ĐOÀN QUỲNH (Chủ biên) - HẠ VŨ ANH - PHẠM KHẮC BAN
VĂN NHƯ CƯƠNG - VŨ ĐÌNH HÒA

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN
BÀI TẬP HÌNH HỌC
12

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn *Tài liệu chuyên Toán - Bài tập Hình học 12* (SBT) này được viết kèm với cuốn *Tài liệu chuyên Toán – Hình học 12* (SLT) nằm trong bộ sách Tài liệu chuyên Toán (TLCT) lớp 12, tiếp nối bộ sách TLCT lớp 10 và 11. Chúng được biên soạn nhằm phục vụ việc dạy và học ở hệ chuyên Toán thể hiện được tinh thần của chương trình đã được Hội đồng chương trình duyệt, khá gần với chương trình và sách giáo khoa Toán nâng cao, để giúp giáo viên trong việc dạy toán ở các trường chuyên, giúp học sinh các lớp chuyên toán THPT có tài liệu học tập, giúp học sinh khá, giỏi ham thích học toán ở các lớp đại trà có tài liệu tự bồi dưỡng thêm.

Bộ TLCT 12 gồm 4 cuốn :

- *Tài liệu chuyên Toán – Giải tích 12*
- *Tài liệu chuyên Toán – Hình học 12*
- *Tài liệu chuyên Toán – Bài tập Giải tích 12*
- *Tài liệu chuyên Toán – Bài tập Hình học 12.*

Chúng tôi đã mời được nhiều thầy dạy ở các trường chuyên, lớp chuyên (dạy các lớp bồi dưỡng thi toán quốc tế cũng như trong nước, dạy các khối chuyên ở các trường đại học, ...) tham gia biên soạn để tài liệu sát với thực tiễn giảng dạy hệ chuyên ở nước ta, đồng thời giới thiệu được phần nào đôi nét giảng dạy ở hệ chuyên Toán của các trường đó.

Các tác giả viết cuốn SBT này cũng là các tác giả đã viết SLT :

- Thầy ***Văn Như Cương*** (Trường Phổ thông dân lập Lương Thế Vinh, Hà Nội) : Chương 1 (*Khối đa diện*)
- Thầy ***Phạm Khắc Ban*** (Trường Đại học Sư Phạm Hà Nội) : Chương 2 (*Mặt cầu, mặt trụ, mặt nón*)
- Thầy ***Hạ Vũ Anh*** (Trường THPT chuyên Vĩnh Phúc) : Chương 3 (*Phương pháp tọa độ trong không gian*)
- Thầy ***Vũ Đình Hòa*** (Trường Đại học Sư Phạm Hà Nội) : Chuyên đề 1 (*Một số yếu tố của Hình học tổ hợp*) và chuyên đề 2 (*Lý thuyết đồ thị*).
- Thầy ***Đoàn Quỳnh*** (Trường Đại học Sư Phạm Hà Nội) : Chuyên đề 3 (*Số phức với hình học phẳng*).

Hai cuốn SBT và SLT Hình học 12 gắn kết mật thiết với nhau, nhưng độc giả vẫn có thể sử dụng cuốn này mà không có cuốn kia. Ngoài các bài tập có trong SLT, cuốn SBT này còn có thêm nhiều bài tập bổ sung. Hệ thống bài tập rất đa dạng, phong phú và được các tác giả lựa chọn cẩn thận, có nhiều mức độ từ dễ đến khó, có nhiều bài thi học sinh giỏi cấp khu vực, quốc gia và quốc tế. Mỗi bài tập đều có lời giải chi tiết hoặc hướng dẫn giải, đôi khi còn có thêm những lời bình thú vị và bổ ích.

Lưu ý khi sử dụng SBT này : Bài tập trong SBT được đánh số như trong SLT, chẳng hạn bài tập 15, chương III trong SBT cũng là bài tập 15, chương III trong SLT ; các bài tập bổ sung được đánh số tiếp theo. Khi nói xem VD3, §5 hoặc mục 3, §5 có nghĩa là xem ví dụ 3, §5 hoặc xem mục 3, §5 của cùng chương trong SLT ; xem bài tập 15 (mà không có chú thích gì thêm) thì có nghĩa là xem bài tập 15 cùng chương trong SBT.

Các tác giả cùng Chủ biên và Biên tập viên đã rất cố gắng phối hợp biên soạn và biên tập bộ Tài liệu chuyên Toán này, tuy nhiên, chúng tôi biết bộ sách vẫn có thể còn nhiều thiếu sót. Chúng tôi mong độc giả lượng thứ cho các điều đó và hy vọng các thầy cô và các em học sinh trong quá trình dạy, học, giải bài tập theo tài liệu này đóng góp ý kiến cho chúng tôi để lần tái bản sau, sách phục vụ được tốt hơn. Chắc chắn rằng đối với học sinh, cách học hay nhất vẫn là tự giải bài tập rồi đối chiếu với lời giải nêu ra trong tài liệu. Nhiều học sinh, nhất là các em học sinh giỏi, có thể có những lời giải hay hơn, ngắn gọn hơn lời giải đã cho, tìm được cả đề toán hay hơn, tổng quát hơn,... Các góp ý xin gửi về :

Ban Toán, Công ty cổ phần Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội,

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 187B, Giảng Võ, Hà Nội.

Hà Nội, tháng 11 năm 2011

Chủ biên

Đoàn Quỳnh

PHẦN A. ĐỀ BÀI

CHƯƠNG I. KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH CỦA CHÚNG

§1. HÌNH ĐA DIỆN VÀ KHỐI ĐA DIỆN

1. Một hình $\mathscr{H}$ gồm k tam giác sao cho :

i) Bất kì hai tam giác nào cũng có đúng một đỉnh chung.

ii) Mỗi đỉnh của tam giác là đỉnh chung của p tam giác.

Hãy mô tả hình $\mathscr{H}$.

2. Một hình đa diện có 6 mặt là 6 tứ giác. Tìm số cạnh và số đỉnh của nó. Hãy chỉ ra một hình đa diện như thế.

3. Có hay không các hình đa diện có 6 cạnh, 7 cạnh, 8 cạnh, 9 cạnh ?

4. Hãy mô tả hình đa diện $\mathscr{H}$ có 5 đỉnh.

5. Chứng minh rằng :

a) Hình chóp là hình đa diện lồi khi và chỉ khi đáy là đa giác lồi.

b) Hình lăng trụ là hình đa diện lồi khi và chỉ khi đáy là đa giác lồi.

6. Hãy chỉ ra một hình đa diện không lồi và có 6 mặt đều là những tam giác cân.

7. Hãy chỉ ra một hình đa diện có 6 mặt là 6 tam giác đều.

8. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Hãy mô tả hình đa diện lồi $\mathscr{H}$ có đỉnh là trung điểm các cạnh của hình lập phương đó.

9. Chứng minh rằng nếu khối đa diện lồi $\overline{\mathscr{H}}$ được xác định bởi hình đa diện lồi $\mathscr{H}$ thì $\overline{\mathscr{H}} = \bigcap_{i=1}^{m} \alpha_i^+$.

10. Cho khối đa diện lồi $\overline{\mathscr{H}}$ xác định bởi hình đa diện $\mathscr{H}$ và α là một mặt phẳng nào đó. Chứng minh rằng $\overline{\mathscr{H}} \cap \alpha$ là một *tập lồi* (nghĩa là với hai điểm bất kì A, B thuộc $\overline{\mathscr{H}} \cap \alpha$, đoạn thẳng $AB \subset \overline{\mathscr{H}} \cap \alpha$.

11. Gọi $\mathscr{H}^o$ là phần trong của hình đa diện lồi $\mathscr{H}$, và M_0 là điểm bất kì của $\mathscr{H}^o$. Chứng minh rằng có số R sao cho với mọi điểm M mà $M_0M < R$ thì điểm $M \in \mathscr{H}^o$.

12. Gọi $\mathcal{H}^*$ là phần ngoài của hình đa diện lồi $\mathcal{H}$, và N_0 là điểm bất kì của $\mathcal{H}^*$. Chứng minh rằng có số R sao cho với mọi điểm N mà $N_0N < R$ thì điểm $N \in \mathcal{H}^*$.

13. Cho tứ diện $OABC$. Với mọi điểm M trong không gian, có duy nhất bộ ba số (x_1, x_2, x_3) sao cho $\overrightarrow{OM} = x_1\overrightarrow{OA} + x_2\overrightarrow{OB} + x_3\overrightarrow{OC}$. Khi đó ta viết $M(x_1, x_2, x_3)$.

a) Tìm điều kiện của x_1, x_2, x_3 để :

i) Điểm M là điểm trong của tứ diện $OABC$.

ii) Điểm M thuộc khối tứ diện $OABC$.

b) Xét tập hợp $X = \{M(x_1, x_2, x_3) \mid |x_1| + |x_2| + |x_3| \le 1\}$. Chứng tỏ X là một khối đa diện, xác định hình đa diện $\mathcal{H}$ xác định ra khối đa diện X.

14. Chứng minh rằng với số chẵn $2n$ (n là số nguyên lớn hơn 1), luôn luôn có khối đa diện $\mathcal{H}_{2n}$ gồm $2n$ mặt và các mặt là tam giác.

15. Chứng minh rằng với n nguyên dương, luôn có hình đa diện $\mathcal{H}_{5n+1}$ gồm $5n+1$ mặt và các mặt là những hình bình hành.

16. Hãy phân chia một khối hộp thành :

a) Ba khối chóp

b) Năm khối tứ diện.

17. a) Chứng minh rằng mọi khối đa diện lồi phải có ít nhất một mặt là tam giác hoặc ít nhất một đỉnh là đỉnh của góc tam diện.

b) Hãy chỉ ra một khối đa diện không có mặt tam giác và cũng không có đỉnh nào là đỉnh của góc tam diện.

18. Hãy mô tả hình đa diện lồi $\mathcal{H}$ có 6 mặt là 6 tam giác.

19. Có hay không một hình đa diện lồi có 7 mặt là 7 tứ giác ?

20. Chứng minh rằng không có khối đa diện lồi nào mà :

a) mọi mặt đều có số cạnh lớn hơn 5

b) mọi góc đa diện đều có số cạnh lớn hơn 5

c) số mặt là số lẻ, và mỗi mặt có số cạnh là số lẻ.

21. Hãy mô tả khối đa diện lồi có 7 đỉnh và 7 mặt.

§2. PHÉP DỜI HÌNH TRONG KHÔNG GIAN

22. Điểm A gọi là *điểm bất động* của phép dời hình f nếu f biến điểm A thành chính nó, tức là $f(A) = A$. Chứng minh rằng nếu phép dời hình f có bốn điểm bất động không đồng phẳng thì f là phép đồng nhất.

23. Cho hai điểm O, A phân biệt và phép dời hình f biến hai điểm O, A lần lượt thành hai điểm O' và A'. Giả sử f biến điểm M thành điểm M'. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA}$ thì $\overrightarrow{O'M'} = k\overrightarrow{O'A'}$.

24. Cho ba điểm không thẳng hàng O, A, B và phép dời hình f biến ba điểm đó lần lượt thành ba điểm O', A', B'. Giả sử f biến điểm M thành điểm M'. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ thì $\overrightarrow{O'M'} = x\overrightarrow{O'A'} + y\overrightarrow{O'B'}$.

25. Cho phép dời hình f. Với mỗi điểm M, gọi $M' = f(M)$ và I là trung điểm đoạn thẳng MM'. Tìm quỹ tích các điểm I trong các trường hợp sau :

a) M thay đổi trên một đường thẳng d cố định.

b) M thay đổi trên một mặt phẳng (α) cố định.

26. Chứng minh rằng :

a) Hợp thành của hai phép đối xứng tâm là một phép tịnh tiến

b) Hợp thành của hai phép đối xứng qua hai mặt phẳng vuông góc với nhau là một phép đối xứng trục

c) Hợp thành của hai phép đối xứng trục với hai trục cắt nhau và vuông góc với nhau là một phép đối xứng trục.

27. Cho phép dời hình f có ba điểm bất động A, B, C không thẳng hàng. Chứng minh rằng

a) Mọi điểm thuộc mp(ABC) cũng là điểm bất động của f

b) f là phép đồng nhất, hoặc là phép đối xứng qua mp(ABC).

28. Cho hai tứ diện $ABCD$ và $A'B'C'D'$ có các cạnh tương ứng bằng nhau : $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$, $AD = A'D'$, $AC = A'C'$, $BD = B'D'$.

Chứng minh rằng có một phép dời hình duy nhất biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm A', B', C', D'.

29. Tìm các mặt phẳng đối xứng của hình tứ diện đều.

30. Tìm trục đối xứng của hình lập phương.

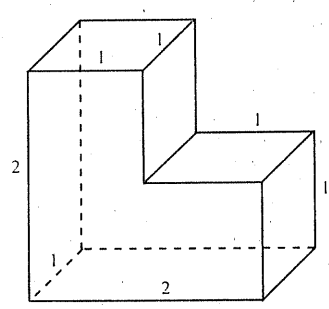
31. Tìm tâm đối xứng, trục đối xứng và mặt phẳng đối xứng của hình bát diện đều.

32. Cho khối đa diện $\mathscr{H}$ có hình chữ "L" tạo thành bằng cách ghép ba khối lập phương đơn vị với nhau (h.1).

Hãy phân chia $\mathscr{H}$ thành :

a) sáu khối đa diện bằng nhau

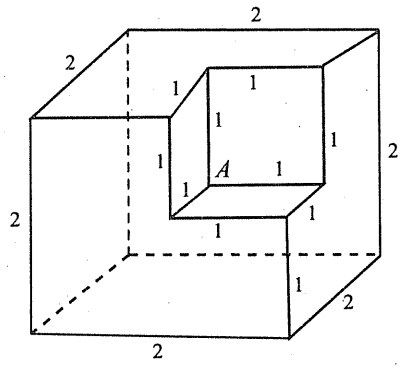
b) bốn khối lăng trụ bằng nhau có chiều cao bằng 1.



Hình 1

33. Một khối đa diện $\mathscr{H}$ có được bằng cách lấy một khối lập phương cạnh bằng 2 bỏ đi khối lập phương đơn vị ở một "góc" của nó (h.2). Như vậy khối $\mathscr{H}$ có thể phân chia thành 7 khối lập phương đơn vị.

Hãy phân chia $\mathscr{H}$ thành 8 khối đa diện bằng nhau.



Hình 2

34. Chứng minh rằng phép vị tự biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đó, biến một mặt phẳng thành mặt phẳng song song hoặc trùng với mặt phẳng đó.

35. Cho hai tứ diện $ABCD$ và $A'B'C'D'$ có các cạnh tương ứng tỉ lệ, tức là

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\frac{D'A'}{DA}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'D'}{BD}=k\,.$$

Chứng minh rằng có một phép đồng dạng duy nhất biến các đỉnh A, B, C, D lần lượt thành các đỉnh A', B', C', D'.

36. Chứng minh rằng mỗi phép đồng dạng đều là hợp thành của một phép vị tự và một phép dời hình.

§3. HÌNH ĐA DIỆN ĐỀU VÀ KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

37. Tính góc nhị diện của đa diện đều loại $\{p,q\}$.

38. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp và nửa nội tiếp của đa diện đều loại $\{p,q\}$.

39. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a và các góc phẳng ở đỉnh A đều bằng 60^0. Chứng minh rằng khối hộp đó có thể phân chia thành hai khối tứ diện đều và một khối bát diện đều.

40. Chứng tỏ rằng :

a) Không thể lấp đầy không gian bằng các khối tứ diện đều cạnh a hoặc bằng các khối bát diện đều cạnh a.

b) Có thể lấp đầy không gian bằng các khối tứ diện đều cạnh a và các khối bát diện đều cạnh a.

41. Chứng minh rằng tâm các mặt của hình bát diện đều là đỉnh của một hình lập phương, và tâm các mặt của một hình lập phương là đỉnh của một hình bát diện đều.

42. Chứng minh rằng tâm các mặt của hình 12 mặt đều là đỉnh của một hình 20 mặt đều, và tâm các mặt của một hình 20 mặt đều là đỉnh của một hình 12 mặt đều.

43. Cho $\mathcal{H}$ là hình đa diện 12 mặt đều. Đường chéo của mỗi mặt của $\mathcal{H}$ gọi là *đường chéo biên* của $\mathcal{H}$, các đường chéo khác gọi là *đường chéo trong*.

a) Tính độ dài các đường chéo biên nếu cạnh của $\mathcal{H}$ bằng a.

b) Chứng tỏ rằng tại mỗi đỉnh A của $\mathcal{H}$ có ba đường chéo biên có chung đỉnh A và đôi một vuông góc với nhau

c) Một hình lập phương gọi là *nội tiếp* $\mathcal{H}$ nếu các đỉnh của hình lập phương đó là đỉnh của $\mathcal{H}$. Hãy chỉ ra một hình lập phương như thế.

d) Có bao nhiêu hình lập phương nội tiếp một hình 12 mặt đều cho trước ?

44. Cho $\mathcal{H}$ là hình đa diện 20 mặt đều có tâm O. Hai đỉnh (hai cạnh, hai mặt) của $\mathcal{H}$ gọi là đối diện nếu chúng đối xứng với nhau qua điểm O. Chứng minh rằng :

a) Nếu MN và $M'N'$ là hai cạnh đối diện của $\mathcal{H}$ thì $MNM'N'$ là hình chữ nhật.

b) 12 đỉnh của $\mathcal{H}$ có thể phân làm ba nhóm, mỗi nhóm có bốn đỉnh là đỉnh của hình chữ nhật và mặt phẳng của ba chữ nhật đó đôi một vuông góc với nhau.

45. Cho hình chóp tứ giác đều $I.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Lấy các điểm M, N, P, Q, R lần lượt nằm trên các cạnh IA, IB, IC, CD và DA sao cho :

$$\frac{MI}{MA}=\frac{NB}{NI}=\frac{PI}{PC}=\frac{QC}{QD}=\frac{RA}{RD}=\tau \text{ với } \tau=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

a) Chứng minh rằng 5 điểm M, N, P, Q, R đồng phẳng và là đỉnh của một ngũ giác đều.

b) Lấy điểm S nằm trên cạnh ID sao cho $\frac{SD}{SI} = \tau$. Chứng minh rằng hình chóp $S.MNPQR$ là hình chóp ngũ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau.

c) Chứng minh rằng trên 12 cạnh của một hình bát diện đều có thể xác định 12 điểm là đỉnh của một hình đa diện 20 mặt đều.

§4. THỂ TÍCH CÁC KHỐI ĐA DIỆN

46. Cho khối đa điện $\mathcal{H}$ có tâm đối xứng O. Chứng minh rằng : mặt phẳng (α) chia $\mathcal{H}$ thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau khi và chỉ khi (α) đi qua O.

47. Cho khối hộp $\mathcal{H}_1$, khối bát diện đều $\mathcal{H}_2$ và khối lập phương $\mathcal{H}_3$ đặt trên mặt bàn. Có hay không một mặt phẳng chia mỗi khối đa diện đó thành hai phần có thể tích bằng nhau ?

48. Cho hai khối lăng trụ $A_1A_2...A_n.B_1B_2...B_n$ và $C_1C_2...C_n.D_1D_2...D_n$ được sắp xếp sao cho các cạnh bên A_iB_i và C_iD_i bằng nhau và nằm trên một đường thẳng. Chứng minh rằng hai khối lăng trụ đó có thể tích bằng nhau.

49. Với mỗi đỉnh A của một hình bát diện đều cạnh a, ta gọi α_A là mặt phẳng đi qua trung điểm các cạnh xuất phát từ A. Các mặt phẳng đó giới hạn một khối đa diện $\mathcal{H}$. Hãy mô tả $\mathcal{H}$ và tính thể tích của $\mathcal{H}$.

50. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với kích thước $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' tại M, N, P, Q. Biết rằng $AM=a'$, $CP=c'$. Tính thể tích hai phần của hình hộp được chia ra bởi $mp(\alpha)$.

51. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật. Một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q. Gọi M', N', P', Q' là hình chiếu của M, N, P, Q trên mặt phẳng đáy. Tìm tỉ số $\frac{SM}{SA}$ để thể tích khối đa diện $MNPQ.M'N'P'Q'$ lớn nhất.

52. Cho $\mathcal{H}$ là lăng trụ n-giác. Cắt các đường thẳng chứa các cạnh bên bởi một mặt phẳng (α) vuông góc với chúng, ta được một n-giác gọi là thiết diện

thẳng của $\mathcal{H}$. Chứng minh rằng nếu S là diện tích thiết diện thẳng và a là độ dài cạnh bên của $\mathcal{H}$ thì $V(\mathcal{H}) = aS$.

53. Tìm thể tích của hình tứ diện có hai cạnh đối diện bằng a và b, khoảng cách giữa hai đường thẳng chứa hai cạnh đó là d và góc giữa hai đường thẳng đó bằng φ.

54. Cho hai tứ diện $ABCD$ và $A'B'C'D$ sao cho các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại D. Chứng minh rằng $\dfrac{V(ABCD)}{V(A'B'C'D)} = \dfrac{DA}{DA'} \cdot \dfrac{DB}{DB'} \cdot \dfrac{DC}{DC'}$.

55. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh đối diện bằng nhau, cụ thể $DA = BC = a$, $DB = AC = b$, $DC = AB = c$. Qua mỗi cặp cạnh đối của tứ diện, dựng hai mặt phẳng song song với nhau. Mô tả khối đa diện $\mathcal{H}$ giới hạn bởi các mặt phẳng đó. Tính thể tích của $\mathcal{H}$ và thể tích tứ diện đã cho.

56. Bốn mặt của hình tứ diện là các tam giác bằng nhau có cạnh là a, b, c. Tính thể tích của tứ diện.

57. Cho khối lập phương $\mathcal{H}$ có cạnh a. Qua mỗi cạnh của $\mathcal{H}$ dựng một mặt phẳng không chứa điểm trong của $\mathcal{H}$ và tạo với hai mặt của $\mathcal{H}$ đi qua cạnh đó những góc bằng nhau. Các mặt phẳng như thế giới hạn một khối đa diện $\mathcal{H}'$. Mô tả $\mathcal{H}'$ và tính thể tích của $\mathcal{H}'$.

58. Cho khối lập phương $\mathcal{H}$ có cạnh a. Gọi $\mathcal{H}'$ là khối đa diện lồi có đỉnh là trung điểm các cạnh của $\mathcal{H}$. Mô tả $\mathcal{H}'$ và tính thể tích của $\mathcal{H}'$.

59. Cho khối tứ diện đều $\mathcal{H}$ cạnh a. Mỗi cạnh của $\mathcal{H}$ được chia thành ba phần bằng nhau bởi hai điểm chia. Mô tả khối đa diện lồi $\mathcal{H}'$ có các đỉnh là các điểm chia như vậy. Tính thể tích của $\mathcal{H}'$.

60. Cho $\mathcal{H}$ là hình chóp cụt tam giác $ABC.A'B'C'$ với hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có diện tích lần lượt là S và S'. Mặt phẳng (ABC') chia hình chóp cụt thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

61. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng đi qua $B'D'$ và trung điểm M của cạnh AB chia hình hộp thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

62. Cho $\mathcal{H}$ là hình chóp cụt ngũ giác đều $ABCDE.A'B'C'D'E'$, với $AB = a$, $A'B' = 2a$. Mặt phẳng $(A'B'C)$ chia hình chóp cụt thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

63. Cho hình chóp tứ giác $O.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Mặt phẳng đi qua AB và trung điểm M của cạnh OC chia hình chóp thành hai phần có tỉ số thể tích bằng bao nhiêu ?

64. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Xét khối đa diện lồi $\mathscr{H}$ có đỉnh là trung điểm các cạnh của hình chóp. Mô tả $\mathscr{H}$ và tính thể tích của $\mathscr{H}$.

65. Cho khối đa diện $\mathscr{H}$ có *hình cái nêm* (còn gọi là *hình đống cát*) : đó là khối phỏng lăng trụ có một đáy là hình thang $AA'B'B$ với hai cạnh song song là $AA' = a$ và $BB' = b$, đáy kia là đoạn thẳng $CC' = c$ song song với AA'. Một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng AA' cắt các đường thẳng AA', BB', CC' lần lượt tại M, N, P. Tính thể tích của $\mathscr{H}$ theo a, b, c và diện tích s của tam giác MNP.

66. Cho khối đa diện $\mathscr{H}$ có hình cái nêm cụt : đó là hình phỏng lăng trụ với hai đáy là hai hình chữ nhật $ABCD$ và $A'B'C'D'$ có các cạnh tương ứng song song : $AB \,//\, A'B'$, $CD \,//\, C'D'$. Biết $AD = a$, $AB = b$, $A'D' = a'$, $A'B' = b'$, khoảng cách giữa hai đáy bằng h. Tính thể tích của $\mathscr{H}$.

67. Cho $\mathscr{H}$ là hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ với $AB = a$ và $A'B' = a'$. Mặt phẳng đi qua A, B, C' chia hình $\mathscr{H}$ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

CHƯƠNG II. MẶT CẦU, MẶT TRỤ, MẶT NÓN

§1. MẶT CẦU, KHỐI CẦU

1. Cho đường thẳng d và điểm A không nằm trên d. Xét các mặt cầu đi qua A và có tâm nằm trên d. Chứng minh rằng các mặt cầu đó luôn đi qua một đường tròn cố định.

2. Mệnh đề sau đây có đúng không?

1) Hình lăng trụ có hai mặt bên vuông góc với mặt đáy có mặt cầu ngoại tiếp.

2) Nếu các mặt của đa diện nội tiếp đường tròn thì đa diện đó nội tiếp mặt cầu.

3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh cùng bằng a. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD. Chứng minh rằng các điểm A, B, C, D, A', B', C', D' cùng thuộc một mặt cầu và tính thể tích khối cầu đó.

4. Cho n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và n số thuộc $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sao cho $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. Tìm tập hợp các điểm M trong không gian mà $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 = k$, k là số thực cho trước.

5. Cho hai đường tròn $(O\ ;\ r)$ và $(O'\ ;\ r')$ cắt nhau tại hai điểm A, B và lần lượt nằm trên hai mặt phẳng phân biệt (P), (P').

1) Chứng minh rằng có mặt cầu (S) đi qua hai đường tròn đó.

2) Tính bán kính R của mặt cầu (S) theo r, r', độ dài AB và OO'.

6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 2a$. Gọi B_1, C_1 là hình chiếu của A trên SB, SC.

1) Chứng minh các điểm A, B, C, C_1, B_1 cùng nằm trên một mặt cầu.

2) Tính bán kính mặt cầu đó và chỉ rõ vị trí tâm của nó.

7. Trong số các hình chóp tam giác đều cùng ngoại tiếp mặt cầu bán kính r cho trước, tìm hình chóp có diện tích toàn phần nhỏ nhất.

8. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh cùng bằng a, hình chiếu của C trên mặt phẳng $(ABB'A')$ là tâm của hình bình hành $ABB'A'$.

1) Tính bán kính mặt cầu đi qua A, B, B', A' và C.

2) Tính thể tích khối lăng trụ.

9. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc, $OA = a$; $OB = b$, $OC = c$. Tìm điều kiện về a, b, c để có mặt cầu tiếp xúc với sáu cạnh của tứ diện. Khi đó xác định tâm và tính bán kính mặt cầu đó.

10. Cho tứ diện $ABCD$ thay đổi vị trí sao cho $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$ và các đỉnh A, B, C lần lượt thuộc ba mặt cầu đồng tâm có bán kính r_1, r_2, r_3 (coi $r_1 < r_2 < r_3$). Chứng minh rằng đỉnh thứ tư D không bao giờ vượt ra khỏi mặt cầu có tâm và bán kính mà sẽ xác định được.

11. Trong không gian cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, M', N, N', P, P' lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AD, AC, BD, AB, DC. Hỏi bốn điểm đó phải thoả mãn điều kiện gì để sáu điểm nói trên cùng nằm trên một mặt cầu?

12. Gọi p và R lần lượt là tổng độ dài các cạnh và bán kính mặt cầu ngoại tiếp một tứ diện $ABCD$. Trong số các tứ diện đó, tứ diện nào có tỉ số $\frac{p}{R}$ đạt giá trị lớn nhất, tìm giá trị lớn nhất đó.

13. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = c$, $AC = BD = b$, $AD = BC = a$. Gọi R, r thứ tự là bán kính mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp tứ diện, V là thể tích tứ diện. Chứng minh rằng $V \le \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{abcr}{R}$.

14. Cho hình chóp $S.ABC$. Biết rằng có mặt cầu bán kính r tiếp xúc với các cạnh của hình chóp và tâm I của mặt cầu nằm trên đường cao SH của hình chóp.

1) Chứng minh $S.ABC$ là hình chóp đều.

2) Tính đường cao của hình chóp biết rằng $IS = r\sqrt{3}$.

15. 1) Cho hai mặt cầu $S(O\ ;\ R)$, $S'(O'\ ;\ R')$ tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm I (nghĩa là chúng cùng tiếp xúc với một mp(P) và I nằm giữa hai điểm O, O'). Gọi (Q) là mặt phẳng tiếp xúc với hai mặt cầu đó lần lượt tại hai điểm A, B (A, B khác I). Tính độ dài đoạn thẳng AB theo R, R'.

2) Tính bán kính của ba mặt cầu tiếp xúc ngoài với nhau đôi một và cùng tiếp xúc với một mặt phẳng qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng lần lượt tại A, B, C. Biết rằng $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

§2. MẶT TRỤ. HÌNH TRỤ. KHỐI TRỤ. MẶT NÓN. HÌNH NÓN. KHỐI NÓN

16. Cho mp (P) và điểm A thuộc (P), điểm B không thuộc (P) sao cho hình chiếu H của B trên (P) không trùng với A. Một điểm M thay đổi trên (P) sao cho $\widehat{ABM} = \widehat{BMH}$. Chứng minh rằng các điểm M thuộc mặt trụ tròn xoay trục AB, từ đó suy ra M thuộc một elip.

17. Cho mặt trụ $\mathscr{T}$ và điểm S cố định không thuộc $\mathscr{T}$. Một đường thẳng Δ thay đổi đi qua S cắt $\mathscr{T}$ tại hai điểm A, B. Chứng minh rằng trung điểm I của đoạn thẳng AB nằm trên mặt trụ cố định.

18. Cho hình trụ $\mathscr{T}$ với trục Δ, bán kính R, chiều cao bằng h. Một mặt phẳng (P) thay đổi đi qua tâm của một đường tròn đáy và tạo với mặt phẳng đáy hình trụ một góc α cắt hai đáy hình trụ theo các dây AB và CD.

1) Tính diện tích tứ giác $ABCD$.

2) Chứng minh hình chiếu của tâm của đáy còn lại của hình trụ $\mathscr{T}$ trên mp (P) nằm trên một đường tròn cố định.

19. Một hình trụ có bán kính đáy là R, chiều cao h. Một hình vuông có ít nhất một cạnh không song song và không vuông góc với trục của hình trụ và có các đỉnh nằm trên các đường tròn đáy hình trụ.

Tính diện tích hình vuông đó.

20. Trong mp(P) cho góc $\widehat{aOb}$. Một mặt phẳng (Q) thay đổi và luôn vuông góc với đường phân giác trong của $\widehat{aOb}$. Gọi giao điểm của (Q) với Oa, Ob lần lượt là A, B. Trong mp (Q) xét điểm M sao cho $\widehat{AMB} = 90^o$. Chứng minh rằng các điểm M luôn thuộc một mặt nón xác định.

21. Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Gọi $\mathscr{H}$ là hình gồm các điểm của hình tròn $(O\ ;\ R)$ nhưng không nằm trong hình vuông $ABCD$. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình $\mathscr{H}$ khi quay quanh một đường chéo của hình vuông $ABCD$.

22. Một mặt cầu gọi là nội tiếp hình nón nếu nó tiếp xúc với mặt đáy của hình nón và tiếp xúc với mọi đường sinh của hình nón (khi đó hình nón được gọi là ngoại tiếp mặt cầu).

1) Chứng minh rằng mọi hình nón đều có mặt cầu nội tiếp duy nhất.

2) Một hình nón có chiều cao h và bán kính đáy r. Hãy tính bán kính mặt cầu nội tiếp.

23. Một hình chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng α.

1) Tính diện tích xung quanh và thể tích hình nón nội tiếp.

2) Tính diện tích xung quanh và thể tích hình nón ngoại tiếp.

24. Tìm hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của nó bằng diện tích hình tròn bán kính bằng a cho trước.

25. Một mặt phẳng vuông góc với đường cao hình nón và đi qua tâm mặt cầu ngoại tiếp hình nón chia khối nón thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính góc giữa đường sinh và mặt phẳng cắt.

26. Cho hình nón đỉnh S và O là tâm của đáy nón. Trên đường tròn đáy hình nón lấy điểm A cố định. Gọi M là điểm thay đổi trên đường tròn đáy nón.

1) Xác định vị trí của điểm M để diện tích tam giác SAM lớn nhất.

2) Gọi H là hình chiếu của điểm O trên mp (SAM). Chứng minh rằng H thuộc đường tròn cố định khi điểm M thay đổi trên đường tròn đáy hình nón.

27. Cho hình nón đỉnh S, góc ở đỉnh bằng 60^o, AB là một đường kính cố định của đáy hình nón.

1) Xét hai điểm C, D thuộc đường tròn đáy và vẽ cùng một phía đối với AB sao cho $\widehat{BAC}=15^o$, $\widehat{BAD}=45^o$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

2) EF là một dây cung thay đổi của đường tròn đáy và luôn vuông góc với AB. Chứng tỏ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SEF luôn thuộc một đường tròn cố định.

28. Một mặt cầu (S_1) bán kính r nội tiếp trong một hình nón có góc ở đỉnh là $\frac{\pi}{3}$.

1) Tính tỉ số $\frac{V_1}{V}$ giữa thể tích V_1 của khối cầu và thể tích V của khối nón.

2) Gọi (S_2) là mặt cầu nằm trong hình nón tiếp xúc với (S_1) và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón ; (S_3) là hình cầu nằm trong hình nón, tiếp xúc với (S_2) và tiếp xúc với các đường sinh hình nón, (S_{k+1}) là mặt cầu nằm trong hình nón tiếp xúc với (S_k) và tiếp xúc với các đường sinh hình nón....

Chứng minh rằng với mọi n, tổng thể tích của các khối cầu $(S_1),\ldots,(S_n)$ luôn nhỏ hơn nửa thể tích khối nón.

29. Cho hình trụ có bán kính đáy R và đường cao $R\sqrt{2}$. Xét hai đường kính thay đổi AB và CD của hai đường tròn đáy mà AB vuông góc với CD.

1) Chứng minh rằng $ABCD$ là tứ diện đều.

2) Chứng minh rằng có mặt trụ cố định mà khoảng cách giữa các đường thẳng AC, AD, BC, BD với trục của mặt trụ bằng nhau, tính khoảng cách đó (các đường thẳng AC, AD, BC, BD gọi là đường thẳng tiếp xúc với mặt trụ ấy).

30. Gọi r, h lần lượt là bán kính đáy, chiều cao hình nón. Kí hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối cầu nội tiếp và khối cầu ngoại tiếp hình nón.

1) Tính $\frac{V_1}{V_2}$ theo r, h.

2) Khi r, h thay đổi, tìm giá trị lớn nhất của tỉ số đó.

31. Cho mặt cầu $S(O; R)$ và A là điểm nằm ngoài mặt cầu đó.

1) Chứng minh rằng các tiếp tuyến với mặt cầu đã cho kẻ từ A thuộc một mặt nón cố định.

2) Tính AO theo R sao cho mặt cầu đã cho chia khối nón đỉnh A, đường tròn đáy là đường tròn chứa các tiếp điểm của các tiếp tuyến với mặt cầu $S(O, R)$ nêu ở câu 1 thành hai phần có thể tích bằng nhau.

32. Cho hình trụ bán kính đáy R, chiều cao $OO' = h$, AB là đường kính di động của đường tròn tâm O, CD là đường kính cố định của đường tròn tâm O'. Đặt α là góc giữa AB , CD.

1) Tính diện tích tam giác ACD và góc φ giữa mp (ACD) tạo với mặt phẳng đáy chứa đường tròn tâm O' theo R, h, α.

2) Với giá trị nào của α thì thể tích tứ diện $ABCD$ lớn nhất?

33. Cho hình cầu $S(O, R)$ tiếp xúc với mặt phẳng (P) và hình nón N có đáy nằm trong (P) có bán kính đáy bằng bán kính mặt cầu (S) ; chiều cao hình nón là h. Cho biết cả hai hình cầu và hình nón nằm về một phía của mp (P). Xét mp (Q) song song với (P) và cách (P) một khoảng x sao cho (Q) cắt cả hình cầu và hình nón.

1) a) Tính tổng diện tích các thiết diện thu được khi $x < 2R$, $x < h$.

b) Tính tổng diện tích các thiết diện thu được khi $h < x < 2R$, khi ta quy ước kéo dài các đường sinh của hình nón cho đến khi đường sinh của hình nón cắt (Q).

2) Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất của tổng diện tích thiết diện khi mp (Q) thay đổi.

34. Cho mp (P) và điểm S nằm ngoài (P). Gọi H là hình chiếu của S trên (P), M là điểm thay đổi trong (P). Gọi K là hình chiếu của H trên SM mà $SM = 2HK$.

1) Chứng minh rằng đoạn SK luôn thuộc một hình nón cố định.

2) a) Gọi (Q) là mặt phẳng vuông góc với HK tại K. Chứng minh rằng (Q) tiếp xúc với một mặt nón cố định.

b) Gọi (R) là mặt phẳng vuông góc với SM tại K. Chứng minh rằng (R) tiếp xúc với một mặt nón cố định.

35. Cho hình nón đỉnh S, chiều cao h. Một hình chóp $S.ABC$ nội tiếp hình nón mà ABC là tam giác vuông tại A và hai mặt bên SAB, SAC cùng tạo với mp (ABC) hai góc bằng α.

1) Tính thể tích khối chóp.

2) Tính diện tích xung quanh hình nón.

36. Cho hình nón có bán kính đáy là r, góc ở đỉnh bằng 2α. Xác định hình trụ nội tiếp hình nón mà thể tích lớn nhất.

37. Cho hình trụ có bán kính R, đường cao bằng h, trục là OO'. Gọi A là điểm cố định thuộc đường tròn tâm O của hình trụ và M là điểm thay đổi trên đường tròn tâm O' của hình trụ.

1) Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của độ dài AM.

2) Gọi A' là hình chiếu của A trên mặt phẳng chứa đường tròn O' của hình trụ. Tính AM khi thể tích khối chóp $MAA'O'$ lớn nhất.

38. Cho hình trụ bán kính R, chiều cao bằng $R\sqrt{2}$. Gọi AB là đường kính cố định của đường tròn tâm O và CD là một đường sinh thay đổi của hình trụ.

1) Hãy xác định vị trí của đường sinh CD để thể tích khối chóp $ABCD$ lớn nhất.

2) Khi thể tích $ABCD$ lớn nhất, chứng minh rằng tam giác DAB là tam giác đều, ở đó D là điểm thuộc đường tròn tâm O' của hình trụ.

39. Cho hình cầu tâm O, bán kính R, S là điểm cho trước mà $SO = 2R$. Gọi $(\mathscr{C})$ là đường tròn chứa tiếp điểm M của tiếp tuyến kẻ từ S tới mặt cầu . Gọi I là điểm thuộc mặt phẳng chứa $(\mathscr{C})$ và ở ngoài mặt cầu đã cho. Gọi (N) là hình nón đỉnh I tiếp xúc với mặt cầu theo đường tròn $(\mathscr{C}_1)$.

Tìm tập hợp điểm I khi hai đường tròn $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{C}_1)$ có bán kính bằng nhau.

40. Cho mặt cầu (S) tâm O, bán kính R và hai điểm cố định A, B mà $OA > R$, $OB > R$. Xét mặt cầu (S') thay đổi đi qua A, B và tiếp xúc với (S) tại điểm M. Gọi (P) là mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại M và I là giao điểm của đường thẳng AB với (P). Chứng minh rằng I là điểm cố định và từ đó suy ra IM thuộc một mặt nón cố định.

BÀI TẬP BỔ SUNG

41. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp \text{mp}(ABC)$, $SA = 3a$, tam giác ABC cân tại B mà $AB = BC = 2a$, $\widehat{B} = 120^\circ$.

1) Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của điểm A trên SB, SC. Tính diện tích mặt cầu qua các điểm A, B, C, C_1, B_1.

2) Tính khoảng cách từ A đến $\text{mp}(SBC)$.

42. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu của A' trên $\text{mp}(ABC)$ là trọng tâm H của tam giác ABC. Gọi DE là đường vuông góc chung của AA' và BC (E thuộc BC, D thuộc AA'), cho biết khoảng cách giữa AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

1) Tính độ dài cạnh bên của hình lăng trụ.

2) Chứng minh rằng các điểm B, C, D, B', C' cùng thuộc một mặt cầu, tính diện tích mặt cầu đó.

43. Cho tứ diện $ABCD$ với tâm mặt cầu ngoại tiếp O. Tìm tập hợp các điểm M sao cho các trọng tâm của các tứ diện $MBCD$, $MCDA$, $MDAB$, $MABC$ cùng nằm trên mặt cầu tâm O, bán kính xác định được (hoặc cách đều điểm O).

44. Trên mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ cho $2n$ điểm cố định phân biệt $A_1, \ldots, A_n, A'_1, \ldots, A'_n$ ($n \geq 2$). Tìm tập hợp những điểm M sao cho các dây cung $A_iA'_i$ đi qua điểm M ($i = \overline{1,n}$) thoả mãn hệ thức

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{A_iM}}{\overrightarrow{MA'_i}} = k, \text{ trong đó } k \text{ là số thực cho trước } k \geq n.$$

45. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G, tâm mặt cầu ngoại tiếp là O. Gọi I là điểm đối xứng của O và qua G. Khi O nằm trong tứ diện thì I có nằm trong tứ diện không ?

46. Cho tam giác đều ABC tâm I, AA' là một trung tuyến. Đặt $IA' = a$. Một mặt cầu tâm O bán kính r tiếp xúc với mp(ABC) tại I.

Chứng minh rằng những mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu trên và chứa một cạnh của tam giác ABC cắt nhau tại điểm D trên đường thẳng OI. Tìm điều kiện cho a và r để ba điểm I, O, D nằm theo thứ tự đó.

47. Cho tam giác ABC cố định. Tìm điểm D trong không gian sao cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V cho trước và bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện đó lớn nhất.

48. Tìm điều kiện cần và đủ đối với tứ diện $ABCD$ sao cho tổng khoảng cách từ một điểm M bất kì nằm trong tứ diện đến các các mặt của nó không đổi.

49. Chứng minh rằng trong tứ diện vuông $OABC$ (vuông ở O) với $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ luôn xảy ra bất đẳng thức

$$\frac{1}{r} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{3\sqrt{3}}{a+b+c},$$

ở đó r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$. Dấu bằng xảy ra khi nào ?

50. Hình tứ diện $ABCD$ ngoại tiếp một mặt cầu bán kính r cho trước. Gọi R_1, R_2, R_3, R_4 là bán kính mặt cầu lần lượt bàng tiếp các góc tam diện đỉnh A, B, C, D của tứ diện $ABCD$.

Hãy xác định tứ diện đó để $R_1 + R_2 + R_3 + R_4$ đạt giá trị nhỏ nhất.

51. Gọi R, r lần lượt là bán kính các mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp tứ diện $ABCD$. Giả sử (O_i, r_1), $i = \overline{1,4}$ là bốn mặt cầu bằng nhau cùng đi qua một điểm O' và cùng nằm trong tứ diện mà mặt cầu $(O_i ; r)$ tiếp xúc với ba mặt của góc tam diện đỉnh A (tương ứng B, C, D) của tứ diện $ABCD$. Tính r_1 theo R và r, từ đó suy ra cách xác định bốn mặt cầu nói trên.

52. Trong (P) cho đường tròn đường kính $AA' = 2R$. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A lấy điểm S cố định, $SA = h$. Xét hình chóp đỉnh S, đáy là tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đã cho và hai đường chéo của $ABCD$ vuông góc với nhau.

1) Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

2) Khi thể tích khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất, chứng tỏ hình chóp $S.ABCD$ có mặt cầu nội tiếp. Tìm tâm và bán kính mặt cầu đó.

53. Cho tứ diện $ABCD$ với $BC = a,\ AD = a',\ CA = b,\ BD = b',\ AB = c,\ CD = c'$. Gọi $h_a,\ h_b,\ h_c,\ h_d$ lần lượt là chiều cao của hình tứ diện đi qua $A,\ B,\ C,\ D$. Gọi $r,\ R$ lần lượt là bán kính mặt cầu nội tiếp, ngoại tiếp tứ diện. Chứng minh rằng:

$$\frac{R}{r} \geq \frac{a+b+c+a'+b'+c'}{\sqrt{h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a + h_d h_a + h_d h_b + h_d h_c}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

54. Cho tứ diện đều $ABCD$. K là trung điểm của đường cao AH của tứ diện. Mặt phẳng (BCK) chia tứ diện $ABCD$ thành hai tứ diện. Tính tỉ số bán kính mặt cầu ngoại tiếp hai tứ diện đó.

55. Cho hai hình cầu đồng tâm bán kính $R_1,\ R_2$ với $R_2 = 4R_1$. Xét hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ có đỉnh S thuộc mặt cầu nhỏ, các đỉnh $A_i\ (i = \overline{1,n})$ của đáy thuộc mặt cầu lớn. Xác định vị trí điểm S và các đỉnh A_i để thể tích khối chóp đó đạt giá trị lớn nhất.

56. Cho tam giác AOB có $OA = OB = 2a$, $\widehat{AOB} = 120^o$. Trên đường vuông góc với mp(OAB) lấy hai điểm $C,\ D$ về cùng một phía của mp(OAB) sao cho tam giác ABD đều còn tam giác ABC vuông.

Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tính bán kính các hình tròn do các mặt của hình tứ diện cắt mặt cầu đó.

57. Cho một nửa mặt cầu bán kính R cho trước và hai mặt cầu nhỏ thay đổi luôn tiếp xúc với nhau và nội tiếp trong nửa mặt cầu đã cho. Chứng minh tiếp điểm của hai mặt cầu nhỏ cùng thuộc một mặt cầu cố định.

58. Cho biết diện tích xung quanh của hình chóp $S.ABC$ bằng $3s$, chu vi đáy ABC bằng $3a$. Một mặt cầu tiếp xúc với ba cạnh đáy tại trung điểm của chúng và đi qua các trung điểm của ba cạnh bên.

1) Chứng minh rằng $S.ABC$ là hình chóp đều.

2) Tính bán kính mặt cầu đó theo $a,\ s$.

59. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Một mặt cầu đi qua điểm A và tiếp xúc với hai cạnh $SB,\ SC$ tại trung điểm mỗi cạnh đó.

1) Chứng minh rằng mặt cầu đó đi qua trung điểm của AB và AC.

2) Đường thẳng SA cắt mặt cầu đó tại điểm thứ hai A_1. Tính AA_1 và SA_1.

60. Cho hai mặt cầu $S(O\,;R)$, $S'(O'\,;R')$ mà $d = OO' > R + R'$. Một đường thẳng Δ thay đổi và tiếp xúc với hai mặt cầu đó lần lượt tại hai điểm A, B. Chứng minh rằng

$$d^2 - (R+R')^2 \le AB^2 \le d^2 - (R-R')^2.$$

61. Cho tứ diện gần đều $ABCD$. Gọi E là điểm tiếp xúc của mặt (BCD) với mặt cầu nội tiếp tứ diện có tâm O. Gọi K là điểm tiếp xúc của mặt (BCD) với mặt cầu bàng tiếp tứ diện ứng với đỉnh A.

1) Chứng minh K là trực tâm tam giác BCD.

2) Chứng minh $FA = 2EF$, trong đó F là giao điểm của AE và KO.

62. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ với chiều cao $SH = h$ cho trước, góc giữa cạnh bên và đường thẳng SH bằng α. Hãy tính bán kính mặt cầu tiếp xúc với các cạnh của hình chóp đó.

63. 1) Tìm điều kiện để hình chóp đều có tâm mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp trùng nhau.

2) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và $\widehat{SAB} = \alpha$. Chứng minh rằng hai tâm của hai mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp hình chóp đó trùng nhau khi và chỉ khi $\alpha = 45^\circ$.

64. Xét hai mặt cầu $S(O\,;R)$ và $S'(O'\,;R')$, đặt $d = OO'$. Chứng tỏ rằng nếu $|R - R'| < d < r + R'$ thì giao hai mặt cầu đó là một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó theo R, R', d.

65. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a, A_1 là trung điểm của cạnh SA.

1) Tính diện tích mặt cầu đi qua A_1, S, C, D.

2) Mặt cầu qua A, B, C, D, A_1 cắt SB, SC, SD tại B_1, C_1, D_1. Tính SB_1, SC_1, SD_1.

66. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, cạnh đáy bằng a, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng h. Tìm tâm, bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

67. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông, $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $AB = AD = 2a$, $CD = a$, góc giữa mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và mặt phẳng (SBC) bằng 60°, mặt bên SAD là tam giác cân tại S, mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt đáy.

1) Tính đường cao của hình chóp $S.ABCD$.

2) Gọi E là trung điểm của AB. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SBCE$.

68. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh đáy bằng a, cạnh bên $a\sqrt{2}$. Gọi A_1, B_1, E lần lượt là trung điểm của SA, SB và CD.

Chứng minh rằng các điểm E, A, B, A_1, B_1 cũng thuộc một mặt cầu, tính diện tích mặt cầu đó.

69. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, mp(SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$.

1) Tính đường cao SH của hình chóp.

2) Gọi M là trung điểm của AB. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $SADM$.

70. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thang vuông $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^o$, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp$ mp$(ABCD)$, $SA = 2a$. Gọi A_1, D_1 lần lượt là trung điểm của SA, SD.

1) Tính thể tích khối chóp $S.A_1BCD_1$.

2) Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.A_1BCD_1$.

71. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều, $AB = BC = CD = a$, $AD = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $SA = 2a$. Gọi E là trung điểm của AD.

Tính thể tích khối chóp $S.CDE$ và diện tích mặt cầu qua S, C, D, E.

72. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, SC và I là giao điểm của MB và AC.

1) Chứng minh rằng mp$(SAC) \perp$ mp(SMB).

2) Tính thể tích tứ diện $ANIB$ và thể tích khối cầu ngoại tiếp $ANIB$.

73. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh rằng AM vuông góc với BP và tính bán kính mặt cầu qua C, M, N, P.

74. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân $AB = AC = a$, $\text{mp}(SBC) \perp \text{mp}(ABC)$ và $SA = SB = a$.

1) Chứng minh tam giác SBC là tam giác vuông.

2) Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp biết $SC = b$.

75. Cho đường thẳng d và điểm A không thuộc d. Một góc $\widehat{xAy}$ di động quanh A. Các cạnh của nó cắt d tại B, C. Trên đường thẳng vuông góc với $\text{mp}(d, A)$ tại A lấy điểm S. Gọi B_1, C_1 là hình chiếu của A lần lượt trên SB, SC.

1) Chứng minh rằng có mặt cầu qua năm điểm A, B, C, C_1, B_1.

2) Nếu tam giác ABC vuông tại A, chứng minh mặt cầu nói trên luôn đi qua một đường tròn cố định khi S thay đổi.

76. Cho góc vuông xOy thuộc $\text{mp}(P)$. Đoạn CO vuông góc với (P), các điểm A, B chuyển động trên Ox, Oy sao cho $OA + OB = OC$.

1) Tìm tập hợp tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

2) Chứng minh $\text{mp}(ABC)$ luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định.

77. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh đáy bằng a, chiều cao $SH = \dfrac{a}{2}$.

1) Chứng minh rằng có mặt cầu tâm H tiếp xúc với tất cả các mặt bên hình chóp. Tính bán kính R mặt cầu đó.

2) Xét $\text{mp}(P)$ song song với $\text{mp}(ABCD)$ và khoảng cách giữa chúng bằng x $(0 < x < R)$. Gọi $\mathcal{S}$ là diện tích thiết diện giữa (P) và hình chóp bỏ đi phần nằm trong mặt cầu. Tính x để $\mathcal{S} = \pi R^2$ (R là bán kính mặt cầu nêu trên).

78. Cho mặt cầu tâm O; S là điểm cố định thuộc mặt cầu. Ba tia Sx, Sy, Sz thay đổi, vuông góc với nhau từng đôi một và cắt mặt cầu tại A, B, C.

1) Chứng minh rằng $\text{mp}(ABC)$ đi qua một điểm cố định.

2) Chứng minh hình chiếu của điểm S trên mỗi đường thẳng AB, BC, CA cùng thuộc một mặt cầu cố định.

79. Trong $\text{mp}(P)$ cho đường tròn (C) tâm O, bán kính R và điểm A cố định thuộc (C). Xét đường kính BC quay quanh O, đặt $\widehat{ABC} = \alpha$. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A lấy điểm S sao cho $SA = 2R$.

1) Tìm tập hợp hình chiếu H của điểm S trên đường thẳng BC.

2) Xác định α để diện tích tam giác SBC đạt giá trị lớn nhất.

3) Lấy các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt thuộc các đoạn thẳng SA, SB, SC sao cho $SA.SA_1 = SB.SB_1 = SC_1.SC = 3R^2$. Chứng minh rằng khi BC quay quanh O thì

a) Mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ là mặt phẳng cố định.

b) Đường tròn ngoại tiếp ΔSB_1C_1 trong mp (SB_1C_1) luôn qua điểm cố định thứ hai khác điểm S.

80. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ cạnh đáy bằng a chiều cao bằng h. Một mặt cầu có tâm là một đỉnh của đáy và tiếp xúc với mặt bên đối diện với đỉnh đó của hình chóp. Tính diện tích phần mặt bên của hình chóp nằm trong mặt cầu.

81. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^o$, cạnh bên hình lăng trụ bằng a.

1) Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $I.ABB'A'$ ở đó I là trung điểm của cạnh CC'.

2) Tính góc giữa hai mặt phẳng $(A'BI)$ và mặt phẳng (ABC).

CHƯƠNG 3. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

1. Cho tam giác ABC với $A(-1;2;3), B(5;-3;4)$ và $C(2;1;6)$. Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{CA}$.

2. Cho các điểm $A(-1;3;7), B(2;-1;5)$ và $C(0;1;-5)$. Tính :

a) $(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}).(2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})$

b) Tọa độ các vectơ $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC})$.

3. Chứng minh rằng tam giác có các đỉnh $A(3;-1;6), B(-1;7;2)$ và $C(1;8;2)$ là một tam giác vuông.

4. Cho tam giác ABC với $A(1;2;1), B(3;-1;7)$ và $C(7;4;-2)$. Tính các góc của tam giác và hãy chứng minh tam giác đó cân.

5. Tìm điểm M trên trục Oy và cách đều hai điểm $A(3;1;2), B(5;7;-5)$.

6. Tìm trên mặt phẳng (yOz) điểm cách đều ba điểm $A(3;1;2), B(4;-2;-2)$ và $C(0;5;1)$.

7. Cho tam giác ABC có hai đỉnh $A(-4;-1;2)$ và $B(3;5;-6)$. Tìm tọa độ đỉnh thứ ba C biết rằng trung điểm của cạnh AC nằm trên trục tung và trung điểm của cạnh BC nằm trên mặt phẳng (zOx).

8. Cho ba điểm $A(1;-1;2), B(5;-6;2)$ và $C(1;3;-1)$. Chứng minh rằng A, B, C là các đỉnh của một tam giác (không suy biến) và hãy tính độ dài của đường cao kẻ từ B.

9. Cho hai vectơ $\vec{a}=(4;-2;-3)$ và $\vec{b}=(0;1;3)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{x}$ biết rằng $\vec{x}$ có phương vuông góc với hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$; hợp với vectơ $\vec{j}$ một góc tù và $|\vec{x}|=26$.

10. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{x}$ có phương vuông góc với hai vectơ $\vec{a}=(2;3;-1), \vec{b}=(1;-2;3)$ và thỏa mãn điều kiện $\vec{x}.(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=-6$.

11. Chứng minh đồng nhất thức $\left([\vec{a};\vec{b}]\right)^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=(\vec{a})^2\cdot(\vec{b})^2$.

Từ đó hãy chứng minh

$$(x^2+y^2+z^2)(t^2+u^2+v^2)-(xt+yu+zv)^2=(yv-uz)^2+(zt-vx)^2+(xu-ty)^2$$

với mọi số thực x, y, z, t, u, v.

12. Chứng minh rằng bốn điểm $A(1;2;-1), B(0;1;5), C(-1;2;1)$ và $D(2;1;3)$ cùng nằm trên một mặt phẳng.

13. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích $V=5$, ba đỉnh $A(2;1;-1), B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$. Đỉnh thứ tư D nằm trên Oy. Tìm tọa độ của D.

14. Cho bốn điểm $A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3)$ và $D(-2;1;-2)$. Chứng minh rằng A, B, C, D là các đỉnh của một tứ diện. Tính góc giữa các đường thẳng chứa các cặp cạnh đối diện của tứ diện $ABCD$.

15. Cho vectơ $\vec{u}$ tùy ý khác $\vec{0}$. Gọi α, β và γ theo thứ tự là góc tạo bởi $\vec{u}$ với các vectơ $\vec{i}, \vec{j}$ và $\vec{k}$. Chứng minh rằng $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

16. Một vectơ có thể tạo với vectơ chỉ phương đơn vị trên các trục tọa độ (tức là các vectơ $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$) những góc sau đây hay không?

a) $\alpha = 90^o, \beta = 150^o, \gamma = 60^o$

b) $\alpha = 45^o, \beta = 135^o, \gamma = 60^o$

c) $\alpha = 30^o, \beta = 45^o, \gamma$ tùy ý.

§2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

17. Cho hai điểm $A(1;3;-2)$ và $B(7;-4;4)$. Viết phương trình của mặt phẳng đi qua B và vuông góc với AB.

18. Viết phương trình của mặt phẳng đi qua điểm $M(2;-1;1)$ và vuông góc với hai mặt phẳng (Ozx) và $(P): 2x - z + 1 = 0$.

19. Viết phương trình của mặt phẳng đi qua hai điểm $M(1;-1;-2), N(3;1;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

20. Cho $M(-5;16;12)$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua M và trục Ox, viết phương trình của mặt phẳng (Q) đi qua M và trục Oy. Tính góc giữa hai mặt phẳng đó.

21. Viết phương trình của mặt phẳng đi qua $A(0;0;1), B(3;0;0)$ và hợp với mặt phẳng (Oxy) một góc 60^o.

22. Viết phương trình của mặt phẳng chứa trục Oz và hợp với mặt phẳng $2x + y - \sqrt{5}\cdot z - 7 = 0$ một góc $\frac{\pi}{3}$.

23. Viết phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0;0;1), B(0;3;0)$, tạo với mặt phẳng (xOy) một góc bằng $\frac{\pi}{6}$.

24. Hai mặt của một hình lập phương nằm trên hai mặt phẳng

$$2x - 2y + z - 1 = 0 \text{ và } 2x - 2y + z + 5 = 0.$$

Tính thể tích của hình lập phương đó.

25. Tìm trên trục Oz tất cả những điểm cách đều điểm $M(1;-2;0)$ và mặt phẳng $3x-2y+6z-9=0$.

26. Tìm tất cả những điểm M trên trục hoành cách đều hai mặt phẳng

$$12x-16y+15z+1=0 \text{ và } 2x+2y-z-1=0.$$

27. Tìm trên mặt phẳng $(P): x+2y-4z+3=0$ điểm M cách đều ba điểm $A(1;2;3), B(2;1;3)$ và $C(1;3;2)$.

28. Cho $A(1;2;1), B(-2;1;3), C(2;-1;1)$ và $D(0;3;1)$.

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B và cách đều C, D.

29. Cho ba điểm $A(2;1;0), B(1;2;2), C(1;1;0)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x+y+z-20=0$. Tìm trên đường thẳng AB điểm M sao cho C, M cách đều mặt phẳng (P).

30. Cho hai điểm $A(4;0;0), B(0;4;0)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $3x+2y-z+4=0$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Tìm tọa độ điểm M sao cho $IM \perp (P)$, đồng thời M cách đều gốc tọa độ O và mặt phẳng (P).

31. Cho ba điểm $A(6;1;-1), B(0;5;4)$ và $C(5;2;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua C và thỏa mãn $d(A;(P))=1, d(B;(P))=3$.

32. Cho $A(1;-2;-1), B(3;-2;-3), C(-4;4;-2)$ và $D(3;2;-4)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua C, D và thỏa mãn $d(A;(P))=2d(B;(P))$.

33. Cho điểm $M(1;2;3)$. Viết phương trình của mặt phẳng đi qua M, theo thứ tự cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho

a) M là trọng tâm tam giác ABC

b) M là trực tâm tam giác ABC.

34. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(4;3;2)$ và chắn trên các trục tọa độ các đoạn có độ dài dương và bằng nhau.

35. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(4;3;2)$ và chắn trên các trục Ox, Oy, Oz các đoạn có tỉ lệ độ dài là $1:2:3$.

36. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Xét các đoạn thẳng có hai đầu mút lần lượt nằm trên các đường thẳng BC', CA' và song song với mặt phẳng $(ABB'A')$. Tìm độ dài của đoạn ngắn nhất trong các đoạn thẳng ấy.

37. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=a, SB=b, SC=c$ và SA, SB, SC đôi một vuông góc. Xét đường thẳng Δ bất kì đi qua S, gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là các điểm đối xứng với A, B, C qua Δ. Các mặt phẳng lần lượt đi qua A_1, B_1, C_1 theo thứ tự vuông góc với các đường thẳng SA, SB, SC đồng quy tại một điểm P.

a) Chứng minh rằng khi Δ thay đổi thì P luôn nằm trên một mặt phẳng cố định.

b) Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng giá trị của đại lượng $\frac{PA^2}{SA^2}+\frac{PB^2}{SB^2}+\frac{PC^2}{SC^2}-\frac{PH^2}{SH^2}$ không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng Δ.

38. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại B với $AB=a, AA'=2a, A'C=3a$. Gọi M là trung điểm cạnh $C'A'$, I là giao điểm của các đường thẳng AM và $A'C$. Tính thể tích tứ diện $IABC$ và khoảng cách từ A tới mặt phẳng (IBC).

39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đáy $ABCD$. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh rằng $AM \perp BP$ và tính thể tích khối tứ diện $CMNP$.

(Đề thi đại học khối A - 2007)

§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

40. Viết phương trình các cạnh của tứ diện với các đỉnh $A(0;0;2), B(4;0;5)$, $C(5;3;0)$ và $D(-1;4;-2)$.

41. Cho tam giác ABC với các đỉnh $A(3;6;-7), B(-5;2;3)$ và $C(4;-7;-2)$. Viết phương trình tham số của trung tuyến kẻ từ C.

42. Cho tam giác ABC có $A(3;-1;-1), B(1;2;-7)$ và $C(-5;14;-3)$.

a) Viết phương trình của đường phân giác trong của góc $\widehat{ABC}$.

b) Viết phương trình của đường cao kẻ từ A.

43. Viết phương trình của đường thẳng đi qua điểm $M(1;-1;3)$ và song song với

a) đường thẳng $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-1}{1}$.

b) giao tuyến của hai mặt phẳng $x-y-z-6=0$ và $4x+y-2z-5=0$.

44. Cho điểm $M(3;2;-5)$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Ox và M.

b) Viết phương trình đường thẳng là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q):3x-y-7z+9=0$.

45. Viết phương trình hình chiếu của đường thẳng $\Delta:\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z+1}{-2}$ trên mặt phẳng $(P):x-y+3z+8=0$.

46. Cho hai mặt phẳng $(P):x+2y-3z-5=0$ và $(Q):2x-y+z+2=0$.

a) Chứng minh rằng $(P),(Q)$ cắt nhau, hãy viết phương trình giao tuyến Δ của chúng.

b) Viết phương trình hình chiếu của Δ trên các mặt phẳng tọa độ.

47. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau :

a) $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-2}{5}$ và $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2+5t\\z=1\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

b) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-7}{1}=\dfrac{z-5}{4}$ và $\dfrac{x-6}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{1}$.

c) $\begin{cases}x=-3+2t\\y=-2+3t\\z=6-4t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ và $\begin{cases}x=5+s\\y=-1-4s\\z=-4+s\end{cases}(s\in\mathbb{R})$.

d) $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{1}$ và giao tuyến của hai mặt phẳng

$$x+y-z=0, x-y-5z-8=0.$$

48. Viết phương trình của đường thẳng đi qua $M(1;-2;3)$ và cắt vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng $(P):x+3y+z+2=0,(Q):x-y-3z-2=0$.

49. Viết phương trình của đường thẳng đi qua $M(1;-1;2)$ và vuông góc với cả hai đường thẳng $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-5}$ và $\begin{cases}x=t\\y=-1-4t\\z=6+6t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

50. Cho hai mặt phẳng $(P):3x-y+2z-5=0,(Q):x+3y-2z+3=0$.

a) Viết phương trình đường thẳng Δ là giao tuyến của (P) và (Q).

b) Viết phương trình của đường thẳng đi qua $M(2;3;-5)$ và song song với Δ.

c) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu của M trên Δ.

d) Tìm tọa độ điểm K đối xứng với M qua Δ.

51. Viết phương trình của đường thẳng đi qua điểm $M(3;-2;-4)$, song song với mặt phẳng $(P):3x-2y-3z-7=0$ và cắt đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$.

52. Viết phương trình của đường thẳng song song với hai mặt phẳng

$$(P):3x+12y-3z-5=0,(Q):3x-4y+9z+7=0$$

và cắt đồng thời cả hai đường thẳng

$$d_1:\frac{x+5}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{3};\ d_2:\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}.$$

53. Cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-9}{-1}$ và $d_2:\dfrac{x-3}{-7}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$.

Chứng minh rằng d_1,d_2 chéo nhau và viết phương trình đường vuông góc chung của chúng.

54. Cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-5}{4}$ và $d_2:\begin{cases}x=7+3t\\y=2+2t\\z=1-2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Chứng minh rằng d_1,d_2 cùng nằm trong một mặt phẳng và viết phương trình của mặt phẳng ấy.

55. Cho điểm $A(0;1;1)$ và hai đường thẳng

$$d_1:\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{1},\ d_2:\begin{cases}x=-1\\ y=-1+t\\ z=t\end{cases}(t\in\mathbb{R}).$$

Viết phương trình của đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với d_1 và cắt đường thẳng d_2.

56. Cho hai điểm $A(3;0;2), B(3;6;4)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{1}$.

Tìm điểm M trên đường thẳng d sao cho vectơ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ có độ dài ngắn nhất.

57. Cho hai điểm $A(1;2;-1), B(7;-2;3)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+3t\\ y=-2t\\ z=4+2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Tìm trên đường thẳng d điểm C sao cho $CA+CB$ nhỏ nhất.

58. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng

$$d_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{1}\quad\text{và}\quad d_2:\begin{cases}x=2+2t\\ y=-1+4t\\ z=1+2t\end{cases}(t\in\mathbb{R}).$$

59. Tìm số đo của góc giữa đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{-2}$ và mặt phẳng $(P):2x-2y+z-3=0$.

60. Cho bốn điểm $A(2;3;2), B(6;-1;-2), C(-1;-4;3)$ và $D(1;6;-5)$.

a) Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, CD.

b) Tìm điểm M trên đường thẳng CD sao cho tam giác MAB có chu vi bé nhất.

61. Cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=2+2t\\ y=-1+t\\ z=1\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ và $d_2:\begin{cases}x=1\\ y=1+s\\ z=3-s\end{cases}(s\in\mathbb{R})$.

a) Chứng minh rằng d_1, d_2 chéo nhau. Viết phương trình của mặt phẳng chứa d_1 và song song với d_2.

b) Tính khoảng cách giữa d_1 và d_2.

§4. MẶT CẦU

62. Xác định tâm I và bán kính R của các mặt cầu

a) $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z=0$

b) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-22=0$

c) $x^2+y^2+z^2-6z-7=0$

d) $3x^2+3y^2+3z^2+6x-3y+15z-2=0.$

63. Trong mỗi trường hợp sau, hãy viết phương trình của mặt cầu:

a) Đi qua ba điểm $A(0;8;0), B(4;6;2), C(0;12;4)$ và có tâm nằm trên mặt phẳng (yOz).

b) Có tâm nằm trên Ox, bán kính bằng 2 và tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz).

c) Có tâm $I(1;2;3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz).

d) Đi qua $A(1;2;-3), B(3;4;5)$ và tâm nằm trên trục hoành.

64. Chứng minh rằng các mặt phẳng đẳng phương của mỗi cặp mặt cầu trong ba mặt cầu cho trước có tâm không thẳng hàng cùng chứa một đường thẳng (Đường thẳng này được gọi là ***trục đẳng phương của ba mặt cầu***).

65. Chứng minh rằng các mặt phẳng đẳng phương của mỗi cặp mặt cầu trong bốn mặt cầu cho trước có tâm không đồng phẳng đồng quy tại một điểm (điểm này được gọi là ***tâm đẳng phương của bốn mặt cầu***).

66. Viết phương trình trục đẳng phương của ba mặt cầu

$$(S_1): x^2+y^2+z^2+10x-2y+21=0, (S_2): x^2+y^2+z^2+4y-6z+7=0$$

và $(S_3): x^2+y^2+z^2+2x-8z+8=0.$

67. Tìm tọa độ tâm đẳng phương của bốn mặt cầu

$$(S_1): x^2+y^2+z^2=9,\ \ (S_2): (x+5)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=53,$$

$$(S_3): (x+1)^2+y^2+(z+3)^2=39,\ \ (S_4): x^2+(y+1)^2+(z-2)^2=10.$$

68. Cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ và mặt phẳng $(P): 4x+3y-12z+1=0$. Viết phương trình của mặt phẳng (Q) song song với (P) và tiếp xúc với mặt cầu (S).

69. Cho mặt phẳng $(P): 2x-2y-z-4=0$ và mặt cầu

$$(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0.$$

Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó.

(Đề thi đại học Khối A - 2009)

70. Viết phương trình của mặt phẳng chứa trục Ox và cắt mặt cầu

$$(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-22=0$$

theo một đường tròn có bán kính bằng 5.

71. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu

$$(S): (x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$$

và song song với mặt phẳng $(P): 4x+3z-17=0$.

72. Viết phương trình mặt phẳng chứa giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x+28y-2z+17=0$ và $(Q): 5x+8y-z+1=0$, đồng thời tiếp xúc với mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=1$.

73. Cho $A(2;0;0), B(0;2;0)$ và $C(0;0;4)$.

a) Viết phương trình của mặt cầu (S) đi qua ba điểm A, B, C và gốc tọa độ $O(0;0;0)$.

b) Viết phương trình của mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): x+2y+3z+4=0$ và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 2π.

74. Viết phương trình của mặt cầu đi qua điểm $M(7;-3;1)$ và chứa đường tròn

$$(\omega): \begin{cases} (x-3)^2+(y-4)^2+z^2=36 \\ 4x+y-z-9=0 \end{cases}$$

75. Viết phương trình của mặt cầu đi qua hai đường tròn

$$(\omega):\begin{cases}x^2+(y-2)^2+z^2=25\\ y=2\end{cases} \text{ và } (\omega'):\begin{cases}x^2+y^2+(z-3)^2=16\\ z=3\end{cases}$$

BÀI TẬP BỔ SUNG

76. Cho bốn điểm $A(5;2;6), B(6;4;4), C(4;3;2)$ và $D(3;1;4)$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

77. Cho bốn điểm $A(3;-1;2), B(1;2;-1), C(-1;1;-3)$ và $D(3;-5;3)$.

Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình thang.

78. Hãy biểu diễn tuyến tính vectơ $\vec{d}=(11;-6;5)$ theo các vectơ $\vec{a}=(3;-2;1)$, $\vec{b}=(-1;1;-2)$ và $\vec{c}=(2;1;-3)$.

79. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(a;b;c)$. Gọi α, β và γ theo thứ tự là góc hợp bởi đường thẳng OM với các mặt phẳng tọa độ $(Oxy), (Oyz)$ và (Ozx). Chứng minh rằng $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$.

80. Cho trước mặt phẳng $(P): x+y-z+1=0$ và hai điểm $A(-2;1;3), B(4;-5;6)$.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng (P) không cắt đoạn thẳng AB.

b) Tìm tọa độ điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho $MA+MB$ bé nhất.

c) Tìm tọa độ điểm D trên mặt phẳng (P) sao cho vectơ $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}$ có độ dài ngắn nhất.

81. Cho mặt phẳng $(P): x+y+z-6=0$ và hai điểm $A(1;2;1), B(3;-2;3)$. Tìm tọa độ điểm $M\in(P)$ sao cho MA^2+MB^2 bé nhất.

82. Cho mặt phẳng $(P): 5x-2y+z-9=0$ và hai điểm $A(1;4;-3), B(2;5;0)$.

a) Tìm tọa độ điểm C trên mặt phẳng (P) sao cho $CA+CB$ nhỏ nhất có thể được.

b) Tìm tọa độ điểm D trên mặt phẳng (P) sao cho $|DA-DB|$ lớn nhất có thể được.

c) Tìm tọa độ điểm E trên mặt phẳng (P) sao cho vectơ $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}$ có độ dài ngắn nhất.

d) Tìm tọa độ điểm F trên mặt phẳng (P) sao cho vectơ $\overrightarrow{FA}+2\overrightarrow{FB}$ có độ dài ngắn nhất.

83. Cho mặt phẳng $(\alpha): x+y+z+3=0$ và hai điểm $M_1(3;1;1), M_2(7;3;9)$. Tìm tọa độ điểm M trên mặt phẳng (α) sao cho $\left|\overrightarrow{MM_1}+\overrightarrow{MM_2}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(Học viện Bưu chính viễn thông - 2000)

84. Cho mặt phẳng $(P): 2x-y+z+1=0$ và hai điểm $A(-1;3;-2), B(-3;7;-18)$.

a) Viết phương trình của mặt phẳng (Q) đi qua A, B và vuông góc với (P).

b) Tìm tọa độ của điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất có thể được.

(Đề dự bị thi Đại học khối A - 2007)

85. Cho mặt phẳng $(P): x+y+z=0$ và hai điểm $A(-3;5;-5), B(5;-3;7)$.

a) Tìm trên mặt phẳng (P) điểm C sao cho CA^2+CB^2 bé nhất.

b) Tìm trên mặt phẳng (P) điểm D sao cho $3DA^2-2DB^2$ bé nhất.

c) Tìm trên mặt phẳng (P) điểm E sao cho EA^2-2EB^2 lớn nhất.

86. Cho bốn điểm $A(3;3;2), B(4;-3;-3), C(2;1;1)$ và $D(1;2;1)$.

a) Chứng minh rằng A, B, C không thẳng hàng. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B, C.

b) Tìm trên mặt phẳng (P) tất cả những điểm E sao cho tam giác ODE có diện tích nhỏ nhất (O là gốc tọa độ).

87. Cho hai mặt phẳng $(P): x+y-z-2=0$ và $(Q): x+3y-12=0$. Gọi Δ là giao tuyến của chúng. Chứng minh rằng đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$ song song với Δ. Viết phương trình của mặt phẳng (R) chứa d và Δ.

88. Viết phương trình của mặt phẳng đi qua hai điểm $A(1;-2;3), B(3;-1;2)$ và chắn trên Ox, Oy những đoạn có tỉ lệ độ dài là $3:2$.

89. Cho điểm $A(1;2;-1)$ và hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{6}=\frac{z+3}{3},\ d_2: \frac{x-2}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{-1}.$$

a) Chứng minh rằng d_1, d_2 chéo nhau.

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua A và cắt đồng thời cả hai đường thẳng d_1, d_2.

90. Cho ba đường thẳng

$$d_1: \frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{1},\ d_2: \frac{x-10}{5}=\frac{y+7}{4}=\frac{z}{1} \text{ và } d_3: \frac{x+2}{8}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{1}.$$

a) Chứng minh rằng d_1, d_2, d_3 đôi một chéo nhau.

b) Viết phương trình đường thẳng Δ song song với d_3 và cắt cả d_1, d_2.

91. Cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-1=0$ và hai đường thẳng

$$\Delta_1: \frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+9}{6},\ \Delta_2: \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-2}.$$

Tìm tọa độ điểm N trên đường thẳng Δ_1 sao cho N cách đều (P) và Δ_2.

(Đề thi đại học khối A - 2009)

92. Cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-5=0$ và hai điểm $A(-3;0;1), B(1;-1;3)$. Trong các đường thẳng đi qua A và song song với (P), hãy viết phương trình đường thẳng mà khoảng cách từ B đến đường thẳng đó là nhỏ nhất.

(Đề thi đại học khối B - 2009)

93. Cho mặt phẳng $(P): x+2y-3z+4=0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$.

Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (P) và cắt vuông góc Δ.

(Đề thi đại học khối D - 2009)

94. Cho đường thẳng $\Delta : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$ và điểm $A(2;5;3)$.

a) Tìm tọa độ hình chiếu của A trên đường thẳng Δ.

b) Viết phương trình của mặt phẳng (P) chứa Δ sao cho khoảng cách từ A tới mặt phẳng (P) là lớn nhất.

(Đề thi đại học, cao đẳng khối A - 2008)

95. Chọ hai đường thẳng

$$d_1 : \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-3}{1} \text{ và } d_2 : \frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{2}.$$

a) Chứng minh rằng d_1, d_2 cắt nhau.

b) Gọi I là giao điểm của d_1, d_2. Tìm tọa độ của các điểm A, B lần lượt thuộc d_1, d_2 sao cho tam giác IAB cân tại I và có diện tích bằng $\frac{\sqrt{41}}{42}$.

96. Viết phương trình của đường tròn đi qua ba điểm $A(1;2;1), B(2;1;1)$ và $C(1;1;2)$.

97. Viết phương trình của mặt cầu có tâm $I(1;-2;3)$ và

a) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y+3z-4=0$;

b) cắt mặt phẳng $(Q): x+2y-2z+12=0$ theo một đường tròn có bán kính $\rho = \sqrt{3}$.

98. Viết phương trình của mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường thẳng

$$d : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-8}{2}$$

đồng thời tiếp xúc với hai mặt phẳng

$$(P): x+2y-2z-2=0, (Q): x+2y-2z+4=0.$$

99. Viết phương trình của mặt cầu (S) có tâm $I(1;3;5)$ và cắt đường thẳng $\Delta : \frac{x-2}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{1}$ tại hai điểm A, B sao cho $AB = 12$.

100. Viết phương trình của mặt cầu chứa đường tròn

$$(\omega):\begin{cases}(x-3)^2+(y-4)^2+z^2=36\\4x+y-z-9=0\end{cases}$$ và đi qua điểm $M(7;-3;1)$.

101. Viết phương trình của mặt cầu chứa đường tròn

$$(\omega):\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x+6y+2z-5=0\\x-2y-2z+1=0\end{cases}$$

và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):2x+2y+z-7=0$.

102. Tìm trên mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$ hai điểm M,N sao cho khoảng cách M và N tới mặt phẳng $(P):3x+4z+19=0$ tương ứng là lớn nhất và nhỏ nhất.

103. Cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=1$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{4}$.

a) Chứng minh rằng (S) và Δ không có điểm chung.

b) Viết phương trình của mặt phẳng chứa đường thẳng Δ và tiếp xúc với (S).

104. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh a, các cạnh bên bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$. Gọi *H*, *K* theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của *A* trên các đường thẳng *SB*, *SD* và gọi *O* là giao điểm của *AC*, *BD*. Tính thể tích của khối tứ diện *OAHK*.

105. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thang vuông tại *A* và *B*, đáy nhỏ là *BC*. Biết tam giác *SAB* là tam giác đều cạnh bằng $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, có $SC=a\sqrt{5}$ và khoảng cách từ *D* đến mặt phẳng (SHC) bằng $2a\sqrt{2}$ (trong đó *H* là trung điểm của cạnh *AB*). Tính thể tích khối chóp *S.ABCD* theo *a*.

106. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh $2a$, các cạnh bên $SA=a, SB=a\sqrt{3}$ và mặt bên *SAB* nằm trên mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi *M*, *N* theo thứ tự là trung điểm của các cạnh *AB*, *BC*. Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng *SM* và *DN*.

107. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh SB, SD và P là giao điểm của mặt phẳng (AMN) với đường thẳng SC. Chứng minh rằng $AP \perp SC$ và tính thể tích của khối tứ diện $ABMP$.

108. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 2a, BC = a$ và các cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, CD và lấy điểm P trên cạnh AD sao cho $AP : PD = 1 : 2$. Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SP và MN.

109. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{2}, BC = a$, các cạnh bên bằng nhau và bằng a. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên CA.

a) Tính khoảng cách giữa SA và BH.

b) Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AH, CD. Chứng minh rằng $BM \perp MN$.

110. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = h$. Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu của A trên các đường thẳng SB, SD, mặt phẳng (AEF) cắt đường thẳng SC tại P.

a) Chứng minh rằng SC vuông góc với mặt phẳng (AEF).

b) Tìm h theo a sao cho thể tích của hình chóp $P.ABCD$ là lớn nhất.

111. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên $AA' = h$. Lấy điểm M trên đoạn AB' sao cho $AM : MB' = 5 : 4$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với các đường thẳng $A'C, BC'$.

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BC'.

b) Cạnh CC' bị mặt phẳng (P) chia theo tỉ số nào?

112. Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC có $CA = AB = a$ và $\widehat{CAB} = 90^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Về cùng một phía của (P) lấy các điểm D, E sao cho $DA \perp (P), EM \perp (P)$ và $AD = 2EM = a$. Gọi F là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng BD. Chứng minh rằng $AF \perp DE$.

113. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a, AD=b$, cạnh bên $SA=h$ và $SA\perp(ABCD)$. Mặt phẳng (P) chứa CD, cắt SA, SB tại K, L theo thứ tự đó. Tính diện tích thiết diện $KLCD$ theo a, b, h và $t=AK$. Xác định t để mặt phẳng (P) chia hình chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau.

114. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA=OB=OC=a$. Gọi K, L, M theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA, gọi D là điểm đối xứng với O qua K và E là giao điểm của mặt phẳng (OLM) với CD.

a) Chứng minh rằng $CD\perp(OLM)$.

b) Tính diện tích của tứ giác $OLEM$.

115. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA=a, OB=a\sqrt{2}, OC=b$. Gọi D là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật $OADB$ và M là trung điểm cạnh BC. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A, M và cắt mặt phẳng (OCD) theo một giao tuyến vuông góc với AM.

a) Mặt phẳng (P) cắt đường thẳng OC tại E. Tính độ dài đoạn OE.

b) Tính khoảng cách từ C tới mặt phẳng (P).

116. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA=a$, $OB=b, OC=c$. Xét các điểm A', B', C' theo thứ tự trên các tia OA, OB, OC sao cho

$$OA=\alpha OA', OB=\beta OB', OC=\gamma OC' \quad (\alpha, \beta, \gamma>0).$$

a) Chứng minh rằng nếu $\gamma=\alpha+\beta+1$ thì mặt phẳng $(A'B'C')$ luôn đi qua một điểm cố định.

b) Chứng minh rằng nếu $\beta=\alpha+1, \gamma=\alpha+2$ thì mặt phẳng $(A'B'C')$ luôn đi qua một đường thẳng cố định.

117. Cho ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 chéo nhau và đôi một vuông góc với nhau có khoảng cách giữa hai đường bất kì trong chúng bằng a. Tìm thể tích của hình hộp mà có một đường chéo nằm trên d_1, còn các đường chéo của hai mặt kề nhau nằm trên hai đường thẳng d_2, d_3.

CHUYÊN ĐỀ 1. MỘT SỐ YẾU TỐ CỦA HÌNH HỌC TỔ HỢP

§1. HÌNH LỒI

1. Cho 5 điểm trên mặt phẳng, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại 4 điểm là đỉnh của một tứ giác lồi.

2. Chứng minh rằng một đa giác là đa giác lồi khi và chỉ khi 4 đỉnh tùy ý của nó là các đỉnh của một tứ giác lồi.

3. Chứng minh rằng một đa giác là đa giác lồi khi và chỉ khi mọi đường chéo của nó đều nằm hoàn toàn trong đa giác.

4. Chứng minh rằng một đa giác là đa giác lồi khi và chỉ khi từ mọi điểm trong đa giác ta có thể nhìn thấy tất cả các cạnh của đa giác.

5. Trên mặt phẳng có một số đa giác lồi đặt đôi một cắt nhau. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng cắt tất cả các đa giác này.

6. Trên mặt phẳng có một số đa giác lồi đặt đôi một cắt nhau. Chứng minh rằng nếu cho trước một phương tùy ý thì luôn tồn tại một đường thẳng song song với phương đã cho và cắt tất cả các đa giác này.

7. Trên một đường tròn có một số các cung nhỏ hơn $\frac{2\pi}{3}$. Chứng minh rằng nếu 2 cung bất kì trong chúng có giao khác rỗng thì giao của cả hệ khác rỗng.

8. Trên mặt phẳng có một hệ các hình chữ nhật có các cạnh tương ứng song song. Chứng minh rằng nếu giao của 2 hình bất kì trong chúng khác rỗng thì giao của tất cả các hình chữ nhật đã cho khác rỗng.

9. Trên mặt phẳng có một số hình tròn. Biết rằng có một đĩa tròn có tính chất là nếu chọn 3 hình tròn tùy ý trong số các hình tròn đã cho thì ta luôn tìm được vị trí đặt đĩa cắt cả 3 hình tròn. Chứng minh rằng khi đó luôn tìm được một vị trí đặt đĩa cắt tất cả các hình tròn đã cho.

§2. ĐƯỜNG KÍNH CỦA HÌNH

10. Chứng minh rằng một tam giác có 3 cạnh không vượt quá 1 luôn phủ được bởi hình tròn bán kính $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

11. Chứng minh rằng một đa giác lồi có đường kính 1 luôn bị phủ bởi một hình tròn bán kính $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

12. Trong một hình ngũ giác lồi có đường kính $\sqrt{3}$ chọn 2011 điểm tùy ý. Chứng minh rằng có một đỉnh của ngũ giác có khoảng cách tới ít nhất 403 điểm đã chọn không lớn hơn 1.

13. Trong một n-giác lồi có đường kính 1 chọn m điểm. Chứng minh rằng có một đỉnh của đa giác có khoảng cách tới ít nhất $\left[\frac{m}{n}\right]$ điểm trong chúng không lớn hơn 1.

14. Chứng minh rằng luôn phủ được ngũ giác lồi có 5 cạnh và các đường chéo xuất phát từ một đỉnh nào đó có độ dài không vượt quá 1 bởi 5 hình tròn bán kính $\frac{1}{\sqrt{3}}$ có tâm tại các đỉnh của ngũ giác.

15. Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ có độ dài mỗi cạnh và độ dài các đường chéo AC, AD không vượt quá $\sqrt{3}$. Lấy 2011 điểm phân biệt tùy ý nằm trong ngũ giác đó. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn đơn vị có tâm nằm trên cạnh của ngũ giác đã cho chứa ít nhất 403 điểm trong số các điểm đã lấy. *(Đề thi học sinh giỏi toàn quốc 2011)*

16. Chứng minh rằng luôn phủ được một n-giác lồi có các cạnh và các đường chéo xuất phát từ một đỉnh nào đó không vượt quá 1 bởi các hình tròn bán kính $\frac{1}{\sqrt{3}}$ có tâm tại các đỉnh của đa giác đã cho.

17. Trong một n-giác lồi có các cạnh và có đường chéo xuất phát từ một đỉnh nào đó không vượt quá 1, ta chọn m điểm. Chứng minh rằng có thể phủ ít nhất $\left[\frac{m}{n}\right]$ điểm trong chúng bởi một hình tròn bán kính $\frac{1}{\sqrt{3}}$ có tâm nằm trên cạnh của đa giác đã cho.

§3. CẮT HÌNH

18. Giả sử G là một hình không lồi. Chứng minh rằng tồn tại một hình lồi có chu vi nhỏ hơn nhưng diện tích lớn hơn G.

19. Chứng minh rằng nếu trong số tất cả các tứ giác lồi với các số đo góc ở đỉnh cho trước và chu vi cho trước, tứ giác ngoại tiếp có diện tích lớn nhất.

20. Chứng minh rằng trong số tất cả các n-giác lồi $A_1, A_2, .., A_n$ với số đo các góc A_i cho trước và chu vi cho trước, n-giác ngoại tiếp có diện tích lớn nhất.

21. Hãy hoàn chỉnh nốt chứng minh định lí 4, rằng cách thiết kế như trong hình 11 cho ta một cách phủ mặt phẳng bằng các tứ giác bằng nhau.

§4. MẶT PHẲNG KẺ Ô VUÔNG

22. Tìm bán kính lớn nhất của đường tròn chỉ đi qua các điểm lưới của mạng lưới ô vuông mà không cắt cạnh ô vuông nào ở điểm trong của nó.

