NEW

LỚP TOÁN THẦY CƯ- XÃ TẮC- TP HUẾ
Trung tâm ứng dụng CN và dạy học MTC
SĐT: 0834 332 133



BÀI GIẢNG TOÁN 12

Từ Cơ Bản đến Nâng Cao

TOANTHAYCU.COM

BÀI 1. SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1. Nhắc lại định nghĩa

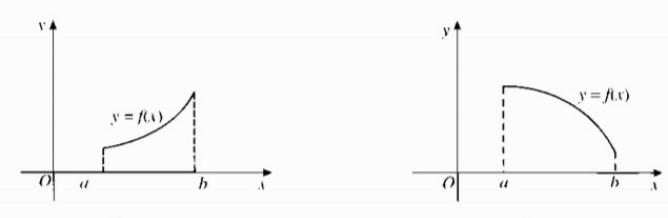
Kí hiệu K là khoảng hoacc đoạn hoặc nửa khoảng. Giả sử hàm số $y=f(x)$ xác định trên K. Ta nói

- Hàm số $y=f(x)$ đồng biến (tăng) trên K nếu với mọi cặp x_1,x_2 thuộc K mà x_1 nhỏ hơn x_2 thì $f(x_1)$ nhỏ hơn $f(x_2)$, tức là $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$;
- Hàm số $y=f(x)$ nghịch biên (giảm) trên K nếu với mọi cặp x_1,x_2 thuộc K mà x_1 nhỏ hơn x_2 thì $f(x_1)$ lớn hơn $f(x_2)$, tức là $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

Hàm số đồng biến hoặc nghịch biển trên K được gọi chung là hàm số đơn điệu trên K.

Nhận xét:

- Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị đi lên từ trái sang phải (H.3a) ;
- Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị đi xương từ trái sang phải (H.3b).



Hình 3

2. Tính đơn điệu và dấu của đạo hàm

Định lí: Giả sử hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K

- Nếu $f'(x)>0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K.
- Nếu $f'(x)<0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K.

Tóm lại, trên K

$$\begin{cases} f'(x)>0\Rightarrow f(x)\ \nearrow \\ f'(x)<0\Rightarrow f(x)\ \searrow \end{cases}$$

CHÚ Ý

Nếu $f'(x)=0,\forall x\in K$ thì $f(x)$ không đổi trên K.

Định lý mở rộng: Giả sử hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K

Nếu $f'(x)\ge 0\ (f'(x)\le 0),\ \forall x\in \mathrm{K}$ và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến (nghịch biến) trên K.

Chú ý: $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm. Tuy nhiên một số hàm số có $f'(x)=0$ tại vô hạn điểm nhưng các điểm rời rạc thì hàm số vẫn đơn điệu.

Ví dụ: Hàm số $y=2x-\sin 2x.$

Ta có $y'=2-2\cos 2x=2(1-\cos 2x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}.$

$y'=0\Leftrightarrow 1-\cos 2x=0\Leftrightarrow x=k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$ có vô hạn điểm làm cho $y'=0$ nhưng các điểm đó rời rạc nên hàm số $y=2x-\sin 2x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

II - QUY TẮC XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1. Quy tắc

Bước 1. Tìm tập xác định.

Bước 2. Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i(i=1,2,\ldots,n)$ mà lại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

Bước 3. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

Bước 4. Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Ví dụ. Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+2$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Cho hàm số $y=f(x)$. Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số

1. Phương pháp:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định

- **Bước 2:** *Tính đạo hàm $f'(x)$.* Tìm các điểm tại đó $f'(x)=0$ hoặc $f'(x)$ không xác định

- **Bước 3 :** Sắp xếp các điểm đó theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên

- **Bước 4:** Kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số theo định lý trên

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=-x^3+6x^2-9x+4$.

Lời giải.

Hàm số $y=-x^3+6x^2-9x+4$ có tập xác định $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=-3x^2+12x-9$. Cho $y'=0\Leftrightarrow -3x^2+12x-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3.\end{array}\right.$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1),(3;+\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

Ví dụ 2. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=-x^4+4x^2-3$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $y=-x^4+4x^2-3$ là $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y' = -4x^3 + 8x$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 8x = 0 \Leftrightarrow 4x\left(-x^2 + 2\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = 0 \\ -x^2 + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	1	↘	$-\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-\sqrt{2})$ và $(0;\sqrt{2})$, hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\sqrt{2};0)$ và $(\sqrt{2};+\infty)$.

Ví dụ 3. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \dfrac{3-2x}{x+7}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{3-2x}{x+7} = \dfrac{-2x+3}{x+7}$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-7\}$. Ta có $y' = \dfrac{-17}{(x+7)^2} < 0, \forall x \neq -7$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-7		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	-2	↘	‖	↘	-2
			$+\infty$		
	$-\infty$				

Hàm số đã cho nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-7)$ và $(-7;+\infty)$.

Ví dụ 4. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = x + \sqrt{16-x^2}$.

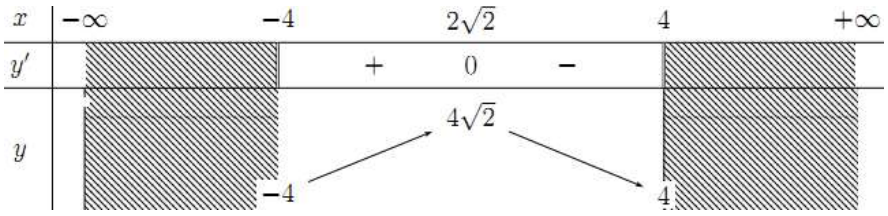
Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = [-4;4]$.

Đạo hàm: $y' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{16-x^2}} = \dfrac{\sqrt{16-x^2} - x}{\sqrt{16-x^2}}$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{16-x^2} = x \\ 16 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ 0 < 16 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$.

Bảng biến thiên



Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-4;2\sqrt{2})$ và nghịch biến trên khoảng $(2\sqrt{2};4)$.

3. Bài tập

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Đạo hàm: $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}<0,\ \forall x\neq 1.$

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 2: Cho hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2+x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;1)$ và nghịch biến $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Đạo hàm: $y'=x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $y'=0\Leftrightarrow x=1$.

Suy ra hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 3: Hàm số $y=x^3-3x^2-9x+m$ nghịch biến trên khoảng nào được cho dưới đây?

A. $(-1;3)$ **B.** $(-\infty;-3)$ hoặc $(1;+\infty)$.

C. $\mathbb{R}$ **D.** $(-\infty;-1)$ hoặc $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=3x^2-6x-9.$

Ta có $y'\leq 0\Leftrightarrow 3x^2-6x-9\leq 0\Leftrightarrow -1\leq x\leq 3$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$.

Câu 4: Hàm số $y=2x^4+1$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ **B.** $(0;+\infty)$ **C.** $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$ **D.** $(-\infty;0)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=8x^3>0\Leftrightarrow x>0$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Câu 5: Cho hàm số $y=2x^4-4x^2$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$, $y'<0$ nên hàm số đã cho nghịch biến.

D. Trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$, $y'>0$ nên hàm số đã cho đồng biến.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=8x^3-8x=8x\left(x^2-1\right);\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$.

Vẽ phác họa bảng biến thiên và kết luận được rằng hàm số

- Đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.
- Nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Câu 6: Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x+2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;0)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. Đạo hàm $y'=\frac{5}{(x+2)^2}>0,\ \forall x\neq-2$.

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$. **Chọn D**

Bình luận: Hàm số đồng biến trên tất cả các khoảng con của các khoảng đồng biến của hàm số. Cụ thể trong bài toán trên:

- Hàm số đồng biến trên $(-2;+\infty)$;
- $(1;+\infty)\subset(-2;+\infty)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Câu 7: Cho hàm số $y=\sqrt{1-x^2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên $[0;1]$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên toàn tập xác định.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên $[0;1]$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên toàn tập xác định.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=[-1;1]$. Đạo hàm $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$; $y'=0\Leftrightarrow x=0$.

Vẽ bảng biến thiên, suy ra được hàm số nghịch biến trên $[0;1]$.

Câu 8: Cho hàm số $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên $(1;4)$.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(1;\dfrac{5}{2}\right)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(\dfrac{5}{2};4\right)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=[1;4]$. Đạo hàm $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}$.

Xét phương trình $y'=0\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=\sqrt{4-x}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(1;4)\\x-1=4-x\end{cases}\longrightarrow x=\dfrac{5}{2}\in(1;4)$.

Vẽ bảng biến thiên, suy ra được hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{5}{2};4\right)$.

Dạng 2: Dựa vào bảng biến thiên, tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số

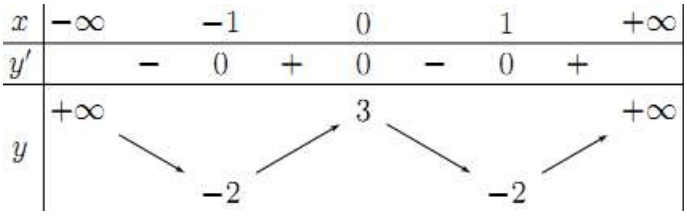
1. Phương pháp: Dự vào bảng biến thiên

* Nếu $y'<0$ (hoặc chiền biến thiên của hàm số đi xuống) trên khoảng $(a;b)$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng đó

* Nếu $y'>0$ (hoặc chiền biến thiên của hàm số đi lên) trên khoảng $(a;b)$ thì hàm số đồng biến trên khoảng đó

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?

Lời giải

Ta có $y' < 0, \forall x \in (-\infty;-1) \cup (0;1) \Rightarrow y' < 0, \forall x \in (-\infty;-2)$.

Ví dụ 2:

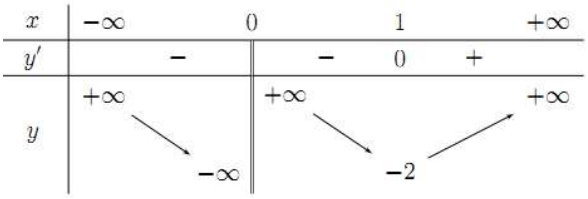
Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.



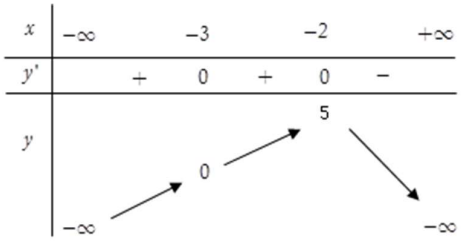
Lời giải.

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0),(0;1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$. Do đó, khẳng định "Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$ " sai.

3. Bài tập

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



Trong các mệnh đề sau, có bao nhiêu mệnh đề sai?

I. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-5)$ và $(-3;-2)$.

II. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;5)$.

III.Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

IV.Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Chọn A

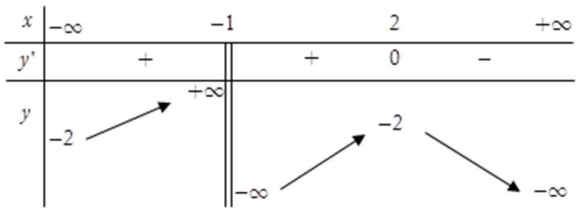
Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$; nghịch biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

Suy ra II. Sai; III. Đúng; IV. Đúng.

Ta thấy khoảng $(-\infty;-3)$ chứa khoảng $(-\infty;-5)$ nên I Đúng.

Vậy chỉ có II sai.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-2;+\infty)$ và $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;-1)\cup(-1;2)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

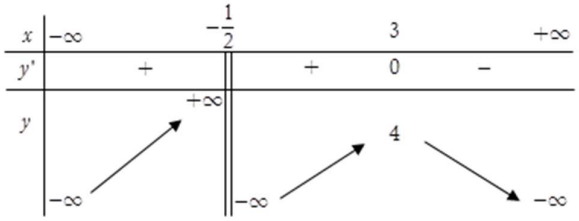
D. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-2;2)$.

Lời giải

Chọn C

Vì $(0;2)\subset(-1;2)$, mà hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$ nên suy ra C đúng.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và $(3;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Lời giải

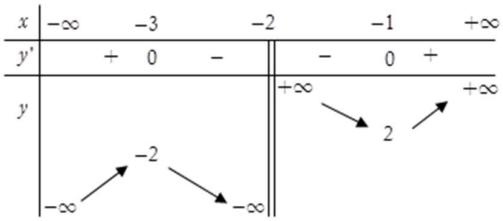
Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số

● Đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2};3\right)$.

● Nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây



A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-3;-2)\cup(-2;-1)$.

B. Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng -3.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-1;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu là 2.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên, ta có nhận xét sau

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;-2)$ và $(-2;-1)\Rightarrow$ A sai (sai chỗ dấu $\cup$).

Hàm số có giá trị cực đại $y_{C\blacklozenge}=-2\Rightarrow$ B sai.

Hàm số đồng biến khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-1;+\infty)\Rightarrow$ C đúng.

Hàm số có điểm cực tiểu là $-1\Rightarrow$ D sai.

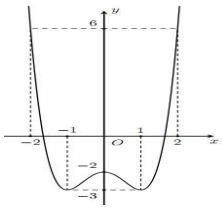
Dạng 3: Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ hoặc $y=f'(x)$. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số

1. Phương pháp:

- Đồ thị hàm số đi lên từ trái sang phải trên khoảng $(a;b)$ thì sẽ đồng biến trên khoảng đó
- Đồ thị hàm số đi xuống từ trái sang phải trên khoảng $(a;b)$ thì sẽ nghịch biến trên khoảng đó

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

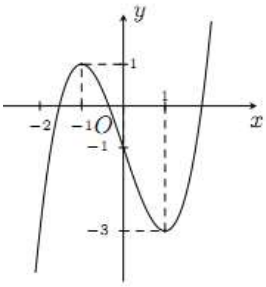
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

D. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$. Chọn đáp án (A)

Ví dụ 2. Hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

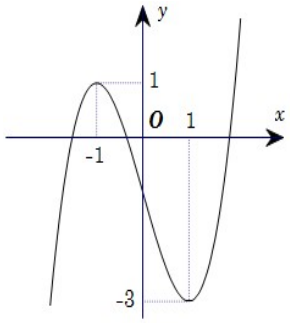


Lời giải.

Dựa vào đồ thị, hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$

3. Bài tập

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là **sai?**



A. Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

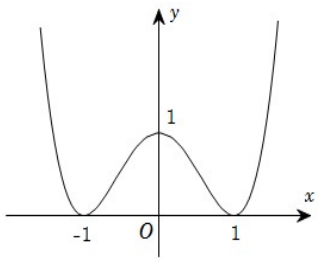
Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta có kết quả: Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên $(-1;1)$ nên các khẳng định **A, B, C** đúng.

Theo định nghĩa hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$ thì khẳng định **D** sai.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-1;0)\cup(1;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

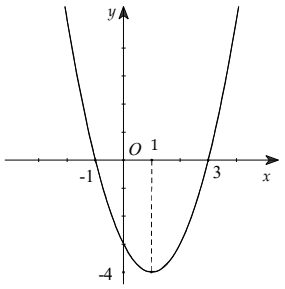
Lời giải

Chọn D

Từ dáng điệu của đồ thị ta nhận thấy trong khoảng $(-1;0);(1;+\infty)$ dáng điệu của hàm số là đi lên nên hàm số đồng biến trên $(-1;0);(1;+\infty)$.

Theo định nghĩa hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$ thì khẳng định **B** sai.

Câu 3 : Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

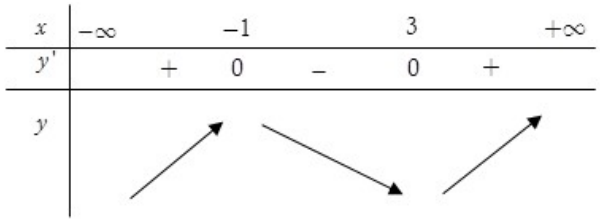
Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có nhận xét:

- $f'(x)$ đổi dấu từ "+" sang "−" khi qua điểm $x=-1$.
- $f'(x)$ đổi dấu từ "−" sang "+" khi qua điểm $x=3$.

Do đó ta có bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy B đúng.

Dạng 4: Tìm tham số m để hàm số đồng biến trên tập xác định

1. Phương pháp:

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên K (một khoảng, một đoạn hoặc nửa khoảng) đồng thời phương trình $f'(x)$ vô nghiệm trên K hoặc có nghiệm rời rạc trên K. Khi đó

∇ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $K \Leftrightarrow f'(x)\geqslant 0, \forall x\in K$.

■ Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $K \Leftrightarrow f'(x)\leq 0, \forall x\in K$.

Kiến thức bổ trợ

Cho tam thức bậc hai $h(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$. Khi đó

$$h(x)\geqslant 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta\leq 0. \end{cases} \quad h(x)\leq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases}$$

Lưu ý: khi đã chắc chắn $a\neq 0$, hai công thức trên đây mới được sử dụng.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+3(m+2)x+3m-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số $y=x^3-3x^2+3(m+2)x+3m-1$ có tập xác định $\mathcal{D}=\mathbb{R}$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'=3x^2-6x+3(m+2)\geqslant 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta'\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3>0 \\ 9-9(m+2)\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\geqslant -1$$

Vậy với $m\geqslant -1$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}(3-m)x^3-(m+3)x^2+(m+2)x-3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số $y=\frac{1}{3}(3-m)x^3-(m+3)x^2+(m+2)x-3$ có tập xác định $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.

* Xét $a=3-m=0 \Leftrightarrow m=3$.

Khi đó hàm số trở thành $y=-6x^2+5x-3$. Đây là hàm số bậc hai, có lúc tăng, lúc giảm khi xét trên $\mathbb{R}$. Do đó ta loại $m=3$.

* Xét $a=3-m\neq 0\Leftrightarrow m\neq 3$.

Hàm số luôn tăng trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'=(3-m)x^2-2(m+3)x+(m+2)\geqslant 0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=3-m>0\\ \Delta'=2m^2+5m+3\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<3\\ -\dfrac{3}{2}\leq m\leq -1\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{3}{2}\leq m\leq -1$$

Vậy với $-\dfrac{3}{2}\leq m\leq -1$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 3. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+m-7}{5x-m+3}$ đồng biến trên mọi khoảng của tập xác định.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{m-3}{5}\right\}$.

Ta có $y'=\dfrac{-m^2-2m+35}{(5x-m+3)^2}$.

Hàm số đồng biến trên mọi khoảng xác định khi và chỉ khi

$$y'>0,\forall x\neq\frac{m-3}{5}\Leftrightarrow -m^2-2m+35>0\Leftrightarrow m\in(-7;5).$$

Vậy, với $m\in(-7;5)$ thì hàm số đồng biến trên mọi khoảng xác định của nó.

3. Bài tập

Câu 1: Tìm tất các các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3+3x^2+mx+m$ đồng biến trên tập xác định

A. $m\leq 1$. **B.** $m\geq 3$. **C.** $-1\leq m\leq 3$. **D.** $m<3$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: D = $\mathbb{R}$. Đạo hàm $y'=3x^2+6x+m$.

Ycbt $\Leftrightarrow y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ ($y'=0$ có hữu hạn nghiệm) $\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta'\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3>0\\ 9-3m\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\geq 3.$

Câu 2: Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(4m-3)x+2017$. Tìm giá trị lớn nhất của tham số thực m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=4$. **D.** $m=3$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Đạo hàm $y'=x^2-2mx+4m-3$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ ($y'=0$ có hữu hạn nghiệm)

$\Leftrightarrow \Delta'=m^2-4m+3\leq 0 \Leftrightarrow 1\leq m\leq 3$.

Suy ra giá trị lớn nhất của tham số m thỏa mãn ycbt là $m=3$.

Câu 3: Cho hàm số $y=-x^3-mx^2+(4m+9)x+5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 4. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Đạo hàm $y'=-3x^2-2mx+4m+9$.

Để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ thì $\Leftrightarrow y'\leq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ ($y'=0$ có hữu hạn nghiệm) $\Leftrightarrow \Delta'\leq 0 \Leftrightarrow m^2+3(4m+9)\leq 0 \Leftrightarrow -9\leq m\leq -3$ $\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=\{-9;-8;...;-3\}$.

Sai lầm hay gặp là "Để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ thì $\Leftrightarrow y'<0, \forall x\in\mathbb{R}$". Khi đó ra giải ra $-9<m<-3$

Câu 4: Cho hàm số $y=\frac{m}{3}x^3-2x^2+(m+3)x+m$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

A. $m=-4$ **B.** $m=0$ **C.** $m=-2$ **D.** $m=1$

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Đạo hàm: $y'=mx^2-4x+m+3$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ ($y'=0$ có hữu hạn nghiệm):

TH1. ● $m=0$ thì $y'=-4x+3\geq 0 \Leftrightarrow x\leq \frac{3}{4}$ (không thỏa mãn).

TH2. ● $\begin{cases} a=m>0 \\ \Delta'_{y'}=-m^2-3m+4\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\geq 1$.

Suy ra giá trị m nhỏ nhất thỏa mãn bài toán là $m=1$.

Câu 5: Cho hàm số $y=(m+2)\frac{x^3}{3}-(m+2)x^2+(m-8)x+m^2-1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m<-2$. **B.** $m>-2$. **C.** $m\leq -2$. **D.** $m\geq -2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=(m+2)x^2-2(m+2)x+m-8$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'\leq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ ($y'=0$ có hữu hạn nghiệm):

TH1 ● $m+2=0 \Leftrightarrow m=-2$, khi đó $y'=-10\leq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ (thỏa mãn).

TH2 • $\begin{cases} a = m+2 < 0 \\ \Delta' = (m+2)^2 - (m+2)(m-8) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 < 0 \\ 10(m+2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2$.

Hợp hai trường hợp ta được $m \le -2$.

Câu 6: Cho hàm số $y = \dfrac{mx - 2m - 3}{x - m}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S

A. 5 **B.** 4 **C.** Vô số. **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = \dfrac{-m^2 + 2m + 3}{(x-m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định thì $y' > 0, \forall x \ne m$

$\Leftrightarrow -m^2 + 2m + 3 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 3 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{0;1;2\}$.

Sai lầm hay gặp là cho $y' \ge 0, \forall x \ne m \Leftrightarrow -1 \le m \le 3 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{-1;0;1;2;3\}$.

Dạng 5: Tìm tham số m để hàm số đồ ng biến và nghịch biến trên tập con của $\mathbb{R}$, trên khoảng có độ dài bằng *l*

1. Phương pháp:

Phương pháp 1: Cô lập tham số, lập bảng biến thiên, từ đó rút ra điều kiện của tham số.

Phương pháp 2: Lập bảng biến thiên trực tiếp để tìm các khoảng đơn điệu cụ thể, từ đó rút ra kết luận.

Để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có độ dài khoảng đồng biến $(a < 0)$; nghịch biến $(a > 0)(x_1; x_2)$ bằng l

- **Bước 1:** Tính y'.
- **Bước 2:** Tìm điều kiện của tham số để hàm số có khoảng đồng biến và nghịch biến

$$\begin{cases} a \ne 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$$

- **Bước 3:** $|x_2 - x_1| = l$ (2) thành $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 = l^2$.
- **Bước 4:** Sử dụng định lí Vi-ét đưa (2) thành phương trình theo tham số.
- **Bước 5:** Giải phương trình, so sánh với điều kiện (1) để chọn kết quả thỏa mann.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 3m$.

Hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \le 0, \forall x \in (0;+\infty)$.

Hay $-3x^2 + 6x + 3m \le 0, \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow m \le x^2 - 2x, \forall x \in (0;+\infty)$ (1).

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ trên $(0;+\infty)$ có $f'(x) = 2x - 2; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Từ bảng biên thiên ta có (1) $\Leftrightarrow m \le -1$.

Vậy với $m \le -1$ thì hàm số đã cho nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2m(2m-1)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên $[2;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 2(m+1)x - (2m^2 - 3m + 2)$.

Xét phương trình $y' = 0$ có $\Delta' = (m+1)^2 + 3(2m^2 - 3m + 2) = 7(m^2 - m + 1) > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Suy ra phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm $x_1 < x_2$ với mọi m.

Để hàm số đồng biến trên $[2;+\infty) \Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm $x_1 < x_2 \le 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - 2) + (x_2 - 2) < 0 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 4 \\ x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2(m+1)}{3} < 4 \\ \dfrac{-(2m^2 - 3m + 2)}{3} - 2.\dfrac{2(m+1)}{3} + 4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ -2 \le m \le \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le m \le \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 3: Tìm m để hàm số $y = \dfrac{mx + 4}{x + m}$ nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$. Ta có $y' = \dfrac{m^2 - 4}{(x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$ khi và chỉ khi $y' < 0, \forall x \in (-\infty;1)$.

Hay $\begin{cases} -m \notin (-\infty;1) \\ m^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m \geqslant 1 \\ -2 < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \le -1.$

Vậy với $m \in (-2;-1\ ]$, hàm số đã cho luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Ví dụ 4. Tìm a để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + ax + a$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1 .

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2+6x+a;\Delta'_{y'}=9-3a$.

Với $9-3a\le 0\Leftrightarrow a\geqslant 3\Rightarrow y'\geqslant 0,\forall\in\mathbb{R}\Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$, mâu thuẫn giả thiết.

Do đó $a\geqslant 3$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $9-3a>0\Leftrightarrow a<3\Rightarrow y'$ có hai nghiệm $x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	y_1	↘	y_2	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1 khi và chỉ khi

$\left|x_1-x_2\right|=1\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1\cdot x_2=1\Leftrightarrow 4-\dfrac{4a}{3}=1\Leftrightarrow a=\dfrac{9}{4}$ (thỏa màn).

Vậy với $a=\dfrac{9}{4}$, hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1 .

3. Bài tập

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=x^3-3\left(m+1\right)x^2+3m\left(m+2\right)x$ nghịch biến trên đoạn $\left[0;1\right]$.

A. $m\le 0$. **B.** $-1<m<0$. **C.** $-1\le m\le 0$. **D.** $m\ge -1$.

Lời giải

Chọn C

Đạo hàm $y'=3x^2-6\left(m+1\right)x+3m\left(m+2\right)=3.\left[x^2-2\left(m+1\right)x+m\left(m+2\right)\right]$.

Ta có $\Delta'=\left(m+1\right)^2-m\left(m+2\right)=1>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$.

Do đó $y'=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x=m,\ x=m+2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		m		$m+2$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên, để hàm số nghịch biến trên $\left[0;1\right]\longleftrightarrow\left[0;1\right]\subset\left[m;m+2\right]$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 0\\ m+2\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow -1\le m\le 0.$

Câu 2: Biết rằng hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+3\left(m-1\right)x^2+9x+1$ (với m là tham số thực) nghịch biến trên

khoảng $(x_1;x_2)$ và đồng biến trên các khoảng giao với $(x_1;x_2)$ bằng rỗng. Tìm tất cả các giá trị của m để $|x_1-x_2|=6\sqrt{3}$.?

A. $m=-1$ **B.** $m=3$ **C.** $m=-3$, $m=1$. **D.** $m=-1$, $m=3$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=x^2+6(m-1)x+9$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1-x_2|=6\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ |x_1-x_2|=\dfrac{2\sqrt{\Delta'}}{|a|}=6\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ \sqrt{\Delta'}=3\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow \Delta'=27$$

$$\Leftrightarrow 9(m-1)^2-9=27\Leftrightarrow (m-1)^2=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=3\\ m=-1\end{array}\right.$$

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3+3x^2+mx+m$ giảm trên đoạn có độ dài lớn nhất bằng 1?

A. $m=-\dfrac{9}{4}$ **B.** $m=3$ **C.** $m\le 3$ **D.** $m=\dfrac{9}{4}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=3x^2+6x+m$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1-x_2|=1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=9-3m>0\\ 2\dfrac{\sqrt{\Delta'}}{|a|}=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m<3\\ 2.\dfrac{\sqrt{9-3m}}{3}=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m<3\\ m=\dfrac{9}{4}\end{cases}\Leftrightarrow m=\frac{9}{4}.$$

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$?

A. $m>2$ **B.** $m\ge 1$ **C.** $m\ge 2$ **D.** $m>1$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=\dfrac{-m+1}{(x-m)^2}$.

Với $-m+1<0\Leftrightarrow m>1$ thì $y'<0,\ \forall x\ne m\Rightarrow$ hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty;m)$ và $(m;+\infty)$.

Ycbt $\Leftrightarrow (-\infty;2)\subset(-\infty;m)\Leftrightarrow m\ge 2$: (thỏa mãn).

Cách 2. Ta có $y'=\dfrac{-m+1}{(x-m)^2}$.

$$\text{Ycbt} \Leftrightarrow \begin{cases} y' < 0, \forall x < 2 \\ x \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+1 < 0 \\ m \neq (-\infty; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+1 < 0 \\ m \in [2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2.$$

Dạng 6: BÀI TẬP DÀNH CHO HỌC SINH 8+, 9+

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;1)$. **B.** $(-4;-3)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt: $y = g(x) = f(x^2 + 2x)$; $g'(x) = \left(f(x^2 + 2x)\right)' = (2x+2).f'(x^2 + 2x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x+2).f'(x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2 = 0 \\ f'(x^2 + 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x = -2 \ (vo\ nghiem) \\ x^2 + 2x = 1 \\ x^2 + 2x = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1 - \sqrt{2} \\ x = -1 + \sqrt{2} \\ x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \text{. } (x = -1 \pm \sqrt{2} \text{ là các nghiệm bội chẵn của phương trình: } x^2 + 2x = 1).$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘				↗		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;-1)$.

Chú ý: Cách xét dấu $g'(x)$:

Chọn giá trị $x=0\in\left(-1;-1+\sqrt{2}\right)\Rightarrow x^2+2x=0\Rightarrow g'(0)=f'(0)>0$ (dựa theo bảng xét dấu của hàm $f'(x)$). Suy ra $g'(x)>0,\ \forall x\in\left(-1;-1+\sqrt{2}\right)$. Sử dụng quy tắc xét dấu đa thức "lẻ đổi, chẵn không" suy ra dấu của $g'(x)$ trên các khoảng còn lại.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x.(x+2)^2(x-5)^3$. Hàm số $g(x)=f(10-5x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(1;3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=(10-5x)'.f'(10-5x)=-5.f'(10-5x)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(10-5x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}10-5x=0\\10-5x=-2\\10-5x=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\dfrac{12}{5}\\x=1\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		1		2		$\frac{12}{5}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	1	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số $y=\left(f(x)\right)^3-3\left(f(x)\right)^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2;3)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $y' = 3\left(f\left(x\right)\right)^2.f'\left(x\right) - 6f\left(x\right).f'\left(x\right)$; $y' = 3f'\left(x\right).f\left(x\right)\left[f\left(x\right)-2\right]$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'\left(x\right) = 0 \\ f\left(x\right) = 0 \\ f\left(x\right) = 2 \end{array}\right.$$

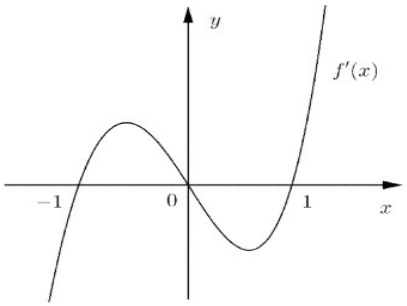
$$+\ f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \\ x = 4 \end{array}\right.;\ f\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 < 1 \\ x = 4 \end{array}\right.;\ f\left(x\right) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_2 \in \left(x_1;1\right) \\ x = x_3 \in \left(1;2\right) \\ x = x_4 > 4 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

+ Bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$		x_1		x_2		1		x_3		2		3		4		x_4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f(x)-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số $y = \left(f\left(x\right)\right)^3 - 3\left(f\left(x\right)\right)^2$ nghịch biến trên khoảng $\left(2;3\right)$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$, hàm số $f'\left(x\right) = x^3 + ax^2 + bx + c\left(a,b,c \in \mathbb{R}\right)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $g\left(x\right) = f\left(f'\left(x\right)\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;-2\right)$. **C.** $\left(-1;0\right)$. **D.** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Vì các điểm $\left(-1;0\right),\left(0;0\right),\left(1;0\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} -1+a-b+c=0 \\ c=0 \\ 1+a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \Rightarrow f'(x)=x^3-x \Rightarrow f''(x)=3x^2-1 \\ c=0 \end{cases}$$

Ta có: $g(x)=f\left(f'(x)\right) \Rightarrow g'(x)=f'\left(f'(x)\right).f''(x)$

Xét $g'(x)=0 \Leftrightarrow g'(x)=f'\left(f'(x)\right).f''(x)=0 \Leftrightarrow f'\left(x^3-x\right)\left(3x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-x=0 \\ x^3-x=1 \\ x^3-x=-1 \\ 3x^2-1=0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=0 \\ x=x_1 (x_1 \approx 1,325\ \ ) \\ x=x_2 (x_2 \approx -1,325) \\ x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-1,325$		-1		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$1,325$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị nằm trên trục hoành và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của biểu thức $f'(x)$ như bảng dưới đây.

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=g(x)=\dfrac{f\left(x^2-2x\right)}{f\left(x^2-2x\right)+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $\left(-2;\dfrac{5}{2}\right)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$g'(x)=\frac{\left(x^2-2x\right)'.f'\left(x^2-2x\right)}{\left(f\left(x^2-2x\right)+1\right)^2}=\frac{(2x-2).f'\left(x^2-2x\right)}{\left(f\left(x^2-2x\right)+1\right)^2}.$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-2=0 \\ f'\left(x^2-2x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x=-2 \\ x^2-2x=-1 \\ x^2-2x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta có hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$.

BÀI 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. KHÁI NIỆM CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU

Giả sử hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và $x_0\in(a;b)$.

- Nếu tồn tại số h sao cho $f(x)<f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0.
- Nếu tồn tại số h sao cho $f(x)>f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0. Khi đó:

Chú ý:

✓ Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0, thì x_0 được gọi là một **điểm cực đại của hàm số** $f(x)$, $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại của hàm số** $f(x)$.

✓ Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0, x_0 được gọi là một **điểm cực tiểu của hàm số** $f(x)$, $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu của hàm số** $f(x)$.

- Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị của hàm số** và điểm cực trị phải là một điểm trong tập xác định K.
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **giá trị cực trị (hay cực trị)**.

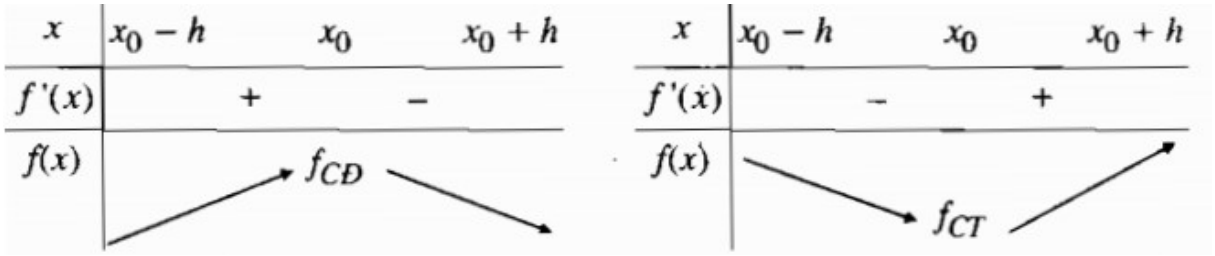
II - ĐIỀU KIỆN ĐỦ ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ

ĐỊNH LÝ 1

Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $K=(x_0-h;x_0+h)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K\setminus\{x_0\}$, với $h>0$.

a) Nếu $f'(x)>0$ trên khoảng $(x_0-h;x_0)$ và $f'(x)<0$ trên khoảng $(x_0;x_0+h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

b) Nếu $f'(x)<0$ trên khoảng $(x_0-h;x_0)$ và $f'(x)>0$ trên khoảng $(x_0;x_0+h)$ thì x_0 là một điểm cực tiêu của hàm số $f(x)$.



Ví dụ: Tìm các điểm cực trị của hàm số $y=x^3-x^2-x+3$.

III - QUY TẮC TÌM CỰC TRI

Áp dụng Định lí 1 , ta có quy tắc tìm cực trị sau đây.

QUY TẮC I

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 vui lòng liên hệ zalo chính tác giả Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa và được nhiều ưu đãi. " Tránh mua các trang và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Bước 1. Tìm tập xác định.

Bước 2. Tính $f'(x)$. *Tìm các điểm tại đó* $f'(x)$ *bằng 0 hoặc* $f'(x)$ *không xác định.*

Bước 3. Lập bảng biến thiên.

Bước 4. Từ báng biến thiên suy ra các diểm cực trị.

ĐỊNH LÍ 2

Giả sử hàm số $y=f(x)$ *có đạo hàm cấp hai trong khoảng* $(x_0-h;x_0+h)$, *với* $h>0$. *Khi đó :*

a) Nếu $f'(x_0)=0, f''(x_0)>0$ *thì* x_0 *là điểm cực tiểu :*

b) Nếu $f'(x_0)=0, f''(x_0)<0$ *thì* x_0 *là điểm cực đại.*

Áp dụng Định lí 2, ta có quy tắc sau đây để tìm các điểm cực trị của một hàm số.

QUY TẮC II

1. Tìm tập xác định.

2. Tính $f'(x)$. *Giải phương trình* $f'(x)=0$ *và kí hiệu* $x_i (i=1,2,\ldots,n)$ *là các nghiệm của nó.*

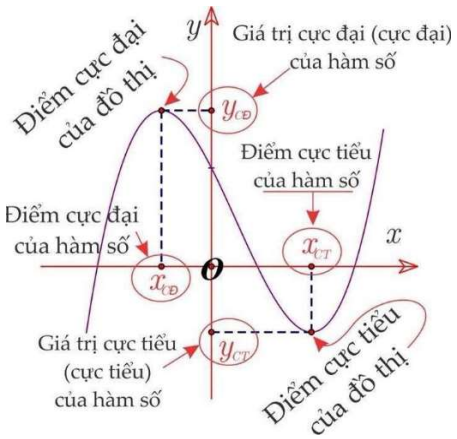
3. Tính $f''(x)$ *và* $f''(x_i)$.

4. Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ *suy ra tính chất cực trị của điểm* x_i.

Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số $f(x)=\frac{x^4}{4}-2x^2+6$.

CHÚ Ý

- Giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ của hàm số f nói chung không phải là giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của hàm số f trên tập xác định K mà $f(x_0)$ chỉ là giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của hàm số f trên khoảng $(a,b)\subset \mathrm{K}$ và (a,b) chứa x_0.
- Nếu $f'(x)$ không đổi dấu trên tập xác định K của hàm số f thì hàm số f không có cực trị.
- Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì người ta nói rằng hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 và điểm có tọa độ $(x_0;f(x_0))$ được gọi là **điểm cực trị của đồ thị hàm số** f.



B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Cho hàm số $y=f(x)$. Tìm các điểm cực đại, cực tiểu, giá trị cực đại giá trị cực tiểu

1. Phương pháp

Quy tắc 1. Lập bảng biến thiên suy ra kết luận về cực trị.

Tìm $f'(x)$.

ٯ Tìm các điểm $x_i (i=1,2,\ldots,n)$ mà tại đó $f'(x_i)=0$ hoặc tại đó hàm số f liên tục nhưng không có đạo hàm.

Lập bảng biến thiên. Xét sự đổi dấu của $f'(x)$ khi x đi qua x_i, từ đó suy ra cực trị của hàm số.

Quy tắc 2: Dựa vào đạo hàm cấp 2 .

Tính $f'(x)$.

Giải phương trình $f'(x)=0$ và tìm các nghiệm $x_i (i=1,2,\ldots,n)$.

Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)(i=1,2,\ldots,n)$

$+f''(x_i)<0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại x_i.

$+f''(x_i)>0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại x_i.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Tìm giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y=-x^3+3x-4$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y'=-3x^2+3$.

Xét $y'=0 \Leftrightarrow -3x^2+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-6	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có giá trị cực tiểu là $y_{CT}=-6$.

Ví dụ 2. Tìm cực trị của hàm số $y=x^4-2x^2+3$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4x$.

Giải $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow y = 2 \\ x = 0 \Rightarrow y = 3 \\ x = 1 \Rightarrow y = 2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0, y\text{CD} = 3$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1, y_{\text{CT}} = 2$.

Ví dụ 3. Tìm cực trị của hàm số $y = \dfrac{x^2 + 4}{x}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có: $y = x + \dfrac{4}{x} \Rightarrow y' = 1 - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$.

Giải $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \Rightarrow y = -4 \\ x = 2 \Rightarrow y = 4 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$
							4		

Hàm số đạt cực đại tại $x = -2, y_{\text{C}} = -4$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2, y_{\text{CT}} = 4$.

Ví dụ 4. Tìm cực trị của hàm số $y = x + \sqrt{2x - x^2}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = [0;2]$.

Ta có: $y' = 1 + \dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}, x \in (0;2)$.

Giải $y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-x^2} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ 2x-x^2 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Bảng biến thiên

x	0		$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$		2
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$1+\sqrt{2}$	↘	2

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}, y_{CD} = 1 + \sqrt{2}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ là?

A. $y_{CD} = 4$. **B.** $y_{CD} = 1$. **C.** $y_{CD} = 0$. **D.** $y_{CD} = -1$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow y = 4 \\ x = 1 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right.$.

Do đó giá trị cực đại của hàm số là $y_{CD} = 4$.

Câu 2: Tìm điểm cực trị x_0 của hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$.

A. $x_0 = -3$ hoặc $x_0 = -\dfrac{1}{3}$. **B.** $x_0 = 0$ hoặc $x_0 = \dfrac{10}{3}$.

C. $x_0 = 0$ hoặc $x_0 = -\dfrac{10}{3}$. **D.** $x_0 = 3$ hoặc $x_0 = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Chọn D

Ta có $y' = 3x^2 - 10x + 3;\ y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$..

Câu 3: Tìm điểm cực đại x_0 của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.

A. $x_0 = -1$. **B.** $x_0 = 0$. **C.** $x_0 = 1$. **D.** $x_0 = 2$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có $y'=3x^2-3=3\left(x^2-1\right);\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\to y\left(-1\right)=3\\x=1\to y\left(1\right)=-1\end{array}\right.$.

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.

Câu 4: Tìm các điểm cực trị của đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2$.

A. $\left(0;0\right)$ hoặc $\left(1;-2\right)$. **B.** $\left(0;0\right)$ hoặc $\left(2;4\right)$.

C. $\left(0;0\right)$ hoặc $\left(2;-4\right)$. **D.** $\left(0;0\right)$ hoặc $\left(-2;-4\right)$.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $y'=3x^2-6x=3x\left(x-2\right);\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\to y=0\\x=2\to y=-4\end{array}\right.$..

Câu 5: Biết rằng hàm số $y=x^3+4x^2-3x+7$ đạt cực tiểu tại x_{CT}. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_{CT}=\frac{1}{3}$. **B.** $x_{CT}=-3$. **C.** $x_{CT}=-\frac{1}{3}$. **D.** $x_{CT}=1$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có $y'=3x^2+8x-3;\ \ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=\frac{1}{3}\end{array}\right.$.

Vẽ bảng biến thiên, ta kết luận được $x_{CT}=\frac{1}{3}$.

Câu 6: Gọi y_{CD}, y_{CT} lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y=x^3-3x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $y_{CT}=2y_{CD}$. **B.** $y_{CT}=\frac{3}{2}y_{CD}$. **C.** $y_{CT}=y_{CD}$. **D.** $y_{CT}=-y_{CD}$.

Lời giải.

Chọn D

Ta có $y'=3x^2-3;\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\to y\left(1\right)=-2\\x=-1\to y\left(-1\right)=2\end{array}\right.$. Do đó $y_{CT}=-y_{CD}$.

Câu 7: Gọi y_1, y_2 lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+4$. Tính $P=y_1.y_2$.

A. $P=-302$. **B.** $P=-82$. **C.** $P=-207$. **D.** $P=25$.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $y'=3x^2-6x-9;\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\to y\left(3\right)=-23\\x=-1\to y\left(-1\right)=9\end{array}\right.$.

Suy ra $P=y_1.y_2=9.\left(-23\right)=-207$.

Câu 8: Cho hàm số $y=-x^4+2x^2+3$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số có 1 điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.

B. Đồ thị hàm số có 1 điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.

C. Đồ thị hàm số có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.

D. Đồ thị hàm số có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại.

Lời giải.

Chọn D

Ta có $y'=-4x^3+4x=-4x\left(x^2-1\right);\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

Vẽ phát họa bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại.

Cách 2. Ta có $\begin{cases}a=-1\\b=2\end{cases}\longrightarrow ab<0\longrightarrow$ đồ thị hàm số có ba điểm cực trị.

Vì $a=-1<0$ nên đồ thị có dạng chữ M. Từ đó suy ra đồ thị hàm số có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại.

Dạng 2: Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$, hoặc cho hàm số $f'(x)$, hoặc cho đồ thị $f'(x)$ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $f(x)$. Tìm các điểm cực trị của hàm số

1. Phương pháp

* Khi dựa vào bản xét dấu của $f'(x)$, nếu $f'(x)$ đổi dấu bao nhiêu lần thì có bấy nhiêu điểm cực trị

* Khi dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$, ta cần kết hợp xét dấu của $f'(x)$ và xem thử hàm số $f(x)$ có **xác định tại điểm** mà $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua hay không

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ với bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

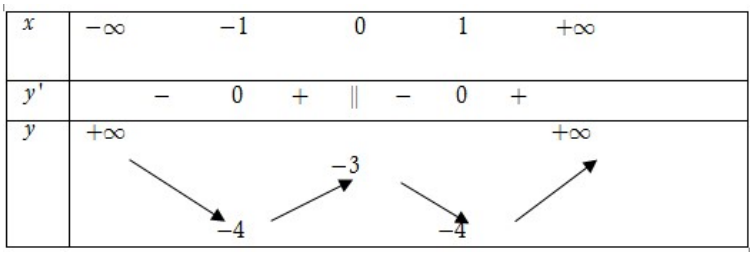
A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải.

Chọn A

Nhận thấy y' đổi dấu khi qua $x=-3$ và $x=2$ nên hàm số có 2 điểm cực trị. ($x=1$ không phải là điểm cực trị vì y' không đổi dấu khi qua $x=1$).

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có ba giá trị cực trị.

B. Hàm số có ba điểm cực trị.

C. Hàm số có hai điểm cực trị.

D. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=1$.

Lời giải.

Chọn B

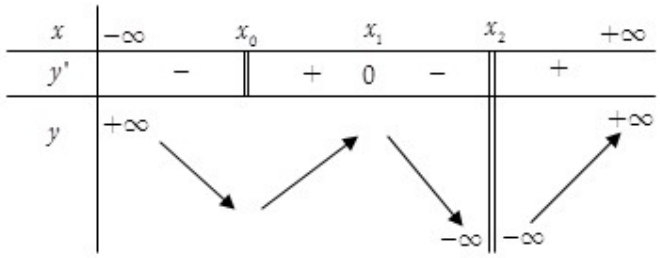
Dựa vào đồ thị hàm số, ta có các nhận xét sau:

● Hàm số có ba điểm cực trị, gồm các điểm $x=-1,\ x=1,\ x=0$ vì đạo hàm y' đổi dấu đi qua các điểm đó.

● Hàm số đạt cực đại tại $x=0$, đạt cực tiểu tại $x=\pm 1$.

(đáp án A sai vì hàm số chỉ có hai giá trị cực trị là $y_{CD}=-3$ và $y_{CT}=-4$. Nói đến đồ thị hàm số thì khi đó mới có ba điểm cực trị là $A(0;-3),\ B(-1;4),\ C(1;-4)$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục tại x_0 và có bảng biến thiên sau:



Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có hai điểm cực đại, một điểm cực tiểu.

B. Hàm số có một điểm cực đại, không có điểm cực tiểu.

C. Hàm số có một điểm cực đại, hai điểm cực tiểu.

D. Hàm số có một điểm cực đại, một điểm cực tiểu.

Lời giải.

Chọn D

● Tại $x=x_2$ hàm số $y=f(x)$ không xác định nên không đạt cực trị tại điểm này.

● Tại $x=x_1$ thì dễ thấy hàm số đạt cực đại tại điểm này.

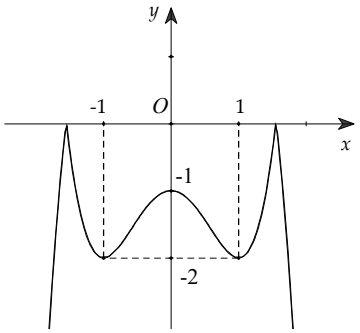
● Tại $x=x_0$, hàm số không có đạo hàm tại x_0 nhưng liên tục tại x_0 thì hàm số vẫn đạt cực trị

tại x_0 và theo như bảng biến thiên thì đó là cực tiểu.

Vậy hàm số có một điểm cực đại, một điểm cực tiểu.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 vui lòng liên hệ zalo chính tác giả Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa và được nhiều ưu đãi. " Tránh mua các trang và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?



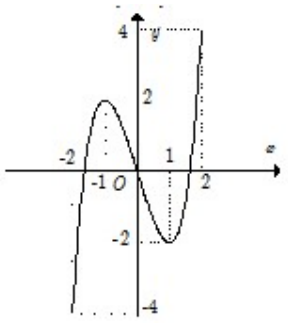
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải.

Chọn D

Theo định nghĩa cực trị thì từ đồ thị ta nhận thấy hàm số có 5 điểm cực trị.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?



A. $x=-2$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

Lời giải.

Chọn B

Theo định nghĩa điểm cực đại thì hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.

Ví dụ 6: Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^5$. Hỏi hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

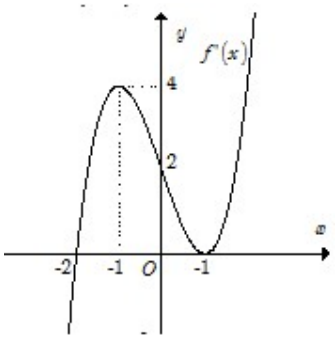
Lời giải.

Chọn B

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\ x=1\\ x=2,\ x=3\end{array}\right.$. Tuy nhiên lại xuất hiện nghiệm kép tại $x=1$ (nghiệm kép thì y'

qua nghiệm không đổi dấu) nên hàm số đã cho có ba điểm cực trị.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=-1$..

B. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

C. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=-2$..

D. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=-2$.

Lời giải.

Chọn C

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta có các nhận xét sau:

● $f'(x)$ đổi dấu từ "$-$" sang "$+$" khi đi qua điểm $x=-2$ suy ra $x=-2$ là điểm cực trị và là

điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$.

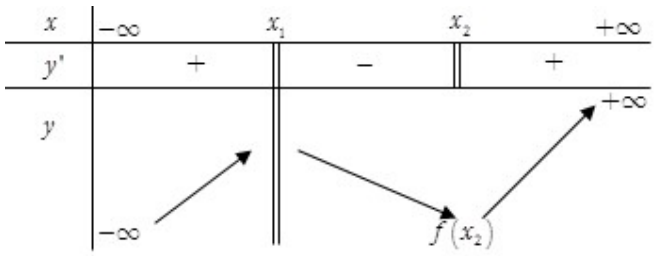
● $f'(x)$ không đổi dấu khi đi qua điểm $x=-1,\ x=1$ suy ra $x=-1,\ x=1$ không là các điểm

cực trị của hàm số $y=f(x)$.

Vậy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm $x=-2$.

3. Bài tập rèn luyện

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{x_1\}$, có bảng biến thiên như sau:



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho có một điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.

B. Hàm số đã cho không có cực trị.

C. Hàm số đã cho có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

D. Hàm số đã cho có một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.

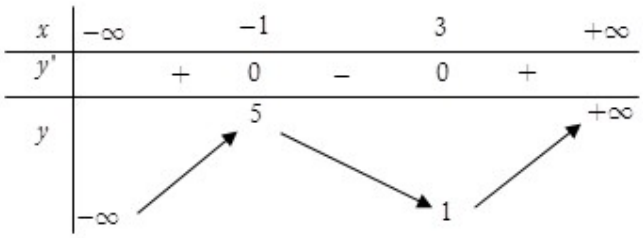
Lời giải.

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy

- $f'(x)$ đổi dấu từ "+" sang "−" khi đi qua điểm x_1 nhưng tại x_1 hàm số $f(x)$ không xác định nên x_1 không phải là điểm cực đại.
- $f'(x)$ đổi dấu từ "−" sang "+" khi đi qua điểm x_2 suy ra x_2 là điểm cực tiểu của hàm số.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau:



Hàm số $y=|f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5.. **B.** 3.. **C.** 4.. **D.** 2.

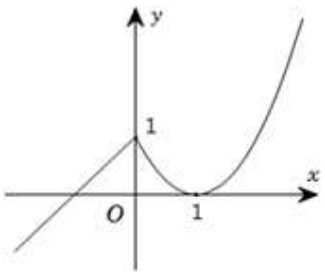
Lời giải.

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất

và đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị suy ra đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ có 3 điểm cực trị.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

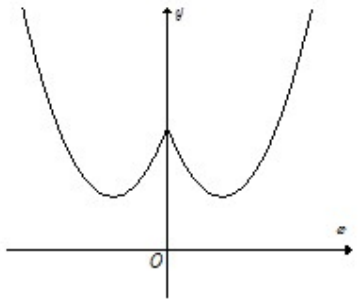
Lời giải.

Chọn D

Dễ nhận thấy hàm số có một điểm cực trị là điểm cực tiểu tại $x=1$.

Xét hàm số $f(x)$ trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, ta có $f(x)<f(0)$ với mọi $x\in\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)$. Suy ra $x=0$ là điểm cực đại của hàm số. Vậy hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 4: Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.

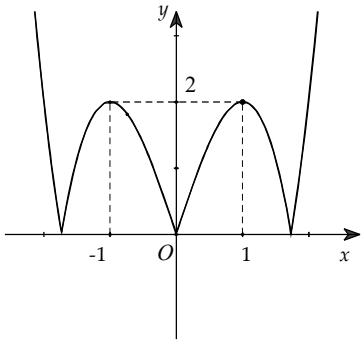
Chọn A

Dễ nhận thấy đồ thị hàm số có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua Oy.

Vấn đề nằm ở chỗ là điểm có đồ thị gấp khúc có phải là điểm cực trị của đồ thị hàm số hay không? Câu trả lời là có

Vậy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị, gồm 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?



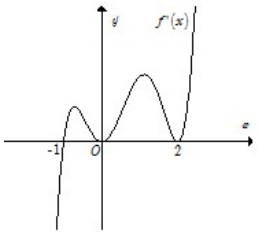
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải.

Chọn D

Theo định nghĩa cực trị thì từ đồ thị ta nhận thấy hàm số có 5 điểm cực trị.

Câu 6: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng K. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên khoảng K. Hỏi hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải.

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f'(x)=0$ chỉ có một nghiệm đơn (cắt trục hoành tại một
điểm) và hai nghiệm kép (tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm) nên $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi qua
nghiệm đơn. Do đó suy ra hàm số $f(x)$ có đúng một cực trị.

Nhận xét. Đây là một dạng toán suy ngược đồ thị.

Dạng 3: Tìm tham số m để hàm số có cực trị, hàm số có cực trị thỏa điều kiện K

1. Phương pháp

* Hàm số đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0)=0$

Đối với hàm bậc ba, ta có thể làm trắc nghiệm như sau:

- Hàm bậc ba có cực trị (hai điểm cực trị) khi và chỉ khi $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_{y'}>0$

- Hàm bậc ba không có cực trị $\Leftrightarrow \Delta_{y'}\le 0$

- Hàm số đạt cực tiểu tại $x=x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_o)=0 \\ f''(x_o)>0 \end{cases}$

- Hàm số đạt cực đại tại $x=x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(xo)=0 \\ f''(xo)<0 \end{cases}$

* Hàm số trùng phương $y=ax^4+bx^2+c,(a\ne 0)$ có 3 điểm cực trị khi $ab<0$

* Hàm số trùng phương $y=ax^4+bx^2+c,(a\ne 0)$ có 1 điểm cực trị khi $ab\ge 0$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Tìm m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-4)x+3$ đạt cực đại tại điểm $x=3$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - 4 \Rightarrow y'' = 2x - 2m$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$ thì

$$y'(3) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 5 \end{array}\right.$$

Với $m = 1, y''(3) = 2.3 - 2.1 = 4 > 0$ suy ra $x = 3$ là điểm cực tiểu.

Với $m = 5, y''(3) = 2.3 - 2.5 = -4 < 0$ suy ra $x = 3$ là điểm cực đại.

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3mx^2 + (m-1)x + 2$. Tìm m để hàm số đạt cucc tiểu tại $x = 2$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6mx + m - 1$. Diều kiện cần để hàm số đạt cực trị tại điểm $x = 2$ là $f'(2) = 0$, hay

$12 - 12m + m - 1 = 0 \Leftrightarrow 11m = 11 \Leftrightarrow m = 1.$

Thử lại:

Cách 1. Khi $m = 1$, ta có

$f'(x) = 3x^2 - 6x,$
$f''(x) = 6x - 6,$
$f'(2) = 0, f''(2) = 12 - 6 = 6 > 0.$

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại diểm $x = 2$. Vậy $m = 1$ thỏa mản các yêu cầu dề bài.

Cách 2. Khi $m = 1$, ta có

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2, f'(x) = 3x^2 - 6x, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$y_{CD} = 2$	↘	$y_{CT} = -2$	↗	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tiểu tại $x = 2$. Vậy $m = 1$ thỏa mản yêu cầu đề bài.

Ví dụ 3. Tìm m để hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị đó, tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 6x + m, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x+m=0.$

Điều kiện để hàm số có hai diểm cực trị x_1,x_2 là (1) có hai nghiệm phân biệt, hay $\Delta=36-12m>0$, tức là $m<3$.

Khi đó x_1,x_2 là hai nghiệm của (1) nên:

$$x_1+x_2=2, x_1x_2=\frac{m}{3}.$$

Theo giả thiết:

$$x_1^2+x_2^2=3 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=3 \Leftrightarrow 4-\frac{2m}{3}=3 \Leftrightarrow \frac{2m}{3}=1 \Leftrightarrow m=\frac{3}{2}$$

Vậy yêu cầu bài toán là: $m=\frac{3}{2}$.

Ví dụ 4. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y=x^4+2(m-2)x^2+3m-2$ có ba điểm cực trị.

Lời giải

Ta có: $y=x^4+2(m-2)x^2+3m-2$; $y'=4x^3+4(m-2)x=4x(x^2+m-2)$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=2-m \quad (1) \end{array}\right.$$

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow 2-m>0 \Leftrightarrow m<2$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2+6mx+m$ có hai điểm cực trị.

A. $m\in(0;2)$. **B.** $m\in(-\infty;0)\cup(8;+\infty)$.

C. $m\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$. **D.** $m\in(0;8)$.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $y'=3x^2-6mx+6m=3(x^2-2mx+2m)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow x^2-2mx+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta'=m^2-2m>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>2 \end{array}\right.$$

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{m}{3}x^3+x^2+x+2017$ có cực trị.

A. $m\in(-\infty;1]$. **B.** $m\in(-\infty;0)\cup(0;1)$.

C. $m\in(-\infty;0)\cup(0;1]$. **D.** $m\in(-\infty;1)$.

Lời giải.

Chọn D

Nếu $m=0$ thì $y=x^2+x+2017$: Hàm bậc hai luôn có cực trị.

Khi $m\neq 0$, ta có $y'=mx^2+2x+1$.

Để hàm số có cực trị khi và chỉ khi phương trình $mx^2+2x+1=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta'=1-m>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\neq m<1.$

Hợp hai trường hợp ta được $m<1$.

Nhận xét. Sai lầm thường gặp là không xét trường hợp $m=0$ dẫn đến chọn đáp án B.

Câu 3: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=(m-3)x^3-2mx^2+3$ không có cực trị.

A. $m=3$. **B.** $m=0$, $m=3$. **C.** $m=0$. **D.** $m\neq 3$.

Lời giải.

Chọn C

● Nếu $m=3$ thì $y=-6x^2+3$. Đây là một Parabol nên luôn có một cực trị.

● Nếu $m\neq 3$, ta có $y'=3(m-3)x^2-4mx$.

Để hàm số có không có cực trị khi $y'=0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta'=4m^2\leq 0 \Leftrightarrow m=0.$

Câu 4: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(3m+2)x^2+(2m^2+3m+1)x-4$. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị là $x=3$ và $x=5$.

A. $m=0$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $y'=x^2-(3m+2)x+(2m^2+3m+1)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm $x=3$ hoặc $x=5$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9-3(3m+2)+(2m^2+3m+1)=0 \\ 25-5(3m+2)+(2m^2+3m+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2-6m+4=0 \\ 2m^2-12m+16=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=2.$

Câu 5: Biết rằng hàm số $y=ax^3+bx^2+cx\ (a\neq 0)$ nhận $x=-1$ là một điểm cực trị. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a+c=b$. **B.** $2a-b=0$.

C. $3a+c=2b$. **D.** $3a+2b+c=0$.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$.

Hàm số nhận $x=-1$ là một điểm cực trị nên suy ra $y'(-1)=0$

$\Leftrightarrow 3a-2b+c=0 \Leftrightarrow 3a+c=2b.$

Câu 6: Biết rằng hàm số $y=3x^3-mx^2+mx-3$ có một điểm cực trị $x_1=-1$. Tìm điểm cực trị còn lại x_2 của hàm số.

A. $x_2=\frac{1}{4}$. **B.** $x_2=\frac{1}{3}$. **C.** $x_2=-\frac{1}{3}$. **D.** $x_2=-2m-6$.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $y'=9x^2-2mx+m$.

Để hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'=m^2-9m>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>9 \end{array}\right.$. $(*)$

Theo giả thiết: $y'(-1)=0 \Leftrightarrow 9+3m=0 \Leftrightarrow m=-3$ (thỏa mãn $(*)$).

Với $m=-3$ thì $y'=9x^2+6x-3;\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{1}{3} \end{array}\right.$..

Câu 7: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-4)x+5$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=-1$.

A. $m=1$.. **B.** $m=-3$. **C.** $m=1,\ m=-3$. **D.** $-3\le m\le 1$.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $y'=x^2-2mx+(m^2-4)$.

Vì $x=-1$ là điểm cực tiểu của hàm số $\longrightarrow y'(-1)=0 \Leftrightarrow m^2+2m-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3 \end{array}\right.$.

Thử lại ta thấy chỉ có giá trị $m=-3$ thỏa mãn y' đổi dấu từ "−" sang "+" khi qua $x=-1$.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=4x^3+mx^2-12x$ đạt cực tiểu tại điểm $x=-2$.

A. $m=-9$. **B.** $m=2$. **C.** $m=9$. **D.** Không có m.

Lời giải.

Chọn D

Đạo hàm $f'(x)=12x^2+2mx-12$ và $f''(x)=24x+2m$.

Riêng hàm bậc ba, yêu cầu bài toán tương đương với $\begin{cases} f'(-2)=0 \\ f''(-2)>0 \end{cases}$

$\leftrightarrow \begin{cases} 12.4-4m-12=0 \\ -48+2m>0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} m=9 \\ m>24 \end{cases}$: vô nghiệm.

Cách trắc nghiệm. Thay ngược đáp án nhưng lâu hơn cách tự luận.

Câu 9: Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3+m$. Tìm các giá trị của tham số m để $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=7$.

A. $m=0$. **B.** $m=\pm\dfrac{9}{2}$. **C.** $m=\pm\dfrac{1}{2}$. **D.** $m=\pm2$.

Lời giải.

Chọn D

Ta có $y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)=3\left[x^2-2mx+\left(m^2-1\right)\right]$.

Do $\Delta'=m^2-m^2+1=1>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2.

Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2m\\x_1x_2=m^2-1\end{cases}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-3x_1x_2=7\Leftrightarrow4m^2-3\left(m^2-1\right)=7\Leftrightarrow m^2=4\Leftrightarrow m=\pm2$.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=2x^3-3x^2-m$ có các giá trị cực trị trái dấu.

A. $m=-1,\ m=0$. **B.** $m<0,\ m>-1$.

C. $-1<m<0$. **D.** $0\le m\le1$.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $f'\left(x\right)=6x^2-6x;\ f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\to f\left(0\right)=-m\\x=1\to f\left(1\right)=-m-1\end{array}\right.$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m\left(m+1\right)<0\Leftrightarrow-1<m<0$.

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^4+2mx^2+m^2+m$ có ba điểm cực trị.

A. $m=0.$. **B.** $m>0.$. **C.** $m<0.$. **D.** $m\ne0$.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $y'=4x^3+4mx=4x\left(x^2+m\right);\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=-m\end{array}\right.$.

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow\ y'=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow-m>0\Leftrightarrow m<0$.

Dạng 4: Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực trị

1. Phương pháp

Cho hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^3+cx+d\quad(a\ne0)$ có đồ thị là (C).

- Bước 1: Thực hiện phép chia đa thức: $y=ax^3+bx^2+cx+d$ cho $y'=3ax^2+2bx+c$ được thương là $q(x)$ và phần dư là $r(x)=mx+n$, ta được: $y=y'\cdot q(x)+r(x)$

- Bước 2: Đường thẳng $(d):y=r(x)=mx+n$ là đương thẳng di qua hai điểm cực trị

2. Các ví dụ

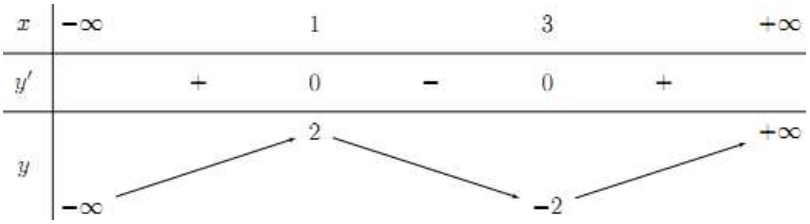
Ví dụ 1. Viết phương trình đường thẳng đi qua diểm $M(-1;1)$ và vuông góc với dường thẳng di qua diểm cực trị của $(C): y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.

Lời giải.

Tập xác dịnh: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Suy ra tọa độ hai diểm cực trị là $A(1;2), B(3;-2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2;-4)$.

Phương trình dường thẳng d di qua $M(-1;1)$ và vuông góc với AB là $d: 2(x+1) - 4(y-1) = 0$
$\Rightarrow d: x - 2y + 3 = 0$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 3m(m+2)x - 1$ (1) (m là tham s? th?c).

1) Tìm m để hàm số (1) có hai cục trị cùng dấu.

2) Khi đồ thị hàm số có hai diểm cực trị, hãy viết phương trình dường thẳng di qua hai diểm cực trị đó.

Lời giải.

1. Tập xác dịnh: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 3m(m+2)$.

Hàm số (1) có hai cực trị cùng dấu khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu, hay

$$\begin{cases} \Delta' = 9 + 9m(m+2) > 0 \\ P = -m(m+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m + 1 > 0 \\ m(m+2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 \neq 0 \\ m \in (-2;0) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-2;0) \setminus \{-1\}.$$

2. Ta có:

$$\begin{cases} y = x^3 - 3x^2 - 3m(m+2)x - 1 \\ 3x^2 - 6x - 3m(m+2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \left[3x^2 - 6x - 3m(m+2)\right]\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{3}\right) - 2(m+1)^2 x - (m+1)^2 \\ 3x^2 - 6x - 3m(m+2) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow y = -2(m+1)^2 x - (m+1)^2$.

Vậy đường thẳng di qua hai diểm cực trị là $\Delta: y = -2(m+1)^2 x - (m+1)^2$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=-2x^3+3x^2+1$.

A. $y=x-1.$ **B.** $y=x+1.$ **C.** $y=-x+1.$ **D.** $y=-x-1.$

Lời giải.

Chọn B

Ta có $y'=-6x^2+6x;\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=1\\x=1\Rightarrow y=2\end{array}\right.$.

Suy ra đồ thị hàm số đã hai điểm cực trị là $A(0;1)$ và $B(1;2)$.

Khi đó, đường thẳng đi qua hai điểm cực trị chính là đường thẳng AB có phương trình $y=x+1$.

Cách 2. Lấy y chia cho y', ta được $\Leftrightarrow y=\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)y'+x+1$.

Suy ra phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là phần dư trong phép chia, đó là $y=x+1$.

Câu 2: Cho hàm số $y=x^3-3x^2-9x+m$. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

A. $y=-8x+m$. **B.** $y=-8x+m-3$.

C. $y=-8x+m+3$. **D.** $y=-8x-m+3$.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $y'=3x^2-6x-9;\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\Rightarrow y=5+m\\x=3\Rightarrow y=-27+m\end{array}\right.$.

Suy ra tọa độ hai điểm cực trị là $A(-1;5+m)$ và $B(3;-27+m)$.

Suy ra đường thẳng đi qua hai điểm $A,\ B$ có phương trình $y=-8x+m-3$.

Câu 3: Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d:y=(2m-1)x+3+m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$.

A. $m=-\frac{1}{2}.$ **B.** $m=\frac{3}{2}.$ **C.** $m=\frac{1}{4}.$ **D.** $m=\frac{3}{4}.$

Lời giải.

Chọn D

Xét hàm $y=x^3-3x^2+1$, có $y'=3x^2-6x$

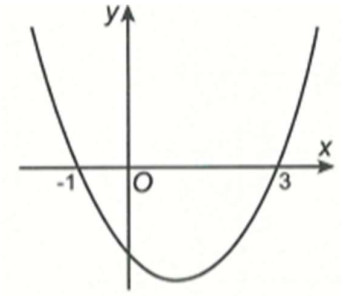
Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị $y=-2x+1$

Đường thẳng $d:y=(2m-1)x+3+m$ có một VTCP là $\overrightarrow{n_d}=(2m-1;-1).$

Ycbt $\Leftrightarrow\overrightarrow{n_{AB}}.\overrightarrow{n_d}=0\Leftrightarrow 2.(2m-1)-1=0\Leftrightarrow m=\frac{3}{4}.$

Dạng 5. BÀI TẬP DÀNH CHO HỌC SINH ĐIỂM 8+,9+

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=f(3-x^2)$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x=0$. **B.** $x=2$. **C.** $x=\pm 2$. **D.** $x=-2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình $f'(x)=0$ có 2 nghiệm bội lẻ là $x=-1, x=3$.

Ta có: $g'(x)=\left[f(3-x^2)\right]'=-2x.f'(3-x^2)$.

Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 3-x^2=-1 \\ 3-x^2=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=4 \\ x^2=0 \end{array}\right.$

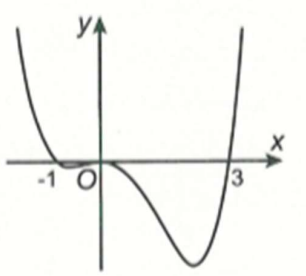
Suy ra $g'(x)=0$ có 3 nghiệm bội lẻ là $x=0, x=\pm 2$.

Vì $g'(3)=-6.f'(6)<0$ nên ta có bảng xét dấu $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Lưu ý: *Do các nghiệm đều là nghiệm bội lẻ, nên $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua mỗi nghiệm ấy. Chính vì vậy mà ta chỉ cần biết dấu của một khoảng nào đó sẽ suy ra dấu ở các khoảng còn lại. Do hàm số liên tục, nên chỉ cần biết dấu tại 1 điểm, ta sẽ biết dấu ở khoảng chứa điểm đó.*
Ở bài này, ta xét tại điểm $x=3\in(2;+\infty)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số cực trị của hàm số $h(x)=f(x^2-2x)$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

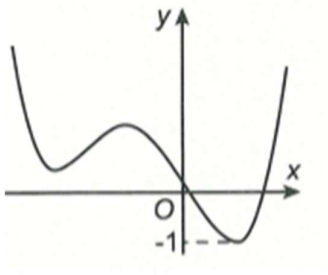
Ta có: $h'(x)=(2x-2).f'(x^2-2x)$.

Dựa vào đồ thị, ta có $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x=-1 \\ x^2-2x=3. \end{array}\right.$

Phương trình trên chỉ có 3 nghiệm bội lẻ là $x=\pm 1, x=3$ nên hàm số $h(x)$ chỉ có 3 điểm cực trị.

Chú ý: *Ta chỉ cần quan tâm đến nghiệm bội lẻ, nên trong bài này ta bỏ qua nghiệm x=0 của phương trình* $f'(x)=0$ *(là nghiệm bội chẵn nên đạo hàm không đổi dấu khi qua nghiệm này). Ta cũng không cần xét đến phương trình* $x^2-2x=-1$

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'(x-2)$ có đồ thị như hình dưới. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là



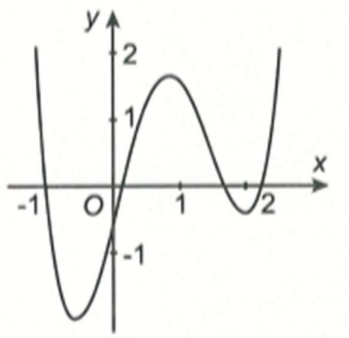
A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ bằng với số điểm cực trị của $y=f(x-2)$. Vì hàm số $y=f(x-2)$ có 2 điểm cực trị nên hàm số $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y=f'(x-2)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y=2f(x-3)-4$ là



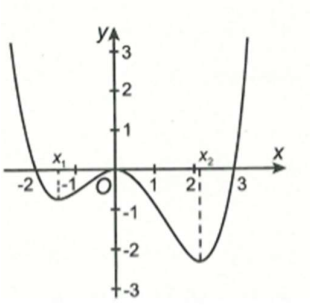
A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Nhận xét: Số điểm cực trị của hàm số $y=2f\left(x-3\right)-4$ bằng với số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)$ và bằng với số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x-2\right)$. Ta có đồ thị hàm số $y=f'\left(x-2\right)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt nên hàm số $y=f\left(x-2\right)$ có 4 điểm cực trị. Vậy hàm số $y=2f\left(x-3\right)-4$ có 4 điểm cực trị.

Câu 5. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới (chỉ đạt cực trị tại 3 điểm và cũng chỉ có 3 điểm chung với trục hoành).



Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=\left[f\left(x\right)\right]^2$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $g'\left(x\right)=2f'\left(x\right).f\left(x\right)$. Cho $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f'\left(x\right)=0 & (1)\\ f\left(x\right)=0 & (2).\end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị trên, ta có:

$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\ x=0\\ x=x_2\end{array}\right.$ (các nghiệm đều là nghiệm bội lẻ).

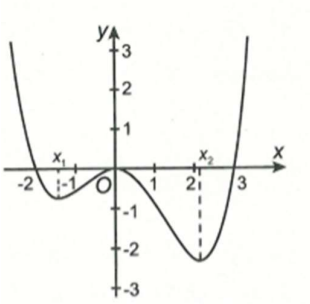
$(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=3\\ x=0\end{array}\right.$ (trong đó $x=0$ nghiệm kép,hai nghiệm kia là nghiệm đơn).

Vậy phương trình $g'\left(x\right)=0$ có 5 nghiệm bội lẻ.

Do vậy số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=\left[f\left(x\right)\right]^2$ là 5.

Câu 6. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới (chỉ đạt cực trị tại 3 điểm và cũng chỉ có 3 điểm chung với trục hoành).

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 vui lòng liên hệ zalo chính tác giả Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa và được nhiều ưu đãi. " Tránh mua các trang và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left[f(x)\right]$ là

A. 6 **B.** 7 **C.** 8 **D.** 9

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $g'(x)=f'(x).f'\left[f(x)\right]$.

Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} f'(x)=0 & (1)\\ f'\left[f(x)\right]=0 & (2)\end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị trên ta có:

$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=x_1\\ x=0\\ x=x_2\end{array}\right.$ (các nghiệm đều là nghiệm bội lẻ).

$(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=x_1\\ f(x)=0\\ f(x)=x_2.\end{array}\right.$

Phương trình $f(x)=x_1$ với $x_1\in(-2;-1)$ có 2 nghiệm đơn khác với 3 nghiệm $x=x_1;x=0;x=x_2$.

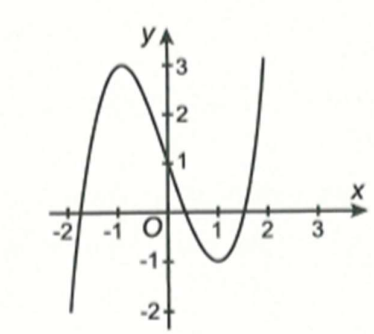
Phương trình $f(x)=0$ có 2 nghiệm đơn là $x=-2,x=3$ (khác với 5 nghiệm đơn trên) và nghiệm kép $x=0$.

Phương trình $f(x)=x_2$ với $x_2\in(2;3)$ có 2 nghiệm đơn khác với tất cả các nghiệm trên.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có tổng cộng 9 nghiệm bội lẻ nên hàm số $g(x)=f\left[f(x)\right]$ có tổng cộng 9 điểm cực trị.

Chú ý: *Chỉ cần quan tâm đến nghiệm bội lẻ hoặc nghiệm mà đạo hàm đổi dấu khi đi qua của phương trình* $f'(x)=0$

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đúng 2 điểm cực trị $x=-1,x=1$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Hỏi hàm số $y=3f\left(x^3-6x^2+9x+1\right)+2020$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Do hàm số $y=f\left(x\right)$ có đúng hai điểm cực trị $x=-1,x=1$ nên phương trình $f'\left(x\right)=0$ có hai nghiệm bội lẻ phân biệt $x=-1,x=1$.

Ta có: $y'=3\left(3x^2-12x+9\right)f'\left(x^3-6x^2+9x+1\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-12x+9=0\\x^3-6x^2+9x+1=-1\\x^3-6x^2+9x+1=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.\\x=x_0\in\left(-1;0\right)\\x\left(x-3\right)^2=0.\end{array}\right.$$

Vì $y'=0$ có các nghiệm lẻ là $x=x_0,x=1$ và $x=3$ nên hàm số $y=3f\left(x^3-6x^2+9x+1\right)+2020$ có tất cả 4 điểm cực trị.

Câu 8. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2\left(x^2-4x\right)$.Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(2x^2-12x+m\right)$ có đúng 5 điểm cực trị ?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 19.

Lời giải.

Chọn B

Ta có : $f'(x)=0\Leftrightarrow(x+1)^2\left(x^2-4x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=4\end{array}\right.$, trong đó $x=-1$ là nghiệm kép.

$g(x)=f\left(2x^2-12x+m\right)\Rightarrow g'\left(x\right)=\left(4x-12\right)f'\left(2x^2-12x+m\right)$

Xét $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left(4x-12\right)f'\left(2x^2-12x+m\right)=0$ (*)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ 2x^2-12x+m=-1 \\ 2x^2-12x+m=0 \\ 2x^2-12x+m=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ 2x^2-12x+m=-1\ (l) \\ 2x^2-12x=-m \quad (1) \\ 2x^2-12x=4-m \quad (2) \end{array}\right.$$

(Điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là nghiệm bội lẻ của phương trình (*) nên ta loại phương trình $2x^2-12x+m=-1$). Xét hàm số $y=2x^2-12x$ có đồ thị (C) có $y'=4x-12$

Ta có bảng biến thiên

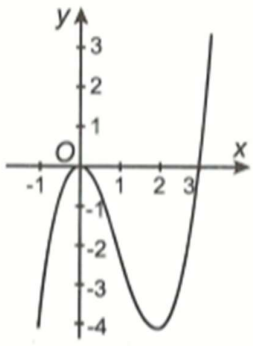
x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-18	$\nearrow$	$+\infty$

Để $g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị thì mỗi phương trình $(1);(2)$ đều có hai nghiệm phân biệt $\neq 3$

Do đó, mỗi đường thẳng $y=4-m$ và $y=-m$ phải cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ khác 3. Nhận xét: đường thẳng $y=4-m$ luôn nằm trên đường thẳng $y=-m$.

Ta có: $-18<-m \Leftrightarrow m<18$. Vậy có 17 giá trị m nguyên dương

Câu 9. Biết rằng hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số $y=5f\left[f(x-3)+1\right]-20$ là

A. 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Số điểm cực trị của hàm số $y=5f\left[f(x-3)+1\right]-20$ bằng với số điểm cực trị của hàm số $y=f\left[f(x-3)+1\right]$ và cũng bằng với số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left[f(x)\right]$.

Ta có: $g'(x)=f'(x).f'\left[f(x)\right]$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \quad (1) \\ f'\left[f(x)\right]=0 \quad (2) \end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị, ta có

$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$ (trong đó $x=0$ và $x=2$ là nghiệm bội lẻ).

$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \quad (3) \\ f(x)=2 \quad (4) \end{array}\right.$

$(3) \Leftrightarrow x=3$ (nghiệm đơn) hoặc $x=0$ (nghiệm kép).

$(4) \Leftrightarrow x=x_0>3$ (nghiệm đơn).

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 4 nghiệm bội lẻ nên $g(x)$ có 4 điểm cực trị

Suy ra hàm số $y=5f\left[f(x-3)+1\right]-20$ cũng có 4 điểm cực trị.

BÀI 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Cho hàm số. xác định trên tập D.

- Số M được gọi là **giá trị lớn nhất (GTLN)** của hàm số $y=f(x)$ trên tập D, nếu $f(x)\le M$ với $\forall x\in \mathrm{D}$ và tồn tại $x_0\in D$ sao cho $f(x_0)=M$. Kí hiệu: $M=\max\limits_{x\in \mathrm{D}} f(x)$.
- Số m được gọi là **giá trị nhỏ nhất (GTNN)** của hàm số $y=f(x)$ trên tập D, nếu $f(x)\ge m$ với $\forall x\in \mathrm{D}$ và tồn tại $x_0\in \mathrm{D}$ sao cho $f(x_0)=m$. Kí hiệu: $m=\min\limits_{x\in \mathrm{D}} f(x)$.

2. Định lý

Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]\Rightarrow$ tồn tại $\max\limits_{[a;b]} f(x)$, $\min\limits_{[a;b]} f(x)$.

3. Cách tìm GTLN – GTNN trên một đoạn

Bước 1: Tìm các điểm $x_1,x_2,...,x_n$ trên $[a;b]$ mà tại đó $f'(x)=0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 2: Tính $f(a),f(x_1),f(x_2),\ ...,f(x_n),f(b)$.

Bước 3: Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên thì

$$\begin{cases} M=\max\limits_{[a;b]} f(x) \\ m=\min\limits_{[a;b]} f(x) \end{cases}.$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên $[a,b]$

1. Phương pháp

- **Bước 1:**

  Hàm số đã cho $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$.

  Tìm các điểm $x_1,x_2,...,x_n$ trên khoảng $(a;b)$, tại đó $f'(x)=0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

- **Bước 2:** Tính $f(a),f(x_1),f(x_2),...,f(x_n),f(b)$.

- **Bước 3:** Khi đó: $\max\limits_{[a,b]} f(x)=\max\{f(x_1),f(x_2),...,f(x_n),f(a),f(b)\}$.

  $\min\limits_{[a,b]} f(x)=\min\{f(x_1),f(x_2),...,f(x_n),f(a),f(b)\}$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^3+3x^2-12x+2$ trên đoạn $[-1;2]$.

Lời giải.

Ta có: $y'=6x^2+6x-12$.

$0 \Leftrightarrow 6x^2+6x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Trên đoạn $[-1:2]$ ta có: $y(-1)=15$; $y(1)=-5; y(2)=6$.

Vậy $\max_{[-1;2]} y=15$ tại $x=-1$ và $\min_{[-1;2]} y=-5$ tại $x=1$.

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\dfrac{1}{x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

Lời giải.

Với $x\neq 0$ ta có: $y'=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$.

$y'=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{x^2}=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1.$

Trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2}:2\right]$ ta có: $y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{2}; y(1)=2; y(2)=\dfrac{5}{2}$.

Vậy $\max_{\left[\frac{1}{2};2\right]} y=\dfrac{5}{2}$ tại $x=\dfrac{1}{2}$ hoặc $x=2$ và $\min_{\left[\frac{1}{2};2\right]} y=2$ tại $x=1$.

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$ trên đoạn $[-2;3]$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2.$

$f(-2)=\sqrt{17}; f(2)=1; f(3)=\sqrt{2}$

Vậy $\max_{[-2;3]} f(x)=\sqrt{17}$ tại $x=-2$ và $\min_{[-2;3]} f(x)=1$ tại $x=2$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-2x^2-4x+1$ trên đoạn $[1;3]$.

A. $\max\limits_{[1;3]} f(x)=\dfrac{67}{27}$. **B.** $\max\limits_{[1;3]} f(x)=-2$. **C.** $\max\limits_{[1;3]} f(x)=-7$. **D.** $\max\limits_{[1;3]} f(x)=7$.

Lời giải.

Chọn B

Đạo hàm $f'(x)=3x^2-4x-4 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\in[1;3] \\ x=-\dfrac{2}{3}\notin[1;3] \end{array}\right.$.

Ta có $\begin{cases} f(1)=-4 \\ f(2)=-7 \\ f(3)=-2 \end{cases} \Rightarrow \max\limits_{[1;3]} f(x)=-2.$

Cách 2. Sử dụng chức năng MODE 7 và nhập hàm $f(X)=X^3-2X^2-4X+1$ với thiết lập Start 1, End 3, Step 0,2.

Quan sát bảng giá trị $F(X)$ ta thấy giá trị lớn nhất $F(X)$ bằng -2 khi $X=3.$.

Câu 2: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=2x^3+3x^2-1$ trên đoạn $\left[-2;-\frac{1}{2}\right]$. Tính $P=M-m$.

A. $P=-5$. **B.** $P=1$. **C.** $P=4$. **D.** $P=5$.

Lời giải.

Chọn D

Đạo hàm $f'(x)=6x^2+6x \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \notin \left[-2;-\frac{1}{2}\right] \\ x=-1 \in \left[-2;-\frac{1}{2}\right] \end{array}\right.$.

Ta có $\begin{cases} f(-2)=-5 \\ f(-1)=0 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=\min\limits_{\left[-2;-\frac{1}{2}\right]} f(x)=-5 \\ M=\max\limits_{\left[-2;-\frac{1}{2}\right]} f(x)=0 \end{cases} \longrightarrow P=M-m=5.$.

Câu 3: Biết rằng hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x+28$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;4]$ tại x_0. Tính $P=x_0+2018$.

A. $P=3$. **B.** $P=2019$. **C.** $P=2021$. **D.** $P=2018$.

Lời giải.

Chọn C

Đạo hàm $f'(x)=3x^2-6x-9 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \notin [0;4] \\ x=3 \in [0;4] \end{array}\right.$.

Ta có $\begin{cases} f(0)=28 \\ f(3)=1 \\ f(4)=8 \end{cases} \Rightarrow \min\limits_{[0;4]} f(x)=1$ khi $x=3=x_0 \Rightarrow P=2021.$.

Câu 4: Xét hàm số $f(x)=-\frac{4}{3}x^3-2x^2-x-3$ trên $[-1;1]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất tại $x=-1$ và giá trị lớn nhất tại $x=1$.
B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất tại $x=1$ và giá trị lớn nhất tại $x=-1$.
C. Hàm số có giá trị nhỏ nhất tại $x=-1$ nhưng không có giá trị lớn nhất.
D. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất nhưng có giá trị lớn nhất tại $x=1$.

Lời giải.

Chọn B

Đạo hàm $f'(x)=-4x^2-4x-1=-(2x+1)^2 \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 vui lòng liên hệ zalo chính tác giả Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa và được nhiều ưu đãi. " Tránh mua các trang và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$ nên có giá trị nhỏ nhất tại $x=1$ và giá trị lớn nhất tại $x=-1$.

Câu 5: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^4-2x^2+5$ trên đoạn $[-2;2]$.

A. $\max\limits_{[-2;2]} f(x)=-4.$. **B.** $\max\limits_{[-2;2]} f(x)=13.$ **C.** $\max\limits_{[-2;2]} f(x)=14.$ **D.** $\max\limits_{[-2;2]} f(x)=23.$

Lời giải.

Chọn B

Đạo hàm $f'(x)=4x^3-4x \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0\in[-2;2] \\ x=1\in[-2;2] \\ x=-1\in[-2;2] \end{bmatrix}$.

Ta có $\begin{cases} f(-2)=f(2)=13 \\ f(-1)=f(1)=4 \\ f(0)=5 \end{cases} \Rightarrow \max\limits_{[-2;2]} f(x)=13.$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=-2x^4+4x^2+10$. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số trên đoạn $[0;2]$.

A. $M=10;\ m=-6.$ **B.** $M=12;\ m=-6.$

C. $M=10;\ m=-8.$ **D.** $M=12;\ m=-8.$

Lời giải.

Chọn B

Đạo hàm $f'(x)=-8x^3+8x \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0\in[0;2] \\ x=1\in[0;2] \\ x=-1\notin[0;2] \end{bmatrix}$.

Ta có $\begin{cases} f(0)=10 \\ f(1)=12 \\ f(2)=-6 \end{cases} \Rightarrow M=\max\limits_{[0;2]} f(x)=12;\ m=\min\limits_{[0;2]} f(x)=-6.$.

Câu 7: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.

A. $\min\limits_{[2;4]} f(x)=6$. **B.** $\min\limits_{[2;4]} f(x)=-2$. **C.** $\min\limits_{[2;4]} f(x)=-3$. **D.** $\min\limits_{[2;4]} f(x)=\dfrac{19}{3}$.

Lời giải.

Chọn A

Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=-1\notin[2;4] \\ x=3\in[2;4] \end{bmatrix}$.

Ta có $\begin{cases} f(2)=7 \\ f(3)=6 \\ f(4)=\dfrac{19}{3} \end{cases} \Rightarrow \min\limits_{[2;4]} f(x)=6.$

Cách 2: Sử dụng công cụ **TABLE** (**MODE 7**).

Bước 1: Bấm tổ hợp phím MODE 7.

Bước 2: Nhập $f(X)=\dfrac{X^2+3}{X-1}$.

Sau đó ấn phím $=$ (nếu có $g(X)$ thì ấn tiếp phím $=$) sau đó nhập $\begin{cases}\text{Start}=2\\ \text{End}=4\\ \text{Step}=0.2\end{cases}$.

(**Chú ý:** Thường ta chọn $\text{Step}=\dfrac{\text{End}-\text{Start}}{10}$)

Dựa vào bảng giá trị ở trên, ta thấy $\min\limits_{[2;4]} f(x)=f(3)=6$..

Câu 8: Tập giá trị của hàm số $f(x)=x+\dfrac{9}{x}$ với $x\in[2;4]$ là đoạn $[a;b]$. Tính $P=b-a$.

A. $P=6$. **B.** $P=\dfrac{13}{2}$. **C.** $P=\dfrac{25}{4}$. **D.** $P=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Chọn D

Đạo hàm $f'(x)=1-\dfrac{9}{x^2}=\dfrac{x^2-9}{x^2}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\in[2;4]\\ x=-3\notin[2;4]\end{array}\right.$.

Ta có $\begin{cases}f(2)=\dfrac{13}{2}\\ f(3)=6\\ f(4)=\dfrac{25}{4}\end{cases}\Rightarrow\longrightarrow\min\limits_{[2;4]} f(x)=6;\ \max\limits_{[2;4]} f(x)=\dfrac{13}{2}$

$\Rightarrow[a;b]=\left[6;\dfrac{13}{2}\right]\Rightarrow P=b-a=\dfrac{13}{2}-6=\dfrac{1}{2}$..

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2+x+1}{x+1}$. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số trên đoạn $[0;1]$.

A. $M=\sqrt{2};\ m=1$. **B.** $M=2;\ m=1$.

C. $M=1;\ m=-2$. **D.** $M=2;\ m=\sqrt{2}$.

Lời giải.

Chọn B

Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{2x^2+4x}{(x+1)^2}$. Ta có $\begin{cases}f'(x)\ge 0,\ \forall x\in[0;1]\\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=0\end{cases}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[0;1]$.

Vậy $\begin{cases}M=\max\limits_{[0;1]} f(x)=f(1)=2\\ m=\min\limits_{[0;1]} f(x)=f(0)=1\end{cases}$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{3x-1}{x-3}$. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số trên đoạn $[0;2]$.

A. $M=5;\ m=\dfrac{1}{3}$. **B.** $M=-\dfrac{1}{3};\ m=-5$.

C. $M=\dfrac{1}{3};\ m=-5$. **D.** $M=5;\ m=-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Chọn C

Đạo hàm $f'(x)=\frac{-8}{(x-3)^2}$. Ta có $f'(x)<0, \forall x\in(0;2)$.

Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[0;2]$.

Vậy $\begin{cases} M=\max\limits_{[0;2]} f(x)=f(0)=\frac{1}{3} \\ m=\min\limits_{[0;2]} f(x)=f(2)=-5 \end{cases}$..

Câu 11: Tìm tập giá trị T của hàm số $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$ với $x\in[3;5]$.

A. $T=\left[\frac{38}{3};\frac{526}{15}\right]$. **B.** $T=\left[\frac{38}{3};\frac{142}{5}\right]$. **C.** $T=\left[\frac{29}{3};\frac{127}{5}\right]$. **D.** $T=\left[\frac{29}{3};\frac{526}{15}\right]$.

Lời giải.

Chọn C

Đạo hàm $f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}=\frac{2\left(x^3-1\right)}{x^2}>0,\ \forall x\in(3;5)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $[3;5]$ nên $\min\limits_{[3;5]} f(x)=f(3)=\frac{29}{3}$; $\max\limits_{[3;5]} f(x)=f(5)=\frac{127}{5}$.

Vậy tập giá trị của hàm số là đoạn $\left[\frac{29}{3};\frac{127}{5}\right]$.

Câu 12: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$.

A. $M=1$.. **B.** $M=2$.. **C.** $M=3$.. **D.** $M=4$.

Lời giải.

Chọn B

TXĐ: $D=[2;4]$.

Đạo hàm $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}-\frac{1}{2\sqrt{4-x}}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=3\in[2;4]$.

Ta có $\begin{cases} f(2)=\sqrt{2} \\ f(3)=2 \\ f(4)=\sqrt{2} \end{cases}\Rightarrow M=2$..

Câu 13: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{2x+14}+\sqrt{5-x}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=-7$.

B. Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{6}$.

C. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=1$.

D. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Chọn D

TXĐ: $D=[-7;5]$.

Đạo hàm $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+14}}-\frac{1}{2\sqrt{5-x}}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=1\in[-7;5]$.

Ta có $\begin{cases} f(-7)=2\sqrt{3} \\ f(5)=2\sqrt{6} \\ f(1)=6 \end{cases} \Rightarrow \min\limits_{[-7;5]} f(x)=f(-7)=2\sqrt{3}..$

Câu 14: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$.

A. $M=2;\ m=0.$ **B.** $M=\sqrt{2};\ m=-\sqrt{2}.$

C. $M=2;\ m=-2.$ **D.** $M=\sqrt{2};\ m=0.$

Lời giải.

Chọn C

TXĐ: $\mathrm{D}=[-2;2]$. Đạo hàm $f'(x)=\sqrt{4-x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

$\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow 4-2x^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2}\in[-2;2] \\ x=-\sqrt{2}\in[-2;2] \end{array}\right.$.

Ta có $\begin{cases} f(-2)=0 \\ f\left(-\sqrt{2}\right)=-2 \\ f\left(\sqrt{2}\right)=2 \\ f(2)=0 \end{cases} \Rightarrow M=2;\ m=-2..$

Câu 15: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=x+\sqrt{2-x^2}$.

A. $m=-\sqrt{2}.$ **B.** $m=-1.$ **C.** $m=1.$ **D.** $m=\sqrt{2}.$

Lời giải.

Chọn A

TXĐ: $\mathrm{D}=\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$. Đạo hàm $f'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}}$

$\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}}=1\Leftrightarrow \sqrt{2-x^2}=x\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 2-x^2=x^2 \end{cases}\Leftrightarrow x=1\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right].$

Ta có $\begin{cases} f\left(-\sqrt{2}\right)=-\sqrt{2} \\ f(1)=2 \\ f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow m=-\sqrt{2}..$

Dạng 2: Tìm GTLN, GTNN trên khoảng hoặc nửa khoảng

1. Phương pháp

- **Bước 1:** Tính đạo hàm $f'(x)$.
- **Bước 2:** Tìm tất cả các nghiệm $x_i\in(a;b)$ của phương trình $f'(x)=0$ và tất cả các điểm $\alpha_i\in(a;b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.
- **Bước 3.** Tính $A=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$, $B=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$, $f(x_i)$, $f(\alpha_i)$.
- **Bước 4.** So sánh các giá trị tính được và kết luận $M=\max\limits_{(a;b)}f(x)$, $m=\min\limits_{(a;b)}f(x)$.

Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì ta kết luận không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 vui lòng liên hệ zalo chính tác giả Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa và được nhiều ưu đãi. " Tránh mua các trang và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-2x^2+x-6$ trên khoảng $(-1:1)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D}=\mathbb{R}$, ta chỉ xét trên khoảng $(-1;1)$.

Đạo hàm: $y'=3x^2-4x+1; y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	-1		$\frac{1}{3}$		1
y'		$+$	0	$-$	
y	-10	↗	$-\frac{158}{27}$	↘	-6

Từ bảng biến thiên ta có $\max_{(-1;1)} y=-\dfrac{158}{27}=y\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x}{4+x^2}$ trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D}=\mathbb{R}$, ta chỉ xét trên nửa khoảng $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Đạo hàm: $f'(x)=x^2(1-x)(3-5x); f'(x)=0\Leftrightarrow x=0, x=1, x=\dfrac{3}{5}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0

V?y $\min_{\mathbb{R}} f(x)=f(-2)=-\dfrac{1}{4}$ và $\max_{\mathbb{R}} f(x)=f(2)=\dfrac{1}{4}$.

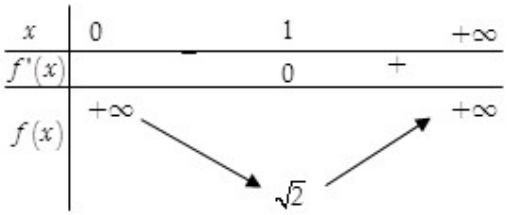
3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=0$. **C.** $m=2$. **D.** $m=1$.

Lời giải.

Chọn A



Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{x^2-1}{2x^2\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}}\longrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\notin(0;+\infty)\\x=1\in(0;+\infty)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

Từ bảng biến thiên ta tìm được giá trị nhỏ nhất của hàm số là $f(1)=\sqrt{2}$.

Câu 2: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=4$.

Lời giải.

Chọn C

Đạo hàm $f'(x)=2x-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2(x^3-1)}{x^2}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=1\in(0;+\infty)$.

Lập bảng biến thiên & dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{(0;+\infty)}f(x)=f(1)=3$..

Câu 3: Gọi y_{CT} là giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$ trên $(0;+\infty)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $y_{CT}>\min\limits_{(0;+\infty)}y$.. **B.** $y_{CT}=1+\min\limits_{(0;+\infty)}y$.. **C.** $y_{CT}=\min\limits_{(0;+\infty)}y$.. **D.** $y_{CT}<\min\limits_{(0;+\infty)}y$.

Lời giải.

Chọn C

Đạo hàm $f'(x)=2x-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2x^3-2}{x^2}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=1\in(0;+\infty)$.

Qua điểm $x=1$ thì hàm số đổi dấu từ "−" sang "+" trong khoảng $(0;+\infty)$.

Suy ra trên khoảng $(0;+\infty)$ hàm số chỉ có một cực trị và là giá trị cực tiểu nên đó cũng chính là giá trị nhỏ nhất của hàm số. Vậy $y_{CT}=\min\limits_{(0;+\infty)}y$..

Câu 4: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$ trên $(0;3]$.

A. $M=3$.. **B.** $M=\dfrac{8}{3}$. **C.** $M=\dfrac{3}{8}$.. **D.** $m=0$.

Lời giải.

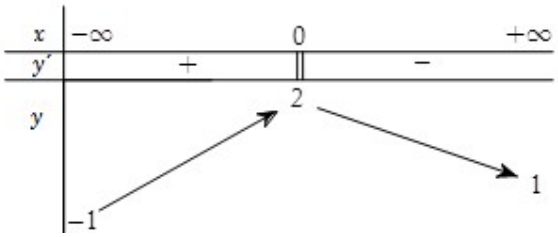
Chọn B

Đạo hàm $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}>0,\ \forall x\in(0;3).$

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;3]$ nên đạt giá trị lớn nhất tại $x=3$ và $\max\limits_{(0;3]} f(x)=f(3)=\frac{8}{3}..$

Dạng 3: Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ hoặc đồ thị hàm số. Tìm GTLN, GTNN của hàm số

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2.

B. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -1.

C. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 1.

D. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -1 và 1.

Lời giải.

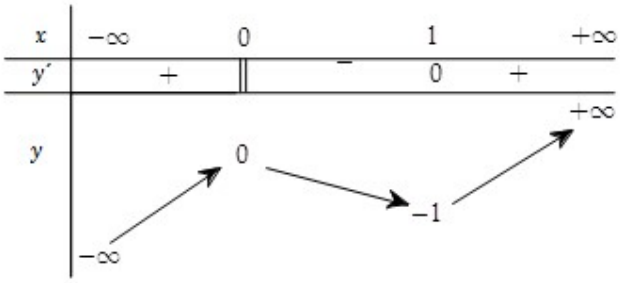
Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên nhận thấy:

- $f(x)\le 2,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$ nên GTLN của hàm số bằng 2.
- $f(x)\ge -1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và vì $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ nên không tồn tại $x_0\in\mathbb{R}$ sao cho $f(x_0)=1$, do đó hàm số không có GTNN.

Có thể giải thích cách khác: y' đổi dấu qua $x=0$ và tồn tại $y(0)=2$ nên giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có đúng một cực trị.

B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

Lời giải.

Chọn D

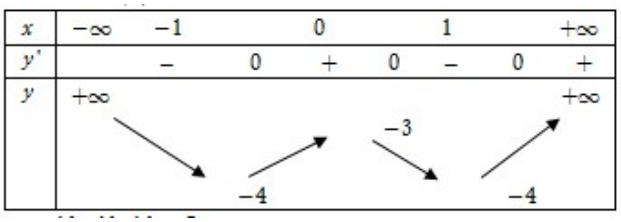
A sai vì hàm số có 2 điểm cực trị.

B sai vì hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1.

C sai vì hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

D Đúng.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau:



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có hai điểm cực trị.

B. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -4.

C. Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng -3.

D. Hàm số có một điểm cực tiểu.

Lời giải.

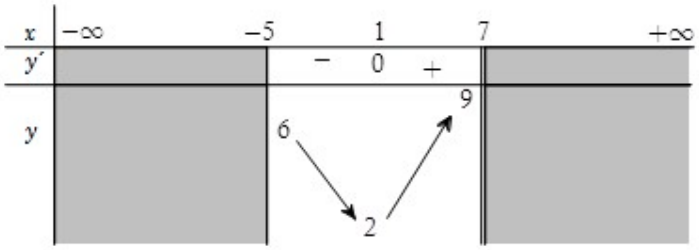
Chọn B

A sai vì hàm số có ba điểm cực trị là $x=-1;\ x=0;\ x=1$.

C sai vì hàm số không có giá trị lớn nhất.

D sai vì hàm số có hai điểm cực tiểu là $x=-1$ và $x=1$..

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ và có bảng biến thiên trên $[-5;7)$ như sau:



Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\min\limits_{[-5;7)} f(x)=2$ và hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $[-5;7)$.

B. $\max\limits_{[-5;7)} f(x)=6$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x)=2$.

C. $\max\limits_{[-5;7)} f(x)=9$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x)=2$.

D. $\max\limits_{[-5;7)} f(x)=9$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x)=6$.

Lời giải.

Chọn A

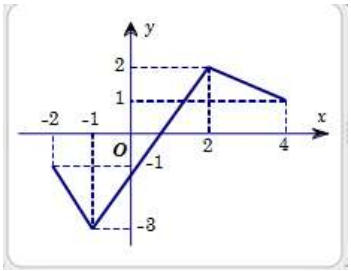
Dựa vào bảng biến thiên, ta nhận thấy:

● Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2, đạt tại $x=1\in[-5;7)$.

● Ta có $\begin{cases} f(x) \le 9, \forall x \in [-5;7) \\ \lim\limits_{x \to 7^-} f(x) = 9 \end{cases}$. Mà $7 \notin [-5;7)$ nên không tồn tại $x_0 \in [-5;7)$ sao cho $f(x_0) = 9$. Do đó hàm số không đạt GTLN trên $[-5;7)$.

Vậy $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 2$ và hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $[-5;7)$.

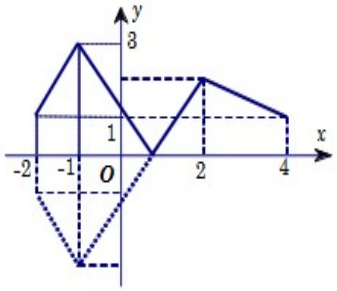
Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2;4]$ như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[-2;4.]$



A. $M = 2.$ **B.** $M = |f(0)|.$ **C.** $M = 3.$ **D.** $M = 1.$

Lời giải.

Chọn C

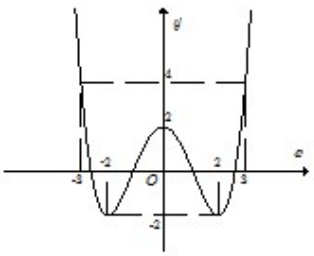


Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;4]$ ta suy ra đồ thị hàm số $|f(x)|$ trên $[-2;4]$ như hình vẽ.

Do đó $\max\limits_{[-2;4]} |f(x)| = 3$ tại $x = -1.$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số này trên đoạn $[-2;3]$ bằng:

A. 2.. **B.** 3.. **C.** 4.. **D.** 5.



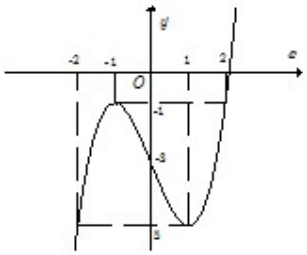
Lời giải.

Chọn C

Nhận thấy trên đoạn $[-2;3]$ đồ thị hàm số có điểm cao nhất có tọa độ $(3;4)$.

$\Rightarrow$ giá trị lớn nhất của hàm số này trên đoạn $[-2;3]$ bằng 4.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$.



A. $m=-5,\ M=0.$ **B.** $m=-5,\ M=-1.$

C. $m=-1,\ M=0.$ **D.** $m=-2,\ M=2.$

Lời giải.

Chọn B

Nhận thấy trên đoạn $[-2;2]$

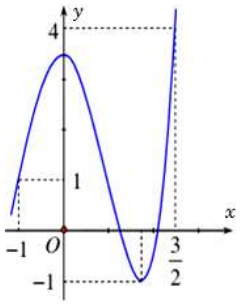
● Đồ thị hàm số có điểm thấp nhất có tọa độ $(-2;-5)$ và $(1;-5)$

$\Rightarrow$ giá trị nhỏ nhất của hàm số này trên đoạn $[-2;2]$ bằng -5.

● Đồ thị hàm số có điểm cao nhất có tọa độ $(-1;-1)$ và $(2;-1)$

$\Rightarrow$ giá trị lớn nhất của hàm số này trên đoạn $[-2;2]$ bằng -1.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1;\frac{3}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1;\frac{3}{2}\right]$ là



A. $M=4,\ m=1.$ **B.** $M=\frac{7}{2},\ m=-1.$

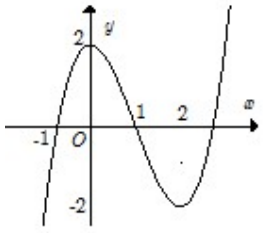
C. $M=4,\ m=-1.$ **D.** $M=\frac{7}{2},\ m=-1.$

Lời giải.

Chọn C

Theo định nghĩa max min của hàm số ta suy ra được điều này

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây là sai?



A. Hàm số có hai điểm cực trị.

B. Hàm số có GTLN là 2 và GTNN là -2.

C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

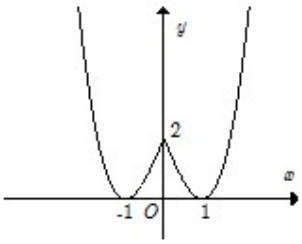
D. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $(0;2)\&(2;-2)$.

Lời giải.

Chọn B

Dựa vào đồ thị suy ra hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. Chú ý. Học sinh thường nhầm tưởng giá trị cực đại là giá trị lớn nhất, giá trị cực tiểu là giá trị nhỏ nhất nên chọn **B**

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình sau:



(I). Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

(II). Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

(III). Hàm số có ba điểm cực trị.

(IV). Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2.

Trong các mệnh đề đã cho có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Chọn B

Xét trên $(0;1)$ ta thấy đồ thị đi xuống (từ trái sang phải) nên hàm số nghịch biến. Do đó (I) đúng

Xét trên $(-1;2)$ ta thấy đồ thị đi lên, rồi đi xuống, rồi đi lên. Do đó (II) sai.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy có ba điểm cực trị. Do đó (III) đúng.

Hàm số không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$. Do đó (IV) sai.

Vậy có 2 mệnh đề đúng.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 vui lòng liên hệ zalo chính tác giả Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa và được nhiều ưu đãi. " Tránh mua các trang và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Dạng 4: Tìm tham số m để hàm số đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

1. Phương pháp

Ta thường sử dụng kết quả sau

- Nếu $y=f(x)$ đồng biến trên $[a;b]$ thì $\begin{cases}\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)\\ \max\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)\end{cases}$.
- Nếu $y=f(x)$ nghịch biến trên $[a;b]$ thì $\begin{cases}\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)\\ \max\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)\end{cases}$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=\dfrac{mx-1}{x+m}$ (với m là số thục). Tìm m để hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1;4]$ bằng 1 .

Lời giải.

Tập xác dịnh của hàm số: $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{m^2+1}{(x+m)^2}>0,\forall x\in\mathcal{D}$ nên hàm số luôn đồng biến trên tìng khoảng xác định của nó.

Do đó hàm số dạt giá trị lớn nhất (nếu có) tại $x=4$, tức là

$\dfrac{4m-1}{4+m}=1\Leftrightarrow 4m-1=4+m\Leftrightarrow m=\dfrac{5}{3}$.

Thử lại ta thấy $m=\dfrac{5}{3}$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 2: Tìm tất cả các giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{2x+m-1}{x+1}$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 1 .

Lời giải.

Ta có $f'(x)=\dfrac{3-m}{(x+1)^2}$.

Nếu $m=3$ thì $f(x)=2,\forall x\in[1;2]$ (không thỏa bài toán).

Nếu $m<3$ thì $f'(x)>0,\forall x\in[1;2]$. Do đó $\min_{[1;2]} f(x)=f(1)=\dfrac{m+1}{2}=1\Rightarrow m=1$ (nhận).

Nếu $m>3$ thì $f'(x)<0,\forall x\in[1;2]$. Do đó $\min_{[1;2]} f(x)=f(2)=\dfrac{m+3}{3}=1\Rightarrow m=0$ (loại).

Vậy $m=1$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)=m\sqrt{x-1}$ (m là tham số thực khác 0). Gọi m_1,m_2 là hai giá trị của m thỏa mãn $\min\limits_{[2;5]} f(x)+\max\limits_{[2;5]} f(x)=m^2-10$. Tính m_1+m_2

Lời giải.

Với mọi $x\in\left[2;5\right]$ có $f'(x)=\dfrac{m}{2\sqrt{x-1}}$. Ta thấy dấu của $f'(x)$ phụ thuộc vào dấu của m

$\forall m\neq 0$ thì $f(x)$ đơn điệu trên $\left[2;5\right]\Rightarrow \min\limits_{[2;5]} f(x)+\max\limits_{[2;5]} f(x)=f(2)+f(5)=m+2m$

Từ giả thiết ta được $m^2-10=m+2m\Leftrightarrow m^2-3m-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=5\\ m=-2\end{array}\right.$. Vậy $m_1+m_2=3$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=-x^2+4x-m$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[-1;3\right]$ bằng 10.

A. $m=3$.. **B.** $m=-6$. **C.** $m=-7$. **D.** $m=-8$.

Lời giải.

Chọn B

Đạo hàm $f'\left(x\right)=-2x+4\Rightarrow f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=2\in\left[-1;3\right].$

Ta có $\begin{cases} f\left(-1\right)=-5-m\\ f\left(2\right)=4-m\\ f\left(3\right)=3-m\end{cases}\Rightarrow \max\limits_{[-1;3]} f\left(x\right)=f\left(2\right)=4-m$.

Theo bài ra: $\max\limits_{[-1;3]} f\left(x\right)=10\Leftrightarrow 4-m=10\Leftrightarrow m=-6$.

Câu 2: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x-m^2}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng

A. $\dfrac{1+m^2}{2}$. **B.** $-m^2$. **C.** $\dfrac{1-m^2}{2}$. **D.** m^2.

Lời giải.

Chọn C

Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{1+m^2}{(x+1)^2}>0,\forall x\in[0;1]$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0;1]\longrightarrow \max\limits_{[0;1]} f(x)=f(1)=\dfrac{1-m^2}{2}$.

Câu 3: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+m^2}{x-1}$ trên đoạn $\left[-1;0\right]$ bằng

A. $\dfrac{m^2-1}{2}$. **B.** $-m^2$. **C.** $\dfrac{1-m^2}{2}$. **D.** m^2.

Lời giải.

Chọn B

Đạo hàm $y'=\dfrac{-1-m^2}{\left(x-1\right)^2}<0,\forall x\in\left[-1;0\right]$.

Suy ra hàm số $f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left[-1;0\right]\Rightarrow \min\limits_{[-1;0]} f\left(x\right)=f\left(0\right)=-m^2$.

Câu 4: Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số $f\left(x\right)=-x^3-3x^2+a$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[-1;1\right]$ bằng 0.

A. $a=2..$ **B.** $a=6.$ **C.** $a=0.$ **D.** $a=4.$

Lời giải.

Chọn D

Đạo hàm $f'(x)=-3x^2-6x \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[-1;1] \\ x=-2\notin[-1;1] \end{array}\right.$.

Ta có $\begin{cases} f(-1)=a-2 \\ f(0)=a \\ f(1)=a-4 \end{cases} \Rightarrow \min\limits_{[-1;1]} f(x)=f(1)=a-4.$

Theo bài ra: $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=0 \Leftrightarrow a-4=0 \Leftrightarrow a=4..$

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=x^3+(m^2+1)x+m^2-2$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ bằng 7.

A. $m=\pm 1.$ **B.** $m=\pm\sqrt{7}.$ **C.** $m=\pm\sqrt{2}.$ **D.** $m=\pm 3.$

Lời giải.

Chọn D

Đạo hàm $f'(x)=3x^2+m^2+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0;2] \Rightarrow \min\limits_{[0;2]} f(x)=f(0)=m^2-2.$

Theo bài ra: $\min\limits_{[0;2]} f(x)=7 \Leftrightarrow m^2-2=7 \Leftrightarrow m=\pm 3..$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-m^2}{x+8}$ với m là tham số thực. Tìm giá trị lớn nhất của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng -2.

A. $m=4.$ **B.** $m=5.$ **C.** $m=-4.$ **D.** $m=1.$

Lời giải.

Chọn A

Đạo hàm $y'=\dfrac{8+m^2}{(x+8)^2}>0,\ \forall x\in[0;3].$

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[0;3] \Rightarrow \min\limits_{[0;3]} f(x)=f(0)=-\dfrac{m^2}{8}.$

Thao bài ra: $\min\limits_{[0;3]} f(x)=-2 \Leftrightarrow -\dfrac{m^2}{8}=-2 \Leftrightarrow m=\pm 4 \Rightarrow$ giá trị m lớn nhất là $m=4..$

Câu 7: Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ (với m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=\dfrac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $0<m\le 2.$ **B.** $2<m\le 4.$ **C.** $m\le 0.$ **D.** $m>4.$

Lời giải.

Chọn D

Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{1-m}{(x+1)^2}.$

Suy ra hàm số $f(x)$ là hàm số đơn điệu trên đoạn $[1;2]$ với mọi $m \neq 1$.

Khi đó $\min\limits_{[1;2]} y + \max\limits_{[1;2]} y = f(1) + f(2) = \frac{m+1}{2} + \frac{m+2}{3} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{5m}{6} = \frac{25}{6} \Leftrightarrow m = 5$.

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm và thỏa mãn điều kiện $m > 4$.

Dạng 5: Bài tập dành cho học sinh 8+, 9+

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y = f(|x-1|)$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ bằng

A. $f(-2)$. **B.** $f(2)$. **C.** $f(1)$. **D.** $f(0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

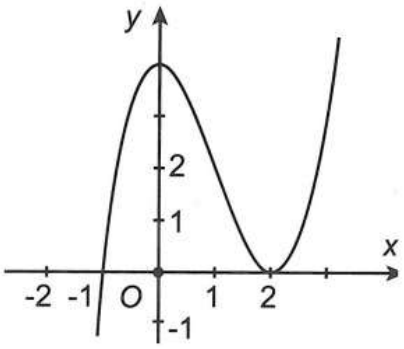
Đặt $g(x) = f(|x-1|)$ và đặt $t = |x-1|, \forall x \in [0;2] \Rightarrow t \in [0;1]$.

Lúc đó ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(t), t \in [0,1]$

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $f(t)$ có giá trị nhỏ nhất $\min\limits_{[0;1]} f(t) = f(0)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Khi đó hàm số $y = f(2-x^2)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\left[0;\sqrt{2}\right]$ bằng

A. $f(-2)$. **B.** $f(2)$. **C.** $f(1)$. **D.** $f(0)$.



Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $t = 2 - x^2$. Từ $x \in \left[0;\sqrt{2}\right] \Leftrightarrow 0 \le x^2 \le 2 \Leftrightarrow 2 \ge 2 - x^2 \ge 0 \Rightarrow t \in [0;2]$.

Dựa vào đồ thị, hàm số $y=f(t)$ có giá trị nhỏ nhất $\min\limits_{[0;2]} f(t)=f(2)$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	2	↗	3	↘	2	↗	$+\infty$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x+3)$ trên đoạn $[0;2]$ là

A. 64. **B.** 65. **C.** 66. **D.** 67.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số có dạng $f(x)=ax^4+bx^2+c$. Từ bảng biến thiên ta có

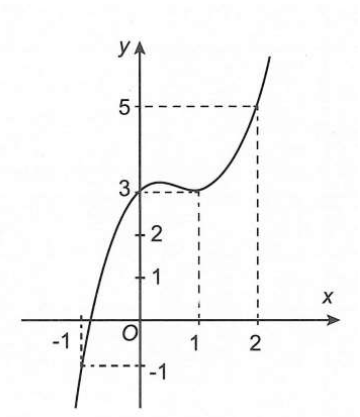
$$\begin{cases} f(0)=3 \\ f(1)=2 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=3 \\ a+b+c=2 \\ 4a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=3 \\ b=-2 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^4-2x^2+3.$$

Đặt $t=x+3, x\in[0;2] \Leftrightarrow t\in[3;5]$.

Dựa vào đồ thị, hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên đoạn $[3;5]$.

Do đó $\min\limits_{[0;2]} f(x+3)=\min\limits_{[3;5]} f(t)=f(3)=66$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như dưới đây. Lập hàm số $g(x)=f(x)-x^2-x$.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $g(-1)>g(1)$.

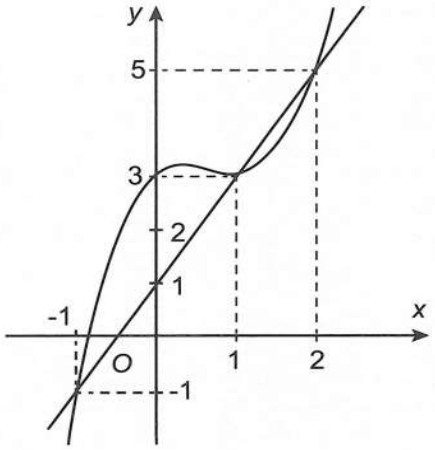
B. $g(-1)=g(1)$.

C. $g(1)=g(2)$.

D. $g(1)>g(2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Ta có $g'(x)=f'(x)-2x-1$.

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=2x+1$ ta có $g'(x)=0$

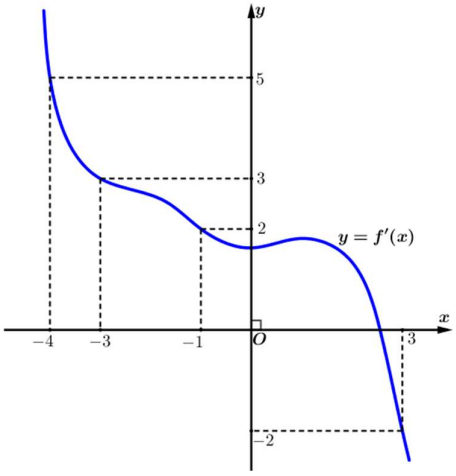
$\Leftrightarrow f'(x)=2x+1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	-1		1		2
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$g(-1)$	↗	$g(1)$	↘	$g(2)$

Dựa vào bảng biến thiên, rõ ràng $g(1)>g(2)$

Câu 5 : Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Trên đoạn $[-4;3]$, hàm số $g(x)=2f(x)+(1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm?



A. $x=-3$. **B.** $x=-4$. **C.** $x=3$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

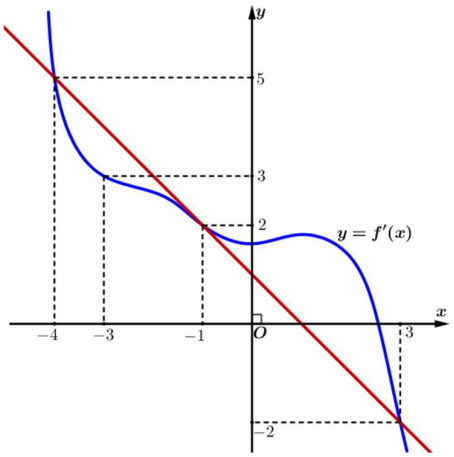
Chọn D

Ta có $g'(x)=2f'(x)-2(1-x)$.

Giải phương trình:

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 2f'(x)-2(1-x)=0\Leftrightarrow f'(x)=(1-x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\in[-4;3]\\x=-1\in[-4;3]\\x=-4\in[-4;3]\end{array}\right.$$

Tương giao đồ thị như sau

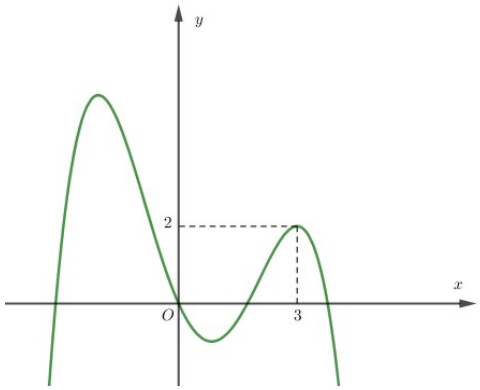


Bảng biến thiên:

x	-4		-1		3
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$		↘		↗	

Vậy trên đoạn $[-4;3]$, hàm số $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x=-1$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx$, $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$, biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ.



Gọi S là tập hợp các giá trị của x sao cho hàm số $g(x)=\dfrac{2f(x)-2}{f^2(x)-2f(x)+2}$ đạt giá trị lớn nhất hoặc đạt giá trị nhỏ nhất. Số phần tử của tập S là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $f(x)=t$, $t\in(-\infty;a], a>2$

Ta có $g(x)=\dfrac{2f(x)-2}{f^2(x)-2f(x)+2}=\dfrac{2t-2}{t^2-2t+2}$.

Đặt $h(t)=\dfrac{2t-2}{t^2-2t+2}$, $t\in(-\infty;a], a>2$.

$$h'(t)=\frac{-2(t^2-2t)}{(t^2-2t+2)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=2\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(t)$.

t	$-\infty$		0		2		a
$h'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(t)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$h(a)$

Ta có $h(a)=\dfrac{2a-2}{a^2-2a+2}>0\ \ \forall a>2$ nên từ bảng biến thiên suy ra:

$\max\limits_{\mathbb{R}} g(x)=\max\limits_{(-\infty;a]} h(t)=1\Leftrightarrow t=2$ hay $f(x)=2$ (phương trình này có 3 nghiệm).

$\min\limits_{\mathbb{R}} g(x)=\min\limits_{(-\infty;a]} h(t)=-1\Leftrightarrow t=0$ hay $f(x)=0$ (phương trình này có 4 nghiệm).

Vậy có tất cả 7 giá trị của x sao cho hàm số $g(x)$ đạt giá trị lớn nhất hoặc đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\left|\dfrac{x+m}{x+1}\right|$. Số giá trị của m thỏa mãn $\min\limits_{[1;2]} f(x)+\max\limits_{[1;2]} f(x)=\dfrac{16}{3}$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $\min\limits_{[1;2]} f(x)+\max\limits_{[1;2]} f(x)=\dfrac{16}{3}$ (1). Đặt $h(x)=\dfrac{x+m}{x+1}$ có đạo hàm: $h'(x)=\dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

Nếu $m=1$ thì $\min\limits_{[1;2]} f(x)=\max\limits_{[1;2]} f(x)=1$ (loại)

Nếu $m=1$ thì $h'(x)\neq 0,\forall x\neq 1$ và $h(1)=\dfrac{m+1}{2};h(2)=\dfrac{m+2}{3}$

Trường hợp 1: $h(1),h(2)\geq 0$ khi đó $m\geq -1$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \dfrac{m+1}{2}+\dfrac{m+2}{3}=\dfrac{16}{3}\Rightarrow m=5$ (TM)

Trường hợp 2: $h(1),h(2)\leq 0$ khi đó $m\leq -2$

Phương trình 1 (1) $\Leftrightarrow \dfrac{m+1}{2}+\dfrac{m+2}{3}=-\dfrac{16}{3}\Rightarrow m=\dfrac{-39}{5}$ (TM)

Trường hợp 3: $\begin{cases} h(1).h(2)<0 \\ \left|\dfrac{m+1}{2}\right|\leq\left|\dfrac{m+2}{3}\right| \end{cases}$ khi đó $-\dfrac{7}{5}<m<-1$

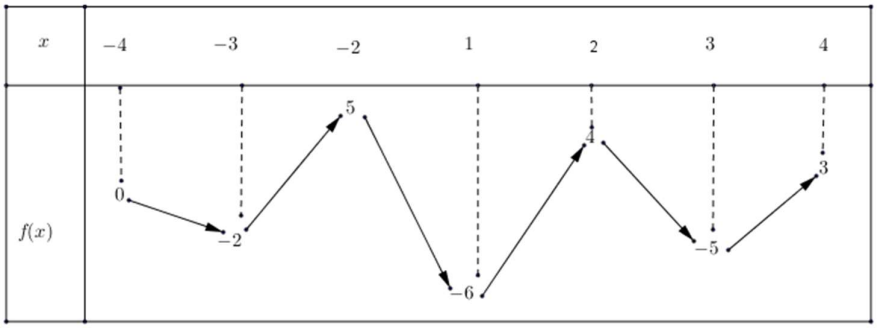
Phương trình (1) $\Leftrightarrow \dfrac{m+2}{3}=\dfrac{16}{3}\Rightarrow m=14$ (không TM)

Trường hợp 4: $\begin{cases} h(1).h(2)<0 \\ \left|\dfrac{m+2}{3}\right|<\left|\dfrac{m+1}{2}\right| \end{cases}$ khi đó $-2<m<\dfrac{-7}{5}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow -\dfrac{m+1}{2}=\dfrac{16}{3}\Rightarrow m=-\dfrac{35}{3}$ (không TM)

Vậy $m=5,m=\dfrac{-39}{5}$ nên có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 8: Cho hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.



Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m thuộc đoạn $[-4;4]$ để hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3+2x\right)+3f(m)\right|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng 8?

A. 12. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 10.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Cách 1:

Đặt $t=f\left(x^3+2x\right)$. Vì $x\in[-1;1]$ nên $t\in[-6;5]$. Khi đó, $g(x)=|t+n|$ với $n=3f(m)$.

Do đó, $\max\limits_{[-1;1]}g(x)=\max\{|n+5|;|n-6|\}=8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|n+5|=8\\|n+5|\geq|n-6|\end{cases}\Leftrightarrow n=3\\\begin{cases}|n-6|=8\\|n-6|>|n+5|\end{cases}\Leftrightarrow n=-2\end{array}\right.$

Với $n=3\Leftrightarrow 3.f(m)=3\Leftrightarrow f(m)=1$, suy ra có 5 giá trị của m.

Với $n=-2\Leftrightarrow 3.f(m)=-2\Leftrightarrow f(m)=\dfrac{-2}{3}$, suy ra có 6 giá trị của m.

Vậy có 11 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Cách 2:

Vì $x\in[-1;1]$ nên $-3\leq x^3+3x\leq 3\Rightarrow -6\leq f\left(x^3+3x\right)\leq 5$..

Ta có : $\left|f\left(x^3+3x\right)+3f(m)\right|\leq 8,\forall x\in[-1;1]\Leftrightarrow -8\leq f\left(x^3+3x\right)+3f(m)\leq 8,\ \forall x\in[-1;1]$

$\Leftrightarrow\begin{cases}f\left(x^3+3x\right)\leq 8-3f(m)\\-8-3f(m)\leq f\left(x^3+3x\right)\end{cases}\forall x\in[-1;1]\Rightarrow\begin{cases}5\leq 8-3f(m)\\-8-3f(m)\leq -6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(m)\leq 1\\f(m)\geq -\dfrac{2}{3}.\end{cases}$

Do đó $\max\left|f\left(x^3+3x\right)+3f(m)\right|=8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(m)=1\\f(m)=-\dfrac{2}{3}.\end{array}\right.$

Với $f(m)=1$, có 5 giá trị của m. Với $f(m)=\dfrac{-2}{3}$, có 6 giá trị của m.

Vậy có 11 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

BÀI 4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

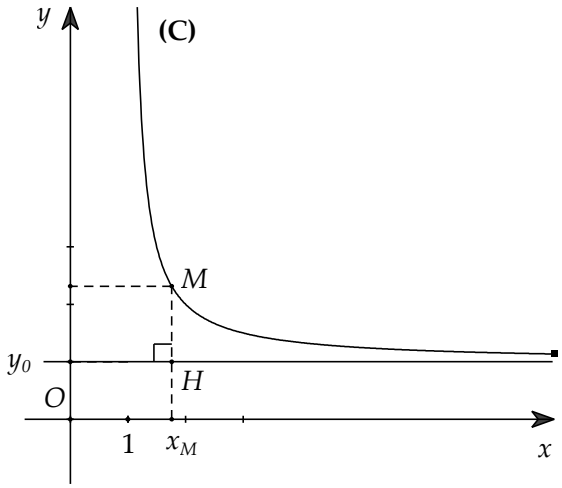
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a;+\infty)$, $(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$). Đường thẳng $y=y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=y_0; \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y_0}$$



Ví dụ. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+1$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$.

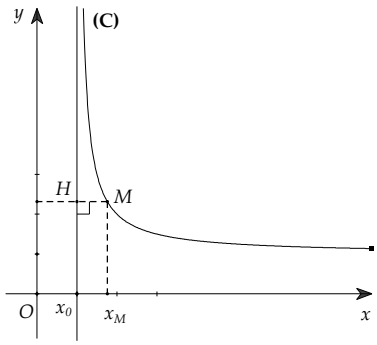
Đó thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1$ vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+1\right)=1.$

II. TIỆM CẬN ĐỨNG

Định nghĩa :

Đường thẳng $x=x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng (gọi tắt là tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\boxed{\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty; \quad \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty; \quad \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty; \quad \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty}$$



Chú ý: Với đồ thị hàm phân thức dạng $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0;\ ad-bc\neq 0)$ luôn có tiệm cận ngang là $y=\dfrac{a}{c}$ và tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$.

Ví dụ 1. Tìm các tiệm cận đứng và ngang của đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$.

Giải

$\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x-1}{x+2}=-\infty$ (hoặc $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x-1}{x+2}=+\infty$) nên đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của (C).

Vì $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{x-1}{x+2}=1$ nên đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của (C).

Ví dụ 1. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+x+1}{2x-3}$.

Giải

Vì $\lim\limits_{x\to \left(\frac{3}{2}\right)^+}\dfrac{2x^2+x+1}{2x-3}=+\infty$ (hoặc $\lim\limits_{x\to \left(\frac{3}{2}\right)^-}\dfrac{2x^2+x+1}{2x-3}=-\infty$) nên đường thẳng $x=\dfrac{3}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Dựa vào định nghĩa tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

1. Phương pháp

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a;+\infty)$, $(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$). Đường thẳng $y=y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=y_0;\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=y_0}$$

- Đường thẳng $x=x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng (gọi tắt là tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^-}f(x)=+\infty;\quad \lim_{x\to x_0^+}f(x)=+\infty;\quad \lim_{x\to x_0^-}f(x)=-\infty;\quad \lim_{x\to x_0^+}f(x)=-\infty}$$

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=1$ và $y=-1$

D. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=1$ và $x=-1$.

Lời giải

Chọn C

Theo định nghĩa về tiệm cận, ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1\longrightarrow y=1$ là TCN, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1\longrightarrow y=-1$ là TCN.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số nằm phía trên trục hoành.

C. Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là trục hoành.

D. Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là đường thẳng $y=0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0\longrightarrow y=0$ là TCN.

Đáp án B sai vì chọn hàm $y=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^x & ;x\le -1\\ -\left(\frac{1}{2}\right)^x & ;x\ge 1\end{cases}$. Vậy ta chỉ có đáp án C đúng.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.

B. Trục hoành và trục tung là hai tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho.

C. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng là đường thẳng $y=0$.

D. Hàm số đã cho có tập xác định là $D=(0,+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Theo định nghĩa về tiệm cận, ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0\longrightarrow y=0$ là TCN, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty\longrightarrow x=0$ là TCĐ.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$ và $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=-1$ và tiệm cận đứng $x=1$.

D. Đồ thị hàm số haitiệm cận ngang là các đường $y=-1$ và $y=1$.

Lời giải

Chọn C

Theo định nghĩa về tiệm cận, ta có:

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1\longrightarrow y=-1$ là TCN, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty\longrightarrow x=1$ là TCĐ.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=10$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y=1$ và đường thẳng $x=2$ không phải là tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1$ và tiệm cận đứng $x=2$.

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1$ và tiệm cận đứng $x=10$.

D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang nhưng có một tiệm cận đứng $x=2$.

Lời giải

Chọn A

Theo định nghĩa về tiệm cận, ta có:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=1\longrightarrow y=1$ là TCN.

$\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=10\longrightarrow x=0$ không phải là TCĐ.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có tập xác định là $D=(-3;3)\setminus\{-1;1\}$, liên tục trên các khoảng của tập D và có

$\lim\limits_{x\to(-3)^+}f(x)=-\infty;\quad\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=-\infty;\quad\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=-\infty;$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=+\infty;\quad\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty;\quad\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=+\infty.$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số có đúng hai TCĐ là các đường thẳng $x=-3$ và $x=3$.

B. Đồ thị hàm số có đúng hai TCĐ là các đường thẳng $x=-1$ và $x=1$.

C. Đồ thị hàm số có đúng bốn TCĐ là các đường thẳng $x=\pm1$ và $x=\pm3$.

D. Đồ thị hàm số có sáu TCĐ.

Lời giải

Chọn C

Câu 7: Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 vui lòng liên hệ zalo chính tác giả Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa và được nhiều ưu đãi. " Tránh mua các trang và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận ngang $y=1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$

B. Nếu hàm số $y=f(x)$ không xác định tại x_0 thì đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=x_0$

C. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=2$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=+\infty$.

D. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ bất kì có nhiều nhất hai đường tiệm cận ngang.

Lời giải

Chọn D

A sai vì chỉ cần một trong hai giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$ hoặc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ tồn tại thì đã suy ra được tiệm cận ngang là $y=1$.

B sai,ví dụ hàm số $y=\sqrt{x^3-1}$ không xác định tại $x=-2$ nhưng $\lim\limits_{x\to(-2)^-}f(x)$ và $\lim\limits_{x\to(-2)^+}f(x)$ không tiến đến vô cùng nên $x=-2$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

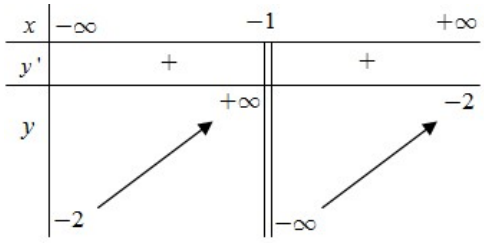
C sai vì chỉ cần tồn tại một trong bốn giới hạn sau:

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to2^-}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to2^+}f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to2^+}f(x)=+\infty.$$

D đúng vì chỉ có hai giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

Dạng 2: Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số tìm các đường tiệm cận

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, có bảng biến thiên như sau:



Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $y=-1$ và tiệm cận ngang $x=-2$.

B. Đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận.

C. Đồ thị hàm số có ba tiệm cận.

D. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$ và tiệm cận ngang $y=-2$.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên, ta có:

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=-\infty\end{cases}\longrightarrow x=-1$ là TCĐ. $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} y=-2\\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=-2\end{cases}\longrightarrow y=-2$ là TCN.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, có bảng biến thiên như sau:

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	5	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	2

A. Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận.

B. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

C. Đồ thị hàm số có hai TCN $y=2,\ y=5$ và một TCĐ $x=-1$.

D. Đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên, ta có:

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=-\infty\end{cases}\longrightarrow x=-1$ là TCĐ.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=5\longrightarrow y=5$ là TCN và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2\longrightarrow y=2$ là TCN.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	-1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	1

Kết luận nào sau đây đầy đủ về đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=f(x)$?

A. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=\pm1$.

B. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=1$.

C. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=\pm1$, tiệm cận đứng $x=-1$.

D. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=1$, tiệm cận đứng $x=-1$.

Lời giải

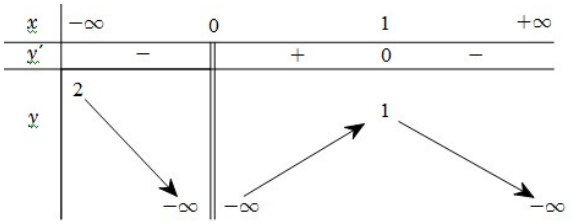
Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\sqrt{2}\neq\pm\infty$ nên đồ thị hàm số không có TCĐ.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 vui lòng liên hệ zalo chính tác giả Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa và được nhiều ưu đãi. " Tránh mua các trang và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1\longrightarrow y=-1$ là TCN; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1\longrightarrow y=1$ là TCN.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:



Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

C. Giá trị lớn nhất của hàm số là 2.

D. Hàm số không có cực trị.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên, ta có nhận xét như sau:

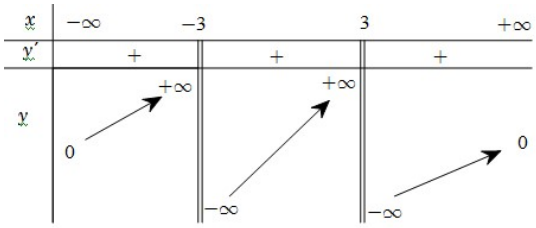
A đúngvì $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty\longrightarrow x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

B saivì tại $x=0$ hàm số không xác định.

C saivì hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 1 trên khoảng $(0;+\infty)$ mà không đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(-\infty;0)$.

D saivì đạo hàm y' đổi dấu từ "+" sang "−" khi đi qua điểm $x=1\longrightarrow x=1$ là điểm cực đại của hàm số.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-3$.

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=3$.

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$.

D. Đồ thị hàm số có tất cả hai đường tiệm cận.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên, ta có:

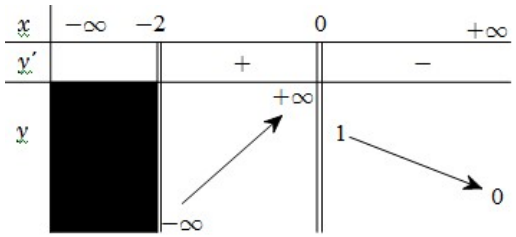
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0 \longrightarrow y=0$ là TCN;

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-3)^+} y=-\infty\\ \lim\limits_{x\to(-3)^-} y=+\infty\end{cases} \longrightarrow x=-3$ là TCĐ;

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+} y=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^-} y=+\infty\end{cases} \longrightarrow x=3$ là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả ba đường tiệm cận. Do đó D sai.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hỏi đồ thị hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

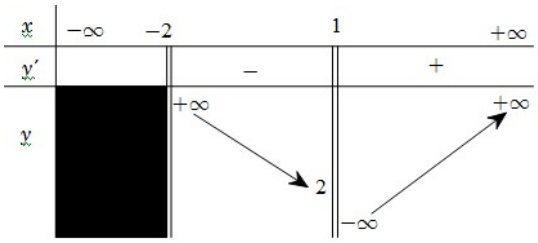
Từ bảng biến thiên, ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=0 \longrightarrow y=0$ là TCN; $\lim\limits_{x\to(-2)^+} y=-\infty \longrightarrow x=-2$ là TCĐ;

$\lim\limits_{x\to 0^-} y=+\infty \longrightarrow x=0$ là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có đúng ba đường tiệm cận.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hỏi đồ thị hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên, ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty \longrightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang;

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 vui lòng liên hệ zalo chính tác giả Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa và được nhiều ưu đãi. " Tránh mua các trang và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

$\lim\limits_{x\to(-2)^+} y=+\infty \longrightarrow x=-2$ là TCĐ;

$\lim\limits_{x\to 1^+} y=-\infty \longrightarrow x=1$ là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có đúng hai đường tiệm cận.

Dạng 3: Cho hàm số $y=f(x)$. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

Câu 1: Tìm tọa độ giao điểm của đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+2}$.

A. $(-2;2)$. **B.** $(2;1)$. **C.** $(-2;-2)$. **D.** $(-2;1)$.

Lời giải

Chọn D

TXĐ $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Dễ thấy đồ thị hàm số có TCĐ: $x=-2$ và TCN: $y=1$.

Suy ra giao điểm của hai đường tiệm cận là $(-2;1)$.

Câu 2: Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $x^2-16=0\Leftrightarrow x=\pm 4$. Ta có:

$\lim\limits_{x\to -4} y=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{(x+1)(x-4)}{(x+4)(x-4)}=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x+1}{x+4}=\infty\to x=-4$ là TCĐ;

$\lim\limits_{x\to 4} y=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x+1)(x-4)}{(x+4)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+1}{x+4}=\dfrac{5}{8}\to x=4$ không là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận đứng.

Câu 3: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-9}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm 3\}$. Ta có:

$\lim\limits_{x\to 3^-} y=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x-2}{x^2-9}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 3^+} y=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-2}{x^2-9}=+\infty\longrightarrow x=3$ là TCĐ;

$\lim\limits_{x\to -3^-} y=\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{x-2}{x^2-9}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to -3^+} y=\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{x-2}{x^2-9}=-\infty\longrightarrow x=-3$ TCĐ;

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{9}{x^2}} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{9}{x^2}} = 0 \longrightarrow y = 0$ là TCN.

Vậy đồ thị hàm số có đúng ba tiệm cận.

Câu 4: Đồ thị hàm số nào trong các hàm số dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. **B.** $y = \dfrac{1}{x^4+1}$. **C.** $y = \dfrac{1}{x^2+1}$. **D.** $y = \dfrac{1}{x^2+x+1}$.

Lời giải

Chọn A

Nhận thấy các đáp án B, C, D hàm số có TXĐ: $D = \mathbb{R}$ nên không có TCĐ.

Dùng phương pháp loại trừ thì A đúng.

(Thật vậy; hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ có $\lim\limits_{x\to0^+} y = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \longrightarrow x = 0$ là TCĐ)

Câu 5: Đồ thị hàm số $y = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} & \text{khi } x \ge 1 \\ \dfrac{2x}{x-1} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$\lim\limits_{x\to1^-} y = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{2x}{x-1} = -\infty \longrightarrow x = 1$ là TCĐ;

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x-1} = 2 \longrightarrow y = 2$ là TCN;

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1 \longrightarrow y = 1$ là TCN.

Vậy đồ thị hàm số có đúng ba tiệm cận.

Câu 6: Tìm tất cả các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{3x+2}{|x|+1}$.

A. Đồ thị hàm số $f(x)$ có đúng một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$ và không có tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số $f(x)$ không có tiệm cận ngang và có đúng một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$.

C. Đồ thị hàm số $f(x)$ có tất cả hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = -3$, $y = 3$ và không có tiệm cận đứng.

D. Đồ thị hàm số $f(x)$ không có tiệm cận ngang và có đúng hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x=-1$, $x=1$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=\mathbb{R} \longrightarrow$ đồ thị không có tiệm cận đứng.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+2}{|x|+1}=-3\longrightarrow y=-3$ là TCN; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+2}{|x|+1}=3\longrightarrow y=3$ là TCN.

Câu 7: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-|x|-2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-|x|-2}=1\longrightarrow y=1$ là TCN.

Xét phương trình $x^2-|x|-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$.

$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^+}y=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2+1}{x^2-|x|-2}=+\infty\\\lim\limits_{x\to2^-}y=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2+1}{x^2-|x|-2}=-\infty\end{array}\right.\longrightarrow x=2$ là TCĐ;

$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^+}y=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x^2+1}{x^2-|x|-2}=-\infty\\\lim\limits_{x\to-2^-}y=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x^2+1}{x^2-|x|-2}=+\infty\end{array}\right.\longrightarrow x=-2$ là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có ba đường tiệm cận.

Câu 8: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số có đúng hai tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số có đúng hai tiệm cận ngang, không có tiệm cận đứng.

D. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=\mathbb{R}\longrightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1\longrightarrow y=1 \text{ là TCN;}$$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-1\longrightarrow y=-1 \text{ là TCN.}$$

Vậy đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng và có đúng hai tiệm cận ngang.

Câu 9: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $4x^2+2x+1>0,\forall x\in\mathbb{R}\longrightarrow$ TXĐ của hàm số $D=\mathbb{R}$. Do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Xét $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}=\dfrac{1}{2}\longrightarrow y=\dfrac{1}{2}$ là TCN;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}=-\dfrac{1}{2}\longrightarrow y=-\dfrac{1}{2}$ là TCN.

Vậy đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận.

Câu 10: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=(-1;1)\cup(1;+\infty)$. Ta có:

- $\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+} y=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x+1}}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}(x-1)}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to1^-} y=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sqrt{x+1}}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}(x-1)}=-\infty\end{cases}\longrightarrow x=1$ là TCĐ;
- $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{x+1}}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x+1}}=-\infty\longrightarrow x=-1$ là TCĐ;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}}{1-\frac{1}{x^2}}=0\longrightarrow y=0$ Là TCN.

Vậy đồ thị hàm số có đúng ba đường tiệm cận.

Dạng 4: Bài toán tìm tham số m liên quan đến đường tiệm cận

Câu 1: Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx-1}{2x+m}$ có đường tiệm cận đứng đi qua điểm $M\left(-1;\sqrt{2}\right)$.

A. $m=2$. **B.** $m=0$. **C.** $m=\dfrac{1}{2}$. **D.** $m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{m}{2}\right\}$.

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to\left(-\frac{m}{2}\right)^-} y=\lim\limits_{x\to\left(-\frac{m}{2}\right)^-}\dfrac{mx-1}{2x+m}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to\left(-\frac{m}{2}\right)^+} y=\lim\limits_{x\to\left(-\frac{m}{2}\right)^+}\dfrac{mx-1}{2x+m}=-\infty\end{cases}\longrightarrow x=-\dfrac{m}{2}$ là TCĐ.

Do đó ycbt $\Leftrightarrow -\dfrac{m}{2}=-1\Leftrightarrow m=2$.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2m^2x-5}{x+3}$ nhận đường thẳng $y=8$ làm tiệm cận ngang.

A. $m=2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=\pm 2$. **D.** $m=0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2m^2x-5}{x-3}=2m^2\longrightarrow y=2m^2$ là TCN.

Do đó ycbt $\Leftrightarrow 2m^2=8\Leftrightarrow m=\pm 2$.

Câu 3: Biết rằng đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(m-2n-3\right)x+5}{x-m-n}$ nhận hai trục tọa độ làm hai đường tiệm cận.

Tính tổng $S=m^2+n^2-2$.

A. $S=2$. **B.** $S=0$. **C.** $S=-1$. **D.** $S=-1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\left(m-2n-3\right)x+5}{x-m-n}=m-2n-3\longrightarrow y=m-2n-3$ là TCN;

$\left|\lim\limits_{x\to(n+m)^+} y\right|=+\infty\longrightarrow x=m+n$ là TCĐ.

Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} m+n=0 \\ m-2n-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=-1 \end{cases} \longrightarrow S=m^2+n^2-2=0.$

Dạng 5: Bài tập dành cho học sinh điểm 8+, 9+

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3

Tổng số đường tiệm cận của hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)+1}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị là số nghiệm của phương trình $f(x)+1=0 \Leftrightarrow f(x)=-1$.

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có hai nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)+1}$ có hai đường tiệm cận đứng.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)+1}=\dfrac{1}{3+1}=\dfrac{1}{4}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)+1}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{1}{4}$ và $y=\dfrac{1}{2}$.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)+1}$ có bốn đường tiệm cận.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x^3+x)+3}$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 vui lòng liên hệ zalo chính tác giả Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa và được nhiều ưu đãi. " Tránh mua các trang và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Chọn A.

Đặt $t = x^3 + x$, ta có khi $x \to -\infty$ thì $t \to -\infty$ và khi $x \to +\infty$ thì $t \to +\infty$.

Mặt khác ta có $t' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên với mọi $t \in \mathbb{R}$ phương trình $x^3 + x = t$ có duy nhất một nghiệm x.

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị là số nghiệm của phương trình

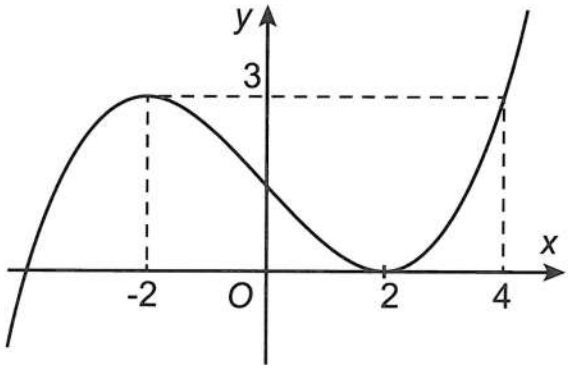
$f(t) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(t) = -3$.

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có duy nhất một nghiệm nên đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{f\left(x^3 + x\right) + 3}$ có một tiệm cận đứng.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f\left(x^3 + x\right) + 3} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{1}{f(t) + 3} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{f\left(x^3 + x\right) + 3} = \lim\limits_{t \to -\infty} \dfrac{1}{f(t) + 3} = 0$ nên đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{f\left(x^3 + x\right) + 3}$ có một tiệm cận ngang là $y = 0$.

Vậy đồ thị có hai đường tiệm cận

Câu 3. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \left(a, b, c, d \in \mathbb{R}\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{1}{f\left(4 - x^2\right) - 3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $t = 4 - x^2$, ta có khi $x \to \pm\infty$ thì $t \to -\infty$.

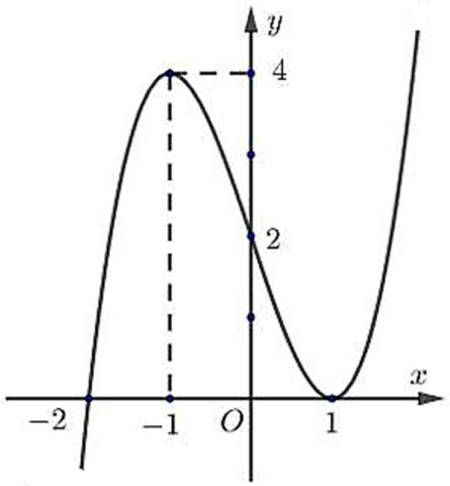
Khi đó $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim\limits_{t \to -\infty} \dfrac{1}{f(t) - 3} = 0$ nên $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x)$.

Mặt khác $f\left(4 - x^2\right) - 3 = 0 \Leftrightarrow f\left(4 - x^2\right) = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4 - x^2 = -2 \\ 4 - x^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{6} \\ x = 0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $g(x)$ có ba đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có bốn đường tiệm cận.

Câu 4: Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ dưới đây:



Đồ thị của hàm số $g(x)=\dfrac{3x^2-x-2}{3f^2(x)-6f(x)}$ có bao nhiêu đường tiện cận đứng

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $3f^2(x)-6f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f(x)=2\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị ta suy ra:

Phương trình $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\end{array}\right.$, với $x=-2$ là nghiệm đơn và $x=1$ là nghiệm kép.

Suy ra: $f(x)=a(x+2)(x-1)^2,(a\neq 0)$.

Phương trình $f(x)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=m(-2<m<-1)\\x=n(n>1)\end{array}\right.$, các nghiệm đều là nghiệm đơn.

Suy ra $f(x)-2=ax(x-m)(x-n),(a\neq 0)$.

