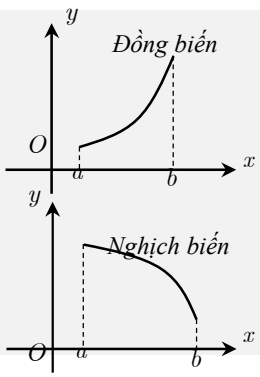
Chuyên đề 1 TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH

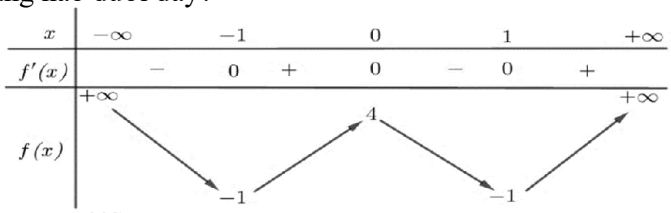
Dạng 1. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số thông qua bảng biến thiên, đồ thị

① ***Định lí*** *(thừa nhận): Giả sử hàm số* $y=f(x)$ *có đạo hàm trên khoảng* K.
Nếu $f'(x)>0,\ \forall x\in K$ *thì hàm số đồng biến trên khoảng* K.
Nếu $f'(x)<0,\ \forall x\in K$ *thì hàm số nghịch biến trên khoảng* K.
Nếu $f'(x)=0,\ \forall x\in K$ *thì hàm số không đổi trên khoảng* K.



② ***Hình dáng đồ thị***
Nếu hàm số ***đồng biến*** *trên* K *thì từ trái sang phải* ***đồ thị đi lên***.
Nếu hàm số ***nghịch biến*** *trên* K *thì từ trái sang phải* ***đồ thị đi xuống***.

Câu 1. **(Mã 101 – 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

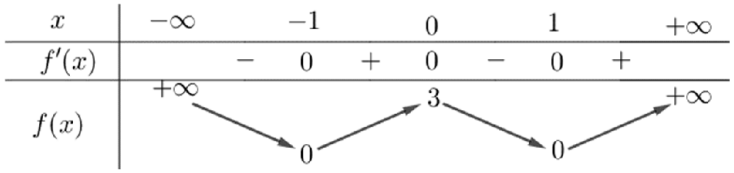
A. $(-\infty;-1)$.

B. $(0;1)$.

C. $(-1;1)$.

D. $(-1;0)$

Câu 2. **(Mã 103 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

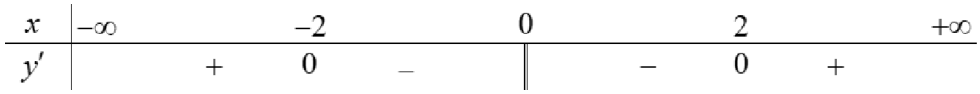
A. $(-\infty;-1)$.

B. $(0;1)$.

C. $(-1;0)$.

D. $(-1;+\infty)$.

Câu 3. **(Mã 104 - 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau



Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

Câu 4. **(Kim Liên - Hà Nội - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ.



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Câu 5. **(Mã 101 - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

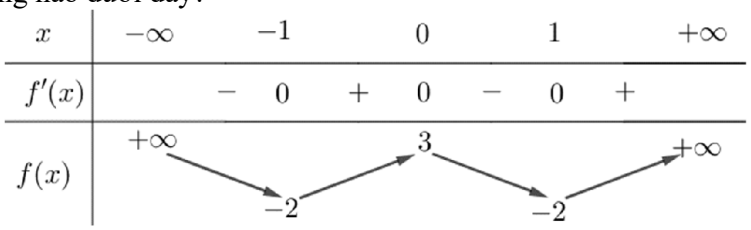
Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;0)$

B. $(-\infty;0)$

C. $(1;+\infty)$

D. $(0;1)$



Câu 6. **(Mã 102 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

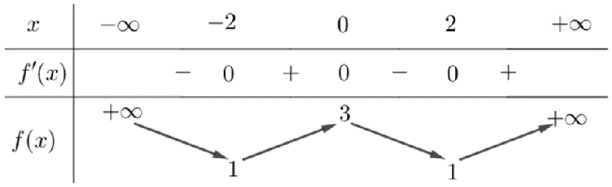
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(0;+\infty)$.

B. $(0;2)$.

C. $(-2;0)$.

D. $(-\infty;-2)$.



Câu 7. **(Mã 103 - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

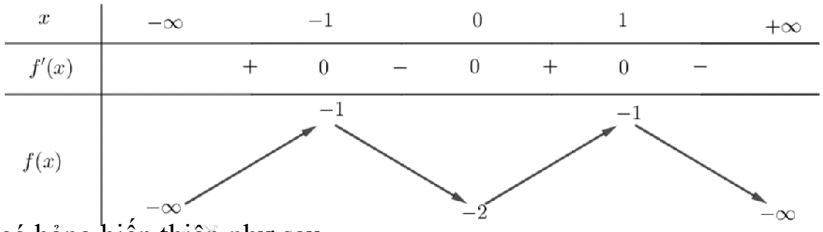
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$

B. $(1;+\infty)$

C. $(-\infty;1)$

D. $(-1;0)$



Câu 8. **(Mã 101 - 2019)** Cho hàm số có bảng biến thiên như sau

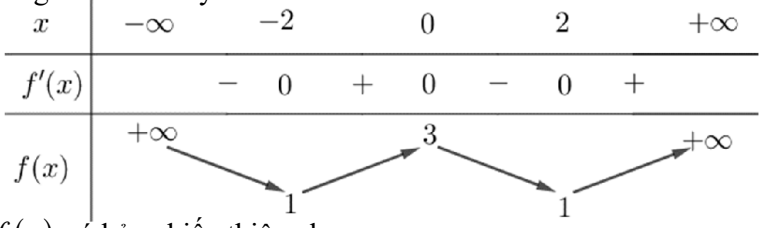
Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$.

B. $(0;+\infty)$.

C. $(-2;0)$.

D. $(2;+\infty)$.



Câu 9. **(Mã 102 - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

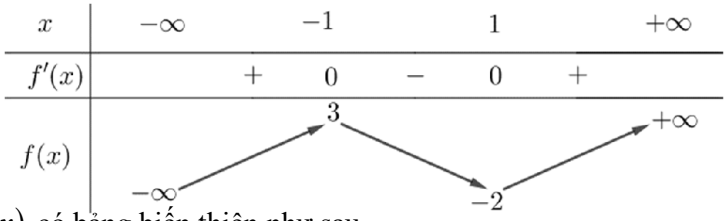
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;+\infty)$.

B. $(1;+\infty)$.

C. $(-1;1)$.

D. $(-\infty;1)$.



Câu 10. **(Mã 104 -2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

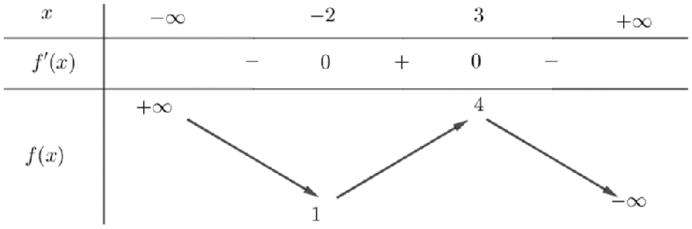
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;3)$

B. $(3;+\infty)$

C. $(-\infty;-2)$

D. $(-2;+\infty)$



Câu 11. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

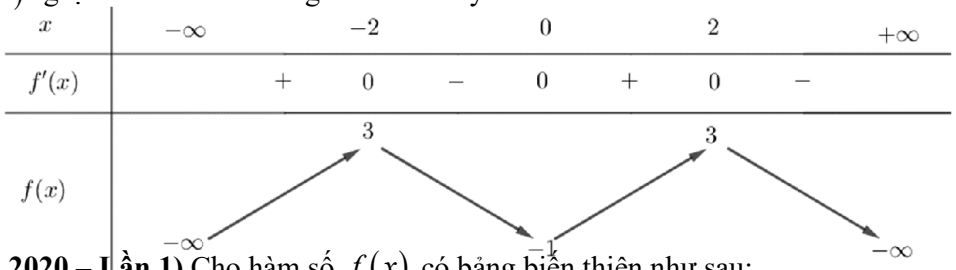
Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;+\infty)$

B. $(-\infty;-2)$

C. $(0;2)$

D. $(-2;0)$



Câu 12. **(Đề Minh Họa 2020 – Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

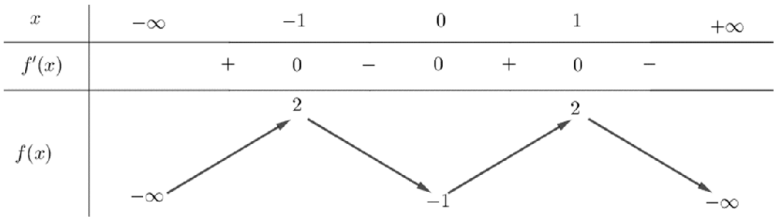
Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$.

B. $(0;1)$.

C. $(-1;0)$.

D. $(-\infty;0)$.



Câu 13. **(Đề Minh Họa 2020 – Lần 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

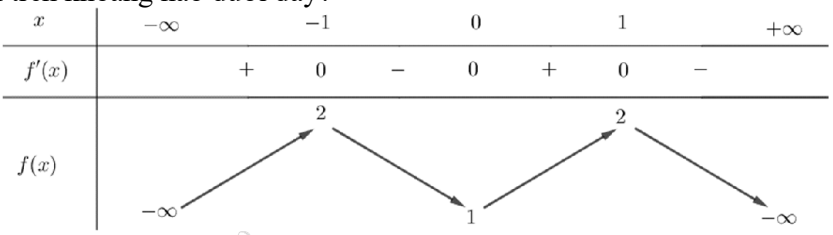
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$.

B. $(-1;0)$.

C. $(-1;1)$.

D. $(0;1)$.



Câu 14. **(Mã 102 – 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

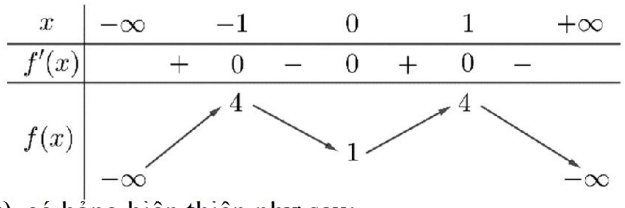
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$.

B. $(-1;1)$.

C. $(0;1)$.

D. $(-1;0)$.



Câu 15. **(Mã 103 – 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biên thiên như sau:

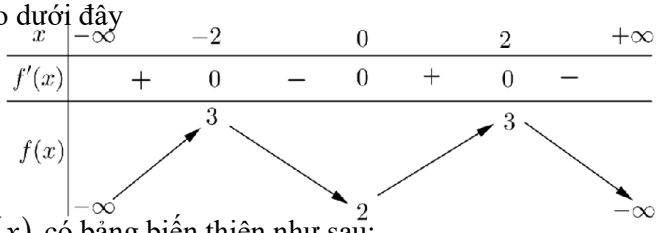
Hàm số đã chođồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-2;2)$

B. $(0;2)$

C. $(-2;0)$

D. $(2;+\infty)$.



Câu 16. **(Mã 104 – 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

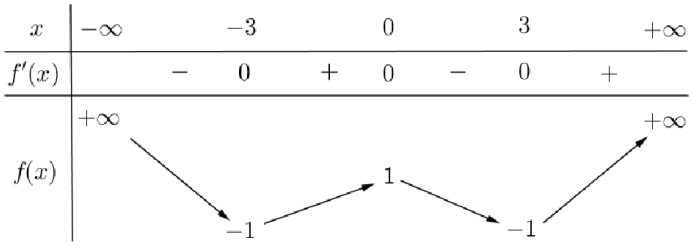
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-3;0)$.

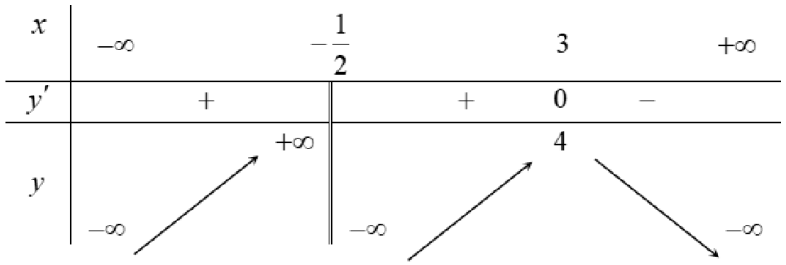
B. $(-3;3)$.

C. $(0;3)$.

D. $(-\infty;-3)$.



Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?



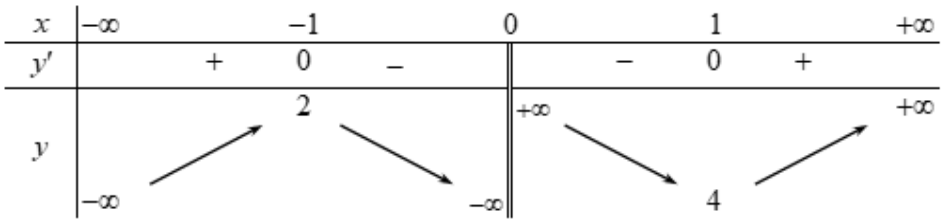
A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

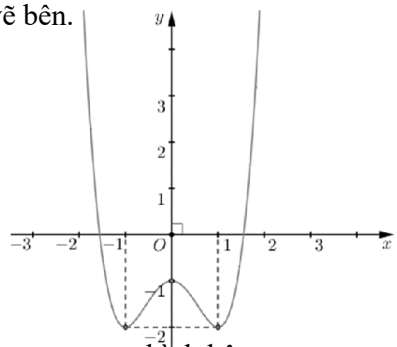


Hàm số nghịch biến trong khoảng nào?

A. $(-1;1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(4;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2)$.

Câu 19. **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty-1)$

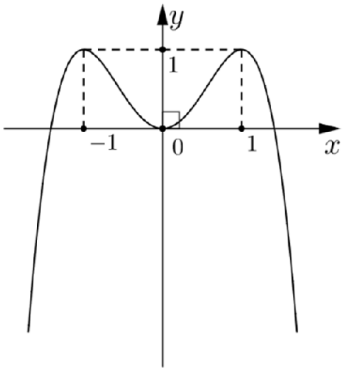
B. $(-1;1)$

C. $(-1;0)$

D. $(0;1)$

Câu 20. **(Mã 102 – 2020 – Lần 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



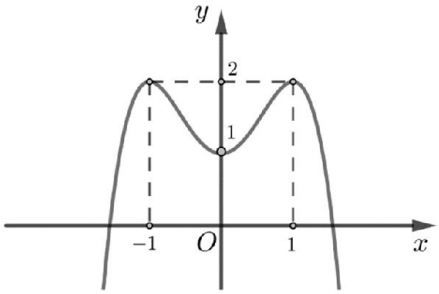
A. $(-1;0)$.

B. $(-\infty;-1)$.

C. $(0;1)$.

D. $(0;+\infty)$.

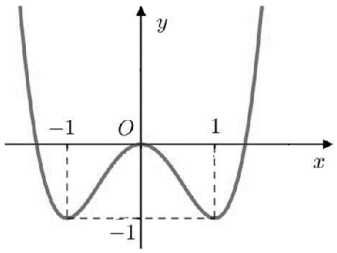
Câu 21. **(Mã 107 – 2020 Lần 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 22. **(Mã 103 – 2020 – Lần 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



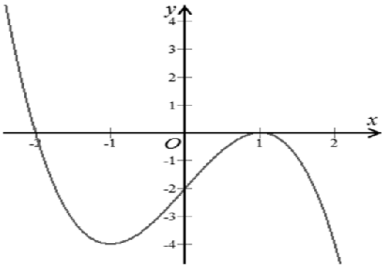
A. $(-1;0)$.

B. $(-\infty;-1)$.

C. $(0;+\infty)$.

D. $(0;1)$.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty;-1)$.

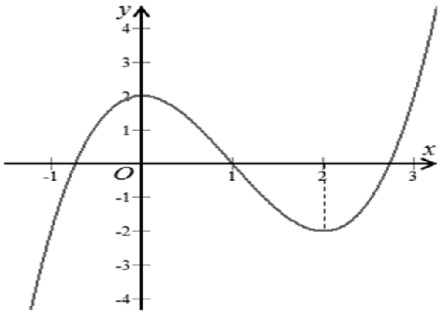
B. $(-1;1)$.

C. $(0;+\infty)$.

D. $(-\infty;+\infty)$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



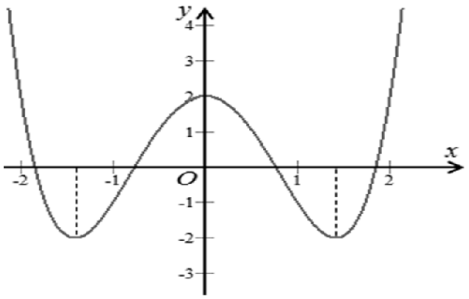
A. $(-1;1)$.

B. $(-1;2)$.

C. $(1;2)$.

D. $(2;+\infty)$.

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



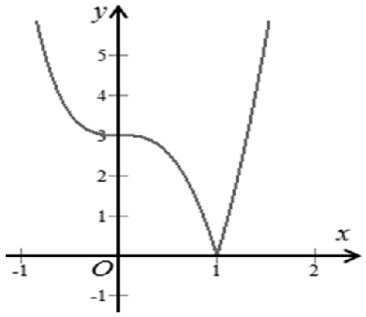
A. $(-\infty;-1)$.

B. $(-1;1)$.

C. $(1;2)$.

D. $(0;1)$.

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**

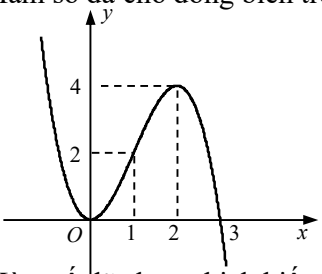
A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào?



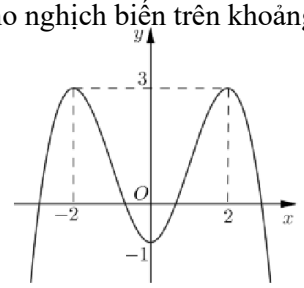
A. $(-\infty;0)$.

B. $(1;3)$.

C. $(0;2)$.

D. $(0;+\infty)$.

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?



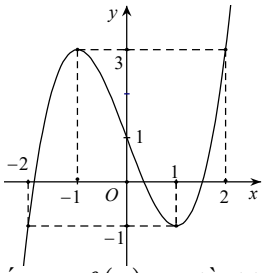
A. $(-2;0)$.

B. $(-\infty;0)$.

C. $(-2;2)$.

D. $(0;2)$.

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?



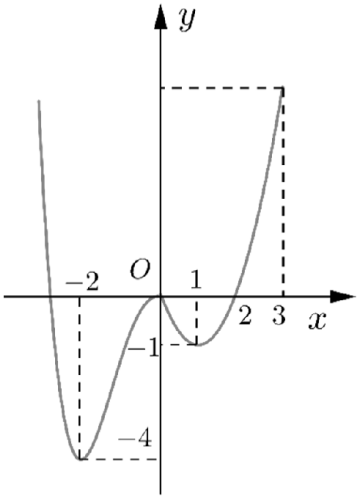
A. $(-1;1)$.

B. $(-2;-1)$.

C. $(-1;2)$.

D. $(1;+\infty)$.

Câu 30. **(Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng

A. $(-1;0)$.

B. $(-2;-1)$.

C. $(0;1)$.

D. $(1;3)$.

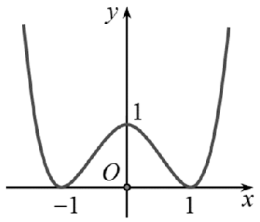
Câu 31. **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-1;0)\cup(1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.



Dạng 2. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số cho trước

- **Bước 1**. Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2**. Tính đạo hàm $y'=f'(x)$. Tìm các điểm x_i, $(i=1,2,3,...,n)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- **Bước 3**. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4**. Nêu kết luận về các khoảng đồng biến và nghịch biến dưa vào bảng biến thiên.

Câu 1. **(Mã 110 - 2017)** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. $y=\dfrac{x-1}{x-2}$ **B.** $y=x^3+x$ **C.** $y=-x^3-3x$ **D.** $y=\dfrac{x+1}{x+3}$

Câu 2. **(Đề Tham Khảo - 2017)** Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

Câu 3. **(Đề Tham Khảo - 2017)** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. $y=x^4+3x^2$. **B.** $y=\dfrac{x-2}{x+1}$. **C.** $y=3x^3+3x-2$. **D.** $y=2x^3-5x+1$.

Câu 4. **(Mã 110 - 2017)** Cho hàm số $y=x^3-3x^2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$ **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$

Câu 5. **(Đề Minh Họa - 2017)** Hỏi hàm số $y=2x^4+1$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Câu 6. **(Mã 105 - 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$ **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$

Câu 7. **(Mã 105 - 2017)** Cho hàm số $y=x^3-2x^2+x+1$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$ **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)$ **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$

Câu 8. **(Mã 105 - 2017)** Cho hàm số $y=x^4-2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

Câu 9. **(Mã 123 - 2017)** Hàm số $y=\dfrac{2}{x^2+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;+\infty)$ **B.** $(0;+\infty)$ **C.** $(-\infty;0)$ **D.** $(-1;1)$

Câu 10. **(Mã 123 - 2017)** Cho hàm số $y=x^3+3x+2$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

Câu 11. **(Mã 104 - 2017)** Cho hàm số $y=\sqrt{2x^2+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$

Câu 12. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2+x+2019$

A. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

Câu 13. **(Lê Quý Đôn - Đà Nẵng - 2019)** Hàm số $y=\dfrac{5-2x}{x+3}$ nghịch biến trên

A. $\mathrm{R}\backslash\{-3\}$. **B.** R. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 14. **(Chuyên Hà Tĩnh - Lần 1 - 2019)** Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x^3-3x+2$. **B.** $y=x^4+2x^2+2$.

C. $y=-x^3+2x^2-4x+1$. **D.** $y=-x^3-2x^2+5x-2$.

Câu 15. **(Chuyên Nguyễn Trãi - Hải Dương - 2019)** Hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ đồng biến trên khoảng

A. $(0;2)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Câu 16. **(HSG - TP Đà Nẵng - 2019)** Hàm số $y=x^4-4x^3$ đồng biến trên khoảng

A. $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Câu 17. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành - Yên Bái - 2019)** Cho hàm số $y=x^4-2x^2+2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$. **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 18. **(THPT Ngô Quyền - Hải Phòng - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(1-x)^2(x+1)^3(3-x)$. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 19. **(HSG 12 - TP Nam Định - 2019)** Hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x+2019$ nghịch biến trên

A. $(-1;3)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 20. **(Chuyên Ngoại Ngữ - Hà Nội - 2019)** Hàm số $y=\sqrt{2018x-x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(1010;2018)$. **B.** $(2018;+\infty)$. **C.** $(0;1009)$. **D.** $(1;2018)$.

Câu 21. **(Chuyên Lê Quý Đôn - Quảng Trị - 2019)** Hàm số $y=-x^3+3x^2-4$ đồng biến trên tập hợp nào trong các tập hợp được cho dưới đây?

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Câu 22. **(SGD&ĐT Hà Nội - 2018)** Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y'=x^2$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và đồng biến trên $(0;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Câu 23. **(THPT Lương Thế Vinh - HN - 2018)** Hàm số $y=x^3-3x$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 24. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Cho hàm $y=\sqrt{x^2-6x+5}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Câu 25. **(Thpt Kinh Môn - HD - 2018)** Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-1$, kết luận nào sau đây về tính đơn điệu của hàm số là **đúng nhất**:

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0);(2;+\infty)$;

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$;

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ và đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0);(2;+\infty)$;

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 26. **(Chuyên ĐH Vinh - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-2)^3$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;3)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;0)$.

Câu 27. **(THPT Can Lộc - Hà Tĩnh - 2018)** Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-12x-1$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;4)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;4)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;+\infty)$.

---------- HẾT ----------

Chuyên đề 1 TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

TÀI LIỆU DÀNH CHO HỌC SINH MỤC TIÊU 7-8 ĐIỂM

Dạng 1. Tìm m để hàm số đơn điệu trên các khoảng xác định của nó

Xét hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

– Bước 1. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

– Bước 2. Tính đạo hàm $y'=f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

+ Để $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'=f'(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{f'(x)}=3a>0 \\ \Delta_{f'(x)}=4b^2-12ac\le 0 \end{cases} \Rightarrow m$?

+ Để $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'=f'(x)\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{f'(x)}=3a<0 \\ \Delta_{f'(x)}=4b^2-12ac\le 0 \end{cases} \Rightarrow m$?

Lưu ý: Dấu của tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$.

• Để $f(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta\le 0 \end{cases}$. • $f(x)\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta\le 0 \end{cases}$.

Câu 1. **(Đề Tham Khảo Lần 2 2020)**Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3+mx^2+4x+3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 2. **(Mã 123 - 2017)** Cho hàm số $y=-x^3-mx^2+(4m+9)x+5$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

A. 5 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 7

Câu 3. Cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+mx^2+(3m+2)x+1$. Tìm tất cả giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $\left[\begin{array}{l} m\ge -1 \\ m\le -2 \end{array}\right.$. **B.** $-2\le m\le -1$. **C.** $-2<m<-1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m>-1 \\ m<-2 \end{array}\right.$.

Câu 4. Tìm m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3(2m-1)+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. Không có giá trị m thỏa mãn. **B.** $m\ne 1$.

C. $m=1$. **D.** Luôn thỏa mãn với mọi m.

Câu 5. Tìm điều kiện của tham số thực m để hàm số $y=x^3-3x^2+3(m+1)x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m\ge 2$. **B.** $m<2$. **C.** $m<0$. **D.** $m\ge 0$.

Câu 6. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+4x-m$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $[-2;2]$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(-\infty;-2]$. **D.** $[2;+\infty)$.

Câu 7. Giá trị của m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2mx^2+(m+3)x-5+m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là.

A. $-\frac{3}{4}\le m\le 1$. **B.** $m\le -\frac{3}{4}$. **C.** $-\frac{3}{4}<m<1$. **D.** $m\ge 1$.

Câu 8. **(Chuyên KHTN - Hà Nội - 2020)** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3+(m+1)x^2+3x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $[-4;2]$. **B.** $(-4;2)$. **C.** $(-\infty;-4]\cup[2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-4)\cup(2;+\infty)$.

Câu 9. **(Đề Tham Khảo - 2017)** Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. 0 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

Câu 10. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số hàm số $y=\frac{1}{3}(m^2-m)x^3+2mx^2+3x-2$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=mx^3+mx^2+m(m-1)x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m\le\frac{4}{3}$ và $m\neq 0$. **B.** $m=0$ hoặc $m\ge\frac{4}{3}$.

C. $m\ge\frac{4}{3}$. **D.** $m\le\frac{4}{3}$.

Câu 12. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{m}{3}x^3-2mx^2+(3m+5)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 13. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=(m-1)x^3-3(m-1)x^2+3x+2$ đồng biến biến trên $\mathbb{R}$?

A. $1<m\le 2$. **B.** $1<m<2$. **C.** $1\le m\le 2$. **D.** $1\le m<2$

Câu 14. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên - 2018)** Số giá trị nguyên của m để hàm số $y=(4-m^2)x^3+(m-2)x^2+x+m-1$ (1) đồng biến trên $\mathbb{R}$ bằng.

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 15. **(Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2018)** Số các giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-100;100]$ để hàm số $y=mx^3+mx^2+(m+1)x-3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là:

A. 200. **B.** 99. **C.** 100. **D.** 201.

Câu 16. **(Liên trường Nghệ An - 2020)** Tổng bình phương của tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=(3m^2-12)x^3+3(m-2)x^2-x+2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là?

A. 9. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 14.

Câu 17. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Xét hàm số nhất biến $y=f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$.

– Bước 1. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

– Bước 2. Tính đạo hàm $y'=f'(x)=\frac{a.d-b.c}{(cx+d)^2}$.

+ Để $f(x)$ đồng biến trên $D\Leftrightarrow y'=f'(x)>0,\ \forall x\in D\Leftrightarrow a.d-b.c>0\Rightarrow m$?

+ Để $f(x)$ nghịch biến trên $D\Leftrightarrow y'=f'(x)<0,\ \forall x\in D\Leftrightarrow a.d-b.c<0\Rightarrow m$?

★ **Lưu ý**: Đối với hàm phân thức thì không có dấu "=" xảy ra tại vị trí y'.

Câu 18. **(Mã 105 - 2017)** Cho hàm số $y=\dfrac{mx-2m-3}{x-m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

A. Vô số **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

Câu 19. **(Mã 104 - 2017)** Cho hàm số $y=\dfrac{mx+4m}{x+m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

A. 4 **B.** Vô số **C.** 3 **D.** 5

Câu 20. **(THPT Hoa Lư A - 2018)** Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\dfrac{(m+1)x-2}{x-m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 21. **(SGD&ĐT Bắc Giang - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 22. **(THPT Hà Huy Tập - 2018)** Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+2-m}{x+1}$ nghịch biến trên các khoảng mà nó xác định?

A. $m\le 1$. **B.** $m\le -3$. **C.** $m<-3$. **D.** $m<1$.

Câu 23. **(SỞ GD&ĐT Yên Bái - 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx-4}{x-m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

A. $\left[\begin{array}{l} m\le -2 \\ m\ge 2 \end{array}\right.$. **B.** $-2<m<2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$. **D.** $-2\le m\le 2$.

Câu 24. **(THCS&THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương - 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=\dfrac{mx-2}{2x-m}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định

A. $\left[\begin{array}{l} m\le -2 \\ m\ge 2 \end{array}\right.$. **B.** $-2<m<2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$. **D.** $-2\le m\le 2$.

Dạng 2. Tìm m để hàm số nhất biến đơn điệu trên khoảng cho trước

Tìm Tìm tham số m để hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên khoảng $(\alpha;\beta)$.

- Tìm tập xác định, chẳng hạn $x\ne -\dfrac{d}{c}$. Tính đạo hàm y'.
- Hàm số đồng biến $\Rightarrow y'>0$ (hàm số nghịch biến $\Rightarrow y'<0$). Giải ra tìm được m (1).
- Vì $x\ne -\dfrac{d}{c}$ và có $x\in(\alpha;\beta)$ nên $-\dfrac{d}{c}\notin(\alpha;\beta)$. Giải ra tìm được m (2).
- Lấy giao của (1) và (2) được các giá trị m cần tìm.

◆ **Các trường hợp đặc biệt:**

◆ Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\ne 0)$ đồng biến trên từng khoảng xác định khi: $ad-bc>0$

◆ Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\ne 0)$ nghịch biến trên từng khoảng xác định khi: $ad-bc<0$

◆ Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\ne 0)$ đồng biến trên khoảng $(\alpha;+\infty)$ khi: $\begin{cases} ad-bc>0 \\ \dfrac{-d}{c}\le\alpha \end{cases}$

◆ Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$ nghịch biến trên khoảng $(\alpha;+\infty)$ khi: $\begin{cases} ad-bc<0 \\ \dfrac{-d}{c}\le \alpha \end{cases}$

◆ Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$ đồng biến trên khoảng $(\alpha;\beta)$ khi: $\begin{cases} ad-bc>0 \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{-d}{c}\le \alpha \\ \dfrac{-d}{c}\ge \beta \end{array}\right. \end{cases}$

◆ Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$ nghịch biến trên khoảng $(\alpha;\beta)$ khi: $\begin{cases} ad-bc<0 \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{-d}{c}\le \alpha \\ \dfrac{-d}{c}\ge \beta \end{array}\right. \end{cases}$

Câu 1. **(Đề Tham Khảo Lần 1 2020)** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{mx-4}{x-m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 2. **(Mã 101 – 2020 – Lần 1)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+4}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-7)$ là

A. $[4;7)$. **B.** $(4;7]$. **C.** $(4;7)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Câu 3. **(Mã 102 – 2020 – Lần 1)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+5}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ là

A. $(5;+\infty)$. **B.** $(5;8]$. **C.** $[5;8)$. **D.** $(5;8)$.

Câu 4. **(Mã 103 – 2020 – Lần 1)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-5)$

A. $(2;5]$. **B.** $[2;5)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(2;5)$.

Câu 5. **(Mã 104- 2020 – Lần 1)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$ là

A. $(3;6]$. **B.** $(3;6)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $[3;6)$.

Câu 6. **(Mã 104-2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+3m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$.

A. 2 **B.** 6 **C.** Vô số **D.** 1

Câu 7. **(Mã 103-2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6;+\infty)$?

A. 0 **B.** 6 **C.** 3 **D.** Vô số

Nguyễn Bảo Vương

Câu 8. **(Mã 101- 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-10)$?

A. 2 **B.** Vô số **C.** 1 **D.** 3

Câu 9. **(Mã 102 - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10;+\infty)$?

A. Vô số **B.** 4 **C.** 5 **D.** 3

Câu 10. **(Chuyên KHTN - 2020)** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx-4}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$ là

A. $(-2;1]$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(-2;-1]$. **D.** $(-2;-1)$.

Câu 11. **(Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx-1}{m-4x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)$.

A. $m>2$. **B.** $1\le m<2$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $-2\le m\le 2$.

Câu 12. **(Chuyên Thái Nguyên - 2020)** Cho hàm số $y=\dfrac{mx-2m+3}{x+m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Tìm số phần tử của S.

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 13. **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+18}{x+4m}$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. Vô số. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 14. **(Sở Hà Tĩnh - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+9}{4x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;4)$?

A. 5. **B.** 11. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 15. **(Sở Yên Bái - 2020)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{-mx+3m+4}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$

A. $-1<m<4$. **B.** $-1<m\le 1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>4 \end{array}\right.$. **D.** $1\le m<4$.

Câu 16. **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-2020;2020)$ sao cho hàm số $y=\dfrac{3x+18}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$?

A. 2020. **B.** 2026. **C.** 2018. **D.** 2023.

Câu 17. **(Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+4}{2x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-3;4)$.

A. Vô số. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 18. **(Chuyên KHTN - Hà Nội - Lần 3)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Nguyễn Bảo Vương

Dạng 3. Tìm m để hàm số bậc 3 đơn điệu trên khoảng cho trước

Tìm tham số m để hàm số $y=f(x;m)$ đơn điệu trên khoảng $(\alpha;\beta)$.

Bước 1: Ghi điều kiện để $y=f(x;m)$ đơn điệu trên $(\alpha;\beta)$. Chẳng hạn:

• Đề yêu cầu $y=f(x;m)$ đồng biến trên $(\alpha;\beta)\Rightarrow y'=f'(x;m)\ge 0$.

• Đề yêu cầu $y=f(x;m)$ nghịch biến trên $(\alpha;\beta)\Rightarrow y'=f'(x;m)\le 0$.

Bước 2: Độc lập m ra khỏi biến số và đặt vế còn lại là $g(x)$, có hai trường hợp thường gặp :

• $m\ge g(x),\ \forall x\in(\alpha;\beta)\Rightarrow m\ge \max\limits_{(\alpha;\beta)} g(x)$.

• $m\le g(x),\ \forall x\in(\alpha;\beta)\Rightarrow m\le \min\limits_{(\alpha;\beta)} g(x)$.

Bước 3: Khảo sát tính đơn điệu của hàm số $g(x)$ trên D (hoặc sử dụng Cauchy) để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. Từ đó suy ra m.

Câu 1. **(Mã 101 – 2020 -Lần 2)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+(4-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

A. $(-\infty;1]$ **B.** $(-\infty;4]$ **C.** $(-\infty;1)$ **D.** $(-\infty;4)$

Câu 2. **(Mã 102 – 2020 – Lần 2)** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+(5-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

A. $(-\infty;2)$. **B.** $(-\infty;5)$. **C.** $(-\infty;5]$. **D.** $(-\infty;2]$.

Câu 3. **(Mã 103 – 2020 – Lần 2)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+(2-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

A. $(-\infty;-1]$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(-\infty;2]$.

Câu 4. **(Mã 104 – 2020 – Lần 2)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+(1-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-\infty;-2]$. **D.** $(-\infty;1]$.

Câu 5. **(Đề Tham Khảo 2019)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-x^3-6x^2+(4m-9)x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ là

A. $\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right]$ **B.** $[0;+\infty)$ **C.** $(-\infty;0]$ **D.** $\left[-\frac{3}{4};+\infty\right)$

Câu 6. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-mx-4$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ là

A. $(-1;5)$. **B.** $(-\infty;-3]$. **C.** $(-\infty;-4]$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=f(x)=\frac{mx^3}{3}+7mx^2+14x-m+2$ giảm trên nửa khoảng $[1;+\infty)$?

A. $\left(-\infty;-\frac{14}{15}\right]$. **B.** $\left[-2;-\frac{14}{15}\right]$. **C.** $\left[-\frac{14}{15};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\frac{14}{15}\right)$.

Câu 8. Xác định các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2-m$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$?

A. $m\ge 0$. **B.** $m<\frac{1}{2}$. **C.** $m\le 0$. **D.** $m\ge\frac{1}{2}$.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3+3x^2-mx+1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

A. $m\le 0$. **B.** $m\ge -2$. **C.** $m\le -3$. **D.** $m\le -1$.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2-9m^2x$ nghịch biến trên

khoảng $(0;1)$.

A. $-1<m<\frac{1}{3}$. **B.** $m>\frac{1}{3}$.

C. $m<-1$. **D.** $m\ge\frac{1}{3}$ hoặc $m\le-1$.

Câu 11. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-1)x-m+2$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$..

A. $m=0$. **B.** $m>1$. **C.** $m\le-\frac{1}{2}$. **D.** $m<-\frac{1}{2}$.

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx+2$ tăng trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. $m<3$. **B.** $m\ge3$. **C.** $m\ne3$. **D.** $m\le3$.

Câu 13. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-mx^2-(m-6)x+1$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$ là:

A. $(-\infty;3)$. **B.** $(-\infty;3]$. **C.** $[3;6]$. **D.** $(-\infty;6]$.

Câu 14. Tìm tất cả các giá thực của tham số m sao cho hàm số $y=2x^3-3x^2-6mx+m$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

A. $m\le-\frac{1}{4}$. **B.** $m\ge\frac{1}{4}$. **C.** $m\ge2$. **D.** $m\ge0$.

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-6x^2+mx+1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. $m\ge12$. **B.** $m\le12$. **C.** $m\ge0$. **D.** $m\le0$.

Câu 16. Tìm m để hàm số $y=-x^3+3x^2+3mx+m-1$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

A. $m\le-1$. **B.** $m\le1$. **C.** $m<1$. **D.** $m>-1$.

Câu 17. **(THPT Chuyên Hạ Long - 2018)** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=x^3-3(2m+1)x^2+(12m+5)x+2$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Số phần tử của S bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 18. **(Chuyên KHTN - 2018)**. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-mx^2-(m-6)x+1$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$ là:

A. $(-\infty;6]$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $(-\infty;3]$. **D.** $[3;6]$.

Câu 19. **(Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020)** Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+6)x+\frac{2}{3}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 9. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 20. **(Chuyên Sơn La - 2020)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-x^3-6x^2+(4m-9)x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ là

A. $\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right]$. **B.** $\left[-\frac{3}{4};+\infty\right)$. **C.** $[0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0]$.

Câu 21. **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=\frac{x^3}{3}-(m-1)x^2+3(m-1)x+1$. Số các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ là

A. 7. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 22. **(Kim Liên - Hà Nội - 2020)** Số giá trị nguyên thuộc khoảng $(-2020;2020)$ của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2-mx+2019$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ là

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2017.

Câu 23. **(Lê Lai - Thanh Hóa - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-2020;2020]$ để hàm số $y=x^3-6x^2+mx+1$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

A. 2004. **B.** 2017. **C.** 2020. **D.** 2009.

Câu 24. **(Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Cho hàm số $f(x)=x^3-(m+1)x^2-(2m^2-3m+2)x+2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 25. **(Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2020;2020)$ sao cho hàm số $y=2x^3+mx^2+2x$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$. Tính số phần tử của tập hợp S.

A. 2025. **B.** 2016. **C.** 2024. **D.** 2023.

Câu 26. **(Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020)** Với mọi giá trị $m\ge a\sqrt{b}$, $(a,b\in\mathbb{Z})$ thì hàm số $y=2x^3-mx^2+2x+5$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$. Khi đó $a-b$ bằng

A. 1. **B.** -2. **C.** 3. **D.** -5.

Dạng 4. Tìm m để hàm số khác đơn điệu trên khoảng cho trước

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{\tan x-2}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

A. $m\le 0$ hoặc $1\le m<2$ **B.** $m\le 0$ **C.** $1\le m<2$ **D.** $m\ge 2$

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=x^3+mx-\dfrac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

A. 0 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 3

Câu 3. **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\dfrac{1}{5}m^2x^5-\dfrac{1}{3}mx^3+10x^2-(m^2-m-20)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** -2. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 4. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x+1+\dfrac{m}{x-2}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó là

A. $[0;1)$. **B.** $(-\infty;0]$. **C.** $[0;+\infty)\setminus\{1\}$. **D.** $(-\infty;0)$.

Câu 5. **(THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số để hàm số $y=\dfrac{\cos x-3}{\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$

A. $\left[\begin{array}{l}0\le m<3\\ m\le -1\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}0<m<3\\ m<-1\end{array}\right.$. **C.** $m\le 3$. **D.** $m<3$.

Câu 6. **(Hoàng Hoa Thám 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10;10)$ sao cho hàm số đồng biến trên $(-8;5)$?

A. 14. **B.** 13. **C.** 12. **D.** 15.

Câu 7. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{4}x^4+mx-\dfrac{3}{2x}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 8. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{\ln x-4}{\ln x-2m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;\mathrm{e})$. Tìm số phần tử của S.

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 4

Câu 9. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Tìm m để hàm số $y=\dfrac{\cos x-2}{\cos x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

A. $\left[\begin{array}{l} m\geq 2 \\ m\leq -2 \end{array}\right.$ **B.** $m>2$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m\leq 0 \\ 1\leq m<2 \end{array}\right.$ **D.** $-1<m<1$

Câu 10. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=\dfrac{3}{4}x^4-\dfrac{9}{2}x^2+(2m+15)x-3m+1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 11. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=3x+\dfrac{m^2+3m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 12. Tìm m để hàm số $y=\dfrac{\cos x-2}{\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

A. $m>2$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m\leq 0 \\ 1\leq m<2 \end{array}\right.$. **C.** $m<2$. **D.** $m\leq 2$.

Câu 13. **(Toán Học Tuổi Trẻ Số 5 2018)** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=8^{\cot x}+(m-3).2^{\cot x}+3m-2$ (1) đồng biến trên $\left[\dfrac{\pi}{4};\pi\right)$.

A. $-9\leq m<3$. **B.** $m\leq 3$. **C.** $m\leq -9$. **D.** $m<-9$.

Câu 14. **(Toán Học Tuổi Trẻ Số 6 2018)**Cho hàm số $y=\dfrac{\ln x-4}{\ln x-2m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;\mathrm{e})$. Tìm số phần tử của S.

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 15. **(THPT Chuyên Lê Hồng Phong 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{m\ln x-2}{\ln x-m-1}$ nghịch biến trên $\left(e^2;+\infty\right)$.

A. $m\leq -2$ hoặc $m=1$. **B.** $m<-2$ hoặc $m=1$.
C. $m<-2$. **D.** $m<-2$ hoặc $m>1$.

Câu 16. **(Chuyên Lương Thế Vinh - 2018)** Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}\cos^3 x-4\cot x-(m+1)\cos x$ đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$?

A. 5. **B.** 2. **C.** vô số. **D.** 3.

Câu 17. **(Chuyên Ngữ - Hà Nội - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số $y=x+5+\dfrac{1-m}{x-2}$ đồng biến trên $[5;+\infty)$?

A. 10. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 11.

Câu 18. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\dfrac{3}{4}x^4-(m-1)x^2-\dfrac{1}{4x^4}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 19. **(Kim Liên - Hà Nội - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2}{2}-mx+\ln(x-1)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 20. **(Chuyên Vinh - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=m^2x^4-2(4m-1)x^2+1$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 15. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 16.

Câu 21. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2018;2018]$ để hàm số $y=\sqrt{x^2+1}-mx-1$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

A. 2017. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2018.

Câu 22. **(Lê Quý Đôn - Quảng Trị- 2018)** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=2^{\frac{mx+1}{x+m}}$ nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

A. $m\in(-1;1)$. **B.** $m\in\left(\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $m\in\left[\frac{1}{2};1\right]$. **D.** $m\in\left[-\frac{1}{2};1\right)$.

Câu 23. **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{x^2+2x+m}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$ và đồng biến trên khoảng $(4;6)$.

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 24. **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Cho hàm số $y=\frac{\sqrt{1-\ln x}+1}{\sqrt{1-\ln x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-5;5]$ để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{e^3};1\right)$.

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 25. **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=\frac{\ln x-6}{\ln x-2m}$ đồng biến trên khoảng $(1;e)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 26. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f(x)=m(2020+x-2\cos x)+\sin x-x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 27. **(Chuyên Quang Trung - 2020)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\ln(x^2+4)+mx+12$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ **C.** $(-\infty;-\frac{1}{2}]$. **D.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

Câu 28. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=\left|x^3-mx^2+12x+2m\right|$ luôn đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 18. **B.** 19. **C.** 21. **D.** 20.

Câu 29. **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-8;8)$ sao cho hàm số $y=\left|-2x^3+3mx-2\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 10. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 11.

Câu 30. **(Sở Ninh Bình)** Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$. Tổng giá trị các phần tử của T bằng

A. 9. **B.** 45. **C.** 55. **D.** 36.

Câu 31. **(Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{m-\sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$.

A. $m\ge 1$. **B.** $m\le 2$. **C.** $m\le\dfrac{5}{4}$. **D.** $m\le 0$.

Câu 32. **(Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=3x^2+6x+4,\forall x\in\mathbb{R}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $(-2020;2020)$ của tham số m để hàm số $g(x)=f(x)-(2m+4)x-5$ nghịch biến trên $(0;2)$?

A. 2008. **B.** 2007. **C.** 2018. **D.** 2019.

Câu 33. **(Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ sao cho hàm số $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{mx^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+mx+2020$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 12. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 34. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f(x)=m(2020+x-2\cos x)+\sin x-x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 35. **(Chuyên Quang Trung - Bình Phước - Lần 2 - 2020)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số thực m để hàm số $y=\ln(x^2+4)+mx+12$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]$. **D.** $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Câu 36. **(Chuyên Thái Bình - Lần 3 - 2020)** Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=2^{x^3-x^2+mx+1}$ đồng biến trên $(1;2)$.

A. $m>-8$. **B.** $m\ge -1$. **C.** $m\le -8$. **D.** $m<-1$.

Nguyễn Bảo Vương

---------- HẾT ----------

Chuyên đề 1 TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH 9 – 10 ĐIỂM

Dạng 1. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số g(x)=f[u(x)] khi biết đồ thị hàm số f'(x)

Cách 1:

Bước 1: Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$, $g'(x)=u'(x).f'\left[u(x)\right]$.

Bước 2: Sử dụng đồ thị của $f'(x)$, lập bảng xét dấu của $g'(x)$.

Bước 3: Dựa vào bảng dấu kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

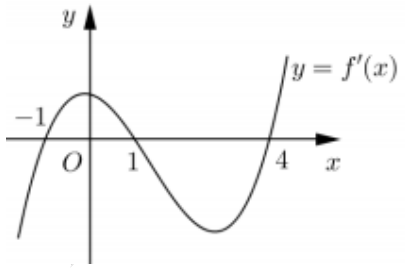
Cách 2:

Bước 1: Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$, $g'(x)=u'(x).f'\left[u(x)\right]$.

Bước 2: Hàm số $g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x)\ge 0$; (Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x)\le 0$) (*)

Bước 3: Giải bất phương trình $(*)$ (dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$) từ đó kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y=f(2-x)$ đồng biến trên khoảng



A. $(2;+\infty)$ **B.** $(-2;1)$ **C.** $(-\infty;-2)$ **D.** $(1;3)$

Câu 2. **(Mã đề 104 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(5-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(3;4)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(4;5)$.

Câu 3. **(Mã 103 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(3-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(3;4)$.

Câu 4. **(Mã 102 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(5-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(3;5)$. **B.** $(5;+\infty)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(0;2)$.

Câu 5. **(Mã đề 101 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;1)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(4;+\infty)$.

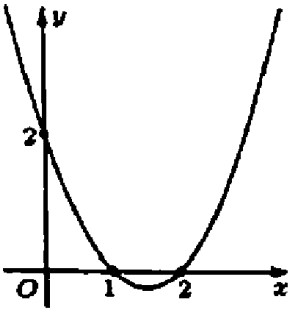
Câu 6. **(Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Cho hàm số $f'(x)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f(x^2+2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;1)$. **B.** $(-4;-3)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

Câu 7. **(Chuyên Thái Nguyên -2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Hàm số $g(x)=f(x-x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

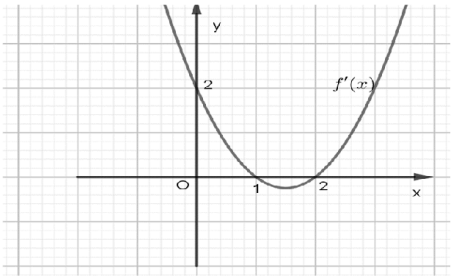


A. $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$.

B. $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$.

C. $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$.

Câu 8. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ

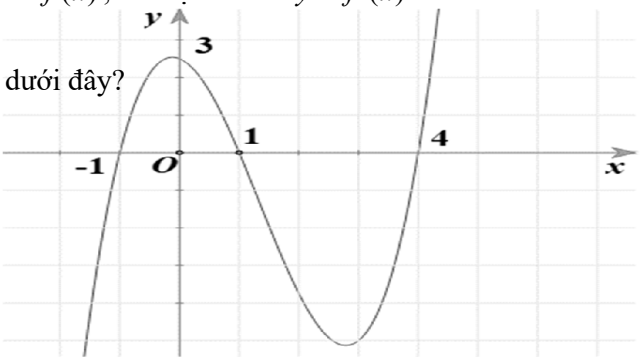


Hàm số $y=f(2-x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 9. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Cho hàm số $f(x)$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.

Hàm số $y=f(|3-x|)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



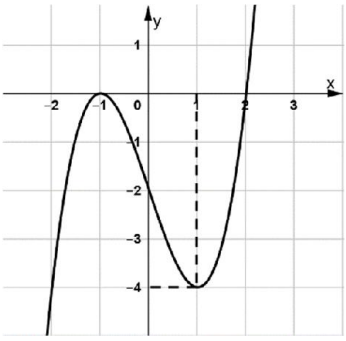
A. $(4;6)$.

B. $(-1;2)$.

C. $(-\infty;-1)$.

D. $(2;3)$.

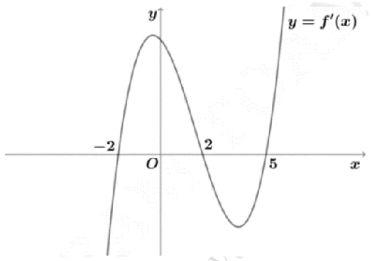
Câu 10. **(THPT Minh Châu Hưng Yên 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x^2-2)$. Mệnhvđề nào sai?



A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ **B.** Hàm số $g(x)$đồng biến trên $(2;+\infty)$

C. Hàm số $g(x)$nghịch biến trên $(-1;0)$ **D.** Hàm số $g(x)$nghịch biến trên $(0;2)$

Câu 11. **(THPT Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên.



Hỏi hàm số $g(x)=f(3-2x)$nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-1;+\infty)$ **B.** $(-\infty;-1)$ **C.** $(1;3)$ **D.** $(0;2)$

Câu 12. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f\left(x^2-2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 13. **(Chuyên KHTN - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau.

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(2-3x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(2;3)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;3)$.

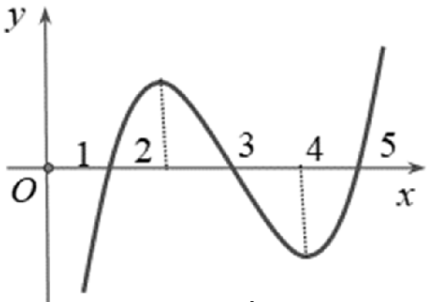
Câu 14. **(Chuyên Bến Tre - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ biết hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x)=f(x+1)$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;4)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(4;6)$.



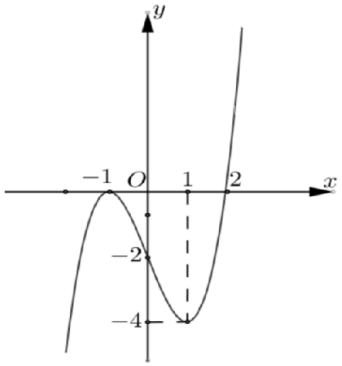
Câu 15. **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x)=f(3-2^x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-5)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(2;7)$.

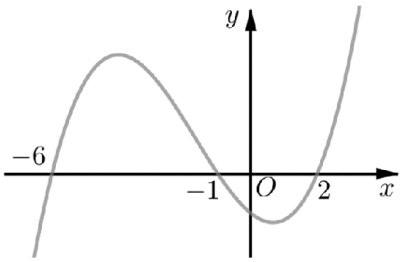
Câu 16. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x)=f(x^2-2)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?



A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$. **B.** Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$. **D.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.

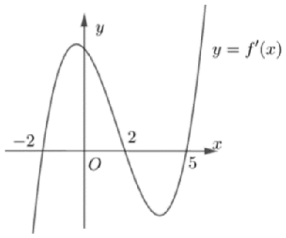
Câu 17. **(Đại Học Hà Tĩnh - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $y=f(3-x^2)$ đồng biến trên khoảng

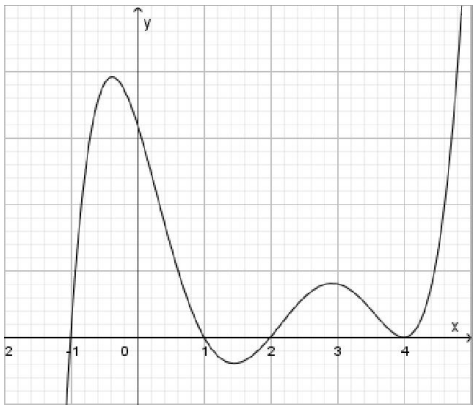
A. $(0;1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(-2;-1)$.

Câu 18. **(Sở Ninh Bình)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y=f(x^2+2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



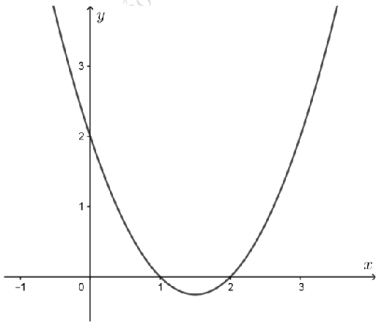
A. $(2;3)$. **B.** $(-3;-2)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 19. **(Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(2019-2020x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



A. $(-1;0)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

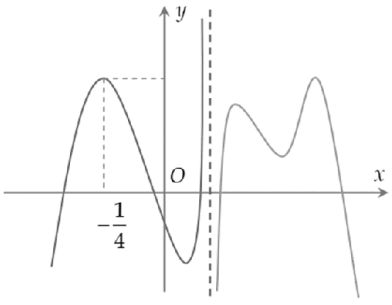
Câu 20. **(Trường VINSCHOOL - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$. Biết đồ thị hàm số $y'=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Hàm số $g(x)=f(2x-3x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$. **D.** $\left(-2;\frac{1}{2}\right)$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2+x)$?



A. 10. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 13.

Dạng 2. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số g(x)=f[u(x)]+v(x) khi biết đồ thị, bảng biến thiên của hàm số f'(x)

Cách 1:

Bước 1: Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$, $g'(x)=u'(x).f'\left[u(x)\right]+v'(x)$.

Bước 2: Sử dụng đồ thị của $f'(x)$, lập bảng xét dấu của $g'(x)$.

Bước 3: Dựa vào bảng dấu kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Cách 2:

Bước 1: Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$, $g'(x)=u'(x).f'\left[u(x)\right]+v'(x)$.

Bước 2: Hàm số $g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x)\ge 0$; (Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x)\le 0$) (*)

Bước 3: Giải bất phương trình $(*)$ (dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$) từ đó kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Cách 3: (Trắc nghiệm)

Bước 1: Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$, $g'(x)=u'(x).f'\left[u(x)\right]+v'(x)$.

Bước 3: Hàm số $g(x)$ đồng biến trên K $\Leftrightarrow g'(x)\ge 0,\forall x\in K$; (Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên K $\Leftrightarrow g'(x)\le 0,\forall x\in K$) (*)

Bước 3: Lần lượt chọn thay giá trị từ các phương án vào $g'(x)$ để loại các phương án **sai**.

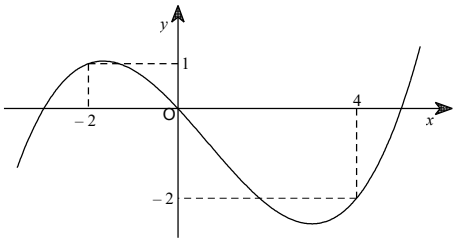
Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=3f(x+2)-x^3+3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2020 – Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?



A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(2;3)$.

Câu 3. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f(x-1)+x^3-12x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(3;4)$.

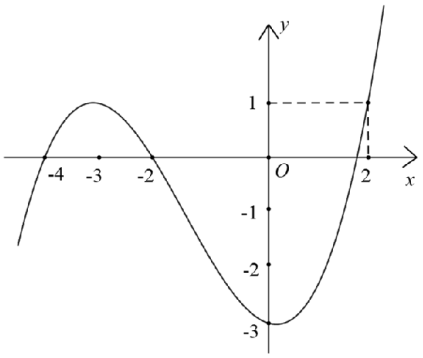
Câu 4. **(Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=2f(1-x)+\sqrt{x^2+1}-x$ nghịch biến trên những khoảng nào dưới đây

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-3;-2)$.

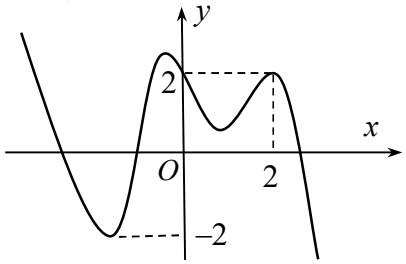
Câu 5. **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên.



Hàm số $y=3f(x)+x^3-6x^2+9x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

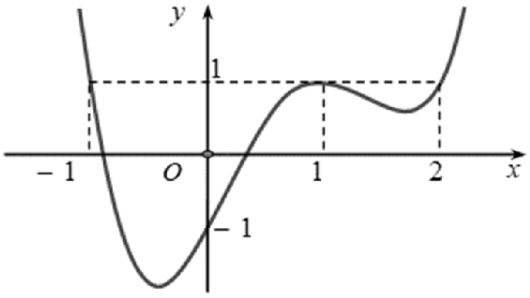
A. $(0;2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-2;0)$.

Câu 6. **(Học Mãi 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số $y=f(x)-2x$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 7. **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x-1)+\dfrac{2019-2018x}{2018}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(2;3)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(1;2)$.

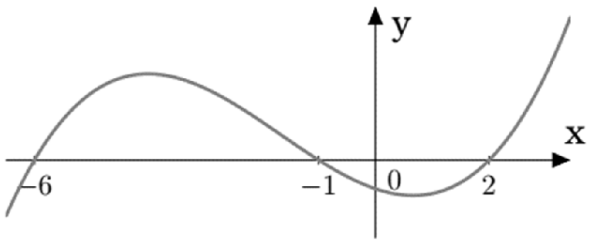
Câu 8. **(Sở Ninh Bình 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		-1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=-2f(x)+2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

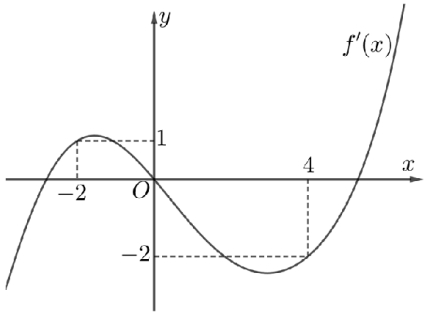
A. $(-4;2)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(2;4)$.

Câu 9. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(3-x^2)+2018$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-1;0)$ **B.** $(2;3)$ **C.** $(-2;-1)$ **D.** $(0;1)$

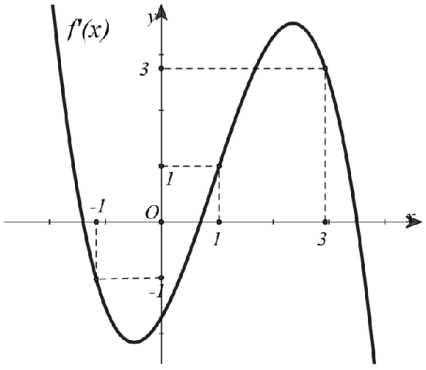
Câu 10. **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0)=0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình sau.



Hàm số $g(x)=\left|4f(x)+x^2\right|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(4;+\infty)$. **B.** $(0;4)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(-2;0)$.

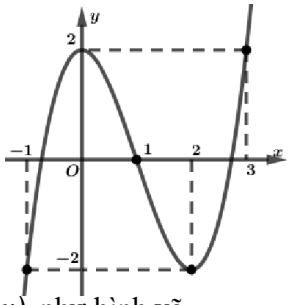
Câu 11. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho như hình vẽ



Hàm số $g(x)=2f(|x-1|)-x^2+2x+2020$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(0;1)$. **B.** $(-3;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-2;0)$.

Câu 12. **(Chuyên Lào Cai - 2020)** Cho hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=f(3x+1)+9x^3+\frac{9}{2}x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-1;1)$.

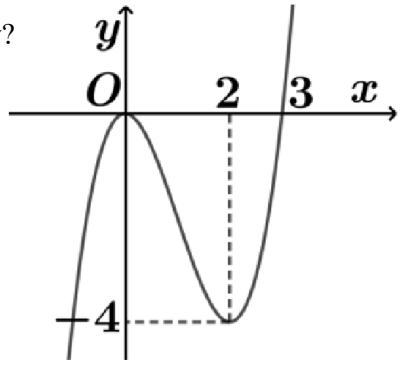
B. $(-2;0)$.

C. $(-\infty;0)$.

D. $(1;+\infty)$.

Câu 13. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ

Hàm số $g(x)=f(e^x-2)-2020$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$.

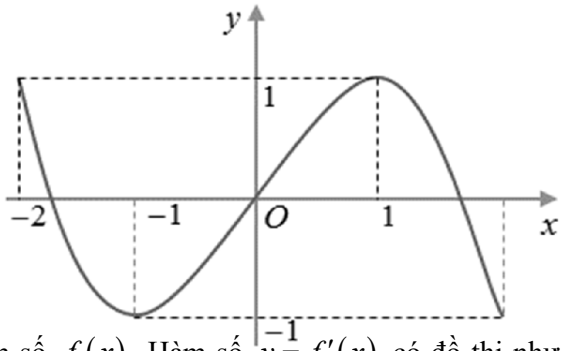
B. $(-1;2)$.

C. $(0;+\infty)$.

D. $\left(\frac{3}{2};2\right)$.

Câu 14. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.

Hàm số $y=f(\cos x)+x^2-x$ đồng biến trên khoảng



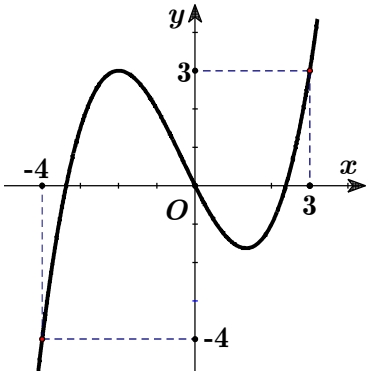
A. $(-2;1)$.

B. $(0;1)$.

C. $(1;2)$.

D. $(-1;0)$.

Câu 15. **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=f(3x^2-1)-\frac{9}{2}x^4+3x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây.

A. $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

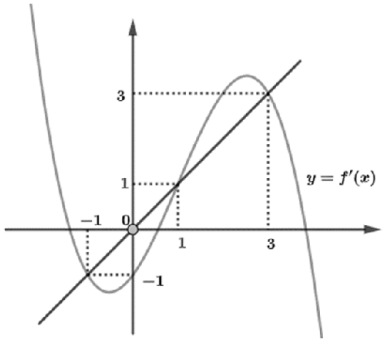
Câu 16. **(Trần Phú - Quảng Ninh - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-4		-1		2		7		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f\left(2x+1\right)+\dfrac{2}{3}x^3-8x+5$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\infty;-2\right)$. **B.** $\left(1;+\infty\right)$. **C.** $\left(-1;7\right)$. **D.** $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$.

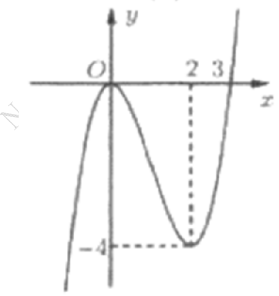
Câu 17. **(Chuyên Thái Bình - Lần 3 - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=2f\left(\left|x-1\right|\right)-x^2+2x+2020$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $\left(0;1\right)$. **B.** $\left(-3;1\right)$. **C.** $\left(1;3\right)$. **D.** $\left(-2;0\right)$.

Câu 18. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ như hình vẽ



Hàm số $g\left(x\right)=f\left(1+e^x\right)+2020$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0;+\infty\right)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **C.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(-1;1\right)$.

Câu 19. **(THPT Anh Sơn - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau.

x	$-\infty$		-2		-1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=-2f\left(x\right)+2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $\left(2;4\right)$. **B.** $\left(-4;2\right)$. **C.** $\left(-2;-1\right)$. **D.** $\left(-1;2\right)$.

Câu 20. **(THPT Anh Sơn - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'\left(x\right)$ thỏa mãn $f'\left(x\right)=\left(1-x\right)\left(x+2\right)g\left(x\right)+2019$ với $g\left(x\right)<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f\left(1-x\right)+2019x+2020$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $\left(1;+\infty\right)$. **B.** $\left(0;3\right)$. **C.** $\left(-\infty;3\right)$. **D.** $\left(3;+\infty\right)$.

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Biết $f(x)>2,\forall x\in\mathbb{R}$. Xét hàm số $g(x)=f\left(3-2f(x)\right)-x^3+3x^2-2020$. Khẳng định nào sau đây đúng?

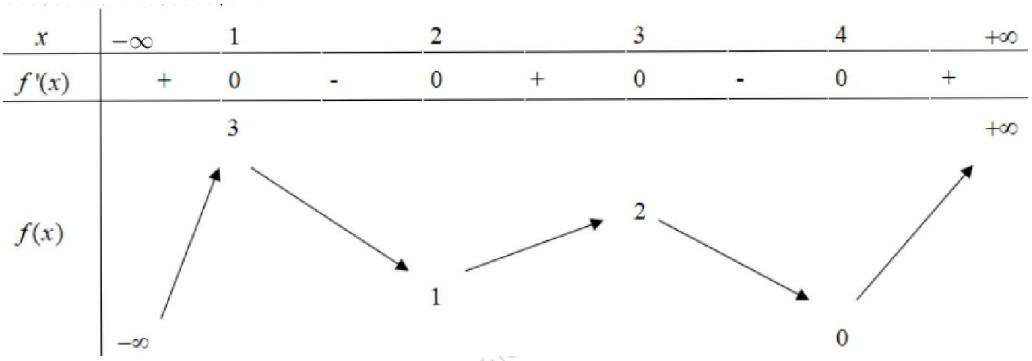
A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$.

B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;4)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số $y=\left(f(x)\right)^3-3.\left(f(x)\right)^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(2;3)$.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị nằm trên trục hoành và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của biểu thức $f'(x)$ như bảng dưới đây.

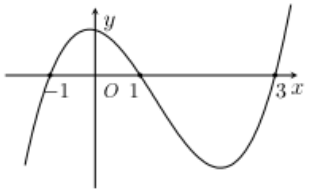
x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=g(x)=\dfrac{f\left(x^2-2x\right)}{f\left(x^2-2x\right)+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $\left(-2;\dfrac{5}{2}\right)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Dạng 3. Bài toán hàm ẩn, hàm hợp liên quan đến tham số và một số bài toán khác

Câu 1. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên $m\in[-5;5]$ để hàm số $g(x)=f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?



A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

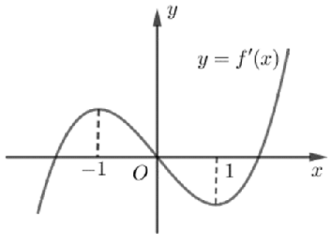
Câu 2. **(Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-10		-2		3		8		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=f\left(x^3+4x+m\right)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$?

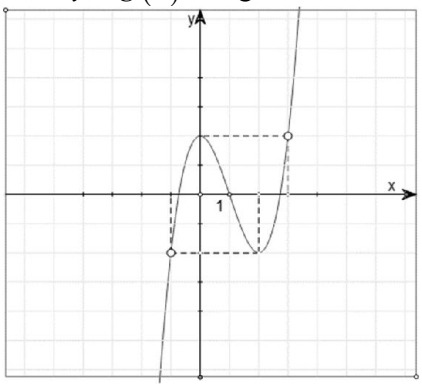
A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 3. **(Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=1$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên dương a để hàm số $y=\left|4f(\sin x)+\cos 2x-a\right|$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?



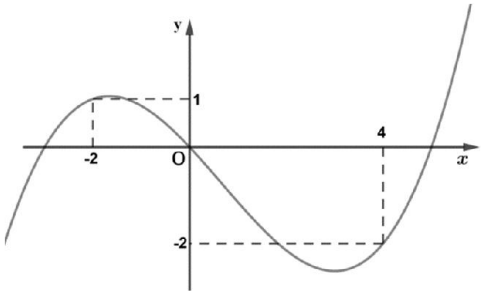
A. 2. **B.** 3. **C.** Vô số. **D.** 5.

Câu 4. **(Chuyên Quang Trung - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x)=f(x-m)-\dfrac{1}{2}(x-m-1)^2+2019$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$. Tổng tất cả các phần tử trong S bằng



A. 4.
B. 11.
C. 14.
D. 20.

Câu 5. **(Sở Hà Nội - Lần 2 - 2020)** Cho hàm số $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,\ a\neq 0$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ

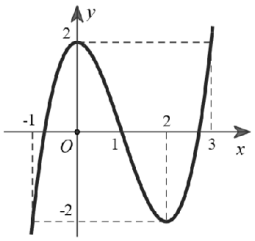


Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên thuộc khoảng $(-6;6)$ của tham số m để hàm số

$g(x)=f(3-2x+m)+x^2-(m+3)x+2m^2$ nghịch biến trên $(0;1)$. Khi đó, tổng giá trị các phần tử của S là

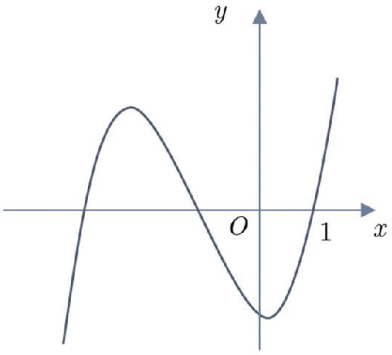
A. 12. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 15.

Câu 6. **(Chuyên Quang Trung - Bình Phước - Lần 2 - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x)=f(x-m)-\frac{1}{2}(x-m-1)^2+2019$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$. Tổng tất cả các phần tử trong S bằng:



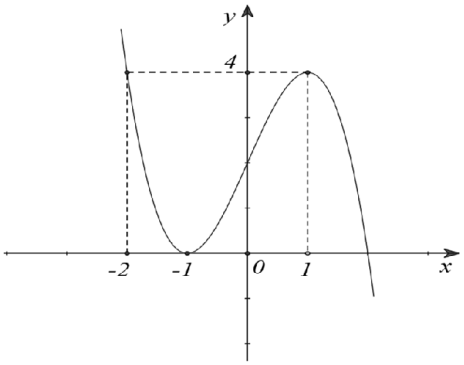
A. 4. **B.** 11. **C.** 14. **D.** 20.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị cho như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-2019;2019]$ để hàm số $g(x)=f(2019^x)-mx+2$ đồng biến trên $[0;1]$



A. 2028. **B.** 2019. **C.** 2011. **D.** 2020

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in(-2020;2020)$ để hàm số $g(x)=f(2x-3)-\ln(1+x^2)-2mx$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{2};2\right)$?

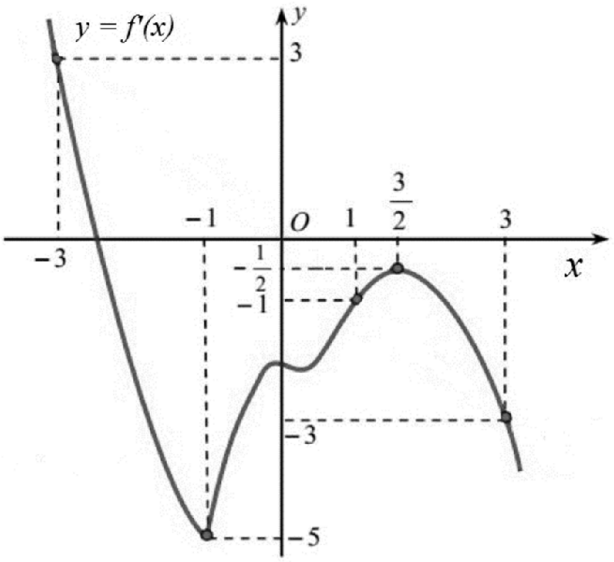


A. 2020. **B.** 2019. **C.** 2021. **D.** 2018.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-2)(x^2-6x+m)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ để hàm số $g(x)=f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

A. 2016. **B.** 2014. **C.** 2012. **D.** 2010.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên R. Hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x)=f(x-2m)+\frac{1}{2}(2m-x)^2+2020$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3;4)$. Hỏi số phần tử của S bằng bao nhiêu?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $y=f(x^2+3x-m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 20.

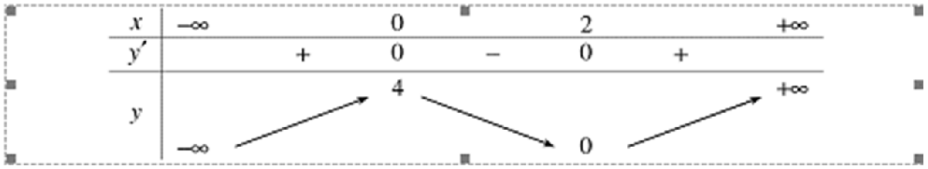
Câu 12. Cho các hàm số $f(x)=x^3+4x+m$ và $g(x)=(x^2+2018)(x^2+2019)^2(x^2+2020)^3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2020;2020]$ để hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên $(2;+\infty)$?

A. 2005. **B.** 2037. **C.** 4016. **D.** 4041.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+1)^2(x^2+2mx+1)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x)=f(2x+1)$ đồng biến trên khoảng $(3;5)$?

A. 3 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

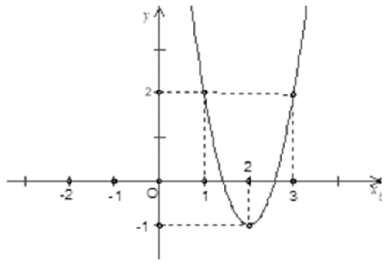
Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Có bao nhiêu số nguyên $m<2019$ để hàm số $g(x)=f(x^2-2x+m)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

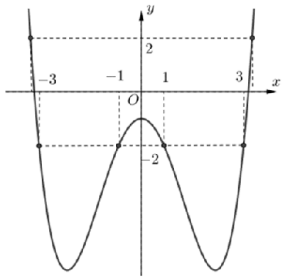
A. 2016. **B.** 2015. **C.** 2017. **D.** 2018.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x-2)+2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?



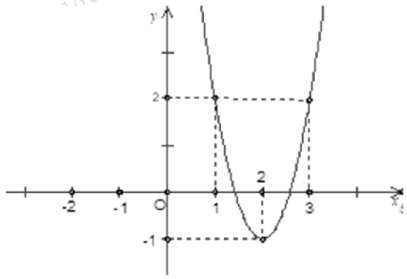
A. $(-\infty;3),(5;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1),(1;+\infty)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(3;5)$.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x+2)-2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?



A. $(-3;-1),(1;3)$. **B.** $(-1;1),(3;5)$. **C.** $(-\infty;-2),(0;2)$. **D.** $(-5;-3),(-1;1)$.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x-2)+2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?



A. $(-\infty;2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

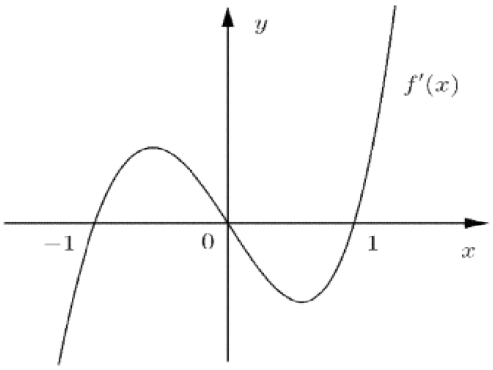
Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 3 liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x).f'''(x)=x(x-1)^2(x+4)^3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $g(x)=\left[f'(x)\right]^2-2f(x).f''(x)$. Hàm số $h(x)=g\left(x^2-2x\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=g(x)=f'(2x+3)+2$ có đồ thị là một parabol với tọa độ đỉnh $I(2;-1)$ và đi qua điểm $A(1;2)$. Hỏi hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(5;9)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-\infty;9)$. **D.** $(1;3)$.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $f'(x)=x^3+ax^2+bx+c\,(a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ



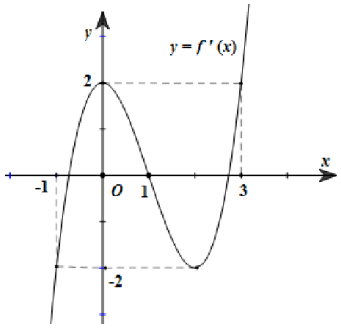
Hàm số $g(x)=f\left(f'(x)\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2+2x-3,\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2+3x-m\right)+m^2+1$ đồng biến trên $(0;2)$?

A. 16. **B.** 17. **C.** 18. **D.** 19.

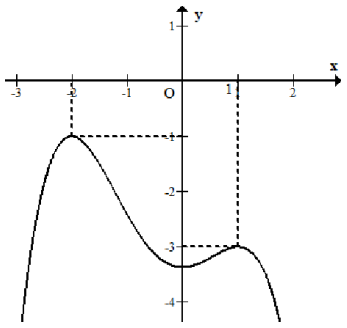
Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Đặt $g(x)=f(x-m)-\frac{1}{2}(x-m-1)^2+2019$ với m là tham số thực. Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoản $(5;6)$.Tổng các phần tử của S bằng:

A. 4. **B.** 11. **C.** 14. **D.** 20.

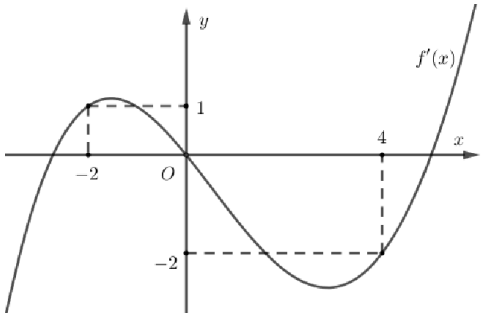
Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m, $m\in Z,-2020<m<2020$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2\right)+mx^2\left(x^2+\frac{8}{3}x-6\right)$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$

A. 2021. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2022.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình sau.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=4f(x-m)+x^2-2mx+2020$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-1)(x-4);\forall x\in\mathbb{R}$.Có bao nhiêu số nguyên $m<2020$ để hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{2-x}{1+x}-m\right)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2021

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)e^x$, có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $y=g(x)=f(\ln x)-mx^2+mx-2$ nghịch biến trên $(1;e^2)$.

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2021.

---------- HẾT ----------

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 1 TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH

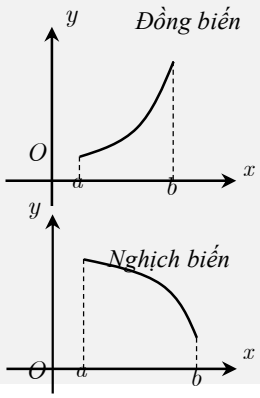
Dạng 1. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số thông qua bảng biến thiên, đồ thị

① ***Định lí*** *(thừa nhận): Giả sử hàm số* $y=f(x)$ *có đạo hàm trên khoảng* K.

Nếu $f'(x)>0,\ \forall x\in K$ *thì hàm số đồng biến trên khoảng* K.

Nếu $f'(x)<0,\ \forall x\in K$ *thì hàm số nghịch biến trên khoảng* K.

Nếu $f'(x)=0,\ \forall x\in K$ *thì hàm số không đổi trên khoảng* K.

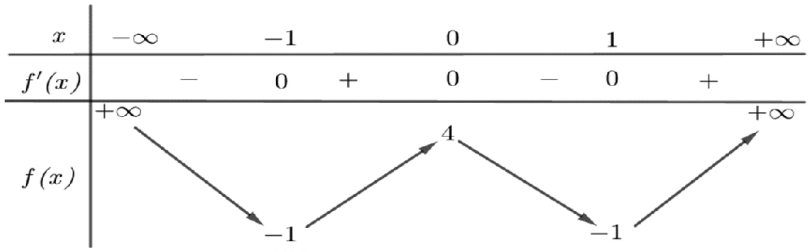


② ***Hình dáng đồ thị***

Nếu hàm số ***đồng biến*** *trên* K *thì từ trái sang phải* ***đồ thị đi lên***.

Nếu hàm số ***nghịch biến*** *trên* K *thì từ trái sang phải* ***đồ thị đi xuống***.

Câu 1. **(Mã 101 – 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

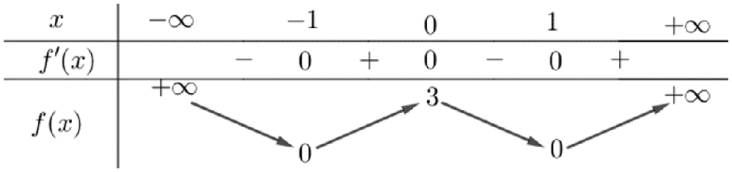
A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-1;0)$

Lời giải

Chọn D.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$

Câu 2. **(Mã 103 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

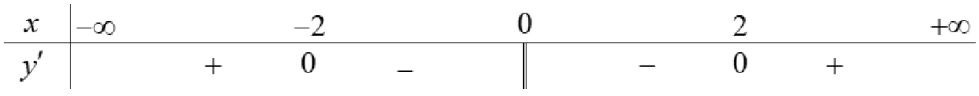
A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Câu 3. **(Mã 104 - 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau



Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

Lời giải

Chọn D

Theo bảng xét dấu thì $y'<0$ khi $x\in(0;2)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 4. **(Kim Liên - Hà Nội - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;1)$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Câu 5. **(Mã 101 - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;0)$ **B.** $(-\infty;0)$ **C.** $(1;+\infty)$ **D.** $(0;1)$

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(0;1)$ và $(-\infty;-1)$.

Câu 6. **(Mã 102 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	3	↘	1	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây

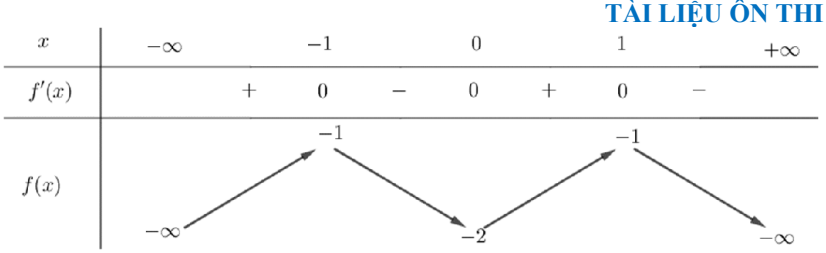
A. $(0;+\infty)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên, suy ra trên khoảng $(-2;0)$ hàm số đồng biến.

Câu 7. **(Mã 103 - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau :



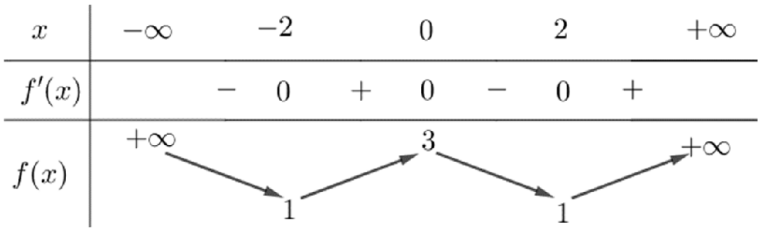
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$ **B.** $(1;+\infty)$ **C.** $(-\infty;1)$ **D.** $(-1;0)$

Lời giải

Chọn A

Câu 8. **(Mã 101 - 2019)** Cho hàm số có bảng biến thiên như sau



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(2;+\infty)$.

