



Phương pháp giải toán

CỰC TRỊ

MŨ – LOGARIT

Cuốn sách là sự tổng hợp và phân loại các dạng toán mũ – logarit hay và khó trong đề thi THPT Quốc Gia nhằm hướng tới các bạn học sinh có mục tiêu 9+ trong kì thi đại học

Lời giới thiệu

Trong đề thi THPT Quốc Gia thì các bài toán về cực trị nói chung luôn là các bài toán ở mức độ vận dụng và vận dụng cao và đa phần các đề đều cảm thấy khó vì không nắm được những phương pháp, những kiến thức cơ bản về bất đẳng thức hay các đánh giá thuần túy. Chính vì lí do đó mà mình đã nảy ra ý tưởng viết một số bài viết có thể giúp được các bạn hiểu được và giải quyết các dạng toán bất đẳng thức và cực trị trong các đề thi thử và đề thi THPT Quốc Gia. Cuốn sách các bạn đang đọc sẽ giới thiệu và mang tới cho các bạn những cái nhìn khác và phương pháp dạng toán về cực trị của hàm số mũ – logarit với mong muốn những ai đọc đều có thể hiểu và áp dụng cho những bài toán khác phức tạp hơn hoặc có thể phát triển thêm nhiều vấn đề khác. Ở lần tái bản đầu tiên thì đã nhận được rất nhiều ý kiến đóng góp từ bạn đọc, tốt có, góp ý có, mình cũng đã tiếp nhận những ý kiến đó và hoàn thiện tốt hơn trong lần tái bản này. Trong ebook mình có sáng tác và tự sưu tầm từ rất nhiều nguồn nên có thể sẽ có những câu hỏi chưa hay hoặc chưa phù hợp mong bạn đọc bỏ qua. Trong quá trình biên soạn không thể tránh khỏi những thiếu sót, mong bạn đọc có thể góp ý trực tiếp qua fanpage

Tạp chí và tư liệu toán học

Nguyễn Minh Tuấn

Nguyễn Mai Hoàng Anh

Fanpage. <https://www.facebook.com/OlympiadMathematical>

Bản ebook được phát hành miễn phí trên blog **Chinh phục Olympic toán**, và fanpage Tạp chí và tư liệu toán học mọi hoạt động sử dụng tài liệu vì mục đích thương mại đều không được cho phép. Xin chân thành cảm ơn bạn đọc.

Mục lục

Chương 1. Các kỹ thuật đánh giá cơ bản.	1
I. Các kiến thức cơ bản.	1
II. Các dạng toán cực trị mũ – logarit.	3
1. Kỹ thuật rút thế, đánh giá điều kiện đưa về hàm 1 biến số.	3
2. Kỹ thuật “hàm đặc trưng”.	17
3. Các bài toán liên quan tới định lý Viet.	37
4. Các bài toán đưa về đánh giá biến $\log_b a$.	45
Chương 2. Các bài toán chứa tham số.	50
Chương 3. Các kỹ thuật đánh giá nâng cao.	99
1. Sử dụng phương pháp đánh giá bất đẳng thức.	100
2. Điều kiện cần và đủ.	148
3. Kỹ thuật đánh giá miền giá nghiệm.	165
Chương 4. Các bài toán về dãy số.	175
Chương 5. Phương trình nghiệm nguyên.	185
Tài liệu tham khảo.	225

Chương 1

Các kỹ thuật đánh giá cơ bản

Các bài toán vận dụng cao mũ – logarit trong các đề thi thử THPT Quốc Gia tương đối đa dạng và phong phú với rất nhiều biến tấu và phát triển qua từng đề, từng năm. Tuy nhiên hầu hết tất cả chỉ xoay quanh các kỹ thuật cơ bản như rút thế, hàm đặc trưng, bất đẳng thức phụ cơ bản, hoặc phương pháp hình học. Vì thế trong chương đầu tiên ta sẽ tìm hiểu các dạng toán, các kỹ thuật đánh giá cơ bản thông qua những bài toán đã từng xuất hiện trong các đề thi thử trong 2 năm gần đây.

I. Các kiến thức cơ bản.

Để có thể làm tốt các bài toán ở chuyên đề này chúng ta cần phải nắm chắc được các kiến thức lý thuyết cơ bản về bất đẳng thức, điều kiện có nghiệm và biến đổi logarit sau. Đây chính là nội dung chính của chuyên đề mà mình muốn nhắc tới, một dạng toán lấy ý tưởng từ đề thi THPT Quốc Gia 2018. Trước tiên để làm tốt ta sẽ cần có một số kiến thức về bất đẳng thức và nhắc lại các kiến thức đã học sau.

Bất đẳng thức AM – GM.

- Cho 2 số thực dương a, b khi đó $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu “=” khi và chỉ khi $a = b$.
- Cho 3 số thực dương a, b, c khi đó $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$. Dấu “=” khi và chỉ khi $a = b = c$.
- Tổng quát với các số thực dương $\sum_{i=1}^n x_i \geq n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$. Dấu “=” khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.
- Dạng cộng mẫu số $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n x_i}$. Dấu “=” khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Khi cho $n = 2, n = 3$ thì ta được 2 bất đẳng thức quen thuộc
$$\begin{cases} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \geq \frac{4}{x_1 + x_2} \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \geq \frac{9}{x_1 + x_2 + x_3} \end{cases}$$

Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz.

+ Cho 2 bộ số $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ khi đó ta có $\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2$

Dấu “=” khi và chỉ khi các số lập thành các bộ số tỉ lệ.

Chú ý khi cho $n = 2, n = 3$ ta được 2 bất đẳng thức quen thuộc

$$+ (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2)^2$$

$$+ (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2$$

$$+ \text{Dạng cộng mẫu Engel tổng quát } \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^n b_i}. \text{ Trong đó dạng } \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b} \text{ là dạng ta hay}$$

gặp nhất

Bất đẳng thức trên còn có thể gọi là bất đẳng thức Svachơ.

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$. Riêng dạng cộng mẫu thì cần thêm điều kiện là $b_1, b_2, \dots, b_n > 0$

Bất đẳng thức Minkowski.

Tổng quát. Cho số thực $r \geq 1$ và mọi số dương $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ thì ta có.

$$\left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^r \right]^{\frac{1}{r}} \leq \left[\sum_{i=1}^n a_i^r \right]^{\frac{1}{r}} + \left[\sum_{i=1}^n b_i^r \right]^{\frac{1}{r}}$$

Ở đây chỉ xét trường hợp cho 2 bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Khi đó ta có.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2}$$

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

Dạng mà ta hay gặp nhất $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$. Bất đẳng thức này còn gọi là bất đẳng thức Vector.

Bất đẳng thức Holder.

Cho các số dương $x_{i,j} (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$.

Khi đó với mọi số $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \geq 0$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ ta có. $\prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m x_{i,j} \right)^{\omega_j} \geq \sum_{j=1}^m \left(\prod_{i=1}^n x_{i,j}^{\omega_j} \right)$

Ở đây ta chỉ xét trường hợp đơn giản nhất cho 3 dãy số gồm $(a, b, c); (m, n, p); (x, y, z)$. Ta có.

$$(a^3 + b^3 + c^3)(x^3 + y^3 + z^3)(m^3 + n^3 + p^3) \geq (axm + byn + czp)^3$$

Dấu “=” xảy ra khi 3 dãy tương ứng tỷ lệ.

Một bất đẳng thức ở dạng này mà ta hay gặp. $(1+a)(1+b)(1+c) \geq (1 + \sqrt[3]{abc})^3$

Bất đẳng thức trị tuyệt đối.

Cho 2 số thực a, b khi đó ta có $|a| + |b| \geq |a+b| \geq |a| - |b|$

Dấu “=” thứ nhất khi a, b cùng dấu, dấu “=” thứ 2 khi a, b trái dấu.

Điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$. Khi đó nếu.

+ $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm, đồng nghĩa về trái luôn không âm hoặc không dương

+ $\Delta > 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt

Ứng dụng của kiến thức này sẽ áp dụng cho những bài tìm điều kiện có nghiệm để suy ra min, max. Ngoài ra phải chú ý tới một số phép biến đổi logarit mà ta đã học.

Tính chất hàm đơn điệu

1. Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu và liên tục trên tập xác định của nó thì phương trình $f(x) = a$ có tối đa một nghiệm
2. Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu và không liên tục trên tập xác định của nó thì phương trình $f(x) = a$ có tối đa $n + 1$ nghiệm.

II. Các dạng toán cực trị Mũ – Logarit.

1. Kỹ thuật rút thế, đánh giá điều kiện đưa về hàm 1 biến số.

Đây là một kỹ thuật cơ bản nhất mà khi gặp các bài toán về cực trị mà ta sẽ luôn nghĩ tới, hầu hết chúng sẽ được giải quyết bằng cách thế một biểu thức từ giả thiết xuống yêu cầu hoặc đặt ẩn phụ và các biến đổi để đưa ra mối quan hệ giữa các biến từ đó sử dụng các công cụ như đạo hàm, bất đẳng thức để giải quyết. Sau đây ta sẽ cùng đi vào các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Cho 2 số thực $a, b > 1$ thỏa mãn $\log_2 a + \log_3 b = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{\log_3 a} + \sqrt{\log_2 b}$ bằng?

- A. $\sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}$ B. $\sqrt{\log_2 3} + \sqrt{\log_3 2}$ C. $\frac{1}{2}(\log_2 3 + \log_3 2)$ D. $\frac{2}{\sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}}$

Chuyên KHTN Hà Nội – Lần 1 – 2017 – 2018

Lời giải

Biến đổi yêu cầu của bài toán ta được.

$$P = \sqrt{\log_3 a} + \sqrt{\log_2 b} = \sqrt{\frac{\log_2 a}{\log_2 3}} + \sqrt{\frac{\log_3 b}{\log_3 2}} = \sqrt{\frac{\log_2 a}{\log_2 3}} + \sqrt{\frac{1 - \log_2 a}{\log_3 2}}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\log_2 3}} + \sqrt{\log_2 3} \sqrt{1-t} \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{\log_2 3}} - \frac{\sqrt{\log_2 3}}{2\sqrt{1-t}} \quad (t = \log_2 a)$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-t} = \log_2 3 \sqrt{t} \Leftrightarrow 1-t = t \cdot \log_2^2 3 \Leftrightarrow t = \frac{1}{1 + \log_2^2 3}$$

$$\Rightarrow f(t) \leq f\left(\frac{1}{1 + \log_2^2 3}\right) = \sqrt{\log_2 3 + \log_3 2} \Rightarrow \max P = \sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}$$

Chọn ý A.

Ví dụ 2. Cho 2 số thực dương a, b thỏa mãn $\frac{1}{2}\log_2 a = \log_2 \frac{2}{b}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = 4a^3 + b^3 - 4\log_2(4a^3 + b^3)$ được viết dưới dạng $x - y\log_2 z$ với x, y, z đều là các số thực dương lớn hơn 2. Khi đó tổng $x + y + z$ có giá trị bằng bao nhiêu?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Cris Tuấn

Lời giải

$$\text{Từ giả thiết ta có } \frac{1}{2}\log_2 a = \log_2 \frac{2}{b} \Leftrightarrow \log_2 a = \log_2 \frac{4}{b^2} \Leftrightarrow a = \frac{4}{b^2}.$$

Đặt $t = 4a^3 + b^3$, theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$t = 4a^3 + b^3 = \frac{256}{b^6} + b^3 = \frac{256}{b^6} + \frac{b^3}{2} + \frac{b^3}{2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{256}{b^6} \cdot \frac{b^3}{2} \cdot \frac{b^3}{2}} = 12$$

Khi đó $P = 4a^3 + b^3 - 4\log_2(4a^3 + b^3) = f(t) = t - 4\log_2 t$.

Ta có $f'(t) = 1 - \frac{4}{t\ln 2} \geq 1 - \frac{4}{12\ln 2} > 0 \forall t \geq 12$. Vậy hàm $f(t)$ đồng biến trên $[12; +\infty)$
 $\Rightarrow P = f(t) \geq f(12) = 4 - 4\log_2 3 \Rightarrow x = y = -4, z = 3 \Rightarrow x + y + z = 3$

Chọn ý **C**.

Ví dụ 3. Cho 2 số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2(12 - a - b) = \frac{1}{2}\log_2(a + 2)(b + 2) + 1$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^3}{b+2} + \frac{b^3}{a+2} + \frac{45}{a+b}$ được viết dưới dạng $\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ tối giản. Hỏi giá trị của $m + n$ bằng bao nhiêu?

A. 62 **B.** 63 **C.** 64 **D.** 65

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có. $\log_2(12 - a - b) = \frac{1}{2}\log_2(a + 2)(b + 2) + 1$

$$\Leftrightarrow \log_2(12 - a - b) = \log_2 2\sqrt{(a + 2)(b + 2)}$$

$$\Leftrightarrow a + b + 2\sqrt{(a + 2)(b + 2)} = 12$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $(12 - a - b)^2 = 4(a + 2)(b + 2) \leq (a + b + 4)^2 \Rightarrow a + b \geq 4$.

Biến đổi tiếp biểu thức $P = \frac{a^3(a + 2) + b^3(a + 2)}{(a + 2)(b + 2)} + \frac{45}{a + b} = \frac{a^4 + b^4 + 2(a^3 + b^3)}{(a + 2)(b + 2)} + \frac{45}{a + b}$

Chú ý tới 2 bất đẳng thức quen thuộc $\begin{cases} a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}(a + b)^4 \\ a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}(a + b)^3 \end{cases}$

Từ đó suy ra $P \geq \frac{\frac{1}{8}(a + b)^4 + 2 \cdot \frac{1}{4}(a + b)^3}{(a + 2)(b + 2)} + \frac{45}{a + b} = \frac{(a + b)^4 + 4(a + b)^3}{2(12 - a - b)^2} + \frac{45}{a + b} = \frac{t^4 + 4t^3}{2(12 - t)^2} + \frac{45}{t}$

Xét hàm số

$$f(t) = \frac{t^4 + 4t^3}{2(12 - t)^2} + \frac{45}{t} \Rightarrow f'(t) = \frac{(t + 4)t^3}{(12 - t)^3} + \frac{2(t + 3)t^2}{(12 - t)^2} - \frac{45}{t^2} \geq \frac{(4 + 4) \cdot 4^3}{(12 - 4)^3} + \frac{2(4 + 3)4^2}{(12 - 4)^2} - \frac{45}{4^2} > 0$$

$$\Rightarrow P \geq f(t) \geq f(4) = \frac{61}{4} \Rightarrow \min P = \frac{61}{4} \Rightarrow m + n = 65$$

Chọn ý **D**.

Ví dụ 4. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log(x + 2y) = \log x + \log y$, khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt[4]{\frac{x^2}{e^{1+2y}}} \cdot \frac{y^2}{e^{x+1}}$ được viết dưới dạng $\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ tối giản. Hỏi giá trị của $m^2 + n^2$ bằng bao nhiêu?

A. 62 **B.** 78 **C.** 89 **D.** 91

Sở giáo dục và đào tạo tỉnh Hải Phòng

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$\log(x+2y) = \log x + \log y \Leftrightarrow \log(x+2y) = \log xy \Leftrightarrow x+2y = xy \Leftrightarrow \frac{x}{2} + y = \frac{x}{2} \cdot y$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{x}{2} + y = \frac{x}{2} \cdot y \leq \frac{\left(\frac{x}{2} + y\right)^2}{4} \Rightarrow \left(\frac{x}{2} + y\right)^2 - 4\left(\frac{x}{2} + y\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + y \geq 4$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng cộng mẫu số Engel ta có.

$$P = \sqrt[4]{e^{\frac{x^2}{1+2y}} e^{\frac{y^2}{x+1}}} \Rightarrow \ln P = \frac{x^2}{4(1+2y)} + \frac{y^2}{x+1} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2y+1} + \frac{y^2}{1+2 \cdot \frac{x}{2}} \geq \frac{\left(\frac{x}{2} + y\right)^2}{2\left(\frac{x}{2} + y + 1\right)}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{2} + y (t \geq 4) \Rightarrow \ln P = \frac{t^2}{2(t+1)} = f(t) \geq f(4) = \frac{8}{5} \Rightarrow P \geq e^{\frac{8}{5}}$$

Chọn ý **C**.

Ví dụ 5. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $0 < x, y \leq 1$ đồng thời $2^{\frac{x}{y}} + 4^{\frac{2x^2+2xy-y^2}{2xy}} = 5 \cdot 2^{\frac{x}{y}}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x, y) = e^{\frac{x+y}{2}} - 2^{x-y} - x - \frac{y^2}{2}$. Khi đó giá trị của biểu thức $T = M + m$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. $e - \frac{1}{2}$

B. $e - 1$

C. $e - \frac{3}{2}$

D. Không tồn tại

Lời giải

$$\text{Từ giả thiết ta có } 2^{\frac{x}{y}} + 4^{\frac{2x^2+2xy-y^2}{2xy}} = 5 \cdot 2^{\frac{x}{y}} \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{y}} + 4 \cdot 2^{\frac{2x-y}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 5 \cdot 2^{\frac{x}{y}}$$

$$\text{Đặt } a = 2^{\frac{x}{y}}, b = 2^{\frac{y}{x}} (a, b > 0) \text{ ta được. } a + \frac{4a^2}{b} = 5b \Leftrightarrow (a-b)(4a+5b) = 0 \Leftrightarrow a = b \Rightarrow x = y$$

$$\text{Khi đó } f(x, y) = e^{\frac{x+y}{2}} - 2^{x-y} - x - \frac{y^2}{2} = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1 = g(x)$$

$$\text{Ta có } g'(x) = e^x - x - 1, g''(x) = e^x - 1 > 0 \text{ vậy khi đó } g(x) > g(0) = 0.$$

Vậy không tồn tại giá trị nhỏ nhất.

Chọn ý **D**.

Ví dụ 6. Gọi S là tập hợp các cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn $x \in [-1; 1]$ đồng thời

$$\ln(x-y)^x - 2017x = \ln(x-y)^y - 2017y + e^{2018}.$$

Biết rằng giá trị lớn nhất của biểu thức $P = e^{2018x}(y+1) - 2018x^2$ với $x, y \in S$ đạt tại $(x_0; y_0)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $x_0 \in (-1; 0)$

B. $x_0 = -1$

C. $x_0 = 1$

D. $x_0 \in [0; 1)$

THPT Chuyên Quốc Học – Huế năm 2017 – 2018

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$\ln(x-y)^x - 2017x = \ln(x-y)^y - 2017y + e^{2018}$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\ln(x-y) - 2017(x-y) = e^{2018} \Leftrightarrow \ln(x-y) - 2017 - \frac{e^{2018}}{x-y} = 0(*)$$

Xét $f(t) = \ln t - 2017 - \frac{e^{2018}}{t} \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t} + \frac{e^{2018}}{t^2} > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Khi đó phương trình $(*) \Leftrightarrow x - y = e^{2018} \Rightarrow y = x - e^{2018}$

$$\Rightarrow P = e^{2018x} (1 + x - e^{2018}) - 2018x^2 = g(x)$$

$$\Rightarrow g'(x) = e^{2018x} (2019 + 2018x - 2018e^{2018}) - 4036x$$

$$\Rightarrow g''(x) = e^{2018x} (2018 \cdot 2020 + 2018^2 x - 2018^2 e^{2018}) - 4036$$

$$\leq e^{2018x} (2018 \cdot 2020 + 2018^2 - 2018^2 e^{2018}) - 4036 < 0, \forall x \in [-1; 1]$$

Nên $g'(x)$ nghịch biến trên $[-1; 1]$. Mặt khác ta lại có $g'(1) = e^{-2018} + 2018 > 0, g'(0) = 2019 - 2018e^{2018}$ nên tồn tại $x_0 \in (-1; 0)$ sao cho $g'(x_0) = 0 \Rightarrow \max_{[-1; 1]} g(x) = g(x_0)$

Chọn ý **A**.

Ví dụ 7. Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $3^{x^2+y^2-2} \log_2(x-y) = \frac{1}{2}(1 + \log_2(1-xy))$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{13}{2}$

B. $\frac{17}{2}$

C. 3

D. 7

Lời giải

Điều kiện $x > y; 1 > xy$. Biến đổi giả thiết ta có

$$3^{x^2+y^2-2} \log_2(x-y)^2 = \log_2(2-2xy)$$

$$\Leftrightarrow 3^{x^2+y^2-2} \log_2(x^2 + y^2 - 2 + 2 - 2xy) = \log_2(2-2xy)$$

- Nếu $x^2 + y^2 > 2 \Rightarrow VT > \log_2(2-2xy) = VP$
- Nếu $x^2 + y^2 < 2 \Rightarrow VT < \log_2(2-2xy) = VP$

Vậy $x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow (x+y)^2 = 2 - 2xy \Rightarrow xy = \frac{2 - (x+y)^2}{2}$. Do $xy < 1 \Rightarrow (x+y) \in (-2; 2)$

Khi đó ta có.

$$P = 2(x+y)^3 - 6xy(x+y) - 3xy = 2a^3 - 3a(a^2 - 2) - \frac{3(a^2 - 2)}{2} = f(a) (a = x+y) \leq f(1) = \frac{13}{2}$$

Chọn ý **A**.

Nhận xét. Kỹ thuật đánh giá này ta sẽ được tìm hiểu ở chương 3.

Ví dụ 8. Cho các số thực dương a, x, y, z thỏa mãn $4z \geq y^2, a > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \log_a^2(xy) + \log_a(x^3 y^3 + x^2 z) + \sqrt{4z - y^2}$$

A. -4

B. $-\frac{25}{16}$

C. -2

D. $-\frac{21}{16}$

Lời giải

Từ giả thiết ta có $z \geq \frac{y^2}{4} \Rightarrow x^3 y^3 + x^2 z \geq x^3 y^3 + \frac{x^2 y^2}{4} \geq 2\sqrt{x^3 y^3 \cdot \frac{x^2 y^2}{4}} = (xy)^{\frac{5}{2}}$

Khi đó $S \geq \log_a^2(xy) + \log_2(xy)^{\frac{5}{2}} = \left(\log_a xy + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} \geq -\frac{25}{16}$

Ví dụ 9. Xét các số thực dương phân biệt x, y thỏa mãn $\frac{x+y}{x-y} = \log_2 3$. Khi biểu thức $4^{x+y} + 16 \cdot 3^{y-x}$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của $x+3y$ bằng

A. $2 - \log_2 3$.

B. $2 - \log_3 2$.

C. $1 + \log_3 2$.

D. $1 + \log_2 3$.

Lời giải

Ta có $\frac{x+y}{x-y} = \log_2 3 \Leftrightarrow x-y = \frac{x+y}{\log_2 3} = (x+y) \cdot \log_3 2$.

Do đó $P = 4^{x+y} + 16 \cdot 3^{y-x} = 4^{x+y} + \frac{16}{3^{(x+y) \cdot \log_3 2}} = 4^{x+y} + \frac{16}{(3^{\log_3 2})^{x+y}} = 4^{x+y} + \frac{16}{2^{x+y}}$.

Đặt $t = x+y > 0$ nên $P = t^2 + \frac{16}{t} = t^2 + \frac{8}{t} + \frac{8}{t} \geq 3\sqrt[3]{t^2 \cdot \frac{8}{t} \cdot \frac{8}{t}} = 3\sqrt[3]{64} = 12$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t^2 = \frac{8}{t} \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow 2^{x+y} = 2 \Leftrightarrow x+y = 1$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất khi $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=\log_3 2 \end{cases} \Leftrightarrow x+3y = 2 - \log_3 2$.

Ví dụ 10. Cho các số x, y thay đổi thỏa mãn $x > y > 0$ và $\ln(x-y) + \frac{1}{2}\ln(xy) = \ln(x+y)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = x+y$ là

A. $2\sqrt{2}$.

B. 2.

C. 4.

D. 16.

Lời giải

$\ln(x-y) + \frac{1}{2}\ln(xy) = \ln(x+y) \Leftrightarrow (x-y)^2 xy = (x+y)^2 \Leftrightarrow [(x+y)^2 - 4xy]xy = (x+y)^2$.

Đặt $A = (x+y)^2; B = xy$. Ta được $(A-4B)B = A \Leftrightarrow A(B-1) = 4B^2 \Rightarrow A = \frac{4B^2}{B-1}$.

Do $A > 0$ nên $B > 1$. Ta có $A = \frac{4B^2}{B-1} = 4B + 4 + \frac{4}{B-1} = 8 + 4(B-1) + \frac{4}{B-1} \geq 8 + 2 \cdot 4 = 16$

Suy ra $x+y \geq 4$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} B-1 = \frac{1}{B-1} \\ A = \frac{4B^2}{B-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=2 \\ A=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=2 \\ x+y=4 \\ x>y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+\sqrt{2} \\ y=2-\sqrt{2} \end{cases}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = x+y$ là 4.

Chú ý. Có thể khảo sát hàm số $f(B) = \frac{4B^2}{B-1}$ với $B \in (1; +\infty)$, ta được $f(B) \geq 16$.

Ví dụ 11. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $1 - \frac{1}{2}\log_2(x-y+2) = \log_2\left(\frac{x+1}{y} + 1\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x(1+y)+17}{y}$.

A. 9.

B. 5.

C. 6.

D. 8.

Lời giải

Điều kiện $x - y + 2 > 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} \log_2(x - y + 2) &= \log_2\left(\frac{x+1}{y} + 1\right) \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{2}{\sqrt{x-y+2}}\right) = \log_2\left(\frac{x+1+y}{y}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x-y+2}} &= \frac{x+y+1}{y} \Leftrightarrow 2y = (x+y+1)\sqrt{x-y+2} \\ \Leftrightarrow (x-y+1)\sqrt{x-y+2} + 2y\sqrt{x-y+2} - 2y &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-y+1)\sqrt{x-y+2} + 2y(\sqrt{x-y+2} - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x-y+2} - 1)(\sqrt{x-y+2} + 1)\sqrt{x-y+2} + 2y(\sqrt{x-y+2} - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x-y+2} - 1)[(\sqrt{x-y+2} + 1)\sqrt{x-y+2} + 2y] &= 0 (*) \end{aligned}$$

Mặt khác x, y là các số thực dương và điều kiện $x - y + 2 > 0$ nên $(\sqrt{x-y+2} + 1)\sqrt{x-y+2} + 2y > 0$

Do đó $(*)$ xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x-y+2} - 1 = 0 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow x = y - 1$.

Với $x = y - 1$ thay vào biểu thức P ta được

$$P = \frac{x(1+y)+17}{y} = \frac{(y-1)(y+1)+17}{y} = \frac{y^2+16}{y} = y + \frac{16}{y}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $\left(y, \frac{16}{y}\right)$ ta được $P = y + \frac{16}{y} \geq 2\sqrt{y \cdot \frac{16}{y}} = 8$.

Dấu bằng xảy ra khi $y = \frac{16}{y} \Leftrightarrow y^2 = 16 \Leftrightarrow y = 4$.

Vậy GTNN của P là 8 khi $(x, y) = (3, 4)$.

Ví dụ 12. Cho các số thực $x, y \geq 1$ thỏa mãn điều kiện $xy \leq 8$. Biểu thức $P = \log_{4x}(8x) - \log_{2y^2}\left(\frac{y^2}{2}\right)$

đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = x_0; y = y_0$. Đặt $T = x_0^4 + y_0^4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $T = 519$.

B. $T = 520$.

C. $T = 521$.

D. $T = 518$.

Lời giải

Biến đổi biểu thức $P = \log_{4x}(8x) - \log_{2y^2}\left(\frac{y^2}{2}\right) = \frac{\log_2(8x)}{\log_2(4x)} - \frac{\log_2\frac{y^2}{2}}{\log_2(2y^2)} = \frac{3 + \log_2 x}{2 + \log_2 x} - \frac{2\log_2 y - 1}{2\log_2 y + 1}$.

Ta có $xy \leq 8 \Rightarrow \log_2(xy) \leq 3 \Leftrightarrow u + v \leq 3$, với $u = \log_2 x; v = \log_2 y$.

Hơn nữa $x, y \geq 1$ nên $u, v \geq 0$. Hay $0 \leq u \leq 3$. Khi đó $P = \frac{3+u}{2+u} - \frac{2v-1}{2v+1} = \frac{3+u}{2+u} - 1 + \frac{2}{2v+1}$.

Ta có $\begin{cases} u+v \leq 3 \\ v, u \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq v \leq 3-u \Rightarrow \frac{2}{2v+1} \geq \frac{2}{7-2u} \Rightarrow P \geq \frac{2}{7-2u} - 1 + \frac{3+u}{2+u}$.

Đặt $f(u) = \frac{2}{7-2u} - 1 + \frac{3+u}{2+u}$, ta tìm min, max của $f(u)$ với $0 \leq u \leq 3$.

$$f'(u) = \frac{4}{(7-2u)^2} - \frac{1}{(2+u)^2}; f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = \frac{3}{4} \in [0; 3].$$

Ta có $f(0) = \frac{11}{14}; f(3) = \frac{11}{5}; f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{8}{11} \Rightarrow f\left(\frac{3}{4}\right) \leq f(u) \leq f(3)$.

Suy ra $P \geq f(u) \geq f\left(\frac{3}{4}\right)$. Nên P min khi $u = \frac{3}{4} \Rightarrow v = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$.

$$\begin{cases} u = \frac{3}{4} \\ v = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = \frac{3}{4} \\ \log_2 y = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^{\frac{3}{4}} \\ y = 2^{\frac{9}{4}} \end{cases}.$$

Do đó $\begin{cases} x_0 = 2^{\frac{3}{4}} \\ y_0 = 2^{\frac{9}{4}} \end{cases} \Rightarrow T = 2^3 + 2^9 = 520$.

Ví dụ 13. Cho x, y là các số thực dương khác 1 thỏa mãn $x \neq y$ và $\log_x \sqrt{xy} = \log_y x$. Tích các giá trị nguyên nhỏ hơn 2021 của biểu thức $P = 4^{\frac{1}{x^2}} + 4^y$ là

- A. 2021!. B. $\frac{2020!}{16}$. C. $\frac{2020!}{2}$. D. 2020!

Lời giải

Điều kiện $0 < x, y \neq 1$

Ta có $\log_x \sqrt{xy} = \log_y x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 + \log_x y) = \frac{1}{\log_x y} \Leftrightarrow \log_x^2 y + \log_x y - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_x y = 1 \\ \log_x y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = \frac{1}{x^2} \end{cases}$

Kết hợp điều kiện $x \neq y$ suy ra $y = \frac{1}{x^2}$ (1). Khi đó $P = 4^y + 4^{\frac{1}{y}} = 2.4^y = 2^{2y+1}$.

Phương trình (1) (ẩn x tham số y) có nghiệm dương khác 1 khi và chỉ khi y dương và khác 1.

Phương trình $2^{2y+1} = P$ (ẩn y tham số P) có nghiệm dương khác 1 khi và chỉ khi $P > 2$ và $P \neq 8$

Lại có P nguyên và nhỏ hơn 2021 nên $P \in \{3; 4; 5; \dots; 2020\} \setminus \{8\}$.

Vậy tích các giá trị cần tìm là $\frac{2020!}{16}$.

Ví dụ 14 . Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $3^{x+y} - x^2(3^x - 1) = (x+1).3^y - x^3$ với $x < 2020$?

- A. 13. B. 6. C. 7. D. 15.

Lời giải

Ta có $3^{x+y} - x^2(3^x - 1) = (x+1).3^y - x^3 \Leftrightarrow 3^{x+y} - x^2.3^x + x^2 = x.3^y + 3^y - x^3$

$$\Leftrightarrow 3^x(3^y - x^2) = 3^y - x^2 + x(3^y - x^2) \Leftrightarrow (3^y - x^2)(3^x - x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^y - x^2 = 0 & (1) \\ 3^x - x - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) $3^y - x^2 = 0 \Leftrightarrow y = \log_3 x^2 \Leftrightarrow y = 2\log_3 x$.

Để $x; y$ là những số nguyên dương thì $x \in \{3; 3^2; 3^3; 3^4; 3^5; 3^6\}$

Phương trình (2) $3^x - x - 1 = 0$ vô nghiệm, vì $\forall x > 0 \Rightarrow 3^x - x - 1 > 0$

Vậy có 6 cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 15. Xét các số thực a, b, x thỏa mãn $a > 1, b > 1, 0 < x \neq 1$ và $a^{\log_b x} = b^{\log_a(x^2)}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \ln^2 a + \ln^2 b - \ln(ab)$.

- A. $\frac{1-3\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{e}{2}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $-\frac{3+2\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải

Ta có $a^{\log_b x} = b^{\log_a(x^2)} \Leftrightarrow x^{\log_b a} = x^{2\log_a b} \Leftrightarrow \log_b a = 2\log_a b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{\ln b} = 2 \cdot \frac{\ln b}{\ln a} \Leftrightarrow \ln^2 a = 2 \cdot \ln^2 b$.

Mà $a > 1, b > 1 \Rightarrow \ln a > 0; \ln b > 0 \Rightarrow \ln a = \sqrt{2} \cdot \ln b$. Thay vào biểu thức ta được

$$\begin{aligned} P &= \ln^2 a + \ln^2 b - \ln(ab) = 2\ln^2 b + \ln^2 b - (\sqrt{2}\ln b + \ln b) = 3\ln^2 b - (\sqrt{2} + 1) \cdot \ln b \\ &= 3 \cdot \left(\ln^2 b - \frac{\sqrt{2} + 1}{3} \cdot \ln b + \frac{3 + 2\sqrt{2}}{36} \right) - \frac{3 + 2\sqrt{2}}{12} = 3 \cdot \left(\ln b - \frac{\sqrt{2} + 1}{6} \right)^2 - \frac{3 + 2\sqrt{2}}{12} \geq -\frac{3 + 2\sqrt{2}}{12}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\ln b = \frac{\sqrt{2} + 1}{6} \Leftrightarrow b = e^{\frac{\sqrt{2} + 1}{6}}; a = e^{\frac{\sqrt{2} + 1}{3\sqrt{2}}}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{3 + 2\sqrt{2}}{12}$.

Ví dụ 16. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $2\log_2 x - \log_2 y \geq \log_2(x + 6y)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy + 2y^2}$.

A. $\frac{2}{5}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{5}{2}$.

D. 2.

Lời giải

Với $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$, ta có $2\log_2 x - \log_2 y \geq \log_2(x + 6y) \Leftrightarrow \log_2 \frac{x^2}{y} \geq \log_2(x + 6y)$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y} \geq x + 6y \Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} - 6 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} \geq 3 \\ \frac{x}{y} \leq -2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} \geq 3 \left(\text{do } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \right).$$

Ta có $P = \frac{\frac{x}{y} - 1}{\frac{x^2}{y^2} - 2\frac{x}{y} + 2} = \frac{\frac{x}{y} - 1}{\left(\frac{x}{y} - 1\right)^2 + 1}$. Đặt $t = \frac{x}{y} - 1 \Rightarrow t \geq 2$. Khi đó $P = \frac{t}{t^2 + 1} = \frac{1}{t + \frac{1}{t}}$.

Ta có $t + \frac{1}{t} = \frac{t}{4} + \frac{1}{t} + \frac{3t}{4} \geq 2\sqrt{\frac{t}{4} \cdot \frac{1}{t}} + \frac{3t}{4} \geq 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $t = 2 \Leftrightarrow x = 3y$. Suy ra $P \leq \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$. Vậy $\max P = \frac{2}{5}$ khi $x = 3y$.

Ví dụ 17. Cho các số dương a, b, c thay đổi thỏa mãn $\log_2 a + \log_2 c \geq 2\log_2 b$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a + b + c + \frac{1}{3}b^3 - 2b^2 + 2$ bằng

A. $\sqrt{3}$.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Từ giả thiết $\log_2 a + \log_2 c \geq 2\log_2 b \Leftrightarrow \log_2(ac) \geq \log_2 b^2 \Leftrightarrow ac \geq b^2$.

Ta có $P = (a + c) + b + \frac{1}{3}b^3 - 2b^2 + 2 \geq 2\sqrt{ac} + b + \frac{1}{3}b^3 - 2b^2 + 2$.

$$\geq 2b + b + \frac{1}{3}b^3 - 2b^2 + 2 = \frac{1}{3}b^3 - 2b^2 + 3b + 2.$$

Xét hàm số $f(b) = \frac{1}{3}b^3 - 2b^2 + 3b + 2$ với $b > 0$.

Có $f'(b) = b^2 - 4b + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ b=3 \end{cases}$. Bảng biến thiên

b	0	1	3	$+\infty$	
$f'(b)$	+	0	-	0	+
$f(b)$		$\frac{10}{3}$		$+\infty$	
	2		2		

Từ bảng biến thiên, ta được $\min_{b>0} f(b) = f(3) = 2 \Rightarrow P \geq 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2 đạt được khi $b = 3$ và $a = c = 3$.

Ví dụ 18. Cho các số thực $x, y \geq 1$ thay đổi thoả mãn $F = \log_{2019} x + \log_{2020} y = 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = \sqrt{\log_{2020} x} + \sqrt{\log_{2019} y}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $M^2 - m^2 = \log_{2019} 2020$. B. $M^2 + m^2 = \sqrt{\log_{2019}^2 2020 + \log_{2020}^2 2019}$.
C. $M + m = \sqrt{\log_{2019} 2020} + \sqrt{\log_{2020} 2019}$. D. $M - m = \sqrt{\log_{2019} 2020}$

Lời giải

Đặt $\sqrt{\log_{2020} x} = a; \sqrt{\log_{2019} y} = b$ với $a, b \geq 0$.

Ta có $F = a + b$ với $a^2 \log_{2019} 2020 + b^2 \log_{2020} 2019 = 1$ (1)

Tìm giá trị lớn nhất Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$(a^2 \log_{2019} 2020 + b^2 \log_{2020} 2019)(\log_{2020} 2019 + \log_{2019} 2020) \geq (a + b)^2$$

Suy ra $a + b \leq \sqrt{\log_{2019} 2020 + \log_{2020} 2019}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a^2 \log_{2019} 2020}{\log_{2020} 2019} = \frac{b^2 \log_{2020} 2019}{\log_{2019} 2020} \Leftrightarrow a \log_{2019} 2020 = b \log_{2020} 2019$

Kết hợp với (1), ta có $a = \frac{\log_{2020} 2019}{\sqrt{\log_{2019} 2020 + \log_{2020} 2019}}; b = \frac{\log_{2019} 2020}{\sqrt{\log_{2019} 2020 + \log_{2020} 2019}}$

Do đó ta có $M = \sqrt{\log_{2019} 2020 + \log_{2020} 2019}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất ta có

$$\begin{aligned} 1 &= a^2 \log_{2019} 2020 + b^2 \log_{2020} 2019 \\ &= (a^2 + b^2) \log_{2019} 2020 - b^2 (\log_{2019} 2020 - \log_{2020} 2019) \leq (a^2 + b^2) \log_{2019} 2020 \end{aligned}$$

Suy ra $a^2 + b^2 \geq \log_{2020} 2019 \Rightarrow (a + b)^2 \geq \log_{2020} 2019 \Rightarrow a + b \geq \sqrt{\log_{2020} 2019}$

Dấu “=” xảy ra khi $b = 0; a = \sqrt{\log_{2020} 2019}$.

Do đó ta có $m = \sqrt{\log_{2020} 2019}$. Vậy $M^2 - m^2 = \log_{2019} 2020$.

Ví dụ 19. Cho hai số thực a, b thoả mãn $a > 0, 0 < b < 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(2b)^a}{(2^a - b^a)^2} + \frac{2^a + 2b^a}{2b^a}$$

- A. $P_{\min} = \frac{7}{4}$. B. $P_{\min} = \frac{5}{4}$. C. $P_{\min} = \frac{9}{4}$. D. $P_{\min} = \frac{13}{4}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \frac{(2b)^a}{(2^a - b^a)^2} + \frac{2^a + 2b^a}{2b^a} = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^a}{\left[1 - \left(\frac{b}{2}\right)^a\right]^2} + \frac{1 + 2\left(\frac{b}{2}\right)^a}{2\left(\frac{b}{2}\right)^a}.$$

Do $0 < b < 2 \Leftrightarrow 0 < \frac{b}{2} < 1$ nên với $a > 0$ ta có $0 < \left(\frac{b}{2}\right)^a < 1$.

Đặt $t = \left(\frac{b}{2}\right)^a$ thì $t \in (0; 1)$. Khi đó bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = f(t) = \frac{t}{(1-t)^2} + \frac{1+2t}{2t}, \text{ với } t \in (0; 1).$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{1+t}{(1-t)^3} + \frac{-1}{2t^2} = \frac{3t^3 - t^2 + 3t - 1}{2t^2(1-t)^3} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \frac{13}{4}.$$

Ví dụ 20. Cho các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 0$ và $\log_2(a-b) = \log_3(a+b)$. Khi biểu thức

$$P = \log_2 a + \log_2 b + 2\log_3(a+b) - 2\log_2(a^2 + b^2)$$

đạt giá trị lớn nhất, giá trị $a-b$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. (3;4).

B. (5;6).

C. (4;5).

D. (2;3).

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} 0 < a-b=2^t \\ 0 < a+b=3^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2ab + b^2 = 4^t \\ a^2 + 2ab + b^2 = 9^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{9^t + 4^t}{2} \\ ab = \frac{9^t - 4^t}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P &= \log_2 ab + 2\log_3(a+b) - 2\log_2(a^2 + b^2) \\ &= \log_2 \frac{9^t - 4^t}{4} + 2t - 2\log_2 \frac{9^t + 4^t}{2} = \log_2 \frac{9^t - 4^t}{(9^t + 4^t)^2} + 2t = \log_2 \frac{36^t - 16^t}{(9^t + 4^t)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } S = \frac{36^t - 16^t}{(9^t + 4^t)^2} = \frac{\left(\frac{9}{4}\right)^t - 1}{\left(\frac{9}{4}\right)^{2t} + 2\left(\frac{9}{4}\right)^t + 1} = \frac{k-1}{k^2 + 2k + 1} \text{ với } k = \left(\frac{9}{4}\right)^t$$

Biểu thức P đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi S đạt giá trị lớn nhất.

Giả sử S có giá trị lớn nhất. Suy ra phương trình $Sk^2 + (2S-1)k + S+1 = 0$ có nghiệm.

$$\Rightarrow \Delta = (2S-1)^2 - 4S(S+1) \geq 0 \Leftrightarrow S \leq \frac{1}{8}.$$

Suy ra S đạt GTLN bằng $\frac{1}{8}$ khi $k=3 \Rightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^t = 3 \Leftrightarrow t = \log_{\frac{9}{4}} 3$.

Do đó P đạt GTLN bằng $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ khi $t = \log_{\frac{9}{4}} 3$.

Khi đó $\log_2(a-b) = t = \log_{\frac{9}{4}} 3 \Leftrightarrow a-b = 2^{\frac{\log_2 3}{\log_2 \frac{9}{4}}} \approx 2,5$.

Bài tập tự luyện.

Câu 1. Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+1}(2x-4y)=1$. Tính $P=\frac{x}{y}$ khi biểu thức $S=4x+3y-5$ đạt giá trị lớn nhất

- A. $P=\frac{8}{5}$ B. $P=\frac{9}{5}$ C. $P=-\frac{13}{4}$ D. $P=\frac{17}{44}$

Câu 2. Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $xy \leq 4y-1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=\frac{6y}{x}+\ln\left(\frac{x+2y}{y}\right)$.

- A. $24+\ln 6$ B. $12+\ln 4$ C. $\frac{3}{2}+\ln 6$ D. $3+\ln 4$

Câu 3. Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2-1}+\log_3(x^2+y^2+1)=3$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $S=|x-y|+|x^3-y^3|$ là $\frac{a\sqrt{6}}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T=a+2b$

- A. 25 B. 34 C. 32 D. 41

Câu 4. Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $\log x+\log y \geq \log(x^3+y)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=2x+y$ là?

- A. $2\sqrt{2}-2$ B. $\frac{3}{8}$ C. $4+4\sqrt{2}$ D. $3+2\sqrt{2}$

Câu 5. Cho 2 số thực a, b thỏa mãn $a^2+b^2>1$ và $\log_{a^2+b^2}(a+b) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2a+4b-3$ là?

- A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ B. $\sqrt{10}$ C. $2\sqrt{10}$ D. $\frac{1}{\sqrt{10}}$

Câu 6. Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $xy=4, x \geq \frac{1}{2}, y \geq 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_2^2 x+(\log_2 y-1)^2$. Tính $S=M+2m$

- A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ B. $\sqrt{10}$ C. $2\sqrt{10}$ D. $\frac{1}{\sqrt{10}}$

Câu 7. Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $\log_2 x+\log_2(x+3y) \leq 2+2\log_2 y$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $S=\frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+2y^2}}-\frac{2x+3y}{x+2y}$ là $\sqrt{a}-\frac{b}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là các phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c$

- A. 30 B. 15 C. 17 D. 10

Câu 8. Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $\log_{2x^2+xy+3y^2}(11x+20y-40)=1$. Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\frac{y}{x}$. Tính $a+b$?

- A. $\sqrt{10}$ B. $2\sqrt{14}$ C. $\frac{11}{6}$ D. $\frac{7}{2}$

Câu 9. Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $\log(x+3y)+\log(x-3y)=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=x-|y|$

- A. $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $\frac{1}{8}$

Câu 10. . Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $\log(x+3y) + \log(x-3y) = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x - 2|y| + 1$

- A. $\sqrt{10} + 1$ B. $\frac{5\sqrt{2}-3}{2}$ C. $\frac{3+5\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{3+2\sqrt{5}}{3}$

Câu 11. Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(x+y+3) \geq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 3x + 4y - 6$

- A. $\frac{5\sqrt{6}-9}{2}$ B. $\frac{5\sqrt{6}-3}{2}$ C. $\frac{5\sqrt{3}-5}{2}$ D. $\frac{5\sqrt{6}-5}{2}$

Câu 12. . Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $\log x + \log y \geq \log(x+y^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 3y$

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. 9 D. $\frac{1}{2}$

Câu 13. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2 x + \log_2 y = \log_2(x+y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x^2 + y^2$

- A. $2\sqrt[3]{4}$ B. 3 C. 2 D. $\sqrt{2}$

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất một cặp số thực (x, y) thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) \geq 1$ và $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 = m$

- A. $(\sqrt{10}-\sqrt{2})^2$ B. $(\sqrt{10}+\sqrt{2})^2$ C. $\sqrt{10}-\sqrt{2}$ D. $\sqrt{10}+\sqrt{2}$

Câu 15. Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $4 + 3^{x^2-2y+2} = (4 + 9^{x^2-2y}) \cdot 7^{2y-x^2+2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + 2y$.

- A. $-\frac{9}{4}$ B. $\frac{7}{4}$ C. $-\frac{33}{8}$ D. $-\frac{1}{4}$

Câu 16. Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $x^2 + 2y^2 > 1$ và $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1$. Biết giá trị lớn nhất của

$P = x + y$ là $\frac{a+b\sqrt{6}}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{c}$ là các phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$

- A. 17 B. 12 C. 11 D. 16

Câu 17. Cho 2 số thực dương thay đổi a, b thỏa mãn điều kiện.

$$\ln a(1 - \ln b) = \ln b\sqrt{4 - \ln^2 a}$$

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\log_b a$. Giá trị của $M + m$ bằng?

- A. $2(\sqrt{2}-1)$ B. $2(\sqrt{2}+1)$ C. $2(1-\sqrt{2})$ D. $-1+\sqrt{2}$

Câu 18. Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $y \geq 4x$, giá trị lớn nhất của biểu thức

$P = \ln \frac{2x+5y}{y} - \frac{2y+5x}{x}$ có dạng $\ln \frac{m}{2} - n$. Tính tổng $m + n$

- A. 25 B. 24 C. 29 D. 4

Câu 19. Cho 2 số thực dương thay đổi a, b thỏa mãn $\log_2(a+1) + \log_2(b+1) \geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + b$

- A. 12 B. 14 C. 8 D. 16

Câu 20. Cho số thực x thỏa mãn $x \in [0; 16]$. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $f(x) = 8 \cdot 3^{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}} + 9^{\sqrt[4]{x+1}} - 9^{\sqrt{x}}$ đạt được khi $x = \frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $m+n$

A. 17

B. 18

C. 19

D. 20

Hướng dẫn giải.

Câu 1. Chọn ý C.

Ta có $2x - y = x^2 + y^2 + 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$

Khi đó theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có.

$$S = 4(x-1) + 3(y+2) - 7 \leq \sqrt{(4^2 + 3^2)((x-1)^2 + (y+2)^2)} - 7 = 3$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} \\ 4x+3y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{5} \\ y = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Câu 2. Chọn ý C.

Theo giả thiết ta có $t = \frac{x}{y} \leq \frac{4y-1}{y^2} = -\left(\frac{1}{y} - 2\right)^2 + 4 \leq 4$

Khi đó $S = \frac{6y}{x} + \ln\left(\frac{x}{y} + 2\right) = \frac{6}{t} + \ln(t+2) = f(t)$

Đến đây xét tính đơn điệu của hàm số ta sẽ chỉ ra $f(t) \geq f(4) = \frac{3}{2} + \ln 6$

Câu 3. Chọn ý B.

Ta sẽ chuyển bài toán về giải phương trình logarit để tìm mối liên hệ giữa x,y.

Xét hàm số $f(t) = 2^{t-1} + \log_3(t+1) - 3$ đây là hàm đồng biến trên $[0; +\infty)$

Do đó $f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow |xy| \in [-1; 1]$. Khi đó ta được

$$S^2 = (x-y)^2 \left(1 + (x^2 + xy + y^2)\right)^2 = (2-2xy)(3+xy)^2 \leq \frac{512}{27} \Rightarrow S \leq \frac{16\sqrt{6}}{9}$$

Câu 4. Chọn ý C.

Áp dụng các tính chất của logarit thì từ giả thiết ta suy ra được.

$$xy \geq x^3 + y \Rightarrow y(x-1) \geq x^3 \Rightarrow y \geq \frac{x^3}{x-1}$$

Vì do x,y dương nên từ điều kiện ta suy ra $x > 1$

Khi đó ta được $2x + y \geq 2x + \frac{x^3}{x-1} = f(x) \geq f(\sqrt{2}) = 4 + 4\sqrt{2}$

Câu 5. Chọn ý B.

Theo giả thiết ta có $a^2 + b^2 > 1 \Rightarrow a+b \geq a^2 + b^2 \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}$

Khi đó theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có.

$$P = 2\left(a - \frac{1}{2}\right) + 4\left(b - \frac{1}{2}\right) \leq \sqrt{(2^2 + 4^2) \left[\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2\right]} \leq \sqrt{10}$$

Câu 6. Chọn ý A.

Theo giả thiết ta có $y = \frac{4}{x} \geq 1 \Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 4 \Rightarrow \log_2 x \in [-1; 2]$

Khi đó $P = \log_2^2 x + (1 - \log_2 x)^2 \in \left[\frac{1}{2}; 5\right] \Rightarrow S = 5 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 6$

Câu 7. Chọn ý **D**.

Theo giả thiết ta có $\log_2(x^2 + 3xy) \leq \log_2 4y^2 \Leftrightarrow x^2 + 3xy \leq 4y^2 \Rightarrow 0 < \frac{x}{y} \leq 1$

Khi đó chia cả tử và mẫu cho y ta chuyển về bài toán xét tính đơn điệu của hàm

$$f(t) = \frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+2}} - \frac{2t+3}{t+2} \Rightarrow f'(t) = \frac{5-3t}{2\sqrt{(t^2-t+2)^3}} - \frac{1}{(t+2)^2} \geq \frac{2}{2\sqrt{2^3}} - \frac{1}{(t+2)^2} > 0$$

$$\Rightarrow f(t) \leq f(1) = \sqrt{2} - \frac{5}{3} \Rightarrow P = 10$$

Câu 8. Chọn ý **C**.

Từ giả thiết ta suy ra $2x^2 + xy + 3y^2 - 11x - 20y + 40 = 0$

Thế $Sx = y$ vào giả thiết trên ta được $(4S^2 + 2)x^2 - (20S + 11)x + 40 = 0$

Sử dụng điều kiện có nghiệm ta có

$$\Delta_x \geq 0 \Leftrightarrow 240S^2 - 440S + 199 \leq 0 \Rightarrow S \in \left[\frac{55-2\sqrt{10}}{60}; \frac{55+2\sqrt{10}}{60}\right] \Rightarrow a+b = \frac{11}{6}$$

Câu 9. Chọn ý **A**.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} x+3y > 0 \\ x-3y > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0; \log(x^2 - 9y^2) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 9y^2 = 10$

Khi đó $|y| = x - S \Rightarrow 8x^2 - 18xS + 9S^2 + 10 = 0$

Phương trình trên phải có nghiệm dương nên ta có $\begin{cases} \Delta_x \geq 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow S \geq \frac{4\sqrt{5}}{3}$

Câu 10. Chọn ý **C**.

Tương tự như câu trên

Câu 11. Chọn ý **D**.

Làm tương tự câu 5 ta có

$$x + y + 3 \geq x^2 + y^2 + 2 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow S = 3\left(x - \frac{1}{2}\right) + 4\left(y - \frac{1}{2}\right) - \frac{5}{2} \leq \sqrt{(3^2 + 4^2) \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right]} - \frac{5}{2} \leq \frac{5\sqrt{6} - 5}{2}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{6}-1}{10} \\ y = \frac{4\sqrt{6}-3}{10} \end{cases}$$

Câu 12. Chọn ý **C**.

Tương tự câu 4

Câu 13. Chọn ý **A**.

Từ giả thiết ta có $x + y = xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \Rightarrow x + y \geq 4 \Rightarrow S \geq \frac{1}{2}(x+y)^2 \geq 8$

Câu 14. Chọn ý **A**.

Từ giả thiết thứ nhất ta suy ra $(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 2$. Đây là một hình tròn (C_1) có tâm là $I_1(2;2)$ và $R_1 = \sqrt{2}$. Từ giả thiết thứ 2 ta suy ra $(x-1)^2 + (y-1)^2 = m \Rightarrow m \geq 0$, đây là đường tròn (C_2) có tâm là $I_2(1;1), R = \sqrt{m}$.

Do yêu cầu của bài toán nên $(C_1), (C_2)$ phải tiếp xúc ngoài với nhau, suy ra

$$I_1 I_2 = R_1 + R_2 \Rightarrow m = (\sqrt{10} - \sqrt{2})^2$$

Câu 15. Chọn ý A.

Ta sẽ đưa về việc giải phương trình từ đó tìm ra mối liên hệ giữa x,y

Từ giả thiết ta có $\frac{4+3^{x^2-2y+2}}{7^{x^2-2y+2}} = \frac{4+3^{2(x^2-2y)}}{7^{2(x^2-2y)}} \Leftrightarrow f(x^2-2y+2) = f(2(x^2-2y)) \Leftrightarrow x^2-2y=2$

$$\Rightarrow S = x^2 + x - 2 \geq -\frac{9}{4}$$

Chú ý. Ngoài ra ta có thể đặt $t = x^2 - 2y$ sau đó dùng máy tính để giải phương trình mũ!

Câu 16. Chọn ý C.

Tương tự câu 5.

Câu 17. Chọn ý A.

Đặt $x = \ln a, y = \ln b \Rightarrow x(1-y) = y\sqrt{4-x^2} (x \in [-2;2])$

Do $\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} = x + \sqrt{4-x^2} \in [-2;2\sqrt{2}]$

Câu 18. Chọn ý B.

Theo giả thiết ta có $t = \frac{y}{x} \geq 4$. Khi đó ta được

$$P = \ln \frac{2x+5y}{y} - \frac{2y+5x}{x} = \ln \left(\frac{2x}{y} + 5 \right) - \frac{2y}{x} - 5 = \ln \left(\frac{2}{t} + 5 \right) - 2t - 5 \leq \ln \frac{11}{2} - 13$$

Câu 19. Chọn ý A.

Theo giả thiết ta có $(a+1)(b+1) \geq 64$. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được

$$64 \leq (a+1)(b+1) \leq \left(\frac{a+b+2}{2} \right)^2 \Rightarrow a+b+2 \geq 14 \Rightarrow a+b \geq 12$$

Câu 20. Chọn ý A.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là 0 đạt được khi $x = \frac{1}{16}$

2. Kỹ thuật “hàm đặc trưng”.

Dạng toán này chắc hẳn chẳng còn xa lạ gì với các bạn học sinh từ khi hình thức thi trắc nghiệm bắt đầu được Bộ áp dụng, qua mỗi năm dạng toán này lại có một cải phát triển mới lạ. Các bài toán dạng này thì đề bài sẽ cho phương trình hàm đặc trưng từ đó ta sẽ đi tìm mối liên hệ giữa các biến và rút thế vào giả thiết thứ 2 để giải quyết yêu cầu bài toán. Nhìn chung dạng toán này ta chỉ cần nắm chắc được kỹ năng biến đổi làm xuất hiện được hàm đặc trưng kết hợp với kiến thức về đạo hàm là sẽ giải quyết được trọn vẹn! Ta có tính chất sau của hàm số.

Tính chất. Nếu hàm số $y = f(x)$ đơn điệu 1 chiều trên miền D và tồn tại $u, v \in D$ thì khi đó phương trình $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

Ta sẽ dùng kiến thức này để giải quyết các bài toán mục này!

Câu 1. Cho 2 số thực không âm x, y thỏa mãn $x^2 + 2x - y + 1 = \log_2 \frac{\sqrt{2y+1}}{x+1}$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $P = e^{2x-1} + 4x^2 - 2y + 1$

A. $m = -1$ B. $m = -\frac{1}{2}$ C. $m = \frac{1}{e}$ D. $m = e - 3$

Lời giải

Mấu chốt của bài toán này sẽ phải làm xuất hiện hàm đặc trưng từ đó rút ra mối liên hệ giữa x và y . Biến đổi giả thiết ta có.

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - y + 1 &= \log_2 \frac{\sqrt{2y+1}}{x+1} \Leftrightarrow x^2 + 2x - y + 1 = \frac{1}{2} \log_2 (2y+1) - \log_2 (x+1) \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 2 + 2 \log_2 (x+1) &= \log_2 (2y+1) + 2y \\ \Leftrightarrow 2(x+1)^2 + \log_2 2(x+1)^2 &= \log_2 (2y+1) + 2y + 1 \Leftrightarrow f(2(x+1)^2) = f(2y+1)(1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên đoạn $(0; +\infty)$ ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0$. Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$. Vậy phương trình (1) $\Leftrightarrow 2y+1 = 2(x+1)^2$

Thế vào biểu thức cần tìm ta được $P = e^{2x-1} + 4x^2 - 2(x+1)^2 + 2 \geq -\frac{1}{2}$.

Chọn ý B.

Chú ý.

- Phần tìm giá trị nhỏ nhất của hàm 1 biến xin nhường cho bạn đọc!
- Để tìm hàm đặc trưng ta phải luôn dựa vào biểu thức mũ hoặc biểu thức trong hàm logarit.
- Với bài thi trắc nghiệm ta có thể lược bỏ bước xét hàm số đơn điệu để suy ra luôn mối liên hệ.

Câu 2. Cho 3 số x, y, z thỏa mãn $x \geq y \geq z > 0$ đồng thời $\log_2 \left(\frac{x-y}{y-z} \right) = (x+z)(z-x-2y)$. Khi đó GTNN của biểu thức $P = \frac{z^2 + 4y^2}{4z^2 + 2xz + 4y^2}$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{3}{7}$

Lời giải

Ý tưởng bài toán không mới, vấn đề là ta phải tìm được mối liên hệ giữa các biến với nhau, và bám sát vào các biểu thức trong dấu logarit để xây dựng hàm đặc trưng. Biến đổi giả thiết ta được.

$$\begin{aligned} \log_2 \left(\frac{x-y}{y-z} \right) &= (x+z)(z-x-2y) \\ \Leftrightarrow \log_2 (x-y) - \log_2 (y-z) &= z^2 - x^2 - 2y(x+z) \\ \Leftrightarrow \log_2 (x-y) + (x-y)^2 &= \log_2 (y-z) + (y-z)^2 \\ \Leftrightarrow x-y &= y-z \Leftrightarrow x+z = 2y \end{aligned}$$

Thế vào giả thiết ta được

$$P = \frac{z^2 + 4y^2}{4z^2 + 2xz + 4y^2} = \frac{x^2 + 2xz + 2z^2}{x^2 + 4xz + 5z^2} = \frac{t^2 + 2t + 2}{t^2 + 4t + 5} \left(t = \frac{x}{z} \geq 1 \right)$$

Từ đây dễ dàng tìm được $\min P = \frac{1}{2}$.

Chọn ý A.

Câu 3. Cho 2 số $x, y > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 \geq 1$ và đồng thời $x^2 + 2y^2 - 1 = \ln\left(\frac{1-y^2}{x^2+y^2}\right)$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{y^2} + \frac{4y}{x^2+y^2} = m\sqrt{n}$ với m, n là 2 số nguyên dương. Hỏi có bao nhiêu bộ số (m, n) thỏa mãn?

A. 1

B. 3

C. 0

D. 2

Lời giải

Nhìn thấy biểu thức logarit viết dưới dạng phân thức là ta nghĩ ngay tới hàm đặc trưng. Biến đổi giả thiết ta được.

$$x^2 + 2y^2 - 1 = \ln\left(\frac{1-y^2}{x^2+y^2}\right) \Leftrightarrow \ln(1-y^2) + 1 - y^2 = \ln(x^2+y^2) + x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 = 1$$

Tuy nhiên vấn đề khó không nằm ở việc biến đổi mà nằm ở phần sau.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{x^4}{x^2 \cdot y^2 \cdot y^2} &\geq \frac{x^4}{(x^2 + y^2 + y^2)^3} = \frac{x^4}{\frac{1}{27}} \Rightarrow \frac{x^2}{y^4} \geq 27x^4 \Rightarrow \frac{x}{y^2} \geq 3\sqrt{3}x^2 \\ \bullet \quad \frac{16y^4}{2y^2(x^2+y^2)(x^2+y^2)} &\geq \frac{16y^4}{(2y^2+x^2+x^2+y^2+y^2)^3} \Rightarrow \frac{16y^2}{(x^2+y^2)^2} \geq 108y^4 \Rightarrow \frac{4y}{x^2+y^2} \geq 3\sqrt{3} \cdot 2y^2 \end{aligned}$$

Cộng vế theo vế ta được $P \geq 3\sqrt{3} = 1 \cdot \sqrt{27}$

Vậy có 2 bộ số (m, n) thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn ý D.

Câu 4. Cho phương trình $\log_2(2x^2 + 2x + 2) = 2^{y^2} + y^2 - x^2 - x$. Hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương (x, y) , $(0 < x < 500)$ thỏa mãn phương trình đã cho?

A. 4

B. 2

C. 3

D. 1

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được.

$$\begin{aligned} \log_2(2x^2 + 2x + 2) &= 2^{y^2} + y^2 - x^2 - x \Leftrightarrow \log_2(x^2 + x + 1) + x^2 + x + 1 = 2^{y^2} + y^2 \\ &\Leftrightarrow 2^{\log_2(x^2+x+1)} + \log_2(x^2+x+1) = 2^{y^2} + y^2 \Leftrightarrow \log_2(x^2+x+1) = y^2 \end{aligned}$$

Do $0 < x < 500 \Rightarrow y^2 = \log_2(x^2 + x + 1) \in (0; 18) \Rightarrow 0 < y < 5$.

Thế ngược lại các giá trị có thể có của y thì ta thấy có 2 giá trị nguyên của y thỏa mãn yêu cầu đề bài đồng nghĩa có 2 cặp số (x, y) thỏa mãn phương trình đã cho.

Chọn ý B.

Câu 5. Cho 3 số thực a, b, c thỏa mãn $\log_2 \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2} = a(a-4) + b(b-4) + c(c-4)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a+2b+3c}{a+b+c}$

A. $\frac{12+\sqrt{30}}{3}$

B. $\frac{4+\sqrt{30}}{3}$

C. $\frac{8+\sqrt{30}}{3}$

D. $\frac{6+\sqrt{30}}{3}$

Lời giải

Một bài toán phát biểu đơn giản nhưng khá là khó. Trước tiên biến đổi giả thiết ta được

$$\begin{aligned}\log_2 \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2} &= a(a-4) + b(b-4) + c(c-4) \\ \Leftrightarrow \log_2 4(a+b+c) + 4(a+b+c) &= \log_2 (a^2+b^2+c^2+2) + a^2+b^2+c^2+2 \\ \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2-4(a+b+c) &= 0 \Leftrightarrow (a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2 = 10(C)\end{aligned}$$

Đến đây sử dụng đại số thì khá là khó, và ý tưởng sử dụng yếu tố hình học của tác giả bài toán rất hay đó là sử dụng điều kiện tương giao giữa mặt phẳng và mặt cầu trong hình phẳng $Oxyz$. Quy đồng giả thiết ta được.

$$P = \frac{a+2b+3c}{a+b+c} \Leftrightarrow a(P-1) + b(P-2) + c(P-3) = 0(P)$$

Điều kiện tương giao của mặt phẳng (P) và mặt cầu (C) là.

$$d(I; (P)) \leq R(I(2;2;2), R=\sqrt{10}) \Leftrightarrow \frac{|6P-12|}{\sqrt{3P^2-12P+14}} \leq \sqrt{10} \Leftrightarrow P \leq \frac{6+\sqrt{30}}{3}$$

Chọn ý **D**.

Ví dụ 6. Tìm tất cả các giá trị thực dương của tham số a thỏa mãn bất đẳng thức

$$\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^{2017} \leq \left(2^{2017} + \frac{1}{2^{2017}}\right)^a$$

A. $0 < a < 1$

B. $1 < a < 2017$

C. $a \geq 2017$

D. $0 < a \leq 2017$

THPT Kiến An – Hải Phòng 2017 – 2018

Lời giải

Lấy logarit cơ số 2 cả 2 vế ta được

$$\begin{aligned}\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^{2017} \leq \left(2^{2017} + \frac{1}{2^{2017}}\right)^a &\Rightarrow 2017 \log_2 \left(2^a + \frac{1}{2^a}\right) \leq a \log_2 \left(2^{2017} + \frac{1}{2^{2017}}\right) \\ \Rightarrow \frac{\log_2 \left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)}{a} &\leq \frac{\log_2 \left(2^{2017} + \frac{1}{2^{2017}}\right)}{2017}\end{aligned}$$

Xét hàm số .

$$f(x) = \frac{\log_2 \left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)}{x} = \frac{\log_2 (4^x + 1) - x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{4^x \cdot x \cdot \ln 4 - (4^x + 1) \ln(4^x + 1)}{x^2 (4^x + 1)} \right] < 0$$

Suy ra $f(x)$ là hàm giảm trên $(0; +\infty) \Rightarrow f(a) \leq f(2017)$ khi $0 < a \leq 2017$

Chọn ý **D**.

Nhận xét. Qua các ví dụ trên ta phần nào đã hiểu được ý tưởng và phương pháp làm dạng toán này. Sau đây là các bài tập luyện tập cho các bạn.

Ví dụ 7. Cho $x, y > 0$ thỏa $\log \left(\frac{x+3y}{xy} \right) = xy - x - 3y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{x^2}{1+3y} + \frac{9y^2}{1+x}$.

A. 10

B. $\frac{71}{7}$

C. $\frac{72}{7}$

D. $\frac{73}{7}$

Lời giải

Phương trình đầu tương đương

$$\log(x+3y) - \log(xy) = xy - (x+3y) \Leftrightarrow \log(x+3y) + (x+3y) = \log(xy) + xy \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = \log t + t$, $t > 0$, có $f'(t) = \frac{1}{t \cdot \ln 10} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Phương trình (1) tương đương $f(x+3y) = f(xy) \Leftrightarrow x+3y = xy$.

Theo bất đẳng thức Schwarz ta có

$$P = \frac{x^2}{1+3y} + \frac{9y^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+3y} + \frac{(3y)^2}{1+x} \geq \frac{(x+3y)^2}{2+(x+3y)} \quad (2).$$

Theo bất đẳng thức AM – GM cho 2 số dương ta có

$$xy = x+3y \geq 2\sqrt{x \cdot 3y} \Leftrightarrow (xy)^2 - 12xy \geq 0 \Leftrightarrow xy(xy-12) \geq 0.$$

Vì $xy > 0$ nên $xy \geq 12 \Rightarrow x+3y \geq 12$. Đặt $u = x+3y \Rightarrow u \geq 12$.

Từ (2) ta có $P \geq f(u) = \frac{u^2}{u+2}$, $u \geq 12$, ta có

$$f'(u) = \frac{u^2 + 4u}{(u+2)^2} \Rightarrow f'(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u=0 \\ u=-4 \end{cases} \text{ (không thỏa mãn)}.$$

Suy ra $\min f(u) = f(12) = \frac{72}{7}$.

Vậy $P \geq \frac{72}{7} \Rightarrow \min P = \frac{72}{7}$ khi $u = 12$, hay

$$\begin{cases} x+3y=12 \\ \frac{x}{1+3y} = \frac{3y}{1+x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3y+12 \\ \left((-3y+12)^2 - 3y+12 = 3y+9y^2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}.$$

Ví dụ 8. Cho hai số thực dương a và b thỏa mãn điều kiện $4^{ab} \cdot 2^{a+b} = \frac{8(1-ab)}{a+b}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ab + 2ab^2$ bằng

A. 1.

B. $\frac{3}{17}$.

C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

D. 3.

Lời giải

Ta có $ab < 1$, biến đổi phương trình tương đương

$$\begin{aligned} 4^{ab} \cdot 2^{a+b} &= \frac{8(1-ab)}{a+b} \Leftrightarrow 2^{2ab+a+b} = \frac{8(1-ab)}{a+b} \Leftrightarrow 2^{2ab+a+b} \cdot (a+b) = 8(1-ab) \\ &\Rightarrow 2ab + a + b + \log_2(a+b) = 3 + \log_2(1-ab) \\ &\Leftrightarrow a + b + \log_2(a+b) = 2 - 2ab + \log_2(2-2ab)(1) \end{aligned}$$

Đặt $f(x) = \log_2 x + x, x > 0$ (2), có $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln 2} + 1 > 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow f(a+b) = f(2-2ab) \Leftrightarrow a+b = 2-2ab \Leftrightarrow 2ab = 2-a-b$.

Khi đó, ta có

$$P = ab + 2ab^2 = 2b - b^2 - ab + ab = 2b - b^2 = 1 - (b-1)^2 \leq 1, \forall b \in \mathbb{R}$$

Khi $P = 1 \Leftrightarrow b = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$, thỏa điều kiện $ab < 1$.

Vậy $P_{\max} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = 1 \end{cases}$.

Ví dụ 9. Cho x, y thỏa mãn $x \geq 1, y \geq 1$ và $\log_3 \left(\frac{x+y}{4xy} \right) = 4xy - 3(x+y) - 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 - 3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$ thuộc tập nào dưới đây?

A. $[5; 9)$. B. $[-5; 0)$. C. $[0; 5)$. D. $[9; +\infty)$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \log_3 \left(\frac{x+y}{4xy} \right) = 4xy - 3(x+y) - 1 &\Leftrightarrow \log_3 \frac{3(x+y)}{4xy} = 4xy - 3(x+y) \\ &\Leftrightarrow 3(x+y) + \log_3 3(x+y) = 4xy + \log_3 (4xy) \quad (1) \end{aligned}$$

Do $x \geq 1, y \geq 1$ nên $\begin{cases} 3(x+y) \geq 6 \\ 4xy \geq 4 \end{cases}$. Xét hàm số $f(t) = t + \log_3 t$ với $t > 0$.

Ta có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 3} > 0, \forall t > 0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Nên } (1) \Leftrightarrow f(3(x+y)) = f(4xy) \Leftrightarrow 3(x+y) = 4xy$$

$$\begin{aligned} \text{Ta lại có } P = x^2 + y^2 - 3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) &= (x+y)^2 - 2xy - \frac{3(x+y)}{xy} \\ &= \frac{16}{9}(xy)^2 - 2xy - 4 = \frac{16}{9}a^2 - 2a - 4 = g(a) \end{aligned}$$

$$\text{Với } a = xy = \frac{3}{4}(x+y) \geq \frac{3}{4}2\sqrt{xy} = \frac{3}{2}\sqrt{a} \Leftrightarrow \sqrt{a} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow a \geq \frac{9}{4}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{3}{2}$.

$$\text{Mặt khác } x \geq 1, y \geq 1 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) \geq 0 \Leftrightarrow xy - (x+y) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow xy - \frac{4}{3}xy + 1 \geq 0 \Leftrightarrow xy \leq 3$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}, \text{ do đó } a \in \left[\frac{9}{4}; 3 \right].$$

$$\text{Khi đó ta có } g'(a) = \frac{32}{9}a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{9}{16} \notin \left[\frac{9}{4}; 3 \right], \text{ và } g\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{1}{2}, g(3) = 6$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = 6 \text{ khi } \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}.$$

Ví dụ 10. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\ln x + x(x+y) \geq \ln(4-y) + 4x$.

Khi biểu thức $P = 8x + 16y + \frac{1}{x} + \frac{147}{y}$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị $\frac{x}{y}$ thuộc khoảng nào sau đây

A. $\left(\frac{1}{2}; 1 \right)$. B. $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right)$. C. $\left(0; \frac{1}{4} \right)$. D. $(1; 2)$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có điều kiện xác định $\begin{cases} x > 0 \\ 0 < y < 4 \end{cases}$. Khi đó

$$\begin{aligned} \ln x + x(x+y) \geq \ln(4-y) + 4x &\Leftrightarrow \ln x + x^2 \geq \ln(4-y) + x(4-y) \\ &\Leftrightarrow \ln x + \ln x + x^2 \geq \ln x + \ln(4-y) + x(4-y) \Leftrightarrow \ln x^2 + x^2 \geq \ln[x(4-y)] + x(4-y) \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \ln t + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$ ta có $f'(t) = \frac{1}{t} + 1 > 0, \forall t > 0$. Do đó hàm số $f(t)$ là hàm đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Bất phương trình (*) trở thành

$$f(x^2) \geq f(x(4-y)) \Leftrightarrow x^2 \geq x(4-y) \Leftrightarrow x+y \geq 4 \text{ do } x, y > 0$$

Khi đó ta chọn điểm rơi để đánh giá min của đẳng thức P như sau

$$P = \alpha(x+y) + (8-\alpha)x + (16-\alpha)y + \frac{1}{x} + \frac{147}{y} = \alpha(x+y) + \left[(8-\alpha)x + \frac{1}{x}\right] + \left[(16-\alpha)y + \frac{147}{y}\right]$$

Ta chọn giá trị α dương thỏa mãn để ghép cặp AM – GM cho các đẳng thức trong ngoặc vuông và dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} (8-\alpha)x = \frac{1}{x} \\ (16-\alpha)y = \frac{147}{y} \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{8-\alpha}} \\ y = \sqrt{\frac{147}{16-\alpha}} \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{8-\alpha}} + \sqrt{\frac{147}{16-\alpha}} = 4.$$

Xét hàm số $g(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{8-\alpha}} + \sqrt{\frac{147}{16-\alpha}}$ trên $[0; 8)$.

Ta có $g'(\alpha) = \left(\frac{1}{\sqrt{8-\alpha}} + \sqrt{\frac{147}{16-\alpha}}\right)' = \frac{1}{2(8-\alpha)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sqrt{147}}{2(16-\alpha)^{\frac{3}{2}}} > 0, \forall \alpha \in [0; 8)$.

Nên hàm số $g(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{8-\alpha}} + \sqrt{\frac{147}{16-\alpha}}$ đồng biến trên $[0; 8)$.

Vậy phương trình $\frac{1}{\sqrt{8-\alpha}} + \sqrt{\frac{147}{16-\alpha}} = 4$ có tối đa một nghiệm.

Dễ thấy $\alpha = 4$ là một nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $\alpha = 4$.

Do đó ta viết lại $P = 4(x+y) + \left(4x + \frac{1}{x}\right) + \left(12y + \frac{147}{y}\right) \geq 4.4 + 2\sqrt{4x \cdot \frac{1}{x}} + 2\sqrt{12y \cdot \frac{147}{y}} = 104$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{2}; y = \frac{7}{2}$. Suy ra $\frac{x}{y} = \frac{1}{2} : \frac{7}{2} = \frac{1}{7} \approx 0.1429 \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$.

Ví dụ 11. Xét các số dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{4-x+2y-xy}{x+2y} = 3xy + 4(x-y) - 13$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y$ thuộc tập hợp nào sau đây?

A. $(-3; 0)$.

B. $(0; 2)$.

C. $(2; 5)$.

D. $(5; 10)$.

Lời giải

Điều kiện $4-x+2y-xy > 0$. Ta có $\log_3 \frac{4-x+2y-xy}{x+2y} = 3xy + 4(x-y) - 13$

$$\Leftrightarrow \log_3 (12-3x+6y-3xy) + (12-3x+6y-3xy) = \log_3 (x+2y) + (x+2y) (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ với $t > 0$. Suy ra $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Do đó hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

Ta có $(*) \Leftrightarrow f(12-3x+6y-3xy) = f(x+2y) \Leftrightarrow 12-3x+6y-3xy = x+2y$

$$\Leftrightarrow 12 - 4x = (3x - 4)y \Leftrightarrow y = \frac{12 - 4x}{3x - 4}.$$

Do $x, y > 0$ nên $x \in \left(\frac{4}{3}; 3\right)$. Ta có

$$P = x + y = x + \frac{12 - 4x}{3x - 4} = g(x); g'(x) = 1 + \frac{-20}{(3x - 4)^2} = \frac{9x^2 - 24x - 4}{(3x - 4)^2}; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{3}.$$

Vì $x \in \left(\frac{4}{3}; 3\right)$ nên ta lấy giá trị $x = \frac{4 + 2\sqrt{5}}{3}$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ ta được $\min P = g\left(\frac{4 + 2\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{5}}{3} \approx 2,98$.

Ví dụ 12. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên n có 4 chữ số thỏa mãn $(2^n + 3^n)^{2020} < (2^{2020} + 3^{2020})^n$. Số phần tử của S là

A. 8999. B. 2019. C. 1010. D. 7979.

Lời giải

Với mọi số tự nhiên n có 4 chữ số, ta có

$$\begin{aligned} (2^n + 3^n)^{2020} < (2^{2020} + 3^{2020})^n &\Leftrightarrow \ln\left((2^n + 3^n)^{2020}\right) < \ln\left((2^{2020} + 3^{2020})^n\right) \\ &\Leftrightarrow 2020 \ln(2^n + 3^n) < n \ln(2^{2020} + 3^{2020}) \Leftrightarrow \frac{\ln(2^n + 3^n)}{n} < \frac{\ln(2^{2020} + 3^{2020})}{2020} (*). \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\ln(2^x + 3^x)}{x}$ trên $(999; +\infty)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f'(x) &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{(2^x \ln 2 + 3^x \ln 3)x}{2^x + 3^x} - \ln(2^x + 3^x) \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{2^x \ln 2^x + 3^x \ln 3^x - (2^x + 3^x) \ln(2^x + 3^x)}{2^x + 3^x} \right) = \frac{1}{x^2 (2^x + 3^x)} \left(2^x \cdot \ln\left(\frac{2^x}{2^x + 3^x}\right) + 3^x \cdot \ln\left(\frac{3^x}{2^x + 3^x}\right) \right). \end{aligned}$$

Với $\forall x > 999$ ta có $\frac{2^x}{2^x + 3^x} < 1$ và $\frac{3^x}{2^x + 3^x} < 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{2^x}{2^x + 3^x}\right) < 0$ và $\ln\left(\frac{3^x}{2^x + 3^x}\right) < 0$.

$\Rightarrow f'(x) < 0, \forall x > 999 \Rightarrow f(x)$ là hàm nghịch biến trên $(999; +\infty)$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow f(n) < f(2020) \Leftrightarrow n > 2020$.

Vì n là số tự nhiên có 4 chữ số nên $n \in \{2021; 2022; \dots; 9999\}$.

Vậy có S có 7979 phần tử.

Ví dụ 12. Cho các số thực x, y thỏa mãn $\log_2\left(\frac{2-x}{2+x}\right) - \log_2 y = 2x + 2y + xy - 5$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 + xy$ là bao nhiêu?

A. $30 - 20\sqrt{2}$. B. $33 - 22\sqrt{2}$. C. $24 - 16\sqrt{2}$. D. $36 - 24\sqrt{2}$.

Lời giải

Điều kiện $x \in (-2; 2), y > 0$.

Ta có $\log_2\left(\frac{2-x}{2+x}\right) - \log_2 y = 2x + 2y + xy - 5 \Leftrightarrow \log_2(4 - 2x) + (4 - 2x) = \log_2(2y + xy) + (2y + xy) (*)$.

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Suy ra $(*) \Leftrightarrow f(4-2x) = f(2y+xy) \Leftrightarrow 4-2x = 2y+xy \Leftrightarrow 4 = 2x+2y+xy$.

Ta có $(x+y)^2 \geq 4xy = 16-8(x+y)$ suy ra điều kiện tồn tại x, y là $\begin{cases} x+y \geq -4+4\sqrt{2} \\ x+y \leq -4-4\sqrt{2} \end{cases} (L)$.

$$P = (x+y)^2 - xy = (x+y)^2 + 2(x+y) - 4 \stackrel{t=x+y}{=} t^2 + 2t - 4 = h(t).$$

Vậy $P_{\min} = 36 - 24\sqrt{2} \Leftrightarrow x = y = -2 + 2\sqrt{2}$.

Cách 2.

Ta có $(*) \Leftrightarrow xy + 2x + 2y = 4 \Leftrightarrow (x+2)(y+2) = 8$.

Ta có $x+2 > 0, y+2 > 0; x+2+y+2 \geq 2\sqrt{(x+2)(y+2)} = 4\sqrt{2} \Rightarrow x+y \geq 4\sqrt{2} - 4$.

Xét $P = x^2 + y^2 + xy; P + xy + 2x + 2y + 1 = x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y = (x+y+1)^2$.

$$\Rightarrow P \geq (4\sqrt{2} - 3)^2 - 5 = 36 - 24\sqrt{2}$$

Vậy $\min P = 36 - 24\sqrt{2}$ khi $\begin{cases} x+y = 4\sqrt{2} - 4 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2\sqrt{2} - 2$.

Ví dụ 13. Cho các số thực x, y dương và thỏa mãn $\log_2 \frac{x^2 + y^2}{3xy + x^2} + 2^{\log_2(x^2 + 2y^2 + 1)} \leq \log_2 8^{xy}$. Tìm giá trị

nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2x^2 - xy + 2y^2}{2xy - y^2}$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{5}{2}$.

C. $\frac{3}{2}$.

D. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{x^2 + y^2}{3xy + x^2} + 2^{\log_2(x^2 + 2y^2 + 1)} &\leq \log_2 8^{xy} \Leftrightarrow \log_2 \frac{x^2 + y^2}{3xy + x^2} + x^2 + 2y^2 + 1 \leq 3xy \\ \Leftrightarrow \log_2(2x^2 + 2y^2) + 2x^2 + 2y^2 &\leq 3xy + x^2 + \log_2(3xy + x^2) \end{aligned} \quad (1)$$

Nhận thấy hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$, nên (1) tương đương với

$$2x^2 + 2y^2 \leq 3xy + x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3xy + 2y^2 \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{y}\right) + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{y} \leq 2.$$

Đặt $t = \frac{x}{y} \Rightarrow t \in [1; 2]$, khi đó $P = g(t) = \frac{2t^2 - t + 2}{2t - 1} = t + \frac{2}{2t - 1}, t \in [1; 2]$.

Ta có $g'(t) = 1 - \frac{4}{(2t-1)^2}$. Suy ra $g'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2} \in [1; 2]$.

Lại có $g(1) = 3, g(2) = \frac{8}{3}, g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}$.

Vậy $\min P = \frac{5}{2}$.

Ví dụ 14. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $2(x^2 + y^2 + 4) + \log_2 \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{y} \right) = \frac{1}{2}(xy - 4)^2$.

Khi biểu thức $x + 4y$ đạt giá trị nhỏ nhất, $\frac{x}{y}$ bằng

- A. 2. B. 4. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Ta có $2(x^2 + y^2 + 4) + \log_2 \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{y} \right) = \frac{1}{2}(xy - 4)^2$

$$\Leftrightarrow 2(x + y)^2 - 4xy + 8 + \log_2 \left[\frac{2(x + y)}{xy} \right] = \frac{1}{2}(xy)^2 - 4xy + 8$$

$$\Leftrightarrow 2(x + y)^2 + \log_2(x + y) = 2\left(\frac{xy}{2}\right)^2 + \log_2\left(\frac{xy}{2}\right). \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^2 + \log_2 t$, với $t > 0$, có $f'(t) = 4t + \frac{1}{t \cdot \ln 2} > 0, \forall t > 0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow f(x + y) = f\left(\frac{xy}{2}\right) \Leftrightarrow x + y = \frac{xy}{2} \Leftrightarrow x(y - 2) = 2y$.

Theo giả thiết $x, y > 0$ nên suy ra $y > 2$ và $x = \frac{2y}{y - 2} = 2 + \frac{4}{y - 2} > 2$.

Đặt $P = x + 4y \Rightarrow P = \frac{2y}{y - 2} + 4y = \left[4(y - 2) + \frac{4}{y - 2} \right] + 10$.

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có $P \geq 2\sqrt{16} + 10 = 18$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} y = 3 \\ x = \frac{2y}{y - 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 6 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = 2$.

Ví dụ 15. Cho các số thực a, b thỏa mãn $e^{a^2+2b^2} + e^{ab}(a^2 - ab + b^2 - 1) - e^{1+ab+b^2} = 0$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{1+2ab}$. Khi đó, $m + M$ bằng

- A. $\frac{10}{3}$. B. $\frac{19}{5}$. C. $\frac{7}{3}$. D. $\frac{2}{5}$.

Lời giải

Ta có $e^{a^2+2b^2} + e^{ab}(a^2 - ab + b^2 - 1) - e^{1+ab+b^2} = 0 \Leftrightarrow e^{a^2-2ab+2b^2} + a^2 - ab + b^2 - 1 - e^{1+b^2} = 0$

$$\Leftrightarrow e^{a^2-ab+2b^2} + a^2 - ab + 2b^2 = e^{1+b^2} + 1 + b^2, (*)$$

Xét hàm số $f(t) = e^t + t \Rightarrow f'(t) = e^t + 1 > 0 \Rightarrow f(t) = e^t + t$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$(*) \Leftrightarrow f(a^2 - ab + 2b^2) = f(1 + b^2) \Leftrightarrow a^2 - ab + 2b^2 = 1 + b^2 \Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 = 1$$

Do đó $P = \frac{1}{1+2ab} = \frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2}$.

- **Trường hợp 1.** $b = 0 \Rightarrow P = 1$.

- **Trường hợp 2.** $b \neq 0 \Rightarrow P = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right) + 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right) + 1} = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = g(x)$ với $x = \frac{a}{b}$.

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } m = P_{\min} = \frac{1}{3}; M = P_{\max} = 3 \Rightarrow m + M = \frac{10}{3}.$$

Ví dụ 17. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $8.2^{y^2} + 2y^2 - 2x + 6 = 2^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{x + 2y^4 - 3}{xy - 3y}$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(0; 2)$.

B. $[4; 10)$.

C. $[3; 4)$.

D. $\left[\frac{1}{2}; 3\right)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 8.2^{y^2} + 2y^2 - 2x + 6 = 2^x \Leftrightarrow 2^{y^2+3} + 2(y^2 + 3) = 2^x + 2x.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = 2^t + 2t \text{ xác định trên } \mathbb{R} \text{ có } f'(t) = 2^t \ln 2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Suy ra hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $f(y^2 + 3) = f(x) \Rightarrow y^2 + 3 = x$. Khi đó, ta có

$$S = \frac{x + 2y^4 - 3}{xy - 3y} = \frac{y^2 + 3 + 2y^4 - 3}{(y^2 + 3)y - 3y} = \frac{y^2 + 2y^4}{y^3} = \frac{1}{y} + 2y \geq 2\sqrt{2}, \forall y > 0.$$

$$\text{Dấu } = \text{ xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} y^2 + 3 = x \\ 2y^2 = 1 \\ x > 0, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{7}{2} \end{cases}.$$

Ví dụ 18. Cho các số thực x, y thỏa mãn $2x - y = e^x(2 - e^x) + \ln(2e^x + y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 10y$.