Khi đó: $g(x)=\dfrac{(x-1)(3x+2)}{3f(x)\left[f(x)-2\right]}=\dfrac{(x-1)(3x+2)}{3a^2(x+2)(x-1)^2x(x-m)(x-n)}$

$=\dfrac{(3x+2)}{3a^2x(x+2)(x-1)(x-m)(x-n)},(a\neq 0)$

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 5 đường tiệm cận đứng

Cách 2: Chọn hàm số $f(x)$. Ta có $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

Đồ thị hàm số qua 4 điểm $A(-2;0),B(-1;4),C(0;2),D(1;0)$.

suy ra $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-3 \\ d=2 \end{cases}$ hay $f(x)=x^3-3x+2$

◆ Khi đó:

$$g(x)=\frac{3x^2-x-2}{3f^2(x)-6f(x)}=\frac{3x^2-x-2}{3f(x)\left(f(x)-2\right)}=\frac{3x^2-x-2}{3\left(x^3-3x+2\right)\left(x^3-3x\right)}$$

$$=\frac{(x-1)(3x+2)}{3(x+2)(x-1)^2x\left(x^2-3\right)}$$

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 5 đường tiệm cận đứng

Câu 5: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2x+7-3\sqrt{4x+5}}{|f(x)|-1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $g(x)$ xác định khi $\begin{cases} x\geq -\dfrac{5}{4} \\ f(x)\neq \pm 1 \end{cases}$

Ta có $y=f(x)$ là hàm bậc ba và dựa vào bảng biến thiên ta có $y'=a\left(x^2-1\right)$

$\Rightarrow y=\dfrac{a}{3}x^3-ax+b$.

$$\begin{cases} y(-1)=3 \\ y(1)=-1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -\dfrac{a}{3}+a+b=3 \\ \dfrac{a}{3}-a+b=-1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}\Rightarrow y=x^3-3x+1$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+7-3\sqrt{4x+5}}{\left|x^3-3x+1\right|-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}-3\sqrt{\dfrac{4}{x^5}+\dfrac{5}{x^6}}}{\left|1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right|-\dfrac{1}{x^3}}=0$$

$\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$g(x)=\frac{2x+7-3\sqrt{4x+5}}{|f(x)|-1}=\frac{\left(4x^2-8x+4\right)\left(|f(x)|+1\right)}{\left(f^2(x)-1\right)\left(2x+7+3\sqrt{4x+5}\right)}$$

$$=\frac{4(x-1)^2\left(|f(x)|+1\right)}{\left(f(x)-1\right)\left(f(x)+1\right)\left(2x+7+3\sqrt{4x+5}\right)}$$

$$=\frac{4(x-1)^2\left(|f(x)|+1\right)}{x\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)(x+2)(x-1)^2\left(2x+7+3\sqrt{4x+5}\right)}$$

$$=\frac{4\left(|f(x)|+1\right)}{x\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)(x+2)\left(2x+7+3\sqrt{4x+5}\right)}$$

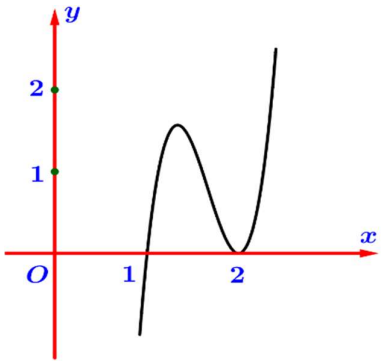
$$x\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)(x+2)\left(2x+7+3\sqrt{4x+5}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt{3}\end{array}\right.\ (\text{vì } x\geq-\frac{5}{4}$$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=-\infty\\\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=+\infty\end{cases}\Rightarrow x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\sqrt{3}^+}g(x)=+\infty\\\lim\limits_{x\to\sqrt{3}^-}g(x)=-\infty\end{cases}\Rightarrow x=\sqrt{3}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có tiện cận ngang là $y=0$ và tiệm cận đứng là $y=\sqrt{3}$

Câu 6: Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

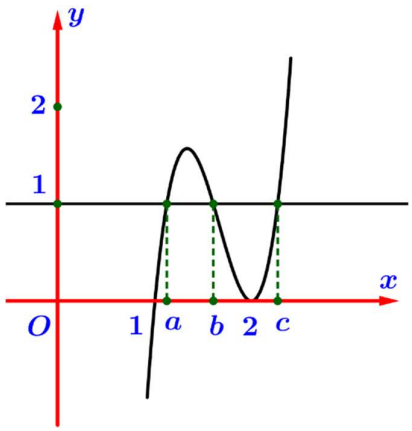


A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định của hàm số $g(x)$ là $x\geq1$.



Xét phương trình $x\left[f^2(x)-f(x)\right]=0 \Leftrightarrow x.f(x).\left[f(x)-1\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \\ f(x)=1 \end{array}\right.$.

Xét phương trình $f(x)=0$ có nghiệm kép $x=2$ và nghiệm đơn $x=1$.

Xét phương trình $f(x)=1$ có ba nghiệm đơn $\left[\begin{array}{l} x=a,\ 1<a<2 \\ x=b,\ 1<b<2,\ b\neq a \\ x=c,\ c>2 \end{array}\right.$. Ta thấy

$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \end{array}\right.$

Nên không mất tính tổng quát, ta có

+ $f(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)^2=0$

+ $f(x)=1 \Leftrightarrow (x-a)(x-b)(x-c)=0$

Do đó:

$$g(x)=\frac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}=\frac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)}$$

Khi đó

+ $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to0^+} g(x) \\ \lim\limits_{x\to0^-} g(x) \end{array}\right.$ không tồn tại giới hạn $\Rightarrow x=0$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$

+ $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)}=+\infty$.

$\Rightarrow x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

$$+\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)}=+\infty\end{cases}$$

$\Rightarrow x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

$$+\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to a^-} g(x)=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)}=+\infty\end{cases}$$

$\Rightarrow x=a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

$$+\begin{cases}\lim\limits_{x\to b^+} g(x)=\lim\limits_{x\to b^+}\dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to b^-} g(x)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)}=-\infty\end{cases}$$

$\Rightarrow x=b$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

$$+\begin{cases}\lim\limits_{x\to c^+} g(x)=\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to c^-} g(x)=\lim\limits_{x\to c^-}\dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)}=-\infty\end{cases}$$

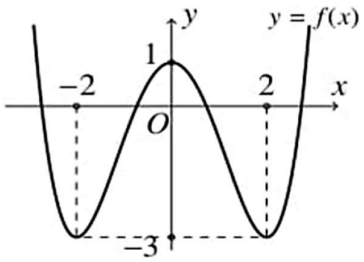
$\Rightarrow x=c$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

$$+\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)}=0.$$

$\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x)$.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 6 đường tiệm cận.

Câu 7: Cho hàm trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x^2-4)(x^2+2x)}{[f(x)]^2+2f(x)-3}$ có tổng cộng bao nhiêu tiệm cận đứng?



A. 5 . **B.** 2 . **C.** 3 . **D.** 4 .

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y=\dfrac{\left(x^2-4\right)\left(x^2+2x\right)}{\left[f\left(x\right)\right]^2+2f\left(x\right)-3}=\dfrac{\left(x-2\right)\left(x+2\right)x\left(x+2\right)}{\left[f\left(x\right)\right]^2+2f\left(x\right)-3}=\dfrac{\left(x-2\right)\left(x+2\right)^2x}{\left[f\left(x\right)\right]^2+2f\left(x\right)-3}$.

Xét $\left[f\left(x\right)\right]^2+2f\left(x\right)-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=1\\f\left(x\right)=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m,\ m<-2\\x=0\\x=n,\ n>2\\x=2\\x=-2\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị ta thấy các nghiệm $x=0;\ x=\pm2$ là các nghiệm kép (nghiệm bội 2).

Do đó đa thức $\left[f\left(x\right)\right]^2+2f\left(x\right)-3$ có bậc là 8.

Suy ra $y=\dfrac{\left(x-2\right)\left(x+2\right)^2x}{a^2x^2\left(x+2\right)^2\left(x-2\right)^2\left(x-m\right)\left(x-n\right)}=\dfrac{1}{a^2x\left(x-2\right)\left(x-m\right)\left(x-n\right)}$.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận đứng là $x=0,\ x=2,\ x=m,\ x=n$.

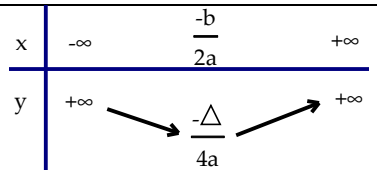
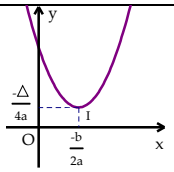
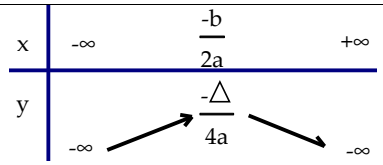
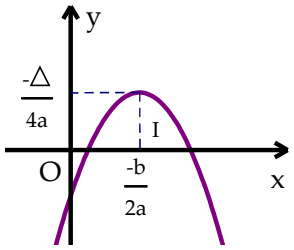
Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 vui lòng liên hệ zalo chính tác giả Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa và được nhiều ưu đãi. " Tránh mua các trang và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

BÀI 5. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Hàm số $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$

- Tập xác định: $\mathbb{R}$.

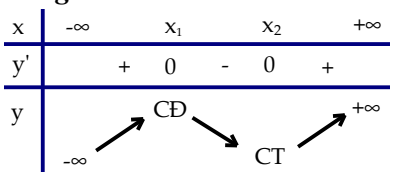
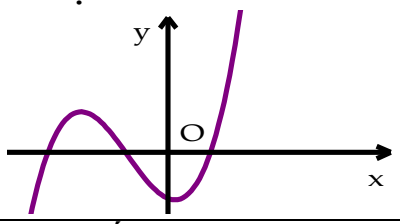
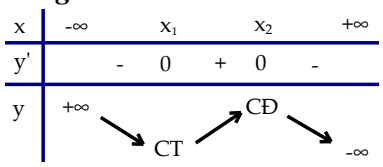
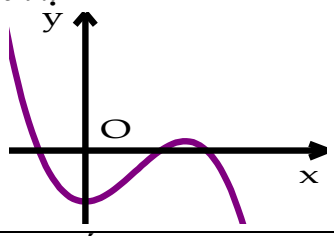
Trường hợp	Bảng biến thiên	Đồ thị
$a > 0$		
$a < 0$		

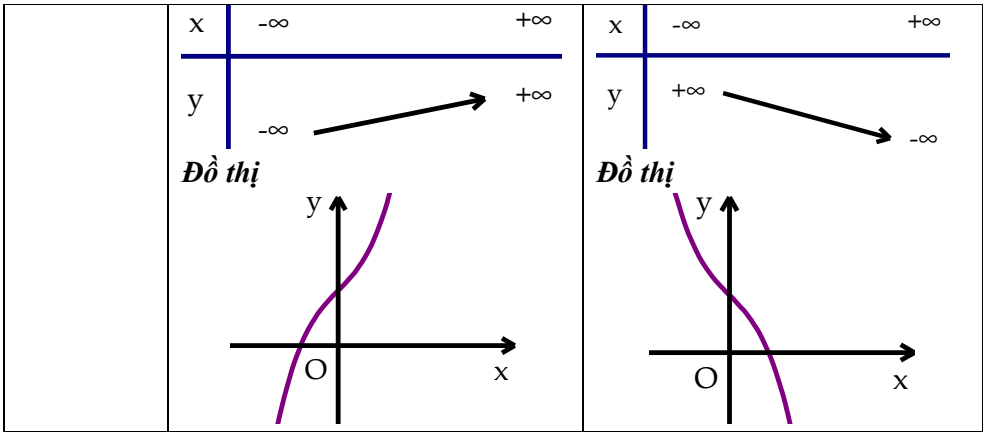
*** Kết luận:** Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ là 1 parabol có đỉnh $I\left(\frac{-b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$; trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$.

+ Bề lõm hướng lên trên nếu $a > 0$; bề lõm hướng xuống dưới nếu $a < 0$.

2. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$

- Tập xác định: $\mathbb{R}$.
- Tính $y' \rightarrow$ tính Δ của phương trình $y' = 0$.

Trường hợp	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$ $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.	***Bảng biến thiên***  ***Đồ thị*** 	***Bảng biến thiên***  ***Đồ thị*** 
$\Delta \leq 0$	***Bảng biến thiên***	***Bảng biến thiên***



3. Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ **(**$c\neq 0$ **và** $ad-bc\neq 0$**)**

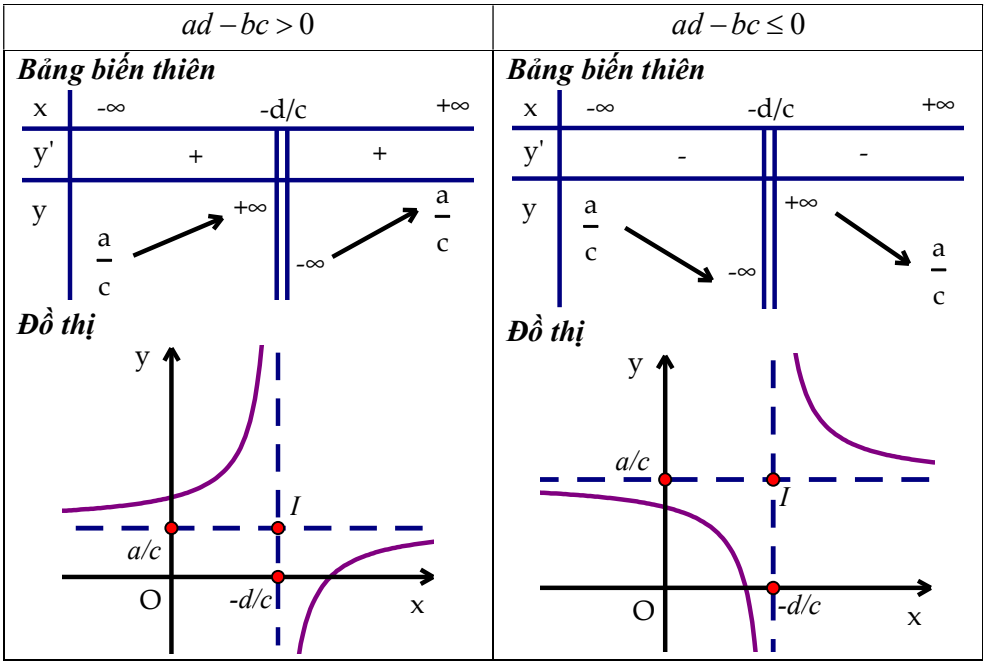
- Tập xác định: $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$

- Ta có: $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

- Tiệm cận đứng: $x=-\dfrac{d}{c}$

- Tiệm cận ngang: $y=\dfrac{a}{c}$

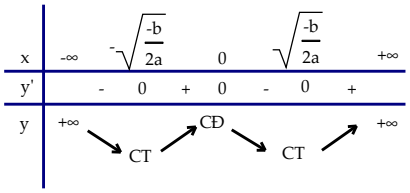
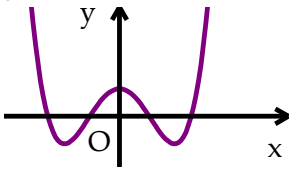
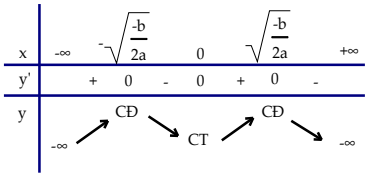
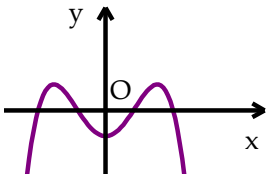
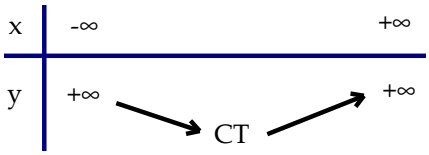
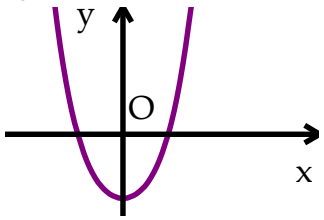
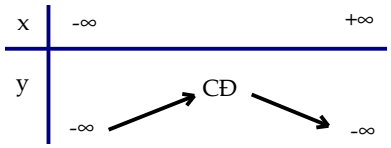
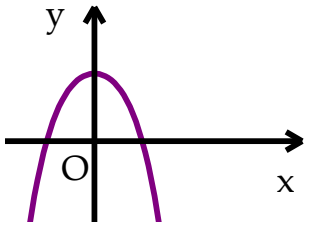
- Đồ thị nhận giao điểm $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.



4. Hàm số trùng phương: $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$

- Tập xác định: $\mathbb{R}$.

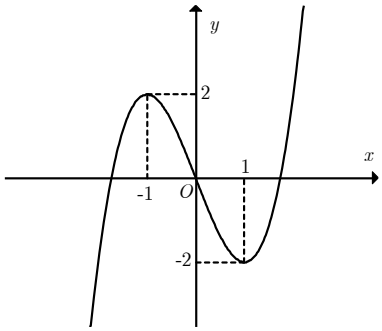
- Ta có: $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x\left(2ax^2 + b\right)$.

Trường hợp	$a > 0$	$a < 0$
$a.b < 0$	Bảng biến thiên  Đồ thị  	Bảng biến thiên  Đồ thị 
$a.b \geq 0$	Bảng biến thiên  Đồ thị  	Bảng biến thiên  Đồ thị 

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1 : Cho đồ thị hàm số. Tìm hàm số

Câu 1: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = x^3 - 3x$. **B.** $y = -x^3 + 3x$. **C.** $y = -x^4 + 2x^2$. **D.** $y = x^4 - 2x^2$.

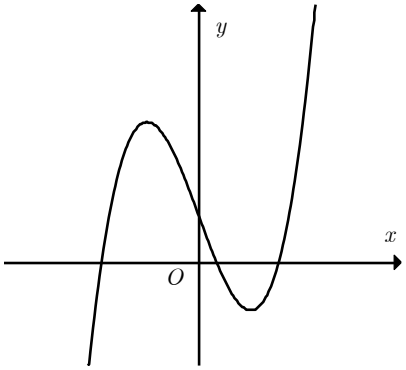
Lời giải

Chọn A

Đặc trưng của đồ thị là hàm bậc ba nên loại C,D.

Hình dáng đồ thị thể hiện $a>0$ nên chỉ có A phù hợp.

Câu 2: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=-x^2+x-1$. **B.** $y=-x^3+3x+1$. **C.** $y=x^4-x^2+1$. **D.** $y=x^3-3x+1$

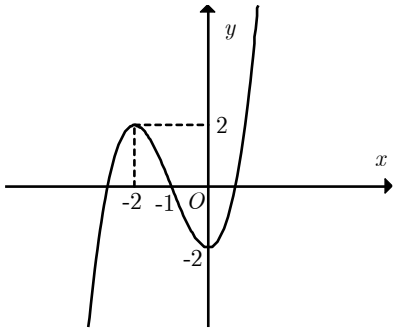
Lời giải

Chọn D

Đặc trưng của đồ thị là hàm bậc ba. Loại đáp án A và C.

Hình dáng đồ thị thể hiện $a>0$.

Câu 3: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=-x^3-3x^2-2$. **B.** $y=x^3+3x^2-2$.

C. $y=x^3-3x^2-2$. **D.** $y=-x^3+3x^2-2$.

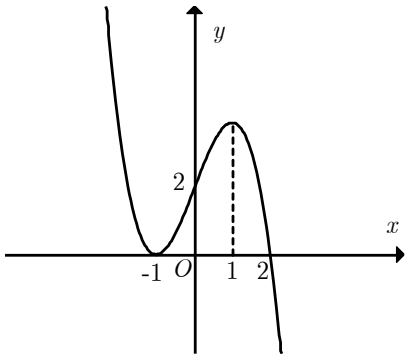
Lời giải

Chọn B

Hình dáng đồ thị thể hiện $a>0$. Loại đáp án A,D.

Thấy đồ thị cắt trục hoành tại điểm $x=-1$ nên thay $\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$ vào hai đáp án B và C, chỉ có B thỏa mãn.

Câu 4: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=(x+1)^2(1-x)$. **B.** $y=(x+1)^2(1+x)$.

C. $y=(x+1)^2(2-x)$. **D.** $y=(x+1)^2(2+x)$.

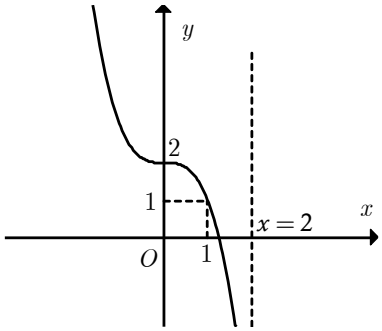
Lời giải

Chọn C

Hình dáng đồ thị thể hiện $a<0$. Loại đáp án B,D.

Để ý thấy khi $x=0$ thì $y=2$. Do đó chỉ có đáp án C phù hợp.

Câu 5: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=-x^3+1$. **B.** $y=-x^3+3x+2$.

C. $y=-x^3+3x^2-3x+2$. **D.** $y=-x^3+2$.

Lời giải

Chọn D

Để ý thấy khi $x=0$ thì $y=2$ nên ta loại đáp án A.

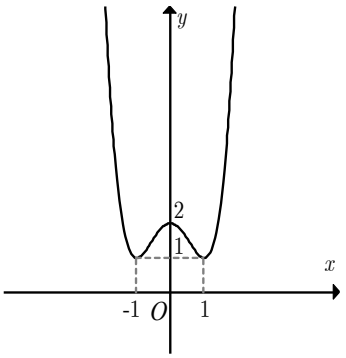
Dựa vào đồ thị, suy ra hàm số không có cực trị nên ta loại đáp án B vì $y'=-3x^2+3$ có hai nghiệm.

Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(1;1)$, kiểm tra thấy C & D đều thỏa mãn.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-x^3+3x^2-3x+2=0 \xrightarrow{\text{CASIO}} x=2$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-x^3+2=0 \longrightarrow x=\sqrt[3]{2}\in(1;2)$. Do đó chỉ có D thỏa mãn.

Câu 6: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=-x^4+2x^2+2$.
B. $y=x^4-2x^2+2$.
C. $y=x^4-4x^2+2$.
D. $y=x^4-2x^2+3$.

Lời giải

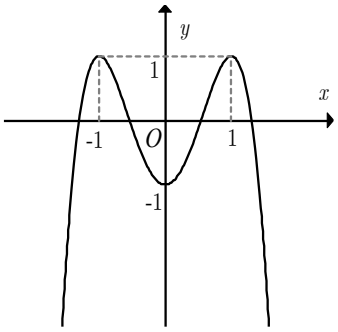
Chọn B

Hình dáng đồ thị thể hiện $a>0$. Loại đáp án A.

Để ý thấy khi $x=0$ thì $y=2$ nên ta loại đáp án D.

Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(1;1)$ nên chỉ có B thỏa mãn.

Câu 7: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=x^4-2x^2-1$.
B. $y=-2x^4+4x^2-1$.
C. $y=-x^4+2x^2-1$.
D. $y=-x^4+2x^2+1$.

Lời giải

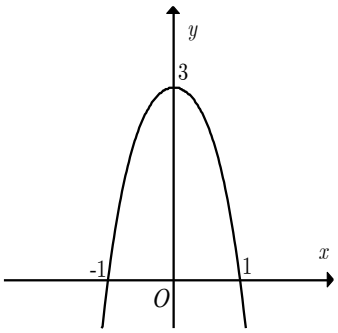
Chọn B

Hình dáng đồ thị thể hiện $a<0$. Loại A.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1 nên thể hiện $c=-1$. Loại D.

Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(1;1)$ nên chỉ có B thỏa mãn.

Câu 8: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=-x^4-2x^2+3$.
B. $y=-x^4-2x^2-3$.
C. $y=-x^4+2x^2+3$.
D. $y=x^4+2x^2+3$.

Lời giải

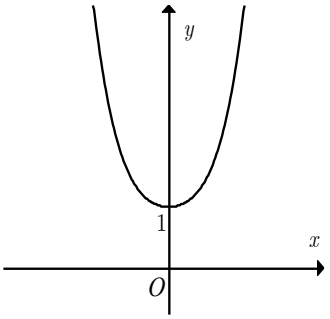
Chọn A

Hình dáng đồ thị thể hiện $a<0$. Loại D.

Dựa vào đồ thị thấy khi $x=0$ thì $y=3$. Loại B.

Hàm số có một cực trị nên a, b cùng dấu.

Câu 9: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=x^4+x^2+2$.
B. $y=x^4-x^2+2$.
C. $y=x^4-x^2+1$.
D. $y=x^4+x^2+1$.

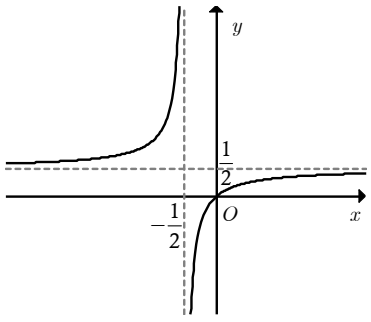
Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta thấy khi $x=0$ thì $y=1$. Loại A,B.

Hàm số có một cực trị nên a, b cùng dấu.

Câu 10: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=\dfrac{x+1}{2x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x+3}{2x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x}{2x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$.

Lời giải

Chọn C

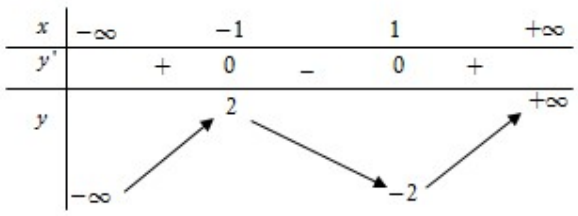
Các chi tiết đồ thị hàm số có TCĐ: $x=-\dfrac{1}{2}$ và TCN: $y=\dfrac{1}{2}$ đều giống nhau.

Chỉ có chi tiết đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ là phù hợp cho đáp án C.

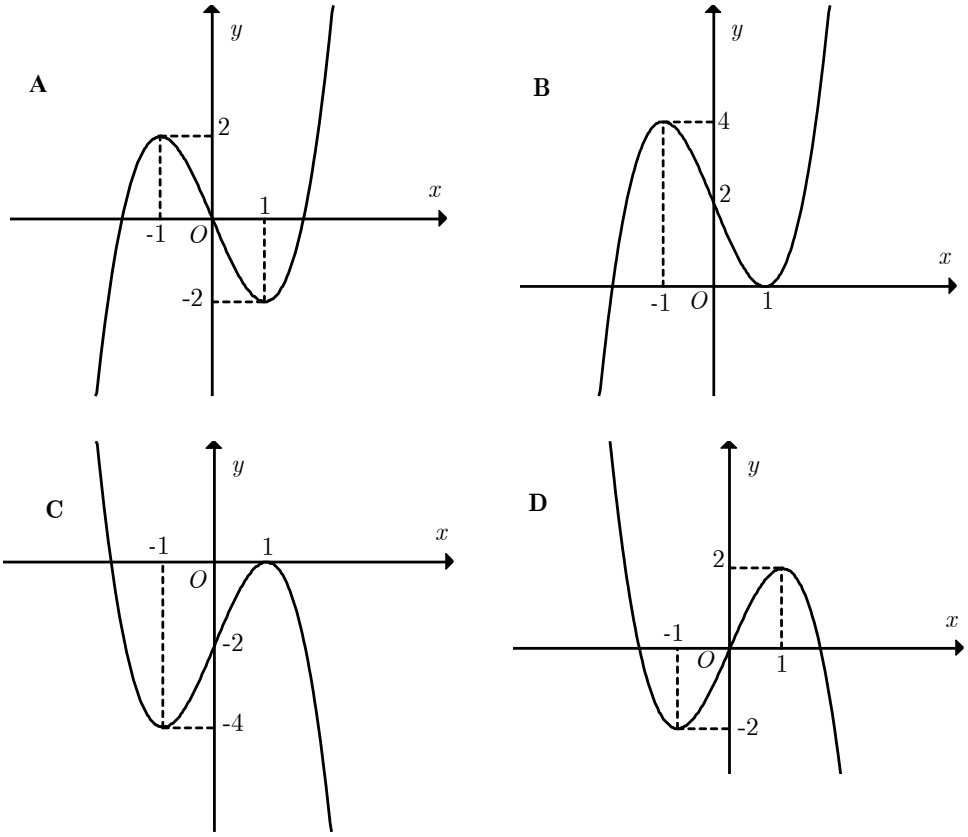
Cách 2. Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định tức $y'>0$. Kiểm tra ta thấy chỉ có C & D thỏa mãn.

Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ nên đáp án C thỏa mãn.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên sau:



Đồ thị nào trong các phương án A, B, C, D thể hiện hàm số $y=f(x)$?



Lời giải

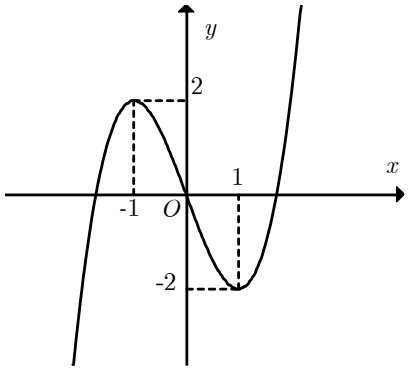
Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy:

● Khi $x \to +\infty$ thì $y \to +\infty$. Loại C và D.

● Tọa độ các điểm cực trị là $(-1;2)$ và $(1;-2)$ nên đáp án A là phù hợp.

Câu 12: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. Hàm số có hệ số $a < 0$.

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(1;2)$.

C. Hàm số không có cực trị.

D. Hệ số tự do của hàm số khác 0.

Lời giải

Chọn B

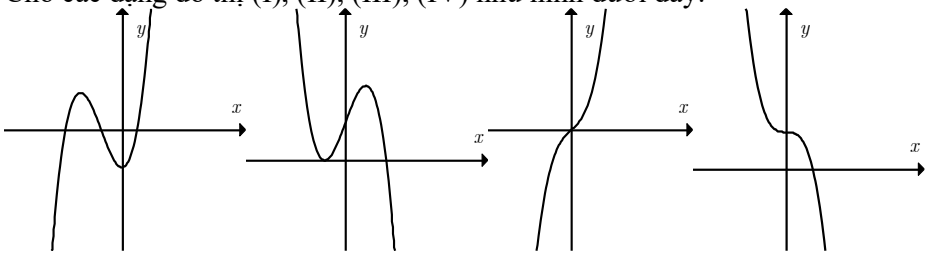
Hình dáng đồ thị thể hiện $a > 0$. Do đó A sai.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$. Do đó B đúng.

Hàm số có hai cực trị. Do đó C sai.

Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ nên hệ số tự do của hàm số phải bằng 0. Do đó D sai.

Câu 13: Cho các dạng đồ thị (I), (II), (III), (IV) như hình dưới đây:



Liệt kê tất cả các dạng có thể biểu diễn đồ thị hàm số $y = x^3 + bx^2 + cx + d$.

A. (I). **B.** (I) và (III). **C.** (II) và (IV). **D.** (III) và (IV).

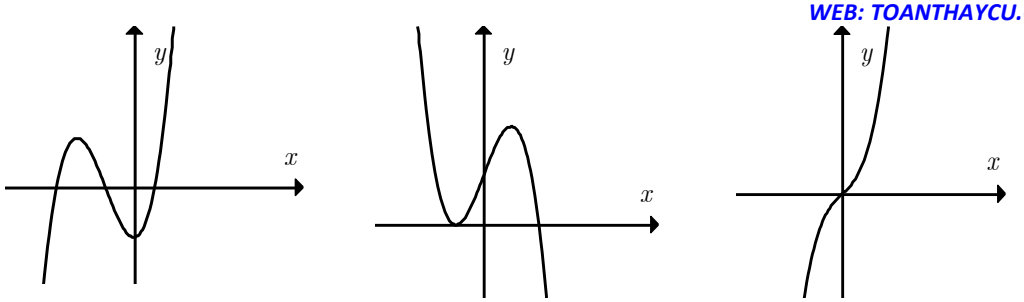
Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ có hệ số của x^3 dương nên loại (II) và (IV).

Xét $y' = 3x^2 + 2bx + c$ có $\Delta_{y'} = b^2 - 3c$. Ta chưa xác định được $\Delta_{y'} = b^2 - 3c$ mang dấu gì nên có thể xảy ra trường hợp (I) và cũng có thể xảy ra trường hợp (III).

Câu 14: Cho các dạng đồ thị (I), (II), (III) như hình dưới đây:



(I) **(II)** **(III)**

Liệt kê tất cả các dạng có thể biểu diễn đồ thị hàm số $y=x^3+bx^2-x+d$.

A. (I). **B.** (I) và (II). **C.** (III). **D.** (I) và (IIII).

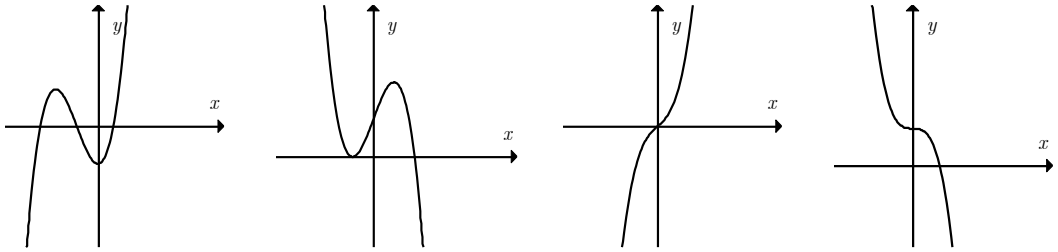
Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=x^3+bx^2-x+d$ có hệ số của x^3 dương nên loại (II).

Xét $y'=3x^2+2bx-1$ có $\Delta_{y'}=b^2+3>0,\forall b\in\mathbb{R}$. Do đó hàm số có hai cực trị.

Câu 15: Biết rằng hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$ có đồ thị là một trong các dạng dưới đây:



(I) **(II)** **(III)** **(IV)**

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị (I) xảy ra khi $a<0$ và $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

B. Đồ thị (II) xảy ra khi $a>0$ và $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

C. Đồ thị (III) xảy ra khi $a>0$ và $f'(x)=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

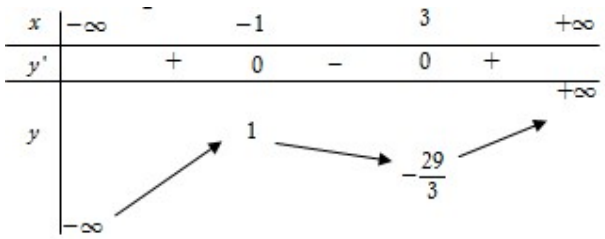
D. Đồ thị (IV) xảy ra khi $a>0$ và $f'(x)=0$ có có nghiệm kép.

Lời giải

Chọn C

Dạng 2: Cho bảng biến thiên. Yêu cầu tìm hàm số

Câu 1: Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên như sau?



A. $y=-x^3+3x^2+9x-2$.

B. $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x-\frac{2}{3}$.

C. $y=x^3-3x^2-9x-2$.

D. $y=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x+\frac{2}{3}$.

Lời giải

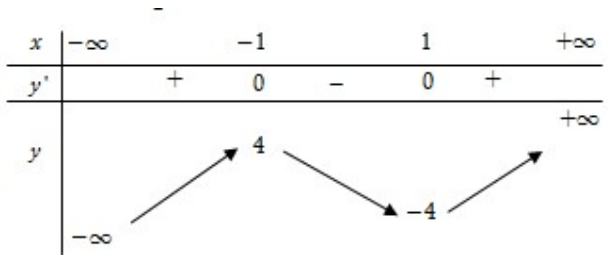
Chọn B

Dựa vào BBT và các phương án lựa chọn, ta thấy:

Đây là dạng hàm số bậc 3 có hệ số $a>0$. Loại A và D.

Mặt khác, đồ thị hàm số đi qua điểm $(-1;1)$ nên loại C.

Câu 2: Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên như sau?



A. $y=2x^3-6x$.

B. $y=-2x^3+6x-8$.

C. $y=-2x^3+6x$.

D. $y=2x^3-6x+8$.

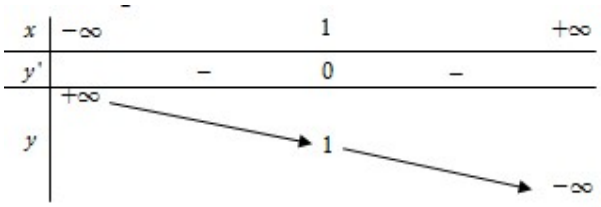
Lời giải

Chọn A

Dựa vào dáng điệu của bảng biến thiên suy ra $a>0$. Loại B & C.

Thử tại $x=1\rightarrow y=-4$. Thay vào 2 đáp án còn lại chỉ có A thỏa.

Câu 3: Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên như sau sau?



A. $y=-x^3+3x^2-3x+1$.

B. $y=x^3-x^2+2x$.`

C. $y=x^3-3x^2+3x+2$.

D. $y=-x^3+3x^2-3x+2$.

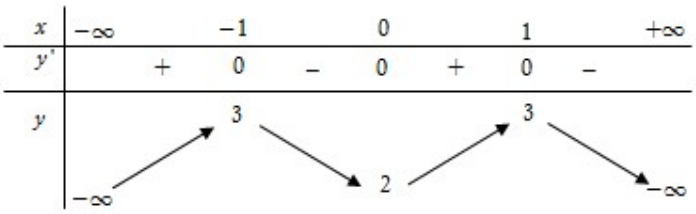
Lời giải

Chọn D

Dựa vào dáng điệu của bảng biến thiên suy ra $a<0$. Loại B & **C.**

Thử tại $x=1\rightarrow y=1$. Thay vào 2 đáp án còn lại chỉ có D thỏa.

Câu 4: Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên như sau?



A. $y=x^4-2x^2+1$. **B.** $y=-x^4+2x^2+1$.

C. $y=x^4-2x^2+2$. **D.** $y=-x^4+2x^2+2$.

Lời giải

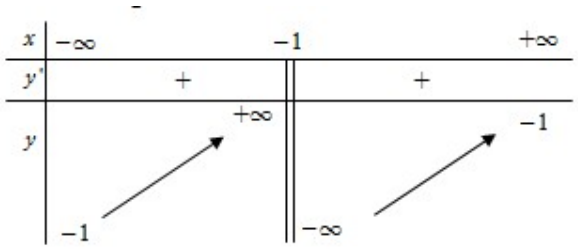
Chọn D

Dựa vào BBT và các phương án lựa chọn, ta thấy:

Đây là dạng hàm số trùng phương có hệ số $a<0$. Loại A và C.

Mặt khác, đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;2)$ nên loại B.

Câu 5: Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên như sau?



A. $y=\dfrac{-x+2}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{-x-2}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{-x-2}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{-x+2}{x-1}$.

Lời giải

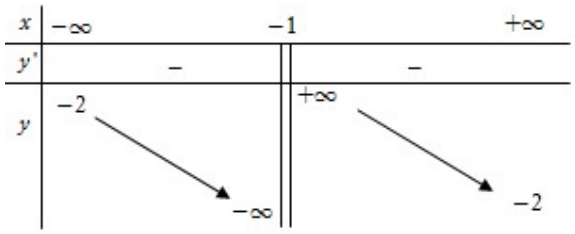
Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên, ta có các nhận xét sau:

● Hàm số có TCĐ $x=-1$; TCN $y=-1$. Do đo ta loại phương án C & D.

● Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định. Thử đáp án A, ta có $y'=\dfrac{-3}{(x+1)^2}<0$ không thỏa mãn.

Câu 6: Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên sau?



A. $y=\dfrac{x-1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{-2x}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{1-2x}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

Lời giải

Chọn C

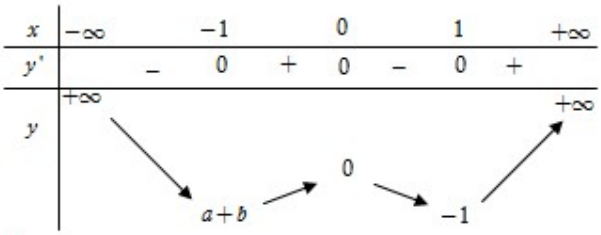
Dựa vào BBT và các phương án lựa chọn, ta thấy

Đây là dạng hàm phân thức hữu tỉ, có tiệm cận đứng là $x=-1$. Loại A và B.

Do đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=-2$.

Dạng 3: Cho bảng biến thiên, đồ thị hàm số . Tìm, xác định dấu các tham số thuộc hàm số $y=f(x)$

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:



Tính giá trị của a và b.

A. $a=1$ và $b=-2$.

B. $a=2$ và $b=-3$.

C. $a=\frac{1}{2}$ và $b=-\frac{3}{2}$.

D. $a=\frac{3}{2}$ và $b=-\frac{5}{2}$.

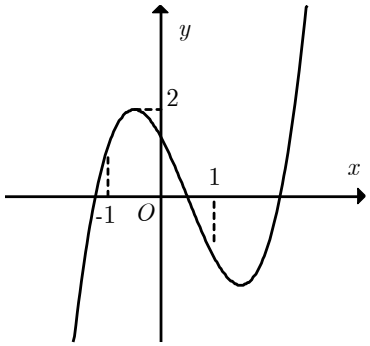
Lời giải

Chọn A

Đạo hàm $f'(x)=4ax^3+2bx=2x(2ax^2+b)$.

Từ bảng biến thiên ta có $\begin{cases} f(1)=a+b=-1 \\ f'(1)=2(2a+b)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$.

Câu 2: Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $a>0,\ b>0,\ c<0,\ d>0$.

B. $a<0,\ b<0,\ c<0,\ d<0$.

C. $a>0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$.

D. $a>0,\ b>0,\ c>0,\ d<0$.

Lời giải

Chọn C

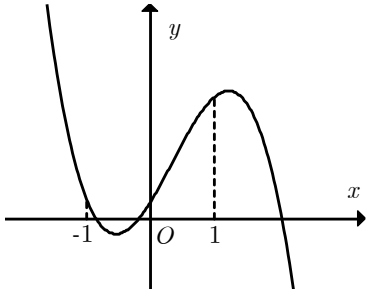
Đồ thị hàm số thể hiện $a>0$; cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d>0$.

Hàm số có $-1<x_{CD}<0,\ x_{CT}>1 \longrightarrow \begin{cases} x_{CD}+x_{CT}>0 \\ x_{CD}.x_{CT}<0 \end{cases}$. $(*)$

Ta có $y'=3ax^2+2bx+c=0$. Do đó $(*)\leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{2b}{3a}>0\longrightarrow\dfrac{b}{a}<0\xrightarrow{a>0}b<0\\ \dfrac{c}{3a}<0\longrightarrow\dfrac{c}{a}<0\xrightarrow{a>0}c<0\end{cases}$.

Vậy $a>0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$.

Câu 3: Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $a<0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$.
B. $a<0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$.
C. $a<0,\ b<0,\ c>0,\ d>0$.
D. $a<0,\ b>0,\ c<0,\ d>0$.

Lời giải

Chọn A

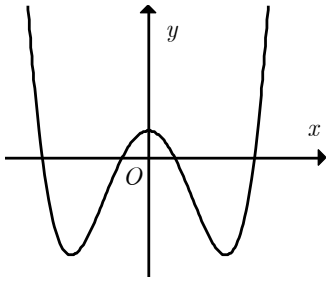
Đồ thị hàm số thể hiện $a<0$; cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d>0$.

Hàm số có $x_{CD}>1,\ -1<x_{CT}<0\longrightarrow\begin{cases}x_{CD}+x_{CT}>0\\ x_{CD}.x_{CT}<0\end{cases}$. $(*)$

Ta có $y'=3ax^2+2bx+c=0$. Do đó $(*)\leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{2b}{3a}>0\longrightarrow\dfrac{b}{a}<0\xrightarrow{a<0}b>0\\ \dfrac{c}{3a}<0\longrightarrow\dfrac{c}{a}<0\xrightarrow{a<0}c>0\end{cases}$.

Vậy $a<0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$.

Câu 4: Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $a>0,\ b>0,\ c<0$.
B. $a>0,\ b<0,\ c<0$.
C. $a>0,\ b<0,\ c>0$.
D. $a<0,\ b>0,\ c<0$.

Lời giải

Chọn C

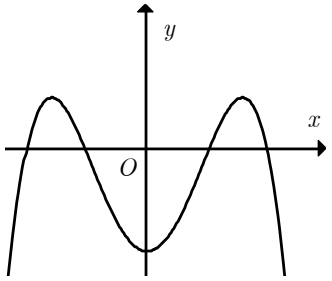
Đồ thị hàm số thể hiện $a>0$.

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên $ab<0\xrightarrow{a>0}b<0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $c>0$.

Vậy $a>0,\ b<0,\ c>0.$

Câu 5: Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $a<0,\ b>0,\ c>0.$ **B.** $a<0,\ b>0,\ c<0.$

C. $a<0,\ b<0,\ c>0.$ **D.** $a<0,\ b<0,\ c<0.$

Lời giải

Chọn B

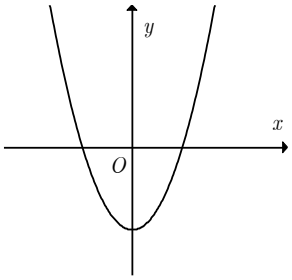
Đồ thị hàm số thể hiện $a<0.$

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên $ab<0\longrightarrow b>0.$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c<0.$

Vậy $a<0,\ b>0,\ c<0$.

Câu 6: Hàm số $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $a>0,\ b\geq 0,\ c<0.$ **B.** $a>0,\ b<0,\ c\leq 0.$

C. $a>0,\ b\geq 0,\ c>0.$ **D.** $a<0,\ b<0,\ c<0.$

Lời giải

Chọn A

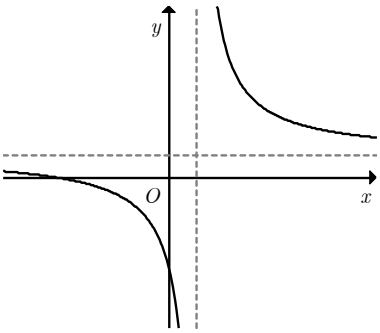
Dựa vào dáng điệu đồ thị suy ra $a>0$.

Hàm số có 1 điểm cực trị nên $ab\geq 0\xrightarrow{a>0}b\geq 0.$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c<0.$

Vậy $a>0,\ b\geq 0,\ c<0.$

Câu 7: Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $a>0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $b>0,\ c>0,\ d<0.$ **B.** $b>0,\ c<0,\ d<0.$

C. $b<0,\ c<0,\ d<0.$ **D.** $b<0,\ c>0,\ d<0.$

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số, ta thấy

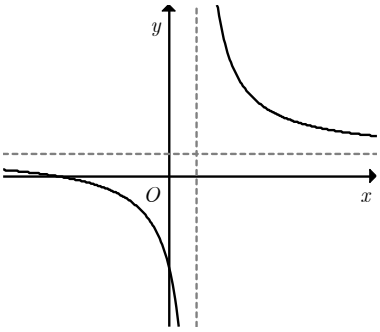
● Khi $y=0\longrightarrow x=-\dfrac{b}{a}<0\xrightarrow{a>0}b>0.$

● Khi $x=0\longrightarrow y=\dfrac{b}{d}<0\xrightarrow{b>0}d<0.$

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}>0\xrightarrow{d<0}c>0.$

Vậy $b>0,\ c>0,\ d<0.$

Câu 8: Hàm số $y=\dfrac{bx-c}{x-a}\ (a\neq 0;\ a,\ b,\ c\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên.Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $a>0,\ b>0,\ c-ab<0.$ **B.** $a>0,\ b>0,\ c-ab>0.$

C. $a>0,\ b>0,\ c-ab=0.$ **D.** $a>0,\ b<0,\ c-ab<0.$

Lời giải

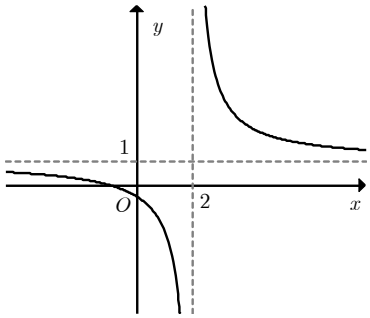
Chọn A

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=a>0$; tiệm cận ngang $y=b>0.$

Mặt khác, ta thấy dạng đồ thị là đường cong đi xuống từ trái sang phải trên các khoảng xác định của nó nên $y'=\dfrac{c-ab}{(x-a)^2}<0,\forall x\neq a\longrightarrow c-ab<0.$

Vậy $a>0,\ b>0,\ c-ab<0.$

Câu 9: Đường cong ở hình bên là đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $y'<0,\ \forall x\neq 1$.
B. $y'<0,\ \forall x\neq 2$.
C. $y'>0,\ \forall x\neq 1$.
D. $y'>0,\ \forall x\neq 2$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào hình vẽ, ta thấy hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định và đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số suy ra $y'<0,\ \forall x\neq 2$.

BÀI 6. TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ VÀ TIẾP TUYẾN VỚI ĐỒ THỊ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. TƯƠNG GIAO

Xét hai đồ thị $(C): y = f(x)$ và $(D): y = g(x)$.

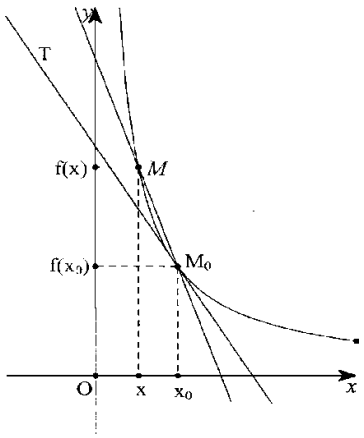
Phương trình hoành độ giao điểm giữa (C) và (D) là: $f(x) = g(x)$. (1)

Số điểm chung giữa (C) và (D) đúng bằng số nghiệm của phương trình (1).

(C) và (D) được gọi là tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$.

II. TIẾP TUYẾN

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường cong (C), Giả sử (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $M(x_0; f(x_0)) \in (C)$. Kí hiệu $M(x; f(x))$ là một điểm di chuyển trên (C). Đường thẳng MM_0 là một cát tuyến của (C).



Nhận xét rằng khi $x \to x_0$ thì $M(x; f(x))$ di chuyển trên (C) tới điểm $M(x_0; f(x_0)) \in (C)$ và ngược lại. Giả sử cát tuyến MM_0 có vị trí giới hạn, kí hiệu là M_0T thì M_0T được gọi là **tiếp tuyến** của (C) tại M_0. Điểm M_0 được gọi là **tiếp điểm**.

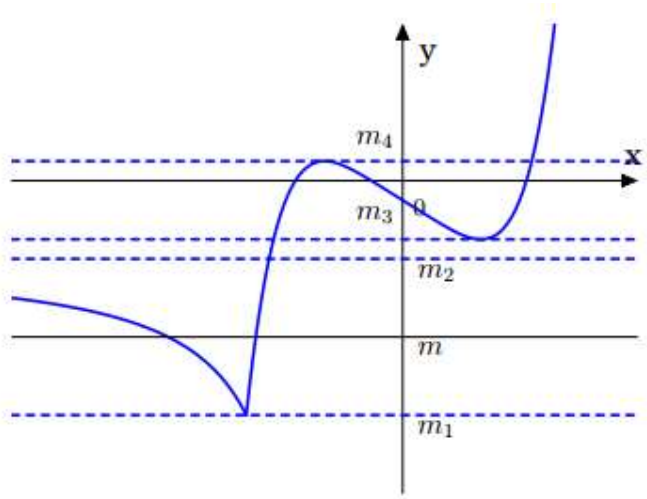
Các dạng phương trình tiếp tuyến và phương pháp giải sẽ được đề cập trong phần bài tập bên dưới

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Dựa vào đồ thị biện luận số nghiệm của phương trình

1. Phương pháp

Biện luận số nghiệm của phương trình $f(x) = m$ bằng đồ thị (khi bài toán cho sẵn đồ thị): ta dưa vào sự tinh tiến của đồ thi $y = m$ theo hướng lên hoặc xuống trên trục tung.

- $m < m_1$: vô nghiệm. - $m_1 < m < m_2$: 2 nghiệm - $m_2 \le m < m_3$: 1 nghiệm. - $m = m_3$: 2 nghiệm. - $m_3 < m < m_4$: 3 nghiệm. - $m = m_4$: 2 nghiệm. - $m > m_4$: 1 nghiệm	

Cần lưu ý các phép biến đổi đồ thị

1. Dạng 1: Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = f(|x|)$.

Ta có: $y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \ge 0 \\ f(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

và $y = f(|x|)$ là *hàm chẵn* nên đồ thị (C') nhận *Oy* làm trục đối xứng.

- Cách vẽ (C') từ (C):

  Giữ nguyên phần đồ thị bên phải Oy của đồ thị $(C): y = f(x)$.

  Bỏ phần đồ thị bên trái Oy của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị** được giữ qua Oy.

2. Dạng 2: Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = |f(x)|$.

Ta có: $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \ge 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}$

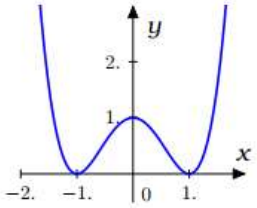
- **Cách vẽ (C') từ (C):**

  Giữ nguyên phần đồ thị phía trên Ox của đồ thị (C): $y = f(x)$.

  Bỏ phần đồ thị phía dưới Ox của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ** qua Ox.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $x^4-2x^2+2-m=0$ có bốn nghiệm thực phân biệt.

A. $-2<m<1$ **B.** $2<m<3$

C. $0<m<1$ **D.** $1<m<2$

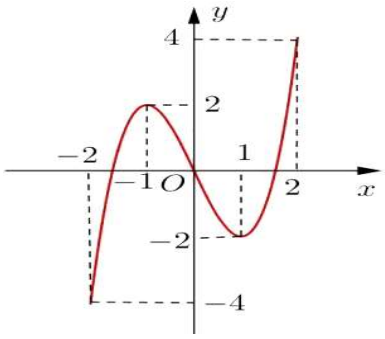
Lời giải.

Chọn D.

Phương trình đã cho tương đương với $x^4-2x^2+1=m-1$. Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+1$ và đường thẳng $y=m-1$.

- Nếu $m-1<0\Leftrightarrow m<1$: phương trình vô nghiệm.
- Nếu $m-1=0\Leftrightarrow m=1$: phương trình có 2 nghiệm.
- Nếu $0<m-1<1\Leftrightarrow 1<m<2$: phương trình có 4 nghiệm.
- Nếu $m-1=1\Leftrightarrow m=2$: phương trình có 3 nghiệm.
- Nếu $m-1>1\Leftrightarrow m>2$: phương trình có 2 nghiệm.

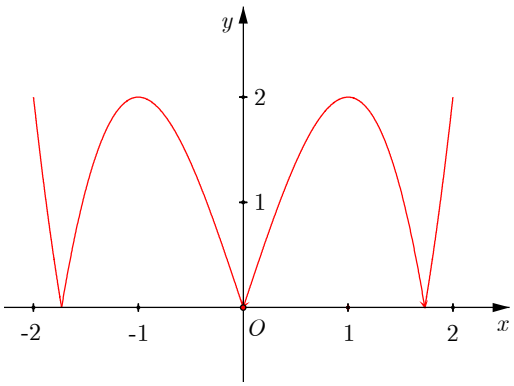
Ví dụ 2: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Các giá trị của tham số m để phương trình $|f(x)|=m$ có 6 nghiệm thực phân biệt là



A. $0<m<2$. **B.** $m<0$. **C.** $m>2$. **D.** $0\le m\le 2$.

Lời giải.

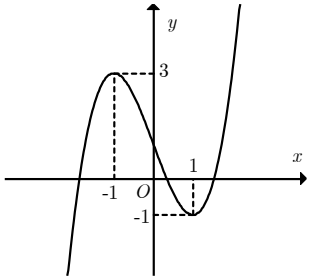
Chọn A



Từ đồ thị của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ ta có phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=m$ có 6 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $0<m<2$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(x\right)+m-2018=0$ có duy nhất một nghiệm.



A. $m=2015,\ m=2019.$ **B.** $2015<m<2019.$

C. $m<2015,\ m>2019.$ **D.** $m\le 2015,\ m\ge 2019.$

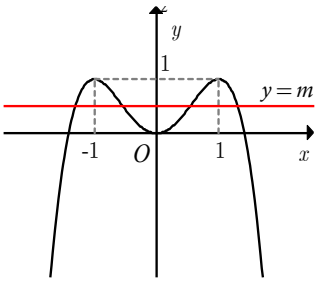
Lời giải

Chọn C

Phương trình $f\left(x\right)+m-2018=0\longleftrightarrow f\left(x\right)=2018-m.$ Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $y=2018-m$ (có phương song song hoặc trùng với trục hoành).

Dựa vào đồ thị, ta có ycbt $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2018-m>3\\2018-m<-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<2015\\m>2019\end{array}\right.$.

Câu 2: Cho hàm số $y=-x^4+2x^2$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $-x^4+2x^2=m$ có bốn nghiệm phân biệt.



A. $0\le m\le 1.$ **B.** $0<m<1.$ **C.** $m<1.$ **D.** $m>0.$

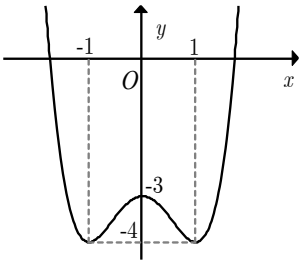
Lời giải

Chọn B

Phương trình $-x^4+2x^2=m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^4+2x^2$ và đường thẳng $y=m$ (cùng phương với trục hoành).

Dựa vào đồ thị ta thấy để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0<m<1.$

Câu 3: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=m$ có sáu nghiệm phân biệt.

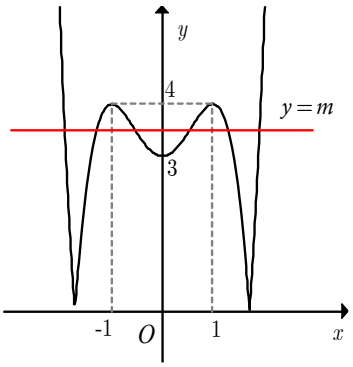


A. $0<m<4$. **B.** $0<m<3$. **C.** $3<m<4$. **D.** $-4<m<-3$.

Lời giải

Chọn C

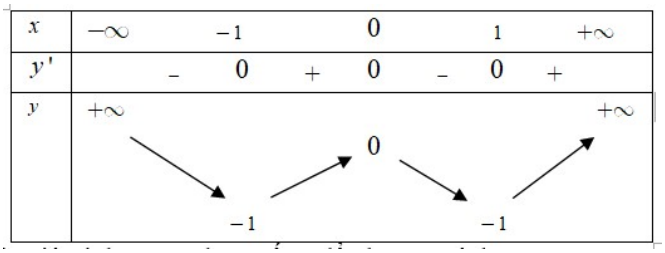
Trước tiên từ đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta suy ra đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ như hình sau:



Dựa vào đồ thị, để phương trình $|f(x)|=m$ có sáu nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 3<m<4$.

Dạng 2 : Dựa vào bảng biến thiên biện luận số nghiệm của phương trình

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)-1=m$ có đúng hai nghiệm.

A. $-2<m<-1$. **B.** $m>0,\ m=-1$.

C. $m=-2,\ m>-1$. **D.** $m=-2,\ m\geq -1$.

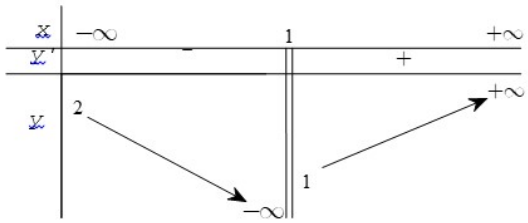
Lời giải

Chọn C

Phương trình $f(x)-1=m\longleftrightarrow f(x)=m+1$. Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m+1$ (cùng phương với trục hoành).

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m+1>0 \\ m+1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>-1 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như sau:



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=2m-1$ tại hai điểm phân biệt.

A. $1\le m<\dfrac{3}{2}$. **B.** $1<m<2$. **C.** $1\le m\le\dfrac{3}{2}$. **D.** $1<m<\dfrac{3}{2}$.

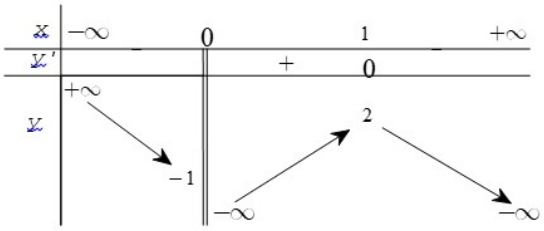
Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy để đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=2m-1$ tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow 1<2m-1<2\Leftrightarrow 1<m<\dfrac{3}{2}$.

Sai lầm hay gặp là cho $1\le 2m-1\le 2\Leftrightarrow 1\le m\le\dfrac{3}{2}\longrightarrow$ Đáp án C thường được chọn Lí do là giá trị của hàm số không bằng 2 mà chỉ tồn tại $\lim\limits_{x\to-\infty} y=2$ và giá trị của hàm số không bằng 1 mà chỉ tồn tại $\lim\limits_{x\to 1^+} y=1$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x)=m$ có đúng hai nghiệm.

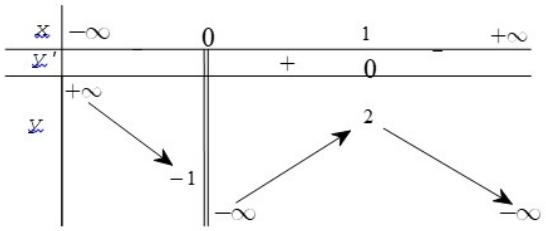
A. $m<2$. **B.** $m<-1$, $m=2$.
C. $m\le 2$. **D.** $m\le -1$, $m=2$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(x)=m$ có đúng hai nghiệm khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm phân biệt.

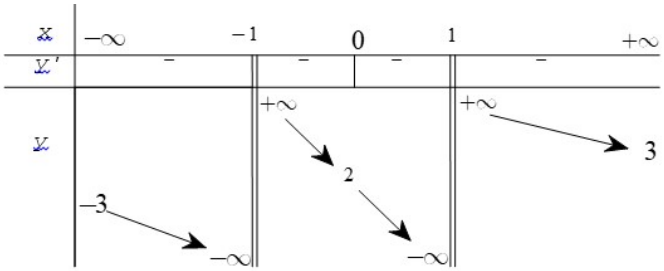
A. $-1\le m\le 2$. **B.** $-1<m<2$. **C.** $-1<m\le 2$. **D.** $m\le 2$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-1<m<2$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$, xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng $y=2m+1$ cắt đồ thị hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt.

A. $m\le -2$. **B.** $m\ge 1$.

C. $m\le -2$, $m\ge 1$. **D.** $m<-2$, $m>1$.

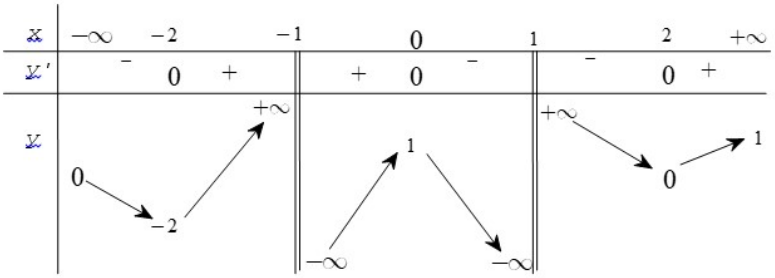
Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đường thẳng $y=2m+1$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}2m+1>3\\2m+1<-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>1\\m<-2\end{array}\right.$.

Nếu yêu cầu bài toán có duy nhất một nghiệm thực $\Leftrightarrow -3\le 2m+1\le 3$.

Câu 6: Giả sử tồn tại hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có bốn nghiệm.

A. $-2\le m\le 0$. **B.** $-2<m<0$, $m=1$. **C.** $-2<m\le 0$. **D.** $-2<m<0$.

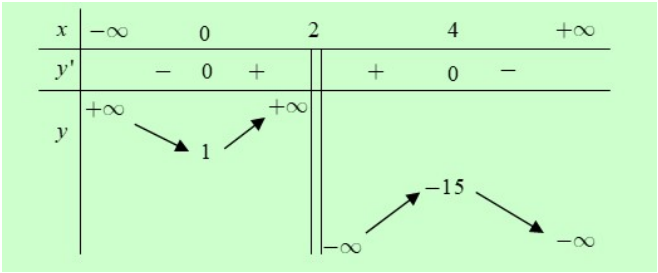
Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(x)=m$ có bốn nghiệm khi và chỉ khi $-2<m\le 0$.

Nhận xét. Học sinh rất dễ sai lầm vì cho rằng $-2<m<0$. Nếu bài toán yêu cầu có hai nghiệm $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>1\\m<-2\end{array}\right.$, có ba nghiệm $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-2\end{array}\right.$, có năm nghiệm $0<m<1$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)+m=0$ có nhiều nghiệm thực nhất.

A. $m\in(-\infty;-1]\cup[15;+\infty)$. **B.** $m\in(-\infty;-15)\cup(1;+\infty)$.

C. $m\in(-\infty;-1)\cup(15;+\infty)$. **D.** $m\in(-\infty;-15]\cup[1;+\infty)$.

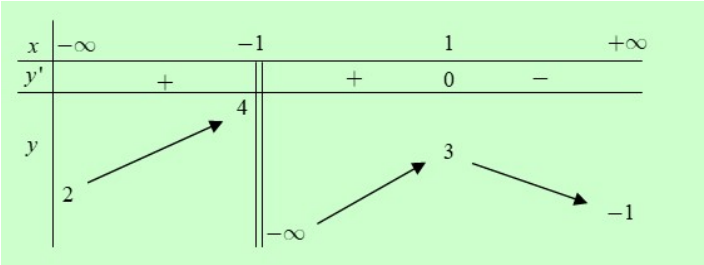
Lời giải

Chọn C

Phương trình $f(x)+m=0 \longleftrightarrow f(x)=-m$. Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-m$ (cùng phương với trục hoành).

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy để phương trình đã cho có nhiều nghiệm thực nhất khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} -m>1 \\ -m<-15 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>15 \end{array}\right.$.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:



Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. Phương trình $f(x)=m$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ 3<m<4 \end{array}\right.$.

B. Hàm số đạt cực đại tại $\left\{\begin{array}{l} x^2=3 \ (x<0) \Leftrightarrow x=-\sqrt{3} \\ x^2=1 \ (x<0) \Leftrightarrow x=-1 \end{array}\right.$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

D. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba đường tiệm cận.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên nhận thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;1)$. Vì vậy khẳng đinh C là sai.

Dạng 3: Tương giao của hai đồ thị

1. Phương pháp

Xét hai đồ thị $(C): y=f(x)$ và $(D): y=g(x)$.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa (C) và (D) là: $f(x)=g(x)$. (1)

Số điểm chung giữa (C) và (D) đúng bằng số nghiệm của phương trình (1).

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho đường thẳng $y=mx+1$ cắt đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x-3}{x+1}=mx+1\Leftrightarrow mx^2+mx+4=0\,(1)\ (x\neq -1)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=m^2-16m>0\\ m(-1)^2+m(-1)+4\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in(-\infty;0)\cup(16;+\infty)\\ 4\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-\infty;0)\cup(16;+\infty)$$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị (C) và đường thẳng d qua $M(1;0)$ và có hệ số góc m. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_3^2=5$.

Lời giải:

Phương trình đường thẳng d qua $M(1;0)$ và có hệ số góc m là $y=m(x-1)$

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3x^2+2=m(x-1)$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2-2x-2-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x-2-m=0\end{array}\right.$$

Hai đồ thị cắt nhau tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow(2)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1 .

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ 1-2-2-m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3+m>0\\ -3-m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m>-3$$

Gọi $x_1,x_2,x_3=1$ là 3 nghiệm của phương trình (1).

Theo đinh lí Viet ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2\\ x_1x_2=-2-m\end{cases}$

Ta có $x_1^2+x_2^2+x_3^2=5\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2+1=5\Leftrightarrow 4-2(-2-m)=4\Leftrightarrow m=-2$

Vậy $m=-2$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Biết rằng đường thẳng $y=-2x+2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+x+2$ tại điểm duy nhất có tọa độ $\left(x_0;y_0\right)$. Tìm y_0.

A. $y_0=4$. **B.** $y_0=0$. **C.** $y_0=2$. **D.** $y_0=-1$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm: $-2x+2=x^3+x+2$

$\Leftrightarrow x^3+3x=0\Leftrightarrow x=0\longrightarrow y=2$.

Câu 2: Cho hàm số $y=(x-2)(x^2+1)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. (C) không cắt trục hoành. **B.** (C) cắt trục hoành tại một điểm.

C. (C) cắt trục hoành tại hai điểm. **D.** (C) cắt trục hoành tại ba điểm.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) với trục hoành:

$$(x-2)(x^2+1)=0\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2.$$

Vậy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại một điểm.

Câu 3: Biết rằng đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2x-1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^2-3x+1$ tại hai điểm phân biệt A và B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $AB=3$. **B.** $AB=2\sqrt{2}$. **C.** $AB=2$. **D.** $AB=1$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3x^2+2x-1=x^2-3x+1$

$$\Leftrightarrow x^3-4x^2+5x-2=0\Leftrightarrow (x-1)^2(x-2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\to y=-1\\ x=2\to y=-1\end{array}\right.$$

Suy ra $A(1;-1)$, $B(2;-1)\longrightarrow AB=1$.

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=(x-1)(x^2+mx+m)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

A. $m\in(4;+\infty)$. **B.** $m\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

C. $m\in(0;4)$. **D.** $m\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup(4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$(x-1)(x^2+mx+m)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2+mx+m=0\ \ (1)\end{array}\right.$$

Ycbt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1^2+m.1+m\neq 0 \\ \Delta = m^2-4m>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1\neq 0 \\ m(m-4)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m>4 \\ m<0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>4 \\ \begin{cases} m\neq -\dfrac{1}{2} \\ m<0 \end{cases} \end{array}\right.$.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$ cắt đường thẳng $y=m$ tại ba điểm phân biệt.

A. $m\in(-4;0)$. **B.** $m\in(0;+\infty)$.

C. $m\in(-\infty;-4)$. **D.** $m\in(-\infty;-4)\cup(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm bậc ba $y=x^3-3x^2$, có $y'=3x^2-6x \longrightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \longrightarrow y_{CD}=0 \\ x=2 \longrightarrow y_{CT}=-4 \end{array}\right.$.

Dựa vào dáng điệu của đồ thị hàm bậc ba, ta có ycbt $\Leftrightarrow y_{CT}<m<y_{CD} \Leftrightarrow -4<m<0$.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3-3x^2+3m-1=0$ có ba nghiệm phân biệt trong đó có đúng hai nghiệm lớn hơn 1.

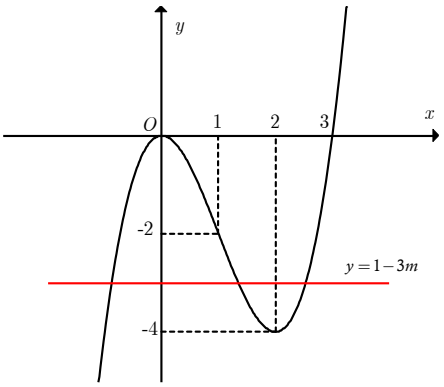
A. $\dfrac{1}{3}<m<\dfrac{5}{3}$. **B.** $1<m<\dfrac{5}{3}$. **C.** $2<m<\dfrac{7}{3}$. **D.** $-2<m<\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $\Leftrightarrow x^3-3x^2=1-3m$.

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$, ta được



Dựa vào đồ thị, ta có ycbt $\Leftrightarrow -4<1-3m<-2 \Leftrightarrow 1<m<\dfrac{5}{3}$.

Chú ý: Sai lầm hay gặp là cho $-4<1-3m<0$.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3-3x^2=2m+1$ có đúng hai nghiệm phân biệt:

A. $m=-\frac{1}{2}$, $m=-1$.

B. $m=-\frac{1}{2}$, $m=-\frac{5}{2}$.

C. $m=\frac{1}{2}$, $m=\frac{5}{2}$.

D. $m=1$, $m=-\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x)=2x^3-3x^2$, có

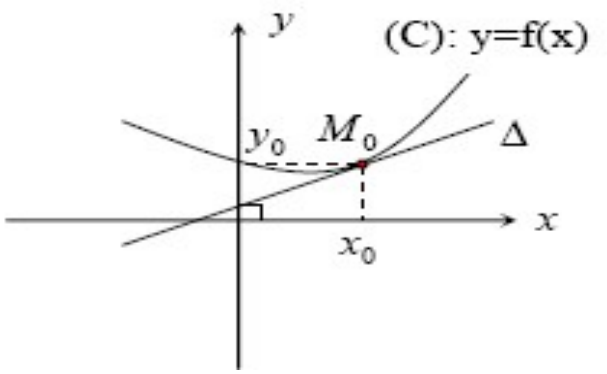
$$f'(x)=6x^2-6x\longrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\longrightarrow y_{CD}=0\\x=1\longrightarrow y_{CT}=-1\end{array}\right.$$

Dựa vào dạng đặc trưng của đồ thị hàm bậc ba, phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt khi $\left[\begin{array}{l}2m+1=y_{CD}\\2m+1=y_{CT}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m+1=0\\2m+1=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-\frac{1}{2}\\m=-1\end{array}\right.$.

Dạng 4: Phương trình tiếp tuyến tại điểm

1. Phương pháp:

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm



Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0;y_0)$ có dạng

$\Delta: y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

- Điểm $M_0(x_0;y_0)$ được gọi là tiếp điểm.
- x_0 là hoành độ tiếp điểm và y_0 là tung độ tiếp điểm.
- Điểm $M\in Ox$ thì tọa độ của M là $M(x;0)$; điểm $M\in Oy$ thì tọa độ của M là $M(0;y)$.

Chú ý

- *Nếu cho x_0 thì tìm $y_0 = f(x_0)$.*

  Nếu cho y_0 thì tìm x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = y_0$.

- *Tính $y' = f'(x)$. Suy ra $y'(x_0) = f'(x_0)$.*

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = \frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2}(C)$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) tại điểm có hoành độ $=1$.

Lời giải

Gọi $M_0(x_0; y_0) \in (C)$. Phương trình tiếp tuyến tại M_0 có dạng: $y = k(x - x_0) + y_0 \ (*)$.

Đạo hàm $y'(x_0) = 2x_0^3 - 6x_0$

Theo giả thiết $x_0 = 1 \Rightarrow y(1) = 0$ và $k = y'(1) = -4$ thay vào $(*)$ ta được phương trình tiếp tuyến là

$y = -4(x-1) = -4x + 4$

Ví dụ 2: Cho hàm số: $y = f(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x(C)$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm trên (C) có hoành độ x_0, với $f''(x_0) = 6$.

Lời giải

Gọi $M_0(x_0; y_0) \in (C)$

Phương trình tiếp tuyến tại M_0 có dạng: $y = k(x - x_0) + y_0 \ (*)$

Tính $f'(x_0) = -x_0^2 + 4x_0 - 3; f''(x_0) = -2x_0 + 4$

Theo giả thiết $f''(x_0) = 6 \Leftrightarrow -2x_0 + 4 = 6 \Leftrightarrow x_0 = -1 \Rightarrow y_0(-1) = \frac{16}{3}$

$k = f'(x_0) = f'(-1) = -(-1)^2 + 4(-1) - 3 = -8$

Thay vào $(*)$ ta được phương trình tiếp tuyến cần tìm là

$y - \frac{16}{3} = -8(x+1) \Leftrightarrow y = -8x - \frac{8}{3}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng K và có đồ thị là đường cong (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(a; f(a))$, $(a \in K)$.

A. $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. **B.** $y = f'(a)(x+a) + f(a)$.

C. $y=f(a)(x-a)+f'(a)$. **D.** $y=f'(a)(x-a)-f(a)$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(a;f(a))$ có dạng

$y-f(a)=f'(a)(x-a)\Leftrightarrow y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

Câu 2: hàm số $y=-x^3+3x-2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

A. $y=-3x-2$. **B.** $y=3x-2$. **C.** $y=2x+1$. **D.** $y=-2x+1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $(C)\cap Oy=A(0;-2)$; $y'(0)=3$.

Tiếp tuyến tại $A(0;-2)$ có dạng: $y=3(x-0)-2=3x-2$.

Câu 3: Gọi M là giao điểm của trục tung với đồ thị hàm số $(C):y=\sqrt{x^2+x+1}$. Tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình là

A. $y=\frac{1}{2}x+1$. **B.** $y=-\frac{1}{2}x+1$. **C.** $y=-x+1$. **D.** $y=x+1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$.

$x_0=0\Rightarrow\begin{cases}y'(0)=\frac{1}{2}\\ y_0=1\end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(0;1)$ có dạng

$y=\frac{1}{2}(x-0)+1\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+1$.

Câu 4. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2+x+2019$ tại điểm có hoành độ $x_0=-1$ là

A. $y=8x+2016$. **B.** $y=8x+2007$. **C.** $y=8x+2014$. **D.** $y=8x+2023$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Với $x_0=-1\Rightarrow y_0=2015$. Ta có $y'=3x^2-4x+1\Rightarrow y'(-1)=8$.

Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0=-1$ có phương trình $y=8(x+1)+2015$ hay $y=8x+2023$.

Câu 5. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=x(4-x)^2$ tại điểm $M_0(1;9)$ là

A. $y=3x+12$. **B.** $y=3x+8$. **C.** $y=3x-3$. **D.** $y=3x+6$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $y=x(4-x)^2=x^3-8x^2+16x\Rightarrow y'=3x^2-16x+16$ nên hệ số góc của tiếp tuyến cần tìm là: $y'(1)=3$.

Tiếp tuyến tại điểm $M_0(1;4)$ có phương trình $y=3(x-1)+9$ hay $y=3x+6$.

Câu 6. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=x^4+2x^2-1$ tại điểm có hoành độ $x_0=-2$ là

A. $y=-40x-80$. **B.** $y=-40x-57$. **C.** $y=-40x+103$. **D.** $y=-40x+25$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Với $x_0=-2\Rightarrow y_0=23$. Ta có $y'=4x^3+4x\Rightarrow y'(-2)=-40$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0=-2$ là $y=-40(x+2)+23$ hay $y=-40x-57$.

Câu 7. Cho hàm số $y=x^4+2x^2+3$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(1;6)$ là

A. $y=8x-2$. **B.** $y=8x+5$. **C.** $y=8x-8$. **D.** $y=8x+14$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $y'=4x^3+4x$

Với $x_0=1\Rightarrow y'(x_0)=y'(1)=8$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(1;6)$ là $y=8(x-1)+6$ hay $y=8x-2$.

Câu 8. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 4 là

A. $y=3x-5$. **B.** $y=-3x+13$. **C.** $y=3x+13$. **D.** $y=-3x+5$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Điều kiện $x\neq 2$. Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình

$\frac{x+1}{x-2}=4 \Rightarrow x+1=4(x-2) \Leftrightarrow x=3$ (thỏa mãn)

Ta có: $y'=\frac{-3}{(x-2)^2} \Rightarrow y'(3)=-3$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm $y=-3(x-3)+4$ hay $y=-3x+13$.

Dạng 5 : Tiếp tuyến có hệ số góc

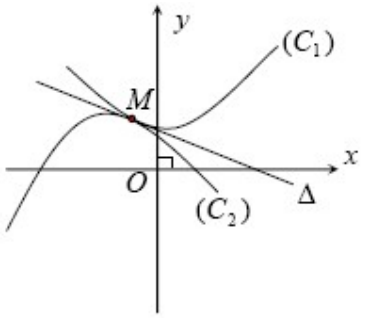
1. Phương pháp: *Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C): y = f(x), biết Δ có hệ số góc k cho trước.*

Cách 1:Tìm toạ độ tiếp điểm.

- Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Tính $f'(x_0)$.
- có hệ số góc k $\Rightarrow$ $f'(x_0) = k$ (*)
- Giải phương trình (*), tìm được x_0 và tính $y_0 = f(x_0)$.

Lúc đó phương trình tiếp tuyến là $\Delta: y-f(x_0)=k(x-x_0)$.

Cách 2: *Dùng điều kiện tiếp xúc.*

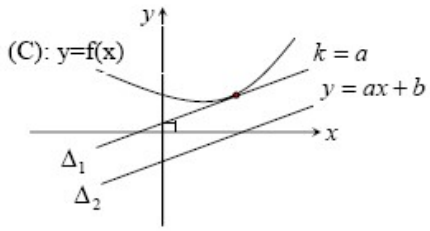


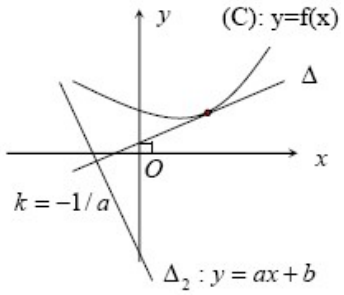
- Phương trình đường thẳng Δ có dạng: y = kx + m.
- Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x)=kx+m \\ f'(x)=k \end{cases} \quad (*)$$

- Giải hệ (*), tìm được m. Từ đó viết phương trình của Δ

Chú ý: Hệ số góc k của tiếp tuyến Δ có thể được cho gián tiếp như sau:





- tạo với chiều dương trục hoành góc α thì $k = \tan\alpha$
- Δ song song với đường thẳng d: $y = ax + b$ thì $k = a$
- Δ vuông góc với đường thẳng d: $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ thì $k = -\frac{1}{a}$
- Δ tạo với đường thẳng d: $y = ax + b$ một góc α thì ta sử dụng công thức góc của hai đường thẳng hoặc $\left|\frac{k-a}{1+ka}\right| = \tan\alpha$

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ (C) có hệ số góc bằng 2 .

Giải

Gọi $M_0(x_0; y_0) \in (C)$. Phương trình tiếp tuyến tại M_0 có dạng: $y = k(x - x_0) + y_0 \ (*)$.

Đạo hàm $y'(x_0) = \frac{2}{(x_0+1)^2}$

Theo giả thiết:

$$k = y'(x_0) = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{(x_0+1)^2} = 2 \Leftrightarrow (x_0^2 + 2x_0 + 1) = 1 \Leftrightarrow x_0^2 + 2x_0 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{array}\right.$$

Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1$ và $k = 2$. Thay vào $(*)$ ta được phương trình tiếp tuyến:

$y = 2(x-0) - 1 = 2x - 1$

Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 3$ và $k = 2$. Thay vào $(*)$ ta được phương trình tiếp tuyến:

$y = 2(x+2) + 3 = 2x + 7$

Ví dụ 2: Cho hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + 3x$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng có phương trình $y = 3x$.

Giải

Gọi $M_0(x_0; y_0) \in (C)$. Phương trìnhtiếp tuyến tại M_0 có dạng: $y = k(x - x_0) + y_0 \ (*)$.

Tiếp tuyến song song với $\Delta : y = 3x$ nên có hệ số góc $k = f'(x_0) = 3$

Do đó: $3x_0^2 - 6x_0 + 3 = 3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{array}\right.$

Với $x_0 = 0$ thì $y_0 = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 = 0$

Và $f'(x_0) = 3$ nên pttt là: $y - 0 = 3(x - 0) \Leftrightarrow y = 3x$ (loại vì trùng với Δ).

Với $x_0 = 2$ thì $y_0 = 2^3 - 3.2^2 + 3.2 = 2$ và $f'(x_0) = 3$ nên phương trìnhtiếp tuyến là:

$y - 2 = 3(x - 2) \Leftrightarrow y = 3x - 4$

Vậy có một tiếp tuyến thỏa mãn đề bài là: $y = 3x - 4$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = -x^4 - x^2 + 6$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C). Biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{6}x - 1$.

Giải

Tiếp tuyến Δ vuông góc $d: y = \frac{1}{6}x - 1 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $\Delta: y = -6x + b$.

Δ tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow$ hệ số có nghiệm: $\begin{cases} -x^4 - x^2 + 6 = -6x + b \\ -4x^3 - 2x = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ b = 10 \end{cases}$

Vậy Δ vuông góc d: $y = \frac{1}{6}x - 1 \Rightarrow$ Phương trình $\Delta: y = -6x + b$

Δ tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow$ hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} -x^4 - x^2 + 6 = -6x + b \\ -4x^3 - 2x = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ b = 10 \end{cases}$.

Vậy $\Delta: y = -6x + 10$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + 2$ tại điểm $A(-1; 1)$ vuông góc với đường thẳng $x - 2y + 3 = 0$. Tính $a^2 - b^2$.

A. $a^2 - b^2 = 10$. **B.** $a^2 - b^2 = 13$. **C.** $a^2 - b^2 = -2$. **D.** $a^2 - b^2 = -5$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$.

Đường thẳng $x - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow -2y = -x - 3 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ có hệ số góc $k = \frac{1}{2}$.

Suy ra $f'(-1) = -2 \Leftrightarrow -2(2a + b) = -2 \Leftrightarrow 2a + b = 1$.

$A(-1; 1)$ thuộc đồ thị hàm số nên $a + b + 2 = 1 \Leftrightarrow a + b = -1$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 = -5$.

Câu 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 5$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số có hệ số góc nhỏ nhất có phương trình là

A. $y = 3x + 9$. **B.** $y = 3x + 3$. **C.** $y = 3x + 12$. **D.** $y = 3x + 6$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + 6 = 3(x-1)^2 + 3 \geq 3$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 1 \Rightarrow y = 9$.

Do đó, tiếp tuyến của đồ thị có hệ số góc nhỏ nhất bằng 3 và là tiếp tuyến tại điểm $M(1;9)$.

Phương trình tiếp tuyến là: $y = 3(x-1) + 9 \Leftrightarrow y = 3x + 6$.

Câu 3: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ song song với đường thẳng $y = 3x + 1$ có phương trình là

A. $y = 3x - \frac{29}{3}$.

B. $y = 3x - \frac{29}{3}$, $y = 3x + 1$.

C. $y = 3x + \frac{29}{3}$.

D. $y = 3x - 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 3x + 1$ nên có hệ số góc $k = 3$.

Ta có $y' = x^2 - 4x + 3$ nên có phương trình $x^2 - 4x + 3 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

+ Với $x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(0;1)$ nên phương trình tiếp tuyến là $y = 3x + 1$ (loại).

+ Với $x = 4 \Rightarrow y = \frac{7}{3} \Rightarrow B\left(4; \frac{7}{3}\right)$ nên có phương trình tiếp tuyến là $y = 3x - \frac{29}{3}$ (thỏa mãn).

Câu 4: Cho hàm số $y = -\frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x - 2$, gọi đồ thị của hàm số là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) có hệ số góc lớn nhất.

A. $y = \frac{9}{2}x - \frac{25}{12}$.

B. $y = 5x - \frac{25}{12}$.

C. $y = \frac{9}{4}x - \frac{25}{12}$.

D. $y = \frac{7}{2}x + \frac{5}{12}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi (d) là tiếp tuyến cần tìm phương trình và x_0 là hoành độ tiếp điểm của (d) với (C) thì hệ số góc của $(d): k = y'(x_0) = -2x_0^2 + 2x_0 + 4 = \frac{9}{2} - \left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{2}$; $k = \frac{9}{2} \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}$.

Vậy $\max k = \frac{9}{2}$ đạt được khi và chỉ khi $x_0 = \frac{1}{2}$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến $(d): y = \frac{9}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}x - \frac{25}{12}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . " Tránh mua các trang và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Câu 5: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2}{2-x}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y=\dfrac{4}{3}x+1$.

A. $(d): y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{7}{2}, y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}$.

B. $(d): y=-\dfrac{3}{4}x, y=-\dfrac{3}{4}x-1$.

C. $(d): y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{9}{2}, y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}$.

D. $(d): y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{9}{2}, y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Tiếp tuyến (d) của (C) vuông góc đường thẳng $y=\dfrac{4}{3}x+1$ suy ra phương trình (d) có dạng: $y=-\dfrac{3}{4}x+m$.

(d) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ $\begin{cases}\dfrac{x_0^2}{2-x_0}=-\dfrac{3}{4}x_0+m\\ \dfrac{-x_0^2+4x_0}{(2-x_0)^2}=-\dfrac{3}{4}\end{cases}$ có nghiệm x_0

$\Rightarrow \dfrac{-x_0^2+4x_0}{(2-x_0)^2}=-\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow x_0=6\vee x_0=-2\Rightarrow (d): y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{9}{2}, y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}$.

Câu 6: Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y=2x^3-3(m+1)x^2+mx+m+1$ và (d) là tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ $x=-1$. Tìm m để (d) đi qua điểm $A(0;8)$.

A. $m=0$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=6x^2-6(m+1)x+m$, suy ra phương trình tiếp tuyến (d) là:

$y=y'(-1)(x+1)+y(-1)=(12+7m)(x+1)-3m-4\Leftrightarrow y=(12+7m)x+4m+8$.

$A(0;8)\in(d)\Leftrightarrow 8=4m+8\Leftrightarrow m=0$.

Câu 7: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: 3x-4y+1=0$.

A. $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{4}; y=\dfrac{3}{4}x+1$.

B. $y=\dfrac{3}{4}x-3; y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

C. $y=\dfrac{3}{4}x-9; y=\dfrac{3}{4}x+7$.

D. $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{4}; y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến d với (C)

$d: y=\dfrac{x_0^2-2x_0}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0^2-x_0+1}{x_0-1}$

Vì d song song với đường thẳng $\Delta: y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{4}$, nên ta có:

$\dfrac{x_0^2-2x_0}{(x_0-1)^2}=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow x_0^2-2x_0-3=0\Leftrightarrow x_0=-1, x_0=3$.

- $x_0=-1$ phương trình tiếp tuyến: $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{4}$.
- $x_0=3\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến: $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

Câu 8: Phương trình các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2+1$ tại các điểm có tung độ bằng 5 là

A. $y=20x-35$. **B.** $y=-20x-35$ và $y=20x+35$.

C. $y=20x-35$ và $y=-20x-35$. **D.** $y=-20x+35$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=5\Leftrightarrow x^4-3x^2-4=0\Leftrightarrow x=\pm 2\Rightarrow \left[\begin{array}{l} f'(-2)=-20 \\ f'(2)=20 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là

☑ $y=-20(x+2)+5=-20x-35$,

☑ $y=20(x-2)+5=20x-35$.

Câu 9: Có bao nhiêu điểm thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ thỏa mãn tiếp tuyến với đồ thị có hệ số góc bằng 2018?

A. 1. **B.** 0. **C.** Vô số. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

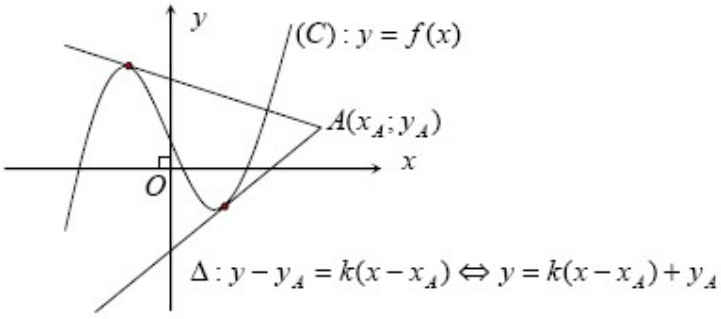
$y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}<0, \forall x\neq 1$.

Hệ số góc tiếp tuyến tại điểm x_0 trên đồ thị bằng $y'(x_0)=2018 \Leftrightarrow \frac{-1}{(x-1)^2}=2018$ vô nghiệm.

Vậy không có tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số có hệ số góc bằng 2018.

Dạng 6 : Phương trình tiếp tuyến đi qua

1. Phương pháp: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của $(C): y=f(x)$, biết Δ đi qua điểm $A(x_A;y_A)$.



Cách 1: Tìm toạ độ tiếp điểm.

- Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó: $y_0 = f(x_0)$, $y'_0 = f'(x_0)$.
- Phương trình tiếp tuyến Δ: $y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$
- Δ đi qua $A(x_A;y_A)$ nên: $y_A - y_0 = f'(x_0).(x_A - x_0)$ (2)
- Giải phương trình (2), tìm được x_0. Từ đó viết phương trình của Δ.

Cách 2: Dùng điều kiện tiếp xúc.

- Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(x_A;y_A)$ và có hệ số góc k:

$$y-y_A=k(x-x_A)$$

- Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x)=k(x-x_A)+y_A \\ f'(x)=k \end{cases} \quad (*)$$

- Giải hệ (*), tìm được x (suy ra k). Từ đó viết phương trình tiếp tuyến Δ.

2. Ví dụ:

Ví dụ 1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C):

1. $y=\frac{x^3}{3}+x^2+3x-1$ đi qua điểm $A\left(0;\frac{1}{3}\right)$

2. $y=-x^4+4x^2-3$ đi qua điểm cực tiểu của đồ thị.

Lời giải.

1. Ta có: $y' = x^2 + 2x + 3$

Phương trình tiếp tuyến d của (C) có dạng : $y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$

(trong đó x_0 là hoành độ tiếp điểm của d với (C))

$$y = (x_0^2 + 2x_0 + 3)(x - x_0) + \frac{x_0^3}{3} + x_0^2 + 3x_0 - 1 = (x_0^2 + 2x_0 + 3)x - \frac{2}{3}x_0^3 - x_0^2 - 1$$

$$A\left(0; \frac{1}{3}\right) \in d \Leftrightarrow \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}x_0^3 - x_0^2 - 1 \Leftrightarrow 2x_0^3 + 3x_0^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -2.$$

Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 3x + \frac{1}{3}$.

2. Điểm cực tiểu của (C) là $A(0;-3)$.

Phương trình tiếp tuyến d của (C) có dạng : $y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$

(trong đó x_0 là hoành độ tiếp điểm của d với (C))

$$y = (-4x_0^3 + 8x_0)(x - x_0) - x_0^4 + 4x_0^2 - 3 = (-4x_0^3 + 8x_0)x + 3x_0^4 - 4x_0^2 - 3$$

$$A(0;-3) \in d \Leftrightarrow -3 = 3x_0^4 - 4x_0^2 - 3 \Leftrightarrow 3x_0^4 - 4x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ hoặc } x_0 = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Với $x_0 = 0$ thì phương trình d: $y = -3$

Với $x_0 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ thì phương trình d: $y = -\frac{16}{3\sqrt{3}}x - \frac{59}{9}$

Với $x_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ thì phương trình d: $y = \frac{16}{3\sqrt{3}}x - \frac{59}{9}$

Vậy, tiếp tuyến cần tìm là: $y = -3, y = -\frac{16}{3\sqrt{3}}x - \frac{59}{9}, y = \frac{16}{3\sqrt{3}}x - \frac{59}{9}$

3. Bài tập trắc nghiêm

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $N(0;1)$.

A. $y = -\frac{33}{4}x + 11$. **B.** $y = -\frac{33}{4}x + 12$. **C.** $y = -\frac{33}{4}x + 1$. **D.** $y = -\frac{33}{4}x + 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi $M\left(x_0; x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 + 1\right)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta có: $y' = 3x^2 + 6x - 6$.

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M có dạng:

$y=(3x_0^2+6x_0-6)(x-x_0)+x_0^3+3x_0^2-6x_0+1$.

Tiếp tuyến đi qua $N(0;1)\Rightarrow 1=(3x_0^2+6x_0-6)(-x_0)+x_0^3+3x_0^2-6x_0+1$

$\Leftrightarrow 2x_0^3+3x_0^2=0\Leftrightarrow x_0=0$ hoặc $x_0=-\dfrac{3}{2}$.

Với $x_0=0$, suy ra phương trình tiếp tuyến: $y=-6x+1$.

Với $x_0=-\dfrac{3}{2}$, suy ra phương trình tiếp tuyến: $y=-\dfrac{33}{4}x+1$.

Câu 2. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1;0)$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi $M\left(x_0;x_0^3-3x_0^2+2\right)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta có $y'=3x^2-6x$.

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M có dạng: $y=\left(3x_0^2-6x_0\right)\left(x-x_0\right)+x_0^3-3x_0^2+2$.

Tiếp tuyến đi qua $A(1;0)\Rightarrow\left(3x_0^2-6x_0\right)\left(1-x_0\right)+x_0^3-3x_0^2+2=0$

$\Leftrightarrow -2x_0^3+6x_0^2-6x_0+2=0\Leftrightarrow x_0=1$. Vậy có duy nhất một tiếp tuyến cần tìm.

Câu 3. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x-2}{x-3}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua điểm $A(4;1)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $y'=\dfrac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$. Gọi $M\left(x_0;\dfrac{{x_0}^2-x_0-2}{x_0-3}\right)$ là tọa độ tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M có dạng: $y=\dfrac{{x_0}^2-6x_0+5}{(x_0-3)^2}\left(x-x_0\right)+\dfrac{{x_0}^2-x_0-2}{x_0-3}$

Tiếp tuyến đi qua $A(4;1)\Rightarrow 1=\dfrac{{x_0}^2-6x_0+5}{(x_0-3)^2}\left(4-x_0\right)+\dfrac{{x_0}^2-x_0-2}{x_0-3}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq 3 \\ 5x_0^2 - 22x_0 + 17 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = \dfrac{17}{5} \end{cases}$. Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm.

Câu 4. Cho hàm số $y = \dfrac{2x}{x+1}$ có đồ thị (C). Biết rằng có hai tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua điểm $A(0;1)$. Tích hệ số góc của hai tiếp tuyến đó bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $y' = \dfrac{2}{(x+1)^2}$. Gọi $M\left(x_0; \dfrac{2x_0}{x_0+1}\right)$ là tọa độ tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M có dạng: $y = \dfrac{2}{(x_0+1)^2}(x - x_0) + \dfrac{2x_0}{x_0+1}$

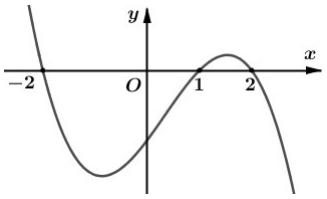
Tiếp tuyến đi qua $A(0;1) \Rightarrow 1 = \dfrac{2}{(x_0+1)^2}(-x_0) + \dfrac{2x_0}{x_0+1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq -1 \\ (x_0+1)^2 = -2x_0 + 2x_0(x_0+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq -1 \\ x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1-\sqrt{2} \\ x_0 = 1+\sqrt{2} \end{cases}$.

Suy ra tích hệ số góc cần tìm là: $y'(1-\sqrt{2}).y'(1+\sqrt{2}) = \dfrac{2}{(1-\sqrt{2}+1)^2} \cdot \dfrac{2}{(1+\sqrt{2}+1)^2} = 1$.

Dạng 7 : Bài tập dành cho học sinh điểm 8+,9+

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên R và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đặt $g(x) = f(|x+m|)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm có hoành độ dương (và 1 điểm có hoành độ âm)

$\longrightarrow f(x)$ có 2 điểm cực trị dương

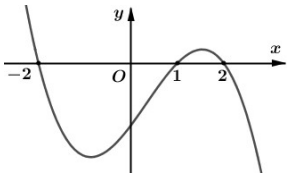
$\longrightarrow f(|x|)$ có 5 điểm cực trị

$\longrightarrow f(|x+m|)$ có 5 điểm cực trị với mọi m (vì tịnh tiến sang trái hay sang phải không ảnh hưởng đến số điểm cực trị của hàm số). Chọn D

Chú ý: Đồ thị hàm số $f(|x+m|)$ có được bằng cách lấy đối xứng trước rồi mới tịnh tiến.

Đồ thị hàm số $f(|x|+m)$ có được bằng cách tịnh tiến trước rồi mới lấy đối xứng.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên R và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đặt $g(x)=f(|x|+m)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có **đúng** 5 điểm cực trị?



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị $f'(x)$ ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\\x=2\end{array}\right.$. Suy ra bảng biến thiên của $f(x)$

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f		↗	↘		↗		↘

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ hàm số $f(x+m)$ có 2 điểm cực trị dương (vì khi đó lấy đối xứng qua Oy ta được đồ thị hàm số $f(|x|+m)$ có đúng 5 điểm cực trị).

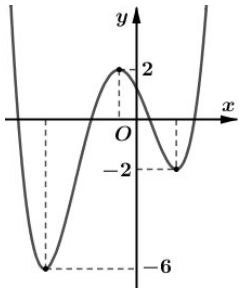
Từ bảng biến thiên của $f(x)$, suy ra $f(x+m)$ luôn có 2 điểm cực trị dương $\Leftrightarrow$ tịnh tiến $f(x)$ (sang trái hoặc sang phải) phải thỏa mãn

Tịnh tiến sang trái nhỏ hơn 1 đơn vị $\longrightarrow m<1$.

Tịnh tiến sang phải không vượt quá 2 đơn vị $\longrightarrow m\geq -2$.

Suy ra $-2\leq m<1\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\{-2;-1;0\}$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x)=\left|f(x+2018)+m^2\right|$ có 5 điểm cực trị khi

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm $f(x)$ đã cho có 3 điểm cực trị nên $f(x+2018)+m^2$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (do phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x+2018)+m^2$ với trục hoành là 2.

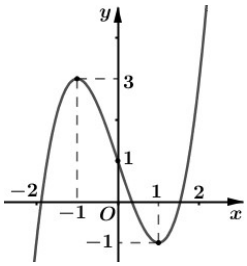
Để số giao điểm của đồ thị $f(x+2018)+m^2$ với trục hoành là 2, ta cần

Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới tối thiểu 2 đơn vị $\longrightarrow m^2\le -2$: vô lý

Hoặc tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên tối thiểu 2 đơn vị nhưng phải nhỏ hơn 6 đơn vị

$$\longrightarrow 2\le m^2<6\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\sqrt{2}\le m<\sqrt{6}\\ -\sqrt{6}<m\le -\sqrt{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-2;2\}.$$

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



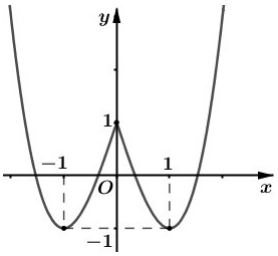
Với $m<-1$ thì hàm số $g(x)=f\left(\left|x+m\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

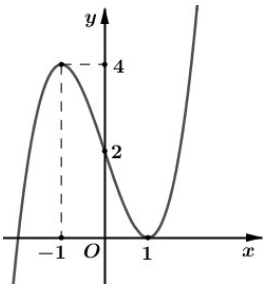
Chọn C

Đồ thị hàm số $f(|x+m|)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ bằng cách lấy đối xứng trước rồi mới tịnh tiến. Lấy đối xứng trước ta được đồ thị hàm số $f(|x|)$ như hình bên dưới



Dựa vào đồ thị hàm số $f(|x|)$ ta thấy có 3 điểm cực trị $\longrightarrow f(|x+m|)$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (vì phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị). **Chọn C**

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x|+m)$ có 5 điểm cực trị.

A. $m<-1$. **B.** $m>-1$. **C.** $m>1$. **D.** $m<1$.

Lời giải

Chọn A

Nhận xét: Hàm $g(x)=f(|x|+m)$ là hàm số chẵn nên đồ thị đối xứng qua trục Oy $\longrightarrow x=0$ là một điểm cực trị của hàm số.

Ta có $g'(x)=\dfrac{x}{|x|}.f'(|x|+m)$ với $x=0$.

$$\longrightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow f'(|x|+m)=0\xleftrightarrow{\text{theo đồ thị } f(x)}\begin{bmatrix}|x|+m=1\\|x|+m=-1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}|x|=1-m\\|x|=-1-m\end{bmatrix}.\ (*)$$

Để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ (*) có 4 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1-m>0\\-1-m>0\\1-m\neq-1-m\end{cases}\Leftrightarrow m<-1.$$

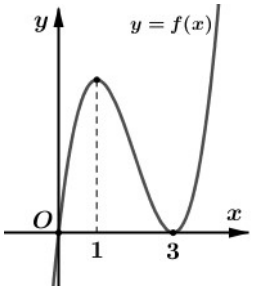
Cách 2.

Đồ thị hàm số $f(|x|+m)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ bằng cách tịnh tiến trước rồi mới lấy đối xứng.

Để hàm số $f(|x|+m)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ hàm số $f(x+m)$ có 2 điểm cực trị dương. Do đó ta phải tịnh tiến điểm cực đại của đồ thị hàm số $f(x)$ qua phía bên phải trục tung nghĩa là tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)$ sang phải lớn hơn 1 đơn vị $\longrightarrow m<-1$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . " Tránh mua các trang và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+f(x)+m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $m>\frac{1}{4}$. **B.** $m\geq\frac{1}{4}$. **C.** $m<1$. **D.** $m\leq 1$.

Lời giải

Chọn B

Xét $g(x)=f^2(x)+f(x)+m\longrightarrow g'(x)=f'(x)\left[2f(x)+1\right]$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\2f(x)=-1\end{array}\right.\xleftrightarrow{\text{theo đồ thị } f(x)}\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\\x=a\ (a<0)\end{array}\right.$. Ta tính được

$$\begin{cases}g(1)=f^2(1)+f(1)+m>m\\g(3)=m\\g(a)=m-\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		a		1		3		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$g(a)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	m	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Suy ra đồ thị hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+f(x)+m\right|=\left|\left[f(x)+\frac{1}{2}\right]^2+m-\frac{1}{4}\right|$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $g(x)$ nằm hoàn toàn phía trên trục Ox (kể cả tiếp xúc)

$\longrightarrow m\geq\frac{1}{4}$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=x-\sqrt{x^2+1}$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Gọi Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0=\frac{1}{2}$. Giả sử Δ cắt Ox tại điểm A và cắt Oy tại điểm B. Khi đó diện tích của tam giác OAB bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $t=x+\sqrt{x^2+1}$ suy ra $t>0$ (vì $\sqrt{x^2+1}>|x|$ với mọi x và $|x|+x\geq 0$ với mọi x).

Ta có $\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=-1$ suy ra $x-\sqrt{x^2+1}=\frac{-1}{t}$.

Vậy $f(t)=\frac{-1}{t}$ với $t>0$ hay $f(x)=\frac{-1}{x}$ với $x>0$.

Có $f'(x)=\frac{1}{x^2}\Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right)=4$ suy ra tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ

$x_0=\frac{1}{2}$ là đường thẳng Δ có phương trình: $y=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=4x-4$.

Khi đó Δ cắt Ox tại điểm $A(1;0)$ và cắt Oy tại điểm $B(0;-4)$ nên diện tích của ΔOAB là

$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}.OA.OB=\frac{1}{2}|1|.|-4|=2$.

Câu 8. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$, biết $f^2(1+2x)=x-f^3(1-x)$ là đường thẳng nào sau đây?

A. $3x-7y+6=0$. **B.** $x-7y-6=0$.

C. $x+7y+6=0$. **D.** $3x+7y+6=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $f^2(1+2x)=x-f^3(1-x)\Leftrightarrow f^2(2x+1)+f^3(1-x)=x$.

Đạo hàm hai vế $f^2(2x+1)+f^3(1-x)=x$, ta có

$$4.f(2x+1).f'(2x+1)-3f^2(1-x).f'(1-x)=1.$$

Cho $x=0$ ta được $4f(1).f'(1)-3.f^2(1).f'(1)=1\Leftrightarrow f(1).f'(1).\left[4-3f(1)\right]=1.\ (1)$

Từ $f^2(2x+1)+f^3(1-x)=x$, cho $x=0$ ta có

$$f^2(1)+f^3(1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1)=0 \\ f(1)=-1 \end{array}\right.$$

Nếu $f(1)=0$ thì mâu thuẫn với (1), do đó $f(1)=-1$, khi đó

$$(1) \Leftrightarrow -f'(1).(4+3)=1 \Leftrightarrow f'(1)=-\frac{1}{7}.$$

Phương trình tiếp tuyến $y=-\frac{1}{7}(x-1)-1 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{7}x-\frac{6}{7}$ hay $x+7y+6=0$.

Câu 9. Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ đều có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(2-x)-2.f^2(2+3x)+x^2.g(x)+36x=0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại $x_o=2$ là

A. $y=-3x$. **B.** $y=2x-4$. **C.** $y=-x+2$. **D.** $y=x$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$f^3(2-x)-2f^2(2+3x)+x^2.g(x)+36x=0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (1).

Vì (1) đúng $\forall x \in \mathbb{R}$ nên cũng đúng với $x=0 \Rightarrow f^3(2)-2f^2(2)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(2)=0 \\ f(2)=2 \end{array}\right.$.

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta có:

$-3f^2(2-x).f'(2-x)-12f(2+3x).f'(2+3x)+2x.g(x)+x^2.g'(x)+36=0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Cho $x=0 \Rightarrow -3f^2(2).f'(2)-12f(2).f'(2)+36=0$ (2).

Ta thấy $f(2)=0$ không thỏa mãn (2) nên $f(2)=2$, khi đó $f'(2)=1$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại $x_o=2$ là

$y=f'(2)(x-2)+f(2) \Leftrightarrow y=x$.

Câu 10. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Gọi điểm I là giao của hai đường tiệm cận của (C). M là một điểm bất kì trên (C) và tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai tiệm cận tại A, B. Biết chu vi tam giác IAB có giá trị nhỏ nhất bằng $a+\sqrt{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$. Hỏi mệnh đề nào sau đây ***đúng***?

A. $a-b+4=0$. **B.** $2a-b<0$. **C.** $a^2+b^2=100$. **D.** $a+b=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$. Giả sử $M(x_0\,;y_0)\in(C),(x_0\neq 1)$ suy ra tiếp tuyến của (C) tại điểm M có phương trình $y=\dfrac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0-1}{x_0-1}$.

Vì $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-1}{x-1}=+\infty,\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x-1}{x-1}=-\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của (C).

Mà $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-1}{x-1}=2$ nên đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của (C), suy ra $I(1\,;2)$.

Điểm $A\left(1\,;\dfrac{2x_0}{x_0-1}\right)$ là giao điểm của tiệm cận đứng và tiếp tuyến, điểm $B(2x_0-1\,;2)$ là giao điểm của tiệm cận ngang và tiếp tuyến.

Ta có chu vi của tam giác IAB bằng $IA+IB+AB$

$=\dfrac{2}{|x_0-1|}+2|x_0-1|+\sqrt{4(x_0-1)^2+\dfrac{4}{(x_0-1)^2}}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $IA+IB+AB\geq 2\sqrt{4}+\sqrt{4.2}=4+\sqrt{8}$.

Đẳng thức xảy ra khi $|x_0-1|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=2\end{array}\right.$

Vậy chu vi tam giác IAB đạt giá trị nhỏ nhất bằng $4+\sqrt{8}$ khi $M(0\,;1)$ hoặc $M(2\,;3)$.

Suy ra $a=4,b=8$ nên $a-b+4=0$.

BÀI 1. LŨY THỪA

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. Khái niệm lũy thừa

1. Lũy thừa với số mũ nguyên

Cho n là một số nguyên dương, a là một số thực tùy ý. **Lũy thừa** bậc n của a là tích của n thừa số a.

$$a^n = \underbrace{a.a...a}_{n \text{ thừa số}};\ a^1 = a$$

Trong biểu thức a^n, a được gọi là **cơ số**, số nguyên n là **số mũ**

Với $a \neq 0$, $n = 0$ hoặc n là một số nguyên âm, lũy thừa bậc n của số a là số a^n xác định bởi: $a^0 = 1;\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Chú ý:

- Kí hiệu $0^0, 0^n$ (n nguyên âm) không có nghĩa.
- Với $a \neq 0$ và n nguyên, ta có $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

2. Phương trình $x^n = b$

a) Trường hợp n lẻ: Với mọi số thực b, phương trình có nghiệm duy nhất

b) Trường hợp n chẵn

- Với $b < 0$, phương trình vô nghiệm
- Với $b = 0$, phương trình có một nghiệm $x = 0$
- Với $b > 0$, phương trình có hai nghiệm đối nhau

3. Căn bậc n

a)Khái niệm: Với n nguyên dương, căn bậc n của số thực a là số thực b sao cho $b^n = a$.

Ta thừa nhận hai khẳng định sau:

- Khi n là số lẻ, mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n. Căn đó được kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$
- Khi n là số chẵn, mỗi số thực dương a có đúng hai căn bậc n là hai số đối nhau là $\sqrt[n]{a}$ (còn gọi là căn bậc số học của a) và $-\sqrt[n]{a}$.

b) Tính chất căn bậc n: Với $a, b \geq 0, m, n \in N^*, p, q \in Z$ ta có:

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$; $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} (b > 0)$;

$\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p (a > 0)$; $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Nếu $\frac{p}{n} = \frac{q}{m}$ *thì* $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}$ $(a > 0)$; *Đặc biệt* $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & (n\ le) \\ |a|, & (n\ chan) \end{cases}$$

4. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Cho số thực a dương và r là một số hữu tỉ. Giả sử $r = \frac{m}{n}$, trong đó m là một số nguyên, còn n là một số nguyên dương. Khi đó, lũy thừa của a với số mũ r là số a^r xác định bởi $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

4. Lũy thừa với số mũ vô tỉ: (SGK)

II. TÍNH CHẤT CỦA LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

Cho a,b là những số dương; $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$a^{\alpha}.a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$; $\dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}=a^{\alpha-\beta}$; $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta}=a^{\alpha\beta}$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha}=\dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$

Nếu $a>1$ thì $a^{\alpha}>a^{\beta}\Leftrightarrow\alpha>\beta$

Nếu $0<a<1$ thì $a^{\alpha}>a^{\beta}\Leftrightarrow\alpha<\beta$

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Tính, rút gọn và biến đổi biểu thức

Câu 1: Cho a, b là các số thực dương thỏa $a^{2b}=5$. Tính. $K=2a^{6b}-4$.

A. $K=226$. **B.** $K=202$. **C.** $K=246$. **D.** $K=242$.

Lời giải

Chọn C

$K=2a^{6b}-4=2\left(a^{2b}\right)^{3}-4=250-4=246$.

Câu 2: Cho biểu thức $P=\sqrt[4]{x^5}$, với $x>0$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. $P=x^{\frac{4}{5}}$. **B.** $P=x^{9}$. **C.** $P=x^{20}$. **D.** $P=x^{\frac{5}{4}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P=\sqrt[4]{x^5}=x^{\frac{5}{4}}$.

Câu 3: Rút gọn biểu thức $P=x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}$ với $x>0$.

A. $P=x^{2}$. **B.** $P=\sqrt{x}$. **C.** $P=x^{\frac{1}{8}}$. **D.** $P=x^{\frac{2}{9}}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $P=x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}=x^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$.

Câu 4: Cho a là một số dương, biểu thức $a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a}$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là?

A. $a^{\frac{5}{6}}$. **B.** $a^{\frac{7}{6}}$. **C.** $a^{\frac{4}{3}}$. **D.** $a^{\frac{6}{7}}$.

Lời giải

Chọn B

Với $a>0$, ta có $a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a}=a^{\frac{2}{3}}.a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{7}{6}}$.

Câu 5: Viết biểu thức $P=\sqrt[3]{x.\sqrt[4]{x}}$ $(x>0)$ dưới dạng luỹ thừa với số mũ hữu tỷ.

A. $P=x^{\frac{5}{4}}$. **B.** $P=x^{\frac{5}{12}}$. **C.** $P=x^{\frac{1}{7}}$. **D.** $P=x^{\frac{1}{12}}$.

Lời giải

Chọn B

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Ta có $P=\left(x.x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(x^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{5}{12}}$.

Câu 6: Biểu thức $Q=\sqrt{x}.\sqrt[3]{x}.\sqrt[6]{x^5}$ với $(x>0)$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ là

A. $Q=x^{\frac{2}{3}}$. **B.** $Q=x^{\frac{5}{3}}$. **C.** $Q=x^{\frac{5}{2}}$. **D.** $Q=x^{\frac{7}{3}}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $Q=x^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{5}{6}}=x^{\frac{5}{3}}$.

Câu 7: Cho biểu thức $P=\dfrac{a^{\sqrt{7}+1}.a^{2-\sqrt{7}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}$ với $a>0$. Rút gọn biểu thức P được kết quả

A. $P=a^5$. **B.** $P=a^4$. **C.** $P=a^3$. **D.** $P=a$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $P=\dfrac{a^{\sqrt{7}+1}.a^{2-\sqrt{7}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}=\dfrac{a^3}{a^{-2}}=a^5$.

Câu 8: Viết biểu thức $P=\dfrac{a^2a^{\frac{5}{2}}\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[6]{a^5}}$, $(a>0)$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ.

A. $P=a$. **B.** $P=a^5$. **C.** $P=a^4$. **D.** $P=a^2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $P=\dfrac{a^2a^{\frac{5}{2}}\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[6]{a^5}}=\dfrac{a^2a^{\frac{5}{2}}a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{5}{6}}}=a^{2+\frac{5}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{6}}=a^5$.

Câu 9: Cho $x>0$, $y>0$. Viết biểu thức $x^{\frac{4}{5}}.\sqrt[6]{x^5\sqrt{x}}$ về dạng x^m và biểu thức $y^{\frac{4}{5}}:\sqrt[6]{y^5\sqrt{y}}$ về dạng y^n. Tính $m-n$.

A. $\dfrac{11}{6}$. **B.** $-\dfrac{8}{5}$. **C.** $-\dfrac{11}{6}$. **D.** $\dfrac{8}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Với $x>0$, $y>0$, ta có

$$x^{\frac{4}{5}}.\sqrt[6]{x^5\sqrt{x}}=x^{\frac{4}{5}}.\left(x^5.x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{6}}=x^{\frac{4}{5}}.x^{\frac{5}{6}}.x^{\frac{1}{12}}=x^{\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{1}{12}}\Rightarrow m=\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{1}{12}=\frac{103}{60}.$$

$y^{\frac{4}{5}}:\sqrt[6]{y^5\sqrt{y}}=\dfrac{y^{\frac{4}{5}}}{y^{\frac{5}{6}}.y^{\frac{1}{12}}}=y^{\frac{4}{5}-\frac{5}{6}-\frac{1}{12}}\Rightarrow n=\dfrac{4}{5}-\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{-7}{60}.$

Do đó $m-n=\dfrac{11}{6}$.

Câu 10: Cho số thực dương $a>0$ và khác 1. Hãy rút gọn biểu thức $P=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{5}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{7}{12}}-a^{\frac{19}{12}}\right)}$.

A. $P=1+a$. **B.** $P=1$. **C.** $P=a$. **D.** $P=1-a$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $P=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{5}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{7}{12}}-a^{\frac{19}{12}}\right)}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{2}}\left(1-a^2\right)}{a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{7}{12}}\left(1-a\right)}=\dfrac{a^{\frac{5}{6}}\left(1+a\right)}{a^{\frac{5}{6}}}=1+a$.

Câu 11: Cho biểu thức $P=\sqrt{x\sqrt[3]{x^2\sqrt[k]{x^3}}}\ (x>0)$. Xác định k sao cho biểu thức $P=x^{\frac{23}{24}}$.

A. $k=2$. **B.** $k=6$.
C. $k=4$. **D.** Không tồn tại k.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $P=\sqrt{x\sqrt[3]{x^2\sqrt[k]{x^3}}}=\sqrt{x\sqrt[3]{x^{2+\frac{3}{k}}}}=\sqrt{x^{1+\frac{2k+3}{k}}}=x^{\frac{5k+3}{6k}}$.

Yêu cầu bài toán xảy ra khi : $\dfrac{5k+3}{6k}=\dfrac{23}{24}\Leftrightarrow k=4$.

Câu 12: Cho $x>0$, $y>0, x\neq y$ và $K=\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(1-2\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}\right)^{-1}$. Xác định mệnh đề đúng.

A. $K=2x$. **B.** $K=x+1$. **C.** $K=x-1$. **D.** $K=x$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $K=\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(1-2\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}\right)^{-1}=\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^{-2}=x$.

Câu 13: Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^7}.a^{\frac{11}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-5}}}$ với $a>0$ ta được kết quả $A=a^{\frac{m}{n}}$, trong đó m, $n\in\mathbb{N}^*$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m^2-n^2=-312$. **B.** $m^2-n^2=312$. **C.** $m^2+n^2=543$. **D.** $m^2+n^2=409$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^7}.a^{\frac{11}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-5}}}=\dfrac{a^{\frac{7}{3}}.a^{\frac{11}{3}}}{a^4.a^{-\frac{5}{7}}}=a^{\frac{19}{7}}$.

Suy ra $m=19$, $n=7\Rightarrow m^2-n^2=312$.

Câu 14: Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^5}.a^{\frac{7}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-2}}}$ với $a>0$ ta được kết quả $A=a^{\frac{m}{n}}$, trong đó m, $n\in\mathbb{N}^*$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m^2-n^2=25$. **B.** $m^2+n^2=43$. **C.** $3m^2-2n=2$. **D.** $2m^2+n=15$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^5}.a^{\frac{7}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-2}}}=\dfrac{a^{\frac{5}{3}}.a^{\frac{7}{3}}}{a^4.a^{\frac{-2}{7}}}=a^{\frac{5}{3}+\frac{7}{3}-4+\frac{2}{7}}=a^{\frac{2}{7}}\Rightarrow\begin{cases}m=2\\n=7\end{cases}\Rightarrow 2m^2+n=15$.

Dạng 2: So sánh đẳng thức và bất đẳng thức đơn giản

Phương pháp

Nếu $a>1$ thì $a^\alpha>a^\beta\Leftrightarrow\alpha>\beta$

Nếu $0<a<1$ thì $a^\alpha>a^\beta\Leftrightarrow\alpha<\beta$

Câu 1: Cho số thực $a>1$ và các số thực α, β. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $a^\alpha>1,\forall\alpha\in\mathbb{R}$. **B.** $a^\alpha>a^\beta\Leftrightarrow\alpha>\beta$.

C. $\dfrac{1}{a^\alpha}<0,\forall\alpha\in\mathbb{R}$. **D.** $a^\alpha<1,\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

Câu 2: Cho $a>0$, $b>0$ và x, y là các số thực bất kỳ. Đẳng thức nào sau đúng?

A. $(a+b)^x=a^x+b^x$. **B.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=a^x.b^{-x}$. **C.** $a^{x+y}=a^x+a^y$. **D.** $a^xb^y=(ab)^{xy}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}=a^x.b^{-x}$.

Câu 3: Cho các số thực a,b,m,n với $(a,b>0)$. Tìm mệnh đề ***sai***?

A. $\sqrt{a^2}=a$. **B.** $\left(\frac{a}{b}\right)^m=a^m.b^{-m}$. **C.** $\left(a^m\right)^n=a^{m+n}$. **D.** $(ab)^m=a^m.b^m$

Lời giải

Chọn C

Câu 4: Cho các số dương $a\neq 1$ và các số thực α, β. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

A. $a^\alpha.a^\beta=a^{\alpha+\beta}$. **B.** $a^\alpha.a^\beta=a^{\alpha\beta}$. **C.** $\frac{a^\alpha}{a^\beta}=a^{\alpha-\beta}$. **D.** $\left(a^\alpha\right)^\beta=a^{\alpha\beta}$.

Lời giải

Chọn B

Câu 5: Cho các số thực a, m, n và a dương. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a^{m-n}=a^m-n$. **B.** $a^{m-n}=\frac{a^m}{a^n}$. **C.** $a^{m-n}=a^m-a^n$. **D.** $a^{m-n}=\frac{a^m}{n}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $a^{m-n}=\frac{a^m}{a^n}$.

Câu 6: Cho a, b là các số thực dương và m,n là hai số thực tùy ý. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

A. $(xy)^n=x^n.y^n$. **B.** $x^m.x^n=x^{m+n}$.

C. $\left(x^m\right)^n=x^{m.n}$. **D.** $x^m.y^n=(xy)^{m+n}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(xy)^{m+n}=x^{m+n}.y^{m+n}$.

Câu 7: Cho a,b là các số thực dương, m,n là các số thực tùy ý. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $a^m.b^m=(ab)^{2m}$. **B.** $a^m.a^n=a^{mn}$. **C.** $a^m.b^n=(ab)^{mn}$. **D.** $a^{-m}b^m=\left(\frac{b}{a}\right)^m$.

Lời giải:

Chọn D

Câu 8: Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\left(\frac{3}{4}\right)^5<\left(\frac{3}{4}\right)^6$. **B.** $\left(\frac{4}{3}\right)^{-7}>\left(\frac{4}{3}\right)^{-6}$.

C. $\left(\frac{3}{2}\right)^6>\left(\frac{3}{2}\right)^7$. **D.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-6}>\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 9: Cho $\left(\sqrt{2}-1\right)^a>\left(\sqrt{2}-1\right)^b$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $a>b$. **B.** $a<b$. **C.** $a=b$. **D.** $a\geq b$.

Lời giải

Chọn B

Câu 10: Cho $x\in\left(0;\frac{3}{\pi}\right)$ và m, n là các số thực tùy ý. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $x^m>x^n\Leftrightarrow m<n$. **B.** $x^m>x^n\Leftrightarrow m>n$. **C.** $\left(x^m\right)^n=x^{m.n}$. **D.** $x^{m+n}=x^m.x^n$.

Lời giải

Chọn B

Do $\frac{3}{\pi}<1$ nên với $x\in\left(0;\frac{3}{\pi}\right)$ thì $x^m>x^n\Leftrightarrow m<n$.

Câu 11: Cho a thuộc khoảng $\left(0;\frac{2}{e}\right)$, α và β là những số thực tuỳ ý. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\left(a^\alpha\right)^b=a^{\alpha.\beta}$. **B.** $a^\alpha>a^\beta\Leftrightarrow a<\beta$.

C. $a^\alpha.a^\beta=a^{\alpha+\beta}$. **D.** $a^\alpha>a^\beta\Leftrightarrow\alpha>\beta$.

Lời giải

Chọn D

Câu 12: Cho $\pi^\alpha>\pi^\beta$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $\alpha.\beta=1$. **B.** $\alpha>\beta$. **C.** $\alpha<\beta$. **D.** $\alpha+\beta=0$.

Lời giải

Chọn B

Vì $\pi\approx3,14>0$ nên $\pi^\alpha>\pi^\beta\Leftrightarrow\alpha>\beta$.

Câu 13: Với α là số thực bất kỳ, mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\left(10^\alpha\right)^2=100^\alpha$. **B.** $\sqrt{10^\alpha}=\left(\sqrt{10}\right)^\alpha$. **C.** $\sqrt{10^\alpha}=10^{\frac{\alpha}{2}}$. **D.** $\left(10^\alpha\right)^2=10^{\alpha^2}$.

Lời giải

Chọn D

Đáp án D sai do với mọi $a>0$ và $m,\ n\in\mathbb{R}$ ta có: $\left(a^m\right)^n=\left(a^n\right)^m=a^{m.n}$.

Khi đó $\left(10^\alpha\right)^2=\left(10^2\right)^\alpha=10^{2\alpha}$.

Câu 14: Cho các số thực $a,b,\alpha\ \left(a>b>0,\alpha\neq1\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $(ab)^\alpha=a^\alpha.b^\alpha$. **B.** $(a-b)^\alpha=a^\alpha-b^\alpha$.

C. $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha=\frac{a^\alpha}{b^{-\alpha}}$. **D.** $(a+b)^\alpha=a^\alpha+b^\alpha$.

Lời giải

Chọn A

Câu 15: Cho a,b là các số thực thỏa điều kiện $\left(\frac{3}{4}\right)^a>\left(\frac{4}{5}\right)^a$ và $b^{\frac{5}{4}}>b^{\frac{4}{3}}$. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

A. $a>0$ và $b>1$. **B.** $a>0$ và $0<b<1$. **C.** $a<0$ và $0<b<1$. **D.** $a<0$ và $b>1$

Lời giải

Chọn C

Vì $\left(\frac{3}{4}\right)^a>\left(\frac{4}{5}\right)^a\Rightarrow a<0$.

Và $b^{\frac{5}{4}}>b^{\frac{4}{3}}\Rightarrow 0<b<1$.

Câu 16: Cho $a>1$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng.

A. $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}>1$ **B.** $\frac{1}{a^{2017}}<\frac{1}{a^{2018}}$ **C.** $a^{-\sqrt{3}}>\frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$ **D.** $a^{\frac{1}{3}}>\sqrt{a}$

Lời giải

Chọn C

Ta có : $a^{-\sqrt{3}}>\frac{1}{a^{\sqrt{5}}}\Leftrightarrow\frac{1}{a^{\sqrt{3}}}>\frac{1}{a^{\sqrt{5}}}\Leftrightarrow a^{\sqrt{3}}<a^{\sqrt{5}}$ luôn đúng với $a>1$.

Câu 17: Xét a, b là các số thực thỏa mãn $ab>0$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\sqrt[3]{\sqrt{ab}}=\sqrt[6]{ab}$. **B.** $\sqrt[8]{(ab)^8}=ab$. **C.** $\sqrt[6]{ab}=\sqrt[6]{a}.\sqrt[6]{b}$. **D.** $\sqrt[5]{ab}=(ab)^{\frac{1}{5}}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $ab>0\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\b>0\end{cases}\vee\begin{cases}a<0\\b<0\end{cases}$.

Với $a<0$, $b<0$ thì $\sqrt[6]{a}$, $\sqrt[6]{b}$ vô nghĩa. Nên khẳng định $\sqrt[6]{ab}=\sqrt[6]{a}.\sqrt[6]{b}$ là sai.

Câu 18: Trong các khẳng định sau khẳng định nào **sai**?

A. $2^{30}<3^{20}$. **B.** $0,99^{\pi}>0,99^{e}$. **C.** $2^3<3^{\pi}$. **D.** $4^{-\sqrt{3}}<4^{-\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\pi>e$ và $0,999<1$ nên $0,99^{\pi}<0,99^{e}$, do đó đáp án B sai.

Câu 19: Nếu $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{a-1}<7-4\sqrt{3}$ thì

A. $a<1$. **B.** $a>1$. **C.** $a>0$. **D.** $a<0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)=1$ nên $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{a-1}<7-4\sqrt{3}\Leftrightarrow\left(7+4\sqrt{3}\right)^{a-1}<\left(7+4\sqrt{3}\right)^{-1}$

$\Leftrightarrow a-1<-1\Leftrightarrow a<0$ (do $7+4\sqrt{3}>1$).

Câu 20: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017}>\left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$. **B.** $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018}>\left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$.

C. $2^{\sqrt{2}+1}>2^{\sqrt{3}}$. **D.** $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}<\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases}0<\sqrt{3}-1<1\\2018>2017\end{cases}\Rightarrow\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018}<\left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$ nên B sai.

Câu 21: Tìm khẳng định đúng?

A. $\left(2-\sqrt{3}\right)^{2016}>\left(2-\sqrt{3}\right)^{2017}$.

B. $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2016}>\left(2+\sqrt{3}\right)^{2017}$.

C. $-\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2016}>-\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2017}$.

D. $\left(2-\sqrt{3}\right)^{-2016}>\left(2-\sqrt{3}\right)^{-2017}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $0<2-\sqrt{3}<1\Rightarrow\left(2-\sqrt{3}\right)^{2016}>\left(2-\sqrt{3}\right)^{2017}$.

Câu 22: Tìm tập tất cả các giá trị của a để $\sqrt[21]{a^5}>\sqrt[7]{a^2}$?

A. $a>0$.

B. $0<a<1$.

C. $a>1$.

D. $\frac{5}{21}<a<\frac{2}{7}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\sqrt[7]{a^2}=\sqrt[21]{a^6}$.

Ta có $\sqrt[21]{a^5}>\sqrt[7]{a^2}\Leftrightarrow\sqrt[21]{a^5}>\sqrt[21]{a^6}$ mà $5<6$ vậy $0<a<1$.

BÀI 2. HÀM SỐ LŨY THỪA

A. KIẾN THỨC GIÁO KHOA CẦN NẮM

1.Khái niệm hàm lũy thừa

Hàm số lũy thừa là hàm số có dạng $y=x^{\alpha},\alpha\in\mathbb{R}$.

Chẳng hạn, các hàm số $y=x, y=x^2, y=\frac{1}{x^4}, y=x^{\frac{1}{3}}, y=x^{\sqrt{2}}, y=x^{\pi}$ là những hàm số luỹ thừa.

Chú ý: Tập xác định của hàm số lũy thừa phụ thuộc vào giá trị của α

- Với α nguyên dương thì tập xác định là R

- Với α nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

- Với α không nguyên thì tập xác định là $(0;+\infty)$

Theo định nghĩa, đẳng thức $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$ chỉ xảy ra nếu $x>0$. Do đó, hàm số $y=x^{\frac{1}{n}}$ không đồng nhất với hàm số $y=\sqrt[n]{x}\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$. Ví dụ $y=\sqrt[3]{x}$ là hàm số căn bậc 3, xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$; còn hàm số lũy thừa $y=x^{\frac{1}{3}}$ chỉ xác định khi $x>0$

2.Đạo hàm của hàm số lũy thừa

$$\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha.x^{\alpha-1} \text{ vôùi } x>0;\quad \left(u^{\alpha}\right)'=\alpha.u^{\alpha-1}.u', \text{vôùi } u>0$$

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \text{ vôùi moïi } x>0 \text{ neáu } n \text{ chaün, vôùi moïi } x\neq 0 \text{ neáu } n \text{ leû}$$

$$\left(\sqrt[n]{u}\right)'=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}, \text{ vôùi moïi u} > 0 \text{ neáu } n \text{ chaün, vôùi moïi u} \neq 0 \text{ neáu } n \text{ leû}$$

Ví dụ

a) $\left(x^{\frac{3}{4}}\right)'=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}=\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}(x>0)$;

b) $\left(x^{\sqrt{3}}\right)'=\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}(x>0)$.

3. Khảo sát hàm số lũy thừa

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y=x^{\alpha}$ luôn chứa khoảng $(0;+\infty)$ với mọi $\alpha\in\mathbb{R}$. Trong trường hợp tổng quát ta khảo sát hàm số $y=x^{\alpha}$ trên khoảng này.

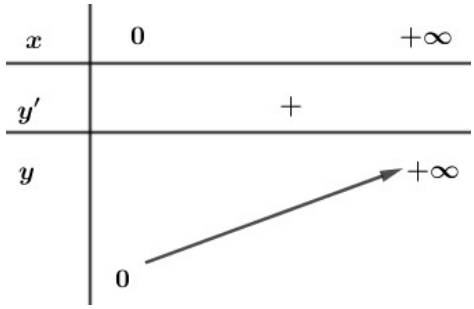
$\alpha>0$	$\alpha<0$
Tập khảo sát: $D=(0;+\infty)$. Sự biến thiên: $y'=\alpha.x^{\alpha-1}>0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên	Tập khảo sát: $D=(0;+\infty)$. Sự biến thiên: $y'=\alpha.x^{\alpha-1}<0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên

$(0;+\infty)$.

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$.

$\Rightarrow$ Hàm số không có tiệm cận.

Bảng biến thiên



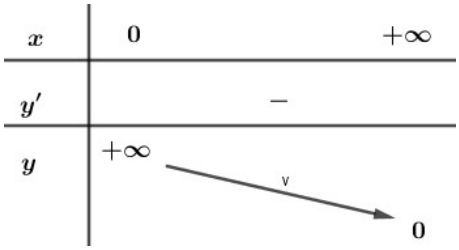
$(0;+\infty)$.

Giới hạn:

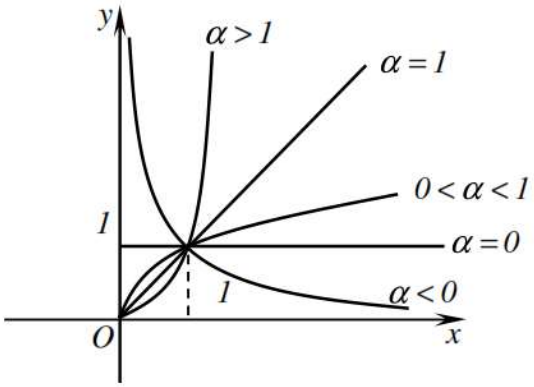
$\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty \Rightarrow$ TCĐ: $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0 \Rightarrow$ TCN: $y = 0$

Bảng biến thiên



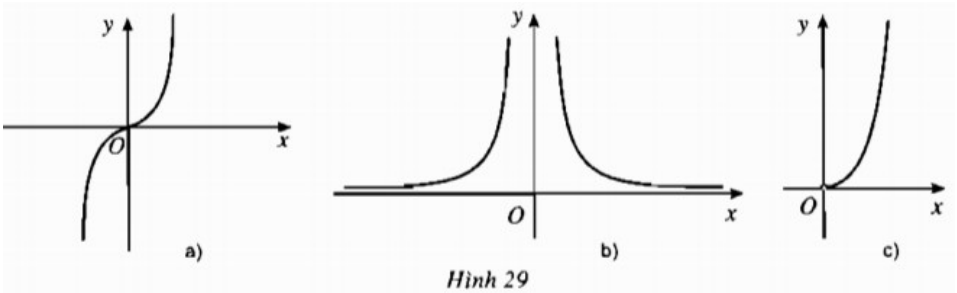
Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $A(1;1)$.



CHÚ Ý

Khi khảo sát hàm số luỹ thừa với số mũ cụ thể, ta phải xét hàm số đó trên toàn bộ tập xác định của nó.

Dưới đây là dạng đồ thị của ba hàm số : $y = x^3$ (H. 29a), $y = x^{-2}$ (H. 29b), $y = x^\pi$ (H. 29c).



Hình 29

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm tập xác định và tính đạo hàm của hàm số

1. Phương pháp

Cần nhớ lại: Xét hàm số $y = \left[f(x)\right]^a$

□ Nếu a nguyên dương thì hàm số xác định khi và chỉ khi $f(x)$ xác định.

□ Nếu a nguyên âm hoặc bằng 0 thì hàm số xác định khi và chỉ khi $f(x)\neq 0$.

□ Nếu a không nguyên thì hàm số xác định khi và chỉ khi $f(x)>0$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Tìm tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{-4}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện xác định: $x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$.

Ví dụ 2: Tìm tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{5}}$

Hướng dẫn giải

Vì $\frac{1}{5}\notin\mathbb{Z}$ nên điều kiện xác định của hàm số là $x-1>0\Leftrightarrow x>1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $(1;+\infty)$.

Ví dụ 3: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(x^2-3x-4\right)^{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

Hướng dẫn giải

Hàm số xác định khi $x^2-3x-4>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\x>4\end{array}\right.$.

Vậy tập xác định D của hàm số là: $D=(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tìm tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-3x+2\right)^{\frac{-1}{3}}$

A. $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. **C.** $y'=\dfrac{2x}{\left(x^2+2\right)\ln 5}$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số lũy thừa có số mũ không nguyên thì điều kiện là cơ số phải dương, nên suy ra $y=\left(x^2-3x+2\right)^{\frac{-1}{3}}$ có điều kiện là $x^2-3x+2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\x<1\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Câu 2: Tìm tập xác định D của hàm số $y=(2-x)^{\frac{1}{3}}$.

A. $D=(-\infty;2]$. **B.** $D=(2;+\infty)$. **C.** $D=(-\infty;2)$. **D.** $D=(-\infty;+\infty)$

.

Lời giải

Chọn C

ĐKXĐ: $2-x>0 \Leftrightarrow x<2$. Suy ra TXĐ: $D=(-\infty;2)$.

Câu 3: Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-1\right)^{-3}$ là

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định của hàm số $y=\left(x^2-1\right)^{-3}$ là: $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \pm 1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$.

Câu 4: Tìm tập xác định của hàm số $y=\left(2x-x^2\right)^{\sqrt{2019}}$.

A. $(-\infty;0]\cup[0;+\infty)$. **B.** $(0;2)$.

C. $\mathbb{R}$. **D.** $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định của hàm số là $2x-x^2>0 \Leftrightarrow 0<x<2$.

Suy ra tập xác định của hàm số đã cho là $(0;2)$.

Câu 5: Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-4x\right)^{\frac{2019}{2020}}$ là:

A. $(-\infty;0]\cup[4;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $R\setminus\{0;4\}$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=\left(x^2-4x\right)^{\frac{2019}{2020}}$ xác định $\Leftrightarrow x^2-4x>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$.

Câu 6: Hàm số nào dưới đây có tập xác định **không** phải là khoảng $(0;+\infty)$?

A. $y=x^{-5}$. **B.** $y=x^{\sqrt{2}}$. **C.** $y=x^{\frac{1}{3}}$. **D.** $y=x^{-1,7}$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=[f(x)]^{\alpha}$ *thì tập xác định phụ thuộc vào giá trị của* α.

Cụ thể:

+ Nếu α *nguyên dương thì hàm số xác định khi và chỉ khi* $f(x)$ *xác định.*

+ Nếu $\alpha=0$ *hoặc* α *nguyên âm thì hàm số xác định khi và chỉ khi* $f(x)\neq 0$.

+ Nếu α *không nguyên thì hàm số xác định khi và chỉ khi* $f(x)>0$.

Vì -5 là số nguyên âm nên tập xác định của hàm số $y=x^{-5}$ là $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Câu 7: Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-3x+2\right)^{\frac{3}{5}}+\left(x-3\right)^{-2}$ là

A. $D=\left(-\infty;1\right)\cup\left(2;+\infty\right)\setminus\{3\}$.
B. $D=\left(-\infty;+\infty\right)\setminus\left(1;2\right)$.
C. $D=\left(-\infty;+\infty\right)\setminus\{3\}$.
D. $D=\left(-\infty;1\right)\cup\left(2;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=\left(x^2-3x+2\right)^{\frac{3}{5}}+\left(x-3\right)^{-2}$ xác định khi $\begin{cases}x^2-3x+2>0\\x-3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<1\\x>2\end{array}\right.\\x\neq 3\end{cases}$.

Vậy $D=\left(-\infty;1\right)\cup\left(2;+\infty\right)\setminus\{3\}$.

Câu 8: Tập xác định của hàm số $y=\left(2x-1\right)^{-2}$

A. $\left(\frac{1}{2};2\right)$.
B. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$.
C. $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.
D. $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số lũy thừa với số mũ nguyên âm nên điều kiện là $2x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{1}{2}$

Vậy tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Câu 9: Tập xác định D của hàm số $y=(3x-5)^{\frac{\pi}{3}}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{5}{3}\right\}$.
B. $\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$.
C. $\left[\frac{5}{3};+\infty\right)$.
D. $\left(\frac{3}{5};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=(3x-5)^{\frac{\pi}{3}}$ xác định khi: $3x-5>0\Leftrightarrow x>\frac{5}{3}$ nên tập xác định $D=\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$.

Câu 10: Tập xác định của hàm số $y=\left(4-3x-x^2\right)^{-2019}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{-4;1\}$.
B. $\mathbb{R}$.
C. $[-4;1]$.
D. $(-4;1)$.

Lờigiải

Chọn A

Vì $y=\left(4-3x-x^2\right)^{-2019}$ là hàm số lũy thừa có số mũ nguyên âm nên điều kiện xác định là

$4-3x-x^2\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\x\neq -4\end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{-4;1\}$.

Câu 11: Tập xác định của hàm số $y=\left(-2x^2-x+3\right)^{2e-1}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2};1\right\}$. **B.** $\left(-\infty;\frac{-3}{2}\right)\cup(1;+\infty)$.

C. $\left(\frac{-3}{2};1\right)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $2e-1$ không là số nguyên nên điều kiện là $-2x^2-x+3>0\Leftrightarrow x\in\left(\frac{-3}{2};1\right)$

Dạng 2: Tính đạo hàm

1. Phương pháp:

Cần thuộc các công thức sau

$\left(x^\alpha\right)'=\alpha.x^{\alpha-1}$ vôùi $x>0$; $\left(u^\alpha\right)'=\alpha.u^{\alpha-1}.u'$, vôùi $u>0$

$\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$, vôùi moïi $x>0$ neáu n chaün, vôùi moïi $x\neq 0$ neáu n leû

$\left(\sqrt[n]{u}\right)'=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$, vôùi moïi u >0 neáu n chaün, vôùi moïi u $\neq 0$ neáu n leû

Đối với trắc nghiệm thì ta có thể dùng công cụ MTCT

2. Các ví dụ

Tính đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y=\sqrt{4x^2-3x-1}$;

b) $y=\left(x^2+x-4\right)^{\frac{1}{4}}$;

c) $y=\left(x^2-3x+2\right)^{\sqrt{3}}$

Giải

a) Ta có $y=\left(4x^2-3x-1\right)^{\frac{1}{2}}$ nên

$y'=\frac{1}{2}\left(4x^2-3x-1\right)^{-\frac{1}{2}}\left(4x^2-3x-1\right)'=\frac{8x-3}{2\sqrt{4x^2-3x-1}}$.

b) $y'=\frac{1}{4}\left(x^2+x+4\right)^{-\frac{8}{4}}(2x+1)$

c) $y' = \sqrt{3}\left(x^2-3x+2\right)^{\sqrt{3}-1}(2x-3)$,

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tìm đạo hàm của hàm số $y=\left(x^2+1\right)^{\frac{e}{2}}$ trên $\mathbb{R}$.

A. $y'=2x\left(x^2+1\right)^{\frac{e}{2}-1}$.

B. $y'=ex\sqrt{\left(x^2+1\right)^{e-2}}$.

C. $y'=\frac{e}{2}\left(x^2+1\right)^{\frac{e}{2}-1}$.

D. $y'=\left(x^2+1\right)^{\frac{e}{2}}\ln\left(x^2+1\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $y'=\left(\left(x^2+1\right)^{\frac{e}{2}}\right)'=\frac{e}{2}.2x\left(x^2+1\right)^{\frac{e}{2}-1}=ex\left(x^2+1\right)^{\frac{e}{2}-1}=ex\sqrt{\left(x^2+1\right)^{e-2}}$.

Câu 2: Hàm số $y=\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^2}$ có đạo hàm là.

A. $y'=\frac{4}{\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^2}}$.

B. $y'=2x\sqrt{x^2+1}$.

C. $y'=4x\sqrt[5]{x^2+1}$.

D. $y'=\frac{4x}{5\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^3}}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Vì Áp dụng công thức $\left(u^n\right)'=n.u^{n-1}.u'$.

Câu 3: Cho $f\left(x\right)=x^2.\sqrt[3]{x^2}$ Giá trị của $f'\left(1\right)$ bằng:

A. 2.

B. $\frac{8}{3}$.

C. 4.

D. $\frac{3}{8}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Với $x>0$ thì $f\left(x\right)=x^{2+\frac{2}{3}}=x^{\frac{8}{3}}\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}$ nên $f'\left(1\right)=\frac{8}{3}$.

Câu 4: Tính đạo hàm của hàm số $y=\left(1-\cos 3x\right)^6$.

A. $y'=18\sin 3x\left(\cos 3x-1\right)^5$.

B. $y'=18\sin 3x\left(1-\cos 3x\right)^5$.

C. $y'=6\sin 3x\left(1-\cos 3x\right)^5$.

D. $y'=6\sin 3x\left(\cos 3x-1\right)^5$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $y=\left(1-\cos 3x\right)^6\Rightarrow y=6\left(1-\cos 3x\right)^5.\left(1-\cos 3x\right)'$.

$=6\left(1-\cos 3x\right)^5.3\sin 3x=18\sin 3x\left(1-\cos 3x\right)^5$..

Câu 5: Đạo hàm của hàm số $y=\left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{3}}$ là

A. $y'=\dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2}}$.

B. $y'=\dfrac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{2}{3}}$.

C. $y'=\dfrac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{8}{3}}$.

D. $y'=\dfrac{2x+1}{2\sqrt[3]{x^2+x+1}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\dfrac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{3}-1}\left(x^2+x+1\right)'=\dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2}}$.

Câu 6: Tính đạo hàm của hàm số $y=\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{3}}$.

A. $y'=\dfrac{2}{3}x\left(x^2+3\right)^{-\frac{2}{3}}$.

B. $y'=\dfrac{1}{3}\left(x^2+3\right)^{-\frac{2}{3}}$.

C. $y'=\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{3}}\ln\left(x^2+3\right)$.

D. $y'=2x\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{3}}\ln\left(x^2+3\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=\dfrac{1}{3}\left(x^2+3\right)^{-\frac{2}{3}}\left(x^2+3\right)'=\dfrac{2}{3}x\left(x^2+3\right)^{-\frac{2}{3}}$.

Câu 7: Cho hàm số $y=\sqrt[4]{x^2-3}$, phương trình $y'=0$ có mấy nghiệm thực:

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=\sqrt[4]{x^2-3}$.

Ta có: $y'=\left[\left(x^2-3\right)^{\frac{1}{4}}\right]'=\dfrac{1}{4}\left(x^2-3\right)^{\frac{-3}{4}}.2x=\dfrac{1}{2\sqrt[4]{\left(x^2-3\right)^3}}$ với $x\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

Ta thấy $y'>0$ với $x\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ do đó phương trình $y'=0$ vô nghiệm.

Câu 8: Tính đạo hàm của hàm số $y=\left(x\sin x\right)^{\frac{2}{3}}$.

A. $y'=\dfrac{2}{3}\left(x\sin x\right)^{-\frac{1}{3}}$.

B. $y'=\dfrac{2}{3}\left(x\sin x\right)^{-\frac{1}{3}}.\left(\sin x+x\cos x\right)$.

C. $y'=-\dfrac{2}{3}.\dfrac{\sin x+x\cos x}{\sqrt[3]{x\sin x}}$.

D. $y'=\dfrac{2}{3}\left(x\sin x\right)^{-\frac{1}{3}}.\cos x$.

Lời giải.

Chọn B

$$y' = \frac{2}{3}\left(x\sin x\right)^{\frac{2}{3}-1}.\left(x\sin x\right)' = \frac{2}{3}\left(x\sin x\right)^{-\frac{1}{3}}.\left(\sin x + x\cos x\right).$$

Dạng 3. Sự biến thiên và nhận dạng đồ thị hàm số

1. Phương pháp

Lưu ý: Trong dạng bài toán này lưu ý những đặc điểm sau của đồ thị hàm số $y = x^{\alpha}$ **:**

- Đồ thị luôn đi qua điểm $A(1,1)$
- Đồ thị hàm số không có tiệm cận khi $\alpha > 0$,
- khi $\alpha < 0$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là trục Ox, tiệm cận đứng là trục Oy .Đồng biến trên $(-\infty;0)$ và nghịch biến trên $(0;+\infty)$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

a) $y = x^{-4}$;

b) $y = x^{\frac{\pi}{2}}$.

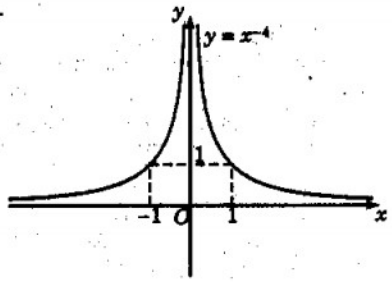
Lời giải

a)

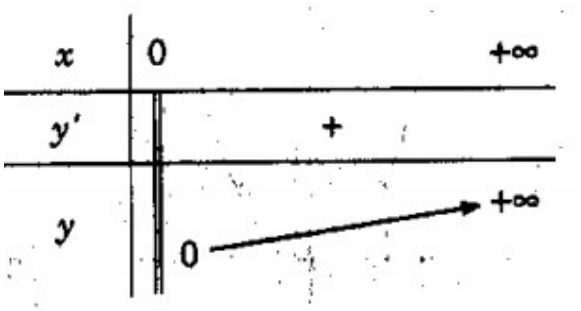
Bảng biến thiên

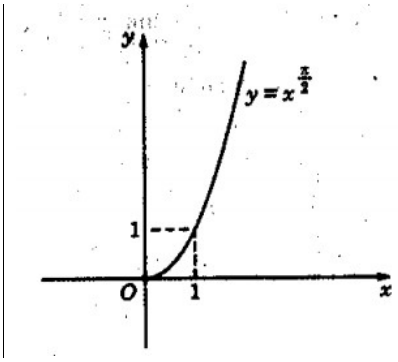
x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$-$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty \mid +\infty$	$\searrow$	0

• Đồ thị (H.14) nhận trục tung là trục đối xứng.



b)





3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề **sai**?

A. Hàm số $y=x^{\alpha}$ có tập xác định tùy theo α.

B. Đồ thị hàm số $y=x^{\alpha}$ với $\alpha>0$ có tiệm cận.

C. Hàm số $y=x^{\alpha}$ với $\alpha<0$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

D. Đồ thị hàm số $y=x^{\alpha}$ với $\alpha<0$ có hai tiệm cận.

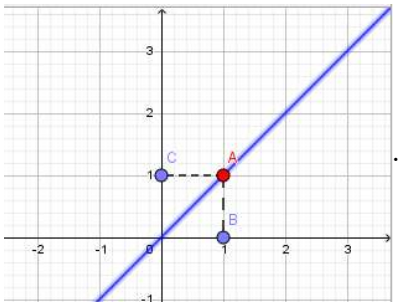
Lời giải

Chọn B

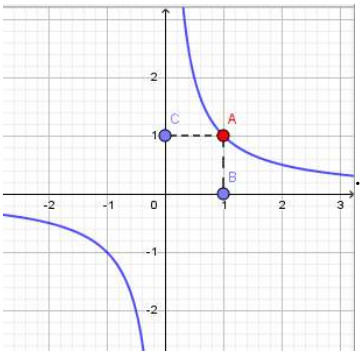
Đồ thị hàm số $y=x^{\alpha}$ với $\alpha>0$ không có tiệm cận.

Câu 2: Đồ thị nào dưới đây **không** là đồ thị của hàm số $y=x^{\alpha}$?

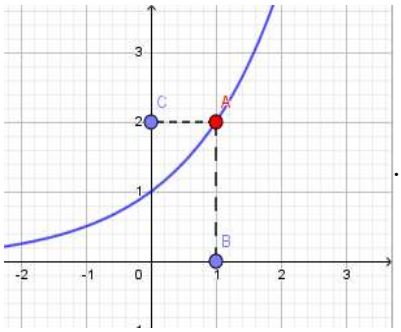
A.



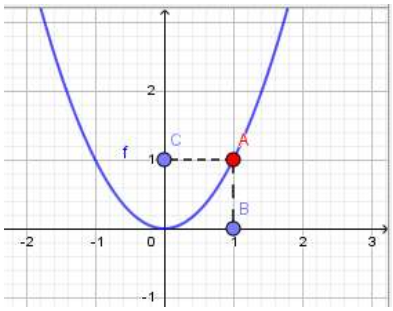
B.



C.



D.

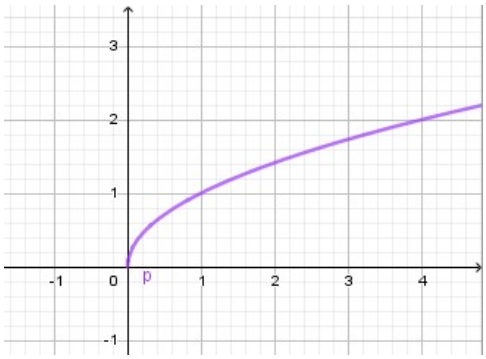


Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $y=x^{\alpha}$ không đi qua điểm $(0;1)$.

Câu 3: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị hàm số nào?



A. $y=x^{-\frac{1}{2}}$. **B.** $y=x^{\frac{1}{2}}$. **C.** $y=2^x$. **D.** $y=2^{x-1}$

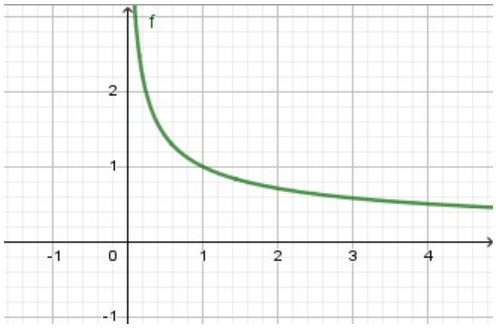
Lời giải

Chọn B

Nhận thấy đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ nên loại đáp án C và D

Nhận thấy đồ thị hàm số đi qua điểm $(4;2)$ nên loại đáp án A

Câu 4: Hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây.



A. $y=x^{-2}$. **B.** $y=2^{-x}$. **C.** $y=x^{-\frac{1}{2}}$. **D.** $y=\log_2 x$.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số đi qua điểm nhận Ox,Oy làm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng loại C,D

Dùng máy tính kiểm tra đáp án thấy đồ thị đi qua chọn đáp án **C.**

Câu 5: Cho hàm số $y=x^{-\sqrt{2}}$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Đồ thị hàm số không cắt trục hoành.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

C. Hàm số có tập xác định là $(0;+\infty)$.

D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=(0;+\infty)$, suy ra C đúng.

