất.

Câu 16: Cho biết mỗi kilôgam thịt bò giá 250 nghìn đồng, trong đó có chứa khoảng 800 đơn vị protein và 100 đơn vị lipid, mỗi kilôgam thịt heo có giá 200 nghìn đồng, trong đó có chứa khoảng 600 đơn vị protein và 200 đơn vị lipid. Một gia đình cần ít nhất 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipid trong khẩu phần thức ăn mỗi ngày và họ chỉ có thể mua một ngày không quá 1kg thịt bò và 1,5kg thịt heo. Hỏi gia đình này phải mua bao nhiêu kilôgam thịt mỗi loại để chi phí là ít nhất?

Câu 17: Bác Ngọc thực hiện chế độ ăn kiêng với yêu cầu tối thiểu hằng ngày qua thức uống là $300ca - lo, 36$ đơn vị vitamin A và 90 đơn vị vitamin C. Một cốc đồ uống ăn kiêng thứ nhất cung cấp 60 $ca-lo$, 12 đơn vị vitamin A và 10 đơn vị vitamin C. Một cốc đồ uống ăn kiêng thứ hai cung cấp $60ca - lo, 6$ đơn vị vitamin A và 30 đơn vị vitamin C.

a) Viết hệ bất phương trình mô tả số lượng cốc cho đồ uống thứ nhất và thứ hai mà bác Ngọc nên uống mỗi ngày để đáp ứng nhu cầu cần thiết đối với số $ca-lo$ và số đơn vị vitamin hấp thụ.

b) Chỉ ra hai phương án mà bác Ngọc có thể chọn lựa số lượng cốc cho đồ uống thứ nhất và thứ hai nhằm đáp ứng nhu cầu cần thiết đối với số $ca-lo$ và số đơn vị vitamin hấp thụ.

Câu 18: Một chuỗi nhà hàng ăn nhanh bán đồ ăn từ 10h00 sáng đến 22 h00 mỗi ngày. Nhân viên phục vụ của nhà hàng làm việc theo hai ca, mỗi ca 8 tiếng, ca I từ 10h00 đến 18 h00 và ca II từ 14 h00 đến 22 h00.

Tiền lương của nhân viên được tính theo giờ (bảng bên).

Khoảng thời gian làm việc	Tiền lương/giờ
10h00 – 18h00	20000 đồng
14h00 – 22h00	22000 đồng

Để mỗi nhà hàng hoạt động được thì cần tối thiểu 6 nhân viên trong khoảng 10h00 - 18h00, tối thiểu 24 nhân viên trong thời gian cao điểm 14h00 - 18h00 và không quá 20 nhân viên trong khoảng 18 h00 -

22h00. Do lượng khách trong khoảng 14 h00 - 22h00 thường đông hơn nên nhà hàng cần số nhân viên ca II ít nhất phải gấp đôi số nhân viên ca I. Em hãy giúp chủ chuỗi nhà hàng chỉ ra cách huy động số lượng nhân viên cho mỗi ca sao cho chi phí tiền lương mỗi ngày là ít nhất.

Câu 19: Một trận bóng đá được tổ chức tại một sân vận động có sức chứa 40000 người, ban tổ chức phát hành hai loại vé là 400000 đồng và 200000 đồng. Do điều kiện sân đấu nên số lượng vé có giá 400000 không lớn hơn số lượng vé có giá 200000 đồng. Để an toàn phòng dịch, liên đoàn bóng đá yêu cầu số lượng vé phát hành không được quá 30% sức chứa của sân. Để tổ chức được trận đấu thì số tiền thu được qua bán vé không được ít hơn 3 tỉ đồng. Gọi x, y lần lượt là số vé giá 400000 đồng và 200000 đồng được bán ra.

a) Viết hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn số vé mỗi loại được bán ra đảm bảo mục đích của ban tổ chức.

b) Chỉ ra hai nghiệm của hệ bất phương trình đó.

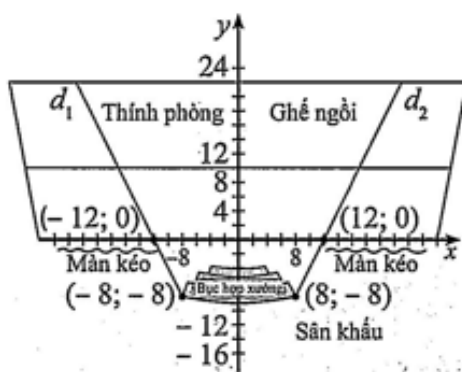
Câu 20: Một xưởng sản xuất bàn và ghế. Một chiếc bàn cần 1,5 giờ lắp ráp và 1 giờ hoàn thiện; một chiếc ghế cần 1 giờ lắp ráp và 2 giờ hoàn thiện. Bộ phận lắp ráp có 3 nhân công, bộ phận hoàn thiện có 4 nhân công. Biết thị trường luôn tiêu thụ hết sản phẩm của xưởng và lượng ghế tiêu thụ không vượt quá 3,5 lần số bàn.

a) Viết hệ bất phương trình mô tả số lượng bàn và ghế mà trong một ngày phân xưởng có thể sản xuất, biết một nhân công làm việc không quá 8 tiếng mỗi ngày.

b) Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đó.

c) Biết một chiếc bàn lãi 600 nghìn đồng, một chiếc ghế lãi 450 nghìn đồng. Hỏi trong một ngày, xưởng cần sản xuất bao nhiêu chiếc bàn, bao nhiêu chiếc ghế để thu được tiền lãi cao nhất?

Câu 21: Hình 13 mô tả sơ đồ một sân khấu gắn với hệ trục tọa độ Oxy (đơn vị trên các trục tọa độ là 1 mét). Phần tính phòng giới hạn bởi hai đường thẳng d_1, d_2 là vị trí ngồi của khán giả có thể nhìn thấy dàn hợp xướng. Gọi $(x; y)$ là tọa độ ngồi của khán giả ở thính phòng. Viết hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y mà khán giả có thể nhìn thấy dàn hợp xướng.



Hình 13

Câu 22: . Bác An đầu tư 1,2 tỉ đồng vào ba loại trái phiếu, trái phiếu chính phủ với lãi suất 7% một năm, trái phiếu ngân hàng với lãi suất 8% một năm và trái phiếu doanh nghiệp rủi ro cao với lãi suất 12% một năm. Vì lí do giảm thuế, bác An muốn số tiền đầu tư trái phiếu chính phủ gấp ít nhất 3 lần số tiền đầu tư trái phiếu ngân hàng. Hơn nữa, để giảm thiểu rủi ro, bác An đầu tư không quá 200 triệu đồng cho trái phiếu doanh nghiệp. Hỏi bác An nên đầu tư mỗi loại trái phiếu bao nhiêu tiền để lợi nhuận thu được sau một năm là lớn nhất?

Câu 23: Một công ty dự định chi tối đa 160 triệu đồng cho quảng cáo một sản phẩm mới trong một tháng trên các đài phát thanh và truyền hình. Biết cùng một thời lượng quảng cáo, số người mới quan

tâm đến sản phẩm trên truyền hình gấp 8 lần trên đài phát thanh, tức là quảng cáo trên truyền hình có hiệu quả gấp 8 lần trên đài phát thanh.

Đài phát thanh chỉ nhận các quảng cáo có tổng thời lượng trong một tháng tối đa là 900 giây với chi phí là 80 nghìn đồng/giây. Đài truyền hình chỉ nhận các quảng cáo có tổng thời lượng trong một tháng tối đa là 360 giây với chi phí là 400 nghìn đồng/giây.

Công ty cần đặt thời gian quảng cáo trên các đài phát thanh và truyền hình như thế nào để hiệu quả nhất?

Gợi ý. Nếu coi hiệu quả khi quảng cáo 1 giây trên đài phát thanh là 1 (đơn vị) thì hiệu quả khi quảng cáo 1 giây trên đài truyền hình là 8 (đơn vị). Khi đó hiệu quả quảng cáo x (giây) trên đài phát thanh và y (giây) trên truyền hình là $F(x, y) = x + 8y$. Ta cần tìm giá trị lớn nhất của hàm $F(x, y)$ với x, y thoả mãn các điều kiện trong đề bài.

Câu 24: Một hợp tác xã chăn nuôi dự định trộn hai loại thức ăn gia súc X và Y để tạo thành thức ăn hỗn hợp cho gia súc. Giá một bao loại X là 250 nghìn đồng. giá một bao loại Y là 200 nghìn đồng. Mỗi bao loại X chứa 2 đơn vị chất dinh dưỡng A , 2 đơn vị chất dinh dưỡng B và 2 đơn vị chất dinh dưỡng C . Mỗi bao loại Y chứa 1 đơn vị chất dinh dưỡng A , 9 đơn vị chất dinh dưỡng B và 3 đơn vị chất dinh dưỡng C . Tìm chi phí nhỏ nhất để mua hai loại thức ăn gia súc X và Y sao cho hỗn hợp thu được chứa tối thiểu 12 đơn vị chất dinh dưỡng A , 36 đơn vị chất dinh dưỡng B và 24 đơn vị chất dinh dưỡng C .

- A. 1,95 triệu đồng.
- B. 4,5 triệu đồng.
- C. 1,85 triệu đồng.
- D. 1,7 triệu đồng.

Câu 25: Một phân xưởng có hai máy chuyên dụng M_1 và M_2 để sản xuất hai loại sản phẩm A và B theo đơn đặt hàng. Nếu sản xuất được một tấn sản phẩm loại A thì phân xưởng nhận được số tiền lãi là 2 triệu đồng. Nếu sản xuất được một tấn sản phẩm loại B thì phân xưởng nhận được số tiền lãi là 1,6 triệu đồng. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại A , người ta phải dùng máy M_1 trong 3 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại B , người ta phải dùng máy M_1 trong 1 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Một máy không thể dùng để sản xuất đồng thời hai loại sản phẩm. Máy M_1 làm việc không quá 6 giờ một ngày và máy M_2 làm việc không quá 4 giờ một ngày. Hỏi số tiền lãi lớn nhất mà phân xưởng này có thể thu được trong một ngày là bao nhiêu?

Câu 26: Giả sử một người ăn kiêng cần được cung cấp ít nhất 300 calo, 36 đơn vị vitamin A và 90 đơn vị vitamin C mỗi ngày từ hai loại đồ uống I và II. Mỗi cốc đồ uống I cung cấp 60 calo, 12 đơn vị vitamin A và 10 đơn vị vitamin C .

Mỗi cốc đồ uống II cung cấp 60 calo, 6 đơn vị vitamin A và 30 đơn vị vitamin C . Biết rằng một cốc đồ uống I có giá 12 nghìn đồng và một cốc đồ uống II có giá 15 nghìn đồng.

a) Gọi x và y tương ứng là số cốc đồ uống I và II. Viết các bất phương trình biểu thị các điều kiện của bài toán thành một hệ bất phương trình và xác định miền nghiệm của hệ đó.

b) Gọi F (nghìn đồng) là số tiền phải trả cho x cốc đồ uống I và y cốc đồ uống II. Hãy biểu diễn F theo x và y .

c) Biết rằng F đạt giá trị nhỏ nhất trên miền nghiệm tìm được ở câu a tại một trong các đỉnh của miền nghiệm, tìm giá trị nhỏ nhất đó. Từ đó suy ra người đó cần uống bao nhiêu cốc loại I và loại II để chi phí là nhỏ nhất mà vẫn đáp ứng được yêu cầu hằng ngày.

Câu 27: Một công ty dự định sản xuất hai loại sản phẩm A và B. Các sản phẩm này được chế tạo từ ba loại nguyên liệu I, II và III. Số kilôgam dự trữ từng loại nguyên liệu và số kilôgam từng loại nguyên liệu cần dùng để sản xuất ra 1 kg sản phẩm được cho trong bảng sau:

Loại nguyên liệu	Số kilôgam nguyên liệu dự trữ	Số kilôgam nguyên liệu cần dùng sản xuất 1 kg sản phẩm	
		A	B
I	8	2	1
II	24	4	4
III	8	1	2

Công ty đó nên sản xuất bao nhiêu sản phẩm mỗi loại để tiền lãi thu về lớn nhất? Biết rằng, mỗi kilôgam sản phẩm loại A lãi 30 triệu đồng, mỗi kilôgam sản phẩm loại B lãi 50 triệu đồng.

Câu 28: Một công ty cần mua các tủ đựng hồ sơ. Có hai loại tủ: Tủ loại A chiếm $3m^2$ sàn, loại này có sức chứa $12m^3$ và có giá 7,5 triệu đồng; tủ loại B chiếm $6m^2$ sàn, loại này có sức chứa $18m^3$ và có giá 5 triệu. Cho biết công ty chỉ thu xếp được nhiều nhất là $60m^2$ mặt bằng cho chỗ đựng hồ sơ và ngân sách mua tủ không quá 60 triệu đồng. Hãy lập kế hoạch mua sắm để công ty có được thể tích đựng hồ sơ lớn nhất.

Câu 29: Một nông trại thu hoạch được 180 kg cà chua và 15 kg hành tây. Chủ nông trại muốn làm các hũ tương cà để bán. Biết rằng, để làm ra một hũ tương cà loại A cần 10 kg cà chua cùng với 1 kg hành tây và khi bán lãi được 200 nghìn đồng, còn để làm được một hũ tương cà loại B cần 5 kg cà chua cùng với 0,25 kg hành tây và khi bán lãi được 150 nghìn đồng. Thăm dò thị hiếu của khách hàng cho thấy cần phải làm số hũ tương loại A ít nhất gấp 3,5 lần số hũ tương loại B. Hãy giúp chủ nông trại lập kế hoạch làm tương cà để có được nhiều tiền lãi nhất.

Câu 30: Một xưởng sản xuất có hai máy đặc chủng A, B sản xuất hai loại sản phẩm X, Y. Để sản xuất một tấn sản phẩm X cần dùng máy A trong 6 giờ và dùng máy B trong 2 giờ. Để sản xuất một tấn sản phẩm Y cần dùng máy A trong 2 giờ và dùng máy B trong 2 giờ. Cho biết mỗi máy không thể sản xuất đồng thời hai loại sản phẩm. Máy A làm việc không quá 12 giờ một ngày, máy B làm việc không quá 8 giờ một ngày. Một tấn sản phẩm X lãi 10 triệu đồng và một tấn sản phẩm Y lãi 8 triệu đồng. Hãy lập kế hoạch sản xuất mỗi ngày sao cho tổng số tiền lãi cao nhất.

Câu 31: Bác Dũng dự định quy hoạch x sào đất trồng cà tím và y sào đất trồng cà chua. Bác chỉ có không quá 9 triệu đồng để mua hạt giống. Cho biết tiền mua hạt giống cà tím là 200000 đồng/sào và cà chua là 100000 đồng/sào. Viết hệ bất phương trình mô tả điều kiện ràng buộc đối với x, y .

Câu 32: Một phân xưởng lắp ráp máy tính dự định ráp x chiếc máy tính cá nhân và y chiếc máy tính bảng trong một ngày. Do hạn chế về nhân công nên mỗi ngày chỉ có thể xuất xưởng tổng hai loại máy tính trên không quá 150 chiếc. Viết hệ bất phương trình mô tả điều kiện ràng buộc đối với x, y .

Câu 33: Bạn Hoàng dự định mua x con cá vàng và y con cá Koi từ một trại cá giống. Cho biết mỗi con cá vàng có giá 35 nghìn đồng còn mỗi con cá Koi có giá 150 nghìn đồng. Hoàng chỉ để dành được 1,7 triệu đồng và trại cá chỉ bán mỗi loại cá từ 10 con trở lên. Hãy viết hệ bất phương trình mô tả điều kiện ràng buộc đối với x, y .

Câu 34: Một học sinh dự định làm các bình hoa bằng giấy để bán trong một hội chợ gây quỹ từ thiện. Cần 1 giờ để làm một bình hoa loại nhỏ và sẽ bán với giá 100 nghìn đồng, 90 phút để làm một bình hoa loại lớn và sẽ bán với giá 200 nghìn đồng. Học sinh này chỉ thu xếp được 15 giờ nghỉ để làm và ban tổ chức yêu cầu phải làm ít nhất là 12 bình hoa. Hãy cho biết bạn ấy cần làm bao nhiêu bình hoa mỗi loại để gây quỹ được nhiều tiền nhất.

Câu 35: Một xưởng sản xuất có 12 tấn nguyên liệu A và 8 tấn nguyên liệu B để sản xuất hai loại sản phẩm X, Y . Để sản xuất một tấn sản phẩm X cần dùng 6 tấn nguyên liệu A và 2 tấn nguyên liệu B , khi bán lãi được 10 triệu đồng. Để sản xuất một tấn sản phẩm Y cần dùng 2 tấn nguyên liệu A và 2 tấn nguyên liệu B , khi bán lãi được 8 triệu đồng. Hãy lập kế hoạch sản xuất cho xưởng nói trên sao cho có tổng số tiền lãi cao nhất.

Câu 36: Tìm giá trị của F và G tương ứng với các giá trị x, y được cho trong bảng dưới đây.

x	0	0	1	1	2	2	4
y	2	4	0	1	0	1	0
$F = 4x + 5y$							
$G = 5x - 3y$							

Trong các giá trị tìm được:

a) tìm GTLN của F .

b) tìm GTNN của G .