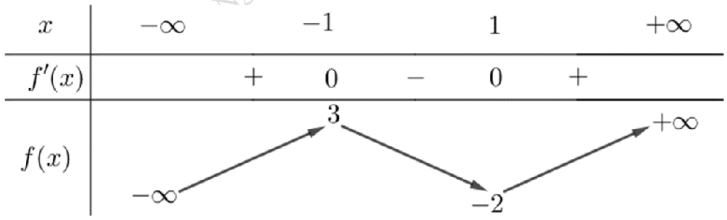
Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $(0;2)$ thì $f'(x)<0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 9. **(Mã 102 - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



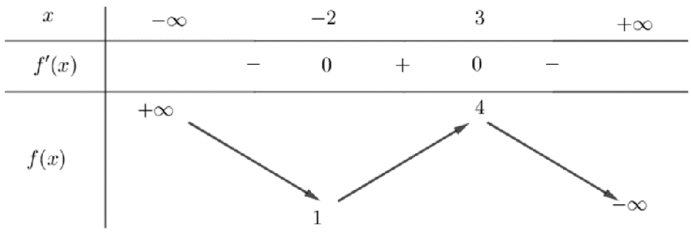
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 10. **(Mã 104 -2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



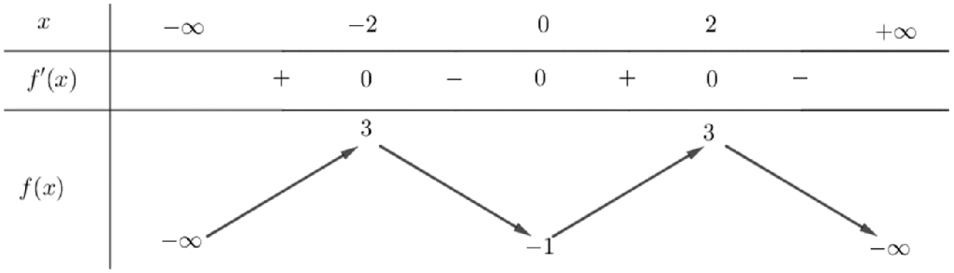
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;3)$ **B.** $(3;+\infty)$ **C.** $(-\infty;-2)$ **D.** $(-2;+\infty)$

Lời giải

Chọn A

Câu 11. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



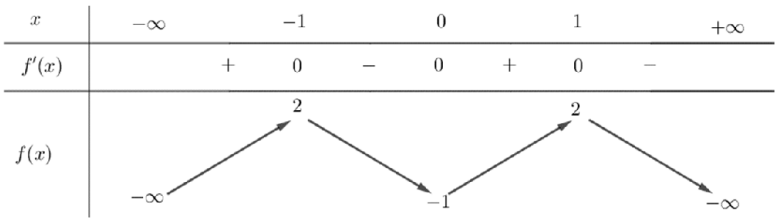
Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;+\infty)$ **B.** $(-\infty;-2)$ **C.** $(0;2)$ **D.** $(-2;0)$

Lời giải

Chọn D

Câu 12. **(Đề Minh Họa 2020 – Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



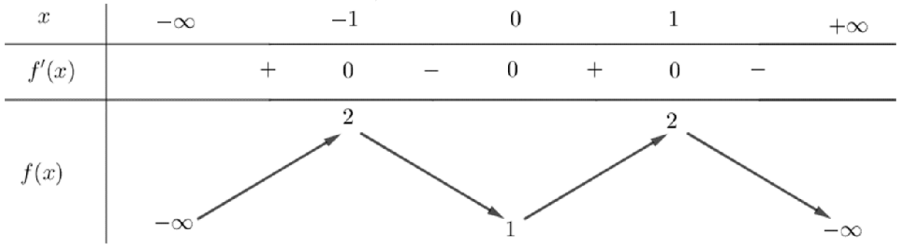
Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn C

Câu 13. **(Đề Minh Họa 2020 – Lần 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

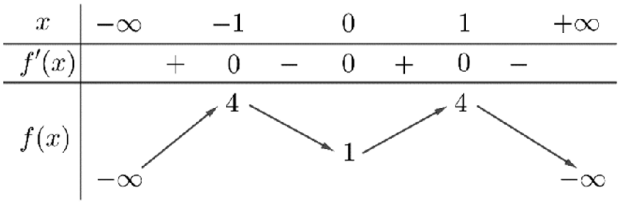
A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Câu 14. **(Mã 102 – 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau.



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

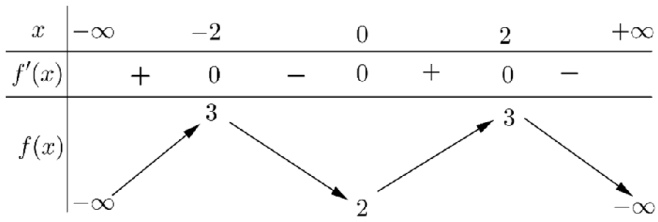
A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Câu 15. **(Mã 103 – 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



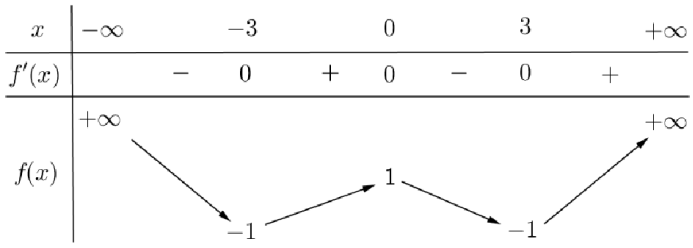
Hàm số đã chođồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-2;2)$ **B.** $(0;2)$ **C.** $(-2;0)$ **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 16. **(Mã 104 – 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

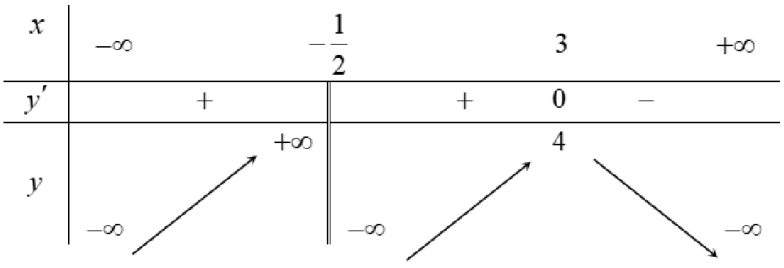
A. $(-3;0)$. **B.** $(-3;3)$. **C.** $(0;3)$. **D.** $(-\infty;-3)$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-3;0)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?



A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

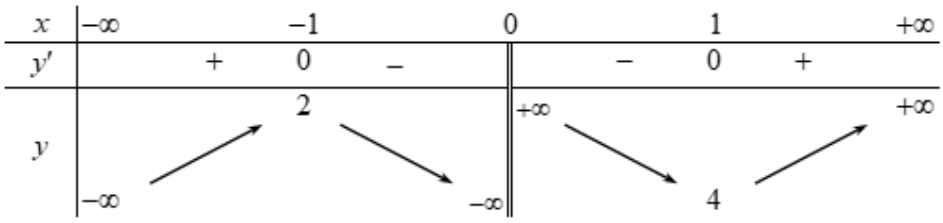
D. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số nghịch biến trong khoảng nào?

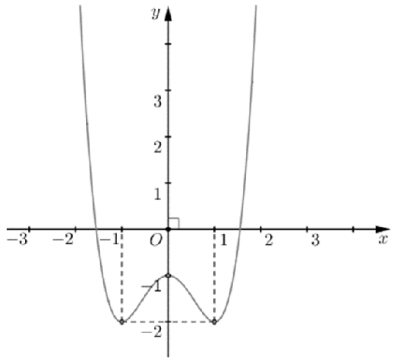
A. $(-1;1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(4;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2)$.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 19. **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



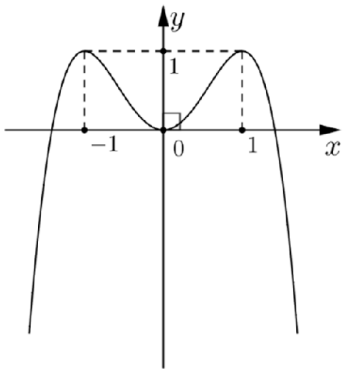
A. $(-\infty-1)$ **B.** $(-1;1)$ **C.** $(-1;0)$ **D.** $(0;1)$

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị, ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$. Chọn

Câu 20. **(Mã 102 – 2020 – Lần 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-1;0)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(0;+\infty)$.

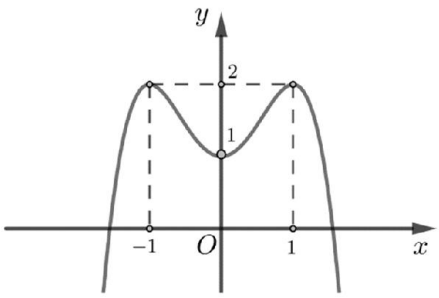
Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f(x)$ ta có:

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$, đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Câu 21. **(Mã 107 – 2020 Lần 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;0)$.

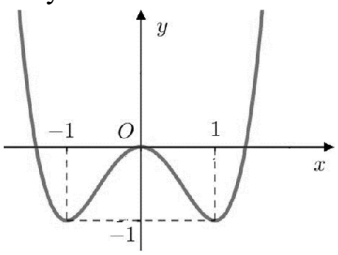
Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta có hàm số đồng biến trên hai khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$

$\Rightarrow$ chọn đáp án **A.**

Câu 22. **(Mã 103 – 2020 – Lần 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

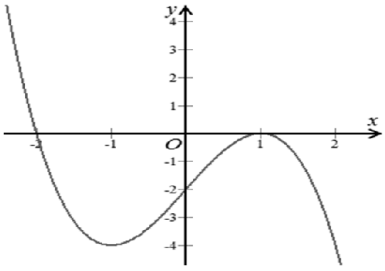


A. $(-1;0)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



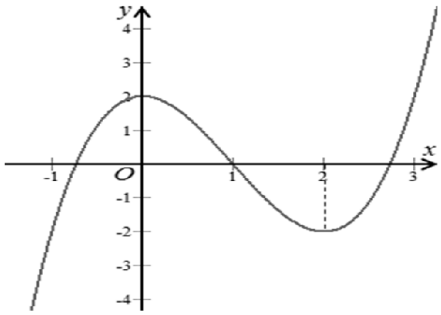
A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Nhìn vào đồ thị đã cho, ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



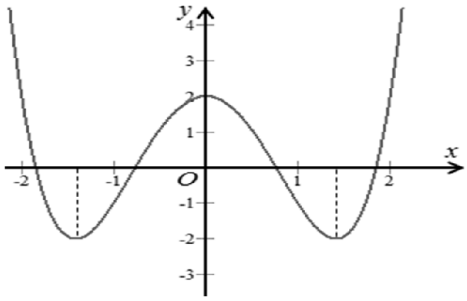
A. $(-1;1)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Nhìn vào đồ thị đã cho, ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ nên nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



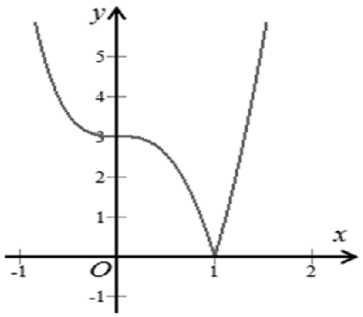
A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn D

Nhìn vào đồ thị đã cho, ta có trên khoảng $(0;1)$ đồ thị hàm số đi xuống (theo chiều từ trái qua phải) nên nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$.

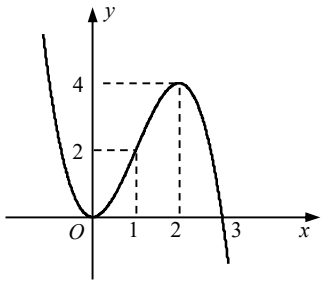
D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn D

Nhìn vào đồ thị đã cho, ta có trên khoảng $(-\infty;1)$ đồ thị hàm số đi xuống (theo chiều từ trái qua phải) nên nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào?



A. $(-\infty;0)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

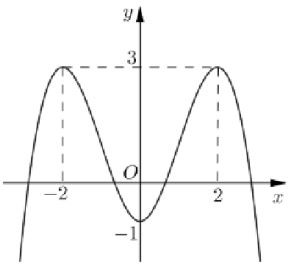
Xét đáp án A, trên khoảng $(-\infty;0)$ đồ thị có hướng đi xuống là hàm số nghịch biến nên loại.

Xét đáp án B, trên khoảng $(1;3)$ đồ thị có đoạn hướng đi lên là hàm số đồng biến và có đoạn hướng đi xuống là hàm số nghịch biến nên loại.

Xét đáp án C, trên khoảng $(0;2)$ đồ thị có hướng đi lên là hàm số đồng biến nên chọn.

Xét đáp án D, trên khoảng $(0;+\infty)$ đồ thị có đoạn hướng đi lên là hàm số đồng biến và có đoạn hướng đi xuống là hàm số nghịch biến nên loại.

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?



A. $(-2;0)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(-2;2)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn A

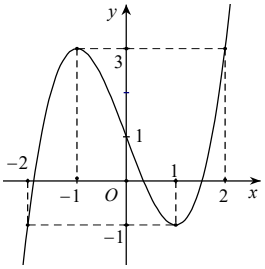
Xét đáp án A, trên khoảng $(-2;0)$ đồ thị hướng đi xuống là hàm số nghịch biến nên chọn.

Xét đáp án B, trên khoảng $(-\infty;0)$ đồ thị có đoạn hướng đi lên là hàm số đồng biến và có đoạn hướng xuống là hàm số đồng nghịch biến nên loại.

xét đáp án C, trên khoảng $(-2;2)$ đồ thị có hướng đi xuống là hàm số nghịch biến và có đoạn hướng đi lên là hàm số đồng biến nên loại.

Xét đáp án D, trên khoảng $(0;2)$ đồ thị có hướng đi lên là hàm số đồng biến nên loại.

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?



A. $(-1;1)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

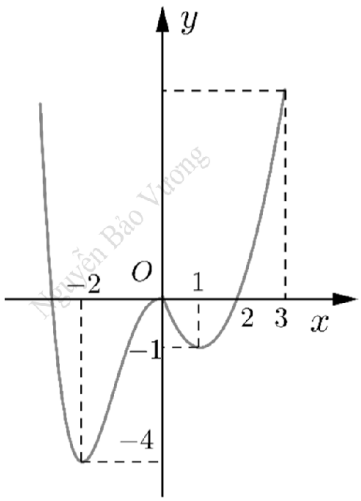
Xét đáp án A, trên khoảng $(-1;1)$ đồ thị có hướng đi xuống là hàm số nghịch biến nên chọn.

Xét đáp án B, trên khoảng $(-2;-1)$ đồ thị có hướng đi lên là hàm số đồng biến nên loại.

Xét đáp án C, trên khoảng $(-1;2)$ đồ thị có đoạn hướng đi xuống là hàm số nghịch biến và có đoạn hướng đi lên là hàm số đồng biến nên loại.

Xét đáp án D, trên khoảng $(1;+\infty)$ đồ thị có hướng đi lên là hàm số đồng biến nên loại.

Câu 30. **(Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng

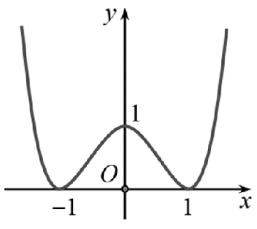
A. $(-1;0)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số ta có hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;1)$.

Câu 31. **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?



A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-1;0)\cup(1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số đồng biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Dạng 2. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số cho trước

- **Bước 1**. Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2**. Tính đạo hàm $y'=f'(x)$. Tìm các điểm x_i, $(i=1,2,3,...,n)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- **Bước 3**. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4**. Nêu kết luận về các khoảng đồng biến và nghịch biến dựa vào bảng biến thiên.

Câu 1. **(Mã 110 - 2017)** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. $y=\dfrac{x-1}{x-2}$ **B.** $y=x^3+x$ **C.** $y=-x^3-3x$ **D.** $y=\dfrac{x+1}{x+3}$

Lời giải

Chọn B

Vì $y=x^3+x\Rightarrow y'=3x^2+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo - 2017)** Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Câu 3. **(Đề Tham Khảo - 2017)** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. $y=x^4+3x^2$. **B.** $y=\dfrac{x-2}{x+1}$. **C.** $y=3x^3+3x-2$. **D.** $y=2x^3-5x+1$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=3x^3+3x-2$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$y'=9x^2+3>0,\forall x\in\mathbb{R}$, suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Câu 4. **(Mã 110 - 2017)** Cho hàm số $y=x^3-3x^2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$ **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên rồi suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

Câu 5. **(Dề Minh Họa - 2017)** Hỏi hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

$y = 2x^4 + 1$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 8x^3$; $y' = 0 \Leftrightarrow 8x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ suy ra $y(0) = 1$

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Câu 6. **(Mã 105 - 2017)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$ **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$

Lời giải

Chọn C

Do hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Câu 7. **(Mã 105 - 2017)** Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$ **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3};1\right)$

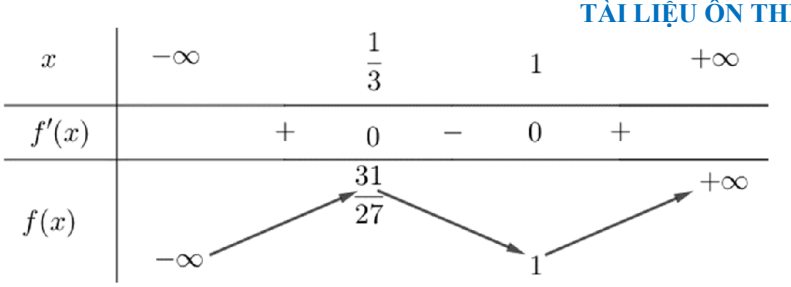
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3};1\right)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:



Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

Câu 8. **(Mã 105 - 2017)** Cho hàm số $y=x^4-2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$

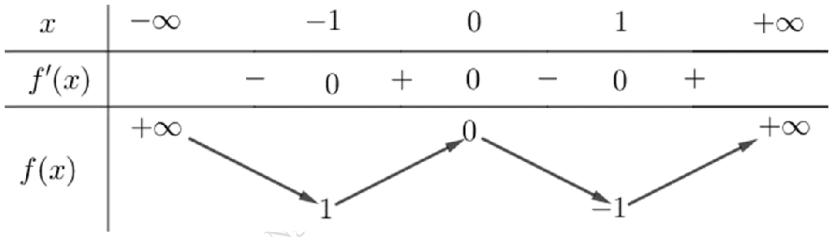
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$$y'=4x^3-4x;\ y'=0\Leftrightarrow 4x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1\end{array}\right.$$



Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$, $(1;+\infty)$; hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$, $(0;1)$. Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

Cách 2: Dùng chức năng mode 7 trên máy tính kiểm tra từng đáp án.

Câu 9. **(Mã 123 - 2017)** Hàm số $y=\frac{2}{x^2+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;+\infty)$ **B.** $(0;+\infty)$ **C.** $(-\infty;0)$ **D.** $(-1;1)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=\frac{-4x}{\left(x^2+1\right)^2}<0\Leftrightarrow x>0$

Câu 10. **(Mã 123 - 2017)** Cho hàm số $y=x^3+3x+2$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

Lời giải

Chọn C

Ta có:

+) TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

+) $y'=3x^2+3>0, \forall x\in\mathbb{R}$, do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 11. **(Mã 104 - 2017)** Cho hàm số $y=\sqrt{2x^2+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$

Lời giải

Chọn A

Ta có $D=\mathbb{R}$, $y'=\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$; $y'>0\Leftrightarrow x>0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Câu 12. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2+x+2019$

A. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0, \forall x$ và $y'=0\Leftrightarrow x=1$ (tại hữu hạn điểm)

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$

Câu 13. **(Lê Quý Đôn - Đà Nẵng - 2019)** Hàm số $y=\dfrac{5-2x}{x+3}$ nghịch biến trên

A. $\mathrm{R}\setminus\{-3\}$. **B.** R. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=\dfrac{5-2x}{x+3}$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

$y'=\dfrac{-11}{(x+3)^2}<0$, với $x\in D$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-3;+\infty)$.

Câu 14. **(Chuyên Hà Tĩnh - Lần 1 - 2019)** Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x^3-3x+2$. **B.** $y=x^4+2x^2+2$.

C. $y=-x^3+2x^2-4x+1$. **D.** $y=-x^3-2x^2+5x-2$.

Lời giải

Chọn C

$y=-x^3+2x^2-4x+1\Rightarrow y'=-3x^2+4x-4=-2x^2-(x-2)^2<0, \forall x\in\mathbb{R}$

Do đó hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 15. **(Chuyên Nguyễn Trãi - Hải Dương - 2019)** Hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ đồng biến trên khoảng

A. $(0;2)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=-3x^2+6x$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu của y' như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Nhìn vào bảng xét dấu của y' ta thấy hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Vậy hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 16. **(HSG - TP Đà Nẵng - 2019)** Hàm số $y=x^4-4x^3$ đồng biến trên khoảng

A. $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3-12x^2$

Cho $y'=0\Leftrightarrow 4x^3-12x^2=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Nguyễn Bảo Vương

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ nên cũng đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

Câu 17. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành - Yên Bái - 2019)** Cho hàm số $y=x^4-2x^2+2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$. **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y'=4x^3-4x$.

Xét $y'=0\Leftrightarrow 4x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=1\\x=0\Rightarrow y=2\\x=-1\Rightarrow y=1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 18. **(THPT Ngô Quyền - Hải Phòng - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(1-x)^2(x+1)^3(3-x)$. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow(1-x)^2(x+1)^3(3-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\\x=3\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;3)$.

Câu 19. **(HSG 12 - TP Nam Định - 2019)** Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+2019$ nghịch biến trên

A. $(-1;3)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=x^2-2x-3$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu của y' như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Nhìn vào bảng xét dấu của y' ta thấy hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+2019$ nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$.

Vậy hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+2019$ nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$.

Câu 20. **(Chuyên Ngoại Ngữ - Hà Nội - 2019)** Hàm số $y=\sqrt{2018x-x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(1010;2018)$. **B.** $(2018;+\infty)$. **C.** $(0;1009)$. **D.** $(1;2018)$.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=[0;2018]$

$y'=\left(\sqrt{2018x-x^2}\right)'=\dfrac{2018-2x}{2\sqrt{2018x-x^2}}=\dfrac{1009-x}{\sqrt{2018x-x^2}}$; $y'=0\Leftrightarrow x=1009$

$y'<0\Leftrightarrow x\in(1009;2018)$, suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(1009;2018)$, suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(1010;2018)$, chọn **A.**

Câu 21. **(Chuyên Lê Quý Đôn - Quảng Trị - 2019)** Hàm số $y=-x^3+3x^2-4$ đồng biến trên tập hợp nào trong các tập hợp được cho dưới đây?

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=-3x^2+6x$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	0	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 22. **(SGD&ĐT Hà Nội - 2018)** Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y'=x^2$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và đồng biến trên $(0;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Lời giải

$y'=0\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗		↗	$+\infty$

Câu 23. **(THPT Lương Thế Vinh - HN - 2018)** Hàm số $y=x^3-3x$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3x^2-3;\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu y':

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 24. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Cho hàm $y=\sqrt{x^2-6x+5}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Lời giải

Tập xác định: $D=(-\infty;1]\cup[5;+\infty)$.

Ta có $y'=\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}}>0,\ \forall x\in(5;+\infty)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$.

Câu 25. **(Thpt Kinh Môn - HD - 2018)** Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-1$, kết luận nào sau đây về tính đơn điệu của hàm số là **đúng nhất**:

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0);(2;+\infty)$;
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$;
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ và đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0);(2;+\infty)$;
D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

Lời giải

Ta có hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

$y=-x^3+3x^2-1\Rightarrow y'=-3x^2+6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Vậy đáp án A là **đúng** nhất.

Câu 26. **(Chuyên ĐH Vinh - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-2)^3$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;3)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Đồng thời $f'(x)<0 \Leftrightarrow x \in (0;2)$ nên ta chọn đáp án theo đề bài là $(0;1)$.

Câu 27. **(THPT Can Lộc - Hà Tĩnh - 2018)** Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-12x-1$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;4)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;4)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;+\infty)$.

Lời giải

$y'=x^2-x-12$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$.

---------- **HẾT** ----------

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 1 TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

TÀI LIỆU DÀNH CHO HỌC SINH MỤC TIÊU 7-8 ĐIỂM

Dạng 1. Tìm m để hàm số đơn điệu trên các khoảng xác định của nó

Xét hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

– Bước 1. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

– Bước 2. Tính đạo hàm $y'=f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

+ Để $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'=f'(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{f'(x)}=3a>0 \\ \Delta_{f'(x)}=4b^2-12ac\le 0 \end{cases} \Rightarrow m$?

+ Đề $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'=f'(x)\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{f'(x)}=3a<0 \\ \Delta_{f'(x)}=4b^2-12ac\le 0 \end{cases} \Rightarrow m$?

Lưu ý: Dấu của tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$.

• Để $f(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta\le 0 \end{cases}$. • $f(x)\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta\le 0 \end{cases}$.

Câu 1. **(Đề Tham Khảo Lần 2 2020)**Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3+mx^2+4x+3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=x^2+2mx+4$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ (Dấu '=' xảy ra tại hữu hạn điểm).

Ta có $f'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta'\le 0$

$\Leftrightarrow \Delta'=m^2-4\le 0$

$\Leftrightarrow -2\le m\le 2$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$, vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 2. **(Mã 123 - 2017)** Cho hàm số $y=-x^3-mx^2+(4m+9)x+5$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

A. 5 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 7

Lời giải

Chọn D

Ta có:

+) TXĐ: $D=\mathbb{R}$

+) $y'=-3x^2-2mx+4m+9$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$ khi $y'\le 0,\forall x\in(-\infty;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3<0 \\ \Delta'=m^2+3(4m+9)\le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m\in[-9;-3] \Rightarrow$ có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 3. Cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+mx^2+(3m+2)x+1$. Tìm tất cả giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $\left[\begin{array}{l} m\geq -1 \\ m\leq -2 \end{array}\right.$. **B.** $-2\leq m\leq -1$. **C.** $-2<m<-1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m>-1 \\ m<-2 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D=\mathbb{R}$, $y'=-x^2+2mx+3m+2$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\leq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1<0 \\ \Delta'=m^2+3m+2\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2\leq m\leq -1$.

Câu 4. Tìm m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3(2m-1)+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. Không có giá trị m thỏa mãn. **B.** $m\neq 1$.

C. $m=1$. **D.** Luôn thỏa mãn với mọi m.

Lời giải

Chọn C

$y'=3x^2-6mx+3(2m-1)$

Ta có: $\Delta'=(-3m)^2-3.3.(2m-1)$. Để hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $\Delta'\leq 0$

$\Leftrightarrow 9m^2-18m+9<0 \Leftrightarrow 9(m^2-2m+1)\leq 0 \Leftrightarrow 9(m-1)^2\leq 0 \Leftrightarrow m=1$.

Câu 5. Tìm điều kiện của tham số thực m để hàm số $y=x^3-3x^2+3(m+1)x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m\geq 2$. **B.** $m<2$. **C.** $m<0$. **D.** $m\geq 0$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-6x+3(m+1)$

$YCBT \Leftrightarrow y'\geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta'=-9m\leq 0 \Leftrightarrow m\geq 0$.

Câu 6. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+4x-m$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $[-2;2]$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(-\infty;-2]$. **D.** $[2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=x^2+2mx+4$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'\geq 0, \forall x\in(-\infty;+\infty)$.

$\Leftrightarrow \Delta'=m^2-4\leq 0 \Leftrightarrow -2\leq m\leq 2$.

Câu 7. Giá trị của m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2mx^2+(m+3)x-5+m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là.

A. $-\frac{3}{4}\leq m\leq 1$. **B.** $m\leq -\frac{3}{4}$. **C.** $-\frac{3}{4}<m<1$. **D.** $m\geq 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=x^2-4mx+(m+3)$.

$y'=0\Leftrightarrow x^2-4mx+(m+3)=0$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$, đẳng thức chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm $\Leftrightarrow \Delta'\le 0\Leftrightarrow (-2m)^2-1.(m+3)\le 0\Leftrightarrow 4m^2-m-3\le 0\Leftrightarrow -\frac{3}{4}\le m\le 1$.

Vậy $-\frac{3}{4}\le m\le 1$.

Câu 8. **(Chuyên KHTN - Hà Nội - 2020)** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3+(m+1)x^2+3x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $[-4;2]$. **B.** $(-4;2)$. **C.** $(-\infty;-4]\cup[2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-4)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2+2(m+1)x+3$.

Hàm số $y=x^3+(m+1)x^2+3x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \Delta'=(m+1)^2-9\le 0\Leftrightarrow m^2+2m-8\le 0\Leftrightarrow -4\le m\le 2.$

Vậy $m\in[-4;2]$.

Nếu hệ số a chứa tham số thì phải xét trường hợp $a=0$ và $a\ne 0$

Câu 9. **(Đề Tham Khảo - 2017)** Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. 0 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

Lời giải

Chọn C

TH1: $m=1$. Ta có: $y=-x+4$ là phương trình của một đường thẳng có hệ số góc âm nên hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó nhận $m=1$.

TH2: $m=-1$. Ta có: $y=-2x^2-x+4$ là phương trình của một đường Parabol nên hàm số không thể nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó loại $m=-1$.

TH3: $m\ne\pm 1$. Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow y'\le 0\ \forall x\in\mathbb{R}$, dấu "=" chỉ xảy ra ở hữu hạn điểm trên $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow 3(m^2-1)x^2+2(m-1)x-1\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a<0\\ \Delta'\le 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m^2-1<0\\ (m-1)^2+3(m^2-1)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m^2-1<0\\ (m-1)(4m+2)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}-1<m<1\\ -\frac{1}{2}\le m\le 1\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le m<1$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=0$.

Vậy có 2 giá trị m nguyên cần tìm là $m=0$ hoặc $m=1$.

Câu 10. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số hàm số $y=\frac{1}{3}(m^2-m)x^3+2mx^2+3x-2$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

$y' = \left(m^2 - m\right)x^2 + 4mx + 3$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right) \Leftrightarrow y' \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

+ Với $m = 0$ ta có $y' = 3 > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$.

+ Với $m = 1$ ta có $y' = 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{3}{4} \Rightarrow m = 1$ không thảo mãn.

+ Với $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$ ta có $y' \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m > 0 \\ \Delta' = m^2 + 3m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < 0 \end{array}\right. \\ -3 \leq m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m < 0$.

Tổng hợp các trường hợp ta được $-3 \leq m \leq 0$.

$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \left\{-3;-2;-1;0\right\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài ra.

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = mx^3 + mx^2 + m\left(m-1\right)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m \leq \dfrac{4}{3}$ và $m \neq 0$. **B.** $m = 0$ hoặc $m \geq \dfrac{4}{3}$.

C. $m \geq \dfrac{4}{3}$. **D.** $m \leq \dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn C

TH1: $m = 0 \Rightarrow y = 2$ là hàm hằng nên loại $m = 0$.

TH2: $m \neq 0$. Ta có: $y' = 3mx^2 + 2mx + m\left(m-1\right)$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 - 3m^2\left(m-1\right) \leq 0 \\ 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2\left(4-3m\right) \leq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \dfrac{4}{3} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{4}{3}$$

Câu 12. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{m}{3}x^3 - 2mx^2 + \left(3m+5\right)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = mx^2 - 4mx + 3m + 5$.

Với $a = 0 \Leftrightarrow m = 0 \Rightarrow y' = 5 > 0$. Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \left(2m\right)^2 - m\left(3m+5\right) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 - 5m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 0 \leq m \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 5.$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \left\{0;1;2;3;4;5\right\}$.

Câu 13. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=(m-1)x^3-3(m-1)x^2+3x+2$ đồng biến biến trên $\mathbb{R}$?

A. $1<m\le 2$. **B.** $1<m<2$. **C.** $1\le m\le 2$. **D.** $1\le m<2$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=3(m-1)x^2-6(m-1)x+3$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-1=0\\ \begin{cases}m-1>0\\ \Delta'\le 0\end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ \begin{cases}m>1\\ 9(m-1)^2-9(m-1)\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ \begin{cases}m>1\\ 1\le m\le 2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow 1\le m\le 2.$

Câu 14. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên - 2018)** Số giá trị nguyên của m để hàm số $y=(4-m^2)x^3+(m-2)x^2+x+m-1$ (1) đồng biến trên $\mathbb{R}$ bằng.

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

TH1: $4-m^2=0\Leftrightarrow m=\pm 2$.

$m=2:(1)\Leftrightarrow y=x+1\Rightarrow$ hàm số luôn tăng trên $\mathbb{R}\Rightarrow m=2$ (nhận).

$m=-2:(1)\Leftrightarrow y=-4x^2+x-3$ là hàm số bậc hai nên tăng trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{8}\right)$, giảm trên khoảng $\left(\frac{1}{8};+\infty\right)\Rightarrow m=-2$ (loại).

Nguyễn Bảo Vương

TH2: $4-m^2\ne 0$.

$y'=3(4-m^2)x^2+2(m-2)x+1$. $\Delta'=(m-2)^2-3(4-m^2)=4m^2-4m-8$.

hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\ge 0\,\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4-m^2>0\\ 4m^2-4m-8\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in(-2;2)\\ m\in[-1;2]\end{cases}\Leftrightarrow m\in[-1;2).\ m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=-1;m=0;\ m=1.$

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 15. **(Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2018)** Số các giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-100;100]$ để hàm số $y=mx^3+mx^2+(m+1)x-3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là:

A. 200. **B.** 99. **C.** 100. **D.** 201.

Lời giải

Trường hợp 1: $m=0$. Ta có:

$y=x-3$ có $y'=1>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên hàm số luôn đồng biến trên trên $\mathbb{R}$.

Do đó loại $m=0$.

Trường hợp 2: $m\ne 0$. Ta có: $y'=3mx^2+2mx+m+1$, $\Delta'=-2m^2-3m=m(-2m-3)$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\le 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ \Delta'\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ m(-2m-3)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ -2m-3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m\le-\frac{3}{2}.$

Vì m là số nguyên thuộc đoạn $[-100;100]$ nên $m \in \{-2;-3;...;-99;-100\}$.

Vậy có 99 giá trị m.

Câu 16. **(Liên trường Nghệ An - 2020)** Tổng bình phương của tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=(3m^2-12)x^3+3(m-2)x^2-x+2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là?

A. 9. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 14.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=9(m^2-4)x^2+6(m-2)x-1$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \le 0 \forall x \in \mathbb{R}$ (dấu "=" xãy ra tại hữu hạn $x \in \mathbb{R}$)

TH1: $m^2-4=0 \Leftrightarrow m=\pm 2$.

+ Với $m=2$ ta có $y'=-1 \le 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ nên $m=2$ thỏa mãn.

+ Với $m=-2$ ta có $y'=-24x-1 \le 0 \Leftrightarrow x \ge -\frac{1}{24}$ (không thỏa với mọi $x \in \mathbb{R}$) nên loại $m=-2$.

TH2: $m^2-4 \ne 0 \Leftrightarrow m \ne \pm 2$. Ta có

$$y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a=9(m^2-4)<0 \\ \Delta'=9(m-2)^2+9(m^2-4) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ 0 \le m \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m < 2 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{0;1\}$$ V

ậy $m \in \{0;1;2\} \Rightarrow 0^2+1^2+2^2=5$.

Câu 17. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=3(m^2-1)x^2+2(m-1)x-1$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty) \Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3(m^2-1)x^2+2(m-1)x-1 \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

* Trường hợp 1: $m^2-1=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$.

+ Với $m=1$, ta được $-1 \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (luôn đúng), suy ra $m=1$ (nhận).

+ Với $m=-1$, ta được $-4x-1 \le 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{4}$, suy ra $m=-1$ (loại).

* Trường hợp 2: $m^2-1 \ne 0 \Leftrightarrow m \ne \pm 1$.

Ta có $\Delta'=(m-1)^2+3(m^2-1)=m^2-2m+1+3m^2-3=4m^2-2m-2$.

Để $y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ 4m^2 - 2m - 2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ -\frac{1}{2} \le m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le m < 1.$

Tổng hợp lại, ta có tất cả giá trị m cần tìm là $-\frac{1}{2} \le m \le 1$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$, suy ra $m \in \{0;1\}$, nên có 2 giá trị nguyên của tham số m.

Xét hàm số nhất biến $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.

– Bước 1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

– Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x) = \frac{a.d - b.c}{(cx+d)^2}$.

+ Để $f(x)$ đồng biến trên $D \Leftrightarrow y' = f'(x) > 0, \ \forall x \in D \Leftrightarrow a.d - b.c > 0 \Rightarrow m$?

+ Để $f(x)$ nghịch biến trên $D \Leftrightarrow y' = f'(x) < 0, \ \forall x \in D \Leftrightarrow a.d - b.c < 0 \Rightarrow m$?

★ **Lưu ý**: Đối với hàm phân thức thì không có dấu "=" xảy ra tại vị trí y'.

Câu 18. **(Mã 105 - 2017)** Cho hàm số $y = \frac{mx - 2m - 3}{x - m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

A. Vô số **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

Lời giải

Chọn B

$y' = \frac{-m^2 + 2m + 3}{(x-m)^2}$ hàm số đồng biến trên khoảng xác định khi $-1 < m < 3$ nên có 3 giá trị của m nguyên

Câu 19. **(Mã 104 - 2017)** Cho hàm số $y = \frac{mx + 4m}{x + m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

A. 4 **B.** Vô số **C.** 3 **D.** 5

Lời giải

Chọn D

$D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$; $y' = \frac{m^2 - 4m}{(x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định khi $y' < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên có 3 giá trị thỏa mãn.

Câu 20. **(THPT Hoa Lư A - 2018)** Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \frac{(m+1)x - 2}{x - m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

$y' = \dfrac{-m^2 - m + 2}{(x-m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của ta cần tìm m để $y' \ge 0$ trên $(-\infty; m)$ và $(m; +\infty)$ và dấu "=" chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm trên các khoảng đó

ĐK: $-m^2 - m + 2 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 1$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = -1, 0$.

Câu 21. **(SGD&ĐT Bắc Giang - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x + m^2}{x + 4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$, $y' = \dfrac{4 - m^2}{(x+4)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó thì $4 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.
Do đó có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 22. **(THPT Hà Huy Tập - 2018)** Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x + 2 - m}{x + 1}$ nghịch biến trên các khoảng mà nó xác định?

A. $m \le 1$. **B.** $m \le -3$. **C.** $m < -3$. **D.** $m < 1$.

Lời giải

Với $m = 1$ thì hàm số là hàm hằng $(\forall x \ne -1)$ nên không nghịch biến.

Ta có $y' = \dfrac{m-1}{(x+1)^2}$, $\forall x \ne -1$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng của tập xác định khi và chỉ khi $y' < 0,\ x \ne -1 \Leftrightarrow m < 1$.

Câu 23. **(SỞ GD&ĐT Yên Bái - 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx - 4}{x - m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

A. $\left[\begin{array}{l} m \le -2 \\ m \ge 2 \end{array}\right.$. **B.** $-2 < m < 2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2 \end{array}\right.$. **D.** $-2 \le m \le 2$.

Lời giải

Tập xác định $D = (-\infty; m) \cup (m; +\infty)$.

Ta có $y = \dfrac{mx-4}{x-m} \Rightarrow y' = \dfrac{-m^2 + 4}{(x-m)^2}$. Vì hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó nên

$-m^2 + 4 < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2 \end{array}\right.$.

Câu 24. **(THCS&THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương - 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = \dfrac{mx - 2}{2x - m}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định

A. $\left[\begin{array}{l} m \le -2 \\ m \ge 2 \end{array}\right.$. **B.** $-2 < m < 2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2 \end{array}\right.$. **D.** $-2 \le m \le 2$.

Lời giải

Ta có: $y'=\dfrac{-m^2+4}{(2x-m)^2}, \forall x\neq\dfrac{m}{2}$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi $-m^2+4>0\Leftrightarrow -2<m<2$.

Dạng 2. Tìm m để hàm số nhất biến đơn điệu trên khoảng cho trước

Câu 1. **(Đề Tham Khảo Lần 1 2020)** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{mx-4}{x-m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{-m^2+4}{(x-m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$f'(x)>0\,\forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+4>0\\ m\notin(0;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<m<2\\ m\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow -2<m\leq 0.$$

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=\{-1;0\}$. Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 2. **(Mã 101 – 2020 – Lần 1)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+4}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-7)$ là

A. $[4;7)$. **B.** $(4;7]$. **C.** $(4;7)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{m-4}{(x+m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-7)\Leftrightarrow y'>0$, $\forall x\in(-\infty;-7)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m-4>0\\ -m\notin(-\infty;-7)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>4\\ -m\geq -7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>4\\ m\leq 7\end{cases}\Leftrightarrow 4<m\leq 7.$$

Câu 3. **(Mã 102 – 2020 – Lần 1)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+5}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ là

A. $(5;+\infty)$. **B.** $(5;8]$. **C.** $[5;8)$. **D.** $(5;8)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x \neq -m$.

Ta có $y' = \dfrac{m-5}{(x+m)^2}$

Để hàm số $y = \dfrac{x+5}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ thì

$\begin{cases} y' > 0 \\ -m \notin (-\infty;-8) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-5 > 0 \\ -m \geq -8 \end{cases} \Rightarrow 5 < m \leq 8$.

Câu 4. **(Mã 103 – 2020 – Lần 1)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+2}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-5)$

A. $(2;5]$. **B.** $[2;5)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(2;5)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{m-2}{(x+m)^2}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-5) \Leftrightarrow \begin{cases} y' > 0 \forall x \in (-\infty;-5) \\ -m \notin (-\infty;-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 > 0 \\ -m \geq -5 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 5$.

Câu 5. **(Mã 104- 2020 – Lần 1)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$ là

A. $(3;6]$. **B.** $(3;6)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $[3;6)$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định khi: $x+m \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -m$.

$y = \dfrac{x+3}{x+m} \Rightarrow y' = \dfrac{m-3}{(x+m)^2}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} y' > 0, \forall x \in (-\infty;-6) \\ -m \notin (-\infty;-6) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m-3 > 0 \\ -m \in [-6;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ -m \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m \leq 6$.

Vậy: $m \in (3;6]$.

Câu 6. **(Mã 104-2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+2}{x+3m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$.

A. 2 **B.** 6 **C.** Vô số **D.** 1

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=(-\infty;-3m)\cup(-3m;+\infty)$.

Ta có $y'=\dfrac{3m-2}{(x+3m)^2}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)\Leftrightarrow\begin{cases}3m-2>0\\-6\le-3m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>\dfrac{2}{3}\\m\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{2}{3}<m\le 2$.

Mà m nguyên nên $m=\{1;2\}$.

Câu 7. **(Mã 103-2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6;+\infty)$?

A. 0 **B.** 6 **C.** 3 **D.** Vô số

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-3m\}$; $y'=\dfrac{3m-1}{(x+3m)^2}$.

Hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6;+\infty)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}y'<0\\(6;+\infty)\subset D\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3m-1<0\\-3m\le 6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{1}{3}\\m\ge -2\end{cases}\Leftrightarrow -2\le m<\dfrac{1}{3}.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-2;-1;0\}$.

Câu 8. **(Mã 101- 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-10)$?

A. 2 **B.** Vô số **C.** 1 **D.** 3

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-5m\}$.

$y'=\dfrac{5m-2}{(x+5m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-10)$ khi và chỉ khi $\begin{cases}5m-2>0\\-5m\in[-10;+\infty)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m>\dfrac{2}{5}\\-5m\ge -10\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{2}{5}<m\le 2$.

Vì m nguyên nên $m\in\{1;2\}$. Vậy có 2 giá trị của tham số m.

Câu 9. **(Mã 102 - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10;+\infty)$?

A. Vô số **B.** 4 **C.** 5 **D.** 3

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-5m\}$.

$y'=\dfrac{5m-6}{(x+5m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên $(10;+\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases}y'<0,\forall x\in D\\-5m\notin(10;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5m-6<0\\-5m\le 10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{6}{5}\\m\ge -2\end{cases}$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1\}$.

Câu 10. **(Chuyên KHTN - 2020)** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx-4}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$ là

A. $(-2;1]$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(-2;-1]$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải

Chọn C

Đạo hàm $y'=\dfrac{-m^2+4}{(x-m)^2}>0,\forall x\ne m$.

Do đó hàm số đồng biến trên $(-1;+\infty)$ khi

$y'>0,\forall x\in(-1;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+4>0\\x-m\ne 0,\forall x\in(-1;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+4>0\\x\ne m,\forall x\in(-1;+\infty)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-2<m<2\\m\le -1\end{cases}\Leftrightarrow -2<m\le -1$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 11. **(Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx-1}{m-4x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)$.

A. $m>2$. **B.** $1\le m<2$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $-2\le m\le 2$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{m}{4}\right\}$.

Ta có $y'=\dfrac{m^2-4}{(m-4x)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)$ khi và chỉ khi $\begin{cases}m^2-4<0\\\dfrac{m}{4}\notin\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<m<2\\\dfrac{m}{4}\ge\dfrac{1}{4}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-2<m<2\\m\ge 1\end{cases}\Rightarrow 1\le m<2$.

Vậy $1\le m<2$.

Câu 12. **(Chuyên Thái Nguyên - 2020)** Cho hàm số $y=\dfrac{mx-2m+3}{x+m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Tìm số phần tử của S.

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định: $x\neq -m$.

Ta có: $y'=\dfrac{m^2+2m-3}{(x+m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$ thì:

$$\begin{cases} y'<0;\forall x\in(2;+\infty) \\ x\neq -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m-3<0 \\ -m\leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<m<1 \\ m\geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2\leq m<1.$$

Vậy giá trị nguyên của m là $S=\{-2;-1;0\}$.

Câu 13. **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+18}{x+4m}$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. Vô số. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x\neq -4m$.

Ta có $y=\dfrac{x+18}{x+4m}\Rightarrow y'=\dfrac{4m-18}{(x+4m)^2}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'<0 \\ -4m\notin(2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m-18<0 \\ -4m\leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{9}{2} \\ m\geq -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leq m<\frac{9}{2}.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0;1;2;3;4\}$. Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+18}{x+4m}$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 14. **(Sở Hà Tĩnh - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+9}{4x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;4)$?

A. 5. **B.** 11. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x \neq -\frac{m}{4}$.

Ta có: $y' = \frac{m^2 - 36}{(4x+m)^2}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;4) \Leftrightarrow y' < 0,\ \forall x \in (0;4)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 36 < 0 \\ -\frac{m}{4} \notin (0;4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < m < 6 \\ \left[\begin{array}{l} -\frac{m}{4} \le 0 \\ -\frac{m}{4} \ge 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < m < 6 \\ \left[\begin{array}{l} m \ge 0 \\ m \le -16 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m < 6.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

Vậy có 6 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 15. **(Sở Yên Bái - 2020)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{-mx + 3m + 4}{x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$

A. $-1 < m < 4$. **B.** $-1 < m \le 1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 4 \end{array}\right.$. **D.** $1 \le m < 4$.

Lời giải

Chọn B

$$y' = \frac{m^2 - 3m - 4}{(x-m)^2}$$

Nguyễn Bảo Vương

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì $y' < 0, \forall x \in (1;+\infty)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m - 4 < 0 \\ m \notin (1;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-1;4) \\ m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \le 1.$$

Câu 16. **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2020;2020)$ sao cho hàm số $y = \frac{3x + 18}{x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$?

A. 2020. **B.** 2026. **C.** 2018. **D.** 2023.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x \neq m$ nên $m \notin (-\infty;-3)$

$$y = \frac{3x + 18}{x - m} \Rightarrow y' = \frac{-3m - 18}{(x-m)^2}$$

Để hàm số $y = \frac{3x + 18}{x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ thì $-3m - 18 < 0 \Leftrightarrow m > -6$

Vì $m \in (-2020;2020)$ và $m \notin (-\infty;-3)$ nên $m \in [-2;2020]$

Vậy có 2023 giá trị m nguyên thoả mãn.

Câu 17. **(Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+4}{2x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-3;4)$.

A. Vô số. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{m}{2}\right\}$.

Có $y'=-\dfrac{m+8}{(2x-m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên $(-3;4)\Leftrightarrow y'<0\ \forall x\in(-3;4)\Leftrightarrow -\dfrac{m+8}{(2x-m)^2}<0\ \forall x\in(-3;4)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-(m+8)<0\\ \dfrac{m}{2}\notin(-3;4)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-8\\ \left[\begin{array}{l}\dfrac{m}{2}\le -3\\ \dfrac{m}{2}\ge 4\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-8<m\le -6\\ m\ge 8\end{array}\right.$$

Do m nguyên âm nên $m\in\{-7;-6\}$, gồm 2 giá trị thỏa mãn.

Câu 18. **(Chuyên KHTN - Hà Nội - Lần 3)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

Ta có $y'=\dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}y'<0,\forall x>0\\ -m\notin(0;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-4<0\\ -m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<m<2\\ m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m<2.$$

Vậy số giá trị nguyên của tham số m là 2.

Dạng 3. Tìm m để hàm số bậc 3 đơn điệu trên khoảng cho trước

Câu 1. **(Mã 101 – 2020 -Lần 2)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+(4-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

A. $(-\infty;1]$ **B.** $(-\infty;4]$ **C.** $(-\infty;1)$ **D.** $(-\infty;4)$

Lời giải

Chọn B

Ta có.

$y'=3x^2-6x+4-m$. $ycbt\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2-6x+4-m\ge 0,\forall x\in(2;+\infty)\Leftrightarrow m\le 3x^2-6x+4,\forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \le \min\limits_{(2;+\infty)} g(x)$ với $g(x) = 3x^2 - 6x + 4$

Ta có.

$g'(x) = 6x - 6$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$g'(x)$		0	$+$	
$g(x)$			4	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $m \le 4$ thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy: $m \in (-\infty; 4]$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 2. **(Mã 102 – 2020 – Lần 2)** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (5-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

A. $(-\infty;2)$. **B.** $(-\infty;5)$. **C.** $(-\infty;5]$. **D.** $(-\infty;2]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 5 - m$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \ge 0, \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 5 - m \ge 0, \forall x > 2 \Leftrightarrow m \le 3x^2 - 6x + 5, \forall x > 2$.

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ trên khoảng $(2;+\infty)$.

Có $f'(x) = 6x - 6$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (loại).

Bảng biến thiên

x	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	5	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $m \le 3x^2 - 6x + 5, \forall x > 2 \Leftrightarrow m \le 5$.

Vậy $m \in (-\infty;5]$.

Câu 3. **(Mã 103 – 2020 – Lần 2)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (2-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

A. $(-\infty;-1]$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(-\infty;2]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 2 - m$.

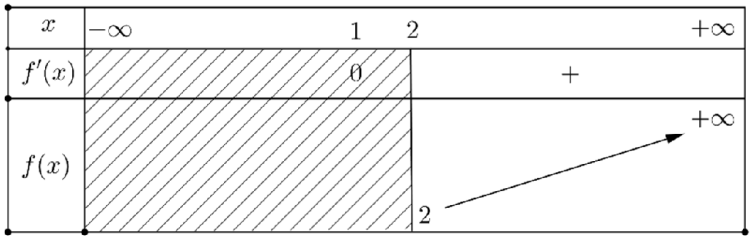
Để hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \ge 0, \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2 - m \ge 0, \forall x \in (2;+\infty)$ $m \le 3x^2 - 6x + 2, \forall x \in (2;+\infty)$.

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 6x + 2, \forall x \in (2;+\infty)$.

$f'(x)=6x-6$; $f'(x)=0\Rightarrow 6x-6=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta thấy $m\le 2$. Vậy $m\in(-\infty;2]$.

Câu 4. **(Mã 104 – 2020 – Lần 2)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+(1-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-\infty;-2]$. **D.** $(-\infty;1]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=3x^2-6x+1-m$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in(2;+\infty)$

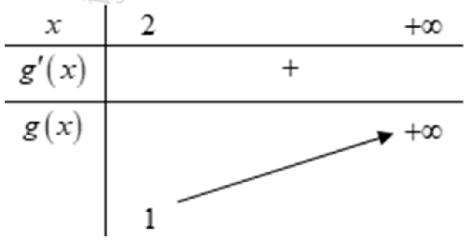
$\Leftrightarrow 3x^2-6x+1-m\ge 0,\ \forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2-6x+1\ge m,\ \forall x\in(2;+\infty)$.

Xét hàm số $g(x)=3x^2-6x+1$ với $\forall x\in(2;+\infty)$.

$g'(x)=6x-6$; $g'(x)>0$, $\forall x\in(2;+\infty)$.

Bảng biến thiên $g(x)$:



Vậy $m\le 1$.

Câu 5. **(Đề Tham Khảo 2019)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-x^3-6x^2+(4m-9)x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ là

A. $\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right]$ **B.** $[0;+\infty)$ **C.** $(-\infty;0]$ **D.** $\left[-\frac{3}{4};+\infty\right)$

Lời giải

Chọn A

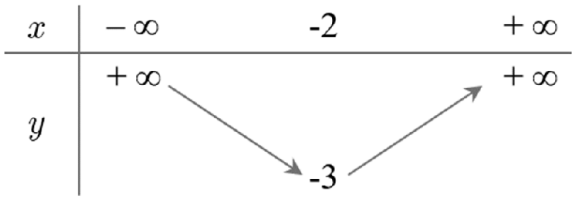
Ta có $y'=-3x^2-12x+4m-9$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ thì $y'=-3x^2-6x+4m-9\le 0\ \ \forall x\in(-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow 4m\le 3x^2+12x+9\ \ \forall x\in(-\infty;-1)\ \Leftrightarrow\ 4m\le \min\limits_{(-\infty;-1]} f(x),\quad f(x)=3x^2+12x+9$

Ta có $f'(x)=6x+12$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-2$.

Khi đó, ta có bảng biến thiên



Suy ra $\min\limits_{(-\infty;0]} f(x) = -3 \Rightarrow 4m \le -3 \Leftrightarrow m \le \dfrac{-3}{4}$.

Câu 6. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ là

A. $(-1;5)$. **B.** $(-\infty;-3]$. **C.** $(-\infty;-4]$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 + 6x - m$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ thì $y' \ge 0,\ \forall x \in (-\infty;0)$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x - m \ge 0, \forall x \in (-\infty;0)$

$\Leftrightarrow m \le 3x^2 + 6x, \forall x \in (-\infty;0)$.

Đặt $g(x) = 3x^2 + 6x$, hàm số $g(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0
y'		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\Leftrightarrow m \le 3x^2 + 6x, \forall x \in (-\infty;0) \Leftrightarrow m \le -3$.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{mx^3}{3} + 7mx^2 + 14x - m + 2$ giảm trên nửa khoảng $[1;+\infty)$?

A. $\left(-\infty;-\dfrac{14}{15}\right]$. **B.** $\left[-2;-\dfrac{14}{15}\right]$. **C.** $\left[-\dfrac{14}{15};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{14}{15}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R}$, yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$mx^2 + 14mx + 14 \le 0, \forall x \ge 1$, tương đương với $g(x) = \dfrac{-14}{x^2 + 14x} \ge m$ (1)

Dễ dàng có được $g(x)$ là hàm tăng $\forall x \in [1;+\infty)$, suy ra $\min\limits_{x \ge 1} g(x) = g(1) = -\dfrac{14}{15}$

Kết luận: (1) $\Leftrightarrow \min\limits_{x \ge 1} g(x) \ge m \Leftrightarrow -\dfrac{14}{15} \ge m$

Câu 8. Xác định các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - m$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$?

A. $m \ge 0$. **B.** $m < \dfrac{1}{2}$. **C.** $m \le 0$. **D.** $m \ge \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2m \\ x = 0 \end{array}\right.$

Hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - m$ nghịch biến trên khoảng $(0;1) \Leftrightarrow 2m \geq 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

A. $m \leq 0$. **B.** $m \geq -2$. **C.** $m \leq -3$. **D.** $m \leq -1$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 3x^2 + 6x - m$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0$, $\forall x < 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x - m \geq 0$, $\forall x < 0$.

Cách 1:

$3x^2 + 6x - m \geq 0$, $\forall x < 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x \geq m$, $\forall x < 0$.

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 + 6x$ trên khoảng $(-\infty;0)$, ta có:

$f'(x) = 6x + 6$. Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Ta có $f(-1) = -3$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $m \leq -3$.

Cách 2:

Ta có $\Delta' = 9 + 3m$.

Nếu $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -3$ thì $y' \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y' \geq 0$ $\forall x < 0$.

Nếu $\Delta' > 0$ thì y' có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Khi đó để $y' \geq 0$ $\forall x < 0$ thì ta phải có $0 \leq x_1 < x_2$. Điều này không thể xảy ra vì $S = x_1 + x_2 = -2 < 0$.

Vậy $m \leq -3$.

Cách 3:

Phương án B: Với $m = -3$ ta có $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$. Khi đó $y' = 3(x+1)^2 \geq 0$ $\forall x$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$. Vậy B là đáp án đúng.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 9m^2x$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

A. $-1 < m < \frac{1}{3}$. **B.** $m > \frac{1}{3}$.

C. $m < -1$. **D.** $m \geq \frac{1}{3}$ hoặc $m \leq -1$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6mx-9m^2$; $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6mx-9m^2=0\Leftrightarrow x^2-2mx-3m^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-m\\x=3m\end{array}\right.$.

•Nếu $-m=3m\Leftrightarrow m=0$ thì $y'\geq 0;\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số không có khoảng nghịch biến.

•Nếu $-m<3m\Leftrightarrow m>0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-m;3m)$.

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-m\leq 0\\3m\geq 1\end{array}\right.\Leftrightarrow m\geq\frac{1}{3}$.

Kết hợp với điều kiện ta được $m\geq\frac{1}{3}$.

•Nếu $-m>3m\Leftrightarrow m<0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(3m;-m)$.

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}3m\leq 0\\-m\geq 1\end{array}\right.\Leftrightarrow m\leq -1$.

Kết hợp với điều kiện ta được $m\leq -1$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ khi $m\leq -1$ hoặc $m\geq\frac{1}{3}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 11. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-1)x-m+2$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$..

A. $m=0$. **B.** $m>1$. **C.** $m\leq-\frac{1}{2}$. **D.** $m<-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=x^2-2mx+2m-1$. Cho $y'=0\Leftrightarrow x^2-2mx+2m-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2m-1\end{array}\right.$.

Nếu $1\leq 2m-1$ thì ta có biến đổi $y'\leq 0\Leftrightarrow 1\leq x\leq 2m-1$.

(trường hợp này hàm số không thể nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$).

Xét $2m-1<1$ ta có biến đổi $y'\leq 0\Leftrightarrow x\in[2m-1;1]$.

x	$-\infty$		$2m-1$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

.

Vậy, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$ thì $(-2;0)\subset[2m-1;1]$.

$\Leftrightarrow 2m-1\le -2\Leftrightarrow m\le -\frac{1}{2}$..

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx+2$ tăng trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. $m<3$. **B.** $m\ge 3$. **C.** $m\ne 3$. **D.** $m\le 3$.

Lời giải

Chọn B

Đạo hàm : $y'=3x^2-6x+m$

YCBT $\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)$.

$\Leftrightarrow 3x^2-6x+m\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow m\ge -3x^2+6x,\forall x\in(1;+\infty)$

Xét hàm số: $f(x)=-3x^2+6x,\forall x\in(1;+\infty)\Rightarrow f'(x)=-6x+6\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $f(1)=3$. Do đó : $m\ge f(x),x\in(1;+\infty)\Rightarrow m\ge 3$.

Câu 13. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-mx^2-(m-6)x+1$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$ là:

A. $(-\infty;3)$. **B.** $(-\infty;3]$. **C.** $[3;6]$. **D.** $(-\infty;6]$.

Lời giải

Chọn B

$y'=3x^2-2mx-(m-6)$. Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;4)$ thì: $y'\ge 0$, $\forall x\in(0;4)$.

tức là $3x^2-2mx-(m-6)\ge 0\ \forall x\in(0;4)\Leftrightarrow \frac{3x^2+6}{2x+1}\ge m\ \forall x\in(0;4)$

Xét hàm số $g(x)=\frac{3x^2+6}{2x+1}$ trên $(0;4)$.

$g'(x)=\frac{6x^2+6x-12}{(2x+1)^2}$, $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in(0;4)\\x=-2\notin(0;4)\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	0		1		4
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	6	$\searrow$	3	$\nearrow$	$\frac{54}{13}$

Vậy để $g(x)=\frac{3x^2+6}{2x+1}\ge m\ \forall x\in(0;4)$ thì $m\le 3$.

Câu 14. Tìm tất cả các giá thực của tham số m sao cho hàm số $y=2x^3-3x^2-6mx+m$ nghịch biến trên

khoảng $(-1;1)$.

A. $m \le -\frac{1}{4}$. **B.** $m \ge \frac{1}{4}$. **C.** $m \ge 2$. **D.** $m \ge 0$.

Lời giải

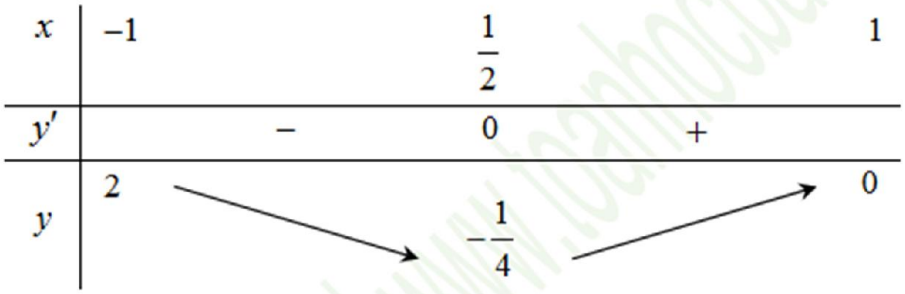
Chọn C

Ta có $y' = 6x^2 - 6x - 6m$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi $y' \le 0$ với $\forall x \in (-1;1)$ hay $m \ge x^2 - x$ với $\forall x \in (-1;1)$.

Xét $f(x) = x^2 - x$ trên khoảng $(-1;1)$ ta có $f'(x) = 2x - 1$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên ta có $m \ge f(x)$ với $\forall x \in (-1;1) \Leftrightarrow m \ge 2$.

* Có thể sử dụng $y' \le 0$ với $\forall x \in (-1;1) \Leftrightarrow \begin{cases} y'(-1) \le 0 \\ y'(1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6m \le 0 \\ 12 - 6m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 0 \\ m \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 2$.

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. $m \ge 12$. **B.** $m \le 12$. **C.** $m \ge 0$. **D.** $m \le 0$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 - 12x + m$

Trường hợp 1:

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \ (hn) \\ 36 - 3m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 12$

Trường hợp 2: Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty) \Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < x_2 \le 0$ (*)

Trường hợp 2.1: $y' = 0$ có nghiệm $x = 0$ suy ra $m = 0$. Nghiệm còn lại của $y' = 0$ là $x = 4$ (không thỏa (*))

Trường hợp 2.2: $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa

$x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36 - 3m > 0 \\ 4 < 0 (vl) \\ \frac{m}{3} > 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ không có m. Vậy $m \ge 12$

Cách 2:Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty) \Leftrightarrow m \geq 12x-3x^2 = g(x), \forall x \in (0;+\infty)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0;+\infty)$.

x	0		2		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g	0	↗	12	↘	$-\infty$

Câu 16. Tìm m để hàm số $y=-x^3+3x^2+3mx+m-1$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

A. $m \leq -1$. **B.** $m \leq 1$. **C.** $m<1$. **D.** $m>-1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=-3x^2+6x+3m=3\left(-x^2+2x+m\right)$.

Vì hàm số liên tục trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ nên hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$ cũng tương đương hàm số nghịch trên $[0;+\infty)$ khi chỉ khi $y' \leq 0,\ \forall x \in [0,+\infty)$.

$\Leftrightarrow -x^2+2x+m \leq 0\ \forall x \in [0;+\infty) \Leftrightarrow m \leq x^2-2x = f(x)\ \forall x \in [0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \leq \min\limits_{[0;+\infty)} f(x) = f(1) = -1$.

Câu 17. **(THPT Chuyên Hạ Long - 2018)** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=x^3-3(2m+1)x^2+(12m+5)x+2$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Số phần tử của S bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6(2m+1)x+12m+5$.

Hàm số đồng biến trong khoảng $(2;+\infty)$ khi $y' \geq 0$, $\forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2-6(2m+1)x+12m+5 \geq 0$, $\forall x \in (2;+\infty)$.

$3x^2-6(2m+1)x+12m+5 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{3x^2-6x+5}{12(x-1)}$

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{3x^2-6x+5}{12(x-1)}$ với $x \in (2;+\infty)$.

$g'(x)=\dfrac{3x^2-6x+1}{12(x-1)^2}>0$ với $\forall x \in (2;+\infty) \Rightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Do đó $m \leq g(x), \forall x \in (2;+\infty) \Rightarrow m \leq g(2) \Leftrightarrow m \leq \dfrac{5}{12}$.

Vậy không có giá trị nguyên dương nào của m thỏa mãn bài toán.

Câu 18. **(Chuyên KHTN - 2018)**. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-mx^2-(m-6)x+1$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$ là:

A. $(-\infty;6]$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $(-\infty;3]$. **D.** $[3;6]$.

Lời giải

$y' = 3x^2 - 2mx - (m-6)$. Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;4)$ thì: $y' \ge 0, \forall x \in (0;4)$.

tức là $3x^2 - 2mx - (m-6) \ge 0 \ \forall x \in (0;4) \Leftrightarrow \dfrac{3x^2+6}{2x+1} \ge m \ \forall x \in (0;4)$

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{3x^2+6}{2x+1}$ trên $(0;4)$.

$g'(x) = \dfrac{6x^2+6x-12}{(2x+1)^2}$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in (0;4) \\ x = -2 \notin (0;4) \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	0		1		4
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	6	$\searrow$	3	$\nearrow$	$\dfrac{54}{13}$

Vậy để $g(x) = \dfrac{3x^2+6}{2x+1} \ge m \ \forall x \in (0;4)$ thì $m \le 3$.

Câu 19. **(Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020)** Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+6)x + \dfrac{2}{3}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 9. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $f'(x) = x^2 - 2mx + (m+6)$

Hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+6)x + \dfrac{2}{3}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi

$f'(x) \ge 0, \forall x \in (0;+\infty)$.

Xét hàm số $y = f'(x) = x^2 - 2mx + (m+6)$ trong 3 trường hợp:

Trường hợp 1: $m = 0$

$y = f'(x) = x^2 + 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Lúc này hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên cũng đồng biến trên $(0;+\infty)$ (1).

Trường hợp 2: $m < 0$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x) = x^2 - 2mx + (m+6)$ như sau:

x	$-\infty$		m		0		$+\infty$
$y = f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-m^2+m+6$	$\nearrow$	$m+6$	$\nearrow$	$+\infty$

$f'(x) \ge 0, \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m+6 \ge 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -6 \le m < 0$ (2).

Trường hợp 3: $m > 0$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x) = x^2 - 2mx + (m+6)$ như sau:

x	$-\infty$		0		m		$+\infty$
$y=f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m+6$	$\searrow$	$-m^2+m+6$	$\nearrow$	$+\infty$

$f'(x)\ge 0,\forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+m+6\ge 0\\ m>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m\le 3$ (3).

Từ $(1),(2)$ và (3) suy ra có 10 giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+6)x+\frac{2}{3}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Câu 20. **(Chuyên Sơn La - 2020)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-x^3-6x^2+(4m-9)x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ là

A. $\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right]$. **B.** $\left[-\frac{3}{4};+\infty\right)$. **C.** $[0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0]$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=-3x^2-12x+4m-9$.

Ycbt $\Leftrightarrow -3x^2-12x+4m-9\le 0,\ \forall x\in(-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow m\le\frac{3}{4}(x^2+4x+3),\ \forall x\in(-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow m\le\frac{3}{4}\left[(x+2)^2-1\right],\ \forall x\in(-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow m\le\min\limits_{x\in(-\infty;-1)}\left\{\frac{3}{4}\left[(x+2)^2-1\right]\right\}=-\frac{3}{4}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 21. **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=\frac{x^3}{3}-(m-1)x^2+3(m-1)x+1$. Số các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ là

A. 7. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=x^2-2(m-1)x+3(m-1)$.

Ycbt $\Leftrightarrow x^2-2(m-1)x+3(m-1)\ge 0,\ \forall x\in(1;+\infty)$

$\Delta'=\left[-(m-1)\right]^2-3(m-1)=m^2-5m+4$.

Trường hợp 1: $\Delta'\le 0\Leftrightarrow m^2-5m+4\le 0\Leftrightarrow m\in[1;4]$. Ta được 4 giá trị nguyên của m.

Trường hợp 2:

$\Delta'>0\Leftrightarrow m^2-5m+4>0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}m<1\\ m>4\end{bmatrix}$. Khi đó phương trình $x^2-2(m-1)x+3(m-1)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2\le 1$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(x_1-1)+(x_2-1)<0\\ (x_1-1)(x_2-1)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x_1+x_2)-2<0\\ x_1x_2-(x_1+x_2)+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(m-1)-2<0\\ 3(m-1)-2(m-1)+1\ge 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow 0\le m<2$.

Kết hợp với điều kiện ta được $0 \le m < 1$. Khi đó có 1 giá trị nguyên của m.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m.

Câu 22. **(Kim Liên - Hà Nội - 2020)** Số giá trị nguyên thuộc khoảng $(-2020;2020)$ của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2019$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ là

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2017.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - m$.

Hàm số đồng biến trên khi $y' \ge 0, \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - m \ge 0, \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x \ge m, \forall x \in (0;+\infty)$ (1)

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 6x$ trên $(0;+\infty)$

Ta có $f'(x) = 6x - 6, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Do đó $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f(1) = -3$

$(1) \Leftrightarrow m \le -3$. Kết hợp với giả thiết ta được $m \in (-2020;-3]$. Nên có 2017 số nguyên thỏa mãn

Vậy chọn **D.**

Câu 23. **(Lê Lai - Thanh Hóa - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-2020;2020]$ để hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

A. 2004. **B.** 2017. **C.** 2020. **D.** 2009.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 - 12x + m$.

Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi

$y' \ge 0, \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + m \ge 0, \forall x \in (0;+\infty)$.

Do đó $m \ge -3x^2 + 12x, \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow m \ge \max\limits_{(0;+\infty)} g(x)$ với $g(x) = -3x^2 + 12x$.

Ta có: $g(x) = -3(x-2)^2 + 12 \le 12, \forall x \in (0;+\infty)$ nên $\max\limits_{(0;+\infty)} g(x) = 12 = g(2)$.

Vậy $m \ge 12$.

Số các số nguyên m cần tìm là: $2020 - 12 + 1 = 2009$.

Câu 24. **(Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Cho hàm số $f(x) = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

$f(x) = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2(m+1)x - (2m^2 - 3m + 2)$

Nhận xét $2m^2 - 3m + 2 > 0 \ \forall m \in \mathbb{R}$ nên $f'(x) = 3x^2 - 2(m+1)x - (2m^2 - 3m + 2) = 0$

luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $f'(x)\ge 0$ với mọi $x\in(2;+\infty)$

Điều này xảy ra khi $\begin{cases}3.f'(2)\ge 0\\ x_1<x_2<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3.\left[3.4-4(m+1)-\left(2m^2-3m+2\right)\right]\ge 0\\ \dfrac{S}{2}<2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-2m^2-m+6\ge 0\\ \dfrac{(m+1)}{3}<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\le m\le\dfrac{3}{2}\\ m<5\end{cases}\Leftrightarrow -2\le m\le\dfrac{3}{2}$

Do m nguyên nên $m\in\{-2;-1;0;1\}$.

Câu 25. **(Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2020;2020)$ sao cho hàm số $y=2x^3+mx^2+2x$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$. Tính số phần tử của tập hợp S.

A. 2025. **B.** 2016. **C.** 2024. **D.** 2023.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=2x^3+mx^2+2x\Rightarrow y'=6x^2+2mx+2$.

Hàm số đã cho đồng biên trên khoảng $(-2;0)\Leftrightarrow y'=6x^2+2mx+2\ge 0,\forall x\in(-2;0)$

$\Leftrightarrow m\le -3x-\dfrac{1}{x},\forall x\in(-2;0)$.

Xét hàm số $g(x)=-3x-\dfrac{1}{x},\forall x\in(-2;0)$

$\Rightarrow g'(x)=-3+\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow -3+\dfrac{1}{x^2}=0\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Bảng biến thiên

x	-2		$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$		0
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\dfrac{13}{2}$	↗	$-2\sqrt{3}$	↘	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $m\le -2\sqrt{3}$. Mà $m\in\mathbb{Z},m\in(-2020;2020)$ nên $m\in\{-2019;-2018;...;-4\}$.

Vậy có 2016 giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2020;2020)$ sao cho hàm số $y=2x^3+mx^2+2x$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

Câu 26. **(Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020)** Với mọi giá trị $m \ge a\sqrt{b}$, $(a,b \in \mathbb{Z})$ thì hàm số $y = 2x^3 - mx^2 + 2x + 5$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$. Khi đó $a-b$ bằng

A. 1. **B.** -2. **C.** 3. **D.** -5.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 6x^2 - 2mx + 2$.

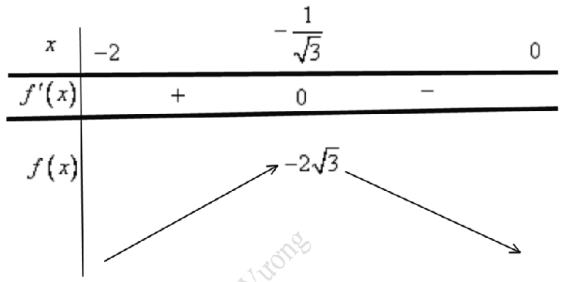
Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$ khi $y' \ge 0, \forall x \in (-2;0)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - mx + 1 \ge 0, \forall x \in (-2;0)$

$3x^2 + 1 \ge mx \Leftrightarrow 3x + \dfrac{1}{x} \le m$.

Xét hàm số $f(x) = 3x + \dfrac{1}{x}$; $f'(x) = 3 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{3x^2-1}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x^2-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$.



Từ bảng biến thiên để $f(x) \le m$, $\forall x \in (-2;0)$

thì $\max\limits_{(-2;0)} f(x) \le m \Rightarrow m \ge -2\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow a - b = -5$.

Dạng 4. Tìm m để hàm số khác đơn điệu trên khoảng cho trước

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

A. $m \le 0$ hoặc $1 \le m < 2$ **B.** $m \le 0$ **C.** $1 \le m < 2$ **D.** $m \ge 2$

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \tan x$, vì $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in (0;1)$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t-2}{t-m} \forall t \in (0;1)$. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

Ta có $f'(t) = \dfrac{2-m}{(t-m)^2}$.

Ta thấy hàm số $t(x) = \tan x$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$. Nên để hàm số $y = \dfrac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ khi và chỉ khi: $f'(t) > 0 \forall t \in (0;1)$

$$\Leftrightarrow \frac{2-m}{(t-m)^2} > 0\ \forall t \in (0;1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2-m>0 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<2 \\ \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty;0] \cup [1;2)$$

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

A. 0 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 3

Lời giải

Chọn B

$y' = 3x^2 + m + \frac{1}{x^6}$

Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' = 3x^2 + m + \frac{1}{x^6} \ge 0, \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow -3x^2 - \frac{1}{x^6} \le m, \forall x \in (0;+\infty)$. Xét hàm số $g(x) = -3x^2 - \frac{1}{x^6} \le m$, $x \in (0;+\infty)$

$g'(x) = -6x + \frac{6}{x^7} = \frac{-6(x^8-1)}{x^7}$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 (\text{loai}) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$

Dựa vào BBT ta có $m \ge -4$, suy ra các giá trị nguyên âm của tham số m là $-4;-3;-2;-1$

Câu 3. **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \frac{1}{5}m^2x^5 - \frac{1}{3}mx^3 + 10x^2 - (m^2 - m - 20)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** -2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = m^2x^4 - mx^2 + 20x - (m^2 - m - 20) = m^2(x^4-1) - m(x^2-1) + 20(x+1)$

$= m^2(x-1)(x+1)(x^2+1) - m(x-1)(x+1) + 20(x+1)$

$= (x+1)\left[m^2(x-1)(x^2+1) - m(x-1) + 20\right]$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ m^2(x-1)(x^2+1) - m(x-1) + 20 = 0 (*) \end{array}\right.$

Ta có $f'(x) = 0$ có một nghiệm đơn là $x = -1$, do đó nếu $(*)$ không nhận $x = -1$ là nghiệm thì $f'(x)$ đổi dấu qua $x = -1$. Do đó để $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $f'(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$ hay $(*)$ nhận $x = -1$ làm nghiệm (bậc lẻ).

Suy ra $m^2(-1-1)(1+1) - m(-1-1) + 20 = 0 \Leftrightarrow -4m^2 + 2m + 20 = 0$.

Tổng các giá trị của m là $\frac{1}{2}$.

Câu 4. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x+1+\frac{m}{x-2}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó là

A. $[0;1)$. **B.** $(-\infty;0]$. **C.** $[0;+\infty)\setminus\{1\}$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó khi và chỉ khi:

$$y'\ge 0,\forall x\in D \Leftrightarrow 1-\frac{m}{(x-2)^2}\ge 0,\forall x\in D$$

$$\Leftrightarrow m\le (x-2)^2,\forall x\in D$$

Xét hàm số $f(x)=(x-2)^2$ ta có:

$f'(x)=2x-4\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Vậy, để hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó thì $m\le 0$.

Câu 5. **(THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số để hàm số $y=\frac{\cos x-3}{\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

A. $\left[\begin{array}{l}0\le m<3\\ m\le -1\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}0<m<3\\ m<-1\end{array}\right.$. **C.** $m\le 3$. **D.** $m<3$.

Lời giải

Điều kiện: $\cos x\ne m$. Ta có: $y'=\frac{(-m+3)}{(\cos x-m)^2}.(-\sin x)=\frac{(m-3)}{(\cos x-m)^2}.\sin x$

Vì $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)\Rightarrow \sin x>0$, $(\cos x-m)^2>0$, $\forall x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right):\cos x\ne m$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng

$\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)\Leftrightarrow y'<0\ \forall x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m-3<0\\ \cos x\ne m\ \ \forall x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m-3<0\\ m\notin(-1;0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<3\\ \left[\begin{array}{l}m\le -1\\ m\ge 0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le m<3\\ m\le -1\end{array}\right.$$

Chú ý : Tập giá trị của hàm số $y=\cos x,\ \forall x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ là $(-1;0)$.

Câu 6. **(Hoàng Hoa Thám 2019)** Cho hàm số $y=\frac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10;10)$ sao cho hàm số đồng biến trên $(-8;5)$?

A. 14. **B.** 13. **C.** 12. **D.** 15.

Lời giải

Đặt $t=-\sqrt{6-x}$ vì $x\in(-8;5)\Rightarrow t\in\left(-\sqrt{14};-1\right)$ và $t=-\sqrt{6-x}$ đồng biến trên $(-8;5)$.

Hàm số trở thành $y=\dfrac{-(4-m)t+3}{-t+m}$ tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}\Rightarrow y'=\dfrac{m^2-4m+3}{(-t+m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\sqrt{14};-1\right)\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-4m+3>0\\ \left[\begin{array}{l}m\le-\sqrt{14}\\ m\ge-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le-\sqrt{14}\\ -1\le m<1.\\ m>3\end{array}\right.$

$\Rightarrow m=\{-9,-8,-7,-6,-5,-4,-1,0,4,5,6,7,8,9\}$ có 14 giá trị.

Câu 7. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{4}x^4+mx-\dfrac{3}{2x}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Tập xác định : $D=\mathbb{R}$. $y'=x^3+m+\dfrac{3}{2x^2}$.

Ta có: hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'\ge0$ với $\forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow x^3+m+\dfrac{3}{2x^2}\ge0,\forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow x^3+\dfrac{3}{2x^2}\ge-m,\forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow -m\le\underset{(0;+\infty)}{\text{Min}}f(x)$,với $f(x)=x^3+\dfrac{3}{2x^2}(1)$.

Cách 1:

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $f(x)=x^3+\dfrac{3}{2x^2}=\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{1}{2x^2}\ge5\sqrt[5]{\dfrac{1}{2^5}}=\dfrac{5}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=1$. Do đó $\underset{(0;+\infty)}{\text{Min}}f(x)=\dfrac{5}{2}(2)$.

Từ (1) và (2) ta có $-m\le\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow m\ge-\dfrac{5}{2}$. Do m nguyên âm nên $m=-1$ hoặc $m=-2$.

Vậy có hai giá trị nguyên âm của tham số m thỏa mãn điều kiện bài ra.

Cách 2:

Xét hàm số $f(x)=x^3+\dfrac{3}{2x^2},\forall x\in(0;+\infty)$.

Ta có $f'(x)=3x^2-\dfrac{3}{x^3},f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\dfrac{5}{2}$	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta có $-m\le\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow m\ge-\dfrac{5}{2}$. Do m nguyên âm nên $m=-1$ hoặc $m=-2$.

Vậy có hai giá trị nguyên âm của tham số m thỏa mãn điều kiện bài ra.

Câu 8. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{\ln x-4}{\ln x-2m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;\mathrm{e})$. Tìm số phần tử của S.

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 4

Lời giải

Chọn C

$y=f(x)=\dfrac{\ln x-4}{\ln x-2m}$

Đặt $t=\ln x$, điều kiện $t\in(0;1)$

$g(t)=\dfrac{t-4}{t-2m}$; $g'(t)=\dfrac{-2m+4}{(t-2m)^2}$

Để hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;e)$ thì hàm số $g(t)$ đồng biến trên $(0;1)$

$\Leftrightarrow g'(t)>0,\mathrm{t}\in(0;1)\Leftrightarrow\dfrac{-2m+4}{(t-2m)^2}>0,t\in(0;1)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-2m+4>0\\2m\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}<m<2\\m<0\end{array}\right.$

S là tập hợp các giá trị nguyên dương $\Rightarrow S=\{1\}$.

Vậy số phần tử của tập S là 1.

Câu 9. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Tìm m để hàm số $y=\dfrac{\cos x-2}{\cos x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

A. $\left[\begin{array}{l}m\geq 2\\m\leq -2\end{array}\right.$ **B.** $m>2$ **C.** $\left[\begin{array}{l}m\leq 0\\1\leq m<2\end{array}\right.$ **D.** $-1<m<1$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=\dfrac{2-m}{(\cos x-m)^2}.(-\sin x),\sin x>0\,\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Do đó: Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

$\begin{cases}2-m>0\\\cos x-m\neq 0\,\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<2\\m\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\leq 0\\1\leq m<2\end{array}\right.$.

Câu 10. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số

$y=\dfrac{3}{4}x^4-\dfrac{9}{2}x^2+(2m+15)x-3m+1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

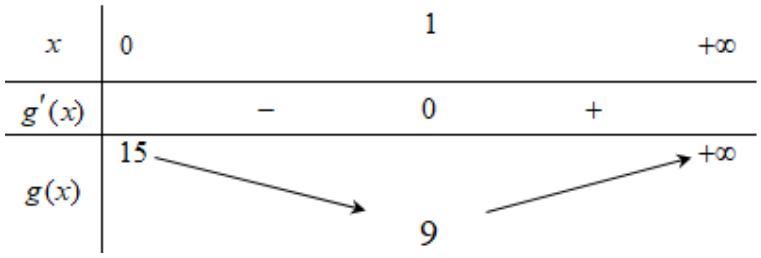
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'=3x^3-9x+2m+15\geq 0\ \forall x\in(0;+\infty)$ và dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm thuộc $(0;+\infty)\Leftrightarrow 3x^3-9x+15\geq -2m\ \forall x\in(0;+\infty)$.

Xét hàm số: $g(x)=3x^3-9x+15$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có: $g'(x)=9x^2-9$

$g'(x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1\ (l) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Từ BBT ta có: $-2m \le 9 \Leftrightarrow m \ge -\dfrac{9}{2}$

Vậy $m \in \{-4;-3;-2;-1\}$.