Do $x>0$ nên $x^{-\sqrt{2}}>0$, suy ra A đúng.

Ta có: $y'=-\sqrt{2}.x^{-\sqrt{2}-1}<0;\forall x>0$, suy ra B đúng.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{-\sqrt{2}}=+\infty$ nên đồ thị hàm số nhận Oy làm tiệm cận đứng, đáp án D đúng.

Câu 6: Cho hàm số $y=x^{\sqrt{2}}$, có các khẳng định sau

I. Tập xác định của hàm số là $D=(0;+\infty)$.

II. Hàm số luôn đồng biến với mọi x thuộc tập xác định của nó.

III. Hàm số luôn đi qua điểm $M(1;1)$.

IV. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Hỏi có bao nhiêu khẳng định đúng?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Do $\alpha=\sqrt{2}$ nên hàm số xác định với mọi $x>0.$ Vậy khẳng định I đúng.

Do $y'=\sqrt{2}.x^{\sqrt{2}-1}>0$ với mọi $x>0$ nên hàm số đồng biến trên tập xác định. Khẳng định II đúng.

Do $y(1)=1^{\sqrt{2}}=1$ nên khẳng định III đúng.

Do $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\sqrt{2}}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sqrt{2}}=0$ nên đồ thì hàm số không có đường tiệm cận. Vậy IV đúng.

Câu 7: Cho hàm số $y=x^{\frac{\pi}{2}}$ có đồ thị. Phương trình tiếp tuyến của tại điểm M_0 có hoành độ $x_0=1$ là:

A. $y=\frac{\pi}{2}x+1$. **B.** $y=\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}+1$.

C. $y=\pi x-\pi+1$. **D.** $y=-\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}+1$

Lời giải

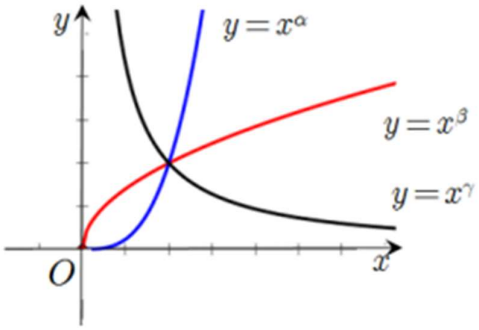
Chọn B

Ta có: $y'=\frac{\pi}{2}x^{\frac{\pi}{2}-1}\Rightarrow y'(1)=\frac{\pi}{2}$

Với $x_0=1$ thì $y_0=1$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}+1$

Câu 8: Cho các hàm số $y=x^{\alpha};y=x^{\beta};y=x^{\gamma}$ có đồ thị trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng.



A. $\gamma<\alpha<\beta$. **B.** $\beta<\gamma<\alpha$. **C.** $\alpha<\gamma<\beta$. **D.** $\gamma<\beta<\alpha$.

Lời giải

Chọn D

Từ hình vẽ ta thấy hàm số $y=x^{\gamma}$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$ nên $\gamma<0$.

Từ hình vẽ ta thấy hàm số $y=x^{\beta}$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ và nằm dưới đường thẳng $y=x$ nên $0<\gamma<1$.

Từ hình vẽ ta thấy hàm số $y=x^{\alpha}$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ và nằm trên đường thẳng $y=x$ nên $\alpha>1$.

Vậy $\gamma<\beta<\alpha$.

Câu 9: Cho hàm số $y=x^{-\sqrt{3}}$ khẳng định nào sau đây đúng?

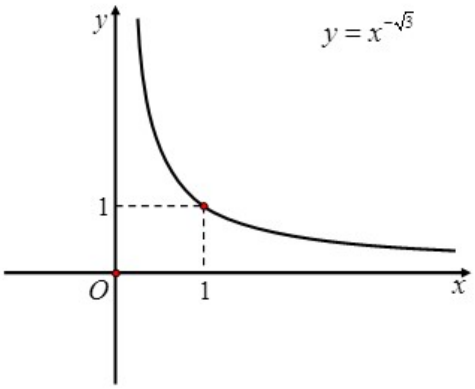
A. Đồ thị hàm số cắt trục Ox.
B. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
C. Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng và không có tiệm cận ngang.
D. Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.

Lời giải

Chọn D

* TXĐ: $D=(0;+\infty)$.

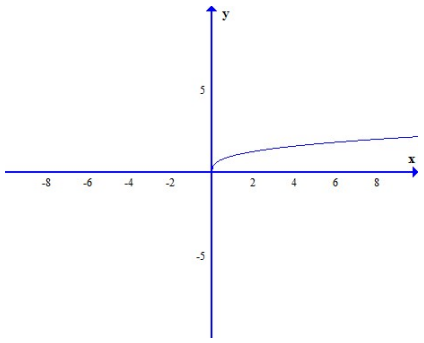
* Đồ thị hàm số:



Từ đồ thị hàm số ta thấy đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là trục Oy và một tiệm cận ngang là trục Ox.

Đáp án đúng là **D.**

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên, biết $f(x)$ là một trong 4 hàm số dưới đây. Tìm $f(x)$.



A. $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$. **B.** $f(x)=\sqrt[3]{x}$. **C.** $f(x)=x^{-\frac{1}{3}}$. **D.** $f(x)=x^3$.

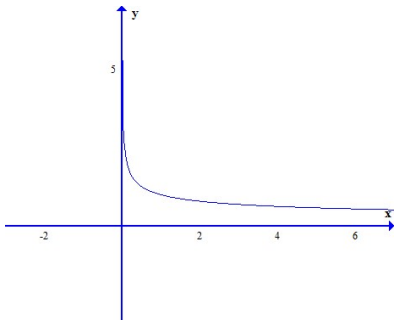
Lời giải.

Chọn A

Hàm số có tập xác định là $D=(0;+\infty)$, loại đáp án B,**D.**

Hàm số tăng trên D, loại **C.**

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên, biết $f(x)$ là một trong 4 hàm số dưới đây. Tìm $f(x)$.



A. $f\left(x\right)=x^{\frac{1}{3}}$. **B.** $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x}$. **C.** $f\left(x\right)=x^{-\frac{1}{3}}$. **D.** $f\left(x\right)=x^3$.

Lời giải.

Chọn C

Hàm số có tập xác định là $D=\left(0;+\infty\right)$, loại đáp án B,**D.**

Hàm số giảm trên $y'=\dfrac{bx^2}{\sqrt[3]{\left(a+bx^3\right)^2}}$, loại **A.**

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=(1-x^2)^{2019}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên R. **B.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên R.

Lời giải

Chọn B

Đạo hàm: $f'\left(x\right)=2019.\left(1-x^2\right)^{2018}.\left(1-x^2\right)'=2019.\left(1-x^2\right)^{2018}.\left(-2x\right)$

Nhận thấy ngay: $2019.\left(1-x^2\right)^{2018}\geq 0$. Nên ta có thể nhận thấy ngay dấu của đạo hàm cùng dấu với $\left(-x\right)$. Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$.

BÀI 3. LOGARIT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. KHÁI NIỆM LOGARIT

1. Định nghĩa: Cho 2 số $a,b>0$ dương với a khác 1. Số α thỏa mãn đẳnng thức $a^{\alpha}=b$ được gọi là **logarit cơ số a của b** và ký hiệu $\log_a b$

$$\alpha=\log_a b\Leftrightarrow a^{\alpha}=b$$

Chú ý

- Không có logarit của số 0 và số âm vì a^{α} luông dương với mọi α
- Cơ số của logarit phải dương và khác 1
- Theo đinh nghĩa logarit ta có các tính chất sau

2. Tính chất

Cho hai số dương a và b, $a\neq 0$. Ta có các tính chất sau

$$\log_a 1=0;\ \ \log_a a=1;\qquad a^{\log_a b}=b,\ \ \forall b\in\mathbb{R},b>0;\qquad \log_a\left(a^{\alpha}\right)=\alpha,\ \ \alpha\in\mathbb{R}$$

Ví dụ. Tính

a) $4^{\log_2 3}$; b) $3^{\log_{\sqrt{3}} 4}$; c) $\sqrt{2}^{\log_2 3}$; d) $\log_2 4$ e) $\log_3\frac{1}{3}$

f) $\log_2\frac{1}{16}$ g) $(2a)^{\log_{3\sqrt{a}}1}$ với $0<a\neq 1$ h) $49^{\log_7\sqrt{5}+\log_{49}3}$

II. CÁC QUY TẮC TÍNH LOGARIT

1. Logarit của một tích: Với $0<a\neq 1;\ \ b,c>0$ ta có $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$

Logarit của một tích bằng tổng các logarit

Ví dụ 3: Tính

a) $\log_{12}6+\log_{12}2$ b) $\log_{\frac{1}{2}}6+\log_{\frac{1}{2}}24+\log_{\frac{1}{2}}\frac{4}{9}$

Chú ý: Công thức trên có thể mở rộng cho tích của n số dương:

$$\log_a\left(b_1.b_2...b_n\right)=\log_a b_1+\log_a b_2+...+\log_a b_n$$
$$\left(a,b_1,b_2,...,b_n>0,a\neq 1\right)$$

2. Logarit của một thương: a > 0; b_1> 0; b_2> 0, a $\neq$ 1

$$\log_a\left(\frac{b_1}{b_2}\right)=\log_a b_1-\log_a b_2$$

Logarit của một thương bằng hiệu các logarit

$$\log_a\left(\frac{1}{b}\right)=-\log_a b,\ \ (0<a\neq 1,b>0)$$

Ví dụ. Tính

a) $\log_{25}100-\log_{25}4$; b) $\log_{\sqrt{2}}20+\log_{\sqrt{2}}6-\log_{\sqrt{2}}15$.

c) $\log_2 5+\log_2 10-\log_2 25$. d) $\log_3 6+\log_3 7-\log_3 14$

3. Logarit của một lũy thừa: a > 0; b> 0, $a\neq 1$

$$\log_a\left(b^\alpha\right)=\alpha\log_a b$$

Logarit của một lũy thừa bằng tích của số mũ với logarit của cơ số

$$\log_a\left(\sqrt[n]{b}\right)=\frac{1}{n}\log_a b$$

Ví dụ 5. Cho $\log_a b=2;\log_a c=-3$. Hãy tính $\log_a x$, biết

a) $x=\frac{a^2b^3}{c^4}$ b) $x=\frac{a^2\sqrt{b}}{c^3}$ c) $x=a^2\sqrt[3]{b}c^2$

III. ĐỔI CƠ SỐ:

Cho a > 0; b > 0; c>0, $a\neq 1$, $c\neq 1$

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a};\qquad \log_a b=\frac{1}{\log_b a},b\neq 1;\qquad \log_{a^\alpha} b=\frac{1}{\alpha}\log_a b,\ \alpha\neq 0$$

Ví dụ.

a) Tính $\log_{36}2-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{6}}3$;

b)Cho $\log_2 3=a;\log_3 5=b;\log_7 2=c$. Tính $\log_{63}50$

V. LOGARIT THẬP PHÂN. LOGARIT TỰ NHIÊN

1. Lôgarit thập phân

Lôgarit thập phân là logarit cơ số 10 của một số dương x được gọi là logarit thập phân của x và được kí hiệu là $\log x$ hoặc $\lg$.

Một ứng dụng quan trong của logarit thập phân trong các bài toán Casio

Rõ ràng khi $x=10^n$ thì $\log x=n$. Còn với số $x\geq 1$ tùy ý, viết x trong hệ thập phân thì số các chữ số đứng trước dấu phẩy của x là $n+1$, trong đó n là phần nguyên của $\log x$, kí hiệu $n=[\log x]$.

Thật vậy, vì 10^n là số tự nhiên bé nhất có $n+1$ chữ số nên số các chữ số đứng trước dấu phẩy của x bằng $n+1$ khi và chỉ khi $10^n\leq x<10^{n+1}$, tức là $n\leq\log x<n+1$; điều này chứng tỏ $n=[\log x]$.

Ví dụ: Để tìm số các chữ số của 2^{2008} khi viết trong hệ thập phân người ta lấy giá trị gần đúng của $\log 2$ là $0,3010$ và ta được

$[2008.\log 2]+1=[2008.0,3010]+1=605$. Vậy số 2^{2008} có 605 chữ số.

2. Lôgarit tự nhiên: Lôgarit tự nhiên là lôgarit cơ số e. Kí hiệu $\log_e b=\ln b$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tính toán về logarit

1. Phương pháp

- Nắm và sử dụn thành thạo các công thưc
- Có thể sử dụng máy tính cầm tay gán vào các ô nhớ và thử đáp án

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho $0 < a \neq 1$. Tính giá trị của biểul thức $a^{\log_{\sqrt{a}} 4}$.

Lời giải.

$a^{\log_{\sqrt{a}} 4} = a^{2\log_a 4} = a^{\log_a 4^2} = 4^2 = 16.$

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức $P = \log_a b^2 + 2\log_{a^2} b^4 + 3\log_{a^3} b^6 - 4\log_{a^4} b^8$.

Lời giải.

$P = \log_a b^2 + 2\log_{a^2} b^4 + 3\log_{a^3} b^6 - 4\log_{a^4} b^8 = 2\log_a b + 4\log_a b + 6\log_a b - 8\log_a b = 4\log_a b.$

Ví dụ 3: Cho hai số thực dương a,b và $a \neq 1$ thỏa mãn $\log_2 a = \frac{b}{4}, \log_a b = \frac{16}{b}$. Tính ab?

Hướng dẫn giải

Ta có: $\log_2 a.\log_a b = \frac{b}{4}.\frac{16}{b} \Leftrightarrow \log_2 b = 4 \Leftrightarrow b = 2^4 \Leftrightarrow b = 16$

$\Rightarrow \log_2 a = 4 \Leftrightarrow a = 16 \Rightarrow a.b = 16^2 \Leftrightarrow ab = 256$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2 a = x$, $\log_2 b = y$. Tính $P = \log_2\left(a^2 b^3\right)$.

A. $P = x^2 y^3$ **B.** $P = x^2 + y^3$ **C.** $P = 6xy$ **D.** $P = 2x + 3y$

Lời giải

Chọn D

$P = \log_2\left(a^2 b^3\right) = \log_2 a^2 + \log_2 b^3 = 2\log_2 a + 3\log_2 b = 2x + 3y$.

Câu 2: Cho $a,b > 0$ và $a,b \neq 1$, biểu thức $P = \log_{\sqrt{a}} b^3.\log_b a^4$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 18. **B.** 24. **C.** 12. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

$P=\log_{\sqrt{a}} b^3.\log_b a^4=(6\log_a b).(4\log_b a)=24$.

Câu 3: Cho b là số thực dương khác 1. Tính $P=\log_b\left(b^2.b^{\frac{1}{2}}\right)$.

A. $P=\frac{3}{2}$. **B.** $P=1$. **C.** $P=\frac{5}{2}$. **D.** $P=\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $P=\log_b\left(b^2.b^{\frac{1}{2}}\right)=\log_b b^{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}\log_b b=\frac{5}{2}$.

Câu 4: Cho $a>0$, $a\neq 1$. Biểu thức $a^{\log_a a^2}$ bằng

A. $2a$. **B.** 2. **C.** 2^a. **D.** a^2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $a^{\log_a a^2}=a^{2\log_a a}=a^2$.

Câu 5: Giá trị biểu thức $A=2^{\log_4 9+\log_2 5}$ là:

A. $A=8$. **B.** $A=15$. **C.** $A=405$. **D.** $A=86$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $A=2^{\log_4 9+\log_2 5}=2^{\log_4 9}.2^{\log_2 5}=2^{\log_2 3}.2^{\log_2 5}=3.5=15$.

Câu 6: Cho $a>0, a\neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_{\sqrt[3]{a}}\left(\frac{1}{a^3}\right)$

A. $P=-9$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=1$. **D.** $P=9$.

Lời giải

Chọn A

• **Tự luận :** $P=\log_{\sqrt[3]{a}}\left(\frac{1}{a^3}\right)=\log_{a^{\frac{1}{3}}} a^{-3}=-9\log_a a=-9$

• **Trắc nghiệm :** Sử dụng máy tính, thay $a=2$ rồi nhập biểu thức $\log_{\sqrt[3]{a}}\left(\frac{1}{a^3}\right)$ vào máy bấm = ta được kết quả $P=-9$.

Câu 7: Cho a là số thực dương khác 2. Tính $I=\log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a^2}{4}\right)$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=-\frac{1}{2}$. **C.** $I=2$. **D.** $I=-2$.

Lời giải

Chọn C

$I=\log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a^2}{4}\right)=\log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)^2=2\log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)=2$.

Câu 8: Cho a là số thực dương và b là số thực khác 0. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $\log_3\left(\frac{3a^3}{b^2}\right)=1+\frac{1}{3}\log_3 a-2\log_3|b|$.

B. $\log_3\left(\frac{3a^3}{b^2}\right)=1+3\log_3 a-2\log_3 b$.

C. $\log_3\left(\frac{3a^3}{b^2}\right)=1+3\log_3 a-2\log_3|b|$.

D. $\log_3\left(\frac{3a^3}{b^2}\right)=1+3\log_3 a+2\log_3 b$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_3\left(\frac{3a^3}{b^2}\right)=\log_3\left(3a^3\right)-\log_3 b^2=\log_3 3+\log_3 a^3-\log_3 b$.

$=\log_3 3+\log_3 a^3-\log_3 b=1+3\log_3 a-2\log_3|b|$.

Câu 9: Cho $\log 3=a$. Tính $\log 9000$ theo a.

A. $6a$ **B.** a^2+3. **C.** $3a^2$. **D.** $2a+3$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: $\log 9000=\log 9+\log 1000=2\log 3+3=2a+3$.

Cách 2: Gán $\log 3=a$. Tính $\log 9000-(2a+3)=0$.

Câu 10: Cho $\log_6 9=a$. Tính $\log_3 2$ theo a

A. $\frac{a}{2-a}$. **B.** $\frac{a+2}{a}$. **C.** $\frac{a-2}{a}$. **D.** $\frac{2-a}{a}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_6 9=2\log_{2.3}3\Leftrightarrow a=\frac{2}{\log_3 2.3}\Leftrightarrow\log_3 2+1=\frac{2}{a}\Leftrightarrow\log_3 2=\frac{2-a}{a}$.

Câu 11: Cho $a,b>0$. Rút gọn biểu thức $\log_a b^2+\log_{a^2} b^4$

A. $2\log_a b$ **B.** 0 **C.** $\log_a b$ **D.** $4\log_a b$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_a b^2+\log_{a^2} b^4=2\log_a b+\frac{1}{2}.4.\log_a b=4\log_a b$.

Câu 12: Cho $\log_a x=2$, $\log_b x=3$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P=\log_{\frac{a}{b^2}} x$.

A. 6. **B.** -6. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{-1}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Vì a, b là các số thực lớn hơn 1 nên ta có:

$$\begin{cases}\log_a x=2\\ \log_b x=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=a^2\\ x=b^3\end{cases}\Leftrightarrow a^2=b^3\Leftrightarrow a=\sqrt{b^3}\Leftrightarrow a=b^{\frac{3}{2}}.$$

$$P=\log_{\frac{a}{b^2}} x=\log_{\frac{b^{\frac{3}{2}}}{b^2}} x=\log_{b^{\frac{-1}{2}}} x=-2\log_b x=-6.$$

Câu 13: Đặt $a=\log_2 3$ và $b=\log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b.

A. $\log_6 45=\frac{a+2ab}{ab+b}$. **B.** $\log_6 45=\frac{2a^2-2ab}{ab}$.

C. $\log_6 45=\frac{a+2ab}{ab}$. **D.** $\log_6 45=\frac{2a^2-2ab}{ab+b}$.

Lời giải

Chọn A

$$\log_6 45=\frac{\log_3\left(5.3^2\right)}{\log_3\left(2.3\right)}=\frac{\log_3 5+2}{\log_3 2+1}=\frac{\frac{1}{b}+2}{\frac{1}{a}+1}=\frac{a+2ab}{ab+b}.$$

Câu 14: Cho 2 số thực dương a, b thỏa mãn $\sqrt{a}\neq b$, $a\neq 1$, $\log_a b=2$. Tính $T=\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}\sqrt[3]{ba}$.

A. $T=-\frac{2}{5}$. **B.** $T=\frac{2}{5}$. **C.** $T=\frac{2}{3}$. **D.** $T=-\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_a b=2\Rightarrow\log_b a=\frac{1}{2}$.

$$T=\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}\sqrt[3]{ba}=\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}\sqrt[3]{b}+\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}\sqrt[3]{a}=\frac{1}{\log_{\sqrt[3]{b}}\frac{\sqrt{a}}{b}}+\frac{1}{\log_{\sqrt[3]{a}}\frac{\sqrt{a}}{b}}.$$

$$=\frac{1}{\log_{\sqrt[3]{b}}\sqrt{a}-\log_{\sqrt[3]{b}} b}+\frac{1}{\log_{\sqrt[3]{a}}\sqrt{a}-\log_{\sqrt[3]{a}} b}=\frac{1}{\frac{3}{2}\log_b a-3}+\frac{1}{\frac{3}{2}-3\log_a b}.$$

$$=\frac{1}{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}-3}+\frac{1}{\frac{3}{2}-3.2}=-\frac{2}{3}.$$

Câu 15: Với $a=\log_2 5$ và $b=\log_3 5$, giá trị của $\log_6 5$ bằng

A. $\frac{ab}{a+b}$. **B.** $\frac{a+b}{ab}$. **C.** $\frac{1}{a+b}$. **D.** $a+b$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_6 5=\frac{1}{\log_5 6}=\frac{1}{\log_5 2+\log_5 3}=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{1}{\log_5 2+\log_5 3}=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{ab}{a+b}$.

Câu 16: Biết $\log\left(xy^3\right)=1$ và $\log\left(x^2y\right)=1$, tìm $\log(xy)$?

A. $\log(xy)=\frac{5}{3}$. **B.** $\log(xy)=\frac{1}{2}$. **C.** $\log(xy)=\frac{3}{5}$. **D.** $\log(xy)=1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log\left(xy^3\right)=1\Leftrightarrow\log(xy)+2\log y=1$, $\log\left(x^2y\right)=1\Leftrightarrow\log(xy)+\log x=1$

Vậy $\log x=2\log y\Leftrightarrow x=y^2$

Xét $\log\left(xy^3\right)=1\Leftrightarrow\log\left(y^2y^3\right)=1\Leftrightarrow 5\log y=1\Leftrightarrow y=10^{\frac{1}{5}}$

Vậy $\log(xy)=\log\left(y^3\right)=\log\left(10^{\frac{3}{5}}\right)=\frac{3}{5}$

Câu 17: Tính giá trị của biểu thức $P=\log_{a^2}\left(a^{10}b^2\right)+\log_{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)+\log_{\sqrt[3]{b}}b^{-2}$ (với $0<a\neq 1;0<b\neq 1$).

A. $P=2$. **B.** $P=1$. **C.** $P=\sqrt{3}$. **D.** $P=\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Sử dụng các quy tắc biến đổi logarit

$P=\log_{a^2}\left(a^{10}b^2\right)+\log_{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)+\log_{\sqrt[3]{b}}b^{-2}$

$=\frac{1}{2}\left[\log_a a^{10}+\log_a b^2\right]+2\left[\log_a a-\log_a\sqrt{b}\right]+3.(-2)\log_b b$.

$=\frac{1}{2}\left[10+2\log_a b\right]+2\left[1-\frac{1}{2}\log_a b\right]-6=1$.

Câu 18: Biết $\log_{27}5=a$, $\log_8 7=b$, $\log_2 3=c$ thì $\log_{12}35$ tính theo a, b, c bằng:

A. $\frac{3(b+ac)}{c+2}$. **B.** $\frac{3b+2ac}{c+1}$. **C.** $\frac{3b+2ac}{c+2}$. **D.** $\frac{3(b+ac)}{c+1}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_{27} 5 = \frac{1}{3}\log_3 5 = a \Leftrightarrow \log_3 5 = 3a$, $\log_8 7 = \frac{1}{3}\log_2 7 = b \Leftrightarrow \log_2 7 = 3b$.

Mà $\log_{12} 35 = \frac{\log_2(7.5)}{\log_2(3.2^2)} = \frac{\log_2 7 + \log_2 5}{\log_2 3 + 2} = \frac{\log_2 7 + \log_2 3.\log_3 5}{\log_2 3 + 2} = \frac{3b + c.3a}{c+2} = \frac{3(b+ac)}{c+2}$.

Câu 19: Cho $a, b > 0$, nếu $\log_8 a + \log_4 b^2 = 5$ và $\log_4 a^2 + \log_8 b = 7$ thì giá trị của ab bằng

A. 2^9. **B.** 8. **C.** 2^{18}. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\begin{cases} \log_8 a + \log_4 b^2 = 5 \\ \log_4 a^2 + \log_8 b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}\log_2 a + \log_2 b = 5 \\ \log_2 a + \frac{1}{3}\log_2 b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 a = 6 \\ \log_2 b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^6 \\ b = 2^3 \end{cases}$.

Vậy $ab = 2^9$.

Dạng 2. So sánh hai số logarit

1. Phương pháp

- Nếu $a > 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$
- Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Số nào trong các số sau lớn hơn 1

A. $\log_{0,5} \frac{1}{8}$. **B.** $\log_{0,2} 125$. **C.** $\log_{\frac{1}{6}} 36$. **D.** $\log_{0,5} \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$\log_{0,5} \frac{1}{8} = \log_{2^{-1}} 2^{-3} = 3 > 1$, $\log_{0,2} 125 = \log_{5^{-1}} 5^3 = -3 < 1$.

$\log_{\frac{1}{6}} 36 = \log_{6^{-1}} 6^2 = -2 < 1$, $\log_{0,5} \frac{1}{2} = \log_{0,5} 0,5 = 1$.

Câu 2: .Cho a, b là các số thực, thỏa mãn $0 < a < 1 < b$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_b a + \log_a b < 0$. **B.** $\log_b a > 1$.

C. $\log_a b > 0$. **D.** $\log_a b + \log_b a \geq 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Vì $0<a<1<b$ nên $\log_b a<\log_b 1\Leftrightarrow \log_b a<0$ và $\log_a b<\log_a 1\Leftrightarrow \log_a b<0$.

Suy ra : $\log_b a+\log_a b<0$.

Câu 3: Cho các số thực a, b thỏa mãn $1<a<b$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\dfrac{1}{\log_a b}<1<\dfrac{1}{\log_b a}$.

B. $\dfrac{1}{\log_b a}<1<\dfrac{1}{\log_a b}$.

C. $1<\dfrac{1}{\log_a b}<\dfrac{1}{\log_b a}$.

D. $\dfrac{1}{\log_a b}<\dfrac{1}{\log_b a}<1$.

Lời giải

Chọn A

Vì $1<a<b$ nên ta có $\log_b a<\log_b b\Leftrightarrow \log_b a<1$ và $\log_a a<\log_a b\Leftrightarrow 1<\log_a b$.

Do đó $\log_b a<1<\log_a b\Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_a b}<1<\dfrac{1}{\log_b a}$.

Câu 4: Cho $0<a<b<1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_b a>\log_a b$.

B. $\log_b a<\log_a b$.

C. $\log_a b>1$.

D. $\log_a b<0$.

Lời giải

Chọn A

Do $0<a<1$ nên hàm số $y=\log_a x$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Đáp án B sai, vì: Với $b<1\Rightarrow \log_a b>\log_a 1\Leftrightarrow \log_a b>0$.

Đáp án D sai, vì: Với $a<b\Rightarrow \log_a a>\log_a b\Leftrightarrow \log_a b<1$.

Với $0<a<b<1$ ta có $0<\log_a b<1$.

Đáp án C sai, vì: Nếu $\log_b a<\log_a b\Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_a b}<\log_a b\Leftrightarrow (\log_a b)^2>1$ (vô lí).

Đáp án A đúng, vì: Nếu $\log_b a>\log_a b\Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_a b}>\log_a b\Leftrightarrow (\log_a b)^2<1$ (luôn đúng).

Câu 5: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\log_3 5>0$.

B. $\log_{2+x^2} 2016<\log_{2+x^2} 2017$.

C. $\log_{0,3} 0,8<0$.

D. $\log_3 4>\log_4\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_{0,3} 0,8<0\Leftrightarrow 0,8>0,3^0\Leftrightarrow 0,8>1$ (sai)

Câu 6: Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\log_3 \pi = 1$. **B.** $\ln 3 < \log_3 e$. **C.** $\log_3 5 > \log_7 4$. **D.** $\log_{\frac{1}{2}} 2 > 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_3 5 > \log_3 3 \Rightarrow \log_3 5 > 1$

$\log_7 4 < \log_7 7 \Rightarrow \log_7 4 < 1$

Vậy: $\log_3 5 > \log_7 4$.

Câu 7: Cho a, b là các số thực thỏa mãn $0 < a < b < 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $\log_b a < 0$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = -2$. **D.** $\log_a b > 1$.

Lời giải

Chọn B

Vì $0 < a < b < 1$ nên

❍ $\log_b a > \log_b b = 1 \Rightarrow$ A sai.

❍ $\Leftrightarrow x + 2y + 5z - 5 = 0 \Rightarrow \log_b a > \log_a b \Rightarrow$ B đúng, C sai.

❍ $\log_a a > \log_a b \Leftrightarrow \log_a b < 1 \Rightarrow$ D sai.

Câu 8: Cho hai số thực a,b thỏa mãn điều kiện $0 < a < b < 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $1 < \log_a b < \log_b a$. **B.** $\log_a b < 1 < \log_b a$.

C. $1 < \log_b a < \log_a b$. **D.** $\log_b a < 1 < \log_a b$.

Lời giải

Chọn B

Do $0 < a < 1$ nên với $a < b$ ta có: $1 = \log_a a > \log_a b \Rightarrow \log_a b < 1$.

Tương tự do $0 < b < 1$ nên với $a < b$ ta có: $\log_b a > \log_b b = 1$.

Vậy $\log_a b < 1 < \log_b a$.

Câu 11: Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Nếu $0 < a < b$ thì $\log_{\frac{e}{2}} a < \log_{\frac{e}{2}} b$. **B.** Nếu $0 < a < b$ thì $\log a < \log b$.

C. Nếu $0 < a < b$ thì $\ln a < \ln b$. **D.** Nếu $0 < a < b$ thì $\log_{\frac{\pi}{4}} a < \log_{\frac{\pi}{4}} b$.

Lời giải

Chọn D

Nếu $0 < a < b$ thì $\log_{\frac{\pi}{4}} a > \log_{\frac{\pi}{4}} b$ do $\frac{\pi}{4} < 1$.

Câu 12: Gọi $a = 3^{\log_{0,5} 4}; b = 3^{\log_{0,5} 13}$, khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $a<1<b$. **B.** $b<a<1$. **C.** $a<b<1$. **D.** $b<1<a$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $a=3^{\log_{0,5}4}<3^{\log_{0,5}1}=1$, $b=3^{\log_{0,5}13}<3^{\log_{0,5}1}=1$ (1)

Lại có $3^{\log_{0,5}13}<3^{\log_{0,5}4}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow b<a<1$

Dạng 3 : Đẳng thức logarit

Câu 1: Giả sử x, y là các số thực dương. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\log_2 xy=\log_2 x+\log_2 y$ **B.** $\log_2\sqrt{xy}=\frac{1}{2}\left(\log_2 x+\log_2 y\right)$

C. $\log_2\frac{x}{y}=\log_2 x-\log_2 y$ **D.** $\log_2\left(x+y\right)=\log_2 x+\log_2 y$

Lời giải

Chọn D

Do $\log_2 x+\log_2 y=\log_2\left(xy\right)$.

Câu 2: Cho hai số thực dương a và b, với $a\neq 1$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $\log_{a^2}\left(ab\right)=2+2\log_a b$. **B.** $\log_{a^2}\left(ab\right)=\frac{1}{2}\log_a b$.

C. $\log_{a^2}\left(ab\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_a b$. **D.** $\log_{a^2}\left(ab\right)=\frac{1}{4}\log_a b$.

Lời giải

Chọn C

Với $a,\ b>0$ và $a\neq 1$, ta có

$\log_{a^2}\left(ab\right)=\frac{1}{2}\log_a\left(ab\right)=\frac{1}{2}\left(\log_a a+\log_a b\right)=\frac{1}{2}\left(1+\log_a b\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_a b..$

Câu 3: Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\ln\left(ab\right)=\ln a+\ln b$. **B.** $\ln\frac{a}{b}=\ln b-\ln a$. **C.** $\ln\left(ab\right)=\ln a.\ln b$. **D.** $\ln\frac{a}{b}=\frac{\ln a}{\ln b}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 4: Cho các số thực dương a, b, c khác 1. Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây.

A. $\log_a\frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$. **B.** $\log_a b=\frac{\log_c a}{\log_c b}$.

C. $\log_a\left(bc\right)=\log_a b+\log_a c$. **D.** $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Lời giải

Chọn B

Với các số thực dương a, b, c khác 1, ta có

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ nên A đúng.

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ nên B sai và D đúng.

$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$ nên C đúng.

Câu 5: Giả sử ta có hệ thức $a^2 + b^2 = 7ab$ $(a, b > 0)$. Hệ thức nào sau đây là đúng?

A. $2\log_2(a+b) = \log_2 a + \log_2 b.$

B. $2\log_2 \frac{a+b}{3} = \log_2 a + \log_2 b.$

C. $\log_2 \frac{a+b}{3} = 2(\log_2 a + \log_2 b).$

D. $4\log_2 \frac{a+b}{6} = \log_2 a + \log_2 b.$

Lời giải

Chọn B

+)

$2\log_2(a+b) = \log_2 a + \log_2 b \Leftrightarrow \log_2 (a+b)^2 = \log_2 ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 = -ab$

+) $2\log_2 \frac{a+b}{3} = \log_2 a + \log_2 b \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 9ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 7ab$.

Câu 6: Cho a, b là các số thực dương thoả mãn $a^2 + b^2 = 14ab$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\ln \frac{a+b}{4} = \frac{\ln a + \ln b}{2}$.

B. $2\log_2(a+b) = 4 + \log_2 a + \log_2 b$.

C. $2\log_4(a+b) = 4 + \log_2 a + \log_2 b$.

D. $2\log \frac{a+b}{4} = \log a + \log b$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $a^2 + b^2 = 14ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 16ab \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{4}\right) ab$

Nên ta có $\ln \frac{a+b}{4} = \ln \sqrt{ab} = \frac{\ln a + \ln b}{2}$ vậy A

đúng $2\log_2(a+b) = \log_2 (a+b)^2 = \log_2 (16ab) = 4 + \log_2 a + \log_2 b$ vậy B đúng

$2\log_4(a+b) = \log_4 (a+b)^2 = \log_4 (16ab) = 2 + \log_4 a + \log_4 b$ vậy C sai

$2\log \frac{a+b}{4} = \log_2 a + \log_2 b$ vậy D đúng

Cách 2:.

Câu này ý **C** sai vì $2\log_4(a+b) = 4 + \log_4 a + \log_4 b \Leftrightarrow \log_4 (a+b)^2 = 4\log_4 4 + \log_4 ab$

$\Leftrightarrow \log_4 (a+b)^2 = \log_4 4^4 + \log_4 ab = \log_4 64ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 64ab$.

Câu 7: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $3\log a + 2\log b = 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng.

A. $a^3 + b^2 = 1$. **B.** $3a + 2b = 10$. **C.** $a^3 b^2 = 10$. **D.** $a^3 + b^2 = 10$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3\log a + 2\log b = 1 \Leftrightarrow \log a^3 + \log b^2 = 1 \Leftrightarrow \log\left(a^3 b^2\right) = 1 \Leftrightarrow a^3 b^2 = 10$.

Câu 8: Với các số thực dương a, b bất kỳ. Mệnh đề nào dưới đây **sai?**

A. $\log_2 \frac{9a^2}{b^3} = 2 + 2\log_2 a - 3\log_2 b$.

B. $\ln \frac{9a^2}{b^3} = 2\ln 3 + 2\ln a - 3\ln b$.

C. $\log \frac{9a^2}{b^3} = 2\log 3 + 2\log a - 3\log b$.

D. $\log_3 \frac{9a^2}{b^3} = 2 + 2\log_3 a - 3\log_3 b$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Nhận thấy $\log_2 \frac{9a^2}{b^3} = \log_2 \left(9a^2\right) - \log_2 b^3$

$= \log_2 9 + \log_2 a^2 - \log_2 b^3 = 2\log_2 3 + 2\log_2 a - 3\log_2 b$

Vậy B, C, D đúng.

Câu 9: Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. **B.** $\ln \frac{a}{b} = \ln b - \ln a$. **C.** $\ln(ab) = \ln a . \ln b$. **D.** $\ln \frac{a}{b} = \frac{\ln a}{\ln b}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 10: Cho các số thực dương a, b, c khác 1. Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây.

A. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

B. $\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b}$.

C. $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$.

D. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Lời giải

Chọn B

Với các số thực dương a, b, c khác 1, ta có

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ nên A đúng.

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ nên B sai và D đúng.

$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$ nên C đúng.

Câu 11: Cho $P=\log_{a^4} b^2$ với $0<a\neq 1$ và $b<0$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $P=-2\log_a(-b)$. **B.** $P=2\log_a(-b)$.

C. $P=-\frac{1}{2}\log_a(-b)$. **D.** $P=\frac{1}{2}\log_a(-b)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P=\log_{a^4} b^2=2.\frac{1}{4}\log_{|a|}|b|=\frac{1}{2}\log_a(-b)$ (Do $0<a\neq 1$ và $b<0$).

Câu 12: Cho $a>0$, $b>0$ và $a^2+b^2=7ab$. Chọn mệnh đề đúng.

A. $2(\ln a+\ln b)=\ln(7ab)$. **B.** $3\ln(a+b)=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)$.

C. $\ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)$. **D.** $\ln(a+b)=\frac{3}{2}(\ln a+\ln b)$.

Lời giải

Chọn C

Với $a>0$, $b>0$, ta có $a^2+b^2=7ab\Leftrightarrow(a+b)^2=9ab$

$\Leftrightarrow\left(\frac{a+b}{3}\right)^2=ab\Leftrightarrow\ln\left(\frac{a+b}{3}\right)^2=\ln(ab)$

$\Leftrightarrow 2\ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=\ln a+\ln b\Leftrightarrow\ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)$.

Câu 13: Cho các số $a,b>0$ thỏa mãn $a^2+b^2=14ab$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\log_{\sqrt{2}}(a+b)=4+\log_2 a+\log_2 b$. **B.** $\log_2(a+b)^2=4(\log_2 a+\log_2 b)$.

C. $\log_2\left(\frac{a+b}{4}\right)=2(\log_2 a+\log_2 b)$. **D.** $\log_2\left(\frac{a+b}{16}\right)=\frac{1}{2}(\log_2 a+\log_2 b)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $a^2+b^2=14ab\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab=16ab\Leftrightarrow(a+b)^2=16ab\Leftrightarrow\left(\frac{a+b}{4}\right)^2=ab$.

$\Rightarrow\log_2\left(\frac{a+b}{4}\right)^2=\log_2 ab\Leftrightarrow 2\log_2(a+b)-2\log_2 4=\log_2 a+\log_2 b$.

$\Leftrightarrow\log_{\sqrt{2}}(a+b)=4+\log_2 a+\log_2 b$.

Câu 14: Cho $\log_{\frac{1}{4}}(y-x)-\log_4\frac{1}{y}=1$, với $y>0, y>x$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $3x=4y$. **B.** $x=3y$. **C.** $x=\frac{3}{4}y$. **D.** $y=\frac{3}{4}x$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$\log_{\frac{1}{4}}(y-x)-\log_4\frac{1}{y}=1\Leftrightarrow-\log_4(y-x)+\log_4 y=1\Leftrightarrow\log_4 y=1+\log_4(y-x)$

$\Leftrightarrow\log_4 y=\log_4 4.(y-x)\Leftrightarrow y=4(y-x)\Leftrightarrow x=\frac{3}{4}y$.

Câu 15: Với mọi số thực dương a và b thỏa mãn $a^2+b^2=8ab$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log(a+b)=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$.

B. $\log(a+b)=1+\log a+\log b$.

C. $\log(a+b)=\frac{1}{2}(1+\log a+\log b)$.

D. $\log(a+b)=\frac{1}{2}+\log a+\log b$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $a^2+b^2=8ab\Leftrightarrow(a+b)^2-2ab=8ab\Leftrightarrow(a+b)^2=10ab$.

Hay ta có

$\log(a+b)^2=\log 10ab\Leftrightarrow 2\log(a+b)=1+\log a+\log b$

$\Leftrightarrow\log(a+b)=\frac{1}{2}(1+\log a+\log b)$.

Câu 16: Cho $\log_2(x^2+y^2)=1+\log_2 xy$, với $xy>0$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $x>y$.

B. $x<y$.

C. $x=y$.

D. $x=y^2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$\log_2(x^2+y^2)=1+\log_2 xy\Leftrightarrow\log_2(x^2+y^2)=\log_2 2xy\Leftrightarrow x^2+y^2=2xy\Leftrightarrow(x-y)^2=0$

$\Leftrightarrow x=y$.

Câu 17: Cho $\log_a x=2,\log_b x=3$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P=\log_{\frac{a}{b^2}} x$.

A. $P=-6$.

B. $P=\frac{1}{6}$.

C. $P=-\frac{1}{6}$.

D. $P=6$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: $\log_a x=2,\log_b x=3\Rightarrow x=a^2=b^3\Rightarrow a=b^{\frac{3}{2}}\Rightarrow\frac{a}{b^2}=\frac{b^{\frac{3}{2}}}{b^2}=b^{\frac{-1}{2}}$.

Do đó $P=\log_{\frac{a}{b^2}} x=\log_{b^{\frac{-1}{2}}} x=-2\log_b x=-2.3=-6$.

Cách 2: $\log_a x = 2 \Rightarrow x = a^2 > 1$. $\log_a x = 2, \log_b x = 3 \Rightarrow \log_x a = \frac{1}{2}$, $\log_x b = \frac{1}{3}$.

Khi đó $P = \log_{\frac{a}{b^2}} x = \frac{1}{\log_x \frac{a}{b^2}} = \frac{1}{\log_x a - 2\log_x b} = \frac{1}{\frac{1}{2} - 2.\frac{1}{3}} = -6$.

Câu 18: Với các số thực a, $b > 0$ bất kì, rút gọn biểu thức $P = 2\log_2 a - \log_{\frac{1}{2}} b^2$ ta được

A. $P = \log_2 \left(2ab^2\right)$.

B. $P = \log_2 \left(ab\right)^2$.

C. $P = \log_2 \left(\frac{a}{b}\right)^2$.

D. $P = \log_2 \left(\frac{2a}{b^2}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $P = 2\log_2 a - \log_{\frac{1}{2}} b^2 = \log_2 a^2 + \log_2 b^2 = \log_2 \left(ab\right)^2$.

$P = \sqrt{2014}$.

Câu 19: Với các số thực dương a, b bất kì, đặt $M = \left(\frac{a^{10}}{\sqrt[3]{b^5}}\right)^{-0,3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log M = -3\log a + \frac{1}{2}\log b$.

B. $\log M = -3\log a - \frac{1}{2}\log b$.

C. $\log M = -3\log a + 2\log b$.

D. $\log M = 3\log a + 2\log b$.

Hướngdẫngiải

Chọn A.

$$M = \left(\frac{a^{10}}{\sqrt[3]{b^5}}\right)^{-0,3} = \left(\frac{a^{10}}{b^{\frac{5}{3}}}\right)^{-0,3} = \frac{a^{-3}}{b^{-0,5}}$$

$$\Rightarrow \log M = \log\left(\frac{a^{-3}}{b^{-0,5}}\right) = \log a^{-3} - \log b^{-0,5} = -3\log a + \frac{1}{2}\log b$$

Câu 20: Cho $a, b > 0, a \neq 1, ab \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**.

A. $\log_{ab} a = \frac{1}{1 + \log_a b}$.

B. $\log_a \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(1 + \log_a b)$.

C. $\log_{a^2} \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{1}{4}\left(1 - \log_a b\right)$.

D. $\log_{\sqrt{a}}(ab^2) = 4(1 + \log_a b)$.

Lời giải

Chọn C

$\log_{ab} a = \dfrac{1}{\log_a ab} = \dfrac{1}{\log_a a + \log_a b} = \dfrac{1}{1+\log_a b}$.

$\log_a \sqrt{ab} = \log_a (ab)\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}(1+\log_a b)$.

$\log_{a^2} \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{1}{2}\log_a \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{4}\left(\log_a a - \log_a b\right) = \dfrac{1}{4}\left(1-\log_a b\right)$

Câu 21: Cho các số thực dương a, x, y, a khác 1. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\log x = \dfrac{\log_a x}{\log_a 10}$. **B.** $\log x = \dfrac{\log_a x}{\log_a \mathrm{e}}$.

C. $\log x = \dfrac{\log_a x}{\ln 10}$. **D.** $\log x = \dfrac{\log_x a}{\log a}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log x = \dfrac{\log_a x}{\log_a 10}$.

Dạng 4 : Bài tập dành cho học sinh 8+, 9+

Câu 1: Cho $\log_a (bc) = 2, \log_b (ca) = 3$. Tính $S = \log_c (ab)$.

A. $S = \dfrac{7}{5}$. **B.** $S = \dfrac{7}{6}$. **C.** $S = \dfrac{5}{7}$. **D.** $S = \dfrac{6}{7}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $x = \log_c a, y = \log_c b$.

Ta có $\log_a (bc) = 2 \Leftrightarrow \log_a b + \log_a c = 2 \Leftrightarrow \dfrac{\log_c b}{\log_c a} + \dfrac{1}{\log_c a} = 2 \Rightarrow \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{x} = 2$.

$\log_b (ca) = 3 \Leftrightarrow \log_b c + \log_b a = 3 \Leftrightarrow \dfrac{\log_c a}{\log_c b} + \dfrac{1}{\log_c b} = 3 \Rightarrow \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y} = 3$.

Do đó ta có hệ $\begin{cases} \dfrac{y+1}{x} = 2 \\ \dfrac{x+1}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+1 = 2x \\ x+1 = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{5} \\ y = \dfrac{3}{5} \end{cases}$.

Thay vào $S = \log_c (ab) = \log_c a + \log_c b = \dfrac{7}{5}$.

Câu 2: Cho các số thực dương a, b khác 1 và số thực dương x thỏa mãn $\log_a (\log_b x) = \log_b (\log_a x)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\log_a x = b^{\log_{\frac{b}{a}}(\log_a b)}$. **B.** $\log_a x = a^{\log_{\frac{b}{a}}(\log_a b)}$.

C. $\log_a x = b^{\log_{\frac{a}{b}}(\log_a b)}$. **D.** $\log_a x = a^{\log_{\frac{a}{b}}(\log_a b)}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $\log_a\left(\log_b x\right) = \log_b\left(\log_a x\right) = k \Leftrightarrow \begin{cases} \log_b x = a^k \\ \log_a x = b^k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = b^{a^k} \\ x = a^{b^k} \end{cases}$

$\Rightarrow b^{a^k} = a^{b^k} = a^k \log_a b \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^k = \log_a b \Leftrightarrow k = \log_{\frac{b}{a}}\left(\log_a b\right) \Rightarrow \log_a x = b^{\log_{\frac{b}{a}}(\log_a b)}$

Câu 3: Cho các số thực dương x,y,z,t,a,b,c thỏa mãn $\frac{\ln x}{a} = \frac{\ln y}{b} = \frac{\ln z}{c} = \ln t$ và $x.y = z^2.t^2$.

Tính $S = a + b - 2c$

A. $S = 4$. **B.** $S = \frac{1}{2}$. **C.** $S = -2$. **D.** $S = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $\begin{cases} \ln x = \ln t^a \Leftrightarrow x = t^a \\ \ln y = \ln t^b \Leftrightarrow y = t^b \\ \ln z = \ln t^c \Leftrightarrow z = t^c \end{cases}$

Do đó $xy = z^2t^2 \Leftrightarrow t^a t^b = \left(t^c t\right)^2 \Leftrightarrow t^{a+b} = t^{2(c+1)} \Leftrightarrow a + b = 2(c+1) \Rightarrow S = 2$

Câu 4: Cho hai số thực dương $x,y \neq 1$ thỏa mãn $\log_x y = \log_y x$ và $\log_x\left(x-y\right) = \log_y\left(x+y\right)$.

Tính giá trị biểu thức $S = x^4 - x^2 + 1$.

A. $S = 2$. **B.** $S = 3$. **C.** $S = 4$. **D.** $S = 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} x,y \neq 1 \\ x > y > 0 \end{cases}$. Ta có:

$\log_x y = \log_y x \Leftrightarrow \log_x y = \frac{1}{\log_x y} \Leftrightarrow \left(\log_x y\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_x y = 1 \text{ (L)} \\ \log_x y = -1 \text{ (TM)} \end{array}\right. \Leftrightarrow y = x^{-1} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$

.

Ta có: $\log_x\left(x-y\right)=\log_y\left(x+y\right)\Leftrightarrow\log_x\left(x-\frac{1}{x}\right)=-\log_x\left(x+\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow\log_x\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow x^2-\frac{1}{x^2}=1\Leftrightarrow x^4-x^2-1=0$. Vậy $S=x^4-x^2+1=1+1=2$.

Câu 5: Giá trị của tham số thực m để tồn tại duy nhất một cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\log_{2019}(x+y)\le 0$ và $x+y+\sqrt{2xy+m}\ge 1$ là

A. $m=\frac{-1}{2}$. **B.** $m=0$. **C.** $m=2$. **D.** $m=\frac{-1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

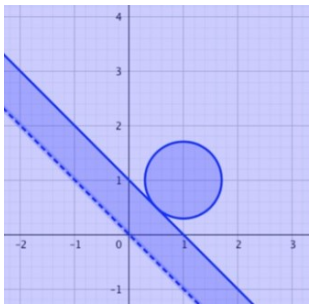
Theo đề

$$\begin{cases}\log_{2019}(x+y)\le 0\\ x+y+\sqrt{2xy+m}\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x+y\le 1\\ \sqrt{2xy+m}\ge 1-(x+y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x+y\le 1\\ 2xy+m\ge\left(1-(x+y)\right)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0<x+y\le 1\\ x^2+y^2-2x-2y+1-m\le 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y>0\\ x+y-1\le 0\\ (x-1)^2+(y-1)^2\le m+1\end{cases}$$

$YCBT\Leftrightarrow d(I;d)=R\Leftrightarrow\frac{|1+1-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{m+1}\Leftrightarrow m=\frac{-1}{2}$



Câu 6: Cho hàm số $f\left(x\right)=\log_2\frac{mx}{2-x}$ với m là số thực dương. Tìm giá trị thực của m, biết rằng với mọi số thực $a,b\in\left(0;2\right)$ thỏa mãn $a+b=2$ ta luôn có $f\left(a\right)+f\left(b\right)=3$.

A. $m=3$. **B.** $m=8$. **C.** $m=2\sqrt{2}$. **D.** $m=9$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $f\left(x\right)=\log_2\frac{mx}{2-x}=\log_2 m+\log_2\frac{x}{2-x}$

Do đó $f\left(a\right)+f\left(b\right)=f\left(a\right)+f\left(2-a\right)=\log_2 m+\log_2\frac{a}{2-a}+\log_2 m+\log_2\frac{2-a}{a}=2\log_2 m$

Theo giả thiết ta có: $f\left(a\right)+f\left(b\right)=3$ nên $2\log_2 m=3\Leftrightarrow m=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$.

Câu 7: Với mỗi cặp số thực $\left(x;y\right)$ thỏa mãn $\log_2\left(2x+y\right)=\log_4\left(x^2+xy+7y^2\right)$ có bao nhiêu số thực z thỏa mãn $\log_3\left(3x+y\right)=\log_9\left(3x^2+4xy+zy^2\right)$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $\begin{cases}\log_2(2x+y)=\log_4(x^2+xy+7y^2)\\ \log_3(3x+y)=\log_9(3x^2+4xy+zy^2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y>0,3x+y>0\\ \log_2(2x+y)^2=\log_2(x^2+xy+7y^2)\\ \log_3(3x+y)^2=\log_3(3x^2+4xy+zy^2)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y>0,3x+y>0\\ (2x+y)^2=x^2+xy+7y^2\\ (3x+y)^2=3x^2+4xy+zy^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y>0,3x+y>0\\ 3x^2+3xy-6y^2=0\\ z=\dfrac{6x^2+2xy+y^2}{y^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{y}=1;\dfrac{x}{y}=-2\\ z=9;z=21\end{cases}$.

Câu 8: Cho $\log_a bc=x,\log_b ca=y$ và $\log_c ab=\dfrac{mx+ny+2}{pxy-1}$, với m,n,p là các số nguyên. Tính $S=m+2n+3p$

A. $S=6$. **B.** $S=9$. **C.** $S=0$. **D.** $S=3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $\begin{cases}x=\log_a bc\\ y=\log_b ca\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\log_c bc}{\log_c a}\\ y=\dfrac{\log_c ca}{\log_c b}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\log_c a-\log_c b=1\\ \log_c a-y\log_c b=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_c a=\dfrac{y+1}{xy-1}\\ \log_c b=\dfrac{x+1}{xy-1}\end{cases}$.

Mặt khác, $\log_c ab=\log_c a+\log_c b=\dfrac{x+y+2}{xy-1}$. Do đó $\begin{cases}m=1\\ n=1\\ p=1\end{cases}\Rightarrow S=m+2n+3p=6$.

Câu 9: Cho $0<a\neq 1$ tìm số tự nhiên n thỏa mãn $\log_a 2019+2^2\log_{\sqrt{a}}2019+3^2\log_{\sqrt[3]{a}}2019+...+n^2\log_{\sqrt[n]{a}}2019=1008.2017^2\log_a 2019$

A. $n=2016$. **B.** $n=2019$. **C.** $n=2017$. **D.** $n=2020$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$\log_a 2019+2^3\log_a 2019+3^3\log_a 2019+...+n^3\log_a 2019=1008^2.2017^2\log_a 2019$

$\Leftrightarrow\left(1^3+2^3+3^3+...+n^3\right)\log_a 2019=1008^2.2017^2\log_a 2019$

$\Leftrightarrow\left(1^3+2^3+3^3+...+n^3\right)=1008^2.2017^2\Leftrightarrow\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2=1008^2.2017^2\Leftrightarrow n=2016$

Câu 10: Cho ba số thực dương a,b,c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân và $a+b+c=64$. Giá trị của biểu thức $P=3\log_2\left(ab+bc+ca\right)-\log_2\left(abc\right)$ bằng:

A. 18. **B.** 6. **C.** 24. **D.** 8

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $\begin{cases} ac=b^2 \\ abc=b^3 \\ ab+bc+ca=b\left(a+c\right)+ca=b\left(64-b\right)+b^2=64b \end{cases}$.

Do đó $P=3\log_2\left(64b\right)-\log_2 b^3=3\log_2 64=3.6=18$.

Câu 11: Cho 3 số $2017+\log_2 a;\ 2018+\log_3 a;\ 2019+\log_4 a;$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Công sai của cấp số cộng này bằng:

A. 1. **B.** 12. **C.** 9. **D.** 20.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Do 3 số $2017+\log_2 a;\ 2018+\log_3 a;\ 2019+\log_4 a;$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Suy ra $2017+\log_2 a+2019+\log_4 a=2\left(2018+\log_3 a\right)$

$\Leftrightarrow \log_2 a+\frac{1}{2}\log_2 a=2\log_3 a \Leftrightarrow 3\log_2 a=4\log_3 a \Leftrightarrow \log_2 a\left(3-4\log_3 2\right)=0 \Leftrightarrow a=1.$.

Vậy công sai $d=\log_3 a-\log_2 a+1=1$.

Câu 12: Tìm số tự nhiên n thoả mãn $\frac{1}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_{3^2} x}+\cdots+\frac{1}{\log_{3^n} x}=\frac{120}{\log_3 x}$ với $0<x\neq 1$

A. $n=15$. **B.** $n=20$. **C.** $n=12$. **D.** $n=10$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Do $0<x\neq 1$ nên ta có:

$$\frac{1}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_{3^2} x}+\cdots+\frac{1}{\log_{3^n} x}=\log_x\left(3.3^2....3^n\right)=\log_x 3^{1+2+\cdots+n}=\frac{n.\left(n+1\right)}{2}\cdot\log_x 3$$

Vậy ta có: $\frac{n.\left(n+1\right)}{2}=120\Leftrightarrow n=15$

BÀI 4. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. HÀM SỐ MŨ

1. Định nghĩa: Cho $a>0, a\neq 1$. Hàm số $y=a^x$ được gọi là **hàm số mũ** cơ số a

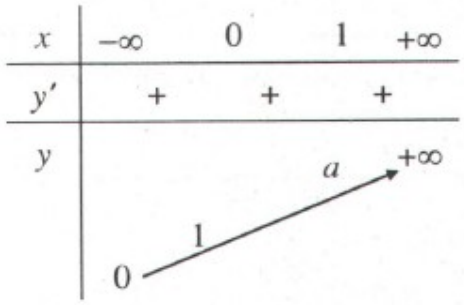
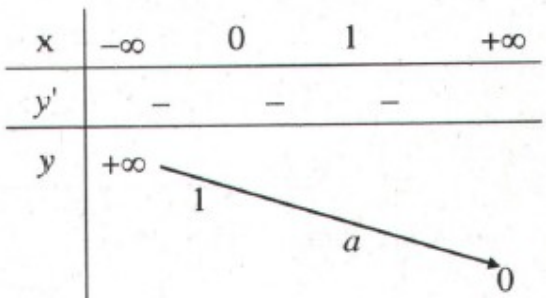
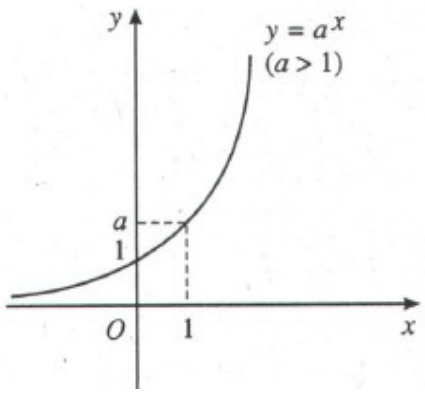
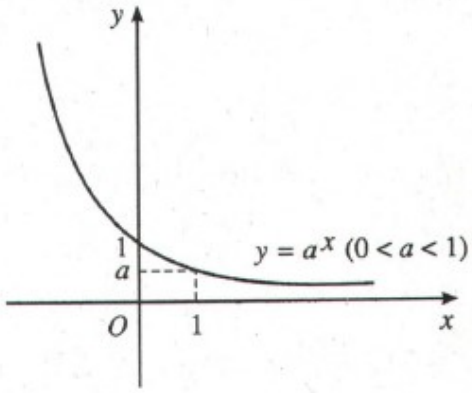
2. Đạo hàm của hàm số mũ: Vôùmoïi $x\in\mathbb{R}, 0<a\neq 1$

$$\left(e^x\right)'=e^x \qquad \left(a^x\right)'=a^x.\ln a$$
$$\left(e^u\right)'=u'e^u \qquad \left(a^u\right)'=u'a^u.\ln a$$

Ví dụ: Tính đạo hàm các hàm sau:

$1)\ y=e^{4x+x^2}$; $2)\ y=\cos 2x.e^{x^2}$; $3)\ y=3^{\sqrt{x^2+2x}}$; $4)\ y=\dfrac{e^x}{2^{-x}}$

3. Khảo sát hàm số mũ $y=a^x\ (a>0, a\neq 1)$

$y=a^x, a>1$	$y=a^x, 0<a<1$
Tập xác định D = R	
$y'=a^x.\ln a>0, \forall x$	$y'=a^x.\ln a<0, \forall x$
$\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0;\ \lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty;$	$\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$
Tiệm cận ngang: trục Ox	
BBT 	BBT 
	

II. HÀM SỐ LÔGARIT

1. Định nghĩa: Cho $a>0, a\neq 1$. Hàm số $y=\log_a x$ được gọi là hàm số logarit cơ số a

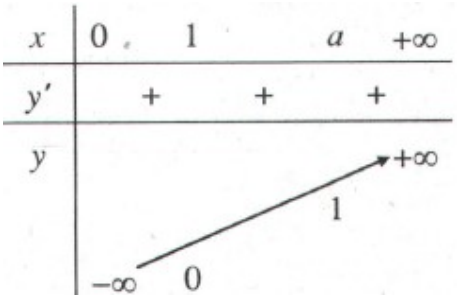
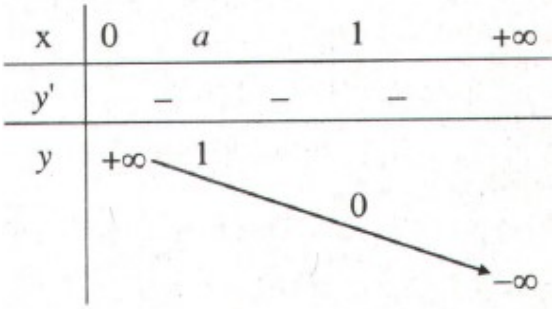
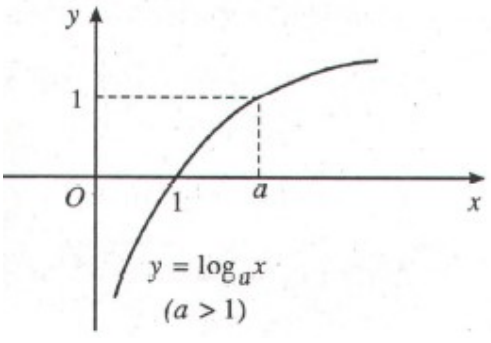
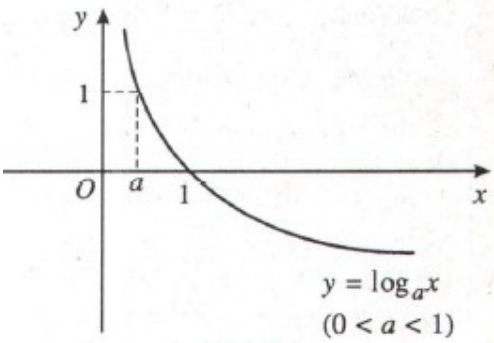
2. Đạo hàm của hàm số logarit: Với mọi $0<a\neq 1$

$$\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x.\ln a} \quad \left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}$$
$$\left(\log_a u\right)'=\frac{u'}{u.\ln a} \quad \left(\ln u\right)'=\frac{1}{u}.u'$$

Ví dụ: Tính đạo hàm các hàm sau

$1)y=\ln\left(\sqrt{x-x^2}\right);$ $2)y=\frac{\ln x}{2x};$ $3)y=\log_2\frac{e^x+1}{x};$ $4)y=\log_4\left[\ln(\cos x)\right]$

4. Sự biến thiên và đồ thị hàm số logarit

$y=\log_a x, a>1$	$y=\log_a x, 0<a<1$
Tập xác định D = $(0;+\infty)$	
$y'=\frac{1}{x.\ln a}>0, \forall x>0$ Hàm số đồng biến trên D	$y'=\frac{1}{x.\ln a}<0, \forall x>0$ Hàm nghịch biến trên D
$\lim\limits_{x\to 0^+} y=-\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty;$	$\lim\limits_{x\to 0^+} y=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty;$
Tiệm cận đứng: trục Oy	
BBT 	BBT 
	

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Tìm tập xác định, tập giá trị của hàm số

1. Phương pháp: $0 < a \neq 1$

Hàm số $y = \log_a f(x)$ xác định khi $f(x) > 0$

2. Các ví dụ

Tim tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \log_3\left(x^2 + 2x\right)$;

b) $y = \log_{0,2}\left(4 - x^2\right)$

c) $y = \log_{\sqrt{2}} \dfrac{1}{3-x}$

d) $y = \dfrac{2}{\log_4 x - 3}$.

Lời giải

a) Hàm số $y = \log_3\left(x^2 + 2x\right)$ xác định khi $x^2 + 2x > 0$ hay $x < -2$ hoặc $x > 0$.

Vạy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$:

b) Hàm số $y = \log_{0,2}\left(4 - x^2\right)$ xác định khi $4 - x^2 > 0$ hay $-2 < x < 2$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-2; 2)$.

c) Hàm số $y = \log_{\sqrt{2}} \dfrac{1}{3-x}$ xác định khi $\dfrac{1}{3-x} > 0$ hay $x < 3$. Vạy tập xác định của hàm số là $(-\infty; 3)$.

d) Hàm số $y = \dfrac{2}{\log_4 x - 3}$ xác định khi $\begin{cases} x > 0 \\ \log_4 x \neq 3 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 64 \end{cases}$

Vạy tập xác định của hàm số là $D = (0; 64) \cup (64; +\infty)$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tập xác định của hàm số $y = \log_2(10 - 2x)$ là

A. $(-\infty; 2)$ **B.** $(5; +\infty)$ **C.** $(-\infty; 10)$ **D.** $(-\infty; 5)$

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định $\Leftrightarrow 10 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 5 \Rightarrow D = (-\infty; 5)$

Câu 2: Tập xác định của hàm số $y = \log\left(x^2 + 2x\right)$ là

A. $D=(-2;0)$ **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ **C.** $D=(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$ **D.** $D=\mathbb{R}$

Lời giải

Chọn C

Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow x^2+2x>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>0\\x<-2\end{array}\right.$. Vậy $D=(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$

Câu 3: Hàm số $y=\log_{x-1}x$. xác định khi và chỉ khi:

A. $\begin{cases}x>1\\x\neq 2\end{cases}$ **B.** $x>1$ **C.** $x>0$ **D.** $x\neq 2$

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=\log_{x-1}x$ xác định khi $\begin{cases}x>0\\x-1>0\\x-1\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x>1\\x\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x\neq 2\end{cases}$

Câu 4: Cho $0<a<1$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. Tập giá trị của hàm số $y=a^x$ là $\mathbb{R}$

B. Tập xác định của hàm số $y=\log_a x$ là $\mathbb{R}$

C. Tập xác định của hàm số $y=a^x$ là $\mathbb{R}$

D. Tập giá trị của hàm số $y=\log_a x$ là $\mathbb{R}$

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=\log_a x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$

Câu 5: Tập xác định của hàm số $y=\log_2\left(3-2x-x^2\right)$ là

A. $D=(-1;3)$ **B.** $D=(0;1)$ **C.** $D=(-1;1)$ **D.** $D=(-3;1)$

Lời giải

Chọn D

Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow 3-2x-x^2>0\Leftrightarrow -3<x<1$.

Vậy $D=(-3;1)$.

Câu 6: Hàm số $y=\log_2\left(4^x-2^x+m\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ thì

A. $m<\frac{1}{4}$ **B.** $m>0$ **C.** $m\geq\frac{1}{4}$ **D.** $m>\frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn D

Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}\Leftrightarrow 4^x-2^x+m>0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m>2^x-4^x\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$

Đặt $t=2^x>0\Rightarrow m>t-t^2\left(\forall t>0\right)\Leftrightarrow m>\max\limits_{t>0}f\left(t\right)\Leftrightarrow m>\frac{1}{4}$.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\ln\left(x^2-2mx+4\right)$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

A. $m\in[-\infty;-2]\cup[2;+\infty]$ **B.** $m\in[-2;2]$

C. $m\in(-2;2)\cup(2;+\infty)$ **D.** $m\in(-2;2)$

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định với mọi

$x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x^2-2mx+4>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\Delta'=m^2-4<0\Leftrightarrow-2<m<2$

Dạng 2. Tính đạo hàm

1. Phương pháp:

$\left(e^x\right)'=e^x \quad \left(a^x\right)'=a^x.\ln a$

$\left(e^u\right)'=u'e^u \quad \left(a^u\right)'=u'a^u.\ln a$

Với mọi $0<a\neq1$

$\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x.\ln a} \quad (\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

$\left(\log_a u\right)'=\dfrac{u'}{u.\ln a} \quad (\ln u)'=\dfrac{1}{u}.u'$

Ngoài ra ta có thể sử dụng MTCT để kiểm tra và thử đáp án

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Hàm số $y=8^{x^2+x+1}(6x+3)\ln 2$ là đạo hàm của hàm số nào sau đây?

A. $y=8^{x^2+x+1}$ **B.** $y=2^{x^2+x+1}$ **C.** $y=2^{3x^2+3x+1}$ **D.** $y=8^{3x^2+3x+1}$

Lời giải

Chọn A

Câu 2: Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x+1}{2^x}$ là

A. $y'=\dfrac{1-(x+1)\ln 2}{4^x}$ **B.** $y'=\dfrac{1-(x+1)\ln 2}{2^x}$ **C.** $y'=-\dfrac{x}{4^x}$ **D.** $y'=-\dfrac{x}{2^x}$

Lời giải

Chọn B

$y'=\dfrac{2^x-(x+1)2^x\ln 2}{4^x}=\dfrac{1-(x+1)\ln 2}{2^x}$

Câu 3: Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x+1}{9^x}$

A. $y'=\dfrac{1-2(x+1)\ln 3}{3^{2x}}.$ **B.** $y'=\dfrac{1-(x+1)\ln 3}{3^{2x}}.$

C. $y'=\dfrac{1-2(x+1)\ln 9}{3^x}.$ **D.** $y'=\dfrac{1-2(x+1)\ln 3}{3^x}.$

Lời giải

Chọn A

$$y' = \frac{(x+1)'.9^x - (9^x)'.(x+1)}{9^{2x}} = \frac{9^x - 9^x(x+1)\ln 9}{9^{2x}} = \frac{1-2(x+1)\ln 3}{3^{2x}}.$$

Câu 4: Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_3(2x-2)$.

A. $y' = \frac{1}{(2x-2)\ln 3}$ **B.** $y' = \frac{1}{x-1}$ **C.** $y' = \frac{1}{(x-1)\ln 3}$ **D.** $y' = \frac{1}{2x-2}$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = \frac{(2x-2)'}{(2x-2)\ln 3} = \frac{1}{(x-1)\ln 3}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \log_3(2x+1)$, ta có:

A. $y' = \frac{1}{2x+1}$. **B.** $y' = \frac{1}{(2x+1)\ln 3}$. **C.** $y' = \frac{2}{(2x+1)\ln 3}$. **D.** $y' = \frac{2}{2x+1}$.

Lời giải

Chọn C

Câu 6: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{\log_2 x}$ là:

A. $y' = -\frac{\ln 2}{x\ln^2 x}$. **B.** $y' = \frac{\ln 2}{x\ln^2 x}$. **C.** $y' = -\frac{x\ln 2}{\log_2^2 x}$. **D.** $y' = \frac{x\ln 2}{\log_2^2 x}$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = -\frac{(\log_2 x)'}{\ln^2 x} = -\frac{\ln 2}{x\ln^2 x}$$

Câu 7: Kết quả tính đạo hàm nào sau đây **sai**?

A. $(3^x)' = 3^x \ln 3$ **B.** $(10^x)' = 10^x \ln 10$ **C.** $(\log_3 x)' = \frac{1}{x\ln 3}$ **D.** $(e^{2x})' = e^{2x}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $(e^{2x})' = 2e^{2x}$, suy ra **D** sai.

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = x^2 e^{-x}$. Bất phương trình $f'(x) \ge 0$ có tập nghiệm là:

A. $[-2;2]$ **B.** $(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$ **C.** $(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$ **D.** $[0;2]$

Lời giải

Chọn D

$$f'(x) = \frac{2x-x^2}{e^x} \ge 0 \Leftrightarrow 2x - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le 2$$

Câu 9: Đạo hàm của hàm số $y=\frac{x+2}{x-1}\ln(x+2)$ là:

A. $\frac{3\ln(x+2)}{(x-1)^2}$.

B. $\frac{x-1-3\ln(x+2)}{(x-1)^2}$.

C. $\frac{1}{x-1}\ln(x+2)$.

D. $\frac{-3\ln(x+2)}{(x-1)^2}+\frac{\ln(x+2)}{x-1}$.

Lời giải

Chọn B

$$y'=\frac{-3}{(x-1)^2}\ln(x+2)+\frac{x+2}{x-1}.\frac{1}{x+2}=\frac{-3\ln(x+2)}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}$$

Câu 10: Đạo hàm của hàm số $y=(2x+1)\ln(1-x)$ là.

A. $2\ln(1-x)-\frac{2x+1}{1-x}$.

B. $2x\ln(x-1)$.

C. $\frac{2x+1}{1-x}+2x$.

D. $2\ln(1-x)+\frac{2x+1}{1-x}$.

Lời giải

Chọn A

$$y'=(2x+1)'.\ln(1-x)+(2x+1).(\ln(1-x))'=2.\ln(1-x)+(2x+1).\frac{-1}{(1-x)}$$

$$=2\ln(1-x)-\frac{2x+1}{1-x}$$

Câu 11: Đạo hàm của hàm số $y=\log_2\left(\frac{x-1}{\ln x}\right)$ là:

A. $\frac{x\ln x+1-x}{x(x-1)\ln 2}$.

B. $\frac{x\ln x+1-x}{(x-1)\ln x\ln 2}$.

C. $\frac{x\ln x+1-x}{(x-1)\ln 2}$.

D. $\frac{x\ln x+1-x}{x(x-1)\ln 2.\ln x}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=\frac{\left(\frac{x-1}{\ln x}\right)'}{\frac{x-1}{\ln x}\ln 2}=\frac{x\ln x+1-x}{x(x-1)\ln 2.\ln x}$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=2^{x^2+a}$ và $f'(1)=2\ln 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $-2<a<0$ **B.** $0<a<1$ **C.** $a>1$ **D.** $a<-2$

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=2x.2^{x^2+a}\ln 2 \Rightarrow f'(1)=2\ln 2.2^{a+1}=2\ln 2 \Rightarrow 2^{a+1}=1 \Rightarrow a=-1$

Câu 13: Cho hàm số $y=\ln\frac{1}{x}$. Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $e^y+y'=0$ **B.** $e^y-y'=0$ **C.** $e^y.y'=0$ **D.** $e^y.y'=\frac{1}{x^2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\frac{1}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{1}{x}\right)'=x.\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{x}$, $e^y=\ln e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\Rightarrow y'+e^y=0$

Dạng 3. So sánh, Đẳng thức, bất đẳng thức

1. Phương pháp

$\oplus a>1:\ a^x>a^y \Leftrightarrow x>y$

$\oplus 0<a<1:\ a^x>a^y \Leftrightarrow x<y$

$\oplus a>1:\log_a x>\log_a y \Leftrightarrow x>y$

$\oplus 0<a<1:\ \log_a x>\log_a y \Leftrightarrow x<y$

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai?**

A. $\left(\frac{10}{11}\right)^{2,3}>\left(\frac{12}{11}\right)^{2,3}$. **B.** $\left(\frac{7}{9}\right)^{-2}>\left(\frac{8}{9}\right)^{-2}$.

C. $(2,5)^{-3,1}>(2,6)^{-3,1}$. **D.** $(3,1)^{7,3}<(4,3)^{7,3}$.

Lời giải

Chọn A

Dùng tính chất: $\begin{cases}a,b>1\\ a^x>b^x\Rightarrow a>b\\ x>0\end{cases}$

Câu 2: Nếu $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{a-1}<7-4\sqrt{3}$ thì

A. $a<1$ **B.** $a>1$ **C.** $a>0$ **D.** $a<0$

Lời giải

Chọn D

BPT $\Leftrightarrow\left(7+4\sqrt{3}\right)^{a-1}<\left(7+4\sqrt{3}\right)^{-1}\Rightarrow a-1<-1\Leftrightarrow a<0$

Câu 3: Cho $\pi^{\alpha}>\pi^{\beta}$ với $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $\alpha>\beta$ **B.** $\alpha<\beta$ **C.** $\alpha=\beta$ **D.** $\alpha\le\beta$

Lời giải

Chọn A

Câu 4: Cho $M=\log_{0,3}0,07; N=\log_3 0,2.$ Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $0>N>M.$ **B.** $M>0>N.$ **C.** $N>0>M.$ **D.** $M>N>0.$

Lời giải

Chọn B

+ Ta có: $\begin{cases}0<0,3<1\\0<0,07<1\end{cases}\Rightarrow M=\log_{0,3}0,07>0$

$\begin{cases}3>1\\0<0,2<1\end{cases}\Rightarrow N=\log_3 0,2<0$

+ Suy ra: $M>0>N$

Câu 5: Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017}>\left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}.$ **B.** $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019}<\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}.$

C. $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018}>\left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}.$ **D.** $2^{\sqrt{2}+1}>2^{\sqrt{3}}.$

Lời giải

Chọn C

Do $\begin{cases}2018>2017\\\sqrt{3}-1>1\end{cases}$ nên $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018}<\left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}.$

Câu 6: Cho $0<a\neq 1;\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$ Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}=a^{\frac{\alpha}{\beta}}$ **B.** $a^{\sqrt{a}}=\left(\sqrt{a}\right)^{\alpha}(a>0)$ **C.** $a^{\alpha^{\beta}}=\left(a^{\alpha}\right)^{\beta}$ **D.** $\sqrt{a^{\alpha}}=\left(\sqrt{a}\right)^{\alpha}$

Lời giải

Chọn D

$\sqrt{a^{\alpha}}=\left(\sqrt{a}\right)^{\alpha}$

Câu 7: Có kết luận gì về a nếu $(2a+1)^{-3}>(2a+1)^{-1}\ (1)$

A. $a\in(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{2};0\right)$ **B.** $a\in(-\infty;-1)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)$

C. $a\in(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{6};0\right)$ **D.** $a\in(-\infty;-2)\cup(-1;0)$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định: $2a+1\neq 0\Leftrightarrow a\neq-\frac{1}{2}.$

Ta có: $(1)\Leftrightarrow \dfrac{1}{(2a+1)^3}>\dfrac{1}{2a+1}\Leftrightarrow \dfrac{1-(2a+1)^2}{(2a+1)^3}>0\Leftrightarrow \dfrac{a(a+1)}{(2a+1)^3}<0$

Lập bảng xét dấu ta được: $\left[\begin{array}{l}-\dfrac{1}{2}<a<0\\ a<-1\end{array}\right.$.

Câu 8: Trong các bất đẳng thức sau, bất đẳng thức nào sai?

A. $\log_2 5>\log_2 \pi$ **B.** $\log_{\sqrt{2}-1}\pi<\log_{\sqrt{2}-1}\mathrm{e}$ **C.** $\log_{\sqrt{3}+1}\pi>\log_{\sqrt{3}+1}7$ **D.** $\log_7 5<1$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\sqrt{3}+1>1$ do đó $\pi<7\Rightarrow \log_{\sqrt{3}+1}\pi<\log_{\sqrt{3}+1}7$.

Câu 9: Cho $0<a<1$, $b>1$ và $M=\log_a 2$, $N=\log_2 b$. Khi đó khẳng định nào sau đây đúng?

A. $M>0$ và $N>0$. **B.** $M>0$ và $N<0$.

C. $M<0$ và $N<0$. **D.** $M<0$ và $N>0$.

Lời giải

Chọn D

Câu 10: Với những giá trị nào của a thì $(a-1)^{-\frac{2}{3}}>(a-1)^{-\frac{1}{3}}$?

A. $1<a<2$. **B.** $a>2$. **C.** $a>1$. **D.** $0<a<1$.

Lời giải

Chọn A

Vì $\begin{cases}\dfrac{-2}{3}<\dfrac{-1}{3}\\ (a-1)^{-\frac{2}{3}}>(a-1)^{-\frac{1}{3}}\end{cases}\Rightarrow 0<a-1<1\Leftrightarrow 1<a<2$.

Câu 11: Nếu $a^{\frac{19}{5}}<a^{\frac{15}{7}}$ và $\log_b\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)>\log_b\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$ thì:

A. $a>1,0<b<1$ **B.** $0<a<1,b>1$ **C.** $0<a<1,0<b<1$ **D.** $a>1,b>1$

Lời giải

Chọn B

$a^{\frac{19}{5}}<a^{\frac{15}{7}}$ vì mũ không là số nguyên nên $a>0$. Mặt khác $\dfrac{19}{5}>\dfrac{15}{7}$ nên $a<1\Rightarrow 0<a<1$

$\log_b\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)>\log_b\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$ để có nghĩa thì $1\neq b>0$ và $\sqrt{2}+\sqrt{7}>\sqrt{2}+\sqrt{5}$ nên $b>1$

Câu 12: Cho các số thực a,b thỏa mãn $a>b>1$. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

A. $\log_a b>\log_b a$ **B.** $\log_a b<\log_b a$ **C.** $\ln a>\ln b$ **D.** $\log_{\frac{1}{2}}(ab)<0$

Lời giải

Chọn A

Cho $a=4;b=2$ ta có: $\log_a b=\frac{1}{2};\log_b a=2$ nên A sai.

Câu 13: Cho a, b là các số thực dương, thỏa mãn $a^{\frac{3}{4}}>a^{\frac{4}{3}}$ và $\log_b\frac{1}{2}<\log_b\frac{2}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a>1,0<b<1$ **B.** $0<a<1,b>1$ **C.** $0<a<1,0<b<1$ **D.** $a>1,b>1$

Lời giải

Chọn B

Ta có $a^{\frac{3}{4}}>a^{\frac{4}{3}}\Rightarrow 0<a<1\left(do\frac{3}{4}<\frac{4}{3}\right)$

Mặt khác $\log_b\frac{1}{2}<\log_b\frac{2}{3}\Rightarrow b>1\left(do\frac{2}{3}>\frac{1}{2}\right)$

Câu 14: Cho hai số thực a và b sao cho với $a^{-5}>a^{-4}$ và $\log_b\left(\frac{3}{4}\right)<\log_b\left(\frac{4}{5}\right)$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào là đúng?

A. $a>1;b>1.$ **B.** $a>1;0<b<1.$

C. $0<a<1;b>1.$ **D.** $0<a<1;0<b<1.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases}-5<-4\\ a^{-5}>a^{-4}\end{cases}\Rightarrow 0<a<1$ và $\begin{cases}\frac{3}{4}<\frac{4}{5}\\ \log_b\left(\frac{3}{4}\right)<\log_b\left(\frac{4}{5}\right)\end{cases}\Rightarrow b>1.$

Vậy $0<a<1;b>1.$

Câu 15: Cho $\left(\sqrt{2}-1\right)^a>\left(\sqrt{2}-1\right)^b$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $a>b.$ **B.** $a<b.$ **C.** $a=b.$ **D.** $a\geq b.$

Lời giải

Chọn B

Do $0<\sqrt{2}-1<1$ nên hàm số mũ $y=\left(\sqrt{2}-1\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và ta có:

$\left(\sqrt{2}-1\right)^a>\left(\sqrt{2}-1\right)^b\Leftrightarrow a<b$

Câu 16: Tìm tập tất cả các giá trị của a để $\sqrt[21]{a^5}>\sqrt[7]{a^2}$

A. $0<a<1$ **B.** $\frac{5}{21}<a<\frac{2}{7}$ **C.** $a>1$ **D.** $a>0$

Lời giải

Chọn A

$\sqrt[21]{a^5} > \sqrt[7]{a^2} \Leftrightarrow a^{\frac{5}{21}} > a^{\frac{2}{7}} \Leftrightarrow 0 < a < 1$

Câu 17: Cho p, q là các số thực thỏa mãn $m = \left(\frac{1}{e}\right)^{2p-q}, n = e^{p-2q}$, biết $m > n$. So sánh p và q

A. $p \geq q$ **B.** $p > q$ **C.** $p \leq q$ **D.** $p < q$

Lời giải

Chọn D

Ta có $m = \left(\frac{1}{e}\right)^{2p-q} = e^{q-2p}, n = e^{p-2q}$. Vì $m > n$ nên $q - 2p > p - 2q \Leftrightarrow q > p$.

Câu 18: Cho $a > 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a} > 1$ **B.** $a^{-\sqrt{3}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$ **C.** $a^{\frac{1}{3}} > \sqrt{a}$ **D.** $\frac{1}{a^{2016}} < \frac{1}{a^{2017}}$

Lời giải

Chọn B

Do $a > 1 \Rightarrow$ với $m > n$ thì $a^m > a^n$

Do $-\sqrt{3} > -\sqrt{5} \Rightarrow a^{-\sqrt{3}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}} = \frac{1}{a^5}$

Câu 19: Cho $0 < a < 1$. Khẳng định nào đúng?

A. $a^{-\sqrt{2}} < \frac{1}{a^{\sqrt{3}}}$ **B.** $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}} > 1$ **C.** $a^{\frac{1}{3}} < \sqrt{a}$ **D.** $\frac{1}{a^{2017}} > \frac{1}{a^{2018}}$

Lời giải

Chọn A

Phương pháp: Xét hàm số có dạng $y = a^x, a > 0, a \neq 1$:

+ Nếu $0 < a < 1$ hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$

+ Nếu $a > 1$: hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$

Cách giải: Với $0 < a < 1$:

$a^{-\sqrt{2}} < \frac{1}{a^{\sqrt{3}}} \Leftrightarrow \frac{1}{a^{\sqrt{2}}} < \frac{1}{a^{\sqrt{3}}} \Leftrightarrow a^{\sqrt{2}} > a^{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 0 < a < 1$ (luôn đúng). Vậy phương án A đúng.

$\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}} > 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} > 1 \Leftrightarrow a > 1$ (Loại). Vậy phương án B sai.

$a^{\frac{1}{3}} < \sqrt{a} \Leftrightarrow a^{\frac{1}{3}} < a^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow a > 1$ (Loại). Vậy phương án C sai.

$\frac{1}{a^{2017}} > \frac{1}{a^{2018}} \Leftrightarrow a^{2017} < a^{2018} \Leftrightarrow a > 1$ (Loại). Vậy phương án D sai.

Câu 20: Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Khi $x > 0$ thì $\log_2 x^2 = 2\log_2 x$. **B.** Khi $0 < a < 1$ và $b < c$ thì $a^b > a^c$.

C. Với $a < b$ thì $\log_a b < \log_b a < 1$. **D.** Điều kiện để $x^{\sqrt{2}}$ có nghĩa là $x > 0$.

Lời giải

Chọn C

Đáp án C sai vì với $a<b \Rightarrow \begin{cases} 1<\log_a b \\ \log_b a<1 \end{cases} \Rightarrow \log_b a<1<\log_a b$

Câu 21: Cho a là số thực dương khác 1. Xét hai số thực x_1, x_2. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Nếu $a^{x_1}>a^{x_2}$ thì $x_1>x_2$.

B. Nếu $a^{x_1}>a^{x_2}$ thì $x_1<x_2$.

C. Nếu $a^{x_1}>a^{x_2}$ thì $(a-1)(x_1-x_2)>0$.

D. Nếu $a^{x_1}>a^{x_2}$ thì $(a-1)(x_1-x_2)<0$.

Lời giải

Chọn C

$\begin{cases} a>1: a^{x_1}>a^{x_2} \to x_1>x_2 \\ a<1: a^{x_1}<a^{x_2} \to x_1<x_2 \end{cases} \to (a-1)(x_1-x_2)>0.$

Dạng 4. GTLN và Gtnn của hàm số

Câu 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=(x-2)e^x$ trên $[0;4]$.

A. $\min\limits_{[0;3]} y=-e$.

B. $\min\limits_{[0;3]} y=0$.

C. $\min\limits_{[0;3]} y=-2e^2$.

D. $\min\limits_{[0;3]} y=2e^4$.

Lời giải

Chọn A

Em có $y'=e^x(x-1), y'=0 \Leftrightarrow x=1\in[0;4]$.

Khi đó $y(0)=-2, y(1)=-e, y(3)=2e^4$.

Vậy $\min\limits_{[0;3]} y=y(1)=-e$.

Câu 2: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=x+e^{2x}$ trên đoạn $[0;1]$.

A. $\max\limits_{x\in[0;1]} y=2e$

B. $\max\limits_{x\in[0;1]} y=e^2+1$

C. $\max\limits_{x\in[0;1]} y=e^2$

D. $\max\limits_{x\in[0;1]} y=1$

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=x+e^{2x}$ trên đoạn $[0;1]$, ta có $y'=1+2e^{2x}>0\,\forall x\in(0;1)$. Suy ra hàm số đã cho là hàm số đồng biến trên $[0;1]$. Khi đó $\max\limits_{[0;1]} y=y(1)=1+e^2$.

Câu 3: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=(x-2)^2e^x$ trên $[1;3]$ là

A. e.

B. 0.

C. e^3.

D. e^4.

Lời giải

Chọn C

$y'=2(x-2)e^x+(x-2)^2e^x=e^x(x^2-2x)$.

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$. Ta có: $y(1)=3; y(3)=e^3; y(2)=0$.

Vậy GTLN của hàm số $y=(x-2)^2e^x$ trên $[1;3]$ là e^3.

Câu 4: Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x\ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2e};e\right]$ lần lượt là

A. $M = e, m = -\frac{1}{2e}\ln(2e)$ **B.** $M = e, m = -\frac{1}{2e}$

C. $M = -\frac{1}{2e}\ln(2e), m = -e^{-1}$ **D.** $M = e, m = -\frac{1}{e}$

Lời giải

Chọn D

$y' = 1.\ln x + x.\frac{1}{x} = \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{e} \in \left[\frac{1}{2e};e\right]$

Ta có $y\left(\frac{1}{2e}\right) = -\frac{\ln 2 + 1}{2e}; y(e) = e; y\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} \Rightarrow M = Maxy = e;\ m = \min y = -\frac{1}{e}$

Câu 5: Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};e\right]$ lần lượt là

A. 1 và $e-1$ **B.** 1 và e **C.** $\frac{1}{2}+\ln 2$ và $e-1$ **D.** 1 và $\frac{1}{2}+\ln 2$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = 1 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Ta có $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \ln 2; y(1) = 1; y(e) = e - 1$

$\Rightarrow Maxy = e - 1; Miny = 1$

Câu 6: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x(2 - \ln x)$ trên đoạn $[2;3]$ là

A. $\max\limits_{[2;3]} y = 4 - 2\ln 2$ **B.** $\max\limits_{[2;3]} y = 1$

C. $\max\limits_{[2;3]} y = e$ **D.** $\max\limits_{[2;3]} y = -2 + 2\ln 2$

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số: $y = x(2 - \ln x)$ trên $[2;3]$

Có $y'(x) = 2 - \ln x - 1 = 1 - \ln x$

$y'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e \in [2;3]$

$y(2) = 4 - 2\ln 2; y(e) = e; y(3) = 6 - 3\ln 3$

Vậy $\max\limits_{[2;3]} y = y(e) = e$

Câu 7: Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 - 2\ln x$ trên $\left[e^{-1};e\right]$ là

A. $M = e^2 - 2$, $m = e^{-2} + 2$. **B.** $M = e^{-2} + 2$, $m = 1$.

C. $M = e^{-2} + 1$, $m = 1$. **D.** $M = e^2 - 2$, $m = 1$.

Lời giải

Chọn D

ĐKXĐ: $x > 0$

$y = x^2 - 2\ln x \Rightarrow y' = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 2}{x} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Leftrightarrow x = 1 \in \left[e^{-1}; e\right]$

Ta có: $y(1) = 1$, $y(e) = e^2 - 2$, $y\left(e^{-1}\right) = e^{-2} + 2$

$\Rightarrow M = e^2 - 2$, $m = 1$.

Câu 8: M là giá trị lớn nhất, m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 4\ln(1-x)$ trên đoạn $[-2;0]$

Tích M.m là

A. 0. **B.** $1 - 4\ln 2$. **C.** $4\ln 2 - 1$. **D.** $4\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

$y' = 2x + \frac{4}{1-x} = \frac{-2x^2 + 2x + 4}{1-x}$

- Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \in [-2;0] \\ x = 2 \notin [-2;0] \end{array}\right.$
- $f(-1) = 1 - 4\ln 2$; $f(-2) = 4 - 4\ln 3$; $f(0) = 0$
- Trong các kết quả trên, số nhỏ nhất là: 1 – 4ln2, số lớn nhất là: 0
- Vậy, $m = \min\limits_{[-2;0]} y = 1 - 4\ln 2$ khi $x = -1$; $M = \max\limits_{[-2;0]} y = 0$ khi $x = 0$

Suy ra M.m = 0

Câu 9: Gọi M, N lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2.e^{-x}$ trên đoạn $[-1;1]$. Tính tổng $M + N$.

A. $M + N = 3e$. **B.** $M + N = e$.

C. $M + N = 2e - 1$. **D.** $M + N = 2e + 1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = xe^{-x}(2 - x)$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow xe^{-x}(2-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0\ (N) \\ x = 2\ (L) \end{array}\right.$.

Khi đó $y(-1) = e$; $y(1) = \frac{1}{e}$; $y(0) = 0$.

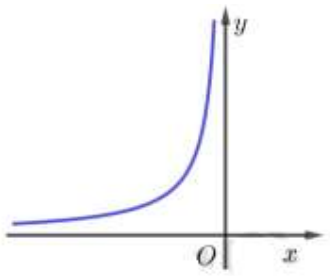
Do đó $m = \text{Min}\limits_{[-1;1]} y = 0$ tại $x = 0$ và $M = \text{Max}\limits_{[-1;1]} y = e$ tại $x = -1$.

Vậy $M + m = e$.

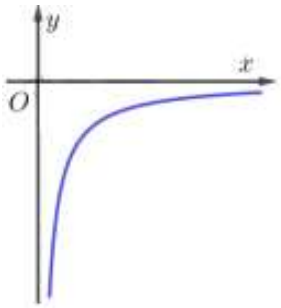
Dạng 5. Nhận dạng đồ thị

Câu 1: Cho a là số thực dương khác 1. Hình nào sau đây là đồ thị của hàm số mũ $y=a^x$?

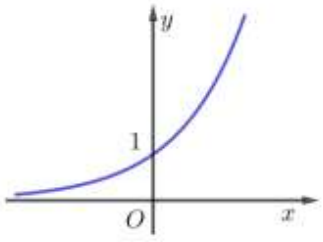
A.



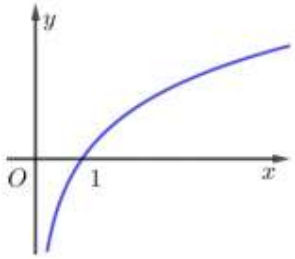
B.



C.



D.

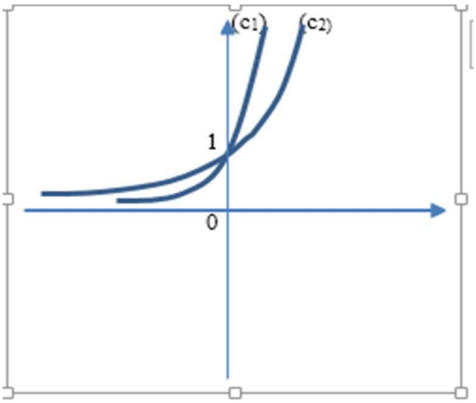


Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=a^x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $(0;+\infty)$

Câu 2: Biết *(C1), (C2)* ở hình bên là hai trong bốn đồ thị của các hàm số $y=\left(\sqrt{3}\right)^x, y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x, y=5^x, y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$. Hỏi *(C2)* là đồ thị của hàm số nào sau đây?



A. $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$ **B.** $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ **C.** $y=5^x$ **D.** $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

Lời giải

Chọn A

- Ta thấy *(C1), (C2)* đều có hướng đi lên khi x tăng $\Rightarrow$ *(C1), (C2)* đồng biến $\forall x\in\mathbb{R}$.
- Mà hàm $y=a^x$ đồng biến khi $a>1$, nghịch biến khi $0<a<1$. Do đó ta loại hàm $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ và $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

- Xét khi $x>0$ thì (C_1) ở trên $(C_2) \Rightarrow y(C_1)>y(C_2)$. Mà $5^x>\left(\sqrt{3}\right)^x \Rightarrow (C_2): y=\left(\sqrt{3}\right)^x$.

Câu 3: Đối xứng qua đường thẳng $y=x$ của đồ thị hàm số $y=5^{\frac{x}{2}}$ là đồ thị nào trong các đồ thị có phương trình sau đây?

A. $y=\log_{\sqrt{5}} x$ **B.** $y=\log_5 x^2$ **C.** $y=\log_5 x$ **D.** $y=\frac{1}{2}\log_5 x$

Lời giải

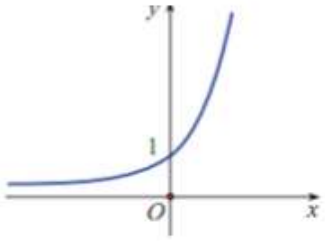
Chọn A

Ta đưa hàm số về dạng: $y=5^{\frac{x}{2}}=\left(\sqrt{5}\right)^x$.

Dựa vào lý thuyết "Hai hàm số $y=a^x, y=\log_a x$ có đồ thị đối xứng nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất $y=x$"

Hoặc thay $x=y$ và $y=x$ ta có $x=\left(\sqrt{5}\right)^y \Leftrightarrow y=\log_{\sqrt{5}} x$

Câu 4: Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ **B.** $y=x^2$

C. $y=\log_2 x$ **D.** $y=2^x$

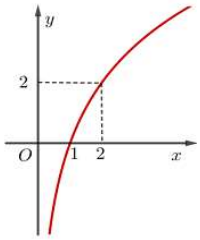
Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$ và đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó chỉ có đáp án D thỏa mãn

Câu 5: Tìm a để hàm số $\log_a x\ (0<a\neq 1)$ có đồ thị là hình bên



A. $a=\sqrt{2}$ **B.** $a=2$ **C.** $a=\frac{1}{2}$ **D.** $a=-\frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(2;2) \Rightarrow \log_a 2=2 \Rightarrow a^2=2 \Rightarrow a=\sqrt{2}$

Câu 6: Nếu gọi (G_1) là đồ thị hàm số $y=a^x$ và (G_2) là đồ thị hàm số $y=\log_a x$ với $0<a\neq 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (G_1) và (G_2) đối xứng với nhau qua trục hoành.

B. (G_1) và (G_2) đối xứng với nhau qua trục tung.

C. (G_1) và (G_2) đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=x$

D. (G_1) và (G_2) đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=-x$

Lời giải

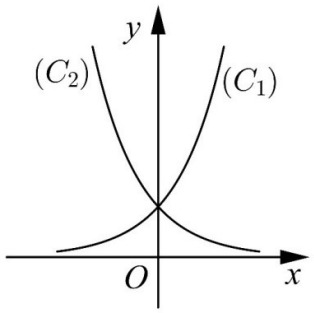
Chọn C

Mọi điểm $A(m;n)\in(G_1)\Rightarrow a^m=n\Rightarrow m=\log_a n\Rightarrow B(n;m)\in(G_2)$

Hai điểm A và B đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$

Do đó (G_1) và (G_2) đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$

Câu 7: Cho hai hàm số $y=a^x, y=b^x$ với a,b là hai số thực dương khác 1, lần lượt có đồ thị là (C_1) và (C_2) như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $0<a<b<1$ **B.** $0<b<1<a$ **C.** $0<a<1<b$ **D.** $0<b<a<1$

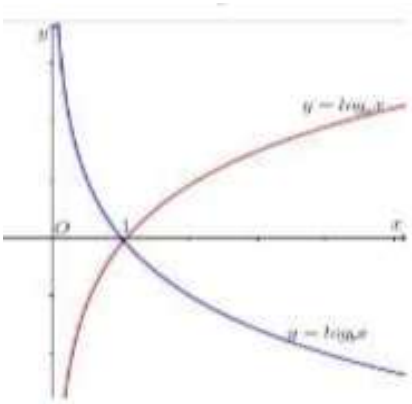
Lời giải

Chọn B

- Đồ thị hàm số (C_1) đồng biến nên $y'=a^x\ln a>0\Leftrightarrow a>1$

- Đồ thị hàm số (C_2) nghịch biến nên $y'=b^x\ln b<0\Leftrightarrow 0<b<1$. Do đó $0<b<1<a$

Câu 8: Cho hai hàm số $y=\log_a x,\ y=\log_b x$ có đồ thị $(C_1),(C_2)$, được vẽ trên cùng mặt phẳng tọa độ. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $0<b<a<1$. **B.** $0<b<1<a$. **C.** $0<a<b<1$. **D.** $0<a<1<b$.

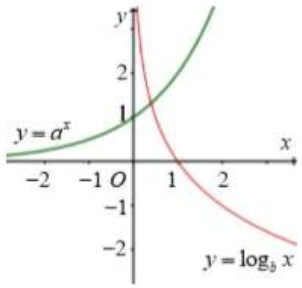
Lời giải

Chọn B

Ta thấy đồ thị hàm số $\log_b x$ nghịch biến nên $0<b<1$

Ta thấy đồ thị hàm số $\log_a x$ đồng biến nên $a>1$

Câu 9: Cho $a>0, b>0, b\neq 1$. Đồ thị các hàm số $y=a^x$ và $y=\log_b x$ cho như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



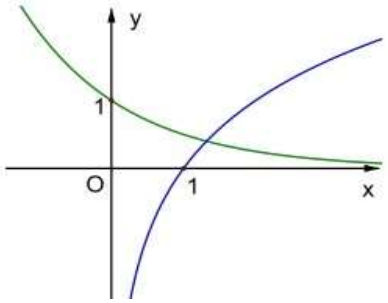
A. $a>1;\ 0<b<1$. **B.** $1>a>0;\ b>1$. **C.** $0<a<1;\ 0<b<1$. **D.** $a>1;\ b>1$.

Lời giải

Chọn A

Quan sát đồ thị ta thấy. Hàm số $y=a^x$ đồng biến $\Rightarrow a>0$. Hàm số $y=\log_b x$ nghịch biến $\Rightarrow 0<b<1$

Câu 10: Cho đồ thị hàm số $y=a^x$ và $y=\log_b x$ như hình vẽ:



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $0<a<\frac{1}{2}<b$ **B.** $0<a<1<b$

C. $0<b<1<a$ **D.** $0<a<1, 0<b<\frac{1}{2}$

Lời giải

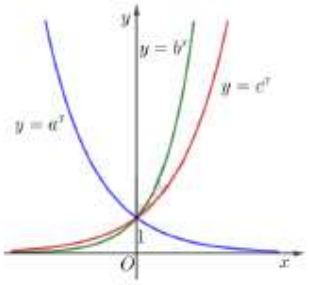
Chọn B

+ Xét hàm số $y=a^x$ đi qua $(0;1)$ suy ra đồ thị hàm số (1) là đường nghịch biến, suy ra $0<a<1$.

+ Xét hàm số $y=\log_b x$ đi qua (1;0) suy ra đồ thị hàm số (2) là đường đồng biến suy ra b>1.

Suy ra $0<a<1<b$.

Câu 11: Cho 3 số $a,b,c>0,a\neq 1,b\neq 1,c\neq 1$. Đồ thị các hàm số $y=a^x,y=a^x,y=c^x$ được cho trong hình vẽ dưới.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

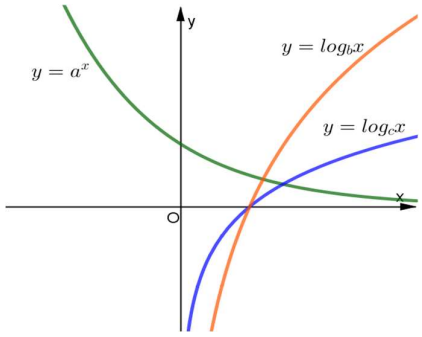
A. $b<c<a$ **B.** $a<c<b$ **C.** $a<b<c$ **D.** $c<a<b$

Lời giải

Chọn B

Ta có hàm số $y=b^x;y=c^x$ đồng biến, hàm số $y=a^x$ nghịch biến nên $a<1;b,c>1$. Thay $x=10$, ta có $b^{10}>c^{10}\Rightarrow b>c$

Câu 12: Cho các hàm số $y=a^x$, $y=\log_b x,y=\log_c x$ có đồ thị như hình vẽ.



Chọn khẳng định đúng.

A. $c>b>a$. **B.** $b>a>c$. **C.** $a>b>c$. **D.** $b>c>a$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=a^x$ đồ thị có dáng đi xuống từ trái sang phải nên nghịch biến trên $\mathbb{R}$ do đó $0<a<1$ (1).

Hai hàm số $y=\log_b x$ và $y=\log_c x$ đồ thị có dáng đi lên từ trái sang phải nên đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ do đó $b>1>a,\ c>1>a$ (2).

Quan sát đồ thị ta thấy với $0<x<1$ thì $\log_b x<\log_c x$, suy ra $c>b$.

Quan sát đồ thị ta thấy với $x>1$ thì $\log_b x>\log_c x$, suy ra $c>b$.

Suy ra $1<b<c$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $c > b > a$.

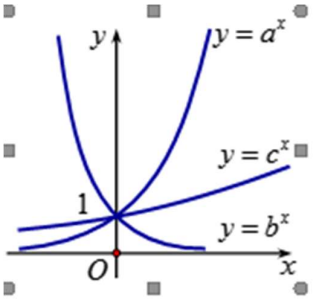
Cách khác:

Dễ thấy $a < 1$, $b > 1$, $c > 1$. Nên a là số nhỏ nhất.

Xét đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hai hàm số $y = \log_b x$ và $y = \log_c x$ lần lượt tại các điểm $B(b;1)$ và $C(c;1)$

(hình vẽ). Dễ thấy $c > b$ vậy $c > b > a$.

Câu 13: Hình vẽ dưới đây vẽ đồ thị của 3 hàm số mũ.



Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a > b > c$. **B.** $a > c > 1 > b$. **C.** $b > c > 1 > a$. **D.** $b > a > c$.

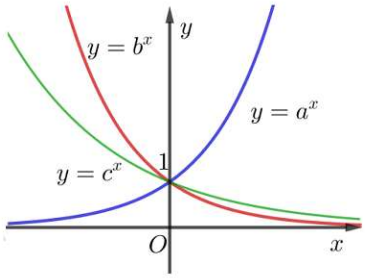
Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ở hình 5 ta thấy đồ thị của hàm số $y = b^x$ là nghịch biến nên $0 < b < 1$.

Vẽ đường thẳng $x = 1$ ta có đường thẳng $x = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = a^x$ tại điểm có tung độ $y = a$ và cắt đồ thị hàm số $y = c^x$ tại điểm có tung độ là $y = c$. Khi đó điểm giao với $y = a^x$ nằm trên điểm giao với $y = c^x$ nên $a > c > 1$. Vậy $a > c > 1 > b$.

Câu 14: Trên hình 2.13, đồ thị của ba hàm số $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ (a, b, c là ba số dương khác 1 cho trước) được vẽ trong cùng một mặt phẳng tọa độ. Dựa vào đồ thị và các tính chất của lũy thừa, hãy so sánh ba số a, b và c



A. c > b > a **B.** b > c > a **C.** a > c > b **D.** a > b > c

Lời giải

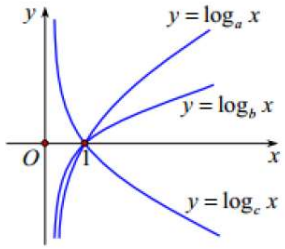
Chọn C

Dựa vào hình vẽ, ta thấy rằng: Hàm số $y = a^x$ là hàm số đồng biến; hàm số $y = b^x, y = c^x$ là hàm số nghịch biến.

Suy ra $a>1$ và $\begin{cases}0<b<1\\0<c<1\end{cases}\rightarrow a>\{b;c\}$. Gọi $B(-1;y_B)$ thuộc đồ thị hàm số $y=b^x\Rightarrow y_B=\frac{1}{b}$;

Và $C(-1;y_C)$ thuộc đồ thị hàm số $y=c^x\Rightarrow y_C=\frac{1}{c}$. Dựa vào đồ thị, ta có $y_B>y_C\Leftrightarrow\frac{1}{b}>\frac{1}{c}\Leftrightarrow c>b$.

Câu 15: Cho a, b, c là ba số thực dương và khác 1. Đồ thị các hàm số $y=\log_a x, y=\log_b x, y=\log_c x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?



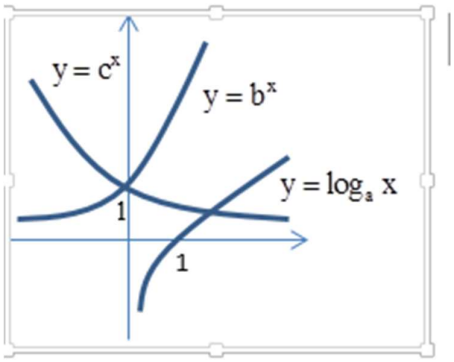
A. $a<b<c$ **B.** $c<a<b$ **C.** $c<b<a$ **D.** $b<c<a$

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=\log_c x$ nghịch biến $\Rightarrow 0<c<1$, các hàm $y=\log_a x, y=\log_b x$ đồng biến nên $a;b>1$ Chọn $x=100\Rightarrow\log_a 100>\log_b 100\Rightarrow a<b\Rightarrow c<a<b$.

Câu 16: Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y=\log_a x, y=b^x, y=c^x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $b<c<a$ **B.** $a<b<c$ **C.** $c<a<b$ **D.** $c<b<a$

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=c^x$ là hàm nghịch biến nên $0<c<1$.

Hàm số $y=b^x$ là hàm đồng biến nên $b>1$

Hàm số $y=\log_a x$ là hàm đồng biến nên $a>1$. Lấy đối xứng đồ thị hàm $y=\log_a x$ qua đường phân giác thứ nhất của mặt phẳng toạ độ ta có đồ thị hàm số $y=b^x$ tăng nhanh hơn đồ thị hàm số $y=a^x$ nên $b>a$

BÀI 5. PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

1. Phương trình mũ cơ bản

Phương trình mũ cơ bản là phương trình có dạng $a^x = b \quad (a > 0; a \neq 1)$

- Nếu $b > 0$ thì phương trình có duy nhất một nghiệm $x = \log_a b$;
- Nếu $b = 0$ hoặc $b < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

2. Cách giải một số phương trình mũ cơ bản

a) Đưa về cùng cơ số

$$\boxed{a^{A(x)} = a^{B(x)} \Leftrightarrow A(x) = B(x), (a > 0, a \neq 1)}$$

Ví dụ . Giải các phương trình mũ sau

a) $3^{x^2-4x+5} = 9$ b) $1,5^{5x-7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$ c) $2^{2x-1} + 4^{x+2} = 10$

Giải.

a) Đưa hai vế về cùng cơ số 3, ta được phương trình đã cho tương đương với: $3^{x^2-4x+5} = 3^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 2^{(1)} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$.

Giải phương trình bậc hai này được hai nghiệm là $x = 1$ và $x = 3$.

b) Đưa về cùng cơ số 1,5, phương trình đã cho tương đương với:

$1,5^{5x-7} = 1,5^{-x-1} \Leftrightarrow 5x - 7 = -x - 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy $x = 1$ là nghiệm của phương trình.

c) Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{2} \cdot 4^x + 16 \cdot 4^x = 10 \Leftrightarrow \frac{33}{2} \cdot 4^x = 10 \Leftrightarrow 4^x = \frac{20}{33} \Leftrightarrow x = \log_4 \frac{20}{33}.$$

Vậy $x = \log_4 \frac{20}{33}$ là nghiệm của phương trình.

b) Phương pháp đặt ẩn phụ

$$\alpha a^{2x} + \beta . a^x + \gamma = 0 \text{. Đặt } t = a^x, (t > 0)$$

Ví dụ: Giải các phương trình sau:

a) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ b) $9^x - 3 \cdot 6^x + 2 \cdot 4^x = 0$

c) $5^x + 5^{1-x} - 6 = 0$ d) $25^x - 2.5^x - 15 = 0$

Lời giải

a) $9^x - 4.3^x + 3 = 0$ đặt $t = 3^x$ với $t > 0$ ta được phương trình: $t^2 - 4.t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 3$ (2 nghiệm đều thoả điều kiện $t > 0$).

với $t = 1 \Leftrightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

với $t = 3 \Leftrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$

b) $9^x-3.6^x+2.4^x=0$ chia 2 vế của phương trình cho 4^x ta được phương trình sau $\left(\frac{9}{4}\right)^x-3\left(\frac{6}{4}\right)^x+2=0\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-3\left(\frac{3}{2}\right)^x+2=0$ đặt $t=(3/2)^x$ với $t>0$ ta được phương trình

$t^2-3.t+2=0\Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=2$ (2 nghiệm đều thoả $t>0$)

với $t=1\Leftrightarrow(3/2)^x=1\Leftrightarrow x=0$

với $t=2\Leftrightarrow(3/2)^x=2\Leftrightarrow x=\log_{\frac{3}{2}}2$

c) $5^x+5^{1-x}-6=0\Leftrightarrow 5^x+5.5^{-x}-6=0$

Đặt $t=5^x$ (với $t>0$) thì $5^{-x}=1/t$ ta được phương trình:

$t+5\frac{1}{t}-6=0\Leftrightarrow t^2-6t+5=0\Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=5$ (thoả điều kiện $t>0$)

với $t=1\Leftrightarrow 5^x=1\Leftrightarrow x=0$

với $t=5\Leftrightarrow 5^x=5\Leftrightarrow x=1$

d) d) $25^x-2.5^x-15=0\Leftrightarrow 5^{2x}-2.5^x-15=0$ đặt $t=5^x$ với $t>0$ ta được phương trình

$t^2-2t-15=0\Leftrightarrow t=5$ (nhận) hoặc $t=-3$ (loại)

với $t=5\Leftrightarrow 5^x=1\Leftrightarrow x=0$

c) Logarit hóa

Nếu phương trình cho ở dạng $a^{f(x)}=b\Leftrightarrow\begin{cases}0<a\neq 1\\ b>0\\ f(x)=\log_a b\end{cases}$.

Vi dụ : Giải phương trình sau

a) $3^x=2$ b) $2^x\cdot 3^x=1$

Lời giải:

a) $3^x=2$ ta logarit cơ số 3 hay vế

$\text{Pt}\Leftrightarrow\log_3 3^x=\log_3 2\Leftrightarrow x=\log_3 2$

$b)2^x\cdot 3^x=1\Leftrightarrow(2.3)^x=1\Leftrightarrow 6^x=1\Leftrightarrow\log_6 6^x=\log_6 1\Leftrightarrow x=0$

Hoặc có thể làm như sau, lấy logarit cơ số 2 của 2 vế ta được

$\Leftrightarrow\log_2\left(2^x\cdot 3^x\right)=\log_2 1\Leftrightarrow\log_2\left(2^x\cdot 3^x\right)=0\Leftrightarrow\log_2 2^x+\log_2 3^x=0$

$\Leftrightarrow x+x\cdot\log_2 3=0\Leftrightarrow x\left(1+\log_2 3\right)=0\Leftrightarrow x=0$

II. PHƯƠNG TRÌNH LOGARI

1. Phương trình logarit cơ bản: là phương trình có dạng $\log_a x=b$ với $0<a\neq 1$

$\log_a x=b\Leftrightarrow\quad x=a^b$

2. Cách giải một số phương trình mũ cơ bản

a) Đưa về cùng cơ số

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \overset{a>0,a\neq 1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f(x) > 0 \ (hoac\ g(x) > 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau

a) $\log_3(2x+1) = \log_3 5$ b) $\log_2(x+3) = \log_2\left(2x^2 - x - 1\right)$

c) $\log_5(x-1) = 2$ d) $\log_2(x-5) + \log_2(x+2) = 3$

Lời giải:

a) ĐK: $2x+1>0 \Leftrightarrow x > (-1/2)$

PT $\Leftrightarrow 2x+1=5 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$ (thoả ĐK)

b) ĐK: $x+3>0, 2x^2-x-1>0$ ta được: $x>1$ hoacc $(-3)<x<(-1/2)$

Ta có: $\log_2(x+3) = \log_2\left(2x^2-x-1\right) \Leftrightarrow x+3 = 2x^2-x-1 \Leftrightarrow 2x^2-2x-4=0$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x=-1$ (thoả) hoặc $x=2$ (thoả)

c) ĐK: $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

Ta có: $\log_5(x-1)=2 \Leftrightarrow x-1=5^2 \Leftrightarrow x=26$ (thoả)

d) ĐK: $x-5>0$ và $x+2>0$ ta được: $x>5$

Ta có:

$\log_2(x-5)+\log_2(x+2)=3 \Leftrightarrow \log_2(x-5)(x+2)=3 \Leftrightarrow (x-5)(x+2)=2^3$

$\Leftrightarrow x^2-3x-18=0 \Leftrightarrow x=-3$ (loai) hoacc $x=6$ (thoả)

b) Phương pháp đặt ẩn phụ

$\alpha \log_a^2 x + \beta.\log_a x + \gamma = 0$. Đặt $t = \log_a x, (x>0)$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau

a) $\log_3^2 x + 2\log_3 x - 3 = 0$

b) $4\log_9 x + \log_x 3 - 3 = 0$

Lời giải:

a) ĐK: $x>0$

Ta đặt $t = \log_3 x$ khi đó $PT \Leftrightarrow t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow t=1$ hoacc $t=-3$

Với $t=1 \Leftrightarrow \log_3 x = 1 \Leftrightarrow x=3$

Với $t=-3 \Leftrightarrow \log_3 x = -3 \Leftrightarrow x = 3^{-3} = 1/27$

b) $4\log_9 x + \log_x 3 - 3 = 0$ ĐK: $0<x\neq 1$

PT $\Leftrightarrow 2\log_3 x + 1/\log_3 x - 3 = 0$

Ta đặt $t = \log_3 x$ khi đó PT $\Leftrightarrow 2t + 1/t - 3 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=1/2$

Vớit $=1 \Leftrightarrow \log_3 x = 1 \Leftrightarrow x=3$ (thoả)

Vớit $=1/2 \Leftrightarrow \log_3 x = 1/2 \Leftrightarrow x=\sqrt{3}$ (thoả)

c) Mũ hóa

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^b \end{cases}$$

Ví dụ 3: Giải các phương trình sau:

a) $\ln(x+3) = -1+\sqrt{3}$

b) $\log_2\left(5-2^x\right) = 2-x$

Lời giải:

a) ĐK: $x-3>0 \Leftrightarrow x>3$ với điều kiện này ta mũ hóa 2 vế của PT đã cho ta được PT: $e^{ln(x+3)} = e^{-1+\sqrt{3}} \Leftrightarrow x+3 = e^{-1+\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = e^{-1+\sqrt{3}} - 3$ (thoả)

b) $\log_2\left(5-2^x\right) = 2-x$

ĐK: $5-2^x > 0 \Leftrightarrow 2^x < 5$

$\$ \text{PT} \Leftrightarrow 2^{\log_2 5-2^x} = 2^{2-x} \Leftrightarrow 5-2^x = 4.2^{-x} \$$

Đặt $t = 2^x \left(t>0, t<5 \text{ do } 2^x<5\right)$ ta được: $5-t = (4/t) \Leftrightarrow t^2-5t+4=0$

$\Leftrightarrow t=1$ (thoả) hoặc $t=4$ (thoả)

Với $t=1 \Leftrightarrow x=0$

Với $t=4 \Leftrightarrow x=2$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Phương pháp đưa về cùng cơ số

Câu 1: Phương trình $2^{2x+1} = 32$ có nghiệm là

A. $x = \frac{5}{2}$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = \frac{3}{2}$. **D.** $x = 3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2^{2x+1} = 32 \Leftrightarrow 2x+1 = 5 \Leftrightarrow x = 2$.

Câu 2: Phương trình $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x-1}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = \left(\frac{1}{7}\right)^{-x+1} \Leftrightarrow x^2-2x-3 = -x+1 \Leftrightarrow x^2-x-4=0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$$

Câu 3: Phương trình $\log_{\sqrt{2}} x = \log_2 (x+2)$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

$$\log_{\sqrt{2}} x = \log_2 (x+2) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x^2 = \log_2 (x+2) \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x+2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{array} \right. \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Câu 4: Số nghiệm của phương trình $\log_3 (x^2 + 4x) + \log_{\frac{1}{3}} (2x+3) = 0$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\begin{cases} x^2 + 4x > 0 \\ 2x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x < -4 \end{array} \right. \\ x > -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_3 (x^2 + 4x) = \log_3 (2x+3)$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array} \right..$$

Kết hợp điều kiện ta được $x = 1$.

Câu 5: Tập nghiệm S của phương trình $\left(\frac{4}{7}\right)^x \left(\frac{7}{4}\right)^{3x-1} - \frac{16}{49} = 0$ là

A. $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. **B.** $S = \{2\}$. **C.** $\left\{\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$. **D.** $S = \left\{-\frac{1}{2}; 2\right\}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left(\frac{4}{7}\right)^x \left(\frac{7}{4}\right)^{3x-1} - \frac{16}{49} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{7}\right)^{-2x+1} = \left(\frac{4}{7}\right)^2 \Leftrightarrow -2x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$

Câu 6: Cho phương trình $\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^{x^2+x-1} = \left(2 + \sqrt{3}\right)^{x-2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Phương trình có hai nghiệm không dương.

B. Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

C. Phương trình có hai nghiệm trái dấu.

D. Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt.

Lời giải

Chọn A

Do $7+4\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$ nên phương trình ban đầu tương đương với

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2\left(x^2+x-1\right)}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{x-2}\Leftrightarrow 2x^2+2x-2=x-2\Leftrightarrow 2x^2+x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm không dương.

Câu 7: Nghiệm của phương trình $\log_2\left(x+1\right)+1=\log_2\left(3x-1\right)$ là

A. $x=3$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định $\begin{cases}x+1>0\\3x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\x>\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{3}$.

Khi đó phương trình trở thành

$\log_2\left(2x+2\right)=\log_2\left(3x-1\right)\Leftrightarrow 2x+2=3x-1\Leftrightarrow -x=-3\Leftrightarrow x=3$.

Vậy phương trình có nghiệm $x=3$.

Câu 8: Số nghiệm thực của phương trình $3\log_3\left(x-1\right)-\log_{\frac{1}{3}}\left(x-5\right)^3=3$ là

A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>5$

$3\log_3\left(x-1\right)-\log_{\frac{1}{3}}\left(x-5\right)^3=3\Leftrightarrow 3\log_3\left(x-1\right)+3\log_3\left(x-5\right)=3$

$\Leftrightarrow\log_3\left(x-1\right)+\log_3\left(x-5\right)=1\Leftrightarrow\log_3\left[\left(x-1\right)\left(x-5\right)\right]=1\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x-5\right)=3$

$\Leftrightarrow x^2-6x+2=0\Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{7}$

Đối chiếu điều kiện suy ra phương trình có 1 nghiệm $x=3+\sqrt{7}$

Câu 9: Nghiệm của phương trình $2^{x+1}.4^{x-1}.\dfrac{1}{8^{1-x}}=16^x$ là

A. $x=3$. **B.** $x=1$. **C.** $x=4$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn D

$2^{x+1}.4^{x-1}.\dfrac{1}{8^{1-x}}=16^{x} \Leftrightarrow 2^{x+1}.2^{2(x-1)}.2^{3(x-1)}=2^{4x}$

$\Leftrightarrow x+1+2(x-1)+3(x-1)=4x \Leftrightarrow x=2.$

Câu 10: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2^{x^2-2x-1}.3^{x^2-2x}=18$ bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2^{x^2-2x-1}.3^{x^2-2x}=18 \Leftrightarrow 6^{x^2-2x}=36 \Leftrightarrow x^2-2x=2 \Leftrightarrow x^2-2x-2=0$.

Phương trình $x^2-2x-2=0$ có hai nghiệm phân biệt.

Theo định lí vi-et tổng hai nghiệm của phương trình là: $x_1+x_2=2$.

Câu 11: Tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$ là $S=a+b\sqrt{2}$. Giá trị của biểu thức $Q=a.b$ bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $2<x\neq 4$.

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương

$2\log_3(x-2)+2\log_3|x-4|=0 \Leftrightarrow \log_3(x-2)|x-4|=0 \Leftrightarrow (x-2)|x-4|=1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-2)(x-4)=1\\(x-2)(x-4)=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-6x+7=0\\x^2-6x+9=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\pm\sqrt{2}\\x=3\end{array}\right.$ So lại điều kiện, ta nhận hai nghiệm $x_1=3+\sqrt{2}; x_2=3$

Ta được: $S=x_1+x_2=6+\sqrt{2} \Rightarrow a=6; b=1$.

Vậy $Q=a.b=6$.

Dạng 2. Phương pháp đặt ẩn phụ

Câu 1: Cho phương trình $4^x+2^{x+1}-3=0$. Khi đặt $t=2^x$, ta được phương trình nào dưới đây?

A. $2t^2-3=0$. **B.** $t^2+t-3=0$. **C.** $4t-3=0$. **D.** $t^2+2t-3=0$.

Lời giải

Chọn D

$4^x+2^{x+1}-3=0 \Leftrightarrow (2^x)^2+2.2^x-3=0$

Đặt $t=2^x\ (t>0)$. Phương trình trở thành $t^2+2t-3=0$

Câu 2: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_2^2 x-3\log_2 x+2=0$. Tính $P=x_1+x_2$.

A. 6. **B.** -3. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

$\log_2^2 x-3\log_2 x+2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=1\\ \log_2 x=2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=2\\ x_2=4\end{array}\right.$.

Vậy $P=x_1+x_2=2+4=6$.

Câu 3: Tổng bình phương tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x-3\log_3 x.\log_2 3+2=0$

A. 20 **B.** 18 **C.** 6 **D.** 25

Lời giải

Chọn A

$\log_2^2 x-3\log_3 x.\log_2 3+2=0 \Leftrightarrow \log_2^2 x-3\log_2 x+2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=1\\ \log_2 x=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=2\\ x_2=4\end{array}\right. \Rightarrow x_1^2+x_2^2=20$

Câu 4: Phương trình $6^{2x-1}-5.6^{x-1}+1=0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Khi đó tổng hai nghiệm x_1+x_2 là.

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

$6^{2x-1}-5.6^{x-1}+1=0 \Leftrightarrow \dfrac{6^{2x}}{6}-\dfrac{5.6^x}{6}+1=0 \Leftrightarrow 6^{2x}-5.6^x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}6^{x_1}=2\\ 6^{x_2}=3\end{array}\right.$.

$\Rightarrow 6^{x_1}.6^{x_2}=3.2 \Leftrightarrow 6^{x_1+x_2}=6 \Leftrightarrow x_1+x_2=1$.

Câu 6: Gọi T là tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{3}}^2 x-5\log_3 x+4=0$. Tính T.

A. $T=4$. **B.** $T=5$. **C.** $T=84$. **D.** $T=-4$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $\log_{\frac{1}{3}}^2 x-5\log_3 x+4=0 \Leftrightarrow \log_3^2 x-5\log_3 x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x=1\\ \log_3 x=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=81\end{array}\right.$.

Vậy $T=3+81=84$.

Câu 7: Phương trình $9^x-6^x=2^{2x+1}$ có bao nhiêu nghiệm âm?

A. 3 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Chọn B

Ta có: $9^x-6^x=2^{2x+1} \Leftrightarrow 9^x-6^x=2.4^x \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}-\left(\dfrac{3}{2}\right)^x-2=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^x = -1 (L)\\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} 2 .$$

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm âm.

Câu 8: Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $\left(2-\sqrt{3}\right)^x + \left(2+\sqrt{3}\right)^x = 4$. Khi đó $x_1^2 + 2x_2^2$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(2-\sqrt{3}\right)^x . \left(2+\sqrt{3}\right)^x = 1$. Đặt $t = \left(2-\sqrt{3}\right)^x, t > 0 \Rightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^x = \frac{1}{t}$.

Phương trình trở thành: $t + \frac{1}{t} = 4 \Rightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \pm \sqrt{3}$.

Với $t = 2-\sqrt{3} \Rightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)^x = 2-\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 1$.

Với $t = 2+\sqrt{3} \Rightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)^x = 2+\sqrt{3} \Leftrightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)^x = \left(2-\sqrt{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow x = -1$.

Vậy $x_1^2 + 2x_2^2 = 3$.

Câu 9: Biết rằng phương trình $\log_2^2 x - \log_2 (2018x) - 2019 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2. Tích $x_1 x_2$ bằng

A. $\log_2 2018$ **B.** 0,5 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Chọn D

$\log_2^2 x - \log_2 (2018x) - 2019 = 0$. (1)

Điều kiện $x > 0$.

Đặt $t = \log_2 x$. Phương trình trở thành $t^2 - t - \log_2 2018 - 2019 = 0$. (2)

Do $ac < 0$ nên phương trình (2) có hai nghiệm t_1, t_2. Khi đó phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $t_1 = \log_2 x_1; t_2 = \log_2 x_2$.

Theo Vi-et ta có $t_1 + t_2 = 1$ hay $\log_2 (x_1 x_2) = 1 \Leftrightarrow x_1 x_2 = 2$.

Câu 10: Tìm số nghiệm thực của phương trình $\log_2^2 x^2 - \log_4 (4x^2) - 5 = 0$.

A. 2 **B.** 4 **C.** 1 **D.** 3

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x \neq 0$.

Phương trình $\log_2^2 x^2 - \log_4 (4x^2) - 5 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x^2 - \frac{1}{2}\log_2 x^2 - 6 = 0$

$\Leftrightarrow \log_2 x^2 = \dfrac{1+\sqrt{97}}{4} \vee \log_2 x^2 = \dfrac{1-\sqrt{97}}{4}$. Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 11: Cho phương trình $\log_5\left(5^x-1\right).\log_{25}\left(5^{x+1}-5\right)=1$. Khi đặt $t=\log_5\left(5^x-1\right)$, ta được phương trình nào dưới đây?

A. $t^2-1=0$ **B.** $t^2+t-2=0$

C. $t^2-2=0$ **D.** $2t^2+2t-1=0$

Lời giải

Chọn B

$\log_5\left(5^x-1\right).\log_{25}\left(5^{x+1}-5\right)=1 \quad (1)$

TXĐ: $D=\left(0;+\infty\right)$.

Ta có $\log_{25}\left(5^{x+1}-5\right)=\log_{5^2}\left(5.5^x-5\right)=\dfrac{1}{2}\left(\log_5\left(5^x-1\right)+1\right)$.

Đặt $t=\log_5\left(5^x-1\right) \ (t>0)$.

Phương trình (1) trở thành $t.\dfrac{1}{2}(t+1)=1 \Leftrightarrow t^2+t-2=0$.

Câu 12: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $3^x+3^{4-x}=30$ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** 9. **D.** 27.

Lời giải

Chọn A

$3^x+3^{4-x}=30 \Leftrightarrow 3^x+\dfrac{81}{3^x}=30$.

Đặt $t=3^x\left(t>0\right)$, phương trình đã cho trở thành:

$t+\dfrac{81}{t}=30 \Leftrightarrow t^2-30t+81=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=27 \Rightarrow 3^x=27 \Leftrightarrow x=3 \\ t=3 \Rightarrow 3^x=3 \Leftrightarrow x=1 \end{array}\right.$ Vậy tích tất cả các nghiệm của phương trình là $1.3=3$.

Câu 13: Biết phương trình $2\log_2 x+3\log_x 2=7$ có hai nghiệm thực $x_1<x_2$. Tính giá trị của biểu thức $T=\left(x_1\right)^{x_2}$

A. $T=64$. **B.** $T=32$. **C.** $T=8$. **D.** $T=16$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$.

Ta có: $2\log_2 x+3\log_x 2=7 \Leftrightarrow 2\log_2 x+\dfrac{3}{\log_2 x}=7$

$$\Leftrightarrow 2\log_2^2 x-7\log_2 x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=3\\ \log_2 x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=8\\ x=\sqrt{2}\end{array}\right..$$

$$\Rightarrow x_1=\sqrt{2};\ x_2=8 \Rightarrow T=(x_1)^{x_2}=\left(\sqrt{2}\right)^8=16.$$

Câu 14: Phương trình $3.9^{x^2+x-1}-10.3^{x^2+x-1}+3=0$ có tổng các nghiệm thực là:

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** -2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=3^{x^2+x-1}$, điều kiện $t>0$.

Khi đó phương trình đã cho có dạng: $3t^2-10t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=3\\ t=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$

Với $t=3\Rightarrow 3^{x^2+x-1}=3\Leftrightarrow x^2+x-1=1\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-2\end{array}\right.$

Với $t=\dfrac{1}{3}\Rightarrow 3^{x^2+x-1}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow x^2+x-1=-1\Leftrightarrow x^2+x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-1\end{array}\right.$

Tập nghiệm của phương trình là $S=\{-2;-1;0;1\}$ nên tổng tất cả các nghiệm thực là -2.

Câu 15: Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x-m.4^{x+1}+5m^2-45=0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. \$13\$ **B.** 3 **C.** 6 **D.** 4

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=4^x,(t>0)$. Phương trình trở thành: $t^2-4mt+5m^2-45=0$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình có hai nghiệm phân biệt $t>0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ P>0\\ S>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-m^2+45>0\\ 5m^2-45>0\\ 4m>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3\sqrt{5}<m<3\sqrt{5}\\ m<-3\vee m>3\\ m>0\end{cases} \Leftrightarrow 3<m<3\sqrt{5}.$$

Vì m nguyên nên $m\in\{4;5;6\}$. Vậy S có 3 phần tử.

Câu 16: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $4^x-m.2^{x+1}+2m=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=3$?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $\Leftrightarrow 4^x - 2m.2^x + 2m = 0\ (1)$

Đặt $t = 2^x$, $t > 0$ phương trình trở thành $t^2 - 2m.t + 2m = 0\ (2)$.

Để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$ điều kiện là phương trình (2) có hai nghiệm t_1, $t_2 > 0$ thỏa mãn $t_1.t_2 = 2^{x_1}.2^{x_2} = 2^{x_1+x_2} = 8$ suy ra $2m = 8 \Leftrightarrow m = 4$.

Câu 17: Tìm giá trị thực của m để phương trình $\log_3^2 x - m\log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 81$.

A. $m = -4$ **B.** $m = 44$ **C.** $m = 81$ **D.** $m = 4$

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \log_3 x$ ta được $t^2 - mt + 2m - 7 = 0$, tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm t_1, t_2

$t_1 + t_2 = \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = \log_3 (x_1 x_2) = \log_3 81 = 4$

Theo vi-et suy ra $t_1 + t_2 = m \Rightarrow m = 4$

Dạng 3. Phương pháp logarit hóa, mũ hóa

Câu 1: Số nghiệm của phương trình $(x-2)\left[\log_{0,5}(x^2 - 5x + 6) + 1\right] = 0$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

ĐKXĐ: $x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < 2 \end{array}\right.$.

Kết hợp ĐKXĐ ta có:

$(x-2)\left[\log_{0,5}(x^2 - 5x + 6) + 1\right] = 0 \Leftrightarrow \log_{0,5}(x^2 - 5x + 6) = -1$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0,5^{-1} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

Đối chiếu với ĐKXĐ ta thấy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là $9 - 7 = 2$

Câu 2: Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - x + 2) = 1$ là

A. $\{0\}$. **B.** $\{0;1\}$. **C.** $\{-1;0\}$. **D.** $\{1\}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_2(x^2 - x + 2) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Câu 3: Nghiệm của phương trình $\log(x-1) = 2$ là

A. 5. **B.** 21. **C.** 101. **D.** 1025.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện của phương trình là $x>1$.

$\log(x-1)=2 \Leftrightarrow x-1=10^2 \Leftrightarrow x=101$.

Vậy $x=101$ thỏa mãn điều kiện nên phương trình đã cho có nghiệm là $x=101$.

Câu 4: Tập nghiệm của phương trình $\log_2 x+\log_4 x+\log_{16} x=7$ là:

A. $\{16\}$. **B.** $\{\sqrt{2}\}$. **C.** $\{4\}$. **D.** $\{2\sqrt{2}\}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>0$.

$\log_2 x+\log_4 x+\log_{16} x=7 \Leftrightarrow \log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x+\frac{1}{4}\log_2 x=7 \Leftrightarrow \frac{7}{4}\log_2 x=7.$

$\Leftrightarrow \log_2 x=4 \Leftrightarrow x=2^4 \Leftrightarrow x=16$.

Câu 5: Tích các nghiệm của phương trình $2^{x^2-1}=3^{2x+3}$ bằng

A. $-3\log_2 3$. **B.** $-\log_2 54$. **C.** -4. **D.** $1-\log_2 3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2^{x^2-1}=3^{2x+3} \Leftrightarrow x^2-1=(2x+3)\log_2 3 \Leftrightarrow x^2-2\log_2 3.x-1-3\log_2 3=0$.

Vì $ac<0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và

$x_1x_2=-1-3\log_2 3=-\log_2 2-\log_2 27=-\log_2 54$.

Câu 6: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2^x.5^{x^2-2x}=1$. Khi đó tổng x_1+x_2 bằng

A. $2-\log_5 2$. **B.** $-2+\log_5 2$. **C.** $2+\log_5 2$. **D.** $2-\log_2 5$.

Lời giải

$2^x.5^{x^2-2x}=1 \Leftrightarrow \log_5\left(2^x.5^{x^2-2x}\right)=0 \Leftrightarrow x\log_5 2+x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(\log_5 2+x-2)=0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=2-\log_5 2 \end{array}\right.$.

Câu 7: Phương trình $27^{\frac{x-1}{x}}.2^x=72$ có một nghiệm viết dưới dạng $x=-\log_a b$, với a, b là các số nguyên dương. Tính tổng $S=a+b$.

A. $S=4$. **B.** $S=5$. **C.** $S=6$. **D.** $S=8$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x\neq 0$.

Phương trình $27^{\frac{x-1}{x}}.2^x=72\Leftrightarrow 3^{3\left(\frac{x-1}{x}\right)}.2^x=3^2.2^3\Leftrightarrow\frac{3^{\frac{3x-3}{x}}}{3^2}=\frac{2^3}{2^x}\Leftrightarrow 3^{\frac{3x-3}{x}-2}=2^{3-x}$

$\Leftrightarrow 3^{\frac{x-3}{x}}=2^{3-x}\Leftrightarrow\frac{x-3}{x}=\log_3 2^{3-x}\Leftrightarrow\frac{x-3}{x}=-(x-3)\log_3 2\Leftrightarrow(x-3)\left(\frac{1}{x}+\log_3 2\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\-\log_3 2=\frac{1}{x}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3(N)\\x=-\log_2 3(N)\end{array}\right.$.

Suy ra $\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}$. Vậy tổng $S=a+b=5$.

Câu 8: Tính tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_4\left(3.2^x-1\right)=x-1$

A. 2. **B.** 1. **C.** 5. **D.** –6.

Lời giải

Chọn A

$\log_4\left(3.2^x-1\right)=x-1\Leftrightarrow 3.2^x-1=4^{x-1}\Leftrightarrow 4^x-12.2^x+4=0$

Đặt $t=2^x\left(t>0\right)$. Phương trình trở thành: $t^2-12t+4=0\Leftrightarrow t=6\pm 4\sqrt{2}$

Với $t=6+4\sqrt{2}\Rightarrow 2^x=6+4\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\log_2\left(6+4\sqrt{2}\right)$.

Với $t=6-4\sqrt{2}\Rightarrow 2^x=6-4\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\log_2\left(6-4\sqrt{2}\right)$.

Tổng các nghiệm là $\log_2\left(6+4\sqrt{2}\right)+\log_2\left(6-4\sqrt{2}\right)=\log_2 4=2$.

Câu 9: Phương trình $\log_2\left(5-2^x\right)=2-x$ có hai ngiệm x_1, x_2. Tính $P=x_1+x_2+x_1x_2$.

A. 11. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $2^x<5$

$\log_2\left(5-2^x\right)=2-x\Leftrightarrow 5-2^x=2^{2-x}\Leftrightarrow 5-2^x=\frac{4}{2^x}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=1\\2^x=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

$\Rightarrow P=x_1+x_2+x_1x_2=2$

Câu 10: Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_6\left(3.4^x+2.9^x\right)=x+1$ bằng

A. 4 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 3

Lời giải

Chọn B

Phương trình đã cho tương đương $3.4^x+2.9^x=6^{x+1}\Leftrightarrow 3.\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-6.\left(\frac{2}{3}\right)^x+2=0$

Đặt $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t, (t>0)$. Khi đó ta có phương trình $3t^2 - 6t + 2 = 0$

Hiển nhiên phương trình có 2 nghiệm phân biệt t_1, t_2 dương và thỏa mãn $t_1.t_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x_1}.\left(\frac{2}{3}\right)^{x_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow x_1 + x_2 = 1.$

Dạng 4: Sử Dụng Tính Đơn Điệu Hàm Số

Câu 1: Hỏi phương trình $3.2^x + 4.3^x + 5.4^x = 6.5^x$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $3.2^x + 4.3^x + 5.4^x = 6.5^x \Leftrightarrow 3\left(\frac{2}{5}\right)^x + 4\left(\frac{3}{5}\right)^x + 5\left(\frac{4}{5}\right)^x - 6 = 0$.

Xét hàm số $f(x) = 3\left(\frac{2}{5}\right)^x + 4\left(\frac{3}{5}\right)^x + 5\left(\frac{4}{5}\right)^x - 6$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Có $f'(x) = 3\left(\frac{2}{5}\right)^x \ln\frac{2}{5} + 4\left(\frac{3}{5}\right)^x \ln\frac{3}{5} + 5\left(\frac{4}{5}\right)^x ln\frac{4}{5} < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm (1).

Mặt khác $f(1).f(2) = \frac{8}{5}.\left(-\frac{22}{25}\right) = -\frac{176}{125} < 0$ nên phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1;2)$.(2).

Từ (1) và (2) suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Câu 2: Số nghiệm của phương trình $2^{\log_5(x+3)} = x$ là:

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > -3$

Đặt $t = \log_5(x+3) \Rightarrow x = 5^t - 3$, phương trình đã cho trở thành

$2^t = 5^t - 3 \Leftrightarrow 2^t + 3 = 5^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^t + 3.\left(\frac{1}{5}\right)^t = 1$

Dễ thấy hàm số $f(t) = \left(\frac{2}{5}\right)^t + 3.\left(\frac{1}{5}\right)^t$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = 1$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $t = 1$.

Với $t = 1$, ta có $\log_5(x+3) = 1 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Câu 3: Tích tất cả các nghiệm phương trình $\log_5 x \log_3 x = \log_5 x + \log_3 x$ bằng

A. 15 **B.** 20 **C.** 25 **D.** 30.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x > 0$.

Phương trình $\log_5 x \log_3 x = \log_5 x + \log_3 x \Leftrightarrow \log_5 x\left(\log_3 x - 1\right) = \log_3 x$

$\Leftrightarrow \log_5 x = 1 + \dfrac{1}{\log_3 x - 1}, (x \neq 3).$

Hàm số $y = \log_5 x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, hàm số $y = 1 + \dfrac{1}{\log_3 x - 1}$ nghịch biến trên các khoảng $(0;3)$ và $(3;+\infty)$. Do đó phương trình trên có tối đa hai nghiệm, mỗi khoảng có tối đa một nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là 1 và 15.

Dạng 5: Bài tập dành cho học sinh 8+, 9+

Câu 1: Tập hợp các số thực m để phương trình $\ln\left(3x - mx + 1\right) = \ln\left(-x^2 + 4x - 3\right)$ có nghiệm là nửa khoảng $[a;b)$. Tổng của $a + b$ bằng

A. $\dfrac{10}{3}$. **B.** 4. **C.** $\dfrac{22}{3}$. **D.** 7.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Phương trình $\ln\left(3x - mx + 1\right) = \ln\left(-x^2 + 4x - 3\right) \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4x - 3 > 0 \\ 3x - mx + 1 = -x^2 + 4x - 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3 \\ x^2 - x + 4 = mx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3 \\ m = \dfrac{x^2 - x + 4}{x} \end{cases} (*).$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{x}$ với $1 < x < 3$.

Khi đó $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{x}$ trên khoảng $(1;3)$

x	1		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	↘	3	↗	$\frac{10}{3}$

Nhận xét: Phương trình ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm trên khoảng $(1;3)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $(*)$ có nghiệm trên khoảng $(1;3)$ khi và chỉ khi $3 \le m < 4$ hay $m \in [3;4)$. Do đó $a=3$, $b=4$.

Vậy $a+b=7$.

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $4^x - (m+3).2^{x+1} + m + 9 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** Vô số.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt: $t = 2^x \ (x > 0 \Rightarrow t > 1)$, phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 2(m+3)t + m + 9 = 0$.

Bài toán trở thành: Tìm các giá trị nguyên của tham số m để phương trình:
$t^2 - 2(m+3)t + m + 9 = 0$ có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $1 < t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + 5m > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) > 0 \\ \frac{S}{2} = m + 3 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + 5m > 0 \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 > 0 (*) \\ \frac{S}{2} = m + 3 > 1 \end{cases}$$

Phương trình: $t^2 - 2(m+3)t + m + 9 = 0$ có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 nên theo Viet ta có:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2(m+3) \\ t_1 . t_2 = m + 9 \end{cases}$$

Thay vào hệ $(*)$ ta được $\begin{cases} m^2 + 5m > 0 \\ -m + 4 > 0 \\ m + 3 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -5 \\ m > 0 \end{array}\right. \\ m < 4 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4$

Vì $m \in \mathbb{Z}, 0 < m < 4 \Rightarrow m \in \{1;2;3\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3: Cho phương trình $4^x - 2^{x+2} + m - 2 = 0$ với m là tham số. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $0 \le x_1 < x_2$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$4^x - 2^{x+2} + m - 2 = 0 \Leftrightarrow 4^x - 4.2^x + m - 2 = 0 (1)$. Đặt $t = 2^x (t > 0)$

$(1) \Leftrightarrow t^2 - 4t + m - 2 = 0 (2)$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0 \le x_1 < x_2$

$\Leftrightarrow 2^0 \le 2^{x_1} < 2^{x_2} \Leftrightarrow 1 \le t_1 < t_2$

Thì phương trình (2) thỏa: $0 \le t_1 - 1 < t_2 - 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 + t_2 > 2 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 4(m-2) > 0 \\ 4 > 2 \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 6 \\ m \ge 5 \end{cases}$$. Vậy $m = 5$ thỏa yêu cầu.

Câu 4: Phương trình $(1+\sqrt{2})^x + (1-2a)(\sqrt{2}-1)^x - 4 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{1+\sqrt{2}} 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$. **B.** $a \in \left(-\frac{3}{2}; 0\right)$. **C.** $a \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$. **D.** $a \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Vì $(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) = 1$. Đặt $t = (1+\sqrt{2})^x (t > 0) \Rightarrow (\sqrt{2}-1)^x = \frac{1}{t}$

Phương trình trở thành: $t + \frac{1-2a}{t} - 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 - 2t = 0 (1)$.

Để phương trình ban đầu có 2 nghiệm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm dương t_1, t_2.

$$\begin{cases} \Delta' = 2a + 3 > 0 \\ t_1 + t_2 = 4 > 0 \\ t_1 t_2 = 1 - 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-3}{2} < a < \frac{1}{2}.$$

Và thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{1+\sqrt{2}} 3 \Leftrightarrow (1+\sqrt{2})^{x_1 - x_2} = 3 \Leftrightarrow \frac{t_1}{t_2} = 3 \Leftrightarrow t_1 = 3t_2$.

$$\begin{cases} t_1 = 3t_2 \\ t_1 + t_2 = 4 \\ t_1 t_2 = 1 - 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 1 \\ t_1 t_2 = 1 - 2a = 1.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

Vậy với $a=-1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5: Cho phương trình $4^{x+1}-(8m+5)2^x+2m+1=0$ (m là tham số) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2=-1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m\in(1;3)$. **B.** $m\in(-5;-3)$. **C.** $m\in(-3;0)$. **D.** $m\in(0;1)$.

Hướng dẫn giải

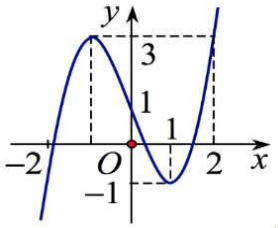
Chọn D

$4^{x+1}-(8m+5)2^x+2m+1=0$ $(*)$

Đặt $t=2^x$, điều kiện $t>0$, phương trình $(*)$ trở thành

$4t^2-(8m+5)t+2m+1=0 \Leftrightarrow (4t-1)(t-2m-1)=0 \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} t_1=\dfrac{1}{4} \\ t_2=2m+1. \end{array}\right.$



Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} 2m+1>0 \\ 2m+1\neq\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} m>-\dfrac{1}{2} \\ m\neq-\dfrac{3}{8}. \end{cases}$ $(**)$

Lại có $x_1x_2=-1 \Leftrightarrow \log_2 t_1\cdot\log_2 t_2=-1 \Leftrightarrow \log_2\dfrac{1}{4}\cdot\log_2(2m+1)=-1 \Leftrightarrow$

$\log_2(2m+1)=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2m+1=\sqrt{2} \Leftrightarrow m=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Câu 6: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ thỏa mãn các điều kiện $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4)=1$ và $x^2+y^2+2x-2y+2-m=0$. Tổng các giá trị của S bằng

A. 33. **B.** 24. **C.** 15. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Điều kiện: $4x+4y-4>0$

Ta có $\begin{cases} \log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4)=1 \\ x^2+y^2+2x-2y+2-m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4x-4y+6=0 \\ x^2+y^2+2x-2y+2-m=0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $(x;y)$.

Với $x^2+y^2-4x-4y+6=0$ là phương trình đường tròn tâm $A(2;2)$, bán kính $R_1=\sqrt{2}$.

Với $x^2+y^2+2x-2y+2-m=0$ là phương trình đường tròn tâm $B(-1;1)$, bán kính $R_2=\sqrt{m}$ với $m>0$.

Hai đường tròn có điểm chung duy nhất khi xảy ra các trường hợp sau:

Hai đường tròn tiếp xúc ngoài $AB=R_1+R_2\Leftrightarrow\sqrt{m}+\sqrt{2}=\sqrt{10}\Leftrightarrow m=(\sqrt{10}-\sqrt{2})^2$.

Hai đường tròn tiếp xúc trong $AB=|R_1-R_2|\Leftrightarrow\sqrt{m}-\sqrt{2}=\sqrt{10}\Leftrightarrow m=(\sqrt{10}+\sqrt{2})^2$.

Vậy tổng các giá trị của tham số $m=(\sqrt{10}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{10}+\sqrt{2})^2=24$.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{|x^2-4x+3|}=m^4-m^2+1$ có 4 nghiệm phân biệt?

A. $0<|m|<1$. **B.** $|m|<1$. **C.** $m>-1$. **D.** $m<0$.

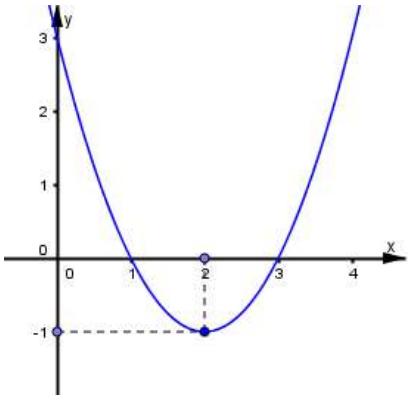
Hướng dẫn giải

Chọn A

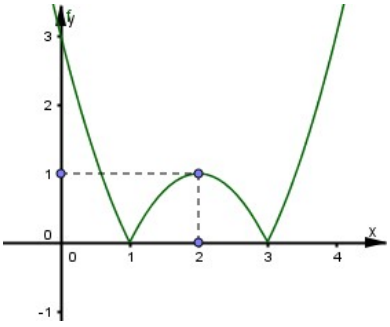
Vì $m^4-m^2+1>0,\forall m$ nên phương trình tương đương với

$|x^2-4x+3|=\log_{\frac{1}{5}}\left(m^4-m^2+1\right)$ (1)

Vẽ đồ thị hàm số bậc hai $y=x^2-4x+3$



Từ đó suy ra đồ thị hàm số $y=|x^2-4x+3|$



Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$0<\log_{\frac{1}{5}}\left(m^4-m^2+1\right)<1\Leftrightarrow\frac{1}{5}<m^4-m^2+1<1\Leftrightarrow 0<|m|<1$.

Câu 8: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-10;10)$ để phương trình $\frac{1}{2}x^2-\ln x-m=0$ có nghiệm?

A. 18. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 12.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Điều kiện xác định $x>0$

Ta có: $\frac{1}{2}x^2-\ln x-m=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}x^2-\ln x=m$

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x, x>0$ có $f'(x)=x-\frac{1}{x}$

Giải phương tình $f'(x)=0\Leftrightarrow x-\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow x^2-1=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x=1$

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình có nghiệm khi $m\geq\frac{1}{2}$.

Mà $m\in\mathbb{Z}, m\in(-10;10)\Rightarrow m\in\{1;2;3...;9\}$. Có 9 giá trị của m

Câu 9. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $1\leq y\leq 10$ và $2^{(x-1)^2}.\log_2\left(x^2-2x+3\right)=4^y.\log_2(2y+2)$?

A. 9. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $2^{(x-1)^2}.\log_2\left(x^2-2x+3\right)=4^y.\log_2(2y+2)$

$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2}.\log_2\left[(x-1)^2+2\right]=2^{2y}.\log_2(2y+2)\ (1)$.

Xét hàm số $f(t)=2^t.\log_2(t+2), t\geq 0$.

Vì $f'(t)=2^t.\ln 2.\log_2(t+2)+\dfrac{2^t}{(t+2)\ln 2}>0,\forall t\ge 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow f\left[(x-1)^2\right]=f(2y)\Leftrightarrow (x-1)^2=2y$.

Mà $1\le y\le 10\Rightarrow 2\le (x-1)^2\le 20\Rightarrow \left[\begin{array}{l}1+\sqrt{2}\le x\le 1+\sqrt{20}\\1-\sqrt{20}\le x\le 1-\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Mặt khác $x\in Z\Rightarrow x\in\{-3;-2;-1;3;4;5\}$. Vì $x-1$ phải chẵn nên x lẻ.

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa đề bài.

Câu 10. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $-20\le x\le 20,-20\le y\le 20$ và $2^{x+5}+3x+12=2^{y+1}+3y$?

A. 41. **B.** 40. **C.** 37. **D.** 32.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $2^{x+5}+3x+12=2^{y+1}+3y\Leftrightarrow 2^{x+5}+3(x+5)=2^{y+1}+3(y+1)$.

Xét hàm số $f(t)=2^t+3t$, $f(t)=2^t+3t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $x+5=y+1\Leftrightarrow y=x+4$.

Kết hợp với điều kiện $-20\le x\le 20;-20\le y\le 20$ suy ra x nguyên thuộc $[-20;16]$ thỏa đề. Vậy có 37 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa đề.

Câu 11. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $1\le x\le 2020$ và $\log_2(2x)+5x=10.2^y+y+2$?

A. 31. **B.** 11. **C.** 2020. **D.** 21.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $\log_2(2x)+5x=10.2^y+y+2\Leftrightarrow \log_2 x+5x+1=\log_2 2^{y+1}+5.2^{y+1}+1$.