A. 0.

B. -21.

C. -20.

D. -9.

Lời giải

Điều kiện $2e^x + y > 0$. (*)

$$\text{Ta có } 2x - y = e^x(2 - e^x) + \ln(2e^x + y) \Leftrightarrow e^{2x} + \ln e^{2x} = 2e^x + y + \ln(2e^x + y) \quad (1).$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t + \ln t, t \in (0; +\infty). \text{ Ta có } f'(t) = 1 + \frac{1}{t} > 0, \forall t \in (0; +\infty).$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow f(e^{2x}) = f(2e^x + y) \Leftrightarrow e^{2x} = 2e^x + y \Leftrightarrow y = e^{2x} - 2e^x.$$

$$\text{Xét hàm số } y = e^{2x} - 2e^x, \text{ có } y' = 2e^{2x} - 2e^x; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Từ bảng biến thiên, ta có $y \geq -1, \forall x \Rightarrow (y + 5)^2 \geq 16, \forall x$, đẳng thức xảy ra khi $x = 0$.

$$\text{Ta có } P = x^2 + y^2 + 10y = x^2 + (y + 5)^2 - 25 \geq 16 - 25 = -9, \forall x.$$

$$\text{Vậy } \min P = -9, \text{ đạt được khi } \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện (*)}.)$$

Bài tập tự luyện

Câu 1. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_3 \frac{2-ab}{a+b} = 3ab + a + b - 7$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + 5b$

- A. $\frac{2\sqrt{95}-6}{3}$ B. $\frac{4\sqrt{95}+15}{12}$ C. $\frac{3\sqrt{95}-16}{3}$ D. $\frac{5\sqrt{95}-21}{6}$

Câu 2. Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $2017^{1-x-y} = \frac{x^2+2018}{y^2-2y+2019}$. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = (4x^2+3y)(4y^2+3x) + 25xy$ là $\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $T = a + b$.

- A. $T = 27$ B. $T = 17$ C. $T = 195$ D. $T = 207$

Câu 3. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a + 2b$.

- A. $\frac{2\sqrt{10}-3}{2}$ B. $\frac{2\sqrt{10}-1}{2}$ C. $\frac{2\sqrt{10}-5}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{10}-7}{2}$

Câu 4. Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $e^{x-4y+\sqrt{1-x^2}} - e^{y^2+\sqrt{1-x^2}} = y + \frac{y^2-x}{4}$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^3 + 2y^2 - 2x^2 + 8y - x + 2$ là $\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $T = a + b$.

- A. $T = 85$ B. $T = 31$ C. $T = 75$ D. $T = 41$

Câu 5. Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $3^{xy-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2y} = 2 - 2xy - 2x - 4y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2x + 3y$

- A. $6\sqrt{2}-7$ B. $\frac{10\sqrt{2}+1}{10}$ C. $15\sqrt{2}-20$ D. $\frac{3\sqrt{2}-4}{2}$

Câu 6. Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $(x+y)^3 + x + y + \log_2 \frac{x+y}{1-xy} = 8(1-xy)^3 - 2xy + 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 3y$.

- A. $\frac{1+\sqrt{15}}{2}$ B. $\frac{3+\sqrt{15}}{2}$ C. $\sqrt{15}-2$ D. $\frac{3+2\sqrt{15}}{6}$

Câu 7. Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2 \frac{y}{2\sqrt{x+1}} = -y^2 + 3y + x - 3\sqrt{x+1}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x - 100y$.

- A. -2499 B. -2501 C. -2500 D. -2490

Câu 8. Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x+2y+3}{x+y+6}$.

- A. $\frac{69+\sqrt{249}}{94}$ B. $\frac{43+3\sqrt{249}}{94}$ C. $\frac{37-\sqrt{249}}{21}$ D. $\frac{69-\sqrt{249}}{94}$

Câu 9. Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x+2y+3}{x+y+6}$.

- A. $\frac{69+\sqrt{249}}{94}$ B. $\frac{43+3\sqrt{249}}{94}$ C. $\frac{37-\sqrt{249}}{21}$ D. $\frac{69-\sqrt{249}}{94}$

Câu 10. Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{2x+y+1}{x+y} = x+2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{y}}$.

- A. 6 B. $3+2\sqrt{3}$ C. 4 D. $3+\sqrt{3}$

Câu 11. Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $\log_2 \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-4) + y(y-4) + xy$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x+2y+1}{x+y+2} = \frac{a+\sqrt{b}}{c}$, với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{c}$ tối giản. Tính giá trị của biểu thức $S = a+b+c$.

- A. 221 B. 231 C. 195 D. 196

Câu 12. Cho 2 số x, y thỏa mãn $(x-y)(x^2+xy+y^2-2) = 2\ln \frac{y+\sqrt{y^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{2xy} + xy$.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 13. Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $2018^{2xy-4x-2y-2} = \frac{2x+y}{xy-1}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x+4y$.

- A. $6+4\sqrt{3}$ B. $1+2\sqrt{3}$ C. $6-4\sqrt{3}$ D. $9+4\sqrt{3}$

Câu 14. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\log_2 \frac{y}{2\sqrt{x+1}} = 3(y-\sqrt{x+1}) - y^2 + x$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x-y$.

- A. $-\frac{3}{4}$ B. $-\frac{5}{4}$ C. -2 D. -1

Câu 15. Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{6x-6y+23}{x^2+y^2} = 9x^2+9y^2-6x+6y-21$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x+y)(50-9xy) - 39x^2 - 6y^2$ là $\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $T = a+b$.

- A. 188 B. 191 C. 202 D. 179

Câu 16. Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $x, y \geq 1$ và $\log_3 [(x+1)(y+1)]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1)$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 - 57(x+y)$ là số thực có dạng $a+b\sqrt{7}$ với a, b là các số nguyên. Tính $T = a+b$.

- A. -28 B. -29 C. -30 D. -31

Câu 17. Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $\log_2 \frac{x^2 + y^2}{3xy + x^2} + x^2 + 2y^2 + 1 \leq 3xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2x^2 - xy + 2y^2}{2xy - y^2}$.

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{5}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{7}{2}$

Câu 18. Cho 2 số thực a, b thỏa mãn $\log_5 \left(\frac{4a + 2b + 5}{a + b} \right) = a + 3b - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2$

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{5}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{7}{2}$

Câu 19. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 \left(\frac{x + 4y}{x + y} \right) = 2x - 4y + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2x^4 - 2x^2y^2 + 6x^2}{(x + y)^3}$.

A. $\frac{9}{4}$

B. $\frac{16}{9}$

C. 4

D. $\frac{25}{9}$

Câu 20. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $5^{x+2y} + \frac{3}{3^{xy}} + x + 1 = \frac{5^{xy}}{3} + 3^{-x-2y} + y(x-2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x + 2y$.

A. $6 - 2\sqrt{3}$

B. $4 + 2\sqrt{6}$

C. $4 - 2\sqrt{6}$

D. $6 + 2\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Câu 1. Chọn ý A

Biến đổi giả thiết ta được

$$\begin{aligned} \log_3(2 - ab) - \log_3(a + b) &= 3(ab - 2) + (a + b) - 1 \\ \Leftrightarrow \log_3(3(2 - ab)) + 3(2 - ab) &= \log_3(a + b) + (a + b) \\ \Leftrightarrow 3(2 - ab) = a + b &\Leftrightarrow b(3a + 1) = 6 - a \Rightarrow b = \frac{6 - a}{3a + 1} \quad (0 < a < 6) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S = f(a) \geq f\left(\frac{-1 + \sqrt{95}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{95} - 6}{3}$$

Câu 2. Chọn ý D

Biến đổi giả thiết ta được

$$\begin{aligned} (x^2 + 2018)2017^x &= ((1 - y)^2 + 2018)2017^{1-y} \Leftrightarrow x = 1 - y \\ \Rightarrow S &= 16(x^2 - x)^2 + 2(x^2 - x) + 12 \geq \frac{191}{16} \end{aligned}$$

Câu 3. Chọn ý A

Tương tự câu 1.

Câu 4. Chọn ý A

Biến đổi giả thiết ta được

$$\begin{aligned} 4e^{x-4y+\sqrt{x^2+1}} - 4e^{y^2+\sqrt{1-x^2}} &= y^2 - (x - 4y) \\ \Leftrightarrow x - 4y + \sqrt{1-x^2} + 4e^{x-4y+\sqrt{1-x^2}} &= y^2 + \sqrt{1-x^2} + 4e^{y^2+\sqrt{1-x^2}} \\ \Leftrightarrow x - 4y + \sqrt{1-x^2} &= y^2 + \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x = y^2 + 4y \end{aligned}$$

Đến đây thế vào giả thiết còn lại và khảo sát hàm số trên đoạn $[-1;1]$ ta sẽ tìm được giá trị lớn nhất

của $P = \frac{58}{27}$

Câu 5. Chọn ý A

Biến đổi giả thiết ta có

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}\right)^{1-xy} - 2(1-xy) &= \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2y} - 2(x+2y) \Leftrightarrow 1-xy = x+2y \\ \Rightarrow P = f(x) &= 2x + 3\left(\frac{1-x}{x+2}\right) \geq f\left(\frac{3\sqrt{2}-4}{2}\right) = 6\sqrt{2} - 7 \end{aligned}$$

Câu 6. Chọn ý C

Biến đổi giả thiết ta có

$$\begin{aligned} (x+y)^3 + x + y + \log_2(x+y) &= (2(1-xy))^3 + 2(1-xy) + \log_2(2(1-xy)) \\ \Leftrightarrow x+y &= 2(1-xy) \Leftrightarrow y = \frac{2-x}{2x+1} (x \in (0;2)) \Rightarrow P = x + \frac{3(2-x)}{2x+1} \geq -2 + \sqrt{15} \end{aligned}$$

Câu 7. Chọn ý B

Biến đổi giả thiết ta có

$$\begin{aligned} \log_2 y + y^2 - 3y &= \log_2 \sqrt{x+1} + (x+1) - 3\sqrt{x+1} \Rightarrow y = \sqrt{x+1} \\ \Rightarrow P &= x - 100\sqrt{x+1} = (\sqrt{x+1} - 50)^2 - 2501 \geq -2501 \end{aligned}$$

Câu 8. Chọn ý A

Biến đổi giả thiết ta có

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt{3}}(x+y) - \log_{\sqrt{3}}(x^2 + y^2 + xy + 2) &= x^2 + y^2 + xy - 3(x+y) \\ \Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}(3(x+y)) + 3(x+y) &= \log_{\sqrt{3}}(x^2 + y^2 + xy + 2) + x^2 + y^2 + xy + 2 \\ \Leftrightarrow 3(x+y) = x^2 + y^2 + xy + 2 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} - 3\left(x + \frac{y}{2}\right) - \frac{3y}{2} + 2 \\ \Leftrightarrow \underbrace{\left(x + \frac{y}{2} - \frac{3}{2}\right)^2}_a + \underbrace{\left(\frac{y\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}_b &= 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1(1) \end{aligned}$$

Khi đó ta được

$$\begin{aligned} x &= a - \frac{b}{\sqrt{3}}, y = \frac{2b}{\sqrt{3}} + 1 \Rightarrow P(x+y+6) = x+2y+3 \\ \Leftrightarrow P\left(a + \frac{b}{\sqrt{3}} + 8\right) &= a + \frac{3b}{\sqrt{3}} + 6 \Leftrightarrow (P-1)a + \frac{1}{\sqrt{3}}(P-3)b + 8P-6 = 0(2) \end{aligned}$$

Coi (1) là phương trình đường tròn (C) có tâm là gốc tọa độ và $R=1$ và (2) là phương trình đường thẳng (d). Để (C) và (d) có điểm chung thì ta có điều kiện.

$$d(O;d) \leq R \Leftrightarrow \frac{|8P-6|}{\sqrt{(P-1)^2 + \frac{1}{3}(P-3)^2}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{69-\sqrt{249}}{94} \leq P \leq \frac{69+\sqrt{249}}{94}$$

Câu 9. Chọn ý D

Tương tự câu 8.

Câu 10. Chọn ý A

Biến đổi giả thiết ta có

$$\begin{aligned}\log_3(2x+y+1) - \log_3(x+y) &= x+2y \\ \Leftrightarrow \log_3(2x+y+1) + (2x+y+1) &= \log_3(3(x+y)) + 3(x+y) \\ \Leftrightarrow x+2y=1 \Rightarrow S=f(x) &= \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{\frac{1-x}{2}}} \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = 6\end{aligned}$$

Câu 11. Chọn ý **A**

Tương tự câu 8.

Câu 12. Chọn ý **C**

Biến đổi giả thiết ta có

$$\begin{aligned}(x-y)(x^2+xy+y^2-2) &= 2\ln \frac{y+\sqrt{y^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}} \\ \Leftrightarrow x^3-y^3-2(x-y) &= 2\ln(y+\sqrt{y^2+1}) - 2\ln(x+\sqrt{x^2+1}) \\ \Leftrightarrow 2\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + x^3-2x &= 2\ln(y+\sqrt{y^2+1}) + y^3-2y \\ \Leftrightarrow x=y \Rightarrow P &= \frac{1}{x^2} + x^2 \geq 2\end{aligned}$$

Câu 13. Chọn ý **D**

Câu 14. Chọn ý **B**

Đề thi HKI – Chuyên Amsterdam – Hà Nội – 2017 – 2018

Câu 15. Chọn ý **A**

Câu 16. Chọn ý **B**

Nguyễn Đăng Đạo – Bắc Ninh – Lần 2 – 2017 – 2018

Biến đổi giả thiết ta có

$$\begin{aligned}\log_3((x+1)(y+1))^{y+1} &= 9 - (x-1)(y+1) \Leftrightarrow (y+1)\log_3((x+1)(y+1)) = 9 - (x-1)(y+1) \\ \Leftrightarrow \log_3((x+1)(y+1)) &= \frac{9}{y+1} - (x-1) \Leftrightarrow \log_3(x+1) + \log_3(y+1) = \frac{9}{y+1} - (x-1) \\ \Leftrightarrow \log_3(x+1) + x+1 &= \log_3 \frac{9}{y+1} + \frac{9}{y+1} \Leftrightarrow x+1 = \frac{9}{y+1} \Rightarrow x+y = 8-xy \geq 2 \Rightarrow 1 \leq xy \leq 6\end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } P = (8-xy)^3 - 3xy(8-xy) - 57(8-xy) = f(xy) \geq f(9-2\sqrt{7}) \Rightarrow \begin{cases} a=83 \\ b=-112 \end{cases}$$

Câu 17. Chọn ý **B**

Biến đổi giả thiết ta có

$$\begin{aligned}\log_2 \frac{x^2+y^2}{3xy+x^2} + 2x^2+2y^2+1 &\leq 3xy+x^2 \Leftrightarrow \log_2 \frac{2x^2+2y^2}{3xy+x^2} + 2x^2+2y^2 \leq 3xy+x^2 \\ \Leftrightarrow \log_2(2x^2+2y^2) + 2x^2+2y^2 &\leq \log_2(3xy+x^2) + 3xy+x^2 \\ \Leftrightarrow 2x^2+2y^2 \leq 3xy+x^2 &\Leftrightarrow x^2-3xy+2y^2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{y} \leq 2 \\ \Rightarrow P &= \frac{2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} + 2}{\frac{2x}{y} - 1} = f\left(\frac{x}{y}\right) \geq f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

Câu 18. Chọn ý **C**

Câu 19. Chọn ý **B**

Câu 20. Chọn ý **B**

Biến đổi giả thiết ta được

$$\begin{aligned} 5^{x+2y} + \frac{3}{3^{xy}} + x + 1 &= \frac{5^{xy}}{3} + 3^{-x-2y} + y(x-2) \\ \Leftrightarrow 5^{x+2y} - 3^{-x-2y} + x + 2y &= 5^{xy-1} - 3^{1-xy} + xy - 1 \\ \Leftrightarrow 1 - xy + x + y &= 0 \Leftrightarrow y(x-2) = x+1 > 0 \Rightarrow y = \frac{x+1}{x-2} (x > 2) \\ \Rightarrow S = f(x) &= x + \frac{2(x+1)}{x-2} \geq f(2+\sqrt{6}) = 4 + 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

Kỹ thuật hàm đặc trưng kết hợp với tính chất đặc biệt của hàm số.

Dạng toán này xuất hiện nhiều trong các đề thi thử các trường năm 2019, ta phải kết hợp với tính chất đặc biệt của hàm số như tính chẵn lẻ, biểu thức liên hợp,... Sau đây ta sẽ tìm hiểu nó.

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m thỏa mãn bất phương trình $f(\log m) + f\left(\log_m \frac{1}{2019}\right) \leq 0$.

A. 65

B. 66

C. 64

D. 63

Lời giải

Điều kiện $m > 1$ (do m là số nguyên và $m > 0, m \neq 1$), suy ra $\log m > 0$.

Hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Mặt khác $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0, \forall x$, nên $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} f(\log m) + f\left(\log_m \frac{1}{2019}\right) \leq 0 &\Leftrightarrow f(\log m) \leq -f\left(\log_m \frac{1}{2019}\right) \Leftrightarrow f(\log m) \leq f\left(-\log_m \frac{1}{2019}\right) \\ &\Leftrightarrow \log m \leq -\log_m \frac{1}{2019} \Leftrightarrow \log m \leq \frac{\log 2019}{\log m} \Leftrightarrow m \leq 10^{\sqrt{\log 2019}} \approx 65,77. \end{aligned}$$

Suy ra $m \in \{2; 3; \dots; 65\}$. Vậy có tất cả 64 số nguyên m thỏa mãn.

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}(e^x - e^{-x})$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn bất phương trình $f(m-7) + f\left(\frac{12}{m+1}\right) \leq 0$.

A. 4

B. 6

C. 3

D. 5

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ là tập đối xứng.

Ta có $f(x) = e^{x+\sqrt{x^2+1}} - e^{-x+\sqrt{x^2+1}}$ và $f(-x) = e^{-x+\sqrt{x^2+1}} - e^{x+\sqrt{x^2+1}} = -(e^{x+\sqrt{x^2+1}} - e^{-x+\sqrt{x^2+1}}) = -f(x)$.

Suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ.

Ta có $f'(x) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)e^{x+\sqrt{x^2+1}} + \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)e^{-x+\sqrt{x^2+1}} > 0, \forall x \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$f(m-7) + f\left(\frac{12}{m+1}\right) \leq 0 \Leftrightarrow f(m-7) \leq -f\left(\frac{12}{m+1}\right) = f\left(-\frac{12}{m+1}\right) \Leftrightarrow m-7 \leq -\frac{12}{m+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq m \leq 5 \\ m < -1 \end{cases}.$$

Vì m là số nguyên dương nên $m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} + x)$. Tìm tập nghiệm của bất phương trình

$$f(a-1) + f(\ln a) \leq 0.$$

A. $[0;1]$

B. $(0;1]$

C. $[0;+\infty)$

D. $(0;+\infty)$

Lời giải

Ta có $\sqrt{1+x^2} + x > \sqrt{x^2} + x = |x| + x \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{1+x^2} + x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy ta có tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$. Xét bất phương trình $f(-x) = \ln(\sqrt{1+(-x)^2} + (-x))$

$$\Leftrightarrow f(-x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x) \Leftrightarrow f(-x) = \ln\left(\left(\sqrt{1+x^2} + x\right) \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{1+x^2} + x}\right)$$

$$\Leftrightarrow f(-x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x}\right) \Leftrightarrow f(-x) = -\ln(\sqrt{1+x^2} + x) \Leftrightarrow f(-x) = f(x)$$

Vậy hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ. Mặt khác

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} (\sqrt{1+x^2} + x)' \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$$

Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, ta có

$$f(a-1) + f(\ln a) \leq 0 \Leftrightarrow f(a-1) \leq -f(\ln a) \Leftrightarrow f(a-1) \leq f(-\ln a) \Leftrightarrow a-1 \leq -\ln a \Leftrightarrow a + \ln a \leq 1 (*)$$

Xét $g(a) = a + \ln a, \forall a > 0; g'(a) = 1 + \frac{1}{a} > 0, \forall a > 0$.

Vậy hàm số $g(a)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Mà $g(1) = 1$, khi đó $(*) \Leftrightarrow g(a) \leq g(1) \Leftrightarrow a \leq 1$.

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $(0;1]$.

Ví dụ 4. Cho hàm số $f(x) = 2^x - 2^{-x}$. Gọi m_0 là số lớn nhất trong các số nguyên m thỏa mãn bất phương trình $f(m) + f(2m - 2^{12}) < 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m_0 \in [1513; 2019)$

B. $m_0 \in [1009; 1513)$

C. $m_0 \in [505; 1009)$

D. $m_0 \in [1; 505)$

Lời giải

Ta có $f(-x) = 2^{-x} - 2^{-(x)} = -(2^x - 2^{-x}) = f(x); f'(x) = 2^x \ln 2 + 2^{-x} \ln 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Hàm số $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ là hàm số lẻ và tăng trên $\mathbb{R}$.

Yêu cầu bài toán $f(2m - 2^{12}) < -f(m) = f(-m) \Leftrightarrow 2m - 2^{12} < -m \Leftrightarrow m < \frac{2^{12}}{3}$.

Như vậy giá trị m nguyên lớn nhất là $m_0 = \left\lfloor \frac{2^{12}}{3} \right\rfloor = 1365$.

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{1+x^2} + x$. Tìm các giá trị của m để bất phương trình

$$(x-m)f(x-m) + \frac{x^3 + 2019x}{f(x^3 + 2019x)} \leq 0$$

luôn đúng trên đoạn $[4;16]$.

A. $m \geq 35228$

B. $m \geq 36416$

C. $m \leq 38421$

D. $m \leq 34662$

Lời giải

Ta xét $f(-x) = \sqrt{1+(-x)^2} + (-x) = \sqrt{1+x^2} - x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} = \frac{1}{f(x)}$, vậy $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.

Bất phương trình $(x-m)f(x-m) + \frac{x^3+2019x}{f(x^3+2019x)} \leq 0$

$$\Leftrightarrow (x-m)f(x-m) \leq -\frac{(x^3+2019x)}{f(x^3+2019x)}$$

$$\Leftrightarrow (x-m)f(x-m) \leq (-x^3-2019x)f(-x^3-2019x) \quad (1)$$

Xét $g(t) = t.f(t) = t(\sqrt{1+t^2} + t)$, có

$$g'(t) = \sqrt{1+t^2} + \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} + 2t \stackrel{AM-GM}{\geq} 2\sqrt{\sqrt{1+t^2} \cdot \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}} + 2t = 2\sqrt{t^2} + 2t \Rightarrow g'(t) \geq 2|t| + 2t \geq 0$$

Vậy hàm số $g(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$, khi đó

$$(1) \Leftrightarrow g(x-m) \leq g(-x^3-2019x) \Leftrightarrow x-m \leq -x^3-2019x \Leftrightarrow m \geq x^3+2020x$$

Để (1) luôn đúng ta phải có $m \geq \max_{[4;16]}(x^3+2020x) = 36416$.

Ví dụ 6. Cho hàm số $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x) + e^x - e^{-x}$. Hỏi phương trình $f(3^x) + f(2x-1) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?
A. 3 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 1

Lời giải

Ta có $\sqrt{x^2+1} + x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(-x) = \ln(\sqrt{(-x)^2+1} - x) + e^{-x} - e^x$.

$$= -\ln(\sqrt{x^2+1} + x) + e^{-x} - e^x = -(\ln(\sqrt{x^2+1} + x) + e^x - e^{-x}) = -f(x) \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ.

$$\text{Mà } f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1} + x} + e^x + e^{-x} = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1} + x} + e^x + e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + e^x + e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } f(3^x) + f(2x-1) = 0 \Leftrightarrow f(3^x) = -f(2x-1) \Leftrightarrow f(3^x) = f(1-2x) \Leftrightarrow 3^x = 1-2x.$$

Xét hàm số $g(x) = 3^x$. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, hàm số $h(x) = 1-2x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số $y = g(x)$ và $y = h(x)$ có nhiều nhất một điểm chung. Mặt khác ta có $g(0) = h(0)$ suy ra phương trình $3^x = 1-2x$ có một nghiệm duy nhất $x = 0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Do m nguyên thuộc $[-20;20]$ nên số giá trị m là 23.

Ví dụ 7. Cho hàm số $f(x) = 2019(e^{2x} - e^{-2x}) + 2020\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + 2021x^3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $f(|3x^2+m|) + f(x^3-12) \leq 0$ có nghiệm với $\forall x \in [-2;1]$.
A. 22. **B.** 20. **C.** Vô số. **D.** 21.

Lời giải

$$\text{Ta có } f(-x) = 2019(e^{-2x} - e^{2x}) + 2020\ln(-x + \sqrt{x^2+1}) + 2021(-x)^3$$

$$= -2019(e^{2x} - e^{-2x}) - 2020 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - 2021x^3 = -f(x)$$

Suy ra $f(x)$ là hàm lẻ, lúc đó $f(x^3 - 12) = -f(12 - x^3)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2019(2e^{2x} + 2e^{-2x}) + 2020 \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} + 6063x^2 \\ &= 2019(2e^{2x} + 2e^{-2x}) + \frac{2020}{\sqrt{x^2 + 1}} + 6063x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Suy ra $f(x)$ hàm đồng biến và liên tục trên $[-2; 1]$.

Khi đó $f(|3x^2 + m|) + f(x^3 - 12) \leq 0 \Leftrightarrow f(|3x^2 + m|) \leq f(12 - x^3)$

$$\Leftrightarrow |3x^2 + m| \leq 12 - x^3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + m \leq 12 - x^3 \\ 3x^2 + m \geq x^3 - 12 \end{cases}, \forall x \in [-2; 1] \text{ (do } 12 - x^3 > 0 \forall x \in [-2; 1])$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 12 - x^3 - 3x^2 \\ m \geq x^3 - 3x^2 - 12 \end{cases} \forall x \in [-2; 1] \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \min_{[-2; 1]}(12 - x^3 - 3x^2) \\ m \geq \max_{[-2; 1]}(x^3 - 3x^2 - 12) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 8 \\ m \geq -12 \end{cases}$$

Mà m nguyên nên $m \in \{-12; -11; \dots; 8\}$.

Vậy có 21 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 8. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + 2020x + \sin 2020x$ và biết tập nghiệm của bất phương trình

$$f(\log_2(e^x - 2020) - 2020) + f(2020) \leq f(f(0))$$

là $S = (\ln a; \ln b]$. Giá trị $T = b - a$ là

A. $T = 1$.

B. $T = 2$.

C. $T = 3$.

D. $T = 4$.

Lời giải

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 + 2020x + \sin 2020x$.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có $\left. \begin{matrix} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{matrix} \right\} \Rightarrow y = f(x)$ là hàm số lẻ (1).

Đạo hàm $y' = 3x^2 + 2020 + 2020 \cdot \cos 2020x > 0, \forall x \in D$. Suy ra hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên D (2).

Ta có $f(0) = 0 \Rightarrow f(f(0)) = f(0) = 0$.

Khi đó bất phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} &f(\log_2(e^x - 2020) - 2020) \leq -f(2020) \\ &\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f(\log_2(e^x - 2020) - 2020) \leq f(-2020) \\ &\stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \log_2(e^x - 2020) - 2020 \leq -2020 \Leftrightarrow \log_2(e^x - 2020) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 0 < e^x - 2020 \leq 1 \Leftrightarrow 2020 < e^x \leq 2021 \Leftrightarrow \ln 2020 < x \leq \ln 2021 \\ &\Rightarrow S = (\ln 2020; \ln 2021] \Rightarrow \begin{cases} a = 2020 \\ b = 2021 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $T = b - a = 1$.

$$(-4; -6), (-6; -4), (-5; -2), (-2; -5), (-5; -6), (-6; -5), (-1; -4), (-4; -1), (0; -2), (-2; 0), (0; -1), (-1; 0).$$

3. Các bài toán liên quan tới định lý Viet.

Phương pháp chung của các bài toán ở dạng này hầu hết sẽ là đưa giả thiết phương trình logarit về dạng một tam thức, sau đó sử dụng định lý Viet và các phép biến đổi logarit để giải quyết bài toán. Để hiểu rõ hơn ta cùng đi vào các ví dụ.

Ví dụ 1. Cho các số nguyên dương $a, b > 1$ thỏa mãn phương trình.

$$11\log_a x \log_b x - 8\log_a x - 20\log_b x - 11 = 0$$

Biết rằng phương trình trên có tích 2 nghiệm là số tự nhiên nhỏ nhất. Tính $S = 2a + 3b$

A. 28

B. 10

C. 22

D. 15

Đề minh họa học sinh giỏi tỉnh cấp THPT tỉnh Phú Thọ

Lời giải

Ta đưa phương trình về phương trình bậc 2 theo ẩn là $\log_a x$ ta được.

$$11\log_b a (\log_a x)^2 - 4(2 + 5\log_b a)\log_a x - 11 = 0$$

Để phương trình có 2 nghiệm thì $\Delta > 0 \Leftrightarrow 400(\log_b a)^2 - 164\log_b a + 64 > 0$ luôn đúng

Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình thì khi đó theo định lý Viet thì ta có

$$\log_a x_1 + \log_a x_2 = \frac{4(2 + 5\log_b a)}{11\log_b a} = \frac{8}{11}\log_a b + \frac{20}{11}$$

$$\Leftrightarrow \log_a (x_1 x_2) = \frac{8}{11}\log_a b + \frac{20}{11} \Leftrightarrow x_1 x_2 = b^{\frac{8}{11}} a^{\frac{20}{11}}$$

Do a, b là các số nguyên dương đồng thời tích 2 nghiệm là số tự nhiên nhỏ nhất nên ta sẽ có 1 đánh giá

$$\text{sau } x_1 x_2 = b^{\frac{8}{11}} a^{\frac{20}{11}} = (a^{20} b^{18})^{\frac{1}{11}} \geq (2^{20} \cdot b^8)^{\frac{1}{11}} = 2(2^9 b^8)^{\frac{1}{11}}$$

Để $x_1 x_2 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 2^9 \cdot b^8 = n^{11} \geq 2^9 \cdot 2^8 \Rightarrow n \geq 3$, mặt khác $n^{11} : 2 \Rightarrow n : 2$. Đến đây ta xét các trường hợp sau

- Nếu $n = 4 \Rightarrow b^8 = 8192 \Rightarrow b \notin \mathbb{N}$
- Nếu $n = 6 \Rightarrow b^8 = 708588 \Rightarrow b \notin \mathbb{N}$
- Nếu $n = 8 \Rightarrow b^8 = 708588 \Rightarrow b = 8$

Vậy $a = 2, b = 8$.

Chọn ý A.

Ví dụ 2. Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5 \log^2 x + b \log x + a = 0$ có 2 nghiệm x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 2a + 3b$ bằng

A. 30

B. 25

C. 36

D. 17

Câu 46 mã đề 104, đề thi THPT Quốc Gia môn toán 2017

Lời giải

Điều kiện để cả hai phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x > 0, b^2 - 20a > 0$ và a, b đồng thời là các số tự nhiên lớn hơn 0. Xét phương trình $a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0$, đặt $t = \ln x$ phương trình trở thành $at^2 + bt + 5 = 0$, giả sử $t_1 = \ln x_1, t_2 = \ln x_2$ là 2 nghiệm của phương trình thì theo Viet ta có.

$$t_1 + t_2 = \ln x_1 + \ln x_2 = \ln(x_1 x_2) = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x_1 x_2 = e^{-\frac{b}{a}}$$

Tương tự đối với phương trình $5 \log^2 x + b \log x + a = 0$ ta có $x_3 x_4 = 10^{-\frac{b}{5}}$

Mặt khác theo giả thiết ta có.

$$x_1 x_2 > x_3 x_4 \Leftrightarrow e^{-\frac{b}{a}} > 10^{-\frac{b}{5}} \Leftrightarrow -\frac{b}{a} > \ln 10^{-\frac{b}{5}} \Leftrightarrow \frac{b}{a} < \frac{b}{5} \ln 10 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{\ln 10}{5} \Leftrightarrow a > \frac{5}{\ln 10} > 2$$

Đồng thời ta lại có a là số nguyên dương nên suy ra $a \geq 3$ và $b^2 - 20a > 0, b \in \mathbb{N}^* \Rightarrow b \geq 8$

Vậy $S = 2a + 3b \geq 2.3 + 3.8 = 30$.

Ví dụ 3. Cho các số thực $a, b > 1$ và phương trình $\log_a(ax)\log_b(bx) = 2018$ có 2 nghiệm phân biệt m, n . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (4a^2 + 9b^2)(36m^2n^2 + 1)$

A. 144

B. 72

C. 68

D. 216

Lời giải

Ta đưa phương trình về phương trình bậc 2 theo ẩn là $\log_a x$ ta được.

$$\log_a(ax)\log_b(bx) = 2018 \Leftrightarrow (1 + \log_a x)(1 + \log_b x) = 2018$$

$$\Leftrightarrow \log_a x \log_b x + \log_a x + \log_b x + 1 = 2018 \Leftrightarrow \log_b a (\log_a x)^2 + (1 + \log_b a) \log_a x = 2017$$

Theo định lý Viet ta có

$$\log_a m + \log_a n = -\frac{1 + \log_b a}{\log_b a} = -\log_a b - 1 = \log_a \frac{1}{ab} = \log_a(mn) \Leftrightarrow mn = \frac{1}{ab}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$P = (4a^2 + 9b^2) \left(\frac{36}{a^2b^2} + 1 \right) \geq 2\sqrt{4a^2 \cdot 9b^2} \cdot 2\sqrt{\frac{36}{a^2b^2}} = 144$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} 4a^2 = 9b^2 \\ \frac{36}{a^2b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3, b = 2$$

Ví dụ 4. Cho 3 số thực a, b, c thay đổi lớn hơn 1, thỏa mãn $a + b + c = 100$. Gọi m, n lần lượt là 2 nghiệm của phương trình $(\log_a x)^2 - (1 + 2\log_a b + 3\log_a c)\log_a x - 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $S = a + 2b + 3c$ khi mn đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{500}{3}$

B. $\frac{700}{3}$

C. 00

D. $\frac{600}{3}$

Lời giải

Với bài toán này giả thiết đã được đưa về một tam thức bậc 2 sẵn rồi nên ta chỉ cần sử dụng tới định lý Viet, ta được

$$\log_a m + \log_a n = 1 + 2\log_a b + 3\log_a c = \log_a(ab^2c^3) \Leftrightarrow mn = ab^2c^3$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\begin{aligned} mn = ab^2c^3 &= ab^2(100 - a - b)^3 = \frac{4}{27} \left(3a \cdot \frac{3b}{2} \cdot \frac{3b}{2} (100 - a - b)(100 - a - b)(100 - a - b) \right) \\ &\leq \frac{4}{27} \left(\frac{3a + 2 + \frac{3b}{2} + 3(100 - a - b)}{6} \right)^6 = \frac{625 \cdot 10^8}{27} \end{aligned}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra tại } 3a = \frac{3b}{2} = 100 - a - b \Leftrightarrow a = \frac{50}{3}, b = \frac{100}{3}, c = \frac{150}{3} \Rightarrow S = \frac{700}{3}$$

Ví dụ 5. Cho 2 phương trình $\ln^2 x - (m-1)\ln x + n = 0(1), \ln^2 x - (n-1)\ln x + m = 0(2)$. Biết phương trình (1), (2) có 2 nghiệm phân biệt đồng thời có chung một nghiệm và x_1 là nghiệm của phương trình (1), x_2 là nghiệm của phương trình (2). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x_1^2 + x_2^2$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Đề thử nghiệm môn toán kì thi THPT Quốc Gia 2018 – Bộ GD&ĐT

Lời giải

Điều kiện $m \neq n$. Gọi x_0 là nghiệm chung của 2 phương trình khi đó ta có

$$\begin{cases} \ln^2 x_0 - (m-1)\ln x_0 + n = 0 \\ \ln^2 x_0 - (n-1)\ln x_0 + m = 0 \end{cases} \Rightarrow (n-1)\ln x_0 - (m-1)\ln x_0 + n - m = 0 \\ \Leftrightarrow (n-m)\ln x_0 = m - n \Rightarrow \ln x_0 = -1 \Rightarrow m + n = 0$$

Áp dụng định lý Viet cho 2 phương trình ta có

$$\begin{aligned} & \bullet \begin{cases} \ln x_0 + \ln x_1 = m - 1 \\ \ln x_0 + \ln x_2 = n - 1 \end{cases} \Rightarrow \ln x_1 - \ln x_2 = m - n \\ & \bullet \begin{cases} \ln x_1 \cdot \ln x_0 = n \\ \ln x_2 \ln x_0 = m \end{cases} \Rightarrow \frac{\ln x_1}{\ln x_2} = \frac{n}{m} \Rightarrow m \ln x_1 = n \ln x_2 \\ & \Rightarrow \frac{n}{m} \ln x_2 - \ln x_2 = m - n \Leftrightarrow \ln x_2 \left(\frac{n}{m} - 1 \right) = m - n \Rightarrow \begin{cases} \ln x_2 = -m \\ \ln x_1 = -n \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó $S = x_1^2 + x_2^2 = e^{-2m} + e^{2m}$. Theo bất đẳng thức AM – GM ta có.

$$S = x_1^2 + x_2^2 = e^{-2m} + e^{2m} \geq 2\sqrt{e^{-2m} \cdot e^{2m}} = 2$$

Ví dụ 6. Xét các số thực a, b, c với $a > 1$ thỏa mãn phương trình $\log_a^2 x - 2b \log_a \sqrt{x} + c = 0$ có hai nghiệm thực $x_1; x_2$ đều lớn hơn 1 và $x_1 \cdot x_2 \leq a$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{b(c+1)}{c}$.

A. $6\sqrt{2}$. B. 4 . C. 5 . D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Điều kiện $x > 0$. Đặt $t = \log_a x$, ta có phương trình $t^2 - bt + c = 0$ (1)

Vì phương trình đã cho có hai nghiệm thực $x_1; x_2$ đều lớn hơn 1 và $x_1 \cdot x_2 \leq a$ nên phương trình (1) có

$$\text{hai nghiệm } t_1, t_2 \text{ thỏa mãn } \begin{cases} t_1, t_2 > 0 \\ t_1 + t_2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = b^2 - 4c \geq 0 \\ 0 < b \leq 1 \\ c > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b}{c} \geq \frac{4}{b} \\ 0 < b \leq 1 (*) \\ c > 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } S = \frac{b(c+1)}{c} = b + \frac{b}{c} \geq b + \frac{4}{b} = \left(b + \frac{1}{b}\right) + \frac{3}{b} \geq 2 + \frac{3}{1} = 5.$$

Dấu bằng khi $b = 1; c = \frac{1}{4}$.

Ví dụ 7. Cho phương trình $\log_a(ax) \log_b(bx) = 2020$ với a, b là các tham số lớn hơn 1. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình đã cho. Khi biểu thức $P = 6x_1x_2 + a + b + 3\left(\frac{1}{4a} + \frac{4}{b}\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $a + b$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{13}{2}; 9\right)$. B. $\left(\frac{5}{2}; \frac{19}{4}\right)$. C. $\left(\frac{19}{4}; \frac{16}{3}\right)$. D. $\left(\frac{16}{3}; \frac{13}{2}\right)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \log_a(ax) \log_b(bx) = 2020 \Leftrightarrow (1 + \log_a x)(1 + \log_b x) = 2020 \Leftrightarrow (1 + \log_a x)(1 + \log_b a \log_a x) = 2020.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} m = \log_b a \\ t = \log_a x \end{cases}, \text{ do } a, b > 1 \Rightarrow m > 0. \text{ Suy ra}$$

$$(1+t)(1+mt) = 2020 \Leftrightarrow mt^2 + (m+1)t - 2019 = 0 \quad (*)$$

Xét $\Delta = (m+1)^2 + 4 \cdot 2019 \cdot m > 0 \Rightarrow m > 0$.

Vậy phương trình (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt t_1, t_2 .

Theo Viet ta có $t_1 + t_2 = -\frac{m+1}{m} \Rightarrow \log_a x_1 + \log_a x_2 = -\frac{\log_b a + 1}{\log_b a}$

$$\Rightarrow \log_a x_1 x_2 = -(1 + \log_a b) = -\log_a ab \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{1}{ab}$$

Do đó $P = 6x_1 x_2 + a + b + 3\left(\frac{1}{4a} + \frac{4}{b}\right)$

$$\Leftrightarrow P = \frac{6}{ab} + a + b + 3\left(\frac{1}{4a} + \frac{4}{b}\right) \Leftrightarrow P = \left(\frac{6}{ab} + \frac{2}{3}a + \frac{1}{4}b\right) + \left(\frac{1}{3}a + \frac{3}{4a}\right) + \left(\frac{3b}{4} + \frac{12}{b}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được $P \geq 3 + 1 + 6 = 10$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{3}{2}; b = 4$. Vậy $a + b = \frac{11}{2}$.

Ví dụ 8. Cho hai số thực dương $a > 1, b > 1$ và biết phương trình $a^{x^2} b^{x+4} = 1$ có nghiệm thực. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a \left(\frac{b}{a^3}\right) + \frac{16}{\log_a b}$ nằm trong khoảng nào?

A. (13;15).

B. (-15;-13).

C. (4;6).

D. (-6;-4).

Lời giải

Ta có $a > 1, b > 1$ nên $\log_a b > 0$.

Xét $a^{x^2} b^{x+4} = 1 \Leftrightarrow \log_a (a^{x^2} b^{x+4}) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x \log_a b + 4 \log_a b = 0$.

Ta có $a^{x^2} b^{x+4} = 1$ có nghiệm thực $\Leftrightarrow \log_a^2 b - 16 \log_a b \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a b \leq 0 & (l) \\ \log_a b \geq 16 & (n) \end{cases}$.

Ta có $P = \log_a \left(\frac{b}{a^3}\right) + \frac{16}{\log_a b} = -3 + \log_a b + \frac{16}{\log_a b} = -3 + \frac{15}{16} \log_a b + \left(\frac{\log_a b}{16} + \frac{16}{\log_a b}\right)$.

Áp dụng AM – GM cho hai số dương $\frac{\log_a b}{16}$ và $\frac{16}{\log_a b}$ ta có $\frac{\log_a b}{16} + \frac{16}{\log_a b} \geq 2$.

Vậy $P \geq -3 + \frac{15}{16} \cdot 16 + 2 \Leftrightarrow P \geq 14$.

Ví dụ 9. Cho hai số thực dương a, b lớn hơn 1 và biết phương trình $a^{x^2} \cdot b^{x+2} = 1$ có nghiệm thực. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a(ab) + \frac{4}{\log_a b}$ có dạng $\frac{m}{n}$ với m, n là số tự nhiên và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khi đó $m + 2n$ bằng

A. 34.

B. 21.

C. 23.

D. 10.

Lời giải

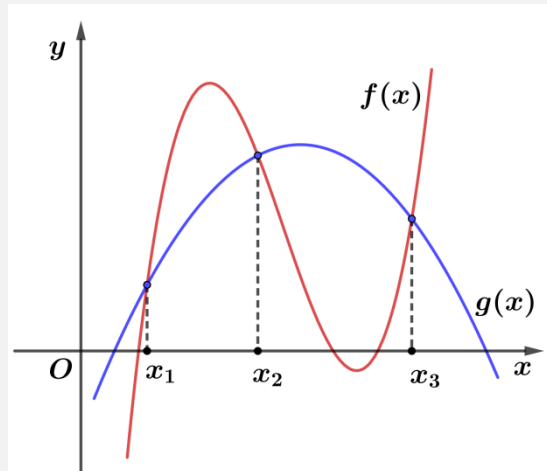
Phương trình tương đương với $x^2 + (x+2) \log_a b = 0 \Leftrightarrow x^2 + x \log_a b + 2 \log_a b = 0$.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $\Delta = (\log_a b)^2 - 8 \log_a b \geq 0 \Leftrightarrow \log_a b \geq 8 \ (\log_a b > 0)$.

Khi đó $P = \log_a b + \frac{4}{\log_a b} + 1 = f(t) = t + \frac{4}{t} + 1 \geq \min_{[8; +\infty)} f(t) = f(8) = \frac{19}{2} = \frac{m}{n}$.

Vậy $m + 2n = 23$.

Ví dụ 10. Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 - 11x^2 + cx - 33$ và $g(x) = -3x^2 + bx - 25$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng x_1, x_2, x_3 dương và không nhất thiết phân biệt.



Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_{\frac{1}{2}} [a^3(c-b)] + 3a(b-c)$ là

A. $2\log_2 3 - 76$.

B. $4\log_2 3 - 76$.

C. $\log_2 3 - 76$.

D. $3\log_2 3 - 76$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là

$$ax^3 - 11x^2 + cx - 33 = -3x^2 + bx - 25 \Leftrightarrow ax^3 - 8x^2 + (c-b)x - 8 = 0 \quad (*)$$

Dựa vào đồ thị ta có $a > 0$ và phương trình (có 3 nghiệm dương x_1, x_2, x_3).

Theo hệ thức Vi-et ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \frac{8}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c-b}{a} \\ x_1x_2x_3 = \frac{8}{a} \end{cases}.$$

Mà $x_1x_2x_3 \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{8}{a} \leq \left(\frac{8}{a}\right)^3 \Leftrightarrow 27 \leq \left(\frac{8}{a}\right)^2 \Rightarrow 0 < a \leq \frac{8\sqrt{3}}{9}$.

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \leq \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2}{3} \Leftrightarrow \frac{c-b}{a} \leq \frac{64}{3a^2} \Leftrightarrow a(c-b) \leq \frac{64}{3}.$$

Khi đó $P = \log_{\frac{1}{2}} [a^3(c-b)] + 3a(b-c) \geq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{64a^2}{3}\right) - 64 = -70 + \log_2 3 - \log_2 a^2$.

Có $0 < a^2 \leq \frac{64}{27} \Leftrightarrow \log_2 a^2 \leq \log_2 \frac{64}{27} \Leftrightarrow \log_2 a^2 \leq 6 - 3\log_2 3$

Suy ra $P \geq 4\log_2 3 - 76$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{8\sqrt{3}}{9} \\ c-b = 8\sqrt{3} \end{cases}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $4\log_2 3 - 76$, đạt được khi $\begin{cases} a = \frac{8\sqrt{3}}{9} \\ c-b = 8\sqrt{3} \end{cases}$.

Ví dụ 11. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a > 1, b > 0, c > 0$ và bất phương trình

$$a^{x^2} \cdot (b + 4c)^{2x+3} \geq 1$$

có tập nghiệm là $\mathbb{R}$. Biết rằng biểu thức $P = \frac{16a}{3} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $a = m, b = n, c = p$.

Khi đó, tổng $m + n + p$ bằng

A. $\frac{81}{16}$.

B. $\frac{57}{20}$.

C. $\frac{32}{3}$.

D. $\frac{51}{16}$.

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$a^{x^2} \cdot (b + 4c)^{2x+3} \geq 1 \Leftrightarrow x^2 + (2x + 3)\log_a(b + 4c) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2\log_a(b + 4c) \cdot x + 3\log_a(b + 4c) \geq 0 \quad (*).$$

Để (*) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\log_a^2(b + 4c) - 3\log_a(b + 4c) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \log_a(b + 4c) \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq b + 4c \leq a^3.$$

Bằng cách áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng Engel cho các số thực a, b và các số thực dương x, y , ta có

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a + b)^2}{x + y}$$

với dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$;

và bất đẳng thức Cauchy cho 4 số dương, ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{16a}{3} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{16a}{3} + \frac{1}{b} + \frac{4}{4c} \geq \frac{16a}{3} + \frac{9}{b + 4c} \geq \frac{16a}{3} + \frac{9}{a^3} \\ &\geq \frac{16a}{9} + \frac{16a}{9} + \frac{16a}{9} + \frac{9}{a^3} \geq 4\sqrt[4]{\frac{16a}{9} \cdot \frac{16a}{9} \cdot \frac{16a}{9} \cdot \frac{9}{a^3}} = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

Suy ra $\min P = \frac{32}{3}$.

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \frac{16a}{9} = \frac{9}{a^3} \\ b + 4c = a^3 \\ b = 2c \\ a > 1, b > 0, c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{9}{8} \\ c = \frac{9}{16} \end{cases}.$$

Khi đó $m = \frac{3}{2}, n = \frac{9}{8}, p = \frac{9}{16}$ và $m + n + p = \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{9}{16} = \frac{51}{16}$.

Bài tập tự luyện

Câu 1. Cho 2 số thực $a, b > 1$. Biết phương trình $a^x b^{x^2-1} = 1$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Tìm giá trị

nhỏ nhất của biểu thức $S = \left(\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} \right)^2 - 4(x_1 + x_2)$.

A. 4

B. $3\sqrt[3]{2}$

C. $3\sqrt[3]{4}$

D. $\sqrt[3]{4}$

Câu 2. Cho 2 số nguyên dương $a, b > 1$. Biết phương trình $a^{x+1} = b^x$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $b^{x^2-1} = (9a)^x$ có 2 nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn điều kiện $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) < 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 3a + 2b$

A. 12

B. 46

C. 44

D. 22

Câu 3. Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a.4^x - b.2^x + 50 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $9^x - b.3^x + 50a = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_3 + x_4 > x_1 + x_2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 2a + 3b$

A. 49

B. 51

C. 78

D. 81

Câu 4. Cho 2 số thực $a, b > 1$ thay đổi thỏa mãn $a + b = 10$. Gọi m, n là 2 nghiệm của phương trình $(\log_a x)(\log_b x) - 2\log_a x - 3 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = mn + 9a$

A. $\frac{279}{4}$

B. 90

C. $\frac{81}{4}$

D. $\frac{45}{2}$

Câu 5. Cho 2 số thực $a, b > 1$ thay đổi thỏa mãn $a + b = 10$. Gọi m, n là 2 nghiệm của phương trình $(\log_a x)(\log_b x) - 2\log_a x - 3\log_b x - 1 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = mn$

A. $\frac{16875}{16}$

B. $\frac{4000}{27}$

C. 15625

D. 3456

Câu 6. Biết rằng khi m, n là các số nguyên dương thay đổi và lớn hơn 1 thì phương trình

$$8\log_m x \log_n x - 7\log_m x - 6\log_n x = 2017$$

luôn có 2 nghiệm phân biệt a, b . Tính $S = m + n$ để tích ab là một số nguyên dương nhỏ nhất

A. 20

B. 12

C. 24

D. 48

Câu 7. Biết rằng khi m, n là các số dương thay đổi khác 1 thỏa mãn $m + n = 2017$ thì phương trình

$$8\log_m x \log_n x - 7\log_m x - 6\log_n x - 2017 = 0$$

luôn có 2 nghiệm phân biệt a, b . Biết rằng giá trị lớn nhất của $\ln(ab)$ là $\frac{3}{4}\ln\left(\frac{c}{13}\right) + \frac{7}{18}\ln\left(\frac{d}{13}\right)$ với c, d

là các số nguyên dương. Tính $S = 2c + 3d$

A. 2017

B. 66561

C. 64544

D. 26221

Câu 8. Cho 2 số thực $a, b > 1$. Biết phương trình $a^{x^2} b^{x+1} = 1$ có nghiệm thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a(ab) + \frac{4}{\log_a b}$

A. 2017

B. 66561

C. 64544

D. 26221

Câu 9. Cho các số nguyên dương $a, b > 1$ thỏa mãn phương trình.

$$13\log_a x \log_b x - 8\log_a x - 20\log_b x - 11 = 0$$

Biết rằng phương trình trên có tích 2 nghiệm là số tự nhiên nhỏ nhất. Tính $S = 3a + 4b$

A. 52

B. 34

C. 70

D. 56

Câu 10. Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 6$. Gọi m, n lần lượt là 2 nghiệm của phương trình $\log_b x \cdot \log_b(abc) = 712$. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_4 \left(3mn - \frac{10}{mn} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + 108 \right)$$

được viết dưới dạng $i + \log_4 j$ với i, j là các số nguyên dương. Khi đó giá trị của biểu $T = i + j$ bằng?

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

Hướng dẫn giải

Câu 1. Chọn ý C.

Biến đổi giả thiết đồng thời áp dụng định lý Viet ta được

$$x^2 - 1 + x \log_b a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\log_b a \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$S = \left(\frac{1}{\log_b a} \right)^2 + 4 \log_b a = \left(\frac{1}{\log_b a} \right)^2 + 2 \log_b a + 2 \log_b a \geq 3\sqrt[3]{4}$$

Câu 2. Chọn ý **B**.

Với phương trình đầu ta lấy logarit 2 vế ta được $x^2 - x \log_a b + 1 = 0$

Phương trình này có 2 nghiệm thì $\Delta = (\log_a b)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow b > a^2$

Tương tự với phương trình 2 ta cũng có $x^2 - x \log_b (9a) - 1 \Rightarrow \Delta = (\log_b (9a))^2 + 4 > 0$

Theo viet ta được $\begin{cases} x_1 + x_2 = \log_a b \\ x_3 + x_4 = \log_b (9a) \end{cases} \Rightarrow \log_a b \cdot \log_b (9a) < 3 \Leftrightarrow \log_a (9a) < 3 \Rightarrow a \geq 4$

Khi đó ta được $b > 16 \Rightarrow b \geq 17 \Rightarrow S \geq 46$

Câu 3. Chọn ý **D**.

Điều kiện để 2 phương trình đều có 2 nghiệm dương là $\begin{cases} \Delta_1 > 0; S_1 > 0; P_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0; S_2 > 0; P_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow b^2 > 200a$

Theo viet ta có $\begin{cases} 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = \frac{50}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 = \log_2 \frac{50}{a} \\ 3^{x_3} \cdot 3^{x_4} = 50a \Rightarrow x_3 + x_4 = \log_3 (50a) \end{cases}$

Theo giả thiết ta có $x_3 + x_4 > x_1 + x_2 \Rightarrow \log_3 (50a) > \log_2 \left(\frac{50}{a} \right) \Rightarrow a \geq 3 \Rightarrow b \geq 25 \Rightarrow S \geq 81$

Câu 4. Chọn ý **A**.

Biến đổi phương trình đầu ta được phương trình tương đương

$$\log_b a (\log_a x)^2 - 2 \log_a x - 3 = 0$$

Theo viet ta có $\log_a n + \log_a n = \frac{2}{\log_b a} = \log_a b^2 \Rightarrow mn = b^2 \Rightarrow P = b^2 - 9b + 90 \geq \frac{279}{4}$

Câu 5. Chọn ý **D**.

Biến đổi phương trình đầu ta được phương trình tương đương

$$\log_b a (\log_a x)^2 - (2 + 3 \log_b a) \log_a x - 1 = 0$$

Theo Viet ta có $\log_a m + \log_a n = \frac{2 + 3 \log_b a}{\log_b a} = 2 \log_a b + 3 \Rightarrow mn = a^3 b^2$

$\Rightarrow S = a^3 (10 - a)^2 = f(a) \leq f(6) = 3456$

Câu 6. Chọn ý **B**.

Làm tương tự ví dụ minh họa 1

Câu 7. Chọn ý **B**.

Biến đổi phương trình tương đương

$$8 \log_n m (\log_m x)^2 - (6 \log_n m + 7) \log_m x - 2017 = 0$$

Theo viet ta có

$$\log_m a + \log_m b = \frac{6 \log_n m + 7}{8 \log_n m} \Rightarrow ab = m^{\frac{6}{7}} \cdot n^{\frac{7}{8}} \Rightarrow \ln(ab) = \frac{3}{4} \ln m + \frac{7}{8} \ln(2017 - m) = f(m)$$

$$\Rightarrow f(m) \leq f\left(\frac{12102}{13}\right) = \frac{3}{4} \ln \frac{12102}{13} + \frac{7}{8} \ln \frac{14119}{13} \Rightarrow S = 66561$$

Câu 8. Chọn ý **C**.

Ta có $\log_a b > 0$

Lấy logarit 2 về ta được $x^2 + x \log_a b + \log_a b = 0$

Điều kiện có nghiệm của phương trình trên là $\Delta = (\log_a b)^2 - 4 \log_a b \geq 0 \Leftrightarrow \log_a b \geq 4$

$$\Rightarrow P = \log_a b + \frac{4}{\log_a b} + 1 = f(\log_a b) \geq f(4) = 6$$

Câu 9. Chọn ý **C**.

Tương tự ví dụ minh họa 1

Câu 10. Chọn ý **A**.

Biến đổi giả thiết tương đương với

$$\begin{aligned} \log_b x \cdot \log_b (xabc) &= 712 \Leftrightarrow \log_b x (\log_b x + \log_b a + \log_b c + 1) = 712 \\ \Leftrightarrow (\log_b x)^2 + (1 + \log_b a + \log_b c) \log_b x - 712 &= 0 \end{aligned}$$

Theo định lý Viet ta có $\log_b m + \log_b n = \log_b abc \Rightarrow mn = abc$

Khi đó ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_4 \left(3mn - \frac{10}{mn} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + 108 \right) = \log_4 (3abc - 10(ab + bc + ca) + 108)$$

Theo bất đẳng thức Schur bậc 3 ta có

$$\begin{aligned} 3abc &\geq \frac{3(a+b+c)(4(ab+bc+ca) - (a+b+c)^2)}{9} = 2(4(ab+bc+ca) - 36) \\ \Rightarrow 3abc - 10(ab+bc+ca) &\geq -2(ab+bc+ca) - 72 \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\begin{aligned} ab + bc + ca &\leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = 12 \Rightarrow -2(ab+bc+ca) - 72 \geq -96 \\ \Rightarrow P &\geq \log_4 (-96 + 108) = \log_4 12 = 1 + \log_4 3 \end{aligned}$$

4. Các bài toán đưa về đánh giá biến $\log_b a$.

Vấn đề được đề cập tới ở đây thực chất chỉ là những bài toán biến đổi giả thiết theo ẩn $\log_b a$ và đưa về khảo sát hàm số 1 biến đơn giản. Sau đây là các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Cho a, b là các số thực thay đổi thỏa mãn $1 < a < \sqrt{b}$. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (\log_a b)^2 + 6 \left[\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \right]^2$ là $m + \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{p}$ là các số nguyên. Tính giá trị của $T = m + n + p$?			
A. -1	B. 0	C. -14	D. 10

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được

$$\begin{aligned} P &= 4(\log_a b)^2 + 6 \left[\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt{b}}{a} \cdot \sqrt{a} \right]^2 = 4(\log_a b)^2 + 6 \left[1 + \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \sqrt{a} \right]^2 \\ &= 4(\log_a b)^2 + 6 \left[1 + \frac{1}{\log_{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{b}}{a}} \right]^2 = 4(\log_a b)^2 + 6 \left(1 + \frac{1}{\log_a b - 2} \right)^2 \end{aligned}$$

Đặt $t = \log_a b (0 < t < 1) \Rightarrow S = f(t) = 4t^2 + 6\left(\frac{t-1}{t-2}\right)^2 \geq \min_{(0;1)} f(t) = f\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = 2\left(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)$

Chọn ý **C**.

Ví dụ 2. Cho các số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ thuộc khoảng $\left(0; \frac{1}{4}\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \log_{x_1} \left(x_2 - \frac{1}{4}\right) + \log_{x_2} \left(x_3 - \frac{1}{4}\right) + \dots + \log_{x_n} \left(x_1 - \frac{1}{4}\right)$$

A. $2n$

B. 1

C. n

D. 2

Lời giải

Trước tiên ta sẽ xét tới bất đẳng thức phụ $x_k - \frac{1}{4} \leq x_k^2 \Leftrightarrow \left(x_k - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$.

Bất đẳng thức trên luôn đúng, áp dụng vào bài toán ta có.

$$P \geq \log_{x_1} x_2^2 + \log_{x_2} x_3^2 + \dots + \log_{x_n} x_1^2 = 2(\log_{x_1} x_2 + \log_{x_2} x_3 + \dots + \log_{x_n} x_1)$$

Théo bất đẳng thức AM – GM ta có.

$$2(\log_{x_1} x_2 + \log_{x_2} x_3 + \dots + \log_{x_n} x_1) \geq 2n \log_{x_1} x_2 \cdot \log_{x_2} x_3 \dots \log_{x_n} x_1 = 2n$$

Chọn ý **A**.

Ví dụ 3. Cho 2 số thực a, b thay đổi thỏa mãn $\frac{1}{3} < b < a < 1$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_a \left(\frac{3b-1}{4a^3}\right) + 12 \log_{\frac{b}{a}}^2 a \text{ là } M \text{ đạt được khi } a = b^m. \text{ Tính } M + m?$$

A. 15

B. 12

C. $\frac{37}{3}$

D. $\frac{28}{3}$

Lời giải

Ta có bất đẳng thức phụ sau $3b-1 \leq 4b^3 \Leftrightarrow (2b-1)^2(b+1) \geq 0 \Rightarrow \frac{3b-1}{4a^3} \leq \frac{b^3}{a^3}$

Mặt khác Khi đó ta được $\frac{1}{3} < b < a < 1$ nên ta được

$$P \geq \log_a \frac{b^3}{a^3} + 12 \left(\frac{1}{\log_a \frac{b}{a}}\right)^2 = 3 \log_a b - 3 + \frac{12}{(\log_a b - 1)^2}$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$3 \log_a b - 3 + \frac{12}{(\log_a b - 1)^2} = \frac{3}{2}(\log_a b - 1) + \frac{3}{2}(\log_a b - 1) + \frac{12}{(\log_a b - 1)^2} \geq 3 \cdot 3 = 9$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\frac{3}{2}(\log_a b - 1) = \frac{12}{(\log_a b - 1)^2} \Leftrightarrow \log_a b = 3 \Rightarrow b = a^3 \Rightarrow a = b^{\frac{1}{3}}$

Chọn ý **D**.

Ví dụ 4. Cho 2 số thực a, b thỏa mãn $3a-4 > b > 0$ và biểu thức $P = \log_a \left(\frac{a^3}{4b}\right) + \frac{3}{16} \left(\log_{\frac{3a}{b+4}} a\right)^2$ đạt giá

trị nhỏ nhất. Tính tổng $S = 3a + b$.

A. 8

B. $\frac{13}{2}$

C. $\frac{25}{2}$

D. 14

Đề thi thử trường THPT Kim Sơn A – Ninh Bình lần 2

Lời giải

Ý tưởng của bài toán này không còn như bài toán trước vì dồn về $\log_a b$ là một điều rất khó, thay vào đó nếu tinh ý thì ta sẽ dồn biến về theo ẩn $\log_a \frac{a^3}{4b}$ bằng bất đẳng thức AM – GM.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có.

$$\begin{aligned} P &= \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) + \frac{3}{16} \left(\log_{\frac{3a}{b+2}} a \right)^2 = \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) + \frac{3}{16} \left(\frac{1}{\log_a \frac{3a}{b+2+2}} \right)^2 \\ &\geq \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) + \frac{3}{16} \left(\frac{1}{\log_a \frac{a}{\sqrt[3]{4b}}} \right)^2 = \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) + \frac{3}{16} \left(\frac{3}{\log_a \frac{a^3}{4b}} \right)^2 \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM lần nữa ta được

$$\begin{aligned} \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) + \frac{3}{16} \left(\frac{3}{\log_a \frac{a^3}{4b}} \right)^2 &= \frac{1}{2} \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) + \frac{1}{2} \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) + \frac{3}{16} \left(\frac{3}{\log_a \frac{a^3}{4b}} \right)^2 \\ &\geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{2} \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) \cdot \frac{1}{2} \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) \cdot \frac{3}{16} \left(\frac{3}{\log_a \frac{a^3}{4b}} \right)^2} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = 2$

Chọn ý **A**.

Ví dụ 5. Cho 3 số thực $a, b, c \in (1; 2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

$$P = \log_{bc} (2a^2 + 8a - 8) + \log_{ca} (4b^2 + 16b - 16) + \log_{ab} (c^2 + 4c - 4)$$

A. $\log_3 \frac{289}{2} + \log_{\frac{9}{4}} 8$

B. $\frac{11}{2}$

C. 4

D. 6

Đề thi thử chuyên Lê Hồng Phong

Lời giải

Xét bất đẳng thức phụ $x^2 + 4x - 4 \geq x^3 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-4) \leq 0$ luôn đúng khi $x \in (1; 2]$.

Áp dụng vào bài toán ta được.

$$\begin{aligned} P &= \log_{bc} (2a^2 + 8a - 8) + \log_{ca} (4b^2 + 16b - 16) + \log_{ab} (c^2 + 4c - 4) \\ &\geq \log_{bc} 2a^3 + \log_{ac} 4b^3 + \log_{ab} c^3 = \log_{bc} 2 + \log_{ca} 4 + 3(\log_{bc} a + \log_{ac} b + \log_{ab} c) \end{aligned}$$

Mặt khác do $a, b, c \in (1; 2]$ nên ta có

$$\log_{bc} 2 + \log_{ca} 4 = \frac{1}{\log_2 bc} + \frac{1}{\log_4 ca} \geq \frac{1}{\log_2 (2.2)} + \frac{1}{\log_4 (2.2)} = \frac{3}{2}$$

Lại theo bất đẳng thức Nesbit ta có.

$$3(\log_{bc} a + \log_{ac} b + \log_{ab} c) = 3 \cdot \sum_{cyc} \frac{\ln a}{\ln b + \ln c} \geq 3 \cdot \frac{3}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 6

Chọn ý **D**.

Chú ý. Cách chứng minh bất đẳng thức Nesbit. Đây là một bất đẳng thức rất nổi tiếng, hiện đã có hơn 20 cách chứng minh cho bất đẳng thức này, sau đây mình xin trình bày một cách xét hiệu nhanh nhất cho mọi người tham khảo.

Xét 3 số thực dương a, b, c thay đổi, khi đó ta có $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

Chứng minh. Ta có $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2} = \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{2(a+c)(b+c)} \geq 0$.

Bất đẳng thức trên luôn đúng nên ta có điều phải chứng minh!

Bài tập tự luyện.

Câu 1. Cho 2 số thực $a > 1, b > 1$. Tính giá trị của biểu thức $S = \log_a \sqrt{ab}$ khi $P = \log_a^2 b + 8 \log_b a$ đạt giá trị nhỏ nhất?

- A. $6\sqrt[3]{2}$ B. $\frac{1+\sqrt[3]{4}}{2}$ C. $\sqrt[3]{4}$ D. $2(1+\sqrt[3]{4})$

Câu 2. Cho 2 số thực $b > a > 1$. Tính giá trị của $S = \log_a \sqrt[3]{ab}$ khi biểu thức $P = \frac{\log_a b}{\log_a^2 \left(\frac{a}{b}\right)} + \log_a \sqrt{ab}$ đạt

giá trị nhỏ nhất?

- A. $S = 4$ B. $S = \frac{11}{4}$ C. $S = \frac{4}{3}$ D. $S = 3$

Câu 3. Cho 2 số thực $a > 1, b > 1$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{1}{\log_{ab} a} + \frac{1}{\log_{\sqrt[3]{ab}} b}$ là $\frac{m}{n}$ với

m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $P = 2m + 3n$

- A. 30 B. 42 C. 24 D. 35

Câu 4. Cho 2 số $a, b \in (1; 2]$ thỏa mãn $a < b$. Biết giá trị nhỏ nhất của $P = \log_a (b^2 + 4b - 4) + \log_{\frac{b}{a}} a$ là

$m + 3\sqrt[3]{n}$ với m, n là các số nguyên dương. Tính $S = m + n$

- A. 9 B. 18 C. 54 D. 15

Câu 5. Cho 2 số thực $a > b > 1$, biết rằng $P = \log_b^2 \left(\frac{a^4}{b^4}\right) + \log_b \sqrt{a}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng M khi

$b = a^m$. Tính $m + M$?

- A. $\frac{7}{2}$ B. $\frac{37}{10}$ C. $\frac{17}{2}$ D. $\frac{35}{2}$

Câu 6. Cho 2 số thực $a \geq b > 1$. Biết rằng biểu thức $P = \frac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất khi có số

thực k sao cho $b = a^k$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $0 < k < \frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2} < k < 1$ C. $-1 < k < -\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2} < k < 0$

Câu 7. Cho 2 số thực $b > a > 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = \log_a^3 \left(\frac{a^2}{b^2}\right) + \log_{\sqrt[3]{b^2}} \left(\frac{b}{a}\right)$?

- A. $\frac{23+16\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{23-16\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{23+8\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{23-8\sqrt{2}}{2}$

Câu 8. Cho 2 số thực $a \geq b > 1$. Biết rằng biểu thức $P = \frac{2}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất là M khi có số thực m sao cho $b = a^m$. Tính $M + m$.

- A. $\frac{81}{16}$ B. $\frac{23}{8}$ C. $\frac{19}{8}$ D. $\frac{49}{16}$

Câu 9. Cho 2 số thực a, b thay đổi thỏa mãn $\frac{1}{4} < b < a < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_a \left(b - \frac{1}{4} \right) - \log_{\frac{a}{b}} \sqrt{b} ?$$

- A. 0,5 B. 1,5 C. 4,5 D. 3,5

Câu 10. Cho 2 số thực a, b thỏa mãn điều kiện $a > b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_a^2 \left(a^2 \right) + 3 \log_b \left(\frac{a}{b} \right) ?$$

- A. 19 B. 13 C. 14 D. 15

Câu 11. Cho 2 số thực thay đổi a, b thỏa mãn $\frac{1}{6} < b < a < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{8} \log_a^3 \left(\frac{6b-1}{9} \right) + 4 \log_{\frac{3}{a}}^3 a$$

- A. 9 B. 12 C. $\frac{23}{2}$ D. $\frac{25}{2}$

Câu 12. Cho 2 số thực a, b thay đổi thỏa mãn $a > b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_a \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 3 \log_b \left(\frac{b}{a} \right) ?$$

- A. 5 B. $5 - \sqrt{6}$ C. $5 - 2\sqrt{6}$ D. $4 - \sqrt{6}$

Câu 13. Cho 2 số thực a, b thay đổi thỏa mãn $a^3 > b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{\log_{\frac{a^3}{b}}(ab) \cdot \log_b a}{3(\log_a b - 1)^2 + 8} ?$$

- A. $e^{\frac{1}{8}}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $e^{\frac{1}{4}}$ D. $\frac{1}{4}$

Câu 14. Cho 2 số thực a, b lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = \log_a \left(\frac{a^2 + 4b^2}{4} \right) + \frac{1}{4 \log_{ab} b}$

- A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{9}{4}$ C. $\frac{13}{4}$ D. $\frac{7}{4}$

Câu 15. Cho 2 số thực $a > 1 > b > 0$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = \log_{a^2} (a^2 b) + \log_{\sqrt{b}} a^3$

- A. $1 - 2\sqrt{3}$ B. $1 - 2\sqrt{2}$ C. $1 + 2\sqrt{3}$ D. $1 + 2\sqrt{2}$

Câu 16. Cho 2 số thực dương a, b nhỏ hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_a \left(\frac{4ab}{a+4b} \right) + \log_b (ab)$$

- A. $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{5+\sqrt{2}}{2}$

Các bài toán chứa tham số

Ta có thể thấy rằng các bài toán chứa tham số luôn là một câu hỏi rất quan trọng trong đề thi, nó trải dài ở các chương như hàm số và mũ – logarit, thực chất các bài toán này bản chất đều giống nhau, chỉ khác nhau ở các phép biến đổi, và tính chất của từng phép biến đổi. Trong chương này chúng ta sẽ tìm hiểu các bài toán chứa tham số liên quan tới mũ – logarit, các kỹ thuật cơ bản ở chương 1 sẽ được áp dụng vào các bài toán chứa tham số, bên cạnh kỹ thuật đặt ẩn phụ.

Câu 1. Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$4^{x+1} + 4^{1-x} = (m+1)(2^{2+x} - 2^{2-x}) + 16 - 8m$$

có nghiệm trên $[0;1]$?

A. 2

B. 5

C. 4

D. 3

THPT Lê Hồng Phong – Nam Định lần 1 năm 2017-2018

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có.

$$4^{x+1} + 4^{1-x} = (m+1)(2^{2+x} - 2^{2-x}) + 16 - 8m \Leftrightarrow 4(4^x + 4^{-x}) = 4(m+1)(2^x - 2^{-x}) + 16 - 8m$$

Đặt $t = u(x) = 2^x - 2^{-x}$, $x \in [0;1] \Rightarrow u'(x) = 2^x + 2^{-x} > 0 \forall x \in [0;1]$.

Suy ra $u(0) \leq t \leq u(1)$ hay $t \in \left[0; \frac{3}{2}\right] \Rightarrow t^2 = 4^x + 4^{-x} - 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} \Rightarrow 4^x + 4^{-x} = t^2 + 2$.

Phương trình trở thành .

$$4(t^2 + 2) = 4t(m+1) + 16 - 8m \Leftrightarrow t^2 + 2 = t(m+1) + 4 - 2m \Leftrightarrow t^2 - t(m+1) + 2m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m(t-2) = t^2 - t - 2 \Leftrightarrow m(t-2) = (t-2)(t+1) \Leftrightarrow m = t+1 \left(t \in \left[0; \frac{3}{2}\right] \right) \Leftrightarrow t = m-1$$

Để phương trình đã cho có nghiệm trên $[0;1]$ thì phương trình $t = m-1$ phải có nghiệm $t \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$.

Suy ra $m-1 \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$, hay $m \in \left[1; \frac{5}{2}\right]$.

Chọn ý A.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ sau có nghiệm $\begin{cases} 3^{2x+\sqrt{x+1}} - 3^{2+\sqrt{x+1}} + 2017x \leq 2017 \\ x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \geq 0 \end{cases}$.

A. $m \geq -3$

B. $m > -3$

C. $m \geq -2$

D. $m \leq -2$

THPT Chuyên Vĩnh Phúc – lần 2 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Điều kiện $x \geq -1$.

Xét $3^{2x+\sqrt{x+1}} - 3^{2+\sqrt{x+1}} + 2017x \leq 2017 \Leftrightarrow 3^{2x} \cdot 3^{\sqrt{x+1}} - 3^2 \cdot 3^{\sqrt{x+1}} \leq 2017 - 2017x$

$\Leftrightarrow (9^x - 9)3^{\sqrt{x+1}} \leq 2017(1-x)$. Dễ thấy $x=1$ là một nghiệm.

- Nếu $x > 1$ thì $VT = (9^x - 9)3^{\sqrt{x+1}} > 0$, $VP = 2017(1-x) < 0$

Suy ra $(9^x - 9)3^{\sqrt{x+1}} \leq 2017(1-x)$ vô nghiệm.

- Nếu $-1 \leq x < 1$ thì $VT = (9^x - 9)3^{\sqrt{x+1}} < 0$, $VP = 2017(1-x) > 0$

Suy ra $(9^x - 9)3^{\sqrt{x+1}} \leq 2017(1-x)$ có nghiệm với $-1 \leq x < 1$.

Vậy bpt $3^{2x+\sqrt{x+1}} - 3^{2+\sqrt{x+1}} + 2017x \leq 2017$ có nghiệm với $-1 \leq x \leq 1$.

Cách 1

Xét. $f(x) = x^2 - (m+2)x + 2m+3 \geq 0$. Ta có $\Delta = m^2 - 4m - 8$, để bpt có nghiệm $-1 \leq x \leq 1$ thì.

- **Trường hợp 1.** $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{3} + 2 \leq m \leq 2\sqrt{3} + 2$, bpt có nghiệm $-1 \leq x \leq 1$ (1)
- **Trường hợp 2.** $\Delta > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2\sqrt{3} + 2 \\ m < -2\sqrt{3} + 2 \end{cases}$, nghiệm của bpt là $(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$.

Ta có $(-1; 1) \subset (x_1; x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) < 0 \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m+6 < 0 \\ m+2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2$

Do đó bất phương trình có nghiệm $-1 \leq x \leq 1$ khi $m \geq -2$

Kết hợp điều kiện ta được $m > 2\sqrt{3} + 2$ và $-2 \leq m < -2\sqrt{3} + 2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra hệ đã cho có nghiệm khi $m \geq -2$.

Cách 2. Bài toán trở thành tìm m để bpt $x^2 - (m+2)x + 2m+3 \geq 0$ có nghiệm $-1 \leq x \leq 1$

Bất phương trình tương đương

$$m(x-2) \leq x^2 - 2x + 3 \Leftrightarrow m \geq \frac{x^2 - 2x + 3}{x-2} = f(x) \quad (*) \quad (\text{Do } -1 \leq x \leq 1)$$

Ta có $f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2}$. Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{3} \in [-1; 1]$

Để bất phương trình (*) có nghiệm thì $m \geq \min_{x \in [-1; 1]} f(x)$. Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên

$[-1; 1]$ ta có $m \geq f(1) = f(-1) = -2$. Vậy $m \geq -2$.

Chọn ý C.

Câu 3. Có bao nhiêu số nguyên dương a để phương trình sau có nghiệm duy nhất?

$$(3a^2 + 12a + 15) \log_{27}(2x - x^2) + \left(\frac{9}{2}a^2 - 3a + 1\right) \log_{\sqrt{11}}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = 2 \log_9(2x - x^2) + \log_{11}\left(\frac{2 - x^2}{2}\right)$$

A. 2

B. 0

C. Vô số

D. 1

THPT Cổ Loa – Hà Nội lần 1 năm 2017 – 2018

Lời giải

Điều kiện $0 < x < \sqrt{2}$.

Biến đổi phương trình ban đầu tương đương

$$(a^2 + 4a + 5) \log_3(2x - x^2) + (9a^2 - 6a + 2) \log_{11}\left(\frac{2 - x^2}{2}\right) = \log_3(2x - x^2) + \log_{11}\left(\frac{2 - x^2}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + 4a + 4) \log_3(2x - x^2) + (9a^2 - 6a + 1) \log_{11}\left(\frac{2 - x^2}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+2)^2 \log_3(2x-x^2) + (3a-1)^2 \log_{11}\left(\frac{2-x^2}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3a-1}{a+2}\right)^2 = \frac{\log_3(2x-x^2)}{\log_{11}\left(\frac{2}{2-x^2}\right)} (*)$$

Mà vế trái của (*) luôn dương với mọi a nguyên dương.

$$\text{Vì } 0 < x < \sqrt{2} \text{ nên } 2-x^2 < 2 \Rightarrow \frac{2}{2-x^2} > 1 \Rightarrow \log_{11}\left(\frac{2}{2-x^2}\right) > 0$$

Do đó từ (*) suy ra $\log_3(2x-x^2) > 0 \Leftrightarrow 2x-x^2 > 1 \Leftrightarrow x^2-2x+1 < 0 \Rightarrow$ không tồn tại x .

Vậy không có giá trị của tham số a thỏa mãn yêu cầu đề bài
họ ý **B**.

Câu 4. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $10m \in \mathbb{Z}$ và phương trình

$$2\log_{mx-5}(2x^2-5x+4) = \log_{\sqrt{mx-5}}(x^2+2x-6)$$

có nghiệm duy nhất. Tìm số phần tử của S .

A. 15.

B. 14.

C. 13.

D. 16.

THTT số 3 – 486 tháng 12 năm 2017

Lời giải

Ta có. $2x^2-5x+4 > 0$ với mọi x nên phương trình ban đầu tương đương với

$$\begin{cases} mx-5 > 0 \\ mx-5 \neq 1 \\ 2x^2-5x+4 > 0 \\ 2x^2-5x+4 = x^2+2x-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx > 5 \\ mx \neq 6 \\ \begin{cases} x=2 \\ x=5 \end{cases} \end{cases}$$

Phương trình có nghiệm duy nhất tương đương với ta nhận nghiệm $x=2$ và loại $x=5$ hoặc nhận nghiệm $x=5$ và loại $x=2$.

- **Trường hợp 1.** Nhận nghiệm $x=2$ và loại $x=5$.

$$\text{Điều này tương đương với } \begin{cases} 2m > 5 \\ 2m \neq 6 \\ \begin{cases} 5m \leq 5 \\ 5m = 6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{5}{2} \\ m \neq 3 \\ \begin{cases} m \leq 1 \\ m = \frac{6}{5} \end{cases} \end{cases} \text{ (vô lí).}$$

- **Trường hợp 2.** Nhận nghiệm $x=5$ và loại $x=2$.

$$\text{Điều này tương đương với } \begin{cases} 5m > 5 \\ 5m \neq 6 \\ \begin{cases} 2m \leq 5 \\ 2m = 6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq \frac{6}{5} \\ \begin{cases} m \leq \frac{5}{2} \\ m = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ 1 < m \leq \frac{5}{2} \\ m \neq \frac{6}{5} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra. } \begin{cases} 10m = 30 \\ 10 < 10m \leq 25 \\ m \neq 12 \end{cases} \text{ . Vì } 10m \in \mathbb{Z} \text{ nên } 10m \in \{11; 13; 14; \dots; 25\} \cup \{30\} \text{ .}$$

Trong tập hợp này có 15 phần tử nên tập hợp S cũng có 15 phần tử.

Chú ý. $m \in \left\{ \frac{11}{10}; \frac{13}{10}; \frac{14}{10} \dots; \frac{25}{10} \right\} \cup \left\{ \frac{30}{10} \right\}$.

Chọn ý **A**.

Câu 5. Cho tham số thực a . Biết phương trình $e^x - e^{-x} = 2\cos ax$ có 5 nghiệm thực phân biệt. Hỏi phương trình $e^x + e^{-x} = 2\cos ax + 4$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt.

A. 5

B. 6

C. 10

D. 11

THPT Chuyên Thái Bình – Lần 3 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Ta thấy rằng phương trình $e^x - e^{-x} = 2\cos ax$ có đúng 5 nghiệm

Suy ra phương trình $e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = 2\cos a\frac{x}{2}$ có đúng 5 nghiệm (*)

$$\begin{aligned} e^x + e^{-x} = 2\cos ax + 4 &\Leftrightarrow e^x + e^{-x} - 2 = 2(\cos ax + 1) \\ &\Leftrightarrow \left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 = 4\cos^2 \frac{ax}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = 2\cos \frac{ax}{2} & (1) \\ e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = -2\cos \frac{ax}{2} & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

- Phương trình (1) và phương trình (2) nếu có nghiệm chung x_0 thì $\cos \frac{ax_0}{2} = 0$ và $e^{\frac{x_0}{2}} = e^{-\frac{x_0}{2}}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ \cos 0 = 0 \end{cases}, \text{ vô lý. Vậy (1), (2) có nghiệm khác nhau.}$$

- Phương trình (1) có 5 nghiệm (theo (*)).

Nếu x_0 là 1 nghiệm của (1) thì $x_0 \neq 0$ và $e^{\frac{x_0}{2}} - e^{-\frac{x_0}{2}} = 2\cos \frac{ax_0}{2} \Rightarrow e^{\frac{-x_0}{2}} - e^{\frac{x_0}{2}} = -2\cos a\left(-\frac{x_0}{2}\right)$

Khi đó $-x_0$ là 1 nghiệm của (2).

Vậy phương trình (2) có 5 nghiệm phân biệt (và khác 5 nghiệm của phương trình (1)).

Phương trình đã cho có đúng 10 nghiệm.

Chọn ý **C**.

Câu 6. Cho bất phương trình $m \cdot 3^{x+1} + (3m+2) \cdot (4-\sqrt{7})^x + (4+\sqrt{7})^x > 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (-\infty; 0]$.

A. $m > \frac{2-2\sqrt{3}}{3}$

B. $m > \frac{2+2\sqrt{3}}{3}$

C. $m \geq \frac{2-2\sqrt{3}}{3}$

D. $m \geq -\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$

THPT Hậu Lộc 2 – Thanh Hóa năm 2017 – 2018

Lời giải

Bất phương trình tương đương.

$$m \cdot 3^{x+1} + (3m+2) \cdot (4-\sqrt{7})^x + (4+\sqrt{7})^x > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3} \right)^x + (3m+2) \left(\frac{4-\sqrt{7}}{3} \right)^x + 3m > 0$$

Đặt $t = \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3} \right)^x$, do $x \leq 0$ nên $0 < t \leq 1$

Ta cần tìm tham số m sao cho $t^2 + 3mt + 3m + 2 > 0$, đúng với mọi $0 < t \leq 1$

Ta có $m > \frac{-t^2 - 2}{3t + 3} \Leftrightarrow m > \max_{(0;1]} \frac{-t^2 - 2}{3t + 3}$. Ta tìm GTLN của hàm số $f(t) = -\frac{t^2 + 2}{3t + 2}$ trên $0 < t \leq 1$

$$\text{Ta có } f'(t) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{t^2 + 2t - 2}{(t+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 - \sqrt{3} \\ t = -1 + \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Lập bảng biến thiên ta được } \max_{(0;1]} \frac{-t^2 - 2}{3t + 3} = f(-1 + \sqrt{3}) = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{3}$$

Chọn ý A.

Câu 7. Phương trình $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 6x^2 + 9x + m)2^{x-2} = 2^{x+1} + 1$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in (a; b)$ đặt $T = b^2 - a^2$ thì

A. $T = 36$

B. $T = 48$

C. $T = 64$

D. $T = 72$

THPT Trần Nhân Tông – Quảng Ninh lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 6x^2 + 9x + m)2^{x-2} = 2^{x+1} + 1$$

$$\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3x}} + (x-2)^3 + 8 + m - 3x = 2^3 + 2^{2-x}$$

$$\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3x}} + m - 3x = 2^{2-x} + (2-x)^3 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t^3$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 3t^2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó từ (1) suy ra $m - 3x = (2-x)^3 \Leftrightarrow m = 8 - 9x + 6x^2 - x^3$

Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 8$ trên $\mathbb{R}$. có $f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$.

Lập bảng biến thiên ta thấy phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi $4 < m < 8$.

Suy ra $a = 4$; $b = 8 \Rightarrow T = b^2 - a^2 = 48$.

Chọn ý B.

Câu 8. Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2018 của tham số m để phương trình

$$\log_6(2018x + m) = \log_4(1009x)$$

có nghiệm là?

A. 2020

B. 2017

C. 2019

D. 2018

Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

$$\text{Đặt } \log_6(2018x + m) = \log_4(1009x) = t \Rightarrow \begin{cases} 2018x + m = 6^t \\ 1009x = 4^t \end{cases} \Rightarrow 2.4^t + m = 6^t \Leftrightarrow m = -2.4^t + 6^t.$$

Đặt $f(t) = -2.4^t + 6^t$. Ta có. $f'(t) = 6^t \ln 6 - 2.4^t \ln 4$.

$$\text{Xét } f'(t) = 0 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{2 \ln 4}{\ln 6} = \log_6 16 \Leftrightarrow t = \log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16).$$

Lập bảng biến thiên ta thấy rằng phương trình $f(t) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi

$$m \geq f\left(\log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)\right) \approx -2,01.$$

Mà $\begin{cases} m < 2018 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$ nên ta có. $\begin{cases} -2 \leq m \leq 2017 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Vậy có 2020 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn ý **A**.

Câu 9. Cho a, x là các số thực dương, $a \neq 1$ thỏa mãn $\log_a x = \log(a^x)$. Tìm giá trị lớn nhất của a .

A. 1

B. $\log(2^e - 1)$

C. $e^{\sqrt{\frac{\ln 10}{e}}}$

D. $10^{\sqrt{\frac{\log e}{e}}}$

Phổ thông năng khiếu – Đại học Quốc Gia TP. HCM lần 1 năm 2017 – 2018

Lời giải

Ta có. $\log_a x = \log(a^x) \Leftrightarrow \log_a x = x \log a \Leftrightarrow \frac{\log x}{\log a} = x \log a \Leftrightarrow \frac{\log x}{x} = (\log a)^2$

Giá trị của a lớn nhất khi và chỉ khi $\log a$ lớn nhất.

Xét hàm số $f(x) = \frac{\log x}{x}$ với $x > 0$. Ta có $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2 \ln 10}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$

Lập bảng biến thiên ta dễ dàng suy ra $(\log a)^2$ lớn nhất là bằng $\frac{\log e}{e}$

Khi đó $(\log a)^2 = \frac{\log e}{e} \Rightarrow \log a = \sqrt{\frac{\log e}{e}} \Rightarrow a = 10^{\sqrt{\frac{\log e}{e}}}$

Chọn ý **D**.

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình

$$\log_2 \left(\frac{\sqrt{2x^2 + mx + 1}}{x + 2} \right) + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2$$

có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 3

B. 4

C. 2

D. 1

Sở Giáo dục và Đào tạo Phú Thọ lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Điều kiện. $\begin{cases} x + 2 > 0 \\ 2x^2 + mx + 1 > 0 \end{cases}$

Phương trình ban đầu tương đương.

$$\log_2 \left(\frac{\sqrt{2x^2 + mx + 1}}{x + 2} \right) + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{2x^2 + mx + 1} + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = \log_2(x + 2) + x + 2 \Leftrightarrow f(\sqrt{2x^2 + mx + 1}) = f(x + 2) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ với $t \in (0; +\infty)$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2$

Từ đó $\begin{cases} x > -2 \\ 2x^2 + mx + 1 = (x + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x^2 + (m - 4)x - 3 = 0 \end{cases} \quad (2)$

Để có hai nghiệm thực phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 lớn hơn -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m - 4)^2 + 12 > 0 \\ (x_1 + 2) + (x_2 + 2) > 0 \\ (x_1 + 2)(x_2 + 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ x_1 + x_2 + 4 > 0 \\ x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ 4 - m + 4 > 0 \\ -3 + 2(4 - m) + 4 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 8 \\ m < \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{9}{2} \text{ mà } m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4\}.$$

Chọn ý **B**.

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |e^{2x} - 4e^x + m|$ trên đoạn $[0; \ln 4]$ bằng 6 ?