Câu 11. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=3x+\dfrac{m^2+3m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$y=3x+\dfrac{m^2+3m}{x+1} \Rightarrow y'=\dfrac{3(x+1)^2-(m^2+3m)}{(x+1)^2}$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi $y' \ge 0$,

$\forall x \ne -1 \Leftrightarrow m^2+3m \le 0 \Leftrightarrow -3 \le m \le 0$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3;-2;-1;0\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 12. Tìm m để hàm số $y=\dfrac{\cos x-2}{\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

A. $m>2$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ 1 \le m < 2 \end{array}\right.$. **C.** $m<2$. **D.** $m \le 2$.

Lời giải

Đặt $t=\cos x$.

Ta có: $t'=-\sin x<0, \forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$\Rightarrow$ hàm số $t=\cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Do đó hàm số $y=\dfrac{\cos x-2}{\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$ hàm số $y=\dfrac{t-2}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Hàm số $y=\dfrac{t-2}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1) \Leftrightarrow y'=\dfrac{2-m}{(t-m)^2}>0, \forall t\in(0;1)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-m>0 \\ \left[\begin{array}{l} 1\le m \\ m\le 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<2 \\ \left[\begin{array}{l} 1\le m \\ m\le 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1\le m<2 \\ m\le 0 \end{array}\right. .$$

Vậy với $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ 1\le m<2 \end{array}\right.$ thì hàm số $y=\dfrac{\cos x-2}{\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Câu 13. **(Toán Học Tuổi Trẻ Số 5 2018)** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=8^{\cot x}+(m-3).2^{\cot x}+3m-2$ (1) đồng biến trên $\left[\dfrac{\pi}{4};\pi\right)$.

A. $-9\le m<3$. **B.** $m\le 3$. **C.** $m\le -9$. **D.** $m<-9$.

Lời giải

Đặt $2^{\cot x}=t$ vì $x\in\left[\dfrac{\pi}{4};\pi\right)$ nên $0<t\le 2$. Khi đó ta có hàm số: $y=t^3+(m-3)t+3m-2$ (2).

$\Rightarrow y'=3t^2+m-3$.

Để hàm số (1) đồng biến trên $\left[\dfrac{\pi}{4};\pi\right)$ thì hàm số (2) phải nghịch biến trên $(0;2]$ hay $3t^2+m-3\le 0, \forall t\in(0;2] \Leftrightarrow m\le 3-3t^2, \forall t\in(0;2]$.

Xét hàm số: $f(t)=3-3t^2$, $\forall t\in(0;2] \Rightarrow f'(t)=-6t$.

$f'(t)=0 \Leftrightarrow t=0$.

Ta có bảng biến thiên:

t	0		2
$f'(t)$	0	$-$	
$f(t)$	3	$\searrow$	-9

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $-9\le f(t)<3, \forall t\in(0;2]$.

Vậy hàm số (1) đồng biến trên $\left[\dfrac{\pi}{4};\pi\right)$ khi $m\le -9$.

Câu 14. **(Toán Học Tuổi Trẻ Số 6 2018)** Cho hàm số $y=\dfrac{\ln x-4}{\ln x-2m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;e)$. Tìm số phần tử của S.

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Điều kiện $\ln x-2m\ne 0 \Leftrightarrow m\ne\dfrac{1}{2}\ln x$.

Do $x\in(1;e)$ nên $\ln x\in(0;1)\Rightarrow m\in(-\infty;0]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta có $y'=\frac{\frac{1}{x}(4-2m)}{(\ln x-2m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$ thì $y'>0$ với mọi $x\in(0;1)$

$\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{x}(4-2m)}{(\ln x-2m)^2}>0$ $4-2m>0\Leftrightarrow m<2$.

Do m là số nguyên dương nên $m=1$.

Câu 15. **(THPT Chuyên Lê Hồng Phong 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{m\ln x-2}{\ln x-m-1}$ nghịch biến trên $(e^2;+\infty)$.

A. $m\le-2$ hoặc $m=1$. **B.** $m<-2$ hoặc $m=1$.

C. $m<-2$. **D.** $m<-2$ hoặc $m>1$.

Lời giải

Tập xác định $D=(0;+\infty)\setminus\{e^{m+1}\}$.

Cách 1: $y'=\frac{-m^2-m+2}{x(\ln x-m-1)^2}$

Vậy yêu cầu bài toán tương đương $\begin{cases}-m^2-m+2<0\\ e^{m+1}\notin(e^2;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>1\\ m<-2\end{array}\right.\\ m+1\le 2\end{cases}\Leftrightarrow m<-2$

Cách 2: Đặt $t=\ln x$, ta biết rằng hàm số $f(x)=\ln x$ đồng biến trên $(e^2;+\infty)$.

Xét hàm số $g(t)=\frac{mt-2}{t-m-1}$ với $t\in(2;+\infty)$, ta có $g'(t)=\frac{-m^2-m+2}{(t-m-1)^2}$.

Vậy hàm số ban đầu nghịch biến trên $(e^2;+\infty)\Leftrightarrow$ hàm số g nghịch biến trên

$(2;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}g'(t)<0\\ m+1\notin(2;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2-m+2<0\\ m+1\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>1\\ m<-2\end{array}\right.\\ m+1\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>1\\ m<-2\end{array}\right.\\ m\le 1\end{cases}\Leftrightarrow m<-2$

Câu 16. **(Chuyên Lương Thế Vinh - 2018)** Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $y=\frac{1}{3}\cos^3x-4\cot x-(m+1)\cos x$ đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$?

A. 5. **B.** 2. **C.** vô số. **D.** 3.

Lời giải

- Ta có: $y'=-\cos^2x.\sin x+\frac{4}{\sin^2x}+(m+1).\sin x=\sin^3x+\frac{4}{\sin^2x}+m.\sin x$.

- Hàm số đồng biến trên $(0;\pi)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0$, $\forall x\in(0;\pi)$

$\Leftrightarrow\sin^3x+\frac{4}{\sin^2x}+m.\sin x\ge 0$, $\forall x\in(0;\pi)$

$\Leftrightarrow\sin^2x+\frac{4}{\sin^3x}\ge -m$, $\forall x\in(0;\pi)$ (1).

- Xét hàm số: $g(x)=\sin^2 x+\dfrac{4}{\sin^3 x}$, trên $(0;\pi)$.

Có $g'(x)=2\sin x.\cos x-\dfrac{12\cos x}{\sin^4 x}=2\cos x.\left(\sin x-\dfrac{6}{\sin^4 x}\right)=2\cos x.\dfrac{\sin^5 x-6}{\sin^4 x}$

$\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}\in(0;\pi)$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{\pi}{2}$		π
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

- Do đó: $(1)\Leftrightarrow -m\le \min\limits_{x\in(0;\pi)} g(x)\Leftrightarrow -m\le 5\Leftrightarrow m\ge -5$.

Lại do m nguyên âm nên $m\in\{-5;-4;-3;-2;-1\}$. Vậy có 5 số nguyên âm.

Câu 17. **(Chuyên Ngữ - Hà Nội - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số $y=x+5+\dfrac{1-m}{x-2}$ đồng biến trên $[5;+\infty)$?

A. 10. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Đạo hàm: $y'=1+\dfrac{m-1}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x+m+3}{(x-2)^2}$.

Xét hàm số $f(x)=x^2-4x+3$ trên $[5;+\infty)$.

Đạo hàm: $f'(x)=2x-4$. Xét $f'(x)=0\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=-1$. Ta có: $f(5)=8$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

Do $(x-2)^2>0$ với mọi $x\in[5;+\infty)$ nên $y'\ge 0$, $\forall x\in[5;+\infty)$ khi và chỉ khi $f(x)\ge -m$, $\forall x\in[5;+\infty)$. Dựa vào bảng biến thiên ta có: $-m\le 8\Leftrightarrow m\ge -8$.

Mà m nguyên âm nên ta có: $m\in\{-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên âm của m để hàm số $y=x+5+\dfrac{1-m}{x-2}$ đồng biến trên $[5;+\infty)$.

Câu 18. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\dfrac{3}{4}x^4-(m-1)x^2-\dfrac{1}{4x^4}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $y'=3x^3-2(m-1)x+\dfrac{1}{x^5}$.

Hàm số đồng biến trong khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \ge 0$ với $\forall x \in (0;+\infty)$.

$y' \ge 0 \Leftrightarrow 2(m-1) \le 3x^2 + \dfrac{1}{x^6}$.

Xét $g(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{x^6}$ với $\forall x \in (0;+\infty)$. Ta có $g'(x) = 6x - \dfrac{6}{x^7}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

$2(m-1) \le g(x) \Leftrightarrow 2(m-1) \le 4 \Leftrightarrow m \le 3$.

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1,2,3\}$.

Vậy có 3 giá trị m nguyên dương thỏa mãn bài toán.

Câu 19. **(Kim Liên - Hà Nội - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x^2}{2} - mx + \ln(x-1)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $y' = x - m + \dfrac{1}{x-1}$.

Để hàm số $y = \dfrac{x^2}{2} - mx + \ln(x-1)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì $y' \ge 0$ với $\forall x \in (1;+\infty)$

$\Leftrightarrow x + \dfrac{1}{x-1} \ge m$ với $\forall x \in (1;+\infty) \Rightarrow m \le \min\limits_{(1;+\infty)} f(x)$.

Xét hàm số $f(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ ta có

$f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-1} + 1 \ge 2\sqrt{(x-1)\dfrac{1}{(x-1)}} + 1 \ge 3 \Rightarrow \min\limits_{(1;+\infty)} f(x) = 3$. Do $m \in \mathbb{Z}^+$ nên $m \in \{1;2;3\}$.

Câu 20. **(Chuyên Vinh - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-10;10)$ để hàm số $y = m^2x^4 - 2(4m-1)x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 15. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 16.

Lời giải

+ Với $m = 0$, hàm số trở thành $y = 2x^2 + 1$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên hàm số cũng đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$, do đó $m = 0$ thỏa mãn.

+ Với $m \ne 0$, hàm số đã cho làm hàm số trùng phương với hệ số $a = m^2 > 0$.

$y' = 4m^2x^3 - 4(4m-1)x = 4x(m^2x^2 - 4m + 1)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = \dfrac{4m-1}{m^2} \end{array}\right.$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì phương trình $x^2 = \dfrac{4m-1}{m^2}$ vô nghiệm hoặc có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $-1 \le x_1 < x_2 \le 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m-1\le 0 \\ \begin{cases} 4m-1>0 \\ \sqrt{\dfrac{4m-1}{m^2}}\le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le \dfrac{1}{4} \\ \begin{cases} m>\dfrac{1}{4} \\ -m^2+4m-1\le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{4}<m<2-\sqrt{3} \\ m>2+\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy điều kiện để hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ là $m\in(-\infty;2-\sqrt{3})\cup(2+\sqrt{3};+\infty)$.

Vì m nguyên, $m\in(-10;10)$ nên $m\in\{-9;-8;...;0;4;5;...;9\}$, có 16 giá trị.

Câu 21. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2018;2018]$ để hàm số $y=\sqrt{x^2+1}-mx-1$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

A. 2017. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2018.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-m$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\le\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}},\ \forall x\in\mathbb{R}\ (1)$.

Xét $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ trên $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1;\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

$f'(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

Ta có: $m\le\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}},\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\le -1$.

Mặt khác $m\in[-2018;2018]\Rightarrow m\in[-2018;-1]$.

Vậy có 2018 số nguyên m thoả điều kiện.

Câu 22. **(Lê Quý Đôn - Quảng Trị- 2018)** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=2^{\frac{mx+1}{x+m}}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

A. $m\in(-1;1)$. **B.** $m\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **C.** $m\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]$. **D.** $m\in\left[-\dfrac{1}{2};1\right)$.

Lời giải

Hàm số $y=2^{\frac{mx+1}{x+m}}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ khi và chỉ khi hàm số $y=\dfrac{mx+1}{x+m}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Xét hàm số $y=\dfrac{mx+1}{x+m}$, ta có: $y'=\dfrac{m^2-1}{(x+m)^2}$.

Hàm số $y=\dfrac{mx+1}{x+m}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-1<0\\-m\le\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<m<1\\m\ge-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{2}\le m<1$.

Câu 23. **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+m}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$ và đồng biến trên khoảng $(4;6)$.

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=\dfrac{x^2-2x-2-m}{(x-1)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$ và đồng biến trên khoảng $(4;6)$ khi và chỉ khi

$\begin{cases}y'\le0,\forall x\in(1;3)\\y'\ge0,\forall x\in(4;6)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x-2-m\le0,\forall x\in(1;3)\\x^2-2x-2-m\ge0,\forall x\in(4;6)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge x^2-2x-2,\forall x\in(1;3)\\m\le x^2-2x-2,\forall x\in(4;6)\end{cases}$ (*)

Xét hàm số $g(x)=x^2-2x-2, g'(x)=2x-2$ ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau

x	$-\infty$		1		3		4		6		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0				$+$				
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3	$\nearrow$		$\nearrow$	18	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên của $g(x)$ ta có (*) $\Leftrightarrow 3\le m\le6$, và vì m là số nguyên nên chọn $m\in\{3;4;5;6\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 24. **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{1-\ln x}+1}{\sqrt{1-\ln x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-5;5]$ để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{e^3};1\right)$.

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

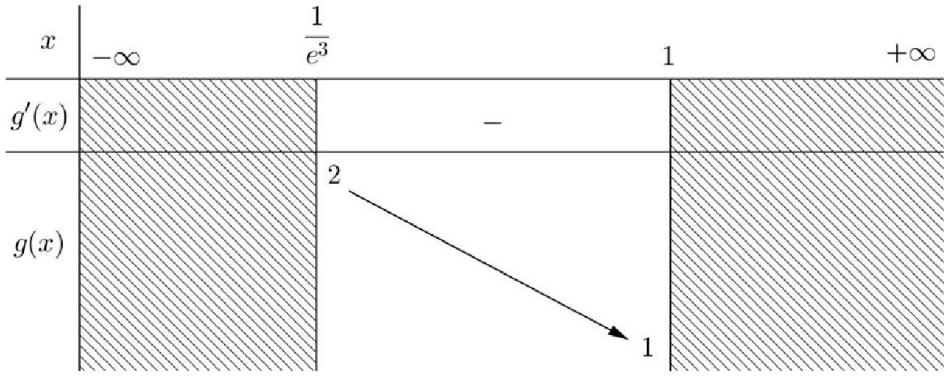
Chọn B

Ta có đạo hàm của $y=\dfrac{\sqrt{1-\ln x}+1}{\sqrt{1-\ln x}+m}$ là $y'=\dfrac{1-m}{2x\sqrt{1-\ln x}(\sqrt{1-\ln x}+m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{e^3};1\right)$ khi và chỉ khi $y'>0,\forall x\in\left(\dfrac{1}{e^3};1\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-m>0 \\ \sqrt{1-\ln x}+m\neq 0, \forall x\in\left(\frac{1}{e^3};1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ \sqrt{1-\ln x}+m\neq 0, \forall x\in\left(\frac{1}{e^3};1\right) \end{cases}$ (*)

Xét hàm số $g(x)=\sqrt{1-\ln x}, x\in\left(\frac{1}{e^3};1\right)$, ta có $g'(x)=\frac{-1}{2x\sqrt{1-\ln x}}<0, \forall x\in\left(\frac{1}{e^3};1\right)$ do đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau



Qua bảng biến thiên ta có (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ m\notin(-2;-1) \end{cases}$, kết hợp với $m\in[-5;5]$ ta có 6 giá trị nguyên của m là $m\in\{-5;-4;-3;-2;-1;0\}$.

Câu 25. **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=\frac{\ln x-6}{\ln x-2m}$ đồng biến trên khoảng $(1;e)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\ln x$ thì $t=\ln x$ đồng biến trên khoảng $(1;e)$ và $t\in(0;1)$

Ta được hàm số $f(t)=\frac{t-6}{t-2m}$. Điều kiện $t\neq 2m$ và $f'(t)=\frac{6-2m}{(t-2m)^2}$.

Hàm số $y=\frac{\ln x-6}{\ln x-2m}$ đồng biến trên khoảng $(1;e)$ khi và chỉ khi hàm số $f(t)=\frac{t-6}{t-2m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m\notin(0;1) \\ f'(t)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2m\geq 1 \\ 2m\leq 0 \end{array}\right. \\ 6-2m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m\geq \frac{1}{2} \\ m\leq 0 \end{array}\right. \\ m<3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}\leq m<3 \\ m\leq 0 \end{array}\right.$.

Vì m nguyên dương nên $m\in\{1;2\}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=\frac{\ln x-6}{\ln x-2m}$ đồng biến trên khoảng $(1;e)$.

Câu 26. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f(x)=m(2020+x-2\cos x)+\sin x-x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

Hàm số $f(x)=m(2020+x-2\cos x)+\sin x-x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$f'(x) \le 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m(2\sin x+1)+\cos x-1 \le 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2m\sin x+\cos x \le 1-m\ \ (1)\ ;\forall x \in \mathbb{R}$

Ta lại có:

$2m\sin x+\cos x \le \sqrt{(4m^2+1)(\sin^2 x+\cos^2 x)} = \sqrt{4m^2+1}$

$\Rightarrow 2m\sin x+\cos x \le \sqrt{4m^2+1}$. Dấu bằng xảy ra khi $2m\cos x=\sin x$

Do đó

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{4m^2+1} \le 1-m \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m \ge 0 \\ 4m^2+1 \le 1-2m+m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 1 \\ 3m^2+2m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-2}{3} \le m \le 0$

Câu 27. **(Chuyên Quang Trung - 2020)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\ln(x^2+4)+mx+12$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ **C.** $(-\infty;-\frac{1}{2}]$. **D.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

Lời giải

Chọn A

+ TXĐ: $\mathbb{R}$

+ Ta có $y' = \frac{2x}{x^2+4}+m$ .Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+4}+m \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m \ge \frac{-2x}{x^2+4}, \forall x \in \mathbb{R}$

Xét $f(x)=\frac{-2x}{x^2+4}$. Ta có: $f'(x)=\frac{2(x^2-4)}{(x^2+4)}=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0

Vậy giá trị m cần tìm là $m \ge \frac{1}{2}$

Câu 28. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=\left|x^3-mx^2+12x+2m\right|$ luôn đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 18. **B.** 19. **C.** 21. **D.** 20.

Lời giải

Chọn D

Xét $f(x)=x^3-mx^2+12x+2m$. Ta có $f'(x)=3x^2-2mx+12$ và $f(1)=13+m$.

Để hàm số $y=\left|x^3-mx^2+12x+2m\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì có hai trường hợp sau

Trường hợp 1: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(1;+\infty)$ và $f(1) \le 0$.

Điều này không xảy ra vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-mx^2+12x+2m\right)=+\infty$.

Trường hợp 2: Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ và $f(1)\ge 0$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-2mx+12\ge 0,\forall x>1\\13+m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le\dfrac{3}{2}x+\dfrac{6}{x},\forall x>1\\m\ge -13\end{cases}\quad(*).$$

Xét $g(x)=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{6}{x}$ trên khoảng $(1;+\infty)$: $g'(x)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{6}{x^2}$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{3}{2}-\dfrac{6}{x^2}=0\Rightarrow x=2$.

Bảng biến thiên:

x	1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\dfrac{15}{2}$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $m\le\dfrac{3}{2}x+\dfrac{6}{x},\forall x>1\Leftrightarrow m\le 6$.

Kết hợp $(*)$ suy ra $-13\le m\le 6$. Vì m nguyên nên $m\in\{-13;-12;-11;...;5;6\}$. Vậy có 20 giá trị nguyên của m.

Câu 29. **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-8;8)$ sao cho hàm số $y=\left|-2x^3+3mx-2\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 10. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 11.

Lời giải

Nguyễn Bảo Vương

Chọn B

$f(x)=-2x^3+3mx-2$

$f'(x)=-6x^2+3m$

Nếu $m\le 0$: $f'(x)\le 0,\forall x\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên $(1;+\infty)\Leftrightarrow f(1)\le 0\Leftrightarrow m\le\dfrac{4}{3}\Rightarrow m\le 0.$

Nếu $m>0$: $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{m}{2}}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{m}{2}}$		$\sqrt{\frac{m}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2m\sqrt{\frac{m}{2}}-2$	$\nearrow$	$2m\sqrt{\frac{m}{2}}-2$	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên $(1;+\infty) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{\dfrac{m}{2}}>1 \\ f\left(\sqrt{\dfrac{m}{2}}\right)=0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{\dfrac{m}{2}}=1 \\ f\left(\sqrt{\dfrac{m}{2}}\right)\le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{\dfrac{m}{2}}<1 \\ f(1)\le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{\dfrac{m}{2}}>1 \\ m=\sqrt[3]{2} \quad (L) \end{cases} \\ \begin{cases} m=2 \quad (L) \\ 2m\sqrt{\dfrac{m}{2}}-2\le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m<2 \\ m\le \dfrac{4}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow 0<m\le \frac{4}{3}.$

$m\in\mathbb{Z},\ m\in(-8;8) \Rightarrow m\in\{-7;-6;...;-1;0;1\}.$

Câu 30. **(Sở Ninh Bình)** Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$. Tổng giá trị các phần tử của T bằng

A. 9. **B.** 45. **C.** 55. **D.** 36.

Lời giải

Chọn B

+ Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

+ Ta có $y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$

Theo đề $m>0$ nên $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $x=-\sqrt{m}, x=0, x=\sqrt{m}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{m}$		0		$\sqrt{m}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$ thì $y'\ge 0, \forall x\in(3;+\infty) \Leftrightarrow \sqrt{m}\le 3 \Leftrightarrow m\le 9$

Vì m nguyên dương nên $m=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$ (là cấp số cộng)

Vậy Tổng giá trị các phần tử của T bằng $\frac{9}{2}(1+9)=45$.

Câu 31. **(Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{m-\sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$.

A. $m\ge 1$. **B.** $m\le 2$. **C.** $m\le\dfrac{5}{4}$. **D.** $m\le 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=\dfrac{-\cos^2 x+2m\sin x-2\sin^2 x}{\cos^3 x}=\dfrac{-1+2m\sin x-\sin^2 x}{\cos^3 x}$

Để hàm số nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$ thì

$y' \le 0, \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow -\sin^2 x + 2m\sin x - 1 \le 0, \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{6}\right)$, vì $\cos^3 x > 0, \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{6}\right)$ (1)

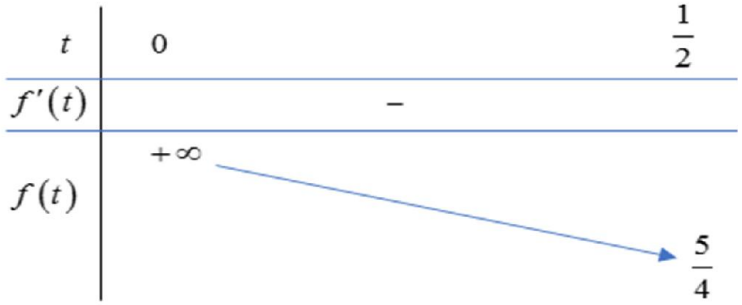
Đặt $\sin x = t, t \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow -t^2 + 2mt - 1 \le 0, \forall t \in \left(0;\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow m \le \frac{t^2+1}{2t}, \forall t \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$ (2)

Ta xét hàm $f(t) = \frac{t^2+1}{2t}, \forall t \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$

Ta có $f'(t) = \frac{2\left(t^2-1\right)}{4t^2} < 0, \forall t \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên suy ra $(2) \Leftrightarrow m \le \frac{5}{4}$.

Câu 32. **(Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 + 6x + 4, \forall x \in \mathbb{R}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $(-2020;2020)$ của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - (2m+4)x - 5$ nghịch biến trên $(0;2)$?

A. 2008. **B.** 2007. **C.** 2018. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = f'(x) - (2m+4)$.

Hàm số $g(x) = f(x) - (2m+4)x - 5$ nghịch biến trên $(0;2)$ khi $g'(x) \le 0, \forall x \in (0;2)$

$\Leftrightarrow f'(x) - (2m+4) \le 0, \forall x \in (0;2) \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 4 \le 2m + 4, \forall x \in (0;2)$.

Xét hàm số $h(x) = 3x^2 + 6x + 4 \Rightarrow h'(x) = 6x + 6$. Ta có BBT:

x	0		2
$h'(x)$		+	
$h(x)$	4	↗	28

Vậy $2m+4\ge 28\Leftrightarrow m\ge 12$. Vì m nguyên thuộc $(-2020;2020)$ nên có 2008 giá trị thỏa mãn.

Câu 33. **(Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ sao cho hàm số $y=\frac{x^4}{4}-\frac{mx^3}{3}-\frac{x^2}{2}+mx+2020$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 12. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $y'=x^3-mx^2-x+m$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi $y'\le 0,\forall x\in(0;1)$ hay $x^3-x\le m(x^2-1),\forall x\in(0;1)$.

Vì $\forall x\in(0;1): x^2-1<0$ nên $x^3-x\le m(x^2-1),\forall x\in(0;1)\Leftrightarrow m\le x,\forall x\in(0;1)\Leftrightarrow m\le 0$.

Mặt khác $m\in[-10;10]\cap\mathbb{Z}$ nên có $0-(-10)=11$ giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 34. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f(x)=m(2020+x-2\cos x)+\sin x-x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=\sin x-2m\cos x+(m-1)x+2020m$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Cần tìm m nguyên để $f'(x)=\cos x+2m\sin x+m-1\le 0,\forall x$

$\Leftrightarrow \max\limits_{x\in\mathbb{R}}[\cos x+2m\sin x+m-1]\le 0\Leftrightarrow \sqrt{1+4m^2}+m-1\le 0\Leftrightarrow \sqrt{1+4m^2}\le 1-m$

$\Leftrightarrow\begin{cases}1-m\ge 0\\ 1+4m^2\le 1-2m+m^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 1\\ -\frac{2}{3}\le m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\le m\le 0$. Kết hợp m nguyên có $m=0$.

Câu 35. **(Chuyên Quang Trung - Bình Phước - Lần 2 - 2020)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số thực m để hàm số $y=\ln(x^2+4)+mx+12$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$. **D.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\frac{2x}{x^2+4}+m,\forall x\in\mathbb{R}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\ge 0\forall x\in\mathbb{R}$ (vì $y'=0$ chỉ có hữu hạn nghiệm)

$\Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+4}+m\ge 0\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\ge -\frac{2x}{x^2+4}\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có $-\frac{1}{2}-\frac{2x}{x^2+4}=-\frac{(x+2)^2}{2(x^2+4)}\le 0\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -\frac{2x}{x^2+4}\le\frac{1}{2}\forall x\in\mathbb{R}$ trên $\mathbb{R}$.

Do đó, $m\ge -\frac{2x}{x^2+4}\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\ge\frac{1}{2}$.

Câu 36. **(Chuyên Thái Bình - Lần 3 - 2020)** Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=2^{x^3-x^2+mx+1}$ đồng biến trên $(1;2)$.

A. $m>-8$. **B.** $m\ge -1$. **C.** $m\le -8$. **D.** $m<-1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=(3x^2-2x+m).2^{x^3-x^2+mx+1}.\ln 2$

Hàm số đồng biến trên $(1;2)\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in(1;2)$

$\Leftrightarrow (3x^2-2x+m).2^{x^3-x^2+mx+1}.\ln 2\ge 0,\ \forall x\in(1;2)$

$\Leftrightarrow 3x^2-2x+m\ge 0,\ \forall x\in(1;2)$

$\Leftrightarrow m\ge -3x^2+2x,\ \forall x\in(1;2)$

$\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{(1;2)}(-3x^2+2x)$.

Xét hàm số $f(x)=-3x^2+2x$, với $x\in(1;2)$.

Ta có: $f'(x)=-6x+2$.

Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow -6x+2=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	1		2
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	-1	↘	-8

Vậy $m\ge -1$ thỏa yêu cầu bài toán.

---------- **HẾT** ----------

Chuyên đề 1 TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH 9 – 10 ĐIỂM

Dạng 1. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số g(x)=f[u(x)] khi biết đồ thị hàm số f'(x)

Cách 1:

Bước 1: Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$, $g'(x)=u'(x).f'\left[u(x)\right]$.

Bước 2: Sử dụng đồ thị của $f'(x)$, lập bảng xét dấu của $g'(x)$.

Bước 3: Dựa vào bảng dấu kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

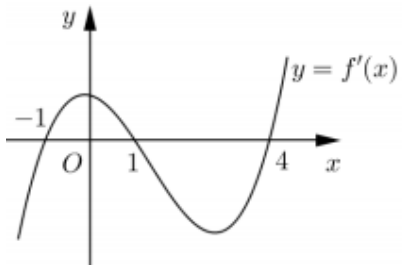
Cách 2:

Bước 1: Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$, $g'(x)=u'(x).f'\left[u(x)\right]$.

Bước 2: Hàm số $g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x)\ge 0$; (Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x)\le 0$) (*)

Bước 3: Giải bất phương trình $(*)$ (dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$) từ đó kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y=f(2-x)$ đồng biến trên khoảng



A. $(2;+\infty)$ **B.** $(-2;1)$ **C.** $(-\infty;-2)$ **D.** $(1;3)$

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Ta thấy $f'(x)<0$ với $\left[\begin{array}{l} x\in(1;4) \\ x<-1 \end{array}\right.$ nên $f(x)$ nghịch biến trên $(1;4)$ và $(-\infty;-1)$ suy ra $g(x)=f(-x)$ đồng biến trên $(-4;-1)$ và $(1;+\infty)$. Khi đó $f(2-x)$ đồng biến biến trên khoảng $(-2;1)$ và $(3;+\infty)$

Cách 2:

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có $f'(x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x<-1 \\ 1<x<4 \end{array}\right.$.

Ta có $\left(f(2-x)\right)'=(2-x)'.f'(2-x)=-f'(2-x)$.

Để hàm số $y=f(2-x)$ đồng biến thì $\left(f(2-x)\right)'>0\Leftrightarrow f'(2-x)<0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2-x<-1 \\ 1<2-x<4 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x>3 \\ -2<x<1 \end{array}\right.$.

Câu 2. **(Mã đề 104 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(5-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(3;4)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(4;5)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=f'(5-2x)=-2f'(5-2x)$.

$$y'=0\Leftrightarrow -2f'(5-2x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5-2x=-3\\5-2x=-1\\5-2x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\x=3\\x=2\end{array}\right..$$

$$f'(5-2x)<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5-2x<-3\\-1<5-2x<1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>4\\2<x<3\end{array}\right.;$$

$$f'(5-2x)>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5-2x>1\\-3<5-2x<-1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<2\\3<x<4\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên hàm số $y=f(5-2x)$ đồng biến trên khoảng $(4;5)$.

Câu 3. **(Mã 103 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(3-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(3;4)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=-2.f'(3-2x)\geq 0\Leftrightarrow f'(3-2x)\leq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3-2x\leq -3\\-1\leq 3-2x\leq 1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\geq 3\\1\leq x\leq 2.\end{array}\right.$$

Vậy chọn **A.**

Câu 4. **(Mã 102 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(5-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(3;5)$. **B.** $(5;+\infty)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ suy ra hàm số $y=f(5-2x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Hàm số $y=f(5-2x)$ có $y'=-2.f'(5-2x), \forall x\in\mathbb{R}$.

$$y'\le 0\Leftrightarrow f'(5-2x)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-3\le 5-2x\le -1\\ 5-2x\ge 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3\le x\le 4\\ x\le 2\end{array}\right.$$

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2);(3;4)$. Do đó B phương án chọn.

Câu 5. **(Mã đề 101 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;1)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$y'=-2.f'(3-2x)$.

Hàm số nghịch biến khi $y'\le 0\Leftrightarrow -2.f'(3-2x)\le 0\Leftrightarrow f'(3-2x)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-3\le 3-2x\le -1\\ 3-2x\ge 1\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\le x\le 3\\ x\le 1\end{array}\right.$$

Vậy chọn đáp án **B.**

Câu 6. **(Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Cho hàm số $f'(x)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f(x^2+2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;1)$. **B.** $(-4;-3)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

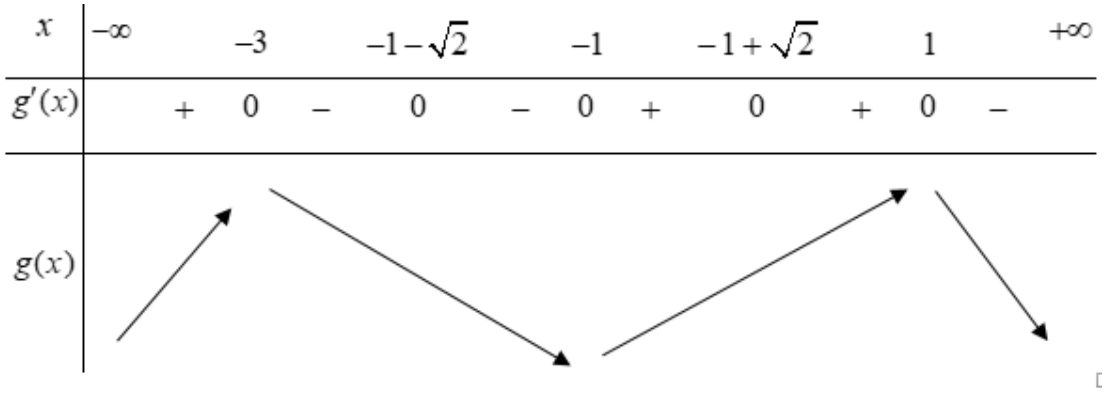
Lời giải

Ta có: Đặt: $y=g(x)=f(x^2+2x)$; $g'(x)=\left[f(x^2+2x)\right]'=(2x+2).f'(x^2+2x)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow(2x+2).f'(x^2+2x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+2=0\\ f'(x^2+2x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x^2+2x=-2(VN)\\ x^2+2x=1\\ x^2+2x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-1-\sqrt{2}\\ x=-1+\sqrt{2}\\ x=1\\ x=-3\end{array}\right.$$

(Trong đó: $x=-1-\sqrt{2};x=-1+\sqrt{2}$ là các nghiệm bội chẵn của PT: $x^2+2x=1$)

+ Ta có bảng biến thiên

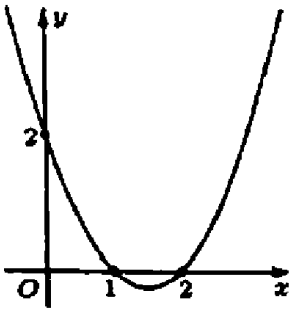


Dựa vào bảng biến thiên, suy ra hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;-1)$.

Chú ý: Cách xét dấu $g'(x)$:

Chọn giá trị $x=0\in\left(-1;-1+\sqrt{2}\right)\Rightarrow x^2+2x=0\Rightarrow g'(0)=f'(0)>0$ (dựa theo bảng xét dấu của hàm $f'(x)$). Suy ra $g'(x)>0\,\forall x\in\left(-1;-1+\sqrt{2}\right)$, sử dụng quy tắc xét dấu đa thức " lẻ đổi, chẵn không" suy ra dấu của $g'(x)$ trên các khoảng còn lại

Câu 7. **(Chuyên Thái Nguyên -2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$. Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x-x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?



A. $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Phương pháp

Hàm số $y=g\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(a;b\right)\Leftrightarrow g'\left(x\right)\le 0\ \forall x\in\left(a;b\right)$ và bằng 0 tại hữu hạn điểm.

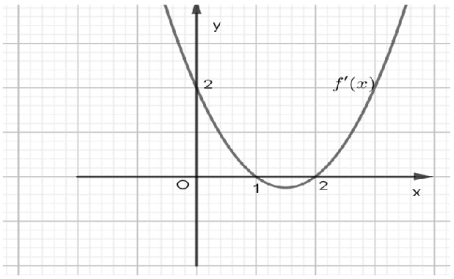
Cách giải

Ta có: $g'\left(x\right)=\left(1-2x\right)f'\left(x-x^2\right)$.

Hàm số $y=g\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(a;b\right)\Leftrightarrow g'\left(x\right)\le 0\ \forall x\in\left(a;b\right)$ và bằng 0 tại hữu hạn điểm.

Ta có $g'\left(-1\right)=3f'\left(-2\right)>0\Rightarrow$ Loại đáp án A, B và D

Câu 8. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $y=f\left(2-x^2\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

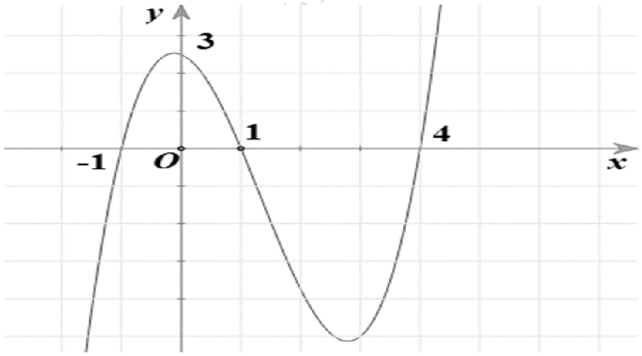
Chọn B

Hàm số $y=f\left(2-x^2\right)$ có $y'=-2x.f'\left(2-x^2\right)$

$$y'=-2x.f'\left(2-x^2\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>0\\1<2-x^2<2\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x<0\\\left[\begin{array}{l}2-x^2<1\\2-x^2>2\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>0\\-1<x<1\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x<0\\\left[\begin{array}{l}x<-1\\x>1\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<1\\x<-1\end{array}\right.$$

Do đó hàm số đồng biến trên $(0;1)$.

Câu 9. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Cho hàm số $f(x)$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y=f\left(|3-x|\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(4;6)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

Ta có:

$$y=f\left(|3-x|\right)\Rightarrow f'\left(|3-x|\right)=-\frac{(3-x)}{|3-x|}f'\left(|3-x|\right)(x\neq 3)$$

$$f'\left(|3-x|\right)=0\Leftrightarrow-\frac{(3-x)}{|3-x|}f'\left(|3-x|\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(|3-x|\right)=0\\3-x=0\end{array}\right.$$

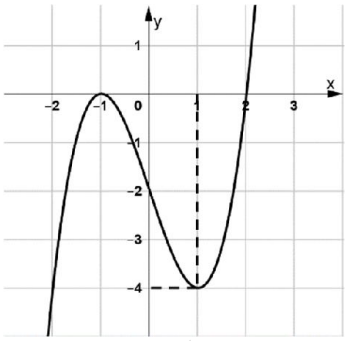
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |3-x|=-1(L) \\ |3-x|=1(N) \\ |3-x|=4(N) \\ x=3(L) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=7 \\ x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu của $f'(|3-x|)$:

x	$-\infty$		-1		2		3		4		7		$+\infty$
$f'\|3-x\|$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số $y=f(|3-x|)$ đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

Câu 10. **(THPT Minh Châu Hưng Yên 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x^2-2)$. Mệnhvđề nào sai?



A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ **B.** Hàm số $g(x)$đồng biến trên $(2;+\infty)$

C. Hàm số $g(x)$nghịch biến trên $(-1;0)$ **D.** Hàm số $g(x)$nghịch biến trên $(0;2)$

Nguyễn Bảo Vương

Lờigiải

ChọnA

Ta có $g'(x)=2x.f'(x^2-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x^2-2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-2=-1 \\ x^2-2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$

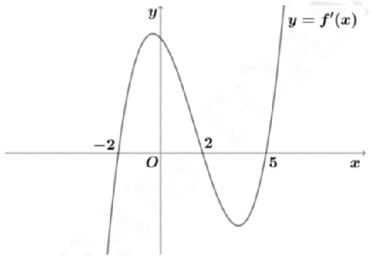
Từ đồ thị $f'(x)$ ta có $f'(x^2-2)>0 \Leftrightarrow x^2-2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-2 \end{array}\right.$

BBT

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗					

Từ BBT ta thấy đáp án **C** sai

Câu 11. **(THPT Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên.



Hỏi hàm số $g(x)=f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-1;+\infty)$ **B.** $(-\infty;-1)$ **C.** $(1;3)$ **D.** $(0;2)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=2\\x=5\end{array}\right.$

Khi đó $g'(x)=-2f'(3-2x)$

Với $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(3-2x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-2x=-2\\3-2x=2\\3-2x=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{5}{2}\\x=\frac{1}{2}\\x=-1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g(-1)$	↗	$g\left(\frac{1}{2}\right)$	↘	$g\left(\frac{5}{2}\right)$	↗	$+\infty$

Câu 12. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(x^2-2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Xét hàm số $g(x)=f(x^2-2)$. Ta có: $g'(x)=2x.f'(x^2-2)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'(x^2-2)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-2=-1\\x^2-2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=1\\x^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1\\x=2\\x=-2\end{array}\right..$$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x^2-2)$		$+$	0	$-$	0	$-$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $g'(x)$ ta thấy hàm số $y=f(x^2-2)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

Câu 13. **(Chuyên KHTN - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau.

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(2-3x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(2;3)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x)=f(2-3x)\Rightarrow g'(x)=-3.f'(2-3x)$

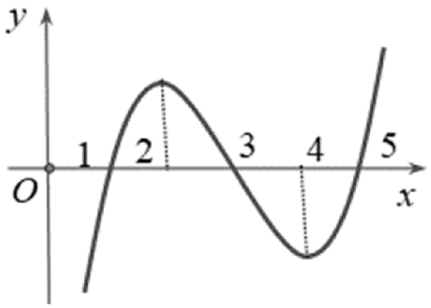
Ta có $g'(x)\ge 0\Leftrightarrow f'(2-3x)\le 0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-3x\le -3\\0\le 2-3x\le 1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge\dfrac{5}{3}\\\dfrac{1}{3}\le x\le\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$$

Suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ và $\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$, do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

Câu 14. **(Chuyên Bến Tre - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ biết hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x)=f(x+1)$. Kết luận nào sau đây đúng?



A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;4)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(4;6)$.

Lời giải

Chọn B

$g(x)=f(x+1)$.

Ta có: $g'(x)=f'(x+1)$

Hàm số $g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x)>0\Leftrightarrow f'(x+1)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1>5\\1<x+1<3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>4\\0<x<2\end{array}\right.$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x)<0\Leftrightarrow f'(x+1)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3<x+1<5\\x+1<1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2<x<4\\x<0\end{array}\right.$.

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$; $(4;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(2;4)$; $(-\infty;0)$.

Câu 15. **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x)=f(3-2^x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-5)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(2;7)$.

Lời giải

Chọn C

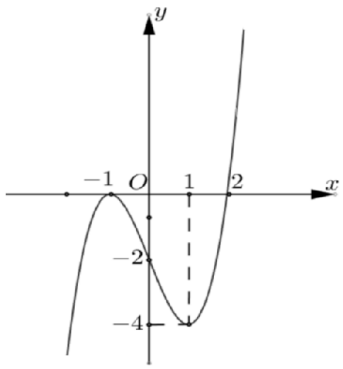
Ta có $g'(x)=-2^x\ln 2.f'(3-2^x)$.

Để $g(x)=f(3-2^x)$ đồng biến thì

$g'(x)=-2^x\ln 2.f'(3-2^x)\geq 0\Leftrightarrow f'(3-2^x)\leq 0\Leftrightarrow -5\leq 3-2^x\leq 2\Leftrightarrow 0\leq x\leq 3$.

Vậy hàm số đồng biến trên $(1;2)$.

Câu 16. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x)=f(x^2-2)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?



A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$. **B.** Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$. **D.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=\left(x^2-2\right)'.f'\left(x^2-2\right)=2x.f'\left(x^2-2\right)$.

Hàm số nghịch biến khi $g'(x)\le 0 \Leftrightarrow x.f'\left(x^2-2\right)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 0\\ f'\left(x^2-2\right)\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0\\ f'\left(x^2-2\right)\le 0\end{cases}\end{array}\right.$

Từ đồ thị hình của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ, ta thấy

$$f'(x)\le 0 \Leftrightarrow x\le 2 \text{ và } f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 2.$$

+ Với $\begin{cases}x\le 0\\ f'\left(x^2-2\right)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\ x^2-2\ge 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\ x^2\ge 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\ \left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ x\le -2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x\le -2.$

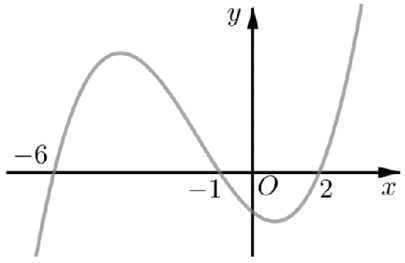
+ Với $\begin{cases}x\ge 0\\ f'\left(x^2-2\right)\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ x^2-2\le 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ x^2\le 4\end{cases} \Leftrightarrow 0\le x\le 2.$

Như vậy hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-2)$, $(0;2)$; suy ra hàm số đồng biến trên $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.

Nguyễn Bảo Vương

Do $(-1;0)\subset(-2;0)$ nên hàm số đồng biến trên $(-1;0)$. Vậy C sai.

Câu 17. **(Đại Học Hà Tĩnh - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $y=f\left(3-x^2\right)$ đồng biến trên khoảng

A. $(0;1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Đặt $y=g(x)=f\left(3-x^2\right)$.

Ta có: $g'(x)=-2x.f'\left(3-x^2\right)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow -2x.f'\left(3-x^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'\left(3-x^2\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 3-x^2=-6 \\ 3-x^2=-1 \\ 3-x^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 3 \\ x=\pm 2 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		1		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra hàm số $y=f\left(3-x^2\right)$ đồng biến trên mỗi khoảng: $(-3;-2),(-1;0),(1;2),(3;+\infty)$.

Vậy hàm số $y=f\left(3-x^2\right)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Cách 2:

Dựa vào đồ thị của $y=f'(x)$ ta chọn $y=f'(x)=(x+6)(x+1)(x-2)$.

Đặt $y=g(x)=f\left(3-x^2\right)$.

Ta có: $g'(x)=-2x.f'\left(3-x^2\right)=-2x\left(9-x^2\right)\left(4-x^2\right)\left(1-x^2\right)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 3 \\ x=\pm 2 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$$

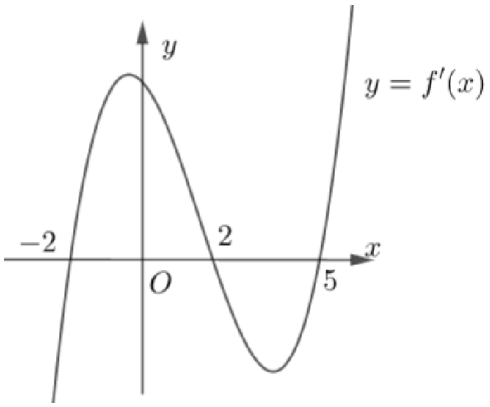
Bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		1		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra hàm số $y=f\left(3-x^2\right)$ đồng biến trên mỗi khoảng: $(-3;-2),(-1;0),(1;2),(3;+\infty)$.

Vậy hàm số $y=f\left(3-x^2\right)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Câu 18. **(Sở Ninh Bình)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y=f\left(x^2+2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(2;3)$. **B.** $(-3;-2)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x)=f\left(x^2+2\right)$, hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

$g'(x)=2xf'\left(x^2+2\right)$, kết hợp với đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta được:

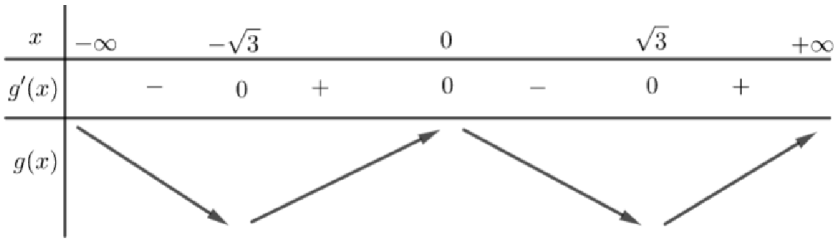
$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(x^2+2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2+2=-2\\x^2+2=2\\x^2+2=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt{3}\\x=-\sqrt{3}\end{array}\right..$$

Từ đồ thị đã cho ta có $f'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<x<2\\x>5\end{array}\right.$

Suy ra $f'\left(x^2+2\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<x^2+2<2\\x^2+2>5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-4<x^2<0\\x^2>3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>\sqrt{3}\\x<-\sqrt{3}\end{array}\right.$.

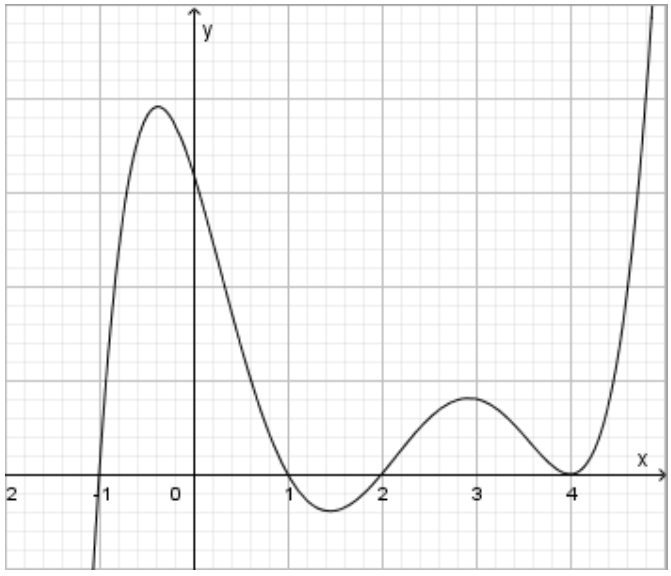
Và lập luận tương tự $f'\left(x^2+2\right)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2<x^2+2<5\\x^2+2<-2\end{array}\right.\Leftrightarrow 0<x^2<3\Leftrightarrow-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$.

Bảng biến thiên (Dấu của $g'(x)$ phụ thuộc vào dấu của $2x$ và $f'\left(x^2+2\right)$ trên từng khoảng)



Dựa vào bảng biến thiên hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$ và $\left(0;\sqrt{3}\right)$ chọn đáp án.

Câu 19. **(Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(2019-2020x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



A. $(-1;0)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=(2019-2020x)'\,f'(2019-2020x)=-2020f'(2019-2020x)$,

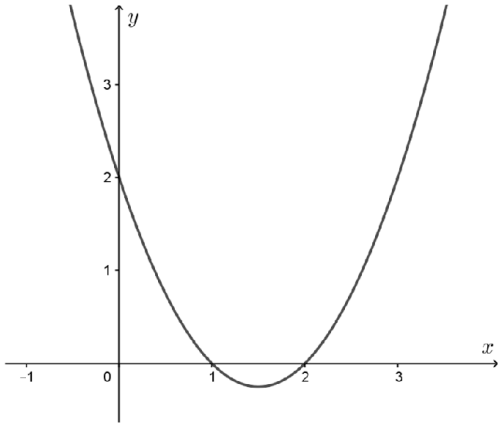
$$f'(2019-2020x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2019-2020x=-1\\2019-2020x=1\\2019-2020x=2\\2019-2020x=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{1009}{1010}\\x=\dfrac{2017}{2020}\\x=\dfrac{403}{404}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{403}{404}$		$\frac{2017}{2020}$		$\frac{1009}{1010}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗			

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $g(x)$ đồng biến trên từng khoảng $\left(\dfrac{2017}{2020};\dfrac{1009}{1010}\right)$, $(1;+\infty)$.

Câu 20. **(Trường VINSCHOOL - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$. Biết đồ thị hàm số $y'=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Hàm số $g(x)=f\left(2x-3x^2\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)$. **D.** $\left(-2;\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1. Ta có $g'(x)=(2-6x).f'\left(2x-3x^2\right)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow (2-6x).f'\left(2x-3x^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2-6x=0\\2x-3x^2=1\\2x-3x^2=2\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

Bảng xét dấu của $g'(x)$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$2-6x$		$+$	0	$-$	
$f'(2x-3x^2)$		$+$	$\|$	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

Từ bảng trên ta có hàm số $g(x)=f(2x-3x^2)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$

Cách 2: $g'(x)=(2-6x).f'(2x-3x^2)$

Để hàm số $g(x)=f(2x-3x^2)$ đồng biến thì

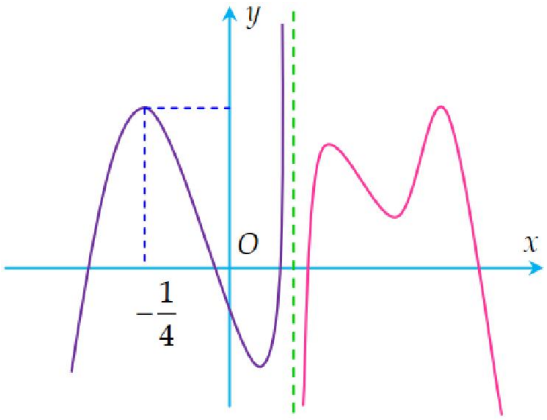
$$g'(x)\ge 0\Leftrightarrow(2-6x).f'(2x-3x^2)\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}2-6x\ge 0\\ f'(2x-3x^2)\ge 0\end{cases}\cup\begin{cases}2-6x\le 0\\ f'(2x-3x^2)\le 0\end{cases}$$

Trường hợp 1. $\begin{cases}2-6x\ge 0\\ f'(2x-3x^2)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\frac{1}{3}\\ \left[\begin{array}{l}2x-3x^2\le 1\\ 2x-3x^2\ge 2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x\le\frac{1}{3}$

Trường hợp 2. $\begin{cases}2-6x\le 0\\ f'(2x-3x^2)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{1}{3}\\ 1\le 2x-3x^2\le 2\end{cases}$ hệ vô nghiệm

Vậy hàm số $g(x)=f(2x-3x^2)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$

Câu 21. ***1:*** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2+x)$?



A. 10. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 13.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=(2x+1)f'(x^2+x)$; $x^2+x=m$ có nghiệm khi và chỉ khi $m\ge -\frac{1}{4}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm $f'(x)$ cắt trục hoành tại 5 điểm trong đó 1 điểm có hoành độ nhỏ hơn $-\frac{1}{4}$ và có một tiệm cận.

Khi đó ứng với mỗi giao điểm có hoành độ lớn hơn $-\frac{1}{4}$ và 1 điểm không xác định thì $y'=0$ có hai nghiệm. Từ đây dễ dàng suy ra hàm $y=f(x^2+x)$ có 11 cực trị.

Dạng 2. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số g(x)=f[u(x)]+v(x) khi biết đồ thị, bảng biến thiên của hàm số f'(x)

Cách 1:

Bước 1: Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$, $g'(x)=u'(x).f'\left[u(x)\right]+v'(x)$.

Bước 2: Sử dụng đồ thị của $f'(x)$, lập bảng xét dấu của $g'(x)$.

Bước 3: Dựa vào bảng dấu kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Cách 2:

Bước 1: Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$, $g'(x)=u'(x).f'\left[u(x)\right]+v'(x)$.

Bước 2: Hàm số $g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x)\ge 0$; (Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x)\le 0$) (*)

Bước 3: Giải bất phương trình $(*)$ (dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$) từ đó kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Cách 3: (Trắc nghiệm)

Bước 1: Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$, $g'(x)=u'(x).f'\left[u(x)\right]+v'(x)$.

Bước 3: Hàm số $g(x)$ đồng biến trên K $\Leftrightarrow g'(x)\ge 0,\forall x\in K$; (Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên K $\Leftrightarrow g'(x)\le 0,\forall x\in K$) (*)

Bước 3: Lần lượt chọn thay giá trị từ các phương án vào $g'(x)$ để loại các phương án **sai**.

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=3f(x+2)-x^3+3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=3\left[f'(x+2)-(x^2-3)\right]$

Với $x\in(-1;0)\Rightarrow x+2\in(1;2)\Rightarrow f'(x+2)>0$, lại có $x^2-3<0\Rightarrow y'>0;\forall x\in(-1;0)$

Vậy hàm số $y=3f(x+2)-x^3+3x$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Chú ý:

+) Ta xét $x\in(1;2)\subset(1;+\infty)\Rightarrow x+2\in(3;4)\Rightarrow f'(x+2)<0;x^2-3>0$

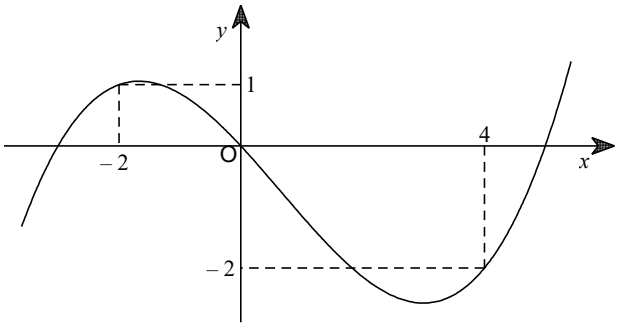
Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ nên loại hai phương án A, D.

+) Tương tự ta xét

$x\in(-\infty;-2)\Rightarrow x+2\in(-\infty;0)\Rightarrow f'(x+2)<0;x^2-3>0\Rightarrow y'<0;\forall x\in(-\infty;-2)$

Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ nên loại hai phương án B.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2020 – Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?



A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

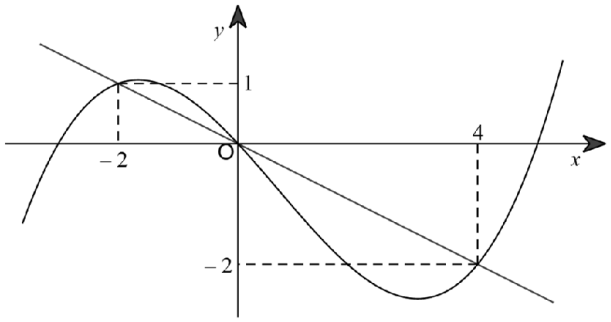
Chọn A

Ta có : $g(x)=f(1-2x)+x^2-x\Rightarrow g'(x)=-2f'(1-2x)+2x-1$

Đặt $t=1-2x\Rightarrow g'(x)=-2f'(t)-t$

$g'(x)=0\Rightarrow f'(t)=-\frac{t}{2}$

Vẽ đường thẳng $y=-\frac{x}{2}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ trên cùng một hệ trục



Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Rightarrow g'(x)\le 0\Rightarrow f'(t)\ge -\frac{t}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-2\le t\le 0\\ t\ge 4\end{array}\right.$

Như vậy $f'(1-2x)\ge\frac{1-2x}{-2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-2\le 1-2x\le 0\\ 4\le 1-2x\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}\\ x\le-\frac{3}{2}\end{array}\right.$.

Vậy hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ và $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$.

Mà $\left(1;\frac{3}{2}\right)\subset\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ nên hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;\frac{3}{2}\right)$

Câu 3. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f(x-1)+x^3-12x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(3;4)$.

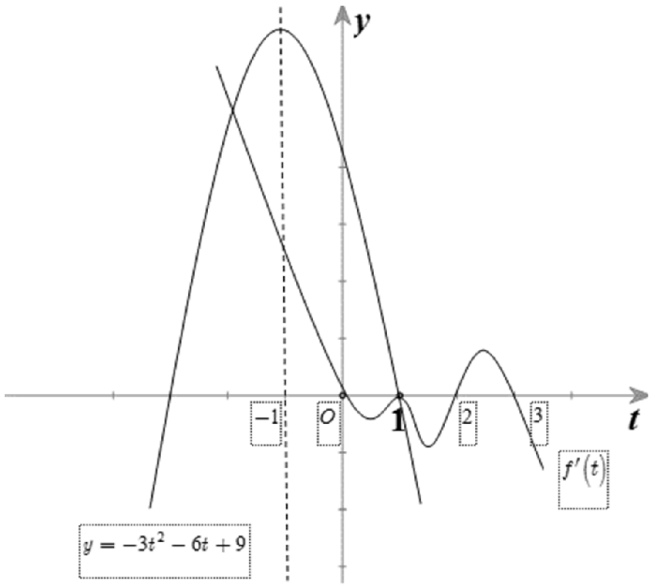
Lời giải

Ta có $y'=f'(x-1)+3x^2-12=f'(t)+3t^2+6t-9=f'(t)-(-3t^2-6t+9)$, với $t=x-1$

Nghiệm của phương trình $y'=0$ là hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số

$y=f'(t);y=-3t^2-6t+9$.

Vẽ đồ thị của các hàm số $y=f'(t);y=-3t^2-6t+9$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ sau:



Dựa vào đồ thị trên, ta có BXD của hàm số $y'=f'(t)-(-3t^2-6t+9)$ như sau: $(t_0<-1)$

t	$-\infty$		t_0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $t\in(t_0;1)$. Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $x\in(1;2)\subset(t_0+1;1)$.

Câu 4. **(Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=2f(1-x)+\sqrt{x^2+1}-x$ nghịch biến trên những khoảng nào dưới đây

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-3;-2)$.

Lời giải.

$y' = -2f'(1-x) + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$.

Có $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 < 0,\ \forall x \in (-2;0)$.

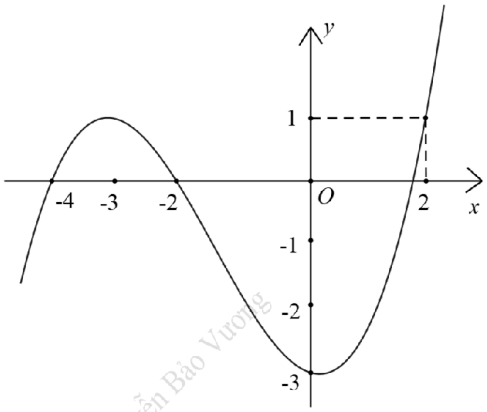
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(1-x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

$\Rightarrow -2f'(1-x) < 0,\ \forall x \in (-2;0)$

$\Rightarrow -2f'(1-x) + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 < 0,\ \forall x \in (-2;0)$.

Câu 5. **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



Hàm số $y = 3f(x) + x^3 - 6x^2 + 9x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải

Hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, (a \neq 0)$; $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$.

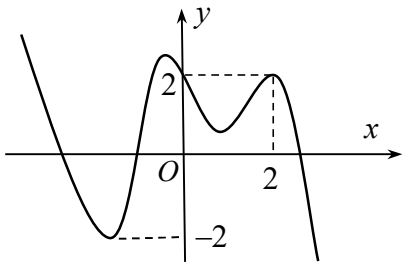
Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ đi qua các điểm $(-4;0), (-2;0), (0;-3), (2;1)$ nên ta có:

$$\begin{cases} -256a + 48b - 8c + d = 0 \\ -32a + 12b - 4c + d = 0 \\ d = -3 \\ 32a + 12b + 4c + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5}{96} \\ b = \dfrac{7}{24} \\ c = -\dfrac{7}{24} \\ d = -3 \end{cases}$$

Do đó hàm số $y = 3f(x) + x^3 - 6x^2 + 9x; y' = 3\left(f'(x) + x^2 - 4x + 3\right) = 3\left(\dfrac{5}{24}x^3 + \dfrac{15}{8}x^2 - \dfrac{55}{12}x\right)$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -11 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-11;0)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 6. **(Học Mãi 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số $y=f(x)-2x$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

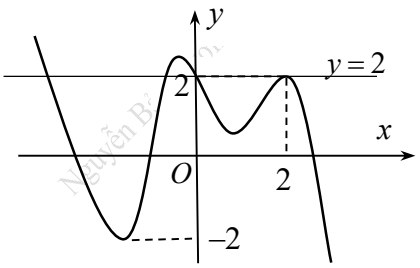
Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x)=f(x)-2x$.

$\Rightarrow g'(x)=f'(x)-2$.

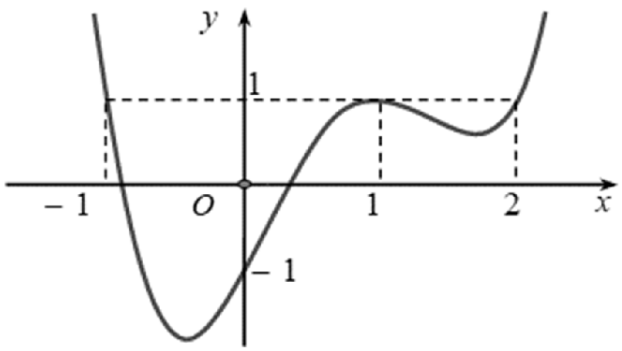
Vẽ đường thẳng $y=2$.



$\Rightarrow$ phương trình $g'(x)=0$ có 3 nghiệm bội lẻ.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=f(x)-2x$ có 3 điểm cực trị.

Câu 7. **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x-1)+\dfrac{2019-2018x}{2018}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(2\,;3)$. **B.** $(0\,;1)$. **C.** $(-1\,;0)$. **D.** $(1\,;2)$.

Lời giải

Ta có $g'(x)=f'(x-1)-1$.

$g'(x)\ge 0\Leftrightarrow f'(x-1)-1\ge 0\Leftrightarrow f'(x-1)\ge 1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1\le -1\\x-1\ge 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le 0\\x\ge 3\end{array}\right.$.

Từ đó suy ra hàm số $g(x)=f(x-1)+\dfrac{2019-2018x}{2018}$ đồng biến trên khoảng $(-1\ ;\ 0)$.

Câu 8. **(Sở Ninh Bình 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		-1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=-2f(x)+2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-4;2)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(2;4)$.

Lời giải

Xét $y=g(x)=-2f(x)+2019$.

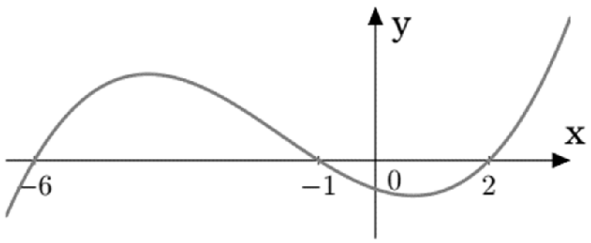
Ta có $g'(x)=\left(-2f(x)+2019\right)'=-2f'(x)$, $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-1\\x=2\\x=4\end{array}\right.$.

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$, ta có bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		-2		-1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$.

Câu 9. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(3-x^2)+2018$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-1;\ 0)$ **B.** $(2;\ 3)$ **C.** $(-2;\ -1)$ **D.** $(0;\ 1)$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left[f(3-x^2)+2018\right]'=-2x.f'(3-x^2)$.

$-2x.f'(3-x^2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\3-x^2=-6\\3-x^2=-1\\3-x^2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 3\\x=\pm 2\\x=\pm 1\end{array}\right.$.

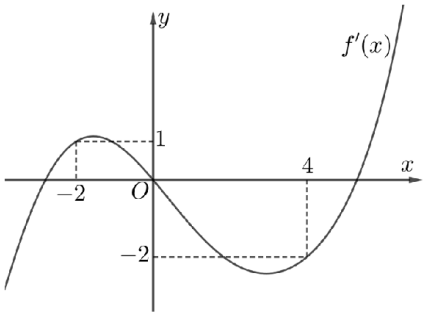
Bảng xét dấu của đạo hàm hàm số đã cho

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$f'(3-x^2)$	$-$	0 $+$	0 $-$	0 $+$	0 $+$	0 $-$	0 $+$	0 $-$	
$-2xf'(3-x^2)$	$-$	0 $+$	0 $-$	0 $+$	0 $-$	0 $+$	0 $-$	0 $+$	

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số đồng biến trên $(-1;0)$.

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$f'(3-x^2)$	$-$	0 $+$	0 $-$	0 $+$	0 $+$	0 $-$	0 $+$	0 $-$	
$-2xf'(3-x^2)$	$-$	0 $+$	0 $-$	0 $+$	0 $-$	0 $+$	0 $-$	0 $+$	

Câu 10. **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0)=0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình sau.



Hàm số $g(x)=\left|4f(x)+x^2\right|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(4;+\infty)$. **B.** $(0;4)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(-2;0)$.

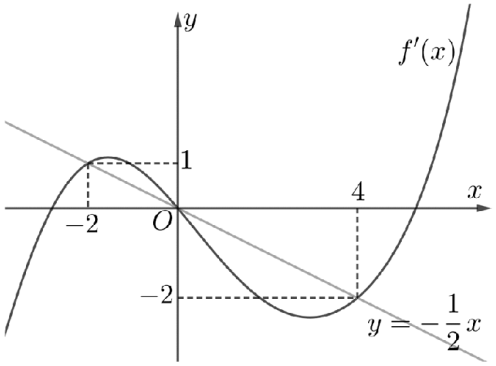
Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $h(x)=4f(x)+x^2$ trên $\mathbb{R}$.

Vì $f(x)$ là hàm số đa thức nên $h(x)$ cũng là hàm số đa thức và $h(0)=4f(0)=0$.

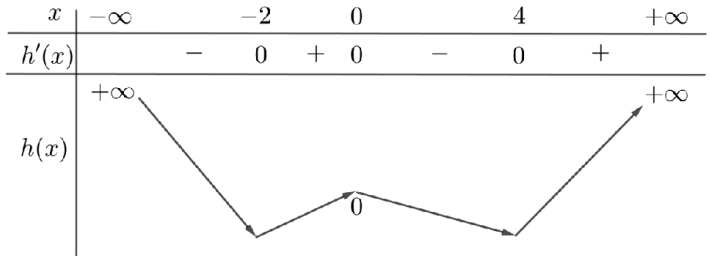
Ta có $h'(x)=4f'(x)+2x$. Do đó $h'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}x$.



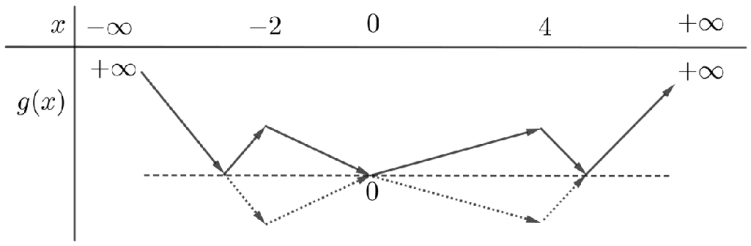
Dựa vào sự tương giao của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=-\frac{1}{2}x$, ta có

$h'(x)=0 \Leftrightarrow x \in \{-2;0;4\}$

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau:

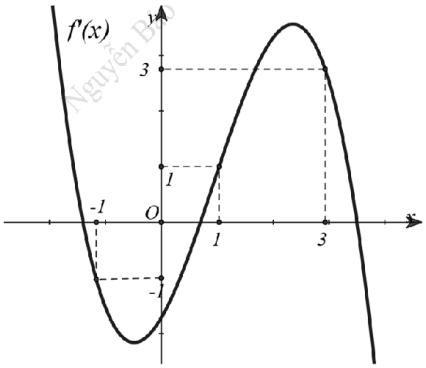


Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=|h(x)|$ như sau:



Dựa vào bảng biến thiên trên, ta thấy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$.

Câu 11. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho như hình vẽ



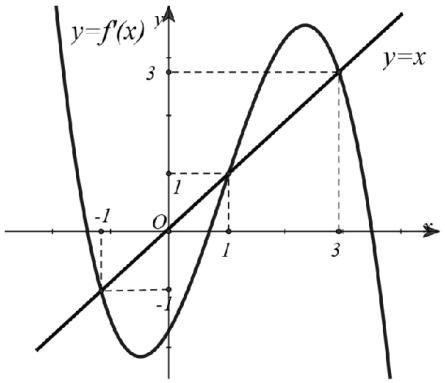
Hàm số $g(x)=2f\left(|x-1|\right)-x^2+2x+2020$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(0;1)$. **B.** $(-3;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có đường thẳng $y=x$ cắt đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tại các điểm $x=-1;\ x=1;\ x=3$ như hình vẽ sau:



Dựa vào đồ thị của hai hàm số trên ta có $f'(x)>x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\1<x<3\end{array}\right.$ và $f'(x)<x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x<1\\x>3\end{array}\right.$.

+ Trường hợp 1: $x-1<0\Leftrightarrow x<1$, khi đó ta có $g(x)=2f\left(1-x\right)-x^2+2x+2020$.

Ta có $g'(x)=-2f'\left(1-x\right)+2(1-x)$.

$g'(x)>0\Leftrightarrow-2f'\left(1-x\right)+2(1-x)>0\Leftrightarrow f'\left(1-x\right)<1-x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<1-x<1\\1-x>3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<2\\x<-2\end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện ta có $g'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<1\\x<-2\end{array}\right.$.

+ Trường hợp 2: $x-1>0\Leftrightarrow x>1$, khi đó ta có $g(x)=2f\left(x-1\right)-x^2+2x+2020$.

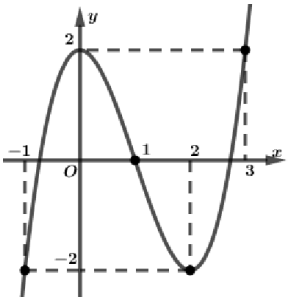
$g'(x)=2f'\left(x-1\right)-2(x-1)$

$g'(x)>0\Leftrightarrow2f'\left(x-1\right)-2(x-1)>0\Leftrightarrow f'\left(x-1\right)>x-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1<-1\\1<x-1<3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\2<x<4\end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện ta có $g'(x)>0\Leftrightarrow 2<x<4$.

Vậy hàm số $g(x)=2f\left(\left|x-1\right|\right)-x^2+2x+2020$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 12. **(Chuyên Lào Cai - 2020)** Cho hàm số $f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g\left(x\right)=f\left(3x+1\right)+9x^3+\frac{9}{2}x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(-1;1\right)$. **B.** $\left(-2;0\right)$. **C.** $\left(-\infty;0\right)$. **D.** $\left(1;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn D

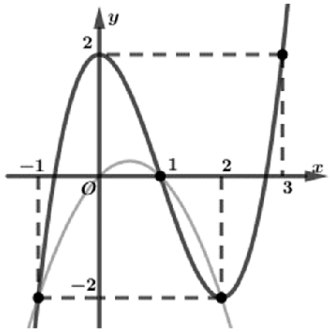
Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(3x+1\right)+9x^3+\frac{9}{2}x^2\Rightarrow g'\left(x\right)=3f'\left(3x+1\right)+27x^2+9x$

Hàm số đồng biến tương đương $g'\left(x\right)>0\Leftrightarrow3f'\left(3x+1\right)+27x^2+9x>0$

$\Leftrightarrow f'\left(3x+1\right)+3x\left(3x+1\right)>0\left(*\right)$.

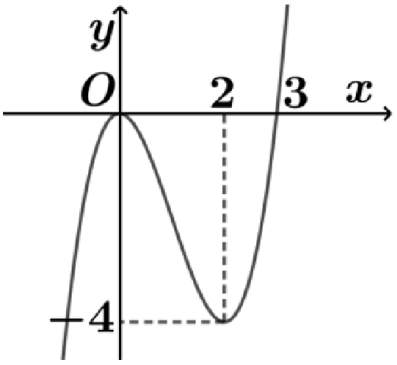
Đặt $t=3x+1$ $(*)\Leftrightarrow f'(t)+(t-1)t>0\Leftrightarrow f'(t)>-t^2+t$

Vẽ parabol $y=-x^2+x$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ trên cùng một hệ trục



Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(t)>-t^2+t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<t<1\\t>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<3x+1<1\\3x+1>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{-2}{3}<x<0\\x>\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$.

Câu 13. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $g(x)=f\left(\mathrm{e}^x-2\right)-2020$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $\left(\dfrac{3}{2};2\right)$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ suy ra $f'(x)\le 0\ \forall x<3$ và $f'(x)>0\ \forall x>3$.

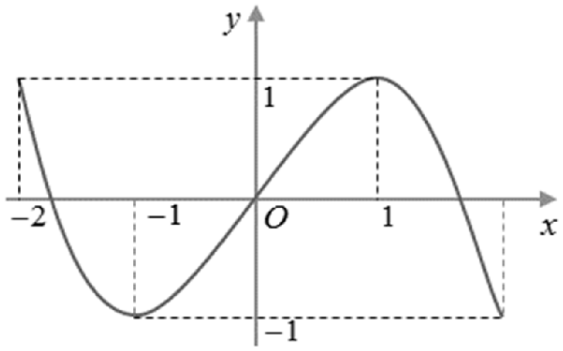
$g'(x)=\mathrm{e}^x f'\left(\mathrm{e}^x-2\right)$.

Hàm số $g(x)=f\left(\mathrm{e}^x-2\right)-2020$ nghịch biến nếu

$g'(x)<0\Leftrightarrow \mathrm{e}^x f'\left(\mathrm{e}^x-2\right)<0\Leftrightarrow f'\left(\mathrm{e}^x-2\right)<0\Leftrightarrow \mathrm{e}^x-2<3\Leftrightarrow \mathrm{e}^x<5\Leftrightarrow x<\ln 5$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$.

Câu 14. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $y=f\left(\cos x\right)+x^2-x$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(-2;1\right)$. **B.** $\left(0;1\right)$. **C.** $\left(1;2\right)$. **D.** $\left(-1;0\right)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt hàm $g\left(x\right)=f\left(\cos x\right)+x^2-x$.

Ta có: $g'\left(x\right)=-\sin x.f'\left(\cos x\right)+2x-1$.

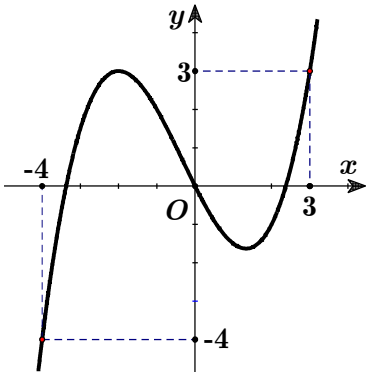
Vì $\cos x\in\left[-1;1\right]$ nên từ đồ thị $f'\left(x\right)$ ta suy ra $f'\left(\cos x\right)\in\left[-1;1\right]$.

Do đó $\left|-\sin x.f'\left(\cos x\right)\right|\le 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta suy ra $g'\left(x\right)=\sin x.f'\left(\cos x\right)+2x-1\ge -1+2x-1=2x-2$

$\Rightarrow g'\left(x\right)>0,\forall x>1$. Vậy hàm số đồng biến trên $\left(1;2\right)$.

Câu 15. **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho hàm số $f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=f\left(3x^2-1\right)-\frac{9}{2}x^4+3x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây.

A. $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. **C.** $\left(1;2\right)$. **D.** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $g'\left(x\right)=6xf'\left(3x^2-1\right)-18x^3+6x=6x\left[f'\left(3x^2-1\right)-3x^2+1\right]$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'\left(3x^2-1\right)=3x^2-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 3x^2-1=-4\,(VN) \\ 3x^2-1=0 \\ 3x^2-1=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ x=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đồng biến trong khoảng $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$.

Câu 16. **(Trần Phú - Quảng Ninh - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-4		-1		2		7		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f(2x+1)+\frac{2}{3}x^3-8x+5$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-1;7)$. **D.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=2f'(2x+1)+2x^2-8$.

Xét $y'\le 0 \Leftrightarrow 2f'(2x+1)+2x^2-8\le 0 \Leftrightarrow f'(2x+1)\le 4-x^2$

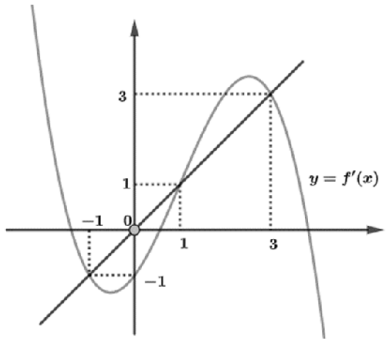
Đặt $t=2x+1$, ta có $f'(t)\le\dfrac{-t^2+2t+15}{4}$

Vì $\dfrac{-t^2+2t+15}{4}\ge 0, \forall t\in[-3;5]$. Mà $f'(t)\le 0,\ \forall t\in[-3;2]$.

Nên $f'(t)\le\dfrac{-t^2+2t+15}{4}\Rightarrow t\in[-3;2]$.

Suy ra $-3\le 2x+1\le 2\Leftrightarrow -2\le x\le\dfrac{1}{2}$. Vậy chọn phương án **D.**

Câu 17. **(Chuyên Thái Bình - Lần 3 - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=2f\left(|x-1|\right)-x^2+2x+2020$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(0;1)$. **B.** $(-3;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải

Chọn A

+Với $x>1$, ta có $g(x)=2f(x-1)-(x-1)^2+2021\Rightarrow g'(x)=2f'(x-1)-2(x-1)$.

Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow 2f'(x-1)-2(x-1)>0\Leftrightarrow f'(x-1)>x-1 \quad (*)$.

Đặt $t=x-1$, khi đó $(*)\Leftrightarrow f'(t)>t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<t<3\\t<-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}2<x<4\\x<0 \quad (loai)\end{array}\right.$.

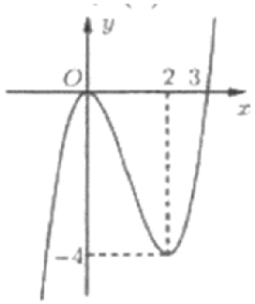
+Với $x<1$, ta có $g(x)=2f(1-x)-(1-x)^2+2021\Rightarrow g'(x)=-2f'(1-x)+2(1-x)$

Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow -2f'(1-x)+2(1-x)>0\Leftrightarrow f'(1-x)<1-x \quad (**)$.

Đặt $t=1-x$, khi đó $(**)\Leftrightarrow f'(t)<t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<t<1\\t>3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<2\\x<-2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<1\\x<-2\end{array}\right.$.

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2),(0;1),(2;4)$.

Câu 18. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $g(x)=f\left(1+e^x\right)+2020$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;+\infty)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $(-1;1)$.

Lời giải

Chọn C

$g'(x)=e^x f'\left(1+e^x\right)$

Do $e^x>0,\forall x$ nên $g'(x)\le 0\Leftrightarrow f'\left(1+e^x\right)\le 0\Leftrightarrow 1+e^x\le 3\Leftrightarrow x\le \ln 2$, dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm.

Nên $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;\ln 2)$.

So với các đáp án thì chỉ có C thỏa mãn.

Câu 19. **(THPT Anh Sơn - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau.

x	$-\infty$		-2		-1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=-2f(x)+2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(2;4)$. **B.** $(-4;2)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-1;2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=-2f'(x)$

$$y'=0\Leftrightarrow -2f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2\\ x=-1\\ x=2\\ x=4 \end{array}\right.$$

Từ bảng xét dấu của $f'(x)$ ta có

x	$-\infty$		-2		-1		2		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$, $(-1;2)$ và $(4;+\infty)$

Câu 20. **(THPT Anh Sơn - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+2019$ với $g(x)<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(1-x)+2019x+2020$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $h(x)=f(1-x)+2019x+2020$.

Vì hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $h(x)$ cũng xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $h'(x)=-f'(1-x)+2019$.

Do $h'(x)=0$ tại hữu hạn điểm nên để tìm khoảng nghịch biến của hàm số $h(x)$, ta tìm các giá trị của x sao cho $h'(x)<0\Leftrightarrow -f'(1-x)+2019<0\Leftrightarrow f'(1-x)-2019>0$

$\Leftrightarrow x(3-x)g(1-x)>0\Leftrightarrow x(3-x)<0$ (Do $g(x)<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0\\ x>3 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $y=f(1-x)+2019x+2020$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Biết $f(x)>2, \forall x\in\mathbb{R}$. Xét hàm số $g(x)=f(3-2f(x))-x^3+3x^2-2020$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$.

B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;4)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g'(x)=-2f'(x)f'\left(3-2f(x)\right)-3x^2+6x$.

Vì $f(x)>2,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $3-2f(x)<-1\ \forall x\in\mathbb{R}$

Từ bảng xét dấu $f'(x)$ suy ra $f'\left(3-2f(x)\right)<0,\forall x\in\mathbb{R}$

Từ đó ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	4	$+\infty$
$-f'(x)f'\left(3-2f(x)\right)$	- 0	+ |	+ 0	- |	- 0	+	
$-3x^2+6x$	- |	- 0	+ |	+ 0	- |	-	

Từ bảng xét dấu trên, loại trừ đáp án suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0 -	0 +	0 -	0 +	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	3 ↘	1 ↗	2 ↘	0 ↗	$+\infty$

Hàm số $y=\left(f(x)\right)^3-3.\left(f(x)\right)^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=3.\left(f(x)\right)^2.f'(x)-6.f(x).f'(x)$

$=3f(x).f'(x).\left[f(x)-2\right]$

$$y'=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}f(x)=0\Leftrightarrow x\in\{x_1,4\mid x_1<1\}\\ f(x)=2\Leftrightarrow x\in\{x_2,x_3,3,x_4\mid x_1<x_2<1<x_3<2;4<x_4\}\\ f'(x)=0\Leftrightarrow x\in\{1,2,3,4\}\end{bmatrix}$$

Lập bảng xét dấu ta có

x	$-\infty$	x_1	x_2	1	x_3	2	3	4	x_4	$+\infty$
f(x)	- 0 +	+	+	+	+	+	+ 0 +	+		
f(x) - 2	-	- 0 +	+	+ 0 -	-	- 0 -	-	- 0 +		
f'(x)	+	+	+ 0 -	-	- 0 +	0 -	0 +	+		
y'	+ 0 -	0 +	0 -	0 +	0 -	0 +	0 -	0 +		

Do đó ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;\ 3)$.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị nằm trên trục hoành và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của biểu thức $f'(x)$ như bảng dưới đây.