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+5t+1$, $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Suy ra $x=2^{y+1}$.

Từ $1\le x\le 2020$ suy ra $1\le 2^{y+1}\le 2020\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\le 2^y\le 1010\Leftrightarrow -1\le y\le \log_2 1010\approx 9{,}98$.

Có 11 giá trị nguyên của y thỏa đề. Vậy có 11 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa đề.

Câu 12. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $1\le y\le 2018$ và $\log_5\left(\dfrac{3^{x+1}-1}{y+1}\right)=y+2-3^{x+1}$?

A. 10. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Điều kiện $\begin{cases} 1 \le y \le 2018 \\ \dfrac{3^{x+1}-1}{y+1} > 0 \end{cases} \Rightarrow x > -1$.

Ta có $\log_5\left(\dfrac{3^{x+1}-1}{y+1}\right) = y+2-3^{x+1} \Leftrightarrow \log_5\left(3^{x+1}-1\right) - \log_5\left(y+1\right) = y+1+1-3^{x+1}$

$\Leftrightarrow \log_5\left(3^{x+1}-1\right) + \left(3^{x+1}-1\right) = \log_5\left(y+1\right) + \left(y+1\right)$ (1).

Xét hàm số $f\left(t\right) = \log_5 t + t$ trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Ta có $f'\left(t\right) = \dfrac{1}{t\ln 5} + 1 > 0$ với mọi $t \in \left(0;+\infty\right)$ nên hàm số $f\left(t\right) = \log_5 t + t$ đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$. Từ $\left(1\right)$ ta có $f\left(3^{x+1}-1\right) = f\left(y+1\right) \Leftrightarrow 3^{x+1}-1 = y+1 \Leftrightarrow y = 3^{x+1}-2$.

Vì $1 \le y \le 2018 \Leftrightarrow 1 \le 3^{x+1}-2 \le 2018 \Leftrightarrow 3 \le 3^{x+1} \le 2020 \Leftrightarrow 1 \le x+1 \le \log_3 2020$

$\Leftrightarrow 0 \le x \le \log_3 2020 - 1$.

Vì x nguyên nên $x \in \left\{0;1;2;3;4;5\right\}$. Vậy có 6 cặp $\left(x;y\right)$ thỏa bài toán.

Câu 13. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_4 x = \log_6 y = \log_9\left(x+y\right)$. Giá trị của tỉ số $\dfrac{x}{y}$ bằng

A. $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. **D.** $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $\log_4 x = \log_6 y = \log_9\left(x+y\right) = t \Rightarrow \begin{cases} x = 4^t \\ y = 6^t \\ x+y = 9^t \end{cases}$.

Mà $4^t.9^t = \left(6^t\right)^2 \Rightarrow x\left(x+y\right) = y^2 \Leftrightarrow x^2+xy-y^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{y} = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\ (l) \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\ (t/m) \end{array}\right.$.

BÀI 6: BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

1. Bất phương trình mũ cơ bản

Bất phương trình mũ cơ bản là bất phương trình có dạng $a^x > b,\ a^x \ge b,\ a^x < b,\ a^x \le b$

Ta xét bất phương trình có dạng $a^x > b$.

- Nếu $b \le 0$, tập nghiệm của bất phương trình là R, vì $a^x > b, \forall x \in R$..

- Nếu $b > 0$ thì bất phương trình tương đương với $a^x > a^{\log_a b}$.

Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$.

Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$.

2. Cách giải bất phương trình mũ đơn giản

a) Đưa về cùng cơ số

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 < a < 1\\ f(x) < g(x)\end{cases}\\ \begin{cases}a > 1\\ f(x) > g(x)\end{cases}\end{array}\right.$$

Ví dụ 1: Giải bất phương trình mũ sau: $3^{x^2-x} \le 3^{1-x}$

Lời giải

Ta có: $3^{x^2-x} \le 3^{1-x} \Leftrightarrow x^2 - x \le 1 - x \Leftrightarrow x^2 - 1 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $[-1;1]$

Ví dụ 2: Giải bất phương trình mũ sau: $\left(\frac{2}{5}\right)^{4x} \le \left(\frac{5}{2}\right)^{2-x}$

Lời giải:

- Ta có thể biến đổi theo 1 trong 2 cách sau (thực tế thì cùng phương pháp).

Cách 1: Bất phương trình được biến đổi về dạng:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{4x} \le \left(\frac{5}{2}\right)^{2-x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{4x} \le \left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} \Leftrightarrow 4x \ge x - 2 \Leftrightarrow 3x \ge -2 \Leftrightarrow x \ge \frac{-2}{3}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $\left[-\frac{2}{3};+\infty\right)$

Cách 2: Bất phương trình được biến đổi về dạng:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{4x} \le \left(\frac{5}{2}\right)^{2-x} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{-4x} \le \left(\frac{5}{2}\right)^{2-x} \Leftrightarrow -4x \le 2 - x \Leftrightarrow 3x \ge -2 \Leftrightarrow x \ge \frac{-2}{3}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $\left[-\frac{2}{3};+\infty\right)$

Ví dụ 3: Giải bất phương trình $(\sqrt{5}+2)^{x-1} \ge (\sqrt{5}-2)^{-x^2+3}$.

Lời giải

Ta có: $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)=1 \Leftrightarrow \sqrt{5}-2=\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}=(\sqrt{5}+2)^{-1}$

Vậy: $(\sqrt{5}+2)^{x-1} \geq (\sqrt{5}-2)^{-x^2+3} \Leftrightarrow (\sqrt{5}+2)^{x-1} \geq (\sqrt{5}+2)^{x^2-3} \Leftrightarrow x-1 \geq x^2-3$

$\Leftrightarrow x^2-x-2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$

Vậy BPT có tập nghiệm $S=[-1;2]$

b) Đặt ẩn phụ

$\alpha a^{2f(x)}+\beta a^{f(x)}+\lambda=0$. Đặt $t=a^{f(x)},(t>0)$

Ví dụ 1: Giải bất phương trình mũ sau: $9^x+2.3^{x+1}-16 \geq 0$

Lời giải:

$9^x+2.3^{x+1}-16 \geq 0 \ (*)$

Ta đặt $t=3^x$ (điều kiện $t>0$), khi đó phương trình $(*)$ biến đổi về dạng:

$$3^{2x}+6.3^x-16 \geq 0 \Leftrightarrow t^2+6t-16 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} t \leq -8(\text{ loai }) \\ t \geq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow t \geq 2$$

Với: $t \geq 2 \Leftrightarrow 3^x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \log_3 2$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm $[log_3 2;+\infty)$

Ví dụ 2: Giải bất phương trình $3^x+4^x>5^x$.

Lời giải:

Chia 2 vế của phương trình cho ta được: $3^x+4^x>5^x \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{5}\right)^x+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x>1$

Xét hàm số: $f(x)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x$, TXĐ: $D=\mathbb{R}$ $f'(x)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^x \cdot \ln\left(\dfrac{3}{5}\right)+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x \cdot \ln\left(\dfrac{4}{5}\right)<0, \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên R.

Mạt khác: $f(2)=1 \Rightarrow f(x)>1 \Leftrightarrow x<2$

Vậy BPT có tập nghiệm là $S=(-\infty;2)$.

Ví dụ 3: Giải bất phương trinh sau: $(7+4\sqrt{3})^x-3(2-\sqrt{3})^x+2 \leq 0$

Lời giải:

Ta có: $7+4\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2$ và $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$ nên đặt $t=(2+\sqrt{3})^x, t>0$ ta có bất phương trình:

$t^2-3/t+2 \leq 0 \Leftrightarrow t^3+2t-3 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)\left(t^2+t+3\right) \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 1 \Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$

Vậy, bất phương trình cho có nghiệm là $x \leq 0$

c) Phương pháp logarit hóa

$$a^{f(x)} > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 < a < 1\\ f(x) < \log_a b\end{cases}\\ \begin{cases}a > 1\\ f(x) > \log_a b\end{cases}\end{array}\right.$$

$$a^{f(x)} > b^{g(x)} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a > 1\\ f(x) > g(x).\log_a^b\end{cases}\\ \begin{cases}0 < a < 1\\ f(x) < g(x).\log_a^b\end{cases}\end{array}\right.$$

Ví dụ 1: Giải bất phương trình $2^{x^2-4} \ge 5^{x-2}$.

Lời giải:

Lấy logarit cơ số 2 hai vế của bát phương trình đã cho ta có:

$$\log_2\left(2^{x^2-4}\right) \ge \log_2\left(5^{x-2}\right) \Leftrightarrow x^2-4 \ge (x-2)\log_2 5 \Leftrightarrow (x-2)\left(x+2-\log_2 5\right) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x \ge 2\\ x \le \log_2 5-2\end{array}\right.$$

Vậy BPT có tập nghiệm $S = \left(-\infty;\log_2 5-2\right] \cup [2;+\infty)$.

II. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

1. Bất phương trình logarit cơ bản

Bất phương trình logarit cơ bản có dạng $\log_a x > b$ (hoặc $\log_a x \ge b, \log_a x < b, \log_a x \le b$) với $a > 0, a \ne 1$.

2. Cách giải một số bất phương trình logarit đơn giản

a) Đưa về cùng cơ số

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 < a < 1\\ f(x) < g(x)\end{cases}\\ \begin{cases}a > 1\\ f(x) > g(x)\end{cases}\end{array}\right.$$

Ví dụ 1: Giải bất phương trình logarit sau: $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5) > \log_{\frac{1}{5}}(x+1)$

Lời giải:

$$\log_{\frac{1}{5}}(3x-5) > \log_{\frac{1}{5}}(x+1) \Leftrightarrow 0 < 3x-5 < x+1 \Leftrightarrow \begin{cases}2x < 6\\ x > \dfrac{5}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{3} < x < 3$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $\left(\frac{5}{3};3\right)$

Ví dụ 2: Giải bất phương trình logarit sau: $\log_3\left(x^2-1\right) < 1-\log_{\frac{1}{3}}(x-1)$ *

Lời giải:

- Ta có thể thực hiện biến đổi theo 1 trong 2 cách sau:

+ **Cách 1:** Điều kiện $x^2-1>0$ và $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

- Biến đổi bất phương trình logarit về dạng:

$\log_3\left(x^2-1\right)<1+\log_3(x-1) \Leftrightarrow \log_3\left(x^2-1\right)<\log_3 3(x-1) \Leftrightarrow x^2-1<3(x-1) \Leftrightarrow x^2-3x+2<0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)<0 \Leftrightarrow 1<x<2$

Kết hợp với điều kiện $x>1$ ta nhận được tập nghiệm của BPT là: $(1;2)$

+ **Cách 2:** Bất phương trình biến đổi tương đương về dạng:

$\log_3\left(x^2-1\right)<1+\log_3(x-1) \Leftrightarrow \log_3\left(x^2-1\right)<\log_3 3(x-1) \Leftrightarrow 0<x^2-1<3(x-1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1>0 \\ x^2-3x+2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|>1 \\ 1<x<2 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình logarit trên là: $(1;2)$

b) Phương pháp mũ hóa

$\log_a f(x)>b \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>1 \\ f(x)>a^b \end{cases} \\ \begin{cases} 0<a<1 \\ f(x)<a^b \end{cases} \end{array}\right.$

Ví dụ: Giải bất phương trình logarit sau: $\log_8(4-2x) \geq 2$

Lời giải

- Điều kiện $4-2x>0$ suy ra $x<2$.

$\log_8(4-2x) \geq 2 \Leftrightarrow \log_8(4-2x) \geq \log_8 8^2 \Leftrightarrow 4-2x \geq 8^2 \Leftrightarrow 4-2x \geq 64 \Leftrightarrow 2x \leq -60 \Leftrightarrow x \leq -30$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình logarit là: $(-\infty;-30]$

c) Phương pháp đặt ẩn phụ

Ví dụ : Giải bất phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x-6 \leq 0$

Lời giải

Đặt $t=\log_2 x$, khi đó phương trình trở thành:

$t^2-5t-6 \leq 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-6) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 6$

Do đó ta có:

$-1 \leq \log_2 x \leq 6 \Rightarrow \log_2 \frac{1}{2} \leq \log_2 x \leq \log_2 64 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 64$

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $S=\left[\frac{1}{2};64\right]$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Đưa về cùng cơ số

Câu 1: Nghiệm của bất phương trình $3^{x+2} \geq \frac{1}{9}$ là

A. $x \geq -4$. **B.** $x<0$. **C.** $x>0$. **D.** $x<4$.

Lời giải.

Chọn A

$3^{x+2} \ge \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{x+2} \ge 3^{-2} \Leftrightarrow x+2 \ge -2 \Leftrightarrow x \ge -4$.

Câu 2: Tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} < 8$ là:

A. $S=(-\infty;3)$. **B.** $S=(1;+\infty)$.

C. $S=(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$. **D.** $S=(1;3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} < 8 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Leftrightarrow x^2-4x > -3 \Leftrightarrow x^2-4x+3>0 \Leftrightarrow x<1 \vee x>3$

.

Vậy $S=(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$.

Câu 3: Giải bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-4} \ge 1$ ta được tập nghiệm T. Tìm T.

A. $T=[-2;2]$. **B.** $T=[2;+\infty)$.

C. $T=(-\infty;-2]$. **D.** $T=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-4} \ge 1 \Leftrightarrow x^2-4 \le 0 \Leftrightarrow x \in [-2;2]$

Vậy tập nghiệm $T=[-2;2]$.

Câu 4: Bất phương trình $2^x > 4$ có tập nghiệm là:

A. $T=(2;+\infty)$. **B.** $T=(0;2)$. **C.** $T=(-\infty;2)$. **D.** $T=\varnothing$.

Lời giải

Chọn A

$2^x > 4 \Leftrightarrow 2^x > 2^2 \Leftrightarrow x > 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $T=(2;+\infty)$.

Câu 5: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \ge \log_{\frac{1}{2}} 4$.

A. $S=(3;7]$. **B.** $S=[3;7]$. **C.** $S=(-\infty;7]$. **D.** $S=[7;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4 \Leftrightarrow 0 < x-3 \leq 4 \Leftrightarrow 3 < x \leq 7$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(3;7]$.

Câu 6: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2^{-x^2+3x} < 4$

A. $S=(\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;1)$. **C.** $S=\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. **D.** $S=(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình tương đương với

$2^{-x^2+3x} < 2^2 \Leftrightarrow -x^2+3x < 2 \Leftrightarrow x^2-3x+2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<1 \end{array}\right.$.

Câu 7: Tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x}$ là

A. $S=(-\infty;2)$. **B.** $S=(-\infty;1)$. **C.** $S=(1;+\infty)$. **D.** $S=(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

$5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x} \Leftrightarrow 5^{x+2} < (5)^{2x} \Leftrightarrow 2 < x$.

Câu 8: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 2^{x+4}$ là

A. $(0;4)$. **B.** $(-\infty;4)$. **C.** $(0;16)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2^{2x} < 2^{x+4} \Leftrightarrow 2x < x+4 \Leftrightarrow x < 4$.

Câu 9: Tập nghiệm của bất phương trình $\ln x^2 < 2\ln(4x+4)$ là:

A. $\left(-\frac{4}{5};+\infty\right)$. **B.** $(-1;+\infty)\setminus\{0\}$.

C. $\left(-\frac{4}{5};+\infty\right)\setminus\{0\}$. **D.** $\left(-\frac{4}{3};+\infty\right)\setminus\{0\}$.

Lời giải

Chọn C

Đk: $-1 < x \neq 0$; $\ln x^2 < 2\ln(4x+4) \Leftrightarrow x^2 < (4x+4)^2 \Leftrightarrow 15x^2+32x+16 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -\frac{4}{3} \\ x > -\frac{4}{5} \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm $S=\left(-\frac{4}{5};+\infty\right)\setminus\{0\}$.

Câu 10: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x < \log_2(12-3x)$ là:

A. $(0;6)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(0;3)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_2 x < \log_2(12-3x) \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<12-3x \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<3$.

Câu 11: Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(2x+5) > \log_2(x-1)$. Hỏi trong tập S có bao nhiêu phần tử là số nguyên dương bé hơn 10?

A. 9. **B.** 15. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} 2x+5>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>1$.

$\log_2(2x+5) > \log_2(x-1) \Leftrightarrow 2x+5>x-1 \Leftrightarrow x>-6$.

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình: $S=(1;+\infty)$.

Vậy trong tập S có 8 phần tử là số nguyên dương bé hơn 10.

Câu 12: Bất phương trình $\log_4(x+7) > \log_2(x+1)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x>-1$.

$\log_4(x+7) > \log_2(x+1) \Leftrightarrow x+7 > x^2+2x+1$

$\Leftrightarrow x^2+x-6<0 \Leftrightarrow -3<x<2$.

Do điều kiện nên tập nghiệm của bất phương trình là $S=\{0,1\}$.

Câu 13: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{e}{3}} 2x < \log_{\frac{e}{3}}(9-x)$ là

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(3;9)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(0;3)$.

Lời giải

Chọn C

$\log_{\frac{e}{3}} 2x < \log_{\frac{e}{3}}(9-x) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x>0 \\ 9-x>0 \\ 2x>9-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<9 \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow 3<x<9$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(3;9)$.

Câu 14: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{4-\sqrt{3}}(9x-5) < \log_{4-\sqrt{3}}(3x+1)$ là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $\left(\frac{5}{9};1\right)$. **C.** $\left(-\frac{1}{3};1\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{3};\frac{5}{9}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases}9x-5>0\\3x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{5}{9}\\x>-\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x>\frac{5}{9}$.

Ta có: $\log_{4-\sqrt{3}}(9x-5)<\log_{4-\sqrt{3}}(3x+1)\Leftrightarrow 9x-5<3x+1\Leftrightarrow x<1$.

Kết hợp với điều kiện, ta có tập nghiệm của phương trình là: $S=\left(\frac{5}{9};1\right)$.

Câu 15: Tập nghiệm của bất phương trình: $\log_2(x-3)+\log_2 x\geq 2$ là

A. $(3;+\infty)$. **B.** $[4;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-1]\cup[4;+\infty)$. **D.** $(3;4]$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $x>3$.

$\log_2(x-3)+\log_2 x\geq 2\Leftrightarrow x^2-3x\geq 4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq 4\\x\leq -1\end{array}\right.$. Vậy tập nghiệm của bpt là $S=[4;+\infty)$

.

Câu 16: Bất phương trình $2^{x^2-3x+4}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-10}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Bất phương trình tương đương với $2^{x^2-3x+4}\leq 2^{10-2x}\Leftrightarrow x^2-3x+4\leq 10-2x\Leftrightarrow x^2-x-6\leq 0$
$\Leftrightarrow -2\leq x\leq 3$. Do $x>0$ nên $0<x\leq 3$.
Mà $x\in\mathbb{Z}^+$ nên $x\in\{1;2;3\}$.Vậy có 3 giá trị nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 17: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{x-1}<5^{x+3}$ là:

A. $(-\infty;-5)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(-5;+\infty)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{x-1}<5^{x+3}\Leftrightarrow 5^{\frac{x-1}{3}}<5^{x+3}\Leftrightarrow\frac{x-1}{3}<x+3\Leftrightarrow x-1<3x+9\Leftrightarrow x>-5$.

Câu 18: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}\leq\left(\sqrt{5}-2\right)^{x-1}$ là

A. $S=(-\infty;1]$. **B.** $S=[1;+\infty)$. **C.** $S=(-\infty;1)$. **D.** $S=(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}\le\left(\sqrt{5}-2\right)^{x-1}\Leftrightarrow\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}\le\left(\sqrt{5}+2\right)^{-x+1}\Leftrightarrow x-1\le -x+1\Leftrightarrow x\le 1$.

Vậy $S=(-\infty;1]$.

Dạng 2: Phương pháp mũ hóa và logarit hóa

Câu 1: Tập nghiệm của bất phương trình $2^x>3^{x+1}$ là:

A. $\varnothing$. **B.** $\left(-\infty;\log_{\frac{2}{3}}3\right)$. **C.** $\left(-\infty;\log_2 3\right]$. **D.** $\left(\log_{\frac{2}{3}}3;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: $2^x>3^{x+1}\Leftrightarrow x>\log_2\left(3^{x+1}\right)\Leftrightarrow x>(x+1)\log_2 3\Leftrightarrow x\left(1-\log_2 3\right)>\log_2 3$

$\Leftrightarrow x\log_2\frac{2}{3}>\log_2 3\Leftrightarrow x<\frac{\log_2 3}{\log_2\frac{2}{3}}\Leftrightarrow x<\log_{\frac{2}{3}}3$.

Cách 2: $2^x>3^{x+1}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^x>3\Leftrightarrow x<\log_{\frac{2}{3}}3$.

Câu 2: Giải bất phương trình $3^{x^2}<2^x$

A. $x\in(0;+\infty)$. **B.** $x\in(0;\log_2 3)$. **C.** $x\in(0;\log_3 2)$. **D.** $x\in(0;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3^{x^2}<2^x\Leftrightarrow\log_3 3^{x^2}<\log_3 2^x\Leftrightarrow x^2-x\log_3 2<0\Leftrightarrow 0<x<\log_3 2$.

Câu 3: Tập nghiệm của bất phương trinh $2^x>3^{x+1}$ là

A. $\varnothing$. **B.** $\left(-\infty;\log_{\frac{2}{3}}3\right)$. **C.** $\left(-\infty;\log_2 3\right]$. **D.** $\left(\log_{\frac{2}{3}}3;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: $2^x>3^{x+1}\Leftrightarrow x>\log_2\left(3^{x+1}\right)\Leftrightarrow x>(x+1)\log_2 3\Leftrightarrow x\left(1-\log_2 3\right)>\log_2 3$

$\Leftrightarrow x\log_2\frac{2}{3}>\log_2 3\Leftrightarrow x<\frac{\log_2 3}{\log_2\frac{2}{3}}\Leftrightarrow x<\log_{\frac{2}{3}}3$.

Cách 2: $2^x>3^{x+1}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^x>3\Leftrightarrow x<\log_{\frac{2}{3}}3$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x.5^{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $f(x)>1\Leftrightarrow x^2+x\log_2 5>0$.
B. $f(x)>1\Leftrightarrow x-x^2\log_2 5<0$.
C. $f(x)>1\Leftrightarrow x^2-x\log_5 2>0$.
D. $f(x)>1\Leftrightarrow -x\ln 2+x^2\ln 5>0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x)>1\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^x.5^{x^2}>1\Leftrightarrow\log_2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x.5^{x^2}\right]>0$

$\Leftrightarrow\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^x+\log_2 5^{x^2}>0\Leftrightarrow -x+x^2\log_2 5>0$ nên phương án A sai.

Câu 5: Giải bất phương trình $\log_3(2x-1)>3$

A. $x>4$.
B. $x>14$
C. $x<2$.
D. $2<x<14$.

Lời giải

Chọn B

$\log_3(2x-1)>3\Leftrightarrow 2x-1>3^3\Leftrightarrow x>14$.

Câu 6: Giải bất phương trình $\log_3(2x-1)<2$ ta được nghiệm là

A. $\frac{1}{2}<x<5$.
B. $x>\frac{1}{5}$.
C. $x<5$.
D. $x>5$.

Lời giải

Chọn A

$\log_3(2x-1)<2\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1>0\\2x-1<9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{1}{2}\\x<5\end{cases}$.

Câu 7: Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(1-x)<0$?

A. $x=0$.
B. $x<0$.
C. $x>0$.
D. $-1<x<0$.

Lời giải

Chọn B

$\log_{\frac{1}{2}}(1-x)<0\Leftrightarrow\begin{cases}1-x>0\\1-x>1\end{cases}\Leftrightarrow x<0$.

Câu 8: Các giá trị x thỏa mãn bất phương trình $\log_2(3x-1)>3$ là:

A. $x>3$.
B. $\frac{1}{3}<x<3$.
C. $x<3$.
D. $x>\frac{10}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_2(3x-1)>3 \Leftrightarrow 3x-1>8 \Leftrightarrow x>3$.

Câu 9: Bất phương trình $\log_{0,5}(2x-1)\geq 0$ có tập nghiệm là?

A. $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$ **B.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ **C.** $(1;+\infty)$ **D.** $\left(\frac{1}{2};1\right]$

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $2x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$.

$\log_{0,5}(2x-1)\geq 0 \Leftrightarrow 2x-1\leq 0,5^0 \Leftrightarrow 2x\leq 2 \Leftrightarrow x\leq 1$.

So sánh với điều kiện ta có tập nghiệp của bất phương trình là $S=\left(\frac{1}{2};1\right]$.

Câu 10: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2(9-x)\leq 3$.

A. 7. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_2(9-x)\leq 3 \Leftrightarrow 0<9-x\leq 8 \Leftrightarrow 1\leq x<9$. Vì $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

Vậy có 8 nghiệm nguyên.

Câu 11: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1)<3$ là:

A. $(-\infty;10)$. **B.** $(1;9)$. **C.** $(1;10)$. **D.** $(-\infty;9)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$.

Ta có: $\log_2(x-1)<3 \Rightarrow x-1<8 \Leftrightarrow x<9$.

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(1;9)$.

Câu 12: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(x^2+2)\leq 3$ là:

A. $S=(-\infty;-5]\cup[5;+\infty)$. **B.** $S=\varnothing$.

C. $S=\mathbb{R}$. **D.** $P=[-5;5]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_3(x^2+2)\leq 3 \Leftrightarrow x^2+2\leq 27 \Leftrightarrow x^2\leq 25 \Leftrightarrow -5\leq x\leq 5$.

Câu 13: Số nghiệm thực nguyên của bất phương trình $\log(2x^2-11x+15)\leq 1$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

ĐK: $2x^2-11x+15>0 \Leftrightarrow x<\frac{5}{2}$ hoặc $x>3$.

$\log\left(2x^2-11x+15\right)\le 1 \Leftrightarrow 2x^2-11x+15\le 10 \Leftrightarrow 2x^2-11x+5\le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\le x\le 5$.

Kết hợp điều kiện ta có: $\frac{1}{2}\le x<\frac{5}{2}$ hoặc $3<x\le 5$. Vậy BPT có 4 nghiệm nguyên là: $x\in\{1;2;4;5\}$.

Câu 14: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2}{x-1}>2$.

A. $S=\left(1;1+\sqrt{2}\right)$. **B.** $S=(1;9)$. **C.** $S=\left(1+\sqrt{2};+\infty\right)$. **D.** $S=(9;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{2}{x-1}>2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ \frac{2}{x-1}<\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x-1<8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<9 \end{cases}.$$

Câu 15: Bất phương trình $\max\left\{\log_3 x,\ \log_{\frac{1}{2}} x\right\}<3$ có tập nghiệm là

A. $(-\infty;27)$. **B.** $(8;27)$. **C.** $\left(\frac{1}{8};\ 27\right)$. **D.** $(27;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>0$.

$$\max\left\{\log_3 x,\log_{\frac{1}{2}} x\right\}<3 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x<3 \\ \log_{\frac{1}{2}} x<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<27 \\ x>\frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{8}<x<27.$$

Vậy tập nghiệm của BPT là: $\left(\frac{1}{8};27\right)$.

Câu 16: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\left(x^2-1\right)\right)\le -1$ là:

A. $S=\left[1;\sqrt{5}\right]$. **B.** $S=\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$.

C. $S=\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$. **D.** $S=\left[-\sqrt{5};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{5}\right]$.

Lời giải

Chọn B

* ĐKXĐ: $\begin{cases} \log_2\left(x^2-1\right)>0 \\ x^2-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2-1>1 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\left(x^2-1\right)\right)\le -1 \Leftrightarrow \log_2\left(x^2-1\right)\ge\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2 \Leftrightarrow \left(x^2-1\right)\ge 4$

$\Leftrightarrow x^2\ge 5 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$.

* Kết hợp điều kiện ta được: $x\in\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$.

Dạng 3: Phương Pháp Đặt Ẩn Phụ

Câu 1: Cho phương trình $3^{2x+10}-6.3^{x+4}-2<0(1)$. Nếu đặt $t=3^{x+5}\left(t>0\right)$ thì (1) trở thành phương trình nào?

A. $9t^2-6t-2<0$. **B.** $t^2-2t-2<0$.

C. $t^2-18t-2<0$. **D.** $9t^2-2t-2<0$.

Lời giải.

Chọn B

$3^{2x+10}-6.3^{x+4}-2<0 \Leftrightarrow 3^{2(x+5)}-2.3^{x+5}-2<0$

Vậy khi đặt $t=3^{x+5}\left(t>0\right)$ thì (1) trở thành phương trình $t^2-2t-2<0$.

Câu 2: Cho phương trình $25^{x+1}-26.5^x+1>0$. Đặt $t=5^x$, $t>0$ thì phương trình trở thành

A. $t^2-26t+1>0$. **B.** $25t^2-26t>0$. **C.** $25t^2-26t+1>0$. **D.** $t^2-26t>0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $25^{x+1}-26.5^x+1>0 \Leftrightarrow 25.5^{2x}-26.5^x+1>0$.

Vậy nếu đặt $t=5^x$, $t>0$ thì phương trình trên trở thành $25t^2-26t+1>0$.

Câu 3: Xét bất phương trình $5^{2x}-3.5^{x+2}+32<0$. Nếu đặt $t=5^x$ thì bất phương trình trở thành bất phương trình nào sau đây?

A. $t^2-3t+32<0$. **B.** $t^2-16t+32<0$.

C. $t^2-6t+32<0$. **D.** $t^2-75t+32<0$.

Lời giải

Chọn D

$5^{2x}-3.5^{x+2}+32<0 \Leftrightarrow 5^{2x}-3.5^2.5^x+32<0 \Leftrightarrow 5^{2x}-75.5^x+32<0$.

Nếu đặt $t=5^x>0$ thì bất phương trình trở thành bất phương trình $t^2-75t+32<0$.

Câu 4: Cho phương trình $4^{x^2-2x}+2^{x^2-2x+3}-3\ge 0$. Khi đặt $t=2^{x^2-2x}$, ta được phương trình nào dưới đây?

A. $t^2+8t-3\ge 0$. **B.** $2t^2-3\ge 0$. **C.** $t^2+2t-3\ge 0$. **D.** $4t-3\ge 0$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $4^{x^2-2x}+2^{x^2-2x+3}-3\ge 0 \Leftrightarrow \left(2^{x^2-2x}\right)^2+2^3.2^{x^2-2x}-3\ge 0$.

Kho đó, đặt $t=2^{x^2-2x}$, ta được phương trình $t^2+8t-3\ge 0$.

Câu 5: Khi đặt $t=\log_5 x$ thì bất phương trình $\log_5^2(5x)-3\log_{\sqrt{5}} x-5\le 0$ trở thành bất phương trình nào sau đây?

A. $t^2-6t-4\le 0$. **B.** $t^2-6t-5\le 0$. **C.** $t^2-4t-4\le 0$. **D.** $t^2-3t-5\le 0$.

Lời giải

Chọn C

$\log_5^2(5x)-3\log_{\sqrt{5}} x-5\le 0\Leftrightarrow(\log_5 x+1)^2-6\log_5 x-5\le 0\Leftrightarrow\log_5^2 x-4\log_5 x-4\le 0$.

Với $t=\log_5 x$ bất phương trình trở thành: $t^2-4t-4\le 0$.

Câu 6: Bất phương trình $\log^2 x-2019\log x+2018\le 0$ có tập nghiệm là

A. $S=\left[10;10^{2018}\right]$. **B.** $S=\left[10;10^{2018}\right)$.

C. $S=[1;2018]$. **D.** $S=\left(10;10^{2018}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>0$.

Ta có $\log^2 x-2019\log x+2018\le 0\Leftrightarrow 1\le\log x\le 2018\Leftrightarrow 10\le x\le 10^{2018}$.

Kết hợp với điều kiện, ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[10;10^{2018}\right]$.

Câu 7: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2^2 x-8\log_2\sqrt{x}+3<0$

A. 5. **B.** 1. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>0$.

$\log_2^2 x-8\log_2\sqrt{x}+3<0\Leftrightarrow\log_2^2 x-8\log_2 x^{\frac{1}{2}}+3<0\Leftrightarrow\log_2^2 x-4\log_2 x+3<0$

$\Leftrightarrow 1<\log_2 x<3\Leftrightarrow 2<x<8$. So với điều kiện ta được $2<x<8$.

Câu 8: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x+4\ge 0$

A. $S=(-\infty;2]\cup[16;+\infty)$. **B.** $S=(0;2]\cup[16;+\infty)$.

C. $S=(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$. **D.** $S=[2;16]$.

Lời giải

Chọn B

ĐK: $x>0$

Đặt $t=\log_2 x$, $t\in\mathbb{R}$.

Bất phương trình tương đương $t^2-5t+4\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\le 1\\t\ge 4\end{array}\right.$.

- $\log_2 x\le 1\Leftrightarrow 0<x\le 2$.
- $\log_2 x\ge 4\Leftrightarrow x\ge 16$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S=(0;2]\cup[16;+\infty)$.

Câu 9: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $3^x+9.3^{-x}<10$ là

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=3^x\ (t>0)$, bất phương trình có dạng $t+\frac{9}{t}<10\Leftrightarrow t^2-10t+9<0\Leftrightarrow 1<t<9$.

Khi đó $1<3^x<9\Leftrightarrow 0<x<2$. Vậy nghiệm nguyên của phương trình là $x=1$.

Câu 10: Tập nghiệm của bất phương trình $16^x-5.4^x+4\ge 0$ là:

A. $T=(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$. **B.** $T=(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$.

C. $T=(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$. **D.** $T=(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=4^x$, $t>0$.

$16^x-5.4^x+4\ge 0$ trở thành $t^2-5.t+4\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\ge 4\\t\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\ge 4\\0<t\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4^x\ge 4\\0<4^x\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\x\le 0\end{array}\right.$.

Vậy $T=(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$.

Câu 11: Biết $S=[a;b]$ là tập nghiệm của bất phương trình $3.9^x-10.3^x+3\le 0$. Tìm $T=b-a$.

A. $T=\frac{8}{3}$. **B.** $T=1$. **C.** $T=\frac{10}{3}$. **D.** $T=2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $3.9^x-10.3^x+3\le 0\Leftrightarrow 3.\left(3^x\right)^2-10.3^x+3\le 0\Leftrightarrow\frac{1}{3}\le 3^x\le 3\Leftrightarrow\log_3\frac{1}{3}\le x\le\log_3 3$

$\Leftrightarrow -1\le x\le 1$. Khi đó bất phương trình có tập nghiệm là $S=[-1;1]$, do vậy $T=1-(-1)=2$.

Câu 12: Nghiệm của bất phương trình $5^{2\sqrt{x}}+5<5^{1+\sqrt{x}}+5^{\sqrt{x}}$ là.

A. $0\le x\le 1$. **B.** $0<x<1$. **C.** $0<x\le 1$. **D.** $0\le x<1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $5^{2\sqrt{x}}+5<5^{1+\sqrt{x}}+5^{\sqrt{x}}$.

$\Rightarrow\left(5^{\sqrt{x}}\right)^2-6.5^{\sqrt{x}}+5<0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}5^{\sqrt{x}}<5\\5^{\sqrt{x}}>1\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x<1\\x>0\end{array}\right.$

Câu 13: Bất phương trình $64.9^x-84.12^x+27.16^x<0$ có nghiệm là:

A. $1<x<2$. **B.** $\frac{9}{16}<x<\frac{3}{4}$. **C.** $x<1$ hoặc $x>2$. **D.** Vô nghiệm.

Lời giải

Chọn A

$64.9^x-84.12^x+27.16^x<0\Leftrightarrow 27.\left(\frac{4}{3}\right)^{2x}-84.\left(\frac{4}{3}\right)^{x}+64<0\Leftrightarrow 1<x<2$.

Câu 14: Tìm tất cả giá trị của m để bất phương trình $9^x-2(m+1)3^x-3-2m>0$ nghiệm đúng với mọi số thực x.

A. $m\in\left(-5-2\sqrt{3};-5+2\sqrt{3}\right)$. **B.** $m<-\frac{3}{2}$.

C. $m\le-\frac{3}{2}$. **D.** $m\neq 2$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=3^x$, $t>0$. Khi đó, bất phương trình trở thành:

$t^2-2(m+1)t-3-2m>0\Leftrightarrow(t+1)(t-3-2m)>0\quad\Leftrightarrow t-3-2m>0\Leftrightarrow t>3+2m\quad(1)$

(Do $t>0$).

Để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì (1) phải nghiệm đúng với mọi $t\in(0;+\infty)$.

Điều này tương đương với $3+2m\le 0\Leftrightarrow m\le-\frac{3}{2}$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m\le-\frac{3}{2}$.

Câu 15: Cho Hàm số $f(x)=\frac{3^{x-2}}{7^{x^2-4}}$. Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $f(x)>1\Leftrightarrow(x-2)\log 3-(x^2-4)\log 7>0$.

B. $f(x)>1\Leftrightarrow(x-2)\log_{0,3}3-(x^2-4)\log_{0,3}7>0$.

C. $f(x)>1\Leftrightarrow(x-2)\ln 3-(x^2-4)\ln 7>0$.

D. $f(x)>1\Leftrightarrow x-2-(x^2-4)\log_3 7>0$.

Lời giải

Chọn B

$f(x)>1\Leftrightarrow\frac{3^{x-2}}{7^{x^2-4}}>1\Leftrightarrow\log_{0.3}\frac{3^{x-2}}{7^{x^2-4}}<\log_{0,3}1\Leftrightarrow(x-2)\log_{0,3}3-(x^2-4)\log_{0,3}7<0$.

Dạng 4: Bài tập dành cho học sinh 8+, 9+

Câu 1: Biết tập nghiệm của bất phương trình $3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}}\ge\frac{1}{3^x}$ là một đoạn $[a;b]$ ta có $a+b$ bằng:

A. $a+b=11$. **B.** $a+b=9$. **C.** $a+b=12$. **D.** $a+b=10$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Điều kiện: $x^2+5x-6\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1\vee x\le -6$

Ta có: $3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}}\ge \dfrac{1}{3^x}\Leftrightarrow 3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}}\ge 3^{-x}\Leftrightarrow 2-\sqrt{x^2+5x-6}\ge -x\Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x-6}\le x+2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x-6\ge 0 \\ x+2\ge 0 \\ x^2+5x-6\le x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -6\vee x\ge 1 \\ x\ge -2 \\ x\le 10 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[1;10]$$

Vậy $a+b=11$

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $9^x+(1-3m).3^x-2-6m>0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. $m<\dfrac{1}{3}$. **B.** Không tồn tại m. **C.** $m\ne 2$. **D.** $m\le -\dfrac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có

$9^x+(1-3m).3^x-2-6m>0\Leftrightarrow (3^x+2)(3^x-3m-1)>0\Leftrightarrow 3^x-3m-1>0\Leftrightarrow m<\dfrac{3^x-1}{3}$,

vì $3^x+2>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Xét hàm số $g(x)=\dfrac{3^x-1}{3}$ trên $\mathbb{R}$.

$g'(x)=\dfrac{3^x\ln 3}{3}>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm số $g(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\dfrac{1}{3}$

Do đó $9^x+(1-3m).3^x-2-6m>0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}\Leftrightarrow m<\dfrac{3^x-1}{3}$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m\le -\dfrac{1}{3}$

Câu 3: Tìm các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_{0,02}\left(\log_2\left(3^x+1\right)\right)>\log_{0,02}m$ có nghiệm với mọi $x\in(-\infty;0)$.

A. $m>9$. **B.** $m<2$. **C.** $0<m<1$. **D.** $m\ge 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $\log_{0,02}\left(\log_2\left(3^x+1\right)\right)>\log_{0,02}m$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Điều kiện tham số m: $m>0$

Ta có: $\log_{0,02}\left(\log_2\left(3^x+1\right)\right)>\log_{0,02}m\Leftrightarrow \log_2\left(3^x+1\right)<m$

Xét hàm số $f(x)=\log_2(3^x+1)$, $\forall x\in(-\infty;0)$ có $f'(x)=\dfrac{3^x.\ln 3}{(3^x+1)\ln 2}>0$, $\forall x\in(-\infty;0)$

Bảng biến thiên $f(x)$

x	$-\infty$		0
f'		$+$	
f	0	$\nearrow$	1

Khi đó với yêu cầu bài toán thì $m\ge 1$.

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-10;10]$ để bất phương trình $4^x+2^x-m\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in[1;2]$

A. 17. **B.** 0. **C.** 21. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $2^x=t, t>0$. Bất phương trình trở thành: $t^2+t-m\ge 0\Leftrightarrow t^2+t\ge m$ (1

$x\in[1;2]\Rightarrow t\in[2;4]$. Xét $f(t)=t^2+t$ với $t\in[2;4]$.

$f'(t)=2t+1; f'(t)=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{2}\notin[2;4]$.

$f(2)=6; f(4)=20\Rightarrow \min\limits_{[2;4]}(f)=6$.

$(1)\Leftrightarrow m\le f(t)$, với $t\in[2;4]$.

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in[1;2]\Leftrightarrow m\le \min\limits_{[2;4]} f(t)\Leftrightarrow m\le 6$.

Vì $m\in[-10;10]\Rightarrow$ có 17 giá trị cần tìm.

Câu 5: Cho bất phương trình $25^x+15^x-2.9^x\le m.3^x(5^x-3^x)$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc đoạn $[0;1]$ là

A. $m\le\dfrac{11}{2}$. **B.** $m>\dfrac{11}{2}$. **C.** $m<\dfrac{11}{3}$. **D.** $m\ge\dfrac{11}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Chia hai vế của bất phương trình cho 3^{2x} ($3^x>0$), ta được

$\left(\dfrac{5}{3}\right)^{2x}+(1-m)\left(\dfrac{5}{3}\right)^{x}+m-2\le 0$

Đặt $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{x}=t$.

Với $x\in[0;1]\Rightarrow t\in\left[1;\dfrac{5}{3}\right]$, ta có bất phương trình bậc hai $t^2+(1-m)t+m-2\le 0$

Bài toán trở thành tìm m để bất phương trình: $t^2+(1-m)t+m-2\le 0$, $\forall t\in\left[1;\frac{5}{3}\right]$

$t^2+(1-m)t+m-2\le 0,\forall t\in\left[1;\frac{5}{3}\right]\Leftrightarrow (t-1)(t+2-m)\le 0,\forall t\in\left[1;\frac{5}{3}\right](*)$

Vì $t-1\ge 0,\forall t\in\left[1;\frac{5}{3}\right]$, nên $(*)\Leftrightarrow t+2-m\le 0,\forall t\in\left[1;\frac{5}{3}\right]\Leftrightarrow \frac{5}{3}+2-m\le 0\Leftrightarrow m\ge\frac{11}{3}$

Câu 6: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để bất phương trình $\log_3\frac{2x^2+x+m+1}{x^2+x+1}\ge 2x^2+4x+5-2m$ có nghiệm. Số phần tử của tập hợp S bằng

A. 20. **B.** 10. **C.** 15. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $\frac{2x^2+x+m+1}{x^2+x+1}>0\Leftrightarrow 2x^2+x+m+1>0$.

Khi đó:

$\log_3\frac{2x^2+x+m+1}{x^2+x+1}\ge 2x^2+4x+5-2m\Leftrightarrow \log_3\frac{2x^2+x+m+1}{x^2+x+1}-1\ge 2x^2+4x+4-2m$

$\Leftrightarrow \log_3\frac{2x^2+x+m+1}{3(x^2+x+1)}\ge 2x^2+4x+4-2m$

$\Leftrightarrow \log_3(2x^2+x+m+1)-\log_3 3(x^2+x+1)\ge -2(2x^2+x+m+1)+6(x^2+x+1)$

$\Leftrightarrow \log_3(2x^2+x+m+1)+2(2x^2+x+m+1)\ge \log_3 3(x^2+x+1)+6(x^2+x+1)$.

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+2t$ với $t>0$.

Ta có: $f'(t)=\frac{1}{t.\ln 3}+2>0,\forall t>0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó tương đương với $f(2x^2+x+m+1)\ge f(3(x^2+x+1))\Leftrightarrow 2x^2+x+m+1$

$\ge 3(x^2+x+1)\Leftrightarrow x^2+2x+2\le m$.

Bất phương trình $x^2+2x+2\le m$ có nghiệm $\Leftrightarrow m\ge \min g(x)$ với $g(x)=x^2+2x+2$.

Xét hàm số $g(x)=x^2+2x+2$ với $x\in\mathbb{R}$ có $g'(x)=2x+2$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow 2x+2=0\Leftrightarrow x=-1$.

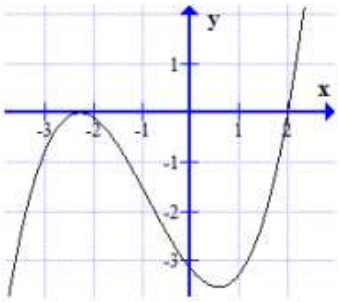
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min g(x)=1$. Do đó $m\ge 1$.

Vì $m\in[-10;10]$ nên tập $S=\{1;2;...;10\}$. Vậy S có 10 phần tử.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để bất phương trình $\left[x\left(m-2^{f(\sin x)}\right)+2.2^{f(\sin x)}+m^2-3\right].\left(2^{f(x)}-1\right)\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Số tập con của tập hợp S là



A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Nhận xét phương trình $2^{f(x)}-1=0$ có một nghiệm đơn $x=2$ nên biểu thức sẽ đổi dấu khi đi qua điểm $x=2$. Do đó để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì phương trình $x\left(m-2^{f(\sin x)}\right)+2.2^{f(\sin x)}+m^2-3=0$ phải có một nghiệm $x=2$

$$\Rightarrow m^2+2m-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-3\end{array}\right.$$

Thử lại với $m=1$ ta có:

$$\left[x\left(1-2^{f(\sin x)}\right)+2.2^{f(\sin x)}-2\right]\left(2^{f(x)}-1\right)\ge 0\Leftrightarrow(x-2)\left(1-2^{f(\sin x)}\right)\left(2^{f(x)}-1\right)\ge 0$$

$\Leftrightarrow 2^{f(\sin x)}\le 1\Leftrightarrow f(\sin x)\le 0\Leftrightarrow \sin x\le 2$ luôn đúng với mọi $x\in\mathbb{R}\Rightarrow m=1$ thỏa mãn ycbt.

Thử lại với $m=-3$ ta có:

$$\left[x\left(-3-2^{f(\sin x)}\right)+2.2^{f(\sin x)}+6\right]\left(2^{f(x)}-1\right)\ge 0\Leftrightarrow-(x-2)\left(3+2^{f(\sin x)}\right)\left(2^{f(x)}-1\right)\ge 0$$

$\Leftrightarrow 3+2^{f(\sin x)}\le 0\Rightarrow m=-3$ không thỏa mãn ycbt.

Vậy $S=\{1\}$. Số tập con của S là 2 đó là $\{1\}$ và $\varnothing$.

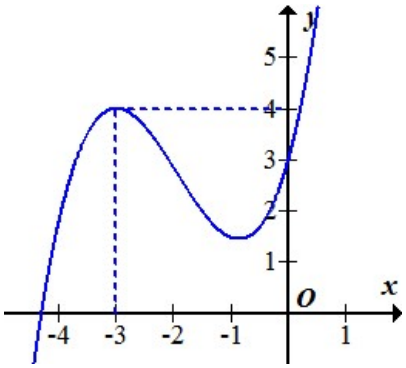
Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . " Tránh mua các trang và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$ của tham số m để bất phương trình $f\left(\sqrt{1-x^2}\right)+\frac{2}{3}x^3-x^2+\frac{8}{3}-f(m)\le 0$ có nghiệm. Số phần tử của tập hợp S bằng

A. 9. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 11.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Điều kiện $x\in[-1;1]$.

Khi đó $f\left(\sqrt{1-x^2}\right)+\frac{2}{3}x^3-x^2+\frac{8}{3}-f(m)\le 0\Leftrightarrow f\left(\sqrt{1-x^2}\right)+\frac{2}{3}x^3-x^2+\frac{8}{3}\le f(m)$.

Đặt $g(x)=f\left(\sqrt{1-x^2}\right)+\frac{2}{3}x^3-x^2+\frac{8}{3}$. Ta có bảng sau:

x	-1	0	1
$\sqrt{1-x^2}$	0	$\nearrow$ 1	$\searrow$ 0
$f\left(\sqrt{1-x^2}\right)$	3	$\nearrow$ $f(1)$	$\searrow$ 3
$\frac{2}{3}x^3-x^2+\frac{8}{3}$	1	$\nearrow$ $\frac{8}{3}$	$\searrow$ $\frac{7}{3}$
$g(x)$	4	$\nearrow$ $g(1)$	$\searrow$ $\frac{16}{3}$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm khi $f(m)\ge 4$. Vì m nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$ nên $m\in\{-3;1;2;...;10\}$. Do đó S có 11 phần tử.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . " Tránh mua các trang và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

BÀI 1. NGUYÊN HÀM

A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN NẮM

I. NGUYÊN HÀM VÀ TÍNH CHẤT

1. Nguyên hàm

Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa đoạn của $\mathbb{R}$). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi $x\in K$.

Định lý 1: Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C, hàm số $G(x)=F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

Định lý 2: Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ đều có dạng $F(x)+C$, với C là một hằng số.

Hai định lý trên cho thấy:

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì $F(x)+C, C\in\mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K. Kí hiệu

$$\boxed{\int f(x)dx=F(x)+C.}$$

Chú ý: Biểu thức $f(x)dx$ chính là vi phân của nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$, vì $dF(x)=F'(x)dx=f(x)dx$.

2. Tính chất của nguyên hàm

Tính chất 1

$$\boxed{\int f'(x)dx=f(x)+C}$$

Tính chất 2

$\boxed{\int kf(x)dx=k\int f(x)dx}$, k là hằng số khác 0.

Tính chất 3

$$\boxed{\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx.}$$

3. Sự tồn tại của nguyên hàm

Định lý 3: Mọi hàm số f liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

4. Bảng nguyên hàm

$\int 0dx=C$	$\int dx=x+C$
$\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$\int(ax+b)^{\alpha}dx=\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$

$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{\alpha x+\beta}dx = \frac{a^{\alpha x+\beta}}{a\ln a} + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot x + C$
$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C, (a\neq 0)$	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = -\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C, (a\neq 0)$
$\int \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$	$\int \sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{3}.\frac{1}{a}(ax+b)\sqrt{ax+b} + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}}dx = 2.\frac{1}{a}\sqrt{ax+b} + C$

II. PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

1. Phương pháp đổi biến số

Định lý 1: Nếu $\int f(u)du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục thì:

$$\int f[u(x)].u'(x)dx = F[u(x)] + C$$

Hệ quả: Với $u = ax + b(a \neq 0)$ ta có

$$\boxed{\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.}$$

2. Phương pháp tính nguyên hàm từng phần:

Định lý 2: Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K thì:

$$\boxed{\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.}$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Nguyên Hàm Đa Thức

1. Phương pháp

Dùng các phép biến đổi, các phương pháp tính nguyên hàm đưa nguyên hàm về nguyên hàm hàm đa thức: $\int x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$; $\int (ax+b)^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.\frac{1}{a}(ax+b)^{n+1} + C$

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x+1)(x+2)$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(x) = (x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$.

Khi đó: $\int f(x)\mathrm{d}x = \int (x^2+3x+2)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$.

Ví dụ 2: Biết hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = 3x^2 + 2x + m$, $f(2) = 1$ và đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -5. Tìm hàm số $f(x)$

Hướng dẫn giải

Theo lý thuyết ta có: $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$.

Ta có: $\int f'(x)\mathrm{d}x = \int (3x^2+2x+m)\mathrm{d}x = x^3 + x^2 + mx + C$.

Khi đó $f(x)$ có dạng: $f(x) = x^3 + x^2 + mx + C_1$

Theo đề ta có: $\begin{cases} f(2) = 1 \\ f(0) = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^3 + 2^2 + 2m + C_1 = 1 \\ C_1 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ C_1 = -5 \end{cases}$.

Vậy hàm số $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 5$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Khẳng định nào sau đây ***sai***?

A. $\int 0\,\mathrm{d}x = C$.

B. $\int x^4\,\mathrm{d}x = \frac{x^5}{5} + C$.

C. $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x + C$.

D. $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C \Rightarrow$ C sai.

Câu 2: Tìm nguyên hàm $F(x) = \int \pi^2 \mathrm{d}x$.

A. $F(x) = \pi^2 x + C$.

B. $F(x) = 2\pi x + C$.

C. $F(x)=\frac{\pi^3}{3}+C$.

D. $F(x)=\frac{\pi^2x^2}{2}+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x)=\int \pi^2 \mathrm{d}x=\pi^2 x+C$.

Câu 3: Cho $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$. Khi đó với $a\neq 0$, a, b là hằng số ta có $\int f(ax+b)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$.

B. $\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a+b}F(ax+b)+C$.

C. $\int f(ax+b)\mathrm{d}x=F(ax+b)+C$.

D. $\int f(ax+b)\mathrm{d}x=aF(ax+b)+C$.

Lời giải

Chọn A

Theo công thức nguyên hàm mở rộng ta có: $\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$.

Câu 4: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+1$ là

A. x^3+C.

B. $\frac{x^3}{3}+x+C$.

C. $6x+C$.

D. x^3+x+C.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int(3x^2+1)\mathrm{d}x=3.\frac{x^3}{3}+x+C=x^3+x+C$.

Câu 5: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+2x+5$ là

A. $F(x)=x^3+x^2+5$.

B. $F(x)=x^3+x+C$.

C. $F(x)=x^3+x^2+5x+C$.

D. $F(x)=x^3+x^2+C$.

Lời giải

Chọn C

Nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+2x+5$ là $F(x)=x^3+x^2+5x+C$.

Câu 6: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x^2}-x^2-\frac{1}{3}$ là

A. $\frac{-x^4+x^2+3}{3x}+C$.

B. $\frac{-2}{x^2}-2x+C$.

C. $-\frac{x^4+x^2+3}{3x}+C$.

D. $\frac{-x^3}{3}-\frac{1}{x}-\frac{x}{3}+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int\left(\frac{1}{x^2}-x^2-\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x=\int\left(x^{-2}-x^2-\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}-\frac{x^3}{3}-\frac{x}{3}+C$.

Câu 7: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}.x^{\mathrm{e}}+4$ là

A. 101376.

B. $\mathrm{e}^2.x^{\mathrm{e}-1}+C$.

C. $\frac{x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1}+4x+C$.

D. $\frac{\mathrm{e}.x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1}+4x+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(\mathrm{e}.x^{\mathrm{e}}+4\right)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}.x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1}+4x+C$.

Câu 8: Hàm số nào sau đây không phải là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(3x+1)^5$?

A. $F(x)=\frac{(3x+1)^6}{18}+8$.

B. $F(x)=\frac{(3x+1)^6}{18}-2$.

C. $F(x)=\frac{(3x+1)^6}{18}$.

D. $F(x)=\frac{(3x+1)^6}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng $\int(ax+b)^{\alpha}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ với $\alpha\neq-1$ và C là hằng số.

Vậy hàm số ở phương án D thỏa yêu cầu đề.

Câu 9: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=5x^4-6x^2+1$ là

A. $20x^3-12x+C$.

B. x^5-2x^3+x+C.

C. $20x^5-12x^3+x+C$.

D. $\frac{x^4}{4}+2x^2-2x+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\left(5x^4-6x^2+1\right)\mathrm{d}x=x^5-2x^3+x+C$.

Câu 10: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^{2018}$, $(x\in\mathbb{R})$ là hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

A. $F(x)=2017.x^{2018}+C$, $(C\in\mathbb{R})$.

B. $F(x)=\frac{x^{2019}}{2019}+C$, $(C\in\mathbb{R})$.

C. $F(x)=x^{2019}+C$, $(C\in\mathbb{R})$.

D. $F(x)=2018.x^{2017}+C$, $(C\in\mathbb{R})$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int x^{2018}\mathrm{d}x=\frac{x^{2019}}{2019}+C$.

Câu 11: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2-2x+3$ thỏa mãn $F(0)=2$, giá trị của $F(1)$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{13}{3}$. **C.** 2. **D.** $\frac{11}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int x^2-2x+3\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-x^2+3x+C$.

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ có $F(0)=2\Rightarrow C=2$.

Vậy $F(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+3x+2\Rightarrow F(1)=\frac{13}{3}$.

Câu 12: Xét $I=\int x^3\left(4x^4-3\right)^5\mathrm{d}x$. Bằng cách đặt: $u=4x^4-3$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I=\frac{1}{16}\int u^5\mathrm{d}u$. **B.** $I=\frac{1}{12}\int u^5\mathrm{d}u$. **C.** $I=\int u^5\mathrm{d}u$. **D.** $I=\frac{1}{4}\int u^5\mathrm{d}u$.

Lời giải

Chọn A

$u=4x^4-3\Rightarrow \mathrm{d}u=16x^3\mathrm{d}x\Rightarrow \frac{1}{16}\mathrm{d}u=x^3\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow I=\frac{1}{16}\int u^5\mathrm{d}u$.

Câu 13: Cho $\int 2x(3x-2)^6\,\mathrm{d}x=A(3x-2)^8+B(3x-2)^7+C$ với A, $B\in\mathbb{Q}$ và $C\in\mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $12A+7B$ bằng

A. $\frac{23}{252}$. **B.** $\frac{241}{252}$. **C.** $\frac{52}{9}$. **D.** $\frac{7}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=3x-2\Rightarrow x=\frac{t+2}{3}\Rightarrow \frac{1}{3}\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Ta có:

$\frac{2}{3}\int\frac{t+2}{3}.t^6\mathrm{d}t=\frac{2}{9}\int\left(t^7+2t^6\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{9}.\frac{t^8}{8}+\frac{4}{9}.\frac{t^7}{7}+C=\frac{1}{36}.(3x-2)^8+\frac{4}{63}.(3x-2)^7+C$.

Suy ra $A=\frac{1}{36}$, $B=\frac{4}{63}$, $12.\frac{1}{36}+7.\frac{4}{63}=\frac{7}{9}$.

Dạng 2: Nguyên Hàm Phân Thức

1. Phương pháp: Tách hàm số muốn lấy nguyên hàm thành các hàm số phân thức cơ bản:

$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C;$ $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$

$\int \frac{1}{(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C;$ $\int \frac{1}{(ax+b)^n}dx = -\frac{1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}} + C;$

$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a} + C$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x-1}$; biết $F(1) = 2$. Tính $F(2)$.

Lời giải

Ta có $F(x) = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$; $F(1) = 2 \Rightarrow C = 2$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + 2 \Rightarrow F(2) = \frac{1}{2}\ln 3 + 2.$

Ví dụ 2: Tính nguyên hàm $I = \int \frac{2x^2-7x+5}{x-3}dx.$

Lời giải

Ta có: $I = \int \frac{2x^2-7x+5}{x-3}dx = \int\left(2x-1+\frac{2}{x-2}\right)dx = x^2 - x + 2\ln|x-2| + C.$

Ví dụ 3: Tìm nguyên hàm $\int \frac{dx}{x(x-3)}$

Hướng dẫn giải

$\int \frac{dx}{x(x-3)} = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{3}\left(\ln|x-3| - \ln|x|\right) + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-3}{x}\right| + C.$

Ví dụ 4: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ và $F(0) = 1$. Tính $F(1)$.

Hướng dẫn giải

$F(x) = \int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}d(x^2+1) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$

Do $F(0) = 1$ nên $C = 1.$

Ví dụ 5: Biết $\int \frac{x+1}{(x-1)(2-x)}dx = a\ln|x-1| + b\ln|x-2| + C, (a,b \in \mathbb{Z})$. Tính giá trị biểu thức $a-b.$

Hướng dẫn giải

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(2-x)}dx = \int\left(\frac{2}{x-1}-\frac{3}{x-2}\right)dx = 2\ln|x-1|-3\ln|x-2|+C$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow a-b=5.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=7x^6+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-2$ là

A. $x^7+\ln|x|-\frac{1}{x}-2x$.

B. $x^7+\ln|x|+\frac{1}{x}-2x+C$.

C. $x^7+\ln x+\frac{1}{x}-2x+C$.

D. $x^7+\ln|x|-\frac{1}{x}-2x+C$.

Lời giải

Chọn D

$\int f(x)dx = x^7+\ln|x|-\frac{1}{x}-2x+C$.

Câu 2: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x+2}$ là:

A. $\ln|x+2|+C$.

B. $\frac{1}{2}\ln|x+2|+C$.

C. $\ln(x+2)+C$.

D. $\frac{1}{2}\ln(x+2)+C$.

Lời giải

Chọn A

Câu 3: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{1-2x}$ là

A. $\int f(x)dx=-2\ln|1-2x|+C$.

B. $\int f(x)dx=2\ln|1-2x|+C$.

C. $\int f(x)dx=-\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C$.

D. $\int f(x)dx=\ln|1-2x|+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\frac{1}{1-2x}dx=-\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C$.

Câu 4: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y=\frac{1}{(1+x)^2}$.

A. $\int\frac{1}{(x+1)^2}dx=\frac{2}{(x+1)^3}+C$.

B. $\int\frac{1}{(x+1)^2}dx=-\frac{1}{x+1}+C$.

C. $\int \frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{x+1}+C$.

D. $\int \frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{-2}{(x+1)^3}+C$.

Lời giải

Chọn B

$$\int \frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \int (x+1)^{-2}\,\mathrm{d}x = -(x+1)^{-1}+C = \frac{-1}{x+1}+C.$$

Câu 5: Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x}{x+1}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = x-\ln|x+1|+1$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x = \ln|x+1|+x+1$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = x-\ln(x+1)$.

D. $x+\ln(x+1)$.

Lời giải

Chọn A

$$\int \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x = \int \frac{x+1-1}{x+1}\mathrm{d}x = \int \left(1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = x-\ln|x+1|+C$$

Vậy $\int f(x)\mathrm{d}x = x-\ln|x+1|+1$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

Câu 6: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\frac{1}{x+1}$ và $F(0)=2$ thì $F(1)$ bằng.

A. $\ln 2$.

B. $2+\ln 2$.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$F(x)=\int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \ln|x+1|+C$ mà $F(0)=2$ nên $F(x)=\ln|x+1|+2$.

Do đó $F(1)=2+\ln 2$.

Câu 7: Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\frac{1}{2x+1}$, biết $F\left(\frac{\mathrm{e}-1}{2}\right)=\frac{3}{2}$ là:

A. $F(x)=2\ln|2x+1|-\frac{1}{2}$.

B. $F(x)=2\ln|2x+1|+1$.

C. $F(x)=\frac{1}{2}\ln|2x+1|+1$.

D. $F(x)=\ln|2x+1|+\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Áp dụng công thức nguyên hàm mở rộng

$$F(x)=\int \frac{1}{2x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x+1|+C.$$

Mà $F\left(\frac{\mathrm{e}-1}{2}\right)=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left|2\left(\frac{\mathrm{e}-1}{2}\right)+1\right|+C=\frac{3}{2} \Leftrightarrow C=1$.

Câu 8: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$.

A. $x+\dfrac{1}{x-1}+C$. **B.** $1+\dfrac{1}{(x-1)^2}+C$.

C. $\dfrac{x^2}{2}+\ln|x-1|+C$. **D.** $x^2+\ln|x-1|+C$.

Lời giải:

Chọn C

Ta có $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}=x+\dfrac{1}{x-1}$

$\Rightarrow \int f(x)\,dx=\dfrac{x^2}{2}+\ln|x-1|+C$.

Câu 9: Cho biết $\int\dfrac{2x-13}{(x+1)(x-2)}dx=a\ln|x+1|+b\ln|x-2|+C$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+2b=8$. **B.** $a+b=8$. **C.** $2a-b=8$. **D.** $a-b=8$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có

$\int\dfrac{2x-13}{(x+1)(x-2)}dx=\int\left(\dfrac{5}{x+1}-\dfrac{3}{x-2}\right)dx=5\int\dfrac{1}{x+1}dx-3\int\dfrac{1}{x-1}dx$

$=5\ln|x+1|-3\ln|x-2|+C$.

Vậy $\begin{cases}a=5\\b=-3\end{cases}\Rightarrow a-b=8$.

Câu 10: $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+\dfrac{1}{2x+1}$. Biết $F(0)=0$, $F(1)=a+\dfrac{b}{c}\ln 3$ trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó giá trị biểu thức $a+b+c$ bằng.

A. 4. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 12.

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x)=\int\left(3x^2+\dfrac{1}{2x+1}\right)dx=x^3+\dfrac{1}{2}\ln|2x+1|+C$.

Do $F(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow F(x)=x^3+\dfrac{1}{2}\ln|2x+1|$.

Vậy $F(1)=1+\dfrac{1}{2}\ln 3\Rightarrow a=1;\ b=1;\ c=2\Rightarrow a+b+c=4$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$ và $f(0)=1$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $4+\ln 15$. **B.** $3+\ln 15$. **C.** $2+\ln 15$. **D.** $\ln 15$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{2}{2x-1}dx=\int\frac{2.\frac{1}{2}d(2x-1)}{2x-1}=\ln|2x-1|+c$.

$f(0)=1\Leftrightarrow c=1\Leftrightarrow f(x)=\ln|2x-1|+1$.

$\begin{cases}f(-1)=\ln 3+1\\ f(3)=\ln 5+1\end{cases}\Leftrightarrow f(-1)+f(3)=2+\ln 15$.

Dạng 3: Nguyên Hàm Căn Thức

1. Phương pháp

Đổi biến số đưa nguyên hàm cần tìm về nguyên hàm của hàm lũy thừa hoặc nguyên hàm của hàm phân thức.

Chú ý thêm các công thức mở rộng sau:

$\int\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$	$\int\sqrt{ax+b}\,dx=\frac{2}{3}.\frac{1}{a}(ax+b)\sqrt{ax+b}+C$
$\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+C$	$\int\frac{1}{\sqrt{ax+b}}dx=2.\frac{1}{a}\sqrt{ax+b}+C$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\sqrt{x},(x>0)$.

Hướng dẫn giải

$$\int x\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C.$$

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm $I=\int\sqrt{\frac{2}{x}}dx,(x>0)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $I=\int\sqrt{\frac{2}{x}}dx=\sqrt{2}\int x^{\frac{1}{2}}dx=\sqrt{2}.\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{2}.\sqrt{x}+C=2\sqrt{2x}+C.$

Ví dụ 3: Tính $\int\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{x}\right)dx,(x>0)$ kết quả là:

Hướng dẫn giải

$$\int\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{x}\right)dx=\int\left(x^{\frac{2}{3}}+\frac{4}{x}\right)dx=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+4\ln|x|+C.$$

Ví dụ 4. Cho $I=\int x\sqrt{x^2+3}dx=\frac{\sqrt{\left(x^2+3\right)^b}}{a}+C,\left(a,b\in\mathbb{Z}^+\setminus\{1\}\right).$

Tính $S=\log_b^2 a+\log_a b+2018$?

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt{x^2+3}\Rightarrow t^2=x^2+3\Rightarrow 2tdt=2xdx\Rightarrow xdx=tdt.$

Suy ra $I=\int t.tdt=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^3}{3}+C.$

Vậy $S=\log_3^2 3+\log_3 3+2018=2020.$

Ví dụ 5: Cho $I=\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}+4}=\sqrt{2x-1}-\ln\left(\sqrt{2x-1}+4\right)^n+C,\left(n\in\mathbb{N}^*\right).$

Tính $S=\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt{2x-1}\Rightarrow t^2=2x-1\Rightarrow tdt=dx$

$\Rightarrow I=\int\frac{tdt}{t+4}=\int\left(1-\frac{4}{t+4}\right)dt=t-4\ln|t+4|+C=\sqrt{2x-1}-\ln\left(\sqrt{2x-1}+4\right)^4+C.$ Vậy $n=4.$

Vậy $S=\cos\left(\frac{n\pi}{8}\right)=-1.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x}-1$ trên $(0;+\infty)$.

A. $F(x)=\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2}-x+1.$ **B.** $F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-x+2.$

C. $F(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$ **D.** $F(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-x.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có : $\int\left(\sqrt{x}-1\right)dx=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-x+C.$

Câu 2: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3\sqrt{x}+x^{2018}$ là

A. $\sqrt{x}+\frac{x^{2019}}{673}+C.$ **B.** $2\sqrt{x^3}+\frac{x^{2019}}{2019}+C.$

C. $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{x^{2019}}{673}+C$.

D. $\frac{1}{2\sqrt{x}}+6054x^{2017}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có:

$$\int\left(3\sqrt{x}+x^{2018}\right)\mathrm{d}x=\int\left(3x^{\frac{1}{2}}+x^{2018}\right)\mathrm{d}x=3.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{2019}}{2019}+C=2\sqrt{x^3}+\frac{x^{2019}}{2019}+C.$$

Câu 3: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{2x+3}$

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x\sqrt{2x+3}+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3}+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\sqrt{2x+3}+C$.

Lời giải

Chọn B

Xét $I=\int\left(\sqrt{2x+3}\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $\sqrt{2x+3}=t\ \Leftrightarrow t^2=2x+3\ \Leftrightarrow 2t\mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$.

$$I=\int t.t\mathrm{d}t=\int \mathrm{t}^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{3}\left(\sqrt{2x+3}\right)^3+C\Leftrightarrow\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3}+C.$$

Câu 4: Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{1-2x}$ là:

A. $\frac{3}{2}(2x-1)\sqrt{1-2x}$.

B. $-\frac{3}{2}(1-2x)\sqrt{1-2x}$.

C. $\frac{3}{4}(2x-1)\sqrt{1-2x}$.

D. $-\frac{1}{3}(1-2x)\sqrt{1-2x}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\sqrt{1-2x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\sqrt{1-2x}\mathrm{d}(1-2x)$, với $x\le\frac{1}{2}$.

$$\Leftrightarrow\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}.\frac{2}{3}\sqrt{(1-2x)^3}+C=-\frac{1}{3}(1-2x)\sqrt{1-2x}+C$$

Câu 5: Hàm số $F(x)$ nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $y=\sqrt[3]{x+1}$?

A. $F(x)=\frac{3}{8}(x+1)^{\frac{4}{3}}+C$.

B. $F(x)=\frac{4}{3}\sqrt[3]{(x+1)^4}+C$.

C. $F(x)=\frac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1}+C$.

D. $F(x)=\frac{3}{4}\sqrt[4]{(x+1)^3}+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I=\int \sqrt[3]{x+1}\mathrm{d}x$.

Đặt: $t=\sqrt[3]{x+1}\Rightarrow t^3=x+1\Rightarrow 3t^2\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow I=\int t.3t^2\mathrm{d}t=\int 3t^3\mathrm{d}t=\frac{3}{4}t^4+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4}+C=\frac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1}+C$.

Vậy $F(x)=\frac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1}+C$.

Câu 6: Tìm hàm số $F(x)$ biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x}$ và $F(1)=1$.

A. $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$.

B. $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{3}$.

C. $F(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}2}+\frac{1}{2}$.

D. $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $F(x)=\int\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

Đặt $t=\sqrt{x}$ suy ra $t^2=x$ và $\mathrm{d}x=2\mathrm{d}t$. Khi đó $I=\int t.2t\mathrm{d}t=\frac{2}{3}t^3+C\Rightarrow I=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$.

Vì $F(1)=1$ nên $C=\frac{1}{3}$.Vậy $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{3}$.

Câu 7: Tìm hàm số $f(x)$, biết rằng $f'(x)=4\sqrt{x}-x$ và $f(4)=0$.

A. $f(x)=\frac{8x\sqrt{x}}{3}-\frac{x^2}{2}-\frac{40}{3}$.

B. $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-1$.

C. $f(x)=\frac{8x\sqrt{x}}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{88}{3}$.

D. $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{x^2}{2}+1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\frac{8x\sqrt{x}}{3}-\frac{x^2}{2}+C$.

$f(4)=0\Leftrightarrow\frac{8.4\sqrt{4}}{3}-\frac{4^2}{2}+C=0\Leftrightarrow C=-\frac{40}{3}=\int(4\sqrt{x}-x)\mathrm{d}x$.

Vậy $f(x)=\frac{8x\sqrt{x}}{3}-\frac{x^2}{2}-\frac{40}{3}$.

Câu 8: Tìm một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x-1}}$.

A. $F(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

B. $F(x)=4\sqrt{x-1}$.

C. $F(x)=2\sqrt{x-1}$. **D.** $F(x)=\sqrt{x-1}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{x-1} \Rightarrow t^2=x-1 \Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Ta có:

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{2}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{4t}{t}\mathrm{d}t\ h'(2)=-\frac{4}{49}=4t+C=4\sqrt{x-1}+C.$$

Vậy một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x-1}}$ là $F(x)=4\sqrt{x-1}$.

Câu 9: Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+m-1$ thỏa mãn $F(0)=0$ và $F(3)=7$. Khi đó, giá trị của tham số m bằng

A. -2. **B.** 3. **C.** -3. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $F(x)=\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+m-1\right)\mathrm{d}x=\sqrt{x+1}+(m-1)x+C$.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases}F(0)=0\\F(3)=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C+1=0\\C+3m=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=-1\\m=3\end{cases}$.

Vậy $F(x)=\sqrt{x+1}+2x-1$.

Câu 10: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2\sqrt{4+x^3}$ là

A. $\frac{2}{9}\sqrt{\left(4+x^3\right)^3}+C$. **B.** $2\sqrt{4+x^3}+C$.

C. $\frac{1}{9}\sqrt{\left(4+x^3\right)^3}+C$. **D.** $2\sqrt{\left(4+x^3\right)^3}+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int x^2\sqrt{4+x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\sqrt{4+x^3}\mathrm{d}\left(4+x^3\right)\to\frac{1}{3}\int\left(4+x^3\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(4+x^3\right)=\frac{1}{3}.\frac{2}{3}\left(4+x^3\right)^{\frac{3}{2}}+C$

$=\frac{2}{9}\sqrt{\left(4+x^3\right)^3}+C$.

Chú ý: Trong lời giải viết dấu "$\to$" thay cho dấu "$=$" vì $\sqrt{4+x^3}\neq\left(4+x^3\right)^{\frac{1}{2}}$ nhưng ta mượn tạm công thức nguyên hàm của $\left(4+x^3\right)^{\frac{1}{2}}$ để tính nguyên hàm của $\sqrt{4+x^3}$.

Câu 11: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{2x+1}+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\sqrt{2x+1}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=2\sqrt{2x+1}+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $\sqrt{2x+1}=t\Rightarrow 2x+1=t^2\Rightarrow \mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$.

Khi đó ta có $\int\frac{1}{2}\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{t\mathrm{d}t}{t}==\frac{1}{2}\int\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t+C=\frac{1}{2}\sqrt{2x+1}+C$.

Câu 12: Khi tính nguyên hàm $\int\frac{x-3}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$, bằng cách đặt $u=\sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

A. $\int 2u\left(u^2-4\right)\mathrm{d}u$.

B. $\int\left(u^2-4\right)\mathrm{d}u$.

C. $\int 2\left(u^2-4\right)\mathrm{d}u$.

D. $\int\left(u^2-3\right)\mathrm{d}u$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $u=\sqrt{x+1}$, $u\ge 0$ nên $u^2=x+1\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u\\ x=u^2-1\end{cases}$.

Khi đó $\int\frac{x-3}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\int\frac{u^2-1-3}{u}.2u\mathrm{d}u=\int 2\left(u^2-4\right)\mathrm{d}u$.

Câu 13: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\frac{2}{\sqrt{2x-1}}$ thỏa mãn $F(5)=7$.

A. $F(x)=2\sqrt{2x-1}$.

B. $F(x)=2\sqrt{2x-1}+1$.

C. $F(x)=\sqrt{2x-1}+4$.

D. $F(x)=\sqrt{2x-1}-10$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\frac{2}{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x=2\int\frac{\mathrm{d}(2x-1)}{2\sqrt{2x-1}}=2\sqrt{2x-1}+C$;

Do $F(5)=7$ nên $6+C=7\Rightarrow C=1$.

Dạng 4. Nguyên hàm của hàm số lượng giác

1. Phương pháp

*** Bảng nguyên hàm cơ bản:**

- $\int\sin(ax+b)\,dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$
- $\int\cos(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$
- $\int\frac{dx}{\sin^2(ax+b)}=-\frac{1}{a}\cot(ax+b)+C$

- $\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$
- $\int \tan x = -\ln|\cos x|+C$
- $\int \cot x dx = \ln|\sin x|+C$

*** Với bài toán tìm nguyên hàm $I = \int f(\sin x;\cos x)dx$ ta sử dụng phương pháp đổi biến trong các trường hợp sau:**

- **Nếu $f(-\sin x;\cos x) = -f(\sin x;\cos x)$ ta đặt $t = \cos x$;**
- **Nếu $f(\sin x,-\cos x) = -f(\sin x;\cos x)$ ta đặt $t = \sin x$;**
- **Nếu $f(-\sin x;\cos x) = f(\sin x;-\cos x) = f(\sin x;\cos x)$ ta có thể sử dụng công thức hạ bậc hoặc đặt $t = \tan x$ (hoặc $t = \cot x$).**

*** Tìm nguyên hàm $I = \int f(\tan x)dx$ (hoặc $I = \int f(\cot x)dx$**

Ta có thể đặt $t = \tan x$ ($t = \cot x$) và chuyển về bài toán tìm nguyên hàm $I = \int \frac{f(t)dt}{1+t^2}$.

*** Phương pháp sử dụng biến đổi vi phân**

$d\left(A\sin^2 x \pm B\cos^2 x \pm C\right) = (A \mp B)\sin 2x dx$

$d\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) = -\sin 4x dx$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos(3x+1)$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \cos(3x+1)dx = \frac{1}{3}\int \cos(3x+1)d(3x+1) = \frac{1}{3}\sin(3x+1)+C.$

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \tan x$.

Hướng dẫn giải

Ta có $F(x) = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x|+C.$

Ví dụ 3: Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{dx}{1+\cos 2x}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $I = \int \frac{1}{2\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\tan x + C.$

Ví dụ 4: Nếu F(x) là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 5x \sin 2x$ thì:

Hướng dẫn giải

Ta có $2f(x) = 2\sin 5x \sin 2x = \cos 3x - \cos 7x$

Suy ra $2\int f(x)dx = \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 7x}{7} + C \Leftrightarrow \int f(x)dx = \frac{\sin 3x}{6} - \frac{\sin 7x}{14} + C$

Ví dụ 5: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^3 x \sin x$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int (\cos x)^3 \sin x dx = -\int (\cos x)^3 d(\cos x) = -\frac{1}{4}\cos^4 x + C.$

Ví dụ 6: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 5x.\cos 3x$.

A. $-\frac{\cos 8x}{16} - \frac{\cos 2x}{4} + C.$ **B.** $-\frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos x}{4} + C.$

C. $\frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos x}{2} + C.$ **D.** $-\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4} + C.$

Hướng dẫn giải

Ví dụ 6: Biết $\int \frac{\cos x}{5\sin x - 9} dx = \frac{a}{b}\ln|5\sin x - 9| + C, (a, b \in \mathbb{Z}^+)$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị $2a - b$

Hướng dẫn giải

$$\int \frac{\cos x}{5\sin x - 9} dx = \frac{1}{5}\int \frac{d(5\sin x - 9)}{5\sin x - 9} = \frac{1}{5}\ln|5\sin x - 9| + C$$

Vậy $a = 1, b = 5$. Nên $2a - b = -3$.

Ví dụ 7: Cho $\int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} dx = F(x) + C$ và $F(\pi) = a + b$. Tính $A = (a + b)^6$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $F(x) = \int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} dx$

$$= \int \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x} dx = \int (\cos x - \sin x) dx = \sin x + \cos x.$$

$\Rightarrow F(\pi) = -1 = a + b \Rightarrow A = 1.$

Ví dụ 8: Cho $\int \cos^3 x \sin x dx = F(x) + C$ và $F(0) = a + b - \frac{1}{4}$.

Tính $A = a^2 + b^2 + 2018$.

Hướng dẫn giải

$\int \cos^3 x \sin x dx$

Đặt $u = \cos x \Rightarrow -du = \sin x dx$.

$\int \cos^3 x \sin x dx = -\int u^3 du = -\frac{u^4}{4} + C = -\frac{\cos^4 x}{4} + C$

$\Rightarrow F(0) = -\frac{1}{4} = a + b - \frac{1}{4} \Rightarrow a + b = 0.$

$A = a^3 + b^3 + 2018 = (a+b)^2 - 2ab(a+b) + 2018 = 2018.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C.$ **B.** $\int \sin\frac{x}{2} dx = 2\cos\frac{x}{2} + C.$

C. $\int \cot x dx = -\ln|\sin x| + C.$ **D.** $\int \cos\frac{x}{2} dx = -2\sin\frac{x}{2} + C.$

Lời giải

Chọn A

Xét $\left(-\ln|\cos x| + C\right)' = -\frac{(\cos x)'}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$ Suy ra khẳng định A đúng.

Câu 2: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$

A. $I = \frac{\pi + 2}{8}$ **B.** $I = \frac{\pi + 2}{4}$ **C.** $I = \frac{1}{3}$ **D.** $I = \frac{2}{3}$

Lời giải

Chọn A

Cách giải: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi + 2}{8}$

Câu 3: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x}$.

A. $\int f(x)dx = -\cot x + \cos x + C.$ **B.** $\int f(x)dx = -\tan x + \cos x + C.$

C. $\int f(x)dx = -\cot x - \cos x + C.$ **D.** $\int f(x)dx = -\tan x - \cos x + C.$

Lời giải

Chọn A

$\int \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int \sin x dx = -\cot x + \cos x + C$

Câu 4: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$

A. $\int f(x)dx = x + \frac{1}{2}\cos 2x + C.$ **B.** $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\cos 2x + C.$

C. $\int f(x)dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$ **D.** $\int f(x)dx = x - \frac{1}{2}\cos 2x + C.$

Lời giải

Chọn D

$$\int (\sin x+\cos x)^2\,dx=\int (\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x)dx$$

$$=\int (1+\sin 2x)dx=x-\frac{1}{2}\cos 2x+C$$

Câu 5: Cặp hàm số nào sau đây có tính chất: Có một hàm số là nguyên hàm của hàm số còn lại?

A. $f(x)=\sin 2x$ và $g(x)=\cos^2 x$.

B. $f(x)=\tan^2 x$ và $g(x)=\frac{1}{\cos^2 x^2}$.

C. $f(x)=e^x$ và $g(x)=e^{-x}$.

D. $f(x)=\sin 2x$ và $g(x)=\sin^2 x$.

Lời giải

Chọn D

Vì $\left(\sin^2 x\right)'=2\sin x\cos x=\sin 2x$

Câu 6: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{1+\cos 2x}$.

A. $I=\frac{1}{2}\tan x+C.$

B. $I=-\tan x+C.$

C. $I=\tan x+C.$

D. $I=-\frac{1}{2}\tan x+C.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $I=\int\frac{1}{2\cos^2 x}dx=\frac{1}{2}\tan x+C.$

Câu 7: Nếu F(x) là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 5x\sin 2x$ thì:

A. $F(x)=\frac{\sin 3x}{6}-\frac{\cos 7x}{14}+C.$

B. $F(x)=\frac{\sin 3x}{6}-\frac{\sin 7x}{14}+C.$

C. $F(x)=\frac{\cos 3x}{6}+\frac{\cos 7x}{14}+C.$

D. $F(x)=\frac{\cos 3x}{6}-\frac{\cos 7x}{14}+C.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $2f(x)=2\sin 5x\sin 2x=\cos 3x-\cos 7x$

Suy ra $2\int f(x)dx=\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 7x}{7}+C\Leftrightarrow\int f(x)dx=\frac{\sin 3x}{6}-\frac{\sin 7x}{14}+C$

Câu 8: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos^3 x\sin x.$

A. $\int f(x)dx=-\cos^4 x+C.$

B. $\int f(x)dx=-\frac{1}{4}\cos^4 x+C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{4}\sin^4 x + C.$ **D.** $\int f(x)dx = -\frac{1}{4}\sin^4 x + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $\int (\cos x)^3 \sin x dx = -\int (\cos x)^3 d(\cos x) = -\frac{1}{4}\cos^4 x + C.$

Câu 9: Nguyên hàm $I = \int \frac{8\cos^2 x - \sin 2x - 3}{\sin x - \cos x} dx$ bằng

A. $I = 4\cos x - 5\sin x + C.$ **B.** $I = 3\cos x - 4\sin x + C.$

C. $I = 3\cos x - 6\sin x + C.$ **D.** $I = 3\cos x - 5\sin x + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$I = \int \frac{8\cos^2 x - \sin 2x - 3}{\sin x - \cos x} dx = \int \frac{(1 - 2\sin x\cos x) + 4(2\cos^2 x - 1)}{\sin x - \cos x} dx$$

$$\int \frac{(\sin x - \cos x)^2 + 4\cos 2x}{\sin x - \cos x} dx = \int [\sin x - \cos x - 4(\sin x + \cos x)] dx$$

$$= 3\cos x - 5\sin x + C.$$

Câu 10: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x} + \frac{2\cot^2 x}{\sin^2 x}.$

A. $F(x) = \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{2\cot^3 x}{3} + C.$

B. $F(x) = \frac{\tan^3 x}{3} - \frac{2\cot^3 x}{3} + C.$

C. $F(x) = -\frac{\tan^3 x}{3} + \frac{2\cot^3 x}{3} + C.$

D. $F(x) = -\frac{\tan^3 x}{3} - \frac{2\cot^3 x}{3} + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\int \left(\frac{\tan^2 x}{\cos^2 x} + \frac{2\cot^2 x}{\sin^2 x}\right) dx = \int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{2\cot^2 x}{\sin^2 x} dx$$

$$= \int \tan^2 x d(\tan x) + \int 2\cot^2 x d(-\cot x) = \frac{\tan^3 x}{3} - \frac{2\cot^3 x}{3} + C.$$

Câu 11: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 5x.\cos 3x.$

A. $-\frac{\cos 8x}{16} - \frac{\cos 2x}{4} + C.$ **B.** $-\frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos x}{4} + C.$

C. $\frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos x}{2} + C.$ **D.** $-\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4} + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $f(x)=\sin 5x.\cos 3x=\frac{1}{2}(\sin 8x+\sin 2x)\Rightarrow \int f(x)dx=\frac{1}{2}\int(\sin 8x+\sin 2x)dx$

Suy ra $\int f(x)dx=-\frac{\cos 8x}{16}-\frac{\cos 2x}{4}+C.$

Câu 12: Biết $\int\frac{\cos x}{5\sin x-9}dx=\frac{a}{b}\ln|5\sin x-9|+C,(a,b\in\mathbb{Z}^+)$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $2a-b$ là

A. 10. **B.** -4.

C. 7. **D.** -3.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$\int\frac{\cos x}{5\sin x-9}dx=\frac{1}{5}\int\frac{d(5\sin x-9)}{5\sin x-9}=\frac{1}{5}\ln|5\sin x-9|+C$

Vậy $a=1,b=5.$ Nên $2a-b=-3.$

Dạng 5: Nguyên Hàm Hàm Mũ, Loga

1. Phương pháp

Sử dụng bảng nguyên hàm cơ bản và vi phân: Đặc biệt tính chất $\int f'(x)dx=f(x)+C$.

Sử dụng phương pháp đổi biến số: Nếu gặp dạng $\int f[u(x)].u'(x)dx$ thì ta đặt $u=u(x)$.

Đặc biệt: $\int f[\log_a x].\frac{1}{x}dx$ thì ta biến đổi $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$ rồi đặt $u=\ln x$

$\int f(a^x)a^x dx$ thì ta đặt $u=a^x$

Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần: $\int udv=uv-\int vdu(*)$ thường trong trường hợp này ta chọn đặt u bằng hàm lôgarit và dv là biểu thức còn lại.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho $\int f(x)dx=3x^2-4x+C$. Tìm $\int f(e^x)dx$

Hướng dẫn giải

Ta có $\int f(x)dx=3x^2-4x+C\Rightarrow f(x)=6x-4\Rightarrow f(e^x)=6e^x-4.$

Vậy $\int f(e^x)dx=\int(6e^x-4)dx=6e^x-4x+C.$

Ví dụ 2: Hàm số $y=f(x)$ có một nguyên hàm là $F(x)=e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)+1}{e^x}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(x)=F'(x)=(e^{2x})'=2e^{2x}$

Suy ra: $\int \frac{f(x)+1}{e^x}dx = \int \frac{2e^{2x}+1}{e^x}dx = \int \left(2e^x + e^{-x}\right)dx = 2e^x - e^{-x} + C$.

Ví dụ 3: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$

Hướng dẫn giải

Ta có $\int \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}dx = \int \frac{d(e^x+1)}{\left(e^x+1\right)^2} = \frac{-1}{e^x+1} + C$.

Ví dụ 4: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Xét đáp án D, ta có: $\begin{cases} F(0) = \frac{3}{2} \\ F'(x) = e^x + 2x = f(x) \end{cases}$.

Cách 2: Ta có $\int \left(e^x + 2x\right)dx = e^x + x^2 + C$.

$F(x)$ là 1 nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ suy ra $F(x)$ có dạng $e^x + x^2 + C$

Theo đề bài $F(0) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow e^0 + 0^2 + C = \frac{3}{2} \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$. Vậy $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$

A. $\int e^{2x}dx = -\frac{1}{2}e^{2x} + C$.

B. $\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$.

C. $\int e^{2x}dx = 2e^{2x} + C$.

D. $\int e^{2x}dx = -2e^{2x} + C$.

Lời giải

Chọn B

Theo công thức nguyên hàm cơ bản $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$. Suy ra $\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$.

Câu 2: Tìm nguyên hàm của hàm số $y = 12^{12x}$.

A. $\int 12^{2x}dx = 12^{12-4x}\ln 12 + C$

B. $\int 12^{2x}dx = 12^{12x}\ln 12 + C$

C. $\int 12^{2x}dx = \frac{12^{12x}}{\ln 12} + C$

D. $\int 12^{2x}dx = \frac{12^{12x-1}}{\ln 12} + C$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int 12^{12x}dx = \frac{1}{12}\int 12^{12x}d(12x) = \frac{12^{12x}}{12.\ln 12} + C = \int 12^{12x}dx = \frac{12^{12x-1}}{\ln 12} + C$

Câu 3: Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Tính $F(e)-F(1)$

A. $I=e$. **B.** $I=\frac{1}{e}$. **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=1$.

Lời giải

Chọn C

$F_{(x)}=\int\frac{\ln(x)}{x}dx=\int\ln(x)d\ln(x)=\frac{1}{2}\ln(x)^2$

$\Rightarrow F_{(e)}-F_{(1)}=\frac{1}{2}$

Câu 4: Biết F làm một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2016e^{2016x}$ và $F(0)=2018$. Giá trị của F là

A. $\mathrm{F}(1)=2016.$ **B.** $\mathrm{F}(1)=2016\mathrm{e}^{2016}.$

C. $\mathrm{F}(1)=2016\mathrm{e}^{2016}+2.$ **D.** $\mathrm{F}(1)=\mathrm{e}^{2016}+2017.$

Lời giải

Chọn D

$\mathrm{F}(\mathrm{x})=\int 2016\mathrm{e}^{2016\mathrm{x}}\mathrm{dx}=\mathrm{e}^{2016\mathrm{x}}+\mathrm{C}\rightarrow\mathrm{F}(0)=1+\mathrm{C}=2018\rightarrow\mathrm{C}=2017$

$\rightarrow\mathrm{F}(\mathrm{x})=\mathrm{e}^{2016\mathrm{x}}+2017\rightarrow\mathrm{F}(1)=\mathrm{e}^{2016}+2017.$

Câu 5: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{x\ln(x^2+1)}{x^2+1}dx$

A. $I=\ln(x^2+1)+C$ **B.** $I=\frac{1}{4}\ln^2(x^2+1)+C$

C. $I=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$ **D.** $I=\ln^2(x^2+1)+C$

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức nguyên hàm hợp $d(\ln(x^2+1))=\frac{2x}{x^2+1}dx$

$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int\ln(x^2+1)d(\ln(x^2+1))=\frac{1}{4}.\ln^2(x^2+1)+C$

Câu 6: Kí hiệu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{e^x+1}$, biết $F(0)=-\ln 2$. Tìm tập nghiệm S của phương trình $F(x)+\ln(e^x+1)=3$.

A. $S=\{-3;3\}$ **B.** $S=\{3\}$ **C.** $S=\varnothing$ **D.** $S=\{-3\}$

Lời giải

Chọn B

$$\int \frac{1}{e^x+1}dx = \int dx - \int \frac{e^x}{e^x+1}dx = x - \ln\left(e^x+1\right) + C$$

Vì $F(0) = -\ln 2 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = x - \ln\left(e^x+1\right)$

Xét phương trình $F(x) + \ln\left(e^x+1\right) = 3 \Leftrightarrow x = 3$

Dạng 6: Nguyên Hàm Từng Phần

1. Phương pháp

Cho hai hàm số u và v liên tục trên $[a;b]$ và có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$. Khi đó: $\int udv = uv - \int vdu (*)$

Để tính tích phân $I = \int_a^b f(x)dx$ bằng phương pháp từng phần ta làm như sau:

Bước 1: Chọn u, v sao cho $f(x)dx = udv$ (chú ý: $dv = v'(x)dx$).

Tính $v = \int dv$ và $du = u'.dx$.

Bước 2: Thay vào công thức $(*)$ và tính $\int vdu$.

Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int vdu$ dễ tính hơn $\int udv$. Ta thường gặp các dạng sau

Loại 1: $I = \int P(x)\begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức

Với dạng này, ta đặt $u = P(x),\ dv = \begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}dx$.

Loại 2: $I = \int (x)e^{ax+b}dx$

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases}u = P(x)\\ dv = e^{ax+b}dx\end{cases}$, trong đó $P(x)$ là đa thức

Loại 3 : $I = \int P(x)\ln(mx+n)dx$

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases}u = \ln(mx+n)\\ dv = P(x)dx\end{cases}$.

Loại 4 : $I = \int \begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}e^x dx$

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases}u = \begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}\\ dv = e^x dx\end{cases}$ để tính $\int vdu$ ta đặt $\begin{cases}u = \begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}\\ dv = e^x dx\end{cases}$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của hàm số $y = x.e^{2x}$

Hướng dẫn giải

$$\int x.e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int x d\left(e^{2x}\right) = \frac{1}{2}x.e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx$$
$$= \frac{1}{2}x.e^{2x} - \frac{1}{4}.e^{2x} + C = \frac{1}{2}\cdot e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C.$$

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm của hàm $f(x) = x.\sin x$

Hướng dẫn giải

Ta có $F(x) = \int f(x)dx = \int x.\sin x dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases} \Rightarrow F(x) = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C.$

Ví dụ 3: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 \ln(3x).$

Hướng dẫn giải

$$I = \int x^2 \ln(3x)dx$$

Đặt $\begin{cases} u = \ln 3x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{3}{3x}dx \\ v = \frac{1}{3}x^3 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3}x^3 \ln 3x - \int \frac{1}{3}x^3 \frac{3}{3x}dx = \frac{1}{3}x^3 \ln 3x - \int \frac{1}{3}x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \ln 3x - \frac{1}{9}x^3.$$

Ví dụ 4: Tìm nguyên hàm của hàm $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}.$

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases} \Rightarrow \int f(x)dx = \int \frac{x}{\cos^2 x}dx = x\tan x - \int \tan x dx$

$$= x\tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = x\tan x + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = x\tan x + \ln|\cos x| + C.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Biết $F(x) = (ax + b).e^x$ là nguyên hàm của hàm số $y = (2x + 3).e^x.$ Khi đó $a + b$ là

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Lời giải

Chọn A

$y = (2x + 3)e^x \Rightarrow F(x) = \int (2x + 3)e^x dx$

$\begin{cases} u = 2x+3 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases}$

$F(x) = \int (2x+3)e^x dx = (2x+3)e^x - \int e^x 2dx = (2x+3)e^x - 2e^x = (2x+1)e^x$

Khi đó $a+b=3$.

Câu 2: Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x-1)\sin 2x dx$. Tìm đẳng thức đúng

A. $I = -(x-1)\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$.

B. $I = -(x-1)\cos 2x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$.

C. $I = -\frac{1}{2}(x-1)\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$.

D. $I = -\frac{1}{2}(x-1)\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = x-1 \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$ ta có $I = -\frac{1}{2}(x-1)\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$

Câu 3: Biết rằng $\int e^{2x}\cos 3x dx = e^{2x}(a\cos 3x + b\sin 3x) + c$, trong đó a, b, c là các hằng số, khi đó tổng
a + b có giá trị là

A. $-\frac{1}{13}$ **B.** $-\frac{5}{13}$ **C.** $\frac{5}{13}$ **D.** $\frac{1}{13}$

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x) = e^{2x}(a\cos 3x + b\sin 3x) + c$. Ta có

$f'(x) = 2ae^{2x}\cos 3x - 3ae^{2x}\sin 3x + 2be^{2x}\sin 3x + 3be^{2x}\cos 3x$
$= (2a+3b)e^{2x}\cos 3x + (2b-3a)e^{2x}\sin 3x$

Để f là một nguyên hàm của hàm số $e^{2x}\cos 3x$, điều kiện là

$f'(x) = e^{2x}\cos 3x \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+3b=1 \\ 2b-3a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{13} \\ b = \frac{3}{13} \end{cases} \Rightarrow a+b = \frac{5}{13}.$

Câu 4: Tính nguyên hàm $I = \int (x-2)\sin 3x dx = -\frac{(x-2)\cos 3x}{a} + b\sin 3x + C$. Tính $M = a + 27b$. Chọn đáp án đúng:

A. 6 **B.** 14 **C.** 34 **D.** 22

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = x-2 \\ dv = \sin 3xdx \end{cases}$. Ta được $\begin{cases} du = dx \\ v = -\dfrac{\cos 3x}{3} \end{cases}$

Do đó:

$$I = -\frac{(x-2)\cos 3x}{3} + \frac{1}{3}\int \cos 3xdx = -\frac{(x-2)\cos 3x}{3} + \frac{1}{9}\sin 3x + C \Rightarrow a = 3; b = \frac{1}{9} \Rightarrow M = 6$$

Câu 5: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\sin 2x$ là

A. $F(x) = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

B. $F(x) = \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

C. $F(x) = -x\cos 2x + \sin 2x + C$.

D. $F(x) = x\cos 2x - \sin 2x + C$.

Lời giải

Chọn A

Đặt

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow u' = 1 \\ v' = \sin 2x \Rightarrow v = -\dfrac{\cos 2x}{2} \end{cases} \Rightarrow I = -\frac{x\cos 2x}{2} + \int \frac{\cos 2x}{2}dx = -\frac{x\cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

Câu 6: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+1)e^x$ và $F(0) = 3$. Tính $F(1)$.

A. $F(1) = 11e - 3$.

B. $F(1) = e + 3$.

C. $F(1) = e + 7$.

D. $F(1) = e + 2$.

Lời giải

Chọn C

$$I = \int_0^1 (5x+1)e^x dx$$

$$u = 5x+1 \Rightarrow du = 5dx, dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\Rightarrow I = (5x+1)e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x 5dx = (5x+1)e^x - 5e^x \Big|_0^1 = e + 4 = F(1) - F(0) \Rightarrow F(1) = e + 7$$

Câu 7: Tìm $\int x\cos 2xdx$.

A. $\frac{1}{2}x.\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$.

B. $x.\sin 2x + \cos 2x + C$.

C. $\frac{1}{2}x.\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + C$.

D. $\frac{1}{2}x.\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases} \Rightarrow \int x\cos 2x dx = \frac{1}{2}x\sin x2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx$

$= \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$

Câu 8: $\int (x-2)\sin 3x dx = -\frac{(x-m)\cos 3x}{n} + \frac{1}{p}\sin 3x + C$. Tính giá trị của $m+n+p$.

A. 14 **B.** –2. **C.** 9 **D.** 10

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = x-2 \\ dv = \sin 3x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{\cos 3x}{3}. \end{cases}$

Khi đó $\int (x-2)\sin 3x dx = -\frac{(x-2)\cos 3x}{3} + \frac{1}{9}\sin 3x + C.$

Suy ra $m = 2, n = 3, p = 9$

Vậy $m+n+p = 14.$

Dạng 7: Bài tập dành cho học sinh 8+, 9+

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = 2x^2 e^{x^3+2} + 2xe^{2x}$, ta có $\int f(x)dx = me^{x^3+2} + nxe^{2x} - pe^{2x} + C$. Giá trị của biểu thức $m+n+p$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{13}{6}$. **D.** $\frac{7}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Vì $\int f(x)dx = me^{x^3+2} + nxe^{2x} - pe^{2x} + C$ nên $\left(me^{x^3+2} + nxe^{2x} - pe^{2x} + C\right)' = f(x)$

Suy ra $3mx^2 e^{x^3+2} + 2nxe^{2x} + (n-2p)e^{2x} = 2x^2 e^{x^3+2} + 2xe^{2x}$ đồng nhất 2 biểu thức ta được

hệ phương trình sau: $\begin{cases} 3m = 2 \\ 2n = 2 \\ n-2p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = 1 \\ p = \frac{1}{2} \end{cases}$. Suy ra: $m+n+p = \frac{13}{6}$.

Câu 2: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + ... + F(2018) + F(2019)$.

A. $T = 1009.\frac{2^{2019}+1}{\ln 2}$. **B.** $T = 2^{2019.2020}$. **C.** $T = \frac{2^{2019}-1}{\ln 2}$. **D.** $T = \frac{2^{2020}-1}{\ln 2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int 2^x \mathrm{d}x = \frac{2^x}{\ln 2} + C$

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, ta có $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + C$ mà $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$

$\Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$.

$T = F(0) + F(1) + ... + F(2018) + F(2019)$

$= \frac{1}{\ln 2}\left(1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{2018} + 2^{2019}\right) = \frac{1}{\ln 2}.\frac{2^{2020} - 1}{2 - 1} = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$

Câu 3: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x$, thỏa mãn $F(0) = 2020$. Tính giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + ... + F(2018) + F(2019)$.

A. $T = \frac{e^{2020} - 1}{e - 1} + 2019.2020$.

B. $T = \frac{e^{2019} - 1}{e - 1} + 2018.2019$.

C. $T = \frac{e^{2020} - 1}{e - 1} + 2020^2$.

D. $T = \frac{e^{2019} - 1}{e - 1} + 2019^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x$, ta có $F(x) = e^x + C$ mà $F(0) = 2020$

$\Rightarrow C = 2019 \Rightarrow F(x) = e^x + 2019$.

$T = F(0) + F(1) + ... + F(2018) + F(2019) = 1 + e + e^2 + ... + e^{2018} + e^{2019} + 2019.2020$

$= \frac{e^{2020} - 1}{e - 1} + +2019.2020$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x - 1}$, $f(0) = 2017$, $f(2) = 2018$. Tính $S = f(3) - f(-1)$.

A. $S = \ln 4035$.

B. $S = 4$.

C. $S = \ln 2$.

D. $S = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Trên khoảng $(1; +\infty)$: $\int f'(x)dx = \int \frac{1}{x - 1}dx = \ln(x - 1) + C_1 \Rightarrow f(x) = \ln(x - 1) + C_1$.

Mà $f(2) = 2018 \Rightarrow C_1 = 2018$.

Trên khoảng $(-\infty;1)$ $\int f'(x)dx = \int \frac{1}{x-1}dx = \ln(1-x)+C_2 \Rightarrow f(x) = \ln(1-x)+C_2$.

Mà $f(0) = 2017 \Rightarrow C_2 = 2017$.

Vậy $f(x) = \begin{cases} \ln(x-1)+2018 & \text{khi } x>1 \\ \ln(1-x)+2017 & \text{khi } x<1 \end{cases}$. Suy ra $f(3)-f(-1)=1$.

Câu 5: Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0;\pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}-4$.

B. $F\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$.

D. $F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3-\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = 2\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$

$= 2\int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin^2 x} - \int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\frac{2}{\sin x} + \cot x + C$

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$ nên hàm số $F(x)$ có công thức dạng $F(x) = -\frac{2}{\sin x} + \cot x + C$ với mọi $x \in (0;\pi)$.

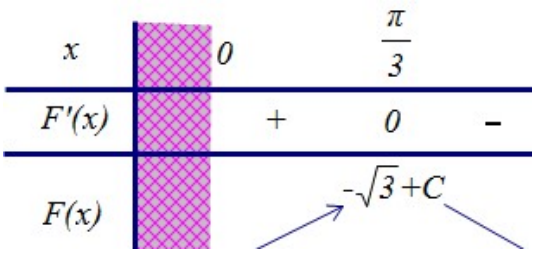
Xét hàm số $F(x) = -\frac{2}{\sin x} + \cot x + C$ xác định và liên tục trên $(0;\pi)$.

$F'(x) = f(x) = \frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$

Xét $F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\cos x-1}{\sin^2 x} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Trên khoảng $(0;\pi)$, phương trình $F'(x) = 0$ có một nghiệm $x = \frac{\pi}{3}$

Bảng biến thiên:



$\max\limits_{(0;\pi)} F(x) = F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} + C$. Theo đề bài ta có, $-\sqrt{3} + C = \sqrt{3} \Leftrightarrow C = 2\sqrt{3}$.

Do đó, $F(x) = -\frac{2}{\sin x} + \cot x + 2\sqrt{3}$. Khi đó, $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3} - 4$.

Câu 6: Biết rằng $x\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của $f(-x)$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)\mathrm{e}^x$ thỏa mãn $F(0) = 1$, giá trị của $F(-1)$ bằng

A. $\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{5-\mathrm{e}}{2}$. **C.** $\frac{7-\mathrm{e}}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $f(-x) = \left(x\mathrm{e}^x\right)' = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x$, $\forall x \in (-\infty;+\infty)$.

Do đó $f(-x) = \mathrm{e}^{-(-x)} - (-x)\mathrm{e}^{-(-x)}$, $\forall x \in (-\infty;+\infty)$.

Suy ra $f(x) = \mathrm{e}^{-x}(1-x)$, $\forall x \in (-\infty;+\infty)$.

Nên $f'(x) = \left[\mathrm{e}^{-x}(1-x)\right]' = \mathrm{e}^{-x}(x-2) \Rightarrow f'(x)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-x}(x-2).\mathrm{e}^x = x-2$.

Bởi vậy $F(x) = \int (x-2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x-2)^2 + C$.

Từ đó $F(0) = \frac{1}{2}(0-2)^2 + C = C + 2$; $F(0) = 1 \Rightarrow C = -1$.

Vậy $F(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 1 \Rightarrow F(-1) = \frac{1}{2}(-1-2)^2 - 1 = \frac{7}{2}$.

Câu 7: Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1, f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1}$ với mọi $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $4 < f(5) < 5$. **B.** $1 < f(5) < 2$. **C.** $3 < f(5) < 4$. **D.** $2 < f(5) < 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $f(x) = f'(x).\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow \ln f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + C$. Vì

$f(1) = 1 \Rightarrow C + \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{4}{3}$.

$\Rightarrow \ln f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3x+1} - \frac{4}{3} \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1} - \frac{4}{3}} \Rightarrow f(5) = e^{\frac{4}{3}} \approx 3{,}8$. Vậy $3 < f(5) < 4$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}=x^2$ và $f(1)=-1$. Giá trị của $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ bằng

A. $\dfrac{1}{96}$. **B.** $\dfrac{1}{64}$. **C.** $\dfrac{1}{48}$. **D.** $\dfrac{1}{24}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có

$$f'(x)+\frac{f(x)}{x}=x^2 \Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=x^3 \Leftrightarrow \left[xf(x)\right]'=x^3 \Rightarrow xf(x)=\int x^3dx=\frac{x^4}{4}+C.$$

$f(1)=-1\Rightarrow C=-\dfrac{5}{4}$. Khi đó $f(x)=\dfrac{x^4-5}{4x}\Rightarrow f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{96}$.

Câu 9: Biết $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\mathrm{e}^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left(2x^2-5x+2\right)\mathrm{e}^{-x}$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị biểu thức $f\left(F(0)\right)$ bằng:

A. $\dfrac{-1}{\mathrm{e}}$. **B.** $3\mathrm{e}$. **C.** $20\mathrm{e}^2$. **D.** $9\mathrm{e}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Tính $\left(F(x)\right)'=\left(\left(ax^2+bx+c\right)\mathrm{e}^{-x}\right)'=\left[-ax^2+(2a-b)x+b-c\right]\mathrm{e}^{-x}=\left(2x^2-5x+2\right)\mathrm{e}^{-x}$.

Suy ra $\begin{cases}a=-2\\2a-b=-5\\b-c=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=1\\c=-1\end{cases}$ nên $F(x)=\left(-2x^2+x-1\right)\mathrm{e}^{-x}$.

Tính $F(0)=-1$ suy ra $f\left(F(0)\right)=f(-1)=9\mathrm{e}$.

Câu 10: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $F(1)=\dfrac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $S=F(1)+F(2)+F(3)+\ ...\ +F(2019)$ bằng

A. $\dfrac{2019}{2020}$. **B.** $\dfrac{2019.2021}{2020}$. **C.** $2018\dfrac{1}{2020}$. **D.** $-\dfrac{2019}{2020}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $F(x)=\displaystyle\int\frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x$.

Suy ra: $F(x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+c$ mà $F(1)=\frac{1}{2}$ nên $c=1$. Hay $F(x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+1$.

Ta có: $S=F(1)+F(2)+F(3)+\ ...\ +F(2019)$

$S=\left(-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+1\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+1\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+1\right)+\ ...\ +\left(-\frac{1}{2019}+\frac{1}{2020}+1\right)$

$S=-1+\frac{1}{2020}+2019.1=2018+\frac{1}{2020}=2018\frac{1}{2020}$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=3$ và $x(4-f'(x))=f(x)-1$ với mọi $x>0$. Tính $f(2)$.

A. 6. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $x(4-f'(x))=f(x)-1\Leftrightarrow f(x)+xf'(x)=4x+1\Leftrightarrow (xf(x))'=4x+1$

$\Rightarrow xf(x)=\int (xf(x))'\mathrm{d}x=\int (4x+1)\mathrm{d}x=2x^2+x+C$.

Với $x=1$ thì $1f(1)=3+C\Leftrightarrow 3=3+C\Leftrightarrow C=0$.

Do đó $xf(x)=2x^2+x$. Vậy $2f(2)=2.2^2+2$ hay $f(2)=5$.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f'(x)-2f(x)=0$. Tính $f(-1)$ biết rằng $f(1)=1$.

A. e^{-4}. **B.** e^{3}. **C.** e^{4}. **D.** e^{-2}.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Vì $f(x)>0$, nên ta có: $f'(x)-2f(x)=0\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=2\Rightarrow \int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int 2\mathrm{d}x$.

$\Leftrightarrow \exists C\in\mathbb{R}:\ln|f(x)|=2x+C\Rightarrow \ln f(x)=2x+C$.

Cho $x=1\ \Rightarrow \ln f(1)=2+C\ \Leftrightarrow \ln 1=2+C\ \Leftrightarrow C=-2$

Do đó: $\ln f(x)=2x-2\Leftrightarrow f(x)=e^{2x-2}\ \Rightarrow f(-1)=e^{-4}$. Do đó: $S=a+b+c=-\frac{9}{2}$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ thoả mãn $f'(x)=\frac{3x-1}{x+2}$, $f(0)=1$ và $f(-4)=2$. Giá trị của biểu thức $f(2)+f(-3)$ bằng

A. 12. **B.** $\ln 2$. **C.** $10+\ln 2$. **D.** $3-20\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{3x-1}{x+2}\mathrm{d}x=\int\left(3-\frac{7}{x+2}\right)\mathrm{d}x=3x-7\ln|x+2|+C$,

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Xét trên khoảng $(-2;+\infty)$ ta có: $f(0)=1 \Leftrightarrow -7\ln 2+C=1 \Rightarrow C=1+7\ln 2$.

Do đó, $f(x)=3x-7\ln|x+2|+1+7\ln 2$, với mọi $x\in(-2;+\infty)$.

Suy ra $f(2)=7-7\ln 4+7\ln 2=7-7\ln 2$.

Xét trên khoảng $(-\infty;-2)$ ta có: $f(-4)=2 \Leftrightarrow -12-7\ln 2+C=2 \Rightarrow C=14+7\ln 2$.

Do đó, $f(x)=3x-7\ln|x+2|+14+7\ln 2$, với mọi $x\in(-\infty;-2)$. Suy ra $f(-3)=5+7\ln 2$.

Vậy $f(2)+f(-3)=7+7\ln 2+5-7\ln 2=12$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left(f'(x)\right)^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Giá trị của $\left(f(1)\right)^2$ là

A. 10. **B.** 8. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\left(f(x).f'(x)\right)'=\left(f'(x)\right)^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x, \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(x).f'(x)=3x^5+6x^2+C, \forall x\in\mathbb{R}$.

Lại có $f(0)=f'(0)=1$ nên $C=1$ do đó $f(x).f'(x)=3x^5+6x^2+1, \forall x\in\mathbb{R}$.

$\left(\left(f(x)\right)^2\right)'=2f(x).f'(x)=6x^5+12x^2+2, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \left(f(x)\right)^2=x^6+4x^3+2x+C_1, \forall x\in\mathbb{R}$.

Mà $f(0)=1$ nên $C_1=1$. Vậy $\left(f(1)\right)^2=1^6+4.1^3+2.1+1=8$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;4]$ thỏa mãn $f''(x)f(x)+\frac{\left[f(x)\right]^2}{\sqrt{(2x+1)^3}}=\left[f'(x)\right]^2$ và $f(x)>0$ với mọi $x\in[0;4]$. Biết rằng $f'(0)=f(0)=1$, giá trị của $f(4)$ bằng

A. e^2. **B.** $2e$. **C.** e^3. **D.** e^2+1.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $f''(x)f(x)+\frac{\left[f(x)\right]^2}{\sqrt{(2x+1)^3}}=\left[f'(x)\right]^2 \Leftrightarrow f''(x)f(x)-\left[f'(x)\right]^2=-\frac{\left[f(x)\right]^2}{\sqrt{(2x+1)^3}}$

$\Leftrightarrow \frac{f''(x)f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^2}=-\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}} \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=-\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\int \frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}dx \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\int (2x+1)^{-\frac{3}{2}}dx \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} + C_1.$$

Thay $x = 0$ ta được: $C_1 = 0$.

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \Leftrightarrow \ln\left[f(x)\right] = \sqrt{2x+1} + C_2$$

Thay $x = 0$ ta được $C_2 = -1$. $\Rightarrow \ln\left[f(x)\right] = \sqrt{2x+1} - 1$

Thay $x = 4$ ta được $\ln\left[f(4)\right] = 2 \Rightarrow f(4) = e^2$.

BÀI 2.TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN NẮM

I. TÍCH PHÂN

1. Định nghĩa: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $[a;b]$.

Câu 1:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

Quy ước:

+ Nếu $a=b$ thì $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$

+ Nếu $a>b$ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \ldots$$

2. Tính chất:

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \qquad (k\in\mathbb{R})$$

$$\int_a^b \left[f(x)\pm g(x)\right]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \qquad (a<c<b)$$

Một số tính chất mở rộng:

Nếu $f(x)\ge 0\forall x\in[a;b]$ thì: $\int_a^b f(x)dx \ge 0\forall x\in[a;b]$

Nếu: $\forall x\in[a;b]: f(x)\ge g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$.

Nếu: $\forall x\in[a;b]$ và với hai số M, N ta luôn có: $M\le f(x)\le N$ thì:

$M(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le N(b-a)$.

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

1. Phương pháp đổi biến số

1.1. Phương pháp đổi biến số dạng 1.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử hàm số $u=u(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $\alpha \le u(x) \le \beta$. Giả sử có thể viết $f(x)=g(u(x))u'(x), x\in[a;b]$, với g liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$.

Khi đó, ta có: $I=\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_{u(a)}^{u(b)} g(u)du.$

Bài toán: Tính tích phân $I=\int\limits_a^b g\left[u(x)\right].u'(x)dx$

Cách giải: Đặt $t=u\left(x\right)\Rightarrow dt=u'(x)dx$

Đổi cận: $\begin{cases} x=a\Rightarrow t=u(a) \\ x=b\Rightarrow t=u(b) \end{cases}$. Khi đó $I=\int\limits_{u(a)}^{u(b)} g(t)dt.$

Chú ý: *Khi đổi biến ta phải đổi cả cận*

Dấu hiệu chung:

Nếu hàm số chứa căn $\Rightarrow$ *đặt* $t=$*căn*

Nếu hàm số chứa mẫu $\Rightarrow$ *đặt* $t=$*mẫu*

Nếu hàm số chứa lũy thừa bậc cao $\Rightarrow$ *đặt* $t=$*biểu thức chứa lũy thừa bậc cao*

Dấu hiệu cụ thể:

Dấu hiệu nhận biết và cách tính tính phân

	Dấu hiệu	Có thể đặt	Ví dụ
1	Có $\sqrt{f(x)}$	$t=\sqrt{f(x)}$	$I=\int_0^3 \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}}$. Đặt $t=\sqrt{x+1}$
2	Có $(ax+b)^n$	$t=ax+b$	$I=\int_{-1}^0 x(x+1)^{2018}\mathrm{d}x$. Đặt $t=x+1$
3	Có $a^{f(x)}$	$t=f(x)$	$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x+3}}{\cos^2 x}dx$. Đặt $t=\tan x+3$
4	Có $\frac{dx}{x}$ và $\ln x$	$t=\ln x$ *hoặc* biểu thức chứa $\ln x$	$I=\int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}.\ln x}{x}.\mathrm{d}x$. Đặt $t=\sqrt{1+3\ln x}$
5	Có $e^x dx$	$t=e^x$ *hoặc* biểu thức chứa e^x	$I=\int_0^{\ln 3} e^{2x}\sqrt{4e^x-3}.\mathrm{d}x$. Đặt $t=\sqrt{4e^x-3}$
6	Có $\sin x dx$	$t=\cos x$	$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{2\cos x+1}\mathrm{d}x$ Đặt $t=2\cos x+1$

7	Có $\cos x dx$	$t = \sin x dx$	$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx$. Đặt $t = \sin x$
8	Có $\frac{dx}{\cos^2 x}$	$t = \tan x$	$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 x) \frac{1}{\cos^2 x} dx$ Đặt $t = \tan x$
9	Có $\frac{dx}{\sin^2 x}$	$t = \cot x$	$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\cot x}}{1-\cos 2x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\cot x}}{2\sin^2 x} dx$. Đặt $t = \cot x$

1.2. Phương pháp đổi biến số dạng 2.

Đặt $x = u(t)$

Bài toán 1: Tính $I = \int_a^b f(x)dx$

Phương pháp: Đặt $x = u(t) \Rightarrow dx = u'(t)dt$

Đổi cận: $x = a \Rightarrow u = \alpha$

$x = b \Rightarrow u = \beta$

Suy ra $I = \int_a^b f[u(t)]u'(t)dt$

Dấu hiệu	Cách đổi biến	Chú ý
1. $\sqrt{x^2 + a^2}$	Đặt $x = a\tan t$	$t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
2. $\sqrt{a^2 - x^2}$	Đặt $x = a\sin t$	$t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
3. $\sqrt{x^2 - a^2}$	Đặt $x = \frac{a}{\sin t}$	$t \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ or $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$
4. $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ or $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$	Đặt $x = a\cos 2t$	$t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Bài toán 2.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó ta có $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$.

Chứng minh:

Đặt $t = a + b - x \Rightarrow dx = -dt$.

Khi đó $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_b^a f(a+b-t)(-\mathrm{d}t) = \int\limits_a^b f(a+b-t)\mathrm{d}t = \int\limits_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$.

Bài toán 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và là hàm số lẻ trên $[-a;a]$. Chứng minh rằng: $\int\limits_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Chứng minh:

Ta có: $I = \int\limits_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

Xét tích phân: $J = \int\limits_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x$, Đặt $x = -t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x = -a \Rightarrow t = a$; $x = 0 \Rightarrow t = 0$.

Mặt khác vì $f(x)$ là hàm số lẻ nên $f(-t) = -f(t)$.

Khi đó: $J = -\int\limits_a^0 f(-t)\mathrm{d}t = -\int\limits_0^a f(t)\mathrm{d}t = -\int\limits_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

Thay vào ta được: $I = -\int\limits_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

2. Phương pháp tích phân từng phần

Công thức: $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Tích Phân Hữu Tỉ

1. Phương pháp

1.1 Một số dạng cần nhớ

1) $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C, a \neq 0.$

2) $\int \frac{dx}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a}.\frac{1}{(-n+1)}.\frac{1}{(ax+b)^{n-1}} + C, a \neq 0.$

3) $\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln|u(x)| + C$

4) $\int_a^b \frac{dx}{x^2+\alpha^2}$ thì đặt $x = \alpha \tan t$.

1.2 Dạng tổng quát $I = \int \frac{P(x)}{(x-\alpha)^m.(x-\beta)^n.(ax^2+bx+c)}dx \left(m,n \in N, b^2-4ac<0, a \neq 0\right)$

+) Trường hợp 1: Nếu bậc của đa thức $P(x) \geq m+n+2$ *ta chia tử cho mẫu để đưa về trường hợp 2*

+) Trường hợp 2: Nếu bậc của đa thức $P(x) < m+n+2$ *ta sử dụng "phương pháp hệ số bất định"*

Bước 1: Phân tích: $\frac{P(x)}{(x-\alpha)^m.(x-\beta)^n.(ax^2+bx+c)} = \sum_{i=1}^{m}\frac{A_i}{(x-\alpha)^i} + \sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{(x-\beta)^k} + \frac{M(2ax+b)+N}{ax^2+bx+c}$

Bước 2: Quy đồng mẫu số và đồng nhất 2 vế để tìm các hệ số A_i, B_k, M, N

Bước 3: Thực hiện các dạng cơ bản.

Chú ý: + Đôi khi ta dùng phương pháp thêm - bớt – tách sẽ gắn gọn hơn.

+ Một số trường hợp ta đổi biến số nhằm giảm bớt bậc để đưa về tích phân hàm hữu tỉ đơn giản hơn.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho $\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3}dx = a\ln 5 + b\ln 3, (a,b \in \mathbb{Z})$. Tính giá trị của $3a+2b$

Hướng dẫn giải

Khi thấy những bài tích phân có dạng $I = \int_m^n \frac{ax+b}{(x+c)(x+d)}dx$ thì ta sẽ biến đổi

$$\frac{ax+b}{(x+c)(x+d)} = \frac{A}{x+c} + \frac{B}{x+d} \Rightarrow ax+b = (A+B)x + Ad + Bc$$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=a \\ Ad+Bc=b \end{cases} \Rightarrow$ ta sẽ tìm được A và B.

Khi đó: $I=\left(A\ln|x+c|+B\ln|x+d|\right)\Big|_m^n$

Áp dụng vào bài, ta có: $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+4x+1}=\dfrac{x-1}{(x+3)(x+1)}=\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{1}{x+1}$

$I=\left(2\ln|x+3|-\ln|x+1|\right)\Big|_0^2=2\ln 5-3\ln 3.$

$VT=VP \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}.$

Ví dụ 2: Tìm tất cả các số thực m dương thỏa mãn $\int\limits_0^m \dfrac{x^2dx}{x+1}=\ln 2-\dfrac{1}{2}.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int\limits_0^m \dfrac{x^2dx}{x+1}=\int\limits_0^m\left(x-1+\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\left(\dfrac{1}{2}x^2-x+\ln|x+1|\right)\Big|_0^m=\dfrac{1}{2}m^2-m+\ln|m+1|$

Suy ra: $\dfrac{1}{2}m^2-m+\ln|m+1|=\ln 2-\dfrac{1}{2}$ (*)

Ta thấy chỉ có $m=1$ thỏa mãn (*).

Ví dụ 3: Biết $I=\int\limits_{-1}^0 \dfrac{3x^2+5x-1}{x-2}dx=a\ln\dfrac{2}{3}+b,(a,b\in\mathbb{Q})$. Tính giá trị của $a+4b$.

Hướng dẫn giải

$I=\int\limits_{-1}^0 \dfrac{3x^2+5x-1}{x-2}dx=\int\limits_{-1}^0\left(3x+11+\dfrac{21}{x-2}\right)dx$

$=\left(\dfrac{3x^2}{2}+11x+21.\ln|x-2|\right)\Big|_{-1}^0=\dfrac{19}{2}+21.\ln\dfrac{2}{3}$

Khi đó, $a=21,b=\dfrac{19}{2}\Rightarrow a+4b=59.$

Ví dụ 4: Biết $\int\limits_1^2 \dfrac{1}{x^2(x+1)}dx=\dfrac{1}{2}+\ln\dfrac{a}{b}$ với a,b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a+b$

Hướng dẫn giải

$\int\limits_1^2 \dfrac{1}{x^2(x+1)}dx=\int\limits_1^2 \dfrac{x^2+1-x^2}{x^2(x+1)}dx=\int\limits_1^2\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)dx=\left(\ln|x+1|-\ln|x|-\dfrac{1}{x}\right)\Big|_1^2$

$=\left(\ln\left|\dfrac{x+1}{x}\right|-\dfrac{1}{x}\right)\Big|_1^2=\dfrac{1}{2}+\ln\dfrac{3}{4}$

Suy ra $a=4;b=3$. Vậy $a+b=7.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Câu 1: Tích phân $\int_0^2 \frac{2}{2x+1}dx$ bằng

A. $2\ln 5$. **B.** $\frac{1}{2}\ln 5$. **C.** $\ln 5$. **D.** $4\ln 5$

Lời giải

Chọn C

$$\int_0^2 \frac{2}{2x+1}dx = \int_0^2 \frac{2}{2x+1}d(2x+1) = \ln|2x+1|\Big|_0^2 = \ln 5.$$

Câu 2: Cho $\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3}dx = a\ln 5 + b\ln 3, (a,b\in\mathbb{Z})$. Giá trị của $3a+2b$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 8. **D.** 10.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Khi thấy những bài tích phân có dạng $I=\int_m^n \frac{ax+b}{(x+c)(x+d)}dx$ thì ta sẽ biến đổi

$$\frac{ax+b}{(x+c)(x+d)} = \frac{A}{x+c}+\frac{B}{x+d} \Rightarrow ax+b = (A+B)x+Ad+Bc$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=a \\ Ad+Bc=b \end{cases} \Rightarrow \text{ ta sẽ tìm được A và B}$$

Khi đó: $I=\left(A\ln|x+c|+B\ln|x+d|\right)\Big|_m^n$

Áp dụng vào bài, ta có: $f(x)=\frac{x-1}{x^2+4x+1}=\frac{x-1}{(x+3)(x+1)}=\frac{2}{x+3}-\frac{1}{x+1}$

$$I=\left(2\ln|x+3|-\ln|x+1|\right)\Big|_0^2 = 2\ln 5-3\ln 3.$$

$$VT=VP \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}.$$

Câu 3: Tìm tất cả các số thực m dương thỏa mãn $\int_0^m \frac{x^2dx}{x+1} = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

A. $m=3$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m>3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $\int_0^m \frac{x^2 \mathrm{d}x}{x+1} = \int_0^m \left(x-1+\frac{1}{x+1} \right) \mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1| \right)\Big|_0^m = \frac{1}{2}m^2 - m + \ln|m+1|$

Suy ra: $\frac{1}{2}m^2 - m + \ln|m+1| = \ln 2 - \frac{1}{2}$ (*)

Ta thấy chỉ có $m=1$ thỏa mãn (*).

Câu 4: Biết $I = \int_{-1}^{0} \frac{3x^2+5x-1}{x-2} dx = a \ln \frac{2}{3} + b, (a,b \in \mathbb{Q})$. Tính giá trị của $a+4b$.

A. 50. **B.** 60. **C.** 59. **D.** 40.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{3x^2+5x-1}{x-2} dx = \int_{-1}^{0} \left(3x+11+\frac{21}{x-2} \right) dx$$

$$= \left(\frac{3x^2}{2} + 11x + 21.\ln|x-2| \right)\Big|_{-1}^{0} = \frac{19}{2} + 21.\ln\frac{2}{3}$$

Khi đó, $a = 21, b = \frac{19}{2} \Rightarrow a+4b = 59.$

Câu 5: Cho $I = \int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^4+1} = \frac{1}{a}\ln b$ Chọn phát biểu đúng

A. $a:b = 2:1.$ **B.** $a+b=3.$ **C.** $a-b=1.$ **D.** Tất cả đều đúng

Lời giải

Chọn A

$I = \int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^4+1}$. Đặt: $u = x^4+1 \Rightarrow du = 4x^3 dx$

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow u=1; x=1 \Rightarrow u=2 \Rightarrow I = \int_1^2 \frac{du}{4u} = \frac{1}{4}\ln|u|\Big|_1^2 = \frac{1}{4}\ln 2.$

Câu 6: Biết $\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \ln\frac{a}{b}$ với a,b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 7. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)}dx = \int_1^2 \frac{x^2+1-x^2}{x^2(x+1)}dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx = \left(\ln|x+1|-\ln|x|-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2$$

$$= \left(\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}+\ln\frac{3}{4}$$

Suy ra $a=4; b=3$. Vậy $a+b=7$.

Câu 7: Cho $\int_0^1 \frac{x^3+3x^2-x-3}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx = a(\ln b-1)$. Khi đó $6a+5b$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 13. **D.** $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $x^3+3x^2-x-3=(x+1)\left(x^2+2x-3\right)$.

Đặt $t=x^2+2x+3 \Rightarrow \frac{1}{2}dt=(x+1)dx$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=3; x=1\Rightarrow t=6$.

Khi đó: $I=\frac{1}{2}\int_3^6 \frac{t-6}{t^2}dt = \frac{1}{2}\int_3^6\left(\frac{1}{t}-\frac{6}{t^2}\right)dx - \frac{1}{2}\left(\ln t+\frac{6}{t}\right)\Big|_3^6 = \frac{1}{2}(\ln 2-1)$

$\Rightarrow a=\frac{1}{2}, b=2\Rightarrow 6a+5b=13.$

Câu 8: Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)^2}dt = \ln a+b$. Khi đó $S=a+2b$ bằng:

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** 1. **D.** -1

Lời giải

Chọn C

$$I=\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)^2}dx = \int_1^2 \frac{x+1-x}{x(x+1)^2}dx = \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}dx - \int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2}dx$$

Suy ra $I=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx - \int_1^2 (x+1)^{-2}dx(x+1) = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Big|_1^2 + (x+1)^{-1}\Big|_1^2 = \ln\frac{4}{3}-\frac{1}{6}$

$\Rightarrow a=\frac{4}{3}, b=-\frac{1}{6}\Rightarrow S=1.$

Câu 9: Biết $\int_1^3 \frac{x^2+x+1}{x+1}dx = a+\ln\frac{b}{2}$, với a,b là các số nguyên. Tính $S=a-2b$.

A. $S=-2$. **B.** $S=5$. **C.** $S=2$. **D.** $S=10$

Lời giải

Chọn C

$$\int_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1}dx = \int_3^5 \left(x+\frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_3^5 + \ln(x+1)\Big|_3^5 = 8+\ln\frac{3}{2}$$

Câu 10: Biết $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x-5}{2x+2}dx = a+\ln b$ với a,b là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=\frac{9}{30}$. **B.** $ab=\frac{9}{8}$. **C.** $ab=\frac{8}{81}$. **D.** $a+b=\frac{7}{24}$

Lời giải

Chọn C

Phương pháp: Chia tử cho mẫu.

Cách giải: $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{x-5}{2x+2}dx = \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{x+1-6}{2x+2}dx = \int_{\frac{1}{3}}^1 \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{x+1}\right)dx = \left(\frac{1}{2}x-3\ln|x+1|\right)\Big|_{\frac{1}{3}}^1$

$$= \frac{1}{2}-3\ln 2-\frac{1}{6}+3\ln\frac{4}{3} = \frac{1}{3}+3\ln\frac{2}{3} = \frac{1}{3}+\ln\frac{8}{27} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=\frac{8}{27} \end{cases} \Rightarrow ab=\frac{8}{81}$$

Câu 11: Cho $\int_1^2 \frac{1}{x^2+5x+6}dx = a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$ với a,b,c là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b+c=4$. **B.** $a+b+c=-3$. **C.** $a+b+c=2$. **D.** $a+b+c=6$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_1^2 \frac{1}{x^2+5x+6}dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)dx = \ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|\Big|_1^2$

$$= \ln\frac{4}{5}-\ln\frac{3}{4} = 4\ln 2-\ln 3-\ln 5 \Rightarrow a+b+c=2$$

Câu 12: Cho $\int_0^1\left(\frac{1}{x^2+3x+2}\right)\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3$ với a,b là các số nguyên. Mệnh đề nào đúng?

A. $a+2b=0$. **B.** $a-2b=0$. **C.** $a+b=-2$. **D.** $a+b=2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{(A+B)x+(2A+B)}{(x+1)(x+2)}$$

Đồng nhất thức ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}A+B=0\\2A+B=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$$

$$\Rightarrow\int_0^1\left(\frac{1}{x^2+3x+2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x=\left(\ln|x+1|-\ln|x+2|\right)\Big|_0^1=(\ln 2-\ln 3)-(\ln 1-\ln 2)$$

$$=2\ln 2-\ln 3$$

$$\Rightarrow a=2,b=-1$$

Vậy $a+2b=0$

Câu 13: Tích phân $I=\int_0^1\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\mathrm{d}x=a\ln b+c$, trong đó a; b; c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a+b+c$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

$$I=\int_0^1\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^2+1-2x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(1-\frac{2x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}\left(x^2+1\right)$$

$$=1-\ln\left|x^2+1\right|\Big|_0^1=1-\ln 2.$$

$a=-1$, $b=2$, $c=1$ nên $a+b+c=2$.

Câu 14: Giả sử tích phân $\int_1^2\frac{x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=a+b\ln 3+c\ln 2$ trong đó a, b, c là các số hữu tỉ. Tính tổng $S=a^2+b^2+c^2$.

A. $\frac{77}{36}$. **B.** $\frac{73}{36}$. **C.** $\frac{67}{36}$. **D.** $\frac{1}{64}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{x+1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{(x+1)}\mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$

$= \ln|x+1|\Big|_1^2 + \frac{1}{x+1}\Big|_1^2 = -\frac{1}{6} + \ln 3 - \ln 2$.

Suy ra $a = -\frac{1}{6};\ b = 1;\ c = -1$.

Vậy $S = a^2 + b^2 + c^2 = \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + 1^2 + (-1)^2 = \frac{73}{36}$.

Dạng 2. Tích phân vô tỉ

1. Phương pháp

Lớp bài toán 1: $\int x^p.\sqrt[n]{(\mathrm{a}x^k + b)^m}\,dx$; $\int \frac{x^p}{\sqrt[n]{(\mathrm{a}x^k + b)^m}}dx$ thỏa $(p+1)\vdots k$, khi đó ta đặt

$t = \sqrt[n]{(\mathrm{a}x^k + b)^m}$

Lớp bài toán 2: Đổi biến dạng lượng giác

Ta chú ý các nhận biết một số dấu hiệu và cách đổi biến tương ứng sau

Dấu hiệu	Cách đổi biến	Chú ý
1. $\sqrt{x^2 + a^2}$	Đặt $x = a\tan t$	$t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$
2. $\sqrt{a^2 - x^2}$	Đặt $x = a\sin t$	$t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
3. $\sqrt{x^2 - a^2}$	Đặt $x = \frac{a}{\sin t}$	$t \in \left[-\frac{\pi}{2};0\right)$ or $\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$
4. $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ *or* $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$	Đặt $x = a\cos 2t$	$t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Lớp bài toán 3: $\int R\left(x;\sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx$

Hướng 1: theo dạng 2

Hướng 2: *Hữu tỉ hoá. Sử dụng các phép biến đổi Euler*

- *Với* $a>0$, *đặt* $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}x$

- *Với* $c>0$, *đặt* $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}$

- *Nếu* ax^2+bx+c *có hai nghiệm* x_1, x_2 *thì đặt* $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$ *hoặc đặt* $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_2)$

Chú ý:

1) $I=\int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ *ta biến đổi về dạng* $I=\frac{m}{2a}\int\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

2) $K=\int\frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ *ngoài cách giải chung bằng phép thế lượng giác ta còn có thể giải bằng phép thế đại số. Đặt* $t=\sqrt{ax^2+bx+c}$ *hoặc* $\frac{1}{t}=\sqrt{ax^2+bx+c}$ *hoặc* $t=mx+n$ *hoặc* $\frac{1}{t}=mx+n$

3) Với dạng $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ *ta thường nhóm biểu thức dưới dấu căn thành hằng đẳng thức rồi đưa về dạng:* $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ *hoặc* $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|+C$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính tích phân $I=\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx$ ta được $I=\frac{a}{b},(a,b\in\mathbb{Z}^+),\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

Hướng dẫn giải

Đặt $u=\sqrt{x+1}\Rightarrow x=u^2-1;\ du=\left(\sqrt{1+x}\right)'dx=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}dx\Rightarrow dx=2udu$

Đổi biến: $u(0)=1$; $u(3)=2$

Khi đó ta có: $\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx=2\int_1^2\left(u^2-1\right)u^2du=2\int_1^2\left(u^4-u^2\right)du=2\left(\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right)\Big|_1^2=\frac{116}{15}.$

Do đó: $a=116,b=15.$ Suy ra: $S=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{131}{1740}.$

Ví dụ 2: Kết quả của tích phân $I=\int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}dx=\frac{a}{b},(a,b\in\mathbb{N}^*),\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P=a^2+b^2$

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt{x^3+1}\Rightarrow t^2=x^3+1\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=3x^2\mathrm{d}x\Rightarrow x^2\mathrm{d}x=\dfrac{2t}{3}\mathrm{d}t.$

Với $x=0\Rightarrow t=1;\ x=0\Rightarrow t=3$

Vậy $I=\int\limits_1^3\dfrac{2}{3}t^2\mathrm{d}t=\left[\dfrac{2t^3}{9}\right]_1^3=6-\dfrac{2}{9}=\dfrac{52}{9}.$

Suy ra: $\mathrm{a}=52,\mathrm{b}=9.$ Do đó: $\mathrm{S}=2785.$

Ví dụ 3: Tính tích phân: $I=\int\limits_1^5\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x+1}}$ được kết quả $I=a\ln 3+b\ln 5,\left(a,b\in\mathbb{Z}\right).$ Tính $a+b$

Hướng dẫn giải

Đặt $u=\sqrt{3x+1}\ \to x=\dfrac{u^2-1}{3}\ \to dx=\dfrac{1}{3}2udu$

Đổi cận : $x=1\to u=2\quad x=5\to u=4$

Vậy $I=\int\limits_2^4\dfrac{2}{u^2-1}du=\int\limits_2^4\dfrac{u+1-(u-1)}{(u+1)(u-1)}du=\ln\left|\dfrac{u-1}{u+1}\right|_2^4=\ln\dfrac{3}{5}-\ln\dfrac{1}{3}=2\ln 3-\ln 5$

Do đó $a=2;\ b=-1.$ Suy ra: $a+b=1.$

Ví dụ 4: Giả sử tích phân $I=\int\limits_1^5\dfrac{1}{1+\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x=a+b\ln 3+c\ln 5,\left(a,b,c\in\mathbb{Q}\right).$ Giá trị $a+b+c$ bằng

Hướng dẫn giải

Đặt $1+\sqrt{3x+1}=t\Rightarrow 3x+1=\left(t-1\right)^2\Rightarrow\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}\left(t-1\right)\mathrm{d}t.$

Đổi cận $x=1\Rightarrow t=3;x=5\Rightarrow t=5$.

Khi đó $I=\int\limits_3^5\dfrac{2}{3}\dfrac{t-1}{t}\mathrm{d}t=\dfrac{2}{3}\int\limits_3^5\left(1-\dfrac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\dfrac{2}{3}\left(t-\ln|t|\right)\Big|_3^5=\dfrac{4}{3}+\dfrac{2}{3}\ln 3-\dfrac{2}{3}\ln 5.$

Do đó $a=\dfrac{4}{3};b=\dfrac{2}{3};c=-\dfrac{2}{3}$ Vậy $a+b+c=\dfrac{4}{3}.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tính tích phân $\mathrm{I}=\int\limits_0^3\mathrm{x}\sqrt{\mathrm{x}+1}\mathrm{dx}$ ta được $\mathrm{I}=\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}},\left(\mathrm{a},\mathrm{b}\in\mathbb{Z}^+\right),\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ là phân số tối giản. Giá trị $\mathrm{S}=\dfrac{1}{\mathrm{a}}+\dfrac{1}{\mathrm{b}}$ bằng

A. $\dfrac{131}{1740}$ **B.** $\dfrac{16}{15}.$ **C.** $\dfrac{116}{5}.$ **D.** $\dfrac{16}{3}.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $\mathrm{u}=\sqrt{\mathrm{x}+1}\Rightarrow\mathrm{x}=\mathrm{u}^2-1;\ \mathrm{du}=\left(\sqrt{1+\mathrm{x}}\right)'\mathrm{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{1+\mathrm{x}}}\mathrm{dx}\Rightarrow\mathrm{dx}=2\mathrm{udu}$

Đổi biến: $u(0)=1;\ u(3)=2$

Khi đó ta có: $\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx = 2\int_1^2 (u^2-1)u^2 du = 2\int_1^2 (u^4-u^2)du = 2\left(\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right)\Big|_1^2 = \frac{116}{15}.$

Do đó: $a=116, b=15.$ Suy ra: $S=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{131}{1740}.$

Câu 2: Tính tích phân $I=\int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$ ta được kết quả $I=a\ln 3+b\ln 5.$ Giá trị $S=a^2+ab+3b^2$ là

A. 0. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 5

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\sqrt{3x+1}\Rightarrow t^2=3x+1\Rightarrow 2tdt=3dx, \begin{cases} x=1\to t=2 \\ x=5\to t=4 \end{cases}$

Suy ra

$$I=2\int_2^4 \frac{dt}{t^2-1}=\int_2^4\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Big|_2^4$$
$$=\ln\frac{3}{5}-\ln\frac{1}{3}=2\ln 3-\ln 5\Rightarrow\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}\Rightarrow S=5$$

Câu 3: Cho $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}dx=a+b\sqrt{2},$ với a,b là các số hữu tỉ. Khi đó giá trị của a là

A. $-\frac{26}{27}.$ **B.** $\frac{26}{27}.$ **C.** $-\frac{27}{26}.$ **D.** $-\frac{25}{27}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}dx=\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{x\left(3x-\sqrt{9x^2-1}\right)}{9x^2-9x^2+1}dx=\int_{\frac{1}{3}}^1\left(3x^2-x\sqrt{9x^2-1}\right)dx$

$$=\int_{\frac{1}{3}}^1 3x^2dx-\frac{1}{18}\int_{\frac{1}{3}}^1\sqrt{9x^2-1}d\left(9x^2-1\right)=\left(x^3-\frac{1}{18}.\frac{2}{3}\sqrt{\left(9x^2-1\right)^3}\right)\Big|_{\frac{1}{3}}^1=\frac{26}{27}-\frac{16}{27}\sqrt{2}$$

Suy ra $a=\frac{26}{27};b=\frac{-16}{27}$.

Câu 4: Tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$

Lời giải

Chọn B

Đặt $\sqrt{3x+1}=t\Rightarrow t^2=3x+1\Rightarrow 2tdt=3dx$

Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\x=1\Rightarrow t=2\end{cases}\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}=\int_1^2 \frac{1}{t}.\frac{2t}{3}dt\int_1^2 \frac{2}{3}dt=\frac{2}{3}t\Big|_1^2=\frac{2}{3}$.

Câu 5: Cho $I=\frac{1}{2}\int_0^4 x\sqrt{1+2x}dx$ và $u=\sqrt{2x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $I=\frac{1}{2}\int_1^3 x^2\left(x^2-1\right)dx$. **B.** $I=\int_1^3 u^2\left(u^2-1\right)du$.

C. $I=\frac{1}{2}\left(\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right)\Big|_1^3$. **D.** $I=\frac{1}{2}\int_1^3 u^2\left(u^2-1\right)du$

Lời giải

Chọn B

u=$\sqrt{2x+1}\Rightarrow$ u du=x dx Đổi cận ta có: u=1 khi x=0
u=3 khi x=4

$I=\int_1^3 \mathrm{u}^2\frac{\left(\mathrm{u}^2-1\right)}{2}d\mathrm{u}=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{u}^5}{5}-\frac{\mathrm{u}^3}{3}\right)\Big|_1^3$.

Câu 6: Cho tích phân $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}=\frac{m}{n}$, với $\frac{m}{n}$ là một phân số tối giản. Tính $m-7n$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 91

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt[3]{1+x^2}\Leftrightarrow t^3=1+x^2\Leftrightarrow 2xdx=3t^2dt\Leftrightarrow xdx=\frac{3t^2}{2}dt$ và $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\x=\sqrt{7}\Rightarrow t=2\end{cases}$

Khi đó $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^2}}.xdx = \int_1^2 \frac{t^3-1}{t}.\frac{3t^2}{2}dt = \frac{3}{2}\int_1^2 \left(t^4-t\right)dt = \frac{141}{20}$

Vậy $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \frac{m}{n} \Rightarrow \begin{cases} m=141 \\ n=20 \end{cases} \rightarrow m=7n=141-7.20=1.$

Câu 7: Tích phân $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$ bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** 3. **C.** 2. **D.** $\sqrt{5}$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx = \sqrt{2x+1}\Big|_0^4 = 2.$

Câu 8: Biết $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+1}}dx = \frac{a+b\sqrt{3}}{9}$, với a,b là các số thực. Tính tổng $T=a+b.$

A. $T=-10.$ **B.** $T=-4.$ **C.** $T=15.$ **D.** $T=8.$

Lời giải

Chọn D

Phương pháp giải: Nhân liên hợp với biểu thức mẫu số, đưa về tính tích phân cơ bản

Lời giải:

Ta có $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+1}}dx = \int_0^1 \frac{x\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+1}\right)}{\left(\sqrt{3x+1}\right)^2-\left(\sqrt{2x+1}\right)^2}dx$

$\int_0^1 \frac{x\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+1}\right)}{3x+1-2x-1} = \int_0^1 \left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+1}\right)dx.$

$= \left(\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{(3x+1)^3}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{2}{9}.\sqrt{(3x+1)^3} - \frac{1}{3}.\sqrt{(2x+1)^3}\right)\Big|_0^1$

$= \frac{1}{9}\left[2\sqrt{(3x+1)^3} - 3\sqrt{(2x+1)^3}\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{9}\left(16-9\sqrt{3}+1\right) = \frac{17-9\sqrt{3}}{9} \Rightarrow \begin{cases} a=17 \\ b=-9 \end{cases}.$

Vậy $T=a+b=17-8=8..$

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Câu 9: Biết $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{a}-b\right)$ với a,b là các số nguyên dương. Tính $T=a+b$

A. $T=7$. **B.** $T=10$. **C.** $T=6$. **D.** $T=8$

Lời giải

Chọn B

Nhân liên hợp, bỏ mẫu số đưa về tìm nguyên hàm của hàm chứa căn thức cơ bản

Ta có

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x^3}\right]\Big|_0^1 = \frac{4}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

mặt khác $\frac{2}{3}\left(\sqrt{a}-b\right) = \frac{4}{3}\left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{8}-2\right) \Rightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=2 \end{cases}$

Vậy $T=a+b=8+2=10$.

Câu 10: Biết $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{5x^2+4}} = \frac{a}{b}$ với a,b. là các số nguyên dương và phân thức $\frac{a}{b}$ là tối giản. Tính giá trị của biểu $T=a^2+b^2$

A. $T=13$. **B.** $T=26$. **C.** $T=29$. **D.** $T=34$

Lời giải

Chọn B

Dùng máy tính bỏ túi tính $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{5x^2+4}} = \frac{1}{5} \Rightarrow T=1^2+5^2=26$.

Câu 11: Biết $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{a\sqrt{2}-1}{b}$ với a, b là số tự nhiên. Giá trị a^2-b^2 là

A. -5. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(x^2+1\right) = \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$.

$\Rightarrow a=2$, $b=3$. Vậy $a^2-b^2=-5$.

Cách 2: Đặt $\sqrt{x^2+1}=t \Rightarrow x^2+1=t^2 \Rightarrow x\,\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$.

Ta có $x=0\Rightarrow t=1,\ x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}$.

Khi đó: $\int\limits_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^{\sqrt{2}} t^2\,\mathrm{d}t=\left.\frac{t^3}{3}\right|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\Rightarrow a=2,\ b=3$.

Cách 3: dùng MTCT

Bước 1: Tính tích phân rồi lưu lại là A.

Bước 2: Rút $b=\frac{a\sqrt{2}-1}{\mathrm{A}}$.

Bước 3: MODE 7 nhập $f(x)=\frac{x\sqrt{2}-1}{\mathrm{A}}$ với Start: 0, End: 18, Step: 1.

Được cặp số $x=2,\ f(x)=3$ thỏa mãn. Suy ra $a=2, b=3$.

Dạng 3: Tích Phân Lượng Giác

1. Phương pháp

1.1 Nguyên hàm cơ bản cần nhớ với mọi số thực $k\neq 0$

$$\int\cos kx dx=\frac{1}{k}\sin kx+C$$

$$\int\sin kx dx=-\frac{1}{k}\cos kx+C$$

$$\int\frac{1}{\cos^2 kx}dx=\frac{1}{k}\tan kx+C$$

$$\int\frac{1}{\sin^2 kx}dx=-\frac{1}{k}\cot kx+C$$

1.2 Một số lớp bài toán thường gặp

Lớp bài toán 1: Đưa về một hàm số lượng giác

$$I=\int f(\sin x)\cos x dx=\int f(t)dt$$

$$I=\int f(\cos x)\sin x dx=-\int f(t)dt$$

$$I=\int f(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int f(t)dt$$

$$I=\int f(\cot x)\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\int f(t)dt$$

Lớp bài toán 2: Dùng công thức biến đổi tích thành tổng

$\int\sin ax.\sin bx dx$ $\int\cos ax.\cos bx dx$; $\int\sin ax.\cos bx dx$

Cách giải: Dùng công thức biến đổi tích thành tổng:

$$\cos x.\cos y = \frac{1}{2}\left(\cos\left(x-y\right)+\cos\left(x+y\right)\right)$$

$$\sin x.\sin y = \frac{1}{2}\left(\cos\left(x-y\right)-\cos\left(x+y\right)\right)$$

$$\sin x.\cos y = \frac{1}{2}\left(\sin\left(x-y\right)+\sin\left(x+y\right)\right)$$

Lớp bài toán 3: $\int \sin^n x dx$; $\int \cos^n x dx$ $\left(n\in N; n\geq 2\right)$

Cách giải:

Nếu n chẵn thì dùng công thức hạ bậc để hạ đến hết bậc:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad ; \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

Nếu n lẻ thì tách ra lấy một thừa số và sử dụng các công thức:

$$\cos x dx = d\left(\sin x\right) \; ; \; \sin x dx = -d\left(\cos x\right)$$

Lớp bài toán 4: $I = \int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$

Cách giải:

Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$

Lớp bài toán 5: $I = \int \frac{a\sin x + b\cos x + c}{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1} dx$

Cách giải

Biến đổi: Tử = A(mẫu) + B(đạo hàm mẫu) + C rồi ta đưa về dạng 4 nếu $C \neq 0$.

Chú ý: Trên đây chỉ là một vài trường hợp thường gặp. Trong thực tế có thể gặp nhiều dạng khác nữa, đòi hỏi phải linh hoạt vận dụng các kiến thức về lượng giác và các phương pháp tính nguyên hàm tích phân.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho tích phân $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 3x dx = a + b$. Tính giá trị $A = a^3 + b^3 + 1$.

Hướng dẫn giải

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x.\cos 3x dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\left[\cos 4x+\cos 2x\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 4x dx+\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x dx=\left[\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=0\Rightarrow a+b=0.$$

$$A=a^3+b^3+1=(a+b)^3-3ab(a+b)+1=1.$$

Ví dụ 2: Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4 x dx=a\pi+b,(a,b\in\mathbb{Q})$. Tính giá trị $A=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

Hướng dẫn giải

$$\sin^4 x=\left(\sin^2 x\right)^2=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x.$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)dx=\left(\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{32}(3\pi-8)$$

$$\Rightarrow a=\frac{3}{32};\ b=-\frac{1}{4}\Rightarrow A=\frac{20}{3}.$$

Ví dụ 3: Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x dx=a+b\pi$. Tính giá trị $A=4a+8b$ bằng

Hướng dẫn giải

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan^2 x+1-1\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx$$

$$=\left(\tan x-x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}.$$

$$\Rightarrow a=1;\ b=-\frac{1}{4}\Rightarrow A=2.$$

Ví dụ 4: Cho tích phân $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{4}{\cos^2 x}-3\sin x\right)dx=8\sin 2a$. Tính $A=\sin^6 a+\cos^6 a$

Hướng dẫn giải

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{4}{\cos^2 x}-3\sin x\right)dx=\left(4\tan x+3\cos x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=4+\frac{3\sqrt{2}}{2}+4-\frac{3\sqrt{2}}{2}=8.$$

$$\Rightarrow \sin 2a=1.\ \text{Suy ra: } A=1-\frac{3}{4}\sin^2 2a=\frac{1}{4}.$$

Ví dụ 5: Cho tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos^5 x\right)dx=a\pi+b,\left(a,b\in\mathbb{Q}\right)$. Tính giá trị $A=6a+15b$

Hướng dẫn giải

Ta có $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos^5 x\right)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dx+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 xdx.$

Trong đó: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dx=x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}.$

Xét $K=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 xdx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x.\cos xdx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 x\right)^2.\cos xdx.$

Đặt $t=\sin x$ suy ra $dt=\cos xdx,\ x=0\Rightarrow t=0,\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$. Khi đó:

$K=\int\limits_0^1\left(1-t^2\right)^2dt=\int\limits_0^1\left(1-2t^2+t^4\right)dt=\left(t-\frac{2}{3}t^3+\frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{8}{15}.$

Vậy $I=\frac{\pi}{2}+\frac{8}{15}\Rightarrow a=\frac{1}{2};\ b=\frac{8}{15}\Rightarrow A=11.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 xdx$

A. $I=\frac{\pi+2}{8}.$ **B.** $I=\frac{\pi+2}{4}.$ **C.** $I=\frac{1}{3}.$ **D.** $I=\frac{2}{3}$

Lời giải

Chọn A

Phương pháp: Biểu thức trong tích phân là hàm lượng giác bậc chẵn, ta thường sử dụng công thức biến đổi lượng giác hạ bậc rồi mới tính tích phân.