Câu 37: Bác An đầu tư 1,2 tỉ đồng vào ba loại trái phiếu, trái phiếu chính phủ với lãi suất 7% một năm, trái phiếu ngân hàng với lãi suất 8% một năm và trái phiếu doanh nghiệp rủi ro cao với lãi suất 12% một năm. Vì lí do giảm thuế, bác An muốn số tiền đầu tư trái phiếu chính phủ gấp ít nhất 3 lần số tiền đầu tư trái phiếu ngân hàng. Hơn nữa, để giảm thiểu rủi ro, bác An đầu tư không quá 200 triệu đồng cho trái phiếu doanh nghiệp. Hỏi bác An nên đầu tư mỗi loại trái phiếu bao nhiêu tiền để lợi nhuận thu được sau một năm là lớn nhất?

CHUYÊN ĐỀ 2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BPT BẬC NHẤT 2 ẨN

VẤN ĐỀ 1: BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT 2 ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khái niệm bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là bất phương trình có một trong các dạng

$ax + by + c < 0; ax + by + c > 0; ax + by + c \leq 0; ax + by + c \geq 0$, trong đó a, b, c là những số cho trước; a, b không đồng thời bằng 0 và x, y là các ẩn.

2. Nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Xét bất phương trình $ax + by + c < 0$. Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ thoả mãn $ax_0 + by_0 + c < 0$ gọi là một **nghiệm** của bất phương trình đã cho.

Chú ý: Nghiệm của các bất phương trình $ax + by + c > 0, ax + by + c \leq 0, ax + by + c \geq 0$ được định nghĩa tương tự.

3. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , tập hợp các điểm $(x_0; y_0)$ sao cho $ax_0 + by_0 + c < 0$ được gọi là **miền nghiệm** của bất phương trình $ax + by + c < 0$.

- Để biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy , ta làm như sau:

+ Bước 1: Trên mặt phẳng Oxy , vẽ đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$.

+ Bước 2: Lấy một điểm $(x_0; y_0)$ không thuộc Δ . Tính $ax_0 + by_0 + c$.

+ Bước 3: Kết luận

- Nếu $ax_0 + by_0 + c < 0$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng (không kể bờ Δ) chứa điểm $(x_0; y_0)$.

- Nếu $ax_0 + by_0 + c > 0$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng (không kể bờ Δ) không chứa điểm $(x_0; y_0)$.

Chú ý: Đối với các bất phương trình bậc nhất hai ẩn dạng $ax + by + c \leq 0$ (hoặc $ax + by + c \geq 0$) thì miền nghiệm là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$ (hoặc $ax + by + c > 0$) kể cả bờ.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Một gian hàng trưng bày bàn và ghế rộng $60m^2$. Diện tích để kê một chiếc ghế là $0,5m^2$, một chiếc bàn là $1,2m^2$. Gọi x là số chiếc ghế, y là số chiếc bàn được kê.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y cho phần mặt sàn để kê bàn và ghế, biết diện tích mặt sàn dành cho lưu thông tối thiểu là $12m^2$.

b) Chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình trên.

Giải

a) Diện tích để kê x chiếc ghế, y chiếc bàn là: $0,5x + 1,2y (m^2)$.

Diện tích tối đa để kê bàn và ghế là: $60 - 12 = 48 (m^2)$.

Ta có bất phương trình: $0,5x + 1,2y \leq 48$.

b) Ba nghiệm có thể chỉ ra được của bất phương trình trên là: $(20;30), (30;20), (50;15)$.

Câu 2 : Trong 1 lạng (100 g thịt bò chứa khoảng 26 g protein, 1 lạng cá rô phi chứa khoảng 20 g protein. Trung bình trong một ngày, một người phụ nữ cần tối thiểu 46 g protein.

(Nguồn: <https://vinmec.com> và <https://thanhvien.vn>) Gọi x, y lần lượt là số lạng thịt bò và số lạng cá rô phi mà một người phụ nữ nên ăn trong một ngày. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng protein cần thiết cho một người phụ nữ trong một ngày và chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình đó.

Lời giải

Bước 1: Biểu diễn lượng protein có trong x lạng thịt bò và y lạng cá rô phi.

Lượng protein trong x lạng thịt bò là $26x$ (g)

Lượng protein trong y lạng cá rô phi là $20y$ (g)

Lượng protein trong x lạng thịt bò và y lạng cá rô phi là $26x + 20y$ (g).

Bước 2: Biểu diễn bất phương trình.

Vì lượng protein tối thiểu là 46 g nên ta có bất phương trình:

$$26x + 20y \geq 46$$

Bước 3: Tìm nghiệm của bất phương trình

Thay $x = 1, y = 1$ vào bất phương trình ta được

Thay $x = 2, y = 1$ vào bất phương trình ta được

Thay $x = 1, y = 2$ vào bất phương trình ta được

Vậy $(1;1), (2;1), (1;2)$ là các nghiệm cần tìm.

Chú ý

Có thể chọn các nghiệm khác, miễn là nghiệm nguyên.

Câu 3: Hà, Châu, Liên và Ngân cùng đi mua trà sữa. Cả bốn bạn có tất cả 185 nghìn đồng. Bốn bạn mua 4 cốc trà sữa với giá tiền 35 nghìn đồng một cốc. Các bạn gọi thêm trân châu cho vào trà sữa. Một phần trân châu đen có giá 5 nghìn đồng, một phần trân châu trắng có giá 10 nghìn đồng. Gọi x, y lần lượt là số phần trân châu đen, trân châu trắng mà bốn bạn định mua thêm.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để thể hiện số tiền các bạn có đủ khả năng chi trả cho phần trân châu đen, trắng.

b) Chỉ ra một nghiệm nguyên của bất phương trình đó.

Lời giải

a) $5x + 10y \leq 45$ hay $x + 2y \leq 9$.

b) $(4; 2)$.

Câu 4: Anh An là nhân viên bán hàng tại siêu thị điện máy. Anh An kiếm được một khoản hoa hồng 600 nghìn đồng cho mỗi máy giặt và 1,3 triệu đồng cho mỗi tủ lạnh mà anh ấy bán được. Hỏi để nhận được từ 10 triệu đồng trở lên tiền hoa hồng thì anh An cần bán bao nhiêu máy giặt và tủ lạnh?

Lời giải

Gọi x và y lần lượt là số máy giặt và số tủ lạnh anh An bán được. Khi đó số tiền hoa hồng mà anh An nhận được là $0,6x + 1,3y$ (triệu đồng). Theo đề bài, ta có:

$$0,6x + 1,3y \geq 10$$

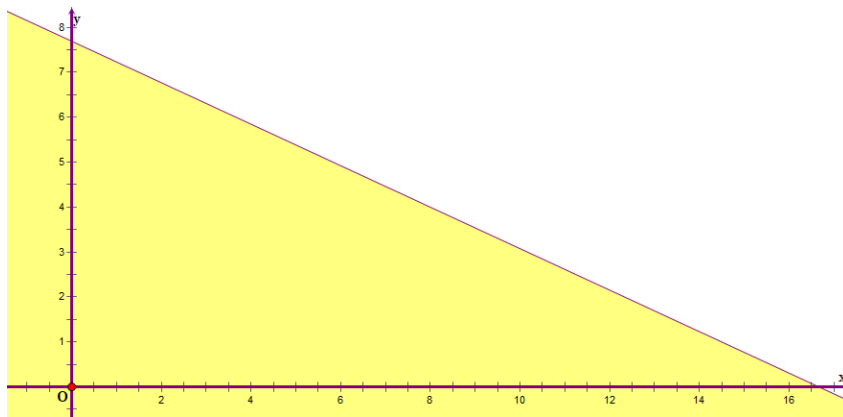
Tiếp theo ta xác định miền nghiệm của bất phương trình $0,6x + 1,3y \geq 10$ như sau:

Bước 1. Vẽ đường thẳng $d: 0,6x + 1,3y = 10$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

Bước 2. Lấy điểm $O(0; 0)$ không thuộc d và thay vào biểu thức $0,6x + 1,3y$ ta được:

$$0,6 \cdot 0 + 1,3 \cdot 0 = 0 < 10.$$

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ d không chứa gốc tọa độ (miền không bị tô màu).



Vậy nếu anh An bán được số máy giặt là $x(x \in \mathbb{N})$ và số tủ lạnh là $y(y \in \mathbb{N})$ sao cho điểm $(x; y)$ nằm trong nửa mặt phẳng bờ d không chứa gốc tọa độ thì anh An nhận được từ 10 triệu đồng trở lên tiền hoa hồng.

Câu 5: Ông An muốn thuê một chiếc ô tô (có lái xe) trong một tuần. Giá thuê xe được cho như bảng sau:

	Phi cố định (nghìn đồng/ngày)	Phí tính theo quãng đường di chuyển (nghìn đồng/kilômét)
Từ thứ Hai đến thứ Sáu	900	8
Thứ Bảy và Chủ nhật	1500	10

a) Gọi x và y lần lượt là số kilômét ông An đi trong các ngày từ thứ Hai đến thứ Sáu và trong hai ngày cuối tuần. Viết bất phương trình biểu thị mối liên hệ giữa x và y sao cho tổng số tiền ông An phải trả không quá 14 triệu đồng.

b) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình ở câu a trên mặt phẳng tọa độ.

Lời giải

a)

Ta có 14 triệu = 14000 (nghìn đồng)

Số tiền ông An đi x km trong các ngày từ thứ Hai đến thứ Sáu là $900.5 + 8x$ (nghìn đồng)

Số tiền ông An đi y km trong 2 cuối tuần là $1500.2 + 10y$ (nghìn đồng)

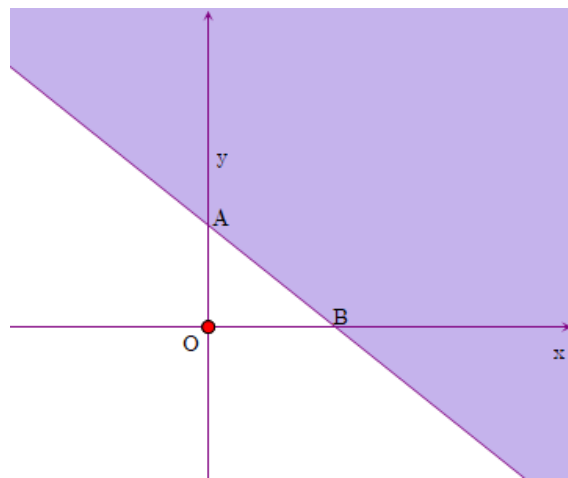
Số tiền ông An đi trong một tuần là $7500 + 8x + 10y$ (nghìn đồng)

Vì số tiền không quá 14 triệu đồng nên ta có :

$$7500 + 8x + 10y \leq 14000 \Leftrightarrow 4x + 5y \leq 3250$$

Vậy bất phương trình cần tìm là $4x + 5y \leq 3250$

b)



Bước 1: Vẽ đường thẳng $4x + 5y = 3250$ (nét liền)

Bước 2: Thay tọa độ điểm $O(0;0)$ vào biểu thức $4x + 5y$ ta được:

$$4.0 + 5.0 = 0 < 3250$$

$\Rightarrow$ Điểm O thuộc miền nghiệm

$\Rightarrow$ Miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng $4x + 5y = 3250$ và chứa gốc tọa độ và $(x;y)$ nằm trong miền tam giác OAB kể cả đoạn AB .

Câu 6: Một cửa hàng bán lẻ bán hai loại hạt cà phê. Loại thứ nhất giá 140 nghìn đồng/kg và loại thứ hai giá 180 nghìn đồng/kg. Cửa hàng trộn x kg loại thứ nhất và y kg loại thứ hai sao cho hạt cà phê đã trộn có giá không quá 170 nghìn đồng/kg.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y thỏa mãn điều kiện đề bài.

b) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình tìm được ở câu a trên mặt phẳng tọa độ.

Lời giải

a) Theo đề bài, ta có: $140x + 180y \leq 170(x + y)$.

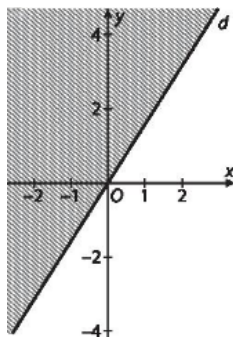
Bằng cách chuyển vế ta được bất phương trình bậc nhất hai ẩn $30x - 10y \geq 0$ hay $3x - y \geq 0$.

b) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $3x - y \geq 0$.

Bước 1. Vẽ đường thẳng $d: 3x - y = 0$ trên mặt phẳng tọa độ.

Bước 2. Lấy điểm $M(1;0)$ không thuộc d và điểm M thỏa mãn $3 \cdot 1 - 0 = 3 > 0$.

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ d chứa điểm $M(1;0)$.



Câu 7: Bạn Hoa để dành được 420 nghìn đồng. Trong một đợt ủng hộ trẻ em khuyết tật, Hoa đã ủng hộ x tờ tiền loại 10 nghìn đồng, y tờ tiền loại 20 nghìn đồng.

a) Tính tổng số tiền bạn Hoa đã ủng hộ theo x, y .

b) Giải thích tại sao ta lại có bất phương trình $10x + 20y \leq 420$.

Lời giải

a) Tổng số tiền bạn Hoa đã ủng hộ là $10x + 20y$.

b) Vì bạn Hoa chỉ có tất cả là 420 nghìn đồng, nên tổng số tiền bạn Hoa đã ủng hộ không thể vượt quá 420 nghìn đồng. Vậy ta có $10x + 20y \leq 420$.

Câu 8: Cho biết 226 g thịt bò chứa khoảng 59 g protein. Một quả trứng nặng 46 g có chứa khoảng 6 g protein (nguồn: Bộ Nông nghiệp Hoa Kỳ). Giả sử có một người mỗi ngày cần không quá 60 g protein. Gọi số gam thịt bò và số gam trứng mà người đó ăn trong một ngày lần lượt là x, y .

a) Lập bất phương trình theo x, y diễn tả giới hạn về lượng protein mà người đó cần mỗi ngày.

b) Dùng bất phương trình ở câu a) để trả lời hai câu hỏi sau:

- Nếu người đó ăn 150 g thịt bò và 2 quả trứng, mỗi quả 46 g, trong một ngày thì có phù hợp không?

- Nếu người đó ăn 200 g thịt bò và 2 quả trứng, mỗi quả 46 g, trong một ngày thì có phù hợp không?

Lời giải

a) Bất phương trình theo x, y diễn tả giới hạn về lượng protein mà người đó cần mỗi ngày là:

$$\frac{59}{226}x + \frac{6}{46}y = \frac{59}{226}x + \frac{3}{23}y \leq 60.$$

b) Ta có: $\frac{59}{226} \cdot 150 + \frac{3}{23} \cdot 2 \cdot 46 \approx 51,16 < 60$ $\frac{59}{226} \cdot 200 + \frac{3}{23} \cdot 2 \cdot 46 \approx 64,21 > 60$.

Suy ra:

- Nếu người đó ăn 150 g thịt bò và 2 quả trứng trong một ngày thì phù hợp.
- Nếu người đó ăn 200 g thịt bò và 2 quả trứng trong một ngày thì không phù hợp.

Câu 9 : Bạn Cúc muốn pha hai loại nước cam. Để pha một lít nước cam loại I cần 30 g bột cam, còn một lít nước cam loại II cần 20 g bột cam. Gọi x và y lần lượt là số lít nước cam loại I và II pha chế được. Biết rằng Cúc chỉ có thể dùng không quá 100 gam bột cam. Hãy lập các bất phương trình mô tả lít nước cam loại I và II mà bạn Cúc có thể pha chế được và biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình đó trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy.