23. Cho trước một số đỉnh của mạng lưới ô vuông, chứng minh rằng ta có thể tô màu các đỉnh này bởi hai màu xanh và đỏ sao cho trên mỗi đường nằm ngang và trên mỗi đường thẳng đứng, số điểm được tô đỏ và số điểm được tô xanh xấp xỉ nhau (hơn kém nhau nhiều nhất 1 đơn vị).

(Đề thi Toán quốc tế năm 1986)

24. Chứng minh rằng nếu đi dọc theo các cạnh của các ô vuông cơ sở từ một đỉnh bất kì rồi trở về đỉnh ban đầu sau hữu hạn bước (có độ dài bằng cạnh ô vuông cơ sở), thì số bước đi của ta sẽ là một số chẵn.

25. Điền vào mỗi ô vuông cơ sở một số nguyên sao cho mỗi số này bằng đúng trung bình cộng của bốn số ở bốn ô vuông cơ sở có cạnh kề với nó. Hãy chứng minh rằng :

a) Tất cả các số được điền bằng nhau, nếu như nó bị chặn.

b) Có một cách điền sao cho các số được điền không nhất thiết tất cả phải bằng nhau.

26. Các đỉnh của một tam giác nguyên ABC không chứa một điểm nguyên nào trên cạnh ngoài các đỉnh của nó và chứa đúng một điểm nguyên ở trong tam giác. Chứng minh rằng điểm nguyên ở trong tam giác này là trọng tâm của tam giác.

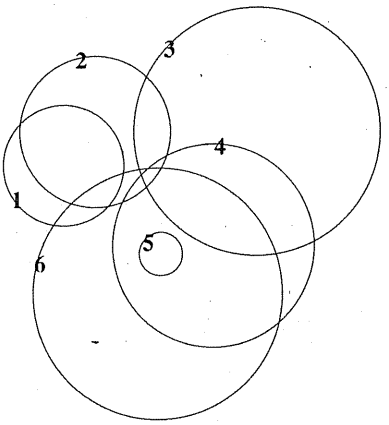
27. Trên mặt phẳng lấy năm điểm nguyên phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại trong chúng hai điểm nguyên sao cho đoạn thẳng nối hai điểm nguyên này đi qua một điểm nguyên nào đó.

28. Chứng minh rằng trong một hình ngũ giác lồi nguyên luôn có ít nhất một điểm nguyên là điểm trong.

29. Hãy tính diện tích nhỏ nhất mà một ngũ giác lồi có đỉnh là các điểm nguyên có thể có.

§1. KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ ĐỒ THỊ

1. Lập sơ đồ quan hệ giao nhau của các hình tròn trong hình 3 bằng cách cho tương ứng mỗi hình tròn với một điểm trên mặt phẳng và với hai hình tròn giao nhau là cạnh nối hai điểm biểu diễn của nó.



Hình 3

2. Hãy thiết lập sơ đồ biểu diễn quan hệ nguyên tố cùng nhau của 6 số tự nhiên 1, 2, 3, 4, 5, 6.

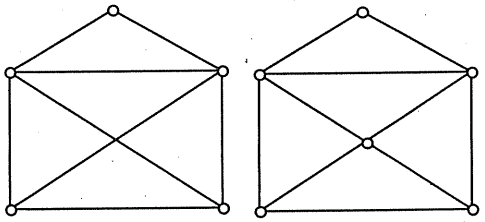
3. Hãy nêu những ví dụ tự bản thân em tìm được về những bài toán dẫn đến việc thiết lập mô hình đồ thị.

4. Hãy vẽ một đồ thị biểu diễn quan hệ quen biết nhau của 5 người, biết rằng trong họ không có 3 người nào đôi một quen nhau cũng như không có 3 người nào đôi một không quen nhau.

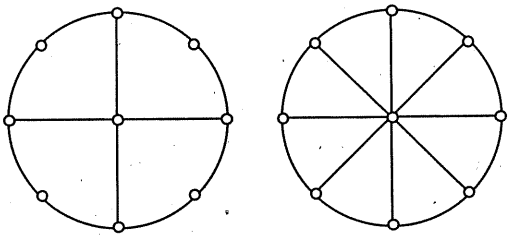
5. Hãy vẽ một đồ thị biểu diễn một trận đấu bóng bàn của 7 cầu thủ bóng bàn sao cho tất cả mọi người đều có điểm bằng nhau (thắng được 1 điểm, thua 0 điểm). Biết rằng hai người bất kì phải đấu với nhau đúng một hiệp.

6. Hãy đưa ra các bài toán thực tế dẫn đến các loại đồ thị khác nhau.

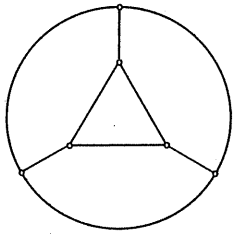
7. Những đồ thị nào đẳng cấu với nhau ?

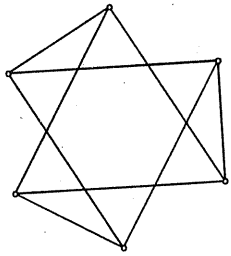


a) *Hình 4*



b) *Hình 5*



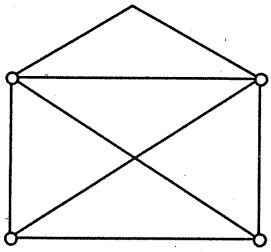


c) *Hình 6*

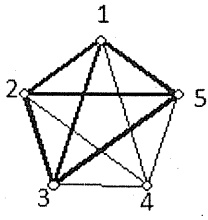
8. Hãy tìm hai đồ thị có cùng số đỉnh và số cạnh nhưng lại không đẳng cấu với nhau.

9. Hãy tự tìm một số đồ thị có thể biểu diễn trên mặt phẳng được theo hai cách hoàn toàn khác nhau (chẳng hạn như đồ thị Petersen).

10. Hãy xây dựng ma trận liên thuộc và ma trận liền kề của đồ thị được biểu diễn trong hình 7a



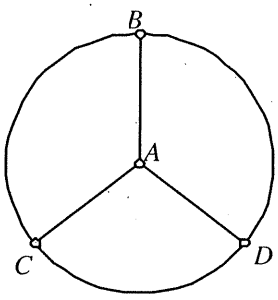
Hình 7a



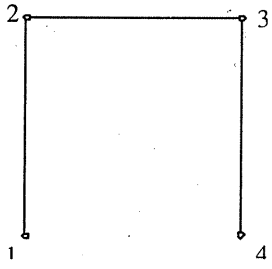
Hình 7b

11. Hãy xây dựng ma trận liên thuộc và ma trận liền kề của hai đồ thị trong hình 7b.

12. Xác định tất cả các đồ thị thành phần có 3 đỉnh của đồ thị trong hình 8 :



Hình 8

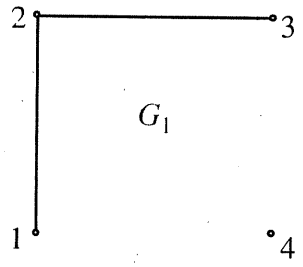


Hình 9

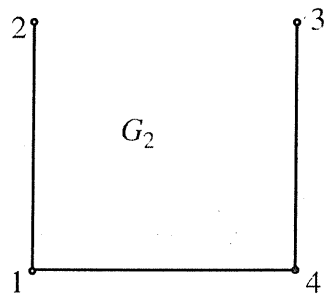
13. Xác định tất cả các đồ thị sinh ra bởi tập hợp có đúng 2 đỉnh của đồ thị ở hình 9.

14. Hỏi rằng đồ thị nào trong các đồ thị G_1 và G_2 sau đây là đồ thị con của đồ thị trong hình 9.

a) *Hình 10*



b) *Hình 11*



§2. CÁC YẾU TỐ CƠ BẢN CỦA ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG

15. Trong một kì nghỉ hè, có 7 người bạn đi nghỉ mát ở xa. Họ hứa với nhau rằng trong suốt kì nghỉ mỗi người phải viết thư cho đúng ba người trong số họ. Chứng minh rằng có một người không viết thư trả lời cho người viết cho mình.

16. Tồn tại hay không một đồ thị đơn vô hướng với 6 đỉnh và bậc của các đỉnh lần lượt là

a) 2, 3, 3, 3, 4, 4. b) 2, 3, 3, 4, 4, 4.

17. Chứng minh rằng một đồ thị n đỉnh có bậc của mỗi đỉnh là một số tự nhiên không nhỏ hơn 2 sẽ có không ít hơn n cạnh.

18. Giả sử Việt Nam có 65 thành phố. Hãy chứng minh rằng tồn tại một thành phố có số chẵn đường giao thông nối tới thành phố khác.

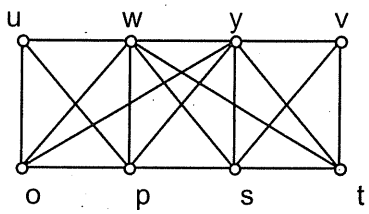
19. Nêu thuật toán xác định đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh của một đồ thị có trọng số, và áp dụng nó để tìm đường đi ngắn nhất nối hai đỉnh u, t của đồ thị G trong hình vẽ sau, với các trọng số

$\omega(u, w) = \omega(w, y) = \omega(y, v) = \omega(u, o) = \omega(o, p)$

$= \omega(p, s) = \omega(s, t) = \omega(w, p) = \omega(y, s) = \omega(v, t) = 1,$

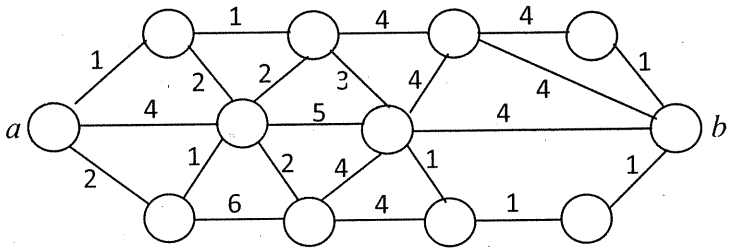
$\omega(w, t) = \omega(y, o) = 3,$

$\omega(u, p) = \omega(o, w) = \omega(w, s) = \omega(s, v) = \omega(y, p) = \omega(y, t) = 2,$



Hình 12

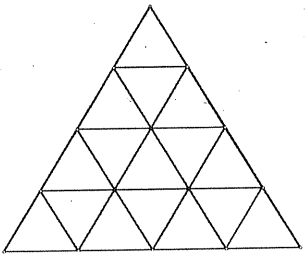
20. Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh a tới đỉnh b trong đồ thị sau đây



Hình 13

21. Có $4\times4 = 16$ gian phòng triển lãm hình tam giác đều được biểu diễn trong hình 14. Biết rằng từ mỗi phòng người ta chỉ có thể đi sang phòng bên có chung cạnh với nó mà thôi.

Hỏi rằng người ta có thể một lượt đi thăm được tất cả các phòng sao cho mỗi phòng chỉ được đi qua đúng một lần hay không ?



Hình 14

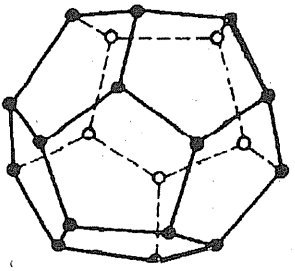
22. Chứng minh rằng một con mã với bước đi thông thường không thể đi hết các ô của một bàn cờ 3×3 ô vuông.

23. Một lớp học có 46 sinh viên. Biết rằng trong 10 em tùy ý luôn có ít nhất 2 em cùng học với nhau ở phổ thông. Chứng minh rằng có ít nhất 6 em cùng học với nhau ở phổ thông.

24. Nêu vài bài toán có liên quan đến số thành phần liên thông của đồ thị.

25. Tính chỉ số liên thông của đồ thị biểu diễn hình khối thập nhị diện đều trong hình 15.

26. Chứng minh rằng đồ thị biểu diễn một khối đa diện đều tùy ý luôn có chỉ số liên thông ít nhất là 3. Xác định chỉ số liên thông của mỗi đồ thị trong số chúng.



Hình 15

27. Chứng minh rằng nếu một đồ thị k-liên thông (đỉnh) thì cũng k-liên thông cạnh.

28. Chứng minh bất đẳng thức $\partial(G) \geq \kappa(G)$, ở đây $\partial(G)$ là bậc nhỏ nhất và $\kappa(G)$ là chỉ số liên thông của đồ thị vô hướng G cho trước.

29. Nêu vài bài toán phải dùng tới chỉ số liên thông hoặc phải dùng số thành phần liên thông để giải.

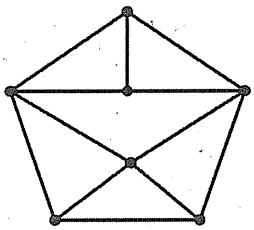
30. Tìm tất cả độ dài có thể có của các chu trình trong đồ thị Petersen.

31. Chứng minh rằng đồ thị 2-liên thông có chứa ít nhất một chu trình.

32. Chứng minh rằng đồ thị 2-liên thông cạnh có chứa ít nhất một chu trình.

33. Chứng minh rằng một đồ thị đơn G có bậc nhỏ nhất $\partial(G) \geq 2$ có ít nhất một chu trình C với độ dài $\ell(C) \geq \partial(G) + 1$.

34. Tính chỉ số ổn định trong của đồ thị dưới đây.



Hình 16

35. Chứng minh bất đẳng thức $\alpha(G) + \kappa(G) \leq n + 1$ cho đồ thị liên thông G với n đỉnh, ở đây $\kappa(G)$ là chỉ số liên thông của đồ thị G.

36. Trên bàn cờ vua có n^2 ô vuông, ta phải đặt một số lớn nhất các quân vua, sao cho không có hai quân cờ vua nào ăn được nhau cả. Hãy xác định số lớn nhất các quân cờ vua này.

37. Cho trước một hình vuông gồm $n \times n$ ô vuông đơn vị. Người ta tô màu một số ô vuông đơn vị sao cho không có hai ô vuông được tô màu nào có cạnh chung hoặc có đỉnh chung. Hãy tính số lớn nhất các ô vuông có thể tô màu được như vậy.

38. Tính số lớn nhất các tập con của tập hợp $\{1, 2, 3\}$ thỏa mãn tính chất : giao của hai tập bất kì trong chúng là tập hợp rỗng.

39. Hãy chứng minh rằng các đỉnh của một ngũ giác đều không thể tô ổn định bằng hai màu.

40. Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên k cho trước, luôn tồn tại một đồ thị có sắc số bằng k.

41. Chứng minh rằng nếu ta tô đỏ nhiều hơn $\frac{n^2}{2}$ ô của một bàn cờ gồm $n \times n$ ô, thì luôn tồn tại hai ô đỏ có chung một cạnh.

§3. MỘT SỐ LOẠI ĐỒ THỊ ĐƠN VÔ HƯỚNG

42. Tính số cạnh của đồ thị đầy đủ n đỉnh K_n.

43. Trên một đường thẳng có n đoạn thẳng với tính chất : giao của hai đoạn thẳng bất kì khác rỗng. Chứng minh rằng đồ thị biểu diễn quan hệ giao nhau của chúng là đồ thị đầy đủ với tính chất : các đoạn thẳng này cùng chứa một điểm nào đó trên đường thẳng.

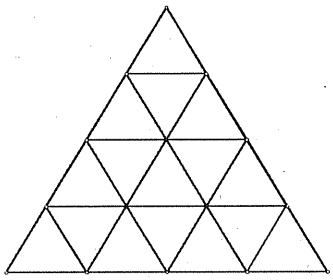
44. Chứng minh rằng trong một đồ thị đơn với $n \geq 2$ đỉnh, luôn tồn tại ít nhất hai đỉnh có bậc bằng nhau. Hỏi rằng khẳng định này có đúng cho đồ thị vô hướng bất kì hay không?

45. Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên chẵn $n \geq 4$, luôn tồn tại một đồ thị đơn 2-liên thông cạnh và là đồ thị đều bậc 3 với n đỉnh.

46. Tìm tất cả khối đa diện đều mà đồ thị biểu diễn nó là đồ thị lưỡng phân.

47. Chứng minh rằng nếu một đồ thị lưỡng phân $G = (A, B ; E)$ có một chu trình Hamilton (chu trình đi qua tất cả các đỉnh của nó) thì các lớp đỉnh của nó có cùng số lượng phần tử như nhau.

48. Có $n \times n$ gian phòng triển lãm hình tam giác đều được biểu diễn trong hình 17. Biết rằng từ mỗi phòng, người ta chỉ có thể đi sang phòng bên có chung cạnh với nó mà thôi.



Hình 17

Hỏi rằng người ta có thể thăm được nhiều nhất bao nhiêu phòng trong một lượt đi sao cho không có phòng nào được thăm hai lần ?

49. Chứng minh rằng với mỗi đồ thị liên thông n đỉnh và m cạnh, luôn tồn tại $m - n + 1$ cạnh sao cho khi bỏ các cạnh này đi thì ta thu được một cây.

50. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để các số nguyên dương $d_1, d_2, ..., d_n$ là bậc của các đỉnh trong một cây có n đỉnh là $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$.

51. Trên mặt phẳng cho n điểm sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng và khoảng cách giữa chúng đôi một khác nhau. Từ mỗi điểm, ta nối tới điểm gần nó nhất trong số các điểm còn lại bởi một đoạn thẳng. Chứng minh rằng đồ thị được tạo ra bằng cách đó là một bụi.

52. Tính sắc số của cây.

53. Chứng minh rằng bụi là đồ thị lưỡng phân.

54. Hãy chứng minh rằng đồ thị biểu diễn khối đa diện đều bao giờ cũng là đồ thị phẳng. Với mỗi khối đa diện đều, hãy vẽ một biểu diễn phẳng của nó thỏa mãn điều kiện là các cạnh đôi một không cắt nhau.

55. Hãy chứng minh rằng các đồ thị biểu diễn khối đa diện lồi là các đồ thị phẳng.

56. Chứng minh rằng đồ thị lưỡng phân đầy đủ $K_{3,3}$ không phải là đồ thị phẳng.

57. Chứng minh rằng đồ thị đầy đủ K_5 không phải là đồ thị phẳng.

58. Chứng minh rằng bụi là một đồ thị phẳng.

59. Trên mặt phẳng cho n điểm sao cho không có 3 điểm nào trong chúng thẳng hàng và khoảng cách giữa các điểm đôi một khác nhau. Mỗi điểm được nối tới điểm gần nó nhất bởi một đoạn thẳng. Chứng minh rằng đồ thị thu được qua cách đó là một đồ thị phẳng.

§4. MỘT SỐ LOẠI ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

60. Trong một cuộc đấu cờ vòng tròn, tổng số điểm của 5 đấu thủ đôi một khác nhau. Biết rằng mỗi ván thắng được tính 1 điểm, ván thua 0 điểm và hòa nửa điểm. Ngoài ra còn biết:

a) Người nhiều điểm nhất không hòa trận nào.

b) Người nhiều điểm nhì không thua trận nào.

c) Người nhiều điểm thứ tư không thắng người thứ năm.

Xác định kết quả các ván đấu của mọi người cũng như tổng số điểm của họ.

61. Có 5 người đấu cờ với nhau. Hãy xác định kết quả của mỗi trận đấu nếu biết rằng hai người bất kì phải đấu với nhau đúng một trận (thắng được 1 điểm,

thua được 0 điểm). Biết rằng tổng số điểm của mỗi người nhận được đều khác nhau và không có một trận hòa nào cả.

62. Trong một cuộc thi đấu bóng bàn có một số đấu thủ tham gia. Hai đấu thủ bất kì phải đấu với nhau đúng một hiệp, nếu thắng được 1 điểm, thua 0 điểm (không có hòa). Hỏi có khi nào cuộc thi đấu kết thúc với kết quả là tất cả các đấu thủ đều bằng điểm nhau hay không?

63. Chứng minh rằng trong một đồ thị phản chu trình T_n, không tồn tại hai đỉnh u và v có cùng số cạnh xuất phát $d^+(u) = d^+(v)$.

64. Chứng minh rằng ta có thể đánh số n đỉnh của một Turnier T_n với các số 1, 2, ..., n, sao cho $d^+(i) = n - i$ đúng cho mọi đỉnh i khi và chỉ khi T_n là đồ thị phản chu trình.

65. Chứng minh rằng một Turnier có duy nhất một băng chuyền Hamilton khi và chỉ khi nó là đồ thị phản chu trình.

CHUYÊN ĐỀ 3. ỨNG DỤNG SỐ PHỨC VÀO HÌNH HỌC PHẲNG

§1. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC SỐ PHỨC

1. Dùng số phức để chứng minh tổng bình phương độ dài hai đường chéo của hình bình hành bằng tổng bình phương độ dài bốn cạnh của hình đó.

2. Chứng minh rằng với mọi số phức z, w ta có : $|z-w| \geq |z| - |w|$. Hỏi khi nào có dấu đẳng thức?

3. Biểu diễn hình học tập các số phức z thỏa mãn từng điều kiện sau :

a) $\mathrm{Im}\left(z^2\right) \leq 2$

b) $\frac{\pi}{3} < \arg(z-i) < \frac{\pi}{2}$

c) $\begin{cases} 1 \leq |z+1| \leq 2 \\ \frac{\pi}{2} < \arg z < \pi \end{cases}$

4. Cho n-giác đều $A_0A_1...A_{n-1}$ nội tiếp đường tròn bán kính R. Tính

$$A_0A_1 . A_0A_2 . \ldots . A_0A_{n-1} .$$

5. Cho hai số thực φ và ψ. Tính môđun và argumen của số phức $e^{i\varphi} - e^{i\psi}$.

Từ đó suy ra định lí về góc nội tiếp của đường tròn (so sánh với góc ở tâm).

6. Biểu diễn tập các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|\dfrac{2iz - i + 1}{z - 2 - 2i}\right| < 1$.

7. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D. Lấy điểm E, điểm G sao cho các tam giác AED, CGB là những tam giác cân, vuông cùng hướng có đỉnh góc vuông theo thứ tự là E, G.

Hỏi khi nào có điểm F cách đều C, D sao cho hoặc E, F, G trùng nhau hoặc EFG là tam giác vuông cân đỉnh F cùng hướng với AED. Khi nào E, F, G trùng nhau ?

§2. TÍCH VÔ HƯỚNG, TÍCH LỆCH. ĐƯỜNG THẲNG TRONG MẶT PHẲNG PHỨC

8. Tìm hiểu ý nghĩa hình học của các đẳng thức

$$\langle iz, w\rangle = [z, w]\ ; \qquad [iz, w] = -\langle z, w\rangle \ (z, w \in \mathbb{C}).$$

9. Cho tam giác EFG và điểm O. Xét hai tam giác tùy ý OAB, $OA'B'$ đồng dạng cùng hướng với tam giác EFG. Gọi U, V, W theo thứ tự là trung điểm của các đoạn $OA, A'B, OB'$. Với tam giác EFG như thế nào thì khi U, V, W không thẳng hàng, ta được tam giác UVW đồng dạng cùng hướng với tam giác EFG ?

10. Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Xét các điểm U, V sao cho hai tam giác ABU, CAV đồng dạng cùng hướng với tam giác EFG cho trước. Gọi W là trung điểm của BC. Tam giác EFG thỏa mãn điều kiện gì để UVW là tam giác đồng dạng cùng hướng với EFG hoặc U, V, W là ba điểm trùng nhau?

11. Cho tam giác ABC và số thực φ khác $2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$. Lấy điểm U cách đều A, B và $\left(\overrightarrow{UB}, \overrightarrow{UA}\right) = \varphi$, lấy điểm V cách đều C, A và $\left(\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VC}\right) = \varphi$.

a) Hỏi có khi nào U trùng với V?

b) Khi U không trùng với V, lấy điểm G cách đều B, C và $\left(\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC}\right) = 2\varphi$. Chứng minh rằng G cách đều U, V và $\left(\overrightarrow{GU}, \overrightarrow{GV}\right) = \varphi + (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Từ đó suy ra nếu $\left(\overrightarrow{GV}, \overrightarrow{GU}\right) = 2\varphi$ thì $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{3} \bmod 2\pi$.

12. Cho ba điểm phân biệt A, B, C trên đường tròn $\mathscr{C}$ tâm O. Gọi B_1 và B_2 theo thứ tự là điểm đối xứng của B qua OA và AC. Chứng minh B_1, B_2, C thẳng hàng.

13. Cho các số phức α, β, γ. Xét ánh xạ f của mặt phẳng phức có công thức :

$$z \mapsto z' = \alpha z + \beta \bar{z} + \gamma .$$

a) Chứng minh rằng khi $|\alpha| \neq |\beta|$ thì f là một song ánh từ mặt phẳng lên mặt phẳng (tức f là một biến đổi của mặt phẳng). Dùng tích lệch, chứng minh rằng f biến các điểm thẳng hàng thành các điểm thẳng hàng, f bảo tồn hướng của tam giác khi $|\alpha| > |\beta|$, đảo hướng của tam giác khi $|\alpha| < |\beta|$.

b) Khi $|\alpha| = |\beta| \neq 0$, chứng minh rằng ảnh của f là một đường thẳng Δ và nghịch ảnh của mỗi điểm thuộc Δ là một đường thẳng.

c) Xét f khi $|\alpha| = |\beta| = 0$.

14. Xét biến đổi f của một mặt phẳng phức có công thức $z \mapsto z' = \alpha z + \beta \bar{z} + \gamma$ (α, β, γ là các số phức cho trước, $|\alpha| \neq |\beta|$).

1) Tìm điều kiện về α, β, γ để tập các điểm bất động của f là một đường thẳng.

2) Tìm α, β, γ để tập các điểm bất động của f là trục thực Ox. Khi đó :

a) Nếu $\mathrm{Re}\,\alpha = 1$, chứng minh rằng :

• Với mọi điểm $M \notin Ox$, đường thẳng $Mf(M)$ cùng phương với Ox ;

• f bảo tồn diện tích đại số của tam giác định hướng ;

• Cho M_0, M'_0 phân biệt không thuộc Ox, đường thẳng $M_0M'_0$ cùng phương với Ox thì có một và chỉ một biến đổi f như thế biến M_0 thành M'_0.

b) Nếu $\mathrm{Re}\,\alpha \neq 1$, chứng minh rằng :

• Với mọi điểm $M \notin Ox$, đường thẳng $Mf(M)$ có phương không đổi (khác phương của Ox) ;

• Với mọi điểm $M \notin Ox$, gọi giao của Ox với đường thẳng $Mf(M)$ là J thì $\overrightarrow{Jf(M)} = k\overrightarrow{JM}$, số thực k chung cho mọi M. (f gọi là phép co dãn trục Ox, hệ số k (xem §8, chương 4, *TLCT Hình học 10*).

15. Gọi H_0, H_1, H_2 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của điểm M trên các đường thẳng BC, CA, AB của tam giác ABC và gọi K là trọng tâm của hệ ba điểm $\{H_0, H_1, H_2\}$.

a) Tìm quỹ tích của K khi M thay đổi tùy ý trong mặt phẳng. (Xem ví dụ 10 chương 4, *TLCT Hình học 10*).

b) Tìm M để $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OM}$, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

c) Hỏi khi nào K là trọng tâm của tam giác ABC?

16. Cho bốn điểm phân biệt A_1, A_2, A_3, A_4 trên đường tròn tâm O. Với $j < k$ ($j, k = 1, 2, 3, 4$), kí hiệu A_{jk} là điểm cách đều A_j, A_k sao cho O là trọng tâm của hệ ba điểm $\{A_j, A_k, A_{jk}\}$ và gọi A'_{jk} là điểm đối xứng của A_{jk} qua đường thẳng A_lA_m ($l, m = 1, 2, 3, 4$; $l < m$ và l, m khác j, k). Chứng minh rằng sáu điểm $A'_{12}, A'_{13}, A'_{14}, A'_{23}, A'_{24}, A'_{34}$ cùng thuộc một đường tròn tâm O.

17. Cho A_1, A_2, A_3, A_4 là bốn điểm phân biệt thuộc một đường tròn tâm O và P là một điểm tùy ý của mặt phẳng. Với $j, k = 1, 2, 3, 4$ và $j < k$, kí hiệu P_{jk} là điểm đối xứng của P qua đường thẳng A_jA_k. Gọi Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng $P_{12}P_{34}, P_{13}P_{24}, P_{14}P_{23}$. Gọi O' là điểm đối xứng của O qua trọng tâm G của hệ bốn điểm $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$. Chứng minh rằng bốn điểm O', Q, R, S cùng thuộc một đường thẳng. Hỏi khi P chạy trên một đường thẳng cố định qua O thì đường thẳng qua O', Q, R, S thay đổi thế nào?

18. Cho tứ giác $A_1A_2A_3A_4$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R.

1) Điểm H xác định bởi $\overrightarrow{OH} = \sum_{j=1}^{4} \overrightarrow{OA_j}$ gọi là trực tâm của tứ giác $A_1A_2A_3A_4$.

Gọi G là trọng tâm của hệ bốn điểm A_1, A_2, A_3, A_4. Chứng minh O, G, H cùng thuộc một đường thẳng gọi là đường thẳng Euler của tứ giác đã cho và

$\overrightarrow{OH} = 4\overrightarrow{OG}$ (cũng có khi ba điểm đó trùng nhau : đường thẳng Euler không xác định).

2) Gọi H_1, H_2, H_3, H_4 theo thứ tự là trực tâm của các tam giác $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$. Chứng minh rằng bốn đường tròn tâm H_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ bán kính R cùng đi qua trực tâm H của $A_1A_2A_3A_4$.

3) Gọi E_1, E_2, E_3, E_4 theo thứ tự là tâm các đường tròn Euler 9 điểm của các tam giác $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$. Chứng minh rằng bốn đường tròn đó cùng đi qua trung điểm E của OH và E_1, E_2, E_3, E_4 cùng thuộc đường tròn tâm E bán kính $\frac{R}{2}$ (gọi là đường tròn Euler của $A_1A_2A_3A_4$).

4) Xét đường thẳng đi qua trung điểm đoạn thẳng nối hai đỉnh của tứ giác, vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm còn lại ; có sáu đường thẳng như thế. Chứng minh rằng sáu đường thẳng đó cùng đi qua E.

5) Xét bốn đường thẳng Simson của A_j đối với tam giác $A_kA_lA_m$ $(k, l, m = 1, 2, 3, 4$ và phân biệt). Chứng minh rằng bốn đường thẳng đó cùng đi qua E.

6) P là một điểm tùy ý thuộc đường tròn đã cho, xét bốn đường thẳng Simson của P đối với các tam giác $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$. Chứng minh rằng bốn hình chiếu vuông góc của P trên bốn đường thẳng đó là bốn điểm cùng thuộc một đường thẳng gọi là đường thẳng Simson của P đối với tứ giác $A_1A_2A_3A_4$ (nếu bốn điểm ấy không trùng nhau).

19. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi P là một điểm thay đổi trên đường tròn tâm O ngoại tiếp ΔABC, Q là trung điểm của OP. Tìm quỹ tích điểm đối xứng của Q qua đường thẳng Simson của P đối với tam giác ABC.

20. Cho đường tròn tâm O nội tiếp tam giác DEF, nó tiếp xúc với các cạnh EF, FD, DE theo thứ tự tại A, B, C. Gọi Δ là một đường thẳng tùy ý qua O và A', B', C' theo thứ tự là các điểm đối xứng của A, B, C qua Δ. Gọi P là một điểm cố định trong mặt phẳng, gọi P_a, P_b, P_c theo thứ tự là các điểm đối xứng của P qua các đường thẳng $B'C', C'A', A'B'$, gọi Q_a, Q_b, Q_c lần lượt

là các điểm đối xứng của P_a, P_b, P_c theo thứ tự qua các đường thẳng EF, FD, DE. Gọi J là tâm đường tròn đi qua Q_a, Q_b, Q_c.

1) Chứng minh J thuộc đường tròn tâm O đã cho và khi Δ thay đổi tùy ý thì J vạch nên đường tròn đó.

2) Chứng minh rằng đường thẳng Simson của J đối với tam giác ABC cùng phương với Δ.

3) Gọi P' là điểm đối xứng của P qua Δ, gọi H là trực tâm của ΔABC và K là điểm mà $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HP'}$. Chứng minh rằng bán kính đường tròn đi qua Q_a, Q_b, Q_c bằng $2OK$.

§3. PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

21. Xét biến đổi đồng dạng thuận f của mặt phẳng phức xác định bởi công thức

$$z \mapsto z' = \alpha z + \beta,\ \alpha, \beta \text{ là số phức},\ \alpha \neq 0.$$

Tìm điều kiện về α, β để f là một phép tịnh tiến, một phép đối xứng tâm, một phép vị tự. Từ đó suy ra trong nhóm đồng dạng thuận mỗi tập sau cũng làm thành một nhóm :

1) tập các phép tịnh tiến

2) tập các phép tịnh tiến và các phép đối xứng tâm

3) tập các phép tịnh tiến và các phép vị tự.

Hỏi tập các phép đối xứng tâm, tập các phép vị tự có làm thành những nhóm không và vì sao?

Trong ba nhóm 1), 2), 3), nhóm nào là một nhóm giao hoán?

22. Dùng số phức để kiểm nghiệm lại rằng trong phép đối xứng trượt f, quỹ tích trung điểm các đoạn thẳng $Mf(M)$ là trục của f.

23. 1) Hai hình trong mặt phẳng gọi là bằng nhau ("toàn đẳng") nếu có phép dời hình của mặt phẳng biến hình này thành hình kia. Chứng minh rằng phép đồng dạng tùy ý biến hai hình bằng nhau thành hai hình bằng nhau.

2) Cho $Đ_\Delta$ là phép đối xứng trục với trục Δ, $Đ_J$ là phép đối xứng tâm với tâm J, g là một biến đổi đồng dạng tùy ý. Chứng minh rằng

$$g \circ Đ_\Delta \circ g^{-1} = Đ_{g(\Delta)}, \qquad g \circ Đ_J \circ g^{-1} = Đ_{g(J)}$$

3) $Q_{(A,\varphi)}$ là phép quay tâm A, góc φ, g là một biến đổi đồng dạng tùy ý. Chứng minh rằng $g \circ Q_{(A,\varphi)} \circ g^{-1} = Q_{(g(A),\varphi)}$.

4) f là một đối xứng trượt trục Δ, g là một biến đổi đồng dạng tùy ý. Chứng minh rằng $g \circ f \circ g^{-1}$ là một đối xứng trượt trục $g(\Delta)$.

24. ABC là một tam giác không đều. Với mỗi điểm M, gọi M_a, M_b, M_c theo thứ tự là điểm đối xứng của M qua các đường thẳng BC, CA, AB và gọi Q là trọng tâm của hệ ba điểm $\{M_a, M_b, M_c\}$. Xét ánh xạ $f : M \mapsto Q$.

1) Chứng minh rằng f là một phép đồng dạng nghịch. Tìm hệ số đồng dạng của f.

2) Tìm dạng phân tích chính tắc (vị tự - đối xứng trục) của f khi ABC là một tam giác vuông tại A.

25. Cho tứ giác $A_0A_1A_2A_3$ nội tiếp đường tròn $\mathscr{C}$. Với mỗi điểm M, gọi M_0, M_1, M_2, M_3 theo thứ tự là điểm đối xứng của M qua các đường thẳng $A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_0$ và gọi Q là trọng tâm của hệ điểm $\{M_0, M_1, M_2, M_3\}$. Xét ánh xạ $f : M \mapsto Q$.

1) Khi nào f là một ánh xạ hằng (ảnh của nó là tập chỉ có một điểm)? Khi đó xác định ảnh của f.

2) Khi f không phải là một ánh xạ hằng, chứng minh rằng f là một phép đồng dạng nghịch. Xác định hệ số đồng dạng.

3) Khi f không phải là một ánh xạ hằng, tìm ảnh của đường tròn $\mathscr{C}$ qua ánh xạ f.

4) Tìm dạng phân tích chính tắc (vị tự - đối xứng trục) của f khi $A_0A_1A_2A_3$ là hình thang cân có ba cạnh bằng a, một cạnh bằng $2a$.

26. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $\mathscr{C}$ tâm O. Từ điểm P trên $\mathscr{C}$, vạch các đường thẳng cùng phương lần lượt với BC, CA, AB, chúng cắt lại $\mathscr{C}$ theo thứ tự ở A', B', C'. Gọi A'', B'', C'' theo thứ tự là điểm đối xứng của A, B, C lần lượt qua các đường thẳng $B'C', C'A', A'B'$. Chứng minh :

1) Tam giác $A"B"C"$ bằng tam giác ABC.

2) Các trung điểm của các đoạn $AA"$, $BB"$, $CC"$ cùng nằm trên một đường thẳng d. Gọi $O"$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta A"B"C"$ thì trung điểm của đoạn $OO"$ cũng thuộc d.

3) Cho đường thẳng Δ tùy ý thì có một và chỉ một điểm $P \in \mathscr{C}$ để đường thẳng d nói trong câu 2) cùng phương với Δ.

4) Độ dài $OO"$ bằng độ dài PH, trong đó H là trực tâm của tam giác ABC. Từ đó suy ra khi nào d đi qua O?

27. Cho đường tròn $\mathscr{C}$ tâm O ngoại tiếp tam giác không vuông ABC, các đường cao của tam giác ABC xuất phát theo thứ tự từ A, B, C cắt lại $\mathscr{C}$ ở A', B', C'.

P là một điểm thuộc $\mathscr{C}$; gọi P_a, P_b, P_c theo thứ tự là điểm đối xứng của P qua các đường thẳng OA, OB, OC ; gọi P'_a, P'_b, P'_c theo thứ tự là điểm đối xứng của P qua các đường thẳng OP_a, OP_b, OP_c ; gọi $P"_a, P"_b, P"_c$ theo thứ tự là điểm đối xứng của P'_a, P'_b, P'_c qua đường thẳng OP ; gọi Q_a, Q_b, Q_c theo thứ tự là điểm đối xứng của $P"_a, P"_b, P"_c$ qua tiếp tuyến của $\mathscr{C}$ theo thứ tự tại A', B', C'.

1) Chứng minh rằng tam giác $Q_aQ_bQ_c$ vị tự với tam giác $A'B'C'$ với hệ số vị tự 2.

2) Tìm quỹ tích tâm phép vị tự nói trên khi P thay đổi trên $\mathscr{C}$.

§4. ĐƯỜNG TRÒN. PHÉP NGHỊCH ĐẢO. BIẾN ĐỔI TRÒN

28. Cho ba điểm phân biệt thẳng hàng A, B, P. Tìm quỹ tích các điểm M sao cho MP là đường phân giác (ngoài hoặc trong) của góc $\widehat{AMB}$.

Quỹ tích đó có liên quan gì với quỹ tích các điểm M thỏa mãn $MA = kMB$ (k là số dương cho trước) (đường tròn Apollonius)?

29. Cho đường kính AB của đường tròn $\mathscr{C}$. Hỏi khi nào hai điểm C, D thuộc $\mathscr{C}$ chia điều hòa A, B, tức là $[A, B, C, D] = -1$?

30. 1) Cho đường thẳng Δ và đường tròn $\mathscr{C}$. Tìm tất cả các biến đổi nghịch đảo f biến Δ vào $\mathscr{C}$.

2) Cho hai đường tròn $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$. Tìm tất cả biến đổi nghịch đảo f biến $\mathscr{C}_1$ thành $\mathscr{C}_2$.

31. Cho hai đường thẳng hoặc tròn Γ_1, Γ_2 trong mặt phẳng phức theo thứ tự xác định bởi :

$$a_1 z\bar{z} + 2\langle \beta_1, z\rangle + p_1 = 0; \qquad a_2 z\bar{z} + 2\langle \beta_2, z\rangle + p_2 = 0$$

(a_j, p_j là số thực, β_j là số phức, $|a_j| + |\beta_j| \neq 0$, $(j = 1, 2)$).

1) Khi Γ_1, Γ_2 là hai đường tròn $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ tâm O_1, O_2 $(O_1 \neq O_2)$ cắt nhau tại A, B, gọi góc $\widehat{O_1AO_2}$ $(= \widehat{O_1BO_2})$ (số đo nằm giữa 0 và π) là góc tương giao của $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ còn góc giữa hai đường thẳng O_1A, O_2A (số đo nằm giữa 0 và $\frac{\pi}{2}$) là góc giữa $\mathscr{C}_1$ và $\mathscr{C}_2$.

Chứng minh rằng côsin của góc tương giao của $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ bằng

$$\operatorname{sgn}(a_1a_2)\frac{a_1p_2 + a_2p_1 - 2\langle \beta_1, \beta_2\rangle}{2\sqrt{\beta_1\bar{\beta}_1 - a_1p_1}\sqrt{\beta_2\bar{\beta}_2 - a_2p_2}}$$

còn giá trị tuyệt đối của biểu thức đó là côsin của góc giữa $\mathscr{C}_1$ và $\mathscr{C}_2$. (sgn x là dấu của $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$).

2) Khi Γ_1 là đường tròn $\mathscr{C}$ tâm O_1, Γ_2 là đường thẳng Δ, $\mathscr{C}$ cắt Δ tại hai điểm A, B, gọi góc giữa tiếp tuyến của $\mathscr{C}$ tại A (hoặc B) với đường thẳng Δ (số đo nằm giữa 0 và $\frac{\pi}{2}$) là góc giữa $\mathscr{C}$ và Δ.

Chứng minh rằng côsin của góc đó bằng $\left|\dfrac{a_1p_2 - 2\langle \beta_1, \beta_2\rangle}{2|\beta_2|\sqrt{\beta_1\bar{\beta}_1 - a_1p_1}}\right|$.

3) Khi Γ_1, Γ_2 theo thứ tự là hai đường thẳng Δ_1, Δ_2. Chứng minh rằng góc giữa Δ_1, Δ_2 (số đo nằm giữa 0 và $\frac{\pi}{2}$) có côsin bằng $\dfrac{|\langle \beta_1, \beta_2\rangle|}{|\beta_1||\beta_2|}$.

32. Cho f là một biến đổi nghịch đảo tâm J.

1) $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ là hai đường tròn cắt nhau, J không thuộc $\mathscr{C}_1$, không thuộc $\mathscr{C}_2$.

a) Chứng minh f bảo tồn góc giữa hai đường tròn đó (tức góc giữa $f(\mathscr{C}_1)$ và $f(\mathscr{C}_2)$ bằng góc giữa $\mathscr{C}_1$ và $\mathscr{C}_2$).

b) Chứng minh rằng nếu J cùng ở bên trong hay cùng ở bên ngoài $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ thì f còn bảo tồn góc tương giao của $\mathscr{C}_1$ và $\mathscr{C}_2$.

c) Hỏi khi J ở bên trong một đường tròn và ở bên ngoài đường tròn kia thì góc tương giao của hai đường tròn đó thay đổi thế nào qua biến đổi f ?

2) $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ là hai đường tròn cắt nhau. Chứng minh rằng nếu J thuộc một đường tròn hay J thuộc cả hai đường tròn đó thì f bảo tồn góc giữa $\mathscr{C}_1$ và $\mathscr{C}_2$.

3) Chứng minh rằng biến đổi nghịch đảo f bảo tồn góc giữa đường thẳng - đường tròn Γ_1 và đường thẳng - đường tròn Γ_2 cắt nhau.

33. Trong mặt phẳng, cho họ 4 đường thẳng d_1, d_2, d_3, d_4 trong đó hai đường nào cũng cắt nhau tại một điểm và không có ba đường nào đồng quy. Ba đường của họ cắt nhau tạo thành một tam giác nội tiếp một đường tròn ; vậy có 4 đường tròn xác định của họ. Chứng minh rằng bốn đường tròn đó cùng đi qua một điểm.

34. 1) Chứng minh rằng mọi biến đổi tròn F không phải là biến đổi đồng dạng viết được dưới dạng $F = f \circ \varphi$, trong đó φ là một biến đổi nghịch đảo với hệ số bằng 1, f là một biến đổi đồng dạng và chứng minh rằng cách phân tích như thế là duy nhất.

Cũng có điều khẳng định đó cho cách phân tích $F = \varphi \circ f$.

2) Hỏi khi nào thì $f \circ \varphi = \varphi \circ f$, trong đó φ là biến đổi nghịch đảo hệ số bằng 1, f là biến đổi đồng dạng?

35. Xác định các điểm bất động của một biến đổi tròn cho trước.

36. Cho đường tròn $\mathscr{C}$ tâm J. Hai điểm P, Q (khác J) gọi là liên hợp đối với $\mathscr{C}$ nếu đường tròn đường kính PQ trực giao với $\mathscr{C}$ (cũng nói P liên hợp với Q hay Q liên hợp với P).

Chứng minh :

1) Nếu đường thẳng nối hai điểm phân biệt P, Q (không thuộc $\mathscr{C}$) cắt $\mathscr{C}$ tại hai điểm phân biệt A, B thì P, Q liên hợp (đối với $\mathscr{C}$) khi và chỉ khi $[P, Q, A, B] = -1$.

2) Nếu $P \in \mathscr{C}$ thì tập mọi điểm Q liên hợp với P (đối với $\mathscr{C}$) là tiếp tuyến của $\mathscr{C}$ tại P.

3) Nếu $P \notin \mathscr{C}$ (và P khác J) thì tập mọi điểm Q liên hợp với P (đối với $\mathscr{C}$) là một đường thẳng $\Delta(P)$ và :

a) Nếu có tiếp tuyến của $\mathscr{C}$ đi qua P thì các tiếp điểm thuộc $\Delta(P)$;

b) $\Delta(P)$ trực giao với đường thẳng JP ;

c) $\Delta(P)$ là trục đẳng phương của $\mathscr{C}$ với đường tròn đường kính JP.

d) $\Delta(P)$ là ảnh qua biến đổi nghịch đảo f tâm J, đường tròn nghịch đảo $\mathscr{C}$ của đường tròn đường kính JP (bỏ điểm J).

4) Nếu với mọi điểm P khác J, gọi đường thẳng quỹ tích các điểm Q liên hợp với P (đối với $\mathscr{C}$) (xem câu 2), 3)) là đường đối cực của P (đối với $\mathscr{C}$) và kí hiệu là $\Delta(P)$ thì với mọi đường thẳng d không đi qua J, có một và chỉ một điểm P để $d = \Delta(P)$; điểm P đó được gọi là cực của P (đối với $\mathscr{C}$) và kí hiệu là $\pi(d)$. Khi d là tiếp tuyến của $\mathscr{C}$ thì $\pi(d)$ là tiếp điểm. Khi d cắt $\mathscr{C}$ tại hai điểm phân biệt A, B thì $\pi(d)$ là giao điểm của hai tiếp tuyến tại A, B. Vậy có song ánh Δ từ tập các điểm khác J đến tập các đường thẳng không đi qua J mà π là ánh xạ đảo ngược tức là $\pi = \Delta^{-1}$.

5) Với hai đường thẳng d, d' không đi qua J, nếu d đi qua cực của d' thì d' đi qua cực của d. Hai đường thẳng như thế gọi là hai đường thẳng liên hợp (đối với $\mathscr{C}$).

6) Nếu cũng coi đường kính d của $\mathscr{C}$ liên hợp với mọi đường thẳng d' vuông góc với d thì tứ giác $ABCD$ nội tiếp $\mathscr{C}$ là tứ giác điều hòa (tức là $[A, B, C, D] = -1$) khi và chỉ khi hai đường thẳng AB và CD liên hợp (đối với $\mathscr{C}$). (Xem lại *TLCT Hình học 10*, bài đọc thêm cuối chương II).

37. Cho điểm P không nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và không nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB. Gọi A_0, A_1, A_2 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của P trên các đường thẳng BC, CA, AB và gọi P_0, P_1, P_2 theo thứ tự là trung điểm của PA, PB, PC.

1) Biến đổi nghịch đảo f với đường tròn nghịch đảo $(A_0A_1A_2)$ biến P_0, P_1, P_2 theo thứ tự thành P'_0, P'_1, P'_2. Tìm tỉ số diện tích (đại số) của các tam giác định hướng $P'_0P'_1P'_2$ và $A_0A_1A_2$.

2) Gọi Q_0, Q_1, Q_2 theo thứ tự là cực của đường thẳng P_1P_2, P_2P_0, P_0P_1 đối với đường tròn $(A_0A_1A_2)$ (xem bài tập 9), tính tỉ số diện tích (đại số) của các tam giác định hướng $Q_0Q_1Q_2$ và $A_0A_1A_2$.

38. Cho tam giác ABC không đều và cũng không vuông. Với mỗi điểm P trên đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABC, gọi A^*, B^*, C^* theo thứ tự là điểm đối xứng của A, B, C qua đường thẳng OP, gọi A', B', C' theo thứ tự là điểm đối xứng của P qua đường thẳng OA^*, OB^*, OC^*. Gọi $A", B", C"$ theo thứ tự là điểm đối xứng của A', B', C' theo thứ tự qua đường thẳng BC, CA, AB.

1) Chứng minh rằng $A", B", C"$ không phải là các đỉnh của một tam giác khi và chỉ khi chúng cùng trùng với trực tâm H của tam giác ABC. Hãy xác định vị trí của P để có điều đó.

2) Chứng minh rằng các bộ ba điểm $(A, B", C"), (B, C", A"), (C, A", B")$ là các bộ ba điểm thẳng hàng.

3) Khi $A", B", C"$ là tam giác, chứng minh rằng có biến đổi đồng dạng thuận f biến A, B, C theo thứ tự thành $A", B", C"$ và trực tâm H của ABC là tâm đường tròn $(A", B", C")$.

4) Chứng minh rằng khi P thay đổi, tâm J của f (nói trong câu 3) (khi $A", B", C"$ trùng nhau, coi J là H) thay đổi trên đường tròn trực - trọng tâm của tam giác ABC (tức là đường tròn nhận GH làm đường kính, trong đó G là trọng tâm của tam giác ABC).

5) Hỏi với vị trí nào của P thì J trùng với G?

6) Hỏi khi P thay đổi thì trọng tâm $G"$ của tam giác $A"B"C"$ vạch nên đường gì?

7) Chứng minh rằng có một và chỉ một biến đổi tròn thuận biến J thành $G"$ (với J thay đổi như nói trong câu 4) giữ bất biến đường tròn trực - trọng tâm của tam giác ABC. Tìm các điểm bất động của biến đổi đó.

39. Cho bốn điểm phân biệt M_1, M_2, M_3, M_4 trong E. Chứng minh rằng điểm M_4 chia đẳng điều hòa hay chia đối đẳng điều hòa bộ ba định hướng (M_1, M_2, M_3) khi và chỉ khi

$$M_1M_2.M_3M_4 = M_2M_3.M_1M_4 = M_3M_1.M_2M_4.$$

PHẦN B. HƯỚNG DẪN - LỜI GIẢI - ĐÁP SỐ

CHƯƠNG I. KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH CỦA CHÚNG

§1. HÌNH ĐA DIỆN VÀ KHỐI ĐA DIỆN

1. Ta xét một tam giác ABC nào đó của $\mathscr{H}$. Tất cả các tam giác khác của $\mathscr{H}$ đều phải có một đỉnh là A, hoặc B, hoặc C. Mỗi đỉnh A, B, C của nó là đỉnh của $p-1$ tam giác khác nữa nên $k = 1 + 3(p-1) = 3p - 2$.

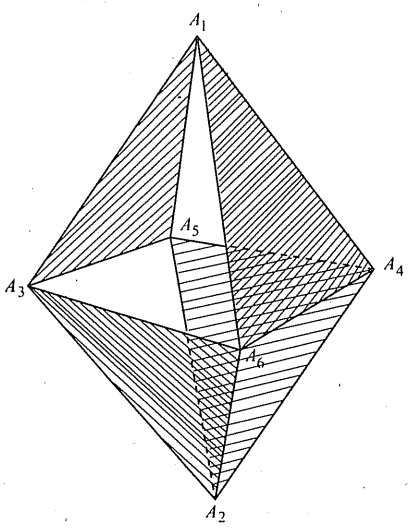
Số đỉnh của k tam giác là $3k$, nhưng mỗi đỉnh là đỉnh chung của p tam giác nên số đỉnh d của $\mathscr{H}$ là $d = \dfrac{3k}{p}$. Vậy $d = \dfrac{3(3p-2)}{p} = 9 - \dfrac{6}{p}$. Như vậy $\dfrac{6}{p}$ phải là một số nguyên, tức là p có các giá trị : 1, 2, 3, 6.

Ta lấy một đỉnh nào đó của hình $\mathscr{H}$, đỉnh A chẳng hạn, A là đỉnh của p tam giác nên A là điểm chung của $2p$ cạnh và do đó có $2p$ đỉnh của $\mathscr{H}$ được nối với A. Hiển nhiên $2p \le d - 1$ hay $2p \le 8 - \dfrac{6}{p}$.

Suy ra $p^2 - 4p + 3 \le 0$, tức là $1 \le p \le 3$.

• Khi $p = 1$ thì $k = 1$ và $d = 3$. Hình $\mathscr{H}$ gồm chỉ một tam giác.

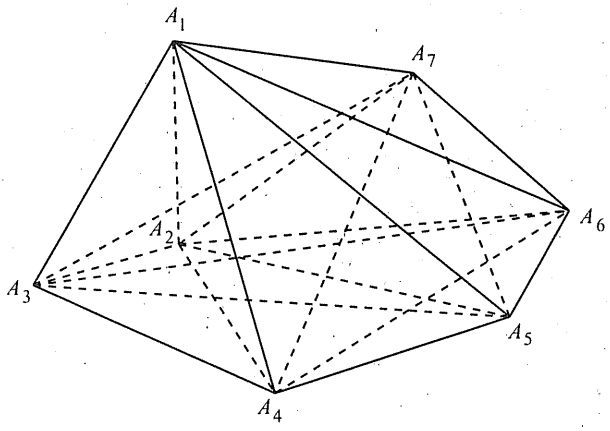
• Khi $p = 2$ thì $k = 4$ và $d = 6$. Hình $\mathscr{H}$ gồm 4 tam giác, 6 đỉnh, mỗi đỉnh là đỉnh chung cho hai tam giác. Xem hình 1, 4 tam giác đó là $A_1A_3A_5$, $A_1A_4A_6$, $A_2A_3A_6$, $A_2A_4A_5$.



Hình 1

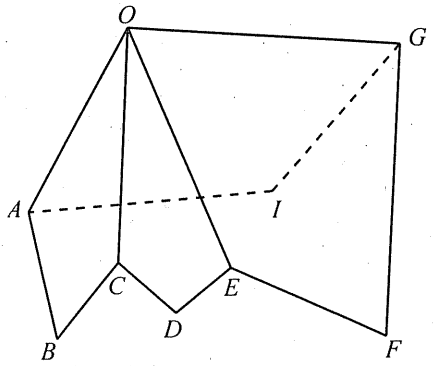
• Khi $p = 3$ thì $k = 7$ và $d = 7$. Hình $\mathscr{H}$ gồm 7 tam giác, 7 đỉnh, mỗi đỉnh là đỉnh chung cho 3 tam giác. Xem hình 2, 7 tam giác đó là

$A_1A_2A_3$, $A_1A_4A_5$, $A_1A_6A_7$, $A_2A_4A_6$, $A_2A_5A_7$, $A_3A_4A_7$, $A_3A_5A_6$.



Hình 2

2. Số cạnh $c = \dfrac{6 \times 4}{2} = 12$. Ta thấy rằng không có đỉnh nào là đỉnh của góc n-diện với $n \geq 4$. Thật vậy giả sử đỉnh O là đỉnh chung của bốn mặt là bốn tứ giác $OABC$, $OCDE$, $OEFG$, $OGIA$ (h.3). Như thế hình đa diện $\mathscr{H}$ có ít ra là 12 cạnh : OA, OC, OE, OG, AB, BC, CD, DE, EF, FG, GI, IA. Hiển nhiên $\mathscr{H}$ còn phải có thêm cạnh khác nữa, tức là $c > 12$, vô lí.



Hình 3

Như vậy $d_4 = d_5 = ... = 0$, tức là $d = d_3$ và do đó $3d_3 = 3d = 2c = 24$.

Suy ra $d = 8$. Hình hộp là một ví dụ.

3. + Hình tứ diện có 6 cạnh, hình chóp tứ giác có 8 cạnh (4 cạnh đáy và 4 cạnh bên).

+ Giả sử hình đa diện $\mathscr{H}$ có 7 cạnh : $c = 7$. Khi đó

$$2c = 14 = 3m_3 + 4m_4 + 5m_5 + ... \geq 3(m_3 + m_4 + m_5 + ...) = 3m.$$

Suy ra $m < 5$. Ngoài ra hiển nhiên là $m > 3$. Vậy $m = 4$ và do đó $m_4 = m_5 = ... = 0$, tất cả 4 mặt là tam giác nên $2c = 3m$ hay 14 = 12, vô lí. Vậy không có hình đa diện 7 cạnh.

+ Giả sử đa diện $\mathscr{H}$ có 9 cạnh : $c = 9$. Khi đó

$$2c = 18 = 3m_3 + 4m_4 + 5m_5 + ... \geq 3(m_3 + m_4 + m_5 + ...) = 3m.$$

Suy ra $m \leq 6$. Rõ ràng là $m_6 = m_7 = ... = 0$.

- Nếu $m_5 \neq 0$ thì do $m \leq 6$ nên $\mathscr{H}$ chỉ có thể là hình chóp ngũ giác, hình này có 10 cạnh, không thỏa mãn.

- Nếu $m_5 = 0$ thì $2c = 18 = 3m_3 + 4m_4$. Suy ra $m_3 = 6 - \frac{4m_4}{3}$. Như vậy hoặc là $m_4 = 0, m_3 = 6$, hoặc $m_4 = 3, m_3 = 2$.

Nếu $m_4 = 3, m_3 = 2$, hình lăng trụ tam giác là một hình đa diện như thế.

Nếu $m_4 = 0, m_3 = 6$ thì $m = 6$, hình đa diện ghép từ hai khối tứ diện là một đa diện như thế.

4. Mỗi mặt của $\mathscr{H}$ chỉ có thể là tam giác hoặc tứ giác, và số tứ giác không thể nhiều hơn 1 (vì khi đó số đỉnh của $\mathscr{H}$ nhiều hơn 5).

+ Nếu $\mathscr{H}$ có một mặt là tứ giác *ABCD* và gọi *S* là đỉnh thứ 5 thì ta được hình chóp *S.ABCD*.

+ Nếu $\mathscr{H}$ không có mặt tứ giác, tức m mặt của $\mathscr{H}$ đều là tam giác, khi đó $3m = 2c$, như vậy m phải là số chẵn. Ta cũng dễ thấy rằng $d_n = 0$ với $n \geq 5$, vậy $d_3 + d_4 = 5$. Mặt khác ta có

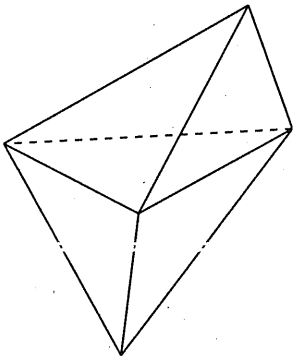
$$3m = 2c = 3d_3 + 4d_4 = 3d_3 + 4(5 - d_3) = 20 - d_3.$$

Như vậy $2c = 20 - d_3$ hay $c = 10 - \frac{d_3}{2}$. Suy ra d_3 là số chẵn và $0 \leq d_3 \leq 5$. Như vậy d_3 có thể lấy các giá trị : 0, 2 hoặc 4.

+ Nếu $d_3 = 0$ thì $c = 10$ và $3m = 2 \times 10$, không xảy ra.

+ Nếu $d_3 = 2$ thì $d_4 = 3$, $c = 9$ và $m = \frac{2c}{3} = 6$.

Đa diện $\mathscr{H}$ có 6 mặt tam giác, có 9 cạnh, 2 góc tam diện và 3 góc tứ diện (h.4).



Hình 4

+ Nếu $d_3 = 4$ thì $d_4 = 1$, $c = 8$ và $3m = 2 \times 8$, không xảy ra.

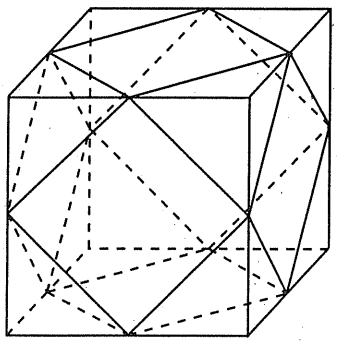
5. Học sinh tự làm.

6. Lấy hai hình chóp tam giác đều $D.ABC$ và $E.ABC$ sao cho điểm E nằm trong hình chóp $D.ABC$. Khi đó hình đa diện gồm 6 tam giác DAB, DBC, DCA, EAB, EBC, ECA là hình đa diện cần tìm.

7. Hình có được bằng cách ghép hai tứ diện đều.

8. Vì hình lập phương có 12 cạnh nên hình đa diện $\mathscr{H}$ có 12 đỉnh : $d = 12$ (h.5).

Các trung điểm của các cạnh thuộc một mặt của hình lập phương là đỉnh của một hình vuông cạnh $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, vậy $\mathscr{H}$ có 6 mặt là những hình vuông bằng nhau : $m_4 = 6$. Các trung điểm của ba cạnh hình lập phương có chung đỉnh làm thành đỉnh của tam giác đều cạnh $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, vậy $\mathscr{H}$ có 8 mặt là tam giác đều : $m_3 = 8$.



Hình 5

Như vậy số mặt của $\mathscr{H}$ là $m = m_3 + m_4 = 8 + 6 = 14$. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của 4 mặt trong đó có hai hình vuông và hai tam giác đều, như vậy $d = d_4$ và $2c = 4d_4 = 4d = 4 \times 12$, vậy số cạnh của $\mathscr{H}$ là $c = 24$, các cạnh đều bằng nhau và bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

9. Theo tính chất 2b) và 2c) thì $\mathscr{H}^*$ và $\overline{\mathscr{H}}$ không giao nhau, hợp của $\mathscr{H}^*$ và $\overline{\mathscr{H}}$ là toàn bộ không gian. Bởi vậy ta có :

$$M \in \overline{\mathscr{H}} \Leftrightarrow M \notin \mathscr{H}^* \Leftrightarrow M \notin \alpha_i^-, \forall i \Leftrightarrow M \in \alpha_i^+, \forall i \Leftrightarrow M \in \bigcap_{i=1}^{m} \alpha_i^+ .$$

Vậy $\overline{\mathscr{H}} = \bigcap_{i=1}^{m} \alpha_i^+$.

10. Theo mục 2c thì $\overline{\mathscr{H}}$ là tập lồi, ngoài ra α là tập lồi, từ đó suy ra $\overline{\mathscr{H}} \cap \alpha$ là tập lồi.

11. Ta đặt $d_i = d(M_0, \alpha_i)$ (khoảng cách từ điểm M_0 tới mặt phẳng α_i). Vì $M_0 \notin \alpha_i$ nên $d_i > 0$, bởi vậy ta có số dương R sao cho $R \le d_i$ với mọi i. Bây giờ giả sử M là điểm sao cho $M_0M < R$. Khi đó với mọi i, đoạn thẳng M_0M không cắt α_i (nếu nó cắt α_i ở điểm I thì $M_0M \ge M_0I \ge d_i \ge R$, vô lí), suy ra $M \in \alpha_i^o$ với mọi i. Vậy $M \in \mathscr{H}^o$.

12. Vì $N_0 \in H^*$ nên có một số j nào đó sao cho $N_0 \in \alpha_j^-$. Gọi R là số dương sao cho $R < d\left(N_0, \alpha_j\right)$ thì khi đó, nếu $N_0N < R$ thì $N \in \mathscr{H}^*$.

13. a) Từ $\overrightarrow{OM} = x_1\overrightarrow{OA} + x_2\overrightarrow{OB} + x_3\overrightarrow{OC}$ suy ra

$$\overrightarrow{OM} = x_1\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MO}\right) + x_2\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MO}\right) + x_3\left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MO}\right)$$

hay $x_1\overrightarrow{MA} + x_2\overrightarrow{MB} + x_3\overrightarrow{MC} + x_4\overrightarrow{MO} = \vec{0}$ với $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$.

Như vậy điểm M có tọa độ tỉ cự đối với tứ diện $OABC$ là $(x_1; x_2; x_3; x_4)$.

Bởi vậy :

i) M là điểm trong của tứ diện khi và chỉ khi $x_i > 0$ với $i = 1,2,3,4$, nghĩa là

$$x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0 \text{ và } x_1 + x_2 + x_3 < 1.$$

ii) Điểm M thuộc khối tứ diện $OABC$ khi và chỉ khi $x_i \ge 0$ với $i = 1,2,3,4$, nghĩa là $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$ và $x_1 + x_2 + x_3 \le 1$.

b) Theo câu a), khối tứ diện $OABC$ là tập hợp

$$X_0 = \left\{M(x_1; x_2; x_3) \mid x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_1 + x_2 + x_3 \le 1\right\}.$$

Gọi A' là điểm sao cho $\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$. Khi đó nếu $\overrightarrow{OM} = x_1\overrightarrow{OA} + x_2\overrightarrow{OB} + x_3\overrightarrow{OC}$ thì $\overrightarrow{OM} = (-x_1)\overrightarrow{OA'} + x_2\overrightarrow{OB} + x_3\overrightarrow{OC}$, bởi vậy khối tứ diện $OA'BC$ là tập hợp

$$X_1 = \left\{M(x_1; x_2; x_3) \mid x_1 \le 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, -x_1 + x_2 + x_3 \le 1\right\}.$$

Tương tự lấy điểm B' và C' sao cho $\overrightarrow{OB'} = -\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC'} = -\overrightarrow{OC}$ thì :

khối tứ diện $OAB'C$ là tập hợp

$$X_2 = \{M(x_1;x_2;x_3) \mid x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0, x_1 - x_2 + x_3 \leq 1\};$$

khối tứ diện $OABC'$ là tập hợp

$$X_3 = \{M(x_1;x_2;x_3) \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0, x_1 + x_2 - x_3 \leq 1\};$$

khối tứ diện $OA'B'C'$ là tập hợp

$$X_0' = \{M(x_1;x_2;x_3) \mid x_1 \leq 0, x_2 \leq 0, x_3 \leq 0, -x_1 - x_2 - x_3 \leq 1\};$$

khối tứ diện $OAB'C'$ là tập hợp

$$X_1' = \{M(x_1;x_2;x_3) \mid x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \leq 0, x_1 - x_2 - x_3 \leq 1\};$$

khối tứ diện $OA'BC'$ là tập hợp

$$X_2' = \{M(x_1;x_2;x_3) \mid x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0, -x_1 + x_2 - x_3 \leq 1\}$$

khối tứ diện $OA'B'C$ là tập hợp

$$X_3' = \{M(x_1;x_2;x_3) \mid x_1 \leq 0, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0, -x_1 - x_2 + x_3 \leq 1\}.$$

Hiển nhiên rằng $X = X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_0' \cup X_1' \cup X_2' \cup X_3'$.

Như vậy tập X là hợp của 8 khối đa diện : $OABC$, $OA'BC$, $OAB'C$, $OABC'$, $OA'B'C'$, $OAB'C'$, $OA'BC'$, $OA'B'C$. Khối đa diện X được xác định bởi hình đa diện $\mathscr{H}$ sau đây : 8 mặt của $\mathscr{H}$ là các tam giác ABC, $A'BC$, $A'BC'$, ABC', $AB'C$, $A'B'C$, $A'B'C'$, $AB'C'$, 6 đỉnh của $\mathscr{H}$ là A, B, C, A', B', C'. Đa diện $\mathscr{H}$ chính là hình bát diện.

14. Với $n = 2$ ta có khối đa diện $\mathscr{H}_4$ gồm 4 mặt là 4 tam giác, đó chính là khối tứ diện. Giả sử ta đã có $\mathscr{H}_{2n}$ là khối đa diện có $2n$ mặt đều là tam giác. Ta gọi một mặt nào đó của nó là tam giác ABC. Ta lấy một điểm D sao khối tứ diện $ABCD$ (trừ tam giác ABC) nằm ngoài $\mathscr{H}_{2n}$. Khi đó gọi $\mathscr{H}_{2(n+1)}$ là hợp của khối đa diện $\mathscr{H}_{2n}$ và khối tứ diện $ABCD$ thì $\mathscr{H}_{2(n+1)}$ là khối đa diện, mặt của nó gồm $2n-1$ mặt của $\mathscr{H}_{2n}$ (vì tam giác ABC không phải là mặt của $\mathscr{H}_{2(n+1)}$) và ba mặt ABD, BCD, CAD của khối tứ diện $ABCD$. Vậy khối đa diện $\mathscr{H}_{2(n+1)}$ có $2(n+1)$ mặt và các mặt đều là tam giác.

15. Tương tự như bài 1 : Với $n=1$ ta có khối đa diện $\mathscr{H}_6$ là khối hộp.

16. Xét khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Khối hộp đó có thể chia thành ba khối chóp: $A.BCC'B'$, $A.A'B'C'D'$ và $A.CDD'C'$.

b) Khối hộp đó có thể chia thành 5 khối tứ diện : $AA'BD$, $A'BB'C'$, $BCC'D$, $A'C'DD'$ và $A'BC'D$.

17. a) Giả sử hình đa diện $\mathscr{H}$ không có mặt tam giác và cũng không có đỉnh nào là đỉnh của góc tam diện, tức là $m_3 = d_3 = 0$. Khi đó ta có

$2c = 4m_4 + 5m_5 + ... \geq 4(m_4 + m_5 + ...) = 4m$,

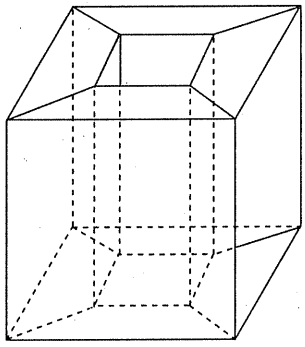
$2c = 4d_4 + 5d_5 + ... \geq 4(d_4 + d_5 + ...) = 4d$.

Suy ra $4c \geq 4m + 4d$ hay $d - c + m \leq 0 \neq 2$, trái với định lí Euler.

b) Viên gạch tuy-nen (h.6).

Hình đa diện này có 16 mặt là tứ giác, 16 đỉnh là đỉnh của góc tứ diện, và có 32 cạnh. Trong trường hợp này thì

$$d - c + m = 0.$$



Hình 6

18. Đa diện $\mathscr{H}$ có số mặt là $m = m_3 = 6$, và do đó có số cạnh là $c = \dfrac{6 \times 3}{2} = 9$.

Theo định lí Euler, ta có $d - c + m = 2$ nên $d = 2 + c - m = 2 + 9 - 6 = 5$.

Ta chứng tỏ rằng $d_5 = d_6 = ... = 0$.

Thật vậy, nếu $d_5 \neq 0$ thì có ít nhất một đỉnh, ta kí hiệu là A, là đỉnh chung của 5 mặt là 5 tam giác ABC, ACD, ADE, AEF và AFB, khi đó $\mathscr{H}$ có ít nhất là 10 cạnh, đó là AB, AC, AD, AE, AF, BC, CD, DE, EF, FB, vô lí. Vậy $d_5 = 0$.

Tương tự như vậy ta cũng có $d_6 = d_7 = ... = 0$.

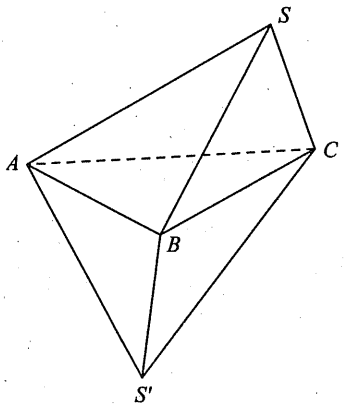
Như vậy $d_3 + d_4 = d = 5$, và do đó ta có $3d_3 + 4d_4 = 2c = 18$ hay $d_3 = 6 - \dfrac{4d_4}{3}$.

Vì d_3 và d_4 là những số nguyên không âm nên ta phải có $d_4 = 3$ và $d_3 = 2$, hoặc $d_4 = 0$ và $d_3 = 6$.

Trường hợp $d_4 = 0$ và $d_3 = 6$ không xảy ra vì khi đó $d = 6$.

Nếu $d_4 = 3$ và $d_3 = 2$ thì số đỉnh của $\mathcal{H}$ là $d = d_3 + d_4 = 5$.

Đa diện $\mathcal{H}$ có dạng như ở hình 7 : có 5 đỉnh A, B, C, S, S', có 6 mặt là 6 tam giác $SAB, SBC, SCA, S'AB, S'BC, S'CA$ và có 9 cạnh : $AB, BC, CA, SA, SB, SC, S'A, S'B, S'C$.



Hình 7

19. Giả sử hình đa diện $\mathcal{H}$ có $m = m_4 = 7$.

Khi đó $2c = 4m_4 = 4 \times 7 = 28$, tức là $c = 14$.

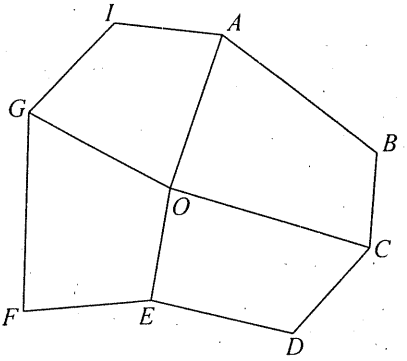
Bởi vậy theo định lí Euler thì $d = 2 + c - m = 2 + 14 - 7 = 9$. (*)

Ta có

$$\begin{aligned} 2c = 28 &= 3d_3 + 4d_4 + 5d_5 + ... \\ &= 3(d_3 + d_4 + d_5 + ...) + d_4 + 2d_5 + 3d_6 + ... \\ &= 3 \times 9 + d_4 + 2d_5 + 3d_6 + ... \end{aligned}$$

hay $1 = d_4 + 2d_5 + 3d_6 + ...$ Từ đó suy ra $d_4 = 1$, $d_5 = d_6 = ... = 0$.

Như vậy $\mathcal{H}$ có một đỉnh là đỉnh chung của 4 mặt và 8 đỉnh còn lại là đỉnh chung của ba mặt. Ta gọi O là đỉnh chung của 4 mặt của $\mathcal{H}$ và kí hiệu bốn mặt đó là : $OABC, OCDE, OEFG, OGIA$ (xem hình 8), như vậy $\mathcal{H}$ có ít ra là 9 đỉnh sau đây : $O, A, B, C, D, E, F, G, I$. Hiển nhiên $\mathcal{H}$ còn phải có thêm các đỉnh khác nữa, tức là nhiều hơn 9 đỉnh : $d > 9$, trái với (*). Vậy không có đa diện $\mathcal{H}$ như thế.



Hình 8

20. a) Nếu mọi mặt đều có số cạnh lớn hơn 5 thì $m_3 = m_4 = m_5 = 0$ nên ta có

$2c = 6m_6 + 7m_7 + 8m_8 + ... \geq 6(m_6 + m_7 + ...) = 6m$, vậy $c \geq 3m$.

Vì $2c = 3d_3 + 4d_4 + 5d_5 + ... \geq 3(d_3 + d_4 + ...) = 3d$ nên $2c \geq 3d$.

Từ $c \geq 3m$ và $2c \geq 3d$ ta suy ra $3c \geq 3m + 3d$ hay $m - c + d \leq 0$, mâu thuẫn với định lí Euler rằng $d - c + m = 2$.

b) Lập luận tương tự.

c) Trong trường hợp này ta có

$$2c = 3m_3 + 5m_5 + ... + (2k+1)m_{2k+1},$$

trong đó $m = m_3 + m_5 + ... + m_{2k+1}$ là số lẻ. Ta có :

$$2c = 3(m_3 + m_5 + ... + m_{2k+1}) + 2(m_5 + 2m_7 + ... + (k-1)m_{2k+1})$$

hay $2c = 3m + 2\left(m_5 + 2m_7 + ... + (k-1)m_{2k+1}\right)$.

Vì m là số lẻ nên vế phải là số lẻ, còn vế trái là số chẵn, do đó đẳng thức không xảy ra.

21. Ta có $d = m = 7$. Theo định lí Euler thì $c = d + m - 2 = 12$. Hiển nhiên là $m_k = 0$ với $k \geq 7$, vì nếu không thì $m > 7$. Số mặt là lục giác nhiều lắm là bằng 1 (vì nếu không thì $d > 7$).

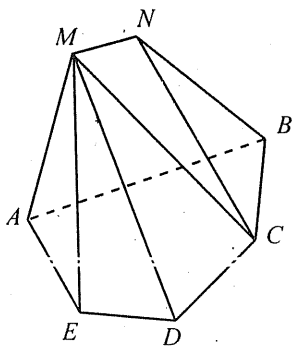
Nếu có một mặt là lục giác thì khối đa diện $\mathcal{H}$ là khối chóp lục giác $S.ABCDEF$.

Nếu không có mặt lục giác thì $m_3 + m_4 + m_5 = 7$ và

$$2c = 24 = 3m_3 + 4m_4 + 5m_5$$
$$= 3(m_3 + m_4 + m_5) + m_4 + 2m_5$$
$$= 3 \times 7 + m_4 + 2m_5.$$

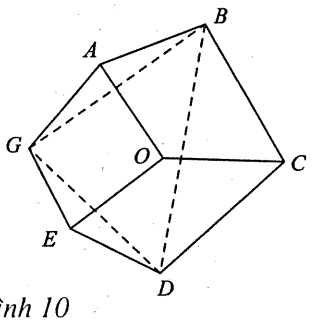
Suy ra $m_4 = 3 - 2m_5$.

Nếu $m_5 = 1$ thì $m_4 = 1$, và $m_3 = 5$. Khi đó khối đa diện $\mathcal{H}$ có dạng như hình 9. Nó có 1 mặt là ngũ giác $ABCDE$, 1 mặt là tứ giác $ABMN$, 5 mặt tam giác là AME, EMD, DMC, CMN, BNC.



Hình 9

Nếu $m_5 = 0$ thì $m_4 = 3$ và $m_3 = 4$. Khối đa diện $\mathscr{H}$ có dạng như hình 10. Nó có 7 mặt gồm 3 tứ giác $OABC$, $OCDE$, $OEGA$ và 4 tam giác : ABG, BCD, DEG, BDG.



Hình 10

§2. PHÉP DỜI HÌNH TRONG KHÔNG GIAN

22. Giả sử phép dời hình f có bốn điểm bất động A, B, C, D không đồng phẳng. Nếu f không phải là phép đồng nhất thì có một điểm M không trùng với ảnh M' của nó. Vì phép dời hình f biến các điểm A, B, C, D, M lần lượt thành các điểm A, B, C, D và M' nên $AM = AM'$, $BM = BM'$, $CM = CM'$, $DM = DM'$.

Vì M và M' phân biệt nên bốn điểm A, B, C, D phải nằm trên mặt phẳng trung trực của MM', trái với giả thiết là bốn điểm đó không đồng phẳng.

Vậy f biến mọi điểm M thành chính nó, suy ra f là phép đồng nhất.

23. Nếu $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA}$ thì ba điểm O, A, M thẳng hàng, do đó ba điểm O', A', M' thẳng hàng. Hai điểm O, A phân biệt nên O' khác A'. Suy ra có số k' sao cho $\overrightarrow{O'M'} = k'\overrightarrow{O'A'}$. Vì phép dời hình f biến O, A, M lần lượt thành O', A', M' nên $OM = O'M'$, $OA = O'A'$, $MA = M'A'$.

Vì $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA}$ nên $OM = |k|OA$, do đó ta có $O'M' = |k|O'A'$. Vậy $|k'| = |k|$.

Do tính chất f bảo tồn thứ tự của ba điểm thẳng hàng O, A, M nên $k' = k$. Vậy $\overrightarrow{O'M'} = k\overrightarrow{O'A'}$.

24. Đặt $x\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM_1}$, $y\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM_2}$. Giả sử phép dời hình f biến các điểm M_1, M_2 lần lượt thành các điểm M_1', M_2' thì theo bài toán 23, ta có $x\overrightarrow{O'A'} = \overrightarrow{O'M_1'}$, $y\overrightarrow{O'B'} = \overrightarrow{O'M_2'}$.

Mặt khác vì OM_1MM_2 là hình bình hành nên $O'M_1'M'M_2'$ cũng là hình bình hành. Suy ra $\overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{O'M_1'} + \overrightarrow{O'M_2'} = x\overrightarrow{O'A'} + y\overrightarrow{O'B'}$.

25. a) Giả sử điểm M thay đổi trên đường thẳng d cố định. Lấy hai điểm phân biệt A, B trên d và gọi A' và B' lần lượt là ảnh của A, B qua phép dời hình f. Khi đó

nếu M nằm trên d và $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ thì ảnh của M là điểm M' sao cho $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{A'B'}$. Gọi O là trung điểm của AA' và I là trung điểm của MM' thì : $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A'M'}\right) = \frac{k}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'}\right)$. Từ đó suy ra

+ Nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'} = \vec{0}$ thì quỹ tích I là một điểm O.

+ Nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'} = \vec{u} \neq \vec{0}$ thì quỹ tích I là đường thẳng đi qua điểm O và song song với vectơ $\vec{u}$.

b) Lấy ba điểm O, A, B không thẳng hàng và nằm trong mp(α). Gọi O', A', B' lần lượt là ảnh của O, A, B qua phép dời hình f. Với mỗi điểm M trên mp(α), ta có các số x, y sao cho $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$. Khi đó phép dời hình f biến điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{O'M'} = x\overrightarrow{O'A'} + y\overrightarrow{O'B'}$

Gọi P là trung điểm của OO' và I là trung điểm của MM', ta có

$$\overrightarrow{PI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{O'M'}\right) = \frac{1}{2}\left(x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + x\overrightarrow{O'A'} + y\overrightarrow{O'B'}\right)$$

$$= \frac{x}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O'A'}\right) + \frac{y}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O'B'}\right).$$

Đặt $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O'A'}\right) = \vec{u}$ và $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O'B'}\right) = \vec{v}$ thì ta có $\overrightarrow{PI} = x\vec{u} + y\vec{v}$. Có thể xảy ra các trường hợp sau đây :

+ Nếu hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ không cùng phương thì quỹ tích I là mặt phẳng đi qua điểm P và song song với giá của các vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

+ Nếu $\vec{u} = \vec{0}$ và $\vec{v} \neq \vec{0}$ (hoặc $\vec{v} = \vec{0}$ và $\vec{u} \neq \vec{0}$, hoặc $\vec{u}, \vec{v}$ khác 0 nhưng cùng phương) thì quỹ tích I là đường thẳng đi qua P song song với giá của $\vec{v}$ (hoặc $\vec{u}$, hoặc cả $\vec{u}$ và $\vec{v}$).

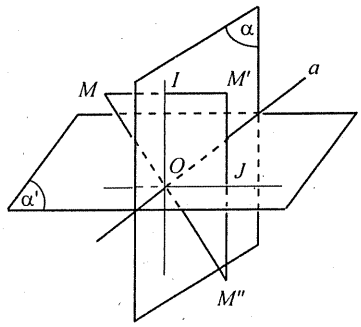
+ Nếu $\vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$ thì $\overrightarrow{PI} = \vec{0}$, quỹ tích I chỉ là một điểm P.

26. a) Giả sử $Đ$ và $Đ'$ là các phép đối xứng tâm lần lượt có tâm là O và O'. Với mỗi điểm M và $M' = Đ(M)$, $M'' = Đ'(M')$ thì

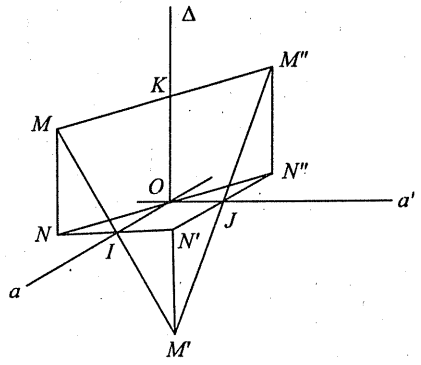
$$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{OM'} + 2\overrightarrow{M'O'} = 2\overrightarrow{OO'}.$$

Vậy hợp thành của $Đ$ và $Đ'$ biến M thành M'' là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = 2\overrightarrow{OO'}$.

b) Gọi (α) và (α') là hai mặt phẳng vuông góc với nhau, cắt nhau theo đường thẳng a (h.11), $Đ_\alpha$ và $Đ_{\alpha'}$ là các phép đối xứng qua (α) và (α'). Với mỗi điểm M, ta lấy $M' = Đ_\alpha(M)$ và $M'' = Đ_{\alpha'}(M')$. Nếu gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với a (tức là vuông góc với cả hai mặt phẳng α và α') thì mp(P) cũng đi qua M' và M''. Nếu ta gọi I và J lần lượt là trung điểm của MM' và $M'M''$ và O là giao điểm của mp(P) với đường thẳng a thì dễ thấy rằng tứ giác $OIM'J$ là hình chữ nhật và O là trung điểm của MM''. Như vậy hợp thành của $Đ_\alpha$ và $Đ_{\alpha'}$ biến M thành M'' là phép đối xứng qua đường thẳng a.



Hình 11



Hình 12

c) Giả sử a và a' là hai đường thẳng vuông góc với nhau và cắt nhau ở O (h.12), $Đ_a$ và $Đ_{a'}$ là các phép đối xứng qua a và a'. Với mỗi điểm M ta lấy $M' = Đ_a(M)$ và $M'' = Đ_{a'}(M')$.

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua a và a', Δ là đường thẳng vuông góc với (α) tại O. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của MM' và $M'M''$, gọi N, N', N'' lần lượt là hình chiếu của M, M', M'' trên mp(α).

Khi đó dễ thấy rằng $OIN'J$ là hình chữ nhật và O là trung điểm của NN''. Vì $MM''N''N$ cũng là hình chữ nhật nên trung điểm K của MM'' nằm trên Δ và $MM'' \perp \Delta$. Như vậy hợp thành của $Đ_a$ và $Đ_{a'}$ biến M thành M'' là phép đối xứng qua đường thẳng Δ.

27. a) Nếu điểm M thuộc mp(ABC) thì điểm $M' = f(M)$ cũng thuộc mp(ABC). Ta có $AM = AM'$, $BM = BM'$, $CM = CM'$. Nếu M khác M' thì xét trong mp(ABC), ba điểm A, B, C phải nằm trên đường trung trực của MM', trái với giả thiết là A, B, C không thẳng hàng. Vậy M' trùng với M hay M là điểm bất động.

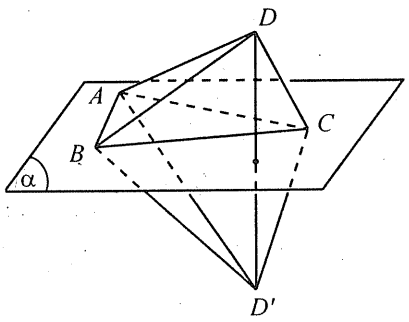
b) Lấy một điểm D nằm ngoài mp(ABC) và $D' = f(D)$ (h.13), ta có

$$DA = D'A,\ DB = D'B,\ DC = D'C.$$

Xảy ra hai trường hợp : D trùng D' và D khác D'.

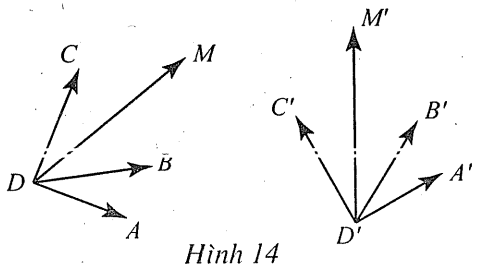
Nếu D trùng D' thì f có 4 điểm bất động A, B, C, D, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng nên f là phép đồng nhất.

Nếu D và D' khác nhau thì mp(ABC) là mặt phẳng trung trực của D và D', Vậy f là phép đối xứng qua mp(ABC).



Hình 13

28. Ta đặt $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$ và $\vec{a'} = \overrightarrow{D'A'}$, $\vec{b'} = \overrightarrow{D'B'}$, $\vec{c'} = \overrightarrow{D'C'}$ (h.14). Với mỗi điểm M trong không gian, ta có ba số x, y, z xác định sao cho $\overrightarrow{DM} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, và do đó có một điểm M' xác định sao cho $\overrightarrow{D'M'} = x\vec{a'} + y\vec{b'} + z\vec{c'}$. Như vậy ta có một phép biến hình f biến điểm M thành điểm M'.



Hình 14

Nếu $x = y = z = 0$ thì điểm M trùng điểm D và điểm M' trùng điểm D', như vậy f biến điểm D thành điểm D'.

Nếu $x=1, y=z=0$ thì điểm M trùng điểm A và điểm M' trùng điểm A', như vậy f biến điểm A thành điểm A', tương tự f biến B thành B' và biến C thành C'. Bây giờ ta chứng minh rằng f là phép dời hình. Giả sử có điểm N và $N'=f(N)$ mà $\overrightarrow{DN}=x'\vec{a}+y'\vec{b}+z'\vec{c}$, suy ra $\overrightarrow{D'N'}=x'\overrightarrow{a'}+y'\overrightarrow{b'}+z'\overrightarrow{c'}$.