Cách giải: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 xdx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\cos 2x\right)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi+2}{8}.$

Câu 2: Cho tích phân $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos 2x}{1-\cos x}dx=a\pi+b$ với $a,b\in Q$. Giá tri của $P=1-a^3-b^2$ là

A. $P=9.$ **B.** $P=-29.$ **C.** $P=-7.$ **D.** $P=-27.$

Lời giải

Chọn C

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos 2x}{1-\cos x}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{2\cos^2 x-2+1}{1-\cos x}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[\frac{1}{1-\cos x}-2\left(1+\cos x\right)\right]dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{2\sin^2\frac{x}{2}}-2\left(x+\sin x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\frac{x}{2}}-\pi+2=-\cot\frac{x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\pi+2=3-\pi.$$

Do đó $a=-1;b=3\Rightarrow P=1-\left(-1\right)^3-3^2=-7.$

Câu 3: Cho $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\sin 2x$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$. Tính $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$

A. $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}.$ **B.** $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=0.$ **C.** $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{4}.$ **D.** $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}$

Lời giải

Chọn D

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sin 2xdx=\frac{1}{2}cos2x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{4}=F\left(\frac{\pi}{4}\right)-F\left(\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{6}\right)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

Câu 4: Tính tích phân $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx.$

A. $I=1-\frac{\pi}{4}.$ **B.** $I=2.$ **C.** $I=\ln 2.$ **D.** $I=\frac{\pi}{12}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 xdx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\left(\text{tanx-x}\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}.$

Câu 5: Kết quả của tích phân $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(2x-1-\sin x\right)dx$ được viết ở dạng $\pi\left(\frac{\pi}{a}-\frac{1}{b}\right)-1$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $a+2b=8.$ **B.** $a+b=5.$ **C.** $2a-3b=2.$ **D.** $a-b=2$

Lời giải

Chọn B

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-1-\sin x)dx=\left(x^2-x+\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}-1=\pi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)-1$$

$\Rightarrow a=4;b=2\Rightarrow a+b=6\Rightarrow$ khẳng định **B** sai.

Câu 6: Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx$

A. $I=-1$. **B.** $I=1$. **C.** $I=0$. **D.** $I=\frac{\pi}{4}$

Lời giải

Chọn C

Phương pháp: $\int\sin(ax+b)dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$

Cách giải: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx=\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$.

Câu 7: Cho f là hàm số liên tục thỏa $\int_0^1 f(x)dx=7$. Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f(\sin x)dx$

A. 1. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 7

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\sin x\Leftrightarrow dt=\cos xdx$ $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ t=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1\end{cases}$

Khi đó $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f(\sin x)dx=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 f(x)dx=7$.

Câu 8: Cho tích phân $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 3xdx=a+b$. Giá trị $A=a^3+b^3+1$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x.\cos 3x dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\left[\cos 4x+\cos 2x\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 4x dx+\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x dx=\left[\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=0\Rightarrow a+b=0.$$

$$A=a^3+b^3+1=(a+b)^3-3ab(a+b)+1=1.$$

Câu 9: Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4 x dx=a\pi+b,(a,b\in\mathbb{Q})$. Giá trị $A=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ bằng

A. 11. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** 4. **D.** 7.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\sin^4 x=\left(\sin^2 x\right)^2=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x.$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)dx=\left(\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{32}(3\pi-8)$$

$$\Rightarrow a=\frac{3}{32};\ b=-\frac{1}{4}\Rightarrow A=\frac{20}{3}.$$

Dạng 4: Tích Phân Từng Phần

1. Phương pháp

Cho $u=u(x),\ v=v(x)$ là các hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ ta có

$$\int udv=uv-\int vdu \qquad \int_a^b udv=(uv)\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

Chú ý: Cho dãy "ưu tiên" các loại hàm như sau LOGARIT → ĐA THỨC → MŨ, LƯỢNG GIÁC và $P(x),Q(x)$ là 2 trong các loại hàm số đó. Khi cần tính $\int P(x)Q(x)dx$ ta chọn từng phần theo nguyên tắc sau

+) Chọn u = Hàm được ưu tiên hơn

+) dv = phần còn lại

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Ví dụ $\int (2x+1)\ln(x-1)dx$ ta chọn $\begin{cases} u=\ln(x-1) \\ dv=(2x+1)dx \end{cases}$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Biết rằng tích phân $\int_0^1 (2x+1)e^x dx = a+be, (a,b\in\mathbb{Z}^+)$. Tính giá trị ab

Hướng dẫn giải

Đặt $u=(2x+1)\Rightarrow du=2dx$

$dv=e^x dx \Rightarrow v=e^x$

$$\int_0^1 (2x+1)e^x dx = \left((2x+1)e^x\right)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 e^x dx = (2x+1)e^x\Big|_0^1 - 2e^x\Big|_0^1 = e+1.$$

Ví dụ 2: Kết quả tích phân $\int_0^2 \left(2x+\ln(x+1)\right)dx = 3\ln 3+b, (b\in\mathbb{Z})$. Tính giá trị $3+b$

Hướng dẫn giải

$I=\int_0^2 \left(2x+\ln(x+1)\right)dx = A+B$

Tính $A=\int_0^2 2xdx = x^2\Big|_0^2 = 4$

Tính $B=\int_0^2 \left(\ln(x+1)\right)dx$

Xem: $\begin{cases} u=\ln(x+1) \\ dv=dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{dx}{x+1} \\ v=x+1 \end{cases}$

Dùng công thức tích phân từng phần

$$B=\int_0^2 \left(\ln(x+1)\right)dx = (x+1).\ln(x+1)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{x+1}{x+1}dx = 3\ln 3 - x\Big|_0^2 = 3\ln 3-2.$$

Vậy: $I=\int_0^2 \left(2x+\ln(x+1)\right)dx = 3\ln 3+2.$

Ví dụ 3: Tìm số thực $m>1$ thỏa mãn $\int_1^m (\ln x+1)dx = m.$

Hướng dẫn giải

$$A=\int_1^m (\ln x+1)dx = \int_1^m \ln x dx + \int_1^m dx$$

$$I=\int_1^m \ln x dx$$

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{1}{x}dx \\ v=x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = x\ln x\Big|_1^m - \int_1^m dx$$

$$A = x\ln x\Big|_1^m = m\ln m = m \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = e \\ m = 0 \end{array}\right.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giá trị của $\int\limits_0^1 x.e^{2x}dx$ bằng:

A. $\frac{e^2+1}{2}$ **B.** $\frac{e^2-1}{2}$ **C.** $\frac{e^2+1}{4}$ **D.** $\frac{e^2-1}{4}$

Lời giải:

Chọn C

Đặt $\left\{\begin{array}{l} u = x \\ dv = e^{2x}dx \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} du = dx \\ v = \frac{e^{2x}}{2} \end{array}\right.$. Do đó $I = \frac{xe^{2x}}{2}\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{e^{2x}}{2}dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^{2x}}{4}\Big|_0^1 = \frac{e^2+1}{4}$

Câu 2: Giá trị của $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$ bằng:

A. $\frac{\pi}{2}+1$ **B.** $\frac{\pi}{2}-1$ **C.** $\frac{\pi+1}{2}$ **D.** $\frac{\pi-1}{2}$

Lời giải:

Chọn B

Đặt $\left\{\begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos x dx \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} du = dx \\ v = \sin x \end{array}\right.$. Do đó $I = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$

Câu 3: Giá trị của $\int\limits_1^2 \left(x^2-1\right)\ln x dx$ bằng:

A. $\frac{2\ln 2+6}{9}$ **B.** $\frac{6\ln 2+2}{9}$ **C.** $\frac{2\ln 2-6}{9}$ **D.** $\frac{6\ln 2-2}{9}$

Lời giải:

Chọn B

Đặt $\left\{\begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = \left(x^2-1\right)dx \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^3-3x}{3} \end{array}\right.$.

Do đó $I = \frac{\left(x^3-3x\right)\ln x}{3}\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 \frac{x^2-3}{3}dx = \frac{2\ln 2}{3} - \left(\frac{x^3}{9}-x\right)\Big|_1^2 = \frac{2\ln 2}{3} + \frac{2}{9}$

Câu 4: Biết $\int_1^e \frac{2\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = -a + b.e^{-1}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $a+b=3$. **B.** $a+b=-3$. **C.** $a+b=6$. **D.** $a+b=-6$.

Lời giải

Chọn D

Đặt

$$\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \int_1^e \frac{2\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = 2\left(-\frac{1}{x}\ln x\right)\Big|_1^e + 2\int_1^e \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = 2\left(-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x}\right)\Big|_1^e = 2\left(1-\frac{2}{e}\right)$$

Sau khi nhân thêm 2 ta được $a=-2, b=-4 \Rightarrow a+b=-6$

Câu 5: Giá trị của $\int_1^e \ln x dx$ bằng:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải:

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$. Do đó $I = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx = e - x\Big|_1^e = 1$

Câu 6: Tích phân $I = \int_1^e \left(\frac{1}{x}+x\right)\ln x dx$ có giá trị là:

A. $I=\frac{e^2+1}{4}$ **B.** $I=\frac{e^2+3}{4}$ **C.** $I=\frac{e^2+5}{4}$ **D.** $I=\frac{e^2+7}{4}$

Lời giải:

Chọn C

Ta có:

$$I = \int_1^e \left(\frac{1}{x}+x\right)\ln x dx = \int_1^e \frac{1}{x}\ln x dx + \int_1^e x\ln x dx$$

$$= \int_0^1 d\left(\ln x\right) + \left(\frac{x^2}{2}\ln x\right)\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x dx = 1 + \frac{e^2}{2} - \left(\frac{1}{4}x^2\right)\Big|_1^e = \frac{e^2+5}{4}.$$

Câu 7: Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\pi}x^2\cos 2x\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $\begin{cases}u=x^2\\ \mathrm{d}v=\cos 2x\mathrm{d}x\end{cases}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I=\frac{1}{2}x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\int\limits_0^{\pi}x\sin 2x\mathrm{d}x$.

B. $I=\frac{1}{2}x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi}-2\int\limits_0^{\pi}x\sin 2x\mathrm{d}x$.

C. $I=\frac{1}{2}x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi}+2\int\limits_0^{\pi}x\sin 2x\mathrm{d}x$.

D. $I=\frac{1}{2}x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi}+\int\limits_0^{\pi}x\sin 2x\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\begin{cases}u=x^2\\ \mathrm{d}v=\cos 2x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{2}sin2x\end{cases}$.

Khi đó: $I=\int\limits_0^{\pi}x^2\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\int\limits_0^{\pi}x\sin 2x\mathrm{d}x$.

Câu 8: Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\mathrm{d}x$.

A. $\frac{\pi}{2}-1$.

B. $\frac{\pi}{2}+1$.

C. 1.

D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt: $\begin{cases}u=x\\ dv=\cos x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=\sin x\end{cases}$.

$I=x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=\left(x\sin x+\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$.

Câu 9: Tính $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}}x\ln x\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{1}{2}$.

B. $I=\frac{1}{2}\left(e^2-2\right)$.

C. $I=2$.

D. $I=\frac{1}{4}\left(e^2+1\right)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$.

Khi đó $I = \int\limits_1^{\mathrm{e}} x\ln x\mathrm{d}x = \left(\dfrac{x^2}{2}\ln x\right)\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int\limits_1^{\mathrm{e}} \dfrac{x}{2}\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - \dfrac{x^2}{4}\Big|_1^{\mathrm{e}} = \dfrac{\mathrm{e}^2+1}{4}$.

Câu 10: Cho biết tích phân $I = \int\limits_0^1 (x+2)\ln(x+1)\mathrm{d}x = a\ln 2 + \dfrac{-7}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $a = b$. **B.** $a < b$. **C.** $a > b$. **D.** $a = b+3$.

Lời giải.

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ \mathrm{d}v = (x+2)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2}{2} + 2x \end{cases}$.

$$I = \left[\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\ln(x+1)\right]\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+4x}{x+1}\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x+3-\frac{3}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{5}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+3x-3\ln(x+1)\right]\Big|_0^1 = 4\ln 2 + \frac{-7}{4}.$$

Suy ra $a = 4$, $b = 4$.

Vậy $a = b$.

Câu 11: Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x = a\pi + b\ln 2$, với a, b là các số thực. Tính $16a - 8b$

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+\cos 2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{1}{2}\tan x \end{cases}$. Ta có

$I=\frac{1}{2}x\tan x\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{4}\\0\end{matrix}\right.-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\ln\left|\cos x\right|\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{4}\\0\end{matrix}\right.=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2\Rightarrow a=\frac{1}{8},b=-\frac{1}{4}$

Do đó, $16a-8b=4$.

Câu 12: Biết $I=\int_0^4 x\ln\left(2x+1\right)\mathrm{d}x=\frac{a}{b}\ln 3-c$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=60$. **B.** $S=70$. **C.** $S=72$. **D.** $S=68$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I=\int_0^4 x\ln\left(2x+1\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(2x+1\right)\\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{2}{2x+1}\mathrm{d}x\\ v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$.

$I=\int_0^4 x\ln\left(2x+1\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2\ln\left(2x+1\right)}{2}\Big|_0^4-\int_0^4\frac{x^2}{2x+1}\mathrm{d}x$

$=8\ln 9-\int_0^4\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4\left(2x+1\right)}\right)\mathrm{d}x=16\ln 3-\left(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\ln\left|2x+1\right|\right)\Big|_0^4=\frac{63}{4}\ln 3-3$.

$\Rightarrow\frac{a}{b}\ln 3-c=\frac{63}{4}\ln 3-3\Rightarrow\begin{cases}a=63\\ b=4\\ c=3\end{cases}\Rightarrow S=70$.

Câu 13: Biết $\int_0^4 x\ln\left(x^2+9\right)\mathrm{d}x=a\ln 5+b\ln 3+c$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ là

A. $T=10$. **B.** $T=9$. **C.** $T=8$. **D.** $T=11$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(x^2+9\right)\\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{2x}{\left(x^2+9\right)}\mathrm{d}x\\ v=\frac{x^2+9}{2}\end{cases}$

Suy ra $\int\limits_0^4 x\ln\left(x^2+9\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2+9}{2}\ln\left(x^2+9\right)\Big|_0^4-\int\limits_0^4\dfrac{x^2+9}{2}.\dfrac{2x}{x^2+9}\mathrm{d}x=25\ln 5-9\ln 3-8$.

Do đó $a=25$, $b=-9$, $c=-8$ nên $T=8$.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_0^1\left[(3x+1).f'(x)\right]dx=1;4f(1)-f(0)=2017$. Tính $I=\int\limits_0^1 f(x)dx.$

A. $I=-2016.$ **B.** $I=672.$ **C.** $I=2016.$ **D.** $I=-672.$

Hướng dẫn

Chọn B

Ta có $\int\limits_0^1\left[(3x+1).f'(x)\right]dx=\int\limits_0^1\left[(3x+1)\right]df(x)=f(x)(3x+1)\Big|_0^1-3\int\limits_0^1 f(x)dx$

$=4f(1)-f(0)-3\int\limits_0^1 f(x)dx=2017-3\int\limits_0^1 f(x)dx=1\Rightarrow\int\limits_0^1 f(x)dx=672.$

Câu 15: Cho $\int\limits_0^1 f'(x)\cos x.dx=1$ và $f(1).\cos 1-f(0)=2018$. Tính $I=\int\limits_0^1 f(x)\sin x.dx$.

A. $I=2017$. **B.** $I=2019$. **C.** $I=-2019$. **D.** $I=-2017$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

+ Tính $\int\limits_0^1 f'(x)\cos x.dx$ theo từng phần, đặt $\begin{cases}u=\cos x\\dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\sin x.dx\\v=f(x)\end{cases}$ suy ra

$1=\int\limits_0^1 f'(x)\cos x.dx=\cos x.f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(x)\sin x.dx$

$\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f(x)\sin x.dx=f(1).\cos 1-f(0)-1=2017$

Câu 16: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $2F(1)-F(0)=1$ và $\int\limits_0^1 F(x)dx=10$. Tính $I=\int\limits_0^1(x+1)f(x)dx$.

A. $I=11.$ **B.** $I=9.$ **C.** $I=-9.$ **D.** $I=-11.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 1 \\ v = F(x) \end{cases}$

Khi đó: $I = \int_0^1 (x+1) f(x)\,dx = (x+1).F(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 F(x)\,dx = 2F(1) - F(0) - 10 = 1 - 10 = -9$

Câu 17: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ với $F(1) = 1$, $\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = -1$. Tính $I = \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 0$. **B.** $I = -1$. **C.** $I = -2$. **D.** $I = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = f(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = F(x) \end{cases}$.

$I = xF(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = F(1) - \int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = 2$

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$ và $\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** -3. **D.** -1.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u = x^3 \Rightarrow \mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = f(x) \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^1 x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = x^3 f(x)\Big|_0^1 - 3\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow I = f(1) - 3.\frac{1}{3} = -1$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 16$, $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính tích phân $I = \int_0^1 x.f'(2x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 13$. **B.** $I = 12$. **C.** $I = 20$. **D.** $I = 7$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = f'(2x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \frac{1}{2}f(2x) \end{cases}$.

Khi đó, $I = x.\frac{1}{2}f(2x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f(2) - \frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x = 8 - \frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x$.

Với $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = 2$.

Suy ra $I = 8 - \frac{1}{4}\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t = 8 - 1 = 7$.

Dạng 5: Tích Phân Chưa Dấu Giá Trị Tuyệt Đối

1. Phương pháp

Bài toán: Tính tích phân $I = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

(với $g(x)$ là biểu thức chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối)

PP chung:

Xét dấu của biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối trên $[a;b]$

Dựa vào dấu để tách tích phân trên mỗi đoạn tương ứng (sử dụng tính chất 3 để tách)

Tính mỗi tích phân thành phần.

Đặc biệt: Tính tích phân $I = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$

Cách giải

Cách 1:

+) Cho $f(x) = 0$ tìm nghiệm trên $[a;b]$

+) Xét dấu của $f(x)$ trên $[a;b]$, dựa vào dấu của $f(x)$ để tách tích phân trên mỗi đoạn tương ứng (sử dụng tính chất 3 để tách)

+) Tính mỗi tích phân thành phần.

Cách 2:

+) Cho $f(x) = 0$ tìm nghiệm trên $[a;b]$ giả sử các nghiệm đó là $x_1; x_2; ...x_n$

(với $x_1 < x_2 < ... < x_n$).

Khi đó $I=\int_a^{x_1}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{x_2}^{x_3}|f(x)|\mathrm{d}x+...+\int_{x_n}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x$

$\Rightarrow I=\left|\int_a^{x_1}f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{x_2}^{x_3}f(x)\mathrm{d}x\right|+...+\left|\int_{x_n}^{b}f(x)\mathrm{d}x\right|$

+) Tính mỗi tích phân thành phần

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: $S=\int_{-1}^{2}\left|x^2-x-2\right|\mathrm{d}x=\frac{a}{b},\left(a,b\in\mathbb{Z}^+\right),\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị $a+b$

Hướng dẫn giải

$$S=\int_{-1}^{2}\left|x^2-x-2\right|\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{2}\left(x^2-x-2\right)\mathrm{d}x=-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_{-1}^{2}$$
$$=-\left[\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{2}-4\right)-\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)\right]=\frac{9}{2}$$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;4]$ và $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=1;;\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=3$. Tính $\int_{-1}^{1}f\left(|3x-1|\right)\mathrm{d}x$

Hướng dẫn giải

$$\int_{-1}^{1}f\left(|3x-1|\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1/3}f\left(1-3x\right)\mathrm{d}x+\int_{1/3}^{1}f\left(3x-1\right)\mathrm{d}x.$$
$$=-\frac{1}{3}\int_{-1}^{1/3}f\left(1-3x\right)\mathrm{d}\left(1-3x\right)+\frac{1}{3}\int_{1/3}^{1}f\left(3x-1\right)\mathrm{d}\left(3x-1\right).$$
$$=-\frac{1}{3}\int_{4}^{0}f\left(t\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{3}\int_{0}^{2}f\left(t\right)\mathrm{d}\left(t\right)=-\frac{1}{3}\left(-3\right)+\frac{1}{3}.1=\frac{4}{3}.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ $(a<b)$ và $f(x)\le 0$, $\forall x\in[a;b]$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

B. $\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$.

C. $\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x=\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

D. $\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Do $f(x)\le 0,\ \forall x\in[a;b]$ nên $|f(x)|=-f(x),\ \forall x\in[a;b]$.

Vậy $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 2: Tích phân $I=2\int_{-1}^{2}|x|dx$ bằng

A. 5 **B.** 2 **C.** 8 **D.** 4

Lời giải

Chọn A

$$I=2\int_{-1}^{2}|x|dx=2\int_{-1}^{0}|x|dx+2\int_{0}^{2}|x|dx=2\int_{-1}^{0}-xdx+2\int_{0}^{2}xdx=5$$

Câu 3: Tích phân $\int_0^4|x-2|dx$ bằng:

A. 0 **B.** 2 **C.** 8 **D.** 4

Lời giải

Chọn D

$$\int_0^4|x-2|dx=\int_0^2(2-x)dx+\int_2^4(x-2)dx=4$$

Câu 4: Tích phân $\int_{-1}^{2}\frac{dx}{1+|1-x|}$ bằng

A. 2ln3 **B.** ln3 **C.** ln2 **D.** ln6

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_{-1}^{2}\frac{1}{1+|1-x|}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2-x}dx+\int_{1}^{2}\frac{1}{x}dx=-\ln(2-x)\Big|_{-1}^{1}+\ln x\Big|_{1}^{2}=\ln 3+\ln 2=\ln 6$

Câu 5: Tích phân $I=\int_{-1}^{2}|x^2-x|dx$ có giá trị là:

A. $I=\frac{3}{2}$ **B.** $I=\frac{1}{6}$ **C.** $I=-\frac{3}{2}$ **D.** $I=-\frac{1}{6}$

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$\underbrace{x^2-x}_{f(x)}=0\Leftrightarrow x=0\vee x=2$.

Bảng xét dấu:

$$I=\int_{-1}^{2}\left|x^2-x\right|dx=\int_{-1}^{0}\left(x^2-x\right)dx+\int_{0}^{2}\left(-x^2+x\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{0}^{2}=\frac{3}{2}.$$

Câu 6: Tích phân $I=\int_{-1}^{1}\left|x^3+x^2-x-1\right|dx$ có giá trị là:

A. $I=\frac{4}{3}$ **B.** $I=\frac{1}{2}$ **C.** $I=-\frac{4}{3}$ **D.** $I=-\frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$\underbrace{x^3+x^2-x-1}_{f(x)}=0\Leftrightarrow(x-1)(x+1)^2=0\Leftrightarrow x=1\vee x=-1$$

Bảng xét dấu:

$$I=\int_{-1}^{1}\left|x^3+x^2-x-1\right|dx=-\int_{-1}^{1}\left(x^3+x^2-x-1\right)dx=-\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{4}{3}.$$

Câu 7: Biết $I=\int_{1}^{5}\frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x=4+a\ln 2+b\ln 5$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $S=a+b$.

A. $S=9$. **B.** $S=11$. **C.** $S=-3$. **D.** $S=5$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $|x-2|=\begin{cases}x-2 \text{ khi } x\geq 2\\ 2-x \text{ khi } x\leq 2\end{cases}$.

Do đó $I=\int_{1}^{2}\frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x+\int_{2}^{5}\frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x$.

$$=\int_{1}^{2}\frac{2(2-x)+1}{x}\mathrm{d}x+\int_{2}^{5}\frac{2(x-2)+1}{x}\mathrm{d}x=\int_{1}^{2}\left(\frac{5}{x}-2\right)\mathrm{d}x+\int_{2}^{5}\left(2-\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(5\ln|x|-2x\right)\Big|_{1}^{2}+\left(2x-3\ln|x|\right)\Big|_{2}^{5}=4+8\ln 2-3\ln 5.$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=8\\ b=-3\end{cases}\Rightarrow S=a+b=5.$$

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Câu 8: Tích phân $I=\int_{-1}^{2}\left(|x|-|x-1|\right)dx$ có giá trị bằng

A. $I=-2$. **B.** $I=0$. **C.** $I=1$. **D.** $I=-1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I=\int_{-1}^{2}\left(|x|-|x-1|\right)dx=\int_{-1}^{0}(-1)dx+\int_{0}^{1}(1-2x)dx+\int_{1}^{2}(1)dx=0$

Dạng 6: Tích Phân ẩn cơ bản

Câu 1: Biết $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{0}^{9}f(x)\mathrm{d}x=9$. Khi đó giá trị của $\int_{1}^{4}f(3x-3)\mathrm{d}x$ là

A. 27. **B.** 3. **C.** 24. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Gọi $I=\int_{1}^{4}f(3x-3)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=3x-3\Rightarrow \mathrm{d}t=3\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=0;\ x=4\Rightarrow t=9$.

Khi đó: $I=\frac{1}{3}\int_{0}^{9}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}.9=3$.

Câu 2: Cho $\int_{0}^{4}f(x)\mathrm{d}x=-1$. Khi đó $I=\int_{0}^{1}f(4x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. $I=\frac{1}{4}$ **B.** $I=-2$ **C.** $I=\frac{-1}{4}$ **D.** $I=\frac{-1}{2}$

Lời giải.

Chọn C

Cách 1: Đặt $t=4x\Rightarrow dt=4dx$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0;x=1\Rightarrow t=4$. Khi đó: $I=\int_{0}^{4}\frac{1}{4}f(t)dt=-\frac{1}{4}$.

Cách 2: Gọi $F(x)$ là 1 nguyên hàm của $f(x)$. Ta có:

$\int_{0}^{4}f(x)\mathrm{d}x=-1\Rightarrow F(4)-F(0)=-1$

$I=\int_{0}^{1}f(4x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}F(4x)\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{4}\left[F(4)-F(0)\right]=-\frac{1}{4}$

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Câu 3: Biết rằng hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và $\int_0^9 f(x)dx=9$. Tính $\int_0^3 f(3x)dx$.

A. $\int_0^3 f(3x)dx=9$ **B.** $\int_0^3 f(3x)dx=3$

C. $\int_0^3 f(3x)dx=-3$ **D.** $\int_0^3 f(3x)dx=-9$

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Đặt $3x=t\Rightarrow 3dx=dt$. Ta có $I=\frac{1}{3}\int_0^9 f(t)dt=\frac{1}{3}.9=3$

Câu 4: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f\left(x\right)dx=1$. Tính $\int_0^1 f\left(1-x\right)dx$.

A. $\int_0^1 f\left(1-x\right)dx=0$. **B.** $\int_0^1 f\left(1-x\right)dx=2$.

C. $\int_0^1 f\left(1-x\right)dx=-1$. **D.** $\int_0^1 f\left(1-x\right)dx=1$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=1-x\Rightarrow dx=-dt$.

Đổi cận:

x	0	1
t	1	0

Vậy $\int_0^1 f\left(1-x\right)dx=-\int_1^0 f\left(t\right)dt=\int_0^1 f\left(t\right)dt=1$.

Câu 5: Giả sử hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_3^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x=a$, $\left(a\in\mathbb{R}\right)$. Tích phân $I=\int_1^2 f\left(2x+1\right)\mathrm{d}x$ có giá trị là

A. $I=\frac{1}{2}a+1$. **B.** $I=2a+1$. **C.** $I=2a$. **D.** $I=\frac{1}{2}a$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=2x+1\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=3$; $x=2\Rightarrow t=5$.

$\Rightarrow I=\int\limits_3^5 \frac{1}{2}f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_3^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a$.

Câu 6: Cho $\int\limits_1^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=5$. Tính $I=\int\limits_1^{16}\frac{1}{\sqrt{x}}.f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$

A. $I=5$. **B.** $I=10$. **C.** $I=\frac{5}{2}$. **D.** $I=3$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\sqrt{x}=t\Rightarrow x=t^2\Rightarrow \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

Với $x=1\Rightarrow t=1$ và $x=16\Rightarrow t=4$.

Khi đó $I=\int\limits_1^4 \frac{1}{t}.f\left(t\right)2t\mathrm{d}t=2\int\limits_1^4 f\left(t\right)\mathrm{d}t=2\int\limits_1^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=10$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^9 f(x)dx=1, \int_0^3 f(x+6)dx=2$. Tính $\int_0^2 f(3x)dx$

A. $\int_0^2 f(3x)dx=\frac{1}{3}$. **B.** $\int_0^2 f(3x)dx=-\frac{1}{3}$.

C. $\int_0^2 f(3x)dx=1$. **D.** $\int_0^2 f(3x)dx=-1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2=\int_0^3 f(x+6)dx=\int_0^3 f(x+6)d(x+6)=\int_6^9 f(x)dx$

$\Rightarrow \int_0^6 f(x)dx=\int_0^9 f(x)dx-\int_6^9 f(x)dx=1-2=-1$

Khi đó: $\int_0^2 f(3x)dx=\frac{1}{3}\int_0^2 f(3x)d(3x)=\frac{1}{3}\int_0^6 f(x)dx=-\frac{1}{3}$

Câu 8: Biết $\int\limits_{-1}^{11} f\left(x\right)\mathrm{d}x=18$. Tính $I=\int\limits_0^2 x\left(2+f\left(3x^2-1\right)\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=5$. **B.** $I=7$. **C.** $I=8$ **D.** $I=10$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=3x^2-1,\ \mathrm{d}t=6x\mathrm{d}x$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=-1,\ x=2\Rightarrow t=11$

$$I=\int_0^2 x\left(2+f\left(3x^2-1\right)\right)\mathrm{d}x=\int_0^2 2x\mathrm{d}x+\int_0^2 xf\left(3x^2-1\right)\mathrm{d}x=4+\frac{1}{6}\int_{-1}^{11} f\left(t\right)\mathrm{d}t=4+\frac{1}{6}.18=7.$$

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int f(x)dx=\frac{1}{2}x^2-x+1$. Tính $\int_1^2 f(x^2)dx$.

A. $\int_1^2 f(x^2)dx=-\frac{4}{3}$.

B. $\int_1^2 f(x^2)dx=\frac{4}{3}$.

C. $\int_1^2 f(x^2)dx=-\frac{2}{3}$.

D. $\int_1^2 f(x^2)dx=\frac{2}{3}$

Lời giải

Chọn B

$$\int f(x)dx=\frac{1}{2}x^2-x+1\Rightarrow f(x)=x-1\Rightarrow f(x^2)=x^2-1$$

$$\int_1^2 f(x^2)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_1^2=\frac{4}{3}.$$

Câu 10: Cho $\int_3^8 f\left(x+1\right)\mathrm{d}x=10$. Tính $J=\int_0^1 f\left(5x+4\right)\mathrm{d}x$

A. $J=4$.

B. $J=10$.

C. $J=32$.

D. $J=2$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=x+1$. Đổi cận: $x=3\Rightarrow t=4$; $x=8\Rightarrow t=9$. Khi đó ta có $\int_4^9 f\left(t\right)\mathrm{d}t=10$.

Đặt $u=5x+4$. Đổi cận $x=0\Rightarrow u=4$; $x=1\Rightarrow u=9$. Khi đó ta có

$$J=\int_0^1 f\left(5x+4\right)\mathrm{d}x=\int_4^9 f\left(u\right)\mathrm{d}u=10.$$

Câu 11: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'\left(x\right)+xf\left(x\right)=2xe^{-x^2}$ và $f\left(0\right)=-2$. Giá trị $f\left(1\right)$ bằng

A. e.

B. $\frac{1}{e}$.

C. $\frac{2}{e}$.

D. $-\frac{2}{e}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Nhân hai vế cho $e^{\frac{x^2}{2}}$ để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$f'(x)e^{\frac{x^2}{2}}+f(x)xe^{\frac{x^2}{2}}=2xe^{-\frac{x^2}{2}}\Leftrightarrow\left[e^{\frac{x^2}{2}}f(x)\right]'=2xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Suy ra $e^{\frac{x^2}{2}}f(x)=\int 2xe^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=-2e^{-\frac{x^2}{2}}+C.$

Thay $x=0$ vào hai vế ta được $C=0\Rightarrow f(x)=-2e^{-x^2}$.

Vậy $f(1)=-2e^{-1}=-\frac{2}{e}.$

Câu 112 Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{2}{15}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x}$ (1).

Đặt $t=1-x$, thay vào (1), ta được: $2f(1-t)+3f(t)=\sqrt{t}$ hay $2f(1-x)+3f(x)=\sqrt{x}$ (2).

Từ (1) & (2), ta được: $f(x)=\frac{3}{5}\sqrt{x}-\frac{2}{5}\sqrt{1-x}$.

Do đó, ta có: $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{5}\int_0^1\sqrt{x}\,\mathrm{d}x-\frac{2}{5}\int_0^1\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{5}-\frac{4}{15}=\frac{2}{15}.$

Cách 2. Công thức $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$

Lấy tích phân 2 vế ta được $2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+3\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$

$5\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{15}.$

Chú ý: Ta có thể dùng công thức $\int_{x_1}^{x_2} f(ax+b)\mathrm{d}x=\int_{ax_1+b}^{ax_2+b} f(x)\mathrm{d}x$. Khi đó:

Từ $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x}$ suy ra: $2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+3\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-3\int_1^0 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x}\mathrm{d}x \Leftrightarrow 5\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{15}.$

Dạng 7: Bài tập dành cho học sinh điểm 8+, 9+

Câu 1: Cho n là số nguyên dương khác 0, hãy tính tích phân $I=\int_0^1\left(1-x^2\right)^n x\mathrm{d}x$ theo n.

A. $I=\frac{1}{2n+2}$. **B.** $I=\frac{1}{2n}$. **C.** $I=\frac{1}{2n-1}$. **D.** $I=\frac{1}{2n+1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Với $n\in\mathbb{N}^*$, khi đó: Đặt $t=1-x^2\Rightarrow\mathrm{d}t=-2x\mathrm{d}x\Rightarrow x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{d}t$

Đổi cận: $x=0\to t=1; x=1\to t=0$

Khi đó $I=-\frac{1}{2}\int_1^0 t^n\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^1 t^n\mathrm{d}t=\frac{1}{2}.\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{2n+2}$

Cách 2: Ta có $\mathrm{d}\left(1-x^2\right)=-2x\mathrm{d}x\to-\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(1-x^2\right)=x\mathrm{d}x$

$I=\int_0^1\left(1-x^2\right)^n x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-x^2\right)^n\mathrm{d}\left(1-x^2\right)=-\frac{1}{2}.\frac{\left(1-x^2\right)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{2n+2}$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và $a>0$. Giả sử với mọi $x\in[0;a]$ ta có $f(x)>0$ và $f(x).f(a-x)=1$. Tính $I=\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$.

A. $I=\frac{a}{3}$. **B.** $I=\frac{a}{2}$.

C. $I=2a$. **D.** $I=a\ln(a+1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Từ giả thiết: $f(x)>0$ và $f(x).f(a-x)=1$, ta suy ra: $f(a-x)=\frac{1}{f(x)}$.

Đặt $x=a-t\Rightarrow\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$; Với $x=0\Rightarrow t=a,\ x=a\Rightarrow t=0$.

Khi đó: $I=\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}=\int_a^0\frac{-\mathrm{d}t}{1+f(a-t)}=\int_0^a\frac{\mathrm{d}t}{1+\frac{1}{f(t)}}=\int_0^a\frac{f(t)\mathrm{d}t}{1+f(t)}=\int_0^a\frac{f(x)\mathrm{d}x}{1+f(x)}$.

Suy ra $2I=\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}+\int_0^a\frac{f(x)\mathrm{d}x}{1+f(x)}=\int_0^a\frac{\left(1+f(x)\right)\mathrm{d}x}{1+f(x)}=\int_0^a\mathrm{d}x=a$. Vậy $I=\frac{a}{2}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2)=-2$; $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=1$.

Tính tích phân $I=\int_{-1}^{3} f'\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=-5$. **B.** $I=0$. **C.** $I=-18$. **D.** $I=-10$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=x\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=-1\Rightarrow t=0$; $x=3\Rightarrow t=2$.

Khi

đó: $I=\int_{-1}^{3} f'\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}x=\int_0^2 2t.f'(t)\mathrm{d}t=2t.f(t)\Big|_0^2-2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=4f(2)-2\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$

$=-8-2=-10$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2x)=3f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$. Tính tích phân $I=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=5$. **B.** $I=6$. **C.** $I=3$. **D.** $I=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $3=3.1=3.\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 3f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}(2x),\forall x\in\mathbb{R}$.

Đặt $2x=t\Rightarrow \mathrm{d}(2x)=\mathrm{d}t$, với $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=2$.

$\Leftrightarrow 3=\frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x,\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow$

$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=6,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=6,\forall x\in\mathbb{R}.\Leftrightarrow 1+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=6,\forall x\in\mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=5,\forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $\int_0^1 x.f(x)\mathrm{d}x=2019$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x.f(\cos x)\mathrm{d}x$ là

A. 2019. **B.** 4038. **C.** –2019. **D.** –4038.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $t=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0$.

Ta

có: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.f\left(\cos x\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x.\cos x.f\left(\cos x\right)\mathrm{d}x = -\int_1^0 2t.f\left(t\right)\mathrm{d}t = 2\int_0^1 t.f\left(t\right)\mathrm{d}t$

$= 2\int_0^1 x.f\left(x\right)\mathrm{d}x = 4038$.

Câu 6: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(2x\right) = 5f\left(x\right) + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 2$. Tính tích phân $I = \int_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I = 11$. **B.** $I = 15$. **C.** $I = 19$. **D.** $I = 14$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $f\left(2x\right) = 5f\left(x\right) + x$

$\Rightarrow \int_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[5f\left(x\right) + x\right]\mathrm{d}x = 5\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x + \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = 5.2 + \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{21}{2}$. Mặt khác

$\int_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}\left(2x\right) = \frac{1}{2}\int_0^2 f\left(t\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x = \frac{21}{2} \Rightarrow \int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 21$.

Do đó: $\int_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x = \int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x - \int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 21 - 2 = 19$.

Câu 7: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[0;1\right]$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{1}{3}} f\left(x\right)\mathrm{d}x = 1$, $\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} f\left(2x\right)\mathrm{d}x = 13$. Tính tích phân $I = \int_0^1 x^2 f\left(x^3\right)\mathrm{d}x$.

A. $I = 6$. **B.** $I = 8$. **C.** $I = 7$. **D.** $I = 9$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Xét $\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} f\left(2x\right)\mathrm{d}x = 13$, đặt $u = 2x \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{1}{2}\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = \frac{1}{6} \Rightarrow u = \frac{1}{3}$; $x = \frac{1}{2} \Rightarrow u = 1$.

Ta có $13 = \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} f\left(2x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{3}}^1 f\left(u\right)\mathrm{d}u \Rightarrow \int_{\frac{1}{3}}^1 f\left(u\right)\mathrm{d}u = 26$.

Xét $I=\int_0^1 x^2 f\left(x^3\right)\mathrm{d}x$, đặt $t=x^3 \Rightarrow \mathrm{d}t=3x^2\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{1}{3}\mathrm{d}t=x^2\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=1$. Vậy ta có:

$$I=\int_0^1 x^2 f\left(x^3\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{3}} f\left(t\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{3}\int_{\frac{1}{3}}^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{3}} f\left(t\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{3}\int_{\frac{1}{3}}^1 f\left(u\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{3}.1+\frac{1}{3}.26=9.$$

Câu 8: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}2x-2 & khi\ x\le 1\\ \dfrac{\ln x}{x} & khi\ x>1\end{cases}$. Biết tích phân $\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=a+\frac{1}{b}\ln^2 2$ trong đó $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị $S=a+b$.

A. $S=3$. **B.** $S=5$. **C.** $S=-3$. **D.** $S=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(2x-2\right)\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=-1+\left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_1^2=-1+\frac{1}{2}\ln^2 2$

$\Rightarrow a=-1, b=2 \Rightarrow S=a+b=-1+2=1$.

Câu 9: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}2x-2 & khi\ x\le 1\\ \dfrac{\ln x}{x} & khi\ x>1\end{cases}$. Biết tích phân $\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=a+\frac{1}{b}\ln^2 2$ trong đó $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị $S=a+b$.

A. $S=3$. **B.** $S=5$. **C.** $S=-3$. **D.** $S=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(2x-2\right)\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=-1+\left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_1^2=-1+\frac{1}{2}\ln^2 2$

$\Rightarrow a=-1, b=2 \Rightarrow S=a+b=-1+2=1$.

Câu 10: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_0^{\ln 2} f\left(\mathrm{e}^x+1\right)\mathrm{d}x=5$ và $\int_2^3\frac{\left(2x-3\right)f\left(x\right)}{x-1}\mathrm{d}x=3$.

Tính $I=\int_2^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. **B.** $I=4$. **C.** $I=-2$. **D.** $I=8$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $t=\mathrm{e}^x+1\Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t-1}$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=2; x=\ln 2\Rightarrow t=3$.

Do đó $\int_0^{\ln 2} f\left(\mathrm{e}^x+1\right)\mathrm{d}x=5\Rightarrow\int_2^3\frac{f\left(t\right)}{t-1}\mathrm{d}t=5\Rightarrow\int_2^3\frac{f\left(x\right)}{x-1}\mathrm{d}x=5$.

Ta có $\int_2^3 \frac{(2x-3)f(x)}{x-1}\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{(2x-2-1)f(x)}{x-1}\mathrm{d}x = \int_2^3 \left[2f(x) - \frac{f(x)}{x-1}\right]\mathrm{d}x = 3$.

Suy ra $2I - \int_2^3 \frac{f(x)}{x-1}\mathrm{d}x = 3 \Rightarrow 2I = 8 \Leftrightarrow I = 4$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{x}{x + f^2(x)}$. Biết rằng $\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x = 1$ và $2g(2) - g(1) = 2$. Tích phân $\int_1^2 \frac{x^2}{x + f^2(x)}\mathrm{d}x$ bằng

A. $1,5$. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Vì $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{x}{x + f^2(x)}$ nên $g'(x) = \frac{x}{x + f^2(x)}$.

Đặt $I = \int_1^2 \frac{x^2}{x + f^2(x)}\mathrm{d}x \Rightarrow I = \int_1^2 xg'(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = g'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = g(x) \end{cases}$.

Khi đó $I = xg(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 g(x)\mathrm{d}x = 2g(2) - g(1) - 1 = 1$.

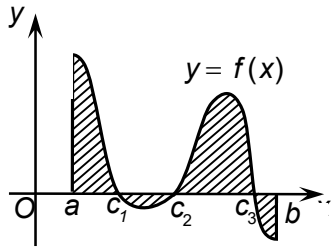
BÀI 3. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

1. Hình phẳng giới hạn bởi 1 đường cong và trục hoành

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn [a ; b], trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được xác định: $S = \int^{b} |f(x)|\,dx$



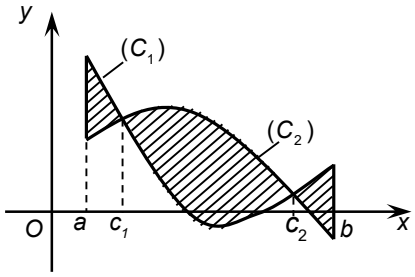
$$(H)\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{S = \int_a^b \left|f(x)\right| dx}$$

Chú ý:

Nếu trên đoạn $[a;b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì: $\int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$

2. Hình phẳng giới hạn bởi 2 đường cong và trục hoành

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được xác định: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$



$$(H)\begin{cases} (C_1): y = f_1(x) \\ (C_2): y = f_2(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{S = \int_a^b \left|f_1(x) - f_2(x)\right| dx}$$

CHÚ Ý

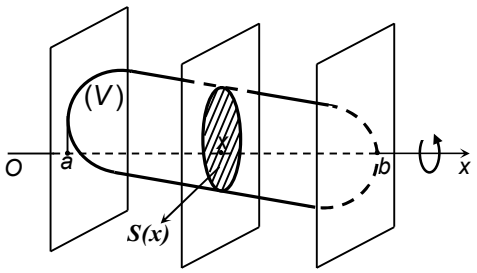
Khi áp dụng công thức trên, cần khử dấu giá trị tuyệt đối của hàm số dưới dấu tích phân. Muốn vậy, ta giải phương trình

$f_1(x) - f_2(x) = 0$ trên đoạn [a ; b]. Giả sử phương trình có ha nghiệm $c, d (c < d)$. Khi đó, $f_1(x) - f_2(x)$ không đổi dáu trê các đoạn [a ; c],[c ; d],[d ; b]. Trên mõi đoạn đó, chẳng hạn trên đoạn [a ; c], ta có $\int_a^c |f_1(x) - f_2(x)|dx = \left|\int_a^c [f_1(x) - f_2(x)]dx\right|$.

II. TÍNH THỂ TÍCH CỦA KHỐI TRÒN XOAY

1. Thể tích vật thể

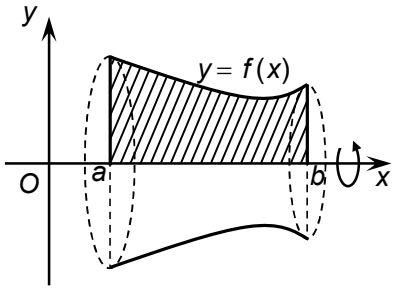
Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a \le x \le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$.



$$V = \int_a^b S(x)dx$$

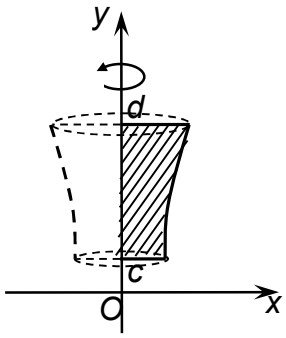
2. Thể tích khối tròn xoay

Bài toán 1: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox:



$$\begin{cases} (C): y = f(x) \\ (Ox): y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Bài toán 2: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục Oy:



$$\begin{cases} (C): x = g(y) \\ (Oy): x = 0 \\ y = c \\ y = d \end{cases} \qquad V_y = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$$

Bài toán 3: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox: $V = \pi \int_a^b \left| f^2(x) - g^2(x) \right| dx$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tính Diện Tích Giới Hạn Bởi 1 Đồ Thị

1. Phương pháp:

a/ ***Phương pháp 1:***

$$S = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

* Xét dấu biểu thức $f(x)$; $x \in [a;b]$, phá dấu trị tuyệt đối và tính tích phân.

b/ Phương pháp 2:

* Giải phương trình $f(x) = 0$; chọn nghiệm trong $[a;b]$. Giả sử các nghiệm là $\alpha; \beta$ với $\alpha < \beta$.

* Áp dụng tính chất liên tục của hàm số $f(x)$ trên $[a;b]$; ta có:

$$S = \left|\int_a^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\beta}^{b} f(x)\mathrm{d}x\right|$$

2. Các ví dụ mẫu:

Ví dụ 1: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = x^2$, trục hoành và đường thẳng $x = 2$.

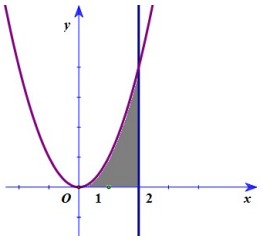
Hướng dẫn giải

Nhận thấy rằng, để tính diện tích ta cần phải tìm được 2 cận. Để tìm thêm cận còn lại ta giải phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $(P): y = x^2$ với trục hoành.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $(P): y = x^2$ với trục hoành: $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Áp dụng công thức ta có $S = \int_0^2 \left|x^2\right| \mathrm{d}x = \frac{8}{3}$.

Nhận xét: Nếu ta vẽ đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $x = 2$ ta dễ dàng xác định được hình phẳng giới hạn bởi các đường này. Từ đó ta dễ dàng tính được diện tích S.



Ví dụ 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^2.e^x$, trục hoành và đường thẳng $x = 1$

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

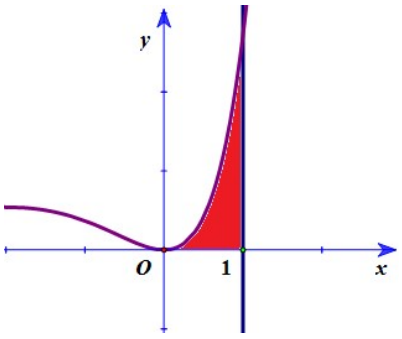
Ta có:

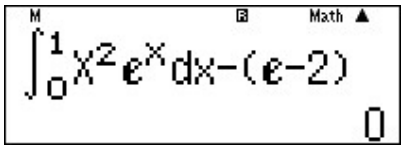
$$S = \int_0^1 x^2e^x\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\mathrm{d}\left(e^x\right) = x^2e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\mathrm{d}\left(x^2\right)$$

$$= e - 2\int_0^1 xe^x\mathrm{d}x = e - 2\int_0^1 x\mathrm{d}\left(e^x\right) = e - 2xe^x\Big|_0^1 + 2\int_0^1 e^x\mathrm{d}x$$

$$= e - 2e + 2e^x\Big|_0^1 = -e + 2e - 2 = e - 2.$$

Lời bình: Bài toán trên đã có 1 cận, ta chỉ cần tìm thêm 1 cận nữa bằng cách giải phương trình hoành độ giao điểm. Sau đó áp dụng công thức. Nếu vẽ đồ thị bài này để tìm hình phẳng giới hạn bởi các đường là không nên vì đồ thị hàm số hơi phức tạp. Việc tìm được công thức $S = \int_0^1 x^2e^x\mathrm{d}x$ và tính tích phân này ta có thể dùng MTCT để tính và chọn đáp án.





Ví dụ 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=\sqrt{1-x^2}$ và trục hoành

Hướng dẫn giải

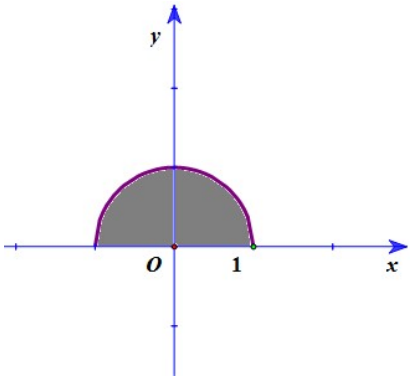
Phương trình hoành độ giao điểm của , Ox là $\sqrt{1-x^2}=0\Leftrightarrow x=\pm 1$

Khi đó, diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx.$

Đặt $x=\sin t\Leftrightarrow dx=\cos tdt$ và $\begin{cases} x=1\to t=\dfrac{\pi}{2} \\ x=-1\to t=-\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Suy ra

$$S=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos tdt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\frac{\pi}{2}$$



Lời bình: Bài toán trên chưa có cận, ta phải giải phương trình hoành độ giao điểm để tìm cận. Sau đó áp dụng công thức. Việc tìm được công thức $S=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$ và tính tích phân này tương đối phức tạp, do đó ta có thể dùng MTCT để tính và chọn đáp án.

Nếu vẽ được đồ thị thì ta xác định được hình phẳng và diện tích của nó dễ dàng, đó chính là diện tích của nữa đường tròn bán kính bằng 1. Do đó: $S=\frac{1}{2}\pi R^2=\frac{\pi}{2}.$

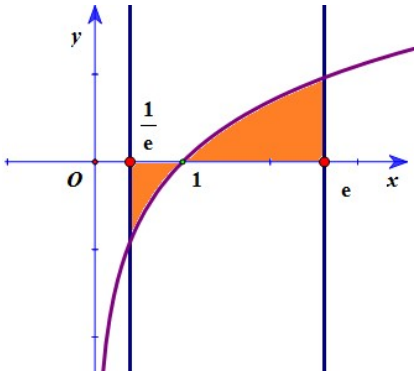
Ví dụ 4: Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\ln x, x=e, x=\frac{1}{e}$ và trục hoành

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=\ln x$ và trụ hoành là

$\ln x=0\Leftrightarrow x=1.$

$$S=\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln xdx+\int_{1}^{e}\ln x.dx=(x-x\ln x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+(x\ln x-x)\Big|_{1}^{e}=2-\frac{2}{e}.$$



3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=3^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\int_0^2 3^x\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\pi\int_0^2 3^{2x}\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\pi\int_0^2 3^x\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int_0^2 3^{2x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=3^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ có diện tích là

$$S=\int_0^2\left|3^x\right|\mathrm{d}x=\int_0^2 3^x\,\mathrm{d}x$$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,x=b(a<b)$ được tính theo công thức

A. $S=\pi\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$. **C.** $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,x=b(a<b)$ được tính theo công thức $S=\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$, các đường thẳng $x=a$, $x=b$ và trục Ox là

A. $-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\int_a^b[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$. **D.** $\pi\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Tổng quát

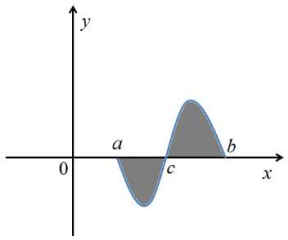
Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên D $([a;b]\subset D)$.

Diện tích giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và các đường thẳng $x=a, x=b$ là $S=\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$.

Phương trình trục Ox là $y=0$. Do đó áp dụng cho bài toán trên ta có diện tích cần tìm là:

$S=\int_a^b \left|f(x)-0\right|\mathrm{d}x=\int_a^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 4: Ký hiệu S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, đường $x=a, x=b$. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=-\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=\left|\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x\right|$.

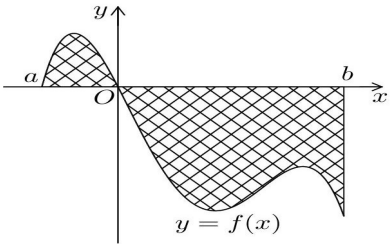
Lời giải

Chọn C

Ta có diện tích hình phẳng được tính $S=\int_a^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int_a^c \left|f(x)\right|\mathrm{d}x+\int_c^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x$.

Do $f(x)<0,\ \forall x\in(a;c)$; $f(x)>0,\ \forall x\in(c;b)$ nên ta có: $S=-\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và thỏa mãn $\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x=m$, $\int_0^b f(x)\mathrm{d}x=n$. Diện tích hình phẳng trong hình vẽ bên bằng



A. $m.n$.

B. $m-n$.

C. $m+n$.

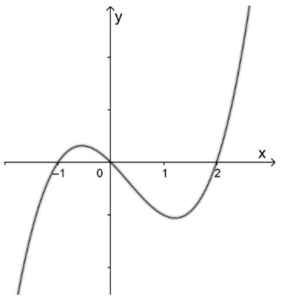
D. $n-m$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $S=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^b f(x)\mathrm{d}x=m-n$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục Ox là

A. $S=\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x-\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_{-1}^{2}-f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x-\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn D

Từ hình vẽ ta có: $S=\int_{-1}^{0}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x-\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x.$

Câu 7: Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số $y=x\sqrt{1+x^2}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=1$. Biết $S=a\sqrt{2}+b$ $(a,b\in\mathbb{Q})$. Tính $a+b$.

A. $a+b=\frac{1}{6}$.

B. $a+b=\frac{1}{2}$.

C. $a+b=\frac{1}{3}$.

D. $a+b=0$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm: $x\sqrt{1+x^2}=0\Leftrightarrow x=0$.

Ta có $S=\int_{0}^{1}\left|x\sqrt{1+x^2}\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{0}^{1}x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x\right|$.

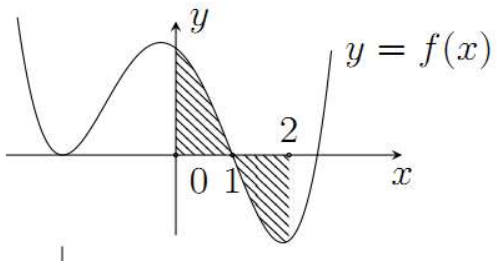
Đặt $t=\sqrt{1+x^2}\Rightarrow t^2=1+x^2\Rightarrow t.\mathrm{d}t=x.\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1$ và $x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}$.

Khi đó $S=\int_{1}^{\sqrt{2}}t^2.\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}\Big|_{1}^{\sqrt{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{2}-\frac{1}{3}$.

Suy ra $a=\frac{2}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$ nên $a+b=\frac{1}{3}$.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) là đường cong như hình bên dưới.



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$ là

A. $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

B. $\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|$.

C. $-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

D. $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

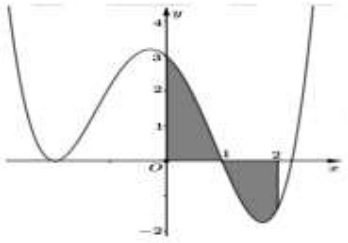
Lời giải

Chọn A

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$ là

$S=\int_0^2 |f(x)|\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình bên. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=2$ là



A. $S=-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|$.

D. $S=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích S của hình phẳng cần tìm là: $S=\int_0^2 |f(x)|\mathrm{d}x$.

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f(x)=0, x\in[0;2]$ có nghiệm duy nhất là $x=1$.

Do đó $S=\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x+\int_1^2 |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x)\geq 0, \forall x\in[0;1]$ và $f(x)\leq 0, \forall x\in[1;2]$.

Vậy $S=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 10: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-2x-8$ và trục hoành được xác định theo công thức nào dưới đây

A. $S=\int_{-4}^{2}\left(x^2-2x-8\right)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_{-2}^{4}\left(x^2-2x-8\right)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_{-4}^{2}\left(-x^2+2x+8\right)\mathrm{d}x$.

D. $S=\int_{-2}^{4}\left(8+2x-x^2\right)\mathrm{d}x$.

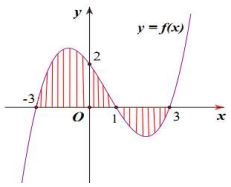
Lời giải

Chọn D

Ta có: $x^2-2x-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=-2\end{array}\right.$. Do đó: $S=\int_{-2}^{4}\left|x^2-2x-8\right|\mathrm{d}x$.

Mặt khác, vì $x^2-2x-8\le 0,\forall x\in[-2;4]$ nên $S=\int_{-2}^{4}\left(-x^2+2x+8\right)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{4}\left(8+2x-x^2\right)\mathrm{d}x$.

Câu 11: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ.



Diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục Ox được tính bởi công thức

A. $S=\left|\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x\right|$.

B. $S=\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_{-3}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=\int_{-3}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số ta thấy $f(x)\ge 0$ với $x\in[-3;1]$, $f(x)\le 0$ với $x\in[1;3]$.

Do đó $S=\int_{-3}^{3}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-3}^{1}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-3}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 12: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=x^2; y=0; x=1; x=2$ bằng

A. $\frac{4}{3}$.

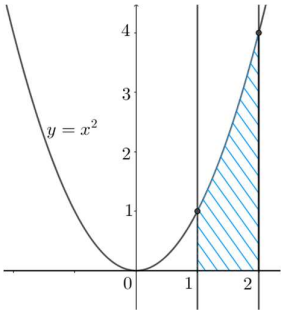
B. $\frac{7}{3}$.

C. $\frac{8}{3}$.

D. 1.

Lời giải

Chọn B



Ta có $S=\int_1^2\left|x^2\right|dx=\int_1^2 x^2dx=\frac{7}{3}$.

Dạng 2: Tính Diện Tích Giới Hạn Bởi 2 Hai Đồ Thị

1. Phương pháp:

Công thức tính $S=\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx$. Tính như dạng 1.

2. Các ví dụ mẫu:

Ví dụ 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị

$$y=\frac{1}{\cos^2 x};y=\frac{1}{\sin^2 x};x=\frac{\pi}{6};\quad x=\frac{\pi}{3}$$

Lời giải

Ta có: $S=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\left|\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right|dx$

Trong trường hợp này nếu chọn cách xét dấu biểu thức $y=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x};\ x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$

hoặc vẽ đồ thị hàm số $y=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x};\ x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$ là khá khó khăn.

Vì vậy ta chọn cách sau:

+ Xét phương trình: $\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}=0;\ x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]\Leftrightarrow\cos^2 x-\sin^2 x=0\ x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$

$\Leftrightarrow\cos 2x=0;\ x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$

Từ đó suy ra: $S=\left|\int_6^{\pi/4}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx\right|+\left|\int_{4/4}^{\pi/3}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx\right.$

$\Rightarrow S=|(\tan x+\cot x)|\frac{\pi/4}{\pi/6}|+|(\tan x+\cot x)\left|\frac{\pi}{\pi}\right|_4|=2\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}-2\right)$.

Ví dụ 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{1}{x^2+1};\quad y=\frac{x^2}{2}$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị trên:

$$\frac{1}{x^2+1}=\frac{x^2}{2} \Leftrightarrow x^4+x^2-2=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Vì vậy hình phẳng đã cho có diện tích là: $S=\int_{-1}^{1}\left|\frac{1}{x^2+1}-\frac{x^2}{2}\right|dx$

Do trên $(-1;1)$ phương trình $\frac{1}{x^2+1}=\frac{x^2}{2}$ vô nghiệm nên ta có:

$$S=\int_{-1}^{1}\left|\frac{1}{x^2+1}-\frac{x^2}{2}\right|dx=\left|\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x\right|$$

Tính $I_1=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+1}dx$.

+/ Đặt $x=\tan t$; $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx=\frac{1}{\cos^2 t}dt$

+/ Đổi cận: $\left[\begin{array}{l} x=-1\Rightarrow t=-\frac{\pi}{4} \\ x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4} \end{array}\right. \Rightarrow I_1=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{1+\tan^2 t}dt=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$

$I_2=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{2}dx=\frac{1}{3}$

Thay thế vào ta được: $S=\left|\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\right|=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$.

Ví dụ 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=\left|x^2-4x+3\right|$ và $y=3$.

Hướng dẫn giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị trên:

$$\left|x^2-4x+3\right|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+3=3 \\ x^2-4x+3=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$$

Khi đó: $S=\int_{0}^{4}\| x^2-4x+3|-3|\,dx=|\int_{0}^{4}\left(x^2-4x+3|-3\right)dx|$

$$\Rightarrow S=|\int_{0}^{1}\left(\left|x^2-4x+3\right|-3\right)dx+\int_{1}^{3}\left(\left|x^2-4x+3\right|-3\right)dx+\int_{3}^{4}\left(\left|x^2-4x+3\right|-3\right)dx$$

$$\Rightarrow S=|\int_{0}^{1}\left(x^2-4x\right)dx+\int_{1}^{3}\left(-x^2+4x-6\right)dx+\int_{3}^{4}\left(x^2-4x\right)dx|$$

$$\Rightarrow S=S=\left(\frac{x^3}{3}-2x^2\right)\Big|_0^1+\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2-6x\right)\Big|_1^3+\left(\frac{x^3}{3}-2x^2\right)\Big|_3^4=8 .$$

Ví dụ 4: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị: $y=\sin|x|$; $y=|x|-\pi$.

Hướng dẫn giải

Xét phương trình hoành độ: $\sin|x|=|x|-\pi$

Đặt $|x| = t$

Khi đó trở thành: $\sin t = t - \pi \Leftrightarrow \sin t - t + \pi = 0$

Xét hàm số $f(t) = \sin t - t + \pi$; $t \in [0, +\infty)$.

$\Rightarrow f'(t) = \cos t - 1 \le 0 \quad \forall t \in [0, +\infty)$.

BBT của hàm số $f(t)$ như sau:

t	0		π		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$-$	
$f(t)$	π	↘	0	↘	$-\infty$

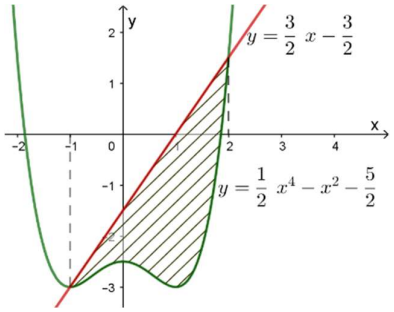
$\Rightarrow$ phương trình có nghiệm duy nhất $t = \pi$.

$\Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x = -\pi$ và $x = \pi$.

$\Rightarrow S = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin|x| - |x| + \pi| dx = \left| \int_{-\pi}^{\pi} (\sin|x| - |x| + \pi) dx \right|$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên dưới được tính theo công thức nào sau đây?



A. $\int_{-1}^{2} \left(-\frac{1}{2}x^4 - x^2 - \frac{3}{2}x - 4 \right) dx$.

B. $\int_{-1}^{2} \left(-\frac{1}{2}x^4 + x^2 + \frac{3}{2}x + 1 \right) dx$.

C. $\int_{-1}^{2} \left(\frac{1}{2}x^4 - x^2 - \frac{3}{2}x - 1 \right) dx$.

D. $\int_{-1}^{2} \left(-\frac{1}{2}x^4 + x^2 + \frac{3}{2}x + 4 \right) dx$.

Lời giải

Chọn B

Từ hình vẽ ta thấy phần diện tích hình phẳng cần tính là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số: $y = f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$; $y = g(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 - \frac{5}{2}$ và hai đường thẳng $x = -1; x = 2$.

Ngoài ra ta thấy đường $y = f(x)$ nằm trên đường $y = g(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ nên ta có diện tích phần gạch chéo trên hình vẽ là:

$$S=\int_{-1}^{2}\left[\left(\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}x^4-x^2-\frac{5}{2}\right)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}\left(-\frac{1}{2}x^4+x^2+\frac{3}{2}x+1\right)\mathrm{d}x\,.$$

Câu 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=2x^2+x+1$ và $y=x^2+3$

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 4. **D. 2.**

Lời giải

Chọn A

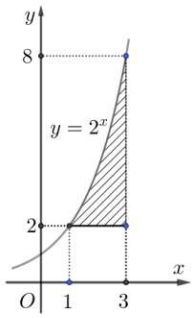
Phương trình hoành độ giao điểm của các đồ thị:

$$2x^2+x+1=x^2+3\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số là:

$$\int_{-2}^{1}|2x^2+x+1-x^2-3|\,dx=\int_{-2}^{1}|x^2+x-2|\,dx=-\int_{-2}^{1}(x^2+x-2)dx=-\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}$$

Câu 4: Diện tích hình mặt phẳng gạch sọc trong hình vẽ bên bằng



A. $\int_1^3 2^x\mathrm{d}x$. **B.** $\int_1^3\left(2-2^x\right)\mathrm{d}x$. **C.** $\int_1^3\left(2^x-2\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int_1^3\left(2^x+2\right)\mathrm{d}x$.

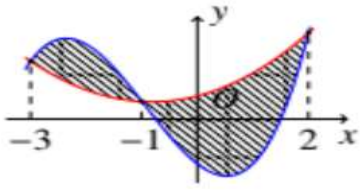
Lời giải

Chọn C

Ta thấy diện tích phần gạch sọc giới hạn bởi các đường $y=2^x, y=2, x=1, x=3$ và trên $[1;3]$ đồ thị hàm số $y=2^x$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y=2$ nên diện tích phần gạch sọc bằng

$\int_1^3\left(2^x-2\right)\mathrm{d}x$

Câu 5: Cho hàm số bậc hai $y=f(x)$ và hàm số bậc ba $y=g(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Diện tích phần gạch chéo được tính bằng công thức nào sau đây?



A. $S=\int_{-3}^{-1}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{-1}^{2}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$. **B.** $S=\left|\int_{-3}^{2}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x\right|$.

C. $S=\int_{-3}^{-1}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{-1}^{2}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int_{-3}^{-1}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{-1}^{2}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$.

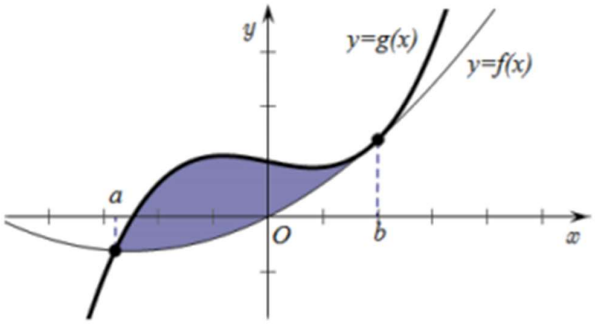
Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta thấy hoành độ giao điểm của 2 đồ thị là: $x=-3;\ x=-1;x=2$.

Mặt khác, trên khoảng $(-3;-1)$, đồ thị hàm $y=g(x)$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y=f(x)$; trên khoảng $(-1;2)$, đồ thị hàm $y=f(x)$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y=g(x)$ nên diện tích cần tìm là: $S=\int_{-3}^{2}\left|\left[g(x)-f(x)\right]\right|\mathrm{d}x=\int_{-3}^{-1}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{-1}^{2}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có đồ thị giao nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ a và b. Gọi (H) là hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số này.



Diện tích của (H) được tính theo công thức

A. $S=\int_{a}^{b}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_{a}^{b}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_{a}^{b}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$. **D.** $S=-\int_{a}^{b}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $S=\int_{a}^{b}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$. Quan sát hình vẽ ta thấy $g(x)\ge f(x)$ trên $[a,b]$ nên

$S=\int_{a}^{b}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{a}^{b}\left(g(x)-f(x)\right)\mathrm{d}x$.

Câu 7: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=-x^2+4$ và $y=-x+2$?

A. $\frac{5}{7}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là:

$-x^2+4=-x+2 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=-x^2+4$ và $y=-x+2$ là:

$$S=\int_{-1}^{2}\left|\left(-x^2+4\right)-\left(-x+2\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}\left(-x^2+x+2\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}.$$

Câu 8: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2+1$ và đường thẳng $y=x+3$.

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{13}{3}$. **C.** $\frac{11}{3}$. **D.** $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình: $x^2+1=x+3 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng là: $S=\int_{-1}^{2}\left|x^2-x-2\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{-1}^{2}\left(x^2-x-2\right)\mathrm{d}x\right|=\frac{9}{2}$.

Câu 10: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$; $y=6-x$ và trục hoành.

A. $\frac{22}{3}$. **B.** $\frac{16}{3}$. **C.** 2. **D.** $\frac{23}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}\ (C)$ với trục hoành là nghiệm của hệ

$\left\{\begin{array}{l} y=\sqrt{x} \\ y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right. \Rightarrow (C)\cap Ox=O(0;0)$.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng $y=6-x\ (\Delta)$ với trục hoành là: $(\Delta)\cap Ox=A(6;6)$.

Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}(C)$ và đường thẳng $y=6-x(\Delta)$ là nghiệm của hệ

$\left\{\begin{array}{l} y=6-x \\ y=\sqrt{x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 6-x=\sqrt{x} \\ y=\sqrt{x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=4 \\ y=2 \end{array}\right. \Rightarrow (C)\cap\Delta=B(4;2)$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\int_{0}^{4}\left|\sqrt{x}\right|\mathrm{d}x+\int_{4}^{6}\left|6-x\right|\mathrm{d}x=\frac{22}{3}$.

Câu 11: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^3-x$; $y=2x$ và các đường $x=1$; $x=-1$ được xác định bởi công thức:

A. $S=\int_{-1}^{0}\left(x^3-3x\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\left(3x-x^3\right)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_{-1}^{0}\left(3x-x^3\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\left(x^3-3x\right)\mathrm{d}x$.

C. $S=\left|\int_{-1}^{1}\left(3x-x^3\right)\mathrm{d}x\right|$.

D. $S=\int_{-1}^{1}\left(3x-x^3\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^3-x$; $y=2x$ và các đường $x=1$; $x=-1$ là $S=\int_{-1}^{1}\left|\left(x^3-x\right)-\left(2x\right)\right|\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left|x^3-3x\right|\,\mathrm{d}x$.

Bảng xét dấu x^3-3x

x	-1		0		1
x^3-3x		+	0	−	

Do đó dựa vào bảng ta có:

$S=\int_{-1}^{0}\left(x^3-3x\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\left(3x-x^3\right)\mathrm{d}x$.

Câu 12: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=-x^2$ và đường thẳng $y=-x-2$ bằng

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{11}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}-\sqrt{2}$.

Lời giải

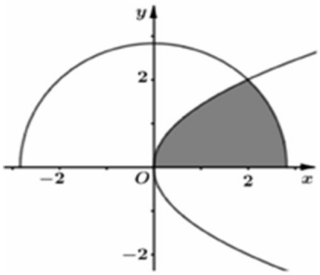
Chọn A

Ta có $-x^2=-x-2\Leftrightarrow -x^2+x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$.

Vậy diện tích hình phẳng là

$S=\int_{-1}^{2}\left|-x^2+x+2\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{-1}^{2}\left(-x^2+x+2\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-1}^{2}\right|=\left|\frac{9}{2}\right|=\frac{9}{2}$.

Câu 13: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\sqrt{2x}$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{8-x^2}$ và trục hoành. Tính diện tích (H) tính bởi công thức nào



A. $\int_{0}^{2}\left|\sqrt{2x}-\sqrt{8-x^2}\right|\mathrm{d}x$.

B. $\int_{0}^{2}\sqrt{2x}\mathrm{d}x+\int_{2}^{2\sqrt{2}}\sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x$.

C. $\int_{0}^{2\sqrt{2}}(\sqrt{2x}-\sqrt{8-x^2})\mathrm{d}x$.

D. $\int_{0}^{2}(\sqrt{2x}-\sqrt{8-x^2})\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

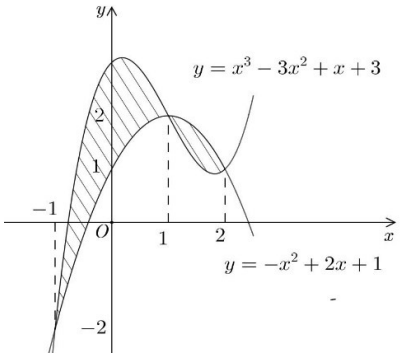
Gọi S là diện tích hình (H) cần tìm.

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y=\sqrt{2x}$ và cung tròn $y=\sqrt{8-x^2}$

$$\sqrt{2x}=\sqrt{8-x^2}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 2\sqrt{2}\\-x^2-2x+8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 2\sqrt{2}\\\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-4\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

Khi đó: $S=\int_0^2\sqrt{2x}\,\mathrm{d}x+\int_2^{2\sqrt{2}}\sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Câu 14: Cho đồ thị hai hàm số $y=x^3-3x^2+x+3$ và $y=-x^2+2x+1$ như hình sau



Diện tích phần hình phẳng được gạch sọc tính theo công thức nào dưới đây?

A. $\int_{-1}^{1}\left(x^3-2x^2-x+2\right)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\left(-x^3+2x^2+x-2\right)\mathrm{d}x$.

B. $\int_{-1}^{2}\left(x^3-2x^2-x+2\right)\mathrm{d}x$.

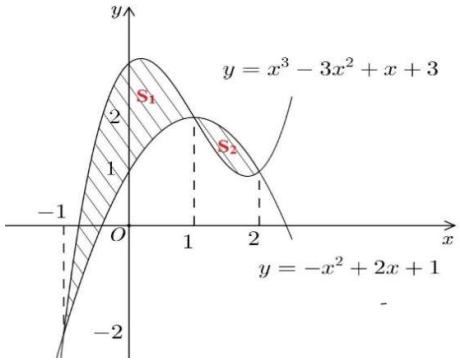
C. $\int_{-1}^{1}\left(-x^3+2x^2+x-2\right)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\left(x^3-2x^2-x+2\right)\mathrm{d}x$.

D. $\int_{-1}^{2}\left(-x^3+2x^2+x-2\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Chia phần diện tích S cần tính thành 2 phần S_1 và S_2 như hình vẽ sau



+ Phần S_1: phần diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $f(x)=x^3-3x^2+x+3$, $g(x)=-x^2+2x+1$ và các đường thẳng $x=-1$, $x=1$.

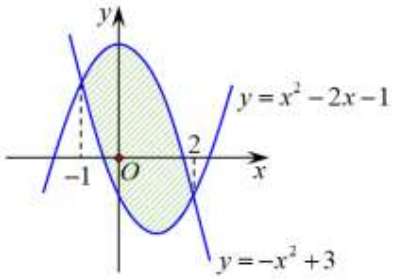
Dựa vào đồ thị ta có $S_1=\int_{-1}^{1}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left(x^3-2x^2-x+2\right)\mathrm{d}x$.

+ Phần S_2: phần diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $f(x)=x^3-3x^2+x+3$, $g(x)=-x^2+2x+1$ và các đường thẳng $x=1$, $x=2$.

Dựa vào đồ thị ta có $S_2=\int_{1}^{2}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x=\int_{1}^{2}\left(-x^3+2x^2+x-2\right)\mathrm{d}x$.

Vậy $S=S_1+S_2=\int_{-1}^{1}\left(x^3-2x^2-x+2\right)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\left(-x^3+2x^2+x-2\right)\mathrm{d}x$.

Câu 15: Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)\mathrm{d}x$.

B. $\int_{-1}^{2}\left(-2x+2\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int_{-1}^{2}\left(2x-2\right)\mathrm{d}x$.

D. $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$.

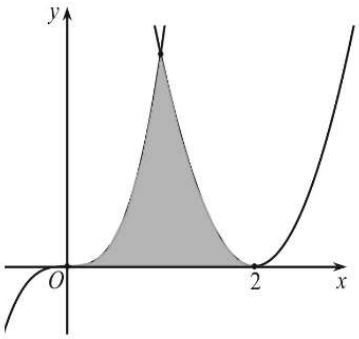
Lời giải

Chọn D

Gọi S là diện tích cần tìm

$\Rightarrow S=\int_{-1}^{2}\left|\left(-x^2+3\right)-\left(x^2-2x-1\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$.

Câu 16: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=(x-2)^2$, đường cong $y=x^3$ và trục hoành bằng



A. $\frac{11}{2}$. **B.** $\frac{73}{12}$. **C.** $\frac{7}{12}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm là: $(x-2)^2 = x^3 \Leftrightarrow x = 1$.

Gọi S_1 là diện tích giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} y = x^3 \\ y = 0 \\ x = 0;\ x = 1 \end{cases}$; S_2 là diện tích giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} y = (x-2)^2 \\ y = 0 \\ x = 1;\ x = 2 \end{cases}$.

Dễ thấy: $x^3 \geq 0\ , \forall x \in [0;1]$ và $(x-2)^2 \geq 0\ , \forall x \in [1;2]$.

Khi đó diện tích phần tô đậm trong hình là $S = S_1 + S_2 = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (x-2)^2\, dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$.

Câu 17: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ và $y = 6 - x^2$ bằng

A. $\int_{-2}^{2}\left(\frac{3x^2}{2} - 6\right)dx$. **B.** $\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{x^2}{2} - 6\right)dx$. **C.** $-\int_{-2}^{2}\left(\frac{3x^2}{2} - 6\right)dx$. **D.** $-\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{x^2}{2} - 6\right)dx$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của hai parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ và $y = 6 - x^2$ là:

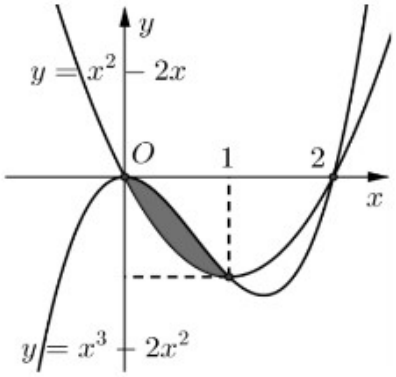
$\frac{1}{2}x^2 = 6 - x^2 \Leftrightarrow \frac{3x^2}{2} - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Lại có $\frac{3x^2}{2} - 6 < 0,\ \forall x \in (-2;2)$.

Suy ra diện tích hình phẳng cần tìm là:

$S = \int_{-2}^{2}\left|\frac{1}{2}x^2 - (6 - x^2)\right|dx = \int_{-2}^{2}\left|\frac{3x^2}{2} - 6\right|dx = -\int_{-2}^{2}\left(\frac{3x^2}{2} - 6\right)dx$.

Câu 18: Diện tích phần tô đậm trong hình bên được tính theo công thức nào trong các công thức sau?



A. $\int_0^1 \left(-x^3+3x^2-2x\right)\mathrm{d}x$.

B. $\int_0^1 \left(x^3-3x^2+2x\right)\mathrm{d}x$.

B. $\int_0^2 \left(-x^3+3x^2-2x\right)\mathrm{d}x$.

D. $\int_0^2 \left(x^3-3x^2+2x\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Ta có công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

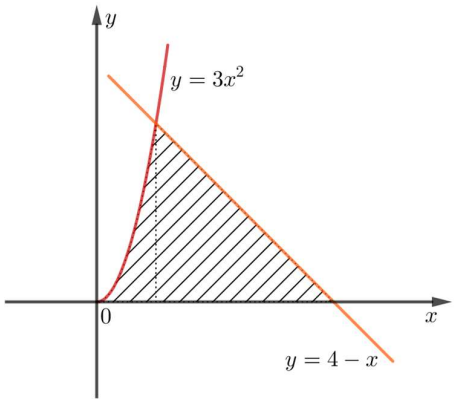
$y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a, x=b$; các hàm số $y=f(x), y=g(x)$ liên tục trên $[a;b]$ là:

$S=\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$. Áp dụng công thức, diện tích phần tô đậm là: $S=\int_0^1 \left|\left(x^2-2x\right)-\left(x^3-2x^2\right)\right|\mathrm{d}x$.

Với $x\in[0,1]$ thì $x^3-2x^2>x^2-2x \Rightarrow x^2-2x-\left(x^3-2x^2\right)<0$ nên $S=\int_0^1 \left(x^3-2x^2-x^2+2x\right)\mathrm{d}x$

$=\int_0^1 \left(x^3-3x^2+2x\right)\mathrm{d}x$.

Câu 19: Gọi (H) là phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ dưới đây được giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=3x^2$, $y=4-x$ và trục hoành. Diện tích của (H) là bằng bao nhiêu?



A. $\frac{11}{2}$.

B. $\frac{9}{2}$.

C. $\frac{13}{2}$.

D. $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$(H):\begin{cases} y=3x^2 \\ y=4-x \\ y=0 \end{cases}$

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$4-x=0 \Leftrightarrow x=4$

$3x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

$3x^2=4-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\ (t/m) \\ x=\dfrac{-4}{3}\ (Loai) \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng $S_{(H)}=\int\limits_0^1 3x^2\mathrm{d}x+\int\limits_1^4(4-x)\mathrm{d}x=x^3\Big|_0^1+\left(4x-\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_1^4=\dfrac{11}{2}$.

Câu 20: Diện tích miền phẳng giới hạn bởi parabol $y=\dfrac{x^2}{2}$ và đường tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính $2\sqrt{2}$ thuộc khoảng nào sau đây.

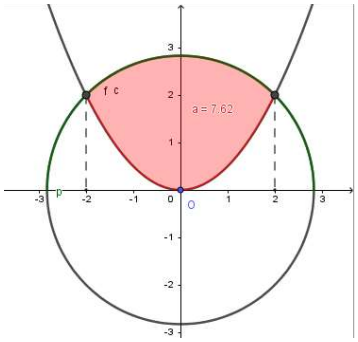
A. $(5;6)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(7;8)$. **D.** $(6;7)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $2\sqrt{2}$ là : $x^2+y^2=8$.

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol và đường tròn : $x^2+\dfrac{x^4}{4}=8 \Leftrightarrow x=\pm 2$.



Vậy diện tích hình phẳng là : $S=\int\limits_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\dfrac{x^2}{2}\right)dx\approx 7,616518641$.

Câu 21: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=\ln x,\ y=1$ và đường thẳng $x=1$ bằng

A. e^2. **B.** $e+2$. **C.** $2e$. **D.** $e-2$.

Lời giải

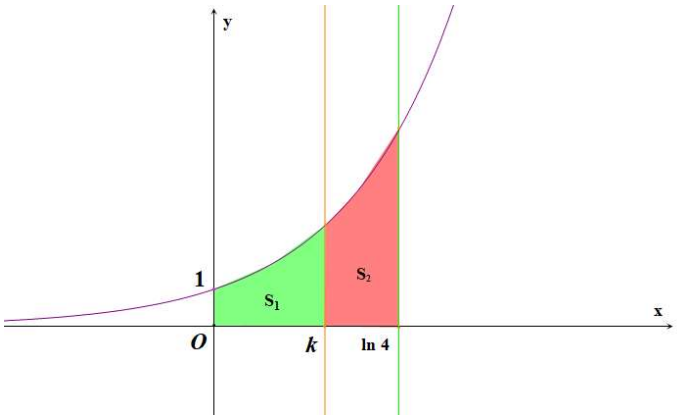
Chọn D

Ta có $\ln x-1=0 \Leftrightarrow x=e$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=\ln x,\ y=1$ và đường thẳng $x=1$ là:

$$S=\int_1^e|\ln x-1|dx=\left|\int_1^e(\ln x-1)\,dx\right|=\left|x(\ln x-1)\Big|_1^e-\int_1^e dx\right|=\left|1-x\Big|_1^e\right|=\left|1-(e-1)\right|=\left|2-e\right|=e-2$$

Câu 22: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k$ $(0<k<\ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1=2S_2$.



A. $k=\dfrac{4}{3}\ln 2$. **B.** $k=\ln\dfrac{8}{3}$. **C.** $k=\ln 2$. **D.** $k=\ln 3$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=\ln 4$ là

$$S=\int_0^{\ln 4}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\Big|_0^{\ln 4}=\mathrm{e}^{\ln 4}-\mathrm{e}^0=4-1=3.$$

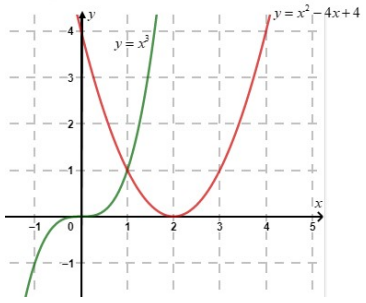
Ta có $S=S_1+S_2=S_1+\dfrac{1}{2}S_1=\dfrac{3}{2}S_1$. Suy ra $S_1=\dfrac{2S}{3}=\dfrac{2.3}{3}=2$.

Vì S_1 là phần diện tích được giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=k$ nên

$$2=S_1=\int_0^k\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\Big|_0^k=\mathrm{e}^k-\mathrm{e}^0=\mathrm{e}^k-1.$$

Do đó $\mathrm{e}^k=3\Leftrightarrow k=\ln 3$.

Câu 23: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=x^3$, $y=x^2-4x+4$ và trục Ox được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_0^2 \left|x^3-\left(x^2-4x+4\right)\right|\mathrm{d}x$.

B. $-\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^2\left(x^2-4x+4\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x-\int_1^2\left(x^2-4x+4\right)\mathrm{d}x$.

D. $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^2\left(x^2-4x+4\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào hình vẽ ta thấy hình phẳng cần tính diện tích gồm 2 phần:

Phần 1: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$, trục Ox, $x=0$, $x=1$.

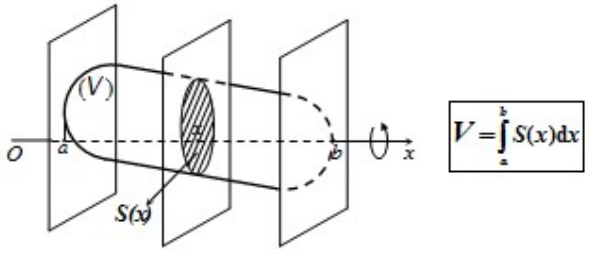
Phần 2: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-4x+4$, trục Ox, $x=1$, $x=2$.

Do đó diện tích cần tính là $S=\int_0^1\left|x^3\right|\mathrm{d}x+\int_1^2\left|x^2-4x+4\right|\mathrm{d}x=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^2\left(x^2-4x+4\right)\mathrm{d}x$.

Dạng 3: Tính Thể Tích Vật Thể Tròn Xoay Dựa Vào Định Nghĩa

1. Phương pháp:

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a\le x\le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a,b]$.



$$V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$$

2. Các ví dụ mẫu:

Ví dụ 1: Cho phần vật thể B giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=2$. Cắt phần vật thể B bởi mặt phẳng vuông góc trục Ox tại điểm có hoành độ $x\ (0\le x\le 2)$, ta được diện tích là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Tính thể tích V của phần vật thể B.

Lời giải

Một tam giác đều cạnh a có diện tích $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Do tam giác đều cạnh $x\sqrt{2-x}$ có diện tích là $S(x)=\dfrac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra thể tích $S=\int_0^2 S(x)dx=\int_0^2\dfrac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}dx=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\int_0^2 x^2(2-x)dx\xrightarrow{Casio}\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{4}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 2: Trong không gian $Oxyz$, cho vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$ và $x=\pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng $x,(0\le x\le\pi)$ là một tam giác đều cạnh là $2\sqrt{\sin x}$ .Tính thể tích của vật thể đó.

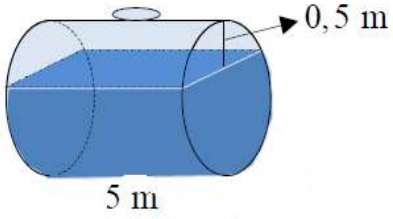
Lời giải

Một tam giác đều cạnh a có diện tích $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Do đó tam giác đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$ có diện tích là $S(x)=\dfrac{4\sin x.\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}\sin x$

Suy ra thể tích $V=\int_0^2 S(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\sqrt{3}\sin x\mathrm{d}x=2\sqrt{3}$

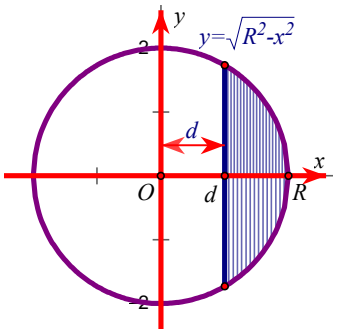
Ví dụ 3: Một bồn trụ đang chứa dầu được đặt nằm ngang có chiều dài bồn là $5m$, bán kính đáy $1m$. Người ta rút dầu ra trong bồn tương ứng với $0,5m$ của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng của dầu còn lại trong bồn



Lời giải

* Thể tích cả khối trụ $V_1=\pi R^2h=\pi.1^2.5=5\pi(m^3)$

* Tính thể tích phần khối trụ bị mất đi

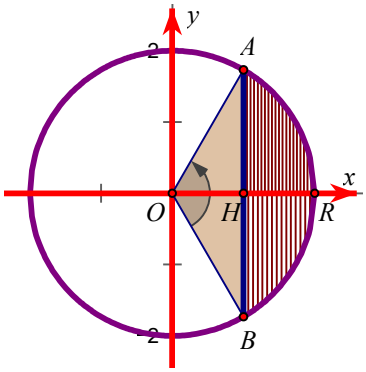


+ Cách 1: $S_{viên\ phân}=2\int_d^R\sqrt{R^2-x^2}dx=2\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{1-x^2}dx\approx 0,61$

$V_2=S_{viên\ phân}.h=2\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{1-x^2}dx\times 5\approx 3,07$

Suy ra thể tích khối trụ còn lại $V=V_1-V_2=5\pi-2\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{1-x^2}dx\times 5\approx 12,637\ (m^3)$

+ Cách 2: Tính góc ở tâm $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{OH}{R}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\alpha=\frac{2\alpha}{3}$



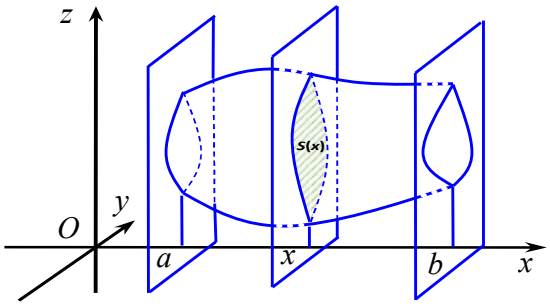
$$S_{viên\ phân}=\frac{1}{2}R^2(\alpha-\sin\alpha)=\frac{1}{2}.\left(\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}\right)\approx 0,614$$

$$V_2=S_{viên\ phân}.h=\frac{1}{2}.\left(\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}\right)\times 5$$

$$V=V_1-V_2=5\pi-\frac{1}{2}.\left(\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}\right)\times 5\approx 12,637\ (m^3)$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho vật thể được giới hạn bởi hai mặt phẳng (P), (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x=a$, $x=b$ $(a<b)$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ x, $(a\le x\le b)$ cắt vật thể theo thiết diện có diện tích là $S(x)$ với $y=S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a;b]$. Thể tích V của thể tích đó được tính theo công thức



A. $V=\int_a^b S^2(x)\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\int_a^b S^2(x)\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$. **D.** $V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$

Lời giải

Chọn D

Theo định nghĩa ta có: $V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$

Câu 2: Cho phần vật thể $(\Im)$ giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=2$. Cắt phần vật thể $(\Im)$ bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0\le x\le 2)$, ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Tính thể tích V của phần vật thể $(\Im)$.

A. $V=\frac{4}{3}$. **B.** $V=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=4\sqrt{3}$. **D.** $V=\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích thiết diện: $S_{\Delta}=\frac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}$.

$$V_{\Im}=\int_0^2\frac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^2x^2(2-x)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^2x^2(2-x)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^2=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 3: Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 3)$ thì được thiết diện là hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2-2}$.

A. $32+2\sqrt{15}$. **B.** $\frac{124\pi}{3}$. **C.** $\frac{124}{3}$. **D.** $\left(32+2\sqrt{15}\right)\pi$.

Lời giải

Chọn C

Thể tích vật thể cần tìm là $V=\int_1^3 3x\sqrt{3x^2-2}\mathrm{d}x=\int_1^5 t.t\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}\Big|_1^5=\frac{124}{3}$.

Câu 4: Cho vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, biết rằng thiết diện của vật thể với mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$ là một đường tròn có bán kính $R=\sqrt{\cos x}$. Thể tích của vật thể đó là

A. 2π. **B.** π^2. **C.** π. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Diện tích của đường tròn là $S(x)=\pi r^2=\pi\cos x$.

Vậy thể tích của vật thể là $V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}S(x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\pi$.

Câu 5: Cho phần vật thể (T) giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=2$.. Cắt phần vật thể (T) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x(0\le x\le 2),$, ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Tính thể tích V của phần vật thể (T).

A. $V=\frac{4}{3}.$ **B.** $V=\frac{\sqrt{3}}{3}.$ **C.** $V=4\sqrt{3}.$ **D.** $V=\sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn B

$$V=\int_0^2\frac{1}{2}.x.\sqrt{2-x}.\frac{\sqrt{3}}{2}.x.\sqrt{2-x}dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^2x^2(2-x)dx=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Câu 6: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng x = 1 và x = 3, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 3)$ thì được thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là 3x và $\sqrt{3x^2-2}$

A. $V=32+2\sqrt{15}$ **B.** $V=\frac{124\pi}{3}$

C. $V=\frac{124}{3}$ **D.** $V=(32+2\sqrt{15})\pi$

Lời giải

Chọn C

$$V=\int_1^3 3x\sqrt{3x^2-2}dx=\frac{1}{3}\left[\left(3x^2-2\right)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_1^3=\frac{124}{3}.$$

Câu 7: Một vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=-1;x=1$ và thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ $x(-1\le x\le 1)$ là một hình tròn có diện tích bằng 3π. Thể tích của vật thể là

A. $3\pi^2.$ **B.** $6\pi.$ **C.** 6. **D.** $2\pi.$

Lời giải

Chọn B

Có $V=\int_{-1}^{1}S(x)dx=\int_{-1}^{1}3\pi dx=6\pi.$

Dạng 4: Tính Thể Tích Vật Thể Tròn Xoay Khi Quay Hình Phẳng Giới Hạn Bởi 1 Đồ Thị

1. Phương pháp:

Vật thể tròn xoay sinh bởi miền hình phẳng được giới hạn: Đồ thị $y=f(x)$; trục $Ox(y=0)$; $x=a,\ x=b$; quay xung quanh Ox.

- Nếu thiếu cận thì giải phương trình $f(x)=0$ để bổ sung cận.

- Tính thể tích theo công thức: $V_{Ox}=\pi\int_a^b f^2(x)dx$

2. Các ví dụ mẫu:

Ví dụ 1: Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2x-x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay được sinh ra bởi hình phẳng đó khi nó quay quanh trục Ox.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $2x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Thể tích của vật thể tròn xoay cần tìm $V=\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{16\pi}{15}$.

Ví dụ 2: Cho miền hình phẳng giới hạn bởi: $y=xe^x$, Ox $x=1$ quay xung quanh Ox. Tính thể tích của vật thể tạo thành.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số: $y=xe^x$ và trục Ox $xe^x=0\Leftrightarrow x=0$

Vậy vật thể tròn xoay có thể tích là: $V=\pi\int_0^1\left(xe^x\right)^2dx=\pi\int_0^1\left(x^2e^{2x}\right)dx$

$$\Rightarrow V=\pi\left(\frac{1}{2}x^2e^{2x}\right)_0^1-\int_0^1xe^{2x}dx=\pi\frac{e^2}{2}-\pi\int_0^1xe^{2x}dx$$

$$\Rightarrow V=\frac{\pi e^2}{2}-\pi\left(\frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1e^{2x}dx\right)=\frac{\pi}{4}e^{2x}\Big|_0^1=\frac{\pi\left(e^2-1\right)}{4}.$$

Ví dụ 3: Cho miền hình phẳng giới hạn bởi: $y=x^2-4x, y=0$; quay xung quanh Ox. tính thể tích của vật thể tạo thành.

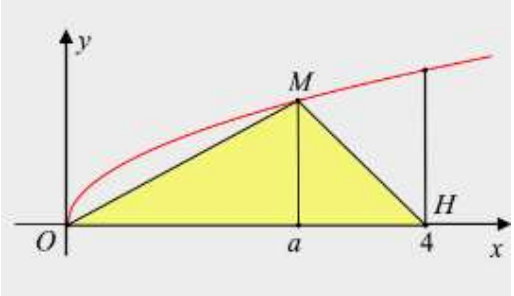
Lời giải

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số: $y=x^2-4x$ và đường thẳng $y=0$ là nghiệm của phương trình: $x^2-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.$

Vật thể tạo thành có thể tích là:

$$V=\pi\int_0^4\left(x^2-4x\right)^2dx=\pi\int_0^4\left(x^4-8x^3+16x^2\right)dx=\pi\left(\frac{x^5}{5}-2x^4+\frac{16x^3}{3}\right)\Big|_0^4=\frac{512\pi}{15}$$

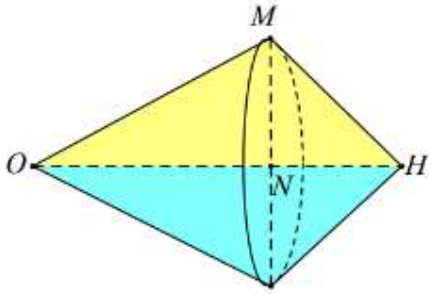
Ví dụ 4: Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quanh hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x};y=0;x=4$ và trục Ox. Đường thẳng $x=a\left(0<a<4\right)$ cắt đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ tại M.



Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác MOH quanh trục Ox. Biết rằng $V = 2V_1$. Tính a

Lời giải

Ta có $V = \pi\int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\int_0^4 x\mathrm{d}x = 8\pi \Rightarrow V_1 = \frac{V}{2} = 4\pi$.



Tam giác MOH quanh trục Ox tạo nên hai khối nón chung đáy. Gọi N là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox. Suy ra $r = MN = y_M = y(a) = \sqrt{a}$.

$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{3}OH.\pi.r^2 = \frac{1}{3}.4\pi.\left(\sqrt{a}\right)^2 = \frac{4\pi a}{3}$.

Suy ra $4\pi = \frac{4\pi a}{3} \Rightarrow a = 3$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y = -x^2 + 2x$, trục hoành. Quay hình phẳng (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $\frac{496\pi}{15}$. **B.** $\frac{32\pi}{15}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** $\frac{16\pi}{15}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của (H) và trục hoành $-x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V=\pi\int_0^2\left(-x^2+2x\right)^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^2\left(x^4-4x^3+4x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4}{3}x^3\right)\Big|_0^2=\frac{16\pi}{15}.$$

Câu 2: Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi elip có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox.

A. $\frac{160\pi}{3}$. **B.** $\frac{320\pi}{3}$. **C.** $\frac{160}{3}$. **D.** $\frac{320}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Elip cắt trục hoành tại hai điểm có tọa độ $(-5;0)$ và $(5;0)$.

Do đó: $V=\pi\int_{-5}^{5}\left(16-\frac{16x^2}{25}\right)\mathrm{d}x=\frac{320\pi}{3}$.

Câu 3: Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=x^2-4x+3$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1;x=3$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành bằng

A. $\frac{16\pi}{15}$. **B.** $\frac{16}{15}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

* Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành là:

$$V=\pi\int_1^3\left[x^2-4x+3\right]^2dx=\pi\int_1^3\left[x^4-5x^3+19x^2-12x+9\right]dx=\frac{16\pi}{15}.$$

Câu 4: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^3+3x-2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1,x=2$. Quay (H) xung quanh trục hoành ta được khối nói tròn xoay có thể tích là:

A. $V=\pi\int_1^2\left|x^2-3x+2\right|dx$ **B.** $V=\int_1^2\left|x^2-3x+2\right|dx$

C. $V=\int_1^2\left|x^2-3x+2\right|^2dx$ **D.** $V=\pi\int_1^2\left(x^2-3x+2\right)^2dx$

Lời giải

Chọn D

Thể tích khối tròn xoay khi hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} y=-x^3+3x-2 \\ y=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{cases}$ là

$V=\pi\int_1^2\left(-x^2+3x-2\right)^2dx = V=\pi\int_1^2\left(x^2-3x+2\right)^2dx \Rightarrow$ Chọn đáp án D

Câu 5: Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x=0$, $x=1$, $y=0$ và $y=\sqrt{2x+1}$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức?

A. $V=\pi\int_0^1\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x$.

B. $V=\pi\int_0^1(2x+1)\mathrm{d}x$.

C. $V=\int_0^1(2x+1)\mathrm{d}x$.

D. $V=\int_0^1\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{2x+1}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1(2x+1)\mathrm{d}x$.

Câu 6: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $x=0$, $x=1$ và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh bởi hình (H) quay quanh trục Ox.

A. $\frac{\pi}{3}$.

B. $\frac{\pi}{2}$.

C. π.

D. $\sqrt{\pi}$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích khối tròn xoay là $V=\pi\int_0^1x\mathrm{d}x=\pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$.

Câu 7: Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{\tan x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ quanh trục hoành là

A. $V=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

B. $V=\frac{\pi\ln 2}{2}$.

C. $V=\frac{\pi^2}{4}$.

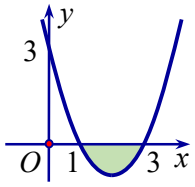
D. $V=\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích khối tròn xoay cần tính là $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=-\pi\ln\left|\cos x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi\ln 2}{2}$.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đồ thị như hình bên. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số đã cho và trục Ox. Quay hình phẳng D quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích V được xác định theo công thức



A. $V=\pi\int_1^3\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$. **B.** $V=\frac{1}{3}\int_1^3\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi^2\int_1^3\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$. **D.** $V=\int_1^3\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $x=1$, $x=3$ nên thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng D quanh trục Ox được tính theo công thức $V=\pi\int_1^3\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$.

Câu 9: Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=1$ xung quanh trục Ox là

A. $V=\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

.Lời giải

Chọn C

Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$ xác định bởi:

$V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Vậy, $V=\pi\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

Câu 10: Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x=0$, $x=\pi$, $y=0$ và $y=-\sin x$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức

A. $V=\pi\int_0^\pi|\sin x|\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\int_0^\pi\sin^2 x\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi\left|\int_0^{\pi}(-\sin x)\mathrm{d}x\right|$.

D. $V=\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là $V=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x$.

Câu 11: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x.\ln x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$; $x=2$. Thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi (H) khi nó quay quanh trục hoành có thể tích V được xác định bởi

A. $V=\pi\int_1^2(x.\ln x)^2\mathrm{d}x$.

B. $V=\int_1^2(x.\ln x)^2\mathrm{d}x$.

C. $V=\int_1^2(x.\ln x)\mathrm{d}x$.

D. $V=\pi\int_1^2(x.\ln x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi $(H):\begin{cases}y=x.\ln x\\ y=0\\ x=1;x=2\end{cases}$ khi nó quay quanh trục hoành có thể tích V được xác định bởi $V=\pi\int_1^2(x.\ln x)^2\mathrm{d}x$.

Câu 12: Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=3x-x^2$ và trục hoành, quanh trục hoành.

A. $\frac{81\pi}{10}$.

B. $\frac{85\pi}{10}$.

C. $\frac{41\pi}{7}$.

D. $\frac{8\pi}{7}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $3x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=3\end{array}\right.$.

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là:

$$V=\pi\int_0^3\left(3x-x^2\right)^2dx=\pi\int_0^3\left(9x^2-6x^3+x^4\right)dx=\pi\left(3x^3-\frac{3x^4}{2}+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^3=\frac{81\pi}{10}.$$

Câu 13: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\pi-1$. **B.** $V=\pi+1$. **C.** $V=\pi(\pi-1)$. **D.** $V=\pi(\pi+1)$.

Lời giải

Chọn D

Thể tích khối tròn xoay khi quay D quanh trục hoành có thể tích là:

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}y^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+\cos x)\mathrm{d}x=\pi(2x+\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi(\pi+1).$$

Câu 14: Gọi V là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{1}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=a$, $(a>1)$. Tìm a để V = 2.

A. $a=\frac{\pi}{\pi-2}$. **B.** $a=\frac{\pi}{\pi+2}$. **C.** $a=\frac{\pi+2}{\pi}$. **D.** $a=\frac{2}{\pi}$.

Lời giải

Chọn A

$$V=\pi\int_1^a\frac{1}{x^2}dx=\pi(-\frac{1}{x})\Big|_1^a=-\frac{\pi}{a}+\pi=2\Rightarrow a=\frac{\pi}{\pi-2}$$

Câu 15: Kí hiệu là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{1}{\cos x}$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{3}$. Thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình xung quanh trục Ox là.

A. $V=\pi$ **B.** $V=2\pi$ **C.** $V=\pi\sqrt{3}$ **D.** $V=\pi\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn C

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos x}-0\right)^2dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2 x}dx=\pi(\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}\pi.$$

Câu 16: Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. V có giá trị gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 550. **B.** 400. **C.** 670. **D.** 335.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1\Leftrightarrow y=\pm\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$.

Do elip nhận Ox, Oy làm các trục đối xứng nên thể tích V cần tính bằng 4 lần thể tích hình sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$, $y=0$ và các đường thẳng $x=0$, $x=5$ quay xung quanh Ox.

Ta có $V=4\pi\int_0^5\left(\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}\right)^2dx=\frac{640\pi}{3}\approx 670,2$.

Câu 17: Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y=1-x^2$, $y=0$ quanh trục Ox là $V=\frac{a\pi}{b}$ với a, b là số nguyên. Khi đó $a+b$ bằng

A. 11. **B.** 17. **C.** 31. **D.** 25.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm $1-x^2=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Ta có $V=\pi\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{16\pi}{15}\Rightarrow a=16,\ b=15$.

Vậy $a+b=31$.

Dạng 5: Ứng Dụng Tích Phân Trong Vật Lý

1. Phương pháp: Ứng dụng của đạo hàm

$v(t)=s'(t)$

$a(t)=v'(t)$

2. Các ví dụ mẫu:

Ví dụ 1: Một viên đá được bắn thẳng đứng lên trên với vận tốc ban đầu là 40 m/s từ một điểm cao 5 m cách mặt đất. Vận tốc của viên đá sau t giây được cho bởi công thức $v(t)=40-10t$ m/s. Tính độ cao lớn nhất viên đá có thể lên tới so với mặt đất.

Lời giải

Gọi h là quãng đường lên cao của viên đá.

$v(t)=h'(t)\Rightarrow h(t)=\int v(t)\mathrm{dt}=\int(40-10t)\mathrm{dt}=40t-5t^2+c$

Tại thời điểm $t=0$ thì $h=5$. Suy ra $c=5$.

Vậy $h(t)=40t-5t^2+5$

$h(t)$ lớn nhất khi $v(t)=0\Leftrightarrow 40-10t=0\Leftrightarrow t=4$. Khi đó $h(4)=85\,\mathrm{m}$.

Ví dụ 2: Một ô tô chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái đạp phanh còn được gọi là "thắng". Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-40t+20$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô di chuyển từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là bao nhiêu?

Lời giải

Lấy mốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu đạp phanh $(t=0)$

Gọi T là thời điểm ô tô dừng lại. Khi đó vận tốc lúc dừng là $v(T)=0$

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Vậy thời gian từ lúc đạp phanh đến lúc dừng là $v(T)=0 \Leftrightarrow -40T+20=0 \Leftrightarrow T=\frac{1}{2}$

Gọi $s(t)$ là quãng đường ô tô đi được trong khoảng thời gian T.

Ta có $v(t)=s'(t)$ suy ra $s(t)$ là nguyên hàm của $v(t)$

Vậy trong $\frac{1}{2}(\text{s})$ ô tô đi được quãng đường là: $\int_t^T v(t)\text{d}t=\int_0^{\frac{1}{2}}(-40t+20)\text{d}t=\left(-20t^2+20t\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=5$

Ví dụ 3: Một ô tô xuất phát từ A chuyển động với vận tốc nhanh dần đều, 10 giây sau, ô tô đạt vận tốc 5 và từ thời điểm đó ô tô chuyển động đều. Ô tô thứ hai cũng xuất phát từ A nhưng sau ô tô thứ nhất là 10 giây, chuyển động nhanh dần đều và đuổi kịp ô tô thứ nhất sau 25 giây. Vận tốc ô tô thứ hai tại thời điểm đó là

Lời giải

Ta có gia tốc trong $10\,\text{s}$ đầu của ô tô thứ nhất là $a=\frac{v-v_0}{t-t_0}=\frac{5}{10}=0,5\left(\text{m/s}^2\right)$

Trong $10\,\text{s}$ đầu, ô tô thứ nhất chuyển động nhanh dần với vận tốc $v(t)=0,5t$

$\Rightarrow$ Quãng đường ô tô thứ nhất đi được trong $10\,\text{s}$ là $\int_0^{10}0,5t\text{d}t=25(\text{m})$.

Trong $25\,\text{s}$ tiếp theo, ô tô thứ nhất đi được $5.25=125$

Vậy quãng đường ô tô thứ nhất đi được đến khi bị đuổi kịp là $25+125=150(\text{m})$

Mặt khác $S=S_0+\frac{1}{2}at^2$

$\Rightarrow$ Gia tốc của ô tô thứ hai là $a=\frac{2(S-S_0)}{t^2}=\frac{2.150}{25^2}=0,48\left(\text{m/s}^2\right)$

Vậy khi đuổi kịp ô tô thứ nhất, vận tốc của ô tô thứ hai là $v_t=v_0+at=12$.

Ví dụ 4: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t)=7t$ đi được 5 , người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-70\left(\text{m/s}^2\right)$. Tính quãng đường $S(\text{m})$ đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

Lời giải

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe lăn bánh đến khi được phanh.

$S_1=\int_0^5 v_1(t)\text{d}t=\int_0^5 7t\text{d}t=7\frac{t^2}{2}\Big|_0^5=87,5(\text{m}).$

Vận tốc $v_2(t)(\text{m/s})$ của ô tô từ lúc được phanh đến khi dừng hẳn thỏa mãn

$v_2(t)=\int(-70)\text{d}t=-70t+C$, $v_2(5)=v_1(5)=35\Rightarrow C=385$. Vậy $v_2(t)=-70t+385$.

Thời điểm xe dừng hẳn tương ứng với t thỏa mãn $v_2(t)=0 \Leftrightarrow t=5,5(\text{s})$.

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe được phanh đến khi dừng hẳn.

$$S_2=\int_5^{5,5} v_1(t)\text{dt}=\int_5^{5,5}(-70t+385)\text{dt}=8,75(\text{m}).$$

Quãng đường cần tính $S=S_1+S_2=96,25(\text{m})$.

Ví dụ 5: Một vật di chuyển với gia tốc $a(t)=-20(1+2t)^{-2}\left(m/s^2\right)$. Khi $t=0$ thì vận tốc của vật là $30(m/s)$. Tính quãng đường vật đó di chuyển sau 2 giây .

Lời giải :

Vận tốc vật là : $v(t)=\int a(t)dt=\int -20(1+2t)^{-2}dt=10(1+2t)^{-1}+C$.

Khi $t=0$ thì $v(0)=10.(1)^{-1}+C=30 \Leftrightarrow C=20$.

Nên $v(t)=10(1+2t)^{-1}+20(m/s)$.

Suy ra : $S=\int_0^2\left(10(1+2t)^{-1}+20\right)dt\approx 48(m)$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+10$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 0,2m **B.** 2m **C.** 10m **D.** 20m

Lời giải

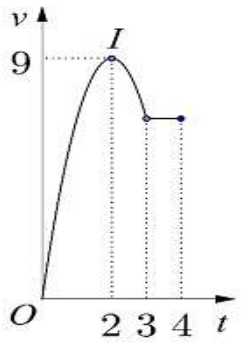
Chọn D

Xét phương trình $-5t+10=0 \Leftrightarrow t=2$. Do vậy, kể từ lúc người lái đạp phanh thì sau 2s ô tô dừng hẳn.

Quãng đường ô tô đi được kể từ lúc người lái đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn là

$$s=\int_0^2\left(-5t+10\right)dt=\left(-\frac{5}{2}t^2+10t\right)\Big|_0^2=10m.$$

Câu 2: Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v phụ thuộc thời gian t có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó.



A. $s=26,5$ **B.** $s=24$ **C.** $s=28,5$ **D.** $s=27$

Lời giải

Chọn C

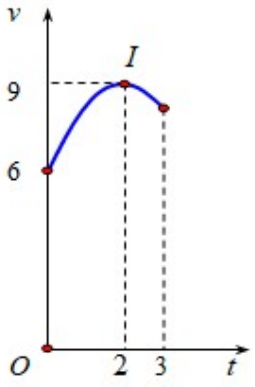
Gọi $(P): y=ax^2+bx+c$.

Vì (P) qua $O(0;0)$ và có đỉnh $I(2;9)$ nên dễ tìm được phương trình là $y=\frac{-9}{4}x^2+9x$.

Ngoài ra tại $x=3$ ta có $y=\frac{27}{4}$

Vậy quãng đường cần tìm là: $S=\int_0^3\left(\frac{-9}{4}x^2+9x\right)\mathrm{d}x+\int_3^4\frac{27}{4}\mathrm{d}x=27\ \ (km)$.

Câu 3: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\mathrm{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t(\mathrm{h})$có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



A. $s=26,75(\mathrm{km})$ **B.** $s=25,25(\mathrm{km})$

C. $s=24,25(\mathrm{km})$ **D.** $s=24,75(\mathrm{km})$

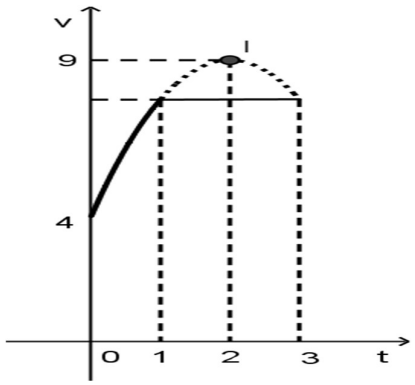
Lời giải

Chọn D

Tìm được phương trình của vận tốc là $v(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 3t + 6$

Vậy $S = \int_0^3 (-\frac{3}{4}t^2 + 3t + 6)dt = 24{,}75$

Câu 4: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó.



A. $s = 15{,}50(km)$ **B.** $s = 23{,}25(km)$

C. $s = 13{,}83(km)$ **D.** $s = 21{,}58(km)$

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình của parabol $v = at^2 + bt + c$ ta có hệ như sau:

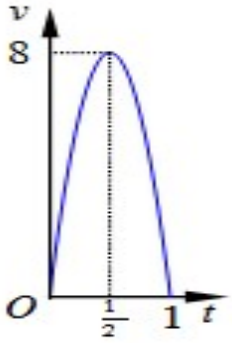
$$\begin{cases} c = 4 \\ 4a + 2b + c = 9 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ c = 4 \\ a = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Với $t = 1$ ta có $v = \frac{31}{4}$.

Vậy quãng đường vật chuyển động được là

$$s = \int_0^1 \left(-\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4\right)dt + \int_1^3 \frac{31}{4}dt = \frac{259}{12} \approx 21{,}583$$

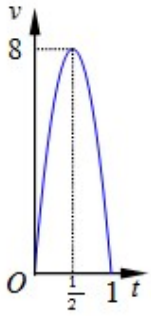
Câu 5: Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v phụ thuộc vào thời gian t có đồ thị là một phần parabol với đỉnh $I\left(\frac{1}{2};\ 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quảng đường s người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi chạy?



A. $s=4$ **B.** $s=2,3$ **C.** $s=4,5$ **D.** $s=5,3$

Lời giải

Chọn C



Gọi parabol là $(P): y=ax^2+bx+c.$ Từ hình vẽ ta có (P) đi qua $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 0)$ và điểm $I\left(\frac{1}{2};\ 8\right)$.

Suy ra $\begin{cases} c=0 \\ a+b+c=0 \\ \frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-32 \\ b=32 \\ c=0 \end{cases}$.

Vậy $(P): y=-32x^2+32x$. Quảng đường người đó đi được là

$s=\int_0^{\frac{3}{4}}\left(-32x^2+32x\right)\mathrm{d}x=4,5$

Câu 6: Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{100}t^2+\frac{13}{30}t\,(\mathrm{m/s})$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng $a\,(\mathrm{m/s^2})$. Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $25\left(\text{m/s}\right)$. **B.** $9\left(\text{m/s}\right)$. **C.** $42\left(\text{m/s}\right)$. **D.** $15\left(\text{m/s}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $v_B\left(t\right)=\int a.\text{dt}=at+C$, $v_B\left(0\right)=0\Rightarrow C=0\ \Rightarrow v_B\left(t\right)=at$.

Quãng đường chất điểm A đi được trong 25 giây là

$$S_A=\int_0^{25}\left(\frac{1}{100}t^2+\frac{13}{30}t\right)\text{dt}=\left(\frac{1}{300}t^3+\frac{13}{60}t^2\right)\Big|_0^{25}=\frac{375}{2}.$$

Quãng đường chất điểm B đi được trong 15 giây là : $S_B=\int_0^{15}at.\text{dt}=\frac{at^2}{2}\Big|_0^{15}=\frac{225a}{2}$.

Ta có $\frac{375}{2}=\frac{225a}{2}\Leftrightarrow a=\frac{5}{3}$.

Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A là $v_B\left(15\right)=\frac{5}{3}.15=25\left(\text{m/s}\right)$.

Câu 7: Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v\left(t\right)=\frac{1}{120}t^2+\frac{58}{45}t\left(m/s\right)$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a\left(m/s^2\right)$. Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $25\left(m/s\right)$ **B.** $36\left(m/s\right)$ **C.** $30\left(m/s\right)$ **D.** $21\left(m/s\right)$

Lời giải

Chọn C

Thời điểm chất điểm B đuổi kịp chất điểm A thì chất điểm B đi được 15 giây, chất điểm A đi được 18 giây.

Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B\left(t\right)=\int a\text{d}t=at+C$ mà $v_B\left(0\right)=0$ nên $v_B\left(t\right)=at$.

Do từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi chất điểm B đuổi kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được bằng nhau.

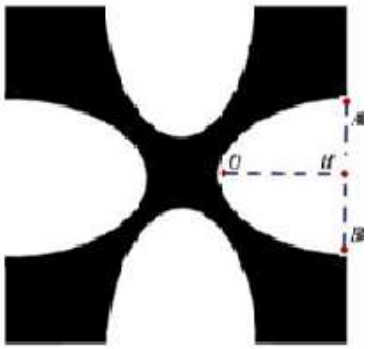
Do đó: $\int_0^{18}\left(\frac{1}{120}t^2+\frac{58}{45}\right)\text{d}t=\int_0^{15}at\text{d}t\Leftrightarrow 225=a.\frac{225}{2}\Leftrightarrow a=2$

Vậy, vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B\left(t\right)=2.15=30\left(m/s\right)$.

Dạng 6: Ứng Dụng Tích Phân vào giải các bài toán thực tế

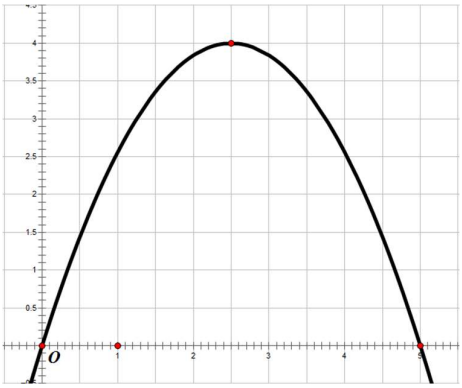
Câu 1: Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB=5\,\text{cm}$,

$OH = 4$ cm. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.



A. $\frac{160}{3}\text{cm}^2$. **B.** $\frac{140}{3}\text{cm}^2$. **C.** $\frac{14}{3}\text{cm}^2$. **D.** $50\ \text{cm}^2$.

Lời giải



Đưa parabol vào hệ trục Oxy ta tìm được phương trình là: $(P): y = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 5$ là: $S = \int_0^5 \left(-\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x \right) dx = \frac{40}{3}$.

Tổng diện tích phần bị khoét đi: $S_1 = 4S = \frac{160}{3}\ \text{cm}^2$.

Diện tích của hình vuông là: $S_{hv} = 100\ \text{cm}^2$.

Vậy diện tích bề mặt hoa văn là: $S_2 = S_{hv} - S_1 = 100 - \frac{160}{3} = \frac{140}{3}\ \text{cm}^2$.

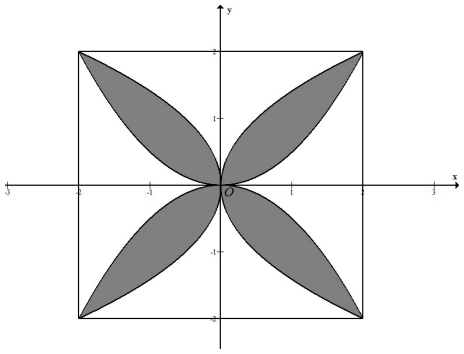
Câu 2: Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô mầu sẫm như hình vẽ bên).



Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng

A. $800\,\text{cm}^2$. **B.** $\frac{800}{3}\text{cm}^2$. **C.** $\frac{400}{3}\text{cm}^2$. **D.** $250\,\text{cm}^2$.

Lời giải



Chọn hệ tọa độ như hình vẽ (1 đơn vị trên trục bằng $10cm = 1dm$), các cánh hoa tạo bởi các đường parabol có phương trình $y = \frac{x^2}{2}$, $y = -\frac{x^2}{2}, x = -\frac{y^2}{2}, x = \frac{y^2}{2}$.

Diện tích một cánh hoa (nằm trong góc phàn tư thứ nhất) bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{2}, y = \sqrt{2x}$ và hai đường thẳng $x = 0; x = 2$.

Do đó diện tích một cánh hoa bằng

$$\int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2}\right)dx = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{(2x)^3} - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}\left(\text{dm}^2\right) = \frac{400}{3}\left(\text{cm}^2\right) = \frac{4}{3}\left(\text{dm}^2\right) = \frac{400}{3}\left(\text{cm}^2\right).$$

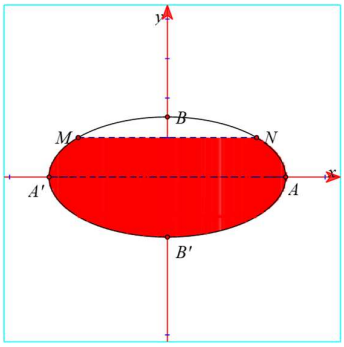
Câu 3: Một cái thùng đựng dầu có thiết diện ngang (mặt trong của thùng) là một đường elip có trục lớn bằng 1m, trục bé bằng $0{,}8\text{m}$, chiều dài (mặt trong của thùng) bằng 3m. Đươc đặt sao cho trục bé nằm theo phương thẳng đứng (như hình bên). Biết chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là $0{,}6\text{m}$. Tính thể tích V của dầu có trong thùng (Kết quả làm tròn đến phần trăm).



A. $V = 1{,}52\text{m}^3$. **B.** $V = 1{,}31\text{m}^3$. **C.** $V = 1{,}27\text{m}^3$. **D.** $V = 1{,}19\text{m}^3$.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Theo đề bài ta có phương trình của Elip là $\frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{4}{25}}=1$.

Gọi M, N lần lượt là giao điểm của dầu với elip.

Gọi S_1 là diện tích của Elip ta có $S_1=\pi ab=\pi\frac{1}{2}.\frac{2}{5}=\frac{\pi}{5}$.

Gọi S_2 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi Elip và đường thẳng MN.

Theo đề bài chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là 0,6m nên ta có phương trình của đường thẳng MN là $y=\frac{1}{5}$.

Mặt khác từ phương trình $\frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{4}{25}}=1$ ta có $y=\frac{4}{5}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}$.

Do đường thẳng $y=\frac{1}{5}$ cắt Elip tại hai điểm M, N có hoành độ lần lượt là $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ và $\frac{\sqrt{3}}{4}$ nên

$$S_2=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\left(\frac{4}{5}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}-\frac{1}{5}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{5}\int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{\sqrt{3}}{10}.$$

Tính $I=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x=\frac{1}{2}\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cos t\mathrm{d}t$.

Đổi cận: Khi $x=\frac{-\sqrt{3}}{4}$ thì $t=-\frac{\pi}{3}$; Khi $x=\frac{\sqrt{3}}{4}$ thì $t=\frac{\pi}{3}$.

$$I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Vậy $S_2 = \frac{4}{5}\frac{1}{8}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{10}=\frac{\pi}{15}-\frac{\sqrt{3}}{20}$.

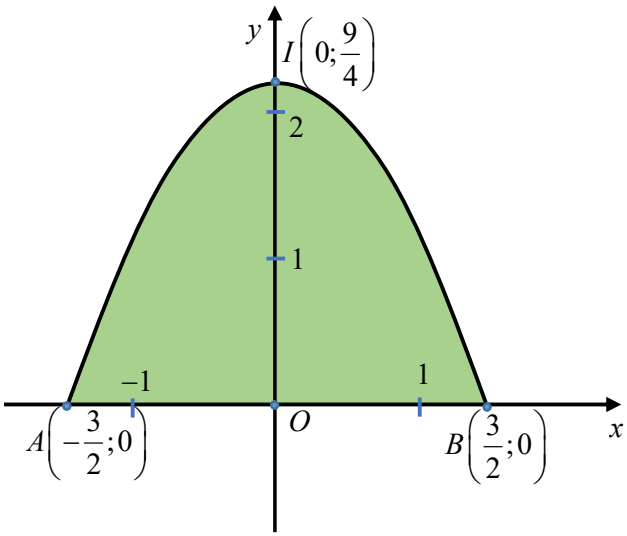
Thể tích của dầu trong thùng là $V=\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{15}+\frac{\sqrt{3}}{20}\right).3=1{,}52$.

Câu 4. Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là $2{,}25$ mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là:

A. 33750000 đồng. **B.** 3750000 đồng. **C.** 12750000 đồng. **D.** 6750000 đồng.

Lời giải

Gọi phương trình parabol $(P): y=ax^2+bx+c$. Do tính đối xứng của parabol nên ta có thể chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho (P) có đỉnh $I\in Oy$ (như hình vẽ).



Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{9}{4}=c,(I\in(P))\\ \frac{9}{4}a-\frac{3}{2}b+c=0(A\in(P))\\ \frac{9}{4}a+\frac{3}{2}b+c=0(B\in(P))\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=\frac{9}{4}\\ a=-1\\ b=0\end{cases}$.

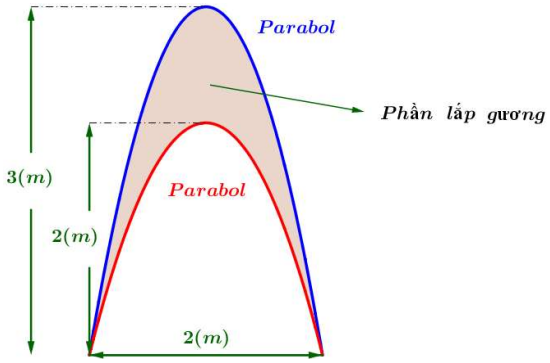
Vậy $(P): y=-x^2+\frac{9}{4}$.

Dựa vào đồ thị, diện tích cửa parabol là:

$$S=\int_{\frac{-3}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(-x^2+\frac{9}{4}\right)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{3}{2}}\left(-x^2+\frac{9}{4}\right)\mathrm{d}x=2\left(\frac{-x^3}{3}+\frac{9}{4}x\right)\Big|_0^{\frac{9}{4}}=\frac{9}{2}\mathrm{m}^2.$$

Số tiền phải trả là: $\frac{9}{2}.1500000=6750000$ đồng

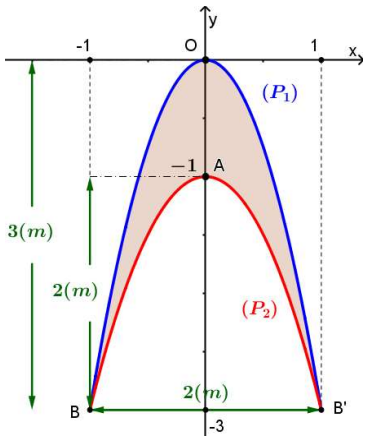
Câu 5: Một tòa nhà có 8 cửa sổ vòm cần lắp một phần gương như hình minh họa ở bên. Biết kinh phí để lắp gương là 750.000 đồng $/1m^2$. Hỏi chủ nhà cần bao nhiêu tiền để lắp gương cho các phần của 8 cửa sổ?



A. 8.000.000 đồng. **B.** 2.000.000 đồng. **C.** 5.000.000 đồng. **D.** 4.000.000 đồng.

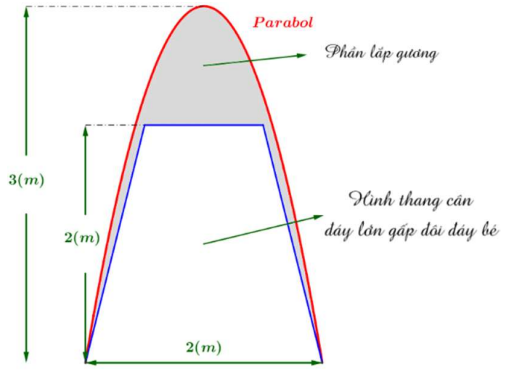
Lời giải

Chọn A



- Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ; $O(0;0)$, $A(0;-1)$, $B(-1;-3)$, $B'(1;-3)$.
- Phương trình hai parabol $(P_1): y=-3x^2$, $(P_2): y=-2x^2-1$.
- Diện tích phần lắp kính: $S=\int_{-1}^{1}\left|y_{P_1}-y_{P_2}\right|.dx=2.\int_{0}^{1}\left|x^2-1\right|.dx=\frac{4}{3}\left(m^2\right)$.
- Vậy số tiền lắp gương cho các phần của 8 cửa sổ bằng: $8.\frac{4}{3}.750000=8000000$ (đ).

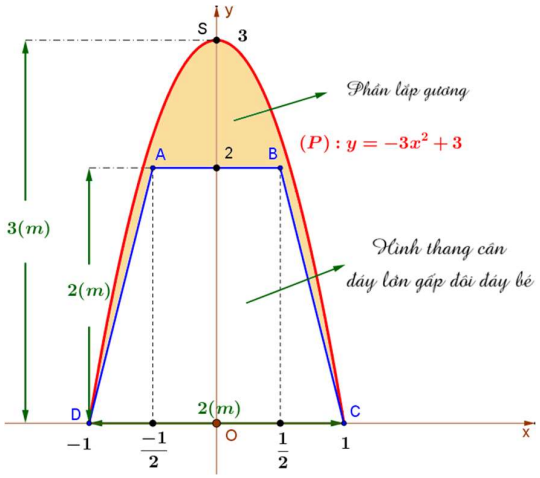
Câu 6: Một tòa nhà có 8 cửa sổ vòm cần lắp một phần gương như hình minh họa ở bên. Biết kinh phí để lắp gương là 750.000 đồng $/1m^2$. Hỏi chủ nhà cần bao nhiêu tiền để lắp gương cho các phần của 8 cửa sổ?



A. $6.000.000$ đồng. **B.** $2.250.000$ đồng. **C.** 750.000 đồng. **D.** $3.000.000$ đồng.

Lời giải

Chọn A



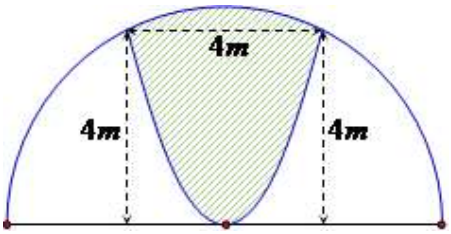
• Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ; $S(0;3)$, $C(1;0)$, $D(-1;0) \Rightarrow (P): y = -3x^2 + 3$.

• Diện tích phần lắp kính: $S = \int_{-1}^{1} \left(-3x^2 + 3\right).dx - S_{ABCD} = 4 - \frac{1}{2}(2+1)2 = 1\left(m^2\right)$.

• Vậy số tiền lắp gương cho các phần của 8 cửa sổ bằng: $8.1.750000 = 6000000$ (đ).

Câu 7: Một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính bằng $4\sqrt{5}$ (m). Trên đó người thiết kế hai phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm nửa hình tròn và hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu), cách nhau một khoảng bằng 4(m), phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ và kinh phí để trồng cỏ Nhật Bản là 100.000

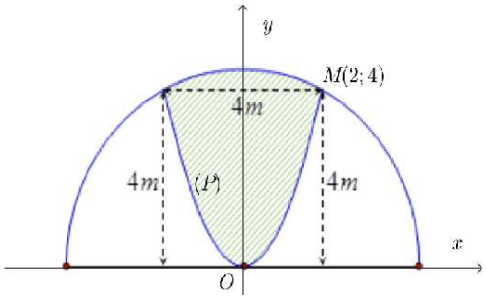
đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cỏ Nhật Bản trên phần đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)



A. 3.895.000 (đồng). **B.** 1.948.000 (đồng). **C.** 2.388.000 (đồng). **D.** 1.194.000 (đồng).

Lời giải

Chọn B



Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó phương trình nửa đường tròn là $y=\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2-x^2}=\sqrt{20-x^2}$.

Phương trình parabol (P) có đỉnh là gốc O sẽ có dạng $y=ax^2$. Mặt khác (P) qua điểm $M(2;4)$ do đó: $4=a(-2)^2\Rightarrow a=1$.

Phần diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (P) và nửa đường tròn.(phần tô màu)

Ta có công thức $S_1=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{20-x^2}-x^2\right)dx\cong 11,94m^2$.

Vậy phần diện tích trồng cỏ là $S_{trongco}=\frac{1}{2}S_{hinhtron}-S_1\approx 19,47592654$

Vậy số tiền cần có là $S_{trongxo}\times 100000\approx 1.948.000$ (đồng).đồng.

CHƯƠNG 4. SỐ PHỨC

BÀI 1. SỐ PHỨC

1. Số i

$x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$. Với $-1=i^2$ **với** i là đơn vị ảo

2. Định nghĩa số phức: Số phức là số có dạng $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$, i là đơn vị ảo, tức là $i^2=-1$

a gọi là phần thực của z

b gọi là phần ảo của z

Tập hợp các số phức kí hiệu là $\mathbb{C}$

3. Số phức bằng nhau

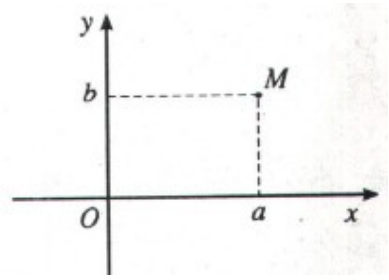
Hai số phức được gọi là bằng nhau nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau

$z_1=a_1+b_1i, z_2=a_2+b_2i$

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=a_2 \\ b_1=b_2 \end{cases}$$

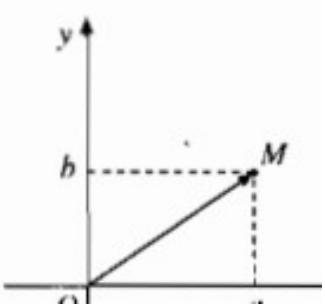
4. Biểu diễn hình học số phức

Điểm $M(a,b)$ trong hệ trục tọa độ vuông góc của mặt phẳng được gọi là điểm biểu diễn số phức $z=a+bi$



5. Mô đun của số phức

Giả sử số phức $z=a+$ bi được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$ trên mặt phẳng toạ độ (H.69).



Độ dài của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là môđun của số phức z và kí hiệu là $|z|$.

$|z|=|\overrightarrow{OM}|$ hay $|a+bi|=|\overrightarrow{OM}|$

Dễ thấy : $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$.

6. Số phức liên hợp

Cho số phức $z=a+bi$. Khi đó số phức $\overline{z}=a-bi$ gọi là số phức liên hợp của z.

Từ định nghĩa ta có :

$$\overline{\overline{z}}=z; \quad |\overline{z}|=|z|.$$

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

BÀI 2. CỘNG, TRỪ, NHÂN SỐ PHỨC

1. Phép cộng và phép trừ

Cho $z_1 = a+bi, z_2 = c+di$. Khi đó

$z_1 + z_2 = (a+b)+(c+d)i$

$z_1 - z_2 = (a-b)+(c-d)i$

2. Phép nhân

$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$

BÀI 3. PHÉP CHIA SỐ PHỨC

1. Tổng và tích của hai số phức liên hiệp

Cho $z = a+bi, (a,b \in \mathbb{R})$. Lúc đó : $\overline{z} = a-bi, (a,b \in \mathbb{R})$

$z+\overline{z} = 2a, z.\overline{z} = a^2+b^2$

2. Phép chia số phức

Cho $z_1 = a+bi, z_2 = c+di$. Khi đó

$$\frac{c+di}{a+bi} = \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+b^2}i$$

Dạng 1. Phần Thực – Phần Ảo & Các Phép Toán

1. Phương pháp

Số phức $z = a+bi$ với $a,b \in \mathbb{R}$ có a là phần thực, b là phần ảo.

- Số phức liên hợp của số phức $z = a+bi$ kí hiệu $\overline{z}$ là $\overline{z} = a-bi$.
- Môđun của số phức $z = a+bi$, kí hiệu là $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

- Hai số phức $z_1 = a_1+b_1i$ và $z_2 = a_2+b_2i$ bằng nhau khi và chỉ khi $\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$.

Phép cộng và phép trừ

Cho $z_1 = a+bi, z_2 = c+di$. Khi đó

$z_1 + z_2 = (a+b)+(c+d)i$

$z_1 - z_2 = (a-b)+(c-d)i$

Phép nhân

$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$

Phép chia số phức

Cho $z_1 = a+bi, z_2 = c+di$. Khi đó $\frac{c+di}{a+bi} = \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+b^2}i$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Tìm phần thực và phần ảo của các số phức $(2-3i)(3+i)$

Lời giải.

$(2-3i)(3+i)=6+2i-9i-3i^2=(6+3)+(2-9)i=9-7i$

Vậy phần thực là 9, phần ảo là -7

Ví dụ 2: Phân tích a^2+1 tành nhân tử.

Lời giải.

$a^2+1=a^2-(i^2)=(a-i)(a+i)$

Ví dụ 3: Tìm các số thực x và y thỏa mãn điều kiện $(2x+1)+(3y-2)i=(x+2)+(y+4)i$

Hướng dẫn giải

Ta có

$$(2x+1)+(3y-2)i=(x+2)+(y+4)i \Leftrightarrow \begin{cases}2x+1=x+2\\3y-2=y+4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}.$$

Ví dụ 4: Tính $(1+i)^2-(1-i)^2$ là:

Lời giải.

$(1+i)^2-(1-i)^2=(1+2i+i^2)-(1-2i+i^2)=4i$

Ví dụ 5: Có tất cả bao nhiêu cặp số thực $(x;y)$ để hai số phức

$z_1=9y^2-4-10xi^5, z_2=8y^2+20i^{11}$ là hai số phức liên hợp của nhau?

Hướng dẫn giải

Ta có

$$z_1=\overline{z_2} \Leftrightarrow 9y^2-4-10xi^5=8y^2-20i^{11} \Leftrightarrow 9y^2-4-10xi=8y^2+20i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}9y^2-4=8y^2\\-10x=20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\y=\pm 2\end{cases}.$$

Vậy có hai cặp số thỏa mãn: $(-2;-2);(-2;2)$.

Nhận xét:

$i^{4k}=1; i^{4k+1}=i; i^{4k+2}=-1; i^{4k+3}=-i.$

Với mọi $k\in\mathbb{N}$. *Do đó:* $i^5=i; i^{11}=-i.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Phần thực và phần ảo của các số phức $(4i)+(2+3i)(5+i)$ là:

A. 1 và 1 **B.** 1 và 2 **C.** 2 và 1 **D.** 2 và 3

Lời giải.

Chọn A

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

$(4i)+(2+3i)(5+i)=(4+2-5)+(-1+3-1)i=1+i$

Câu 2: Phần thực và phần ảo của các số phức $(2-3i)-\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{4}i\right)$ là:

A. $\frac{8}{3}$ và $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{12}{3}$ và $\frac{1}{6}$ **C.** $\frac{4}{3}$ và $-\frac{7}{4}$ **D.** $\frac{1}{8}$ và $\frac{9}{2}$

Lời giải.

Chọn C

$(2-3i)-\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{4}i\right)=\left(2-\frac{2}{3}\right)+\left(-3+\frac{5}{4}\right)i=\frac{4}{3}-\frac{7}{4}i$

Câu 3: Phần thực và phần ảo của các số phức $\frac{1+i}{1-i}$ là:

A. 1 và 0 **B.** 2 và 0 **C.** 0 và 2 **D.** 0 và 1

Lời giải.

Chọn D

$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}^2}=\frac{2\mathrm{i}}{2}=\mathrm{i}$

Câu 4: Phần thực và phần ảo của các số phức $\frac{a+i\sqrt{b}}{i\sqrt{a}}$ là:

A. $\sqrt{\frac{b}{a}}$ và $-\sqrt{a}$ **B.** $\sqrt{\frac{2a}{b}}$ và $-\sqrt{a}$ **C.** $-\sqrt{\frac{b}{a}}$ và $\sqrt{a}$ **D.** $-\sqrt{\frac{2a}{b}}$ và $\sqrt{a}$

Lời giải.

Chọn A

$\frac{a+i\sqrt{b}}{i\sqrt{a}}=\frac{\left(a+i\sqrt{b}\right)\left(-i\sqrt{a}\right)}{-i^2a}=\frac{-ia\sqrt{a}+\sqrt{ab}}{a}=\sqrt{\frac{b}{a}}-i\sqrt{a}$

Câu 5: Kết quả của phép tính $(2+i)^3-(3-i)^3$ là:

A. $-6+33i$ **B.** $5+27i$ **C.** $-7+24i$ **D.** $-16+37i$

Lời giải.

Chọn D

$(2+i)^3-(3-i)^3=\left(8+12i+6i^2+i^3\right)-\left(27-27i+9i^2-i^3\right)$

$=2+11i-(18-26i)=-16+37i$

Câu 6: Kết quả của phép tính $(2-i)^6$ là:

A. $-1-44i$ **B.** $-117-44i$ **C.** $-17+24i$ **D.** $-112-25i$

Lời giải.

Chọn B

$(2-i)^6=\left[(2-i)^3\right]^2=(2-11i)^2=-117-44i$

Câu 7: Kết quả của phép tính $(1-i)^{100}$ là:

A. -2^{25} **B.** -2^{50} **C.** 2^{50} **D.** 2^{25}

Lời giải.

Chọn B

$(1-i)^{100}=\left[(1-i)^2\right]^{50}=(-2i)^{50}=-2^{50}$

Chú ý: $i^{2n}=-1, n\in\mathbb{N}^*$

Câu 8: Cho số phức $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$. Phần thực và phần ảo của số phức $z^2-2z+4i$ là:

A. x^2-2y^2-2y và $3xy+2y+3$ **B.** x^2+2y^2-2x và $2xy-2y+4$

C. x^2-y^2+5x và $2xy+2x-1$ **D.** x^2+4y^2+2x và $2xy+y-4$

Lời giải.

Chọn B

$z^2-2z+4i=(x+yi)^2-2(x+yi)+4i=(x^2+2xyi-y^2)-2x-2yi+4i$

$=(x^2-y^2-2x)+(2xy-2y+4)i$

Câu 9: Phân tích a^2+1 tành nhân tử. Chọn đáp án đúng:

A. $-(a-2i)(a+2i)$ **B.** $(a-2i)(a+2i)$ **C.** $(a-i)(a+i)$ **D.** $-(a-i)(a+i)$

Lời giải.

Chọn C

$a^2+1=0\Leftrightarrow a^2-(i^2)=0\Leftrightarrow(a-i)(a+i)=0$

Câu 10: Phân tích $2a^2+3$ tành nhân tử. Chọn đáp án đúng:

A. $\left(\sqrt{2}a-\sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{2}a+\sqrt{3}i\right)$ **B.** $\left(\sqrt{2}a+\sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{2}a+\sqrt{3}i^2\right)$

C. $-\left(\sqrt{2}a-\sqrt{3}i^2\right)\left(\sqrt{2}a+\sqrt{3}i^2\right)$ **D.** $\left(\sqrt{2}a^2-\sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{2}a^2+\sqrt{3}i\right)$

Lời giải.

Chọn A

$2a^2+3=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}a\right)^2-\left(\sqrt{3}i\right)^2=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}a-\sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{2}a+\sqrt{3}i\right)=0$

Câu 11: Phân tích $4a^4+9b^2$ tành nhân tử. Chọn đáp án đúng:

A. $-\left(2a^2-9b^2i\right)\left(2a^2+9b^2i\right)$ **B.** $\left(2a^2-9b^2i\right)\left(2a^2+9b^2i\right)$

C. $-\left(2a^2-9bi\right)\left(2a^2+9bi\right)$ **D.** $\left(2a^2-9bi\right)\left(2a^2+9bi\right)$

Lời giải.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh muacác trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham giacác lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp quaSĐT:0834 332 133

Chọn D

$4a^4+9b^2=\left(2a^2\right)^2-\left(9bi\right)^2=\left(2a^2-9bi\right)\left(2a^2+9bi\right)=0$

Câu 12: Phân tích a^4+16 tành nhân tử. Chọn đáp án đúng:

A. $\left(a^2-4i\right)\left(a^2+4i\right)$ **B.** $\left(a^2-16i\right)\left(a^2+16i\right)$

C. $-\left(a^2-4i\right)\left(a^2+4i\right)$ **D.** $\left(a^4-4i\right)\left(a^4+4i\right)$

Lời giải.

Chọn A

$a^4+16=\left(a^2\right)^2-\left(4i\right)^2=\left(a^2-4i\right)\left(a^2+4i\right)$

Câu 13: Nếu $z=x+yi$ và a là số thực thì z^2+a^2 bằng:

A. $\left(x-ai\right)\left(y+ai\right)$ **B.** $\left(z-ai\right)\left(z+ai\right)$ **C.** $\left(y-ai\right)\left(y+ai\right)$ **D.** $\left(x+y\right)\left(z-i\right)$

Lời giải.

Chọn B

Ta có $z^2+a^2=z^2-\left(ai\right)^2=\left(z-ai\right)\left(a+ai\right)$

Câu 14: Số phức liên hợp của $a+bi$ là

A. $-\left(a+bi\right)$ **B.** $a-bi$ **C.** $a-\left(-b\right)i$ **D.** $-a+bi$

Lời giải.

Chọn B

Số phức liên hiệp của $a+bi$ là $a+\left(-b\right)i=a-bi$

Câu 15: Cho số phức z thỏa mãn: $(2+i)z+\dfrac{2(1+2i)}{1+i}=7+8i\,(1)$. Tìm môđun của số phức $\omega=z+1+i$

A. $\sqrt{5}$ **B.** 5 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** 3

Lời giải.

Chọn B

Giả sử $z=a+bi$

$(1)\Leftrightarrow(2+i)(a+bi)+\dfrac{2(1+2i)}{1+i}=7+8i$

$\Leftrightarrow 2a+2bi+ai+bi^2+\dfrac{2(1+2i)(1-i)}{1+i^2}=7+8i$

$\Leftrightarrow 2a+2bi+ai-bi+1-i+2i-2i^2=7+8i\Leftrightarrow\begin{cases}2a-b+3=7\\2b+a+1=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}$

Do đó $\omega=3+2i+1+i=4+3i\Rightarrow|\omega|=\sqrt{16+9}=5$.

Câu 16: Tìm phần ảo của số phức z, biết $\overline{z}=\left(\sqrt{2}+i\right)^2\left(1-\sqrt{2}i\right)$

A. $\sqrt{7}$ **B.** $\sqrt{5}$ **C.** $-\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{2}$

Lời giải.

Chọn C

Ta có: $\overline{z}=\left(\sqrt{2}+i\right)^2\left(1-\sqrt{2}i\right)=\left(1+2\sqrt{2}i\right)\left(1-\sqrt{2}i\right)=5+\sqrt{2}i\Leftrightarrow z=5-\sqrt{2}i$

$\Rightarrow$ Phần ảo của số phức z là $-\sqrt{2}$

Dạng 2: Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện

1. Phương pháp

Bước 1: Đặt $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$

Bước 2: Từ giả thiết suy ra các $\overline{z}$ là $\overline{z}=a-bi$, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Bước 3: Thay vào đề bài, giải hệ phương trình tìm được a,b

2. Các ví dụ

Ví dụ 1 : Tìm số phức z biết: $\overline{z}+3z=\left(3-2i\right)^2\left(2+i\right)(1)$

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi$, ta có:

$(1)\Leftrightarrow a-bi+3a+3bi=\left(9-12i+4i^2\right)\left(2+i\right)=\left(5-12i\right).\left(2+i\right)$

$\Leftrightarrow 4a+2bi=10-24i+5i-12i^2=22-19i\Leftrightarrow a=\frac{11}{12};b=\frac{-19}{2}.$

Vậy $z=\frac{11}{2}-\frac{19}{2}i$

Ví dụ 2 : Tìm số phức z thỏa mãn $z+1+3i-|z|i=0$.

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi$, ta có:

$z+1+3i-|z|i=0$

$\Leftrightarrow a+1+\left(b+3-\sqrt{a^2+b^2}\right)i=0\Leftrightarrow\begin{cases}a+1=0\\b+3=\sqrt{a^2+b^2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\\begin{cases}b\geq -3\\(b+3)^2=1+b^2\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-\frac{4}{3}\end{cases}$

Ví dụ 3 : Cho số phức z thỏa mãn $|z|-2\overline{z}=-7+3i+z$. Tính $|z|$.

Hướng dẫn giải

Gọi $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$.

$$|z|-2\bar{z}=-7+3i+z\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}-2(a-bi)=-7+3i+a+bi\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}-2a=-7+a\\2b=3+b\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=3\\\sqrt{a^2+9}=3a-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=3\\3a-7\ge 0\\a^2+9=(3a-7)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=3\end{cases}\Rightarrow z=4+3i\Rightarrow|z|=5.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tính môđun của số phức z biết: $(2z-1)(1+i)+(\bar{z}+1)(1-i)=2-2i\,(1)$

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Lời giải.

Chọn C

$(1)\Leftrightarrow(2a+2bi-1))(1+i)+(a-bi+1)(1-i)=2-2i$

$\Leftrightarrow 2a+2ai+2bi+2bi^2-1-i+a-ai-bi+bi^2+1-i=2-2i$

$\Leftrightarrow 3a-3ba+ai+bi-2i=2-2i$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3a-3b=2\\a+b-2=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{3}\\b=\frac{-1}{3}\end{cases}$ Suy ra $|z|=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$

Câu 2: Tìm phần ảo của z biết: $z+3\bar{z}=(2+i)^3(2-i)(1)$

A. -5 **B.** -10 **C.** -15 **D.** 10

Lời giải.

Chọn B

Giả sử $z=a+bi$

$(1)\Leftrightarrow a+bi+3a-3bi=(8+12i+6i^2+i^3)(2-i)=(2+11i).(2-i)$

$\Leftrightarrow 4a-2bi=4-2i+22i-11i^2=20i+15\Leftrightarrow a=\frac{15}{4};b=-10.$

Vậy phần ảo của z bằng -10

Câu 3: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo

A. 1 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 5

Lời giải.

Chọn B

Đặt $z=a+bi$ (với $a,b\in\mathbb{R}$) $\Rightarrow z^2=a^2-b^2+2abi$

Từ giả thiết ta có hệ phương trình $\begin{cases}a^2-b^2=0\\a^2+b^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=1\\b^2=1\end{cases}$

Vậy: $z_1=1+i, z_2=1-i, z_3=-1+i, z_4=-1-i$

Câu 4: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(2-3i)z+(4+i)\overline{z}=-(1+3i)^2$. Tìm phần thực và phần ảo của z.

A. -2 và -5 **B.** -2 và 5 **C.** 2 và 5 **D.** 2 và -5.

Lời giải.

Chọn B

Gọi $z=x+yi$ (với $x,y\in\mathbb{R}$)

Ta có $(2-3i)z+(4+i)\overline{z}=-(1+3i)^2$

$\Leftrightarrow (2-3i)(x+yi)+(4+i)(x-yi)=8-6i$

$\Leftrightarrow (6x+4y)-(2x+2y)i=8-6i$

$\Leftrightarrow \begin{cases}6x+4y=8\\2x+2y=6\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\y=5\end{cases}$

Vậy phần thực của z là -2 và phần ảo của z là 5

Dạng 3. Biểu diễn số phức

1. Phương pháp

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, số phức $z=a+bi$ có điểm biểu diễn là $M(a;b)$.

Chú ý:

- Ta có: $OM=|z|$.
- Nếu z_1,z_2 có các điểm biểu diễn lần lượt là M_1,M_2 thì $M_1M_2=|z_1-z_2|$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)\overline{z}-1-3i=0$. Điểm M biểu diễn số phức z trong hệ tọa độ Oxy có tọa độ nhiêu ?

Lời giải.

Ta có: $\overline{z}=\dfrac{1+3i}{1+i}=2+i\Rightarrow z=2-i\Rightarrow M(2;-1)$.

Ví dụ 2: Cho số phức z thỏa mãn $z-(1+i)\overline{z}=(1-2i)^2$. Điểm M biểu diễn số phức z trong hệ tọa độ Oxy có tọa độ nhiêu ?

Lời giải.

Gọi $z=x+yi; x,y\in\mathbb{R}$. Từ giả thiết cho ta:

$a+bi-(1+i)(a-bi)=-3-4i\Leftrightarrow -b+(2b-a)i=-3-4i$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-b=-3\\2b-a=-4\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=10\\b=3\end{cases}\Rightarrow M(10;3)$

Ví dụ 3: Gọi A,B,C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1=2,\ z_2=4i,\ z_3=2+4i$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Tính diện tích tam giác ABC

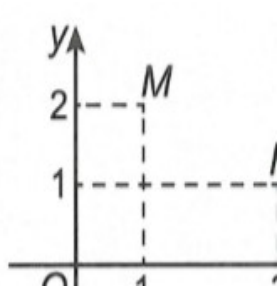
Lời giải.