Lời giải

Để pha x lít nước cam loại I cần $30x$ g bột cam,

Để pha y lít nước cam loại II cần $20y$ g bột cam,

Vì Cúc chỉ có thể dùng không quá 100 gam bột cam nên ta có bất phương trình $30x + 20y \leq 100$

$$\Leftrightarrow 3x + 2y - 10 \leq 0$$

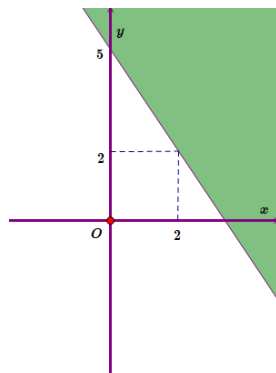
Vẽ đường thẳng $\Delta: 3x + 2y - 10 = 0$ đi qua hai điểm $A(0;5)$ và $B(2;2)$

Xét gốc tọa độ $O(0;0)$. Ta thấy $O \notin \Delta$ và

$$3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 10 = -10 < 0$$

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng kể cả bờ Δ , chứa gốc tọa độ O

(miền không tô màu trên hình)



Câu 10 : Bạn Nga muốn pha hai loại nước rửa xe. Để pha một lít loại I cần 600ml dung dịch chất tẩy rửa, còn loại II chỉ cần 400ml. Gọi x và y lần lượt là số lít nước rửa xe loại I và II pha chế được và biết rằng Nga chỉ còn 2400ml chất tẩy rửa, hãy lập các bất phương trình mô tả số lít nước rửa xe loại I và II mà bạn Nga có thể pha chế được và biểu diễn miền nghiệm của từng bất phương trình đó trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

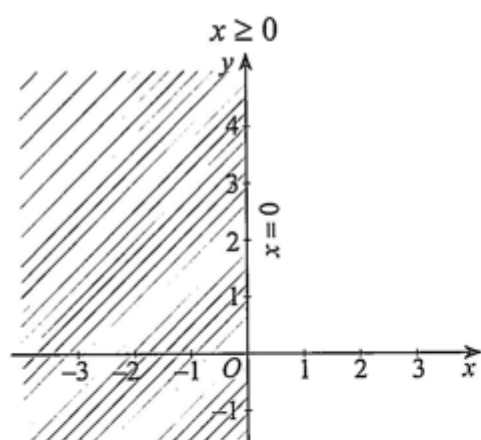
Lời giải

Các bất phương trình mô tả số lít nước rửa xe loại I và II mà bạn Nga có thể pha chế được:

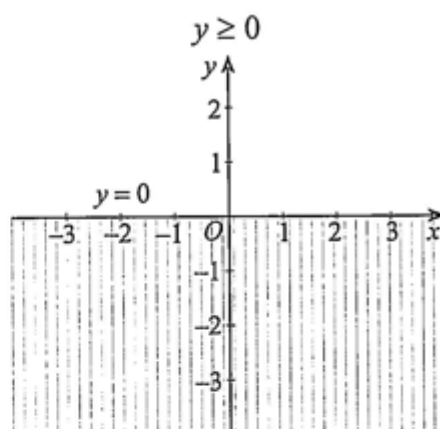
$$x \geq 0; y \geq 0;$$

$$600x + 400y \leq 2400 \Leftrightarrow 3x + 2y \leq 12.$$

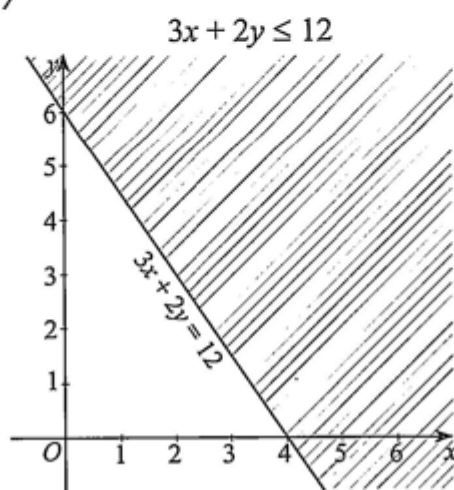
Biểu diễn miền nghiệm của từng bất phương trình đó trên mặt phẳng tọa độ Oxy :



Hình 7



Hình 8



Hình 9

Câu 11 : Nhu cầu canxi tối thiểu cho một người đang độ tuổi trưởng thành trong một ngày là $1300mg$. trong 1 lạng đậu nành có $165mg$ canxi, 1 lạng thịt có $15mg$ canxi.

(Nguồn: <https://hongngochospital.vn>)

Gọi x, y lần lượt là số lạng đậu nành và số lạng thịt mà một người đang độ tuổi trưởng thành ăn trong một ngày

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng canxi cần thiết trong một ngày của một người trong độ tuổi trưởng thành.

b) Chỉ ra một nghiệm $(x_0; y_0)$ với $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ của bất phương trình đó.

Lời giải

a)

Lượng canxi có trong x lạng đậu nành là $165x$ (mg)

Lượng canxi có trong y lạng thịt là $15y$ (mg)

Bất phương trình là $165x + 15y \geq 1300$

b) Thay cặp số $(10;10)$ vào bất phương trình ta được:

$$165.10 + 15.10 = 1650 + 150 = 1800 > 1300$$

Vậy $(10;10)$ là một nghiệm của bất phương trình.

Câu 12: Bạn Danh để dành được 900 nghìn đồng. Trong một đợt ủng hộ trẻ em mồ côi, Danh đã lấy ra x tờ tiền loại 50 nghìn đồng, y tờ tiền loại 100 nghìn đồng để trao tặng. Một bất phương trình mô tả điều kiện ràng buộc đối với x, y là:

A. $50x + 100y \leq 900$;

B. $50x + 100y \geq 900$

C. $100x + 50y \leq 900$;

D. $x + y = 900$.

Lời giải

Chọn A

VẤN ĐỀ 2: HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khái niệm hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y . Mỗi nghiệm chung của tất cả các bất phương trình đó được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm $(x_0; y_0)$ có tọa độ là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn được gọi là miền nghiệm của hệ bất phương trình đó.

2. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Để **biểu diễn miền nghiệm** của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng tọa độ Oxy , ta thực hiện như sau:

- Trên cùng mặt phẳng tọa độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình của hệ.
- Phần giao của các miền nghiệm là miền nghiệm của hệ bất phương trình.

Chú ý: Miền mặt phẳng tọa độ bao gồm một đa giác lồi và phần nằm bên trong đa giác đó được gọi là một **miền đa giác**.

3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = ax + by$ trên một miền đa giác

Hệ bất phương trình giúp ta mô tả được nhiều bài toán thực tế để tìm ra cách giải quyết tối ưu, các bài toán này thường được đưa về việc tìm giá trị lớn nhất (GTLN) hoặc giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức $F = ax + by$ trên một miền đa giác.

Ví dụ. Một người dùng ba loại nguyên liệu A, B, C để sản xuất ra hai loại sản phẩm P và Q . Để sản xuất 1kg mỗi loại sản phẩm P hoặc Q phải dùng một số kilôgam nguyên liệu khác nhau. Tổng số kilôgam nguyên liệu mỗi loại mà người đó có và số kilôgam từng loại nguyên liệu cần thiết để sản xuất ra 1kg sản phẩm mỗi loại được cho trong bảng sau:

Loại nguyên liệu	Số kilôgam nguyên liệu đang có	Số kilôgam từng loại nguyên liệu cần để sản xuất 1kg sản phẩm	
		P	Q
A	10	2	2
B	4	0	2
C	12	4	4

Biết 1kg sản phẩm P lãi 3 triệu đồng và 1kg sản phẩm Q lãi 5 triệu đồng. Hãy lập phương án sản xuất hai loại sản phẩm trên sao cho có lãi cao nhất.

Phương pháp giải

Để giải bài toán tìm phương án tối ưu ở trên, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Đặt biến số x, y cho các đối tượng cần tìm.

Đặt x là số kilôgam sản phẩm P và y là số kilôgam sản phẩm Q cần sản xuất.

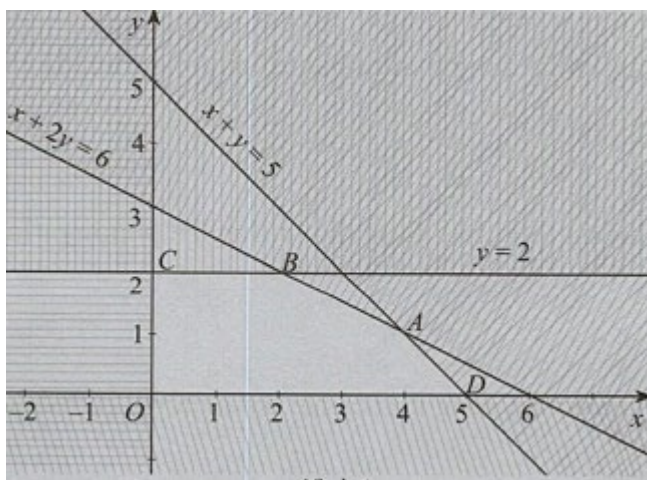
Bước 2. Lập các hệ bất phương trình mô tả các điều kiện ràng buộc.

$$\begin{cases} 2x + 2y \leq 10 \\ 2y \leq 4 \\ 2x + 4y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leq 5 \\ y \leq 2 \\ x + 2y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Bước 3. Xây dựng hàm mục tiêu cho giá trị mà ta muốn đạt giá trị tối ưu.

$F = 3x + 5y$ (Tiền lãi của phương án sản xuất mà ta muốn đạt lớn nhất).

Bước 4. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình (1) trên hệ trục tọa độ Oxy ta được một đa giác. Tìm tọa độ các đỉnh của đa giác.



Miền nghiệm là ngũ giác $OCBAD$, trong đó $O(0;0); C(0;2); B(2;2); A(4;1); D(5;0)$.

Bước 5. Do người ta đã chứng minh được F đạt GTLN hoặc GTNN tại một trong các đỉnh của đa giác nên ta chỉ cần tính các giá trị của hàm mục tiêu F tại các đỉnh của đa giác. Tìm ra đỉnh tại đó F đạt GTLN hoặc GTNN. Toạ độ của đỉnh này là phương án tối ưu cần tìm.

Tính giá trị của F tại các đỉnh:

$$\text{Tại } O(0;0): F = 3.0 + 5.0 = 0;$$

$$\text{Tại } C(0;2): F = 3.0 + 5.2 = 10;$$

$$\text{Tại } B(2;2): F = 3.2 + 5.2 = 16;$$

$$\text{Tại } A(4;1): F = 3.4 + 5.1 = 17;$$

$$\text{Tại } D(5;0): F = 3.5 + 5.0 = 15.$$

Tại đỉnh $A(4;1)$, F đạt giá trị lớn nhất là 17.

Bước 6. Nêu kết luận dựa trên ngôn ngữ thực tế của bài toán.

Vậy phương án sản xuất tối ưu là làm ra 4kg sản phẩm P và 1kg sản phẩm Q . Khi đó sẽ có lãi cao nhất là 17 triệu đồng.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Một phân xưởng sản xuất hai kiểu mũ. Thời gian để làm ra một chiếc mũ kiểu thứ nhất nhiều gấp hai lần thời gian làm ra một chiếc mũ kiểu thứ hai. Nếu chỉ sản xuất toàn kiểu mũ thứ hai thì trong 1 giờ phân xưởng làm được 60 chiếc. Phân xưởng làm việc 8 tiếng mỗi ngày và thị trường tiêu thụ tối đa trong một ngày là 200 chiếc mũ kiểu thứ nhất và 240 chiếc mũ kiểu thứ hai. Tiền lãi khi bán một chiếc mũ kiểu thứ nhất là 24 nghìn đồng, một chiếc mũ kiểu thứ hai là 15 nghìn đồng. Tính số lượng mũ kiểu thứ nhất và kiểu thứ hai trong một ngày mà phân xưởng cần sản xuất để tiền lãi thu được là cao nhất.

Giải

Gọi số lượng mũ kiểu thứ nhất và kiểu thứ hai mà phân xưởng cần sản xuất trong một ngày lần lượt là $x, y (x, y > 0, x, y \in \mathbb{Z})$.

Thời gian để làm ra một chiếc mũ kiểu thứ hai là: $\frac{1}{60}$ (giờ).

Thời gian để làm ra một chiếc mũ kiểu thứ nhất là: $2 \cdot \frac{1}{60} = \frac{1}{30}$ (giờ).

Thời gian để làm ra x chiếc mũ kiểu thứ nhất và y chiếc mũ kiểu thứ hai là:

$$\frac{1}{30} \cdot x + \frac{1}{60} \cdot y = \frac{2x+y}{60}. \text{ (giờ)}$$

Theo giả thiết, x và y phải thoả mãn các điều kiện: $0 \leq x \leq 200, 0 \leq y \leq 240; \frac{2x+y}{60} \leq 8$ hay $2x+y \leq 480$.

Tổng số tiền lãi thu được khi bán x chiếc mũ kiểu thứ nhất và y chiếc mũ kiểu thứ hai là:
 $T = 24x + 15y$ (nghìn đồng).

Bài toán đưa về: Tìm các số nguyên x, y là nghiệm của hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 200 \\ 0 \leq y \leq 240 \quad (II) \\ 2x + y \leq 480 \end{cases}$$

sao cho $T = 24x + 15y$ đạt giá trị lớn nhất.

Trước hết, ta xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (II).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (II) là miền ngũ giác $OABCD$ với $O(0;0)$, $A(0;240)$, $B(120;240)$, $C(200;80)$, $D(200;0)$ (hình 8).

Ta có biểu thức $T = 24x + 15y$ có giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh của ngũ giác $OABCD$.

Tính giá trị của biểu thức $T = 24x + 15y$ tại cặp

số $(x; y)$ là toạ độ các đỉnh của ngũ giác $OABCD$

rồi so sánh các giá trị đó. Ta được T đạt giá trị lớn

nhất bằng 6480 khi $x = 120, y = 240$ ứng với toạ độ đỉnh B .

Vậy để thu được tiền lãi là cao nhất thì trong một ngày, phân xưởng cần sản xuất 120 chiếc mũ kiểu thứ nhất và 240 chiếc mũ kiểu thứ hai. Khi đó tiền lãi thu được là 6480 nghìn đồng hay 6480000 đồng.

Câu 2: Một phân xưởng sản xuất hai kiểu mũ. Thời gian để làm ra một chiếc mũ kiểu thứ nhất nhiều gấp hai lần thời gian làm ra một chiếc mũ kiểu thứ hai. Nếu chỉ sản xuất toàn kiểu mũ thứ hai thì trong 1 giờ phân xưởng làm được 60 chiếc. Phân xưởng làm việc 8 tiếng mỗi ngày và thị trường tiêu thụ tối đa trong một ngày là 200 chiếc mũ kiểu thứ nhất và 240 chiếc mũ kiểu thứ hai. Tiền lãi khi bán một chiếc mũ kiểu thứ nhất là 24 nghìn đồng, một chiếc mũ kiểu thứ hai là 15 nghìn đồng. Tính số lượng mũ kiểu thứ nhất và kiểu thứ hai trong một ngày mà phân xưởng cần sản xuất để tiền lãi thu được là cao nhất.

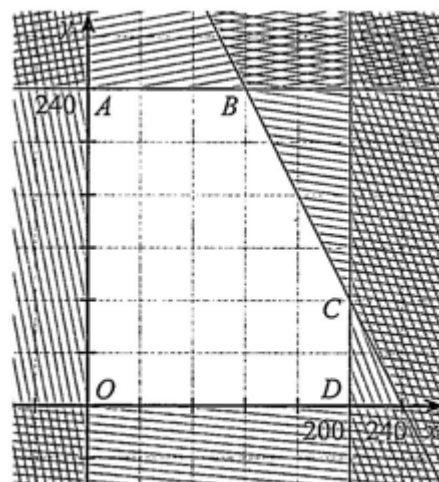
Lời giải

Bước 1: Gọi số lượng mũ kiểu thứ nhất và kiểu thứ hai trong một ngày mà phân xưởng cần sản xuất lần lượt là x và $y (x, y \in \mathbb{N})$. Biểu diễn các đại lượng khác theo x và y .

Gọi số lượng mũ kiểu thứ nhất và kiểu thứ hai trong một ngày mà phân xưởng cần sản xuất lần lượt là x và $y (x, y \in \mathbb{N})$.

Theo giả thiết, thị trường tiêu thụ tối đa trong một ngày là 200 chiếc mũ kiểu thứ nhất và 240 chiếc mũ kiểu thứ hai nên ta có $0 \leq x \leq 200; 0 \leq y \leq 240$

Thời gian làm y chiếc kiểu 2 trong một ngày là $\frac{y}{60} (h)$



Hình 8

Thời gian để làm ra một chiếc mũ kiểu thứ nhất nhiều gấp hai lần thời gian làm ra một chiếc mũ kiểu thứ hai nên thời gian làm mũ thứ nhất là 1 giờ làm được 30 chiếc.

Thời gian làm x chiếc kiểu 1 trong một ngày là $\frac{x}{30}(h)$

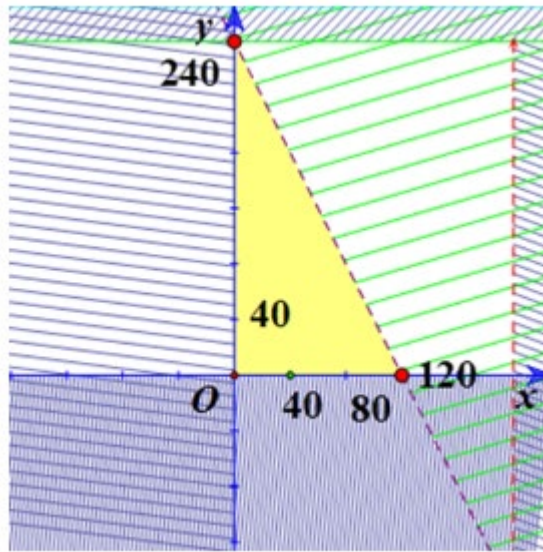
Tổng thời gian làm trong một ngày là $8h$ nên ta có:

$$\frac{x}{30} + \frac{y}{60} = 8$$

Bước 2: Lập hệ bất phương trình.

Bước 3: Biểu diễn miền nghiệm.

Miền biểu diễn miền nghiệm là phần màu vàng:



Bước 4: Tìm x và y để tiền lãi cao nhất.