Khi đó ta có : $\overrightarrow{MN}=(x'-x)\vec{a}+(y'-y)\vec{b}+(z'-z)\vec{c}$ và do đó

$$MN^2=(x'-x)^2\vec{a}^2+(y'-y)^2\vec{b}^2+(z'-z)^2\vec{c}^2+$$
$$+2(x'-x)(y'-y)\vec{a}.\vec{b}+2(y'-y)(z'-z)\vec{b}.\vec{c}+2(z'-z)(x'-x)\vec{c}.\vec{a}$$

$$M'N'^2=(x'-x)^2\overrightarrow{a'}^2+(y'-y)^2\overrightarrow{b'}^2+(z'-z)^2\overrightarrow{c'}^2+$$
$$+2(x'-x)(y'-y)\overrightarrow{a'}.\overrightarrow{b'}+2(y'-y)(z'-z)\overrightarrow{b'}.\overrightarrow{c'}+2(z'-z)(x'-x)\overrightarrow{c'}.\overrightarrow{a'}$$

Vì hai tứ diện có các cạnh tương ứng bằng nhau nên ta có

$$\vec{a}^2=\overrightarrow{a'}^2\ ,\vec{b}^2=\overrightarrow{b'}^2,\vec{c}^2=\overrightarrow{c'}^2,\vec{a}.\vec{b}=\overrightarrow{a'}.\overrightarrow{b'},\vec{b}.\vec{c}=\overrightarrow{b'}.\overrightarrow{c'},\vec{c}.\vec{a}=\overrightarrow{c'}.\overrightarrow{a'}.$$

Từ đó suy ra $MN=M'N'$ và do đó f là phép dời hình.

Bây giờ ta chứng minh rằng không có phép dời hình f' nào khác f cũng biến các điểm A, B, C, D thành các điểm A', B', C', D'. Thật vậy, nếu có phép f' như thế thì vì f' khác f nên phải có một điểm M sao cho $M'=f(M)$ và $M"=f(M)$ là hai điểm khác nhau. Vì phép dời hình f biến A, M thành A', M' nên $A'M'=AM$, vì phép dời hình f' biến A, M thành A', $M"$ nên $A'M"=AM$. Vậy $A'M'=A'M"$, tương tự ta có $B'M'=B'M"$, $C'M'=C'M"$, $D'M'=D'M"$. Vì M và $M"$ khác nhau nên từ đó suy ra bốn điểm A', B', C', D' nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng $M'M"$. Vô lí.

29. ĐS. Các mặt phẳng trung trực của các cạnh.

30. ĐS :

- Các đường thẳng đi qua tâm O và trung điểm của một cạnh (cũng là đi qua trung điểm của hai cạnh đối diện). Có 6 đường thẳng như thế.
- Các đường thẳng đi qua tâm O và tâm của một mặt bên (cũng là đi qua tâm của hai mặt đối diện). Có 3 đường thẳng như thế.

31. ĐS : Hai đỉnh của hình bát diện đều gọi là *đối diện* nếu chúng không cùng thuộc một cạnh. Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là *đường chéo* của hình

bát diện đều. Có ba đường chéo với độ dài bằng nhau và đôi một vuông góc với nhau.

Tâm đối xứng : là giao điểm ba đường chéo, ta gọi đó là tâm hình bát diện đều

Trục đối xứng :

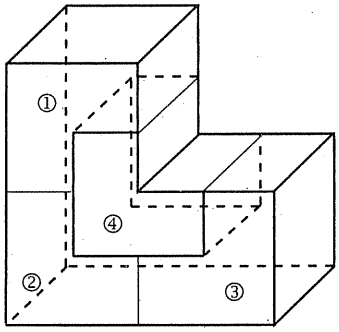
- Các đường thẳng đi qua tâm và một đỉnh (cũng là các đường chéo). Có ba đường thẳng như vậy.
- Các đường thẳng đi qua tâm và trung điểm của một cạnh (cũng là đi qua trung điểm của hai cạnh song song). Có 6 đường thẳng như thế.

Mặt phẳng đối xứng :

- Các mặt phẳng đi qua tâm và một cạnh (cũng là đi qua hai đường chéo). Có 3 mặt phẳng như thế.
- Các mặt phẳng trung trực của một cạnh bên (cũng là mặt phẳng trung trực của hai cạnh song song). Có 6 mặt phẳng như thế.

32. a) Ta có thể chia $\mathscr{H}$ thành 3 khối lập phương đơn vị và hiển nhiên có thể chia mỗi khối lập phương thành hai khối đa diện bằng nhau sao cho ta nhận được 6 khối đa diện bằng nhau.

b) $\mathscr{H}$ là một hình lăng trụ có đáy hình chữ L hợp thành bởi ba hình vuông đơn vị. Đa giác đáy có thể phân chia thành 4 đa giác bằng nhau như hình 15 và từ đó suy ra $\mathscr{H}$ có thể phân chia thành bốn hình lăng trụ bằng nhau có chiều cao bằng 1.



Hình 15

33. Khối lập phương $\mathscr{H}$ có thể xem là do 7 khối lập phương đơn vị ghép lại với nhau, và 7 khối lập phương đó có một đỉnh chung duy nhất A. Bây giờ ta hình dung rằng mỗi một khối lập phương đó cũng được phân thành 8 khối lập phương bằng nhau và bỏ đi khối lập phương có đỉnh A. Khi đó 7 khối lập phương đơn vị sau khi bỏ đi khối lập phương ở góc A trở thành 7 khối đa diện bằng nhau, còn 7 khối lập phương bỏ đi ở đỉnh A làm thành khối đa diện thứ 8 bằng 7 khối đa diện nói trên.

34. Giả sử V là phép vị tự tâm O tỉ số k.

Gọi a là một đường thẳng nào đó. Trên a lấy hai điểm phân biệt A và B, và gọi A', B' là ảnh của chúng. Khi đó ảnh của đường thẳng a qua phép vị tự V chính là đường thẳng a' đi qua hai điểm A' và B'.

Vì $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$ nên

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA} = k\left(\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'}\right) = k\overrightarrow{A'B'}.$$

Từ đó suy ra hai đường thẳng a và a' song song với nhau hoặc trùng nhau.

Gọi α là một mặt phẳng nào đó. Trên α lấy ba điểm không thẳng hàng A, B, C và gọi A', B', C' là ảnh của chúng. Khi đó ảnh của mặt phẳng α qua phép vị tự V chính là mặt phẳng đi qua ba điểm A', B' và C'. Theo trên ta có $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{AC}$ nên hai mặt phẳng α và α' song song với nhau hoặc trùng nhau.

35. Đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{a}, \overrightarrow{DB} = \vec{b}, \overrightarrow{DC} = \vec{c}$ và $\overrightarrow{D'A'} = \vec{a'}, \overrightarrow{D'B'} = \vec{b'}, \overrightarrow{D'C'} = \vec{c'}$ và kí hiệu

$$a = DA = \left|\vec{a}\right|,\ b = DB = \left|\vec{b}\right|,\ c = DC = \left|\vec{c}\right|,$$

$$a' = D'A' = \left|\vec{a'}\right|,\ b' = D'B' = \left|\vec{b'}\right|,\ c' = D'C' = \left|\vec{c'}\right|.$$

Khi đó ta có $a' = ka, b' = kb, c' = kc$ và

$$\widehat{ADB} = \widehat{A'D'B'}, \widehat{BDC} = \widehat{B'D'C'}, \widehat{CDA} = \widehat{C'D'A'}.$$

Ta xác định phép biến hình F biến mỗi điểm M thành điểm $F(M) = M'$ như sau.

Vì ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng nên với mỗi điểm M có duy nhất bộ ba số x, y, z sao cho $\overrightarrow{DM} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Ta xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{D'M'} = x\vec{a'} + y\vec{b'} + z\vec{c'}$. Tương tự , đối với điểm N nếu $\overrightarrow{DN} = x'\vec{a} + y'\vec{b} + z'\vec{c}$ thì điểm N' được xác định sao cho $\overrightarrow{D'N'} = x'\vec{a'} + y'\vec{b'} + z'\vec{c'}$.

Khi đó ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DM} = (x' - x)\vec{a} + (y' - y)\vec{b} + (z' - z)\vec{c}$

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{D'N'} - \overrightarrow{D'M'} = (x' - x)\vec{a'} + (y' - y)\vec{b'} + (z' - z)\vec{c'}.$$

Sau đó bằng cách tính $\overrightarrow{MN}^2$ và $\overrightarrow{M'N'}^2$ (dùng công thức tính tích vô hướng của hai vecơ), ta dễ dàng suy ra $\overrightarrow{M'N'}^2 = k^2\overrightarrow{MN}^2$,tức là $M'N' = kMN$. Vậy F là một phép đồng dạng.

Ngoài ra dễ dàng thấy rằng phép đồng dạng F biến A thành A' (khi $x=1, y=z=0$), biến B thành B' (khi $y=1, x=z=0$), biến C thành C' (khi $z=1, x=y=0$), biến D thành D' (khi $x=y=z=0$).

Để chứng minh tính duy nhất của F, ta giả sử có phép đồng dạng F' khác với F cũng biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm A', B', C', D'. Khi đó phải có một điểm M sao cho $M' = F(M)$ và $M'' = F'(M)$ là hai điểm phân biệt. Khi đó ta có $A'M' = kAM$ và $A'M'' = kAM$ nên $A'M' = A'M''$. Tương tự ta có $B'M' = B'M''$, $C'M' = C'M''$, $D'M' = D'M''$.

Như vậy bốn điểm A', B', C', D' cùng cách đều hai điểm phân biệt M' và M'', do đó bốn điểm đó đồng phẳng, trái với giả thiết $A'B'C'D'$ là hình tứ diện.

36. *Chứng minh.* Cho phép đồng dạng F với tỉ số $k > 0$. Ta xét một hình tứ diện nào đó $ABCD$ và gọi $A'B'C'D'$ là ảnh của tứ diện đó, tức là

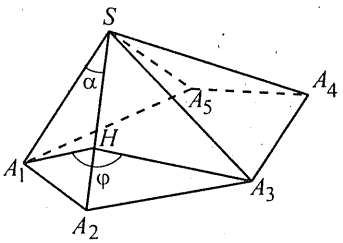
$$A'B' = kAB,\ B'C' = kBC,\ C'D' = kCD,$$

$$D'A' = kDA,\ A'C' = kAC,\ B'D' = kBD.$$

Dùng một phép vị tự V nào đó với tỉ số k, ta biến tứ diện $ABCD$ thành tứ diện $A''B''C''D''$ có các cạnh tương ứng bằng các cạnh của tứ diện $ABCD$. Theo bài tập 28, có phép dời hình F' biến tứ diện $A''B''C''D''$ thành tứ diện $A'B'C'D'$. Hợp thành của phép vị tự V và phép dời hình F' cố nhiên là một đồng dạng biến tứ diện $ABCD$ thành tứ diện $A'B'C'D'$ và hợp thành đó chính là phép đồng dạng F đã cho.

§3. HÌNH ĐA DIỆN ĐỀU VÀ KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

37. Giả sử $\mathcal{H}$ là hình đa diện đều loại $\{p;q\}$ có cạnh bằng a. Gọi S là một đỉnh nào đó và $SA_1, SA_2, ..., SA_q$ là q cạnh xuất phát từ đỉnh đó (h.16). Theo định nghĩa, ta có hình chóp đều q-giác là $S.A_1A_2...A_q$.



Hình 16

Gọi α các góc phẳng ở đỉnh S thì α là góc của p-giác đều nên $\alpha = \left(1 - \frac{2}{p}\right)\pi$.

Từ đó ta có : $A_1A_2 = A_2A_3 = ... = 2SA_1 \sin\frac{\alpha}{2} = 2a\sin\left(1 - \frac{2}{p}\right)\frac{\pi}{2} = 2a\cos\frac{\pi}{p}$.

Đa giác $A_1A_2...A_q$ là q-giác đều nên $\widehat{A_1A_2A_3} = \left(1-\frac{2}{q}\right)\pi$. Từ tam giác cân $A_1A_2A_3$ đỉnh A_2 ta có :

$$A_1A_3 = 2A_1A_2.\sin\frac{\widehat{A_1A_2A_3}}{2} = 4a\cos\frac{\pi}{p}\sin\left(1-\frac{2}{q}\right)\frac{\pi}{2} = 4a\cos\frac{\pi}{p}\cos\frac{\pi}{q}.$$

Kẻ $A_1H \perp SA_2$ thì $A_3H \perp SA_2$, do đó $\varphi = \widehat{A_1HA_3}$ là góc phẳng của nhị diện cạnh SA_2. Ta có :

$$A_1H = A_3H = SA_1\sin\alpha = a\sin\left(1-\frac{2}{p}\right)\pi = a\sin\frac{2\pi}{p}.$$

Trong tam giác cân A_1HA_3 đỉnh H ta có :

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{H}{2} = \frac{A_1A_3}{2} : A_1H = \frac{2a\cos\frac{\pi}{p}\cos\frac{\pi}{q}}{a\sin\frac{2\pi}{p}} = \frac{\cos\frac{\pi}{q}}{\sin\frac{\pi}{p}}.$$

Suy ra $\varphi = 2\text{arc}\sin\left(\dfrac{\cos\frac{\pi}{q}}{\sin\frac{\pi}{p}}\right)$.

38. Giả sử $\mathscr{H}$ là đa diện đều loại $\{p,q\}$ với cạnh a. Gọi s là một mặt của $\mathscr{H}$ có tâm I (tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp p-giác đều s) và có một cạnh là AB. Khi đó ta có $R_0 = OA = OB$, $R_1 = OK$ trong đó K là trung điểm của AB, và $R_2 = OI$ (O là tâm của $\mathscr{H}$, R_0, R_1, R_2 lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp, nửa nội tiếp và nội tiếp $\mathscr{H}$.

Vì s là p-giác đều tâm I nên AIB là tam giác cân có góc ở đỉnh là $\widehat{AIB} = \frac{2\pi}{p}$,

do đó $IK = AK.\cot\widehat{AIK} = \frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{p}$ và $IA = \frac{AK}{\sin\widehat{AIK}} = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{p}}$.

Chú ý rằng nếu gọi φ là góc nhị diện của $\mathscr{H}$ thì $\widehat{OKI} = \frac{\varphi}{2}$, nên từ tam giác vuông OIK ta có :

$$R_1 = OK = \frac{IK}{\cos K} = \frac{IK}{\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{a\cot\frac{\pi}{p}}{2\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

Vì $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{q}}{\sin\frac{\pi}{p}}$ (xem bài 34) nên $\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{p} - \cos^2\frac{\pi}{q}}}{\sin\frac{\pi}{p}}$.

Vậy $R_1 = \frac{a\cos\frac{\pi}{p}}{2\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{p} - \cos^2\frac{\pi}{q}}}$.

Ta có : $R_2 = OI = R_1\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{a\cos\frac{\pi}{p}}{2\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{p} - \cos^2\frac{\pi}{q}}} \cdot \frac{\cos\frac{\pi}{q}}{\sin\frac{\pi}{p}}$.

Vậy $R_2 = \frac{a\cot\frac{\pi}{p}\cos\frac{\pi}{q}}{2\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{p} - \cos^2\frac{\pi}{q}}}$.

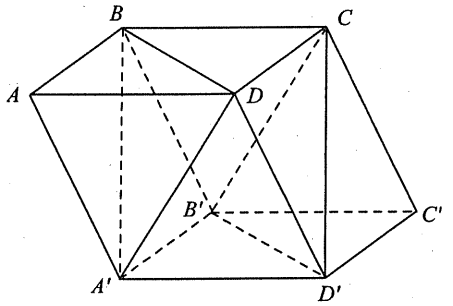
Cuối cùng, trong tam giác vuông OAK ta có :

$$R_0^2 = OA^2 = OK^2 + AK^2 = R_1^2 + \frac{a^2}{4} =$$

$$= \frac{a^2\cos^2\frac{\pi}{p}}{4\left(\sin^2\frac{\pi}{p} - \cos^2\frac{\pi}{q}\right)} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}\left(\frac{\cos^2\frac{\pi}{p}}{\sin^2\frac{\pi}{p} - \cos^2\frac{\pi}{q}} + 1\right).$$

Vậy $R_0 = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\pi}{p}}{\sin^2\frac{\pi}{p} - \cos^2\frac{\pi}{q}} + 1}$.

39. Khối hộp đã cho có thể phân chia thành hai khối tứ diện $ABDA'$, $C'CB'D'$ và khối bát diện với các đỉnh là A', C, B, D', D, B' (h.17).



Hình 17

Dễ dàng thấy rằng hai khối tứ diện $ABDA'$ và $C'CB'D'$ đều có các cạnh bằng a nên chúng là các khối tứ diện đều.

Trong tứ diện đều $ABDA'$ ta có $BD \perp AA'$, mà $AA' // DD'$ nên $BD \perp DD'$ và do đó $BDD'B'$ là hình vuông cạnh a. Ngoài ra vì

$$CB = CB' = CD = CD' = A'B = A'B' = A'D = A'D' = a$$

nên khối bát diện $BB'D'DCA'$ là khối bát diện đều.

40. a) Gọi φ là góc nhị diện của hình tứ diện đều thì dễ thấy rằng $\cos\varphi = \frac{1}{3}$, hay $\varphi = \arccos\frac{1}{3}$ (có thể sử dụng bài 34). Giả sử ta đã lấp đầy không gian bằng các tứ diện đều cạnh a. Lấy một cạnh AB của một tứ diện nào đó. Cạnh AB phải là cạnh chung của các tứ diện lần lượt có chung một mặt. Nói cách khác chung quanh AB phải có một số các tứ diện ghép vào nhau. Nhưng điều đó không xảy ra vì không có số nguyên n nào mà $n.\varphi = 360^o$.

Đối với khối bát diện đều cạnh a cũng lập luận tương tự.

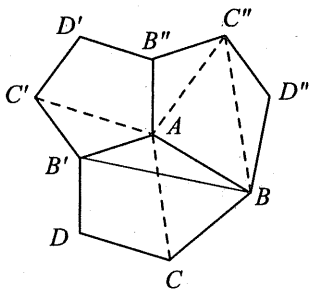
b) Hiển nhiên có thể lấp đầy không gian bởi các hình hộp bằng nhau. Nếu chúng ta lấy các hình hộp như ở bài 36 thì mỗi hình hộp đó được phân thành hai tứ diện đều và một bát diện đều có cạnh bằng nhau. Vậy có thể lấp đầy không gian bằng các khối tứ diện đều cạnh a và các khối bát diện đều cạnh a.

41. Dành cho bạn đọc.

42. Dành cho bạn đọc.

43. a) Đường chéo biên của $\mathscr{H}$ chính là đường chéo của lục giác đều cạnh a. Bởi vậy nó có độ dài là $d = \tau a$ với $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b) (h.18) Lấy ba mặt của $\mathscr{H}$ có chung đỉnh A là ba ngũ giác đều $ABCDB'$, $AB'C'D'B''$ và $AB''C''D''B$. Vì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB''} = \overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AB''}$ nên $\overrightarrow{AB''}.(\overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AB}) = 0$ hay là $\overrightarrow{AB''}.\overrightarrow{BB'} = 0$. Vậy $AB'' \perp BB'$, nhưng vì $BC''//AB''$ nên $BC'' \perp BB'$.



Hình 18

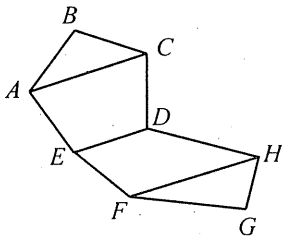
Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB thì dễ thấy rằng (α) cũng là mặt phẳng trung trực của $B'C$ và (α) đi qua C''.

Bởi vậy phép đối xứng qua mp(α) biến BC'' thành AC'' và biến BB' thành AC. Nhưng vì $BC'' \perp BB'$ nên $AC'' \perp AC$.

Chứng minh tương tự, ta có $AC' \perp AC''$ và $AC' \perp AC$. Vậy ba đường chéo biên AC, AC', AC'' đôi một vuông góc.

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có ba đường chéo biên AD, AD', AD'' đôi một vuông góc.

c) Gọi $ABCDE$ là một mặt của $\mathscr{H}$ và AC là một đường chéo biên (h.19) khi đó AC // DE. Cạnh DE còn là cạnh của một mặt nữa mà ta kí hiệu là $DEFGH$ và ta có FH // DE. Vậy hai đường chéo biên AC và FH song song với nhau. Gọi O là tâm đối xứng của $\mathscr{H}$ và gọi A', C', F', H' lần lượt là các điểm đối xứng với các điểm A, C, F, H qua điểm O thì hiển nhiên ta có 4 đường chéo biên song song với nhau là AC, FH, $A'C'$, $F'H'$.



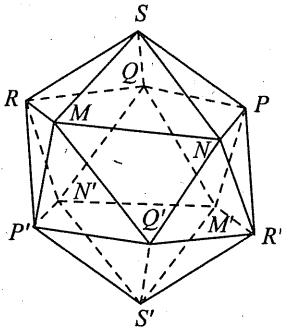
Hình 19

Theo câu b) ta có các đỉnh A, C, F, H, A', C', F', H' của $\mathscr{H}$ sao cho các đoạn thẳng AF, AC và AH' bằng nhau và đôi một vuông góc với nhau. Bởi vậy ta có một hình lập phương với ba cạnh là AC, AF, AH'. Hình lập phương này rõ ràng nội tiếp hình 12 mặt đã cho.

d) Theo chứng minh trên, các cạnh của hình lập phương nội tiếp $\mathscr{H}$ là các đường chéo biên của $\mathscr{H}$. Đa diện $\mathscr{H}$ có 12 mặt, mỗi mặt có 5 đường chéo nên $\mathscr{H}$ có $12 \times 5 = 60$ đường chéo biên. Ta dễ thấy rằng mỗi đường chéo biên

của $\mathscr{H}$ song song với ba và chỉ ba đường chéo biên khác, tức các đường chéo biên được phân ra $60:4=15$ bộ, mỗi bộ gồm 4 đường chéo song song với nhau. Mỗi bộ như thế xác định một hình lập phương nội tiếp và mỗi hình lập phương nội tiếp được xác định bởi ba bộ khác nhau nên ta có tất cả là $15:3=5$ hình lập phương nội tiếp.

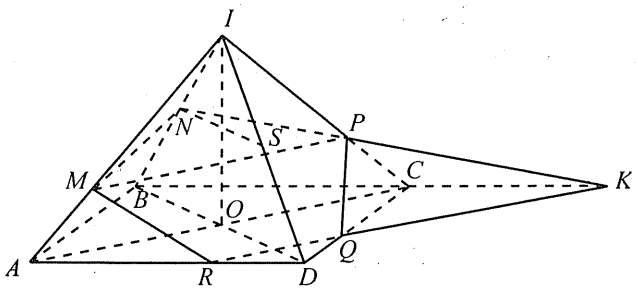
44. a) Ta kí hiệu các cặp đỉnh đối diện của $\mathscr{H}$ là M và M', N và N', P và P', Q và Q', R và R', S và S', sao cho $S.MNPQR$ là ngũ giác đều (xem hình 20). Trong hình chóp đều đó, cạnh bên SQ vuông góc với cạnh đáy MN, nhưng trong ngũ giác đều $QSNR'M'$ ta có $SQ \,//\, M'N$, vậy $MN \perp M'N$, do đó $MNM'N'$ là hình chữ nhật.



Hình 20

b) Có thể lấy ba nhóm đỉnh tạo thành ba hình chữ nhật sau đây : $MNM'N'$, $SQS'Q'$ và $PRP'R'$. Dễ dàng chứng minh các mặt phẳng của các hình chữ nhật đó đôi một vuông góc.

45. a) (h.21)



Hình 21

Từ điều kiện $\dfrac{MI}{MA}=\dfrac{PI}{PC}$, ta suy ra $MP \,//\, AC$.

Từ điều kiện $\dfrac{QC}{QD}=\dfrac{RA}{RD}$, ta suy ra $RQ \,//\, AC$.

Vậy $MP \,//\, RQ$ và do đó bốn điểm M, P, R, Q đồng phẳng. Giả sử các đường thẳng NP và BC cắt nhau tại K, ta có

$$\frac{KC}{KB}\cdot\frac{NB}{NI}\cdot\frac{PI}{PA}=1 \text{ hay } \frac{KC}{KB}=\frac{1}{\tau^2}.$$

Từ đó : $\frac{KC}{KB-KC}=\frac{1}{\tau^2-1}=\frac{1}{\tau}$ (vì $\tau^2-\tau-1=0$ nên $\tau^2-1=\tau$, hay $KC=\frac{a}{\tau}=CQ$ (dễ kiểm tra $CQ=\frac{a\tau}{1+\tau}=\frac{a}{\tau}$) và do đó tam giác CKQ cũng là tam giác vuông cân, tức là đường thẳng QR cũng đi qua K. Như vậy bốn điểm N, P, Q, R cũng đồng phẳng. Tóm lại ta có 5 điểm M, N, P, Q, R đồng phẳng.

Từ $\frac{MI}{MA}=\tau$ ta suy ra $\frac{MI}{MI+IA}=\frac{\tau}{1+\tau}$ và do đó $MI=\frac{\tau a}{1+\tau}$ và $MA=\frac{a}{1+\tau}$.

Chú ý rằng $\tau^2-\tau-1=0$ nên $1+\tau=\tau^2$, ta suy ra $MI=\frac{a}{\tau}$ và $MA=\frac{a}{\tau^2}$.

Tương tự ta có : $NB=\frac{a}{\tau}$, $NI=\frac{a}{\tau^2}$, $PI=\frac{a}{\tau}$, $PC=\frac{a}{\tau^2}$, $QC=\frac{a}{\tau}$, $QD=\frac{a}{\tau^2}$, $RA=\frac{a}{\tau}$, $RD=\frac{a}{\tau^2}$.

Tam giác IMN có góc I bằng 60^o nên

$$MN^2=IM^2+IN^2-2IM.IN\cos 60^o=\frac{a^2}{\tau^2}+\frac{a^2}{\tau^4}-\frac{a^2}{\tau^3}=\frac{(\tau^2-\tau+1)a^2}{\tau^4}=\frac{2a^2}{\tau^4}.$$

Vậy $MN=\frac{a\sqrt{2}}{\tau^2}$. Tương tự ta có : $NP=PQ=MR=\frac{a\sqrt{2}}{\tau^2}$. Cuối cùng vì tam giác DQR vuông cân nên $PQ=RD\sqrt{2}=\frac{a\sqrt{2}}{\tau^2}$. Như vậy là ngũ giác $MNPQR$ có các cạnh bằng nhau và bằng $\frac{a\sqrt{2}}{\tau^2}$.

Phần chứng minh các góc của ngũ giác đó bằng nhau không khó khăn, dành cho học sinh như một bài tập. Vậy $MNPQR$ là ngũ giác đều.

b) Ta tính được $SM=SN=SP=SQ=SR=\frac{a\sqrt{2}}{\tau^2}=RQ$.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

c) Ta vẫn xét hình chóp $I.ABCD$ như đã cho (h.21), gọi O là tâm hình vuông và I' là điểm đối xứng với I qua O, ta được hình bát diện đều $IABCDI'$. Gọi M', N', P', Q', R', S' lần lượt đối xứng với các điểm M, N, P, Q, R, S thì các điểm M', N', P', Q', R', S' lần lượt nằm trên các cạnh $I'C$, $I'D$, $I'A$, AB, BC, $I'B$. Việc chứng minh các điểm M, M', N, N', P, P', Q, Q', R, R', S, S' là đỉnh của hình 20 mặt đều không có gì khó khăn (do đã có kết quả ở câu b).

§4. THỂ TÍCH CÁC KHỐI ĐA DIỆN

46. Mặt phẳng (α) chia không gian thành hai nửa không gian đóng α_1 và α_2 (có (α) là bờ chung). Khi đó mp(α) chia $\mathscr{H}$ thành hai khối đa diện $\mathscr{H}_1$ và $\mathscr{H}_2$ mà $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H} \cap \alpha_1$, $\mathscr{H}_2 = \mathscr{H} \cap \alpha_2$

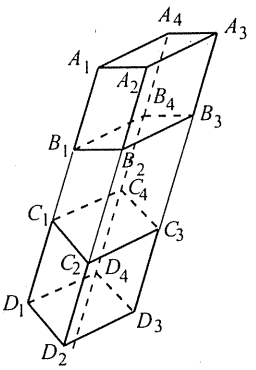
Nếu mp(α) đi qua O thì phép đối xứng qua O biến $\mathscr{H}$ thành $\mathscr{H}$ và biến α_1 thành α_2 nên nó biến $\mathscr{H}_1$ thành $\mathscr{H}_2$, bởi vậy $V(\mathscr{H}_1) = V(\mathscr{H}_2)$.

Ngược lại, nếu mp(α) không đi qua O thì ta gọi (α') là mặt phẳng đi qua O song song với (α), khi đó (α') chia $\mathscr{H}$ thành hai khối $\mathscr{H}_1'$ và $\mathscr{H}_2'$ mà $V(\mathscr{H}_1') = V(\mathscr{H}_2')$. Như vậy hiển nhiên là $V(\mathscr{H}_1) \neq V(\mathscr{H}_2)$, vô lí.

47. Có, đó là mặt phẳng đi qua tâm đối xứng của $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ và $\mathscr{H}_3$.

48. Ta có thể giả sử $\overrightarrow{A_iB_i} = \overrightarrow{C_iD_i} = \vec{u}$ với $i = 1, 2, ..., n$ (h.22).

Như vậy phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ biến khối đa diện $A_1A_2...A_n.C_1C_2...C_n$ thành khối đa diện $B_1B_2...B_n.D_1D_2...D_n$ bởi vậy thể tích của chúng bằng nhau. Ta có

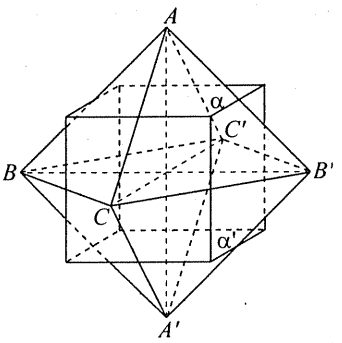


Hình 22

$$V(A_1A_2...A_n.B_1B_2...B_n) = V(A_1A_2...A_n.C_1C_2...C_n) - V(B_1B_2...B_n.C_1C_2...C_n)$$
$$= V(B_1B_2...B_n.D_1D_2...D_n) - V(B_1B_2...B_n.C_1C_2...C_n)$$
$$= V(C_1C_2...C_n.D_1D_2...D_n).$$

49. Gọi các cặp đỉnh đối diện của bát diện đều là A và A', B và B', C và C' (h.23). Ta có $\alpha_A // \alpha_{A'}$ (vì cùng vuông góc với AA'), khoảng cách d giữa α_A và $\alpha_{A'}$ là $d = \dfrac{AA'}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tương tự : $\alpha_B // \alpha_{B'}$, $\alpha_C // \alpha_{C'}$ và khoảng cách giữa α_B và $\alpha_{B'}$, giữa α_C và $\alpha_{C'}$ đều bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Hình 23

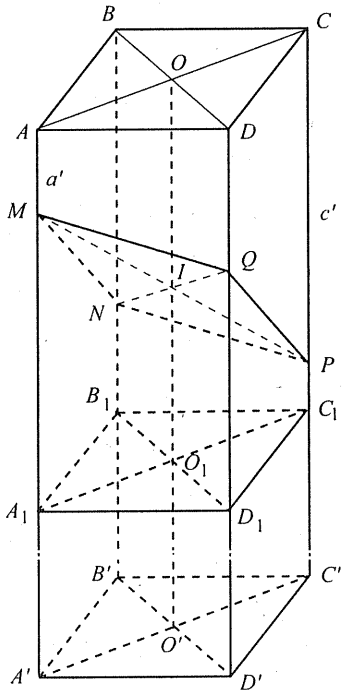
Ngoài ra vì AA', BB', CC' đôi một vuông góc nên các mặt phẳng α_A, α_B, α_C cũng đôi một vuông góc. Bởi vậy 6 mặt phẳng α_A, α_B, α_C, $\alpha_{A'}$, $\alpha_{B'}$, $\alpha_{C'}$ giới hạn ra một hình lập phương $\mathscr{H}$ có cạnh $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Và do đó

$$V(\mathscr{H}) = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}.$$

50. Thiết diện $MNPQ$ là hình bình hành (h.24). Gọi O, O' lần lượt là tâm của các hình chữ nhật $ABCD$ và $A'B'C'D'$, I là tâm của hình bình hành $MNPQ$. Không mất tính tổng quát, giả sử $OI < \dfrac{OO'}{2}$. Ta có

$$OI = \frac{AM + CP}{2} = \frac{a' + c'}{2}.$$

Ta gọi O_1 là điểm đối xứng với O qua I. Qua điểm O_1 dựng mặt phẳng song song với mp$(ABCD)$ cắt các đường thẳng AA', BB', CC', DD' lần lượt tại A_1, B_1, C_1, D_1. Khi đó I là tâm của khối hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Vì mặt phẳng (α) đi qua I nên nó chia khối hộp đó thành hai phần có thể tích bằng nhau. Do đó :



Hình 24

$$V\left(ABCD.MNPQ\right)=\frac{1}{2}V\left(ABCD.A_1B_1C_1D_1\right)=\frac{1}{2}ab(a'+c')$$

và $$V(A'B'C'D'.MNPQ)=V(ABCD.A'B'C'D')-V(ABCD.MNPQ)$$

$$=abc-\frac{1}{2}ab(a'+c')=\frac{1}{2}ab(2c-a'-c').$$

51. Khối đa diện $MNPQ.M'N'P'Q'$ là khối hộp chữ nhật (h.25).

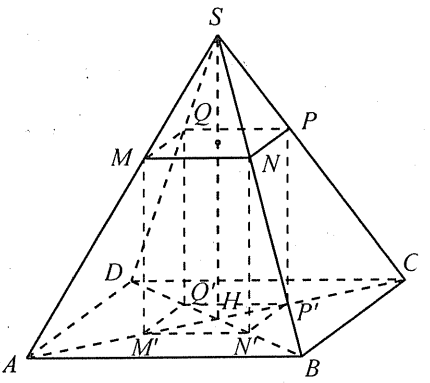
Đặt $\frac{SM}{SA}=x$ thì $S_{MNPQ}=x^2S_{ABCD}$.

Gọi $SH=h$ là đường cao của khối chóp đã cho thì

$$\frac{MM'}{SH}=\frac{MA}{SA}=\frac{SA-SM}{SA}=1-x.$$

Vậy $MM'=(1-x)h$ và do đó

$$V(MNPQ.M'N'P'Q')=x^2\cdot(1-x)hS_{ABCD}.$$



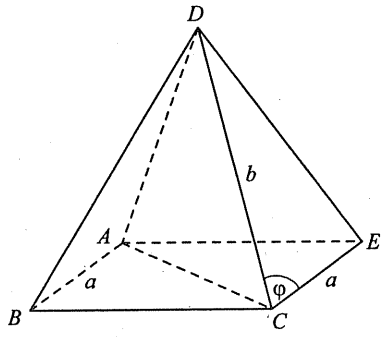
Hình 25

Thể tích V lớn nhất khi $x^2(1-x)$ lớn nhất, tức là khi $x=\frac{2}{3}$.

52. Gọi B là diện tích mặt đáy của $\mathscr{H}$ và h là chiều cao thì $V(\mathscr{H})=Bh$. Chú ý rằng thiết diện thẳng là hình chiếu vuông góc của mặt đáy lên mặt phẳng (α), hãy chứng minh rằng $B=\frac{a}{h}S$.

53. Giả sử tứ diện $ABCD$ có $AB=a$, $CD=b$, khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng d và góc giữa hai đường thẳng đó bằng φ (h.26). Gọi E là điểm sao cho $ABCE$ là hình bình hành thì $V(ABCD)=V(A.ECD)$. Ta có

$$S_{ECD}=\frac{1}{2}EC.DC\sin\widehat{ECD}=\frac{1}{2}ab\sin\varphi.$$

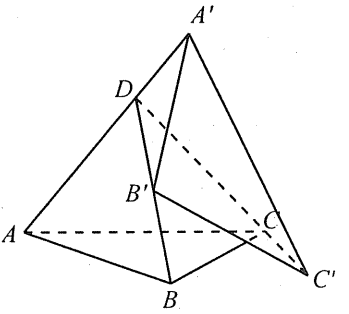


Hình 26

Vì AB // mp(CED) nên khoảng cách từ điểm A tới mp(CED) bằng khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và CD, bởi vậy :

$$V(ABCD) = V(A.CED) = \frac{1}{3} \cdot \frac{ab \sin\varphi}{2} d = \frac{1}{6} abd \sin\varphi .$$

54. (h.27) Hai tứ diện $ABCD$ và $A'BCD$ có chung đáy BCD còn đường cao hạ từ A và A' xuống đáy chung đó tỉ lệ với DA và DA' nên : $\dfrac{V(ABCD)}{V(A'BCD)} = \dfrac{DA}{DA'}$.



Hình 27

Tương tự như vậy ta có

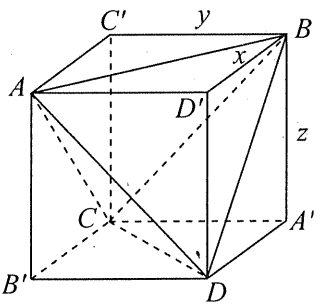
$$\frac{V(A'BCD)}{V(A'B'CD)} = \frac{DB}{DB'}, \quad \frac{V(A'B'CD)}{V(A'B'C'D)} = \frac{DC}{DC'}.$$

Từ đó suy ra :

$$\frac{V(ABCD)}{V(A'B'C'D)} = \frac{V(ABCD)}{V(A'BCD)} \cdot \frac{V(A'BCD)}{V(A'B'CD)} \cdot \frac{V(A'B'CD)}{V(A'B'C'D)} = \frac{DA}{DA'} \cdot \frac{DB}{DB'} \cdot \frac{DC}{DC'}.$$

55. Ba cặp mặt phẳng (mỗi cặp gồm hai mặt phẳng song song) tạo ra một hình hộp mà A, B, C, D là bốn đỉnh (h.28). Ta kí hiệu hình hộp đó là $AC'BD'.B'CA'D$. Dễ thấy rằng đó là hình hộp chữ nhật. Đặt $BD' = x$, $BC' = y$ và $BA' = z$, ta có

$$x^2 + y^2 = c^2 , \; y^2 + z^2 = a^2 , \; z^2 + x^2 = b^2 .$$



Hình 28

Từ đó tính được x, y, z và

$$V(\mathscr{H}) = xyz = \sqrt{\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}} \sqrt{\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2}} \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}} =$$

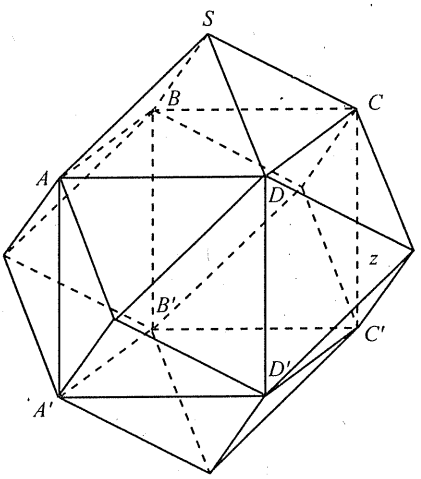
$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(-a^2 + b^2 + c^2\right)\left(a^2 - b^2 + c^2\right)\left(a^2 + b^2 - c^2\right)$$

và $V(ABCD) = \dfrac{V(\mathscr{H})}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{12} \left(-a^2 + b^2 + c^2\right)\left(a^2 - b^2 + c^2\right)\left(a^2 + b^2 - c^2\right)$.

56. Gọi tứ diện đó là $ABCD$ với $BC = a$, $CA = b$ và $AB = c$. Tam giác ABD có cạnh $AB = c$ nên $DB = b$ và $DA = a$ (vì nếu $DB = a$ thì tam giác DBC có hai cạnh bằng a, trái giả thiết), từ đó suy ra $DC = c$. Như vậy tứ diện $ABCD$ có các cạnh đối bằng nhau. Theo bài 52 ta có :

$$V(ABCD) = \frac{\sqrt{2}}{12}\left(-a^2 + b^2 + c^2\right)\left(a^2 - b^2 + c^2\right)\left(a^2 + b^2 - c^2\right).$$

57. Giả sử $ABCD.A'B'C'D'$ là khối lập phương $\mathscr{H}$ (h.29). Với mỗi mặt của $\mathscr{H}$, ví dụ hình vuông $ABCD$ (cạnh a), ta lấy hình chóp đều $S.ABCD$ với S nằm ngoài $\mathscr{H}$ và có chiều cao bằng $\frac{a}{2}$. Khối lập phương $\mathscr{H}$ cùng với 6 khối chóp như vậy tạo thành khối đa diện $\mathscr{H}'$.



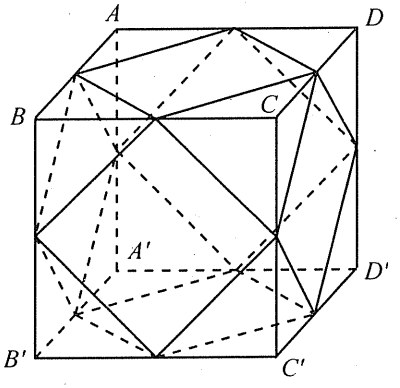
Hình 29

Khối đa diện $\mathscr{H}'$ có :

+ 14 đỉnh (8 đỉnh của $\mathscr{H}$ và 6 đỉnh của 6 hình chóp)
+ 24 cạnh (bằng số cạnh bên của 6 hình chóp : $6 \times 4 = 24$)
+ 12 mặt, mỗi mặt là một hình thoi có cạnh bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$V(\mathscr{H}') = V(\mathscr{H}) + 6.V(S.ABCD) = a^3 + 6 \cdot \frac{1}{6}a^3 = 2a^3.$$

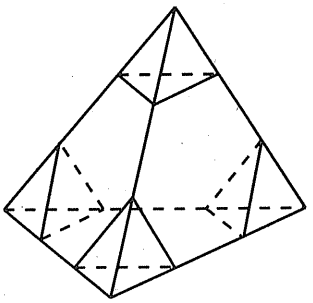
58. (h.30) $\mathscr{H}'$ có 12 đỉnh, có 14 mặt trong đó có 6 mặt là hình vuông cạnh $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (nằm trên 6 mặt của $\mathscr{H}$) và 8 mặt là tam giác đều cạnh $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, có $\frac{4 \times 6 + 8 \times 3}{2} = 24$ cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Hình 30

$$V(\mathscr{H}') = a^3 - 8 \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{5a^3}{6}.$$

59. (h.31) $\mathscr{H}'$ có 12 đỉnh, có 8 mặt trong đó có 4 mặt là lục giác đều cạnh $\frac{a}{3}$, 4 mặt là các tam giác đều cạnh $\frac{a}{3}$, có $\frac{4\times 6+4\times 3}{2}=18$ cạnh.



Hình 31

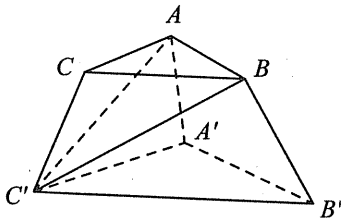
$$V(\mathscr{H}')=V(\mathscr{H})-4\frac{V(\mathscr{H})}{27}=\frac{23}{27}V(\mathscr{H})$$

$$=\frac{23}{27}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3}=\frac{23}{27}\frac{a^3\sqrt{2}}{12}=\frac{23\sqrt{2}}{324}a^3.$$

60. (h.32) Gọi chiều cao của $\mathscr{H}$ là h thì

$$V(\mathscr{H})=\frac{1}{3}\left(S+S'+\sqrt{SS'}\right)h.$$

Mặt phẳng (ABC') chia $\mathscr{H}$ thành hai phần, một phần là hình chóp $C'.ABC$ mà ta kí hiệu là $\mathscr{H}_1$, phần còn lại kí hiệu là $\mathscr{H}_2$.



Hình 32

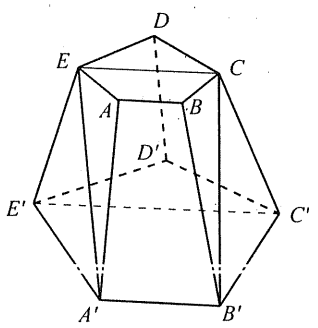
Ta có $V(\mathscr{H}_1)=\frac{1}{3}Sh$ và

$$V(\mathscr{H}_2)=V\left(\mathscr{H}\right)-V(\mathscr{H}_1)=\frac{1}{3}\left(S+S'+\sqrt{SS'}\right)h-\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\left(S'+\sqrt{SS'}\right)h.$$

Vậy $\frac{V(\mathscr{H}_1)}{V\left(\mathscr{H}_2\right)}=\frac{S}{S'+\sqrt{SS'}}$.

61. ĐS : $\frac{7}{24}$.

62. Mặt phẳng $(A'B'C)$ cắt $\mathscr{H}$ theo thiết diện là hình thang cân $A'B'CE$ (h.33) và nó chia $\mathscr{H}$ thành hai khối đa diện: khối đa diện $\mathscr{H}_1$ có các đỉnh là A', B', A, B, C, E, khối đa diện $\mathscr{H}_2$ có các đỉnh A', B', C', D', E', C, D, E. Ta có :



Hình 33

$$V(\mathscr{H}_1)=V\left(A'.ABCE\right)+V\left(A'B'BC\right).$$

Tứ giác $ABCE$ là hình thang cân có

$$EA = AB = BC = a, CE = d = \tau a \ \ (\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2})$$

nên có diện tích : $S_{ABCE} = \frac{a+d}{2}\sqrt{a^2 - \left(\frac{d-a}{2}\right)^2}$

$$= \frac{1}{4}(a+d)\sqrt{3a^2+2ad-d^2} = \frac{a^2}{4}(1+\tau)\sqrt{3+2\tau-\tau^2}\ .$$

Chú ý rằng $\tau^2 - \tau - 1 = 0$ nên $\tau + 1 = \tau^2$, suy ra $S_{ABCE} = \frac{\tau^2\sqrt{2+\tau}\,a^2}{4}$.

Chiều cao của hình chóp $A'.ABCE$ cũng là chiều cao h của hình chóp cụt $\mathcal{H}$ nên $V\left(A'.ABCE\right) = \frac{\tau^2\sqrt{2+\tau}}{12}a^2h$.

Theo bài 50, ta có : $V(A'B'BC) = \frac{1}{6}A'B'.BC.h.\sin\widehat{ABC} = \frac{1}{3}a^2h\sin\widehat{ABC}$.

Chú ý rằng tam giác cân ABC có $AB = BC = a, AC = d = \tau a$ nên

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB.BC} = \frac{2-\tau^2}{2} = \frac{1-\tau}{2}.$$

Suy ra $\sin\widehat{ABC} = \sqrt{1-\left(\frac{1-\tau}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2+\tau}}{2}$. Vậy $V(A'B'BC) = \frac{\sqrt{2+\tau}}{6}a^2h$.

Suy ra :

$$V(\mathcal{H}_1) = \frac{\tau^2\sqrt{2+\tau}}{12}a^2h + \frac{\sqrt{2+\tau}}{6}a^2h = \frac{\sqrt{2+\tau}\,(\tau^2+2)a^2h}{12} = \frac{\sqrt{2+\tau}\,(\tau+3)}{12}a^2h.$$

Nếu gọi diện tích ngũ giác đều $ABCDE$ là S thì diện tích ngũ giác đều $A'B'C'D'E'$ là $4S$ nên hình chóp cụt $\mathcal{H}$ đã cho có thể tích

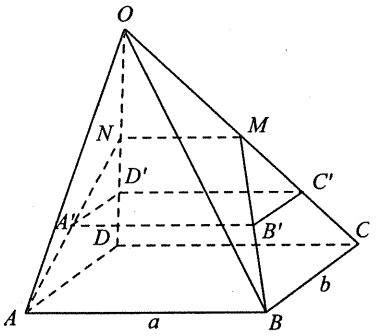
$$V(\mathcal{H}) = \frac{1}{3}\left(S + 4S + \sqrt{S.4S}\right)h = \frac{7}{3}Sh.$$

Dễ tính được $S = \frac{(2+\tau)^{\frac{3}{2}}}{4}a^2$ nên $V(\mathcal{H}) = \frac{7(2+\tau)^{\frac{3}{2}}}{12}a^2h$. Vậy :

$$\frac{V(\mathcal{H}_2)}{V\left(\mathcal{H}_1\right)} = \frac{V(\mathcal{H})}{V\left(\mathcal{H}_1\right)} - 1 = \frac{7(2+\tau)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2+\tau}\left(\tau+3\right)} - 1 = \frac{7(\tau+2)}{\tau+3} - 1 = \frac{6\tau+11}{\tau+3}.$$

Vậy $\dfrac{V(\mathscr{H}_2)}{V(\mathscr{H}_1)}=\dfrac{6\tau+11}{\tau+3}$.

63. Giả sử $AB = a$ và $BC = b$ (h.34). Mặt phẳng (ABM) đi qua trung điểm N của cạnh OD, và mặt phẳng đó chia hình chóp đã cho thành hai phần, một phần là hình phỏng lăng trụ $MN.ABCD$ mà ta gọi là $\mathscr{H}$. Gọi $A'B'C'D'$ là thiết diện trung bình của $\mathscr{H}$ thì



Hình 34

$$A'B'=\frac{AB+MN}{2}=\frac{a+\dfrac{a}{2}}{2}=\frac{3a}{4},\quad B'C'=\frac{BC}{2}=\frac{b}{2}.$$

Nếu coi S là diện tích hình bình hành $ABCD$ và S' là diện tích hình bình hành $A'B'C'D'$ thì $\dfrac{S'}{S}=\dfrac{A'B'}{AB}\cdot\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{8}$

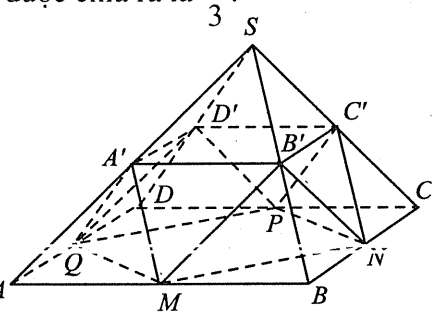
Vậy $S'=\dfrac{3S}{8}$. Vì chiều cao của $\mathscr{H}$ là $\dfrac{h}{2}$ nên

$$V(\mathscr{H})=\frac{1}{6}\left(S+4S'\right)\frac{h}{2}=\frac{1}{6}\left(S+3\frac{S}{2}\right)\frac{h}{2}=\frac{5Sh}{24}.$$

Vì thể tích hình chóp là $\dfrac{Sh}{3}$ nên phần thứ hai được chia ra có thể tích là $\dfrac{Sh}{3}-\dfrac{5Sh}{24}=\dfrac{3Sh}{24}$. Vậy tỉ số thể tích hai phần được chia ra là $\dfrac{5}{3}$.

64. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD, và M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA (h.35).

Khối đa diện $\mathscr{H}$ là một khối phỏng lăng trụ với hai đáy là hai hình vuông $A'B'C'D'$ và $MNPQ$, các mặt bên là các tam giác $A'B'M$, $B'MN$, $B'C'N$, $C'NP$, $C'D'P$, $D'PQ$, $D'A'Q$, $A'QM$.

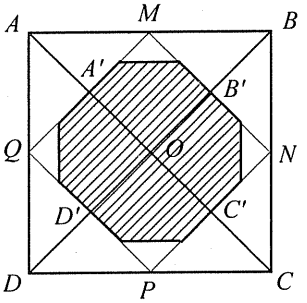


Hình 35

Ta dễ thấy rằng thiết diện trung bình của $\mathscr{H}$ là một hình 8 cạnh có tâm đối xứng O đồng thời là tâm đường tròn ngoại tiếp. Nếu ta đánh số thứ tự các cạnh liên tiếp là 1, 2,..., 8 bắt đầu từ cạnh song song với MN thì các cạnh số lẻ có độ dài bằng $\frac{a\sqrt{2}}{4}$, các cạnh số chẵn có độ dài bằng $\frac{a}{4}$. Có thể dựng hình 8 cạnh ấy như sau (h.36) :

Lấy hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O. Gọi A', B', C', D' là trung điểm của OA, OB, OC, OD, và M, N, P, Q là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Khi đó đỉnh của hình 8 cạnh nói trên là trung điểm các đoạn thẳng $A'M$, MB', $B'N$, NC', $C'P$, PD', $D'Q$, QA'. Dễ thấy diện tích của thiết diện trung bình đó bằng $\frac{7a^2}{16}$. Đáy trên và đáy dưới của $\mathscr{H}$ có diện tích lần lượt là $\frac{a^2}{4}$ và $\frac{a^2}{2}$, chiều cao của $\mathscr{H}$ là $\frac{h}{2}$. Suy ra :

$$V(\mathscr{H}) = \frac{1}{6}\left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} + 4\frac{7a^2}{16}\right)\frac{h}{2} = \frac{5a^2h}{24}.$$



Hình 36

65. ĐS : $V(\mathscr{H}) = \frac{1}{3}(a+b+c)s$.

66. ĐS : $V(\mathscr{H}) = \frac{h}{6}(2ab + 2a'b' + a'b + ab')$.

67. Mặt phẳng đi qua A, B, C' cũng đi qua D' và nó chia $\mathscr{H}$ thành hai cái nêm : Cái nêm $\mathscr{H}_1$ là $AB.A'B'C'D'$ và cái nêm $\mathscr{H}_2$ là $C'D'.ABCD$. Thiết diện trung bình của hình chóp cụt $\mathscr{H}$ là hình vuông có cạnh $\frac{a+a'}{2}$ nên có diện tích $\frac{(a+a')^2}{4}$, bởi vậy cả hai cái nêm $\mathscr{H}_1$ và $\mathscr{H}_2$ đều có diện tích của thiết diện trung bình bằng $\frac{(a+a')^2}{8}$. Kết quả là :

$$\frac{V(\mathscr{H}_1)}{V(\mathscr{H}_2)} = \frac{a'^2 + \frac{(a+a')^2}{2}}{a^2 + \frac{(a+a')^2}{2}} = \frac{3a'^2 + a^2 + 2aa'}{3a^2 + a'^2 + 2aa'}.$$

§1. MẶT CẦU, KHỐI CẦU

1. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và vuông góc với d. Khi đó (P) cắt các mặt cầu (S) có tâm thuộc d theo đường tròn $(\mathcal{C})$ với tâm I (giao điểm của (P) và d) bán kính $r = IA$. Dĩ nhiên đường tròn $(\mathcal{C})$ cố định đều thuộc các mặt cầu (S) có tâm thuộc d, đi qua điểm A cho trước không thuộc d.

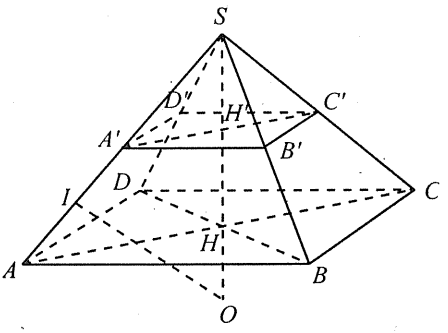
2. 1) Không đúng.

2) Không đúng. Có thể chỉ ra bởi ví dụ sau :

Xét tứ diện $ABCD$ và mặt cầu (S) ngoại tiếp nó. Lấy điểm A' khác phía với điểm A đối với mp (BCD) sao cho A' không nằm trên (S). Đa diện $ABCDA'$ có các mặt là tam giác, tức là các mặt của đa diện đó nội tiếp đường tròn nhưng nó không có mặt cầu ngoại tiếp. Thật vậy nếu nó có mặt cầu ngoại tiếp (S') thì (S') phải qua A, B, C, D, tức là (S') và (S) trùng nhau, điều này mâu thuẫn vì A' không nằm trên (S).

3. Gọi SH là đường cao của hình chóp đều $S.ABCD$ thì H là tâm hình vuông $ABCD$ và SH qua tâm H' của hình vuông $A'B'C'D'$.

Đường trung trực của AA' trong mp(SAH) cắt SH tại O, đó là tâm mặt cầu qua các điểm $A, B, C, D, A', B', C', D'$.



Hình 1

Vì các cạnh hình chóp đều đã cho bằng a nên tam giác AHS vuông cân, từ đó SIO là tam giác vuông cân tức là $IO = SI = \frac{3}{4}SA = \frac{3}{4}a$. Khi đó bán kính mặt cầu được tính bởi $R^2 = OA^2 = AI^2 + IO^2 = \frac{a^2}{16} + \frac{9a^2}{16} = \frac{10a^2}{16}$.

tức là $R = \frac{a\sqrt{10}}{4}$. Vậy thể tích khối cầu là $\frac{5\sqrt{10}\,\pi a^3}{24}$.

Chú ý. Ở bài tập 3 nếu chọn các điểm A', B', C', D' sao cho $\frac{SA'}{SA} = ... = \frac{SD'}{SD} = k$ thì cách giải bài toán vẫn còn có ý nghĩa.

4. Ta biết với n điểm $A_1,..., A_n$ và n số thực α_i mà $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ thì luôn có duy nhất điểm G sao cho $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = 0$ (điểm G xác định bởi $\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$ với O là điểm cố định). Khi đó ta có

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 = k \quad \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i})^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i) MG^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i GA_i^2 = k .$$

Từ đó $GM^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} (k - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i GA_i^2) = k_1$

Nếu $k_1 < 0$ thì tập hợp các điểm M là tập rỗng ;

Nếu $k_1 = 0$ thì tập hợp các điểm M là một điểm, đó là điểm G ;

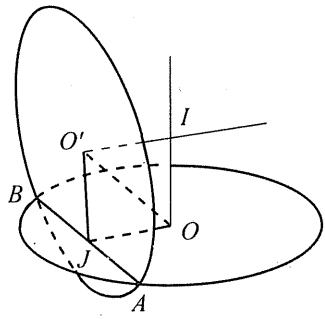
Nếu $k_1 > 0$ thì $GM = \sqrt{\frac{k - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i GA_i^2}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}}$;

từ đó tập M là mặt cầu tâm G, bán kính $r = \sqrt{\frac{k - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i GA_i^2}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}}$.

Chú ý. Từ bài tập 4 bạn đọc tự giải bài tập sau:

Cho n mặt cầu (S_i) tâm A_i, bán kính R_i, và n số thực α_i sao cho $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \mathcal{P}_{M/(S_i)} = k$, trong đó k là số cho trước.

5. 1) Gọi J là trung điểm của AB thì $OJ \perp AB$. Do hai đường tròn đó thuộc (P), (P') cắt nhau nên O, J, O' không thẳng hàng, từ đó mp $(OO'J) \perp AB$. Khi đó các trục Δ' của hai đường tròn đã cho nằm trong mp $(OO'J)$, từ đó Δ, Δ' cắt nhau tại I, và mặt cầu (S) tâm I, bán kính $R = IA$ là mặt cầu qua cả hai đường tròn đã cho.



Hình 2

2) Tính bán kính R của mặt cầu (S) theo r, r', AB và $d = OO'$.

Ta có $\cos\widehat{OJO'} = \dfrac{JO^2 + JO'^2 - OO'^2}{2.JO.JO'}$, từ đó $\cos\widehat{OIO'} = \dfrac{OO'^2 - JO^2 - JO'^2}{2.JO.JO'}$,

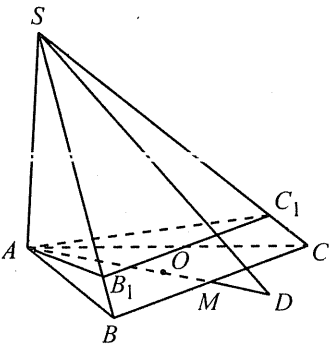
với $JO = \sqrt{r^2 - \dfrac{AB^2}{4}}$, $JO' = \sqrt{r'^2 - \dfrac{AB^2}{4}}$.

Ta lại có $\cos\widehat{JO'O} = \dfrac{JO'^2 + OO'^2 - JO^2}{2.JO'.OO'} = \sin\widehat{OO'I}$ (vì $\widehat{JO'I} = 90^o$).

Áp dụng định lí hàm số sin vào tam giác $OO'I$ ta tính được IO bởi hệ thức $\dfrac{OI}{\sin\widehat{OO'I}} = \dfrac{d}{\sin\widehat{OIO'}}$ và từ đó bán kính R của mặt cầu (S) tính được từ hệ thức

$$R^2 = IA^2 = OA^2 + OI^2 = r^2 + OI^2.$$

6. Gọi D là đối xứng của điểm O qua BC (O là trọng tâm ΔABC) thì AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và từ đó $BD \perp AB$, mặt khác $BD \perp SA$, từ đó $BD \perp AB$, kết hợp với $AB_1 \perp SB$ ta có $\widehat{AB_1D} = 90^o$.



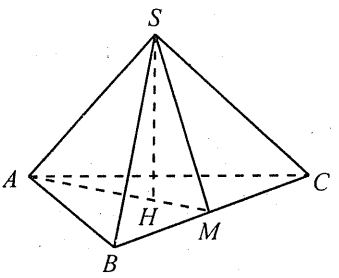
Hình 3

Tương tự ta có $\widehat{ACD} = \widehat{AC_1D} = 90^o$.

Vậy đường kính mặt cầu đi qua A, B, C, C_1, B_1 là AD, bán kính mặt cầu đó là $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Chú ý. Khi cho điểm S thay đổi trên đường thẳng vuông góc với mp(ABC) tại A thì mặt cầu qua năm điểm A, B, C, C_1, B_1 là mặt cầu cố định, tâm, bán kính mặt cầu đó là tâm, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

7. Giả sử hình chóp đều $S.ABC$ ngoại tiếp mặt cầu tâm O, bán kính r cho trước thì tâm O thuộc đường cao SH.



Hình 4

Kí hiệu cạnh đáy hình chóp là x, chiều cao hình chóp là y, thể tích hình chóp là V, S là diện tích toàn phần của hình chóp thì $r = \frac{3V}{S}$, từ đó S nhỏ nhất tương đương với V nhỏ nhất.

Cũng từ hệ thức $r = \frac{3V}{S}$ ta có $r = \frac{xy}{x + \sqrt{x^2 + 12y^2}}$ (1)

Gọi M là trung điểm cạnh BC, đặt $\widehat{SMH} = \varphi$ thì φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC). Khi đó $y = \frac{x\sqrt{3}}{6}\tan\varphi$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $y = \frac{r(1+\cos\varphi)}{\cos\varphi}$ và $x^2 = 12r^2\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}$.

Do đó $V = \frac{\sqrt{3}}{12}.12r^3\frac{(1+\cos\varphi)^2}{\cos\varphi(1-\cos\varphi)} = \sqrt{3}r^3\frac{(1+t)^2}{t(1-t)}$ với $0 < t = \cos\varphi < 1$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{(1+t)^2}{t(1-t)}$, $0 < t < 1$.

Dễ thấy $f'(t) = \frac{3t^2 + 2t - 1}{t^2(1-t)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$.

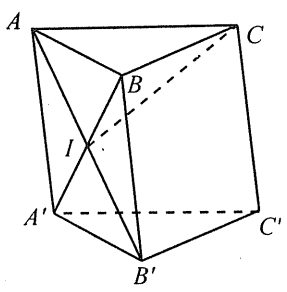
Từ đó $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $t = \frac{1}{3}$ tức là $\cos\varphi = \frac{1}{3}$, khi ấy $y = 4r$, $\tan\varphi = 2\sqrt{2}$, $x = 2r\sqrt{6}$.

Kết luận : Khi cạnh đáy và chiều cao hình chóp tam giác đều ngoại tiếp mặt cầu bán kính r cho trước lần lượt bằng $2r\sqrt{6}$ và $4r$ thì diện tích toàn phần hình chóp đều đó đạt giá trị nhỏ nhất.

Chú ý. Bạn đọc tự giải bài toán tổng quát.

Trong số các hình chóp n giác đều ngoại tiếp mặt cầu bán kính r cho trước, tìm được hình chóp có diện tích toàn phần nhỏ nhất.

8. Vì $ABB'A'$ là hình thoi với tâm I và $CI \perp (ABB'A')$, $CA = CB$ nên $IA = IB$ từ đó $ABB'A'$ là hình vuông và như vậy $C.ABB'A'$ là hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh cùng bằng a nên dễ thấy mặt cầu đi qua A, B, B', A', C có tâm I, bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ và thể tích khối chóp $C.ABB'A'$ bằng



Hình 5

$$\frac{1}{3}a^2.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

Mặt khác $V_{C.ABB'A'} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}$.

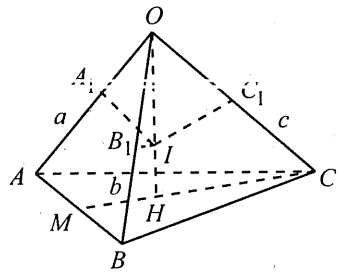
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{2}.\frac{a^3\sqrt{2}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

9. Tứ diện $OABC$ có mặt cầu tiếp xúc với các cạnh khi và chỉ khi

$$OA + BC = OB + AC = OC + AB \qquad (1)$$

Do $OABC$ là tứ diện vuông tại O với $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ nên hệ thức (1) tương đương với

$$a + \sqrt{b^2 + c^2} = b + \sqrt{c^2 + a^2} = c + \sqrt{a^2 + b^2}.$$



Hình 6

Xét $a+\sqrt{b^2+c^2}=b+\sqrt{c^2+a^2}$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2a\sqrt{b^2+c^2}=a^2+b^2+c^2+2b\sqrt{c^2+a^2}$

$\Leftrightarrow a^2b^2+a^2c^2=b^2c^2+b^2a^2 \Leftrightarrow b=a$.

Tương tự, ta có (1) xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. Khi ấy $O.ABC$ là hình chóp đều. Vì $O.ABC$ là hình chóp đều nên tâm I mặt cầu tiếp xúc với các cạnh hình tứ diện $OABC$ thuộc đường cao OH của hình chóp $O.ABC$ (H là tâm của tam giác đều ABC). Gọi A_1 và M là điểm tiếp xúc của cạnh OA, AB với mặt cầu đó thì

$$AA_1 = AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Từ hai tam giác đồng dạng OA_1I và OHA ta có

$$IA_1 = OA_1.\frac{AH}{OH} = (OA - AA_1).\frac{AH}{OH} = \left(a - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right).\frac{AH}{OH} = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2}.\frac{AH}{OH}.$$

Mặt khác $AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, $OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, từ đó $IA_1 = a(\sqrt{2}-1)$.

Vậy bán kính mặt cầu tiếp xúc với các cạnh của tứ diện $OABC$ (khi $OABC$ có mặt cầu tiếp xúc với các cạnh) bằng $r = a(\sqrt{2}-1)$.

Chú ý. Bạn đọc tự giải bài tập sau :

Với tứ diện đều $ABCD$ cạnh a, xét mặt cầu tiếp xúc với các cạnh. Tính thể tích phần khối cầu đó nằm ngoài khối tứ diện đã cho.

(Đáp số $V = \frac{\pi a^3\sqrt{2}(9-4\sqrt{3})}{108}$).

10. Vì tứ diện $ABCD$ có tính chất $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$ nên tâm mặt cầu ngoại tiếp $ABCD$ trùng với trọng tâm G của tứ diện. Khi ấy với mọi điểm M trong không gian ta có

$$MD^2 \le MA^2 + MB^2 + MC^2.$$

Thật vậy, xét $MA^2 + MB^2 + MC^2 - MD^2$

$= (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GM})^2 + (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GM})^2 + (\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GM})^2 - (\overrightarrow{GD} - \overrightarrow{GM})^2$

$= 2R^2 + 2GM^2 + 4\overrightarrow{GD}.\overrightarrow{GM} = 2(\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GM})^2 \geq 0.$

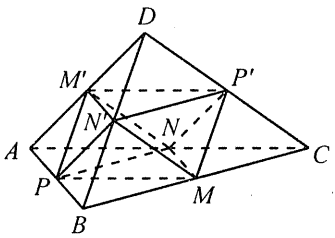
(R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$).

Khi cho M là tâm O của ba mặt cầu nêu trong bài toán thì ta có

$$OD^2 \leq OA^2 + OB^2 + OC^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \text{ hay } OD \leq \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}.$$

Điều này khẳng định điểm D không vượt ra ngoài mặt cầu có tâm là tâm O của ba mặt cầu đã cho, bán kính mặt cầu là $\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$.

11. Dễ thấy $MPM'P'$, $NPN'P'$, $MNM'N'$ là các hình bình hành và từ đó MM', NN', PP' đồng quy tại trung điểm mỗi đường. Do A, B, C, D không đồng phẳng nên sáu điểm M, M', N, N', P, P' không đồng phẳng. Vậy sáu điểm đó thuộc một mặt cầu khi và chỉ khi $MM' = NN' = PP'$ tức là các hình bình hành $MPM'P'$, $MNM'N'$, $NPN'P'$ là hình chữ nhật, từ đó tứ diện $ABCD$ là trực tâm.



Hình 7

Kết luận : Nếu bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D tạo thành tứ diện trực tâm thì trung điểm các cạnh của tứ diện đó cũng thuộc một mặt cầu và ngược lại.

12. Gọi G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ và O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đó. Khi đó ta có $p^2 = (AB + BC + CA + DA + DB + DC)^2$

$\leq 6(AB^2 + BC^2 + CA^2 + DA^2 + DB^2 + DC^2)$

$= 6[(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD})^2 +$

$+ (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD})^2 + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD})^2]$

$= 6[12R^2 - 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD}$

$-2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD}]$

$= 6[16R^2 - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})^2]$ $(R = OA = OB = OC = OD)$

$= 6(16R^2 - 16OG^2).$

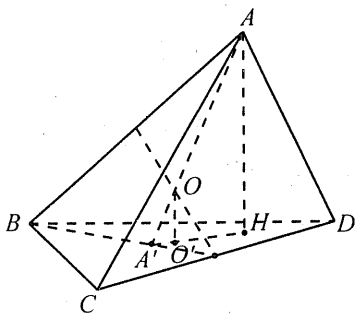
Từ đó $16R^2 - 16OG^2 \geq 0$ và $16R^2 - 16OG^2 \leq 16R^2$,

vậy $\frac{p}{R} \leq 4\sqrt{6}$, tức là $\frac{p}{R}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $4\sqrt{6}$.

Điều ấy xảy ra khi và chỉ khi $BC = CA = AB = DA = DB = DC$ và $O \equiv G$, tức là $ABCD$ là tứ diện đều.

Vậy nếu p là tổng độ dài các cạnh, R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện thì tỉ số $\frac{p}{R}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $4\sqrt{6}$ khi và chỉ khi tứ diện đó là đều.

13. Do $ABCD$ là tứ diện gần đều nên ta có tâm mặt cầu ngoại tiếp, tâm mặt cầu nội tiếp và trọng tâm tứ diện trùng nhau, kí hiệu điểm đó là O. Khi ấy hình chiếu O' của O trên mặt nào đó của tứ diện, chẳng hạn trên mặt BCD thì O' nằm trong tam giác BCD và O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD, ngoài ra $OO' = r$.



Hình 8

Mặt khác $ABCD$ là tứ diện gần đều nên các đường cao của tứ diện bằng nhau, kí hiệu đường cao đó là h và khi đó $h = 4r$ và $R^2 - r^2 = R_1^2$ (R_1 là bán kính đường tròn ngoại tiếp một mặt, chẳng hạn BCD).

Gọi A' là giao của AO và mp (BCD) thì A' là trọng tâm tam giác BCD và $OA = 3OA'$. Gọi AH là đường cao của tứ diện thì A', O', H thẳng hàng.

Như vậy $R = OA = 3OA' \geq 3OO' = 3r$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $R = 3r$ hay $AO \perp (BCD)$, tức $ABCD$ là tứ diện đều.

Ta có $S_{BCD} = \frac{abc}{4R_1}$, $V = \frac{1}{3} S_{BCD}.h$ mà $V \leq \frac{\sqrt{2}abcr}{4R}$ suy ra

$$\frac{4r}{3}\frac{abc}{4R_1} \leq \frac{\sqrt{2}abcr}{4R} \Leftrightarrow 4R \leq 3R_1\sqrt{2} \Leftrightarrow 8R^2 \leq 9R_1^2$$

$$\Leftrightarrow 8R^2 \leq 9(R^2 - r^2) \Leftrightarrow 9r^2 \leq R^2 \Leftrightarrow 3r \leq R.$$

Bất đẳng thức $R \geq 3r$ luôn đúng. Vậy ta có bất đẳng thức $V_{ABCD} \leq \dfrac{\sqrt{2}abcr}{4R}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $ABCD$ là tứ diện đều.

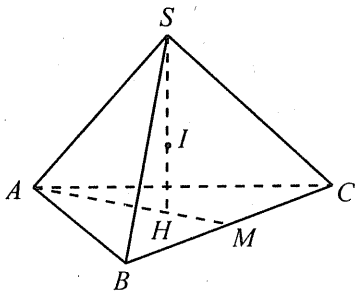
14. 1) Vì có mặt cầu tiếp xúc với các cạnh hình chóp nên

$$SA + BC = SB + AC = SC + AB.$$

Mặt khác tâm I của hình chóp thuộc đường cao SH nên $\widehat{HSA} = \widehat{HSB} = \widehat{HSC}$, từ đó

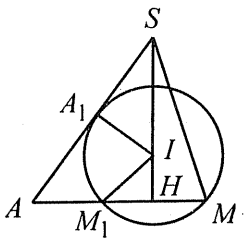
$SA = SB = SC$, vì vậy $AB = BC = CA$.

Vậy $S.ABC$ là hình chóp đều.



Hình 9

2) Gọi M là trung điểm của BC thì mp (SAM) cắt mặt cầu theo đường tròn lớn, đường tròn này tiếp xúc với SA tại A_1, đi qua M và cắt AM tại M_1, ở đó $AM = M_1H = HM$.



Hình 10

Ta có $\dfrac{A_1I}{SI} = \dfrac{AH}{SA}$ hay $\dfrac{r}{r\sqrt{3}} = \dfrac{AH}{\sqrt{AH^2 + SH^2}}$.

Ta có $AH = 2\,M_1H$ nên

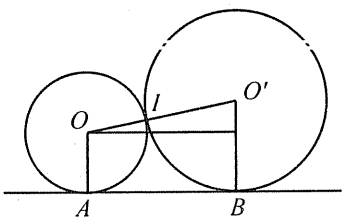
$$AH^2 = 4M_1H^2 = 4\left[r^2 - (SH - r\sqrt{3})^2\right].$$

Từ đó $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{r^2 - (SH - r\sqrt{3})^2}}{\sqrt{SH^2 + 4[r^2 - (SH - r\sqrt{3})^2]}}$

$$\Leftrightarrow 9SH^2 - 16rSH\sqrt{3} + 16r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow SH = \frac{4r}{\sqrt{3}} \quad (\text{do } SH > SI > r).$$

15. 1) Vì hai mặt cầu $S(O\,;\,R)$, $S'(O'\,;\,R')$ tiếp xúc với mp (Q) tại A và B nên $OA \,//\, O'B$. Khi đó mp $(OA, O'B)$ cắt hai mặt cầu đã cho theo hai đường tròn lớn, hai đường tròn này tiếp xúc



Hình 11

ngoài với nhau tại điểm I ; mp(OA, $O'B$) cắt mp (Q) theo đường thẳng AB, đường thẳng này tiếp xúc với hai đường tròn trên tại A, B. Từ đó

$OO'^2 = AB^2 + (R - R')^2$ hay $(R + R')^2 = AB^2 + (R - R')^2$,

vậy $AB = 2\sqrt{RR'}$.

2) Gọi R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính của ba mặt cầu thoả mãn điều kiện bài toán. Khi đó từ kết quả nêu trên ta có

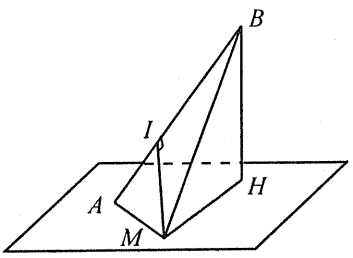
$$AB^2 = c^2 = 4R_1R_2,\ AC^2 = b^2 = 4R_1R_3,\ BC^2 = a^2 = 4R_2R_3$$

hay $a^2b^2c^2 = 64R_1^2R_2^2R_3^2$, tức là $abc = 8R_1R_2R_3$.

Từ đó ta có $R_3 = \dfrac{ab}{2c}$. Tương tự ta có $R_2 = \dfrac{ca}{2b}$, $R_1 = \dfrac{cb}{2a}$.

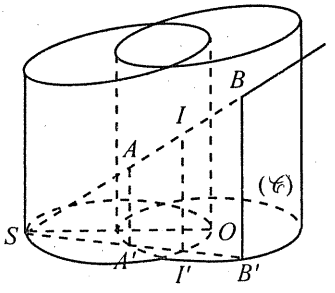
§2. MẶT TRỤ. HÌNH TRỤ. KHỐI TRỤ. MẶT NÓN. HÌNH NÓN. KHỐI NÓN

16. Gọi I là hình chiếu của điểm M trên đường thẳng AB. Do $\widehat{ABM} = \widehat{BMH}$ nên ta có $MI = BH$, điều này chứng tỏ M cách đường thẳng AB cố định một khoảng không đổi $BH = d(B, (P))$. Vậy M thuộc mặt trụ tròn xoay có trục là đường thẳng AB, bán kính mặt trụ bằng BH là khoảng cách từ điểm B đến (P) cho trước. Mặt khác M thuộc (P) và AB không vuông góc với (P) nên M thuộc elip tạo bởi mp (P) và mặt trụ nêu trên.



Hình 12

17. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm S và vuông góc với trục Δ của mặt trụ đã cho. Khi đó (P) cắt mặt trụ ấy theo đường tròn $(\mathscr{C})$ tâm O, bán kính R (bán kính của mặt trụ $\mathscr{T}$).



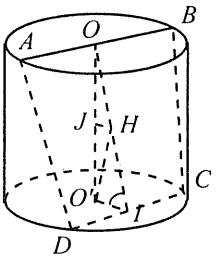
Hình 13

Chiếu các điểm A, B, I lên mp (P) ta được các điểm A', B', I'. Do A, B, I, S thẳng hàng nên A', B', I', S thẳng hàng. Vì A, B thuộc mặt trụ $\mathscr{T}$ nên A', B' thuộc đường tròn $(\mathscr{C})$.

Mặt khác $IA = IB$ nên $I'A' = I'B'$. Từ đó $\widehat{OI'S} = 90^o$, nghĩa là điểm I' thuộc đường tròn $(\mathscr{C}_1)$ đường kính SO trong mp (P), tất nhiên đường tròn này cố định.

Như vậy điểm I có hình chiếu I' trên mp (P) cố định luôn thuộc đường tròn $(\mathscr{C}_1)$ đường kính SO cố định. Vậy I thuộc mặt trụ $\mathscr{T}_1$ có trục song song với trục của $\mathscr{T}_1$ và bán kính mặt trụ $\mathscr{T}_1$ bằng $\frac{SO}{2}$. Rõ ràng mặt trụ $\mathscr{T}_1$ cố định.

18. 1) Giả sử hai tâm hai đáy hình trụ là O, O', khi đó $OO' = h$.



Hình 14

Coi (P) đi qua O, cắt đáy của hình trụ theo đường kính AB. Giả sử (P) cắt hai đáy hình trụ theo hai dây AB, CD. Khi đó $ABCD$ là hình thang cân, và góc giữa (P) với mặt phẳng đáy hình trụ là $\widehat{OIO'}$ (I là trung điểm của CD) tức là $\widehat{OIO'} = \alpha$.

Diện tích S của hình thang $ABCD$ được tính bởi

$$S = \frac{1}{2}(AB + CD).IO.$$

Ta có $AB = 2R$, $OI = \frac{OO'}{\sin\alpha} = \frac{h}{\sin\alpha}$,

$$O'I = OO'\cot\alpha = h\cot\alpha \Rightarrow ID = \sqrt{O'D^2 - O'I^2} = \sqrt{R^2 - h^2\cot^2\alpha}$$

$$\Rightarrow CD = 2\sqrt{R^2 - h^2\cot^2\alpha}\,.$$

Vậy $S = \frac{1}{2}(2R + 2\sqrt{R^2 - h^2\cot^2 a}).\frac{h}{\sin a} = (R + \sqrt{R^2 - h^2\cot^2\alpha}).\frac{h}{\sin\alpha}$.

2) Trong mp $(OO'I)$ kẻ $O'H \perp OI$ thì H là hình chiếu của điểm O' trên (P).

Dễ thấy $O'H = O'I\sin\alpha = h\cot\alpha\,.\sin\alpha = h\cos\alpha$.

Kẻ đường cao HJ của tam giác vuông $O'HO$ thì

$$O'H^2 = O'J.O'O \Rightarrow O'J = \frac{O'H^2}{O'O} = \frac{h^2\cos^2\alpha}{h} = h\cos^2\alpha\,.$$

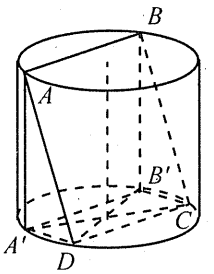
Khi (P) đi qua O, tạo với mặt phẳng đáy hình trụ một góc α thì có $O'J = h\cos^2\alpha$, từ đó J là điểm cố định.

Mặt khác $HJ^2 = O'H^2 - O'J^2 = h^2\cos^2\alpha - h^2\cos^4\alpha = h^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha$

$\Rightarrow HJ$ có độ dài không đổi. Vậy H thuộc đường tròn tâm J, bán kính $h\cos\alpha\sin\alpha$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với OO' tại điểm J.

Chú ý: Bạn đọc có thể thấy H thuộc mặt trụ $\mathscr{T}$ có trục là OO' bán kính $h\cos\alpha\sin\alpha$, đồng thời H thuộc mặt phẳng vuông góc với OO' tại J. Từ đó H thuộc đường tròn giao của $\mathscr{T}$ và mặt phẳng nói trên.

19. Giả sử $ABCD$ là hình vuông thoả mãn điều kiện bài toán. Gọi cạnh hình vuông là x. Chiếu AB xuống mặt đáy đối diện thì được $A'B' \,//\, AB$ và $A'B' = AB = x$. Từ đó $A'B' \,//\, CD$. Như vậy $A'B'CD$ là hình chữ nhật nhận tâm đường tròn đáy thứ hai của hình trụ làm tâm hình chữ nhật.



Hình 15

Đặt $A'D = y$ thì ta có

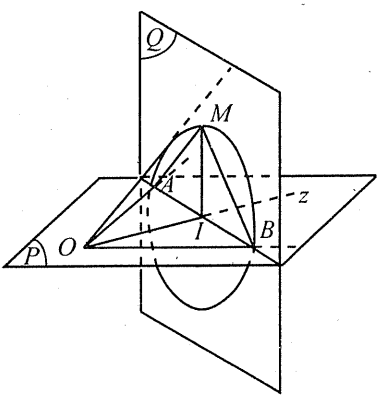
$$x^2 + y^2 = 4R^2, x^2 - y^2 = h^2.$$

Vậy cạnh hình vuông là $x^2 = \dfrac{4R^2 + h^2}{2}$,

tức là $x = \sqrt{\dfrac{4R^2 + h^2}{2}}$.

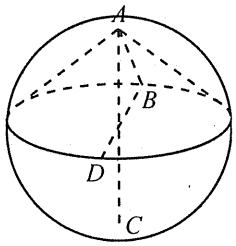
Diện tích hình vuông là $\dfrac{4R^2 + h^2}{2}$.

20. Trong (Q), vì điểm M có tính chất $\widehat{AMB} = 90^o$ nên M thuộc đường tròn đường kính AB. Vì $OI \perp (Q)$ nên đường tròn đó sinh ra bởi điểm M khi quay quanh OI. Vậy điểm M thuộc mặt nón đỉnh O trục $OI \equiv Oz$.



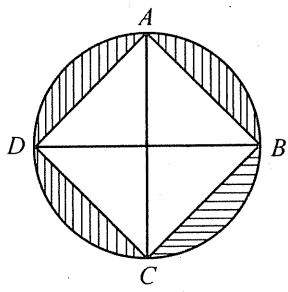
Hình 16

21. Khi quay quanh đường chéo AC chẳng hạn thì hình tròn tâm O, bán kính R sinh ra khối cầu (S), đoạn thẳng BD sinh ra hình tròn $(\mathscr{C})$ còn hình vuông sinh ra hình tròn xoay $\mathscr{N}$ gồm có hai hình nón có chung đáy là hình tròn $(\mathscr{C})$ với hai đỉnh là A và C. Bởi vậy hình $\mathscr{H}$ sinh ra khối tròn xoay gồm những điểm thuộc hình cầu (S) nhưng không thuộc $\mathscr{N}$. Từ đó thể tích V của khối đó là



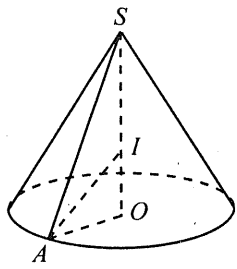
Hình 17

$$V = V_{(S)} - V_{\mathscr{N}} = \frac{4}{3}\pi R^3 - 2.\frac{1}{3}\pi R^2.R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$



Hình 18

22. 1) Giả sử hình nón đã cho có đỉnh S, và đáy là hình tròn $\mathscr{C}(O, r)$. Nếu I là tâm mặt cầu nội tiếp hình nón thì I phải thuộc SO. Thật vậy nếu I không thuộc đường thẳng SO thì ta gọi I' là giao của đường thẳng SI và mặt phẳng đáy nón. Khi đó mp $(SI'O)$ cắt hình nón theo một tam giác cân, chẳng hạn tam giác SAB. Điểm I' không nằm trên SO, đường phân giác của góc ASB lại cách đều hai đường thẳng SA, SB, điều này vô lí.



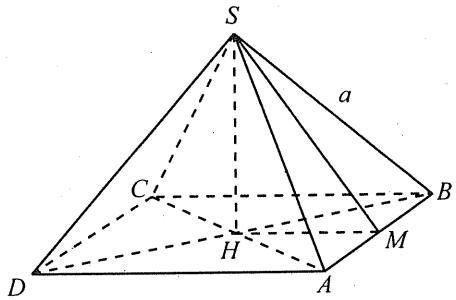
Hình 19

Ta lấy một điểm cố định thuộc đường tròn đáy hình nón chẳng hạn điểm A. Gọi I là điểm thuộc SO sao cho AI là phân giác trong của góc $\widehat{SAO}$. Điểm I như vậy hoàn toàn xác định và dĩ nhiên I là tâm mặt cầu nội tiếp hình nón đã cho, bán kính mặt cầu đó chính là $IO = R$.

2) Ta có $SA^2 = h^2 + r^2$ và $\dfrac{IO}{IS} = \dfrac{AO}{AS} \Rightarrow \dfrac{IO}{IO + IS} = \dfrac{AO}{AO + AS}$.

Từ đó $R = IO = \dfrac{hr}{r + \sqrt{h^2 + r^2}}$.

23. Gọi cạnh đáy hình chóp đều là $2x$, gọi M là trung điểm của AB thì $\widehat{SMH} = \alpha$, và $x = SM\cos\alpha$.



Hình 20

Mặt khác $x = \sqrt{a^2 - SM^2}$, từ đó

$$SM.\cos\alpha = \sqrt{a^2 - SM^2}$$

$$\Rightarrow SM = \frac{a}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$$

và cạnh hình vuông là $2x = \dfrac{2a\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$.

Từ đó $HB = \dfrac{a\sqrt{2}\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$, $h = SH = \dfrac{a\tan\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}} = \dfrac{a\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$.

1) Hình nón nội tiếp hình chóp đều nên đỉnh hình nón chính là đỉnh S của hình chóp, đường tròn đáy hình nón chính là đường tròn nội tiếp đáy hình chóp. Vì vậy hình nón đó có đường cao là SH, bán kính đáy hình nón là HM.

Vậy thể tích V của hình nón đó là

$$V = \frac{1}{3}\pi\frac{a^2\cos^2\alpha.\, a\sin\alpha}{(1+\cos^2\alpha)\sqrt{1+\cos^2\alpha}} = \frac{\pi a^3\sin\alpha\cos^2\alpha}{3(1+\cos^2\alpha)\sqrt{1+\cos^2\alpha}}.$$

Còn diện tích xung quanh hình nón là

$$S = \frac{\pi a\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}\cdot\frac{a}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}} = \frac{\pi a^2\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha}.$$

2) Hình nón ngoại tiếp hình chóp đều $S.ABCD$ có đỉnh S, đường cao SH, đường tròn đáy có bán kính là $HB = \dfrac{a\sqrt{2}\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$, thể tích là

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi\frac{2a^2\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}\cdot\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}} = \frac{\pi a^3\sin 2\alpha\cos\alpha}{3(1+\cos^2\alpha)\sqrt{1+\cos^2\alpha}}.$$

Diện tích xung quanh hình nón đó là

$$S_1 = \pi \frac{a\sqrt{2}\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}} . a = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}.$$

24. Kí hiệu bán kính đáy, chiều cao hình nón thứ tự là x, y ($x, y > 0$).

Vì diện tích toàn phần hình nón bằng diện tích hình tròn bán kính a nên ta có

$$\pi x^2 + \pi x\sqrt{x^2+y^2} = \pi a^2 \Leftrightarrow x^2 + x\sqrt{x^2+y^2} = a^2 \Leftrightarrow x\sqrt{x^2+y^2} = a^2 - x^2$$

(với điều kiện $x < a$).