Ta có $A(2;0),B(0;4),C(2;4)$ suy ra $\overrightarrow{AC}=(0;4);\overrightarrow{BC}=(2;0)\Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}=0.$

Do đó tam giác ABC là tam giác vuông tại C.

Suy ra $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}CA.CB=\frac{1}{2}.4.2=4.$

Ví dụ 4: Cho hai điểm M,N trong mặt phẳng phức như hình bên. Gọi P là điểm sao cho $OMPN$ là hình bình hành. Điểm P biểu thị cho số phức nào trong các số phức sau?



Lời giải.

Cách 1: Giả sử $P(x;y)$. Ta có: $\overrightarrow{MP}=(x-1;y-2);\overrightarrow{ON}=(3;1).$

Tứ giác $OMPN$ là hình bình hành khi $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{ON}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=3\\y-2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}.$

Suy ra, $P(4;3)$ là điểm biểu diễn số phức $z=4+3i.$

Cách 2: Ta có: $M(1;2),N(3;1)\Rightarrow I\left(2;\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng MN.

Tứ giác $OMPN$ là hình bình hành nên I là trung điểm OP. Suy ra $P(4;3)$, là điểm biểu diễn số phức $z=4+3i$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho số phức z thỏa mãn $z=(3+2i)(2-3i)+(1+i)^2-8$. Điểm M biểu diễn số phức z trong hệ tọa độ Oxy có tọa độ là:

A. $M(4;-3)$ **B.** $M(4;3)$ **C.** $M(-4;3)$ **D.** $M(-4;-3)$

Lời giải.

Chọn A

Ta có $z=6-9i+4i-6i^2+t^2+2i+1-8=4-3i\Rightarrow M(4;-3).$

Câu 2: Cho số phức z thỏa mãn $z=(1+i)(3-2i)+\frac{1}{3+i}$. Điểm M biểu diễn số phức z trong hệ tọa độ Oxy có tọa độ là:

A. $M\left(\frac{53}{10};-\frac{9}{10}\right)$ **B.** $M\left(-\frac{53}{10};-\frac{9}{10}\right)$ **C.** $M\left(\frac{53}{10};\frac{9}{10}\right)$ **D.** $M\left(\frac{-53}{10};\frac{9}{10}\right)$

Lời giải.

Chọn C

Ta có $z=3-2i+3i-2i^2+\frac{3-i}{\sqrt{3^2+1}}=\frac{53}{10}+\frac{9}{10}i\Rightarrow M\left(\frac{53}{10};\frac{9}{10}\right)$.

Câu 3: Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)\overline{z}-1-3i=0$. Điểm M biểu diễn số phức z trong hệ tọa độ Oxy có tọa độ là:

A. $M(2;1)$ **B.** $M(2;-1)$ **C.** $M(-1;2)$ **D.** $M(-2;-1)$

Lời giải.

Chọn B

Ta có: $\overline{z}=\frac{1+3i}{1+i}\Leftrightarrow\overline{z}=2+i\Rightarrow z=2-i\Rightarrow M(2;-1)$

Câu 4: Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)z=4-3i$. Điểm M biểu diễn số phức z trong hệ tọa độ Oxy có tọa độ là:

A. $M(1;-2)$ **B.** $M(1;2)$ **C.** $M(-1;2)$ **D.** $M(-1;-2)$

Lời giải.

Chọn A

Ta có $z=\frac{4-3i}{2+i}=1-2i\Rightarrow M(1;-2)$

Câu 5: Cho số phức z thỏa mãn $\frac{z}{1+i}=\overline{z}-\frac{1}{2}(3+i)$. Điểm M biểu diễn số phức z trong hệ tọa độ Oxy có tọa độ là:

A. $M(-4;1)$ **B.** $M(4;-1)$ **C.** $M(-4;-1)$ **D.** $M(4;1)$

Lời giải.

Chọn D

Gọi $z=a+bi;a,b\in\mathbb{R}$. Từ giả thiết cho ta:

$$\frac{a+bi}{1+i}=a-bi-\frac{1}{2}(3+i)\Leftrightarrow(a+b)+(-a+b)i=2a-3+(-2b-1)i\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=1\end{cases}\Rightarrow M(4;1)$$

Câu 6: Cho số phức z thỏa mãn $\overline{z}+2z=3-2i$. Điểm M biểu diễn số phức z trong hệ tọa độ Oxy có tọa độ là:

A. $M(1;2)$ **B.** $M(-1;2)$ **C.** $M(1;-2)$ **D.** $M(-1;-2)$

Lời giải.

Chọn C

Gọi $z=a+bi;a,b\in\mathbb{R}$. Từ giả thiết cho ta:

$$(a-bi)+2(a+bi)=3-2i\Leftrightarrow 3a+bi=3-2i\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\end{cases}\Rightarrow M(1;-2)$$

Câu 7: Trên mặt phẳng phức, nếu A(1;2) thì điểm B đối xứng qua trục tung của A là điểm biểu diễn của số phức:

A. $2+i$ **B.** $2-i$ **C.** $-1+2i$ **D.** $-2-i$

Lời giải.

Chọn C

Câu 8: Trên mặt phẳng phức, tập hợp các số $z=x+yi$ sao cho z^2 là số thực được biểu diễn bởi:

A. Đường có phương trình $xy=0$

B. Đường có phương trình $x=0$

C. Đường có phương trình $y=0$

D. Nửa mặt phẳng bờ là Ox.

Lời giải.

Chọn A

Ta có $z^2=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$.

Như thế, z^2 là số thực khi và chỉ khi $xy=0$

Câu 9: Cho các số phức $z_1=1;z_2=2+2i,z_3=-1+3i$ được biểu diễn trong mặt phẳng tọa độ Oxy là M,N,P, các điểm này lần lượt là trung điểm của ba cạnh tam giác EFH. Tọa độ trọng tâm G của tam giác EFH là:

A. $(2;3)$ **B.** $(3;2)$ **C.** $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ **D.** $\left(\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right)$

Lời giải.

Chọn D

$M(1;0),N(2;2),P(-1;3)$ là điểm biểu diễn các số phức trên.

Hai tam giác EFH và MNP có 3 trung tuyến trùng nhau từng đôi một nên có cùng trọng tâm G.

$$\Rightarrow\begin{cases}x_G=\frac{1+2-1}{3}=\frac{2}{3}\\y_G=\frac{0+2+3}{3}=\frac{5}{3}\end{cases}\Rightarrow G\left(\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right)$$

Câu 10: Cho 2 số phức $z_1=-3+4i$ và $z_2=7+2i$ được biểu diễn trong mặt phẳng tọa độ Oxy là hai điểm M và N. Đường tròn đường kính MN có phương trình là:

A. $x(x+3)+y(y-4)=0$ **B.** $x(x-3)+y(y+4)=0$

C. $(x-2)^2+(y-3)^2=26$ **D.** $(x-2)^2+(y-3)^2=16$

Lời giải.

Chọn C

Trong mặt phẳng oxy 2 điểm $M(-3;4), N(7;2) \Rightarrow$ Tâm $I(2;3)$

Bán kính $R=\frac{MN}{2}=\frac{\sqrt{104}}{2}=\sqrt{26} \Rightarrow (C):(x-2)^2+(y-3)^2=26$

Câu 11: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm M là điểm biểu diễn của số phức $z=4+2i$. Phương trình đường trung trực của đoạn OM là:

A. $x+2y+5=0$ **B.** $2x+y-5=0$ **C.** $x-2y+5=0$ **D.** $2x+y+5=0$

Lời giải.

Chọn B

Gọi (Δ) là trung trực của đoạn OM

$\Rightarrow (\Delta)$ qua trung điểm I của $OM \Rightarrow I(2;1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\overrightarrow{OM}=(4;2)$

$\Rightarrow (\Delta):4(x-2)+2(y-1)=0 \leftrightarrow 4x+2y-10=0 \Leftrightarrow 2x+y-5=0$

Câu 12: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm M,N,P là điểm biểu diễn của 3 số phức: $z_1=8+3i; z_2=1+4i; z_3=5+xi$. Với giá trị nào của x thì tam giác MNP vuông tại P?

A. 1 và 2 **B.** 0 và 7 **C.** -1 và -7 **D.** 3 và 5

Lời giải.

Chọn B

Ta có 3 điểm $M(8;3), N(1;4), P(5;x)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MP}=(-3;x-3); \overrightarrow{NP}=(4;x-4)$

Để ΔMNP vuông tại $P \Leftrightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{NP}=0 \Leftrightarrow -12+(x-3)(x-4)=0 \Leftrightarrow x=0; x=7$

Câu 13: Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác MNP có M, N,P là điểm biểu diễn của số phức $z_1=1+2i; z_2=-3+i; z_3=x+yi$ và O là trọng tâm. Tọa độ đỉnh P là:

A. $(3;-2)$ **B.** $(2;-3)$ **C.** $(2;1)$ **D.** $(1;-3)$

Lời giải.

Chọn B

$M(1;2),\ N(-3;1),\ P(x_p;y_p)$

O là trọng tâm tam giác MNP

$\Rightarrow \begin{cases} x_M+x_N+x_P=3x_O \\ y_M+y_N+y_P=3y_O \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-3+x_p=0 \\ 2+1+y_p=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_p=2 \\ y_p=-3 \end{cases}$. Vậy $P(2;-3)$

Câu 14: Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm M, N. là điểm biểu diễn của số phức $z_1=m+2i; z_2=4-2i$ Nếu $MN=5$ thì tất cả các giá trị của m là:

A. 1 và 7 **B.** 7 **C.** -1 và -7 **D.** $(1;-3)$

Lời giải.

Chọn A

$M(m;2),\ N(4;-2)$

$MN=5 \Leftrightarrow MN^2=25$

$\Leftrightarrow (4-m)^2+16=25 \Leftrightarrow 16-8m+m^2=25$

$\Leftrightarrow m^2-8m+7=0 \Leftrightarrow m=1,\ m=7$

Dạng 4. Tập hợp

1. Phương pháp

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, số phức $z=a+bi$ có điểm biểu diễn là $M(a;b)$.

Thay $z=x+yi$ vào giả thiết, đưa về phương trình đường thẳng, đường tròn, parabol hay elip đã được học ở lớp 10

Chú ý: Nếu z_1,z_2 có các điểm biểu diễn lần lượt là M_1,M_2 thì $M_1M_2=|z_1-z_2|$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho các số phức z thỏa mãn $|zi-(2+i)|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn. Tâm I của đường tròn đó.

Lời giải.

Chọn A

Gọi số phức $z=x+yi;x,y\in\mathbb{R}$. Từ giả thiết ta có:

$|zi-(2+i)|=2 \Leftrightarrow |-y-2+(x-1)i|=2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=4 \Rightarrow I(1;-2)$

Ví dụ 2: Cho các số phức z thỏa mãn $|z+\bar{z}+3|=4$. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z trong mặt phẳng Oxy

.

Lời giải.

Gọi số phức $z=x+yi;x,y\in\mathbb{R}$. Từ giả thiết ta có:

$|x+yi+x-yi+3|=4 \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2}=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=5 \end{array}\right.$.

Tập hợp các điểm bểu diễn số phức z là hai đường thẳng $x=-1, x=5$

Ví dụ 3: Cho các số phức z thỏa mãn phần thực thuộc $[0;3]$ và phần ảo thuộc đoạn $[-2;4]$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z

Lời giải.

Gọi $z=x+yi, z, y\in\mathbb{R}$. Từ giả thiết ta có $\begin{cases}0\le x\le 3\\ -2\le y\le 4\end{cases}$ nên suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là miền trong của hình chữ nhật có bốn đỉnh là giao của $x=0, x=3, y=-2, y=4$.

Ví dụ 4: Cho các số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|\leqslant 2$. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z

Lời giải.

Gọi $z=x+yi, z, y\in\mathbb{R}$. Ta có $|x+yi-1+2i|\le 2\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2\le 4$

Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là hình tròn tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R=2$

Ví dụ 5: Tìm tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-4i|+|z+4i|=10$ là

Lời giải.

Xét hệ thức: $|z-4i|+|z+4i|=10$

Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$. Lúc đó

$(4)\Leftrightarrow\sqrt{x^2+(y-4)^2}+\sqrt{x^2+(y+4)^2}=10\Leftrightarrow\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

Vậy tập hợp điểm M là đường elip có hai tiêu điểm là $F_1(0;4); F_2(0;-4)$ và độ dài trục lớn là 16.

Ví dụ 6: Cho các số phức z thỏa mãn $|z-2i^{2020}|=|\bar{z}-1+2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=2\bar{z}-1+4i$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Tính khoảng cách từ $I(2;-3)$ đến đường thẳng đó

Hướng dẫn giải

Giả sử $z=a+bi\ (a;b\in\mathbb{R})$ và $w=x+yi\ (x;y\in\mathbb{R})$.

Ta có $|z-2i^{2020}|=|\bar{z}-1+2i|\Leftrightarrow|a+bi-2(i^2)^{1010}|=|a-bi-1+2i|$

$\Leftrightarrow\sqrt{(a-2)^2+b^2}=\sqrt{(a-1)^2+(2-b)^2}\Leftrightarrow 2a-4b+1=0(1).$

Theo giả thiết: $w=2\bar{z}-1+4i\Leftrightarrow x+yi=2(a-bi)-1+4i\Leftrightarrow x+yi=2a-1+(4-2b)i.$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2a-1\\ y=4-2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{x+1}{2}\\ b=\frac{4-y}{2}\end{cases}(2).$

Thay (2) vào (1) ta được: $2.\frac{x+1}{2}-4.\frac{4-y}{2}+1=0\Leftrightarrow x+2y-6=0(\Delta).$

Vậy: $d(I,\Delta)=\frac{10\sqrt{5}}{5}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho các số phức z thỏa mãn $|z-1+i|=1$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn. Bán kính R của đường tròn đó là

A. $R=1$ **B.** $R=2$ **C.** $R=4$ **D.** $R=8$

Lời giải.

Chọn A

Gọi số phức $z=x+yi; x,y\in\mathbb{R}$. Từ giả thiết ta có:

$$|z-1+i|=1\Leftrightarrow|(x-1)+(y+1)i|=1\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+1)^2=1\Rightarrow R=1.$$

Câu 2: Cho các số phức z thỏa mãn $|z-\bar{z}+1-i|=2$.

A. Đường thẳng **B.** Đường tròn **C.** E – líp **D.** Một điểm xác định.

Lời giải.

Chọn A

Gọi số phức $z=x+yi;\ x,y\in\mathbb{R}$. Từ giả thiết ta có:

$$|x+yi-(x+yi+1-i)|=2\Leftrightarrow|1+(2y-1)i|=2\Leftrightarrow\sqrt{1+(2y-1)^2}=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\\ y=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$$

Câu 3: Cho các số phức z thỏa mãn phần thực thuộc đoạn $[-2;1]$. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là:

A. Đường thẳng $x=-2$.

B. Đường thẳng $x=1$

C. Phần mặt phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x=-2$ và $x=1$.

D. Phần mặt phẳng không giới hạn bởi hai đường thẳng $x=-2$ và $x=1$.

Lời giải.

Chọn C

Câu 4: Cho các số phức z thỏa mãn $2\leqslant|z|\leqslant3$. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là:

A. Hình tròn. **B.** Hình quạt **C.** E – líp **D.** Hình vành khăn.

Lời giải.

Chọn D

Gọi $z=x+yi;\ x,y\in\mathbb{R}.$. Từ giả thiết ta có:

$2\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant3\Leftrightarrow4\leqslant x^2+y^2\leqslant9\Rightarrow$ Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn đồng tâm O có bán kính lần lượt là 2 và 3.

Câu 5: Quĩ tích các điểm M biểu diễn số phức $\omega = (1+i\sqrt{3})z+2$ biết số phức z thỏa mãn: $|z-1| \le 2$ (1).

A. Là đường tròn có bán kính 16 **B.** Là hình tròn tâm I(1,2)

C. Là đường tâm I (1,2) **D.** Là hình tròn bán kính 4

Lời giải.

Chọn D

Giả sử $\omega = a+bi$

Ta có $a+bi = (1+i\sqrt{3})z+2 \Leftrightarrow z = \dfrac{a-2+bi}{1+i\sqrt{3}} \Leftrightarrow z-1 = \dfrac{a-3+(b-\sqrt{3}i)}{1+i\sqrt{3}}$

$(1) \Leftrightarrow \left|\dfrac{a-3+(b-\sqrt{3})i}{1+i\sqrt{3}}\right| \le 2 \Leftrightarrow \dfrac{|a-3+(b-\sqrt{3})i|}{|1+i\sqrt{3}|} \le 2 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{(a-3)^2+(b-\sqrt{3})^2}}{2} \le 2$

$\Leftrightarrow (a-3)^2+(b-\sqrt{3})^2 \le 16$

Vậy quĩ tích các điểm M biểu diễn số phức là hình tròn $(x-3)^2+(y-\sqrt{3})^2 \le 16$ (kể cả những điểm nằm trên biên).

Câu 6: Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z sao cho $u = \dfrac{z+2+3i}{z-i}$ là một số thuần ảo. Là một đường tròn tâm $I(a;b)$. Tính tổng a + b

A. 2 **B.** 1 **C.** -2 **D.** 3

Lời giải.

Chọn C

Giả sử $z = x+yi(x,y \in \mathbb{R})$ có điểm $M(x;y)$ biểu diễn z trên mặt phẳng (Oxy).

Khi đó $u = \dfrac{z+2+3i}{z-i} = \dfrac{x+2+yi+3i}{x+(y-1)i} = \dfrac{[x+2+(y+3)i][x-(y-1)i]}{x^2+(y-1)^2}$

Từ số bằng: $x^2+y^2+2x+2y-3+2(2x-y+1)i$; u là số thuần ảo khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+2y-3=0 \\ x^2+(y-1)^2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2+(y+1)^2=5 \\ x^2+(y-1)^2 \ne 0 \end{cases}$$

Kết luận: Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của z là một đường tròn tâm $I(-1;-1)$, bán kính $R=\sqrt{5}$, loại đi điểm $(0;1)$.

Câu 7: Tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức thỏa mãn $|z+2i| \le 1$ là

A. Hình tròn tâm $I(0;2)$, bán kính $R=1$

B. Hình tròn tâm $I(0;-2)$, bán kính $R=1$

C. Hình tròn tâm $I(-2;0)$, bán kính $R=1$

D. Đường tròn tâm $I(0;-2)$, bán kính $R=1$

Lời giải.

Chọn B

Đặt $z=x+iy(x,y\in\mathbb{R})$ và $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức

$$\Rightarrow z+2i=x+(y+2i)\Rightarrow|z+2i|=\sqrt{x^2+(y+2)^2}$$

Theo giả thiết $|z+2i|\le 1\Leftrightarrow x^2+(y+2)^2\le 1$

Câu 8: Tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn $2|z-i|=|z-\bar{z}+2i|$ là:

A. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

B. Đường tròn tâm $I(\sqrt{3};0)$, bán kính $R=\sqrt{3}$

C. Parabol $y=\dfrac{x^2}{4}$

D. Parabol $x=\dfrac{y^2}{4}$

Lời giải.

Chọn C

Đặt $z=x+iy(x,y\in\mathbb{R})$ và $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức

Ta có: $2|z-i|=|z-\bar{z}+2i|\Leftrightarrow 2|x+(y-1)i|=2|(y+1)i|$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(y+1)^2}\Leftrightarrow x^2+y^2-2y+1=y^2+2y+1\Leftrightarrow x^2=4y$$

Câu 9: Gọi $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$. Hãy xác định tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $|z-\bar{z}+1-i|=2$. Chọn đáp án đúng:

A. Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là hai đường thẳng song song với trục hoành $y=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

B. Tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z là một đường parabol $y=4x^2-4x-2$

C. Tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z là một đường tròn tâm $I(1;2),R=4$

D. Tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z là một hình tròn tâm $I(1;2),R=4$

Lời giải.

Chọn A

$|z-\bar{z}+1-i|=2 \Leftrightarrow |x+yi-x+yi+1-i|=2 \Leftrightarrow |1+(2y-1)i|=2$

$\Leftrightarrow \sqrt{1^2+(2y-1)^2}=2 \Leftrightarrow 4y^2-4y-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ y=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

Kết luận: Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là hai đường thẳng song song với trục hoành $y=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

Câu 10: Gọi $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$. Hãy xác định tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $|2i.z-1|=2|z+3|$. Chọn đáp án đúng:

A. Tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z là một đường tròn tâm $I(1;4), R=4$

B. Tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z là một hình tròn tâm $I(1;4), R=4$

C. Tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z là một đường parapol $y=6x^2+\dfrac{35}{4}$

D. Tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z là một đường đường thẳng $y=6x+\dfrac{35}{4}$

Lời giải.

Chọn D

$|2i.z-1|=2|z+3| \Leftrightarrow |2i(x+yi)-1|=2|x+yi+3| \Leftrightarrow |-2y-1+2xi|=2|x+3+yi|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(-2y-1)^2+4x^2}=2\sqrt{(x+3)^2+y^2} \Leftrightarrow (-2y-1)^2+4x^2=4\left[(x+3)^2+y^2\right] \Leftrightarrow y=6x+\dfrac{35}{4}$

Kết luận: Tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z là một đường đường thẳng $y=6x+\dfrac{35}{4}$

Dạng 5. Bài tập 8+, 9+

Câu 1: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-(6+8i)|=2$ và $z.\bar{z}=64$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Gọi $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$.

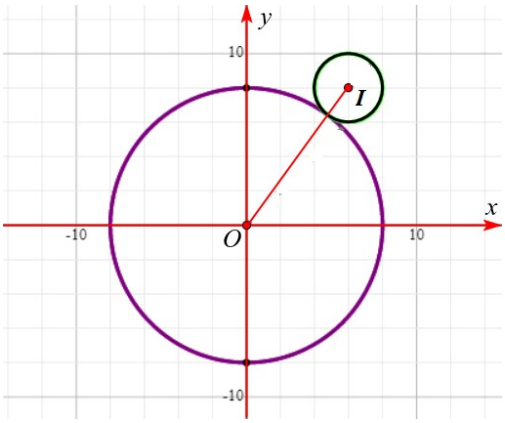
Khi đó: $\begin{cases} |z-(6+8i)|=2 \\ z.\bar{z}=64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)^2+(y-8)^2=4 \ (1) \\ x^2+y^2=64 \ (2) \end{cases}$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy thì:

(1) là phương trình của đường tròn (C_1) có tâm $I(6;8)$, bán kính $R_1=2$.

(2) là phương trình của đường tròn (C_2) có tâm $O(0;0)$, bán kính $R_2=8$.

Vì $OI=\sqrt{6^2+8^2}=10=R_1+R_2$ nên đường tròn (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài nhau như hình vẽ.



Suy ra hệ phương trình $(1),(2)$ có nghiệm duy nhất.

Vậy có đúng 1 số phức thỏa mãn ycbt.

Chú ý: Ta có thể tìm nghiệm của hệ phương trình $(1),(2)$ như sau:

$$\text{Hệ } (1),(2)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-12x+96-16y=0\\x^2+y^2-64=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+4y-40=0\\x^2+y^2-64=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{24}{5}\\y=\dfrac{32}{5}\end{cases}\Rightarrow z=\frac{24}{5}+\frac{32}{5}i.$$

Câu 2: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-2+3i|=|z+1-i|$ và $|z|^2+2\left(z+\bar{z}\right)=5$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Cách 1.

Đặt $z=x+yi$ (x, $y\in\mathbb{R}$). Ta có

$$|z-2+3i|=|z+1-i|\Leftrightarrow(x-2)^2+(y+3)^2=(x+1)^2+(y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 6x-8y-11=0\Leftrightarrow y=\frac{6x-11}{8}.$$

$$|z|^2+2\left(z+\bar{z}\right)=5\Leftrightarrow x^2+y^2+2(x+yi+x-yi)=5\Leftrightarrow x^2+y^2+4x-5=0.$$

Thay vào, ta được $x^2+\left(\dfrac{6x-11}{8}\right)^2+4x-5=0\Leftrightarrow 100x^2+124x-199=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-31+4\sqrt{371}}{50}\\ x=\dfrac{-31-4\sqrt{371}}{50}\end{array}\right.$$

Với $x=\dfrac{-31+4\sqrt{371}}{50}\Rightarrow y=\dfrac{-92+3\sqrt{371}}{50}\Rightarrow z=\dfrac{-31+4\sqrt{371}}{50}+\left(\dfrac{-92+3\sqrt{371}}{50}\right)i$.

Với $x=\dfrac{-31-4\sqrt{371}}{50}\Rightarrow y=\dfrac{-92-3\sqrt{371}}{50}\Rightarrow z=\dfrac{-31-4\sqrt{371}}{50}+\left(\dfrac{-92-3\sqrt{371}}{50}\right)i$.

Vậy có hai số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2.

Từ và suy ra số các số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán bằng số giao điểm của đường thẳng $\Delta:6x-8y-11=0$ với đường tròn $(C):x^2+y^2+4x-5=0$.

Đường tròn (C) có tâm $I(-2;0)$ và bán kính $R=3$.

Ta có $d(I,\Delta)=\dfrac{|-12-11|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\dfrac{23}{10}<R$ nên Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

Do đó, có hai số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3: Giả sử z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $\left|(2+i)|z|z-(1-2i)z\right|=|1+3i|$ và $|z_1-z_2|=1$. Tính $M=|2z_1+3z_2|$.

A. $M=\sqrt{19}$. **B.** $M=19$. **C.** $M=25$. **D.** $M=5$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\left|(2+i)|z|z-(1-2i)z\right|=|1+3i|\Leftrightarrow\left|z\left[(2|z|-1)+(|z|+2)i\right]\right|=\sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow|z|\sqrt{(2|z|-1)^2+(|z|+2)^2}=\sqrt{10}\Leftrightarrow 5|z|^4+5|z|^2-10=0\Leftrightarrow|z|^2=1\Leftrightarrow|z|=1$$

Gọi $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$.

Ta có: $|z_1|=|z_2|=1\Rightarrow a_1^2+b_1^2=a_2^2+b_2^2=1$

Ta có: $|z_1-z_2|=1\Rightarrow(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2=1\Rightarrow a_1a_2+b_1b_2=\dfrac{1}{2}$

Ta có: $M=\left|2z_1+3z_2\right|=\left|\left(2a_1+3a_2\right)+\left(2b_1+3b_2\right)i\right|=\sqrt{\left(2a_1+3a_2\right)^2+\left(2b_1+3b_2\right)^2}$

$=\sqrt{4\left(a_1^{\,2}+b_1^{\,2}\right)+12\left(a_1a_2+b_1b_2\right)+9\left(a_2^{\,2}+b_2^{\,2}\right)}=\sqrt{19}$.

Câu 4: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\left|z\right|^2=\left|z+\overline{z}\right|+\left|z-\overline{z}\right|$ và z^2 là số thuần ảo.

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Giả sử $z=a+bi;\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$, khi đó ta có $z^2=a^2-b^2+2abi$ là số thuần ảo khi và chỉ khi $a^2=b^2\Leftrightarrow\left|a\right|=\left|b\right|\quad(1)$

Khi đó $\overline{z}=a-bi$ suy ra $\left|z+\overline{z}\right|=2\left|a\right|,\left|z-\overline{z}\right|=2\left|b\right|$.

Ta có $\left|z\right|^2=\left|z^2\right|=2\left|ab\right|$ nên kết hợp với giả thiết suy ra $\left|ab\right|=\left|a\right|+\left|b\right|\quad(2)$

Kết hợp (1) và (2) ta được hệ $\begin{cases}\left|a\right|=\left|b\right|\\\left|ab\right|=\left|a\right|+\left|b\right|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|a\right|^2=2\left|a\right|\\\left|a\right|=\left|b\right|\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|a\right|=\left|b\right|=2\\\left|a\right|=\left|b\right|=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b=2\\a=b=-2\\a=-b=2\\a=-b=-2\\a=b=0\end{array}\right.$

Vậy có 5 số phức thỏa mãn.

Câu 5: Cho số phức z không phải là số thực và $\dfrac{z^2-2z+4}{z^2+2z+4}$ là số thực. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\left|z+\overline{z}\right|+\left|z-\overline{z}\right|=\left|z^2\right|$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Cách 1.

Ta có $\dfrac{z^2-2z+4}{z^2+2z+4}$ là số thực nên

$\dfrac{z^2-2z+4}{z^2+2z+4}=\dfrac{\overline{z^2-2z+4}}{z^2+2z+4}\Leftrightarrow\left(z^2-2z+4\right)\left(\overline{z}^2+2\overline{z}+4\right)=\left(z^2+2z+4\right)\left(\overline{z}^2-2\overline{z}+4\right)$

$\Leftrightarrow4z^2.\overline{z}-4z.\overline{z}^2-16z+16\overline{z}=0\Leftrightarrow\left|z\right|^2\left(z-\overline{z}\right)-4\left(z-\overline{z}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(\left|z\right|^2-4\right)\left(z-\overline{z}\right)=0\Leftrightarrow\left|z\right|^2=4$ vì $z-\overline{z}\neq0\quad(1)$

Đặt $z=a+bi$ với $b\neq 0, a\in\mathbb{R}$

$|z+\overline{z}|+|z-\overline{z}|=|z|^2 \Leftrightarrow 2|a|+2|b|=4 \ (2)$

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} a^2+b^2=4 \\ |a|+|b|=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a|.|b|=0 \\ |a|+|b|=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a|=0 \\ |b|=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ b=2 \end{cases} \\ \begin{cases} a=0 \\ b=-2 \end{cases} \end{array}\right.$.

Cách 2.

Đặt $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Do z là số thực nên $b\neq 0$

$$\frac{z^2-2z+4}{z^2+2z+4}=\frac{(a+bi)^2-2(a+bi)+4}{(a+bi)^2+2(a+bi)+4}=\frac{(a^2-b^2-2a+4)+(2ab-2b)i}{(a^2-b^2+2a+4)+(2ab+2b)i}$$

$\dfrac{z^2-2z+4}{z^2+2z+4}$ là số thực nên phần ảo bằng 0

$\Leftrightarrow -(a^2-b^2-2a+4)(2ab+2b)+(2ab-2b)(a^2-b^2+2a+4)=0$

$\Leftrightarrow 4b(a^2+b^2-4)=0 \Leftrightarrow a^2+b^2=4$ do $b\neq 0$.

Mặt khác $|z+\overline{z}|+|z-\overline{z}|=|z|^2 \Leftrightarrow |2a|+|2b|=a^2+b^2$

$\Leftrightarrow 2(|a|+|b|)=a^2+b^2 \Leftrightarrow 4(a^2+2|ab|+b^2)=(a^2+b^2)^2$

Thay (1) vào (2) ta có $4(4+2|ab|)=16 \Leftrightarrow |ab|=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right.$ mà $b\neq 0$ nên nhận $a=0$

Với $a=0$ ta được $b=\pm 2$ nên $z=\pm 2i$

Câu 6: Cho số phức $z=m+3+(m^2-1)i$,với m là tham số thực thay đổi. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thuộc đường cong (C). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Xét $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

Mà $z=m+3+(m^2-1)i \Rightarrow \begin{cases} x=m+3 \\ y=m^2-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3=m \\ y=(x-3)^2-1=x^2-6x+8 \end{cases}$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thuộc đường cong $(C): y=x^2-6x+8$

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục Ox. $x^2-6x+8=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=4\end{array}\right.$

Diện tích giới hạn bởi (C) và trục hoành là:

$$S=\int_2^4\left|x^2-6x+8\right|dx=-\int_2^4\left(x^2-6x+8\right)dx=-\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+8x\right)\Big|_2^4=\frac{4}{3}$$

Câu 7: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại 4 số phức z thỏa mãn $\left|z+\bar{z}\right|+\left|z-\bar{z}\right|=2$ và $z\left(\bar{z}+2\right)-\left(z+\bar{z}\right)-m$ là số thuần ảo. Tổng các phần tử của S là.

A. $\sqrt{2}+1$. **B.** $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

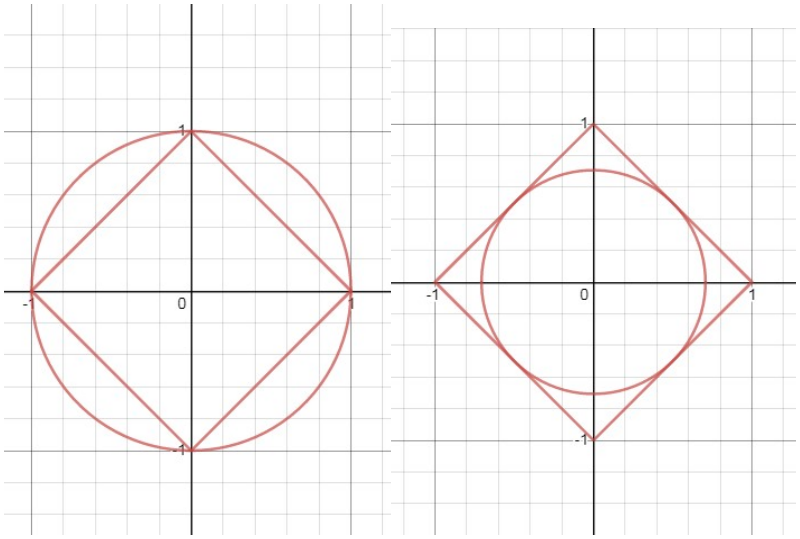
Đặt $z=x+yi,\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

$\left|z+\bar{z}\right|+\left|z-\bar{z}\right|=2\Leftrightarrow|2x|+|2yi|=2\Leftrightarrow|x|+|y|=1$.

Đặt $z'=z\left(\bar{z}+2\right)-\left(z+\bar{z}\right)-m=|z|^2+z-\bar{z}-m$.

z' là số thuần ảo nên có phần thực bằng 0. Tức là: $x^2+y^2=m$.

Tập hợp các điểm $M\left(x;y\right)$ thỏa mãn là hình vuông tâm là gốc tọa



Để có 4 cặp số $\left(x;y\right)$ thỏa mãn đồng thời và thì phải là một đường tròn nội tiếp hoặc ngoại tiếp hình vuông nói trên. Tức là $m>0$ và $\sqrt{m}=1$ hoặc $\sqrt{m}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow m=1$ hoặc $m=\frac{1}{2}$

Vậy tổng các phần tử của S là $\frac{3}{2}$.

Câu 8: Biết rằng hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-3-4i|=1$ và $|z_2-3-4i|=\frac{1}{2}$. Số phức z có phần thực là a và phần ảo là b thỏa mãn $3a-2b=12$. Giá trị nhỏ nhất của $P=|z-z_1|+|z-2z_2|+2$ bằng:

A. $P=\frac{\sqrt{9945}}{11}$. **B.** $P=5-2\sqrt{3}$. **C.** $P=\frac{\sqrt{9945}}{13}$. **D.** $P=5+2\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi A là điểm biểu diễn của số phức z_1 suy ra A thuộc đường tròn (C) tâm $I(3;4)$, bán kính $R=1$.

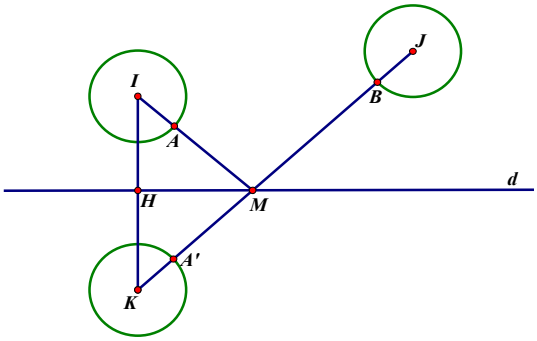
Gọi A' là điểm đối xứng của A qua đường thẳng d.

$|z_2-3-4i|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow|2z_2-6-8i|=1$.

Gọi B là điểm biểu diễn của số phức $2z_2$ suy ra B thuộc đường tròn (C_1) tâm $J(6;8)$ bán kính $R_1=1$.

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z suy ra M thuộc đường thẳng $d:3x-2y-12=0$.

Ta có: điểm I, J cùng phía so với đường thẳng d và đường thẳng d không có điểm chung với đường tròn (C) và đường tròn (C_1).



Gọi (C_2) là đường tròn tâm K đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng d.

Khi đó điểm K đối xứng với điểm I qua đường thẳng d.

Ta tìm được $K\left(\frac{105}{13};\frac{8}{13}\right)$, $JK=\frac{\sqrt{9945}}{13}$.

Khi đó: $P=|z-z_1|+|z-2z_2|+2=MA+MB+2=MA'+MB+2\geq A'B+2$

Suy ra $P_{\min}=A'B+2=JK-1-1+2=JK=\frac{\sqrt{9945}}{13}$.

Câu 9: Trong các số phức z thỏa mãn $|z-1+i|=|\overline{z}+1-2i|$, số phức z có mô đun nhỏ nhất có phần ảo là

A. $\frac{3}{10}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $-\frac{3}{5}$. **D.** $-\frac{3}{10}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Gọi $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $M(x;y)$.

$|z-1+i|=|\overline{z}+1-2i| \Leftrightarrow |(x-1)+(y+1)i|=|(x+1)-(y+2)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2} \Leftrightarrow 4x+2y+3=0 \Leftrightarrow y=-2x-\frac{3}{2}$.

Cách 1:

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+\left(-2x-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{5x^2+6x+\frac{9}{4}}=\sqrt{5\left(x+\frac{3}{5}\right)^2+\frac{9}{20}}\geq\frac{3\sqrt{5}}{10},\forall x$.

Suy ra $min|z|=\frac{3\sqrt{5}}{10}$ khi $x=-\frac{3}{5};y=-\frac{3}{10}$.

Vậy phần ảo của số phức z có mô đun nhỏ nhất là $-\frac{3}{10}$.

Cách 2:

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $d: 4x+2y+3=0$.

Ta có $|z|=OM$. $|z|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow OM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của O trên d.

Phương trình đường thẳng OM đi qua O và vuông góc với d là: $x-2y=0$.

Tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}4x+2y+3=0\\x-2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{3}{5}\\y=-\frac{3}{10}\end{cases}$

$\Rightarrow M\left(-\frac{3}{5};-\frac{3}{10}\right)$. Hay $z=-\frac{3}{5}-\frac{3}{10}i$.

Vậy phần ảo của số phức z có mô đun nhỏ nhất là $-\frac{3}{10}$.

Nhận xét: Ta có thể tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z như sau:

$|z-1+i|=|\overline{z}+1-2i| \Leftrightarrow |z-(1-i)|=|z-(-1-2i)|$ $(*)$

Gọi M biểu diễn số phức z, điểm $A(1;-1)$ biểu diễn số phức $1-i$, điểm $B(-1;-2)$ biểu diễn số phức $-1-2i$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow MA = MB$. Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình $d: 4x+2y+3=0$.

Câu 10: Cho số phức z thoả mãn $|z-3-4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $P = |z+2|^2 - |z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|z+i|$

A. $\sqrt{61}$. **B.** $\sqrt{41}$. **C.** $5\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi $z = x+yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Vì $|z-3-4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn của số phức z là đường tròn tâm $I(3;4)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Ta có $P = |z+2|^2 - |z-i|^2 = (x+2)^2 + y^2 - x^2 - (y-1)^2 = 4x+2y+3$

$= 4x-12+2y-8+23 = 4(x-3)+2(y-4)+23$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 4 số: $4, x-3, 2, y-4$ ta có:

$P-23 = 4(x-3)+2(y-4) \le \sqrt{16+4}.\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2} = 10 \Rightarrow P \le 33$

$\Rightarrow \text{Max}P = 33$ khi $\begin{cases} \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-4}{2} \\ 4x+2y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y = -10 \\ 4x+2y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow |z+1| = |5+6i| = \sqrt{61}$.

Câu 11: Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z-3\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|w-4\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$. Biết rằng $|z-w|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z = z_0$, $w = w_0$. Tính $|3z_0 - w_0|$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $6\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

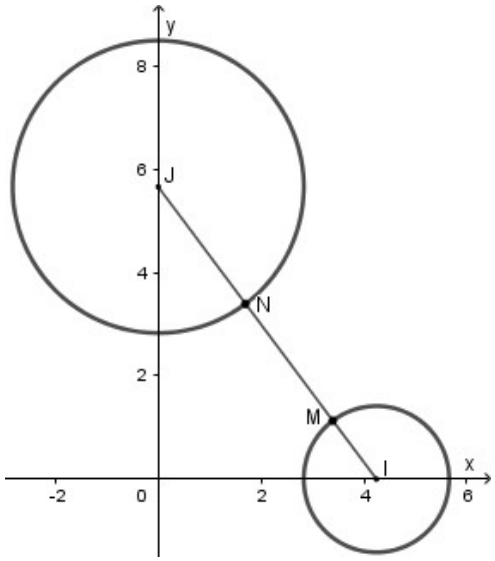
Chọn D

Ta có: + $|z-3\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn M biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I(3\sqrt{2};0)$, bán kính $r = \sqrt{2}$.

$|w-4\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn N biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $J(0;4\sqrt{2})$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Ta có $\min|z-w| = \min MN$.

$IJ = 5\sqrt{2}; IM = r = \sqrt{2}; NJ = R = 2\sqrt{2}$.



Mặt khác $IM+MN+NJ\ge IJ\ \Rightarrow MN\ge IJ-IM-NJ$ hay $MN\ge 5\sqrt{2}-\sqrt{2}-2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

Suy ra $\min MN=2\sqrt{2}$ khi I,M,N,J thẳng hàng và M,N nằm giữa I,J.

Cách 1:

Khi đó ta có: $\left|3z_0-w_0\right|=\left|3\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}\right|$ và $IN=3\sqrt{2}\ \Rightarrow \overrightarrow{IM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{IJ};\ \overrightarrow{IN}=\frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$.

Mặt khác $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IN}\ =\overrightarrow{OI}+\frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}\ ;\ 3\overrightarrow{OM}=3\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IM}\right)=\ 3\left(\overrightarrow{OI}+\frac{1}{5}\overrightarrow{IJ}\right)=\ 3\overrightarrow{OI}+\frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$.

Suy ra $\left|3z_0-w_0\right|=\left|3\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}\right|\ =\left|3\overrightarrow{OI}+\frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}-\left(\overrightarrow{OI}+\frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}\right)\right|=\left|2\overrightarrow{OI}\right|\ =6\sqrt{2}$.

Cách 2:

Ta có $\overrightarrow{IN}=3\overrightarrow{IM}\Rightarrow 3\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IN}=\vec{0}$.

Do đó $\left|3z_0-w_0\right|=\left|3\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}\right|=\left|3\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IM}\right)-\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IN}\right)\right|=\left|2\overrightarrow{OI}\right|=2.OI=2.3\sqrt{2}=6\sqrt{2}.$

Cách 3:

$$\overrightarrow{IM}=\frac{IM}{IJ}\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=\dfrac{12\sqrt{2}}{5}\\ y_M=\dfrac{4\sqrt{2}}{5}\end{cases}\Rightarrow z_0=\frac{12\sqrt{2}}{5}+\frac{4\sqrt{2}}{5}i.$$

$$\overrightarrow{IN}=\frac{IN}{IJ}\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow\overrightarrow{IN}=\frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow\begin{cases}x_N=\dfrac{6\sqrt{2}}{5}\\ y_N=\dfrac{12\sqrt{2}}{5}\end{cases}\Rightarrow w_0=\frac{6\sqrt{2}}{5}+\frac{12\sqrt{2}}{5}i.$$

Suy ra $\left|3z_0-w_0\right|=\left|6\sqrt{2}\right|=6\sqrt{2}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Câu 12: Cho số phức z thỏa mãn $3\left|z+\overline{z}\right|+2\left|z-\overline{z}\right|\le 12$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $\left|z-4+3i\right|$. Giá trị của $M.m$ bằng

A. 28. **B.** 24. **C.** 26. **D.** 20.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $z=x+yi,\ \left(x;y\in \mathrm{R}\right)$, $P\left(x;y\right)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Ta có $3\left|z+\overline{z}\right|+2\left|z-\overline{z}\right|\le 12 \Leftrightarrow 3\left|2x\right|+2\left|2yi\right|\le 12 \Leftrightarrow 3\left|x\right|+2\left|y\right|\le 6\ \ (1)$.

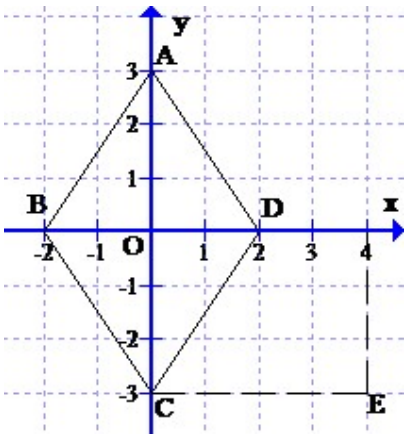
Khi $x\ge 0;y\ge 0$, ta có $(1)\Leftrightarrow 3x+2y\le 6$.

Khi $x\le 0;y\le 0$, ta có $(1)\Leftrightarrow -3x-2y\le 6$.

Khi $x\le 0;y\ge 0$, ta có $(1)\Leftrightarrow -3x+2y\le 6$.

Khi $x\ge 0;y\le 0$, ta có $(1)\Leftrightarrow 3x-2y\le 6$.

Suy ra quỹ tích điểm P là hình thoi $ABCD$ cùng miền trong của nó.



+) $\left|z-4+3i\right|=EP$ với $E\left(4;-3\right)$ là điểm biểu diễn của số phức $z_1=4-3i$.

Từ hình vẽ ta có $m=\min EP=d\left(E,CD\right)$.

Đường thẳng CD có phương trình $3x-2y-6=0$, suy ra $m=\dfrac{12}{\sqrt{13}}$.

$\max EP=\max\left\{EA,EB,EC,ED\right\}$.

Lại có $EA=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}$, $EB=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$, $EC=4$, $ED=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$.

Do đó $M=EA=\sqrt{52}$. Vậy $M.m=24$.

Câu 13: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3i + 5| = 2$ và $|iz_2 - 1 + 2i| = 4$ .Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |2iz_1 + 3z_z|$

A. $\sqrt{313}$. **B.** $\sqrt{313} + 8$. **C.** $\sqrt{313} + 16$. **D.** $\sqrt{313} + 2\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

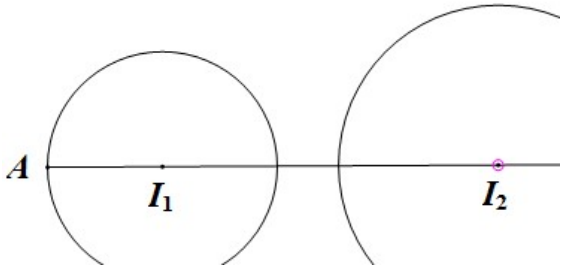
Chọn C

Ta có $|z_1 - 3i + 5| = 2 \Leftrightarrow |2iz_1 + 6 + 10i| = 4 (1)$

$|iz_2 - 1 + 2i| = 4 \Leftrightarrow |(-3z_2) - 6 - 3i| = 12 (2)$

Gọi A là điểm biểu diễn số phức $2iz_1$, B là điểm biểu diễn số phức $-3z_2$

Từ (1) và (2) suy ra điểm A nằm trên đường tròn tâm $I_1(-6;-10)$, bán kính $R_1 = 4$, điểm B nằm trên đường tròn tâm $I_2(6;3)$, bán kính $R_2 = 12$



Ta có $T = |2iz_1 + 3z_z| = AB \le I_1I_2 + R_1 + R_2 = \sqrt{12^2 + 13^2} + 4 + 12 = \sqrt{313} + 16$

Vậy $\max T = \sqrt{313} + 16.$

Câu 14: Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 + iz + 2| = |z^2 + z - i + 1|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z - 2 + i|$ là

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2 . **D.** $\sqrt{5} - \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $|z^2 + iz + 2| = |z^2 + z - i + 1| \Leftrightarrow |z^2 + iz - 2i^2| = |z^2 + z - i - i^2|$

$\Leftrightarrow |(z - i)(z + 2i)| = |(z - i)(z + i + 1)|$

$\Leftrightarrow |z - i|.|z + 2i| = |z - i|.|z + i + 1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} |z - i| = 0 & (1) \\ |z + 2i| = |z + i + 1| & (2) \end{array}\right.$.

Giải phương trình (1) : Ta có $z = i \Rightarrow |z - 2 + i| = |2i - 2| = 2\sqrt{2}$ $(*)$.

Giải phương trình (2): Đặt $z=x+yi,\ (x,y\in\mathbb{R})$, ta có

$|z+2i|=|z+i+1|\Leftrightarrow\sqrt{x^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}\Leftrightarrow y=x-1$

Khi đó $|z-2+i|=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+x^2}=\sqrt{2(x-1)^2+2}\geq\sqrt{2}$

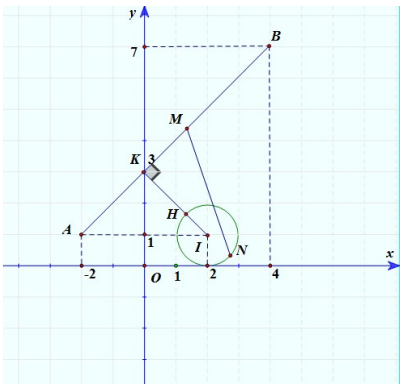
Từ $(*)$ và $(**)$ ta có $min|z-2+i|=\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$ hay $z=1$.

Câu 15: Cho hai số phức z_1,z_2 thoả mãn $|z_1+2-i|+|z_1-4-7i|=6\sqrt{2}$ và $|iz_2-1+2i|=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=|z_1+z_2|$.

A. $\sqrt{2}-1$. **B.** $\sqrt{2}+1$. **C.** $2\sqrt{2}+1$. **D.** $2\sqrt{2}-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Gọi M là điểm biểu diễn số phức z_1 và $A(-2;1)$; $B(4;7)$ lần lượt là hai điểm biểu diễn hai số phức $-2+i$, $4+7i$. Ta có $AB=6\sqrt{2}$. Phương trình đường thẳng AB là $d:x-y+3=0$.

$|z_1+2-i|+|z_1-4-7i|=6\sqrt{2}\Leftrightarrow MA+MB=6\sqrt{2}\Leftrightarrow MA+MB=AB$. Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z_1 là đoạn thẳng AB.

$|iz_2-1+2i|=1\Leftrightarrow|iz_2-1+2i||i|=1\Leftrightarrow|-z_2-2-i|=1$.

Gọi N là điểm biểu diễn số phức $-z_2$ và $I(2;1)$ là điểm biểu diễn số phức $2+i$. Ta có $IN=1$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức $-z_2$ là đường tròn (C) có phương trình:

$(x-2)^2+(y-1)^2=1$.

$d(I,AB)=2\sqrt{2}>1$, suy ra AB không cắt đường tròn.

Gọi K là hình chiếu của $I(2;1)$ lên AB. Dễ thấy K nằm trên đoạn thẳng AB.

Gọi H là giao điểm của đoạn IK với đường tròn (C).

Ta có $|z_1+z_2|=MN\geq KH=d(I,AB)-R=2\sqrt{2}-1$.

Suy ra $min|z_1+z_2|=2\sqrt{2}-1$.

BÀI 4. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC

1. Căn bậc hai của một phức

Định nghĩa

Cho số phức w. Mỗi số phức z thỏa mãn $z^2 = w$ được gọi là một căn bậc hai của w

Tìm căn bậc hai của số phức w

- w là số thực.
  + Nếu $w < 0$ thì w có hai căn bậc hai là $i\sqrt{-w}$ và $-i\sqrt{-w}$
  + Nếu $w \geq 0$ thì w có hai căn bậc hai là $\sqrt{w}$ và $-\sqrt{w}$
- $w = a + bi \ \ (a,b \in \mathbb{R}),\ b \neq 0$

  Nếu $z = x + iy$ là căn bậc hai của w thì $(x+iy)^2 = a + bi$

  Do đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$

  Mỗi nghiệm của hệ phương trình cho ta một căn bậc hai của w

Nhận xét:

+) Số 0 có đúng một căn bậc hai là 0

+) Mỗi số phức khác 0 có hai căn bậc hai là hai số đối nhau (khác 0)

2. Giải phương trình bậc hai với hệ số thực

Xét phương trình $az^2 + bz + c = 0 \ \ (a,b,c \in \mathbb{R}; a \neq 0)$

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac$

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm thực $x = -\dfrac{b}{2a}$
- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm thực phân biệt:

  $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a};\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình có hai nghiệm thực phân biệt:

  $x_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a};\ x_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Chú ý:

Mọi phương trình bậc n:

$A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + ... + A_{n-1} z + A_n = 0$ *luôn có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt) với n nguyên dương.*

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

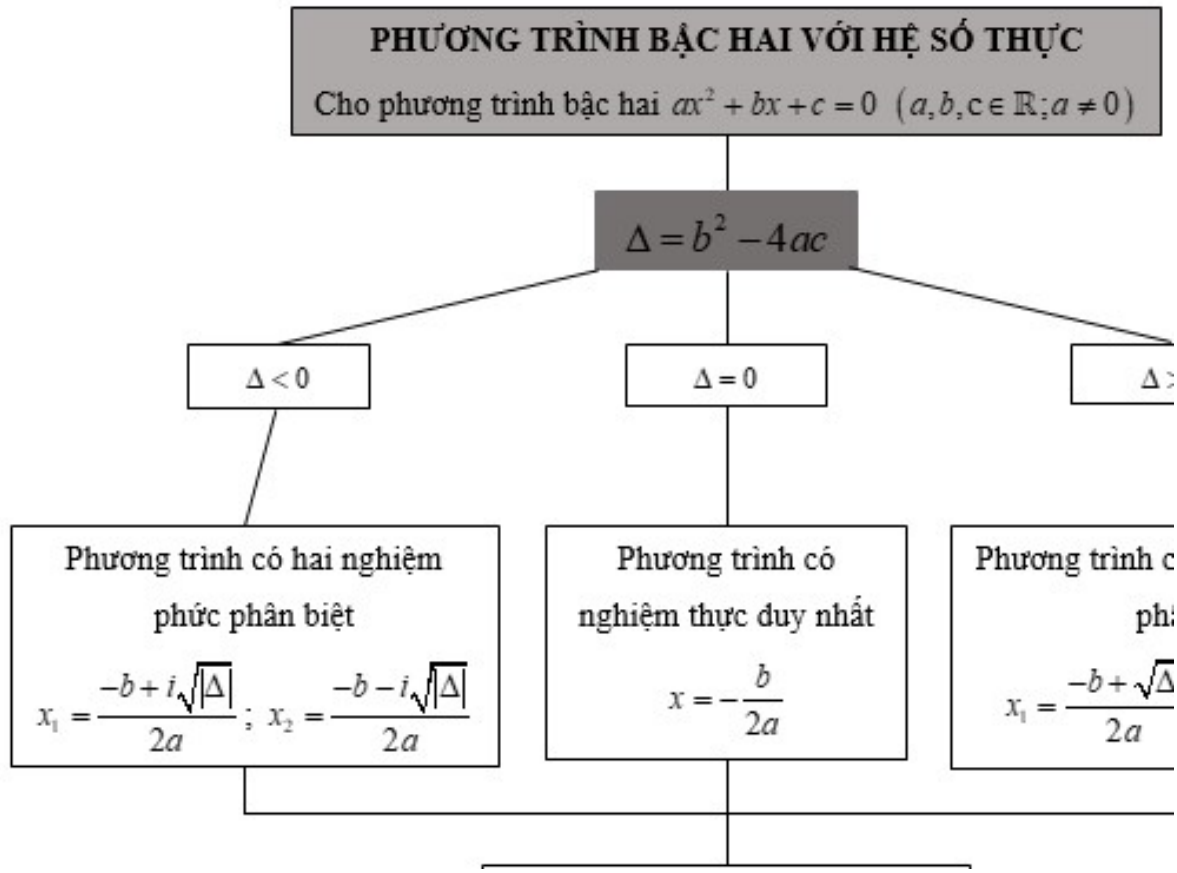
Hệ thức Vi-ét đối với phương trình bậc hai với hệ số thực

Phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 (thực hoặc phức) thì

$$\begin{cases} S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Dạng 1 : Phương trình bậc hai hệ số thực

1. Phương pháp giải



2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Xét phương trình $z^2-2z+5=0$

a) Giải phương trình trên tập số phức

b) Tính $|z_1|+|z_2|$

Lời giải

a) Ta có: $\Delta'=1-5=-4=(2i)^2$

Phương trình có hai nghiệm là: $z_1=2+2i$; $z_2=2-2i$

b) Ta có $|z_1|=|z_2|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

Suy ra $|z_1|+|z_2|=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

Ví dụ 2: Tìm phương trình bậc hai chứa các nghiệm $x_1=\sqrt{7}-i\sqrt{3}; x_2=\sqrt{7}+i\sqrt{3}$.

Lời giải

$$\begin{cases} x_1+x_2=2\sqrt{7} \\ x_1.x_2=10 \end{cases} \Rightarrow x^2-2\sqrt{7}x+10=0$$

Ví dụ 3. Phương trình $z^2+az+b=0\ \ (a,b\in\mathbb{R})$ có nghiệm phức là $3+4i$. Giá trị của $a+b$

Lời giải

Cách 1: Do $z=3+4i$ là nghiệm của phương trình $z^2+az+b=0$ nên ta có:

$$(3+4i)^2+a(3+4i)+b=0 \Leftrightarrow (3a+b-7)+(4a+24)i=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a+b-7=0 \\ 4a+24=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-6 \\ b=25 \end{cases}$$

Do đó $a+b=19$

Cách 2: Vì $z_1=3+4i$ là nghiệm của phương trình $z^2+az+b=0$ nên $z_2=3-4i$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho

Áp dụng hệ thức Vi-ét vào phương trình trên ta có $\begin{cases} z_1+z_2=-a \\ z_1.z_2=b \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3+4i)+(3-4i)=-a \\ (3+4i)(3-4i)=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-6 \\ b=25 \end{cases} \Rightarrow a+b=19$$

Chú ý: *Nếu* z_0 là nghiệm của phương trình bậc hai với hệ số thực thì $\overline{z_0}$ cũng là nghiệm của phương trình

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Nghiệm của phương trình: $z^2+4z+7=0$

A. $-2-\sqrt{3}i$ **B.** $2-\sqrt{3}i$ **C.** $-3-\sqrt{3}i$ **D.** $2+\sqrt{3}i$

Lời giải

Chọn A

$\Delta'=2^2-7=-3=3i^2 \Rightarrow$ các căn bậc hai của Δ' là $\pm i\sqrt{3}$

Vậy nghiệm của phương trình là: $z=-2+\sqrt{3}i,\ z=-2-\sqrt{3}i$

Câu 2. Tìm phương trình bậc hai chứa các nghiệm $x_1=3+4; x_2=3-4i$. Chọn đáp án đúng:

A. $x^2+6x+25=0$ **B.** $x^2-6x-25=0$

C. $x^2+6x-25=0$ **D.** $x^2-6x+25=0$

Lời giải

Chọn D

$\begin{cases} x_1x_2 = 25 \\ x_1 + x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 6x + 25 = 0$

Câu 3. Tìm tham số m để phương trình số phức $z^2 - mz + m + 1 = 0$ có 2 nghiệm z_1, z_2 thõa mãn $z_1^2 + z_2^2 = z_1z_2 + 1$.

A. $m = -1; m = -4$ **B.** $m = 4$ **C.** $m = -1; m = 4$ **D.** $m = -1$

Lời giải

Chọn C

$z^2 - mz + m + 1 = 0$

- $\begin{cases} z_1 + z_2 = m \\ z_1z_2 = m + 1 \end{cases}$
- $z_1^2 + z_2^2 = z_1z_2 + 1 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2 = z_1z_2 + 1 \Leftrightarrow m^2 - 3(m+1) - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4(N) \\ m = -1(N) \end{array}\right.$

Câu 4. Tìm tham số m để phương trình $z^2 - 9mz + 2mi = 0$ có 2 nghiệm z_1, z_2 thõa mãn $z_1^3 + z_2^3 = 36m - 8i$.

A. $m = -\frac{2}{3}i$ **B.** $m = -2i$ **C.** $m = \frac{2}{3}i$ **D.** $m = 2i$

Lời giải

Chọn C

- $\begin{cases} z_1 + z_2 = 9m \\ z_1z_2 = 2mi \end{cases}$
- $z_1^3 + z_2^3 = 36m - 8i \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^3 - 3z_1z_2(z_1 + z_2) = 18 \Leftrightarrow (3m)^3 - 3.(2mi)(9m) = 36m - 8i$

$\Leftrightarrow (3m)^3 - 3.(3m)^2.2i + 3.3m.(2i)^2 - (2i)^3 = 0 \Leftrightarrow (3m - 2i)^3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}i$

Dạng 2 : Phương trình quy về phương trình bậc hai

1. Phương pháp giải

- Nắm vững cách giải phương trình bậc hai với hệ số thực trên tập số phức
- Nắm vững cách giải một số phương trình quy về bậc hai, hệ phương trình đại số bậc cao;…

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Giải phương trình $2z^4 - 3z^2 - 2 = 0$

Lời giải

Ta có: $2z^4-3z^2-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z^2=2\\z^2=-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.i^2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=\sqrt{2}\\z=-\sqrt{2}\\z=\frac{\sqrt{2}}{2}i\\z=-\frac{\sqrt{2}}{2}i\end{array}\right.$

Ví dụ 2: Kí hiệu z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4+4z^2-5=0$. Tính $|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+|z_4|^2$

Lời giải

Ta có: $z^4+4z^2-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z^2=1\\z^2=-5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=1\\z=-1\\z=\sqrt{5}i\\z=-\sqrt{5}i\end{array}\right.$

Phương trình có bốn nghiệm lần lượt là: $z_1=1$, $z_2=-1$, $z_3=-i\sqrt{5}$, $z_4=i\sqrt{5}$

Do đó: $|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+|z_4|^2=1^2+1^2+\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2=12$

Ví dụ 3: Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là các nghiệm phức của phương trình $\left(z^2+z\right)^2+4\left(z^2+z\right)-12=0$. Tính giá trị của biểu thức $S=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+|z_4|^2$

Lời giải

Ta có: $\left(z^2+z\right)^2+4\left(z^2+z\right)-12=0$

Đặt $t=z^2+z$, ta có $t^2+4t-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=-6\end{array}\right.$

Suy ra: $\left[\begin{array}{l}z^2+z-2=0\\z^2+z+6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=1\\z_2=-2\\z_3=\frac{-1+i\sqrt{23}}{2}\\z_4=\frac{-1-i\sqrt{23}}{2}\end{array}\right.$

Suy ra $S=1^2+(-2)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{23}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{23}}{2}\right)^2=17$

Ví dụ 4: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $\frac{|z|^4}{z^2}+\bar{z}=-4$. Tính $|z_1+z_2|$

Lời giải

Điều kiện: $z\neq 0$

Ta có: $\frac{|z|^4}{z^2}+\bar{z}=-4\Leftrightarrow\left(\frac{|z|^2}{z}\right)^2+\bar{z}=-4\Leftrightarrow\left(\frac{z.\bar{z}}{z}\right)^2+\bar{z}=-4$

$\Leftrightarrow\bar{z}^2+\bar{z}+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\bar{z}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2}i\\ \bar{z}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{2}i\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{2}i\\ z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2}i\end{array}\right.$

Vậy $|z_1+z_2|=\left|-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{2}i-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2}i\right|=|-1|=1$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Gọi $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$. Câu phương trình $(z^2+9)(z^2-z+1)=0$. Giá trị x và y là:

A. $(x;y)=\left(0;\pm\frac{3}{2}\right),\left(\frac{1}{2};\pm2\right)$ **B.** $(x;y)=(0;\pm1),(2;\pm1)$

C. $(x;y)=(0;\pm1),\left(2;\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **D.** $(x;y)=(0;\pm3),\left(\frac{1}{2};\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Lời giải

Chọn D

$(z^2+9)(z^2-z+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z^2+9=0\\ z^2-z+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=\pm3i\\ z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\\ z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{array}\right.\Leftrightarrow(x;y)=(0;\pm3),\left(\frac{1}{2};\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Câu 2. Cho phương trình $z^4+z^2-6=0$.Có bao nhiêu nghiệm thuần thực

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=z^2$. Phương trình trở thành: $t^2+t-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=-3\end{array}\right.$

+ Với $t=2:z^2=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=\sqrt{2}\\ z=-\sqrt{2}\end{array}\right.$

+ Với $t=-3:z^2=-3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=i\sqrt{3}\\ z=-i\sqrt{3}\end{array}\right.$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $z=\sqrt{2};z=-\sqrt{2};z=i\sqrt{3};z=-i\sqrt{3}$

Câu 3. Phương trình $\left(\frac{4z+i}{z-i}\right)^2-5\frac{4z+i}{z-i}+6=0$ có tập nghiệm là:

A. $S=\left\{\frac{-3}{2}i;-4i\right\}$ **B.** $S=\left\{\frac{-3}{2}i;4i\right\}$ **C.** $S=\left\{\frac{3}{2}i;-4i\right\}$ **D.** $S=\left\{\frac{3}{2}i;4i\right\}$

Lời giải

Chọn A

$$\left(\frac{4z+i}{z-i}\right)^2-5\frac{4z+i}{z-i}+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{4z+i}{z-i}=2\\\frac{4z+i}{z-i}=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=\frac{-3}{2}i\\z=-4i\end{array}\right.\Rightarrow S=\left\{\frac{-3}{2}i;-4i\right\}$$

Câu 4. Câu phương trình: $(z^2+3z+6)^2+2z(z^2+3z+6)-3z^2=0$ Có bao nhiêu nghiệm thực

A. 0 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Chọn B

$$(z^2+3z+6)^2+2z(z^2+3z+6)-3z^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z^2+3z+6=z\\z^2+3z+6=-3z\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z^2+2z+6=0\\z^2+6z+6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=-1\pm\sqrt{5}i\\z=-3\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Câu 5. Gọi $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$. Câu phương trình $(z+3i)(z^2-2z+5)=0$. Giá trị x và y là:

A. $(x;y)=(0;-3),(-1;-2),(-1;-2)$ **B.** $(x;y)=(0;3),(-1;2),(1;2)$

C. $(x;y)=(0;-3),(1;2),(1;-2)$ **D.** $(x;y)=(0;3),(1;-2),(1;-2)$

Lời giải

Chọn C

$$(z+3i)(z^2-2z+5)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=-3i\\z^2-2z+5=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=-3i\\z=1+2i\\z=1-2i\end{array}\right.\Leftrightarrow(x;y)=(0;-3),(1;2),(1;-2)$$

Câu 6. Cho phương trình $z^3+8=0(1)$.Hỏi có bao nhiêu nghiệm thuần ảo

A. 2 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 3

Lời giải

Chọn B

$$(1)\Leftrightarrow(z+2)(z^2-2z+4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=-2\\z^2-2z+4=0\ (*)\end{array}\right.$$

Câu phương trình (*): $\Delta=-12=12i^2$

Phương trình (*) có 2 nghiệm phức $x=\frac{2-i2\sqrt{3}}{2}=1-\sqrt{3}i;\ x=\frac{2+i2\sqrt{3}}{2}=1+\sqrt{3}i$

Vậy phương trình (1) có các nghiệm là $z=-2;\mathrm{x}=1-\sqrt{3}i;x=1+\sqrt{3}i$

Câu 7. Cho phương trình $z^4-1=0(1)$.Tổng các nghiệm thuần ảo

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Lời giải

Chọn B

$(1) \Leftrightarrow \left(z^2-1\right)\left(z^2+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2=1 \\ z^2=-1 \end{array}\right.$

+) Với $z^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=-1 \end{array}\right.$

+) Với $z^2=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=i \\ z=-i \end{array}\right.$

Vậy phương trình có các nghiệm là $z=1; z=-1; z=i; z=-i$

Câu 8. Cho phương trình $z^3+i=0$. Tính tổng các phần ảo nghiệm phức của phương trình trên

A. 2 **B.** 0 **C.** $-\frac{3}{2}$ **D.** $-\frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn B

Phương trình $\Leftrightarrow z^3-i^3=0 \Leftrightarrow \left(z-i\right)\left(z^2+iz-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=i \\ z^2+iz-1=0(*) \end{array}\right.$

Câu phương trình $(*): \Delta=i^2+4=3$

Phương trình (*) có 2 nghiệm phức $z=\frac{-i+\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i; z=\frac{-i-\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

Vậy phương trình (1) có các nghiệm là: $z=i; z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i; z=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

Dạng 3: Bài tập dành cho học sinh 8+, 9+

Câu 1: Biết phương trình $z^2+mz+n=0$ có một nghiệm là $z=1+i$. Tính môđun của số phức $z=m+ni$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** 16. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Vì $z=1+i$ là nghiệm của phương trình $z^2+mz+n=0$ nên:

$\left(1+i\right)^2+m\left(1+i\right)+n=0 \Leftrightarrow m+n+\left(2+m\right)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m+n=0 \\ 2+m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2 \\ n=2 \end{cases}$.

$\Rightarrow |z|=\sqrt{m^2+n^2}=2\sqrt{2}$.

Câu 2: Kí hiệu n là số các giá trị của tham số a sao cho phương trình $z^2+az+3=0$, có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1^2+z_2^2=-5$. Tìm n.

A. $n=0$. **B.** $n=1$. **C.** $n=2$. **D.** $n=3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+az+3=0 \Rightarrow \begin{cases} z_1+z_2=-a \\ z_1 z_2=3 \end{cases}$.

Khi đó $z_1^2+z_2^2=\left(z_1+z_2\right)^2-2z_1z_2=-5 \Leftrightarrow a^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-1 \end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị của a thỏa mãn $\Rightarrow n=2$.

Câu 3: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+5=0$. Giá trị của biểu thức $\left(z_1-1\right)^{2019}+\left(z_2-1\right)^{2019}$ bằng

A. 2^{1009}. **B.** 2^{1010}. **C.** 0. **D.** -2^{1010}.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Xét phương trình $z^2-4z+5=0 \Leftrightarrow \left(z-2\right)^2=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=2+i \\ z_2=2-i \end{array}\right.$

Khi đó ta có: $\left(z_1-1\right)^{2019}+\left(z_2-1\right)^{2019}=\left(1+i\right)^{2019}+\left(1-i\right)^{2019}$

$=\left(1+i\right).\left(\left(1+i\right)^2\right)^{1009}+\left(1-i\right).\left(\left(1-i\right)^2\right)^{1009}$

$=\left(1+i\right).\left(2i\right)^{1009}+\left(1-i\right).\left(-2i\right)^{1009}$

$=\left(2i\right)^{1009}\left(\left(1+i\right)-\left(1-i\right)\right)=\left(2i\right)^{1010}=-2^{1010}$.

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị **dương** của số thực a sao cho phương trình $z^2+\sqrt{3}z+a^2-2a=0$ có nghiệm phức z_0 thỏa $\left|z_0\right|=\sqrt{3}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Phương trình $z^2+\sqrt{3}z+a^2-2a=0$ có $\Delta=-4a^2+8a+3$.

Xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1. $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -4a^2+8a+3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{7}}{2} \leq a \leq \frac{2+\sqrt{7}}{2}$.

Khi đó, phương trình có nghiệm z_0 thì $z_0 \in \mathbb{R}$.

Theo đề bài: $|z_0|=\sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_0=\sqrt{3} \\ z_0=-\sqrt{3} \end{array}\right.$.

$z_0=-\sqrt{3}$, thay vào phương trình ta được $a^2-2a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=2 \end{array}\right.$.

$z_0=\sqrt{3}$, thay vào phương trình ta được $a^2-2a+6=0$.

Kết hợp điều kiện $a>0$ và điều kiện suy ra $a=2$.

Trường hợp 2. $\Delta<0 \Leftrightarrow -4a^2+8a+3<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<\dfrac{2-\sqrt{7}}{2} \\ a>\dfrac{2+\sqrt{7}}{2} \end{array}\right.$.

Khi đó, phương trình có nghiệm phức z_0 thì $\overline{z_0}$ cũng là một nghiệm của phương trình.

Ta có $z_0.\overline{z_0}=a^2-2a \Leftrightarrow |z_0|^2=a^2-2a \Leftrightarrow a^2-2a-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=3 \end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện $a>0$ và điều kiện suy ra $a=3$.

Vậy có 2 giá trị a dương thỏa mãn là $a=2$; $a=3$.

Câu 5: Gọi S là tổng các giá trị thực của m để phương trình $9z^2+6z+1-m=0$ có nghiệm phức thỏa mãn $|z|=1$. Tính S.

A. 20. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $9z^2+6z+1-m=0 \ (*)$.

Trường hợp 1: $(*)$ có nghiệm thực $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 9-9(1-m) \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1$.

$|z|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=-1 \end{array}\right.$.

$z=1 \Rightarrow m=16$.

$z=-1 \Rightarrow m=4$.

Trường hợp 2: $(*)$ có nghiệm phức $z=a+bi(b \neq 0) \Leftrightarrow \Delta'<0 \Leftrightarrow 9-9(1-m)<0 \Leftrightarrow m<1$.

Nếu z là một nghiệm của phương trình $9z^2+6z+1-m=0$ thì $\overline{z}$ cũng là một nghiệm của phương trình $9z^2+6z+1-m=0$.

Ta có $|z|=1 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow z.\overline{z}=1 \Leftrightarrow \dfrac{c}{a}=1 \Leftrightarrow \dfrac{1-m}{9}=1 \Leftrightarrow m=-8$.

Vậy tổng các giá trị thực của m bằng 12.

Câu 6: Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $(z-3+i)^2-4z-4i+25=0$. Tính giá trị của biểu thức $A=|z_1|^2+|z_2|^2$.

A. $A=50$. **B.** $A=70$. **C.** $A=13$. **D.** $A=8$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Có $(z-3+i)^2-4z-4i+25=0 \Leftrightarrow [(z+i)-3]^2-4(z+i)+25=0 \Leftrightarrow (z+i)^2-10(z+i)+34=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z+i=5+3i \\ z+i=5-3i \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=5+2i \\ z_2=5-4i \end{array}\right.$$

$A=|z_1|^2+|z_2|^2=|5+2i|^2+|5-4i|^2=70.$

Câu 7: Gọi S là tập tất cả các nghiệm phức của phương trình $z^4-2iz^3+(i-1)z^2+2z-i=0$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 1. **B.** $1+i$. **C.** i. **D.** $2i$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $z^4-2iz^3+(i-1)z^2+2z-i=0$

$$\Leftrightarrow (z-i)^2.(z^2+i)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z-i=0 \\ z^2+i=0 \Leftrightarrow z^2=-i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=i \\ z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i \\ z=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i \end{array}\right.$$

Khi đó, tập các nghiệm phức của phương trình đã cho: $S=\left\{i;-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i;\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$

Tổng các phần tử của S bằng: $i+\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=i$.

Câu 8: Kí hiệu $z_1;z_2;z_3;z_4$ là bốn nghiệm phức của phương trình $\left(z^2-3z+6\right)\left(z^2+3z+3\right)-z\left(9+2z^2\right)+z^2=0$. Giá trị của biểu thức $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$ bằng

A. $2\sqrt{3}\left(1+\sqrt{2}\right)$. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)$. **D.** $2\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $\left(z^2-3z+6\right)\left(z^2+3z+3\right)-z\left(9+2z^2\right)+z^2=0$

$\Leftrightarrow z^2-\left(9+2z^2\right)z+\left(z^2-3z+6\right)\left(z^2+3z+3\right)=0$

$$\Delta=\left(9+2z^2\right)^2-4\left(z^2-3z+6\right)\left(z^2+3z+3\right)=\left(6z-3\right)^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}z=\dfrac{2z^2+9-6z+3}{2}=z^2-3z+6\\ z=\dfrac{2z^2+9+6z-3}{2}=z^2+3z+3\end{array}\right.$$

Với $z=z^2-3z+6\Leftrightarrow z^2-4z+6=0$.

Phương trình có hai nghiệm $z_1=2+\sqrt{2}i$ và $z_2=2-\sqrt{2}i$

Với $z=z^2+3z+3\Leftrightarrow z^2+2z+3=0$.

Phương trình có hai nghiệm là $z_3=-1-\sqrt{2}i$ và $z_4=-1+\sqrt{2}i$ f

Vậy $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=\left|2+\sqrt{2}i\right|+\left|2-\sqrt{2}i\right|+\left|-1-\sqrt{2}i\right|+\left|-1+\sqrt{2}i\right|=2\sqrt{3}\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Câu 9: Cho số phức z,w khác 0 thỏa mãn $z+w\neq 0$ và $\dfrac{1}{z}+\dfrac{3}{w}=\dfrac{6}{z+w}$. Khi đó $\left|\dfrac{z}{w}\right|$ bằng:

A. 3. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Với hai số phức z,w khác 0 thỏa mãn $z+\mathrm{w}\neq 0$, ta có:

$$\frac{1}{z}+\frac{3}{w}=\frac{6}{z+w}\Leftrightarrow\frac{w+3z}{zw}=\frac{6}{z+w}\Leftrightarrow\left(w+3z\right)\left(z+w\right)=6zw\Leftrightarrow 3z^2-2zw+w^2=0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{z}{w}\right)^2-2.\left(\frac{z}{w}\right)+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{z}{w}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{\sqrt{2}}{3}i\\ \dfrac{z}{w}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}i\end{array}\right.$$

Suy ra $\left|\dfrac{z}{w}\right|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

CHƯƠNG I. KHỐI ĐA DIỆN

BÀI 1. KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – KHỐI LĂNG TRỤ VÀ KHỐI CHÓP

Khối lăng trụ là phần không gian được giới hạn bởi một hình lăng trụ kể cả hình lăng trụ ấy.

Khối chóp là phần không gian được giới hạn bởi một hình chóp kể cả hình chóp ấy.

Khối chóp cụt là phần không gian được giới hạn bởi một hình chóp cụt kể cả hình chóp cụt ấy.

II – KHÁI NIỆM VỀ HÌNH ĐA DIỆN VÀ KHỐI ĐA DIỆN

1. Khái niệm về hình đa diện

Hình đa diện là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn hai tính chất:

- Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.
- Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

Mỗi đa giác như trên được gọi là một mặt của hình đa diện.

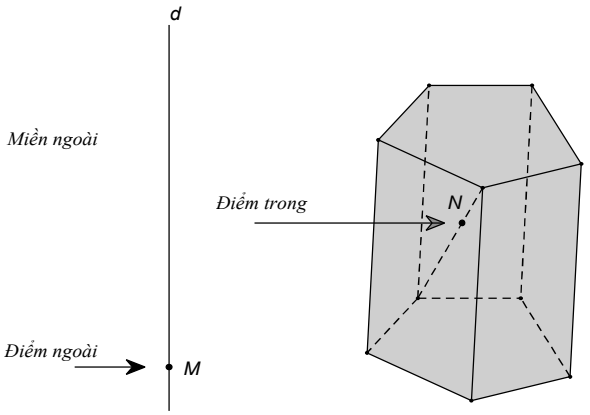
Các đỉnh, các cạnh của đa giác ấy theo thứ tự gọi là các đỉnh, các cạnh của hình đa diện.

2. Khái niệm về khối đa diện

Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.

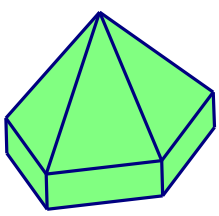
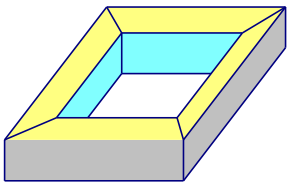
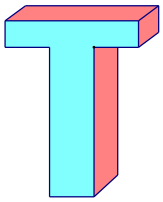
Những điểm không thuộc khối đa diện được gọi là điểm ngoài của khối đa diện. Tập hợp các điểm ngoài được gọi là miền ngoài của khối đa diện. Những điểm thuộc khối đa diện nhưng không thuộc hình đa diện ứng với đa diện ấy được gọi là điểm trong của khối đa diện. Tập hợp các điểm trong được gọi là miền trong của khối đa diện.

Mỗi khối đa diện được xác định bởi một hình đa diện ứng với nó. Ta cũng gọi đỉnh, cạnh, mặt, điểm trong, điểm ngoài… của một khối đa diện theo thứ tự là đỉnh, cạnh, mặt, điểm trong, điểm ngoài… của hình đa diện tương ứng.

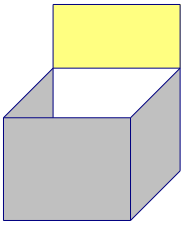


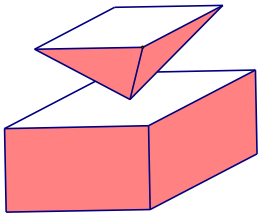
Ví dụ

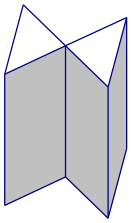
- Các hình dưới đây là những khối đa diện:

- Các hình dưới đây không phải là những khối đa diện:


Hình a


Hình b


Hình c

Giải thích: Hình a không phải là hình đa diện vì tồn tại cạnh không phải là cạnh chung của hai mặt; Hình b không phải là hình đa diện vì có một điểm đặc biệt trong hình, điểm đó không phải là đỉnh chung của hai đa giác; Hình c không phải là hình đa diện vì tồn tại một cạnh là cạnh chung của bốn đa giác.

III – HAI ĐA DIỆN BẰNG NHAU

1. Phép dời hình trong không gian

Trong không gian, quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' xác định duy nhất được gọi là một phép biến hình trong không gian.

Phép biến hình trong không gian được gọi là phép dời hình nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm tùy ý.

a) Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$, là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'}=\vec{v}$. Kí hiệu là $T_{\vec{v}}$.

b) Phép đối xứng qua mặt phẳng (P) là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của MM'.

Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến hình (H) thành chính nó thì (P) được gọi là mặt phẳng đối xứng của (H).

c) Phép đối xứng tâm O là phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho O là trung điểm của MM'.

Nếu phép đối xứng tâm O biến hình (H) thành chính nó thì O được gọi là tâm đối xứng của (H).

d) Phép đối xứng qua đường thẳng Δ là là phép biến hình biến mọi điểm thuộc đường thẳng Δ thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc Δ thành điểm M' sao cho Δ là đường trung trực của MM'.

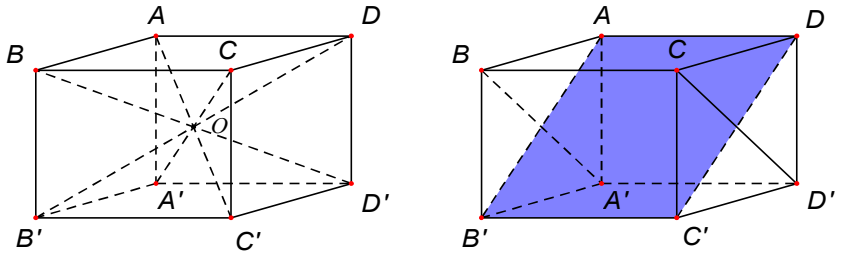
Nếu phép đối xứng qua đường thẳng Δ biến hình (H) thành chính nó thì Δ được gọi là trục đối xứng của (H).

Nhận xét

- Thực hiện liên tiếp các phép dời hình sẽ được một phép dời hình.
- Phép dời hình biến đa diện (H) thành đa diện (H'), biến đỉnh, cạnh, mặt của (H) thành đỉnh, cạnh, mặt tương ứng của (H').

Ví dụ: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó:

- Các hình chóp $A.A'B'C'D'$ và $C'.ABCD$ bằng nhau (vì qua phép đối xứng tâm O hình chóp $A.A'B'C'D'$ biến thành hình chóp $C'.ABCD$).
- Các hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và $AA'D'.BB'C'$ bằng nhau (vì qua phép đối xứng qua mặt phẳng $(AB'C'D)$ thì hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biến thành hình lăng trụ $AA'D'.BB'C'$).



2. Hai hình bằng nhau

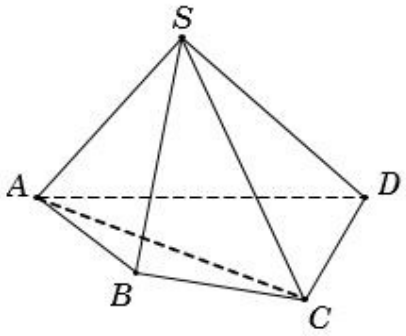
Hai hình được gọi là nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

Đặc biệt, hai đa diện được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến đa diện này đa diện kia.

IV – PHÂN CHIA VÀ LẮP GHÉP CÁC KHỐI ĐA DIỆN

Nếu khối đa diện (H) là hợp của hai khối đa diện (H_1) và (H_2) sao cho (H_1) và (H_2) không có chung điểm trong nào thì ta nói có thể phân chia được khối đa diện (H) thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2). Khi đó ta cũng nói có thể ghép hai khối đa diện (H_1) và (H_2) để được khối đa diện (H).

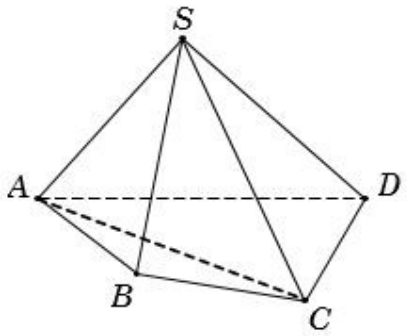
Ví dụ 1. Với khối chóp tứ giác $S.ABCD$, xét hai khối chóp tam giác $S.ABC$ và $S.ACD$.



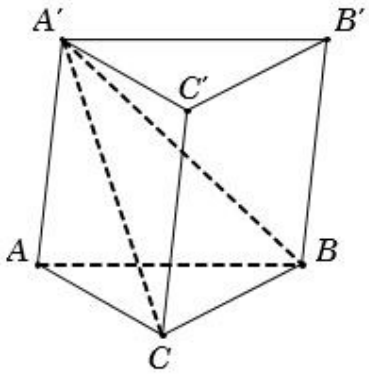
Ta thấy rằng:

● Hai khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ không có điểm trong chung (tức là không tồn tại điểm trong của khối chóp này là điểm trong của khối chóp kia và ngược lại).

● Hợp của hai khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ chính là khối chóp $S.ABCD$. Vậy khối chóp $S.ABCD$ được phân chia thành hai khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ hay hai khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ được ghép lại thành khối chóp $S.ABCD$.



Ví dụ 2. Cắt khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bởi mặt phẳng $(A'BC)$.



Khi đó, khối lăng trụ được phân chia thành hai khối đa diện $A'ABC$ và $A'BCC'B'$.

Nếu ta cắt khối chóp $A'BCC'B'$ bởi mặt phẳng $(A'B'C)$ thì ta chia khối chóp $A'BCC'B'$ thành hai khối chóp $A'BCB'$ và $A'CC'B'$.

Vậy khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ được chia thành ba khối tứ diện là $A'ABC$, $A'BCB'$ và $A'CC'B'$.

MỘT SỐ KẾT QUẢ QUAN TRỌNG

Kết quả 1: Một khối đa diện bất kì có ít nhất 4 mặt.

Kết quả 2: Mỗi hình đa diện có ít nhất 4 đỉnh.

Kết quả 3: Mỗi hình đa diện có ít nhất 6 cạnh.

Kết quả 4: Mỗi đỉnh của một hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất 3 cạnh.

Kết quả 5: Không tồn tại hình đa diện có 7 cạnh.

Kết quả 6: Cho (H) là đa diện mà các mặt của nó là những đa giác có p cạnh. Nếu số mặt của (H) là lẻ thì p phải là số chẵn.

Chứng minh:Gọi M là số các mặt của khối đa diện (H). Vì mỗi mặt của (H) có p cạnh nên M mặt sẽ có $p.M$ cạnh. Nhưng do mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai đa giác nên số cạnh của (H) bằng $C=\frac{pM}{2}$. Vì M lẻ nên p phải là số chẵn.

Kết quả 7 (Suy ra từ chứng minh kết quả 6): Cho (H) là đa diện có M mặt, mà các mặt của nó là những đa giác có p cạnh. Khi đó số cạnh của (H) là $C=\frac{pM}{2}$.

Kết quả 8: Mỗi khối đa diện có các mặt là các tam giác thì tổng số các mặt của nó phải là một số chẵn.

Chứng minh:Gọi số cạnh và số mặt của khối đa diện lần lượt là C và M.

Vì mỗi mặt có ba cạnh và mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên ta có số cạnh của đa diện là $C=\frac{3M}{2}\xrightarrow{C\in\mathbb{Z}}M$ chẵn.

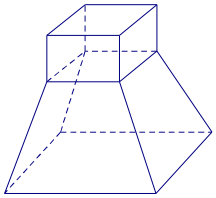
Kết quả 9: Mỗi khối đa diện bất kì luôn có thể được phân chia được thành những khối tứ diện.

Kết quả 10: Nếu khối đa diện có mỗi đỉnh là đỉnh chung của ba cạnh thì số đỉnh phải là số chẵn. (Tổng quát: Một đa diện mà mỗi đỉnh của nó đều là đỉnh chung của một số lẻ mặt thì tổng số đỉnh là một số chẵn).

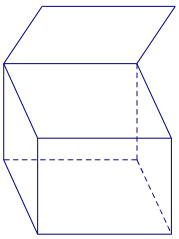
Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

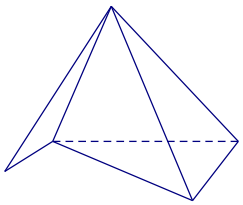
Câu 1: Cho các hình sau:



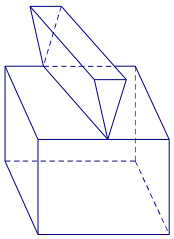
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

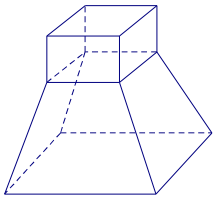
Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), hình đa diện là:

A. Hình 1. **B.** Hình 2. **C.** Hình 3. **D.** Hình 4.

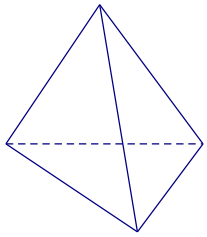
Hướng dẫn giải

Chọn A

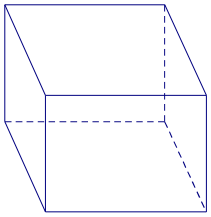
Câu 2: Cho các hình sau:



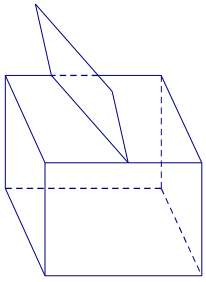
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

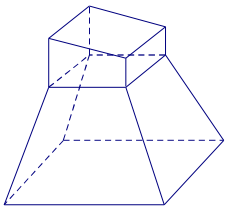
Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), hình không phải đa diện là:

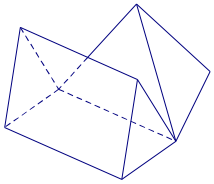
A. Hình 1. **B.** Hình 2. **C.** Hình 3. **D.** Hình 4.

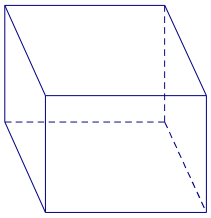
Hướng dẫn giải

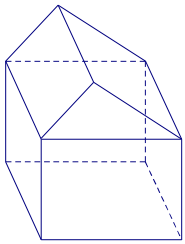
Chọn D

Câu 3: Cho các hình sau:


Hình 1


Hình 2


Hình 3


Hình 4

Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), số hình đa diện là:

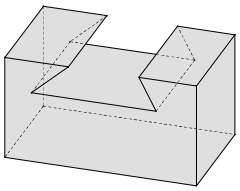
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

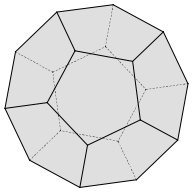
Hướng dẫn giải

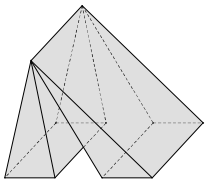
Chọn C

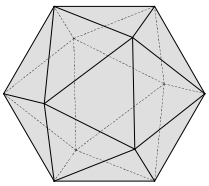
Các hình đa diện là: Hình 1; Hình 3; Hình 4.

Câu 4: Vật thể nào trong các vật thể sau không phải là khối đa diện?


A.


B.


C.


D.

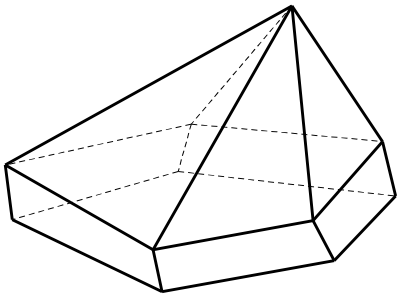
Hướng dẫn giải

Chọn C

Vì hình C vi phạm tính chất "Mỗi cạnh của miền đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai miền đa giác".

Câu 5: Hình đa diện trong hình vẽ bên có bao nhiêu mặt?

A. 6. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

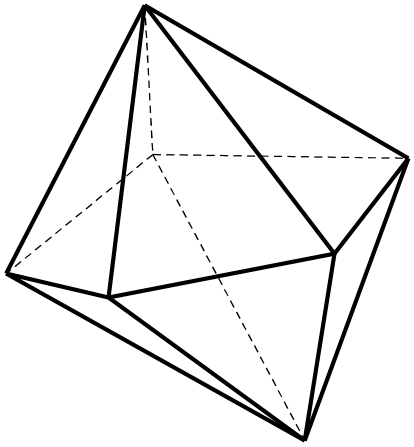


Hướng dẫn giải

Chọn C

Câu 6: Hình đa diện trong hình vẽ bên có bao nhiêu mặt?

A. 8. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

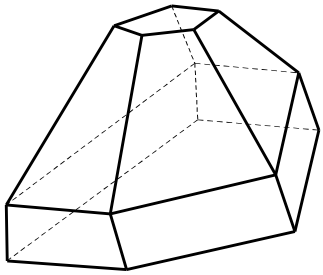


Hướng dẫn giải

Chọn B

Câu 7: Hình đa diện trong hình vẽ bên có bao nhiêu mặt?

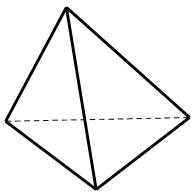
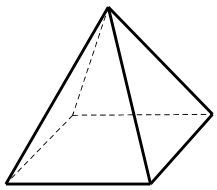
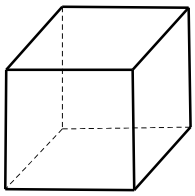
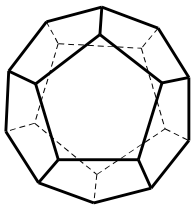
A. 11. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 14.



Hướng dẫn giải

Chọn B

Câu 8: Khối đa diện nào sau đây có số mặt nhỏ nhất?

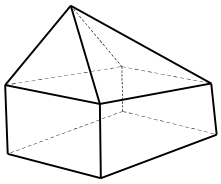
A. Khối tứ diện đều.
B. Khối chóp tứ giác.
C. Khối lập phương.
D. Khối 12 mặt đều.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Câu 9: Hình đa diện trong hình vẽ bên có bao nhiêu cạnh?

A. 8. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 16.



Hướng dẫn giải

Chọn D

Câu 10: Cho một hình đa diện. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh.

B. Mỗi mặt có ít nhất ba cạnh.

C. Mỗi cạnh là cạnh chung của ít nhất ba mặt.

D. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta thấy các đáp án A, B, D đều đúng dựa vào khái niệm hình đa diện.

Câu 11: Gọi $Đ$ là số các đỉnh, M là số các mặt, C là số các cạnh của một hình đa diện bất kỳ. mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $Đ > 4,\ M > 4,\ C > 6.$ **B.** $Đ > 5,\ M > 5,\ C > 7.$

C. $Đ \geq 4,\ M \geq 4,\ C \geq 6.$ **D.** $Đ \geq 5,\ M \geq 5,\ C \geq 7.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Xét hình đa diện là hình tứ diện thì kết quả về quan hệ số đỉnh và số mặt thỏa mãn đáp án C

Câu 12: Một hình đa diện có các mặt là những tam giác. Gọi M là tổng số mặt và C là tổng số cạnh C của đa diện đó. Mệnh đề nào sau đây đúng.

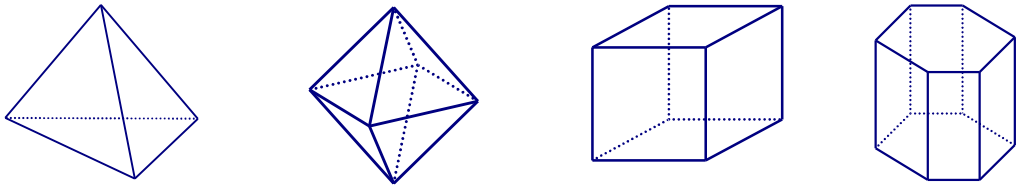
A. $3C = 2M$. **B.** $C = M + 2$. **C.** $M \geq C$. **D.** $3M = 2C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Vì mỗi mặt là những tam giác nên có tổng số cạnh là $3M$. Mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên ta có hệ thức $3M = 2C$.

Câu 13: Hình đa diện nào dưới đây không có tâm đối xứng?



A. Tứ diện đều. **B.** Bát diện đều.

C. Hình lập phương. **D.** Lăng trụ lục giác đều.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Câu 14: Gọi n_1, n_2, n_3 lần lượt là số trục đối xứng của khối tứ diện đều, khối chóp tứ giác đều và khối lập phương. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $n_1 = 0,\ n_2 = 0,\ n_3 = 6.$ **B.** $n_1 = 0,\ n_2 = 1,\ n_3 = 9.$

C. $n_1 = 3,\ n_2 = 1,\ n_3 = 9.$ **D.** $n_1 = 0,\ n_2 = 1,\ n_3 = 3.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Khối tứ diện đều có 3 trục đối xứng (đi qua trung điểm của các cặp cạnh đối diện). Khối chóp tứ giác đều có 1 trục đối xứng (đi qua đỉnh và tâm của mặt tứ giác). Khối lập phương có 9 trục đối xứng (Loại 1: đi qua tâm của các mặt đối diện ; Loại 2: đi qua trung điểm các cặp cạnh đối diện).

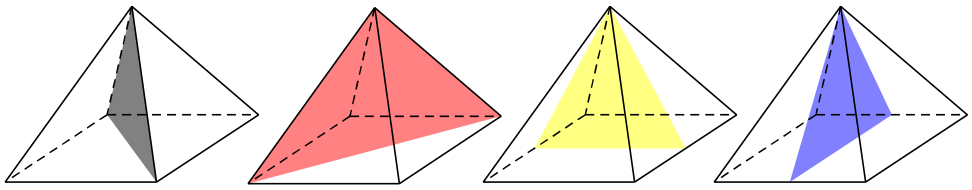
Câu 15: Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4 mặt phẳng. **B.** 1 mặt phẳng. **C.** 2 mặt phẳng. **D.** 3 mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Hình chóp tứ giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng bao gồm:



- 2 mặt phẳng đi qua đỉnh hình chóp và chứa đường trung bình của đáy.
- 2 mặt phẳng đi qua đỉnh hình chóp và chứa đường chéo của đáy.

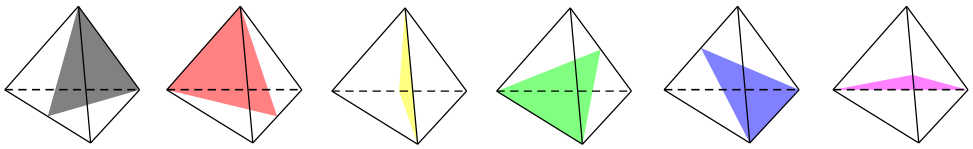
Câu 16: Số mặt phẳng đối xứng của hình tứ diện đều là:

A. 4 mặt phẳng. **B.** 6 mặt phẳng. **C.** 8 mặt phẳng. **D.** 10 mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Các mặt phẳng đối xứng của hình tứ diện đều là các mặt phẳng chứa một cạnh và qua trung điểm cạnh đối diện.



Vậy hình tứ diện đều có 6 mặt phẳng đối xứng.

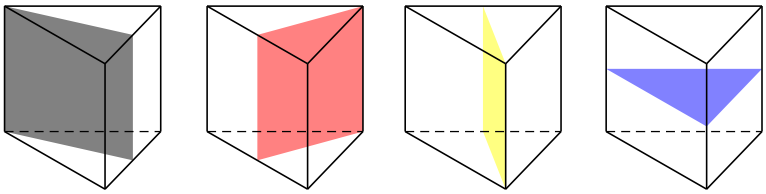
Câu 17: Hình lăng trụ tam giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4 mặt phẳng. **B.** 1 mặt phẳng. **C.** 2 mặt phẳng. **D.** 3 mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Hình lăng trụ tam giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng (hình vẽ bên dưới).



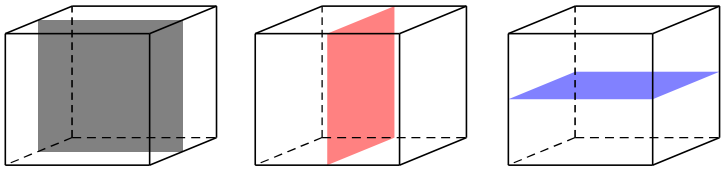
Câu 18: Hình hộp chữ nhật có ba kích thước đôi một khác nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4 mặt phẳng. **B.** 6 mặt phẳng. **C.** 9 mặt phẳng. **D.** 3 mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Hình hộp chữ nhật (không là hình lập phương) có các mặt phẳng đối xứng là các mặt các mặt phẳng trung trực của các cặp cạnh đối.



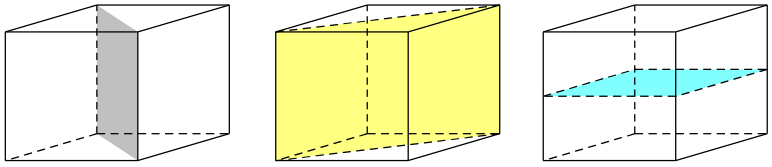
Câu 19: Một hình hộp đứng có đáy là hình thoi (không phải là hình vuông) có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4 mặt phẳng. **B.** 1 mặt phẳng. **C.** 2 mặt phẳng. **D.** 3 mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Hình hộp đứng có đáy là hình thoi (không phải là hình chữ nhật) có 3 mặt phẳng đối xứng bao gồm:



- 2 mặt phẳng chứa đường chéo của đáy và vuông góc với đáy.
- Một mặt phẳng là mặt phẳng trung trực của cạnh bên.

Câu 20: Hình lập phương có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

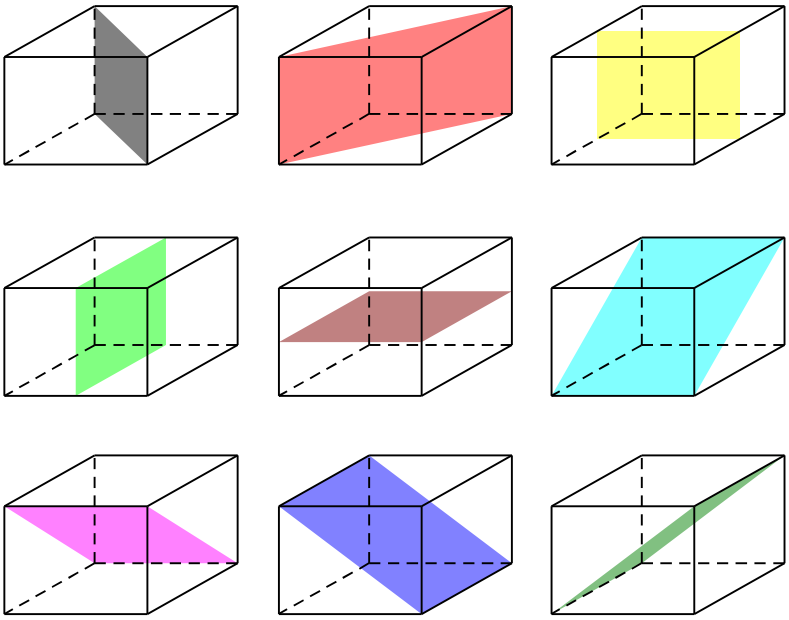
A. 8 mặt phẳng. **B.** 9 mặt phẳng.

C. 10 mặt phẳng. **D.** 12 mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Có 9 mặt đối xứng (như hình vẽ sau).



Câu 21: Số mặt phẳng đối xứng của hình bát diện đều là:

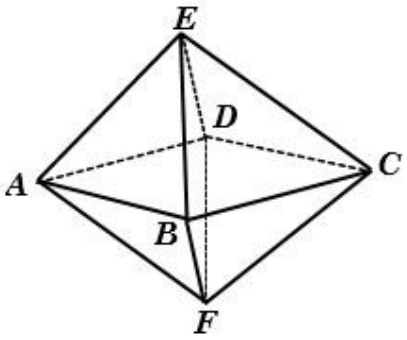
A. 4 mặt phẳng. **B.** 9 mặt phẳng.

C. 6 mặt phẳng. **D.** 12 mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Gọi bát diện đều $ABCDEF$. Có 9 mặt phẳng đối xứng, bao gồm: 3 mặt phẳng $(ABCD)$, $(BEDF)$, $(AECF)$ và 6 mặt phẳng mà mỗi mặt phẳng là mặt phẳng trung trực của hai cạnh song song (chẳng hạn AB và CD).



Câu 22: Có tất cả bao nhiêu mặt phẳng cách đều bốn đỉnh của một tứ diện?

A. 1 mặt phẳng. **B.** 4 mặt phẳng.

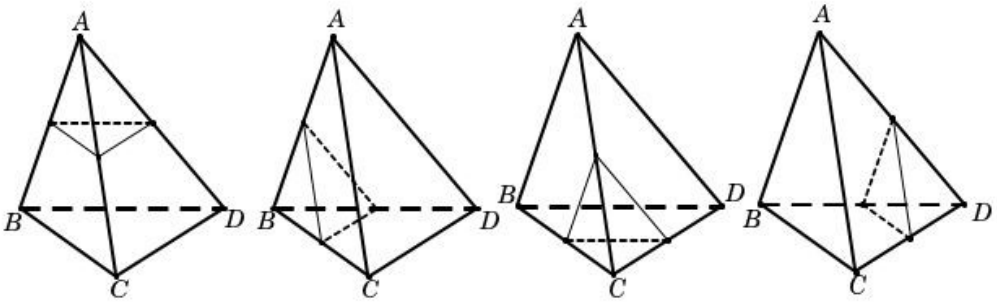
C. 7 mặt phẳng. **D.** Có vô số mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn C

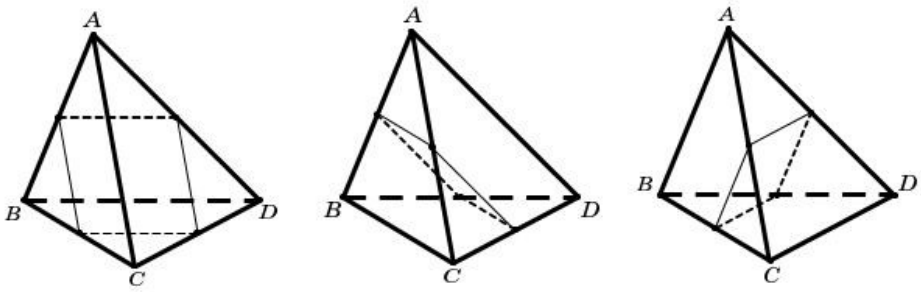
Có 2 loại mặt phẳng thỏa mãn đề bài là:

● Loại 1: Mặt phẳng qua trung điểm của 3 cạnh bên có chung đỉnh. Có 4 mặt phẳng thỏa mãn loại này (vì có 4 đỉnh)



Nhận xét. Loại này ta thấy có 1 điểm nằm khác phía với 3 điểm còn lại.

● Loại 2: Mặt phẳng qua trung điểm của 4 cạnh (4 cạnh này thuộc 2 cặp cạnh, mỗi cặp cạnh là chéo nhau). Có 3 mặt phẳng như thế.



Nhận xét. Loại này ta thấy có 2 điểm nằm khác phía với 2 điểm còn lại.

Câu 23: Mặt phẳng $(AB'C')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành các khối đa diện nào?

A. Một khối chóp tam giác và một khối chóp tứ giác.

B. Hai khối chóp tam giác.

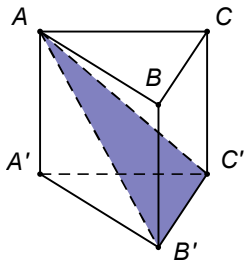
C. Một khối chóp tam giác và một khối chóp ngũ giác.

D. Hai khối chóp tứ giác.

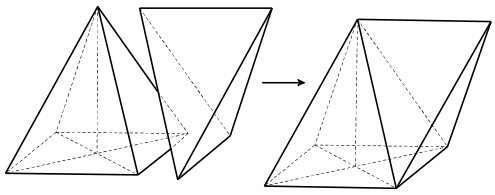
Hướng dẫn giải

Chọn A

Dựa vào hình vẽ, ta thấy mặt phẳng $(AB'C')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành khối chóp tam giác $A.A'B'C'$ và khối chóp tứ giác $A.BCC'B'$.



Câu 24: Lắp ghép hai khối đa diện (H_1), (H_2) để tạo thành khối đa diện (H), trong đó (H_1) là khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a, (H_2) là khối tứ diện đều cạnh a sao cho một mặt của (H_1) trùng với một mặt của (H_2) như hình vẽ. Hỏi khối da diện (H) có tất cả bao nhiêu mặt?



A. 5. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Khối đa diện (H) có đúng 5 mặt.

Sai lầm hay gặp: Khối chóp tứ giác đều có 5 mặt. Khối tứ diện đều có 4 mặt.

Ghép hai hình lại như hình vẽ ta được khối đa diện (H) có 8 mặt.

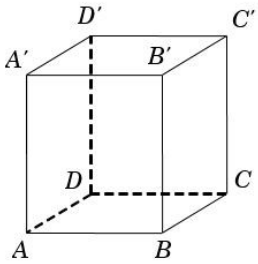
Câu 25: Có thể chia một hình lập phương thành bao nhiêu khối tứ diện bằng nhau?

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Lần lượt dùng mặt phẳng $(BDD'B')$ ta chia thành hai khối lập phương thành hai khối lăng trụ $ABD.A'B'D'$ và $BCD.B'C'D'$.



- Với khối $ABD.A'B'D'$ ta lần lượt dùng các mặt phẳng $(AB'D')$ và $(AB'D)$ chia thành ba khối tứ diện bằng nhau.
- Tương tự với khối $BCD.B'C'D'$.

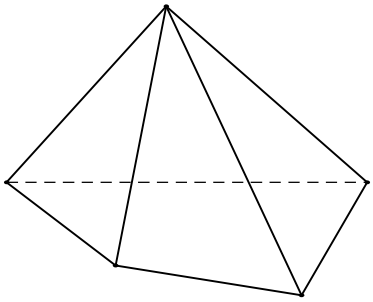
Vậy có tất cả 6 khối tứ diện bằng nhau.

BÀI 2. KHÁI ĐA DIỆN LỒI VÀ KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

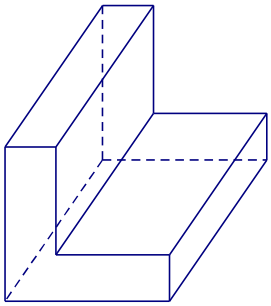
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – KHỐI ĐA DIỆN LỒI

Khối đa diện (H) được gọi là khối đa diện lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của (H) luôn thuộc (H). Khi đó đa diện giới hạn (H) được gọi là đa diện lồi.

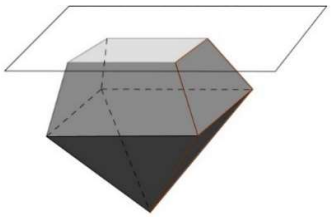


Khối đa diện lồi



Khối đa diện không lồi

Một khối đa diện là khối đa diện lồi khi và chỉ khi miền trong của nó luôn nằm về một phía đối với mỗi mặt phẳng đi qua một mặt của nó.



II – KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

Định nghĩa

Khối đa diện đều là một khối đa diện lồi có hai tính chất sau đây:

- Các mặt là những đa giác đều n cạnh.
- Mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng p cạnh.

Khối đa diện đều như vậy gọi là khối đa diện đều loại $\{n,p\}$.

Định lí

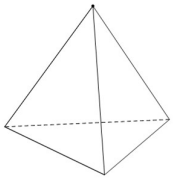
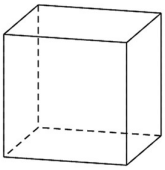
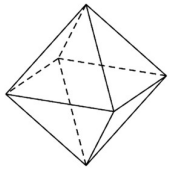
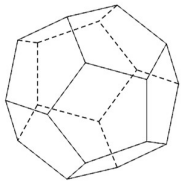
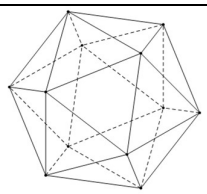
Chỉ có năm khối đa diện đều. Đó là:

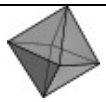
□ Loại $\{3;3\}$: khối tứ diện đều.

□ Loại $\{4;3\}$: khối lập phương.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

- Loại $\{3;4\}$: khối bát diện đều.
- Loại $\{5;3\}$: khối 12 mặt đều.
- Loại $\{3;5\}$: khối 20 mặt đều.

				
Khối tứ diện đều	Khối lập phương	Bát diện đều	Hình 12 mặt đều	Hình 20 mặt đều

Khối đa diện đều		Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt	Loại
Tứ diện đều		4	6	4	$\{3;3\}$
Khối lập phương		8	12	6	$\{4;3\}$
Bát diện đều		6	12	8	$\{3;4\}$
Mười hai mặt đều		20	30	12	$\{5;3\}$
Hai mươi mặt đều		12	30	20	$\{3;5\}$

Chú ý. Gọi $Đ$ là tổng số đỉnh, C là tổng số cạnh và M là tổng các mặt của khối đa diện đều loại $\{n;p\}$. Ta có

$$\boxed{pĐ = 2C = nM}$$

- Xét tứ diện đều $\{3;3\} \to \begin{cases} n=3,\ p=3 \\ M=4 \end{cases} \xrightarrow{pĐ=2C=nM} C = \frac{nM}{2} = 6 \ \ \& \ \ Đ = \frac{nM}{p} = 4.$
- Xét khối lập phương $\{4;3\} \to \begin{cases} n=4,\ p=3 \\ M=6 \end{cases} \xrightarrow{pĐ=2C=nM} C = \frac{nM}{2} = 12 \ \ \& \ \ Đ = \frac{nM}{p} = 8.$

- Xét bát diện đều $\{3;4\} \leftrightarrow \begin{cases} n=3,\ p=4 \\ M=8 \end{cases} \xrightarrow{pD=2C=nM} C=\frac{nM}{2}=12 \ \ \& \ \ D=\frac{nM}{p}=6.$

- Xét khối mười hai mặt đều

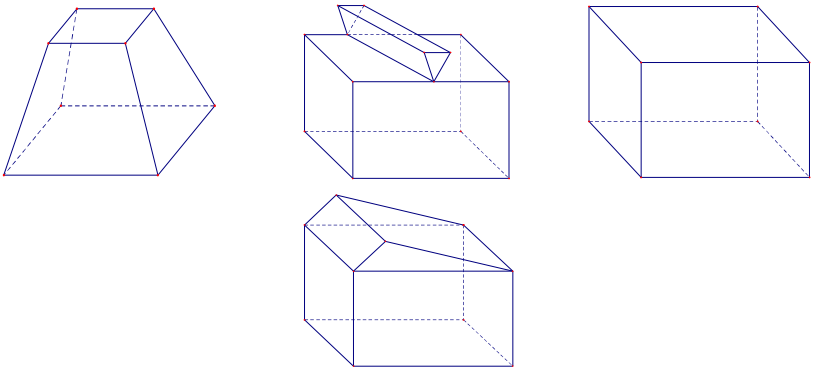
$$\{5;3\} \to \begin{cases} n=5,\ p=3 \\ M=12 \end{cases} \xrightarrow{pD=2C=nM} C=\frac{nM}{2}=30 \ \ \& \ \ D=\frac{nM}{p}=20.$$

- Xét khối hai mươi mặt đều

$$\{3;5\} \to \begin{cases} n=3,\ p=5 \\ M=20 \end{cases} \xrightarrow{pD=2C=nM} C=\frac{nM}{2}=30 \ \ \& \ \ D=\frac{nM}{p}=12.$$

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho các hình khối sau:



Hình 1 **Hình 2** **Hình 3** **Hình 4**

Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), hình không phải đa diện lồi là

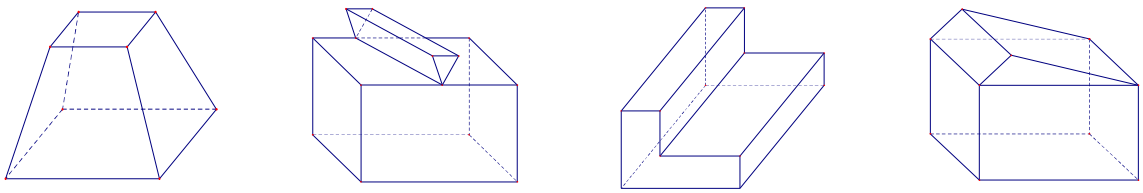
A. Hình 1. **B.** Hình 2. **C.** Hình 3. **D.** Hình 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Áp dụng các tính chất của khối đa diện lồi (H): "Đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của (H) luôn thuộc (H)".

Câu 2: Cho các hình khối sau:



Hình 1 **Hình 2** **Hình 3** **Hình 4**

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), số đa diện lồi là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B

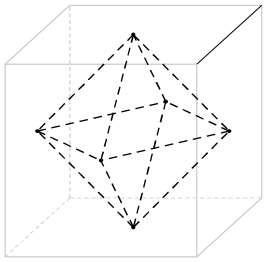
Có hai khối đa diện lồi là: Hình 1 & Hình 4.

Câu 3: Tâm tất cả các mặt của một hình lập phương là các đỉnh của hình nào trong các hình sau đây?

A. Bát diện đều. **B.** Tứ diện đều. **C.** Lục giác đều. **D.** Ngũ giác đều.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Câu 4: Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. Tâm tất cả các mặt của một hình lập phương là các đỉnh của một hình lập phương.

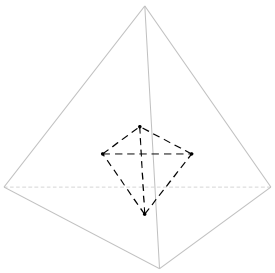
B. Tâm tất cả các mặt của một hình tứ diện đều là các đỉnh của một hình tứ diện đều.

C. Tâm tất cả các mặt của một hình tứ diện đều là các đỉnh của một hình lập phương.

D. Tâm tất cả các mặt của một hình lập phương là các đỉnh của một hình tứ diện đều.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Câu 5: Trung điểm các cạnh của một tứ diện đều tạo thành

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

A. các đỉnh của một hình tứ diện đều.

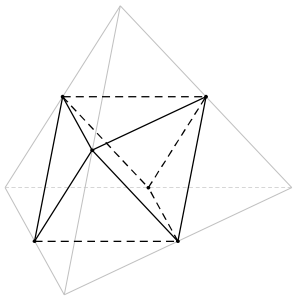
B. các đỉnh của một hình bát diện đều.

C. các đỉnh của một hình mười hai mặt đều.

D. các đỉnh của một hình hai mươi mặt đều.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Câu 6: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Tồn tại khối tứ diện là khối đa diện đều.

B. Tồn tại khối lăng trụ đều là khối đa diện đều.

C. Tồn tại khối hộp là khối đa diện đều.

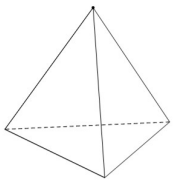
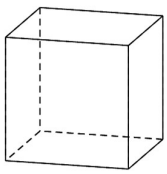
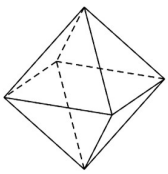
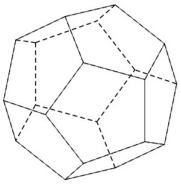
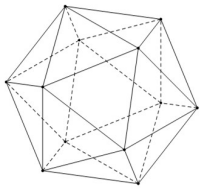
D. Tồn tại khối chóp tứ giác đều là khối đa diện đều.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Trong 5 loại khối đa diện đều không tồn tại khối chóp có đáy là tứ giác.

Câu 7: Trong không gian chỉ có 5 loại khối đa diện đều như hình vẽ

				
Khối tứ diện đều	Khối lập phương	Bát diện đều	Hình 12 mặt đều	Hình 20 mặt đều

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Mọi khối đa diện đều có số mặt là những số chia hết cho 4.

B. Khối lập phương và khối bát diện đều có cùng số cạnh.

C. Khối tứ diện đều và khối bát diện đều có 1 tâm đối xứng.

D. Khối mười hai mặt đều và khối hai mươi mặt đều có cùng số đỉnh.

Hướng dẫn giải

Chọn B

- Khối lập phương có 6 mặt. Do đó A sai.
- Khối lập phương và khối bát diện đều có cùng số cạnh là 12.
- Khối tứ diện đều không có tâm đối xứng. Do đó C sai.
- Khối 12 mặt đều có 20 đỉnh. Khối 20 mặt đều có 12 đỉnh. Do đó D sai.

Câu 8: Mỗi khối đa diện đều mà mỗi đỉnh của nó đều là đỉnh chung của ba mặt thì số đỉnh $Đ$ và số cạnh C của các khối đa diện đó luôn thỏa mãn:

A. $Đ = C - 2$. **B.** $Đ \geq C$. **C.** $3Đ = 2C$. **D.** $3C = 2Đ$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Do mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng ba mặt nên suy ra số cạnh của khối đa diện là $3Đ$. Mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên ta có hệ thức $3Đ = 2C$.

Câu 9: Tổng các góc ở đỉnh của tất cả các mặt của khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ là:

A. 4π. **B.** 8π. **C.** 12π. **D.** 10π.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ là khối lập phương, gồm 6 mặt là các hình vuông nên tổng các góc bằng $6.2\pi = 12\pi$.

Câu 10: Tổng các góc ở đỉnh của tất cả các mặt của khối đa diện đều loại $\{3;5\}$ là:

A. 12π. **B.** 16π. **C.** 20π. **D.** 24π.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Khối đa diện đều loại $\{3;5\}$ là khối hai mươi mặt đều, gồm 20 mặt là các tam giác đều nên tổng các góc bằng $20.\pi = 20\pi$.

Câu 11: Tổng độ dài ℓ của tất cả các cạnh của một tứ diện đều cạnh a.

A. $\ell = 4a$. **B.** $\ell = 6a$. **C.** $\ell = 6$. **D.** $\ell = 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Tứ diện đều có tất cả 6 cạnh nên có tổng độ dài các cạnh là $6a$.

Câu 12: Tổng độ dài ℓ của tất cả các cạnh của khối mười hai mặt đều cạnh bằng 2.

A. $\ell = 8$. **B.** $\ell = 16$. **C.** $\ell = 24$. **D.** $\ell = 60$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Khối mười hai mặt đều có 30 cạnh nên có tổng độ dài tất cả các cạnh bằng $\ell = 30.2 = 60$.

Câu 13: Cho hình đa diện đều loại $\{4;3\}$ cạnh a. Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình đa diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = 4a^2$. **B.** $S = 6a^2$. **C.** $S = 8a^2$. **D.** $S = 10a^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đa diện đều loại $\{4;3\}$ là khối lập phương nên có 6 mặt là các hình vuông cạnh a. Vậy hình lập phương có tổng diện tích tất cả các mặt là $S = 6a^2$.

Câu 14: Cho hình bát diện đều cạnh a. Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình bát diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = 4\sqrt{3}a^2$. **B.** $S = \sqrt{3}a^2$. **C.** $S = 2\sqrt{3}a^2$. **D.** $S = 8a^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Hình bát diện đều là hình có tám mặt bằng nhau và mỗi mặt là một tam giác đều. Gọi S_0 là diện tích tam giác đều cạnh $a \longrightarrow S_0 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy diện tích S cần tính là $S = 8.S_0 = 8.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}a^2$.

Câu 15: Cho hình 20 mặt đều có cạnh bằng 2. Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình đa diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = 10\sqrt{3}$. **B.** $S = 20\sqrt{3}$. **C.** $S = 20$. **D.** $S = 10$.

Hướng dẫn giải

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Chọn B

Hình 20 đều là hình có 20 mặt bằng nhau và mỗi mặt là một tam giác đều.

Gọi S_0 là diện tích tam giác đều cạnh bằng $2 \longrightarrow S_0 = \frac{2^2.\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}.$

Vậy diện tích S cần tính là $S = 20.S_0 = 20\sqrt{3}.$

BÀI 3. KHÁI NIỆM VÀ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – NHẮC LẠI MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

Hình lăng trụ là hình có hai đáy là hai đa giác bằng nhau nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau và các mặt bên đều là các hình bình hành.

1. Hình lăng trụ đứng

Định nghĩa. Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

Tính chất. Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là các hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.

2. Hình lăng trụ đều

Định nghĩa. Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

Tính chất. Các mặt bên của hình lăng trụ đều là các hình chữ nhật bằng nhau và vuông góc với mặt đáy.

Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.

3. Hình hộp đứng

Định nghĩa. Hình hộp đứng là hình hộp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

Tính chất. Hình hộp đứng có 2 đáy là hình bình hành, 4 mặt xung quanh là 4 hình chữ nhật.

4. Hình hộp chữ nhật

Định nghĩa. Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

Tính chất. Hình hộp chữ nhật có 6 mặt là 6 hình chữ nhật.

5. Hình lập phương

Định nghĩa. Hình lập phương là hình hộp chữ nhật 2 đáy và 4 mặt bên đều là hình vuông

Tính chất. Hình lập phương có 6 mặt đều là hình vuông.

Hình chóp là hình có đáy là một đa giác và các mặt bên là các tam giác có chung một đỉnh.

II – THỂ TÍCH

1. Công thức tính thể tích khối chóp

$$V=\frac{1}{3}S.h$$

Trong đó: S là diện tích đáy, h là chiều cao khối chóp.

2. Công thức tính thể tích khối lăng trụ

$$V=B.h$$

Trong đó: B là diện tích đáy, h là hiều cao khối lăng trụ

● **Thể tích khối hộp chữ nhật**: $V = a.b.c$

Trong đó: a, b, c là ba kích thước của khối hộp chữ nhật.

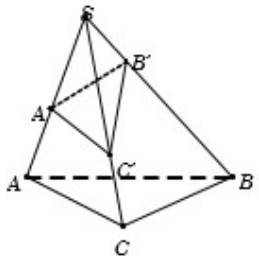
● **Thể tích khối lập phương**: $V = a^3$

Trong đó a là độ dài cạnh của hình lập phương.

III – TỈ SỐ THỂ TÍCH

Cho khối chóp $S.ABC$ và A', B', C' là các điểm tùy ý lần lượt thuộc SA, SB, SC ta có

$$\boxed{\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}}.$$



Phương pháp này được áp dụng khi khối chóp không xác đinh được chiều cao một cách dễ dàng hoặc khối chóp cần tính là một phần nhỏ trong khối chóp lớn và cần chú ý đến một số điều kiện sau

- Hai khối chóp phải cùng chung đỉnh.
- Đáy hai khối chóp phải là tam giác.
- Các điểm tương ứng nằm trên các cạnh tương ứng.

B. PHÂN DẠNG VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

1. Phương pháp

- Một hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy thì cạnh bên đó chính là đường cao.
- Một hình chóp có hai mặt bên kề nhau cùng vuông góc với đáy thì cạnh bên là giao tuyến của hai mặt đó vuông góc với đáy.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho tứ diện $OABC$ có đáy OBC là tam giác vuông tại O, $OB = a$, $OC = a\sqrt{3}$, $(a > 0)$ và đường cao $OA = a\sqrt{3}$. Tính hể tích khối tứ diện theo a

Hướng dẫn giải

Ta có: $S_{OBC} = \frac{1}{2}OB.OC = \frac{1}{2}a(a\sqrt{3}) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Thế tích khối tứ diện $V = \frac{1}{3}S_{OBC}.OA = \frac{1}{3}(\frac{a^2\sqrt{3}}{2})(a\sqrt{3}) = \frac{a^3}{2}$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60°$, cạnh SA vuông góc với đáy và SC tạo với đáy một góc $60°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a bằng

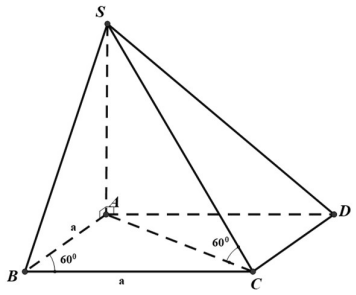
Hướng dẫn giải

$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Ta có ΔABC đều nên $AC = a$.

$SA = AC.\tan 60° = a\sqrt{3}$.

Suy ra: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{a^3}{2}$.



Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi có cạnh bằng $a\sqrt{3}$, $\widehat{BAD} = 120°$ và cạnh bên *SA* vuông góc với đáy. Biết mặt phẳng (SBC) và đáy bằng $60°$. Thể tích khối chóp S.ABCD bằng

Hướng dẫn giải

Tam giác SAH vuông tại A:

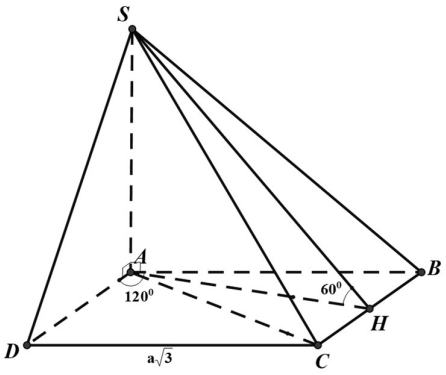
$SA = AH.\tan 60° = \frac{3a}{2}$

Ta có: $S_{ABCD} = 2S_{ABC}$

$= 2\frac{\left(a\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra:

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$.



Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 2a$, $\widehat{BAC} = 60°$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp S.ABC theo *a* bằng

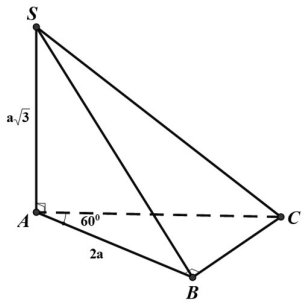
Hướng dẫn giải

Xét tam giác *ABC* có:

$BC = AB.\tan 60^0 = 2a\sqrt{3}$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = 2a^2\sqrt{3}$

$\Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = 2a^3$.



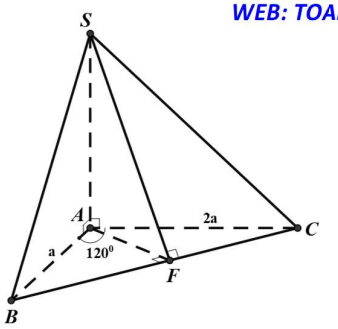
Ví dụ 5: Cho hình chóp S.ABC có cạnh bên SA vuông góc với đáy và AB = a, AC = 2a, $\widehat{BAC} = 120°$. Mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc $60°$. Thể tích của khối chóp S.ABC bằng

Hướng dẫn giải

Ta có: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$$BC = a\sqrt{7};\ AF = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{a\sqrt{21}}{7};\ SA = \frac{3a\sqrt{7}}{7}$$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SA = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{3a\sqrt{7}}{7} = \frac{a^3\sqrt{21}}{14}$$



3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $V = a^3\sqrt{2}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

Chiều cao khối chóp là $SA = a\sqrt{2}$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 2: Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = 4,\ AB = 6,\ BC = 10$ và $CA = 8$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = 40$. **B.** $V = 192$. **C.** $V = 32$. **D.** $V = 24$.

Lời giải

Chọn C

Tam giác ABC, có $AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2 = BC^2$

$\longrightarrow$ tam giác ABC vuông tại $A \longrightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = 24$.

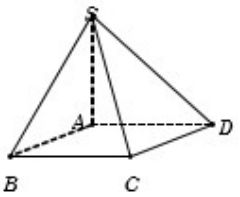
Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA = 32$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có cạnh $AB = a$, $BC = 2a$. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, cạnh $SA = a\sqrt{15}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{2a^3\sqrt{15}}{6}$. **B.** $V = \frac{2a^3\sqrt{15}}{3}$. **C.** $V = 2a^3\sqrt{15}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Vì hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với $(ABCD)$, suy ra $SA \perp (ABCD)$. Do đó chiều cao khối chóp là $SA = a\sqrt{15}$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB.BC = 2a^2$.

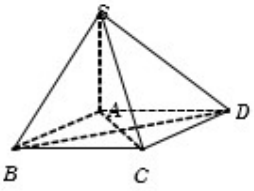
Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SA = \frac{2a^3\sqrt{15}}{3}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SC = a\sqrt{5}$. Tính theo a thể tích V khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V = a^3\sqrt{3}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Đường chéo hình vuông $AC = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SAC, ta có $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = a\sqrt{3}$.

Chiều cao khối chóp là $SA = a\sqrt{3}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

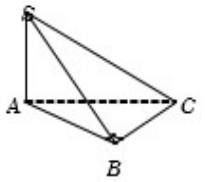
Vậy thể tích khối chop $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA = BC = a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = a^3$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $V = \frac{a^3}{3}$. **D.** $V = \frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Diện tích tam giác vuông $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BA.BC=\frac{a^2}{2}$.

Chiều cao khối chóp là $SA=2a$.

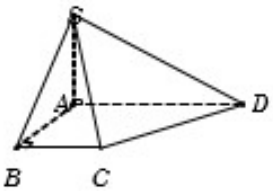
Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}.SA=\frac{a^3}{3}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=1$, $AD=2$. Cạnh bên $SA=2$ và vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=1$. **B.** $V=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $V=\frac{1}{3}$. **D.** $V=2$.

Lời giải

Chọn A



Diện tích hình thang $ABCD$ là

$$S_{ABCD}=\left(\frac{AD+BC}{2}\right).AB=\frac{3}{2}.$$

Chiều cao khối chóp là $SA=2$.

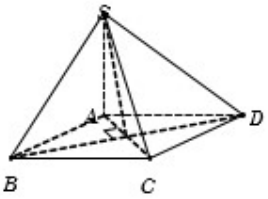
Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SA=1.$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{SBD}=60^0$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=a^3$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $V=\frac{a^3}{3}$. **D.** $V=\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\Delta SAB = \Delta SAD \longrightarrow SB = SD.$

Hơn nữa, theo giả thiết $\widehat{SBD} = 60^0$.

Do đó ΔSBD đều cạnh $SB = SD = BD = a\sqrt{2}$.

Tam giác vuông SAB, ta có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2.$

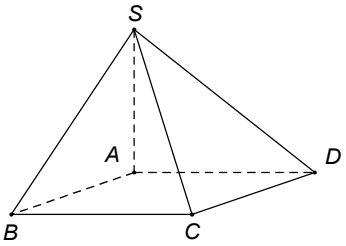
Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SA = \frac{a^3}{3}$ (đvtt).

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AC = 5a$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt đáy, cạnh bên SB tạo với mặt đáy một góc 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = 6\sqrt{2}a^3$. **B.** $V = 4\sqrt{2}a^3$. **C.** $V = 2\sqrt{2}a^3$. **D.** $V = 2a^3$.

Lời giải

Chọn C



Trong tam giác vuông ABC, ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2\sqrt{6}a$.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$ là AB.

Do đó $60^0 = \widehat{SB,(ABCD)} = \widehat{SB,AB} = \widehat{SBA}$.

Tam giác vuông SAB, có $SA = AB.\tan\widehat{SBA} = a\sqrt{3}$.

Diện tích hình chữ nhật $S_{ABCD} = AB.BC = 2\sqrt{6}a^2.$

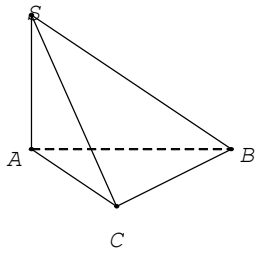
Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SA = 2\sqrt{2}a^3.$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC); góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3}{4}$. **B.** $V=\frac{3a^3}{4}$. **C.** $V=\frac{a^3}{2}$. **D.** $V=a^3$.

Lời giải

Chọn A



Do $SA\perp(ABCD)$ nên ta có

$60^0=\widehat{SB,(ABC)}=\widehat{SB,AB}=\widehat{SBA}.$

Tam giác vuông SAB, có $SA=AB.\tan\widehat{SBA}=a\sqrt{3}.$

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

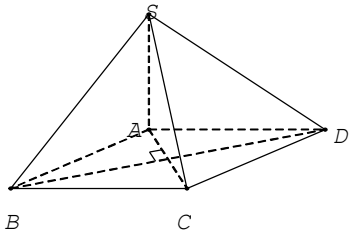
Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA=\frac{a^3}{4}.$

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD}=120^0$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$ và SD tạo với đáy $(ABCD)$ một góc 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{a^3}{4}$. **B.** $V=\frac{3a^3}{4}$. **C.** $V=\frac{a^3}{2}$. **D.** $V=a^3$.

Lời giải

Chọn C



Do $SA\perp(ABCD)$ nên ta có $60^0=\widehat{SD,(ABCD)}=\widehat{SD,AD}=\widehat{SDA}.$

Tam giác vuông SAD, có $SA=AD.\tan\widehat{SDA}=a\sqrt{3}.$

Diện tích hình thoi $S_{ABCD}=2S_{\Delta BAD}=AB.AD.\sin\widehat{BAD}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$

Vậy thể tích khối chop $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\frac{a^3}{2}.$

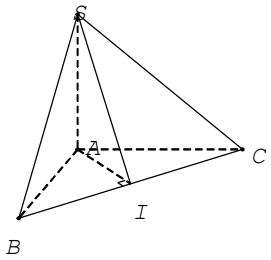
Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB=AC=a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC). Gọi I là trung điểm của BC, SI tạo với mặt phẳng (ABC) góc 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **C.** $V=\dfrac{a^3}{2}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải

Chọn D



Vì $SA\perp(ABC)$ nên hình chiếu vuông góc của SI trên mặt phẳng (ABC) là AI. Do đó $60^o=\widehat{SI,(ABC)}=\widehat{SI,AI}=\widehat{SIA}$.

Tam giác ABC vuông tại A, suy ra trung tuyến $AI=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác vuông SAI, có $SA=AI.\tan\widehat{SIA}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích tam giác vuông $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC=\dfrac{a^2}{2}$.

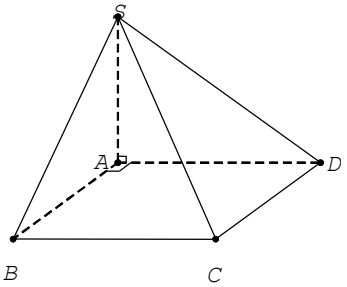
Vậy $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy, SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc bằng 30^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\dfrac{\sqrt{6}a^3}{18}$. **B.** $V=\sqrt{3}a^3$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D



$ABCD$ là hình vuông suy ra $AB\perp AD$. (1)

Vì $SA\perp(ABCD)\longrightarrow SA\perp AD$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $AD\perp(SAB)$.

Khi đó SA là hình chiếu của SD trên mặt phẳng (SAB).

Do đó $30^0=\widehat{SD;(SAB)}=\widehat{(SD;SA)}=\widehat{DSA}$.

Tam giác SAD vuông tại A, có $SA = \dfrac{AD}{\tan \widehat{DSA}} = a\sqrt{3}.$

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} S_{ABCD}.SA = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}.$

Câu 13: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

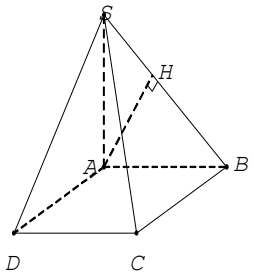
A. $V = \dfrac{a^3}{2}.$ **B.** $V = a^3.$ **C.** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{9}.$ **D.** $V = \dfrac{a^3}{3}.$

Lời giải

Chọn D

Gọi H là hình chiếu của A trên SB
$\Rightarrow AH \perp SB.$

Ta có
$\begin{cases} SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow AH \perp BC$



Suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow d[A,(SBC)] = AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$

Tam giác SAB vuông tại A, có
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} \Rightarrow SA = a.$

Vậy $V = \dfrac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \dfrac{a^3}{3}.$

Dạng 2 : Khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy

1. Phương pháp

Để xác định đường cao hình chóp ta vận dụng định lí sau

$$\left.\begin{array}{l} (\alpha) \perp (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \\ a \subset (\alpha) \\ a \perp d \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp (\beta).$$

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B $BA = 3a, BC = 4a;$ mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30°$. Thể tích khối chóp S.ABC

Hướng dẫn giải

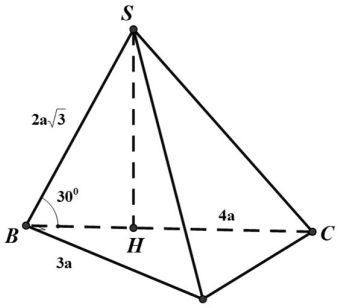
Ta có:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}BA.BC = 6a^2$

Trong tam giác vuông SBH:

$SH = SB.\sin\widehat{SBC} = a\sqrt{3}$.

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = 2a^3\sqrt{3}$.



Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông có cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy ABCD Thể tích khối chóp S. ABCD

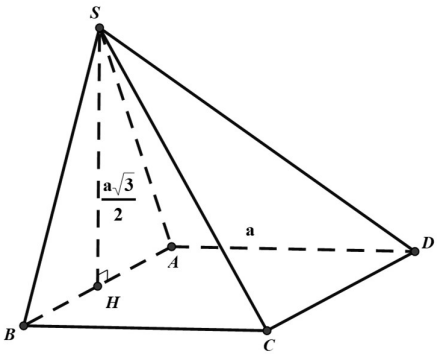
Hướng dẫn giải

Ta có:

$S_{ABCD} = a^2$

Tam giác SAB đều nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra: $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.



Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, có BC = a. Mặt bên SAC vuông góc với đáy, các mặt bên còn lại đều tạo với mặt đáy một góc 45°. Thể tích khối chóp S.ABC bằng

Hướng dẫn giải

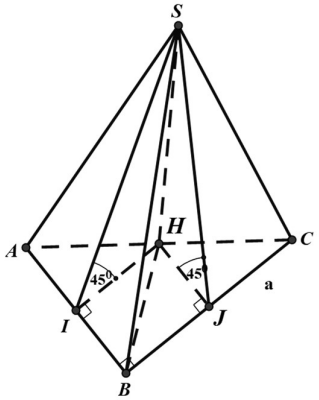
Ta có:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC^2 = \frac{1}{2}a^2$.

Tam giác SHI vuông cân tại H nên

$SH = HI = \frac{a}{2}$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{a^3}{12}$

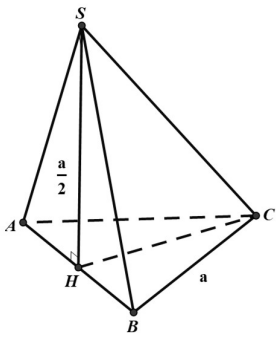


Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC đều cạnh a, tam giác SBC vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). Thể tích khối chóp S.ABC bằng

Hướng dẫn giải

Ta có tam giác ABC đều cạnh bằng a nên $S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác SAB vuông cân tại S và có $AB=a$ nên $SH=\frac{a}{2}$



$$V=\frac{1}{3}SH.S_{ABC}$$
$$=\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$$

.

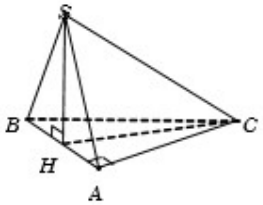
3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **C.** $V=\frac{2a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của AB, suy ra $SH\perp AB$.

Do $(SAB)\perp(ABC)$ theo giao tuyến AB nên $SH\perp(ABC)$.

Tam giác SAB là đều cạnh $AB=a$ nên $SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác vuông ABC, có $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=a\sqrt{2}$.

Diện tích tam giác vuông $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

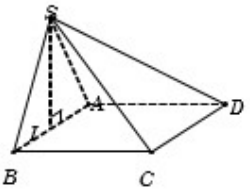
Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 2: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, $SA=2a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{12}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. **C.** $V=2a^3$. **D.** $V=\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của AB. Tam giác SAB cân tại S và có I là trung điểm AB nên $SI\perp AB$. Do $(SAB)\perp(ABCD)$ theo giao tuyến AB nên $SI\perp(ABCD)$.

Tam giác vuông SIA, có

$$SI=\sqrt{SA^2-IA^2}=\sqrt{SA^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD}=a^2$.

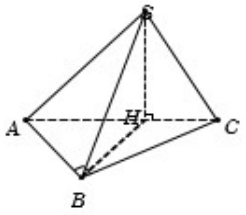
Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SI=\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AC=2a$, $AB=SA=a$. Tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABC). Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3}{4}$. **B.** $V=\frac{3a^3}{4}$. **C.** $V=a^3$. **D.** $V=\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $SH\perp AC$. Do $(SAC)\perp(ABC)$ theo giao tuyến AC nên $SH\perp(ABC)$.

Trong tam giác vuông SAC, ta có

$SC=\sqrt{AC^2-SA^2}=a\sqrt{3}$, $SH=\frac{SA.SC}{AC}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác vuông ABC, có $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=a\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.BC=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

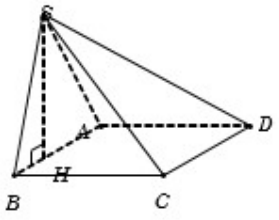
Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH=\frac{a^3}{4}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Hình chiếu vuông góc của S trên AB là điểm H thỏa $AH=2BH$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Trong tam giác vuông SAB, ta có $SA^2=AH.AB=\frac{2}{3}AB.AB=\frac{2}{3}a^2$;

$$SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD}=a^2$.

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SH=\frac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{3}$, tam giác SBC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, đường thẳng SD tạo với mặt phẳng (SBC) một góc 60^0. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{1}{\sqrt{6}}$. **B.** $V=\sqrt{6}$. **C.** $V=\frac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $V=\sqrt{3}$.

Lời giải

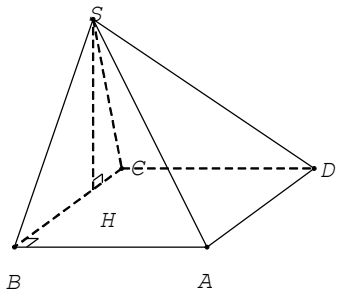
Chọn C

Kẻ $SH\perp BC$. Vì $(SBC)\perp(ABCD)$ theo giao tuyến BC nên $SH\perp(ABCD)$.

Ta có $\begin{cases}DC\perp BC\\DC\perp SH\end{cases}\Rightarrow DC\perp(SBC)$. Do đó $60^0=\widehat{SD,(SBC)}=\widehat{SD,SC}=\widehat{DSC}$.

Từ $DC \perp (SBC) \longrightarrow DC \perp SC.$

Tam giác vuông SCD, có $SC = \dfrac{DC}{\tan \widehat{DSC}} = 1$.



Tam giác vuông SBC, có

$$SH = \frac{SB.SC}{BC} = \frac{\sqrt{BC^2 - SC^2}.SC}{BC} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = 3.$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} S_{ABCD}.SH = \dfrac{\sqrt{6}}{3}.$

Dạng 3: Khối chóp đều

1. Phương pháp

1. Một số lưu ý

a) Định nghĩa: Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu đáy của nó là một đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

b) Kết quả: Trong hình chóp đều:

- Đường cao hình chóp qua tâm của đa giác đáy.
- Các cạnh bên tạo với đáy các góc bằng nhau.
- Các mặt bên tạo với đáy các góc bằng nhau.

Chú ý:

❖ Đề bài cho hình chóp tam giác đều (tứ giác đều) ta hiểu là hình chóp đều.

❖ Hình chóp tam giác đều khác với hình chóp có đáy là tam giác đều vì hình chóp tam giác đều thì bản thân nó có đáy là tam giác đều và các cạnh bên bằng nhau, nói một cách khác, hình chóp tam giác đều thì suy ra hình chóp có đáy là tam giác đều nhưng điều ngược lại là không đúng.

❖ Hình chóp tứ giác đều là hình chóp đều có đáy là hình vuông.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

Hướng dẫn giải

Tam giác ABC đều cạnh a nên

$$S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

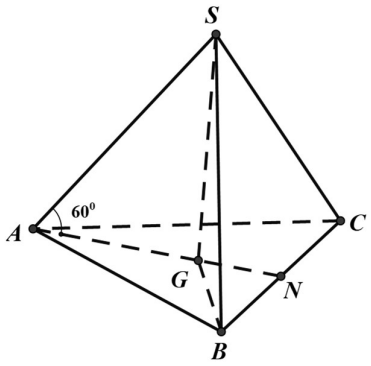
Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên

$$AG=\frac{2}{3}AN=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Trong tam giác SAG có

$$SG=AG.\tan 60°=a$$

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.



Ví dụ 2: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, đáy ABCD có diện tích là $16cm^2$, diện tích một mặt bên là $8\sqrt{3}cm^2$. Tính chiều cao của hình chóp S.ABCD

Hướng dẫn giải

Ta có $S_{ABCD}=16cm^2\Rightarrow CD=4cm$

$$S_{SCD}=8\sqrt{3}cm^2=S_{SAB}$$

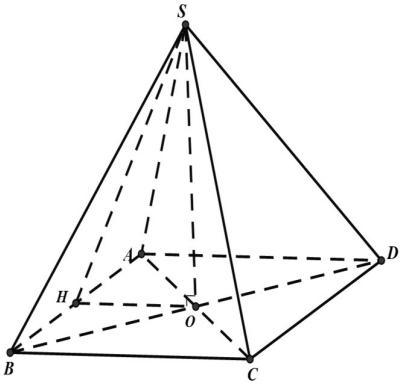
$$\Rightarrow\frac{1}{2}SH.AB=8\sqrt{3}cm^2$$

$$\Rightarrow SH=4\sqrt{3}cm$$

Xét ΔSOH vuông tại O có:

$$SO=\sqrt{SH^2-OH^2}$$

$$=\sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2-2^2}cm=2\sqrt{11}cm$$



Ví dụ 3: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có các cạnh bên bằng $\sqrt{3}$ và tạo với mặt phẳng đáy góc 60^0. Thể tích khối chóp S.ABC bằng

Hướng dẫn giải

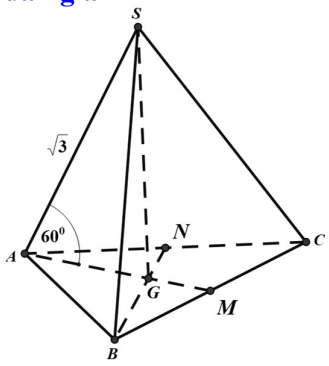
Xét ΔSGA vuông tại G có :

$$SG=SA.\sin 60^0=\frac{3}{2};$$

$$AG=SA.\cos 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow AM=\frac{3}{2}AG=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

ΔABC đều $\Rightarrow AM=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$



$\Rightarrow AB = \frac{2}{\sqrt{3}} AM = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{16}$

Vậy $V_{SABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SM = \frac{1}{3}.\frac{9\sqrt{3}}{16}.\frac{3}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{32}$.

Ví dụ 4: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng 2a. Tính thể tích chóp đều S.ABC bằng

Hướng dẫn giải

Ta có tam giác ABC đều nên

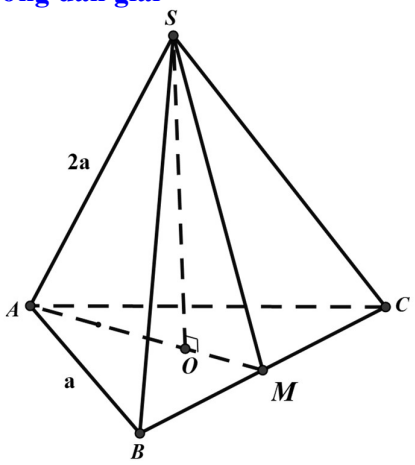
$AO = \frac{2}{3} AH = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Trong tam giác vuông SOA

$SO^2 = SA^2 - OA^2 = \frac{11a^2}{3}$

$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$

Vậy $V = \frac{1}{3} S_{ABC}.SO = \frac{a^3\sqrt{11}}{12}$.



Ví dụ 5: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng 2a, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD

Hướng dẫn giải

Ta có: $S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$

Ta có: $AC = 2a.\sqrt{2}$

$\Rightarrow$

$AO = \frac{AC}{2} = \frac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$

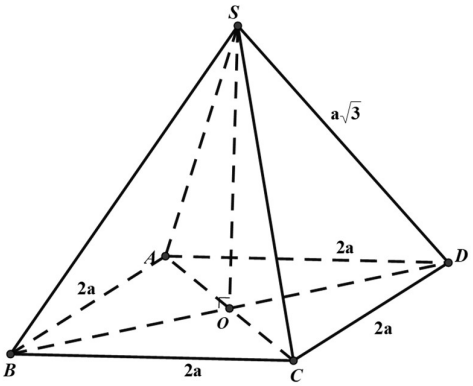
Δ SAO vuông tại O có

$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = a$

Thể tích khối chóp S.ABCD:

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO$

$= \frac{1}{3}.4a^2.a = \frac{4a^3}{3}$



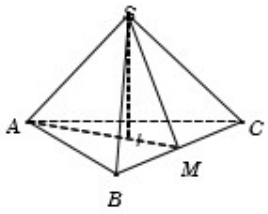
3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\dfrac{\sqrt{13}a^3}{12}$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{11}a^3}{12}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{11}a^3}{6}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{11}a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Vì $S.ABC$ là khối chóp đều nên suy ra $SI\perp(ABC)$.

Gọi M là trung điểm của $BC\Rightarrow AI=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SAI vuông tại I, có $SI=\sqrt{SA^2-SI^2}=\sqrt{(2a)^2-\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{33}}{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

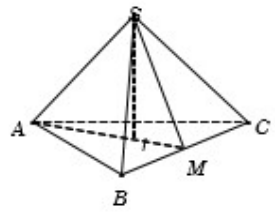
Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SI=\dfrac{\sqrt{11}a^3}{12}$.

Câu 2: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\dfrac{a\sqrt{21}}{6}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Vì $S.ABC$ là khối chóp đều nên suy ra $SI\perp(ABC)$.

Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AI = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SAI vuông tại I, có $SI = \sqrt{SA^2 - AI^2} \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{21}}{6}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a}{2}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

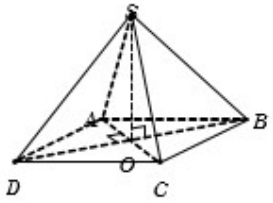
Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SI = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Câu 3: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $V = \frac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O = AC \cap BD$. Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Suy ra OB là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$.