Từ miền nghiệm ta thấy tiền lãi cao nhất tại khi điểm $(x; y)$ là một trong các đỉnh của tam giác màu vàng:

$$T = 24x + 15y$$

$$T(0; 240) = 15 \cdot 240 = 3600 \text{ (nghìn đồng)}$$

$$T(120; 0) = 24 \cdot 120 = 2880 \text{ (nghìn đồng)}$$

Số lượng mũ kiểu 1 là 240 và số lượng mũ kiểu 2 là 0

Câu 3: Anh Trung có kế hoạch đầu tư 400 triệu đồng vào hai khoản X và Y . Để đạt được lợi nhuận thì khoản X phải đầu tư ít nhất 100 triệu đồng và số tiền đầu tư cho khoản Y không nhỏ hơn số tiền cho khoản X . Viết hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn để mô tả hai khoản đầu tư đó và biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình vừa tìm được.

Lời giải

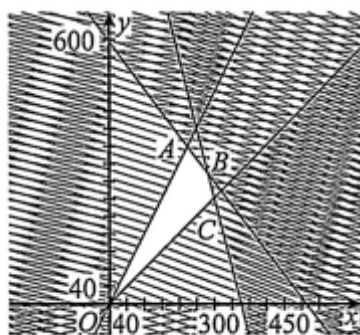
Gọi x, y lần lượt là số tiền anh Trung đầu tư cho hai khoản X và Y (đơn vị: triệu đồng).

Ta có hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} x + y \leq 400 \\ x \geq 100 \\ y \geq x. \end{cases}$$

Câu 4: Một phân xưởng may áo vest và quần âu để chuẩn bị cho dịp cuối năm. Biết may 1 áo vest hết $2m$ vải và cần 20 giờ; 1 quần âu hết $1,5m$ vải và cần 5 giờ. Xí nghiệp được giao sử dụng không quá $900m$ vải và số giờ công không vượt quá 6000 giờ. Theo khảo sát thị trường, số lượng quần bán ra không nhỏ hơn số lượng áo và không vượt quá 2 lần số lượng áo. Khi xuất ra thị trường, 1 chiếc áo lãi 350 nghìn đồng, 1 chiếc quần lãi 100 nghìn đồng. Phân xưởng cần may bao nhiêu áo vest và quần âu để thu được tiền lãi cao nhất (biết thị trường tiêu thụ luôn đón nhận sản phẩm của xí nghiệp)?

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là số áo vest và quần âu phân xưởng cần may ($x \geq 0, y \geq 0, x, y \in \mathbb{Z}$). Tiền lãi thu được $T = 350x + 100y$ (nghìn đồng).



Hình 16

Ta có hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} 2x + 1,5y \leq 900 \\ 20x + 5y \leq 6000 \\ x \leq y \leq 2x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ bất phương trình trên là miền tứ giác $OABC$ với $O(0;0), A(180;360), B(225;300), C(240;240)$ (Hình 16).

Ta được T đạt giá trị lớn nhất khi $x = 225, y = 300$ ứng với toạ độ đỉnh B .

Vậy để thu được tiền lãi cao nhất thì phân xưởng cần may 225 chiếc áo vest và 300 quần âu.

Câu 5: Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kilôgam thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipid. Mỗi kilôgam thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất là $1,6kg$ thịt bò và $1,1kg$ thịt lợn; giá tiền $1kg$ thịt bò là 250 nghìn đồng; $1kg$ thịt lợn là 160 nghìn đồng. Giả sử gia đình đó mua x kilôgam thịt bò và y kilôgam thịt lợn.

a) Viết các bất phương trình biểu thị các điều kiện của bài toán thành một hệ bất phương trình rồi xác định miền nghiệm của hệ đó.

b) Gọi F (nghìn đồng) là số tiền phải trả cho x kilôgam thịt bò và y kilôgam thịt lợn. Hãy biểu diễn F theo x và y .

c) Tìm số kilôgam thịt mỗi loại mà gia đình cần mua để chi phí là ít nhất.

Lời giải

a)

	Thịt bò	Thịt lợn
Protein	800 / 1kg	600 / 1kg
Lipit	200 / 1kg	400 / 1kg

a) Giả sử gia đình đó mua x kilôgam thịt bò và y kilôgam thịt lợn.

Số lượng thịt bò và thịt lợn phải là một số không âm nên ta có: $x \geq 0, y \geq 0$.

Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein trong thức ăn mỗi ngày nên ta có:

$$800x + 600y \geq 900 \Leftrightarrow 8x + 6y \geq 9$$

Một gia đình cần ít nhất 400 đơn vị protein trong thức ăn mỗi ngày nên ta có:

$$200x + 400y \geq 400 \Leftrightarrow x + 2y \geq 2$$

Vì gia đình này chỉ mua nhiều nhất là 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn nên ta có:

$$x \leq 1,6 \text{ và } y \leq 1,1$$

Vậy ta có hệ:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 8x + 6y \geq 9 \\ x + 2y \geq 2 \\ x \leq 1,6 \\ y \leq 1,1 \end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ là tứ giác $ABCD$ với

$A(1,6; 0,2)$ (giao của d' và đường thẳng $x = 1,6$)

$B(1,6; 1,1)$ (giao của đường thẳng $x = 1,6$ và đường thẳng $y = 1,1$)

$C(0,3; 1,1)$ (giao của d và đường thẳng $y = 1,1$)

$D(0,6; 0,7)$ (giao của d và d')

b) Vì số tiền mỗi kg thịt bò và thịt lợn lần lượt là 250 nghìn đồng và 160 nghìn đồng nên ta có

$$F(x; y) = 250x + 160y \text{ (nghìn đồng)}$$

c)

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $F(x; y)$ khi $(x; y)$ thỏa mãn hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 8x + 6y \geq 9 \\ x + 2y \geq 2 \\ x \leq 1,6 \\ y \leq 1,1 \end{cases}$$

Ta có $F(1,6; 0,2) = 250.1,6 + 160.0,2 = 432$.

$F(1,6; 1,1) = 250.1,6 + 160.1,1 = 576$

$F(0,3; 1,1) = 251$

$F(0,6; 0,7) = 262$

Giá trị nhỏ nhất là $F(0,3; 1,1) = 251$.

Vậy để chi phí ít nhất thì cần mua 0,3kg thịt bò và 1,1 thịt lợn.

Chú ý

Đơn vị của F phải là nghìn đồng.

Câu 6 : Người ta dự định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 280kg chất A và 18kg chất B. Với một tấn nguyên liệu loại I, người ta có thể chiết xuất được 40kg chất A và 1,2kg chất B. Với một tấn nguyên liệu loại II, người ta có thể chiết xuất được 20kg chất A và 3kg chất B. Giá mỗi tấn nguyên liệu loại I là 4 triệu đồng và loại II là 3 triệu đồng. Hỏi người ta phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất mà vẫn đạt được mục tiêu đề ra? Biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp tối đa 10 tấn nguyên liệu loại I và 9 tấn nguyên liệu loại II.

Lời giải

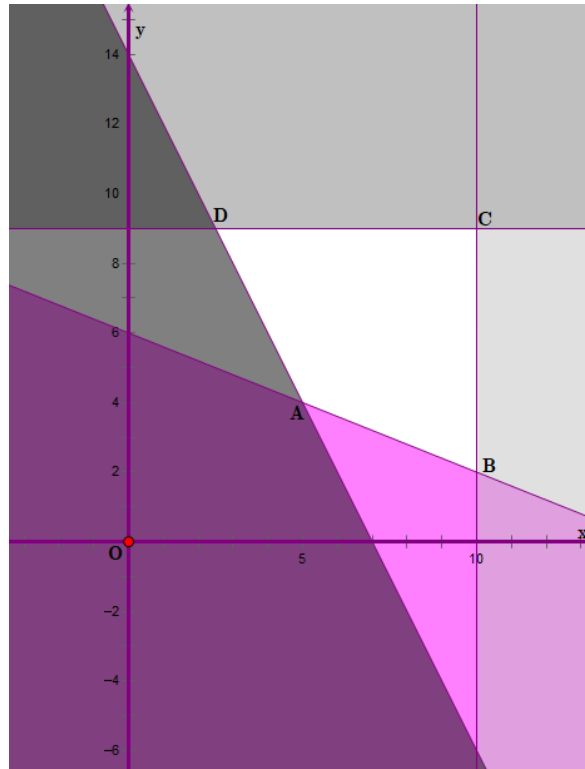
Gọi x và y lần lượt là số tấn nguyên liệu loại I và loại II mà người ta cần dùng. Khi đó khối lượng chất A chiết xuất được là $40x + 20y$ (kg). Khối lượng chất B chiết xuất được là $1,2x + 3y$ (kg). Từ giả thiết ta có hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 40x + 20y \geq 280 \\ 1,2x + 3y \geq 18 \\ x \leq 10 \\ y \leq 9 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} 2x + y \geq 14 \\ 1,2x + 3y \geq 18 \\ x \leq 10 \\ y \leq 9. \end{cases}$$

Hơn nữa, số tiền người ta phải trả để mua nguyên liệu là $F(x; y) = 4x + 3y$ (triệu đồng). Vậy bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $F(x; y)$ với $(x; y)$ thỏa mãn hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn ở trên.

Bước 1. Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên. Miền nghiệm là miền tứ giác ABCD với $A(5;4), B(10;2), C(10;9), D(2,5;9)$.

Bước 2. Tính giá trị của F tại các đỉnh của tứ giác ABCD.



Ta có: $F(5;4) = 32, F(10;2) = 46, F(10;9) = 67, F(2;5;9) = 37$.

So sánh các giá trị này ta thấy $F(5;4)$ là nhỏ nhất. Do đó, giá trị nhỏ nhất của $F(x;y)$ với $(x;y)$ thoả mãn hệ bất phương trình trên là $F(5;4) = 32$.

Vậy người ta cần mua 5 tấn nguyên liệu loại I và 4 tấn nguyên liệu loại II để chi phí là nhỏ nhất.

Câu 7: Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 12 g hương liệu, 9 lít nước và 315 g đường để pha chế hai loại nước A và B . Để pha chế 1 lít nước A cần 45 g đường, 1 lít nước và 0,5 g hương liệu; để pha chế 1 lít nước B cần 15 g đường, 1 lít nước và 2 g hương liệu. Mỗi lít nước A nhận được 60 điểm thưởng, mỗi lít nước B nhận được 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước mỗi loại để đội chơi được số điểm thưởng là lớn nhất?

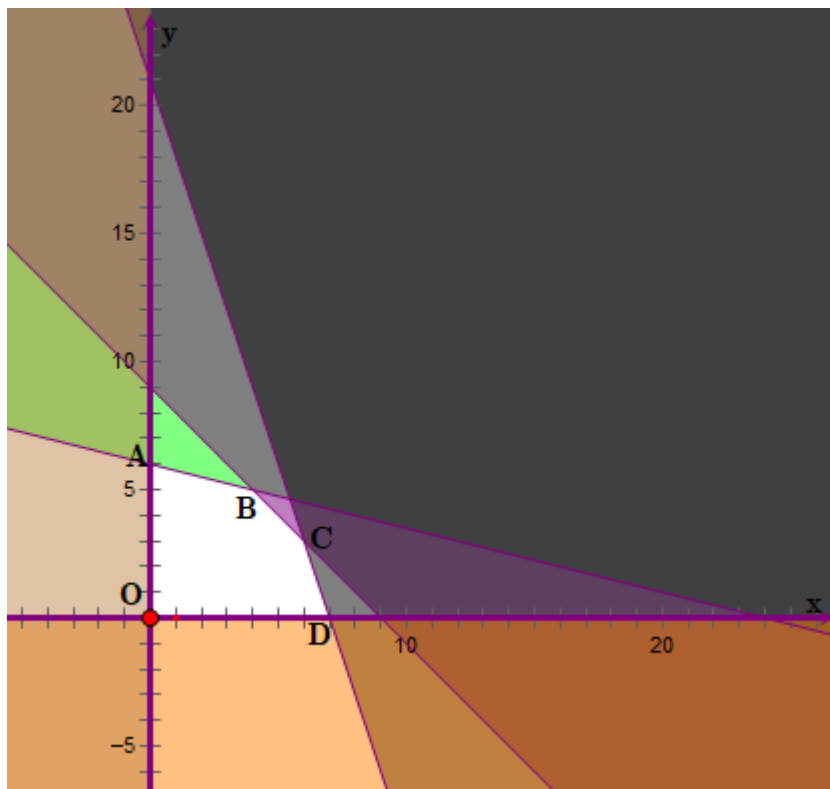
Lời giải

Gọi x và y lần lượt là số lít nước loại A và B cần pha chế. Khi đó, theo đề bài

$$\text{ta có hệ bất phương trình } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 9 \\ 45x + 15y \leq 315 \\ 0,5x + 2y \leq 12. \end{cases}$$

Số điểm thưởng đội chơi nhận được là $F(x;y) = 60x + 80y$ (điểm). Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $F(x;y)$ với $(x;y)$ thoả mãn hệ trên.

Miền nghiệm của hệ là miền ngũ giác $OABCD$ với $A(0;6), B(4;5), C(6;3), D(7;0)$ và $O(0;0)$.



Tính giá trị của F tại các đỉnh của ngũ giác: $F(0;6) = 480, F(4;5) = 640, F(6;3) = 600, F(7;0) = 420$ và $F(0;0) = 0$. So sánh các giá trị đó ta được giá trị lớn nhất cần tìm là $F(4;5) = 640$. Vậy cần pha chế 4 lít nước loại A và 5 lít nước loại B để số điểm thưởng nhận được là lớn nhất.

Câu 8: Bác Năm dự định trồng khoai lang và khoai mì trên mảnh đất có diện tích 8 ha. Nếu trồng 1 ha khoai lang thì cần 10 ngày công và thu được 20 triệu đồng. Nếu trồng 1 ha khoai mì thì cần 15 ngày công và thu được 25 triệu đồng. Bác Năm cần trồng bao nhiêu hecta cho mỗi loại cây để thu được nhiều tiền nhất? Biết rằng, bác Năm chỉ có thể sử dụng được không quá 90 ngày công cho việc trồng khoai lang và khoai mì.

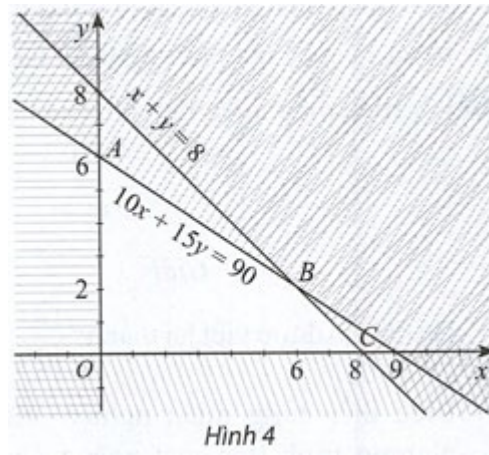
Lời giải

Gọi x là số hecta trồng khoai lang và y là số hecta trồng khoai mì.

Ta có hệ bất phương trình mô tả các điều kiện ràng buộc:

$$\begin{cases} x + y \leq 8 \\ 10x + 15y \leq 90 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên hệ trục tọa độ Oxy ta được miền đa giác $OABC$. Tọa độ các đỉnh của đa giác đó là: $O(0;0); A(0;6); B(6;2); C(8;0)$.



Hình 4

Gọi F là số tiền (đơn vị: triệu đồng) bác Năm thu được, ta có: $F = 20x + 25y$.

Ta phải tìm x, y thỏa mãn hệ bất phương trình sao cho F lớn nhất, nghĩa là tìm giá trị lớn nhất của $F = 20x + 25y$ trên miền đa giác $OABC$.

Tính các giá trị của biểu thức F tại các đỉnh của đa giác, ta có:

Tại $O(0;0)$: $F = 20.0 + 25.0 = 0$;

Tại $A(0;6)$: $F = 20.0 + 25.6 = 150$;

Tại $B(6;2)$: $F = 20.6 + 25.2 = 170$;

Tại $C(8;0)$: $F = 20.8 + 25.0 = 160$.

Ta thấy F đạt giá trị lớn nhất bằng 170 tại $B(6;2)$.

Vậy để thu được nhiều tiền nhất, bác Năm cần trồng 6 ha khoai lang và 2 ha khoai mì.

Câu 9: Một người bán nước giải khát đang có 25 g bột nho và 100 g đường để pha chế hai loại nước nho A và B . Để pha chế 1l nước nho loại A cần 10 g đường và 1 g bột nho; để pha chế 1l nước nho loại B cần 10 g đường và 4 g bột nho. Mỗi lít nước nho loại A khi bán lãi được 30 nghìn đồng, mỗi lít nước nho loại B khi bán lãi được 40 nghìn đồng. Hỏi người đó nên pha chế bao nhiêu lít nước nho mỗi loại để có lợi nhuận cao nhất?

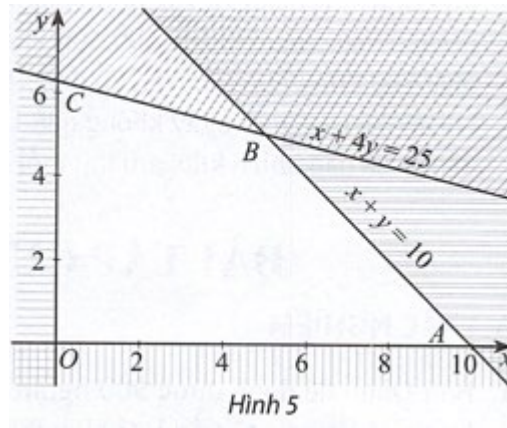
Lời giải

Gọi x và y lần lượt là số lít nước nho loại A và B người đó có thể pha chế. Ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x + 4y \leq 25 \\ x + y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tứ giác $OABC$, trong đó $O(0;0)$;

$A(10;0)$; $B(5;5)$; $C(0;6,25)$.