A. 3

B. 4

C. 2

D. 1

THPT Chuyên Ngoại ngữ - Hà Nội lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Xét $x \in [0; \ln 4]$. Đặt $t = e^x \Rightarrow t \in [1; 4]$. Đặt $g(t) = t^2 - 4t + m$ với $t \in [1; 4]$

Đạo hàm. $g'(t) = 2t - 4$. Xét $g'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Ta có. $g(1) = m - 3$; $g(2) = m - 4$; $g(4) = m$

Giá trị nhỏ nhất của $f(x) = |e^{2x} - 4e^x + m|$ trên $[0; \ln 4]$ sẽ thuộc $A = \{|m - 3|; |m - 4|; |m|\}$

- Xét $|m - 4| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 10 \Rightarrow A = \{7; 6; 10\} \\ m = -2 \Rightarrow A = \{5; 6; 2\} \end{cases}$

Ta thấy $m = 10$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\min f(x) = 6$

- Xét $|m - 3| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 9 \Rightarrow A = \{5; 6; 9\} \\ m = -3 \Rightarrow A = \{7; 6; 3\} \end{cases}$ (không thỏa mãn)

- Xét $|m| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \Rightarrow A = \{2; 3; 6\} \\ m = -6 \Rightarrow A = \{10; 9; 6\} \end{cases}$

Ta thấy $m = -6$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\min f(x) = 6$

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn ý **D**.

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-9; 9)$ của tham số m để bất phương trình

$$3\log x \leq 2\log(m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x})$$

có nghiệm thực?

A. 6

B. 7

C. 10

D. 11

Sở Giáo dục và Đào tạo Quảng Nam năm học 2017 – 2018

Lời giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 0 < x < 1 \\ m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ m\sqrt{x} - (1-x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ m > \frac{(1-x)}{\sqrt{x}} > 0 \end{cases}$$

Bất phương trình đã cho tương đương.

$$\begin{aligned} \log x^3 &\leq \log(m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x})^2 \Leftrightarrow x^3 \leq (m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x})^2 \\ \Leftrightarrow x\sqrt{x} &\leq (m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x}) \Leftrightarrow m \geq \frac{x\sqrt{x} + (1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{x-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $\left(\frac{x}{\sqrt{1-x}} + \sqrt{1-x}\right) + \left(\frac{1-x}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right) \geq 2\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x}$

Vì vậy $m \geq \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$.

Khảo sát hàm số $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ trên $(0;1)$ ta được $f(x) \geq \sqrt{2} \approx 1,414$.

Vậy m có thể nhận được các giá trị 2,3,4,5,6,7,8.

Chọn ý B.

Câu 13. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$e^{3m} + e^m = 2(x + \sqrt{1-x^2})(1 + x\sqrt{1-x^2})$$

có nghiệm

A. $\left(0; \frac{1}{2} \ln 2\right)$

B. $\left[-\infty; \frac{1}{2} \ln 2\right]$

C. $\left(0; \frac{1}{e}\right)$

D. $\left[\frac{1}{2} \ln 2; +\infty\right)$

Sở Giáo dục và Đào tạo Bắc Ninh lần 2 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Đặt $t = x + \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq t \leq \sqrt{2} \\ t^2 - 1 = 2x\sqrt{1-x^2} \end{cases}$. Khi đó, $e^{3m} + e^m = t(t^2 + 1) \Leftrightarrow e^{3m} + e^m = t^3 + t$.

Xét hàm $f(u) = u^3 + u \Rightarrow f'(u) = 3u^2 + 1$. Hàm số luôn đồng biến $\Rightarrow e^{3m} + e^m = t^3 + t \Leftrightarrow e^m = t$.

Phương trình có nghiệm thì $e^m \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2} \ln 2$

Chọn ý B.

Câu 14. Cho phương trình $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_{2017}(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \log_a(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(1;2018)$ của tham số a sao cho phương trình đầu có nghiệm lớn hơn 3

A. 20

B. 19

C. 18

D. 17

Lời giải

Nhận thấy với $x > 3$ thì $\sqrt{x^2 - 1} < \sqrt{x^2} = x \Rightarrow x - \sqrt{x^2 - 1} > 0$ và $x + \sqrt{x^2 - 1} > 0$

Biến đổi phương trình tương đương.

$$\begin{aligned} \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_{2017}(x - \sqrt{x^2 - 1}) &= \log_a(x + \sqrt{x^2 - 1}) \\ \Leftrightarrow \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_{2017}(x + \sqrt{x^2 - 1}) &= \log_a 2 \cdot \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1}) \\ \Leftrightarrow \log_{2017}(x + \sqrt{x^2 - 1}) &= \log_a 2 \quad (1) \quad (\text{vì } \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1}) > 0, \forall x > 3) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = \log_{2017}(x + \sqrt{x^2 - 1})$ trên khoảng $(3; +\infty)$.

Ta có $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1} \cdot \ln 2017} \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x > 3$.

Lập bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) có nghiệm lớn hơn 3 $\Leftrightarrow \log_2 a > f(3)$

$$\Leftrightarrow \log_2 a > \log_{2017}(3 + 2\sqrt{2}) \Leftrightarrow \log_2 a < \log_{3+2\sqrt{2}} 2017 (a > 1) \Leftrightarrow a < 2^{\log_{3+2\sqrt{2}} 2017} \approx 19,9.$$

Lại do a nguyên thuộc khoảng $(1;2018)$ nên $a \in \{2;3;\dots;19\}$

Vậy có 18 giá trị nguyên của tham số a thỏa mãn yêu cầu đề bài

Chọn ý C.

Câu 15. Giả sử tồn tại số thực a sao cho phương trình $e^x + e^{-x} = 2\cos ax + 4$ có 10 nghiệm thực phân biệt. Số nghiệm phân biệt của phương trình $e^x - e^{-x} = 2\cos ax$ là

A. 5

B. 20

C. 10

D. 4

Lời giải

Đây là một câu tương tự với câu trong đề thi thử Chuyên Thái Bình lần 3.

Phương trình đầu tương đương

$$e^x + e^{-x} = 2\cos ax + 4 \Leftrightarrow \left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 = 2\cos ax + 2$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 = \left(2\cos \frac{ax}{2} \right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = 2\cos \frac{ax}{2} & (1) \\ e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = -2\cos \frac{ax}{2} & (2) \end{cases}$$

Nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình đã cho.

Nếu $x = x_0$ là nghiệm của (1) thì $x = -x_0$ là nghiệm của (2).

Do đó số nghiệm của (1) và (2) bằng nhau và đồng thời khác nhau đôi một.

Suy ra phương trình (1) có đúng 5 nghiệm $x_1; x_2; x_3; x_4; x_5$.

Vậy phương trình $e^x - e^{-x} = 2\cos ax$ có đúng 5 nghiệm phân biệt là $\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{2}, \frac{x_4}{2}, \frac{x_5}{2}$.

Chọn ý A.

Câu 16. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình sau có nghiệm thực?

$$\ln(m + 2\sin x + \ln(m + 3\sin x)) = \sin x$$

A. 5

B. 4

C. 3

D. 6

Lời giải

Điều kiện. $\begin{cases} m + 2\sin x + \ln(m + 3\sin x) > 0 \\ m + 3\sin x > 0 \end{cases}$.

Phương trình đã cho tương đương.

$$\begin{aligned} m + 2\sin x + \ln(m + 3\sin x) &= e^{\sin x} \\ \Leftrightarrow m + 3\sin x + \ln(m + 3\sin x) &= e^{\sin x} + \sin x \\ \Leftrightarrow e^{\ln(m + 3\sin x)} + \ln(m + 3\sin x) &= e^{\sin x} + \sin x, \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = e^t + t, t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = e^t + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Vậy } (1) \Leftrightarrow f[\ln(m + 3\sin x)] = f(\sin x) \Leftrightarrow \ln(m + 3\sin x) = \sin x.$$

Đặt $a = \sin x, a \in [-1; 1]$. Phương trình trở thành. $\ln(m + 3a) = a \Leftrightarrow m = e^a - 3a$.

Xét $g(a) = e^a - 3a, a \in [-1; 1], g'(a) = e^a - 3 < 0, \forall a \in [-1; 1]$.

Vậy để phương trình có nghiệm thực thì $g(1) \leq m \leq g(-1) \Leftrightarrow e - 3 \leq m \leq \frac{1}{e} + 3$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m là $0; 1; 2; 3$.

Chọn ý B.

Câu 17. Cho n là số tự nhiên thỏa mãn phương trình $3^x - 3^{-x} = 2\cos nx$ có 2018 nghiệm. Tìm số nghiệm của phương trình $9^x + 9^{-x} = 4 + 2\cos 2nx$.

A. 4036

B. 2018

C. 4035

D. 2019

THPT Quảng Xương 1 – Thanh Hóa năm học 2017 – 2018

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương.

$$9^x + 9^{-x} = 4 + 2\cos 2nx \Leftrightarrow 9^x + 9^{-x} - 2.3^x.3^{-x} = 2 + 2\cos 2nx$$

$$\Leftrightarrow (3^x - 3^{-x})^2 = 4\cos^2 nx \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x - 3^{-x} = 2\cos nx & (1) \\ 3^x - 3^{-x} = -2\cos nx & (2) \end{cases}$$

Khi đó nếu (1) và (2) có nghiệm chung thì $3^x - 3^{-x} = 3^{-x} - 3^x \Leftrightarrow 3^x = 3^{-x} \Leftrightarrow x = 0$

Thay $x = 0$ vào (1) ta được $3^0 - 3^0 = 2\cos 0 \Leftrightarrow 0 = 2$, tức là (1) và (2) không có nghiệm chung. Mặt khác ta thấy nếu x_0 là nghiệm của (1) thì $-x_0$ sẽ là nghiệm của (2). Mà (1) có 2018 nghiệm nên (2) cũng có 2018 nghiệm. Vậy phương trình đã cho có 4036 nghiệm.

Chọn ý A.

Câu 18. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$m.3^{x^2-7x+12} + 3^{2x-x^2} = 9.3^{10-5x} + m$$

có ba nghiệm thực phân biệt. Tìm số phần tử của S .

A. 3

B. Vô số

C. 1

D. 2

THPT Trần Hưng Đạo – TP. HCM năm học 2017 – 2018

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được.

$$m.3^{x^2-7x+12} + 3^{2x-x^2} = 9.3^{10-5x} + m \Leftrightarrow m(3^{x^2-7x+12} - 1) - 3^{2x-x^2}(3^{x^2-7x+12} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3^{x^2-7x+12} - 1)(m - 3^{2x-x^2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2-7x+12} - 1 = 0 \\ m - 3^{2x-x^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \\ 2x - x^2 - \log_3 m = 0(*) \end{cases}$$

Phương trình đã cho có ba nghiệm thực phân biệt, ta có các trường hợp sau.

- **Trường hợp 1.** (*) có một nghiệm $x = 3$ và nghiệm còn lại khác 3 và 4

Thay $x = 3$ vào (*) ta được $\log_3 m = -3 \Leftrightarrow m = \frac{1}{27}$

Khi đó (*) trở thành $-x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$ (Thỏa yêu cầu)

- **Trường hợp 2.** (*) có một nghiệm $x = 4$ và nghiệm còn lại khác 3 và 4

Thay $x = 4$ vào (*) ta được $\log_3 m = -8 \Leftrightarrow m = 3^{-8}$

Khi đó (*) trở thành $-x^2 + 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}$ (Thỏa yêu cầu)

- **Trường hợp 3.** (*) có nghiệm kép khác 3 và 4 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - \log_3 m = 0 \\ \log_3 m \neq -3 \\ \log_3 m \neq -8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$

Vậy có 3 giá trị m thỏa yêu cầu đề bài.

Chọn ý A.

Câu 19. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tồn tại cặp số $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $e^{2x+y+1} - e^{3x+2y} = x + y - 1$, đồng thời $\log_2^2(2x + y - 1) - (m + 4)\log_2 x + m^2 + 4 = 0$.

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

Sở Giáo dục và đào tạo Bà Rịa Vũng Tàu đề 1 năm 2017 – 2018

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có $e^{2x+y+1} - e^{3x+2y} = x + y - 1 \Leftrightarrow e^{2x+y+1} + (2x + y + 1) = e^{3x+2y} + (3x + 2y)$.

Xét hàm số $f(t) = e^t + t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = e^t + 1 > 0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình có dạng $f(2x + y + 1) = f(3x + 2y) \Leftrightarrow 2x + y + 1 = 3x + 2y \Leftrightarrow y = 1 - x$.

Thế vào phương trình còn lại ta được $\log_2^2 x - (m + 4)\log_2 x + m^2 + 4 = 0$.

Đặt $t = \log_2 x$, phương trình có dạng $t^2 - (m + 4)t + m^2 + 4 = 0$.

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 8m \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{8}{3}$.

Do đó có 3 số nguyên m thỏa mãn.

Chọn ý A.

Câu 20. Biết $(a; b)$ là khoảng chứa tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình

$$\left(7 - 3\sqrt{5}\right)^{x^2} + m\left(7 + 3\sqrt{5}\right)^{x^2} = 2^{x^2-1}$$

có đúng bốn nghiệm thực phân biệt. Tính $M = a + b$.

A. $M = \frac{1}{8}$

B. $M = \frac{1}{16}$

C. $M = \frac{-7}{16}$

D. $M = \frac{3}{5}$

THPT Hồng Lĩnh – Hà Tĩnh lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có.

$$\left(7 - 3\sqrt{5}\right)^{x^2} + m\left(7 + 3\sqrt{5}\right)^{x^2} = 2^{x^2-1} \Leftrightarrow \left(\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2} + m\left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2} = \frac{1}{2}$$

Vì $\left(\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2} \cdot \left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2} = 1$ nên đặt $t = \left(\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2}$, $0 < t \leq 1$ phương trình trở thành

$$t + \frac{m}{t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2t^2 - t + 2m = 0 \Leftrightarrow 2m = -2t^2 + t (*)$$

Xét hàm số $f(t) = -2t^2 + t$, $0 < t \leq 1 \Rightarrow f'(t) = -4t + 1$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$. Vẽ bảng biến thiên ta thấy rằng để phương trình đã cho có đúng bốn nghiệm thực phân biệt thì phương trình (*) phải có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0 < t < 1$.

Từ đó ta được $0 < 2m < \frac{1}{8} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{16} \Rightarrow M = 0 + \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$

Chọn ý B.

Câu 21. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để phương trình $\sqrt{m + \sqrt{m + e^x}} = e^x$ có nghiệm thực?

A. 9

B. 8

C. 10

D. 7

Sở Giáo dục và đào tạo Bắc Giang năm học 2017 – 2018

Lời giải

Điều kiện. $\begin{cases} m + e^x \geq 0 \\ m + \sqrt{m + e^x} \geq 0 \end{cases}$. Đặt $t = \sqrt{m + e^x}$ ($t \geq 0$) ta suy ra. $\begin{cases} m + t = e^{2x} \\ t^2 = m + e^x \end{cases}$

$$\Rightarrow e^{2x} - t^2 = t - e^x \Leftrightarrow (e^x - t)(e^x + t + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x - t = 0 & (1) \\ e^x + t + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (2) vô nghiệm vì $e^x + t + 1 > 0$

Phương trình (1) tương đương với $e^x = t \Leftrightarrow e^x = \sqrt{m + e^x} \Leftrightarrow m = e^{2x} - e^x$ (3)

Phương trình $\sqrt{m + \sqrt{m + e^x}} = e^x$ (*) có nghiệm thực khi phương trình (3) có nghiệm thực. Xét hàm số $f(x) = e^{2x} - e^x$ với $x \in \mathbb{R}$, ta có. $f'(x) = 2e^{2x} - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\ln 2$. Lập bảng biến thiên của

hàm số $f(x) = e^{2x} - e^x$ ta suy ra phương trình (3) có nghiệm khi $m \geq -\frac{1}{4}$.

Kết hợp với giả thiết m là số nguyên nhỏ hơn 10 ta suy ra $m \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Vậy có 10 giá trị thỏa mãn.

Chọn ý C.

Câu 22. Cho hàm số $f(x) = (a^2 + 1)\ln^{2017}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) + bx \sin^{2018} x + 2$ với a, b là các số thực. Biết rằng $f(7^{\log 5}) = 6$. Tính $f(-5^{\log 7})$.

- A. $f(-5^{\log 7}) = 2$ B. $f(-5^{\log 7}) = 4$ C. $f(-5^{\log 7}) = -2$ D. $f(-5^{\log 7}) = 6$

Sở Giáo dục và đào tạo Bắc Giang năm học 2017 – 2018

Lời giải

Đặt $g(x) = (a^2 + 1)\ln^{2017}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) + bx \sin^{2018} x$ có tập xác định $\mathbb{R}$ là tập đối xứng.

Ta có với mọi $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = (a^2 + 1)\ln^{2017}\left(-x + \sqrt{1 + x^2}\right) - bx \sin^{2018}(-x)$

$$\begin{aligned} &= (a^2 + 1)\ln^{2017}\left(\frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}\right) - bx \sin^{2018}(x) \\ &= -(a^2 + 1)\ln^{2017}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - bx \sin^{2018}(x) = -g(x) \end{aligned}$$

Suy ra $g(x)$ là hàm số lẻ, mặt khác $7^{\log 5} = 5^{\log 7}$ nên $g(-5^{\log 7}) = -g(5^{\log 7}) = -g(7^{\log 5})$

Theo giả thiết ta có $f(7^{\log 5}) = g(7^{\log 5}) + 2 \Rightarrow g(7^{\log 5}) = 4$.

Do đó $f(-5^{\log 7}) = g(-5^{\log 7}) + 2 = -g(7^{\log 5}) + 2 = -4 + 2 = -2$

Chọn ý C.

Câu 23. Cho bất phương trình $m \cdot 3^{x+1} + (3m + 2)(4 - \sqrt{7})^x + (4 + \sqrt{7})^x > 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (-\infty; 0)$

- A. $m > \frac{2 + 2\sqrt{3}}{3}$ B. $m > \frac{2 - 2\sqrt{3}}{3}$ C. $m \geq \frac{2 - 2\sqrt{3}}{3}$ D. $m \geq -\frac{2 - 2\sqrt{3}}{3}$

Chuyên Đồng bằng sông Hồng lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$m \cdot 3^{x+1} + (3m+2)(4-\sqrt{7})^x + (4+\sqrt{7})^x > 0 \Leftrightarrow 3m + (3m+2) \cdot \left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^x + \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x > 0$$

Đặt $t = \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x$. Khi $x < 0$ thì $0 < t < 1$. BPT trở thành.

$$3m + \frac{3m+2}{t} + t > 0, \forall t \in (0;1) \Leftrightarrow 3m > \frac{-t^2-2}{t+1}, \forall t \in (0;1)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{-t^2-2}{t+1}, \forall t \in (0;1) \Rightarrow f'(t) = \frac{-2t-2}{t+1} = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{3}-1$$

Vẽ bảng biến thiên ta thấy rằng để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (-\infty; 0)$ thì

$$3m > 2 - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow m > \frac{2-2\sqrt{3}}{3}$$

Chọn ý B.

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\ln(m + \ln(m+x)) = x$ có nhiều nghiệm nhất.

A. $m \geq 0$

B. $m > 1$

C. $m < e$

D. $m \geq -1$

THPT Chuyên Vĩnh Phúc lần 4 – năm học 2017 – 2018

Lời giải

Điều kiện $x > e^{-m} - m$

Đặt $\ln(m+x) = y$ ta được $e^y - m = x$. Thay vào (1) ta được $\ln(m+y) = x \Leftrightarrow e^x - m = y$

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} e^x - m = y \\ e^y - m = x \end{cases} \Rightarrow e^x - e^y = y - x \Rightarrow e^x + x = e^y + y$$

Do hàm số $f(t) = e^t + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên suy ra $x = y \Rightarrow x = \ln(x+m) \Leftrightarrow e^x - x = m$

Xét hàm số $g(x) = e^x - x$; $g'(x) = e^x - 1$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Vẽ bảng biến thiên cho hàm $g(x)$ ta suy ra phương trình có nhiều nhất là hai nghiệm khi và chỉ khi $m > 1$.

Chọn ý B.

Câu 25. Cho phương trình $e^{m \cos x - \sin x} - e^{2(1-\sin x)} = 2 - \sin x - m \cos x$ với m là tham số thực. Gọi S là tập tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm. Khi đó S có dạng $(-\infty; a] \cup [b; +\infty)$. Tính $T = 10a + 20b$.

A. $T = 10\sqrt{3}$

B. $T = 0$

C. $T = 1$

D. $T = 3\sqrt{10}$

THPT Kim Liên – Hà Nội lần 2 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Biến đổi phương trình đầu tương đương

$$e^{m \cos x - \sin x} - e^{2(1-\sin x)} = 2 - \sin x - m \cos x \Leftrightarrow e^{m \cos x - \sin x} + m \cos x - \sin x = e^{2(1-\sin x)} + 2(1-\sin x)$$

Xét hàm số $f(t) = e^t + t, f'(t) = e^t + 1 > 0$ ($t \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow e^{m \cos x - \sin x} + m \cos x - \sin x = e^{2(1-\sin x)} + 2(1-\sin x)$$

$$\Leftrightarrow m \cos x - \sin x = 2(1-\sin x) \Leftrightarrow m \cos x + \sin x = 2$$

Phương trình có nghiệm khi $m^2 + 1 \geq 4 \Leftrightarrow m^2 \geq 3 \Rightarrow S = (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty)$

Vậy $T = 10a + 20b = 10\sqrt{3}$

Chọn ý **A**.

Câu 26. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x + 2 - m$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

A. 3

B. Vô số

C. 2

D. 4

THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai lần 2 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Điều kiện. $3x^2 + 3x + m + 1 > 0$.

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} \right) - 1 = x^2 - 5x + 1 - m \Leftrightarrow \log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{4x^2 - 2x + 2} = x^2 - 5x + 1 - m$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (3x^2 + 3x + m + 1) - \log_2 (4x^2 - 2x + 2) = (4x^2 - 2x + 2) - (3x^2 + 3x + m + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (3x^2 + 3x + m + 1) + (3x^2 + 3x + m + 1) = \log_2 (4x^2 - 2x + 2) + (4x^2 - 2x + 2) \quad (1)$$

Xét hàm số. $f(t) = t + \log_2 t$ trên $(0; +\infty)$, ta có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 2} > 0, \forall t \in (0; +\infty)$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Khi đó phương trình (1) $\Leftrightarrow f(4x^2 - 2x + 2) = f(3x^2 + 3x + m + 1)$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 2x + 2 = 3x^2 + 3x + m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x = m - 1 \quad (2)$$

Điều này đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Xét hàm số. $g(x) = x^2 - 5x$ trên $\mathbb{R}$, ta có $g'(x) = 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

Vẽ bảng biến thiên ta thấy rằng phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 khi và chỉ khi

$$-\frac{25}{4} < m - 1 < -4 \Leftrightarrow -\frac{21}{4} < m < -3. \text{ Do } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } m \in \{-5; -4\}.$$

Chọn ý **C**.

Câu 27. Cho phương trình $\log_2 (x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_5 (x - \sqrt{x^2 - 1}) = \log_m (x + \sqrt{x^2 - 1})$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương khác 1 của m sao cho phương trình đã cho có nghiệm x lớn hơn 2?

A. Vô số

B. 3

C. 2

D. 1

THPT Chuyên Đại học Vinh – Nghệ An lần 2 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Điều kiện xác định. $x > \sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow x \geq 1$

$$\text{Đặt } t = \log_2 (x - \sqrt{x^2 - 1}) \Rightarrow t' = \frac{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{1}{\ln 2} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x}{\ln 2 (x - \sqrt{x^2 - 1}) \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} \ln 2} < 0$$

Mặt khác ta có $x > 2 \Rightarrow t < \log_2 (2 - \sqrt{3})$

Phương trình trở thành

$$t \cdot \log_5 2^t = \log_m \frac{1}{2^t} \Leftrightarrow t \cdot \log_5 2 = -\log_m 2 \Leftrightarrow \log_5 m = -\frac{1}{t}$$

Để cho phương trình đã cho có nghiệm x lớn hơn 2 thì ta cần có

$$\log_5 m < -\frac{1}{\log_2(2-\sqrt{3})} \Leftrightarrow m < 5^{\frac{1}{-\log_2(2-\sqrt{3})}}$$

Do $m \in \mathbb{N}^*$ và $m \neq 1$ nên $m = 2$

Chọn ý **D**.

Câu 28. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(0; 2018)$ để ta luôn có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9^n + 3^{n+1}}{5^n + 9^{n+a}}} \leq \frac{1}{2187} ?$$

A. 2011

B. 2016

C. 2019

D. 2009

THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu – Đồng Tháp lần 5 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Từ giả thiết ta luôn có $\frac{9^n + 3^{n+1}}{5^n + 9^{n+a}} > 0, \forall n$. Từ đó suy ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9^n + 3^{n+1}}{5^n + 9^{n+a}}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n + 3^{n+1}}{5^n + 9^{n+a}}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{5}{9}\right)^n + 9^a}} = \sqrt{\frac{1}{9^a}} = \frac{1}{3^a}.$$

Theo đề bài ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9^n + 3^{n+1}}{5^n + 9^{n+a}}} \leq \frac{1}{2187} \Leftrightarrow \frac{1}{3^a} \leq \frac{1}{2187} \Leftrightarrow a \geq 7$.

Do a là số nguyên thuộc khoảng $(0; 2018)$ nên có $a \in \{7; 8; 9; \dots; 2017\}$ nên có tất cả 2011 giá trị của a .

Chọn ý **A**.

Câu 29. Cho phương trình $4^x - (m+1)2^{x+1} + 8 = 0$. Biết phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 6$. Khẳng định đúng trong bốn khẳng định dưới đây là?

A. Không có m

B. $1 < m < 3$

C. $m > 3$

D. $m < 2$

THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Hà Nội lần 2 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Đặt $t = 2^x$ ($t > 0$) thì phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2(m+1)t + 8 = 0$ (1).

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 là phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt

$$t_1, t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 7 > 0 \\ 2(m+1) > 0 \\ 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 - 2\sqrt{2} \\ m > -1 + 2\sqrt{2} \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1 + 2\sqrt{2}.$$

Khi đó $t_1 = m+1 + \sqrt{m^2 + 2m - 7} = 2^{x_1}$, $t_2 = m+1 - \sqrt{m^2 + 2m - 7} = 2^{x_2}$

Ta có $t_1 t_2 = 2^{x_1+x_2} = 8 \Rightarrow x_1 + x_2 = 3$, $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 6 \Leftrightarrow x_1 x_2 = 2$

$$\Leftrightarrow \log_2(m+1 + \sqrt{m^2 + 2m - 7}) \cdot \log_2(m+1 - \sqrt{m^2 + 2m - 7}) = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(m+1 + \sqrt{m^2 + 2m - 7}) \log_2 \frac{8}{m+1 + \sqrt{m^2 + 2m - 7}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(m+1 + \sqrt{m^2 + 2m - 7}) \left[3 - \log_2(m+1 + \sqrt{m^2 + 2m - 7}) \right] = 2 \quad (2)$$

Đặt $u = \log_2(m+1 + \sqrt{m^2 + 2m - 7})$ thì (2) trở thành $3u - u^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ u = 2 \end{cases}$

- Nếu $u = 1 \Rightarrow m + 1 + \sqrt{m^2 + 2m - 7} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 2m - 7} = 1 - m$ thì phương trình vô nghiệm do $m > -1 + 2\sqrt{2}$
- Nếu $u = 2 \Rightarrow m + 1 + \sqrt{m^2 + 2m - 7} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 2m - 7} = 3 - m \Leftrightarrow m = 2$ (nhận).

Vậy $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán

Chọn ý **B**.

Câu 30. Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$$2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2)$$

có đúng ba nghiệm phân biệt.

A. $S = \left\{ \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2} \right\}$

B. $S = \left\{ \frac{1}{2}; -1; \frac{3}{2} \right\}$

C. $S = \left\{ -\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2} \right\}$

D. $S = \left\{ \frac{1}{2}; 1; -\frac{3}{2} \right\}$

THPT Chu Văn Anh – Hà Nội năm học 2017 – 2018

Lời giải

Xét hàm số $f(t) = 2^t \cdot \log_2(t+2)$, $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 \cdot \log_2(t+2) + 2^t \cdot \frac{1}{(t+2)\ln 2} > 0, \forall t \geq 0$.

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\begin{aligned} 2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) &= 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2) \\ \Leftrightarrow 2^{(x-1)^2} \cdot \log_2((x-1)^2 + 2) &= 2^{2|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2) \\ \Leftrightarrow f[(x-1)^2] &= f[2|x-m|] \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-m| \quad (1) \end{aligned}$$

Khi $x \geq m$, (1) $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 + 2m = 0$ (2)

Khi $x < m$, (1) $\Leftrightarrow x^2 = 2m - 1$ (3)

- **Trường hợp 1.** (2) có nghiệm kép x_0 , (3) có hai nghiệm phân biệt khác x_0 .

Khi đó $m = \frac{3}{2}$ thì (2) có nghiệm $x = 2 \geq \frac{3}{2}$, (3) có hai nghiệm phân biệt $x = \pm\sqrt{2} < \frac{3}{2}$.

- **Trường hợp 2.** (3) có nghiệm kép x_0 , (2) có hai nghiệm phân biệt khác x_0 .

Khi đó $m = \frac{1}{2}$ thì (3) có nghiệm $x = 0 < \frac{1}{2}$, (2) có hai nghiệm $x = 2 \pm \sqrt{2} \geq \frac{1}{2}$.

- **Trường hợp 3.** (2) và (3) có chung một nghiệm x_0

Khi đó $x_0 = m \Rightarrow m = 1$, thử lại $m = 1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy $S = \left\{ \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2} \right\}$.

Chọn ý **B**.

Câu 31. Có bao nhiêu số nguyên dương m trong đoạn $[-2018; 2018]$ sao cho bất phương trình sau

đúng với mọi $x \in (1; 100)$. $(10x)^{m + \frac{\log x}{10}} \geq 10^{10 \log x}$.

A. 2018

B. 4026

C. 2013

D. 4036

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\begin{aligned} \left(m + \frac{\log x}{10}\right)(\log x + 1) &\geq \frac{11}{10} \log x \Leftrightarrow (\log x + 10m)(\log x + 1) - 11 \log x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 10m(\log x + 1) + \log^2 x - 10 \log x \geq 0. \end{aligned}$$

Do $x \in (1; 100) \Rightarrow \log x \in (0; 2)$. Do đó ta có

$$10m(\log x + 1) + \log^2 x - 10 \log x \geq 0 \Leftrightarrow 10m \geq \frac{10 \log x - \log^2 x}{\log x + 1}$$

Đặt $t = \log x$, $t \in (0; 2)$, xét hàm số $f(t) = \frac{10t - t^2}{t + 1}$

Ta có. $f'(t) = \frac{10 - 2t - t^2}{(t + 1)^2} > 0 \forall t \in (0; 2)$. Do đó $f(0) < f(t) < f(2) \Leftrightarrow 0 < f(t) < \frac{16}{3}$

Để $10m \geq \frac{10 \log x - \log^2 x}{\log x + 1}$ đúng với mọi $x \in (1; 100)$ thì $10m \geq \frac{16}{3} \Rightarrow m \geq \frac{8}{15}$

Do đó $m \in \left[\frac{8}{15}; 2018\right]$ hay có 2018 số thỏa mãn.

Chọn ý A.

Câu 32. Gọi S là tập các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = x^2 + \ln(x + m + 2)$ đồng biến trên tập xác định của nó. Biết $S = (-\infty; a + \sqrt{b}]$. Tính tổng $K = a + b$ là

A. $K = -5$

B. $K = 5$

C. $K = 0$

D. $K = 2$

Lời giải

Điều kiện xác định. $x > -m - 2$.

Cách 1. Ta có $y' = 2x + \frac{1}{x + m + 2} = \frac{2x^2 + 2(m + 2)x + 1}{x + m + 2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2(m + 2)x + 1 = 0$

- **Trường hợp 1.** $\Delta' = m^2 + 4m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 - \sqrt{2} \leq m \leq -2 + \sqrt{2}$

Khi đó $y' \geq 0 \forall x \in (-m - 2; +\infty)$.

- **Trường hợp 2.** $\begin{cases} m < -2 - \sqrt{2} \\ m > -2 + \sqrt{2} \end{cases}$, khi đó $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$x_1 = \frac{-(m + 2) - \sqrt{m^2 + 4m + 2}}{2}, \quad x_2 = \frac{-(m + 2) + \sqrt{m^2 + 4m + 2}}{2}$$

Vẽ bảng biến thiên ta suy ra được.

$$\begin{aligned} y' \geq 0 \forall x \in (-m - 2; +\infty) &\Leftrightarrow x_2 \leq -m - 2 \Leftrightarrow \frac{-(m + 2) + \sqrt{m^2 + 4m + 2}}{2} \leq -m - 2 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 4m + 2} \leq -m - 2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m + 2 \leq m^2 + 4m + 4 \\ m \leq -2 \\ m^2 + 4m + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \leq -2 - \sqrt{2} \Leftrightarrow m \leq -2 - \sqrt{2} \\ m \geq -2 + \sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $S = (-\infty; -2 + \sqrt{2}] \Rightarrow a = -2$, $b = 2$ nên $K = a + b = 0$.

Cách 2. Ta có $y' = 2x + \frac{1}{x + m + 2} = \frac{2x^2 + 2(m + 2)x + 1}{x + m + 2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2(m + 2)x + 1 = 0$

- Trường hợp 1. $\Delta' = m^2 + 4m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 - \sqrt{2} \leq m \leq -2 + \sqrt{2}$, khi đó $y' \geq 0 \forall x \in (-m - 2; +\infty)$.

- Trường hợp 2. $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 - \sqrt{2} \\ m > -2 + \sqrt{2} \end{cases}, (*)$.

Khi đó phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo Viet ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -(m+2) \\ x_1 x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; x_1)$ và $(x_2; +\infty)$ khi đó ta cần có $x_1 < x_2 \leq -(m+2)$. Suy ra.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2(m+2) < 0 \\ (x_1 + m + 2)(x_2 + m + 2) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow m < -2 - \sqrt{2}$$

Kết hợp (*) và (**) có $m < -2 - \sqrt{2}$. Hợp hai trường hợp có các giá trị cần tìm của m là 100.

Vậy $S = (-\infty; -2 + \sqrt{2}] \Rightarrow a = -2, 100$ nên $K = a + b = 0$.

Chọn ý C.

Câu 33. Cho hai số thực a, b ($a > 1, b > 1$). Phương trình $a^x + b^x = b + ax$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = a^x + b^x - b - ax$. Ta có $f'(x) = a^x \ln a + b^x \ln b - a$.

Do $f''(x) = a^x \ln^2 a + b^x \ln^2 b > 0$ nên hàm số đã cho có tối đa một cực trị. Do đó phương trình đã cho có tối đa hai nghiệm. Ta sẽ chọn các số để phương trình trên có 2 nghiệm như sau. Chọn $a = b = e$ ta có

$$f'(x) = 2e^x - e, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln \frac{e}{2}.$$

$$f\left(\ln \frac{e}{2}\right) = -e \ln \frac{e}{2} < 0; \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Vì vậy phương trình đã cho có tối đa 2 nghiệm.

Chọn ý C.

Câu 34. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$27^x - m \cdot 3^{2x+1} + (m^2 - 1)3^{x+1} - (m^2 - 1) = 0$$

Có 3 nghiệm thực phân biệt là khoảng $(a; b)$. Tính giá trị của biểu thức $S = a + b$

A. 2

B. $1 + \sqrt{3}$

C. $2 + \sqrt{2}$

D. $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$

Lời giải

Đặt $t = 3^x$ ($t > 0$) phương trình trở thành $t^3 - 3mt^2 + 3(m^2 - 1)t - m^2 + 1 = 0$.

Ta cần tìm điều kiện để phương trình có 3 nghiệm phân biệt dương.

Xét hàm số $y = t^3 - 3mt^2 + (m^2 - 1)t - m^2 + 1 \Rightarrow y' = 3t^2 - 6mt + 3(m^2 - 1)$

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = m - 1 = x_{CD} \\ t = m + 1 = x_{CT} \end{cases}$. Để phương trình có 3 nghiệm dương phân biệt khi

$$\begin{cases} y_{CD} \cdot y_{CT} < 0 \\ x_{CD} > 0, x_{CT} > 0 \\ y(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0 \\ m + 1 > 0 \\ (m^2 - 1)(m^2 - 3)(m^2 - 2m - 1) < 0 \\ -(m^2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \sqrt{3} < m < 1 + \sqrt{2} \right.$$

Chọn ý D.

Câu 35. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2018; 2018]$ để phương trình $|2^{|x|+1} - 8| = \frac{3}{2}x^2 + m$ có đúng 2 nghiệm thực phân biệt?
A. 2013 **B.** 2012 **C.** 4024 **D.** 2014

Lời giải

Phương trình tương đương với $m = |2^{|x|+1} - 8| - \frac{3}{2}x^2$. Hàm số $f(x) = |2^{|x|+1} - 8| - \frac{3}{2}x^2$ là một hàm số chẵn do đó ta chỉ cần xét trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ để suy ra bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên cả tập số thực.

Xét hàm số

$$f(x) = |2^{|x|+1} - 8| - \frac{3}{2}x^2 = \begin{cases} 2^{x+1} - 8 - \frac{3x^2}{2} & (x \geq 2) \\ -2^{x+1} + 8 - \frac{3x^2}{2} & (0 \leq x < 2) \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} g(x) = 2^{x+1} \ln 2 - 3x & (x > 2) \\ -2^{x+1} \ln 2 - 3x & (0 < x < 2) \end{cases}$$

Ta có $g'(x) = 2^{x+1} \ln 2 - 3 > 8 \ln 2 - 3 > 0, \forall x > 2, g(2) = 8 \ln 2 - 6 < 0, g(3) = 16 \ln 2 - 9 > 0$ nên phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in (2; 3)$.

Vẽ bảng biến thiên cho hàm số $f(x)$ ta suy ra được phương trình có đúng 2 nghiệm thực khi và chỉ

$$\text{khi } \begin{cases} m > 6 \\ m = f(x_0) = 2^{x_0+1} - 8 - \frac{3x_0^2}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{7, 8, \dots, 2018\}$$

Chọn ý **B**.

Câu 36. Cho bất phương trình $\log_{3a} 11 + \left(\log_{\frac{1}{7}} \left(\sqrt{x^2 + 3ax + 10} + 4 \right) \right) \log_{3a} (x^2 + 3ax + 12) \geq 0$. Giá trị thực của tham số a để bất phương trình trên có nghiệm duy nhất thuộc khoảng nào sau đây?
A. $(-1; 0)$ **B.** $(1; 2)$ **C.** $(0; 1)$ **D.** $(2; +\infty)$

THPT Hàm Rồng – Thanh Hóa lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Điều kiện xác định $0 < a \neq \frac{1}{3}$.

Biến đổi bất phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \log_{3a} 11 + \left(\log_{\frac{1}{7}} \left(\sqrt{x^2 + 3ax + 10} + 4 \right) \right) \log_{3a} (x^2 + 3ax + 12) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \log_{3a} 11 - \log_7 \left(\sqrt{x^2 + 3ax + 10} + 4 \right) \cdot \log_{3a} (x^2 + 3ax + 12) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \log_7 \left(\sqrt{x^2 + 3ax + 10} + 4 \right) \cdot \log_{3a} (x^2 + 3ax + 12) &\leq \log_{3a} 11 \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 3ax + 10} \geq 0 \Rightarrow x^2 + 3ax + 12 = x^2 + 3ax + 10 + 2 = t^2 + 2$. Khi đó bất phương trình trở thành

$$\log_7 (t + 4) \log_{3a} (t^2 + 2) \leq \frac{1}{\log_{11} 3a} (*).$$

- Nếu $0 < a < \frac{1}{3} \Rightarrow \log_{11} 3a < 0$ bất phương trình (*) trở thành

$$\log_7 (t + 4) \log_{11} 3a \log_{3a} (t^2 + 2) \geq 1 \Leftrightarrow \log_7 (t + 4) \log_{11} (t^2 + 2) \geq 1$$

Xét hàm số $f(t) = \log_7 (t + 4) \log_{11} (t^2 + 2) (t \geq 0)$ là hàm đồng biến đồng thời $f(3) = 1$ nên

$$f(t) \geq f(3) \Leftrightarrow t \geq 3 \Leftrightarrow x^2 + 3ax + 1 \geq 0.$$

Để phương trình có nghiệm duy nhất thì ta có $a = \frac{2}{3}$, nghiệm này không thỏa mãn.

- Nếu $a > \frac{1}{3} \Rightarrow \log_{11} 3a > 0$. Đến đây xét tương tự trường hợp 1 ta sẽ tìm được $a = \frac{2}{3}$

Chọn ý C.

Câu 37. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình $(3^{x+2} - \sqrt{3})(3^x - 2m) < 0$ chứa không quá 9 số nguyên?

A. 3281

B. 3283

C. 3280

D. 3279

Lời giải

Ta có $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 2m \geq 2 > \frac{\sqrt{3}}{9}$. Khi đó

$$(3^{x+2} - \sqrt{3})(3^x - 2m) < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{9} < 3^x < 2m \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < \log_3(2m).$$

Để tập nghiệm của bất phương trình chứa không quá 9 số nguyên thì

$$\log_3(2m) \leq 8 \Leftrightarrow 2m \leq 3^8 \Leftrightarrow m \leq 3280,5.$$

Mà m nguyên dương nên ta có $m \in \{1; 2; \dots; 3280\}$.

Vậy có 3280 giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn ý C.

Câu 38. Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-2019; 2019)$ để phương trình $\frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x - 1} = x + a$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 2017

B. 2022

C. 2014

D. 2015

Lời giải

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} \ln(x+5) \neq 0 \\ x+5 > 0 \\ 3^x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ x > -5 \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x - 1} = x + a \Leftrightarrow \frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x - 1} - x = a$$

$$\text{Đặt hàm số } f(x) = \frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x - 1} - x \text{ có } D = (-5; -4) \cup (-4; 0) \cup (0; +\infty)$$

$$\text{Suy ra } f'(x) = \frac{-1}{(x+5)\ln^2(x+5)} - \frac{3^x \ln 3}{(3^x - 1)^2} - 1 < 0 \text{ nên } f(x) \text{ nghịch biến trên từng khoảng xác định.}$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = \frac{1}{3^{-5} - 1} + 5 = 5 - \frac{243}{242}; \quad \lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Lập bảng biến thiên ta dễ dàng chỉ ra rằng phương trình $f(x) = a$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ

$$\text{khi } a \geq 5 - \frac{243}{242}$$

$$\text{Do } \begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ a \in (-2019; 2019) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ a \in [4; 2018] \end{cases}.$$

Vậy có $2018 - 4 + 1 = 2015$ giá trị của a .

Chọn ý **D**.

Câu 39. Tất cả các giá trị của m để bất phương trình $(3m+1)12^x + (2-m)6^x + 3^x < 0$ có nghiệm đúng với mọi $x > 0$ là.

- A. $(-2; +\infty)$ B. $(-\infty; -2]$ C. $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ D. $\left(-2; -\frac{1}{3}\right)$

Lời giải

Bất phương trình đầu tương đương

$$(3m+1)12^x + (2-m)6^x + 3^x < 0 \Leftrightarrow (3m+1)4^x + (2-m)2^x + 1 < 0$$

Đặt $2^x = t$. Do $x > 0 \Rightarrow t > 1$.

Khi đó ta có

$$(3m+1)t^2 + (2-m)t + 1 < 0, \forall t > 1 \Leftrightarrow (3t^2 - t)m < -t^2 - 2t - 1 \forall t > 1 \Leftrightarrow m < \frac{-t^2 - 2t - 1}{3t^2 - t} \forall t > 1 (*).$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{-t^2 - 2t - 1}{3t^2 - t} \quad \forall t \in (1; +\infty) \Rightarrow f'(t) = \frac{7t^2 + 6t - 1}{(3t^2 - t)^2} > 0 \quad \forall t \in (1; +\infty).$$

Lập bảng biến thiên ta dễ dàng chỉ ra rằng $m \leq \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = -2$ là điều kiện cần tìm.

Câu 40. Tìm m để bất phương trình $2^x + 3^x + 4^x \geq 3 + mx$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

- A. Không tồn tại m . B. $\ln 26$ C. $\ln 26$ D. $\ln 9$

Lời giải

Xét đường cong $(C): f(x) = 2^x + 3^x + 4^x$.

Phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm $M(0; 3)$ là. $y = x \ln 24 + 3$.

Ta cần chứng minh $2^x + 3^x + 4^x \geq 3 + x \ln 24, \forall x \in \mathbb{R}$.

Xét hàm số $g(x) = 2^x + 3^x + 4^x - 3 - x \ln 24$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = 2^x \cdot \ln 2 + 3^x \cdot \ln 3 + 4^x \cdot \ln 4 - \ln 24$.

$$g''(x) = 2^x \cdot (\ln 2)^2 + 3^x \cdot (\ln 3)^2 + 4^x \cdot (\ln 4)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g'(x) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

Phương trình $g'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0$ trên $\mathbb{R}$.

Bảng biến thiên của $g(x)$ trên $\mathbb{R}$

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $\mathbb{R} \Rightarrow g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 41. Với a là tham số thực để bất phương trình $2^x + 3^x \geq ax + 2$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$, khi đó

- A. $a \in (-\infty; 0)$. B. $a \in (1; 3)$ C. $a \in (3; +\infty)$ D. $a \in (0; 1)$

Lời giải

Xét trường hợp $a \leq 0$, bất phương trình không nhận các giá trị âm của x làm nghiệm.

Thật vậy, khi đó $2^x + 3^x < 2$ mà $ax + 2 \geq 2$.

Suy ra loại $a \leq 0$.

Xét trường hợp $a > 0$. Ta có $2^x + 3^x \geq ax + 2 \Leftrightarrow 2^x + 3^x - ax - 2 \geq 0$.

Đặt $f(x) = 2^x + 3^x - ax - 2, x \in \mathbb{R}$.

Khi đó $f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 - a, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 = a \quad (1)$$

Đặt $g(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3, x \in \mathbb{R} \Rightarrow g'(x) = 2^x \ln^2 2 + 3^x \ln^2 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lại có $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$

Suy ra với mỗi giá trị $a > 0$ thì phương trình (1) luôn có nghiệm duy nhất là x_0 .

Ta có phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất là x_0 .

Mà $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -a < 0$ nên $f'(x) > 0, \forall x > x_0$ và $f'(x) < 0, \forall x < x_0$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 , ta kết hợp với điều kiện đề bài là $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$ nên ta suy ra $x_0 = 0$ và $x_0 = 0$ là giá trị duy nhất để $f(x) = 0$.

Suy ra $x_0 = 0$ là giá trị duy nhất để $f'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(0) = \ln 2 + \ln 3 - a = 0$.

Suy ra $a = \ln 2 + \ln 3 = \ln 6$.

Như vậy $a = \ln 2 + \ln 3 = \ln 6$ là giá trị duy nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 42. Cho phương trình $(2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2)\sqrt{3^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt?

A. 80.

B. 81

C. 79

D. Vô số.

Đề thi THPT Quốc Gia môn toán 2019

Lời giải

Xét phương trình $(2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2)\sqrt{3^x - m} = 0$ (1).

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ 3^x - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq \log_3 m \end{cases}$ (do $m > 0$).

Ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2 = 0 \\ \sqrt{3^x - m} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -\frac{1}{2} \\ 3^x = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \log_3 m \end{cases}$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 m \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \log_3 m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m \leq 1 \\ 3^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \leq m < 3^4 \end{cases}$

Do m nguyên dương $\Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m \in \{3; 4; 5; \dots; 80\} \end{cases}$.

Vậy có tất cả $1 + 80 - 3 + 1 = 79$ giá trị m nguyên dương thỏa mãn đề bài.

Chọn ý C.

Câu 43. Cho phương trình $7^x + m = \log_7(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-25; 25)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 9

B. 25

C. 24

D. 26

Lời giải

Dạng toán này xuất hiện trong đề thi THPT Quốc Gia 2018, với hướng giải là đặt ẩn phụ để đưa về hệ phương trình đối xứng.

Điều kiện $x > m$.

Đặt $t = \log_7(x - m)$ ta có $\begin{cases} 7^x + m = t \\ 7^t + m = x \end{cases} \Rightarrow 7^x + x = 7^t + t$ (1)

Do hàm số $f(u) = 7^u + u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên ta có $(1) \Leftrightarrow t = x$. Khi đó

$$7^x + m = x \Leftrightarrow m = x - 7^x.$$

Xét hàm số $g(x) = x - 7^x \Rightarrow g'(x) = 1 - 7^x \ln 7 = 0 \Leftrightarrow x = -\log_7(\ln 7)$.

Vẽ bảng biến thiên ta thấy phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi

$$m \leq g(-\log_7(\ln 7)) \approx -0,856$$

các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện vì $x - m = 7^x > 0$.

Do m nguyên thuộc khoảng $(-25; 25)$, nên $m \in \{-24; -16; \dots; -1\}$.

Câu 43. Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3^{x^2+2x+1-2|x-m|} = \log_{x^2+2x+3}(2|x-m|+2)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là

A. 3

B. -2

C. -3

D. 2

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} 3^{x^2+2x+1-2|x-m|} = \log_{x^2+2x+3}(2|x-m|+2) &\Leftrightarrow \frac{3^{x^2+2x+3}}{3^{2|x-m|+2}} = \frac{\ln(2|x-m|+2)}{\ln(x^2+2x+3)} \\ &\Leftrightarrow \ln(x^2+2x+3) \cdot 3^{x^2+2x+3} = \ln(2|x-m|+2) \cdot 3^{2|x-m|+2} \end{aligned}$$

Xét $f(t) = \ln(t) \cdot 3^t, \forall t \geq 2$, có $f'(t) = \frac{1}{t}3^t + \ln(t)3^t \ln(3) > 0, \forall t \geq 2$.

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến.

$$\begin{aligned} f(x^2+2x+3) &= f(2|x-m|+2) \Leftrightarrow x^2+2x+3 = 2|x-m|+2 \\ &\Leftrightarrow x^2+2x+1 = 2|x-m| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -1-2m & (1) \\ x^2+4x = -1+2m & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Điều kiện cần để phương trình có 3 nghiệm là

- **Trường hợp 1.** (1) có nghiệm kép $\Rightarrow m = \frac{-1}{2}$ thử lại ta thấy thỏa mãn.
- **Trường hợp 2.** (2) có nghiệm kép $\Rightarrow m = \frac{-3}{2}$ thử lại ta thấy thỏa mãn.
- **Trường hợp 3.** (1) và (2) có nghiệm chung $\Rightarrow x = m$. Thế (1) vào ta có $m = -1$

Ta có $\frac{-1}{2} + \frac{-3}{2} + (-1) = -3$.

Câu 44. Tìm các giá trị m để phương trình $3^{\sin x + \sqrt{5} \cos x - |m|+5} = \log_{\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10}(|m|+5)$ có nghiệm.

A. $\sqrt{6} \leq m \leq \sqrt{6}$

B. $-5 \leq m \leq 5$

C. $5 - \sqrt{6} \leq m \leq 5 + \sqrt{6}$

D. $-\sqrt{6} \leq m \leq 5$

Lời giải

Biến đổi phương trình đầu tương đương

$$\begin{aligned} 3^{\sin x + \sqrt{5} \cos x - |m|+5} = \log_{\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10}(|m|+5) &\Leftrightarrow \frac{3^{\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10}}{3^{|m|+5}} = \frac{\ln(|m|+5)}{\ln(\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10)} \\ &\Leftrightarrow 3^{\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10} \cdot \ln(\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10) = 3^{|m|+5} \cdot \ln(|m|+5) \end{aligned}$$

Xét $f(t) = \ln(t) \cdot 3^t, \forall t \geq 5$, ta có $f'(t) = \frac{1}{t}3^t + \ln(t)3^t \ln(3) > 0, \forall t \geq 5$.

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến. Khi đó

$$f(\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10) = f(|m|+5) \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{5} \cos x + 10 = |m|+5 \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{5} \cos x + 5 = |m|$$

Mặt khác ta lại có $-\sqrt{6} \leq \sin x + \sqrt{5} \cos x \leq \sqrt{6}$, nên để phương trình có nghiệm ta phải có

$$5 - \sqrt{6} \leq m \leq 5 + \sqrt{6}.$$

Câu 45. Tìm số giá trị nguyên của m thuộc $[-20; 20]$ để phương trình

$$\log_2(x^2 + m + x\sqrt{x^2 + 4}) = (2m - 9)x - 1 + (1 - 2m)\sqrt{x^2 + 4}$$

có nghiệm

A. 12

B. 23

C. 25

D. 10

Lời giải

Điều kiện xác định $x^2 + m + x\sqrt{x^2 + 4} > 0$.

$$\log_2(x^2 + m + x\sqrt{x^2 + 4}) = (2m - 9)x - 1 + (1 - 2m)\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(x(\sqrt{x^2 + 4} + x) + m\right) = 2mx - 9x - 1 + \sqrt{x^2 + 4} - 2m\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{4x}{\sqrt{x^2 + 4} - x} + m\right) = 2mx - 9x - 1 + \sqrt{x^2 + 4} - 2m\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{4x + m\sqrt{x^2 + 4} - mx}{\sqrt{x^2 + 4} - x}\right) = 2mx - 9x - 1 + \sqrt{x^2 + 4} - 2m\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2(4x + m\sqrt{x^2 + 4} - mx) + (8x + 2m\sqrt{x^2 + 4} - 2mx) + 1 = \log_2(\sqrt{x^2 + 4} - x) + (\sqrt{x^2 + 4} - x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(8x + 2m\sqrt{x^2 + 4} - 2mx) + (8x + 2m\sqrt{x^2 + 4} - 2mx) = \log_2(\sqrt{x^2 + 4} - x) + (\sqrt{x^2 + 4} - x) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$, $t \in (0; +\infty)$, ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$ nên hàm số luôn đồng

biến trên tập xác định. Khi đó phương trình (1) $\Leftrightarrow 8x + 2m\sqrt{x^2 + 4} - 2mx = \sqrt{x^2 + 4} - x$

$$\Leftrightarrow 2m(\sqrt{x^2 + 4} - x) = (\sqrt{x^2 + 4} - x) - 8x \Leftrightarrow 2m = 1 - \frac{8x}{\sqrt{x^2 + 4} - x}$$

$$\Leftrightarrow 2m = 1 - \frac{8x(\sqrt{x^2 + 4} + x)}{4} \Leftrightarrow 2m = 1 - 2x(\sqrt{x^2 + 4} + x)$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2 + 4} + x^2 = \frac{1 - 2m}{2}.$$

Xét hàm số $g(x) = x\sqrt{x^2 + 4} + x^2$ với $x \in (-\infty; +\infty)$.

Ta có $g'(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + 4} + x)^2}{\sqrt{x^2 + 4}} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x(\sqrt{x^2 + 4} + x) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4} - x} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{-\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} - 1} = -2;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} + 1 \right) \right] = +\infty.$$

Để phương trình có nghiệm thì $\frac{1 - 2m}{2} > -2 \Leftrightarrow m < \frac{5}{2}$.

Câu 46. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m ($|m| < 10$) để phương trình

$$2^{x-1} = \log_4(x+2m) + m$$

có nghiệm ?

A. 9

B. 10

C. 5

D. 4

Lời giải

Điều kiện $x+2m > 0$.

Ta có $2^{x-1} = \log_4(x+2m) + m \Leftrightarrow 2^x = \log_2(x+2m) + 2m$.

Đặt $t = \log_2(x+2m)$ ta có $\begin{cases} 2^x = t + 2m \\ 2^t = x + 2m \end{cases} \Rightarrow 2^x + x = 2^t + t \quad (1)$.

Do hàm số $f(u) = 2^u + u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên ta có $(1) \Leftrightarrow t = x$. Khi đó

$$2^x = x + 2m \Leftrightarrow 2m = 2^x - x.$$

Xét hàm số $g(x) = 2^x - x \Rightarrow g'(x) = 2^x \ln 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\log_2(\ln 2)$.

Từ đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi

$$2m \geq g(-\log_2(\ln 2)) \Leftrightarrow m \geq \frac{g(-\log_2(\ln 2))}{2} \approx 0,457$$

các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện vì $x+2m = 2^x > 0$.

Do m nguyên và $|m| < 10$, nên $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Câu 47. Cho phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^m + \left(\frac{1}{8}\right)^m = 2\left(x + \sqrt{1-x^2}\right)\left(1 + x\sqrt{1-x^2}\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên

thuộc đoạn $[-10; 10]$ của tham số m sao cho phương trình có nghiệm?

A. 13.

B. 12.

C. 11.

D. 10.

Lời giải

Ta có $f(x) = 2\left(x + \sqrt{1-x^2}\right)\left(1 + x\sqrt{1-x^2}\right)$ điều kiện $-1 \leq x \leq 1$.

$$\Leftrightarrow f(x) = \left(x + \sqrt{1-x^2}\right)\left(2 + 2x\sqrt{1-x^2}\right).$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \left(x + \sqrt{1-x^2}\right)\left(x^2 + 2x\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2 + 1\right).$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \left(x + \sqrt{1-x^2}\right)\left(\left(x + \sqrt{1-x^2}\right)^2 + 1\right).$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \left(x + \sqrt{1-x^2}\right)^3 + \left(x + \sqrt{1-x^2}\right).$$

Với hàm $f(t) = t^3 + t$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Theo phương trình đề bài $\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^m = x + \sqrt{1-x^2} \quad (*)$ với $x \in [-1; 1]$.

Xét $g(x) = x + \sqrt{1-x^2}$ với $x \in [-1; 1]$ ta có $-1 \leq g(x) \leq \sqrt{2}$.

Để phương trình $(*)$ có nghiệm $0 < \left(\frac{1}{2}\right)^m \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{-1}{2} \leq m < 0$.

Vậy có 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 45. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2020; 2021]$ để phương trình

$$\frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x - 3} = \frac{x^2 - (m+2)x + 2m - 1}{x - 2}$$

có ba nghiệm phân biệt?

A. 4042 .

B. 2027 .

C. 0 .

D. 2016 .

Lời giải

Tập xác định $D = (-5; +\infty) \setminus \{-4; 1; 2\}$.

Ta có $\frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x - 3} = \frac{x^2 - (m+2)x + 2m - 1}{x - 2} \Leftrightarrow m = x - \frac{1}{x-2} - \frac{1}{\ln(x+5)} - \frac{1}{3^x - 3}$.

Đặt $g(x) = x - \frac{1}{x-2} - \frac{1}{\ln(x+5)} - \frac{1}{3^x - 3}$. Ta có

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x+5)\ln^2(x+5)} + \frac{3^x \ln 3}{(3^x - 3)^2} > 0, \forall x \in D.$$

Ta có $A = \lim_{x \rightarrow -5^+} g(x) = -5 + \frac{1}{7} - \frac{1}{3^{-5} - 3} = -\frac{3293}{728}$.

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \leq -\frac{3293}{728} = -4,523(351648)$.

Do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-2020; 2021] \end{cases}$ nên $m \in \{-2020; -2019; \dots; -5\}$.

Câu 46. Cho biểu thức $P = \left| 2^{2(x+y)} - 2^{x+y+1} + m \right|$, với x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện

$$(\sqrt{e})^{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}e(x^2+y^2).$$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của P bằng 2020?

A. 1.

B. Vô số.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Đặt $u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $u \geq 0$. Khi đó $(\sqrt{e})^{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}e(x^2+y^2)$ trở thành $e^u \leq e.u$ (1)

Suy ra $e^u - e.u \leq 0$. Đặt $f(u) = e^u - e.u$; $f'(u) = e^u - e$; $f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 1$.

Suy ra hàm $f(u)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$

$$f(u) \geq f(1) = 0 \Rightarrow e^u - e.u \geq 0 \Rightarrow e^u \geq e.u \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $e^u = e.u \Leftrightarrow u = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow -2 \leq x + y \leq 2$. Ta có

$$P = \left| 2^{2(x+y)} - 2^{x+y+1} + m \right| = \left| t^2 - 2t + m \right| \text{ với } t = 2^{x+y}, t \in \left[\frac{1}{4}; 4 \right]$$

Đặt $g(t) = t^2 - 2t + m$. Cần tìm m để $\min_{t \in \left[\frac{1}{4}; 4 \right]} |g(t)| = 2020$.

Ta có $\min_{t \in \left[\frac{1}{4}; 4 \right]} g(t) = g(1) = m - 1$ và $\max_{t \in \left[\frac{1}{4}; 4 \right]} g(t) = g(4) = m + 8$.

Suy ra $\begin{cases} m - 1 = 2020 \\ m + 8 = -2020 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2021 \\ m = -2028 \end{cases}$.

Có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 47. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-20; 20)$ để phương trình

$$3\log_2\left(\frac{8x-2^x-12m}{3}\right)-2^x-x=3m$$

có đúng hai nghiệm thực phân biệt.

A. 19.

B. 18.

C. 20.

D. 21.

Lời giải

Ta có

$$3\log_2\left(\frac{8x-2^x-12m}{3}\right)-2^x-x=3m \Leftrightarrow 3\log_2\left(\frac{8x-2^x-12m}{3}\right)=\frac{2^x+x+3m}{3}=y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8x-2^x-12m=3 \cdot 2^y & (1) \\ x+2^x+3m=3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x-2^x-12m=3 \cdot 2^y \\ 4x+4 \cdot 2^x+12m=12y \end{cases} \Rightarrow 12x+3 \cdot 2^x=3 \cdot 2^y+12y \Leftrightarrow f(x)=f(y),$$

Với $f(t)=12t+3 \cdot 2^t$ là hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow x=y$

Khi đó tương đương (1) $8x-2^x-12m=3 \cdot 2^x \Leftrightarrow 8x-4 \cdot 2^x=12m \Leftrightarrow 2x-2 \cdot 2^x=3m$

Xét hàm số $f(x)=2x-2 \cdot 2^x \Rightarrow f'(x)=2-2^x \cdot \ln 2 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\log_2\left(\frac{2}{\ln 2}\right)$

Khi đó lập bảng biến thiên ta được $\begin{cases} m < 0,17 \\ m \in \mathbb{Z} \\ m \in (-20; 20) \end{cases} \Rightarrow m \in \{-19; -18; \dots; 0\}$

Câu 48. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình .

$$\frac{\ln(2x^2+2)}{\ln(x^2+2)}=\frac{\ln\left[2x^2+2+(x^3-3x-m)^2\right]}{\ln\left[x^2+2+(x^3-3x-m)^2\right]}$$

có đúng 3 nghiệm phân biệt?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Vô số.

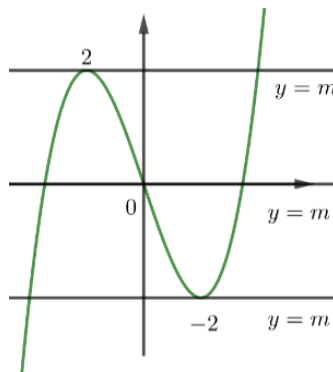
Lời giải

Phương trình đã cho tương đương

$$\frac{\ln\left[x^2+2+(x^3-3x-m)^2\right]}{\ln(x^2+2)}=\frac{\ln\left[2x^2+2+(x^3-3x-m)^2\right]}{\ln(2x^2+2)} \quad (1)$$

Trường hợp 1. $x=0$, khi đó (1) trở thành $\frac{\ln 2}{\ln 2}=\frac{\ln 2}{\ln 2} \Rightarrow x=0$ là 1 nghiệm của phương trình.

Trường hợp 2. $x \neq 0$, khi đó (1) $\Leftrightarrow x^3-3x-m=0 \Leftrightarrow x^3-3x=m$ (2)



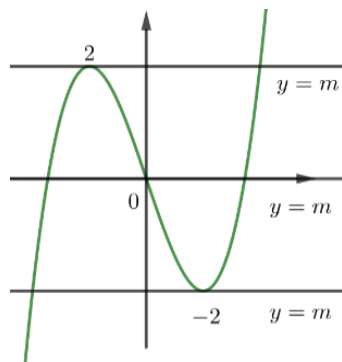
Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m = 0 \end{cases}$

Cách 2. Áp dụng mệnh đề sau

Bổ đề. Nếu $b \geq a > 1; c > 0 \Rightarrow \log_a b \geq \log_{a+c}(b+c)$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ c=0 \end{cases}$

Bổ đề này chứng minh đơn giản, nhường lại cho các bạn, mình hơi ngại gõ....

Áp dụng vào bài từ phương (1) $\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2 = 2x^2 + 2 \\ (x^3 - 3x - m)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^3 - 3x = m \end{cases} \quad (2)$



Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m = 0 \end{cases}$.

Câu 49. Gọi M là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $g(a;b) = a^2 + b^2$ với $a; b$ thỏa mãn $\begin{cases} a - 2b + 8 \geq 0 \\ a + b + 2 \geq 0 \\ 2a - b + 4 \leq 0 \end{cases}$.

Khi $m \in [0; M]$ thì tổng các nghiệm của phương trình

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2 - 2x - 2 + |1 - m|) = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 3)$$

thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}; 2\right)$.

B. $(1; 2 + \sqrt{3})$.

C. $(2 + \sqrt{3}; 2\sqrt{2 + \sqrt{3}})$.

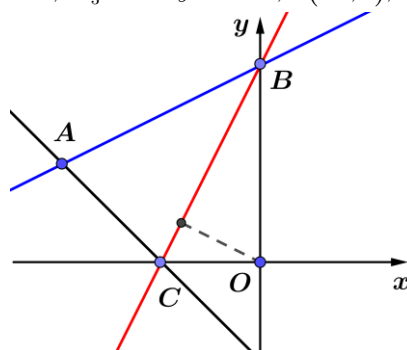
D. $(2\sqrt{2 + \sqrt{3}}; +\infty)$.

Lời giải

Nhận xét. Câu này vào phòng thi các bạn nên bỏ!

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y + 8 \geq 0 \\ x + y + 2 \geq 0 \\ 2x - y + 4 \leq 0 \end{cases}$

Với $\Delta_1: x - 2y + 8 = 0$; $\Delta_2: x + y + 2 = 0$; $\Delta_3: 2x - y + 4 = 0$; $A(-4; 2)$; $B(0; 4)$; $C(-2; 0)$



Miền nghiệm của hệ phương trình là phần giới hạn bởi ΔABC

$$\Rightarrow g(a;b) = a^2 + b^2 = OM^2, M(a;b) \in \Delta ABC;$$

Ta có $OM_{\min} = d(O; BC) = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow m \in \left[0; \frac{4}{\sqrt{5}}\right]$. Khi đó

$$\begin{aligned} \log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} (x^2 - 2x - 2 + |1-m|) &= \log_{2+\sqrt{3}} (x^2 - 2x - 3) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 2 + |1-m| = \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^t \\ x^2 - 2x - 3 = \left(2+\sqrt{3}\right)^t \end{cases} &\Rightarrow |1-m| = \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^t - \left(2+\sqrt{3}\right)^t - 1 \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^t - \left(2+\sqrt{3}\right)^t - 1$. Ta có

$$f'(t) = \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^t \ln 2\sqrt{2+\sqrt{3}} - \left(2+\sqrt{3}\right)^t \ln(2+\sqrt{3})$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \log_{\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \left[\frac{\ln(2+\sqrt{3})}{\ln(2\sqrt{2+\sqrt{3}})} \right] = t_0$$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	t_0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	-1	$f(t_0)$	$+\infty$

$\Rightarrow |1-m| = f(t)$ luôn có nghiệm duy nhất t_1 .

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 - \left(2+\sqrt{3}\right)^{t_1} = 0; \Delta' = 4 + \left(2+\sqrt{3}\right)^{t_1} > 0.$$

Vậy phương trình luôn có 2 nghiệm x_1, x_2 và $x_1 + x_2 = 2 \in (1; 2+\sqrt{3})$.

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)e^x$, có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-2020; 2021]$ để hàm số $y = g(x) = f(\ln x) - mx^2 + mx - 2$ nghịch biến trên $(e; e^{2020})$.

A. 2018.

B. 2019.

C. 2020.

D. 2021.

Lời giải

Ta có $y' = g'(x) = (\ln x)' \cdot f'(\ln x) - 2mx + m = \frac{1}{x} \cdot (\ln x + 1)e^{\ln x} - 2mx + m = \ln x + 1 - 2mx + m$.

Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên $(e; e^{2020})$ khi và chỉ khi $y' \leq 0, \forall x \in (e; e^{2020})$

$$\Leftrightarrow \ln x + 1 \leq m(2x - 1), \forall x \in (e; e^{2020}) \Leftrightarrow m \geq \frac{\ln x + 1}{2x - 1}, \forall x \in (e; e^{2020})$$

Xét hàm số $h(x) = \frac{\ln x + 1}{2x - 1}$ trên $(e; e^{2020}) \Rightarrow h'(x) = \frac{\frac{1}{x}(2x - 1) - 2(\ln x + 1)}{(2x - 1)^2} = \frac{-\frac{1}{x} - 2\ln x}{(2x - 1)^2}$

$$\text{Vì } x \in (e; e^{2020}) \Rightarrow \begin{cases} 1 < \ln x < 2020 \\ -\frac{1}{x} < 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{x} - 2\ln x < 0 \text{ nên } h'(x) < 0, \forall x \in (e; e^{2020})$$

Suy ra hàm số $h(x)$ nghịch biến trên $(e; e^{2020})$.

Ta có bảng biến thiên như sau

x	e	e^{2020}
$h'(x)$	—	
$h(x)$	$\frac{2}{2e-1}$	$\frac{2021}{2e^{2020}-1}$

Vậy $m \geq \frac{2}{2e-1} \approx 0,45$. Mà $m \in [-2020; 2021]$ suy ra $m \in \{1, 2, \dots, 2021\}$.

Do đó có 2021 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 51. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2020^2(2020^{x^2+y^2} - 2020^{2x-6y-6}) + (x-1)^2 + (y+3)^2 \leq 4 \\ e^{(x+1)^2+(y-3)^2} \leq (x^2+y^2+2x-6y+11-m).e^m \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất. Tổng của tất cả các phần tử thuộc tập hợp S là

A. 88.

B. $2\sqrt{10}-2$.

C. $2\sqrt{10}+2$.

D. 44.

Lời giải

Từ phương trình $2020^2(2020^{x^2+y^2} - 2020^{2x-6y-6}) + (x-1)^2 + (y+3)^2 \leq 4$ ta có

$$\begin{aligned} 2020^{x^2+y^2+2} - 2020^{2x-6y-6+2} + x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 2020^{x^2+y^2+2} + x^2 + y^2 + 2 &\leq 2020^{2x-6y-4} + 2x - 6y - 4 \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 2020^t + t, \forall t \in \mathbb{R}$ có $f'(t) = 2020^t \ln 2020 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ do đó f là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Bất phương trình (1) trở thành

$$f(x^2 + y^2 + 2) \leq f(2x - 6y - 4) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2 \leq 2x - 6y - 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 \leq 4. (*)$$

Ta thấy miền nghiệm của bất phương trình (là hình tròn tâm $I_1(1; -3)$ và bán kính $R_1 = 2$).

Từ phương trình $e^{(x+1)^2+(y-3)^2} \leq (x^2+y^2+2x-6y+11-m).e^m$ ta có

$$e^{(x+1)^2+(y-3)^2-m} \leq (x+1)^2 + (y-3)^2 - m + 1 \quad (2)$$

Xét hàm số $g(t) = e^t - t - 1, \forall t \in \mathbb{R}$ có $g'(t) = e^t - 1$ do đó ta có bảng biến thiên là

Suy ra bất phương trình $g(t) \leq 0 \Leftrightarrow t = 0$, do đó bất phương trình (2) trở thành

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 - m = 0 \quad (*)$$

Để hệ phương trình có nghiệm thì phương trình (*) có nghiệm, hay $m \geq 0$.

- Nếu $m = 0$, phương trình (2) có nghiệm $(-1; 3)$ (không thỏa mãn)
- Nếu $m > 0$, khi đó tập hợp điểm $M(x, y)$ biểu diễn nghiệm của phương trình nằm trên đường tròn tâm $I_2(-1; 3)$, bán kính $R_2 = \sqrt{m}$.

Do đó để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì hai đường tròn này phải tiếp nhau hay

$$\begin{cases} I_1 I_2 = R_1 + R_2 \\ I_1 I_2 = |R_1 - R_2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{10} = 2 + \sqrt{m} \\ 2\sqrt{10} = |2 - \sqrt{m}| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 44 - 8\sqrt{10} \\ m = 44 + 8\sqrt{10} \end{cases}$$

Câu 52. Cho hàm số $y = \ln(x+a)$ và $y = e^{x+a}$ có đồ thị lần lượt là (C) và (C') với a là tham số thực. Giả sử điểm $M \in (C)$ và $N \in (C')$ sao cho tam giác IMN là tam giác đều với điểm $I(-a;0)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để hoành độ của điểm M và N đồng thời thỏa mãn bất phương trình $|\ln(x+a) - a.e^{x+a}| \leq 10$.

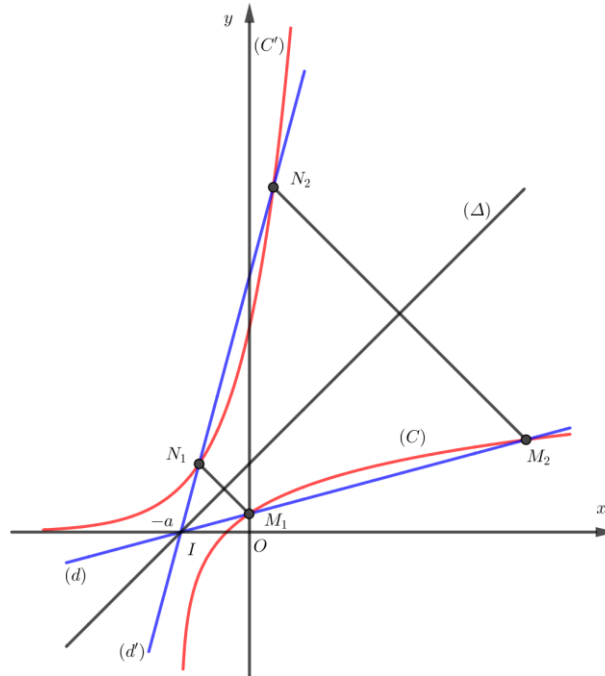
A. 5.

B. 3.

C. 11.

D. 20.

Lời giải



Điều kiện xác định của bất phương trình $|\ln(x+a) - a.e^{x+a}| \leq 10$ là $x+a > 0$.

Nhận xét. Đồ thị (C) và (C') đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta: y = x+a$ và $I(-a;0) \in \Delta$.

Lại có $M \in (C)$, $N \in (C')$, tam giác IMN đều, suy ra M, N đối xứng nhau qua Δ và

$$(\angle IM, \Delta) = (\angle IN, \Delta) = 30^\circ.$$

Đường thẳng Δ có hệ số góc $k_\Delta = 1 (= \tan 45^\circ)$ cho nên có hai đường thẳng đi qua $I(-a;0)$ và tạo với Δ góc 30° là đường thẳng d có hệ số góc $k_d = \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ và đường thẳng d' có hệ số góc

$$k_{d'} = \tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}.$$

Ta được phương trình đường thẳng $d: y = (2 - \sqrt{3})(x+a)$ và phương trình đường thẳng

$$d': y = (2 + \sqrt{3})(x+a).$$

Dễ thấy d không cắt (C') và d' không cắt (C) . Khi đó M là giao điểm của d và (C) , N là giao điểm của d' và (C') . Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (C)

$$\ln(x+a) = (2 - \sqrt{3})(x+a) \Leftrightarrow \begin{cases} x+a = t_1 \approx 1,5 \\ x+a = t_2 \approx 7,5 \end{cases}.$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d' và (C')

$$e^{x+a} = (2 + \sqrt{3})(x+a) \Leftrightarrow \begin{cases} x+a = k_1 \approx 0,4 \\ x+a = k_2 \approx 2,02 \end{cases}.$$

Từ đồ thị hàm số, dễ thấy

- Tam giác IM_1N_1 đều với M_1 có hoành độ thỏa $x_{M_1} + a = t_1$ và N_1 có hoành độ thỏa $x_{N_1} + a = k_1$.
- Tam giác IM_2N_2 đều với M_2 có hoành độ thỏa $x_{M_2} + a = t_2$ và N_2 có hoành độ thỏa $x_{N_2} + a = k_2$.

Trường hợp 1. Với tam giác IM_1N_1 đều

$$\text{Yêu cầu bài toán tương đương } \begin{cases} |\ln t_1 - a.e^{t_1}| \leq 10 \\ |\ln k_1 - a.e^{k_1}| \leq 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2,16 \leq a \leq 2,34 \\ -7,3 \leq a \leq 6,1 \end{cases} \Rightarrow a \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}.$$

Trường hợp 2. Với tam giác IM_2N_2 đều

$$\text{Yêu cầu bài toán tương đương } \begin{cases} |\ln t_2 - a.e^{t_2}| \leq 10 \\ |\ln k_2 - a.e^{k_2}| \leq 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -0,004 \leq a \leq 0,006 \\ -1,06 \leq a \leq 1,6 \end{cases} \Rightarrow a = 0.$$

Vậy có 5 giá trị nguyên của a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 53. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $|f(x+h) - f(x-h)| \leq h^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, $h > 0$. Đặt $g(x) = [x + f'(x)]^{2019} + [x + f'(x)]^{29-m} - (m^4 - 29m^2 + 100) \cdot \sin^2 x - 1$ với tham số m . Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của $m < 27$ sao cho $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$. Tổng bình phương các phần tử của S là

A. 108. **B.** 58. **C.** 100. **D.** 50.

Lời giải

Nhận xét. Nếu vào phòng thi gặp câu này thì nên bỏ nhé!

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $h > 0$, ta có

$$|f(x+h) - f(x-h)| \leq h^2 \Leftrightarrow \frac{|f(x+h) - f(x) + f(x) - f(x-h)|}{h} \leq h$$

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \right| \leq h.$$

Cho $h \rightarrow 0$, ta được $f'(x) = 0$. Khi đó $g(x) = x^{2019} + x^{29-m} - (m^4 - 29m^2 + 100) \cdot \sin^2 x - 1$.

$$g'(x) = 2019x^{2018} + (29-m)x^{28-m} - (m^4 - 29m^2 + 100)\sin 2x \Rightarrow g'(0) = 0.$$

Xét $g''(x) = 2019 \cdot 2018x^{2017} + (29-m)(28-m)x^{27-m} - 2(m^4 - 29m^2 + 100)\cos 2x$

$$\Rightarrow g''(0) = -2(m^4 - 29m^2 + 100).$$

- Nếu $g''(0) = 0 \Leftrightarrow m^4 - 29m^2 + 100 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 5 \\ m = \pm 2 \end{cases}$.
- Nếu $m = 5$ thì $g'(x) = 2019x^{2018} + 24x^{23} = x^{23}(2019x^{1995} + 24)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x = 0$ nên thỏa mãn yêu cầu.
- Nếu $m = -5$ thì $g'(x) = 2019x^{2018} + 34x^{33} = x^{33}(2019x^{1985} + 34)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x = 0$ nên thỏa mãn yêu cầu.
- Nếu $m = 2$ thì $g'(x) = 2019x^{2018} + 27x^{26} = x^{26}(2019x^{1992} + 27)$ không đổi dấu khi qua $x = 0$ nên loại.
- Nếu $m = -2$ thì $g'(x) = 2019x^{2018} + 31x^{30} = x^{30}(2019x^{1988} + 31)$ không đổi dấu khi qua $x = 0$ nên loại.

Xét $g''(x) \neq 0$ thì $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0 \Leftrightarrow g''(0) > 0 \Leftrightarrow -2(m^4 - 29m^2 + 100) > 0$

$$\Leftrightarrow m^4 - 29m^2 + 100 < 0 \Leftrightarrow 4 < m^2 < 25.$$

Vì m nguyên nên $m \in \{-4; -3; 3; 4\}$.

Vậy $S = \{-5; -4; -3; 3; 4; 5\}$. Do đó tổng bình phương các phần tử của S bằng 100.

Câu 54. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2020; 2020)$ để bất phương trình

$$27^x - \frac{m}{3^{x-1}} \leq m \cdot 3^x - \frac{1}{27^{x-1}}$$

có nghiệm?

A. 3.

B. 6.

C. 2020.

D. 2017.

Lời giải

Đặt $3^x = t$ điều kiện $t > 0$. Bất phương trình trở thành $t^3 + \frac{27}{t^3} \leq m \left(\frac{3}{t} + t \right)$ (*).

Do $t > 0$ nên $\frac{3}{t} + t > 0$ nên phương trình (*) $\Leftrightarrow t^2 - 3 + \frac{9}{t^2} \leq m$.

Xét $f(t) = t^2 - 3 + \frac{9}{t^2}$ ($t > 0$) ta có $f'(t) = 2t - \frac{18}{t^3}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{3}$. Ta có bảng biến thiên

t	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$+\infty$	3	$+\infty$

Để (*) có nghiệm thì $m \geq \min_{(0; +\infty)} f(t) = 3$.

Vậy có 2017 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 55. Cho hai hàm số $f(x) = \frac{2}{5^x} + \frac{5}{\ln(x+1)}$ và $g(x) = \frac{mx-m-1}{x-1}$. Số giá trị nguyên của tham số

m để đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt là?

A. 11.

B. 8.

C. 10.

D. 9.

Lời giải

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình

$$\frac{2}{5^x} + \frac{5}{\ln(x+1)} = \frac{mx-m-1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{2}{5^x} + \frac{5}{\ln(x+1)} = m - \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{2}{5^x} + \frac{5}{\ln(x+1)} + \frac{1}{x-1} = m.$$

Đặt $h(x) = \frac{2}{5^x} + \frac{5}{\ln(x+1)} + \frac{1}{x-1}$, với $x > -1, x \neq 0, x \neq 1$.

Ta có $h'(x) = -\frac{2\ln 5}{5^x} - \frac{5}{(x+1)\ln^2(x+1)} - \frac{1}{(x-1)^2} < 0, \forall x > -1, x \neq 0, x \neq 1$, vẽ bảng biến thiên ta sẽ chỉ

ra được rằng yêu cầu bài toán tương đương $0 < m < \frac{19}{2}$, suy ra có 9 giá trị nguyên của m .

Câu 56. Cho phương trình $2(1-a^2)x^2 - 2a^2 + \log_2(x^2 + 3x + 3) = x^4 + \log_2(3x^2 + 6x + 2a^2 + 3) - 4$ với a là tham số thực. Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị của a để phương trình có nghiệm, biết rằng $T = [c; d]$ khi đó $(d^3 - c^3)^5$ thuộc khoảng nào sau đây.

- A.** (650;750) **B.** (1000;1500)
C. (550;650) **D.** (200;450)

Lời giải

$$\text{V\ddot{o}i } 2(1-a^2)x^2-2a^2+\log_2(x^2+3x+3)=x^4+\log_2(3x^2+6x+2a^2+3)-4$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \log_2(x^2 + 3x + 3) = (x^2 + 1)^2 + 2a^2(x^2 + 1) - 4(x^2 + 1) - 1 + \log_2(3x^2 + 6x + 2a^2 + 3) \\ &\Leftrightarrow \log_2(x^2 + 3x + 3) + 4(x^2 + 1) + 1 = (x^2 + 1)^2 + 2a^2(x^2 + 1) + \log_2[3(x+1)^2 + 2a^2] \quad (1) \end{aligned}$$

Với $\log_2(3(x+1)^2 + 2a^2) \geq \log_2(2a^2) = 1 + \log_2 a^2$, khi đó phương trình (1) tương đương

$$\begin{aligned} & \log_2(x^2 + 3x + 3) + 4(x^2 + 1) \geq (x^2 + 1)^2 + 2a^2(x^2 + 1) + \log_2 a^2 \\ & \Leftrightarrow \log_2(x^2 + 3x + 3) \geq (x^2 + 1)(x^2 + 2a^2 - 3) + \log_2 a^2 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x + 3 \geq a^2 \\ (x^2 + 1)(x^2 + 2a^2 - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \leq \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \leq \frac{3}{4} \\ 3 - 2a^2 = x^2 \geq 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} \leq a \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{3}{2}} \leq a \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Như vậy ta suy ra được $T = \left[-\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}\right] \Rightarrow \left[\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3 - \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3\right]^5 = \frac{2187\sqrt{6}}{8} \approx 669$.

Câu 57. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-10;10]$ để hệ phương trình

$$\begin{cases} 2^{x^2+y^2+z^2} + (x^2+y^2+z^2) \cdot 2^{z^2} = 4 \cdot (2^{z^2} + 4) \\ 2 \cdot \frac{y}{x} + \frac{z-6}{x} = 3-m \end{cases} \quad \text{có nghiệm?}$$

- A.** 17. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 18.

Lời giải

Cách 1.

Điều kiện $x \neq 0$. Ta có $2^{x^2+y^2+z^2} + (x^2+y^2+z^2).2^{z^2} = 4.(2^{z^2} + 4)$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2+y^2} \cdot 2^{z^2} + (x^2 + y^2 + z^2) \cdot 2^{z^2} = 4 \cdot (2^{z^2} + 4) \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2} + x^2 + y^2 = 4 + 16 \cdot 2^{-z^2} - z^2$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2+y^2} + x^2 + y^2 = 2^{4-z^2} + 4 - z^2 \quad (1).$$

Xét hàm $f(u) = 2^u + u; f'(u) = 2^u \cdot \ln 2 + 1 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó, $(1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 - z^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Xét phương trình $2 \cdot \frac{y}{x} + \frac{z-6}{x} = 3-m \Leftrightarrow (m-3)x + 2y + z = 6 \ (x \neq 0)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\begin{aligned} & \left[(m-3)^2 + 2^2 + 1^2 \right] (x^2 + y^2 + z^2) \geq [(m-3)x + 2y + z]^2 \\ & \Leftrightarrow (m^2 - 6m + 14) \cdot 4 \geq 36 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 5 \\ m \leq 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Mà $m \in [-10; 10] \Rightarrow m \in \{-10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Vậy có 18 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2.

Điều kiện $x \neq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 > 0$. Ta có

$$2^{x^2+y^2+z^2} + (x^2 + y^2 + z^2) \cdot 2^{z^2} = 4 \cdot (2^{z^2} + 4) \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2+z^2} - 16 = 2^{z^2} (4 - x^2 - y^2 - z^2) \quad (*)$$

- Với $x^2 + y^2 + z^2 > 4 \Rightarrow \begin{cases} 2^{x^2+y^2+z^2} - 16 > 0 \\ 2^{z^2} (4 - x^2 - y^2 - z^2) < 0 \end{cases} \Rightarrow (*)$ vô nghiệm.
- Với $0 < x^2 + y^2 + z^2 < 4 \Rightarrow \begin{cases} 2^{x^2+y^2+z^2} - 16 < 0 \\ 2^{z^2} (4 - x^2 - y^2 - z^2) > 0 \end{cases} \Rightarrow (*)$ vô nghiệm.

Đây là phương trình mặt cầu (S) có tâm $O(0; 0; 0)$, bán kính $R = 2$.

Xét phương trình $2 \cdot \frac{y}{x} + \frac{z-6}{x} = 3-m \quad (x \neq 0) \Leftrightarrow (m-3)x + 2y + z - 6 = 0$.

Đây là phương trình mặt phẳng (P) . Hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow (P) \cap (S) \neq \emptyset \Leftrightarrow d(O, (P)) \leq 2$

$$\Leftrightarrow \frac{|-6|}{\sqrt{(m-3)^2 + 4 + 1}} \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 6m + 14} \geq 3 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 5 \\ m \leq 1 \end{cases}.$$

Do $m \in [-10; 10]$ và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Vậy có 18 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét. Kỹ thuật đánh giá ở cách 2 ta sẽ tìm hiểu ở chương sau.

Câu 58. Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để có đúng 2 bộ số thực $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời hai hệ thức $(x-12)^2 + (y+2)^2 = 196$ và

$$\log_3^2(26x+53) \cdot \log_3 \frac{x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5}{729} + 8 \log_3 m = 0.$$

Tổng giá trị các phần tử của tập S bằng

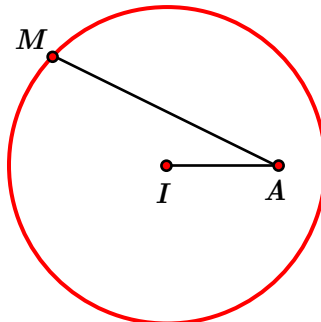
A. 2.

B. 82.

C. 81.

D. -32.

Lời giải



Trên hệ trục tọa độ Oxy , gọi $M(x; y)$ là điểm có tọa độ thỏa mãn các hệ thức trong giả thiết của bài toán.

Từ $(x-12)^2 + (y+2)^2 = 196$ ta có M nằm trên đường tròn (C) có tâm $I(12;-2)$ và bán kính $R=14$.