Từ đó $$x^2\left(x^2+y^2\right) = a^4 + x^4 - 2a^2x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2 = a^4 - 2a^2x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^4}{y^2+2a^2}.$$

Với điều kiện đó thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi \frac{a^4}{y^2+2a^2}.y = \frac{\pi a^4}{3} \cdot \frac{y}{y^2+2a^2}.$

Từ hệ thức trên ta có V lớn nhất $\Leftrightarrow \frac{y}{y^2+2a^2}$ lớn nhất $\Leftrightarrow y + \frac{2a^2}{y}$ nhỏ nhất.

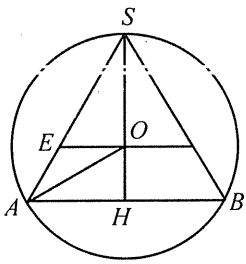
Ta lại có $y + \frac{2a^2}{y} \geq 2\sqrt{y.\frac{2a^2}{y}} = 2\sqrt{2}\,a$.

Vậy V lớn nhất $\Leftrightarrow$ y = $\frac{2a^2}{y} \Leftrightarrow y = a\sqrt{2}$, từ đó $x = \frac{a}{2}$.

Kết luận : bán kính đáy hình nón là $\frac{a}{2}$, đường cao hình nón là $a\sqrt{2}$ thoả mãn điều kiện bài toán.

25. Giả sử bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón là R và φ là góc giữa đường sinh hình nón với mặt phẳng cắt.

Xét mp(α) qua đường cao hình nón thì (α) cắt mặt cầu theo đường tròn lớn và cắt hình nón theo tam giác cân SAB chẳng hạn (cân tại đỉnh S) mà tam giác SAB nội tiếp



Hình 21

đường tròn lớn nói trên. Kí hiệu O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình nón. Theo giả thiết ta có

$$\frac{1}{3}\pi AH^2.SH = \frac{2}{3}\pi OE^2.SO \Leftrightarrow AH^2.SH = 2\,OE^2.SO \qquad (1)$$

Xét tam giác AOH thì $OA = R$ và $\widehat{AOH} = 2\widehat{ASO} = 2(90^o - \varphi) = 180^o - 2\varphi$.

Từ đó $AH = AO\sin(180^o - 2\varphi) = AO.\sin 2\varphi = R\sin 2\varphi$.

Mặt khác $SH = AH\tan\varphi = R\sin 2\varphi\tan\varphi$.

Xét tam giác SEO ta có $EO = SO\tan(90^o - \varphi) = R\cot\varphi$.

Từ các hệ thức trên ta thấy (1) $\Leftrightarrow R^2\sin^2 2\varphi.R\sin 2\varphi\tan\varphi = 2R^2\cot^2\varphi.R$

$$\Leftrightarrow \sin^3 2\varphi = 2\cot^3\varphi \Leftrightarrow 2\sin\varphi\cos\varphi = \sqrt[3]{2}\cot\varphi$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\varphi = \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Vậy góc φ phải tìm được xác định bởi $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

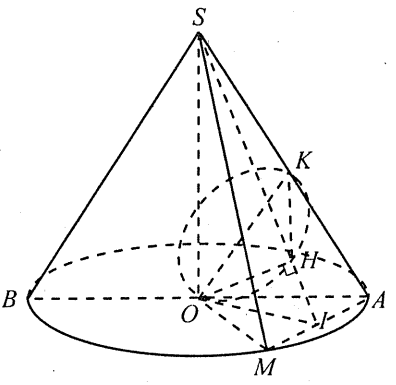
26. 1) $S_{\Delta SAM} = \frac{1}{2}SA^2\sin\widehat{ASM} \Rightarrow S_{\Delta SAM}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \sin\widehat{ASM}$ lớn nhất.

Có hai trường hợp xảy ra

a) *Trường hợp 1* : Góc ở đỉnh của hình nón không tù, tức là $0^o < \widehat{ASB} \le 90^o$, trong đó B là điểm đối xứng của A qua O.

Với M bất kì trên đường tròn đáy hình nón, ta luôn có $\widehat{ASM} \le \widehat{ASB}$ nên $0 \le \widehat{ASM} \le 90^o$. Từ đó $\sin\widehat{ASM} \le \widehat{ASB}$.

Ta có $S_{\Delta SAM} = \frac{1}{2}SA^2\sin\widehat{ASM}$.



Hình 22

Từ đó $S_{\Delta SAM}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \sin\widehat{ASM}$ lớn nhất

$\Leftrightarrow M$ trùng với điểm B (đối xứng của A qua O) hay thiết diện SAM là thiết diện qua trục của hình nón.

b) *Trường hợp 2* : Góc ở đỉnh hình nón là góc tù, tức là $90^o < \widehat{ASB} < 180^o$.

Khi đó $\sin\widehat{ASM}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \sin\widehat{ASM} = 1 \Leftrightarrow AS \perp SM$.

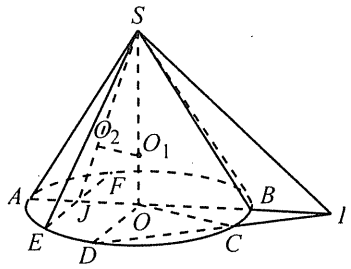
Vậy có hai vị trí của M trên đường tròn đáy hình nón để diện tích tam giác SAM lớn nhất (thiết diện này không đi qua trục của hình nón).

2) Gọi H là hình chiếu của O trên SI (I là trung điểm của AM) thì $OH \perp (SAM)$, từ đó $OH \perp SA$ tức là H thuộc mp(α) đi qua điểm O và vuông góc với SA, mặt phẳng này cố định. Gọi K là giao điểm của (α) với (SA) thì K là điểm cố định và $OH \perp HK$. Từ đó H thuộc đường tròn đường kính OK trong mp(α). Tất nhiên đường tròn đó cố định.

27. 1) Gọi O là tâm của đáy hình nón thì $\widehat{BOC} = 30^o$, $\widehat{BOD} = 90^o$, $\widehat{COD} = 60^o$, từ đó $\widehat{ODC} = 60^o$.

Gọi I là giao điểm của AB và CD và gọi bán kính đáy hình nón là r thì

$$OI = OD\tan 60^o = r\sqrt{3}.$$



Hình 23

Do góc ở đỉnh hình nón bằng 60^o nên tam giác SAB là tam giác đều và $SO = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$.

Ta có SI là giao tuyến hai mặt phẳng (SAB) và (SCD). Vì vậy nếu kẻ OH vuông góc với SI thì dễ thấy $\widehat{OHD}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD), ngoài ra H là trung điểm của SI, từ đó $OH = \dfrac{1}{2}SI = \dfrac{1}{2}r\sqrt{3}.\sqrt{2} = \dfrac{r\sqrt{6}}{2}$.

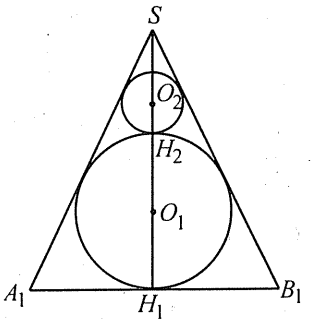
Vậy $\tan\widehat{OHD} = \dfrac{OD}{OH} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$.

Kết luận : Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) được tính bởi $\tan\widehat{OHD} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$.

2) Gọi J là giao điểm của AB và EF, khi ấy tâm O_2 của đường tròn ngoại tiếp tam giác SEF thuộc SJ nghĩa là tâm đó thuộc mp(SAB).

Gọi O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB thì O_1 cũng là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình nón, từ đó $O_1O_2 \perp$ mp (SEF), tức là $\widehat{SO_2O_1} = 90^o$. Vậy O_2 thuộc đường tròn đường kính SO_1 trong mp (SAB). Tất nhiên đường tròn này cố định. Chú ý rằng O_1 là điểm mà $SO_1 = \frac{2}{3}SO$.

28. Cắt hệ thống hình vẽ bởi mặt phẳng (α) đi qua trục SH_1 của hình nón thì (α) cắt hình nón theo tam giác đều SA_1B_1; (α) cắt (S_1) theo đường tròn lớn $(\mathscr{C}_1)$ tâm O_1, bán kính $r_1 = r$ nội tiếp tam giác đều SA_1B_1; (α) cắt (S_2) theo đường tròn $(\mathscr{C}_2)$ tâm O_2 bán kính r_2 tiếp xúc với SA_1, SB_1; và tiếp xúc với $(\mathscr{C}_1)$ tại H_2; ...; (α) cắt (S_{k+1}) theo đường tròn $(\mathscr{C}_{k+1})$ tâm O_{k+1} bán kính r_{k+1} tiếp xúc với SA_1, SB_1; và tiếp xúc với $(\mathscr{C}_k)$ tại H_{k+1}.



Hình 24

1) Ta có $V_1 = V_{(S_1)} = \frac{4}{3}\pi r^3$ $(r_1 = O_1H_1 = r)$.

$$V = V_{\text{nón}} = \frac{1}{3}\pi SH_1^2 \tan^2\frac{\pi}{6}.SH_1 = \frac{1}{3}\pi.9r^2.\frac{1}{3}.3r = 3\pi r^3.$$

Vậy $\frac{V_1}{V} = \frac{4}{9}$.

2) Ta có $r_2 = O_2H_2 = \frac{1}{3}SH_2 = \frac{1}{3}r = \frac{1}{3}r_1$,

$$r_3 = \frac{1}{3}r_2 = \frac{1}{3^2}r_1, ..., r_n = \frac{1}{3^{n-1}}r \ \forall n.$$

Từ đó $V_k = V_{(S_k)} = \frac{4}{3}\pi r_k^3 = \frac{4}{3}\pi r^3\left(\frac{1}{3^3}\right)^{k-1}$.

Do vậy với mọi n ta có

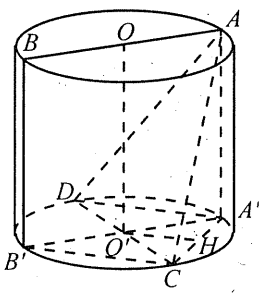
$$V_1 + V_2 + ... + V_n = \frac{4}{3}\pi r^3 \left[1 + \frac{1}{3^3} + \left(\frac{1}{3^3}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{3^3}\right)^{n-1} \right]$$

$$= \frac{18\pi r^3}{13}\left[1 - \left(\frac{1}{3^3}\right)^n \right] < \frac{18\pi r^3}{13}.$$

Vậy: $$\frac{V_1 + V_2 + ... + V_n}{V} < \frac{18\pi r^3}{13.3\pi r^3} = \frac{6}{13} < \frac{1}{2},$$

tức là $V_1 + V_2 + ... + V_n < \frac{V}{2}$ với mọi n.

29. 1) Gọi A', B' là hình chiếu của A, B trên mặt phẳng chứa đường tròn đáy có chứa CD thì A', B', C, D cùng thuộc một đường tròn và $A'B' \perp CD$ tại O', từ đó $A'CB'D$ là hình vuông nội tiếp đường tròn bán kính R.



Hình 25

Khi ấy $A'C = R\sqrt{2}$, mặt khác $AA' = R\sqrt{2}$, suy ra $AC = 2R$.

Tương tự như trên ta cũng có $AD = BC = BD = 2R$. Vậy tứ diện $ABCD$ là tứ diện đều cạnh bằng $2R$.

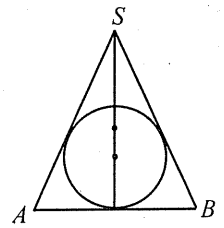
2) Gọi OO' là trục của hình trụ đã cho. Ta tính khoảng cách từ OO' đến AC. Dễ thấy $d(OO', AC) = \mathrm{d}(OO', \mathrm{mp}(AA'C)) = O'H$, trong đó H là trung điểm của AC'.

Vậy $d(OO', AC) = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Tương tự các khoảng cách từ AD, BC, BD đến OO' cũng bằng $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Từ đó suy ra có mặt trụ trục OO', bán kính bằng $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ có tính chất thoả mãn điều kiện bài toán.

30. Dễ thấy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón được tính bởi $R = \dfrac{r^2+h^2}{2h}$ và bán kính mặt cầu nội tiếp hình nón được tính bởi $r_1 = \dfrac{rh}{r+\sqrt{r^2+h^2}}$



Hình 26

Khi đó $\dfrac{V_1}{V_2} = \left[\dfrac{2rh^2}{(r^2+h^2)\,(r+\sqrt{r^2+h^2})}\right]^3$.

Khi r, h thay đổi, đặt α là góc giữa đường sinh của hình nón và mặt phẳng đáy hình nón, lẽ tất nhiên $0^3 < \alpha < 90^o$. Khi đó $h = r\tan\alpha$ và từ đó

$$R = \frac{r^2+h^2}{2h} = \frac{r^2(1+\tan^2\alpha)}{2r\tan\alpha} = \frac{r}{2\cos^2\alpha\tan\alpha} = \frac{r}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

và $r_1 = \dfrac{r^2\tan\alpha}{r+\sqrt{r^2+r^2\tan^2\alpha}} = \dfrac{r\tan\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{r\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

Như vậy $\dfrac{r_1}{R} = \dfrac{r\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{r} = \dfrac{2\sin^2\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = 2\,(1-\cos\alpha)\cos\alpha.$

Ta có $\dfrac{V_1}{V_2} = \left(\dfrac{r_1}{R}\right)^3 = [2(1-\cos\alpha)\cos\alpha]^3.$

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2}$ lớn nhất $\Leftrightarrow (1-\cos\alpha)\cos\alpha$ lớn nhất.

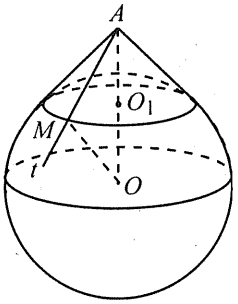
Dễ thấy điều này xảy ra khi và chỉ khi $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ nghĩa là $\alpha = 60^o$.

Giá trị lớn nhất của $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng $\dfrac{1}{8}$, từ đó $h = r\sqrt{3}$.

Chú ý : Bạn đọc tự giải bài tập sau :

Khi r, h thay đổi, khi nào $\dfrac{V_1}{V_3}$; $\dfrac{V_3}{V_2}$ đạt giá trị lớn nhất, ở đó V_3 là thể tích khối nón.

31. 1) Giả sử At là một tiếp tuyến của mặt cầu $S(O, R)$ với tiếp điểm là M. Khi ấy đặt $\widehat{OAM} = \alpha$ thì $\sin\alpha = \dfrac{OM}{OA} = \dfrac{R}{d} < 1$ ($d = OA$), tức là α xác định.



Hình 27

Như vậy đường thẳng At đi qua điểm A cố định và tạo với đường thẳng cố định OA một góc α không đổi. Vì thế At thuộc mặt nón đỉnh A, trục là đường thẳng AO, góc ở đỉnh của mặt nón là 2α mà $\sin\alpha = \dfrac{R}{d}$ (d là khoảng cách từ A đến tâm mặt cầu).

Chú ý rằng điểm tiếp xúc M của At với mặt cầu thuộc đường tròn ($\mathscr{C}$).

2) Ta thấy giao của khối nón đỉnh A, đáy là đường tròn ($\mathscr{C}$) và khối cầu đã cho là khối chỏm cầu có chiều cao $h = R - OO_1$ (O_1 là tâm của đường tròn ($\mathscr{C}$), chỏm cầu này nằm trên mặt cầu đã cho).

Thể tích khối chỏm cầu là $\pi h^2(R - \dfrac{h}{3})$.

Dễ thấy $OO_1.OA = R^2 \Rightarrow OO_1 = \dfrac{R^2}{d}$ ($d = OA$), từ đó chiều cao chỏm cầu là

$$R - \frac{R^2}{d} = \frac{R(d-R)}{d}$$

Vậy thể tích khối chỏm cầu là

$$V_1 = \pi \cdot \frac{R^2(d-R)^2}{d^2}\left[R - \frac{R(d-R)}{3d}\right] = \frac{\pi . R^3(d-R)^2(R+2d)}{3d^3} \quad (1)$$

Ta lại có bán kính đáy hình nón là $r = O_1M$. Dễ thấy

$$r^2 = O_1M^2 = O_1O.\, O_1A = O_1O(AO - O_1O) = \frac{R^2(d^2 - R^2)}{d^2},$$

chiều cao hình nón là $AO_1 = AO - OO_1 = d - \dfrac{R^2}{d} = \dfrac{d^2 - R^2}{d}$.

Từ đó thể tích khối nón là

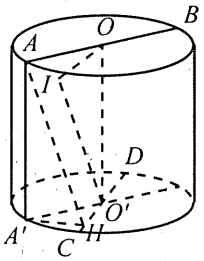
$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \frac{R^2(d^2-R^2)}{d^2}.\frac{d^2-R^2}{d} = \frac{\pi R^2(d^2-R^2)^2}{3d^3}.$$

Theo điều kiện của bài toán ta có

$$V_1 = \frac{1}{2}V_2 \text{ hay } \frac{\pi R^3(d-R)^2(R+2d)}{3d^3} = \frac{\pi R^2(d^2-R^2)^2}{3.2d^3}$$

$$\Leftrightarrow d^2 - 2Rd - R^2 = 0 \Leftrightarrow d = R(\sqrt{2}+1).$$

32. 1) Gọi AA' là một đường sinh của hình trụ. Gọi H là hình chiếu của A trên CD thì $AH \perp CD$ và $\widehat{AHA'} = \varphi$ (góc giữa mp (ACD) và mặt phẳng đáy chứa đường tròn tâm O' của hình trụ), $\widehat{A'O'H} = \alpha$.



Hình 28

Dễ thấy $A'H = R\sin\alpha$, từ đó $AH = \sqrt{h^2 + R^2\sin^2\alpha}$

và diện tích tam giác ACD là

$$S = \frac{1}{2}CD.AH = R\sqrt{h^2 + R^2\sin^2\alpha}.$$

Ta cũng có $\cos\varphi = \frac{A'H}{AH} = \frac{R\sin\alpha}{\sqrt{h^2 + R^2\sin^2\alpha}}$.

2) Gọi I là hình chiếu của O trên mp (ACD) thì $IO \perp CD$, mặt khác $OO' \perp CD$ nên $CD \perp IO'$, từ đó $\widehat{OO'I} = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Khi đó

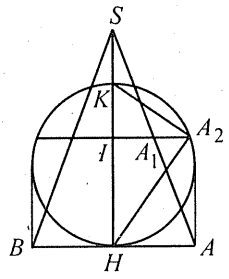
$$OI = OO'.\sin\widehat{OO'I} = h\cos\varphi = \frac{hR\sin\alpha}{\sqrt{h^2 + R^2\sin^2\alpha}};$$

$$V_{ABCD} = 2V_{OACD} = 2.\frac{1}{3}.OI.S_{\Delta ACD} = \frac{2}{3}.\frac{hR\sin\alpha}{\sqrt{h^2 + R^2\sin^2\alpha}}.R\sqrt{h^2 + R^2\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{2}{3}R^2h\sin\alpha.$$

Từ đó V_{ABCD} lớn nhất $\Leftrightarrow$ $\sin\alpha$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ $\alpha = 90^\circ$, tức là AB và CD vuông góc với nhau.

33. 1) Ta có thể coi chân đường cao H của một hình nón trùng với điểm tiếp xúc của mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ và mp (P) (nếu chưa có điều này thì có thể thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ là vectơ nối điểm H (chân đường cao hình nón) với điểm tiếp xúc của mặt cầu và mp (P)).



Hình 29

Xét mp (α) đi qua đường cao SH của hình nón.

Vì (Q) // (P) nên (Q) cắt hình nón theo hình tròn tâm I, bán kính IA_1 còn (Q) cắt $S(O,\ R)$ theo hình tròn cùng tâm I bán kính IA_2. Ta có (α) cắt $S(O,\ R)$ theo đường tròn lớn bán kính R, (α) cắt hình nón theo tam giác cân SAB, cạnh AB của tam giác SAB tiếp xúc với đường tròn lớn tại H (trung điểm của AB, coi đường tròn lớn cắt SH tại điểm K (hình 29) ứng với $x < 2R,\ x < h$).

Với các kí hiệu đó thì $IH = x,\ SH = h$. Vì $AB = 2R$ nên $KH = 2HA$.

Ta có $\dfrac{IA_1}{HA} = \dfrac{SI}{SH}$ hay $\dfrac{IA_1}{R} = \dfrac{SH - IH}{h} = \dfrac{h-x}{h} \Rightarrow IA_1 = \dfrac{R(h-x)}{h}$.

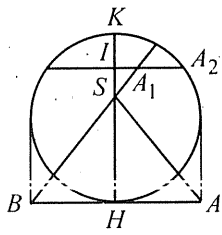
Mặt khác từ tam giác KA_2H ta có

$$IA_2^2 = IK.IH = (KH - IH)IH = (2R - x)x.$$

Khi ấy tổng S diện tích các thiết diện là

$$S = \pi\left[\frac{R^2(h-x)^2}{h^2} + (2R-x)x\right] \qquad (1)$$

Chú ý : Khi $h < x < 2R$, với lí luận như trên ta có hình vẽ tương ứng và cũng có



Hình 30

$$IA_1 = \frac{R}{h}(x-h),\ IA_2^2 = (2R-x)x$$

và biểu thức tính S vẫn như trên.

2) Với $0 < x < 2R,\ 0 < x < h$, ta tìm giá trị lớn nhất của S.

Dễ thấy $S = \pi\left[\left(\dfrac{R^2}{h^2} - 1\right)x^2 + 2R\left(1 - \dfrac{R}{h}\right)x + R^2\right]$.

Khi $\frac{R^2}{h^2}-1\neq 0$ thì toạ độ đỉnh của parabol

$$\pi\left[\left(\frac{R^2}{h^2}-1\right)x^2+2R\left(1-\frac{R}{h}\right)x+R^2\right] \text{ là } x_Đ=\frac{Rh}{R+h},\ y_Đ=\frac{2R^2h.\pi}{R+h}.$$

Từ đó:

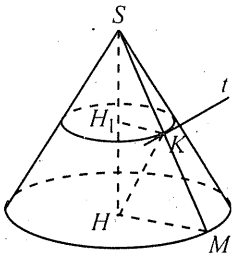
+ Nếu $\frac{R^2}{h^2}-1>0$ tức $R>h$ thì giá trị nhỏ nhất của S ứng với tung độ đỉnh, tức là $S_{\min}=\frac{2\pi R^2h}{R+h}$ ứng với $x_Đ=\frac{Rh}{R+h}$.

+ Nếu $R<h$ thì giá trị lớn nhất của S ứng với tung độ đỉnh, tức là $S_{\max}=\frac{2\pi R^2h}{R+h}$ ứng với $x_Đ=\frac{Rh}{R+h}$.

+ Nếu $R=h$ thì $S=\pi R^2$ trong trường hợp này giá trị của S không đổi.

Bạn đọc tự mô phỏng hình vẽ ứng với $R>h$, $R<h$.

34. 1) Vì $HK=\frac{1}{2}SM$, $SH\perp HM$, $HK\perp SM$ nên SHM là tam giácvuông cân, tức là $HM=h$ (h là khoảng cách từ S đến (P)). Gọi H_1 là trung điểm của SH thì $KH_1\perp SH$, H_1 cố định và $H_1K=\frac{h}{2}$. Vậy K thuộc đường tròn tâm H_1, bán kính $\frac{h}{2}$ trong mặt phẳng (α) là mặt phẳng trung trực của SH. Từ đó đoạn SK thuộc hình nón đỉnh S, trục SH_1, bán kính hình nón là $\frac{h}{2}$.

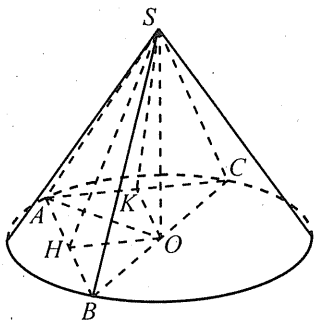


Hình 31

2) a) Trong mp (α) gọi Kt là tiếp tuyến của đường tròn tâm H_1, bán kính $\frac{h}{2}$ thì $Kt\perp H_1K$, từ đó $Kt\perp HK$. Do (Q) là mặt phẳng vuông góc với KH tại K nên $Kt\subset(Q)$, mặt khác $SM\perp HK$, tức là $SM\subset(Q)$. Vậy (Q) chính là mp(SKt), mặt phẳng này tiếp xúc với mặt nón nêu ở câu 1.

b) Vì $HK \perp SM$, (R) là mặt phẳng vuông góc với SM tại K nên HK thuộc (R). Dễ thấy Kt cũng vuông góc với SM tại K nên Kt thuộc (R). Vậy (R) chính là mp (HKt), từ đó (R) tiếp xúc với mặt nón đỉnh H, trục HS, mặt nón đó chứa đường tròn tâm H_1, bán kính $\frac{h}{2}$ trong mặt phẳng trung trực (α) của SH.

35. 1) Gọi O là tâm của đáy hình nón. Kẻ $OH \perp AB$ thì $SH \perp AB$. Vậy $\widehat{SHO}$ là góc giữa mp (SAB) và mp (ABC).



Hình 32

Tương tự ta có $\widehat{SKO}$ là góc giữa mp (SAC) và mp(ABC). Theo giả thiết ta có $\widehat{SHO} = \widehat{SKO} = \alpha$, từ đó AO là phân giác của góc $\widehat{BAC}$, mặt khác $\widehat{BAC} = 90^o$ nên ABC là tam giác vuông cân tại A.

Từ đó $OB = OH\sqrt{2}$, mặt khác $OH = h\cot\alpha$.

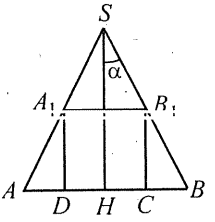
Vậy $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC.AO = \frac{1}{2}.2OB^2 = 2h^2\cot^2\alpha$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}2h^3\cot^3\alpha$.

2) Ta có $SB^2 = SO^2 + OB^2 = h^2 + 2h^2\cot^2\alpha$.

Vậy $S_{\text{xqnón}} = \sqrt{2}\pi h\cot\alpha . h\sqrt{1+2\cot^2\alpha} = \pi h^2\cot\alpha . \sqrt{2(1+2\cot^2\alpha)}$.

36. Gọi (P) là một mặt phẳng qua trục hình nón thì (P) cắt hình nón theo tam giác cân SAB, (P) cắt hình trụ nội tiếp hình nón theo hình chữ nhật A_1B_1CD nội tiếp tam giác cân SAB (giả thiết A_1 thuộc SA, B_1 thuộc SB, CD thuộc cạnh AB) và $\widehat{HSB} = \alpha$, $AB = 2r$. Gọi x là bán kính đáy, y là chiều cao hình trụ nội tiếp hình nón thì $x = DH$, $y = A_1D$.



Hình 33

Khi đó

$$\frac{y}{r\cot\alpha} = \frac{AD}{AH} = \frac{AH - DH}{AH} = \frac{AH - x}{AH} = \frac{r - x}{r},$$

từ đó $x = \dfrac{r\cot\alpha - y}{\cot\alpha}$.

Thể tích khối trụ là

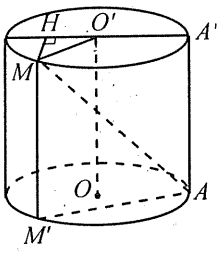
$$V = \pi x^2 y = \pi . \frac{(r\cot\alpha - y)^2}{\cot^2\alpha} . y = \frac{\pi}{2\cot^2\alpha} . (r\cot\alpha - y)\,(r\cot\alpha - y) . 2y.$$

Từ đó dễ thấy V lớn nhất khi và chỉ khi

$r\cot\alpha - y = 2y$ hay $y = \dfrac{r\cot\alpha}{3}$ và giá trị lớn nhất của V là $\dfrac{4\pi r^3\cot\alpha}{27}$, từ biểu thức tính y sẽ có x.

Vậy hình trụ có kích thước x, y như trên thì thể tích khối trụ lớn nhất.

37. 1) Gọi MM' là đường sinh của hình trụ thì $MM' = h$, từ đó $MA^2 = h^2 + M'A^2$. Như vậy MA lớn nhất hay nhỏ nhất tương đương với $M'A$ có tính chất đó. Vậy $M'A$ lớn nhất khi và chỉ khi $M'A$ bằng đường kính của đường tròn đáy hình trụ, tức là $M'A = 2R$, do đó giá trị lớn nhất của MA bằng $\sqrt{h^2 + 4R^2}$.



Hình 34

Ta lại có $M'A$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $M' \equiv A$, do đó giá trị nhỏ nhất của MA bằng h.

2) Kẻ đường cao MH của tam giác $MA'O'$ thì dễ thấy thể tích khối chóp $M.AA'O'$ là $V = \dfrac{1}{3} MH . dt(O'A'A) = \dfrac{1}{6} Rh.MH$.

Vậy V lớn nhất khi và chỉ khi MH lớn nhất.

Ta dễ thấy MH lớn nhất khi $H \equiv O'$, tức là lớn nhất của MH bằng R và

$$V_{\text{lớn nhất}} = \frac{1}{6} Rh.R = \frac{1}{6} R^2 h.$$

Khi đó $AM^2 = h^2 + 2R^2$ tức là $AM = \sqrt{h^2 + 2R^2}$.

Chú ý : Từ câu 1 của bài toán, bạn đọc có thể tự giải bài toán sau :

Cho hình nón cụt có đường cao h, bán kính đáy lần lượt là R, r. Hai điểm M, N thay đổi trên hai đường tròn đáy của nón cụt. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của MN.

Đáp số : Giá trị lớn nhất của MN bằng $\sqrt{h^2+(R+r)^2}$, giá trị bé nhất của MN bằng $\sqrt{h^2+(R-r)^2}$.

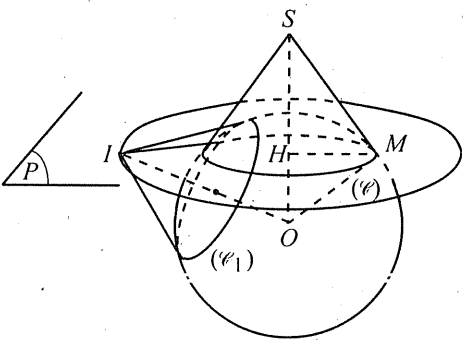
38. Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{3}dt(ABC).R\sqrt{2} = \frac{1}{6}AB.CH.R\sqrt{2} = \frac{R^2\sqrt{2}}{3}.CH$ (H là hình chiếu của C trên AB).

Vậy V_{ABCD} lớn nhất khi và chỉ khi CH lớn nhất, lúc đó H chính là tâm O của đường tròn đáy hình trụ và giá trị lớn nhất của CH bằng R, tức là giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $ABCD$ bằng $\frac{R^3\sqrt{2}}{3}$, lúc đó điểm C được xác định sao cho tam giác ABC vuông cân, và vị trí D suy ra từ vị trí của điểm C. Chú ý có hai đường sinh CD để V_{ABCD} lớn nhất.

Khi V_{ABCD} lớn nhất thì $DA = DB = \sqrt{2R^2+2R^2} = 2R$, từ đó ABD là tam giác đều.

39. Dễ thấy đường tròn $(\mathscr{C})$ nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với SO tại điểm H mà $OH = \frac{R}{2}$, bán kính r của $(\mathscr{C})$ tính bởi $HM^2 = HO.HS = \frac{3R^2}{4}$

tức là $r = \frac{\sqrt{3}R}{2}$.



Hình 35

Vì mặt nón đỉnh I và tiếp xúc với mặt cầu đã cho theo đường tròn $(\mathscr{C}_1)$ và bán kính r_1 của $(\mathscr{C}_1)$ bằng bán kính r của

($\mathscr{C}$) nên ta có $OS = OI = 2R$ và từ đó $HI^2 = OI^2 - OH^2 = 4R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{15R^2}{4}$

tức là $HI = \frac{R\sqrt{15}}{2}$.

Vậy tập các điểm I là đường tròn có tâm H, bán kính $\frac{R\sqrt{15}}{2}$ trong mặt phẳng (P) nói trên.

40. Dễ thấy đẳng thức sau $IM^2 = IO^2 - R^2 = \overline{IA}.\overline{IB}$.

Mặt khác gọi J là trung điểm của AB thì

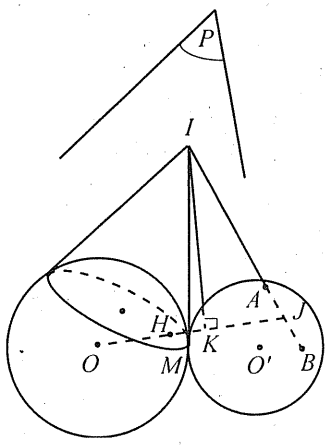
$$\overline{IA}.\overline{IB} = (\overline{IJ} + \overline{JA})(\overline{IJ} + \overline{JB})$$

$$= (\overline{IJ} + \overline{JA})(\overline{IJ} - \overline{JA})$$

$$= IJ^2 - JA^2 = IJ^2 - \frac{AB^2}{4}.$$

Vậy ta có $IO^2 - R^2 = IJ^2 - \frac{AB^2}{4}$

$$\Leftrightarrow IO^2 - IJ^2 = \frac{4R^2 - AB^2}{4}.$$



Hình 36

Hệ thức này khẳng định I thuộc mp (Q) vuông góc với OJ tại K mà

$\overline{HK} = \frac{4R^2 - AB^2}{8OJ}$, tức là K là điểm cố định (H là trung điểm của OJ) và (Q) là mặt phẳng cố định. Vậy I là giao của đường thẳng AB với (Q), tức là I là điểm cố định.

Vì IM là tiếp tuyến của mặt cầu (S) nên

$$IM^2 = IO^2 - R^2 \text{ hay } IM = \sqrt{IO^2 - R^2},$$

tức là M thuộc mặt cầu (S_1) tâm I, bán kính $\sqrt{IO^2 - R^2}$. Mặt cầu này cố định. Mặt khác M thuộc mặt cầu (S), từ đó M thuộc đường tròn ($\mathscr{C}$) là giao của hai mặt cầu (S) và (S_1), tất nhiên ($\mathscr{C}$) cố định.

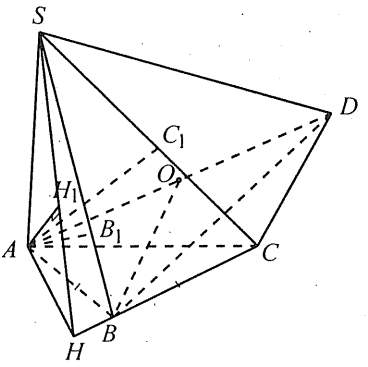
Như vậy khi (S') thay đổi thì đường thẳng IM luôn đi qua điểm I cố định, còn M luôn thuộc đường tròn $(\mathscr{C})$ cố định. Do đó IM thuộc mặt nón tròn xoay, đỉnh I, trục IO, và qua đường tròn cố định $(\mathscr{C})$. Mặt nón đó là cố định.

BÀI TẬP BỔ SUNG

41. 1) Vì $BA = BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 120^o$ nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là điểm O (đối xứng với B qua trung điểm I của AC).

Gọi AD là đường kính của đường tròn đó, dễ thấy $AD = 2AO = 4a$.

Khi đó $AB \perp BD$, mặt khác $SA \perp BD$, từ đó $BD \perp AB_1$. Như vậy $AB_1 \perp (SBD)$ hay $AB_1 \perp B_1D$. Tương tự ta cũng có $AC \perp CD$, $AC_1 \perp C_1D$. Do đó AD là đường kính của mặt cầu qua các điểm A, B, C, C_1, B_1.



Hình 37

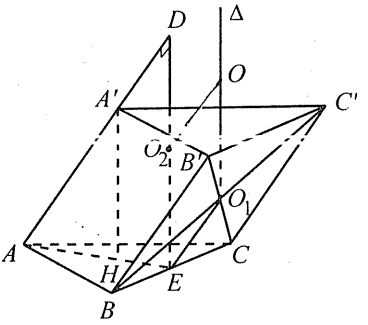
Diện tích mặt cầu đó là $\pi AD^2 = 16\pi a^2$.

2) Kẻ đường cao AH của tam giác ABC thì $SH \perp BC$. Từ đó $d(A, (SBC)) = AH_1$ (AH_1 là đường cao của tam giác vuông SAH). Ta có $AH = a\sqrt{3}$ và

$$\frac{1}{AH_1^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{9a^2}$$

từ đó $AH_1 = \dfrac{3a}{2}$.

42. 1) Ta có $(AA'H) \perp BC$ tại E, E là trung điểm của BC, từ đó $BC \perp AA'$. Từ đó đường vuông góc chung của AA', BC là DE thì DE nằm trong $(AA'H)$ và $DE \perp AA'$.



Hình 38

Vì $AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $DE = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ nên $\widehat{DAE} = 30^o$ hay $\widehat{A'AH} = 30^o$,

từ đó $AA' = \frac{AH}{\cos 30^o} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{2}{\sqrt{3}}$ hay $AA' = \frac{2a}{3}$.

Vậy cạnh bên của hình lăng trụ bằng $\frac{2a}{3}$.

2) Dễ thấy $BCC'B'$ là hình chữ nhật, và $DE \perp (BCC'B')$.

Gọi O_1 là tâm hình chữ nhật $BCC'B'$ và Δ là trục của đường tròn ngoại tiếp $BCC'B'$ thì O_1 thuộc Δ và Δ // DE. Từ đó tâm O của mặt cầu qua các điểm B, C, C', B' thuộc Δ. Cũng dễ thấy tam giác DBC cân tại D mà $BD^2 = DE^2 + BE^2$ hay $BD^2 = \frac{3a^2}{16} + \frac{4a^2}{16} = \frac{7a^2}{16}$.

Gọi O_2 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD thì có OO_2 // O_1E, từ đó mặt cầu tâm O đi qua các điểm B, C, C', B' cũng đi qua D. Ta cũng có $OO_2 = O_1E$ và bán kính R của mặt cầu phải tìm được tính bởi $R^2 = O_1E^2 + R_1^2$ ($R_1 = O_2D$ bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD).

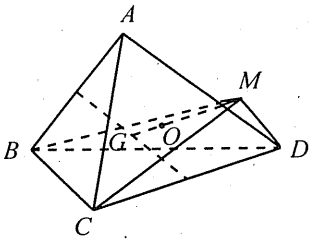
Ta có $O_1E = \frac{1}{2}BB' = \frac{a}{3}$, còn R_1 được tính bởi

$$\frac{1}{2}BC.DE = \frac{BD^2.BC}{4R_1} \text{ hay } \frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{7a^3}{64R_1}$$

từ đó $R_1 = \frac{7a}{8\sqrt{3}}$ và $R^2 = \frac{a^2}{9} + \frac{49a^2}{192} = \frac{211a^2}{576}$.

Diện tích mặt cầu phải tìm là $\frac{211\pi a^2}{144}$.

43. Ta sẽ chứng minh tập hợp các điểm M sao cho trọng tâm các tứ diện $MBCD$, $MCDA$, $MDAB$, $MABC$ cách đều tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.



Hình 39

Gọi G, O lần lượt là trọng tâm, tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ thì

$$4\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}.$$

Gọi A_1 là trọng tâm tứ diện $MBCD$ thì

$$4\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$$

hay $4\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA} = 4\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OM}$.

Tương tự như trên ta có

$$4\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA} = 4\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OM}$$

(B_1, C_1, D_1 lần lượt là trọng tâm tứ diện $MCDA$, $MDAB$, $MABC$) từ đó ta có

$$4\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = 4\overrightarrow{OA_1}, \quad 4\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OC_1}$$

$$4\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{OB_1}, \quad 4\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OD_1}.$$

Khi đó $OA_1 = OB_1 = OC_1 = OD_1 \Leftrightarrow$

$$(4\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA})^2 = (4\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB})^2$$

$$= (4\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC})^2 = (4\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OD})^2$$

Xét $(4\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA})^2 = (4\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB})^2$

$$\Leftrightarrow (4\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OM})^2 + \overrightarrow{OA}^2 - 2(4\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OM})^2.\overrightarrow{OA}$$

$$= (4\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OM})^2 + \overrightarrow{OB^2} - 2(4\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OM}).\overrightarrow{OB} \qquad (*)$$

mà $OA^2 = OB^2$ nên $(*) \Leftrightarrow (4\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OM}).\overrightarrow{AB} = 0$.

Tương tự ta cũng có

$$(4\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OM}).\overrightarrow{AC} = 0, \quad (4\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OM}).\overrightarrow{AD} = 0.$$

Do A, B, C, D không đồng phẳng nên từ các biểu thức trên suy ra

$$4\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OM} = \vec{0}.$$

Vậy tập các điểm M sao cho trọng tâm các tứ diện $MBCD$, $MCDA$, $MDAB$, $MABC$ cách đều tâm O mặt cầu ngoại tiếp $ABCD$ được xác định bởi hệ thức $(4\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OM}) = \vec{O}$. Tập này chỉ là một điểm.

44. Vì A_iA_i' là một dây cung của mặt cầu $S(O, R)$ mà A_iA_i' đi qua M nên

$\overrightarrow{MA_i}.\overrightarrow{MA_i'} = OM^2 - R^2$ hay $\overrightarrow{A_iM}.\overrightarrow{MA_i'} = R^2 - OM^2$.

Khi ấy tập điểm M thoả mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{A_iM}}{\overrightarrow{MA_i'}} = k$ tương đương với

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{A_iM}.\overrightarrow{A_iM}}{\overrightarrow{MA_i'}.\overrightarrow{A_iM}} = k \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{MA_i^2}{R^2 - OM^2} = k \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} MA_i^2 = kR^2 - kOM^2 \quad (1)$$

Gọi G là điểm xác định bởi $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{n+k} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i}$ hay

$$(n + k)\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA_i}) = n\overrightarrow{OG} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GA_i} \Leftrightarrow k\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GA_i}.$$

Khi đó (1) tương đương với $\sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i})^2 = kR^2 - k(\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{OG})^2$

$$\Leftrightarrow n\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GA_i} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GA_i}^2 = kR^2 - kMG^2 - kOG^2 + 2k\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{OG}$$

$$\Leftrightarrow (n + k)MG^2 = kR^2 - kOG^2 - \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GA_i}^2 \quad (2)$$

Mặt khác $\sum_{i=1}^{n} GA_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OG})^2 = \sum_{i=1}^{n} OA_i^2 - 2\overrightarrow{OG}.\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} + n\overrightarrow{OG}^2$

$$= nR^2 - 2\overrightarrow{OG}.\sum_{i=1}^{n} OA_i + n\overrightarrow{OG}^2 = nR^2 - 2\overrightarrow{OG}.(n + k)\overrightarrow{OG} + nOG^2$$

$$= nR^2 - (n + 2k)OG^2.$$

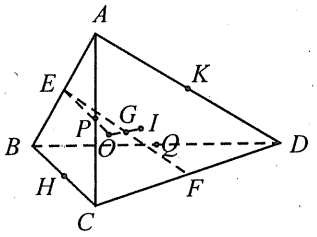
Vậy (2) $\Leftrightarrow (n + k)MG^2 = kR^2 - kOG^2 - nR^2 + (n + 2k)OG^2$

$\Leftrightarrow (n + k)\ MG^2 = (k - n)R^2 + (n + k)OG^2$

$\Leftrightarrow MG^2 = OG^2 + \frac{k - n}{k + n}R^2$.

Vì $k \geq n$ nên $\frac{k-n}{k+n} \geq 0$. Từ đó $GM = \sqrt{OG^2 + \frac{k-n}{k+n}R^2}$, tức là tập hợp các điểm M là mặt cầu có tâm G, bán kính $R = \sqrt{OG^2 + \frac{k-n}{k+n}R^2}$, ở đó G xác định bởi $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{n+k}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}$.

45. Ta có trọng tâm G của tứ diện $ABCD$ thì G là trung điểm của EF, HK, PQ, trong đó E, F là trung điểm của AB, CD; H, K là trung điểm của BC, AD; P, Q là trung điểm của AC, BD.



Hình 40

Phép đối xứng qua tâm G biến E thành F, H thành K, P thành Q. Từ đó khối $HEPFQK$ nhận G làm tâm đối xứng.

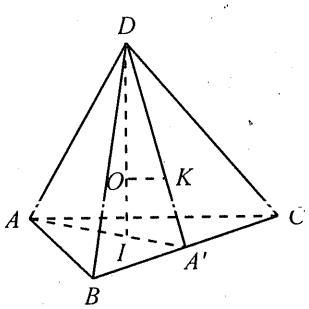
Mặt khác vì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ nên

$$\widehat{OEA} = \widehat{OPA} = \widehat{OKA} = 90^o,$$

tức là các điểm E, P, K cùng thuộc mặt cầu đường kính AO, tức là O không nằm trong tứ diện $AEPK$. Tương tự O không nằm trong tứ diện $BHQE$, $CHPF$, $DFQK$. Theo giả thiết O nằm trong tứ diện $ABCD$, từ đó O thuộc khối tám mặt $HEPFQK$, từ đó do I là ảnh của O qua G nên I cũng thuộc khối $HEPFQK$, tức là I nằm trong tứ diện $ABCD$.

46. Dễ thấy cạnh của tam giác đều ABC bằng $2a\sqrt{3}$.

Xét mp (α) chứa cạnh BC và tiếp xúc với mặt cầu tâm O, bán kính $r = OI$, nó cắt trục OI của tam giác ABC tại điểm D. Nếu ta quay hình vẽ quanh đường thẳng OI một góc 120^o thì các điểm I, O, D cố định, hình cầu tâm O, bán kính $r = OI$ bất biến và mp (DBC) biến thành mp (DCA) hoặc mp (DAB); hai mặt phẳng đó chứa hai cạnh của tam giác ABC là CA, AB và cùng tiếp xúc với mặt cầu đó.



Hình 41

Vậy ba mặt phẳng lần lượt chứa cạnh BC, CA, AB của tam giác đều ABC và tiếp xúc với mặt cầu tâm O, bán kính $r = OI$ cùng đi qua điểm D.

Xét tam giác vuông $IA'D$, ta có ba điểm I, O, D xếp theo thứ tự đó khi và chỉ khi nửa đường thẳng $A'O$ nằm trong góc $\widehat{IA'D}$. Mặt khác $\widehat{IA'D} < 90^o$ nên $\widehat{IA'O} = \dfrac{\widehat{IA'D}}{2}$ sẽ nhỏ hơn 45^o hay $\tan\widehat{IA'O} < 1$. Điều này tương đương với $\dfrac{r}{a} < 1$ hay $r < a$.

Chú ý : Với điều kiện $r < a$, có thể tính r theo a để tứ diện $ABCD$ vuông tại D.

Thật vậy, trước hết ta chứng minh giữa r, a, $h = ID$ thoả mãn hệ thức

$$hr^2 + 2a^2r - ha^2 = 0 \qquad (*)$$

Cụ thể là đặt $\widehat{IA'O} = \alpha$ thì $\widehat{IA'D} = 2\alpha$, $\tan\alpha = \dfrac{r}{a}$, $\tan 2\alpha = \dfrac{h}{a}$ hay

$$\frac{h}{a} = \frac{\dfrac{2r}{a}}{1 - \dfrac{r^2}{a^2}} = \frac{2ra}{a^2 - r^2}.$$

Từ đó có (*).

Vì $IB = IC$ nên $DB = DC$.

Vậy $\widehat{BDC} = 90^o \Leftrightarrow DA' = \dfrac{1}{2}BC = a\sqrt{3}$

mà $DA'^2 = a^2 + h^2$, từ đó $a^2 + h^2 = 3a^2$ hay $h = a\sqrt{2}$.

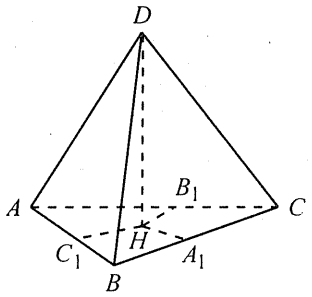
Thay vào hệ thức (*) ta có

$$r_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} - 1),$$

$$r_2 = -\frac{a}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} + 1) \text{ (loại giá trị này).}$$

Vậy $r = \dfrac{a}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} - 1)$.

47. Kẻ đường cao DH của tứ diện $ABCD$ (H có thể nằm trong tam giác hoặc nằm ngoài tam giác đáy). Gọi A_1, B_1, C_1 là hình chiếu của H trên các đường thẳng BC, CA, AB.



Hình 42

Đặt $HA_1 = |x|$, $HB_1 = |y|$, $HC_1 = |z|$ và quy ước :

$x > 0$ khi và chỉ khi A, H về một phía của BC;

$x < 0$ khi và chỉ khi A, H về hai phía của BC;

$x = 0$ khi và chỉ khi H thuộc đường thẳng BC.

Đối với y, z cũng có quy ước tương tự như trên.

Nếu kí hiệu các cạnh của tam giác ABC là a, b, c thì ta có

$$ax + by + cz = 2S_{\Delta ABC}.$$

Mặt khác giữa bán kính mặt cầu nội tiếp $ABCD$, thể tích V của tứ diện $ABCD$, diện tích toàn phần S_{tp} của tứ diện $ABCD$ có hệ thức $r = \dfrac{3V}{S_{tp}}$. Vì V cho trước nên r lớn nhất khi và chỉ khi S_{tp} bé nhất $\Leftrightarrow S_{xq}$ bé nhất.

Ta có $S_{xq} = \dfrac{1}{2}(a\sqrt{x^2+h^2} + b\sqrt{y^2+h^2} + c\sqrt{z^2+h^2})$ (ở đó $h = DH$).

Vậy S_{xq} bé nhất khi và chỉ khi

$$4S_{xq}^2 = a^2(x^2+h^2) + b^2(y^2+h^2) + c^2(z^2+h^2)$$
$$+ 2ab\sqrt{(x^2+h^2)(y^2+h^2)} + 2bc\sqrt{(y^2+h^2)(z^2+h^2)}$$
$$+ 2ac\sqrt{(x^2+h^2)(z^2+h^2)} \text{ bé nhất}$$

Ta lại có

$$4S_{xq}^2 \geq a^2(x^2+h^2) + b^2(y^2+h^2) + c^2(z^2+h^2)$$
$$+ 2ab(xy+h^2) + 2bc(yz+h^2) + 2ca(zx+h^2) \qquad (*)$$

(áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski cho ba bộ số (x, y, h, h), (x, z, h, h), (y, z, h, h)).

Dấu bằng trong bất đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{h}=\frac{y}{h}=\frac{z}{h}$ hay $x = y = z$.

Mặt khác từ (*) ta có

$$4S_{xq}^2 \geq a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2abxy + 2bcyz + 2caxz + a^2h^2 + b^2h^2 + c^2h^2$$

$$+ 2abh^2 + 2bch^2 + 2cah^2$$

hay $\quad 4S_{xq}^2 \geq (ax + by + cz)^2 + (a + b + c)^2 h^2$

$$\Leftrightarrow S_{xq} \geq \sqrt{S_{\Delta ABC}^2 + \frac{(a+b+c)^2 h^2}{4}} = k \text{ (k cho trước).}$$

Vậy min $S_{xq} = k$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$ (nghĩa là D là điểm sao cho hình chiếu của D trên mp (ABC) là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, tức là điểm D thuộc trục của đường tròn nội tiếp ΔABC, trừ giao điểm của mp (ABC) với trục đó.

48. Gọi G và O lần lượt là trọng tâm, tâm mặt cầu nội tiếp của tứ diện, r là bán kính mặt cầu nội tiếp ; h_a, h_b, h_c, h_d là đường cao của tứ diện kẻ từ A, B, C, D thì

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d} \text{ ngoài ra } h_a + h_b + h_c + h_d \geq 16r$$

(do $(h_a + h_b + h_c + h_d).\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d}\right) \geq 16$).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow h_a = h_b = h_c = h_d$.

Kí hiệu tổng khoảng cách từ một điểm M nào đó nằm trong tứ diện đều các mặt của nó là $\Sigma(M)$ thì ta có $\Sigma(G) = \frac{1}{4}(h_a + h_b + h_c + h_d)$, $\Sigma(O) = 4r$. Do đó

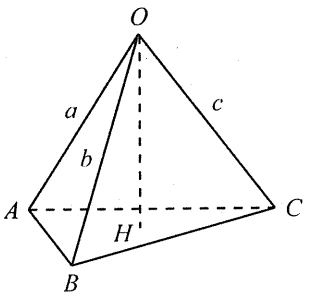
$$\Sigma(M) = \Sigma(G) = \Sigma(O) \Leftrightarrow h_a + h_b + h_c + h_d = 16\text{r}.$$

(M là điểm nằm trong tứ diện $ABCD$).

Khi đó $h_a = h_b = h_c = h_d$ và từ đó $S_{\Delta BCD} = S_{\Delta ACD} = S_{\Delta ABD} = S_{\Delta ABC}$, nghĩa là $ABCD$ là tứ diện gần đều.

Vậy $\sum(M)$, M là điểm bất kì nằm trong tứ diện $ABCD$, không đổi khi và chỉ khi $ABCD$ là tứ diện gần đều.

49. Vì $OABC$ là tứ diện vuông tại O nên OA, OB, OC lần lượt là ba đường cao qua A, B, C của tứ diện.



Hình 43

Gọi OH là đường cao qua O của tứ diện và r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$ thì có

$$\frac{1}{h}+\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}+\frac{1}{OC}=\frac{1}{r}$$

hay $$\frac{1}{h}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{r}.$$

Khi đó bất đẳng thức $\frac{1}{r}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{3\sqrt{3}}{a+b+c}$ tương đương với

$$\frac{1}{h}\geq\frac{3\sqrt{3}}{a+b+c}.$$

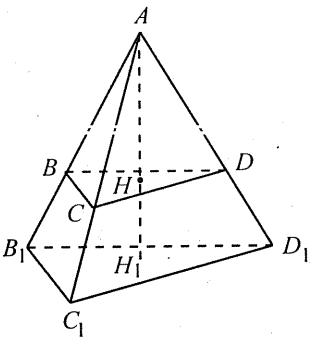
Mặt khác $$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}}.$$

Do $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$ nên $(a+b+c)^2\geq 9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$.

Vậy $\frac{(a+b+c)^2}{h^2}\geq 27$, tức là $\frac{1}{h}\geq\frac{3\sqrt{3}}{a+b+c}$.

Từ đó chứng minh được bất đẳng thức đã cho. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ nghĩa là $OABC$ là tứ diện vuông cân.

50. Xét mp (α) song song với mp (BCD) và tiếp xúc với mặt cầu bán kính R_1 (mặt cầu bàng tiếp góc tam diện đỉnh A). Mp (α) cắt AB, AC, AD theo thứ tự tại B_1, C_1, D_1. Gọi AH là đường cao của tứ diện $ABCD$ thì AH cắt mp $(B_1C_1D_1)$ tại H_1 thì có



Hình 44

$$AH_1=AH+2R_1=h_a+2R_1.$$

Ta có tứ diện $AB_1C_1D_1$ là ảnh của tứ diện $ABCD$ qua phép vị tự tâm A, tỉ số vị tự $\frac{AH_1}{AH}=\frac{R_1}{r}$, từ đó $\frac{r}{R_1}=\frac{2r}{2R_1}=\frac{h_a}{h_a+2R_1}=\frac{h_a-2r}{(h_a+2R_1)-2R_1}=1-\frac{2r}{h_a}$

hay $\frac{1}{R_1}=\frac{1}{r}-\frac{2}{h_a}$.

Tương tự ta có $\frac{1}{R_2}=\frac{1}{r}-\frac{2}{h_b}$, $\frac{1}{R_3}=\frac{1}{r}-\frac{2}{h_c}$, $\frac{1}{R_4}=\frac{1}{r}-\frac{2}{h_d}$.

Từ đó $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}=\frac{4}{r}-2\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_d}\right)$

Mặt khác $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_d}=\frac{1}{r}$, do đó $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}=\frac{2}{r}$. (1)

Ta lại có $(R_1+R_2+R_3+R_4)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)\geq 16$ (2)

Từ (1), (2) ta có $R_1+R_2+R_3+R_4\geq 8r$.

Vậy giá trị bé nhất của $R_1+R_2+R_3+R_4$ bằng $8r$.

Điều đó xảy ra khi và chỉ khi $R_1=R_2=R_3=R_4$.

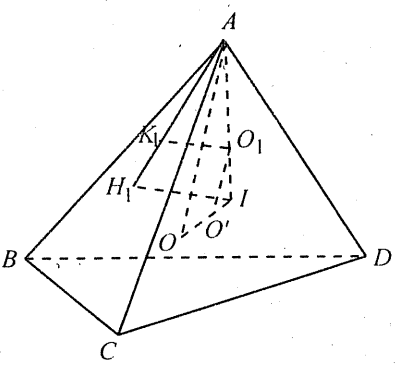
Kết hợp với hệ thức tính R_1, R_2, R_3, R_4 ở trên ta có $h_a=h_b=h_c=h_d$

hay $S_{BCD}=S_{CAD}=S_{ABD}=S_{ABC}$.

Vậy tứ diện $ABCD$ là gần đều.

51. Gọi O, I lần lượt là tâm mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp tứ diện $ABCD$.

Giả sử O_1 là tâm mặt cầu bán kính r_1 tiếp xúc với ba mặt của góc tam diện đỉnh A mà (O_1) nằm trong tứ diện đã cho. Khi đó A, O_1, I thẳng hàng, $r_1=O_1O'$.



Hình 45

Gọi H_1, K_1 là hình chiếu của I, O_1 trên mp (ABC) của tứ diện $ABCD$, khi đó $IH_1 // O_1K_1$ và $IH_1 = r$, $O_1K_1 = r_1$, $\dfrac{AI}{AO_1} = \dfrac{r}{r_1}$.

Tương tự ta cũng có $\dfrac{BI}{BO_2} = \dfrac{r}{r_1}$, $\dfrac{CI}{CO_3} = \dfrac{r}{r_1}$, $\dfrac{DI}{DO_4} = \dfrac{r}{r_1}$.

(O_2 là tâm mặt cầu bán kính r_1 tiếp xúc với ba mặt của tam diện đỉnh B đối với tứ diện $ABCD$; O_3, O_4 có tính chất tương tự như thế).

Từ đó : $\dfrac{AI}{O_1I} = \dfrac{r}{r - r_1} \Rightarrow \overrightarrow{IA} = \dfrac{r}{r - r_1}\overrightarrow{IO_1}$.

Tương tự ta cũng có $\overrightarrow{IB} = \dfrac{r}{r - r_1}\overrightarrow{IO_2}$, $\overrightarrow{IC} = \dfrac{r}{r - r_1}\overrightarrow{IO_3}$, $\overrightarrow{ID} = \dfrac{r}{r - r_1}\overrightarrow{IO_4}$.

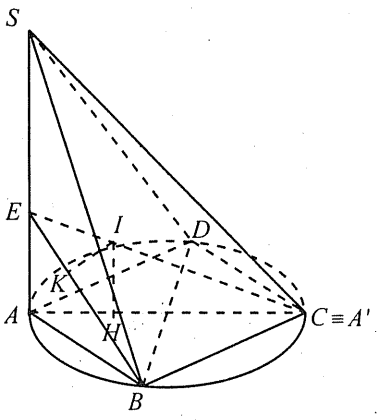
Vậy phép vị tự tâm I, hệ số vị tự $k = \dfrac{r}{r - r_1}$ biến O_1 thành A, O_2 thành B, O_3 thành C, O_4 thành D. Mặt khác các mặt cầu $(O_1, r_1), (O_2, r_1), (O_3, r_1), (O_4, r_1)$ cũng đi qua O' nên O' là tâm mặt cầu đi qua bốn điểm O_1, O_2, O_3, O_4. Vì thế phép vị tự trên biến O' thành tâm O của mặt cầu qua A, B, C, D, tức là $\dfrac{R}{r_1} = \dfrac{r}{r - r_1}$ và như thế $AO // O_1O'$; O, O', I thẳng hàng.

Từ $\dfrac{R}{r_1} = \dfrac{r}{r - r_1}$ ta có $r_1 = \dfrac{Rr}{R + r}$.

Cách xác định tâm O_1 của mặt cầu nằm trong tứ diện $ABCD$ và tiếp xúc với ba mặt của góc tam diện đỉnh A.

Trên đoạn IO lấy điểm O' sao cho $IO' = IO.\dfrac{r}{r - r_1}$ và vẽ qua O' đường thẳng song song với AO, nó cắt AI tại O_1. Mặt cầu tâm O_1, bán kính r_1 là mặt cầu phải tìm. Tương tự cho O_i, $i = \overline{2,4}$.

52. 1) Dễ thấy tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là trung điểm của SA', bán kính mặt cầu đó bằng $\sqrt{R^2+\frac{h^2}{4}}$.



Hình 46

2) Ta có $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA.\,dt(ABCD)$

$$=\frac{1}{6}h.AC.BD.$$

Vì $ABCD$ nội tiếp đường tròn, $AC \perp BD$ nên $V_{S.ABCD}$ lớn nhất khi và chỉ khi

$AC = BD = 2R$, tức là $C \equiv A'$ và $ABCD$ là hình vuông.

Vì B, D đối xứng nhau qua mp (SAA') nên (SAA') là mặt phẳng phân giác của nhị diện cạnh SA và nhị diện cạnh SA'.

Mặt khác $AB \perp BA'$ nên $SB \perp BA'$, tức là $\widehat{SBA}$ là góc phẳng nhị diện cạnh BA'.

Vẽ phân giác BE của $\widehat{SBA}$ thì EA' là giao các mặt phẳng phân giác của các nhị diện cạnh SA, SA', BA'. Từ đó tâm I của mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$ thuộc $A'E$.

Ta tính tỉ số $\frac{IA'}{IE}$ và bán kính r của mặt cầu đó.

Kẻ $IH \,//\, SA$ thì $IH \perp (ABCD)$, $IK \,//\, BA'$ thì $IK \perp (SAB)$.

Vì BE là phân giác của $\widehat{SBA}$ nên

$$\frac{EA}{ES}=\frac{BA}{BS}\Rightarrow\frac{EA}{SA}=\frac{AB}{AB+SB}\Rightarrow EA=\frac{Rh\sqrt{2}}{R\sqrt{2}+\sqrt{h^2+2R^2}}.$$

Ta lại có $\frac{HI}{EA}+\frac{IK}{BA'}=\frac{IA'}{EA'}+\frac{IE}{EA'}=1$ hay $\frac{r(R\sqrt{2}+\sqrt{h^2+2R^2})}{Rh\sqrt{2}}+\frac{r}{R\sqrt{2}}=1.$

Từ đó $r=\frac{Rh\sqrt{2}}{R\sqrt{2}+\sqrt{h^2+2R^2}+h}.$

Vậy $\frac{IA'}{IE} = \frac{IA'}{EA'}.\frac{EA'}{IE} = \frac{IH}{AE}.\frac{BA'}{IK} = \frac{BA'}{AE}$ hay $\frac{IA'}{IE} = \frac{R\sqrt{2}+\sqrt{h^2+2R^2}}{h}$.

Hệ thức này xác định vị trí điểm I.

53. Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện và G là trọng tâm của tứ diện đó thì $OA = OB = OC = OD = R$ và $4\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

Ta có $a^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})^2 = OC^2 + OB^2 - 2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 2R^2 - 2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}$.

Từ đó $2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 2R^2 - a^2$.

Tương tự ta có $2\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OA} = 2R^2 - a'^2$,

$2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = 2R^2 - b^2$, $2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OD} = 2R^2 - b'^2$,

$2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 2R^2 - c^2$, $2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD} = 2R^2 - c'^2$.

Mặt khác ta có $0 \le 16OG^2 = 4R^2 + 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD}$

$+ 2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD}$

$= 16R^2 - (a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2)$.

Từ đó $(a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2) \le 16R^2$ (1)

Ta lại có $(a + a' + b + b' + c + c')^2 \le 6\,(a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2)$

Từ đó $a + a' + b + b' + c + c' \le 4\sqrt{6}\,R$. (2)

Gọi r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện và h_a, h_b, h_c, h_d là các đường cao của tứ diện lần lượt qua A, B, C, D thì $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d}$ mà

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d} \ge \frac{4}{\sqrt[4]{h_a h_b h_c h_d}} = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{6.\sqrt[6]{(h_a h_b h_c h_d)^3}}}$$

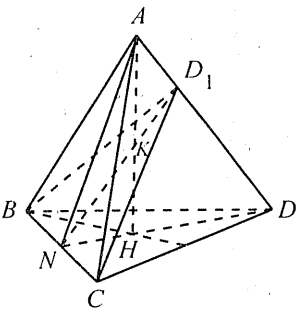
$$\ge \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a + h_d h_a + h_d h_b + h_d h_c}} \quad (3)$$

Từ đó $\frac{1}{r} \geq \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a + h_d h_a + h_d h_b + h_d h_c}}$

Từ (2) và (3) suy ra $\frac{R}{r} \geq \frac{a + a' + b + b' + c + c'}{\sqrt{h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a + h_d h_a + h_d h_b + h_d h_c}}$.

Đẳng thức xảy ra ở (1) khi và khi $O \equiv G$ tức là $ABCD$ là tứ diện gần đều ; còn đẳng thức xảy ra ở (2) $\Leftrightarrow a = b = c = a' = b' = c'$ tức $ABCD$ là tứ diện đều, đẳng thức xảy ra ở (3) $\Leftrightarrow h_a = h_b = h_c = h_d \Leftrightarrow S_1 = S_2 = S_3 = S_4$ tức $ABCD$ là tứ diện gần đều. Vậy dấu "=" xảy ra trong bất đẳng thức phải chứng minh khi và chỉ khi $ABCD$ là tứ diện gần đều.

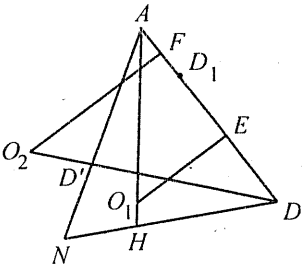
54. Dễ thấy $AD_1 = \frac{1}{4}AD$ trong đó D_1 là giao điểm của mp (BCK) với AD.



Hình 47

Vì AH là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD nên tâm O_1 của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $BCDD_1$ thuộc AH. Tâm đó là giao của AH với đường trung trực O_1E của DD_1 trong mp (AHD).

Tương tự tâm O_2 của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD_1$ là giao của DD' với đường trung trực O_2F của AD_1 trong mp (ADD') (D' là hình chiếu của D trên AN, N là trung điểm BC). Bán kính R_1 của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $BCDD_1$ là $R_1 = O_1D$, bán kính R_2 của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD_1$ là $R_2 = O_2A$.



Hình 48

Xét tứ giác nội tiếp O_1HDE trong mp (AHD) ta có

$$AE \,.\, AD = AO_1 \,.\, AH, AE = \frac{5a}{8}, \; AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

(a là độ dài một cạnh của tứ diện $ABCD$).

Ta có $AO_1 = \frac{5a\sqrt{6}}{16}$, từ đó $O_1H = AH - AO_1 = \frac{a\sqrt{6}}{3} - \frac{5a\sqrt{6}}{16} = \frac{a\sqrt{6}}{48}$.

Vậy $R_1^2 = O_1D^2 = O_1H^2 + HD^2 = \frac{6a^2}{48^2} + \frac{3a^2}{9} = \frac{129a^2}{48.8} \Rightarrow R_1 = \frac{a\sqrt{129}}{8\sqrt{6}}$.

Tương tự như trên khi xét tứ giác nội tiếp $O_2D'FA$ ta có

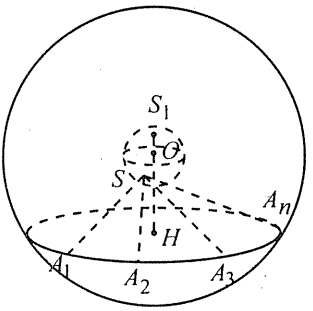
$DD' \,.\, DO_2 = DF \,.\, DA, DF = \frac{3a}{4} + \frac{a}{8} = \frac{7a}{8}, DA = a, DD' = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Từ đó $DO_2 = \frac{7a\sqrt{6}}{16}$ và $D'O_2 = \frac{7a\sqrt{6}}{16} - \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{5a\sqrt{6}}{48}$, từ đó

$R_2^2 = O_2A^2 = O_2D'^2 + D'A^2 = \frac{153a^2}{48.8}$, tức là $R_2 = \frac{a\sqrt{153}}{8\sqrt{6}}$.

Vậy $\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{43}{51}}$.

55. Kí hiệu tâm hai mặt cầu là O. Vì các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ của hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ thuộc mặt cầu lớn nên khi kẻ đường OH vuông góc với mp $(A_1, A_2, ..., A_n)$ thì đường thẳng OH sẽ cắt mặt cầu nhỏ tại hai điểm S_1, S_2 trong đó có một điểm cách xa mặt phẳng $(A_1...A_n)$ hơn. Giả sử điểm đó là S_1.



Hình 49

Đặt $OH = x$, $0 \le x \le R_2$. Khi ấy với mỗi x ta có

$$V_{S.A_1A_2...A_n} \le V_{S_1.A_1A_2...A_n} = \frac{1}{3} S_1H.dt(A_1A_2...A_n) \le \frac{1}{3} S_1H.dt(B_1B_2...B_n).$$

ở đó $B_1B_2...B_n$ là đa giác đều nội tiếp đường tròn do mp $(A_1...A_n)$ cắt mặt cầu lớn.

Ta có $S_1H = x + R_1$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác đều $B_1B_2...B_n$ là

$$R^2 = HA_1^2 = OA_1^2 - OH^2 = 16R_1^2 - x^2 \quad (\text{vì } R_2 = 4R_1).$$

Ta có : $dt(B_1B_2...B_n) = \frac{n}{2}(16R_1^2 - x^2)\sin\frac{2\pi}{n}$.

Từ đó $V_{S.A_1A_2...A_n} \le \frac{1}{6} n\sin\frac{2\pi}{n}(16R_1^2 - x^2).(R_1 + x)$.

Xét hàm số $f(x) = (16R_1^2 - x^2).(R_1 + x) = -x^3 - R_1x^2 + 16R_1^2x + 16R_1^3$

với $0 \le x \le 4R_1$.

Dễ thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2R_1$.

Vậy $f_{max} = \max\{f(0), f(2R_1), f(4R_1)\} = f(2R_1) = 36R_1^3$.

Như thế $V_{S.A_1...A_n} \le \frac{1}{6} n\sin\frac{2\pi}{n}.36R_1^3 = 6nR_1^3\sin\frac{2\pi}{n}$.

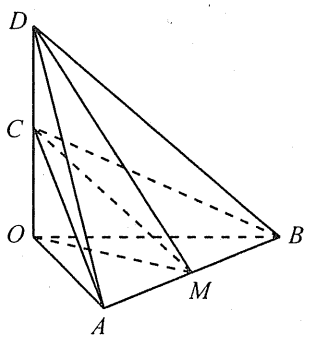
Kết luận : $V_{S.A_1...A_n}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ $A_1A_2...A_n$ là đa giác đều nội tiếp đường tròn, thiết diện cách tâm mặt cầu một khoảng $2R_1$, còn S là điểm S_1 (S_1 như nêu trên).

56. Vì $OA = OB = 2a$, $\widehat{AOB} = 120^o$ nên $AB = 2a\sqrt{3}$.

Do tam giác ABD đều nên $AD = BD = 2a\sqrt{3}$, từ đó $OD^2 = AD^2 - OA^2 = 8a^2 \Rightarrow OD = 2a\sqrt{2}$.

Do tam giác ABC vuông mà $OA = OB$ tức là $CA = CB$ nên tam giác đó vuông tại C. Từ đó

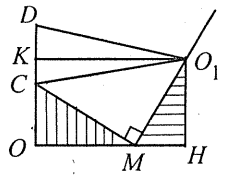
$$AC = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = a\sqrt{6}$$



Hình 50

$\Rightarrow OC^2 = AC^2 - OA^2 = 6a^2 - 4a^2 = 2a^2$

hay $OC = a\sqrt{2}$.



Hình 51

Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của AB thì mp(OMD) là mặt phẳng trung trực của AB, tức là $(ODM) \perp (ABC)$. Vì ABC vuông tại C nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, từ đó trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó phải thuộc mp(OMD). Từ đó tâm O_1 của mặt cầu phải tìm là giao của

trục đó và đường trung trực KO_1 của CD trong mp (ODM), nói khác đi mp(ODM) cắt mặt cầu phải tìm theo đường tròn lớn.

Tính bán kính mặt cầu phải tìm.

Ta có $OK = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

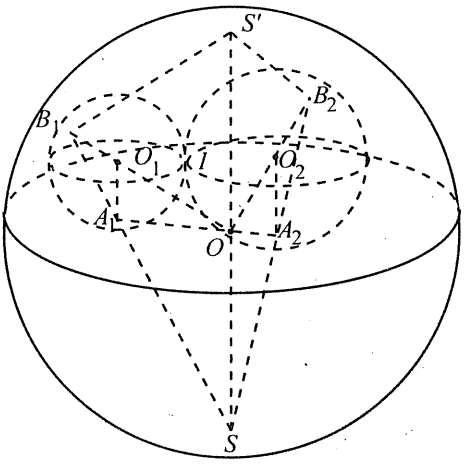
Dễ thấy $\dfrac{OM}{CM} = \dfrac{O_1H}{MO_1} \Rightarrow O_1M = \dfrac{CM.O_1H}{OM} = \dfrac{a\sqrt{3}.\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}}{a} = \dfrac{3a\sqrt{6}}{2}$.

Ta có bán kính R mặt cầu phải tìm là O_1C, từ đó

$$R^2 = O_1C^2 = CM^2 + MO_1^2 = 3a^2 + \frac{54a^2}{4} = \frac{66a^2}{4} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{66}}{2}.$$

Bạn đọc tự tính bán kính các đường tròn do các mặt phẳng chứa các mặt của tứ diện $ABCD$ cắt mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

57. Kí hiệu mặt cầu đã cho là $S(O, R)$ và (P) là một mặt phẳng qua tâm O của mặt cầu. Xét nửa trên mặt cầu $S(O, R)$ do mp (P) cắt. Kí hiệu hai mặt cầu nhỏ thoả mãn điều kiện bài toán là $S_1(O_1, r_1)$, $S_2(O_2, r_2)$.



Hình 52

Giả sử $S_1(O_1, r_1)$ tiếp xúc với nửa mặt cầu $S(O, R)$ tại A_1 và B_1 (A_1 thuộc hình tròn lớn).

Gọi SS' là đường kính của mặt cầu $S(O, R)$ mà $SS' \perp (P)$. Khi đó do $O_1A_1 \perp (P)$ nên $O_1A_1 \,//\, SS'$ và B_1, O_1, O thẳng hàng. Từ đó $\dfrac{B_1O_1}{B_1O} = \dfrac{O_1A_1}{OS}$. Vậy S, A_1, B_1 thẳng hàng.

Tương tự như trên cũng có S, A_2, B_2 thẳng hàng. Ta lại có SS' là đường kính mặt cầu, B_1 thuộc mặt cầu $S(O, R)$ nên $\widehat{S'B_1S} = 90^o$ hay $\widehat{S'B_1A_1} = 90^o$.

Như vậy SB_1A_1O nội tiếp đường tròn, từ đó $\overline{SA_1}\,.\,\overline{SB_1} = \overline{SO}\,.\,\overline{SS'} = 2R^2$.

Tương tự cũng có $\overrightarrow{SA_2}.\overrightarrow{SB_2} = 2R^2$.

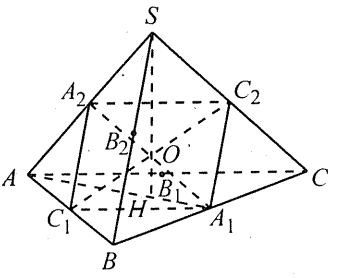
Vậy điểm S có cùng phương tích đối hai mặt cầu $S_1(O_1, r_1)$, $S_2(O_2, r_2)$.

Gọi I là điểm tiếp xúc của hai mặt cầu $S_1(O_1, r_1)$, $S_2(O_2, r_2)$ (dĩ nhiên hai mặt cầu đó tiếp xúc ngoài) thì SI là tiếp tuyến của hai mặt cầu đó, nghĩa là $SI^2 = 2R^2$.

Vậy I thuộc mặt cầu tâm S, bán kính $R\sqrt{2}$. Mặt cầu này cố định.

58. 1) Kí hiệu O, R là tâm, bán kính mặt cầu đã cho.

Gọi A_1, B_1, C_1 là trung điểm các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC ; A_2, B_2, C_2 là trung điểm của SA, SB, SC.



Hình 53

Vì mặt cầu tiếp xúc với ba cạnh AB, BC, CA tại trung điểm của chúng nên $AC_1 = AB_1$

$\Rightarrow AB = AC$.

Tương tự ta có $AB = BC$, vậy ABC là tam giác đều.

Xét hai tam giác OAS, OBS có OS chung, $OA = OB$, $OA_2 = OB_2$ nên $SA = SB$. Tương tự có $SB = SC$ tức là $SA = SB = SC$. Vậy $S.ABC$ là hình chóp đều.

2) Tính bán kính mặt cầu.

Dễ thấy O thuộc đường cao SH và $A_1C_1A_2C_2$ là hình chữ nhật. Do O cách đều bốn đỉnh của hình chữ nhật đó nên O là giao điểm của A_1A_2 và C_1C_2.

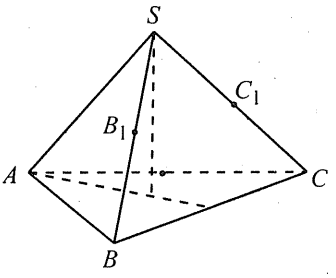
Vậy $4R^2 = A_1A_2^2 = A_1C_1^2 + C_1A_2^2 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{SA^2}{4}$.

Ta có $s = \dfrac{1}{2}a.SA_1 \Rightarrow SA_1 = \dfrac{2s}{a}$. Vậy $SA^2 = SB^2 = SA_1^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{4s^2}{a^2} + \dfrac{a^2}{4}$.

Từ đó $R^2 = \dfrac{1}{16}(a^2 + SA^2) = \dfrac{1}{16}\left(\dfrac{5a^2}{4} + \dfrac{4s^2}{a^2}\right) = \dfrac{5a^4 + 16s^2}{64a^2}$.

$\Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{5a^4 + 16s^2}}{8a}$.

59. Kí hiệu B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của SB, SC và gọi giao điểm thứ hai của AB với mặt cầu là C' thì $BC' \,.\, BA = BB_1^2$ hay $BC' . a = \dfrac{SB^2}{4} = \dfrac{a^2}{2}$.

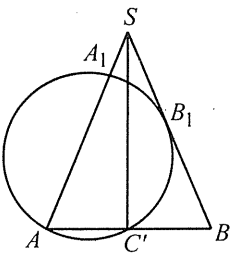


Hình 54

Vậy $BC' = \dfrac{a}{2}$, tức C' là trung điểm của AB.

Tương tự ta có mặt cầu đó qua trung điểm B' của AC.

Xét mp(SAB) cắt mặt cầu đã cho theo đường tròn, đường tròn đó đi qua A, C' (trung điểm của AB) và tiếp xúc với SB tại trung điểm B_1 của SB. Giả sử đường tròn đó cắt SA tại điểm A_1 thì

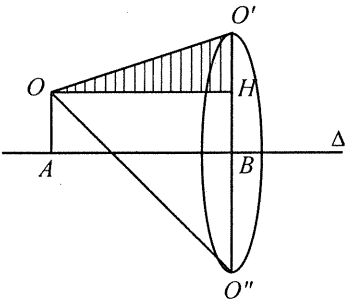


Hình 55

$$SB_1^2 = SA_1 . SA \text{ hay } \frac{a^2}{2} = SA_1 . a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow SA_1 = \frac{a\sqrt{2}}{4}. \text{ Từ đó } AA_1 = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

60. Vì mặt cầu $S(O, R)$ và $S'(O', R')$ tiếp xúc với đường thẳng Δ tại hai điểm A, B nên $OA \perp \Delta$, $O'B \perp \Delta$. Khi ấy do $d = OO' > R + R'$ nên có hai trường hợp xảy ra:



Hình 56

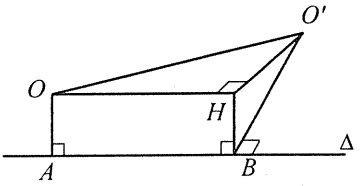
Trường hợp 1 : OO' và Δ đồng phẳng.

Trong trường hợp này OA và $O'B$ song song với nhau và từ đó có thể xảy ra O, O' nằm về một phía của Δ hoặc về hai phía của Δ. Từ đó

$$OO'^2 = AB^2 + (R - R')^2 \text{ hoặc } OO'^2 = AB^2 + (R + R')^2$$

tức là $AB^2 = OO'^2 - (R - R')^2$ hoặc $AB^2 = OO'^2 - (R + R')^2$.

Trường hợp 2 : OO' và Δ chéo nhau.



Hình 57

Điều này tương đương với các điểm H, B, O' không thẳng hàng (H là hình chiếu của O trên đường thẳng qua B và song song với OA) và từ đó ta có $|BO' - HB| < HO' < |HB + BO'|$

tức là $|R' - R| < HO' < |R + R'|$

$$\Leftrightarrow (R - R')^2 < HO'^2 < (R + R')^2.$$

Mặt khác $OO'^2 = OH^2 + HO'^2 = AB^2 + HO'^2$,

từ đó $AB^2 + (R - R')^2 < OO'^2 < AB^2 - (R + R')^2$

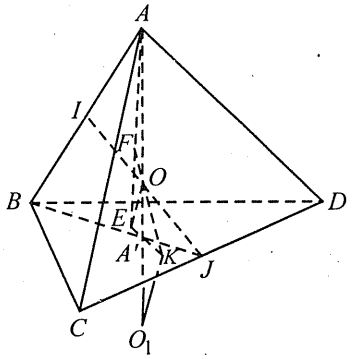
hay $OO'^2 - (R + R')^2 < AB^2 < OO'^2 - (R - R')^2$.

Vậy trong trường hợp chung ta có :

$$OO'^2 - (R + R')^2 \le AB^2 \le OO'^2 + (R - R')^2$$

tức là $d^2 - (R + R')^2 \le AB^2 \le d^2 - (R - R')^2$.

61. 1) Vì $ABCD$ là tứ diện gần đều nên tâm mặt cầu ngoại tiếp, tâm mặt cầu nội tiếp và trọng tâm của tứ diện trùng nhau. Ta kí hiệu điểm đó là O thì O là trung điểm của một đường trung bình IJ. Gọi O_1 là tâm mặt cầu bàng tiếp tứ diện ứng với đỉnh A. Khi đó A, O, O_1 thẳng hàng và AO cắt mp (BCD) tại A' (trọng tâm của tam giác BCD).



Hình 58

Vì E là điểm tiếp xúc của mp (BCD) và mặt cầu tâm O nên E nằm trong tam giác BCD, E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và $OE = r$, $OE \perp (BCD)$. Do K là điểm tiếp xúc của mp (BCD) với mặt cầu tâm O_1 bàng tiếp tứ diện $ABCD$ ứng với đỉnh A nên $O_1K \perp$ mp (BCD) và $O_1K = r_1$ (bán kính mặt cầu bàng tiếp tứ diện ứng với đỉnh A), đồng thời $O_1K \,//\, OE$ và từ đó ta có A', E, K thẳng hàng.

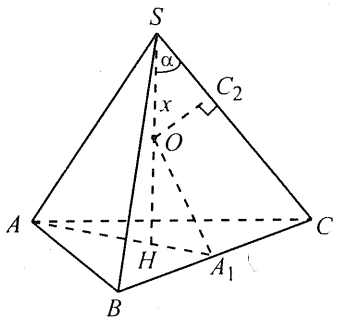
Kí hiệu diện tích bốn mặt của tứ diện lần lượt là S_1, S_2, S_3, S_4 (các mặt lần lượt đối diện với đỉnh A, B, C, D) ; V là thể tích tứ diện $ABCD$ thì

$3V = (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)r = (S_2 + S_3 + S_4 - S_1)r_1$.

Do $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S$ ($ABCD$ là tứ diện gần đều) nên từ hai hệ thức trên ta có $r_1 = 2r$. Mặt khác do $OE \,//\, O_1K$ nên $\frac{r_1}{r} = \frac{A'K}{A'E} = 2$ hay $\overrightarrow{EK} = 3\overrightarrow{EA'}$. Vậy K là trực tâm tam giác BCD.

2) Gọi F là giao của AE với KO, áp dụng định lí Menelaus vào tam giác AEA' với cát tuyến KOF ta có $AF = 2FE$.

62. Vì hình chóp $S.ABC$ là đều nên tâm O của mặt cầu tiếp xúc với các cạnh của hình chóp thuộc tia SH (đường cao hình chóp).



Hình 59

Gọi C_2 là điểm tiếp xúc của SC với mặt cầu thì $SC_2 < SC$.

Đặt $OS = x$ thì $OC_2 = x\sin\alpha$. (1)

Gọi A_1 là điểm tiếp xúc của cạnh BC với mặt cầu thì $OA_1^2 = OH^2 + HA_1^2 = (h-x)^2 + HA_1^2$.

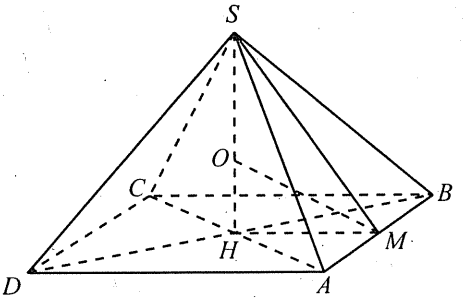
Ta có $HA_1 = \frac{1}{2}HC$, $HC = h\tan\alpha$, từ đó $OA_1^2 = (h-x)^2 + \frac{1}{4}h^2\tan^2\alpha$ (2).

Vì OC_2 và OA_1 là bán kính mặt cầu tiếp xúc với các cạnh, tức là $OC_2 = OA_1$ nên từ (1), (2) ta có $x^2\sin^2\alpha = (h-x)^2 + \frac{1}{4}h^2\tan^2\alpha$.

Từ đẳng thức này tính được x, chú ý chọn x để $0 < x < h$, tức là tính được bán kính mặt cầu tiếp xúc với các cạnh của tứ diện theo h, α.

63. 1) Trong hình chóp đều, tâm mặt cầu ngoại tiếp và tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp đều thuộc đường cao hình chóp đó, mặt khác tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp nằm trong hình chóp nên điều kiện để tâm mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp trùng nhau là $R + r = h$ trong đó R, r, h lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại, nội tiếp và đường cao của hình chóp.

2) Áp dụng kết quả đó vào hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ ta có hai tâm mặt cầu nói trên trùng nhau khi và chỉ khi $\alpha = 45^o$, trong đó $\alpha = \widehat{ASB}$.



Hình 60

Thật vậy gọi O là tâm mặt cầu đó thì

$$\frac{r}{R}=\frac{HM}{SM} \text{ hay } \frac{r+R}{R} = \frac{HM+MS}{MS}$$

hay $\frac{h}{R}=1+\frac{HM}{SM}$.

Ta dễ thấy $R = \frac{SA^2}{2SH} \Rightarrow \frac{2h^2}{SA^2} = 1+\frac{HM}{MS}$,

$SA = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ (a là cạnh đáy hình chóp),

$$h^2 = SH^2 = SM^2 - HM^2 = \left(\frac{a}{2}.\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow 2h^2 = \frac{a^2\cos\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Thay vào hệ thức $\frac{2h^2}{SA^2} = 1+\frac{HM}{SM}$, ta có

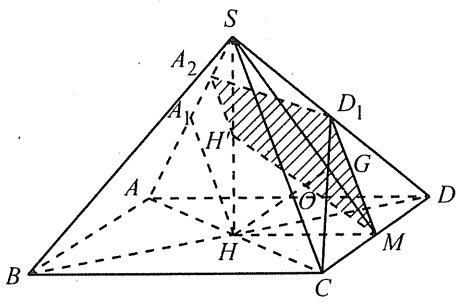
$$\frac{a^2\cos\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}.\frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{a^2} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}.\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}}+1 \text{ hay } 2\cos\alpha = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow 2\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin\alpha = 1$$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = \sin\alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^o$.