Hình 5

Gọi F là số tiền lãi (đơn vị: nghìn đồng) thu được, ta có: $F = 30x + 40y$.

Ta có: Tại $O(0;0)$: $F = 30.0 + 40.0 = 0$;

Tại $A(10;0)$: $F = 30.10 + 40.0 = 300$;

Tại $B(5;5)$: $F = 30.5 + 40.5 = 350$;

Tại $C(0;6,25)$: $F = 30.0 + 40.6,25 = 250$.

Ta thấy F đạt GTLN bằng 350 tại $B(5;5)$.

Vậy người đó nên pha chế 5l nước nho mỗi loại để có lợi nhuận cao nhất.

Câu 10 : Một nhà máy sản xuất hai loại thuốc trừ sâu nông nghiệp là A và

B . Cứ sản xuất mỗi thùng loại A thì nhà máy thải ra 0,25 kg khí carbon dioxide (CO_2) và 0,60 kg khí sulfur dioxide (SO_2), sản xuất mỗi thùng loại B thì thải ra 0,50 kg CO_2 và 0,20 kg SO_2 . Biết rằng, quy định hạn chế sản lượng CO_2 của nhà máy tối đa là 75 kg và SO_2 tối đa là 90 kg mỗi ngày.

a) Tìm hệ bất phương trình mô tả số thùng của mỗi loại thuốc trừ sâu mà nhà máy có thể sản xuất mỗi ngày để đáp ứng các điều kiện hạn chế trên. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đó trên mặt phẳng tọa độ.

b) Việc nhà máy sản xuất 100 thùng loại A và 80 thùng loại B mỗi ngày có phù hợp với quy định không?

c) Việc nhà máy sản xuất 60 thùng loại A và 160 thùng loại B mỗi ngày có phù hợp với quy định không?

Lời giải

a) Gọi x là số thùng thuốc trừ sâu loại A , y là số thùng thuốc trừ sâu loại B mà nhà máy sản xuất mỗi ngày. Ta có các điều kiện ràng buộc đối với x, y như sau:

- Hiển nhiên $x \geq 0, y \geq 0$

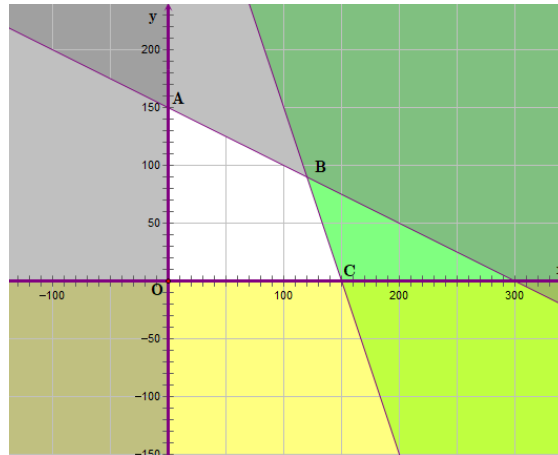
- sản lượng CO_2 tối đa là 75 kg nên $0,25x + 0,5y \leq 75$

- sản lượng SO_2 tối đa là 90 kg nên $0,6x + 0,2y \leq 90$

Từ đó ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 0,25x + 0,5y \leq 75 \\ 0,6x + 0,2y \leq 90 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Biểu diễn từng miền nghiệm của hệ bất phương trình trên hệ trục tọa độ Oxy, ta được như hình dưới.



Miền không tô màu (miền tứ giác $OABC$, bao gồm cả các cạnh) trong hình trên là phần giao của các miền nghiệm và cũng là phần biểu diễn nghiệm của hệ bất phương trình.

b) Nhà máy sản xuất 100 thùng loại A và 80 thùng loại B mỗi ngày tức là $x = 100, y = 80$.

$$\text{Vì } \begin{cases} 0,25 \cdot 100 + 0,5 \cdot 80 = 65 \leq 75 \\ 0,6 \cdot 100 + 0,2 \cdot 80 = 76 \leq 90 \\ 100 \geq 0 \\ 80 \geq 0 \end{cases} \quad \text{nên cặp số } (100; 80) \text{ là một nghiệm của hệ bất phương trình a).}$$

Do đó việc nhà máy sản xuất 100 thùng loại A và 80 thùng loại B mỗi ngày là phù hợp với quy định.

c) vì $0,25 \cdot 60 + 0,5 \cdot 160 = 95 > 75$ nên việc sản xuất 60 thùng loại A và 160 thùng loại B mỗi ngày vượt quá sản lượng CO_2 tối đa.

Vậy việc nhà máy sản xuất 60 thùng loại A và 160 thùng loại B mỗi ngày là không phù hợp với quy định.

Câu 11: Bạn Lan thu xếp được không quá 10 giờ để làm hai loại đèn trung thu tặng cho các trẻ em khuyết tật. Loại đèn hình con cá cần 2 giờ để làm xong 1 cái, còn loại đèn ông sao chỉ cần 1 giờ để làm xong 1 cái. Gọi x, y lần lượt là số đèn hình con cá và đèn ông sao bạn Lan sẽ làm. Hãy lập hệ bất phương trình mô tả điều kiện của x, y và biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đó.

Lời giải

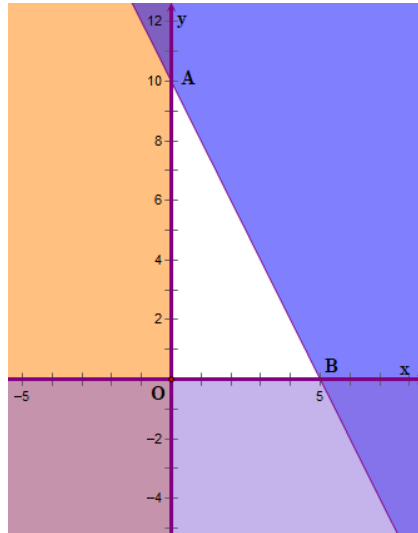
Ta có các điều kiện ràng buộc đối với x, y như sau:

- Hiển nhiên $x \geq 0, y \geq 0$

- Tổng số giờ làm không quá 10 giờ nên $2x + y \leq 10$

Từ đó ta có hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} 2x + y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{N})$$

Biểu diễn từng miền nghiệm của hệ bất phương trình trên hệ trục tọa độ Oxy, ta được như hình dưới.



Miền không tô màu (miền tam giác OAB , bao gồm cả các cạnh) trong hình trên là phần giao của các miền nghiệm và cũng là phần biểu diễn nghiệm của hệ bất phương trình.

Câu 12: Một học sinh dự định vẽ các tấm thiệp xuân làm bằng tay để bán trong một hội chợ Tết. Cần 2 giờ để vẽ một tấm thiệp loại nhỏ có giá 10 nghìn đồng và 3 giờ để vẽ một tấm thiệp loại lớn có giá 20 nghìn đồng. Học sinh này chỉ có 30 giờ để vẽ và ban tổ chức hội chợ yêu cầu phải vẽ ít nhất 12 tấm. Hãy cho biết bạn ấy cần vẽ bao nhiêu tấm thiệp mỗi loại để có được nhiều tiền nhất.

Lời giải

Ta có các điều kiện ràng buộc đối với x, y như sau:

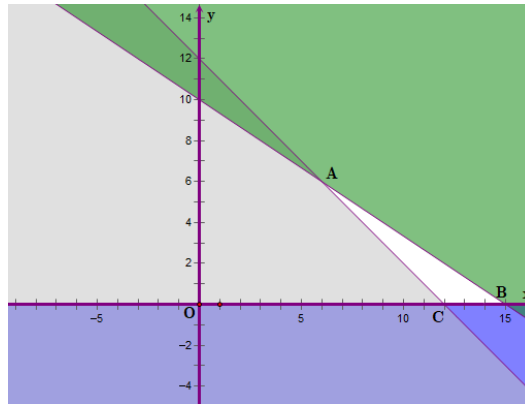
- Hiển nhiên $x \geq 0, y \geq 0$

- Tổng số giờ vẽ không quá 30 giờ nên $2x + 3y \leq 30$

- Số tấm thiệp tối thiểu là 12 tấm nên $x + y \geq 12$

Từ đó ta có hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 30 \\ x + y \geq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{N})$$

Biểu diễn từng miền nghiệm của hệ bất phương trình trên hệ trục tọa độ Oxy, ta được như hình dưới.



Miền không tô màu (miền tam giác ABC , bao gồm cả các cạnh) trong hình trên là phần giao của các miền nghiệm và cũng là phần biểu diễn nghiệm của hệ bất phương trình.

Với các đỉnh $A(6;6), B(15;0), C(12;0)$.

Gọi F là số tiền (đơn vị: nghìn đồng) thu được, ta có: $F = 10x + 20y$

Tính giá trị của F tại các đỉnh của tam giác:

Tại $A(6;6)$: $F = 10.6 + 20.6 = 180$

Tại $B(15;0)$: $F = 10.15 + 20.0 = 150$

Tại $C(12;0)$: $F = 10.12 + 20.0 = 120$

F đạt giá trị lớn nhất bằng 180 tại $A(6;6)$.

Vậy bạn học sinh đó cần vẽ 6 tấm thiệp loại nhỏ và 6 tấm thiệp loại to để có được nhiều tiền nhất.

Câu 13: Trong một tuần, bạn Mạnh có thể thu xếp được tối đa 12 giờ để tập thể dục giảm cân bằng hai môn: đạp xe và tập cử tạ tại phòng tập. Cho biết mỗi giờ đạp xe sẽ tiêu hao 350 calo và không tốn chi phí, mỗi giờ tập cử tạ sẽ tiêu hao 700 calo với chi phí 50000 đồng/giờ. Mạnh muốn tiêu hao nhiều calo nhưng không được vượt quá 7000 calo một tuần. Hãy giúp bạn Mạnh tính số giờ đạp xe và số giờ tập tạ một tuần trong hai trường hợp sau:

a) Mạnh muốn chi phí luyện tập là ít nhất.

b) Mạnh muốn số calo tiêu hao là nhiều nhất.

Lời giải

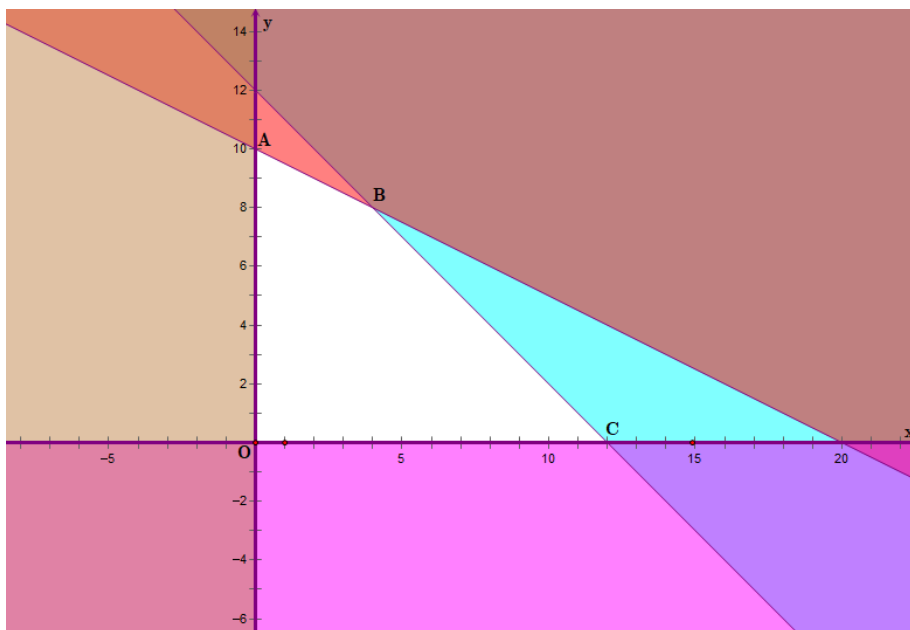
Gọi x, y lần lượt là số giờ đạp xe và tập tạ trong một tuần.

Ta có các điều kiện ràng buộc đối với x, y như sau:

- Hiển nhiên $x \geq 0, y \geq 0$
- Số giờ tập thể dục tối đa là 12 giờ nên $x + y \leq 12$
- Tổng số calo tiêu hao một tuần không quá 7000 calo nên $350x + 700y \leq 7000$

Từ đó ta có hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} x + y \leq 12 \\ 350x + 700y \leq 7000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Biểu diễn từng miền nghiệm của hệ bất phương trình trên hệ trục tọa độ Oxy , ta được như hình dưới.



Miền không tô màu (miền tứ giác $OABC$, bao gồm cả các cạnh) trong hình trên là phần giao của các miền nghiệm và cũng là phần biểu diễn nghiệm của hệ bất phương trình.

Với các đỉnh $O(0;0)$, $A(0;10)$, $B(4;8)$, $C(12;0)$.

a) Gọi F là chi phí luyện tập (đơn vị: nghìn đồng), ta có: $F = 50y$

Tính giá trị của F tại các đỉnh của tứ giác:

Tại $O(0;0)$, $F = 50 \cdot 0 = 0$

Tại $A(0;10)$, $F = 50 \cdot 10 = 500$

Tại $B(4;8)$, $F = 50 \cdot 8 = 400$

Tại $C(12;0)$, $F = 50 \cdot 0 = 0$

F đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 tại $O(0;0)$, $C(12;0)$.

Vậy bạn Mạnh cần đạp xe 12 giờ hoặc không tập thể dục..

b) Gọi T là lượng calo tiêu hao (đơn vị: calo), ta có:

$T = 350x + 700y$

Tính giá trị của F tại các đỉnh của tứ giác:

Tại $O(0;0)$, $T = 350 \cdot 0 + 700 \cdot 0 = 0$

Tại $A(0;10), T = 350.0 + 700.10 = 7000$

Tại $B(4;8), T = 350.4 + 700.8 = 7000$

Tại $C(12;0), T = 350.12 + 700.0 = 4200$

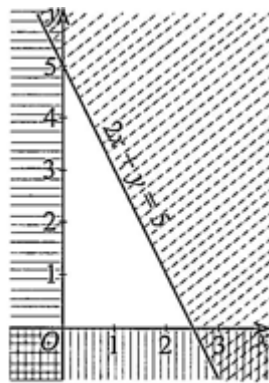
T đạt giá trị lớn nhất bằng 7000 tại $A(0;10), B(4;8)$.

Vậy bạn Mạnh có thể chọn một trong hai phương án: Tập tạ 10 giờ hoặc đạp xe 4 tiếng và tập tạ 8 tiếng.

Câu 14: Bạn Bích có 500 g bột gạo để pha hai loại nước hồ tráng bánh đa và bánh xèo. Một lít nước hồ tráng bánh đa cần 200 g bột gạo, còn một lít nước hồ tráng bánh xèo chỉ cần 100 g bột gạo. Gọi x, y lần lượt là số lít nước hồ tráng bánh đa và bánh xèo. Hãy lập hệ bất phương trình mô tả điều kiện của x, y và biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đó.

Lời giải

Hệ bất phương trình mô tả điều kiện của x, y :

$$\begin{cases} 2x + y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$


Hình 3

Miền không gạch chéo bao gồm cả các cạnh trong Hình 3 là phần giao của các miền nghiệm và cũng là phần biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên

Câu 15: Một bãi đậu xe ban đêm có diện tích đậu xe là $150m^2$ (không tính lối đi cho xe ra vào). Cho biết xe du lịch cần diện tích $3m^2$ /chiếc và phải trả phí 40 nghìn đồng, xe tải cần diện tích $5m^2$ / chiếc và phải trả phí 50 nghìn đồng. Nhân viên quản lí không thể phục vụ quá 40 xe một đêm. Hãy tính số lượng xe mỗi loại mà chủ bãi xe có thể cho đăng kí đậu xe để có doanh thu cao nhất.

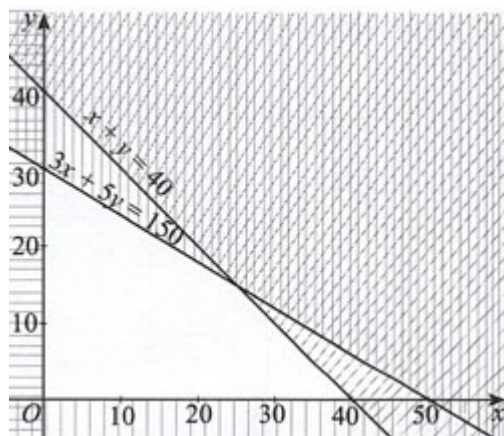
Lời giải

Gọi x là số xe du lịch và y là số xe tải mà chủ bãi xe nên cho đậu một đêm. Ta có hệ bất phương

trình:

$$\begin{cases} x + y \leq 40 \\ 3x + 5y \leq 150 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Miền không gạch chéo bao gồm cả các cạnh trong Hình 4 là phần giao của các miền nghiệm và cũng là phần biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên.