Ta có $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5 = (x+1)^2 + (y+2)^2 = AM^2$; trong đó điểm $A(-1;-2)$.

Dễ dàng xác định được $1 \leq AM \leq 27$ như hình vẽ bên trên. Mặt khác, ta có

$$26x + 53 = 26x + 53 - 196 + (x-12)^2 + (y+2)^2 = (x+1)^2 + (y+2)^2 = AM^2.$$

Suy ra

$$\log_3^2(2x+53) \cdot \log_3 \frac{x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5}{729} + 8\log_3 m = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 AM^2 \cdot \log_3 \frac{AM^2}{729} + 8\log_3 m = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 AM^2 \cdot (\log_3 AM^2 - 6) + 8\log_3 m = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \log_3 AM^2$, điều kiện là $\log_3 1^2 \leq t \leq \log_3 27^2 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 6$. Để ý khi $t=0$ hoặc $t=6$ thì ta có duy nhất một bộ số $(x;y)$ và với mỗi $0 < t < 6$ cho ta hai bộ số $(x;y)$, với hai vị trí của điểm M đối xứng qua IA . Khi đó (1) trở thành $t^2(t-6) = -8\log_3 m \Leftrightarrow f(t) = t^3 - 6t^2 = -8\log_3 m \quad (2)$.

Lập bảng biến thiên của $f(t) = t^3 - 6t^2$ trên $[0;6]$.

- Với $-32 < -8\log_3 m < 0$ thì phương trình (2) có hai nghiệm $t_1, t_2 \in (0;6)$ nên ta có 4 bộ $(x;y)$.
- Với $-8\log_3 m = -32 \Leftrightarrow m = 81$ thì phương trình (2) có đúng một nghiệm $t = 4$ có hai bộ $(x;y)$.
- Với $-8\log_3 m = 0 \Leftrightarrow m = 1$ thì phương trình (2) có hai nghiệm $t = 0; t = 6$ có hai bộ $(x;y)$.

Nên $m = 1$ và $m = 81$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Vậy tổng các phần tử của tập S bằng 82.

Câu 59. Số các giá trị nguyên của $m \in (1;2020)$ để phương trình $x \ln x + xe^{\frac{1}{x}} - \left(x + e^{\frac{1}{x}}\right)m = m \ln x - 1$ có đúng 2 nghiệm thực là			
A. 2018.	B. 2016.	C. 2017.	D. 2015.

Lời giải

Điều kiện $x > 0$. Phương trình tương đương

$$x \ln x + xe^{\frac{1}{x}} - \left(x + e^{\frac{1}{x}}\right)m = m \ln x - 1$$

$$\Leftrightarrow x \ln x + xe^{\frac{1}{x}} - mx - me^{\frac{1}{x}} - m \ln x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-m) \left(\ln x + e^{\frac{1}{x}} \right) = mx - 1 \quad (1)$$

- **Trường hợp 1.** Với $x = m$, ta có $\begin{cases} VT = 0 \\ VP = m^2 - 1 > 0, \forall m \in (1;2020) \end{cases} \Rightarrow x = m$ không là nghiệm của phương trình.
- **Trường hợp 2.** Với $x \neq m$, chia cả 2 vế của (1) cho $x-m$ ta được $\ln x + e^{\frac{1}{x}} - \frac{mx-1}{x-m} = 0$

Cách 1.

Đặt $f(x) = \ln x + e^{\frac{1}{x}}, g(x) = \frac{mx-1}{x-m}$. Ta có $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} > 0, \forall x > 0$, suy ra hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Với $m \in (1; 2020)$; $g'(x) = \frac{1-m^2}{(x-m)^2} < 0, \forall x \neq m$.

Khi đó, với mọi $m \in (1; 2020)$ thì đồ thị hàm số $f(x)$ và đồ thị hàm số $g(x)$ luôn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt. Do đó, với mọi $m \in (1; 2020)$ thì phương trình $f(x) = g(x)$ luôn có 2 nghiệm thực phân biệt, 1 nghiệm thuộc khoảng $(0; m)$, 1 nghiệm thuộc khoảng $(m; +\infty)$. Mà $m \in \mathbb{Z}$ suy ra $m = 2; 3; \dots; 2019$. Vậy có 2018 giá trị nguyên của $m \in (1; 2020)$ thỏa mãn phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm thực.

Cách 2.

Đặt $f(x) = \ln x + e^{-\frac{1}{x}} - \frac{mx-1}{x-m}, \forall x \neq m, x > 0$. Khi đó số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành $y = 0$. Có

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{m^2-1}{(x-m)^2} > 0, \forall x \neq m, x > 0, m \in (1; 2020).$$

Ta có bảng biến thiên

x	0	m	$+\infty$
$f'(x)$			
		+	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ luôn cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt với mọi $m \in (1; 2020)$. Mà m nguyên nên ta có $m = 2; 3; \dots; 2019$.

Vậy có 2018 giá trị nguyên của $m \in (1; 2020)$ thỏa mãn phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm thực.

Câu 60. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m nhỏ hơn 20 để phương trình

$$e^{\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}} - \sqrt{\frac{x^2+mx+1}{x}}} = \frac{x^3 + mx^2 + x}{x^4 + 1}$$

có nghiệm thực dương?

A. 19

B. 16.

C. 18.

D. 17.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{x^2 + mx + 1}{x} \geq 0 \end{cases}$. Ta có

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}} - \sqrt{\frac{x^2+mx+1}{x}}} &= \frac{x^3 + mx^2 + x}{x^4 + 1} \Leftrightarrow e^{\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}} - \sqrt{\frac{x^2+mx+1}{x}}} = \frac{x^2}{x^4 + 1} \cdot \frac{x^2 + mx + 1}{x} \\ &\Leftrightarrow \frac{x^4 + 1}{x^2} \cdot e^{\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}}} = \frac{x^2 + mx + 1}{x} \cdot e^{\sqrt{\frac{x^2+mx+1}{x}}} \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 \cdot e^t$, với $t \geq 0$, ta có $f'(t) = 2t \cdot e^t + t^2 \cdot e^t \geq 0, \forall t \geq 0$.

Do đó hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Phương trình (*) có dạng $f\left(\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}}\right)=f\left(\sqrt{\frac{x^2+mx+1}{x}}\right)$.

$$\text{Suy ra } \sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}}=\sqrt{\frac{x^2+mx+1}{x}} \Leftrightarrow \frac{x^4+1}{x^2}=\frac{x^2+mx+1}{x} \Leftrightarrow x^4-x^3-x+1=mx^2.$$

$$\Leftrightarrow m=x^2+\frac{1}{x^2}-x-\frac{1}{x} \quad (**).$$

Đặt $a=x+\frac{1}{x}$, $x>0 \Rightarrow a \geq 2$ và $x^2+\frac{1}{x^2}=a^2-2$.

Khi đó (**) trở thành $m=a^2-a-2$ (***) .

Phương trình (*) có nghiệm thực dương $\Leftrightarrow$ (***) có nghiệm $a \in [2;+\infty)$.

Xét hàm số $g(a)=a^2-a-2$ trên $[2;+\infty)$.

Có $g'(a)=2a-1>0$, $\forall a \geq 2$. Suy ra hàm $g(a)$ đồng biến trên $[2;+\infty)$.

Do đó $g(a) \geq g(2)$, $\forall a \in [2;+\infty) \Leftrightarrow g(a) \geq 0$, $\forall a \in [2;+\infty)$.

Vậy (***) có nghiệm $a \in [2;+\infty) \Leftrightarrow m \geq 0$. Mà $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ 0 < m < 20 \end{cases} \Rightarrow m \in \{1;2;3;...;19\}$.

Có 19 giá trị của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 61. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để tồn tại hai số thực x,y thỏa mãn

$$\log_x y = \log_y x \text{ và } \log_x [m(x+y)] = \log_y (x-y) + 2.$$

A. $(0;+\infty)$.

B. $[1;+\infty)$.

C. $(1;+\infty)$.

D. $(0;1)$.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} 0 < x, y \neq 1 \\ x > y \\ m > 0 \end{cases}$. Ta có $\log_x y = \log_y x \Leftrightarrow \log_x y = \frac{1}{\log_x y} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_x y = 1 \\ \log_x y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \text{ (loại)} \\ y = x^{-1} \text{ (nhận)} \end{cases}$.

Với $y = \frac{1}{x} \Rightarrow x > \frac{1}{x} \Rightarrow x > 1$ (do $x > 0$).

$$\text{Khi đó } \log_x [m(x+y)] = \log_y (x-y) + 2 \Leftrightarrow \log_x \left[m \left(x + \frac{1}{x} \right) \right] = \log_{\frac{1}{x}} \left(x - \frac{1}{x} \right) + 2$$

$$\Leftrightarrow \log_x \left[m \left(x + \frac{1}{x} \right) \right] + \log_x \left(x - \frac{1}{x} \right) = 2 \Leftrightarrow \log_x \left[m \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right) \right] = 2$$

$$\Leftrightarrow m \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right) = x^2 \Leftrightarrow m = \frac{x^4}{x^4-1} \Leftrightarrow \frac{1}{m} = 1 - \frac{1}{x^4} \quad (*).$$

Để tồn tại hai số x,y thì phương trình (*) có nghiệm $x > 1$.

Với mọi $x > 1$ thì $0 < 1 - \frac{1}{x^4} < 1$, do đó để thỏa mãn bài ra thì $0 < \frac{1}{m} < 1 \Leftrightarrow m > 1$.

Vậy $m > 1$.

Câu 62. Với mỗi cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn $\log_2(2x+y) = \log_4(x^2+xy+7y^2)$ luôn tồn tại một số thực k sao cho $\log_3(3x+y) = \log_9(3x^2+4xy+ky^2)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị k có thể nhận. Tổng các phần tử của S bằng?

A. 17.

B. 10.

C. 30.

D. 22.

Lời giải

Xét phương trình $\log_2(2x+y) = \log_4(x^2+xy+7y^2)$ (1)

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x+y > 0 \\ x^2+xy+7y^2 > 0 \end{cases}$$

Với điều kiện trên, phương trình (1) tương đương $2x+y = \sqrt{x^2+xy+7y^2}$

$$\Leftrightarrow 4x^2+4xy+y^2 = x^2+xy+7y^2 \Leftrightarrow x^2+xy-2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+2y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x=-2y \end{cases} (*)$$

Xét phương trình $\log_3(3x+y) = \log_9(3x^2+4xy+ky^2)$ (2)

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 3x+y > 0 \\ 3x^2+4xy+ky^2 > 0 \end{cases}$$

Với điều kiện trên, phương trình (2) tương đương $3x+y = \sqrt{3x^2+4xy+ky^2}$ (3)

Từ (*) ta có các trường hợp sau

- **Trường hợp 1.** Với $x=y$ thì

$$(3) \Leftrightarrow 4y = \sqrt{7y^2+ky^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ 9y^2 = ky^2 \end{cases} \Leftrightarrow k=9$$

- **Trường hợp 2.** Với $x=-2y$ thì

$$(3) \Leftrightarrow -5y = \sqrt{4y^2+ky^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y < 0 \\ 21y^2 = ky^2 \end{cases} \Leftrightarrow k=21$$

Vậy tập hợp các giá trị của S là $\{9; 21\}$.

Câu 63. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $(2^x-2x)\sqrt{(3)^{2^x}-m} = 0$, với m là tham số thực. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2020; 2020]$ để tập hợp S có hai phần tử?

A. 2094.

B. 2092.

C. 2093.

D. 2095.

Lời giải

Phương trình $(2^x-2x)\sqrt{(3)^{2^x}-m} = 0$ có điều kiện xác định $(3)^{2^x}-m \geq 0 \Leftrightarrow (3)^{2^x} \geq m$.

- Nếu $m \leq 1$ thì tập xác định là $D = \mathbb{R}$.
- Nếu $m > 1$ thì tập xác định là $D = [\log_2(\log_3 m); +\infty)$.

$$\text{Ta có } (2^x-2x)\sqrt{(3)^{2^x}-m} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 2x & (1) \\ (3)^{2^x} = m & (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) $2^x = 2x \Leftrightarrow 2^x - 2x = 0$.

Xét hàm số $f(x) = 2^x - 2x$, ta có $f'(x) = 2^x \ln 2 - 2$, $f''(x) = 2^x (\ln 2)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $f'(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm $f'(x)$ liên tục, đồng biến trên $\mathbb{R}$ và có $f'(1) \cdot f'(2) = (2 \ln 2 - 2)(4 \ln 2 - 2) < 0$, nên phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = x_0$. Hơn nữa $f'(x) < f'(x_0) = 0, \forall x < x_0$ và $f'(x) > f'(x_0) = 0, \forall x > x_0$.

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(x_0; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; x_0)$. Trên mỗi khoảng đó, phương trình $f(x) = 0$ có không quá một nghiệm. Suy ra trên $\mathbb{R}$, phương trình $f(x) = 0$ có không quá hai nghiệm. Nhận thấy $f(1) = f(2) = 0$. Vậy phương trình (1) có đúng hai nghiệm $x = 1; x = 2$.

- Nếu $m \leq 1$ thì PT(2) vô nghiệm nên yêu cầu bài toán được thỏa mãn, kết hợp với điều kiện

$m \in [-2020; 2020] \cap \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2020; -2019; \dots; -1; 0; 1\}$, có 2022 giá trị của m .

- Nếu $m > 1$ thì phương trình (2) có nghiệm là $x = \log_2(\log_3 m)$.

Để yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì $1 \leq \log_2(\log_3 m) < 2 \Leftrightarrow 2 \leq \log_3 m < 4 \Leftrightarrow 9 \leq m < 81$.

Như vậy có 72 giá trị nguyên của m là $m \in \{9; 10; \dots; 80\}$.

Câu 64. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

$$f(x) = \frac{1}{4}m^2 e^{4x} + \frac{1}{3}m e^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x} - (m^2 + m - 1)e^x$$

không có cực trị trên tập $\mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. $-\frac{2}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. -1 .

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = m^2 e^{4x} + m e^{3x} - e^{2x} - (m^2 + m - 1)e^x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 0(L) \\ e^x = 1 \\ m^2 e^{2x} + (m^2 + m)e^{2x} + m^2 + m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ m^2 e^{2x} + (m^2 + m)e^{2x} + m^2 + m - 1 = 0(*) \end{cases}$$

Để hàm số đã cho không có cực trị thì $x = 0$ là nghiệm của (*)

Thay $x = 0$ vào (*) ta được $3m^2 + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{1}{3} \end{cases}$.

- Với $m = -1$ thì (*) $\Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 1 \\ e^x = -1(L) \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$. Khi đó $f'(x)$ không đổi dấu qua $x = 0$.
- Với $m = \frac{1}{3}$ thì (*) $\Leftrightarrow e^{2x} + 4e^x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 1 \\ e^x = -\frac{5}{4}(L) \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$.

Khi đó $f'(x)$ không đổi dấu qua $x = 0$.

Vậy $m = -1, m = \frac{1}{3} \Rightarrow -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$

Câu 65. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hệ phương trình

$$\begin{cases} (xy - 1)4^{xy} = 2(x^2 + y) \cdot 2^{x^2 + y} \\ \frac{(x + 2 - \sqrt{x^2 + 1})^2}{2xy - y - 1} + \frac{18\sqrt{x^2 + 1}}{2xy + x - x^2 - y + \sqrt{x^2 + 1}} = m \end{cases}$$

có nghiệm (x, y) thỏa mãn x và y là các số thực dương. Tích của tất cả các phần tử trong tập hợp S

A. 30.

B. 42.

C. 60.

D. 56.

Lời giải

Nhận xét. Vẫn như lời khuyên ở một số câu trên, vào phòng thi gặp câu này nên bỏ! Đây là một câu trong đề thi thử của một Sở nào đó.

Ta có
$$\begin{cases} (xy - 1)4^{xy} = 2(x^2 + y) \cdot 2^{x^2 + y} \\ \frac{(x + 2 - \sqrt{x^2 + 1})^2}{2xy - y - 1} + \frac{18\sqrt{x^2 + 1}}{2xy + x - x^2 - y + \sqrt{x^2 + 1}} = m \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Do $x > 0, y > 0$ nên từ (1) ta có $xy - 1 > 0$ (*).

Phương trình (1) $\Leftrightarrow 2(xy-1) \cdot \frac{1}{4} \cdot 2^{2xy} = (x^2+y) \cdot 2^{x^2+y} \Leftrightarrow (2xy-2) \cdot 2^{2xy-2} = (x^2+y) \cdot 2^{x^2+y}$ (3).

Đặt $\begin{cases} u=2xy-2 \\ v=x^2+y \end{cases}$ với $\begin{cases} u>0 \text{ (do } *) \\ v>0 \text{ (do } x,y>0) \end{cases}$.

Khi đó (3) trở thành $u \cdot 2^u = v \cdot 2^v$ (4). Xét hàm đặc trưng $f(t) = t \cdot 2^t$ với $t > 0$, ta có

$$f'(t) = 2^t + t \cdot 2^t \cdot \ln 2 > 0 \quad \forall t > 0.$$

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Như vậy (4) $\Leftrightarrow f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow 2xy - 2 = x^2 + y \Leftrightarrow (2x - 1)y = x^2 + 2 \Rightarrow 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

Ta có $2xy - 2 = x^2 + y \Rightarrow \begin{cases} 2xy - y - 1 = x^2 + 1 \\ 2xy + x - x^2 - y = x + 2 \end{cases}$ thế vào (2) ta có

$$\begin{aligned} & \frac{\left(x+2-\sqrt{x^2+1}\right)^2}{x^2+1} + \frac{18\sqrt{x^2+1}}{x+2+\sqrt{x^2+1}} = m \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{x+2-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2 + \frac{18}{\frac{x+2+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}} = m \Leftrightarrow \left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)^2 + \frac{18}{\frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}} + 1} = m \quad (5). \end{aligned}$$

Đặt $t = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}$ với $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ta có $t' = \frac{1-2x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} < 0, \forall x > \frac{1}{2}$, do đó với $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ thì $t \in (1, \sqrt{5})$.

Khi đó (5) $\Leftrightarrow (t-1)^2 + \frac{18}{t+1} = m$ (6).

Xét hàm số $g(t) = (t-1)^2 + \frac{18}{t+1}$ với $t \in (1; \sqrt{5})$. Ta có

$$g'(t) = 2(t-1) - \frac{18}{(t+1)^2} = \frac{2(t^3+t^2-t-10)}{(t+1)^2}; g'(t) = 0 \Rightarrow t = 2.$$

Theo yêu cầu bài toán thì phương trình (6) có nghiệm $t \in (1; \sqrt{5}) \Leftrightarrow 7 \leq m < 9$.

Theo đề bài $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in S = \{7; 8\}$.

Vậy tích các phần tử của S là $7 \cdot 8 = 56$

Câu 66. Cho hàm số $f(x) = \frac{3}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - 3$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $\left[m^2 + x(m - 2^{f(x)}) + 2 \cdot 2^{f(x)} - 3\right] \left(2 - 2^{\frac{3}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - 2}\right) \leq 0$ nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$. Số phần tử của tập hợp S là

A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.

Lời giải

Nhận xét. Như câu trên!

Vì $\left[m^2 + x(m - 2^{f(x)}) + 2 \cdot 2^{f(x)} - 3 \right] \left(2 - 2^{\frac{3}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - 2} \right) \leq 0$ (1) nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$, suy ra điều kiện cần là (1) đúng khi $x = 0$, tức là

$$\left[m^2 + 2 \cdot 2^{f(0)} - 3 \right] (2 - 2^{-2}) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-\sqrt{11}}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

Do $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m = 1$. Thử lại, với $m = 1$ bất phương trình đã cho trở thành

$$\left[1 + x(1 - 2^{f(x)}) + 2 \cdot 2^{f(x)} - 3 \right] \left(2 - 2^{\frac{3}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - 2} \right) \leq 0 \Leftrightarrow 2(1 - 2^{f(x)})^2(x - 2) \leq 0 \quad (2)$$

Ta thấy $x = 3$ không phải là nghiệm của (2) do đó $m = 1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy số phần tử của tập hợp S là 0.

Câu 67. Cho phương trình $\log_5^3(5x) - 6\log_5^2\left(\frac{x}{5}\right) - (11 + m)\log_5 x + 3 + m = 0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1; 625]$ là

A. $(1; 2)$. **B.** $[1; 2]$. **C.** $(2; +\infty)$. **D.** $(1; 2]$.

Lời giải

Điều kiện $x > 0$. Phương trình tương đương

$$\log_5^3(5x) - 6\log_5^2\left(\frac{x}{5}\right) - (11 + m)\log_5 x + 3 + m = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \log_5 x)^3 - 6(\log_5 x - 1)^2 - (11 + m)\log_5 x + 3 + m = 0.$$

Đặt $t = \log_5 x$ ta được $t^3 - 3t^2 + (4 - m)t + m - 2 = 0$ (*).

Với $x \in [1; 625]$ thì $t \in [0; 4]$ như vậy ta cần tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 4]$. Ta có

$$(*) \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 - 2t + 2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t^2 - 2t + 2 - m = 0 \quad (**) \end{cases}.$$

Vậy ta cần tìm m để (**) có hai nghiệm phân biệt khác 1 thuộc đoạn $[0; 4]$.

Ta có $t^2 - 2t + 2 - m = 0 \Leftrightarrow m = t^2 - 2t + 2$.

Suy ra điều kiện của m là $m \in (1; 2]$.

Câu 68. Cho phương trình $4^{-x} - 3x + \log_4(m - x) - 2m + 2 = 0$ với m là tham số thực. Gọi S là tập tất cả các giá trị m nguyên để phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 1]$. Số phần tử của S là

A. 3. **B.** 6. **C.** 5. **D.** Vô số.

Lời giải

Nhận xét. Bài toán này tương đối hay, các phương pháp ta đã học ở trên gần như không thể phát huy tác dụng trong bài toán này, tuy nhiên để ý rằng vế trái là một hàm nghịch biến, khi đó ta có lời giải như sau.

Điều kiện $m - x > 0 \Leftrightarrow x < m$. Để phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 1]$ thì $m > -1$.

Xét hàm số $f(x) = 4^{-x} - 3x + \log_4(m - x) - 2m + 2$.

Trường hợp 1. $m > 1$

Ta có $f'(x) = -4^{-x} \cdot \ln 4 - 3 - \frac{1}{(m-x)\ln 4} < 0, \forall x \in [-1; 1]$ nên hàm số nghịch biến trên đoạn $[-1; 1]$.

Do đó $\max_{[-1; 1]} f(x) = f(-1); \min_{[-1; 1]} f(x) = f(1)$. Vì $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 1]$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 1]$ khi $f(1) \leq 0 \leq f(-1)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) = \log_4(m+1) - 2m + 9 \geq 0 & (1) \\ f(1) = \log_4(m-1) - 2m - \frac{3}{4} \leq 0 & (2) \end{cases}$$

Xét bất phương trình (1), ta có $\log_4(m+1) - 2m + 9 \geq 0 \Leftrightarrow \log_4(m+1) - 2(m+1) + 11 \geq 0$.

Đặt $g(t) = \log_4 t - 2t + 11$ với $t \in (2; +\infty)$, $g'(t) = \frac{1}{t \ln 4} - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4 \ln 2}$. Suy ra $g'(t) < 0, \forall t \in (2; +\infty)$.

Vẽ bảng biến thiên thì ta thấy nghiệm của bất phương trình (1) là $2 < m+1 \leq 6$. Suy ra $m \in \{2; 3; 4; 5\}$.

Xét bất phương trình (2) $\log_4(m-1) - 2m - \frac{3}{4} \leq 0 \Leftrightarrow \log_4(m-1) - 2(m-1) - \frac{11}{4} \leq 0$.

Đặt $h(z) = \log_4 z - 2z - \frac{11}{4}$ với $z > 0$. Ta có $h'(z) = \frac{1}{z \ln 4} - 2 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{4 \ln 2}$.

Vì $h\left(\frac{1}{4 \ln 2}\right) < 0$ nên $h(z) < 0, \forall z$. Do đó bất phương trình (2) đúng với mọi $m > 1$.

Vậy trong trường hợp 1, các giá trị thỏa mãn là $m \in \{2; 3; 4; 5\}$.

Trường hợp 2. $m = 1$

Phương trình đã cho trở thành $4^{-x} - 3x + \log_4(1-x) = 0$. Xét hàm số $p(x) = 4^{-x} - 3x + \log_4(1-x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{3}{4}\right]$ và $p(0) \cdot p\left(\frac{3}{4}\right) < 0$ nên phương trình $p(x) = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{3}{4}\right)$. Do đó $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 3. $m = 0$

Phương trình đã cho trở thành $4^{-x} - 3x + \log_4(-x) + 2 = 0$.

Xét hàm số $q(x) = 4^{-x} - 3x + \log_4(-x) + 2$ là hàm số liên tục trên $\left[-1; -\frac{1}{256}\right]$ và $q(-1) \cdot q\left(-\frac{1}{256}\right) < 0$

nên phương trình $q(x) = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(-1; -\frac{1}{256}\right)$.

Do đó $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy tập hợp các giá trị của m thỏa mãn là $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Câu 59. Có bao nhiêu m nguyên dương để bất phương trình $3^{2x+2} - 3^x(3^{m+2} + 1) + 3^m < 0$ có không quá 30 nghiệm nguyên?

A. 28.

B. 29.

C. 30.

D. 31.

Lời giải

Xét bất phương trình $3^{2x+2} - 3^x(3^{m+2} + 1) + 3^m < 0$ (*)

$$\Leftrightarrow (3^{2x+2} - 3^x \cdot 3^{m+2}) - (3^x - 3^m) < 0 \Leftrightarrow 9 \cdot 3^x(3^x - 3^m) - (3^x - 3^m) < 0 \Leftrightarrow (9 \cdot 3^x - 1)(3^x - 3^m) < 0$$

- **Trường hợp 1.** $\begin{cases} 9 \cdot 3^x - 1 < 0 \\ 3^x - 3^m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > m \end{cases}$.

Do $m > 0$ nên trường hợp 1 loại.

- **Trường hợp 2.** $\begin{cases} 9 \cdot 3^x - 1 > 0 \\ 3^x - 3^m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < m$

Do BPT (*) có không quá 30 nghiệm nguyên và $m > 0$ nên $0 < m \leq 29$.

Vậy có 29 giá trị m nguyên dương thỏa mãn đề bài.

Câu 70. Gọi m_0 là giá trị nhỏ nhất để bất phương trình sau có nghiệm

$$1 + \log_2(2-x) - 2\log_2\left(m - \frac{x}{2} + 4(\sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2})\right) \leq -\log_2(x+1)$$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $m_0 \in (8;9)$. B. $m_0 \in (9;10)$.
C. $m_0 \in (-10;-9)$. D. $m_0 \in (-9;-8)$.

Lời giải

Điều kiện $-1 < x < 2$. Đặt $t = \sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2} \Rightarrow t \in (\sqrt{3}; 3]$

Bất phương trình tương đương

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{(2-x)(2x+2)} \leq \log_2 \left(m - \frac{x}{2} + 4(\sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2}) \right) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(2-x)(2x+2)} \leq m - \frac{x}{2} + 4(\sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2}) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(2-x)(2x+2)} + \frac{x}{2} - 4(\sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2}) \leq m \end{aligned}$$

Ta xét bất phương trình $\frac{t^2-4}{2} - 4t \leq m, t \in (\sqrt{3}; 3]$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2-4}{2} - 4t, t \in (\sqrt{3}; 3]$

Ta có $f'(t) = t - 4 < 0, \forall t \in (\sqrt{3}; 3]$, suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $(\sqrt{3}; 3]$.

$$\Rightarrow f(t) \geq f(3) = -\frac{19}{2}, \forall t \in (\sqrt{3}; 3]$$

Bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi bất phương trình $f(t) \leq m$ có nghiệm $t \in (\sqrt{3}; 3]$.

Do đó $m \geq \min_{t \in (\sqrt{3}; 3]} f(t) = -\frac{19}{2} \Rightarrow m_0 = -\frac{19}{2} \in (-10; -9)$.

Câu 71. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số $m \in [-1, 1]$ sao cho phương trình

$$\log_{m^2+1}(x^2 + y^2) = \log_2(2x + 2y - 2)$$

có nghiệm nguyên (x, y) duy nhất.

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Lời giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2 + y^2 > 0 \\ 2x + 2y - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq y \neq 0 \\ x + y > 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \log_{m^2+1}(x^2 + y^2) = \log_2(2x + 2y - 2) = t \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = (m^2 + 1)^t \\ 2x + 2y - 2 = 2^t \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = (m^2 + 1)^t - 2^t \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = (m^2 + 1)^t - 2^t \geq 0 \Rightarrow (m^2 + 1)^t \geq 2^t (1).$$

Theo bài ra $m \in [-1, 1] \Leftrightarrow m^2 + 1 \in [1, 2] \Rightarrow m^2 + 1 \leq 2$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} t \leq 0 \\ m^2 + 1 = 2 \end{cases}$.

Trường hợp 1. Với $t \leq 0$. Ta có $2x + 2y - 2 = 2^t \leq 2^0 \Rightarrow x + y \leq \frac{3}{2}$.

Kết hợp với điều kiện suy ra $1 < x + y \leq \frac{3}{2}$

Mà theo bài ra x, y nguyên nên không có giá trị nào của x, y thỏa mãn yêu cầu bài ra.

Trường hợp 2. Với $m^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Khi đó $(x-1)^2 + (y-1)^2 = (m^2 + 1)^t - 2^t = 2^t - 2^t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy với $m = \pm 1$ phương trình $\log_{m^2+1}(x^2 + y^2) = \log_2(2x + 2y - 2)$ có nghiệm nguyên (x, y) duy nhất.

Câu 72. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_3(3^x + 2m) = \log_5(3^x - m^2)$ có nghiệm?

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 5.

Lời giải

Đặt $t = \log_3(3^x + 2m) = \log_5(3^x - m^2)$. Ta có

$$\begin{cases} 3^x + 2m = 3^t \\ 3^x - m^2 = 5^t \end{cases} \Rightarrow 2m + m^2 = 3^t - 5^t \Rightarrow (m+1)^2 = 3^t - 5^t + 1 \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t - 5^t + 1$. Ta có $f'(t) = 3^t \ln 3 - 5^t \ln 5 = 0 \Leftrightarrow t = \log_3(\log_5 5) = t_0$ và

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5^t \left(\left(\frac{3}{5} \right)^t - 1 + \frac{1}{5^t} \right) = -\infty.$$

Như vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$(m+1)^2 \leq f(t_0) \Leftrightarrow -\sqrt{f(t_0)} - 1 \leq m \leq \sqrt{f(t_0)} + 1 \Leftrightarrow -2,0675... \leq m \leq 0,0675...$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0\}$.

Thử lại các giá trị của tham số m vào hệ ban đầu ta thấy đều có nghiệm.

Cách 2.

Nhận xét, nếu $m \geq 1$ thì $3^x + 2m > 3^x - m^2 \Rightarrow \log_3(3^x + 2m) > \log_3(3^x - m^2) > \log_5(3^x - m^2)$.

Nếu $m \leq -3$ thì $2m > -m^2$ nên $3^x + 2m > 3^x - m^2 > 0$ và $3^x > m^2 \geq -2m - m$, hay $3^x + 2m > -m \geq 3$.

Khi đó $\log_3(3^x + 2m) > \log_5(3^x + 2m) > \log_5(3^x - m^2)$.

Do đó phương trình đã cho vô nghiệm với $m \geq 1$ hoặc $m \leq -3$.

Với $m \in \{-2; -1; 0\}$, bằng cách thử lại ta thấy thỏa mãn. Vậy có 3 giá trị của tham số m .

Câu 73. Gọi S là tập hợp các giá trị của m , sao cho hai phương trình

$$2x^2 + 1 = 3^m \text{ và } m = 3^x - 2x^2 + x - 1$$

có nghiệm chung. Tính tổng các phần tử của S ?

A. $\frac{5}{2}$.

B. 1.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

Để hai phương trình có nghiệm chung thì hệ phương trình sau phải có nghiệm

$$\begin{cases} 2x^2 + 1 = 3^m \\ m = 3^x - 2x^2 + x - 1 \end{cases}$$

Ta có $m = 3^x - 2x^2 + x - 1 \Rightarrow m = 3^x - (2x^2 + 1) + x = 3^x + x - 3^m \Rightarrow 3^x + x = 3^m + m$.

Xét hàm số $f(u) = 3^u + u$, ta có $f'(u) = \ln 3 \cdot 3^u + 1 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$

Nên $f(u)$ đồng biến. Khi đó $3^x + x = 3^m + m \Leftrightarrow f(x) = f(m) \Leftrightarrow x = m$.

Ta có $2x^2 + 1 = 3^x$. Đặt $f(x) = 2x^2 + 1 - 3^x$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Có

$$f'(x) = 4x - 3^x \cdot \ln 3$$

$$f''(x) = 4 - 3^x \cdot \ln^2 3$$

$$f'''(x) = -3^x \cdot \ln^3 3 < 0$$

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có tối đa ba nghiệm phân biệt. Dễ thấy $f(0) = f(1) = f(2) = 0$ mà nên phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt là $x = 0; x = 1; x = 2$.

Vậy $m = 0; m = 1; m = 2$.

Câu 74. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a trên đoạn $[-10; 10]$ để phương trình

$$e^{x+a} - e^x = \ln(1+x+a) - \ln(1+x)$$

có nghiệm duy nhất.

A. 2.

B. 10.

C. 1.

D. 20

Lời giải

Điều kiện xác định $\begin{cases} x+1+a > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} (*)$

Phương trình tương đương với $e^{x+a} - e^x - (\ln(1+x+a) - \ln(1+x)) = 0$.

Đặt $f(x) = e^{x+a} - e^x$, $g(x) = \ln(1+x+a) - \ln(1+x)$, $Q(x) = f(x) - g(x)$

Phương trình đã cho viết lại thành $Q(x) = 0$

- Với $a = 0$ thì $Q(x) = 0$ (luôn đúng với mọi x thỏa mãn $(*)$).
- Với $a > 0$ có $(*)$ tương đương với $x > -1$, $f(x)$ đồng biến và $g(x)$ nghịch biến với $x > -1$

Khi đó, $Q(x)$ đồng biến với $x > -1$. (1)

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} Q(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(e^{x+a} - e^x - \ln \frac{1+x+a}{1+x} \right) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left[e^{x+a} - e^x - \ln \left(1 + \frac{a}{1+x} \right) \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} Q(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x (e^a - 1) - \ln \left(1 + \frac{a}{1+x} \right) \right] = +\infty \end{cases} \quad (2)$$

Kết hợp (1), (2) thì phương trình $Q(x) = 0$ có nghiệm duy nhất.

Với $a < 0$ có $(*)$ tương đương với $x > -1-a$, $g(x)$ đồng biến và $f(x)$ nghịch biến với $x > -1-a$.

Khi đó, $Q(x)$ nghịch biến với $x > -1-a$. (3)

Ta có

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1-a)^+} Q(x) = \lim_{x \rightarrow (-1-a)^+} \left(e^{x+a} - e^x - \ln \frac{1+x+a}{1+x} \right) = \lim_{x \rightarrow (-1-a)^+} \left[e^{x+a} - e^x - \ln \left(1 + \frac{a}{1+x} \right) \right] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} Q(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x (e^a - 1) - \ln \left(1 + \frac{a}{1+x} \right) \right] = -\infty \end{cases} \quad (4)$$

Kết hợp (3), (4) suy ra $Q(x) = 0$ có nghiệm duy nhất.

Do a là số nguyên trên đoạn $[-10; 10]$ nên kết hợp 3 trường hợp trên thấy có 20 giá trị của a thoả mãn điều kiện của bài.

Câu 75. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m sao cho phương trình

$$\log_{\sqrt{m+1}+\sqrt{1-m}}(x^2 + y^2) = \log_2(2x + 4y - 5)$$

có nghiệm nguyên $(x; y)$ duy nhất ?

A. 2 .

B. 3 .

C. 1 .

D. 6 .

Lời giải

Điều kiện $-1 \leq m \leq 1$.

Ta có $\sqrt{2} \leq \sqrt{m+1} + \sqrt{1-m} \leq \sqrt{2(m+1+1-m)} = \sqrt{2 \cdot 2} = 2$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{m+1}+\sqrt{1-m}}(x^2 + y^2) \geq \log_2(x^2 + y^2) \Rightarrow \log_2(2x + 4y - 5) \geq \log_2(x^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow 2x + 4y - 5 \geq x^2 + y^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

Với $x=1, y=2 \Rightarrow \log_{\sqrt{m+1}+\sqrt{1-m}}(5) = \log_2(5) \Leftrightarrow m=0$

Thử $m=0$ lại thấy thoả mãn.

Câu 76. Số giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2000; 2000)$ để $2a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}} > m\sqrt{\log_a b} + 1$ với mọi $a, b \in (1; +\infty)$ là

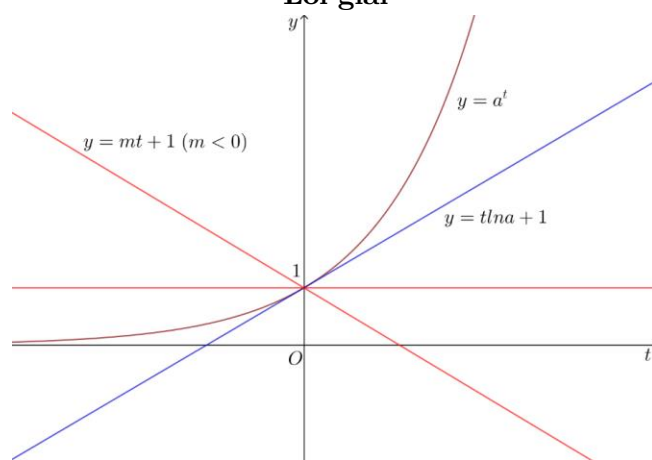
A. 2199 .

B. 1999 .

C. 2000 .

D. 2001 .

Lời giải



Đặt $t = \sqrt{\log_a b} \Rightarrow t > 0, \forall a, b \in (1; +\infty)$, khi đó $2a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}} > m\sqrt{\log_a b} + 1, \forall a, b \in (1; +\infty)$ trở thành $a^t > mt + 1, \forall t > 0$.

Bằng đồ thị dễ thấy, nếu $m \leq 0$ thì $a^t > mt + 1, \forall t > 0$

Nếu $m > 0$ thì đường thẳng $y = mt + 1$ luôn đi cắt đồ thị hàm số $y = a^t$ tại điểm $(0; 1)$ và phải nằm giữa đường thẳng $y = 1$ và đường thẳng $y = t \ln a + 1$, (đường thẳng $y = t \ln a + 1$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = a^t$ tại điểm $(0; 1)$). Do đó $0 < m \leq \ln a$. Từ 2 trường hợp suy ra $m \leq \ln a, \forall a > 1 \Rightarrow m \leq 0$.

Vậy $P_{\min} = 22$, dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a=b=\frac{1}{2} \\ c=\frac{1}{25} \end{cases}$.

Câu 77. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x - m - 2)(x - \sqrt{4 - m^2})^3 \ln(x + 1)$ với mọi giá trị của $x \in (-1; +\infty)$, trong đó m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 2.

Lời giải

Điều kiện $4 - m^2 \geq 0 \Leftrightarrow m \in [-2; 2]$

Ta có $f'(0) = 0 \ (\forall m \in [-2; 2])$.

$$f''(x) = \left((x - m - 2)(x - \sqrt{4 - m^2})^3 \right)' \ln(x + 1) + (x - m - 2)(x - \sqrt{4 - m^2})^3 \cdot \frac{1}{x + 1}$$

Suy ra $f''(0) = (-m - 2)(-\sqrt{4 - m^2})^3$.

$$\text{Xét } f''(0) > 0 \Leftrightarrow (-m - 2)(-\sqrt{4 - m^2})^3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4 - m^2} \neq 0 \\ -m - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m > -2 \end{cases}.$$

Vậy có 3 giá trị m nguyên thỏa mãn là $m = -1; m = 0; m = 1$.

$$\text{Xét } f''(0) = 0 \Leftrightarrow (-m - 2)(-\sqrt{4 - m^2})^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 2 \end{cases}.$$

Với $m = -2$ thay vào $f'(x)$ suy ra $f'(x) = x^4 \ln(x + 1)$. Bảng xét dấu

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

Vậy $m = -2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

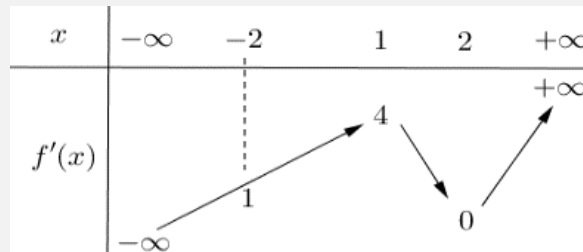
Với $m = 2$ thay vào $f'(x)$ suy ra $f'(x) = (x - 4)x^3 \ln(x + 1)$. Bảng xét dấu

x	-1	0	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

Vậy $m = 2$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Có 4 giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Câu 78. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của số thực m sao cho hàm số

$$g(x) = f(x + 1) + \frac{2020}{m} \ln \frac{2 - x}{2 + x} + \frac{x^2}{2} + 3x + 4 \ln(2 - x)$$

ng nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$. Tính tổng tất cả các phần tử thuộc S ?

A. 81810.

B. 5151.

C. 1275.

D. 127765.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $g(x)$ là $D = (-2; 2)$. Ta có $g'(x) = f'(x+1) - \frac{8080}{m} \frac{1}{4-x^2} + x + 3 - \frac{4}{2-x}$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$ khi và chỉ khi $g'(x) \leq 0, \forall x \in (-1; 1)$ (do hàm số $g'(x)$ chỉ có thể bằng 0 tại hữu hạn điểm trên $(-1; 1)$)

$$\Leftrightarrow f'(x+1) + x + 3 - \frac{4}{2-x} \leq \frac{8080}{m(4-x^2)} \Leftrightarrow (4-x^2)f'(x+1) - x^3 - 3x^2 + 4 \leq \frac{8080}{m}, \forall x \in (-1; 1) \quad (1)$$

(do $4-x^2 > 0, \forall x \in (-1; 1)$).

Đặt $t = x+1$. Khi $x \in (-1; 1)$ thì $t \in (0; 2)$.

Phương trình (1) trở thành $[4-(t-1)^2]f'(t) - (t-1)^3 - 3(t-1)^2 + 4 \leq \frac{8080}{m}$

$$\Leftrightarrow (3+2t-t^2).f'(t) + 2+3t-t^3 \leq \frac{8080}{m}, \forall t \in (0; 2) \quad (2).$$

Ta có hàm số $h(t) = 3+2t-t^2$ liên tục trên $(0; 2)$ có bảng biến thiên như sau

t	0	1	2
$h(t)$	3	4	3

Suy ra $3 < h(t) \leq 4, \forall t \in (0; 2)$. Hàm số $k(t) = 2+3t-t^3$ liên tục trên khoảng $(0; 2)$.

Ta có $k'(t) = 3-3t^2; k'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$. Bảng biến thiên của hàm số $k(t)$ trên khoảng $(0; 2)$ là

t	0	1	2
$k'(t)$	+	0	-
$k(t)$	2	4	0

Suy ra $0 < k(t) \leq 4, \forall t \in (0; 2)$. Dựa vào bảng biến thiên của hàm số f' ta thấy

$$f'(t) \in (0; 4], \forall t \in (0; 2).$$

Từ đó ta thấy $g(t) = (3+2t-t^2).f'(t) + 2+3t-t^3 \leq 20, \forall t \in (0; 2)$.

Do đó (2) thỏa mãn khi và chỉ khi $\frac{8080}{m} \geq 20 \Leftrightarrow m \leq 404$ suy ra $S = \{1; 2; \dots; 404\}$.

Vậy tổng các phần tử của tập S là $\frac{(1+404)}{2} \cdot 404 = 81810$.

Các kỹ thuật đánh giá nâng cao

Ở chương 1 chúng ta đã tìm hiểu các đánh giá và kỹ thuật cơ bản để xử lý các bài toán mũ – logarit, tuy nhiên từng đấy thôi là chưa đủ, trong thực tế chúng ta gặp rất nhiều các bài toán yêu cầu cần phải có kỹ thuật giải quyết nhanh và mạnh hơn, thay vì chỉ sử dụng công cụ đạo hàm hay biến đổi thông thường. Trước tiên ta có bài toán mở đầu sau.

Bài toán. Cho 2 số thực $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) = 2$. Giá trị của biểu thức $a + 2b$ bằng?

A. 9

B. $\frac{20}{3}$

C. 6

D. $\frac{27}{4}$

Câu 43 mã đề 105 – Đề thi THPT Quốc Gia môn toán 2018

Nhận xét. Đây là một bài toán tương đối khó trong đề thi THPT Quốc Gia 2018 với nhiều bạn học sinh chưa được trang bị kiến thức về bất đẳng thức AM – GM, tuy nhiên nếu đã nắm được bất đẳng thức này thì bài toán này dễ dàng nhận ra điểm mấu chốt của nó, từ đó ta dẫn tới lời giải sau.

Lời giải. Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $16a^2 + b^2 \geq 8ab$. Từ đây suy ra.

$$VT \geq \log_{4a+5b+1}(8ab + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) \geq 2$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a, b > 0 \\ 16a^2 = b^2 \\ \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a + 2b = \frac{27}{4}$$

Vậy chọn đáp án **D**.

Chú ý. Ngoài phép đánh giá đầu ta còn sử dụng thêm đánh giá sau.

$$\log_a b + \log_b a = \log_a b + \frac{1}{\log_a b} \geq 2 \sqrt{\log_a b \cdot \frac{1}{\log_a b}} = 2$$

Bài toán trên chỉ là mở đầu cho một lớp các bài toán có giả thiết lằng nhằng và yêu cầu đề bài là phải tính một biểu thức nào đó, thì đa phần mấu chốt ta sẽ phải đi chứng minh $VT \geq VP$ hoặc $VT \leq VP$, từ đó chỉ ra được dấu của đẳng thức. Sau đây ta sẽ cùng đi tìm hiểu sâu hơn về từng kỹ thuật một.

1. Sử dụng phương pháp đánh giá bất đẳng thức.

Nội dung chính của mục này là đề cập tới các bất đẳng thức phụ, các bài toán ước lượng khó hoặc các bất đẳng thức cổ điển như AM – GM hay Cauchy – Schwarz và các đánh giá cổ điển khác.

Câu 1. Cho 2 số $x, y > 0$ thỏa mãn điều kiện $4\log_2 2x \cdot \log_2 2y = \log_2^2 4xy$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2^{ \sin x } + 2^{ \cos y }$. Biết $M \cdot n = a \cdot 2^{1+\frac{1}{\sqrt{b}}}$ với a, b là các số nguyên dương và $a, b > 0$. Tính giá trị của biểu thức $a^3 + b^3$			
A. 31	B. 32	C. 33	D. 35

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có.

$$4\log_2 2x \cdot \log_2 2y = \log_2^2 4xy \Leftrightarrow 4\log_2 2x \cdot \log_2 2y = (\log_2 2x + \log_2 2y)^2$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 2x - \log_2 2y)^2 = 0 \Leftrightarrow \log_2 2x = \log_2 2y \Leftrightarrow x = y$$

Thế vào giả thiết ta được $P = h(x) = 2^{|\sin x|} + 2^{|\cos x|}$ ($t \in [0; 1]$). Đặt $t = |\sin x|$ khi đó ta được

$$f(t) = 2^t + 2^{\sqrt{1-t^2}} \Rightarrow f'(t) = 2^t \ln 2 - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} 2^{\sqrt{1-t^2}} \ln 2$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2^t \ln 2 = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} 2^{\sqrt{1-t^2}} \ln 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t \in (0; 1) \\ \frac{2^t}{t} = \frac{2^{\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$$

Xét hàm số $g(a) = \frac{2^a}{a}$ trên khoảng $(0; 1)$ ta có $g'(a) = \frac{2^a(a \ln 2 - 1)}{a^2} < 0 \forall a \in (0; 1)$.

Do đó $g(a)$ nghịch biến trên $(0; 1)$ vì vậy ta được $t = \sqrt{1-t^2} \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\text{Mặt khác ta lại có } f(0) = f(1) = 3; y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \begin{cases} \min P = 3 \\ \max P = 2^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} \end{cases}$$

Chọn ý **D**.

Câu 2. Cho $x \geq 2, y \geq 1$ thỏa mãn $\log_2 \frac{8}{x} \cdot \log_2 \frac{x}{y} \cdot \log_2 2y = 4$. Đặt $P = 2^x + 2^y$. Mệnh đề nào sau đây đúng?			
A. $18 \leq P < 19$	B. $19 < P < 20$	C. $20 \leq P < 21$	D. $17 \leq P < 18$

Lời giải

Nhìn thoáng qua thì nhiều bạn sẽ cho rằng đây là dạng toán rút thế để tìm min, max, tuy nhiên ở bài này ta phải sử dụng đến kiến thức của bất đẳng thức. Biến đổi giả thiết ta có.

$$\log_2 \frac{8}{x} \cdot \log_2 \frac{x}{y} \cdot \log_2 2y = 4 \Leftrightarrow (3 - \log_2 x)(\log_2 x - \log_2 y)(\log_2 y + 1)^2 = 4$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$(3 - \log_2 x)(\log_2 x - \log_2 y)(\log_2 y + 1)^2 = 4(3 - \log_2 x)(\log_2 x - \log_2 y) \frac{\log_2 y + 1}{2} \cdot \frac{\log_2 y + 1}{2}$$

$$\stackrel{AM-GM}{\leq} 4 \left(\frac{3 - \log_2 x + \log_2 x - \log_2 y + \frac{\log_2 y + 1}{2} + \frac{\log_2 y + 1}{2}}{4} \right)^4 = 4 = VP$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 3 - \log_2 x = \log_2 x - \log_2 y \\ 3 - \log_2 x = \frac{\log_2 y + 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}.$

Từ đó suy ra $P = 18 < 19$.

Câu 3. Cho hai số thực $x, y \geq 1$ thỏa mãn điều kiện.

$$\left| \log_2 2(x+y) \right| + \left| \log_2 \frac{2(x+y)}{x^2 + 4y^2 + 1} \right| = \log_2 (4xy + 1)$$

Giá trị lớn nhất của biểu thức $f(x, y) = 2xy + \sqrt{x+2y} - x^2 - 4y^2$ bằng?

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{3}{7}$

Lời giải

Nhìn hình thức bài toán khá cồng kềnh, thấy rằng bài toán có chứa dấu trị tuyệt đối nên ta sẽ nghĩ ngay tới bất đẳng thức liên quan tới nó. Áp dụng bất đẳng thức trị tuyệt đối ta có.

$$\begin{aligned} \left| \log_2 2(x+y) \right| + \left| \log_2 \frac{2(x+y)}{x^2 + 4y^2 + 1} \right| &= \left| \log_2 (x+y) + 1 \right| + \left| 1 - \log_2 \frac{x^2 + 4y^2 + 1}{x+y} \right| \\ &= \left| \log_2 (x+y) + 1 \right| + \left| \log_2 \frac{x^2 + 4y^2 + 1}{x+y} - 1 \right| \geq \left| \log_2 (x^2 + 4y^2 + 1) \right| = \log_2 (x^2 + 4y^2 + 1) \end{aligned}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức AM – GM ta lại có $\log_2 (x^2 + 4y^2 + 1) \geq \log_2 (4xy + 1) = VP$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \left(1 - \log_2 \frac{x^2 + 4y^2 + 1}{x+y} \right) (\log_2 (x+y) + 1) \\ x = 2y \end{cases}$

Thế vào $f(x, y)$ ta được $f(x, y) = g(x) = \sqrt{2x} - x^2$

Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2x}} = 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \max_{[1; +\infty)} g(x) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$

Chọn ý C.

Câu 4. Cho hai số thực $x \geq \frac{3}{2} \geq y \geq 0$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\log_2 (3x-y)}{4^{2x-3y-1}} \sqrt{4^{2x-3y-1} - 1} + \sqrt{\log_2 \frac{3x-y}{2}} = \log_2 (3x-y)$$

Khi đó biểu thức $P = 4xy$ có bao nhiêu ước số nguyên?

- A. 2 B. 4 C. 5 D. 8

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được.

$$\begin{aligned} \frac{\log_2 (3x-y)}{4^{2x-3y-1}} \sqrt{4^{2x-3y-1} - 1} + \sqrt{\log_2 \frac{3x-y}{2}} &= \log_2 (3x-y) \\ \Leftrightarrow \log_2 (3x-y) \sqrt{4^{2x-3y-1} - 1} + 4^{2x-3y-1} \sqrt{\log_2 (3x-y) - 1} &= \log_2 (3x-y) \cdot 4^{2x-3y-1} \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có.

$$\bullet \quad \log_2 (3x-y) \sqrt{4^{2x-3y-1} - 1} \leq \log_2 (3x-y) \cdot \frac{4^{2x-3y-1} - 1 + 1}{2} = \frac{4^{2x-3y-1} \log_2 (3x-y)}{2}$$

$$\bullet \quad 4^{2x-3y-1} \sqrt{\log_2(3x-y)-1} \leq 4^{2x-3y-1} \cdot \frac{\log_2(3x-y)-1+1}{2} = \frac{4^{2x-3y-1} \log_2(3x-y)}{2}$$

Cộng 2 vế bất đẳng thức ta được $VT \leq VP$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} 4^{2x-3y-1} = 2 \\ \log_2(3x-y) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y = \frac{3}{2} \\ 3x-y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $P = 4xy = 3$ có tất cả 4 ước số nguyên là $\pm 1, \pm 3$

Chọn ý **B**.

Câu 5. Cho hai số $x, y > \frac{1}{2}$ thỏa mãn điều kiện $x \neq 2y$ đồng thời $2^{\frac{(x-2y)^4+1}{(x-2y)^2}} (e^{x+y} - e^2(x+y-2)) = 4e^2$.

Đặt $P = x + y$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P > 5$

B. $\min P = 1$

C. $P < 3$

D. $\max P = 4$

Lời giải

Đây là một câu khá là hay chắc hẳn nhiều bạn sẽ nghĩ tới phương pháp đánh giá đầu tiên, ý tưởng đó là đúng nhưng trước tiên ta cần phải biết tới 1 bất đẳng thức phụ sau.

Bất đẳng thức phụ hay gặp. $e^x \geq x + 1$

Chứng minh. Xét hàm số $f(x) = e^x - x - 1 \Rightarrow f'(x) = e^x - 1$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$\Rightarrow \min f(x) = f(0) = 0 \Rightarrow e^x \geq x + 1 \forall x$$

Biến đổi giả thiết ta được.

$$2^{\frac{(x-2y)^4+1}{(x-2y)^2}} (e^{x+y} - e^2(x+y-2)) = 4e^2 \Leftrightarrow 2^{\frac{(x-2y)^4+1}{(x-2y)^2}} (e^{x+y-2} - (x+y-2)) = 4$$

Áp dụng bất đẳng thức phụ trên ta có. $e^{x+y-2} - (x+y-2) \geq 1$

Mặt khác cũng theo AM – GM ta có $2^{\frac{(x-2y)^4+1}{(x-2y)^2}} = 2^{\frac{(x-2y)^2+1}{(x-2y)^2}} \geq 2^2 = 4$

Vậy $VT \geq 4$. Dấu “=” khi và chỉ khi $\begin{cases} (x-2y)^2 = 1 \\ x+y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$

Chọn ý **C**.

Câu 6. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện

$$\frac{2}{2^{x-2y} + 1} = 2 - \log_{y^2+y-x^2-x} (x+y+1)$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_{x+y+1} (y-x) \cdot 2^{2x-4y}$

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{8}$

D. $\frac{1}{16}$

Lời giải

Đến bài này sẽ không còn dễ như những bài toán trước nữa, ta cần một chút kỹ năng biến đổi để có thể có thêm định hướng giải bài toán này. Biến đổi giả thiết ta được.

$$\begin{aligned} \frac{2}{2^{x-2y} + 1} = 2 - \log_{y^2+y-x^2-x} (x+y+1) &\Leftrightarrow \frac{2}{2^{x-2y} + 1} = 2 - \frac{1}{\log_{x+y+1} (x+y+1)(y-x)} \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{2^{x-2y} + 1} = 2 - \frac{1}{\log_{x+y+1} (y-x) + 1} \Leftrightarrow \frac{2}{2^{x-2y} + 1} + \frac{1}{\log_{x+y+1} (y-x) + 1} = 2 \end{aligned}$$

Khi đó P viết lại thành $P = \log_{x+y+1} (y-x) \cdot (2^{x-2y})^2$

Để đơn giản ta đặt $\begin{cases} a = \log_{x+y+1}(y-x) \\ b = 2^{x-2y} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{b+1} + \frac{1}{a+1} = 2 \Rightarrow a = \frac{b+1}{2b} - 1$

Thế vào ta được $P = \frac{b^2(1-b)}{2b} = \frac{b(1-b)}{2} \leq \frac{1}{8}$

Chọn ý C.

Câu 7. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{5}{2} \ln xy = \frac{5}{2}$.

Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá $x + y$?

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Lời giải

Với bài này ta sẽ sử dụng cách dồn biến về đại lượng xy . Có thể thấy là vế trái là đa thức đối xứng nên

ta cho $x = y \Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{5}{2x^2} = \frac{5}{2xy}$. Vậy bài toán sẽ thêm bớt như sau.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{5}{2} \ln xy &= \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{5}{2xy} + \frac{5}{2} \ln xy + \frac{5}{2xy} &= \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{2}{xy} + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{1}{2xy} + \frac{5}{2} \ln xy + \frac{5}{2xy} &= \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{x^2 y^2} - \frac{(x-y)^2}{2xy(x^2 + y^2)} + \frac{5}{2} \ln xy + \frac{5}{2xy} &= \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2(2x^2 - xy + 2y^2)}{2x^2 y^2(x^2 + y^2)} + \frac{5}{2} \left(\frac{1}{xy} - \ln \left(\frac{1}{xy} \right) \right) &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t - \ln t (t > 0) \Rightarrow f'(t) = \frac{5}{2} \left(1 - \frac{1}{t} \right), f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow f(t) \geq f(1) = \frac{5}{2}$

Vậy $VT \geq VP$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$

Chọn ý C.

Câu 8. Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $4^x - 2^{x+1} + 2(2^x - 1) \sin(2^x + y - 1) + 2 = 0$.

Đặt $P = \sin^{2018}(y+1) + x^{2018}$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P = 1$

B. $P = 2$

C. $P = 3$

D. $P \in [4; 5]$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được.

$$\begin{aligned} 4^x - 2^{x+1} + 2(2^x - 1) \sin(2^x + y - 1) + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1) + 2(2^x - 1) \sin(2^x + y - 1) + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1) + 2(2^x - 1) \sin(2^x + y - 1) + \sin^2(2^x + y - 1) + \cos^2(2^x + y - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2^x - 1 + \sin(2^x + y - 1))^2 + \cos^2(2^x + y - 1) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x + \sin(2^x + y - 1) = 1 \\ \cos^2(2^x + y - 1) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Vì $\cos^2(2^x + y - 1) = 0 \Rightarrow \sin(2^x + y - 1) = \pm 1$.

- Nếu $\sin(2^x + y - 1) = 1 \Rightarrow 2^x = 0$ - Phương trình vô nghiệm

- Nếu $\sin(2^x + y - 1) = -1 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \sin(y + 1) = -1$

Vậy giá trị của biểu thức $P = 2$.

Chọn ý **B**.

Câu 9. Cho hai số thực $x, y \geq 1$ thỏa mãn điều kiện $\log_2^2 2x = 2\log_2^2(y^2 + 1)(\log_2^2 x + 1)$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_2(x + y)$

A. $\log_2 3$

B. $\log_2 5$

C. 1

D. 2

Lời giải

Ý tưởng bài này giống với bài 12, nhưng hình thức đã đơn giản hơn rất nhiều.

Biến đổi giả thiết ta có.

$$\log_2^2 2x = 2\log_2^2(y^2 + 1)(\log_2^2 x + 1) \Leftrightarrow \frac{(\log_2(x) + 1)^2}{\log_2^2 x + 1} = 2\log_2^2(y^2 + 1)$$

$$\text{Xét hàm } f(t) = \frac{(t+1)^2}{t^2 + 1} (t \geq 0) \Rightarrow f'(t) = \frac{-2t^2 + 2}{(t^2 + 1)^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow f(t) \leq f(1) = 2$$

Từ đó suy ra $\frac{(\log_2(x) + 1)^2}{\log_2^2 x + 1} \leq 2$. Mặt khác theo giả thiết ta có.

$$2\log_2^2(y^2 + 1) \geq 2\log_2^2(1 + 1) = 2$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$.

Chọn ý **C**.

Câu 10. Cho hai số thực dương $x \geq y \geq 1$ thỏa mãn điều kiện.

$$4\log_2(x + y) + 12 = (2^{x-y} + 1)(\log_2(x + y) + 5 + \sqrt{2\log_2^2(x + y) + 2})$$

Đặt $P = a^3 + b^3$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P = 2$

B. $P = 3$

C. $P = 1$

D. $P < 1$

Lời giải

Vẫn là ý tưởng của bài toán 12 và 14 tuy nhiên với bài này cần một chút kiến thức về bất đẳng thức thì sẽ giải nhanh hơn rất nhiều thay vì cách đạo hàm truyền thống.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có.

$$\begin{aligned} \log_2(x + y) + 3 &= \frac{\log_2(x + y) + 5 + \log_2(x + y) + 1}{2} \leq \frac{\log_2(x + y) + 5 + \sqrt{2(\log_2^2(x + y) + 1)}}{2} \\ &\Rightarrow \frac{4\log_2(x + y) + 12}{\log_2(x + y) + 5 + \sqrt{2(\log_2^2(x + y) + 1)}} \leq 2 \end{aligned}$$

Mặt khác theo giả thiết ta lại có $2^{x-y} + 1 \geq 2^0 + 1 = 2$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$

Chọn ý **A**.

Câu 11. Cho 2 số thực x, y không âm thỏa mãn điều kiện $x \geq y + 1$ đồng thời

$$2^{x-y} + 2^{2y-2x} = 9.2^{-2x+y}$$

Đặt $P = x + y$. Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá P ?

A. 1

B. 2

C. 5

D. 0

Lời giải

Đây là một bài toán với cách phát biểu đơn giản nhưng tuy nhiên một số bạn sẽ rất dễ bị nhầm khi áp dụng bất đẳng thức AM – GM. Sau đây mình sẽ chỉ ra một lỗi có thể một vài bạn mắc phải.

Với ý tưởng của các bài toán cũ thì chúng ta thường sẽ có đánh giá sau.

$$2^{x-y} + 2^{2y-2x} = 2^{x-y} + \frac{1}{(2^{x-y})^2} = \frac{1}{2} \cdot 2^{x-y} + \frac{1}{2} \cdot 2^{x-y} + \frac{1}{(2^{x-y})^2} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

Sau khi có đánh giá trên thì tiếp theo ta sẽ đánh giá về trái để chỉ ra dấu “=”, nhưng tuy nhiên điều này là không thể do điểm rơi của bài toán không phải như thế. Để giải quyết được ta phải chú ý thêm tới điều kiện mà đề bài đã cho là $x \geq y + 1$ từ đây ta sẽ suy ra $2^{x-y} \geq 2$. Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có.

$$2^{x-y} + 2^{2y-2x} = 2^{x-y} + \frac{1}{(2^{x-y})^2} = \frac{2^{x-y}}{8} + \frac{2^{x-y}}{8} + \frac{1}{(2^{x-y})^2} + \frac{3 \cdot 2^{x-y}}{4} \geq \frac{3}{4} + \frac{3 \cdot 2^{x-y}}{4} \geq \frac{9}{4}$$

$$\text{Mặt khác ta lại có } x \geq y + 1 \Rightarrow 2^{-2x+y} \leq 2^{-2y+y-2} = 2^{-y-2} \leq 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

Vậy $VT \geq VP$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

Chọn ý **A**.

Nhận xét. Ngoài mắc phải lỗi như trên thì một số ít khi lần đầu gặp sẽ bị nhầm rằng đây là dạng toán tìm mối liên hệ x,y, nhưng ta phải tỉnh ý nhận ra yêu cầu của đề bài là hỏi có bao nhiêu số nguyên dương để nhận ra phải sử dụng tới phương pháp đánh giá!

Câu 12. Cho 2 số x, y thỏa mãn $\begin{cases} x \geq 1-y \\ y \leq 0 \end{cases}$ thỏa mãn điều kiện.

$$\sqrt{\ln(x+y)} + \sqrt{\ln(1-y)} = 2\sqrt{\ln \frac{x+1}{2}}$$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + xy + y^2$ là?

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{4}$

Lời giải

Thực chất đây là một bài toán khá là đơn giản, để ý tới yêu cầu của bài toán là tìm giá trị nhỏ nhất nên chắc chắn từ giả thiết ta sẽ phải tìm được mối liên hệ giữa x và y.

$$\text{Đặt } \begin{cases} x+y=a \\ 1-y=b \end{cases} \Rightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{a+b}{2}. \text{ Giả thiết trở thành } \sqrt{\ln a} + \sqrt{\ln b} = 2\sqrt{\ln \frac{a+b}{2}}$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có.

$$\ln a + \ln b \geq 2\sqrt{\ln a \cdot \ln b} \Rightarrow 2(\ln a + \ln b) \geq (\sqrt{\ln a} + \sqrt{\ln b})^2$$

$$\text{Mặt khác } \ln \frac{a+b}{2} \geq \ln \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \geq \frac{1}{4}(\sqrt{\ln a} + \sqrt{\ln b})^2 \Rightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{\ln a} + \sqrt{\ln b}) \leq \sqrt{\ln \frac{a+b}{2}}$$

Vậy $VT \leq VP$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a=b \Rightarrow x+y=1-y \Rightarrow x=1-2y$

$$\text{Khi đó } P_{\min} = \frac{1}{4}.$$

Chọn ý **D**.

Câu 13. Cho 2 số thực $x, y > 0$ thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{\log_2 x + \log_4^2 y^2} + \sqrt{\log_2^2 x + 2} = \sqrt{\log_2 \frac{y^2}{x}}$$

Có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá $8xy$?

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được.

$$\begin{aligned} & \sqrt{\log_2 x + \log_4 y^2} + \sqrt{\log_2^2 x + 2} = \sqrt{\log_2 \frac{y^2}{x}} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{\log_2 x + \log_2^2 y} + \sqrt{\log_2^2 x + 2} = \sqrt{2\log_2 y - \log_2 x} \\ \Leftrightarrow & \log_2 x + \log_2^2 y - 2\log_2 y + \log_2^2 x + 2 + \log_2 x + 2\sqrt{\log_2 x + \log_2^2 y} \sqrt{\log_2^2 x + 2} = 0 \\ \Leftrightarrow & (\log_2 x + 1)^2 + (\log_2 y - 1)^2 + 2\sqrt{\log_2 x + \log_2^2 y} \sqrt{\log_2^2 x + 2} = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \log_2 x = -1 \\ \log_2 y = 1 \\ \log_2 x + \log_2^2 y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó $8xy = 8$, vậy có tất cả 8 số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán

Chọn ý **D**.

Câu 14. Cho 2 số thực $x, y > 0$ thỏa mãn điều kiện

$$(2^{x+y-1} + 2^{x+2y-1})(2^{3x+4y-3} + 2^{1-x-y}) = 2^{2x+3y}$$

Biết rằng biểu thức $\frac{x^2 + y^2}{4} = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tổng $a + b$ bằng?

A. 5

B. 6

C. 4

D. 7

Lời giải

Nhìn chung bài toán nhìn rất cồng kềnh, ta sẽ tư duy theo hướng mà ta hay nghĩ tới nhất đó là quy đồng. Biến đổi giả thiết ta được.

$$\begin{aligned} & (2^{x+y-1} + 2^{x+2y-1})(2^{3x+4y-3} + 2^{1-x-y}) = 2^{2x+3y} \\ \Leftrightarrow & 2^{4x+5y-4} + 2^{4x+6y-4} + 2^y + 1 = 2^{2x+3y} \\ \Leftrightarrow & 2^{2x+2y-4} + 2^{2x+3y-4} + 2^{-2x-2y} + 2^{-2x-3y} = 1 \end{aligned}$$

Đến đây mọi việc trở nên rất đơn giản phải không nào? Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có.

$$2^{2x+2y-4} + 2^{-2x-2y} + 2^{2x+3y-4} + 2^{-2x-3y} \geq 2\sqrt{2^{2x+2y-4} \cdot 2^{-2x-2y}} + 2\sqrt{2^{-2x-3y} \cdot 2^{2x+3y-4}} = 1 = VP$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{4} = \frac{1}{4}$

Chọn ý **A**.

Câu 15. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0 < a, b, c < 1$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = \frac{1}{2}\log_a b + \frac{1}{2}\log_b c + \frac{1}{4}\log_c^2 a$ được viết dưới dạng $\frac{m}{n}$, với m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Hỏi $T = m^3 + n^3$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 171

B. 189

C. 195

D. 163

Lời giải

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có.

$$\begin{aligned} \bullet \quad P &= \frac{1}{2}\log_a b + \frac{1}{2}\log_b c + \frac{1}{4}\log_c^2 a \geq \sqrt{\log_a b \log_b c} + \frac{1}{4}\log_c^2 a = \sqrt{\log_a c} + \frac{1}{4}\log_c^2 a \\ \bullet \quad \sqrt{\log_a c} + \frac{1}{4}\log_c^2 a &= \frac{1}{4}\sqrt{\log_a c} + \frac{1}{4}\sqrt{\log_a c} + \frac{1}{4}\sqrt{\log_a c} + \frac{1}{4}\sqrt{\log_a c} + \frac{1}{4}\log_c^2 a \\ &\geq 5\sqrt[5]{\frac{1}{4}\sqrt{\log_a c} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{\log_a c} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{\log_a c} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{\log_a c} \cdot \frac{1}{4}\log_c^2 a} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{5}{4}$, khi đó $T = 189$

Chọn ý **B**.

Câu 16. Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $2^{x+\frac{1}{4x}} + 2^{\frac{y+1}{4}y} = 4$. Đặt $P = x + y$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P=1$ B. 2 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{5}{2}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có.

$$2^{x+\frac{1}{4x}} + 2^{\frac{y+1}{4}y} \geq 2^{\sqrt{x \cdot \frac{1}{4x}}} + 2^{\sqrt{\frac{y+1}{4}y}} = 4 = VP$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow P = \frac{5}{2}.$$

Chọn ý **D**.

Câu 17. Cho 2 số a, b thỏa mãn $b \geq a > 1$ và $2^{\log_b a} + 16^{\frac{\log_a b}{\sqrt[4]{a^3}}} = 4$. Giá trị của biểu thức $P = \log_2 \left(\frac{a}{b} \right)$?

A. 0 B. 2 C. 3 D. 1

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có.

$$2^{\log_b a} + 16^{\frac{\log_a b}{\sqrt[4]{a^3}}} = 2^{\log_b a} + 2^{4\left(\log_a b - \frac{3}{4}\right)} = f(t) = 2^t + 2^{4\left(\frac{1}{t} - \frac{3}{4}\right)} \quad (t = \log_b a \in (0; 1])$$

$$\text{Suy ra } f'(t) = 2^t \ln 2 - \frac{4}{t^2} \cdot 2^{4\left(\frac{1}{t} - \frac{3}{4}\right)} \ln 2 \leq \left(2^t - 4 \cdot 2^{\frac{4}{t} - 3} \right) \ln 2 \leq (2 - 4 \cdot 2^{4-3}) \ln 2 < 0$$

$$\Rightarrow f(t) = 2^t + 2^{4\left(\frac{1}{t} - \frac{3}{4}\right)} \geq f(1) = 4 \Rightarrow VT \geq VP$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } a = b \Rightarrow P = \log_2 \left(\frac{a}{b} \right) = 0$$

Chọn ý **A**.

Câu 18. Cho 2 số thực $x, y > 0$ thỏa mãn $\frac{1}{x} \leq y \leq 2x$ và $\log_2 \frac{2x}{x} \sqrt{\log_2 \frac{2x}{y} \log_2 xy} = \frac{9}{16}$. Đặt $P = 2^x \cdot 2^y$.
Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P \in [4; 5]$ B. $P \in [1; 2]$ C. $P \in [2; 3]$ D. $P \in [6; 7]$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được

$$\log_2 \frac{2x}{x} \sqrt{\log_2 \frac{2x}{y} \log_2 xy} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow (1 - \log_2 x) \sqrt{(\log_2 x - \log_2 y + 1)(\log_2 x + \log_2 y)} = \frac{9}{16}$$

$$\text{Để đơn giản ta đặt } \begin{cases} a = \log_2 x \\ b = \log_2 y \end{cases} \Rightarrow (1 - a) \sqrt{(a - b + 1)(a + b)} = \frac{9}{16}$$

Nếu $a \geq 1 \Rightarrow VT \leq 0$, vô lý

$$\text{Để ý thấy } \frac{1}{x} \leq y \leq 2x \Rightarrow \log_2 2x \geq \log_2 \frac{1}{x} \Rightarrow a + 1 \geq -a \Rightarrow a \geq -\frac{1}{2}.$$

Nếu $-\frac{1}{2} \leq a < 1$ thì ta có.

$$(1-a)\sqrt{(a-b+1)(a+b)} \leq \frac{1}{2}(1-a)(a-b+1+a+b) = (1-a)\left(a + \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{4}\left(1-a+a+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x = \frac{1}{4} \\ \log_2 y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2^{\frac{1}{4}} \\ y = 2^{\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow P \approx 6,07725$$

Chọn ý **D**.

Câu 19. Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $\begin{cases} 2 \leq x \leq 3 \\ 2 < y < 5 \end{cases}$. Hỏi có bao nhiêu bộ số (x, y) thỏa mãn phương trình

$$\log_2(3 - |\sin xy|) = \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right)?$$

A. 4

B. 2

C. 3

D. 1

Lời giải

Thực chất đây là một câu khá đơn giản nếu như ta đã làm quen với phương pháp đánh giá rồi, các câu 28, 29 sẽ làm tương tự nên mình sẽ chỉ trình bày mỗi lời giải câu 27. Ta có

$$3 - |\sin xy| \geq 2 \Rightarrow \log_2(3 - |\sin xy|) \geq 1,$$

mặt khác $\cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$. Do đó phương trình thỏa mãn khi và chỉ khi.

$$\begin{cases} \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \\ |\sin xy| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6} + 2k \\ xy = \frac{\pi}{2} + n\pi \end{cases} \quad (k, n \in \mathbb{Z})$$

Với giả thiết $2 \leq x \leq 3$ nên $k = 1$. Với $k = 1 \Rightarrow x = \frac{13}{6} \Rightarrow y = \frac{6}{13}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$

$$\text{Do } 2 < y < 5 \Rightarrow 2 < \frac{6}{13}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) < 5 \Rightarrow n \in \{1; 2\} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{9\pi}{13} \\ y = \frac{15\pi}{13} \end{cases}$$

Vậy có 2 bộ số thỏa mãn yêu cầu đề bài. Chọn ý **B**.

Bài tập tương tự.

1. Tìm tổng các số $\alpha \in (5; 16)$ để phương trình sau có nghiệm trên đoạn $[1; 2]$

$$1 + \cos^2\left(\frac{\alpha x}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos \pi x - \sin \pi x|}$$

A. $\frac{17\pi}{5}$

B. $\frac{34\pi}{5}$

C. $\frac{63\pi}{5}$

D. $\frac{51\pi}{5}$

2. Tìm tổng các số $\alpha \in (2; 7)$ để phương trình sau có nghiệm trên đoạn $[1; 2]$

$$\log_3\left(1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{5\pi}{2}\right)\right) = |\cos \alpha x| - 1$$

A. $\frac{17\pi}{7}$

B. $\frac{18\pi}{7}$

C. $\frac{19\pi}{7}$

D. $\frac{20\pi}{7}$

Câu 20. Biết rằng tồn tại duy nhất một a để phương trình $2^{|\sin x|} + |\sin x| = \cos x + \sin^2 x + a$ có nghiệm duy nhất, hỏi a có tất cả bao nhiêu ước số nguyên

A. 2 số B. 8 số C. Không có D. Vô số

Lời giải

Do $|\sin x| = |\sin(-x)|, (\sin(-x))^2 = (\sin x)^2$ nên nếu phương trình có 1 nghiệm là x thì cũng có nghiệm là $-x$. Nên để phương trình có nghiệm duy nhất thì đồng nghĩa với $x = 0$. Thế ngược lại ta giải ra được $a = 0$.

Chọn ý D.

Câu 21. Cho 2 số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x + y + 1 = 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3})$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 3^{x+y-4} + (x+y+1)2^{7-x-y} - 3(x^2 + y^2)$ là $\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $P = a + b$

A. $P = 8$ B. $P = 141$ C. $P = 148$ D. $P = 151$

Lời giải

Đây chính là đề thi THPT Quốc Gia 2016 đã được biến tấu để trở thành 1 câu hỏi trắc nghiệm!

Từ giả thiết ta có $(x+y+1)^2 = 4(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3})^2 = 4(x+y+1+2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3})$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho 2 số thực không âm ta có.

$$2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3} \leq x+y+1 \Rightarrow (x+y+1)^2 \leq 8(x+y+1) \Rightarrow -1 \leq x+y \leq 7$$

Mặt khác ta lại có.

$$(x+y+1)^2 = 4(x+y+1+2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3}) \geq 4(x+y+1) \Rightarrow \begin{cases} x+y \geq 3 \\ x+y \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \leq x+y \leq 7 \\ x+y = -1 \end{cases}$$

$$\text{Nếu } x+y = -1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2}\sqrt{y+3} = 0 \\ x+y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases} \Rightarrow S = -\frac{9746}{243}$$

Nếu $3 \leq x+y \leq 7$. Đặt $t = x+y$ ($t \in [3;7]$)

Xét hàm số $f(t) = 3^{t-4} + (t+1) \cdot 2^{7-t}$ ($t \in [3;7]$)

$$\Rightarrow f'(t) = 3^{t-4} \ln 3 + 2^{7-t} - (t+1)2^{7-t} \ln 2$$

$$\Rightarrow f''(t) = 3^{t-4} \ln^2 3 - 2^{7-t} \ln 2 - \ln 2 (2^{7-t} - (t+1)2^{7-t} \ln 2)$$

$$= 3^{t-4} \ln^2 3 + ((t+1) \ln^2 2 - 2 \ln 2) 2^{7-t} > 0 \forall t \in [3;7]$$

Vì $f'(3) < 0, f'(7) > 0$ nên tồn tại số $a \in (3;7)$ sao cho $f'(a) = 0$. Suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $(3;a)$ và

$$\text{đồng biến trên } (a;7). \text{ Mặt khác } f(3) = \frac{193}{3}; f(7) = 35 \Rightarrow f(t) \leq f(3) = \frac{193}{3} \forall t \in [3;7]$$

Ta sẽ đi chứng minh $x^2 + y^2 \geq 5$ với $x+y \geq 3, x \geq 2$.

Nhận thấy rằng khi.

$$+ x \in [2;3] \Rightarrow y \geq 3-x \geq 0 \Rightarrow y^2 \geq x^2 - 6x + 9 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2x^2 - 6x + 9 = 2(x-2)(x-1) + 5 \geq 5$$

$$+ x > 3 \Rightarrow x^2 + y^2 > 9$$

$$\text{Vậy } x^2 + y^2 \geq 5 \Rightarrow S \leq \frac{148}{3}.$$

Chọn ý D.

Câu 22. Cho x, y là 2 số tự nhiên khác 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |36^x - 5^y|$

A. $P = 8$

B. 9

C. 10

D. 11

Lời giải

Đây là một câu phát biểu vô cùng đơn giản, nhưng thực chất là một bài toán nếu làm tự luận sẽ rất khó đòi hỏi tới kiến thức số học.

Ta có 36^m tận cùng bằng 6, 5^n tận cùng bằng 5. Nếu $36^m > 5^n$ thì P có tận cùng bằng 1, nếu $36^m < 5^n$ thì P có tận cùng bằng 9

Xét $P = 1$ ta có $36^m - 5^n = 1 \Leftrightarrow 36^m - 1 = 5^n$. Đẳng thức này không thể xảy ra vì vế trái chia hết cho 35 nên chia hết cho 7, còn vế phải không chia hết cho 7

Xét $P = 9$ ta có $5^n - 36^m = 9 \Rightarrow 5^n$ chia hết cho 9, vô lí.

Xét $A = 11$, xảy ra khả năng này chẳng hạn khi $m = 1, n = 2$. Vậy $\min P = 11$.

Chọn ý D.

Câu 23. Cho các số thực dương a, b, c khác 1 thỏa mãn $\log_a^2 b + \log_b^2 c = \log_a \frac{c}{b} - 2 \log_b \frac{c}{b} - 3$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a b - \log_b c$. Tính $S = 2m + 3M$

A. $S = \frac{2}{3}$

B. $S = \frac{1}{3}$

C. $S = 3$

D. $S = 2$

Lời giải

Đặt $x = \log_a b, y = \log_b c \Rightarrow P = x - y$, khi đó giả thiết viết lại thành $x^2 + y^2 = xy - x - 2y - 1$

Thế $y = x - P$ vào giả thiết trên ta được $x^2 + y^2 = xy - x - 2y - 1 \Leftrightarrow x^2 + (3 - P)x + (P - 1)^2 = 0$

Phương trình trên có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta = (3 - P)^2 - 4(P - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq P \leq \frac{5}{3}$

Chọn ý C.

Câu 24. Cho các số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn $3^a = 5^b = 15^{-c}$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 - 4(a + b + c)$ là?

A. $-3 - \log_5 3$

B. -4

C. $-2 - \sqrt{3}$

D. $-2 - \log_3 5$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có $3^a = 5^b = 15^{-c} = t \Leftrightarrow a = \log_3 t, b = \log_5 t, -c = \log_{15} t$

$$\Rightarrow -c = \frac{1}{\log_t 15} = \frac{1}{\log_t 3 + \log_t 5} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{ab}{a+b} \Leftrightarrow ab + bc + ca = 0$$

Khi đó ta có $P = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) - 4(a + b + c) = (a + b + c)^2 - 4(a + b + c) \geq -4$

Chọn ý B.

Câu 25. Cho a, b là hai số thực thay đổi thỏa mãn $b > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{(a - b)^2 + (10^a - \log b)^2}$$

A. $\sqrt{2} \left(\frac{1}{\ln 10} + \log \left(\frac{1}{\ln 10} \right) \right)$

B. $\sqrt{2} \left(\frac{1}{\ln 10} - \log \left(\frac{1}{\ln 10} \right) \right)$

C. $\sqrt{2} \log(\ln 10)$

D. $\sqrt{2} \left(\frac{1}{\ln 10} - \ln \left(\frac{1}{\ln 10} \right) \right)$

Lời giải

Xét 2 điểm $A(a; 10^a), B(b; \log b)$, do đồ thị của 2 hàm số $y = 10^x, y = \log x$ đối xứng qua đường thẳng $y = x$ do đó khoảng cách giữa 2 điểm A và B chính là P và đạt giá trị nhỏ nhất khi A, B đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$, do đó 2 điểm A, B cùng nằm trên đường thẳng $y = -x + m$.

Vì vậy ta có

$$A(a; 10^a), B(b; \log b) \Rightarrow AB = P = \sqrt{2}|10^a - a| = f(a) \geq f\left(\log\left(\frac{1}{\ln 10}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\ln 10} - \log\left(\frac{1}{\ln 10}\right)\right)$$

Chọn ý B.

Câu 26. Cho các số thực a, b, c lớn hơn 1 thỏa mãn $\log_2 a \geq (1 - \log_2 b \log_2 c) \log_{bc} 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 10 \log_2^2 a + 10 \log_2^2 b + \log_2^2 c$

A. $-3 - \log_5 3$

B. -4

C. $-2 - \sqrt{3}$

D. $-2 - \log_3 5$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được

$$\log_2 a \geq (1 - \log_2 b \log_2 c) \log_{bc} 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 a \cdot (\log_2 b + \log_2 c) \geq 1 - \log_2 b \log_2 c$$

$$\Leftrightarrow \log_2 a \log_2 b + \log_2 a \log_2 c + \log_2 b \log_2 c \geq 1$$

Đặt $(\log_2 a; \log_2 b; \log_2 c) \rightarrow (x, y, z)$ ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $S = 10x^2 + 10y^2 + z^2$

Bây giờ ta cần tìm số k dương sao cho

$$10x^2 + 10y^2 + z^2 \geq 2k(xy + yz + xz)$$

$$\Leftrightarrow 10x^2 + 10y^2 + z^2 + k(x^2 + y^2 + z^2) \geq k(x^2 + y^2 + z^2) + 2k(xy + yz + xz)$$

$$\Leftrightarrow (k+10)x^2 + (k+10)y^2 + (k+1)z^2 \geq k(x+y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{k+10}} + \frac{y^2}{\frac{1}{k+10}} + \frac{z^2}{\frac{1}{k+1}} \geq k(x+y+z)^2$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng cộng mẫu Engel ta có

$$\frac{x^2}{\frac{1}{k+10}} + \frac{y^2}{\frac{1}{k+10}} + \frac{z^2}{\frac{1}{k+1}} \geq \frac{(x+y+z)^2}{\frac{1}{k+10} + \frac{1}{k+10} + \frac{1}{k+1}}$$

Đến đây sử dụng được giả thiết ta sẽ chọn k sao cho $\frac{1}{\frac{1}{k+10} + \frac{1}{k+10} + \frac{1}{k+1}} = k \Leftrightarrow k = 2$

Chọn ý B.

Câu 27. Với a, b, c lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \log_a bc + \log_b ca + 4 \log_c ab$

A. 6

B. 12

C. 11

D. 10

Lời giải

Đây là một câu sử dụng bất đẳng thức AM – GM khá là cơ bản

Biến đổi giả thiết và áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\begin{aligned} P &= \log_a bc + \log_b ca + 4 \log_c ab = \log_a b + \log_b a + \log_a c + 4 \log_c a + \log_b c + 4 \log_c b \\ &\geq 2\sqrt{\log_a b \cdot \log_b a} + 2\sqrt{4 \log_a c \cdot \log_c a} + 2\sqrt{4 \log_b c \cdot \log_c b} = 10 \end{aligned}$$

Chọn ý D.

Tương tự với câu 39. Chọn ý C.

Câu 28. Xét các số thực dương x, y, z thay đổi sao cho tồn tại các số thực a, b, c lớn hơn 1 và thỏa mãn $\sqrt{abc} = a^x = b^y = c^z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x + y + 2z^2$

A. $4\sqrt{2}$

B. 4

C. 6

D. 10

Lê Phúc Lữ

Lời giải

Từ giả thiết ta có $a^x = \sqrt{abc} \Leftrightarrow 2\log_{abc} a = \frac{1}{x}$ tương tự $\frac{1}{y} = 2\log_{abc} b, \frac{1}{z} = 2\log_{abc} c$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2(\log_{abc} a + \log_{abc} b + \log_{abc} c) = 2.$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có .

$$\frac{4}{x+y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 - \frac{1}{z} \Rightarrow x+y \geq \frac{4z}{2z-1} \Rightarrow T \geq \frac{4z}{2z-1} + 2z^2 = f(z) \geq f(1) = 6$$

Chọn ý C.

Nhận xét. Cách giải bài toán này có lẽ đã không còn quá xa lạ với các bạn thi THPT Quốc Gia 2020 vì dạng này đã xuất hiện trong đề tham khảo của Bộ năm nay, câu dưới đây là một câu hoàn toàn tương tự.

Câu 29. Xét các số thực dương x, y, z thay đổi sao cho tồn tại các số thực a, b, c lớn hơn 1 và thỏa mãn $\sqrt{abc} = a^x = b^y = c^z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{16}{x} + \frac{16}{y} - z^2$

A. 20

B. $20 - \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

C. 24

D. $24 - \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

Lời giải

Tương tự với câu 40 ta có $\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2(\log_{abc} a + \log_{abc} b + \log_{abc} c) = 2.$

$$\Rightarrow P = 16\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) - z^2 = 16\left(2 - \frac{1}{z}\right) - z^2 = 32 - \frac{16}{z} - z^2 = f(z) \leq f(2) = 20$$

Chọn ý A.

Câu 30. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0 < a, b, c < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \log_a b + \log_b c + \sqrt{\log_c a}$$

A. $2\sqrt{2}$

B. 3

C. $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{3}{2}$

Lời giải

Đây là một câu tương tự câu 23 ta sẽ phải dùng tới bất đẳng thức AM – GM để triệt tiêu các biến

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\begin{aligned} S &= \log_a b + \log_b c + \sqrt{\log_c a} \geq 2\sqrt{\log_a b \cdot \log_b c} + \sqrt{\log_c a} = 2\sqrt{\log_a c} + \sqrt{\log_c a} \\ &\geq 2\sqrt{2\sqrt{\log_a c} \cdot \sqrt{\log_c a}} = 2\sqrt{2\sqrt{\log_a c \cdot \log_c a}} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Chọn ý A.