Khi đó $60^0 = \widehat{SB,(ABCD)} = \widehat{SB,OB} = \widehat{SBO}$.

Tam giác vuông SOB, có $SO = OB.\tan\widehat{SBO} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích hình vuông ABC là $S_{ABCD} = AB^2 = a^2$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 4: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên với mặt đáy bằng 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

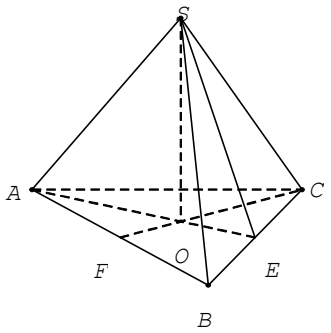
A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $V = \frac{a^3}{8}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi E, F lần lượt là trung điểm BC, BA và $O = AE \cap CF$.

Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABC)$.



Khi đó $60^0 = \widehat{(SBC),(ABC)} = \widehat{SE,OE} = \widehat{SEO}$.

Tam giác vuông SOE, có

$SO = OE.\tan\widehat{SEO} = \frac{AE}{3}.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{6}.\sqrt{3} =$

.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SO = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

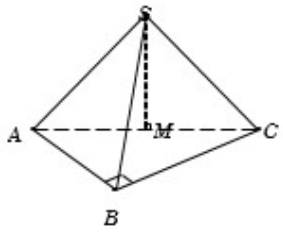
Dạng 4: Khối chóp có hình chiếu lên mặt phẳng đáy

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$, hình chiếu của điểm S lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm của cạnh huyền AC. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **C.** $V = \frac{2a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm AC. Theo giả thiết, ta có $SM \perp (ABC) \Rightarrow SM \perp AC$.

Tam giác vuông ABC, có $AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

Tam giác vuông SMA, có

$$SM = \sqrt{SA^2 - AM^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Diện tích tam giác vuông cân ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2}{2}$.

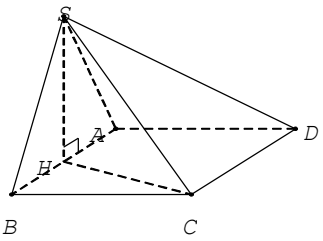
Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SM=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của cạnh AB, góc giữa SC và mặt đáy bằng 30^0. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{\sqrt{15}}{6}$. **B.** $V=\frac{\sqrt{15}}{18}$. **C.** $V=\frac{1}{3}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{5}}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Vì $SH\perp(ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là HC.

Do đó $30^0=\widehat{SC,(ABCD)}=\widehat{SC,HC}=\widehat{SCH}$.

Tam giác vuông BCH, có $HC=\sqrt{BC^2+BH^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Tam giác vuông SHC, có $SH=HC.\tan\widehat{SCH}=\frac{\sqrt{15}}{6}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD}=1$.

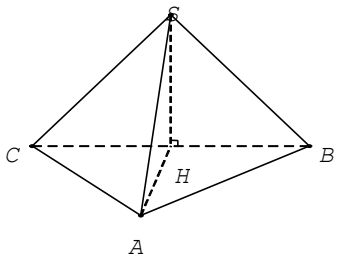
Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SH=\frac{\sqrt{15}}{18}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $V=\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Vì $SH \perp (ABC)$ nên hình chiếu vuông góc của SA trên mặt đáy (ABC) là HA. Do đó $60^0 = \widehat{SA,(ABC)} = \widehat{SA,HA} = \widehat{SAH}$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác vuông SHA, có $SH = AH.\tan\widehat{SAH} = \dfrac{3a}{2}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Dạng 5: Một số dạng khác

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác SBC là tam giác vuông cân tại S, $SB = 2a$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $3a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = 2a^3$. **B.** $V = 4a^3$. **C.** $V = 6a^3$ **D.** $V = 12a^3$.

Lời giải

Chọn A

Ta chọn (SBC) làm mặt đáy $\longrightarrow$ chiều cao khối chóp là $d[A,(SBC)] = 3a$.

Tam giác SBC vuông cân tại S nên $S_{\Delta SBC} = \dfrac{1}{2}SB^2 = 2a^2$.

Vậy thể tích khối chóp $V = \dfrac{1}{3}S_{\Delta SBC}.d[A,(SBC)] = 2a^3$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$ và thể tích bằng a^3. Tính chiều cao h của hình chóp đã cho.

A. $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **B.** $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $h = a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Xét hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = a^2\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.h\longrightarrow h=\frac{3.V_{S.ABC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{3a^3}{a^2\sqrt{3}}=a\sqrt{3}.$

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB=6a$, $AC=7a$ và $AD=4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, BD. Tính thể tích V của tứ diện $AMNP$.

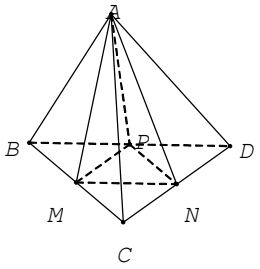
A. $V=\frac{7}{2}a^3$. **B.** $V=14a^3$. **C.** $V=\frac{28}{3}a^3$. **D.** $V=7a^3$.

Lời giải

Chọn D

Do AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau nên

$V_{ABCD}=\frac{1}{6}AB.AC.AD=\frac{1}{6}.6a.7a.4a=28a^3$.



Dễ thấy $S_{\Delta MNP}=\frac{1}{4}S_{\Delta BCD}$.

Suy ra $V_{AMNP}=\frac{1}{4}V_{ABCD}=7a^3$.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm của tam giác BCD. Tính thể tích V của khối chóp $A.GBC$.

A. $V=3$. **B.** $V=4$. **C.** $V=6$. **D.** $V=5$.

Lời giải

Chọn B

Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $S_{\Delta GBC}=\frac{1}{3}S_{\Delta DBC}$.

Suy ra $V_{A.GBC}=\frac{1}{3}V_{ABCD}=\frac{1}{3}.12=4.$

Dạng 6. Thể tích lăng trụ đứng, lăng trụ đều

Câu 1: Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

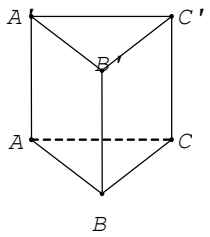
Chọn C

Xét khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a.

Diện tích tam giác đều cạnh a là $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Chiều cao của lăng trụ $h=AA'=a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'}=S.h=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



Câu 2: Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và tổng diện tích các mặt bên bằng $3a^2$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn D

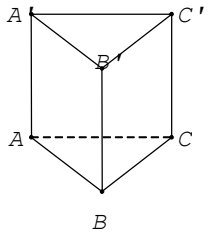
Xét khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều và $AA'\perp(ABC)$.

Diện tích xung quanh lăng trụ là $S_{xq}=3.S_{ABB'A'}$

$\Leftrightarrow 3a^2=3.(AA'.AB)\Leftrightarrow 3a^2=3.(AA'.a)\Rightarrow AA'=a.$

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'}=S_{\Delta ABC}.AA'=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



Câu 3: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB'=a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC=a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{a^3}{6}$. **B.** $V=\dfrac{a^3}{3}$. **C.** $V=\dfrac{a^3}{2}$. **D.** $V=a^3$.

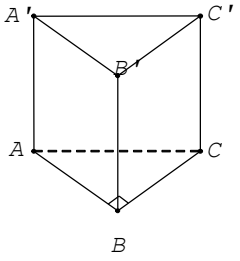
Lời giải

Chọn C

Tam giác ABC vuông cân tại B,

suy ra $BA=BC=\dfrac{AC}{\sqrt{2}}=a\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2}{2}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $V=S_{\Delta ABC}.BB'=\dfrac{a^3}{2}$.



Câu 4: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác với $AB=a$, $AC=2a$, $\widehat{BAC}=120^0$, $AA'=2a\sqrt{5}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=4a^3\sqrt{5}$. **B.** $V=a^3\sqrt{15}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$. **D.** $V=\frac{4a^3\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'}=S_{\Delta ABC}.AA'=a^3\sqrt{15}$.

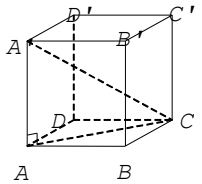
Câu 5: Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC'=a\sqrt{3}$.

A. $V=a^3$. **B.** $V=\frac{3\sqrt{6}a^3}{4}$. **C.** $V=3\sqrt{3}a^3$. **D.** $V=\frac{1}{3}a^3$.

Lời giải

Chọn A

Đặt cạnh của khối lập phương là $x\ (x>0)$.



Suy ra $CC'=x;\ AC=x\sqrt{2}$.

Tam giác vuông ACC', có

$AC'=\sqrt{AC^2+CC'^2}\Leftrightarrow x\sqrt{3}=a\sqrt{3}\Rightarrow x=a.$

Vậy thể tích khối lập phương $V=a^3$.

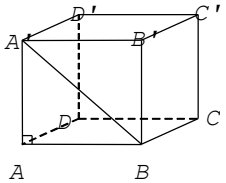
Câu 6: Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình vuông cạnh 2a. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho theo a, biết $A'B=3a$.

A. $V=\frac{4\sqrt{5}a^3}{3}$. **B.** $V=4\sqrt{5}a^3$. **C.** $V=2\sqrt{5}a^3$. **D.** $V=12a^3$.

Lời giải

Chọn B

Do ABCD.A'B'C'D' là lăng trụ đứng nên $AA'\perp AB$.



Xét tam giác vuông A'AB, ta có $A'A=\sqrt{A'B^2-AB^2}=a\sqrt{5}$.

Diện tích hình vuông ABCD là $S_{ABCD}=AB^2=4a^2$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}=S_{ABCD}.A'A=4\sqrt{5}a^3$.

Câu 7: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$, $AD=a\sqrt{2}$, $AB'=a\sqrt{5}$. Tính theo a thể tích khối hộp đã cho.

A. $V=a^3\sqrt{10}$. **B.** $V=\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V=a^3\sqrt{2}$. **D.** $V=2a^3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Trong tam giác vuông ABB', có $BB'=\sqrt{AB'^2-AB^2}=2a$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD}=AB.AD=a^2\sqrt{2}$.

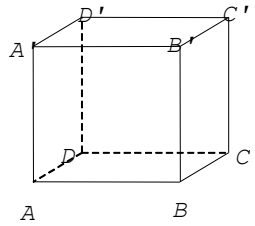
Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}=S_{ABCD}.BB'=2a^3\sqrt{2}$.

Câu 8: Cho hình hộp chữ nhật có diện tích ba mặt cùng xuất phát từ cùng một đỉnh là 10cm^2, 20cm^2, 32cm^2. Tính thể tích V của hình hộp chữ nhật đã cho.

A. $V=80\text{cm}^3$. **B.** $V=160\text{cm}^3$. **C.** $V=40\text{cm}^3$. **D.** $V=64\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn A



Xét hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật.

Theo bài ra, ta có $\begin{cases}S_{ABCD}=10\,\text{cm}^2\\S_{ABB'A'}=20\,\text{cm}^2\\S_{ADD'A'}=30\,\text{cm}^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}AB.AD=10\\AB.AA'=20\\AA'.AD=32\end{cases}$.

Nhân vế theo vế, ta được $\left(AA'.AB.AD\right)^2=6400\Rightarrow AA'.AB.AD=80$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}=AA'.AB.AD=80\,\text{cm}^3$.

Câu 9: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA=BC=1$. Cạnh $A'B$ tạo với mặt đáy (ABC) góc 60^0. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\sqrt{3}$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $V=\dfrac{1}{2}$.

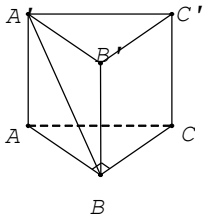
Lời giải

Chọn C

Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $AA'\perp(ABC)$, suy ra hình chiếu vuông góc của $A'B$ trên mặt đáy (ABC) là AB.

Do đó $60^0 = \widehat{A'B,(ABC)} = \widehat{A'B,AB} = \widehat{A'BA}$

.



Tam giác vuông $A'AB$, ta có $AA' = AB.\tan\widehat{A'BA} = \sqrt{3}.$

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BA.BC = \frac{1}{2}.$

Vậy $V = S_{\Delta ABC}.AA' = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Dạng 7. Thể tích lăng trụ xiên

Câu 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng $2a$, đáy $ABCD$ là hình vuông. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng đáy trùng với tâm của đáy. Tính theo a thể tích V của khối hộp đã cho.

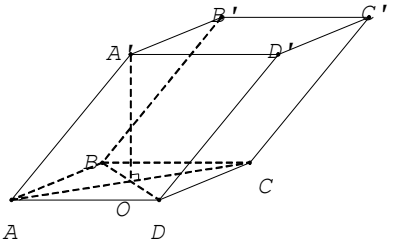
A. $V = \frac{4a^3\sqrt{2}}{3}.$ **B.** $V = \frac{8a^3}{3}.$ **C.** $V = 8a^3.$ **D.** $V = 4a^3\sqrt{2}.$

Lời giải

Chọn D

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$,

suy ra $A'O \perp (ABCD)$.



Tam giác vuông $A'OA$, có

$A'O = \sqrt{AA'^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = a\sqrt{2}$

.

Diện tích hình vuông $S_{ABCD} = 4a^2.$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{\Delta ABCD}.A'O = 4a^3\sqrt{2}.$

Câu 2: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $AA' = a$, hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm H của AB. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

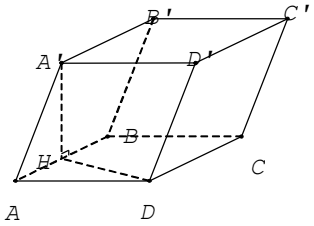
A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$ **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}.$ **C.** $V = a^3.$ **D.** $V = \frac{a^3}{3}.$

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết, ta có $A'H \perp AB$.

Tam giác vuông $A'HA$, có $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Diện tích hình vuông $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.A'H = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 3: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB và $A'A = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

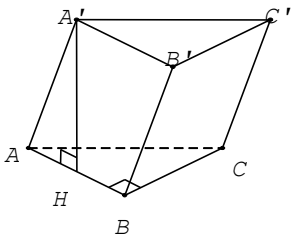
A. $V = a^3\sqrt{3}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **D.** $V = 2a^3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $BA = BC = a\sqrt{2}$.

Tam giác vuông $A'HA$, có $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.



Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BA.BC = a^2$.

Vậy $V = S_{\Delta ABC}.A'H = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Câu 4: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, biết $A'O = a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $V = \frac{a^3}{4}$. **D.** $V = \frac{a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích tam giác đều $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Chiều cao khối lăng trụ $A'O = a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $V = S_{\Delta ABC}.A'O = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 5: Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biết thể tích khối chóp $A.BCB'C'$ bằng $2a^3$.

A. $V=6a^3$. **B.** $V=\dfrac{5a^3}{2}$. **C.** $V=4a^3$. **D.** $V=3a^3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có thể tích khối chóp $V_{A.A'B'C'}=\dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$.

Suy ra $V_{A.BCB'C'}=\dfrac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}\longrightarrow V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{3}{2}V_{A.BCB'C'}=\dfrac{3}{2}.2a^3=3a^3$.

Câu 6: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh có độ dài bằng 2. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC. Góc tạo bởi cạnh bên AA' với mặt đáy là 45^0. Tính thể tích khối trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=3$. **B.** $V=1$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{6}}{8}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{6}}{24}$.

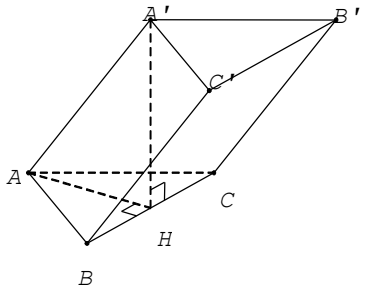
Lời giải

Chọn A

Tam giác ABC đều cạnh bằng 2 nên $AH=\sqrt{3}$. Vì $A'H\perp(ABC)$ nên hình chiếu vuông góc của AA' trên mặt đáy (ABC) là AH. Do đó

$45^0=\widehat{AA',(ABC)}=\widehat{AA',AH}=\widehat{A'AH}$.

Suy ra tam giác $A'HA$ vuông cân tại H nên $A'H=HA=\sqrt{3}$.



Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\Delta ABC}=\sqrt{3}$.

Vậy $V=S_{\Delta ABC}.A'H=3$.

Câu 7: Tính thể tích V của một khối lăng trụ biết đáy có diện tích $S=10\text{cm}^2$, cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0 và độ dài cạnh bên bằng 10cm.

A. $V=100\text{cm}^3$. **B.** $V=50\sqrt{3}\text{cm}^3$. **C.** $V=50\text{cm}^3$. **D.** $V=100\sqrt{3}\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn B

Xét khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC.

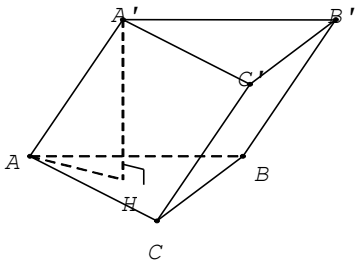
Gọi H là hình chiếu của A' trên mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow A'H \perp (ABC)$. Suy ra AH là hình chiếu của AA' trên mặt phẳng (ABC). Do đó

$60^0 = \widehat{AA',(ABC)} = \widehat{(AA',AH)} = \widehat{A'AH}.$

Tam giác $A'AH$ vuông tại H, có

$A'H = AA'.\sin\widehat{A'AH} = 5\sqrt{3}.$

Vậy $V = S_{\Delta ABC}.A'H = 50\sqrt{3}\,\text{cm}^3.$



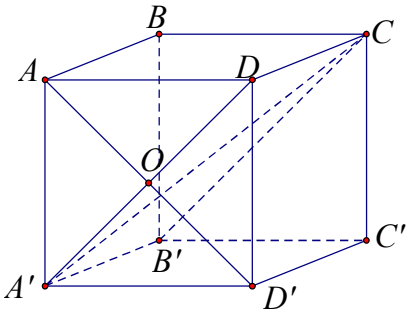
Dạng 8: Bài tập dành cho học sinh 8+, 9+

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và $C'D'$ bằng a. Tính thể tích V của khối lập phương đã cho.

A. $V = 8a^3$. **B.** $V = 2\sqrt{2}a^3$. **C.** $V = 3\sqrt{3}a^3$. **D.** $V = 27a^3$.

Lời giải

Chọn B



Đặt cạnh hình lập phương là x.

Gọi $O = AD' \cap A'D$, ta có $D'O \perp (DCB'A')$.

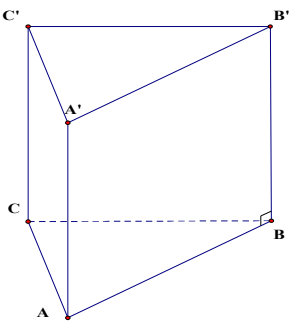
Ta có: $A'C \subset (DCB'A') // C'D'$ nên

$d(C'D';A'C) = d(C'D';(DCB'A'))$

$= d(D';(DCB'A')) = D'O = \dfrac{x\sqrt{2}}{2} = a$.

Do đó, $x = a\sqrt{2}$. Thể tích khối lập phương là: $V = x^3 = 2\sqrt{2}a^3$.

Câu 2: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$ *(tham khảo hình vẽ bên dưới)*.Thể tích khối lăng trụ bằng

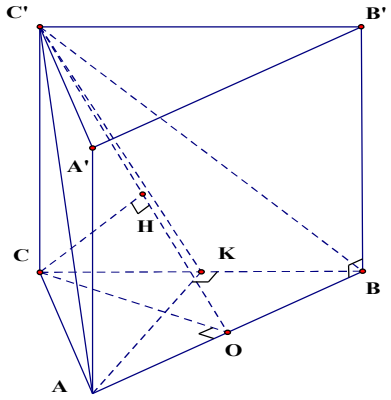


A. $\dfrac{9\sqrt{15}a^3}{20}$. **B** $\dfrac{3\sqrt{15}a^3}{20}$.

C. $\dfrac{3\sqrt{15}a^3}{10}$. **D.** $\dfrac{9\sqrt{15}a^3}{10}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $2x$ là cạnh của tam giác đều, Gọi O,K lần lượt là trung điểm của AB,BC

Kẻ $CK\perp C'O$

Ta có $CH\perp C'O$ và $CH\perp AB$ nên $CH\perp\left(ABC'\right)$ và $d\left(C,\left(ABC'\right)\right)=CH=a$

Suy ra: $\frac{1}{CH^2}=\frac{1}{CC'^2}+\frac{1}{CO^2}$ hay $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{CC'^2}+\frac{1}{3x^2}$ **(1)**

Ta có hình chiếu vuông góc của tam giác ABC' lên mặt phẳng $\left(BCC'B'\right)$ là tam giác KBC'

Do đó $\frac{S_{\triangle KBC'}}{S_{\Delta ABC'}}=\cos\alpha=\frac{1}{3}$

Ta có: $S_{\triangle KBC'}=\frac{1}{2}.x.CC'$ và $S_{\Delta ABC'}=\frac{1}{2}.AB.C'O=\frac{1}{2}.AB.\sqrt{CC'^2+CO^2}=x\sqrt{CC'^2+3x^2}$

Do đó $\frac{1}{2}.x.CC'=\frac{1}{3}x\sqrt{CC'^2+3x^2}\Leftrightarrow 3CC'=2\sqrt{CC'^2+3x^2}\Leftrightarrow 5CC'^2=12x^2$ **(2)**

Từ $(1),(2)$ ta có $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{CC'^2}+\frac{4}{5CC'^2}\Leftrightarrow 5CC'^2=9a^2\Leftrightarrow CC'=\frac{3a}{\sqrt{5}}$

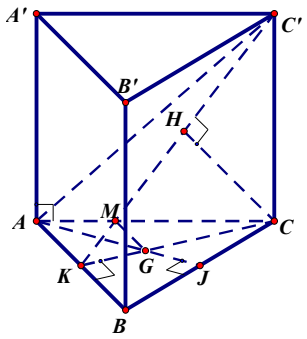
Suy ra $x=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy thể tích khối lăng trụ là $V=S_{ABC}.CC'=\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}.\frac{3a}{\sqrt{5}}=\frac{9\sqrt{15}a^3}{20}$.

Câu 3: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $\left(ABC'\right)$ bằng a góc giữa hai mặt phẳng $\left(ABC'\right)$ và $\left(BCC'B'\right)$ bằng α với $\cos\alpha=\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (tham khảo hình vẽ bên). Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$

Lời giải

Chọn B



Gọi K,J lần lượt là trung điểm của AB,BC.

Gọi x là độ dài cạnh AB.

$AJ=CK=\frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $CH \perp (ABC') \Rightarrow d(C,(ABC')) = CH = a$.

Mặt khác $AJ \perp (BCC'B')$.

Nên $\left(\widehat{(ABC'),(BCC'B')}\right) = \left(\widehat{CH,AJ}\right) = \alpha = \left(\widehat{CH,AG}\right)$ $(\cos\alpha = \sin\varphi)$.

Ta có $\sin\varphi = \dfrac{MG}{AG} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow MG = \dfrac{AG}{2\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3}\dfrac{AJ}{\sqrt{3}.2} = \dfrac{x\sqrt{3}}{2.3\sqrt{3}} = \dfrac{x}{6}$.

$\dfrac{HC}{3} = \dfrac{x}{6} \Leftrightarrow \dfrac{a}{3} = \dfrac{x}{6} \Leftrightarrow x = 2a$ mà $d(C,(ABC')) = CH = a$.

$\Rightarrow CC' = \dfrac{CH.CK}{\sqrt{CK^2 - CH^2}} = \dfrac{a\dfrac{2a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 - a^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Vậy $V = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}.CC' = \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

$= \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 4: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{6}$, $AD = \sqrt{3}$, $A'C = 3$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$ vuông góc với mặt đáy. Biết hai mặt phẳng $(AA'C'C)$, $(AA'B'B)$ tạo với nhau góc α thỏa mãn $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$. Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng?

A. $V = 6$. **B.** $V = 8$. **C.** $V = 12$. **D.** $V = 10$.

Lời giải

Chọn B

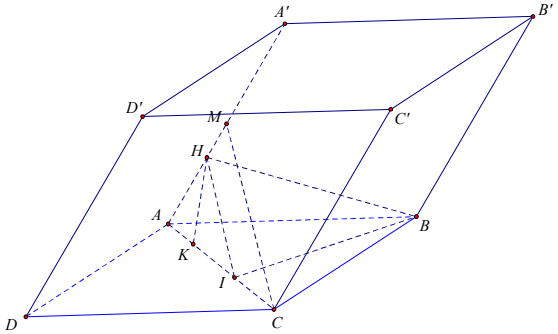
Từ B kẻ $BI \perp AC \Rightarrow BI \perp (AA'C'C)$.

Từ I kẻ $IH \perp AA'$

$\Rightarrow \left(\widehat{(AA'C'C),(AA'B'B)}\right) = \widehat{BHI}$.

Theo giải thiết ta có $AC = 3$

$\Rightarrow BI = \dfrac{AB.BC}{AC} = \sqrt{2}$.



Xét tam giác vuông BIH có $\tan\widehat{BHI} = \dfrac{BI}{IH} \Leftrightarrow IH = \dfrac{BI}{\tan\widehat{BHI}}$

$\Leftrightarrow IH = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Xét tam giác vuông ABC có $AI.AC = AB^2 \Rightarrow AI = \dfrac{AB^2}{AC} = 2$.

Gọi M là trung điểm cả AA', do tam giác $AA'C$ cân tại C nên $CM \perp AA' \Rightarrow CM // IH$.

Do $\frac{AI}{AC}=\frac{AH}{AM}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{AH}{AM}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{AH}{AA'}=\frac{1}{3}$.

Trong tam giác vuông AHI kẻ đường cao HK ta có $HK=\frac{4\sqrt{2}}{9}\Rightarrow$ chiều cao của lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là $h=3HK=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là $V_{ABCD.A'B'C'D'}=AB.AD.h=\sqrt{6}\sqrt{3}\frac{4\sqrt{2}}{3}=8$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi H là điểm trên cạnh SD sao cho $5SH=3SD$, mặt phẳng (α) qua B, H và song song với đường thẳng AC cắt hai cạnh SA, SC lần lượt tại E, F. Tính tỉ số thể tích $\frac{V_{C.BEHF}}{V_{S.ABCD}}$.

A. $\frac{1}{7}$. **B.** $\frac{3}{20}$. **C.** $\frac{6}{35}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

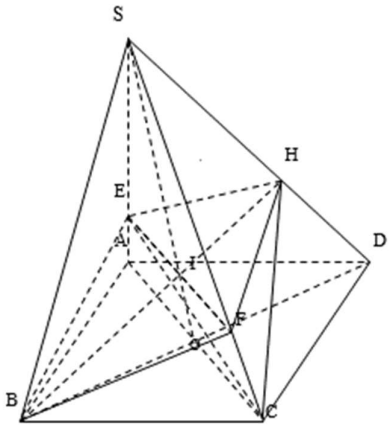
Lời giải

Chọn B

Đặt $V_{S.ABCD}=V$

Trong tam giác SOD ta có:

$\frac{IS}{IO}.\frac{BO}{BD}.\frac{HD}{HS}=1\Rightarrow\frac{IS}{IO}=3\Rightarrow\frac{SI}{SO}=\frac{SE}{SA}=\frac{SF}{SC}=$



Ta có: $\frac{V_{S.HBC}}{V_{S.DBC}}=\frac{SH}{SD}=\frac{3}{5}\Rightarrow V_{S.HBC}=\frac{3V}{10}$.

Mặt khác: $\frac{V_{C.FHB}}{V_{C.SHB}}=\frac{CF}{CS}=\frac{1}{4}\Rightarrow V_{C.FHB}=\frac{3V}{40}$.

Mà: $V_{C.BEHF}=2V_{C.FHB}=\frac{6V}{40}\Rightarrow\frac{V_{C.BEHF}}{V_{S.ABCD}}=\frac{3}{20}$.

Câu 6: Khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng 3 và góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích V khối lăng trụ đã cho?

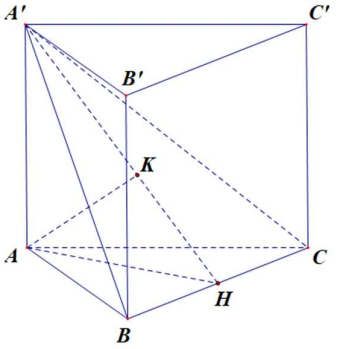
A. $V=24\sqrt{3}$. **B.** $V=8\sqrt{3}$. **C.** $V=\frac{8\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\frac{8\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Do lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đều nên lăng trụ đã cho là lăng trụ đứng.

Gọi H là trung điểm của BC, K là hình chiếu của H lên $A'H$.



Ta có $\left.\begin{matrix} BC\perp AH \\ BC\perp AA' \end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp (AA'H)\Rightarrow (ABC)\perp (AA'H)$

Mà

$AK\perp A'H\Rightarrow AK\perp (A'BC)\Rightarrow d(A,(A'BC))=AK=3$.

Ta có góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là góc giữa AH và.

Suy ra $\widehat{A'HA}=60^0$.

Ta có $AH=\dfrac{AK}{\sin 60^0}=2\sqrt{3}\Rightarrow \begin{cases} A'A=AH.\tan 60^0=6 \\ AB=\dfrac{2.2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=4 \end{cases}$

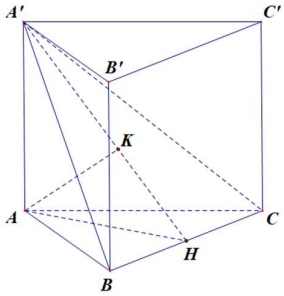
Thể tích khối lăng trụ là $V=S_{ABC}.AA'=4\sqrt{3}.6=24\sqrt{3}$.

Câu 7: Khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng 3 và góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích V khối lăng trụ đã cho?

A. $V=24\sqrt{3}$. **B.** $V=8\sqrt{3}$. **C.** $V=72$. **D.** $V=24$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H hình chiếu của A lên BC, K là hình chiếu của H lên $A'H$.

Ta có $\left.\begin{matrix} BC\perp AH \\ BC\perp AA' \end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp (AA'H)\Rightarrow (ABC)\perp (AA'H)$

Mà $AK\perp A'H\Rightarrow AK\perp (A'BC)\Rightarrow d(A,(A'BC))=AK=3$.

Ta có góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là góc giữa AH và. Suy ra

$\widehat{A'HA}=60^0$. Ta có $AH=\dfrac{AK}{\sin 60^0}=2\sqrt{3}\Rightarrow \begin{cases} A'A=AH.\tan 60^0=6 \\ BC=2AH=4\sqrt{3};\ AB=2\sqrt{6} \end{cases}$

Thể tích khối lăng trụ là $V=S_{ABC}.AA'=\dfrac{1}{2}.\left(2\sqrt{6}\right)^2.6=72$.

Câu 8: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $A'G \perp (ABC)$ nên $A'G \perp BC$; $BC \perp AM$

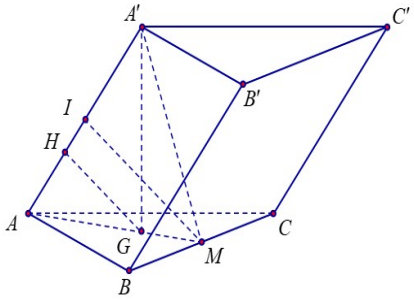
$\Rightarrow BC \perp (MAA')$

Kẻ $MI \perp AA'$;

$BC \perp IM$ nên $d(AA'; BC) = IM = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Kẻ $GH \perp AA'$,

Ta có $\dfrac{AG}{AM} = \dfrac{GH}{IM} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow GH = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$



$$\frac{1}{HG^2} = \frac{1}{A'G^2} + \frac{1}{AG^2} \Leftrightarrow A'G = \frac{AG.HG}{\sqrt{AG^2 - HG^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{\frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{12}}} = \frac{a}{3}$$

$V_{ABC.A'B'C'} = A'G.S_{ABC} = \dfrac{a}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

Câu 9: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a; AD = a\sqrt{3}$, góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và mặt phẳng (ACD') bằng 60^0. Tính thể tích khối hộp chữ nhật đã cho.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **D.** $V = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$.

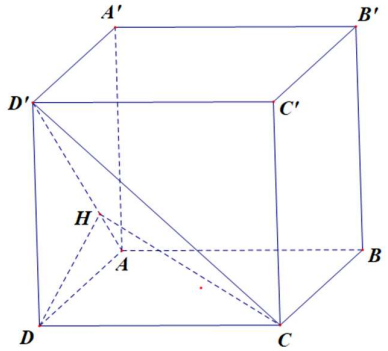
Lời giải

Chọn D

Gọi H là hình chiếu của D lên AD'.

Ta có

$AD' \perp (DHC) \Rightarrow \widehat{((ADD'A'),(ACD'))} = \widehat{DHC} = 60^0$.



Có $DH = CD.\cot 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$,

Suy ra $\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{DD'^2} + \dfrac{1}{DA^2} \Rightarrow DD' = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Thể tích khối hộp là $V = S_{ABCD}.DD' = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$.

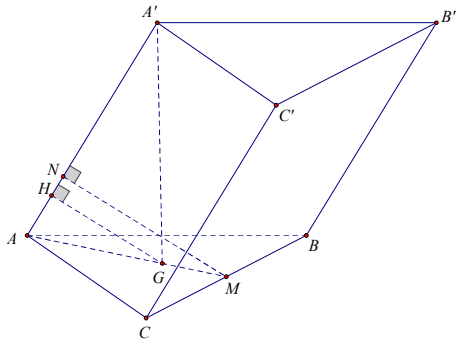
Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Câu 10: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi G là trọng tâm của ΔABC, M là trung điểm của $BC \Rightarrow A'G \perp (ABC)$.

Trong $(AA'M)$ dựng $MN \perp AA'$, ta có: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp A'G \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'G) \Rightarrow BC \perp MN$.

$\Rightarrow d(AA', BC) = MN = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Gọi H là hình chiếu của G lên AA'.

Ta có: $GH // MN \Rightarrow \frac{GH}{MN} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow GH = \frac{2}{3}MN = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Xét tam giác $AA'G$ vuông tại G, ta có:

$$\frac{1}{GH^2} = \frac{1}{GA^2} + \frac{1}{GA'^2} \Rightarrow \frac{1}{GA'^2} = \frac{1}{GH^2} - \frac{1}{GA^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{27}{3a^2} \Rightarrow GA' = \frac{a}{3}.$$

Vậy thể tích của khối lăng trụ là: $V = S_{ABC}.A'G = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 2a, AD = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy và góc giữa hai mặt phẳng (SAB), (SBD) là $45°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là V. Tỉ số $\frac{V}{a^3}$ gần giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

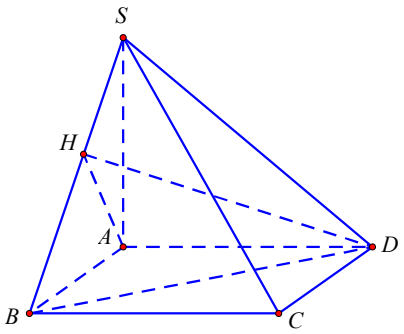
A. $0,25$. **B.** $0,5$. **C.** $0,75$. **D.** $1,5$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\begin{cases}(SAB)\cap(SAD)=SA\\(SAB)\perp(ABCD)\\(SAD)\perp(ABCD)\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABCD)$

.



Gọi H là hình chiếu của A trên SB
$\Rightarrow AH\perp SB$.

Dễ thấy $AD\perp(SAB)\Rightarrow AD\perp SB$.

Do đó: $SB\perp(AHD)\Rightarrow SB\perp HD$.

Khi đó ta có:

$\begin{cases}(SAB)\cap(SBD)=SB\\AH\perp SB;\ HD\perp SB\\AH\subset(SAB);\ HD\subset(SBD)\end{cases}\Rightarrow((SAB);(SBD))=\widehat{AHD}=45°$.

Hay ΔAHD vuông cân tại $A\Rightarrow AH=AD=a$.

ΔSAB vuông tại A: $\dfrac{1}{SA^2}=\dfrac{1}{AH^2}-\dfrac{1}{AB^2}=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{4a^2}=\dfrac{3}{4a^2}\Rightarrow SA=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Suy ra $V=V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{2a}{\sqrt{3}}.2a^2=\dfrac{4a^3}{3\sqrt{3}}$. Vậy $\dfrac{V}{a^3}=\dfrac{4}{3\sqrt{3}}\approx 0,77$.

Câu 12: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại $A, AB=2a$, SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{4a}{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

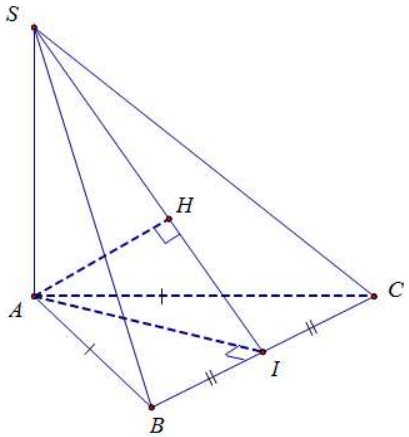
A. $V=\dfrac{8a^3}{3}$. **B.** $V=\dfrac{9a^3}{8}$. **C.** $V=8a^3$. **D.** $V=\dfrac{27a^3}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Vì ΔABC là tam giác vuông cân tại $A, AB=2a$,
nên $BC=2\sqrt{2}a$

Gọi I là trung điểm BC suy ra $AI=\dfrac{1}{2}BC=a\sqrt{2}$.



Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12
Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua

Khi đó $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI).$

Goi H là hình chiếu của A lên SI suy ra AH là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

$\Rightarrow AH = \dfrac{4a}{3}$. Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AI^2} + \dfrac{1}{SA^2} \Rightarrow SA = \sqrt{\dfrac{AI^2.AH^2}{AI^2 - AH^2}} = 4a.$

Mặt khác $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{2}2a.2a = 2a^2. \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SA = \dfrac{1}{3}.2a^2.4a = \dfrac{8a^3}{3}.$

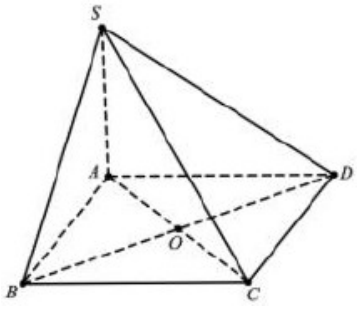
Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $AB = 2a$, BC = a $\widehat{ABC} = 120^0$ và SD vuông góc với đáy. Sin góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAB) bằng $\dfrac{1}{4}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. a^3. **B.** $\dfrac{a^3}{2}$. **C.** $3a^3$. **D.** $\dfrac{3a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $SD = h$, ta có



$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2 - 2AB.AD.\cos 60^0} = \sqrt{3}a$

Suy ra $SB = \sqrt{SD^2 + BD^2} = \sqrt{h^2 + 3a^2}$

Ta có $d(B;(SAC)) = d(D;(SAC))$

và

$$\frac{1}{d^2(D;(SAC))} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{d^2(D;AC)} = \frac{1}{h^2} + \frac{AC^2}{4S_{DAC}^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{7}{3a^2}$$

$\Rightarrow d(D;(SAC)) = \dfrac{\sqrt{3}ah}{\sqrt{3a^2 + 7h^2}}$ (Do $AC^2 = 7a^2; S_{DAC} = \dfrac{1}{2}a.2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$)

Do đó $\sin(SB;(SAC)) = \dfrac{d(B;(SAC))}{SB} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}ah}{\sqrt{3a^2 + 7h^2}}}{\sqrt{h^2 + 3a^2}} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow h = a\sqrt{3}$

Vậy $V_{S.ABCD} = a^3$

CHƯƠNG II. MẶT NÓN, MẶT TRỤ VÀ KHỐI TRỤ

BÀI 1. MẶT NÓN – HÌNH NÓN – KHỐI NÓN

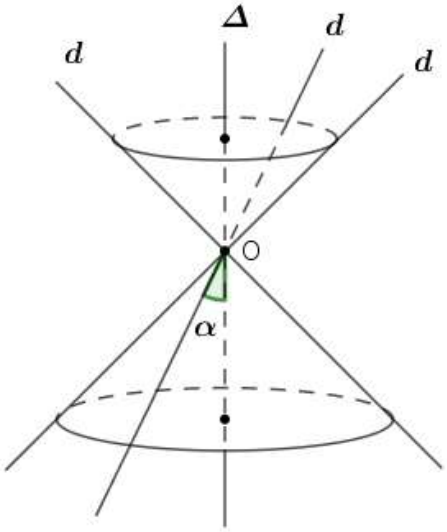
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ĐỊNH NGHĨA MẶT NÓN

Cho đường thẳng Δ. Xét một đường thẳng d cắt Δ tại O tạo thành một góc α với $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng d như thế khi quay quanh Δ gọi là mặt nón tròn xoay (hay đơn giản hơn là mặt nón).

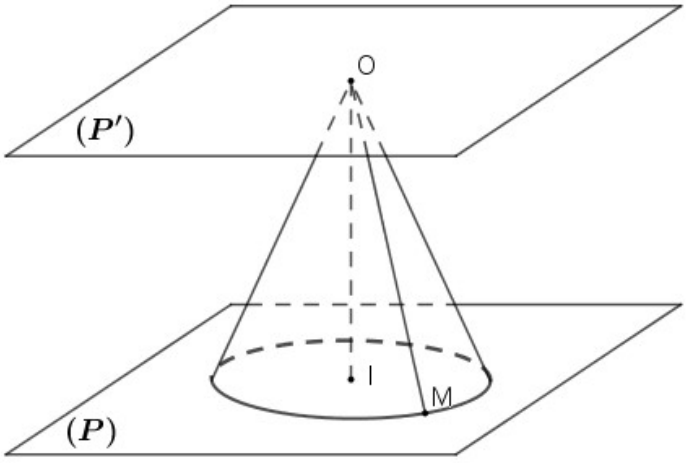
- Δ gọi là trục của mặt nón.
- d gọi là đường sinh của mặt nón.
- O gọi là đỉnh của mặt nón.
- Góc 2α gọi là góc ở đỉnh của mặt nón.



II. HÌNH NÓN VÀ KHỐI NÓN

1. Hình nón

Cho mặt nón N với trục Δ, đỉnh O, góc ở đỉnh 2α. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với Δ tại điểm I khác O. Mặt phẳng (P) cắt mặt nón theo một đường tròn (C) có tâm I. Lại gọi (P') là mặt phẳng vuông góc với Δ tại O.



● Phần của mặt nón N giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (P') cùng với hình tròn xác định bởi (C) được gọi là hình nón.

● O gọi là đỉnh của hình nón.

● Đường tròn (C) gọi là đường tròn đáy của hình nón.

● Với mỗi điểm M nằm trên đường tròn (C), đoạn thẳng OM gọi là đường sinh của hình nón.

● Đoạn thẳng OI gọi là trục của hình nón, độ dài OI gọi là chiều cao của hình nón (đó chính là khoảng cách từ đỉnh O đến mặt đáy.)

2. Khối nón

Một hình nón chia không gian thành hai phần: phần bên trong và phần bên ngoài của nó. Hình nón cùng với phần bên trong của nó gọi là khối nón.

III. KHÁI NIỆM VỀ DIỆN TÍCH HÌNH NÓN VÀ THỂ TÍCH KHỐI NÓN

Một hình chóp gọi là nội tiếp một hình nón nếu:

● Đáy của hình chóp là đa giác nội tiếp đáy của hình nón.

● Đỉnh của hình chóp là đỉnh của hình nón.

1. Định nghĩa

Diện tích xung quanh của hình nón là giới hạn của diện tích xung quanh của một hình chóp đều nội tiếp hình nón đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn.

Thể tích của khối nón là giới hạn của thể tích của khối chóp đều nội tiếp khối nón đó khi số cạnh tăng lên vô hạn.

2. Định lí 1

Diện tích xung quanh của hình nón có bán kính đáy R và đường sinh ℓ là

$$\boxed{S_{xq}=\pi R\ell}.$$

Diện tích toàn phần:

3. Định lí 2

Thể tích của khối nón có bán kính đáy R và chiều cao h là

$$\boxed{V=\frac{1}{3}\pi R^2 h}.$$

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

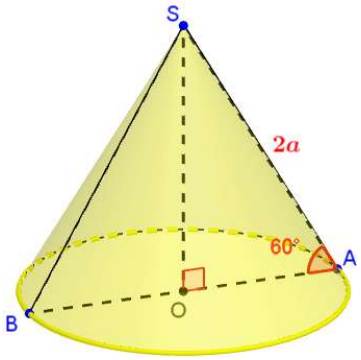
Dạng 1: Bài tập cơ bản

Câu 1: Hình nón có đường sinh $\ell=2a$ và hợp với đáy góc $\alpha=60^0$. Diện tích toàn phần của hình nón bằng:

A. $4\pi a^2$. **B.** $3\pi a^2$. **C.** $2\pi a^2$. **D.** πa^2.

Lời giải

Chọn B



Theo giả thiết, ta có

$SA = \ell = 2a$ và $\widehat{SAO} = 60^0$.

Suy ra: $R = OA = SA.\cos 60^0 = a$.

Vậy diện tích toàn phần của hình nón bằng:

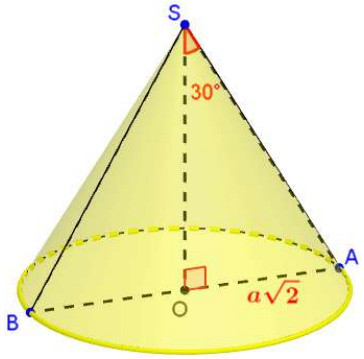
$S = \pi Rl + \pi R^2 = 3\pi a^2$ (đvdt).

Câu 2: Cho hình nón đỉnh S có bán kính đáy $R = a\sqrt{2}$, góc ở đỉnh bằng 60^0. Diện tích xung quanh của hình nón bằng:

A. $4\pi a^2$. **B.** $3\pi a^2$. **C.** $2\pi a^2$. **D.** πa^2.

Lời giải

Chọn A



Theo giả thiết, ta có: $OA = a\sqrt{2}$ và $\widehat{OSA} = 30^0$.

Suy ra độ dài đường sinh: $\ell = SA = \dfrac{OA}{\sin 30^0} = 2a\sqrt{2}$.

Vậy diện tích xung quanh bằng: $S_{xq} = \pi R\ell = 4\pi a^2$ (đvdt).

Câu 3: Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$ và $AC = a\sqrt{3}$. Độ dài đường sinh ℓ của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB bằng:

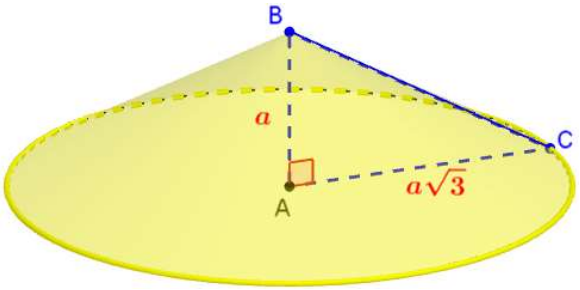
A. $\ell = a$. **B.** $\ell = a\sqrt{2}$. **C.** $\ell = a\sqrt{3}$. **D.** $\ell = 2a$.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết suy ra hình nón có đỉnh là B, tâm đường tròn đáy là A, bán kính đáy là $AC = a\sqrt{3}$ và chiều cao hình nón là $AB = a$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133



Vậy độ dài đường sinh của hình nón là:

$\ell = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a.$

Câu 4: Thiết diện qua trục hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a. Diện tích toàn phần và thể tích hình nón có giá trị lần lượt là:

A. $\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)\pi a^2}{2}$ và $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}$.

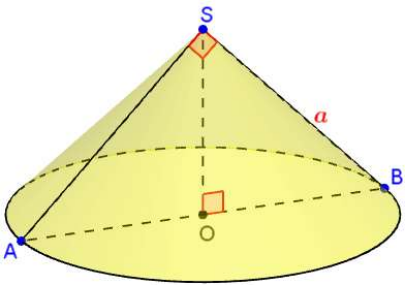
B. $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$ và $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{4}$.

C. $\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)\pi a^2}{2}$ và $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{4}$.

D. $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$ và $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi S, O là đỉnh và tâm đường tròn đáy của hình nón, thiết diện qua đỉnh là tam giác SAB.

Theo bài ra ta có tam giác SAB vuông cân tại S nên

$AB = SB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$, $SO = \dfrac{SB\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra $h = SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $l = SA = a$ và

$SB\sqrt{2} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{SB\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

Diện tích toàn phần của hình nón: $S_{tp} = \pi R\ell + \pi R^2 = \dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)\pi a^2}{2}$ (đvdt).

Thể tích khối nón là: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}$ (đvtt).

Câu 5: Cạnh bên của một hình nón bằng 2a. Thiết diện qua trục của nó là một tam giác cân có

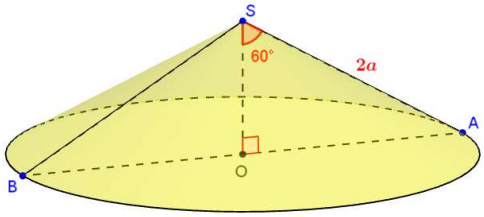
góc ở đỉnh bằng 120°. Diện tích toàn phần của hình nón là:

A. $\pi^2\left(3+\sqrt{3}\right)$. **B.** $2\pi a^2\left(3+\sqrt{3}\right)$.

C. $6\pi a^2$. **D.** $\pi a^2\left(3+2\sqrt{3}\right)$.

Lời giải

Chọn D



Gọi S là đỉnh, O là tâm của đáy, thiết diện qua trục là SAB.

Theo giả thiết, ta có $SA=2a$ và $\widehat{ASO}=60^\circ$.

Trong tam giác SAO vuông tại O, ta có

$OA=SA.\sin 60^\circ=a\sqrt{3}$.

Vậy diện tích toàn phần:

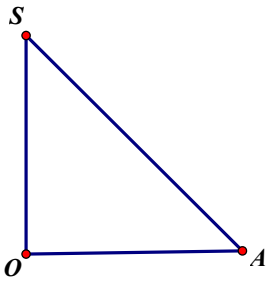
$S_{tp}=\pi R\ell+\pi R^2=\pi.OA.SA+\pi\left(OA\right)^2=\pi a^2\left(3+2\sqrt{3}\right)$ (đvdt).

Câu 6. Cho tam giác SOA vuông tại O có $OA=3$ cm, $SA=5$ cm, quay tam giác SOA xung quanh cạnh SO được hình nón. Thể tích của khối nón tương ứng là:

A. $12\pi\left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $15\pi\left(\text{cm}^3\right)$. **C.** $\frac{80\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $36\pi\left(\text{cm}^3\right)$

Lời giải

Chọn A



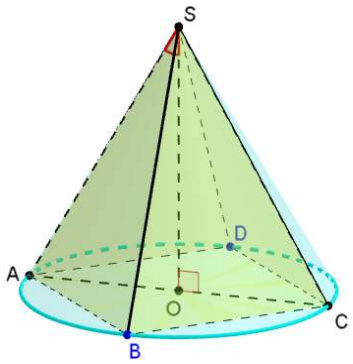
$SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=4$; $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi.3^2.4=12\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 7: Cho hình nón có đỉnh S, đường cao $SO=h$, đường sinh SA. Nội tiếp hình nón là một hình chóp đỉnh S, đáy là hình vuông ABCD cạnh a. Nửa góc ở đỉnh của hình nón có tan bằng:

A. $\frac{h\sqrt{2}}{2a}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2h}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{h}$. **D.** $\frac{h\sqrt{2}}{a}$.

Lời giải

Chọn C



Nửa góc ở đỉnh của hình nón là góc $\widehat{ASO}$.

Hình vuông ABCD cạnh a nên suy ra $OA=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

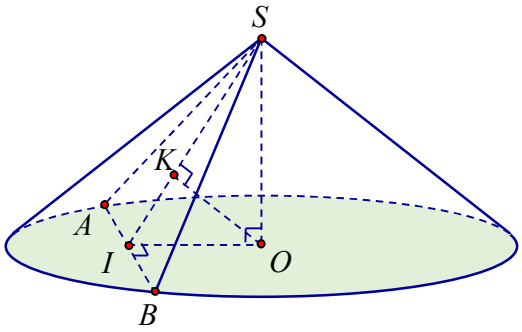
Trong tam giác vuông SOA, ta có: $\tan\widehat{ASO}=\dfrac{OA}{SO}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2h}$.

Câu 8: Cho hình nón tròn xoay có chiều cao $h=20(\text{cm})$, bán kính đáy $r=25(\text{cm})$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là $12(\text{cm})$. Tính diện tích của thiết diện đó.

A. $S=500(\text{cm}^2)$.
B. $S=400(\text{cm}^2)$.
C. $S=300(\text{cm}^2)$.
D. $S=406(\text{cm}^2)$.

1) **Lời giải**

Chọn A



2)

Theo bài ra ta có $AO=r=25$; $SO=h=20$; $OK=12$ (Hình vẽ).

Lại có $\dfrac{1}{OK^2}=\dfrac{1}{OI^2}+\dfrac{1}{OS^2}\Rightarrow OI=15(\text{cm})$

$AB=2AI=\sqrt{25^2-15^2}=40(\text{cm})$; $SI=\sqrt{SO^2+OI^2}=25(\text{cm})$

$\Rightarrow S_{\Delta SAB}=\dfrac{1}{2}.25.40=500(\text{cm}^2)$.

Câu 9. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=6\text{cm}$, $AC=8\text{cm}$. Gọi V_1 là thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB và V_2 là thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC. Khi đó, tỷ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. $\frac{16}{9}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{9}{16}$.

Lời giải

Chọn B

Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB ta có:

$h = AB$, $r = AC \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3}\pi.r^2.h = \frac{1}{3}\pi.8^2.6 = 128\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC ta có:

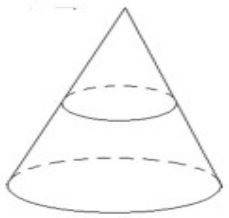
$h = AC$, $r = AB \Rightarrow V_2 = \frac{1}{3}\pi.r^2.h = \frac{1}{3}\pi.6^2.8 = 96\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{128}{96} = \frac{4}{3}$.

Câu 10: Cho hình nón (N) có chiều cao bằng $3a$. Thiết diện song song với đáy cách đáy một đoạn bằng a có diện tích bằng $\frac{64}{9}\pi a^2$. Thể tích khối nón (N) là

A. $16\pi a^3$ **B.** $\frac{25\pi a^3}{3}$ **C.** $\frac{16\pi a^3}{3}$ **D.** $48\pi a^3$

Lời giải



Chọn A

Gọi h, r lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của khối nón (N).

Gọi h', r' lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của khối nón có đỉnh là đỉnh của (N) và đáy là thiết diện đáy cách đáy của (N) một đoạn bằng a.

Ta có $h = 3a, h' = 2a$.

Hơn nữa, $S_{td} = \frac{64}{9}\pi a^2 \Leftrightarrow \pi\left(r'\right)^2 = \frac{64}{9}\pi a^2 \Leftrightarrow r = \frac{8a}{3}$.

Theo định lý Talet, ta có chiều cao và bán kính đáy $\frac{h'}{h} = \frac{r'}{r}$ hay $r = \frac{h.r'}{h'} = 4a$.

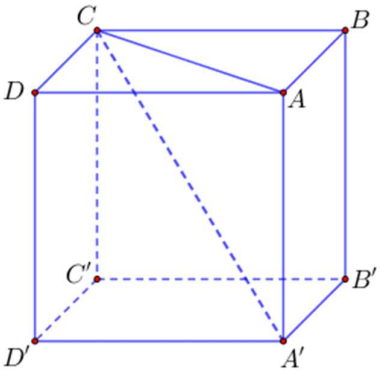
Vậy thể tích của khối nón (N) là $V = \frac{1}{3}\pi.r^2.h = \frac{1}{3}\pi.16a^2.3a = 16\pi a^3$.

Câu 11: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Tính diện tích xung quanh của hình tròn xoay sinh bởi đường gấp khúc ACA' khi quay quanh trục AA'.

A. $\pi\sqrt{5}$. **B.** $\pi\sqrt{6}$. **C.** $\pi\sqrt{3}$. **D.** $\pi\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



3)

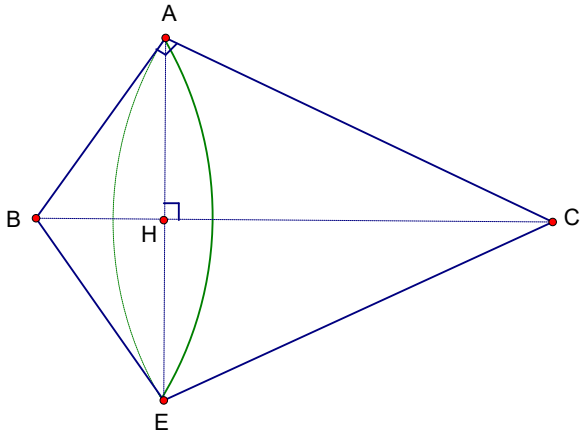
Tam giác ACA' vuông tại A, hình nón tròn xoay sinh ra có bán kính đường tròn đáy $r = AC = \sqrt{2}$, độ dài đường sinh $l = A'C = \sqrt{3}$ nên $S_{xq} = \pi rl = \pi\sqrt{6}$.

Câu 12: Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$, $AC = 2a$. Quay tam giác ABC (kể cả các điểm bên trong tam giác) quanh BC, ta thu được khối tròn xoay. Tính diện tích bề mặt của khối tròn xoay đó.

A. $4\pi a^2$. **B.** $2\pi a^2$. **C.** $\dfrac{6\pi a^2}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{3\pi a^2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là chân đường cao kẻ từ đỉnh A của ΔABC.Ta có ΔABC vuông tại A

$\Rightarrow AH.BC = AB.AC \Rightarrow AH = \dfrac{AB.AC}{BC} = \dfrac{AB.AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \dfrac{a.2a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$

Khi quay ΔABC quanh cạnh BC ta được vật thể là hai khối nón tròn xoay có chung đáy là đường tròn tâm H, bán kính $R = AH = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow$ Diện tích bề mặt của vật thể tròn xoay đó là: $S = \pi R(AB + AC) = \pi.\dfrac{2a}{\sqrt{5}}.(a + 2a) = \dfrac{6\pi a^2}{\sqrt{5}}$.

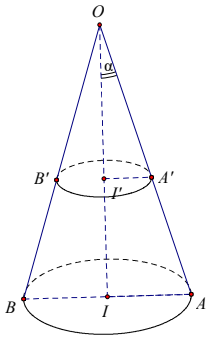
Dạng 2 : Bài tập dành cho học sinh 8+, 9+

Câu 1: Cho hình nón N_1 có chiều cao bằng $40\,\text{cm}$. Người ta cắt hình nón N_1 bằng một mặt phẳng song song với mặt đáy của nó để được một hình nón nhỏ N_2 có thể tích bằng $\frac{1}{8}$ thể tích N_1. Tính chiều cao h_2 của hình nón N_2?

A. 40 cm. **B.** 10 cm. **C.** 20 cm. **D.** 5 cm.

Lời giải

Chọn C



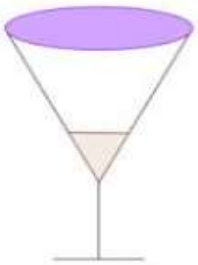
Gọi R_1, R_2, h_1, h_2 lần lượt là bán kính và chiều cao của các khối nón N_1, N_2. Gọi V_1, V_2 thể tích của các khối nón N_1, N_2.

Ta có: $V_1 = \frac{1}{3}\pi R_1^2 h_1$; $V_2 = \frac{1}{3}\pi R_2^2 h_2$.

Theo đề bài ta có $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{3}\pi R_2^2 h_2}{\frac{1}{3}\pi R_1^2 h_1} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{R_2^2 h_2}{R_1^2 h_1} = \frac{1}{8}$.

Mặt khác ta lại có, $\frac{h_2}{h_1} = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \frac{h_2^3}{h_1^3} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow h_2 = \frac{1}{2}h_1 \Rightarrow h_2 = 20$.

Câu 2: Một chiếc ly dạng hình nón (như hình vẽ). Người ta đổ một lượng nước vào ly sao cho chiều cao của lượng nước trong ly bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao của ly. Hỏi nếu bịt kín miệng ly rồi úp ngược ly lại thì tỷ lệ chiều cao của mực nước và chiều cao của ly nước lúc bây giờ bằng bao nhiêu?



4)

A. $\frac{3-2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{3-\sqrt[3]{25}}{3}$. **C.** $\frac{1}{9}$. **D.** $\frac{3-\sqrt[3]{26}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi chiều cao và bán kính đường tròn đáy của chiếc ly lần lượt là h và R

$\longrightarrow$ thể tích của chiếc ly $V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$.

● Khi để cốc theo chiều xuôi thì lượng nước trong cốc là hình nón có chiều cao và bán kính đường tròn đáy lần lượt là $\frac{h}{3}$ và $\frac{R}{3}$

$\longrightarrow$ thể tích của lượng nước $V_1=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2\left(\frac{h}{3}\right)=\frac{V}{27}$

$\longrightarrow$ thể tích phần không chứa nước $V_2=\frac{26V}{27}$.

● Khi úp ngược ly lại thì phần thể tích nước trong ly không đổi và lúc đó phần không chứa nước là hình nón. Gọi h' và R' lần lượt là chiều cao và bán kính đường tròn đáy của phần hình nón không chứa nước đó. Ta có $\frac{R'}{R}=\frac{h'}{h}$ và phần thể tích hình nón không chứa nước là

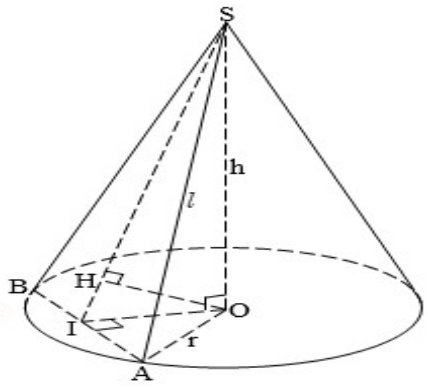
$$V_2=\frac{26}{27}.V\longleftrightarrow\frac{1}{3}\pi R'^2.h'=\frac{26}{27}.\left(\frac{1}{3}\pi R^2.h\right)\longleftrightarrow\frac{R'^2.h'}{R^2.h}=\frac{26}{27}\longleftrightarrow\left(\frac{h'}{h}\right)^3=\frac{26}{27}\longleftrightarrow\frac{h'}{h}=\frac{\sqrt[3]{26}}{3}.$$

Vậy tỷ lệ chiều cao của mực nước và chiều cao của ly nước trong trường hợp úp ngược ly là $\frac{h-h'}{h}=1-\frac{h'}{h}=1-\frac{\sqrt[3]{26}}{3}=\frac{3-\sqrt[3]{26}}{3}$.

Câu 3: Một hình nón có chiều cao $h=20\,\text{cm}$, bán kính đáy $r=25\,\text{cm}$. Một thiết diện đi qua đỉnh có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12cm. Tính diện tích thiết diện đó.

A. $450\sqrt{2}$ cm^2. **B.** $500\sqrt{2}$ cm^2. **C.** $500\,\text{cm}^2$. **D.** $125\sqrt{34}$ cm^2.

Lời giải



5)

Tính diện tích thiết diện S_{SAB}

+ Ta có $S_{\Delta SAB}=\frac{1}{2}AB.SI=\frac{1}{2}2IA.SI=IA.SI$

+ Xét tam giác vuông SOI, ta có:

$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OI^2}+\frac{1}{OS^2}\Rightarrow\frac{1}{12^2}=\frac{1}{OI^2}+\frac{1}{20^2}\Rightarrow OI=15$ (cm).

+ Mặt khác, xét tam giác vuông SOI thì:

$OI.OS=SI.OH\Rightarrow SI=\frac{OI.OS}{OH}=\frac{20.15}{12}=25$ (cm).

+ Trong tam giác vuông AIO, ta có:

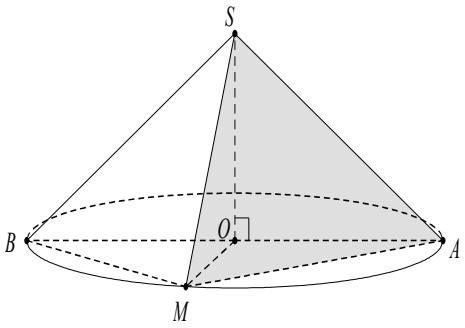
$IA=\sqrt{OA^2-OI^2}=\sqrt{25^2-15^2}=20$ (cm).

+ Từ đó suy ra: $S_{\Delta SAB}=IA.SI=20.25=500$ (cm^2).

Câu 4: Một hình nón đỉnh S có bán kính đáy bằng $a\sqrt{3}$, góc ở đỉnh là 120^0. Thiết diện qua đỉnh của hình nón là một tam giác**.** Diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của thiết diện đó là bao nhiêu?

A. $S_{\max}=2a^2$. **B.** $S_{\max}=a^2\sqrt{2}$. **C.** $S_{\max}=4a^2$. **D.** $S_{\max}=\frac{9a^2}{8}$.

Lời giải



Giả sử O là tâm đáy và AB là một đường kính của đường tròn đáy hình nón. Thiết diện qua đỉnh của hình nón là tam giác cân SAM. Theo giả thiết hình nón có bán kính đáy $R=OA=a\sqrt{3}$ cm, $\widehat{ASB}=120^0$ nên $\widehat{ASO}=60^0$. Xét tam giác SOA vuông tại O, ta có: $\sin 60^0=\frac{OA}{SA}\Rightarrow SA=\frac{OA}{\sin 60^0}=2a$.

Diện tích thiết diện là:

$S_{\Delta SAM}=\frac{1}{2}SA.SM.\sin\widehat{ASM}=\frac{1}{2}2a.2a.\sin\widehat{ASM}=2a^2\sin\widehat{ASM}$

Do $0<\sin\widehat{ASM}\le 1$ nên $S_{\Delta SAM}$ lớn nhất khi và chỉ khi $\sin\widehat{ASM}=1$ hay khi tam giác ASM vuông cân tại đỉnh S (vì $\widehat{ASB}=120^0>90^0$ nên tồn tại tam giác ASM thỏa mãn).

Vậy diện tích thiết diện lớn nhất là: $S_{\max}=2a^2$ (đvtt).

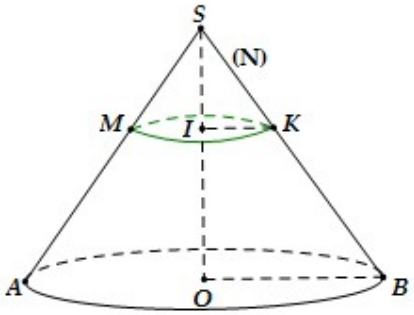
Câu 5: Cho một hình nón đỉnh S có chiều cao bằng $8\,\text{cm}$, bán kính đáy bằng $6\,\text{cm}$. Cắt hình nón đã cho bởi một mặt phẳng song song với mặt phẳng chứa đáy được một hình nón (N) đỉnh S có đường sinh bằng $4\,\text{cm}$. Tính thể tích của khối nón (N).

A. $V=\frac{768}{125}\pi\,\text{cm}^3$. **B.** $V=\frac{786}{125}\pi\,\text{cm}^3$.

C. $V=\frac{2304}{125}\pi\,\text{cm}^3$. **D.** $V=\frac{2358}{125}\pi\,\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn A



Đường sinh của hình nón lớn là $l = SB = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10\,\text{cm}$.

Gọi l_2, r_2, h_2 lần lượt là đường sinh, bán kính đáy và chiều cao của hình nón (N).

$l_2 = SK = 4\,\text{cm}$

Ta có: ΔSOB và ΔSIK đồng dạng nên: $\frac{SI}{SO} = \frac{IK}{OB} = \frac{SK}{SB} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

$$\Rightarrow \frac{h_2}{h} = \frac{r_2}{r} = \frac{l_2}{l} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} h_2 = \frac{2}{5}h = \frac{16}{5} \\ r_2 = \frac{2}{5}.r = \frac{12}{5} \end{array}\right.$$

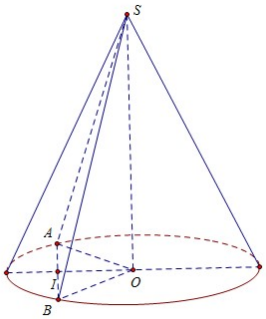
Thể tích khối nón (N) là $V_{(N)} = \frac{1}{3}.\pi.r_2^2.h_2 = \frac{1}{3}.\pi.\left(\frac{12}{5}\right)^2.\frac{16}{5} = \frac{768}{125}\pi\,\text{cm}^3$.

Câu 6: Cho hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O bán kính R. Trên đường tròn (O) lấy hai điểm A, B sao cho $\widehat{ASB} = 60^o$. Biết diện tích ΔSAB bằng $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích khối nón theo R.

A. πR^3 **B.** $\frac{\pi R^3}{3}$ **C.** $\frac{\pi R^3}{3\sqrt{2}}$ **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Chọn B



Ta có: $S_{\Delta SAB}=\frac{1}{2}SA.SB.\sin 60^o=\frac{\sqrt{3}}{4}SA^2=\frac{R^2\sqrt{3}}{2}\Rightarrow SA=R\sqrt{2}.$

$SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\sqrt{2R^2-R^2}=R$

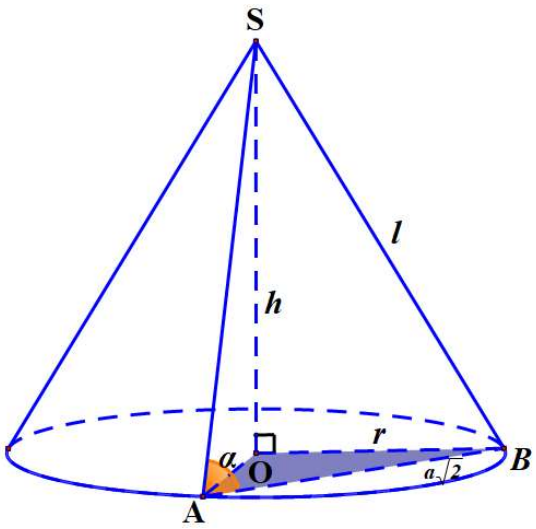
Vậy thể tích của khối nón bằng $V=\frac{1}{3}\pi R^2.SO=\frac{1}{3}\pi R^3.$

Câu 7: Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO. Gọi A,B là hai điểm thuộc đường tròn đáy của hình nón sao cho tam giác OAB là tam giác vuông. Biết $AB=\sqrt{2}a$ và góc giữa hai đường thẳng SA,AB bằng α sao cho $\cos\alpha=\frac{1}{4}$. Thể tích khối nón là

A. $\pi a^3\sqrt{7}$. **B.** $\frac{\pi a^3\sqrt{15}}{3}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{15}}{6}$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{7}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



ΔSAB cân tại $S\Rightarrow\widehat{SAB}<90°\Rightarrow\widehat{SAB}=\left(\widehat{SA,AB}\right)=\alpha.$

ΔOAB vuông cân tại $O\Rightarrow OA^2+OB^2=AB^2\Leftrightarrow 2OA^2=2a^2\Leftrightarrow OA=a.$

Áp dụng định lí côsin cho ΔSAB, ta có:

$SB^2=SA^2+AB^2-2SA.AB.\cos\widehat{SAB}\Leftrightarrow SA=\frac{AB}{2\cos\alpha}=2\sqrt{2}\,\text{a}.$

Xét ΔSAO vuông tại O có $SO^2=SA^2-OA^2\Rightarrow SO=a\sqrt{7}.$

Khối nón đã cho có bán kính đáy $r=OA=a$, chiều cao $h=SO=a\sqrt{7}$ nên thể tích khối nón là $V=\frac{1}{3}\pi.r^2.h=\frac{1}{3}\pi.a^2.a\sqrt{7}=\frac{\pi a^3\sqrt{7}}{3}.$

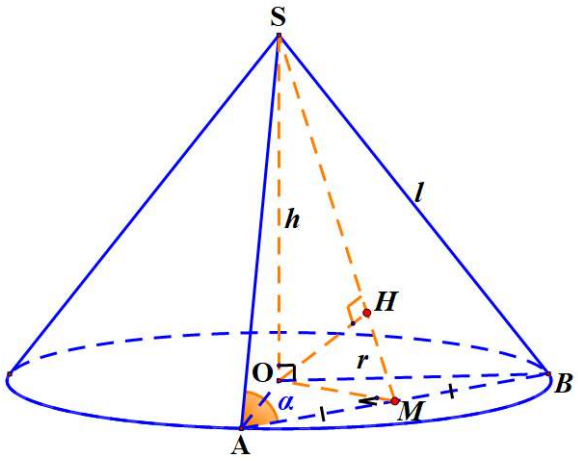
Câu 8: Cho hình nón đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O, bán kính đáy là r và độ dài đường sinh bằng $l=a\sqrt{5}$. Mặt phẳng (P) qua đỉnh S cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SAB.

Góc giữa hai đường thẳng SA, AB bằng α sao cho $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ và khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính chiều cao h của hình nón biết $r < h$.

A. $h = 3a$. **B.** $h = \sqrt{5}a$. **C.** $h = a$. **D.** $h = \sqrt{3}a$.

Lời giải

Chọn D



$SA = SB = l = a\sqrt{5}$.

ΔSAB cân tại $S \Rightarrow \widehat{SAB} < 90° \Rightarrow \widehat{SAB} = \left(\widehat{SA, AB}\right) = \alpha.$

Áp dụng định lí côsin cho ΔSAB, ta có:

$SB^2 = SA^2 + AB^2 - 2SA.AB.\cos\widehat{SAB} \Leftrightarrow AB = 2SA.\cos\alpha \Leftrightarrow AB = 2a.$

$d\left(O;(P)\right) = \frac{a\sqrt{3}}{2} \neq 0 \Rightarrow AB$ không qua O.

Gọi M là trung điểm AB thì $AB \perp OM$, $AB \perp SO$. Suy ra $AB \perp (SMO)$.

Hai mặt phẳng $(SMO), (SAB)$ vuông góc và cắt nhau theo giao tuyến SM nên gọi H là hình chiếu của O trên SM thì H là hình chiếu của O trên (SAB), $OH = d\left(O;(P)\right)$.

Theo đề $OH = d\left(O;(P)\right) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (1)

Mặt khác, $OM^2 = SM^2 - SO^2 = \left(SA^2 - AM^2\right) - SO^2 = 4a^2 - h^2.$

ΔSMO vuông tại O, đường cao $OH \Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OM^2}$ hay $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{OM^2}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{4a^2 - h^2} \Leftrightarrow h^2\left(4a^2 - h^2\right) = 3a^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h^2 = 3a^2 \\ h^2 = a^2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h = \sqrt{3}a \\ h = a \end{array}\right.$.

• $h=\sqrt{3}a \Rightarrow r=\sqrt{SA^2-SO^2}=a\sqrt{2}$ thỏa điều kiện $r<h$.

• $h=a \Rightarrow r=\sqrt{SA^2-SO^2}=2a$ **không** thỏa điều kiện $r<h$.

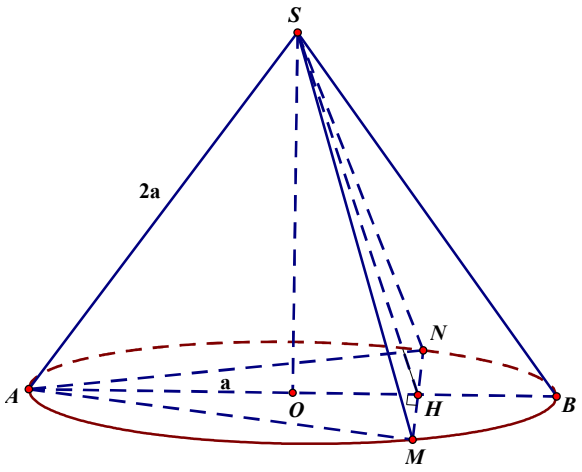
Vậy $h=SO=\sqrt{3}a$.

Câu 9: Cho hình nón đỉnh S, tâm O có độ dài đường sinh bằng $2a$, đường kinh đáy $AB=2a$. Biết rằng dây cung $MN=\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$ của đường tròn đáy (M,N không trùng với B) cắt đoạn OB và vuông góc với SA. Thể tích tứ diện $SAMN$ bằng:

A. $\dfrac{15a^3\sqrt{5}}{8}$. **B.** $\dfrac{5a^3\sqrt{5}}{16}$. **C.** $\dfrac{15a^3\sqrt{5}}{16}$. **D.** $\dfrac{5a^3\sqrt{5}}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có : $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{4a^2-a^2}=a\sqrt{3}$

Do SA vuông góc với MN nên $MN\perp AH$: $OH=\sqrt{OM^2-HM^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{15a^2}{16}}=\dfrac{a}{4}$

$\Rightarrow AH=AO+OH=a+\dfrac{a}{4}=\dfrac{5a}{4}$.

Do đó $S_{\Delta AMN}=\dfrac{1}{2}AH.MN=\dfrac{1}{2}.\dfrac{5a}{4}.\dfrac{a\sqrt{15}}{2}=\dfrac{5a^2\sqrt{15}}{16}$

Vậy $V_{SAMN}=\dfrac{1}{3}SO.S_{AMN}=\dfrac{1}{3}.a\sqrt{3}.\dfrac{5a^2\sqrt{15}}{16}=\dfrac{5a^3\sqrt{5}}{16}$

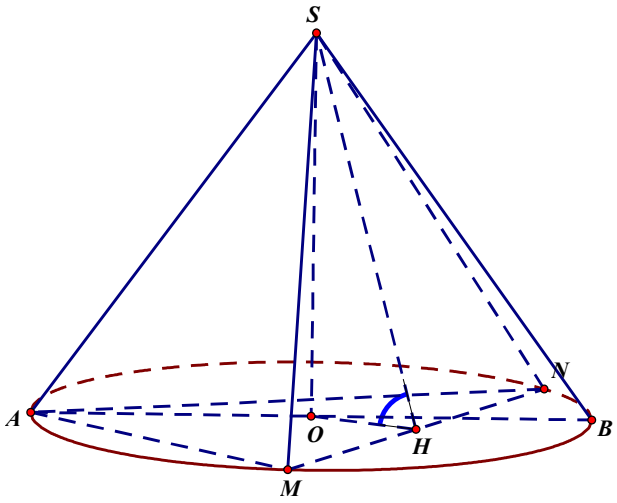
Câu 10: Cho hình nón đỉnh S, tâm O có độ dài đường sinh bằng $SA=a$, đường kính đáy AB. Thiết diện qua đỉnh tạo với đáy một góc 60^0 cắt đường tròn đáy theo dây cung $MN=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ (M,N không trùng với A và B), biết rằng khoảng cách từ A đến MN bằng a. Thể tích tứ diện $SAMN$ bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{9}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{18}$.

Lời giải

Chọn D

Lời giải



Không mất tính tổng quát , gọi H là trung điểm MN , Đặt $OM = x$

$\Rightarrow OH = \sqrt{OM^2 - MH^2} = \sqrt{x^2 - \frac{a^2}{3}}$

$SO = OH.\tan 60^0 = \sqrt{3x^2 - a^2}$.

Mặt khác $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$

$\Rightarrow \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{3x^2 - a^2} \Rightarrow 4x^2 = 2a^2 \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do đó $SO = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$S_{AMN} = \frac{1}{2}.a.\frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow V_{SAMN} = \frac{1}{3}.SO.\mathrm{S}_{\Delta AMN} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{3} = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$.

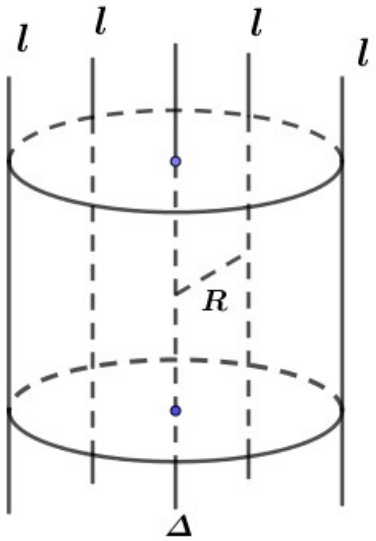
BÀI 2. MẶT TRỤ_HÌNH TRỤ_ KHỐI TRỤ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. MẶT TRỤ TRÒN XOAY

Cho hai đường thẳng ℓ và Δ sao cho ℓ song song với Δ và $d\left[\ell,\Delta\right]=R$. Khi ta quay ℓ quanh trục Δ một góc 360^0 thì ℓ tạo thành một mặt trụ tròn xoay $\left(T\right)$ (hoặc đơn giản hơn là mặt trụ).

- Δ gọi là trục của mặt trụ $\left(T\right)$.
- ℓ gọi là đường sinh của mặt trụ $\left(T\right)$.
- R gọi là bán kính của mặt trụ $\left(T\right)$.



II. HÌNH TRỤ VÀ KHỐI TRỤ TRÒN XOAY

1. Định nghĩa hình trụ

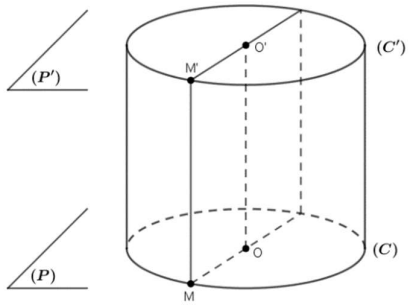
Cắt mặt trụ $\left(T\right)$ trục Δ, bán kính R bởi hai mặt phẳng $\left(P\right)$ và $\left(P'\right)$ cùng vuông góc với Δ, ta được giao tuyến là hai đường tròn $\left(C\right)$ và $\left(C'\right)$.

●Phần của mặt trụ $\left(T\right)$ nằm giữa $\left(P\right)$ và $\left(P'\right)$ cùng với hai hình tròn xác định bởi $\left(C\right)$ và $\left(C'\right)$ gọi là hình trụ.

- Hai đường tròn $\left(C\right)$ và $\left(C'\right)$ gọi là hai đường tròn đáy của hình trụ.
- OO' gọi là trục của hình trụ.
- Độ dài OO' gọi là chiều cao của hình trụ.
- Phần giữa hai đáy gọi là mặt xung quanh của hình trụ.
- Với mỗi điểm $M\in\left(C\right)$, có một điểm $M'\in\left(C'\right)$ sao cho $MM'\|OO'$.

Các đoạn thẳng như MM' gọi là đường sinh của hình trụ.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133



2. Nhận xét

Các đường sinh của hình trụ đều bằng nhau và bằng với trục của hình trụ.

Các thiết diện qua trục của hình trụ là các hình chữ nhật bằng nhau.

Thiết diện vuông góc vơi trục của hình trụ là một hình tròn bằng hình tròn đáy.

Nếu một điểm M di động trong không gian có hình chiếu vuông góc M' lên một mặt phẳng (α) và M' di động trên môt đường tròn (C) cố định thì M thuộc một mặt trụ cố định (T) chứa (C) và có trục vuông góc (α).

3. Khối trụ

Định nghĩa. Hình trụ cùng với phần bên trong nó được gọi là khối trụ.

III. DIỆN TÍCH HÌNH TRỤ VÀ THỂ TÍCH KHỐI TRỤ

Diện tích xung quanh của hình trụ có bán kính R và chiều cao h là: $\boxed{S_{xq}=2\pi Rh}$.

Diện tích toàn phần của hình trụ bằng tổng diện tích xung quanh hình trụ với diện tích hai đáy của nó.

Thể tích của khối trụ có bán kính R và chiều cao h là: $\boxed{V=\pi R^2h}$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Bài tập cơ bản

Câu 1: Mặt phẳng đi qua trục hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh bằng a Thể tích khối trụ bằng:

A. πa^3. **B.** $\dfrac{\pi a^3}{2}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Do thiết diện đi qua trục hình trụ nên ta có $h=a$.

Bán kính đáy $R=\dfrac{a}{2}$. Do đó thể tích khối trụ $V=R^2\pi.h=\dfrac{\pi a^3}{4}$ (đvtt).

Câu 2: Cho một hình trụ có bán kính đáy bằng R và có chiều cao bằng $R\sqrt{3}$. Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình lần lượt có giá trị là:

A. $2\left(\sqrt{3}+1\right)\pi R^2$ và $2\sqrt{3}\pi R^2$. **B.** $2\sqrt{3}\pi R^2$ và $2\left(\sqrt{3}+1\right)\pi R^2$.

C. $2\sqrt{3}\pi R^2$ và $2\pi R^2$. **D.** $2\sqrt{3}\pi R^2$ và $2\sqrt{3}\pi R^2+R^2$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq}=2\pi R.R\sqrt{3}=2\sqrt{3}\pi R^2$ (đvdt).

Diện tích toàn phần của hình trụ:

$S_{tp}=S_{xq}+2.S_{\text{day}}=2\sqrt{3}\pi R^2+2\left(\pi R^2\right)=2\left(\sqrt{3}+1\right)\pi R^2$ (đvdt).

Câu 3: Mặt phẳng đi qua trục hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh có cạnh bằng $2R$. Diện tích toàn phần của khối trụ bằng:

A. $4\pi R^2$. **B.** $6\pi R^2$. **C.** $8\pi R^2$. **D.** $2\pi R^2$.

Lời giải

Chọn B

Do thiết diện đi qua trục hình trụ nên ta có $h=2R$.

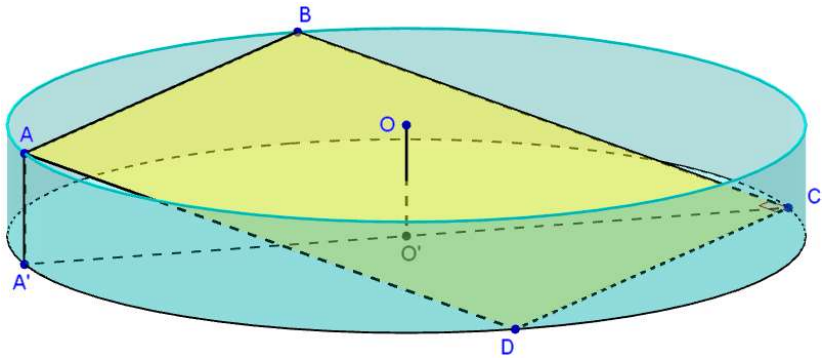
Diện tích toàn phần là: $S_{tp}=2\pi R\left(R+h\right)=6\pi R^2$ (đvdt).

Câu 4: Một hình trụ có bán kính đáy $R=70\text{cm}$, chiều cao hình trụ $h=20\text{cm}$. Một hình vuông có các đỉnh nằm trên hai đường tròn đáy sao cho có ít nhất một cạnh không song song và không vuông góc với trục hình trụ. Khi đó cạnh của hình vuông bằng bao nhiêu?

A. 80cm. **B.** 100cm. **C.** $100\sqrt{2}$cm. **D.** 140cm.

Lời giải

Chọn B



Xét hình vuông $ABCD$ có AD không song song và không vuông góc với trục OO' của hình trụ.

Dựng đường sinh AA', ta có

$\begin{cases}CD\perp AA'\\CD\perp AD\end{cases}\Rightarrow CD\perp\left(AA'D\right)\Rightarrow CD\perp A'D$.

Suy ra $A'C$ là đường kính đáy nên

$A'C=2R=140\text{cm}$.

Xét tam giác vuông $AA'C$, ta có

$AC=\sqrt{AA'^2+A'C^2}=100\sqrt{2}\text{cm}$.

Suy ra cạnh hình vuông bằng 100cm.

Câu 5: Bán kính đáy hình trụ bằng 4cm, chiều cao bằng 6cm. Độ dài đường chéo của thiết diện qua trục bằng:

A. 10cm. **B.** 6cm. **C.** 5cm. **D.** 8cm.

Lời giải

Chọn A

Thiết diện qua trục của một hình trụ là một hình chữ nhật có hai cạnh lần lượt bằng đường kính đáy và chiều cao của hình trụ.

Vậy hai cạnh của hình chữ nhật là 8cm và 6cm.

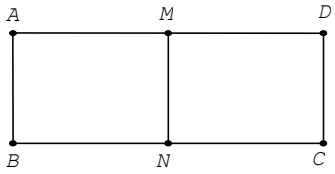
Do đó độ đài đường chéo: $\sqrt{8^2+6^2}=10\text{cm}.$

Câu 6: Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=1$ và $AD=2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN, ta được một hình trụ. Diện tích toàn phần của hình trụ bằng:

A. 2π. **B.** 3π. **C.** 4π. **D.** 8π.

Lời giải

Chọn C



Theo giả thiết ta được hình trụ có chiều cao $h=AB=1$, bán kính đáy $R=\dfrac{AD}{2}=1$.

Do đó diện tích toàn phần: $S_{tp}=2\pi Rh+2\pi R^2=4\pi.$

Câu 7: Một tấm nhôm hình chữ nhật có hai kích thước là a và 2a (a là độ dài có sẵn). Người ta cuốn tấm nhôm đó thành một hình trụ. Nếu hình trụ được tạo thành có chu vi đáy bằng 2a thì thể tích của nó bằng:

A. $\dfrac{a^3}{\pi}$. **B.** πa^3. **C.** $\dfrac{a^3}{2\pi}$. **D.** $2\pi a^3$.

Lời giải

Chọn A

Gọi bán kính đáy là R.

Hình trụ có chu vi đáy bằng $2a$ nên ta có $2\pi R=2a\Leftrightarrow R=\dfrac{a}{\pi}$.

Suy ra hình trụ này có đường cao $h=a.$

Vậy thê tích khối trụ $V=\pi R^2h=\pi\left(\dfrac{a}{\pi}\right)^2 a=\dfrac{a^3}{\pi}$ (đvtt).

Câu 8: Một tấm nhôm hình chữ nhật có hai kích thước là a và $2a$ (a là độ dài có sẵn). Người ta cuốn tấm nhôm đó thành một hình trụ. Nếu hình trụ được tạo thành có chiều dài đường sinh bằng $2a$ thì bán kính đáy bằng:

A. $\dfrac{a}{\pi}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2\pi}$. **D.** $2\pi a$.

Lời giải

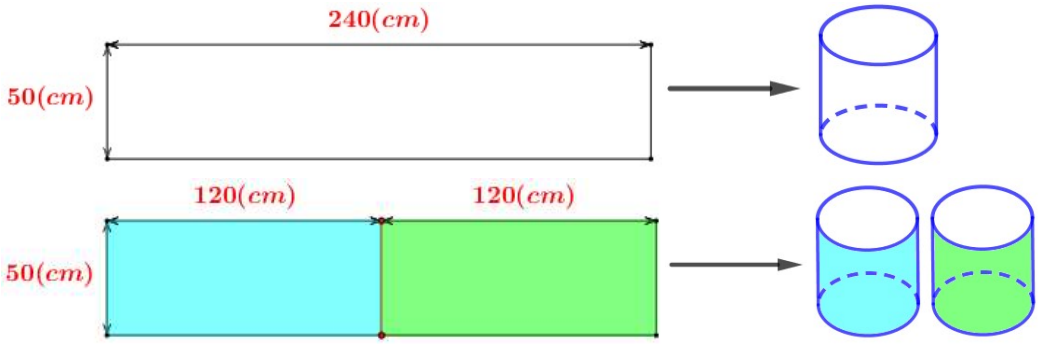
Chọn C

Gọi bán kính đáy là R.

Từ giả thiết suy ra $h=2a$ và chu vi đáy bằng a.

Do đó $2\pi R=a\Leftrightarrow R=\dfrac{a}{2\pi}$.

Câu 9: Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $50\text{cm}\times 240\text{cm}$, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 50cm, theo hai cách sau (xem hình minh họa sau đây):



● **Cách 1**: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.

● **Cách 2**. Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm tôn bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là thể tích của thùng gò được theo cách 2. Khi đó tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Công thức thể tích khối trụ $V=\pi R^2h$.

● Ở cách 1, suy ra $h=50\text{cm}$ và $2\pi R_1=240\Leftrightarrow R_1=\dfrac{120}{\pi}$. Do đó $V_1=\pi.\left(\dfrac{120}{\pi}\right)^2.50$ (đvtt).

● Ở cách 2, suy ra mỗi thùng có $h=50\text{cm}$ và $2\pi R_2=120\Leftrightarrow R_2=\dfrac{60}{\pi}$.

Do đó $V_2=2\times\left[\pi.\left(\dfrac{60}{\pi}\right)^2.50\right]$ (đvtt).

Suy ra $\dfrac{V_1}{V_2}=2$.

Câu 10: Một hộp sữa hình trụ có thể tích V (không đổi) được làm từ một tấm tôn có diện tích đủ lớn. Nếu hộp sữa chỉ kín một đáy thì để tốn ít vật liệu nhất, hệ thức giữa bán kính đáy R và đường cao h bằng:

A. $h=R$. **B.** $h=\sqrt{2}R$. **C.** $h=\sqrt{3}R$. **D.** $h=2R$.

Lời giải

Chọn A

Công thức tính thể tích $V=\pi R^2h$, suy ra $h=\dfrac{V}{\pi R^2}$.

Hộp sữa chỉ kín một đáy nên diện tích tôn cần dùng là:

$S_{tp}=S_{xq}+S_{\text{day}}=2\pi Rh+\pi R^2=\dfrac{2V}{R}+\pi R^2.$

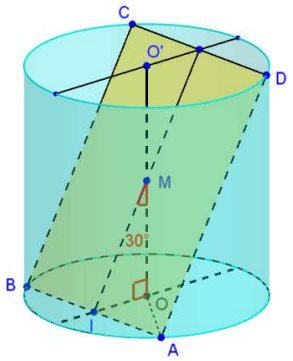
Xét hàm $f(R)=\dfrac{2V}{R}+\pi R^2$ trên $(0;+\infty)$, ta được $\min\limits_{(0;+\infty)} f(R)$ đạt tại $R=h.$

Câu 11: Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), chiều cao $2R$ và bán kính đáy R. Một mặt phẳng (α) đi qua trung điểm của OO' và tọa với OO' một góc $30°$. Hỏi (α) cắt đường tròn đáy theo một dây cung có độ dài bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{4R}{3\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{2R}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Hình vẽ, kết hợp với giả thiết ta có:

$OA=OB=R$, $OO'=2R$ và $\widehat{IMO}=30^0$.

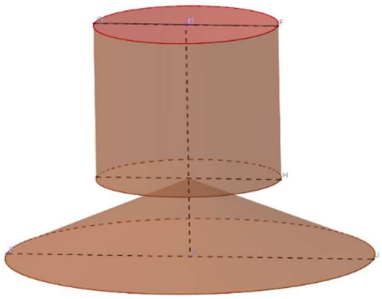
Trong tam giác vuông MOI, ta có $OI=MO.\tan 30^0=\dfrac{R}{\sqrt{3}}$.

Trong tam giác vuông AIO, ta có

$IA=\sqrt{OA^2-OI^2}=\sqrt{R^2-\left(\dfrac{R}{\sqrt{3}}\right)^2}=\dfrac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$

Suy ra $AB=2IA=\dfrac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$

Câu 12: Một khối đồ chơi gồm một khối hình trụ (T) gắn chồng lên một khối hình nón (N), lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_2=2r_1$, $h_1=2h_2$ (hình vẽ). Biết rằng thể tích của khối nón (N) bằng $20\,\text{cm}^3$. Thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng



A. 140cm^3 **B.** 120cm^3 **C.** 30cm^3 **D.** 50cm^3

Lời giải

Chọn D

Ta có thể tích khối trụ là $V_1 = \pi.r_1^2.h_1$, mà $r_2 = 2r_1$, $h_1 = 2h_2$

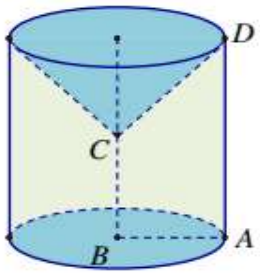
$V_1 = \pi.\left(\frac{r_2}{2}\right)^2.2h_2 = \frac{1}{2}\pi.r_2^2h_2$.

Mặt khác thể tích khối nón là $V_2 = \frac{1}{3}\pi.r_2^2h_2 = 20 \Rightarrow \pi.r_2^2h_2 = 60\ \left(\text{cm}^3\right)$.

Suy ra $V_1 = \frac{1}{2}.60 = 30\ \text{cm}^3$.

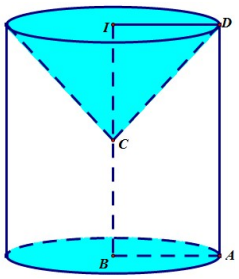
Vậy thể tích toàn bộ khối đồ chơi bằng $V_1 + V_2 = 30 + 20 = 50\ \text{cm}^3$.

Câu 13: Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B với $AB = BC = \frac{AD}{2} = a$. Quay hình thang và miền trong của nó quanh đường thẳng chứa cạnh BC. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.



A. $V = \frac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $V = \frac{5\pi a^3}{3}$. **C.** $V = \pi a^3$. **D.** $V = \frac{7\pi a^3}{3}$.

1) **Lời giải**



Thể tích của khối trụ sinh bởi hình chữ nhật $ABID$ khi quay cạnh BI là:

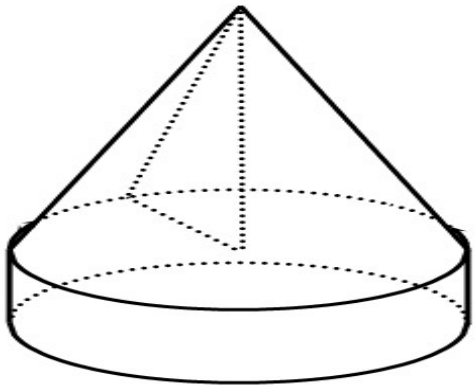
$$V_1 = \pi.AB^2.AD = 2\pi a^3.$$

Thể tích của khối nón sinh bởi tam giác CID khi quay cạnh CI là:

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi.ID^2.CI = \frac{\pi a^3}{3}.$$

Vậy $V = V_1 - V_2 = \frac{5\pi a^3}{3}$.

Câu 14: Một vật trang trí gồm một khối trụ và một khối nón có cùng bán kính đáy r xếp chồng lên nhau (như hình vẽ).



Khối trụ có chiều cao h bằng một nửa chiều cao của khối nón. Biết thể tích của cả khối vật trang trí đó bằng $80cm^3$. Thể tích của khối trụ là

A. $40cm^3$ **B.** $45cm^3$ **C.** $48cm^3$ **D.** $60cm^3$

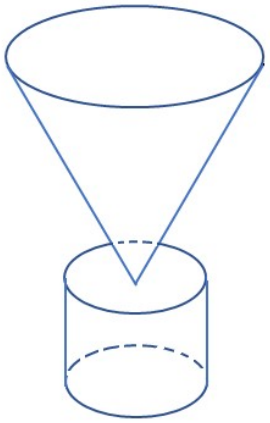
Lời giải

Chọn C

- Thể tích khối trụ là: $V_1 = \pi r^2 h$
- Thể tích của cả khối vật trang trí là: $V = \pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi r^2 (2h) = \frac{5}{3}\pi r^2 h = \frac{5}{3}V_1$
- Suy ra: $\frac{5}{3}V_1 = 80$. Do đó: $V_1 = 48cm^3$

Câu 15. Một khối đồ chơi gồm một khối hình nón (H_1) xếp chồng lên một khối hình trụ (H_2), lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_1 = 2r_2, h_1 = 2h_2$ (hình vẽ).

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133



Biết rằng thể tích của khối trụ (H_2) bằng $30\,\text{cm}^3$, thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng

A. $110\,\text{cm}^3$. **B.** $70\,\text{cm}^3$. **C.** $270\,\text{cm}^3$. **D.** $250\,\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích toàn bộ khối đồ chơi là $V = V_{(H_1)} + V_{(H_2)} = \frac{1}{3}\pi.r_1^2.h_1 + \pi.r_2^2.h_2$

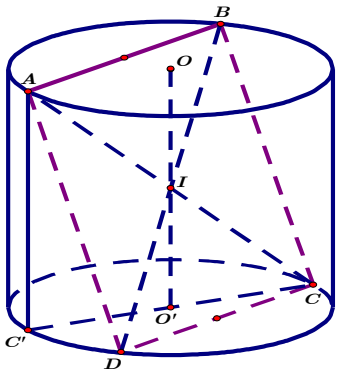
$= \frac{1}{3}\pi.(2r_2)^2.(2h_2) + \pi.(r_2)^2.(h_2) = \frac{11}{3}.V_{(H_2)} = 110\left(\text{cm}^3\right)$

Câu 16: Một hình trụ có bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Một hình vuông $ABCD$ có đáy AB, CD là hai dây cung của hai đường tròn đáy và $(ABCD)$ không vuông góc với đáy. Diện tích hình vuông đó bằng

A. $\frac{5a^2}{4}$. **B.** $5a^2$. **C.** $\frac{5a^2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{5a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn D



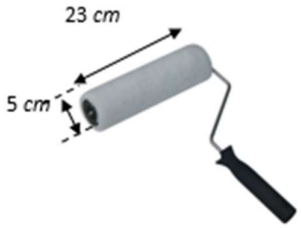
+ Gọi O, O' là tâm của 2 đường tròn đáy, I là trung điểm của OO'.

Do tính đối xứng nên I là trung điểm của AC, BD.

Kẻ đường kính $CC' \Rightarrow AC' = a; CC' = 2a \Rightarrow AC = \sqrt{C'A^2 + C'C^2} = a\sqrt{5}$.

+ Do đó $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC^2=\frac{5a^2}{2}$.

Câu 17. Một cái trục lăn sơn nước có dạng một hình trụ. Đường kính của đường tròn đáy là 5cm, chiều dài lăn là 23cm (hình bên). Sau khi lăn trọn 10 vòng thì trục lăn tạo nên tường phẳng lớp sơn có diện tích là



A. $2300\pi\,\text{cm}^2$. **B.** $1150\pi\,\text{cm}^2$. **C.** $862,5\pi\,\text{cm}^2$. **D.** $5230\pi\,\text{cm}^2$.

Lời giải

Chọn B

Khi lăn trọn một vòng thì trục lăn tạo trên tường phẳng lớp sơn có diện tích bằng diện tích xung quanh của trục lăn là $S=2\pi R.h=2\pi.\frac{5}{2}.23=115\pi(\text{cm}^2)$.

Vậy sau khi lăn trọn 10 vòng thì trục lăn tạo nên tường phẳng lớp sơn có diện tích là $10S=1150\pi(\text{cm}^2)$.

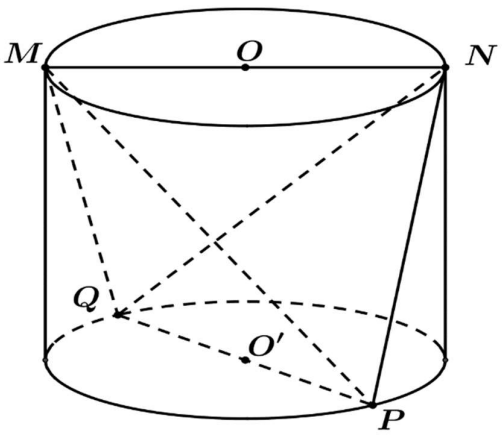
Dạng 2: Bài tập dành cho học sinh 8+, 9+

Câu 1: Một người thợ có một khối đá hình trụ. Kẻ hai đường kính MN, PQ của hai đáy sao cho $MN\perp PQ$. Người thợ đó cắt khối đá theo các mặt đi qua 3 trong 4 điểm M,N,P,Q để khối đá có hình tứ diện $MNPQ$. Biết $MN=60$ cm và thể tích khối tứ diện $MNPQ=30$ dm^3. Hãy tính thể tích lượng đá cắt bỏ (làm tròn đến một chữ số thập phân sau dấu phẩy).

A. $101,3\text{dm}^3$ **B.** $111,4\text{dm}^3$ **C.** $121,3\text{dm}^3$ **D.** $141,3\text{dm}^3$

Lời giải

Chọn B



Gọi O và O' lần lượt là trung điểm MN và PQ.

Khi đó OO' là trục của hình trụ và $OO' \perp MN \Rightarrow MN \perp (OPQ)$.

$V_{MNPQ} = \frac{1}{3} MN.S_{OPQ} = \frac{OO'.6^2}{6} = 6OO' \ (\text{dm}^3)$.

Theo bài ra ta có $V_{MNPQ} = 30\text{dm}^3 \Rightarrow OO' = 5\text{dm}$.

Thể tích khối trụ là $V_{tru} = \pi.3^2.5 \approx 141,4\text{dm}^3$. Vậy thể tích lượng đá cắt bỏ $V = V_{tru} - V_{MNPQ} \approx 111,4\text{dm}^3$.

Câu 2: Cần sản xuất một vỏ hộp sữa hình trụ có thể tích V cho trước. Để tiết kiệm vật liệu nhất thì bán kính đáy phải bằng

A. $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. **B.** $\sqrt[3]{\frac{V}{2}}$. **C.** $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. **D.** $\sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}$.

Lời giải

Chọn A

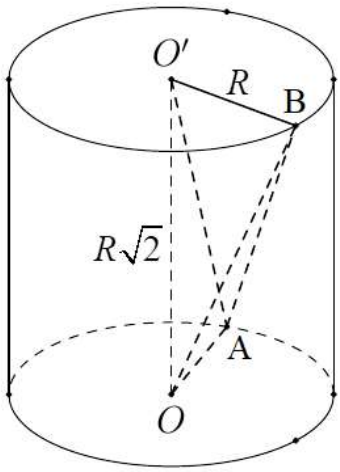
Ta có $V = \pi hr^2 \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2} \Rightarrow S_{tp} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} = 2\pi r^2 + \frac{V}{r} + \frac{V}{r} \geq 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$

Suy ra để tiết kiệm nguyên vật liệu nhất thì $\frac{V}{r} = 2\pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

Câu 3: Cho khối trụ có đáy là các đường tròn tâm (O), (O') có bán kính là R và chiều cao $h = R\sqrt{2}$. Gọi A, B lần lượt là các điểm thuộc (O) và (O') sao cho OA vuông góc với $O'B$. Tỉ số thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ với thể tích khối trụ là:

A. $\frac{2}{3\pi}$. **B.** $\frac{1}{3\pi}$. **C.** $\frac{1}{6\pi}$. **D.** $\frac{1}{4\pi}$.

Lời giải



Thể tích khối trụ $V_1 = \pi R^2.h = \pi R^2.R\sqrt{2} = \pi R^3\sqrt{2}$

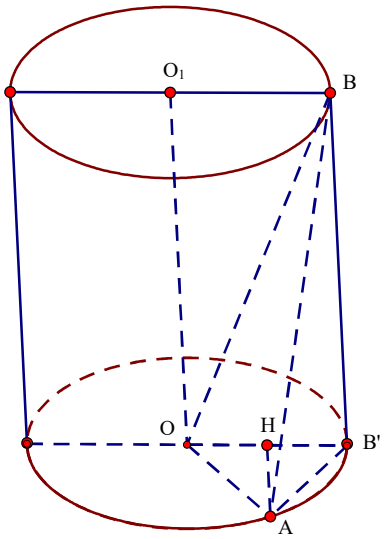
Khối tứ diện $BO'OA$ có BO' là đường cao và đáy là tam giác vuông $O'OA$, do đó thể tích khối tứ diện là $V_2 = \frac{1}{3} S_{O'OA}.O'B = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} OA \cdot OO' \cdot O'B = \frac{1}{6} R.R\sqrt{2}.R = \frac{\sqrt{2}}{6} R^3$

Vậy $\frac{V_2}{V_1}=\frac{R^3\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{1}{\pi R^3\sqrt{2}}=\frac{1}{6\pi}$.

Câu 4. Cho hình trụ (T) chiều cao bằng $2a$, hai đường tròn đáy của (T) có tâm lần lượt là O và O_1, bán kính bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O_1 lấy điểm B sao cho $AB=\sqrt{5}a$. Thể tích khối tứ diện OO_1AB bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$

Lời giải



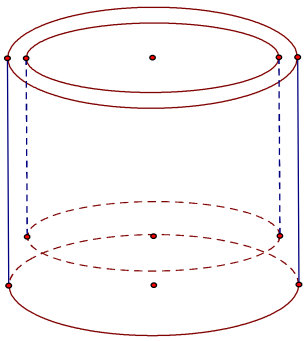
Kẻ đường sinh BB' và gọi H là trung điểm OB'.

Trong tam giác vuông ABB' có $BB'=OO_1=2a$ và $AB=a\sqrt{5}$ nên $AB'=\sqrt{AB^2-BB'^2}=a$.

Tam giác OAB' có $OB'=OA=AB'=a$ nên OAB' là tam giác đều $\Rightarrow AH\perp OB'$, $AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ta có $\begin{cases}AH\perp OB'\\AH\perp OO_1\end{cases}\Rightarrow AH\perp(O_1OB)\Rightarrow$ Thể tích khối tứ diện $A.O_1OB$ là

$V_{O_1OAB}=\frac{1}{3}.AH.S_{O_1OB}=\frac{1}{6}AH.O_1O.O_1B=\frac{1}{6}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.2a.a=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 5. Để làm một chiếc cốc bằng thủy tinh dạng hình trụ với đáy cốc dày $1,5\ cm$, thành xung quanh cốc dày $0,2\ cm$ và có thể tích thật (thể tích nó đựng được) là $480\pi\ cm^3$ thì người ta cần ít nhất bao nhiêu cm^3 thủy tinh (lấy gần đúng)?



A. $238\left(cm^3\right)$. **B.** $269\left(cm^3\right)$. **C.** $217\left(cm^3\right)$. **D.** $201\left(cm^3\right)$.

Lời giải

Gọi $h, R\left(cm\right)$ lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của khối trụ bên trong (phần hình trụ dùng để đựng được).

Ta suy ra $h+1,5\left(cm\right)$ và $R+0,2\left(cm\right)$ lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của khối trụ bên ngoài (phần hình trụ của chiếc cốc).

Ta có thể tích thật (thể tích cái cốc có thể đựng được) được tính bởi công thức $\pi R^2h=480\pi$.

Suy ra $h=\dfrac{480}{R^2}$.

Do đó, thể tích phần thủy tinh cần thiết để làm chiếc cốc là

$$V=\pi\left(R+0,2\right)^2\left(\frac{480}{R^2}+1,5\right)-480\pi$$

$$=\pi\left(\frac{3R^2}{2}+\frac{192}{R}+\frac{3R}{5}+\frac{96}{5R^2}+\frac{3}{50}\right).$$

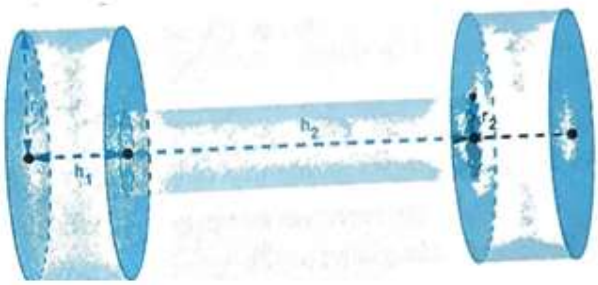
Suy ra

$$V_R'=\pi\left(3R-\frac{192}{R^2}+\frac{3}{5}-\frac{192}{5R^3}\right)=\frac{\pi\left(5R+1\right)\left(R-4\right)\left(3R^2+12R+48\right)}{5R^3}$$

$V_R'=0\Leftrightarrow R=4$ (nhận vì $R>0$). Dễ thấy V_R' đổi dấu từ âm sang dương khi R đi qua 4 nên

$$V_{\min}=\frac{3783\pi}{50}\approx 238\left(cm^3\right) \text{ khi } R=4.$$

Câu 6: Một quả tạ tập tay gồm ba khối trụ $\left(H_1\right)$, $\left(H_2\right)$, $\left(H_3\right)$ gắn liền nhau lần lượt có bán kính và chiều cao tương ứng là r_1,h_1, r_2,h_2, r_3,h_3 thỏa mãn $r_1=r_3$, $h_1=h_3$; $r_2=\dfrac{1}{3}r_1$ (xem hình vẽ). Biết thể tích của toàn bộ quả tạ bằng 60π và chiều dài quả tạ bằng 9. Thể tích khối trụ $\left(H_2\right)$ bằng?



(H_1)

A. $\pi\dfrac{16(9-2h_1)}{4h_1+9}$. **B.** $\pi\dfrac{36(9-2h_1)}{4h_1+9}$ **C.** $\pi\dfrac{60(9-2h_1)}{4h_1+9}$ **D.** $\pi\dfrac{46(9-2h_1)}{4h_1+9}$

Lời giải

Chọn C

Chiều dài quả tạ là $l=h_1+h_2+h_3=2h_1+h_2=9\Rightarrow h_2=9-2h_1$

Thể tích quả tạ là $V=V_{(H_1)}+V_{(H_2)}+V_{(H_3)}=\pi r_1^2h_1+\pi r_2^2h_2+\pi r_3^2h_3=2\pi r_1^2h_1+\pi r_2^2h_2=60\pi$

$\Leftrightarrow 2r_1^2h_1+r_2^2h_2=60\Leftrightarrow 6r_2^2h_1+r_2^2(9-2h_1)=60\Leftrightarrow r_2^2(9+4h_1)=60\Leftrightarrow r_2=\dfrac{60}{9+4h_1}$

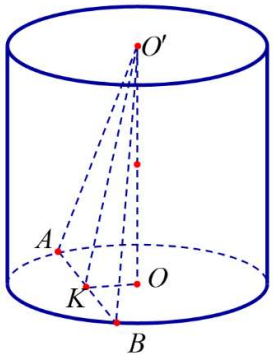
Thể tích $V_{(H_2)}=\pi r_2^2h_2=\pi\dfrac{60}{9+4h_1}(9-2h_1)=\pi\dfrac{60(9-2h_1)}{9+4h_1}$.

Câu 7: Một hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai đường tròn (O,R) và (O',R). Biết rằng tồn tại dây cung AB của đường tròn (O,R) sao cho tam giác $O'AB$ đều và góc giữa hai mặt phẳng $(O'AB)$ và mặt phẳng chứa đường tròn (O,R) bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ đã cho.

A. $4\pi R^2$ **B.** $2\sqrt{3}\pi R^2$ **C.** $\dfrac{3\sqrt{7}}{7}\pi R^2$ **D.** $\dfrac{6\sqrt{7}}{7}\pi R^2$

Lời giải

Chọn D



Gọi K là trung điểm AB, đặt $AB=2a$.

Ta có : $AB \perp OK$ và $AB \perp OO'$ nên $\widehat{OKO'} = 60°$ $\Rightarrow O'K = 2OK$ $\Rightarrow O'K^2 = 4OK^2$

$\Rightarrow 3a^2 = 4\left(R^2 - a^2\right)$ $\Rightarrow a^2 = \dfrac{4R^2}{7}$

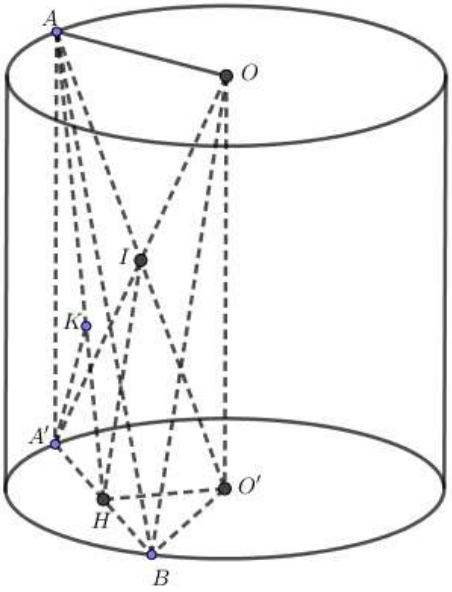
Mặt khác : $OO'^2 = O'B^2 - OB^2 = 4a^2 - R^2 = 4.\dfrac{4R^2}{7} - R^2 = \dfrac{9R^2}{7}$ $\Rightarrow O'O = \dfrac{6\sqrt{7}\pi R}{7}$

Vậy diện tích xung quanh hình trụ đã cho là : $S_{xq} = 2\pi Rl = \dfrac{6\sqrt{7}\pi R^2}{7}$.

Câu 8: Cho hình trụ có chiều cao bằng bán kính đáy và bằng $4cm$. Điểm A nằm trên đường tròn đáy tâm O, điểm B nằm trên đường tròn đáy tâm O' của hình trụ. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng OO' và AB bằng $2\sqrt{2}cm$. Khi đó khoảng cách giữa $O'A$ và OB bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Gọi A' là hình chiếu của A trên mặt đáy chứa đường tròn tâm O', H là trung điểm $A'B$

$\Rightarrow OO' // \left(AA'B\right)$ nên $d\left(OO', AB\right) = d\left(OO', \left(AA'B\right)\right) = d\left(O', \left(AA'B\right)\right) = O'H$.

Vậy $O'H = 2\sqrt{2} \Rightarrow A'H = \sqrt{O'A'^2 - O'H^2} = \sqrt{16-8} = 2\sqrt{2}$.

Gọi I là giao điểm của AO' và $A'O$ thì $HI // OB$ nên $OB // \left(AHO'\right)$

$\Rightarrow d\left(AO', OB\right) = d\left(OB, \left(OO'B\right)\right) = d\left(B, \left(OO'B\right)\right) = d\left(A', \left(OO'B\right)\right)$.

Hạ $A'K \perp AH$ thì $d\left(A', \left(OO'B\right)\right) = A'K$

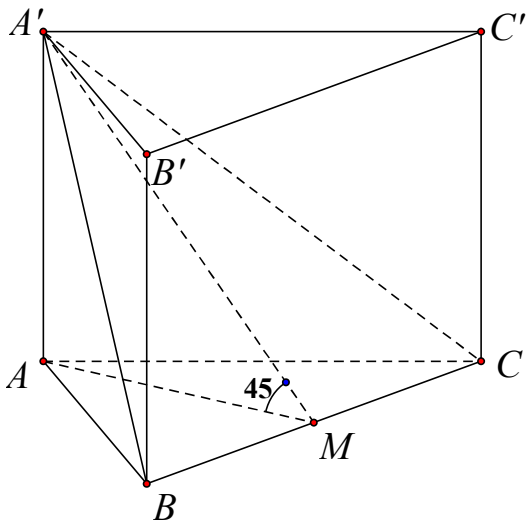
Trong tam giác vuông $AA'H$ có $\dfrac{1}{A'K^2} = \dfrac{1}{A'H^2} + \dfrac{1}{AA'^2} = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{3}{16}$ $\Rightarrow A'K = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Vậy $d\left(AO', OB\right) = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Câu 9: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $45°$, diện tích tam giác $A'BC$ bằng $a^2\sqrt{6}$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{4\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $2\pi a^2$. **C.** $4\pi a^2$. **D.** $\dfrac{8\pi a^2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC, khi đó $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp A'M$, do đó góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là $\widehat{A'MA} = 45°$.

Tam giác $A'AM$ vuông cân tại A nên $A'M = AM\sqrt{2} = \dfrac{BC\sqrt{3}}{2}.\sqrt{2} = \dfrac{BC\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích $S_{A'BC} = \dfrac{1}{2}A'M.BC = \dfrac{1}{2}\dfrac{BC\sqrt{6}}{2}.BC = \dfrac{BC^2\sqrt{6}}{4}$.

Theo đề $\dfrac{BC^2\sqrt{6}}{4} = a^2\sqrt{6} \Rightarrow BC = 2a$.

Hình trụ có đáy là đường tròn ngoại tiếp ABC có bán kính $r = \dfrac{BC\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$, đường cao $h = AA' = AM = \dfrac{BC\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

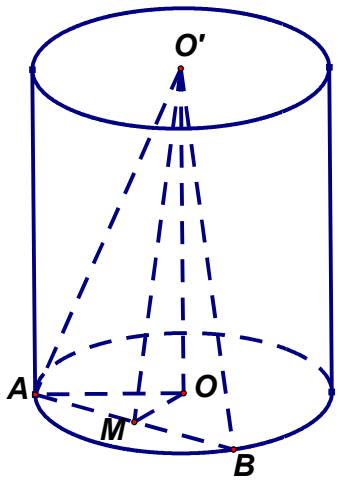
Diện tích xung quanh $S = 2\pi rh = 2\pi\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}.a\sqrt{3} = 4\pi a^2$.

Câu 10. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O;R)$ và $(O';R)$. AB là một dây cung của đường tròn $(O;R)$ sao cho tam giác $O'AB$ là tam giác đều và mặt phẳng $(O'AB)$ tạo với mặt phẳng chứa đường tròn $(O;R)$ một góc $60°$. Tính theo R thể tích V của khối trụ đã cho.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

A. $V=\dfrac{\pi\sqrt{7}R^3}{7}$. **B.** $V=\dfrac{3\pi\sqrt{5}R^3}{5}$. **C.** $V=\dfrac{\pi\sqrt{5}R^3}{5}$. **D.** $V=\dfrac{3\pi\sqrt{7}R^3}{7}$.

Lời giải



Đặt độ dài cạnh $AB=x\ (x>0)$ và M là trung điểm AB.

Vì tam giác $O'AB$ đều nên $O'A=O'B=AB=x\Rightarrow O'M=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

Vì mặt phẳng $(O'AB)$ tạo với mặt phẳng chứa đường tròn $(O;R)$ góc $60°$ nên $\widehat{O'MO}=60°$.

Xét tam giác $O'OM$ vuông tại O ta có: $\cos\widehat{O'MO}=\dfrac{OM}{O'M}$. Suy ra

$$\cos 60°=\frac{OM}{\frac{x\sqrt{3}}{2}}\Leftrightarrow OM=\frac{x\sqrt{3}}{4}$$

Xét tam giác OAM vuông ở M có: $OA^2=OM^2+AM^2$ nên

$$R^2=\left(\frac{x\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2\Leftrightarrow R^2=\frac{7}{16}x^2\Rightarrow x=\frac{4\sqrt{7}}{7}R$$

Do đó: $O'M=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2\sqrt{21}}{7}R$ và $OM=\dfrac{x\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}R$. Vì vậy, ta có

$$OO'=\sqrt{O'M^2-OM^2}=\frac{3\sqrt{7}}{7}R.$$

Vậy thể tích khối trụ là

$$V=\pi R^2.h=\pi R^2.\frac{3\sqrt{7}}{7}R\Rightarrow V=\frac{3\pi\sqrt{7}R^3}{7}.$$

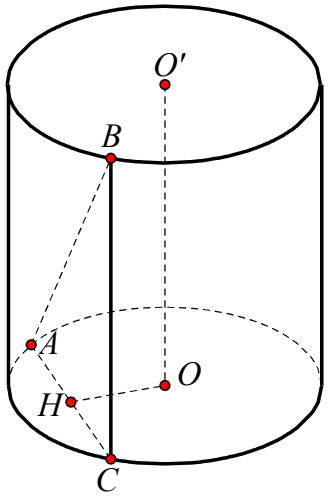
Câu 47: Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông. Gọi A,B là hai điểm lần lượt nằm trên hai đường tròn (O) và (O'). Biết

$AB = 2a$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OO' bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Bán kính đáy bằng

A. $\frac{a\sqrt{14}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{14}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{14}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{14}}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Dựng đường sinh BC gọi H là trung điểm của đoạn AB.

Ta có $d\left(OO', AB\right) = OH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

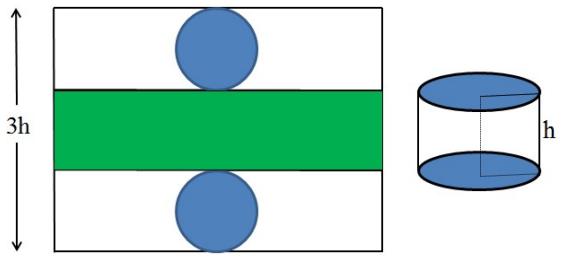
Giả sử bán kính đáy của hình trụ là r, do thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông suy ra $BC = 2r$

$\Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{4a^2 - 4r^2}$,

Mặt khác $AC = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 2\sqrt{r^2 - \frac{3a^2}{4}} = \sqrt{4r^2 - 3a^2}$

Ta có phương trình $\sqrt{4a^2 - 4r^2} = \sqrt{4r^2 - 3a^2} \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{14}}{4}$.

Câu 12: Từ một tấm thép phẳng hình chữ nhật, người ta muốn làm một chiếc thùng đựng dầu hình trụ bằng cách cắt ra hai hình tròn bằng nhau và một hình chữ nhật (phần tô đậm) sau đó hàn kín lại, như hình vẽ dưới đây.

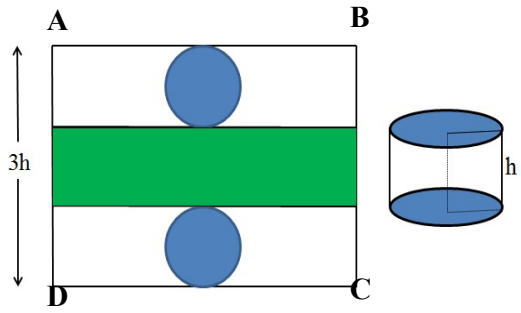


Hai hình tròn làm hai mặt đáy, hình chữ nhật làm thành mặt xung quanh của thùng đựng dầu (vừa đủ). Biết thùng đựng dầu có thể tích bằng $50,24$ lít (các mối ghép nối khi gò hàn chiếm diện tích không đáng kể. Lấy $\pi = 3,14$). Tính diện tích của tấm thép hình chữ nhật ban đầu?

A. $1,8062\,\text{m}^2$. **B.** $2,2012\,\text{m}^2$. **C.** $1,5072\,\text{m}^2$. **D.** $1,2064\,\text{m}^2$.

Lời giải

Gọi tấm thép hình chữ nhật ban đầu là $ABCD$ (Hình vẽ dưới), r là bán kính của hình tròn đáy.



Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là: $S = AB.AD$.

Ta có $3h = 4r + h \Leftrightarrow h = 2r$.

Thể tích của khối trụ $V = \pi.r^2.h = 3,14.r^2.2\text{r} = 6,28\text{r}^3$.

Theo bài ra $V = 50,24 \Leftrightarrow 6,28r^3 = 50,24 \Leftrightarrow r^3 = 8 \Leftrightarrow r = 2$.

Do $r = 2\,\text{dm} = 0,2\,\text{m} \Rightarrow AD = 3h = 6r = 1,2\,\text{m}; AB = 2\pi.r = 1,256\,\text{m}$.

Vậy $S = 1,2.1,256 = 1,5072\,(\text{m}^2)$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

BÀI 3. MẶT CẦU – KHỐI CẦU

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ĐỊNH NGHĨA

1. Mặt cầu

Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm O cố định một khoảng R không đổi gọi là mặt cầu có tâm là O và bán kính bằng R.

Kí hiệu: $S(O;R)=\{M|OM=R\}$.

2. Khối cầu

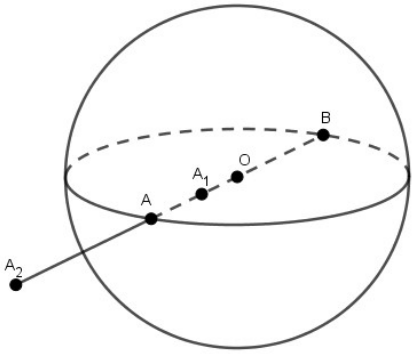
Mặt cầu $S(O;R)$ cùng với các điểm nằm bên trong nó được gọi là một khối cầu tâm O, bán kính R.

Kí hiệu: $B(O;R)=\{M|OM\le R\}$.

Nếu OA, OB là hai bán kính của mặt cầu sao cho A, O, B thẳng hàng thì đoạn thẳng AB gọi là đường kính của mặt cầu.

Định lí. Cho hai điểm cố định A, B. Tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $\widehat{AMB}=90^0$ là mặt cầu đường kính AB.

- $A\in S(O;R)\Leftrightarrow OA=R.$
- $OA_1<R\Leftrightarrow A_1$ nằm trong mặt cầu.
- $OA_2>R\Leftrightarrow A_2$ nằm ngoài mặt cầu.



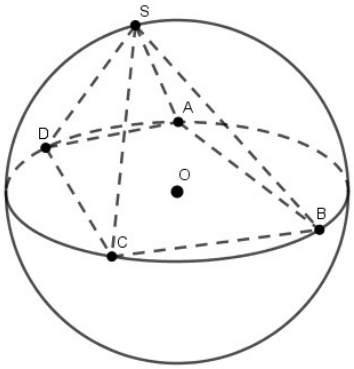
II. MẶT CẦU NGOẠI TIẾP KHỐI ĐA DIỆN

Định nghĩa: Mặt cầu đi qua mọi đỉnh của một hình đa diện (H) gọi là mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện (H) và khi đó (H) được gọi là nội tiếp mặt cầu đó.

Điều kiện cần và đủ để một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp là đáy của nó là một đa giác nội tiếp một đường tròn.

Mọi tứ diện đều có mặt cầu ngoại tiếp.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133



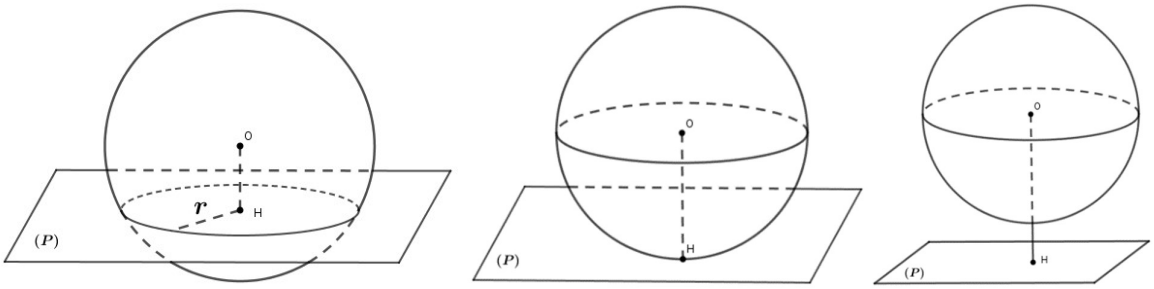
III. MẶT CẦU NỘI TIẾP HÌNH CHÓP

1. Mặt cầu nội tiếp hình chóp là mặt cầu nằm bên trong hình chóp và tiếp xúc với với tất các mặt của hình chóp.

2. Tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp cách đều tất cả các mặt của hình chóp.

IV. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT CẦU VÀ MẶT PHẲNG

Cho mặt cầu $S(O;R)$ và mặt phẳng (P), gọi d là khoảng cách từ O đến (P) và H là hình chiếu vuông góc của O trên (P). Khi đó



● Nếu $d<R$ thì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu $S(O;R)$ theo giao tuyến là đường tròn nằm trên mặt phẳng (P) có tâm là H và có bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2}$.

Khi $d=0$ thì mặt phẳng (P) đi qua tâm O của mặt cầu, mặt phẳng đó gọi là mặt phẳng kính; giao tuyến của mặt phẳng kính với mặt cầu là đường tròn có tâm O và bán kính R, đường tròn đó gọi là đường tròn lớn của mặt cầu.

●Nếu $d=R$ thì mặt phẳng (P) và mặt cầu $S(O;R)$ có một điểm chung duy nhất H.

Khi đó ta nói (P) tiếp xúc với $S(O;R)$ tại H và (P) gọi là tiếp diện của mặt cầu, H gọi là tiếp điểm.

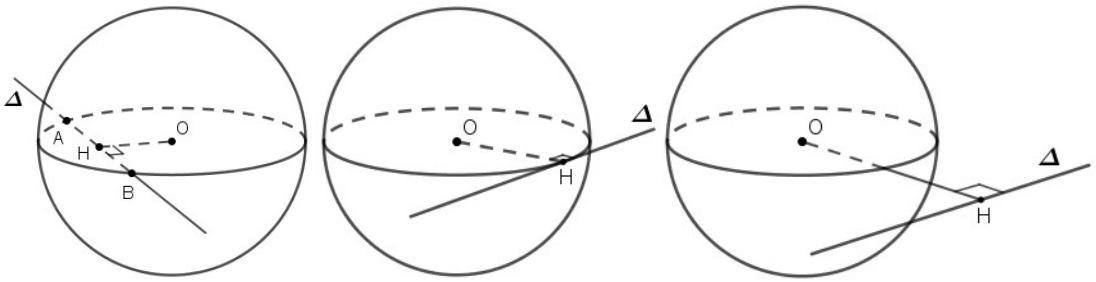
Chú ý. Cho H là một điểm thuộc mặt cầu $S(O;R)$ và mặt phẳng (P) qua H. Thế thì:

(P) tiếp xúc với $S(O;R)\Leftrightarrow OH\perp(P)$.

●Nếu $d>R$ thì mặt phẳng (P) và mặt cầu $S(O;R)$ không có điểm chung.

V. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT CẦU VÀ ĐƯỜNG THẲNG

Cho mặt cầu $S(O;R)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên Δ và $d=OH$ là khoảng cách từ O đến Δ. Khi đó



● Nếu $d<R$ thì Δ cắt $S(O;R)$ tại hai điểm A, B và H là trung điểm của AB.

● Nếu $d=R$ thì Δ và $S(O;R)$ chỉ có một điểm chung H, trong trường hợp này Δ gọi là tiếp tuyến của mặt cầu $S(O;R)$ hay Δ tiếp xúc với $S(O;R)$ và H là tiếp điểm.

● Nếu $d>R$ thì Δ và $S(O;R)$ không có điểm chung.

VI. DIỆN TÍCH MẶT CẦU VÀ THỂ TÍCH KHỐI CẦU

Gọi R là bán kính của mặt cầu thì

● Diện tích mặt cầu: $\boxed{S=4\pi R^2}$.

● Thể tích khối cầu: $\boxed{V=\frac{4}{3}\pi R^3}$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

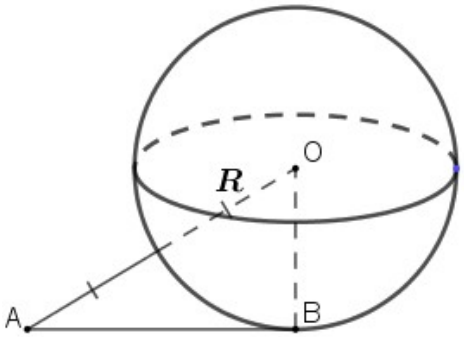
Dạng 1: Bài tập cơ bản

Câu 1: Cho mặt cầu $S(O;R)$ và một điểm A, biết $OA=2R$. Qua A kẻ một tiếp tuyến tiếp xúc với (S) tại B. Khi đó độ dài đoạn AB bằng:

A. R. **B.** $\frac{R}{2}$. **C.** $R\sqrt{2}$. **D.** $R\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Vì AB tiếp xúc với (S) tại B nên $AB\perp OB$.

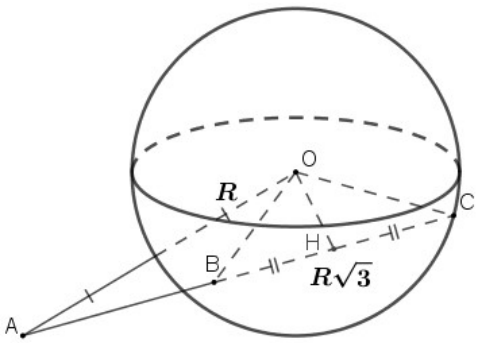
Suy ra $AB=\sqrt{OA^2-OB^2}=\sqrt{4R^2-R^2}=R\sqrt{3}$.

Câu 2: Cho mặt cầu $S(O;R)$ và một điểm A, biết $OA=2R$. Qua A kẻ một cát tuyến cắt (S) tại B và C sao cho $BC=R\sqrt{3}$. Khi đó khoảng cách từ O đến BC bằng:

A. R. **B.** $\frac{R}{2}$. **C.** $R\sqrt{2}$. **D.** $R\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

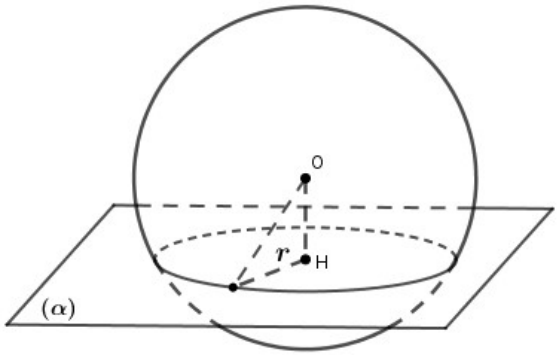


Gọi H là hình chiếu của O lên BC.

Ta có $OB=OC=R$, suy ra H là trung điểm của BC nên $HC=\frac{CD}{2}=\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $OH=\sqrt{OC^2-HC^2}=\frac{R}{2}$.

Câu 3: Cho mặt cầu $S(O;R)$ và mặt phẳng (α). Biết khoảng cách từ O đến (α) bằng $\frac{R}{2}$. Khi đó thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) với $S(O;R)$ là một đường tròn có đường kính bằng:



A. R. **B.** $R\sqrt{3}$. **C.** $\frac{R}{2}$. **D.** $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi H là hình chiếu của O xuống (α).

Ta có $d[O,(\alpha)]=OH=\frac{R}{2}<R$ nên (α) cắt $S(O;R)$ theo đường tròn $C(H;r)$.

Bán kính đường tròn $C(H;r)$ là $r=\sqrt{R^2-OH^2}=\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra đường kính bằng $R\sqrt{3}$.

Câu 4: Cho mặt cầu tâm I bán kính $R=2,6\text{cm}$. Một mặt phẳng cắt mặt cầu và cách tâm I một khoảng bằng $2,4\text{cm}$. Thế thì bán kính của đường tròn do mặt phẳng cắt mặt cầu tạo nên là:

A. $1,2\text{cm}$. **B.** $1,3\text{cm}$. **C.** 1cm. **D.** $1,4\text{cm}$.

Lời giải

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Chọn C

Mặt phẳng cắt mặt cầu $S(I;2,6\text{cm})$ theo một đường tròn $(H;r)$.

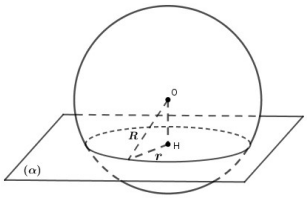
Vậy $r=\sqrt{R^2-IH^2}=\sqrt{(2,6)^2-(2,4)^2}=1\text{cm}$.

Câu 5: Diện tích hình tròn lớn của một hình cầu là p. Một mặt phẳng (α) cắt hình cầu theo một hình tròn có diện tích là $\frac{p}{2}$. Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng (α) bằng:

A. $\sqrt{\frac{p}{\pi}}$. **B.** $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$. **C.** $\sqrt{\frac{2p}{\pi}}$. **D.** $\sqrt{\frac{p}{2\pi}}$.

Lời giải

Chọn D



Hình tròn lớn của hình cầu S là hình tròn tạo bởi mặt phẳng cắt hình cầu và đi qua tâm của hình cầu. Gọi R là bán kính hình cầu thì hình tròn lớn cũng có bán kính là R.

Theo giả thiết, ta có $\pi R^2=p\Leftrightarrow R=\sqrt{\frac{p}{\pi}}$ và $\pi r^2=\frac{p}{2}\Leftrightarrow r=\sqrt{\frac{p}{2\pi}}$.

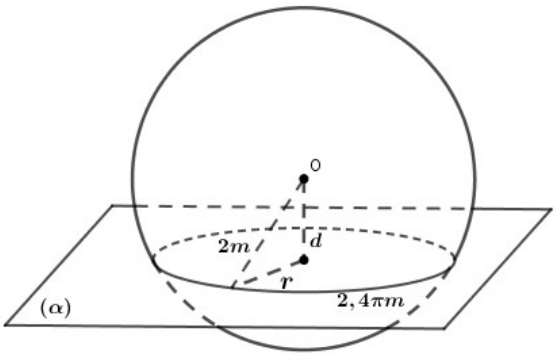
Suy ra $d=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{\frac{p}{2\pi}}$.

Câu 6: Một hình cầu có bán kính là 2m, một mặt phẳng cắt hình cầu theo một hình tròn có độ dài là $2,4\pi\text{m}$. Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng là:

A. $1,6\text{m}$. **B.** $1,5\text{m}$. **C.** $1,4\text{m}$. **D.** $1,7\text{m}$.

Lời giải

Chọn A

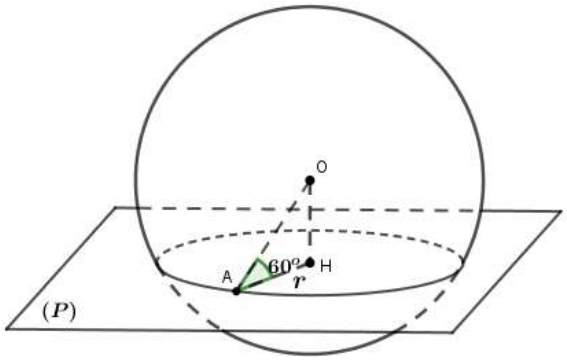


Gọi khoảng cách từ tâm cầu đến mặt phẳng là d, ta có $d^2=R^2-r^2$.

Theo giả thiết $R=2\text{m}$ và $2\pi r=2,4\pi m\Rightarrow r=\frac{2,4\pi}{2\pi}=1,2\text{m}$.

Vậy $d=\sqrt{R^2-r^2}=1,6\text{m}$.

Câu 7: Cho mặt cầu $S(O;R)$, A là một điểm ở trên mặt cầu (S) và (P) là mặt phẳng qua A sao cho góc giữa OA và (P) bằng 60^0.



Diện tích của đường tròn giao tuyến bằng:

A. πR^2. **B.** $\frac{\pi R^2}{2}$. **C.** $\frac{\pi R^2}{4}$. **D.** $\frac{\pi R^2}{8}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên (P) thì

- H là tâm của đường tròn giao tuyến của (P) và (S).
- $\widehat{OA,(P)} = \widehat{(OA,AH)} = 60^0$.

Bán kính của đường tròn giao tuyến: $r = HA = OA.\cos 60^0 = \frac{R}{2}$.

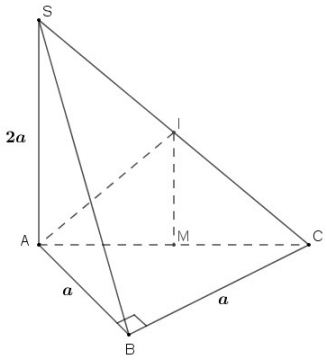
Suy ra diện tích đường tròn giao tuyến: $\pi r^2 = \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{4}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA = BC = a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $3a$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $a\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm AC, suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi I là trung điểm SC, suy ra

$IM \parallel SA$ nên $IM \perp (ABC)$.

Do đó IM là trục của ΔABC, suy ra

$IA = IB = IC.$ (1)

Hơn nữa, tam giác SAC vuông tại A có I là trung điểm SC nên $IS = IC = IA$. (2)

Từ (1) và (2), ta có $IS = IA = IB = IC$

hay I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

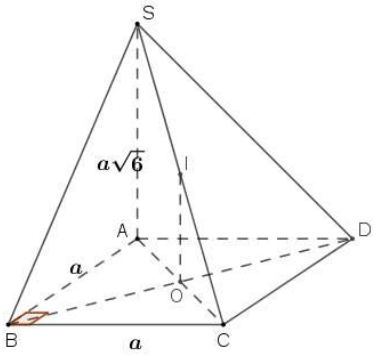
Vậy bán kính $R = IS = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính theo a diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ ta được:

A. $a^2\sqrt{2}$. **B.** $8\pi a^2$. **C.** $2a^2$. **D.** $2\pi a^2$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $O = AC \cap BD$, suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.

Gọi I là trung điểm SC, suy ra

$IO \parallel SA \Rightarrow IO \perp (ABCD).$

Do đó IO là trục của hình vuông $ABCD$, suy ra

$IA = IB = IC = ID.$ (1)

Tam giác SAC vuông tại A có I là trung điểm cạnh huyền SC nên $IS = IC = IA$. (2)

Từ (1) và (2), ta có: $R = IA = IB = IC = ID = IS = \dfrac{SC}{2} = a\sqrt{2}.$

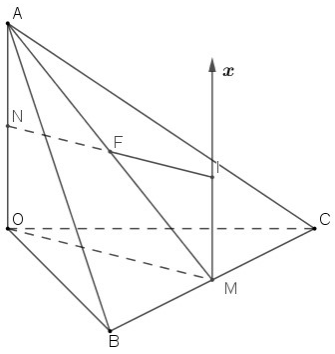
Vậy diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 8\pi a^2$ (đvdt).

Câu 10: Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = a$, $OB = 2a$, $OC = 3a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$ là:

A. $a\sqrt{3}$ **B.** $\dfrac{3a}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm BC,

suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔOBC.

Kẻ $Mx \perp (OBC)$ (như hình vẽ).

Suy ra Mx là trục của ΔOBC.

Trong mặt phẳng (OA, Mx), kẻ trung trực d của đoạn thẳng OA cắt Mx tại I.

Khi đó I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

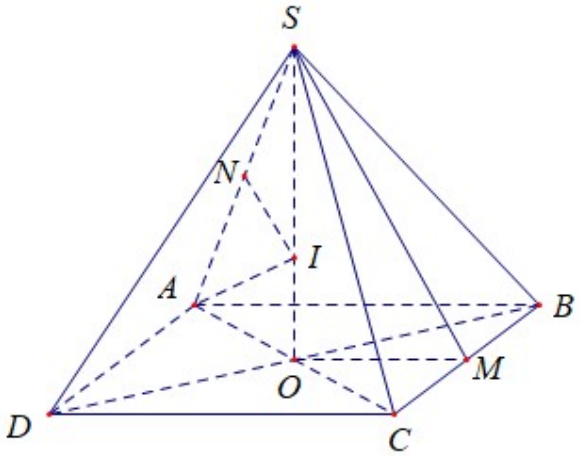
Bán kính mặt cầu: $R = IO = \sqrt{IM^2 + OM^2} = \dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

Câu 11: Cho hình chóp tứ giác đều có góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Biết rằng mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó có bán kính $R = a\sqrt{3}$. Tính độ dài cạnh đáy của hình chóp tứ giác đều nói trên.

A. $\dfrac{12}{5}a$. **B.** $2a$. **C.** $\dfrac{3}{2}a$. **D.** $\dfrac{9}{4}a$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow \big((SBC),(ABCD)\big) = \widehat{SMO} = 60°$.

Gọi N là trung điểm SA, dựng mp trung trực của SA, cắt SO tại $I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

$\Rightarrow R = IA = IS = a\sqrt{3}$

Gọi $AB = x$

Có $SO = OM.\tan 60° = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$, $OA = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$, $SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \dfrac{x\sqrt{5}}{2}$

ΔSNI đồng dạng $\Delta SOA \Rightarrow SN.SA = SO.SI$

$\Leftrightarrow \frac{x\sqrt{5}}{4}.\frac{x\sqrt{5}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{12a}{5}$.

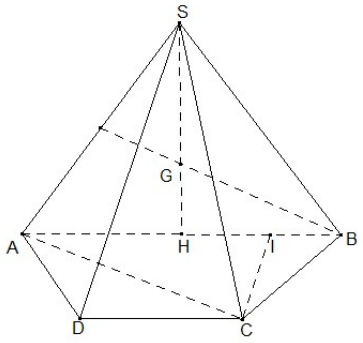
Dạng 2: Bài tập dành cho học sinh 8+, 9+

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân, $AB = 2a$, $CD = a$, $\widehat{ABC} = 60^0$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $R = a$ **C.** $R = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $R = \frac{2a}{3}$

Lời giải

Chọn C



Do AB và CD không bằng nhau nên hai đáy của hình thang là AB và CD. Gọi H là trung điểm của AB. Khi đó SH vuông góc với AB nên SH vuông góc với $(ABCD)$.

Gọi I là chân đường cao của hình thang $ABCD$ từ đỉnh C của hình thang $ABCD$.

Ta có $BI = \frac{AB - CD}{2} = \frac{a}{2}$

Do $\widehat{ABC} = 60^0$ nên $BC = a$. Từ đó ta có tam giác ABC vuông tại C.

Do đó SH chính là trục của tam giác ABC.

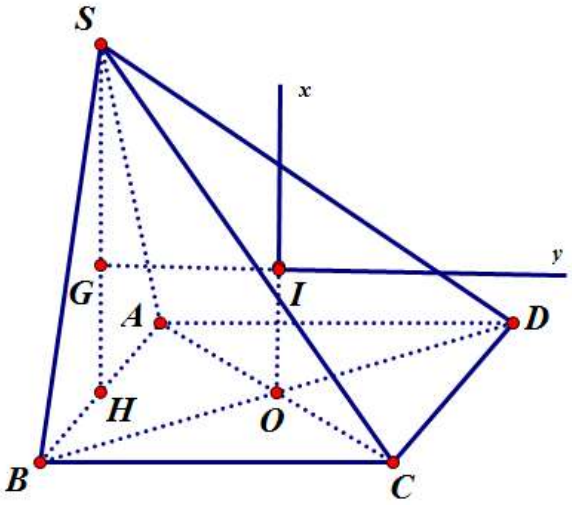
Mặt khác do tam giác SAB đều nên tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ chính là trọng tâm G của tam giác SAB.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

A. $S = 3\pi a^2$. **B.** $S = \frac{4\pi a^2}{3}$. **C.** $S = \frac{7\pi a^2}{3}$. **D.** $S = 7\pi a^2$.

Lời giải

Chọn C.



+) Xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

Gọi SH là đường cao của tam giác SAB. Vì SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy nên SH là đường cao của hình chóp $S.ABCD$.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, từ O dựng $Ox \perp (ABCD)$.

Từ trọng tâm G của tam giác SAB dựng $Gy \perp (SAB)$.

Gọi $I = Ox \cap Gy$. Vậy I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

+) Chứng minh *I* là tâm mặt cầu cần tìm

Vì $I \in Ox$, mà $Ox \perp (ABCD)$, O là tâm hình vuông $ABCD$ nên I cách đều A, B, C, D (1).

Mặt khác G là trọng tâm của tam giác đều SAB, $I \in Gy$, mà $Gy \perp (SAB)$ nên I cách đều S, A, B (2).

Từ (1) và (2) suy ra I cách đều S, A, B, C, D. Nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$, bán kính $R=IB$

+) Tìm độ dài bán kính mặt cầu

Vì $OI \perp (ABCD)$, $SH \perp (ABCD)$ nên $OI // GH$ vì $G \in SH$ (3)

Mặt khác $Gy \perp (SAB)$, $I \in Gy$ mà $OH \perp (SAB)$ (vì $OH \perp AB, OH \perp SH$) nên $GI // OH$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $GHOI$ là hình bình hành $OI = GH = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Vì $OI \perp (ABCD) \Rightarrow OI \perp OB \Rightarrow \triangle BOI$ vuông tại B

Xét $\triangle BOI$ vuông tại B ta có

$$IB^2 = IO^2 + OB^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{7}{12}a^2 \Rightarrow IB = \frac{\sqrt{21}}{6}a = R.$$

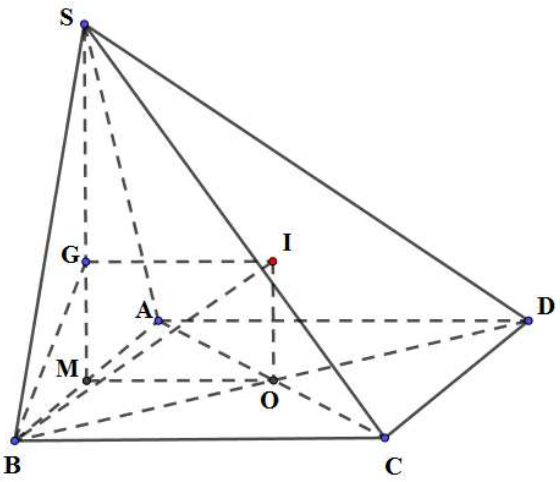
$\Rightarrow$ Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = \frac{7}{3}\pi a^2$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V = \frac{7\sqrt{21}\pi a^3}{54}$. **B.** $V = \frac{7\sqrt{21}\pi a^3}{18}$. **C.** $V = \frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{81}$. **D.** $V = \frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27}$.

Lời giải

Chọn A



***) Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp** $S.ABCD$:

Gọi G là trọng tâm tam giác SAB, O là tâm của hình vuông $ABCD$, M là trung điểm của AB.

Do ΔSAB đều $\Rightarrow SM \perp AB$

Mà $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SM \perp (ABCD) \Rightarrow SM \perp OM$

OM là đường trung bình của $\Delta ABC \Rightarrow OM // AD \Rightarrow OM \perp AB$ $(do\ AD \perp AB)$

$\Rightarrow OM \perp (SAB)$.

Dựng các đường thẳng qua G, O lần lượt song song với MO, SM, hai đường thẳng này cắt nhau tại I

Ta có: $IO // SM, SM \perp (ABCD) \Rightarrow IO \perp (ABCD)$, mà O là tâm của hình vuông $ABCD$

$\Rightarrow IA = IB = IC = ID$ (1)

Ta có: $GI // OM,\ MO \perp (SAB) \Rightarrow GI \perp (SAB)$, mà G là trọng tâm tam giác đều SAB

$\Rightarrow IS = IA = IB$ (2)

Từ (1), (2) suy ra: I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

***) Tính bán kính, thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp** $S.ABCD$:

Ta có: $OM = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2} \Rightarrow GI = OM = \frac{a}{2}$ (do tứ giác $OMIG$ là hình chữ nhật)

ΔSAB đều cạnh bằng a có G là trọng tâm $\Rightarrow BG = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Do $GI \perp (SAB) \Rightarrow GI \perp BG \Rightarrow \Delta BGI$ vuông tại G

$$\Rightarrow IB = \sqrt{IG^2 + GB^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{7}{12}}$$

Bán kính khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là: $R = IB = a\sqrt{\frac{7}{12}}$

Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là:

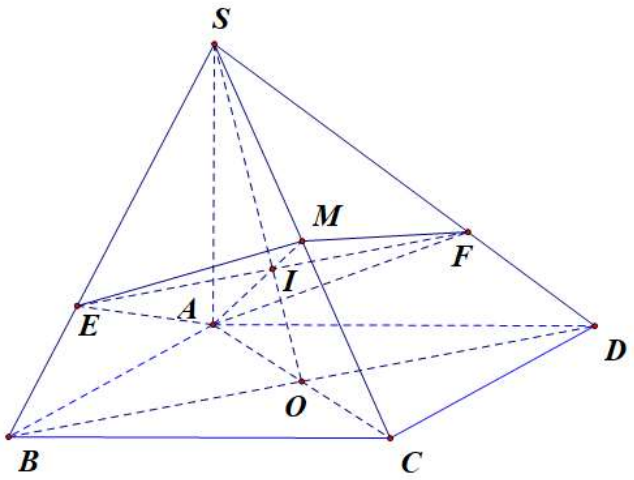
$$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi.\left(a\sqrt{\frac{7}{12}}\right)^3=\frac{7\sqrt{21}\pi a^3}{54}.$$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Đường thẳng $SA=a\sqrt{2}$ vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm SC, mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A và M đồng thời song song với BD cắt SB,SD lần lượt tại E,F. Bán kính mặt cầu đi qua năm điểm S,A,E,M,F nhận giá trị nào sau đây?