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=g(x)=\dfrac{f\left(x^2-2x\right)}{f\left(x^2-2x\right)+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $\left(-2;\dfrac{5}{2}\right)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$$g'(x)=\frac{\left(x^2-2x\right)'.f'\left(x^2-2x\right)}{\left(f\left(x^2-2x\right)+1\right)^2}=\frac{(2x-2).f'\left(x^2-2x\right)}{\left(f\left(x^2-2x\right)+1\right)^2}.$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\f'\left(x^2-2x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x=-2\\x^2-2x=-1\\x^2-2x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\\x=3\end{array}\right.$$

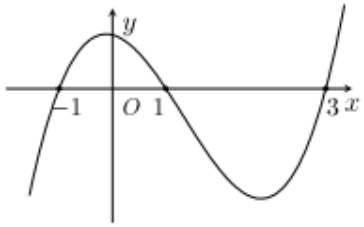
Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta có hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$.

Dạng 3. Bài toán hàm ẩn, hàm hợp liên quan đến tham số và một số bài toán khác

Câu 1. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên $m\in[-5;5]$ để hàm số $g(x)=f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?



A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Ta có $g'(x)=f'(x+m)$. Vì $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g'(x)=f'(x+m)$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Căn cứ vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy

$$g'(x)<0\Leftrightarrow f'(x+m)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+m<-1\\1<x+m<3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1-m\\1-m<x<3-m\end{array}\right.$$

Hàm số $g(x)=f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\le -1-m \\ \begin{cases} 3-m\ge 2 \\ 1-m\le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -3 \\ 0\le m\le 1 \end{array}\right.$$

Mà m là số nguyên thuộc đoạn $[-5;5]$ nên ta có $S=\{-5;-4;-3;0;1\}$.

Vậy S có 5 phần tử.

Câu 2. **(Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-10		-2		3		8		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=f(x^3+4x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

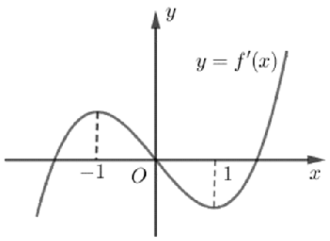
Chọn C

Đặt $t=x^3+4x+m \Rightarrow t'=3x^2+4$ nên t đồng biến trên $(-1;1)$ và $t\in(m-5;m+5)$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để hàm số $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(m-5;m+5)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta được $\begin{cases} m-5\ge -2 \\ m+5\le 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge 3 \\ m\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow m=3$

Câu 3. **(Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=1$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên dương a để hàm số $y=\left|4f(\sin x)+\cos 2x-a\right|$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?



A. 2. **B.** 3. **C.** Vô số. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x)=\left|4f(\sin x)+\cos 2x-a\right| \Rightarrow g(x)=\sqrt{\left[4f(\sin x)+\cos 2x-a\right]^2}$.

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{\left[4\cos x.f'(\sin x)-2\sin 2x\right]\left[4f(\sin x)+\cos 2x-a\right]}{\sqrt{\left[4f(\sin x)+\cos 2x-a\right]^2}}.$$

Ta có $4\cos x.f'(\sin x)-2\sin 2x=4\cos x\left[f'(\sin x)-\sin x\right]$.

Với $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ thì $\cos x>0,\sin x\in(0;1)\Rightarrow f'(\sin x)-\sin x<0$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ khi $4f(\sin x)+\cos 2x-a\ge 0,\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 4f(\sin x)+1-2\sin^2 x\ge a,\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

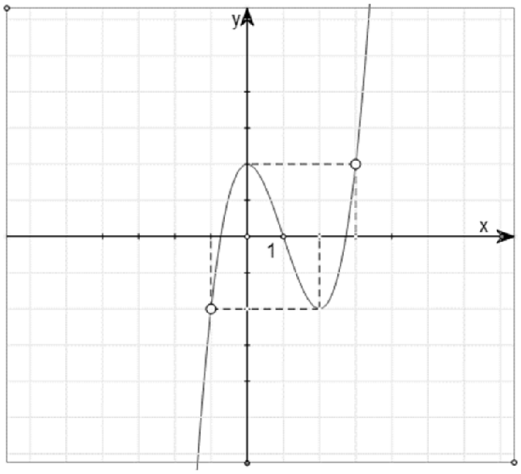
Đặt $t=\sin x$ được $4f(t)+1-2t^2\ge a,\forall t\in(0;1)$ (*).

Xét $h(t)=4f(t)+1-2t^2\Rightarrow h'(t)=4f'(t)-4t=4\left[f'(t)-1\right]$.

Với $t\in(0;1)$ thì $h'(t)<0\Rightarrow h(t)$ nghịch biến trên $(0;1)$.

Do đó (*) $\Leftrightarrow a\le h(1)=4f(1)+1-2.1^2=3$. Vậy có 3 giá trị nguyên dương của a thỏa mãn.

Câu 4. **(Chuyên Quang Trung - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x)=f(x-m)-\frac{1}{2}(x-m-1)^2+2019$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$. Tổng tất cả các phần tử trong S bằng



A. 4. **B.** 11. **C.** 14. **D.** 20.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x)=f(x-m)-\frac{1}{2}(x-m-1)^2+2019$

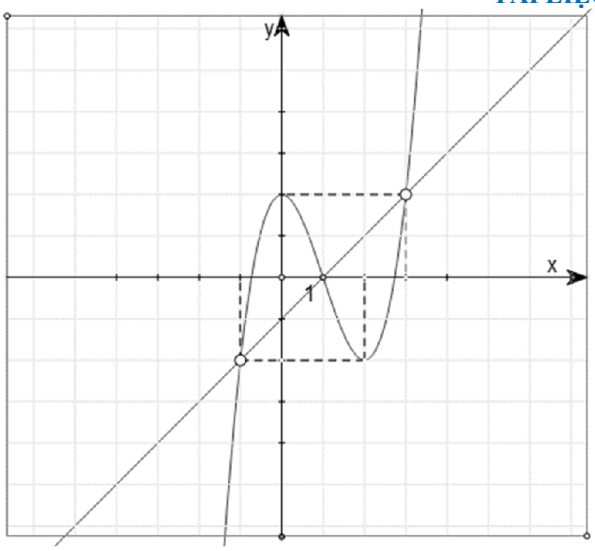
$g'(x)=f'(x-m)-(x-m-1)$

Xét phương trình $g'(x)=0(1)$

Đặt $x-m=t$, phương trình (1) trở thành $f'(t)-(t-1)=0\Leftrightarrow f'(t)=t-1(2)$

Nghiệm của phương trình (2) là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và $y=t-1$

Ta có đồ thị các hàm số $y=f'(t)$ và $y=t-1$ như sau:



Căn cứ đồ thị các hàm số ta có phương trình (2) có nghiệm là: $\begin{bmatrix} t=-1 \\ t=1 \\ t=3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x=m-1 \\ x=m+1 \\ x=m+3 \end{bmatrix}$

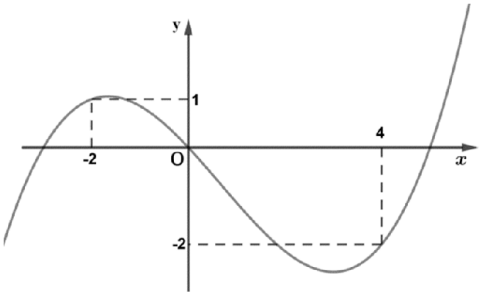
Ta có bảng biến thiên của $y=g(x)$

x	$-\infty$		$m-1$		$m+1$		$m+3$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Để hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$ cần $\begin{bmatrix} \begin{cases} m-1\le 5 \\ m+1\ge 6 \end{cases} \\ m+3\le 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5\le m\le 6 \\ m\le 2 \end{bmatrix}$

Vì $m\in\mathbb{N}^*\Rightarrow m$ nhận các giá trị $1;2;5;6\Rightarrow S=14$.

Câu 5. **(Sở Hà Nội - Lần 2 - 2020)** Cho hàm số $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,\ a\neq 0$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên thuộc khoảng $(-6;6)$ của tham số m để hàm số $g(x)=f(3-2x+m)+x^2-(m+3)x+2m^2$ nghịch biến trên $(0;1)$. Khi đó, tổng giá trị các phần tử của S là

A. 12. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 15.

Lời giải

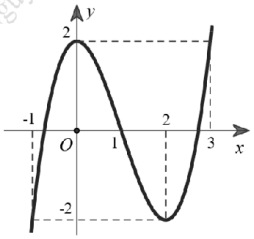
Chọn B

Xét $g'(x) = -2f'(3-2x+m) + 2x - (m+3)$. Xét phương trình $g'(x) = 0$, đặt $t = 3 - 2x + m$ thì phương trình trở thành $-2.\left[f'(t) - \frac{-t}{2}\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 4 \\ t = 0 \end{array}\right.$.

Từ đó, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{5+m}{2}, x_2 = \frac{m+3}{2}, x_3 = \frac{-1+m}{2}$. Lập bảng xét dấu, đồng thời lưu ý nếu $x > x_1$ thì $t < t_1$ nên $f(x) > 0$. Và các dấu đan xen nhau do các nghiệm đều làm đổi dấu đạo hàm nên suy ra $g'(x) \le 0 \Leftrightarrow x \in [x_2; x_1] \cup (-\infty; x_3]$.

Vì hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ nên $g'(x) \le 0, \forall x \in (0;1)$ từ đó suy ra $\left[\begin{array}{l} \frac{3+m}{2} \le 0 < 1 \le \frac{5+m}{2} \\ 1 \le \frac{-1+m}{2} \end{array}\right.$ và giải ra các giá trị nguyên thuộc $(-6;6)$ của m là -3; 3; 4; 5. Từ đó chọn câu B

Câu 6. **(Chuyên Quang Trung - Bình Phước - Lần 2 - 2020)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x) = f(x-m) - \frac{1}{2}(x-m-1)^2 + 2019$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$. Tổng tất cả các phần tử trong S bằng:



A. 4. **B.** 11. **C.** 14. **D.** 20.

Lời giải

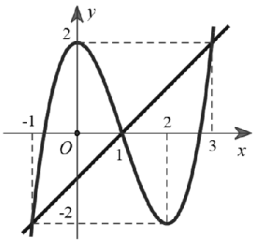
Chọn C

Ta có $g'(x) = f'(x-m) - (x-m-1)$

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x-m) = x-m-1$

Đặt $x - m = t \Rightarrow f'(t) = t - 1$

Khi đó nghiệm của phương trình là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và và đường thẳng $y = t - 1$



Dựa vào đồ thị hàm số ta có được $f'(t)=t-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=1\\t=3\end{array}\right.$

Bảng xét dấu của $g'(t)$

t	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số $g(t)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$

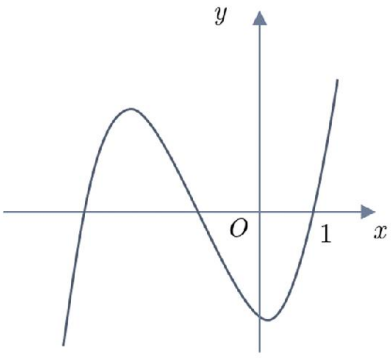
Hay $\left[\begin{array}{l}-1<t<1\\t>3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x-m<1\\x-m>3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-1<x<m+1\\x>m+3\end{array}\right.$

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$ thì $\left[\begin{array}{l}m-1\le 5<6\le m+1\\m+3\le 5<6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5\le m\le 6\\m\le 2\end{array}\right.$

Vì m là các số nguyên dương nên $S=\{1;2;5;6\}$

Vậy tổng tất cả các phần tử của S là: $1+2+5+6=14$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị cho như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-2019;2019]$ để hàm số $g(x)=f\left(2019^x\right)-mx+2$ đồng biến trên $[0;1]$



A. 2028. **B.** 2019. **C.** 2011. **D.** 2020

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=2019^x\ln 2019.f'\left(2019^x\right)-m$.

Ta lại có hàm số $y=2019^x$ đồng biến trên $[0;1]$.

Với $x\in[0;1]$ thì $2019^x\in[1;2019]$ mà hàm $y=f'(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ nên hàm $y=f'(2019^x)$ đồng biến trên $[0;1]$

Mà $2019^x\geq 1; f'(2019^x)>0\,\forall x\in[0;1]$ nên hàm $h(x)=2019^x\ln 2019.f'(2019^x)$ đồng biến trên $[0;1]$

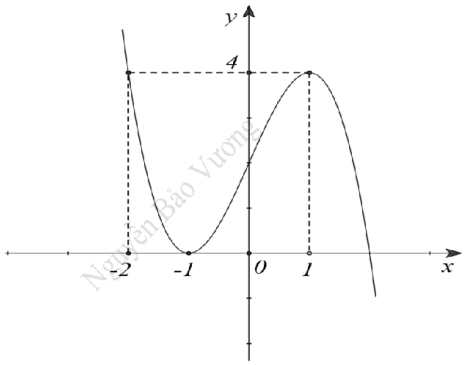
Hay $h(x)\geq h(0)=0,\forall x\in[0;1]$

Do vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên đoạn $[0;1]\Leftrightarrow g'(x)\geq 0,\forall x\in[0;1]$

$\Leftrightarrow m\leq 2019^x\ln 2019.f'(2019^x),\forall x\in[0;1]\Leftrightarrow m\leq \min\limits_{x\in[0;1]}h(x)=h(0)=0$

Vì m nguyên và $m\in[-2019;2019]\Rightarrow$ có 2020 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in(-2020;2020)$ để hàm số $g(x)=f(2x-3)-\ln(1+x^2)-2mx$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{2};2\right)$?



A. 2020. **B.** 2019. **C.** 2021. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn B

+ Ta có $g'(x)=2f'(2x-3)-\frac{2x}{1+x^2}-2m$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{2};2\right)$ khi và chỉ khi $g'(x)\geq 0,\ \forall x\in(-1;2)\Leftrightarrow m\leq f'(2x-3)-\frac{x}{1+x^2},\ \forall x\in\left(\frac{1}{2};2\right)\Leftrightarrow m\leq \min\limits_{x\in\left(\frac{1}{2};2\right)}\left[f'(2x-3)-\frac{x}{1+x^2}\right]$ (1)

+ Đặt $t=2x-3$, khi đó $x\in\left(\frac{1}{2};2\right)\Leftrightarrow t\in(-2;1)$.

Từ đồ thị hàm $f'(x)$ suy ra $f'(t)\geq 0,\ \forall t\in(-2;1)$ và $f'(t)=0$ khi $t=-1$.

Tức là $f'(2x-3)\geq 0,\ \forall x\in\left(\frac{1}{2};2\right)\Rightarrow \min\limits_{x\in\left(\frac{1}{2};2\right)}f'(2x-3)=0$ khi $x=1$. (2)

+ Xét hàm số $h(x)=-\dfrac{x}{1+x^2}$ trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$. Ta có $h'(x)=\dfrac{x^2-1}{\left(1+x^2\right)^2}$ và

$$h'(x)=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm 1.$$

Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ trên $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$ như sau:

x	$\frac{1}{2}$		1		2
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	$-\frac{1}{2}$	↗	

Từ bảng biến thiên suy ra $h(x)\ge -\dfrac{1}{2}\Rightarrow \min\limits_{x\in\left(\frac{1}{2};2\right)} h(x)=-\dfrac{1}{2}$ khi $x=1$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $m\le -\dfrac{1}{2}$.

Kết hợp với $m\in\mathbb{Z}$, $m\in(-2020;2020)$ thì $m\in\{-2019;-2018;....;-2;-1\}$.

Vậy có tất cả 2019 giá trị m cần tìm.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-2)\left(x^2-6x+m\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ để hàm số $g(x)=f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

A. 2016. **B.** 2014. **C.** 2012. **D.** 2010.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x)=f'(1-x)=-(1-x)^2(-x-1)\left[(1-x)^2-6(1-x)+m\right]$

$=(x-1)^2(x+1)\left(x^2+4x+m-5\right)$

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow g'(x)\le 0,\forall x<-1\,(*)$, (dấu "=" xảy ra tại hữu hạn điểm).

Với $x<-1$ thì $(x-1)^2>0$ và $x+1<0$ nên $(*)\Leftrightarrow x^2+4x+m-5\ge 0,\forall x<-1$

$\Leftrightarrow m\ge -x^2-4x+5,\forall x<-1$.

Xét hàm số $y=-x^2-4x+5$ trên khoảng $(-\infty;-1)$, ta có bảng biến thiên:

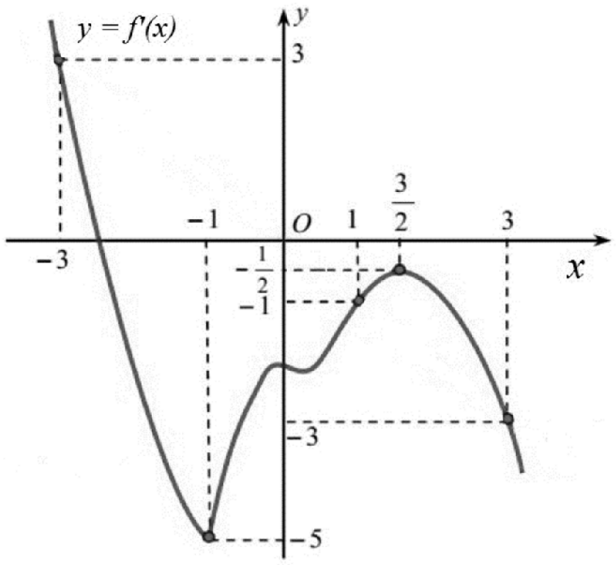
x	$-\infty$		-2		-1
y	$-\infty$	↗	9	↘	8

Từ bảng biến thiên suy ra $m\ge 9$.

Kết hợp với m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ và m nguyên nên $m\in\{9;10;11;...;2020\}$.

Vậy có 2012 số nguyên m thỏa mãn đề bài.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên R. Hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x)=f(x-2m)+\frac{1}{2}(2m-x)^2+2020$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3;4)$. Hỏi số phần tử của S bằng bao nhiêu?

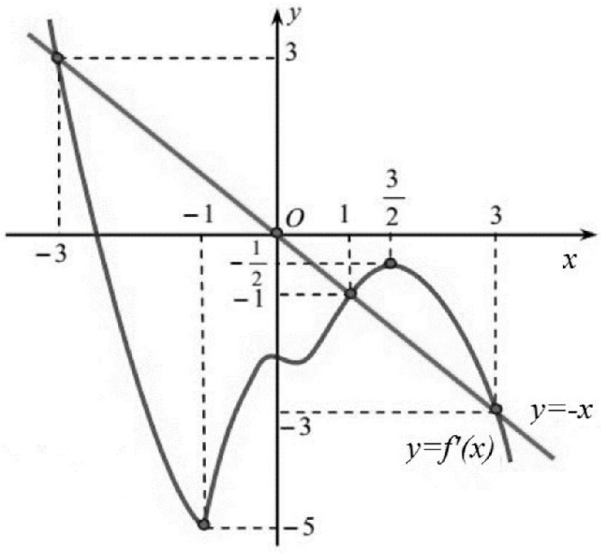
A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=f'(x-2m)-(2m-x)$.

Đặt $h(x)=f'(x)-(-x)$. Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đồ thị hàm số $y=-x$ trên hình vẽ suy ra: $h(x)\le 0 \Leftrightarrow f'(x)\le -x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-3\le x\le 1\\ x\ge 3\end{array}\right.$.



Ta có $g'(x)=h(x-2m)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-3\le x-2m\le 1\\ x-2m\ge 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2m-3\le x\le 2m+1\\ x\ge 2m+3\end{array}\right.$.

Suy ra hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(2m-3;2m+1)$ và $(2m+3;+\infty)$.

Do đó hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3;4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2m-3\le 3\\2m+1\ge 4\end{cases}\\2m+3\le 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{3}{2}\le m\le 3\\m\le 0\end{array}\right.$.

Mặt khác, do m nguyên dương nên $m\in\{2;3\} \Rightarrow S=\{2;3\}$. Vậy số phần tử của S bằng 2.

Từ đó chọn **đáp án B.**

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $y=f(x^2+3x-m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=f'(x^2+3x-m)=(2x+3)f'(x^2+3x-m)$.

Theo đề bài ta có: $f'(x)=(x-1)(x+3)$

suy ra $f'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-3\\x>1\end{array}\right.$ và $f'(x)<0 \Leftrightarrow -3<x<1$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$ khi $y'\ge 0, \forall x\in(0;2)$

$\Leftrightarrow (2x+3)f'(x^2+3x-m)\ge 0, \forall x\in(0;2)$.

Do $x\in(0;2)$ nên $2x+3>0, \forall x\in(0;2)$. Do đó, ta có:

$$y'\ge 0, \forall x\in(0;2) \Leftrightarrow f'(x^2+3x-m)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+3x-m\le -3\\x^2+3x-m\ge 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\ge x^2+3x+3\\m\le x^2+3x-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\ge \max\limits_{[0;2]}(x^2+3x+3)\\m\le \min\limits_{[0;2]}(x^2+3x-1)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\ge 13\\m\le -1\end{array}\right.$$

Do $m\in[-10;20]$, $m\in\mathbb{Z}$ nên có 18 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 12. Cho các hàm số $f(x)=x^3+4x+m$ và $g(x)=(x^2+2018)(x^2+2019)^2(x^2+2020)^3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2020;2020]$ để hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên $(2;+\infty)$?

A. 2005. **B.** 2037. **C.** 4016. **D.** 4041.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=x^3+4x+m$,

$g(x)=(x^2+2018)(x^2+2019)^2(x^2+2020)^3=a_{12}x^{12}+a_{10}x^{10}+\ldots+a_2x^2+a_0$.

Suy ra $f'(x)=3x^2+4$, $g'(x)=12a_{12}x^{11}+10a_{10}x^9+\ldots+2a_2x$.

Và $\left[g(f(x))\right]'=f'(x)\left[12a_{12}(f(x))^{11}+10a_{10}(f(x))^9+\ldots+2a_2f(x)\right]$

$=f(x)f'(x)\left(12a_{12}(f(x))^{10}+10a_{10}(f(x))^8+\ldots+2a_2\right)$.

Dễ thấy $a_{12};a_{10};\ldots;a_2;a_0>0$ và $f'(x)=3x^2+4>0$, $\forall x>2$.

Do đó $f'(x)\left(12a_{12}\left(f(x)\right)^{10}+10a_{10}\left(f(x)\right)^{8}+...+2a_2\right)>0,\ \forall x>2.$

Hàm số $g\left(f(x)\right)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi $\left[g\left(f(x)\right)\right]'\geq 0,\ \forall x>2\Rightarrow f(x)\geq 0,\ \forall x>2.$

$\Leftrightarrow x^3+4x+m\geq 0,\ \forall x>3\Leftrightarrow m\geq -x^3-4x,\ \forall x>2\Rightarrow m\geq \max\limits_{[2;+\infty)}\left(-x^3-4x\right)=-16.$

Vì $m\in[-2020;2020]$ và $m\in\mathbb{Z}$ nên có 2037 giá trị thỏa mãn m.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+1)^2\left(x^2+2mx+1\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x)=f(2x+1)$ đồng biến trên khoảng $(3;5)$?

A. 3 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x)=2f'(2x+1)=2(2x+1)(2x+2)^2[(2x+1)^2+2m(2x+1)+1]$

Đặt $t=2x+1$

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;5)$ khi và chỉ khi $g'(x)\geq 0,\ \forall x\in(3;5)$

$\Leftrightarrow t(t^2+2mt+1)\geq 0,\ \forall t\in(7;11)\Leftrightarrow t^2+2mt+1\geq 0,\ \forall t\in(7;11)\Leftrightarrow 2m\geq\dfrac{-t^2-1}{t},\ \forall t\in(7;11)$

Xét hàm số $h(t)=\dfrac{-t^2-1}{t}$ trên $[7;11]$, có $h'(t)=\dfrac{-t^2+1}{t^2}$

BBT:

t	$-\infty$		7		11		$+\infty$
$h'(t)$			$-$				
		$\searrow$	$-\frac{50}{7}$	$\searrow$	$-\frac{122}{11}$		

Dựa vào BBT ta có $2m\geq\dfrac{-t^2-1}{t},\ \forall t\in(7;11)\Leftrightarrow 2m\geq\max\limits_{[7;11]}h(t)\Leftrightarrow m\geq-\dfrac{50}{14}$

Vì $m\in\mathbb{Z}^-\Rightarrow m\in\{-3;-2;-1\}$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số nguyên $m<2019$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x+m\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 2016. **B.** 2015. **C.** 2017. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=\left(x^2-2x+m\right)'f'\left(x^2-2x+m\right)=2(x-1)f'\left(x^2-2x+m\right).$

Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x)\geq 0,\forall x\in(1;+\infty)$ và

$g'(x)=0$ tại hữu hạn điểm $\Leftrightarrow 2(x-1)f'(x^2-2x+m)\geq 0,\forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow f'(x^2-2x+m)\geq 0,\forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x+m\geq 2,\forall x\in(1;+\infty) \\ x^2-2x+m\leq 0,\forall x\in(1;+\infty) \end{array}\right.$

Xét hàm số $y=x^2-2x+m$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	$m-1$	↗ $+\infty$

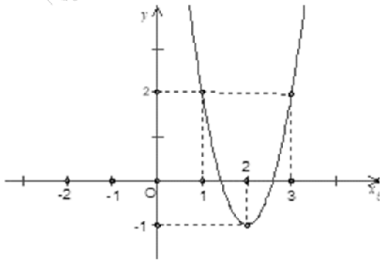
Dựa vào bảng biến thiên ta có

TH1: $x^2-2x+m\geq 2,\forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow m-1\geq 2\Leftrightarrow m\geq 3$.

TH2: $x^2-2x+m\leq 0,\forall x\in(1;+\infty)$: Không có giá trị m thỏa mãn.

Vậy có 2016 số nguyên $m<2019$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x-2)+2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

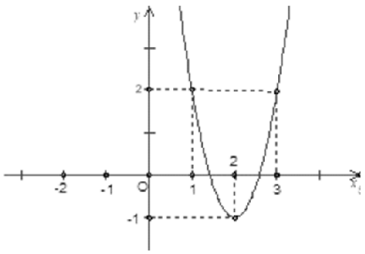


A. $(-\infty;3),(5;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1),(1;+\infty)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(3;5)$.

Lời giải.

Chọn B

Hàm số $y=f'(x-2)+2$ có đồ thị (C) như sau:



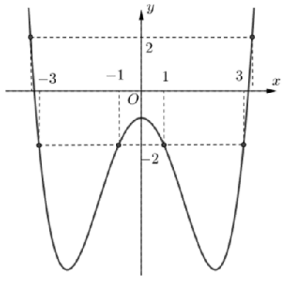
Dựa vào đồ thị (C) ta có:

$f'(x-2)+2>2,\forall x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)\Leftrightarrow f'(x-2)>0,\forall x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$.

Đặt $x^*=x-2$ suy ra: $f'(x^*)>0,\forall x^*\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Vậy: Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1),(1;+\infty)$.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x+2)-2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

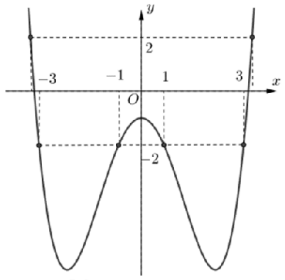


A. $(-3;-1),(1;3)$. **B.** $(-1;1),(3;5)$. **C.** $(-\infty;-2),(0;2)$. **D.** $(-5;-3),(-1;1)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=f'(x+2)-2$ có đồ thị (C) như sau:



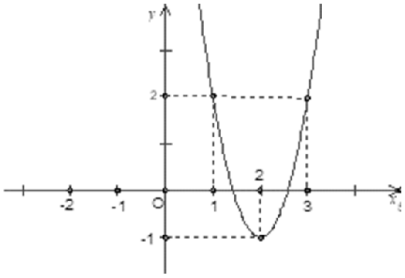
Dựa vào đồ thị (C) ta có:

$f'(x+2)-2<-2,\forall x\in(-3;-1)\cup(1;3)\Leftrightarrow f'(x+2)<0,\forall x\in(-3;-1)\cup(1;3)$.

Đặt $x^*=x+2$ suy ra: $f'(x^*)<0,\forall x^*\in(-1;1)\cup(3;5)$.

Vậy: Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1),(3;5)$.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x-2)+2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

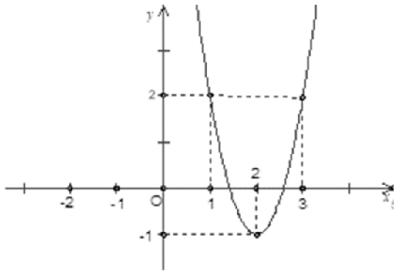


A. $(-\infty;2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Chọn B

Hàm số $y=f'(x-2)+2$ có đồ thị (C) như sau:



Dựa vào đồ thị (C) ta có: $f'(x-2)+2<2, \forall x \in (1;3) \Leftrightarrow f'(x-2)<0, \forall x \in (1;3)$.

Đặt $x^*=x-2$ thì $f'(x^*)<0, \forall x^* \in (-1;1)$.

Vậy: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Cách khác:

Tịnh tiến sang trái hai đơn vị và xuống dưới 2 đơn vị thì từ đồ thị (C)sẽ thành đồ thị của hàm $y=f'(x)$. Khi đó: $f'(x)<0, \forall x \in (-1;1)$.

Vậy: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Phân tích: Cho biết đồ thị của hàm số $f'(x)$ sau khi đã tịnh tiến và dựa vào đó để xét sự đồng biến của hàm số $f(x)$.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 3 liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x).f'''(x)=x(x-1)^2(x+4)^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $g(x)=\left[f'(x)\right]^2-2f(x).f''(x)$. Hàm số $h(x)=g(x^2-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=2f''(x)f'(x)-2f'(x).f''(x)-2f(x).f'''(x)=-2f(x).f'''(x)$;

Khi đó $\left(h(x)\right)'=(2x-2)g'(x^2-2x)=-2(2x-2)(x^2-2x)(x^2-2x-1)^2(x^2-2x+4)^3$

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \\ x=1\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu của $h'(x)$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		0		1		2		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Suy ra hàm số $h(x)=g(x^2-2x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=g(x)=f'(2x+3)+2$ có đồ thị là một parabol với tọa độ đỉnh $I(2;-1)$ và đi qua điểm $A(1;2)$. Hỏi hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(5;9)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-\infty;9)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=f'(2x+3)+2$ có đồ thị là một Parabol nên có phương trình dạng:

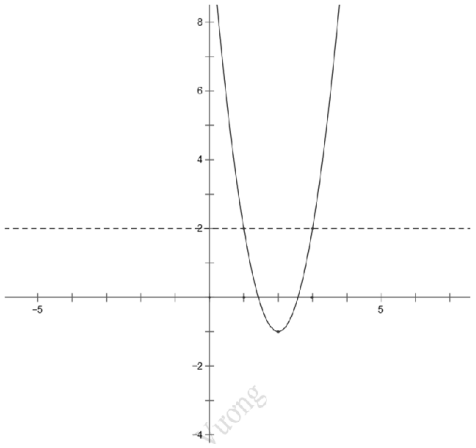
$y=g(x)=ax^2+bx+c\ \ (P)$

Vì (P) có đỉnh $I(2;-1)$ nên $\begin{cases}\dfrac{-b}{2a}=2\\ g(2)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-b=4a\\ 4a+2b+c=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a+b=0\\ 4a+2b+c=-1\end{cases}$.

(P) đi qua điểm $A(1;2)$ nên $g(1)=2\Leftrightarrow a+b+c=2$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}4a+b=0\\ 4a+2b+c=-1\\ a+b+c=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=-12\\ c=11\end{cases}$ nên $g(x)=3x^2-12x+11$.

Đồ thị của hàm $y=g(x)$ là

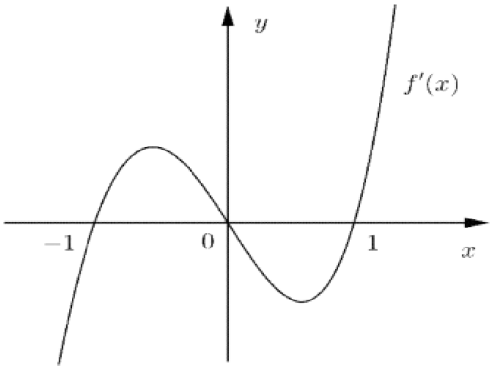


Theo đồ thị ta thấy $f'(2x+3)\le 0\Leftrightarrow f'(2x+3)+2\le 2\Leftrightarrow 1\le x\le 3$.

Đặt $t=2x+3\Leftrightarrow x=\dfrac{t-3}{2}$ khi đó $f'(t)\le 0\Leftrightarrow 1\le\dfrac{t-3}{2}\le 3\Leftrightarrow 5\le t\le 9$.

Vậy $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(5;9)$.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $f'(x)=x^3+ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $g(x)=f(f'(x))$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Vì các điểm $(-1;0),(0;0),(1;0)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases}-1+a-b+c=0\\c=0\\1+a+b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=-1\Rightarrow f'(x)=x^3-x\Rightarrow f''(x)=3x^2-1\\c=0\end{cases}$$

Ta có: $g(x)=f\left(f'(x)\right)\Rightarrow g'(x)=f'\left(f'(x)\right).f''(x)$

Xét $g'(x)=0\Leftrightarrow g'(x)=f'\left(f'(x)\right).f''(x)=0\Leftrightarrow f'\left(x^3-x\right)\left(3x^2-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-x=0\\x^3-x=1\\x^3-x=-1\\3x^2-1=0\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x=0\\x=x_1(x_1\approx1,325\quad)\\x=x_2(x_2\approx-1,325)\\x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-1,325$		-1		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$1,325$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2+2x-3,\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2+3x-m\right)+m^2+1$ đồng biến trên $(0;2)$?

A. 16. **B.** 17. **C.** 18. **D.** 19.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(t)=t^2+2t-3\ge0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\le-3\\t\ge1\end{array}\right.$ (*).

Có $g'(x)=(2x+3)f'\left(x^2+3x-m\right)$

Vì $2x+3>0,\forall x\in(0;2)$ nên $g(x)$ đồng biến trên $(0;2)\Leftrightarrow g'(x)\ge0,\forall x\in(0;2)$

$\Leftrightarrow f'\left(x^2+3x-m\right)\ge0,\forall x\in(0;2)$

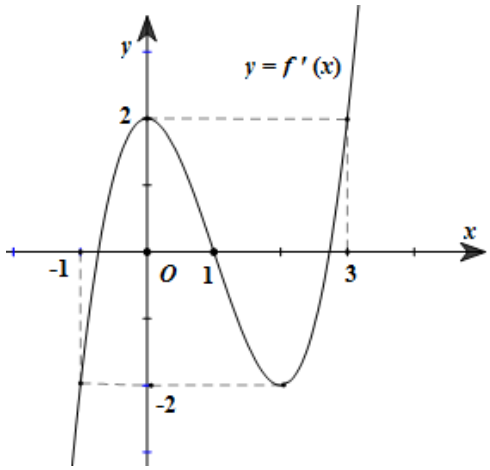
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+3x-m\le-3,\forall x\in(0;2)\\x^2+3x-m\ge1,\forall x\in(0;2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+3x\le m-3,\forall x\in(0;2)\\x^2+3x\ge m+1,\forall x\in(0;2)\end{array}\right.(**)$$

Có $h(x)=x^2+3x$ luôn đồng biến trên $(0;2)$ nên từ (**) $\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m-3\ge10\\m+1\le0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge13\\m\le-1\end{array}\right.$

Vì $\begin{cases}m\in[-10;20]\\m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow$ Có 18 giá trị của tham số m.

Vậy có 18 giá trị của tham số m cần tìm.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Đặt $g(x)=f(x-m)-\frac{1}{2}(x-m-1)^2+2019$ với m là tham số thực. Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoản $(5;6)$.Tổng các phần tử của S bằng:

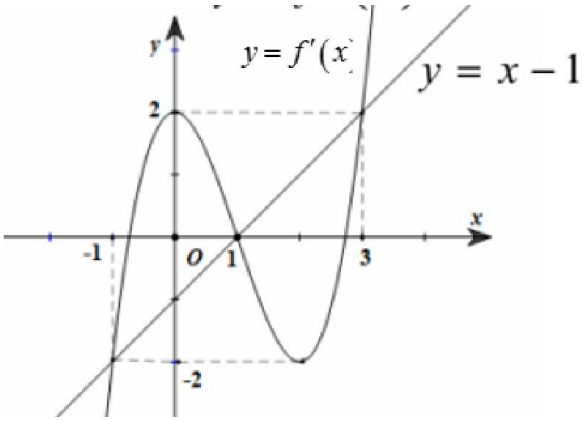
A. 4. **B.** 11. **C.** 14. **D.** 20.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=f'(x-m)-(x-m-1)$

Đặt $h(x)=f'(x)-(x-1)$. Từ đồ thị $y=f'(x)$ và đồ thị $y=x-1$ trên hình vẽ ta suy ra $h(x)\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\leq x\leq 1\\ x\geq 3\end{array}\right.$



Ta có $g'(x)=h(x-m)\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\leq x-m\leq 1\\ x-m\geq 3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-1\leq x\leq m+1\\ x\geq m+3\end{array}\right.$

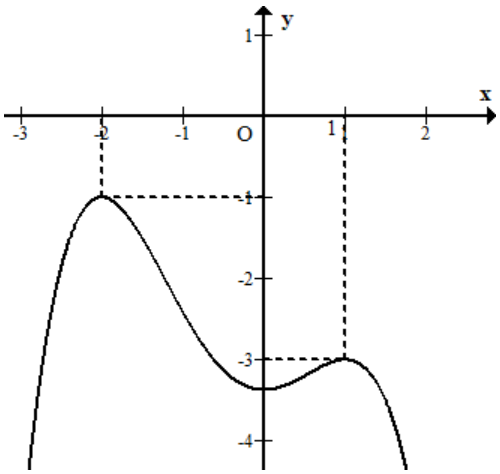
Do đó hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(m-1;m+1)$ và $(m+3;+\infty)$

Do vậy, hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}m-1\leq 5\\ m+1\geq 6\\ m+3\leq 5\end{array}\right.\\ \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5\leq m\leq 6\\ m\leq 2\end{array}\right.$

Do m nguyên dương nên $m\in\{1;2;5;6\}$, tức $S=\{1;2;5;6\}$

Tổng các phần tử của S bằng 14.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m, $m\in Z, -2020<m<2020$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2\right)+mx^2\left(x^2+\frac{8}{3}x-6\right)$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$

A. 2021. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2022.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=2xf'\left(x^2\right)+4mx\left(x^2+2x-3\right)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$ suy ra $g'(x)\ge 0,\ \forall x\in(-3;0)$.

$2xf'\left(x^2\right)+4mx\left(x^2+2x-3\right)\ge 0,\forall x\in(-3;0)\Leftrightarrow f'\left(x^2\right)-2m\left(-x^2-2x+3\right)\le 0,\forall x\in(-3;0)$

$\Leftrightarrow f'\left(x^2\right)\le 2m\left(-x^2-2x+3\right),\forall x\in(-3;0)\Leftrightarrow m\ge\frac{f'\left(x^2\right)}{2\left(-x^2-2x+3\right)},\forall x\in(-3;0)$

$\Leftrightarrow m\ge\max\limits_{(-3;0)}\frac{f'\left(x^2\right)}{2\left(-x^2-2x+3\right)}$.

Ta có $-3<x<0\Rightarrow 0<x^2<9\Rightarrow f'\left(x^2\right)\le -3$ dấu "=" khi $x^2=1\Leftrightarrow x=-1$.

$-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4\Rightarrow 0<-x^2-2x+3\le 4,\forall x\in(-3;0)$

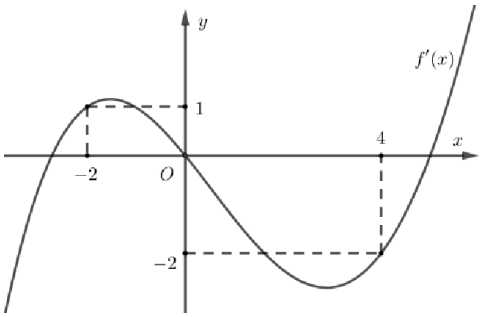
$\Leftrightarrow\frac{1}{-x^2-2x+3}\ge\frac{1}{4}$, dấu "=" khi $x=-1$.

Suy ra $\frac{f'\left(x^2\right)}{2\left(-x^2-2x+3\right)}\le\frac{-3}{2.4}=\frac{-3}{8},\ \forall x\in(-3;0)$, dấu "=" khi $x=-1$.

$\Rightarrow\max\limits_{(-3;0)}\frac{f'\left(x^2\right)}{2\left(x^2+2x+3\right)}=-\frac{3}{8}$.

Vậy $m\ge-\frac{3}{8}$, mà $m\in\mathbb{Z}$, $-2020<m<2020$ nên có 2020 giá trị của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình sau.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=4f(x-m)+x^2-2mx+2020$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

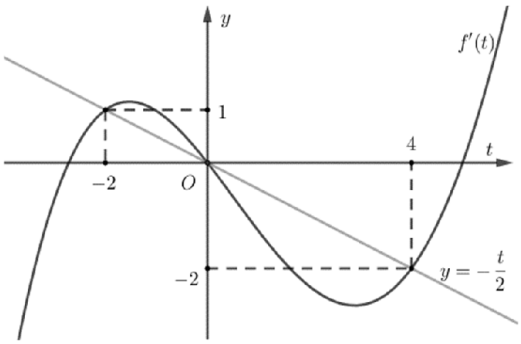
Chọn A

Ta có $g'(x)=4f'(x-m)+2x-2m$

$g'(x)\ge 0 \Leftrightarrow f'(x-m)\ge -\dfrac{x-m}{2}$ (*)

Đặt $t=x-m$ thì (*) $\Leftrightarrow f'(t)\ge -\dfrac{t}{2}$

Vẽ đường thẳng $y=-\dfrac{x}{2}$ trên cùng hệ trục Oxy với đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ sau



Từ đồ thị ta có $f'(t)\ge -\dfrac{t}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2\le t\le 0\\ t\ge 4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-2\le x\le m\\ x\ge m+4\end{array}\right.$

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)\Leftrightarrow g'(x)\ge 0\ \ \forall x\in(1;2)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-2\le 1<2\le m\\ m+4\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\le m\le 3\\ m\le -3\end{array}\right.$

Vì m nguyên dương nên $m\in\{2;3\}$.

Vậy có hai giá trị nguyên dương của m để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-1)(x-4);\ \forall x\in\mathbb{R}$.Có bao nhiêu số nguyên $m<2020$ để hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{2-x}{1+x}-m\right)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2021

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x)=-\dfrac{3}{(x+1)^2}f'\left(\dfrac{2-x}{1+x}-m\right)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow g'(x)\ge 0;\forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow -\dfrac{3}{(x+1)^2}f'\left(\dfrac{2-x}{1+x}-m\right)\ge 0;\forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow f'\left(\dfrac{2-x}{1+x}-m\right)\le 0;\forall x\in(2;+\infty)$

Ta có: $f'(x)\le 0\Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x-4)\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le -1\\1\le x\le 4\end{array}\right.$

Do đó: $f'\left(\dfrac{2-x}{1+x}-m\right)\le 0;\forall x\in(2;+\infty)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\dfrac{2-x}{1+x}-m\le -1;\forall x\in(2;+\infty) & (1)\\ 1\le \dfrac{2-x}{1+x}-m\le 4;\forall x\in(2;+\infty) & (2)\end{array}\right.$

Hàm số $h(x)=\dfrac{2-x}{1+x}-m$; $x\in(2;+\infty)$ có bảng biến thiên:

x	2		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	
$h(x)$	‖ $-m$	↘	$-\infty$

Căn cứ bảng biến thiên suy ra: Điều kiện (2) không có nghiệm m thỏa mãn.

Điều kiện $(1)\Leftrightarrow -m\le -1\Leftrightarrow m\ge 1$,kết hợp điều kiện $m<2020$ suy ra có 2019 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét: Có thể mở rộng bài toán đã nêu như sau:

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-1)(x-4);\forall x\in\mathbb{R}$.Có bao nhiêu số nguyên $m<2020$ để hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{2-x}{1+x}+h(m)\right)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)e^x$, có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $y=g(x)=f(\ln x)-mx^2+mx-2$ nghịch biến trên $(1;e^2)$.

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn B

Trên $(1;e^2)$ ta có $g'(x)=\dfrac{1}{x}.f'(\ln x)-2mx+m=\ln x+1-(2x-1)m$

Để hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên $(1;e^2)$ thì $g'(x)=\ln x+1-(2x-1)m\le 0,\forall x\in(1;e^2)$

$\Leftrightarrow \ln x+1-(2x-1)m\le 0,\forall x\in(1;e^2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{\ln x+1}{2x-1}\le m,\forall x\in(1;e^2)$

Xét hàm số $h(x)=\dfrac{\ln x+1}{2x-1}$ trên $(1;e^2)$, ta có $h'(x)=\dfrac{-\dfrac{1}{x}-2\ln x}{(2x-1)^2}<0,\forall x\in(1;e^2)$, từ đây suy ra $m\geq 1$. Vậy có 2019 giá trị nguyên của m thỏa bài toán.

---------- HẾT ----------

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 2 CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH 5-6 ĐIỂM

Dạng 1. Tìm cực trị của hàm số dựa vào bảng biến thiên, đồ thị của hàm số y, y'

-Định lí cực trị

- ***Điều kiện cần (định lí 1)***: *Nếu hàm số* $y=f(x)$ *có đạo hàm trên khoảng* $(a;b)$ *và đạt cực đại (hoặc cực tiểu) tại* x_0 *thì* $f'(x_0)=0$.
- ***Điều kiện đủ (định lí 2)***:

Nếu $f'(x)$ *đổi dấu từ* ***âm sang dương*** *khi* x *đi qua điểm* x_0 *(theo chiều tăng) thì hàm số* $y=f(x)$ *đạt* ***cực tiểu*** *tại điểm* x_0.

Nếu $f'(x)$ *đổi dấu từ* ***dương sang âm*** *khi* x *đi qua điểm* x_0 *(theo chiều tăng) thì hàm số* $y=f(x)$ *đạt* ***cực đại*** *tại điểm* x_0.

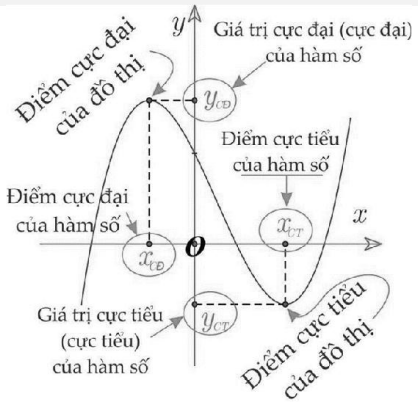
- ***Định lí 3***: *Giả sử* $y=f(x)$ *có đạo hàm cấp* 2 *trong khoảng* $(x_0-h;\ x_0+h)$, *với* $h>0$. *Khi đó:*

Nếu $y'(x_0)=0,\ y''(x_0)>0$ *thì* x_0 *là điểm cực tiểu.*

Nếu $y'(x_0)=0,\ y''(x_0)<0$ *thì* x_0 *là điểm cực đại.*

- Các THUẬT NGỮ cần nhớ

- *Điểm cực đại (cực tiểu) của* ***hàm số*** *là* x_0, ***giá trị cực đại (cực tiểu)*** *của hàm số là* $f(x_0)$ *(hay* $y_{CĐ}$ *hoặc* y_{CT}*). Điểm cực đại của* ***đồ thị hàm số*** *là* $M(x_0;f(x_0))$.
- *Nếu* $M(x_0;y_0)$ *là điểm cực trị của đồ thị hàm số* $y=f(x)\Rightarrow\begin{cases}y'(x_0)=0\\M(x_0;y_0)\in y=f(x)\end{cases}$.



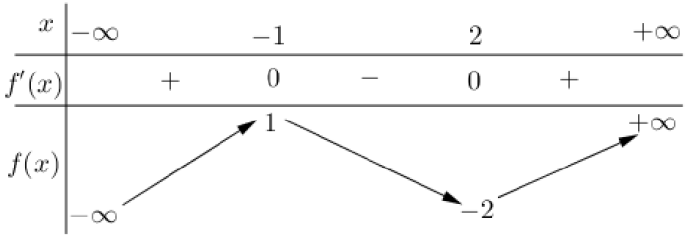
Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2020 – Lần 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** -4.

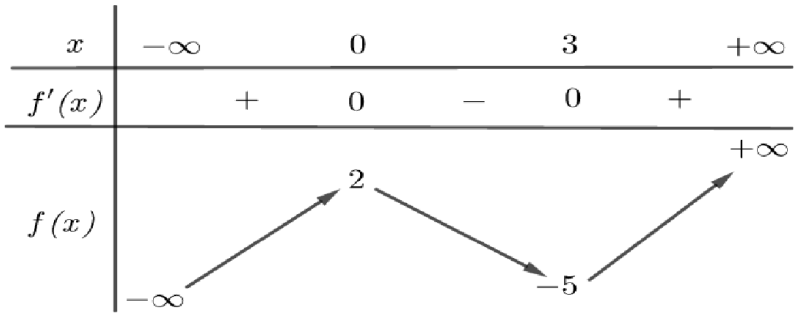
Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2020 – Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số đã cho đạt cực đại tại

A. $x=-2$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

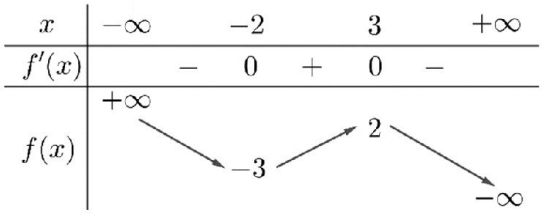
Câu 3. **(Mã 101 – 2020 Lần 1)** Cho hàm $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** −5. **C.** 0. **D.** 2.

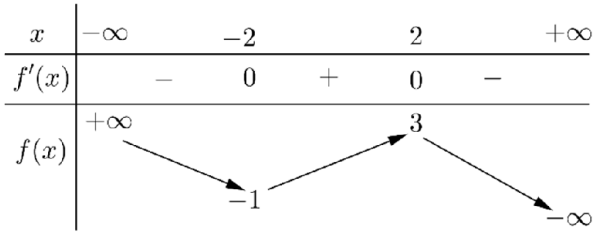
Câu 4. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau.



Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** −2. **D.** −3.

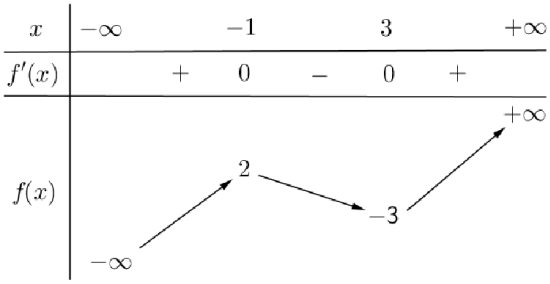
Câu 5. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 2. **B.** −2. **C.** 3. **D.** −1.

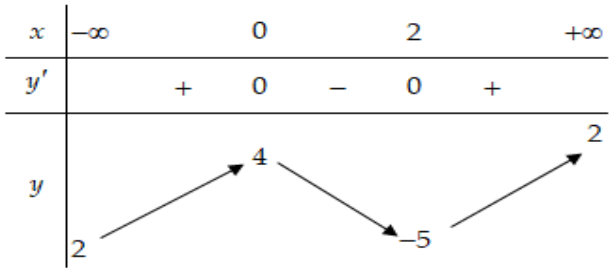
Câu 6. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 2.

Câu 7. **(Mã 105 - 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

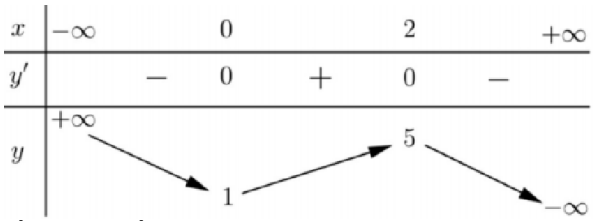


Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-5$ **B.** Hàm số có bốn điểm cực trị

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ **D.** Hàm số không có cực đại

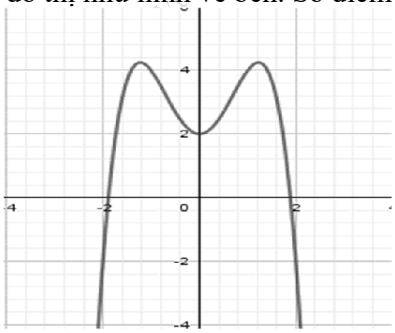
Câu 8. **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

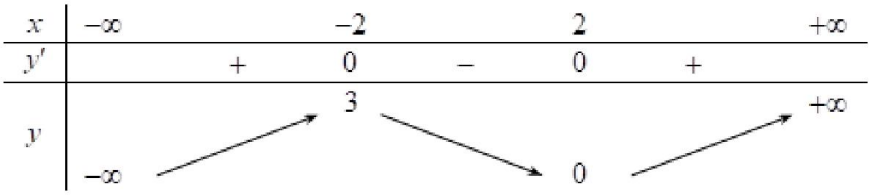
A. 5 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 1

Câu 9. **(Mã 104 - 2018)** Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:



A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

Câu 10. **(Mã 110 - 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tìm giá trị cực đại $y_{CĐ}$ và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho.

A. $y_{CĐ}=2$ và $y_{CT}=0$ **B.** $y_{CĐ}=3$ và $y_{CT}=0$

C. $y_{CĐ}=3$ và $y_{CT}=-2$ **D.** $y_{CĐ}=-2$ và $y_{CT}=2$

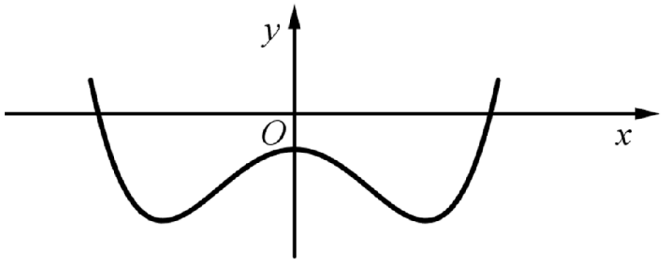
Câu 11. **(Mã 103 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại:

A. $x=-2$. **B.** $x=3$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

Câu 12. **(Mã 103 - 2018)** Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ $(a,\ b,\ c\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

Câu 13. **(Mã 102 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại

A. $x=-2$. **B.** $x=3$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

Câu 14. **(Mã 123 - 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	$+$	0	-	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây **sai**

A. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3 **B.** Hàm số có hai điểm cực tiểu

C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0 **D.** Hàm số có ba điểm cực trị

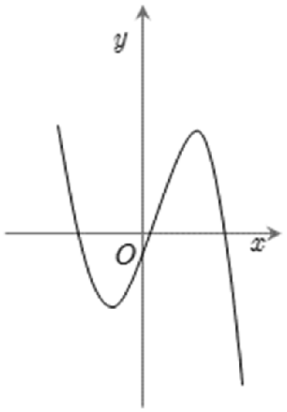
Câu 15. **(Mã 104 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=3$.

Câu 16. **(Mã 102 - 2018)** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số này là



A. 3 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 1

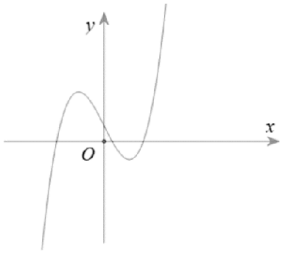
Câu 17. **(Mã 101 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A. $x=-1$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=2$. **D.** $x=1$.

Câu 18. **(Mã 101 - 2018)** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\,(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là



A. 2 **B.** 0 **C.** 3 **D.** 1

Câu 19. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm

A. $x=1$ **B.** $x=0$ **C.** $x=5$ **D.** $x=2$

Câu 20. **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. $x=3$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-3$.

Câu 21. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. $x=3$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-2$.

Câu 22. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. $x=3$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=-1$.

Câu 23. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. $x=-2$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=1$. **D.** $x=3$.

Câu 24. **(Đề Tham Khảo 2020 – Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0 . **B.** 2 . **C.** 1. **D.** 3 .

Câu 25. **(Đề Tham Khảo 2020 – Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3 . **B.** 0 . **C.** 2 . **D.** 1.

Câu 26. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$-$	

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. 4 . **B.** 1. **C.** 2 . **D.** 3 .

Câu 27. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$+$	

Số điểm cực tiểu của hàm số là

A. 1. **B.** 2 . **C.** 3 . **D.** 4 .

Câu 28. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$+$	

Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 29. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R có bảng xét dấu $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$-$	

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là:

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Dạng 2. Tìm cực trị của hàm số khi biết y, y'

★ **Bài toán**: Tìm các điểm cực đại, cực tiểu (nếu có) của hàm số $y = f(x)$.

✍ **Phương pháp**: Sự dụng 2 qui tắc tìm cực trị sau:

Quy tắc I: sử dụng nội dụng định lý 1

- **Bước 1**. Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2**. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Tìm các điểm x_i, $(i = 1,2,3,...,n)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- **Bước 3**. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4**. Từ bảng biến thiên, suy ra các điểm cực trị (dựa vào nội dung định lý 1).

Quy tắc II: sử dụng nội dụng định lý 2

- **Bước 1**. Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2**. Tính đạo hàm $y'=f'(x)$. Giải phương trình $f'(x)=0$ và kí hiệu x_i, $(i=1,2,3,...,n)$ là các nghiệm của nó.
- **Bước 3**. Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.
- **Bước 4**. Dựa vào dấu của $y''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i:

+ Nếu $f''(x_i)<0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i.

+ Nếu $f''(x_i)>0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i.

Câu 1. **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x+4)^3, \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực đại của hàm số đã cho là
A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 2. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+1)(x-4)^3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực đại của hàm số đã cho là
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 3. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)=x(x+1)(x-4)^3, \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là
A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 4. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x+4)^3, \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là
A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 1

Câu 5. **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x+2)^3$, $\forall x\in R$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 5

Câu 6. **(Mã 101 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+2)^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 7. **(Mã 103 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2$, $\forall x\in R$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 8. **(Mã 104 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+1)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 9. **(Mã 102 - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-2)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 10. **(THPT Lê Quý Đôn Dà Nẵng 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là
A. $x=2$. **B.** $x=3$. **C.** $x=0$. **D.** $x=1$.

Câu 11. **(Chuyên Sơn La 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^3(x-1)(x-2), \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 12. **(VTED 2019)** Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x-2)...(x-2019)$, $\forall x\in R$. Hàm số $y=f(x)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1008 **B.** 1010 **C.** 1009 **D.** 1011

Câu 13. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x-2)^3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hỏi $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 14. **(THPT Cù Huy Cận 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x(x-1)(x+2)^2$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số là?

A. 5. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 15. **(Sở Bình Phước 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3 **B.** 5 **C.** 2 **D.** 4

Câu 16. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x-2)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 5. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 17. **(THPT Ba Đình 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)(x^2-3)(x^4-9)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 18. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x^2(x-2)(x^2-x-2)(x+1)^4$ thì tổng các điểm cực trị của hàm số $f(x)$ bằng

A. -1. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 19. **(Chuyên Quang Trung Bình Phước 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x^2+2x)^3(x^2-\sqrt{2})\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số là

A. 4 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 20. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)=(x-1)(x-2)^2(x+3)$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

A. 3 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 2

Câu 21. **(Đề Minh Họa 2017)** Tìm giá trị cực đại $y_{CĐ}$ của hàm số $y=x^3-3x+2$.

A. $y_{CĐ}=-1$ **B.** $y_{CĐ}=4$ **C.** $y_{CĐ}=1$ **D.** $y_{CĐ}=0$

Câu 22. **(Mã 104 - 2017)** Hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 2

Câu 23. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Cực tiểu của hàm số bằng -3 **B.** Cực tiểu của hàm số bằng 1
C. Cực tiểu của hàm số bằng -6 **D.** Cực tiểu của hàm số bằng 2

Câu 24. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=x^3-6x^2+9x$ có tổng hoành độ và tung độ bằng

A. 5. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -1.

Câu 25. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Tìm giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y=-x^3+3x-4$.

A. $y_{CT}=-6$ **B.** $y_{CT}=-1$ **C.** $y_{CT}=-2$ **D.** $y_{CT}=1$

Câu 26. **(THPT Cù Huy Cận 2019)** Giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y=x^3-3x^2+4$ là:

A. $y_{CT}=0$. **B.** $y_{CT}=3$. **C.** $y_{CT}=2$. **D.** $y_{CT}=4$.

Câu 27. **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Đồ thị hàm số $y=x^4-x^2+1$ có bao nhiêu điểm cực trị có tung độ là số dương?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 28. **(Hsg Bắc Ninh 2019)** Hàm số nào dưới đây **không** có cực trị?

A. $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ **B.** $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$ **C.** $y=x^2-2x+1$ **D.** $y=-x^3+x+1$

Câu 29. **(THPT Ba Đình 2019)** Cho hàm số $y=x^4-2x^2+1$. Xét các mệnh đề sau đây

1) Hàm số có 3 điểm cực trị.

2) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$; $(1;+\infty)$.

3) Hàm số có 1 điểm cực trị.

4) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$; $(0;1)$.

Có bao nhiêu mệnh đề **đúng** trong bốn mệnh đề trên?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 30. **(THPT Ba Đình 2019)** Tìm giá trị cực đại của hàm số $y=x^3-3x^2-2$.

A. -2. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 31. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Hàm số $y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2-3x+2019m\ (m\in\mathbb{R})$ đạt cực tiểu tại điểm:

A. $x=3$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

Câu 32. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=-x^3+3x+1$ là:

A. $M(-1;-1)$. **B.** $N(0;1)$. **C.** $P(2;-1)$. **D.** $Q(1;3)$.

Câu 33. **(Sở Ninh Bình 2019)** Hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-3x+1$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=3$.

Câu 34. **(THPT Sơn Tây Hà Nội 2019)** Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=x^4-2x^2$.

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 35. **(Chuyên Quang Trung Bình Phước 2019)** Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=-x^3+x^2+5x-5$ là

A. $(-1;-8)$ **B.** $(0;-5)$ **C.** $\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{40}{27}\right)$ **D.** $(1;0)$

Câu 36. Hàm số nào trong bốn hàm số được liệt kê dưới đây không có cực trị?

A. $y=\dfrac{2x-3}{x+2}$. **B.** $y=x^4$. **C.** $y=-x^3+x$. **D.** $y=|x+2|$.

---------- **HẾT** ----------

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 2 CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH 7-8 ĐIỂM

Dạng 1. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại x = x0

Bước 1. Tính $y'(x_0), y''(x_0)$

Bước 2. Giải phương trình $y'(x_0)=0 \Rightarrow m$?

Bước 3. Thế m vào $y''(x_0)$ nếu giá trị $\left[\begin{array}{l} y''>0 \to x_0 = CT \\ y''<0 \to x_0 = CD \end{array}\right.$

Dạng 1.1 Hàm số bậc 3

Câu 1. **(Mã 110 - 2017)** Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực đại tại $x=3$.

A. $m=-1$ **B.** $m=-7$ **C.** $m=5$ **D.** $m=1$

Câu 2. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Tìm m để hàm số $y=x^3-2mx^2+mx+1$ đạt cực tiểu tại $x=1$

A. không tồn tại m. **B.** $m=\pm 1$. **C.** $m=1$. **D.** $m\in\{1;2\}$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx+1$ đạt cực tiểu tại $x=2$.

A. $m=0$. **B.** $m>4$. **C.** $0\le m<4$. **D.** $0<m\le 4$.

Câu 4. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương 2019)** Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực đại tại $x=3$.

A. $m=1, m=5$. **B.** $m=5$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Câu 5. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Có bao nhiêu số thực m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-m+1\right)x+1$ đạt cực đại tại $x=1$.

A. 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

Câu 6. **(THPT Đoàn Thượng – Hải Dương)** Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực đại tại $x=3$.

A. $m=1, m=5$. **B.** $m=5$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Câu 7. **(THPT Thăng Long - Hà Nội - Lần 2 - 2019)** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y=x^3+\left(3m-1\right)x^2+m^2x-3$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

A. $\{5;1\}$. **B.** $\{5\}$. **C.** $\varnothing$. **D.** $\{1\}$.

Câu 8. **(THPT Kinh Môn - 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m+1\right)x-1$ đạt cực đại tại $x=-2$?

A. $m=2$. **B.** $m=3$. **C.** Không tồn tại m. **D.** $m=-1$.

Câu 9. **(Chuyên ĐHSPHN - Lần 3 - 2019)** Tập hợp các số thực m để hàm số $y=x^3-3mx^2+(m+2)x-m$ đạt cực tiểu tại $x=1$ là.

A. $\{1\}$. **B.** $\{-1\}$. **C.** $\varnothing$. **D.** R.

Nguyễn Bảo Vương

Dạng 1.2 Hàm số đa thức bậc cao, hàm căn thức …

Câu 10. **(Chuyên QH Huế - Lần 2 - 2019)** Xác định tham số m sao cho hàm số $y = x + m\sqrt{x}$ đạt cực trị tại $x = 1$.

A. $m = -2$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = -6$. **D.** $m = 6$.

Câu 11. **(Trường THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Tìm tất cả tham số thực m để hàm số $y = (m-1)x^4 - (m^2-2)x^2 + 2019$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

A. $m = 0$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 2$.

Câu 12. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x - \sin x)(x - m - 3)\left(x - \sqrt{9 - m^2}\right)^3$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. 6 **B.** 7 **C.** 5 **D.** 4

Câu 13. **(Mã 101 - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-2)x^5 - (m^2-4)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. Vô số **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

Câu 14. **(Chuyên Quang Trung- Bình Phước 2019)** Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^5}{5} - \frac{mx^4}{4} + 2$ đạt cực đại tại $x = 0$ là:

A. $m \in \mathbb{R}$. **B.** $m < 0$. **C.** Không tồn tại m. **D.** $m > 0$.

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để hàm số $y = \frac{m-1}{5}x^5 + \frac{m+2}{4}x^4 + m + 5$ đạt cực đại tại $x = 0$?

A. 101. **B.** 2016. **C.** 100. **D.** 10.

Câu 16. **(Mã 104 - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-3)x^5 - (m^2-9)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. 6 **B.** Vô số **C.** 4 **D.** 7

Câu 17. **(Mã 103 - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-4)x^5 - (m^2-16)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

A. 8 **B.** Vô số **C.** 7 **D.** 9

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^{12} + (m-5)x^7 + (m^2-25)x^6 + 1$ đạt cực đại tại $x = 0$?

A. 8 **B.** 9 **C.** Vô số **D.** 10

Câu 19. **(Mã 102 - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-1)x^5 - (m^2-1)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. 3 **B.** 2 **C.** Vô số **D.** 1

Dạng 2. Tìm m để hàm số có n cực trị

- *Hàm số có n cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có n nghiệm phân biệt.*
- *Xét hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$:*

+ *Hàm số có hai điểm cực trị khi* $\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$.

+ *Hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.*

- *Xét hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$.*

+ Hàm số có ba cực trị khi $ab<0$. + Hàm số có 1 cực trị khi $ab\ge 0$.

Câu 1. Biết rằng hàm số $y=(x+a)^3+(x+b)^3-x^3$ có hai điểm cực trị. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $ab\le 0$. **B.** $ab<0$. **C.** $ab>0$. **D.** $ab\ge 0$.

Câu 2. **(THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=mx^3-2mx^2+(m-2)x+1$ không có cực trị

A. $m\in(-\infty;6)\cup(0;+\infty)$. **B.** $m\in(-6;0)$. **C.** $m\in[-6;0)$. **D.** $m\in[-6;0]$.

Câu 3. **(Đề Tham Khảo 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=(m-1)x^4-2(m-3)x^2+1$ không có cực đại?

A. $1<m\le 3$ **B.** $m\le 1$ **C.** $m\ge 1$ **D.** $1\le m\le 3$

Câu 4. **(Chuyên Sơn La - Lần 2 - 2019)** Để đồ thị hàm số $y=-x^4-(m-3)x^2+m+1$ có điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu thì tất cả các giá trị thực của tham số m là

A. $m\ge 3$. **B.** $m>3$. **C.** $m<3$. **D.** $m\le 3$.

Câu 5. **(Quang Trung - Bình Phước - Lần 5 - 2019)** Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số có 3 cực trị

A. $m>0$. **B.** $m\ge 0$. **C.** $m<0$. **D.** $m\le 0$.

Câu 6. **(Chuyên Hà Tĩnh - Lần 1 - 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=m^2x^4-(m^2-2019m)x^2-1$ có đúng một cực trị?

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2018. **D.** 2017.

Câu 7. **(THPT Yên Khánh A - Ninh Bình - 2019)** Cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+3(7m-3)x$. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Số phần tử của S là

A. 2. **B.** 4. **C.** 0. **D.** Vô số.

Câu 8. **(HSG - TP Đà Nẵng - 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^4+4mx^3+3(m+1)x^2+1$ có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $m\in\left(-\infty;\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}\right]$. **B.** $m\in\left[\dfrac{1-\sqrt{7}}{3};1\right]\cup\{-1\}$.

C. $m\in\left[\dfrac{1+\sqrt{7}}{3};+\infty\right)$. **D.** $m\in\left[\dfrac{1-\sqrt{7}}{3};\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right]\cup\{-1\}$.

Câu 9. **(HSG 12 - Bắc Ninh - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số có đúng một điểm cực trị?

A. 0. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 10. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}+mx^2-2mx+1$ có hai điểm cực trị.

A. $0<m<2$. **B.** $m>2$. **C.** $m>0$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m>2\\m<0\end{array}\right.$.

Câu 11. **(THPT Ba Đình 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+2mx+m$ có cực đại và cực tiểu?

A. $m<\dfrac{3}{2}$. **B.** $m<-\dfrac{3}{2}$. **C.** $m\le\dfrac{3}{2}$. **D.** $m>\dfrac{3}{2}$.

Câu 12. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x+1$ có hai cực trị là:

A. $(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$ **B.** $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$ **C.** $(-1;2)$ **D.** $[-1;2]$

Câu 13. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Cho hàm số $y=mx^4-x^2+1$. Tập hợp các số thực m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0]$. **C.** $[0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Câu 14. **(THPT Yên Định Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số $y=mx^4+(2m+1)x^2+1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có đúng một điểm cực tiểu.

A. Không tồn tại m. **B.** $m\ge 0$. **C.** $m\ge -\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}\le m\le 0$.

Câu 15. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^4+2\left(m^2-m-6\right)x^2+m-1$ có ba điểm cực trị.

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 16. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Hàm số $y=mx^4+(m-1)x^2+1-2m$ có một điểm cực trị khi

A. $0\le m\le 1$. **B.** $m\le 0\vee m\ge 1$. **C.** $m=0$. **D.** $m<0\vee m>1$.

Câu 17. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m trên miền $[-10;10]$ để hàm số $y=x^4-2(2m+1)x^2+7$ có ba điểm cực trị?

A. 20 **B.** 10 **C.** Vô số **D.** 11

Câu 18. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Cho hàm số $y=mx^4+\left(m^2-6\right)x^2+4$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số có ba điểm cực trị trong đó có đúng hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại ?

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 5

Câu 19. **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=mx^4+(m-1)x^2+1-2m$ có một cực trị.

A. $m\ge 1$ **B.** $m\le 0$ **C.** $0\le m\le 1$ **D.** $m\le 0\cup m\ge 1$

Câu 20. **(Chuyên Lào Cai - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+2)^4(x+4)^3\left[x^2+2(m+3)x+6m+18\right]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có **đúng** một điểm cực trị?

B. 7. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 21. **(Chuyên Sơn La - 2020)** Gọi S là tập hợp những giá trị của tham số m để hàm số sau không có cực trị trên $\mathbb{R}$.

$f(x)=\frac{1}{4}m^2.e^{4x}+\frac{1}{3}m.e^{3x}-\frac{1}{2}e^{2x}-(m^2+m-1)e^x$. Tổng tất cả các phần tử của tập S bằng

A. $-\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** -1.

Dạng 3. Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị

Phương trình hai đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số bậc ba là phần dư của phép chia của y cho y'

- Phân tích (bằng cách chia đa thức y cho y'): $y=y'\cdot q(x)+h(x)\Rightarrow\begin{cases}y_1=h(x_1)\\y_2=h(x_2)\end{cases}$.
- Đường thẳng qua 2 điểm cực trị là $y=h(x)$.

Câu 1. **(Mã 123 - 2017)** Đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có hai cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB?

A. $M(0;-1)$ **B.** $N(1;-10)$ **C.** $P(1;0)$ **D.** $Q(-1;10)$

Câu 2. **(Mã 104 - 2017)** Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d:y=(2m-1)x+3+m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$.

A. $m=\frac{3}{2}$ **B.** $m=\frac{3}{4}$ **C.** $m=-\frac{1}{2}$ **D.** $m=\frac{1}{4}$

Câu 3. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=(2m-1)x+m+3$ song song với đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$

A. $m=\frac{3}{4}$. **B.** $m=\frac{1}{2}$. **C.** $m=-\frac{3}{4}$. **D.** $m=-\frac{1}{2}$.

Câu 4. Đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB.

A. $P(1;0)$. **B.** $M(0;-1)$. **C.** $N(1;-10)$. **D.** $Q(-1;10)$.

Câu 5. **(Lương Văn Chánh - Phú Yên – 2018)** Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d:y=(3m+1)x+3+m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-1$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{1}{6}$. **C.** $m=\frac{1}{6}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Câu 6. **(TT Tân Hồng Phong - 2018)** Tìm tổng tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6m(1-2m)x$ song song đường thẳng $y=-4x$.

A. $m=-\frac{1}{3}$. **B.** $m=\frac{2}{3}$. **C.** $m=-\frac{2}{3}$. **D.** $m=1$.

Câu 7. **(THPT Xuân Hòa-Vĩnh Phúc- 2018)** Biết đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ có hai điểm cực trị A, B. Khi đó phương trình đường thẳng AB là

A. $y=2x-1$. **B.** $y=-2x+1$. **C.** $y=-x+2$. **D.** $y=x-2$.

Câu 8. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+2x^2+(m-3)x+m$ có hai điểm cực trị và điểm $M(9;-5)$ nằm trên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị.

A. $m=-1$. **B.** $m=-5$. **C.** $m=3$. **D.** $m=2$.

Câu 9. **(Nguyễn Khuyến 2019)** Đường thẳng nối hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-2x+m$ đi qua điểm $M(-3;7)$ khi m bằng bao nhiêu?

A. 1. **B.** -1. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 10. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018)** Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d:y=(3m+1)x+3+m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-1$.

A. $m=\frac{1}{6}$. **B.** $-\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{1}{6}$.

Câu 11. **(TT Diệu Hiền - Cần Thơ - 2018)** Giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ và đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=abc+ab+c$.

A. $-\frac{16}{25}$. **B.** -9. **C.** $-\frac{25}{9}$. **D.** 1.

Câu 12. **(Chuyên Hạ Long - 2018)** Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+2$ có hai điểm cực trị A và B sao cho các điểm A, B và $M(1;-2)$ thẳng hàng.

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=-\sqrt{2}$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-\sqrt{2}$; $m=\sqrt{2}$.

Dạng 4. Tìm m để hàm số bậc 3 có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước

★ **Bài toán tổng quát**: Cho hàm số $y=f(x;m)=ax^3+bx^2+cx+d$. Tìm tham số m để đồ thị hàm số có *2* điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện K cho trước?

✍ **Phương pháp**:

— **Bước 1**. Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Tính đạo hàm: $y'=3ax^2+2bx+c$.

— **Bước 2**. Để hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'}=3a\neq 0 \\ \Delta_{y'}=(2b)^2-4.3ac>0 \end{cases}$

và giải hệ này sẽ tìm được $m\in D_1$.

— **Bước 3**. Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $y'=0$. Theo Viét, ta có: $\begin{cases} S=x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ P=x_1x_2=\frac{c}{a} \end{cases}$.

— **Bước 4**. Biến đổi điều kiện K về dạng tổng S và tích P. Từ đó giải ra tìm được $m\in D_2$.

— **Bước 5**. Kết luận các giá trị m thỏa mãn: $m=D_1\cap D_2$.

🕮 ***Lưu ý:***

— Hàm số bậc 3 không có cực trị $\Leftrightarrow$ $y'=0$ không có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_{y'}\le 0$.

— Trong trường hợp điều kiện K liên quan đến hình học phẳng, tức là cần xác định tọa độ 2 điểm cực trị $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của $y'=0$. Khi đó có 2 tình huống thường gặp sau:

• Nếu giải được nghiệm của phương trình $y'=0$, tức tìm được x_1, x_2 cụ thể, khi đó ta sẽ thế vào hàm số đầu đề $y=f(x;m)$ để tìm tung độ y_1, y_2 tương ứng của A và B.

• Nếu tìm không được nghiệm $y'=0$, khi đó gọi 2 nghiệm là x_1, x_2 và tìm tung độ y_1, y_2 bằng cách thế vào phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị.

Để viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị, ta thường dùng phương pháp tách đạo hàm (phần dư bậc nhất trong phép chia y cho y'), nghĩa là:

◦ Phân tích (bằng cách chia đa thức y cho y'): $y=y'\cdot q(x)+h(x)\Rightarrow \begin{cases} y_1=h(x_1) \\ y_2=h(x_2) \end{cases}$.

◦ Đường thẳng qua 2 điểm cực trị là $y=h(x)$.

Dạng toán: Tìm tham số m để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước **(cùng phía, khác phía *d*)**:

Vị trí tương đối giữa 2 điểm với đường thẳng:

Cho 2 điểm $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ và đường thẳng $d: ax+by+c=0$. Khi đó:

• *Nếu $(ax_A+by_A+c)\cdot(ax_B+by_B+c)<0$ thì A, B nằm về 2 phía so với đường thẳng d.*

• *Nếu $(ax_A+by_A+c)\cdot(ax_B+by_B+c)>0$ thì A, B nằm cùng phía so với đường d.*

Trường hợp đặc biệt:

• *Để hàm số bậc ba $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với trục tung*

$Oy \Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm trái dấu và ngược lại.

• *Để hàm số bậc ba $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với trục hoành $Ox \Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt (áp dụng khi nhẩm được nghiệm).*

Dạng toán: Tìm m để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước **(đối xứng và cách đều)**:

★ ***Bài toán 1. Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B đối xứng nhau qua đường d :***

— **Bước 1**. Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m \in D_1$.

— **Bước 2**. Tìm tọa độ 2 điểm cực trị A, B. Có 2 tình huống thường gặp:

+ Một là $y'=0$ có nghiệm đẹp x_1, x_2, tức có $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$.

+ Hai là $y'=0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là Δ và lấy $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2) \in \Delta$.

— **Bước 3**. Gọi $I\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Do A, B đối xứng qua d nên thỏa hệ $\begin{cases}\Delta \perp d\\ I \in d\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{u_d}=0\\ I \in d\end{cases} \Rightarrow m \in D_2$.

— **Bước 4**. Kết luận $m = D_1 \cap D_2$.

★ ***Bài toán 2. Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B cách đều đường thẳng d :***

— **Bước 1**. Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m \in D_1$.

— **Bước 2**. Tìm tọa độ 2 điểm cực trị A, B. Có 2 tình huống thường gặp:

+ Một là $y'=0$ có nghiệm đẹp x_1, x_2, tức có $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$.

+ Hai là $y'=0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là Δ và lấy $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2) \in \Delta$.

— **Bước 3**. Do A, B cách đều đường thẳng d nên $d(A;d)=d(B;d) \Rightarrow m \in D_2$.

— **Bước 4**. Kết luận $m = D_1 \cap D_2$.

☞ **Lưu ý**: Để 2 điểm A, B đối xứng nhau qua điểm $I \Leftrightarrow I$ là trung điểm AB.

Câu 1. Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA=OB$ (O là gốc tọa độ)?

A. $m=\dfrac{3}{2}$. **B.** $m=3$. **C.** $m=\dfrac{1}{2}$. **D.** $m=\dfrac{5}{2}$.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2017)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-1\right)x$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A,B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y=5x-9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 3 **B.** 6 **C.** –6 **D.** 0

Câu 3. **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2}{3}x^3-mx^2-2\left(3m^2-1\right)x+\dfrac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 4. **(Chuyên KHTN - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^3-(2m-1)x^2+2mx-m-1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 5. **(Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=x^3-(m+6)x^2+(2m+9)x-2$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành.

A. $\left[\begin{array}{l} m\geq -2 \\ m\leq -6 \end{array}\right.$. **B.** $m\geq -2$. **C.** $m\leq -6$. **D.** $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m>-2 \\ m<-6 \end{array}\right. \\ m\neq \dfrac{-3}{2} \end{array}\right.$.

Câu 6. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+2018$ với m là tham số. Tổng bình phương tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1+2x_2=1$ bằng

A. $\dfrac{40}{9}$ **B.** $\dfrac{22}{9}$ **C.** $\dfrac{25}{4}$ **D.** $\dfrac{8}{3}$

Câu 7. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho hàm số $y=-x^3+3mx^2-3m-1$ với m là một tham số thực. Giá trị của m thuộc tập hợp nào sau đây để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x+8y-74=0$.

A. $m\in(-1;1]$. **B.** $m\in(-3;-1]$. **C.** $m\in(3;5]$. **D.** $m\in(1;3]$.

Câu 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-8x^2+(m^2+11)x-2m^2+2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Ox.

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 9. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Cho hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+(m+1)x+m-1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m<20$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?

A. 18. **B.** 19. **C.** 21. **D.** 20.

Câu 10. **(Chuyên KHTN 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^3-(m+1)x^2+(m^2-2)x-m^2+3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về hai phía khác nhau đối với trục hoành?

A. 2. **B.** 1.
C. 3. **D.** 4.

Câu 11. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Tìm tất cả cả các giá trị của tham số m để $y=x^3-3x^2+mx-1$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=6$

A. $m=-3$ **B.** $m=3$ **C.** $m=-1$ **D.** $m=1$

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)=2x^3-6x^2-m+1$ có các giá trị cực trị trái dấu?

A. 7. **B.** 9. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 13. **(Thi thử SGD Hưng Yên)** Cho hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x-1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$.

A. $m\in(-1;4)\setminus\{3\}$. **B.** $m\in(3;4)$. **C.** $m\in(1;3)$. **D.** $m\in(-1;4)$.

Câu 14. **(THPT Cẩm Bình Hà Tĩnh 2019)** Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^2-2$ có đồ thị (C) và điểm $C(1;4)$. Tính tổng các giá trị nguyên dương của m để (C) có hai điểm cực trị A,B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 4.

A. 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4

Câu 15. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Cho hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x-1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$.

A. $m\in(-1;3)\cup(3;4)$. **B.** $m\in(1;3)$. **C.** $m\in(3;4)$. **D.** $m\in(-1;4)$.

Câu 16. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số: $y=3x^3+2(m+1)x^2-3mx+m-5$ có hai điểm cực trị $x_1;x_2$ đồng thời $y(x_1).y(x_2)=0$ là:

A. -21 **B.** -39 **C.** -8 **D.** $3\sqrt{11}-13$

Câu 17. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3mx^2+27x+3m-2$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $|x_1-x_2|\le 5$. Biết $S=(a;b]$. Tính $T=2b-a$.

A. $T=\sqrt{51}+6$ **B.** $T=\sqrt{61}+3$ **C.** $T=\sqrt{61}-3$ **D.** $T=\sqrt{51}-6$

Câu 18. **(Sở Bắc Giang 2019)** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+mx+3$ có hai điểm cực trị $x_1,x_2\le 4$. Số phần tử của S bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 19. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3+4(m-2)x^2-7x+1$ có hai điểm cực trị $x_1;x_2$ $(x_1<x_2)$ thỏa mãn $|x_1|-|x_2|=-4$

A. $m=5$. **B.** $m=\frac{1}{2}$. **C.** $m=3$. **D.** $m=\frac{7}{2}$.

Câu 20. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để điểm $M(2m^3;m)$ tạo với hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ (C) một tam giác có diện tích nhỏ nhất?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** không tồn tại

Câu 21. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số thực m để đường thẳng đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$, bán kính bằng 1 tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.