Số tiền chủ bãi xe thu được $F = 40x + 50y$ đạt GTLN bằng 1750 nghìn đồng tại $(25; 15)$. Vậy để có doanh thu cao nhất, chủ bãi xe có thể cho đăng kí 25 chiếc xe du lịch và 15 chiếc xe tải.

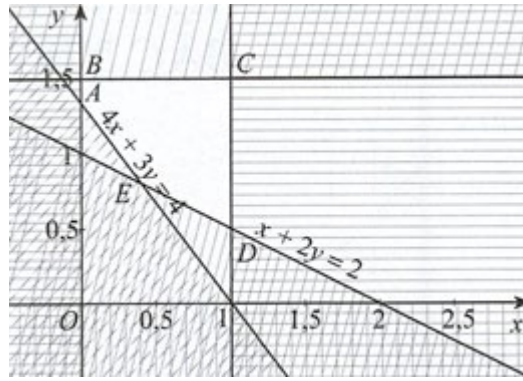
Câu 16: Cho biết mỗi kilôgam thịt bò giá 250 nghìn đồng, trong đó có chứa khoảng 800 đơn vị protein và 100 đơn vị lipit, mỗi kilôgam thịt heo có giá 200 nghìn đồng, trong đó có chứa khoảng 600 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Một gia đình cần ít nhất 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit trong khẩu phần thức ăn mỗi ngày và họ chỉ có thể mua một ngày không quá 1kg thịt bò và 1,5kg thịt heo. Hỏi gia đình này phải mua bao nhiêu kilôgam thịt mỗi loại để chi phí là ít nhất?

Lời giải

Gọi x và y lần lượt là số kilôgam thịt bò và thịt heo có thể mua. Ta có hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 4x + 3y \geq 4 \\ x + 2y \geq 2 \\ x \geq 0 \\ x \leq 1 \\ y \geq 0 \\ y \leq 1,5 \end{cases}$$

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình ta được miền đa giác $ABCDE$ có toạ độ các đỉnh là: $A\left(0; \frac{4}{3}\right); B\left(0; \frac{3}{2}\right); C\left(1; \frac{3}{2}\right); D\left(1; \frac{1}{2}\right); E\left(\frac{2}{5}; \frac{4}{5}\right)$. Số tiền người đó thu được $F = 250x + 200y$ đạt GTNN là 260 nghìn đồng tại đỉnh $E\left(\frac{2}{5}; \frac{4}{5}\right)$



Vậy gia đình này chỉ cần mua $\frac{2}{5}kg$ thịt bò và $\frac{4}{5}kg$ thịt heo để đủ đáp ứng yêu cầu về dinh dưỡng mà lại tốn chi phí ít nhất.

Câu 17: Bác Ngọc thực hiện chế độ ăn kiêng với yêu cầu tối thiểu hằng ngày qua thức uống là $300ca - lo, 36$ đơn vị vitamin A và 90 đơn vị vitamin C. Một cốc đồ uống ăn kiêng thứ nhất cung cấp $60ca - lo, 12$ đơn vị vitamin A và 10 đơn vị vitamin C. Một cốc đồ uống ăn kiêng thứ hai cung cấp $60ca - lo, 6$ đơn vị vitamin A và 30 đơn vị vitamin C.

a) Viết hệ bất phương trình mô tả số lượng cốc cho đồ uống thứ nhất và thứ hai mà bác Ngọc nên uống mỗi ngày để đáp ứng nhu cầu cần thiết đối với số ca-lo và số đơn vị vitamin hấp thụ.

b) Chỉ ra hai phương án mà bác Ngọc có thể chọn lựa số lượng cốc cho đồ uống thứ nhất và thứ hai nhằm đáp ứng nhu cầu cần thiết đối với số ca-lo và số đơn vị vitamin hấp thụ.

Lời giải

a) Gọi x, y lần lượt là số lượng cốc cho đồ uống thứ nhất và thứ hai cần tìm.

Lượng calo trong cả 2 đồ uống là: $60x + 60y$

Lượng vitamin A trong 2 đồ uống là: $12x + 6y$

Lượng vitamin C trong 2 đồ uống là: $10x + 30y$

Ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 60x + 60y \geq 300 \\ 12x + 6y \geq 36 \\ 10x + 30y \geq 90 \end{cases}$$

b)

+) Thay cặp số $(2; 4)$ vào hệ ta được:

$$60.2 + 60.2 = 360 > 300$$

$$2.12 + 4.6 = 48 > 36$$

$$2.10 + 4.30 = 140 > 90$$

$\Rightarrow (2; 4)$ là một nghiệm của hệ.

+) Thay cặp số $(1; 5)$ vào hệ ta được:

$$1.60 + 5.60 = 360 > 300$$

$$1.12 + 5.6 = 42 > 36$$

$$1.10 + 5.30 = 160 > 90$$

$\Rightarrow (1; 5)$ là một nghiệm của hệ.

Vậy hai phương án bác Ngọc có thể chọn là:

Phương án 1: 2 cốc loại 1 và 4 cốc loại 2.

Phương án 2: 1 cốc loại 1 và 5 cốc loại 2.

Câu 18: Một chuỗi nhà hàng ăn nhanh bán đồ ăn từ 10h00 sáng đến 22h00 mỗi ngày. Nhân viên phục vụ của nhà hàng làm việc theo hai ca, mỗi ca 8 tiếng, ca I từ 10h00 đến 18h00 và ca II từ 14h00 đến 22h00.

Tiền lương của nhân viên được tính theo giờ (bảng bên).

Khoảng thời gian làm việc	Tiền lương/giờ
10h00 – 18h00	20000 đồng
14h00 – 22h00	22000 đồng

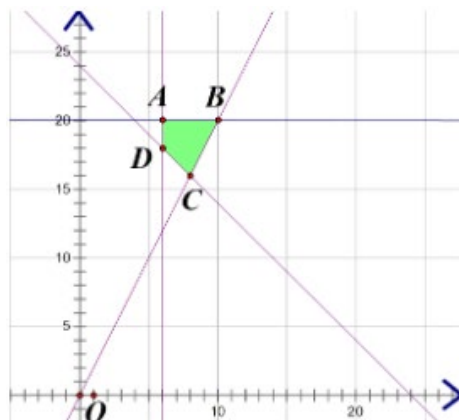
Để mỗi nhà hàng hoạt động được thì cần tối thiểu 6 nhân viên trong khoảng 10h00 - 18h00, tối thiểu 24 nhân viên trong thời gian cao điểm 14h00 - 18h00 và không quá 20 nhân viên trong khoảng 18h00 - 22h00. Do lượng khách trong khoảng 14h00 - 22h00 thường đông hơn nên nhà hàng cần số nhân viên ca II ít nhất phải gấp đôi số nhân viên ca I. Em hãy giúp chủ chuỗi nhà hàng chỉ ra cách huy động số lượng nhân viên cho mỗi ca sao cho chi phí tiền lương mỗi ngày là ít nhất.

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là số nhân viên ca I và ca II ($x > 0, y > 0$)

Theo giả thiết ta có:
$$\begin{cases} x \geq 6 \\ x + y \geq 24 \\ (x + y) - x \leq 20 \\ y \geq 2x \end{cases}$$

Biểu diễn tập nghiệm của hệ bất phương trình



Tập nghiệm của bất phương trình giới hạn bởi tứ giác $ABCD$ với:

$$A(6;20), B(10;20), C(8;16), D(6;18)$$

Tiền lương mỗi ngày của các nhân viên: $T = 20x + 22y$ (nghìn đồng)

$$T(6;20) = 20.6 + 22.20 = 560 \text{ (nghìn đồng)}$$

$$T(10;20) = 20.10 + 22.20 = 640 \text{ (nghìn đồng)}$$

$$T(8;16) = 20.8 + 22.16 = 512 \text{ (nghìn đồng)}$$

$$T(6;18) = 20.6 + 22.18 = 516 \text{ (nghìn đồng)}$$

Vậy để tiền lương mỗi ngày ít nhất thì ca I có 8 nhân viên, ca II có 16 nhân viên.

Câu 19: Một trận bóng đá được tổ chức tại một sân vận động có sức chứa 40000 người, ban tổ chức phát hành hai loại vé là 400000 đồng và 200000 đồng. Do điều kiện sân đấu nên số lượng vé có giá 400000 không lớn hơn số lượng vé có giá 200000 đồng. Để an toàn phòng dịch, liên đoàn bóng đá yêu cầu số lượng vé phát hành không được quá 30% sức chứa của sân. Để tổ chức được trận đấu thì số tiền thu được qua bán vé không được ít hơn 3 tỉ đồng. Gọi x, y lần lượt là số vé giá 400000 đồng và 200000 đồng được bán ra.

a) Viết hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn số vé mỗi loại được bán ra đảm bảo mục đích của ban tổ chức.

b) Chỉ ra hai nghiệm của hệ bất phương trình đó.

Lời giải

$$a) \begin{cases} x + y & \leq 12000 \\ 2x + y & \geq 15000 \\ x - y & \leq 0 \\ x & \geq 0 \\ y & \geq 0 \end{cases} \quad b) (5000; 6000), (3000; 9000)$$

Câu 20: Một xưởng sản xuất bàn và ghế. Một chiếc bàn cần 1,5 giờ lắp ráp và 1 giờ hoàn thiện; một chiếc ghế cần 1 giờ lắp ráp và 2 giờ hoàn thiện. Bộ phận lắp ráp có 3 nhân công, bộ phận hoàn thiện có 4 nhân công. Biết thị trường luôn tiêu thụ hết sản phẩm của xưởng và lượng ghế tiêu thụ không vượt quá 3,5 lần số bàn.

a) Viết hệ bất phương trình mô tả số lượng bàn và ghế mà trong một ngày phân xưởng có thể sản xuất, biết một nhân công làm việc không quá 8 tiếng mỗi ngày.

b) Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đó.

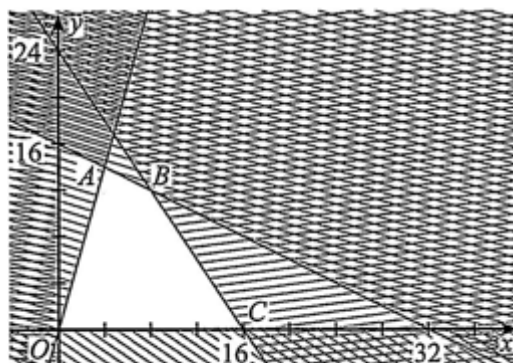
c) Biết một chiếc bàn lãi 600 nghìn đồng, một chiếc ghế lãi 450 nghìn đồng. Hỏi trong một ngày, xưởng cần sản xuất bao nhiêu chiếc bàn, bao nhiêu chiếc ghế để thu được tiền lãi cao nhất?

Lời giải

a) Gọi x, y lần lượt là số bàn, số ghế mà xưởng sản xuất trong một ngày ($x \geq 0; y \geq 0; x, y \in \mathbb{Z}$). Ta có hệ:

$$\begin{cases} 1,5x + y \leq 24 \\ x + 2y \leq 32 \\ 3,5x - y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

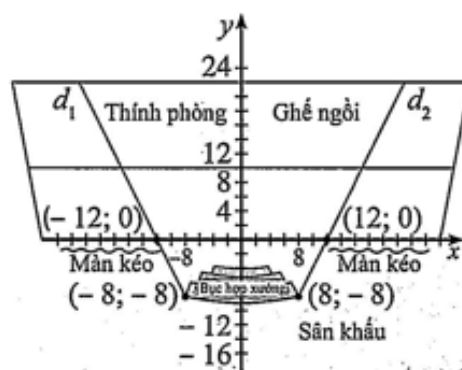
b) Miền nghiệm của hệ là tứ giác $OABC$ (Hình 18).



Hình 18

c) Để thu được tiền lãi cao nhất thì một ngày, xưởng sản xuất 8 chiếc bàn và 12 chiếc ghế. Khi đó tiền lãi mỗi ngày là 10200000 đồng.

Câu 21: Hình 13 mô tả sơ đồ một sân khấu gắn với hệ trục tọa độ Oxy (đơn vị trên các trục tọa độ là 1 mét). Phần tính phòng giới hạn bởi hai đường thẳng d_1, d_2 là vị trí ngồi của khán giả có thể nhìn thấy dàn hợp xướng. Gọi $(x; y)$ là tọa độ ngồi của khán giả ở thính phòng. Viết hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y mà khán giả có thể nhìn thấy dàn hợp xướng.



Hình 13

Lời giải

$$\begin{cases} 2x - y < 24 \\ 2x + y > -24 \\ 10 \leq y \leq 22 \end{cases}$$

Câu 22: . Bác An đầu tư 1,2 tỉ đồng vào ba loại trái phiếu, trái phiếu chính phủ với lãi suất 7% một năm, trái phiếu ngân hàng với lãi suất 8% một năm và trái phiếu doanh nghiệp rủi ro cao với lãi suất 12% một năm. Vì lí do giảm thuế, bác An muốn số tiền đầu tư trái phiếu chính phủ gấp ít nhất 3 lần số tiền đầu tư trái phiếu ngân hàng. Hơn nữa, để giảm thiểu rủi ro, bác An đầu tư không

quá 200 triệu đồng cho trái phiếu doanh nghiệp. Hỏi bác An nên đầu tư mỗi loại trái phiếu bao nhiêu tiền để lợi nhuận thu được sau một năm là lớn nhất?

Lời giải

	Trái phiếu chính phủ	Trái phiếu ngân hàng	Trái phiếu doanh nghiệp
Lãi suất	7% / năm	8% / năm	12% / năm

Bước 1:

1,2 tỉ đồng=1200 (triệu đồng)

Gọi x là số tiền mua trái phiếu ngân hàng và y là số tiền mua trái phiếu doanh nghiệp.

Khi đó $x \geq 0, y \geq 0$.

Bác An đầu tư 1,2 tỉ đồng vào ba loại trái phiếu, trái phiếu chính phủ nên số tiền đầu tư trái phiếu chính phủ là $1200 - x - y$ (triệu đồng)

Số tiền đầu tư trái phiếu chính phủ gấp ít nhất 3 lần số tiền đầu tư trái phiếu ngân hàng nên ta có:
 $1200 - x - y \geq 3x \Leftrightarrow 4x + y \leq 1200$

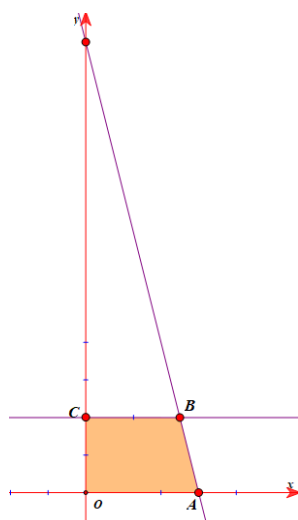
Bác An đầu tư không quá 200 triệu đồng cho trái phiếu doanh nghiệp nên $y \leq 200$

Từ điều kiện của bài toán ta có số tiền bác An đầu tư trái phiếu phải thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 4x + y \leq 1200 \\ y \leq 200 \end{cases}$$

Xác định miền nghiệm là miền tứ giác $OABC$ với:

$O(0;0); A(300;0); B(250;200); C(0;200)$



Bước 2: Lợi nhuận thu được sau một năm là

$$\begin{aligned} F(x; y) &= (1200 - x - y) \cdot 7\% + x \cdot 8\% + y \cdot 12\% \\ &= 84 + 0,01x + 0,05y \end{aligned}$$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $F(x;y)$ khi $(x;y)$ thỏa mãn hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 4x + y \leq 1200 \\ y \leq 200 \end{cases}$$

Thay tọa độ các điểm O, A, B, C vào biểu thức $F(x; y)$ ta được:

$$F(0; 0) = 80$$

$$F(300; 0) = 84 + 0,01.300 + 0,05.0 = 87$$

$$F(250; 200) = 84 + 0,01.250 + 0,05.200 = 96,5$$

$$F(0; 200) = 84 + 0,01.0 + 0,05.200 = 94$$

$\Rightarrow F$ đạt giá trị lớn nhất là 96,5 nếu $x = 250$ và $y = 200$.

Vậy bác An nên đầu tư 250 triệu đồng trái phiếu ngân hàng, 200 triệu trái phiếu doanh nghiệp và 750 trái phiếu chính phủ.

Câu 23: Một công ty dự định chi tối đa 160 triệu đồng cho quảng cáo một sản phẩm mới trong một tháng trên các đài phát thanh và truyền hình. Biết cùng một thời lượng quảng cáo, số người mới quan tâm đến sản phẩm trên truyền hình gấp 8 lần trên đài phát thanh, tức là quảng cáo trên truyền hình có hiệu quả gấp 8 lần trên đài phát thanh.

Đài phát thanh chỉ nhận các quảng cáo có tổng thời lượng trong một tháng tối đa là 900 giây với chi phí là 80 nghìn đồng/giây. Đài truyền hình chỉ nhận các quảng cáo có tổng thời lượng trong một tháng tối đa là 360 giây với chi phí là 400 nghìn đồng/giây.

Công ty cần đặt thời gian quảng cáo trên các đài phát thanh và truyền hình như thế nào để hiệu quả nhất?