Câu 31. Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $\log^2 a + 2\log^2 b + 3\log^2 c = 6$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức là $T = \log a \log b + \log b \log c + \log c \log a$ là $\frac{3}{k}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $k = 1$

B. $k^3 + 3k^2 = 3$

C. $k^3 + 3k = 3$

D. $k = \frac{1}{2}$

Lời giải

Một câu hoàn toàn tương tự với câu 26, ta sẽ dùng phương pháp tham số hóa kết hợp bất đẳng thức cổ điển Cauchy – Schwarz. Đặt $(\log a; \log b; \log c) \rightarrow (x, y, z) \Rightarrow x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$.

$$\text{Ta có đánh giá } 6 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 \geq 2k(xy + yz + xz) \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{k+1}} + \frac{y^2}{\frac{1}{k+2}} + \frac{z^2}{\frac{1}{k+3}} \geq k(x + y + z)^2.$$

$$\text{Khi đó cần tìm } k \text{ sao cho } k = \frac{1}{\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3}} \Leftrightarrow k^3 + 3k^2 = 3$$

Chọn ý C.

Câu 32. Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $\log a \log b + \log b \log c + 3 \log c \log a = 1$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log^2 a + \log^2 b + \log^2 c$ là $\frac{-m + \sqrt{n}}{p}$ với m, n, p lần lượt là các số nguyên dương và $\frac{m}{p}$ là phân số tối giản. Tính $m + n + p$?

A. 64

B. 16

C. 102

D. 22

Lời giải

Với bài toán này nếu đặt $(\log a; \log b; \log c) \rightarrow (x, y, z) \Rightarrow xy + yz + 3xz = 1$ thì ta sẽ không thể áp dụng phương pháp làm của bài trên, khi đó ta sẽ cần phải nghĩ ra cách đặt khác.

$$\text{Đặt } (\log a; \log b; \log c) \rightarrow (ix, jy, kz) \Rightarrow ijxy + jkyz + 3kixz = 1$$

$$\text{Tìm } m, n, p \text{ thỏa mãn } ij = kj = 3ki \Rightarrow i = k = \frac{j}{3}. \text{ Chọn } j = 3 \Rightarrow i = k = 1$$

$$\text{Khi đó ta được } 3xy + 3yz + 3xz = 1 \Rightarrow xy + yz + xz = \frac{1}{3}. \text{ Bài toán lại quay trở về các bài toán trên.}$$

$$\text{Với cách làm tương tự các bài toán trên ta tìm được } \min P = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$$

Chọn ý D.

Cách 2. Chú ý rằng ở giả thiết và yêu cầu của bài toán vai trò của 2 biến a, c là như nhau nên dấu “=” sẽ xảy ra tại $a = c$. Khi đó ta có.

$$\begin{cases} P = 2x^2 + y^2 \\ 3x^2 + 2xy = 1 \end{cases} \Rightarrow P(3x^2 + 2xy) = 2x^2 + y^2 \Leftrightarrow (3P - 2)x^2 + 2Pxy - y^2 = 0$$

Sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2 ta sẽ tìm được đáp án của bài toán.

Câu 33. Với n là số nguyên dương, biết rằng $-\log_2 \left(\log_2 \left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{2018}}}} \right) \right) > 2017$ mà biểu thức trong dấu ngoặc có tất cả n dấu căn. Tìm giá trị nhỏ nhất của n ?

A. 2021

B. 2014

C. 2013

D. 2020

Lê Phúc Lữ

Lời giải

$$\text{Từ giả thiết ta có } \sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{2018}}}} = (2018)^{\frac{1}{2^n}} = (2018)^{2^{-n}} \Rightarrow \log_2 \left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{2018}}}} \right) = 2^{-n} \log_2 2018$$

$$\Rightarrow -\log_2 \left(\log_2 \left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{2018}}}} \right) \right) > 2017 \Leftrightarrow -\log_2 2^{-n} - \log_2 (\log_2 2018) > 2017$$

$$\Rightarrow n \log_2 2 > 2020,4 \Rightarrow n > 2020,4 \Rightarrow n \geq 2021$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của n là 2021

Chọn ý **A**.

Câu 34. Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $\log_2(\log_{2^a}(\log_{2^b}(2^{1000}))) = 0$. Giá trị lớn nhất của ab là?

A. 500

B. 375

C. 125

D. 250

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được.

$$\begin{aligned}\log_2(\log_{2^a}(\log_{2^b}(2^{1000}))) = 0 &\Leftrightarrow \log_{2^a}(\log_{2^b}(2^{1000})) = 1 \\ &\Leftrightarrow \log_{2^b}(2^{1000}) = 2^a \Leftrightarrow 2^{1000} = 2^{2^a \cdot b} \Leftrightarrow 2^a b = 1000\end{aligned}$$

Do a, b là các số nguyên dương nên ta có $1000 : 2^a$. Mặt khác ta lại có $1000 = 2^3 \cdot 5^3 \Rightarrow a \leq 3$

- Nếu $a = 3 \Rightarrow b = 125 \Rightarrow ab = 375$
- Nếu $a = 2 \Rightarrow b = 250 \Rightarrow ab = 500$
- Nếu $a = 1 \Rightarrow b = 500 \Rightarrow ab = 500$

Vậy giá trị lớn nhất của ab bằng 500

Chọn ý **A**.

Câu 35. Cho số thực dương $a > 1$, biết khi $a = a_0$ thì bất đẳng thức $x^a \leq a^x$ đúng với mọi số thực x lớn hơn 1. Hỏi mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1 < a_0 < 2$

B. $e < a_0 < e^2$

C. $2 < a_0 < 3$

D. $e^2 < a_0 < e^3$

Lời giải

Lấy logarit tự nhiên 2 vế ta được $\ln(x^a) \leq \ln(a^x) \Leftrightarrow a \ln x \leq x \ln a \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} \geq \frac{\ln x}{x}$

Ta xét $f(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e \Rightarrow f(x) \leq f(e) = \frac{\ln e}{e}$

Từ đó ta suy ra $a = e$.

Chọn ý **C**.

Câu 36. Cho hàm số $f(x) = e^x (a \sin x + b \cos x)$ với a, b là các số thực thay đổi và phương trình $f'(x) + f''(x) = 10e^x$ có nghiệm. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = a^2 - 2ab + 3b^2$

A. $10 + 10\sqrt{2}$

B. $20 + 10\sqrt{2}$

C. $10 + 20\sqrt{2}$

D. $20 + \sqrt{2}$

Lời giải

Do $f(x) = e^x (a \sin x + b \cos x)$ nên phương trình $f'(x) + f''(x) = 10e^x$ tương đương

$$\begin{aligned}e^x ((a-b)\sin x + (a+b)\cos x - 2b\sin x + 2a\cos x) &= 10e^x \\ \Leftrightarrow (a-3b)\sin x + (3a+b)\cos x &= 10\end{aligned}$$

Phương trình trên có nghiệm khi và chỉ khi $(a-3b)^2 + (3a+b)^2 \geq 100 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 10$

Khi đó ta có.

$$S = a^2 - 2ab + 3b^2 = \frac{10(a^2 - 2ab + 3b^2)}{10} \leq \frac{10(a^2 - 2ab + 3b^2)}{a^2 + b^2} = \frac{10(t^2 - 2t + 3)}{t^2 + 1} = f(t) \left(t = \frac{a}{b} \right)$$

Khảo sát hàm số $f(t) \Rightarrow f(t) \leq f(1 - \sqrt{2}) = 20 + 10\sqrt{2}$

Chọn ý **B**.

Câu 37. Cho 2 số thực a, b thỏa mãn $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{a+n} < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{b+n}$ với mọi số n nguyên dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|a - b|$?

- A. $\frac{1}{\ln 2} - \frac{3}{2}$ B. 1 C. $\frac{1}{\ln 2} - 1$ D. $\frac{1}{\ln 2} - 3$

Lời giải

Đây là một câu rất khó không phù hợp với kì thi THPT Quốc Gia nên chúng ta chỉ tham khảo.

Lấy logarit tự nhiên 2 vế ta có $a < \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - n < b, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} - x, x \geq 1$ khi đó ta có $\min|a - b| = \max_{x \geq 1} f(x) - \min_{x \geq 1} f(x)$

Mặt khác $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)} - 1 < 0, \forall x \geq 1$, do đó ta được

$$\begin{aligned} \max_{x \geq 1} f(x) - \min_{x \geq 1} f(x) &= f(1) - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{\ln 2} - 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} - x \right) \\ &= \frac{1}{\ln 2} - 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\ln 2} - 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{x(x+1)}} \\ &= \frac{1}{\ln 2} - 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x^2(x+1)^2}} = \frac{1}{\ln 2} - 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x+1) - x^2}{2x+1} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Vậy $\min|a - b| = \frac{1}{\ln 2} - \frac{3}{2}$

Chọn ý A.

Chú ý. Ở đây ta dùng tới quy tắc. Trong giải tích, Quy tắc L'Hôpital (phát âm như Lô-pi-tan) (cũng được gọi là quy tắc Bernoulli) là quy tắc sử dụng đạo hàm để tính toán các giới hạn có dạng vô định. Ứng dụng của quy tắc này là đưa dạng vô định trở thành dạng hữu hạn, cho phép tính toán giới hạn một cách dễ dàng. Dạng đơn giản nhất của quy tắc L'Hôpital được phát biểu như sau.

Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ hoặc $\pm\infty$ và $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ tồn tại thì ta luôn có

$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Việc lấy đạo hàm của tử số và mẫu số thường làm đơn giản thương số, hoặc làm

khử dạng vô định.

Câu 38. Cho các số thực dương x, y, z bất kì thỏa mãn $xyz = 10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\log^2 x + 1} + \sqrt{\log^2 y + 4} + \sqrt{\log^2 z + 4}$$

- A. $\sqrt{29}$ B. $\sqrt{23}$ C. $\sqrt{26}$ D. $\sqrt{27}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Mincowsky ta có

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{\log^2 x + 1} + \sqrt{\log^2 y + 4} + \sqrt{\log^2 z + 4} \geq \sqrt{\log^2 x + 1} + \sqrt{(\log y + \log z)^2 + 16} \\ &= \sqrt{\log^2 x + 1} + \sqrt{(\log yz)^2 + 16} = \sqrt{\log^2 x + 1} + \sqrt{\left(\log \frac{10}{x}\right)^2 + 16} \\ &= \sqrt{\log^2 x + 1} + \sqrt{(1 - \log x)^2 + 16} \geq \sqrt{(\log x + 1 - \log x)^2 + (1 + 4)^2} = \sqrt{26} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \sqrt[5]{10}, y = z = \sqrt[5]{100}$.

Câu 39. Cho 2 số thực x, y sao cho tổng của chúng không âm và đồng thời

$$\left(2^{2x-2y} + 4\right) \left(\frac{1+2^{x+y}}{1+4^x} + \frac{1+2^{x+y}}{1+4^y}\right) = 2^{2x-2y} + 2^{x-y+2} + 4$$

Biết rằng giá trị của biểu thức $P = x^3 + y^4 = \frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Hỏi biểu thức $m^2 + n$ có tất cả bao nhiêu ước số nguyên?

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

Lời giải

Ta có $T = \frac{a}{b} - \frac{a-m}{b-m} = \frac{m(b-a)}{b(b-m)} \geq 0$ khi $0 < m < a \leq b$. Nên $\frac{a}{b} \geq \frac{a-m}{b-m}$ (1)

Theo giả thiết ta có $x + y \geq 0 \Rightarrow 4^{x+y} \geq 1$. Ta có đánh giá sau.

$$0 < 4^x + 4^y - 2^{x+y+1} < 1 + 4^x + 4^y + 1 \leq 1 + 4^x + 4^y + 4^{x+y}$$

Khi đó sử dụng kết quả (1) ta có.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+4^x} + \frac{1}{1+4^y} &= \frac{1+4^x+4^y+1}{1+4^x+4^y+4^{x+y}} \geq \frac{2+4^x+4^y-(4^x+4^y-2^{x+y+1})}{1+4^x+4^y+4^{x+y}-(4^x+4^y-2^{x+y+1})} \\ &= \frac{2(1+2^{x+y})}{(1+2^{x+y})^2} = \frac{2}{1+2^{x+y}} \Rightarrow (1+2^{x+y}) \left(\frac{1}{1+4^x} + \frac{1}{1+4^y} \right) \geq 2 \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác } \frac{2^{2x-2y} + 2^{x-y+2} + 4}{2^{2x-2y} + 4} = \frac{(2^{x-y})^2 + 4 \cdot 2^{x-y} + 4}{(2^{x-y})^2 + 4} = 1 + \frac{4 \cdot 2^{x-y}}{(2^{x-y})^2 + 4}$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có } 1 + \frac{4 \cdot 2^{x-y}}{(2^{x-y})^2 + 4} \leq 1 + \frac{4 \cdot 2^{x-y}}{2\sqrt{4 \cdot (2^{x-y})^2}} = 2$$

$$\text{Vậy } VT \geq VP. \text{ Dấu "}" xảy ra khi } \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow P = \frac{3}{16} \Rightarrow m^2 + n = 25$$

Câu 40. Cho các số thực $a, b, c \in [2; 3]$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = 4^a + 4^b + 4^c - \frac{1}{4}(a+b+c)^3$$

là $\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $P = m + 2n$

A. $P = 257$

B. $P = 258$

C. $P = 17$

D. $P = 18$

Lời giải

Với dạng toán này ta sẽ xét tới bất đẳng thức phụ $4^t \leq mt + n, \forall t \in [2;3]$

Thay $t = 2, t = 3$ ta được hệ phương trình $\begin{cases} 16 = 2m + n \\ 64 = 3m + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 48 \\ n = -80 \end{cases}$

Giờ ta cần chỉ ra bất đẳng thức $4^t \leq 48t - 80$ đúng với mọi $t \in [2;3]$ là bài toán sẽ được giải quyết. Ta

xét $f(t) = 4^t - 48t + 80 \Rightarrow f'(t) = 4^t \ln 4 - 48; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \log_4 \frac{48}{\ln 4}$.

Nhận thấy rằng $f(2) = f(3) = 0; f\left(\log_4 \frac{48}{\ln 4}\right) < 0$ nên bất đẳng thức luôn đúng.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $t \in \{2;3\}$. Khi đó ta được

$$S = 4^a + 4^b + 4^c - \frac{1}{4}(a+b+c)^3 \leq 48 \sum a - \frac{1}{4}(\sum a)^3 - 240 \leq 16$$

Chọn ý **D**.

Bài tập tương tự

Cho 3 số thực $x, y, z \in [1;2]$. Tìm giá trị lớn nhất của $S = 3^x + 3^y + 3^z - \frac{3}{5}(x+y+z)^2$

A. 5

B. 15

C. 8

D. 12

Ta xét bất đẳng thức phụ $3^t \leq 6t - 3$

Chọn ý **D**.

Câu 41. Có tất cả bao nhiêu bộ số thực $(x; y; z)$ thỏa mãn $\begin{cases} 2^{\sqrt[3]{x^2}} \cdot 4^{\sqrt[3]{y^2}} \cdot 16^{\sqrt[3]{z^2}} = 128 \\ (xy^2 + z^4)^2 = 4 + (xy^2 - z^4)^2 \end{cases}$			
A. 3	B. 4	C. 1	D. 2
THPT Chuyên Quốc học Huế - Năm học 2017 – 2018			

Lời giải

Từ giả thiết ta có.

- $2^{\sqrt[3]{x^2}} \cdot 4^{\sqrt[3]{y^2}} \cdot 16^{\sqrt[3]{z^2}} = 128 \Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{x^2}} \cdot 4^{\sqrt[3]{y^2}} \cdot 16^{\sqrt[3]{z^2}} = 2^7 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{y^2} + 4\sqrt[3]{z^2} = 7 \quad (1)$
- $(xy^2 + z^4)^2 = 4 + (xy^2 - z^4)^2 \Leftrightarrow xy^2 z^4 = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{y^2} \sqrt[3]{z^4} = 1 \quad (2)$

Đặt $(\sqrt[3]{x}; \sqrt[3]{y}; \sqrt[3]{z}) \rightarrow (a, b, c)$. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$7 = a^2 + 2b^2 + 4c^2 = a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + c^2 + c^2 \geq 7\sqrt[7]{a^2 b^4 c^8} = 7$$

Dấu “=” xảy ra khi $a^2 = b^2 = c^2 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{z^2} = 1$

Vì $x > 0$ nên có tất cả 4 bộ số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn ý **B**.

Câu 42. Cho hàm số $f(x) = \log_3 \frac{m^2 x}{1-x}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao $f(a) + f(b) = 3$ với mọi số thực a, b thỏa mãn $e^{a+b} \leq e^{(a+b)}$. Tính tích các phần tử của tập hợp S.			
A. 27	B. $3\sqrt{3}$	C. $-3\sqrt{3}$	D. -27

Lời giải

Theo giả thiết ta có $e^{a+b-1} \leq a+b \Leftrightarrow e^{a+b-1} \leq 1+a+b-1$

Mặt khác theo một bất đẳng thức phụ mà ta đã chứng minh được ở các bài tập trước thì ta luôn có $e^{a+b-2} \geq 1+(a+b-1)$. Do đó dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a+b=1$

Khi đó ta có

$$f(a) + f(b) = 3 \Leftrightarrow f(a) + f(1-a) = \log_3 \frac{m^2 a}{1-a} + \log_3 \frac{m^2 (1-a)}{1-(1-a)} = 3 \Leftrightarrow m^4 = 27$$

Do đó tích các phần tử của S bằng $-3\sqrt{3}$

Chọn ý **C**.

Câu 43. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 5 \\ \log_m(3x+2y) - \log_3(3x-2y) = 1 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $3x+2y \leq 5$. Tìm giá trị lớn nhất của m ?

A. -5

B. $\log_3 5$

C. 5

D. $\log_5 3$

THPT Chuyên Lương Văn Tụy – Ninh Bình lần 1 năm 2017 – 2018

Lời giải

Từ phương trình 1 của hệ ta có $(3x-2y)(3x+2y) = 5 \neq 0 \Rightarrow 3x-2y = \frac{5}{3x+2y}$

Từ phương trình 2 của hệ ta có

$$\begin{aligned} \log_m 3 \log_3(3x+2y) - \log_3 \left(\frac{5}{2x+2y} \right) &= 1 \\ \Leftrightarrow \log_3(3x+2y)(\log_m 3 + 1) &= \log_3 5 + 1 \\ \Leftrightarrow \log_3(3x+2y) &= \frac{1 + \log_3 5}{1 + \log_m 3} \leq \log_3 5 \quad (3x+2y \leq 5) \Rightarrow \frac{1 - \log_m 5}{1 + \log_m 3} \leq 0 \end{aligned}$$

Giải bất phương trình trên ta được $m \in \left(\frac{1}{3}; 5 \right] \setminus \{1\}$

Khi đó hệ phương trình đầu có dạng $\begin{cases} (3x+2y)(3x-2y) = 5 \\ 3x+2y = 3^{\frac{1+\log_3 5}{1+\log_m 3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y = \frac{5}{M} \\ 3x+2y = M \end{cases}$ nên luôn có nghiệm. Vậy

giá trị lớn nhất của m để hệ có nghiệm là 5

Chọn ý **C**.

Câu 44. Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x}{9^x + m^2}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho $f(a) + f(b) = 1$ với mọi số thực a, b thỏa mãn $e^{a+b} \leq e^2(a+b-1)$. Tính tích các phần tử của S .

A. 81

B. -3

C. 3

D. -9

Lời giải

Theo giả thiết ta có $e^{a+b-2} \leq a+b-1 \Leftrightarrow e^{a+b-2} \leq 1 + (a+b-2)$.

Mặt khác theo một bất đẳng thức phụ mà ta đã chứng minh được ở các bài tập trước thì ta luôn có $e^{a+b-2} \geq 1 + (a+b-2)$. Do đó dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a+b=2$

Khi đó ta có.

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) &= \frac{9^a}{9^a + m^2} + \frac{9^{2-a}}{9^{2-a} + m^2} = \frac{162 + m^2(9^a + 9^{2-a})}{81 + m^2(9^{2-a} + 9^a) + m^4} = 1 \\ \Leftrightarrow m^4 + 81 &= 162 \Leftrightarrow m^4 = 81 \Leftrightarrow m = \pm 3 \end{aligned}$$

Chọn ý **D**.

Bài tập tương tự

1. Cho hàm số $f(t) = \frac{4^t}{4^t + m}$ với $m > 0$ là tham số thực. Biết rằng $f(x) + f(y) = 1$ với mọi x, y thỏa mãn $(x+y)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}$. Tìm giá trị của $f(t)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{5}{4}$

Hướng dẫn.

Chú ý từ giả thiết áp dụng bất đẳng thức AM – GM $\Rightarrow (x+y)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2} \Rightarrow x+y=1$

Đến đây bài toán sẽ quay về bài toán ở trên

Chọn ý B.

2. Cho hàm số $f(t) = \frac{16^t}{16^t + m^2}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho $f(a) + f(b) = 1$ với mọi số thực a, b thỏa mãn $e^{a+b} \leq e^2(a+b-1)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

- A. 8 B. 20 C. 11 D. 34

Chọn ý B.

Câu 45. Cho phương trình $3^x = \sqrt{a \cdot 3^x \cos(\pi x) - 9}$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số a thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình đã cho có đúng một nghiệm thực?			
A. 1	B. 2018	C. 0	D. 2

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có .

$$3^x = \sqrt{a \cdot 3^x \cos(\pi x) - 9} \Leftrightarrow 9^x = a \cdot 3^x \cos(\pi x) - 9 \left(3^x > 0 \right) \Leftrightarrow 3^x + 3^{2-x} = a \cdot \cos(\pi x) \quad (*)$$

Điều kiện cần. Nếu phương trình (*) có nghiệm duy nhất x_0 thì ta thấy rằng $2 - x_0$ cũng là nghiệm của (*) do đó $x_0 = 2 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1$. Thay vào (*) ta được $a = -6$.

Điều kiện đủ. Ngược lại nếu $a = -6$ thì phương trình (*) trở thành $3^x + 3^{2-x} = -6 \cdot \cos(\pi x)$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$3^x + 3^{2-x} \geq 2 \cdot \sqrt{3^x \cdot 3^{2-x}} = 6 \text{ mà } -6 \cdot \cos(\pi x) \leq 6$$

$$\text{Do đó } 3^x + 3^{2-x} = -6 \cdot \cos(\pi x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x + 3^{2-x} = 6 \\ -6 \cos(\pi x) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 3^{2-x} \\ \cos(\pi x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Chọn ý A.

Câu 46. Cho các số thực x, y, z không âm thỏa mãn $0 < (x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+z)^2 \leq 2$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 4^x + 4^y + 4^z + \ln(x^4 + y^4 + z^4) - \frac{3}{4}(x+y+z)^4$ là $\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $S = 2a + 3b$			
A. 13	B. 42	C. 54	D. 71

Lời giải

Theo giả thiết $0 < (x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+z)^2 \leq 2 \Rightarrow 2x^2 \leq 2 \Rightarrow x \leq 1$. Tương tự ta cũng sẽ được $0 \leq x, y, z \leq 1$. Khi đó ta có.

$$2(x^2 + y^2 + z^2) \leq 2(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + xz) \leq 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

$$\text{Đồng thời } x^4 + y^4 + z^4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \ln(x^4 + y^4 + z^4) \leq \ln(x^2 + y^2 + z^2) \leq 0$$

Xét bất đẳng thức phụ $4^t \leq mt + n$. Khi đó ta cần bất đẳng thức trên đúng với mọi $t \in [0; 1]$ nên thay $t = 0, t = 1$ vào giải hệ ta sẽ tìm được $m = 3, n = 1$. Xét hàm số $f(t) = 4^t - 3t - 1$ trên $[0; 1]$ ta có $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 4^t \ln 4 - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \log_4 \frac{3}{\ln 4}$. Lập bảng biến thiên ta dễ chỉ ra được bất đẳng thức trên luôn đúng. Dấu “=” xảy ra khi $t = 0 \vee t = 1$. Áp dụng vào bài toán ta có

$$P \leq 3(x + y + z) - \frac{3}{4}(x + y + z)^4 + 3 \leq \frac{21}{4}$$

Chọn ý C.

Bài tập tương tự.

Cho các số thực x, y, z không âm thỏa mãn $0 < (x + y)^2 + (y + z)^2 + (x + z)^2 \leq 18$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 4^{\frac{x}{3}} + 4^{\frac{y}{3}} + 4^{\frac{z}{3}} - \frac{1}{108}(x + y + z)^4$ là $\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $S = 2a + 3b$

A. 13

B. 42

C. 54

D. 71

Ta giả thiết ta cũng tìm điều kiện của 3 biến x, y, z và áp dụng nguyên cách làm của câu trên để giải quyết bài toán này

Chọn ý C.

Câu 47. Cho 2 hàm số $f(x) = (m - 1)6^x - \frac{2}{6^x} + 2m + 1, h(x) = (x - 6^{1-x})$. Tìm tham số m để hàm số $g(x) = h(x) \cdot f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là 0 với mọi $x \in [0; 1]$

A. $m = 1$

B. $m \leq \frac{1}{2}$

C. $m \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

D. $m \geq 1$

Lời giải

Ta thấy rằng với mọi m , ta luôn có $h(1)f(1) = 0$ nên bài toán trở thành tìm m để cho hàm số $g(x) = h(x) \cdot f(x) \geq 0 \forall x \in [0; 1]$. Dễ thấy với $x = 1$ thì bất đẳng thức luôn đúng, do đó ta sẽ xét trên $[0; 1)$.

Ta dễ thấy $h(x)$ là hàm đồng biến trên $[0; 1)$, $h(1) = 0 \Rightarrow h(x) < 0 \forall x \in [0; 1)$. Đến đây lại rút gọn bài toán trở thành tìm m để $f(x) \leq 0 \forall x \in [0; 1)$. Đặt $t = 6^x (t \in [1; 6))$ ta có

$$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow (m - 1)6^x - \frac{2}{6^x} + 2m + 1 \leq 0 \Rightarrow (m - 1)t^2 + 2mt - 2 + t \leq 0 \Rightarrow m \leq \frac{t^2 - t + 2}{t^2 + 2t}$$

Đến đây bài toán trở thành bài toán rất đơn giản, ta cần $m \leq \min_{[1; 6]} \frac{t^2 - t + 2}{t^2 + 2t} = \frac{1}{2}$

Chọn ý B.

Câu 48. Số thực a nhỏ nhất để bất đẳng thức $\ln(x + 1) \geq x - ax^2$ đúng với mọi số thực x là $\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $T = 2m + 3n$

A. $T = 5$

B. $T = 8$

C. $T = 7$

D. $T = 11$

Lời giải

Đây là một câu khá cơ bản trong việc ứng dụng đạo hàm tìm điều kiện có nghiệm.

Biến đổi giả thiết ta có $a \geq \frac{x - \ln(x+1)}{x^2}, \forall x > 0$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x - \ln(x+1)}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2\ln(x+1) - x - \frac{x}{x+1}}{x^3}$

Xét $h(x) = 2\ln(x+1) - x - \frac{x}{x+1} \Rightarrow h'(x) = -\frac{x^2}{(x+1)^2} < 0, \forall x > 0 \Rightarrow h(x) < h(0) = 0$

Vậy $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) < \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow a \geq \frac{1}{2}$.

Chọn ý B.

Bài tập tương tự.

Số thực a nhỏ nhất để bất đẳng thức $\ln(x+1) \leq x - \frac{x^2}{2} + ax^3$ đúng với mọi số thực x là $\frac{m}{n}$ với m, n là

các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $T = 2m + 3n$

A. 8

B. 20

C. 11

D. 34

Tương tự như câu trên thì đây cũng là một câu khá cơ bản trong việc ứng dụng đạo hàm tìm điều kiện có nghiệm.

Chọn ý C.

Câu 49. Cho các số thực $a, b, c \in [1; 2]$ thỏa mãn $\log_2^3 a + \log_2^3 b + \log_2^3 c \leq 1$. Tính giá trị biểu thức

$S = a + b + c$ khi biểu thức $P = a^3 + b^3 + c^3 - 3(\log_2 a^a + \log_2 b^b + \log_2 c^c)$ đạt giá trị lớn nhất?

A. 5

B. $3.2^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

C. 6

D. 4

THPT Chuyên Thái Bình lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Ý tưởng vẫn sẽ như bài trước ta phải sử dụng tới bất đẳng thức phụ.

Ta sẽ có đánh giá $t^3 - 3t \log_2 t \leq \log_2^3 t + 1$. Để chứng minh đơn giản ta sẽ đặt $\log_2 t = x$. Khi đó ta cần chứng minh $t^3 - 3tx \leq x^3 + 1$. Xét hàm số

$$f(t) = t - \log_2 t, \forall t \in [1; 2] \Rightarrow f'(t) = 1 - \frac{1}{t \ln 2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow f(t) \leq 1$$

Khi đó $t - x \leq 1 \Leftrightarrow t - x - 1 \leq 0 \Rightarrow t^3 - 3tx - x^3 - 1 = (t - x - 1)(t^2 + t(x+1) + x^2 - x + 1) \leq 0$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh luôn đúng.

Áp dụng vào bài toán ta có $P = \sum a^3 - 3(\sum a \log_2 a) \leq \sum \log_2^3 a + 3 \leq 1 + 3 = 4$

Chọn ý D.

Bài tập tương tự.

Cho các số thực $a, b, c \in [1; 2]$ thỏa mãn $\log_2^3 a + \log_2^3 b + \log_2^3 c \leq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$P = a^3 + b^3 + c^3 - 3(\log_2 a^a + \log_2 b^b + \log_2 c^c)$?

A. 3

B. 6

C. $3\sqrt[3]{4}$

D. 5

Chọn ý D.

Câu 50. Cho 2 số thực x, y phân biệt thỏa mãn $x, y \in (0; 2018)$. Đặt

$$S = \frac{1}{y-x} \left(\ln \frac{y}{2018-y} - \ln \frac{x}{2018-x} \right).$$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S \geq \frac{2}{1009}$

B. $S \leq \frac{2}{1009}$

C. $S \geq \frac{4}{1009}$

D. $S \leq \frac{4}{1009}$

Lời giải

Một bài toán chỉ nên tham khảo vì có sử dụng tới kiến thức không trong chương trình phổ thông cơ bản. Xét hàm số $f(t) = \ln \left(\frac{t}{2018-t} \right)$ và tham số u nằm giữa x và y . Theo định lý Lagrange ta có

$$S = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(u) = \frac{2018}{u(2018-u)} \stackrel{AM-GM}{\geq} \frac{2018}{\left(\frac{u + 2018 - u}{2} \right)^2} = \frac{2}{1009}$$

Chọn ý **A**.

Định lý Lagrange - Lagrange's Mean Value Theorem.

Nếu $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ và đồng thời có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ thì tồn tại

$$c \in (a; b) \text{ sao cho } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Chứng minh. Xét hàm số $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$. Ta có $F(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$, có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và $F(a) = F(b)$. Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $F'(c) = 0$. Mà

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Định lý Rolle là một hệ quả của định lý Lagrange trong trường hợp $f(a) = f(b)$.

Câu 51. Cho 3 số a, b, c là các số thực lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

$$P = \frac{4}{\log_{\sqrt{bc}} a} + \frac{1}{\log_{ac} \sqrt{b}} + \frac{8}{3 \log_{ab} \sqrt[3]{c}}$$

A. 20

B. 10

C. 18

D. 12

THPT Chuyên Hùng Vương – Gia Lai – Lần 2 năm 2017 – 2018

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{4}{2 \log_{bc} a} + \frac{1}{\frac{1}{2} \log_{ac} b} + \frac{8}{\log_{ab} c} = 2 \log_a bc + 2 \log_b ac + 8 \log_c ab \\ &= 2 \log_a b + 2 \log_a c + 2 \log_b a + 2 \log_b c + 8 \log_c a + 8 \log_c b \\ &= (2 \log_a b + 2 \log_b a) + (2 \log_a c + 8 \log_c a) + (2 \log_b c + 8 \log_c b). \end{aligned}$$

Vì a, b, c là các số thực lớn hơn 1 nên $\log_a b, \log_b a, \log_a c, \log_c a, \log_b c, \log_c b > 0$.

Do đó áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có.

$$P \geq 2\sqrt{2 \log_a b \cdot 2 \log_b a} + 2\sqrt{2 \log_a c \cdot 8 \log_c a} + 2\sqrt{2 \log_b c \cdot 8 \log_c b} = 4 + 8 + 8 = 20.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \log_a b = \log_b a \\ \log_a c = 4 \log_c a \\ \log_b c = 4 \log_c b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = a^2 \\ c = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \sqrt{c} > 1$$

Chọn ý **A**.

Câu 52. Cho a, b, c, d là các số thực dương có tổng bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (1 + a^2 + b^2 + a^2b^2)(1 + c^2 + d^2 + c^2d^2)$

Lời giải

Từ giả thiết ta có.

$$P = (1 + a^2 + b^2 + a^2b^2)(1 + c^2 + d^2 + c^2d^2) = \prod (a^2 + 1) \Rightarrow \ln P = \sum \ln(a^2 + 1)$$

Ta có đánh giá sau $\ln(t^2 + 1) \geq mt + n$, để tìm được hai số m, n ta sẽ sử dụng tới bất đẳng thức tiếp tuyến, đây là một phương pháp rất hay để chứng minh các bất đẳng thức đối xứng với các biến độc lập nhau.

Cơ sở của phương pháp

- Nếu đường thẳng $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $A(x_0; y_0)$, A không phải điểm uốn thì khi đó tồn tại một khoảng D chứa x_0 sao cho $f(x) \geq ax + b$ hoặc $f(x) \leq ax + b$. Đẳng thức xảy ra khi $x = x_0$
- Nếu đường thẳng $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $A(x_0; y_0)$ thì ta luôn phân tích được $f(x) - (ax + b) = (x - x_0)^k g(x), k \geq 2$

Sau đây ta áp dụng lý thuyết trên vào bài toán trên. Chú ý ta có $\sum \ln(a^2 + 1)$ là một biểu thức đối xứng theo bốn biến a, b, c, d đồng thời giả thiết cũng là đối xứng nên ta sẽ dự đoán dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = d = \frac{1}{4}$. Quay lại bất đẳng thức phụ mà ta đang đi tìm hệ số $\ln(t^2 + 1) \geq mt + n$, ta sẽ tìm m, n

sao cho hai đồ thị hàm số $y = \ln(t^2 + 1), y = mt + n$ tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ $t = \frac{1}{4}$ ta được

$$\begin{cases} m = \frac{8}{17} \\ n = -\frac{2}{17} + \ln \frac{17}{16} \end{cases}. \text{ Vậy ta có bất đẳng thức phụ là } \ln(t^2 + 1) \geq \frac{8}{17}t - \frac{2}{17} + \ln \frac{17}{16}, \text{ dễ thấy bất đẳng thức}$$

này luôn đúng, khi đó áp dụng vào bài toán ta có.

$$\ln P = \sum \ln(a^2 + 1) \geq \frac{8}{17} \sum a + 4 \left(-\frac{2}{17} + \ln \frac{17}{16} \right) = 4 \ln \frac{17}{16} \Rightarrow P \geq \left(\frac{17}{16} \right)^4$$

Câu 53. Cho 3 số thực x, y, z không âm thỏa mãn $2^x + 4^y + 8^z = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2}$$

Lời giải

Chú ý với điều kiện x, y, z không âm thì ta luôn có $2^x, 4^y, 8^z \geq 1$.

Theo nguyên lý Dirichlet ta có

$$\begin{aligned} (2^x - 1)(4^y - 1) &\geq 0 \Rightarrow 2^x \cdot 4^y \geq 2^x + 4^y - 1 \\ \Rightarrow 2^x \cdot 4^y \cdot 8^z &\leq (2^x + 4^y - 1) \cdot 8^z = 2^x \cdot 8^z + 4^y \cdot 8^z - 8^z \\ &\geq 2^x + 8^z - 1 + 4^y + 8^z - 1 - 8^z = 2^x + 4^y + 8^z - 2 \end{aligned}$$

Chú ý rằng khi $2^x, 4^y, 8^z \geq 1$ thì $8^z \leq 2$

$$\Rightarrow 2^x \cdot 4^y \cdot 8^z \geq 2^x + 4^y + 8^z - 2 = 2 \Rightarrow x + 2y + 3z \geq 1 \Rightarrow S \geq \frac{1}{6}$$

Chọn ý **C**.

Nguyên lí Dirichlet

Nguyên lý những cái lồng và các chú thỏ đã được biết đến từ rất lâu. Ngay trong chương trình phổ thông cơ sở chúng ta cũng đã làm quen với phương pháp giải toán này. Thực ra nguyên lý này mang tên nhà bác học người Đức Pête Gutxtap Legien Dirichlet (1805-1859). Nguyên lý phát biểu rất đơn giản. Nếu chúng ta nhốt thỏ vào các lồng mà số lồng ít hơn số thỏ, thì thỏ nào cũng có một lồng nhốt ít nhất hai con thỏ. Nguyên lý Dirichlet có rất nhiều ứng dụng trong Toán Học, điển hình là bất đẳng thức. Chúng thường được áp dụng để giải một số bài toán bất đẳng thức không thuần nhất. Hôm nay tôi sẽ đưa ra một số ví dụ để các bạn hiểu hơn về vấn đề này. Trong 3 số a, b, c luôn có 2 số nằm cùng phía với số m bất kỳ (Hay lớn hơn bằng m hoặc bé hơn bằng m). Đây chính là cơ sở lời giải của bài toán trên.

Câu 54. Cho các số thực $a, b, c \geq 1$ thỏa mãn $a + b + c = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_3 a + 2\log_9 b + 3\log_{27} c$

A. $\log_3 5$

B. 1

C. $\log_3 15$

D. $\log_3 \frac{5}{3}$

Lời giải

Giả thiết tương đương $P = \log_3 a + 2\log_9 b + 3\log_{27} c = \log_3 a + \log_3 b + \log_3 c = \log_3 (abc)$

Theo nguyên lý Dirichlet ta có

$$\begin{aligned} (a-1)(b-1) &\geq 0 \Leftrightarrow ab \geq a+b-1 \Rightarrow abc \geq c(a+b-1) = ac+bc-c \\ &\geq a+c-1+b+c-1-c = a+b+c-2 = 3 \\ &\Rightarrow P = \log_3 (abc) \geq \log_3 3 = 1 \end{aligned}$$

Chọn ý B.

Câu 55. Biết a là số thực dương bất kỳ để bất đẳng thức $a^x \geq 9x+1$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a \in (10^3; 10^4]$

B. $a \in (10^2; 10^3]$

C. $a \in (0; 10^2]$

D. $a \in (10^4; +\infty)$

THPT Chuyên ĐH Vinh – lần 1 - năm 2017 – 2018

Lời giải

Bất đẳng thức $a^x \geq 9x+1$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì nó phải đúng với $x=1 \Rightarrow a > 10$.

Do $a > 1$ nên hàm số $y = a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $\mathbb{R}$ có bề lõm quay lên trên.

Hay hàm số là hàm số lõm trên $\mathbb{R}$

Do hai đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = 9x+1$ luôn đi qua điểm $A(0;1)$ nên bất đẳng thức $a^x \geq 9x+1$ nghiệm đúng với mọi x khi đường thẳng $y = 9x+1$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm

$$A(0;1) \Leftrightarrow y'(0) = 9(y' = a^x \ln a) \Leftrightarrow \ln a = 9 \Leftrightarrow a = e^9$$

Chọn ý A.

Câu 56. Gọi a là giá trị nhỏ nhất của $f(n) = \frac{\prod_{i=2}^n \log_3 i}{9^n}$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Có bao nhiêu số tự nhiên n để $f(n) = a$?

A. 2

B. Vô số

C. 1

D. 4

Lời giải

Từ giả thiết ta có $f(n+1) = \frac{f(n)\log_3(n+1)}{9}, f(n) = \frac{f(n-1)\log_3 n}{9}$

Để $f(n)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì ta có $\begin{cases} f(n) \leq f(n+1) \\ f(n) \leq f(n-1) \end{cases}$

$$\begin{cases} f(n) \leq \frac{f(n)\log_3(n+1)}{9} \\ \frac{f(n-1)\log_3 n}{9} \leq f(n-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(n+1) \geq 9 \\ \log_3 n \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow 3^9 - 1 \leq n \leq 3^9$$

Vậy có 2 giá trị của n thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn ý **A**.

Câu 57. Cho 2 số thực x, y không âm thỏa mãn $2^{\frac{x+1}{x}} = \log_2(14 - (y-2)\sqrt{y+1})$. Tính giá trị của biểu thức $P = x^2 + y^2 - xy + 1$?

A. 3

B. 1

C. 2

D. 4

THPT Quảng Xương – Thanh Hóa lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Khi đã làm quen với các dạng toán ở dạng 5 này thì bài toán này trở nên vô cùng bình thường.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $2^{\frac{x+1}{x}} \geq 2^{2\sqrt{\frac{1}{x}}} = 4$

Mặt khác ta có $14 - (y-2)\sqrt{y+1} = 14 - (y+1)\sqrt{y+1} + 3\sqrt{y+1}$. Đặt $t = \sqrt{y+1} > 0$.

Xét hàm số $f(t) = -t^3 + 3t + 14, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow f(t) \leq 16 \Rightarrow \log_2(14 - (y-2)\sqrt{y+1}) \leq 4$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow P=2$

Chọn ý **C**.

Bài tập tương tự

Tính giá trị của biểu thức $P = x^2 + y^2 - xy + 1$ biết rằng.

$$4^{\frac{x^2+\frac{1}{x^2}-1}{x^2}} = \log_2[14 - (y-2)\sqrt{y+1}] \left(x \neq 0, -1 \leq y \leq \frac{13}{2} \right)$$

A. 3

B. 4

C. 1

D. 2

THPT Chuyên Lương Văn Chánh – Phú Yên năm học 2017 – 2018

Chọn ý **D**.

Câu 58. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $4^x + 9^y + 16^z = 2^x + 3^y + 4^z$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2^{x+1} + 3^{y+1} + 4^{z+1}$

A. $\frac{9+\sqrt{87}}{2}$

B. $\frac{7+\sqrt{87}}{2}$

C. $\frac{5+\sqrt{87}}{2}$

D. $\frac{3+\sqrt{87}}{2}$

Lời giải

Đặt $(2^x, 3^y, 4^z) \rightarrow (a, b, c) \Rightarrow \begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c \end{cases}$

Khi đó ta có $P = 2a + 3b + 4c = 2\left(a - \frac{1}{2}\right) + 3\left(b - \frac{1}{2}\right) + 4\left(c - \frac{1}{2}\right) + \frac{9}{2}$

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$P \leq \sqrt{(2^2 + 3^2 + 4^2) \left[\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 \right]} + \frac{9}{2} = \frac{9+\sqrt{87}}{2}$$

Câu 59. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{\ln x + 1}{\sqrt{\ln^2 x + 1}} + m \right|$ trên đoạn $[1; e^2]$ đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{-1+\sqrt{2}}{4}$

C. $\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$

Lời giải

Ta có $\max_{[1; e^2]} y = \max_{[0; 2]} \left| \frac{t+1}{\sqrt{t^2+1}} + m \right|$. Xét $f(t) = \frac{t+1}{\sqrt{t^2+1}} + m, f'(t) = \frac{1-t}{(\sqrt{t^2+1})^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Mặt khác ta có

$$f(0) = m+1, f(1) = m+\sqrt{2}, f(2) = m+\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\Rightarrow \min_{[1; e^2]} y = \min \left\{ |m+1|; |m+\sqrt{2}| \right\} \geq \frac{1}{2} (|m+1| + |m+\sqrt{2}|) \geq \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$$

Chọn ý C.

Câu 60. Biết α là số thực lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\alpha} \leq e, \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\alpha \in (0; 1)$

B. $\alpha \in (1; 2)$

C. $\alpha \in (-1; 0)$

D. $\alpha \in (2; 3)$

Lời giải

Nhận xét. Đây là một bài toán dành cho các bạn ôn thi HSG không thi THPT Quốc Gia.

Gọi $f(n)$ là số thực thỏa mãn đẳng thức

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+f(n)} = e \Leftrightarrow (n+f(n)) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \Leftrightarrow f(n) = \frac{1}{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)} - n$$

Trên khoảng $(1; +\infty)$ ta xét hàm số $f(x) = \frac{1}{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} - x$ ta có $f'(x) = \frac{1}{x(x+1) \ln^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} - 1$

Mặt khác $\ln(t+1) < \frac{t}{\sqrt{t+1}} \forall t > 0$. Thật vậy ta có.

$$g(t) = \ln(t+1) - \frac{t}{\sqrt{t+1}} \Rightarrow g'(t) = \frac{2+t}{2\sqrt{t+1}(t+1)} - \frac{1}{t+1} = \frac{(\sqrt{1+t}-1)^2}{2\sqrt{t+1}(t+1)} > 0$$

Nên suy ra $g(t) > g(0) = 0 \Rightarrow \ln(1+t) < \frac{t}{\sqrt{t+1}}$. Do đó ta được

$$\ln^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \Leftrightarrow x(x+1) \ln^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) < 1 \Rightarrow f'(x) \forall x > 0$$

Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$. Do đó ta suy ra $\alpha \leq f(n) \Rightarrow \alpha = f(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1$

Câu 61. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a;b)$ thỏa mãn $0 < a, b \leq 100$ sao cho đồ thị của 2 hàm số $y = \frac{1}{a^x} + \frac{1}{b}$ và $y = \frac{1}{b^x} + \frac{1}{a}$ cắt nhau tại đúng 2 điểm phân biệt?

A. 9704

B. 9702

C. 9698

D. 9700

Lời giải

Ta thấy $a > 1; b > 1$, nếu $a = b$ 2 đường cong trùng nhau nên có vô số điểm chung, loại.

Vì vai trò của a, b như nhau nên ta chỉ cần tìm cặp số nguyên $(a;b)$ với $a > b > 1$ sao cho phương trình

$$\frac{1}{a^x} + \frac{1}{b} = \frac{1}{b^x} + \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a^x} - \frac{1}{b^x} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt.}$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{1}{a^x} - \frac{1}{b^x} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow f'(x) = -\left(\frac{1}{a}\right)^x \ln a + \left(\frac{1}{b}\right)^x \ln b, f(1) = 0$$

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = \log_{\frac{b}{a}} \left(\frac{\ln b}{\ln a} \right), f'(x) > 0 \text{ khi } x > x_0, f'(x) < 0 \text{ khi } x < x_0.$$

$$\text{Nếu } x_0 = 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{b}{a}} \left(\frac{\ln b}{\ln a} \right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b} \Leftrightarrow (a;b) = (4;2).$$

$$\text{Chú ý xét hàm số } f(t) = \frac{\ln t}{t} \Rightarrow \frac{\ln 3}{3} > \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 4}{4} > \frac{\ln 5}{5} > \dots > \frac{\ln 100}{100}$$

$$\text{Khi đó } f(x) \geq f(x_0) = f(1) = 0 \Rightarrow f(x) \text{ có đúng 1 nghiệm } x_0 = 1$$

Nếu $x_0 \neq 1$, khi đó vẽ bảng biến thiên cho hàm số ta thấy phương trình $f(x) = 0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Với mỗi $b = k \in \{2, 3, \dots, 99\} \Rightarrow a \in \{k+1, \dots, 100\}$ tức có $100 - k$ cách chọn a.

Vậy có $\sum_{k=2}^{99} (100 - k) = 4851$ cặp $(a;b) (a > b > 1)$ và loại đi cặp $(4;2)$ ta có 4850 cặp.

Xét tương tự với trường hợp $b > a > 1$ ta có tất cả 9700 cách chọn.

Chọn ý D.

Câu 62. Cho 2 số thực x, y không âm thỏa mãn đẳng thức sau.

$$\log_2 \left(\log_3 \left(-x^2 - 9y^2 + 6xy - 2x + 6y + 2 \right) \right) = \log_3 \left(\log_2 \left(9x^2 + y^2 - 6xy - 6x + 2y + 3 \right) \right)$$

Biết rằng xy^2 được viết dưới dạng $\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên không âm và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản.

Hỏi $m+n$ có giá trị bằng bao nhiêu

A. 8

B. 9

C. 10

D. 11

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\log_2 \left(\log_3 \left(-x^2 - 9y^2 + 6xy - 2x + 6y + 1 \right) \right) = \log_3 \left(\log_2 \left(9x^2 + y^2 - 6xy - 6x + 2y + 3 \right) \right)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(\log_3 \left(3 - (x - 3y + 1)^2 \right) \right) = \log_3 \left(\log_2 \left((3x - y - 1)^2 + 2 \right) \right)$$

$$\text{Ta thấy rằng } \begin{cases} \log_2 \left(\log_3 \left(3 - (x - 3y + 1)^2 \right) \right) \leq \log_2 (\log_3 3) = 0 \\ \log_3 \left(\log_2 \left((3x - y - 1)^2 + 2 \right) \right) \geq \log_3 (\log_2 2) = 0 \end{cases} \text{ . Do đó } VT \leq VP.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ 3x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2} \Rightarrow xy^2 = \frac{1}{8}$$

Chọn ý **A**.

Câu 63. Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $0 < x - y < \frac{\pi}{2}$ và đồng thời

$$(\tan(x-y))^{\sin(x-y)} + (\cot(x-y))^{\cos(x-y)} = \log_2(4 - x^2 y^2)$$

Tính giá trị của biểu thức $\sin\left(x^2 y^2 + x - y + \frac{\pi}{4}\right)$?

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. 0

C. 1

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

+ Nếu $0 < x - y \leq \frac{\pi}{4}$, áp dụng tính chất của lượng giác và bất đẳng thức AM – GM ta có

$$(\tan(x-y))^{\sin(x-y)} + (\cot(x-y))^{\cos(x-y)} \geq (\tan(x-y))^{\sin(x-y)} + (\cot(x-y))^{\sin(x-y)} \geq 2$$

+ Nếu $\frac{\pi}{4} \leq x - y < \frac{\pi}{2}$, , áp dụng tính chất của lượng giác và bất đẳng thức AM – GM ta có

$$(\tan(x-y))^{\sin(x-y)} + (\cot(x-y))^{\cos(x-y)} \geq (\tan(x-y))^{\cos(x-y)} + (\cot(x-y))^{\cos(x-y)} \geq 2$$

Vậy $(\tan(x-y))^{\sin(x-y)} + (\cot(x-y))^{\cos(x-y)} \geq 2$. Mặt khác $\log_2(4 - x^2 y^2) \leq \log_2(4) = 2$.

Nên dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} xy = 0 \\ x - y = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \sin\left(x^2 y^2 + x - y + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

Chọn ý **C**.

Câu 64. Cho các số thực a, b, c có tổng bằng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau

$$P = \sqrt{4^a + 9^b + 16^c} + \sqrt{9^a + 16^b + 4^c} + \sqrt{16^a + 4^b + 9^c}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$P \geq 3\sqrt[6]{(4^a + 9^b + 16^c)(9^a + 16^b + 4^c)(16^a + 4^b + 9^c)}$$

Theo bất đẳng thức Holder ta có

$$\begin{aligned} (4^a + 9^b + 16^c)(9^a + 16^b + 4^c)(16^a + 4^b + 9^c) &\geq \left(\sqrt[3]{4^{a+b+c}} + \sqrt[3]{9^{a+b+c}} + \sqrt[3]{16^{a+b+c}}\right)^3 \\ &= (4 + 9 + 16)^3 = 3^9 \Rightarrow P \geq 3\sqrt[6]{3^9} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

Câu 65. Cho 3 số thực thỏa mãn $x \in [2; 4]; y \in [0; 4]; z \in [1; 5]$. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức

$T = (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 - 5(\log_3(x-1) + 2\log_5(y+1) + 4\log_5 z)$ bằng?

A. 10

B. 11

C. $8\sqrt{5} - 14$

D. 12

Lời giải

Theo Cauchy – Schwarz, ta có.

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 = \left(1\sqrt{x} + 1\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2z}\right)^2 \leq \left(1 + 1 + \frac{1}{2}\right)(x + y + 2z) = \frac{5}{2}(x + y + 2z)$$

Dấu “=” xảy ra khi. $\sqrt{x} = \sqrt{y} = 2\sqrt{z} \Leftrightarrow x = y = 4z$ (1)

Suy ra $T \leq \frac{5}{2}(x + y + 2z) - 5(\log_3(x-1) + 2\log_5(y+1) + 4\log_5 z)$

$$\Rightarrow T \leq \frac{5}{2}(x+y+2z-2\log_3(x-1)-4\log_5(y+1)-8\log_5 z)$$

$$\Rightarrow T \leq \frac{5}{2}(x+y+2z-2\log_3(x-1)-4\log_5(y+1)-8\log_5 z)$$

$$\Rightarrow T \leq \frac{5}{2}(x-2\log_3(x-1))+\frac{5}{2}(y-4\log_5(y+1))+5(z-4\log_5 z)$$

Áp dụng kết quả quan trọng $x-(a-1)\log_a x-1 \leq 0, \forall x \in [1; a]$.

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } x=1 \text{ hoặc } x=a \Rightarrow \begin{cases} x-\log_3(x-1)=((x-1)-2\log_3(x-1)-1)+2 \leq 2 \\ y-4\log_5(y+1)=((y+1)-4\log_5(y+1)-1) \leq 0 \\ z-4\log_5 z=(z-4\log_5 z-1)+1 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow T \leq 10$$

Dấu “=” xảy ra khi $x=y=4z=4$.

Câu 66. Cho các số thực x, y, z . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau

$$P = \sqrt{3+2011^{x+y-2z}} + \sqrt{3+2011^{y+z-2x}} + \sqrt{3+2011^{z+x-2y}}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Mincowsky và bất đẳng thức AM – GM ta có.

$$\begin{aligned} \sum \sqrt{3+2011^{x+y-2z}} &\geq \sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)^2 + \left(2011^{\frac{x+y-2z}{2}} + 2011^{\frac{y+z-2x}{2}} + 2011^{\frac{z+x-2y}{2}}\right)^2} \\ &\geq \sqrt{27 + \left[3\sqrt[3]{2011^{\frac{x+y-2z}{2} + \frac{y+z-2x}{2} + \frac{z+x-2y}{2}}}\right]^2} = 6 \end{aligned}$$

Câu 67. Cho hai các số thực a, b, c, d, e dương thỏa mãn $a+b+c+d+e=1000$ và

$$\begin{cases} a-b+c-d+e > 0 \\ a+b-c+d-e > 0 \\ -a+b+c-d+e > 0 \\ a-b+c+d-e > 0 \\ -a+b-c+d+e > 0 \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = (a+c)^{b+d}$

Lời giải

Một câu chỉ mang tính tham khảo cho những bạn có tìm tòi thôi nhé.

$$\text{Đặt } \begin{cases} a-b+c-d+e=h \\ a+b-c+d-e=k \\ -a+b+c-d+e=l \\ a-b+c+d-e=m \\ -a+b-c+d+e=n \end{cases} \text{ ta thấy rằng } h+k+n+m+l=a+b+c+d+e=1000 \text{ và đồng thời}$$

$2a=h+k, 2b=k+l, 2c=l+m, 2d=m+n, 2e=n+h$. Từ đó suy ra h, k, l, m, n đều là các số chẵn. Bên

cạnh đó ta suy ra được $a+c=\frac{1}{2}(h+k+l+m)=\frac{1}{2}(1000-n), b+d=\frac{1}{2}(1000-h)$.

Để $M=(a+c)^{b+d}$ đạt giá trị lớn nhất thì n và h có giá trị nhỏ nhất, mà n, h chia hết cho 2 nên

$$h=n=2 \Rightarrow \max M = 499^{499}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} k = 9974 - 2t \\ l = 2, 4, \dots, 2t \\ l + m = 2 + 2t \\ k + l + m = 996 \end{cases} \quad (t = \overline{1, 496})$$

Câu 68. Giá trị nhỏ nhất của m để hệ phương trình sau có nghiệm .

$$\begin{cases} \log_2(x+y) + \log_3(xy+2) = 2 \\ x^3 + y^3 - 2xy = m \end{cases}$$

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Đặt $\log_2(x+y) = a$, $\log_3(xy+2) = b$ khi đó $a+b=2$

Lại có. $(x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow (2^a)^2 \geq 4(3^b - 2) = 4(3^{2-a} - 2) \Leftrightarrow 12^a + 8 \cdot 3^a - 36 \geq 0$

Xét hàm $g(a) = 12^a + 8 \cdot 3^a - 36$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, $g(1) = 0 \Rightarrow a \geq 1$

$$m = (x+y)^3 - 3xy(x+y) - 2xy = (2^a)^3 - 3(3^{2-a} - 2) \cdot 2^a - 2(3^{2-a} - 2) = f(a)$$

Hàm f đồng biến trên $[1; +\infty)$ suy ra $m \geq f(1) = 1$

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi phương trình thứ 2 có nghiệm $a \geq 1 \Leftrightarrow m \geq 1$

Câu 69. Có tất cả bao nhiêu cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện

$$\begin{cases} 3^{|x^2-2x-3|-\log_3 5} = 5^{-(y+4)} \\ 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \leq 8 \end{cases} \quad ?$$

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra $\frac{3^{|x^2-2x-3|}}{3^{\log_3 5}} = 5^{-(y+4)} \Leftrightarrow \frac{3^{|x^2-2x-3|}}{5} = 5^{-(y+4)} \Leftrightarrow 3^{|x^2-2x-3|} = 5^{-(y+3)} \geq 1 \Rightarrow y \leq -3$

$$\Rightarrow 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 = -4y - (1-y) + (y+3)^2 = -3y - 1 + (y+3)^2 \geq 8 \quad (y \leq -3)$$

$$\Rightarrow 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 = -4y - (1-y) + (y+3)^2 = -3y - 1 + (y+3)^2 = 8$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $y = -3$. Thế vào giả thiết ta được $|x^2 - 2x - 3| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

Vậy tồn tại 2 bộ số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 70. Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn $2z \geq y^2$. Khi biểu thức

$$P = \log_2^2 xy + \log_2(x^3 y^3 + x^3 z^3) + \sqrt{-y^4 - xy^2 + 2zy^2 + 2xz}$$

đạt giá trị nhỏ nhất, hãy tính $\log_2 \sqrt{xyz}$?

A. 3

B. 2

C. -1

D. 0

Lời giải

Ta có $P = \log_2^2 xy + \log_2(x^3 y^3 + x^3 z^3) + \sqrt{-y^4 - xy^2 + 2zy^2 + 2xz}$

$$= \log_2^2 xy + \log_2(x^3 y^3 + x^3 z^3) + \sqrt{(2z - y^2)(x + y)} \geq \log_2^2 xy + \log_2(x^3 y^3 + x^3 z^3)$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $x^3 y^3 + z^3 x^3 \geq 2x^3 \sqrt{y^3 z^3}$

$$\Rightarrow P \geq \log_2^2 xy + \log_2 \left(2(x^2 yz)^{\frac{3}{2}} \right) = \log_2^2 xy + \frac{3}{2} \log_2 (x^2 yz) + 1$$

• **Trường hợp 1.** $y \leq z \Rightarrow P \geq \log_2^2 xy + 3 \log_2 xy + 1 \geq -\frac{5}{4}$

• **Trường hợp 2.** $y \geq z \Rightarrow P \geq \log_2^2 xz + 3 \log_2 xz + 1 \geq -\frac{5}{4}$

Vậy $\min P = -\frac{5}{4}$, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{\sqrt{2}}{16}, y = z = 4 \Rightarrow \log_2 \sqrt{xyz} = -1$.

Câu 71. Giả sử k là số thực lớn nhất sao cho bất đẳng thức $\frac{1}{\sin^2 x} < \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{k}{\pi^2}$ đúng với mọi giá trị của $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó giá trị của k là?

A. 5

B. 2

C. 4

D. 6

Lời giải

Ta có $\frac{1}{\sin^2 x} < \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{k}{\pi^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} < 1 - \frac{k}{\pi^2}$.

Xét $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta sẽ chứng minh $f'(x) = -\frac{2 \cos x}{\sin^3 x} + \frac{2}{x^3} > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Thật vậy $f'(x) = \frac{2 \sin^3 x - 2x^3 \cos x}{x^3 \sin^3 x} > 0$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x - x^3 \cos x > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin x > x \sqrt[3]{\cos x}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Ta có $g'(x) = \frac{2 \cos^2 x + 1}{3 \cos x \sqrt[3]{\cos x}} - 1 = \frac{2(\sqrt[3]{\cos x})^6 - 3(\sqrt[3]{\cos x})^4 + 1}{3 \cos x \sqrt[3]{\cos x}}$

$$= \frac{\left[\left(\sqrt[3]{\cos x} \right)^2 - 1 \right]^2 \left[2 \left(\sqrt[3]{\cos x} \right)^2 + 1 \right]}{3 \cos x \sqrt[3]{\cos x}} > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Do đó $g(x) > g(0) = 0$. Suy ra $f'(x) > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Vẽ bảng biến thiên ta suy ra $f(x) < 1 - \frac{k}{\pi^2}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{\pi^2} \leq 1 - \frac{k}{\pi^2} \Leftrightarrow k \leq 4$.

Câu 72. Cho 4 số thực a, b, c, d sao cho $c + d < 0$ đồng thời thỏa mãn

$$\begin{cases} \log(1 + a^2 + b^2) = 1 + \log(a + b) \\ 2^{-c} \cdot 2^{-d} \cdot 2^{\frac{-4}{c+d}} + \ln(c^2 + d^2 + 2cd + 4c + 4d + 5) = 16 \end{cases}$$

Gọi M và m lần lượt là GTNN và GTLN của biểu thức $P = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$. Tính giá trị của $S = M + n$?

A. $6\sqrt{2}$

B. $8\sqrt{2}$

C. $10\sqrt{2}$

D. $12\sqrt{2}$

Lời giải

Biến đổi giả thiết đầu tiên ta có

$$\log(1+a^2+b^2)=1+\log(a+b) \Leftrightarrow a^2+b^2+1=10(a+b) \Leftrightarrow (a-5)^2+(b-5)^2=49$$

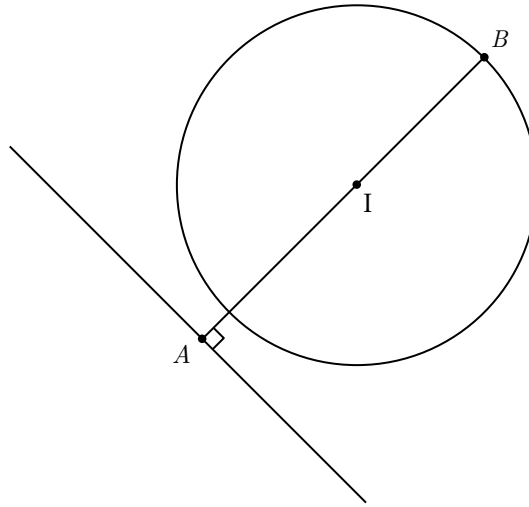
Giả thiết 2 tương đương

$$2^{-c} \cdot 2^{-d} \cdot 2^{-\frac{4}{c+d}} + \ln(c^2+d^2+2cd+4c+4d+5)=16 \Leftrightarrow 2^{-c-d-\frac{4}{c+d}} + \ln((c+d+2)^2+1)=16$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $2^{-c-d-\frac{4}{c+d}} \geq 2^{2\sqrt{4}} = 2^4 = 16$. Mặt khác

$$\ln((c+d+2)^2+1) \geq 0 \Rightarrow VT \geq 16.$$

Dấu “=” xảy ra khi $c+d=-2$. Ta sẽ sử dụng phương pháp hình học cho bài này. Xét đường tròn tâm $I(5;5)$ bán kính $R=7$, và đường thẳng $(\Delta): x+y+2=0$. Gọi điểm $A(a;b), B(c;d)$. Ta có hình vẽ dưới đây.



$$\text{Ta có } P = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = AB \Rightarrow \begin{cases} AB_{\min} = d(0; \Delta) - R = 6\sqrt{2} - 7 \\ AB_{\max} = AB_{\min} + 2R = 6\sqrt{2} + 7 \end{cases}.$$

Câu 73. Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn xác định trên $\mathbb{R}$, sao cho $f(0) \neq 0$ và phương trình

$$4^x - 4^{-x} = f(x)$$

có đúng 10 nghiệm thực phân biệt. Số nghiệm thực của phương trình $4^x + 4^{-x} = f^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2$ là

A. 10

B. 20.

C. 5.

D. 15.

Lời giải

Từ giả thiết $f(0) \neq 0$ ta suy ra $x=0$ không phải là nghiệm của hai phương trình $4^x - 4^{-x} = f(x)$ và

$$4^x + 4^{-x} = f^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2. \text{ Ta có } 4^x + 4^{-x} = f^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow (2^x - 2^{-x})^2 = f^2\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 2^{-x} = f\left(\frac{x}{2}\right) & (1) \\ 2^x - 2^{-x} = -f\left(\frac{x}{2}\right) & (2) \end{cases}$$

$$\text{Phương trình (2)} \Leftrightarrow 2^{-x} - 2^x = f\left(-\frac{x}{2}\right) \quad (3)$$

Xét phương trình (1) đặt $t = \frac{x}{2}$. Khi đó ta có $4^t - 4^{-t} = f(t)$ (4)

Theo giả thiết phương trình $4^x - 4^{-x} = f(x)$ có 10 nghiệm phân biệt nên phương trình (4) có 10 nghiệm t . Suy ra phương trình (1) có 10 nghiệm x phân biệt. Giả sử 10 nghiệm đó là $x_1; x_2; \dots; x_{10}$.

Chứng minh tương tự ta có phương trình (3) có 10 nghiệm phân biệt là $-x_1; -x_2; \dots; -x_{10}$. Dễ thấy số nghiệm của phương trình (bằng tổng số nghiệm phương trình (1) và (3) (nghiệm trùng nhau tính 1 lần). Suy ra phương trình có 20 nghiệm.

Câu 74. Xét các số $a, b, c > 1$ thỏa mãn $\log_a b + 2\log_b c + 3\log_c a = 8$. Giá trị lớn nhất của

$$P = 2\log_a c + 3\log_c b + 12\log_b a$$

thuộc khoảng nào dưới đây?

A. (15;20).

B. (25;30).

C. (20;25).

D. (30;35).

Lời giải

Đặt $x = \log_a b, y = \log_b c, z = \log_c a$. Từ giả thiết ta có
$$\begin{cases} x; y; z > 0 \\ x + 2y + 3z = 8 \\ xyz = 1 \end{cases}$$

Đặt $T = 2\log_a c + 3\log_c b + 12\log_b a$, suy ra $T = \frac{12}{x} + \frac{3}{y} + \frac{2}{z}$.

Ta có $T = \frac{12}{x} + \frac{2y+3z}{yz} = \frac{12}{x} + \frac{8-x}{\frac{1}{x}} = \frac{12}{x} - x^2 + 8x$.

Ta có $x + 2y + 3z \geq x + 2\sqrt{6yz} = x + \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{x}} \Rightarrow x + \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{x}} \leq 8 \Leftrightarrow \sqrt{x^3} - 8\sqrt{x} + 2\sqrt{6} \leq 0$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{6})(x + \sqrt{6x} - 2) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{14} - \sqrt{6}}{2} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{6} \Leftrightarrow 5 - \sqrt{21} \leq x \leq 6.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{12}{x} - x^2 + 8x$ với $x \in [5 - \sqrt{21}; 6]$, ta có $f'(x) = -\frac{12}{x^2} - 2x + 8 = \frac{-2x^3 + 8x^2 - 12}{x^2}$.

Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^3 + 8x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx -1,086 \notin [5 - \sqrt{21}; 6] \\ x \approx 3,514 \in [5 - \sqrt{21}; 6] \\ x \approx 1,572 \in [5 - \sqrt{21}; 6] \end{cases}$.

Ta có
$$\begin{cases} f(5 - \sqrt{21}) = 9 + 5\sqrt{21} \approx 31,91 \\ f(6) = 14 \\ f(3,514) \approx 19,18 \\ f(1,572) \approx 17,39 \end{cases}$$
.

Vậy $\max T = 9 + 5\sqrt{21}$ đạt được khi $x = 5 - \sqrt{21}$ và y, z thỏa mãn

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ xyz = 1 \\ 2y = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y + 3z = 3 + \sqrt{21} \\ 2y \cdot 3z = \frac{15 + 3\sqrt{21}}{2} \\ 2y = 3z \end{cases} \Leftrightarrow 2y = 3z = \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3 + \sqrt{21}}{4} \\ z = \frac{3 + \sqrt{21}}{6} \end{cases}$$

Câu 75. Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = \sqrt[3]{e}$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = 2\ln a \ln b + 7\ln b \ln c + 3\ln c \ln a$$

 là phân số tối giản $\frac{p}{q}$ và p, q là các số tự nhiên. Giá trị $q - 3p$ bằng

A. 10.

B. 11.

C. 12.

D. 9.

Lời giải

Đặt $x = \ln a; y = \ln b; z = \ln c$ ta có

$$x + y + z = \ln a + \ln b + \ln c = \ln(abc) \Leftrightarrow e^{x+y+z} = abc = e^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x + y + z = \frac{1}{3}$$

Ta có

$$\begin{aligned} T &= 2xy + 7yz + 3zx = 2xy + (7y + 3x)z = 2xy + (7y + 3x)\left(\frac{1}{3} - x - y\right) = -8xy + \frac{7}{3}y - 7y^2 + x - 3x^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{3}x(8y - 1) + \frac{(8y - 1)^2}{36} - \frac{(8y - 1)^2}{36} + \frac{7}{3}y^2 - \frac{7}{9}y + \frac{T}{3} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[x + \frac{1}{6}(8y - 1)\right]^2 + \frac{5}{9}y^2 - \frac{1}{3}y + \frac{T}{3} - \frac{1}{36} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[x + \frac{1}{6}(8y - 1)\right]^2 = -\frac{5}{9}y^2 + \frac{1}{3}y - \frac{T}{3} + \frac{1}{36} = -\frac{5}{9}\left(y^2 - \frac{3}{5}y + \frac{9}{100}\right) - \frac{T}{3} + \frac{7}{90} \\ &\Leftrightarrow \left[x + \frac{1}{6}(8y - 1)\right]^2 = -\frac{5}{9}\left(y - \frac{3}{10}\right)^2 - \frac{T}{3} + \frac{7}{90} \geq 0 \Rightarrow \frac{T}{3} \leq \frac{7}{90} - \frac{5}{9}\left(y - \frac{3}{10}\right)^2 \leq \frac{7}{90} \end{aligned}$$

Vậy giá trị lớn nhất của T là $T = \frac{7}{30}$. Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} y - \frac{3}{10} = 0 \\ \left[x + \frac{1}{6}(8y - 1)\right]^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{10} \\ x = -\frac{7}{30} \end{cases}. \text{ Khi đó } z = \frac{4}{15}.$$

Vậy $p = 7; q = 30 \Rightarrow q - 3p = 9$.

Câu 76. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $3 + (1 - 2^{|x-4|}) \cdot 2^{|y-3|} = (1 - 2^{|y-3|}) \cdot 2^{2-|x-4|}$. Gọi M, m là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 6x - 2y + 12$. Giá trị $M.m$ bằng

A. 1302.

B. 2697.

C. 4263.

D. 4165.

Lời giải

Đặt $2^{|x-4|} = a, 2^{|y-3|} = b$ ($a \geq 1, b \geq 1$). Khi đó

$$\begin{aligned} 3 + (1 - 2^{|x-4|}) \cdot 2^{|y-3|} &= (1 - 2^{|y-3|}) \cdot 2^{2-|x-4|} \Leftrightarrow 3 + (1 - a)b = \left(1 - \frac{1}{b}\right)\frac{4}{a} \\ &\Leftrightarrow 3ab + ab^2 - a^2b^2 = 4b - 4 \Leftrightarrow (a^2b^2 - 3ab - 4) - (ab^2 - 4b) = 0 \\ &\Leftrightarrow (ab - 4)(ab - b + 1) = 0. \end{aligned}$$

Do $ab - b + 1 = a(b - 1) + 1 > 0 \Rightarrow ab = 4 \Rightarrow |x - 4| + |y - 3| = 2$

Xét trong hệ trục tọa độ Oxy , gọi $M(x; y), I(-3; 1)$. Khi đó $P = (x + 3)^2 + (y - 1)^2 + 2 = MI^2 + 2$ và M di động trên 4 cạnh hình vuông $ABCD$, trong đó $A(2; 3), B(4; 1), C(6; 3), D(4; 5)$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} MI_{\min} = IA = \sqrt{29} \\ MI_{\max} = IC = \sqrt{85} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = P_{\min} = 31 \\ M = P_{\max} = 87 \end{cases} \Rightarrow M.m = 2697.$$

Câu 77. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\left(\frac{1}{4^x} + \frac{1}{9^y}\right)(2^x + 3^y) = 4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2^x}{1+3^y} + \frac{3^x}{1+2^y} + \frac{1}{1+2^x \cdot 3^y}$$

thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(\sqrt{3}; 4)$.

B. $(0; \sqrt{3})$.

C. $(5; 2020)$.

D. $(4; 5)$.

Lời giải

Đặt $a = 2^x, b = 3^y$, khi đó $a, b > 0$ thỏa mãn $\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)(a + b) = 4$ (*)

Và $P = \frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} + \frac{1}{1+ab}$. Từ điều kiện ta có

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{4}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow (a+b)ab \geq a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow a+b \geq 2.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \left(\frac{a}{1+b} + 1\right) + \left(\frac{b}{1+a} + 1\right) - 2 + \frac{1}{1+ab} = (a+b+1)\left(\frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+a}\right) - 2 + \frac{1}{1+ab} \\ &\geq (a+b+1)\left(\frac{4}{2+a+b}\right) - 2 + \frac{1}{1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = \frac{2(a+b)}{2+a+b} + \frac{4}{4+(a+b)^2}. \end{aligned}$$

Đặt $t = a + b$, ta có $t \geq 2$ và $P \geq \frac{2t}{t+2} + \frac{4}{t^2+4}$.

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{2t}{t+2} + \frac{4}{t^2+4}, \text{ ta có } f'(t) = \frac{4}{(t+2)^2} - \frac{8t}{(t^2+4)^2} = \frac{4(t-2)^2(t^2+2t+4)}{(t+2)^2(t^2+4)^2} \geq 0, \forall t \geq 2$$

Hơn nữa hàm số $f(t)$ liên tục trên $[2; +\infty)$, suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[2; +\infty)$.

$$\Rightarrow \min_{[2; +\infty)} f(t) = f(2) = \frac{3}{2}. \text{ Do đó } P \geq \frac{3}{2}. \text{ Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow a = b = 1 \text{ hay } x = y = 0.$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{3}{2} \in (0; \sqrt{3}).$$

Câu 78. Đồ thị của các hàm số $y = a^x, y = a^{-x}, y = 2$ ($a > 1$) đôi một cắt nhau tại ba điểm A, B, C phân biệt, không thẳng hàng. Biết tam giác ABC đều, khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a \in [3; 4)$.

B. $a \in [2; 3)$.

C. $a \in [4; 5)$.

D. $a \in (1; 2)$.

Lời giải

Ta có A là giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = a^x, y = a^{-x}$. Ta tính được $A(0; 1)$.

Ta có B là giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = a^x, y = 2$. Ta tính được $B(\log_a 2; 2)$.

Ta có C là giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = a^{-x}, y = 2$. Ta tính được $C(-\log_a 2; 2)$.

$$\text{Ta tính được } AB = AC = \sqrt{\log_a^2 2 + 1}, BC = \sqrt{4 \log_a^2 2}$$

$$\text{Để tam giác } ABC \text{ đều thì } AB = AC = BC \text{ hay } \sqrt{\log_a^2 2 + 1} = \sqrt{4 \log_a^2 2}$$

$$\Leftrightarrow \log_a^2 2 + 1 = 4 \log_a^2 2 \Leftrightarrow 3 \log_a^2 2 = 1 \Leftrightarrow \log_a 2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \log_2 a = \sqrt{3} \Leftrightarrow a = 2^{\sqrt{3}}.$$

Câu 79. Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^{2x} = b^{3y} = a^6 b^6$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4xy + 2x - y$ có dạng $m + n\sqrt{165}$ (với m, n là các số tự nhiên), tính $S = m + n$.

A. 58.

B. 54.

C. 56.

D. 60.

Lời giải

Theo bài ra ta có

$$a^{2x} = b^{3y} = a^6 b^6 \Leftrightarrow \begin{cases} a^{2x} = a^6 b^6 \\ b^{3y} = a^6 b^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \log_a(a^6 b^6) \\ 3y = \log_b(a^6 b^6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 6 + 6\log_a b \\ 3y = 6 + 6\log_b a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3(1 + \log_a b) \\ y = 2(1 + \log_b a) \end{cases}$$

Vì $a > 1, b > 1$ nên $\log_a b > \log_a 1 = 0$. Do đó

$$P = 4xy + 2x - y = 24(1 + \log_a b)(1 + \log_b a) + 6 + 6\log_a b - 2 - 2\log_b a$$

$$P = 52 + 30\log_a b + 22\log_b a \geq 52 + 2\sqrt{30\log_a b \cdot 22\log_b a} = 52 + 4\sqrt{165}$$

Vậy $\min P = 52 + 4\sqrt{165}$ khi $30\log_a b = 22\log_b a \Leftrightarrow \log_a b = \sqrt{\frac{11}{15}} \Leftrightarrow b = a^{\sqrt{\frac{11}{15}}}$.

Suy ra $m = 52, n = 4 \Rightarrow m + n = 56$.

Câu 80. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $e^{a+b} \leq e(a+b)$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a^3 + b^3} + \frac{1}{ab} + 2020$ bằng

A. $2024 - 2\sqrt{3}$.

B. 2028.

C. $2020 + \sqrt{3}$.

D. $2024 + 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Xét bất đẳng thức phụ mà ta đã quá quen thuộc $e^{a+b} \leq e(a+b)$ (*)

Đặt $t = a + b$ điều kiện $t > 0$, khi đó (trở thành $e^t \leq et \Leftrightarrow e^t - et \leq 0$).

Xét hàm số $f(t) = e^t - et; t \in (0; +\infty)$, có $f'(t) = e^t - e \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên $(0; +\infty) \Rightarrow f(t) \geq 0 \quad \forall t \in (0; +\infty)$

Điều kiện $\Leftrightarrow f(t) \leq 0 \Rightarrow f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hay $a + b = 1$.

$$\text{Khi đó, } P = \frac{1}{(a+b)^3 - 3ab(a+b)} + \frac{1}{ab} + 2020 = \frac{1}{1-3ab} + \frac{1}{ab} + 2020$$

$$\text{Đặt } u = ab, \text{ có } 0 < ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \Rightarrow 0 < ab \leq \frac{1}{4} \Rightarrow u \in \left(0; \frac{1}{4}\right].$$

$$\text{Khi đó } P = \frac{1}{1-3u} + \frac{1}{u} + 2020 = g(u), \text{ có } g'(u) = \frac{3}{(1-3u)^2} - \frac{1}{u^2} = \frac{-6u^2 + 6u - 1}{(1-3u)^2 u^2}$$

$$g'(u) = 0 \Leftrightarrow -6u^2 + 6u - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \\ u = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Lập biến thiên của hàm số $g(u)$ trên $\left(0; \frac{1}{4}\right]$, ta được $\min P = 2024 + 2\sqrt{3}$.

Câu 81. Cho các số thực $a > 3, b > 1, c > 1$ thỏa mãn

$$\log_{a(b+2c)} \frac{bc(a-3)}{ab+2ca} + \log_{bc(a-3)} (ab+2ac) = 1.$$

Giá trị nhỏ nhất của $T = a + b + c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. (19;20).

B. (16;17).

C. (18;19).

D. (17;18).

Lời giải

Đặt $\begin{cases} ab+2ca=x \\ bc(a-3)=y \end{cases}$, từ giả thiết suy ra $x > 0, 0 < y \neq 1$.

Theo bài ra ta có $1 = \log_x \frac{y}{x} + \log_y x = \log_x y - 1 + \log_y x \Leftrightarrow \log_x y + \log_y x = 2$.

Do đó $\log_x y + \frac{1}{\log_x y} = 2 \Rightarrow \log_x^2 y - 2\log_x y + 1 = 0 \Leftrightarrow (\log_x y - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \log_x y = 1 \Leftrightarrow y = x$.

Từ đó suy ra $ab + 2ca = bc(a - 3) \Leftrightarrow ab + 2ca + 3bc = abc \Leftrightarrow \frac{1}{c} + \frac{2}{b} + \frac{3}{a} = 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz cho bộ 3 số ta có

$$\begin{aligned} & \left[(\sqrt{c})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{a})^2 \right] \left[\left(\frac{1}{\sqrt{c}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}} \right)^2 \right] \geq (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \\ & \Leftrightarrow (a + b + c) \left(\frac{1}{c} + \frac{2}{b} + \frac{3}{a} \right) \geq (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \Leftrightarrow T \geq (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^2. \end{aligned}$$

Dấu "=" của bất đẳng thức trên xảy ra khi

$$\begin{cases} \frac{1}{c} = \frac{\sqrt{2}}{b} = \frac{\sqrt{3}}{a} \\ \frac{1}{c} + \frac{2}{b} + \frac{3}{a} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{c} + \frac{\sqrt{2}}{c} + \frac{\sqrt{3}}{c} = 1 \\ b = c\sqrt{2} \\ a = c\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ b = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{6} \\ a = 3 + \sqrt{3} + \sqrt{6} \end{cases}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \approx 17,19 \in (17; 18)$.

Câu 82. Biết rằng x, y là các số thực thỏa mãn $3^{2y}(3^x + 3^{4y}) = 81(3^{-x} + 3^{-4y})$. Giá trị của biểu thức $x + 6y$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 3^{2y}(3^x + 3^{4y}) &= 81(3^{-x} + 3^{-4y}) \Leftrightarrow 3^{2y}(3^x + 3^{4y}) = 81\left(\frac{1}{3^x} + \frac{1}{3^{4y}}\right) \\ &\Leftrightarrow 3^{2y}(3^x + 3^{4y}) = 81\left(\frac{3^{4y} + 3^x}{3^x \cdot 3^{4y}}\right) \Leftrightarrow 3^{2y} = \frac{81}{3^x \cdot 3^{4y}} \\ &\Leftrightarrow 3^{2y} \cdot 3^x \cdot 3^{4y} = 81 \Leftrightarrow 3^{x+6y} = 81 \Leftrightarrow x + 6y = 4. \end{aligned}$$

Câu 83. Cho a, b là các số thực dương và $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $2^a - \frac{2}{2^b} + \frac{3^b}{3} - \frac{1}{3^a} = 1 - a - b$. Để giá trị lớn nhất của biểu thức $P = e^{ax+(b-1)y} - ae^{x-y} - b + 2020a$ bằng 1 thì a thuộc khoảng nào sau đây

A. $\left(0; \frac{1}{2018}\right)$.

B. $\left(\frac{1}{2015}; \frac{1}{2012}\right)$.

C. $\left(\frac{1}{2012}; \frac{1}{2009}\right)$.

D. $\left(\frac{1}{2018}; \frac{1}{2015}\right)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 2^a - \frac{2}{2^b} + \frac{3^b}{3} - \frac{1}{3^a} = 1 - a - b \Leftrightarrow 2^a - \frac{1}{3^a} + a = 2^{1-b} - \frac{1}{3^{1-b}} + 1 - b.$$

$$\text{Đặt } f(t) = 2^t - 3^{-t} + t, f'(t) = 2^t \ln 2 + 3^{-t} \ln 3 + 1 > 0 \Rightarrow f(a) = f(1-b) \Leftrightarrow a = 1-b.$$

$$\text{Xét } P = e^{ax+(b-1)y} - ae^{x-y} - b + 2020a = e^{a(x-y)} - ae^{x-y} + 2021a - 1.$$

Đặt $t = e^{x-y} > 0 \Rightarrow P(t) = t^a - at + 2021a - 1$, có $P'(t) = at^{a-1} - a = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Ta có $\max_{(0;+\infty)} P(t) = P(1) = 1 - a + 2021a - 1 = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2020}$.

Câu 84. Cho các số thực x, y thỏa mãn $\ln y \geq \ln(x^3 + 2) - \ln 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$H = e^{4y-x^3-x-2} - \frac{x^2+y^2}{2} + x(y+1) - y$$

A. 0.

B. $\frac{1}{e}$.

C. 1.

D. e .

Lời giải

Có $\ln y \geq \ln(x^3 + 2) - \ln 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 2 > 0 \\ 3y \geq x^3 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\sqrt[3]{2} \\ 4y \geq x^3 + 2 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\sqrt[3]{2} \\ 4y - x^3 - x - 2 \geq y - x \end{cases}$.

Ta có $H = e^{4y-x^3-x-2} - \frac{x^2+y^2}{2} + x(y+1) - y = e^{4y-x^3-x-2} - \frac{(y-x)^2 + 2xy}{2} + xy - (y-x)$.

Khi đó $H \geq e^{y-x} - \frac{(y-x)^2}{2} - (y-x)$. Đặt $t = y - x$, ta có

$$t \geq \frac{x^3 + 2}{3} - x = \frac{x^3 - 3x + 2}{3} = \frac{(x-1)(x^2 + x - 2)}{3} = \frac{(x-1)^2(x+2)}{3} \geq 0 \quad \forall x > -\sqrt[3]{2}$$

Khi đó $H \geq e^t - \frac{t^2}{2} - t$. Xét $T(t) = e^t - t - \frac{1}{2}t^2$ với $t \geq 0$

Có $T'(t) = e^t - t - 1$; $T''(t) = e^t - 1$,

Ta thấy $T''(t) = e^t - 1 \geq 0 \quad \forall t \in [0; +\infty)$; $T''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

$\Rightarrow T'(t)$ đồng biến trên nửa khoảng $[0; +\infty)$

$\Rightarrow T'(t) \geq T'(0) \quad \forall t \in [0; +\infty)$.

$\Rightarrow T'(t) \geq 0, \forall t \in [0; +\infty)$; $T'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

$\Rightarrow T(t)$ đồng biến trên nửa khoảng $[0; +\infty)$

Như vậy thì $\min_{[0;+\infty)} T = T(0) = 1 \Rightarrow H \geq 1$; dấu bằng xảy ra khi $x = y = 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của H là 1.

Câu 85. Cho các số thực a, b, c thuộc khoảng $(1; +\infty)$ và thỏa mãn

$$\log^2_{\sqrt{a}} b + \log_b c \cdot \log_b \left(\frac{c^2}{b} \right) + 9 \log_a c = 4 \log_a b.$$

Giá trị của biểu thức $\log_a b + \log_b c^2$ bằng

A. 1.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

$$\log^2_{\sqrt{a}} b + \log_b c \cdot \log_b \left(\frac{c^2}{b} \right) + 9 \log_a c = 4 \log_a b \Leftrightarrow (2 \log_a b)^2 + \log_b c \cdot (2 \log_b c - 1) + 9 \log_a c = 4 \log_a b$$

$$\Leftrightarrow (2 \log_a b)^2 + \log_b c \cdot 2 \log_b c - \log_b c + 9 \log_a b \cdot \log_b c - 4 \log_a b = 0 \quad (1).$$

Đặt $\begin{cases} \log_a b = x \\ \log_b c = y \end{cases}$. Do a, b, c thuộc khoảng $(1; +\infty)$ nên $x > 0; y > 0$.

Khi đó (1) trở thành $4x^2 + 2y^2 - y + 9xy - 4x = 0$

$$\Leftrightarrow (4x^2 + xy) + (2y^2 + 8xy) - (y + 4x) = 0 \Leftrightarrow (4x + y)(x + 2y - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4x \\ x + 2y = 1 \end{cases}.$$

Do $x > 0; y > 0$ nên $y = -4x$ bị loại. Khi đó $x + 2y = 1$

Suy ra $\log_a b + 2\log_b c = 1 \Leftrightarrow \log_a b + \log_b c^2 = 1$

Câu 86. Cho các số thực x, y sao cho $x > 1, y > 1$ và thỏa mãn

$$\log_3 x \log_3 6y + 2\log_3 x \log_3 2y(3 - \log_3 2xy) = \frac{9}{2}.$$

Giá trị của biểu thức $P = x + 2y$ gần với giá trị nào nhất trong các số sau đây

A. 10.

B. 8.

C. 9.

D. 7.

Lời giải

Đặt $a = \log_3 x$ và $b = \log_3 2y$ trong đó $a > 0$ và $b > \log_3 2$.