64. *Gợi ý* : Xét mp (α) qua đường thẳng OO'. Giao của (α) với hai mặt cầu là hai đường tròn bán kính R, R'. Do $|R - R'| < OO' < R + R'$ nên hai đường tròn đó giao nhau tại hai điểm I, I' đối xứng nhau qua OO', từ đó giao hai mặt cầu là đường tròn do I quay quanh OO'. Bán kính đường tròn đó chính là đường cao của tam giác OIO'. Biết $OI = R$, $O'I = R'$, $OO' = d$, từ đó tính được bán kính đường tròn phải tìm.

65. 1) Gọi H là tâm hình vuông $ABCD$. Do các cạnh của hình chóp $S.ABCD$ bằng a nên $HS = HC = HD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, mặt khác tam giác SCD đều nên trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác SCD là đường thẳng HG (G là trọng tâm tam giác SCD).



Hình 61

Gọi D_1 là trung điểm của SD, A_2 là trung điểm của SA_1 thì $A_2D_1 \perp SA_1$. Gọi H' là trung điểm của SH thì $H'A_2 \perp SA_1$ (vì $H'A_2 \,//\, HA_1$, mà $HA_1 \perp SA$), từ đó mp($H'A_2D_1$) là mặt phẳng trung trực của SA_1. Gọi M là trung điểm của CD thì $D_1M \,//\, A_2H'$ (vì cùng song song với SC), tức là $M \in$ mp ($H'A_2D_1$). Khi đó gọi O là giao điểm của HG và $H'M$ thì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SA_1CD.

Tính bán kính mặt cầu đó.

Dễ thấy $OG = \dfrac{OH}{3}$ hay $OG = \dfrac{1}{4}HG$ (do định lí Menelauyt áp dụng vào tam giác với cát tuyến MOH'). Mặt khác $HG = \dfrac{SH.HM}{SM} = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$. Vậy $OG = \dfrac{a}{4\sqrt{6}}$.

Bán kính R của mặt cầu được tính bởi

$$R^2 = OS^2 = OG^2 + GS^2 = \left(\frac{a}{4\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{11a^2}{32}.$$

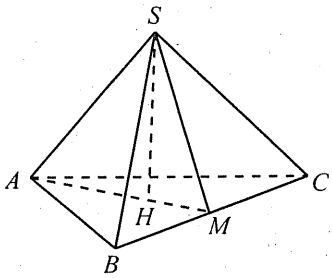
Từ đó diện tích mặt cầu phải tìm bằng $\dfrac{11\pi a^2}{8}$.

2) Vì mặt cầu đi qua A_1, A, B, D cắt SB tại B_1 nên các điểm A, B, B_1, A_1 thuộc đường tròn. Khi đó $\overline{SA}.\overline{SA_1} = \overline{SB}.\overline{SB_1}$, từ đó $SB_1 = \frac{a}{2}$, tương tự ta có $SC_1 = SD_1 = \frac{a}{2}$.

66. Ta giải bài tập này khi $h = \frac{a\sqrt{15}}{5}$. Khi h cho trước thì cách giải tương tự.

Gọi cạnh bên hình chóp là x. Khoảng cách từ A đến mp(SBC) là đường cao của tam giác SAM (M là trung điểm của BC). Khi đó

$$AM \,.\, SH = SM \,.\, \frac{a\sqrt{15}}{5}$$



Hình 62

hay $\frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{x^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{x^2 - \frac{a^2}{4}}.\frac{a\sqrt{15}}{5}$,

từ đó $x = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Khi $x = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ thì $SH^2 = \frac{2a^2}{3} - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{3}$.

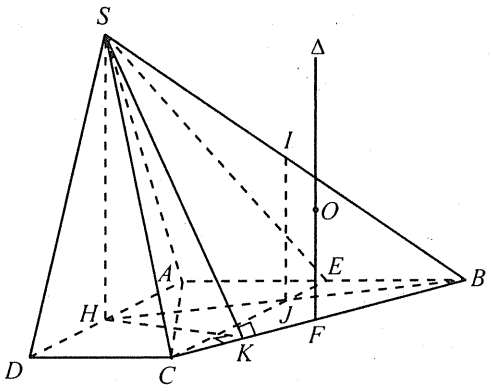
Vậy $HS = HA = HB = HC$, do đó tâm mặt cầu phải tìm là H, bán kính mặt cầu là $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Chú ý khi khoảng cách từ A đến mp (SBC) là h thì x được xác định bởi

$$\frac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{x^2 - \frac{a^2}{3}} = h\sqrt{x^2 - \frac{a^2}{4}}$$

và chú ý x thoả mãn điều kiện $x^2 - \frac{a^2}{3} > 0$.

67. 1) Vì ΔSAD cân tại S, nên gọi H là trung điểm của AD thì $SH \perp AD$, mặt khác $(SAD) \perp (ABCD)$ nên SH là đường cao hình chóp đã cho. Kẻ $HK \perp BC$ thì $SK \perp BC$, tức $\widehat{SKH}$ là góc giữa mp(SBC) và mp$(ABCD)$, từ đó $\widehat{SKH} = 60^o$.



Hình 63

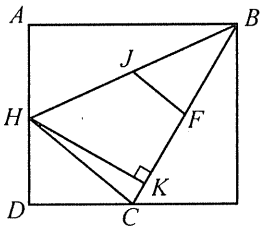
Ta có $SH = HK \tan 60^o = HK\sqrt{3}$.

Dễ thấy $BC = a\sqrt{5}$ và do

$$HK \,.\, BC = 2S_{HBC},\ S_{HBC} = S_{ABCD} - (S_{HAB} + S_{HCD})$$

nên $HK = \dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$. Vậy $SH = \dfrac{3a\sqrt{15}}{5}$.

2) Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SBCE$ (E là trung điểm của AB).



Hình 64

Ta có $\widehat{CEB} = 90^o$, gọi F là trung điểm của BC và Δ là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCE thì $F \in \Delta$ và $\Delta \,//\, SH$, từ đó tâm O của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SBCE$ thuộc Δ.

Gọi I là trung điểm của SB, R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SBCE$, đặt $FO = x$.

Khi đó $R^2 = x^2 + \dfrac{BC^2}{4} = OI^2 + \dfrac{SB^2}{4}$, mà $BC = a\sqrt{5}$,

$SB^2 = SH^2 + HA^2 + AB^2 = \dfrac{52a^2}{5}$, từ đó

$$x^2 + \frac{5a^2}{4} = OI^2 + \frac{13a^2}{5} \text{ hay } x^2 = OI^2 + \frac{27a^2}{20}.$$

Gọi J là hình chiếu của I trên mp$(ABCD)$ thì J là trung điểm của HB, từ đó

$$IJ = \frac{1}{2}SH = \frac{3a\sqrt{15}}{10} \text{ và } JF = \frac{1}{2}HC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

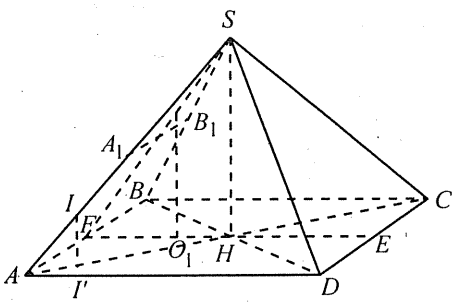
Vậy $OI^2 = \left(x - \frac{3a\sqrt{15}}{10}\right)^2 + \frac{a^2}{2}$.

Từ đó $x^2 = x^2 + \frac{9a^2.3}{20} - \frac{3a\sqrt{15}}{5}x + \frac{a^2}{2} + \frac{27}{20}a^2$

$$\Leftrightarrow \frac{3a\sqrt{15}}{5}x = \frac{27a^2}{20} + \frac{27}{20}a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{64}{20}a^2 = \frac{16}{5}a^2 \Rightarrow x = \frac{16a}{3\sqrt{15}}.$$

Do vậy $R^2 = \frac{16^2a^2}{9.15} + \frac{5a^2}{4} = \frac{1699a^2}{540}$ và diện tích mặt cầu bằng $\frac{4\pi.1699a^2}{540}$.

68. Ta có ABB_1A_1 là hình thang cân nên nó có đường tròn ngoại tiếp. Vậy các điểm E, A, B, B_1, A_1 là cùng thuộc một mặt cầu.



Hình 65

Gọi O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE thì O_1 thuộc EF (F là trung điểm của AB) và bán kính R_1 của đường tròn đó được tính bởi

$$\frac{a^2}{2} = \frac{\frac{5a^2}{4}.a}{4R_1} \Rightarrow R_1 = \frac{5a}{8} = O_1E \Rightarrow O_1F = \frac{3a}{8}.$$

Gọi Δ là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE thì $O_1 \in \Delta$ và $\Delta \,//\, SH$. Khi đó tâm O của mặt cầu phải tìm thuộc Δ. Đặt $O_1O = x$ và bán kính mặt cầu là R thì ta có

$$R^2 = x^2 + \frac{25a^2}{64} = OI^2 + \frac{A_1A^2}{4} = OI^2 + \frac{a^2}{8} \ (I \text{ là trung điểm của } AA_1).$$

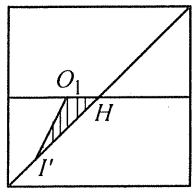
Gọi hình chiếu của I trên mp$(ABCD)$ là I' thì $II' = \frac{1}{4}SH = \frac{a\sqrt{6}}{8}$.

Từ đó $OI^2 = \left(x - \frac{a\sqrt{6}}{8}\right)^2 + I'O_1^2$.

Ta có $I'O_1^2 = O_1H^2 + I'H^2 - 2O_1H \,.\, I'H\cos 45^o$

$$= \frac{a^2}{64} + \frac{18a^2}{64} - 2.\frac{a}{8}.\frac{3a\sqrt{2}}{8}.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{19a^2}{64} - \frac{6a^2}{64} = \frac{13a^2}{64}.$$



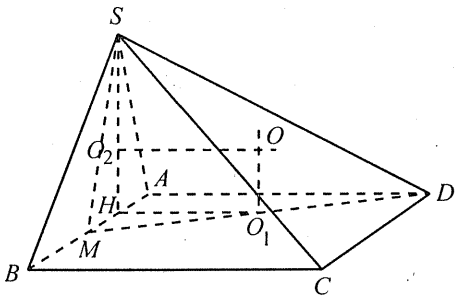
Hình 66

Từ các hệ thức trên ta có

$$\frac{25a^2}{64} = \frac{6a^2}{64} - \frac{a\sqrt{2}}{4}x + \frac{13a^2}{64} + \frac{a^2}{8} = \frac{27a^2}{64} - \frac{a\sqrt{6}}{4}x \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{48}.$$

Từ đó $R^2 = x^2 + \frac{25a^2}{64} = \frac{151a^2}{646}$ và diện tích mặt cầu đó là $S = \frac{151\pi a^2}{96}$.

69. 1) Vì $AB = 2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ nên SAB là tam giác vuông tại S. Do mp(SAB) vuông góc với mp$(ABCD)$ nên đường cao hình chóp chính là đường cao SH của tam giác vuông SAB, dễ thấy $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và H là điểm mà $AH = \frac{1}{4}AB$.



Hình 67

2) Dễ thấy tam giác SAM đều cạnh a.

Gọi O_1 là trung điểm MD thì O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMD, trục Δ_1 của đường tròn này đi qua O_1 và $\Delta_1 \,//\, SH$.

Gọi O_2 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAM (O_2 là trọng tâm ΔSAM) trục Δ_2 của đường tròn này qua O_2 và $\Delta_2 // HO_1$. Gọi O là giao của Δ_1 và Δ_2 thì O là tâm mặt cầu phải tìm.

Bán kính R của mặt cầu được tính bởi

$$R^2 = OD^2 = OO_1^2 + O_1D^2 = O_2H^2 + \frac{MD^2}{4}$$

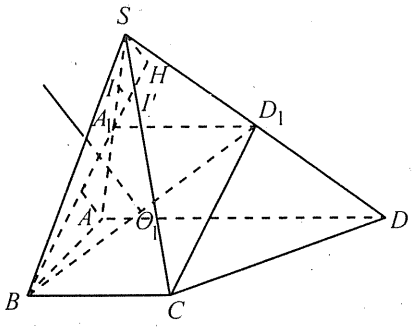
$$= \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \frac{5a^2}{4} = \frac{a^2}{12} + \frac{5a^2}{4} = \frac{16a^2}{12} = \frac{4a^2}{3}.$$

Vậy $R = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Suy ra thể tích khối cầu đó là

$$\frac{4}{3}\pi.\frac{8a^2}{3\sqrt{3}} = \frac{32\pi a^3}{9\sqrt{3}}.$$

70. 1) Dễ thấy A_1BCD_1 là hình chữ nhật mà $BC = a, A_1B = a\sqrt{2} \Rightarrow S_{A_1BCD_1} = a^2\sqrt{2}$.

Ta có $(A_1BCD_1) \perp (SA_1B)$ nên đường cao SH của tam giác SA_1B là đường cao hình chóp $S.A_1BCD_1$.



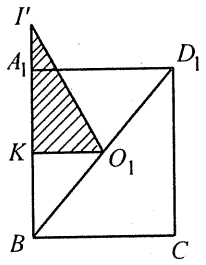
Hình 68

Vì A_1AB là tam giác vuông cân cạnh a nên dễ thấy $SH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Từ đó thể tích hình chóp $S.A_1BCD_1$ là $V = \frac{1}{3}a^2\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3}{3}$.

2) Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.A_1BCD_1$. Gọi O_1 là tâm của hình chữ nhật A_1BCD_1 thì trục Δ của đường tròn ngoại tiếp A_1BCD_1 qua O_1 và $\Delta // SH$ và tâm O của mặt cầu ngoại tiếp $S.A_1BCD_1$ thuộc Δ.

Đặt $O_1O = x$ thì ta có $R^2 = x^2 + \frac{3a^2}{4} = OI^2 + \frac{a^2}{4}$ (I là trung điểm của SA_1).

Gọi I' là hình chiếu của I trên mp(A_1BCD_1) thì I' là trung điểm của A_1H và $II' = \frac{1}{2}SH = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.



Hình 69

Ta có $OI^2 = \left(x - \frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + I'O_1^2$.

Dễ thấy $I'O_1^2 = I'K^2 + KO_1^2 = \frac{18a^2}{16} + \frac{a^2}{4} = \frac{22a^2}{16}$ (K là trung điểm BA_1).

Từ đó $OI^2 = x^2 + \frac{2a^2}{16} - \frac{a\sqrt{2}}{2}x + \frac{22a^2}{16}$

$= x^2 - \frac{a\sqrt{2}}{2}x + \frac{24a^2}{16} = x^2 - \frac{a\sqrt{2}}{2}x + \frac{3a^2}{2}$.

Từ các hệ thức trện ta có

$$\frac{3a^2}{4} = -\frac{a\sqrt{2}}{2}x + \frac{3a^2}{2} + \frac{a^2}{4} = -\frac{a\sqrt{2}}{2}x + \frac{7a^2}{4}$$

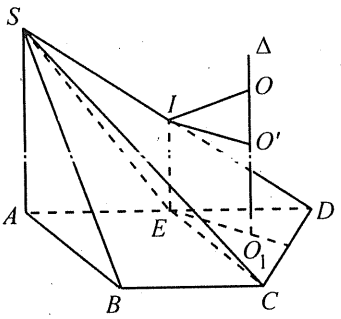
$\Rightarrow \frac{a\sqrt{2}}{2}x = a^2 \Rightarrow x = a\sqrt{2}$.

Vậy $R^2 = 2a^2 + \frac{3a^2}{4} = \frac{11a^2}{4}$ và $R = \frac{a\sqrt{11}}{2}$.

71. Ta có $V_{S.CDE} = \frac{1}{3}dt(CDE).SA$

$= \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}.2a}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Tam giác CDE đều cạnh a. Gọi O_1 là tâm tam giác đó và Δ là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE thì Δ qua O_1 và Δ // SA, khi đó tâm O của mặt cầu ngoại tiếp $SCDE$ thuộc Δ.



Hình 70

Đặt $O_1O = x$ thì

$$R^2 = x^2 + \frac{a^2}{3} = OI^2 + \frac{SD^2}{4} = OI^2 + 2a^2$$

(I là trung điểm SD).

Ta cũng có

$$OI^2 = (x - IE)^2 + EO_1^2 = (x - a)^2 + \frac{a^2}{3}.$$

Vậy $x^2 + \frac{a^2}{3} = (x-a)^2 + \frac{a^2}{3} + 2a^2$

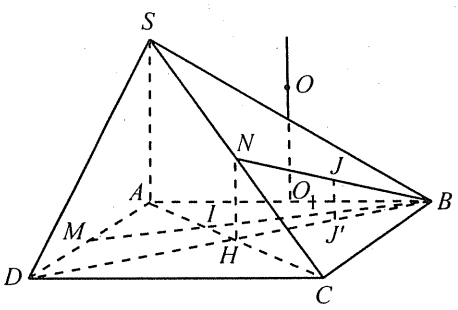
$\Rightarrow 2ax = 3a^2 \Rightarrow x = \frac{3a}{2}$.

Từ đó $R^2 = \frac{9a^2}{4} + \frac{a^2}{3} = \frac{31a^2}{12}$ và diện tích mặt cầu đó là $S = \frac{31\pi a^2}{3}$.

72. 1) Ta có $\frac{AI}{IC} = \frac{MI}{IB} = \frac{AM}{BC} = \frac{1}{2}$,

mặt khác $AC = a\sqrt{3}$, $MB = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

nên $AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $MI = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.



Hình 71

Ta có

$$AI^2 + MI^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{6} = \frac{a^2}{2} = AM^2.$$

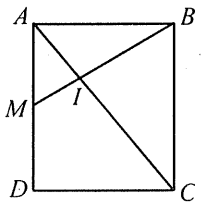
Vậy $MB \perp AC$.

Do $SA \perp (ABCD)$ nên $MB \perp SA$. Từ đó $MB \perp (SAC)$ hay $(SAC) \perp (SMB)$.

2) $V_{ANIB} = V_{N.AIB} = \frac{1}{3} dt(AIB).\frac{SA}{2}$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.AI.IB.\frac{a}{2} = \frac{1}{6}\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}.$$

Gọi O_1 là trung điểm của AB và Δ là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác AIB thì Δ qua O_1 và Δ // SA.



Hình 72

Khi đó tâm O mặt cầu ngoại tiếp $NAIB$ thuộc Δ. Gọi R là bán kính mặt cầu này và đặt $OO_1 = x$ thì

$$R^2 = x^2 + \frac{AB^2}{4} = OJ^2 + \frac{NB^2}{4}$$

hay $x^2 + \frac{a^2}{4} = OJ^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}\right) = OJ^2 + \frac{a^2}{4}$ (J là trung điểm của NB).

Gọi H là giao điểm của AC và DB và J' là hình chiếu của J trên $(ABCD)$ thì J' là trung điểm của HB, từ đó $JJ' = \frac{1}{2}NH = \frac{a}{4}$.

Từ đó $OJ^2 = \left(x - \frac{a}{4}\right)^2 + J'O_1^2 = \left(x - \frac{a}{4}\right)^2 + \frac{AC^2}{4^2} = \left(x - \frac{a}{4}\right)^2 + \frac{3a^2}{4^2}$.

Do vậy $x^2 + \frac{a^2}{4} = x^2 + \frac{a^2}{16} - \frac{a}{2}x + \frac{3a^2}{16} + \frac{a^2}{4} = x^2 + \frac{a^2}{2} - \frac{a}{2}x$

$$\Rightarrow \frac{a}{2}x = \frac{a^2}{4} \Rightarrow x = \frac{a}{2}.$$

Vậy $R^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{4} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và thể tích khối cầu đó là

$$V = \frac{4}{3}\pi . \frac{2a^3\sqrt{2}}{8} = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}.$$

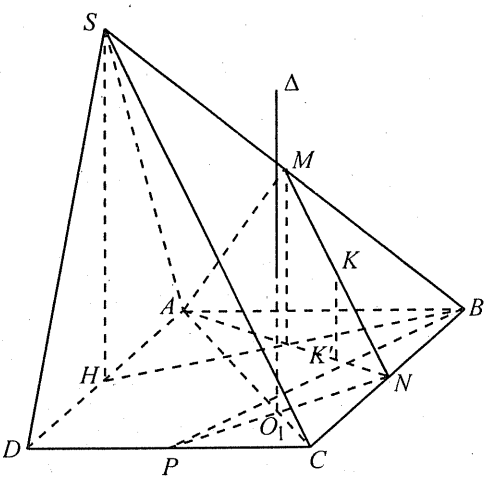
73. Vì tam giác SAD đều và $(SAD) \perp (ABCD)$ nên đường cao SH của tam giác SAD là đường cao của hình chóp.

Do $ABCD$ là hình vuông và HA = HD, $PC = PD$ nên $BP \perp HC$, mà $BP \perp SH$, từ đó $BP \perp (SHC)$.

Mặt khác (SHC) // (AMN), từ đó $BP \perp (AMN)$, tức là $BP \perp AM$.

Tính bán kính R của mặt cầu qua các điểm C, M, N, P.

Gọi O_1 là trung điểm của NP thì O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CNP. Khi đó trục Δ của đường tròn đó đi qua O_1 và Δ // SH và tâm O mặt cầu đi qua các điểm C, M, N, P thuộc Δ.



Hình 73

Đặt $OO_1 = x$ thì

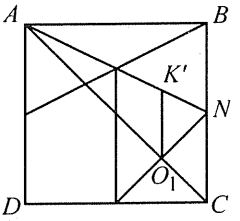
$$R^2 = x^2 + \frac{NP^2}{4} = OK^2 + \frac{MN^2}{4}$$

hay $x^2 + \frac{2a^2}{16} = OK^2 + \frac{MN^2}{4}$.

Ta có $MN^2 = \frac{SC^2}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{3a^2}{4} + \frac{5a^2}{4}\right) = \frac{a^2}{2}$,

từ đó $x^2 + \frac{a^2}{8} = OK^2 + \frac{a^2}{8} \Rightarrow x^2 = OK^2$

(K là trung điểm MN).



Hình 74

Kẻ $KK' \perp AN$ ($K' \in AN$). Ta có

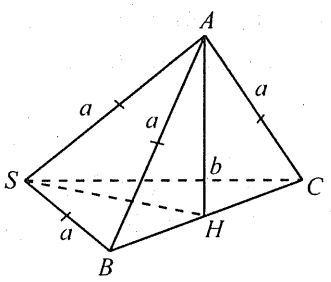
$$OK^2 = (x - KK')^2 + K'O_1^2,$$

$KK' = \frac{1}{4} SH = \frac{a\sqrt{3}}{8}$, $K'O_1 = \frac{3a}{8}$.

Từ đó $OK^2 = \left(x - \frac{a\sqrt{3}}{8}\right)^2 + \frac{9a^2}{64}$ và $x^2 = \left(x - \frac{a\sqrt{3}}{8}\right)^2 + \frac{9a^2}{64}$

$\Rightarrow \frac{a\sqrt{3}x}{4} = \frac{3a^2}{16} \Rightarrow x = \frac{3a}{4\sqrt{3}}$. Từ đó $R^2 = \frac{9a^2}{48} + \frac{2a^2}{16} = \frac{15a^2}{48} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{5}}{4}$.

74. 1) Gọi H là trung điểm của BC thì $AH \perp BC$. Do $(SBC) \perp (ABC)$ nên $AH \perp (SBC)$, tức là tam giác AHS vuông tại H.



Hình 75

Xét tam giác vuông SHA và tam giác vuông AHC có $SA = CA = a$, AH chung, từ đó $SH = HC = HB$. Vậy tam giác SBC vuông tại S.

2) Ta có $AH \perp (SBC)$, H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông SBC nên AH là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC và từ đó tâm mặt cầu ngoại tiếp $ABCS$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và bán kính R của mặt cầu phải tìm là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó . Từ đó

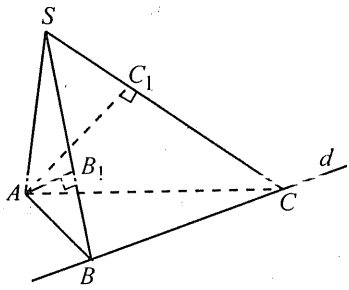
$$R = \frac{AB.AC.BC}{4\,dt(ABC)} = \frac{a^2.\sqrt{a^2+b^2}}{4.\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\,.AH}.$$

Ta có $$AH^2 = a^2 - \frac{BC^2}{4} = a^2 - \frac{a^2+b^2}{4} = \frac{3a^2-b^2}{4},$$

$$AH = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2-b^2} \quad (b < a\sqrt{3}).$$

Vậy $R = \dfrac{a^2}{\sqrt{3a^2-b^2}}$.

75. 1) Ta có SAB, SAC là các tam giác vuông ở A. Vì $AB_1 \perp SB$ nên $SB_1.SB = SA^2$. Tương tự ta có $SC_1.SC = SA^2$. Từ đó $SB_1.SB = SC_1.SC$, tức là bốn điểm B, C, C_1, B_1 cùng thuộc một đường tròn và vì vậy có mặt cầu đi qua năm điểm A, B, C, C_1, B_1.



Hình 76

Chú ý : Có thể chỉ ra đường kính mặt cầu đó là đường kính AD của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

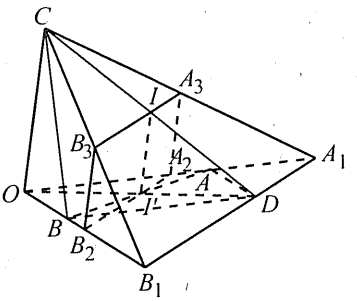
2) Khi $\widehat{xAy} = 90^o$ và S thay đổi trên đường thẳng vuông góc với mp (A, d) tại A, (tức là S thay đổi trên đường thẳng Δ cố định) thì năm điểm A, B, C, C_1, B_1 vẫn nằm trên mặt cầu, tâm mặt cầu này là trung điểm của BC, tức là tâm mặt cầu đó thuộc đường thẳng d.

Xét mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với d tại I (I thuộc BC) thì $\Delta \subset \text{mp}(\alpha)$ và mp (α) cắt mặt cầu qua A, B, C, C_1, B_1 theo đường tròn tâm I bán kính IA. Ta có mp (α) cố định nên I cố định, A cố định. Vậy đường tròn nói trên cố định, đường tròn đó nằm trên mặt cầu qua A, B, C, B_1, C_1 với mọi vị trí của S, tức là mặt cầu nói trên chứa một đường tròn cố định.

76. 1) Đặt $OA_1 = OB_1 = OC$ thì A_1, B_1 là hai điểm cố định và $\widehat{OA_1B_1} = \widehat{OBA_1} = 45^o$.

Do $OA + OB = OC$ nên $AO_1 = OB$.

Kẻ $AD \,//\, OB$ thì có $AD = OB$. Vậy $OADB$ là hình chữ nhật. Từ đó tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là trung điểm I của CD.



Hình 77

Kẻ $II' \,//\, OC$ thì I' là tâm hình chữ nhật $OADB$.

Khi A, B thay đổi trên hai cạnh góc vuông mà $OA + OB = OA_1 = OB_1$ thì I' thuộc đường trung bình A_2B_2 của tam giác A_1OB_1, từ đó I thuộc đường trung bình A_3B_3 của tam giác A_1B_1C.

2) Dựng hình vuông $A_1OB_1O_1$ thì CO_1 cố định (thực chất CO_1 là một đường chéo của hình lập phương dựng trên ba cạnh OA_1, OB_1, OC). Gọi I_1 là tâm của $A_1OB_1O_1$ và I là trung điểm của CO_1 thì I cố định và $II_1 = \dfrac{OC}{2}$ không đổi.

Ta chứng minh mặt cầu (S) tâm I, bán kính $R = II_1$ tiếp xúc với mp (ABC).

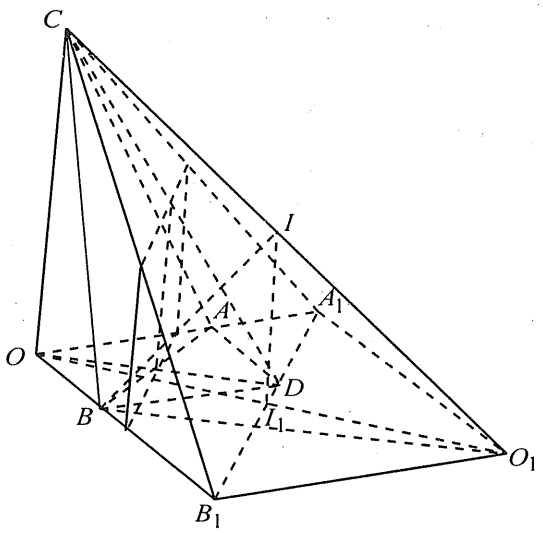
Thật vậy dễ chứng minh được $AO_1 = BC$, $BO_1 = AC$, từ đó tam giác ABC bằng tam giác BAO_1.

Xét hai tứ diện $IABC$ và $IABO_1$, do $IO_1 = IC$ nên $V_{CABI} = V_{O_1ABI}$ hay $V_{IABC} = V_{IO_1AB}$.

Mặt khác $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta O_1AB}$ nên khoảng cách từ I đến mp(ABO_1) bằng khoảng cách từ I đến mp(ABC), tức là

$$II_1 = \frac{OC}{2} = d(I, \text{mp}(ABC)),$$

từ đó có điều phải chứng minh.

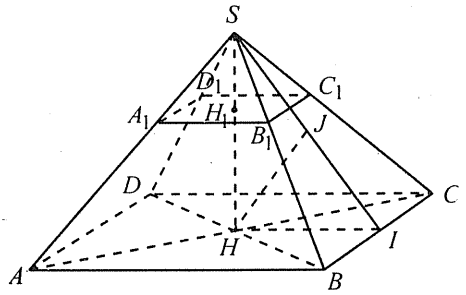


Hình 78

77. 1) Gọi I là trung điểm của BC thì $HI = \frac{a}{2} = SH$. Gọi J là trung điểm của SI thì $HJ \perp SI$, mặt khác $HJ \perp BC$ nên $HJ \perp (SBC)$, đồng thời $HJ = \frac{1}{2}SI$ hay

$$HJ = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Vậy $d(H, (SBC)) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.



Hình 79

Tương tự ta có khoảng cách từ H đến các mặt bên của hình chóp đã cho cùng bằng $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. Vậy mặt cầu tâm H, bán kính $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ là mặt cầu cần tìm.

2) Gọi H_1 là giao điểm của (P) với SH thì $HH_1 = x$ $(0 < x < R = \frac{a\sqrt{2}}{4})$. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với (P) là hình vuông $A_1B_1C_1D_1$.

Khi đó $\dfrac{dt(A_1B_1C_1D_1)}{dt(ABCD)} = \dfrac{\left(\dfrac{a}{2}-x\right)^2}{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{(a-2x)^2}{a^2}$,

mà $dt(ABCD) = a^2$ nên $dt(A_1B_1C_1D_1) = (a-2x)^2$.

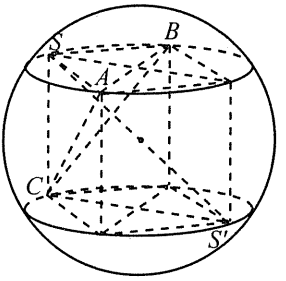
Vì (P) cắt mặt cầu nêu ở câu 1) theo đường tròn bán kính r mà $r^2 = R^2 - x^2$ hay $r^2 = \dfrac{a^2}{8} - x^2$. Từ đó diện tích hình tròn thu được là $\dfrac{1}{8}\pi(a^2 - 8x^2)$.

Phần diện tích $\mathscr{S}$ phải tính là

$$\mathscr{S} = (a-2x)^2 - \frac{1}{8}\pi(a^2-8x^2) = \frac{1}{8}\left[8(a-2x)^2 - \pi(a^2-8x^2)\right]$$

Vậy $\mathscr{S} = \pi R^2 = \dfrac{\pi a^2}{8} \Leftrightarrow 8(a-2x)^2 - \pi(a^2-8x^2) = \pi a^2$ và $x = \dfrac{4a-\pi a}{8+2\pi}$.

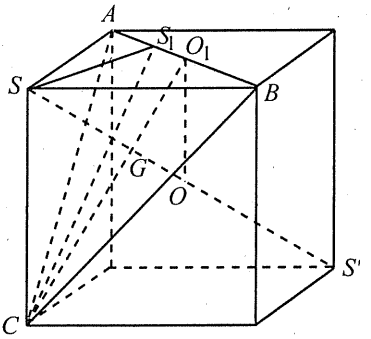
78. 1) Dựng hình hộp chữ nhật trên ba cạnh SA, SB, SC thì đường chéo SS' của hình hộp sẽ qua tâm O của mặt cầu và SS' là cố định. Mặt khác SS' cắt (ABC) tại trọng tâm G của tam giác ABC sao cho $SG = \dfrac{1}{3}SS'$. Như vậy G là điểm cố định mà mp (ABC) đi qua.



Hình 80

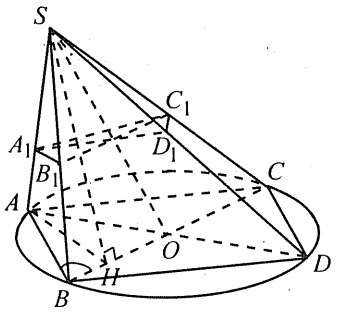
2) Xét hình chiếu S_1 của S trên đường thẳng AB thì SS_1 là đường cao của tam giác vuông SAB, do đó $CS_1 \perp AB$.

Gọi O_1 là tâm của mặt hình hộp chứa tam giác ABC thì $OO_1 \perp (SAB)$, từ đó $SS_1 \perp S_1O$, tức là S_1 thuộc mặt cầu đường kính SO. Mặt cầu này cố định. Tương tự hình chiếu của S trên AC hay BC cũng nằm trên mặt cầu đường kính SO. Ta có điều phải chứng minh.



Hình 81

79. 1) Dễ thấy tập hợp các điểm H là đường tròn đường kính AO trong mp (P).



Hình 82

2) $S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2} BC.SH = R.SH$, $SH^2 = SA^2 + AH^2$.

Ta có $S_{\Delta SBC}$ lớn nhất khi và chỉ khi SH lớn nhất, điều đó tương đương với AH lớn nhất, tức là H trùng với O và khi đó tam giác ABC vuông cân, từ đó $\alpha = \widehat{ABC} = 45^o$.

3) a) Vì $SA.SA_1 = 3R^2$; $SA = 2R$ nên $SA_1 = \frac{3R}{2}$, tức A_1 là điểm cố định.

Từ $SA.SA_1 = SB.SB_1$ suy ra ABB_1A_1 nội tiếp đường tròn, mặt khác $\widehat{A_1AB} = 90^o$ nên $A_1B_1 \perp B_1B$ hay $A_1B_1 \perp SB$.

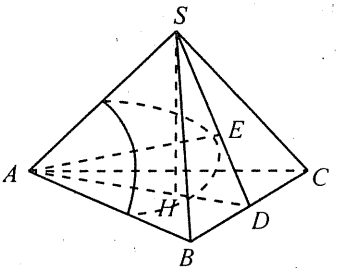
Tương tự ta cũng có $A_1C_1 \perp SC$. Như vậy khi BC quay quanh O thì $\widehat{SB_1A_1} = \widehat{SC_1A_1} = 90^o$, tức là B_1, C_1 thuộc mặt cầu đường kính SA_1, tất nhiên mặt cầu này cố định.

Gọi D là điểm đối xứng của A qua O thì $D \in (C)$. Trên SD lấy điểm D_1 sao cho $SD.SD_1 = 3R^2$ thì D_1 là điểm cố định. Chứng minh tương tự như trên ta có $A_1D_1 \perp SD$. Mặt khác $BD \perp AB$, $BD \perp SA$ nên $BD \perp (SAB)$, tức là $BD \perp A_1B_1$, mà $A_1B_1 \perp SB$ nên $A_1B_1 \perp SD$. Tương tự ta có $A_1C_1 \perp SD$.

Vậy $(A_1B_1C_1) \perp SD$. Do vậy mp $(A_1B_1C_1)$ qua điểm A_1 cố định và vuông góc với đường thẳng SD cố định nên mặt phẳng đó cố định.

b) Đường tròn qua S, B_1,C_1 là giao của mặt cầu đường kính SA_1 với mp (SBC), mặt khác mp (SBC) luôn qua hai điểm cố định là S, O, từ đó đường tròn ấy cắt SO tại điểm thứ hai $O_1 \neq S$; O_1 cũng chính là giao của mặt cầu đường kính SA_1 với SO, tất nhiên O_1 là điểm cố định thứ hai khác S mà đường tròn ngoại tiếp tam giác SB_1C_1 luôn đi qua.

80. Xét đỉnh A của hình chóp. Gọi D là trung điểm của BC, SH là đường cao hình chóp thì $HD = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. Kẻ đường cao AE của tam giác SAD thì AE là khoảng cách từ A đến mp (SBC), nghĩa là AE là bán kính R của mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mp (SBC). Kí hiệu $\mathscr{S}$ là diện tích phần mặt bên SAB nằm trong mặt cầu đó thì



Hình 83

$$\mathscr{S} = \frac{R^2}{2}\widehat{SAB}.$$ Ta tính R và $\widehat{SAB}$.

Ta có $SD^2 = h^2 + \dfrac{a^2}{12} = \dfrac{12h^2 + a^2}{12} \Rightarrow SD = \dfrac{\sqrt{12h^2 + a^2}}{2\sqrt{3}}$.

Mặt khác $SD \,.\, AE = SH \,.\, AD \Rightarrow R = AE = \dfrac{3ah}{\sqrt{12h^2 + a^2}}$.

Ta đặt $\widehat{SAB} = \widehat{SBC} = \alpha$ thì $\tan\alpha = \dfrac{SD}{BD} = \dfrac{\sqrt{12h^2 + a^2}}{a\sqrt{3}}$.

Từ đó $\mathscr{S} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{9a^2h^2}{12h^2 + a^2}.\alpha$, ở đó $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{12h^2 + a^2}}{a\sqrt{3}}$.

Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên diện tích phần mặt bên SAC nằm trong mặt cầu cùng bằng $\mathscr{S}$. Đối với B, C cũng làm tương tự như trên.

Chú ý

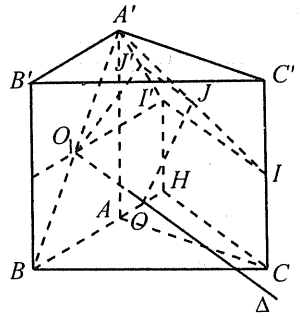
1) Phần diện tích mặt đáy nằm trong mặt cầu đó là $\mathscr{S}_1 = \dfrac{1}{2}R^2.\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3a^2h^2\pi}{2(12h^2 + a^2)}$.

2) Có thể thấy phần mặt bên hình chóp nằm trong mặt cầu tâm S tiếp xúc với mặt đáy hình chóp có diện tích là

$$\mathscr{S}_2 = \frac{3}{2}h^2.\beta \text{ với } \beta = \pi - 2\alpha, \tan\alpha = \frac{\sqrt{12h^2 + a^2}}{a\sqrt{3}}.$$

81. 1) Gọi CH là đường cao của tam giác ABC thì

$$CH = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ AH = \frac{a}{2} \text{ và } CH \perp (ABB'A').$$



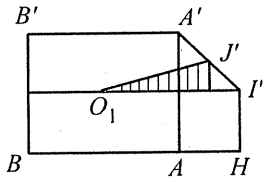
Hình 84

Gọi O_1 là tâm của $ABB'A'$ thì O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp $ABB'A'$.

Gọi Δ là trục của đường tròn ngoại tiếp $ABB'A'$ thì $O_1 \in \Delta$ và $\Delta \,//\, CH$.

Khi ấy tâm O của mặt cầu đi qua A, B, B', A', I thuộc Δ.

Gọi J là trung điểm của $A'I$, J' là hình chiếu của J trên mp $(ABB'A')$ thì J' là trung điểm của $A'I'$, trong đó I' là hình chiếu của I trên $(ABB'A')$ và $HI' = \frac{1}{2}BB'$.



Hình 85

Đặt $O_1O = x$ và R là bán kính mặt cầu phải tìm.

Khi đó

$$R^2 = x^2 + \frac{a^2}{2};\ R^2 = OJ^2 + \frac{A'I^2}{4} = OJ^2 + \frac{5a^2}{16};$$

$$OJ^2 = (x - JJ')^2 + O_1J'^2;\ JJ' = \frac{1}{2}CH = \frac{a\sqrt{3}}{4};\ O_1J'^2 = \frac{9a^2}{16} + \frac{a^2}{16} = \frac{10a^2}{16}.$$

Từ đó $x^2 + \frac{a^2}{2} = \left(x - \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \frac{10a^2}{16} + \frac{5a^2}{16}$, tức là $x = \frac{5a\sqrt{3}}{12}$.

Vậy $R^2 = \frac{25a^2}{48} + \frac{a^2}{2} = \frac{49a^2}{48} \Rightarrow R = \frac{7a}{4\sqrt{3}}$.

Thể tích khối cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.\frac{7^3a^3}{64.3\sqrt{3}} = \frac{7^3\pi a^3}{144\sqrt{3}}$.

2) Ta có $A'B^2 = 2a^2$, $A'I^2 = \frac{5a^2}{4}$, $BI^2 = 3a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{13a^2}{4}$.

Từ đó $A'B^2 + A'I^2 = BI^2$ hay tam giác $A'BI$ vuông tại A' và

$$S_{\Delta A'BI} = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a^2\sqrt{10}}{4}.$$

Xét phép chiếu vuông góc lên mp (ABC) thì tam giác $A'BI$ chiếu thành tam giác ABC, từ đó

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta A'BI} \cos\varphi \ (\varphi \text{ là góc giữa mp } (A'BI) \text{ và mp } (ABC))$$

hay $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{10}}{4}\cos\varphi$.

Vậy $\cos\varphi = \frac{\sqrt{30}}{10}$.

CHƯƠNG III. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

1. $\overrightarrow{AB}=(6;-5;1), \overrightarrow{BC}=(-3;4;2)$ và $\overrightarrow{CA}=(-3;1;-3)$.

2. Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-4;-2), \overrightarrow{BC}=(-2;2;-10), \overrightarrow{CA}=(-1;2;12)$.

a) $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=(4;-6;-14), 2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=(-7;8;-18)$. Suy ra

$$\left(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}\right)\left(2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)=4\cdot(-7)+(-6)\cdot 8+(-14)\cdot(-18)=176.$$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\cdot 1+(-4)\cdot(-2)+(-2)\cdot(-12)=35$ suy ra

$$\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=(-70;70;-350).$$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=1\cdot(-2)+(-2)\cdot 2+(-12)\cdot(-10)=114$ suy ra

$$\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}\right)=(342;-456;-228).$$

3. Ta có $\overrightarrow{BA}=(4;-8;4), \overrightarrow{BC}=(2;1;0)$ suy ra $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. Điều phải chứng minh.

4. $\widehat{CAB}=\arccos\left(-\dfrac{12}{49}\right), \widehat{ABC}=\widehat{BCA}=\arccos\left(\dfrac{61}{7\sqrt{122}}\right)$.

5. $M\left(0;\dfrac{85}{12};0\right)$.

6. $I(0;1;-2)$.

7. Gọi $M(0;m;0)$ là trung điểm AC và $N(a;0;b)$ là trung điểm BC. Khi đó do $\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$, ta được $C(4;2m+1;-2)$; do $\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OB}$, ta được $2m+1=2\cdot 0-5\Rightarrow m=-3$. Vậy $C(4;-5;-2)$.

8. Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;-5;0), \overrightarrow{AC}=(0;4;-3)$. Suy ra

$$\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}-5 & 0\\ 4 & -3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0 & 4\\ -3 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}4 & -5\\ 0 & 4\end{vmatrix}\right)=(15;12;16)\neq\vec{0}$$

do đó A,B,C không thẳng hàng và vì vậy A,B,C là các đỉnh của một tam giác (không suy biến).

Hơn nữa từ $AC=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{0^2+4^2+(-3)^2}=5$ và

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{15^2+12^2+16^2}=\frac{25}{2},$$

suy ra độ dài chiều cao kẻ từ B bằng $d(B;AC)=\dfrac{2S_{\Delta ABC}}{AC}=5$.

9. Gọi $(x_1;x_2;x_3)$ là tọa độ của vectơ $\vec{x}$. Do $\left|\vec{x}\right|=26,\vec{x}\perp\vec{a},\vec{x}\perp\vec{b}$ và $\vec{x}\cdot\vec{j}<0$ nên ta có hệ

$$\begin{cases}4x_1-2x_2-3x_3=0\\x_2+3x_3=0\\x_1^2+x_2^2+x_3^2=26^2\\x_2<0\end{cases}$$

Giải hệ, thu được $(x_1;x_2;x_3)=(-6;-24;8)$.

10. Tương tự như bài 9, $\vec{x}=(-3;3;3)$.

11. Do $\left[\vec{a};\vec{b}\right]=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin(\vec{a};\vec{b})$ và $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos(\vec{a};\vec{b})$ nên

$$\left(\left[\vec{a};\vec{b}\right]\right)^2+\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2=\left|\vec{a}\right|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2\left(\sin^2(\vec{a};\vec{b})+\cos^2(\vec{a};\vec{b})\right)=\left|\vec{a}\right|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2=\vec{a}^2\vec{b}^2.$$

Áp dụng đồng nhất thức trên cho $\vec{a}=(x;y;z),\vec{b}=(t;u;v)$, thu được ngay điều phải chứng minh.

12. Chứng minh $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

13. Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2),\overrightarrow{AC}=(0;-2;4)$. Từ đó $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(0;-4;-2)$.

Do $D\in Oy$ nên $D(0;d;0)$ suy ra $\overrightarrow{AD}=(-2;d-1;1)$.

Do đó $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}=2(1-2d)$.

Do $V_{ABCD}=5$ nên $\dfrac{|1-2d|}{3}=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=-7\\d=8.\end{array}\right.$

14. Chứng minh $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}\neq 0$.

$\left(\widehat{AB;CD}\right)=\arccos\dfrac{4}{5\sqrt{6}}$; $\left(\widehat{BC;DA}\right)=\arccos\dfrac{8}{\sqrt{13\cdot 14}}$;

và $\left(\widehat{CA;DB}\right)=\arccos\dfrac{4}{3\sqrt{10}}$.

15. $\vec{u}=(a;b;c)$. Khi đó

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\cos\gamma=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

16. Sử dụng kết quả bài 15.

§2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

17. $6x-7y+6z-94=0$.

18. Mặt phẳng (zOx) có vectơ pháp tuyến $\vec{j}=(0;1;0)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{p}=(2;0;-1)$. Do mặt phẳng (Q) cần tìm vuông góc với hai mặt phẳng (zOx) và (P) nên (Q) có vectơ pháp tuyến $\vec{q}=\left[\vec{p};\vec{j}\right]=(1;0;2)$.

Do đó (Q) có phương trình $x+2z-4=0$.

Nhận xét. Ta cũng có thể tìm vectơ $\vec{q}$ nhờ tính chất $\begin{cases}\vec{q}\cdot\vec{j}=0\\ \vec{q}\cdot\vec{p}=0.\end{cases}$

19. $(P):4x-y-2z-9=0$.

20. Do mặt phẳng (P) đi qua trục Ox nên có phương trình

$$ay+bz=0\left(a^2+b^2\neq 0\right).$$

Do $M(-5;16;12)\in(P)$ nên $16a+12b=0$.

Từ đó, do $a^2+b^2\neq 0$ nên có thể chọn $a=3,b=-4$. Vậy $(P):3y-4z=0$.

Tương tự, cũng tìm được $(Q):12x+5z=0$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(P),(Q)$. Khi đó tính được $\cos\alpha=\dfrac{4}{13}$. Suy ra $\alpha=\arccos\dfrac{4}{13}$.

21. Mặt phẳng (Oxy) có vectơ pháp tuyến $\vec{k}=(0;0;1)$. Gọi $\vec{n}=(a;b;c)\neq\vec{0}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) cần tìm. Khi đó, do $A\in(P)$ nên (P) có phương trình

$$a(x-0)+b(y-0)+c(z-1)=0 \text{ hay } ax+by+cz-c=0.$$

Do $B\in(P)$ nên $3a-c=0$ hay $c=3a$.

Do góc giữa (P) và (Oxy) bằng 60° nên

$$\cos 60^{\circ}=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{k}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{k}|}\Leftrightarrow\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 6|a|=\sqrt{10a^2+b^2}\Leftrightarrow b=\pm a\sqrt{26}.$$

Do $a^2+b^2+c^2\neq 0$ nên có thể chọn $a=1,b=\pm\sqrt{26},c=3$. Vậy, có hai mặt phẳng thỏa mãn là $x\pm\sqrt{26}y+3z-3=0$.

22. Giải tương tự như bài 21, được hai mặt phẳng $-3x+y=0$ và $x+3y=0$.

23. Giải tương tự như bài 21, được hai mặt phẳng $\pm\sqrt{2}\,x+y+3z-3=0$.

24. Vì hai mặt của hình lập phương nằm trên hai mặt phẳng $2x-2y+z-1=0$ và $2x-2y+z+5=0$ song song nên cạnh của hình lập phương bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song đó và bằng 2. Do đó thể tích của hình lập phương bằng 8.

25. Giả sử tìm được điểm $N(0;0;z)\in Oz$ thỏa mãn. Khi đó $MN=\sqrt{5+z^2}$ và

$$d(N;(P))=\frac{|6z-9|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+6^2}}=\frac{|6z-9|}{7}.$$

Do N cách đều $M,(P)$ nên ta có phương trình

$$\frac{|6z-9|}{7}=\sqrt{z^2+5}\Leftrightarrow|6z-9|=7\sqrt{z^2+5}\Leftrightarrow 13z^2+108z+164=0.$$

Giải phương trình, thu được $z=-2$ và $z=-\frac{82}{13}$.

Vậy có hai điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán là $N_1(0;0;-2),N_2\left(0;0;-\frac{82}{13}\right)$.

26. Giải tương tự như bài 25, tìm được hai điểm $M_1(2;0;0)$ và $M_2\left(\frac{11}{43};0;0\right)$.

27. Giả sử tìm được điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn.

Do $M \in (P)$ nên $x+2y-4z+3=0.$ (1)

Do M cách đều A,B,C nên $MA=MB=MC \Leftrightarrow MA^2=MB^2=MC^2$.

Điều đó tương đương với

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2\\(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2\end{cases} \Leftrightarrow x=y=z.$$

Thay kết quả trên vào (1), tìm được $x=y=z=3$. Vậy $M(3;3;3)$ là điểm cần tìm.

Nhận xét. Điểm M tìm được trong bài toán chính là điểm đồng quy của mặt phẳng trung trực của các đoạn AB,BC,CA với mặt phẳng (P).

28. Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;-1;2), \overrightarrow{DC}=(2;-4;0), \overrightarrow{AD}=(-1;1;0)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DC}\right]=\left(\begin{vmatrix}-1 & 2\\-4 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & -3\\0 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-3 & -1\\2 & -4\end{vmatrix}\right)=(8;4;14)$

và $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}=-8+4=-4\neq 0.$

Do đó AB,CD chéo nhau và bởi vậy, mặt phẳng (P) đi qua A,B và cách đều C,D khi và chỉ khi hoặc $(P)\parallel CD$ hoặc (P) đi qua trung điểm đoạn CD.

Nếu $(P)\parallel CD$ thì do (P) đi qua AB nên mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{p}$ cùng phương với $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DC}\right]=2(4;2;7)$. Do đó có thể chọn $\vec{p}=(4;2;7)$, suy ra phương trình của (P) là

$$4(x-1)+2(y-2)+7(z-1)=0 \text{ hay } 4x+2y+7z-15=0.$$

Nếu (P) đi qua trung điểm M của đoạn CD thì (P) có cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}$ và do đó, nhận vectơ $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}\right]$ làm vectơ pháp tuyến.

Do M là trung điểm CD nên $M=(1;1;1)$, suy ra $\overrightarrow{AM}=(0;-1;0)$, từ đó $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}\right]=(2;0;3)$. Vậy, trong trường hợp này ta được $(P):2x+3z-5=0$.

Cách 2. Giả sử tìm được mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$ $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$ thỏa mãn. Do (P) đi qua A, B nên ta có

$$a+2b+c+d=0, -2a+b+3c+d=0.$$

Suy ra $3a+b-2c=0$ và $d=2a-b-3c$.

Do $d(C;(P))=d(D;(P))$ nên $|2a-b+c+d|=|3b+c+d|$. Từ đó

$$|2a-b+c+2a-b-3c|=|3b+c+2a-b-3c|$$

$$\Leftrightarrow |2a-b-c|=|a+b-c| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2b \\ 3a=2c. \end{array}\right.$$

Nếu $a=2b$ thì $2c=7b$, từ đó do $a^2+b^2+c^2\neq 0$ nên có thể chọn $c=7$, $b=2, a=4$, suy ra $d=-15$ và ta được mặt phẳng $(P): 4x+2y+7z-15=0$.

Nếu $3a=2c$ thì $b=0$, từ đó do $a^2+b^2+c^2\neq 0$ nên có thể chọn $a=2, c=3$, suy ra $d=-5$ và ta được mặt phẳng $(P): 2x+3z-5=0$.

29. Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;1;2)$. Điểm $M(x;y;z)$ nằm trên đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{AM}\,||\,\overrightarrow{AB}$, điều đó tương đương với

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-2x+4 \\ y=3-x. \end{array}\right.$$

Xét điểm $M(x;3-x;4-2x)\in AB$. Khoảng cách từ M tới (P) bằng

$$d(M;(P))=\frac{|x+3-x+4-2x-20|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{|13+2x|}{\sqrt{3}}.$$

Khoảng cách từ C tới mặt phẳng (P) bằng

$$d(C;(P))=\frac{|1+1+0-20|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=6\sqrt{3}.$$

Từ đó do (P) cách đều C, M nên ta có phương trình

$$\frac{|13+2x|}{\sqrt{3}}=6\sqrt{3} \Leftrightarrow |13+2x|=18 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{2} \\ x=-\dfrac{31}{2}. \end{array}\right.$$

Với $x=\dfrac{5}{2}$ ta được $M\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2};-1\right)$. Với $x=-\dfrac{31}{2}$ ta được $M\left(-\dfrac{31}{2};\dfrac{37}{2};35\right)$.

30. Do I là trung điểm của AB nên $I=(2;2;0)$. Xét điểm $M(x;y;z)$, ta có

$$OM=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \text{ và } d(M;(P))=\frac{|3x+2y-z+4|}{\sqrt{14}}.$$

Do M cách đều gốc tọa độ O và mp(P) nên

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{|3x+2y-z+4|}{\sqrt{14}}. \qquad (*)$$

Do $IM\perp(P)$ nên $\overrightarrow{IM}\parallel\vec{p}$, ở đây $\vec{p}=(3;2;-1)$ là vectơ pháp tuyến của (P).

Điều này tương đương với $\frac{x-2}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2-3z\\y=2-2z.\end{cases}$

Thay vào (*), ta được phương trình

$$\sqrt{(2-3z)^2+(2-2z)^2+z^2}=\frac{14|1-z|}{\sqrt{14}}\Leftrightarrow\sqrt{14z^2-20z+8}=\sqrt{14}|1-z|\Leftrightarrow z=\frac{3}{4}$$

Vậy điểm cần tìm là $M\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$.

31. Mặt phẳng (P) cần tìm đi qua (C) nên có phương trình dạng :

$$a(x-5)+b(y-2)+c(z-0)=0.$$

Vì $a^2+b^2+c^2\neq 0$ nên bằng cách chia cả hai vế của phương trình trên cho $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, ta có thể giả sử $a^2+b^2+c^2=1$.

Khi đó, do $d(A;(P))=1, d(B;(P))=3$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}|a-b-c|=1\\|-5a+3b+4c|=3\end{cases}$$

Từ đó, phân chia các trường hợp phá dấu giá trị tuyệt đối, giải được

$$(a;b;c)=\pm(0;1;0),\pm\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn là $(P):y-2=0$ và $(P'):x+2y+2z-9=0$.

32. Bằng cách giải tương tự như bài 31, ta được

$$(P):2x-y+8z+28=0 \text{ và } (P'):34x+31y+88z+188=0.$$

33. Giả sử mặt phẳng (P) cắt Ox, Oy, Oz theo thứ tự tại $A(a;0;0), B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$. Khi đó (P) có phương trình : $(P): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (với $abc \neq 0$).

a) M là trọng tâm ΔABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OM}$ $\forall O$. Từ đó với O là gốc tọa độ, tìm được $a=3, b=6, c=9$, do đó $(P): \frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1$ hay $6x+3y+2z-18=0$.

b) *Cách 1.* Để ý rằng hình chóp $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc, nên M là trực tâm tam giác ABC khi và chỉ khi M là hình chiếu của đỉnh O trên mặt phẳng (ABC) (tức là mặt phẳng (P)). Điều này tương đương với

$$\begin{cases} M \in (P) \\ \overrightarrow{OM} \,//\, \vec{p} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1 \\ \frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}=1:2:3 \end{cases} \Leftrightarrow (a;b;c)=\left(14;7;\frac{14}{3}\right).$$

($\vec{p}$ là vectơ pháp tuyến của (P))

Suy ra mặt phẳng (P) cần tìm có phương trình

$$\frac{x}{14}+\frac{y}{7}+\frac{3z}{14}=1 \text{ hay } x+2y+3z-14=0.$$

Nhận xét. Trong lời giải trên, chúng ta đã vận dụng tính chất của hình chóp $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc : "hình chiếu của đỉnh O trên mặt phẳng đáy trùng với trực tâm của đáy" để chỉ ra M là trực tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM}$ cùng phương với vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Cách 2. M là trực tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\begin{cases} M \in (P) \\ \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA}=0 \end{cases}$

Từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1 \\ -2b+3c=0 \\ a-3c=0 \end{cases}$ và giải được $(a;b;c)=\left(14;7;\frac{14}{3}\right)$.

Suy ra mặt phẳng (P) cần tìm có phương trình

$$\frac{x}{14}+\frac{y}{7}+\frac{3z}{14}=1 \text{ hay } x+2y+3z-14=0.$$

34. Giả sử tìm được mặt phẳng $(P): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, với $abc \neq 0$ thỏa mãn.

Do $M(4;3;2) \in (P)$ nên $\frac{4}{a}+\frac{3}{b}+\frac{2}{c}=1$. (1)

Do (P) chắn trên các trục tọa độ các đoạn có độ dài bằng nhau nên $|a|=|b|=|c|$.

Khi đó, có các trường hợp sau xảy ra :

+ *Trường hợp 1.* $a=b=c$. Thay vào (1) được $\frac{4}{a}+\frac{3}{a}+\frac{2}{a}=1 \Leftrightarrow a=9$.

+ *Trường hợp 2.* $a=b=-c$. Thay vào (1) được $\frac{4}{a}+\frac{3}{a}-\frac{2}{a}=1 \Leftrightarrow a=5$.

+ *Trường hợp 3.* $b=c=-a$. Thay vào (1) được $\frac{4}{a}-\frac{3}{a}-\frac{2}{a}=1 \Leftrightarrow a=-1$.

+ *Trường hợp 4.* $c=a=-b$. Thay vào (1) được $\frac{4}{a}-\frac{3}{a}+\frac{2}{a}=1 \Leftrightarrow a=3$.

Vậy, có 4 mặt phẳng sau thỏa mãn yêu cầu :

$$(P_1): x+y+z-9=0, \quad (P_2): x+y-z-5=0,$$
$$(P_3): -x+y+z-1=0, (P_4): x-y+z-3=0.$$

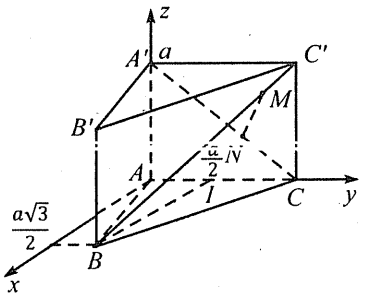
35. Với cách giải như bài 34, thay điều kiện $|a|=|b|=|c|$ bởi điều kiện $|a|:|b|:|c|=1:2:3$, ta được 4 mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu là :

$$(P_1): 6x+3y+2z-37=0, (P_2): 6x-3y+2z-19=0,$$
$$(P_3): 6x-3y-2z-11=0, \ (P_4): 6x+3y-2z-29=0.$$

36. Gọi I là trung điểm của CA. Khi đó, do tam giác ABC là tam giác đều cạnh a nên $IA=\frac{a}{2}$ và $BI=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ sao cho

$$A(0;0;0), C(0;a;0), A'(0;0;a)$$

và $B(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0)$ (h.1).



Hình 1

Do mặt phẳng $(ABB'A')$ đi qua B và trục Az nên có phương trình dạng $x-\sqrt{3}y=0$. Do đó mặt phẳng $(ABB'A')$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-\sqrt{3};0)$.

Ngoài ra, do $\overrightarrow{CA'}=(0;-a;a)=a(0;-1;1)$ nên điểm N nằm trên đường thẳng CA' khi và chỉ khi tồn tại số thực s sao cho $\overrightarrow{CN}=\frac{s}{a}\overrightarrow{CA'}$ hay $N=(0;a-s;s)$.

Vì $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC}$ nên $C'=(0;a;a)$, suy ra

$$\overrightarrow{C'B}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};-a\right)=\frac{a}{2}\left(\sqrt{3};-1;-2\right).$$

Từ đó, điểm $M\in BC'$ khi và chỉ khi tồn tại số thực t sao cho $\overrightarrow{C'M}=\frac{2t}{a}\overrightarrow{C'B}$ hay $M\left(\sqrt{3}t;a-t;a-2t\right)$.

Ta có $\overrightarrow{MN}=\left(-t\sqrt{3};t-s;2t+s-a\right)$. Suy ra với $MN\,||\,(ABB'A')$ thì $\overrightarrow{MN}\cdot\vec{n}=0\Leftrightarrow s=2t$. Khi đó $\overrightarrow{MN}=\left(-t\sqrt{3};-t;4t-a\right)$. Suy ra

$$MN^2=\left(-t\sqrt{3}\right)^2+(-t)^2+(4t-a)^2=20t^2-8at+a^2=20\left(t-\frac{a}{5}\right)^2+\frac{a^2}{5}\geq\frac{a^2}{5}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=\frac{a}{5}$. Khi đó, dễ thấy $M,N\notin(ABB'A')$.

Vậy độ dài của đoạn thẳng ngắn nhất trong các đoạn thẳng MN bằng $\frac{a}{\sqrt{5}}$.

Cách 2. Ta cũng có thể giải bài toán này bằng phương pháp vectơ như sau :

Đặt $\overrightarrow{BA}=\vec{a},\overrightarrow{BB'}=\vec{b},\overrightarrow{BC}=\vec{c}$ với $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=a,\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{c}=0,\vec{a}.\vec{c}=\frac{a^2}{2}$.

Giả sử tìm được $M\in BC',N\in CA'$ thỏa mãn yêu cầu bài toán và đặt

$$\overrightarrow{BM}=m\overrightarrow{BC'},\overrightarrow{CN}=n\overrightarrow{CA'}.$$

Ta có $\overrightarrow{BM}=m\vec{b}+m\vec{c},\overrightarrow{CN}=n\vec{a}+n\vec{b}-n\vec{c}$

$$\Rightarrow\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=n\vec{a}+n\vec{b}+(1-n)\vec{c}.$$

Suy ra $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BM}=n\vec{a}+(n-m)\vec{b}+(1-m-n)\vec{c}.$

$MN \parallel (ABB'A') \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BB'}$ đồng phẳng. Điều này tương đương với tồn tại các số $x, y \in \mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BB'}$ hay

$$n\vec{a} + (n-m)\vec{b} + (1-m-n)\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

$$\Leftrightarrow (n-x)\vec{a} + (n-m-y)\vec{b} + (1-m-n)\vec{c} = \vec{0} \qquad (1)$$

Do $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng nên

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} n-x=0 \\ n-m-y=0 \\ 1-n-m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=x \\ m=x-y \\ 2x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=x \\ m=1-x \end{cases}$$

Khi đó $\overrightarrow{MN} = x\vec{a} + (2x-1)\vec{b}$. Suy ra

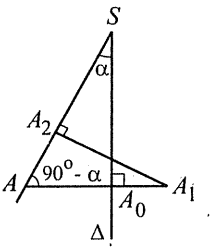
$$MN^2 = \left(x^2 + (2x-1)^2\right)a^2 = \left(5x^2 - 4x + 1\right)a^2 = \left(5\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}\right)a^2 \geq \frac{a^2}{5}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{2}{5}$. Vậy độ dài đoạn ngắn nhất cần tìm là $\frac{a}{\sqrt{5}}$, đạt được khi $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{CN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA'}$.

37. a) Đặt α, β, γ theo thứ tự bằng góc tạo bởi Δ với các đường thẳng SA, SB, SC. Gọi A_0, B_0, C_0 theo thứ tự là trung điểm AA_1, BB_1, CC_1, và A_2, B_2, C_2 lần lượt là hình chiếu của A_1, B_1, C_1 trên SA, SB, SC.

Tam giác vuông SA_0A có cạnh huyền $SA = a$, góc nhọn $\widehat{ASA_0} = \alpha$, suy ra $AA_0 = a \cdot \sin\alpha$.

Tam giác vuông AA_2A_1 có cạnh huyền $AA_1 = 2a \cdot \sin\alpha$, góc nhọn $\widehat{A_1AA_2} = 90^\circ - \alpha$, suy ra $AA_2 = 2a \cdot \sin^2\alpha$.



Hình 2

Do đó $SA_2 = a \cdot \cos 2\alpha$ (h.2).

Hoàn toàn tương tự, cũng có $SB_2 = b \cdot \cos 2\beta, SC_2 = c \cdot \cos 2\gamma$.

Chọn hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $Sxyz$ sao cho

$$S(0;0;0), A(a;0;0), B(0;b;0) \text{ và } C(0;0;c).$$

Khi đó, theo kết quả tính toán ở trên thì $P=(a\cdot\cos 2\alpha;b\cdot\cos 2\beta;c\cdot\cos 2\gamma)$.

Theo kết quả của bài tập 15,

$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=2\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\right)-3=-1. \qquad (1)$$

Suy ra điểm P luôn nằm trên mặt phẳng cố định có phương trình

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=-1 \text{ hay } \frac{x}{-a}+\frac{y}{-b}+\frac{z}{-c}=1.$$

Chính xác thì P luôn nằm trong miền tam giác $A'B'C'$ (kể cả biên), trong đó A', B', C' theo thứ tự đối xứng với A, B, C qua S.

b) Theo câu a) ta có :

$$\frac{PA^2}{SA^2}=(\cos 2\alpha-1)^2+\frac{b^2}{a^2}\cos^2 2\beta+\frac{c^2}{a^2}\cos^2 2\gamma,$$

$$\frac{PB^2}{SB^2}=(\cos 2\beta-1)^2+\frac{a^2}{b^2}\cos^2 2\alpha+\frac{c^2}{b^2}\cos^2 2\gamma$$

và

$$\frac{PC^2}{SC^2}=(\cos 2\gamma-1)^2+\frac{b^2}{c^2}\cos^2 2\beta+\frac{a^2}{c^2}\cos^2 2\alpha.$$

Suy ra $X=\dfrac{PA^2}{SA^2}+\dfrac{PB^2}{SB^2}+\dfrac{PC^2}{SC^2}$

$$=a^2\cos^2 2\alpha\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+b^2\cos^2 2\beta\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

$$+c^2\cos^2 2\gamma\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-2\left(\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma\right)+3$$

$$=\left(a^2\cos^2 2\alpha+b^2\cos^2 2\beta+c^2\cos^2 2\gamma\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+5 \qquad (1)$$

Bây giờ ta tìm $Y=\dfrac{PH^2}{SH^2}$.

Nếu gọi H' là điểm đối xứng với H qua S thì H' là trực tâm của tam giác $A'B'C'$ và khi đó $HH'\perp(A'B'C')$. Vì P nằm trên $\text{mp}(A'B'C')$ (theo câu a) nên $PH^2=HH'^2+H'P^2=4SH^2+\left(SP^2-SH'^2\right)=SP^2+3SH^2$.

Lại có $\dfrac{1}{SH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{SB^2}+\dfrac{1}{SC^2}$ (do SA, SB, SC đôi một vuông góc)

$$=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Vậy $Y=\dfrac{PH^2}{SH^2}=\dfrac{SP^2+3SH^2}{SH^2}=\dfrac{SP^2}{SH^2}+3$

$=\left(a^2\cos^2 2\alpha+b^2\cos^2 2\beta+c^2\cos^2 2\gamma\right)\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)+3.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $X-Y=2$ không đổi.

Suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét. Trong lời giải trên ta đã sử dụng bài tập 15 và tính chất : nếu tứ diện vuông $OABC$ (OA,OB,OC đôi một vuông góc) có H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC) thì $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$.

Việc chứng minh tính chất này coi như một bài tập.

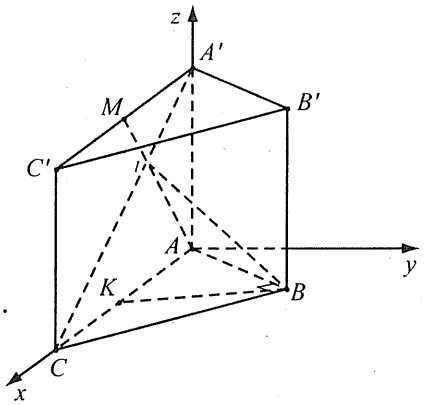
38. Từ giả thiết, suy ra $AC=a\sqrt{5}, BC=2a$. Gọi K là hình chiếu của B trên AC.

Khi đó, $BK=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$ và $KA=\dfrac{a}{\sqrt{5}}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ sao cho

$A(0;0;0), C\left(a\sqrt{5};0;0\right), B\left(\dfrac{a}{\sqrt{5}};\dfrac{2a}{\sqrt{5}};0\right)$

và $A'(0;0;2a)$ (h.3).



Hình 3

Do $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}$ nên $C'=(a\sqrt{5};0;2a)$.

Vì M là trung điểm của $A'C'$ nên

$$M=\left(\frac{a\sqrt{5}}{2};0;2a\right).$$

Từ đó, trong mặt phẳng (xAz), đường thẳng $A'C$ có phương trình $\dfrac{x}{a\sqrt{5}}+\dfrac{z}{2a}=1$,

còn đường thẳng AM có phương trình $z=\dfrac{4}{\sqrt{5}}x$. Do I là giao điểm của $A'C$ và AM nên tọa độ của I thỏa mãn hệ $\begin{cases}\dfrac{x}{a\sqrt{5}}+\dfrac{z}{2a}=1\\ y=0\\ z=\dfrac{4}{\sqrt{5}}x\end{cases}$

Giải hệ thu được $x=\frac{a\sqrt{5}}{3}, y=0, z=\frac{4a}{3}$.

Suy ra $I\left(\frac{a\sqrt{5}}{3};0;\frac{4a}{3}\right)$ và $d(I;(ABC))=\frac{4a}{3}$.

Từ đó $V_{IABC}=\frac{1}{3}\cdot d(I;(ABC))\cdot S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{4a}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot 2a=\frac{4a^3}{9}$ (đvtt).

Ta có $\overrightarrow{IB}=\frac{2a}{3\sqrt{5}}\left(-1;3;-2\sqrt{5}\right)$ và $\overrightarrow{IC}=\frac{2a}{3}\left(\sqrt{5};0;-2\right)$. Do đó

$$\left[\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}\right]=\frac{4a^2}{9\sqrt{5}}\left(\begin{vmatrix}3 & -2\sqrt{5}\\ 0 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-2\sqrt{5} & -1\\ -2 & \sqrt{5}\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & 3\\ \sqrt{5} & 0\end{vmatrix}\right)=\frac{-4a^2}{3\sqrt{5}}\left(2;4;\sqrt{5}\right).$$

Suy ra $S_{\Delta IBC}=\frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}\right]\right\|=\frac{2a^2\sqrt{5}}{3}$ (đvtt).

Vậy $d\left(A;(IBC)\right)=\frac{3V_{IABC}}{S_{\Delta IBC}}=\frac{3\cdot\frac{4a^3}{9}}{\frac{2a^2\sqrt{5}}{3}}=\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

39. Gọi O là trung điểm của AD. Khi đó $OA=OD=\frac{a}{2}$ và $OS=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

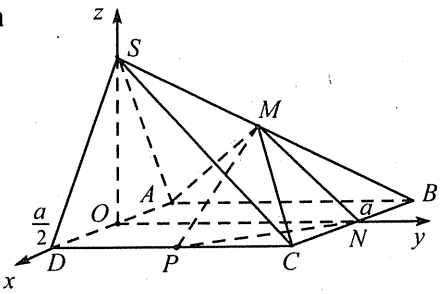
Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ sao cho $O(0;0;0), D\left(\frac{a}{2};0;0\right), N\left(0;a;0\right), S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ (h.4). Suy ra $A\left(-\frac{a}{2};0;0\right), B\left(-\frac{a}{2};a;0\right), C\left(\frac{a}{2};a;0\right)$.

Do M là trung điểm của SB, P là trung điểm của CD nên

$$M=\left(-\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right) \text{ và } P=\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right).$$

Do đó

$$\overrightarrow{AM}=\left(\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right), \overrightarrow{BP}=\left(a;-\frac{a}{2};0\right).$$



Hình 4

Suy ra $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BP}=\frac{a}{4}\cdot a+\frac{a}{2}\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)+\frac{a\sqrt{3}}{4}\cdot 0=0$, do đó $AM\perp BP$.

Ta có $\overrightarrow{CM}=\left(-\frac{3a}{4};-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$, $\overrightarrow{CN}=\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$, $\overrightarrow{CP}=\left(0;-\frac{a}{2};0\right)$. Suy ra

$$\left[\overrightarrow{CN};\overrightarrow{CP}\right]=\left(\begin{vmatrix}0&0\\-\frac{a}{2}&0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0&-\frac{a}{2}\\0&0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-\frac{a}{2}&0\\0&-\frac{a}{2}\end{vmatrix}\right)=\left(0;0;\frac{a^2}{4}\right)$$

và $$\left[\overrightarrow{CN};\overrightarrow{CP}\right]\cdot\overrightarrow{CM}=0\cdot\left(-\frac{3a}{4}\right)+0\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)+\frac{a^2}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{16}.$$

Từ đó $V_{CMNP}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{CN};\overrightarrow{CP}\right]\cdot\overrightarrow{CM}\right|=\frac{a^3\sqrt{3}}{96}$ (đvtt).

§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

40. $AB:\begin{cases}x=4t\\y=0\\z=2+3t\end{cases}(t\in\mathbb{R}),BC:\frac{x-4}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z-5}{-5},CA:\frac{x}{5}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-2}$

$$DA:\frac{x}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z-2}{4},DB:\frac{x-4}{5}=\frac{y}{-4}=\frac{z-5}{7},DC:\frac{x-5}{6}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z}{2}.$$

41. Gọi M là trung điểm của AB, khi đó $M=(-1;4;-2)$. Suy ra $\overrightarrow{MC}=(5;-11;0)$.

Vậy phương trình của trung tuyến CM là $\begin{cases}x=-1+5t\\y=4-11t\\z=-2\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

42. a) Ta có $\overrightarrow{BA}=(2;-3;6),\overrightarrow{BC}=(-6;12;4)$.

Phân giác trong của góc $\widehat{ABC}$ có vectơ chỉ phương cùng phương với $\frac{1}{BA}\cdot\overrightarrow{BA}+\frac{1}{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(-\frac{1}{7};\frac{3}{7};\frac{8}{7}\right)=\frac{1}{7}(-1;3;8)$. Từ đó, phương trình của phân giác cần tìm là $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+7}{8}$.

Nhận xét. Ta cũng có thể xác định điểm D là chân phân giác trong kẻ từ B của tam giác ABC nhờ tính chất $a\cdot\overrightarrow{DA}+c\cdot\overrightarrow{DC}=\vec{0}$, trong đó $a=BC, c=AB$, rồi viết phương trình của đường thẳng BD.

b) Đường thẳng BC có vectơ chỉ phương $\vec{u}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=(-3;6;2)$ và do đó có phương trình tham số $\begin{cases}x=1-3t\\y=2+6t\\z=-7+2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Gọi $H(1-3t;2+6t;-7+2t)$ là hình chiếu của A trên BC. Khi đó $\overrightarrow{AH}=(-4-3t;3+6t;-8+2t)$. Từ đó, do $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0$, ta được

$$-3(-4-3t)+6(3+6t)+2(-8+2t)=0\Leftrightarrow 49t+14=0\Leftrightarrow t=-\frac{2}{7}.$$

Do đó $\overrightarrow{AH}=\left(-\frac{22}{7};\frac{9}{7};-\frac{60}{7}\right)=-\frac{1}{7}(22;-9;60)$. Suy ra đường cao kẻ từ A của tam giác ABC có phương trình $\frac{x-3}{22}=\frac{y+1}{-9}=\frac{z+1}{60}$.

Nhận xét. Đường cao kẻ từ A của tam giác ABC là giao tuyến của mặt phẳng (ABC) với mặt phẳng đi qua A, vuông góc với BC, trực tâm của tam giác ABC là điểm chung (duy nhất) của mặt phẳng (ABC) với các mặt phẳng lần lượt đi qua A,B,C theo thứ tự vuông góc với các đường thẳng BC, CA, AB.

43. a) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-3}{1}$.

b) Mặt phẳng $(P): x-y-z-6=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{p}=(1;-1;-1)$ và mặt phẳng $(Q): 4x+y-2z-5=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{q}=(4;1;-2)$. Suy ra giao tuyến của $(P),(Q)$ là đường thẳng có vectơ chỉ phương

$$\vec{u}=\left[\vec{p};\vec{q}\right]=\left(\begin{vmatrix}-1&-1\\1&-2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1&1\\-2&4\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&-1\\4&1\end{vmatrix}\right)=(3;-2;5).$$

Do đó, đường thẳng Δ cần tìm có phương trình $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{5}$.

44. a) $(P): 5y+2z=0.$ b) $\dfrac{x+3}{11}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{5}.$

45. Đường thẳng $\Delta: \dfrac{x}{4}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z+1}{-2}$ là giao tuyến của hai mặt phẳng

$$3x-4y+16=0 \text{ và } 2y+3z-5=0.$$

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua Δ và vuông góc với $(P): x-y+3z+8=0$, thế thì (Q) có phương trình dạng

$k(3x-4y+16)+l(2y+3z-5)=0$ hay $3kx+(2l-4k)y+3lz+16k-5l=0$

(với $k^2+l^2\neq 0$).

Do $(Q)\perp(P)$ nên $3k-(2l-4k)+9l=0 \Leftrightarrow k+l=0$.

Từ đó, do $k^2+l^2\neq 0$, chọn $k=1, l=-1$.

Suy ra $(Q): 3x-6y-3z+21=0$ hay $x-2y-z+7=0.$

Do đường thẳng d cần tìm là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P),(Q)$ nên mọi điểm trên d có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x-y+3z+8=0 \\ x-2y-z+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-9-7z \\ y=-1-4z. \end{cases}$$

Từ đó, đường thẳng d cần tìm có phương trình tham số : $\begin{cases} x=-9-7t \\ y=-1-4t \\ z=t. \end{cases}$

46. a) Do $1:2:(-3)\neq 2:(-1):1$ nên $(P),(Q)$ cắt nhau theo giao tuyến Δ.

Phương trình của $\Delta: \begin{cases} x=-2+t \\ y=-3+7t \\ z=-1+5t \end{cases} (t\in\mathbb{R}).$

b) Hình chiếu của Δ trên các mặt phẳng $(xOy),(yOz)$ và (zOx) là các đường thẳng :

$$\Delta_z: \begin{cases} x=-2+t \\ y=-3+7t \\ z=0 \end{cases}, \Delta_y: \begin{cases} x=-2+t \\ y=0 \\ z=-1+5t \end{cases} \text{ và } \Delta_z: \begin{cases} x=0 \\ y=-3+7t \\ z=-1+5t \end{cases} (t\in\mathbb{R}).$$

47. a) Chéo nhau b) Cắt nhau tại $(-3;5;-3)$.

c) Cắt nhau tại $(3;7;-6)$ d) Song song.

48. Gọi Δ là giao tuyến của (P) và (Q). Khi đó, mọi điểm trên Δ có tọa độ thỏa mãn

$$\begin{cases} x+3y+z+2=0 \\ x-y-3z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2z \\ y=-1-z. \end{cases}$$

Suy ra đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1-t \\ z=t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

Gọi $N(1+2t;-1-t;t)$ là hình chiếu vuông góc của $M(1;-2;3)$ trên Δ, suy ra

$$\overrightarrow{MN}=(2t;1-t;-3+t) \text{ và } \overrightarrow{MN}\cdot\vec{u}=0$$

(ở đây $\vec{u}=(2;-1;1)$ là vectơ chỉ phương của Δ).

Từ đó tìm được $t=\frac{2}{3}$ và do đó $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3};-\frac{7}{3}\right)=\frac{1}{3}(4;1;-7)$.

Vậy phương trình của đường thẳng cần tìm là $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-7}$.

49. Đường thẳng $d_1:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-5}$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(2;1;-5)$ và đường thẳng $d_2:\begin{cases} x=t \\ y=-1-4t \\ z=6+6t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(1;-4;6)$.

Do đường thẳng Δ cần tìm có phương vuông góc với cả d_1 và d_2 nên Δ có vectơ chỉ phương

$$\vec{v}=\left[\overrightarrow{u_2};\overrightarrow{u_1}\right]=\left(\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 1 & -5 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)=(14;17;9).$$

Suy ra đường thẳng cần tìm là $\Delta:\frac{x-1}{14}=\frac{y+1}{17}=\frac{z-2}{9}$.

50. a) $\Delta:\begin{cases} x=2t \\ y=1-4t \\ z=3-5t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$. b) $d:\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+5}{-5}$.

c) $H\left(\frac{8}{5};-\frac{11}{5};-1\right)$. d) $K\left(\frac{6}{5};-\frac{37}{5};3\right)$.

51. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{p}=(3;-2;-3)$.

Đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases}x=2+3t\\y=-4-2t\\z=1+2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Với điểm $N(2+3t;-4-2t;1+2t)\in d$, ta có $\overrightarrow{MN}=(-1+3t;-2-2t;5+2t)$.

Khi đó $MN\,||\,(P)$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{MN}\cdot\vec{p}=0$ (do $M(3;-2;-4)\notin(P)$). Điều này tương đương với

$$3(-1+3t)-2(-2-2t)-3(5+2t)=0\Leftrightarrow 7t-14=0\Leftrightarrow t=2.$$

Suy ra $\overrightarrow{MN}=(5;-6;9)$. Do đó, đường thẳng cần tìm có phương trình là

$$\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{-6}=\frac{z+4}{9}.$$

52. Mặt phẳng $(P):3x+12y-3z-5=0$ có vectơ pháp tuyến

$$\vec{p}=(3;12;-3)=3(1;4;-1)$$

và mặt phẳng $(Q):3x-4y+9z+7=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{q}=(3;-4;9)$.

Đường thẳng Δ cần tìm có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ cùng phương với vectơ

$$\left[\vec{p};\vec{q}\right]=3\left(\begin{vmatrix}4&-1\\-4&9\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1&1\\9&3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&4\\3&-4\end{vmatrix}\right)=3(32;-12;-16)=12(8;-3;-4)$$

Do đó chọn $\vec{u}=(8;-3;-4)$.

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(-5;3;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(2;-4;3)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua d_1 và Δ. Khi đó (α) có vectơ pháp tuyến

$$\vec{a}=\left[\overrightarrow{u_1};\vec{u}\right]=\left(\begin{vmatrix}-4&3\\-3&-4\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3&2\\-4&8\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2&-4\\8&-3\end{vmatrix}\right)=(25;32;26).$$

Suy ra (α) có phương trình

$$25(x+5)+32(y-3)+26(z+1)=0 \text{ hay } 25x+32y+26z+55=0.$$

Tương tự, gọi (β) là mặt phẳng đi qua d_2 và Δ, khi đó (β) có phương trình $4y-3z+10=0$.

Đường thẳng Δ cần tìm là giao tuyến của (α) và (β) nên mọi điểm trên Δ có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases}25x+32y+26z+55=0\\4y-3z+10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-2z\\4y=-10+3z.\end{cases}$$

Từ đó, chọn $z=4t+2$, ta thu được phương trình tham số của đường thẳng Δ là

$$\begin{cases}x=-3-8t\\y=-1+3t\\z=2+4t\end{cases}\left(t\in\mathbb{R}\right).$$

Nhận xét.

- Đường thẳng d_1 là giao tuyến của hai mặt phẳng $2x+y+7=0$, $3y+4z-5=0$. Vậy, có thể viết phương trình của (α) ở dạng $k(2x+y+7)+l(3y+4z-5)=0$. Từ đó, do (α) chứa Δ nên chọn được k,l.

- Ta cũng có thể giải bằng cách xác định $M\in d_1, N\in d_2$ sao cho $MN\parallel\Delta$ như sau :

Đường thẳng d_1 có phương trình tham số $\begin{cases}x=-5+2t\\y=3-4t\\z=-1+3t\end{cases}\left(t\in\mathbb{R}\right)$ và đường thẳng d_2 có phương trình tham số $\begin{cases}x=3-2s\\y=-1+3s\\z=2+4s\end{cases}\left(s\in\mathbb{R}\right)$.

Xét $M\left(-5+2t;3-4t;-1+3t\right)\in d_1$ và $N\left(3-2s;-1+3s;2+4s\right)\in d_2$. Ta có

$$\overrightarrow{MN}=\left(8-2t-2s;-4+4t+3s;3-3t+4s\right).$$

Khi đó $MN\parallel\Delta\Leftrightarrow\dfrac{8-2t-2s}{8}=\dfrac{-4+4t+3s}{-3}=\dfrac{3-3t+4s}{-4}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\s=-1.\end{cases}$

Từ đó suy ra $M\left(-3;-1;2\right)$, vectơ $\overrightarrow{MN}=\left(8;-3;-4\right)$ và thu được

$$\Delta:\begin{cases}x=-3-8t\\y=-1+3t\\z=2+4t\end{cases}\left(t\in\mathbb{R}\right).$$

53. Chứng minh d_1, d_2 chéo nhau bằng cách kiểm tra hai vectơ chỉ phương không cùng phương và hệ tương giao không có nghiệm.

Đường vuông góc chung : Đường thẳng d_1 và đường thẳng d_2 có phương trình tham số lần lượt là :

$$d_1 : \begin{cases} x = 7 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 9 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \qquad d_2 : \begin{cases} x = 3 - 7s \\ y = 1 + 2s \\ z = 1 + 3s \end{cases} (s \in \mathbb{R}).$$

Xét $M(7+t;3+2t;9-t) \in d_1, N(3-7s;1+2s;1+3s) \in d_2$. Ta có

$$\overrightarrow{MN} = (-4-t-7s;-2-2t+2s;-8+t+3s).$$

Khi đó, với $\vec{u} = (1;2;-1), \vec{v} = (-7;2;3)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d_1, d_2, ta có

$$\begin{cases} MN \perp d_1 \\ MN \perp d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4-t-7s+2(-2-2t+2s)-(-8+t+3s) = 0 \\ -7(-4-t-7s)+2(-2-2t+2s)+3(-8+t+3s) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = s = 0.$$

Từ đó $M = (7;3;9), N = (3;1;1)$ và đường vuông góc chung cần tìm là đường thẳng đi qua M, N, do đó có phương trình $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{4}$.

54. Chỉ ra d_1, d_2 cắt nhau tại $M(1;-2;5)$. Suy ra d_1, d_2 đồng phẳng.

Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (2;-3;4)$ và đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (3;2;-2)$. Mặt phẳng đi qua d_1, d_2 nhận vectơ

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}\right] = \left(\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right) = (-2;16;13)$$

làm vectơ pháp tuyến. Do đó nó có phương trình

$$-2 \cdot (x-1) + 16 \cdot (y+2) + 13 \cdot (z-5) = 0 \text{ hay } 2x - 16y - 13z + 31 = 0.$$

55. Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua $A(0;1;1)$ và vuông góc với d_1. Khi đó (P) nhận $\vec{u}$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình $3x + y + z - 2 = 0$.

Gọi B là giao điểm của (P) và d_2, khi đó tọa độ của B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x=-1, \\ y=-1+t \\ z=t \\ 3x+y+z-2=0 \end{cases}$$

Giải hệ, thu được $x=-1, y=2, z=3$. Vậy $B(-1;2;3)$.

Đường thẳng Δ cần tìm là đường thẳng đi qua hai điểm A, B nên có phương trình

$$\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

56. $M\left(\frac{13}{7};-\frac{4}{7};-\frac{5}{7}\right)$.