A. $m=\frac{2\pm\sqrt{3}}{3}$ **B.** $m=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$ **C.** $m=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ **D.** $m=\frac{2\pm\sqrt{5}}{2}$

Câu 22. **(VTED 2019)** Biết đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ có hai điểm cực trị $M(x_1;y_1),N(x_2;y_2)$ thỏa mãn $x_1(y_1-y_2)=y_1(x_1-x_2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=abc+2ab+3c$ bằng

A. $-\frac{49}{4}$ **B.** $-\frac{25}{4}$ **C.** $-\frac{841}{36}$ **D.** $-\frac{7}{6}$

Câu 23. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3-m$ (m là tham số). Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và $I(2;-2)$. Tổng tất cả các giá trị của m để ba điểm I, A, B tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$ là

A. $\frac{4}{17}$. **B.** $\frac{14}{17}$. **C.** $-\frac{2}{17}$. **D.** $\frac{20}{17}$.

Câu 24. Cho hàm số $y=x^3-6mx+4$ có đồ thị (C_m). Gọi m_0 là giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của (C_m) cắt đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất. Chọn khẳng định đúng

A. $m_0\in(3;4)$. **B.** $m_0\in(1;2)$. **C.** $m_0\in(0;1)$. **D.** $m_0\in(2;3)$.

Câu 25. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018)** Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2-4x-10$, với m là tham số; gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số đã cho. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left(x_1^2-1\right)\left(x_2^2-1\right)$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 9.

Câu 26. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018)** Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3$, với m là tham số; gọi (C) là đồ thị của hàm số đã cho. Biết rằng khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định. Xác định hệ số góc k của đường thẳng d.

A. $k=-\frac{1}{3}$. **B.** $k=\frac{1}{3}$. **C.** $k=-3$. **D.** $k=3$.

Câu 27. **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2018)** Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=13$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m_0\in(-1;7)$. **B.** $m_0\in(7;10)$. **C.** $m_0\in(-15;-7)$. **D.** $m_0\in(-7;-1)$.

Câu 28. **(THPT Thanh Miện I - Hải Dương 2018)** Biết rằng đồ thị hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2+x-2$ có giá trị tuyệt đối của hoành độ hai điểm cực trị là độ dài hai cạnh của tam giác vuông có cạnh huyền là $\sqrt{7}$. Hỏi có mấy giá trị của m?

A. 3. **B.** 1. **C.** Không có m. **D.** 2.

Câu 29. **(Phan Đăng Lưu - Huế - 2018)** Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)=-x^3+3x-4$ và $M(x_0;0)$ là điểm trên trục hoành sao cho tam giác MAB có chu vi nhỏ nhất, đặt $T=4x_0+2015$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?

A. $T=2017$. **B.** $T=2019$. **C.** $T=2016$. **D.** $T=2018$.

Câu 30. **(Chuyên Hà Tĩnh - 2018)** Tổng tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ có điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 0. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 31. **(THPT Triệu Thị Trinh - 2018)** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $y=x^3-5x^2+(m+4)x-m$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành.

A. $\varnothing$. **B.** $(-\infty;3)\cup(3;4]$. **C.** $(-\infty;3)\cup(3;4)$. **D.** $(-\infty;4)$.

Câu 32. **(CTN - LẦN 1 - 2018)** Biết $\frac{a}{b}$ (trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và a, $b\in\mathbb{N}^*$) là giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{2}{3}x^3-mx^2-2\left(3m^2-1\right)x+\frac{2}{3}$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1$. Tính giá trị biểu thức $S=a^2+b^2$.

A. $S=13$. **B.** $S=25$. **C.** $S=10$. **D.** $S=34$.

Câu 33. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3+x^2+mx-1$ nằm bên phải trục tung. Tìm số phần tử của tập hợp $(-5;6)\cap S$.

A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 34. **(THPT Nghen - Hà Tĩnh - 2018)** Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+3\left(m^2-1\right)x-3m^2-1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu nằm bên trái đường thẳng $x=2$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 35. **(Chuyên Hạ Long - 2018)** Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+2$ có hai điểm cực trị A và B sao cho các điểm A, B và $M\left(1;-2\right)$ thẳng hàng.

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=-\sqrt{2}$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-\sqrt{2}$; $m=\sqrt{2}$.

Câu 36. **(THPT Nam Trực - Nam Định - 2018)** Cho hàm số $y=\frac{m}{3}x^3-\left(m-1\right)x^2+3\left(m-2\right)x+2$. Hàm số đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+2x_2=1$ khi $m=a$ và $m=b$. Hãy tính tổng $a+b$.

A. $-\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** $-\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 37. **(THPT Cao Bá Quát - 2018)** Cho hàm số $y=2x^3-3\left(m+1\right)x^2+6mx+m^3$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A,B sao cho độ dài $AB=\sqrt{2}$.

A. $m=0$. **B.** $m=0$ hoặc $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Câu 38. **(THPT Phú Lương - Thái Nguyên - 2018)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^3-3mx^2+3m-3$ có hai điểm cực trị A,B sao cho $2AB^2-\left(OA^2+OB^2\right)=20$ (trong đó O là gốc tọa độ)

A. $m=-1$. **B.** $m=1$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=-\frac{17}{11}\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-\frac{17}{11}\end{array}\right.$.

Dạng 5. Tìm m để hàm số trùng phương có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước

Một số công thức tính nhanh "thường gặp"

liên quan cực trị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$

1 ***cực trị:*** $ab\geq 0$		3 ***cực trị:*** $ab<0$	
$a>0$: 1 cực tiểu	$a<0$: 1 cực đại	$a>0$: 1 cực đại, 2 cực tiểu	$a<0$: 2 cực đại, 1 cực tiểu

$A(0;c),B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right),C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)\Rightarrow AB=AC=\sqrt{\frac{b^4}{16a^2}-\frac{b}{2a}},BC=2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$

với $\Delta=b^2-4ac$

Phương trình qua điểm cực trị: $BC:y=-\frac{\Delta}{4a}$ và $AB,AC:y=\pm\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)^3x+c$

Gọi $\widehat{BAC}=\alpha$, luôn có: $8a(1+cos\alpha)+b^3(1-cos\alpha)=0\Rightarrow cos\alpha=\frac{b^3+8a}{b^3-8a}$ và $S^2=-\frac{b^5}{32a^3}$

Phương trình đường tròn đi qua $A,B,C:x^2+y^2-\left(c+n\right)x+c.n=0,$ với $n=\frac{2}{b}-\frac{\Delta}{4a}$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác là $R=\left|\frac{b^3-8a}{8ab}\right|$

Câu 1. **(THPT Lương Thế Vinh - 2018)** Cho hàm số $y=x^4-2x^2+2$. Diện tích S của tam giác có ba đỉnh là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho có giá trị là

A. $S=3$. **B.** $S=\frac{1}{2}$. **C.** $S=1$. **D.** $S=2$.

Câu 2. **(Chuyên Lê Hồng Phong - 2018)** Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ có ba điểm cực trị $A(0;\,1)$, B, C thỏa mãn $BC=4$?

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=4$. **C.** $m=\pm 4$. **D.** $m=\pm\sqrt{2}$.

Câu 3. **(Đề Minh Họa 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân

A. $m=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **D.** $m=-1$.

Câu 4. **(Mã 105 -2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^4-2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

A. $0<m<1$ **B.** $m>0$ **C.** $0<m<\sqrt[3]{4}$ **D.** $m<1$

Câu 5. **(Chuyên Nguyễn Trãi - Hải Dương - Lần 2 - 2020)** Cho hàm số $y=x^4-2mx^2-2m^2+m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C thỏa mãn $ABCD$ là hình thoi với $D(0;-3)$. Số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $m\in\left(\frac{1}{2};\frac{9}{5}\right)$. **B.** $m\in\left(\frac{9}{5};2\right)$. **C.** $m\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $m\in(2;3)$.

Câu 6. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông. Số phần tử của tập hợp S là

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 7. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Phòng 2019)** Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+1\,(1)$. Tổng lập phương các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính $R=1$ bằng

A. $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $2+\sqrt{5}$. **D.** $-1+\sqrt{5}$.

Câu 8. **(THPT Minh Châu Hưng Yên 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2m^2x^2+m+4$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều?

A. $m\in\left\{0;\sqrt{3};-\sqrt{3}\right\}$ **B.** $m\in\left\{0;\sqrt[6]{3};-\sqrt[6]{3}\right\}$ **C.** $m\in\left\{\sqrt[6]{3};-\sqrt[6]{3}\right\}$ **D.** $m\in\left\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\right\}$

Câu 9. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4-2m^2x^2+1$ có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác vuông cân.

A. $m=1$. **B.** $m\in\{-1;1\}$. **C.** $m\in\{-1;0;1\}$. **D.** $m\in\varnothing$.

Câu 10. **(Toán Học Tuổi Trẻ Số 5)** Tìm tất cả các giá trị m sao cho đồ thị hàm số $y=x^4+(m+1)x^2-2m-1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác có một góc bằng $120°$.

A. $m=-1-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$. **B.** $m=-1-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$, $m=-1$.

C. $m=-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. **D.** $m<-1$.

Câu 11. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) của hàm số $y=x^4-2m^2x^2+m^4+5$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tứ giác nội tiếp. Tìm số phần tử của S.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 12. **(Chuyên Quang Trung - 2018)** Cho hàm số $y=x^4-2mx^2-2m^2+m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C và $ABDC$ là hình thoi trong đó $D(0;-3)$, A thuộc trục tung. Khi đó m thuộc khoảng nào?

A. $m\in\left(\frac{9}{5};2\right)$. **B.** $m\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $m\in(2;3)$. **D.** $m\in\left(\frac{1}{2};\frac{9}{5}\right)$.

Câu 13. **(THPT Nguyễn Huệ - Ninh Bình - 2018)** Cho hàm số $y=-x^4+2mx^2+2$ có đồ thị (C_m). Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông.

A. $m=\sqrt[3]{3}$. **B.** $-m=\sqrt[3]{3}$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=1$.

Câu 14. **(CHUYÊN ĐHSPHN - 2018)** Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng

A. 1. **B.** $\sqrt{2}+1$. **C.** $\sqrt{2}-1$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 15. **(Hồng Bàng - Hải Phòng - 2018)** Cho hàm số $y=x^4+2(m-4)x^2+m+5$ có đồ thị (C_m). Tìm m để (C_m) có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

A. $m=1$ hoặc $m=\frac{17}{2}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=4$. **D.** $m=\frac{17}{2}$.

Câu 16. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^4-2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

A. $m<1$. **B.** $0<m<1$. **C.** $0<m<\sqrt[3]{4}$. **D.** $m>0$.

Câu 17. **(Liên Trường - Nghệ An -2018)** Gọi m_0 là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4+2mx^2-1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $m_0\in(-1;0]$. **B.** $m_0\in(-2;-1]$. **C.** $m_0\in(-\infty;-2]$. **D.** $m_0\in(-1;0)$.

Câu 18. **(Chuyên Bắc Ninh - 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

A. $m=0\cdot$ **B.** $m=-1;m=0$. **C.** $m=1$. **D.** $m=1;m=0$.

Câu 19. **(THPT Triệu Thị Trinh - 2018)** Cho hàm số: $y=x^4+2mx^2+m^2+m$. Tìm m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị lập thành tam giác có một góc bằng $120°$.

A. $m=\frac{-1}{\sqrt{3}}$. **B.** $m=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. **C.** $m=\frac{-1}{\sqrt[3]{3}}$. **D.** $m=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 20. **(THPT Thái Phiên - Hải Phòng - 2018)** Đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2-m$ có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua ba điểm cực trị này có bán kính bằng 1 thì giá trị của m là:

A. $m=1;m=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **B.** $m=1;m=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

C. $m=-1;m=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $m=-1;m=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Dạng 6. Tìm m để hàm số bậc 2 trên bậc 1 có cực trị thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 1. **(Toán Học Tuổi Trẻ Số 5)** Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+2x+3}{2x+1}$.

A. $y=2x+2$. **B.** $y=x+1$. **C.** $y=2x+1$. **D.** $y=1-x$.

Câu 2. **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Điều kiện của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2-mx}{1-x}$ có cực đại và cực tiểu là

A. $m<0$. **B.** $m>-1$. **C.** $m<2$. **D.** $m>-2$.

Câu 3. **(Chuyên KHTN - Hà Nội - Lần 3)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+2m}{x+1}$ có hai điểm cực trị A, B và tam giác OAB vuông tại O. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 9. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 4. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Biết rằng đồ thị $(H):y=\dfrac{x^2+2x+m}{x-2}$ (với m là tham số thực) có hai điểm cực trị là A,B. Hãy tính khoảng cách từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng AB.

A. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 5. **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2018)** Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+m^2}{x-1}$ có hai điểm cực trị A,B. Khi $\angle AOB=90^\circ$ thì tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng:

A. $\dfrac{1}{16}$. **B.** 8. **C.** $\dfrac{1}{8}$. **D.** 16.

Câu 6. **(Chuyên KHTN - 2018)** Với tham số m, đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-mx}{x+1}$ có hai điểm cực trị A, B và $AB=5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m>2$. **B.** $0<m<1$. **C.** $1<m<2$. **D.** $m<0$.

Câu 7. **(Cụm 5 Trường Chuyên - ĐBSH - 2018)** Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-|m|x+4}{x-|m|}$. Biết rằng đồ thị hàm số có hai điểm cực trị phân biệt là A, B. Tìm số giá trị m sao cho ba điểm A, B, $C(4;2)$ phân biệt và thẳng hàng.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 8. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến - 2018)** Giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại điểm $x_0=2$ là:

A. $m=-1$. **B.** $m=-3$. **C.** $m=1$. **D.** $m=3$.

Câu 9. **(THPT Nam Trực - Nam Định - 2018)** Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2mx+m+2}{2x-2m}$. Để hàm số có cực đại và cực tiểu, điều kiện của tham số m là:

A. $\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>2\end{array}\right.$ **B.** $-1<m<2$. **C.** $-2<m<1$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m<-2\\m>1\end{array}\right.$.

Câu 10. **(Chuyên Nguyễn Dình Triểu - Đồng Tháp - 2018)** Để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại $x=2$ thì m thuộc khoảng nào?

A. $(0;2)$. **B.** $(-4;-2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(2;4)$.

Câu 11. **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Cho hàm số $y = x + p + \dfrac{q}{x+1}$ đạt cực đại tại điểm $A(-2;-2)$. Tính pq.

A. $pq = 2$. **B.** $pq = \dfrac{1}{2}$. **C.** $pq = \sqrt{3}$. **D.** $pq = 1$.

Câu 12. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có giá trị cực đại là 7.

A. $m = 7$. **B.** $m = 5$. **C.** $m = -9$. **D.** $m = -5$.

---------- HẾT ----------

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 2 CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH 9 - 10

Dạng 1. Bài toán cực trị hàm số chứa dấu trị tuyệt đối

Bài toán: Đồ thị hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị

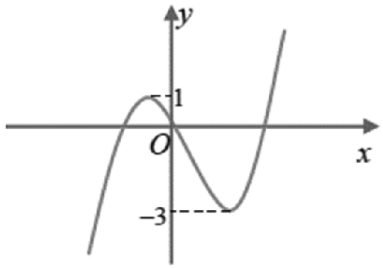
(Áp dụng định nghĩa). $y=f(x)=\sqrt{f^2(x)}\Rightarrow y'=\dfrac{2f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$

$$y'=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=0(1)\\ f'(x)=0(2)\end{array}\right.$$

Số nghiệm của (1) chính là số giao điểm của đồ thị $y=f(x)$ và trục hoành $y=0$. Còn số nghiệm của (2) là số cực trị của hàm số $y=f(x)$, dựa vào đồ thị suy ra (2). Vậy tổng số nghiệm bội lẻ của (1) và (2) chính là số cực trị cần tìm.

Dạng toán này mình làm tựa theo đề tham khảo 2018, vẫn xuất hiện ở dạng toán hàm hợp, các bạn học chú ý nhé!

Câu 1. **(Chuyên Vinh – Lần 2).** Đồ thị (C) có hình vẽ bên.



Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\left|f\left(x\right)+m\right|$ có ba điểm cực trị là:

A. $m\le -1$ hoặc $m\ge 3$. **B.** $m\le -3$ hoặc $m\ge 1$. **C.** $m=-1$ hoặc $m=3$. **D.** $1\le m\le 3$.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ có 7 điểm cực trị?

A. 5 **B.** 6 **C.** 4 **D.** 3

Câu 3. **(Gia Bình 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	6	↘	2	↗	$+\infty$

Hàm số $y=f\left(\left|x-3\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị

A. 5 **B.** 6 **C.** 3 **D.** 1

Câu 4. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\left|x^4-2mx^2+2m^2+m-12\right|$ có bảy điểm cực trị

A. 1. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 5. **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m^2\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 6. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị.

A. 16 **B.** 44 **C.** 26 **D.** 27

Câu 7. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=\left|x^4-2mx^2+2m-1\right|$ với m là tham số thực. Số giá trị nguyên trong khoảng $[-2;2]$ của m để hàm số đã cho có 3 điểm cực trị là

A. 2 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 1

Câu 8. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m-1\right|$ có 7 điểm cực trị là:

A. $(0;6)$ **B.** $(6;33)$ **C.** $(1;33)$ **D.** $(1;6)$

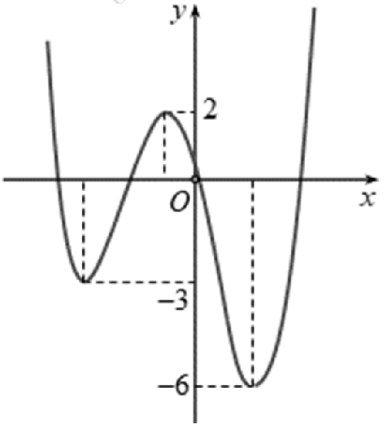
Câu 9. **(THPT Kinh Môn - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

A. $\frac{5}{4}<m\le 2$. **B.** $-2<m<\frac{5}{4}$. **C.** $-\frac{5}{4}<m<2$. **D.** $\frac{5}{4}<m<2$.

Câu 10. **(Chuyên Đh Vinh - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\left(x^3-2x^2\right)\left(x^3-2x\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $\left|f\left(1-2018x\right)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 9. **B.** 2018. **C.** 2022. **D.** 11.

Câu 11. **(THPT Thạch Thanh 2 - Thanh Hóa - 2018)** Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f(x)$.



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f\left(x-1\right)+m\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 9. **B.** 12. **C.** 18. **D.** 15.

Câu 12. **(THPT Quảng Yên - Quảng Ninh - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4+4x^3-12x^2+\frac{m}{2}\right|$ có 7 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 13. **(THPT Nguyễn Tất Thành - Yên Bái - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 14. **(Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai - Sóc Trăng - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^5-25x^3+60x+m\right|$ có 7 điểm cực trị?

A. 42. **B.** 21. **C.** 40. **D.** 20.

Câu 15. **(Sở Nam Định - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	11	↘	4	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=\left|f(x)-2m\right|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

A. $m\in(4;11)$. **B.** $m\in\left(2;\frac{11}{2}\right)$. **C.** $m=3$. **D.** $m\in\left[2;\frac{11}{2}\right]$.

Câu 16. **(THPT Nguyễn Huệ - Tt Huế - 2018)** Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=\left|f(x-2)+m\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 15. **B.** 18. **C.** 9. **D.** 12.

Câu 17. **(Sở Hưng Yên - 2018)** Cho hàm số $f(x)=\left|x^3-3x^2+m\right|$ với $m\in[-5;5]$ là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng ba điểm cực trị.

A. 3. **B.** 0. **C.** 8. **D.** 6.

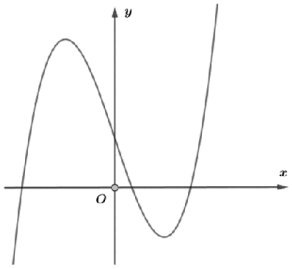
Câu 18. **(Chuyên Hùng Vương - Bình Dương - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2018	↘	-2018	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=\left|f(x-2017)+2018\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 19. **(Chuyên Ngữ - Hà Nội - 2018)** Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$.



Hỏi hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)+2018$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 20. **(Sở- Nam Định - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	11	↘	4	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=\left|f(x)-2m\right|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

A. $m\in(4;11)$. **B.** $m\in\left(2;\frac{11}{2}\right)$. **C.** $m=3$. **D.** $m\in\left[2;\frac{11}{2}\right]$.

Dạng 2. Số điểm cực trị của hàm hợp

Bài toán: Cho hàm số $y=f(x)$ *(Đề có thể cho bằng hàm, đồ thị, bảng biến thiên của* $f(x),f'(x)$*)*. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(u)$ trong đó u là một hàm số đối với x

Ta thực hiện phương pháp tương tự xét số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$

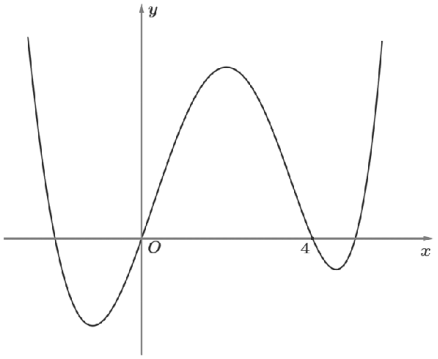
Bước 1. Tính đạo hàm $y'=u'.f'(u)$

Bước 2. Giải phương trình $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u'=0\\f'(u)=0\end{array}\right.$

Bước 3.Tìm số nghiệm đơn và bội lẻ hoặc các điểm mà y' không xác định.

Kết luận

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3+3x^2\right)$ là



A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 11.

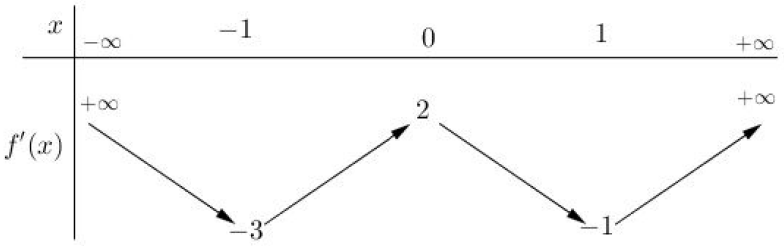
Câu 2. **(Mã 101 - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ là

A. 9. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 5.

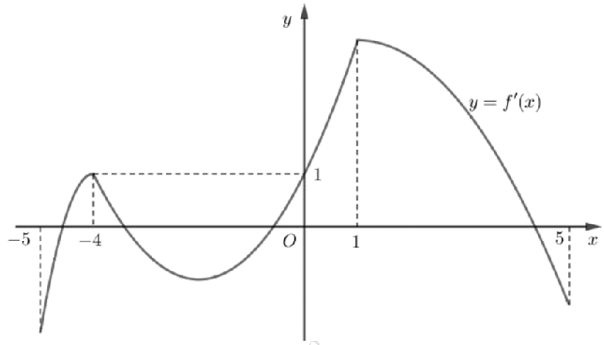
Câu 3. **(Mã 104 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(4x^2+4x\right)$ là

A. 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 4. **(Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=f\left(x^2+4x\right)-x^2-4x$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $\left(-5;1\right)$?



A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

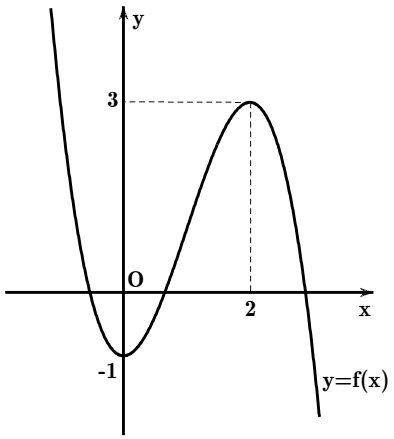
Câu 5. **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình sau:

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $g\left(x\right)=f\left(1-x\right)+\frac{x^3}{3}-2x^2+3x$ đạt cực tiểu tại điểm nào trong các điểm sau?

A. $x=3$. **B.** $x=0$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=1$.

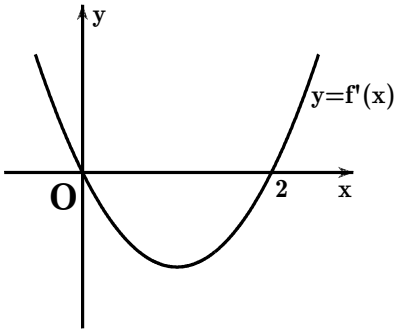
Câu 6. **(Chuyên KHTN - 2020)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f\left(x\right)$ như hình vẽ.



Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^3+x\right)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0. Giá trị x_0 thuộc khoảng nào sau đây

A. $\left(1;3\right)$. **B.** $\left(-1;1\right)$. **C.** $\left(0;2\right)$. **D.** $\left(3;+\infty\right)$.

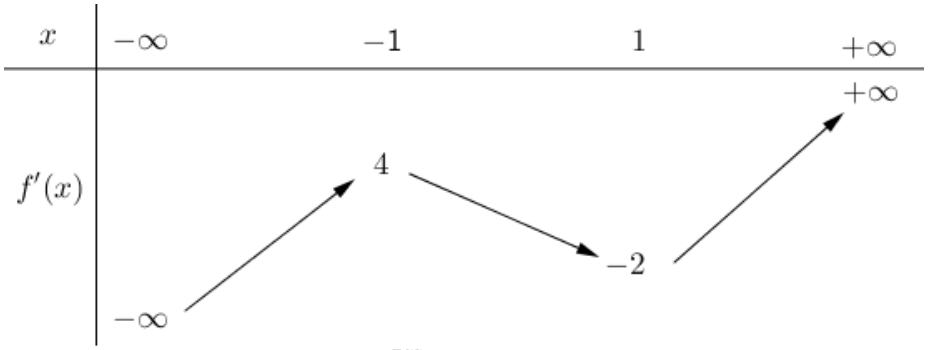
Câu 7. **(Chuyên KHTN - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f(-x^2+x)$ là

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 8. **(Chuyên Lam Sơn - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:



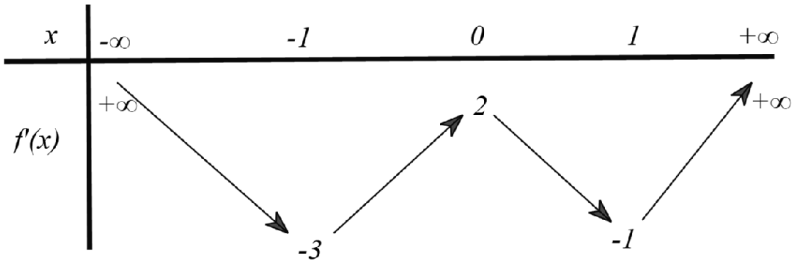
Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2+2x)$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 7.

Câu 9. **(Sở Bắc Giang - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2;-1;0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y=f(x^2-2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 7.

Câu 10. **(Mã 102 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau



Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2+2x)$ là

A. 9. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 3.

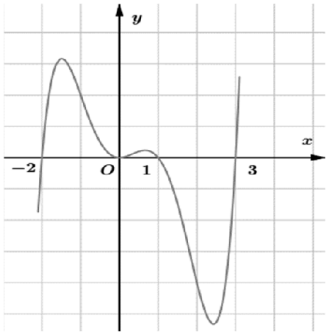
Câu 11. **(Mã 103 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

Số cực trị của hàm số $y=f\left(4x^2-4x\right)$ là

A. 3. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 7.

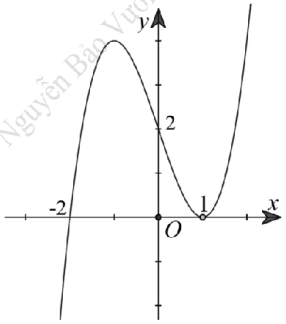
Câu 12. **(Chuyên An Giang - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên.



Hàm số $g(x)=f\left(x^2\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

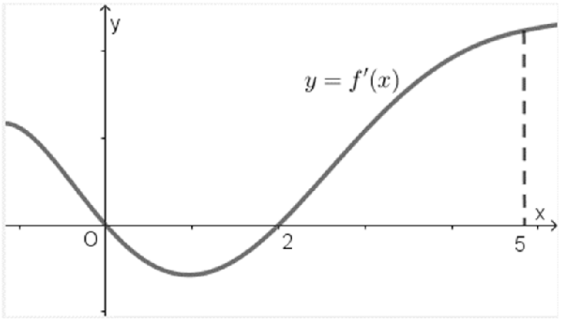
A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 13. **(THPT Lê Văn Thịnh Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-3\right)$.



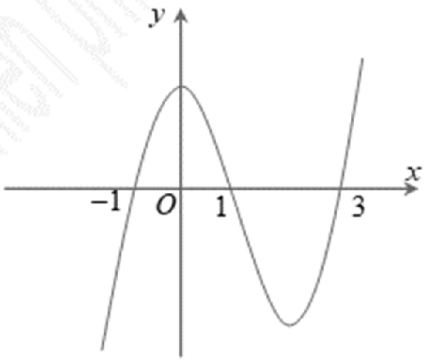
A. 4 **B.** 2 **C.** 5 **D.** 3

Câu 14. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Tính số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2\right)$ trên khoảng $\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$.



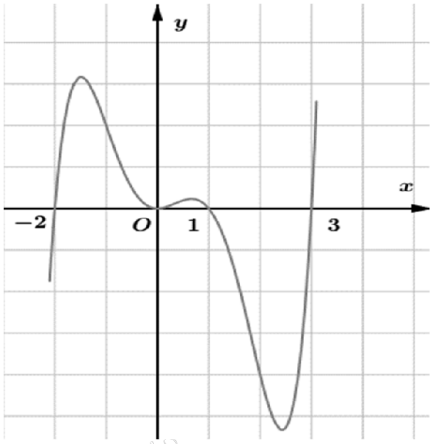
A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 15. **(Chuyên Vinh - 2018)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ là



A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

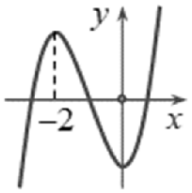
Câu 16. **(Chuyên Thoại Ngọc Hầu 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau.



Hàm số $g(x)=f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

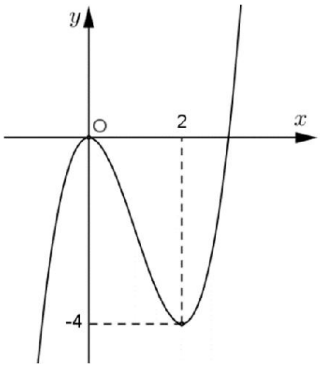
A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x^2-2x-4)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



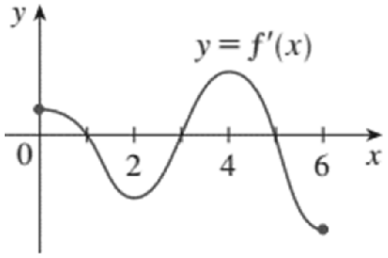
A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 18. **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An -2018)** Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f[f(x)]$.



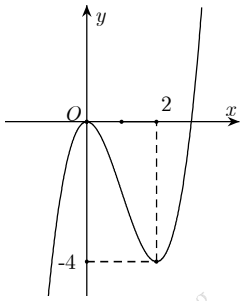
A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 19. **(Sở Bình Phước - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0;6]$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y=[f(x)]^2$ có tối đa bao nhiêu cực trị.



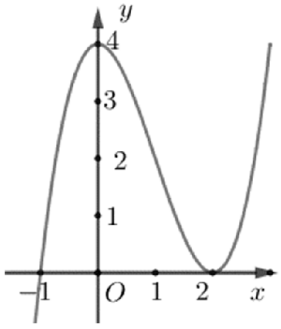
A. 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 20. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f[f(x)]$?



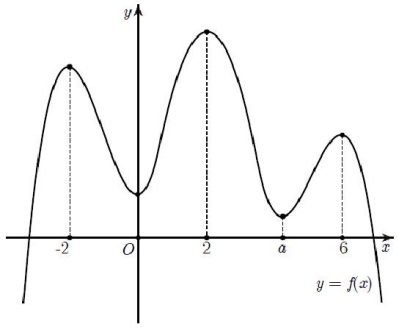
A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 21. **(THPT Đô Lương 3 - Nghệ An - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(f(x))$ là.



A. 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

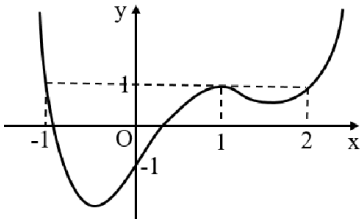
Câu 22. **(Sở GD Bắc Ninh - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết tất cả các điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là -2; 0; 2; a; 6 với $4<a<6$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^6-3x^2)$ là

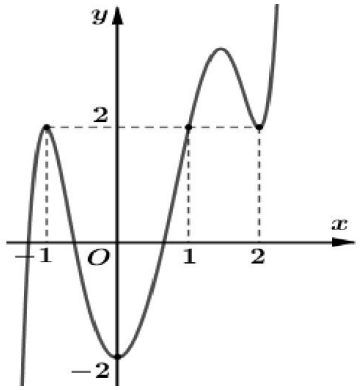
A. 8. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 23. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x)=f(x)-x$. Hàm số đạt cực đại tại điểm thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{3}{2};3\right)$ **B.** $(-2;0)$ **C.** $(0;1)$ **D.** $\left(\frac{1}{2};2\right)$

Câu 24. **(Thpt Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Cho hàm số $y=f'(x-1)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=\pi^{2f(x)-4x}$ đạt cực tiểu tại điểm nào?

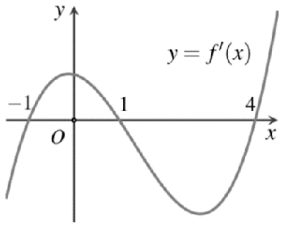
A. $x=1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-1$.

Câu 25. **(THPT Minh Châu Hưng Yên 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên.

Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x-2017)-2018x+2019$ là.

A. 3 **B.** 4 **C.** 1 **D.** 2

Câu 26. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Cho hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=e^{2f(x)+1}+5^{f(x)}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

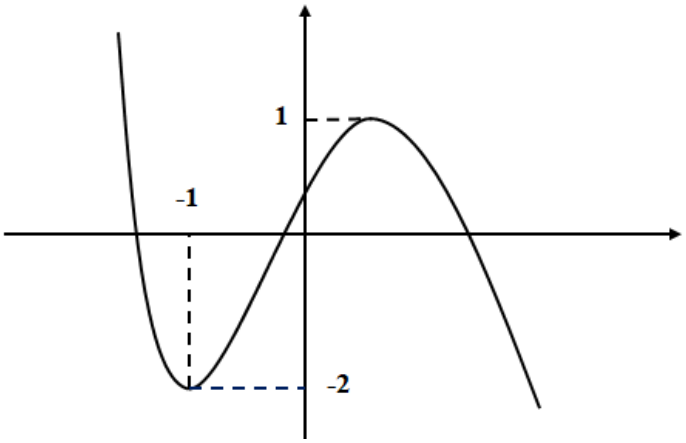
Câu 27. **(THPT Quỳnh Lưu - Nghệ An - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y=2f(x)+1$ đạt cực tiểu tại điểm

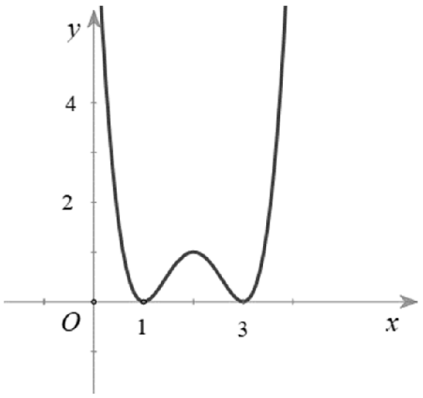
A. $x=2$. **B.** $x=0$. **C.** $x=1$. **D.** $x=5$.

Câu 28. **(Liên Trường - Nghệ An - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)+2x$ là:



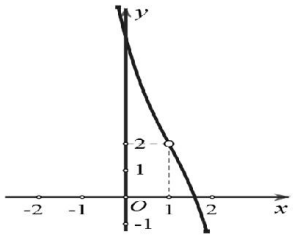
A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ dưới. Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{x^3}{3}+2x^2-5x+2001$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và không có cực trị, đồ thị của hàm số $y=f(x)$ là đường cong của như hình vẽ dưới đây.



Xét hàm số $h(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)\right]^2-2x.f(x)+2x^2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Đồ thị của hàm số $y=h(x)$ có điểm cực tiểu là $M(1;0)$.

B. Hàm số $y=h(x)$ không có cực trị.

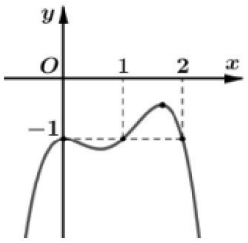
C. Đồ thị hàm số $y=h(x)$ có điểm cực đại là $N(1;2)$.

D. Đồ thị hàm số $y=h(x)$ có điểm cực đại là $M(1;0)$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)=x^4$. Hàm số $g(x)=f'(x)-3x^2-6x+1$ đạt cực tiểu, cực đại lần lượt tại x_1, x_2. Tính $m=g(x_1)g(x_2)$.

A. $m=0$. **B.** $m=\dfrac{-371}{16}$. **C.** $m=\dfrac{1}{16}$. **D.** $m=-11$.

Câu 33. **(Kim Liên - Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

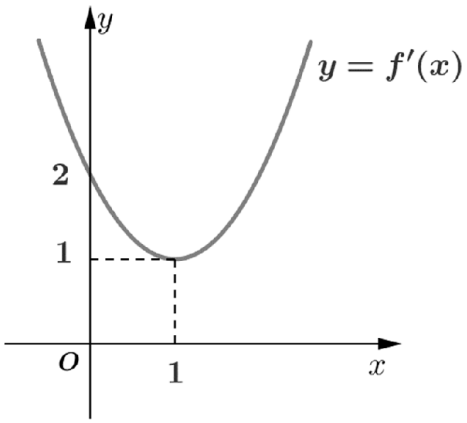


Hàm số $g(x)=f(x)+x$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x=1$. **B.** $x=2$.

C. Không có điểm cực tiểu. **D.** $x=0$.

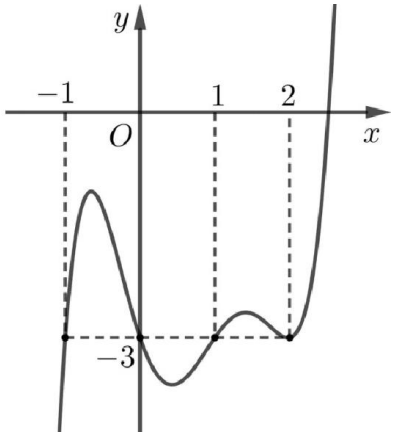
Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là parabol như hình bên dưới.



Hàm số $y=f(x)-2x$ có bao nhiêu cực trị?

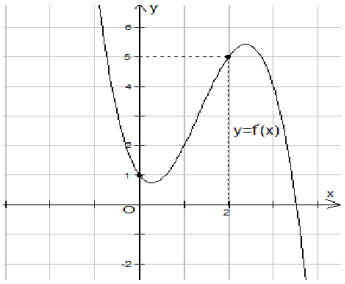
A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 35. Cho hàm số đa thức $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0)<0$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x)=\left|f(x)+3x\right|$ cóbao nhiêu cực trị?



A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình bên.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

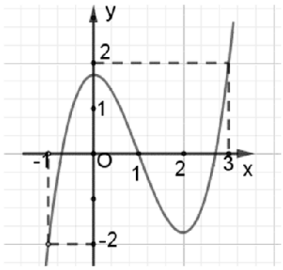
A. Hàm số $y=f(x)-x^2-x$ đạt cực đại tại $x=0$.

B. Hàm số $y=f(x)-x^2-x$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

C. Hàm số $y=f(x)-x^2-x$ không đạt cực trị tại $x=0$.

D. Hàm số $y=f(x)-x^2-x$ không có cực trị.

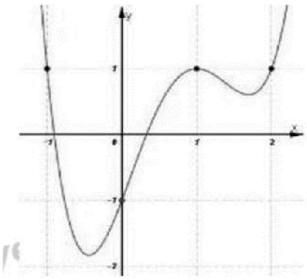
Câu 37. **(THPT Minh Khai)** Cho hàm số Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x)=2f(x)-x^2+2x+2019$. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y=g(|x|)$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.

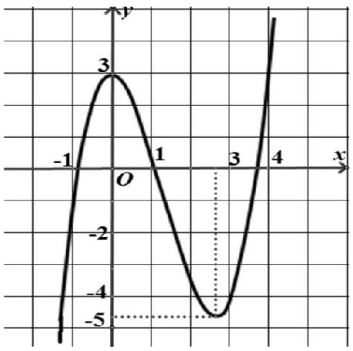


Đặt $g(x)=f(x)-x$. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

A. $x=1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=0$. **D.** $x=-1$.

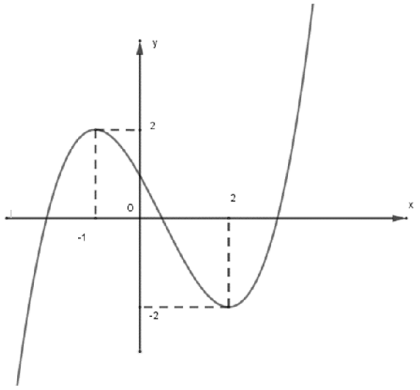
Câu 39. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ.

Đặt $g(x)=3f(f(x))+4$. Tìm số cực trị của hàm số $g(x)$



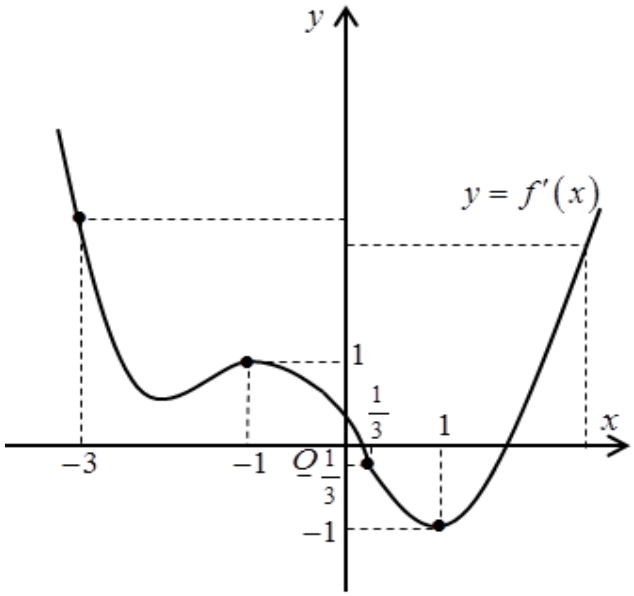
A. 2. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 6.

Câu 40. **(HSG 12 - Sở Quảng Nam - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f(x)$ là đường cong ở hình vẽ. Hỏi hàm số $h(x)=\left|[f(x)]^2-4f(x)+1\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 41. **(THPT Thăng Long - Hà Nội - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=2f\left(\dfrac{5\sin x-1}{2}\right)+\dfrac{(5\sin x-1)^2}{4}+3$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0;2\pi)$.



A. 9. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 42. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^4\left[f(x+1)\right]^2$ là

A. 11. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 5.

Câu 43. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^2\left[f(x-1)\right]^4$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 9.

Câu 44. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biên thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^4[f(x-1)]^2$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 11.

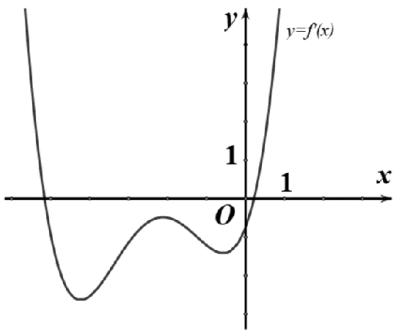
Câu 45. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-2	↗	3	↘	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^2\left[f(x+1)\right]^4$

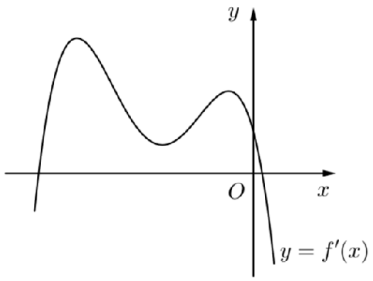
A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 5.

Câu 46. **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$. Biết $y=f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f(x^3)-x\right|$ là



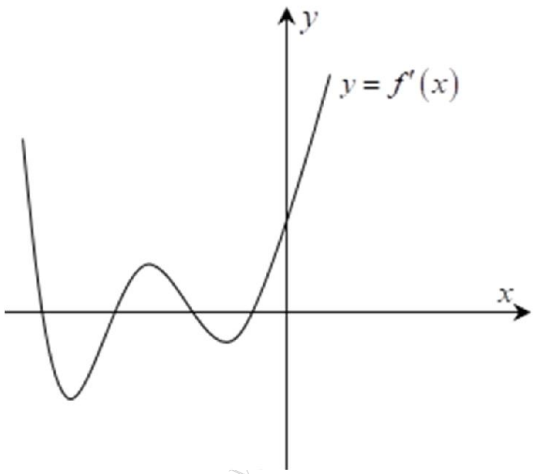
A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 47. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$. Biết $y=f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f(x^3)+x\right|$ là



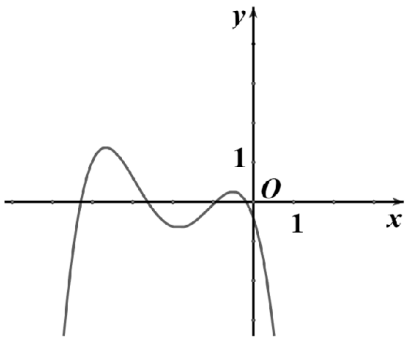
A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 48. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$. Biết $y=f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left(x^4\right)-x^2\right|$ là



A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 49. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$. Biết $y=f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left(x^4\right)+x^2\right|$ là



A. 3. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

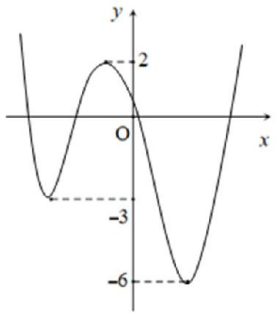
Câu 50. **(Chuyên Quang Trung - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như hình vẽ bên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2|x|\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

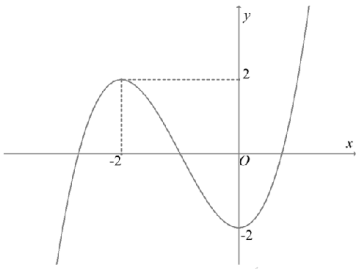
A. 4 **B.** 7 **C.** 9 **D.** 11

Câu 51. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-12;12]$ để hàm số $g(x)=|2f(x-1)+m|$ có 5 điểm cực trị?



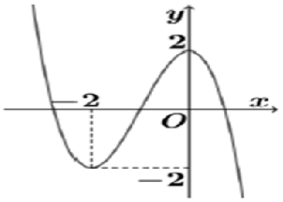
A. 13. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 12.

Câu 52. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ và $a\neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(-2x^2+4x\right)$



A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

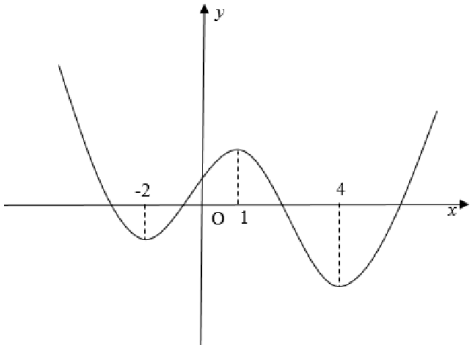
Câu 53. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f\left(-x^2+x\right)$ bằng

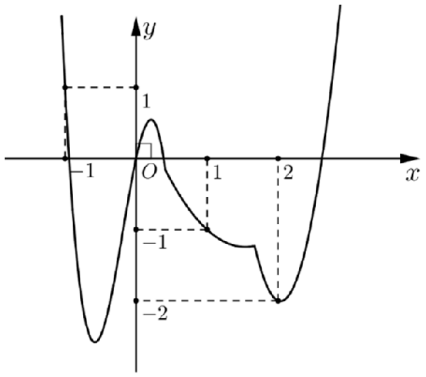
A. 1. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 54. **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f\left(e^x-\dfrac{x^2+2x}{2}\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 55. **(Sở Yên Bái - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)+x^2+1$. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

B. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

C. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

D. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

Câu 56. **(Kim Liên - Hà Nội - 2020)** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 16. **B.** 28. **C.** 26. **D.** 27.

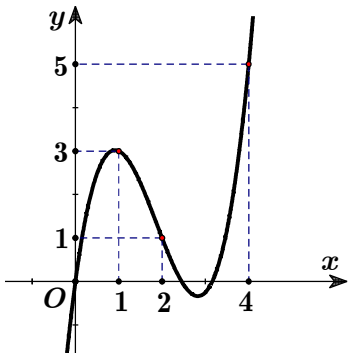
Câu 57. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$		↗	1	↘	-2	↗	1	↘	

Hàm số $y=f(2x)$ đạt cực đại tại

A. $x=\dfrac{1}{2}$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-2$.

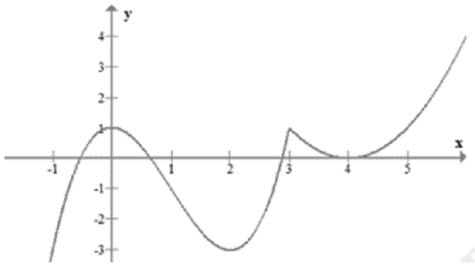
Câu 58. **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0)=0; f(4)>4$. Biết hàm $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f(x^2)-2x\right|$ là

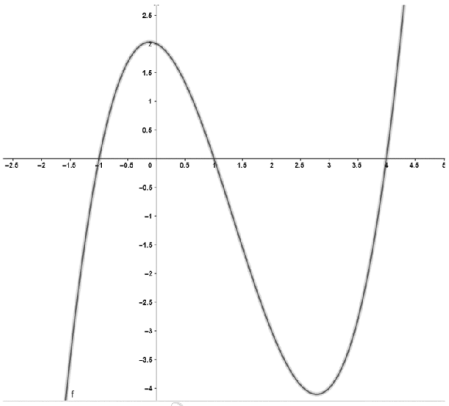
A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 59. **(Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(4;+\infty)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(2|x|-2)$ bằng



A. 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 9.

Câu 60. **(Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Tìm điểm cực đại của hàm số $y=2019^{-f(x)}-2020^{f(x)}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

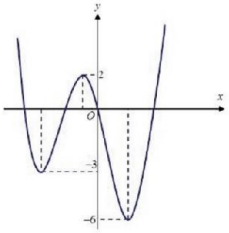
Câu 61. **(Kim Thành - Hải Dương - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ là một hàm đa thức có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^2-|x|\right)$

A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 7.

Câu 62. **(Trần Phú - Quảng Ninh - 2020)** Cho đồ thị $y=f(x)$ như hình vẽ dưới đây:

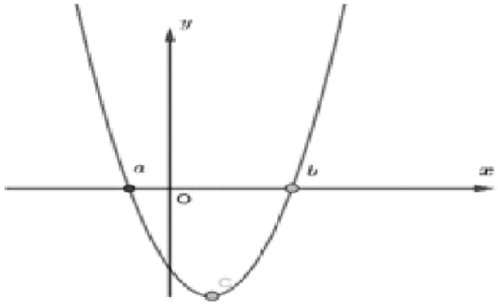


Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f(x+2018)+\frac{1}{3}m^2\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các giá trị của các phần tử trong tập S bằng

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

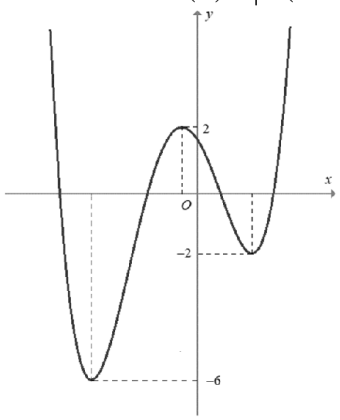
Dạng 3. Tìm m để hàm số f(u) thỏa mãn điều kiện cho trước

Câu 1. **(Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020)** Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị của hàm đạo hàm $f'\left(x\right)$ như hình vẽ và $f\left(b\right)=1$.Số giá trị nguyên của $m\in\left[-5;5\right]$ để hàm số $g\left(x\right)=\left|f^2\left(x\right)+4f\left(x\right)+m\right|$ có đúng 5 điểm cực trị là



A. 8. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 2. **(Sở Bình Phước - 2020)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x+2020\right)+m^2\right|$ có 5 điểm cực trị?

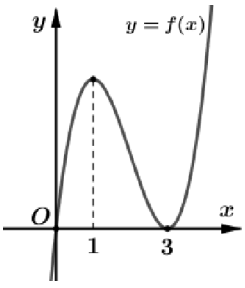


A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 3. **(Chuyên Lào Cai - 2020)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x^2\left(x+2\right)^4\left(x+4\right)^3\left[x^2+2\left(m+3\right)x+6m+18\right]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f\left(x\right)$ có **đúng** một điểm cực trị?

B. 7. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 4. **(THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h\left(x\right)=\left|f^2\left(x\right)+2f\left(x\right)+2m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $m>1$ **B.** $m\geq1$ **C.** $m\leq2$ **D.** $m>2$

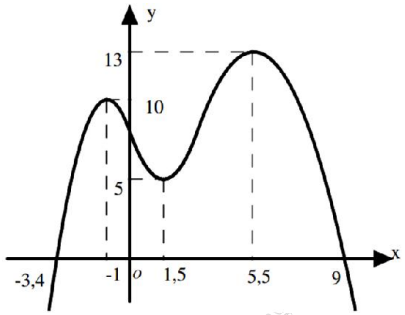
Câu 5. **(THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-a)(13x-15)^3$. Tập hợp các giá trị của a để hàm số $y=f\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)$ có 6 điểm cực trị là

A. $\left[-\frac{5}{4};\frac{5}{4}\right]\setminus\left\{0;\frac{15}{13}\right\}$. **B.** $\left(-\frac{5}{4};\frac{5}{4}\right)\setminus\left\{0;\frac{15}{13}\right\}$. **C.** $\left(-\frac{5}{4};\frac{5}{4}\right)\setminus\{0\}$. **D.** $\left(-\frac{5}{4};\frac{5}{4}\right)\setminus\left\{\frac{15}{13}\right\}$.

Câu 6. **(Chuyên Vinh - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x^2-8x+m)$ có 5 điểm cực trị?

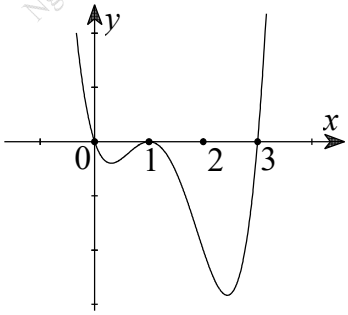
A. 15. **B.** 17. **C.** 16 **D.** 18

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết rằng $f'(x)<0$ với mọi $x\in(-\infty;-3,4)\cup(9;+\infty)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(x)-mx+5$ có **đúng** hai điểm cực trị.



A. 7. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 8. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tìm m để hàm số $y=f(x^2+m)$ có 3 điểm cực trị.

A. $m\in(3;+\infty)$. **B.** $m\in[0;3]$. **C.** $m\in[0;3)$. **D.** $m\in(-\infty;0)$.

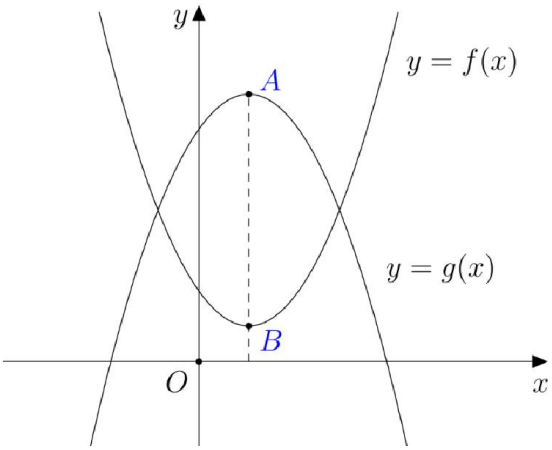
Câu 9. **(THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa - 2019)** Cho hàm số $f'(x)=(x-2)^2(x^2-4x+3)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=f(x^2-10x+m+9)$ có 5 điểm cực trị?

A. 18. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 15.

Câu 10. **(Chuyên Bắc Giang - Lần 4 - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)^2(x-1)(x^2-2(m+1)x+m^2-1)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 11. **(Sở GD Quảng Nam - 2019)** Cho hai hàm đa thức $y=f(x)$, $y=g(x)$ có đồ thị là hai đường cong ở hình vẽ. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đúng một điểm cực trị là A, đồ thị hàm số $y=g(x)$ có đúng một điểm cực trị là B và $AB=\frac{7}{4}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-5;5)$ để hàm số $y=\left|\left|f(x)-g(x)\right|+m\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?

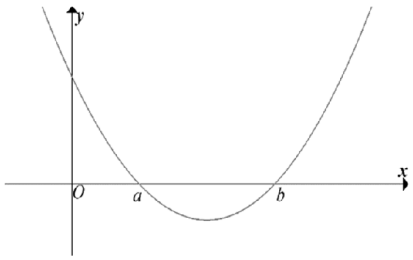


A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 12. **(Sở GD Bạc Liêu - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị là $\left(\frac{a}{b};c\right)$, (với a, b, c là các số nguyên, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của biểu thức $M=a^2+b^2+c^2$ là

A. $M=40$. **B.** $M=11$. **C.** $M=31$. **D.** $M=45$.

Câu 13. **(Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - Lần 3 - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tập hợp S tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x)=\left|2f^2(x)+3f(x)+m\right|$ có đúng 7 điểm cực trị, biết phương trình $f'(x)=0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt, $f(a)=1, f(b)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.



A. $S=(-5;0)$. **B.** $S=(-8;0)$. **C.** $S=\left(-8;\frac{1}{6}\right)$. **D.** $S=\left(-5;\frac{9}{8}\right)$.

Câu 14. **(THPT Thanh Chương - Nghệ An - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}\left|x^3\right|-(3-m)x^2+(3m+7)|x|-1$ có 5 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.

---------- **HẾT** ----------

Dạng 1. Tìm cực trị của hàm số dựa vào bảng biến thiên, đồ thị của hàm số y, y'

-Định lí cực trị

- ***Điều kiện cần (định lí 1)***: *Nếu hàm số* $y=f(x)$ *có đạo hàm trên khoảng* $(a;b)$ *và đạt cực đại (hoặc cực tiểu) tại* x_0 *thì* $f'(x_0)=0$.
- ***Điều kiện đủ (định lí 2)***:

Nếu $f'(x)$ *đổi dấu từ* ***âm sang dương*** *khi* x *đi qua điểm* x_0 *(theo chiều tăng) thì hàm số* $y=f(x)$ *đạt* ***cực tiểu*** *tại điểm* x_0.

Nếu $f'(x)$ *đổi dấu từ* ***dương sang âm*** *khi* x *đi qua điểm* x_0 *(theo chiều tăng) thì hàm số* $y=f(x)$ *đạt* ***cực đại*** *tại điểm* x_0.

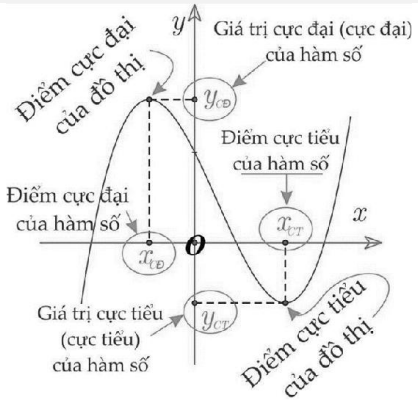
- ***Định lí 3***: *Giả sử* $y=f(x)$ *có đạo hàm cấp* 2 *trong khoảng* $(x_0-h;\ x_0+h)$, *với* $h>0$. *Khi đó:*

Nếu $y'(x_0)=0,\ y''(x_0)>0$ *thì* x_0 *là điểm cực tiểu.*

Nếu $y'(x_0)=0,\ y''(x_0)<0$ *thì* x_0 *là điểm cực đại.*

- Các THUẬT NGỮ cần nhớ

- *Điểm cực đại (cực tiểu) của* ***hàm số*** *là* x_0, ***giá trị cực đại (cực tiểu)*** *của hàm số là* $f(x_0)$ *(hay* $y_{CĐ}$ *hoặc* y_{CT}*). Điểm cực đại của* ***đồ thị hàm số*** *là* $M(x_0;f(x_0))$.
- *Nếu* $M(x_0;y_0)$ *là điểm cực trị của đồ thị hàm số* $y=f(x)\Rightarrow\begin{cases}y'(x_0)=0\\M(x_0;y_0)\in y=f(x)\end{cases}$.



Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2020 – Lần 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

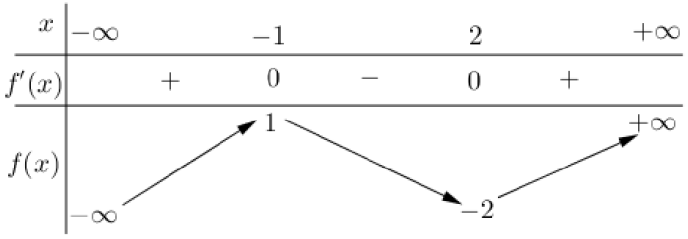
A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** -4.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng -4.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2020 – Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số đã cho đạt cực đại tại

A. $x=-2$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

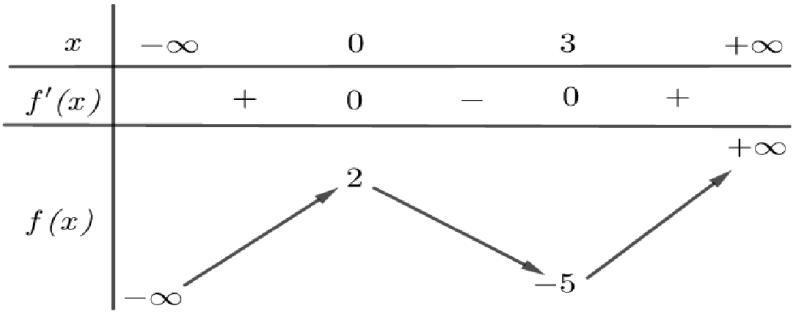
Lời giải

Chọn D

Hàm số đạt cực đại tại điểm mà đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm.

Từ bảng biến thiên hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.

Câu 3. **(Mã 101 – 2020 Lần 1)** Cho hàm $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

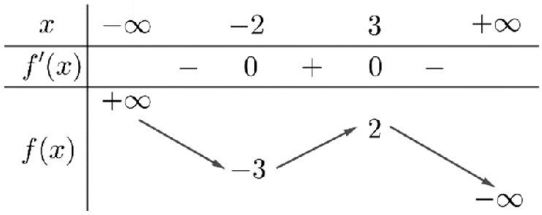
A. 3. **B.** −5. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B.

Từ BBT ta có hàm số đạt giá trị cực tiểu $f(3)=-5$ tại $x=3$

Câu 4. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau.



Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

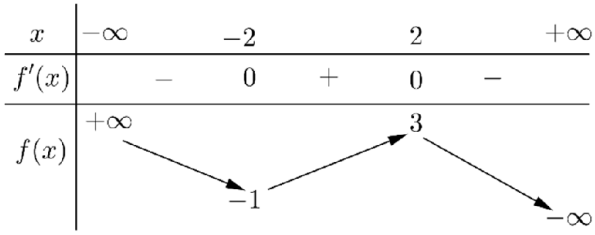
A. 3. **B.** 2. **C.** −2. **D.** −3.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực đại của hàm số đã cho là $y_{CD}=2$.

Câu 5. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

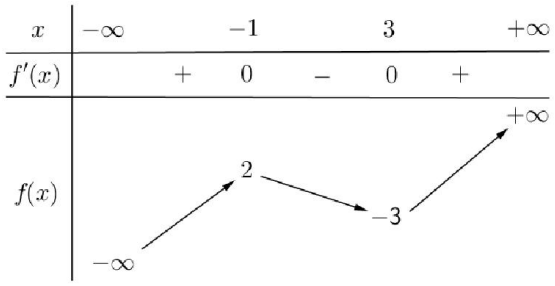
A. 2. **B.** −2. **C.** 3. **D.** −1.

Lời giải

Chọn D

Gía trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng -1.

Câu 6. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

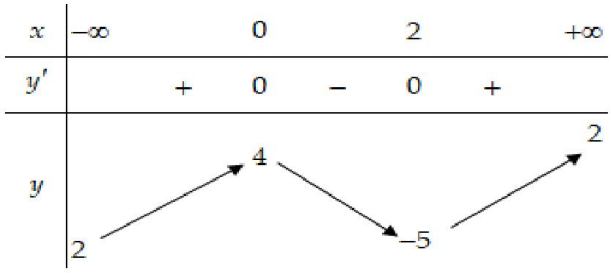
A. 3. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 2.

Câu 7. **(Mã 105 - 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-5$ **B.** Hàm số có bốn điểm cực trị

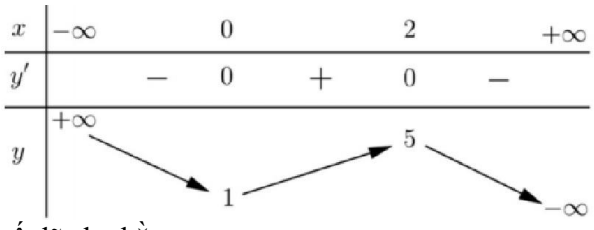
C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ **D.** Hàm số không có cực đại

Lời giải

Chọn.C

Dựa vào bảng biến thiên. Hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $y'(2)=0; y'$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x=2$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$.

Câu 8. **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

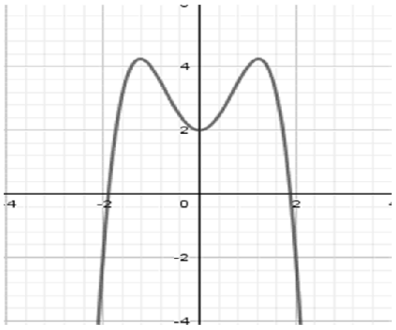
A. 5 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 1

Lời giải

Chọn A

Dựa bào BBT ta có: Giá trị cực đại của hàm số là $y_{CD}=5$

Câu 9. **(Mã 104 - 2018)** Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:



A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

Lời giải

Chọn A

Hàm số có ba điểm cực trị.

Câu 10. **(Mã 110 - 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Tìm giá trị cực đại $y_{CĐ}$ và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho.

A. $y_{CĐ}=2$ và $y_{CT}=0$ **B.** $y_{CĐ}=3$ và $y_{CT}=0$

C. $y_{CĐ}=3$ và $y_{CT}=-2$ **D.** $y_{CĐ}=-2$ và $y_{CT}=2$

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có $y_{CĐ}=3$ và $y_{CT}=0$.

Câu 11. **(Mã 103 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại:

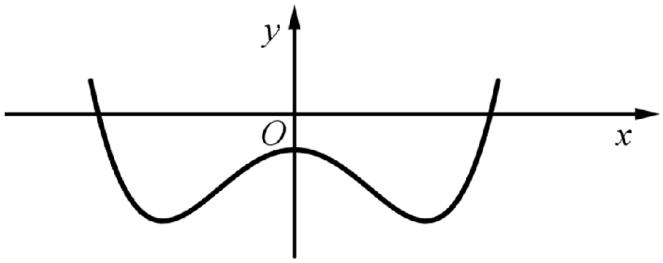
A. $x=-2$. **B.** $x=3$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x)$ xác định tại $x=1$, $f'(1)=0$ và đạo hàm đổi dấu từ $(+)$ sang $(-)$

Câu 12. **(Mã 103 - 2018)** Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ $(a,\ b,\ c\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên.



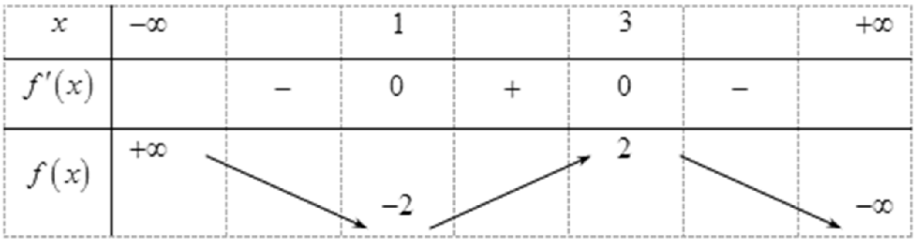
Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Chọn A

Câu 13. **(Mã 102 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



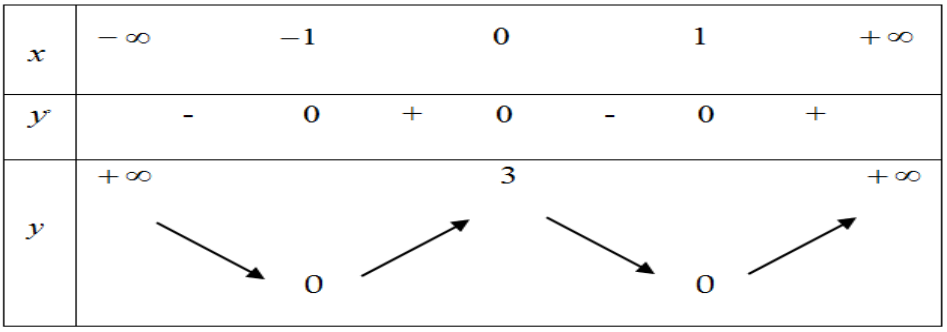
Hàm số đạt cực đại tại

A. $x=-2$. **B.** $x=3$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn B

Câu 14. **(Mã 123 - 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Mệnh đề nào dưới đây **sai**

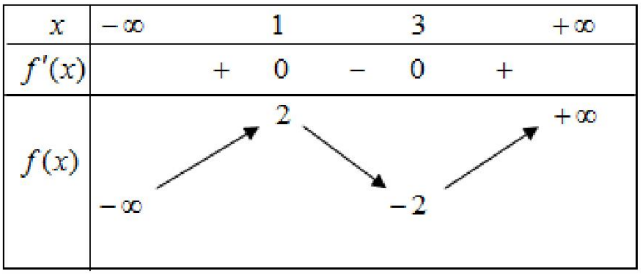
A. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3 **B.** Hàm số có hai điểm cực tiểu

C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0 **D.** Hàm số có ba điểm cực trị

Lời giải

Chọn C

Câu 15. **(Mã 104 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

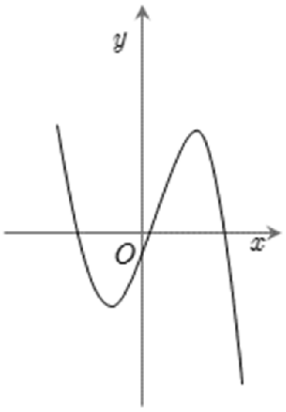
A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=3$.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên ta có điểm cực tiểu của hàm số là $x=3$.

Câu 16. **(Mã 102 - 2018)** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số này là



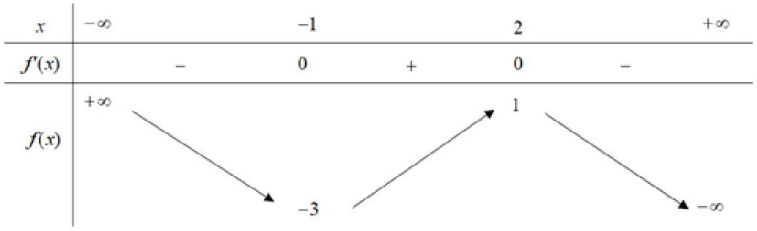
A. 3 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 1

Lời giải

Chọn B

Dựa vào hình dạng đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 17. **(Mã 101 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

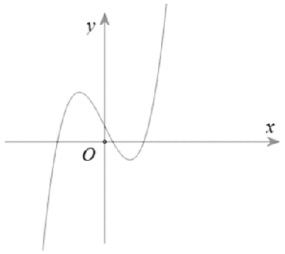
A. $x=-1$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=2$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn A

Theo bảng biến thiên thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=-1$

Câu 18. **(Mã 101 - 2018)** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

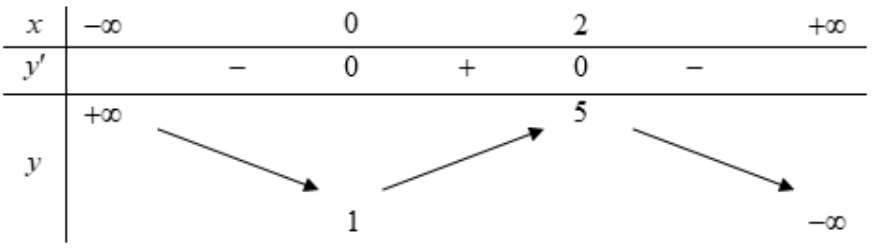


A. 2 **B.** 0 **C.** 3 **D.** 1

Lời giải

Chọn A

Câu 19. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau



Hàm số đạt cực đại tại điểm

A. $x=1$ **B.** $x=0$ **C.** $x=5$ **D.** $x=2$

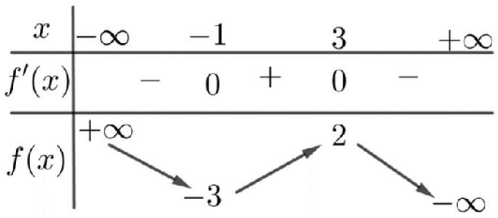
Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy y' đổi dấu từ $(+)$ sang $(-)$ tại $x=2$.

Nên hàm số đạt cực đại tại điểm $x=2$.

Câu 20. **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Điểm cực đại của hàm số đã cho là

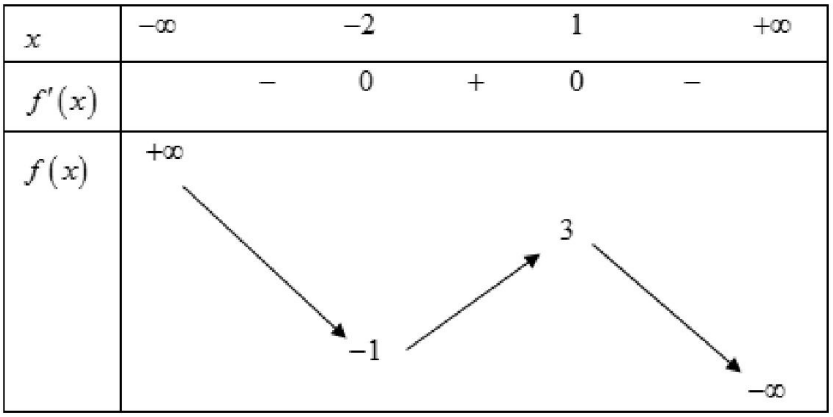
A. $x=3$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-3$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên ta có: hàm số đạt cực đại tại điểm $x=3$.

Câu 21. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Điểm cực đại của hàm số đã cho là

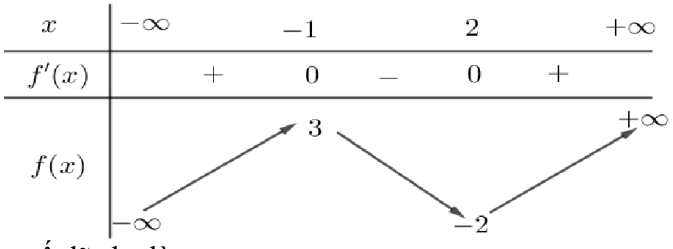
A. $x=3$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-2$.

Lời giải

Chọn C

Từ BBT của hàm số $f(x)$ suy ra điểm cực đại của hàm số $f(x)$ là $x=1$.

Câu 22. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau :



Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. $x=3$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn D

Câu 23. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. $x=-2$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=1$. **D.** $x=3$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Qua $x=-2$, đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm nên hàm số đạt cực đại tại $x=-2$.

Câu 24. **(Đề Tham Khảo 2020 – Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

Từ bảng biến thiên ta thấy $f'(x)$ đổi dấu khi x qua nghiệm -1 và nghiệm 1; không đổi dấu khi x qua nghiệm 0 nên hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 25. **(Đề Tham Khảo 2020 – Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Câu 26. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$-$	

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Do hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f'(-1)=0$,

$f'(1)$ không xác định nhưng do hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên tồn tại $f(1)$

và $f'(x)$ đổi dấu từ "+" sang "−" khi đi qua các điểm $x=-1$, $x=1$ nên hàm số đã cho đạt cực đại tại 2 điểm này.

Vậy số điểm cực đại của hàm số đã cho là 2.

Câu 27. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$+$	

Số điểm cực tiểu của hàm số là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 2 lần từ $(-)$ sang $(+)$ khi qua các điểm $x=-1; x=1$ nên hàm số có 2 điểm cực tiểu.

Câu 28. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$+$	

Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Câu 29. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R có bảng xét dấu $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$-$	

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là:

A. 3. **B.** 1. **C. 2.** **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x)=0$, $f'(x)$ không xác định tại $x=-2; x=1; x=2, x=3$. Nhưng có 2 giá trị $x=-2; x=2$ mà qua đó $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm nên hàm số đã cho có 2 điểm cực đại.

Dạng 2. Tìm cực trị của hàm số khi biết y, y'

★ **Bài toán**: Tìm các điểm cực đại, cực tiểu (nếu có) của hàm số $y=f(x)$.

✍ **Phương pháp**: Sự dụng 2 qui tắc tìm cực trị sau:

Quy tắc I: sử dụng nội dụng định lý 1

- **Bước 1**. Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2**. Tính đạo hàm $y'=f'(x)$. Tìm các điểm x_i, $(i=1,2,3,...,n)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- **Bước 3**. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4**. Từ bảng biến thiên, suy ra các điểm cực trị (dựa vào nội dung định lý 1).

Quy tắc II: sử dụng nội dụng định lý 2

- **Bước 1**. Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2**. Tính đạo hàm $y'=f'(x)$. Giải phương trình $f'(x)=0$ và kí hiệu x_i, $(i=1,2,3,...,n)$ là các nghiệm của nó.
- **Bước 3**. Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.
- **Bước 4**. Dựa vào dấu của $y''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i:

+ Nếu $f''(x_i)<0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i.

+ Nếu $f''(x_i)>0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i.

Câu 1. **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x+4)^3, \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-4\end{array}\right.$

Bảng xét dấu $f'(x)$:

x	$-\infty$		-4		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số có đúng 1 điểm cực đại.

Câu 2. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+1)(x-4)^3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x(x+1)(x-4)^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1.\\x=4\end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(4)$	$\nearrow$	

Vậy hàm số đã cho có một điểm cực đại.

Câu 3. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)=x(x+1)(x-4)^3, \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

$$f'(x)=x(x+1)(x-4)^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1.\\x=4\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	0	4	$+\infty$

$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số đã cho có hai điểm cực tiểu là $x=-1$ và $x=4$.

Câu 4. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x+4)^3, \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

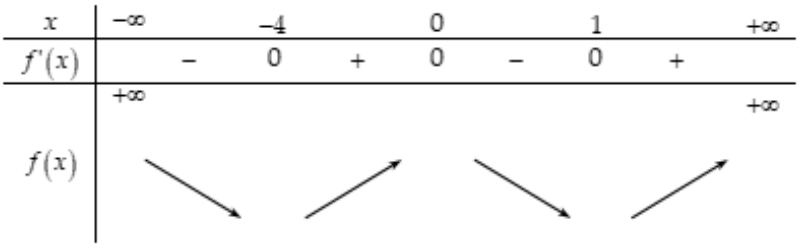
A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 1

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow x(x-1)(x+4)^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-4\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho có 2 điểm cực tiểu.

Câu 5. **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x+2)^3$, $\forall x\in R$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 5

Lời giải

Chọn B

Phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow x(x-1)(x+2)^3=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-2\end{array}\right.$

Do $f'(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt và $f'(x)$ đổi dấu qua ba nghiệm này nên hàm số có ba điểm cực trị.

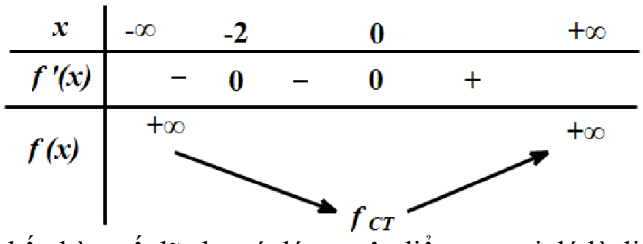
Câu 6. **(Mã 101 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+2)^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị đó là điểm cực tiểu $x=0$.

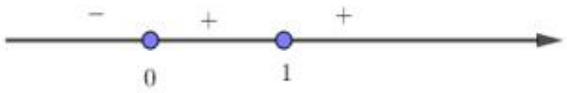
Câu 7. **(Mã 103 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2, \forall x\in R$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Xét dấu của đạo hàm:



Ta thấy đạo hàm đổi dấu đúng 1 lần nên hàm số đã cho có đúng 1 điểm cực trị

Câu 8. **(Mã 104 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+1)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x(x+1)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\(x+1)^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.$.

Vì nghiệm $x=0$ là nghiệm bội lẻ và $x=-1$ là nghiệm bội chẵn nên số điểm cực trị của hàm số là 1.

Câu 9. **(Mã 102 - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-2)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow x(x-2)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y		↘		↗		↗	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có 1 điểm cực trị $x=0$.

Câu 10. **(THPT Lê Quý Đôn Dà Nẵng 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. $x=2$. **B.** $x=3$. **C.** $x=0$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Ta có

$$f'(x)=x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\\x=3\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu đạo hàm.

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$

Câu 11. **(Chuyên Sơn La 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^3(x-1)(x-2), \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow x^3(x-1)(x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu nhận thấy hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 12. **(VTED 2019)** Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x-2)...(x-2019)$, $\forall x\in R$. Hàm số $y=f(x)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1008 **B.** 1010 **C.** 1009 **D.** 1011

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)=(x-1)(x-2)...(x-2019)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\.....\\x=2019\end{array}\right.$

$f'(x)=0$ có 2019 nghiệm bội lẻ và hệ số a dương nên có 1010 cực tiểu

Nguyễn Bảo Vương

Câu 13. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x-2)^3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hỏi $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\x-1=0\\(x-2)^3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↘		↘		↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số có 1 điểm cực đại.

Câu 14. **(THPT Cù Huy Cận 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x(x-1)(x+2)^2$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số là?

A. 5. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-2\end{array}\right.$. Do $x=0,\ x=1$ là nghiệm đơn, còn các nghiệm và $x=-2$ là nghiệm bội chẵn nên $f'(x)$ chỉ đổi khi đi qua $x=0,\ x=1$.

$\Rightarrow$ Hàm số $(1)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a>0\\\Delta'<0\end{array}\right.\Leftrightarrow m^2-4>0\Leftrightarrow m<-2\vee m>2$ có 2 điểm cực trị.

Câu 15. **(Sở Bình Phước 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3 **B.** 5 **C.** 2 **D.** 4

Lời giải

Chọn C

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x=3\\x=4\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên: Số điểm cực trị của hàm số đã cho là 2.

Câu 16. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x-2)^2,\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 5. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $f'(x)=0\ \Leftrightarrow\ x(x-1)(x-2)^2=0\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Lập bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua các điểm $x=0$ và $x=1$, do đó hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

Câu 17. **(THPT Ba Đình 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)(x^2-3)(x^4-9)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

$f'(x)=(x-2)(x^2-3)^2(x^2+3)=(x-2)(x-\sqrt{3})^2(x+\sqrt{3})^2(x^2+3)$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x+\sqrt{3}\right)^2\left(x-\sqrt{3}\right)^2\left(x^2+3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{3} \\ x=\sqrt{3} \\ x=2 \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(-\sqrt{3})$	$\searrow$	$f(\sqrt{3})$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$, ta thấy hàm số $y=f(x)$ có đúng 1 điểm cực trị.

Câu 18. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x^2(x-2)\left(x^2-x-2\right)(x+1)^4$ thì tổng các điểm cực trị của hàm số $f(x)$ bằng

A. -1. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Có $f'(x)=x^2(x-2)^2(x+1)^5$. Ta thấy $f'(x)$ chỉ đổi dấu qua nghiệm $x=-1$ nên hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị là $x=-1$.

Vậy tổng các điểm cực trị của hàm số $f(x)$ bằng -1.

Câu 19. **(Chuyên Quang Trung Bình Phước 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x\left(x^2+2x\right)^3\left(x^2-\sqrt{2}\right)\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số là

A. 4 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Sử dụng MTCT chọn một số nằm giữa các khoảng suy ra bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt[4]{2}$		0		$\sqrt[4]{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

$f'(x)$ đổi dấu 3 lần qua $x=-2, x=-\sqrt[4]{2}, x=\sqrt[4]{2}$. suy ra hàm số có 3 cực trị.

Cách 2: Sử dụng nghiệm bội chẵn lẻ, nghiệm đơn.

$f'(x)=x\left(x^2+2x\right)^3\left(x^2-\sqrt{2}\right)=x^4(x+2)^2(x+2)\left(x-\sqrt[4]{2}\right)\left(x+\sqrt[4]{2}\right)$

$f'(x)$ đổi dấu qua 3 nghiệm đơn. 2 nghiệm bội chẵn không đổi dấu nên có 3 cực trị.