Khi đó phương trình ở đề bài trở thành $a(b+1) + 2ab(3-a-b) = \frac{9}{2}$. Điều này tương đương với

$$2ba^2 + (2b^2 - 7b - 1)a + \frac{9}{2} = 0.$$

Ta xem đẳng thức trên là phương trình bậc hai ẩn a . Nhận thấy $b > 0$ và $\frac{9}{2} > 0$ nên phương trình có nghiệm dương khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \begin{cases} S > 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{(2b^2 - 7b - 1)}{2b} > 0 \\ (2b^2 - 7b - 1)^2 - 36b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 2 < b < \frac{7 + \sqrt{57}}{4} \\ (b-1)^2(4b^2 - 20b + 1) \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 2 < b < \frac{7 + \sqrt{57}}{4} \\ \begin{cases} (b-1)^2 = 0 \\ (4b^2 - 20b + 1) \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 2 < b < \frac{7 + \sqrt{57}}{4} \\ \begin{cases} b = 1 \\ b \geq \frac{5 + 2\sqrt{6}}{2} \\ b \leq \frac{5 - 2\sqrt{6}}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow b = 1 \end{aligned}$$

Khi đó $a = \frac{3}{2}$.

Vậy $P = 3^a + 3^b = \sqrt{27} + 3 \approx 8.2$.

Câu 87. Gọi A thuộc đồ thị hàm số $y = 2^x$; B thuộc đồ thị hàm số $y = 2^{-x}$; C, D là hai điểm thuộc trục hoành sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang cân với đáy lớn AB , $AB = 2CD$ và có chu vi bằng 20 đơn vị. Diện tích của hình thang $ABCD$ nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. (20;25).

B. (27;33).

C. (34;39).

D. (41;45).

Lời giải

Gọi $A(a; 2^a) \Rightarrow B(-a; 2^a)$.

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow H(0; 2^a) \Rightarrow$ Trung điểm CD là $O(0; 0) \Rightarrow D\left(\frac{a}{2}; 0\right)$.

Ta có $AB = 2|a|$; $CD = |a|$; $AD = \sqrt{2^{2a} + \frac{a^2}{4}}$.

Yêu cầu bài toán $2\sqrt{2^{2a} + \frac{a^2}{4}} + 3|a| = 20 \Rightarrow a \approx 2,5823$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD).OH = \frac{1}{2}.3|a|.2^a \approx 23,19791302.$$

Câu 88. Cho các số thực dương a, b, c, m, n, p thỏa mãn các điều kiện $2^{2017}\sqrt[m]{m} + 2^{2017}\sqrt[n]{n} + 3^{2017}\sqrt[p]{p} \leq 7$ và $4a + 4b + 3c \geq 42$. Tìm khẳng định đúng với biểu thức $S = \frac{2(2a)^{2018}}{m} + \frac{2(2b)^{2018}}{n} + \frac{3c^{2018}}{p}$?

A. $42 < S \leq 7.6^{2018}$

B. $S > 6^{2018}$

C. $7 \leq S \leq 7.6^{2018}$

D. $4 \leq S \leq 42$

Lời giải

Đặt $2a = x_1; 2b = x_2; c = x_3; {}^{2017}\sqrt[m]{m} = y_1; {}^{2017}\sqrt[n]{n} = y_2; {}^{2017}\sqrt[p]{p} = y_3$.

Khi đó ta có $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 42 \\ 2y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq 7 \end{cases}$ và $P = 2\frac{x_1^{2018}}{y_1^{2017}} + 2\frac{x_2^{2018}}{y_2^{2017}} + 3\frac{x_3^{2018}}{y_3^{2017}}$.

$$\Rightarrow 7^{2017}P \geq (2y_1 + 2y_2 + 3y_3)^{2017} \left(2\frac{x_1^{2018}}{y_1^{2017}} + 2\frac{x_2^{2018}}{y_2^{2017}} + 3\frac{x_3^{2018}}{y_3^{2017}} \right)$$

Theo bất đẳng thức Holder ta có $(2y_1 + 2y_2 + 3y_3) \dots (2y_1 + 2y_2 + 3y_3) \left(2\frac{x_1^{2018}}{y_1^{2017}} + 2\frac{x_2^{2018}}{y_2^{2017}} + 3\frac{x_3^{2018}}{y_3^{2017}} \right)$

$$\geq \left({}^{2018}\sqrt{(2y_1)^{2017} \cdot 2\frac{x_1^{2018}}{y_1^{2017}}} + {}^{2018}\sqrt{(2y_2)^{2017} \cdot 2\frac{x_2^{2018}}{y_2^{2017}}} + {}^{2018}\sqrt{(3y_3)^{2017} \cdot 3\frac{x_3^{2018}}{y_3^{2017}}} \right)^{2018} = (2x_1 + 2x_2 + 3x_3)^{2018} \geq 42^{2018}.$$

$$\Rightarrow P \geq 7.6^{2018}.$$

Nhận xét. Câu này quá sức khủng khiếp tuy vậy là câu trong đề thi thử của **Nguyễn Khuyến!**

Câu 89. Cho a, x là hai số dương khác 1. Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương n sao cho

$$\left| \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_{a^2} x} + \dots + \frac{1}{\log_{a^n} x} \right| \leq \frac{4095}{|\log_a x|}.$$

Tính tổng T tất cả các phần tử của S .

A. $T = 8010$

B. $T = 4005$

C. $T = 8090$

D. $T = 4095$

Lời giải

Ta có $\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_{a^2} x} + \dots + \frac{1}{\log_{a^n} x} = \log_x a + 2\log_x a + \dots + n\log_x a = \frac{n(n+1)}{2}\log_x a$.

Mà $\frac{4095}{|\log_a x|} = 4095|\log_x a|$. Do đó $n(n+1) \leq 8190 \Rightarrow -91 \leq n \leq 90 \Rightarrow 1 \leq n \leq 90$.

Tổng các giá trị n thỏa mãn yêu cầu bài toán là $T = 4095$.

Câu 90. Cho $0 < a \neq 1$, phương trình $\log_a(a^{2x^2+4x} + a^2) = (x+1)^2 + \log_a\left(a + \frac{1}{a}\right)$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow \log_a(a^{2x^2+4x} + a^2) = x^2 + 2x + \log_a(a^2 + 1)$

$$\Leftrightarrow \log_a(a^{2x^2+4x} + a^2) = \log_a a^{x^2+2x} + \log_a(a^2 + 1) \Leftrightarrow (a^{x^2+2x})^2 + a^2 = (a^{x^2+2x})(a^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow (a^{x^2+2x} - a^2)(a^{x^2+2x} - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = 2 \\ x^2 + 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}.$$

Câu 91. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thỏa mãn bất phương trình

$$2019^x - \log_2 x \geq (m^2 - m)x + (2019 - m^2 + m)$$

luôn đúng $\forall x \geq 1$, biết rằng $2^m \geq e$.

A. 122

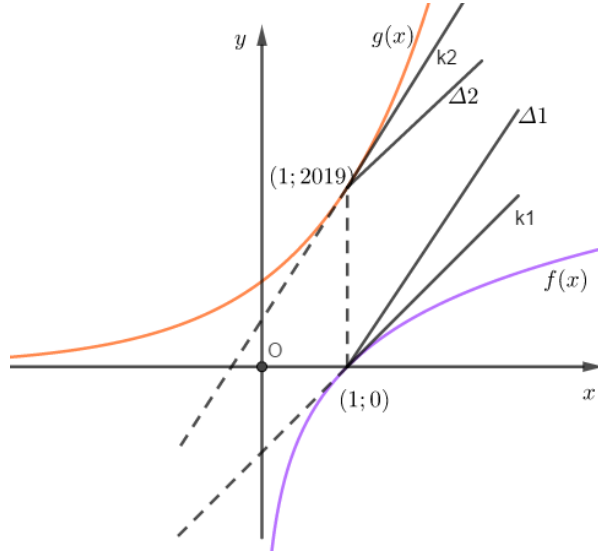
B. 100

C. 98

D. 123

Lời giải

$$\text{Ta có } 2^m \geq e \Leftrightarrow m \geq \log_2 e \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{\ln 2}$$



Bất phương trình tương đương $2019^x - (m^2x + 2019 - m^2) + (mx - m - \log_2 x) \geq 0, \forall x \geq 1$.

- Ta xét $\Delta_1: y = mx - m$ đi qua điểm cố định $(1; 0)$ có hệ số góc $k_{\Delta_1} = m$, mà $y = f(x) = \log_2 x$ có tiếp tuyến tại $(1; 0)$ có hệ số góc tại điểm là $k_1 = y'(1) = \frac{1}{\ln 2}$.

Với $m \geq \frac{1}{\ln 2}; x \geq 1 \Rightarrow k_{\Delta_1} \geq k_1 \Rightarrow \Delta_1: y = mx - m$ nằm phía trên đồ thị $f(x) = \log_2 x$.

$$\Rightarrow \boxed{mx - m \geq \log_2 x}.$$

$$\text{Nên } 2019^x - (m^2x + 2019 - m^2) \geq 0 \Leftrightarrow 2019^x \geq m^2x + 2019 - m^2, \forall x \geq 1 \quad (2)$$

- Ta xét $\Delta_2: y = m^2x + 2019 - m^2$ đi qua điểm cố định $(1; 2019)$ và có hệ số góc là $k_{\Delta_2} = m^2$.

Mà $y = g(x) = 2019^x$ có tiếp tuyến tại $(1; 2019)$ có hệ số góc $k_2 = g'(1) = 2019 \ln 2019$.

$$\text{Để (2) xảy ra thì } k_{\Delta_2} \leq k_2 \Leftrightarrow m^2 \leq 2019 \ln 2019 \Leftrightarrow -\sqrt{2019 \ln 2019} \leq m \leq \sqrt{2019 \ln 2019}.$$

Vậy $\frac{1}{\ln 2} \leq m \leq \sqrt{2019 \ln 2019} \Rightarrow$ có 122 giá trị nguyên của m .

Câu 92. Cho a, b là hai số dương phân biệt thỏa mãn $a.b \leq e^2$ và $b^a = a^b$. Tìm số giá trị nguyên của

$$m \text{ với } m \in [0; 6] \text{ thỏa mãn } a^x + b^x + (a.b)^x + \left(\frac{2^{m^2} - 2^{3m}}{2} + 2(m^2 - 3m) - 4 \right) x \geq 3 \text{ với } \forall x > 0$$

A. 4

B. 5

C. 2

D. 1

Lời giải

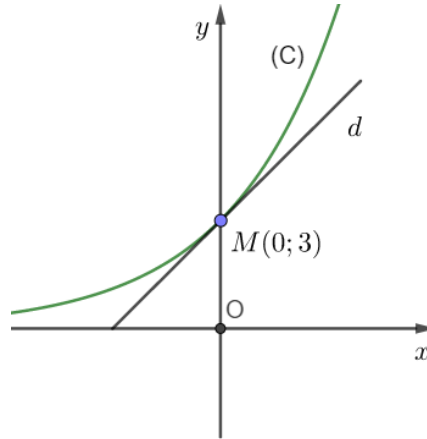
$$\text{Ta có } b^a = a^b \Leftrightarrow a \cdot \ln b = b \cdot \ln a \Rightarrow \frac{\ln b}{b} = \frac{\ln a}{a}.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}, \forall x > 0$ có $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow x = e$ ta có bảng biến thiên của $f(x)$

x	0	a	e	b	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$f(a)$		$f(b)$	

Từ bảng biến thiên ta giả sử $b > a \Rightarrow b > e > a \Rightarrow b > 1 \Rightarrow \ln b > 0$ mà $\frac{\ln b}{b} = \frac{\ln a}{a} \Rightarrow \ln a > 0 \Rightarrow a > 1$.

Nên $\boxed{b > e > a > 1} \Rightarrow (C): g(x) = a^x + b^x + (ab)^x$ sẽ có đồ thị như hình vẽ



Ta có $a^x + b^x + (ab)^x \geq -\left(\frac{2^{m^2} - 2^{3m}}{2} + 2(m^2 - 3m) - 4\right)x + 3 \quad (1)$

Gọi d là tiếp tuyến của đường cong $(C): g(x) = a^x + b^x + (ab)^x$ tại điểm $M(0; 3)$ như hình vẽ.

Đường thẳng $d': y = -\left(\frac{2^{m^2} - 2^{3m}}{2} + 2(m^2 - 3m) - 4\right)x + 3$ luôn đi qua điểm cố định $M(0; 3)$.

Như vậy để (1) luôn đúng $\forall x > 0$ thì $k_{d'} \leq k_d$.

Lại có $g'(x) = a^x \ln a + b^x \ln b + (ab)^x \ln(ab) \Rightarrow g'(0) = \ln(ab)^2$

$$\Rightarrow -\left(\frac{2^{m^2} - 2^{3m}}{2} + 2(m^2 - 3m) - 4\right) \leq g'(0)$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{2^{m^2} - 2^{3m}}{2} + 2(m^2 - 3m) - 4\right) \leq \ln(ab)^2 \leq \ln e^4 = 4$$

$$\Rightarrow \frac{2^{m^2} - 2^{3m}}{2} + 2(m^2 - 3m) \geq 0 \Rightarrow m^2 \geq 3m \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq 0 \end{cases} \text{ mà } m \in [0; 6].$$

Vậy có tất cả 5 giá trị nguyên thỏa mãn.

Câu 93. Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $\frac{1}{2^a} + \frac{1}{4^b} + \frac{1}{8^c} + \frac{1}{16^d} = \frac{1}{4}$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + 2b + 3c + 4d$. Giá trị của biểu thức $\log_2 m$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Biến đổi tương đương $\frac{1}{2^a} + \frac{1}{4^b} + \frac{1}{8^c} + \frac{1}{16^d} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{-a} + 2^{-2b} + 2^{-3c} + 2^{-4d} = \frac{1}{4}$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = 2^{-a} \\ y = 2^{-2b} \\ z = 2^{-3c} \\ t = 2^{-4d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z + t = \frac{1}{4} \\ x, y, z, t > 0 \end{cases}. \text{ Ta có}$$

$$S = a + 2b + 3c + 4d = -(\log_2 x + \log_2 y + \log_2 z + \log_2 t) = -\log_2 (xyzt).$$

$$\text{Ta có } xyzt \leq \left(\frac{x+y+z+t}{4} \right)^4 = \frac{1}{16^4} = 2^{-16} \Rightarrow S \geq 16.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } x = y = z = t = \frac{1}{16}. \text{ Do đó } m = 16.$$

Câu 94. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $3^{x+y} + 3^{y+z} + 3^{z+x} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 9^x + 9^{y+\frac{1}{2}} + 9^{z+\frac{1}{2}}$?

A. $P_{\min} = 1$

B. $P_{\min} = 2$

C. $P_{\min} = 3$

D. $P_{\min} = 4$

Lời giải

Ta đặt $3^x = a, 3^y = b, 3^z = c$. Khi đó $ab + bc + ca = 1$.

$$\text{Đồng thời } P = a^2 + 3b^2 + 3c^2 = (1+k)a^2 + (3+k)b^2 + (3+k)c^2 - k(a^2 + b^2 + c^2).$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{a^2}{\frac{1}{1+k}} + \frac{b^2}{\frac{1}{3+k}} + \frac{c^2}{\frac{1}{3+k}} - k(a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{(a+b+c)^2}{\frac{1}{1+k} + \frac{2}{3+k}} - k(a^2 + b^2 + c^2).$$

$$\text{Chọn } k=1 \text{ thì } P \geq (a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow P_{\min} = 2.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} ab + bc + ca = 1 \\ \frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{4}} = \frac{c}{\frac{1}{4}} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{5}}, b = c = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Câu 95. Cho a, b là hai số thực dương. Giá trị nhỏ nhất của $P = \log_5 \sqrt{a^2 + b^2} + \log_5 \left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b} \right)$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{3}{2}$.

D. 2.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{8}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4^2}{2a} + \frac{1}{b} \geq \frac{(4+1)^2}{2a+b} \\ (2a+b) \leq \sqrt{5(a^2 + b^2)} \end{cases} \Rightarrow \frac{8}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{5^2}{\sqrt{5(a^2 + b^2)}}.$$

$$\text{Do đó } P \geq \log_5 \sqrt{a^2 + b^2} + \log_5 \frac{5^2}{\sqrt{5(a^2 + b^2)}} = \log_5 \frac{5^2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2}.$$

Câu 96. Cho a, b là hai số thực dương. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_3 (1+2a) + \log_3 \left(1 + \frac{b}{2a} \right) + 2 \log_3 \left(1 + \frac{4}{\sqrt{b}} \right)$$

A. 1.

B. 4.

C. 7.

D. 9.

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \log_3 \left[(1+2a) \left(1 + \frac{b}{2a} \right) \left(1 + \frac{4}{\sqrt{b}} \right)^2 \right].$$

- $(1+2a)\left(1+\frac{b}{2a}\right)=1+\frac{b}{2a}+2a+b\geq 1+2\sqrt{b}+b=\left(\sqrt{b}+1\right)^2.$
- $(1+2a)\left(1+\frac{b}{2a}\right)\left(1+\frac{4}{\sqrt{b}}\right)^2\geq\left[\left(\sqrt{b}+1\right)\left(1+\frac{4}{\sqrt{b}}\right)\right]^2=\left(1+\sqrt{b}+\frac{4}{\sqrt{b}}+4\right)^2\geq(1+2.2+4)^2=81.$

Suy ra $P\geq\log_3 81=4.$

Câu 97. Xét hàm số $f(x)=\log_2\sqrt{2+4^x}$ và a, b là hai số thực dương thỏa mãn $f'(a)+f'(b)=1$. Đặt $T=\sqrt[27]{a^{12}}+\sqrt[2018]{b^{2017}}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $0<T<\frac{1}{4}.$ B. $\frac{1}{4}\leq T\leq\frac{1}{2}.$ C. $\frac{1}{2}<T\leq 1.$ D. $T>1.$

Lời giải

Ta có $f'(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$. Do đó $f'(a)+f'(b)=1\Leftrightarrow\frac{4^a}{4^a+1}+\frac{4^b}{4^b+1}=1\Leftrightarrow 4^{a+b}=4\Leftrightarrow a+b=1\Leftrightarrow\begin{cases} 0<a<1 \\ 0<b<1 \end{cases}.$

Khi đó ta có $T=\sqrt[27]{a^{12}}+\sqrt[2018]{b^{2017}}=a^{\frac{4}{9}}+b^{\frac{2017}{2018}}>a+b=1$ với mọi $a, b\in(0;1).$

Câu 98. Với hai số thực a, b bất kỳ, ta kí hiệu $f_{(a,b)}(x)=|x-a|+|x-b|+|x-2|+|x-3|$. Biết rằng tồn tại duy nhất số thực x_0 để $\min_{x\in\mathbb{R}}f_{(a,b)}(x)=f_{(a,b)}(x_0)$ với mọi số thực a, b thỏa mãn $a^b=b^a$ và $0<a<b$. Giá trị của x_0 bằng

- A. $2e-1$ B. $2,5$ C. e D. $2e$

Lời giải

Ta có $b^a=a^b\Leftrightarrow a.\ln b=b.\ln a\Rightarrow\frac{\ln b}{b}=\frac{\ln a}{a}.$

Xét hàm số $f(x)=\frac{\ln x}{x}, \forall x>0$ có $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=0\Rightarrow x=e$ ta có bảng biến thiên của $f(x)$

x	0	a	e	b	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$f(a)$		$f(b)$	

Từ bảng biến thiên vì $b>a\Rightarrow b>e>a\Rightarrow b>1\Rightarrow\ln b>0$ mà $\frac{\ln b}{b}=\frac{\ln a}{a}\Rightarrow\ln a>0\Rightarrow a>1$

Nên $\boxed{b>e>a>1}.$

Với $x=e\Rightarrow f_{(a,b)}(e)=b-a+1$, ta thấy $f_{(a,b)}(x)\geq|x-a+b-x+x-2+3-x|\geq b-a+1=f(e)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} (x-a)(b-x)\geq 0 \\ (x-2)(3-x)\geq 0 \end{cases}.$$

Câu 99. Cho 2 số thực $x, y\in(0;2)$ thỏa mãn điều kiện $(x-3)(x+8)=ey(ey-11)$. Giá trị lớn nhất của $P=\sqrt{\ln x}+\sqrt{1+\ln y}$ bằng

- A. $\sqrt{1+\ln 3-\ln 2}.$ B. $2\sqrt{\ln 3-\ln 2}.$ C. $1+\sqrt{\ln 3-\ln 2}.$ D. $1+\sqrt{\ln 2}.$

Lời giải

Điều kiện $x\geq 1, y\geq\frac{1}{e}$. Ta có $(x-3)(x+8)=ey(ey-11)\Leftrightarrow x^2+5x-24=e^2y^2-11ey$

$$\Leftrightarrow e^2 y^2 - 11ey - (x^2 + 5x - 24) = 0 \quad (*)$$

$$\text{có } \Delta = (2x+5)^2 > 0, \forall x \geq 1. \text{ Do đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} ey = \frac{11+(2x+5)}{2} \\ ey = \frac{11-(2x+5)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ey = x+8 \\ ey = 3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x+8}{e} \\ y = \frac{3-x}{e} \end{cases}.$$

Do $y = \frac{x+8}{e} > \frac{9}{e} > 2$ nên loại $y = \frac{x+8}{e}$.

Với $y = \frac{3-x}{e}, 1 \leq x < 2$

Khi đó, ta được $P = \sqrt{\ln x} + \sqrt{\ln(3-x)}$ trên $[1;2)$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow P^2 &= \left[\sqrt{\ln x} + \sqrt{\ln(3-x)} \right]^2 \leq 2(\ln x + \ln(3-x)) = 2\ln[x(3-x)] \\ &\leq 2\ln\left(\frac{x+3-x}{2}\right)^2 = 4(\ln 3 - \ln 2), \forall x \in [1;2) \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} \sqrt{\ln x} = \sqrt{\ln(3-x)} \\ x = 3-x \\ x \in [1;2) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$

Vậy $P_{\max} = 2\sqrt{\ln 3 - \ln 2}$ tại $x = \frac{3}{2}, y = \frac{3}{2e}$.

Câu 100. Cho $x; y; z > 1$ thỏa mãn $\log_{(xy+yz+xz)}(5x^2 + 16y^2 + 27z^2) + \log_{144} \sqrt{xy + yz + xz} = 2$. Giá trị của biểu thức $\frac{2y+2z}{x-1}$ bằng

A. $\frac{13}{12}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $\frac{20}{11}$. D. $\frac{3}{19}$.

Lời giải

Ta có $5x^2 + 16y^2 + 27z^2 = 3x^2 + 12y^2 + 2x^2 + 18z^2 + 4y^2 + 9z^2 \geq 12(xy + xz + yz)$

$$\Rightarrow \log_{(xy+yz+xz)}(5x^2 + 16y^2 + 27z^2) \geq 1 + \log_{(xy+yz+xz)} 12$$

$$\Rightarrow VT \geq 1 + \log_{xy+yz+xz} 12 + \frac{1}{4} \log_{12}(xy + yz + xz) \geq 2$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x = 2y = 3z \\ \log_{12}(xy + yz + xz) = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 12; y = 6; z = 4 \Rightarrow \frac{2y+2z}{x-1} = \frac{20}{11}.$

Câu 101. Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{(\sqrt{ax^2-3x+2x})(x-3)} & \text{nếu } x < 0 \\ \left(\frac{2x+4}{2x+1}\right)^{\frac{3x+2}{4}} & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}, (a > 0).$

Biết rằng các đường tiệm cận ngang của (C) đều nằm phía trên trục Ox . Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường tiệm cận của (C) và đường thẳng $y = x$. Diện tích của D là $S = \frac{1}{2}e^m - n$. Tính tích $a.m.n$.

A. 4.

B. 32.

C. -8.

D. 8.

Lời giải

Điều kiện $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{(\sqrt{ax^2-3x+2x})(x-3)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{\left(-\sqrt{a-\frac{3}{x}}+2\right)\left(1-\frac{3}{x}\right)}.$$

Nếu $-\sqrt{a}+2 \neq 0$ thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow (C)$ có tiệm cận ngang $y=0$ (mâu thuẫn giả thiết).

Suy ra $-\sqrt{a}+2=0 \Leftrightarrow a=4$.

$$\begin{aligned} \text{Với } a=4, \text{ ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-1)(\sqrt{4x^2-3x-2x})}{-3x(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(2-\frac{1}{x}\right)\left(-\sqrt{4-\frac{3}{x}}-2\right)}{-3\left(1-\frac{3}{x}\right)} = \frac{2(-\sqrt{4}-2)}{-3} = \frac{8}{3} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{2x+1}\right)^{\frac{3x+2}{4}}.$$

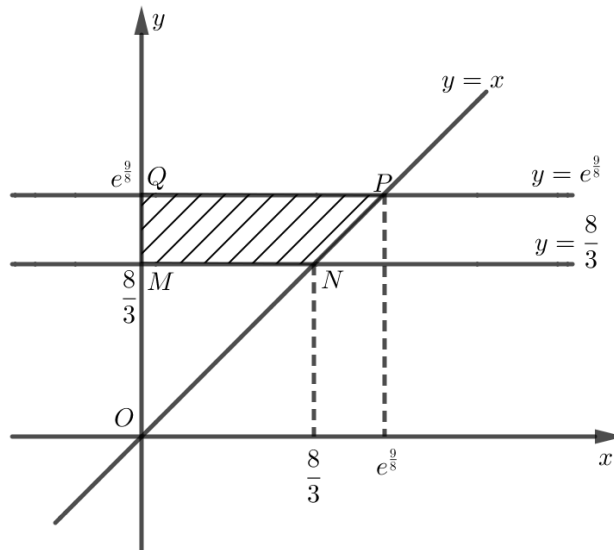
Đặt $t = \frac{2x+1}{3}$, ta có $x = \frac{3t-1}{2}$ và khi $x \rightarrow +\infty$ thì $t \rightarrow +\infty$.

$$\text{Suy ra } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\frac{9t+1}{8}} = \left[\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{\frac{9}{8}} \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{8}} = e^{\frac{9}{8}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra (C) có hai đường tiệm cận ngang là $y = \frac{8}{3}$, $y = e^{\frac{9}{8}}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x-1}{(\sqrt{4x^2-3x+2x})(x-3)} = +\infty \Rightarrow (C) \text{ có tiệm cận đứng } x=0.$$

Ta có hình phẳng D là hình thang vuông $MNPQ$ (như hình vẽ).



Có $MN = \frac{8}{3}$, $PQ = e^{\frac{9}{8}}$, $QM = e^{\frac{9}{8}} - \frac{8}{3}$. Như vậy thì

$$S = S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(PQ + MN) \cdot QM = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{9}{8}} + \frac{8}{3}\right) \cdot \left(e^{\frac{9}{8}} - \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{9}{4}} - \frac{64}{9}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{9}{4}} - \frac{32}{9}.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} m = \frac{9}{4} \\ n = \frac{32}{9} \end{cases} \Rightarrow a.m.n = 32.$$

Câu 102. Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 4x + 6y$ bằng

A. $\frac{33}{4}$.

B. $\frac{65}{8}$.

C. $\frac{49}{8}$.

D. $\frac{57}{8}$.

Lời giải

Cách 1.

Nhận xét. Giá trị của x, y thỏa mãn phương trình $2x + y \cdot 4^{x+y-1} = 3(1)$ sẽ làm cho biểu thức P nhỏ nhất. Đặt $a = x + y$, từ (1) ta được phương trình

$$4^{a-1} + \frac{2}{y} \cdot a - 2 - \frac{3}{y} = 0.$$

Nhận thấy $y = 4^{a-1} + \frac{2}{y} \cdot a - 2 - \frac{3}{y}$ là hàm số đồng biến theo biến a , nên phương trình trên có nghiệm

$$\text{duy nhất } a = \frac{3}{2} \Rightarrow x + y = \frac{3}{2}.$$

Ta viết lại biểu thức $P = (x + y)^2 + 4(x + y) + 2\left(y - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{8} = \frac{65}{8}$. Vậy $P_{\min} = \frac{65}{8}$.

Cách 2.

Với mọi x, y không âm ta có

$$2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3 \Leftrightarrow x + y \cdot 4^{x+y-\frac{3}{2}} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(x + y - \frac{3}{2}\right) + y \cdot \left(4^{x+y-\frac{3}{2}} - 1\right) \geq 0 \quad (1)$$

Nếu $x + y - \frac{3}{2} < 0$ thì $\left(x + y - \frac{3}{2}\right) + y \cdot \left(4^{x+y-\frac{3}{2}} - 1\right) < 0 + y \cdot (4^0 - 1) = 0$ (vô lí)

Vậy $x + y \geq \frac{3}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta được

$$\begin{aligned} P &= x^2 + y^2 + 4x + 6y = (x + 3)^2 + (y + 2)^2 - 13 \\ &\geq \frac{1}{2}(x + y + 5)^2 - 13 \geq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + 5\right)^2 - 13 = \frac{65}{8} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x + y = \frac{3}{2} \\ x + 3 = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{4} \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$.

Vậy $\min P = \frac{65}{8}$.

2. Điều kiện cần và đủ.

Mở đầu phương pháp này ta sẽ đi vào một bài toán khá nổi tiếng sau.

Bài toán. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$9 \cdot 3^{2x} - m \left(4\sqrt[4]{x^2 + 2x + 1} + 3m + 3 \right) \cdot 3^x + 1 = 0$$

Có đúng 3 nghiệm phân biệt?

Chắc hẳn bài toán này sẽ làm rất nhiều bạn gặp khó khăn trong việc tìm ra hướng giải quyết phải không nào? Tuy nhiên trong phần này ta sẽ tìm hiểu tới phương pháp điều kiện cần và đủ để giải quyết các bài toán như này. Phương pháp điều kiện cần và đủ thường tỏ ra khá hiệu quả cho lớp bài toán tìm điều kiện tham số để.

- Phương trình trị tuyệt đối có nghiệm duy nhất.
- Phương trình trị tuyệt đối có nghiệm với mọi giá trị của một tham số.
- Phương trình tương đương với một phương trình hoặc một bất phương trình khác.

Khi đó ta thực hiện theo các bước sau

- **Bước 1.** Đặt điều kiện để các biểu thức của phương trình có nghĩa.
- **Bước 2.** Tìm điều kiện cần cho hệ dựa trên việc đánh giá hoặc tính đối xứng của hệ. Giả sử hệ thỏa mãn tính chất p nào đó mà đầu bài đòi hỏi. Khi đó, dựa vào những đặc điểm của tính chất p và dạng của phương trình ta sẽ tìm được một ràng buộc nào đó đối với tham số m và ràng buộc ấy chính là điều kiện cần để có tính chất p . Điều đó có nghĩa là nếu với m_0 không thỏa mãn ràng buộc trên thì chắc chắn ứng với m_0 , hệ không có tính chất p .
- **Bước 3.** Ta tìm xem trong các giá trị của m vừa tìm được, giá trị nào làm cho hệ thỏa mãn tính chất p . Kiểm tra điều kiện đủ. Ở bước này nói chung ta cũng chỉ cần giải những hệ cụ thể không còn tham số. Sau khi kiểm tra, ta sẽ loại đi những giá trị không phù hợp và những giá trị còn lại chính là đáp số của bài toán.

Như vậy, ý tưởng của phương pháp này khá rõ ràng và đơn giản. Trong rất nhiều bài toán về biện luận thì phương pháp này lại thể hiện ưu thế rõ rệt. Tuy nhiên, thành công của phương pháp còn nằm ở chỗ ta phải làm thế nào để phát hiện điều kiện cần một cách hợp lý và chọn điều kiện đủ một cách đúng đắn. Sau đây chúng ta sẽ đi vào các ví dụ cụ thể!

Câu 1. Tìm m để phương trình $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2-x} + \sqrt{x} + \sqrt{2-x} = m(1)$ có nghiệm duy nhất.

Giải

Phân tích. Nếu như ở phương pháp cô lập m thì ta đã có cách giải quyết bài này bằng đạo hàm thì ở phần này ta sẽ tiếp cận nó với phương pháp điều kiện cần và đủ

Điều kiện cần.

Giả sử (1) có nghiệm là $x = x_0 \Rightarrow (2 - x_0)$ cũng là nghiệm của (1)

Vậy (1) có nghiệm duy nhất khi $x_0 = 2 - x_0 = 1$

Thay $x_0 = 1$ vào (1), ta được $m = 4$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ.

Với $m = 4$, khi đó (1) có dạng $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2-x} + \sqrt{x} + \sqrt{2-x} = 4(2)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta được $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{2-x} \leq 2 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2-x} \leq 2 \end{cases}$.

Do đó (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{2-x} = 2 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2-x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Vậy với $m = 4$ phương trình có nghiệm duy nhất.

Câu 2. Tìm m để phương trình $\sqrt{x^2 + 2x - m^2 + 2m + 4} = x + m - 2$ (1) nghiệm đúng $\forall x \geq 0$.

Giải

Điều kiện cần.

Giả sử (1) có nghiệm $\forall x \geq 0 \Rightarrow x = 0$ là nghiệm của (1), khi đó.

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{-m^2 + 2m + 4} = m - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 \geq 0 \\ -m^2 + 2m + 4 = (m - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình nghiệm đúng với $\forall x \geq 0$

Điều kiện đủ.

Với $m = 3$, khi đó (1) có dạng

$$\sqrt{-m^2 + 2x + 1} = x + 1 \stackrel{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x + 1 = x + 1 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ luôn đúng.}$$

Vậy với $m = 3$ phương trình nghiệm đúng với $\forall x \geq 0$.

Chú ý. Với bài toán có nhiều hơn một tham số ra sẽ thấy tầm quan trọng của việc lựa chọn điểm thuận lợi cùng với việc xác định các giá trị của tham số được thực hiện tuần tự. Chúng ta đi xem xét ví dụ sau.

Câu 3. Tìm a, b để phương trình $a\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + bx + 1} = 0$ nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Giải

Điều kiện cần.

Giả sử (1) có nghiệm $\forall x \Rightarrow x = 0$ là nghiệm của (1), khi đó (1) $\Leftrightarrow a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$

Với $a = 1$ thì (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x^2 + bx + 1} \Leftrightarrow x^2 + 1 = x^2 + bx + 1 \Leftrightarrow bx = 0 \stackrel{\forall x}{\Leftrightarrow} b = 0$

Vậy $a = 1, b = 0$ là điều kiện cần để phương trình nghiệm đúng với $\forall x$.

Điều kiện đủ.

Với $a = 1, b = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow 0 = 0$ luôn đúng.

Vậy với (1) phương trình nghiệm đúng với $\forall x$

Câu 4. Cho 2 phương trình $\begin{cases} (x + 5)(2 - x) = 3m\sqrt{x^2 + 3x + m - 1} & (1) \\ x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 16 = 0 & (2) \end{cases}$.

Tìm m để (1), (2) tương đương?

Giải

Phân tích. Để 2 phương trình tương đương nhau thì phương trình 1 phải có cùng tập nghiệm với phương trình 2. Do đó ta đi giải phương trình 2. Ta có

$$(2) \Leftrightarrow (x^2 + 3x)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 4)(x^2 + 3x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \end{cases}$$

Điều kiện cần.

Giả sử (1), (2) tương đương $\Rightarrow x = 1$ là nghiệm của (1) khi đó

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow 6 &= 3m\sqrt{m + 3} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 4 = m^2(m + 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^3 + 3m^2 - 4 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ (m - 1)(m^2 + 4m + 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1 \end{aligned}$$

Vậy $m = 1$ là điều kiện cần để (1), (2) tương đương.

Điều kiện đủ.

Với $m = 1$, khi đó (1) có dạng $-x^2 - 3x + 10 = 3\sqrt{x^2 + 3x}$ (3)

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 3x}$, điều kiện $t \geq 0$

Khi đó (3) $\Leftrightarrow t^2 + 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -5(L) \\ t = 2 \end{cases}$

Với $t = 2$ ta có $\sqrt{x^2 + 3x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \end{cases}$

Tức là (1),(2) tương đương.

Vậy với $m = 1$ thì (1),(2) tương đương.

Chú ý. Chúng ta đã thấy tồn tại những phương trình chứa căn thức mà tập nghiệm của nó là một khoảng, do đó một phương trình chứa căn thức có thể tương đương với một bất phương trình. Chúng ta đi xem xét ví dụ sau.

Câu 5. Cho phương trình và bất phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x-1+2m\sqrt{x-2}} + \sqrt{x-1-2m\sqrt{x-2}} = 2 & (1) \\ |x^2 + 3x + 2| \leq x^2 + 2x + 5 & (2) \end{cases}$$

Tìm m để (1),(2) tương đương?

Giải

Điều kiện cần

Giả sử (1),(2) tương đương suy ra $x = 3$ là nghiệm của (1), khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2+2m} + \sqrt{2-2m} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{4-4m^2} = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

Vậy $m = \pm 1$ là điều kiện cần để (1),(2) tương đương.

Điều kiện đủ

Với $m = 1$, khi đó (1) có dạng

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}} + \sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} = 2 &\Leftrightarrow |\sqrt{x-2}+1| + |\sqrt{x-2}-1| = 2 \\ &\Leftrightarrow |\sqrt{x-2}+1| + |1-\sqrt{x-2}| = |(\sqrt{x-2}+1) + (1-\sqrt{x-2})| \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x-2}+1)(1-\sqrt{x-2}) \geq 0 \Leftrightarrow 1-(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3 \end{aligned}$$

Tức là (1),(2) tương đương.

Với $m = -1$ tương tự hoặc có thể nhận xét về tính đối xứng của m trong phương trình

Vậy với $m = \pm 1$ thì (1),(2) tương đương.

Câu 6. Tìm m để phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + 2m\sqrt{x(1-x)} - 2\sqrt[4]{x(1-x)} = m^3$ (1) có nghiệm duy nhất?

Giải

Phân tích. Một bài toán nhìn nhiều căn khá là phức tạp, và ý tưởng hàm đặc trưng dường như cũng khá là khó, tuy nhiên hãy chú ý đến các biểu thức $x, 1-x$ ta không khó để nhận ra nếu x_0 thì $1-x_0$ cũng là nghiệm của phương trình, do đó chúng ta sẽ sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ để giải quyết bài toán này.

Lời giải

Nhận thấy nếu x_0 là nghiệm của phương trình (1) thì $1-x_0$ cũng là nghiệm của phương trình (1).

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất thì

$$x_0 = 1 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow m^3 = m \Leftrightarrow m = 0 \vee m = \pm 1$$

- Với $m = 0$ thì (1) trở thành

$$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} - 2\sqrt[4]{x(1-x)} = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{1-x}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Vậy $m = 0$ thỏa mãn

- Với $m = 1$ thì (1) trở thành $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} - 2\sqrt[4]{x(1-x)} = 1 - 2\sqrt{x(1-x)}$

$$\left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{1-x}\right)^2 = \left(\sqrt{x} - \sqrt{1-x}\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{1-x} \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1-x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy ta loại $m = 1$

- Với $m = -1$ thì (1) trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + \sqrt{1-x} - 2\sqrt[4]{x(1-x)} + 1 - 2\sqrt{x(1-x)} &= 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{1-x}\right)^2 + \left(\sqrt{x} - \sqrt{1-x}\right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{1-x} \\ \sqrt{x} = \sqrt{1-x} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vậy $m = -1$ thỏa mãn

Vậy $m = 0, m = -1$ là 2 giá trị thỏa mãn.

Câu 7. Tìm m để phương trình $2\sqrt{x^2 + 2(\sqrt{2}x + m^2)} + 3m + 1 = 2|x + \sqrt{2}| + 3 + m$ có nghiệm duy nhất?

Giải

Biến đổi phương trình tương đương

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x^2 + 2(\sqrt{2}x + m^2)} + 3m + 1 &= 2|x + \sqrt{2}| + 3 + m \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{(x + \sqrt{2})^2 + 2m^2 + 3m - 1} &= 2|x + \sqrt{2}| + 3 + m(1) \end{aligned}$$

Đặt $t = x + \sqrt{2}$, ta có phương trình $2\sqrt{t^2 + 2m^2 + 3m - 1} = 2|t| + 3 + m$ (2).

Nhận xét (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi (2) có nghiệm duy nhất.

Giả sử t_0 là một nghiệm của (2) thì $-t_0$ cũng là nghiệm của (2). Do đó để (2) có nghiệm duy nhất, điều kiện cần là $t_0 = -t_0 \Leftrightarrow t_0 = 0$.

Với $t_0 = 0$ thay vào (2) ta được $2\sqrt{2m^2 + 3m - 1} = 3 + m \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -3 \\ 7m^2 + 6m - 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{13}{7} \end{cases}$

Thử lại.

- Với $m = 1$ phương trình (2) trở thành

$$2\sqrt{t^2 + 4} = 2|t| + 4 \Leftrightarrow t^2 + 4 = t^2 + 4|t| + 4 \Leftrightarrow t = 0 \text{ (thỏa mãn)}$$

- Với $m = -\frac{13}{7}$ phương trình (2) trở thành

$$2\sqrt{t^2 + \frac{16}{49}} = 2|t| + \frac{8}{7} \Leftrightarrow t^2 + \frac{16}{49} = t^2 + \frac{8}{7}|t| + \frac{16}{49} \Leftrightarrow t = 0 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = 1, m = -\frac{13}{7}$ là 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8. Tìm a và b để phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\sqrt[3]{(ax+b)^2} + \sqrt[3]{(ax-b)^2} + \sqrt[3]{a^2x^2 - b^2} = \sqrt[3]{b} \quad (1)$$

Giải

Điều kiện cần

Giả sử (1) có nghiệm duy nhất $x = x_0$, khi đó dễ thấy $x = -x_0$ cũng là nghiệm của (1).

Do đó từ giả thiết suy ra $x_0 = 0$. Thay $x_0 = 0$ vào (1) ta được $\sqrt[3]{b^2} = \sqrt[3]{b} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 1 \end{cases}$

Điều kiện đủ

Khi $b = 0$, (1) có dạng

$$\sqrt[3]{a^2x^2} + \sqrt[3]{a^2x^2} + \sqrt[3]{a^2x^2} = 0 \Leftrightarrow a^2x^2 = 0$$

Do đó (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $a \neq 0$.

Khi $b = 1$, (1) có dạng

$$\sqrt[3]{(ax+1)^2} + \sqrt[3]{(ax-1)^2} + \sqrt[3]{a^2x^2 - 1} = 1 \quad (*)$$

Đặt $u = \sqrt[3]{ax+1}$; $v = \sqrt[3]{ax-1}$, ta thấy.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 - v^3 = 2 \\ u^2 + uv + v^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 2 \\ u^2 + uv + v^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+1 = 1 \\ ax-1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow ax = 0$$

Vậy (*) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $a \neq 0$.

Tóm lại, để phương trình (1) có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần và đủ là $\begin{cases} a \neq 0; b = 0 \\ b = 1 \end{cases}$.

Nhận xét. Đây là một bài toán tổng quát cho rất nhiều bài toán khác mà một số “thầy” dạy online trên mạng đã đưa ra dựa vào việc thay các biến thành các biểu thức chứa mũ hoặc logarit.

Câu 9. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} \sqrt{7+x} + \sqrt{11-x} - 4 = m - \sqrt{4-3\sqrt{10-3m}} \\ \sqrt{7+y} + \sqrt{11-y} - 4 = m - \sqrt{4-3\sqrt{10-3m}} \end{cases}$$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} -7 \leq x, y \leq 11 \\ \frac{74}{27} \leq m \leq \frac{10}{3} \end{cases}$$

Trừ theo về hai phương trình ta có

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{11-x} = \sqrt{y+7} - \sqrt{11-y}$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t+7} - \sqrt{11-t}$, $-7 \leq t \leq 11$ ta có $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+7}} + \frac{1}{2\sqrt{11-t}} > 0$.

Vậy hàm số đồng biến, khi đó $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Thay vào một trong hai phương trình của hệ ta được

$$\sqrt{7+x} + \sqrt{11-x} - 4 = m - \sqrt{4-3\sqrt{10-3m}} \quad (*)$$

Điều kiện cần

Ta thấy là nếu x_0 là một nghiệm của phương trình thì $4 - x_0$ cũng là nghiệm của phương trình.

Nên hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $x_0 = 4 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = 2$

Thay vào phương trình (*) ta được $\sqrt{4 - 3\sqrt{10 - m}} = m - 2$ (**)

Giải phương trình (**) ta tìm được $m = 3$.

Điều kiện đủ.

Với $m = 3$, ta thu được hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{7+x} + \sqrt{11-x} = 6 \\ \sqrt{7+y} + \sqrt{11-y} = 6 \end{cases}$$

Vì $x = y$ nên ta chỉ việc giải phương trình $\sqrt{7+x} + \sqrt{11-x} = 6 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy $m = 3$ là giá trị cần tìm để hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Câu 10. Tìm a và b để phương trình sau có nghiệm duy nhất
$$\begin{cases} xyz + z = a \\ xyz^2 + z = b \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện cần.

Giả sử $(x_0; y_0; z_0)$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho thì $(-x_0; -y_0; z_0)$ cũng là nghiệm. Do tính duy nhất nên $x_0 = -x_0; y_0 = -y_0 \Rightarrow x_0 = y_0 = 0$.

Thay trở lại vào hệ, ta có.
$$\begin{cases} z_0 = a \\ z_0 = b \\ z_0^2 = 4 \end{cases}$$
. Từ đây ta suy ra $a = b = 2$ hoặc $a = b = -2$.

Điều kiện đủ.

Nếu $a = b = 2$. Khi đó hệ có dạng
$$\begin{cases} xyz + z = 2 & (1) \\ xyz^2 + z = 2 & (2) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 & (3) \end{cases}$$

Lấy (1) – (2) ta được $xyz(1 - z) = 0$, từ (1) lại có $z \neq 0$ do đó $xy(1 - z) = 0$

Nếu $x = 0 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow y = 0$

Nếu $y = 0 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow x = 0$

Nếu $z = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ xy = 1 \end{cases}$

Hệ trên có nghiệm $(x_1; y_1) \neq (0; 0)$. Vì vậy ngoài nghiệm $(0; 0; 2)$, hệ còn có nghiệm khác $(x_1; y_1; 1)$ do đó hệ không có nghiệm duy nhất. Trường hợp này không thỏa mãn.

Nếu $a = b = -2$. Khi đó hệ có dạng
$$\begin{cases} xyz = -2 \\ xyz^2 + z = -2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Tiến hành làm như trường hợp trên ta đi đến

Nếu $x = 0 \Rightarrow z = -2 \Rightarrow y = 0$

Nếu $y = 0 \Rightarrow z = -2 \Rightarrow x = 0$

Nếu $z = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ xy = -3 \end{cases}$

Ta thấy từ hệ phương trình trên, ta suy ra $x^2 + y^2 < 2|xy|$ nên hệ vô nghiệm.

Vậy trong trường hợp này hệ có duy nhất nghiệm $(x; y; z) = (0; 0; 2)$

Vậy điều kiện cần và đủ để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $a = b = -2$.

Câu 11. Tìm a để phương trình sau có nghiệm đúng với mọi x :

$$\log_2(a^2x^2 - 5ax^2 + \sqrt{6-a}) = \log_{2+x^2}(3 - \sqrt{a-1}) \quad (*)$$

Giải

Điều kiện cần

Giả sử $(*)$ đúng với mọi x . Với $x = 0$ ta có $\log_2 \sqrt{6-a} = \log_2(3 - \sqrt{a-1})$

$$\text{Lại có } \begin{cases} 1 \leq a \leq 6 \\ \sqrt{a-1} < 3 \\ \sqrt{a-1} + \sqrt{6-a} = 3 \end{cases} \Rightarrow a \in \{2; 5\}$$

Điều kiện đủ

Nếu $a = 2$ thì $(*) \Leftrightarrow \log_2(2 - 12x^2) = \log_{2+x^2} 2 \quad (**)$

Rõ ràng $(**)$ không đúng với mọi x , vì để $\log_2(2 - 12x^2)$ có nghĩa thì phải có $12x^2 < 2$

Nếu $a = 5$ thì $(*) \Leftrightarrow \log_2 1 = \log_{2+x^2} 1$ (luôn đúng)

Vậy $a = 5$ là điều kiện cần và đủ để $(*)$ đúng với mọi x .

Câu 12. Tìm a để hệ phương trình ẩn $(x; y)$ có nghiệm với mọi b :
$$\begin{cases} 2^{bx} + (a+1)by^2 = a^2 \\ (a-1)x^3 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện cần.

Giả sử hệ có nghiệm với mọi b , thay $b = 0$ ta được $\begin{cases} a^2 = 1 \\ (a-1)x^3 + y^2 = 1 \end{cases}$

Do đó điều kiện cần là $a = \pm 1$

Điều kiện đủ.

Nếu $a = 1$, ta có hệ $\begin{cases} 2^{bx} + 2by^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases}$

Khi $b > \frac{1}{2}$ hệ vô nghiệm. Vậy trường hợp này loại.

Nếu $a = -1$, ta có hệ $\begin{cases} 2^{bx} = 1 \\ -2x^3 + y^2 = 1 \end{cases}$

Hệ trên luôn có nghiệm $(x; y) = (0; 1)$.

Vậy $a = -1$ là điều kiện cần và đủ để hệ phương trình có nghiệm với mọi b .

Câu 13. Tìm a để hệ phương trình ẩn $(x; y)$ có nghiệm với mọi b :
$$\begin{cases} (x^2 + 1)^a + (b^2 + 1)^y = 2 \\ a + bxy + x^2y = 1 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện cần.

Giả sử hệ có nghiệm với mọi b , thay $b = 0$ ta có

$$(*) \begin{cases} (x^2 + 1)^a = 1 \\ a + x^2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0; x^2y = 1 \\ x^2 + 1 = a + x^2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \{0; 1\}$$

Điều kiện đủ.

Nếu $a = 0$, ta có
$$\begin{cases} (b^2 + 1)^y = 1 & (1) \\ bxy + x^2y = 1 & (2) \end{cases}$$

Nếu $b \neq 0 \Rightarrow b^2 + 1 \neq 1$ nên từ (1) ta có $y = 0$, nhưng không thỏa (2). Vậy trường hợp này loại.

Nếu $a = 1$, ta có
$$\begin{cases} x^2 + (b^2 + 1)^y = 1 \\ bxy + x^2y = 0 \end{cases}$$
. Hệ trên luôn có nghiệm $x = y = 0$.

Vậy $a = 1$ là điều kiện cần và đủ để hệ có đã cho có nghiệm với mọi b .

Nhận xét. Qua 13 ví dụ ở trên có lẽ phần nào ta đã hiểu được ý tưởng của phương pháp này, bây giờ quay lại bài toán mở đầu, ta có lời giải bài toán như sau.

Lời giải bài toán mở đầu.

Ta có $9.3^{2x} - m(4\sqrt{x+1} + 3(m+1))3^x + 1 = 0 \Leftrightarrow 9.3^x + \frac{1}{3^x} = m[4\sqrt{x+1} + 3(m+1)]$

Nhận xét thấy x là nghiệm thì $-2-x$ là nghiệm, vậy có phương trình có 3 nghiệm thì phương trình phải có một nghiệm là -1 .

Nên $6 = 3m(m+1) \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$.

Thử lại.

- Với $m = 1$ ta có $9.3^x + \frac{1}{3^x} = 4\sqrt{x+1} + 6 \Leftrightarrow (3^{x+1} - 1)^2 = 4.3^x \cdot \sqrt{x+1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x+1} - 1 = 2.3^{\frac{x}{2}}\sqrt[4]{x+1} \\ 3^{x+1} - 1 = -2.3^{\frac{x}{2}}\sqrt[4]{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = -1 \end{cases}.$$

- Với $m = -2$ ta có $(3^{x+1} - 1)^2 + 2\sqrt{x+1}.3^x = 0 \Leftrightarrow x = -1$ (vô lý).

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho bất phương trình

$$\log_3(x^2 + 2mx + 2m^2 - 1) \leq 1 + \log_2(x^2 + 2x + 3) \cdot \log_3(x^2 + 3)$$

nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Đặt $\log_3(x^2 + 2mx + 2m^2 - 1) \leq 1 + \log_2(x^2 + 2x + 3) \cdot \log_3(x^2 + 3)$ (*).

Điều kiện
$$\begin{cases} x^2 + 2mx + 2m^2 - 1 > 0 \\ x^2 + 2x + 3 > 0 \\ x^2 + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + 2mx + 2m^2 - 1 > 0.$$

Điều kiện cần.

Để bất phương trình (*) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì trước hết $x^2 + 2mx + 2m^2 - 1 > 0$ phải có nghiệm với mọi $x \in \mathbb{R}$. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ m^2 - (2m^2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - m^2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases} (1).$$

Với $x = -1$ thì (*) trở thành

$$\begin{aligned} \log_3(2m^2 - 2m) &\leq 1 + \log_2(2) \cdot \log_3(4) = \log_3 12 \\ \Leftrightarrow 2m^2 - 2m &\leq 12 \Leftrightarrow m^2 - m - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 3 \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1), (2) và do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; 2; 3\}$.

Thử lại.

Với $m = 3$ thì (*) trở thành $\log_3(x^2 + 6x + 17) \leq 1 + \log_2(x^2 + 2x + 3) \cdot \log_3(x^2 + 3)$.

Tuy nhiên bất phương trình trên không thỏa với $x = -\frac{1}{2}$ nên chúng ta loại trường hợp này.

Với $m = \pm 2$ thì (*) trở thành $\log_3(x^2 \pm 4x + 7) \leq 1 + \log_2(x^2 + 2x + 3) \cdot \log_3(x^2 + 3)$.

Bất phương trình trên có nghiệm với mọi $x \in \mathbb{R}$ vì

$$\log_3(x^2 \pm 4x + 7) \leq \log_3(3x^2 + 9) = 1 + \log_3(x^2 + 3) \leq 1 + \log_2(x^2 + 2x + 3) \cdot \log_3(x^2 + 3), \forall x \in \mathbb{R}.$$

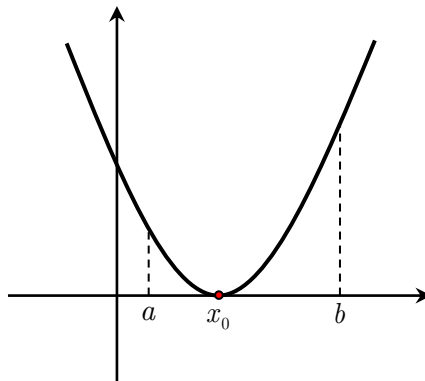
Tóm lại $m \in \{-2; 2\}$.

Sử dụng điều kiện cần và đủ trong các bài toán cực trị.

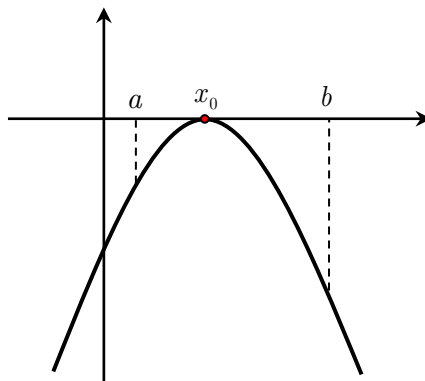
Cơ sở lý thuyết.

Bên cạnh các lớp bài toán về nghiệm của phương trình thì ta cũng có thể sử dụng phương pháp này cho lớp các bài toán về cực trị. Cụ thể ta xét các trường hợp sau.

- Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và đạt cực trị tại $x_0 \in (a; b)$ thì $f'(x_0) = 0$.
- Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $f(x) \geq 0, \forall x \in (a; b)$ mà $f(x_0) = 0$, với $x_0 \in (a; b)$ thì điều kiện cần là x_0 là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x)$.



- Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $f(x) \leq 0, \forall x \in (a; b)$ mà $f(x_0) = 0$, với $x_0 \in (a; b)$ thì điều kiện cần là x_0 là điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = f(x)$.



Nhận xét. Phương pháp này tỏ ra vô cùng mạnh với các bài toán có giả thiết *bất phương trình đúng với mọi số thực x*. Sau đây ta sẽ tìm hiểu vào các bài toán cụ thể để thấy nó ưu việt ra sao.

Các bài toán minh họa.

Câu 1. Biết α là một số thực sao cho bất phương trình $9^{ax} + (ax)^2 \geq 18x + 1$ đúng với mọi số thực x , mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\alpha \in (12; +\infty)$.

B. $\alpha \in (2; 6]$.

C. $\alpha \in (0; 2]$.

D. $\alpha \in (6; 10]$.

Lời giải

Điều kiện cần.

Xét hàm số $f(x) = 9^{ax} + \alpha^2 x^2 - 18x - 1$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = \alpha 9^{ax} \ln 9 + 2\alpha^2 x - 18, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do $\begin{cases} f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 0 \end{cases}$. Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Suy ra $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{18}{\ln 9}$.

Điều kiện đủ.

Với $\alpha = \frac{18}{\ln 9} \Rightarrow f'(x) = 18 \cdot 9^{ax} + 2\alpha^2 x - 18$. Ta có $f''(x) = 18^2 \cdot 9^{ax} + 2\alpha^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra hàm số $f'(x)$

đồng biến trên $\mathbb{R}$ hay phương trình $f'(x) = 0$ có tối đa một nghiệm, mà $f'(0) = 0$.

Từ đó suy ra $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 2. Biết rằng a là số thực dương để bất phương trình $a^x \geq 9x + 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a \in (10^3; 10^4]$.

B. $a \in (10^2; 10^3]$.

C. $a \in (0; 10^2]$.

D. $a \in [10^4; +\infty)$.

Lời giải

Ta có $a^x \geq 9x + 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a^x - 9x - 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Điều kiện cần.

Xét hàm số $f(x) = a^x - 9x - 1 \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a - 9$

Do $\begin{cases} f(x) = a^x - 9x - 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 0 \end{cases}$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow a = e^9$

Điều kiện đủ.

Với $a = e^9$ ta có $f(x) = e^{9x} - 9x - 1 \Rightarrow f'(x) = 9e^{9x} - 9 = 9(e^{9x} - 1)$

Từ đó suy ra $f(x) = a^x - 9x - 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow a^x \geq 9x + 1 \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 3. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình

$$m^2(\ln^4 x - 16) + 3m(\ln^2 x - 4) - 14(\ln x - 2) \geq 0$$

đúng với mọi $x \in (0; +\infty)$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. $-\frac{3}{8}$.

B. -2 .

C. $-\frac{7}{8}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Điều kiện cần. Đặt $t = \ln x, t \in \mathbb{R}$, bất phương trình trở thành

$$f(t) = m^2(t^4 - 16) + 3m(t^2 - 4) - 14(t - 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 2) \left[\underbrace{m^2(t^3 + 2t^2 + 4t + 8) + 3m(t + 2) - 14}_{g(t)} \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 2)g(t) \geq 0$$

Ta có bất phương trình đã cho nghiệm đúng $\forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow f(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Với $t = 2$ không phải là nghiệm của $g(t)$ thì $f(t)$ sẽ đổi dấu khi t đi qua $t = 2$.

Do đó điều kiện cần để $f(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ là $t = 2$ phải là nghiệm của $g(t) = 0$

$$\Rightarrow g(2) = 0 \Rightarrow 32m^2 + 12m - 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = -\frac{7}{8} \end{cases}$$

Điều kiện đủ.

Với $m = \frac{1}{2}$ thì $f(t) = \frac{1}{4}(t-2)^2(t^2 + 4t + 18) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $m = \frac{1}{2}$ thoả mãn.

Với $m = -\frac{7}{8}$ thì $f(t) = \frac{1}{64}(t-2)^2(49t^2 + 196t + 420) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $m = -\frac{7}{8}$ thoả mãn.

Vậy $S = \left\{ \frac{1}{2}; -\frac{7}{8} \right\}$ nên tổng các phần tử của S là $\frac{1}{2} - \frac{7}{8} = -\frac{3}{8}$.

Câu 4. Với a là tham số thực để bất phương trình $2^x + 3^x \geq ax + 2$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$, khi đó mệnh đề nào sau đây là đúng

A. $a \in (-\infty; 0)$.

B. $a \in (1; 3)$.

C. $a \in (3; +\infty)$.

D. $a \in (0; 1)$.

Lời giải

Cách 1.

Xét trường hợp $a \leq 0$, phương trình không nhận các giá trị âm của x làm nghiệm.

Thật vậy, khi đó $2^x + 3^x < 2$ mà $ax + 2 \geq 2$.

Xét trường hợp $a > 0$, ta có

$$2^x + 3^x \geq ax + 2 \Leftrightarrow 2^x + 3^x - ax - 2 \geq 0.$$

Đặt $f(x) = 2^x + 3^x - ax - 2, x \in \mathbb{R}$.

Khi đó $f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 - a, \forall x \in \mathbb{R}$. Ta có

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 = a \quad (1)$$

Đặt $g(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3, x \in \mathbb{R}$.

$$g'(x) = 2^x \ln^2 x + 3^x \ln^2 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra với mỗi giá trị $a > 0$ thì phương trình (1) luôn có nghiệm duy nhất là x_0 . Lập bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 , ta kết hợp với điều kiện đề bài là $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và đồng thời $f(0) = 0$ nên ta suy ra $x_0 = 0$ và $x_0 = 0$ là giá trị duy nhất để $f(x) = 0$.

Suy ra $x_0 = 0$ là giá trị duy nhất để $f'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(0) = \ln 2 + \ln 3 - a = 0$.

Suy ra $a = \ln 2 + \ln 3 = \ln 6$. Như vậy a là giá trị duy nhất thoả mãn yêu cầu bài toán.

Suy ra mệnh đề đúng là $a \in (1; 3)$.

Cách 2. Ta có

$$2^x + 3^x \geq ax + 2, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2^x + 3^x - ax - 2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đặt $f(x) = 2^x + 3^x - ax - 2, x \in \mathbb{R}$.

Khi đó $f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 - a, \forall x \in \mathbb{R}$.

Điều kiện cần.

Hàm số $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$ nên hàm số đạt cực trị tại $x = 0$

$$\Rightarrow f'(0) = \ln 2 + \ln 3 - a = 0 \Rightarrow a = \ln 2 + \ln 3 = \ln 6.$$

Điều kiện đủ.

Với $a = \ln 6$, ta có $f(x) = 2^x + 3^x - x \ln 6 - 2$. Ta có

$$f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 - \ln 6, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$f''(x) = 2^x \ln^2 2 + 3^x \ln^2 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}$$

Mà $f'(0) = 0$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0 \Rightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy $a = \ln 6$.

Cách 3.

Ta có $2^x + 3^x \geq ax + 2, \forall x \in \mathbb{R}$

Xét hàm số $f(x) = 2^x + 3^x - (ax + 2)$, có $f(0) = 0$.

Ta có $f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 - a, \forall x \in \mathbb{R}$, có $f'(0) = \ln 2 + \ln 3 = \ln 6$.

Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại điểm $(0; 2)$. Phương trình của Δ là

$$y = f'(0)(x - 0) + 2 \Leftrightarrow y = \ln 6 \cdot x + 2.$$

Yêu cầu bài toán được thỏa mãn khi $a = \ln 6$.

Thật vậy, ta sẽ chứng minh $2^x + 3^x \geq \ln 6 \cdot x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $2^x + 3^x \geq \ln 6 \cdot x + 2 \Leftrightarrow 2^x + 3^x - \ln 6 \cdot x - 2 \geq 0$.

Đặt $g(x) = 2^x + 3^x - \ln 6 \cdot x - 2$, suy ra $g'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 - \ln 6 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Từ bảng biến thiên ta có $g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ hay $2^x + 3^x \geq \ln 6 \cdot x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy $a = \ln 6$.

Câu 5. Tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $(\sqrt{10} + 1)^x - m(\sqrt{10} - 1)^x > 3^{x+1}$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ là

A. $m < -\frac{7}{4}$.

B. $m < -\frac{9}{4}$.

C. $m < -2$.

D. $m < -\frac{11}{4}$.

Lời giải

Xét bất phương trình $(\sqrt{10} + 1)^x - m(\sqrt{10} - 1)^x > 3^{x+1}$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^x - m\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^x > 3.$$

$$\text{Nhận xét } \frac{\sqrt{10}+1}{3} \cdot \frac{\sqrt{10}-1}{3} = 1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{-1}.$$

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^x - m\left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{-x} > 3.$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^x, t > 0. \text{ Khi đó } (1) \text{ trở thành } t - \frac{m}{t} > 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t > m \quad (2).$$

Phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (2)$ nghiệm đúng với mọi $t > 0$.

Từ bảng biến thiên ta có $m < -\frac{9}{4}$.

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\ln(x+1) \leq m^5 x^4 + mx$ đúng với mọi $x > -1$.

A. 2.

B. 5.

C. 1.

D. Không có.

Lời giải

Điều kiện cần.

Xét hàm số $f(x) = -m^5 x^4 - mx + \ln(x+1)$ trên $(-1; +\infty)$.

Ta có $f'(x) = -4m^5 x^3 - m + \frac{1}{x+1}$, $\forall x > -1$. Do $\begin{cases} f(x) \leq 0, \forall x > -1 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = 0$,

suy ra $f'(0) = 0 \Leftrightarrow -m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Điều kiện đủ.

Với $m = 1$ ta có $f(x) = -x^4 - x + \ln(x+1)$; $f'(x) = -4x^3 - 1 + \frac{1}{x+1}$; $f'(0) = 0$. Ta lại có

$$f''(x) = -12x^2 - \frac{1}{(x+1)^2} < 0 \text{ với } \forall x > -1$$

Suy ra hàm số $f'(x)$ nghịch biến nên $x = 0$ là nghiệm duy nhất của $f'(x)$.

Vậy $f(x) \leq 0$ với $\forall x > -1$.

Câu 7. Giả sử tham số m_0 là giá trị để bất phương trình $2^x + 3^x + 5^x - mx - 3 \geq 0$ thỏa mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$. Nhận xét nào sau đây là đúng?

A. $m_0 \in (12; +\infty)$.

B. $m_0 \in (2; 6]$.

C. $m_0 \in (0; 2]$.

D. $m_0 \in (6; 10]$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = 2^x + 3^x + 5^x - mx - 3$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 + 5^x \ln 5 - m$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Do $\begin{cases} f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 0 \end{cases}$ nên $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$. Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Suy ra $f'(0) = 0 \Leftrightarrow m = \ln 2 + \ln 3 + \ln 5 = \ln 30$.

Thử lại áp dụng bất đẳng thức $e^u \geq u + 1$, $\forall u \in \mathbb{R}$ cho $u \in \{x \ln 2; x \ln 3; x \ln 5\}$, ta được

- $2^x \geq x \ln 2 + 1$
- $3^x \geq x \ln 3 + 1$
- $5^x \geq x \ln 5 + 1$

Suy ra $2^x + 3^x + 5^x \geq (\ln 2 + \ln 3 + \ln 5)x + 3$ hay

$$2^x + 3^x + 5^x - (\ln 2 + \ln 3 + \ln 5)x - 3 \geq 0.$$

Câu 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$$\ln(x^2 + 1) + (m-1)x + \sqrt{x^2 + 1} - 1 \geq 0$$

có nghiệm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Đặt $f(x) = \ln(x^2 + 1) + (m-1)x + \sqrt{x^2 + 1} - 1$; hàm số $f(x)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} + m - 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Điều kiện cần.

Ta có $\begin{cases} f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \min_{\mathbb{R}} f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ là một điểm cực tiểu của hàm số.

Từ đó suy ra $f'(0) = 0 \Rightarrow m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$.

Điều kiện đủ.

Với $m = 1$ ta có $f(x) = \ln(x^2 + 1) + \sqrt{x^2 + 1} - 1$ và $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Lập bảng biến thiên ta dễ dàng chỉ ra $m = 1$ thỏa mãn.

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình $9^x + 2(m+1).3^x - 3 - 2m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Điều kiện cần.

Xét hàm số $f(x) = 9^x + 2(m+1).3^x - 3 - 2m$ trên tập $\mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = 9^x \ln 9 + 2(m+1).3^x \ln 3$.

Do $\begin{cases} f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 0 \end{cases}$ nên suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và do đó

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \ln 9 + 2(m+1).\ln 3 = 0 \Leftrightarrow m = -2.$$

Điều kiện đủ.

Với $m = -2$ ta có bất phương trình đã cho trở thành $9^x - 2.3^x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (3^x - 1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy có một giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 10. Biết m là số thực để bất phương trình $e^{m(x-1)} + x^2 + mx - m - 2 \geq 0$ đúng với mọi số thực x . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m \in (-\infty; -3)$.

B. $m \in [2; 5)$.

C. $m \in [-3; 2)$.

D. $m \in [5; +\infty)$.

Lời giải

Điều kiện cần.

Xét hàm số $y = f(x) = e^{m(x-1)} + x^2 + mx - m - 2$ trên $\mathbb{R}$, có $f'(x) = me^{m(x-1)} + 2x + m$.

Do $\begin{cases} f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ f(1) = 0 \end{cases}$ suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Suy ra $f'(1) = 0 \Rightarrow m + 2 + m = 0 \Rightarrow m = -1$.

Điều kiện đủ.

Với $m = -1$ ta có $y = f(x) = e^{1-x} + x^2 - x - 1$, suy ra

$$f'(x) = -e^{1-x} + 2x - 1$$

$$f''(x) = e^{1-x} + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Suy ra hàm số $f'(x) = -e^{1-x} + 2x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra phương trình $f'(x) = 0$ có tối đa một nghiệm, mà $f'(1) = 0$ nên $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f'(x) = 0$. Lập bảng biến thiên ta có $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 11. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình

$$4^x + (m+1)2^x - 2m - 6 \geq 0$$

nghiệm đúng với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$. Số phần tử của S là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Điều kiện cần.

Xét hàm số $f(x) = 4^x + (m+1)2^x - 2m - 6$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 4^x \ln 4 + (m+1)2^x \ln 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do $\begin{cases} f(x) \geq 0, \forall x \in [0; +\infty) \\ f(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Suy ra $f'(1) = 0 \Leftrightarrow m = -5$.

Điều kiện đủ.

Với $m = -5$ bất phương trình trở thành $4^x - 4 \cdot 2^x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (2^x - 2)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy $S = \{-5\}$.

Câu 12. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình

$$m^2(x^4 - x^3) - m(x^3 - x^2) + e^{x-1} - x \geq 0$$

đúng với mọi số thực x . Tìm số tập con của S .

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 8.

Lời giải

Điều kiện cần.

Xét hàm số $f(x) = m^2(x^4 - x^3) - m(x^3 - x^2) + e^{x-1} - x$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = m^2(4x^3 - 3x^2) - m(3x^2 - 2x) + e^{x-1} - 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do $\begin{cases} f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \\ f(1) = 0 \end{cases}$. Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Suy ra $f'(1) = 0 \Leftrightarrow m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$.

Điều kiện đủ.

Với $m = 0 \Rightarrow f(x) = e^{x-1} - x$.

Ta có $f'(x) = e^{x-1} - 1, \forall x \in \mathbb{R}$; có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Từ bảng biến thiên ta suy ra $f(x) = e^{x-1} - x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (*).

Với $m = 1 \Rightarrow f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + e^{x-1} - x = (x^2 - x)^2 + e^{x-1} - x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do $(x^2 - x)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $e^{x-1} - x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ theo (*)

Vậy $S = \{0; 1\}$, như vậy số tập con của tập $S = \{0; 1\}$ là 4.

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 13. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình

$$m^2(x^4 - x^3) + m(-x^3 + x^2) + 2(e^{x-1} - x) \geq 0$$

đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số phần tử của S là

A. 0

B. 1.

C. 2.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Đặt $f(x) = m^2(x^4 - x^3) + m(-x^3 + x^2) + 2(e^{x-1} - x)$.

Ta có $y = f(x)$ là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$,

Điều kiện cần.

Nhận thấy $f(1) = 0$ nên $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) \geq f(1), \forall x \in \mathbb{R}$, hay $x = 1$ là điểm cực trị của hàm số, suy ra $f'(1) = 0$, ta có

$$f'(x) = (4x^3 - 3x^2)m^2 + (-3x^2 + 2x)m + 2(e^{x-1} - 1) \Rightarrow f'(1) = m^2 - m \Rightarrow f'(1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

Điều kiện đủ.

Với $m = 0$ ta có $f(x) = 2(e^{x-1} - x); f'(x) = 2(e^{x-1} - 1); f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$,

Suy ra $f(x) \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$ hay $m = 0$ thỏa mãn

Với $m = 1$ ta có $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 2(e^{x-1} - x) = x^2(x-1)^2 + 2(e^{x-1} - x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $m = 1$ thỏa mãn $\Rightarrow S = \{0; 1\}$.

Câu 14. Giả sử m là số thực sao cho bất phương trình $(10x)^{m + \frac{\log x}{10}} \leq 10^{\frac{11}{10}(\log x + 1)^4}$ (1) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; +\infty)$, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m \in (0; 1)$.

B. $m \in (2; 3)$.

C. Không có m .

D. $m \in (3; 10)$.

Lời giải

Điều kiện cần.

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow \left(m + \frac{\log x}{10}\right)(\log x + 1) \leq \frac{11}{10}(\log x + 1)^4$.

Đặt $t = \log x \Rightarrow t \in \mathbb{R}$, bất phương trình (1) nghiệm đúng với $\forall x \in (0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \left(m + \frac{t}{10}\right)(t + 1) - \frac{11}{10}(t + 1)^4 \leq 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(t) = 11(t + 1)^4 - (t + 1)(10m + t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

Ta có $\begin{cases} f(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R} \\ f(-1) = 0 \end{cases}$. Suy ra $t = -1$ là điểm cực tiểu của hàm số $y = f(t) \Rightarrow f'(-1) = 0$.

Mà $f'(t) = 44(t + 1)^3 - (2t + 10m + 1)$ nên suy ra $f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (-1) + 10m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{10}$.

Điều kiện đủ.

Với $m = \frac{1}{10}$ thì bất phương trình (1) có dạng $(10x)^{\frac{1}{10} + \frac{\log x}{10}} \leq 10^{\frac{11}{10}(\log x + 1)^4}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{10} + \frac{\log x}{10}\right)(\log x + 1) \leq \frac{11}{10}(\log x + 1)^4$$

$$\Leftrightarrow (1 + t)(t + 1) \leq 11(t + 1)^4, \forall t \in \mathbb{R}, t = \log x$$

$$\Leftrightarrow g(t) = 11(t + 1)^4 - (1 + t)(t + 1) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

Mà $g\left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{5}{256} < 0$ nên $m = \frac{1}{10}$, loại.

Vậy không có giá trị m thỏa mãn.

Câu 15. Có bao nhiêu số thực dương a để bất phương trình $2002^x + a^x \geq 2019^x + 2020^x$ đúng với mọi số thực x ?

A. Vô Số.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = 2002^x + a^x - 2019^x - 2020^x$

$$\Rightarrow f'(x) = 2002^x \ln 2002 + a^x \ln a - 2019^x \ln 2019 - 2020^x \ln 2020.$$

Điều kiện cần.

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \min_{\mathbb{R}} f(x) = 0 = f(0) \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$\Rightarrow \ln 2002 + \ln a - \ln 2019 - \ln 2020 = 0$$

$$\Rightarrow 2002 \cdot a = 2019 \cdot 2020 \Rightarrow a = \frac{2019 \cdot 2020}{2002}.$$

Điều kiện đủ. Với $a = \frac{2019 \cdot 2020}{2002}$ ta có $f(x) = 2002^x + \left(\frac{2019 \cdot 2020}{2002}\right)^x - 2019^x - 2020^x$.

$$f'(x) = 2002^x \ln(2002) + \left(\frac{2019 \cdot 2020}{2002}\right)^x \ln\left(\frac{2019 \cdot 2020}{2002}\right) - 2019^x \ln(2019) - 2020^x \ln(2020).$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \approx -0,262791 \end{cases}.$$

Lập bảng biến thiên

x	$-\infty$	-0.262791	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$7,07365 \cdot 10^{-7}$			$+\infty$
		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		0	0		

Từ bảng biến thiên ta có $\min_{\mathbb{R}} f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Do đó với $a = \frac{2019 \cdot 2020}{2002}$ thì $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy có duy nhất một số thực a thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Câu 16. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

$$f(x) = m^2 \left(\frac{e^{5x}}{5} - 16e^x \right) + 3m \left(\frac{e^{3x}}{3} - 4e^x \right) - 14 \left(\frac{e^{2x}}{2} - 2e^x \right) + 2020$$

đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tổng của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. $-\frac{7}{8}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. -2 .

D. $-\frac{3}{8}$.

Lời giải

Đặt $t = e^x; t > 0$. Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để hàm số

$$f(t) = m^2 \left(\frac{t^5}{5} - 16t \right) + 3m \left(\frac{t^3}{3} - 4t \right) - 14 \left(\frac{t^2}{2} - 2t \right) + 2020$$

đồng biến trên $(0; +\infty)$. Ta có $f'(t) = m^2 (t^4 - 16) + 3m (t^2 - 4) - 14(t - 2)$.

Khi đó yêu cầu bài toán tương đương

$$m^2 (t^4 - 16) + 3m (t^2 - 4) - 14(t - 2) \geq 0; \forall t > 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 2) [m^2 (t^2 + 4)(t + 2) + 3m(t + 2) - 14] \geq 0; \forall t > 0$$

Điều kiện cần là phương trình $m^2(t^2 + 4)(t + 2) + 3m(t + 2) - 14 = 0$ phải có nghiệm $t = 2$, tức là

$$m^2(2^2 + 4)(2 + 2) + 3m(2 + 2) - 14 = 0 \Leftrightarrow 32m^2 + 12m - 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = -\frac{7}{8} \end{cases}$$

Thử lại. Với $m = \frac{1}{2}$ thì

$$\begin{aligned} f'(x) &= (t-2) \left[\frac{1}{4}(t^2 + 4)(t+2) + \frac{3}{2}(t+2) - 14 \right] \\ &= \frac{1}{4}(t-2)(t^3 + 2t^2 + 10t - 36) = \frac{1}{4}(t-2)^2(t^2 + 4t + 18) \geq 0; \forall t > 0 \end{aligned}$$

Nên $m = \frac{1}{2}$ nhận.

Với $m = -\frac{7}{8}$ thì

$$\begin{aligned} f'(x) &= (t-2) \left[\frac{49}{64}(t^2 + 4)(t+2) - \frac{21}{8}(t+2) - 14 \right] \\ &= \frac{1}{64}(t-2)(49t^3 + 98t^2 + 28t - 840) = \frac{1}{64}(t-2)^2(49t^2 + 196t + 420) \geq 0; \forall t > 0 \end{aligned}$$

Nên $m = -\frac{7}{8}$ nhận.

Vậy $S = \left\{ \frac{1}{2}; -\frac{7}{8} \right\}$. Tổng của tất cả các phần tử thuộc S bằng $\frac{1}{2} - \frac{7}{8} = -\frac{3}{8}$.

3. Kỹ thuật đánh giá miền giá nghiệm.

Gần đây xu hướng các bài toán vận dụng cao đang dần hướng tới các kỹ thuật đánh giá hàm số khó hơn mà những nội dung này chỉ xuất hiện trong các đề thi học sinh giỏi những năm về trước. Tuy nhiên nói thế không có nghĩa là nó rất khó, các kỹ thuật này cũng chỉ từ phương pháp hàm số mà ra, ý tưởng của nó là ra các trường hợp đối nghịch nhau, từ đó nghiệm của phương trình chỉ xảy ra tại một điểm. Trước tiên ta đi vào bài toán mở đầu sau.

Bài toán. Cho 2 số thực dương $x > y > 1$ thỏa mãn điều kiện $\log_2 xy + y = \frac{3x+8}{x}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (\log_2 x)^3 + (\log_2 y + 1)^3$

Ta biến đổi phương trình ban đầu

$$\log_2 xy + y = \frac{3x+8}{x} \Leftrightarrow \log_2 xy = \frac{3x+8-xy}{x}$$

- Nếu $xy < 8 \Rightarrow \begin{cases} \frac{3x+8-xy}{x} > 3 \\ \log_2 xy < \log_2 8 = 3 \end{cases}$.
- Nếu $xy > 8 \Rightarrow \begin{cases} \frac{3x+8-xy}{x} < 3 \\ \log_2 xy > \log_2 8 = 3 \end{cases}$.
- Nếu $xy = 8 \Rightarrow VT = VP$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} P &= (\log_2 x)^3 + (\log_2 y + 1)^3 = (\log_2 x)^3 + \left(\log_2 \frac{8}{x} + 1\right)^3 \\ &= (\log_2 x)^3 + (4 - \log_2 x)^3 \geq \frac{(4 - \log_2 x + \log_2 x)^3}{4} = 16 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 4$, suy ra $y = 2$.

Nhận xét. Bài toán trên đã cho các bạn thấy phần nào ý tưởng có phương pháp đánh giá nghiệm này, mặc dù bài toán này có thể giải bằng phương pháp hàm đặc trưng, tuy nhiên ta thấy rằng cách đánh giá này là vô cùng tự nhiên, ở một số bài toán nếu bế tắc trong việc áp dụng các phương pháp khác thì phương pháp này có thể mở cho ta một lối đi vô cùng dễ dàng. Sau đây ta cùng tìm hiểu các ví dụ để tìm hiểu rõ hơn.

Câu 1. Giải bất phương trình $x(3\log_2 x - 2) > 9\log_2 x - 2$.

Lời giải

Điều kiện $x > 0$, khi đó bất phương trình tương đương với

$$3(x-3)\log_2 x > 2(x-1)$$

Nhận thấy $x = 3$ không là nghiệm của bất phương trình.

- Nếu $x > 3$ thì bất phương trình trở thành $\frac{3}{2}\log_2 x > \frac{x-1}{x-3} \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{2}\log_2 x - \frac{x-1}{x-3} > 0$.

Ta có $f'(x) = \frac{3}{2x\ln 2} + \frac{2}{(x-3)^2} > 0$, nên $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $(3; +\infty)$.

Mặt khác ta lại có $f(4) = 0$, vậy $f(x) > 0 \Rightarrow x > 4$.

- Nếu $x < 3$, khi đó ta xét tương tự trường hợp trên, ta sẽ chỉ ra được $0 < x < 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (0; 1) \cup (4; +\infty)$.

Tổng quát. Để giải bất phương trình $f(x) \geq 0$ trên miền D ta đưa về giải bất phương trình $x - x_0 \geq 0$ nếu $f(x)$ đồng biến hoặc $x - x_0 \leq 0$ nếu $f(x)$ nghịch biến, với x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Bài tập tương tự. Giải các bất phương trình sau

1. $\frac{2^x + 2x - 5}{x - 2} > 1$.
2. $\frac{2^{4-x} - x + 1}{(x^2 - 25)(\log_2 |x| - 2)} \geq 0$.
3. $\frac{\log \frac{5+x}{5-x}}{2^x - 3x + 1} < 0$.
4. $\frac{3^x + x - 4}{x^2 - x - 6} > 0$.
5. $\frac{2^{1-x} - 2^x + 1}{2^x - 1} \leq 0$.
6. $\frac{\log_4(x^2 - 4x - 11)^2 - \log_{11}(x^2 - 4x - 11)^3}{2 - 5x - 3x^2} \geq 0$.
7. $\log_2(\sqrt{x^2 - 5x + 5} + 1) + \log_3(x^2 - 5x + 7) \leq 2$.
8. $(4 \cdot 3^x + 3^{-x})^{3\log_3(x-1) - \log_3(x-1)(2x+1)} > 1$.

Sau đây ta sẽ cùng tìm hiểu lớp các bài toán sử dụng hàm số đánh giá để loại miền nghiệm của phương trình. Trước tiên xét bài toán sau.

Bài toán. Giải phương trình $(a-1)\log_c b + (b-1)\log_c a = 0$

Trước tiên ta nhận thấy rằng $b=1$ là một nghiệm của phương trình, do đó ta xét $b \neq 1$.

Biến đổi phương trình ta được

$$(a-1)\log_c b = (1-b)\log_c a \Leftrightarrow \frac{a-1}{1-b} = \frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_b a$$

- Nếu $b > 1$ thì ta có $f(a) = \frac{a-1}{1-b} - \log_b a$ là hàm nghịch biến, do vậy phương trình $f(a) = 0$ có tối đa 1 nghiệm, ta chỉ ra nghiệm đó là $a = 1$.
- Nếu $b < 1$ thì ta có $f(a) = \frac{a-1}{1-b} - \log_b a$ là hàm đồng biến, do vậy phương trình $f(a) = 0$ có tối đa 1 nghiệm, ta chỉ ra nghiệm đó là $a = 1$.

Như vậy thì phương trình đầu tương đương

$$(a-1)\log_c b + (b-1)\log_c a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Bài toán được giải quyết.

Nhận xét. Có vài bài toán có dạng gần như này, ví dụ như ta có phương trình sau.

$$(a-1)\log_c a + (b-1)\log_d b = 0 (c, d > 1)$$

Ở bài toán này ta dễ dàng chứng minh được từng hàm theo biến a và biến b luôn dương và đồng thời $a-1$ cùng dấu với $\log_c a$, $b-1$ cùng dấu với $\log_d b$, từ đó chỉ ra nghiệm của phương trình là $a = b = 1$.

Bài tập tương tự. Cho phương trình

$$(x^2 - 2mx - 1)\log_2(x^2 - 2mx) + (x^2 + 4nx - 2)\log(x^2 + 4nx - 1) = 0,$$

trong đó m và n là hai số thực không âm sao cho phương trình đã cho có nghiệm. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 2m + 3n$ tương ứng bằng?

A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

B. $1 + \sqrt{3}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

D. 0.

Câu 2. Giải phương trình $x \cdot 3^{x^2-1} + (x^2-1)3^x + 1 - x - x^2 = 0$.

Đề chọn đội tuyển VMO - Chuyên Quốc Học Huế

Lời giải

Nhìn hình thức bài toán tưởng chừng rất bình thường, có thể nghĩ ngay tới phương pháp hàm đặc trưng, nếu không tin vào mức độ khó của bài toán này thì có thể đặt bút làm thử nhé. Biến đổi phương trình ban đầu ta được

$$(x^2-1)(3^x-1) + x(3^{x^2-1}-1) = 0$$

Nhận thấy rằng $x=0, x=\pm 1$ đều thỏa mãn phương trình trên.

Xét $x \neq 0, x \neq \pm 1$ thì phương trình trở thành

$$\frac{3^x-1}{x} + \frac{3^{x^2-1}-1}{x^2-1} = 0$$

Với $t \neq 0$, ta xét hàm số $f(t) = \frac{3^t-1}{t}$, ta dễ dàng nhận thấy rằng nếu $t > 0$ thì $3^t-1 > 0 \Rightarrow f(t) > 0$ và

với $t < 0$ thì $3^t-1 < 0 \Rightarrow f(t) < 0$, do đó phương trình (2) tương đương với $f(x) + f(x^2-1) = 0$ vô nghiệm. Như vậy bài toán được giải quyết.

Nhận xét.

- Như vậy từ bài này ta rút ra được một hệ quả là $\frac{3^t - 1}{t}$ cùng dấu với t , trong đó $t \neq 0$.
- Ngoài ra ta có thể bài toán cho dạng như này, mà cho ta dạng $f(t) + g(t)$ mà ở đó hàm $f(t)$ và hàm $g(t)$ cùng dấu với nhau. Đây là các bài toán tương đối khó để nhận biết được nó.

- Giải phương trình $2^{2x} + 3^{2x} = 2^x + 3^{x+1} + x + 1$.
- Giải phương trình $7^{x-1} = 1 + 2\log_7(6x - 5)^3$.
- Giải phương trình $(1 + 4x - x^2) \cdot 5^{2x^2 - 3x - 1} + (2x^2 - 3x - 1) \cdot 5^{1 + 4x - x^2} = x^2 + x$.
- Giải phương trình $(x^2 - 3x + 2) \cdot 6^{x-3} + (x^2 - 5x + 6) \cdot 6^{x-1} + (x^2 - 4x + 3) \cdot 6^{x-2} = 3x^2 - 12x + 11$.
- Giải phương trình $(2^{x-2} - 1)\ln x + (x - 2)(x^{\ln 2} - 1) = 0$.
- Giải phương trình $(x^2 + 2x - 1)\ln x + (x - 1)\log(x^2 + 2x) = 0$.
- Tìm m để phương trình $(x - 1)\ln x + (x^2 - 2mx + m - 1)\log(x^2 - 2mx + m) = 0$ có nghiệm

Câu 3. Cho bất phương trình $\frac{2^x}{4^x - 2} + 3^{x+2}(x - \log_2(4^x - 2)) - 1 \geq 0$ có nghiệm thực là $x \in (\alpha; \beta]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2(\beta - \alpha)$.

Lời giải

Điều kiện $4^x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

Ta có bất phương trình ban đầu tương đương

$$\frac{2^x}{2^{\log_2(4^x - 2)}} + 3^{x+2}(x - \log_2(4^x - 2)) \geq 1 \Leftrightarrow 2^{x - \log_2(4^x - 2)} + 3^{x+2}(x - \log_2(4^x - 2)) \geq 1 \quad (1)$$

- Nếu $(x - \log_2(4^x - 2)) < 0 \Rightarrow 3^{x+2}(x - \log_2(4^x - 2)) < 0; 2^{x - \log_2(4^x - 2)} < 1$, trường hợp này không thỏa mãn (1).
- Nếu $(x - \log_2(4^x - 2)) \geq 0 \Rightarrow 3^{x+2}(x - \log_2(4^x - 2)) \geq 0; 2^{x - \log_2(4^x - 2)} \geq 1$, trường hợp này không thỏa mãn (1).