Gợi ý. Nếu coi hiệu quả khi quảng cáo 1 giây trên đài phát thanh là 1 (đơn vị) thì hiệu quả khi quảng cáo 1 giây trên đài truyền hình là 8 (đơn vị). Khi đó hiệu quả quảng cáo x (giây) trên đài phát thanh và y (giây) trên truyền hình là $F(x, y) = x + 8y$. Ta cần tìm giá trị lớn nhất của hàm $F(x, y)$ với x, y thỏa mãn các điều kiện trong đề bài.

Lời giải

	Đài phát thanh	Truyền hình
Chi phí nhận quảng cáo	80 nghìn đồng /giây	400 nghìn đồng/giây
Hiệu quả quảng cáo	1 (đơn vị)	8 (đơn vị)

Gọi x và y là số giây quảng cáo trên đài phát thanh và trên truyền hình.

Khi đó $x \geq 0; y \geq 0$

160 triệu đồng = 160000 (nghìn đồng)

Chi phí quảng cáo x giây trên đài phát thanh và y giây trên truyền hình là $80x + 400y$ (nghìn đồng)

Vì công ty dự chi tối đa 160 triệu đồng nên ta có

$$80x + 400y \leq 160000 \Leftrightarrow x + 5y \leq 2000$$

Đài phát thanh chỉ nhận các quảng cáo có tổng thời lượng trong một tháng tối đa là 900 giây nên ta có: $x \leq 900$

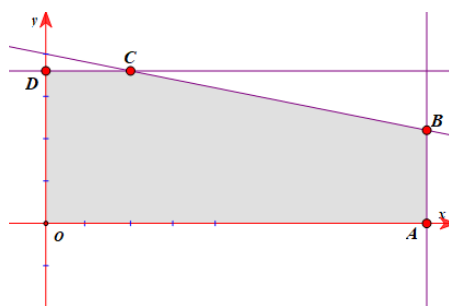
Đài truyền hình chỉ nhận các quảng cáo có tổng thời lượng trong một tháng tối đa là 360 giây nên ta có: $y \leq 360$

Ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 5y \leq 2000 \\ x \leq 900 \\ y \leq 360 \end{cases}$$

Xác định miền nghiệm là miền ngũ giác $OABCD$ với:

$A(900 ; 0)$; $B(900 ; 220)$; $C(200 ; 360)$; $D(0 ; 400)$



Hiệu quả quảng cáo là: $F(x; y) = x + 8y$

Ta có:

$$F(0 ; 0) = 0$$

$$F(900 ; 0) = 900 + 8.0 = 900$$

$$F(900 ; 220) = 900 + 8.220 = 2660$$

$$F(200 ; 360) = 3080$$

$$F(0 ; 400) = 3200$$

Vậy công ty cần đặt thời gian quảng cáo trên đài phát thanh là 0 giây và trên truyền hình là 400 giây thì hiệu quả nhất.

Câu 24: Một hợp tác xã chăn nuôi dự định trộn hai loại thức ăn gia súc X và Y để tạo thành thức ăn hỗn hợp cho gia súc. Giá một bao loại X là 250 nghìn đồng. giá một bao loại Y là 200 nghìn đồng. Mỗi bao loại X chứa 2 đơn vị chất dinh dưỡng A , 2 đơn vị chất dinh dưỡng B và 2 đơn vị chất dinh dưỡng C . Mỗi bao loại Y chứa 1 đơn vị chất dinh dưỡng A , 9 đơn vị chất dinh dưỡng B và 3 đơn vị chất dinh dưỡng C . Tìm chi phí nhỏ nhất để mua hai loại thức ăn gia súc X và Y sao cho hỗn hợp thu được chứa tối thiểu 12 đơn vị chất dinh dưỡng A , 36 đơn vị chất dinh dưỡng B và 24 đơn vị chất dinh dưỡng C .

A. 1,95 triệu đồng.

B. 4,5 triệu đồng.

C. 1,85 triệu đồng.

D. 1,7 triệu đồng.

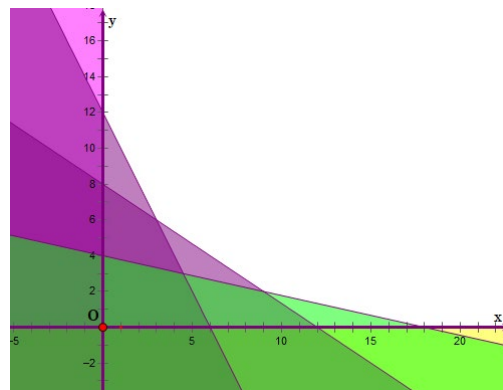
Lời giải

Chọn A

Gọi x và y tương ứng là số bao loại X và loại Y . Khi đó, theo đề bài ta có hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \geq 12 \\ 2x + 9y \geq 36 \\ 2x + 3y \geq 24 \end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ là miền có các đỉnh là $A(0;12), B(3;6), C(9;2), D(18;0)$ (miền không bị gạch).



Chi phí để mua hai loại thức ăn là $F(x; y) = 250x + 200y$ (nghìn đồng).

Thay giá trị tại các đỉnh ta có $F(0;12) = 2400, F(3;6) = 1950, F(9;2) = 2650, F(18;0) = 4500$. Do đó, giá trị nhỏ nhất là $F(3;6) = 1950$. Vậy chi phí nhỏ nhất để mua hai loại thức ăn là 1,95 triệu đồng.

Câu 25: Một phân xưởng có hai máy chuyên dụng M_1 và M_2 để sản xuất hai loại sản phẩm A và B theo đơn đặt hàng. Nếu sản xuất được một tấn sản phẩm loại A thì phân xưởng nhận được số tiền lãi là 2 triệu đồng. Nếu sản xuất được một tấn sản phẩm loại B thì phân xưởng nhận được số tiền lãi là 1,6 triệu đồng. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại A , người ta phải dùng máy M_1 trong 3 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại B , người ta phải dùng máy M_1 trong 1 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Một máy không thể dùng để sản xuất đồng thời hai loại sản phẩm. Máy M_1 làm việc không quá 6 giờ một ngày và máy M_2 làm việc không quá 4 giờ một ngày. Hỏi số tiền lãi lớn nhất mà phân xưởng này có thể thu được trong một ngày là bao nhiêu?

Lời giải

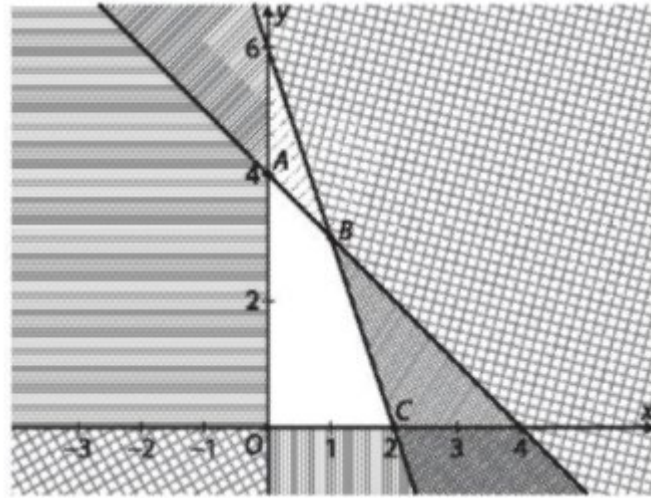
Gọi x và y lần lượt là số tấn sản phẩm loại A và loại B mà phân xưởng sản

xuất được. Khi đó, theo đề bài ta có hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \end{cases}$$

Số tiền lãi phân xưởng thu được là $F(x; y) = 2x + 1,6y$ (triệu đồng). Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $F(x; y)$ với $(x; y)$ thoả mãn hệ trên.

Miền nghiệm của hệ là miền tứ giác $OABC$ với $O(0;0)$, $A(0;4)$, $B(1;3)$ và $C(2;0)$.



Tính giá trị của F tại các đỉnh ta được $F(0;4) = \frac{32}{5}$, $F(1;3) = \frac{34}{5}$, $F(2;0) = 4$, $F(0;0) = 0$. Khi đó giá trị lớn nhất cần tìm là $F(1;3) = \frac{34}{5}$. Vậy số tiền lãi lớn nhất mà phân xưởng có thể thu được là 6,8 triệu đồng.

Câu 26: Giả sử một người ăn kiêng cần được cung cấp ít nhất 300 calo, 36 đơn vị vitamin A và 90 đơn vị vitamin C mỗi ngày từ hai loại đồ uống I và II. Mỗi cốc đồ uống I cung cấp 60 calo, 12 đơn vị vitamin A và 10 đơn vị vitamin C .

Mỗi cốc đồ uống II cung cấp 60 calo, 6 đơn vị vitamin A và 30 đơn vị vitamin C . Biết rằng một cốc đồ uống I có giá 12 nghìn đồng và một cốc đồ uống II có giá 15 nghìn đồng.

a) Gọi x và y tương ứng là số cốc đồ uống I và II. Viết các bất phương trình biểu thị các điều kiện của bài toán thành một hệ bất phương trình và xác định miền nghiệm của hệ đó.

b) Gọi F (nghìn đồng) là số tiền phải trả cho x cốc đồ uống I và y cốc đồ uống II. Hãy biểu diễn F theo x và y .

c) Biết rằng F đạt giá trị nhỏ nhất trên miền nghiệm tìm được ở câu a tại một trong các đỉnh của miền nghiệm, tìm giá trị nhỏ nhất đó. Từ đó suy ra người đó cần uống bao nhiêu cốc loại I và loại II để chi phí là nhỏ nhất mà vẫn đáp ứng được yêu cầu hằng ngày.

Lời giải

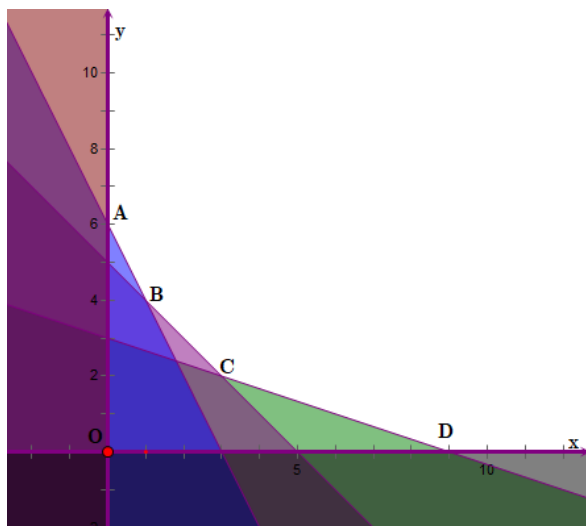
a) Gọi x và y lần lượt là số cốc đồ uống I và II thoả mãn điều kiện đề bài.

Khi đó ta có $x \geq 0$ và $y \geq 0$. Hơn nữa, để người ăn kiêng được cung cấp đủ lượng calo và vitamin thì $60x + 60y \geq 300$, $12x + 6y \geq 36$ và $10x + 30y \geq 90$.

Từ đó, ta có hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 60x + 60y \geq 300 \text{ hay } x + y \geq 5 \\ 12x + 6y \geq 36 \\ 10x + 30y \geq 90 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 5 \\ 2x + y \geq 6 \\ x + 3y \geq 9 \end{cases}$$

Miền nghiệm là miền không bị gạch với các đỉnh $A(0;6), B(1;4), C(3;2), D(9;0)$ như hình dưới đây.



b) Chi phí cho hai loại đồ uống là $F(x; y) = 12x + 15y$ (nghìn đồng).

c) Ta tính giá trị của F tại các đỉnh: $F(0;6) = 90, F(1;4) = 72, F(3;2) = 66, F(9;0) = 108$. Do đó F nhỏ nhất tại $(x; y) = (3; 2)$.

Vậy người đó cần uống 3 cốc đồ uống I và 2 cốc đồ uống II để đạt được các mục tiêu đề ra.

Câu 27: Một công ty dự định sản xuất hai loại sản phẩm A và B. Các sản phẩm này được chế tạo từ ba loại nguyên liệu I, II và III. Số kilogram dự trữ từng loại nguyên liệu và số kilogram từng loại nguyên liệu cần dùng để sản xuất ra 1 kg sản phẩm được cho trong bảng sau:

Loại nguyên liệu	Số kilogram nguyên liệu dự trữ	Số kilogram nguyên liệu cần dùng sản xuất 1 kg sản phẩm	
		A	B
I	8	2	1
II	24	4	4
III	8	1	2

Công ty đó nên sản xuất bao nhiêu sản phẩm mỗi loại để tiền lãi thu về lớn nhất? Biết rằng, mỗi kilogram sản phẩm loại A lãi 30 triệu đồng, mỗi kilogram sản phẩm loại B lãi 50 triệu đồng.

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là số kilogram sản phẩm loại A, loại B mà công ty đó sản xuất.

Ta có các điều kiện ràng buộc đối với x, y như sau:

Hiển nhiên $x \geq 0, y \geq 0$

Nguyên liệu loại I có số kilogram dự trữ là 8 kg nên $2x + y \leq 8$

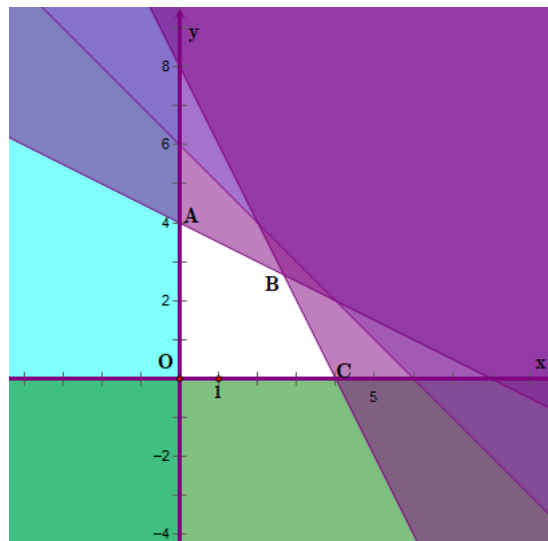
Nguyên liệu loại II có số kilogram dự trữ là 24 kg nên $4x + 4y \leq 24$

Nguyên liệu loại III có số kilogram dự trữ là 8 kg nên $x + 2y \leq 8$

Từ đó ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 8 \\ 4x + 4y \leq 24 \\ x + 2y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Biểu diễn từng miền nghiệm của mỗi bất phương trình trên hệ trục tọa độ Oxy.



Miền không gạch chéo (miền tứ giác $OABC$, bao gồm cả các cạnh) trong hình trên là phần giao của các miền nghiệm và cũng là phần biểu diễn nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Với các đỉnh $O(0;0)$, $A(0;4)$, $B\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$, $C(4;0)$.

Gọi F là số tiền lãi (đơn vị: triệu đồng) thu về, ta có:

$$F = 30x + 50y$$

Tính giá trị của F tại các đỉnh của tứ giác:

$$\text{Tại } O(0;0), F = 30.0 + 50.0 = 0$$

$$\text{Tại } A(0;4), F = 30.0 + 50.4 = 200$$

$$\text{Tại } B\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right), F = 30.\frac{8}{3} + 50.\frac{8}{3} = \frac{640}{3}$$

Tại $C(4;0): F = 30.4 + 50.0 = 120$

F đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{640}{3}$ tại $B\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

Vậy công ty đó nên sản xuất $\frac{8}{3}kg$ sản phẩm mỗi loại để tiền lãi thu về lớn nhất.

Câu 28: Một công ty cần mua các tủ đựng hồ sơ. Có hai loại tủ: Tủ loại A chiếm $3m^2$ sàn, loại này có sức chứa $12m^3$ và có giá 7,5 triệu đồng; tủ loại B chiếm $6m^2$ sàn, loại này có sức chứa $18m^3$ và có giá 5 triệu. Cho biết công ty chỉ thu xếp được nhiều nhất là $60m^2$ mặt bằng cho chỗ đựng hồ sơ và ngân sách mua tủ không quá 60 triệu đồng. Hãy lập kế hoạch mua sắm để công ty có được thể tích đựng hồ sơ lớn nhất.

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là số tủ loại A, loại B mà công ty cần mua.

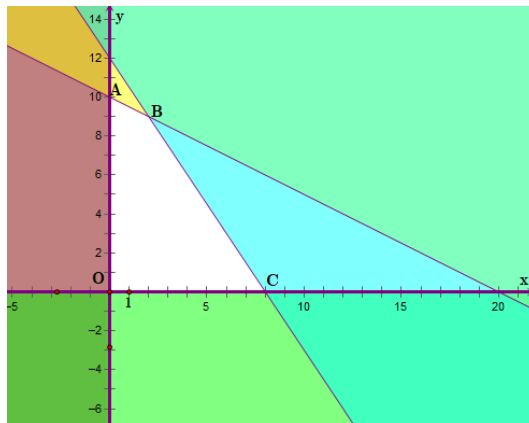
Ta có các điều kiện ràng buộc đối với x, y như' sau:

- Hiển nhiên $x \geq 0, y \geq 0$
- Mặt bằng nhiều nhất là $60m^2$ nên $3x + 6y \leq 60$
- Ngân sách mua tủ không quá 60 triệu đồng nên $7,5x + 5y \leq 60$

Từ đó ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 3x + 6y \leq 60 \\ 7,5x + 5y \leq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Biểu diễn từng miền nghiệm của mỗi bất phương trình trên hệ trục tọa độ Oxy.