A. a **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $a\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases}(\alpha)\parallel BD\\(SBD)\cap(\alpha)=FE\end{cases}\Rightarrow BD//\text{EF}$. Gọi I là giao điểm của AM và SO

Dễ thấy I là trong tâm tam giác SAC

$$\frac{SF}{SD}=\frac{SI}{SO}=\frac{2}{3}\Rightarrow SF=\frac{2}{3}SD\Rightarrow SF.SD=\frac{2}{3}SD^2=\frac{2}{3}\left(SA^2+AD^2\right)=2a^2\Rightarrow SF.SD=SA^2$$

Xét tam giác vuông SAD và $SF.SD=SA^2\Rightarrow AF$ là đường cao của tam giác $\Rightarrow AF\perp SF$, chứng minh tương tự ta có $\Rightarrow AE\perp SB$

Tam giác $SA=AC=a\sqrt{2}$ nên AM vừa là trung tuyến vừa là đường cao của tam giác $SAC\Rightarrow AM\perp SM$

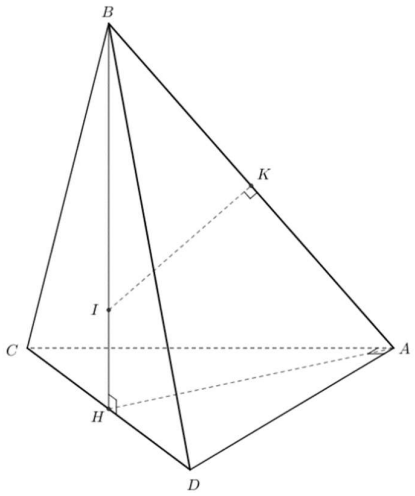
Ta có $\begin{cases}AF\perp SF\\AE\perp SE\\AM\perp SM\end{cases}$ nên mặt cầu đi qua năm điểm S,A,E,M,F có tâm là trung điểm của SA và bán kính bằng $\frac{SA}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = BC = AC = BD = 2a, AD = a\sqrt{3}$; hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) vuông góc với nhau. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{64\pi a^2}{27}$ **B.** $\frac{4\pi a^2}{27}$ **C.** $\frac{16\pi a^2}{9}$ **D.** $\frac{64\pi a^2}{9}$

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm $CD \Rightarrow BH \perp (ACD)$ và tam giác ACD vuông tại A.

$$\Rightarrow CD = \sqrt{CA^2 + AD^2} = a\sqrt{7} \text{ và } BH = \sqrt{BD^2 - HD^2} = \frac{3}{2}a.$$

Trong mặt phẳng (BHA) kẻ đường trung trực Δ của cạnh BA và gọi $I = \Delta \cap SH$

Khi đó ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Ta có

$$\Delta BIK \sim \Delta BAH \Rightarrow BI = \frac{BK.BA}{BH} = \frac{BA^2}{2BH} = \frac{4}{3}a.$$

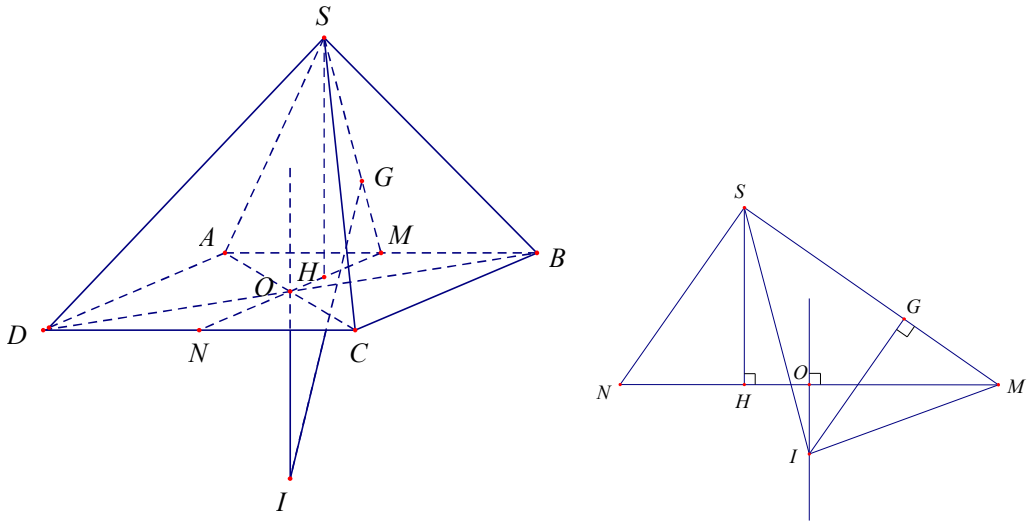
Suy ra bán kính mặt cầu là $R = BI = \frac{4}{3}a.$

Vậy diện tích của mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = \frac{64\pi a^2}{9}.$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và tam giác SCD vuông cân tại S. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

A. $\frac{7}{3}\pi a^2$ **B.** $\frac{8}{3}\pi a^2$ **C.** $\frac{5}{3}\pi a^2$ **D.** πa^2

Lời giải



Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CD.

Do tam giác SAB đều nên $SM \perp AB$.

Mà $MN \perp AB$. Do đó $AB \perp (ABCD)$.

Kẻ $SH \perp MN \left(H \in MN\right)$

Mà $AB \perp (SMN) \Rightarrow AB \perp SH \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Có $SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, SN = \dfrac{a}{2}, MN = a \Rightarrow \Delta SMN$ vuông tại S

$\Rightarrow SH = \dfrac{SM.SN}{MN} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Gọi O là tâm $ABCD$, dựng trục Δ của $(ABCD)$ tại O. Dựng trục d của (SAB) tại trọng tâm G và cắt Δ tại I. $\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

$R = IS = IA = IB = IC = ID$

ΔSHM đồng dạng $\Delta IOM \Rightarrow \dfrac{SM}{IM} = \dfrac{HM}{OM} \Rightarrow IM = \dfrac{SM.OM}{HM} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$GI^2 = IM^2 - GM^2 = \dfrac{a^2}{4}$

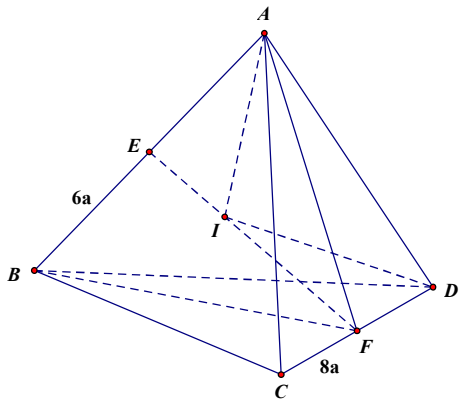
$R = SI = \sqrt{SG^2 + GI^2} = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp: $S = 4\pi R^2 = \dfrac{7}{3}\pi a^2$.

Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6a$, $CD = 8a$ và các cạnh còn lại bằng $a\sqrt{74}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $S = 25\pi a^2$. **B.** $S = 100\pi a^2$. **C.** $S = \dfrac{100}{3}\pi a^2$. **D.** $S = 96\pi a^2$.

Lời giải



Gọi E, F thứ tự là trung điểm của AB, CD. Coi $a=1$, từ giả thiết ta có $AC=AD=BC=BD=\sqrt{74}$ nên $AF\perp CD, BF\perp CD\Rightarrow (ABF)\perp CD\Rightarrow EF\perp CD.$

Chứng minh tương tự $EF\perp AB.$

Khi đó EF là đường trung trực của CD và AB. Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ ta có $IA=IB=IC=ID=R$ nên I thuộc đoạn thẳng EF.

$EF=\sqrt{AF^2-AE^2}=\sqrt{AD^2-DF^2-AE^2}=\sqrt{74-16-9}=7.$

Đặt $EI=x\Rightarrow FI=7-x$ (với $0<x<7$).

$$\begin{cases} IA=\sqrt{EA^2+EI^2}=\sqrt{x^2+9} \\ ID=\sqrt{FI^2+FD^2}=\sqrt{16+(7-x)^2}=\sqrt{x^2-14x+65} \end{cases}.$$

Ta có $IA=ID\Leftrightarrow \sqrt{x^2+9}=\sqrt{x^2-14x+65}\Leftrightarrow 9=-14x+65\Leftrightarrow x=4$

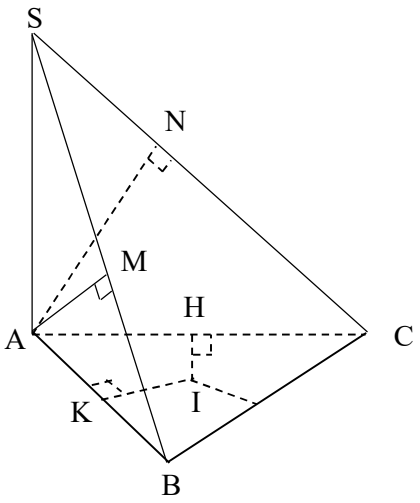
Khi đó $IA=\sqrt{x^2+9}=5$. Do đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là $R=5a$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là $S=4\pi R^2=4\pi.25a^2=100\pi a^2$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BAC}=60^\circ$, $BC=a$, $SA\perp(ABC)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC. Bán kính mặt cầu đi qua các điểm A, B, C, M, N bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ **C.** a **D.** $2a$

Lời giải



• Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$\Rightarrow IA = IB = IC\ (1)$.

• Kẻ IH là trung trực của AC.

$\left.\begin{array}{l} IH \perp AC \\ IH \perp SA \end{array}\right\} \Leftrightarrow IH \perp (SAC) \Leftrightarrow IH \perp (ANC)$.

Mà ΔANC vuông tại N có AC là cạnh huyền và H là trung điểm $AC \Rightarrow IH$ là trục của $\Delta ANC \Rightarrow IA = IC = IN\ (2)$.

• Tương tự kẻ IK là trung trực của $AB \Rightarrow IK$ là trục của $\Delta AMB \Rightarrow IA = IB = IM\ (3)$.

$(1),(2),(3) \Rightarrow IA = IB = IC = IM = IN \Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp chóp $A.BCMN$

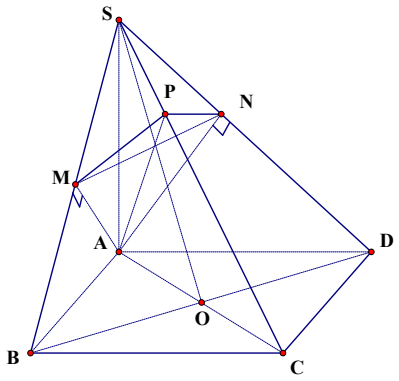
.

Định lí hàm sin trong ΔABC: $IA = \dfrac{BC}{2\sin \widehat{BAC}} = \dfrac{a}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 9. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc mặt phẳng đáy, Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại các điểm M, N, P. Thể tích của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$.

A. $V = \dfrac{125\pi}{6}$. **B.** $V = \dfrac{32\pi}{3}$. **C.** $V = \dfrac{108\pi}{3}$. **D.** $V = \dfrac{64\sqrt{2}\pi}{3}$.

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông ABCD cạnh $2\sqrt{2} \Rightarrow OC = \frac{AC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = 2$

Ta có $\begin{matrix} BC \perp (SAB) \Rightarrow \text{BC} \perp \text{AM}\ (1) \\ \text{CD} \perp (\text{SAD}) \Rightarrow \text{CD} \perp \text{AP}\ \ (2) \end{matrix}$ và

$\begin{cases} (\alpha) \perp SC \\ AM, AP \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow SC \perp \text{AM}\ (3),\ \ SC \perp \text{AP}\ \ (4)$

Từ (1) và (3) $\Rightarrow \text{AM} \perp (\text{SBC}) \Rightarrow \text{AM} \perp \text{MC} \Rightarrow \text{OA} = OC = OM$

Từ (2) và (4) $\Rightarrow \text{AP} \perp (\text{SAD}) \Rightarrow \text{AP} \perp P\text{C} \Rightarrow \text{OA} = \text{OC} = \text{OP}$

$AN \perp SC \Rightarrow AN \perp NC \Rightarrow OA = OC = ON$

Suy ra, $OM = ON = OP = OC = 2$. khi đó tứ diện $CMNP$ nội tiếp mặt tấm O bán kính $R = 2$.

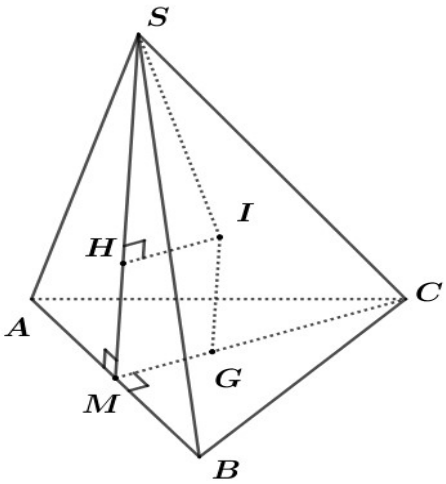
Vậy thể tích hình cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$ là $V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4.\pi 2^3}{3} = \frac{32\pi}{3}$

Câu 10: Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{18}$ **B.** $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$ **C.** $V = \frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$ **D.** $V = \frac{5\pi}{3}$

Lời giải

Chọn B



Gọi M,G,H lần lượt là trung điểm của AB, trọng tâm $\Delta ABC,\Delta SAB$.

Vì $\Delta ABC,\Delta SAB$ là hai tam giác đều nên $CM\perp AB;SM\perp AB$.

Mà $\begin{cases}(SAB)\perp(ABC)\\(SAB)\cap(ABC)=AB\\CM\perp AB;SM\perp AB\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}CM\perp(SAB)\\SM\perp(ABC)\end{cases}$

Trong (SMC) từ G,H lần lượt kẻ các đường thẳng song song với SM,MC và cắt nhau tại I. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

Ta có

$$SI^2=SH^2+HI^2=SH^2+MG^2=\left(\frac{2}{3}SM\right)^2+\left(\frac{1}{3}SM\right)^2$$

$$=\frac{5}{9}SM^2=\frac{5}{9}.\frac{3}{4}=\frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi.SI^3=\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{5}{12}}\right)^3=\frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$$

CHƯƠNG III. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

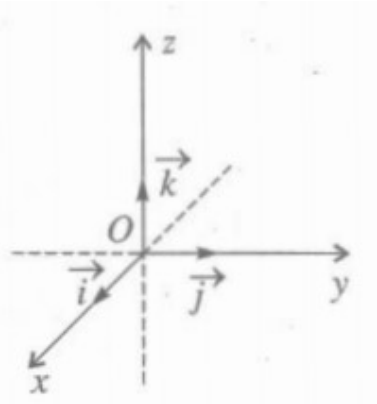
BÀI 1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. TỌA ĐỘ ĐIỂM VÀ TỌA ĐỘ VECTƠ

1. Hệ trục tọa độ

Trong không gian, cho ba trục $x'Ox, y'Oy$, $z'Oz$, vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ lần lượt là các vecto đơn vị trên các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$.



Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Đé-các vuông góc Oxyz trong không gian, hay đơn giản được gọi là hệ tọa độ Oxyz (h.3.1).

Điểm O được gọi la gốcc toạ độ.

Các mặt phẳng $(Oxy),(Oyz),(Ozx)$ đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng tọa độ.

Không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian Oxyz.

2. Tọa độ của một điểm

$$M(x_M;y_M;z_M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k}$$

3. Tọa độ của vectơ

Trong không gian xét hệ trục Oxyz, có trục Ox vuông góc với trục Oy tại O, và trục Oz vuông góc với mặt phẳng Oxyz tại O. Các vectơ đơn vị trên từng trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $\vec{i}=(1;0;0)$, $\vec{j}=(0;0;1)$, $\vec{k}=(0;0;1)$.

$$\vec{a}=(a_1;a_2;a_3) \Leftrightarrow \vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$$

II. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

1. Định lý: Cho $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ ta có

- $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1;a_2\pm b_2;a_3\pm b_3)$
- $k.\vec{a}=(ka_1;ka_2;ka_3)$

Hệ quả

- $\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=b_1 \\ a_2=b_2 \\ a_3=b_3 \end{cases}$
- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùngphương $\Leftrightarrow \exists k\in R: \vec{a}=k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=kb_1 \\ a_2=kb_2 \\ a_3=kb_3 \end{cases}$
- Cho $A(x_A;y_A;z_A)$ và $B(x_B;y_B;z_B)$ tacó: $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

- M là trung điểm AB thì $M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$.
- G là trọng tâm của tam giác ABC thì $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+c_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$

III. TÍCH VÔ HƯỚNG

1. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Cho $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ ta có $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|cos(\vec{a};\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

2. Ứng dụng

- $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$
- $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.
- $cos\varphi=cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$
- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc $\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3=0$

IV. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

1. Mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính R có phương trình là:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

2. Phương trình: $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$

là phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R=\sqrt{A^2+B^2+C^2-D}$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Các dạng toán mở đầu về hệ tọa độ oxyz

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vecto $\vec{a}(1;2;3);\vec{b}(2;2;-1);\vec{c}(4;0;-4)$. Tọa độ của vecto $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ là

A. $\vec{d}(-7;0;-4)$ **B.** $\vec{d}(-7;0;4)$ **C.** $\vec{d}(7;0;-4)$ **D.** $\vec{d}(7;0;4)$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}=(1-2+2.4;2-2+2.0;3+1+2.(-4))=(7;0;-4)$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-1)$ và $B(2;3;2)$. Vecto $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(1;2;3)$ **B.** $(-1;-2;3)$ **C.** $(3;5;1)$ **D.** $(3;4;1)$

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)=(1;2;3)$

Câu 4: Trong không gian với trục hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Tọa độ của vecto $\vec{a}$ là:

A. $\vec{a}(-1;2;-3)$. **B.** $\vec{a}(2;-3;-1)$. **C.** $\vec{a}(-3;2;-1)$. **D.** $\vec{a}(2;-1;-3)$.

Lời giải

Chọn A

+) Ta có $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\Leftrightarrow\vec{a}(x;y;z)$ nên $\vec{a}(-1;2;-3)$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;1;-3)$ và $B(1;0;-2)$. Độ dài đoạn thẳng AB.

A. $3\sqrt{3}$ **B.** 11 **C.** $\sqrt{11}$ **D.** 27

Lời giải

Chọn C

$AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{11}$

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(1;2;-3)$, $\vec{b}=(-2;-4;6)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\vec{a}=2\vec{b}$. **B.** $\vec{b}=-2\vec{a}$. **C.** $\vec{a}=-2\vec{b}$. **D.** $\vec{b}=2\vec{a}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $-2=-2.1;-4=-2.2;6=-2.(-3)$ suy ra $\vec{b}=-2\vec{a}$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(0;2;-1),B(-5;4;2),C(-1;0;5)$. Tọa độ trọng tâm tam giác ABC là:

A. $(-1;1;1)$. **B.** $(-6;6;6)$. **C.** $(-3;3;3)$. **D.** $(-2;2;2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có tọa độ trọng tâm tam giác ABC là $\begin{cases}x_G=\dfrac{0-5-1}{3}\\ y_G=\dfrac{2+4+0}{3}\\ z_G=\dfrac{-1+2+5}{3}\end{cases}\Rightarrow G(-2;2;2)$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(3;2;1)$, $\vec{b}=(-2;0;1)$. Độ dài của vectơ $\vec{a}+\vec{b}$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{a}+\vec{b}=(1;2;2)\Rightarrow\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{1+4+4}=3$.

Câu 9: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, B vecto $\overrightarrow{AB}(1;3;1)$. Xác định tọa độ B.

A. $B(2;5;0)$. **B.** $B(0;-1;-2)$. **C.** $B(0;1;2)$. **D.** $B(-2;-5;0)$

Lời giải.

Chọn A

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(-2;1;3)$. Hình chiếu vuông góc của A lên trục Ox có tọa độ là:

A. $(0;1;0)$. **B.** $(-2;0;0)$. **C.** $(0;0;3)$. **D.** $(0;1;3)$.

Lờigiải

Chọn B

Chiếu vuông góc một điểm bất kỳ lên trục Ox khi đó giữ nguyên hoành độ còn tung độ và cao độ bằng 0.

Vậy hình chiếu vuông góc của A lên trục Ox có tọa độ là: $(-2;0;0)$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;-1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm M lên trục Oz là điểm:

A. $M_3(3;0;0)$. **B.** $M_4(0;2;0)$. **C.** $M_1(0;0;-1)$. **D.** $M_2(3;2;0)$.

Lời giải

Chọn C

Câu 12: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1;2;-3), B(1;0;2), C(x;y;-2)$ thẳng hàng. Khi đó $x+y$ bằng

A. $x+y=1$. **B.** $x+y=17$. **C.** $x+y=-\frac{11}{5}$. **D.** $x+y=\frac{11}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Có $\overrightarrow{AB}=(2;-2;5)$, $\overrightarrow{AC}=(x+1;y-2;1)$.

A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{3}{5} \\ y=\frac{8}{5} \end{cases} \Rightarrow x+y=1.$$

Câu 13: Tìm tọa độ véctơ $\vec{u}$ biết rằng $\vec{u}+\vec{a}=\vec{0}$ và $\vec{a}=(1;-2;1)$.

A. $\vec{u}=(-3;-8;2)$. **B.** $\vec{u}=(1;-2;8)$.

C. $\vec{u}=(-1;2;-1)$. **D.** $\vec{u}=(6;-4;-6)$.

Lời giải

Chọn C

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Ta có $\vec{u}+\vec{a}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{u}=-\vec{a}=(-1;2;-1)$.

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(2;m-1;3)$, $\vec{b}=(1;2;-2n)$. Tìm m,n để các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng.

A. $m=5;\ n=-\frac{3}{4}$. **B.** $m=1;\ n=0$.

C. $m=7;\ n=-\frac{4}{3}$. **D.** $m=4;\ n=-3$.

Lời giải

Chọn A

Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng $\Rightarrow$ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow\begin{cases}m=5\\n=-\frac{3}{4}\end{cases}$.

Câu 15: Cho điểm $M(1;2;-3)$, hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (Oxy) là điểm

A. $M'(1;2;0)$. **B.** $M'(1;0;-3)$. **C.** $M'(0;2;-3)$. **D.** $M'(1;2;3)$.

Lời giải

Chọn A

Tọa độ hình chiếu vuông góc M' của $M(1;2;-3)$ lên mặt phẳng (Oxy) có dạng $M'(1;2;0)$.

Câu 16: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(1;-3;-5)$ trên mặt phẳng (Oyz) có toạ độ là

A. $(0;-3;5)$. **B.** $(0;-3;0)$. **C.** $(1;-3;0)$ **D.** $(0;-3;-5)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên (Oyz).

(Oyz) có phương trình: $x=0$

Đường thẳng d qua $M(1;-3;-5)$ và vuông góc với (Oyz) có phương trình: $\begin{cases}x=1+t\\y=-3\\z=-5\end{cases}$

Ta có $(Oyz)\cap d=\{H\}$ nên toạ độ H thoả mãn hệ: $\begin{cases}x=1+t\\y=-3\\z=-5\\x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-3\\z=-5\\x=0\end{cases}$

$\Rightarrow H(0;-3;-5)$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC biết $A(2,4,-3)$; $\overrightarrow{AB}=(-3,-1,1)$; $\overrightarrow{AC}=(2,-6,6)$. Tìm tọa độ vector trung tuyến $\overrightarrow{AM}$

A. $(1,7,-7)$. **B.** $(-1,-7,7)$.

C. $\left(\frac{1}{2},\frac{7}{2},-\frac{7}{2}\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2},-\frac{7}{2},\frac{7}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{7}{2},\frac{7}{2}\right)$

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC biết $A(2,4,-3)$; $\overrightarrow{AB}=(-3,-1,1)$; $\overrightarrow{AC}=(2,-6,6)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho ABCD là hình bình hành

A. $(-7,1,-2)$. **B.** $(1,-3,4)$. **C.** $(7-,1,2)$. **D.** $(-1,3,-4)$.

Lời giải

Chọn C

ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-x_A=2+3\\y-y_A=-6+1\Rightarrow D(7;-1;2)\\z-z_A=6-1\end{cases}$$

Câu 19: Cho ba điểm $A(3,1,0)$; $B(2,1,-1)$; $C(x,y,-1)$. Tìm tọa độ của C để ABC là tam giác đều:

A. $(3,2,-1)$. **B.** $(3,0,-1)$.

C. $(-3,-2,1)$; $(3,0,-1)$. **D.** $(3,2,-1)$; $(3,0,-1)$.

Lời giải

Chọn D

Tam giác ABC đều

$$\Leftrightarrow\begin{cases}AC=AB\\BC=AB\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-6x-2y+9=0 & (1)\\x^2+y^2-4x-2y+3=0 & (2)\end{cases}$$

$(2)-(1):2x-6=0\Leftrightarrow x=3\Rightarrow y^2-2y=0\Leftrightarrow y=2\vee y=0$

Hai điểm $C(3;2;-1);C'(3;0;-1)$

Câu 20: Cho ba điểm $A(3,1,0)$; $B(2,1,-1)$; $C(x,y,-1)$. Tìm tọa độ của C để tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A

A. $\left(4,1+\sqrt{2}\right);\left(4,1-\sqrt{2}\right)$. **B.** $\left(4,1\right)$.

C. $\left(2,1\right)$. **D.** $\left(2,-1\right)$.

Lời giải

Chọn B

Tam giác ABC vuông cân tại A $\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}\\AB=AC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\\AC^2=AB^2\end{cases}$

$\overrightarrow{AB}=\left(-1,0,1-1\right)\Rightarrow AB^2=2;\qquad\overrightarrow{AC}=\left(x-3,y-1,-1\right)$

$\Rightarrow\begin{cases}-1\left(x-3\right)+0\left(y-1\right)+1=0\\\left(x-3\right)^2+\left(y-1\right)^2+1=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\x^2+y^2-6x-2y+9=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}\Rightarrow C\left(4;1\right)$

Câu 21: Cho ba điểm $A\left(3,1,0\right);\ B\left(2,1,-1\right);\ C\left(x,y,-1\right)$. Tính x và y để A,B,C thẳng hàng:

A. $x=2,\ y=1$. **B.** $x=2,\ y=-1$. **C.** $x=-2,\ y=-1$. **D.** $x=1,\ y=2$.

Lời giải

Chọn A

A,B,C thẳng thàng $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a_1b_2-a_2b_1=0\\a_2b_3-a_3b_2=0\\a_3b_1-a_1b_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\left(y-1\right)-0\left(x-3\right)=0\\0\left(-1\right)-\left(-1\right)\left(y-1\right)=0\\-1\left(x-3\right)-\left(-1\right)\left(-1\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

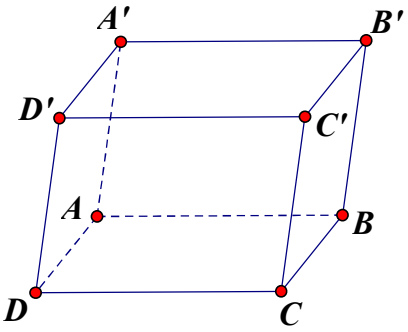
Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A\left(-3;0;0\right)$, $B\left(0;2;0\right)$, $D\left(0;0;1\right)$, $A'\left(1;2;3\right)$. Tìm tọa độ điểm C'.

A. $C'\left(13;4;4\right)$. **B.** $C'\left(7;4;4\right)$.

C. $C'\left(10;4;4\right)$. **D.** $C'\left(-13;4;4\right)$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $C'(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;2;0)$; $\overrightarrow{AD}=(3;0;1)$; $\overrightarrow{AA'}=(4;2;3)$.

Mà $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\Rightarrow\overrightarrow{AC'}=(10;4;4)\Rightarrow\begin{cases}x=10+3\\y=4-0\\z=4-0\end{cases}\Rightarrow C'(13;4;4)$.

Câu 23: Cho ba điểm $A(3,1,0)$; $B(2,1,-1)$; $C(x,y,-1)$. Tính x,y để $G\left(2,-1,-\frac{2}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ABC

A. $x=2,\ y=1$. **B.** $x=2,\ y=-1$. **C.** $x=-2,\ y=-1$. **D.** $x=1,\ y=-5$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{cases}3+2+x=3.2=6\\1+1+y=3(-1)=-3\\0-1-1=3\left(-\frac{2}{3}\right)=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-5\end{cases}$$

Câu 24: Cho ba điểm $A(2,-1,1)$; $B(3,-2,-1)$; $C(1,3,4)$. Tìm điểm N trên x'Ox cách đều A và B.

A. $(4,0,0)$. **B.** $(-4,0,0)$. **C.** $(1,0,0)$. **D.** $(2,0,0)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $N(x,0,0)$ trên $x'Ox$. Ta có $AN^2=BN^2$

$\Leftrightarrow(x-2)^2+(1)^2+(-1)^2=(x-3)^2+(2)^2+1^2\Leftrightarrow x=4\Rightarrow N(4,0,0)$

Câu 25: Cho ba điểm $A(2,-1,1)$; $B(3,-2,-1)$; $C(1,3,4)$. Tìm điểm E trên mặt phẳng (xOy) cách đều A,B,C.

A. $\left(\frac{14}{3},\frac{26}{3},0\right)$. **B.** $\left(\frac{7}{3},\frac{13}{3},0\right)$. **C.** $\left(\frac{26}{3},-\frac{14}{3},0\right)$. **D.** $\left(\frac{26}{3},\frac{14}{3},0\right)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $E(x,y,0)$ trên mặt phẳng (xOy). Ta có: $EA=EB=EC$

$$\Rightarrow \begin{cases} AE^2=BE^2 \\ AE^2=CE^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2+(y+1)^2+(-1)^2=(x-3)^2+(y+2)^2+1^2 \\ (x-2)^2+(y+1)^2+(-1)^2=(x-1)^2+(y-3)^2+(-4)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=4 \\ x-4y=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{26}{3} \\ y=\dfrac{14}{3} \Rightarrow E\left(\dfrac{26}{3},\dfrac{14}{3},0\right) \end{cases}$$

Câu 26: Tính góc của hai vectơ $\vec{a}=(-4,2,4);\ \vec{b}=(2\sqrt{2},-2\sqrt{2},0)$

A. 60^0. **B.** 135^0. **C.** 30^0. **D.** 120^0.

Lời giải

Chọn B

$$\cos\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)=\frac{-8\sqrt{2}-4\sqrt{2}+0}{\sqrt{36}.\sqrt{16}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)=135^0$$

Câu 27: Cho hai vectơ $\vec{V}=m\vec{a}-2\vec{b}$ và $\vec{W}=m\vec{b}-\vec{a}$ với $\vec{a}=(2,1,-1)$ và $\vec{b}=(1,-2,1)$. Định m để $\vec{V}$ và $\vec{W}$ vuông góc

A. $-3\pm\sqrt{7}$. **B.** $3\pm\sqrt{7}$. **C.** $9\pm\sqrt{79}$. **D.** $-9\pm\sqrt{79}$.

Lời giải

Chọn D

$\vec{V}$ vuông góc $\vec{W}\Leftrightarrow\left(m\vec{a}-2\vec{b}\right)\left(m\vec{b}-\vec{a}\right)=0 \qquad (1)$

Với $\vec{a}^2=6;\vec{b}^2=6;\vec{a}.\vec{b}=-1$

$(1)\Leftrightarrow m^2+18m+2=0\Leftrightarrow m=-9\pm\sqrt{79}$

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(4;0;0),B(0;2;0)$. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là

A. $I(-2;1;0)$. **B.** $I(2;1;0)$.

C. $I(2;-1;0)$. **D.** $I\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{2}{3};0\right)$.

Lời giải

Chọn B

Vì $\begin{cases} A(4;0;0)\in Ox \\ B(0;2;0)\in Oy \end{cases} \Rightarrow \Delta OAB$ vuông tại O nên tâm $I(x;y;z)$ của đường tròn ngoại tiếp ΔOAB nằm trên trung điểm cạnh AB. Suy ra $\begin{cases} x=\dfrac{4+0}{2}=2 \\ y=\dfrac{0+2}{2}=1 \\ z=\dfrac{0+0}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow I(2;1;0)$.

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các véc tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=\sqrt{5}$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=\sqrt{3}$ và $\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$. Khi đó giá trị của $\vec{a}.\vec{b}+2\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$ là

A. $-\dfrac{15}{2}$. **B.** $2\sqrt{5}-4\sqrt{3}$. **C.** $-2\sqrt{42}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

+) $\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}=-2\vec{b}-3\vec{c} \Rightarrow |\vec{a}|^2=|-2\vec{b}-3\vec{c}|^2=4|\vec{b}|^2+9|\vec{c}|^2+12\vec{b}.\vec{c}$

$\Rightarrow 5=4.4+9.3+12\vec{b}.\vec{c} \Leftrightarrow 2\vec{b}.\vec{c}=-\dfrac{19}{3}$ (1).

+) $\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{b}=-\vec{a}-3\vec{c} \Rightarrow |2\vec{b}|^2=|-\vec{a}-3\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+9|\vec{c}|^2+6\vec{a}.\vec{c}$

$\Rightarrow 4.4=5+9.3+6\vec{a}.\vec{c} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{c}=-\dfrac{8}{3}$ (2).

+) $\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0} \Leftrightarrow 3\vec{c}=-\vec{a}-2\vec{b} \Rightarrow |3\vec{c}|^2=|-\vec{a}-2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+4\vec{a}.\vec{b}$

$\Rightarrow 9.3=5+4.4+4\vec{a}.\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=\dfrac{3}{2}$ (3).

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra: $\vec{a}.\vec{b}+2\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{19}{3}-\dfrac{8}{3}=-\dfrac{15}{2}$.

DẠNG 2: CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN VỀ PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2+4x-2y-4=0$. Tính bán kính R của (S).

A. 1. **B.** 9. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Giả sử phương trình mặt cầu

$(S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ $(a^2+b^2+c^2-d>0)$

Ta có: $a=-2,b=1,c=0,d=-4\Rightarrow$ Bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=3$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-3;1;-1)$. **B.** $(3;-1;1)$. **C.** $(3;-1;-1)$. **D.** $(3;1;-1)$.

Lời giải

Chọn B

Tâm của (S) có tọa độ là $(3;-1;1)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hỏi trong các phương trình sau phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2-2x+4z-1=0$ **B.** $x^2+z^2+3x-2y+4z-1=0$

C. $x^2+y^2+z^2+2xy-4y+4z-1=0$ **D.** $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+8=0$

Lời giải

Chọn A

Đáp án B vì không có số hạng y^2. Đáp án C loại vì có số hạng $2xy$. Đáp án D loại vì $a^2+b^2+c^2-d=1+1+4-8=-2<0$.

Đáp án A thỏa mãn vì $a^2+b^2+c^2-d=1+0+4+1=6>0$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá nguyên của m để $x^2+y^2+z^2+2(m+2)x-2(m-1)z+3m^2-5=0$ là phương trình một mặt cầu?

A. 4 **B.** 6 **C.** 5 **D.** 7

Lời giải

Chọn D

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi

$(m+2)^2+(m-1)^2-3m^2+5>0$

$\Leftrightarrow m^2-2m-10<0$

$\Leftrightarrow 1-\sqrt{11}<m<1+\sqrt{11}$

Theo bài ra $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=\{-2;-1;0;1;2;3;4\}\Rightarrow$ có 7 giá trị của m nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 5: Trong không gian với hệ trục tọ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(5;4;-1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=36$. **B.** $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9$.

C. $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=6$. **D.** $(x+3)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=9$.

Lời giải.

Chọn B

Tọa độ tâm mặt cầu là $I(3;3;1)$, bán kính $R = IA = 3$.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm $I(1;-4;3)$ và đi qua điểm $A(5;-3;2)$.

A. $(x-1)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=18$. **B.** $(x-1)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=16$.

C. $(x-1)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=16$. **D.** $(x-1)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=18$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu có tâm $I(1;-4;3)$ và đi qua điểm $A(5;-3;2)$ nên có bán kính $R = IA = 3\sqrt{2}$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=18$.

Câu 7: Với giá trị nào của m thì mặt phẳng $(P): 2x-y+z-5=0$ tiếp xúc với mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2mx+2(2-m)y-4mz+5m^2+1=0$?

A. $m=-3$. **B.** $m=1 \vee m=-3$. **C.** $m=1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right.$

Lời giải

Chọn A

$a=m; b=m-2; c=2m; d=5m^2+1$. Tâm $I(m, m-2, 2m)$

$\Rightarrow R^2 = m^2+(m-2)^2+4m^2-5m^2-1 = m^2-4m+3>0$

$\Rightarrow m<1 \vee m>3$. (P) tiếp xúc (S) khi:

$d(I,P) = \dfrac{|3m-3|}{\sqrt{6}} = R = \sqrt{m^2-4m3}$

$\Leftrightarrow m^2+2m-3=0 \Leftrightarrow m=-3 \vee m=1$ (loại)

$\Rightarrow m=-3$.

Câu 8: Với giá trị nào của m thì mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+4x-2my+4mz+4m^2+3m+2=0$ tiếp xúc trục $z'Oz$.

A. -2. **B.** 2. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $-\dfrac{2}{3}$

Lời giải

Chọn D

(S) có tâm $I(-2,m,-2m)$, bán kính $R=\sqrt{m^2-3m+2}, m<1 \vee m>2$

Hình chiếu A của I trên z'Oz là tiếp điểm của (S) và z'Oz $\Rightarrow A(0,0,-2m)$

Ta có: $d(I,z'Oz) = AI = \sqrt{4+m^2} = R = \sqrt{m^2-3m+2}$

$\Leftrightarrow 4+m^2=m^2-3m+2\Leftrightarrow m=-\frac{2}{3}.$

Câu 9: Viết phương trình mặt cầu (S) tâm $I(-2,1,-1)$ qua $A(4,3,-2)$.

A. $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+35=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2+4x-2y+2z-35=0$.

C. $x^2+y^2+z^2+4x-2y+2z+35=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2+4x-2y-2z-35=0$

Lời giải

Chọn B

$M(x,y,z)\in(S)\Rightarrow IM^2=IA^2$

$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=(4+2)^2+(3-1)^2+(-2+1)^2$.

$\Leftrightarrow x^2+y^2+4x-2y+2z-35=0$

Câu 10: Viết phương trình mặt cầu (S) tâm $E(-1,2,4)$ qua gốc O.

A. $x^2+y^2+z^2+2x-4y-8z+42=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2+2x-4y-8z+21=0$.

C. $x^2+y^2+z^2+2x-4y-8z-42=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2+2x-4y-8z=0$

Lời giải

Chọn D

$M(x,y,z)\in(S)\Rightarrow EM^2=OE^2$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=1+4+16$.

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x-4y-8z=0$

Câu 11: Gọi (S) là mặt cầu đi qua 4 điểm $A(2;0;0),B(1;3;0),C(-1;0;3),D(1;2;3)$. Tính bán kính R của (S).

A. $R=2\sqrt{2}$. **B.** $R=3$. **C.** $R=6$. **D.** $R=\sqrt{6}$.

Lời giải

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua bốn điểm A,B,C,D. Khi đó:

$$\begin{cases} AI^2=BI^2 \\ AI^2=CI^2 \\ AI^2=DI^2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} (a-2)^2+b^2+c^2=(a-1)^2+(b-3)^2+c^2 \\ (a-2)^2+b^2+c^2=(a+1)^2+b^2+(c-3)^2 \\ (a-2)^2+b^2+c^2=(a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a-3b=-3 \\ a-c=-1 \\ a-2b-3c=-5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}\Rightarrow I(0;1;1)$$

Bán kính: $R = IA = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$.

Câu 12: Cho hai điểm A, B cố định trong không gian có độ dài AB là 4. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA = 3MB$ là một mặt cầu. Bán kính mặt cầu đó bằng

A. 3. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải



Ta có: $MA = 3MB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 = 9\overrightarrow{MB}^2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 = 9\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2$

$\Leftrightarrow IA^2 - 9IB^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} - 9\overrightarrow{IB}\right) = 8MI^2 \ (1)$

Gọi I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} - 9\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BI} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$ nên $IB = \frac{1}{2}; IA = \frac{9}{2}$.

Từ (1) suy ra $\Leftrightarrow 8MI^2 = 18 \Leftrightarrow MI = \frac{3}{2}$ suy ra $M \in S\left(I; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 13. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm O và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C khác O thỏa mãn tam giác ABC có trọng tâm là điểm $G(-6; -12; 18)$. Tọa độ tâm của mặt cầu (S) là

A. $(9; 18; -27)$. **B.** $(-3; -6; 9)$. **C.** $(3; 6; -9)$. **D.** $(-9; -18; 27)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi tọa độ các điểm trên ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt là $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với $a, b, c > 0$.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} \frac{a}{3} = -6 \\ \frac{b}{3} = -12 \\ \frac{c}{3} = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -18 \\ b = -36 \\ c = 54 \end{cases}$.

Gọi phương trình mặt cầu (S) cần tìm là: $x^2+y^2+z^2-2mx-2ny-2pz+q=0$. Vì (S) qua các điểm O,A,B,C nên ta có hệ:

$$\begin{cases} q=0 \\ 36m+q=-18^2 \\ 72n+q=-36^2 \\ -108p+q=-54^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-9 \\ n=-18 \\ p=27 \\ q=0 \end{cases}.$$

Vậy tọa độ tâm mặt cầu (S) là $(-9;-18;27)$.

Dạng 3: Bài tập dành cho học sinh 8+, 9+

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $S(1;2;3)$ và các điểm A, B, C thuộc các trục Ox, Oy, Oz sao cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{343}{6}$. **B.** $\frac{343}{18}$. **C.** $\frac{343}{12}$. **D.** $\frac{343}{36}$.

Lời giải

Chọn D

$A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$.

$\overrightarrow{SA}=(a-1;-2;-3)$; $\overrightarrow{SB}=(-1;b-2;-3)$; $\overrightarrow{SC}=(-1;-2;c-3)$.

Vì SA, SB, SC đôi một vuông góc nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{SA}\perp\overrightarrow{SB} \\ \overrightarrow{SB}\perp\overrightarrow{SC} \\ \overrightarrow{SA}\perp\overrightarrow{SC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}=0 \\ \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC}=0 \\ \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=14 \\ 2b+3c=14 \\ a+3c=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7 \\ b=\frac{7}{2} \\ c=\frac{7}{3} \end{cases}.$$

Do SA, SB, SC đôi một vuông góc, nên: $V_{SABC}=\frac{1}{6}SA.SB.SC=\frac{1}{6}.7.\frac{7}{2}.\frac{7}{3}=\frac{343}{36}$.

Câu 2: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;2;1)$, $B(4;4;2)$, $C(-2;4;-3)$. Đường phân giác trong AD của tam giác ABC có một vectơ chỉ phương là:

A. $(-2;4;-3)$ **B.** $(6;0;5)$ **C.** $\left(0;1;-\frac{1}{3}\right)$ **D.** $\left(-\frac{4}{3};-\frac{1}{3};-1\right)$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $AB=3, AC=6$. Kí hiệu $(x;y;z)$ là toạ độ điểm D.

Vì AD là phân giác trong của tam giác ABC nên $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{2}$.

Do đó, ta có $\overrightarrow{DB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{cases} 4-x=-\frac{1}{2}(-2-x) \\ 4-y=-\frac{1}{2}(4-y) \\ 2-z=-\frac{1}{2}(-3-z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \\ z=\frac{1}{3} \end{cases}$. Vậy $D\left(2;4;\frac{1}{3}\right)$.

$\overrightarrow{AD}=\left(0;2;-\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AD}=2\vec{u}$, với $\vec{u}=\left(0;1;-\frac{1}{3}\right)$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1;-1;2)$, $B(-2;0;3)$, $C(0;1;-2)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $S=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T=12a+12b+c$ có giá trị là

A. $T=3$. **B.** $T=-3$. **C.** $T=1$. **D.** $T=-1$.

Lời giải

Chọn D

Do $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $c=0 \Rightarrow M(a;b;0)$.

Ta có $\overrightarrow{MA}=(1-a;-1-b;2)$, $\overrightarrow{MB}=(-2-a;-b;3)$, $\overrightarrow{MC}=(-a;1-b;-2)$.

$S=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=6a^2+6b^2+2a-b+1=6\left(a+\frac{1}{6}\right)^2+6\left(b-\frac{1}{12}\right)^2+\frac{19}{24}$

.

$\Rightarrow S\geq\frac{19}{24}$. Vậy S đạt giá trị nhỏ nhất $\frac{19}{4}$ khi $\begin{cases} a=-\frac{1}{6} \\ b=\frac{1}{12} \end{cases} \Rightarrow T=12a+12b+c=-1$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$, $B(3;0;8)$, $D(-5;-4;0)$. Biết đỉnh A thuộc mặt phẳng (Oxy) và có tọa độ là những số nguyên, khi đó $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right|$ bằng:

A. $5\sqrt{10}$. **B.** $6\sqrt{10}$. **C.** $10\sqrt{6}$. **D.** $10\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có trung điểm BD là $I(-1;-2;4)$, $BD=12$ và điểm A thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $A(a;b;0)$.

$$ABCD \text{ là hình vuông} \Rightarrow \begin{cases} AB^2=AD^2 \\ AI^2=\left(\frac{1}{2}BD\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)^2+b^2+8^2=(a+5)^2+(b+4)^2 \\ (a+1)^2+(b+2)^2+4^2=36 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=4-2a \\ (a+1)^2+(6-2a)^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=\frac{17}{5} \\ b=\frac{-14}{5} \end{cases} \Rightarrow \text{A(1; 2; 0) hoặc}$$

$A\left(\frac{17}{5};\frac{-14}{5};0\right)$(loại). Với $A(1;2;0) \Rightarrow C(-3;-6;8)$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;6;2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M. Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$

A. $\frac{AM}{BM}=\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{AM}{BM}=2$. **C.** $\frac{AM}{BM}=\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{AM}{BM}=3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $M\in(Oxz) \Rightarrow M(x;0;z)$; $\overrightarrow{AB}=(7;3;1) \Rightarrow AB=\sqrt{59}$; $\overrightarrow{AM}=(x+2;-3;z-1)$

Ta có: A,B,M thẳng hàng $\Rightarrow \overrightarrow{AM}=k.\overrightarrow{AB}\ (k\in\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=7k \\ -3=3k \\ z-1=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-9 \\ -1=k \\ z=0 \end{cases}$

$\Rightarrow M(-9;0;0)$

và $\overrightarrow{BM}=(-14;-6;-2) \Rightarrow BM=\sqrt{118}=2AB$

Câu 6. Cho ba điểm $A(1;-3)$, $B(-2;6)$ và $C(4;-9)$. Tìm điểm M trên trục Ox sao cho vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ có độ dài nhỏ nhất.

A. $M(2;0)$. **B.** $M(4;0)$. **C.** $M(3;0)$. **D.** $M(1;0)$.

Lời giải

Chọn D.

* Cách 1: Ta có ba điểm A, B, C không thẳng hàng (do hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương). Gọi $M(m;0)\in Ox$ và G là trọng tâm ΔABC suy ra $G(1;-2)$. Khi đó $\vec{u}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}=3(1-m;-2)$

Do đó $\left|\vec{u}\right|=3\left|\overrightarrow{MG}\right|=3\sqrt{(1-m)^2+4}\geq 3.2=6$. Suy ra $\left|\vec{u}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 6 khi và chỉ khi $m=1$.

Vậy $M(1;0)$.

* Cách 2: Gọi $M(m;0)\in Ox$, ta có $\overrightarrow{MA}=(1-m;-3)$, $\overrightarrow{MB}=(-2-m;6)$, $\overrightarrow{MC}=(4-m;-9)$.

$\vec{u}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(3-3m;-6)\Rightarrow\left|\vec{u}\right|=\sqrt{(3-3m)^2+36}\geq 6$. Suy ra $\left|\vec{u}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 6 khi và chỉ khi $m=1$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

BÀI 2. MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. VECTƠ PHÁP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Định nghĩa

Cho mặt phẳng (α). Nếu vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (α) thi $\vec{n}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của (α).

Kết quả: Nếu (P) có cặp vecto $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ không cùng phương,có giá song song hoặc nằm trên (P). Thì vectơ pháp tuyến của (P) được xác định $\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]$ (tích có hướng 2 vectơ)

II. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẲNG

1. Định nghĩa

Phương trình có dạng $Ax+By+Cz+D=0$, trong đó A, B, C Không đồng thời bằng 0 được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

Nhận xét:

a) Nếu mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là $Ax+By+Cz+D=0$ thì nó có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(A;B;C)$.

b) Phương trình mặt phẳng đi qua điêm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nhận vecto $\vec{n}(A;B;C)$ khác $\vec{0}$ làm vectơ pháp tuyến là $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

2. Các trường hợp riêng

Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) $Ax+By+Cz+D=0.$

a) Nếu $D=0$ thì góc toạ độ O có tọa độ thoả mãn phương trình của mặt phẳng (α).

Vậy (α) đi qua góc toạ độ O

b) Nếu một trong ba hệ số A,B,C bằng 0 , chẳng hạn $A=0$ thì mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(0;B;C)$. Ta có $\vec{n}\vec{i}=0$. Do $\vec{i}$ là vectơ chi phương của Ox nên ta suy ra (α) song song hoặc chứa trục Ox

c) Nếu hai trong ba hệ số A,B,C bằng 0 , ví dụ $A=B=0$ và $C\neq 0$ thì từ trường hợp b) ta suy ra mặt phẳng (α) song song với Ox và Oy hoặc (α) chứa Ox và Oy.

Vậy (α) song song hoặc trùng với mặt phảng (Oxy).

Nhận xét

Nêu cả bón hệ so A,B,C,D đều khác 0 thì bằng cách đặt $a=-\frac{D}{A}$, $b=-\frac{D}{B},c=-\frac{D}{C}$, ta có thể đưa phương trình (1) vé dạng sau đây: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.\quad(2)$

Khỉ đó mặt phẳng (α) cất các trục Ox,Oy,Oz lân lượt tại các điểm có toạ đọ là $(a;0;0),(0;b;0)$, $(0;0;c)$. Người ta còn gọi phương trình (2) là phương trình của mặt phẳng theo đoan chắn

III. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI MẶT PHẲNG SONG SONG HOẶC VUÔNG GÓC

1. Điều kiện để hai mặt phẳng song song

Trong không gian Oxyz cho $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $(\alpha'): A'x+B'y+C'z+D'=0$

$$(\alpha_1)//(\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{n}_1=k\vec{n}_2\\ D_1\neq kD_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(A_1;B_1;C_1)=k(A_2;B_2;C_2)\\ D_1\neq kD_2.\end{cases}$$

$$(\alpha_1)\equiv(\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{n}_1=k\vec{n}_2\\ D_1=kD_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(A_1;B_1;C_1)=k(A_2;B_2;C_2)\\ D_1=kD_2.\end{cases}$$

2. Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

$(\alpha)\perp(\alpha') \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0 \Leftrightarrow A.A'+B.B'+C.C'=0$

III. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

1. Công thức tính khoảng cách từ 1 điểm đến mootjmawtj phẳng: Trong không gian $Oxyz$, cho mắt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ vd diểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Khoảng cách từ diểm M_0 đến mặt phẳng (α), ki hiệu là $d(M_0,(\alpha))$, đuợc tính theo công thức:

$$d(M_0,(\alpha))=\frac{|Ax_0+By_0+C_{-0}+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

2. Góc giữa hai mặt phẳng:

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(0^0\le\varphi\le 90^0)$.

$(P): Ax+By+Cz+D=0$ và $(Q): A'x+B'y+C'z+D'=0$

$$cos\varphi=\left|cos(\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q})\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{n_Q}\right|}=\frac{|A.A'+B.B'+C.C'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Viết phương trình mặt phẳng biết một điểm thuộc mặt phẳng và tìm được một vectơ pháp tuyến

1. Phương pháp giải

- Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ là

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

- *Mặt phẳng (α) đi qua một điểm M, vuông góc với đường thẳng (d), khi đó vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng (d) là một vectơ pháp tuyến của (α).*
- *Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và song song với mặt phẳng $(\beta): Ax+By+Cz+D=0$ thì (α) có phương trình là $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$*

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Biết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{v}(-1;2;1)$

Hướng dẫn giải

$-1(x-1)+2(y-2)+1(z-3)=0 \Leftrightarrow x-2y-z+6=0.$

Ví dụ 2: Cho ba điểm $A(2;1;-1), B(-1;0;4), C(0;-2;-1)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (P) đi qua $A(2;1;-1)$ và vuông góc với BC nên nhận $\overrightarrow{BC}=(1;-2;-5)$ làm vectơ pháp tuyến. Vì vậy ta viết được phương trình mặt phẳng (P) là:

$x-2-2(y-1)-5(z+1)=0 \Leftrightarrow x-2y-5z-5=0.$

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;2), B(3;5;-2)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB

Hướng dẫn giải

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB, ta có $M(2;1;0)$ và $\overrightarrow{AB}=(2;8;-4)=2(1;4;-2)=2\vec{n}$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua M và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}$ nên có phương trình: $x+4y-2z-6=0$

Ví dụ 4: Trong không gian $Oxyz$, Viết phương trình mặt phẳng mặt phẳng song song với mặt phẳng (Oxy) và đi qua điểm $A(1;1;1)$

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng song song với mặt phẳng (Oxy) và đi qua $A(1;1;1)$ nhận $\vec{k}=(0;0;1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $z-1=0$.

Ví dụ 5: Cho mặt phẳng $(Q): x-y+2z-2=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q), đồng thời cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm M, N sao cho $MN=2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

$(P)//(Q)$ nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng $x-y+2z+D=0$ $(D\neq -2)$.

Khi đó mặt phẳng (P) cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm $M(-D;0;0)$, $N(0;D;0)$.

Từ giả thiết: $MN=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2D^2}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow D=2$ (do $D\neq -2$).

Vậy phương trình mặt phẳng $(P): x-y+2z+2=0$.

Dạng 2. Viết phương trình mặt phẳng biết một điểm thuộc mặt phẳng và tìm được một cặp vectơ chỉ phương

1. Phương pháp giải

- Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a},\vec{b}$. Khi đó một vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]$.
- *Mặt phẳng (α) chứa một đường thẳng (d) và vuông góc với một mặt phẳng (β):*
  - *Xác định vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của (d) và vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\beta$ của (β).*
  - *Một vectơ pháp tuyến của (α) là: $\vec{n}=[\vec{u},\vec{n}_\beta]$.*

- *Lấy một điểm M thuộc d thì* $M \in (\alpha)$.

- *Mặt phẳng* (α) *đi qua điểm* M *và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau* $(\beta),(\gamma)$: *Chọn vectơ pháp tuyến của* (α) *là:* $\vec{n} = \left[\vec{n}_\beta, \vec{n}_\gamma\right]$.

- *Mặt phẳng* (α) *đi qua ba điểm không thẳng hàng* A, B, C. *Khi đó ta có thể xác định một vectơ pháp tuyến của* (α) *là:* $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$.

2. Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(0;2;-2)$ và nhận vectơ $\vec{a}(2,0,1), \vec{b}(-1,1,0)$ là hai vectơ chỉ phương.

Hướng dẫn giải

Suy ra (P) có vectơ pháp tuyến là: $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = (1;1;-2)$.

Từ đó ta có $(P): x + y - 2z - 6 = 0$.

Ví dụ 2: Cho hai điểm $A(1;-1;5), B(0;0;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa A, B và song song với trục Oy

Hướng dẫn giải

Do mặt phẳng (P) chứa A, B và song song với trục Oy nên vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \vec{j}] = (4;0;-1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là: $4(x-0) + 0(y-0) - 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow 4x - z + 1 = 0$

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1); B(2;1;0)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 3z + 1 = 0$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa $A; B$ và vuông góc với (P). Viết phương trình mặt phẳng (Q)

Hướng dẫn giải

Phương trình mặt phẳng (Q) chứa AB và vuông góc với mặt phẳng (P) nên có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (1;-1;1)$ và $\overrightarrow{n_P} = (2;1;-3)$.

Suy ra $\overrightarrow{n_Q} = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{n_P}] = (2;5;3)$.

Mặt phẳng (Q) đi qua $A(1;2;-1)$ nên $2(x-1) + 5(y-2) + 3(z+1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 5y + 3z - 9 = 0$

Ví dụ 4: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ O và vuông góc với hai mặt phẳng $(P): x - y + z - 7 = 0, (Q): 3x + 2y - 12z + 5 = 0$

Hướng dẫn giải

Ta có $(P): x - y + z - 7 = 0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (1;-1;1)$ và

$(Q): 3x + 2y - 12z + 5 = 0$ có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2} = (3;2;-12)$

Do $(\alpha) \perp (P)$ và $(\alpha) \perp (Q)$ nên (α) có vectơ pháp tuyến là

$\vec{n} = [\overrightarrow{n_1}; \overrightarrow{n_2}] = (10;15;5)$.

Vậy (α) có phương trình $10x + 15y + 5z = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y + z = 0$.

Ví dụ 5: Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(0;1;2), B(2;-2;1), C(-2;1;0)$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;-3;-1); \overrightarrow{AC}=(-2;0;-2)$.

$$\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 0 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -2 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & -3\\ -2 & 0\end{vmatrix}\right)=(6;6;-6).$$

Chọn $\vec{n}=\frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(1;1;-1)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).

Ta có phương trình mặt phẳng (ABC) là: $x+y-1-z+2=0 \Leftrightarrow x+y-z+1=0$.

Ví dụ 6: Trong không gian $Oxyz$, biết mặt phẳng $ax+by+cz+5=0$ qua hai điểm $A(3;1;-1), B(2;-1;4)$ và vuông góc với $(P): 2x-y+3z+4=0$.

Hướng dẫn giải

Gọi $(\alpha): ax+by+cz+5=0$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-2;5), \overrightarrow{n_P}=(2;-1;3)$.

Mặt phẳng (α) nhận $\vec{n}=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_P}]=(-1;13;5)$ làm vectơ pháp tuyến nên (α) có dạng

$-x+13y+5z+D=0$.

Mặt phẳng (α) qua $A(3;1;-1)$ nên $-3+13.1+5.(-1)+D=0 \Leftrightarrow D=-5$.

$\Rightarrow (\alpha): -x+13y+5z-5=0$ hay $(\alpha): x-13y-5z+5=0$.

Dạng 3. Lập phương trình mặt phẳng liên quan đến khoảng cách

1. Phương pháp giải

Sử dụng các công thức liên quan đến khoảng cách:

Khoảng cách từ điểm $M(x_0,y_0,z_0)$ đến mặt phẳng $(\alpha): ax+by+cz+d=0$ là

$$\mathrm{d}(M,(\alpha))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Chú ý: Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song: $\mathrm{d}[(\alpha),(\beta)]=\mathrm{d}[M,(\beta)]$ trong đó điểm $M\in(\alpha)$.

2. Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, lập phương trình của các mặt phẳng song song với mặt phẳng $(\beta): x+y-z+3=0$ và cách (β) một khoảng bằng $\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm. Ta có $A(0;0;3)\in(\beta)$.

Do $(\alpha)//(\beta)$ nên phương trình của mặt phẳng (α) có dạng:

$x+y-z+m=0$ với $m\neq 3$.

Ta có $\mathrm{d}((\alpha),(\beta))=\sqrt{3} \Leftrightarrow \mathrm{d}(A,(\alpha))=\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|m-3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

$\Leftrightarrow |m-3|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=6\\ m=0\end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình của các mặt phẳng cần tìm là

$x+y-z+6=0$ và $x+y-z=0$.

Ví dụ 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng

$$(P):x+3z+2=0,(Q):x+3z-4=0.$$

Lập phương trình mặt phẳng song song và cách đều (P) và (Q)

Hướng dẫn giải

Điểm $M(x;y;z)$ bất kỳ cách đều (P) và $(Q) \Leftrightarrow d(M;(P))=d(M;(Q))$

$$\Leftrightarrow \frac{|x+3z+2|}{\sqrt{1+9}}=\frac{|x+3z-4|}{\sqrt{1+9}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3z+2=x+3z-4 \\ x+3z+2=-x-3z+4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2=-4 \\ x+3z-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x+3z-1=0.$$

Vậy M thuộc $(\alpha):x+3z-1=0$. Nhận thấy (α) song song với (P) và (Q).

Dạng 4. Viết phương trình mặt phẳng liên quan đến mặt cầu

1. Phương pháp giải

Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm H.

Giả sử mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R, khi đó ta viết được phương trình mặt phẳng (α) đi qua H và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\overrightarrow{IH}$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):x-2y-2z-8=0$

Lời giải

Do mặt cầu tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):x-2y-2z-8=0$ nên

$$d(I,(P))=R \Leftrightarrow R=\frac{|1-2.2-2(-1)-8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}} \Leftrightarrow R=3.$$

Vậy phương trình mặt cầu là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $I(0;2;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I tiếp xúc với trục Oy.

Lời giải

Mặt cầu tâm I tiếp xúc với trục Oy nên mặt cầu có $R=d(I,Oy)=3$.

Vậy phương trình mặt cầu là: $x^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$.

Ví dụ 3. Viế phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;-1)$ và cắt mặt phẳng $(P):2x-y+2z-1=0$ theo một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{8}$

Lời giải

Ta có: $d=d\left(I;(P)\right)=\dfrac{\left|2.1-2+2.(-1)-1\right|}{3}=1$.

Bán kính mặt cầu là $R=\sqrt{d^2+r^2}=3$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.

Ví dụ 4 Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$ và mặt phẳng $(P):x+2y-2z+3=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích là 2π .Viết phương trình mặt cầu (S).

Lời giải.

Ta có $h=d(I,(P))=1$

Gọi (C) là đường tròn giao tuyến có bán kính r.

Vì $S=r^2.\pi=2\pi\Leftrightarrow r=\sqrt{2}$.

Mà $R^2=r^2+h^2=3\Rightarrow R=\sqrt{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu tâm $I(0;-2;1)$ và bán kính $R=\sqrt{3}$.

$(S):x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) qua điểm $B(3,4,-5)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}=(3,1,-1),\vec{b}=(1,-2,1)$ là:

A. $x-4y-7z-16=0$. **B.** $x-4y+7z+16=0$.

C. $x+4y+7z+16=0$. **D.** $x+4y-7z-16=0$.

Lời giải

Chọn C

Vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(-1,-4,-7)$ có thể thay thế bởi $\vec{n}=(1,4,7)$

Phương trình (α) có dạng $x+4y+7z+D=0.$

$B\in(\alpha)\Leftrightarrow 3+16-35+D=0\Leftrightarrow D=16$

$(\alpha):\ x+4y+7z+16=0$.

Câu 2: Phương trình tổng quát của mặt phẳng qua $A(3,-1,2),B(4,-2,-1),C(2,0,2)$ là:

A. $x+y-2=0$. **B.** $x-y+2=0$. **C.** $x+y+2=0$. **D.** $x-y-2=0$.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{AB}=(1,-1,-3),\overrightarrow{AC}=(-1,1,0);\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(3,3,0)$: Chọn $\vec{n}=(1,1,0)$ làm vectơ pháp tuyến:phương trình (ABC) có dạng $x+y+D=0$

Qua A $\Leftrightarrow 3-1+D=0\Leftrightarrow D=-2$

Phương trình $(ABC): x+y-2=0$.

Câu 3: Phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua $A(2,-1,3), B(3,1,2)$ và song song với vecto $\vec{a}=(3,-1,-4)$ là:

A. $9x+y-7z+40=0$. **B.** $9x-y+7z-40=0$.

C. $9x-y-7z+40=0$. **D.** $9x+y+7z-40=0$.

Lời giải

Chọn B

$\overrightarrow{AB}=(1,2,-1); \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{a}\right]=\vec{n}=(-9,1,-7)$. Chọn $\vec{n}=(9,-1,7)$ làm vectơ pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng phải tìm có dạng: $9x-y+7z+D=0$

Qua A nên $9.2-(-1)+7.3+D=0 \Leftrightarrow D=-40$

Phương trình cần tìm là: $9x-y+7z-40=0$.

Câu 4: Phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua $A(4,-1,1), B(3,1,-1)$ và song song với trục Ox là:

A. $y+z+2=0$. **B.** $y-z-2=0$. **C.** $y+z=0$. **D.** $y-z=0$.

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{AB}=(-1,2,-2)$: vectơ chỉ phương của trục Ox: $\vec{i}=(1,0,0)$.

$\left[\overrightarrow{AB},\vec{i}\right]=(0,-2,-2)$: Chọn $\vec{n}=(0,1,1)$ làm vectơ pháp tuyến thì phương trình mặt phẳng cần tìm có dạng $y+z+D=0$, qua A nên: $-1+1+D=0 \Leftrightarrow D=0$

Câu 5: Viết phương trình của mặt phẳng (P) qua điểm $H(2,2,2)$ và nhận $\overrightarrow{OH}$ làm vectơ pháp tuyến.

A. $(P): x+y+z=6$. **B.** $(P): x+y=4$.

C. $(P): y+z=4$. **D.** Ba câu A, B và C đúng.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{OH}=(2;2;2)$ suy ra phương trình mặt phẳng

$(P): 2(x-2)+2(y-2)+2(z-2)=0 \Leftrightarrow (P): x+y+z=6$.

Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$ có $A(3,-2,1), B(-4,0,3), C(1,4,-3), D(2,3,5)$. Phương trình tổng quát của mặt phẳng chứa AC và song song với BD là:

A. $12x+10y+21z+35=0$. **B.** $12x-10y+21z-35=0$.

C. $12x-10y-21z-35=0$. **D.** $12x+10y-21z+35=0$.

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{AC}=(-2,6,-4);\overrightarrow{BD}=(6,3,2);\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right]=(24,-20,-42)$. Có thể chọn $\vec{n}=(12,-10,-21)$ làm vectơ pháp tuyến cho mặt phẳng.

Phương trình mặt phẳng này có dạng $12x-10y-21z+D=0$.Điểm A thuộc mặt phẳng nên:

$12.3-10(-2)-21.1+D=0\Leftrightarrow D=-35$

Phương trình cần tìm: $12x-10y-21z-35=0$,

Câu 7: Cho vectơ chỉ phương điểm $A(4,3,2),B(-1,-2,1),C(-2,2,-1)$. Phương trình tổng quát của mặt phẳng qua A và vuông góc với BC là:

A. $x-4y+2z+4=0$.
B. $x+4y-2z-4=0$.
C. $x-4y+2z+4=0$.
D. $x-4y-2z-4=0$.

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{BC}=(-1,4,-2)$. Chọn $\vec{n}=(1,-4,2)$ làm vectơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng chứa A và vuông góc với BC có dạng $x-4y+2z+D=0$

Chứa A nên $4-4.3+2.2+D=0\Leftrightarrow D=4$

Vậy: $x-4y+2z+4=0$.

Câu 8: Cho hai mặt phẳng điểm $A(1,-4,4),B(3,2,6)$. Phương trình tổng quát của mặt phẳng trung trực của đoạn AB là:

A. $x-3y+z+4=0$.
B. $x-3y-z+4=0$.
C. $x+3y-z-4=0$.
D. $x+3y+z-4=0$.

Lời giải

Chọn D

Gọi I là trung điểm của AB: $I(2,-1,5)$.

$\overrightarrow{AB}=(2,6,2)$.Chọn $\vec{n}=(1,3,1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB có dạng $x+3y+z+D=0$

I thuộc mặt phẳng này: $2+3(-1)+5+D=0\Leftrightarrow D=4$.

Phương trình cần tìm: $x+3y+z-4=0$.

Câu 9: Phương trình tổng quát của mặt phẳng qua điểm $M(3,0,-1)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $x+2y-z+1=0$ và $2x-y+z-2=0$ là:

A. $x-3y-5z-8=0$.
B. $x-3y+5z-8=0$.
C. $x+3y-5z+8=0$
D. $x+3y+5z+8=0$.

Lời giải

Chọn A

$\vec{a}=(1,2,-1);\vec{b}=(2,-1,1)$ là hai vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng cho trước.

Chọn $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(1,-3,-5)$ làm vectơ pháp tuyến,ta có mặt phẳng có dạng $x-3y-5z+D=0$

.

Qua M nên: $3-3.0-5.(-1)+D=0\Leftrightarrow D=-8$

Phương trình mặt phẳng cần tìm là: $x-3y-5z-8=0$

Câu 10: Phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua hai điểm $A(2,-1,1),B(-2,1,-1)$ và vuông góc với mặt phẳng $3x+2y-z+5=0$ là:

A. $x+5y+7z-1=0$. **B.** $x-5y+7z+1=0$.

C. $x-5y-7z=0$. **D.** $x+5y-7z=0$.

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{AB}=(-4,2,-2)$; vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng $3x+2y-z+5=0$:

$\vec{n}=(3,2,-1);\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}\right]=\vec{n}=(2,-10,-14)$.chọn $\vec{b}=(1,-5,-7)$ làm vectơ pháp tuyến.có mặt phẳng $x-5y-7z+D=0$

A thuộc mặt phẳng này: $2-5.9-1)-7.1+D=0\Leftrightarrow D=0$

Vậy $x-5y-7z=0$ là mặt phẳng cần tìm.

Câu 12: Ba mặt phẳng $x+2y-z-6=0,2x-y+3z+13=0,3x-2y+3z+16=0$ cắt nhau tại điểm A. Tọa độ của A là:

A. $A(1,2,3)$. **B.** $A(1,-2,3)$. **C.** $A(-1,-2,3)$. **D.** $A(-1,2,-3)$.

Lời giải

Chọn D

Tọa độ giao điểm của ba mặt phẳng là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+2y-z-6=0(1)\\2x-y+3z+13=0(2)\\3x-2y+3z+16=0(3)\end{cases}$$

Giải (1),(2) tính x,y theo z được $x=-z-4;y=z+5.$ Thế vào phương trình (3) được $z=-3,$ từ đó có $x=-1,y=2$

Vậy $A(-1,2,-3)$.

Câu 13: Cho hai điểm $A(1,-4,5),B(-2,3,-4)$ và vectơ $\vec{a}=(2,-3,-1)$. Mặt phẳng (β) chứa hai điểm A,B và song song với vectơ $\vec{a}$ có phương trình:

A. $34x-21y+5z-25=0$. **B.** $34x+21y-5z+25=0$.

C. $34x+21y+5z+25=0$. **D.** $34x-21y-5z-25=0$.

Lời giải

Chọn C

$A(1,-4,5); B(-2,3,-4) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-3,7,-9); \vec{a} = (2,-3,-1)$

$\overrightarrow{AB}$ và $\vec{a}$ sẽ là cặp vectơ chỉ phương của (β)

$\left[\overrightarrow{AB}, \vec{a}\right] = (-34,-21,-5)$

Chọn $\vec{n} = (34,21,5)$ làm vectơ pháp tuyến của (β)

Phương trình mặt phẳng (β) có dạng $34x + 21y + 5z + D = 0$

Điểm A $\in (\beta) \Leftrightarrow 34 - 84 + 25 + D = 0 \Leftrightarrow D = 25$

Phương trình $(\beta): 34x + 21y + 5z + 25 = 0$

Câu 14: Cho hai điểm $C(-1,4,-2), D(2,-5,1)$. Mặt phẳng chứa đường thẳng CD và song song với Oz có phương trình:

A. $3x - y + 1 = 0$. **B.** $3x + y - 1 = 0$. **C.** $x - 3y + 1 = 0$. **D.** $x + 3y - 1 = 0$.

Lời giải

Chọn B

$C(-1,4,-2); D(2,-5,1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{CD} = (3,-9,3)$ cùng phương với vectơ $\vec{a} = (1,-3,1)$

Trục Oz có vectơ chỉ phương $\vec{k} = (0,0,1)$

$\left[\vec{a}, \vec{k}\right] = (-3,-1,0)$ cùng phương với vectơ $\vec{n} = (3,1,0)$

Chọn $\vec{n} = (3,1,0)$ làm vectơ pháp tuyến cho mặt phẳng chứa CD và song song với trục Oz.

Phương trình mặt phẳng này có dạng: $3x + y + D = 0$

Mặt phẳng qua C $\Leftrightarrow -3 + 4 + D = 0 \Leftrightarrow D = -1$

Phương trình mặt phẳng cần tìm: $3x + y - 1 = 0$

Câu 15: Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) qua $M(2,-3,1)$ và vuông góc với đường thẳng (D) qua hai điểm $A(3,-4,5)$; $B(-1,2,6)$.

A. $4x - 6y - z + 11 = 0$. **B.** $4x + 6y - z + 11 = 0$.

C. $4x + 6y - z + 25 = 0$. **D.** $4x - 6y - z + 25 = 0$.

Lời giải

Chọn D

Pháp vecto của $(P): \overrightarrow{AB} = (-4,6,1)$

$\Rightarrow (P): (x-2)(-4) + (y+3)6 + (z-1) = 0 \Leftrightarrow 4x - 6y - z - 25 = 0$

Câu 16: Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) qua hai điểm $A(-2, 3, 5)$; $B(-4, -2, 3)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{a}=(2, -3, 4)$.

A. $9x + 3y - z + 4 = 0$. **B.** $9x + 3y - z - 4 = 0$.

C. $13x - 2y - 8z + 72 = 0$. **D.** $13x + 2y + 8z + 72 = 0$.

Lời giải

Chọn C

Pháp vecto của (P): $\overrightarrow{AB}=(-2,-5,-2)\Rightarrow \vec{n}=\left[\vec{a},\overrightarrow{AB}\right]=2(13,-2,-8)$ 0.

$\Rightarrow (P):(x+2)13+(y-3)(-2)+(z-5)(-8)=0\Leftrightarrow 13x-2y-8z+72=0$

Câu 17: Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) qua $M(-2, 1, 3)$ và song song với mặt phẳng $(Q): 2x + 5y - 3z + 7 = 0.$

A. $2x + 5y - 3z - 8 = 0$. **B.** $2x + 5y - 3z - 7 = 0$.

C. $2x + 5y - 3z - 18 = 0$. **D.** $2x + 5y - 3z + 8 = 0$.

Lời giải

Chọn D

$(P): 2x+5y-3z+D=0$ qua $M(-2,1,3)\Rightarrow D=8$

$\Rightarrow (P): 2x+5y-3z+8=0$

Câu 18: Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) qua hai điểm $E(3, -2, 4)$; $F(1, 3, 6)$ và song song với trục $y'Oy$

A. $x + y + z - 7 = 0$. **B.** $x + z - 7 = 0$. **C.** $x + y + z + 7 = 0$. **D.** $x + z + 7 = 0$.

Lời giải

Chọn B

$(P)//y'Oy\Rightarrow$ ecto chỉ phương của (P) là: $\vec{e_2}=(0,1,0)$

Vecto chỉ phương thứ hai $\overrightarrow{EF}=(-2,5,2)\Rightarrow \vec{n}=\left[\vec{e_2},\overrightarrow{EF}\right]=2(1,0,1)$

$\Rightarrow (P):(x-3).1+(y+2).0+(z-4).1\Leftrightarrow x+z-7=0$

Câu 19: Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) qua $M(-3, 5, 2)$ và vuông góc với $x'Ox$

A. $x - 3 = 0$. **B.** $x + 3 = 0$.

C. $x + y - 3 = 0$. **D.** $x - y + 3 = 0$.

Lời giải

Chọn B

$(P)\perp x'Ox$ tại $A(-3,0,0)\Rightarrow \vec{n}=\vec{e_1}=(1,0,0)$

$A(-3,0,0)\in(P)\Rightarrow(P):(x+3).1+y.0+z.0=0\Leftrightarrow x+3=0$

Câu 20: Cho tứ diện $ABCD$ có $A(5,1,3),B(1,6,2),C(5,0,4),D(4,0,6)$. Mặt phẳng chứa BC và song song với AD có phương trình:

A. $8x-7y+5z-60=0$.
B. $8x+7y+5z-60=0$.
C. $8x-7y-5z-60=0$.
D. $8x+7y-5z-60=0$.

Lời giải

Chọn B

$A(5,1,3),B(1,6,2),C(5,0,4),D(4,0,6)$

$\overrightarrow{BC}=(4,-6,2);\overrightarrow{AD}=(-1,-1,3)$

$\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD}\right]=(-16,-14,-10)$ cùng phương với $\vec{n}=(8,7,5)$

Chọn $\vec{n}$ làm vectơ pháp tuyến cho mặt phẳng chứa BC và song song với A**D.**

Phương trình (P) có dạng: $8x+7y+5z+D=0$

Điểm $B\in(P)\Leftrightarrow 8+42+10+D=0\Leftrightarrow D=-60$

Phương trình $(P):8x+7y+5z-60=0$

Câu 21: Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) qua hai điểm $M(2,-4,1);N(3,-2,-4)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q): $3x+4y-2z-5=0$.

A. $16x+13y-2z+82=0$.
B. $16x-13y+2z-82=0$.
C. $16x-13y-2z-82=0$.
D. $16x+13y+2z-82=0$.

Lời giải

Chọn C

Cặp vecto chỉ phương của $(P):\overrightarrow{MN}=(1,2,-5);\overrightarrow{n_Q}=(3,4,-2)$

$\Rightarrow$ Pháp vecto của $(P):\vec{n}=\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{n_Q}\right]=(16,-13,-2)$

$\Rightarrow(P):(x-2)16+(y+4)(-13)+(z-1)(-2)=0\Leftrightarrow 16x-13y-2z-82=0$

Câu 22: Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) qua $E(-4,1,-2)$ và vuông góc với hai mặt phẳng (Q): $2x-3y+5z-4=0$; (R): $x+4y-2z+3=0$.

A. $14x-9y+11z+43=0$.
B. $14x+9y-11z-43=0$.
C. $14x+9y+11z-43=0$.
D. $14x-9y-11z+43=0$.

Lời giải

Chọn D

Cặp vecto chỉ phương của $(P):\vec{a}=(2,-3,5);\vec{b}=(1,4,2)$

Pháp vecto của $(P):\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(-14,9,11)$

$\Rightarrow (P):(x+4)(-14)+(y-1)9+(z+2)11=0\Leftrightarrow 14x-9y-11z+43=0$

Câu 23: Cho tứ giác $ABCD$ có $A(0,1,-1);\ B(1,1,2);\ C(1,-1,0);\ (0,0,1)$. Gọi H,I,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B,C,D trên ba trục Ox, Oy, Oz. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (HIK).

A. $x-y+z+1=0$.

B. $x-y+z-1=0$.

C. $x+y+z-1=0$.

D. $x+y+z+1=0$.

Lời giải

Chọn B

$H(1,0,0);I(0,-1,0);K(0,0,1)$

$\Rightarrow (HIK):\frac{x}{1}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{1}=1\Leftrightarrow x-y+z-1=0$

Câu 24: Cho mặt phẳng $(P):3x-4y+2z-5=0$. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đối xứng của (P) qua trục $y'Oy$:

A. $3x+4y+2z-5=0$.

B. $3x-4y-2z+5=0$.

C. $3x+4y-2z+5=0$.

D. $3x+4y+2z+5=0$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $E(x,y,z)\in(\alpha)$ là điểm đối xứng của $M(x_M,y_M,z_M)\in(P)$ qua trục

$y'Oy: x_M=-x; y_M=y; z_M=-z$

$\Rightarrow 3(-x)-4y+2(-z)-5=0\Leftrightarrow (\alpha):3x+4y+2z+5=0$

Câu 25: Cho điểm $M(1,-4,-2)$ và mặt phẳng $(P):x+y+5z-14=0$. Tính khoảng cách từ M đến (P).

A. $2\sqrt{3}$.

B. $4\sqrt{3}$.

C. $6\sqrt{3}$.

D. $3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$d(M,P)=\frac{|1-4+5(-2)-14|}{\sqrt{1+1+25}}=\frac{27}{3\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$$

Câu 26: Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q):2x-4y+4z+3=0$ và cách điểm $A(2,-3,4)$ một khoảng bằng 3:

A. $2x-4y+4z-14=0$.

B. $2x-4y+4z-50=0$.

C. $2x-4y+4z-14=0;\ 2x-4y+4z-50=0$.

D. $2x-4y+4+-14=0;\ 2x-4y+4z-50=0$.

Lời giải

Chọn C

$(P)//(Q):2x-4y+4z+3=0\Rightarrow (P):2x-4y+4z+D=0$

$d(A,P)=3\Leftrightarrow \dfrac{4+12+16+D}{\sqrt{4+16+16}}=\dfrac{|D+32|}{6}=3\Leftrightarrow D=-14\vee D=-50$

$\Rightarrow (P):2x-4y+4z-14=0;(P'):2x-4y+4z-50=0$

Câu 27: Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) cách mặt phẳng $(Q):3x-2y-6z+5=0$ một khoảng bằng 4:

A. $3x-2y-6z-23=0;\ 3x-2y-6z+33=0$.

B. $3x-2y-6z+23=0;\ 3x-2y-6z+33=0$.

C. $3x-2y-6z-23=0;\ 3x-2y-6z-33=0$.

D. $3x-2y-6z+23=0;\ 3x-2y-6z-33=0$.

Lời giải

Chọn A

$(P)//(Q):3x-2y-6z+5=0;M(x,y,z)\in(P)\Rightarrow d(M,Q)=4$

$\Leftrightarrow \dfrac{|3x-2y-6z+5|}{\sqrt{9+4+36}}=3\Leftrightarrow 3x-2y-6z+5=\pm 28$

$\Leftrightarrow 3x-2y-6z-23=0;3x-2y-6z+33=0$

Câu 28: Với giá trị nào của m thì hai mặt phẳng sau song song:

$(P):(m-2)x-3my+6z-6=0;\quad (Q):(m-1)x+2y+(3-m)z+5=0$

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải

Chọn D

$A_1B_2-A_2B_1=(m-2)2+(m-1)3m=3m^2-m-4=0\Leftrightarrow m=-1,m=\dfrac{4}{3}$

$B_1C_2-B_2C_1=-3m(3-m)-2.6=3m^2-9m-12=0\Leftrightarrow m=-1,m=4$

$C_1A_2-C_1A_1=6(m-1)-(3-m)(m-2)=m^2+m=0\Leftrightarrow m=-1,m=0$

Với $m=-1$ thoả cả 3 điều trên $\Rightarrow (P)//(Q)$

Câu 29: Giá trị m thỏa mãn điều kiện nào để hai mặt phẳng

$(P):mx+(m-2)y+2(1-m)z+2=0;\ (Q):(m+2)x-3y+(1-m)z-3=0$ cắt nhau?

A. $m\neq 1$. **B.** $m\neq 1$ và $m\neq -4$. **C.** $m\neq -4$. **D.** $m\neq 4$.

Lời giải

Chọn B

(P) cắt (Q) $\Leftrightarrow \begin{cases} m(-3)-(m+2)(m-2)\neq 0 \\ (m-2)(1-m)+6(1-m)\neq 0 \\ 2(1-m)(m+2)-(1-m)\neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -m^2-3m+4\neq 0 \\ (1-m)(m+4)\neq 0 \\ (1-m)(m+4)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow m\neq 1 \& m\neq -4$

Câu 30: Với giá trị nào của m và n thì hai mặt phẳng sau song song:

$(P): x+my-z+2=0;\ (Q): 2x+y+4nz-3=0$

A. $m=\frac{1}{2};\ n=\frac{1}{2}.$ **B.** $m=-\frac{1}{2};\ n=\frac{1}{2}.$

C. $m=\frac{1}{4};\ n=-\frac{1}{4}.$ **D.** $m=\frac{1}{2};\ n=-\frac{1}{2}.$

Lời giải

Chọn D

Để hai mặt phẳng song song chắc chắn $n\neq 0$ nên:

$(P)//(Q)\Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{m}{1}=-\frac{1}{4n}\neq\frac{2}{-3}\Leftrightarrow m=\frac{1}{2};n=-\frac{1}{2}$

Câu 31: Hai mặt phẳng $(P): 4x-2y+4z+5=0$ và $(Q): x\sqrt{3}-y\sqrt{3}-2=0$ tạo với nhau một góc bằng:

A. 45^o. **B.** 30^o. **C.** 60^o. **D.** 90^o.

Lời giải

Chọn A

$\cos\alpha=\frac{\left|4\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right|}{6\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\alpha=45^o$

Câu 32: Cho hai mặt phẳng $(P): mx+(m-1)y-z-3=0$ và $(Q): (m-1)x+my+z+5=0$. Với giá trị nào của m thì (P) và (Q) vuông góc?

A. $1+\sqrt{3}$. **B.** $1-\sqrt{3}$. **C.** $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{3})$. **D.** $1\pm\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

$(P)\perp(Q)\Leftrightarrow m(m-1)+(m-1)m-1=0$

$\Leftrightarrow 2m^2-2m-1=0\Leftrightarrow m=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

Câu 33: Cho hai mặt phẳng $(P): mx+(m-1)y-z-3=0$ và $(Q): (m-1)x+my+z+5=0$. Với giá trị nào của m thì (P) và (Q) tạo với nhau một góc 60^o?

A. -1. **B.** 2. **C.** 1 và 2. **D.** -1 và 2.

Lời giải

Chọn D

$$\cos 60^o = \frac{\left|2m^2-2m-1\right|}{\sqrt{m^2+(m-1)^2+1}.\sqrt{(m-1)^2+m^2+1}} = \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow 4m^2-3m-2 = 2m^2-2m+2 \Leftrightarrow m^2-m-2=0$

$\Leftrightarrow m=-1 \vee m=2$

Câu 34: Tìm tập hợp các điểm $M(x,y,z)$ sao cho $MA^2-MB^2=4$ với $A(2,-1,3)$; $B(-4,3,1)$

A. $3x+2y-z-4=0$. **B.** $3x-2y+z+4=0$.

C. $3x-2y+z+5=0$. **D.** $3x+2y+z-5=0$.

Lời giải

Chọn B

$MA^2-MB^2=4 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+1)^2+(z-3)^2$

$=(x+4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2+4$

$\Leftrightarrow 3x-2y+z+4=0$

Câu 35: Tìm tập hợp các điểm M cách đều hai mặt phẳng:

$(P): 2x-y+2z+9=0$; $(Q): 4x-2y+4z-3=0$

A. $2x-y+2z+2=0$. **B.** $2x-y+2z-2=0$.

C. $6x-3y+6z-5=0$. **D.** $8x-4y+8z+15=0$.

Lời giải

Chọn D

$$d(M,P)=\pm d(M,Q) \Leftrightarrow \frac{2x-y+2z+9}{3} = \pm\frac{4x-2y+4z-3}{6}$$

$\Leftrightarrow 8x-4y+8z+15=0$

Câu 36: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9$ và mặt phẳng $(P): 2x-y-2z+1=0$. Biết (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r. Tính r.

A. $r=3$. **B.** $r=2\sqrt{2}$. **C.** $r=\sqrt{3}$. **D.** $r=2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có (S) có tâm $I(1;2;2)$ và bán kính $R=3$; $d(I,(P))=\dfrac{|2-2-4+1|}{\sqrt{4+1+4}}=1$.

Khi đó $r=\sqrt{R^2-d^2(I,(P))}=2\sqrt{2}$.

Câu 37: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm I, tiếp xúc với trục Oy là:

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=10$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=8$. **D.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$.

Lời giải

Chọn A

Gọi M là hình chiếu vuông góc của tâm $I(1;-2;3)$ lên trục Oy, suy ra $M(0;-2;0)$.

Vì mặt cầu tiếp xúc với trục Oy nên có bán kính $R=IM=\sqrt{10}$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=10$.

Câu 38: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-2;3;4)$ biết mặt cầu (S) cắt mặt phẳng tọa độ (Oxz) theo một hình tròn giao tuyến có diện tích bằng 16π.

A. $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=25$. **B.** $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=5$.

C. $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=16$. **D.** $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=9$.

Lời giải

Chọn A

Gọi R, r lần lượt là bán kính mặt cầu và bán kính đường tròn giao tuyến.

Hình tròn giao tuyến có diện tích bằng $16\pi \Leftrightarrow \pi r^2=16\pi \Leftrightarrow r=4$.

Khoảng cách từ $I(-2;3;4)$ đến (Oxz) là $h=|y_I|=3$.

Suy ra $R=\sqrt{h^2+r^2}=\sqrt{16+9}=5$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=25$.

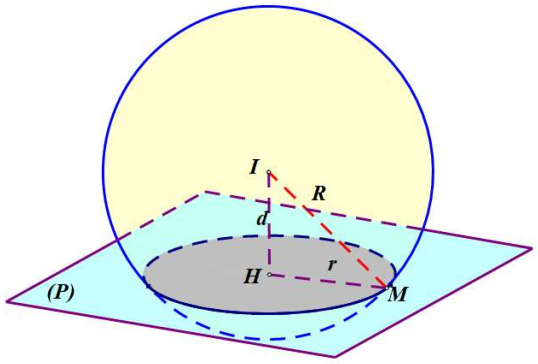
Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

A. $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$. **B.** $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

C. $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=34$. **D.** $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$.

Lời giải.

Chọn A



$d = d\left(I,(P)\right) = \dfrac{\left|-1-4-2-2\right|}{3} = 3.$

$R^2 = d^2 + r^2 = 9 + 25 = 34.$

Vậy $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 34.$

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;1)$ và mặt phẳng $(P): 4x - 3y + 5 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 16.$ **B.** $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 16.$

C. $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4.$ **D.** $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4.$

Lời giải

Chọn B

Do mặt cầu (S) có tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên có bán kính là:

$R = d\left(A;(P)\right) = \dfrac{\left|12+3+5\right|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 4$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 16.$

Dạng 5: Bài tập dành cho học sinh 8+, 9+

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-3;0;0)$, $B(0;0;3)$, $C(0;-3;0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$. Tìm trên (P) điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

A. $M(3;3;-3).$ **B.** $M(-3;-3;3).$ **C.** $M(3;-3;3).$ **D.** $M(-3;3;3).$

Lời giải

Chọn D

Gọi $I(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ (1)

Ta có $\overrightarrow{IA}(-3-a;-b;-c)$, $\overrightarrow{IB}(-a;-b;3-c)$, $\overrightarrow{IC}(-a;3-b;-c)$

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}-3-a=0\\ b-3=0\\ 3-c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\ b=3\\ c=3\end{cases}\Leftrightarrow I(-3;3;3).$$

Nhận thấy $I(-3;3;3)\in(P)$

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}\right|=\left|\overrightarrow{MI}\right|=MI\geq 0.$$

$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất bằng 0 khi $M(-3;3;3)$.

Câu 2: Trong không gian cho điểm $M(1;-3;2)$.Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua M và cắt các trục tọa độ tại A,B,C mà $OA=OB=OC\neq 0$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Giả sử mặt phẳng (α) cần tìm cắt Ox,Oy,Oz lần lượt tại $A(a,0,0),B(0,b,0),C(0,0c)(a,b,c\neq 0)$

$(\alpha):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$; (α) qua $M(1;-3;2)$ nên: $(\alpha):\frac{1}{a}-\frac{3}{b}+\frac{2}{c}=1(*)$

$$OA=OB=OC\neq 0\Rightarrow|a|=|b|=|c|\neq 0\Rightarrow\begin{cases}a=b=c(1)\\ a=b=-c(2)\\ a=-b=c(3)\\ a=-b=-c(4)\end{cases}$$

Thay (1) vào (*) ta có phương trình vô nghiệm

Thay $(2),(3),(4)$ vào (*) ta được tương ứng $a=-4,a=6,a=\frac{-3}{4}$

Vậy có 3 mặt phẳng.

Câu 3: Phương trình của mặt phẳng nào sau đây đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho thể tích tứ diện $OABC$ nhỏ nhất?

A. $6x+3y+2z+18=0$. **B.** $6x+3y+3z-21=0$.
C. $6x+3y+3z+21=0$. **D.** $6x+3y+2z-18=0$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $A(a;0;0),\ B(0;b;0),C(0;0;c)\quad (a,b,c>0)$

(ABC): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (1)

M(1;2;3) thuộc (ABC): $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$.

Thể tích tứ diện OABC: $V=\frac{1}{6}abc$

Áp dụng BDT Côsi ta có: $1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}}\Rightarrow 1\ge\frac{27.6}{abc}\Rightarrow\frac{1}{6}abc\ge 27\Rightarrow V\ge 27$

Ta có: V đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow V=27\Leftrightarrow\frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=6\\c=9\end{cases}$

Vậy (ABC): $6x+3y+2z-18=0$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):3x+y-z+5=0$ và hai điểm $A(1;0;2)$, $B(2;-1;4)$. Tìm tập hợp các điểm $M(x;y;z)$ nằm trên mặt phẳng (P) sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất.

A. $\begin{cases}x-7y-4z+7=0\\3x-y+z-5=0\end{cases}$.

B. $\begin{cases}x-7y-4z+14=0\\3x+y-z+5=0\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x-7y-4z+7=0\\3x+y-z+5=0\end{cases}$.

D. $\begin{cases}3x-7y-4z+5=0\\3x+y-z+5=0\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Ta thấy hai điểm A,B nằm cùng 1 phía với mặt phẳng (P)và AB song song với (P). Điểm $M\in(P)$ sao cho tam giác ABM có diện tích nhỏ nhất

$\Leftrightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{AB.d(M;AB)}{2}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(M;AB)$ nhỏ nhất, hay $M\in\Delta=(P)\cap(Q),(Q)$ là mặt phẳng đi qua AB và vuông góc với (P).

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2)$, vtpt của (P) $\overrightarrow{n_{(P)}}=(3;1;-1)$

Suy ra vtpt của (Q): $\overrightarrow{n_{(Q)}}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_{(P)}}\right]=(-1;7;4)$

PTTQ $(Q):-1(x-1)+7y+4(z-2)=0$

$\Leftrightarrow x-7y-4z+7=0$

Quỹ tích M là $\begin{cases}x-7y-4z+7=0\\3x+y-z+5=0\end{cases}$.

BÀI 3. ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Phương trình ttham số của đường thẳng Δ đi qua điểm M_0 và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ là

$$\begin{cases} x=x_0+a_1t \\ y=y_0+a_2t \quad (t\in R) \\ z=z_0+a_3t \end{cases}$$

Nếu a_1, a_2, a_3 đều khác không. Phương trình đường thẳng Δ viết dưới dạng chính tắc như sau:

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$$

II. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI ĐƯỜNG THƯỞNG SONG SONG, CẮT NHAU VÀ CHÉO NHAU

1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Trong Kg Oxyz cho hai đường thẳng

$d:\begin{cases} x=x_o+a_1t \\ y=y_o+a_2t \\ z=z_0+a_3t \end{cases}$ $d':\begin{cases} x=x_o'+a_1't' \\ y=y_o'+a_2't' \\ z=z_o'+a_3't' \end{cases}$ vtcp $\vec{u}$ đi qua M_o và d'có vtcp $\vec{u'}$ đi qua M_o'

*** Nếu $\vec{u},\vec{u'}$ cùng phương**

d // d'$\Leftrightarrow\begin{cases} \vec{u}=k\vec{u'} \\ M_0\notin d' \end{cases}$

d ≡ d'$\Leftrightarrow\begin{cases} \vec{u}=k\vec{u'} \\ M_0\in d' \end{cases}$

d song song d'$\Leftrightarrow$ Hệ phương trình vô nghiệm

d trùng d'$\Leftrightarrow$ Hệ phương trình có vô số nghiệm

*** $\vec{u},\vec{u'}$ Không cùng phương**

$$\begin{cases} x_o+a_1t=x_o'+a_1't' \\ y_o+a_2t=y_o'+a_2't' \\ z_0+a_3t=z_o'+a_3't' \end{cases}$$

d chéo d'$\Leftrightarrow$ Hệ phương trình vô nghiệm

d cắt d'$\Leftrightarrow$ Hệ phương trình có một nghiệm

2. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Trong không gian Oxyz cho $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $d:\begin{cases} x=x_o+a_1t \\ y=y_o+a_2t \\ z=z_0+a_3t \end{cases}$

Xét hương trình $A(x_0+a_1t)+B(y_0+a_2t)+C(z_0+a_3t)+D=0$

- Phương trình vô nghiệm thì đường thẳng $d//(P)$

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

- Phương trình có một nghiệm thì d cắt (P)
- Phương trình có vô số nghiệm thìd thuộc

Đặc biệt : $(d) \perp (\alpha) \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{n}$ cùng phương

3. Khoảng cách

- Khoảng cách từ M đến đường thẳng $d(M,\Delta) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M}, \vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}$
- Khoảng cách giữa hai đường chéo nhau : $d\left(\Delta,\Delta'\right) = \dfrac{\left|\left[\vec{a},\overrightarrow{a'}\right]\overrightarrow{MM'}\right|}{\left|\left[\vec{a},\overrightarrow{a'}\right]\right|}$

4. Góc giữa hai đường thẳng

Trong không gian *Oxyz*, cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có các vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$.

Góc giữa d_1 và d_2 bằng hoặc bù với góc giữa $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$.

Ta có: $\cos\left(d_1,d_2\right) = \left|\cos\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$.

5. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Trong không gian *Oxyz*, cho đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}$ và mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}$.

Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng góc giữa đường thẳng d với hình chiếu d' của nó trên (α).

Ta có: $\sin\left(d,(\alpha)\right) = \left|\cos\left(\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{n_\alpha}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_\alpha}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|}$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Viết phương trình đường thẳng khi tìm được một vectơ chỉ phương và điểm thuộc đường thẳng

1. Phương pháp giải

- Đường thẳng d đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = \left(a_1;a_2;a_3\right)$ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \left(t \in \mathbb{R}\right)$.
- Đường thẳng d đi qua hai điểm *A, B*: Một vectơ chỉ phương của *d* là $\overrightarrow{AB}$.
- Đường thẳng d đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và song song với đường thẳng Δ cho trước: Vì $d//\Delta$ nên vectơ chỉ phương của Δ cũng là vectơ chỉ phương của d.

• Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) cho trước: Vì $d \perp (P)$ nên vectơ pháp tuyến của (P) cũng là vectơ chỉ phương của d.

• Đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P), (Q).

Tìm toạ độ một điểm $A \in d$ bằng cách giải hệ phương trình mặt phẳng của (P), (Q) với việc chọn giá trị cho một ẩn.

– Tìm một vectơ chỉ phương của d: $\vec{a} = \left[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}\right]$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Trong không gian *Oxyz*, cho điểm $A(1;2;3)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $3x-4y+7z+2=0$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P)

Hướng dẫn giải

Gọi $\overrightarrow{u_\Delta}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ta có vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P): $\overrightarrow{n_P} = (3;-4;7)$.

Vì $\begin{cases} \Delta \perp (P) \\ A \in \Delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{n_P} = (3;-4;7) \\ A(1;2;3) \in (\Delta) \end{cases}$ nên phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2-4t \\ z = 3+7t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Ví dụ 2. Cho điểm $A(1;2;3)$ và hai mặt phẳng $(P): 2x+2y+z+1=0$, $(Q): 2x-y+2z-1=0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A song song với cả (P) và (Q)

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(P)}} = (2;2;1)$.

Mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(Q)}} = (2;-1;2)$

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_d}$.

Do đường thẳng d song song với (P) và (Q) nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_d} \perp \overrightarrow{n_{(P)}} \\ \overrightarrow{u_d} \perp \overrightarrow{n_{(Q)}} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{n_{(P)}}, \overrightarrow{n_{(Q)}}\right] = (5;-2;-6).$$

Suy ra đường thẳng d đi qua $A(1;2;3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = (5;-2;-6)$.

Phương trình chính tắc của d là $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-3}{-6}$.

Ví dụ 3. Trong không gian *Oxyz*, cho tam giác ABC với $A(1;4;-1)$, $B(2;4;3)$, $C(2;2;-1)$. Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm A và song song với BC là

Hướng dẫn giải

Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm A và song song với BC.

Ta có: $\overrightarrow{BC}=(0;-2;-4)$.

Do Δ song song với BC nên một vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}=(0;1;2)$.

Vậy phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\begin{cases}x=1\\y=4+t\\z=-1+2t\end{cases}$.

Ví dụ 4. Viết phương trình đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $x+z-5=0$ và $x-2y-z+3=0$

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=(1;0;1)$.

Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2}=(1;-2;-1)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=(2;2;-2)$.

Gọi $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của Δ thì $\vec{u}\perp\overrightarrow{n_1}$ và $\vec{u}\perp\overrightarrow{n_2}$.

Suy ra $\vec{u}$ cùng phương với $\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]$. Chọn $\vec{u}=(1;1;-1)$

Lấy $M(2;1;3)$ thuộc mặt phẳng (P) và (Q).

Đường thẳng Δ đi qua $M(2;1;3)$ có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;-1)$.

Vậy phương trình Δ là: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Dạng 2: Viết phương trình đường thẳng bằng phương pháp tham số hóa

1. Phương pháp giải

• Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$, vuông góc và cắt đường thẳng Δ.

Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M_0 trên đường thẳng Δ. Khi đó $H\in\Delta$, $\overrightarrow{M_0H}\perp\overrightarrow{u_\Delta}$. Khi đó đường thẳng d là đường thẳng đi qua M_0,H.

Cách 2: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M_0 và vuông góc với d. (Q) là mặt phẳng đi qua M_0 và chứa d. Khi đó $d=(P)\cap(Q)$

• Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và cắt hai đường thẳng d_1,d_2.

Cách 1: Gọi $M_1\in d_1\cap d$, $M_2\in d_2\cap d$. Suy ra M_0,M_1,M_2 thẳng hàng. Từ đó tìm được M_1,M_2 và suy ra phương trình đường thẳng d.

Cách 2: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M_0 và chứa d_1; (Q) là mặt phẳng đi qua M_0 và chứa d_2.

Khi đó $d=(P)\cap(Q)$. Do đó một vectơ chỉ phương của d có thể chọn là $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]$.

• Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1,d_2: Tìm các giao điểm $A=d_1\cap(P)$, $B=d_2\cap(P)$. Khi đó d chính là đường thẳng AB.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

• Đường thẳng d song song với Δ và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2: Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với Δ và chứa d_1, mặt phẳng (Q) song song với Δ và chứa d_2. Khi đó $d = (P) \cap (Q)$.

• Đường thẳng d là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau:

Cách làm: Gọi $M \in d_1,\ N \in d_2$. Từ điều kiện $\begin{cases} MN \perp d_1 \\ MN \perp d_2 \end{cases}$, ta tìm được M, N. Viết phương trình đường thẳng MN chính là đường vuông góc chung của d_1, d_2.

2. Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 1 = 0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-4}{-2} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P)

Hướng dẫn giảii

Đường thẳng d có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -2 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Lấy điểm $M = d \cap (P) \Rightarrow M(4-2t; -2+2t; -1+t) \in d$. Thay đổi tọa độ điểm M vào phương trình mặt phẳng (P) ta được: $4 - 2t - 2 + 2t + 1 - t = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Suy ra $M(0;2;1)$.

Do đó $d \cap (P) = M(0;2;1)$.

Lấy $A(4;-2;-1) \in d$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P).

Đường thẳng AH đi qua $A(4;-2;-1)$ và nhận $\overrightarrow{n_{(P)}} = (1;1;-1)$ làm vectơ chỉ phương nên AH có phương trình là $\begin{cases} x = 4 + t_1 \\ y = -2 + t_1 \\ z = -1 - t_1 \end{cases} (t_1 \in \mathbb{R})$.

Suy ra $H(4 + t_1; -2 + t_1; -1 - t_1)$.

Thay tọa độ H vào phương trình mặt phẳng (P) được

$$4 + t_1 - 2 + t_1 + 1 + t_1 - 1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -\frac{2}{3} \Rightarrow H\left(\frac{10}{3}; -\frac{8}{3}; -\frac{1}{3}\right).$$

MH là hình chiếu của d lên mặt phẳng (P), MH đi qua $M(0;2;1)$ và nhận $\overrightarrow{MH} = \left(\frac{10}{3}; -\frac{14}{3}; -\frac{4}{3}\right) = -\frac{2}{3}(-5;7;2)$ là vectơ chỉ phương nên có phương trình là $\dfrac{x}{-5} = \dfrac{y-2}{7} = \dfrac{z-1}{2}$

Ví dụ 2. Cho các đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}$ và đường thẳng $d_2:\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1;0;2)$, cắt d_1 và vuông góc với d_2

Hướng dẫn giải

Gọi $I=d_1\cap\Delta$, $I(1+t,-1+2t,-t)\Rightarrow\overrightarrow{AI}=(t;2t-1;-t-2)$ là một vectơ chỉ phương của Δ.

Do $\vec{u}_{d_2}=(1;2;2)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d_2 và $\Delta\perp d_2$.

Suy ra $\overrightarrow{AI}.\vec{u}_{d_2}=0\Leftrightarrow t+2(2t-1)+2(-t-2)=0\Leftrightarrow 3t-6=0\Leftrightarrow t=2$.

Vậy $\overrightarrow{AI}=(2;3;-4)$. Phương trình đường thẳng Δ cần tìm là $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-4}$.

Ví dụ 3. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng $(P):3x+y-2z=0$ và hai đường thẳng $d_1:\frac{x+1}{-1}=\frac{y-6}{2}=\frac{z}{1}$ và $d_2:\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+4}{4}$. Viết pường thẳng vuông góc với (P) cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2

Hướng dẫn giải

$$d_1:\frac{x+1}{-1}=\frac{y-6}{2}=\frac{z}{1}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1-t\\y=6+2t\\z=t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

$M\in d_1\Leftrightarrow M(-1-t;6+2t;t)$.

$$d_2:\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+4}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-3t'\\y=2-t'\\z=-4+4t'\end{cases},\ t'\in\mathbb{R}$$

$N\in d_1\Leftrightarrow N(1-3t';2-t';-4+4t')$.

$\overrightarrow{MN}=(2+t-3t';-4-2t-t';-4-t+4t')$.

$(P):3x+y-2z=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(3;1;-2)$.

Đường thẳng (d) vuông góc với (P) cắt cả hai đường thẳng d_1 tại M và cắt d_2 tại N suy ra

$$\overrightarrow{MN}=k\vec{n}\Leftrightarrow\begin{cases}2+t-3t'=3k\\-4-2t-t'=k\\-4-t+4t'=-2k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-2\\t'=1\\k=-1\end{cases}$$

$t=-2\Rightarrow M(1;2;-2)$

Do $(d)\perp(P)$ nên $\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{n_{(P)}}$.

Phương trình đường thẳng d là $\begin{cases}x=1+3s\\y=2+s\\z=-2-2s\end{cases}$; $s\in\mathbb{R}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Chọn $s=-1\Rightarrow A(-2;1;0)\in d\Rightarrow d:\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-2}$.

Ví dụ 4. Viết phương trình đường thẳng d qua $A(1;2;3)$ cắt đường thẳng $d_1:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ và song song với mặt phẳng $(P):x+y-z-2=0$.

Hướng dẫn giải

Do $d\cap d_1=B\Rightarrow B(2m;m;m+2)\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(2m-1;m-2;m-1)$.

d song song với mặt phẳng (P) nên

$\overrightarrow{AB}.\vec{n}_{(P)}=0\Leftrightarrow 1(2m-1)+1.(m-2)-(m-1)=0\Leftrightarrow m=1\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(1;-1;0)$.

Vậy phương trình đường thẳng $\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=3\end{cases}$.

Ví dụ 5. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng $(P):2x-y+z-10=0$, điểm $A(1;3;2)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$. Tìm phương trình đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của MN.

Hướng dẫn giải

Ta có $N=\Delta\cap d\Rightarrow N(-2+2t;1+t;1-t)$.

A là trung điểm của $MN\Rightarrow M(4-2t;5-t;3+t)$.

Mà $M\in(P)$ nên tọa độ M thỏa phương trình (P), ta được:

$2(4-2t)-(5-t)+(3+t)-10=0\Leftrightarrow t=-2\Rightarrow N(-6;-1;3),M(8;7;1)$.

Suy ra $\overrightarrow{MN}=(14;8;-2)$.

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm M và N nên có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{NM}=(7;4;-1)$

nên có phương trình là $\dfrac{x+6}{7}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Dạng 3: Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

1. Phương pháp giải

Trong không gian *Oxyz*, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ đi qua $M_1(x_0;y_0;z_0)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(a;b;c)$ và $d_2:\dfrac{x-x_0'}{a'}=\dfrac{y-y_0'}{b'}=\dfrac{z-z_0'}{c'}$ đi qua $M_2(x_0';y_0';z_0')$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(a';b';c')$.

Để xét vị trí tương đối của d_1 và d_2, ta sử dụng phương pháp sau:

*** Nếu $\vec{u},\vec{u'}$ cùng phương**

d // d' $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = k\vec{u'} \\ M_0 \notin d' \end{cases}$

d ≡ d' $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = k\vec{u'} \\ M_0 \in d' \end{cases}$

d song song d' $\Leftrightarrow$ Hệ phương trình vô nghiệm

d trùng d' $\Leftrightarrow$ Hệ phương trình có vô số nghiệm

*** $\vec{u}, \vec{u'}$ Không cùng phương**

$$\begin{cases} x_o + a_1 t = x_o' + a_1' t' \\ y_o + a_2 t = y_o' + a_2' t' \\ z_0 + a_3 t = z_o' + a_3' t' \end{cases}$$

d chéo d' $\Leftrightarrow$ Hệ phương trình vô nghiệm

d cắt d' $\Leftrightarrow$ Hệ phương trình có một nghiệm

2. Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x = 2 - 2t' \\ y = -2 + t' \\ z = 1 + 3t' \end{cases}$$

Tìm tọa độ giao điểm M của d và d'.

Hướng dẫn giải

Tọa độ giao điểm M của d và d' ứng với t và t' là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1 + t = 2 - 2t' \\ 2 + 3t = -2 + t' \\ 3 - t = 1 + 3t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + 2t' = 1 \\ 3t - t' = -4 \\ t + 3t' = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t' = 1 \end{cases}.$$

Vậy $M = (0; -1; 4)$.

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz* cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-2}$, $d_2: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng đã cho.

Lời giải

$d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-2} \Rightarrow \vec{u_1} = (2; 1; -2)$; $d_2: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2} \Rightarrow \vec{u_2} = (-2; -1; 2)$

$\vec{u_1} = -\vec{u_2} \Rightarrow d_1 // d_2 \vee d_1 \equiv d_2$

Điểm $M(1; 0; -2) \in d_1$; $M \notin d_2$ nên $d_1 // d_2$

Dạng 4: Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

1. Phương pháp giải

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}=(A;B;C)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$ đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(a;b;c)$.

Để xét vị trí tương đối của d và (α) ta sử dụng phương pháp sau:

Phương pháp đại số: Xét hệ phương trình $\begin{cases}x=x_0+at & (1)\\y=y_0+bt & (2)\\z=z_0+ct & (3)\\Ax+By+Cz+D=0 & (4)\end{cases}$

Thay (1), (2), (3) vào (4), ta được

$A(x_0+at)+B(y_0+bt)+C(z_0+ct)+D=0(*)$

+) Nếu phương trình (*) vô nghiệm t thì $d//(\alpha)$.

+) Nếu phương trình (*) có nghiệm t duy nhất thì d cắt (α).

+) Nếu phương trình (*) có vô số nghiệm t thì $d\subset(\alpha)$.

Chú ý: Để tìm điểm chung của đường thẳng d và mặt phẳng (α) ta giải phương trình (*), sau đó thay giá trị t vào phương trình tham số của d để tìm $(x;y;z)$

Phương pháp hình học

- Nếu $\begin{cases}\overrightarrow{u_d}\perp\overrightarrow{n_\alpha}\\M(x_0;y_0;z_0)\in(\alpha)\end{cases}$ thì $d\subset(\alpha)$.
- Nếu $\begin{cases}\overrightarrow{u_d}\perp\overrightarrow{n_\alpha}\\M(x_0;y_0;z_0)\notin(\alpha)\end{cases}$ thì $d//(\alpha)$.
- Nếu $\overrightarrow{u_d}$ và $\overrightarrow{n_\alpha}$ cùng phương $\Leftrightarrow\overrightarrow{u_d}=k.\overrightarrow{n_\alpha}$ với $k\neq0$ thì $d\perp(\alpha)$.

Nếu $\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_\alpha}\neq0$; $\overrightarrow{u_d}$ và $\overrightarrow{n_\alpha}$ không cùng phương thì d cắt (α).

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Tọa độ giao điểm M của đường thẳng $d:\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P):3x+5y-z-2=0$

Hướng dẫn giải

Gọi $M(4t+12;3t+9;t+1)\in d$.

Ta có $M\in(P)\Rightarrow 3(4t+12)+5(3t+9)-(t+1)-2=0\Leftrightarrow t=-3$.

Suy ra $M(0;0;-2)$.

Ví dụ 2. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng $(P):3x-3y+2z-6=0$.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. d cắt và không vuông góc với (P).

B. d song song với (P).

C. d vuông góc với (P).

D. d nằm trong (P).

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đường thẳng d nhận $\vec{u}=(1;-3;-1)$ làm một vectơ chỉ phương.

Mặt phẳng (P) nhận $\vec{n}=(3;-3;2)$ làm một vectơ pháp tuyến.

Do $\vec{u}.\vec{n}\neq 0$ và hai vectơ này không cùng phương nên đường thẳng d cắt và không vuông góc với (P).

Ví dụ 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng có phương trình $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x+my+(m^2-1)z-7=0$ với m là tham số thực. Tìm m sao cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (P).

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;1;-1)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;m;m^2-1)$.

$$d//(P)\Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{n}\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{n}=0\Leftrightarrow 1+m-m^2+1=0\Leftrightarrow m^2-m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=2\end{array}\right.$$

Thử lại ta thấy với $m=-2$ thì $d\subset(P)$ (loại). Vậy $m=-1$.

Ví dụ 4. Trong không gian *Oxyz*, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha):x-y+2z-5=0$, mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $d//(\alpha)$.

B. $d\subset(\alpha)$.

C. d cắt (α) và không vuông góc với (α).

D. $d\perp(\alpha)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=2+4t\\z=3+t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$.

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x=1+2t & (1) \\ y=2+4t & (2) \\ z=3+t & (3) \\ x-y+2z-5=0 & (*) \end{cases}$

Thay (1), (2), (3) vào (*) ta được $1+2t-(2+4t)+2(3+t)-5=0$.

Phương trình này có vô số nghiệm.

Do đó, đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (α).

Dạng 4: Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

1. Phương pháp giải

Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

Trong không gian *Oxyz*, cho đường thẳng và mặt cầu có phương trình lần lượt là:

$d:\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ và $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Để xét vị trí tương đối của d và (α) ta sử dụng phương pháp sau:

Phương pháp đại số

thay x, y, z từ phương trình tham số của d vào phương trình (S)*, khi đó ta được phương trình bậc hai theo* t. Biện luận số giao điểm của (d) *và* (S) *theo số nghiệm của phương trình bậc hai theo* t .

Chú ý: *Để tìm điểm chung của đường thẳng và mặt cầu ta giải phương trình bậc hai theo* t*, sau đó thay giá trị của* t *vào phương trình tham số của d để tìm* $(x;y;z)$.

Phương pháp hình học

Bước 1: Tìm khoảng cách từ tâm I của (S) đến d .

Bước 2:

+ Nếu $d(I,d)>R$ thì d không cắt (S).

+ Nếu $d(I,d)=R$ thì d tiếp xúc (S).

+ Nếu $d(I,d)<R$ thì d cắt (S).

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z+2)^2=25$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=2+3t \\ z=-3+2t \end{cases}$. Chứng minh d luôn cắt (S) tại hai điểm phân biệt

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-2)$ và bán kính $R=5$.

Đường thẳng d đi qua $M(-2;2;-3)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;3;2)$.

Ta có $h=d(I,d)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=3$.

Vì $h<R$ nên d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt.

Ví dụ 2: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z+2)^2=17$ cắt trục Oz tại hai điểm A,B. Tìm độ dài đoạn AB.

Hướng dẫn giải

Gọi M là giao điểm của (S) với trục Oz.

Ta có $M\in Oz$ nên $M(0;0;t)$.

Mà $M\in(S)$ nên $0^2+0^2+(t+2)^2=17$

$\Leftrightarrow(t+2)^2=17\Leftrightarrow|t+2|=\sqrt{17}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2-\sqrt{17}\\t=-2+\sqrt{17}\end{array}\right.$.

Suy ra tọa độ các giao điểm là $A\left(0;0;-2-\sqrt{17}\right)$, $B\left(0;0;-2+\sqrt{17}\right)\Rightarrow AB=2\sqrt{17}$.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{a}=(4;-6;2)$.Phương trình tham số của Δ là

A. $\begin{cases}x=-2+4t\\y=6t\\z=1+2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2+2t\\y=-3t\\z=-1+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=4+2t\\y=-6\\z=2+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-2+2t\\y=3t\\z=1+t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

$\vec{a}=(4;-6;2)=2(2;-3;1)$ \

Do đó đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-3;1)$. Vậy phương trình tham số của Δ đi qua $M(2;0;-1)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-3;1)$ là: $\begin{cases}x=2+2t\\y=-3t\\z=-1+t\end{cases}$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;-2;1)$, $N(0;1;3)$. Phương trình đường thẳng qua hai điểm M, N là

A. $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{2}$. **B.** $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$.

C. $\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}$. **D.** $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{1}$.

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{MN}=(-1;3;2)$.

Đường thẳng MN qua N nhận $\overrightarrow{MN}=(-1;3;2)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình $\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}$.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình tham số trục Oz là

A. $z=0$. **B.** $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=0\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Trục Oz đi qua gốc tọa độ $O(0;0;0)$ và nhận vectơ đơn vị $\vec{k}=(0;0;1)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình tham số $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=t\end{cases}$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3),B(3;4;1),C(-5;2;-4)$. Đường thẳng di qua A và song song với đường thẳng BC có phương trình

A. $\frac{x-2}{-8}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-5}$. **B.** $\frac{x-2}{-8}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-5}$.

C. $\frac{x-2}{-8}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-5}$. **D.** $\frac{x-2}{-8}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-5}$.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{BC}=(-8;-2;-5)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng qua A và song song với đường thẳng BC.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases}x=2+2t\\y=-3t\\z=-3+5t\end{cases};t\in\mathbb{R}.$

Khi đó, phương trình chính tắc của d là

A. $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}$. **B.** $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-3}{5}$.

C. $x-2=y=z+3$. **D.** $x+2=y=z-3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình đường thẳng d: $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-3+5t \end{cases}$ đi qua điểm $A(2;0;-3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-3;5)$ nên có phương trình chính tắc là $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}$.

Câu 5: Trong hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+2}{3}$. Phương trình nào sau đây là phương là phương trình tham số của d ?

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=2-t \\ z=-2+3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=1+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=-2+3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1 \\ y=2+t \\ z=1-t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d có một VTCP $\vec{u}(1;-2;3)$ và đi qua $M(1;2;-2)$.

Vậy đường thẳng d có phương trình tham số là $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=-2+3t \end{cases}$.

Câu 6: Phương trình tham số đường thẳng qua $I(-1,5,2)$ và song song với trục $x'Ox$ là

A. $\begin{cases} x=t-1 \\ y=5 \\ z=2 \end{cases};t\in\mathbb{R}$. **B.** $\begin{cases} x=-m \\ y=5m \\ z=2m \end{cases};m\in\mathbb{R}$. **C.** $\begin{cases} x=-2t \\ y=10t \\ z=4t \end{cases};t\in\mathbb{R}$. **D.** Cả A và C

Lời giải

Chọn A

$(D)//x'Ox \Rightarrow$ Vectơ chỉ phương của $(D):\vec{e_1}=(1,0,0)$

$\Rightarrow (D)\begin{cases} x=t-1 \\ y=5 \\ z=2 \end{cases};t\in\mathbb{R}$

Câu 7: Viết phương trình tham số của đường thẳng (D) qua $E(2,-1,-3)$ và vuông góc với hai đường thẳng $(D_1):\frac{x-1}{3}=y-1=\frac{z+2}{2}$; $(D_2):\frac{x}{2}=\frac{y+3}{4}=2-z$.

A. $\begin{cases} x=2-7t \\ y=t-1 \\ z=3+10t \end{cases};t\in\mathbb{R}$. **B.** $\begin{cases} x=2+7t \\ y=-1-t \\ z=3-10t \end{cases};t\in\mathbb{R}$.

C. $\begin{cases} x=2+8t \\ y=7t-1 \\ z=3+10t \end{cases} ; t\in\mathbb{R}.$ **D.** $\begin{cases} x=2-9m \\ y=7m-1 \\ z=10m-3 \end{cases} ; m\in\mathbb{R}.$

Lời giải

Chọn D

Hai vectơ chỉ phương của (D_1) và $(D_2): \vec{a}=(3,1,2); \vec{b}=(2,4,-1)$

Một vectơ chỉ phương của $(D): \vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(-9,7,10)$

$\Rightarrow (D): x=2-9t; y=7t-1; z=10t-1; t\in\mathbb{R}$

Câu 8: Cho tam giác ABC có $A(1,2,-3)$; $B(2,-1,4)$; $C(3,-2,5)$. Viết phương trình tham số của trung tuyến AM:

A. $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2-7t \\ z=15t-3 \end{cases} ; t\in\mathbb{R}.$ **B.** $\begin{cases} x=1-3m \\ y=2-7m \\ z=-3-15m \end{cases} ; m\in\mathbb{R}.$

C. $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+7t \\ z=-3+15t \end{cases} ; t\in\mathbb{R}.$ **D.** $\begin{cases} x=1+3m \\ y=2+7m \\ z=-3-15m \end{cases} ; m\in\mathbb{R}$

Lời giải

Chọn A

Trung điểm M của BC: $M\left(\frac{5}{2},-\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)$

Một vecto chỉ phương của AM: $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{3}{2},-\frac{7}{2},\frac{15}{2}\right)=\frac{1}{2}(3,-7,15)$

$\Rightarrow AM: x=1+3t;\ y=2-7t;\ z=15t-3;\ t\in\mathbb{R}$

Câu 9: Hai đường thẳng (D): $\frac{x-1}{2}=y+3=\frac{z-2}{3}$; (d): $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+4}{4}$

A. Song Song. **B.** Trùng nhau. **C.** Chéo nhau. **D.** Cắt nhau.

Lời giải

Chọn C

$A(1,-3,2)\in(D)$ và (D) có vecto chỉ phương $\vec{a}=(2,1,3)$

$B(-2,1,-4)\in(d)$ và (d) có vecto chỉ phương $\vec{b}=(3,2,4)$

$\overrightarrow{AB}=(-3,4,-6)\Rightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right].\overrightarrow{AB}=(-2,1,1).(-3,4,-6)=4\neq 0$

$\Rightarrow (D)$ và (d) chéo nhau.

Câu 10: Hai đường thẳng

$(D): x=2t+3;\ y=t+1;\ z=3t-2;\quad (d): x=4t-1;\ y=2t-5;\ z=6t+1;\ t\in\mathbb{R}$

A. Song song. **B.** Chéo nhau. **C.** Cắt nhau. **D.** Trùng nhau.

Lời giải

Chọn A

(D) qua $M(3,1,-2)$ và có vecto chỉ phương $\vec{a}=(2,1,3)$

(d) qua $M(-1,-5,1)$ và có vecto chỉ phương $\vec{b}=(4,2,6)=2(2,1,3)$

$\Rightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Rightarrow (D)$ và (d) cùng phương.

$\overrightarrow{MN}=(-4,-6,3)$ không cùng phương với $\vec{a} \Rightarrow (D)//(d)$

Câu 11: Đường thẳng $(D):\dfrac{x-1}{2}=1-y=\dfrac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P):x+2y-4z-23=0$:

A. Song song. **B.** Vuông góc. **C.** Cắt nhau. **D.** chứa .

Lời giải

Chọn C

(D) có vecto chỉ phương $\vec{a}=(2,-1,3)$

(P) có pháp vecto: $\vec{n}=(1,2,-4)$

$\Rightarrow \vec{a}.\vec{n}=2.1-1.2+3(-4)=-12\neq 0 \Rightarrow (D)$ và (P) cắt nhau.

Chú ý: nếu đòi hỏi hình tọa độ giao điểm thì viết phương trình tham số của $(d):x=2t+1;y=1-t;z=3t-2$. Thay x,y,z vào phương trình (P) ta có $t=-1\Rightarrow$ Tọa độ giao điểm $M(-1,2,-5)$.

Câu 12: Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng sau song song?

$(D):\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{m}=\dfrac{z-1}{m-2}$; $(d):x-3=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+2}{2}$

A. 0. **B.** 2. **C.** $m\neq 0,\ m\neq 2$. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

(D) qua $(-1,3,1)$ và có vecto chỉ phương $\vec{a}=(2,m,m-2); m\neq 0$ và $m\neq 2$

(d) qua $B(3,-1,2)$ và có vecto chỉ phương $\vec{b}=(1,3,2)$

$(D)//(d)\Leftrightarrow 2=\dfrac{m}{3}=\dfrac{m-2}{2}$ và $A\notin(d)\Leftrightarrow m=6$

Câu 13: Với giá trị nào của m và n thì đường thẳng $(D):\begin{cases}x=3+4t\\y=1-4t\\z=t-3\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ chứa trong mặt phẳng $(P):(m-1)x+2y-4z+n-9=0$?

A. $m=4;\ n=14$. **B.** $m=-4;\ n=-10$.

C. $m=3;\ n=-11$. **D.** $m=4;\ n=-14$.

Lời giải

Chọn D

(D) qua $A(3,1,-3)$ và có vecto chỉ phương $\vec{a}=(4,-4,1)$

Vecto pháp tuyến của $(P):(m-1,2,-4)$

$$(D)\subset(P)\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}.\vec{n}=0\\A\in(P)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=4\\3m+n=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=4\\n=-14\end{cases}$$

Câu 14: Với giá trị nào của m thì đường thẳng $(D):\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{m}=\dfrac{z-1}{m-2}$ vuông góc với mặt phẳng $(P):x+3y+2z=2$

A. 1. **B.** 5. **C.** 6. **D.** -7.

Lời giải

Chọn C

Vecto chỉ phương của $(D):\vec{a}=(2,m,m-2)$

Vecto pháp tuyến của $(P):\vec{n}=(1,3,2)$

$(D)\perp(P)\Leftrightarrow\vec{a}$ và $\vec{n}$ cùng phương: $2=\dfrac{m}{3}=\dfrac{m-2}{2}\Leftrightarrow m=6$

Câu 15: Tính góc của hai đường thẳng $(D):\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z+2}{4}$ và $(d):x=3+2t;\ y=2t-4;\ z=2\ (t\in\mathbb{R})$.

A. 75^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 45^0.

Lời giải

Chọn D

(D) và (d) có vec-tơ chỉ phương $\vec{a}=(2,4,4);\vec{b}=(2,2,0)$

$$\Rightarrow\cos\alpha=\frac{|2.2+4.2+4.0|}{6.2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\alpha=45^0.$$

Câu 16: Hai đương thẳng $(d_1):\begin{cases}x=2t-3\\y=3t-2\\z=4t+6\end{cases}$ và $(d_2):\begin{cases}x=5+t'\\y=-1-4t'\\z=20+t'\end{cases}$ cắt nhau tại C.

Tọa độ điểm C là:

A. $C(3,-7,18)$. **B.** $C(3,7,18)$. **C.** $C(3,-7,-18)$. **D.** $C(-3,7,18)$.

Lời giải

Chọn B

Hệ phương trình $\begin{cases}2t-3=5+t'\\3t-2=-1-4t'\\4t+6=20+t'\end{cases}$ có nghiệm $t=3,t'=-2$.

Từ đó có $C(3,7,18)$.

Câu 17: Cho hai đường thẳng: $(d_1):\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-9}{-1}$ và $(d_2):\begin{cases}\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}\end{cases}$.

Chọn câu trả lời đúng:

A. (d_1) và (d_2) cắt nhau. **B.** (d_1) và (d_2) vuông góc nhau.

C. (d_1) và (d_2) trùng nhau. **D.** (d_1) và (d_2) chéo nhau.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $(d_1)\in(d_1)$ cho $A(7,3,7)$ và vectơ chỉ phương của (d_1):

$\vec{a}=(1,2,-1)$.

Phương trình (d_2) cho $B(3,1,1)\in(d_2)$ và vectơ chỉ phương của (d_2):

$\vec{b}=(-7,2,3)$.

$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(8,4,16)$; $\overrightarrow{AB}=(-4,-2,-8)$.

$\left[\vec{a},\vec{b}\right].\overrightarrow{AB}=-32-8-128\neq 0\Leftrightarrow (d_1)$ và (d_2) chéo nhau.

Câu 18: Cho điểm $A(3,2,1)$ và đương thẳng $(d):\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{4}=z+3$ .Mặt phẳng (α) chứa điểm A và (d) có phương trình tổng quát là:

A. $14x-15y-8z+24=0$.. **B.** $14x+5y-8z-24=0$..

C. $14x-5y+8z+24=0$.. **D.** $14x-5y-8z-24=0$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình (d) cho $B(0,0,-3)\in(d)$ và vectơ chỉ phương của (d):

$\vec{a}=(2,4,1)$.

$\overrightarrow{AB}=(-3,-2,-4)$; $\left[\overrightarrow{AB},\vec{a}\right]=(14,-5,-8)$

Gọi $M(x,y,z)\in(\alpha)$, $\overrightarrow{BM}=(x,y,z+3)$.

$\left[\overrightarrow{AB},\vec{a}\right].\overrightarrow{BM}=0\Leftrightarrow 14x-5y-8z-24=0$ là phương trình của (α).

Câu 19: Cho đường thẳng $(d):\begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=3t\end{cases}$ và điểm $I(2,-1,3)$.Điểm K đối xứng với điểm I qua đường thẳng (d) có tọa độ:

A. $K(4,-3,-3)$.. **B.** $K(-4,3,-3)$.. **C.** $K(4,-3,3)$.. **D.** $K(4,3,3)$.

Lời giải

Chọn D

(d) có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(2,-1,3)$.Xét mặt phẳng $(\alpha):2x-y+3z+D=0$.

$I\in(\alpha)$ nên $D=-14$

$(\alpha):2x-y+3z-14=0$. Thế x,y,z theo t vào phương trình (α) được

$t=1\Rightarrow(d)$ cắt (α) tại $M(3,1,3)$.

M là trung điểm của IK nên $K(4,3,3)$

Câu 20: Cho ba điểm $A(-1,2,3),B(-2,1,1),C(5,0,0)$.Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB. Tọa độ điểm H là:

A. $H\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{-7}{3}\right)$.

B. $H\left(\frac{-4}{3},\frac{-5}{3},\frac{-7}{2}\right)$.

C. $H\left(\frac{-4}{3},\frac{-5}{3},\frac{7}{3}\right)$.

D. $H\left(\frac{-4}{3},\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Đương thẳng AB có phương trình tham số $\begin{cases}x=-1+t\\y=2+t\\z-3+2t\end{cases}$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa C và vuông góc với AB. Phương trình (α) có dạng:

$x+2y+2z+D=0$.

$C\in(\alpha)\Rightarrow D=-5$.

Phương trình $(\alpha):x+y+2z-5=0$.

Thế x,y,z theo t từ phương trình tham số của AB được $t=-\frac{1}{3}$ $\Rightarrow H$ có tọa độ:

$H\left(\frac{-4}{3},\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right)$.

.

Câu 21: Cho điểm $A(2,3,5)$ và mặt phẳng $(P):2x+3y+z-17=0$. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (P).Tọa độ điểm A' là:

A. $A'\left(\frac{12}{7},\frac{18}{7},\frac{34}{7}\right)$.

B. $A'\left(\frac{12}{7},-\frac{18}{7},\frac{34}{7}\right)$.

C. $A'\left(\frac{12}{7},-\frac{18}{7},-\frac{34}{7}\right)$.

D. $A'\left(-\frac{12}{7},\frac{18}{7},-\frac{34}{7}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình tham số của đường thẳng (d) qua A vuông góc với $(P):\begin{cases}x=2+2t\\y=3+3t\\z=5+t\end{cases}$.Thế x,y,z theo t vào phương trình của (P) được $t=-\frac{1}{14}$.

Thế $t=-\frac{1}{14}$ vào phương trình của (d) được guao điểm I của (d)và (P):

$I\left(\frac{26}{14},\frac{39}{14},\frac{69}{14}\right)$.

I là trung điểm của AA' nên:.

$\Rightarrow A'\left(\frac{12}{7},\frac{18}{7},\frac{34}{7}\right)$.

Câu 22: Cho ba điểm $A(-4,4,0),B(2,0,4),C(1,2,-1)$.Khoảng cách từ C đến đường thẳng AB là

A. $\sqrt{13}$. **B.** $\sqrt{17}$. **C.** $\sqrt{26}$. **D.** $\sqrt{19}$

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{CA}=(-5,2,1);\overrightarrow{CB}=(1,-2,5);\overrightarrow{AB}=(6,-4,4)$.

Khoảng cách cần tìm bằng: $\frac{\left|\left[\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right]\right|}{\overrightarrow{AB}}=\frac{2\sqrt{36+169+16}}{2\sqrt{9+4+4}}=\sqrt{13}$..

Câu 23: Cho hai đường thẳng: $(d_1):\frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3},(d_2):\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$

và mặt phẳng $(\alpha):x+y+z+3=0$. Hình chiếu của (d_2) theo phương của (d_1) lên mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát:

A. $\begin{cases}2x-y+4z+53=0\\x+y+z+3=0\end{cases}$.. **B.** $\begin{cases}2x+y-4z+53=0\\x+y+z+3=0\end{cases}$..

C. $\begin{cases}2x+y+4z-53=0\\x+y+z+3=0\end{cases}$.. **D.** $\begin{cases}2x-y-4z+53=0\\x+y+z+3=0\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Vectơ chỉ phương của $(d_1):\vec{a}=(-7,2,3)$. Vectơ chỉ phương của $(d_2):\vec{b}=(1,2,-1)$.

Phương trình của mặt phẳng chứa (d_2) và có phương của (d_1) có dạng:

$2x+y+4z+D=0$.

Điểm $A(7,3,9)$ thuộc mặt phẳng này $\Rightarrow D=-53$.

Giao tuyến của mặt phẳng này với mặt phẳng (α) là hình chiếu của (d_2) theo phương của (d_1) lên $(\alpha): \begin{cases} 2x+y+4z-53=0 \\ x+y+z+3=0 \end{cases}$

Câu 24. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;-2)$ và đường thẳng Δ có phương trình là $\frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{2}$. Phương trình mặt cầu tâm A, cắt Δ tại hai điểm B và C sao cho $BC=8$ là

A. $(x+2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=16$. **B.** $x^2+y^2+(z+2)^2=25$.

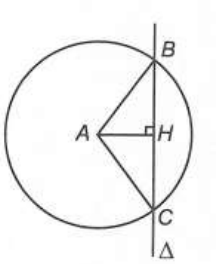
C. $(x+2)^2+y^2+z^2=25$. **D.** $x^2+y^2+(z+2)^2=16$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi (S) là mặt cầu tâm $A(0;0;-2)$ và có bán kính R.

Đường thẳng Δ đi qua $M(-2;2;-3)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;3;2)$.



Gọi H là trung điểm BC nên $AH \perp BC$.

Ta có $AH=d(A,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{MA},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}$.

Với $\begin{cases} \overrightarrow{MA}=(2;-2;1) \\ \vec{u}=(2;3;2) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{MA},\vec{u}\right]=(-7;-2;10) \Rightarrow AH=\dfrac{\sqrt{(-7)^2+(-2)^2+10^2}}{\sqrt{2^2+3^2+2^2}}=3$.

Bán kính mặt cầu (S) là: $R=AB=\sqrt{AH^2+HB^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $x^2+y^2+(z+2)^2=25$.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(P): 11x+my+nz-16=0$. Biết $\Delta \subset (P)$, tính giá trị của $T=m+n$.

A. $T=2$. **B.** $T=-2$. **C.** $T=14$. **D.** $T=-14$.

Lời giải

Cách 1: Lấy $\begin{cases} A(0;2;-1)\in\Delta \\ B(-2;3;2)\in\Delta \end{cases}$

Mà $\Delta \subset (P) \Rightarrow \begin{cases} A\in(P) \\ B\in(P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-n-16=0 \\ 11.(-2)+3m+2n-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=10 \\ n=4 \end{cases}$

$\Rightarrow T=m+n=14$.

Cách 2: Đường thẳng Δ đi qua $A(0;2;-1)$ có VTCP $\vec{u}=(-2;1;3)$.

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(11;m;n)$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

$\Delta \subset (P) \Rightarrow \begin{cases} A \in (P) \\ \vec{n}.\vec{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - n - 16 = 0 \\ -22 + m + 3n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 10 \\ n = 4 \end{cases}$.

$\Rightarrow T = m + n = 14$.

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng d: $\frac{x-1}{m} = \frac{y+2}{2m-1} = \frac{z+3}{2}$ và mặt phẳng (P): x+3y-2z+1=0. Với giá trị nào của m thì đường thẳng d vuông góc mặt phẳng (P).

A. m = 2. **B.** m = -1. **C.** m = 1. **D.** m = 0.

Lời giải

Yêu cầu bài toán tương đương $\overrightarrow{u_d}(m; 2m-1; 2)$ cùng phương $\overrightarrow{n_P}(1; 3; -2)$ hay

$\frac{m}{1} = \frac{2m-1}{3} = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow m = -1$

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1,-2,3)$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$. Biết rằng mặt cầu (S) tiếp xúc với đường thẳng (d). Viết phương trình mặt cầu (S):

A. $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = \frac{20}{9}$.

B. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = \frac{20}{9}$.

C. $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = \frac{25}{9}$.

D. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = \frac{25}{9}$.

Lời giải

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với đường thẳng (d), nên bán kính mặt cầu (S) là:

$R = d(I,d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{u_d}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|}$

với $M(1;-1;1) \in (d)$, $\overrightarrow{IM} = (0;1;-2)$ và $\overrightarrow{u_d} = (2;-1;2)$ là một VTCP của đường thẳng (d).

Ta có $\left[\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{u_d}\right] = (0;-4;-2) \Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{u_d}\right]\right| = \sqrt{20}$, $\left|\overrightarrow{u_d}\right| = 3$. Suy ra $R = \frac{\sqrt{20}}{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = \frac{20}{9}$.

Dạng 5: Bài tập dành cho học sinh điểm 8+,9+

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;3;3)$, phương trình đường trung tuyến kẻ từ B là $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{-1}$, phương trình đường phân giác trong của góc C là $\frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng AB có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_3=(2;1;-1)$. **B.** $\vec{u}_2=(1;-1;0)$. **C.** $\vec{u}_4=(0;1;-1)$. **D.** $\vec{u}_1=(1;2;1)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình tham số của đường phân giác trong góc C là $CD:\begin{cases}x=2+2t\\y=4-t\\z=2-t\end{cases}$.

Gọi $C=(2+2t;4-t;2-t)$, suy ra tọa độ trung điểm M của AC là $M=\left(2+t;\frac{7-t}{2};\frac{5-t}{2}\right)$. Vì $M\in BM$ nên:

$$\frac{(2+t)-3}{-1}=\frac{\left(\frac{7-t}{2}\right)-3}{2}=\frac{\left(\frac{5-t}{2}\right)-2}{-1}\Leftrightarrow\frac{t-1}{-1}=\frac{1-t}{4}=\frac{1-t}{-2}\Rightarrow t=1.$$

Do đó $C=(4;3;1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc CD là

$2.(x-2)-1.(y-3)-1.(z-3)=0$ hay $2x-y-z+2=0$.

Tọa độ giao điểm H của (P) và CD là nghiệm $(x;y;z)$ của hệ

$$\begin{cases}x=2+2t\\y=4-t\\z=2-t\\2x-y-z+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2+2t\\y=4-t\\z=2-t\\2(2+2t)-(4-t)-(2-t)+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=4\\z=2\\t=0\end{cases}\Rightarrow H(2;4;2).$$

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua đường phân giác CD, suy ra H là trung điểm AA', bởi vậy:

$$\begin{cases}x_{A'}=2x_H-x_A=2.2-2=2\\y_{A'}=2y_H-y_A=2.4-3=5\\x_{A'}=2z_H-z_A=2.2-3=1\end{cases}\Rightarrow A'(2;5;1).$$

Do $A'\in BC$ nên đường thẳng BC có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{CA'}=(-2;2;0)=2(-1;1;0)$, nên phương trình đường thẳng BC là $\begin{cases}x=4-t\\y=3+t\\z=1\end{cases}$.

Vì $B=BM\cap BC$ nên tọa độ B là nghiệm $(x;y;z)$ của hệ

$\begin{cases} x=4-t \\ y=3+t \\ z=1 \\ \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-3}{2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=5 \\ z=1 \\ t=2 \end{cases} \Rightarrow B(2;5;1) \equiv A'$.

Đường thẳng AB có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}=(0;2;-2)=2(0;1;-1)$; hay $\vec{u}_4=(0;1;-1)$ là một véc-tơ chỉ của phương đường thẳng AB.

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;-4), B(-3;5;2)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho biểu thức MA^2+2MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(-1;3;-2)$. **B.** $M(-2;4;0)$.

C. $M(-3;7;-2)$. **D.** $M\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{7}{2};-1\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;3;6) \Rightarrow$ một véc tơ chỉ phương của đường thẳng AB là $\vec{u}=(-1;1;2)$.

Phương trình của đường thẳng AB là $\begin{cases} x=-t \\ y=2+t \\ z=-4+2t \end{cases}$

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Rightarrow I(-2;4;0)$.

$MA^2+2MB^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=IA^2+2IB^2+3MI^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}\right)$

$=IA^2+2IB^2+3MI^2$.

Do A, B, I cố định nên $IA^2+2IB^2+3MI^2$ nhỏ nhất khi MI^2 nhỏ nhất hay M là hình chiếu của I trên đường thẳng AB.

Vì $M \in AB$ nên $M(-t;2+t;2t-4) \Rightarrow \overrightarrow{IM}=(2-t;t-2;2t-4)$

Ta có $IM \perp AB \Rightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow 2-t+t-2+4t-8=0 \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow M(-2;4;0)$.

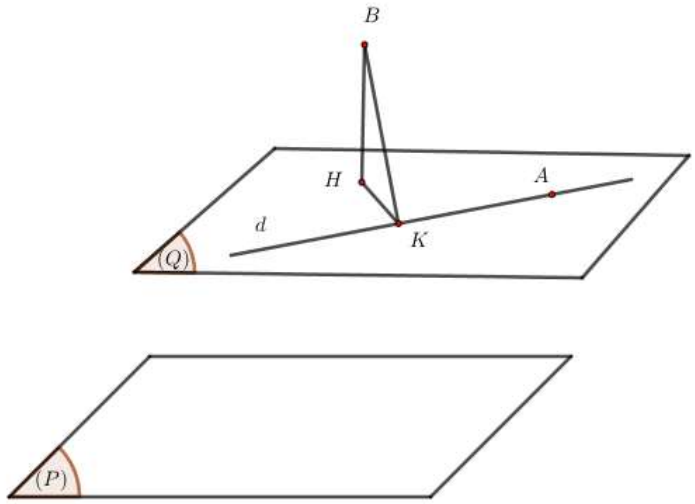
Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+2z-5=0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A, song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất.

A. $d: \dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{-2}$. **B.** $d: \dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{-11}=\dfrac{z-1}{2}$.

C. $d: \dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{2}$. **D.** $d: \dfrac{x+3}{-26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{-2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi mặt phẳng (Q) là mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (P). Khi đó phương trình của mặt phẳng (Q) là $1(x+3)-2(y-0)+2(z-1)=0$ $\Leftrightarrow x-2y+2z+1=0$.

Gọi H là hình chiếu của điểm B lên mặt phẳng (Q), khi đó đường thẳng BH đi qua $B(1;-1;3)$ và nhận $\vec{n}_{(Q)}=(1;-2;2)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình tham số là $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1-2t \\ z=3+2t \end{cases}$.

Vì $H=BH\cap(Q)\Rightarrow H\in BH\Rightarrow H(1+t;-1-2t;3+2t)$ và $H\in(Q)$ nên ta có $(1+t)-2(-1-2t)+2(3+2t)+1=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{10}{9}\Rightarrow H\left(-\dfrac{1}{9};\dfrac{11}{9};\dfrac{7}{9}\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}=\left(\dfrac{26}{9};\dfrac{11}{9};\dfrac{-2}{9}\right)=\dfrac{1}{9}(26;11;-2)$.

Gọi K là hình chiếu của B lên đường thẳng d, khi đó

Ta có $d(B;d)=BK\geq BH$ nên khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất khi $BK=BH$, do đó đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(26;11;-2)$ có phương trình chính tắc: $d:\dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{-2}$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng cắt nhau $\Delta_1:\begin{cases}x=2+t\\y=2+2t\\z=-1-t\end{cases}$, $\Delta_2:\begin{cases}x=1-t'\\y=-t'\\z=2t'\end{cases}$ $(t,t'\in\mathbb{R})$. Viết phương trình đường phân giác của góc nhọn tạo bởi Δ_1 và Δ_2.

A. $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-3}$.

B. $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$.

C. $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{3}$.

D. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$

Lời giải

Chọn A

$I(1;0;0)=\Delta_1\cap\Delta_2$.

Δ_1 và Δ_2 có VTCP lần lượt là $\vec{u_1}=(1;2;-1)$ và $\vec{u_2}=(-1;-1;2)$.

Ta có: $\cos(\vec{u_1};\vec{u_2})=\frac{\vec{u_1}.\vec{u_2}}{|\vec{u_1}|.|\vec{u_2}|}=-\frac{5}{6}<0\Rightarrow(\vec{u_1};\vec{u_2})$ là góc tù.

Gọi $\vec{u'}$ là véc tơ đối của $\vec{u_2}\Rightarrow\vec{u'}=(1;1;-2)$.

Khi đó đường phân giác của góc nhọn tạo bởi Δ_1 và Δ_2 có VTCP $\vec{u}=\vec{u_1}+\vec{u'}=(2;3;-3)$.

Vậy phương trình đường phân giác của góc nhọn tạo bởi Δ_1 và Δ_2 có dạng:

$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-3}$.

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn đường thẳng:

$(d_1):\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+1}{1}$, $(d_2):\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{1}$, $(d_3):\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1}$,

$(d_4):\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-1}$. Số đường thẳng trong không gian cắt cả bốn đường thẳng trên là:

A. 0.

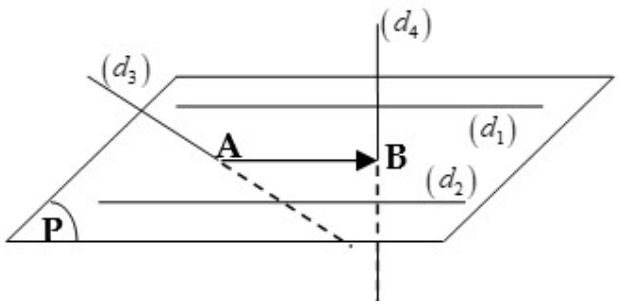
B. 2.

C. Vô số.

D. 1.

Lời giải

Chọn A



Ta có (d_1) song song (d_2), phương trình mặt phẳng chứa hai

Hai đường thẳng (d_1), (d_2) là $(P): x+y+z-1=0$.

Gọi $A=(d_3)\cap(P) \Rightarrow A(1;-1;1)$, $(A\notin(d_1), A\notin(d_2))$.

$B=(d_4)\cap(P)\Rightarrow B(0;1;0)$, $(B\notin(d_1), B\notin(d_2))$.

Mà $\overrightarrow{AB}=(-1;2;-1)$ cùng phương với véc-tơ chỉ phương của hai đường thẳng (d_1), (d_2) nên không tồn tại đường thẳng nào đồng thời cắt cả bốn đường thẳng trên.

Câu 6: Cho hai điểm $A(3;3;1)$, $B(0;2;1)$, mặt phẳng $(P): x+y+z-7=0$. Đường thẳng d nằm trên (P) sao cho mọi điểm của d cách đều hai điểm A, B có phương trình là

A. $\begin{cases} x=t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=t \\ y=7+3t \\ z=2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;-1;0)$; $I\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2};1\right)$ là trung điểm của AB và A, B nằm ở hai phía của mặt phẳng (P).

Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của AB và $d=(\alpha)\cap(P)$. Khi đó d chính là đường thẳng thuộc mặt phẳng (P) và cách đều hai điểm A,B.

Mặt phẳng (α) đi qua $I\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2};1\right)$ và có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB}=(-3;-1;0)$ là

$$-3\left(x-\frac{3}{2}\right)-\left(y-\frac{5}{2}\right)=0\Leftrightarrow 3x+y-7=0$$

Vì d là đường giao tuyến của (α) và (P) nên một véctơ chỉ phương của d là

$$\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{n_{(P)}},\overrightarrow{n_{(\alpha)}}\right]=(-1;3;-2)=-(1;-3;2).$$

Mà d đi qua $C(0;7;0)\in(\alpha)\cap(P)$. Vậy d có phương trình tham số là: $\begin{cases}x=t\\y=7-3t\\z=2t\end{cases}$ ($t\in\mathbb{R}$).

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$ và $d_2:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{7}=\dfrac{z-3}{-1}$. Đường vuông góc chung của d_1 và d_2 lần lượt cắt d_1 , d_2 tại A và B . Tính diện tích S của tam giác OAB .

A. $S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $S=\sqrt{6}$. **C.** $S=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $S=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình tham số $d_1:\begin{cases}x=1+2t_1\\y=-t_1\\z=-2+t_1\end{cases}$, $\overrightarrow{a_1}=(2;-1;1)$ là VTCP của d_1.

Phương trình tham số $d_1:\begin{cases}x=-1+t_2\\y=1+7t_2\\z=3-t_2\end{cases}$, $\overrightarrow{a_2}=(1;7;-1)$ là VTCP của d_2.

$A=d_1\cap d\Rightarrow A(1+2a;-a;-2+a)$.

$B=d_2\cap d\Rightarrow B(-1+b;1+7b;3-b)$.

$\overrightarrow{AB}=(-2+b-2a;1+7b+a;5-b-a)$

AB là đường vuông góc chung của d_1 và d_2

$$\Leftrightarrow\begin{cases}AB\perp d_1\\AB\perp d_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{a_1}=0\\\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{a_2}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}2(-2+b-2a)-(1+7b+a)+(5-b-a)=0\\(-2+b-2a)+7(1+7b+a)-(5-b-a)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-6b-6a=0\\52b+6a=0\end{cases}\Leftrightarrow a=b=0\Rightarrow\begin{cases}A(1;0;-2)\\B(-1;1;3)\end{cases}.$$

Ta có

$\overrightarrow{OA}=(1;0;-2);\overrightarrow{OB}=(-1;1;3);\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(2;-1;1)$.

Vậy $S_{OAB}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]\right|=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 8: Cho hai điểm $A(1;4;2)$, $B(-1;2;4)$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$. Tìm tọa độ điểm $M\in\Delta$ mà MA^2+MB^2 nhỏ nhất.

A. $(1;-2;0)$. **B.** $(0;-1;2)$. **C.** $(2;-3;-2)$. **D.** $(-1;0;4)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(1-t;-2+t;2t)\in\Delta$

$MA^2+MB^2=(t)^2+(6-t)^2+(2-2t)^2+(-2+t)^2+(4-t)^2+(4-2t)^2=12t^2-48t+76$

Ta có: $12t^2-48t+76=12(t-2)^2+28\geq 28$

Vậy MA^2+MB^2 nhỏ nhất bằng 28 khi $t=2$ hay $M(-1;0;4)$.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0)$, $B(-1;0;1)$ và điểm M thay đổi trên đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=MA+MB$ là

A. 4. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Phương trình tham số của đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=1+t\end{cases}$.

Do $M\in d\Rightarrow M(t;1-t;1+t)$.

Khi đó $\overrightarrow{MA}=(1-t;t;-1-t)\Rightarrow MA=\sqrt{3t^2+2}$ và

$\overrightarrow{MB}=(-1-t;-1+t;-t)\Rightarrow MB=\sqrt{3t^2+2}$.

Do vậy $T=MA+MB=2\sqrt{3t^2+2}\geq 2\sqrt{2}$. Suy ta $T_{\min}=2\sqrt{2}$ khi $t=0\Rightarrow M(0;1;1)$.

Câu 10: Cho mặt phẳng $(P):2x+2y-2z+15=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2y-2z-1=0$. Khoảng cách nhỏ nhất từ một điểm thuộc mặt phẳng (P) đến một điểm thuộc mặt cầu (S) là

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;1)$ và bán kính $R=\sqrt{3}$. Gọi H là hình chiếu của I trên (P) và A là giao điểm của IH với (S). Khoảng cách nhỏ nhất từ một điểm thuộc mặt phẳng (P) đến một điểm thuộc mặt cầu (S) là đoạn AH. $AH=d(I,(P))-R=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;-1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;0;1)$. Tìm điểm M sao cho $3MA^2+2MB^2-MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M\left(\frac{3}{4};\frac{1}{2};-1\right)$. **B.** $M\left(-\frac{3}{4};\frac{1}{2};2\right)$.

C. $M\left(-\frac{3}{4};\frac{3}{2};-1\right)$. **D.** $M\left(-\frac{3}{4};\frac{1}{2};-1\right)$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $M(x;y;z)\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AM}=(x;y;z+1)\\ \overrightarrow{BM}=(x+1;y-1;z)\\ \overrightarrow{CM}=(x-1;y;z-1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}AM^2=x^2+y^2+(z+1)^2\\ BM^2=(x+1)^2+(y-1)^2+z^2\\ CM^2=(x-1)^2+y^2+(z-1)^2\end{cases}$

$\Rightarrow 3MA^2+2MB^2-MC^2=3\left[x^2+y^2+(z+1)^2\right]+2\left[(x+1)^2+(y-1)^2+z^2\right]$

$-\left[(x-1)^2+y^2+(z-1)^2\right]$

$=4x^2+4y^2+4z^2+6x-4y+8z+6=\left(2x+\frac{3}{2}\right)^2+(2y-1)^2+(2z+2)^2-\frac{5}{4}\geq-\frac{5}{4}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=-\frac{3}{4}$, $y=\frac{1}{2}$, $z=-1$, khi đó $M\left(-\frac{3}{4};\frac{1}{2};-1\right)$.