Câu 20. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)=(x-1)(x-2)^2(x+3)$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

A. 3 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 2

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↘		↗		↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Câu 21. **(Đề Minh Họa 2017)** Tìm giá trị cực đại $y_{CĐ}$ của hàm số $y=x^3-3x+2$.

A. $y_{CĐ}=-1$ **B.** $y_{CĐ}=4$ **C.** $y_{CĐ}=1$ **D.** $y_{CĐ}=0$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=3x^2-3 \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y(1)=0 \\ x=-1 \Rightarrow y(-1)=4 \end{array}\right.$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-3x+2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-3x+2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\left(1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)=+\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực đại của hàm số bằng 4

Câu 22. **(Mã 104 - 2017)** Hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 2

Lời giải

Chọn C

Có $y'=\dfrac{-1}{(x+1)^2}>0, \forall x\neq -1$ nên hàm số không có cực trị.

Câu 23. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Cực tiểu của hàm số bằng -3 **B.** Cực tiểu của hàm số bằng 1

C. Cực tiểu của hàm số bằng -6 **D.** Cực tiểu của hàm số bằng 2

Lời giải

Chọn D

□ ***Cách 1.***

Ta có: $y'=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$; $y'=0 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên. Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và giá trị cực tiểu bằng 2.

□ ***Cách 2.***

Ta có $y'=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$; $y'=0\Leftrightarrow x^2+2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=1\end{array}\right.$

$y''=\dfrac{8}{(x+1)^3}$. Khi đó: $y''(1)=\dfrac{1}{2}>0$; $y''(-3)=-\dfrac{1}{2}<0$.

Nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và giá trị cực tiểu bằng 2.

Câu 24. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=x^3-6x^2+9x$ có tổng hoành độ và tung độ bằng

A. 5. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải

Ta có: $y'=3x^2-12x+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Khi đó: $x_{CD}=1\Rightarrow y_{CD}=4\Rightarrow x_{CD}+y_{CD}=5$.

Câu 25. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Tìm giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y=-x^3+3x-4$.

A. $y_{CT}=-6$ **B.** $y_{CT}=-1$ **C.** $y_{CT}=-2$ **D.** $y_{CT}=1$

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$; $y'=-3x^2+3$; $y'=0\Leftrightarrow x=\pm1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-6	↗	-2	↘	$-\infty$

Vậy $y_{CD}=y(1)=-2$; $y_{CT}=y(-1)=-6$.

Câu 26. **(THPT Cù Huy Cận 2019)** Giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y=x^3-3x^2+4$ là:

A. $y_{CT}=0$. **B.** $y_{CT}=3$. **C.** $y_{CT}=2$. **D.** $y_{CT}=4$.

Lời giải

Ta có $y'=3x^2-6x,\ y''=6x-6$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

$y''(0)=-6, y''(2)=6$

Do đó hàm số đạt cực tiểu tại $x=2\Rightarrow y_{CT}=y(2)=0$.

Câu 27. **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Đồ thị hàm số $y=x^4-x^2+1$ có bao nhiêu điểm cực trị có tung độ là số dương?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=4x^3-2x;\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=1\\ x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{3}{4}\end{array}\right.$.

Suy ra đồ thị có hàm số $y=x^4-x^2+1$ có 3 điểm cực trị có tung độ là số dương.

Câu 28. **(Hsg Bắc Ninh 2019)** Hàm số nào dưới đây **không** có cực trị?

A. $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ **B.** $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$ **C.** $y=x^2-2x+1$ **D.** $y=-x^3+x+1$

Lời giải

+ Xét hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $y'=\dfrac{4}{(x+1)^2}>0,\forall x\in D$.

Nên hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định.

Do đó hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$ không có cực trị.

Câu 29. **(THPT Ba Đình 2019)** Cho hàm số $y=x^4-2x^2+1$. Xét các mệnh đề sau đây

1) Hàm số có 3 điểm cực trị.

2) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$; $(1;+\infty)$.

3) Hàm số có 1 điểm cực trị.

4) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$; $(0;1)$.

Có bao nhiêu mệnh đề **đúng** trong bốn mệnh đề trên?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

$y'=4x^3-4x\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=0 & \Rightarrow y=1\\ x=1 & \Rightarrow y=0\\ x=-1 & \Rightarrow y=0\end{array}\right.$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$+$		$-$		$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số có 3 điểm cực trị, đồng biến trên khoảng $(-1;0)$; $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$; $(0;1)$. Vậy mệnh đề 1, 2, 4 đúng.

Câu 30. **(THPT Ba Đình 2019)** Tìm giá trị cực đại của hàm số $y=x^3-3x^2-2$.

A. -2. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-6x\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.$.

$y''=6x-6\Rightarrow y''(0)=-6<0\Rightarrow$ Giá trị cực đại của hàm số là: $y(0)=-2$.

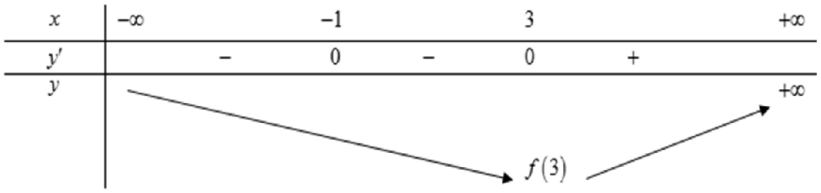
Câu 31. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Hàm số $y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2-3x+2019m\ (m\in\mathbb{R})$ đạt cực tiểu tại điểm:

A. $x=3$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$y'=x^3-x^2-5x-3$; $y'=0\Leftrightarrow x^3-x^2-5x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-1\end{array}\right.$.



Hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$.

Câu 32. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=-x^3+3x+1$ là:

A. $M(-1;-1)$. **B.** $N(0;1)$. **C.** $P(2;-1)$. **D.** $Q(1;3)$.

Lời giải

$y'=-3x^2+3$; $y'=0\Leftrightarrow x=\pm1$

$y''=-6x$; $y''(1)=-6<0$; $y''(-1)=6>0$

Do đó hàm số đạt cực đại tại $x=1; y(1)=3$. Vậy chọn đáp án $Q(1;3)$.

Câu 33. **(Sở Ninh Bình 2019)** Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+1$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=3$.

Lời giải

Ta có hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+1$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=x^2+2x-3$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$.

$y''=2x+2$; $y''(-3)=-4<0$; $y''(1)=4>0$.

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

Câu 34. **(THPT Sơn Tây Hà Nội 2019)** Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=x^4-2x^2$.

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

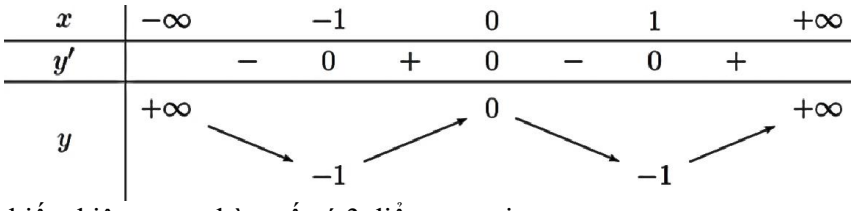
Chọn C

Tự luận

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=4x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Trắc nghiệm

Hàm số bậc 4 trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ có hệ số $a.b<0$ thì sẽ có 3 điểm cực trị.

Vậy chọn ngay đáp án **C.**

Câu 35. **(Chuyên Quang Trung Bình Phước 2019)** Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=-x^3+x^2+5x-5$ là

A. $(-1;-8)$ **B.** $(0;-5)$ **C.** $\left(\frac{5}{3};\frac{40}{27}\right)$ **D.** $(1;0)$

Lời giải

Chọn A

$y'=-3x^2+2x+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\frac{5}{3}\end{array}\right.$.

$y''=-6x+2$.

Ta có: $y''(-1)=8>0\Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$; $y_{CT}=y(-1)=-8$.

Vậy điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(-1;-8)$.

Câu 36. Hàm số nào trong bốn hàm số được liệt kê dưới đây không có cực trị?

A. $y=\frac{2x-3}{x+2}$. **B.** $y=x^4$. **C.** $y=-x^3+x$. **D.** $y=|x+2|$.

Lời giải

Chọn A.

+ Hàm số $y=\frac{2x-3}{x+2}$

Tập xác định: $D=(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$.

Có $y'=\frac{7}{(x+2)^2}>0\,\forall x\in D\Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định $\Rightarrow$ hàm số không có cực trị.

Các hàm số khác dễ dàng chứng minh được y' có nghiệm và đổi dấu qua các nghiệm. Riêng hàm số cuối y' không xác định tại -2 nhưng hàm số xác định trên R và y' đổi dấu qua -2 do đó có hàm số có điểm cực trị x = -2.

Nguyễn Bảo Vương

---------- HẾT ----------

Dạng 1. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại x = x0

Bước 1. Tính $y'(x_0), y''(x_0)$

Bước 2. Giải phương trình $y'(x_0)=0 \Rightarrow m$?

Bước 3. Thế m vào $y''(x_0)$ nếu giá trị $\left[\begin{array}{l} y''>0 \to x_0 = CT \\ y''<0 \to x_0 = CD \end{array}\right.$

Dạng 1.1 Hàm số bậc 3

Câu 1. **(Mã 110 - 2017)** Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực đại tại $x=3$.

A. $m=-1$ **B.** $m=-7$ **C.** $m=5$ **D.** $m=1$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=x^2-2mx+\left(m^2-4\right)$; $y''=2x-2m$.

Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực đại tại $x=3$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} y'(3)=0 \\ y''(3)<0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9-6m+m^2-4=0 \\ 6-2m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-6m+5=0 \\ m>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=1(L) \\ m=5(TM) \end{array}\right. \\ m>3 \end{cases}.$$

Vậy $m=5$ là giá trị cần tìm.

Câu 2. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Tìm m để hàm số $y=x^3-2mx^2+mx+1$ đạt cực tiểu tại $x=1$

A. không tồn tại m. **B.** $m=\pm 1$. **C.** $m=1$. **D.** $m\in\{1;2\}$.

Lời giải

Để $x=1$ là điểm cực tiểu của hàm số $\Leftrightarrow \begin{cases} y'(1)=0 \\ y''(1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-4m+m=0 \\ 6-4m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m<\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m=1.$

Thử lại với $m=1$, ta có $y=x^3-2x^2+x+1$; $y'=3x^2-4x+1$.

$$y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↗	

Quan sát bảng biến thiên ta thấy $m=1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx+1$ đạt cực tiểu tại $x=2$.

A. $m=0$. **B.** $m>4$. **C.** $0\le m<4$. **D.** $0<m\le 4$.

Lời giải

Chọn A

$y' = 3x^2 - 6x + m$; $y'' = 6x - 6$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 4. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương 2019)** Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

A. $m = 1, m = 5$. **B.** $m = 5$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -1$.

Lời giải

Tập xác định $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - 4$, $y'' = 2x - 2m$.

Để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$ thì

$$\begin{cases} y'(3) = 0 \\ y''(3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ 6 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 5 \\ m = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m = 5.. \\ 3 < m \end{cases}$$

Câu 5. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Có bao nhiêu số thực m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực đại tại $x = 1$.

A. 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

Lời giải

Chọn C

$y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$

$y'' = 2x - 2m$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ nên ta có $\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ 2 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \vee m = 2 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$

Thử lại với $m = 2$ ta có $y'' = 2x - 4 \Rightarrow y''(1) = -2 < 0$

Do đó Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$

Câu 6. **(THPT Đoàn Thượng – Hải Dương)** Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

A. $m = 1, m = 5$. **B.** $m = 5$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -1$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - 4$, $y'' = 2x - 2m$.

Để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$ thì

$$\begin{cases} y'(3) = 0 \\ y''(3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ 6 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 5 \\ m = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m = 5. \\ 3 < m \end{cases}$$

Câu 7. **(THPT Thăng Long - Hà Nội - Lần 2 - 2019)** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^3 + (3m - 1)x^2 + m^2 x - 3$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

A. $\{5;1\}$. **B.** $\{5\}$. **C.** $\varnothing$. **D.** $\{1\}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 + 2(3m-1)x + m^2 \Rightarrow y'' = 6x + 6m - 2$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f''(-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ 6m - 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 5 \end{array}\right. \\ m > \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = 5$.

Câu 8. **(THPT Kinh Môn - 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+1)x - 1$ đạt cực đại tại $x = -2$?

A. $m = 2$. **B.** $m = 3$. **C.** Không tồn tại m. **D.** $m = -1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m + 1$.

Giả sử $x = -2$ là điểm cực đại của hàm số đã cho, khi đó

$y'(-2) = 0 \Leftrightarrow (-2)^2 - 2m(-2) + m + 1 = 0 \Leftrightarrow 5m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Với $m = -1$, ta có $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 1$.

$y' = x^2 + 2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta kết luận $m = -1$ là giá trị cần tìm.

Câu 9. **(Chuyên ĐHSPHN - Lần 3 - 2019)** Tập hợp các số thực m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m+2)x - m$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ là.

A. $\{1\}$. **B.** $\{-1\}$. **C.** $\varnothing$. **D.** R.

Lời giải

Chọn C.

$y' = 3x^2 - 6mx + m + 2$

$y'' = 6x - 6m$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ khi $\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5m + 5 = 0 \\ 6 - 6m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m < 1 \end{cases}$ không có giá trị của m.

Dạng 1.2 Hàm số đa thức bậc cao, hàm căn thức …

Câu 10. **(Chuyên QH Huế - Lần 2 - 2019)** Xác định tham số m sao cho hàm số $y = x + m\sqrt{x}$ đạt cực trị tại $x = 1$.

A. $m = -2$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = -6$. **D.** $m = 6$.

Lời giải

Chọn A

$y' = f'(x) = 1 + \dfrac{m}{2\sqrt{x}}, (x > 0)$

Để hàm số đạt cực trị tại $x = 1$ thì $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + \dfrac{m}{2} = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

Thử lại với $m = -2$, hàm số $y = x - 2\sqrt{x}$ có cực tiểu tại $x = 1$, do đó $m = -2$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 11. **(Trường THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Tìm tất cả tham số thực m để hàm số $y = (m-1)x^4 - (m^2-2)x^2 + 2019$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

A. $m = 0$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 2$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 4(m-1)x^3 - 2(m^2-2)x$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1 \Rightarrow y'(-1) = 0 \Leftrightarrow -4(m-1) + 2(m^2-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right.$.

Với $m = 0$, hàm số trở thành $y = -x^4 + 2x^2 + 2019$. Dễ thấy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

Với $m = 2$, hàm số trở thành $y = x^4 - 2x^2 + 2019$. Dễ thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Vậy $m = 2$ thì hàm số $y = (m-1)x^4 - (m^2-2)x^2 + 2019$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Câu 12. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x - \sin x)(x - m - 3)\left(x - \sqrt{9 - m^2}\right)^3 \ \forall x \in \mathbb{R}$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. 6 **B.** 7 **C.** 5 **D.** 4

Lời giải

Điều kiện $9 - m^2 \ge 0 \Leftrightarrow -3 \le m \le 3$

TH 1: $0 \le m < 3$ ta có BTT

x	$-\infty$		0		$\sqrt{9-m^2}$		$m+3$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	

TH 2: $-3 \le m < 0$ ta có BTT

x	$-\infty$		0		$m+3$		$\sqrt{9-m^2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	

TH 2: $m = 3$ ta có BTT

x	$-\infty$		0		6		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↘		↗	

Từ đó suy ra $-3 \le m < 3 \Rightarrow$ có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 13. **(Mã 101 - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^8+(m-2)x^5-(m^2-4)x^4+1$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. Vô số **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

Lời giải

Chọn D

Ta có $y=x^8+(m-2)x^5-(m^2-4)x^4+1 \Rightarrow y'=8x^7+5(m-2)x^4-4(m^2-4)x^3$.

$y'=0 \Leftrightarrow x^3\left(8x^4+5(m-2)x-4(m^2-4)\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ g(x)=8x^4+5(m-2)x-4(m^2-4)=0 \end{array}\right.$

Xét hàm số $g(x)=8x^4+5(m-2)x-4(m^2-4)$ có $g'(x)=32x^3+5(m-2)$.

Ta thấy $g'(x)=0$ có một nghiệm nên $g(x)=0$ có tối đa hai nghiệm

+ TH1: Nếu $g(x)=0$ có nghiệm $x=0 \Rightarrow m=2$ hoặc $m=-2$

Với $m=2$ thì $x=0$ là nghiệm bội 4 của $g(x)$. Khi đó $x=0$ là nghiệm bội 7 của y' và y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x=0$ nên $x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m=2$ thỏa ycbt.

Với $m=-2$ thì $g(x)=8x^4-20x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt[3]{\frac{5}{2}} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↘		↗	$+\infty$

Dựa vào BBT $x=0$ không là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m=-2$ không thỏa ycbt.

+ TH2: $g(0)\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \pm 2$. Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0 \Leftrightarrow g(0)>0$ $\Leftrightarrow m^2-4<0 \Leftrightarrow -2<m<2$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-1;0;1\}$.

Vậy cả hai trường hợp ta được 4 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

Câu 14. **(Chuyên Quang Trung- Bình Phước 2019)** Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{x^5}{5}-\frac{mx^4}{4}+2$ đạt cực đại tại $x=0$ là:

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $m<0$.

C. Không tồn tại m. **D.** $m>0$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{mx^4}{4}+2$.

Ta có: $f'(x)=x^4-mx^3$.

Khi $m=0$ thì $f'(x)=x^4\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số không có cực trị.

Khi $m\neq 0$, xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^4-mx^3=0 \Leftrightarrow x^3(x-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=m \end{array}\right.$.

+ Trường hợp $m>0$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		m		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$f(m)$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

+ Trường hợp $m<0$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		m		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(m)$	↘	2	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

Như vậy, để hàm số đạt cực đại tại $x=0$ thì $m>0$.

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số $y=\frac{m-1}{5}x^5+\frac{m+2}{4}x^4+m+5$ đạt cực đại tại $x=0$?

A. 101. **B.** 2016. **C.** 100. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Ta xét: $m=1\Rightarrow y=\frac{3}{4}x^4+6\Rightarrow y'=3x^3\Rightarrow y'=0\Rightarrow x=0$.

Ta có, bảng xét dấu $y'=2x^3$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Dựa, vào bảng xét dấu ta thấy $x=0$ là điểm cực tiểu. Suy ra $m=1$(loại).

Ta xét: $m\neq 1\Rightarrow y'=(m-1)x^4+(m+2)x^3\Rightarrow y'=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=-\frac{m+2}{m-1}\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: xét $m>1$, suy ra $x_2<x_1$.

Ta có, bảng xét dấu $y'=(m-1)x^4+(m+2)x^3$

x	$-\infty$		$-\frac{m+2}{m-1}$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa, vào bảng xét dấu ta thấy $x=0$ là điểm cực tiểu. Suy ra $m>1$(loại).

Trường hợp 2: $-2<m<1$, suy ra $x_2>x_1$.

Ta có, bảng xét dấu $y'=(m-1)x^4+(m+2)x^3$

x	$-\infty$		0		$-\dfrac{m+2}{m-1}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa, vào bảng xét dấu ta thấy $x=0$ là điểm cực tiểu. Suy ra $-2<m<1$ (loại).

Trường hợp 3: $m<-2$, suy ra $x_2<x_1$.

Ta có, bảng xét dấu $y'=(m-1)x^4+(m+2)x^3$

x	$-\infty$		$-\dfrac{m+2}{m-1}$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa, vào bảng xét dấu ta thấy $x=0$ là điểm cực đại. Suy ra $m<-2$ (nhận).

Vậy, tập hợp tất cả các giá trị của tham số m thỏa mãn đề bài là $m<-2$ mà m thuộc khoảng $(-2019;2019)$.

Suy ra, số giá trị nguyên của m là 2016.

Câu 16. **(Mã 104 - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^8+(m-3)x^5-(m^2-9)x^4+1$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. 6 **B.** Vô số **C.** 4 **D.** 7

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=x^8+(m-3)x^5-(m^2-9)x^4+1 \Rightarrow y'=8x^7+5(m-3)x^4-4(m^2-9)x^3$.

$y'=0 \Leftrightarrow x^3\left(8x^4+5(m-3)x-4(m^2-9)\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ g(x)=8x^4+5(m-3)x-4(m^2-9)=0 \end{array}\right.$

Xét hàm số $g(x)=8x^4+5(m-3)x-4(m^2-9)$ có $g'(x)=32x^3+5(m-3)$.

Ta thấy $g'(x)=0$ có một nghiệm nên $g(x)=0$ có tối đa hai nghiệm

+) TH1: Nếu $g(x)=0$ có nghiệm $x=0 \Rightarrow m=3$ hoặc $m=-3$

Với $m=3$ thì $x=0$ là nghiệm bội 4 của $g(x)$. Khi đó $x=0$ là nghiệm bội 7 của y' và y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x=0$ nên $x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m=3$ thỏa ycbt.

Với $m=-3$ thì $g(x)=8x^4-30x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt[3]{\dfrac{15}{4}} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\frac{15}{4}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↘		↗	$+\infty$

Dựa vào BBT $x=0$ không là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m=-3$ không thỏa ycbt.

+) TH2: $g(0)\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \pm 3$. Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0 \Leftrightarrow g(0)>0 \Leftrightarrow m^2-9<0 \Leftrightarrow -3<m<3$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2;-1;0;1;2\}$.

Vậy cả hai trường hợp ta được 6 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

Câu 17. **(Mã 103 - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-4)x^5 - (m^2-16)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

A. 8 **B.** Vô số **C.** 7 **D.** 9

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 8x^7 + 5(m-5)x^4 - 4(m^2-16)x^3 = x^3\left[8x^4 + 5(m-4)x - 4(m^2-16)\right] = x^3.g(x)$

Với $g(x) = 8x^4 + 5(m-5)x - 4(m^2-16)$.

● Trường hợp 1: $g(0) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 4$.

Với $m = 4 \Rightarrow y' = 8x^7$. Suy ra $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Với $m = -4 \Rightarrow y' = 8x^4(x^3 - 5)$. Suy ra $x = 0$ không là điểm cực trị của hàm số.

● Trường hợp 2: $g(0) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 4$.

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ thì qua giá trị $x = 0$ dấu của y' phải chuyển từ âm sang dương do đó $g(0) > 0 \Leftrightarrow -4 < m < 4$.

Kết hợp hai trường hợp ta được $-4 < m \le 4$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^{12} + (m-5)x^7 + (m^2-25)x^6 + 1$ đạt cực đại tại $x = 0$?

A. 8 **B.** 9 **C.** Vô số **D.** 10

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 12x^{11} + 7(m-5)x^6 + 6(m^2-25)x^5$

TH1: $m = 5 \Rightarrow y' = 12x^{11}$. Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ là nghiệm bội lẻ, đồng thời dấu của y' đổi từ âm sang dương, nên $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số,do đó không thỏa mãn, $m = 5$ loại.

TH2: $m = -5 \Rightarrow y' = x^6(12x^5 - 70) = 0 \Rightarrow x = 0$ là nghiệm bội chẵn, do đó y' không đổi dấu khi đi qua $x = 0$, $m = -5$ loại.

TH3: $m \neq \pm 5 \Rightarrow y' = x^5\left[12x^6 + 7(m-5)x + 6(m^2-25)\right] = x^5.g(x)$

Với $g(x) = 12x^6 + 7(m-5)x + 6(m^2-25)$, ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của $g(x)$.

Để hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ thì y' phải đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x = 0$, xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) < 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 6(m^2-25) < 0 \Leftrightarrow -5 < m < 5$

Vì m nguyên nên $m = \{-4;-3;...;3;4\}$, vậy có 9 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu49. Cho hàm số $y = x^6 + (4+m)x^5 + (16-m^2)x^4 + 2$. Gọi S là tập hợp các gia trị m nguyên dương để hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 0$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 10. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $y' = 6x^5 + 5(4+m)x^4 + 4(16-m^2)x^3 = x^3\left(6x^2 + 5(4+m)x + 16 - m^2\right)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \\ 6x^2 + 5(4+m)x + 16 - m^2 = 0\,(*) \end{cases}$.

$(*)$ có $\Delta=(4+m)(49m+4)$.

Với mọi m nguyên dương thì $\begin{cases}\Delta>0\\ \dfrac{-5(4+m)}{6}<0\end{cases}$ do đó ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $16-m^2>0\Leftrightarrow 0<m<4$: $(*)$ có hai nghiệm âm phân biệt $x_1,x_2\,(x_1<x_2)$, ta có bảng xét dấu y' như sau:

x	$-\infty$		x_1		x_2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Lúc này $x=0$ là điểm cực tiểu.

Trường hợp 2: $16-m^2<0\Leftrightarrow m>4$: $(*)$ có hai nghiệm trái dấu $x_1,x_2\,(x_1<0<x_2)$, ta có bảng xét dấu y' như sau:

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ đây suy ra $x=0$ là điểm cực đại (không thỏa mãn).

Trường hợp 3: $(*)$ có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm âm, lúc này $x=0$ là nghiệm bội 4 của đạo hàm nên không phải là điểm cực trị.

Vậy có ba giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là 1, 2, 3. Tổng các phần tử của S bằng 6.

Câu 19. **(Mã 102 - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^8+(m-1)x^5-(m^2-1)x^4+1$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. 3 **B.** 2 **C.** Vô số **D.** 1

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=8x^7+5(m-1)x^4-4(m^2-1)x^3+1=x^3\left(8x^4+5(m-1)x-4\left(m^2-1\right)\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ 8x^4+5(m-1)x-4\left(m^2-1\right)=0\end{array}\right.\qquad(1)$$

*Nếu $m=1$ thì $y'=8x^7$, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

*Nếu $m=-1$ thì $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ 8x^4-10x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}}\end{array}\right.$, nhưng $x=0$ là nghiệm bội chẵn nên không phải cực trị.

*Nếu $m\neq\pm1$: khi đó $x=0$ là nghiệm bội lẻ. Xét $g(x)=8x^4+5(m-1)x-4\left(m^2-1\right)$. Để $x=0$ là điểm cực tiểu thì $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=-4(m^2-1)>0\Leftrightarrow m^2-1<0\Leftrightarrow-1<m<1$. Vì m nguyên nên chỉ có giá trị $m=0$.

Vậy chỉ có hai tham số m nguyên để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ là $m=0$ và $m=1$.

Dạng 2. Tìm m để hàm số có n cực trị

- *Hàm số có n cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có n nghiệm phân biệt.*
- *Xét hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$:*

+ *Hàm số có hai điểm cực trị khi* $\begin{cases}a\neq0\\ b^2-3ac>0\end{cases}$.

+ *Hàm số không có cực trị khi $y'=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.*

- *Xét hàm số bậc bốn trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$.*

+ Hàm số có ba cực trị khi $ab<0$. + Hàm số có 1 cực trị khi $ab\ge 0$.

Câu 1. Biết rằng hàm số $y=(x+a)^3+(x+b)^3-x^3$ có hai điểm cực trị. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $ab\le 0$. **B.** $ab<0$. **C.** $ab>0$. **D.** $ab\ge 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=x^3+3(a+b)x^2+3(a^2+b^2)x+a^3+b^3$.

$y'=3x^2+6(a+b)x+3(a^2+b^2)$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=18ab>0\Leftrightarrow ab>0$.

Câu 2. **(THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=mx^3-2mx^2+(m-2)x+1$ không có cực trị

A. $m\in(-\infty;6)\cup(0;+\infty)$. **B.** $m\in(-6;0)$. **C.** $m\in[-6;0)$. **D.** $m\in[-6;0]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=3mx^2-4mx+(m-2)$.

+ Nếu $m=0$.

$\Rightarrow y'=-2<0\ (\forall x\in\mathbb{R})$. Nên hàm số không có cực trị.

Do đó $m=0$(chọn) (1).

+ Nếu $m\ne 0$.

Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y'$không đổi dấu

$\Leftrightarrow \Delta'\le 0\Leftrightarrow 4m^2-3m(m-2)\le 0\Leftrightarrow m^2+6m\le 0\Rightarrow -6\le m<0$ (do $m\ne 0$) (2).

Kết hợp (1) và (2) ta được $-6\le m\le 0$.

Câu 3. **(Đề Tham Khảo 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=(m-1)x^4-2(m-3)x^2+1$ không có cực đại?

A. $1<m\le 3$ **B.** $m\le 1$ **C.** $m\ge 1$ **D.** $1\le m\le 3$

Lời giải

Chọn D

TH1: Nếu $m=1\Rightarrow y=4x^2+1$. Suy ra hàm số không có cực đại.

TH2: Nếu $m>1$.

Để hàm số không có cực đại thì $-2(m-3)\ge 0\Leftrightarrow m\le 3$. Suy ra $1<m\le 3$.

Vậy $1\le m\le 3$.

Câu 4. **(Chuyên Sơn La - Lần 2 - 2019)** Để đồ thị hàm số $y=-x^4-(m-3)x^2+m+1$ có điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu thì tất cả các giá trị thực của tham số m là

A. $m\ge 3$. **B.** $m>3$. **C.** $m<3$. **D.** $m\le 3$.

Lời giải

Chọn A

$y'=-4x^3-2(m-3)x=-2x(2x^2+m-3)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=\dfrac{3-m}{2}\end{array}\right.\cdot$$

Vì hàm số đã cho là hàm trùng phương với $a=-1<0$ nên hàm số có điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu $\Leftrightarrow$ $y'=0$ có đúng 1 nghiệm bằng 0 $\Leftrightarrow \dfrac{3-m}{2}\le 0\Leftrightarrow m\ge 3$.

Câu 5. **(Quang Trung - Bình Phước - Lần 5 - 2019)** Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số có 3 cực trị

A. $m>0$. **B.** $m\ge 0$. **C.** $m<0$. **D.** $m\le 0$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$.

$y'=0\Leftrightarrow 4x\left(x^2-m\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m\ (*) \end{array}\right.$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $x\neq 0\Leftrightarrow m>0$.

Câu 6. **(Chuyên Hà Tĩnh - Lần 1 - 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=m^2x^4-\left(m^2-2019m\right)x^2-1$ có đúng một cực trị?

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2018. **D.** 2017.

Lời giải

Chọn A

Trường hợp 1: $m=0\Rightarrow y=-1$ nên hàm số không có cực trị.

$\Rightarrow m=0$ (loại).

Trường hợp 2: $m\neq 0\Rightarrow m^2>0$.

Hàm số $y=m^2x^4-\left(m^2-2019m\right)x^2-1$ có đúng một cực trị

$\Leftrightarrow -m^2.\left(m^2-2019m\right)\ge 0\Leftrightarrow m^2-2019m\le 0\Leftrightarrow 0\le m\le 2019$.

Vì $m\neq 0\Rightarrow 0<m\le 2019$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên có 2019 giá trị nguyên của tham số m thỏa đề.

Câu 7. **(THPT Yên Khánh A - Ninh Bình - 2019)** Cho hàm số $y=x^3-3\left(m+1\right)x^2+3\left(7m-3\right)x$. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Số phần tử của S là

A. 2. **B.** 4. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=3x^2-6\left(m+1\right)x+3\left(7m-3\right)$.

$y'=0\Leftrightarrow x^2-2\left(m+1\right)x+7m-3=0$.

Để hàm số không có cực trị thì

$\Delta'\le 0\Leftrightarrow \left(m+1\right)^2-\left(7m-3\right)\le 0$

$\Leftrightarrow m^2-5m+4\le 0$

$\Leftrightarrow 1\le m\le 4$.

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow S=\{1;2;3;4\}$. Vậy S có 4 phần tử.

Câu 8. **(HSG - TP Đà Nẵng - 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^4+4mx^3+3\left(m+1\right)x^2+1$ có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $m\in\left(-\infty;\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}\right]$. **B.** $m\in\left[\dfrac{1-\sqrt{7}}{3};1\right]\cup\{-1\}$.

C. $m\in\left[\dfrac{1+\sqrt{7}}{3};+\infty\right)$. **D.** $m\in\left[\dfrac{1-\sqrt{7}}{3};\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right]\cup\{-1\}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=4x^3+12mx^2+6\left(m+1\right)x$.

+ TH1: $m=-1$, ta có: $y'=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số có 1 cực tiểu duy nhất.

Ta có: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\2x^2+6mx+3m+3=0(*)\end{array}\right.$

+ TH2: $m\neq -1$

Để hàm số đã cho chỉ có một cực tiểu thì phương trình $(*)$ không có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (3m)^2-2(3m+3)\le 0\Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\le m\le \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$.

Vậy $m\in\left[\dfrac{1-\sqrt{7}}{3};\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right]\cup\{-1\}$.

Câu 9. **(HSG 12 - Bắc Ninh - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số có đúng một điểm cực trị?

A. 0. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị khi và chỉ khi tam thức $g(x)=x^2+2mx+5$ vô nghiệm hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm là $x=-1$, hoặc $g(x)$ có nghiệm kép $x=-1$

Tức là $\left[\begin{array}{l}\Delta'_g<0\\\begin{cases}g(-1)=0\\\Delta'_g>0\end{cases}\\\begin{cases}-\dfrac{b'}{a}=-1\\\Delta'_g=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2-5<0\\\begin{cases}-2m+6=0\\m^2-5>0\end{cases}\\\begin{cases}-m=-1\\\Delta'_g=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\sqrt{5}<m<\sqrt{5}\\m=3\end{array}\right.$. Do đó tập các giá trị nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $S=\{-2,-1,0,1,2,3\}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 10. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}+mx^2-2mx+1$ có hai điểm cực trị.

A. $0<m<2$. **B.** $m>2$. **C.** $m>0$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m>2\\m<0\end{array}\right.$.

Lời giải

Ta có: $y'=-x^2+2mx-2m$

Hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}+mx^2-2mx+1$ có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'=m^2-2m>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>2\\m<0\end{array}\right.$.

Câu 11. **(THPT Ba Đình 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+2mx+m$ có cực đại và cực tiểu?

A. $m<\frac{3}{2}$. **B.** $m<-\frac{3}{2}$. **C.** $m\le\frac{3}{2}$. **D.** $m>\frac{3}{2}$.

Lời giải

+ TXĐ: $D=\mathbb{R}$

+ $y'=3x^2-6x+2m$

+ Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta=36-24m>0\Leftrightarrow m<\frac{3}{2}$.

Câu 12. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x+1$ có hai cực trị là:

A. $(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$ **B.** $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$ **C.** $(-1;2)$ **D.** $[-1;2]$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=x^2-2mx+m+2$. Để hàm số có hai cực trị thì $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt nên

$y'>0\Leftrightarrow\Delta'>0\Leftrightarrow m^2-m-2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>2\end{array}\right.$

Câu 13. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Cho hàm số $y=mx^4-x^2+1$. Tập hợp các số thực m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0]$. **C.** $[0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

TH1: $m=0$ hàm số đã cho trở thành $y=-x^2+1$ là một hàm bậc hai nên luôn có một cực trị.

TH2: $m\neq0$, ta có $y'=4mx^3-2x$.

$y'=0\Leftrightarrow 4mx^3-2x=0\Leftrightarrow 2x(2mx^2-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\2mx^2-1=0(*)\end{array}\right.$.

Để hàm số có đúng một cực trị thì phương trình $y'=0$ có đúng 1 nghiệm.

Ycbt $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có một nghiệm $x=0$ hoặc vô nghiệm suy ra $m<0$.

Vậy $m\le0$.

Câu 14. **(THPT Yên Định Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số $y=mx^4+(2m+1)x^2+1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có đúng một điểm cực tiểu.

A. Không tồn tại m. **B.** $m\ge0$. **C.** $m\ge-\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}\le m\le0$.

Lời giải

Với $m=0$, ta có $y=x^2+1\Rightarrow y'=2x$. Khi đó hàm số có 1 cực trị và cực trị đó là cực tiểu. Suy ra $m=0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. (1)

Với $m\neq0$, ta có $y'=4mx^3+2(2m+1)x=2x(2mx^2+2m+1)$

Hàm số có một cực trị là cực tiểu $\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m>0\\2mx^2+2m+1=0 \text{ vô nghiệm}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m>0\\\frac{-2m-1}{2m}<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m>0\\\left[\begin{array}{l}m<\frac{-1}{2}\\m>0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow m>0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra hàm số có một cực trị là cực tiểu khi $m\ge0$.

Câu 15. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^4+2\left(m^2-m-6\right)x^2+m-1$ có ba điểm cực trị.

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $y'=4x^3+4\left(m^2-m-6\right)x=4x\left[x^2+\left(m^2-m-6\right)\right]$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2+\left(m^2-m-6\right)=0(1)\end{array}\right.$

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow m^2-m-6<0\Leftrightarrow -2<m<3$.

Ta có: $m\in\mathbb{Z},-2<m<3\Leftrightarrow m\in\{-1;0;1;2\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m để hàm số có ba điểm cực trị.

Câu 16. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Hàm số $y=mx^4+\left(m-1\right)x^2+1-2m$ có một điểm cực trị khi

A. $0\le m\le 1$. **B.** $m\le 0\vee m\ge 1$. **C.** $m=0$. **D.** $m<0\vee m>1$.

Lời giải

Trường hợp 1: $m=0$ thì hàm số đã cho trở thành $y=-x^2+1$. Hàm số này có 1 cực trị là cực đại $\Rightarrow m=0$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $m\neq 0$ thì hàm số đã cho trở thành $y=mx^4+\left(m-1\right)x^2+1-2m$

Ta có $y'=4mx^3+2\left(m-1\right)x=2x\left(2mx^2+m-1\right)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=0\\2mx^2+m-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=\dfrac{1-m}{2m}\ (*)\end{array}\right.$

YCBT $\Leftrightarrow y'$ đổi dấu một lần $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ vô nghiệm hoặc có nghiệm $x=0$.

$\Leftrightarrow\dfrac{1-m}{2m}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 1\\m<0\end{array}\right.$

Kết hợp hai trường hợp ta được $0\le m\vee m\ge 1$.

Giải nhanh: Với a khác 0 thì hàm số đã cho có 1 cực trị $\Leftrightarrow ab\ge 0\Rightarrow m\left(m-1\right)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 1\\m\le 0\end{array}\right.$.

Câu 17. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m trên miền $[-10;10]$ để hàm số $y=x^4-2\left(2m+1\right)x^2+7$ có ba điểm cực trị?

A. 20 **B.** 10 **C.** Vô số **D.** 11

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=4x\left[x^2-\left(2m+1\right)\right]\quad\forall x$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=2m+1\end{array}\right.\ (*)$

Hàm số đã cho có ba cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt, hay (*) có hai nghiệm phân biệt khác $0\Leftrightarrow 2m+1>0\Leftrightarrow m>-\dfrac{1}{2}$.

Do $m\in[-10;10]$ nên có 11 giá trị thỏa mãn.

Câu 18. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Cho hàm số $y=mx^4+\left(m^2-6\right)x^2+4$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số có ba điểm cực trị trong đó có đúng hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại ?

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 5

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4mx^3+2\left(m^2-6\right)x$.

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị trong đó có đúng hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại khi và chỉ khi $\begin{cases}4m>0\\ m\left(m^2-6\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<\sqrt{6}$.

Do đó có hai giá trị nguyên của tham số m.

Câu 19. **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=mx^4+\left(m-1\right)x^2+1-2m$ có một cực trị.

A. $m\ge 1$ **B.** $m\le 0$ **C.** $0\le m\le 1$ **D.** $m\le 0\cup m\ge 1$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=4mx^3+2\left(m-1\right)x$

- Trường hợp 1: Xét $m=0\Rightarrow y'=-2x$. Ta thấy phương trình $y'=0$ đổi dấu một lần nên hàm số có một điểm cực trị. Suy ra $m=0$ (thoả YCBT) (1)
- Trường hợp 2: Xét $m=1\Rightarrow y'=4x^3$.Ta thấy phương trình $y'=0$ đổi dấu một lần nên hàm số có một điểm cực trị. Suy ra $m=1$ (thoả YCBT) (2)
- Trường hợp 3: Xét $m\ne 0$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=\dfrac{1-m}{2m}\end{array}\right.$

Để hàm số có một điểm cực trị thì $\dfrac{1-m}{2m}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<0\\ m\ge 1\end{array}\right.$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge 1\end{array}\right.$

Ghi chú: Dùng công thức tính nhanh

Hàm số có một điểm cực trị khi và chỉ khi $m\left(m-1\right)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge 1\end{array}\right.$.

Câu 20. **(Chuyên Lào Cai - 2020)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x^2\left(x+2\right)^4\left(x+4\right)^3\left[x^2+2\left(m+3\right)x+6m+18\right]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f\left(x\right)$ có **đúng** một điểm cực trị?

B. 7. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\ \left(x+2\right)^4=0\\ \left(x+4\right)^3=0\\ x^2+2\left(m+3\right)x+6m+18=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\\ x=-4\\ x^2+2\left(m+3\right)x+6m+18=0\ \left(*\right)\end{array}\right.$

Để hàm số $f\left(x\right)$ có đúng một điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $\left(*\right)$ vô nghiệm, có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có nghiệm là -4.

Trường hợp 1. Phương trình $\left(*\right)$ vô nghiệm

$\Leftrightarrow\Delta=4m^2+24m+36-24m-72=4m^2-36<0$

$\Leftrightarrow -3<m<3\Rightarrow m\in\left\{-2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\right\}$

Trường hợp 2. Phương trình $(*)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 4m^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -3 \end{array}\right.$.

Trường hợp 3. Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Trong đó $x_1 = -4$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, $x_2 \Leftrightarrow \Delta = 4m^2 - 36 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 3 \end{array}\right.$.

Theo định lí Viète ta có $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -4 + x_2 = -2m - 6 \\ P = x_1.x_2 = -4.x_2 = 6m + 18 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2m - 2 \\ x_2 = -\dfrac{3}{2}m - \dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2m - 2 = -\dfrac{3}{2}m - \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow m = 5$.

Vậy $m \in \{-3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 5\}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 21. **(Chuyên Sơn La - 2020)** Gọi S là tập hợp những giá trị của tham số m để hàm số sau không có cực trị trên $\mathbb{R}$.

$f(x) = \dfrac{1}{4}m^2.e^{4x} + \dfrac{1}{3}m.e^{3x} - \dfrac{1}{2}e^{2x} - (m^2 + m - 1)e^x$. Tổng tất cả các phần tử của tập S bằng

A. $-\dfrac{2}{3}$ **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

$f'(x) = m^2.e^{4x} + m.e^{3x} - e^{2x} - (m^2 + m - 1)e^x = e^x(m^2.e^{3x} + m.e^{2x} - e^x - m^2 - m + 1) = 0$

$\Leftrightarrow m^2.e^{3x} + m.e^{2x} - e^x - m^2 - m + 1 = 0$.

Đặt $t = e^x > 0$ ta có

Ta có: $m^2t^3 + mt^2 - t - m^2 - m + 1 = 0$

$\Leftrightarrow m^2(t^3 - 1) + m(t^2 - 1) + 1 - t = 0 \Leftrightarrow (t - 1)[m^2(t^2 + t + 1) + m(t + 1) - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (t - 1)[m^2t^2 + (m^2 + m)t + m^2 + m - 1] = 0$

Điều kiện cần để hàm số không có cực trị thì phương trình $m^2t^2 + (m^2 + m)t + m^2 + m - 1$ có nghiệm $t = 1 \Leftrightarrow 3m^2 + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1,\ m = \dfrac{1}{3}$.

Thử lại ta thấy với hai giá trị m trên ta đều có nghiệm đơn $t = 1$.

Vậy hai giá trị $m = -1,\ m = \dfrac{1}{3}$ thỏa mãn.

Dạng 3. Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị

Phương trình hai đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số bậc ba là phần dư của phép chia của y cho y'

- Phân tích (bằng cách chia đa thức y cho y'): $y = y' \cdot q(x) + h(x) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = h(x_1) \\ y_2 = h(x_2) \end{cases}$.
- Đường thẳng qua 2 điểm cực trị là $y = h(x)$.

Câu 1. **(Mã 123 - 2017)** Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB?

A. $M(0;-1)$ **B.** $N(1;-10)$ **C.** $P(1;0)$ **D.** $Q(-1;10)$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=3x^2-6x-9$ thực hiện phép chia y cho y' ta được số dư là $y=-8x-2$.

Như thế điểm $N(1;-10)$ thuộc đường thẳng AB.

Câu 2. **(Mã 104 - 2017)** Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=(2m-1)x+3+m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$.

A. $m=\frac{3}{2}$ **B.** $m=\frac{3}{4}$ **C.** $m=-\frac{1}{2}$ **D.** $m=\frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=3x^2-6x$. Từ đó ta có tọa độ hai điểm cực trị $A(0;1)$, $B(2;-3)$. Đường thẳng qua hai điểm cực trị có phương trình $y=-2x+1$. Đường thẳng này vuông góc với đường thẳng $y=(2m-1)x+3+m$ khi và chỉ khi $(2m-1)(-2)=-1\Leftrightarrow m=\frac{3}{4}$.

Câu 3. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=(2m-1)x+m+3$ song song với đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$

A. $m=\frac{3}{4}$. **B.** $m=\frac{1}{2}$. **C.** $m=-\frac{3}{4}$. **D.** $m=-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=x^3-3x^2+1$ có TXĐ: $\mathbb{R}$; $y'=3x^2-6x$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Suy ra đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(0;1)$, $B(2;-3)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(2;-4)$.

Đường thẳng d đi qua hai điểm A, B có phương trình: $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-4}\Leftrightarrow y=-2x+1$.

Đường thẳng $y=(2m-1)x+m+3$ song song với đường thẳng $d\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2m-1=-2\\m+3\neq 1\end{array}\right.\Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$.

Câu 4. Đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB.

A. $P(1;0)$. **B.** $M(0;-1)$. **C.** $N(1;-10)$. **D.** $Q(-1;10)$.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6x-9$.

$y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6x-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\Rightarrow y=6\\x=3\Rightarrow y=-26\end{array}\right.$

Ta có $A(-1;6), B(3;-26)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(4;-32)$ nên) Chọn $\vec{n}_{AB}=(8;1)$.

Phương trình đường thẳng AB là:

$$8(x+1)+1(y-6)=0\Leftrightarrow 8x+y+2=0.$$

Thay tọa độ các điểm P,M,N,Q vào phương trình đường thẳng AB ta có điểm $N(1;-10)$ thuộc đường thẳng.

Câu 5. **(Lương Văn Chánh - Phú Yên – 2018)** Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=(3m+1)x+3+m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-1$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{1}{6}$. **C.** $m=\frac{1}{6}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=x^3-3x^2-1$

Có : $y'=3x^2-6x$, $y=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)y'-2x-1$.

Do đó, đường thẳng Δ qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số này có phương trình là $y=-2x-1$.

Để d vuông góc với Δ thì $(3m+1).(-2)=-1 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{6}$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m=-\frac{1}{6}$.

Câu 6. **(TT Tân Hồng Phong - 2018)** Tìm tổng tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6m(1-2m)x$ song song đường thẳng $y=-4x$.

A. $m=-\frac{1}{3}$. **B.** $m=\frac{2}{3}$. **C.** $m=-\frac{2}{3}$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=6x^2+6(m-1)x+6m(1-2m)$, $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=1-2m \end{array}\right.$.

Để hàm số có hai cực trị thì $m\neq 1-2m \Leftrightarrow m\neq\frac{1}{3}$.

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(m;-7m^3+3m^2\right)$, $B\left(1-2m;20m^3-24m^2+9m-1\right)$. Do đó $\overrightarrow{AB}=\left(1-3m;(3m-1)^3\right)$. Do đó AB có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left((3m-1)^2;1\right)$.

Do đó $AB:(3m-1)^2x+y-2m^3+3m^2-m=0 \Leftrightarrow y=-(3m-1)^2x+2m^3-3m^2+m$.

Để đường thẳng AB song song với đường thẳng $y=-4x$ thì:

$$\begin{cases} -(3m-1)^2=-4 \\ 2m^3-3m^2+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\frac{1}{3} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m\neq 0 \\ m\neq\frac{1}{2} \\ m\neq 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m=-\frac{1}{3}.$$

Câu 7. **(THPT Xuân Hòa-Vĩnh Phúc- 2018)** Biết đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ có hai điểm cực trị A, B. Khi đó phương trình đường thẳng AB là

A. $y=2x-1$. **B.** $y=-2x+1$. **C.** $y=-x+2$. **D.** $y=x-2$.

Lời giải

Chọn B

Thực hiện phép chia y cho y' ta được: $y=y'.\left(\frac{1}{3}x\right)+(-2x+1)$.

Giả sử hai điểm cực trị của đồ thị hàm số lần lượt là: $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$.

Ta có: $\begin{cases} y_1=y(x_1)=y'(x_1).\left(\frac{1}{3}x_1\right)+(-2x_1+1)=-2x_1+1 \\ y_2=y(x_2)=y'(x_2).\left(\frac{1}{3}x_2\right)+(-2x_2+1)=-2x_2+1 \end{cases}$.

Ta thấy, toạ độ hai điểm cực trị A và B thoả mãn phương trình $y=-2x+1$.

Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị là: $y=-2x+1$.

Câu 8. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+2x^2+(m-3)x+m$ có hai điểm cực trị và điểm $M(9;-5)$ nằm trên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị.

A. $m=-1$. **B.** $m=-5$. **C.** $m=3$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=3x^2+4x+m-3$, để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow m<\frac{13}{3}(*)$

Ta có $y=y'.\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}\right)+\left(\frac{2m}{3}-\frac{26}{9}\right)x+\frac{7m}{9}+\frac{2}{3}$ nên phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y=\left(\frac{2m}{3}-\frac{26}{9}\right)x+\frac{7m}{9}+\frac{2}{3}$. Theo giả thiết, đường thẳng này đi qua $M(9;-5)$ nên $m=3$ (thỏa mãn điều kiện $(*)$).

Câu 9. **(Nguyễn Khuyến 2019)** Đường thẳng nối hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-2x+m$ đi qua điểm $M(-3;7)$ khi m bằng bao nhiêu?

A. 1. **B.** -1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-2$.

$y=x^3-2x+m=\frac{1}{3}x.y'+\left(-\frac{4}{3}x+m\right)$

Nguyễn Bảo Vương

Suy ra đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình là $y=-\frac{4}{3}x+m$

đường thẳng này đi qua điểm $M(-3;7)$ khi và chỉ khi $7=-\frac{4}{3}.(-3)+m \Leftrightarrow m=3$.

Câu 10. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018)** Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=(3m+1)x+3+m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-1$.

A. $m=\frac{1}{6}$. **B.** $-\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{1}{6}$.

Lời giải

Xét hàm số $y=x^3-3x^2-1$

Có : $y'=3x^2-6x$, $y=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)y'-2x-1$.

Do đó, đường thẳng Δ qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số này có phương trình là $y=-2x-1$.

Để d vuông góc với Δ thì $(3m+1).(-2)=-1 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{6}$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m=-\frac{1}{6}$.

Câu 11. **(TT Diệu Hiền - Cần Thơ - 2018)** Giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ và đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=abc+ab+c$.

A. $-\dfrac{16}{25}$. **B.** -9. **C.** $-\dfrac{25}{9}$. **D.** 1.

Lời giải

TXĐ $D=\mathbb{R}$.

$f'(x)=3x^2+2ax+b$. Điều kiện để hàm số có hai điểm cực trị là $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow a^2-3b>0$.

Lấy $f(x)$ chia cho $f'(x)$.

Ta có $f(x)=f'(x).\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{9}a\right)+\left(\dfrac{2}{3}b-\dfrac{2}{9}\right)x+c-\dfrac{1}{9}ab$.

Suy ra đường thẳng đi qua A, B là: $y=\left(\dfrac{2}{3}b-\dfrac{2}{9}\right)x+c-\dfrac{1}{9}ab\ (d)$.

Theo đầu bài (d) đi qua gốc tọa độ $\Rightarrow c-\dfrac{1}{9}ab=0\Leftrightarrow ab=9c$.

Khi đó $P=abc+ab+c\Leftrightarrow P=9c^2+10c\Leftrightarrow P=\left(3c+\dfrac{5}{3}\right)^2-\dfrac{25}{9}$.

Suy ra $\min P=-\dfrac{25}{9}$.

Câu 12. **(Chuyên Hạ Long - 2018)** Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+2$ có hai điểm cực trị A và B sao cho các điểm A, B và $M(1;-2)$ thẳng hàng.

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=-\sqrt{2}$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-\sqrt{2}$; $m=\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có: $y'=3x^2-6mx$; $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6mx=0\Leftrightarrow x=0$, $x=2m$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2m\neq 0\Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó hai điểm cực trị là $A(0;2)$, $B\left(2m;2-4m^3\right)$.

Ta có $\overrightarrow{MA}=(-1;4)$, $\overrightarrow{MB}=\left(2m-1;4-4m^3\right)$.

Ba điểm A, B và $M(1;-2)$ thẳng hàng $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ cùng phương

$\Leftrightarrow \dfrac{2m-1}{-1}=\dfrac{4-4m^3}{4}\Leftrightarrow \dfrac{2m-1}{-1}=\dfrac{1-m^3}{1}\Leftrightarrow 2m-1=m^3-1\Leftrightarrow m^3=2m$

$\Leftrightarrow m^2=2\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{2}$ (do $m\neq 0$).

Dạng 4. Tìm m để hàm số bậc 3 có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước

★ **Bài toán tổng quát**: Cho hàm số $y=f(x;m)=ax^3+bx^2+cx+d$. Tìm tham số m để đồ thị hàm số có *2* điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện K cho trước?

✍ **Phương pháp**:

— **Bước 1**. Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Tính đạo hàm: $y'=3ax^2+2bx+c$.

— **Bước 2**. Để hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}a_{y'}=3a\neq 0\\ \Delta_{y'}=(2b)^2-4.3ac>0\end{cases}$

và giải hệ này sẽ tìm được $m\in D_1$.

— **Bước 3**. Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $y'=0$. Theo Viét, ta có: $\begin{cases}S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}\\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$.

— **Bước 4**. Biến đổi điều kiện K về dạng tổng S và tích P. Từ đó giải ra tìm được $m \in D_2$.

— **Bước 5**. Kết luận các giá trị m thỏa mãn: $m = D_1 \cap D_2$.

Lưu ý:

— Hàm số bậc 3 không có cực trị $\Leftrightarrow$ $y' = 0$ không có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_{y'} \le 0$.

— Trong trường hợp điều kiện K liên quan đến hình học phẳng, tức là cần xác định tọa độ 2 điểm cực trị $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của $y' = 0$. Khi đó có 2 tình huống thường gặp sau:

• Nếu giải được nghiệm của phương trình $y' = 0$, tức tìm được x_1, x_2 cụ thể, khi đó ta sẽ thế vào hàm số đầu đề $y = f(x; m)$ để tìm tung độ y_1, y_2 tương ứng của A và B.

• Nếu tìm không được nghiệm $y' = 0$, khi đó gọi 2 nghiệm là x_1, x_2 và tìm tung độ y_1, y_2 bằng cách thế vào phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị.

Để viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị, ta thường dùng phương pháp tách đạo hàm (phần dư bậc nhất trong phép chia y cho y'), nghĩa là:

◦ Phân tích (bằng cách chia đa thức y cho y'): $y = y' \cdot q(x) + h(x) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = h(x_1) \\ y_2 = h(x_2) \end{cases}$.

◦ Đường thẳng qua 2 điểm cực trị là $y = h(x)$.

Dạng toán: Tìm tham số m để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước **(cùng phía, khác phía *d*)**:

Vị trí tương đối giữa 2 điểm với đường thẳng:

Cho 2 điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ và đường thẳng $d: ax + by + c = 0$. Khi đó:

• *Nếu $(ax_A + by_A + c) \cdot (ax_B + by_B + c) < 0$ thì A, B nằm về 2 phía so với đường thẳng d.*

• *Nếu $(ax_A + by_A + c) \cdot (ax_B + by_B + c) > 0$ thì A, B nằm cùng phía so với đường d.*

Trường hợp đặc biệt:

• *Để hàm số bậc ba $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với trục tung $Oy \Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm trái dấu và ngược lại.*

• *Để hàm số bậc ba $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với trục hoành $Ox \Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt (áp dụng khi nhẩm được nghiệm).*

Dạng toán: Tìm m để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước **(đối xứng và cách đều)**:

★ ***Bài toán 1. Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B đối xứng nhau qua đường d :***

— **Bước 1**. Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m \in D_1$.

— **Bước 2**. Tìm tọa độ 2 điểm cực trị A, B. Có 2 tình huống thường gặp:

+ Một là $y' = 0$ có nghiệm đẹp x_1, x_2, tức có $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$.

+ Hai là $y' = 0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là Δ và lấy $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2) \in \Delta$.

— **Bước 3**. Gọi $I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Do A, B đối xứng qua d nên thỏa hệ $\begin{cases} \Delta \perp d \\ I \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \\ I \in d \end{cases} \Rightarrow m \in D_2$.

— **Bước 4**. Kết luận $m = D_1 \cap D_2$.

★ ***Bài toán 2. Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B cách đều đường thẳng***

d :

— **Bước 1**. Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m \in D_1$.

— **Bước 2**. Tìm tọa độ 2 điểm cực trị A, B. Có 2 tình huống thường gặp:

+ Một là $y'=0$ có nghiệm đẹp x_1, x_2, tức có $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$.

+ Hai là $y'=0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là Δ và lấy $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2) \in \Delta$.

— **Bước 3**. Do A, B cách đều đường thẳng d nên $d(A;d)=d(B;d) \Rightarrow m \in D_2$.

— **Bước 4**. Kết luận $m = D_1 \cap D_2$.

☞ **Lưu ý**: Để 2 điểm A, B đối xứng nhau qua điểm $I \Leftrightarrow I$ là trung điểm AB.

Câu 1. Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA=OB$ (O là gốc tọa độ)?

A. $m=\dfrac{3}{2}$. **B.** $m=3$. **C.** $m=\dfrac{1}{2}$. **D.** $m=\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6x$, $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Do đó đồ thị hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị lần lượt có tọa độ là $A(0;m)$ và $B(2;-4+m)$.

Ta có $OA=OB \Leftrightarrow \sqrt{0^2+m^2}=\sqrt{2^2+(4-m)^2} \Leftrightarrow m^2=4+(4-m)^2 \Leftrightarrow 20-8m=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{5}{2}$.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2017)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-1)x$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A,B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y=5x-9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 3 **B.** 6 **C.** -6 **D.** 0

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Ta có $y'=x^2-2mx+(m^2-1)$

$\Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m-1 \\ x=m+1 \end{array}\right. \Rightarrow A\left(m-1;\dfrac{m^3-3m+2}{3}\right)$ và $B\left(m+1;\dfrac{m^3-3m-2}{3}\right)$

Dễ thấy phương trình đường thẳng $AB: y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{m(m^2-1)}{3}$ nên AB không thể song song hoặc trùng với $d \Rightarrow A,B$ cách đều đường thẳng $d: y=5x-9$ nếu trung điểm I của AB nằm trên d

$I\left(m;\dfrac{m^3-3m}{3}\right) \in d \Rightarrow \dfrac{m^3-3m}{3}=5m-9 \Leftrightarrow m^3-18m+27=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=\dfrac{-3\pm 3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Với $m=3 \Rightarrow A,B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d.

Với $m=\dfrac{-3\pm 3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow A,B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d.

Tổng các phần tử của S bằng 0.

Câu 3. **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{2}{3}x^3-mx^2-2\left(3m^2-1\right)x+\frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=2x^2-2mx-2\left(3m^2-1\right)=2\left(x^2-mx-3m^2+1\right)$,

$g\left(x\right)=x^2-mx-3m^2+1$; $\Delta=13m^2-4$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ $g\left(x\right)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ $\Delta>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>\frac{2\sqrt{13}}{13}\\m<-\frac{2\sqrt{13}}{13}\end{array}\right.$. (*)

x_1, x_2 là các nghiệm của $g\left(x\right)$ nên theo định lý Vi-ét, ta có $\left\{\begin{array}{l}x_1+x_2=m\\x_1x_2=-3m^2+1\end{array}\right.$.

Do đó $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1$ $\Leftrightarrow$ $-3m^2+2m+1=1$ $\Leftrightarrow$ $-3m^2+2m=0$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=\frac{2}{3}\end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện (*), ta thấy chỉ $m=\frac{2}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4. **(Chuyên KHTN - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^3-(2m-1)x^2+2mx-m-1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành khi và chỉ khi phương trình $mx^3-(2m-1)x^2+2mx-m-1=0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có (1) $\Leftrightarrow(x-1)\left[mx^2-(m-1)x+m+1\right]=0$

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi pt $mx^2-(m-1)x+m+1=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\neq0\\m-(m-1)+m+1\neq0\\(m-1)^2-4m(m+1)>0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\neq0\\m+2\neq0\\-3m^2-6m+1>0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\neq0\\m\neq-2\\\frac{-3-2\sqrt{3}}{3}<m<\frac{-3+2\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=-1$.

Câu 5. **(Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=x^3-(m+6)x^2+(2m+9)x-2$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành.

A. $\left[\begin{array}{l} m\geq -2 \\ m\leq -6 \end{array}\right.$. **B.** $m\geq -2$. **C.** $m\leq -6$. **D.** $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m>-2 \\ m<-6 \end{array}\right. \\ m\neq \dfrac{-3}{2} \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn D

$y'=3x^2-2(m+6)x+2m+9$.

$y'=3x^2-2(m+6)x+2m+9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{2m+9}{3} \end{array}\right.$.

Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow \dfrac{2m+9}{3}\neq 1\Leftrightarrow m\neq -3$. (1)

$y(1)=m+2$.

$y\left(\dfrac{2m+9}{3}\right)=-m\dfrac{(2m+9)^2}{27}-2$.

Ycbt $\Leftrightarrow y(1).y\left(\dfrac{2m+9}{3}\right)<0$

$\Leftrightarrow (m+2).\left[-m\dfrac{(2m+9)^2}{27}-2\right]<0\Leftrightarrow (m+2).\left(4m^3+36m^2+81m+54\right)>0\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m<-6 \\ m>-2 \end{array}\right. \\ m\neq \dfrac{-3}{2} \end{array}\right.$. (2)

Từ (1), (2) ta có ycbt $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m>-2 \\ m<-6 \end{array}\right. \\ m\neq \dfrac{-3}{2} \end{array}\right.$.

Câu 6. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+2018$ với m là tham số. Tổng bình phương tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1+2x_2=1$ bằng

A. $\dfrac{40}{9}$ **B.** $\dfrac{22}{9}$ **C.** $\dfrac{25}{4}$ **D.** $\dfrac{8}{3}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=mx^2-2(m-1)x+3(m-2)$

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $mx^2-2(m-1)x+3(m-2)=0$ phải có hai nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m\neq 0 \\ \Delta'=(m-1)^2-3m(m-2)>0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m\neq 0 \\ -2m^2+4m+1>0 \end{array}\right.$

Theo định lý Vi-ét ta có $\left\{\begin{array}{l} x_1.+x_2=\dfrac{2(m-1)}{m} \\ x_1.x_2=\dfrac{3(m-2)}{m} \end{array}\right.$

Theo bài ta có hệ phương trình $\begin{cases} x_1.+x_2=\dfrac{2(m-1)}{m} \\ x_1+2x_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{3m-4}{m} \\ x_2=1-\dfrac{2(m-1)}{m}=\dfrac{2-m}{m} \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{3m-4}{m}.\dfrac{2-m}{m}=\dfrac{3(m-2)}{m} \Rightarrow 3(2-m)m+(3m-4)(2-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2(t/m) \\ m=\dfrac{2}{3}(t/m) \end{array}\right.$

Vậy $m_1^{\,2}+m_2^{\,2}=\dfrac{40}{9}$.

Câu 7. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho hàm số $y=-x^3+3mx^2-3m-1$ với m là một tham số thực. Giá trị của m thuộc tập hợp nào sau đây để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x+8y-74=0$.

A. $m\in(-1;1]$. **B.** $m\in(-3;-1]$. **C.** $m\in(3;5]$. **D.** $m\in(1;3]$.

Lời giải

Chọn D

$y'=-3x^2+6mx$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$

Đồ thị có hai cực trị khi: $m\neq 0$

Khi đó hai điểm cực trị là: $A(0;-3m-1), B(2m;4m^3-3m-1)$

Tọa độ trung điểm AB là: $I(m;2m^3-3m-1)$

A và B đối xứng qua d khi và chỉ khi: $\begin{cases} I\in d \\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}_d=0 \end{cases}$

$\overrightarrow{AB}=(2m;4m^3), \vec{u}_d=(8;-1)$

+ $\overrightarrow{AB}.\vec{u}_d=0\Leftrightarrow 16m-4m^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

Với $m=0$ loại

Với $m=2$, ta có $I(2;9)\Rightarrow I\in d$

Với $m=-2$, ta có $I(-2;-11)\Rightarrow I\notin d$

Do đó $m=2$ thỏa mãn yêu cầu.

Câu 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-8x^2+(m^2+11)x-2m^2+2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Ox.

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow x^3-8x^2+(m^2+11)x-2m^2+2=0$ có ba nghiệm phân biệt

$x^3-8x^2+(m^2+11)x-2m^2+2=0\Leftrightarrow(x-2)(x^2-6x+m^2-1)=0$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^2-6x+m^2-1=0(*) \end{array}\right.$

Suy ra phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 2

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 10 - m^2 > 0 \\ m^2 - 8 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \neq \pm 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{10} < m < \sqrt{10} \end{cases}$

Vậy có 7 giá trị nguyên của tham số thỏa mãn đề bài.

Câu 9. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Cho hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m+1)x + m - 1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m < 20$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?

A. 18. **B.** 19. **C.** 21. **D.** 20.

Lời giải

+ Ta có: $y = (x-1)(x^2 - 2mx + 1 - m)$.

+ Hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành khi và chỉ khi đồ thị y cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt. $\Leftrightarrow y = (x-1)(x^2 - 2mx + 1 - m) = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 1 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 1 > 0 \\ 2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ m > \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array} \right. \\ m \neq \dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

+ Do $m \in N, m < 20$ nên $1 \le m < 20$. Vậy có 19 số tự nhiên thỏa mãn bài toán.

Câu 10. **(Chuyên KHTN 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 - 2)x - m^2 + 3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về hai phía khác nhau đối với trục hoành?

A. 2. **B.** 1.
C. 3. **D.** 4.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2 = 0$.

Để hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 2m + 7 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{15}}{2} < m < \dfrac{1+\sqrt{15}}{2} (*)$.

Ta lần lượt thử bốn giá trị nguyên của m thỏa mãn $(*)$ là $-1; 0; 1; 2$.

Ta được bốn hàm số

$y = x^3 - x + 2; y = x^3 - x^2 - 2x + 3; y = x^3 - 2x^2 - x + 2; y = x^3 - 3x^2 + x - 1$.

Khi đó ta nhận thấy chỉ có $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 11. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Tìm tất cả cả các giá trị của tham số m để $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$

A. $m = -3$ **B.** $m = 3$ **C.** $m = -1$ **D.** $m = 1$

Lời giải

Chọn A

$y' = 3x^2 - 6x + m$. Hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2. Vậy x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $y' = 0$

Theo viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 . x_2 = \dfrac{m}{3} \end{cases}$

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$

$= 4 - \dfrac{2m}{3} \Rightarrow 4 - \dfrac{2m}{3} = 6 \Rightarrow m = -3$

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)=2x^3-6x^2-m+1$ có các giá trị cực trị trái dấu?

A. 7. **B.** 9. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Có $f'(x)=6x^2-12x$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

$x=0\Rightarrow f(0)=-m+1$

$x=2\Rightarrow f(2)=-m-7$

Hàm số có các giá trị cực trị trái dấu

$\Leftrightarrow(-m+1)(-m-7)<0\Leftrightarrow(m-1)(m+7)<0\Leftrightarrow -7<m<1$.

Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 13. **(Thi thử SGD Hưng Yên)** Cho hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x-1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$.

A. $m\in(-1;4)\setminus\{3\}$. **B.** $m\in(3;4)$. **C.** $m\in(1;3)$. **D.** $m\in(-1;4)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=6x^2+6(m-1)x+6(m-2)$.

$y'=0\Leftrightarrow x^2+(m-1)x+(m-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-m+2\end{array}\right.$.

Để hàm số có điểm cực đại cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$ thì $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt nằm trong khoảng $(-2;3)$ $\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-m+2\neq-1\\-2<-m+2<3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\neq3\\-1<m<4\end{array}\right.$.

Câu 14. **(THPT Cẩm Bình Hà Tĩnh 2019)** Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^2-2$ có đồ thị (C) và điểm $C(1;4)$. Tính tổng các giá trị nguyên dương của m để (C) có hai điểm cực trị A,B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 4.

A. 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=3x^2-6mx=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2m\end{array}\right.$

Đồ thị (C) có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow 2m\neq0\Leftrightarrow m\neq0$.

Khi đó $A(0;4m^2-2),B(2m;-4m^3+4m^2-2)\Rightarrow AB=\sqrt{4m^2+16m^6}=2|m|\sqrt{4m^4+1}$

Phương trình đường thẳng AB là: $\dfrac{x-0}{2m-0}=\dfrac{y-(4m^2-2)}{-4m^3}\Leftrightarrow 2m^2x+y-4m^2+2=0$

$d(C,AB)=\dfrac{|2m^2+4-4m^2+2|}{\sqrt{4m^4+1}}=\dfrac{2|m^2-3|}{\sqrt{4m^4+1}}$

Diện tích tam giác ABC là

$S=\frac{1}{2}.AB.d\left(C,AB\right)=4\Leftrightarrow\frac{1}{2}.2\left|m\right|.\sqrt{4m^4+1}.\frac{2\left|m^2-3\right|}{\sqrt{4m^4+1}}=4$

$\Leftrightarrow\left|m\left(m^2-3\right)\right|=2\Leftrightarrow m^6-6m^4+9m^2-4=0\Leftrightarrow\left(m^2-1\right)^2\left(m^2-4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm1\\m=\pm2\end{array}\right.$

Do m nguyên dương nên ta được $m=1,m=2$, tổng thu được là 3.

Câu 15. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Cho hàm số $y=2x^3+3\left(m-1\right)x^2+6\left(m-2\right)x-1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $\left(-2;3\right)$.

A. $m\in\left(-1;3\right)\cup\left(3;4\right)$. **B.** $m\in\left(1;3\right)$. **C.** $m\in\left(3;4\right)$. **D.** $m\in\left(-1;4\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=6x^2+6\left(m-1\right)x+6\left(m-2\right)$

Để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $\left(-2;3\right)\Leftrightarrow$ pt $y'=0$ có 2 nghiệm thuộc khoảng $\left(-2;3\right)$

$\Leftrightarrow x^2+\left(m-1\right)x+\left(m-2\right)=0$ có 2 nghiệm thuộc khoảng $\left(-2;3\right)$

$\Leftrightarrow\left(x+1\right)\left(x+m-2\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\in\left(-2;3\right)\\x=2-m\end{array}\right.$

$YCBT\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2-m\neq-1\\-2<2-m<3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\neq3\\-1<m<4\end{array}\right.$

Câu 16. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số: $y=3x^3+2\left(m+1\right)x^2-3mx+m-5$ có hai điểm cực trị $x_1;x_2$ đồng thời $y\left(x_1\right).y\left(x_2\right)=0$ là:

A. -21 **B.** -39 **C.** -8 **D.** $3\sqrt{11}-13$

Lời giải

Chọn A

+) Để hàm số có hai cực trị thì phương trình $y'=0$ phải có hai nghiệm phân biệt:

$y'=9x^2+4\left(m+1\right)x-3m$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\Delta'=4\left(m+1\right)^2+27m>0$

+) Xét $y\left(x_1\right).y\left(x_2\right)=0$ nên ta có $y=3x^3+2\left(m+1\right)x^2-3mx+m-5$ phải tiếp xúc với trục hoành

$\Rightarrow3x^3+2\left(m+1\right)x^2-3mx+m-5=0$ phải có nghiệm kép

$\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left[3x^2+\left(2m+5\right)x-m+5\right]=0\left(1\right)$ phải có nghiệm kép

+) TH1: Phương trình $3x^2+\left(2m+5\right)x-m+5=0$ có một nghiệm $x=1\Rightarrow m_1=-13$

+) TH2: Phương trình $3x^2+\left(2m+5\right)x-m+5=0$ có nghiệm kép khác 1

$\Rightarrow\Delta=\left(2m+5\right)^2-12\left(5-m\right)=0\Leftrightarrow4m^2+32m-35=0\Rightarrow m_2+m_3=-8$

$\Rightarrow m_1+m_2+m_3=-21$

Câu 17. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3mx^2+27x+3m-2$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $\left|x_1-x_2\right|\leq5$. Biết $S=\left(a;b\right]$. Tính $T=2b-a$.

A. $T=\sqrt{51}+6$ **B.** $T=\sqrt{61}+3$ **C.** $T=\sqrt{61}-3$ **D.** $T=\sqrt{51}-6$

Lời giải

Chọn C

+) Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 27$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 9 = 0$ (1)

+) Theo giả thiết hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < -3 \end{array}\right.$ (*)

+) Với điều kiện (*) thì phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2, theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = 9 \end{cases}$

+) Ta lại có $|x_1 - x_2| \le 5 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \le 25 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 25 \le 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 61 \le 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{61}}{2} \le m \le \dfrac{\sqrt{61}}{2}$ (**)

+) Kết hợp (*), (**) và điều kiện m dương ta được: $3 < m \le \dfrac{\sqrt{61}}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \dfrac{\sqrt{61}}{2} \end{cases} \Rightarrow T = 2b - a = \sqrt{61} - 3$.

Câu 18. **(Sở Bắc Giang 2019)** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + mx + 3$ có hai điểm cực trị $x_1, x_2 \le 4$. Số phần tử của S bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + mx + 3 \Rightarrow y' = x^2 - 4x + m$.

Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4$.

Khi đó giả sử $x_1 < x_2$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 - \sqrt{4 - m} \\ x_2 = 2 + \sqrt{4 - m} \end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán trở thành $x_2 \le 4 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{4 - m} \le 4 \Leftrightarrow 0 \le m \le 4$.

Kết hợp với $m < 4$ ta được $0 \le m < 4$. Do m nguyên nên $m \in \{0;1;2;3\}$. Vậy có 4 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 19. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 4(m-2)x^2 - 7x + 1$ có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ $(x_1 < x_2)$ thỏa mãn $|x_1| - |x_2| = -4$

A. $m = 5$. **B.** $m = \dfrac{1}{2}$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = \dfrac{7}{2}$.

Lời giải

Ta có $y = x^3 + 4(m-2)x^2 - 7x + 1$ (1)

$\Rightarrow y' = 3x^2 + 8(m-2)x - 7$. Xét phương trình $3x^2 + 8(m-2)x - 7 = 0$ (2)

$\Delta' = [4(m-2)]^2 + 21 > 0$, với mọi m $\Rightarrow$ hàm số (1) luôn có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ với mọi m.

*Ta thấy $ac = -21 < 0 \Rightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm trái dấu

$\Rightarrow x_1 < 0; x_2 > 0 \Rightarrow |x_1| = -x_1; |x_2| = x_2$

*Ta có $|x_1| - |x_2| = -4 \Rightarrow -x_1 - x_2 = -4 \Leftrightarrow -(x_1 + x_2) = -4 \Leftrightarrow \dfrac{8(m-2)}{3} = -4 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$

Câu 20. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để điểm $M(2m^3; m)$ tạo với hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ (C) một tam giác có diện tích nhỏ nhất?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** không tồn tại

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = m+1 \end{array}\right. \Rightarrow \forall m \in R$, hàm số luôn có CĐ, CT

Tọa độ các điểm CĐ, CT của đồ thị là $A(m; 2m^3 + 3m^2 + 1), B(m+1; 2m^3 + 3m^2)$

Suy ra $AB = \sqrt{2}$ và phương trình đường thẳng $AB: x + y - 2m^3 - 3m^2 - m - 1 = 0$

Do đó, tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi khoảng cách từ M tới AB nhỏ nhất

Ta có $d(M, AB) = \dfrac{3m^2+1}{\sqrt{2}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, dấu "=" khi $m = 0$

Câu 21. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số thực m để đường thẳng đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ cắt đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$, bán kính bằng 1 tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.

A. $m = \dfrac{2 \pm \sqrt{3}}{3}$ **B.** $m = \dfrac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$ **C.** $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ **D.** $m = \dfrac{2 \pm \sqrt{5}}{2}$

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 3m$ suy ra đồ thị hàm số có điểm cực đại và cực tiểu khi $m > 0$. Các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số là $C\left(-\sqrt{m}; 2 + 2m\sqrt{m}\right); D\left(\sqrt{m}; 2 - 2m\sqrt{m}\right)$.

Đường thẳng Δ đi qua các điểm CĐ, CT của đồ thị hàm số có phương trình là: $y = -2mx + 2$. Do

$d(I, \Delta) = \dfrac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} < R = 1$ (vì m > 0) $\Rightarrow \Delta$ luôn cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R = 1$ tại 2

điểm A, B phân biệt. Dễ thấy $m = \dfrac{1}{2}$ không thỏa mãn do A, I, B thẳng hàng.

Với $m \neq \dfrac{1}{2}$: Δ không đi qua I, ta có: $S_{\Delta ABI} = \dfrac{1}{2} IA.IB.\sin AIB \leq \dfrac{1}{2} R^2 = \dfrac{1}{2}$.

Do đó $S_{\Delta IAB}$ lớn nhất bằng $\dfrac{1}{2}$ khi $\sin \widehat{AIB} = 1$ hay ΔAIB vuông cân tại $I \Leftrightarrow IH = \dfrac{R}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m = \dfrac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$ (H là trung điểm của AB)

Câu 22. **(VTED 2019)** Biết đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ có hai điểm cực trị $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ thỏa mãn $x_1(y_1 - y_2) = y_1(x_1 - x_2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = abc + 2ab + 3c$ bằng

A. $-\dfrac{49}{4}$ **B.** $-\dfrac{25}{4}$ **C.** $-\dfrac{841}{36}$ **D.** $-\dfrac{7}{6}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 3x^2 + 2ax + b$

Chia y cho y' ta được $y = y'\left(\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{9}a\right) + \left(-\dfrac{a^2}{9} - \dfrac{2b}{3}\right)x + c - \dfrac{ab}{9}$.

Do $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ là hai điểm cực trị nên $y'(x_1) = 0, y'(x_2) = 0$

Do đó $y_1 = \left(-\dfrac{a^2}{9} - \dfrac{2b}{3}\right)x_1 + c - \dfrac{ab}{9}; y_2 = \left(-\dfrac{a^2}{9} - \dfrac{2b}{3}\right)x_2 + c - \dfrac{ab}{9}$

Theo giả thiết $x_1(y_1 - y_2) = y_1(x_1 - x_2) \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1$

$\Leftrightarrow x_1\left[\left(-\frac{a^2}{9}-\frac{2b}{3}\right)x_2+c-\frac{ab}{9}\right]=x_2\left[\left(-\frac{a^2}{9}-\frac{2b}{3}\right)x_1+c-\frac{ab}{9}\right]$

$\Leftrightarrow x_1\left(c-\frac{ab}{9}\right)=x_2\left(c-\frac{ab}{9}\right)\Leftrightarrow c-\frac{ab}{9}=0(x_1\neq x_2)\Leftrightarrow ab=9c$

Ta có: $P=abc+2ab+3c=9c^2+21c=\left(3c+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}\geq-\frac{49}{4}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=abc+2ab+3c$ bằng $-\frac{49}{4}$

Câu 23. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3-m$ (m là tham số). Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và $I\left(2;-2\right)$. Tổng tất cả các giá trị của m để ba điểm I, A, B tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$ là

A. $\frac{4}{17}$. **B.** $\frac{14}{17}$. **C.** $-\frac{2}{17}$. **D.** $\frac{20}{17}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-1=0$.

Vì $\Delta'=1>0\ \forall m$ nên phương trình $y'=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x=m\pm1$.

Gọi $A\left(m+1;-4m-2\right)$, $B\left(m-1;-4m+2\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}=\left(-2;4\right)=-2\left(1;-2\right)$, $\overrightarrow{IA}=\left(m-1;-4m\right)$, $\overrightarrow{IB}=\left(m-3;-4m+4\right)$.

Phương trình đường thẳng AB qua $A\left(m+1;-4m-2\right)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left(2;1\right)$ là $AB:2x+y+2m=0$.

Suy ra $d\left(I,\ AB\right)=\frac{\left|2+2m\right|}{\sqrt{5}}$.

Khi đó $S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}AB.d\left(I,\ AB\right)=\frac{1}{2}2\sqrt{5}\frac{\left|2+2m\right|}{\sqrt{5}}=\left|2+2m\right|$.

Mặt khác $S_{\Delta IAB}=\frac{AB.IA.IB}{4R}\Leftrightarrow AB.IA.IB=4\sqrt{5}\left|2+2m\right|$.

$\Leftrightarrow\sqrt{20}\sqrt{17m^2-2m+1}\sqrt{17m^2-38m+25}=4\sqrt{5}\left|2+2m\right|$

$\Leftrightarrow\left(17m^2-2m+1\right)\left(17m^2-38m+25\right)=4\left(4m^2+8m+4\right)$

$\Leftrightarrow 289m^4-680m^3+502m^2-120m+9=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=\frac{3}{17}\end{array}\right.$.

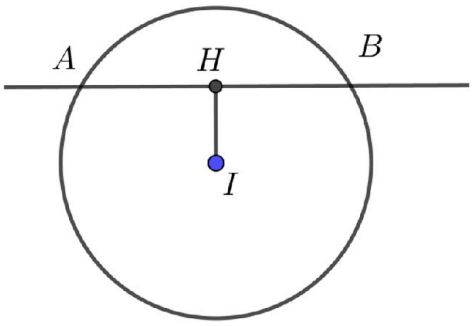
Vậy $m_1+m_2=\frac{20}{17}$.

Câu 24. Cho hàm số $y=x^3-6mx+4$ có đồ thị $\left(C_m\right)$. Gọi m_0 là giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của $\left(C_m\right)$ cắt đường tròn tâm $I\left(1;0\right)$, bán kính $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất. Chọn khẳng định đúng

A. $m_0\in\left(3;4\right)$. **B.** $m_0\in\left(1;2\right)$. **C.** $m_0\in\left(0;1\right)$. **D.** $m_0\in\left(2;3\right)$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $y' = 3x^2 - 6m$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2m$

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow m > 0$

Gọi $A\left(\sqrt{2m}; 4 - 4m\sqrt{2m}\right)$ và $B\left(-\sqrt{2m}; 4 + 4m\sqrt{2m}\right)$

Phương trình đường thẳng $AB: 4mx + y - 4 = 0$

Đặt $a = d\left(I, AB\right)$ $\left(0 < a < \sqrt{2}\right) \Rightarrow HB = \sqrt{2 - a^2}$

Suy ra $S_{\Delta IAB} = a\sqrt{2 - a^2} \le \frac{1}{2}\left(a^2 + 2 - a^2\right) = 1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = \sqrt{2 - a^2} \Leftrightarrow a = 1$

Khi đó $d\left(I; AB\right) = \frac{\left|4m + 0 - 4\right|}{\sqrt{16m^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{16m^2 + 1} = 4\left|m - 1\right|$

$\Leftrightarrow 16m^2 + 1 = 16m^2 - 32m + 16 \Leftrightarrow m = \frac{15}{32}$

Câu 25. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018)** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 - 4x - 10$, với m là tham số; gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số đã cho. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \left(x_1^2 - 1\right)\left(x_2^2 - 1\right)$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 9.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = x^2 - mx - 4$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - mx - 4 = 0$.

Ta có $\Delta = m^2 + 16 > 0$, $\forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt $\forall m \in \mathbb{R}$ hay hàm số luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2 $\forall m \in \mathbb{R}$.

Do x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của $y' = 0$ nên theo định lý Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1.x_2 = -4 \end{cases}$.

$P = \left(x_1^2 - 1\right)\left(x_2^2 - 1\right) = \left(x_1x_2\right)^2 - \left(x_1^2 + x_2^2\right) + 1 = \left(x_1x_2\right)^2 - \left(x_1 + x_2\right)^2 + 2x_1x_2 + 1$

$= 16 - m^2 - 8 + 1 = -m^2 + 9 \le 9, \forall m \in \mathbb{R}$.

Do đó giá trị lớn nhất của biểu thức P bằng $9 \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 26. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018)** Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3\left(m^2 - 1\right)x - m^3$, với m là tham số; gọi $\left(C\right)$ là đồ thị của hàm số đã cho. Biết rằng khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị $\left(C\right)$ luôn nằm trên một đường thẳng d cố định. Xác định hệ số góc k của đường thẳng d.