Miền không gạch chéo (miền tứ giác $OABC$, bao gồm cả các cạnh) trong hình trên là phần giao của các miền nghiệm và cũng là phần biểu diễn nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Với các đỉnh $O(0;0), A(0;10), B(2;9), C(8;0)$.

Gọi F là số tiền lãi (đơn vị: triệu đồng) thu về, ta có: $F = 12x + 18y$

Tính giá trị của F tại các đỉnh của tứ giác:

Tại $O(0;0)$, $F = 12.0 + 18.0 = 0$

Tại $A(0;10)$: $F = 12.0 + 18.10 = 180$

Tại $B(2;9)$, $F = 12.2 + 18.9 = 186$

Tại $C(8;0)$, $F = 12.8 + 18.0 = 96$

F đạt giá trị lớn nhất bằng 186 tại $B(2;9)$,

Vậy công ty đó nên mua 2 tủ loại A và 9 tủ loại B để thể tích đựng hồ sơ là lớn nhất.

Câu 29: Một nông trại thu hoạch được 180 kg cà chua và 15 kg hành tây. Chủ nông trại muốn làm các hũ tương cà để bán. Biết rằng, để làm ra một hũ tương cà loại A cần 10 kg cà chua cùng với 1 kg hành tây và khi bán lãi được 200 nghìn đồng, còn để làm được một hũ tương cà loại B cần 5 kg cà chua cùng với 0,25 kg hành tây và khi bán lãi được 150 nghìn đồng. Thăm dò thị hiếu của khách hàng cho thấy cần phải làm số hũ tương loại A ít nhất gấp 3,5 lần số hũ tương loại B . Hãy giúp chủ nông trại lập kế hoạch làm tương cà để có được nhiều tiền lãi nhất.

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là số hũ tương cà loại A , loại B mà chủ nông trại cần làm.

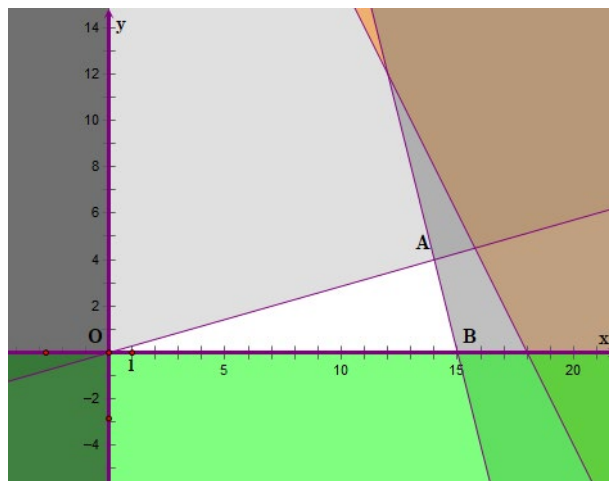
Ta có các điều kiện ràng buộc đối với x, y như sau:

- Hiển nhiên $x \geq 0, y \geq 0$
- Có 180 kg cà chua nên $10x + 5y \leq 180$
- Có 15 kg hành tây nên $x + 0,25y \leq 15$
- Số hũ tương loại A ít nhất gấp 3,5 lần số hũ tương loại B nên $x \geq 3,5y$

Từ đó ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 10x + 5y \leq 180 \\ x + 0,25y \leq 15 \\ x \geq 3,5y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Biểu diễn từng miền nghiệm của mỗi bất phương trình trên hệ trục tọa độ Oxy.



Miền không gạch chéo (miền tam giác OAB , bao gồm cả các cạnh) trong hình trên là phần giao của các miền nghiệm và cũng là phần biểu diễn nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Với các đỉnh $O(0;0)$, $A(14;4)$, $B(15;0)$.

Gọi F là số tiền lãi (đơn vị: nghìn đồng) thu được, ta có: $F = 200x + 150y$

Tính giá trị của F tại các đỉnh của tứ giác:

Tại $O(0;0)$, $F = 200.0 + 150.0 = 0$

Tại $A(14;4)$, $F = 200.14 + 150.4 = 3400$

Tại $B(15;0)$, $F = 200.15 + 150.0 = 3000$

F đạt giá trị lớn nhất bằng 3400 nghìn đồng tại $A(14;4)$.

Vậy chủ nông trại đó nên làm 14 hũ loại A và 4 hũ loại B để tiền lãi thu được là lớn nhất.

Câu 30: Một xưởng sản xuất có hai máy đặc chủng A, B sản xuất hai loại sản phẩm X, Y . Để sản xuất một tấn sản phẩm X cần dùng máy A trong 6 giờ và dùng máy B trong 2 giờ. Để sản xuất một tấn sản phẩm Y cần dùng máy A trong 2 giờ và dùng máy B trong 2 giờ. Cho biết mỗi máy không thể sản xuất đồng thời hai loại sản phẩm. Máy A làm việc không quá 12 giờ một ngày, máy B làm việc không quá 8 giờ một ngày. Một tấn sản phẩm x lãi 10 triệu đồng và một tấn sản phẩm Y lãi 8 triệu đồng. Hãy lập kế hoạch sản xuất mỗi ngày sao cho tổng số tiền lãi cao nhất.

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là số tấn sản phẩm X, Y mà xưởng cần sản xuất mỗi ngày.

Ta có các điều kiện ràng buộc đối với x, y như sau:

Hiển nhiên $x \geq 0, y \geq 0$

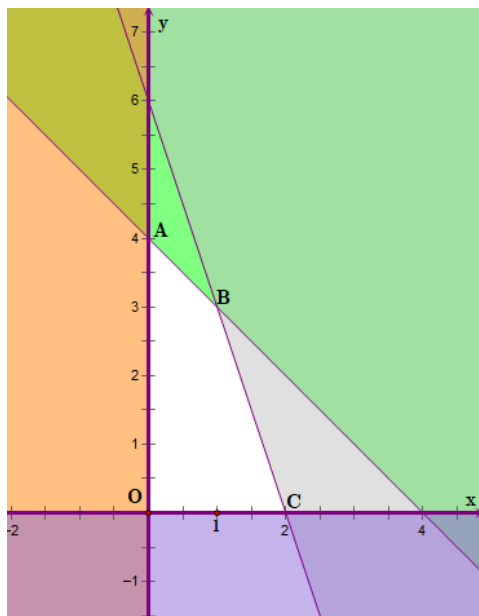
Máy A làm việc không quá 12 giờ một ngày nên $6x + 2y \leq 12$

Máy B làm việc không quá 8 giờ một ngày nên $2x + 2y \leq 8$

Từ đó ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 6x + 2y \leq 12 \\ 2x + 2y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Biểu diễn từng miền nghiệm của mỗi bất phương trình trên hệ trục tọa độ Oxy.



Miền không gạch chéo (miền tứ giác $OABC$, bao gồm cả các cạnh) trong hình trên là phần giao của các miền nghiệm và cũng là phần biểu diễn nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Với các đỉnh $O(0;0)$, $A(0;4)$, $B(1;3)$, $C(2;0)$.

Gọi F là số tiền lãi (đơn vị: triệu đồng) thu về, ta có: $F = 10x + 8y$

Tính giá trị của F tại các đỉnh của tứ giác:

Tại $O(0;0)$, $F = 10.0 + 8.0 = 0$

Tại $A(0;4)$: $F = 10.0 + 8.4 = 32$

Tại $B(1;3)$, $F = 10.1 + 8.3 = 34$

Tại $C(2;0)$: $F = 10.2 + 8.0 = 20$

F đạt giá trị lớn nhất bằng 34 tại $B(1;3)$.

Vậy xưởng đó nên sản xuất 1 tấn sản phẩm loại X và 3 tấn sản phẩm loại Y để tổng số tiền lãi là lớn nhất.

Câu 31: Bác Dũng dự định quy hoạch x sào đất trồng cà tím và y sào đất trồng cà chua. Bác chỉ có không quá 9 triệu đồng để mua hạt giống. Cho biết tiền mua hạt giống cà tím là 200000 đồng/sào và cà chua là 100000 đồng/sào. Viết hệ bất phương trình mô tả điều kiện ràng buộc đối với x, y .

Lời giải

$$\begin{cases} 2x + y \leq 90 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Câu 32: Một phân xưởng lắp ráp máy tính dự định ráp x chiếc máy tính cá nhân và y chiếc máy tính bảng trong một ngày. Do hạn chế về nhân công nên mỗi ngày chỉ có thể xuất xưởng tổng hai loại máy tính trên không quá 150 chiếc. Viết hệ bất phương trình mô tả điều kiện ràng buộc đối với x, y .

Lời giải

$$\begin{cases} x + y \leq 150 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Câu 33: Bạn Hoàng dự định mua x con cá vàng và y con cá Koi từ một trại cá giống. Cho biết mỗi con cá vàng có giá 35 nghìn đồng còn mỗi con cá Koi có giá 150 nghìn đồng. Hoàng chỉ để dành được 1,7 triệu đồng và trại cá chỉ bán mỗi loại cá từ 10 con trở lên. Hãy viết hệ bất phương trình mô tả điều kiện ràng buộc đối với x, y .

Lời giải

$$\begin{cases} 7x + 30y \leq 340 \\ x \geq 10 \\ y \geq 10. \end{cases}$$

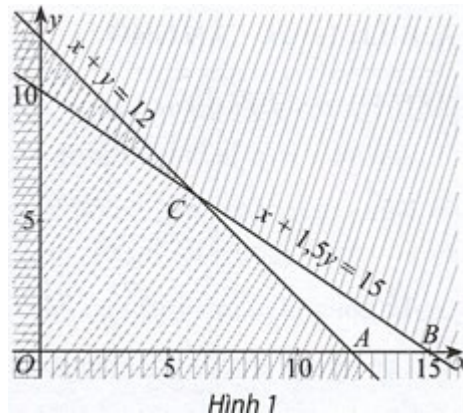
Câu 34: Một học sinh dự định làm các bình hoa bằng giấy để bán trong một hội chợ gây quỹ từ thiện. Cần 1 giờ để làm một bình hoa loại nhỏ và sẽ bán với giá 100 nghìn đồng, 90 phút để làm một bình hoa loại lớn và sẽ bán với giá 200 nghìn đồng. Học sinh này chỉ thu xếp được 15 giờ nghỉ để làm và ban tổ chức yêu cầu phải làm ít nhất là 12 bình hoa. Hãy cho biết bạn ấy cần làm bao nhiêu bình hoa mỗi loại để gây quỹ được nhiều tiền nhất.

Lời giải

Gọi x và y lần lượt là số bình hoa loại nhỏ và $4y$ loại lớn mà bạn học sinh có thể làm được.

Ta có hệ bất phương trình sau:
$$\begin{cases} x + y \geq 12 \\ x + 1,5y \leq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình ta được miền tam giác ABC có tọa độ các đỉnh là:
 $A(12;0); B(15;0); C(6;6)$



Số tiền gây quỹ $F = 100x + 200y$ đạt GTLN là 1800 nghìn đồng tại đỉnh $C(6; 6)$.

Vậy bạn đó cần làm 6 cái bình hoa mỗi loại để gây quỹ được nhiều tiền nhất.

Câu 35: Một xưởng sản xuất có 12 tấn nguyên liệu A và 8 tấn nguyên liệu B để sản xuất hai loại sản phẩm X, Y . Để sản xuất một tấn sản phẩm X cần dùng 6 tấn nguyên liệu A và 2 tấn nguyên liệu B , khi bán lãi được 10 triệu đồng. Để sản xuất một tấn sản phẩm Y cần dùng 2 tấn nguyên liệu A và 2 tấn nguyên liệu B , khi bán lãi được 8 triệu đồng. Hãy lập kế hoạch sản xuất cho xưởng nói trên sao cho có tổng số tiền lãi cao nhất.

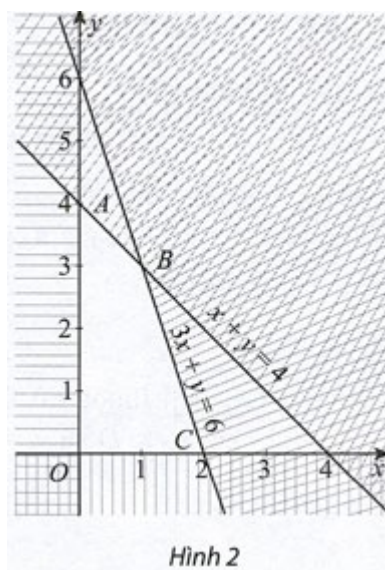
Lời giải

Gọi x và y lần lượt là số tấn sản phẩm X và Y mà xưởng cần sản xuất.

Ta có hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 3x + y \leq 8 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình ta được miền tứ giác $OABC$ có tọa độ các đỉnh là: $O(0; 0); A(0; 4); B(1; 3); C(2; 0)$ (Hình 2).



Số tiền lãi $F = 10x + 8y$ đạt GTLN bằng 34 triệu đồng tại đỉnh $B(1; 3)$.

Vậy xưởng cần sản xuất 1 tấn sản phẩm X và 3 tấn sản phẩm Y thì sẽ có tổng tiền lãi cao nhất.

Câu 36: Tìm giá trị của F và G tương ứng với các giá trị x, y được cho trong bảng dưới đây.

x	0	0	1	1	2	2	4
y	2	4	0	1	0	1	0
$F = 4x + 5y$							
$G = 5x - 3y$							

Trong các giá trị tìm được:

a) tìm GTLN của F .

b) tìm GTNN của G .

Lời giải

a) GTLN $F = 20$;

b) GTNN $G = -12$.

Câu 37: Bác An đầu tư 1,2 tỉ đồng vào ba loại trái phiếu, trái phiếu chính phủ với lãi suất 7% một năm, trái phiếu ngân hàng với lãi suất 8% một năm và trái phiếu doanh nghiệp rủi ro cao với lãi suất 12% một năm. Vì lí do giảm thuế, bác An muốn số tiền đầu tư trái phiếu chính phủ gấp ít nhất 3 lần số tiền đầu tư trái phiếu ngân hàng. Hơn nữa, để giảm thiểu rủi ro, bác An đầu tư không quá 200 triệu đồng cho trái phiếu doanh nghiệp. Hỏi bác An nên đầu tư mỗi loại trái phiếu bao nhiêu tiền để lợi nhuận thu được sau một năm là lớn nhất?

Lời giải

	Trái phiếu chính phủ	Trái phiếu ngân hàng	Trái phiếu doanh nghiệp
Lãi suất	7% / năm	8% / năm	12% / năm

Bước 1:

1,2 tỉ đồng = 1200 (triệu đồng)

Gọi x là số tiền mua trái phiếu ngân hàng và y là số tiền mua trái phiếu doanh nghiệp.

Khi đó $x \geq 0, y \geq 0$.

Bác An đầu tư 1,2 tỉ đồng vào ba loại trái phiếu, trái phiếu chính phủ nên số tiền đầu tư trái phiếu chính phủ là $1200 - x - y$ (triệu đồng)

Số tiền đầu tư trái phiếu chính phủ gấp ít nhất 3 lần số tiền đầu tư trái phiếu ngân hàng nên ta có:
 $1200 - x - y \geq 3x \Leftrightarrow 4x + y \leq 1200$

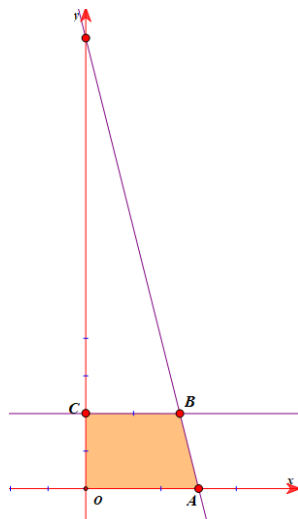
Bác An đầu tư không quá 200 triệu đồng cho trái phiếu doanh nghiệp nên $y \leq 200$

Từ điều kiện của bài toán ta có số tiền bác An đầu tư trái phiếu phải thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 4x + y \leq 1200 \\ y \leq 200 \end{cases}$$

Xác định miền nghiệm là miền tứ giác $OABC$ với:

$O(0;0); A(300;0); B(250;200); C(0;200)$



Bước 2: Lợi nhuận thu được sau một năm là

$$\begin{aligned} F(x; y) &= (1200 - x - y) \cdot 7\% + x \cdot 8\% + y \cdot 12\% \\ &= 84 + 0,01x + 0,05y \end{aligned}$$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $F(x; y)$ khi $(x; y)$ thỏa mãn hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 4x + y \leq 1200 \\ y \leq 200 \end{cases}$$

Thay tọa độ các điểm O, A, B, C vào biểu thức $F(x; y)$ ta được:

$$F(0; 0) = 80$$

$$F(300; 0) = 84 + 0,01 \cdot 300 + 0,05 \cdot 0 = 87$$

$$F(250; 200) = 84 + 0,01 \cdot 250 + 0,05 \cdot 200 = 96,5$$

$$F(0; 200) = 84 + 0,01 \cdot 0 + 0,05 \cdot 200 = 94$$

$\Rightarrow F$ đạt giá trị lớn nhất là 96,5 nếu $x = 250$ và $y = 200$.

Vậy bác An nên đầu tư 250 triệu đồng trái phiếu ngân hàng, 200 triệu trái phiếu doanh nghiệp và 750 trái phiếu chính phủ.