Vậy nghiệm của bất phương trình (1) là nghiệm của bất phương trình

$$x - \log_2(4^x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \log_2(4^x - 2) \Leftrightarrow 2^x \geq 4^x - 2 \Leftrightarrow -1 \leq 2^x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 1$$

Kết hợp điều kiện suy ra $\frac{1}{2} < x \leq 1 \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right] = (\alpha; \beta] \rightarrow 2(\beta - \alpha)_{\max} = 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1$.

Câu 4. Giải bất phương trình $3^{x^2-9} + (x^2 - 9) \cdot 5^{x+1} < 1$

Lời giải

Đặt $3^{x^2-9} + (x^2 - 9) \cdot 5^{x+1} < 1$. (1)

Ta có $5^{x+1} > 0, \forall x$. Khi đó

- Xét $x^2 - 9 = 0$, có $VT(1) = 3^0 + 0 = 1$ (loại).
- Xét $x^2 - 9 > 0 \Rightarrow \begin{cases} 3^{x^2-9} > 3^0 = 1 \\ (x^2 - 9) \cdot 5^{x+1} > 0 \end{cases} \Rightarrow$ Vế trái (1) > 1 (loại).

- Xét $x^2 - 9 < 0 \Rightarrow \begin{cases} 3^{x^2-9} < 3^0 = 1 \\ (x^2 - 9) \cdot 5^{x+1} < 0 \end{cases} \Rightarrow$ Về trái (1) > 1 (luôn đúng).

Có $x^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow x \in (-3; 3)$, như vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-3; 3)$.

Câu 5. Giải phương trình $\log_{6-x}(\log_2 x) = \log_{7-x}(\log_2 2x)$.

Lời giải

Điều kiện $0 < x < 6, x \neq 5$.

Đặt $\log_{6-x}(\log_2 x) = \log_{7-x}(\log_2 2x) = t \Rightarrow (6-x)^t + 1 = (7-x)^t$.

Đặt $6-x = a > 0$, khi đó ta có phương trình $a^t + 1 = (a+1)^t \Leftrightarrow \left(\frac{a}{a+1}\right)^t + \left(\frac{1}{a+1}\right)^t = 1$.

Do $0 < \frac{a}{a+1}, \frac{1}{a+1} < 1$ nên ta xét các trường hợp sau.

- Nếu $t > 1$ thì $\left(\frac{a}{a+1}\right)^t + \left(\frac{1}{a+1}\right)^t > \frac{a}{a+1} + \frac{1}{a+1} = 1$, loại.
- Nếu $t < 1$ thì $\left(\frac{a}{a+1}\right)^t + \left(\frac{1}{a+1}\right)^t < \frac{a}{a+1} + \frac{1}{a+1} = 1$, loại.
- Nếu $t = 1$ thì thỏa mãn. Suy ra $x = 4$.

Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài tập tương tự. Giải phương trình

- $\frac{1}{4} \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x+3) = \log_{\frac{1}{4}}(2^x + x^3 + x^2)$.
- $8^x - (x^3 + 3x^2 - 6)4^x + 2(x^3 + 3x^2 - 6)^3 = 0$.
- $\log_3(x^2 + x + 1) - \log_3 x = 2x - x^2$.

Câu 6. Chứng minh rằng

- Với $0 < a \neq 1$ thì ta có $\begin{cases} a^x \geq (a-1)x + 1, \forall x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ a^x < (a-1)x + 1, \forall x \in (0; 1) \end{cases}$.
- Với $x > 0$ thì $x^a \geq a(x-1) + 1, \forall a > 1$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Bất đẳng thức Bernoulli

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = a^x - (a-1)x - 1$, ta có $f'(x) = a^x \ln a - (a-1), f''(x) = a^x (\ln a)^2 > 0$, nên phương trình $f(x) = 0$ có không quá hai nghiệm phân biệt. Ta lại thấy $f(0) = f(1) = 0$ nên $x = 0, x = 1$ là hai nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Dựa vào bảng biến thiên ta chỉ ra điều phải chứng minh.

Xét hàm số $f(x) = x^a - a(x-1) - 1, x > 0$. Ta có

$$f'(x) = ax^{a-1} - a = a(x^{a-1} - 1), f''(x) = a(a-1)x^{a-2} > 0$$

Nên hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất tại nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ hay ta được $f(x) \geq f(1) = 0$. Như vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài tập. Chứng minh các đánh giá sau.

- Với $0 < a \neq 1$ và $x, y \in \mathbb{R}$ thì $a^x - a^y$ cùng dấu với $(a-1)(x-y)$.
- Với $0 < a, b \neq 1$ và $x \in \mathbb{R}$ thì $a^x - b^x$ cùng dấu với $x(a-b)$.

- Với $0 < a \neq 1$ và $x > 0$ thì $\log_a x$ cùng dấu với $(a-1)(x-1)$.
- Với $0 < a \neq 1$ và $x, y > 0$ thì $\log_a x - \log_a y$ cùng dấu với $(a-1)(x-y)$.
- Với $0 < a, b \neq 1$ và $x > 0$ thì $\log_a x - \log_b x$ cùng dấu với $(1-x)(a-b)$.
- Sử dụng 1 trong các đánh giá trên, giải và biện luận bất phương trình $x^{\log_a x} - a^2 \geq 0$.

Câu 7. Cho phương trình $2018^{x^2+(2-m)x+2} + \left[(x+1)^2 - mx\right] \ln(x^2+1) = 2018$. Có bao nhiêu giá trị nguyên m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình có nghiệm duy nhất thuộc khoảng $(-1; +\infty)$?

A. 2017. B. 2018. C. 2019. D. 2020.

Lời giải

Phương trình tương đương $(1 - 2018^{x^2+(2-m)x+2}) \cdot 2018 = [x^2 + (2-m)x + 1] \cdot \ln(x^2+1)$.

- Nếu $x^2 + (2-m)x + 1 > 0$ thì $\begin{cases} VT < 0 \\ VP > 0 \end{cases} \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.
- Nếu $x^2 + (2-m)x + 1 < 0$ thì $\begin{cases} VT > 0 \\ VP < 0 \end{cases} \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Thử thấy $x^2 + (2-m)x + 1 = 0$ (*) thỏa mãn phương trình. Do đó yêu cầu bài toán tương đương với phương trình (*) có nghiệm duy nhất trên $(-1; +\infty)$. Bằng cách dùng tam thức bậc hai hoặc xét hàm số cho ta kết quả $\begin{cases} m = 4 \\ m < 0 \end{cases} \xrightarrow[m \in [-2018; 2018]]{m \in \mathbb{Z}}$ có 2019 giá trị.

Câu 8. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$$2^{|2x^2+m(x+1)+15|} \leq 2 - (m+8)(x^2-3x+2)$$

nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 3]$?

A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số

Lời giải

Nhận xét. Đây là một bài toán tương đối khó, ta dễ nhận thấy phương trình

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [1; 3] \\ x = 2 \in [1; 3] \end{cases}$$

nên ta xét bất phương trình với $x = 1$ và $x = 2$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^{|2m+17|} \leq 2 \\ 2^{|3m+23|} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2m+17| \leq 1 \\ |3m+23| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 2m+17 \leq 1 \\ -1 \leq 3m+23 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 \leq m \leq -8 \\ -8 \leq m \leq -\frac{22}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = -8.$$

Thay $m = -8$ vào lại bất phương trình ta được

$$2^{|2x^2-8x+7|} \leq 2 \Leftrightarrow |2x^2-8x+7| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2x^2-8x+7 \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-8x+8 \geq 0 \\ 2x^2-8x+6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 \geq 0 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$$

Vậy với $m = -8$ bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in [1; 3]$.

Câu 9. Cho phương trình $\ln x + 2(x^2+x)e^{mx} + (m-2)x - 2 = 0$. Khoảng $(a; b)$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(1; e^4)$. Tính $\frac{a}{b}$.

A. $\frac{b}{a} = \frac{2}{e^2}$. B. $\frac{b}{a} = \frac{e}{2}$. C. $\frac{b}{a} = \frac{e^3}{3}$. D. $\frac{b}{a} = \frac{4}{e^3}$.

Lời giải

Điều kiện $x > 0$. Đặt $e^{mx} = t$ ($t > 0$) $\Leftrightarrow mx = \ln t$.

Ta có phương trình $\ln x + mx + 2(x+1)(xe^{mx} - 1) = 0$ có dạng

$$\Leftrightarrow \ln x + \ln t + 2(x+1)(xe^{mx} - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln(xt) + 2(x+1)(xt - 1) = 0 \quad (*)$$

- Nếu $xt > 1 \Rightarrow VT(*) > 0 \Rightarrow (*)$ vô nghiệm.
- Nếu $1 > xt > 0 \Rightarrow VT(*) < 0 \Rightarrow (*)$ vô nghiệm.
- Nếu $xt = 1 \Rightarrow VT(*) = 0$.

Do đó phương trình $(*) \Leftrightarrow m = -\frac{\ln x}{x} = f(x)$.

Ta có $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = e$, lập bảng biến thiên ta thấy rằng phương trình có hai nghiệm phân

biệt thuộc khoảng $(1; e^4)$ khi và chỉ khi $m \in \left(-\frac{1}{e}; -\frac{4}{e^4}\right) \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{4}{e^3}$.

Câu 10. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_2(x+2y) + x(x+3y-1) + y(2y-1) = 0$. Khi biểu thức $P = \log_{2020} x + 2\log_{2020} y$ đạt giá trị lớn nhất, tính giá trị $4x^2 + 5y^2$.

A. 1.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{8}{9}$.

D. 3.

Lời giải

Cách 1.

Ta có $\log_2(x+2y) + x(x+3y-1) + y(2y-1) = 0 \Leftrightarrow \log_2(x+2y) = [1 - (x+2y)](x+y) \quad (*)$

Dễ thấy $x+2y=1$ thỏa mãn $(*)$

- Nếu $0 < x+2y < 1$ thì $VT(*) < 0, VP(*) > 0 \Rightarrow$ vô lý.
- Nếu $x+2y > 1$ thì $VT(*) > 0, VP(*) < 0 \Rightarrow$ vô lý.

Vậy $(*) \Leftrightarrow x+2y=1 \Rightarrow x=1-2y$. Vì $x, y > 0$ nên $0 < y < \frac{1}{2}$. Khi đó,

$$P = \log_{2020} x + 2\log_{2020} y = \log_{2020} xy^2 = \log_{2020} (y^2 - 2y^3)$$

và P lớn nhất $f(y) = y^2 - 2y^3$ lớn nhất.

Xét hàm số $f(y) = y^2 - 2y^3, y \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$, có $f'(y) = 2y - 6y^2 = 2y(1-3y); f'(y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \notin \left(0; \frac{1}{2}\right) \\ y = \frac{1}{3} \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \end{cases}$

Như vậy ta dễ dàng chỉ ra hàm số $f(y)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{27}$, tại $y = \frac{1}{3}, x = \frac{1}{3}$.

Khi đó $4x^2 + 5y^2 = 1$.

Cách 2.

Hướng suy luận $P = \log_{2020} x + 2\log_{2020} y = \log_{2020} xy^2$; P đạt GTLN khi xy^2 đạt GTLN

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $xy^2 \leq \left(\frac{x+y+y}{3}\right)^3$ từ đó phán đoán $x+2y$ là hằng số.

Mặt khác phần phía ngoài logarit của $\log_2(x+2y) + x(x+3y-1) + y(2y-1) = 0 \quad (1)$ bậc hai nên cần tạo ra $(x+2y)^2$; suy ra nhân cả 2 vế của (1) với 2.

Lời giải.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \log_2(x+2y)^2 + 2x^2 + 6xy - 2x + 4y^2 - 2y = 0$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+2y)^2 + (x^2 + 4xy + 4y^2) + x^2 + 2xy = 2(x+y)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+2y)^2 + (x+2y)^2 + x(x+2y) = 2(x+y) \quad (2)$$

Đặt $a = x+2y; b = x$; từ (2) suy ra $\log_2 a^2 + a^2 + ab = a+b$

- Nếu $a > 1$: $\log_2 a^2 > 0, a(a+b) > (a+b) \Rightarrow VT > VP$.
- Nếu $0 < a < 1$: $\log_2 a^2 < 0, a(a+b) < (a+b) \Rightarrow VT < VP$.
- Nếu $a = 1$ (1) và (3) đúng với mọi $b > 0$

Vậy $x+2y=1 \Rightarrow xy^2 \leq \frac{1}{27}$. Dấu "=" xảy ra khi $x=y$ và $x+2y=1$ hay $x=y=\frac{1}{3}$.

Khi đó $4x^2 + 5y^2 = 1$.

Cách 3. Ta cũng có thể sử dụng hàm đặc trưng cho bài toán này.

$$\log_2(x+2y) + x(x+3y-1) + y(2y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+2y) + (x+2y)^2 - y(x+2y) - (x+y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{(x+2y)(x+y)}{(x+y)} + (x+2y)(x+y) = (x+y)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+2y)(x+y) + (x+2y)(x+y) = \log_2(x+y) + (x+y) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = \log_2 x + x, x \in (0; +\infty)$, ta có $f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + 1 > 0 \forall x \in (0; +\infty)$;

Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$

Từ (1), ta có $(x+2y)(x+y) = x+y \Rightarrow x+2y=1$ (vì x, y dương)

$$\text{Vậy } P = \log_{2020} x + 2\log_{2020} y = \log_{2020} xy^2 \leq \log_{2020} \left(\frac{x+y+y}{3} \right) = \log_{2020} \frac{1}{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y$ và $x+2y=1$ hay $x=y=\frac{1}{3}$. Suy ra $4x^2 + 5y^2 = 1$.

Câu 11. Có tất cả bao nhiêu cặp số $(a; b)$ với a, b là các số nguyên dương thỏa mãn

$$\log_3(a+b) + (a+b)^3 = 3(a^2 + b^2) + 3ab(a+b-1) + 1.$$

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải

Cách 1.

Với a, b là các số nguyên dương, ta có

$$\log_3(a+b) + (a+b)^3 = 3(a^2 + b^2) + 3ab(a+b-1) + 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2 - ab} + a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = 3(a^2 + b^2 - ab) + 3ab(a+b) + 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3(a^3 + b^3) + a^3 + b^3 = \log_3[3(a^2 + b^2 - ab)] + 3(a^2 + b^2 - ab) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ trên $(0; +\infty)$, ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Khi đó, phương trình (1) trở thành

$$\begin{aligned} f(a^3 + b^3) &= f[3(a^2 + b^2 - ab)] \Leftrightarrow a^3 + b^3 = 3(a^2 + b^2 - ab) \\ &\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - ab)(a + b - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - ab = 0 (*) \\ a + b - 3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Do $a, b \in \mathbb{N}^*$ nên phương trình $(*)$ vô nghiệm. Suy ra $a + b = 3$.

$$\text{Mà } a, b \text{ là các số nguyên dương nên } \begin{cases} 0 < a < 3 \\ 0 < b < 3 \\ a + b = 3 \\ a, b \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Vậy có hai cặp số $(a; b)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2.

Với a, b là các số nguyên dương, ta có

$$\begin{aligned} \log_3(a + b) + (a + b)^3 &= 3(a^2 + b^2) + 3ab(a + b - 1) + 1 \\ &\Leftrightarrow \log_3 \frac{a + b}{3} + a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = 3(a^2 + b^2 - ab) + 3ab(a + b) \\ &\Leftrightarrow \log_3 \frac{a + b}{3} = (a^2 + b^2 - ab)(3 - a - b)(1) \end{aligned}$$

Trường hợp 1. $a + b = 2$. Khi đó $(1) \Leftrightarrow \log_3 \frac{2}{3} = 4 - 3ab$ loại do $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Trường hợp 2. $a + b > 3 \Rightarrow \log_3 \frac{a + b}{3} > 0$ và $(a^2 + b^2 - ab)(3 - a - b) < 0$, nên (1) không xảy ra.

Trường hợp 3. $a + b = 3$, khi đó (1) thỏa mãn.

$$\text{Mà } a, b \text{ là các số nguyên dương nên } \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ a = 1 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Vậy có hai cặp số $(a; b)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 12. Số nghiệm của phương trình $x^3 + x^2 + 1 = (x^3 - 3x + 2).2018^{x^2 + 3x - 1} + (x^2 + 3x - 1).2018^{x^3 - 3x + 2}$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} a = x^2 + 3x - 1 \\ b = x^3 - 3x + 2 \end{cases}$, phương trình trở thành

$$a + b = b.2018^a + a.2018^b \Leftrightarrow a(2018^b - 1) + b(2018^a - 1) = 0.$$

Nếu $a \neq 0$, $b \neq 0$ chia hai vế cho ab , ta được $\frac{2018^a - 1}{a} + \frac{2018^b - 1}{b} = 0$.

Phương trình này vô nghiệm do $\frac{2018^a - 1}{a} > 0$ và $\frac{2018^b - 1}{b} > 0$ với mọi $a, b \neq 0$.

Thật vậy nếu $a > 0$ thì $2018^a - 1 > 0$; nếu $a < 0$ thì $2018^a - 1 < 0$.

Kiểm tra thấy $a = 0$ hoặc $b = 0$ thỏa mãn. Suy ra $\begin{cases} x^2 + 3x - 1 = 0 \\ x^3 - 3x + 2 = 0 \end{cases}$.

Thôi đến đây cho các bạn giải tiếp, mình gõ hơi mệt rồi....

Các bài toán về dãy số

Trong đề minh họa THPT Quốc Gia 2018 dạng toán mũ – logarit kết hợp với dãy số đã gây sốt một thời gian với các bài toán được các trường các sở đưa ra vô cùng phong phú và phát biểu dưới nhiều hình thức khác nhau. Mặc dù trong năm vừa rồi dạng toán này không còn được phổ biến nữa, tuy nhiên trong chương này ta vẫn sẽ cùng nhìn lại dạng toán đã từng thành trào lưu một thời này.

Các bài toán minh họa.

Câu 1 . Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 2\log u_{10}} = 2\log u_{10}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất để $u_n > 5^{100}$ bằng

A. 247

B. 248

C. 229

D. 290

Đề tham khảo kỳ thi THPT Quốc Gia 2018 – Bộ Giáo dục và Đào tạo

Lời giải

Vì $u_{n+1} = 2u_n$ nên dễ thấy dãy số (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 2$.

Ta có $u_{10} = u_1 \cdot q^9 = 2^9 \cdot u_1$. Xét $\log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 2\log u_{10}} = 2\log u_{10}$

$$\Leftrightarrow \log u_1 - 2\log(2^9 \cdot u_1) + \sqrt{2 + \log u_1 - 2\log(2^9 \cdot u_1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \log u_1 - 18\log 2 - 2\log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 18\log 2 - 2\log u_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\log u_1 - 18\log 2 + \sqrt{2 - \log u_1 - 18\log 2} = 0$$

Đặt $\sqrt{2 - \log u_1 - 18\log 2} = t (t \geq 0)$. Phương trình trên trở thành

$$t^2 - 2 + t = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2(L) \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2 - \log u_1 - 18\log 2} = 1 \Leftrightarrow 2 - \log u_1 - 18\log 2 = 1 \Leftrightarrow u_1 = \frac{5}{2^{17}}$$

Trong trường hợp này ta có. $u_n = \frac{5}{2^{17}} \cdot 2^{n-1} > 5^{100} \Leftrightarrow 2^{n-18} > 5^{99} \Leftrightarrow n > 99\log_2 5 + 18$

Mà $n \in \mathbb{N}^*$ nên giá trị nhỏ nhất trong trường hợp này là $n = 248$.

Câu 2 . Cho biểu thức $A = \log\left(2017 + \log\left(2016 + \log\left(2015 + \log\left(\dots + \log(3 + \log 2)\dots\right)\right)\right)\right)$

Biểu thức A có giá trị thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(\log 2017; \log 2018)$ B. $(\log 2019; \log 2020)$ C. $(\log 2018; \log 2019)$ D. $(\log 2020; \log 2021)$

Sở Giáo dục và Đào tạo Ninh Bình năm học 2017 - 2018

Lời giải

Đặt $A_n = \log\left(2017 + \log\left(2016 + \log\left(2015 + \log\left(\dots + \log(3 + \log 2)\dots\right)\right)\right)\right) \Rightarrow A_n = (n + A_{n-1})$

Ta có

$$0 < \log 2 < 1 \Leftrightarrow 0 < A_2 < 1$$

$$\Rightarrow 0 < \log 3 < A_3 = \log(3 + A_2) < \log 4 < 1$$

...

$$\Rightarrow 0 < \log 9 < A_9 = \log(9 + A_8) < \log 10 = 1$$

$$\Rightarrow 1 = \log 10 < A_{10} = \log(10 + A_9) < \log 11 < 2$$

$$\Rightarrow 1 < \log 12 < A_{11} = \log(11 + A_{10}) < \log 13 < 2$$

...

$$\Rightarrow 2 < \log 999 < A_{997} = \log(997 + A_{996}) < \log 1000 = 3$$

$$\Rightarrow 3 = \log 1000 < A_{998} = \log(998 + A_{997}) < \log 1001 < 4$$

$$\Rightarrow 3 < \log 1002 < A_{999} = \log(999 + A_{998}) < \log 1003 < 4$$

...

$$\Rightarrow 3 < \log 2020 < A_{2017} = \log(2017 + A_{2016}) < \log 2021 < 4$$

Vậy $A_{2017} \in (\log 2020; \log 2021)$

Chọn ý **D**.

Câu 3. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\ln^2 u_6 - \ln u_8 = \ln u_4 - 1$ và $u_{n+1} = u_n \cdot e^{\frac{1}{n}} \forall n \geq 1$. Tìm u_1			
A. e	B. e^2	C. e^{-3}	D. e^{-4}
THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa năm học 2017 – 2018			

Lời giải

Từ giả thiết suy ra dãy số (u_n) là cấp số nhân với công bội e và $u_n > 0 \forall n \geq 1$.

Ta có $u_6 = u_1 \cdot e^5; u_8 = u_1 \cdot e^7; u_4 = u_1 \cdot e^3$. Do đó ta có.

$$\begin{aligned} \ln^2 u_6 - \ln u_8 &= \ln u_4 - 1 \Leftrightarrow \ln^2(u_1 \cdot e^5) - \ln(u_1 \cdot e^7) = \ln(u_1 \cdot e^3) - 1 \\ &\Leftrightarrow (\ln u_1 + 5)^2 - (\ln u_1 + 7) = (\ln u_1 + 3) - 1 \Leftrightarrow (\ln u_1)^2 + 8(\ln u_1) + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln u_1 = -4 \Leftrightarrow u_1 = e^{-4} \end{aligned}$$

Chọn ý **D**.

Câu 4. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $e^{u_{18}} + 5\sqrt{e^{u_{18}} - e^{4u_1}} = e^{4u_1}$ và $u_{n+1} = u_n + 3$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị lớn nhất của n để $\log_3 u_n < \ln 2018$ bằng?			
A. 1419	B. 1418	C. 1420	D. 1417
THPT Kim Liên – Hà Nội lần 2 năm học 2017 – 2018			

Lời giải

Ta có $u_{n+1} = u_n + 3$ với mọi $n \geq 1$ nên (u_n) là cấp số cộng có công sai $d = 3$

$$e^{u_{18}} + 5\sqrt{e^{u_{18}} - e^{4u_1}} = e^{4u_1} \Leftrightarrow 5\sqrt{e^{u_{18}} - e^{4u_1}} = e^{4u_1} - e^{u_{18}} \quad (1)$$

Đặt $t = e^{u_{18}} - e^{4u_1}$ ($t \geq 0$) Phương trình (1) trở thành

$$5\sqrt{t} = -t \Leftrightarrow t + 5\sqrt{t} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{t}(\sqrt{t} + 5) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{t} = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

Với $t = 0$ ta có $e^{u_{18}} = e^{4u_1} \Leftrightarrow u_{18} = 4u_1 \Leftrightarrow u_1 + 51 = 4u_1 \Leftrightarrow u_1 = 17$

Vậy $u_n = u_1 + (n-1)d = 17 + (n-1)3 = 3n + 14$

Khi đó ta được $\log_3 u_n < \ln 2018 \Leftrightarrow u_n < 3^{\ln 2018} \Leftrightarrow 3n + 14 < 3^{\ln 2018} \Leftrightarrow n < \frac{3^{\ln 2018} - 14}{3} \approx 1419,98$

Vậy giá trị lớn nhất của n là 1419.

Chọn ý **A**.

Câu 5. Cho dãy số (a_n) thỏa mãn $a_1 = 1$ và $5^{a_{n+1}-a_n} - 1 = \frac{3}{3n+2}$, với mọi $n \geq 1$. Tìm số nguyên dương $n > 1$ nhỏ nhất để a_n là một số nguyên.

A. $n = 123$

B. $n = 41$

C. $n = 39$

D. $n = 49$

Lời giải

Từ giả thiết ta có $5^{a_{n+1}-a_n} - 1 = \frac{3}{3n+2} \Leftrightarrow 5^{a_{n+1}-a_n} = \frac{3n+5}{3n+2} \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + \log_5 \frac{3n+5}{3n+2}$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + \log_5 \frac{3n+2}{3n-1} = a_{n-2} + \log_5 \frac{3n-1}{3n-4} + \log_5 \frac{3n+2}{3n-1} \\ &\dots \\ &= a_1 + \log_5 \frac{8}{5} + \log_5 \frac{11}{8} + \dots + \log_5 \frac{3n-1}{3n-4} + \log_5 \frac{3n+2}{3n-1} \\ &= 1 + \log_5 \left(\frac{8}{5} \cdot \frac{11}{8} \dots \frac{3n-1}{3n-4} \cdot \frac{3n+2}{3n-1} \right) = 1 + \log_5 \frac{3n+2}{5} = \log_5 (3n+2) \end{aligned}$$

Do đó $a_n = \log_5 (3n+2)$. Vì $n > 1$ nên $a_n = \log_5 (3n+2) > \log_5 5 = 1$, đồng thời dễ thấy (a_n) là dãy tăng.

Lại có $a_n = \log_5 (3n+2) \Leftrightarrow n = \frac{5^{a_n} - 2}{3}$.

Lần lượt thử các giá trị $a_n = 2; 3; 4; \dots$ ta có $a_n = 3$ là giá trị nguyên, lớn hơn 1, nhỏ nhất, cho giá trị tương ứng $n = 41$.

Vậy $n = 41$.

Chọn ý **B**.

Câu 6. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} 4e^{2u_9} + 2e^{u_9} - 4e^{u_1+u_9} = e^{u_1} - e^{2u_1} + 3 \\ u_{n+1} = u_n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Giá trị nhỏ nhất của số n để $u_n > 1$?

A. 725

B. 682

C. 681

D. 754

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra (u_n) là CSC có công sai $d = 3 \Rightarrow u_9 = u_1 + 24$.

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\begin{aligned} 4e^{2u_9} + 2e^{u_9} - 4e^{u_1+u_9} &= e^{u_1} - e^{2u_1} + 3 \\ \Leftrightarrow 4e^{2u_1+48} + 2e^{u_1+24} - 4e^{2u_1+24} &= e^{u_1} - e^{2u_1} - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow \left((2e^{24} - 1)e^{2u_1} \right)^2 + \left((2e^{24} - 1)e^{2u_1} \right) - 3 &= 0 \\ \Rightarrow (2e^{24} - 1)e^{2u_1} = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \Rightarrow u_1 &= \ln \left[\frac{-1 + \sqrt{13}}{2(2e^{24} - 1)} \right] \end{aligned}$$

Ta có $u_n = u_1 + 3(n-1) > 2018 \Rightarrow n > 681 \Rightarrow n \geq 682$

Chọn ý **B**.

Câu 7. Cho dãy số (u_n) có số hạng đầu tiên $u_1 \neq 1$ thỏa mãn đẳng thức sau .

$$\log_2^2(5u_1) + \log_2^2(7u_1) = \log_2^2 5 + \log_2^2 7 \text{ và } u_{n+1} = 7u_n \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 1111111$ bằng

A. 11

B. 8

C. 9

D. 10

Lời giải

Vì $u_{n+1} = 7u_n$ nên dễ thấy dãy số (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 7$.

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\log_2^2(5u_1) + \log_2^2(7u_1) = \log_2^2 5 + \log_2^2 7$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 5 + \log_2 u_1)^2 + (\log_2 7 + \log_2 u_1)^2 = \log_2^2 5 + \log_2^2 7$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2 5 \cdot \log_2 u_1 + 2\log_2^2 u_1 + 2\log_2 7 \cdot \log_2 u_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 u_1 = 0 \\ 2\log_2 5 + 2\log_2 u_1 + 2\log_2 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \quad (L) \\ \log_2 35u_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{35}$$

Ta có $u_n = u_1 \cdot 7^{n-1} \cdot u_n > 1111111 \Leftrightarrow \frac{1}{35} \cdot 7^{n-1} > 1111111 \Leftrightarrow 7^{n-1} > 35 \cdot 1111111$

$\Leftrightarrow n > \log_7(35 \cdot 1111111) + 1$. Mà $n \in \mathbb{N}^*$ nên giá trị nhỏ nhất trong trường hợp này là $n = 10$.

Chọn ý **D**.

Câu 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc đoạn $[0; 2018]$ sao cho ba số

$5^{x+1} + 5^{1-x}; \frac{a}{2}; 25^x + 25^{-x}$ theo thứ tự đó, lập thành một cấp số cộng?

A. 2008

B. 2006

C. 2018

D. 2007

Lời giải

Ba số $5^{x+1} + 5^{1-x}; \frac{a}{2}; 25^x + 25^{-x}$, theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi

$$a = (5^{x+1} + 5^{1-x}) + (25^x + 25^{-x}) \geq 2\sqrt{5^{x+1} \cdot 5^{1-x}} + 2\sqrt{25^x \cdot 25^{-x}} = 12.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 5^{x+1} = 5^{1-x} \\ 25^x = 25^{-x} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$.

Như vậy nếu xét $a \in [0; 2018]$ thì ta nhận $a \in [12; 2018]$. Có 2007 số a thỏa đề.

Chọn ý **D**.

Câu 9. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $2^{2u_1+1} + 2^{3-u_2} = \frac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$.

Giá trị nhỏ nhất của n để $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n > 5^{100}$ bằng

A. 230

B. 231

C. 233

D. 234

Lời giải

Theo giả thiết ta có $u_{n+1} = 2u_n$ nên (u_n) là một cấp số nhân với công bội $q = 2$. Suy ra $u_n = u_1 \cdot 2^{n-1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$. Ta lại có .

$$2^{2u_1+1} + 2^{3-u_2} = \frac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)} \Leftrightarrow 2.4^{u_1} + \frac{8}{4^{u_1}} = \frac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2 - u_3 + 4\right)} \quad (1)$$

Mà $2.4^{u_1} + \frac{8}{4^{u_1}} \geq 8$ và $\frac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2 - u_3 + 4\right)} = \frac{8}{\log_3\left[\left(\frac{1}{2}u_3 - 1\right)^2 + 3\right]} \leq 8$

Nên phương trình (1) tương đương
$$\begin{cases} 2.4^{u_1} + \frac{8}{4^{u_1}} = 8 \\ \frac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2 - u_3 + 4\right)} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{2}$$

Khi đó $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \frac{1-2^n}{1-2} = \frac{2^n - 1}{2}$

Do đó, $S_n > 5^{100} \Leftrightarrow \frac{2^n - 1}{2} > 5^{100} \Leftrightarrow \log_5 \frac{2^n - 1}{2} > 100 \Leftrightarrow n > 233$

Chọn ý **D**.

Câu 10. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log_3(2u_5 - 63) = 2\log_4(u_n - 8n + 8)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Tìm số nguyên dương lớn nhất n thỏa mãn $\frac{u_n \cdot S_{2n}}{u_{2n} \cdot S_n} < \frac{148}{75}$.

A. 18

B. 17

C. 16

D. 19

Sở Giáo dục và Đào tạo Bắc Ninh lần 2 năm học 2017 - 2018

Lời giải

Ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\log_3(2u_5 - 63) = 2\log_4(u_n - 8n + 8) \Leftrightarrow \log_3(2u_5 - 63) = \log_2(u_n - 8n + 8)$.

Đặt $t = \log_3(2u_5 - 63) \Rightarrow \begin{cases} 2u_5 - 63 = 3^t \\ u_n - 8n + 8 = 2^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u_5 - 63 = 3^t \\ u_5 - 32 = 2^t \end{cases} \Rightarrow 1 = 3^t - 2.2^t \Rightarrow t = 2$

$\Rightarrow u_n = 8n - 4 \Rightarrow S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 4n^2$

Do đó $\frac{u_n \cdot S_{2n}}{u_{2n} \cdot S_n} = \frac{(8n - 4) \cdot 16n^2}{(16n - 4) \cdot 4n^2} < \frac{148}{75} \Rightarrow n < 19$.

Chọn ý **A**.

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = e^{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \dots f(2017) = e^{\frac{m}{n}}$ ($m, n \in \mathbb{N}$) với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $P = m - n^2$.

A. -2018

B. 2018

C. 1

D. -1

Sở Giáo dục và Đào tạo Phú Thọ lần 1 năm học 2017 - 2018

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$f(x) = e^{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}} = e^{\sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right)^2 + \frac{2}{x(x+1)}}} = e^{\sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + 1}} = e^{\sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)^2}} = e^{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + 1} = e \cdot e^{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}.$$

Do đó ta được.

$$f(1) = e \cdot e^{1 - \frac{1}{2}}; f(2) = e \cdot e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}; f(3) = e \cdot e^{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}; \dots; f(2016) = e \cdot e^{\frac{1}{2016} - \frac{1}{2017}}; f(2017) = e \cdot e^{\frac{1}{2017} - \frac{1}{2018}}.$$

$$\Rightarrow f(1).f(2).f(3)...f(2017) = e^{2017} \cdot e^{\frac{1}{2018}} = e^{\frac{2017}{2018} + 2017} = e^{\frac{2018^2 - 1}{2018}}$$

$$\Rightarrow m = 2018^2 - 1, n = 2018. \text{ Vậy } P = -1.$$

Chọn ý **D**.

Câu 12. Cho cấp số cộng (u_n) có tất cả các số hạng đều dương thỏa mãn đẳng thức

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{2018} = 4(u_1 + u_2 + \dots + u_{1009}).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_3^2 u_2 + \log_3^2 u_5 + \log_3^2 u_{14}$.

A. -2

B. -3

C. 2

D. 3

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{2018} = 4(u_1 + u_2 + \dots + u_{1009}) \Leftrightarrow \frac{2018(2u_1 + 2017d)}{2} = 2 \cdot 1009(2u_1 + 1008d)$$

$$\Leftrightarrow u_1 = \frac{d}{2} \Rightarrow (u_n): \frac{d}{2}; \frac{3d}{2}; \frac{5d}{2}; \dots \Rightarrow \begin{cases} u_2 = \frac{3d}{2} \\ u_5 = \frac{9d}{2} \\ u_{14} = \frac{27d}{2} \end{cases} \Rightarrow P = \log_3^2 \frac{3d}{2} + \log_3^2 \frac{9d}{2} + \log_3^2 \frac{27d}{2} \geq 2$$

Chọn ý **C**.

Câu 13. Cho cấp số cộng (a_n) , cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $a_2 > a_1 \geq 0$ và $b_2 > b_1 \geq 1$; và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(a_2) + 2 = f(a_1)$ và $f(\log_2 b_2) + 2 = f(\log_2 b_1)$. Số nguyên dương n nhỏ nhất và lớn hơn 1 sao cho $b_n > 2018a_n$ là

A. 16

B. 15

C. 17

D. 18

THPT Lê Xoay – Vĩnh Phúc lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'		$+$	$0 -$	$0 +$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

$$\text{Theo giả thiết } \begin{cases} f(a_2) + 2 = f(a_1) \\ a_2 > a_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(a_2) < f(a_1) \\ a_2 > a_1 \geq 0 \end{cases}$$

Từ đó suy ra $\begin{cases} 0 \leq a_1 < a_2 \leq 1 \\ 0 \leq a_1 \leq 1 < a_2 \end{cases}$, hơn nữa $f(x) + 2 \geq 0 \forall x \geq 0$. Ta xét các trường hợp.

- Nếu $0 \leq a_1 < a_2 \leq 1$ thì $\begin{cases} f(a_2) + 2 \geq 0 \\ f(a_1) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(a_2) = -2 \\ f(a_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 1 \\ a_1 = 0 \end{cases}$.
- Nếu $0 \leq a_1 \leq 1 < a_2$ thì $\begin{cases} f(a_2) + 2 > 0 \\ f(a_1) \leq 0 \end{cases}$ điều này là không thể.

Do đó chỉ xảy ra trường hợp $a_1 = 0; a_2 = 1$.

Từ đó suy ra $a_n = n - 1 (n \geq 1)$. Tương tự vì $b_2 > b_1 \geq 1$ nên $\log_2 b_2 > \log_2 b_1 \geq 0$, suy ra

$$\begin{cases} \log_2 b_2 = 1 \\ \log_2 a_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_2 = 1 \\ b_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow b_n = 2^{n-1} (n \geq 1).$$

Xét hàm số $g(x) = 2^x - 2018x$ trên nửa khoảng $[0; +\infty)$, ta có bảng biến thiên.

x	$-\infty$	$\log_2 \frac{2018}{\ln 2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	1	$g\left(\log_2 \frac{2018}{\ln 2}\right)$	$+\infty$

Ta có $\begin{cases} g\left(\log_2 \frac{2018}{\ln 2}\right) < 0 \\ \log_2 \frac{2018}{\ln 2} > 11 \\ g(12) = -20120 \\ g(13) = -18042 \\ g(14) = -11868 \\ g(15) = 2498 > 0 \end{cases}$ nên số nguyên dương nhỏ nhất n thỏa $g(n-1) > 0$ là $n-1 = 15 \Leftrightarrow n = 16$.

Chọn ý **A**.

Câu 14. Cho cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $b_2 > b_1 \geq 1$ và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho

$$f(\log_2(b_2)) + 2 = f(\log_2(b_1)).$$

Giá trị nhỏ nhất của n để $b_n > 5^{100}$ bằng

A. 234

B. 229

C. 333

D. 292

THPT Phan Châu Trinh – Đắk Lắk lần 2 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x$.

Có $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$+$	0	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

Mặt khác, ta có $b_1 > b_2 \geq 1$. Đặt $a = \log_2 b_2 > \log_2 b_1 = b \geq 0$. Ta có. $a^3 - 3a + 2 = b^3 - 3b$ (1).

- Nếu $b > 1 \Rightarrow a > b > 1 \Rightarrow a^3 - 3a > b^3 - 3b \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.
- Nếu $0 \leq b \leq 1 \Rightarrow -2 < b^3 - 3b \leq 0 \Rightarrow a^3 - 3a + 2 \leq 0 \Rightarrow (a-1)^2(a+2) \leq 0$.

Suy ra $a = 1 \Rightarrow b = 0$. Khi đó $\begin{cases} b_1 = 2^0 = 1 \\ b_2 = 2^1 = 2 \end{cases} \Rightarrow b_n = 2^{n-1} > 5^{100} \Leftrightarrow n-1 > 100 \log_2 5 \Rightarrow n \geq 234$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của n là 234.

Chọn ý **A**.

Câu 15. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} \left(u_1^2 + u_3 + \frac{1}{4}u_1 - \frac{1}{8} \right) = e^{4u_2-7} + e^{6u_1-6} - 3 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2} \left(u_n - \frac{n+4}{n^2+3n+2} \right), \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Giá trị lớn nhất của số n để $u_n > \frac{3+(n+1)2^{2018}}{n+1}$

A. 3472

B. 3245

C. 3665

D. 3453

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có $u_{n+1} = \frac{3}{2} \left(u_n - \frac{3}{n+1} + \frac{2}{n+2} \right) \Leftrightarrow u_{n+1} - \frac{3}{n+2} = \frac{3}{2} \left(u_n - \frac{3}{n+1} \right)$

Đặt $v_n = u_n - \frac{3}{n+1} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n \Rightarrow (v_n)$ là CSN với công bội $q = \frac{3}{2}$.

Khi đó $v_n = \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} v_1 = \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} \left(u_1 - \frac{3}{2} \right) \Rightarrow u_n = \frac{3}{n+1} - \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} \left(u_1 - \frac{3}{2} \right)$

Ta có $u_3 = \frac{33}{8} - \frac{9}{4}u_1, u_2 = \frac{13}{4} - \frac{3}{2}u_1$, thay vào giả thiết ta được

$$\log_{\frac{1}{3}} \left(u_1^2 - 2u_1 + 4 \right) = e^{6-6u_1} + e^{6u_1-6} - 3$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $e^{6-6u_1} + e^{6u_1-6} - 3 \geq 2\sqrt{e^{6-6u_1} \cdot e^{6u_1-6}} - 3 = -1$

Mặt khác ta cũng có $\log_{\frac{1}{3}} \left(u_1^2 - 2u_1 + 4 \right) = \log_{\frac{1}{3}} \left((u_1 - 1)^2 + 3 \right) \leq -1$

Do đó $VT \leq VP$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $u_1 = 1 \Rightarrow u_n = \frac{3}{n+1} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1}$

Để $u_n > \frac{3+(n+1)2^{2018}}{n+1} \Rightarrow \frac{3}{n+1} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} > \frac{3+(n+1)2^{2018}}{n+1} \Leftrightarrow n \leq 3453$

Chọn ý D.

Câu 16. Cho $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $u_n = \frac{f(1).f(3)...f(2n-1)}{f(2).f(4)...f(2n)}$.

Tìm số n nguyên dương nhỏ nhất sao cho u_n thỏa mãn điều kiện $\log_2 u_n + u_n < \frac{-10239}{1024}$.

A. $n = 23$

B. $n = 29$

C. $n = 21$

D. $n = 33$

THPT Chuyên Biên Hòa – Hà Nam lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Từ giả thiết ta có $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1 = (n^2 + 1) \left[(n+1)^2 + 1 \right]$.

Khi đó ta có $u_n = \frac{(1^2+1)(2^2+1)(3^2+1)(4^2+1)...[(2n-1)^2+1][4n^2+1]}{(2^2+1)(3^2+1)(4^2+1)(5^2+1)...[4n^2+1][(2n+1)^2+1]}$

$$= \frac{2}{(2n+1)^2+1} = \frac{1}{2n^2+2n+1}$$

Theo đề bài ta có $\log_2 u_n + u_n < \frac{-10239}{1024} \Leftrightarrow -\log_2 (2n^2 + 2n + 1) + \frac{1}{2n^2 + 2n + 1} + \frac{10239}{1024} < 0$.

Xét hàm số $g(n) = -\log_2(2n^2 + 2n + 1) + \frac{1}{2n^2 + 2n + 1} + \frac{10239}{1024}$ với $n \geq 1$.

Ta có $g'(n) = -\frac{4n+2}{(2n^2+2n+1)\ln 2} - \frac{4n+2}{(2n^2+2n+1)^2} < 0$ với $n \geq 1 \Rightarrow g(n)$ nghịch biến.

Mà $g\left(\frac{-1+\sqrt{2047}}{2}\right) = 0$ nên $-\log_2(2n^2 + 2n + 1) + \frac{1}{2n^2 + 2n + 1} + \frac{10239}{1024} < 0$

$\Rightarrow n > \frac{-1+\sqrt{2047}}{2}$. Do n nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn nên $n = 23$

Chọn ý **A**.

Câu 17. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \ln(2n^2 + 1) - \ln(n^2 + n + 1), \forall n \geq 1$. Tìm số nguyên n lớn nhất sao cho $u_n - [u_n] < \frac{2}{3}$. Biết $[a]$ kí hiệu phần nguyên của số a là số tự nhiên nhỏ nhất không vượt quá a .

A. 37

B. 36

C. 38

D. 40

THPT Chuyên Biên Hòa – Hà Nam lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Ta có $u_n = \ln \frac{2n^2 + 1}{n^2 + n + 1} \in [0; \ln 2) \Rightarrow [u_n] = 0$

$$\Rightarrow u_n - [u_n] < \frac{2}{3} \Leftrightarrow u_n < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \ln \left(\frac{2n^2 + 1}{n^2 + n + 1} \right) < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2n^2 + 1}{n^2 + n + 1} < \sqrt[3]{e^2} \Rightarrow n < 37.462$$

Chọn ý **A**.

Câu 18. Cho dãy số (u_n) có tất cả số hạng đều dương thỏa mãn $u_{n+1} = 2u_n$ và đồng thời $\sqrt{u_1^2 + \sqrt{u_2^2 + \dots + \sqrt{u_n^2 + \sqrt{u_{n+1}^2 + u_{n+2} + 1}}}} = \frac{4}{3}, \forall n \geq 1$. Số tự nhiên n nhỏ nhất để $u_n > 5^{100}$ là?

A. 232

B. 233

C. 234

D. 235

Lời giải

Ta có $u_{n+1} = 2u_n \Rightarrow u_n = 2^{n-1}u_1$, đẳng thức đúng với mọi $n \geq 1$ nên đúng với $n = 1$ nên

$$\begin{aligned} \sqrt{u_1^2 + \sqrt{u_2^2 + u_3 + 1}} &= \frac{4}{3} \Leftrightarrow \sqrt{u_1^2 + \sqrt{4u_1^2 + 4u_1 + 1}} = \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow \sqrt{u_1^2 + 2u_1 + 1} &= \frac{4}{3} \Leftrightarrow u_1 + 1 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Do đó $u_n = \frac{2^{n-1}}{3} > 5^{100} \Leftrightarrow 2^{n-1} > 3 \cdot 5^{100} \Leftrightarrow n > \log_2 3 + 100 \log_2 5 > 233$.

Chọn ý **C**.

Câu 19. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\ln(u_1^2 + u_2^2 + 10) = \ln(2u_1 + 6u_2)$ và đồng thời $u_{n+2} + u_n = 2u_{n+1} + 1, \forall n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 5050$

A. 100

B. 99

C. 101

D. 102

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$\ln(u_1^2 + u_2^2 + 10) = \ln(2u_1 + 6u_2) \Leftrightarrow (u_1 - 1)^2 + (u_2 - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 3 \end{cases}$$

Mặt khác ta có $u_{n+2} + u_n = 2u_{n+1} + 1 \Leftrightarrow u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n + 1$.

Đặt $v_n = u_{n+1} - u_n \Rightarrow v_{n+1} = v_n + 1 \Rightarrow (v_n)$ là CSC có công sai $d = 1$

$$\text{Khi đó } \Rightarrow v_n = n + 1 \Rightarrow u_{n+1} = u_n + n + 1 \Rightarrow \begin{cases} u_2 = u_1 + 2 \\ u_3 = u_2 + 3 \\ \dots\dots\dots \\ u_n = u_{n-1} + n \end{cases} \Rightarrow u_n = u_1 + \sum_{i=2}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{Vậy để } u_n > 5050 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} > 5050 \Rightarrow n > 100$$

Chọn ý **C**.

Câu 20. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} \log\left(u_2 + \frac{391}{40}\right) + \sqrt{\log\left(\frac{1}{4}u_1 + \frac{39}{4}\right)} = 2 \\ u_n = \frac{2(n+1)u_{n+1}}{n} + \frac{2-n}{(n^2+n+1)^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > \frac{5^{100} + n^2 + 1}{5^{100}(n^3 + n)}$.			
A. 235	B. 255	C. 233	D. 241

Lời giải

$$\text{Ta có } (n^2 + n + 1)^2 + 1 = (n^2 + 1)^2 + 2n(n^2 + 1) + n^2 + 1 = (n^2 + 1)((n + 1)^2 + 1)$$

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\begin{aligned} nu_n &= 2(n+1)u_{n+1} + \frac{2n-n^2}{(n^2+1)((n+1)^2+1)} = 2(n+1)u_{n+1} + \frac{(n+1)^2-2(n^2+1)+1}{(n^2+1)((n+1)^2+1)} \\ &\Leftrightarrow nu_n = 2(n+1)u_{n+1} + \frac{1}{n^2+1} - \frac{2}{(n+1)^2+1} \Leftrightarrow (n+1)u_{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1} = \frac{1}{2} \left(nu_n - \frac{1}{n^2+1} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } v_n = nu_n - \frac{1}{n^2+1} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n \Rightarrow (v_n) \text{ là CSN có công bội } q = \frac{1}{2}$$

$$\text{Từ đó suy ra } v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} v_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(u_1 - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow u_n = \frac{1}{n^3+n} + \frac{1}{2^{n-1}n} \left(u_1 - \frac{1}{2}\right)$$

Thay $u_2 = -\frac{1}{40} + \frac{1}{4}u_1$ vào giả thiết ta được

$$\log\left(\frac{1}{4}u_1 + \frac{39}{4}\right) + \sqrt{\log\left(\frac{1}{4}u_1 + \frac{39}{4}\right)} = 2 \Rightarrow u_1 = 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{n^3+n} + \frac{1}{2^n n}$$

$$\text{Để } u_n > \frac{5^{100} + n^2 + 1}{5^{100}(n^3 + n)} \Rightarrow n > 100 \log_2 5 \Rightarrow n \geq 233$$

Chọn ý **C**.

Phương trình nghiệm nguyên

Đầu tiên thì chúng ta cần chú ý là dạng toán này không phải là **phương trình nghiệm nguyên** trong **Lý thuyết số**, mà là một dạng toán xu hướng trong năm 2020, thực chất cũng chỉ là việc vận dụng các biến đổi ở các chương trước và các đánh giá cơ bản để tìm ra mối liên hệ giữa các biến trong phương trình, từ đó sử dụng điều kiện “nguyên” để chỉ ra các giá trị thỏa mãn. Chương này được tham khảo từ chuyên đề phương trình nghiệm nguyên trên VTV7 và chuyên đề phát triển câu 47 – 50 của Nhóm Toán VD – VDC.

Mở đầu.

Trước tiên ta hãy xem lời giải bài toán sau.

Bài toán. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 127 số nguyên y thỏa mãn $\log_3(x^2 + y) \geq \log_2(x + y)$?

A. 89

B. 46

C. 45

D. 90

Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 1043

Lời giải

Ta có $\log_3(x^2 + y) \geq \log_2(x + y) \Leftrightarrow (1)$.

Đặt $t = x + y \in \mathbb{N}^*$ (do $x, y \in \mathbb{Z}, x + y > 0$), khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \log_3(x^2 - x + t) \geq \log_2 t \Leftrightarrow g(t) = \log_2 t - \log_3(x^2 - x + t) \leq 0 \quad (2)$$

Đạo hàm $g'(t) = \frac{1}{t \ln 2} - \frac{1}{(x^2 - x + t) \ln 3} > 0$ với mọi y . Do đó $g(t)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$

Vì mỗi x nguyên có không quá 127 giá trị $t \in \mathbb{N}^*$ nên ta có

$$g(128) > 0 \Leftrightarrow \log_2 128 - \log_3(x^2 - x + 128) > 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 128 < 3^7 \Leftrightarrow -44,8 \leq x \leq 45,8.$$

Như vậy có 90 giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

Nhận xét. Đây là câu khó nhất trong đề thi THPT Quốc Gia 2020 vừa rồi, điều làm bài toán này khó hơn so với bài toán ở đề tham khảo là dấu bất phương trình và giả thiết “không có quá 127 số nguyên y ”. Như vậy ta đã nhận dạng được lớp các bài toán về *phương trình nghiệm nguyên* mà chương này đang đề cập. Sau đây là các ví dụ minh họa.

Các bài toán minh họa.

Câu 1. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn

$$\log_3[(x+1)(y+1)]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1)$$

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 8.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $(y+1)\log_3[(x+1)(y+1)] = 9 - (x-1)(y+1)$

$$\Leftrightarrow \log_3[(x+1)(y+1)] = \frac{9}{y+1} - (x+1) \Leftrightarrow \log_3(x+1) + (x+1) = \log_3 \frac{9}{y+1} + \frac{9}{y+1} (*)$$

Xét hàm $f(t) = t + \log_3 t$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 3} > 0, \forall t > 0 \Rightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow x+1 = \frac{9}{y+1}$ hay $x = \frac{8-y}{y+1} = -1 + \frac{9}{y+1}$.

$$\text{Để } x, y \text{ nguyên dương thì } \begin{cases} \frac{8-y}{y+1} > 0 \\ (y+1) \in \{-9; -3; -1; 1; 3; 9\} \\ y \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \text{ Suy ra } y = 2.$$

Do đó $(x; y) \in \{(2; 2)\}$. Vậy có duy nhất 1 cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $3(9^y + 2y) = x + \log_3(x+1)^3 - 2$?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Ta có $3(9^y + 2y) = x + \log_3(x+1)^3 - 2$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 9^y + 6y = x + 3 \log_3(x+1) - 2$$

$$\Leftrightarrow 3^{2y+1} + 3(2y+1) = (x+1) + 3 \log_3(x+1) (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t + 3t$. Ta có $f'(t) = 3^t \ln 3 + 3 > 0, \forall t$.

Suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow f(2y+1) = f(\log_3(x+1)) \Leftrightarrow 2y+1 = \log_3(x+1) \Leftrightarrow x = 3^{2y+1} - 1$.

Vì $0 \leq x \leq 2020$ nên $0 \leq 3^{2y+1} - 1 \leq 2020 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{\log_3 2021 - 1}{2}$.

Do y nguyên nên $y \in \{0; 1; 2\} \Rightarrow (x; y) \in \{(2; 0); (26; 1); (242; 2)\}$.

Nên tổng cộng có 3 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa đề.

Câu 3. Có bao nhiêu số tự nhiên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+4y) = \log_2(x^2+4y^2)$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Vô số.

Lời giải

$$\text{Đặt } \log_3(x+4y) = \log_2(x^2+4y^2) = t, \text{ suy ra } \begin{cases} x+4y = 3^t \\ x^2+4y^2 = 2^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3^t - 4y \\ (3^t - 4y)^2 + 4y^2 = 2^t \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow 20y^2 - 8 \cdot 3^t y + 9^t - 2^t = 0$. Phương trình phải có nghiệm nên

$$\Delta' = 16 \cdot 9^t - 20(9^t - 2^t) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^t \leq 5 \Leftrightarrow t \leq \log_{\frac{9}{2}} 5.$$

Do đó $x^2 + 2y^2 \leq 2^{\log_{\frac{9}{2}} 5} \Rightarrow x^2 \leq 2^{\log_{\frac{9}{2}} 5} \simeq 2,1$. Vì $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{0; 1\}$

Thử lại.

Với $x = 0$, suy ra $\begin{cases} 4y = 3^t \\ 4y^2 = 2^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \log_9 4 \\ y = \frac{1}{4} \cdot 3^{\frac{\log_9 4}{2}} \end{cases}$.

Với $x = 1$, suy ra $\begin{cases} 1 + 4y = 3^t \\ 1 + 4y^2 = 4^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Vậy $x \in \{1; 2\}$.

Câu 4. Có bao nhiêu số nguyên dương x sao cho tồn tại số nguyên dương y thỏa mãn điều kiện

$$\ln[(x-y+1)(x+2y)] + 2^{x-y+1} = 8^{\frac{1}{x+2y}} + \ln 3 ?$$

A. 1 .

B. 2 .

C. 2020 .

D. 2021 .

Lời giải

Điều kiện xác định $(x-y+1)(x+2y) > 0$ (*)

Do $x > 0, y > 0$ nên $x+2y > 0$ từ (*) ta suy ra $x-y+1 > 0$

Nên $\ln[(x-y+1)(x+2y)] + 2^{x-y+1} = 8^{\frac{1}{x+2y}} + \ln 3$

$$\Leftrightarrow \ln(x-y+1) + \ln(x+2y) + 2^{x-y+1} = 2^{\frac{3}{x+2y}} + \ln 3$$

$$\Leftrightarrow \ln(x-y+1) + 2^{x-y+1} = 2^{\frac{3}{x+2y}} + \ln 3 - \ln(x+2y)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x-y+1) + 2^{x-y+1} = \ln \frac{3}{x+2y} + 2^{\frac{3}{x+2y}} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \ln t + 2^t$ với $t \in (0; +\infty)$, có $f'(t) = \frac{1}{t} + 2^t \ln 2 > 0, \forall t > 0$.

Nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Từ (1) ta suy ra $f(x-y+1) = f\left(\frac{3}{x+2y}\right)$

$$\Leftrightarrow x-y+1 = \frac{3}{x+2y} \Leftrightarrow (x-y+1)(x+2y) = 3 \quad (2)$$

Do x, y nguyên dương, nên (2) tương đương với

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+1=1 \\ x+2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+1=1 \\ x+2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Kết hợp các điều kiện chỉ có $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ thỏa mãn.

Vậy có 1 giá trị của x thỏa mãn.

Câu 5. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $2^x + y \leq 100$ và

$$\log_5 \frac{(x+4y)^2}{x^2 + 4y^2} = 4(x-y)^2 + 1 ?$$

A. 5 .

B. 6 .

C. 7 .

D. 10 .

Lời giải

Biến đổi phương trình đầu tương đương

$$\begin{aligned}\log_5 \frac{(x+4y)^2}{x^2+4y^2} &= 4(x-y)^2 + 1 \\ \Leftrightarrow \log_5 (x+4y)^2 - \log_5 (x^2+4y^2) &= 5(x^2+4y^2) - (x+4y)^2 + \log_5 5 \\ \Leftrightarrow \log_5 (x+4y)^2 + (x+4y)^2 &= \log_5 5(x^2+4y^2) + 5(x^2+4y^2) (*)\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \log_5 t + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$

Có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 5} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty) \Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Khi đó $(*) \Leftrightarrow f[(x+4y)^2] = f[5(x^2+4y^2)] \Leftrightarrow (x+4y)^2 = 5(x^2+4y^2)$

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S, ta có

$$(x+4y)^2 = (1.x + 2.2y)^2 \leq (1^2 + 2^2) \cdot (x^2 + 4y^2) = 5(x^2 + 4y^2)$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{2y}{2} \Leftrightarrow x = y$.

Theo giả thiết ta có $2^x + y \leq 100 \Leftrightarrow 2^x + x \leq 100$.

Đặt $g(x) = 2^x + x \Rightarrow g'(x) = 2^x \ln 2 + 1 > 0, \forall x \Rightarrow g(x)$ là hàm số đồng biến trên R .

Nhận xét $g(6) < 100 < g(7)$. Mà x nguyên dương nên $g(x) \leq 100 \Leftrightarrow x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$$\Rightarrow (x; y) \in \{(1; 1); (2; 2); (3; 3); (4; 4); (5; 5); (6; 6)\}.$$

Vậy có 6 cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 6. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực dương y thỏa mãn

$$\log_3(x+2y) = \log_2\left(x^2 + y + \frac{1}{16}\right)$$

A. Vô số.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Ta có $\log_3(x+2y) = \log_2\left(x^2 + y + \frac{1}{16}\right)$.

Điều kiện $x+2y > 0$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} t = \log_3(x+2y) \\ t = \log_2\left(x^2 + y + \frac{1}{16}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y = 3^t \\ x^2 + y + \frac{1}{16} = 2^t \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - x + 3^t - 2^t + \frac{1}{8} = 0 \quad (1)$$

Phương trình (1) có nghiệm x khi và chỉ khi

$$\Delta = 8 \cdot 2^t - 8 \cdot 3^t \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t \leq 1 \Leftrightarrow t \leq 0.$$

$$\Rightarrow x^2 + y + \frac{1}{16} = 2^t \leq 2^0 = 1 \Rightarrow x^2 \leq \frac{15}{16} - y < \frac{15}{16} \Rightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\text{Ta có } x = 0 \Rightarrow \log_3 2y = \log_2\left(y + \frac{1}{16}\right) \Leftrightarrow \frac{\log_2\left(y + \frac{1}{16}\right)}{\log_2 2y} = \log_3 2 \Leftrightarrow \log_{2y}\left(y + \frac{1}{16}\right) = \log_3 2.$$

$$\Leftrightarrow \log_{2y}\left(y + \frac{1}{16}\right) = \log_3 2 \Rightarrow \begin{cases} y \approx 3,1 \\ x = 0 \end{cases}, \text{ nhận.}$$

Câu 7. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $2.625^{x^2} - 10.125^y = 3y - 4x^2 + 1$.
A. 2020. **B.** 674. **C.** 2021. **D.** 1347.

Lời giải

Biến đổi phương trình đầu tương đương

$$2.625^{x^2} - 10.125^y = 3y - 4x^2 + 1 \Leftrightarrow 2.5^{4x^2} - 2.5^{3y+1} = 3y - 4x^2 + 1 \Leftrightarrow 2.5^{4x^2} + 4x^2 = 2.5^{3y+1} + 3y + 1 \quad (*).$$

Xét hàm số $f(t) = 2.5^t + t$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$(*) \Leftrightarrow f(4x^2) = f(3y+1) \Leftrightarrow 4x^2 = 3y+1 \Leftrightarrow 4x^2 - 1 = 3y \Leftrightarrow (2x-1)(2x+1) = 3y \quad (**).$$

Do x, y nguyên nên $2x-1; 2x+1 \in \mathbb{Z}$ và 3 là số nguyên tố nên $(**)$ tương đương với hoặc

$$(2x-1):3 \text{ hoặc } (2x+1):3.$$

- **Trường hợp 1.** $(2x-1):3 \Leftrightarrow 2x \equiv 1 \pmod{3} \Leftrightarrow 2x \equiv 4 \pmod{3} \Leftrightarrow x \equiv 2 \pmod{3}$.
- **Trường hợp 2.** $(2x+1):3 \Leftrightarrow 2x \equiv -1 \pmod{3} \Leftrightarrow 2x \equiv 2 \pmod{3} \Leftrightarrow x \equiv 1 \pmod{3}$.

Ta có 2021 giá trị nguyên của x sao cho $0 \leq x \leq 2020$. Trong đó có 674 số chia hết cho 3 nên có tất cả 1347 số thỏa $(**)$. Với mỗi giá trị nguyên của x thì ta tìm được một và chỉ một giá trị y nguyên tương ứng. Vậy có 1347 cặp $(x; y)$ nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 8. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq y \leq 2020$ và $\log_2 \left(\frac{3^x - 1}{2y} \right) = y - 3^x$?
A. 2019. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 11.

Lời giải

$$\text{Từ giả thiết ta có } \begin{cases} y > 0 \\ \frac{3^x - 1}{y} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$$

$$\text{Ta có phương trình } \Leftrightarrow \log_2 (3^x - 1) + 3^x - 1 = \log_2 y + y \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên $(0; +\infty)$.

Khi đó $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0$ do đó hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

Phương trình $(*)$ có dạng $f(3^x - 1) = f(y) \Leftrightarrow y = 3^x - 1$

$$\text{Vì } 0 \leq y \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq 3^x - 1 \leq 2020 \Leftrightarrow 1 \leq 3^x \leq 2021 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \log_3 (2021)$$

$$\text{Vì } \begin{cases} 0 < x \leq \log_3 (2021) \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \Rightarrow y = 3^x - 1 \in \mathbb{Z}.$$

Vậy có 6 cặp $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $3^{x+m} = 4^{x^2+m^2}$ có nghiệm?
A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

$$\text{Vì } x^2 + m^2 \geq 0 \Rightarrow 4^{x^2+m^2} \geq 1 \Rightarrow 3^{x+m} \geq 1 \Rightarrow x+m \geq 0.$$

$$\text{Đặt } t = 3^{x+m} = 4^{x^2+m^2}, (t > 0) \Rightarrow \begin{cases} x+m = \log_3 t \\ x^2+m^2 = \log_4 t \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } (x+m)^2 \leq 2(x^2+m^2) \Leftrightarrow (\log_3 t)^2 \leq 2 \log_4 t \Leftrightarrow (\log_3 t)^2 - 2 \log_4 3 \cdot \log_3 t \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \log_3 t \leq \log_4 9 \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 3^{\log_4 9} \Rightarrow 0 \leq x^2 + m^2 \leq \log_4 (3^{\log_4 9}) \approx 1,25$$

$$\Rightarrow m^2 < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2}.$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1\}$.

- Nếu $m = -1$ ta có $3^{x-1} = 4^{x^2+1} \Leftrightarrow x^2 + 1 = (x-1)\log_4 3$
 $\Leftrightarrow x^2 - (\log_4 3).x + 1 + \log_4 3 = 0$ (vô nghiệm) nên $m = -1$ (loại).
- Nếu $m = 0$ ta có $3^x = 4^{x^2} \Leftrightarrow x^2 = x.\log_4 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_4 3 \end{cases}$ nên $m = 0$ (thỏa mãn).
- Nếu $m = 1$ ta có $3^{x+1} = 4^{x^2+1} \Leftrightarrow x^2 + 1 = (x+1).\log_4 3$
 $\Leftrightarrow x^2 - (\log_4 3).x + 1 - \log_4 3 = 0$ (luôn có hai nghiệm phân biệt) nên $m = 1$ (thỏa mãn).

Vậy có 2 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 < y < 2020$ và $4^x + 8(x-1) = 4y + 2\log_2 y^2$.

A. 4. B. 7. C. 6. D. 5.

Lời giải

Ta có $4^x + 8(x-1) = 4y + 2\log_2 y^2 \Leftrightarrow 4^x + 8(x-1) = 4y + 8\log_4 y$.

Đặt $t = \log_4 y$. Đẳng thức đã cho trở thành

$$4^x + 8(x-1) = 4.4^t + 8t \Leftrightarrow 4^x + 8x = 4^{t+1} + 8(t+1) (*)$$

Xét hàm số $f(u) = 4^u + 8u$ với $t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(u) = 4^u \ln 4 + 8 > 0, \forall u$. Suy ra hàm số $f(u)$ đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(*)$ được viết lại thành

$$f(x) = f(t+1) \Leftrightarrow x = t+1 = \log_4 y + 1.$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}, 0 < y < 2020$ nên có $0 < y = 4^t < 2020 \Rightarrow t < \log_4 2020 \approx 5,5, t \in \mathbb{N}$

Ứng với mỗi giá trị t cho ta 1 giá trị của y và cũng cho 1 giá trị x . Vậy có 6 cặp số nguyên $(x; y)$.

Câu 11. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq y \leq 2020$ và $\log_3 \left(\frac{2^x - 1}{y} \right) - y = 1 - 2^x$?

A. 19. B. 12. C. 2020. D. 11.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} y \neq 0 \\ \frac{2^x - 1}{y} > 0 \Leftrightarrow 2^x > 1 \Leftrightarrow x > 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Phương trình đầu tương đương $\log_3 (2^x - 1) + 2^x - 1 = \log_3 y + y$ (*).

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ trên $(0; +\infty)$.

Khi đó $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0$ do đó hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

Phương trình (*) có dạng $f(2^x - 1) = f(y) \Leftrightarrow y = 2^x - 1$.

Vì $0 \leq y \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq 2^x - 1 \leq 2020 \Leftrightarrow 1 \leq 2^x \leq 2021 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \log_2 (2021)$.

Mà $\begin{cases} 0 \leq x \leq \log_2 (2021) \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Với mỗi giá trị của x ta có một giá trị của y tương ứng.

Vậy có 11 giá trị của x nên ta có 11 cặp $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 12. Cho hai số nguyên x, y thay đổi, hỏi có bao nhiêu bộ $(x; y)$ thỏa mãn

$$3^{xy-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2y} = 2 - 2xy - 2x - 4y.$$

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

$$\text{Ta có } 3^{xy-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2y} = 2 - 2xy - 2x - 4y \Leftrightarrow 3^{xy-1} - 3^{-x-2y} = 2 - 2xy - 2x - 4y$$

$$\Leftrightarrow 3^{xy-1} + 2(xy-1) = 3^{-x-2y} + 2(-x-2y)$$

Xét hàm $f(t) = 3^t + 2t$ ta có $f'(t) = 3^t \cdot \ln 3 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến nên

$$\begin{aligned} f(xy-1) = f(-x-2y) &\Leftrightarrow xy-1 = -x-2y \Leftrightarrow y(x+2) = 1-x \Leftrightarrow y = \frac{1-x}{x+2} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{-(x+2)+3}{x+2} = -1 + \frac{3}{x+2} \end{aligned}$$

Khi đó $y \in \mathbb{Z}$ nên $\begin{cases} x+2 = \pm 1 \\ x+2 = \pm 3 \end{cases}$. Từ đó có 4 bộ $(x; y)$ thỏa mãn giả thiết.

Câu 13. Gọi $(x; y)$ là cặp số nguyên dương thỏa mãn $1 < y < 2020$ và $\log_3 \left(\frac{4^x + 1}{y} \right) = y^2 - 2y + 1 - 16^x$.

Gọi $y_{\min}$ và $y_{\max}$ lần lượt là nghiệm ứng với giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của y . Tính giá trị của biểu thức $T = y_{\min} + y_{\max}$.

A. $T = 103$.

B. $T = 3010$.

C. $T = 1030$.

D. $T = 301$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \log_3 \left(\frac{4^x + 1}{y} \right) = y^2 - 2y + 1 - 16^x \Leftrightarrow \log_3 (4^x + 1) - \log_3 y = (y-1)^2 - 16^x$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (4^x + 1) + (4^x)^2 = \log_3 y + (y-1)^2 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } t = 4^x + 1 \Leftrightarrow 4^x = t - 1 \quad (t > 1).$$

$$(*) \Leftrightarrow \log_3 t + (t-1)^2 = \log_3 y + (y-1)^2 \quad (**)$$

Xét hàm $f(u) = \log_3 u + (u-1)^2$ ($u > 1$). Ta có $f'(u) = \frac{1}{u \cdot \ln 3} + 2 \cdot (u-1) > 0$ khi $u > 1$.

Suy ra hàm số $y = f(u)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

$$\text{Khi đó } (**) \Leftrightarrow t = y \Leftrightarrow 4^x + 1 = y.$$

$$\text{Vì } 1 < y < 2020, \text{ nên ta có } 1 < 4^x + 1 < 2020 \Leftrightarrow 0 < 4^x < 2019 \Leftrightarrow x < \log_4 2019 \approx 5,49$$

$$\text{Vì } x \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow x = \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \begin{cases} x_{\min} = 1 \\ x_{\max} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_{\min} = 5 \\ y_{\max} = 1025 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } T = y_{\min} + y_{\max} = 5 + 1025 = 1030.$$

Câu 14. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ và $0 \leq x \leq 2020$ thỏa mãn điều kiện

$$\log_2 \left(\frac{2x+6}{x-1} \right) + \frac{8}{x-1} = y - 2 + 2^y ?$$

A. 2018.

B. 2.

C. 2020.

D. 1.

Lời giải

Điều kiện của $x: x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$. Nên ta chỉ kiểm tra $2 \leq x \leq 2020$.

$$\text{Ta có } \log_2 \left(\frac{2x+6}{x-1} \right) + \frac{8}{x-1} = y - 2 + 2^y \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{2x+6}{x-1} \right) + 2 + \frac{8}{x-1} = y + 2^y$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{2x+6}{x-1} \right) + \frac{2x+6}{x-1} = y + 2^y \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{2x+6}{x-1} \right) + 2^{\log_2 \left(\frac{2x+6}{x-1} \right)} = y + 2^y \quad (1)$$

Đặt $f(t) = 2^t + t$. Ta có $f'(t) = 1 + 2^t \ln 2 > 0 \forall t \Rightarrow f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow f(y) = f \left(\log_2 \left(\frac{2x+6}{x-1} \right) \right) \Leftrightarrow y = \log_2 \left(\frac{2x+6}{x-1} \right) \Leftrightarrow \frac{2x+6}{x-1} = 2^y$$

$$\text{Đặt } u = \frac{2x+6}{x-1} \Rightarrow u' = \frac{-8}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty).$$

$$\text{Do } 2 \leq x \leq 2020 \text{ và } u = \frac{2x+6}{x-1} \text{ luôn nghịch biến trên } [2; 2020] \text{ nên } u \in \left[\frac{4046}{2019}; 10 \right].$$

Mà $u = 2^y$ và $y \in \mathbb{Z}$ nên $u \in \{4; 8\}$.

- Với $u = 4 \Rightarrow \begin{cases} 4 = 2^y \Leftrightarrow y = 2 \\ \frac{2x+6}{x-1} = 4 \Leftrightarrow 2x+6 = 4x-4 \Leftrightarrow x = 5 \end{cases}$
- Với $u = 8 \Rightarrow \begin{cases} 8 = 2^y \Leftrightarrow y = 3 \\ \frac{2x+6}{x-1} = 8 \Leftrightarrow 2x+6 = 8x-8 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3} \text{ (loại)} \end{cases}$

Vậy, phương trình có một cặp nghiệm thỏa bài toán $(5; 2)$.

Câu 15. Có bao nhiêu bộ hai số nguyên $(x; y)$ thỏa $1 \leq x^2 + x \leq 2020$ và

$$\log x + \log(x+1) + x^2 + x = y + 10^y$$

A. 8.

B. 4.

C. 2

D. 0.

Lời giải

Điều kiện $x > 0$

Ta có

$$\begin{aligned} \log x + \log(x+1) + x^2 + x = y + 10^y &\Leftrightarrow \log[x(x+1)] + x^2 + x = y + 10^y \\ &\Leftrightarrow \log(x^2 + x) + x^2 + x = \log(10^y) + 10^y \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \log t + t$ với $t > 0$, ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 10} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty) \Rightarrow x^2 + x = 10^y$

Vì $1 \leq x^2 + x \leq 2020$ nên $1 \leq 10^y \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \log 2020 \approx 3,305$

Mà y chỉ nhận giá trị nguyên nên $y \in \{0; 1; 2; 3\}$.

- Với $y = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ (loại).

- Với $y = 1 \Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{41}}{2}$ (loại).
- Với $y = 2 \Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{401}}{2}$ (loại).
- Với $y = 3 \Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{4001}}{2}$ (loại).

Vậy không có bộ hai số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 16. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $e^{x+3y} + e^{xy+1} + x(y+1) + 1 = e^{-xy-1} + \frac{1}{e^{x+3y}} - 3y$?

A. 10. B. 7. C. 4. D. 3.

Lời giải

Đẳng thức đã cho tương đương

$$e^{x+3y} - \frac{1}{e^{x+3y}} + x + 3y = e^{-xy-1} - \frac{1}{e^{-xy-1}} + (-xy - 1) \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = e^t - \frac{1}{e^t} + t$ với $t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = e^t + \frac{1}{e^t} + 1 \Rightarrow f'(t) > 0$ với $\forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(*)$ được viết lại thành

$$f(x+3y) = f(-xy-1) \Leftrightarrow x+3y = -xy-1 \Leftrightarrow y(x+3) = -x-1.$$

Dễ thấy $x = -3$ không thỏa mãn, nên $y = \frac{-x-1}{x+3} = -1 + \frac{2}{x+3}$, $(x \neq -3)$.

Vì $y \in \mathbb{Z}$ nên $\left(-1 + \frac{2}{x+3}\right) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+3 \in \{\pm 1; \pm 2\} \Rightarrow x \in \{-5; -4; -2; -1\}$.

Ứng với mỗi giá trị x nguyên trên cho ta tương ứng 1 giá trị của y .

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x; y)$.

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên x để tồn tại số thực $y \in [1; 2020]$ và thỏa mãn điều kiện $y \ln y + e^{x+1} = y(x+2)$?

A. 8. B. 7. C. 6. D. 5.

Lời giải

Đặt $t = \ln y \Leftrightarrow y = e^t$.

Khi đó, $y \ln y + e^{x+1} = y(x+2)$ trở thành $t.e^t + e^{x+1} = e^t(x+2) \Leftrightarrow e^{x+1-t} = (x+1-t) + 1 \quad (1)$

Xét hàm $f(u) = e^u - u - 1$, ta có $f'(u) = e^u - 1$

Suy ra $\begin{cases} f'(u) \geq 0 \forall u \geq 0 \\ f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Hàm số $f(u)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$

Do đó, $u \geq 0 \Rightarrow f(u) \geq f(0) \Leftrightarrow e^u \geq u + 1, \forall u \geq 0 \quad (a)$

Ta cũng có, $\begin{cases} f'(u) \leq 0 \forall u \leq 0 \\ f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Hàm số $f(u)$ nghịch biến trên $(-\infty; 0]$

Do đó, $u \leq 0 \Rightarrow f(u) \geq f(0) \Leftrightarrow e^u \geq u + 1, \forall u \leq 0 \quad (b)$

Từ (a) và (b) suy ra $e^u \geq u + 1, \forall u \in \mathbb{R}$ và "=" xảy ra khi và chỉ khi $u = 0$

Từ đó, $(1) \Leftrightarrow x+1-t=0 \Leftrightarrow x=\ln y-1$. Vì $y \in [1; 2020] \Rightarrow -1 \leq x \leq \ln 2020-1$

Do $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-1; 0; \dots; 6\}$. Vậy có 8 giá trị nguyên của x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 18. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực dương y thỏa mãn

$$\log_5 \frac{3x+2y}{\sqrt{x^2+4y^2}} = \log_4 (x^2+y^2) ?$$

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Vô số.

Lời giải

Điều kiện $x^2+y^2 \neq 0; 3x+2y > 0$.

Đặt $\log_5 \frac{3x+2y}{\sqrt{x^2+4y^2}} = \log_4 (x^2+y^2) = t$, ta có
$$\begin{cases} \frac{3x+2y}{\sqrt{x^2+4y^2}} = 5^t \\ x^2+y^2 = 4^t \end{cases} (*)$$

Xét $\frac{3x+2y}{\sqrt{x^2+4y^2}} = 5^t \Leftrightarrow \frac{3 \cdot \frac{x}{y} + 2}{\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4}} = 5^t$. Đặt $a = \frac{x}{y}$, phương trình trở thành $\frac{3a+2}{\sqrt{a^2+4}} = 5^t$.

Xét hàm số $f(a) = \frac{3a+2}{\sqrt{a^2+4}}$, có $f'(a) = \frac{12-2a}{(a^2+4)\sqrt{a^2+4}}; f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 6$.

Từ bảng biến thiên ta có $f(a) \leq \sqrt{10} \Rightarrow 5^t \leq \sqrt{10} \Leftrightarrow t \leq \log_5 \sqrt{10}$

Khi đó $x^2+y^2 = 4^t \leq 4^{\log_5 \sqrt{10}} < 3 \Rightarrow x^2 < 3 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-1; 0; 1\}$.

- Nếu $x = 0$, khi đó $(*)$ trở thành $\begin{cases} \frac{2y}{|2y|} = 5^t \\ y^2 = 4^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ (thỏa mãn) nên $x = 0$ nhận.

- Nếu $x = 1$, khi đó $(*)$ trở thành $\begin{cases} \frac{2y+3}{\sqrt{4y^2+1}} = 5^t \\ y^2+1 = 4^t \end{cases}$ nhận thấy $\begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$ là một nghiệm của hệ nên $x = 1$ thỏa mãn.

- Nếu $x = -1$, khi đó $(*)$ trở thành $\begin{cases} \frac{2y-3}{\sqrt{4y^2+1}} = 5^t \\ y^2+1 = 4^t \end{cases}$. Từ $y^2+1 = 4^t$ ta thấy $y^2+1 \geq 1 \Rightarrow 4^t \geq 1 \Leftrightarrow t \geq 0 \Rightarrow 5^t \geq 1$

Khi đó $\frac{2y-3}{\sqrt{4y^2+1}} = 5^t \geq 1 \Rightarrow 2y-3 \geq \sqrt{4y^2+1} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{3}{2} \\ (2y-3)^2 \geq 4y^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{3}{2} \\ y \leq \frac{2}{3} \end{cases}$ (vô lí)

Suy ra $x = -1$ loại.

Vậy có hai giá trị nguyên của x thỏa mãn bài toán là $x = 0; x = 1$

Câu 19. Cho hệ phương trình $\begin{cases} \log_3 (x+y) = m \\ \log_2 (x^2+y^2) = 2m \end{cases}$, trong đó m là tham số thực. Hỏi có bao nhiêu giá trị của m để hệ phương trình đã cho có đúng hai nghiệm $(x; y)$ và $x; y$ nguyên?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. vô số.

Lời giải

Điều kiện $x + y > 0$.

$$\begin{cases} \log_3(x+y) = m \\ \log_2(x^2+y^2) = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 3^m \\ x^2+y^2 = 4^m \end{cases} (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 3^m \\ ((x+y)^2 - 2xy) = 4^m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 3^m \\ xy = \frac{9^m - 4^m}{2} \end{cases} (**)$$

Đặt $S = x + y = 3^m$; $P = xy = \frac{9^m - 4^m}{2}$ để hệ $(**)$ có nghiệm thì điều kiện là $S^2 \geq 4P$

$$\Leftrightarrow 9^m \geq 4 \cdot \frac{9^m - 4^m}{2} \Leftrightarrow m \leq \log_{\frac{9}{4}} 2.$$

Mặt khác từ $x^2 + y^2 = 4^m$ suy ra $x^2 \leq 4^m \Leftrightarrow -2^m \leq x \leq 2^m \leq 2^{\frac{\log_9 2}{4}}$, do x nguyên nên chọn $x \in \{-1; 0; 1\}$.

Làm tương tự với y nguyên nên $y \in \{-1; 0; 1\}$. Vì $x, y \in \{-1; 0; 1\}$ và $x + y = 3^m > 0$ nên x, y không thể nhận giá trị -1 do đó $x, y \in \{0; 1\}$ khi đó ta có các nghiệm nguyên có thể xảy ra của hệ phương trình là $(0; 0); (0; 1); (1; 0); (1; 1)$. Ta đi thử lại thay từng cặp nghiệm trên vào hệ phương trình $(*)$

- Với $(x; y) = (0; 0)$ không thỏa mãn điều kiện.
- Với $(x; y) = (0; 1)$ trở thành $\begin{cases} 1 = 3^m \\ 1 = 4^m \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$.
- Với $(x; y) = (1; 0)$ trở thành $\begin{cases} 1 = 3^m \\ 1 = 4^m \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$.
- Với $(x; y) = (1; 1)$ trở thành $\begin{cases} 2 = 3^m \\ 2 = 4^m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \log_3 2 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$ vô lý.

Nhận thấy $m = 0$ thì hệ có hai nghiệm $(0; 1)$ và $(1; 0)$.

Vậy có duy nhất một giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 20. Có bao nhiêu số tự nhiên y và số thực x thỏa mãn $2020^{|x|+2y} = 3^{x^2+3y^2}$?

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 4.

Lời giải

Đặt $2020^{|x|+2y} = 3^{x^2+3y^2} = t > 0$. Ta có $\begin{cases} |x| + 2y = \log_{2020} t \\ x^2 + 3y^2 = \log_3 t \end{cases} (*)$

Ta có $(|x| + 2y)^2 = \left(1 \cdot |x| + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}y\right)^2 \leq \frac{7}{3}(x^2 + 3y^2)$.

Suy ra $(\log_{2020} t)^2 \leq \frac{7}{3} \log_3 t \Leftrightarrow (\log_{2020} t)^2 - \frac{7}{3} \log_3 2000 \cdot \log_{2000} t \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \log_{2000} t \leq \frac{7}{3} \log_3 2000$.

Ta có $x^2 + 3y^2 = \log_3 t \Leftrightarrow x^2 + 3y^2 = \log_3 2000 \cdot \log_{2000} t \Rightarrow x^2 + 3y^2 \leq \frac{7}{3}(\log_3 2000)^2 \approx 111,69$.

Do $x^2 \geq 0 \Rightarrow 3y^2 \leq 111,69 \Rightarrow y^2 \leq 37,23$. Do $y \in \mathbb{N} \Rightarrow y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- Với $y = 0$ ta có $t = 1 \Rightarrow x = 0$ thỏa mãn.
- Với $y = 1$ thay vào hệ $(*)$ ta có $\begin{cases} |x| + 2 = \log_{2020} t \\ x^2 + 3 = \log_3 t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = \log_{2020} t - 2 \\ x^2 + 3 = \log_3 t \end{cases} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Thay (1) vào (2) ta có

$$(\log_{2020} t - 2)^2 + 3 = \log_3 t = \log_3 2020 \cdot \log_{2020} t \Leftrightarrow \log_{2020}^2 t - (4 + \log_3 2020) \cdot \log_{2020} t + 7 = 0$$

Ta có $\Delta = (4 + \log_3 2020)^2 - 28 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm t nên, tuy nhiên khi thay 2 giá trị vào ta đều được $|x| < 0$ nên không tồn tại số thực x .

- Với $y = 2$ thay vào hệ (*) ta có $\begin{cases} |x| + 4 = \log_{2020} t \\ x^2 + 12 = \log_3 t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = \log_{2020} t - 4 \quad (3) \\ x^2 + 12 = \log_3 t \quad (4) \end{cases}$.

Thay (3) vào (4) ta có

$$(\log_{2020} t - 4)^2 + 12 = \log_3 t = \log_3 2020 \cdot \log_{2020} t \Leftrightarrow \log_{2020}^2 t - (8 - \log_3 2020) \cdot \log_{2020} t + 28 = 0.$$

Ta có $\Delta = (8 - \log_3 2020)^2 - 112 < 0$ nên phương trình vô nghiệm nên không tồn tại số thực x

- Với $y = 3$ thay vào hệ (*) ta có $\begin{cases} |x| + 6 = \log_{2020} t \\ x^2 + 27 = \log_3 t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = \log_{2020} t - 6 \quad (5) \\ x^2 + 27 = \log_3 t \quad (6) \end{cases}$.

Thay (5) vào (6) ta có

$$(\log_{2020} t - 6)^2 + 27 = \log_3 t = \log_3 2020 \cdot \log_{2020} t \Leftrightarrow \log_{2020}^2 t - (12 - \log_3 2020) \cdot \log_{2020} t + 63 = 0$$

Ta có $\Delta = (12 - \log_3 2020)^2 - 252 < 0$ nên phương trình vô nghiệm nên không tồn tại số thực x

- Với $y = 4$ thay vào hệ (*) ta có $\begin{cases} |x| + 8 = \log_{2020} t \\ x^2 + 48 = \log_3 t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = \log_{2020} t - 8 \quad (7) \\ x^2 + 48 = \log_3 t \quad (8) \end{cases}$.

Thay (7) vào (8) ta có

$$(\log_{2020} t - 8)^2 + 48 = \log_3 t = \log_3 2020 \cdot \log_{2020} t \Leftrightarrow \log_{2020}^2 t - (16 - \log_3 2020) \cdot \log_{2020} t + 110 = 0$$

Ta có $\Delta = (16 - \log_3 2020)^2 - 440 < 0$ nên phương trình vô nghiệm nên không tồn tại số thực x .

Tương tự với $y = 5, y = 6$ đều không tồn tại số thực x .

Vậy có duy nhất $x = 0, y = 0$ thỏa mãn.

Câu 21. Có bao nhiêu cặp $(x; y)$ với x, y nguyên là nghiệm của phương trình

$$2^{y(x+1)} - \log_3 \frac{x^2 + 2x + 9}{y} = 256 \cdot 2^{(x+1)^2} - \log_3 (x+1).$$

A. 0.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Điều kiện $x > -1; y > 0$. Ta có

$$\begin{aligned} 2^{y(x+1)} - \log_3 \frac{x^2 + 2x + 9}{y} &= 256 \cdot 2^{(x+1)^2} - \log_3 (x+1) \\ \Leftrightarrow 2^{y(x+1)} - \log_3 (x^2 + 2x + 9) + \log_3 y &= 2^{x^2 + 2x + 9} - \log_3 (x+1) \\ \Leftrightarrow 2^{y(x+1)} + \log_3 y(x+1) &= 2^{x^2 + 2x + 9} + \log_3 (x^2 + 2x + 9) \end{aligned} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + \log_3 t$ với $t \in (0; +\infty)$, ta có $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 + \frac{1}{t \cdot \ln 3} > 0, \forall t > 0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow f(y(x+1)) = f(x^2 + 2x + 9) \Leftrightarrow y(x+1) = x^2 + 2x + 9 \Leftrightarrow y = \frac{x^2 + 2x + 9}{x+1} \Leftrightarrow y = x+1 + \frac{8}{x+1}$.

Khi đó y nguyên khi và chỉ khi $x+1 \in \{1; 2; 4; 8\} \Leftrightarrow x \in \{0; 1; 3; 7\}$.

Vậy tồn tại 4 cặp số nguyên thỏa mãn đề bài.

Câu 22. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn điều kiện $3^{x+2y} = 4^{x^2+y^2}$.

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Ta có $x^2 + y^2 \geq 0 \Rightarrow 4^{x^2+y^2} \geq 1 \Rightarrow 3^{x+2y} \geq 1 \Rightarrow x+2y \geq 0$.

Đặt $t = 3^{x+2y} = 4^{x^2+y^2}$, ($t > 0$).