57. Xét $C(2+3t;-2t;4+2t)\in d$. Ta có

$$CA=\sqrt{(1+3t)^2+(-2-2t)^2+(5+2t)^2}=\sqrt{17t^2+34t+30}\ \backslash$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{17}t+\sqrt{17}\right)^2+\left(\sqrt{13}\right)^2},$$

$$CB=\sqrt{(-5+3t)^2+(2-2t)^2+(1+2t)^2}$$

$$=\sqrt{17t^2-34t+30}=\sqrt{\left(-\sqrt{17}t+\sqrt{17}\right)^2+\left(\sqrt{13}\right)^2}$$

Từ đó, theo bất đẳng thức $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\geq\left|\vec{u}+\vec{v}\right|$, ta có

$$CA+CB\geq\sqrt{\left(\sqrt{17}+\sqrt{17}t+\sqrt{17}-\sqrt{17}t\right)^2+\left(\sqrt{13}+\sqrt{13}\right)^2}=2\sqrt{30}.$$

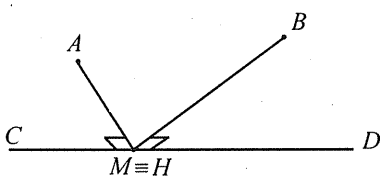
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{\sqrt{17}+\sqrt{17}t}{\sqrt{17}-\sqrt{17}t}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}}\ (>0)\Leftrightarrow t=0$.

Vậy $C\in d$ sao cho $CA+CB$ bé nhất là $C(2;0;4)$.

58. Để ý rằng $d_1\parallel d_2$ nên khoảng cách giữa chúng bằng khoảng cách từ một điểm trên d_1 tới d_2. Đáp số $d(d_1;d_2)=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

59. Đáp số : $\arcsin\dfrac{4}{9}$.

60. a) $\left(\widehat{AB;CD}\right)=\dfrac{\pi}{2}$, $d\left(AB;CD\right)=\sqrt{14}$.



Hình 5

b) Tam giác MAB có độ dài cạnh $AB=4\sqrt{3}$ không đổi, do đó chu vi của nó bé nhất khi và chỉ khi $MA+MB$ bé nhất. Do $AB\perp CD$ nên điểm M cần tìm là hình chiếu vuông góc của A, cũng là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng CD (h.5).

Đáp số : $M\left(0;1;-1\right)$.

61. a) Mặt phẳng chứa d_1 và song song với d_2 là $\left(P\right):x-2y-2z-2=0$

b) Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M\left(1;1;3\right)$. Do $d_2\,\|\left(P\right)$ và $\left(P\right)\supset d_1$ nên

$$d\left(d_1;d_2\right)=d\left(M;\left(P\right)\right)=\frac{\left|1-2\cdot1-2\cdot3-2\right|}{\sqrt{1^2+\left(-2\right)^2+\left(-2\right)^2}}=3.$$

§4. MẶT CẦU

62. a) $I\left(6;-2;3\right),R=7$ b) $I\left(1;-2;3\right),R=6$

c) $I\left(0;0;3\right),R=4$ d) $I\left(-1;\dfrac{1}{2};-\dfrac{5}{2}\right),R=\sqrt{\dfrac{49}{6}}$.

63. a) Gọi $I\left(0;b;c\right)\in\left(yOz\right)$ và R là tâm và bán kính của mặt cầu cần tìm. Do mặt cầu đi qua A,B,C nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\left(b-8\right)^2+c^2=\left(b-12\right)^2+\left(c-4\right)^2\\ \left(b-8\right)^2+c^2=\left(-4\right)^2+\left(b-6\right)^2+\left(c-2\right)^2\\ \left(b-12\right)^2+\left(c-4\right)^2=R^2\end{cases}$$

Giải hệ, thu được $b=7,c=5,R=\sqrt{26}$.

Vậy phương trình của mặt cầu cần tìm là $x^2+\left(y-7\right)^2+\left(z-5\right)^2=26$.

Ta cũng có thể giải bài toán như sau : Để ý rằng ΔABC vuông tại A và mặt phẳng (ABC) có phương trình $x+y-z-8=0$ nên phương trình của đường tròn đi qua ba điểm A,B,C là

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-9)^2+(z-3)^2=14\\ x+y-z-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2-4x-18y-6z+80=0\\ x+y-z-8=0\end{cases}$$

Suy ra mọi mặt cầu đi qua đường tròn này đều có phương trình dạng

$$x^2+y^2+z^2-4x-18y-6z+80+k(x+y-z-8)=0$$

hay $x^2+y^2+z^2+(k-4)x+(k-18)y-(k+6)z+80-8k=0$.

Mặt cầu này có tâm $I\left(2-\frac{k}{2};9-\frac{k}{2};3+\frac{k}{2}\right)$ và bán kính

$$R=\sqrt{\left(2-\frac{k}{2}\right)^2+\left(9-\frac{k}{2}\right)+\left(3+\frac{k}{2}\right)^2-80+8k}=\sqrt{\frac{3k^2}{4}+14}.$$

Do $I\in(yOz)$ nên $2-\frac{k}{2}=0\Leftrightarrow k=4$. Từ đó $I(0;7;5), R=\sqrt{26}$ và thu được phương trình của mặt cầu cần tìm $x^2+(y-7)^2+(z-5)^2=26$.

b) $(x-2)^2+y^2+z^2=4$.

c) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$.

d) $(x-9)^2+y^2+z^2=77$.

64. Xét ba mặt cầu

$$(S_k): x^2+y^2+z^2+2a_kx+2b_ky+2c_kz+d_k=0,$$

với $a_k^2+b_k^2+c_k^2-d_k>0, k=1,2,3$.

Mặt cầu (S_k) có tâm $I_k(a_k;b_k;c_k)$. Do I_1,I_2,I_3 không thẳng hàng nên

$$(a_2-a_1):(b_2-b_1):(c_2-c_1)\neq(a_3-a_1):(b_3-b_1):(c_3-c_1). \quad (*)$$

Mặt phẳng đẳng phương của $(S_1),(S_2)$ có phương trình

$$2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y+2(c_2-c_1)z+d_2-d_1=0.$$

Mặt phẳng đẳng phương của $(S_1),(S_3)$ có phương trình

$$2(a_3-a_1)x+2(b_3-b_1)y+2(c_3-c_1)z+d_3-d_1=0.$$

Do điều kiện (*) nên hai mặt phẳng này cắt nhau theo một đường thẳng, và mọi mặt phẳng đi qua đường thẳng này đều có phương trình dạng

$$k\left[2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y+2(c_2-c_1)z+d_2-d_1\right]+$$
$$+l\left[2(a_3-a_1)x+2(b_3-b_1)y+2(c_3-c_1)z+d_3-d_1\right]=0.$$

Với $k=1, l=-1$, ta được mặt phẳng

$$2(a_2-a_3)x+2(b_2-b_3)y+2(c_2-c_3)z+d_2-d_3=0$$

và đó chính là mặt phẳng đẳng phương của (S_2) và (S_3).

Nhận xét. Do mặt phẳng đẳng phương của hai mặt cầu có phương vuông góc với đường thẳng đi qua tâm của chúng nên trục đẳng phương của ba mặt cầu (S_k) có phương vuông góc với mặt phẳng $(I_1I_2I_3)$.

65. Xét bốn mặt cầu $(S_k): x^2+y^2+z^2+2a_kx+2b_ky+2c_kz+d_k=0,$

với $a_k^2+b_k^2+c_k^2-d_k>0, k=1,2,3,4.$

Mặt cầu (S_k) có tâm I_k. Do I_1, I_2, I_3, I_4 không đồng phẳng nên I_1, I_2, I_3 không thẳng hàng.

Gọi Δ là trục đẳng phương của ba mặt cầu $(S_1),(S_2),(S_3)$ và (P) là mặt phẳng đẳng phương của $(S_1),(S_4)$. Khi đó $\Delta\perp(I_1I_2I_3)$ và $(P)\perp I_1I_4$. Do $I_4\notin(I_1I_2I_3)$ nên $\Delta\nparallel(P)$, do đó $\Delta\cap(P)=\{I\}$. Hơn nữa, I có cùng phương tích với cả bốn mặt cầu đã cho, suy ra đpcm.

66. Mặt phẳng đẳng phương của $(S_1),(S_2)$ có phương trình

$$10x-6y+6z+14=0 \text{ hay } 5x-3y+3z+7=0.$$

Mặt phẳng đẳng phương của $(S_1),(S_3)$ có phương trình

$$8x-2y+8z+13=0.$$

Theo kết quả bài 64, mọi điểm nằm trên trục đẳng phương của ba mặt cầu có tọa độ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases}5x-3y+3z+7=0\\8x-2y+8z+13=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x+3z=-7+3y\\8x+8z=-13+2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{17}{16}+\dfrac{18}{16}y\\z=-\dfrac{9}{16}-\dfrac{14}{16}y\end{cases}$$

Từ đó, chọn $y = 8t$, được phương trình tham số của trục đẳng phương cần tìm là

$$\begin{cases} x = -\dfrac{17}{16} + 9t \\ y = \quad\quad 8t \\ z = -\dfrac{9}{16} - 7t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

67. Mặt phẳng đẳng phương của $(S_1), (S_2)$ có phương trình

$$10x - 2y + 4z - 14 = 0 \text{ hay } 5x - y + 2z - 7 = 0.$$

Mặt phẳng đẳng phương của $(S_1), (S_3)$ có phương trình

$$2x + 6z - 20 = 0 \text{ hay } x + 3z - 10 = 0.$$

Mặt phẳng đẳng phương của $(S_1), (S_4)$ có phương trình

$$2y - 4z + 4 = 0 \text{ hay } y - 2z + 2 = 0.$$

Suy ra tọa độ của điểm P cần tìm là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 5x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + \quad 3z - 10 = 0 \\ \quad y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ, thu được $x = 1, y = 4, z = 3$. Vậy tâm đẳng phương của bốn mặt cầu cần tìm là $P(1;4;3)$.

68. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 2} = 4$.

Do $(Q) \parallel (P)$ nên (Q) có phương trình $4x + 3y - 12z + d = 0$.

(Q) tiếp xúc với (S) khi và chỉ khi

$$d(I;(Q)) = R \Leftrightarrow \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 12 \cdot 3 + d|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + (-12)^2}} = 4 \Leftrightarrow \frac{|d - 26|}{13} = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = 78 \\ d = -26. \end{array}\right.$$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn là

$$(Q_1): 4x + 3y - 12z + 78 = 0 \text{ và } (Q_2): 4x + 3y - 12z - 26 = 0.$$

69. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 11} = 5$. Do

$$d = d(I;(P)) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 - 4|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3 < 5 = R$$

nên (P) và (S) cắt nhau theo đường tròn $(\mathscr{C})$ có bán kính $\rho=\sqrt{R^2-d^2}=4$ và có tâm J là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P).

Tọa độ của J là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}2x-2y-z-4=0\\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}\end{cases}$.

Giải hệ, thu được $(x;y;z)=(3;0;2)$. Vậy $J=(3;0;2)$.

70. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2+22}=6$.

Mặt phẳng (P) cần tìm có phương trình dạng $ay+bz=0\ (a^2+b^2\neq 0)$. Khi đó khoảng cách từ I tới mặt phẳng (P) bằng $d=\dfrac{|a\cdot(-2)+b\cdot 3|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Do (P) cắt (S) theo một đường tròn có bán kính $\rho=5$ nên $d^2+\rho^2=R^2$ hay

$$\frac{(-2a+3b)^2}{a^2+b^2}+25=36\Leftrightarrow 7a^2+12ab+2b^2=0\Leftrightarrow a=\frac{-6\pm\sqrt{22}}{7}\cdot b$$

Từ đó, do $a^2+b^2\neq 0$ nên chọn $b=7, a=-6\pm\sqrt{22}$, ta được hai mặt phẳng thỏa mãn $\left(-6\pm\sqrt{22}\right)y+7z=0$.

71. $(Q_1):4x+3z-40=0$ và $(Q_2):4x+3z+10=0$.

72. Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính bằng 1. Mặt phẳng (R) cần tìm đi qua giao tuyến của (P) và (Q) nên có phương trình dạng

$$k(x+28y-2z+17)+l(5x+8y-z+1)=0$$

hay $(k+5l)x+(28k+8l)y-(2k+l)z+17k+l=0\ \ (k^2+l^2\neq 0)$.

Do (S) và (R) tiếp xúc nhau nên

$$d(O;(R))=1\Leftrightarrow |17k+l|=\sqrt{(k+5l)^2+(28k+8l)^2+(-2k-l)^2}$$

$$\Leftrightarrow 500k^2+428kl+89l^2=0\Leftrightarrow (2k+l)(250k+89l)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2k+l=0\\ 250k+89l=0.\end{array}\right.$$

Với $2k+l=0$, chọn $l=-2, k=1$, ta được $(R_1): -9x+12y+15=0$.

Với $250k+89l=0$ chọn $l=-250, k=89$ ta được

$$(R_2): -1161x+492y+72z+1263=0.$$

73. a) *Cách 1.* Mặt cầu (S) đi qua bốn điểm O, A, B, C chính là mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật dựng trên ba cạnh OA, OB, OC, nên có tâm I là trung điểm đường chéo chính. Do $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$ nên $I=(1;1;2)$. Hơn nữa bán kính của (S) bằng $R=OI=\sqrt{6}$. Suy ra phương trình của mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=6$.

Nhận xét. Trong lời giải trên đây, do OA, OB, OC đôi một vuông góc nên việc sử dụng tính chất mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $O.ABC$ chính là mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật dựng trên ba cạnh OA, OB, OC cho lời giải khá gọn gàng. Tuy nhiên, khi hai trong ba đường OA, OB, OC không vuông góc thì không thể giải như vậy được. Trong trường hợp đó, ta có thể giải như sau :

Cách 2. Gọi phương trình của mặt cầu (S) cần tìm là

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0,\ \ (a^2+b^2+c^2-d>0).$$

Do $O, A, B, C \in (S)$ nên ta có hệ phương trình $\begin{cases} d=0 \\ 4+4a+d=0 \\ 4+4b+d=0 \\ 16+8c+d=0. \end{cases}$

Giải hệ thu được $a=-1, b=-1, c=-2, d=0$.

Do đó $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z=0$.

b) Do $(P)\,||\,(Q)$ nên (P) có phương trình dạng $x+2y+3z+d=0$. Do mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 2π nên khoảng cách từ tâm I đến (P) bằng $\sqrt{5}$. Từ đó tìm được hai mặt phẳng thỏa mãn là $x+2y+3z-9\pm\sqrt{70}=0$.

74. Do mặt cầu (S) chứa đường tròn (ω): $\begin{cases} (x-3)^2+(y-4)^2+z^2=36 \\ 4x+y-z-9=0 \end{cases}$

nên có phương trình dạng

$$(x-3)^2+(y-4)^2+z^2-36+k(4x+y-z-9)=0.$$

Do $M(7;-3;1)\in(S)$ nên

$$(7-3)^2+(-3-4)^2+1^2-36+k(4\cdot 7-3-1-9)=0\Leftrightarrow k=-2.$$

Vậy phương trình của mặt cầu cần tìm là

$$(x-3)^2+(y-4)^2+z^2-36-2(4x+y-z-9)=0$$

hay $x^2+y^2+z^2-14x-10y+2z+7=0$.

75. Giả sử mặt cầu (S) phải tìm có phương trình là

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$$

với $a^2+b^2+c^2-d>0$.

Do (S) đi qua (ω) nên khi $y=2$ ta phải có

$$x^2+4+z^2-2ax-4b-2cz+d\equiv x^2+z^2-25$$

do đó $a=0,c=0,4+d-4b=-25$.

Cũng vậy, do (S) đi qua (ω') nên khi $y=3$ ta phải có

$$x^2+z^2+9-2ax-6b-2cz+d\equiv x^2+z^2-16$$

do đó $a=0,c=0,9-6b+d=-16$.

Từ đó, tìm được $a=c=0,b=-2,d=-37$. Vậy, mặt cầu cần tìm là

$$x^2+y^2+z^2+4y-37=0 \text{ hay } x^2+(y+2)^2+z^2=41.$$

Ta cũng có thể sử dụng phương trình của chùm mặt cầu để giải như sau :

Do mặt cầu (S) cần tìm đi qua (ω) nên có phương trình dạng

$$x^2+(y-2)^2+z^2+k(y-2)=0 \text{ hay } x^2+y^2+z^2+(k-4)y+4-2k=0.$$

Do (S) đi qua (ω') nên khi $y=3$ ta phải có

$$x^2+9+z^2+3k-12+4-2k=x^2+z^2-16\Leftrightarrow k=\frac{1}{2}.$$

Vậy, mặt cầu cần tìm là

$$x^2+y^2+z^2-\frac{7}{2}y+3=0 \text{ hay } x^2+\left(y-\frac{7}{4}\right)^2+z^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2.$$

BÀI TẬP BỔ SUNG

76. Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;2;-2), \overrightarrow{DC}=(1;2;-2)$. Suy ra $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, do đó $ABCD$ là hình bình hành.

Mà $\overrightarrow{CB}=(2;1;2)$ nên $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AB}=2\cdot1+1\cdot2+2\cdot(-2)=0$ và $\left|\overrightarrow{CB}\right|=3=\left|\overrightarrow{AB}\right|$ nên hình bình hành $ABCD$ có hai cạnh liên tiếp bằng nhau và vuông góc với nhau. Suy ra $ABCD$ là hình vuông.

77. Chỉ ra $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$.

78. Giả sử $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$. Khi đó $\begin{cases}3x-y+2z=11\\-2x+y+z=-6\\x-2y-3z=5.\end{cases}$

Giải hệ thu được $x=2, y=-3, z=1$. Vậy $\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$.

79. $\sin\alpha=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \sin\beta=\dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \sin\gamma=\dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Từ đó, do $\sin^2 x+\cos^2 x=1\ \forall x$, suy ra điều phải chứng minh.

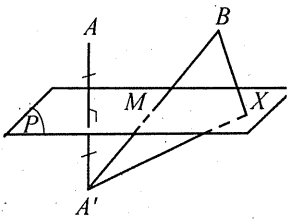
80. a) Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;-1)$ và $\overrightarrow{AB}=(6;-6;3)=3(2;-2;1)$. Suy ra $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=3(2-2-1)=-3\neq0$ nên $AB\not\parallel(P)$. Gọi $M(x;y;z)$ là giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (P). Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{1}\\x+y-z+1=0.\end{cases}$

Giải hệ thu được $x=-8, y=7, z=0$.

Suy ra $M(-8;7;0)$.

Từ đó $\overrightarrow{MA}=(6;-6;3), \overrightarrow{MB}=(12;-12;6)$.

Vì $\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MA}$ nên điểm M nằm ngoài đoạn AB, bởi vậy mặt phẳng (P) không cắt đoạn AB.



Hình 6

b) Gọi A' là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (P).

Khi đó, với mọi $X\in(P)$ đều có $XA+XB=XA'+XB\geq A'B$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $X = A'B \cap (P)$. Vậy điểm $M \in (P)$ sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất là giao điểm của $A'B$ với mặt phẳng (P) (hình 6).

Gọi $(x; y; z)$ là tọa độ của A'. Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-3}{-1} \\ \dfrac{x-2}{2} + \dfrac{y+1}{2} - \dfrac{z+3}{2} + 1 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ thu được $x = 0, y = 3, z = 1$. Vậy $A'(0;3;1)$.

Do điểm M cần tìm là giao điểm của $A'B$ với mặt phẳng (P) nên tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ \dfrac{x}{4} = \dfrac{y-3}{-8} = \dfrac{z-1}{5}. \end{cases}$$

Giải hệ, thu được $x = \dfrac{4}{3}, y = \dfrac{1}{3}, z = \dfrac{8}{3}$. Vậy, điểm $M \in (P)$ mà $MA + MB$ bé nhất là $M\left(\dfrac{4}{3}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{8}{3}\right)$.

c) Gọi I là trung điểm của đoạn AB, thế thì

$$I\left(1; -2; \frac{9}{2}\right) \text{ và } \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{DI} \quad \forall D.$$

Từ đó, điểm $D \in (P)$ mà $\left|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}\right|$ bé nhất là hình chiếu của I trên (P).

Đáp số : $D\left(\dfrac{5}{2}; -\dfrac{1}{2}; 3\right)$.

81. Gọi I là trung điểm AB. Khi đó $I = (2;0;2)$ và với mọi điểm M đều có

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + IA^2 + IB^2 = 2MI^2 + 12$$

Do đó, điểm $M \in (P)$ mà $MA^2 + MB^2$ bé nhất là hình chiếu vuông góc của $I(2;0;2)$ trên mặt phẳng (P).

Đáp số : $M\left(\dfrac{8}{3}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{8}{3}\right)$.

82. Vì $5\cdot1-2\cdot4+(-3)-9=-15<0$ và $5\cdot2-2\cdot5+0-9=-9<0$ nên A, B nằm về cùng một phía của (P).

a) Giải tương tự như bài 80b, đáp số : $C\left(\frac{7}{2};\frac{31}{8};-\frac{3}{4}\right)$.

b) Do $|DA-DB|\le AB$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi D nằm trên đường thẳng AB nhưng không nằm trong đoạn AB. Do đó, điểm D cần tìm là giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (P). Từ đó, tìm được $D\left(\frac{7}{2};\frac{13}{2};\frac{9}{2}\right)$.

c) Giải tương tự như bài 80c, được $E\left(\frac{7}{2};\frac{37}{10};-\frac{11}{10}\right)$ (E là hình chiếu của trung điểm đoạn AB trên mặt phẳng (P)).

d) Giải tương tự như phần c, được $F\left(\frac{43}{12};\frac{39}{10};-\frac{67}{60}\right)$ (F là hình chiếu của điểm J trên mặt phẳng (P), với J là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}=\vec{0}$).

83. $M(0;-3;0)$.

84. a) Ta có $\overrightarrow{BA}=(2;-4;16)=2(1;-2;8)$, mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{p}=(2;-1;1)$. Do mặt phẳng (Q) đi qua A, B và vuông góc với (P) nên (Q) có vectơ pháp tuyến $\vec{q}$ cùng phương với vectơ

$$\left[\overrightarrow{BA};\vec{p}\right]=2\left(\begin{vmatrix}-2 & 8\\ -1 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}8 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}\right)=6(2;5;1).$$

Do đó, chọn $\vec{q}=(2;5;1)$, suy ra mặt phẳng (Q) có phương trình

$$2\cdot(x+1)+5\cdot(y-3)+1\cdot(z+2)=0 \text{ hay } 2x+5y+z-11=0.$$

b) $M(2;2;-3)$.

85. a) $C(0;0;0)$ b) $D(-10;30;-20)$ c) $E(6;-18;12)$.

Bài toán khái quát. Cho mặt phẳng (P) và n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Tìm trên mặt phẳng (P) điểm M sao cho :

a) vectơ $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\overrightarrow{MA_k}$ có độ dài ngắn nhất (với $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \neq 0$).

b) $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k MA_k^2$ bé nhất (với $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \neq 0$).

86. a) Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-6;-5)$ và $\overrightarrow{CA}=(1;2;1)$. Suy ra

$$\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CA}\right]=\left(\begin{vmatrix}-6 & -5\\ 2 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-5 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & -6\\ 1 & 2\end{vmatrix}\right)=2(2;-3;4).$$

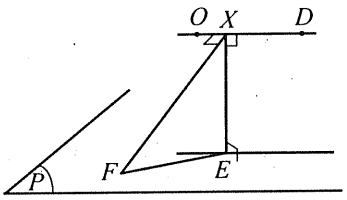
Từ đó $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CA}\right]\neq\vec{0}$ nên A, B, C không thẳng hàng và mặt phẳng (P) đi qua A, B, C có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CA}\right]=(2;-3;4)$. Suy ra (P) có phương trình $2(x-3)-3(y-3)+4(z-2)=0$ hay $2x-3y+4z-5=0$.

b) Do $OD=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$ nên $S_{\Delta ODE}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $d(E;OD)$ nhỏ nhất.

Để ý rằng $\overrightarrow{OD}\cdot\vec{n}=1\cdot 2+2\cdot(-3)+1\cdot 4=0$

và $1\cdot 2+2\cdot(-3)+1\cdot 4-5\neq 0$

nên $OD\parallel(P)$. Bởi vậy tập hợp tất cả những điểm $E\in(P)$ sao cho $d(E;OD)$ bé nhất là hình chiếu của đường thẳng OD trên mặt phẳng (P) (hình 7). Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua O, D và vuông góc với (P). Khi đó (Q) có vectơ pháp tuyến



Hình 7

$$\vec{q}=\left[\overrightarrow{OD};\vec{n}\right]=\left(\begin{vmatrix}2 & 1\\ -3 & 4\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -3\end{vmatrix}\right)=(11;-2;-7).$$

Suy ra $(Q):11x-2y-7z=0$. Và do đó, tất cả những điểm E cần tìm có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases}11x-2y-7z=0\\ 2x-3y+4z-5=0.\end{cases}$

87. Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;-2;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;-1;2)$. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{p}=(1;1;-1)$ và mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\vec{q}=(1;3;0)$. Suy ra đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương

$$\left[\vec{p};\vec{q}\right]=\left(\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\right)=(3;-1;2)=\vec{u}.$$

Từ đó, do $1+(-2)-(-1)-2=-2\neq 0$ nên $M\notin(P)$, suy ra $M\notin d$, do đó $\Delta \parallel d$.

Gọi (R) là mặt phẳng đi qua Δ và d. Khi đó (R) có phương trình dạng

$k(x+y-z-2)+l(x+3y-12)=0$ hay $(k+l)x+(k+3l)y-kz-2k-12l=0$

(với $k^2+l^2\neq 0$). Do $M(1;-2;-1)\in(R)$ nên

$$k+l-2(k+3l)+k-2k-12l=0\Leftrightarrow 2k+17l=0.$$

Từ đó, do $k^2+l^2\neq 0$ nên chọn $k=17, l=-2$. Vậy, mặt phẳng (R) cần tìm có phương trình $15x+11y-17z-10=0$.

88. *Cách 1.* Giả sử mặt phẳng cần tìm cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại $M(3m;0;0)$, $N(0;2n;0)$ ($mn\neq 0$ và $|n|=|m|$). Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;1;-1), \overrightarrow{MN}=(-3m;2n;0)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{MN}\right]=\left(\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2n & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & -3m\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & 1\\ -3m & 2n\end{vmatrix}\right)=(2n;3m;4n+3m)$.

Nếu $m=n$ thì mặt phẳng cần tìm có vectơ pháp tuyến

$$\vec{p}=\frac{1}{n}\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{MN}\right]=(2;3;7).$$

Do đó phương trình của mặt phẳng cần tìm là

$$2(x-1)+3(y+2)+7(z-3)=0 \text{ hay } 2x+3y+7z-17=0.$$

Nếu $m=-n$ thì mặt phẳng cần tìm có vectơ pháp tuyến

$$\vec{p}=\frac{1}{n}\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{MN}\right]=(2;-3;1).$$

Do đó phương trình của mặt phẳng cần tìm là

$$2(x-1)-3(y+2)+1(z-3)=0 \text{ hay } 2x-3y+z-11=0.$$

Cách 2. Giả sử tìm được mặt phẳng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ $(abc\neq 0)$ thỏa mãn yêu cầu. Khi đó ta có hệ

$$\begin{cases}\frac{1}{a}-\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1\\ \frac{3}{a}-\frac{1}{b}+\frac{2}{c}=1\\ |a|:|b|=3:2.\end{cases}\qquad (*)$$

Nếu $a=\frac{3}{2}b$ thì thay vào hai phương trình đầu của hệ (*), ta có $\begin{cases}-\frac{4}{3b}+\frac{3}{c}=1\\ \frac{1}{b}+\frac{2}{c}=1.\end{cases}$

Từ đó, tìm được $b=\frac{17}{3}$ và $c=\frac{17}{7}$, suy ra $a=\frac{3}{2}\cdot\frac{17}{3}=\frac{17}{2}\cdot$ Do đó, phương trình của mặt phẳng cần tìm là $\frac{2}{17}x+\frac{3}{17}y+\frac{7}{17}z=1$ hay $2x+3y+7z-17=0.$

Nếu $a=-\frac{3}{2}b$ thì thay vào hai phương trình đầu của hệ (*), ta được $\begin{cases}-\frac{8}{3b}+\frac{3}{c}=1\\ -\frac{3}{b}+\frac{2}{c}=1.\end{cases}$

Từ đó, tìm được $b=-\frac{11}{3}, c=11$, suy ra $a=-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{11}{3}\right)=\frac{11}{2}\cdot$ Do đó, phương trình của mặt phẳng cần tìm là $\frac{2}{11}x-\frac{3}{11}y+\frac{1}{11}z=1$ hay $2x-3y+z-11=0.$

89. a) Kiểm tra rằng d_1, d_2 không cùng phương và không có điểm chung.

b) *Cách 1.* Đường thẳng d_1 có phương trình tham số $\begin{cases}x=1+2t\\ y=-1+6t\\ z=-3+3t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ và đường thẳng d_2 có phương trình tham số $\begin{cases}x=2+3s\\ y=s\\ z=-3-s\end{cases}$ $(s\in\mathbb{R}).$

Xét $M(1+2t;-1+6t;-3+3t)\in d_1$ và $N(2+3s;s;-3-s)\in d_2$. Ta có

$$\overrightarrow{AM}=(2t;-3+6t;-2+3t) \text{ và } \overrightarrow{AN}=(1+3s;-2+s;-2-s).$$

Khi đó A, M, N thuộc cùng một đường thẳng khi và chỉ khi tồn tại số thực k sao cho $\overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{AM}$ hay là $\begin{cases}1+3s=2kt\\ -2+s=-3k+6kt\\ -2-s=-2k+3kt.\end{cases}$

Giải hệ, thu được $k=-1, s=-1, t=1.$

Khi đó $\overrightarrow{AM}=(2;3;1)$ và đường thẳng cần tìm đi qua $A(1;2;-1)$, nhận $\overrightarrow{AM}=(2;3;1)$ làm vectơ chỉ phương, do đó có phương trình

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{1}.$$

Cách 2. Giả sử tìm được đường thẳng Δ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó Δ chính là giao tuyến của mặt phẳng (P) đi qua d_1 và A với mặt phẳng (Q) đi qua d_2 và A.

Đường thẳng d_1 là giao tuyến của hai mặt phẳng $3x-y-4=0$ và $y-2z-5=0$. Bởi vậy, mặt phẳng (P) có phương trình dạng

$$k(3x-y-4)+l(y-2z-5)=0 \text{ hay } 3kx+(l-k)y-2lz-4k-5l=0$$

với $k^2+l^2\neq 0$.

Do (P) đi qua A nên $3k+2(l-k)+2l-4k-5l=0\Leftrightarrow 3k+l=0$.

Từ đó, do $k^2+l^2\neq 0$, chọn $k=1,l=-3$ suy ra $(P):3x-4y+6z+11=0$.

Tương tự, cũng được $(Q):-4x+5y-7z-13=0$.

Từ đó, do $\Delta=(P)\cap(Q)$ nên mọi điểm của Δ có tọa độ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}3x-4y+6z+11=0\\-4x+5y-7z-13=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2z+3\\y=3z+5.\end{cases}$$

Vậy đường thẳng Δ cần tìm có phương trình tham số $\begin{cases}x=3+2t\\y=5+3t\\z=t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Nhận xét. Trong cách giải 1 ở trên, ta cũng có thể sử dụng điều kiện A,M,N thuộc cùng một đường thẳng khi và chỉ khi $\left[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AN}\right]=\vec{0}$ để tìm s và t.

90. a) Kiểm tra d_1,d_2,d_3 đôi một không cùng phương và đôi một không có điểm chung.

b) Đường thẳng d_1, d_2 có phương trình tham số lần lượt là

$$\begin{cases}x=-3+2t\\y=5+3t\\z=t\end{cases}(t\in\mathbb{R}),\qquad\begin{cases}x=10+5s\\y=-7+4s\\z=s\end{cases}(s\in\mathbb{R}).$$

Xét $M(-3+2t;5+3t;t)\in d_1, N(10+5s;-7+4s;s)\in d_2$. Ta có

$$\overrightarrow{MN}=(13+5s-2t;-12+4s-3t;s-t).$$

Đường thẳng MN song song với d_3 khi và chỉ khi

$$\frac{13+5s-2t}{8}=\frac{-12+4s-3t}{7}=\frac{s-t}{1}.$$

Suy ra $s=-\frac{62}{3}$ và $t=-\frac{25}{2}$.

Từ đó đường thẳng cần tìm có phương trình tham số $\begin{cases}x=-28+8t\\ y=-\frac{65}{2}+7t\\ z=-\frac{25}{2}+t\end{cases}(t\in\mathbb{R}).$

Cách 2. Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(2;3;1)$, đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(5;4;1)$ và đường thẳng d_3 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_3}=(8;7;1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa d_1 và song song với d_3, (Q) là mặt phẳng chứa d_2 và song song với d_3. Khi đó, dễ tìm được

$$(P):-2x+3y-5z-21=0, (Q):-x+y+z+17=0.$$

Đường thẳng Δ cần tìm là giao tuyến của (P) với (Q) nên mọi điểm của Δ có tọa độ thỏa mãn $\begin{cases}-2x+3y-5z-21=0\\ -x+y+z+17=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=72+8z\\ y=55+7z.\end{cases}$

Từ đó đường thẳng Δ cần tìm có phương trình tham số dạng

$$\begin{cases}x=72+8t\\ y=55+7t\\ z=t\end{cases}(t\in\mathbb{R}).$$

91. Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $A(1;3;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;-2)$.

Đường thẳng Δ_1 có phương trình tham số $\begin{cases}x=-1+t\\ y=t\\ z=-9+6t\end{cases}(t\in\mathbb{R}).$

Xét điểm $N(-1+t;t;-9+6t)\in\Delta_1$. Ta có $\overrightarrow{AN}=(-2+t;-3+t;-8+6t)$ và

$$\left[\overrightarrow{AN};\vec{u}\right]=\left(\begin{vmatrix}-3+t & -8+6t\\ 1 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-8+6t & -2+t\\ -2 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-2+t & -3+t\\ 2 & 1\end{vmatrix}\right)$$

$$=(14-8t;-20+14t;4-t).$$

Suy ra $d(N;\Delta_2)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AN};\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\dfrac{3\sqrt{29t^2-88t+68}}{3}=\sqrt{29t^2-88t+68}$.

Lại có $d(N;(P))=\dfrac{|-1+t-2t-18+12t-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{|11t-20|}{3}$.

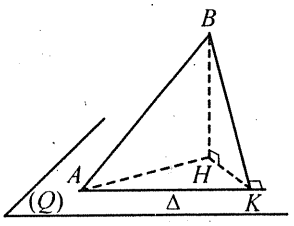
Vậy $d(N;\Delta_2)=d(N;(P))\Leftrightarrow|11t-20|=3\sqrt{29t^2-88t+68}$

$$\Leftrightarrow 35t^2-88t+53=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\dfrac{53}{35}.\end{array}\right.$$

Với $t=1$ ta được $N(0;1;-3)$. Với $t=\dfrac{53}{35}$ ta được $N\left(\dfrac{18}{35};\dfrac{53}{35};\dfrac{3}{35}\right)$.

92. Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và song song với (P). Khi đó (Q) có phương trình

$$x-2y+2z+1=0.$$



Hình 8

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm, gọi H,K theo thứ tự là hình chiếu của B trên $(Q),\Delta$. Khi đó, do $\Delta\subset(Q)$ nên $BH\le BK$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $K\equiv H$ (h.8). Bởi vậy, đường thẳng Δ cần tìm chính là đường thẳng đi qua hai điểm A và H.

Do H là hình chiếu của $B(1;-1;3)$ trên mặt phẳng $(Q):x-2y+2z-2=0$ nên tọa độ của H là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-3}{2}\\ x-2y+2z+1=0.\end{cases}$$

Giải hệ thu được $x=-\dfrac{1}{9},y=\dfrac{11}{9},z=\dfrac{7}{9}$. Vậy $H=\left(-\dfrac{1}{9};\dfrac{11}{9};\dfrac{7}{9}\right)$, suy ra

$$\overrightarrow{AH}=\left(\frac{26}{9};\frac{11}{9};-\frac{2}{9}\right)=\frac{1}{9}(26;11;-2).$$

Do đó, đường thẳng cần tìm có phương trình là $\frac{x+3}{26}=\frac{y}{11}=\frac{z-1}{-2}$.

93. Gọi $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của Δ và $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của (P). Khi đó đường thẳng cần tìm đi qua giao điểm của Δ với (P) và nhận $\left[\vec{u};\vec{n}\right]$ làm vectơ chỉ phương.

Đáp số : $d:\frac{x+3}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{-1}$.

94. a) Hình chiếu của A trên Δ là $H(3;1;4)$.

b) Lập luận tương tự như bài 92, mặt phẳng (P) cần tìm vuông góc với AH tại H.

Đáp số : $(P):x-4y+z-3=0$.

95. a) Chỉ ra d_1,d_2 cắt nhau tại $I(1;1;2)$.

b) Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(2;2;1)$ và đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(6;3;2)$.

Gọi α là góc giữa d_1,d_2, thế thì $\cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{u_2}\right|}=\frac{20}{21}$.

Từ đó do $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ nên $\sin\alpha=\frac{\sqrt{41}}{21}$.

Giả sử tìm được $A\in d_1,B\in d_2$ sao cho tam giác IAB cân tại I và $S_{\Delta IAB}=\frac{\sqrt{41}}{42}$. Khi đó $IA=IB$ và $\frac{1}{2}IA\cdot IB\cdot\sin\alpha=\frac{\sqrt{41}}{42}$, suy ra $IA=IB=1$.

Vì $A\in d_1$ nên $A=(3+2t;3+2t;3+t)$. Suy ra $\overrightarrow{IA}=(2+2t;2+2t;1+t)$. Do đó

$$IA=1\Leftrightarrow\sqrt{(2+2t)^2+(2+2t)^2+(1+t)^2}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\frac{2}{3}\\ t=-\frac{4}{3}.\end{array}\right.$$

Với $t=-\frac{2}{3}$ được $A_1\left(\frac{5}{3};\frac{5}{3}\frac{7}{3}\right)$. Với $t=-\frac{4}{3}$ được $A_2\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$.

Tương tự, cũng được $B_1\left(\frac{13}{7};\frac{10}{7};\frac{16}{7}\right), B_2\left(\frac{1}{7};\frac{4}{7};\frac{12}{7}\right)$.

Vậy, tìm được bốn cặp điểm $\left(A_i;B_j\right), i,j\in\{1,2\}$ có tọa độ ở trên.

96. Từ giả thiết, ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;0), \overrightarrow{BC}=(-1;0;1)$ và $\overrightarrow{CA}=(0;1;-1)$. Từ đó $AB=BC=CA=\sqrt{2}$ hay tam giác ABC đều. Bởi vậy tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác trùng với trọng tâm của tam giác ABC, tức là $I=\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$, và bán kính $R=\frac{2}{3}\cdot AB\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Vậy phương trình của mặt cầu (S) nhận đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC làm đường tròn lớn có phương trình

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2+\left(z-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{2}{3}.$$

Mặt khác $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}\right]=\left(\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\right)=(-1;-1;-1)=-1\cdot(1;1;1)$.

Suy ra mặt phẳng (ABC) có phương trình

$$1\cdot(x-1)+1\cdot(y-2)+1\cdot(z-1)=0 \text{ hay } x+y+z-4=0.$$

Từ đó phương trình của đường tròn cần tìm là

$$\begin{cases}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2+\left(z-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{2}{3}\\ x+y+z-4=0.\end{cases}$$

97. a) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=\frac{50}{7}$.

b) Gọi d là khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (Q). Khi đó

$$d=\frac{|1\cdot1+2\cdot(-2)-2\cdot3+12|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=1.$$

Do (S) cắt mặt phẳng (P) theo một đường tròn có bán kính $\rho=\sqrt{3}$ nên mặt cầu (S) có bán kính $R=\sqrt{d^2+\rho^2}=2$. Suy ra (S) có phương trình

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4.$$

98. Đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 8 + 2t \end{cases} \left(t \in \mathbb{R}\right)$.

Do tâm I của mặt cầu (S) nằm trên d nên $I = (2-t; 1+2t; 8+2t)$. Vì (S) tiếp xúc với (P) và (Q) nên

$$d\left(I;(P)\right) = d\left(I;(Q)\right) = R$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|2-t+2+4t-16-4t-2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \dfrac{|2-t+2+4t-16-4t+4|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} \\ R = \dfrac{|2-t+2+4t-16-4t-2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -11 \\ R = 1. \end{cases}$$

Do đó (S) có tâm $I(13;-21;-14)$, bán kính $R = 1$.

Suy ra (S) có phương trình $(x-13)^2 + (y+21)^2 + (z+14)^2 = 1$.

99. Gọi d là khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng Δ. Khi đó $R = \sqrt{d^2 + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2}$.

Đáp số : $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 50$.

100. Mặt cầu $\left(S\right)$ cần tìm có phương trình dạng

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 + z^2 - 36 + k(4x + y - z - 9) = 0 \quad \left(k \in \mathbb{R}\right).$$

Do $M\left(7;-3;1\right) \in \left(S\right)$ nên

$$(7-3)^2 + (-3-4)^2 + 1^2 - 36 + k(4\cdot 7 - 3 - 1 - 9) = 0 \Leftrightarrow k = -2.$$

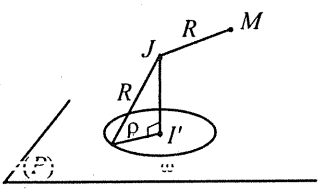
Từ đó $\left(S\right)$ có phương trình

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 + z^2 - 36 - 2(4x + y - z - 9) = 0$$

hay $x^2 + y^2 + z^2 - 14x - 10y + 2z + 7 = 0$.

Cách 2. Mặt cầu $(x-3)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 36$ có tâm $I(3;4;0)$ và có bán kính $r = 6$. Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình

$$4x + y - z - 9 = 0.$$



Hình 9

Đặt $d = d(I;(P)) = \dfrac{7}{\sqrt{18}}$. Đường tròn $\left(\omega\right)$ có bán kính $\rho = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{36 - \dfrac{49}{18}}$.

Đường thẳng Δ đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình

$$\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 4 + t \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Mặt cầu cần tìm có tâm $J(3+4t;4+t;-t) \in \Delta$, có bán kính

$$R = JM = \sqrt{(4t-4)^2 + (t+7)^2 + (t+1)^2}.$$

Đặt $\delta = d(J;(P))$, khi đó $\delta = \dfrac{|18t+7|}{\sqrt{18}}$. Từ đó, do $R^2 = \delta^2 + \rho^2$ nên ta có phương trình

$$(4t-4)^2 + (t+7)^2 + (t+1)^2 = \frac{(18t+7)^2}{18} + 36 - \frac{49}{18}.$$

Giải phương trình thu được $t = 1$. Từ đó mặt cầu cần tìm có tâm $J(7;5;-1)$, có bán kính $R = \sqrt{68}$, do đó có phương trình $(x-7)^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 68$.

101. Mặt cầu (S) cần tìm có phương trình dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 6y + 2z - 5 + k(x - 2y - 2z + 1) = 0$$

hay $x^2 + y^2 + z^2 + (k-3)x + 2(3-k)y + 2(1-k)z + k - 5 = 0 \quad (k \in \mathbb{R})$.

(S) có tâm $I\left(\dfrac{3-k}{2}; k-3; k-1\right)$ và bán kính

$$R = \sqrt{\left(\frac{3-k}{2}\right)^2 + (k-3)^2 + (k-1)^2 - k + 5} = \frac{1}{2}\sqrt{9k^2 - 42k + 69}.$$

Do (S) tiếp xúc với $(P): 2x + 2y + z - 7 = 0$ nên

$$d(I;(P)) = R \Leftrightarrow \frac{\left|2 \cdot \dfrac{3-k}{2} + 2 \cdot (k-3) + k - 1 - 7\right|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{9k^2 - 42k + 69}$$

$$\Leftrightarrow 65k^2 - 202k + 137 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = \dfrac{137}{65}. \end{array}\right.$$

Với $k = 1$ ta được mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4 = 0$.

Với $k = \dfrac{137}{65}$ ta được mặt cầu $65\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - 58x + 116y - 144z - 188 = 0$.

102. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=5$.

Do $d(I;(P))=\dfrac{|3\cdot1+4\cdot3+19|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{34}{5}>5$ nên (S) và (P) không có điểm chung.

Xét điểm $M(x;y;z)$ với $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$ thuộc (*S*). Khi đó khoảng cách từ M tới mặt phẳng (P) bằng $d(M;(P))=\dfrac{|3x+4z+19|}{5}$.

Khoảng cách này lớn nhất hay nhỏ nhất, tùy theo $|3x+4z+19|$ là lớn nhất, hay nhỏ nhất. Theo bất đẳng thức tam giác ta có

$$|3x+4z+19|=|3(x-1)+0(y-2)+4(z-3)+34|$$
$$\le|3(x-1)+0(y-2)+4(z-3)|+34.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $3(x-1)+0(y-2)+4(z-3)\ge0$.

Nhưng, do bất đẳng thức Cauchy

$$|3(x-1)+0(y-2)+4(z-3)|\le\sqrt{3^2+0^2+4^2}\cdot\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=25$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}y=2\\ \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{z-3}{4}\end{cases}$.

Suy ra $|3x+4z+19|\le34+25=59$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}3(x-1)+0(y-2)+4(z-3)\ge0\\ y=2,\ \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{z-3}{4}\\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25\end{cases}\Leftrightarrow x=4,y=2,z=7.$$

Vậy, điểm *M* trên mặt cầu mà xa mặt phẳng (P) nhất là $M(4;2;7)$.

Ta lại có $|3x+4z+19|=|-3(x-1)-0(y-2)-4(z-3)-34|$

$$\ge34-|3(x-1)+0(y-2)+4(z-3)|\ge34-25=9.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}3(x-1)+0(y-2)+4(z-3)\le0\\ y=2,\ \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{z-3}{4}\\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25\end{cases}\Leftrightarrow x=-2,y=2,z=-1.$$

Vậy điểm N trên mặt cầu mà gần mặt phẳng (P) nhất là $N(-2;2;-1)$.

Nhận xét. Ta cũng có thể dựa vào dấu hiệu hình học sau để giải bài toán (h.10) : Khi mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung, với $(P_1),(P_2)$ là hai tiếp diện của (S) song song với (P) ((P_1) nằm giữa (P) và (P_2)), thì mặt phẳng (P_2) chia không gian thành hai miền, một miền chứa cả (S) và (P), một miền không chứa (S) cũng như (P). Vì vậy

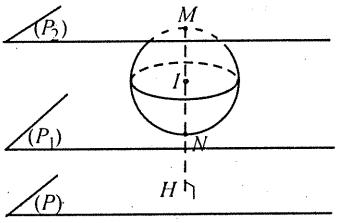
$$d(M;(P)) \le d(J;(P)), \forall M \in (S),$$

trong đó J là tiếp điểm của (S) với (P_2).

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv J$.

Do đó điểm M trên mặt cầu mà $d(M;(P))$ lớn nhất chính là J.

Tương tự, điểm N trên (S) mà $d(N;(P))$ nhỏ nhất là tiếp điểm của (S) với (P_1).



Hình 10

103. a) Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R=1$. Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3;1;3)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;4)$. Suy ra

$$\left[\overrightarrow{OM};\vec{u}\right]=\left(\begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3&3\\4&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3&1\\1&1\end{vmatrix}\right)=(1;-9;2)$$

và $d(O;\Delta)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{OM};\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{1^2+(-9)^2+2^2}}{\sqrt{1^2+1^2+4^2}}=\dfrac{\sqrt{86}}{\sqrt{18}}>1=R$.

Suy ra mặt cầu (S) và đường thẳng Δ không có điểm chung.

b) Đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x-y-2=0$ và $(Q): 4y-z-1=0$. Suy ra mặt phẳng cần tìm có phương trình dạng

$$k(x-y-2)+l(4y-z-1)=0 \text{ hay } kx+(4l-k)y-lz-2k-l=0$$

(với $k^2+l^2\neq 0$). Mặt phẳng này tiếp xúc với mặt cầu (S) khi và chỉ khi

$$\frac{|2k+l|}{\sqrt{k^2+(4l-k)^2+l^2}}=1 \Leftrightarrow |2k+l|=\sqrt{2k^2-8kl+17l^2}$$

$$\Leftrightarrow 2k^2+12kl-16l^2=0 \Leftrightarrow k^2+6kl-8l^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} l=\dfrac{3+\sqrt{17}}{8}k \\ l=\dfrac{3-\sqrt{17}}{8}k \end{array}\right.$$

Do $k^2+l^2\neq 0$ nên chọn $k=8$ thì $l=3\pm\sqrt{17}$, ta được hai mặt phẳng cần tìm là

$$8x+\left(4\pm 4\sqrt{17}\right)y-\left(3\pm\sqrt{17}\right)z-19\mp\sqrt{17}=0.$$

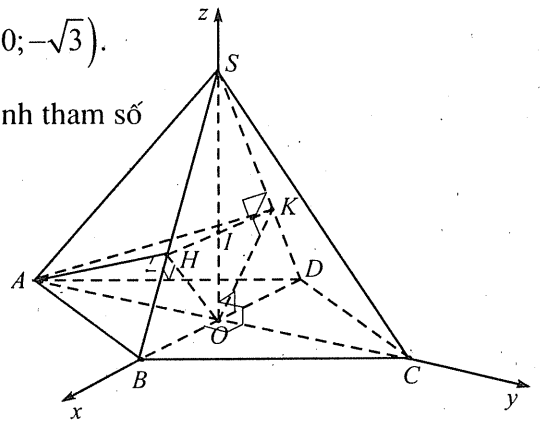
104. Do $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AC\perp BD$ tại trung điểm chung và do đó $OA=OB=OC=OD=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Do $SA=SC=AC=a\sqrt{2}=SB=SD=BD$ nên các tam giác SAC, SBD là các tam giác đều cạnh $a\sqrt{2}$, suy ra $SO\perp AC, SO\perp BD$ và $SO=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O(0;0;0), B\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}};0;0\right), C\left(0;\dfrac{a}{\sqrt{2}};0\right)$ và $S\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)$ (h.11). Khi đó, $A=\left(0;-\dfrac{a}{\sqrt{2}};0\right)$ và $D=\left(-\dfrac{a}{\sqrt{2}};0;0\right)$.

Ta có $\overrightarrow{SB}=\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}};0;-\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\cdot\left(1;0;-\sqrt{3}\right)$.

Suy ra đường thẳng SB có phương trình tham số

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}+t \\ y=0 \\ z=-\sqrt{3}\cdot t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}).$$



Hình 11

Từ đó điểm $H\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}+t;0;-\sqrt{3}\cdot t\right)$ là hình chiếu vuông góc của A trên SB khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{SB}=0\Leftrightarrow\frac{a}{\sqrt{2}}+4t=0\Leftrightarrow t=-\frac{a}{4\sqrt{2}}.$$

Do đó $H=\left(\dfrac{3a}{4\sqrt{2}};0;\dfrac{a\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right)$. Hoàn toàn tương tự, tìm được $K=\left(-\dfrac{3a}{4\sqrt{2}};0;\dfrac{a\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{OH};\overrightarrow{OK}\right]=\dfrac{3a^2}{32}\left(\begin{vmatrix}0&1\\0&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&\sqrt{3}\\1&-\sqrt{3}\end{vmatrix};\begin{vmatrix}\sqrt{3}&0\\-\sqrt{3}&0\end{vmatrix}\right)=\dfrac{3a^2}{32}\cdot\left(0;-2\sqrt{3};0\right)$.

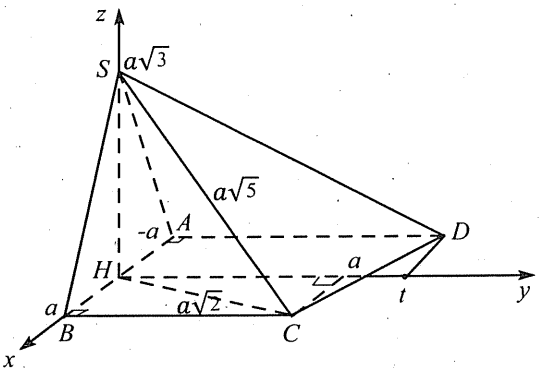
Suy ra $\left[\overrightarrow{OH};\overrightarrow{OK}\right]\cdot\overrightarrow{OA}=\dfrac{3a^2}{32}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\dfrac{a}{\sqrt{2}}=\dfrac{3a^3\sqrt{6}}{32}$.

Do đó $V_{OAHK} = \frac{1}{6} \cdot \left| \left[\overrightarrow{OH}; \overrightarrow{OK} \right] \cdot \overrightarrow{OA} \right| = \frac{a^3\sqrt{6}}{64}$ (đvtt).

105. Từ giả thiết suy ra $SH = a\sqrt{3}$.

Từ đó, theo định lí Py-ta-go, ta được $HC = \sqrt{SC^2 - SH^2} = a\sqrt{2}$, do đó $BC = a$.

Chọn hệ trục tọa độ $Hxyz$ sao cho $H(0;0;0), B(a;0;0), A(-a;0;0)$, $C(a;a;0)$ và $S\left(0;0;a\sqrt{3}\right)$ (h.12).



Hình 12

Khi đó, mặt phẳng (SHC) có phương trình $x - y = 0$.

Giả sử $D = (-a;t;0)$, với $t > 0$. Khi đó

$$d(D;(SHC)) = \frac{|-a-t|}{\sqrt{2}} = \frac{|a+t|}{\sqrt{2}} = \frac{a+t}{\sqrt{2}}.$$

Vì $d(D;(SHC)) = 2a\sqrt{2}$ nên $a + t = 4a \Leftrightarrow t = 3a$. Suy ra $DA = 3a$ và

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot (BC + DA) = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot (a + 3a) = 4a^2 \text{ (đvdt)}.$$

Do đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot 4a^2 = \frac{4a^3}{\sqrt{3}}$ (đvtt).

106. Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ sao cho $A(0;0;0), B(2a;0;0), D(0;2a;0)$ và $S\left(\frac{a}{2};0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. Tính được $\widehat{(SM;DN)} = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$ và $d(SM;DN) = \frac{3\sqrt{3}a}{4}$.

107. Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ sao cho $A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;a;0)$ và $S(0;0;a)$. Tìm được $P\left(\frac{a}{3};\frac{a}{3};\frac{2a}{3}\right)$ là giao điểm của mặt phẳng (AMN) với đường thẳng AC. Tìm được

$$V_{ABMP} = \frac{1}{6} \cdot \left| \left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM} \right] \cdot \overrightarrow{AP} \right| = \frac{a^3}{36} \text{ (đvtt)}.$$

108. Gọi O là giao điểm của AC, BD. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O(0;0;0), A\left(a;\frac{a}{2};0\right), B\left(-a;\frac{a}{2};0\right), C\left(-a;-\frac{a}{2};0\right)$ và $D\left(a;-\frac{a}{2};0\right)$ (chọn trục cao chứa OS, trục tung chứa M, N và trục hoành là trung trực AD. Tính được

$$(\widehat{SP;MN}) = \arccos\frac{1}{8} \text{ và } d(SP;MN) = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

109. Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ sao cho $A(0;0;0), D(a;0;0), B(0;a\sqrt{2};0)$ và $S\left(\frac{a}{2};\frac{a}{\sqrt{2}};\frac{a}{2}\right)$. Tìm được $H(\frac{2a}{3};\frac{2a\sqrt{2}}{3};0)$ là hình chiếu của điểm $B\left(0;a\sqrt{2};0\right)$ trên đường thẳng AC. Từ đó, tìm được

$$d\left(SA;BH\right) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AS};\overrightarrow{BH}\right]\cdot\overrightarrow{AH}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AS};\overrightarrow{BH}\right]\right|} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

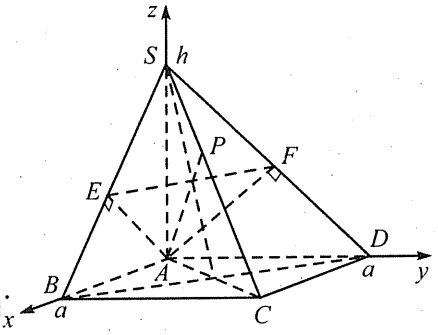
110. a) Chọn hệ tọa độ $Axyz$ sao cho $B(a;0;0), D(0;a;0)$ và $S(0;0;h)$, suy ra $C(a;a;0)$ (h.13).

Trong mặt phẳng xAz, đường thẳng SB có phương trình $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ hay $hx+az-ah=0$, và đường thẳng AE có phương trình $ax-hz=0$. Suy ra, tọa độ của E là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} hx+az-ah=0 \\ ax-hz=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Từ đó tìm được $E\left(\frac{ah^2}{a^2+h^2};0;\frac{a^2h}{a^2+h^2}\right)$.

Tương tự cũng được $F\left(0;\frac{ah^2}{a^2+h^2};\frac{a^2h}{a^2+h^2}\right)$.



Hình 13

Mặt phẳng (AEF) có vectơ pháp tuyến

$$\left[\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AF}\right] = \left(\frac{ah}{a^2+h^2}\right)^2\cdot\left(\begin{vmatrix}0 & a\\ h & a\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a & h\\ a & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}h & 0\\ 0 & h\end{vmatrix}\right) = h\left(\frac{ah}{a^2+h^2}\right)^2\cdot(-a;-a;h)$$

cùng phương với vectơ $\overrightarrow{CS}=(-a;-a;h)$. Suy ra $SC\perp(AEF)$.

b) Hình chóp $P.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cho trước, nên $S_{ABCD} = \text{const}$, do đó $V_{P.ABCD}$ lớn nhất khi và chỉ khi $d(P;(ABCD))$ là lớn nhất. Mặt phẳng (AEF) có phương trình $-ax - ay + hz = 0$. Đường thẳng SC có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = -at \\ y = -at \\ z = h + ht \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Từ đó, do $P = (AEF) \cap (SC)$ nên tìm được $P\left(\frac{ah^2}{2a^2+h^2}; \frac{ah^2}{2a^2+h^2}; \frac{2a^2h}{2a^2+h^2}\right)$.

Suy ra $d(P;(ABCD)) = \frac{2a^2h}{2a^2+h^2}$.

Bằng việc khảo sát hàm số $f(t) = \frac{2a^2t}{2a^2+t^2}, t > 0$, được $\max\limits_{t>0} f(t) = \frac{a}{\sqrt{2}}$, đạt được khi và chỉ khi $t = a\sqrt{2}$.

Vậy thể tích khối chóp $P.ABCD$ lớn nhất khi và chỉ khi $h = SA = a\sqrt{2}$.

111. Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ sao cho $A(0;0;0), B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0\right), C(0;a;0)$ và $A'(0;0;h)$

a) $d\left(AC;BC'\right) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{BC'};\overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BC'};\overrightarrow{AC}\right]\right|} = \frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2+3a^2}}$.

b) Mặt phẳng (P) cắt CC' tại $X\left(0;a;\frac{2h}{3}\right)$ chia đoạn CC' theo tỉ số -2, tức là $\overrightarrow{XC} = -2\overrightarrow{XC'}$.

112. Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ sao cho $A(0;0;0), B(a;0;0), C(0;a;0)$ và $D(0;0;a)$.

Tính được $\overrightarrow{AF} = \left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2}\right)$ và $\overrightarrow{DE} = \left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};-\frac{a}{2}\right)$, từ đó suy ra $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DE} = 0$.

Điều phải chứng minh.

113. Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ sao cho $A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;b;0)$ và $S(0;0;h)$ (h.14). Suy ra $C(a;b;0), K(0;0;t), L\left(\frac{a(h-t)}{h};0;t\right)$ (do $KL \parallel AB$).

Tính được $\left[\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CK}\right]=a\cdot(0;t;b)$ và $\left[\overrightarrow{CK};\overrightarrow{CL}\right]=\dfrac{a(h-t)}{h}\cdot(0;t;b)$. Suy ra

$$S_{CDKL}=\frac{1}{2}\cdot\left(\left|\left[\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CK}\right]\right|+\left|\left[\overrightarrow{CK};\overrightarrow{CL}\right]\right|\right)=\frac{a(2h-t)\sqrt{t^2+b^2}}{2h}\ \text{(đvdt)}.$$

Mặt phẳng $(CDKL)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(0;t;b)$, suy ra có phương trình $ty+bz-tb=0$. Suy ra $d(S;(CDKL))=\dfrac{|b(h-t)|}{\sqrt{t^2+b^2}}$ và do đó

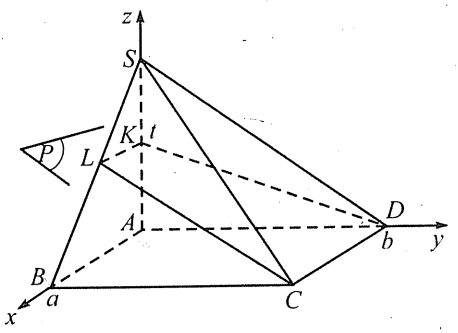
$$V_{S.CDKL}=\frac{1}{3}\cdot S_{CDKL}\cdot d(S;(CDKL))=\frac{ab(h-t)(2h-t)}{6h}.$$

Do đó, mặt phẳng (P) chia hình chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau khi và chỉ khi

$$V_{S.CDKL}=\frac{1}{2}V_{S.ABCD}$$

$$\Leftrightarrow\frac{ab(h-t)(2h-t)}{6h}=\frac{abh}{6}$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{(3-\sqrt{5})h}{2}\ \left(\text{do } 0<t<h\right).$$



Hình 14

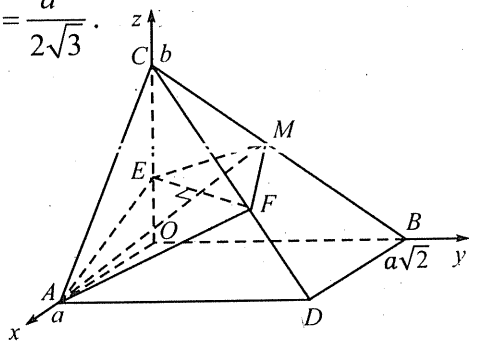
114. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O(0;0;0), A(a;0;0), B(0;a;0)$ và $C(0;0;a)$. Khi đó tìm được $D(a;a;0)$, suy ra $\overrightarrow{CD}=a\cdot(1;1;-1)$.

a) Tính được $\left[\overrightarrow{OL},\overrightarrow{OM}\right]=\dfrac{a^2}{4}.(-1;-1;1)$, suy ra mặt phẳng (OLM) có vectơ pháp tuyến cùng phương với $\overrightarrow{CD}$ hay $CD\perp(OLM)$.

b) $S_{OLEM}=\dfrac{1}{2}\left(\left|\left[\overrightarrow{OL},\overrightarrow{OE}\right]\right|+\left|\left[\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OM}\right]\right|\right)=\dfrac{a^2}{2\sqrt{3}}$.

115. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O(0;0;0), A(a;0;0), B(0;a\sqrt{2};0)$ và $C(0;0;b)$ (h.15).

Suy ra $D\left(a;a\sqrt{2};0\right), M\left(0;\dfrac{a}{\sqrt{2}};\dfrac{b}{2}\right)$ và $\overrightarrow{AM}=\left(-a;\dfrac{a}{\sqrt{2}};\dfrac{b}{2}\right)$.



Hình 15

Giả sử mặt phẳng (P) lần lượt cắt OC, OD tại E, F và $\overrightarrow{EF} = (m; n; p)$ với $m^2 + n^2 + p^2 \neq 0$.

Do $EF \perp AM$ nên $-am + \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot n + \frac{b}{2} \cdot p = 0 \Leftrightarrow -2am + an\sqrt{2} + bp = 0.$ (1)

Mặt phẳng (OCD) chứa Oz và điểm $D(a; a\sqrt{2}; 0)$ nên có phương trình $\sqrt{2}x - y = 0$, do đó nó có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (\sqrt{2}; -1; 0)$.

Do $E, F \in (OCD)$ nên $\vec{n} \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}m - n = 0 \Leftrightarrow n = m\sqrt{2}.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $p = 0$, và do đó tìm được $\overrightarrow{EF}$ cùng phương với vectơ $\vec{u} = (1; \sqrt{2}; 0)$. Suy ra mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến cùng phương với

$$\left[\overrightarrow{AM}, \vec{u}\right] = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} a\sqrt{2} & b \\ \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} b & -2a \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2a & a\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left(-b\sqrt{2}; b; -3a\sqrt{2}\right).$$

Suy ra (P) có phương trình $-b\sqrt{2}x + by - 3a\sqrt{2}z + ab\sqrt{2} = 0.$

a) Mặt phẳng (P) cắt Oz tại $E\left(0; 0; \frac{b}{3}\right)$. Suy ra $OE = \frac{b}{3}$.

b) $d(C; (P)) = \frac{2ab\sqrt{2}}{\sqrt{18a^2 + 3b^2}}.$

116. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A(a; 0; 0), B(0; b; 0)$ và $C(0; 0; c)$. Khi đó theo cách xác định A', B', C' ta có $A'\left(\frac{a}{\alpha}; 0; 0\right), B'\left(0; \frac{b}{\beta}; 0\right)$ và $C'\left(0; 0; \frac{c}{\gamma}\right)$.

Suy ra mặt phẳng $(A'B'C')$ có phương trình

$$\frac{x}{\frac{a}{\alpha}} + \frac{y}{\frac{b}{\beta}} + \frac{z}{\frac{c}{\gamma}} = 1 \text{ hay } \alpha \cdot \frac{x}{a} + \beta \cdot \frac{y}{b} + \gamma \cdot \frac{z}{c} = 1.$$

a) Khi $\gamma = \alpha + \beta + 1$ thì mặt phẳng $(A'B'C')$ có phương trình dạng

$$\alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) + \beta\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) + \frac{z}{c} - 1 = 0.$$

Mặt phẳng này luôn đi qua điểm $M(-a; -b; c)$ với mọi α, β.

b) Khi $\beta = \alpha + 1, \gamma = \alpha + 2$ thì mặt phẳng $(A'B'C')$ có phương trình dạng

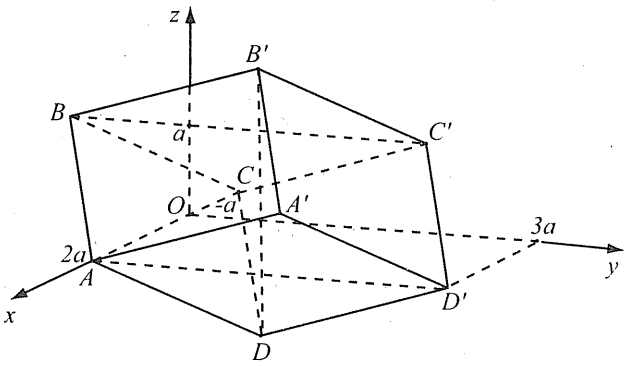
$$\alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) + \left(\frac{y}{b} + 2 \cdot \frac{z}{c} - 1\right) = 0.$$

Mặt phẳng này luôn đi qua đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng

$$(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0 \text{ và } (Q):\frac{y}{b}+2\cdot\frac{z}{c}-1=0.$$

Nhận xét. Khi OA,OB,OC không có phương vuông góc với nhau, bằng cách làm như trên, nhưng xét trong hệ tọa độ affin $\left\{O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right\}$, ta cũng thu được kết quả tương tự.

117. Xét hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và giả sử AC,BC' là hai đường chéo của hai mặt chung cạnh BC, tương ứng nằm trên d_2,d_3, còn đường chéo $B'D$ nằm trên d_1. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho A,C nằm trên trục Ox, đường thẳng BC' song song với trục Oy và đi qua điểm $(0;0;a)$, đường thẳng $B'D$ đi qua điểm $(a;a;0)$ và song song với trục Oz (h.16).



Hình 16

Đặt $A(x_1;0;0),C(x_2;0;0),B(0;y_1;a),C'(0;y_2;a),D(a;a;z_1),B'(a;a;z_2)$.

Do $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B'C'}$ nên ta có hệ phương trình $\begin{cases}a-x_1=x_2=-a\\a=-y_1=y_2-a\\z_1=-a=a-z_2.\end{cases}$

Từ đó, tìm được $x_2=-a,x_1=2a,y_1=-a,y_2=2a,z_1=-a,z_2=2a.$ Suy ra $A(2a;0;0),B(0;-a;a),C(-a;0;0),C'(0;2a;a),D(a;a;-a)$ và $B'(a;a;2a)$.

Do $ABB'A'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB'}-\overrightarrow{OB}$, suy ra $A'(3a;2a;a)$. Từ đó

$$\overrightarrow{AB}=(-2a;-a;a),\overrightarrow{AD}=(-a;a;-a) \text{ và } \overrightarrow{AA'}=(a;2a;a).$$

Suy ra $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right]=\left(\begin{vmatrix}-a & a\\ a & -a\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a & -2a\\ -a & -a\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-2a & -a\\ -a & a\end{vmatrix}\right)=-3a^2(0;1;1)$ và

$$\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right]\cdot\overrightarrow{AA'}=-3a^2(0\cdot a+1\cdot 2a+1\cdot a)=-9a^3.$$

Từ đó $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right]\cdot\overrightarrow{AA'}\right|=9a^3$ (đvtt).

CHUYÊN ĐỀ 1. MỘT SỐ YẾU TỐ CỦA HÌNH HỌC TỔ HỢP

§1. HÌNH LỒI

1. Nếu bao lồi của 5 điểm này là ngũ giác hoặc tứ giác thì ta có điều cần phải chứng minh. Trong trường hợp bao lồi của chúng là một tam giác ABC chứa hai điểm còn lại M và N bên trong thì ta xét đường thẳng MN. Đường thẳng này phải cắt hai cạnh của tam giác ABC, chẳng hạn hai cạnh AB và AC. Khi đó $MNBC$ là một tứ giác lồi.

2. Hiển nhiên là đa giác lồi thì 4 đỉnh bất kì của nó cũng tạo thành một tứ giác lồi.

Đảo lại, nếu 4 đỉnh bất kì của đa giác tạo thành tứ giác lồi thì đa giác phải là đa giác lồi. Ta chứng minh điều này bằng phản chứng. Giả sử đa giác đã cho không phải là đa giác lồi. Như vậy thì bao lồi của đa giác đã cho là một đa giác lồi F chứa ít nhất một đỉnh của đa giác đã cho bên trong, gọi đó là đỉnh A. Ta chia bao lồi của đa giác thành các tam giác bằng cách kẻ các đường chéo xuất phát từ một đỉnh của F. Khi đó A phải nằm trong một trong các tam giác được chia. Khi đó A và 3 đỉnh của tam giác này không thể lập thành một tứ giác lồi, điều này mâu thuẫn với giả thiết ban đầu của bài toán.

3. Cho trước F là một đa giác lồi thì hiển nhiên đường chéo tùy ý của nó nằm hoàn toàn trong đa giác F. Đảo lại, giả sử F là một đa giác chứa tất cả các đường chéo của F bên trong. Khi đó ta chứng minh rằng F là một đa giác lồi. Ta chứng minh điều này bằng phản chứng. Giả sử F không phải là đa giác lồi. Gọi G là bao lồi của F. Khi đó G phải chứa một đỉnh A nào đó của F bên trong. Gọi B và C là hai đỉnh đầu tiên của G mà từ A tới được nó theo 2 hướng khác nhau trên biên của F. Dễ dàng thấy rằng BC là đường chéo của F nhưng lại không nằm trong F. Điều này mâu thuẫn với giả thiết đã cho là mọi đường chéo của F đều nằm trong F. Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng F là đa giác lồi.

4. Trước hết ta chứng minh chiều thuận. Nếu từ mọi điểm trong đa giác ta nhìn thấy tất cả các cạnh của đa giác thì từ đỉnh tùy ý của đa giác ta cũng nhìn thấy

tất cả các cạnh của đa giác. Suy ra các đường chéo xuất phát từ đỉnh đó nằm hoàn toàn trong đa giác. Theo bài 3 ở trên thì đa giác đã cho phải là đa giác lồi.

Đảo lại, giả sử đa giác đã cho là đa giác lồi. Khi đó với một điểm A tùy ý trong đa giác, các đoạn thẳng nối A với các đỉnh của đa giác nằm hoàn toàn trong đa giác đã cho. Vì vậy, đa giác bị chia thành các tam giác có đỉnh là A và các cạnh đối diện A là các cạnh của các tam giác nhận được. Như vậy từ A, ta nhìn thấy hết tất cả các cạnh của đa giác. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

5. Đem chiếu vuông góc các đa giác lồi xuống một đường thẳng d. Hình chiếu của các đa giác này lên d là các đoạn thẳng. Do hai đa giác đã cho tùy ý có giao khác rỗng nên giao của hai đoạn thẳng ảnh bất kì cũng khác rỗng. Theo định lí 5, giao của tất cả các đoạn thẳng này khác rỗng, nên chứa ít nhất một điểm M. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với d sẽ cắt tất cả các đa giác đã cho.

6. Đem chiếu các đa giác lồi song song với phương đã cho xuống một đường thẳng d. Hình chiếu của các đa giác này lên d là các đoạn thẳng. Do hai đa giác đã cho tùy ý có giao khác rỗng nên giao của hai đoạn thẳng ảnh bất kì cũng khác rỗng. Theo định lí 5, giao của tất cả các đoạn thẳng này khác rỗng nên chứa ít nhất một điểm M. Đường thẳng đi qua M và song song với phương đã cho sẽ cắt tất cả các đa giác đã cho.

7. Xét a là cung lớn nhất, kí hiệu M là trung điểm của a và N là điểm xuyên tâm đối của M. Ta chứng minh N không thuộc cung nào cả. Rõ ràng N không thuộc a vì a nhỏ hơn 2π. Ta chứng tỏ rằng cung b tùy ý trong các cung đã cho không chứa N. Thật vậy, vì b phải có giao khác rỗng và vì a và b đều nhỏ hơn $\frac{2\pi}{3}$ nên b không thể chứa N, nếu không cung MN là π sẽ nhỏ hơn $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$, vô lí.

Vậy các cung đã cho không chứa N. Ta cắt đường tròn tại điểm N và trải thẳng thành một đoạn thẳng. Theo định lí 5 áp dụng cho hệ các cung đôi một cắt nhau trên đoạn thẳng này, ta suy ra các cung có giao không rỗng.

Lưu ý. Có thể thấy không thể bỏ đi điều kiện các cung nhỏ hơn $\frac{2\pi}{3}$. Thật vậy, lấy ví dụ đơn giản là ta chia đường tròn thành 3 cung bằng nhau có độ dài

$\frac{2\pi}{3}$. Khi đó các cung này đôi một có điểm chung (tại các nút chia) mà không có điểm chung thuộc cả 3 cung này.

8. Ta lập hệ trục tọa độ có 2 trục song song với 2 cạnh của các hình chữ nhật. Hình chiếu vuông góc của mỗi hình chữ nhật lên trục tung là một đoạn thẳng. Theo giả thiết bài toán thì giao của hai đoạn thẳng tùy ý trong chúng khác rỗng, cho nên theo định lí 5, giao của cả hệ khác rỗng. Kí hiệu a là một điểm trên trục tung thuộc tất cả các đoạn thẳng. Tương tự, tồn tại một điểm b trên trục hoành thuộc hình chiếu vuông góc của tất cả các hình chữ nhật lên trục hoành. Dễ thấy khi đó điểm có tọa độ $(a\ ;\ b)$ thuộc tất cả các hình chữ nhật. Vậy giao của tất cả các hình chữ nhật đã cho khác rỗng.

9. Kí hiệu r là bán kính của đĩa tròn và $R_1, R_2, \ldots, R_n$ là bán kính của các hình tròn đã cho. Xét các hình tròn đồng tâm với các hình tròn đã cho và có bán kính tương ứng là $R_1 + r, R_2 + r, \ldots, R_n + r$. Từ giả thiết ban đầu, dễ dàng suy ra 3 hình tròn tùy ý trong các hình tròn này có giao khác rỗng. Theo định lí 6, ta suy ra giao của tất cả các hình tròn này khác rỗng. Kí hiệu O là điểm thuộc tất cả các hình tròn bán kính $R_1 + r, R_2 + r, \ldots, R_n + r$ này. Khi đó dễ thấy khi đặt đĩa tròn có tâm tại O, đĩa tròn sẽ cắt tất cả các hình tròn đã cho.

§2. ĐƯỜNG KÍNH CỦA HÌNH

10. Ta xét hai trường hợp :

a) Tam giác đã cho là tam giác không tù. Trong trường hợp này, hình tròn ngoại tiếp tam giác có bán kính r không vượt quá $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Thật vậy, giả sử a là cạnh lớn nhất của tam giác ứng với góc $A \geq 60^\circ$ thì

$$2r = \frac{a}{\sin A} \leq \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow r \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

b) Trường hợp tam giác đã cho là tam giác tù. Trong trường hợp này, hình tròn với đường kính là cạnh lớn nhất sẽ phủ hoàn toàn tam giác. Như vậy, thậm chí ta có thể phủ được tam giác đã cho bằng hình tròn bán kính không vượt quá $\frac{1}{2}$.

Tóm lại, luôn phủ được tam giác có các cạnh không vượt quá 1 bởi hình tròn bán kính $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

11. Lấy các đỉnh của đa giác làm tâm, dựng các hình tròn bán kính $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Theo bài 10 thì 3 hình tùy ý trong các hình tròn này có giao khác rỗng, nên theo định lí Helly, giao của tất cả các hình tròn này khác rỗng. Gọi O là một điểm thuộc giao của chúng. Khi đó hình tròn tâm O bán kính $\frac{1}{\sqrt{3}}$ phủ tất cả các đỉnh của đa giác và do đó cũng phủ toàn bộ đa giác (do tính lồi của đa giác).

12. Theo bài toán 11 ở trên thì ta có thể phủ được hình ngũ giác lồi bởi một hình tròn bán kính 1. Gọi O là tâm của hình tròn này. Khi đó dễ thấy các hình tròn đơn vị có tâm tại các đỉnh của ngũ giác phủ kín toàn bộ đa giác và phải có một trong chúng chứa không ít hơn $\frac{2011}{5}$ điểm đã cho, tức là chứa ít nhất 403 điểm. Các điểm này cách đỉnh ngũ giác là tâm của hình tròn đơn vị chứa nó một khoảng không quá 1.

13. Lời giải tương tự như lời giải bài toán 12.

14. Ta không áp dụng được định lí Helly để giải bài toán này, nhưng ta có thể áp dụng cách chứng minh tương tự của bài tập 11 để giải nó. Ta kẻ các đường chéo xuất phát từ đỉnh có các đường chéo không vượt quá 1. Bằng cách đó, ta chia ngũ giác thành 3 tam giác có đường kính không vượt quá 1. Sử dụng kết quả của bài tập 11 rằng mỗi tam giác này có thể phủ được bởi hình tròn bán kính $\frac{1}{\sqrt{3}}$, ta dễ dàng suy ra các hình tròn bán kính $\frac{1}{\sqrt{3}}$ có tâm tại các đỉnh của tam giác phủ kín hoàn toàn tam giác. Như vậy, năm hình tròn bán kính $\frac{!}{\sqrt{3}}$ có tâm tại các đỉnh của ngũ giác phủ kín hoàn toàn ngũ giác đã cho.

15. Sử dụng kết quả bài tập 14, ta phủ được ngũ giác đã cho bởi 5 hình tròn đơn vị có tâm là 5 đỉnh của ngũ giác. Suy ra có một trong chúng chứa ít nhất 403 điểm đã cho.

16. Lời giải bài toán này tương tự như lời giải bài toán 14. Ta kẻ các đường chéo xuất phát từ đỉnh có các đường chéo không vượt quá 1. Bằng cách đó, ta chia n-giác thành $n-2$ tam giác có đường kính không vượt quá 1. Sử dụng kết quả của bài tập 10 rằng mỗi tam giác này có thể phủ được bởi hình tròn bán kính $\frac{1}{\sqrt{3}}$, dễ dàng suy ra các hình tròn bán kính $\frac{1}{\sqrt{3}}$ có tâm tại các đỉnh của tam giác phủ kín hoàn toàn tam giác. Như vậy, các hình tròn bán kính $\frac{1}{\sqrt{3}}$ có tâm tại các đỉnh của n-giác phủ kín hoàn toàn đa giác đã cho.

17. Trước hết theo bài 16, ta có thể phủ n-giác đã cho bởi n hình tròn bán kính $\frac{1}{\sqrt{3}}$ có tâm là đỉnh của n-giác. Suy ra có một trong các hình tròn này chứa ít nhất $\left[\frac{m}{n}\right]$ điểm đã cho.

§3. CẮT HÌNH

18. Kẻ tới hình G tất cả các *đường thẳng tựa* theo mọi phương (đường thẳng tựa của hình bất kì được định nghĩa như đường thẳng tựa của hình lồi) và xét giao của các nửa mặt phẳng chứa hình G có bờ là các đường thẳng đó. Giao đó là hình lồi F. Bởi vì hình F chứa G, nên diện tích của F lớn hơn G. Đường biên của F khác đường biên của G ở một số chỗ các phần đường cong (hoặc đường gấp khúc) được thay bằng các đoạn thẳng. Do đó chu vi của F nhỏ hơn chu vi của G.

Lưu ý : Bài tập này không áp dụng được định lí 1, vì hình cho trước chưa chắc chắn là hình đa giác. Nếu giả thiết cho trước G là hình đa giác thì có thể chọn bao lồi F của G và áp dụng định lí 1.

19. Nhận xét rằng đối với tất cả các đa giác đồng dạng, tỉ số giữa diện tích và bình phương chu vi là như nhau, cho nên chỉ cần chứng minh rằng trong số tất cả các tứ giác với các số đo góc tại các đỉnh đã cho, tỉ số giữa diện tích và bình phương chu vi của các tứ giác ngoại tiếp là lớn nhất.

Trước hết ta giả sử các góc được cho để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành có một góc bằng α. Giả sử các cạnh của $ABCD$ bằng a, b. Khi đó tỉ số giữa diện tích và bình phương chu vi của $ABCD$ bằng

$$\frac{ab\sin\alpha}{4(a+b)^2} \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sin\alpha}{4(a+b)^2} = \frac{1}{16}\sin\alpha,$$

đẳng thức chỉ xảy ra khi $a = b$, tức $ABCD$ là hình thoi. Rõ ràng hình thoi là tứ giác ngoại tiếp.

Bây giờ có thể giả sử $ABCD$ không phải là hình bình hành. Khi đó phần kéo dài của hai cạnh của nó cắt nhau. Không mất tính tổng quát, giả sử các tia AB và DC cắt nhau tại điểm E. Kẻ đường thẳng $B'C' \,//\, BC$ tiếp xúc với đường tròn nội tiếp của ΔADE ; các điểm B' và C' nằm trên các cạnh AE và DE. Kí hiệu bán kính đường tròn nội tiếp của ΔADE là r, còn tâm của nó là O. Khi đó :

$$S_{EB'C'} = S_{EB'O} + S_{EOC'} - S_{OB'C'} = \frac{1}{2}r(EB' + EC' - B'C') = qr$$

trong đó $q = \frac{1}{2}(EB' + EC' - B'C')$. Do đó

$$S_{ABCD} = S_{AED} - S_{EBC} = S_{AED} - k^2 S_{EB'C'} = pr - k^2 qr$$

trong đó p là nửa chu vi của ΔAED, $k = EB : EB'$. Bây giờ ta tính chu vi của $ABCD$. Tổng các chu vi của $ABCD$ và EBC bằng tổng chu vi của AED và $2BC$, do đó chu vi của $ABCD$ bằng $2p - (EB + EC - BC) = 2p - 2kq$. Suy ra tỉ số giữa diện tích và bình phương chu vi của tứ giác $ABCD$ bằng $\frac{pr - k^2 qr}{4(p - kq)^2}$. Đối với tứ giác ngoại tiếp $AB'C'D'$, tỉ số đó bằng $\frac{pr - qr}{4(p-q)^2}$, vì khi đó $k = 1$. Ta còn phải chứng minh rằng : $\frac{pr - k^2 qr}{4(p-kq)^2} \le \frac{pr - qr}{4(p-q)^2}$, tức là $\frac{p - k^2 q}{(p-kq)^2} \le \frac{1}{p-q}$ (có thể giản ước được cho $p - q$ vì $p > q$). Bất đẳng thức $(p - k^2 q)(p - q) \le (p - kq)^2$ đúng, vì nó tương đương với $-qp(1-k)^2 \le 0$. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $k = 1$, khi $ABCD$ là tứ giác ngoại tiếp.

20. Áp dụng nhận xét là đối với tất cả các đa giác đồng dạng, tỉ số giữa diện tích và bình phương chu vi là như nhau, cho nên chỉ cần chứng minh rằng trong số

tất cả các đa giác với các số đo góc tại các đỉnh đã cho, tỉ số giữa diện tích và bình phương chu vi của các đa giác ngoại tiếp là lớn nhất.

Ta chứng minh bằng quy nạp theo n. Với $n = 4$, ta đã chứng minh ở bài tập 19. Trước hết ta chứng minh rằng với $n \geq 5$, trong n-giác có một cạnh mà tổng các góc kề với nó lớn hơn 180°. Thật vậy, vì tổng tất cả các góc trong một n-giác bằng $(n-2)180^\circ$ nên có một cạnh mà tổng hai góc kề với nó không nhỏ hơn $\frac{2(n-2).180^\circ}{n} \geq 180^\circ.\frac{6}{5} > 180^\circ$.

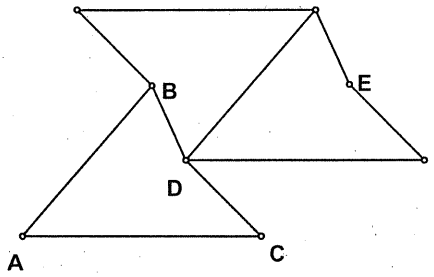
Không mất tính tổng quát, giả sử trong n-giác $A_1A_2...A_n$, tổng các góc ở các đỉnh A_1 và A_2 lớn hơn 180°, khi đó các tia A_nA_1 và A_3A_2 cắt nhau tại điểm B. Ta cũng xét n-giác ngoại tiếp $A_1'A_2'...A_n'$ đồng dạng với n-giác $A_1A_2...A_n$ mà hai tia $A_n'A_1'$ và $A_3'A_2'$ cắt nhau tại B'. Để đỡ phải tính toán nhiều, ta có thể coi chu vi của các $(n-1)$-giác $BA_3A_4\ldots A_n$ và $B'A'_3A'_4\ldots A'_n$ bằng nhau và bằng P (điều này luôn có thể đạt được khi chuyển sang xét các đa giác đồng dạng). Kí hiệu bán kính đường tròn nội tiếp của đa giác $A_1'\ldots A_n'$ bằng r. Khi đó diện tích của $B'A_3'A_4'\ldots A_n'$ bằng $\frac{1}{2}rP$. Theo giả thiết quy nạp, diện tích của $(n-1)$-giác $BA_3..A_n$ không lớn hơn diện tích của $B'A_3'\ldots A_n'$, tức là nó bằng $\alpha r\frac{P}{2}$, trong đó $\alpha \leq 1$ và $\alpha = 1$ chỉ khi đa giác $BA_3\ldots A_n$ ngoại tiếp. Kí hiệu diện tích của $\Delta A_1'A_2'B'$ là S, còn tỉ số đồng dạng của các tam giác A_1A_2B và $A_1'A_2'B'$ là k thì diện tích của A_1A_2B bằng k^2S. Rõ ràng :

$$S = \frac{1}{2}rA_1'B' + \frac{1}{2}rA_2'B' - \frac{1}{2}rA_1'A_2' = \frac{1}{2}rq \text{, trong đó } q = A_1'B' + A_2'B' - A_1'A_2'.$$

Do đó diện tích của các đa giác $A_1'A_2'...A_n'$ và $A_1A_2...A_n$ tương ứng bằng $\frac{1}{2}r(P-q)$ và $\frac{1}{2}r(\alpha P - k^2q)$, còn chu vi bằng $P-q$ và $P - kq$. Còn lại ta phải chứng minh rằng $\frac{\alpha P - k^2q}{(P-kq)^2} \leq \frac{P-q}{(P-q)^2} = \frac{1}{P-q}$ và đẳng thức chỉ xảy ra

nếu $\alpha = 1$ và $k = 1$ (từ $\alpha = 1$ suy ra các đa giác $BA_3 \ldots A_n$ và $B'A'_3 \ldots A'_n$ bằng nhau, và nếu có thêm $k = 1$ thì $\Delta A_1A_2B = \Delta A'_1A'_2B'$, tức là các đa giác $A_1 \ldots A_n$ và $A'_1 \ldots A'_n$ bằng nhau). Rõ ràng $(P-q)(\alpha P - k^2q) \le (P - kq)^2$ tương đương với $0 \le Pq(1-k)^2 + (1-\alpha)(P-q)P$. Bất đẳng thức cuối cùng đúng và đẳng thức chỉ xảy ra khi $k = 1$ và $\alpha = 1$.