A. $k=-\frac{1}{3}$. **B.** $k=\frac{1}{3}$. **C.** $k=-3$. **D.** $k=3$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)$ và $y''=6x-6m$.

Khi đó $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)=0$.

$\Delta'=9m^2-9\left(m^2-1\right)=9$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị $x=\frac{3m+3}{3}=m+1$ và $x=\frac{3m-3}{3}=m-1$.

$y''\left(m-1\right)=6\left(m-1\right)-6m=-6<0\Rightarrow x=m-1$ là điểm cực đại của hàm số

$\Rightarrow A\left(m-1;-3m+2\right)$ là điểm cực đại của đồ thị (C).

Ta có $\begin{cases}x_A=m-1\\ y_A=-3m+2\end{cases}\Rightarrow y_A=-3x_A-1$

$\Rightarrow A$ luôn thuộc đường thẳng d có phương trình $y=-3x-1$.

Do đó hệ số góc k của đường thẳng d là -3.

Câu 27. **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2018)** Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1,x_2 sao cho $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=13$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m_0\in\left(-1;7\right)$. **B.** $m_0\in\left(7;10\right)$. **C.** $m_0\in\left(-15;-7\right)$. **D.** $m_0\in\left(-7;-1\right)$.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=3x^2-6x+m$.

Xét $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6x+m=0$; $\Delta'=9-3m$.

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow\Delta'>0\Leftrightarrow m<3$.

Hai điểm cực trị $x_1;x_2$ là nghiệm của $y'=0$ nên: $x_1+x_2=2;x_1.x_2=\frac{m}{3}$.

Để $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=13\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-3x_1.x_1=13$

$\Leftrightarrow 4-m=13\Leftrightarrow m=-9$. Vậy $m_0=-9\in\left(-15;-7\right)$.

Câu 28. **(THPT Thanh Miện I - Hải Dương 2018)** Biết rằng đồ thị hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2+x-2$ có giá trị tuyệt đối của hoành độ hai điểm cực trị là độ dài hai cạnh của tam giác vuông có cạnh huyền là $\sqrt{7}$. Hỏi có mấy giá trị của m ?

A. 3. **B.** 1. **C.** Không có m. **D.** 2.

Lời giải

Có $y'\left(x\right)=x^2-mx+1$, $y'=0\Leftrightarrow x^2-mx+1=0$ (1).

- Để hàm số có cực trị thì (1) phải có hai nghiệm phân biệt.

Điều này tương đương với $\Delta>0\Leftrightarrow m^2-4>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>2\\ m<-2\end{array}\right.$.

- Gọi hai nghiệm của (1) là x_1, x_2. Khi đó, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=m\\ x_1.x_2=1\end{cases}$.

Độ dài hai cạnh của tam giác vuông đó là $\left|x_1\right|$, $\left|x_2\right|$. Theo bài ra ta có phương trình:

$x_1^2+x_2^2=7\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=7\Leftrightarrow m^2-2=7\Leftrightarrow m^2=9\Leftrightarrow m=\pm3$ (thỏa mãn).

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 29. **(Phan Đăng Lưu - Huế - 2018)** Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)=-x^3+3x-4$ và $M(x_0;0)$ là điểm trên trục hoành sao cho tam giác MAB có chu vi nhỏ nhất, đặt $T=4x_0+2015$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?

A. $T=2017$. **B.** $T=2019$. **C.** $T=2016$. **D.** $T=2018$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Đạo hàm: $f'(x)=-3x^2+3$.

Xét $f'(x)=0\Leftrightarrow -3x^2+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=-2 \\ x=-1\Rightarrow y=-6 \end{array}\right.$. Đặt $A(1;-2)$ và $B(-1;-6)$.

Ta thấy hai điểm A và B nằm cùng phía với trục hoành.

Gọi $A'(1;2)$ là điểm đối xứng với điểm A qua trục hoành. Chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi ba điểm B, M và A' thẳng hàng.

Ta có: $\overrightarrow{A'M}=(x_0-1;-2)$ và $\overrightarrow{A'B}=(-2;-8)\Rightarrow \dfrac{x_0-1}{-2}=\dfrac{-2}{-8}\Leftrightarrow x_0=\dfrac{1}{2}\Rightarrow M\left(\dfrac{1}{2};0\right)$.

Vậy $T=4.\dfrac{1}{2}+2015=2017$.

Câu 30. **(Chuyên Hà Tĩnh - 2018)** Tổng tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ có điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Ta có: $y'=3x^2-6mx$, $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$.

Để hàm số có cực đại cực tiểu thì $m\neq 0$.

Khi đó các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0;4m^3)$, $B(2m;0)$.

Ta có $I(m;2m^3)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là $d: x-y=0$.

Do đó để điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua d thì:

$\left\{\begin{array}{l} 2m-4m^3=0 \\ m-2m^3=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow 1-2m^2=0\Leftrightarrow m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị của tham số thực m là 0.

Câu 31. **(THPT Triệu Thị Trinh - 2018)** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $y=x^3-5x^2+(m+4)x-m$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành.

A. $\varnothing$. **B.** $(-\infty;3)\cup(3;4]$. **C.** $(-\infty;3)\cup(3;4)$. **D.** $(-\infty;4)$.

Lời giải

Ta có $y=x^3-5x^2+(m+4)x-m=(x-1)(x^2-4x+m)$

Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành khi và chỉ khi phương trình $y=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x^2-4x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4-m>0 \\ 1-4+m\neq 0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m<4 \\ m\neq 3 \end{array}\right.$.

Câu 32. **(CTN - LẦN 1 - 2018)** Biết $\frac{a}{b}$ (trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và a, $b \in \mathbb{N}^*$) là giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{2}{3}x^3-mx^2-2\left(3m^2-1\right)x+\frac{2}{3}$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1$. Tính giá trị biểu thức $S=a^2+b^2$.

A. $S=13$. **B.** $S=25$. **C.** $S=10$. **D.** $S=34$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm $y'=2x^2-2mx-6m^2+2$.

Hàm số có hai điểm cực trị

$$\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow m^2-2\left(-6m^2+2\right)>0 \Leftrightarrow 13m^2-4>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\frac{2\sqrt{13}}{13} \\ m<-\frac{2\sqrt{13}}{13} \end{array}\right.$$

Theo định lý Viet thì $\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1x_2=-3m^2+1 \end{cases}$

Ta có $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1 \Leftrightarrow -3m^2+1+2m=1 \Leftrightarrow 3m^2-2m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\frac{2}{3} \end{array}\right.$

Chỉ có giá trị $m=\frac{2}{3}$ thỏa điều kiện, khi đó $S=a^2+b^2=2^2+3^2=13$.

Câu 33. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3+x^2+mx-1$ nằm bên phải trục tung. Tìm số phần tử của tập hợp $(-5;6)\cap S$.

A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$; $y'=3x^2+2x+m$.

Hàm bậc ba có cực trị khi $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=1-3m>0 \Leftrightarrow m<\frac{1}{3}$ (1).

Khi đó $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1-\sqrt{1-3m} \\ x=-1+\sqrt{1-3m} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{1-3m}$		$-1+\sqrt{1-3m}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$y_{CĐ}$	↘	y_{CT}	↗	$+\infty$

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số nằm về phía bên phải trục tung khi

$$-1+\sqrt{1-3m}>0 \Leftrightarrow \sqrt{1-3m}>1 \Leftrightarrow m<0.$$

Kết hợp với (1) ta có $m<0$ thì điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho nằm bên phải trục tung.

Khi đó S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên âm.

Vậy $(-5;6)\cap S=\{-4;-3;-2;-1\}\Rightarrow(-5;6)\cap S$ có 4 phần tử.

Vậy giá trị m cần tìm là $m\le -1$ hoặc $m\ge 3$.

Câu 34. **(THPT Nghen - Hà Tĩnh - 2018)** Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+3\left(m^2-1\right)x-3m^2-1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu nằm bên trái đường thẳng $x=2$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

$y=-x^3+3x^2+3\left(m^2-1\right)x-3m^2-1\Rightarrow y'=-3x^2+6x+3\left(m^2-1\right)$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-m\\x=1+m\end{array}\right.$.

Để đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu nằm bên trái đường thẳng $x=2$ thì

$\left\{\begin{array}{l}m\ne 0\\1+m<2\\1-m<2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\ne 0\\m<1\\m>-1\end{array}\right.$.

Vậy không có giá trị nguyên nào của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 35. **(Chuyên Hạ Long - 2018)** Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+2$ có hai điểm cực trị A và B sao cho các điểm A, B và $M(1;-2)$ thẳng hàng.

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=-\sqrt{2}$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-\sqrt{2}$; $m=\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có: $y'=3x^2-6mx$; $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6mx=0\Leftrightarrow x=0$, $x=2m$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2m\ne 0\Leftrightarrow m\ne 0$.

Khi đó hai điểm cực trị là $A(0;2)$, $B\left(2m;2-4m^3\right)$.

Ta có $\overrightarrow{MA}=(-1;4)$, $\overrightarrow{MB}=\left(2m-1;4-4m^3\right)$.

Ba điểm A, B và $M(1;-2)$ thẳng hàng $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ cùng phương

$\Leftrightarrow\dfrac{2m-1}{-1}=\dfrac{4-4m^3}{4}\Leftrightarrow\dfrac{2m-1}{-1}=\dfrac{1-m^3}{1}\Leftrightarrow 2m-1=m^3-1\Leftrightarrow m^3=2m$

$\Leftrightarrow m^2=2\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{2}$ (do $m\ne 0$).

Câu 36. **(THPT Nam Trực - Nam Định - 2018)** Cho hàm số $y=\dfrac{m}{3}x^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+2$. Hàm số đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+2x_2=1$ khi $m=a$ và $m=b$. Hãy tính tổng $a+b$.

A. $-\dfrac{8}{3}$. **B.** $\dfrac{8}{3}$. **C.** $-\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Có $y'=mx^2-2(m-1)x+3(m-2)$.

Hàm số đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+2x_2=1$ suy ra $x_2=\dfrac{2-m}{m}$.

Do $x_2=\dfrac{2-m}{m}$ là nghiệm của phương trình $mx^2-2(m-1)x+3(m-2)=0$ nên

$m\left(\dfrac{2-m}{m}\right)^2-2(m-1)\left(\dfrac{2-m}{m}\right)+3(m-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$.

Thử lại thấy $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$ đều thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $a+b=\dfrac{8}{3}$.

Câu 37. **(THPT Cao Bá Quát - 2018)** Cho hàm số $y=2x^3-3(m+1)x^2+6mx+m^3$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A,B sao cho độ dài $AB=\sqrt{2}$.

A. $m=0$. **B.** $m=0$ hoặc $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Ta có $y'=6x^2-6(m+1)x+6m$. $y'=0\Leftrightarrow x^2-(m+1)x+m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=m \end{array}\right.$.

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì $m\neq 1$.

Khi đó ta có $A(1;m^3+3m-1), B(m;3m^2)$.

Có $AB=\sqrt{2}\Leftrightarrow(m-1)^2+(m^3-3m^2+3m-1)^2=2\Leftrightarrow(m-1)^2+(m-1)^6=2$.

$\Leftrightarrow(m-1)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$ (thỏa mãn yêu cầu bài toán).

Câu 38. **(THPT Phú Lương - Thái Nguyên - 2018)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^3-3mx^2+3m-3$ có hai điểm cực trị A,B sao cho $2AB^2-(OA^2+OB^2)=20$ (trong đó O là gốc tọa độ)

A. $m=-1$. **B.** $m=1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-\dfrac{17}{11} \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{17}{11} \end{array}\right.$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Tập xác định $D=R$

Ta có: $y'=3mx^2-6mx$

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow m\neq 0$

Khi đó $\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Tọa độ điểm cực trị: $A(0;3m-3), B(2;-m-3)$

Theo giả thiết $2AB^2-(OA^2+OB^2)=20\Leftrightarrow 22m^2+12m-34=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{17}{11} \end{array}\right.$.

Dạng 5. Tìm m để hàm số trùng phương có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước

Một số công thức tính nhanh "thường gặp"

liên quan cực trị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$

1 ***cực trị:*** $ab\geq 0$		3 ***cực trị:*** $ab<0$	
$a>0$: 1 cực tiểu	$a<0$: 1 cực đại	$a>0$: 1 cực đại, 2 cực tiểu	$a<0$: 2 cực đại, 1 cực tiểu

$$A(0;c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)\Rightarrow AB=AC=\sqrt{\frac{b^4}{16a^2}-\frac{b}{2a}}, BC=2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

với $\Delta=b^2-4ac$

Phương trình qua điểm cực trị: $BC: y=-\dfrac{\Delta}{4a}$ và $AB, AC: y=\pm\left(\sqrt{\dfrac{-b}{2a}}\right)^3 x+c$

Gọi $\widehat{BAC}=\alpha$, luôn có: $8a(1+cos\alpha)+b^3(1-cos\alpha)=0 \Rightarrow cos\alpha=\dfrac{b^3+8a}{b^3-8a}$ và $S^2=-\dfrac{b^5}{32a^3}$

Phương trình đường tròn đi qua $A,B,C: x^2+y^2-(c+n)x+c.n=0$, với $n=\dfrac{2}{b}-\dfrac{\Delta}{4a}$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác là $R=\left|\dfrac{b^3-8a}{8ab}\right|$

Câu 1. **(THPT Lương Thế Vinh - 2018)** Cho hàm số $y=x^4-2x^2+2$. Diện tích S của tam giác có ba đỉnh là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho có giá trị là

A. $S=3$. **B.** $S=\dfrac{1}{2}$. **C.** $S=1$. **D.** $S=2$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \to y=2 \\ x=\pm 1 \to y=1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $A(0;2)$, $B(-1;1)$, $C(1;1)$.

Nhận xét ΔABC cân tại A. Vì vậy $S=\dfrac{1}{2}|y_A-y_B|.|x_C-x_B|=\dfrac{1}{2}.1.2=1$.

Câu 2. **(Chuyên Lê Hồng Phong - 2018)** Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ có ba điểm cực trị $A(0;\ 1)$, B, C thỏa mãn $BC=4$?

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=4$. **C.** $m=\pm 4$. **D.** $m=\pm\sqrt{2}$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=4x^3-4mx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m \end{array}\right.$.

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m>0$.

Tọa độ điểm cực trị của đồ thị hàm số: $A(0;1)$, $B\left(\sqrt{m};\ -m^2+1\right)$, $C\left(-\sqrt{m};\ -m^2+1\right)$.

$BC=4 \Leftrightarrow 4m=16 \Leftrightarrow m=4$.

Câu 3. **(Đề Minh Họa 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân

A. $m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **D.** $m=-1$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=4x^3+4mx; y'=0 \Leftrightarrow 4x^3+4mx=0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2+m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=-m\ (*) \end{array}\right.$

Hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow -m>0\Leftrightarrow m<0$.

Vậy tọa độ 3 điểm lần lượt là: $A(0;1);B\left(-\sqrt{-m};1-m^2\right);C\left(\sqrt{-m};1-m^2\right)$

Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(-\sqrt{-m};-m^2\right);\overrightarrow{AC}=\left(\sqrt{-m};-m^2\right)$

Vì ΔABC vuông cân tại $A\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow -\sqrt{m^2}+m^2.m^2=0\Leftrightarrow -|m|+m^4=0\Leftrightarrow m+m^4=0$

$\Leftrightarrow m=-1$ (vì $m<0$)

Vậy với $m=-1$ thì hàm số có 3 cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

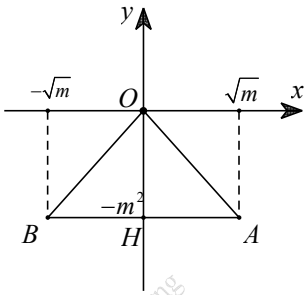
Câu 4. **(Mã 105 -2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^4-2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

A. $0<m<1$ **B.** $m>0$ **C.** $0<m<\sqrt[3]{4}$ **D.** $m<1$

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}$



Ta có $y'=4x^3-4mx$. $y'=0\Leftrightarrow 4x^3-4mx=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m\end{array}\right.$.

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $m>0$. Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $O(0;0)$, $A\left(\sqrt{m};-m^2\right)$, $B\left(-\sqrt{m};-m^2\right)$.

Do đó $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OH.AB=\frac{1}{2}m^2.2\sqrt{m}=m^2\sqrt{m}<1\Leftrightarrow 0<m<1.$

Câu 5. **(Chuyên Nguyễn Trãi - Hải Dương - Lần 2 - 2020)** Cho hàm số $y=x^4-2mx^2-2m^2+m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C thỏa mãn $ABCD$ là hình thoi với $D(0;-3)$. Số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $m\in\left(\frac{1}{2};\frac{9}{5}\right)$. **B.** $m\in\left(\frac{9}{5};2\right)$. **C.** $m\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $m\in(2;3)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3-4mx\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m\end{array}\right.$.

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m>0$.

Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A\left(0;-2m^2+m^4\right)$; $B\left(\sqrt{m};m^4-3m^2\right)$; $C\left(-\sqrt{m};m^4-3m^2\right)$.

Gọi I trung điểm của $BC\Rightarrow I\left(0;m^4-3m^2\right)$

Vì $A,D\in Oy$, B và C đối xứng nhau qua Oy nên tứ giác $ABCD$ là hình thoi $\Leftrightarrow$ I là trung điểm của AD

$\Leftrightarrow 2\left(m^4-3m^2\right)=-2m^2+m^4-3\Leftrightarrow m^4-4m^2+3=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2=1\\m^2=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm1\\m=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.\xrightarrow{m>0}\left[\begin{array}{l}m=1\\m=\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Câu 6. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông. Số phần tử của tập hợp S là

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

• $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2\Rightarrow y'=4x^3-4(m+1)x=4x\left(x^2-m-1\right)$.

• Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow x^2-m-1=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

$\Leftrightarrow -m-1>0$.

$\Leftrightarrow m<-1$.

Khi đó: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\sqrt{m+1}\\x=0\\x=\sqrt{m+1}\end{array}\right.$.

• Giả sử A,B,C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

$\Rightarrow A\left(-\sqrt{m+1};-2m-1\right),B\left(0;m^2\right),C\left(\sqrt{m+1};-2m-1\right)$

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{m+1};(m+1)^2\right),\overrightarrow{CB}=\left(-\sqrt{m+1};(m+1)^2\right)$

ΔABC vuông tại $B\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}=0\Leftrightarrow-(m+1)+(m+1)^4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=0\end{array}\right.\Rightarrow m=0$.

Câu 7. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Phòng 2019)** Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+1\ (1)$. Tổng lập phương các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính $R=1$ bằng

A. $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $2+\sqrt{5}$. **D.** $-1+\sqrt{5}$.

Lời giải

➢ TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

➢ $y'=4x^3-4mx=4x(x^2-m)$.

➢ Để đồ thị hs (1) có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m>0$.

➢ Gọi $A(0;1),B(\sqrt{m};-m^2+1),C(-\sqrt{m};-m^2+1)$ là các điểm cực trị của đồ thị hs (1), $I(0;-m^2+1)$ là trung điểm BC.

Ta có $AI=m^2,AB=AC=\sqrt{m+m^4}$. Suy ra $\dfrac{1}{2}AI.BC=\dfrac{AB.AC.BC}{4R}\Leftrightarrow R=\dfrac{2AI}{AB.AC}$

$\Leftrightarrow\dfrac{2m^2}{m+m^4}=1\Leftrightarrow m^4-2m^2+m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}m=0 & (l)\\m=1 & (n)\\m=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} & (l)\\m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} & (n)\end{array}\right.$

Câu 8. **(THPT Minh Châu Hưng Yên 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2m^2x^2+m+4$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều?

A. $m \in \left\{0;\sqrt{3};-\sqrt{3}\right\}$ **B.** $m \in \left\{0;\sqrt[6]{3};-\sqrt[6]{3}\right\}$ **C.** $m \in \left\{\sqrt[6]{3};-\sqrt[6]{3}\right\}$ **D.** $m \in \left\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\right\}$

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó, 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(0;m+4\right)$, $B\left(\left|m\right|;-m^4+m+4\right)$, $C\left(-\left|m\right|;-m^4+m+4\right)$.

Tam giác ABC có $AB=AC$ nên tam giác ABC cân tại A, suy ra tam giác ABC đều

$$\Leftrightarrow AB=BC \Leftrightarrow \sqrt{m^2+m^8}=2\left|m\right| \Leftrightarrow m^8+m^2=4m^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm\sqrt[6]{3} \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta được $m \in \left\{-\sqrt[6]{3};\sqrt[6]{3}\right\}$.

Câu 9. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4-2m^2x^2+1$ có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác vuông cân.

A. $m=1$. **B.** $m \in \left\{-1;1\right\}$. **C.** $m \in \left\{-1;0;1\right\}$. **D.** $m \in \varnothing$.

Lời giải

$y=x^4-2m^2x^2+1$.

+ Cách 1:

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow ab<0 \Leftrightarrow -2m^2<0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

$y'=4x^3-4m^2x$

$y'=0 \Leftrightarrow 4x^3-4m^2x=0$

$$\Leftrightarrow 4x\left(x^2-m^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=m \\ x_3=-m \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_1=1 \\ y_2=-m^4+1 \\ y_3=-m^4+1 \end{array}\right.$$

Nguyễn Bảo Vương

Giả sử $A\left(0;1\right)$, $B\left(m;-m^4+1\right)$, $C\left(-m;-m^4+1\right)$ là 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số.

$\overrightarrow{AB}=\left(m;-m^4\right) \Rightarrow AB=\sqrt{m^2+m^8}$.

$\overrightarrow{AC}=\left(-m;-m^4\right) \Rightarrow AC=\sqrt{m^2+m^8}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} AB=AC \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m \in \mathbb{R} \\ -m^2+m^8=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow -m^2\left(1-m^6\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \ \ (l) \\ m=1 \ \ (n) \\ m=-1(n) \end{array}\right.$$

Vậy $m \in \left\{-1;1\right\}$.

+ Cách 2: (Áp dụng công thức tính nhanh cực trị hàm trùng phương)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} ab<0 \\ \dfrac{-8a}{b^3}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2m^2<0 \\ \dfrac{-8}{\left(-2m^2\right)^3}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m \neq 0 \\ m^6=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m=1 \ \ (n) \\ m=-1(n) \end{array}\right. \end{array}\right.$.

Vậy $m \in \left\{-1;1\right\}$.

Câu 10. **(Toán Học Tuổi Trẻ Số 5)** Tìm tất cả các giá trị m sao cho đồ thị hàm số $y=x^4+\left(m+1\right)x^2-2m-1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác có một góc bằng $120°$.

A. $m=-1-\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$. **B.** $m=-1-\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$, $m=-1$.

C. $m=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$. **D.** $m<-1$.

Lời giải

Ta có $y'=4x^3+2(m+1)x=2x\left(2x^2+m+1\right)$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\2x^2=-m-1\end{array}\right.$

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow m+1<0\Leftrightarrow m<-1$.

Khi đó

$A(0;-2m-1)$, $B\left(-\sqrt{\dfrac{-m-1}{2}};-\dfrac{(m+1)^2}{4}-2m-1\right)$, $C\left(\sqrt{\dfrac{-m-1}{2}};-\dfrac{(m+1)^2}{4}-2m-1\right)$, là các điểm cực trị của đồ thị.

Ta thấy $AB=AC=\sqrt{-\dfrac{m+1}{2}+\dfrac{(m+1)^4}{16}}$ nên tam giác ABC cân tại A.

Từ giả thiết suy ra $A=120°$.

Gọi H là trung điểm BC, ta có $H\left(0;-\dfrac{(m+1)^2}{4}-2m-1\right)$

$BH=AH\tan 60°\Leftrightarrow\dfrac{(m+1)^2}{4}.\sqrt{3}=\sqrt{-\dfrac{m+1}{2}}$

$\Leftrightarrow\dfrac{3(m+1)^4}{16}=-\dfrac{m+1}{2}\Leftrightarrow 3(m+1)^3=-8\Leftrightarrow m=-1-\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 11. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) của hàm số $y=x^4-2m^2x^2+m^4+5$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tứ giác nội tiếp. Tìm số phần tử của S.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $y'=4x^3-4m^2x$.

Hàm số có cực đại cực tiểu $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\neq 0$.

Gọi $A\left(0;m^4+5\right)$, $B(m;5)$, $C(-m;5)$ lần lượt là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABOC$ khi đó ta có ba điểm A, I, O thẳng hàng.

Mặt khác do hai điểm B và C đối xứng nhau qua AO nên AO là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABOC\Rightarrow AB\perp OB\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OB}=0$.

Trong đó $\overrightarrow{AB}=\left(m;-m^4\right)$, $\overrightarrow{OB}=(m;5)$. Ta có phương trình $m^2-5m^4=0\Leftrightarrow m=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Câu 12. **(Chuyên Quang Trung - 2018)** Cho hàm số $y=x^4-2mx^2-2m^2+m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C và $ABDC$ là hình thoi trong đó $D(0;-3)$, A thuộc trục tung. Khi đó m thuộc khoảng nào?

A. $m\in\left(\dfrac{9}{5};2\right)$. **B.** $m\in\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $m\in(2;3)$. **D.** $m\in\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{5}\right)$.

Lời giải

Ta có $y' = 4x\left(x^2 - m\right) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$;

Với điều kiện $m > 0$ đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A\left(0; m^4 - 2m^2\right)$; $B\left(-\sqrt{m}; m^4 - 3m^2\right)$; $C\left(\sqrt{m}; m^4 - 3m^2\right)$. Để $ABDC$ là hình thoi điều kiện là $BC \perp AD$ và trung điểm I của BC trùng với trung điểm J của AD. Do tính đối xứng ta luôn có $BC \perp AD$ nên chỉ cần $I \equiv J$ với $I\left(0; m^4 - 3m^2\right), J\left(0; \dfrac{m^4 - 2m^2 - 3}{2}\right)$.

ĐK: $m^4 - 2m^2 - 3 = 2m^4 - 6m^2 \Leftrightarrow m^4 - 4m^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \in \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{9}{5}\right)$.

Câu 13. **(THPT Nguyễn Huệ - Ninh Bình - 2018)** Cho hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 + 2$ có đồ thị $\left(C_m\right)$. Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông.

A. $m = \sqrt[3]{3}$. **B.** $-m = \sqrt[3]{3}$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = 1$.

Lời giải

Cách 1:

Ta có $y' = -4x^3 + 4mx = -4x\left(x^2 - m\right)$.

Để hàm số có ba cực trị thì phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4x\left(x^2 - m\right) = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Rightarrow m > 0$.

Gọi $A(0;2)$, $B\left(-\sqrt{m}, m^2 + 2\right), C\left(\sqrt{m}, m^2 + 2\right)$ là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Vì ΔABC cân tại A nên ΔABC chỉ có thể vuông tại $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} = 0$.

Với $\overrightarrow{AB} = \left(-\sqrt{m}; m^2\right)$, $\overrightarrow{AC} = \left(\sqrt{m}; m^2\right) \Rightarrow -m + m^4 = 0 \Leftrightarrow m\left(m^3 - 1\right) = 0 \Rightarrow m = 1$.

Cách 2: Áp dụng công thức tính nhanh: Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ tạo thành một tam giác vuông khi $8a + b^3 = 0 \Leftrightarrow 8m^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Câu 14. **(CHUYÊN ĐHSPHN - 2018)** Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng

A. 1. **B.** $\sqrt{2} + 1$. **C.** $\sqrt{2} - 1$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

$y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow A(0;4) \\ x = -1 \Rightarrow B(-1;3) \\ x = 1 \Rightarrow C(1;3) \end{array}\right.$.

$\overrightarrow{AB} = (-1;-1) \Rightarrow AB = \sqrt{2}$; $\overrightarrow{AC} = (1;-1) \Rightarrow AC = \sqrt{2}$; $\overrightarrow{BC} = (2;0) \Rightarrow BC = 2$.

Ta có ΔABC vuông cân tại A có $S = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2 = 1$, $p = \dfrac{AB + AC + BC}{2} = \sqrt{2} + 1$.

Vậy $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$.

Câu 15. **(Hồng Bàng - Hải Phòng - 2018)** Cho hàm số $y = x^4 + 2(m-4)x^2 + m + 5$ có đồ thị $\left(C_m\right)$. Tìm m để $\left(C_m\right)$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

A. $m = 1$ hoặc $m = \dfrac{17}{2}$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = 4$. **D.** $m = \dfrac{17}{2}$.

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 + 4(m-4)x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 4 - m \end{array}\right.$.

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m < 4$. Khi đó các điểm cực trị của (C_m) là

$A(0; m+5)$, $B\left(\sqrt{4-m}; m+5-(m-4)^2\right)$, $C\left(-\sqrt{4-m}; m+5-(m-4)^2\right)$.

Do O là trọng tâm tam giác ABC nên $3(m+5) = 2(m-4)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \dfrac{17}{2} \end{array}\right.$.

Do $m < 4$ nên $m = 1$.

Câu 16. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

A. $m < 1$. **B.** $0 < m < 1$. **C.** $0 < m < \sqrt[3]{4}$. **D.** $m > 0$.

Lời giải

Hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$.

Để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị thì $m > 0$. Khi đó ba điểm cực trị là $O(0;0)$, $B\left(-\sqrt{m}; -m^2\right)$, $C\left(\sqrt{m}; -m^2\right)$. Ta giác OBC cân tại O, với $I\left(0; -m^2\right)$ trung điểm của BC

Theo yêu cầu bài toán, ta có: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} OI.BC = \dfrac{1}{2}\left|-m^2\right|.2\sqrt{m} < 1 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Câu 17. **(Liên Trường - Nghệ An -2018)** Gọi m_0 là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $m_0 \in (-1; 0]$. **B.** $m_0 \in (-2; -1]$. **C.** $m_0 \in (-\infty; -2]$. **D.** $m_0 \in (-1; 0)$.

Lời giải

Ta có: $y = x^4 + 2mx^2 - 1 \Rightarrow y' = 4x^3 + 4mx$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -m \end{array}\right.$ (1).

Để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - 1$ có ba điểm cực trị thì $y' = 0$ phải có ba nghiệm phân biệt tức là $m < 0$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{-m} \end{array}\right.$ nên ta gọi $A(0; -1)$, $B\left(-\sqrt{-m}; -m^2 - 1\right)$, $C\left(\sqrt{-m}; -m^2 - 1\right)$

Tam giác ABC cân tại A nên $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AH.BC$ với H là trung điểm của BC nên $H\left(0; -m^2 - 1\right)$. Nên: $AH = \sqrt{\left(-m^2\right)^2} = m^2$ và $BC = \sqrt{\left(2\sqrt{-m}\right)^2} = 2\sqrt{-m}$.

Ta có: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.m^2.2\sqrt{-m}$ theo giả thiết $S_{\Delta ABC} = 4\sqrt{2}$ nên $m^2\sqrt{-m} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow m = -2$.

Câu 18. **(Chuyên Bắc Ninh - 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

A. $m = 0$. **B.** $m = -1; m = 0$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 1; m = 0$.

Lời giải

Cách 1: Điều kiện để đồ thị hàm trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ có ba điểm cực trị là $ab<0\Leftrightarrow m>-1\Rightarrow$ loại **B**

Khi đó ba điểm cực trị lập thành tam giác vuông cân khi

$b^3+8a=0\Leftrightarrow -8(m+1)^3+8=0\Leftrightarrow m=0$.

Cách 2: Ta có $y'=4x\left(x^2-m-1\right)$

Xét $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m+1\end{array}\right.$. Để đồ thị số có ba điểm cực trị thì $m>-1$ $(*)$

Tọa độ ba điểm cực trị là $A\left(0;m^2\right)$, $B\left(\sqrt{m+1};-2m-1\right)$, $C\left(-\sqrt{m+1};-2m-1\right)$

Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BC thì $H\left(0;-2m-1\right)$

Khi đó ba điểm cực trị lập thành tam giác vuông cân khi

$AH=BH\Leftrightarrow\sqrt{(m+1)^4}=\sqrt{m+1}\Leftrightarrow m=0:T/m(*)$.

Câu 19. **(THPT Triệu Thị Trinh - 2018)** Cho hàm số: $y=x^4+2mx^2+m^2+m$. Tìm m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị lập thành tam giác có một góc bằng $120°$.

A. $m=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$. **B.** $m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$. **C.** $m=\dfrac{-1}{\sqrt[3]{3}}$. **D.** $m=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

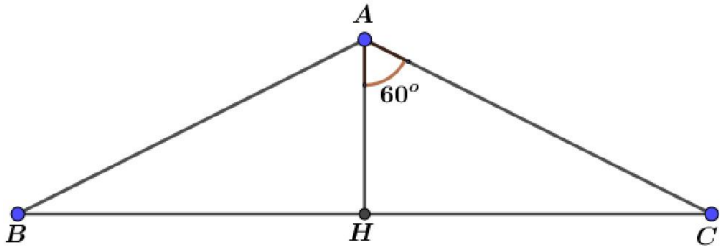
Lời giải

$y'=4x^3+4mx=4x\left(x^2+m\right)$.

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m<0$.

Khi đó $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{-m}\end{array}\right.$.

Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(0;m^2+m\right)$, $B\left(\sqrt{-m};m\right)$, $C\left(-\sqrt{-m};m\right)$.



Do ΔABC cân tại A nên gọi $H\left(0;m\right)$ là trung điểm của BC thì ΔAHC vuông tại H.

ΔABC có một góc bằng $120°$ khi và chỉ khi $\widehat{HAB}=\widehat{HAC}=60°\Leftrightarrow HB=AH.\tan\widehat{HAB}$

$\Leftrightarrow\sqrt{-m}=m^2\sqrt{3}\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$. Bỏ cặp ngoặc.

Câu 20. **(THPT Thái Phiên - Hải Phòng - 2018)** Đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2-m$ có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua ba điểm cực trị này có bán kính bằng 1 thì giá trị của m là:

A. $m=1;m=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **B.** $m=1;m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

C. $m=-1;m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $m=-1;m=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

$y=x^4-2mx^2-m\Rightarrow y'=4x^3-4mx$.

Với $m>0$ ta có ba cực trị $A\left(0;-m\right);B\left(-\sqrt{m};-m^2-m\right);C\left(\sqrt{m};-m^2-m\right)$.

$$S_{ABC}=\frac{abc}{4R}\Leftrightarrow\frac{1}{2}2\sqrt{m}\left|m^2\right|=2\frac{\sqrt{m}AB^2}{4}\Leftrightarrow 2m^2=m^4+m\Leftrightarrow m^4-2m^2+m=0.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0(l)\\m=1(n)\\m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}(n)\\m=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}(l)\end{array}\right.$$

Dạng 6. Tìm m để hàm số bậc 2 trên bậc 1 có cực trị thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 1. **(Toán Học Tuổi Trẻ Số 5)** Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+3}{2x+1}$.

A. $y=2x+2$. **B.** $y=x+1$. **C.** $y=2x+1$. **D.** $y=1-x$.

Lời giải

□ Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

□ $y'=\dfrac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}$, $y'=0\Leftrightarrow 2x^2+2x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1(\Rightarrow y=2)\\x=-2(\Rightarrow y=-1)\end{array}\right.$.

□ Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $M(1;2)$ và $N(-2;-1)$.

□ Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị M,N của đồ thị hàm số đã cho là: $y=x+1$.

Cách khác:

□ Áp dụng tính chất: Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số hữu tỷ $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ thì giá trị cực trị tương ứng của hàm số là $y_0=\dfrac{u(x_0)}{v(x_0)}=\dfrac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$. Suy ra với bài toán trên ta có phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=\dfrac{\left(x^2+2x+3\right)'}{(2x+1)'}=x+1$.

Câu 2. **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Điều kiện của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2-mx}{1-x}$ có cực đại và cực tiểu là

A. $m<0$. **B.** $m>-1$. **C.** $m<2$. **D.** $m>-2$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x\neq 1$.

Ta có $y=\dfrac{x^2-mx}{1-x}\Rightarrow y'=\dfrac{-x^2+2x-m}{(1-x)^2}$.

Hàm số $y=\dfrac{x^2-mx}{1-x}$ có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt và đổi dấu khi đi qua hai điểm đó $\Leftrightarrow -x^2+2x-m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ -1+2-m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}1-m>0\\ m\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow m<1$.

Vậy $m<1$ thì hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu.

Không có đáp án hoặc chọn **A.**

Câu 3. **(Chuyên KHTN - Hà Nội - Lần 3)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+2m}{x+1}$ có hai điểm cực trị A, B và tam giác OAB vuông tại O. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 9. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

$y'=\dfrac{x^2+2x-m}{(x+1)^2},\forall x\neq -1$. Đặt $f(x)=x^2+2x-m$, $h(x)=x^2+mx+2m$, $g(x)=x+1$.

Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị A, B khi $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác -1 $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=m+1>0\\ f(-1)=-m-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m>-1\ (1)$. Khi đó $\begin{cases}y(x_1)=\dfrac{h'(x_1)}{g'(x_1)}=2x_1+m\\ y(x_2)=\dfrac{h'(x_2)}{g'(x_2)}=2x_2+m\end{cases}$.

Suy ra $A(x_1;2x_1+m)$, $B(x_2;2x_2+m)$. Suy ra $\overrightarrow{OA}=(x_1;2x_1+m)$, $\overrightarrow{OB}(x_2;2x_2+m)$.

ΔOAB vuông tại O khi $\begin{cases}\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}\ (2)\\ \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=x_1.x_2+(2x_1+m)(2x_2+m)=0\ (3)\end{cases}$.

$(3)\Leftrightarrow m^2+5x_1.x_2+2m(x_1+x_2)=0$. Kết hợp với định lí Vi-et cho phương trình $f(x)=0$ ta được $m^2-5m-4m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\ (\text{không thỏa mãn}\ (2))\\ m=9\ (\text{thỏa mãn}\ (1),(2))\end{array}\right.\Rightarrow S=\{9\}$.

Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng 9.

Câu 4. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Biết rằng đồ thị $(H):y=\dfrac{x^2+2x+m}{x-2}$ (với m là tham số thực) có hai điểm cực trị là A,B. Hãy tính khoảng cách từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng AB.

A. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn A

+ Phương trình của đường thẳng AB là $y=\dfrac{(x^2+2x+m)'}{(x-2)'}\Leftrightarrow y=2x+2\Leftrightarrow 2x-y+2=0$.

+ Khoảng cách $d(O;AB)=\dfrac{|2.0-0+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu 5. **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2018)** Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+m^2}{x-1}$ có hai điểm cực trị A,B. Khi $\angle AOB=90^\circ$ thì tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng:

A. $\dfrac{1}{16}$. **B.** 8. **C.** $\dfrac{1}{8}$. **D.** 16.

Lời giải

$y'=\dfrac{(2x+m)(x-1)-x^2-mx-m^2}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-(m+m^2)}{(x-1)^2}$

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A,B thì $y'=0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác $1\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=1+m+m^2>0\\-1-m-m^2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\forall m\in\mathbb{R}$.

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực đại, cực tiểu là $y_A=2x+m$.

Gọi $x_A;x_B$ là hoành độ của A, B khi đó $x_A;x_B$ là nghiệm của $x^2-2x-(m+m^2)$.

Theo định lí Viet ta có $x_A+x_B=2$; $x_A.x_B=-m^2-m$.

$y_A=2x_A+m$; $y_B=2x_B+m$.

$\angle AOB=90^\circ\Rightarrow x_A.x_B+y_A.y_B=0\Leftrightarrow x_Ax_B+4x_Ax_B+2m(x_A+x_B)+m^2=0$

$\Leftrightarrow 5(-m^2-m)+4m+m^2=0\Leftrightarrow -4m^2-m=0\Leftrightarrow m=0;m=-\dfrac{1}{4}$.

Tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng: $0^2+\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}$.

Câu 6. **(Chuyên KHTN - 2018)** Với tham số m, đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-mx}{x+1}$ có hai điểm cực trị A, B và $AB=5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m>2$. **B.** $0<m<1$. **C.** $1<m<2$. **D.** $m<0$.

Lời giải

Ta có $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đạo hàm là $y'=\dfrac{x^2+2x-m}{(x+1)^2}$.

Để hàm số có hai điểm cực trị ta phải có $\begin{cases}1+m>0\\1-2-m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m>-1$.

Gọi hai hoành độ cực trị là x_1 và x_2 ta có $\begin{cases}x_1+x_2=-2\\x_1x_2=-m\end{cases}$.

Khi đó điểm $A(x_1,2x_1-m)$ và $B(x_2,2x_2-m)$.

$AB=\sqrt{4+4m}.\sqrt{5}=5\Leftrightarrow 4+4m=5\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{4}$.

Câu 7. **(Cụm 5 Trường Chuyên - ĐBSH - 2018)** Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-|m|x+4}{x-|m|}$. Biết rằng đồ thị hàm số có hai điểm cực trị phân biệt là A, B. Tìm số giá trị m sao cho ba điểm A, B, $C(4;2)$ phân biệt và thẳng hàng.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{|m|\}$.

Ta có $y=\dfrac{x^2-|m|x+4}{x-|m|}=x+\dfrac{4}{x-|m|}$.

$y'=1-\dfrac{4}{(x-|m|)^2}$, $\forall x\in D$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2+|m|\\x=-2+|m|\end{array}\right.$.

Tọa độ hai điểm cực trị là $B(2+|m|;4+|m|)$, $A(-2+|m|;-4+|m|)$.

$\overrightarrow{AB}=(4;8)$, $\overrightarrow{AC}=(6-|m|;6-|m|)$.

Ba điểm A, B, $C(4;2)$ phân biệt và thẳng hàng $\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}\\6-|m|\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6-|m|=4k\\6-|m|=8k\\6-|m|\neq 0\end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy không có giá trị m nào thỏa mãn.

Câu 8. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến - 2018)** Giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại điểm $x_0=2$ là:

A. $m=-1$. **B.** $m=-3$. **C.** $m=1$. **D.** $m=3$.

Lời giải

$y'=1-\dfrac{1}{(x+m)^2}; y''=\dfrac{2}{(x+m)^3}$.

Hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại điểm $x_0=2$ khi $\begin{cases}y'(2)=0\\y''(2)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-\dfrac{1}{(2+m)^2}=0\\\dfrac{2}{(2+m)^3}<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow m=-3\\m<-2\end{cases}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 9. **(THPT Nam Trực - Nam Định - 2018)** Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2mx+m+2}{2x-2m}$. Để hàm số có cực đại và cực tiểu, điều kiện của tham số m là:

A. $\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>2\end{array}\right.$ **B.** $-1<m<2$. **C.** $-2<m<1$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m<-2\\m>1\end{array}\right.$.

Lời giải

Điều kiện: $x\neq m$.

Đạo hàm $y'=\dfrac{x^2-2mx+2m^2-m-2}{2(x-m)^2}$.

Để hàm số có cực đại và cực tiểu, thì $y'=0\Leftrightarrow x^2-2mx+2m^2-m-2=0$ có hai nghiệm phân biệt khác m.

Ta có: $\begin{cases}\Delta'=-m^2+m+2>0\\m^2-2m.m+2m^2-m-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<m<2\\m^2-m-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow -1<m<2$.

Câu 10. **(Chuyên Nguyễn Dình Triểu - Đồng Tháp - 2018)** Để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại $x=2$ thì m thuộc khoảng nảo?

A. $(0;2)$. **B.** $(-4;-2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(2;4)$.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

$y'=\dfrac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}, y''=\dfrac{2}{(x+m)^3}$

Hàm số đạt cực đại tại $x=2$ nên $\begin{cases}y'(2)=0\\ y''(2)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{m^2+4m+3}{(m+2)^2}=0\\ \dfrac{2}{(m+2)^3}<0\end{cases}\Leftrightarrow m=-3$ thuộc $(-4;-2)$.

Câu 11. **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Cho hàm số $y=x+p+\dfrac{q}{x+1}$ đạt cực đại tại điểm $A(-2;-2)$. Tính pq.

A. $pq=2$. **B.** $pq=\dfrac{1}{2}$. **C.** $pq=\sqrt{3}$. **D.** $pq=1$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Ta có $y'=1-\dfrac{q}{(x+1)^2}$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$, suy ra $y'(-2)=0\Rightarrow 0=1-q\Leftrightarrow q=1$.

Lại có đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-2;-2)$ nên $-2=-2+p-q\Leftrightarrow p-q=0$.

Do đó $p=q=1$.

Thử lại: với $p=q=1$ ta được $y=x+1+\dfrac{1}{x+1}$.

Ta có $y'=1-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}=0\Rightarrow x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\end{array}\right.$.

Từ đó có bảng biến thiên của hàm số:

x	-2	-1	0
y'	+ 0 -	-	0 +
y	-2 ; -∞ ; -∞	+∞ ; 2	; +∞

Rõ ràng đồ thị hàm số đạt cực đại tại điểm $A(-2;-2)$. Vậy $p=q=1\Rightarrow pq=1$.

Câu 12. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có giá trị cực đại là 7.

A. $m=7$. **B.** $m=5$. **C.** $m=-9$. **D.** $m=-5$.

Lời giải

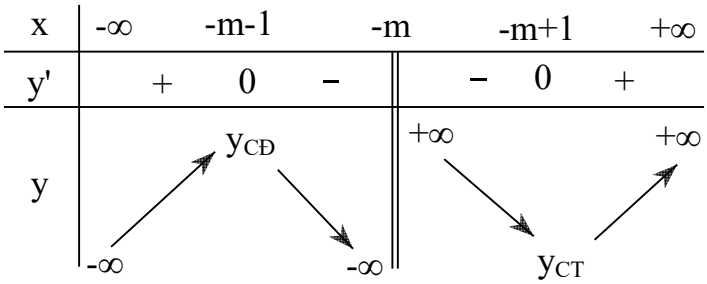
Chọn C

Tập xác định của hàm số là: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

$$y=\frac{x^2+mx+1}{x+m}\Rightarrow y'=\frac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}$$

$$y'=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -m\\ x^2+2mx+m^2-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -m\\ \left[\begin{array}{l}x=-m+1\\ x=-m-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-m+1\\ x=-m-1\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=-m-1$.

Vậy $y(-m-1)=7\Leftrightarrow -m-2=7\Leftrightarrow m=-9$.

---------- **HẾT** ----------

Nguyễn Bảo Vương

Dạng 1. Bài toán cực trị hàm số chứa dấu trị tuyệt đối

Bài toán: Đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị

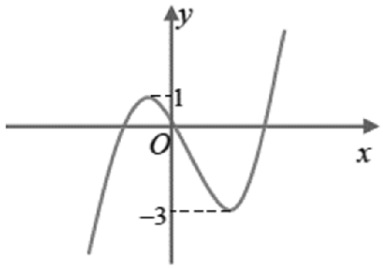
(Áp dụng định nghĩa). $y=f(x)=\sqrt{f^2(x)} \Rightarrow y'=\dfrac{2f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$

$$y'=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 (1) \\ f'(x)=0 (2) \end{array}\right.$$

Số nghiệm của (1) chính là số giao điểm của đồ thị $y=f(x)$ và trục hoành $y=0$. Còn số nghiệm của (2) là số cực trị của hàm số $y=f(x)$, dựa vào đồ thị suy ra (2). Vậy tổng số nghiệm bội lẻ của (1) và (2) chính là số cực trị cần tìm.

Dạng toán này mình làm tựa theo đề tham khảo 2018, vẫn xuất hiện ở dạng toán hàm hợp, các bạn học chú ý nhé!

Câu 1. **(Chuyên Vinh – Lần 2).** Đồ thị (C) có hình vẽ bên.



Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=|f(x)+m|$ có ba điểm cực trị là:

A. $m\le -1$ hoặc $m\ge 3$. **B.** $m\le -3$ hoặc $m\ge 1$. **C.** $m=-1$ hoặc $m=3$. **D.** $1\le m\le 3$.

Giải

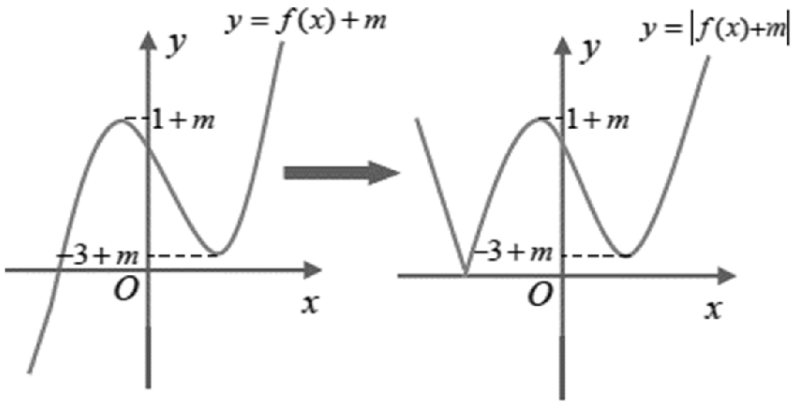
Cách 1:

Do $y=f(x)+m$ là hàm số bậc ba

Khi đó, hàm số $y=|f(x)+m|$ có ba điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ hàm số $y=f(x)+m$ có $y_{CD}.y_{CT}\ge 0$

(hình minh họa)



$\Leftrightarrow (1+m)(-3+m) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -1 \\ m \ge 3 \end{array}\right.$ → Đáp án A

Cách 2:

Ta có $y = |f(x)+m| = \sqrt{(f(x)+m)^2} \Rightarrow y' = \dfrac{(f(x)+m).f'(x)}{\sqrt{(f(x)+m)^2}}$.

Để tìm cực trị của hàm số $y = |f(x)+m|$, ta tìm x thỏa mãn $y' = 0$ hoặc y' không xác định.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f'(x) = 0 & (1) \\ f(x) = -m & (2) \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị, suy ra hàm số có 2 điểm cực trị x_1, x_2 trái dấu.

Suy ra (1) có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu.

Vậy để đồ thị hàm số có 3 cực trị thì (2) có một nghiệm khác x_1, x_2.

Số nghiệm của (2) chính là số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $y = -m$.

Do đó để (2) có một nghiệm thì dựa vào đồ thị ta có điều kiện: $\left[\begin{array}{l} -m \ge 1 \\ -m \le -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -1 \\ m \ge 3 \end{array}\right.$

→ Đáp án. **A.**

Chú ý:

Nếu $x = x_0$ là cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì $f'(x_0) = 0$ hoặc không tồn tại $f'(x_0)$.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị?

A. 5 **B.** 6 **C.** 4 **D.** 3

Lời giải.

Chọn C

$y = |f(x)| = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$

Ta có: $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$.; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -1$ hoặc $x = 2$.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m-5$	$\nearrow$	m	$\searrow$	$m-32$	$\nearrow$	$+\infty$

Do hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị nên hàm số $y=|f(x)|$ có 7 điểm cực trị khi

Phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m-5<0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<5$.

Vậy có 4 giá trị nguyên thỏa đề bài là $m=1; m=2; m=3; m=4$.

Câu 3. **(Gia Bình 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y=f\left(|x-3|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị

A. 5 **B.** 6 **C.** 3 **D.** 1

Lời giải

Chọn C

$y=f\left(|x-3|\right)$ (1), Đặt $t=|x-3|, t\geq 0$ Thì (1) trở thành: $y=f(t)(t\geq 0)$

Có $t=\sqrt{(x-3)^2} \Rightarrow t'=\dfrac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2}}$

Có $y'_x=t'_x f'(t)$

$$y'_x=0 \Leftrightarrow t'_x f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t'_x=0 \\ f'(t)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ t=-2(L) \\ t=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=7 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Lấy x=8 có $t'(8)f'(5)>0$, đạo hàm đổi dấu qua các nghiệm đơn nên ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		3		7		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	CT	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	CT	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT thì hàm số $y=f\left(|x-3|\right)$ có 3 cực trị.

Câu 4. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\left|x^4-2mx^2+2m^2+m-12\right|$ có bảy điểm cực trị

A. 1. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y=\left|x^4-2mx^2+2m^2+m-12\right|$ có bảy điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+2m^2+m-12$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt

$x^4-2mx^2+2m^2+m-12=0$ có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} m^2-\left(2m^2+m-12\right)>0 \\ 2m>0 \\ 2m^2+m-12>0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4<m<3 \\ m>0 \\ m<\dfrac{-1-\sqrt{97}}{4} \vee m>\dfrac{-1+\sqrt{97}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1+\sqrt{97}}{4}<m<3$$

Vậy không có giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\left|x^4-2mx^2+2m^2+m-12\right|$ có bảy điểm cực trị.

Câu 5. **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m^2\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+m^2$; $f'(x)=12x^3-12x^2-24x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x_1=0; x_2=-1; x_3=2$. Suy ra, hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị.

$\Rightarrow$ Hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m^2\right|$ có 5 điểm cực trị khi đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 3x^4-4x^3-12x^2+m^2=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Phương trình $3x^4-4x^3-12x^2+m^2=0 \Leftrightarrow -3x^4+4x^3+12x^2=m^2$ (1).

Xét hàm số $g(x)=-3x^4+4x^3+12x^2$; $g'(x)=-12x^3+12x^2+24x$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	32	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2<0 \\ 5<m^2<32 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{5}<|m|<\sqrt{32}$.

Vậy $m\in\{3;4;5;-3;-4;-5\}$.

Câu 6. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị.

A. 16 **B.** 44 **C.** 26 **D.** 27

Lời giải

Chọn C

Đặt: $g(x)=3x^4-4x^3-12x^2+m$

Ta có: $g'(x)=12x^3-12x^2-24x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\Rightarrow y=m-32\\x=-1\Rightarrow y=m-5\\x=0\Rightarrow y=m\end{array}\right.$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$m-5$	↗	m	↘	$m-32$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số có $y=\left|g(x)\right|$ có 5 điểm cực trị khi $\left[\begin{array}{l}m<0\\\left\{\begin{array}{l}m-5>0\\m-32<0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<0\\5<m<32\end{array}\right.$.

Vì m là số nguyên dương cho nên có 26 số m thỏa đề bài

Câu 7. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=\left|x^4-2mx^2+2m-1\right|$ với m là tham số thực. Số giá trị nguyên trong khoảng $[-2;2]$ của m để hàm số đã cho có 3 điểm cực trị là

A. 2 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 1

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x)=x^4-2mx^2+2m-1$, $f'(x)=4x^3-4mx$, $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m\end{array}\right.$

+ Trường hợp 1: hàm số có một cực trị $\Rightarrow m\in[-2;0]$.

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực trị là $A(0;2m-1)$.

Do $m\in[-2;0]\Rightarrow y_A=2m-1<0$ nên đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt nên hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có 3 cực trị $\Rightarrow$ có 3 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

+ Trường hợp 2: hàm số có ba cực trị $\Rightarrow m\in(0;2]$.

Khi đó đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị là $A(0;2m-1)$, $B\left(\sqrt{m};-m^2+2m-1\right)$, $C\left(-\sqrt{m};-m^2+2m-1\right)$.

Do $a=1>0$ nên hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có 3 điểm cực trị khi hàm số $y=f(x)$ có $y_B=y_C\geq 0$

$\Leftrightarrow -m^2+2m-1\geq 0\Leftrightarrow m=1$.

Nếu $y_B=y_C<0$ (trong bài toán này không xảy ra) thì hàm số có ít nhất 5 điểm cực trị.

Vậy có 4 giá trị của m thỏa ycbt.

Câu 8. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m-1\right|$ có 7 điểm cực trị là:

A. $(0;6)$ **B.** $(6;33)$ **C.** $(1;33)$ **D.** $(1;6)$

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+m-1$,

Có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x\left(x^2-x-2\right)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$m-6$	↗	$m-1$	↘	$m-33$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m-6<0<m-1\Leftrightarrow 1<m<6$.

Câu 9. **(THPT Kinh Môn - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

A. $\frac{5}{4}<m\le 2$. **B.** $-2<m<\frac{5}{4}$. **C.** $-\frac{5}{4}<m<2$. **D.** $\frac{5}{4}<m<2$.

Lời giải

Ta có: $y'=3x^2-2(2m-1)x+2-m$

Hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị khi chi khi hàm số $f(x)$ có hai cực trị dương.

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\Delta>0\\S>0\\P>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}(2m-1)^2-3(2-m)>0\\\frac{2(2m-1)}{3}>0\\\frac{2-m}{3}>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}4m^2-m-5>0\\m>\frac{1}{2}\\m<2\end{array}\right.\Leftrightarrow\frac{5}{4}<m<2$$

Câu 10. **(Chuyên Đh Vinh - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\left(x^3-2x^2\right)\left(x^3-2x\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $\left|f(1-2018x)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

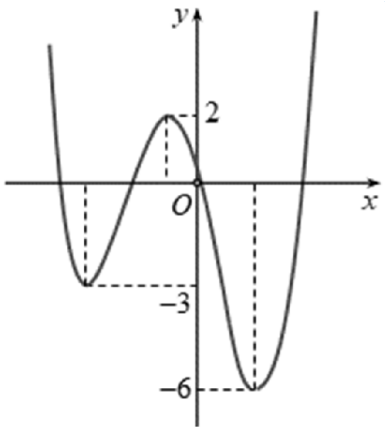
A. 9. **B.** 2018. **C.** 2022. **D.** 11.

Lời giải

Ta có $f'(x)=x^3(x-2)\left(x^2-2\right)=0$ có 4 nghiệm và đổi dấu 4 lần nên hàm số $y=f(x)$ có 4 cực trị. Suy ra $f(x)=0$ có tối đa 5 nghiệm phân biệt.

Do đó $y=\left|f(1-2018x)\right|$ có tối đa 9 cực trị.

Câu 11. **(THPT Thạch Thanh 2 - Thanh Hóa - 2018)** Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f(x)$.



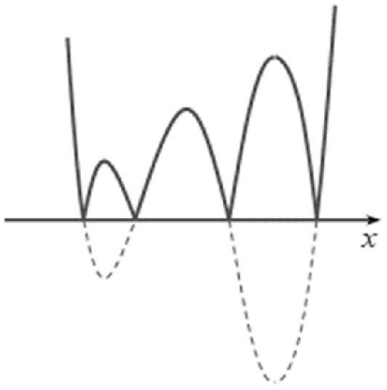
Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f\left(x-1\right)+m\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 9. **B.** 12. **C.** 18. **D.** 15.

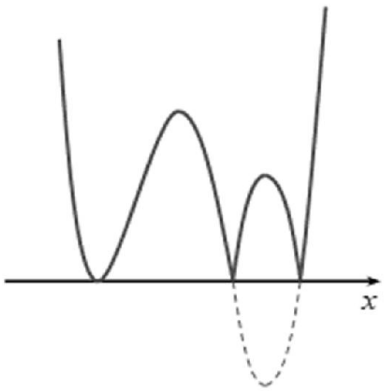
Lời giải

Nhận xét: Số giao điểm của $\left(C\right):y=f\left(x\right)$ với Ox bằng số giao điểm của $\left(C'\right):y=f\left(x-1\right)$ với Ox.

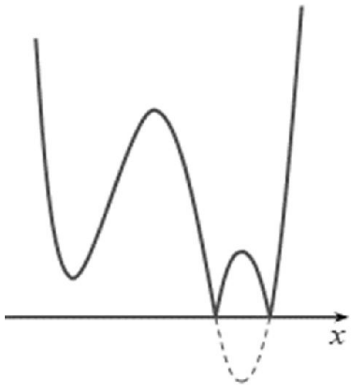
Vì $m>0$ nên $\left(C''\right):y=f\left(x-1\right)+m$ có được bằng cách tịnh tiến $\left(C'\right):y=f\left(x-1\right)$ lên trên m đơn vị.



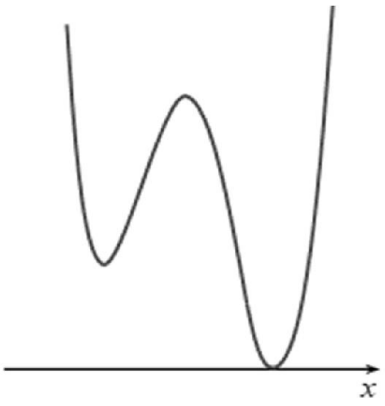
TH1: $0<m<3$



TH2 : $m=3$



TH3: $3<m<6$



TH4 : $m\ge 6$

TH1: $0<m<3$. Đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị. Loại.

TH2: $m=3$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.

TH3: $3<m<6$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.

TH4: $m\ge 6$. Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị. Loại.

Vậy $3\le m<6$. Do $m\in\mathbb{Z}^*$ nên $m\in\left\{3;4;5\right\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12.

Câu 12. **(THPT Quảng Yên - Quảng Ninh - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4+4x^3-12x^2+\frac{m}{2}\right|$ có 7 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $y=\left|3x^4+4x^3-12x^2+\frac{m}{2}\right|=\sqrt{\left(3x^4+4x^3-12x^2+\frac{m}{2}\right)^2}$

$$\Rightarrow y'=\frac{\left(12x^3+12x^2-24x\right)\left(3x^4+4x^3-12x^2+\frac{m}{2}\right)}{\sqrt{\left(3x^4+4x^3-12x^2+\frac{m}{2}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}12x^3+12x^2-24x=0\ \ (1)\\ 3x^4+4x^3-12x^2+\frac{m}{2}=0\ \ (2)\end{array}\right.$$

Từ $(1)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\\ x=-2\end{array}\right.$.

Vậy để hàm số có 7 điểm cực trị thì (2) phải có bốn nghiệm phân biệt khác $\{0;1;-2\}$.

Xét hàm số $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+\frac{m}{2}\Rightarrow f'(x)=12x^3+12x^2-24x\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\\ x=-2\end{array}\right.$

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-32+\frac{m}{2}$	$\nearrow$	$\frac{m}{2}$	$\searrow$	$-5+\frac{m}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Để (2) có 4 nghiệm phân biệt thì $f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}-5+\frac{m}{2}<0\\ \frac{m}{2}>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m<10\\ m>0\end{array}\right.\Leftrightarrow 0<m<10.$$

Vậy có 9 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4+4x^3-12x^2+\frac{m}{2}\right|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 13. **(THPT Nguyễn Tất Thành - Yên Bái - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị?

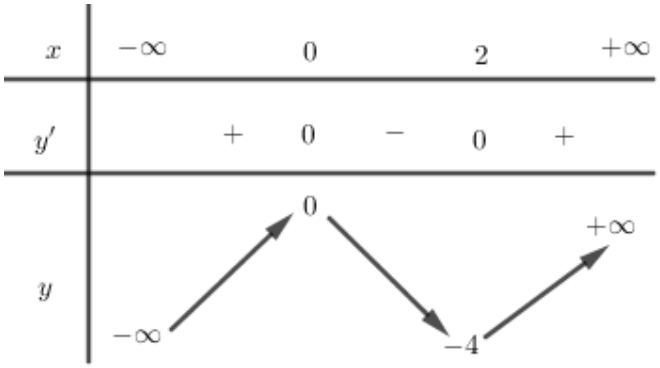
A. 5. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có hai điểm cực trị và nằm về hai phía của trục hoành $\Leftrightarrow$ phương trình $x^3-3x^2+m=0\ (1)$ có ba nghiệm phân biệt.

Xét bbt của hàm số $y=x^3-3x^2$

$y'=3x^2-6x=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$



Từ đó ta được (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4<-m<0\Leftrightarrow 0<m<4$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 14. **(Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai - Sóc Trăng - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^5-25x^3+60x+m\right|$ có 7 điểm cực trị?

A. 42. **B.** 21. **C.** 40. **D.** 20.

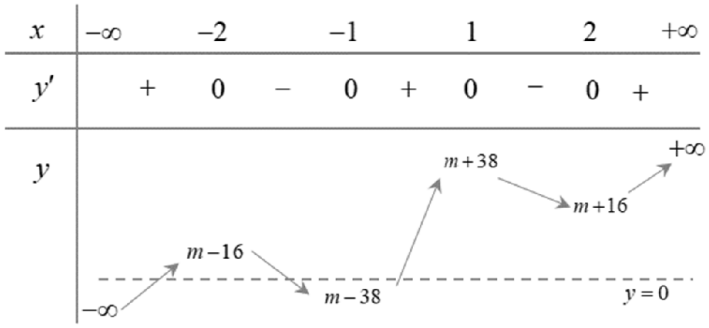
Lời giải

Nguyễn Bảo Vương

$y=3x^5-25x^3+60x+m$

$\Rightarrow y'=15x^4-75x^2+60$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1\\x^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\Rightarrow y=m-16\\x=-1\Rightarrow y=m-38\\x=1\ \Rightarrow y=m+38\\x=2\ \Rightarrow y=m+16\end{array}\right.$

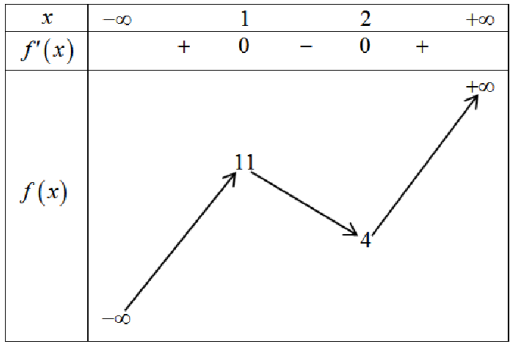


Suy ra $y=\left|3x^5-25x^3+60x+m\right|$ có 7 điểm cực trị

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-38<0<m-16\\m+16<0<m+38\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}16<m<38\\-38<m<-16\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\overline{17,37}\\m=\overline{-37,-17}\end{array}\right.$

Có tất cả 42 giá trị nguyên của m.

Câu 15. **(Sở Nam Định - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

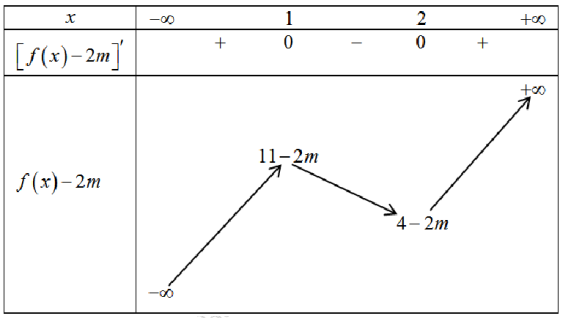


Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)-2m\right|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

A. $m\in\left(4;11\right)$. **B.** $m\in\left(2;\dfrac{11}{2}\right)$. **C.** $m=3$. **D.** $m\in\left[2;\dfrac{11}{2}\right]$.

Lời giải

Từ BBT của hàm số $y=f\left(x\right)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)-2m$ như sau



Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)-2m\right|$ gồm hai phần:

+ Phần đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)-2m$ nằm phía trên trục hoành.

+ Phần đối xứng với đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)-2m$ nằm phía dưới trục hoành qua trục Ox.

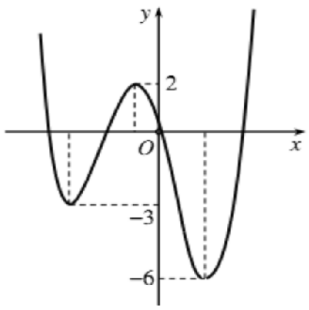
Do đó, đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)-2m\right|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

$$\left(4-2m\right)\left(11-2m\right)<0\Leftrightarrow m\in\left(2;\frac{11}{2}\right).$$

Câu 16. **(THPT Nguyễn Huệ - Tt Huế - 2018)** Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x-2\right)+m\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 15. **B.** 18. **C.** 9. **D.** 12.

Lời giải



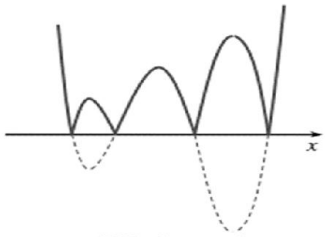
Cách 1: *dùng đồ thị.*

- Nhận thấy: số giao điểm của $(C): y = f(x)$ với Ox bằng số giao điểm của $(C_1): y = f(x-2)$ với Ox.

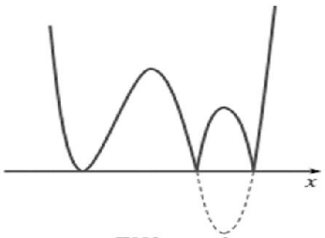
Vì $m > 0$ nên $(C_2): y = f(x-2)+m$ có được bằng cách tịnh tiến $(C_1): y = f(x-2)$ lên trên m đơn vị.

- Đồ thị hàm số $y = |f(x-2)+m|$ có được bằng cách lấy đối xứng qua trục hoành Ox phần đồ thị (C_2) nằm phía dưới trục Ox và giữ nguyên phần phía trên trục Ox.

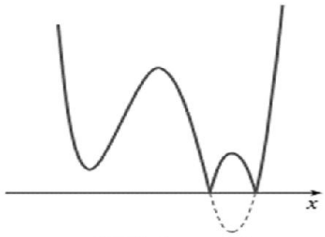
- Ta xét các trường hợp sau:



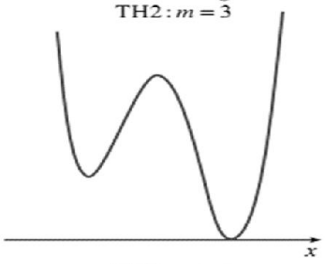
TH1: $0 < m < 3$



TH2: $m = 3$



TH3: $3 < m < 6$



TH4: $m \geq 6$

+ Trường hợp 1: $0 < m < 3$: đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị (loại).
+ Trường hợp 2: $m = 3$: đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị (thỏa mãn).
+ Trường hợp 3: $3 < m < 6$: đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị (thỏa mãn).
+ Trường hợp 4: $m \geq 6$: đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị (loại).

Vậy $3 \leq m < 6$ Do $m \in \mathbb{Z}_+^*$ nên $m \in \{3;4;5\}$ hay $S = \{3;4;5\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12.

***Cách 2:** đạo hàm hàm số hợp.*

- Ta có: $y = |f(x-2)+m| = \sqrt{[f(x-2)+m]^2} \Rightarrow y' = \dfrac{(f(x-2)+m).f'(x-2)}{\sqrt{[f(x-2)+m]^2}}$

- Xét $f'(x-2) = 0$ (1)

+ Do phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nên phương trình $f'(x-2) = 0$ cũng có 3 nghiệm phân biệt.

- Xét $f(x-2)+m = 0 \Leftrightarrow f(x-2) = -m$ (2)

+ Nếu $-6 < -m < -3 \Leftrightarrow 3 < m < 6$ thì phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 3 nghiệm của (1).

+ Nếu $-m = -3 \Leftrightarrow m = 3$ thì (2) có 3 nghiệm phân biệt (trong đó có 2 nghiệm đơn khác 3 nghiệm của (1) và 1 nghiệm kép trùng với 1 nghiệm của (1))

Tóm lại : với $3 \leq m < 6$ thì hai phương trình (1) và (2) có tất cả 5 nghiệm bội lẻ phân biệt và y' đổi dấu khi x đi qua các nghiệm đó, hay đồ thị hàm số $y = |f(x-2)+m|$ có 5 điểm cực trị.

- Lại do $m \in \mathbb{Z}_+^*$ nên $m \in \{3;4;5\}$ hay $S = \{3;4;5\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12.

Câu 17. **(Sở Hưng Yên - 2018)** Cho hàm số $f(x)=\left|x^3-3x^2+m\right|$ với $m\in[-5;5]$ là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng ba điểm cực trị.

A. 3. **B.** 0. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x^2+m$ có $g'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	m	↘	$-4+m$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy để hàm số $f(x)$ có đúng ba điểm cực trị thì đồ thị hàm số $g(x)$ phải có đúng một giao điểm hoặc tiếp xúc với Ox.

Điều kiện này tương đương với $\left[\begin{array}{l}m\le 0\\-4+m\ge 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le 0\\m\ge 4\end{array}\right.$. Kết hợp điều kiện $m\in[-5;5]$ ta có $m\in\{-5;-4;-3;-2;-1;0;4;5\}$. Vậy có 8 giá trị thoả mãn.

Câu 18. **(Chuyên Hùng Vương - Bình Dương - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2018	↘	-2018	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=\left|f(x-2017)+2018\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Có $y=f(x-2017)$ bằng cách tịnh tiến sang bên phải 2017 đơn vị ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x-2017)$

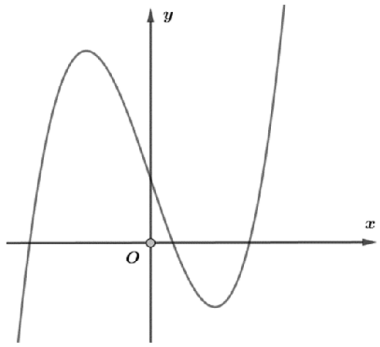
x	$-\infty$		2016		2020		$+\infty$
$f(x-2017)$	$-\infty$	↗	2018	↘	-2018	↗	$+\infty$

Tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x-2017)$ lên trên 2018 đơn vị và lấy trị tuyệt đối ta có bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f(x-2017)+2018\right|$

x	$-\infty$		2016		2020	$+\infty$
y		$\searrow$	4036	$\searrow$		$\nearrow$
		0		0		

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số có 3 cực trị.

Câu 19. **(Chuyên Ngữ - Hà Nội - 2018)** Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$.



Hỏi hàm số $y=f(|x|)+2018$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Cách 1: Từ đồ thị hàm số của $f'(x)$ ta thấy $f(x)$ có hai cực trị dương nên hàm số $y=f(|x|)$ lấy đối xứng phần đồ thị hàm số bên phải trục tung qua trục tung ta được bốn cực trị, cộng thêm giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(|x|)+2018$ với trục tung nữa ta được tổng cộng là 5 cực trị.

Cách 2: Ta có: $y=f(|x|)+2018=f\left(\sqrt{x^2}\right)+2018$.

Đạo hàm: $y'=f'\left(\sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2}\right)'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}.f'(|x|)$.

Từ đồ thị hàm số của $f'(x)$ suy ra $f'(x)$ cùng dấu với $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ với $x_1<0$, $0<x_2<x_3$.

Suy ra: $f'(|x|)$ cùng dấu với $(|x|-x_1)(|x|-x_2)(|x|-x_3)$.

Do $|x|-x_1>0$ nên $y'=f'\left(\sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2}\right)'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}f'(|x|)$ cùng dấu với $(|x|-x_2)(|x|-x_3).\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}$.

Vậy hàm số $y=f(|x|)+2018$ có 5 cực trị.

Câu 20. **(Sở- Nam Định - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	11	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=|f(x)-2m|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

A. $m \in (4;11)$. **B.** $m \in \left(2;\frac{11}{2}\right)$. **C.** $m = 3$. **D.** $m \in \left[2;\frac{11}{2}\right]$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

Để đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2m|$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 2m$ tại $5 - 2 = 3$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow 4 < 2m < 11 \Leftrightarrow 2 < m < \frac{11}{2}$.

Dạng 2. Số điểm cực trị của hàm hợp

Bài toán: Cho hàm số $y = f(x)$ *(Đề có thể cho bằng hàm, đồ thị, bảng biến thiên của* $f(x), f'(x)$*)*. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(u)$ trong đó u là một hàm số đối với x

Ta thực hiện phương pháp tương tự xét số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$

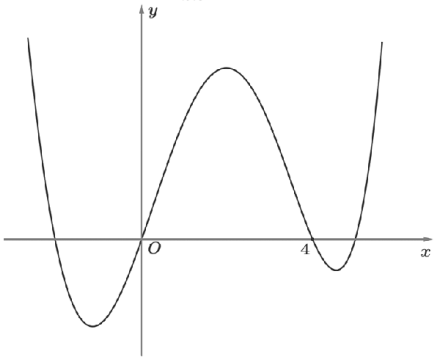
Bước 1. Tính đạo hàm $y' = u'.f'(u)$

Bước 2. Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u' = 0 \\ f'(u) = 0 \end{array}\right.$

Bước 3.Tìm số nghiệm đơn và bội lẻ hoặc các điểm mà y' không xác định.

Kết luận

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ là



A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘		↗		↘		↗	$+\infty$

Ta có $g(x) = f(x^3 + 3x^2) \Rightarrow g'(x) = (3x^2 + 6x).f'(x^3 + 3x^2)$

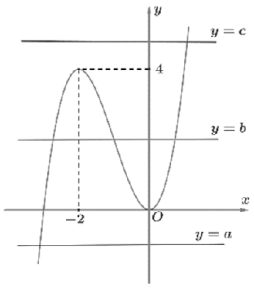
Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2+6x=0 \\ f'\left(x^3+3x^2\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ x^3+3x^2=a;\ a<0 \\ x^3+3x^2=b;\ 0<b<4 \\ x^3+3x^2=c;\ c>4 \end{array}\right.$

Xét hàm số $h(x)=x^3+3x^2 \Rightarrow h'(x)=3x^2+6x$. Cho $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Ta có đồ thị của hàm $h(x)=x^3+3x^2$ như sau



Từ đồ thị ta thấy:

Đường thẳng $y=a$ cắt đồ thị hàm số $y=h(x)$ tại 1 điểm.

Đường thẳng $y=b$ cắt đồ thị hàm số $y=h(x)$ tại 3 điểm.

Đường thẳng $y=c$ cắt đồ thị hàm số $y=h(x)$ tại 1 điểm.

Như vậy phương trình $g'(x)=0$ có tất cả 7 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $g(x)=f\left(x^3+3x^2\right)$ có 7 cực trị.

Câu 2. **(Mã 101 - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ là

A. 9. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

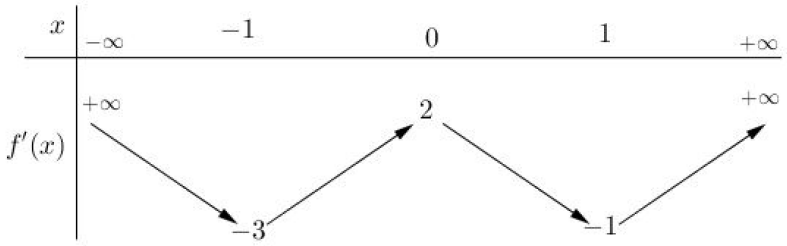
Ta có $y'=2(x-1).f'\left(x^2-2x\right)$.

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ f'\left(x^2-2x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x=a\in(-\infty;-1) \\ x^2-2x=b\in(-1;0) \\ x^2-2x=c\in(0;1) \\ x^2-2x=d\in(1;+\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1 & \\ x^2-2x-a=0, a\in(-\infty;-1) & (1) \\ x^2-2x-b=0, b\in(-1;0) & (2). \\ x^2-2x-c=0, c\in(0;1) & (3) \\ x^2-2x-d=0, d\in(1;+\infty) & (4) \end{array}\right.$$

Phương trình (1) vô nghiệm, các phương trình $(2),(3),(4)$ đều có hai nghiệm phân biệt khác 1 và do b,c,d đôi một khác nhau nên các nghiệm của phương trình $(2),(3),(4)$ cũng đôi một khác nhau. Do đó $f'\left(x^2-2x\right)=0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Vậy $y'=0$ có 7 nghiệm phân biệt, do đó số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ là 7.

Câu 3. **(Mã 104 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:



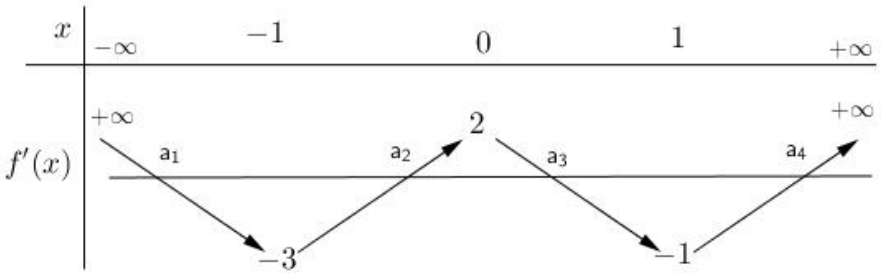
Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(4x^2+4x\right)$ là

A. 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

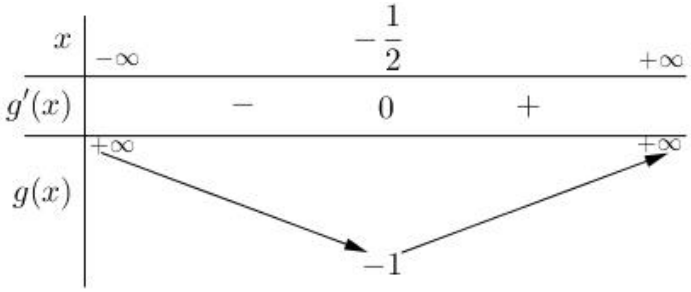
Chọn C

Có $\left(f\left(4x^2+4x\right)\right)'=(8x+4)f'\left(4x^2+4x\right)$, $\left(f\left(4x^2+4x\right)\right)'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\ f'\left(4x^2+4x\right)=0\end{array}\right.$.



Từ bảng biến thiên trên ta có $f'\left(4x^2+4x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x^2+4x=a_1\in(-\infty;-1)\\ 4x^2+4x=a_2\in(-1;0)\\ 4x^2+4x=a_3\in(0;1)\\ 4x^2+4x=a_4\in(1;+\infty)\end{array}\right.$. (1)

Xét $g(x)=4x^2+4x$, $g'(x)=8x+4$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ ta có bảng biến thiên



Kết hợp bảng biến thiên của $g(x)$ và hệ (1) ta thấy:

Phương trình $4x^2+4x=a_1\in(-\infty;-1)$ vô nghiệm.

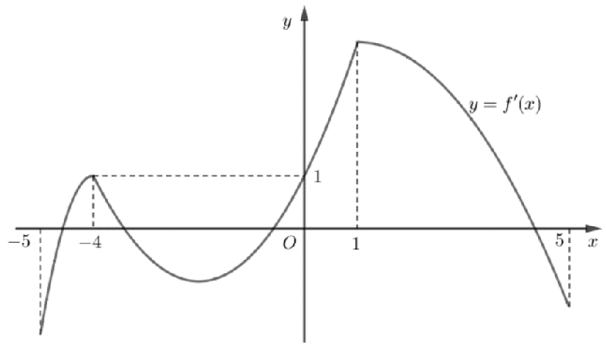
Phương trình $4x^2+4x=a_2\in(-1;0)$ tìm được hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{1}{2}$.

Phương trình $4x^2+4x=a_2\in(0;1)$ tìm được thêm hai nghiệm mới phân biệt khác $-\frac{1}{2}$.

Phương trình $4x^2+4x=a_2\in(1;+\infty)$ tìm được thêm hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{1}{2}$.

Vậy hàm số $y=f\left(4x^2+4x\right)$ có tất cả 7 điểm cực trị.

Câu 4. **(Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=f\left(x^2+4x\right)-x^2-4x$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(-5;1)$?



A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x)=f\left(x^2+4x\right)-x^2-4x$

$\Rightarrow g'(x)=(2x+4)f'\left(x^2+4x\right)-(2x+4)=(2x+4)\left[f'\left(x^2+4x\right)-1\right]$.

Ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}2x+4=0 & \\ x^2+4x=-4 & (1)\\ x^2+4x=0 & (2)\\ x^2+4x=a\in(1;5) & (3)\end{array}\right.$.

Xét phương trình $x^2+4x=a\in(1;5)$, ta có BBT của hàm số $y=x^2+4x$ trên $(-5;1)$ như sau:

x	-5		-4		-2		0		1
y'			$-$		0		$+$		
y	5	$\searrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	5

Suy ra (1) có nghiệm kép $x=-2$, (2) có 2 nghiệm phân biệt $x=-4;x=0$, (3) có 2 nghiệm phân biệt $x=x_1;x=x_2$ khác $-2;0;-4$. Do đó phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm trong đó có $x=-2$ là nghiệm bội ba, các nghiệm $x=-4;x=0;x=x_1;x=x_2$ là các nghiệm đơn.

Vậy $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 5. **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của hàm số $y=f'(x)$ như hình sau:

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $g(x)=f(1-x)+\frac{x^3}{3}-2x^2+3x$ đạt cực tiểu tại điểm nào trong các điểm sau?

A. $x=3$. **B.** $x=0$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn A

$g'(x)=-f'(1-x)+x^2-4x+3$.

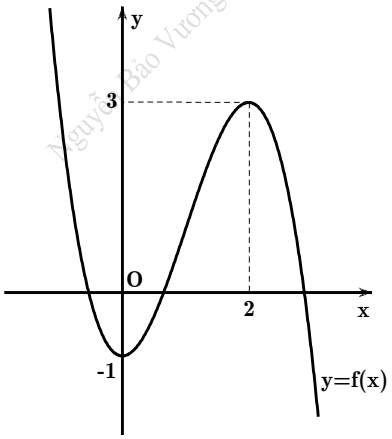
$-f'(1-x)>0\Leftrightarrow f'(1-x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-x<-2\\0<1-x<4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\-3<x<1\end{array}\right.$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$-f'(1-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2-4x+3		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		không xác định		$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu $g'(x)$ ta suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$.