Khi đó ta có $\begin{cases} x+2y = \log_3 t \\ x^2+y^2 = \log_4 t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_3 t - 2y \\ 5y^2 - 4(\log_3 t)y + (\log_3 t)^2 - \log_4 t = 0 \end{cases} (*)$

Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta'_y = 4(\log_3 t)^2 - 5(\log_3 t)^2 + 5\log_4 t \geq 0 \Leftrightarrow -(\log_3 t)^2 + 5(\log_4 3)(\log_3 t) \geq 0 \\ \Leftrightarrow 0 \leq \log_3 t \leq 5(\log_4 3) \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 3^{5(\log_4 3)}$$

Từ đó ta có $\begin{cases} 0 \leq x+2y \leq 5\log_4 3 \\ 0 \leq x^2+y^2 \leq 5(\log_4 3)^2 \end{cases} (**)$

Từ (**) suy ra $x^2, y^2 \leq 5(\log_4 3)^2$, mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-1; 0; 1\}$.

- Nếu $x = -1$, khi đó $3^{-1+2y} = 4^{1+y^2} \Leftrightarrow y^2 - 2(\log_4 3)y + 1 + \log_4 3 = 0$, vô nghiệm.
- Nếu $x = 0$, khi đó $3^{2y} = 4^{y^2} \Leftrightarrow y^2 - 2(\log_4 3)y = 0$, có nghiệm.
- Nếu $x = 1$, khi đó $3^{1+2y} = 4^{1+y^2} \Leftrightarrow y^2 - 2(\log_4 3)y + 1 - \log_4 3 = 0$, có nghiệm.

Vậy có 2 cặp số nguyên x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 23. Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm của tham số m để phương trình sau có nghiệm thực $\log_2(m + \sqrt{x}) = \log_3(m^4 + x^2)$.

A. 2.

B. Vô số.

C. 3.

D. 4

Lời giải

Điều kiện $x \geq 0$. Đặt $\log_2(m + \sqrt{x}) = \log_3(m^4 + x^2) = t \Rightarrow \begin{cases} m + \sqrt{x} = 2^t & (1) \\ m^4 + x^2 = 3^t & (2) \end{cases}$.

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S, ta có $(m + \sqrt{x})^2 \leq 2(m^2 + x) \Rightarrow 4^t \leq 2(m^2 + x) \Leftrightarrow \frac{16^t}{4} \leq (m^2 + x)^2$

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S, ta lại có $(m^2 + x)^2 \leq 2(m^4 + x^2) \Rightarrow \frac{16^t}{4} \leq 2 \cdot 3^t$.

Suy ra $\left(\frac{16}{3}\right)^t \leq 8 \Rightarrow t \leq \log_{\frac{16}{3}} 8 < 2$.

Từ (2), do $m^4 + x^2 = 3^t < 3^2 \Rightarrow m^4 < 9 \Rightarrow m^2 < 3 \Rightarrow \begin{cases} m^2 = 0 \\ m^2 = 1 \\ m^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm 1 \\ m = \pm \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$ vì $m \in \mathbb{Z}^+$

Với $m = 0$, ta thấy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

Với $m = 1$, ta thấy phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$.

Câu 24. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $1 \leq x \leq 2020, y \geq 2$ và

$$x^2 + x - xy = x \log_2(xy - x) - 2^x$$

A. 2021.

B. 6.

C. 2020.

D. 11.

Lời giải

Biến đổi phương trình đầu

$$\begin{aligned}x^2 + x - xy &= x \log_2(xy - x) - 2^x \\ \Leftrightarrow x + 1 - y &= \log_2 x(y - 1) - \frac{2^x}{x} \\ \Leftrightarrow \log_2 2^x + (1 - y) &= \log_2 x + \log_2(y - 1) - \frac{2^x}{x} \\ \Leftrightarrow \log_2 \frac{2^x}{x} + \frac{2^x}{x} &= \log_2(y - 1) + (y - 1) \quad (1)\end{aligned}$$

Ta có hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

Suy ra $(1) \Leftrightarrow \frac{2^x}{x} = y - 1$, khi đó $(1) \Leftrightarrow y = \frac{2^x}{x} + 1$

Do y nguyên nên 2^x chia hết cho x nên $x = 2^m$ với m là số tự nhiên

Có $1 \leq x \leq 2020 \Rightarrow 0 \leq 2^m \leq 2020 \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; \dots; 10\}$.

Khi đó ta có 11 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn đề là $(1; 3), (2; 3), (4; 5), (8; 33), \dots, (2^{10}; 2^{2^{10}-10} + 1;)$

Câu 25. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $2y \cdot 2^x = \log_2 \left(1 + \frac{2x}{y}\right) + 2y + 3x$

A. 1. **B. 2.** **C. 10.** **D. 4.**

Lời giải

Ta có $2y \cdot 2^x = \log_2 \left(1 + \frac{2x}{y}\right) + 2y + 3x$.

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow 2y \cdot 2^x &= \log_2(y + 2x) - \log_2 y + 2y + 3x \\ \Leftrightarrow y \cdot 2^{x+1} + \log_2 y + (x + 1) &= 1 + \log_2(y + 2x) + 2y + 4x \\ \Leftrightarrow y \cdot 2^{x+1} + \log_2(y \cdot 2^{x+1}) &= \log_2(2y + 4x) + (2y + 4x) \quad (1)\end{aligned}$$

Ta thấy $f(t) = \log_2 t + t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên

$$(1) \Leftrightarrow y \cdot 2^{x+1} = 2y + 4x \Leftrightarrow y \cdot 2^x = y + 2x \Rightarrow 2^x = 1 + \frac{2x}{y} \quad (2)$$

Do y nguyên dương nên $1 + \frac{2x}{y} \leq 1 + 2x \quad (3)$

Từ (2) và (3) ta có $2^x \leq 1 + 2x \quad (4)$

Xét $f(x) = 2^x - 2x - 1, x > 0$.

$$f'(x) = 2^x \ln 2 - 2 > 0, \forall x \geq 3 \Rightarrow f(x) \geq f(3) = 2^3 - 2 \cdot 3 - 1 > 0 \quad \forall x \geq 3$$

Suy ra $2^x - 2x - 1 > 0 \quad \forall x \geq 3$

Từ (4) và do x nguyên dương nên từ $2^x \leq 1 + 2x \Rightarrow x \in \{1; 2\}$

- Thay $x = 1$ vào (2) ta có $y = 2$.
- Thay $x = 2$ vào (2) ta có $y = \frac{4}{3}$.

Vậy có một cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa đề là $(1; 2)$.

Câu 26. Có tất cả bao nhiêu cặp số nguyên không âm $(x; y)$ thỏa mãn

$$\log_2(2x + y + xy + 2)^{y+2} = 8 - (x - 2)(y + 2) ?$$

A. 1. **B. 2.** **C. vô số.** **D. 3.**

Lời giải

Với hai số thực không âm ta có

$$\begin{aligned}\log_2(2x+y+xy+2)^{y+2} &= 8 - (x-2)(y+2) \quad (1) \\ \Leftrightarrow (y+2)\log_2[(x+1)(y+2)] &= 8 - (x+1)(y+2) + 3(y+2) \\ \Leftrightarrow \log_2(x+1) + \log_2(y+2) &= \frac{8}{y+2} - (x+1) + 3 \\ \Leftrightarrow \log_2(x+1) + (x+1) &= \log_2\left(\frac{8}{y+2}\right) + \frac{8}{y+2} \\ \Leftrightarrow f(x+1) &= f\left(\frac{8}{y+2}\right),\end{aligned}$$

Với hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ xét trên $(0; +\infty)$, ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Vậy $(1) \Leftrightarrow x+1 = \frac{8}{y+2} \quad (2)$.

Do x, y là các số nguyên không âm nên từ (2) ta có $(x; y) \in \{(3; 0); (1; 2); (0; 6)\}$.

Vậy có tất cả 3 cặp số nguyên không âm $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 27. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ với $10 < y < 15$ thỏa mãn

$$\log_3 \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-9) + y(y-9) + xy.$$

A. 13.

B. 16.

C. 15.

D. 14.

Lời giải

Điều kiện $x+y > 0$ (do $x^2+y^2+xy+2 = \left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 2 > 0$).

Đẳng thức đã cho tương đương với

$$\log_3 \frac{9(x+y)}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-9) + y(y-9) + xy + 2 \quad (*).$$

Đặt $u = x^2 + y^2 + xy + 2 > 0$, $v = 9x + 9y > 0$, ta có.

$$(*) \Leftrightarrow \log_3 \frac{v}{u} = u - v \Leftrightarrow u + \log_3 u = v + \log_3 v.$$

Mà hàm số $f(t) = t + \log_3 t$ có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 3} > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên

$$(*) \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow x^2 + y^2 + xy - 9x - 9y + 2 = 0.$$

Ta có $x^2 + y^2 + xy - 9x - 9y + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - 9\left(x + \frac{y}{2}\right) = -\frac{3}{4}y^2 + \frac{9}{2}y - 2$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - 9\left(x + \frac{y}{2}\right) = -\frac{3}{4}(y-3)^2 + \frac{19}{4}.$$

Dẫn đến $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - 9\left(x + \frac{y}{2}\right) \leq \frac{19}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x + \frac{y}{2} \leq \frac{19}{2} \Rightarrow -1 \leq 2x + y \leq 19.$

Do $10 < y < 15$ và $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{11; 12; 13; 14\}$. Ta có

y	11	12	13	14
x	$\{0; 1; 2; 3; 4\}$	$\{0; 1; 2; 3\}$	$\{0; 1; 2; 3\}$	$\{0; 1; 2\}$

Vậy có tất cả $5 + 4 + 4 + 3 = 16$ cặp số nguyên $(x; y)$.

Câu 28. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $7^{x+y} = 4^{x^2+2y^2}$?

A.1.

B.2.

C.3.

D.Vô số.

Lời giải

Đặt $7^{x+y} = 4^{x^2+2y^2} = t > 0$. Ta có $\begin{cases} x+y = \log_7 t \\ x^2+2y^2 = \log_4 t \end{cases} (I).$

Vì $(x+y)^2 = \left(1.x + \frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}y\right)^2 \leq \frac{3}{2}(x^2+2y^2)$ nên $(\log_7 t)^2 \leq \frac{3}{2}\log_4 t = \frac{3}{2}\log_4 7.\log_7 t \Leftrightarrow 0 \leq \log_7 t \leq \frac{3}{2}\log_4 7$

Suy ra $x^2+2y^2 = \log_4 t = \log_4 7.\log_7 t \leq \frac{3}{2}(\log_4 7)^2 \approx 2,96$ và x^2 nguyên nên $x^2 \in \{0,1\} \Leftrightarrow x \in \{-1,0,1\}$.

- Với $x=0$ thay vào hệ (I) ta có $\begin{cases} y = \log_7 t \\ 2y^2 = \log_4 t \end{cases}$ hệ này có một nghiệm $\begin{cases} t=1 \\ y=0 \end{cases}$ thỏa yêu cầu.
- Với $x=1$ thay vào hệ (I) ta có $\begin{cases} 1+y = \log_7 t \\ 1+2y^2 = \log_4 t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \log_7 t - 1 & (1) \\ 1+2y^2 = \log_4 t & (2) \end{cases}$ thay (1) vào (2) ta có

$$1+2(\log_7 t - 1)^2 = \log_4 t = \log_4 7.\log_7 t \Leftrightarrow 2\log_7^2 t - (4+\log_4 7).\log_7 t + 3 = 0 \quad (3)$$

Phương trình (3) có $\Delta = (4+\log_4 7)^2 - 24 > 0$ nên phương trình (3) có nghiệm nên tồn tại số thực y .

- Với $x=-1$ thay vào hệ (I) ta có

$$\begin{cases} -1+y = \log_7 t \\ 1+2y^2 = \log_4 t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \log_7 t + 1 & (4) \\ 1+2y^2 = \log_4 t & (5) \end{cases}$$

Thay (4) vào (5) ta có

$$1+2(\log_7 t + 1)^2 = \log_4 t = \log_4 7.\log_7 t \Leftrightarrow 2\log_7^2 t + (4-\log_4 7).\log_7 t + 3 = 0 \quad (6)$$

Phương trình (6) có $\Delta = (4-\log_4 7)^2 - 24 < 0$ nên phương trình (6) vô nghiệm nên không tồn tại số thực y .

Vậy $x \in \{0,1\}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 29. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn điều kiện

$$\log_5(2x+y) = \log_6(4x^2+y^2).$$

A. 1.

B. 0.

C. 2

D. 3.

Lời giải

Điều kiện $2x+y > 0$. Đặt $\log_5(2x+y) = t$

Theo đề ra có $\log_5(2x+y) = \log_6(4x^2+y^2) = t \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y = 5^t \\ 4x^2+y^2 = 6^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y = 5^t \\ 2xy = \frac{25^t - 6^t}{2} \end{cases}$

Ta có $2x, y$ là nghiệm phương trình $X^2 - 5^t X - \frac{6^t - 25^t}{2} = 0 \quad (1).$

Để phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{25}{6}\right)^t \leq 2 \Leftrightarrow t \leq \log_{\frac{25}{6}} 2$.

Mà $4x^2+y^2 = 6^t \Rightarrow 4x^2 \leq 6^t \leq 6^{\log_{\frac{25}{6}} 2} \approx 2,39$.

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x=0 \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 6^t \\ y = 5^t \end{cases} \Rightarrow 6^t = 25^t \Rightarrow t=0 \Rightarrow y=1$.

Vậy $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$, thỏa mãn bài toán. Vậy chỉ có một giá trị x thỏa mãn bài toán.

Câu 30. Có bao nhiêu cặp các số thực nguyên (x, y) thỏa mãn $x \in [-2; 2), y \in [0; +\infty)$ và

$$\log_2(y + \sqrt{y + 2^x}) = 2x.$$

A. 2.

B. 0.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Ta có $\log_2(y + \sqrt{y + 2^x}) = 2x \Leftrightarrow y + \sqrt{y + 2^x} = 2^{2x} \Leftrightarrow (y + 2^x) + \sqrt{y + 2^x} = (2^x)^2 + 2^x \quad (*)$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ với $t > 0$ suy ra $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t > 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Do đó $(*) \Leftrightarrow f(\sqrt{y + 2^x}) = f(2^x) \Leftrightarrow \sqrt{y + 2^x} = 2^x \Leftrightarrow y = (2^x)^2 - 2^x$.

Đặt $u = 2^x$ với $x \in [-2; 2) \Rightarrow u = 2^x \in [\frac{1}{4}; 4)$ ta được hàm số $y = u^2 - u$ với $u \in [\frac{1}{4}; 4)$ có

$$y' = 2u - 1 \Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 2u - 1 = 0 \Leftrightarrow u = \frac{1}{2}$$

Từ bảng biến thiên suy ra $-\frac{1}{4} \leq y < 12$ mà $y \in [0; +\infty)$ nên $0 \leq y < 12$. Ta có bảng sau

x	-2	-1	0	1
$u = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = u^2 - u$	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{4}$	0	2

Vậy có 2 cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(0; 0)$ và $(1; 2)$.

Câu 31. Số cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $\log_2(x - y + 2) + \log_2(x + y + 2) \leq \log_2(4x + 13 - 2y^2)$ là

A. 14.

B. 12.

C. 10.

D. 15.

Lời giải

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} x - y + 2 > 0 \\ x + y + 2 > 0 \\ 4x + 13 - 2y^2 > 0 \end{cases}.$$

Với điều kiện trên ta biến đổi bất đẳng thức đề cho ta có

$$(x - y + 2)(x + y + 2) \leq 4x + 13 - 2y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 9$$

Suy ra $x^2 \leq 9$, mà x là số nguyên nên $x \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$

Từ điều kiện xác định ta có $\begin{cases} x - y + 2 > 0 \\ x + y + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + 4 > 0 \Rightarrow x > -2$, suy ra loại $x = -2$ và loại $x = -3$.

$$\text{Ta kiểm tra từng trường hợp thỏa điều kiện } \begin{cases} x - y + 2 > 0 \\ x + y + 2 > 0 \\ 4x + 13 - 2y^2 > 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases} \quad (*)$$

- Với $x = 0$ thế vào $(*)$ ta có được kết quả $-2 < y < 2$, nên $y = \pm 1$ hoặc $y = 0$.
- Với $x = -1$ thế vào $(*)$ thì được $-1 < y < 1$, suy ra $y = 0$.
- Với $x = 1$ thế vào $(*)$ thì được $-2\sqrt{2} \leq y \leq 2\sqrt{2}$, suy ra $y = 0, y = \pm 1, y = \pm 2$.
- Với $x = 2$ thế vào $(*)$ thì được $-\sqrt{5} \leq y \leq \sqrt{5}$, suy ra $y = 0, y = \pm 1, y = \pm 2$.

- Với $x = 3$ thế vào (*) thì được $y = 0$.

Vậy có tất cả 15 cặp số nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 32. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 < y \leq 2020$ và $\log_3 \left(\frac{2^x - 1}{y} \right) = y + 1 - 2^x$?

A. 2019. B. 10. C. 2020. D. 4.

Lời giải

Từ giả thiết ta có
$$\begin{cases} y \neq 0 \\ \frac{2^x - 1}{y} > 0 \Leftrightarrow 2^x > 1 \Leftrightarrow x > 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Phương trình tương đương $\log_3 (2^x - 1) + 2^x - 1 = \log_3 y + y$ (*).

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ trên $(0; +\infty)$.

Khi đó $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0$ do đó hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Phương trình (*) có dạng $f(2^x - 1) = f(y) \Leftrightarrow y = 2^x - 1$.

Vì $0 \leq y \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq 2^x - 1 \leq 2020 \Leftrightarrow 1 \leq 2^x \leq 2021 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \log_2 (2021)$.

Ta có $\begin{cases} 0 \leq x \leq \log_2 (2021) \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$. Vậy có 10 cặp $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 33. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $\log_4 (x^2 - 2x + 5)^{2y^2 + 8} \leq y^2 + 8y - 7$?

A. 6. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Ta có $x^2 - 2x + 5 = (x - 1)^2 + 4 \geq 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $2y^2 + 8 > 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \log_4 (x^2 - 2x + 5)^{2y^2 + 8} = (2y^2 + 8) \log_4 (x^2 - 2x + 5) \geq (2y^2 + 8) \log_4 4 = 2y^2 + 8.$$

Kết hợp đề bài, ta được $2y^2 + 8 \leq y^2 + 8y - 7 \Leftrightarrow y^2 - 8y + 15 \leq 0 \Leftrightarrow 3 \leq y \leq 5 \Rightarrow y \in \{3; 4; 5\}$.

Với $y = 3 \Rightarrow \log_4 (x^2 - 2x + 5)^{26} \leq 26$

$$\Leftrightarrow 26 \log_4 (x^2 - 2x + 5) \leq 26 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 5 - 4^1 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Với $y = 4 \Rightarrow \log_4 (x^2 - 2x + 5)^{40} \leq 41$

$$\Leftrightarrow 40 \log_4 (x^2 - 2x + 5) \leq 41 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 5 - 4^{\frac{41}{40}} \leq 0 \Leftrightarrow 0,6 \leq x \leq 1,4 \Rightarrow x = 1.$$

Với $y = 5 \Rightarrow \log_4 (x^2 - 2x + 5)^{58} \leq 58$

$$\Leftrightarrow 58 \log_4 (x^2 - 2x + 5) \leq 58 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 5 - 4^1 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy có 3 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn là $(1; 3)$, $(1; 4)$ và $(1; 5)$.

Câu 34. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $\log_a (x - y) = \log_{a^2} \frac{xy + 5}{2}$ ($0 < a \neq 1$)?

A. 4. B. 8. C. 2. D. 3.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x-y > 0 \\ xy+5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > y \\ xy > -5 \end{cases}.$

Với điều kiện trên, ta có $\log_a(x-y) = \log_{a^2} \frac{xy+5}{2} \Leftrightarrow \log_a(x-y) = \frac{1}{2} [\log_a(xy+5) - \log_a 2]$

$$\Leftrightarrow 2\log_a(x-y) + \log_a 2 = \log_a(xy+5) \Leftrightarrow \log_a [2(x-y)^2] = \log_a(xy+5)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4xy + 2y^2 = xy + 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 5.$$

Bài toán trở thành tìm nghiệm nguyên của phương trình $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 5$ (*).

$$(*) \Leftrightarrow 2x^2 - 4xy - xy + 2y^2 = 5 \Leftrightarrow 2x(x-2y) - y(x-2y) = 5 \Leftrightarrow (x-2y)(2x-y) = 5.$$

Do $x-2y$ và $2x-y$ nhận các giá trị nguyên và là ước của 5 nên

$x-2y$	1	-1	5	-5
$2x-y$	5	-5	1	-1
$(x;y)$	(3;1)	(-3;-1)	(-1;-3)	(1;3)

So điều kiện, ta được 2 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn là $(3;1)$ và $(-1;-3)$.

Câu 35. Có tất cả bao nhiêu số nguyên y thuộc $[-2020;2020]$ sao cho tồn tại duy nhất số thực x thỏa mãn $\log_2 x = \log_3(x+y)$?

A. 2019. B. 2021. C. 2020. D. 2022.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ x+y > 0 \end{cases}.$

Đặt $\log_2 x = \log_3(x+y) = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^t \\ x+y = 3^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^t \\ 2^t + y = 3^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^t \\ y = 3^t - 2^t \end{cases} (1).$

Xét hàm số $f(t) = 3^t - 2^t$. Ta có $f'(t) = 3^t \ln 3 - 2^t \ln 2$.

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 3^t \ln 3 = 2^t \ln 2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{\ln 2}{\ln 3} = \log_3 2 \Leftrightarrow t = \log_{\frac{3}{2}}(\log_3 2) = t_0.$$

Lập bảng biến thiên ta thấy rằng tồn tại duy nhất số thực x thỏa mãn bài toán $\Leftrightarrow (1)$ ẩn t có nghiệm

duy nhất khi và chỉ khi $\begin{cases} y \geq 0 \\ y = 3^{\log_{\frac{3}{2}}(\log_3 2)} - 2^{\log_{\frac{3}{2}}(\log_3 2)}. \end{cases}$

Do y nguyên thuộc $[-2020;2020]$ nên $y \in \{0;1;2;...;2020\}$.

Vậy có 2021 số nguyên y thỏa mãn bài toán.

Câu 36. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y) = \log_6(x^4+y^4)$

A. 0. B. 2. C. 4. D. 8.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x+y > 0 \\ x^4+y^4 \neq 0 \end{cases}.$

Đặt $t = \log_5(x+y) = \log_7(x^4+y^4) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 3^t \\ x^4+y^4 = 6^t \end{cases}.$

$$\text{Ta có } \left(\frac{x+y}{2}\right)^4 \leq \frac{x^4+y^4}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{3^t}{2}\right)^4 \leq \frac{6^t}{2} \Leftrightarrow \frac{81^t}{16} \leq \frac{6^t}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{81}{6}\right)^t \leq \frac{16}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{27}{2}\right)^t \leq 8 \Leftrightarrow t \leq \log_{\frac{27}{2}} 8$$

$$\text{Mặt khác } 6^t = x^4 + y^4 \geq x^4 \Rightarrow |x| \leq 6^{\frac{t}{4}} \Rightarrow |x| \leq 6^{\frac{3}{4} \log_{\frac{27}{2}} 2} \approx 1,43.$$

Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-1; 0; 1\}$. Với $x = -1$ ta có hệ

$$\begin{cases} y = 3^t + 1 \\ y^4 = 6^t - 1 \end{cases} \Rightarrow (3^t + 1)^4 = 6^t - 1 \Leftrightarrow 3^{4t} + 4 \cdot 3^{3t} + 6 \cdot 3^{2t} + 4 \cdot 3^t - 6^t + 2 = 0 (*)$$

$$\text{Đặt } f(t) = 3^{4t} + 4 \cdot 3^{3t} + 6 \cdot 3^{2t} + 4 \cdot 3^t - 6^t + 2$$

$$\text{Với } t \geq 0 \text{ suy ra } 3^{4t} > 6^t \Rightarrow f(t) > 0$$

$$\text{Với } t < 0 \Rightarrow 2 - 6^t > 0 \Rightarrow f(t) > 0 \Rightarrow (*) \text{ vô nghiệm.}$$

$$\text{Với } x = 0 \text{ ta có hệ } \begin{cases} y = 3^t \\ y^4 = 6^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3^t)^4 = 6^t \\ y = 3^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{81}{6}\right)^t = 1 \\ y = 3^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình đã cho có nghiệm } \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Với } x = 1 \text{ ta có hệ } \begin{cases} y = 3^t - 1 \\ y^4 = 6^t - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3^t - 1)^4 = 6^t - 1 \\ y = 3^t - 1 \end{cases}$$

Xét hàm số $f(t) = (3^t - 1)^4 - 6^t + 1$ là hàm số liên tục và có $f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0 \Rightarrow f(t) = 0$ có ít nhất một nghiệm $\frac{1}{2} < t < 1 \Rightarrow \exists y \in (0; 2)$, thỏa mãn.

Vậy $x \in \{0; 1\}$.

Câu 37. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn

$$\log_3(x + y - 2) = \log_4(x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2)$$

A. 0.

B. 2.

C. 4.

D. 8.

Lời giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x + y - 2 > 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \neq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Đặt } t = \log_3(x + y - 2) = \log_4(x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2 - 3^t = 0 & (\Delta) \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4^t & (C) \end{cases}.$$

Hệ trên có nghiệm khi và chỉ khi đường thẳng (Δ) cắt đường tròn (C) , điều này có nghĩa khoảng cách từ tâm $I(1;1)$ của đường tròn (C) đến đường thẳng (Δ) nhỏ hơn hoặc bằng bán kính $R = 2^t$.

$$\text{Tức là ta phải có } \frac{|1+1-2-3^t|}{\sqrt{2}} \leq 2^t \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow t \leq \log_{\frac{3}{2}} \sqrt{2} \approx 0,8547.$$

$$\text{Ta có } 4^t = (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq (x-1)^2 \Rightarrow |x-1| \leq 2^t \Rightarrow 0 \leq x \leq 2.$$

$$\text{Với } x = 0, \text{ ta có } \begin{cases} y = 2 + 3^t \\ (y-1)^2 = 4^t - 1 \end{cases} \Rightarrow (3^t + 1)^2 - 4^t + 1 = 0 \Leftrightarrow 9^t + 2 \cdot 3^t - 4^t + 2 = 0 (*)$$

$$\text{Với } t \leq 0 \text{ có } -4^t + 2 > 0 \Rightarrow (*) \text{ vô nghiệm.}$$

Với $0 < t < \log_3 \sqrt{2}$ có $9^t > 4^t \Rightarrow (*)$ vô nghiệm.

Với $x = 1$, ta có $\begin{cases} y = 1 + 3^t \\ (y-1)^2 = 4^t \end{cases} \Rightarrow 3^{2t} - 4^t = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^t = 1 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow y = 2.$

Phương trình đã cho có nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}.$

Với $x = 2$, ta có $\begin{cases} y = 3^t \\ (y-1)^2 = 4^t - 1 \end{cases} \Rightarrow (3^t - 1)^2 - 4^t + 1 = 0 (**).$

Ta thấy $t = 0$ là nghiệm của $(**) \Rightarrow y = 1$, thỏa mãn điều kiện.

Vậy có $x \in \{1; 2\}.$

Câu 38. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $3 \leq x \leq 27$ và

$$\left[2 + \log_2(x-1)\right]^3 + 4x = 8y^3 + 4^y + 4?$$

A. 2019.

B. 3.

C. 2020.

D. 2.

Lời giải

Ta có $\left[2 + \log_2(x-1)\right]^3 + 4x = 8y^3 + 4^y + 4 \Leftrightarrow \left[\log_2 4(x-1)\right]^3 + 4(x-1) = (2y)^3 + 2^{2y} \quad (1).$

Đặt $t = \log_2 4(x-1) \Rightarrow 4(x-1) = 2^t.$

Khi đó (1) trở thành $t^3 + 2^t = (2y)^3 + 2^{2y} \quad (2).$

Xét hàm số $f(h) = h^3 + 2^h$. Ta có $f'(h) = 3h^2 + 2^h \ln 2 > 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(h)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(2) \Leftrightarrow f(t) = f(2y) \Leftrightarrow t = 2y \Leftrightarrow \log_2 4(x-1) = 2y \Leftrightarrow 4(x-1) = 2^{2y}.$

Do $3 \leq x \leq 27$ nên $8 \leq 4(x-1) \leq 104 \Leftrightarrow 8 \leq 4^y \leq 104 \Leftrightarrow \log_4 8 \leq y \leq \log_4 104.$

Do $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{2; 3\}$, với mỗi giá trị y cho ta 1 giá trị x thỏa đề.

- Với $y = 2$ ta được $x = 5$.
- Với $y = 3$ ta được $x = 17$.

Vậy có 2 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 39. Có bao nhiêu số thực $y \in [0; 6\pi]$ sao cho tồn tại số ít nhất một số thực $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $4^x - 2^{x+1} + 2(2^x - 1)\sin(2^x + y - 1) + 2 = 0$

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. vô số.

Lời giải

Ta có $4^x - 2^{x+1} + 2(2^x - 1)\sin(2^x + y - 1) + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 4^x - 2^x \cdot 2 + 1 + 2(2^x - 1)\sin(2^x + y - 1) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2^x - 1)^2 + 2(2^x - 1)\sin(2^x + y - 1) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2^x - 1)^2 + 2(2^x - 1)\sin(2^x + y - 1) + \sin^2(2^x + y - 1) + \cos^2(2^x + y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2^x - 1 + \sin(2^x + y - 1))^2 + \cos^2(2^x + y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2^x - 1 + \sin(2^x + y - 1))^2 = 0 \\ \cos^2(2^x + y - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 1 + \sin(2^x + y - 1) = 0 \\ \cos(2^x + y - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1 - \sin(2^x + y - 1) \\ \cos(2^x + y - 1) = 0 \end{cases}, \text{ vì } \cos^2(2^x + y - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2^x + y - 1) = 1 \\ \sin(2^x + y - 1) = -1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 0 \text{ (vn)} \\ \sin(2^x + y - 1) = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} 2^x = 2 \\ \sin(2^x + y - 1) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \sin(y + 1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y + 1 = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 - \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

$$\text{Vì } x \in \mathbb{R}; y \in [0; 6\pi] \text{ nên } \begin{cases} x = 1 \\ y \in \left\{ -1 - \frac{\pi}{2} + 2\pi; -1 - \frac{\pi}{2} + 2.2\pi; -1 - \frac{\pi}{2} + 3.2\pi \right\} \end{cases}$$

Vậy có 3 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 40. Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ với x, y là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện

$$2^x - \log_2(y^2 + 615) = y^2 - x + 615$$

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. vô số.

Lời giải

$$\text{Ta có } 2^x - \log_2(y^2 + 615) = y^2 - x + 615$$

$$\Leftrightarrow 2^x + x = \log_2(y^2 + 615) + y^2 + 615$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2^x) + 2^x = \log_2(y^2 + 615) + y^2 + 615$$

$$\Leftrightarrow f(2^x) = f(y^2 + 615) \quad (1)$$

Ta thấy hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Khi đó phương trình (1) $\Leftrightarrow 2^x = y^2 + 615$.

Xét chữ số hàng đơn vị của các số $y^2 + 615$, 2^x

Chữ số hàng đơn vị của y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chữ số hàng đơn vị của y^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
Chữ số hàng đơn vị của $y^2 + 615$	5	6	9	4	1	0	1	4	9	6
Chữ số hàng đơn vị của x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Chữ số hàng đơn vị của 2^x	2	4	8	6	2	4	8	6	2	4

Ta thấy x phải là số chẵn $\Rightarrow x = 2k, (k \in \mathbb{N}^*)$

$$\text{Ta có } 2^{2k} = y^2 + 615 \Leftrightarrow 2^{2k} - y^2 = 615 \Leftrightarrow (2^k - y)(2^k + y) = 615.$$

Mặt khác $615 = 3 \times 5 \times 41 = 1 \times 615 = 15 \times 41 = 5 \times 123 = 3 \times 205$.

Mà tổng $(2^k - y) + (2^k + y) = 2^k \cdot 2 = 2^{k+1}$; lại có $1 + 615; 15 + 41; 3 + 205$ không có dạng lũy thừa của 2 và $5 + 123 = 128 = 2^7$ nên xảy ra

$$\begin{cases} 2^k - y = 5 \\ 2^k + y = 123 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k = 2^6 \\ y = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 6 \\ y = 59 \end{cases}$$

Vậy có duy nhất một cặp số nguyên dương $(x; y) = (12; 59)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 41. Có bao nhiêu bộ $(x; y)$ với x, y là các số nguyên thỏa mãn $1 \leq x, y \leq 1024$ và

$$\log_{\sqrt{2}} x + x(x-y) + 2 = \frac{(2^x)^y}{4}$$

A. 1.

B. 3.

C. 11.

D. 22.

Lời giải

Ta có $\log_{\sqrt{2}} x + x(x-y) + 2 = \frac{(2^x)^y}{4} \Leftrightarrow \log_2 x^2 + x^2 = 2^{xy-2} + xy - 2$.

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t$.

Như vậy hàm số $f(t)$ luôn đồng biến nên $f(\log_2 x^2) = f(xy - 2) \Leftrightarrow \log_2 x^2 = xy - 2 \Leftrightarrow x^2 = 2^{xy-2}$

Vì $x \in [1; 1024]$ nên $2^{xy-2} = x^2 \leq 1024^2 \Rightarrow xy \leq 22$. Vậy ta có $\begin{cases} x, y \in \mathbb{Z} \\ xy \leq 22 \\ x^2 = 2^{xy-2} \end{cases}$.

Nhận xét. Ta thấy x có dạng $2^k \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = 2 \\ x = 2; y = 2 \\ x = 4; y = \frac{3}{2} \\ x = 8; y = 1 \\ x = 16; y = \frac{5}{8} \end{cases}$.

Vậy có 3 bộ $(1; 2), (2; 2), (8; 1)$.

Câu 42. Có bao nhiêu cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $\log_{2019} (x^4 - 2x^2 + 2020)^{y^2+2019} = 2y + 2018$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Ta có $\log_{2019} (x^4 - 2x^2 + 2020)^{y^2+2019} = 2y + 2018 \Leftrightarrow \log_{2019} [(x^2 - 1)^2 + 2019] = \frac{2y + 2018}{y^2 + 2019}$.

$VT \geq \log_{2019} 2019 = 1, \forall x$ (*).

$VP = \frac{2y + 2018}{y^2 + 2019} = 1 - \frac{(1-y)^2}{y^2 + 2019} \Rightarrow VP \leq 1, \forall y$ (**).

Từ (*) và (**) suy ra $\log_{2019} [(x^2 - 1)^2 + 2019] = \frac{2y + 2018}{y^2 + 2019} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ 1 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

Vậy có hai cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 43. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện

$$\log_2 (x^2 + y^2 + 4) - \log_2 (x + 2y) \leq 1 \text{ và } 2x - y \geq 0$$

A. 2.

B. 5.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

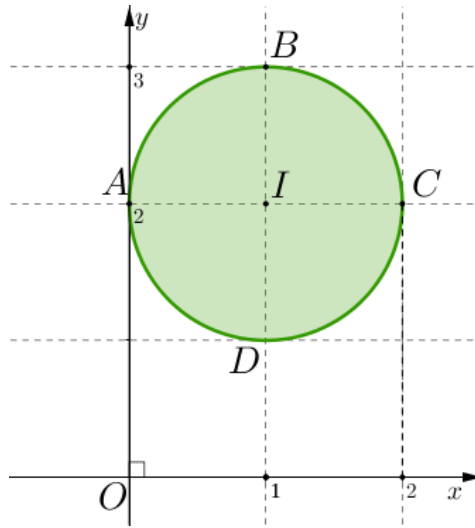
Ta có, $\log_2 (x^2 + y^2 + 4) - \log_2 (x + 2y) \leq 1$ (1)

$\Leftrightarrow \log_2 (x^2 + y^2 + 4) \leq \log_2 (x + 2y) + \log_2 2$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 + y^2 + 4) \leq \log_2(2x + 4y)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4 \leq 2x + 4y \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 1$$

Tập hợp những điểm $M(x; y)$ thỏa mãn điều kiện (1) là hình tròn tâm $I(1; 2)$ bán kính $R=1$ (kể cả đường tròn)



Từ đó suy ra có 5 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện (1) là $(1; 1)$, $(2; 2)$, $(0; 2)$, $(1; 2)$ và $(1; 3)$.

Trong 5 cặp số $(x; y)$ trên thì có 3 cặp số thỏa mãn điều kiện $2x - y \geq 0$ là $(1; 1)$, $(1; 2)$ và $(2; 2)$.

Câu 44. Có bao nhiêu cặp số nguyên a, b thỏa mãn đồng thời các điều kiện $a^2 + b^2 > 1$ và

$$a^2 + b^2 - 3 \leq \log_{a^2+b^2} \left[\frac{b^2(a^2 + b^2 + 4) + 4a^2}{a^2 + 2b^2} \right] ?$$

A. 10.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Lời giải

$$\text{Ta có } a^2 + b^2 - 3 \leq \log_{a^2+b^2} \left[\frac{b^2(a^2 + b^2 + 4) + 4a^2}{a^2 + 2b^2} \right]$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 3 \leq \log_{a^2+b^2} \left[\frac{(b^2 + 4)(a^2 + b^2)}{a^2 + 2b^2} \right]$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 4 \leq \log_{a^2+b^2} (b^2 + 4) - \log_{a^2+b^2} (a^2 + 2b^2)$$

$$\Leftrightarrow \log_{a^2+b^2} (a^2 + 2b^2) + (a^2 + 2b^2) \leq \log_{a^2+b^2} (b^2 + 4) + (b^2 + 4) \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_{a^2+b^2} t + t$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln(a^2 + b^2)} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$. Do đó hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Phương trình } (*) \Leftrightarrow f(a^2 + 2b^2) \leq f(b^2 + 4) \Leftrightarrow a^2 + 2b^2 \leq b^2 + 4 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 4$$

Vậy, a, b thỏa mãn $1 < a^2 + b^2 \leq 4$. Từ đó ta có 8 cặp số $(a; b)$ thỏa mãn bài toán là

$$(-2; -2), (-2; -1), (-1; -2), (-1; -1), (1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2).$$

Câu 45. Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn

$$\log_2(4444 + 4x - 2x^2) = 2 \cdot 2^{y^2} + y^2 + x^2 - 2x - 2220 ?$$

A. 13 .

B. 9 .

C. 11 .

D. 7 .

Lời giải

Ta có, $\log_2(4444 + 4x - 2x^2) = 2 \cdot 2^{y^2} + y^2 + x^2 - 2x - 2220 \quad (*)$

$$\Leftrightarrow \log_2[2(2222 + 2x - x^2)] + 2220 + 2x - x^2 = 2 \cdot 2^{y^2} + y^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + \log_2(2222 + 2x - x^2) + 2220 + 2x - x^2 = 2 \cdot 2^{y^2} + y^2 \quad (1).$$

Đặt $2^{y^2} = t (t \geq 1) \Rightarrow y^2 = \log_2 t$. Phương trình (1) trở thành

$$\log_2(2222 + 2x - x^2) + 2222 + 2x - x^2 = 2t + \log_2 t + 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2222 + 2x - x^2) + 2222 + 2x - x^2 = \log_2 2t + 2t \quad (2).$$

Đặt $f(t) = \log_2 t + t \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0 \forall t \geq 1$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$. Do đó (2) $\Leftrightarrow 2222 + 2x - x^2 = 2t$.

Ta có $2222 + 2x - x^2 = 2223 - (x - 1)^2 \leq 2223$.

Tồn tại $x \in \mathbb{R}$ thỏa (*) $\Leftrightarrow 2 \cdot 2^{y^2} \leq 2223 \Leftrightarrow 2^{y^2} \leq \frac{2223}{2} \Leftrightarrow y^2 \leq \log_2 \frac{2223}{2} \Leftrightarrow -\sqrt{\log_2 \frac{2223}{2}} \leq y \leq \sqrt{\log_2 \frac{2223}{2}}$.

Mà $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Vậy có 7 giá trị của y .

Câu 46. Có bao nhiêu bộ số $(x; y)$ với $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn phương trình sau đây

$$4^{x+1} + 2 \log_2(xy + 2021) = 2^{xy+2022} + 2 \log_2(2x+1) ?$$

A. 12 .

B. Vô số.

C. 1 .

D. 3 .

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x, y \in \mathbb{Z} \\ xy + 2021 > 0 \\ 2x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \mathbb{Z} \\ xy + 2021 \geq 1 \\ 2x + 1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \mathbb{Z} \\ xy + 2021 \geq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2^{2(x+1)} + 2 \log_2(xy + 2021) = 2 \cdot 2^{xy+2021} + 2 \log_2(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x+1} - \log_2(2x+1) = 2^{xy+2021} - \log_2(xy+2021) \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t - \log_2 t$ với $t \geq 1$.

Có $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 - \frac{1}{t \cdot \ln 2} = \frac{t \cdot 2^t \cdot (\ln 2)^2 - 1}{t \cdot \ln 2} > 0$ với $t \geq 1$.

Nên hàm số $f(t)$ đồng biến, do đó (1) $\Leftrightarrow f(2x+1) = f(xy+2021)$

$$\Leftrightarrow 2x+1 = xy+2021 \Leftrightarrow x(2-y) = 2020.$$

Suy ra x là một ước nguyên dương của 2020.

Ta có $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$ nên $x = 2^a \cdot 5^b \cdot 101^c$ với $0 \leq a \leq 2, 0 \leq b, c \leq 1$ và $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Do đó mỗi số nguyên x là một cách chọn bộ ba số $(a; b; c)$ nên có $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ số.

Vậy có 12 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 47. Có bao nhiêu cặp số dương $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $\log_2 \left(\frac{6x+2y+1}{2x+y+1} \right), \log_3 \left(\frac{3y-2x+4}{y+1} \right)$ nhận giá trị là số nguyên dương bằng nhau.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Cho $x = \frac{1}{2}$ và thay vào $\log_2 \left(\frac{6x+2y+1}{2x+y+1} \right), \log_3 \left(\frac{3y-2x+4}{y+1} \right)$ ta được $\log_2 \left(\frac{2y+4}{y+2} \right) = \log_2 2 = 1, \forall y > 0$ và

$$\log_3 \left(\frac{3y+3}{y+1} \right) = \log_3 3 = 1, \forall y > 0.$$

Do đó ta có vô số cặp số (x, y) dương, với $x = \frac{1}{2}$ và $y > 0$ tùy ý thì

$$\log_2 \left(\frac{6x+2y+1}{2x+y+1} \right) = \log_3 \left(\frac{3y-2x+4}{y+1} \right) = 1$$

Câu 48. Có bao nhiêu bộ số thực $(x; y)$ với $x+y$ là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện

$$\log_2 \left(\frac{|x^3 + y^3|}{x^2 + y^2} \right) = \log_3 (x+y)$$

A. 8. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 10.

Lời giải

Cách 1. Đặt $t = \log_2 \left(\frac{|x^3 + y^3|}{x^2 + y^2} \right) = \log_3 (x+y)$. Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{|x^3 + y^3|}{x^2 + y^2} = 2^t \\ x+y = 3^t \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|x+y| \cdot |x^2 - xy + y^2|}{x^2 + y^2} = 2^t \\ x+y = 3^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{x^2 + y^2} = 2^t \\ x+y = 3^t \end{cases} \quad (I) \\ &\Rightarrow \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2} = \left(\frac{2}{3} \right)^t \Leftrightarrow 1 - \frac{xy}{x^2 + y^2} = \left(\frac{2}{3} \right)^t \quad (2) \end{aligned}$$

Ta có, $x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 y^2} \Leftrightarrow \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-1}{2} \leq \frac{xy}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}$.

Do đó, $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{xy}{x^2 + y^2} \leq \frac{3}{2}$. Từ (2) suy ra $\frac{1}{2} \leq \left(\frac{2}{3} \right)^t \leq \frac{3}{2}$ hay $-1 \leq t \leq \frac{\ln 2}{\ln 3 - \ln 2}$

Mặt khác $x+y = 3^t$ (là số nguyên dương nên $x+y \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$)

Từ (2) ta có $xy = \frac{\left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^t \right] \cdot 3^{2t}}{3 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^t}$. Do $(3^t)^2 > \frac{4 \cdot \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^t \right] 3^{2t}}{3 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^t}, \forall t: -1 \leq t \leq \frac{\ln 2}{\ln 3 - \ln 2}$

Nên luôn tồn tại x, y ($x \neq y$) thỏa mãn yêu cầu bài toán với $x+y \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Có 12 cặp.

Cách 2. Đặt $t = \log_2 \left(\frac{|x^3 + y^3|}{x^2 + y^2} \right) = \log_3 (x+y)$. Ta có

$$\begin{cases} \left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| = 2^t \\ x + y = 3^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{x + y}{x^2 + y^2} \right| = 2^t \\ x + y = 3^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x + y)(x^2 - xy + y^2)}{x^2 + y^2} = 2^t \\ x + y = 3^t \end{cases} \quad (I) \Rightarrow \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^t \quad (2)$$

Trường hợp 1. $y \neq 0$, (2) $\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} + 1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} = \left(\frac{2}{3}\right)^t$. Đặt $u = \frac{x}{y}$ ta có

$$\frac{u^2 - u + 1}{u^2 + 1} = \left(\frac{2}{3}\right)^t \Leftrightarrow u^2 - u + 1 = (u^2 + 1) \left(\frac{2}{3}\right)^t \Leftrightarrow \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^t\right] u^2 - u + 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^t = 0 \quad (1)$$

Ta có phương trình (1) có nghiệm khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 4 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^t\right]^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^t \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow -1 \leq t \leq \frac{\ln 2}{\ln 3 - \ln 2}$

Mặt khác $x + y = 3^t$ là số nguyên dương nên $x + y \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Trường hợp 2. $y = 0$, (2) trở thành $\left(\frac{2}{3}\right)^t = 1 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow x = 1$ (thỏa mãn).

Nhận xét khi thay $x = y$ vào hệ (I) không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vai trò của $x; y$ như nhau trong hệ (I) nên có 12 cặp $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 49. Có bao nhiêu cặp số (x, y) với $x, y \in \mathbb{Z}$ và $y \in [-2019; 2020^3]$ thỏa mãn phương trình

$$\log_4 \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} \right) = \log_2 (y - x) ?$$

A. 84567.

B. 93781.

C. 90787.

D. 60608.

Lời giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} y - x > 0 \\ x + \frac{1}{4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > x \\ x \geq -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Kết hợp giả thiết $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \in [-2019; 2020^3]$ nên ta suy ra $y > 0, y \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ta có } \log_4 \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} \right) = \log_2 (y - x) \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = (y - x)^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \right)^2 = (y - x)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} = y - x \\ \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} = y - x \\ x + \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} = y \end{cases} \Leftrightarrow y = \left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y} = \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x + \frac{1}{4}} = \sqrt{y} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} \geq \frac{1}{2} \\ x + \frac{1}{4} = y - \sqrt{y} + \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{1}{4} \\ \sqrt{y} = y - x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Theo bài ra, } \begin{cases} y \in \mathbb{Z} \\ y \in [-2019; 2020^3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq \sqrt{y} \leq \sqrt{2020^3} \\ \sqrt{y} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{y} \in \{1, 2, \dots, 90787\}.$$

Vậy có 90787 cặp số (x, y) thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 50. Có bao nhiêu cặp số thực dương $(a; b)$ thỏa mãn $\log_2 a$ là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $\log_2 a = 1 + \log_3 b$ và $a^2 + b^2 < 2020^2$?

A. 8.

B. 6.

C. 7.

D. 5.

Lời giải

Theo bài ra ta có $\log_2 a = m \quad (m \in \mathbb{Z}; m \geq 1) \Rightarrow \begin{cases} a = 2^m \\ a \geq 2 \end{cases}$.

Lại có $\log_2 a = 1 + \log_3 b \Leftrightarrow \log_3 b = m - 1 \Leftrightarrow b = 3^{m-1}$.

Suy ra $a^2 + b^2 = (2^m)^2 + (3^{m-1})^2 = 4^m + 9^{m-1} < 2020^2$.

Đặt $g(m) = 4^m + 9^{m-1} \Rightarrow g'(m) = 4^m \ln 4 + 9^{m-1} \ln 9 > 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$.

Vậy $g(m)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra $g(m) < 2020^2 \approx g(7,92)$. Ta được $m < 7,92$.

Số cặp $(a; b)$ là số giá trị nguyên dương của m .

Vậy $m \in \{1, 2, \dots, 7\}$. Có 7 giá trị.

Câu 51. Có tất cả bao nhiêu số nguyên dương x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn

$$\log_2(x + 2^y) = \log_3\left(3^y + (\sqrt{2})^y\right)?$$

A. 2.

B. Vô số.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Ta xét ba trường hợp của số thực y như sau

Trường hợp 1. Với $\forall x \in \mathbb{N}^*$ và $\forall y \in (0; +\infty)$ ta có

$$\begin{aligned} \log_2(x + 2^y) = \log_3\left(3^y + (\sqrt{2})^y\right) &\Leftrightarrow \log_2\left(2^y \left(1 + \frac{x}{2^y}\right)\right) = \log_3\left(3^y \left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^y\right)\right) \\ &\Leftrightarrow y + \log_2\left(1 + \frac{x}{2^y}\right) = y + \log_3\left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^y\right) \\ &\Leftrightarrow \log_2\left(1 + \frac{x}{2^y}\right) = \log_3\left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^y\right) (*) \end{aligned}$$

Với $\forall x \in \mathbb{N}^*$ và $\forall y \in (0; +\infty)$ thì

$$\begin{aligned} VT(*) &= \log_2\left(1 + \frac{x}{2^y}\right) \geq \log_2\left(1 + \frac{1}{2^y}\right) = \log_2\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^y\right) \\ &> \log_2\left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^y\right) > \log_3\left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^y\right) = VP(*) \end{aligned}$$

Do đó, phương trình đã cho vô nghiệm với $\forall x \in \mathbb{N}^*$ và $\forall y \in (0; +\infty)$.

Trường hợp 2 Với $\forall x \in \mathbb{N}^*$ và $\forall y \in (-\infty; 0)$ ta có

$$\log_2(x + 2^y) \geq \log_2(1 + 2^y) > \log_3(1 + 2^y) = \log_3\left((\sqrt{2})^0 + 2^y\right) > \log_3\left((\sqrt{2})^y + 3^y\right)$$

Suy ra, phương trình đã cho vô nghiệm với $\forall x \in \mathbb{N}^*$ và $\forall y \in (-\infty; 0)$.

Trường hợp 3 Với $\forall x \in \mathbb{N}^*$ và $y = 0$, ta được phương trình $\log_2(x + 1) = \log_3 2$ (**).

Để thấy phương trình này vô nghiệm.

Vậy, không tồn tại số nguyên dương x nào thỏa mãn yêu cầu.

Câu 52. Có tất cả bao nhiêu cặp các số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $\frac{\log_2(x^2 - 2x + y^2) + 1}{\log_2(x^2 + y^2 - 1)} < 1$?

A. 2 .

B. 5 .

C. 6 .

D. 4 .

Lời giải

Xét trường hợp $\log_2(x^2 + y^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow 0 < x^2 + y^2 - 1 < 1 \Leftrightarrow 1 < x^2 + y^2 < 2$ (1)

Do x và y là các số nguyên nên không tồn tại $(x; y)$ thỏa mãn (1)

Xét trường hợp $\log_2(x^2 + y^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 > 2$ (*)

Khi đó bất phương trình $\frac{\log_2(x^2 - 2x + y^2) + 1}{\log_2(x^2 + y^2 - 1)} < 1 \Leftrightarrow \log_2 2(x^2 - 2x + y^2) < \log_2(x^2 + y^2 - 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4x + 2y^2 < x^2 + y^2 - 1 \\ x^2 - 2x + y^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 < 3 \\ (x-1)^2 + y^2 > 1 \end{cases} \quad (2) \quad (**)$$

Từ (2) suy ra $\begin{cases} (x-2)^2 < 3 \\ y^2 < 3 \end{cases}$ do x, y nguyên nên $\begin{cases} x \in \{1; 2; 3\} \\ y \in \{-1; 0; 1\} \end{cases}$

Vậy có tất cả 5 cặp $(x; y)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 53. Trong hệ tọa độ Oxy , cho điểm $M(x; y)$ với $x; y \in \mathbb{Z}; -6 < x < 6; y \neq 0$ và thỏa mãn phương trình $3^{9y^2} - \frac{3^{36}}{3^{x^2}} + 2 = \log_3\left(\frac{36 - x^2}{y^2}\right)$. Hỏi có bao nhiêu điểm M thỏa yêu cầu nêu trên?

A. Bốn điểm

B. Một điểm

C. Ba điểm

D. Hai điểm

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} 3^{9y^2} - \frac{3^{36}}{3^{x^2}} + 2 &= \log_3\left(\frac{36 - x^2}{y^2}\right) \Leftrightarrow 3^{9y^2} - 3^{36-x^2} = \log_3\left(\frac{36 - x^2}{y^2}\right) - 2 \Leftrightarrow 3^{9y^2} - 3^{36-x^2} = \log_3\left(\frac{36 - x^2}{9y^2}\right) \\ &\Leftrightarrow 3^{9y^2} - 3^{36-x^2} = \log_3(36 - x^2) - \log_3 9y^2 \Leftrightarrow 3^{9y^2} + \log_3 9y^2 = \log_3(36 - x^2) + 3^{36-x^2} \quad (1). \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = 3^x + \log_3 x$ với $x > 0$.

Có $f'(x) = 3^x \cdot \ln 3 + \frac{1}{x \cdot \ln 3} > 0, \forall x > 0$, do đó hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow f(9y^2) = f(36 - x^2) \Leftrightarrow 9y^2 = 36 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + 9y^2 = 36$

Vì $x; y \in \mathbb{Z}; -6 < x < 6; y \neq 0$ nên nhận được $\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow M_1(0; 2); M_2(0; -2).$

Câu 54. Cho cặp số nhân $(a_n), n \in \mathbb{N}^*$ có $a_1 = a$, công bội $q = r$ với a, r là các số nguyên dương. Biết $\log_8 a_1 + \log_8 a_2 + \dots + \log_8 a_{11} + \log_8 a_{12} = 2020$. Hỏi có bao nhiêu cặp số (a, r) theo thứ tự thỏa mãn ?

A. 92 .

B. 91 .

C. 45 .

D. 46 .

Lời giải

Ta có $a_1 = a; a_2 = a.r; \dots; a_{12} = a.r^{11}$.

$$\log_8 a_1 + \log_8 a_2 + \dots + \log_8 a_{11} + \log_8 a_{12} = 2020 \Leftrightarrow \log_8(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{12}) = 2020$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \log_2 \left(a^{12} \cdot r^{\frac{11 \cdot 12}{2}} \right) = 2 \log_2 (a^2 \cdot r^{11}) = 2020$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (a^2 \cdot r^{11}) = 1010 \Leftrightarrow a^2 \cdot r^{11} = 2^{1010} \quad (*)$$

Vì a, r đều là số nguyên dương nên chúng phải là lũy thừa của 2.

Đặt $a = 2^x; r = 2^y$ với x, y là các số tự nhiên. Ta có

$$(*) \Leftrightarrow 2^{2x} \cdot 2^{11y} = 2^{2x+11y} = 2^{1010} \Leftrightarrow 2x+11y = 1010 \Rightarrow 0 \leq y \leq \frac{1010}{11} \approx 91 \quad (**)$$

Mà $2x; 1010$ đều chia hết cho 2 nên $11y$ phải chia hết cho 2 nên y là số chẵn.

Kết hợp với (**) ta có số giá trị của y là $\frac{90-0}{2} + 1 = 46$ giá trị

Với mỗi giá trị của y sẽ có một giá trị x thỏa mãn.

Câu 55. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x + y > 0; -20 \leq x \leq 20$ và

$$\log_2 (x + 2y) + x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y = 0 ?$$

A. 19 .

B. 16 .

C. 10 .

D. 41 .

Lời giải

Điều kiện $x + 2y > 0$.

$$\text{Ta có } \log_2 (x + 2y) + x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y = 0 \Leftrightarrow \log_2 \frac{(x + y)(x + 2y)}{x + y} + x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2 + 2y^2 + 3xy) - \log_2 (x + y) + x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y = 0 \quad (\text{do có } x + y > 0)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2 + 2y^2 + 3xy) + x^2 + 2y^2 + 3xy = \log_2 (x + y) + x + y \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$, ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên

khoảng $(0; +\infty)$. Do đó $(1) \Leftrightarrow f(x^2 + 2y^2 + 3xy) = f(x + y) \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 + 3xy = x + y$

$$\Leftrightarrow (x + y)(x + 2y - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 - 2y \text{ vì } x + y > 0$$

- Do $-20 \leq x \leq 20$ suy ra $\frac{-19}{2} \leq y \leq \frac{21}{2}$.
- Do $x = 1 - 2y \Leftrightarrow x + y = 1 - y > 0$ nên $y < 1$.
- Do $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{-9; -8; \dots; 0\}$, với mỗi giá trị y cho ta 1 giá trị x thỏa đề.

Vậy có 10 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa đề.

Câu 56. Có bao nhiêu bộ $(x; y)$ với x, y nguyên và $1 \leq x, y \leq 2020$ thỏa mãn

$$(xy + 2x + 4y + 8) \log_3 \left(\frac{2y}{y+2} \right) \leq (2x + 3y - xy - 6) \log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right) ?$$

A. 2017 .

B. 4034 .

C. 2 .

D. 2017.2020 .

Lời giải

Từ giả thiết kết hợp với điều kiện của bất phương trình ta có $1 \leq y \leq 2020; 4 \leq x \leq 2020; x, y \in \mathbb{Z} \quad (1)$.

$$\text{Ta có } (xy + 2x + 4y + 8) \log_3 \left(\frac{2y}{y+2} \right) \leq (2x + 3y - xy - 6) \log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right)$$

$$\Leftrightarrow (x+4)(y+2) \log_3 \left(\frac{2y}{y+2} \right) + (x-3)(y-2) \log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right) \leq 0 \quad (*).$$

Xét hàm số $f(x) = \log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right) = \log_2 \left(2 + \frac{7}{x-3} \right) > 0, \forall x \in [4; 2020]$ (2).

- Với $y = 1$ thay vào (*) ta được

$$3(x+4)\log_3 \left(\frac{2}{3} \right) - (x-3)\log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right) \leq 0$$

luôn đúng $\forall x \in [4; 2020]$ do (1) và (2). Suy ra có 2017 bộ $(x; y)$.

- Với $y = 2$ thay vào (*) ta thấy luôn đúng $\forall x \in [4; 2020]$. Suy ra có 2017 bộ $(x; y)$.
- Với $3 \leq y \leq 2020 \Rightarrow y - 2 > 0$. Xét hàm số

$$g(y) = \log_3 \left(\frac{2y}{y+2} \right) = \log_3 \left(\frac{y+y}{y+2} \right) > \log_3 \left(\frac{y+2}{y+2} \right) = 0, \forall y \geq 3 \quad (3).$$

Suy ra (*) vô nghiệm.

Vậy có tất cả 4034 bộ số $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu.

Cách 2. Bất phương trình tương đương

$$(xy + 2x + 4y + 8)\log_3 \left(\frac{2y}{y+2} \right) \leq (x-3)(2-y)\log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right) \quad (1)$$

Từ (1) suy ra $x \geq 4$.

Nếu $y \geq 3$ ta có $(xy + 2x + 4y + 8)\log_3 \left(\frac{2y}{y+2} \right) \geq 0$, $(x-3)(2-y)\log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right) < 0$.

Suy ra (1) vô nghiệm, suy ra $y = 2, x \geq 4$ thỏa (1) và $y = 1, x \geq 4$ thỏa (1).

Vậy có $2017 + 2017 = 4034$ bộ $(x; y)$ nguyên thỏa bài toán.

Câu 57. Có bao nhiêu số hữu tỉ a thuộc $[-1; 1]$ sao cho tồn tại số thực b thỏa mãn

$$\log_2 (1 - a^2 - b^2 + 2b) = \frac{2^a}{4^a + 1} + \frac{4^a}{2^a + 1} + \frac{1}{2^a + 4^a} - \frac{1}{2} ?$$

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải

Ta có $\log_2 (1 - a^2 - b^2 + 2b) = \log_2 (2 - a^2 - (b-1)^2) \leq \log_2 2 = 1$ (1).

Xét hàm $f(a) = \frac{2^a}{4^a + 1} + \frac{4^a}{2^a + 1} + \frac{1}{2^a + 4^a} - \frac{1}{2}$ với $a \in [-1; 1]$.

Đặt $2^a = t$, với $a \in [-1; 1]$ ta có $t \in \left[\frac{1}{2}; 2 \right]$.

Khi đó, ta được $g(t) = \frac{t}{t^2 + 1} + \frac{t^2}{t + 1} + \frac{1}{t + t^2} - \frac{1}{2}$ với $t \in \left[\frac{1}{2}; 2 \right]$.

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{-t^2 + 1}{(t^2 + 1)^2} + \frac{t^2 + 2t}{(t + 1)^2} - \frac{2t + 1}{(t + t^2)^2} = \frac{-t^2 + 1}{(t^2 + 1)^2} + \frac{t^4 + 2t^3 - 2t - 1}{t^2 \cdot (t + 1)^2} = \frac{-t^2 + 1}{(t^2 + 1)^2} + \frac{(t^2 - 1)(t^2 + 2t + 1)}{t^2 \cdot (t + 1)^2} \\ &= (t^2 - 1) \left[\frac{-1}{(t^2 + 1)^2} + \frac{1}{t^2} \right] = (t^2 - 1) \left[\frac{t^4 + t^2 + 1}{t^2 \cdot (t^2 + 1)^2} \right]. \end{aligned}$$

Ta có $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \in \left[\frac{1}{2}; 2 \right] \\ t = -1 \notin \left[\frac{1}{2}; 2 \right] \end{cases}; g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{5}; g(1) = 1; g(2) = \frac{7}{5}.$

Do đó, $\min_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} g(t) = 1$ hay $f(a) \geq 1, \forall a \in [-1; 1]$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned} \log_2(1 - a^2 - b^2 + 2b) &= \frac{2^a}{4^a + 1} + \frac{4^a}{2^a + 1} + \frac{1}{2^a + 4^a} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(1 - a^2 - b^2 + 2b) = 1 \\ f(a) = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0; b = 1 \\ 2^a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0; b = 1. \end{aligned}$$

Vậy có một giá trị của a thỏa mãn.

Câu 58. Cho phương trình $\log_5(2x + 5y + 1) - \log_5 21 = 1 - \frac{1}{\log_{2^{|x|} + y + x^2 + x} 5}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa phương trình trên.

A. 2. B. 3. C. 4. D. 1

Lời giải

$$\begin{aligned} \log_5(2x + 5y + 1) - \log_5 21 &= 1 - \frac{1}{\log_{2^{|x|} + y + x^2 + x} 5} \\ \Leftrightarrow \log_5(2x + 5y + 1) - \log_5 21 &= 1 - \log_5(2^{|x|} + y + x^2 + x) \\ \Leftrightarrow \log_5(2x + 5y + 1) + \log_5(2^{|x|} + y + x^2 + x) &= \log_5 21 + 1 \\ \Leftrightarrow \log_5(2x + 5y + 1)(2^{|x|} + y + x^2 + x) &= \log_5 105 \\ \Leftrightarrow (2x + 5y + 1)(2^{|x|} + y + x^2 + x) &= 105 \quad (*) \end{aligned}$$

Do 105 lẻ $\Rightarrow 2x + 5y + 1$ lẻ $\Rightarrow 5y$ chẵn $\Rightarrow y$ chẵn, mặt khác $2^{|x|} + y + x^2 + x = 2^{|x|} + y + x(x + 1)$ lẻ.

Mà y và $x(x + 1)$ chẵn nên $2^{|x|}$ lẻ $\Rightarrow 2^{|x|} = 1 \Rightarrow x = 0$.

$$\text{Thế } x = 0 \text{ vào } (*) \text{ ta được } (5y + 1)(y + 1) = 105 \Leftrightarrow 5y^2 + 6y - 104 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ y = -\frac{26}{5} \end{cases}$$

Do x, y nguyên dương nên $(x; y) = (0; 4)$.

Vậy có một cặp số $(x; y)$ thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 59. Có tất cả bao nhiêu cặp số $(a; b)$ với a, b là các số nguyên dương thỏa mãn

$$\log_3(a + b) + (a + b)^3 = 3(a^2 + b^2) + 3ab(a + b - 1) + 1.$$

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. vô số.

Lời giải

Cách 1.

Với a, b là các số nguyên dương, ta có

$$\begin{aligned} \log_3(a + b) + (a + b)^3 &= 3(a^2 + b^2) + 3ab(a + b - 1) + 1 \\ \Leftrightarrow \log_3 \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2 - ab} + a^3 + b^3 + 3ab(a + b) &= 3(a^2 + b^2 - ab) + 3ab(a + b) + 1 \\ \Leftrightarrow \log_3(a^3 + b^3) + a^3 + b^3 &= \log_3[3(a^2 + b^2 - ab)] + 3(a^2 + b^2 - ab) \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ trên $(0; +\infty)$. Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Khi đó, phương trình (1) trở thành

$$\begin{aligned} f(a^3 + b^3) &= f[3(a^2 + b^2 - ab)] \Leftrightarrow a^3 + b^3 = 3(a^2 + b^2 - ab) \\ \Leftrightarrow (a^2 + b^2 - ab)(a + b - 3) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - ab = 0 (*) \\ a + b - 3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Do $a, b \in \mathbb{N}^*$ nên phương trình (*) vô nghiệm. Suy ra $a + b = 3$.

$$\text{Mà } a, b \text{ là các số nguyên dương nên } \begin{cases} 0 < a < 3 \\ 0 < b < 3 \\ a + b = 3 \\ a, b \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Vậy có hai cặp số $(a; b)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2. Với a, b là các số nguyên dương, ta có

$$\begin{aligned} \log_3(a + b) + (a + b)^3 &= 3(a^2 + b^2) + 3ab(a + b - 1) + 1 \\ \Leftrightarrow \log_3 \frac{a + b}{3} + a^3 + b^3 + 3ab(a + b) &= 3(a^2 + b^2 - ab) + 3ab(a + b) \\ \Leftrightarrow \log_3 \frac{a + b}{3} &= (a^2 + b^2 - ab)(3 - a - b)(1) \end{aligned}$$

- **Trường hợp 1.** $a + b = 2$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow \log_3 \frac{2}{3} = 4 - 3ab$ loại do $a, b \in \mathbb{N}^*$.
- **Trường hợp 2.** $a + b > 3 \Rightarrow \log_3 \frac{a + b}{3} > 0$ và $(a^2 + b^2 - ab)(3 - a - b) < 0, \forall a, b \in \mathbb{N}^*$, nên (1) không xảy ra.
- **Trường hợp 3.** $a + b = 3$, khi đó (1) thỏa mãn.

$$\text{Mà } a, b \text{ là các số nguyên dương nên } \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ a = 1 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Vậy có hai cặp số $(a; b)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 60. Có bao nhiêu số nguyên x thuộc đoạn $[1; 2020]$ sao cho tồn tại số nguyên dương y thỏa mãn $10^{(4x^2 - 3y + 1)\log x} = \frac{3y + 1}{4}$?

A. 2020.

B. 1347.

C. 673.

D. Vô số.

Lời giải

$$10^{(4x^2 - 3y + 1)\log x} = \frac{3y + 1}{4} \Leftrightarrow (4x^2 - 3y + 1)\log x = \log\left(\frac{3y + 1}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - (3y + 1) + 2)\log x = \log(3y + 1) - \log 4$$

$$\Leftrightarrow [4x^2 - (3y + 1)]\log x + 2\log x + \log 4 - \log(3y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow [4x^2 - (3y + 1)]\log x + [\log(4x^2) - \log(3y + 1)] = 0$$

Nếu $4x^2 > 3y + 1$ thì $\log(4x^2) > \log(3y + 1)$. Suy ra $VT(1) > 0$

Nếu $4x^2 < 3y + 1$ thì $\log(4x^2) < \log(3y + 1)$. Suy ra $VT(1) < 0$

Do đó, từ (1) suy ra: $4x^2 = 3y + 1 \Leftrightarrow y = \frac{4x^2 - 1}{3} \Leftrightarrow y = x^2 + \frac{(x-1)(x+1)}{3}$ (2)

Với $x = 3k + 1, x = 3k + 2, k \in \mathbb{N}$ từ (2) dễ dàng thấy y là số nguyên dương.

Xét y không phải là số nguyên dương. Từ (2), suy ra x chia hết cho 3.

Đặt $x = 3k, k \in \mathbb{N}^*$. Vì $x \in \mathbb{Z} \cap [1; 2020]$ nên $1 \leq 3k \leq 2020, k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 1 \leq k \leq 673, k \in \mathbb{N}^*$.

Do đó, có 673 số nguyên x thuộc đoạn $[1; 2020]$ mà y không phải là số nguyên dương.

Vậy có $2020 - 673 = 1347$ số nguyên x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 61. Có bao nhiêu cặp số nguyên (a, b) thỏa mãn đồng thời các điều kiện $0 < a^2 + b^2 \leq 16$ và

$$|a| + |b| > \log_2 \frac{16|b| + 64}{|a| + 2|b|}?$$

A. 10.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Lời giải

Từ điều kiện $0 < a^2 + b^2 \leq 16$, suy ra a, b không đồng thời bằng 0 nên $|a| + 2|b| > 0$. Ta có

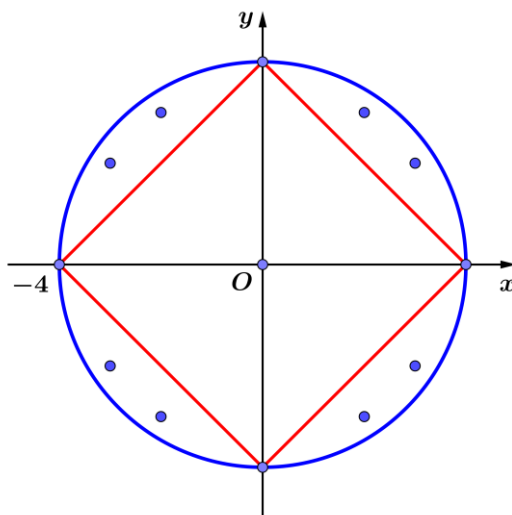
$$|a| + |b| > \log_2 \frac{16|b| + 64}{|a| + 2|b|} \Leftrightarrow |a| + |b| > 4 + \log_2(|b| + 4) - \log_2(|a| + 2|b|)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(|a| + 2|b|) + (|a| + 2|b|) > \log_2(|b| + 4) + (|b| + 4) \Leftrightarrow f(|a| + 2|b|) > f(|b| + 4),$$

với $f(t) = t + \log_2 t$ là hàm đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Do đó, $f(|a| + 2|b|) > f(|b| + 4) \Leftrightarrow |a| + 2|b| > |b| + 4 \Leftrightarrow |a| + |b| > 4$.

Kết hợp với điều kiện $0 < a^2 + b^2 \leq 16, a, b \in \mathbb{Z}$ nên nghiệm nguyên (a, b) là các điểm nguyên trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) nằm trong hình tròn tâm $O(0; 0)$, bán kính bằng 4 (bỏ đi tâm O) và nằm ngoài hình vuông $|a| + |b| = 4$.



Đếm trực tiếp trên hình, ta có 8 điểm nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy có 8 cặp số nguyên (a, b) .

Câu 62. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số nguyên y thỏa mãn

$$\log_2 \left(\frac{x-3}{y} \right) - \log_2 (4x^2 + 4x + 8) = \frac{y(x^2 + x) + 3 - x}{y}?$$

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. Vô số.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} \frac{x-3}{y} > 0 \\ y \in \mathbb{Z} \end{cases}$. Ta có

$$\begin{aligned} \log_2 \left(\frac{x-3}{y} \right) - \log_2 (4x^2 + 4x + 8) &= \frac{y(x^2 + x) + 3 - x}{y} \\ \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{x-3}{y} \right) - \log_2 (x^2 + x + 2) - 2 &= x^2 + x - \frac{x-3}{y} \\ \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{x-3}{y} \right) + \frac{x-3}{y} &= \log_2 (x^2 + x + 2) + (x^2 + x + 2) \Leftrightarrow f \left(\frac{x-3}{y} \right) = f(x^2 + x + 2), \end{aligned}$$

Với với $f(t) = t + \log_2 t$ là hàm đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Do đó

$$f \left(\frac{x-3}{y} \right) = f(x^2 + x + 2) \Leftrightarrow \frac{x-3}{y} = x^2 + x + 2 \Leftrightarrow y = \frac{x-3}{x^2 + x + 2}.$$

Nhận xét. Nếu tồn tại cặp số $(x; y)$ thì điều kiện $\frac{x-3}{y} > 0$ luôn thỏa mãn.

Cách 1. Xét hàm $y = \frac{x-3}{x^2 + x + 2}$ với $x \neq 3$, ta có

$$y' = \frac{-x^2 + 6x + 5}{(x^2 + x + 2)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x \in \{3 - \sqrt{14}; 3 + \sqrt{14}\}$$

Lập bảng biến thiên, suy ra $y \in \left[\frac{-7 - 2\sqrt{14}}{7}; \frac{-7 + 2\sqrt{14}}{7} \right] \setminus \{0\}$.

Mà $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{-2; -1\}$. Mặt khác, dựa vào bảng biến thiên, ứng với mỗi giá trị $y \in \{-2; -1\}$ ta có 2 nghiệm x .

Vậy có 4 giá trị x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2. Xét phương trình $yx^2 + (y-1)x + 2y + 3 = 0$ (*)

Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta = (y-1)^2 - 4y(2y+3) \geq 0$

$$\Leftrightarrow -7y^2 - 14y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-7 - 2\sqrt{14}}{7} \leq y \leq \frac{-7 + 2\sqrt{14}}{7}.$$

Vì $y \in \mathbb{Z}, y \neq 0 \Rightarrow y \in \{-2; -1\}$.

- Với $y = -2$, thay vào (*) suy ra $x \in \left\{ -1; \frac{-1}{2} \right\}$.
- Với $y = -1$, thay vào (*) suy ra $x \in \{-1 + \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2}\}$.

Vậy có 4 giá trị x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 63. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{\log x} + \sqrt{\log y} + \log \sqrt{x} + \log \sqrt{y} = 100$$

và $\sqrt{\log x}, \sqrt{\log y}, \log \sqrt{x}, \log \sqrt{y}$ là các số nguyên dương.

A. 10^{164} .

B. 10^{144} .

C. 10^{100} .

D. 10^{200} .

Lời giải

Đặt $\begin{cases} \sqrt{\log x} = a \\ \sqrt{\log y} = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x = a^2 \\ \log y = b^2 \end{cases}$. Ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{\log x} + \sqrt{\log y} + \log \sqrt{x} + \log \sqrt{y} &= \sqrt{\log x} + \sqrt{\log y} + \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{2} \log y = 100 \\ \Leftrightarrow a + b + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 &= 100 \Leftrightarrow (a+1)^2 + (b+1)^2 = 202 \Leftrightarrow (a+1)^2 + (b+1)^2 = 9^2 + 11^2\end{aligned}$$

Mà $a+1, b+1$ là các số nguyên dương nên suy ra $\begin{cases} a+1=9 \\ b+1=11 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a+1=11 \\ b+1=9 \end{cases}$.

Trường hợp 1.

$$\begin{cases} a+1=9 \\ b+1=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x=64 \\ \log y=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10^{64} \\ y=10^{100} \end{cases} \Rightarrow xy=10^{64+100}=10^{164}$$

Trường hợp 2.

$$\begin{cases} a+1=11 \\ b+1=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=10 \\ b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x=100 \\ \log y=64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10^{100} \\ y=10^{64} \end{cases} \Rightarrow xy=10^{100+64}=10^{164}$$

Vậy $xy=10^{164}$.

Câu 64. Có bao nhiêu cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn điều kiện

$$2^{x^2} \cdot 8^x + x^2(x-y) = 32 \cdot 2^{x(x^2+2)} + 2y - 3x + 5?$$

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}2^{x^2} \cdot 8^x + x^2(x-y) &= 32 \cdot 2^{x(x^2+2)} + 2y - 3x + 5 \Leftrightarrow 2^{x^2+3x} + (x^3+3x) = 2^{(x^2+2)+5} + y(x^2+2) \\ \Leftrightarrow f(x^3+3x) &= f(y(x^2+2)+5),\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Suy ra } x^3 + 3x = y(x^2 + 2) + 5 \Leftrightarrow y = \frac{x^3 + 3x - 5}{x^2 + 2} \Leftrightarrow y = x + \frac{x-5}{x^2+2}.$$

Cách 1. Xét hàm $g(x) = \frac{x-5}{x^2+2}, \forall x \in \mathbb{R}$. Ta có

$$g'(x) = \frac{-x^2 + 10x + 2}{(x^2 + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow x \in \{5 - 3\sqrt{3}; 5 + 3\sqrt{3}\}.$$

$$\text{Lập bảng biến thiên ta được } g(x) \in \left[\frac{-5 - 3\sqrt{3}}{4}; \frac{-5 + 3\sqrt{3}}{4} \right].$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $g(x) \in \mathbb{Z}$. Suy ra $g(x) \in \{-2; -1; 0\}$. Thử lại

- Với $g(x) = -2 \Rightarrow \frac{x-5}{x^2+2} = -2 \Rightarrow x = -1, y = -3$.
- Với $g(x) = -1 \Rightarrow \frac{x-5}{x^2+2} = -1 \Rightarrow x \in \left\{ \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \right\}$ (loại).
- Với $g(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-5}{x^2+2} = 0 \Rightarrow x = 5, y = 5$.

Vậy có 2 cặp số nguyên (x, y) là $(-1; -3), (5; 5)$.

Cách 2.

Ta có $y = x + \frac{x-5}{x^2+2}$. Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $\frac{x-5}{x^2+2} \in \mathbb{Z}$. Suy ra $\frac{x-5}{x^2+2} = k \in \mathbb{Z}$.

Ta có $\frac{x-5}{x^2+2} = k \Leftrightarrow kx^2 - x + 2k + 5 = 0$ (*).

- Với $k = 0 \Rightarrow x = 5; y = 5$ (nhận)
- Với $k \neq 0$. Khi đó, (*) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta = 1 - 4k(2k + 5) \geq 0 \Leftrightarrow k \in \left[\frac{-5 - 3\sqrt{3}}{4}; \frac{-5 + 3\sqrt{3}}{4} \right].$$

Vì $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ nên $k \in \{-2; -1\}$. Thử lại ta nhận $k = -2, x = -1, y = -3$.

Vậy có 2 cặp số nguyên $(x; y)$ là $(-1; -3), (5; 5)$.

Cách 3. Ta có $y = x + \frac{x-5}{x^2+2}$. Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $\frac{x-5}{x^2+2} \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} (x-5):(x^2+2) &\Rightarrow (x-5)(x+5):(x^2+2) \Rightarrow (x^2-25):(x^2+2) \\ &\Rightarrow (x^2+2-27):(x^2+2) \Rightarrow 27:(x^2+2) \\ &\Rightarrow (x^2+2) \in \{1; 3; 9; 27\} \Rightarrow x^2 \in \{1; 25\} \Rightarrow x \in \{-1; 1; -5; 5\}. \end{aligned}$$

Thử lại

- Với $x = -1 \Rightarrow y = -3$ (nhận).
- Với $x = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$ (loại).
- Với $x = -5 \Rightarrow y = -\frac{145}{27}$ (loại).
- Với $x = 5 \Rightarrow y = 5$ (nhận).

Vậy có 2 cặp số nguyên $(x; y)$ là $(-1; -3), (5; 5)$.

Câu 65. Có bao nhiêu cặp số nguyên không âm $(a; b)$ thỏa mãn điều kiện

$$2^{a^2+b^2} + \log_2 \frac{a^2+b^2}{|a|+|b|} \leq 4^{|a|+|b|} + 1?$$

A. 25.

B. 24.

C. 36.

D. 35.

Lời giải

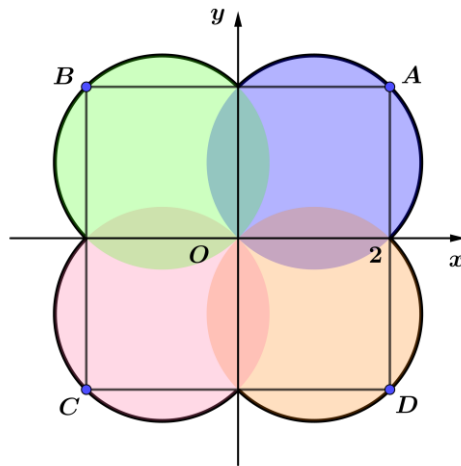
Điều kiện $\frac{a^2+b^2}{|a|+|b|} > 0 \Leftrightarrow a, b$ không đồng thời bằng 0. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} 2^{a^2+b^2} + \log_2 \frac{a^2+b^2}{|a|+|b|} \leq 4^{|a|+|b|} + 1 &\Leftrightarrow 2^{a^2+b^2} + \log_2 (a^2+b^2) \leq 4^{|a|+|b|} + \log_2 (|a|+|b|) + 1 \\ &\Leftrightarrow 2^{a^2+b^2} + \log_2 (a^2+b^2) \leq 2^{2(|a|+|b|)} + \log_2 [2(|a|+|b|)] \Leftrightarrow f(a^2+b^2) \leq f[2(|a|+|b|)], \end{aligned}$$

Với $f(t) = 2^t + \log_2 t$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Do đó, $f(a^2+b^2) \leq f[2(|a|+|b|)] \Leftrightarrow a^2+b^2 \leq 2(|a|+|b|) \Leftrightarrow (|a|-1)^2 + (|b|-1)^2 \leq 2$.

Kết hợp với điều kiện $a, b \in \mathbb{Z}$ và a, b không đồng thời bằng 0 nên nghiệm $(a; b)$ là các điểm nguyên trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) nằm trong hình hoa, kể cả biên, bỏ đi điểm $O(0; 0)$ (hình hoa là hình hợp bởi bốn hình tròn bán kính $\sqrt{2}$ lần lượt có tâm $I_1(1; 1), I_1(1; -1), I_1(-1; 1), I_1(-1; -1)$)



Đếm trực tiếp, ta thấy đó là các điểm nguyên nằm trong hình vuông $ABCD$, kích thước 4×4 , bỏ đi điểm $(0;0)$. Do đó, có $5^2 - 1 = 24$ điểm nguyên.

Vậy có 24 cặp số nguyên $(a;b)$.

Câu 66. Có bao nhiêu cặp số nguyên không âm (x,y) thỏa mãn điều kiện

$$\log \frac{x^2 + y^2 + 11}{6x + 8y + 2} + x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 \leq 0?$$

A. 45.

B. 49.

C. 48.

D. 47.

Lời giải

Ta có

$$\log \frac{x^2 + y^2 + 11}{6x + 8y + 2} + x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 \leq 0$$

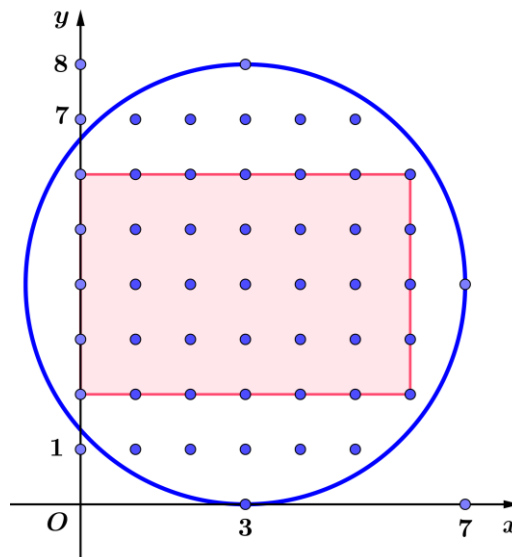
$$\Leftrightarrow \log(x^2 + y^2 + 11) + x^2 + y^2 + 11 \leq \log(6x + 8y + 2) + 6x + 8y + 2 \quad (1)$$

Xét hàm số đặc trưng $f(t) = t + \log t$ với $t > 0$. Ta có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 10} > 0, \forall t > 0 \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng

biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Do đó $(1) \Leftrightarrow f(x^2 + y^2 + 11) \leq f(6x + 8y + 2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 11 \leq 6x + 8y + 2$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 \leq 16.$$

Vì x, y là số nguyên không âm nên ta coi cặp số (x, y) là các điểm nguyên (x, y) nằm trong hình tròn (C) có tâm $I(3;4), R=4$ ở góc phần tư thứ nhất.



Vậy có $5 \times 7 + 5 \times 2 + 1 + 1 + 1 = 48$ cặp số nguyên (x, y) .

Chú ý. Ta cũng có thể tính trực tiếp như sau

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 \leq 16 \quad (*) \Rightarrow (x-3)^2 \leq 16 \Rightarrow -1 \leq x \leq 7.$$

Vì x là số nguyên không âm nên $x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Thay vào $(*)$ ta cũng có được 48 cặp số nguyên (x, y) .

Câu 67. Có bao nhiêu cặp số thực $(x; y)$; $x, y > \frac{1}{2}$ thỏa mãn $\log_3\left(\frac{10x}{x+2}\right) = \log_2\left(\frac{2y}{2y-1}\right) \in \mathbb{Z}$

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Đặt $\log_3\left(\frac{10x}{x+2}\right) = \log_2\left(\frac{2y}{2y-1}\right) = t \quad (t \in \mathbb{Z})$. Ta được

$$\begin{cases} \frac{2y}{2y-1} = 2^t, \forall y > \frac{1}{2} \\ \frac{10x}{x+2} = 3^t, \forall x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^t = 1 + \frac{1}{2y-1} > 1, \forall y > \frac{1}{2} \\ 3^t = 10 - \frac{20}{x+2} < 10, \forall x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} 3^t < 10 \\ 2^t > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < \log_3 10 \\ t > \log_2 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < 2,095 \\ t > 0 \end{cases}$. Do $t \in \mathbb{Z}$ nên $t \in \{1; 2\}$

- Nếu $t = 1 \rightarrow \begin{cases} \frac{2y}{2y-1} = 2 \\ \frac{10x}{x+2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = \frac{6}{7} \end{cases}$
- Nếu $t = 2 \rightarrow \begin{cases} \frac{2y}{2y-1} = 4 \\ \frac{10x}{x+2} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3} \\ x = 18 \end{cases}$.

Vậy có 2 cặp $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 68. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a; b)$ thỏa mãn $4.2^{(a+b)^2} - 8^{ab-a-b} + a^2 + b^2 + 3(a+b) - ab + 2 = 0$?

A. 12.

B. 10.

C. 14.

D. 9.

Lời giải

Ta có $4.2^{(a+b)^2} - 8^{ab-a-b} + a^2 + b^2 + 3(a+b) - ab + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2^{(a+b)^2+2} + (a+b)^2 + 2 = 2^{3ab-3a-3b} + 3ab - 3a - 3b \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ trên $\mathbb{R}$, có $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$, nên phương trình

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow f((a+b)^2 + 2) = f(3ab - 3a - 3b) \Leftrightarrow (a+b)^2 + 2 = 3ab - 3a - 3b \\ &\Leftrightarrow a^2 - (b-3)a + b^2 + 3b + 2 = 0 \quad (2). \end{aligned}$$

Xem (2) là phương trình bậc hai biến a và b là tham số. Tồn tại cặp số thực $(a; b)$ thỏa (2) khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow (b-3)^2 - 4(b^2 + 3b + 2) \geq 0 \Leftrightarrow -3b^2 - 18b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-9-2\sqrt{21}}{3} \leq b \leq \frac{-9+2\sqrt{21}}{3}$$

Do b nguyên nên $b \in \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$.

- Với $b = -6$: phương trình (2) thành $a^2 + 9a + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ a = -5 \end{cases}$.
- Với $b = -5$: phương trình (2) thành $a^2 + 8a + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = -6 \end{cases}$.
- Với $b = -4$: phương trình (2) thành $a^2 + 7a + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = -6 \end{cases}$.
- Với $b = -3$: phương trình (2) thành $a^2 + 6a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -3 \pm \sqrt{7}$.
- Với $b = -2$ phương trình (2) thành $a^2 + 5a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -5 \end{cases}$.
- Với $b = -1$ phương trình (2) thành $a^2 + 4a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -4 \end{cases}$.
- Với $b = 0$ phương trình (2) thành $a^2 + 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = -2 \end{cases}$.

Vậy có 12 cặp số nguyên (a, b) thỏa yêu cầu bài toán.

Tài liệu tham khảo

- [1]. Đề thi thử các trường trên cả nước.
- [2]. Tách các câu hỏi từ dự án của Strong Team Toán VD – VDC, nhóm Toán VD -VDC .
- [3]. Phương trình nghiệm nguyên liên quan tới mũ – logarit, Trần Trọng Trị, nhóm giáo viên tiếp sức Chinh phục kì thi THPT Quốc Gia 2020 – VTV7.
- [4]. Một số đề thi American Mathematics Competitions.

Hết