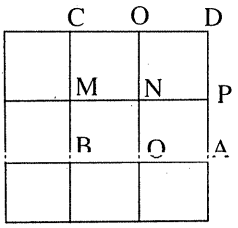
21. **Gợi ý** : Có nhiều cách chứng minh cách lát như trong hình 11 (SLT) là một cách lát phủ kín mặt phẳng. Có thể giảm bớt khó khăn khi chứng minh bằng lưu ý rằng *ABEC* là hình bình hành và mặt phẳng lát được bởi các hình bình hành bằng hình bình hành *ABEC* (xem hình 1).



Hình 1

§4. MẶT PHẲNG KẺ Ô VUÔNG

22. Giả sử đường tròn cần tìm đi qua đỉnh lưới *N*, Ta xét hình vuông *ABCD* (xem hình 2) gồm 4 ô vuông cơ sở nhận *N* làm tâm. Các đỉnh lưới khác được đặt tên là *M*, *O*, *P* và *Q* như trong hình 2.



Hình 2

Trước khi đi vào *N* và sau khi ra khỏi *N*, đường tròn cần tìm phải đi qua 2 đỉnh khác của các đỉnh *A*, *B*, *C*, *D*, *M*, *N*, *O*, *P* và *Q*. Ba điểm này đủ để xác

định một đường tròn. Do đó ta tìm cách xác định hai điểm còn lại khác điểm N. Lưu ý rằng khoảng cách từ N tới các đỉnh này chỉ có hai loại : là khoảng cách a của cạnh hình vuông cơ sở, hoặc là khoảng cách $a\sqrt{2}$ của đường chéo hình vuông cơ sở. Dễ thấy ba điểm nói trên không thể thẳng hàng được, nên chỉ có thể có 3 loại đường tròn. Loại thứ nhất là có cả hai khoảng cách bằng a (chẳng hạn đường tròn đi qua M, N và Q) ứng với bán kính đường tròn là $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Loại thứ hai có một khoảng cách a và khoảng cách còn lại là $a\sqrt{2}$ (chẳng hạn là A, N và O) ứng với bán kính đường tròn ngoại tiếp là $\frac{\sqrt{10}}{2}$. Còn loại thứ ba ứng với cả hai khoảng cách là $a\sqrt{2}$, chẳng hạn (DNC), ứng với bán kính 1 (h.2).

So sánh ba bán kính của ba đường tròn trên, ta có bán kính lớn nhất có thể có là $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

23. Ta xuất phát từ phía trên bên trái, từ điểm trên cao nhất này, ta ghép các điểm trên cùng đường thẳng đứng đi qua nó thành từng cặp, mỗi điểm với điểm tiếp theo gần nó nhất, sao cho mỗi điểm nằm trên đúng một đoạn thẳng nối (trừ nhiều lắm là điểm ở vị trí thấp nhất không nằm trên đoạn thẳng nối nào cả). Sau đó ta lại xuất phát từ đường vuông góc tiếp theo về hướng bên phải... Cứ làm như vậy cho đến khi không còn điểm nào để nối.

Bây giờ ta lại làm như vậy với đường nằm ngang, xuất phát từ đường thẳng cao nhất, ta nối điểm nằm tận cùng bên trái với điểm tiếp theo cùng trên phương nằm ngang với nó bởi một đoạn thẳng. Bằng cách đó ta ghép các điểm trên cùng đường thẳng ngang đi qua nó thành từng cặp, mỗi điểm với điểm tiếp theo gần nó nhất sao cho mỗi điểm nằm trên đúng một đoạn thẳng nối (trừ nhiều lắm là điểm ở vị trí tận cùng bên phải không nằm trên đoạn nối nào cả). Sau đó ta lại xuất phát từ đường nằm ngang tiếp theo về phía dưới... Cứ làm như vậy, cho đến khi không còn điểm nào để nối.

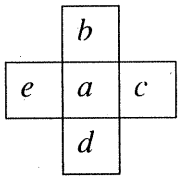
Tập hợp điểm đã cho và các đoạn thẳng thu được tạo nên một đồ thị mà mỗi đỉnh có bậc nhiều lắm là 2 và mỗi thành phần của nó là một đường mở hoặc một đường khép kín có các cạnh là các đoạn thẳng nối 2 điểm theo phương nằm ngang hoặc phương thẳng đứng. Trên đường mở, ta có thể tô màu các

đỉnh dọc theo đường đi sao cho các đỉnh màu đỏ và các đỉnh màu xanh đan màu nhau. Trên mỗi đường khép kín, các đoạn thẳng nằm ngang và thẳng đứng xen kẽ nhau, cho nên số đỉnh trên mỗi đường khép kín là một số chẵn, do đó ta cũng có thể tô các đỉnh của nó màu xanh và màu đỏ xen kẽ nhau.

Cách tô màu này thỏa mãn điều kiện đầu bài là mỗi đường thẳng đứng hoặc nằm ngang chứa một số xấp xỉ (hơn kém nhau nhiều nhất là 1 đơn vị) các điểm màu đỏ và các điểm màu xanh, vì trên mỗi đường thẳng đứng chẳng hạn, ứng với mỗi điểm đỏ là một điểm màu xanh kề với nó trên cùng một đoạn thẳng nối (trừ nhiều nhất là điểm ở vị trí thấp nhất mà thôi).

24. Ta tưởng tượng rằng các ô vuông được kẻ sao cho các cạnh của nó nằm theo phương nằm ngang và thẳng đứng. Để trở về đỉnh ban đầu, ta đi lên trên bao nhiêu bước thì phải đi xuống dưới bấy nhiêu bước, đi sang trái bao nhiêu bước thì phải đi về bên phải bấy nhiêu bước. Do đó tổng số bước đi phải là một số chẵn.

25. a) Nếu tập hợp các số được điền bị chặn dưới (bị chặn trên) thì tập hợp này có một phần tử nhỏ nhất (lớn nhất) mà ta kí hiệu là a. Giả sử các số được điền không bằng nhau tất cả. Như vậy sẽ có một ô chứa số a mà trong 4 ô có cạnh chung với nó sẽ có ít nhất một ô chứa số $b \neq a$. Giả sử các số ở 3 ô còn lại có cạnh chung với ô chứa số a này là c, d và e (hình 3). Theo giả sử về sự nhỏ nhất (lớn nhất) của số a, ta có $b > a$ và $c, d, e \geq a$ ($b < a$ và $c, d, e \leq a$). Do đó $\frac{1}{4}(b + c + d + e) > a$ $\left(\frac{1}{4}(b+c+d+e) < a\right)$, trái với giả thiết của bài toán : a là trung bình cộng của b, c, d và e.



Hình 3. Điền số vào các ô vuông trên mặt phẳng

b) Ta thiết lập một hệ trục tọa độ vuông góc với đơn vị trên trục đúng bằng độ dài cạnh của hình vuông cơ sở. Ta điền vào mỗi hình vuông cơ sở một số bằng trung bình cộng của 2 tọa độ của tâm hình vuông cơ sở. Rõ ràng với cách điền này, các số được điền đôi một khác nhau và mỗi số trong mỗi ô vuông cơ sở bằng trung bình cộng của 4 số ở 4 ô kề với nó.

26. Giả sử rằng O là điểm nguyên duy nhất nằm trong tam giác ABC. Theo định lí Pick, ta có $S_{OAB} = S_{OBC} = S_{OCA} = \frac{1}{2}$. Do $S_{OAB} = S_{OCA}$ nên O nằm trên trung tuyến AA_1 vì B và C cách đều AO. Tương tự thì O cũng nằm trên trung tuyến BB_1 và CC_1 của tam giác ABC. Vậy điểm O là trọng tâm của tam giác ABC.

27. Ta xét tính chẵn lẻ của tọa độ của một điểm nguyên. Tính chẵn lẻ của tọa độ của điểm nguyên cho trước chỉ có thể là 1 trong 4 khả năng tương ứng với 4 bộ số dư của chúng trong phép chia cho 2 là (0 , 0), (0, 1), (1, 0) và (1, 1). Do có 5 điểm nguyên nên tồn tại hai điểm trong chúng mà tọa độ có cùng tính chẵn lẻ. Trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm này có tọa độ là trung bình cộng tọa độ của hai điểm nguyên nói trên, đó là các số nguyên do hai điểm nguyên này có cùng tính chất chẵn lẻ. Vậy tồn tại hai điểm nguyên sao cho đoạn thẳng nối hai điểm nguyên này chứa một điểm nguyên nào đó.

28. Theo bài toán 27, tồn tại trên cạnh hoặc trên đường chéo của ngũ giác lồi một điểm nguyên. Nếu điểm nguyên này nằm trên một đường chéo thì nó là điểm trong của ngũ giác lồi, đó là điều ta muốn chứng minh. Nếu điểm nguyên P này nằm trên một cạnh thì ta có thể xét ngũ giác bằng cách bỏ đi một trong hai đỉnh mút của cạnh này, ngũ giác mới có một đỉnh là P và 4 đỉnh còn lại của ngũ giác cũ. Cứ tiếp tục như vậy cho đến khi ta nhận được một điểm nguyên nằm trên một đường chéo của ngũ giác được tạo thành và là điểm trong của ngũ giác ban đầu.

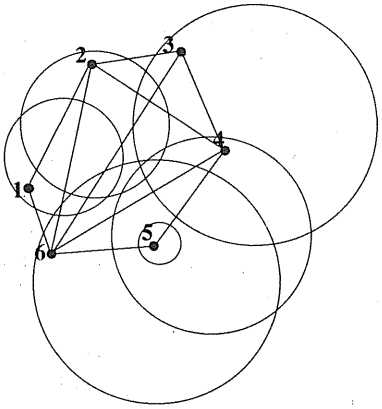
29. Theo bài toán 28, luôn tồn tại một điểm nguyên là điểm trong của ngũ giác lồi nguyên, do đó theo công thức Pick, diện tích của ngũ giác lồi ít nhất là

$$1 + \frac{5}{2} - 1 = \frac{5}{2}.$$

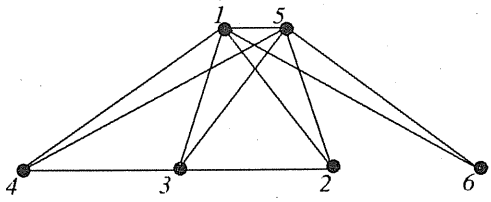
Đây là diện tích nhỏ nhất có thể có, vì hình ngũ giác với 5 đỉnh (0, 0), (0, 1), (1, 0), (2, 1) và (1, 2) là một ngũ giác lồi với diện tích đúng bằng $\frac{5}{2}$.

§1. KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ ĐỒ THỊ

1. Ta cho tương ứng mỗi hình tròn với một điểm trên mặt phẳng và hai điểm được nối với nhau bởi một cạnh nếu như hai hình tròn tương ứng với chúng giao nhau. Bằng cách đó ta thu được hình 1 dưới đây :



Hình 1

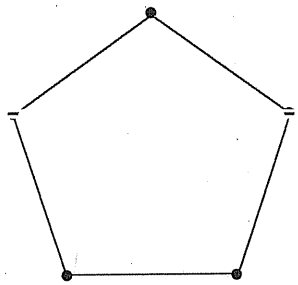


Hình 2

2. Đồ thị ở hình 2 biểu diễn quan hệ nguyên tố cùng nhau của 6 số tự nhiên 1, 2, 3, 4, 5, 6. Đồ thị có sáu đỉnh được đánh số 1, 2, 3, 4, 5 và 6, trong đó hai đỉnh i và j được nối với nhau bởi một đoạn thẳng nếu như hai số i và j này nguyên tố cùng nhau.

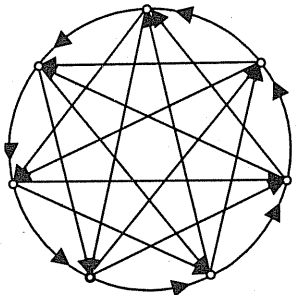
3. Học sinh tự làm.

4. Đồ thị với 5 đỉnh là 5 đỉnh của một ngũ giác đều và có cạnh là cạnh của ngũ giác đều này thỏa mãn yêu cầu đầu bài. Nếu ta chọn 3 đỉnh tùy ý của ngũ giác đều này thì luôn có 2 đỉnh trong chúng là đỉnh liên tiếp của ngũ giác đều nên hai đỉnh này sẽ kề nhau. Ngoài ra trong 3 đỉnh tùy ý của ngũ giác đều luôn có 2 đỉnh không kề nhau, và hai đỉnh này không được nối bởi cạnh nào cả.



Hình 3

5. Đồ thị có 7 đỉnh là 7 đỉnh của một thất giác đều và cạnh nối 2 đỉnh là cạnh của thất giác đều hoặc đường chéo của thất giác đều này, với quy ước là nếu a thắng b thì cạnh nối a và b sẽ có hướng đi từ a tới b. Ta thấy với chiều của các cạnh được ghi như trong hình 4 thì đồ thị thu được thỏa mãn yêu cầu đầu bài. Ta có thể dễ dàng thấy từ một đỉnh tùy ý luôn có 3 cạnh xuất phát và có 3 cạnh đi từ các đỉnh khác tới nó.



Hình 4

Đồ thị có thể lập được bằng cách định hướng trên chu vi của thất giác đều một chiều quay, chẳng hạn là chiều quay ngược chiều kim đồng hồ, và từ mỗi đỉnh nối với đúng ba đỉnh tiếp theo nó theo chiều ngược chiều kim đồng hồ bởi cạnh có hướng xuất phát từ đỉnh được chọn. Với cách thiết lập đó thì mỗi đỉnh có đúng 3 cạnh xuất phát.

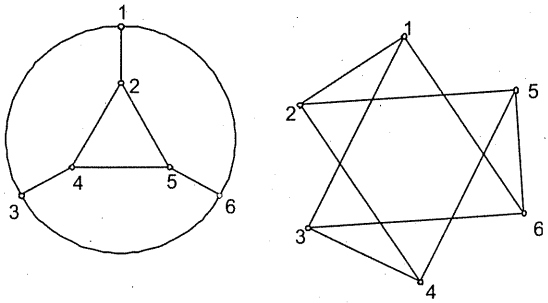
6. Học sinh tự làm.

7. Chỉ có hai đồ thị trong hình 22 (câu c) đẳng cấu với nhau.

a) Hai đồ thị này không đẳng cấu vì chúng có số đỉnh khác nhau.

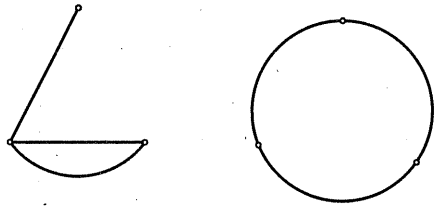
b) Hai đồ thị này không đẳng cấu vì chúng có tổng số cạnh khác nhau.

c) Hai đồ thị này đẳng cấu với nhau. Trong hình 5 chỉ ra một cách đánh số đỉnh của chúng bởi các số 1, 2, 3, 4, 5, 6 thỏa mãn điều kiện : hai đỉnh nào kề nhau trong đồ thị thứ nhất thì cũng kề nhau trong đồ thị thứ hai.



Hình 5

8. Hai đồ thị trong hình 6 cùng có 3 đỉnh và 3 cạnh nhưng không đẳng cấu với nhau bởi vì đồ thị đầu có hai đỉnh không kề nhau, còn đồ thị thứ hai thì không (ta cũng thấy đồ thị đầu có cạnh kép, đồ thị sau là đồ thị đơn).



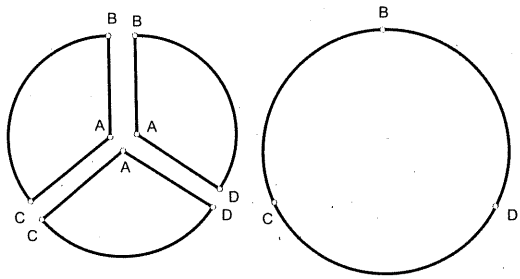
Hình 6

9. Học sinh tự giải.

10. Dùng số đánh số các đỉnh và các cạnh của đồ thị, sau đó xây dựng ma trận liền kề và ma trận liên thuộc. Đáp số bài toán phụ thuộc cách đánh số đỉnh và cạnh của đồ thị.

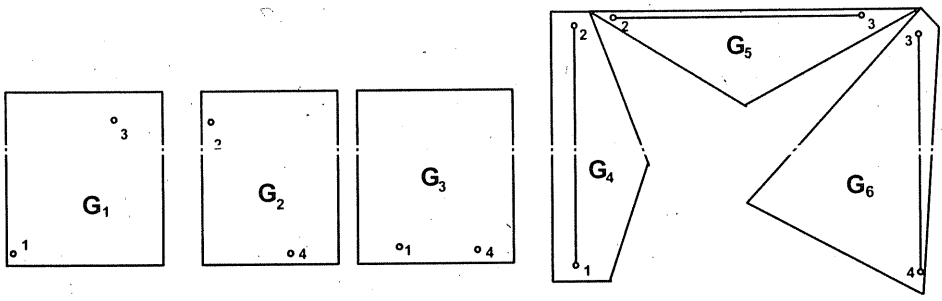
11. Dùng số đánh số các đỉnh và các cạnh của đồ thị, sau đó xây dựng ma trận liền kề và ma trận liên thuộc. Đáp số bài toán phụ thuộc cách đánh số đỉnh và cạnh của đồ thị.

12. Có tất cả 4 đồ thị thành phần có 3 đỉnh, là các đồ thị trong hình 7 :



Hình 7

13. Có tất cả đúng $C_4^2 = 6$ đồ thị sinh bởi tập hợp có đúng 2 đỉnh, là các đồ thị được biểu diễn trong hình 8 (được đóng khung trong các hình đa giác hoặc trong hình chữ nhật) :



Hình 8

14. Đồ thị G_1 là đồ thị con của đồ thị đã cho. Đồ thị G_2 không phải là đồ thị con của đồ thị đã cho vì nó có cạnh (1, 4) không phải là cạnh của đồ thị cho trước.

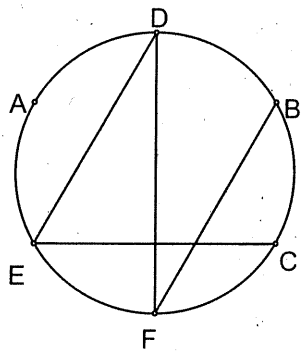
§2. CÁC YẾU TỐ CƠ BẢN CỦA ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG

15. Ta chứng minh bài toán bằng phản chứng. Giả sử ngược lại rằng mỗi người đều viết thư cho người viết cho mình, khi đó ta có thể thiết lập được một đồ thị có đỉnh là 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 tượng trưng cho 7 người. Ta nối 2 người bởi một cạnh nếu như họ viết thư cho nhau. Bằng cách đó ta thu được một đồ thị có 7 đỉnh và mỗi đỉnh có đúng 3 cạnh. Khi đó, theo công thức tính các cạnh của đồ thị, ta có số cạnh của đồ thị là $\frac{7.3}{2} = 10,5$ không phải là số nguyên, vô lí.

Mâu thuẫn đó chứng tỏ có một người không viết trả lời thư người viết cho mình.

16. a) Không tồn tại, do tổng các bậc là số lẻ, mâu thuẫn với định lí 1.

b) Tồn tại. Đồ thị đơn như hình 9 có bậc của các đỉnh là 2, 3, 3, 4, 4, 4.



Hình 9

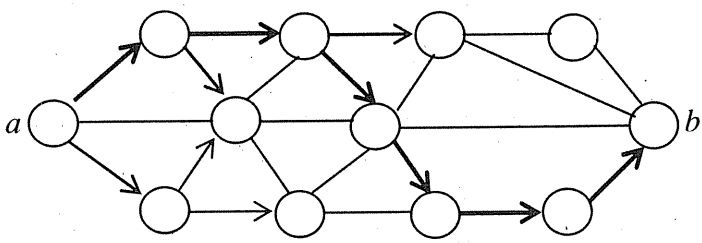
17. Bằng công thức tính cạnh của đồ thị, dễ thấy :

$$\text{số cạnh của đồ thị} \geq \frac{1}{2} \times 2 \times n = n .$$

18. Vì số thành phố lẻ luôn là một số chẵn (xem ví dụ 2) nên tồn tại trong số 65 thành phố (là một con số lẻ) ít nhất một thành phố chẵn.

19. Có nhiều đường đi với độ dài ngắn nhất là 4 nối đỉnh u với đỉnh t.

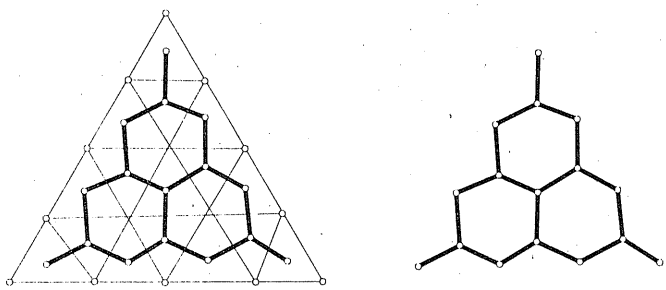
20. Áp dụng thuật toán tìm đường đi ngắn nhất, ta có sơ đồ sau (h.10) :



Hình 10

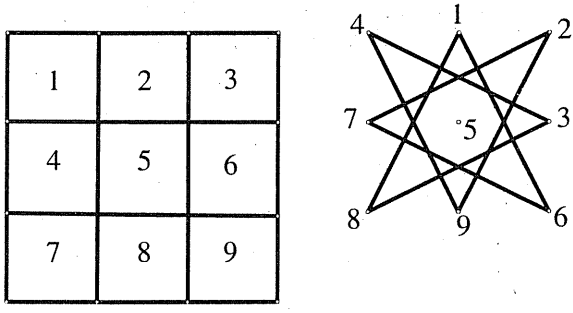
Các cạnh trên đường đi ngắn nhất nối a với b được tô đậm nét.

21. Câu trả lời là không. Hãy biểu diễn thành đồ thị với mỗi phòng là một đỉnh của đồ thị, và hai đỉnh được nối với nhau bởi một cạnh nếu như hai phòng tương ứng có cạnh chung. Đồ thị thu được (h.11) có 3 đỉnh treo tương ứng với các phòng ở góc hình tam giác (có 3 phòng như vậy). Các đỉnh treo này chỉ có thể là đỉnh đầu hoặc là đỉnh cuối của một con đường, mà một con đường chỉ có 2 đỉnh đầu và cuối mà thôi. Tóm lại đồ thị tương ứng thu được không có đường Hamilton, cho nên không thể đi thăm tất cả 16 phòng sao cho mỗi phòng chỉ qua đúng một lần mà thôi.



Hình 11

22. Đồ thị G biểu diễn của bàn cờ là đồ thị với 9 đỉnh là 9 ô vuông bàn cờ và hai đỉnh được nối bởi một cạnh nếu từ ô vuông tương ứng của đỉnh này ta tới được ô vuông tương ứng của đỉnh kia bởi một bước đi con mã. Khi đó đồ thị G có hai thành phần liên thông. Do G không phải là đồ thị liên thông, nên con mã không thể đi khắp các ô của bàn cờ 3×3 với bước đi thông thường.



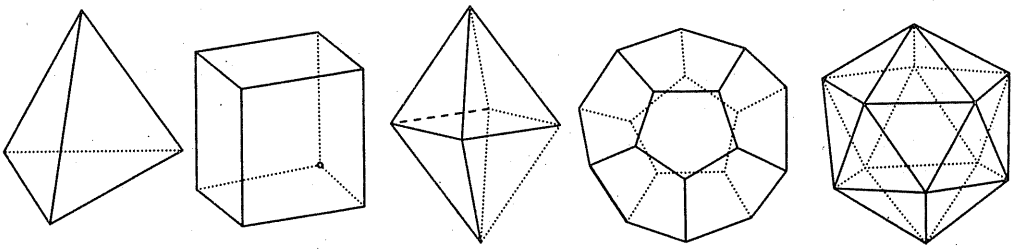
Hình 12

23. Ta biểu diễn một graph có mỗi đỉnh tương ứng với một em sinh viên. Hai đỉnh được nối với nhau bởi một cạnh nếu hai em tương ứng học ở phổ thông cùng nhau. Graph thu được có số thành phần liên thông không vượt quá 9, nếu không ta có thể chọn từ mỗi thành phần liên thông của nó một đỉnh và tương ứng là 10 em sinh viên mà không có hai em nào trong số đó có học với nhau ở phổ thông. Vậy số thành phần liên thông của graph thu được không vượt quá 9. Do có tất cả 46 đỉnh nên tồn tại một thành phần liên thông có ít nhất 6 đỉnh. Vậy tồn tại 6 em có học với nhau ở phổ thông.

24. Học sinh tự giải.

25. Có thể kiểm tra thấy bỏ đi 2 đỉnh tùy ý thì đồ thị thu được vẫn còn liên thông. Ngược lại bỏ đi 3 đỉnh láng giềng của một đỉnh tùy ý thì đồ thị thu được có 2 thành phần liên thông. Do đó chỉ số liên thông của đồ thị biểu diễn hình thập nhị diện đều là 3.

26. Có tất cả 5 loại khối đa diện đều : hình tứ diện đều, hình lập phương, hình bát diện đều, hình thập nhị diện đều, hình nhị thập diện đều :



Hình 13

Có thể thấy nếu bỏ 2 đỉnh tùy ý của một khối đa diện đều bất kì thì đồ thị thu được vẫn là đồ thị liên thông. Do đó, chỉ số liên thông của đồ thị biểu diễn khối đa diện đều tùy ý ít nhất là 3. Có thể kiểm tra cụ thể để thấy rằng chỉ số

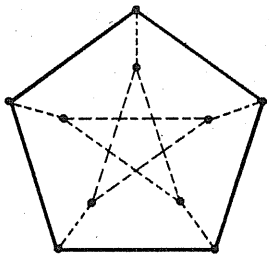
liên thông của hình bát diện đều bằng 4, của hình nhị thập diện đều bằng 5 và của các khối đa diện đều còn lại bằng 3.

27. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tồn tại một đồ thị G là k-liên thông đỉnh nhưng lại không k-liên thông cạnh. Khi đó tồn tại $t < k$ cạnh, sao cho khi bỏ t cạnh này, ta thu được đồ thị G' không liên thông. Ta có thể chọn từ mỗi cạnh trong t cạnh này một đỉnh của nó, và khi bỏ đi t đỉnh này, ta thu được một đồ thị không liên thông, mâu thuẫn với giả thiết G là đồ thị k-liên thông đỉnh. Vậy, nếu G là đồ thị k-liên thông đỉnh thì nó là đồ thị k-liên thông cạnh.

28. Nếu đồ thị G đã cho là đồ thị đầy đủ thì khẳng định của bài toán rõ ràng đúng. Ngược lại, giả sử đồ thị G đã cho không phải là đồ thị đầy đủ và P là đỉnh có bậc nhỏ nhất $\partial(G)$. Khi đó bằng việc bỏ đi tất cả các đỉnh kề với đỉnh P thì đồ thị thu được sẽ có ít nhất 2 thành phần liên thông, trong đó có một thành phần liên thông chứa đỉnh P. Từ đó suy ra G không phải là đồ thị $(\partial(G)+1)$-liên thông và do đó $\partial(G) \geq \kappa(G)$.

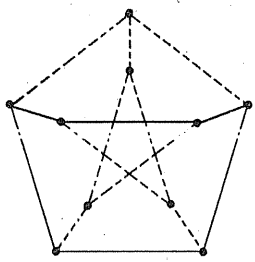
29. Học sinh tự giải.

30. Đồ thị Petersen chỉ có các chu trình với độ dài 5, 6, 8 và 9 mà thôi.



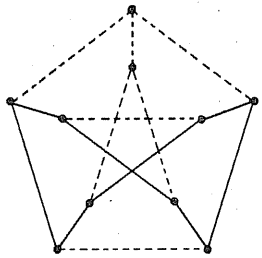
Hình 14

Trong hình 14 là một chu trình độ dài 5 của đồ thị Petersen.



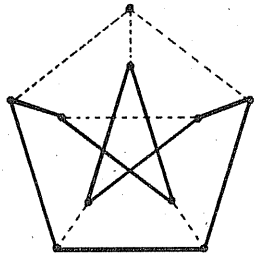
Hình 15

Trong hình 15 là một chu trình độ dài 6 của đồ thị Petersen.



Hình 16

Hình 16 là một chu trình độ dài 8 của đồ thị Petersen, và một chu trình độ dài 9 được mô tả trong hình 17.



Hình 17

31. Một đồ thị 2-liên thông sẽ không có đỉnh treo. Như vậy mỗi đỉnh của đồ thị phải có bậc không nhỏ hơn 2 và suy ra theo định lí 2, đồ thị này sẽ phải có một chu trình.

32. Một đồ thị 2-liên thông cạnh sẽ không có đỉnh treo. Như vậy mỗi đỉnh của đồ thị phải có bậc không nhỏ hơn 2 và suy ra theo định lí 2, đồ thị này sẽ phải có một chu trình.

33. Một đồ thị đơn G với n đỉnh ($n \geq 3$) và bậc nhỏ nhất thỏa mãn $\partial(G) \geq 2$ có một chu trình theo định lí 2. Xét một con đường có độ dài lớn nhất W trong đồ thị đã cho. Giả sử a và b là hai đỉnh đầu và cuối của W. Khi đó mọi đỉnh kề với b phải nằm trên W. Giả sử ngược lại, có một đỉnh c kề với b nhưng không nằm trên W thì ta có thể bổ sung thêm c vào W để được một con đường dài hơn W, vô lí. Do bậc của b không nhỏ hơn 2, cho nên b phải kề với ít nhất một đỉnh c nào đó nằm trên W. Gọi W_1 là đoạn đường đi từ một đỉnh c nằm xa b nhất trên W tới b, ta có một chu trình C đi qua b và c khi bổ sung thêm cạnh (b, c) vào W_1. Do c nằm xa b nhất ở trên W, cho nên các láng giềng của b đều nằm trên W_1, và do đó C có độ dài ít nhất là $d(b) + 1 \geq \partial(G) + 1$, với $d(b)$ là bậc của b trong G.

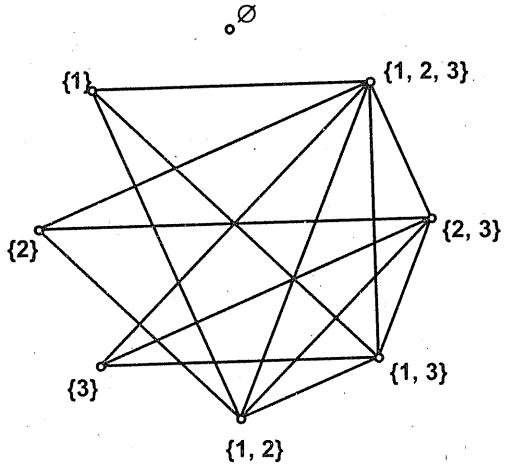
34. Có thể kiểm tra thấy rằng nếu bỏ đi một đỉnh tùy ý và tất cả các đỉnh láng giềng của nó thì đồ thị thu được sẽ là một đồ thị đầy đủ. Từ đó suy ra chỉ số ổn định trong của đồ thị đã cho là 2.

35. Rõ ràng nếu bỏ đi $\kappa(G) - 1$ đỉnh tùy ý của G thì đồ thị thu được vẫn liên thông, tức là vẫn có hai đỉnh kề nhau, từ đó suy ra $\alpha(G) \leq n + 1 - \kappa(G)$, và ta có $\alpha(G) + \kappa(G) \leq n + 1$.

36. Chia hình vuông thành các hình vuông nhỏ 2×2 ô vuông. Trong mỗi hình vuông nhỏ này có không quá 1 quân cờ vua, suy ra số quân cờ vua trên bàn cờ không vượt quá a^2 với a là số tự nhiên nhỏ nhất $\geq n/2$. Bằng cách xếp các quân vua từ ô trên cùng bên trái và lần lượt cách nhau đúng một ô vuông đơn vị phân cách ở giữa, ta có đúng a^2 quân cờ vua trên bàn cờ. Vậy số các quân cờ vua cần tìm là a^2.

37. Bài giải và đáp số hoàn toàn đúng như bài toán 36.

38. Ta biểu diễn mỗi tập hợp con tương ứng với một đỉnh của đồ thị có 8 đỉnh (là số các tập hợp con của $\{1, 2, 3\}$). Hai tập con được nối với nhau bởi một cạnh nếu như giao của chúng khác rỗng. Khi đó ta thu được đồ thị dưới đây.



Hình 18

Dễ xác định chỉ số ổn định trong của đồ thị thu được là 4. Như vậy chỉ có nhiều nhất 4 tập hợp con đôi một có giao khác rỗng. Bốn tập hợp như vậy là $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$ và $\{3\}$.

39. Đồ thị biểu diễn ngũ giác đều có một chu trình 5 cạnh. Trên chu trình này, nếu các đỉnh kề nhau không cùng màu mà lại chỉ được tô bằng 2 màu thì số đỉnh của đồ thị phải là số chẵn, vô lí.

40. Thực vậy, đồ thị đầy đủ K_k, là đồ thị có k đỉnh và giữa hai đỉnh có đúng một cạnh nối, có sắc số k. Trong đồ thị K_k này, rõ ràng hai đỉnh bất kì phải có màu khác nhau. Do nó có đúng k đỉnh, cho nên chỉ có thể dùng đúng k màu để tô màu ổn định các đỉnh của nó.

41. Rõ ràng nếu ta tô màu một số lớn hơn $n^2/2$ ô vuông, thì phải có một hàng có nhiều hơn $n/2$ ô vuông được tô màu. Trong hàng này chỉ có n ô vuông, nên rõ ràng phải có hai ô được tô màu ở cạnh nhau, tức là có cạnh chung với nhau. Bài toán được chứng minh.

§3. MỘT SỐ LOẠI ĐỒ THỊ ĐƠN VÔ HƯỚNG

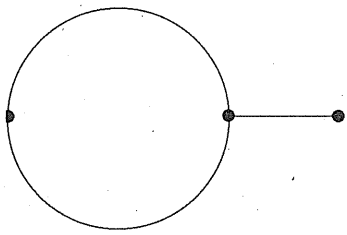
42. Bậc của mỗi đỉnh trong đồ thị đầy đủ K_n là $n - 1$, do đó theo công thức của định lí 1, §1, số cạnh của đồ thị đầy đủ K_n là $\frac{1}{2}n(n-1)$.

43. Giả sử đoạn thẳng thứ n là $[a_n, b_n]$. Điều kiện để hai đoạn thẳng $[a_i, b_i]$ và $[a_j, b_j]$ giao nhau là $\max\{a_i, a_j\} \le \min\{b_i, b_j\}$. Do bất đẳng thức này đúng cho mọi $i \neq j$ cho nên ta có $a_i \le b_j$ với mọi i, j, suy ra giao của tất cả các đoạn thẳng này khác $\varnothing$. Vậy đồ thị biểu diễn quan hệ giao nhau của chúng là đồ thị đầy đủ.

44. Nếu bậc của tất cả các đỉnh của graph bằng 0 thì bài toán hiển nhiên đúng. Trong trường hợp ngược lại, ta xét A là một đỉnh có bậc lớn nhất, và $A_1, A_2, ..., A_n$ là các đỉnh láng giềng của nó. Bậc của mỗi đỉnh trong các đỉnh $A, A_1, A_2, ..., A_n$ là một số tự nhiên từ 1 đến n. Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại hai số trong chúng bằng nhau. Vậy có hai đỉnh trong số các đỉnh $A, A_1, A_2, ..., A_n$ có bậc bằng nhau.

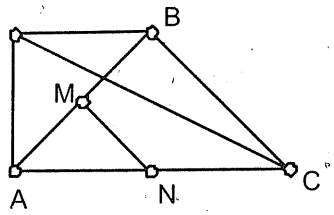
Khẳng định này không đúng cho đồ thị bất kì.

Đồ thị trong hình bên có 3 đỉnh : một đỉnh là đỉnh treo, hai đỉnh còn lại được nối với nhau bởi hai cạnh kép. Đỉnh treo có bậc là 1. Đỉnh láng giềng với đỉnh treo có bậc là 3 và đỉnh còn lại có bậc là 2. Bậc của các đỉnh đôi một khác nhau.



Hình 19

45. Ta chứng minh khẳng định bằng quy nạp theo số đỉnh n (là số chẵn) của đồ thị. Với $n = 4$, đồ thị K_4 thỏa mãn yêu cầu : là một đồ thị đều bậc 3 với 4 đỉnh. Giả sử kết luận đúng cho số chẵn $n \geq 4$, tức là tồn tại một đồ thị đơn đều G bậc 3 và 2-liên thông cạnh với n đỉnh. Ta chọn hai cạnh (A, B) và (A, C) cùng xuất phát từ một đỉnh A của đồ thị.



Hình 20

Ta thêm hai đỉnh M, N và bỏ hai cạnh được chọn (A, B) và (A, C). Cùng với hai đỉnh thêm vào, ta thêm vào các cạnh (A, M), (M, B), (A, N), (N, C) và cạnh (M, N). Đồ thị thu được rõ ràng vẫn là đồ thị đều bậc 3 (xem hình 20) và là đồ thị đơn. Mặt khác, do G là đồ thị 2-liên thông cạnh nên cũng dễ thấy đồ thị mới thu được cũng 2-liên thông cạnh. Vậy kết luận của bài toán cũng đúng cho $n + 2$ và do đó đúng cho mọi giá trị n chẵn, n không nhỏ hơn 4.

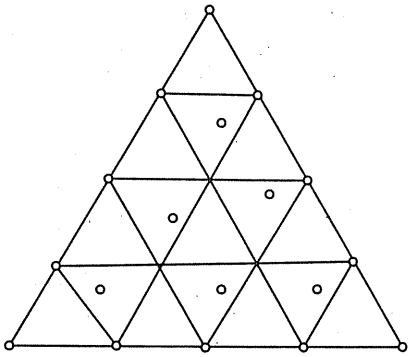
46. Có tất cả 5 khối đa diện đều. Theo tiêu chuẩn nhận biết của các đồ thị lưỡng phân là chu trình của nó chỉ có độ dài chẵn, ta nhận thấy chỉ có hình lập phương thỏa mãn điều kiện này. Các hình khối đa diện đều còn lại đều có mặt hoặc là hình tam giác đều hoặc là hình ngũ giác đều, đó là các chu trình có độ dài lẻ, nên đồ thị biểu diễn chúng không thể là đồ thị lưỡng phân được.

Đáp số : là hình lập phương.

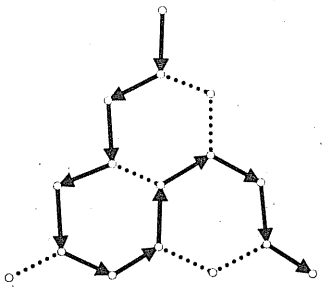
47. Giả sử đồ thị lưỡng phân $G = (A, B ; E)$ có một chu trình Hamilton thì các đỉnh kề nhau trên chu trình phải thuộc hai lớp khác nhau. Do đó, số đỉnh của chu trình phải là số chẵn, và số đỉnh của mỗi lớp bằng nhau và bằng nửa số đỉnh của chu trình Hamilton.

48. Ta biểu diễn đồ thị tương ứng với các phòng (đỉnh là các phòng và cạnh nối hai đỉnh ứng với hai phòng có cạnh chung). Nhận xét rằng đây là đồ thị lưỡng phân như trong hình 21 thể hiện (các phòng thuộc lớp đỉnh thứ hai được đánh

dấu bởi một viên sỏi tròn). Dễ dàng tính được số đỉnh của lớp thứ nhất tính từ tam giác nhỏ trên cùng là $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, và số đỉnh của lớp thứ hai của đồ thị là $n^2-\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n^2-n}{2}$. Trên một đường đi, các đỉnh của hai lớp sẽ xen kẽ nhau nên độ dài của đường đi không vượt quá $2\times\dfrac{n^2-n}{2}=n^2-n$. Con số này đạt được khi ta xuất phát từ đỉnh trên cùng và đi qua hết tất cả các đỉnh thuộc lớp thứ hai và kết thúc tại đỉnh của lớp thứ nhất cũng tại một góc của tam giác lớn như trong hình 22.



Hình 21



Hình 22

49. Nếu đồ thị liên thông đã cho không phải là cây thì nó có một chu trình. Dễ thấy rằng nếu bỏ một cạnh trên chu trình này thì ta thu được một đồ thị vẫn liên thông. Như vậy bằng cách lần lượt bỏ đi các cạnh trên các chu trình của đồ thị cho đến lúc ta thu được một đồ thị không có chu trình, khi đó đồ thị thu được là đồ thị liên thông và không có chu trình, tức là một cây. Vì cây có $n-1$ cạnh nên số cạnh ta đã bỏ đi đúng bằng $m-(n-1)=m-n+1$ cạnh. Tóm lại trong đồ thị, luôn tồn tại $m-n+1$ cạnh sao cho khi bỏ các cạnh này đi thì ta thu được một cây.

50. Nếu $d_1, d_2, \ldots, d_n$ là bậc của các đỉnh của một cây n đỉnh thì theo định lí 1, §2 về tổng các bậc của các đỉnh trong đồ thị và theo định lí 5, §3 về cây n đỉnh có đúng $n-1$ cạnh, ta suy ra ngay $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$.

Ngược lại, ta chứng minh bằng quy nạp theo n rằng nếu $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$ thì luôn tồn tại một cây có n đỉnh với bậc các đỉnh là $d_1, d_2, ..., d_n$.

Với $n = 1$ khẳng định hiển nhiên đúng.

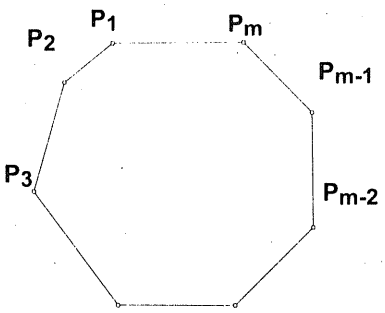
Giả sử với mỗi bộ số tự nhiên n phần tử $d_1, d_2, ..., d_n$ luôn tồn tại một cây $G(n)$ có n đỉnh sao cho $d_1, d_2, ..., d_n$ là bậc các đỉnh của $G(n)$.

Xét một bộ $n + 1$ số tự nhiên $d_1, d_2, ..., d_n, d_{n+1}$ với $\sum_{i=1}^{n+1} d_i = 2(n+1)-2 = 2n$.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n \geq d_{n+1}$.

Do $\sum_{i=1}^{n+1} d_i = 2n$ nên $d_{n+1} = 1$ và $d_1 \geq 2$. Xét dãy số $d'_1 = d_1 - 1$ và $d'_i = d_i$ với mọi $i > 1$. Ta có $\sum_{i=1}^{n} d'_i = 2n-2$. Theo giả thiết quy nạp, tồn tại một cây $G(n)$ gồm n đỉnh $P_1, ..., P_n$ với P_i có bậc là d'_i. Ta thêm vào $G(n)$ đỉnh P_{n+1} và cạnh nối P_1 với P_{n+1}. Đồ thị thu được là đồ thị liên thông có $n + 1$ đỉnh và n cạnh và là một cây. Có thể dễ dàng kiểm tra thấy bậc của đỉnh P_i là d_i.

51. Trước hết ta chứng tỏ rằng đồ thị thu được G không có chu trình. Thật vậy, giả sử rằng tồn tại chu trình $C = (P_1, ..., P_m)$ trong G. Khi đó, không mất tổng quát, giả sử rằng cạnh P_1P_2 là cạnh nhỏ nhất trong các cạnh của C. Do cách nối các đoạn thẳng là từ mỗi điểm nối tới điểm gần nó nhất, cho nên có cạnh P_1P_m là do P_m nối tới P_1 vì $P_1P_2 < P_1P_m$.

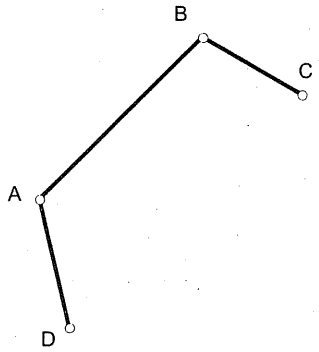


Hình 23

Lập luận tương tự, ta có cạnh P_mP_{m-1} là do P_{m-1} nối tới P_m.

Áp dụng liên tiếp lí luận này, ta có P_{i-1} nối tới P_i và đặc biệt là P_2 nối tới P_3, và điều đó có nghĩa là $P_2P_1 > P_2P_3$, vô lí.

Ta cũng có thể chứng minh bằng cách nhanh hơn như sau : Giả sử cạnh AB là cạnh dài nhất trên chu trình. Khi đó có $AB > BC$ và cũng có $AB > AD$ (xem hình 24). Như vậy, theo nguyên tắc nối thì đỉnh A không nối tới đỉnh B, cũng như đỉnh B không nối tới đỉnh A (do còn có đỉnh gần nó hơn), và như vậy cạnh AB không thể nối được.

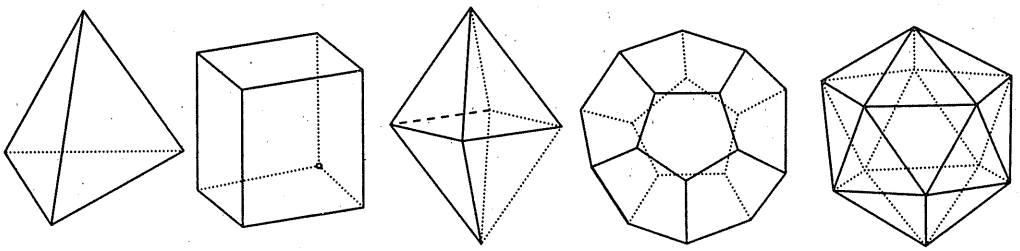


Hình 24

52. Cây là đồ thị không có chu trình, tức là nó không có chu trình có lẻ cạnh, do đó cây có sắc số bằng 2.

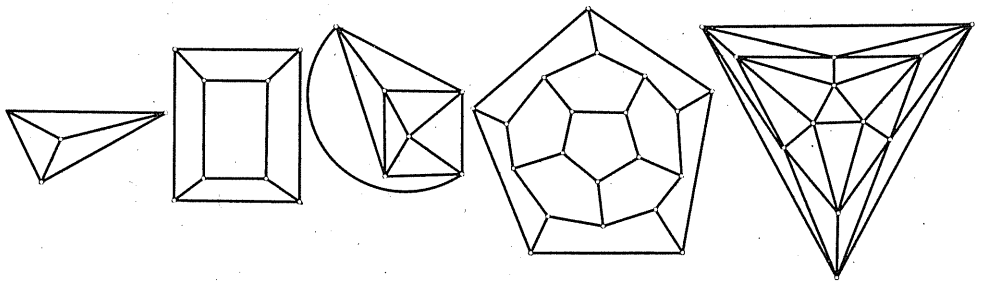
53. Bụi là hợp của các cây, và theo bài toán trên suy ra bụi có sắc số 2. Như vậy, các đỉnh của bụi có thể phân thành hai tập hợp mà mỗi cạnh chỉ nối 2 đỉnh khác tập hợp nhau mà thôi. Tóm lại, bụi là một đồ thị lưỡng phân.

54. Có tất cả 5 khối đa diện đều như trong hình sau :



Hình 25

Chúng là đồ thị phẳng vì có thể biểu diễn chúng trên mặt phẳng sao cho không có 2 cạnh nào cắt nhau. Dưới đây là hình biểu diễn phẳng của các đồ thị khối đa diện đều một cách tương ứng thỏa mãn điều kiện là không có 2 cạnh nào cắt nhau.



Hình 26

55. Một cách biểu diễn dễ hiểu là ta khoét trên một mặt đa diện một lỗ và nhìn qua lỗ khoét này. Khi đó hình ảnh ta nhìn thấy bên trong của hình khối đa diện lồi chính là biểu diễn phẳng thỏa mãn điều kiện : không có hai cạnh nào của nó cắt nhau.

56. Giả sử ngược lại, ta có thể biểu diễn đồ thị $K_{3,3}$ trên mặt phẳng sao cho không có 2 cạnh nào của chúng cắt nhau. Khi đó ta có số đỉnh $n = 6$, số cạnh $\ell = 9$, và số miền m theo công thức Euler là

$$m = \ell + 2 - n = 9 + 2 - 6 = 5.$$

Vì đồ thị $K_{3,3}$ là lưỡng phân nên mỗi chu trình phải có chẵn cạnh. Suy ra mỗi miền phải có số cạnh lớn hơn hoặc bằng 4, do đó 5 miền có số cạnh lớn hơn hoặc bằng 20.

Vì mỗi cạnh là cạnh chung của 2 miền nên số cạnh của $K_{3,3}$ thỏa mãn :

$$l \geq \frac{20}{2} = 10, \text{ mâu thuẫn với } l = 9.$$

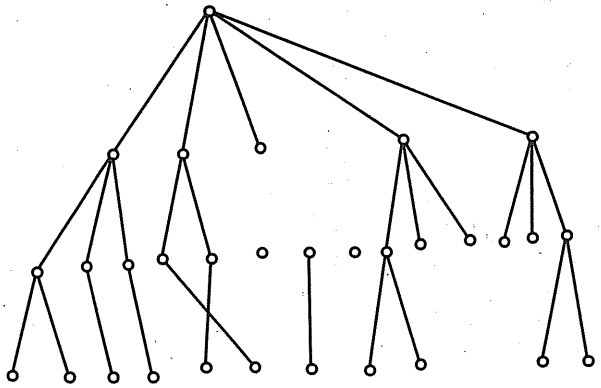
57. Giả sử ngược lại, ta có thể biểu diễn đồ thị K_5 trên mặt phẳng sao cho không có 2 cạnh nào của chúng cắt nhau. Khi đó ta có số đỉnh $n = 5$, số cạnh $\ell = C_5^2 = 10$, và số miền m theo công thức Euler là

$$m = \ell + 2 - n = 12 - 5 = 7.$$

Mặt khác, vì mỗi miền biểu diễn là một tam giác (do K_5 là đồ thị đầy đủ) và mỗi cạnh là cạnh chung của 2 miền nên ta có $\ell = \frac{3 \times 7}{2} = \frac{21}{2}$ không phải là số nguyên, vô lí. Như vậy đồ thị K_5 không phải là đồ thị phẳng.

58. Rõ ràng mỗi cây là một đồ thị phẳng, vì ta có thể biểu diễn cây theo sơ đồ sau : Xuất phát từ một đỉnh tùy ý của cây, ta biểu diễn các cạnh xuất phát từ nó, sau đó từ mỗi đỉnh láng giềng của nó, ta vẽ các cạnh xuất phát từ các đỉnh này như ở hình 27.

Bằng cách biểu diễn như trên, ta thấy rằng cây là một đồ thị phẳng, do đó bụi là hợp các cây không có đỉnh chung cũng là đồ thị phẳng.



Hình 27

59. Theo bài tập 51, ta thấy rằng đồ thị thu được là một bụi, và theo bài tập 58 thì bụi là đồ thị phẳng, do vậy đồ thị thu được là một đồ thị phẳng.

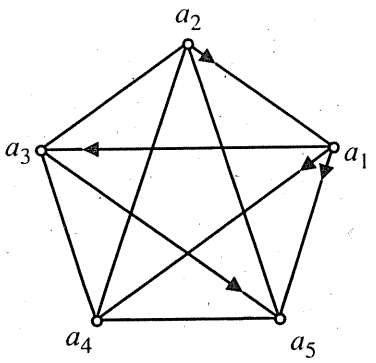
§6. MỘT SỐ LOẠI ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

60. Tổng số ván cờ là $C_5^2 = 10$ nên tổng số điểm của tất cả các đấu thủ là 10 (trong mỗi ván, tổng số điểm thu được của cả hai đấu thủ trong ván đó đúng bằng 1). Gọi a_i là điểm của người nhiều điểm thứ i, ta có $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$.

Vì người a_1 không hòa trận nào và người a_2 không thua trận nào nên người a_1 đấu thua người a_2. Vậy $a_1 \le 3$.

Vì điểm chênh lệch của hai người khác nhau lệch nhau ít nhất 0,5, và do $3+2.5+2+1.5+1=10$ cho nên chỉ có thể có $a_1 = 3$; $a_2 = 2,5$; $a_3 = 2$; $a_4 = 1,5$; $a_5 = 1$ mà thôi.

Ta biểu diễn bằng đồ thị có năm đỉnh a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 và nối các đỉnh giữa chúng bởi các cạnh có hướng (từ người thắng tới người thua) hoặc không có hướng (nếu hai người chơi hòa nhau).



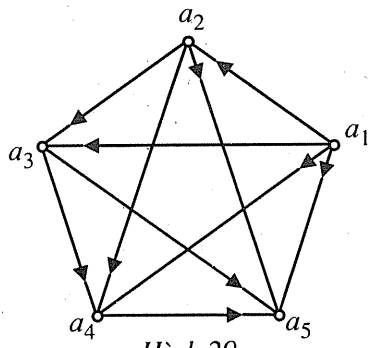
Hình 28

Do $a_1 = 3$ và người a_1 thua người a_2 nên 3 điểm thắng của anh ta là thắng 3 người còn lại a_3, a_4 và a_5. Do người a_2 không thua trận nào, ngoài 1 điểm thắng a_1, số điểm còn lại

(1,5) do đấu với a_3, a_4, a_5 cho nên anh ta hòa với tất cả 3 người này. Kết quả tổng số điểm trong nội bộ a_3, a_4, a_5 lần lượt là 1,5 ; 1 và 0,5 điểm. Do a_4 không thắng a_5 và a_5 có 0,5 điểm nên số điểm này là của a_5 thu được trong trận đấu với a_4, hai người hòa nhau. Như vậy trong nội bộ a_3 và a_4 thì a_4 có 0,5 điểm mà thôi, cho nên hai người này hòa nhau. Số điểm của a_3 thu được khi đấu với a_5 là $1,5-0,5=1$, cho nên a_3 thắng a_5.

Tóm lại, đồ thị ta vẽ tương ứng trong quá trình lập luận cho ta kết quả các ván gặp nhau của từng đôi một, và dễ kiểm tra thấy chúng phù hợp với giả thiết bài toán.

61. Ta biểu thị mỗi người bằng một đỉnh a_1, a_2, ..., a_5 sao cho đỉnh a_i tương ứng với người nhiều điểm thứ i xếp theo thứ tự điểm giảm dần.



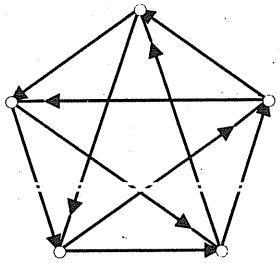
Hình 29

Do tổng số điểm của 5 người này là $C_5^2=10$ điểm và số điểm của họ là 5 số nguyên không âm đôi một khác nhau, lại có $10=4+3+2+1+0$, nên dễ thấy người a_i có đúng $5-i$ điểm.

Dễ thấy người thứ nhất thắng tất cả 4 người còn lại. Người thứ nhì chỉ thua người thứ nhất và thắng tất cả những người còn lại. Người thứ ba chỉ thua 2 người nhất, nhì và thắng 2 người thứ tư và thứ năm. Người thứ tư chỉ thắng người thứ năm.

Với mô hình : mỗi người thắng tất cả những người ít điểm hơn họ, ta dễ thấy rằng mô hình thỏa mãn được yêu cầu của đầu bài (xem hình 29).

62. Ta biểu diễn các đấu thủ tương ứng thành các đỉnh của một đồ thị. Hai đỉnh x và y của đồ thị được nối bởi một cạnh có hướng đi từ x tới y nếu như đấu thủ x thắng đấu thủ y. Bài toán được đặt ra là có thể có đồ thị n đỉnh sao cho các đỉnh có số cạnh xuất phát từ chúng bằng nhau hay không.


Hình 30

Trong hình 30 là một đồ thị thỏa mãn yêu cầu của bài toán với $n = 5$ đỉnh. Sau đây ta sẽ chứng minh cần và đủ để tồn tại một đồ thị có tính chất đầu bài yêu cầu là số đỉnh n phải là một số lẻ.

Do tổng số điểm đúng bằng số cạnh của đồ thị đầy đủ K_n nên nếu kết quả cuộc thi đấu là các đấu thủ có cùng số điểm là $\frac{C_n^2}{n} = \frac{n-1}{2}$ thì suy ra n là số lẻ.

Đảo lại, giả sử n là một số lẻ. Khi đó đồ thị K_n có bậc của các đỉnh là số chẵn. Theo định lí về đường một nét Euler khép kín, thì K_n có một đường một nét Euler khép kín như vậy. Trên đường một nét Euler, ta định một chiều đi và sẽ lấy hướng của tất cả các cạnh theo chiều đi này. Bằng cách đó, tại mỗi đỉnh, mỗi cạnh đi vào nó sẽ được tương ứng với cạnh đi ra khỏi nó, cho nên số cạnh xuất phát từ nó sẽ bằng số cạnh đi tới nó, tức là các đấu thủ có số điểm thắng đúng bằng số điểm thua và do đó bằng nhau.

63. Giả sử có u, v là hai đỉnh thuộc T_n có $d^+(u) = d^+(v)$, giả sử cạnh nối u, v có chiều từ u đến v. Xét đỉnh x bất kì của T_n ($x \neq u, x \neq v$). Do T_n là đồ thị phản chu trình (theo giả thiết) nên nếu $[v,x]$ là một cung của T_n thì $[u,x]$ cũng là một cung của T_n (vì nếu không, $C = (v,[v,x],x,[x,u],u,[u,v])$ là chu trình của T_n). Kết hợp với giả thiết cạnh nối u, v có chiều từ u đến v suy ra $d^+(u) < d^+(v)$, mâu thuẫn.

64. Nếu T_n phản chu trình thì theo bài toán trên, không có hai đỉnh nào có cùng một số cung xuất phát. Mặt khác số cung xuất phát từ các đỉnh là một số nguyên không âm nằm từ 0 tới $n-1$. Do các số này đôi một khác nhau, cho nên ta có thể đánh số các đỉnh bởi các số tự nhiên 1, 2, ..., n sao cho $d^+(i) = n - i$ cho mọi $i \leq n$.

65. Trước hết ta chứng minh rằng một Turnier bất kì luôn có một băng chuyền Hamilton. Để chứng minh khẳng định này, ta giả sử rằng tồn tại một Turnier không có băng chuyền Hamilton và sẽ chỉ ra một mâu thuẫn. Giả sử rằng T_n là một Turnier và $B = (x_1, x_2, ..., x_k)$ là một băng chuyền cơ bản có độ dài lớn nhất với $k < n$. Ta chọn một đỉnh tùy ý $x \notin \{x_1, x_2, ..., x_k\}$. Do tính cực đại của B, đỉnh x không phải là đỉnh xuất phát của cung nối x với x_1 và không phải là đỉnh đích của cung nối đỉnh x với đỉnh x_k. Giả sử rằng

$$i_0 = \max\{i : [x_i, x] \text{ là một cung trong } T_n\}.$$

Khi đó ta có $1 \le i_0 \le k-1$.

Rõ ràng rằng $B' = (x_1, x_2, ..., x_{i_0}, x, x_{1+i_0}, ..., x_k)$ là một băng chuyền cơ bản trong Turnier T_n với độ dài lớn hơn độ dài của B, mâu thuẫn với tính cực đại của độ dài của băng chuyền B.

Để chứng minh bài toán, ta nhận thấy rằng nếu T_n phản chu trình, thì T_n có đúng một băng chuyền Hamilton. Khẳng định này được suy ra trực tiếp từ định lí 2 đã chứng minh, vì một băng chuyền Hamilton chỉ có thể theo thứ tự từ nguồn xuống hạ lưu.

Đảo lại, chỉ cần chứng minh rằng ta có thể đánh số các đỉnh của Turnier thỏa mãn yêu cầu định lí 2 với các số 1, 2, ..., n, nếu như Turnier T_n chỉ có đúng một băng chuyền Hamilton.

Giả sử $B = (x_1, x_2, ..., x_n)$ là băng chuyền Hamilton duy nhất của một Turnier cho trước T_n, khi đó ta đánh số đỉnh x_i một cách đơn giản với số i và sẽ chỉ ra rằng cách đánh số này thỏa mãn yêu cầu rằng từ mỗi đỉnh x_i có cung đi tới tất cả các đỉnh với chỉ số lớn hơn nó.

Giả sử ngược lại là điều giả sử không đúng.

Giả sử x_s là đỉnh với chỉ số nhỏ nhất không có cung nối với tất cả các đỉnh có chỉ số cao hơn. Trong tất cả các chỉ số i của đỉnh x_i với $i > s$, giả sử đỉnh x_t là đỉnh có chỉ số lớn nhất sao cho từ đỉnh này có một cung đi tới đỉnh x_s. Khi đó rõ ràng ta có $s \le n-2$ và $t > s+1$. Bây giờ ta có

$$B' = (x_1 x_2 ... x_{s-1})(x_{s+1} x_{s+2} ... x_{t-1} x_t x_s)(x_{t+1} x_{t+2} ... x_n),$$

là một băng chuyền Hamilton khác với B (ở đây có thể bỏ đi nhóm đỉnh $(x_1 x_2 ... x_{s-1})$ cho trường hợp $s = 1$ và nhóm cuối cho trường hợp $t = n$). Điều này là điều mâu thuẫn với giả thiết của chúng ta, rằng đồ thị đã cho chỉ có đúng một băng chuyền Hamilton mà thôi. Khẳng định của bài toán được chứng minh.

CHUYÊN ĐỀ 3. ỨNG DỤNG SỐ PHỨC VÀO HÌNH HỌC PHẲNG

§1. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC SỐ PHỨC

1. Coi hình bình hành $ABCD$ nằm trong mặt phẳng phức ; $\overrightarrow{AB}$ biểu diễn số phức u, $\overrightarrow{AD}$ biểu diễn số phức v thì $\overrightarrow{AC}$ biểu diễn số phức $u+v$, $\overrightarrow{BD}$ biểu diễn số phức $v-u$.

Vậy cần chứng minh $|u+v|^2+|u-v|^2=2\left(|u|^2+|v|^2\right)$

tức là $(u+v)(\overline{u}+\overline{v})+(u-v)(\overline{u}-\overline{v})=2(u\overline{u}+v\overline{v})$. Dễ thấy điều đó.

2. Xét các điểm A, B theo thứ tự biểu diễn số phức z, w. Khi đó $|z|=OA, |w|=OB, |z-w|=AB$ (O là gốc tọa độ).

Nếu $w=0$, luôn có $|z-w|=|z|-|w|$.

Nếu $w\neq 0$, khi O, A, B không thẳng hàng thì trong tam giác OAB, ta có $AB>OA-OB$ nên $|z-w|>|z|-|w|$.

Khi O, A, B thẳng hàng, viết được $\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{OB}$, k là số thực, tức là $z=kw$ và ta có : $|z-w|=|k-1||w|$, $|z|-|w|=(|k|-1)|w|$;

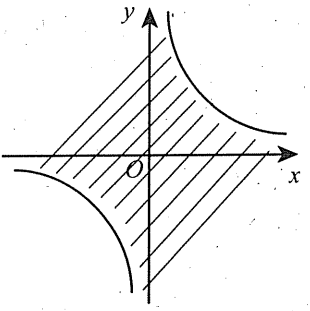
rõ ràng $|k-1|\geq|k|-1$ và có dấu đẳng thức khi và chỉ khi $k\geq 1$.

Vậy với mọi z, w, ta có $|z-w|\geq|z|-|w|$ và có dấu đẳng thức khi và chỉ khi $w=0$ hoặc $w\neq 0$, $z=kw$, k là số thực lớn hơn hoặc bằng 1.

3. a) $z=x+yi$, $(x, y\in\mathbb{R})$ thì $z^2=x^2-y^2+2xyi$ nên

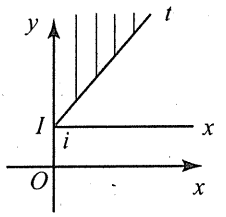
$$\text{Im}\left(z^2\right)=2xy\leq 2\Leftrightarrow xy\leq 1.$$

Biểu diễn hình học của tập cần tìm là tập các điểm thuộc "miền ngoài" của hypebol vuông $y=\dfrac{1}{x}$ (xem hình 1).



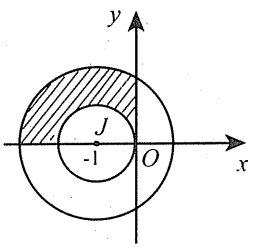
Hình 1

b) I là điểm biểu diễn điểm i, It là tia sao cho góc định hướng $(Ix, It) = \dfrac{\pi}{3}$ thì tập cần tìm là miền trong của góc tạo bởi hai tia It, Iy (xem hình 2).



Hình 2

c) J là điểm biểu diễn số -1, xét hình vành khăn gồm các điểm ở giữa hai đường tròn tâm J bán kính bằng 1 và bằng 2. Tập cần tìm là phần vành khăn đó nằm trong góc phần tư thứ hai (xem hình 3).



Hình 3

4. Coi tâm đường tròn là gốc tọa độ, A_0 biểu diễn số R, n-giác $A_0A_1...A_{n-1}$ định hướng thuận thì $A_j = R\varepsilon_j$ (ε_j là căn bậc n thứ j của đơn vị) ($j = 0, 1, 2, ..., n-1$) thì $A_0A_k = |\varepsilon_k - 1|R$, $(k = 1, 2, ..., n-1)$. Từ đó :

$$\prod_{k=1}^{n-1} A_0A_k{}^2 = \prod_{k=1}^{n-1}(1-\varepsilon_k)\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\overline{\varepsilon_k}\right).R^{2(n-1)}.$$

Ta đã biết $z^n - 1 = \prod_{j=0}^{n-1}(z-\varepsilon_j) = (z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z-\varepsilon_k)$

nên $1 + z + z^2 + ... + z^{n-1} = \dfrac{z^n-1}{z-1} = \prod_{k=1}^{n-1}(z-\varepsilon_k)$.

Từ đó $\prod_{k=1}^{n-1}(1-\varepsilon_k) = n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\overline{\varepsilon_k}\right)$, suy ra $\prod_{k=1}^{n-1} A_0A_k = nR^{n-1}$.

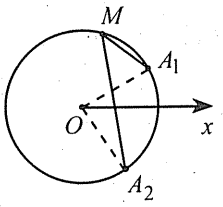
5. Ta có

$$e^{i\varphi} - e^{i\psi} = e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}}\left(e^{i\frac{\varphi-\psi}{2}} - e^{-i\frac{\varphi-\psi}{2}}\right) = e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}}.2i\sin\frac{\varphi-\psi}{2} = 2\sin\frac{\varphi-\psi}{2}.e^{i\frac{\varphi+\psi+\pi}{2}}$$

Vậy $\left|e^{i\varphi} - e^{i\psi}\right| = 2\left|\sin\dfrac{\varphi-\psi}{2}\right|$.

Khi $\sin\dfrac{\varphi-\psi}{2}=0$, (tức là $\varphi-\psi=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$) thì $e^{i\varphi}-e^{i\psi}=0$, nó không có argumen xác định. Khi $\sin\dfrac{\varphi-\psi}{2}>0$ thì $e^{i\varphi}-e^{i\psi}$ có argumen là $\dfrac{\varphi+\psi+\pi}{2}$, khi $\sin\dfrac{\varphi-\psi}{2}<0$ thì $e^{i\varphi}-e^{i\psi}$ có argumen là $\dfrac{\varphi+\psi-\pi}{2}$.

Hệ quả. Gọi M, A_1, A_2 là ba điểm phân biệt trên đường tròn đơn vị theo thứ tự biểu diễn các số phức $e^{i\varphi}, e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}$. Khi đó góc định hướng $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right)=\varphi$, $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA_1}\right)=\varphi_1$, $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA_2}\right)=\varphi_2$, $\left(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}\right)=\varphi_2-\varphi_1$ (xem hình 4).



Hình 4

Ta có góc định hướng

$$\left(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MA_2}\right)=\arg\frac{e^{i\varphi_2}-e^{i\varphi}}{e^{i\varphi_1}-e^{i\varphi}}=\arg\frac{2\sin\dfrac{\varphi_2-\varphi}{2}\,e^{i\frac{\varphi_2+\varphi+\pi}{2}}}{2\sin\dfrac{\varphi_1-\varphi}{2}\,e^{i\frac{\varphi_1+\varphi+\pi}{2}}}$$

$$=\arg\left(\frac{\sin\dfrac{\varphi_2-\varphi}{2}}{\sin\dfrac{\varphi_1-\varphi}{2}}\,e^{i\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}}\right)=\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\ (\mathrm{mod}\,\pi)=\frac{\left(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}\right)}{2}\ (\mathrm{mod}\ \pi).$$

6. Ta có $\left|\dfrac{2iz-i+1}{z-2-2i}\right|<1 \Leftrightarrow \dfrac{2\left|z-\frac{1}{2}(1+i)\right|}{\left|z-2(1+i)\right|}<1$

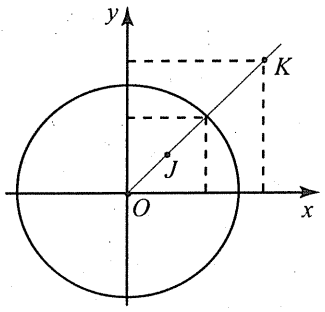
$$\Leftrightarrow 4\left(z-\frac{1}{2}(1+i)\right)\left(\bar{z}-\frac{1}{2}(1-i)\right)<\left(z-2(1+i)\right)\left(\bar{z}-2(1-i)\right)$$

(với điều kiện $z\neq 2(1+i)$)

$\Leftrightarrow |z|^2<2$ (khi $|z|<2$ thì $z\neq 2(1+i)$).

Vậy ta được tập các điểm nằm bên trong đường tròn $\mathscr{C}$ tâm O bán kính $\sqrt{2}$.

Chú ý. Gọi J là điểm biểu diễn $\frac{1+i}{2}$, K là điểm biểu diễn $2(1+i)$, M là điểm biểu diễn z thì $\frac{2\left|z-\frac{1}{2}(1+i)\right|}{\left|z-2(1+i)\right|}=1$ có tập nghiệm được biểu diễn bởi các điểm M mà $2MJ = MK$: đường tròn Apollonius đó chính là đường tròn $\mathscr{C}$ (xem hình 5).



Hình 5

7. Coi trục thực là đường thẳng CD, gốc tọa độ O là trung điểm của CD. Giả sử các điểm A, B, C, D, E, F, G theo thứ tự biểu diễn các số a, b, c, d, e, f, g.

Khi đó c, d là hai số thực phân biệt, $c+d=0$.

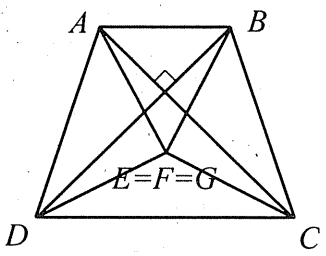
Ta có $a-e=\varepsilon i(d-e)$, $c-g=\varepsilon i(b-g)$ $(\varepsilon=\pm 1)$ diễn tả điều kiện về tam giác AED, CGB. Từ đó $e=\frac{a-\varepsilon id}{1-\varepsilon i}$ (1), $g=\frac{c-\varepsilon ib}{1-\varepsilon i}$ (2).

Điểm F cách đều C, D được diễn tả bởi $f=it$, t là số thực. Điểm F trùng với E, G hoặc là đỉnh tam giác vuông cân EFG cùng hướng với các tam giác vuông cân đã dựng được diễn tả bởi $e-f=\varepsilon i(g-f)$. Hai điều kiện này được viết lại là $e-it=\varepsilon i(g-it)$ (3).

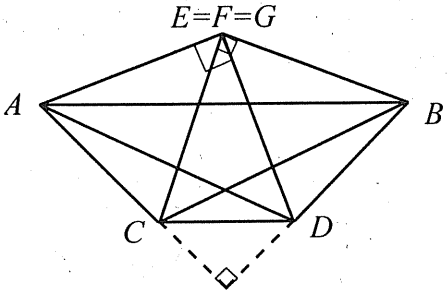
Từ (1) và (2) suy ra :

$$(3)\Leftrightarrow(\varepsilon+i)t=\frac{a-\varepsilon id}{1-\varepsilon i}-\varepsilon i\frac{c-\varepsilon ib}{1-\varepsilon i}=\frac{a-b}{1-\varepsilon i}\Leftrightarrow t=\frac{a-b}{2}\varepsilon.$$

Vậy $a-b\in\mathbb{R}$ là điều kiện để tồn tại F là hai đường thẳng AB, CD cùng phương. Các điểm E, F, G trùng nhau khi và chỉ khi F trùng G, tức là $\frac{a-\varepsilon id}{1-\varepsilon i}=\frac{c-\varepsilon ib}{1-\varepsilon i}$, nó tương đương với $a-c=\varepsilon i(d-b)$ và có nghĩa là $BD=AC$ và các đường thẳng BD, AC vuông góc với nhau (và ε phải thỏa mãn $\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{CA}\right)=\varepsilon\frac{\pi}{2}\bmod 2\pi$) (xem hình 6).



Hình 6a. ABCD là hình thang cân, hai đường chéo AC, BD vuông góc.



Hình 6b. ABCD là hình thang cân, hai cạnh bên AC, BD vuông góc.

§2. TÍCH VÔ HƯỚNG, TÍCH LỆCH. ĐƯỜNG THẲNG TRONG MẶT PHẲNG PHỨC

8. Gọi $\vec{z}, \vec{w}$ là hai vectơ biểu diễn hai số phức z, w khác 0. Khi đó iz được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v}$ mà $\left(\vec{z}, \vec{v}\right) = \frac{\pi}{2} \bmod 2\pi$ (và $\left|\vec{z}\right| = \left|\vec{v}\right|$).

Ta có $\langle iz, w\rangle = \vec{v}.\vec{w} = |z||w| \cos\left(\vec{v}, \vec{w}\right) = |z||w| \cos\left(\left(\vec{z}, \vec{w}\right) - \left(\vec{z}, \vec{v}\right)\right)$

$= |z||w| \cos\left(\left(\vec{z}, \vec{w}\right) - \frac{\pi}{2}\right)$;

$[z, w] = |z||w| \sin\left(\vec{z}, \vec{w}\right)$.

Vậy $\langle iz, w\rangle = [z, w] \Leftrightarrow \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha$ (ở đây $\alpha = \left(\vec{z}, \vec{w}\right)$).

Tương tự, $[iz, w] = -\langle z, w\rangle \Leftrightarrow \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha$ (ở đây $\alpha = \left(\vec{z}, \vec{w}\right)$).

9. Gọi λ là số phức mà phép vị tự - quay tâm E với hệ số vị tự $|\lambda|$, góc quay $\arg\lambda$ biến F thành G (λ là số phức không thực).

Coi O là gốc tọa độ, A, B, A', B' theo thứ tự biểu diễn các số phức $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$. Khi đó $\beta = \lambda\alpha$, $\beta' = \lambda\alpha'$. Trung điểm U của OA biểu diễn $u = \frac{\alpha}{2}$, trung điểm V của $A'B$ biểu diễn $v = \frac{\alpha' + \beta}{2}$, trung điểm W của OB' biểu diễn $w = \frac{\beta'}{2}$.

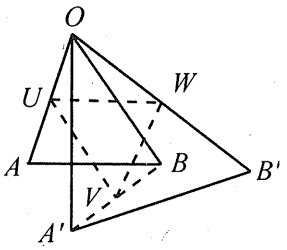
Ba điểm U, V, W trùng nhau hoặc tạo thành tam giác UVW đồng dạng cùng hướng với tam giác EFG khi và chỉ khi $\lambda(v-u)=w-u$ tức là $\lambda\left(\frac{\alpha'+\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\beta'-\alpha}{2}$; nó tương đương với

$$\lambda(\alpha'+\beta-\alpha)=\beta'-\alpha \Leftrightarrow \left(\lambda^2-\lambda\right)\alpha=-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda^2-\lambda+1\right)\alpha=0 \Leftrightarrow \lambda^2-\lambda+1=0$$

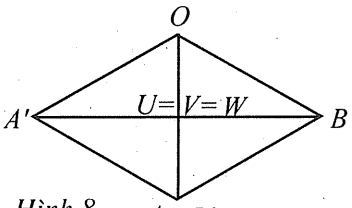
$$\Leftrightarrow \lambda^3+1=0 \ (\lambda\neq -1) \Leftrightarrow \lambda=e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$$

tức là EFG là tam giác đều (xem hình 7).



Hình 7

Chú ý. Khi EFG là tam giác đều thì ba điểm U, V, W không tạo thành tam giác nếu và chỉ nếu U, V, W trùng nhau, tức là B' trùng với A. (xem hình 8).

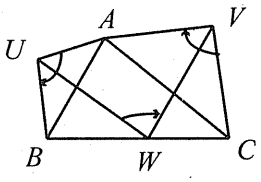


Hình 8 $A \equiv B'$

10. Gọi λ là số phức mà phép vị tự - quay tâm G với hệ số vị tự $|\lambda|$, góc quay $\arg\lambda$ biến E thành F (λ là số phức không thực).

Coi A là gốc tọa độ ; B, C, U, V, W biểu diễn theo thứ tự các số phức b, c, u, v, w thì ta có :

$$b-u=-\lambda u,\ -v=\lambda(c-v),\ w=\frac{b+c}{2} \text{ (xem hình 9).}$$



Hình 9

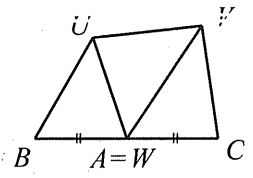
Từ đó $u=\frac{b}{1-\lambda}$, $v=\frac{-\lambda c}{1-\lambda}$.

Ba điểm U, V, W trùng nhau hoặc tạo thành tam giác UVW đồng dạng cùng hướng với tam giác EFG khi và chỉ khi $v-w=\lambda(u-w)$ tức là

$$\frac{\lambda c}{1-\lambda}-\frac{b+c}{2}=\lambda\left(\frac{b}{1-\lambda}-\frac{b+c}{2}\right),$$

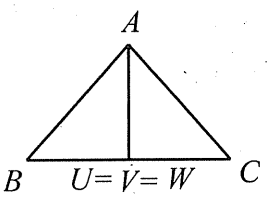
nó tương đương với $\frac{\lambda-1}{2}(b+c)=\frac{\lambda}{1-\lambda}(b+c)$. Từ đó :

Khi $b+c=0$, tức A là trung điểm của đoạn BC thì EFG là tam giác tùy ý (xem hình 10).



Hình 10

Khi A không phải là trung điểm của BC thì ta được điều kiện $2\lambda+(\lambda-1)^2=0$ tức là $\lambda^2+1=0$ nên $\lambda=\pm i$ và suy ra EFG phải là tam giác vuông cân tại G. Khi đó $U\equiv V\equiv W$ nếu và chỉ nếu BCA là tam giác vuông cân tại A cùng hướng với EFG (xem hình 11).



Hình 11

11. Coi A, B, C, U, V là các điểm của mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số phức a, b, c, u, v. Đặt $\lambda=e^{i\varphi}$ thì ta có

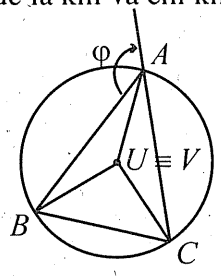
$$a-u=e^{i\varphi}(b-u)=\lambda(b-u)\ ;\ c-v=e^{i\varphi}(a-v)=\lambda(a-v)$$

từ đó $u=\dfrac{a-\lambda b}{1-\lambda}$, $v=\dfrac{c-\lambda a}{1-\lambda}$.

a) Các điểm U, V trùng nhau khi và chỉ khi $\lambda=-\dfrac{c-a}{b-a}$ tức là khi và chỉ khi :

$$|c-a|=|b-a| \text{ và } \varphi=\arg\left(-\frac{c-a}{b-a}\right) \bmod 2\pi.$$

Các điều kiện đó có nghĩa là tam giác ABC là cân tại đỉnh A và $\varphi=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})+(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ và khi đó dễ thấy $U\equiv V$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (xem hình 12).



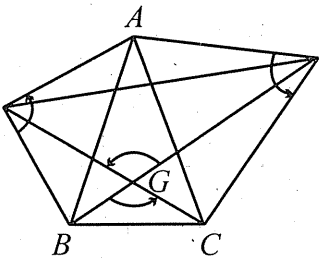
Hình 12

b) Điểm G biểu diễn số phức g thì $c-g=e^{2i\varphi}(b-g)$ tức là $g=\dfrac{c-\lambda^2 b}{1-\lambda^2}$.

Suy ra $g-v=\dfrac{c-\lambda^2 b}{1-\lambda^2}-\dfrac{c-\lambda a}{1-\lambda}=-\dfrac{\lambda}{1-\lambda^2}\big((c-a)+\lambda(b-a)\big)$

$g-u=\dfrac{c-\lambda^2 b}{1-\lambda^2}-\dfrac{a-\lambda b}{1-\lambda}=\dfrac{1}{1-\lambda^2}\big((c-a)+\lambda(b-a)\big)$

Do $U\neq V$ nên $c-a+\lambda(b-a)\neq 0$ (theo câu a), tức là $g-u\neq 0$, vậy ta có $\dfrac{g-v}{g-u}=-\lambda$. Suy ra $|g-v|=|g-u|$ tức là G cách đều U, V và $(\overrightarrow{GV},\overrightarrow{GU})=\arg(-\lambda)=\varphi+(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.



Hình 13

Nếu $(\overrightarrow{GU},\overrightarrow{GV})=2\varphi \bmod 2\pi$ thì suy ra $\varphi=\pm\dfrac{\pi}{3} \bmod 2\pi$ (xem hình 13).

12. Coi $\mathscr{C}$ là đường tròn đơn vị trong mặt phẳng phức, A, B, C theo thứ tự biểu diễn các số phức α, β, γ, $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$.

Điểm B_1 đối xứng của B qua đường kính OA biểu diễn số phức $b_1 = \alpha^2\overline{\beta}$.

Điểm B_2 đối xứng của B qua đường thẳng AC biểu diễn số $b_2 = \alpha + \gamma - \alpha\gamma\overline{\beta}$.

Vì B khác C nên $b_2 - \gamma \neq 0$. Chỉ cần chứng minh $\dfrac{b_1 - \gamma}{b_2 - \gamma}$ là số thực, tức là

$\dfrac{\alpha^2\overline{\beta} - \gamma}{\alpha - \alpha\gamma\overline{\beta}} = \dfrac{\alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\gamma}{1 - \gamma\overline{\beta}}$ là số thực.

Dễ thấy $\dfrac{\alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\gamma}{1 - \gamma\overline{\beta}} = \dfrac{\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\gamma}}{1 - \overline{\gamma}\beta}$.

13. a) Khi $|\alpha| \neq |\beta|$, với mọi số phức ω, phương trình $\alpha z + \beta\overline{z} + \gamma = \omega$ tức là $\alpha z + \beta\overline{z} + \gamma - \omega = 0$ có nghiệm z duy nhất (xem mục 2b). Vậy f là một song ánh. Với ba điểm M_0, M_1, M_2 theo thứ tự biểu diễn các số phức z_0, z_1, z_2 thì ảnh của chúng $f(M_0)$, $f(M_1)$, $f(M_2)$ theo thứ tự biểu diễn các số phức z'_0, z'_1, z'_2 (xác định bởi $z'_j = \alpha z_j + \beta\overline{z_j} + \gamma$, $j = 0, 1, 2$) và dễ tính được

$$[z'_0, z'_1] + [z'_1, z'_2] + [z'_2, z'_0] = \left(|\alpha|^2 - |\beta|^2\right)\left([z_0, z_1] + [z_1, z_2] + [z_2, z_0]\right).$$

Từ đó suy ra nếu M_0, M_1, M_2 thẳng hàng thì $f(M_0)$, $f(M_1)$, $f(M_2)$ thẳng hàng ; còn khi M_0, M_1, M_2 không thẳng hàng, tam giác $M_0M_1M_2$ và $f(M_0)f(M_1)f(M_2)$ là các tam giác có cùng hướng nếu $|\alpha| > |\beta|$, ngược hướng nếu $|\alpha| < |\beta|$ (xét diện tích đại số của tam giác định hướng).

b) Khi $|\alpha| = |\beta| \neq 0$, ta đã biết phương trình với ẩn z, $\alpha z + \beta\overline{z} + \gamma - \omega = 0$ (ω cho trước) có nghiệm khi và chỉ khi $\alpha\left(\overline{\gamma - \omega}\right) = \overline{\beta}(\gamma - \omega)$.

Vậy tập ảnh của f tức là tập các điểm biểu diễn tập

$$\left\{\omega \in \mathbb{C} \mid \text{có } z \text{ để } \alpha z + \beta\overline{z} + \gamma = \omega\right\} = \left\{\omega \in \mathbb{C} \mid \alpha\left(\overline{\gamma - \omega}\right) = \overline{\beta}(\gamma - \omega)\right\}$$

$$= \left\{\omega \in \mathbb{C} \mid \omega - \gamma = \frac{\alpha}{\overline{\beta}}\overline{(\omega - \gamma)}\right\}.$$

trong đó $\left|\frac{\alpha}{\overline{\beta}}\right|=1$ nên tập đó là một đường thẳng Δ (đi qua điểm biểu diễn γ, có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ biểu diễn số phức u sao cho $\frac{u}{\overline{u}}=\frac{\alpha}{\overline{\beta}}$).

Với mỗi điểm P thuộc Δ biểu diễn số ω (sao cho $\omega-\gamma=\frac{\alpha}{\overline{\beta}}\left(\overline{\omega-\gamma}\right)$, tức là $\alpha\left(\overline{\gamma-\omega}\right)=\overline{\beta}\left(\gamma-\omega\right)$), nghịch ảnh của P bởi f là tập các điểm M biểu diễn các số phức z mà $\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=\omega$, tức là biểu diễn tập $\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma-\omega=0\right\}$. Với điều kiện $\alpha\left(\overline{\gamma-\omega}\right)=\overline{\beta}\left(\gamma-\omega\right)$, tập đó là tập các số phức được biểu diễn bởi các điểm thuộc một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{v}$ biểu diễn số phức v mà $\frac{v}{\overline{v}}=-\frac{\beta}{\alpha}$.

c) Khi $|\alpha|=|\beta|=0$ thì rõ ràng ảnh của f là tập hợp chỉ gồm một điểm biểu diễn số phức γ.

14. 1) Điểm M biểu diễn số phức z là điểm bất động của f khi và chỉ khi z là nghiệm của phương trình $\left(\alpha-1\right)z+\beta\overline{z}+\gamma=0$.

Vậy tập các điểm bất động của f là một đường thẳng khi và chỉ khi $|\alpha-1|=|\beta|\neq 0$ và $\left(\overline{\alpha-1}\right)\gamma=\beta\overline{\gamma}$.

2) Trục Ox có phương trình $z-\overline{z}=0$ nên dễ thấy đường thẳng các điểm bất động của f là trục Ox khi và chỉ khi $\gamma=0,\beta=1-\alpha\neq 0$, và điều kiện $|\alpha|\neq|\beta|$ trở thành $|\alpha|\neq\|1-\alpha\|$ tức là $|\alpha|^2-|1-\alpha|^2=-1+2\,\mathrm{Re}\,\alpha\neq 0$. Vậy điều kiện cần tìm là : $\alpha\neq 1,\ \mathrm{Re}\,\alpha\neq\frac{1}{2},\ \beta=1-\alpha,\ \gamma=0$; công thức của f là $z\mapsto z'=\alpha z+\left(1-\alpha\right)\overline{z}$.

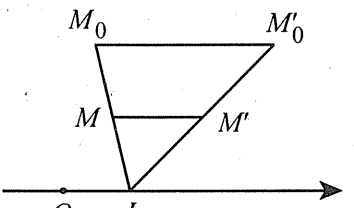
a) Nếu $\mathrm{Re}\,\alpha=1$ thì viết $\alpha=1+ki$ ($k\in\mathbb{R},\ k\neq 0$ vì $\alpha\neq 1$), ta được công thức của f là $z\mapsto z'=\left(1+ki\right)z-ki\overline{z}$.

• Khi đó $z'-z=ki\left(z-\overline{z}\right)=-2k\,\mathrm{Im}\,z\in\mathbb{R}$ nên khi M không thuộc Ox (tức là $\mathrm{Im}\,z\neq 0$) thì M khác $f(M)$ và $\overrightarrow{Mf(M)}$ có phương của Ox.

• Do $\left|1+ki\right|^2-\left|ki\right|^2=1$ nên f bảo tồn diện tích đại số của tam giác định hướng (xem bài tập 13).

• Lấy $M_0\notin Ox$ biểu diễn số phức z_0, $\mathrm{Im}\,z_0\neq 0$ thì M'_0 biểu diễn số phức z'_0 sao cho $\mathrm{Im}\,z'_0=\mathrm{Im}\,z_0$ tức là $z'_0-z_0\in\mathbb{R}$ và ta được $k=-\dfrac{1}{2}\dfrac{z'_0-z_0}{\mathrm{Im}\,z_0}$.

Chú ý : Khi biết M_0, M'_0 thì với mọi M không thuộc Ox, không thuộc đường thẳng $M_0M'_0$, dễ dựng ảnh $f(M)$ của M bằng cách dựng giao J của đường thẳng M_0M với Ox, để ý rằng $f(J)=J$ và f biến đường thẳng thành đường thẳng (xem hình 14).



Hình 14

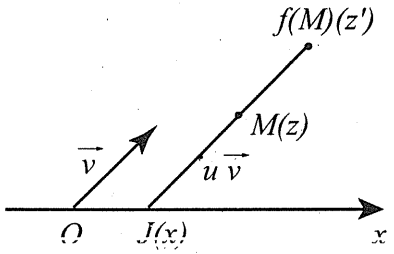
b) Nếu $\mathrm{Re}\,\alpha\neq 1$ thì số phức $\omega=i(\alpha-1)$ không phải là số thực do $\omega-\overline{\omega}=2i(\mathrm{Re}\,\alpha-1)$) nên vectơ $\vec{v}$ biểu diễn ω không có phương của Ox và mọi số phức z viết được dạng $z=x+u\omega=x+u(\alpha-1)i$ với x, u thuộc $\mathbb{R}$, Khi đó $z'=\alpha z+(1-\alpha)\overline{z}=\alpha\left(x+u(\alpha-1)i\right)+(1-\alpha)\left(x-u\left(\overline{\alpha}-1\right)i\right)$

$=x+u(\alpha-1)i\left(\alpha+\overline{\alpha}-1\right)$

$=x+u(2\,\mathrm{Re}\,\alpha-1)\omega$ (xem hình 15).

• Suy ra với mọi điểm $M\notin Ox$ (tức $u\neq 0$) thì $f(M)\notin Ox$ và đường thẳng $Mf(M)$ có phương của $\vec{v}$ vì

$$z'-z=2u(\mathrm{Re}\,\alpha-1)\omega.$$



Hình 15

• M biểu diễn $z=x+u\omega, u\neq 0$ thì $Mf(M)$ giao với Ox tại J biểu diễn số thực x. Công thức của biến đổi f là $z=x+u\omega\mapsto z'$ nói trên chứng tỏ $\overrightarrow{Jf(M)}=(2\,\mathrm{Re}\,\alpha-1)\overrightarrow{JM}$, vậy hệ số của phép co dãn f là $2\,\mathrm{Re}\,\alpha-1$ $(\neq 0)$.

15. Coi đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là đường tròn đơn vị, A, B, C theo thứ tự biểu diễn các số phức α, β, γ, $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$, M biểu diễn số phức z, H_0, H_1, H_2 theo thứ tự biểu diễn số phức z_0, z_1, z_2. Khi đó :

$$z_0 = \frac{z}{2} + \frac{\beta+\gamma}{2} - \frac{\beta\gamma}{2}\bar{z}\ ; \qquad z_1 = \frac{z}{2} + \frac{\gamma+\alpha}{2} - \frac{\gamma\alpha}{2}\bar{z}\ ; \qquad z_2 = \frac{z}{2} + \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha\beta}{2}\bar{z}$$

nên trọng tâm K của hệ $\{H_0, H_1, H_2\}$ biểu diễn số phức

$$w = \frac{1}{3}(z_0 + z_1 + z_2) = \frac{z}{2} + \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} - \frac{1}{6}\overline{\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}\right)}\bar{z}$$

(để ý rằng $(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)\overline{\alpha\beta\gamma} = \overline{\alpha+\beta+\gamma}$).

a) Hệ số của z ở vế phải là $\frac{1}{2}$, của $\bar{z}$ là $-\frac{1}{6}\overline{\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}\right)}$, mà $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{6}|\alpha+\beta+\gamma|$ và có dấu đẳng thức khi và chỉ khi $\alpha = \beta = \gamma$ nên ánh xạ $z \mapsto w$ là một song ánh. Vậy quỹ tích của K là toàn bộ mặt phẳng phức.

b) $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow w = \frac{1}{2}z$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \frac{1}{6}\overline{\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}\right)}\bar{z} \Leftrightarrow 2\left(\overline{\alpha+\beta+\gamma}\right) = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}.z\,.$$

Khi $\alpha+\beta+\gamma = 0$ tức khi tam giác ABC là tam giác đều thì mọi z đều thỏa mãn phương trình.

Khi $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, có một số z duy nhất là $2\frac{\alpha\beta\gamma.\left(\overline{\alpha+\beta+\gamma}\right)}{\alpha+\beta+\gamma}$.

c) Trọng tâm G của tam giác ABC biểu diễn số phức $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ nên K trùng với G khi và chỉ khi $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = w \Leftrightarrow \frac{z}{2} - \frac{1}{6}\overline{\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}\right)}\bar{z} = 0$.

Xét hệ số của z và của $\bar{z}$ ở vế trái của phương trình, suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $z = 0$. Vậy K trùng với G khi và chỉ khi M trùng với O tức là M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

16. Coi đường tròn đã cho là đường tròn đơn vị của mặt phẳng phức, A_j biểu diễn số phức α_j $(j=1, 2, 3,4)$. Xét điểm A_{12} : nó cách đều A_1, A_2 nên biểu diễn số $\alpha_{12}=l(\alpha_1+\alpha_2)$, $l\in\mathbb{R}$, mà O là trọng tâm của hệ $\{A_1, A_2, A_{12}\}$ nên $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_{12}=0$, do đó $l=-1$ và như vậy $\alpha_{12}=-(\alpha_1+\alpha_2)$. Điểm A'_{12} là điểm đối xứng của A_{12} qua đường thẳng A_3A_4 nên biểu diễn số

$$\alpha'_{12}=-\alpha_3\alpha_4\overline{\alpha_{12}}+\alpha_3+\alpha_4=\alpha_3\alpha_4\left(\overline{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}\right).$$

Từ đó $|\alpha'_{12}|=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4|=4|\overrightarrow{OG}|$, trong đó G là trọng tâm của hệ bốn điểm $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

Tương tự : $|\alpha'_{12}|=|\alpha'_{13}|=|\alpha'_{14}|=|\alpha'_{23}|=|\alpha'_{24}|=|\alpha'_{34}|=4|\overrightarrow{OG}|$.

17. Coi đường tròn tâm O đã cho là đường tròn của mặt phẳng phức, A_j biểu diễn số phức α_j $(j=1, 2, 3, 4)$, P biểu diễn số phức ω. Điểm P_{jk} là điểm đối xứng của P qua đường thẳng A_jA_k nên biểu diễn số phức $\omega_{jk}=-\alpha_j\alpha_k\overline{\omega}+\alpha_j+\alpha_k$. Trung điểm Q của $P_{12}P_{34}$ biểu diễn số phức $\frac{1}{2}\left(-(\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4)\overline{\omega}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\right)$, trọng tâm G của hệ bốn điểm $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ biểu diễn số phức $\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)$ nên điểm O' đối xứng của O qua G biểu diễn số phức $\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)$, từ đó vectơ $\overrightarrow{O'Q}$ biểu diễn số phức $-\frac{1}{2}(\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4)\overline{\omega}$. Tương tự, $\overrightarrow{O'R}$ biểu diễn số $-\frac{1}{2}(\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_4)\overline{\omega}$, $\overrightarrow{O'S}$ biểu diễn số $-\frac{1}{2}(\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3)\overline{\omega}$.

Dễ thấy rằng $\left[\overrightarrow{O'Q}, \overrightarrow{O'R}\right]=\left[\overrightarrow{O'R}, \overrightarrow{O'S}\right]=\left[\overrightarrow{O'S}, \overrightarrow{O'Q}\right]=0$, từ đó O', Q, R, S thẳng hàng (bốn điểm này có thể trùng nhau, chẳng hạn khi P trùng với O tức là $\omega=0$). Khi P chạy trên một đường thẳng qua O ($\omega=l\omega_0$, $l\in\mathbb{R}$) thì dễ thấy Q, R, S chạy trên một đường thẳng qua O'.

18. Coi đường tròn tâm O bán kính R đã cho là đường tròn đơn vị ($R=1$) trong mặt phẳng phức, A_j biểu diễn số phức α_j ($j=1, 2, 3, 4$). (xem ví dụ 8, 9 §2).

1) Rõ ràng G biểu diễn $\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)$, H biểu diễn $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ nên $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OH}$.

2) H_1 chẳng hạn biểu diễn số phức $\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ nên $\overrightarrow{H_1H}$ biểu diễn số phức α_1, từ đó $\left|\overrightarrow{H_1H}\right|=1$. Tương tự $\left|\overrightarrow{H_jH}\right|=1,\ j=2,3,4$.

3) E_1 chẳng hạn biểu diễn số phức $\frac{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{2}$ mà E biểu diễn số phức $\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{2}$ nên $\overrightarrow{E_1E}$ biểu diễn số phức $\frac{\alpha_1}{2}$, từ đó $\left|\overrightarrow{E_1E}\right|=\frac{1}{2}$. Tương tự $\left|\overrightarrow{E_jE}\right|=\frac{1}{2},\ j=2,3,4$.

4) Chẳng hạn trung điểm M_{12} của đoạn A_1A_2 biểu diễn $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$ nên $\overrightarrow{M_{12}E}$ biểu diễn $\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}$ mà $\langle\alpha_3+\alpha_4,\alpha_3-\alpha_4\rangle=0$ nên $\overrightarrow{M_{12}E}.\overrightarrow{A_3A_4}=0$.

5) Chẳng hạn đường thẳng Simson của A_1 đối với tam giác $A_2A_3A_4$ đi qua trung điểm của A_1H_1 mà điểm này biểu diễn số $\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)$ nên trùng với điểm E.

6) Giả sử P biểu diễn số phức ω ($|\omega|=1$). Đường thẳng Simson Δ_1 của P đối với tam giác $A_2A_3A_4$ đi qua trung điểm của PH_1 là điểm biểu diễn $\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\omega)$ và có một vectơ chỉ phương $\overrightarrow{v_1}$ biểu diễn số phức v_1 sao cho $\frac{v_1}{\overline{v_1}}=\alpha_2\alpha_3\alpha_4\overline{\omega}$ nên hình chiếu vuông góc Q_1 của P trên Δ_1 biểu diễn số phức

$$\omega_1=\frac{1}{2}\left(\omega+\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\omega)\right)+\alpha_2\alpha_3\alpha_4\overline{\omega}\left(\overline{\omega-\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\omega)}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(3\omega+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_4\overline{\omega}^2-(\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_2)\overline{\omega}\right).$$

Ta có biểu thức tương tự cho số phức ω_2 biểu diễn bởi hình chiếu vuông góc Q_2 của P trên đường thẳng Simson Δ_2 của P đối với tam giác $A_3A_4A_1$ và từ đó suy ra vectơ $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ biểu diễn số

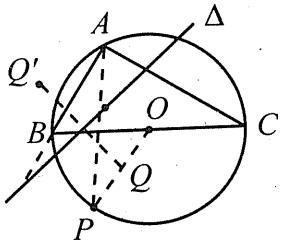
$$\omega_2-\omega_1=\frac{\alpha_1-\alpha_2}{4}\left(\alpha_3\alpha_4\overline{\omega}^2-(\alpha_3+\alpha_4)\overline{\omega}+1\right)$$

nên nếu $\omega_2\neq\omega_1$ thì $\dfrac{\omega_2-\omega_1}{\overline{\omega_2-\omega_1}}=-\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\overline{\omega}^2$.

Vậy, nếu hình chiếu vuông góc Q_j của P trên đường thẳng Simson Δ_j của P đối với tam giác $A_iA_kA_l$ (i, k, l phân biệt, $i, j, k, l=1,2,3,4$) biểu diễn số phức ω_j thì $\dfrac{\omega_j-\omega_k}{\overline{\omega_j-\omega_k}}$ (giả sử $\omega_j\neq\omega_k$, với $j\neq k$) luôn bằng $-\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\overline{\omega}^2$, tức là khi các điểm Q_j không trùng nhau thì chúng cùng thuộc một đường thẳng xác định.

19. Coi đường tròn ngoại tiếp ΔABC là đường tròn đơn vị của mặt phẳng phức, coi A, B, C biểu diễn theo thứ tự các số $\alpha, \beta=-1, \gamma=1$.

A là trực tâm của ΔABC, đường thẳng Simson Δ của $P(\omega)$ đối với ABC đi qua trung điểm của AP biểu diễn $\left(\dfrac{\alpha+\omega}{2}\right)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ biểu diễn số phức u sao cho $\dfrac{u}{\overline{u}}=\alpha\beta\gamma\overline{\omega}=-\alpha\overline{\omega}$.



Hình 16

Trung điểm Q của OP biểu diễn $\dfrac{\omega}{2}$ nên điểm Q' đối xứng với Q qua Δ biểu diễn số phức $z'=\dfrac{\alpha+\omega}{2}-\alpha\overline{\left(\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{\alpha+\omega}{2}\right)}=\dfrac{\alpha+\omega}{2}+\dfrac{\overline{\omega}}{2}=\dfrac{\omega+\overline{\omega}}{2}+\dfrac{\alpha}{2}$.

Khi P thay đổi, điểm biểu diễn $\dfrac{\omega+\overline{\omega}}{2}$ vạch nên đoạn thẳng BC. Vậy Q' vạch nên đoạn thẳng ảnh của BC qua phép tịnh tiến với vectơ $\dfrac{\overrightarrow{OA}}{2}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

20. Coi đường tròn tâm O đã cho là đường tròn đơn vị trong mặt phẳng phức, A, B, C theo thứ tự biểu diễn các số phức α, β, γ. Một vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của Δ biểu diễn số phức u, đặt $\lambda = \dfrac{u}{\overline{u}}$, thì A' biểu diễn số phức $\lambda\overline{\alpha}$ (vì chẳng hạn $\left|\lambda\overline{\alpha}\right| = |\alpha|$ và

$$\left[\lambda\overline{\alpha}+\alpha,\, u\right] = \left[\overline{u}\left(\lambda\overline{\alpha}+\alpha\right), 1\right] = \left[u\overline{\alpha}+\overline{u}\alpha,\, 1\right] = 0 \text{ do } u\overline{\alpha}+\overline{u}\alpha \in \mathbb{R}).$$

Tương tự, B' biểu diễn $\lambda\overline{\beta}$, C' biểu diễn $\lambda\overline{\gamma}$.

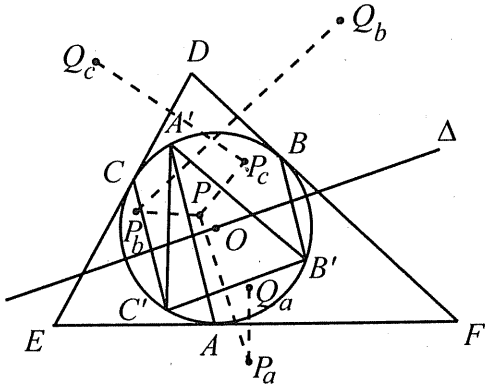
Điểm P biểu diễn số phức ω thì điểm P_a đối xứng với P qua đường thẳng $B'C'$, với $\left|\lambda\overline{\beta}\right| = 1, \left|\lambda\overline{\gamma}\right| = 1$, biểu diễn số phức $z_a = \lambda\left(\overline{\beta+\gamma}\right) - \lambda^2\overline{\beta\gamma\omega}$ (xem lại mục 5a).

Đường thẳng EF đi qua điểm $A(\alpha)$, có một vectơ chỉ phương biểu diễn số $i\alpha$ nên điểm Q_a đối xứng với P_a qua đường thẳng EF biểu diễn số phức ω_a sao cho

$$\omega_a - \alpha = \frac{i\alpha}{i\alpha}\left(\overline{z_a - \alpha}\right) = -\frac{\alpha}{\alpha}\left(\overline{z_a} - \overline{\alpha}\right)$$

$$= \alpha - \frac{\alpha}{\alpha}\left(\overline{\lambda}\left(\beta+\gamma\right) - \overline{\lambda}^2\beta\gamma\omega\right)$$

$$= \alpha - \alpha^2\left(\overline{\lambda}\left(\beta+\gamma\right) - \overline{\lambda}^2\beta\gamma\omega\right)$$



Hình 17

nên

$$\omega_a = \alpha\left(2 + \overline{\lambda}^2\alpha\beta\gamma\omega - \overline{\lambda}\alpha\left(\beta+\gamma\right)\right)$$

$$= \alpha\left(2 + \overline{\lambda}^2\alpha\beta\gamma\omega - \overline{\lambda}\left(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma\right) + \overline{\lambda}\beta\gamma\right)$$

$$= \overline{\lambda}\alpha\beta\gamma + \alpha\left(2 - \overline{\lambda}\varphi\left(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma\right) + \overline{\lambda}^2\alpha\beta\gamma\omega\right)$$

viết tắt $\omega_a = \overline{\lambda}\sigma_3 + \alpha\left(2 - \overline{\lambda}\sigma_2 + \overline{\lambda}^2\sigma_3\omega\right)$ (trong đó $\sigma_3 = \alpha\beta\gamma$, $\sigma_2 = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$).

Tương tự : $\omega_b = \overline{\lambda}\sigma_3 + \beta\left(2 - \overline{\lambda}\sigma_2 + \overline{\lambda}^2\sigma_3\omega\right)$, $\omega_c = \overline{\lambda}\sigma_3 + \gamma\left(2 - \overline{\lambda}\sigma_2 + \overline{\lambda}^2\sigma_3\omega\right)$.

1) Suy ra Q_a, Q_b, Q_c thuộc đường tròn tâm J biểu diễn số phức $\overline{\lambda}\sigma_3$, bán kính $\left|2 - \overline{\lambda}\sigma_2 + \overline{\lambda}^2\sigma_3\omega\right|$. Vì $\left|\overline{\lambda}\sigma_3\right| = 1$ và do $\overline{\lambda}$ lấy mọi giá trị thỏa mãn $|\lambda| = 1$ nên J vạch nên đường tròn đơn vị.

2) Đường thẳng Simson của điểm J đối với tam giác ABC có một vectơ chỉ phương $\vec{v}$ biểu diễn số phức v sao cho $\frac{v}{v} = \sigma_3\left(\overline{\overline{\lambda}\sigma_3}\right) = \lambda$ nên nó cùng phương với Δ.

3) Điểm P' đối xứng với P qua Δ biểu diễn số phức $\lambda\overline{\omega}$, trực tâm H của ABC biểu diễn $\alpha + \beta + \gamma = \sigma_1$, J biểu diễn $\overline{\lambda}\sigma_3$ nên điểm K mà $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HP'}$ biểu diễn số $\overline{\lambda}\sigma_3 + \frac{1}{2}\left(\lambda\overline{\omega} - \sigma_1\right)$ và suy ra $\left|2\overrightarrow{OK}\right| = \left|2\overline{\lambda}\sigma_3 + \lambda\overline{\omega} - \sigma_1\right|$

$$= \left|\left(2\lambda\overline{\sigma_3} + \overline{\lambda}\omega - \overline{\sigma_1}\right)\overline{\lambda}\sigma_3\right| = \left|2 + \overline{\lambda}^2\sigma_3\omega - \overline{\lambda}\sigma_3\overline{\sigma_1}\right| = \left|2 + \overline{\lambda}^2\sigma_3\omega - \overline{\lambda}\sigma_2\right|$$

(để ý rằng $\sigma_3\overline{\sigma_1} = \sigma_2$).

§3. PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

21. Biến đổi đồng dạng thuận $z \overset{f}{\mapsto} z' = \alpha z + \beta$, $\alpha \neq 0$, là một phép tịnh tiến khi và chỉ khi $\alpha = 1$, là một phép đối xứng tâm khi và chỉ khi $\alpha = -1$, là một phép vị tự khi và chỉ khi α là một số thực khác 0.

Kí hiệu hệ số α của z trong công thức xác định phép đồng dạng thuận $f : z \mapsto z' = \alpha z + \beta$ là α_f thì dễ thấy $\alpha_{g\circ f} = \alpha_g.\alpha_f$, $\alpha_{f^{-1}} = \frac{1}{\alpha_f}$. Từ đó suy ra tập các phép tịnh tiến làm thành một nhóm : mọi α_f bằng 1 ; tập các phép tịnh tiến và các phép đối xứng tâm làm thành một nhóm : mọi α_f bằng ± 1 ; tập các phép tịnh tiến và các phép vị tự làm thành một nhóm : mọi α_f là số thực khác 0.

Tích hai phép đối xứng tâm là một phép tịnh tiến (khi hai tâm phân biệt thì tích đó không phải là biến đổi đồng nhất) nên riêng các phép đối xứng tâm không làm thành một nhóm.

Tích hai phép vị tự hệ số k_1, k_2 là một phép tịnh tiến khi $k_1k_2 = 1$ (và khi hai tâm phân biệt thì tích đó không phải là biến đổi đồng nhất) nên riêng các phép vị tự không làm thành một nhóm.

Trong ba nhóm nói trên, nhóm các phép tịnh tiến là một nhóm giao hoán, hai nhóm kia không giao hoán (xem lại ví dụ 2, §3).

22. Xét phép dời hình nghịch $f : z \mapsto z' = \alpha\bar{z} + \beta, |\alpha| = 1$. Viết $\alpha = \frac{u}{\bar{u}}$, xét $\beta_1 = \frac{1}{2}\left(\beta - \frac{u}{\bar{u}}\bar{\beta}\right) = \frac{1}{2}\left(\beta - \alpha\bar{\beta}\right)$, $\beta_2 = \frac{1}{2}\left(\beta + \frac{u}{\bar{u}}\bar{\beta}\right) = \frac{1}{2}\left(\beta + \alpha\bar{\beta}\right)$ thì ta đã biết trục Δ của f có phương trình $z = \alpha\bar{z} + \beta_1$.

Với điểm M tùy ý biểu diễn số phức z, trung điểm của $Mf(M)$ biểu diễn số phức $\omega = \frac{z}{2} + \frac{\alpha}{2}\bar{z} + \frac{\beta}{2}$. Ánh xạ $F : z \mapsto \omega = \frac{z}{2} + \frac{\alpha}{2}\bar{z} + \frac{\beta}{2}$ có công thức ở vế phải với hệ số của z là $\frac{1}{2}$, hệ số của $\bar{z}$ là $\frac{\alpha}{2}$ mà $\left|\frac{\alpha}{2}\right| = 1$ nên theo bài tập 13, ảnh của F là đường thẳng gồm các điểm biểu diễn số ω mà $\left(\frac{\beta}{2} - \omega\right)\frac{1}{2} = \overline{\left(\frac{\beta}{2} - \omega\right)}\frac{\alpha}{2}$ tức là $\omega = \alpha\bar{\omega} - \frac{\alpha\bar{\beta}}{2} + \frac{\beta}{2} = \alpha\bar{\omega} + \frac{1}{2}\left(\beta - \alpha\bar{\beta}\right)$: đó chính là phương trình của trục Δ.

23. 1) f là phép dời hình biến hình $\mathscr{H}$ thành hình $\mathscr{H}'$, g là một phép đồng dạng tùy ý thì tích $g \circ f \circ g^{-1}$ biến hình $g(\mathscr{H})$ thành

$$g \circ f \circ g^{-1}\left(g(\mathscr{H})\right) = \left(g \circ f\right)(\mathscr{H}) = g\left(f(\mathscr{H})\right) = g(\mathscr{H}').$$

Do g, f, g^{-1} là ba phép đồng dạng nên tích $g \circ f \circ g^{-1}$ là một phép đồng dạng, hệ số đồng dạng của nó bằng tích ba hệ số đồng dạng của g^{-1} (bằng $\frac{1}{k}$), của f (bằng 1), của g (bằng k) nên $g \circ f \circ g^{-1}$ là phép đồng dạng có hệ số đồng dạng bằng 1, tức là một phép dời hình, nó biến $g(\mathscr{H})$ thành $g(\mathscr{H}')$ nên hai hình này bằng nhau.

2) g là một biến đổi đồng dạng tùy ý thì $g \circ Đ_\Delta \circ g^{-1}$ là một phép dời hình (theo câu 1) ; nhưng g, g^{-1} hoặc cùng là biến đổi đồng dạng thuận hoặc cùng là biến đổi đồng dạng nghịch nên $g \circ Đ_\Delta \circ g^{-1}$ là một phép dời hình nghịch. Với mọi điểm $M \in \Delta$, ta có $\left(g \circ Đ_\Delta \circ g^{-1}\right)\left(g(M)\right) = \left(g \circ Đ_\Delta\right)(M) = g(M)$, tức $g(M)$ là điểm bất động của dời hình nghịch đó. Suy ra $g(\Delta)$ là trục của nó.

Cũng lí luận tương tự, ta có $g \circ Đ_J \circ g^{-1} = Đ_{g(J)}$.

3) $Q_{(A,\,\varphi)}$ có công thức $z \mapsto z' = \alpha z + \beta, |\alpha| = 1, \arg\alpha = \varphi$ thì với mọi phép đồng dạng g (thuận hay nghịch), dễ thấy $g \circ Q_{(A,\,\varphi)} \circ g^{-1}$ cũng có công thức $\omega \mapsto \omega' = \alpha\omega + \gamma$ với cùng α như trên mà $g \circ Q_{(A,\varphi)} \circ g^{-1}$ giữ $g(A)$ bất động nên $g \circ Q_{(A,\,\varphi)} \circ g^{-1} = Q_{(g(A),\,\varphi)}$.

4) f là một đối xứng trượt trục Δ, g là một đồng dạng thì $g \circ f \circ g^{-1} = F$ là một dời hình nghịch tức là một đối xứng trượt, cần chứng minh trục của nó là $g(\Delta)$, tức là với N tùy ý, trung điểm đoạn $NF(N)$ thuộc $g(\Delta)$. Viết $N = g(M)$ thì $F(N) = \left(g \circ f \circ g^{-1}\right)\left(g(M)\right) = g\left(f(M)\right)$ nên cần chứng minh trung điểm đoạn nối $g(M)$ với $g\left(f(M)\right)$ thuộc $g(\Delta)$. Nhưng g là một biến đổi đồng dạng, nó biến trung điểm đoạn nối M với $f(M)$ (trung điểm này thuộc Δ) thành trung điểm đoạn nối $g(M)$ với $g\left(f(M)\right)$, vậy trung điểm này thuộc $g(\Delta)$.

24. Coi đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là đường tròn đơn vị trong mặt phẳng phức ; giả sử A, B, C theo thứ tự biểu diễn các số phức α, β, γ ; coi M biểu diễn số phức z ; M_a, M_b, M_c theo thứ tư biểu diễn các số phức z_a, z_b, z_c và trọng tâm Q của họ điểm $\{M_a, M_b, M_c\}$ biểu diễn số phức ω thì ta dễ tính được (xem lại ví dụ 4, §2).

$$\omega = \frac{1}{3}\left(z_a + z_b + z_c\right) = \frac{2}{3}\left(\alpha + \beta + \gamma\right) - \frac{1}{3}\overline{\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma}\right)}\,\bar{z}$$

mà đặt $\sigma_1 = \alpha+\beta+\gamma$, $\sigma_2 = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ thì ta có thể viết gọn lại là

$$\omega = \frac{2}{3}\sigma_1 - \frac{1}{3}\sigma_2\bar{z}.$$

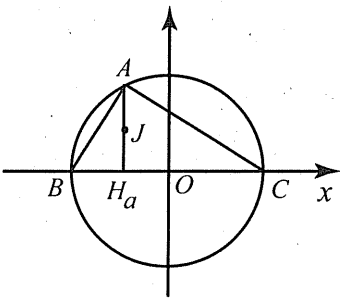
1) Khi tam giác ABC không phải là tam giác đều thì $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = \left(\overline{\frac{\sigma_1}{\sigma_3}}\right) \neq 0$ nên ánh xạ $f: z \mapsto \omega$ là một phép đồng dạng nghịch với hệ số đồng dạng $\frac{1}{3}|\sigma_2| = \frac{1}{3}|\sigma_1| = OG$ (khoảng cách từ tâm O đường tròn ngoại tiếp ΔABC đến trọng tâm G của nó).

2) Khi ABC là tam giác vuông tại A, chọn BC là trục thực, $\beta = -1$, $\gamma = 1$ thì $\sigma_1 = \alpha$, $\sigma_2 = -1$ nên $f: z \mapsto \omega = \frac{1}{3}\bar{z} + \frac{2}{3}\alpha$.

Điểm bất động J biểu diễn số phức z_0 mà $z_0 = \frac{1}{3}\overline{z_0} + \frac{2}{3}\alpha$.

Từ đó $\overline{z_0} = \frac{1}{3}z_0 + \frac{2}{3}\bar{\alpha}$ suy ra $z_0 = \frac{1}{9}z_0 + \frac{2}{9}\bar{\alpha} + \frac{2}{3}\alpha$ tức là $z_0 = \frac{3}{4}\alpha + \frac{\bar{\alpha}}{4}$.

Viết $\alpha = a+bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thì $z_0 = a + \frac{bi}{2}$, suy ra : nếu gọi H_a là hình chiếu của A trên BC thì $\overrightarrow{H_aJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{H_aA}$ (xem hình 18).



Hình 18

Trục Δ của biến đổi đối xứng trượt $z \mapsto \omega = \frac{1}{3}\bar{z} + \frac{2}{3}\alpha$ có phương xác định bởi vectơ $\vec{u}$ biểu diễn số phức u mà $\frac{u}{\bar{u}} = \frac{1}{3}$ nên song song với trục thực. Vậy Δ là đường thẳng qua J song song với BC ; đó là đường trung bình của ABC (qua trung điểm AB, AC). Dạng chính tắc của biến đổi đó là tích của vị tự tâm J, hệ số $\frac{1}{3}$ với đối xứng trục có trục Δ.

25. Coi đường tròn $\mathscr{C}$ tâm O ngoại tiếp tứ giác $A_0A_1A_2A_3$ là đường tròn đơn vị trong mặt phẳng phức, A_0, A_1, A_2, A_3 biểu diễn các số phức α_0, α_1, α_2, α_3. Giả sử M biểu diễn số phức z. Khi đó điểm đối xứng M_j của M qua đường thẳng A_jA_{j+1} (coi $A_4 \equiv A_0$) biểu diễn số phức $\alpha_j + \alpha_{j+1} - \alpha_j\alpha_{j+1}\overline{z}$; do đó trọng tâm Q của hệ điểm $\{M_0, M_1, M_2, M_3\}$ biểu diễn số phức :

$$w = \frac{1}{4}\left(2(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) - (\alpha_0\alpha_1+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_0)\overline{z}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) - \frac{1}{4}(\alpha_0+\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_3)\overline{z}.$$

1) Ánh xạ $f : z \mapsto w$ là một ánh xạ hằng khi và chỉ khi $(\alpha_0+\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_3) = 0$, khi đó ảnh là tập chỉ có một điểm, biểu diễn số $\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$.

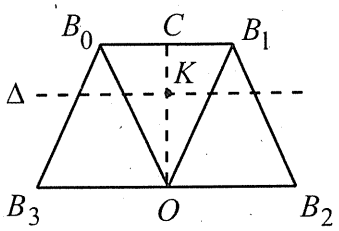
Vậy khi $\alpha_0+\alpha_2 = 0$ tức A_0A_2 là một đường kính của $\mathscr{C}$ thì ảnh của f là trung điểm của A_1A_3 ; Khi $\alpha_1+\alpha_3 = 0$ tức A_1A_3 là một đường kính của $\mathscr{C}$ thì ảnh của f là trung điểm của A_0A_2.

2) Khi $(\alpha_0+\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_3) \neq 0$ tức là A_0A_2, A_1A_3 đều không phải là đường kính của $\mathscr{C}$ thì f là một đồng dạng nghịch với hệ số đồng dạng bằng $\frac{1}{4}|\alpha_0+\alpha_2||\alpha_1+\alpha_3| = \left|\frac{\alpha_0+\alpha_2}{2}\right|\left|\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\right| = OB_1.OB_2$, B_1, B_2 theo thứ tự là trung điểm của A_0A_2, A_1A_3.

3) Viết $w = \frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) - \frac{1}{4}(\alpha_0+\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_3)\overline{z}$ thì khi $(\alpha_0+\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_3) \neq 0$, từ $|z| = 1$ suy ra $f(\mathscr{C})$ là đường tròn có tâm J, $\overrightarrow{OJ} = 2\overrightarrow{OG}$, G là trọng tâm của $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ tức G là trung điểm của B_1B_2 ; bán kính đường tròn $f(\mathscr{C})$ bằng $OB_1.OB_2$.

(Chú ý : ta đã coi đường tròn $\mathscr{C}$ có bán kính bằng 1 ; còn nếu đường tròn $\mathscr{C}$ có bán kính bằng R thì hệ số đồng dạng là $\frac{1}{R^2}OB_1.OB_2$, bán kính của $f(\mathscr{C})$ bằng $\frac{1}{R}OB_1.OB_2$).

4) Xét hình thang $B_0B_1B_2B_3$ (ảnh của $A_0A_1A_2A_3$ qua phép vị tự g tâm O, hệ số $\frac{1}{a}$) trong mặt phẳng phức nội tiếp đường tròn đơn vị, B_0, B_1, B_2, B_3 biểu diễn theo thứ tự $\alpha_0 = -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$, $\alpha_2 = 1$; $\alpha_3 = -1$ (xem hình 19) thì $g \circ f \circ g^{-1} = \varphi$ có công thức



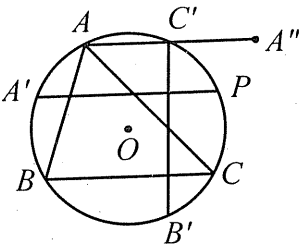
Hình 19

$$z \mapsto w = \frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) - \frac{1}{4}(\alpha_0+\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_3)\bar{z} = \frac{i\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{4}\bar{z}.$$

Điểm bất động K của φ biểu diễn số phức z_0 mà $z_0 = \frac{i\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{4}\overline{z_0}$, suy ra $z_0 = \frac{2i\sqrt{3}}{5}$. Do hệ số của $\bar{z}$ trong công thức $z \mapsto w = \frac{i\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{4}\bar{z}$ của φ là số thực $\frac{1}{4}$ nên trục Δ của đồng dạng nghịch φ là đường thẳng qua K song song với Ox. Để ý rằng gọi C là trung điểm của B_0B_1 thì C biểu diễn số phức $\frac{i\sqrt{3}}{2}$ nên $\overrightarrow{OK} = \frac{4}{5}\overrightarrow{OC}$.

Trở về hình thang cân $A_0A_1A_2A_3$, gọi D là trung điểm của A_0A_1, xét J sao cho $\overrightarrow{OJ} = \frac{4}{5}\overrightarrow{OD}$ thì f là tích của phép vị tự tâm J, hệ số $\frac{1}{4}$ với phép đối xứng qua đường thẳng qua J song song với cạnh đáy của hình thang.

26. Coi đường tròn ngoại tiếp ΔABC là đường tròn đơn vị tâm O trong mặt phẳng phức ; A, B, C theo thứ tự biểu diễn các số phức α, β, γ ; P là điểm biểu diễn số phức ω thì điểm A' là điểm của đường tròn đơn vị xác định bởi điều kiện $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OP}) = (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB})$ nên nếu gọi α' là số phức biểu diễn bởi A' thì $\frac{\omega}{\gamma} = \frac{\beta}{\alpha'}$ tức là $\alpha' = \frac{\beta\gamma}{\omega} = \beta\gamma\bar{\omega}$.



Hình 20

Tương tự, B', C' biểu diễn theo thứ tự $\beta' = \gamma\alpha\bar{\omega}$, $\gamma' = \alpha\beta\bar{\omega}$.

Điểm $A"$ đối xứng của A qua đường thẳng $B'C'$ ($|\beta'|=|\gamma'|=1$) biểu diễn số phức $\alpha"=\beta'+\gamma'-\beta'\gamma'\overline{\alpha}=(\gamma+\beta)\alpha\overline{\omega}-\alpha\beta\gamma\overline{\omega}^2$,

đặt $\sigma_2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\sigma_3=\alpha\beta\gamma$ thì viết được

$$\alpha"=(\sigma_2-\beta\gamma)\overline{\omega}-\sigma_3\overline{\omega}^2=-\sigma_3\overline{\omega}^2+\sigma_2\overline{\omega}-\sigma_3\overline{\omega\alpha}=\mu+\lambda\overline{\alpha},$$

trong đó $\mu=-\sigma_3\overline{\omega}^2+\sigma_2\overline{\omega}$, $\lambda=-\sigma_3\overline{\omega}$.

Tương tự $\beta"=\mu+\lambda\overline{\beta}$, $\gamma"=\mu+\lambda\overline{\gamma}$.

Vậy $\alpha"$, $\beta"$, $\gamma"$ là ảnh theo thứ tự của α, β, γ qua ánh xạ $f: z\mapsto z'=\lambda\overline{z}+\mu$.

Vì $|\lambda|=1$ nên công thức đó xác định một phép dời hình nghịch f biến A, B, C thành $A"$, $B"$, $C"$.

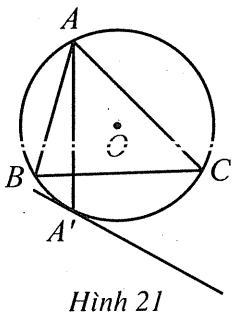
2) d chính là trục của đối xứng trượt f nói trên, nó đi qua trung điểm mọi đoạn nối M với $f(M)$ (trong đó có đoạn $AA"$, $BB"$, $CC"$, $OO"$).

3) d có phương trình xác định bởi vectơ $\vec{u}$ biểu diễn số phức u mà $\frac{u}{\overline{u}}=-\sigma_3\overline{\omega}$ nên cho $\beta=\frac{u}{\overline{u}}$ thì có $\omega=-\overline{\left(\frac{\beta}{\sigma_3}\right)}$ duy nhất biểu diễn bởi P.

4) $O"$ biểu diễn số phức $\mu=-\sigma_3\overline{\omega}^2+\sigma_2\overline{\omega}=(-\sigma_3\overline{\omega}+\sigma_2)\overline{\omega}$ nên $OO"=|-\sigma_3\overline{\omega}+\sigma_2|=\left|-\overline{\omega}+\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right|=|-\overline{\omega}+\overline{\sigma_1}|=|-\omega+\sigma_1|$, $(\sigma_1=\alpha+\beta+\gamma)$. Từ đó gọi H là trực tâm của ΔABC thì $OO"=PH$. Suy ra đường thẳng d đi qua O khi và chỉ khi P trùng với H, tức P là đỉnh của tam giác vuông ABC (lúc này $\mu=0$, đối xứng trượt f là đối xứng trục, trục chứa cạnh huyền của ABC).

27. 1) Coi đường tròn $\mathscr{C}$ là đường tròn đơn vị trong mặt phẳng phức, A, B, C theo thứ tự biểu diễn các số α, β, γ. Điểm A' là điểm đối xứng của A qua đường kính nối các điểm biểu diễn $\frac{\beta-\gamma}{|\beta-\gamma|}$ và $\frac{\gamma-\beta}{|\beta-\gamma|}$ nên A' biểu diễn số phức

$$\alpha'=-\frac{\beta-\gamma}{|\beta-\gamma|}\cdot\frac{\gamma-\beta}{|\beta-\gamma|}\overline{\alpha}=-\beta\gamma\overline{\alpha}.$$



Hình 21

P là điểm biểu diễn số $w, |w|=1$, thì điểm P_a đối xứng của P qua đường kính OA biểu diễn số phức $w_a = \alpha^2\overline{w}$. Điểm P'_a đối xứng của P qua đường kính OP_a biểu diễn số phức $w'_a = w_a^2\overline{w} = \alpha^4\overline{w}^3$. Điểm P''_a đối xứng của P'_a qua đường kính OP biểu diễn số phức $w''_a = w^2\overline{\left(\alpha^4\overline{w}^3\right)} = \overline{\alpha}^4 w^5$.

Tiếp tuyến của $\mathscr{C}$ tại A' là đường thẳng qua A' biểu diễn α' vuông góc với OA' nên có một vectơ chỉ phương biểu diễn $i\alpha'$, do đó nó có phương trình

$$z-\alpha' = \frac{i\alpha'}{\overline{i\alpha'}}\left(\overline{z-\alpha'}\right) = -\alpha'^2\left(\overline{z-\alpha'}\right), \text{ tức là } z = -\alpha'^2\overline{z} + 2\alpha'.$$

Điểm Q_a đối xứng với P''_a qua tiếp tuyến đó biểu diễn số phức

$$z_a = -\alpha'^2\overline{w''_a} + 2\alpha' = -\beta^2\gamma^2\overline{\alpha}^2\alpha^4\overline{w}^5 + 2\alpha' = -\sigma_3^2\overline{w}^5 + 2\alpha' \ (\sigma_3 = \alpha\beta\gamma).$$

Tương tự, điểm Q_b biểu diễn $z_b = -\sigma_3^2\overline{w}^5 + 2\beta'$, điểm Q_c biểu diễn $z_c = -\sigma_3^2\overline{w}^5 + 2\gamma'$ (trong đó $\beta' = -\gamma\alpha\overline{\beta}, \gamma' = -\alpha\beta\overline{\gamma}$).

Vậy ánh xạ xác định bởi $z \mapsto -\sigma_3^2\overline{w}^5 + 2z$ biến A', B', C' theo thứ tự thành Q_a, Q_b, Q_c. Đó là một phép vị tự hệ số 2, tâm vị tự J biểu diễn số phức $\sigma_3^2\overline{w}^5$.

2) Từ đó khi P thay đổi trên $\mathscr{C}$, quỹ tích của J cũng chính là $\mathscr{C}$ (để ý rằng $|\overline{w}|=1, |\sigma_3|=1$) (với mỗi J cho trước thuộc $\mathscr{C}$, có năm điểm P tương ứng là năm điểm của một ngũ giác đều nội tiếp $\mathscr{C}$).

§4. ĐƯỜNG TRÒN. PHÉP NGHỊCH ĐẢO. BIẾN ĐỔI TRÒN

28. Coi AB là trục thực của mặt phẳng phức, A, B, P theo thứ tự biểu diễn các số thực $-a, a, p$ (có thể coi a, p dương, $a \neq p$).

1) Cần tìm M sao cho $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MP}\right) = \left(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MB}\right) \bmod \pi$, tức là nếu M biểu diễn số phức z thì (coi M khác A, B, P) $\arg\dfrac{z-p}{z+a} = \arg\dfrac{z-a}{z-p} + n\pi \ (n \in \mathbb{Z})$.

Vậy điều kiện đó là : $\dfrac{z-p}{z+a} : \dfrac{z-a}{z-p}$ là số thực khác 0, tức là :

$$\overline{\left(\frac{z-p}{z-a}.\frac{z-p}{z+a}\right)}=\frac{z-p}{z-a}.\frac{z-p}{z+a}\ (\neq 0).$$

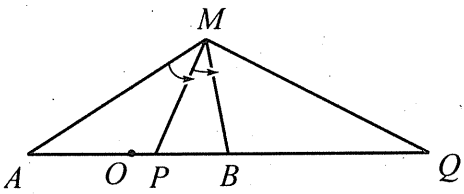
Sử dụng tính chất tỉ lệ thức bằng nhau được

$$\left(\bar{z}-z\right)\frac{\left(\bar{z}+z-2p\right)}{\left(\bar{z}-p\right)^2}=\left(\bar{z}-z\right).\frac{\bar{z}+z}{\bar{z}^2-a^2}.$$

Vậy quỹ tích gồm có đường thẳng AB $(z-\bar{z}=0)$ (bỏ các điểm A, B, P) và các điểm M biểu diễn z mà $\dfrac{\bar{z}+z-2p}{\left(\bar{z}-p\right)^2}=\dfrac{z+\bar{z}}{\bar{z}^2-a^2}$, điều kiện này tương đương với

$$2pz\bar{z}-\left(a^2+p^2\right)\left(z+\bar{z}\right)+2pa^2=0\ (z\neq -a,\ a,\ p).$$

Bộ phận này của quỹ tích cắt trục thực (tức đường thẳng AB) tại điểm biểu diễn số thực x mà $px^2-\left(a^2+p^2\right)x+pa^2=0$ tức là $x=p$ (điểm P đã cho) và $x=\dfrac{a^2}{p}$ (điểm Q).



Hình 22

Bộ phận đó là đường tròn đường kính PQ (bỏ điểm P) và rõ ràng $\left[A,\ B,\ P,\ Q\right]=-1$, tâm đường tròn biểu diễn số $\dfrac{a^2+p^2}{2p}$ (trung điểm của PQ). (xem hình 22).

2) Quỹ tích các điểm M sao cho $MA=kMB$ được xác định bởi các điểm M biểu diễn số phức z mà $|z+a|=k|z-a|$, tức là

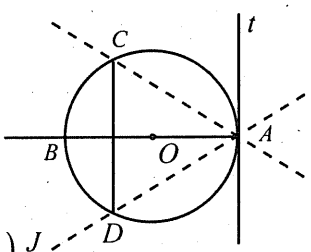
$$\left(z+a\right)\left(\bar{z}+a\right)=k^2\left(z-a\right)\left(\bar{z}-a\right),$$

nó tương đương với $\left(k^2-1\right)z\bar{z}-\left(k^2+1\right)a\left(z+\bar{z}\right)+\left(k^2-1\right)a^2=0$.

Khi $k=1$, đó là đường trung trực của AB.

Khi $k\neq 1$, $k=\left|\dfrac{a+p}{a-p}\right|$ với p nói trong câu 1) (và chỉ khi đó), đường tròn đường kính PQ của câu 1) trùng với đường tròn quỹ tích ở câu 2).

29. *Cách 1* : Coi A, B, C, D thuộc đường tròn đơn vị của mặt phẳng phức, theo thứ tự biểu diễn các số phức $1, -1, z, \mathrm{w}$ (xem hình 23). Khi đó



Hình 23

$[A, B, C, D] = -1$ (C, D phân biệt và khác A, B)

$$\Leftrightarrow \frac{z-1}{z+1} : \frac{\mathrm{w}-1}{\mathrm{w}+1} = -1 \Leftrightarrow (z-1)(\mathrm{w}+1) = -(z+1)(\mathrm{w}-1)$$

$$\Leftrightarrow z\mathrm{w} = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{\mathrm{w}} = 1 \Leftrightarrow z = \overline{\mathrm{w}},$$

tức là đường thẳng CD ($C \neq D$) cắt vuông góc đường kính AB.

Cách 2. Gọi At là tiếp tuyến của $\mathscr{C}$ tại A thì (xem mục 2, Bài đọc thêm, Chương 2, TLCT Hình học 10) :

$$[A, B, C, D] = -1 \Leftrightarrow [At, AB, AC, AD] = -1$$

$\Leftrightarrow C, D$ đối xứng qua đường thẳng AB (lấy C' đối xứng của C qua đường thẳng AB thì $C' \in \mathscr{C}$, trung điểm CC' thuộc đường thẳng AB nên $[At, AB, AC, AC'] = -1$ suy ra C' trùng với D).

30. 1) Gọi O là tâm của $\mathscr{C}$, đường thẳng qua O vuông góc với Δ cắt Δ ở A, cắt $\mathscr{C}$ ở J_1, J_2 thì nghịch đảo f phải có tâm là J_1 và $f(J_1) = A$ hoặc nghịch đảo f có tâm là J_2 và $f(J_2) = A$. Suy ra các phép nghịch đảo biến Δ vào $\mathscr{C}$:

• tâm J_1 với hệ số $k = 2\overrightarrow{J_1O}.\overrightarrow{J_1A}$ (nếu $A \neq J_1$),

• tâm J_2 với hệ số $k = 2\overrightarrow{J_2O}.\overrightarrow{J_2A}$ (nếu $A \neq J_2$).

2) a) Nếu $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ trùng nhau, bán kính bằng R, cùng tâm O thì dễ thấy từ định nghĩa, các biến đổi nghịch đảo f cần phải tìm là :

• tâm là O, hệ số $k = R^2$ hoặc hệ số $k = -R^2$.

• tâm là điểm J khác O, hệ số là k bằng phương tích của J đối với $\mathscr{C}$.

b) Nếu $\mathscr{C}_1$ khác $\mathscr{C}_2$:

• $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ có cùng tâm O thì biến đổi nghịch đảo f cần tìm phải có tâm J là O và hệ số nghịch đảo là $\pm R_1R_2$ (R_1, R_2 là bán kính của R_1, R_2).

• Tâm O_1 của $\mathscr{C}_1$ khác tâm O_2 của $\mathscr{C}_2$ thì biến đổi nghịch đảo f cần tìm phải có tâm J là một tâm vị tự của $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, tâm vị tự đó phải không thuộc $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ và hệ số nghịch đảo phải bằng $k = \dfrac{\overline{JO_2}}{\overline{JO_1}}\mathscr{P}_{J/\mathscr{C}_1}$ ($\mathscr{P}_{J/\mathscr{C}_1}$ là phương tích của điểm J đối với $\mathscr{C}_1$). Suy ra :

Khi $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ có bán kính bằng nhau và tiếp xúc (ngoài) nhau thì không có biến đổi nghịch đảo cần tìm ;

Khi $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ có bán kính bằng nhau nhưng không tiếp xúc nhau thì có một và chỉ một biến đổi nghịch đảo cần tìm (có tâm là tâm vị tự trong của $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$) ;

Khi $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ có bán kính không bằng nhau và tiếp xúc ngoài nhau thì có một biến đổi nghịch đảo cần tìm (nó có tâm là tâm vị tự ngoài), còn nếu tiếp xúc trong thì không có.

Khi $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ có bán kính không bằng nhau và không tiếp xúc nhau thì có hai biến đổi nghịch đảo cần tìm (có tâm là tâm vị tự của 2 đường tròn).

31. 1) Γ_j có tâm O_j biểu diễn số phức $-\dfrac{\beta_j}{a_j}$, bán kính $R_j = \dfrac{1}{|a_j|}\sqrt{\beta_j\overline{\beta_j} - a_j p_j}$ ($j = 1, 2$). Ta có :

$$\cos\widehat{O_1AO_2} = \frac{1}{2R_1R_2}\left(R_1^2 + R_2^2 - O_1O_2^2\right).$$

Từ đó tính được $\cos\widehat{O_1AO_2}$ bằng biểu thức ở đề bài. Còn côsin của góc giữa hai đường thẳng O_1A, O_2A rõ ràng bằng $\left|\cos\widehat{O_1AO_2}\right|$.

2) Gọi H là hình chiếu của O_1 trên Δ thì côsin của góc giữa $\mathscr{C}$ và Δ là $\dfrac{O_1H}{R_1}$. Ta có $\overrightarrow{O_1H} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{O_1H'}$ (H' là điểm đối xứng của O_1 qua Δ) biểu diễn số phức $\dfrac{1}{2a_1\overline{\beta_2}}(2\langle\beta_1, \beta_2\rangle - a_1p_2)$, từ đó suy ra biểu thức trong đề bài.

3) β_1, β_2 theo thứ tự được biểu diễn bởi vectơ pháp tuyến của Δ_1, Δ_2, từ đó suy ra biểu thức trong đề bài.

32. Coi J là gốc O của mặt phẳng phức thì biến đổi nghịch đảo f có công thức $z \mapsto w = \dfrac{k}{\overline{z}}$ (k là số thực khác 0).

1) $f(\mathscr{C}_1)$, $f(\mathscr{C}_2)$ theo thứ tự xác định bởi

$$p_1 w\overline{w} + 2\langle k\beta_1, w\rangle + a_1 k^2 = 0 \ ; \ p_2 w\overline{w} + 2\langle k\beta_2, w\rangle + a_2 k^2 = 0 .$$

Do O không thuộc $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ nên $p_1 \neq 0$, $p_2 \neq 0$, $f(\mathscr{C}_1)$, $f(\mathscr{C}_2)$ là hai đường tròn và góc tương giao giữa chúng có côsin xác định bởi :

$$\operatorname{sgn}(p_1 p_2).\frac{a_1 p_2 + a_2 p_1 - 2\langle \beta_1, \beta_2\rangle}{2\sqrt{\beta_1\overline{\beta_1} - a_1 p_1}\sqrt{\beta_2\overline{\beta_2} - a_2 p_2}}.$$

a) Từ đó suy ra góc giữa $f(\mathscr{C}_1)$, $f(\mathscr{C}_2)$ bằng góc giữa $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ vì chúng có cùng giá trị tuyệt đối của côsin.

b) Để ý rằng $\dfrac{p_j}{a_j}$ là phương tích của O đối với $\mathscr{C}_j$ ($j = 1, 2$) nên khi O cùng ở bên trong hay cùng ở bên ngoài $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ thì $\operatorname{sgn}(p_1 p_2) = \operatorname{sgn}(a_1 a_2)$ nên góc tương giao giữa $f(\mathscr{C}_1)$, $f(\mathscr{C}_2)$ bằng góc tương giao giữa $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ vì côsin của chúng bằng nhau.

c) Khi O ở bên trong một đường tròn, ở bên ngoài đường tròn kia thì $\operatorname{sgn}(p_1 p_2) = -\operatorname{sgn}(a_1 a_2)$ nên côsin của góc tương giao giữa $f(\mathscr{C}_1)$, $f(\mathscr{C}_2)$ bằng số đối của côsin của góc tương giao giữa $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$.

Suy ra các góc tương giao đó bù nhau.

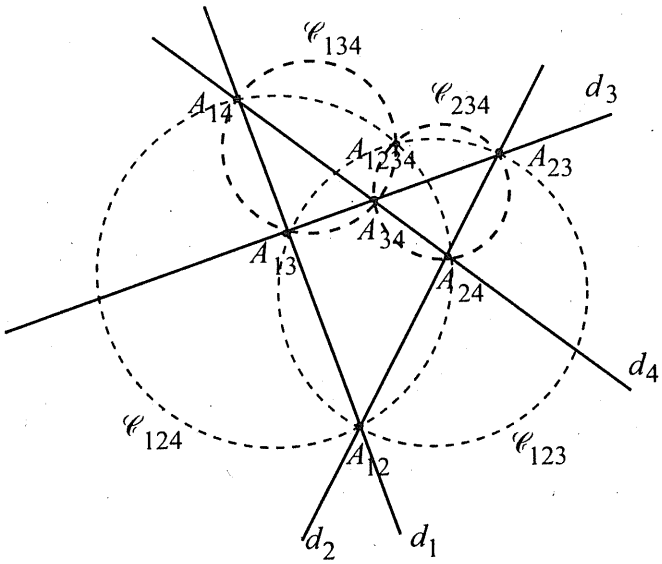
2) Chú ý rằng công thức tính côsin của góc giữa đường tròn và đường thẳng suy ra trực tiếp từ công thức tính côsin của góc giữa hai đường tròn (coi $a_1 \neq 0$, $a_2 = 0$) ở bài tập 31. Công thức tính côsin của góc giữa hai đường thẳng cũng suy ra trực tiếp từ công thức tính côsin của góc giữa hai đường tròn (coi $a_1 = a_2 = 0$) ở bài tập 31. Vậy từ lời giải câu 1a) suy ra lời giải câu 2).

3) Từ lời giải câu 1a), câu 2) suy ra lời giải câu 3).

33. Kí hiệu $A_{jk} = d_j \cap d_k$ ($j, k = 1, 2, 3, 4$, $j < k$), gọi chẳng hạn $\mathscr{C}_{134}$ là đường tròn đi qua A_{13}, A_{14}, A_{34}. Gọi $\mathscr{C}_{234}$ là đường tròn đi qua A_{23}, A_{24}, A_{34} (xem hình 24) thì $\mathscr{C}_{134}$, $\mathscr{C}_{234}$ có chung điểm A_{34} nên còn có chung một điểm nữa kí

hiệu là A_{1234} (dễ thấy A_{1234} khác A_{34}). Trong $\overline{E}$ xét họ bốn đường tròn nghĩa rộng $C_{134}, C_{234}, d_2 \cup \{\infty\}, d_1 \cup \{\infty\}$ (đây là hai "đường thẳng bổ sung") : chúng thỏa mãn giả thiết ở bài toán ví dụ 7, §4 : do A_{34}, A_{23}, ∞, A_{13} cùng thuộc một đường thẳng bổ sung $d_3 \cup \{\infty\}$ nên bốn giao điểm còn lại A_{1234}, A_{24}, A_{12}, A_{14} cùng thuộc đường tròn $\mathscr{C}_{124}$.

Xét họ bốn đường tròn nghĩa rộng $\mathscr{C}_{234}, \mathscr{C}_{134}$, $d_2 \cup \{\infty\}, d_1 \cup \{\infty\}$ thì bằng lí luận tương tự, suy ra A_{12}, A_{13}, A_{23}, A_{1234} cùng thuộc đường tròn $\mathscr{C}_{123}$. Vậy bốn đường tròn $\mathscr{C}_{123}$, $\mathscr{C}_{124}$, $\mathscr{C}_{134}$, $\mathscr{C}_{234}$ cùng đi qua A_{1234} (xem §5 chuyên đề Hình học phẳng, Tài liệu chuyên Toán Hình học 10).



Hình 24

34. 1) Giả sử $F^{-1}(\infty) = J$, $F(\infty) = K$ thì do F không phải là biến đổi đồng dạng nên J, K khác ∞. Gọi φ là biến đổi nghịch đảo tâm J, hệ số 1 thì $F \circ \varphi^{-1}(\infty) = \infty$ mà $F \circ \varphi^{-1}$ là một biến đổi tròn nên $F \circ \varphi^{-1}$ là một biến đổi đồng dạng f, tức là $F = f \circ \varphi$.

Xét ψ là biến đổi nghịch đảo tâm K, hệ số 1 thì $\psi^{-1} \circ F$ là biến đổi tròn giữ bất biến ∞ nên là một biến đổi đồng dạng f, tức là $F = \psi \circ f$.

Giả sử $f \circ \varphi = f' \circ \varphi'$, trong đó φ, φ' là những biến đổi nghịch đảo với hệ số bằng 1, f, f' là những biến đổi đồng dạng. Khi đó $\varphi' \circ \varphi^{-1} = f'^{-1} \circ f$ nhưng φ', φ^{-1} là những biến đổi nghịch đảo hệ số bằng 1 và $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ là một biến đổi đồng dạng nên theo ví dụ 8, tâm của φ' trùng với tâm của φ, $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ là phép vị tự hệ số 1, vậy $\varphi' = \varphi$ và $f' = f$.

Lí luận tương tự thì từ $\varphi \circ f = \varphi' \circ f'$ (φ, φ', f, f' vẫn như trên), suy ra $\varphi = \varphi'$, $f = f'$.

2) Xét tích $f \circ \varphi \circ f^{-1}$ trong đó φ là một biến đổi nghịch đảo tâm J hệ số k, f là một biến đổi đồng dạng hệ số p thì dễ thấy :

$$\left(f \circ \varphi \circ f^{-1}\right)(\infty) = f\left(\varphi(\infty)\right) = f(J),$$

$$\left(f \circ \varphi \circ f^{-1}\right)\left(f(J)\right) = f\left(\varphi(J)\right) = f(\infty) = \infty.$$

Còn với M khác $f(J)$, ta có $N = f^{-1}(M)$ khác J và $\overrightarrow{JN}$ cùng phương với $\overrightarrow{J\varphi(N)}$, $\overrightarrow{J\varphi(N)}.\overrightarrow{JN} = k$; từ đó do f là biến đổi đồng dạng hệ số p suy ra các vectơ $\overrightarrow{f(J)f\left(\varphi(N)\right)}$ và $\overrightarrow{f(J)f(N)}$ cùng phương và có tích vô hướng bằng kp^2, tức là các vectơ $\overrightarrow{f(J)\left(f \circ \varphi \circ f^{-1}\right)(M)}$ và $\overrightarrow{f(J)M}$ cùng phương và có tích vô hướng bằng kp^2. Vậy theo định nghĩa, $f \circ \varphi \circ f^{-1}$ là một biến đổi nghịch đảo tâm $f(J)$, hệ số kp^2.

Nếu φ có hệ số nghịch đảo $k = 1$ thì $f \circ \varphi = \varphi \circ f$ tức là $f \circ \varphi \circ f^{-1} = \varphi$ tương đương với $f(J) = J$ và $kp^2 = 1$ tức là $p^2 = 1$, cũng có nghĩa là f là một phép dời hình giữ bất động J.

35. 1) f là biến đổi tròn thuận của $\overline{E}$ với công thức

$$z \mapsto z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ là số phức, } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Điểm bất động của f trong E biểu diễn số phức $z \in \mathbb{C}$ mà

$$\gamma z^2 + (\delta - \alpha) z - \beta = 0.$$

a) $\gamma = 0, \delta - \alpha = 0, \beta = 0$: f là biến đổi đồng nhất, mọi điểm của $\overline{E}$ đều bất động.

b) $\gamma = 0, \delta - \alpha = 0, \beta \neq 0$: điểm ∞ là điểm bất động duy nhất của f trong $\overline{E}$. Rõ ràng f là một phép tịnh tiến không phải là đồng nhất.

c) $\gamma = 0, \delta - \alpha \neq 0$: f có một điểm bất động $J \in E$ biểu diễn số phức $\dfrac{\beta}{\delta - \alpha}$ và ∞ là điểm bất động thứ hai (trong $\overline{E}$). f là một phép vị tự - quay tâm J.

d) $\gamma \neq 0$:

• Khi $(\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma = 0$, f có đúng một điểm bất động và điểm này thuộc E.

• Khi $(\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma \neq 0$: f có đúng hai điểm bất động phân biệt, hai điểm này thuộc E.

Vậy biến đổi tròn thuận hoặc có một điểm bất động hoặc hai điểm bất động hoặc mọi điểm đều bất động.

2) f là biến đổi tròn nghịch của $\overline{E}$ với công thức $z \mapsto z' = \dfrac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ là số phức, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Điểm bất động của f trong E biểu diễn số phức $z \in \mathbb{C}$ mà

$$\gamma z\bar{z} + \delta z - \alpha\bar{z} - \beta = 0.$$

a) $\gamma = 0$: điểm vô tận là một điểm bất động của f trong $\overline{E}$; f là một biến đổi đồng dạng.

• Khi $|\alpha| \neq |\delta|$: f còn có điểm bất động $J \in E$ biểu diễn nghiệm duy nhất của $\delta z - \alpha\bar{z} - \beta = 0$: f là một biến đổi đồng dạng nghịch không phải dời hình.

• Khi $|\alpha| = |\delta|$: f là một phép dời hình nghịch.

- Nếu $\delta\beta + \alpha\beta = 0$ thì f nhận mọi điểm thuộc đường thẳng Δ biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\delta z - \alpha\bar{z} - \beta = 0$ làm điểm bất động : f là một đối xứng trục.

- Nếu $\delta\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta \neq 0$ thì f không có điểm bất động trong E : f là một phép đối xứng - trượt (với vectơ trượt khác $\vec{0}$).

b) $\gamma \neq 0$ (điểm vô tận không phải là một điểm bất động). Điểm bất động biểu diễn số phức z mà $z\bar{z} + \frac{\delta}{\gamma} z - \frac{\alpha}{\gamma} \bar{z} - \frac{\beta}{\gamma} = 0$, do đó cũng thỏa mãn $z\bar{z} + \overline{\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)} \bar{z} - \overline{\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)} z - \overline{\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)} = 0$ và vậy biểu diễn các số phức z thỏa mãn :

$$\begin{cases} \left(\frac{\delta}{\gamma} + \overline{\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)}\right) z - \left(\overline{\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)} + \frac{\alpha}{\gamma}\right) \bar{z} - \left(\frac{\beta}{\gamma} - \overline{\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)}\right) = 0 & (*) \\ 2z\bar{z} + \left(\frac{\delta}{\gamma} - \overline{\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)}\right) z + \left(\left(\overline{\frac{\delta}{\gamma}}\right) - \frac{\alpha}{\gamma}\right) \bar{z} - \left(\frac{\beta}{\gamma} + \overline{\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)}\right) = 0 & (**) \end{cases}$$

Phương trình (*) hoặc không có nghiệm, hoặc có một nghiệm hoặc có các nghiệm được biểu diễn bởi các điểm của một đường thẳng hoặc tất cả số phức làm nghiệm. Phương trình (**) hoặc có vô số nghiệm được biểu diễn bởi các điểm của một đường tròn, hoặc có một nghiệm duy nhất (biểu diễn đường tròn có bán kính bằng 0) hoặc không có nghiệm ("đường tròn bán kính ảo").

Vậy khi $\gamma \neq 0$, có các khả năng :

• f không có điểm bất động (chẳng hạn $z \mapsto z' = -\frac{1}{\bar{z}}$).

• f có đúng một điểm bất động (chẳng hạn $z \mapsto z' = \frac{\bar{z}}{\bar{z}+1}$ nhận gốc O làm điểm bất động duy nhất).

• f có đúng hai điểm bất động phân biệt (chẳng hạn $z \mapsto z' = \frac{2\bar{z}}{\bar{z}+1}$, hai điểm bất động biểu diễn các số phức 0 và 1).

• f nhận mọi điểm của một đường tròn $\mathscr{C}$ làm điểm bất động : f là biến đổi nghịch đảo với $\mathscr{C}$ là đường tròn nghịch đảo.

36. 1) Xem lại ví dụ 10.

2) $P \in \mathscr{C}$ thì rõ ràng Q liên hợp với P (đối với $\mathscr{C}$) tức là đường tròn đường kính PQ trực giao với $\mathscr{C}$ khi và chỉ khi Q thuộc tiếp tuyến của $\mathscr{C}$ tại P.

3) Giả sử $\mathscr{C}$ xác định bởi $z.\bar{z} + 2\langle \beta, z \rangle + p = 0$

(tâm J của $\mathscr{C}$ biểu diễn số $-\beta$, bán kính bằng $\sqrt{\beta\bar{\beta} - p}$).

Điểm P, Q theo thứ tự biểu diễn z, w thì P, Q liên hợp đối với $\mathscr{C}$ khi và chỉ khi đường tròn đường kính PQ (có tâm biểu diễn $\frac{z+w}{2}$, có bán kính bằng $\left|\frac{z-w}{2}\right|$) trực giao với $\mathscr{C}$, tức là khi và chỉ khi :

$$\left|\frac{z+w}{2}+\beta\right|^2=\left|\frac{z-w}{2}\right|^2+\beta\bar{\beta}-p.$$

Đơn giản phương trình, ta được

$$\langle z, w\rangle+\langle z+w, \beta\rangle+p=0,$$

viết cách khác : $\langle z+\beta, w\rangle+\langle\beta, z\rangle+p=0$.

a) và b) Do $|z+\beta|$ bằng khoảng cách từ P đến tâm J tức là bằng bán kính của $\mathscr{C}$ nên giả thiết $P\notin\mathscr{C}$, tương đương với $z+\beta\neq 0$. Từ đó quỹ tích các điểm Q liên hợp với P (đối với $\mathscr{C}$), khi $P\notin\mathscr{C}$ là một đường thẳng $\Delta(P)$ với một vectơ pháp tuyến biểu diễn bởi $z+w$; vậy $\Delta(P)$ vuông góc với JP : đó là nội dung của câu b), còn câu a) suy ra được từ câu 2).

c) Giữ P (tức z_0) cố định thì đường tròn đường kính JP (có tâm biểu diễn số $\frac{1}{2}(z_0-\beta)$, có bán kính bằng $\frac{1}{2}|z_0+\beta|$) xác định bởi tập các điểm biểu diễn số z mà $\left|z-\frac{1}{2}(z_0-\beta)\right|=\frac{1}{2}|z_0+\beta|$ tức là $z\bar{z}-\langle z_0-\beta, z\rangle-\langle\beta, z_0\rangle=0$.

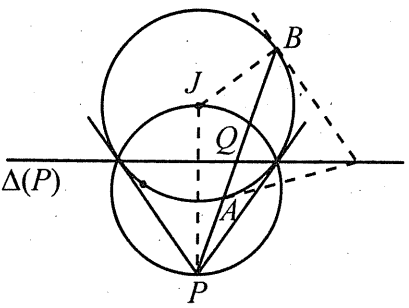
Còn đường tròn $\mathscr{C}$ xác định bởi $z\bar{z}+2\langle\beta, z\rangle+p=0$ nên trục đẳng phương hai đường tròn đó xác định bởi : $-\langle z_0-\beta, z\rangle-\langle\beta, z_0\rangle=2\langle\beta, z\rangle+p$ tức là $\langle z_0, z\rangle+\langle\beta, z\rangle+\langle\beta, z_0\rangle+p=0$, đây chính là phương trình của $\Delta(P)$, P biểu diễn z_0.

d) Để dễ tính toán, coi J trùng với gốc O thì do $\mathscr{C}$ có bán kính bằng $\sqrt{-p}$ nên biến đổi nghịch đảo tâm O, đường tròn nghịch đảo là $\mathscr{C}$ xác định bởi $z\mapsto w=\frac{-p}{\bar{z}}$; nó biến đường tròn đường kính OP (P biểu diễn z_0) (bỏ điểm O) :

$$z\bar{z} - \langle z_0, z\rangle = 0,\ z \neq 0$$

thành $$-\frac{p^2}{ww} - \left\langle z_0, -\frac{p}{w}\right\rangle = 0,$$

tức là $p + \langle z_0, w\rangle = 0$, đây chính là đường $\Delta(P)$. (xem hình 25)



Hình 25

4) Vẫn tiếp tục coi tâm J của $\mathscr{C}$ là điểm gốc O, coi $\mathscr{C}$ xác định bởi $z\bar{z} + p = 0$ thì đường đối cực của điểm P_0 (biểu diễn số z_0) đối với $\mathscr{C}$ xác định bởi $\langle z_0, z\rangle + p = 0$.

Vậy nếu đường thẳng d xác định bởi $\langle z - z_1, v\rangle = 0$ (z, v là số phức, $z_1 \neq 0$) thì điểm P_0 biểu diễn $z_0 = -\dfrac{pv}{\langle z_1, v\rangle}$ là điểm duy nhất mà $\Delta(P_0) = d$ (để ý rằng v biểu diễn bởi một vectơ pháp tuyến của d còn z_0 biểu diễn bởi một vectơ pháp tuyến của $\Delta(P_0)$).

Còn nếu đường thẳng d xác định bởi phương trình $z = \lambda\bar{z} + \delta,\ |\lambda| = 1,\ \lambda\bar{\delta} + \delta = 0$ thì viết $\Delta(P)$ dạng $\dfrac{1}{2}\left(\overline{z_0}z + z_0\bar{z}\right) + p = 0$ tức là $z = -\dfrac{z_0}{2\overline{z_0}}\bar{z} - \dfrac{p}{2\overline{z_0}}$ suy ra điểm P_0 biểu diễn số $z_0 = -\dfrac{2p}{\overline{\delta}}\left(= \dfrac{2p\lambda}{\delta}\right)$ là điểm duy nhất mà $\Delta(P_0) = d$.

Khi d là tiếp tuyến của $\mathscr{C}$ tại A thì rõ ràng $\pi(d) = A$ (xem câu 2). Khi d cắt $\mathscr{C}$ tại hai điểm phân biệt A, B thì $\pi(d)$ là giao điểm của hai tiếp tuyến tại A, B cũng suy ra từ câu 2).

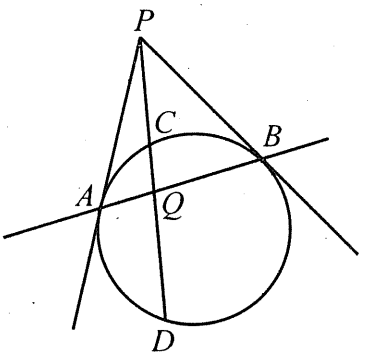
Rõ ràng $\pi = \Delta^{-1}$.

5) Gọi $\pi(d) = P,\ \pi(d') = P'$ thì $d = \Delta(P) \ni P' \Leftrightarrow P'$ liên hợp với $P \Leftrightarrow P$ liên hợp với $P' \Leftrightarrow P \in \Delta(P') = d'$.

6) Khi AB là đường kính của $\mathscr{C}$ thì $[A, B, C, D] = -1$ nếu và chỉ nếu CD vuông góc với AB (xem bài tập 29).

Khi AB không đi qua tâm J của $\mathscr{C}$, gọi P là cực của AB, nối PC cắt $\mathscr{C}$ ở D' (dễ thấy D' khác A, B, C), cắt AB ở Q thì do P, Q liên hợp đối với $\mathscr{C}$, $[P, Q, C, D'] = -1$. Vì AP là tiếp tuyến của $\mathscr{C}$ tại A nên $[P, Q, C, D'] = [AP, AB, AC, AD']$, vậy

$$[A, B, C, D'] = -1.$$



Hình 26

$[A, B, C, D'] = -1 \Leftrightarrow D$ trùng với D'

$\Leftrightarrow$ đường thẳng CD đi qua cực P của AB (hình 26).

37. Do P không thuộc đường tròn ngoại tiếp ABC nên A_0, A_1, A_2 không thẳng hàng (xem ví dụ 5 phần B về đường thẳng Simson). Coi đường tròn $(A_0A_1A_2)$ là đường tròn đơn vị trong mặt phẳng phức, A_j biểu diễn số phức α_j $(j = 0, 1, 2)$. Giả sử P biểu diễn số ω. Đường thẳng AB có phương trình $\langle \omega - \alpha_2, z - \alpha_2 \rangle = 0$ (z được biểu diễn bởi điểm tùy ý trên đường thẳng đó) ; đường thẳng AC có phương trình $\langle \omega - \alpha_1, z - \alpha_1 \rangle = 0$. Từ đó A biểu diễn số

$$\alpha = \frac{-\omega^2 + (\alpha_1\alpha_2\overline{\omega} + \alpha_1 + \alpha_2)\omega - 2\alpha_1\alpha_2}{\omega + \alpha_1\alpha_2\overline{\omega} - (\alpha_1 + \alpha_2)}$$

Từ đó P_0 biểu diễn số $\omega_0 = \dfrac{\omega + \alpha}{2} = \dfrac{\alpha_1\alpha_2(\omega\overline{\omega} - 1)}{\omega + \alpha_1\alpha_2\overline{\omega} - (\alpha_1 + \alpha_2)}$ và tương tự cho P_1, P_2.

1) P'_0 biểu diễn số $\omega'_0 = \dfrac{\alpha_1\alpha_2\overline{\omega} - (\alpha_1 + \alpha_2)}{\omega\overline{\omega} - 1}$ và tương tự cho P'_1, P'_2 và tính được

$$[\omega'_0, \omega'_1] + [\omega'_1, \omega'_2] + [\omega'_2, \omega'_0] = \frac{1}{1 - \omega\overline{\omega}}([\alpha_0, \alpha_1] + [\alpha_1, \alpha_2] + [\alpha_2, \alpha_0]).$$

Suy ra tỉ số diện tích cần tìm là $\frac{1}{1-\omega\overline{\omega}} = =-$ nghịch đảo phương tích của P đối với đường tròn $(A_0A_1A_2)$.

2) Đường đối cực của P_0 và của P_1 (đối với đường tròn đơn vị $(A_0A_1A_2)$) có phương trình theo thứ tự là $\langle\omega_0, z\rangle - 1 = 0, \langle\omega_1, z\rangle - 1 = 0$. Điểm Q_2 là giao của hai đường thẳng đó nên biểu diễn số $z_2 = \frac{2(\omega-\alpha_2)}{\omega\overline{\omega}-1}$. Kết quả tương tự cho số phức z_1, biểu diễn Q_1, số phức z_0 biểu diễn Q_0. Từ đó tính được

$$[z_0, z_1]+[z_1, z_2]+[z_2, z_0] = \frac{4}{\left(\omega\overline{\omega}-1\right)^2}\left([\alpha_0, \alpha_1]+[\alpha_1, \alpha_2]+[\alpha_2, \alpha_0]\right)$$

Vậy tỉ số diện tích cần tìm là 4 lần nghịch đảo bình phương phương tích của P đối với đường tròn $(A_0A_1A_2)$.

38. Coi đường tròn ngoại tiếp ABC là đường tròn đơn vị trong mặt phẳng phức ; A, B, C theo thứ tự biểu diễn các số phức α, β, γ ; P biểu diễn số phức ω.

Phép đối xứng qua đường thẳng OP xác định bởi $z \mapsto z^* = \omega^2\overline{z}$ nên suy ra $\alpha^* = \omega^2\overline{\alpha}, \beta^* = \omega^2\overline{\beta}, \gamma^* = \omega^2\overline{\gamma}$ ($\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ biểu diễn bởi A^*, B^*, C^*).

Phép đối xứng qua đường thẳng OA^* xác định bởi $z \mapsto z' = \alpha^{*2}\overline{z}$ nên A' biểu diễn $\alpha' = \alpha^{*2}\overline{\omega} = \overline{\alpha}^2\omega^3$.

Phép đối xứng qua đường thẳng BC xác định bởi $z \mapsto z' = -\beta\gamma\overline{z} + \beta + \gamma$ nên A'' biểu diễn số phức $\alpha'' = -\alpha^2\beta\gamma\overline{\omega}^3 + \beta + \gamma = -\left(\sigma_3\overline{\omega}^3 + 1\right)\alpha + \sigma_1$ (trong đó $\sigma_3 = \alpha\beta\gamma, \sigma_2 = \alpha + \beta + \gamma$). Tương tự B'' biểu diễn $\beta'' = -\left(\sigma_3\overline{\omega}^3 + 1\right)\beta + \sigma_1$, còn C'' biểu diễn $\gamma'' = -\left(\sigma_3\overline{\omega}^3 + 1\right)\gamma + \sigma_1$.

1) Đặt $\lambda = -\left(\sigma_3\overline{\omega}^3 + 1\right)$ thì ánh xạ xác định bởi $z \mapsto z' = \lambda z + \sigma_1$ biến A, B, C thành A'', B'', C''. Từ đó nếu $\lambda \neq 0$ thì đó là một biến đổi đồng

dạng thuận và $A"B"C"$ là một tam giác. Vậy $A"$, $B"$, $C"$ không phải là các đỉnh của một tam giác khi và chỉ khi $\lambda = 0$. Khi đó $A"$, $B"$, $C"$ cùng biểu diễn số phức σ_1 tức là $A"$, $B"$, $C"$ trùng với trực tâm H của ABC. Ta có $\lambda = 0 \Leftrightarrow \sigma_3 \overline{\omega}^3 = -1 \Leftrightarrow \omega^3 = -\sigma_3$. Vậy có ba vị trí của P trên đường tròn ngoại tiếp ABC (làm thành ba đỉnh một tam giác đều) để $A"$, $B"$, $C"$ xây dựng từ P không làm thành các đỉnh một tam giác (cụ thể là chúng cùng trùng với H).

2) A biểu diễn số phức α, $B"$ biểu diễn số phức $\beta"$, $C"$ biểu diễn số phức $\gamma"$ mà $\beta" - \alpha = -\sigma_3 \overline{\omega}^3 \beta + \gamma$; $\gamma" - \alpha = -\sigma_3 \overline{\omega}^3 \gamma + \beta$ và dễ thấy

$$\left[-\sigma_3 \overline{\omega}^3 \beta + \gamma, -\sigma_3 \overline{\omega}^3 \gamma + \beta\right] = 0$$

nên A, $B"$, $C"$ thẳng hàng.

Tương tự B, $C"$, $A"$ thẳng hàng và C, $A"$, $B"$thẳng hàng.

3) Theo câu 1), f xác định bởi $z \mapsto z' = \lambda z + \delta_1$ trong đó $\lambda = -\left(\sigma_3 \overline{\omega}^3 + 1\right) \neq 0$.

f biến tâm O của đường tròn ngoại tiếp ABC (tâm đó biểu diễn số phức 0) thành tâm đường tròn ngoại tiếp $A"B"C"$ và do đó nó biểu diễn số phức $\lambda 0 + \sigma_1$ nên nó là trực tâm H của ABC.

4) Với P biểu diễn $\omega, |\omega| = 1$ mà $\lambda = -\left(\sigma_3 \overline{\omega}^3 + 1\right) \neq 0$, đồng dạng thuận $f : z \mapsto z' = \lambda z + \sigma_1$ có tâm J biểu diễn số z_0 mà $z_0 = \lambda z_0 + \sigma_1$ tức là $\left(\sigma_3 \overline{\omega}^3 + 2\right) z_0 = \sigma_1$. Do $\left|\sigma_3 \overline{\omega}^3\right| = 1$ nên $\sigma_3 \overline{\omega}^3 + 2 \neq 0$ vậy $z_0 = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_3 \overline{\omega}^3 + 2}$.

Với P biểu diễn $\omega, |\omega| = 1$ mà $\lambda = -\left(\sigma_3 \overline{\omega}^3 + 1\right) = 0$ thì ta coi điểm J tương ứng với P đó là điểm biểu diễn $z_0 = \dfrac{\sigma_1}{\left(\sigma_3 \overline{\omega}^3 + 1\right) + 2} = \sigma_1$ tức là trực tâm H của ABC.

Vậy gọi Γ là đường tròn đơn vị thì ứng với mỗi $P \in \Gamma$ ta được điểm J của mặt phẳng phức. Cần tìm ảnh của ánh xạ đó.

Xét ánh xạ : $\varphi : \Gamma \mapsto \Gamma$ xác định bởi $\omega \mapsto z = \overline{\omega}^{-3}$

và ánh xạ $F : \overline{\mathbb{C}} \mapsto \overline{\mathbb{C}}$ xác định bởi $z \mapsto z' = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_3 z + 2}$

thì $F \circ \varphi : \omega \mapsto \dfrac{\sigma_1}{\sigma_3 \overline{\omega}^{-3} + 2}$ đặt ứng mỗi điểm P biểu diễn ω, $|\omega| = 1$ thành điểm J nói trên.

φ là một toàn ánh.

F là một biến đổi tròn thuận (để ý rằng $\sigma_1 \sigma_3 \neq 0$ do tam giác ABC không phải là tam giác đều).

Vậy J chạy trên ảnh của Γ bởi F.

Tâm của đường tròn trực - trọng tâm của ABC biểu diễn số

$$\frac{1}{2}\left(\sigma_1 + \frac{\sigma_1}{3}\right) = \frac{2}{3}\sigma_1,$$

bán kính của nó là $\left|\dfrac{\sigma_1}{3}\right|$.

Khi $|z| = 1$ thì $\left|\dfrac{\sigma_1}{\sigma_3 z + 2} - \dfrac{2}{3}\sigma_1\right| = \dfrac{|\sigma_1|}{3}\dfrac{\left|(2\sigma_3 z + 1)\overline{\sigma_3 z}\right|}{|\sigma_3 z + 2|} = \left|\dfrac{\sigma_1}{3}\right|\left|\dfrac{2 + \overline{\sigma_3 z}}{\sigma_3 z + 2}\right| = \left|\dfrac{\sigma_1}{3}\right|$.

Suy ra ảnh của Γ qua $F \circ \varphi$ là đường tròn trực - trọng tâm của ABC.

5) J trùng với $G \Leftrightarrow \dfrac{\sigma_1}{3} = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_3 \overline{\omega}^{-3} + 2} \Leftrightarrow \omega^3 = \sigma_3$.

Vậy có ba vị trí của P trên đường tròn ngoại tiếp ABC (là ba đỉnh một tam giác đều) để J tương ứng với P trùng với G.

6) Trọng tâm G'' của $A''B''C''$ biểu diễn số phức

$$z'' = \frac{1}{3}(\alpha'' + \beta'' + \gamma'') = -\frac{\sigma_1 \sigma_3}{3}\overline{\omega}^{3} + \frac{2}{3}\sigma_1.$$

Khi P vạch nên đường tròn đơn vị thì G'' vạch nên đường tròn trực - trọng tâm của ABC vì khi $\omega = 1$ thì (lời giải xem câu 4)

$$\left|\left(-\frac{\sigma_1\sigma_3}{3}\overline{\omega}^3+\frac{2}{3}\sigma_1\right)-\frac{2}{3}\sigma_1\right|=\left|-\frac{\sigma_1\sigma_3}{3}\overline{\omega}^3\right|=\left|\frac{\sigma_1}{3}\right|.$$

7) Đã biết điểm J biểu diễn số $z_0=\dfrac{\sigma_1}{\sigma_3\overline{\omega}^3+2}$ còn G'' biểu diễn số

$$z''=-\frac{\sigma_1\sigma_3}{3}\overline{\omega}^3+\frac{2}{3}\sigma_1=-\frac{\sigma_1^2\left(\sigma_3\overline{\omega}^3+2\right)}{3\sigma_1}+\frac{4\sigma_1}{3}=-\frac{\sigma_1^2}{3\omega_0}+\frac{4}{3}\sigma_1.$$

Vậy biến đổi tròn thuận xác định bởi $z\mapsto z'=-\dfrac{\sigma_1^2}{3z}+\dfrac{4}{3}\sigma_1$ biến J thành G''. Nó giữ bất biến đường tròn trực - trọng tâm của ABC. Điểm bất động của biến đổi đó biểu diễn số phức z mà $z=-\dfrac{\sigma_1^2}{3z}+\dfrac{4}{3}\sigma_1$ tức là $3z^2-4\sigma_1 z+\sigma_1^2=0$:

Phương trình này có hai nghiệm là σ_1 và $\dfrac{\sigma_1}{3}$ nên các điểm bất động là H và Q.

39. Ta có :

$$M_1M_2.M_3M_4=M_2M_3.M_1M_4\Leftrightarrow\left|\left[M_1,\,M_2,\,M_3,\,M_4\right]\right|=1(*)$$

$$M_2M_3.M_1M_4=M_3M_1.M_2M_4\Leftrightarrow\left|\left[M_1,\,M_2,\,M_3,\,M_4\right]\right|=1(**)$$

Từ (**), đặt $\left[M_1,\,M_2,\,M_3,\,M_4\right]=\cos\varphi+i\sin\varphi$ $(\varphi\in\mathbb{R})$ thì theo tính chất của tỉ số kép, $\left[M_1,\,M_3,\,M_2,\,M_4\right]=1-\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$, vậy (*) trở thành $\left|1-\cos\varphi-i\sin\varphi\right|=1$ tức là $\left|2\sin\dfrac{\varphi}{2}\left(\sin\dfrac{\varphi}{2}-i\cos\dfrac{\varphi}{2}\right)\right|=1$, nghĩa là $\left|\sin\dfrac{\varphi}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $\varphi=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ hoặc $\varphi=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ tức là hoặc

$$\left[M_1,\,M_2,\,M_3,\,M_4\right]=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\text{ hoặc }\left[M_1,\,M_2,\,M_3,\,M_4\right]=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

MỤC LỤC

Lời nói đầu	*3*	*HD-LG-ĐS*
Chương I. **KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH CỦA CHÚNG**	**5**	**64**
§1. Hình đa diện và khối đa diện	5	64
§2. Phép dời hình trong không gian	7	73
§3. Hình đa diện đều và khối đa diện đều	8	80
§4. Thể tích các khối đa diện	10	87
Chương II. **MẶT CẦU, MẶT TRỤ, MẶT NÓN**	**12**	**96**
§1. Mặt cầu, khối cầu	12	96
§2. Mặt trụ. Hình trụ. Khối trụ Mặt nón. Hình nón. Khối nón	14	105
Bài tập bổ sung	19	124
Chương III. **PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN**	**25**	**164**
§1. Hệ tọa độ trong không gian	25	164
§2. Phương trình mặt phẳng	27	166
§3. Phương trình đường thẳng	29	178
§4. Mặt cầu	33	186
Bài tập bổ sung	35	193
Chuyên đề 1. **MỘT SỐ YẾU TỐ CỦA HÌNH HỌC TỔ HỢP**	**42**	**215**
§1. Hình lồi	42	215
§2. Đường kính của hình	42	217
§3. Cắt hình	43	219
§4. Mặt phẳng kẻ ô vuông	44	222
Chuyên đề 2. **LÍ THUYẾT ĐỒ THỊ**	**45**	**226**
§1. Khái niệm cơ bản về đồ thị	45	229
§2. Các yếu tố cơ bản của đồ thị vô hướng	47	235
§3. Một số loại đồ thị đơn vô hướng	50	235
§4. Một số loại đồ thị có hướng	51	241
Chuyên đề 3. **ỨNG DỤNG SỐ PHỨC VÀO HÌNH HỌC PHẲNG**	**52**	**245**
§1. Biểu diễn hình học số phức	52	245
§2. Tích vô hướng. Tích lệch. Đường thẳng trong mặt phẳng phức	53	249
§3. Phép dời hình và phép đồng dạng trong mặt phẳng	57	260
§4. Đường tròn. Phép nghịch đảo. Biến đổi tròn	59	267

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập VŨ VĂN HÙNG

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung:
Phó Tổng biên tập PHAN XUÂN THÀNH
Giám đốc CTCP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội PHAN KẾ THÁI

Biên tập nội dung:
PHAN THỊ MINH NGUYỆT

Trình bày bìa:
LƯU CHÍ ĐỒNG

Chế bản:
TRẦN THỊ KIM THANH

Công ty cổ phần Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội -
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ quyền công bố tác phẩm.

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN - BÀI TẬP HÌNH HỌC 12

Mã số: TZT69h3-CPH

Số đăng kí KHXB: 27-2013/CXB/111-2008/GD.
In 3.000 cuốn (QĐ: 042), khổ 17 x 24cm. Số in: 235/13.
In tại Công ty Cổ phần In Gia Định, 9D Nơ Trang Long, Q.BT, TP.HCM.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2013.