Câu 6. **(Chuyên KHTN - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=f(x^3+x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0. Giá trị x_0 thuộc khoảng nào sau đây

A. $(1;3)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g(x)=f(x^3+x)\Rightarrow g'(x)=(3x^2+1)f'(x^3+x)$.

$\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow(3x^2+1)f'(x^3+x)=0\Leftrightarrow f'(x^3+x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3+x=0\\x^3+x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

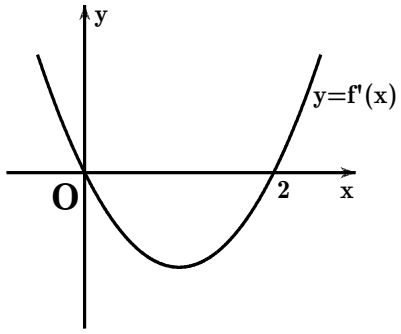
Do đó $g'(x)>0\Leftrightarrow(3x^2+1)f'(x^3+x)>0\Leftrightarrow f'(x^3+x)>0\Leftrightarrow 0<x^3+x<2\Leftrightarrow 0<x<1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số $g(x)=f(x^3+x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x_0=0$. Suy ra $x_0\in(-1;1)$.

Câu 7. **(Chuyên KHTN - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f(-x^2+x)$ là

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Nguyễn Bảo Vương

Chọn A

Ta có $g(x)=f(-x^2+x)\Rightarrow g'(x)=(-2x+1)f'(-x^2+x)$.

$$\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow(-2x+1)f'(-x^2+x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2x+1=0\\ f'(-x^2+x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\ -x^2+x=0\\ -x^2+x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\ x=1\\ x=0\end{array}\right.$$

Do đó $g'(x)>0\Leftrightarrow(-2x+1)f'(-x^2+x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-2x+1>0\\ f'(-x^2+x)>0\end{cases}\\ \begin{cases}-2x+1<0\\ f'(-x^2+x)<0\end{cases}\end{array}\right.$

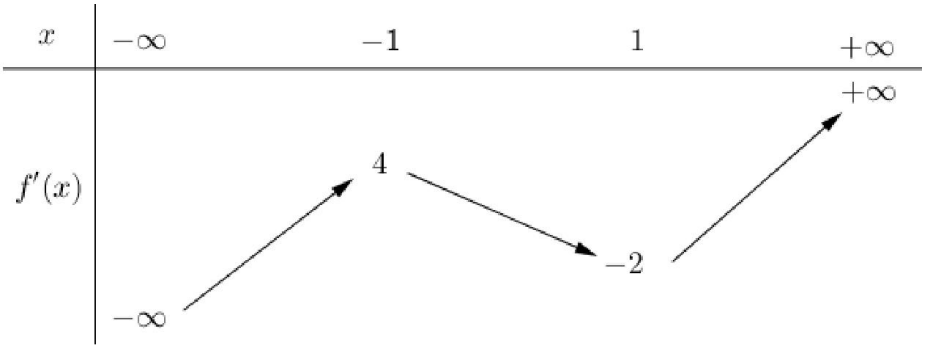
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} -x^2+x>2 \\ -x^2+x<0 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x>\dfrac{1}{2} \\ 0<-x^2+x<2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<0 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x>\dfrac{1}{2} \\ 0<x<1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ \dfrac{1}{2}<x<1 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘		↗		↘	

Vậy hàm số có 1 điểm cực tiểu.

Câu 8. **(Chuyên Lam Sơn - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 7.

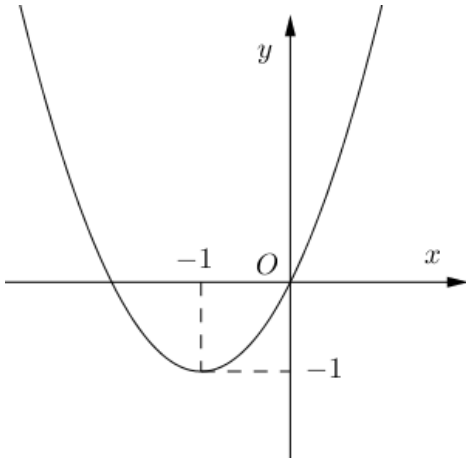
Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=(2x+2)f'\left(x^2+2x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ f'\left(x^2+2x\right)=0 \quad (1) \end{array}\right.$.

Từ BBT ta thấy phương trình $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2+2x=a<-1 & (2) \\ x^2+2x=b\in(-1;1) & (3) \\ x^2+2x=c>1 & (4) \end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số $y=x^2+2x$ có dạng



Từ đồ thị hàm số $y=x^2+2x$ ta thấy phương trình (2) vô nghiệm; phương trình (3) ; phương trình (4) đều có 2 nghiệm phân biệt.

Do đó $y'=0$ có 5 nghiệm đơn phân biệt. Vậy hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 9. **(Sở Bắc Giang - 2018)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2;-1;0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 7.

Lời giải

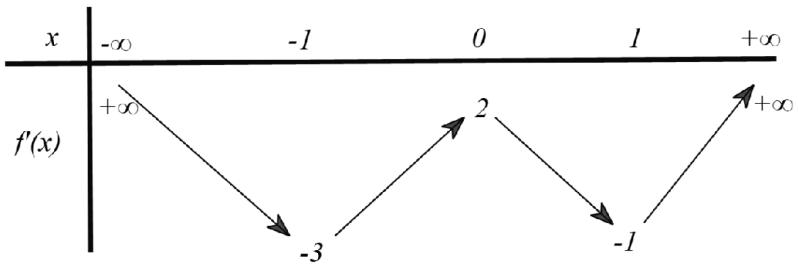
Vì hàm số $y=f\left(x\right)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2;-1;0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f'\left(x\right)=0$ có ba nghiệm là $-2;-1;0$ (ba nghiệm bội lẻ).

Xét hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có $y'=\left(2x-2\right).f'\left(x^2-2x\right)$; $y'=0\Leftrightarrow\left(2x-2\right).f'\left(x^2-2x\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x=-2\\x^2-2x=-1\\x^2-2x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\\x=2\end{array}\right..$$

Do $y'=0$ có một nghiệm bội lẻ $(x=1)$ và hai nghiệm đơn $(x=0;\ x=2)$ nên hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ chỉ có ba điểm cực trị.

Câu 10. **(Mã 102 - 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$, bảng biến thiên của hàm số $f'\left(x\right)$ như sau



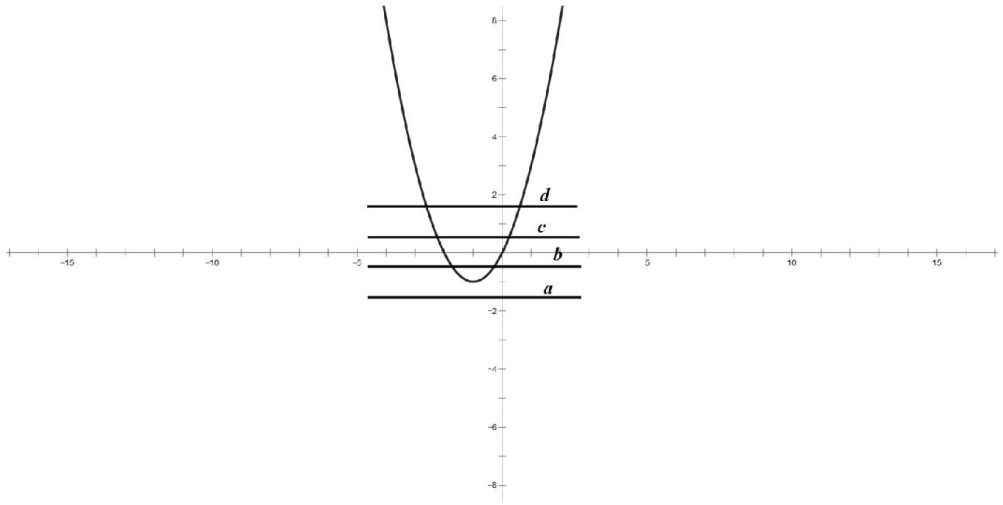
Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ là

A. 9. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=(2x+2)f'\left(x^2+2x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+2=0\\ x^2+2x=a,a<-1\\ x^2+2x=b,-1<b<0\\ x^2+2x=c,0<c<1\\ x^2+2x=d,d>1\end{array}\right.$



Dựa vào đồ thị ta được $y'=0$ có 7 nghiệm đơn nên nó có 7 cực trị

Câu 11. **(Mã 103 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$ ↘	-3 ↗	2 ↘	-1 ↗	$+\infty$

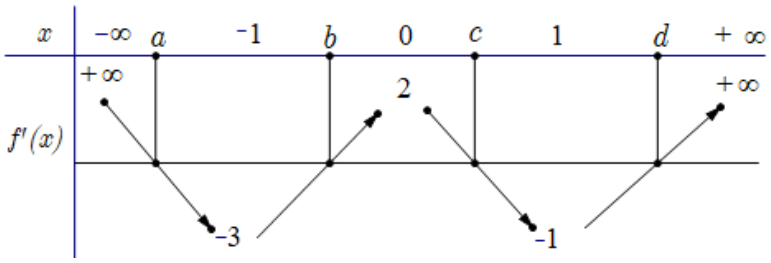
Số cực trị của hàm số $y=f\left(4x^2-4x\right)$ là

A. 3. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên



Ta thấy $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\in(-\infty;-1)\\ x=b\in(-1;0)\\ x=c\in(0;1)\\ x=d\in(1;+\infty)\end{array}\right.$

Với $y=f\left(4x^2-4x\right)$, ta có $y'=(8x-4)f'\left(4x^2-4x\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}8x-4=0\\ f'\left(4x^2-4x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ 4x^2-4x=a\in(-\infty;-1)\ (1)\\ 4x^2-4x=b\in(-1;0)\ (2)\\ 4x^2-4x=c\in(0;1)\ (3)\\ 4x^2-4x=d\in(1;+\infty)\ (4)\end{array}\right.$$

Xét hàm số $g(x)=4x^2-4x$, ta có $g'(x)=8x-4=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên của $g(x)$ ta có:

□Vì $a\in(-\infty;-1)$ nên (1) vô nghiệm.

□Vì $b\in(-1;0)$ nên (2) có 2 nghiệm phân biệt.

□Vì $c\in(0;1)$ nên (3) có 2 nghiệm phân biệt.

□Vì $d\in(1;+\infty)$ nên (4) có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số $y=f\left(4x^2-4x\right)$ có 7 điểm cực trị

Nguyễn Bảo Vương

Cách khác:

Ta có: $y'=(8x-4).f'\left(4x^2-4x\right)$.

$$y'=0\Leftrightarrow(8x-4).f'\left(4x^2-4x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}8x-4=0\\ f'\left(4x^2-4x\right)=0\end{array}\right.$$

+ $8x-4=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

$$+\ f'\left(4x^2-4x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x^2-4x=a\,(a<-1)\ (1)\\ 4x^2-4x=b\,(-1<b<0)\ (2)\\ 4x^2-4x=c\,(0<c<1)\ (3)\\ 4x^2-4x=d\,(d>1)\ (4)\end{array}\right.$$

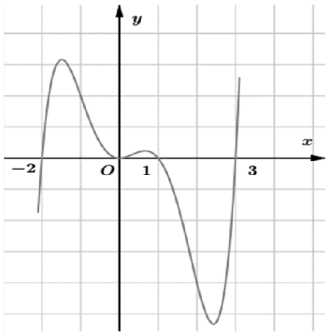
+ Phương trình $4x^2-4x=m\Leftrightarrow 4x^2-4x-m=0$ có nghiệm khi $\Delta'=4-4m\geq 0$ hay $m\leq 1$.

Từ đó, ta có phương trình (1); (2); (3) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Phương trình (4) vô nghiệm.

Do đó, hàm số đã cho có 7 cực trị.

Câu 12. **(Chuyên An Giang - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên.



Hàm số $g(x)=f\left(x^2\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Từ đồ thị $y=f'(x)$ ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\\x=1\\x=3\end{array}\right.$;

$f'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\-2<x<1\end{array}\right.$; $f'(x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-2\\1<x<3\end{array}\right.$.

Ta có $g'(x)=2xf'\left(x^2\right)$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(x^2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=1\\x^2=3\\x^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$.

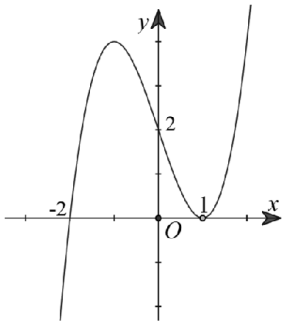
Ta có $f'\left(x^2\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x^2<1\\x^2>3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}-1<x<1\\x\neq0\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}x>\sqrt{3}\\x<-\sqrt{3}\end{array}\right.\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'\left(x^2\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $g(x)=f\left(x^2\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 13. (THPT Lê Văn Thịnh Bắc Ninh 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-3\right)$.



A. 4 **B.** 2 **C.** 5 **D.** 3

Lời giải

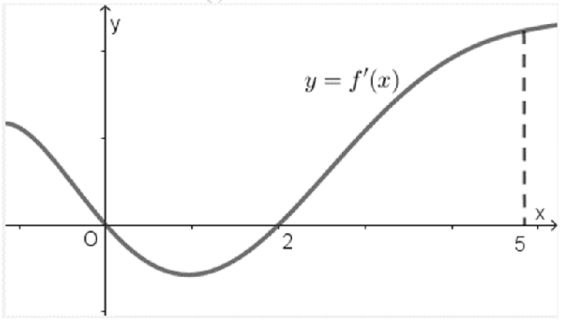
Chọn D

Quan sát đồ thị ta có $y=f'\left(x\right)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x=-2$ nên hàm số $y=f\left(x\right)$ có một điểm cực trị là $x=-2$.

Ta có $y'=\left[f\left(x^2-3\right)\right]'=2x.f'\left(x^2-3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-3=-2\\x^2-3=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm2\end{array}\right.$.

Mà $x=\pm2$ là nghiệp kép, còn các nghiệm còn lại là nghiệm đơn nên hàm số $y=f\left(x^2-3\right)$ có ba cực trị.

Câu 14. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm là $f'\left(x\right)$. Đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên. Tính số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2\right)$ trên khoảng $\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$.



A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2\right)\Rightarrow g'\left(x\right)=2xf'\left(x^2\right)$.

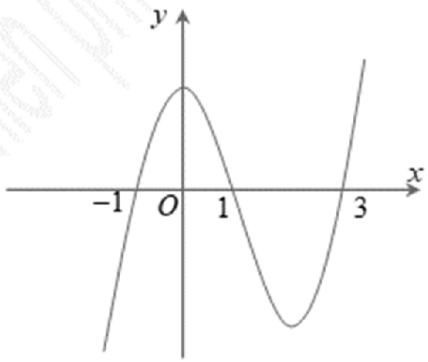
$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(x^2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=0\\x^2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\sqrt{5}$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{5}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ đó suy ra hàm số $y=f\left(x^2\right)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 15. **(Chuyên Vinh - 2018)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ là



A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Từ đồ thị của $y=f'(x)$ ta chọn $f'(x)=(x+1)(x-1)(x-3)$.

Áp dụng công thức $y=\left[f(u)\right]'=u'f'(u)$ với $u=\sqrt{x^2+2x+2}$

Ta có

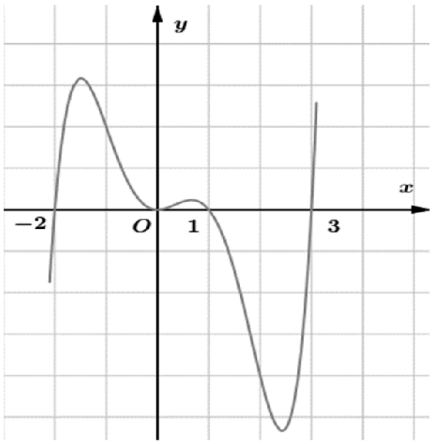
$$y'=\left[f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)\right]'=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}.\left(\sqrt{x^2+2x+2}+1\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2}-1\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2}-3\right)$$

$$=\frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2+2x+2}+1\right)(x+1)^2\left(x^2+2x-7\right)}{\sqrt{x^2+2x+2}\left(\sqrt{x^2+2x+2}+1\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2}+3\right)}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-1+2\sqrt{2}\\x=-1-2\sqrt{2}\end{array}\right.$$

x	$-\infty$		$-1-2\sqrt{2}$		-1		$-1+2\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có một điểm cực đại.

Câu 16. **(Chuyên Thoại Ngọc Hầu 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau.



Hàm số $g(x)=f\left(x^2\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Có $g'(x)=\left[f\left(x^2\right)\right]'=2xf'\left(x^2\right)$

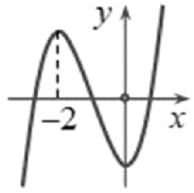
$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(x^2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'\left(x^2\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu của $g'(x)$ suy ra hàm số có 5 điểm cực trị.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x-4\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $g'(x)=2(x-1)f'\left(x^2-2x-4\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow(x-1)f'\left(x^2-2x-4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\f'\left(x^2-2x-4\right)=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x-4=-2\\x^2-2x-4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=1+\sqrt{3}\\x=1-\sqrt{3}\\x=1+\sqrt{5}\\x=1-\sqrt{5}\end{array}\right.$$ (Tất cả đều là nghiệm bội lẻ).

Ta chọn $x=-2$ để xét dấu của $g'(x)$: $g'(-2)=2.(-3).f'(4)$.

Vì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ do đó: $f'(4)>0$.

Suy ra: $g'(-2)<0$.

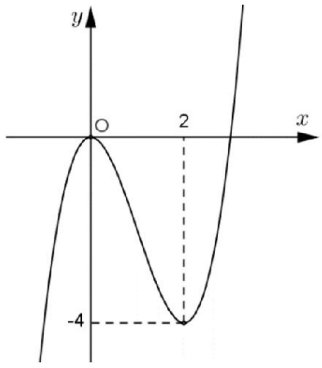
Theo tính chất qua nghiệm bội lẻ $g'(x)$ đổi dấu, ta có bảng xét dấy $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$1-\sqrt{5}$	$1-\sqrt{3}$	1	$1+\sqrt{3}$	$1+\sqrt{5}$	$+\infty$

$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu, suy ra hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 18. **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An -2018)** Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left[f(x)\right]$.



A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Xét hàm số $y=f\left[f(x)\right]$, $y'=f'(x).f'\left[f(x)\right]$;

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f'\left[f(x)\right]=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\f(x)=0\\f(x)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x=a\in(2;+\infty)\\x=b\in(a;+\infty)\end{array}\right.$$

Với $x>b$, ta có $f(x)>2\Rightarrow f'\left[f(x)\right]>0$

Với $a<x<b$, ta có $0<f(x)<2\Rightarrow f'\left[f(x)\right]<0$

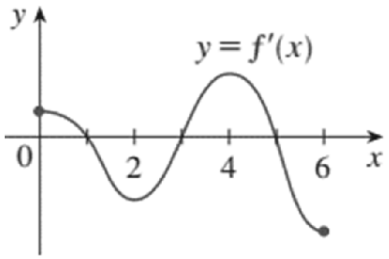
Với $0<x<a$ hoặc $x<0$, ta có $f(x)<0\Rightarrow f'\left[f(x)\right]>0$

BBT:

x	$-\infty$		0		2		a		b		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào BBT suy ra hàm số $y=f\left[f(x)\right]$ có bốn điểm cực trị.

Câu 19. **(Sở Bình Phước - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0;6]$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y=\left[f(x)\right]^2$ có tối đa bao nhiêu cực trị.



A. 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

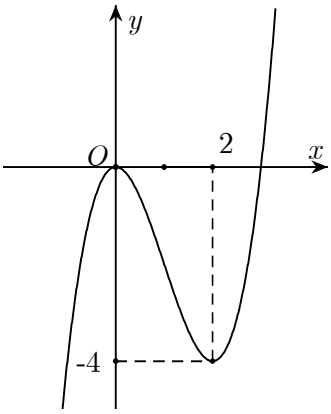
Lời giải

Ta có $y' = 2f(x)f'(x)$ nên $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right.$.

Từ đồ thị ta suy ra $f(x) = 0$ có tối đa 4 nghiệm, $f'(x) = 0$ có tối đa 3 nghiệm.

Do đó, hàm số $y = \left[f(x)\right]^2$ có tối đa 7 điểm cực trị nên có tối đa 7 cực trị.

Câu 20. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f\left[f(x)\right]$?



A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

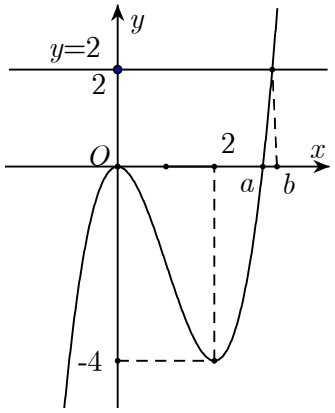
Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = \left[f\left(f(x)\right)\right]' = f'(x).f'\left(f(x)\right)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'\left(f(x)\right) = 0 \end{array}\right.$

+ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$ vì hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị $x = 0; x = 2$

+ $f'\left(f(x)\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{array}\right.$



Quan sát đồ thị ta thấy phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm bội chẵn $x = 0$ và một

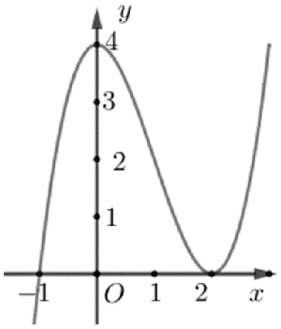
nghiệm đơn hoặc bội lẻ $x=a>2$.

Kẻ đường thẳng $y=2$ nhận thấy phương trình $f\left(x\right)=2$ có một nghiệm đơn hoặc bội lẻ $x=b>a$

Do đó y' có các điểm đổi dấu là $x=0;x=2,x=a,x=b$.

Vậy hàm số có 4 điểm cực trị.

Câu 21. **(THPT Đô Lương 3 - Nghệ An - 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(f\left(x\right)\right)$ là.



A. 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'\left(x\right)=f'\left(x\right).f'\left(f\left(x\right)\right)$.

$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(x\right)=0\\f'\left(f\left(x\right)\right)=0\end{array}\right.$$

$$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$$

$$f'\left(f\left(x\right)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=0\left(*\right)\\f\left(x\right)=2\left(**\right)\end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị suy ra:

Phương trình (*) có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$.

Phương trình (**) có ba nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=m\left(-1<n<0\right)\\x=n\left(0<n<1\right)\\x=p\left(p>2\right)\end{array}\right.$

$g'\left(x\right)=0$ có nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=m\\x=0\\x=n\\x=2\\x=p\end{array}\right.$.

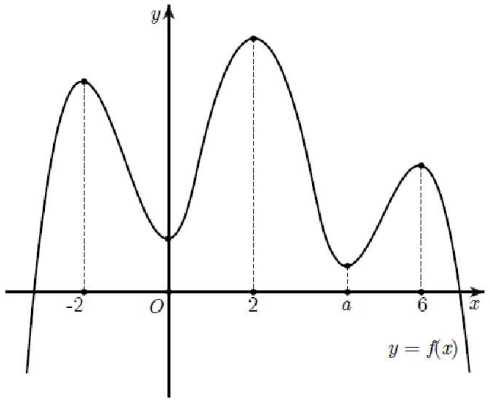
Bảng biến thiên

Nguyễn Bảo Vương

x	$-\infty$		-1		m		0		n		2		p		$+\infty$
$f'(x)$		+	|	+	|	+	0	-	|	-	0	+	|	+	
$f'(f(x))$		+	0	-	0	+	|	+	0	-	0	-	0	+		
$g'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+		
$g(x)$		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗		

Nhìn bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x)=f(f(x))$ có 6 cực trị.

Câu 22. **(Sở GD Bắc Ninh - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết tất cả các điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là $-2;\ 0;\ 2;\ a;\ 6$ với $4<a<6$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^6-3x^2\right)$ là

A. 8. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta có -2; 0; 2; a; 6 là tất cả các nghiệm của $f'(x)$.

Ta có: $y'=\left(f\left(x^6-3x^2\right)\right)'=\left(6x^5-6x\right)f'\left(x^6-3x^2\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}6x^5-6x=0\\ f'\left(x^6-3x^2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,x=\pm1\\ x^6-3x^2=-2\\ x^6-3x^2=0\\ x^6-3x^2=2\\ x^6-3x^2=a\\ x^6-3x^2=6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,x=\pm1\\ x=\pm1\\ x=0,x=\pm\sqrt[4]{3}\\ x=\pm\sqrt{2}\\ x=\pm m,m>\sqrt{2}\\ x=\pm n,\ n>m\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=x^6-3x^2$

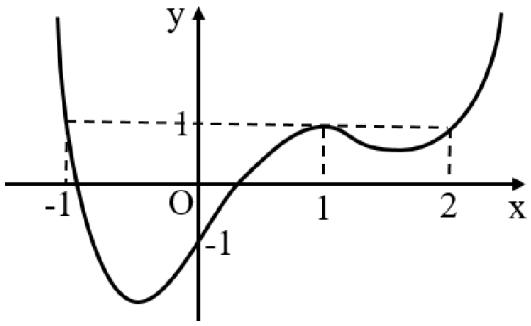
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	0	↘	-2	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $g(x)=x^6-3x^2$, ta suy ra ± 1 là nghiệm kép của phương trình $x^6-3x^2=-2$ và 0 là nghiệm kép của phương trình $x^6-3x^2=0$. Do đó ± 1 và 0 là nghiệm kép của $f'\left(x^6-3x^2\right)$. Do vậy ± 1 và 0 là nghiệm bội ba của y'.

Các nghiệm khác ± 1 và 0 của y' đều là nghiệm đơn.

Vậy hàm số đã cho có 11 cực trị.

Câu 23. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x)=f(x)-x$. Hàm số đạt cực đại tại điểm thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{3}{2};3\right)$ **B.** $(-2;0)$ **C.** $(0;1)$ **D.** $\left(\frac{1}{2};2\right)$

Lời giải

Ta có $g'(x)=f'(x)-1; g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$

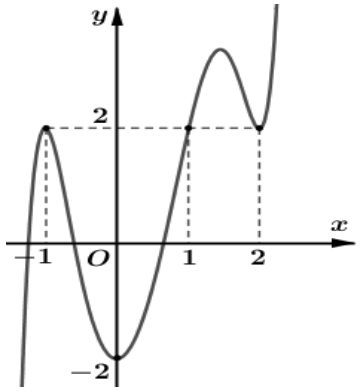
Nguyễn Bảo Vương

Bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	-∞		-1		1		2		+∞
g'(x)		+	0	−	0	−	0	+	

Từ bảng xét dấu nhận thấy $g(x)$ đạt cực đại tại $x=-1\in(-2;0)$.

Câu 24. **(Thpt Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Cho hàm số $y=f'(x-1)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=\pi^{2f(x)-4x}$ đạt cực tiểu tại điểm nào?

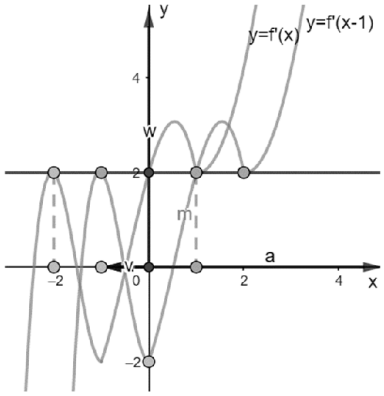
A. $x=1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-1$.

Lời giải:

Ta có: $y'=\left[2f'(x)-4\right]\pi^{2f(x)-4x}\ln\pi$.

$y'=0 \Leftrightarrow 2f'(x)-4=0 \Leftrightarrow f'(x)=2$.

Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nhận được từ việc tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f'(x-1)$ sang trái 1 đơn vị



nên $f'(x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Do $x=-2$ và $x=1$ là nghiệm bội chẵn nên ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

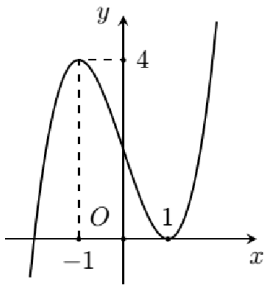
Câu 25. **(THPT Minh Châu Hưng Yên 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên.

Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x-2017)-2018x+2019$ là.

A. 3 **B.** 4 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

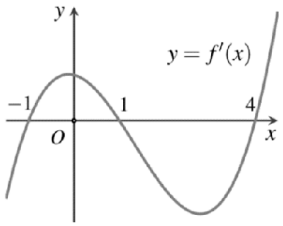
Chọn C



Ta có: $\left[f(x-2017)-2018x+2019\right]'=0 \Leftrightarrow f'(x-2017)-2018=0 \Leftrightarrow f'(x-2017)=2018$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ suy ra phương trình $f'(x-2017)=2018$ có 1 nghiệm đơn duy nhất. Suy ra hàm số $y=f(x-2017)-2018x+2019$ có 1 điểm cực trị.

Câu 26. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Cho hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=\mathrm{e}^{2f(x)+1}+5^{f(x)}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

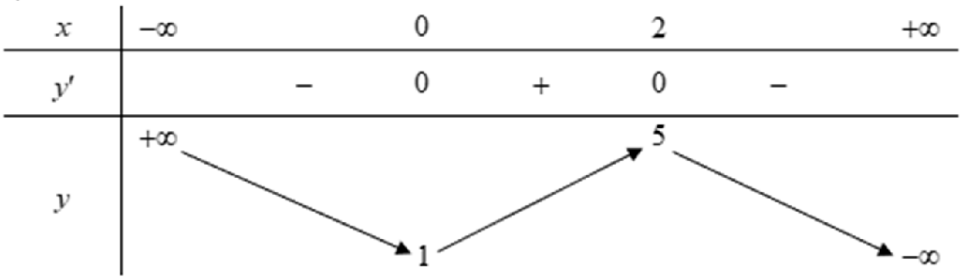
Ta có $y=\mathrm{e}^{2f(x)+1}+5^{f(x)}$

$y'=2f'(x).\mathrm{e}^{2f(x)+1}+f'(x).5^{f(x)}\ln 5=f'(x)\left(2\mathrm{e}^{2f(x)+1}+5^{f(x)}\ln 5\right)$.

Nhận xét $2\mathrm{e}^{2f(x)+1}+5^{f(x)}\ln 5>0,\forall x$ làm cho $f(x)$ xác định nên dấu của y' phụ thuộc hoàn toàn vào $f'(x)$.

Vì vậy do $f'(x)$ đổi dấu 3 lần nên số điểm cực trị của hàm số $y=\mathrm{e}^{2f(x)+1}+5^{f(x)}$ là 3.

Câu 27. **(THPT Quỳnh Lưu - Nghệ An - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Hàm số $y=2f(x)+1$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x=2$. **B.** $x=0$. **C.** $x=1$. **D.** $x=5$.

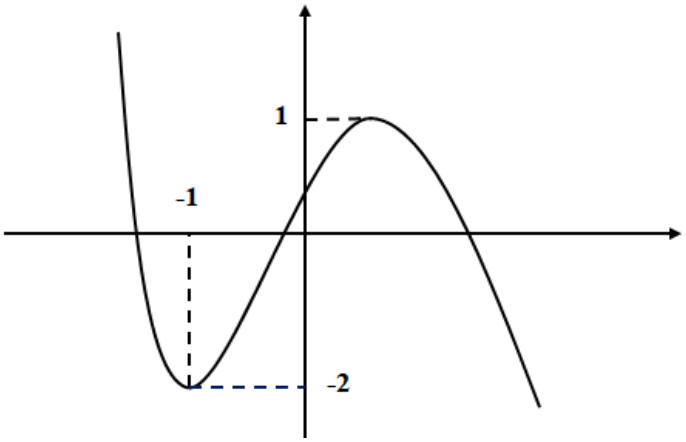
Lời giải

Ta có: $y=2f(x)+1\Rightarrow y'=2f'(x)$.

Suy ra: Điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$ cũng chính là điểm cực tiểu của hàm số $y=2f(x)+1$.

Vậy: Hàm số $y=2f(x)+1$ đạt cực tiểu tại điểm $x=0$.

Câu 28. **(Liên Trường - Nghệ An - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)+2x$ là:



A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Đặt $g(x)=f(x)+2x$ suy ra $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)+2=0\Leftrightarrow f'(x)=-2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=x_0>-1\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị ta có: Trên $(-\infty;-1)$ thì $f'(x)>-2\Leftrightarrow f'(x)+2>0$.

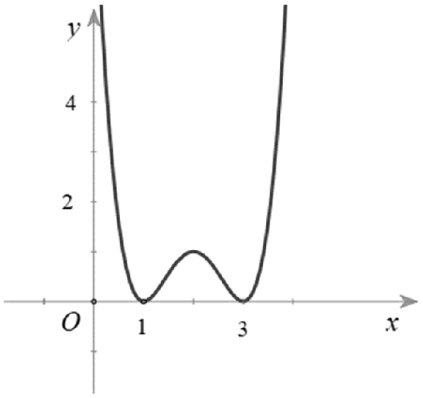
Trên $(-1;x_0)$ thì $f'(x)>-2\Leftrightarrow f'(x)+2>0$.

Trên $(x_0;+\infty)$ thì $f'(x)<-2\Leftrightarrow f'(x)+2<0$.

x	$-\infty$		-1		x_0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↗		↘	

Vậy hàm số $g(x)=f(x)+2x$ có 1 cực trị.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ dưới. Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{x^3}{3}+2x^2-5x+2001$ có bao nhiêu điểm cực trị?



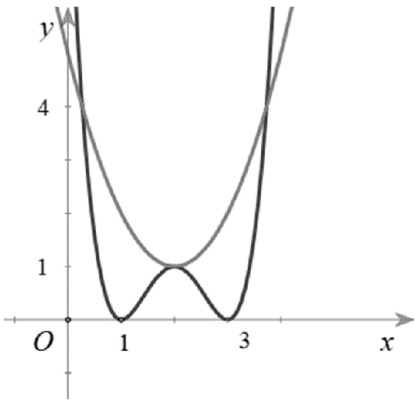
A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Có $g'(x)=f'(x)-x^2+4x-5 \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x^2-4x+5$

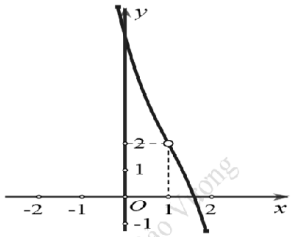
Ta có đồ thị hàm số $y=x^2-4x+5$ và đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới



Quan sát hình vẽ ta thấy $g'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt trong đó chỉ có 1 nghiệm bội chẵn

Vậy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và không có cực trị, đồ thị của hàm số $y=f(x)$ là đường cong của như hình vẽ dưới đây.



Xét hàm số $h(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)\right]^2-2x.f(x)+2x^2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Đồ thị của hàm số $y=h(x)$ có điểm cực tiểu là $M(1;0)$.

B. Hàm số $y=h(x)$ không có cực trị.

C. Đồ thị hàm số $y=h(x)$ có điểm cực đại là $N(1;2)$.

D. Đồ thị hàm số $y=h(x)$ có điểm cực đại là $M(1;0)$.

Lời giải

Chọn A

Theo bài ra ta có

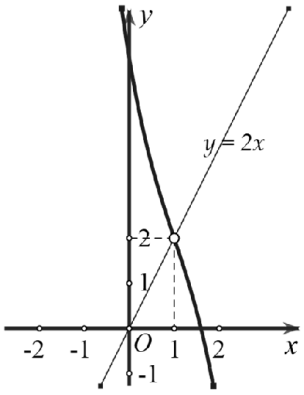
$h'(x)=f'(x).f(x)-2f(x)+2x.f'(x)+4x=f'(x)\left(f(x)-2x\right)-2\left(f(x)-2x\right)$

$=\left(f'(x)-2\right)\left(f(x)-2x\right)$

Từ đồ thị ta thấy $y=f(x)$ nghịch biến nên $f'(x)<0$ suy ra $f'(x)-2<0$.

Suy ra $h'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)-2x=0$.

Từ đồ thị dưới ta thấy $f(x)-2x=0 \Leftrightarrow x=1$.



Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra đồ thị của hàm số $y=h(x)$ có điểm cực tiểu là $M(1;0)$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)=x^4$. Hàm số $g(x)=f'(x)-3x^2-6x+1$ đạt cực tiểu, cực đại lần lượt tại x_1, x_2. Tính $m=g(x_1)g(x_2)$.

A. $m=0$. **B.** $m=\dfrac{-371}{16}$. **C.** $m=\dfrac{1}{16}$. **D.** $m=-11$.

Lời giải

Nguyễn Bảo Vương

Chọn D

Theo bài ra ta có $f'(x)=4x^3$.

Suy ra $g(x)=4x^3-3x^2-6x+1$.

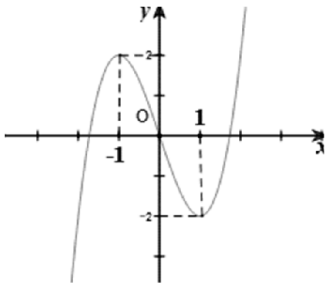
Suy ra $g'(x)=12x^2-6x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=1\\x_2=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Đồ thị hàm số lên - xuống – lên.

Hàm số $g(x)=f'(x)-3x^2-6x+1$ đạt cực tiểu, cực đại lần lượt tại $x_1=1$, $x_2=-\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $m=g(1).g(2)=(4-3-6+1)\left[4.\left(\dfrac{-1}{2}\right)^3-3.\left(\dfrac{-1}{2}\right)^2-6.\left(\dfrac{-1}{2}\right)+1\right]=-11$.

Câu 32. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Biết đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=f(x)-2x$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x)=f'(x)$

$g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

Đồ thị hàm số $g(x)$ đi qua các điểm $O(0;0)$, $(-1;2)$, $(1;-2)$ nên ta có:

$$\begin{cases} d=0 \\ a+b+c+d=-2 \\ -a+b-c+d=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ b=0 \\ a+c=-2 \end{cases}$$

Do đó: $g(x)=ax^3+cx \Rightarrow g'(x)=3ax^2+c$

Hàm số đạt cực trị tại $x=\pm 1$ nên $g'(\pm 1)=0 \Leftrightarrow 3a+c=0$

Từ đó có: $a=1;c=-3 \Rightarrow g(x)=f'(x)=x^3-3x$

Xét hàm số: $y=f(x)-2x$

$y'=f'(x)-2=x^3-3x-2=(x+1)^2(x-2)$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

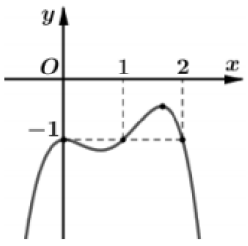
Dấu của y'

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Nguyễn Bảo Vương

Do đó hàm số có 1 điểm cực trị.

Câu 33. **(Kim Liên - Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=f(x)+x$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x=1$. **B.** $x=2$.

C. Không có điểm cực tiểu. **D.** $x=0$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=f(x)+x$ có $g'(x)=f'(x)+1$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có:

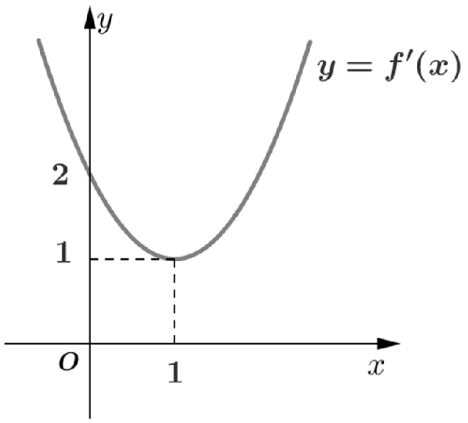
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↘		↘	CT	↗	CĐ	↘	

Từ đó suy ra hàm số $y=g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là parabol như hình bên dưới.

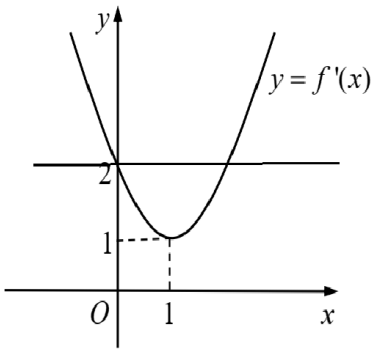


Hàm số $y=f(x)-2x$ có bao nhiêu cực trị?

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

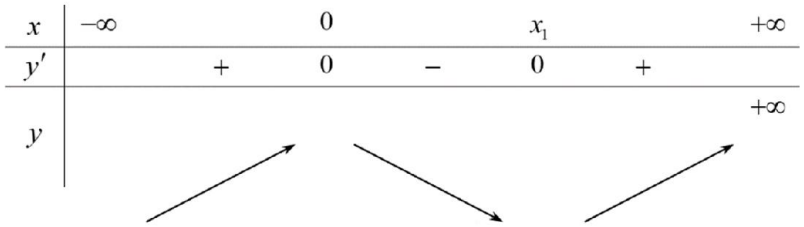
Chọn B



Ta có $y'=f'(x)-2$.

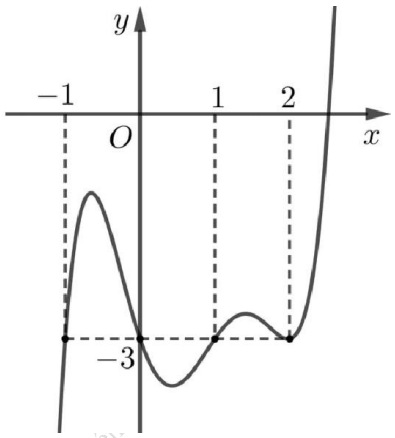
$$y'=0 \Leftrightarrow f'(x)-2=0 \Leftrightarrow f'(x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=x_1>1 \end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=2$, ta có bảng biến thiên sau



Vậy hàm số $y=f(x)-2x$ có hai điểm cực trị.

Câu 35. Cho hàm số đa thức $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0)<0$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x)=|f(x)+3x|$ cóbao nhiêu cực trị?



A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

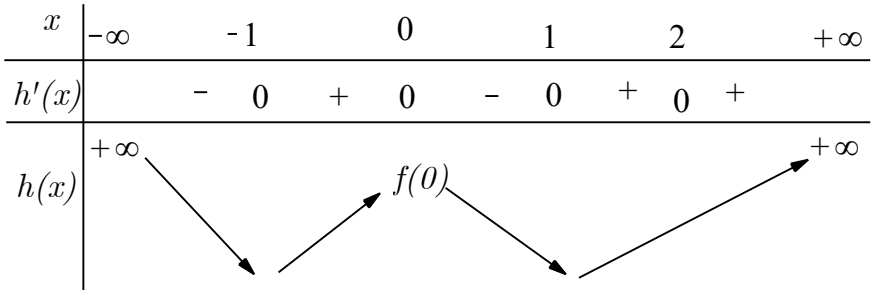
Đặt $h(x)=f(x)+3x$

$h'(x)=f'(x)+3$

$h'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)+3=0\Leftrightarrow f'(x)=-3$

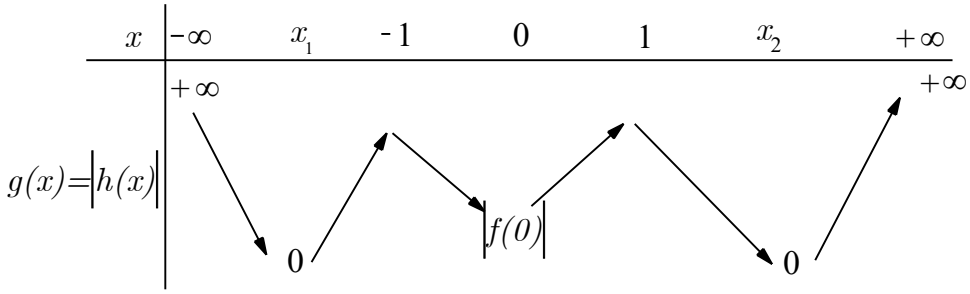
Theo đồ thị của hàm số $f'(x)$ thì phương trình $f'(x)=-3$ có 4 nghiệm $\{-1;0;1;2\}$

Ta có bảng biết thiên



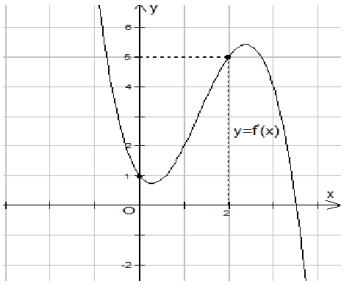
Theo bảng biến thiên ta có phương trình $h(x)=0$ có hai nghiệm $x_1<-1;$ và $x_2>1$ (do có $f(0)<0$)

Khi đó ta có



Vậy hàm số $g(x)=|f(x)+3x|$ có 5 cực trị.

Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình bên.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $y=f(x)-x^2-x$ đạt cực đại tại $x=0$.

B. Hàm số $y=f(x)-x^2-x$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

C. Hàm số $y=f(x)-x^2-x$ không đạt cực trị tại $x=0$.

D. Hàm số $y=f(x)-x^2-x$ không có cực trị.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=f(x)-x^2-x$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=f'(x)-2x-1$.

Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=2x+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

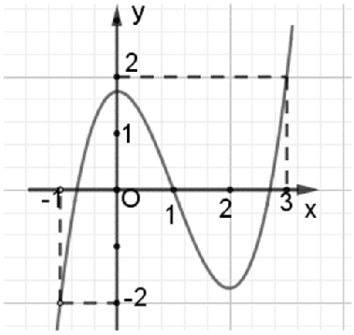
Dựa vào đồ thị ta có: $g'(1)=f'(1)-3<0$, $g'(3)=f'(3)-7<0$ nên $x=0$ là nghiệm đơn và $x=2$ là nghiệm kép.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘		↘	

Từ bảng biến thiên ta có $x=0$ là điểm cực đại.

Câu 37. **(THPT Minh Khai)** Cho hàm số Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x)=2f(x)-x^2+2x+2019$. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y=g(|x|)$ là

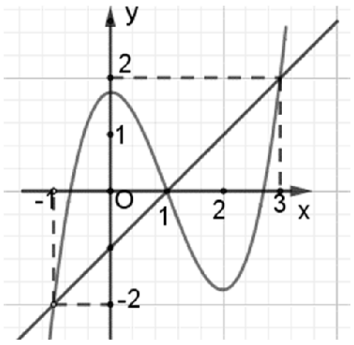
A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

$*\quad g'(x)=2f'(x)-2x+2,\ g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x-1$

Đường thẳng $y=x-1$ đi qua các điểm $(-1;-2),(1;0),(3;2)$



Quan sát vào vị trí tương đối của hai đồ thị trên hình vẽ, ta có BBT của hàm số $y=g'(x)$ như sau

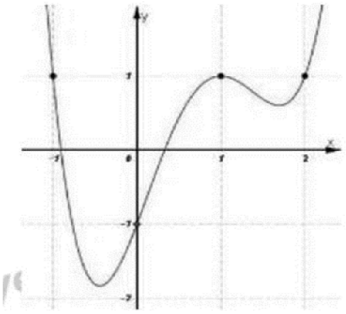
x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$		0	$-$	0	$+$		
$g(x)$		$\searrow$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g(0)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(3)$	$\nearrow$	

$*$Đồ thị hàm số $y=g(|x|)$ nhận trục Oy làm trục đối xứng nên từ BBT trên ta suy ra BBT của hàm số $y=g(|x|)$ như sau

x	$-\infty$		-3		-1		0		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(3)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(3)$	$\nearrow$	

Vậy hàm số $y=g(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Đặt $g(x)=f(x)-x$. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

A. $x=1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=0$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=f'(x)-1=0\Leftrightarrow f'(x)=1$.

Từ đồ thị ta thấy đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị $f'(x)$ tại ba điểm có hoành độ là $x=-1, x=1$ và $x=2$

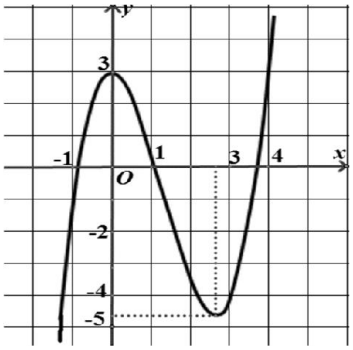
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗		↘		↘		↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra $x_{CD}=-1$.

Câu 39. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ.

Đặt $g(x)=3f\left(f(x)\right)+4$. Tìm số cực trị của hàm số $g(x)$



A. 2. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x)=3f'(x).f'\left(f(x)\right)$, $g'(x)=0\Leftrightarrow 3f'(x).f'\left(f(x)\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f'\left(f(x)\right)=0\end{array}\right.$.

Từ đồ thị hàm số trên ta thấy:

+ Phương trình $f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt là $x=0; x=\alpha$ với $\alpha\in(1;3)$.

+ Phương trình $f'\left(f(x)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f(x)=\alpha\end{array}\right.$.

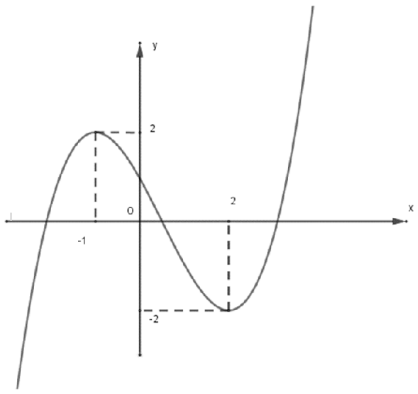
+ Phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 2 nghiệm trên.

+ Phương trình $f(x)=\alpha$ với $\alpha\in(1;3)$ có 3 nghiệm phân biệt khác các nghiệm trên.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 8 nghiệm phân biệt và $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm.

Do đó hàm số $g(x)$ có 8 điểm cực trị.

Câu 40. **(HSG 12 - Sở Quảng Nam - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f(x)$ là đường cong ở hình vẽ. Hỏi hàm số $h(x)=\left|[f(x)]^2-4f(x)+1\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x)=[f(x)]^2-4f(x)+1$.

Khi đó, $g'(x)=2f(x).f'(x)-4f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=2\\f'(x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a(a>2)\\x=-1\\x=2\end{array}\right.$

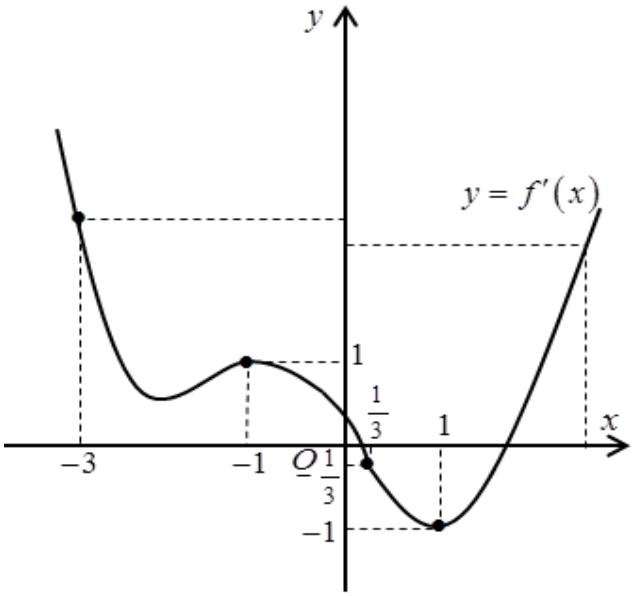
Do đó, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		2		a		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-3	↗	13	↘	$g(2)<0$	↗	$+\infty$

Suy ra đồ thị hàm số $y=g(x)$ có ba điểm cực không nằm trên trục hoành và bốn giao điểm với Ox.

Vậy đồ thị hàm số $y=h(x)=|g(x)|$ có số cực trị là $3+4=7$.

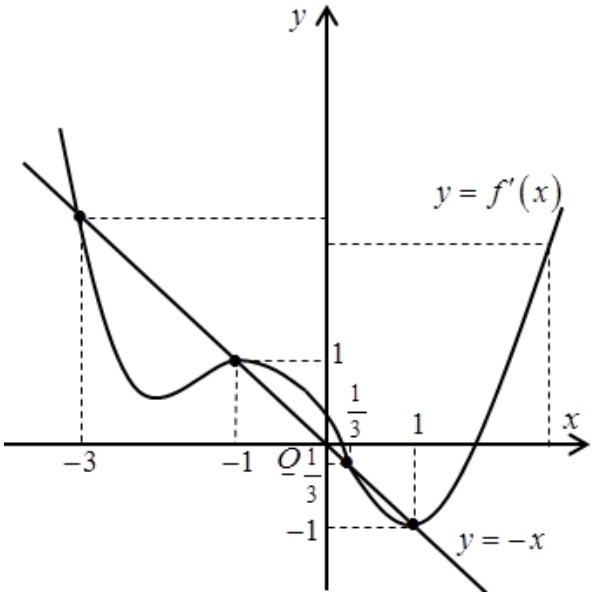
Câu 41. **(THPT Thăng Long - Hà Nội - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=2f\left(\frac{5\sin x-1}{2}\right)+\frac{(5\sin x-1)^2}{4}+3$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0;2\pi)$.



A. 9. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $g'(x)=5\cos xf'\left(\frac{5\sin x-1}{2}\right)+\frac{5}{2}\cos x(5\sin x-1)$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow 5\cos xf'\left(\frac{5\sin x-1}{2}\right)+\frac{5}{2}\cos x(5\sin x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ f'\left(\dfrac{5\sin x-1}{2}\right)=-\dfrac{5\sin x-1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \dfrac{5\sin x-1}{2}=-3\\ \dfrac{5\sin x-1}{2}=-1\\ \dfrac{5\sin x-1}{2}=\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{5\sin x-1}{2}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ 5\sin x-1=-6\\ 5\sin x-1=-2\\ 5\sin x-1=\dfrac{2}{3}\\ 5\sin x-1=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=-1\\ \sin x=-\dfrac{1}{5}\\ \sin x=\dfrac{1}{3}\\ \sin x=\dfrac{3}{5}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=-1\\ \sin x=-\dfrac{1}{5}\\ \sin x=\dfrac{1}{3}\\ \sin x=\dfrac{3}{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}\vee x=\dfrac{3\pi}{2}\\ x=\dfrac{3\pi}{2}\\ x=\pi-arc\sin\left(-\dfrac{1}{5}\right)\vee x=2\pi+arc\sin\left(-\dfrac{1}{5}\right),\ (\text{Vì } 0<x<2\pi).\\ x=arc\sin\left(\dfrac{1}{3}\right)\vee x=\pi-arc\sin\left(\dfrac{1}{3}\right)\\ x=arc\sin\left(\dfrac{3}{5}\right)\vee x=\pi-arc\sin\left(\dfrac{3}{5}\right)\end{array}\right.$$

Suy phương trình $g'(x)=0$ có 9 nghiệm, trong đó có nghiệm $x=\dfrac{3\pi}{2}$ là nghiệm kép.

Vậy hàm số $y=g(x)$ có 7 cực trị.

Câu 42. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^4\left[f(x+1)\right]^2$ là

A. 11. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B.

Ta chọn hàm $f(x)=5x^4-10x^2+3$.

Đạo hàm

$$g'(x)=4x^3\left[f(x+1)\right]^2+2x^4f(x+1)f'(x+1)=2x^3f(x+1)\left[2f(x+1)+xf'(x+1)\right].$$

Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^3 f(x+1)=0 \\ 2f(x+1)+xf'(x+1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x+1)=0 \\ 2f(x+1)+xf'(x+1)=0 \end{array}\right.$.

+) $f(x+1)=0\ (*) \Leftrightarrow 5(x+1)^4-10(x+1)+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1\approx 1,278 \\ x+1\approx 0,606 \\ x+1\approx -0,606 \\ x+1\approx -1,278 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Phương trình có bốn nghiệm phân biệt khác 0.

+) $2f(x+1)+xf'(x+1)=0 \overset{t=x+1}{\Rightarrow} 2\left(5t^4-10t^2+3\right)+(t-1)\left(20t^3-20t\right)=0$

$\Leftrightarrow 30t^4-20t^3-40t^2+20t+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\approx 1,199 \\ t\approx 0,731 \\ t\approx -0,218 \\ t\approx -1,045 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Phương trình có bốn nghiệm phân biệt khác 0 và khác các nghiệm của phương trình $(*)$.

Vậy số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là 9.

Câu 43. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^2\left[f(x-1)\right]^4$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=2x.\left[f(x-1)\right]^4+4x^2f'(x-1)\left[f(x-1)\right]^3=2x.\left[f(x-1)\right]^3\left(f(x-1)+2xf'(x-1)\right)$

Vậy $g'(x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x-1)=0\ (1) \\ f(x-1)+2xf'(x-1)=0\ (2) \end{array}\right.$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt

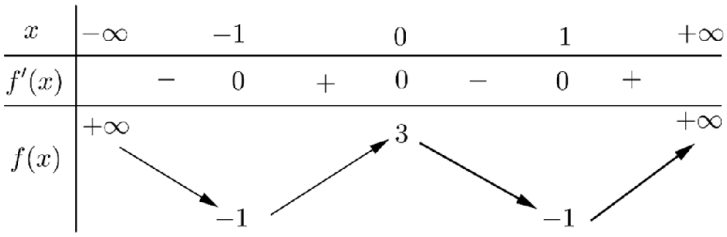
Phương trình (2) có $f(x-1)=-2xf'(x-1) \Rightarrow f(x)=-2(x+1)f'(x)$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm $f(x)$ là bậc bốn trùng phương nên ta có

$f(x)=-3x^4+6x^2-1$ thay vào $f(x)=-2(x+1)f'(x)$ vô nghiệm

Vậy hàm $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 44. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biên thiên như sau:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^4[f(x-1)]^2$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Ta có : $f(x)=4x^4-8x^2+3\Rightarrow f'(x)=16x(x^2-1)$

Ta có $g'(x)=2x^3.f(x-1).[2f(x-1)+x.f'(x-1)]$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^3=0 & (1)\\ f(x-1)=0 & (2)\\ 2f(x-1)+x.f'(x-1)=0 & (3)\end{cases}$$

Phương trình (1) có $x=0$ (nghiệm bội ba).

Phương trình (2) có cùng số nghiệm với phương trình $f(x)=0$ nên (2) có 4 nghiệm đơn.

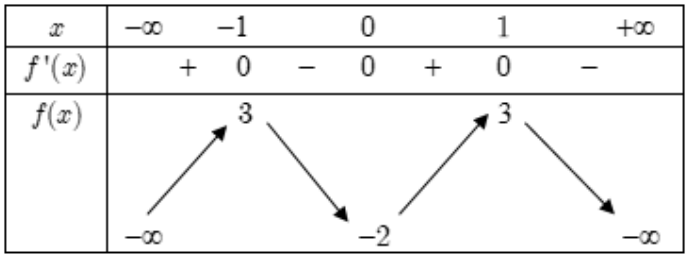
Phương trình (3) có cùng số nghiệm với phương trình :

$2f(x)+(x+1).f'(x)=0\Leftrightarrow 2(4x^4-8x^2+3)+16x(x+1)(x^2-1)=0$

$\Leftrightarrow 24x^4+16x^3-32x^2-16x+6=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Dễ thấy 9 nghiệm trên phân biệt nên hàm số $g(x)=0$ có tất cả 9 điểm cực trị.

Câu 45. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^2\left[f(x+1)\right]^4$

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

$g'(x)=2x\left[f(x+1)\right]^4+4x^2\left[f(x+1)\right]^3.f'(x+1)=2x\left[f(x+1)\right]^3.\left[f(x+1)+2x.f'(x+1)\right]$

$g'(x)=0$ ta được

+ **TH1:** $x=0$

+ **TH2:** $f(x+1)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=a<-2\\ x=b\in(-2;-1)\\ x=c\in(-1;0)\\ x=d>0\end{cases}$

+ TH3: $f(x+1)+2x.f'(x+1)=0$.

Từ bảng biến thiên ta có hàm số thỏa mãn là $f(x)=-5x^4+10x^2-2$

$\Rightarrow f(x+1)+2x.f'(x+1)=0 \Leftrightarrow h(x)=f(x+1)+2(x+1).f'(x+1)-2f'(x+1)=0$

Với $t=x+1$ ta có: $h(t)=-5t^4+10t^2-2+2t(-20t^3+20t)-2(-20t^3+20t)=0$

$\Leftrightarrow -45t^4+40t^3+50t^2-40t-2=0$

Lập bảng biến thiên ta suy ra có 4 nghiệm $t \Rightarrow 4$ nghiệm x

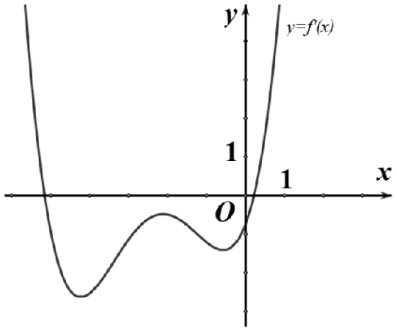
Vậy có 9 cực trị.

Bài toán tìm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left[u(x)\right]+h(x)\right|$

Bước 1. Tìm cực trị của hàm số $v(x)=f\left[u(x)\right]+h(x)$

Bước 2. Sử dụng phương pháp biến đổi đồ thị hàm số trị tuyệt đối để tìm số cực trị của hàm số $g(x)$

Câu 46. **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$. Biết $y=f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3\right)-x\right|$ là



A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Xét $h(x)=f\left(x^3\right)-x$

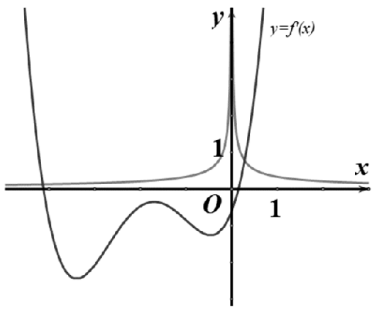
Có $h'(x)=3x^2f'\left(x^3\right)-1$

$h'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2f'\left(x^3\right)-1=0 \Leftrightarrow f'\left(x^3\right)=\dfrac{1}{3x^2} \quad (x\neq 0) \quad (1)$

Đặt $x^3=t \Rightarrow x^2=\sqrt[3]{t^2}$ phương trình (1) trở thành:

$f'(t)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} \quad (t\neq 0) \quad (2)$

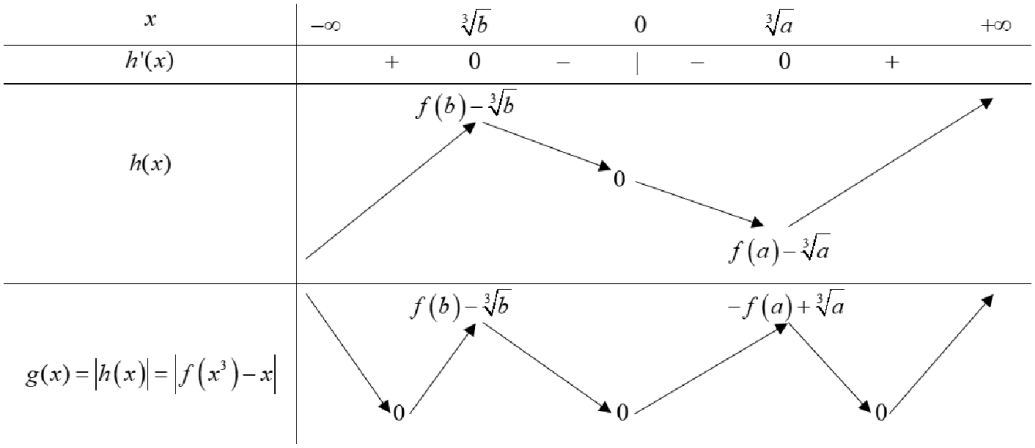
Vẽ đồ thị hàm $y=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ trên cùng hệ trục tọa độ với hàm $y=f'(x)$.



Dựa vào đồ thị ta có:

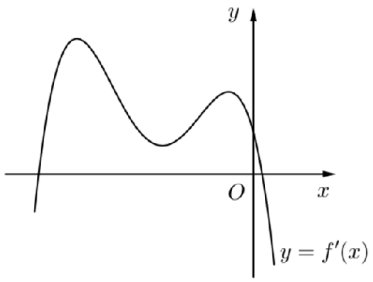
$$f'(t)=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=b<0\\t=a>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3=b<0\\x^3=a>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt[3]{b}<0\\x=\sqrt[3]{a}>0\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên



Dựa vào BBT ta thấy hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3\right)-x\right|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 47. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$. Biết $y=f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3\right)+x\right|$ là



A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

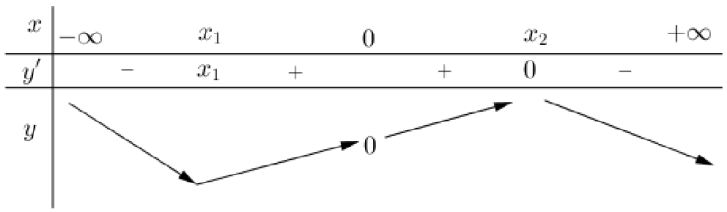
Lời giải

Chọn B

Đặt $h(x)=f\left(x^3\right)+x\Rightarrow h'(x)=3x^2f'\left(x^3\right)+1=0\Leftrightarrow f'\left(x^3\right)=-\frac{1}{3x^2}$

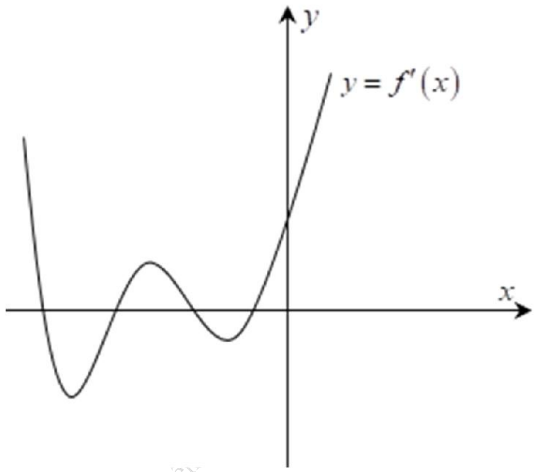
Đặt $t=x^3\Rightarrow x=\sqrt[3]{t}$ thế vào phương trình trên ta được $f'(t)=-\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$

Xét hàm số $y=-\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\Rightarrow y'=\frac{2}{9\sqrt[3]{t^5}}$ đổi dấu khi qua 0 và đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=0$. Khi vẽ đồ thị trên cùng một mặt phẳng tọa độ với đồ thị hàm số $y=f'(t)$ ta thấy hai đồ thị cắt nhau tại 2 điểm phân biệt thuộc góc phần từ thứ 3 và 4, gọi 2 giao điểm lần lượt là $t_1<0,t_2>0\Rightarrow x_1=\sqrt[3]{t_1},x_2=\sqrt[3]{t_2}$. Như vậy ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $h(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt và hàm số $h(x)$ có 2 điểm cực trị không nằm trên trục hoành, do đó hàm số $g(x)=|h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 48. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$. Biết $y=f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=|f(x^4)-x^2|$ là



A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

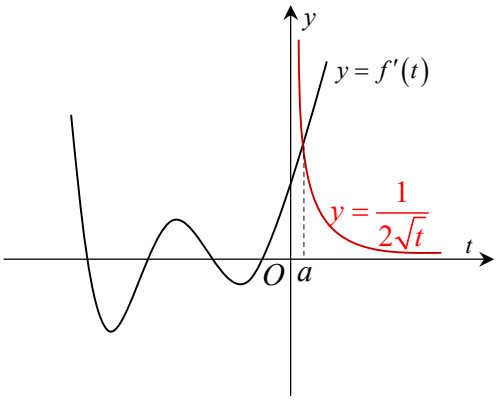
Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x)=f(x^4)-x^2$ có $h'(x)=4x^3f'(x^4)-2x$.

$$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'(x^4)=\dfrac{1}{2x^2}\quad(*)\end{array}\right.$$

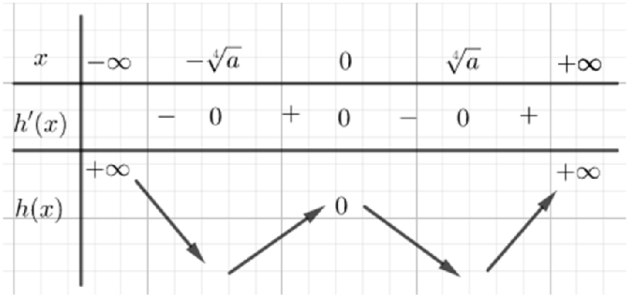
Xét phương trình $(*)$: Đặt $t=x^4$ thì $(*)$ thành $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ với $t>0$.



Dựa vào đồ thị, phương trình $(*)$ có duy nhất một nghiệm $a>0$.

Khi đó, ta được $x=\pm\sqrt[4]{a}$.

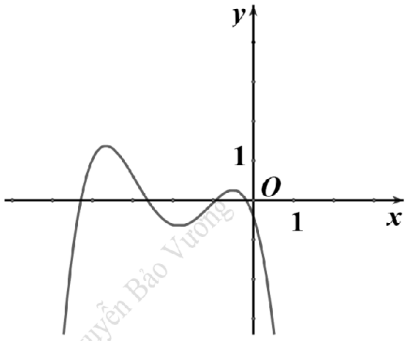
Bảng biến thiên của hàm số $h(x)=f\left(x^4\right)-x^2$



Số cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left(x^4\right)-x^2\right|$ bằng số cực trị của hàm $h(x)=f\left(x^4\right)-x^2$ và số nghiệm đơn hoặc bội lẻ của phương trình $h(x)=0$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $f(x)$ thì số cực trị của $g(x)$ là 5.

Câu 49. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$. Biết $y=f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left(x^4\right)+x^2\right|$ là



A. 3. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Xét $h(x)=f\left(x^4\right)+x^2$

Có $h'(x)=4x^3f'\left(x^4\right)+2x=2x\left(2x^2f'\left(x^4\right)+1\right)$

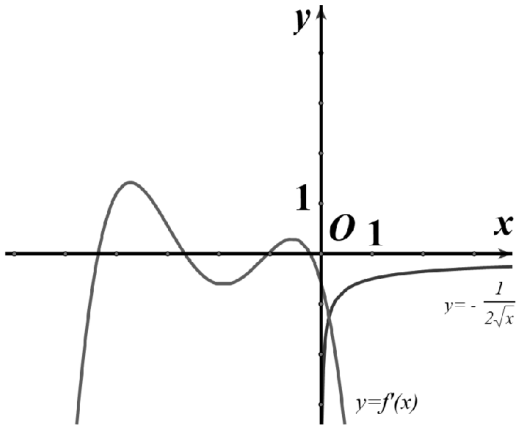
$$h'(x)=0\Leftrightarrow 2x\left(2x^2f'\left(x^4\right)+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\2x^2f'\left(x^4\right)+1=0\quad(1)\end{array}\right.$$

$$(1):2x^2f'\left(x^4\right)+1=0\Leftrightarrow f'\left(x^4\right)=-\frac{1}{2x^2}\quad(x\neq 0)\quad(2)$$

Đặt $x^4=t\Rightarrow x^2=\sqrt{t}\quad(t>0)$ phương trình (2) trở thành:

$$f'(t)=-\frac{1}{2\sqrt{t}}\quad(t>0)\quad(3)$$

Vẽ đồ thị hàm $y=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ trên cùng hệ trục tọa độ với hàm $y=f'(x)$.



Dựa vào đồ thị ta có: phương trình (3) có nghiệm duy nhất $t = a > 0 \Rightarrow x^4 = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt[4]{a} \\ x = -\sqrt[4]{a} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt[4]{a}$		0		$\sqrt[4]{a}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$		↗	$f(a)+\sqrt{a}$	↘	0	↗	$f(a)+\sqrt{a}$	↘	
$g(x)=\lvert h(x)\rvert=\lvert f(x^4)+x^2\rvert$		↘	0	↗	$f(a)+\sqrt{a}$	↘	0	↗	$f(a)+\sqrt{a}$

Dựa vào BBT ta thấy hàm số $g(x) = \left|f\left(x^4\right)+x^2\right|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 50. **(Chuyên Quang Trung - 2020)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như hình vẽ bên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $y = f\left(x^2 - 2|x|\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4 **B.** 7 **C.** 9 **D.** 11

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$.

* $y = h(x) = f\left(|x|^2 - 2|x|\right)$

$y' = h'(x) = f'\left(|x|^2 - 2|x|\right).\dfrac{x}{|x|}.(2|x|-2).$

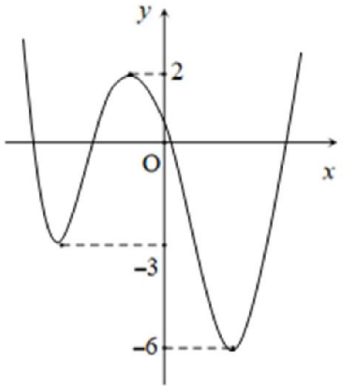
$$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\\|x|^2-2|x|=0\\|x|^2-2|x|=1\\|x|^2-2|x|=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\\x=2\\x=-2\\x=1+\sqrt{2}\\x=-1-\sqrt{2}\\x=1+\sqrt{3}\\x=-1-\sqrt{3}\end{array}\right.\cdot$$

Ta thấy phương trình $h'(x)=0$ có 8 nghiệm đơn (1).

$h'(x)$ không tồn tại tại $x=0$ mà $x=0$ thuộc tập xác định đồng thời qua đó $h'(x)$ đổi dấu (2).

Từ (1) và (2) suy ra hàm số đã cho có 9 điểm cực trị.

Câu 51. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-12;12]$ để hàm số $g(x)=|2f(x-1)+m|$ có 5 điểm cực trị?



A. 13. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

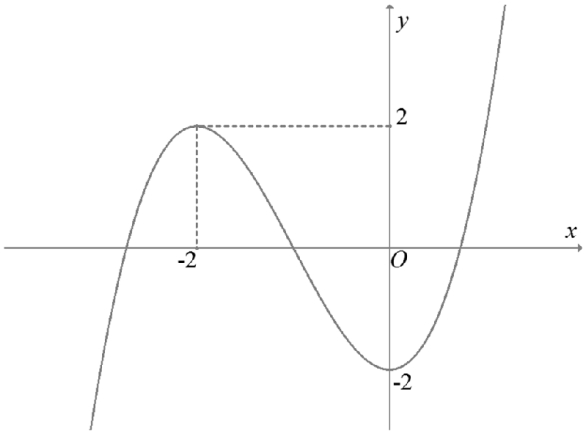
Đặt $h(x)=2f(x-1)+m\Rightarrow g(x)=|h(x)|$.

- Số điểm cực trị của $g(x)$ = số điểm cực trị của $y=h(x)$ + số giao điểm của $y=h(x)$ với trục Ox khác với điểm cực trị của $y=h(x)$.
- Hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị. Suy ra hàm số $y=h(x)$ cũng có 3 điểm cực trị.
- Hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $h(x)=0\Leftrightarrow f(x-1)=-\dfrac{m}{2}$ có 2 nghiệm phân biệt khác điểm cực trị của $h(x)$.
- Đồ thị hàm số $y=f(x-1)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f(x)$ sang bên phải 1 đơn vị.

Dựa vào đồ thị, ta được: $-\dfrac{m}{2}\geq 2$ hoặc $-6<-\dfrac{m}{2}\leq -3$.

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\leq -4\\6\leq m<12\end{array}\right.\xrightarrow{m\in\mathbb{Z};\,m\in[-12;12]}$ có 15 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 52. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ và $a\neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(-2x^2+4x\right)$



A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải.

Chọn D

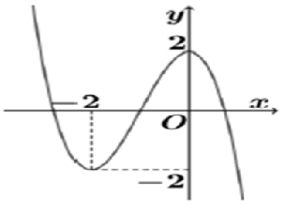
Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị là $x=-2;x=0$.

$g(x)=f\left(-2x^2+4x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. $g'(x)=(-4x+4)f'\left(-2x^2+4x\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-4x+4=0\\-2x^2+4x=0\\-2x^2+4x=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\\x=2\\(x-1)^2=0\end{array}\right.$$

Như vậy $g'(x)$ có 3 nghiệm, trong đó 1 là nghiệm bội 3, 0 và 2 là nghiệm đơn nên $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 53. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f\left(-x^2+x\right)$ bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Khi đó $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Theo đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta có

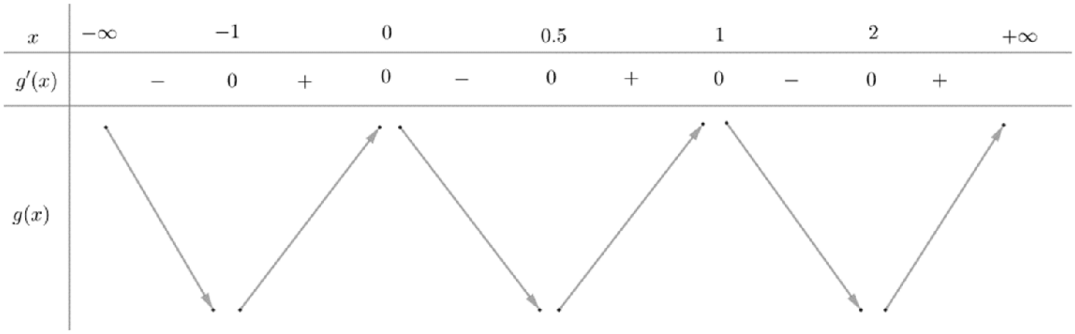
$$\begin{cases} f'(-2)=0 \\ f'(0)=0 \\ f(-2)=-2 \\ f(0)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a-4b+c=0 \\ c=0 \\ -8a+4b-2c+d=-2 \\ d=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a-4b=0 \\ -8a+4b=-4 \\ c=0 \\ d=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-3 \\ c=0 \\ d=2 \end{cases}.$$

Vậy $f(x)=-x^3-3x^2+2$.

Khi đó, ta có $g(x)=f\left(-x^2+x\right)=x^6-3x^5+5x^3-3x^2+2$.

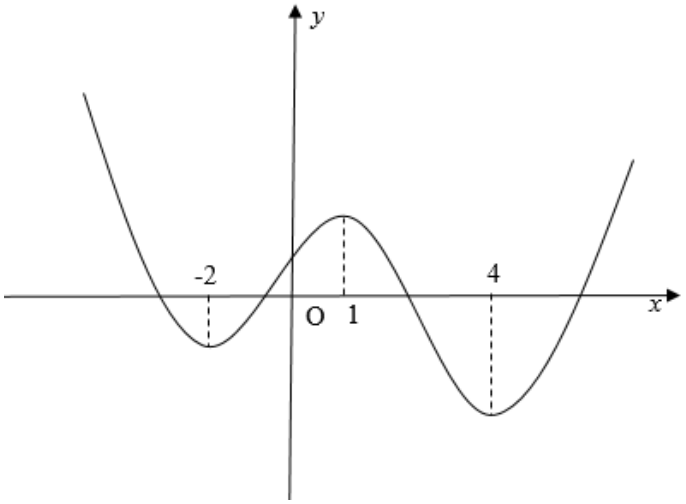
$$g'(x)=3x\left(2x^4-5x^3+5x-2\right) \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên



Suy ra, hàm số $g(x)=f\left(-x^2+x\right)$ có ba điểm cực tiểu.

Câu 54. **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f\left(e^x-\dfrac{x^2+2x}{2}\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=\left(e^x-x-1\right)f'\left(e^x-\dfrac{x^2+2x}{2}\right)$

Xét $g'(x)=0\Leftrightarrow\left(e^x-x-1\right)f'\left(e^x-\dfrac{x^2+2x}{2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}e^x-x-1=0\\ f'\left(e^x-\dfrac{x^2+2x}{2}\right)=0\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}e^x-x-1=0 & (1)\\ e^x-\dfrac{x^2+2x}{2}=-2 & (2)\\ e^x-\dfrac{x^2+2x}{2}=1 & (3)\\ e^x-\dfrac{x^2+2x}{2}=4 & (4)\end{array}\right.$$

Ta xét $u(x)=e^x-x-1; v(x)=e^x-\dfrac{x^2+2x}{2}$

Ta có $u'(x)=e^x-1; u'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ $u'(x)=e^x-1; v'(x)=e^x-x-1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
$u(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $u(x)\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Xét hàm số $v(x)=e^x-\dfrac{x^2+2x}{2}$

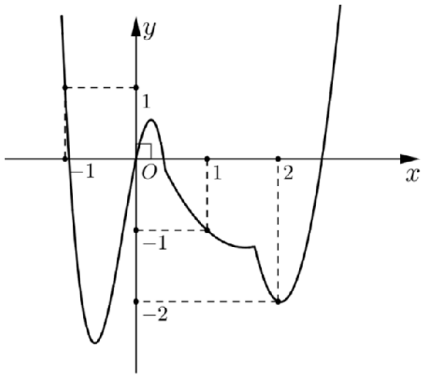
Ta có $v'(x)=e^x-x-1\geq 0\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$v'(x)$		$+$	0	$+$	
$v(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó các phương trình $(2),(3),(4)$ có nghiệm duy nhất và $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm đó.
Vậy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 55. **(Sở Yên Bái - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)+x^2+1$. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

B. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

C. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

D. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

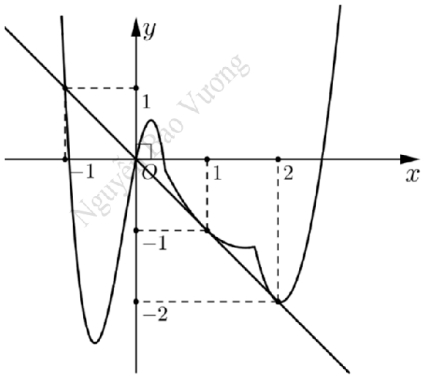
Lời giải

Chọn C

$g'(x)=2f'(x)+2x$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-x$.

Ta vẽ thêm đường thẳng $y=-x$ và đồ thị.



Khi đó phương trình $g'(x)=0$ có các nghiệm $x=-1$, $x=1$, $x=2$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	
$g(x)$		↗		↘				↗			

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

Câu 56. **(Kim Liên - Hà Nội - 2020)** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 16. **B.** 28. **C.** 26. **D.** 27.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+m$. Ta có $f'(x)=12x^3-12x^2-24x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1. \\ x=2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$m-5$	↗	m	↘	$m-32$	↗	$+\infty$

Vậy với mọi m hàm số $f(x)$ luôn có ba điểm cực trị.

Do đó để hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $f(x)=0$ có đúng hai nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ \left\{\begin{array}{l} m-5\ge 0 \\ m-32<0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ 5\le m<32 \end{array}\right.$.

Vì m là số nguyên dương cho nên có 27 số m thỏa đề bài.

Câu 57. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$		↗	1	↘	-2	↗	1	↘	

Hàm số $y=f(2x)$ đạt cực đại tại

A. $x=\dfrac{1}{2}$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-2$.

Lời giải

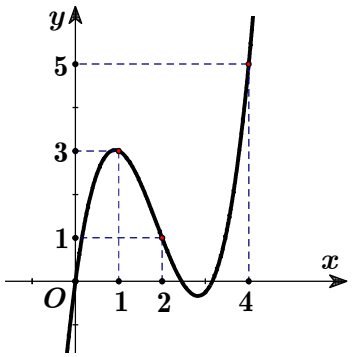
Chọn C

Đặt $t=2x \Rightarrow y=f(t)$.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=f(t)$ đạt cực đại tại $\left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=-1 \\ 2x=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2}. \\ x=1 \end{array}\right.$

Vậy hàm số $y=f(2x)$ đạt cực đại tại điểm $x=1$ và $x=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 58. **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0)=0; f(4)>4$. Biết hàm $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left(x^2\right)-2x\right|$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x)=f\left(x^2\right)-2x$.

Ta có: $h'(x)=2xf'\left(x^2\right)-2$; $h'(x)=0\Leftrightarrow f'\left(x^2\right)=\dfrac{1}{x}$(vô nghiệm $\forall x\le 0$).

Đặt $t=x^2\Rightarrow x=\sqrt{t},\forall t>0$.

Khi đó: $f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ (*). Nhận thấy trên khoảng $(0;1)$ thì $w(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ nghịch biến và $f'(t)$ đồng biến, do đó (*) nếu có nghiệm là duy nhất.

Mặt khác: $h'(0).h'(1)=-2\left(2f'(1)-2\right)=-8<0$ và $h'(x)$ liên tục trên $[0;1]$ nên $\exists x_0\in(0;1):h'(x_0)=0$.

Vậy $h'(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x_0\in(0;1)$ và $h(x)$ có một điểm cực tiểu (vẽ bảng biến thiên). (1)

Xét phương trình: $h(x)=0\Leftrightarrow f\left(x^2\right)-2x=0$ (**).

Ta có: $h(0)=f(0)=0\Rightarrow x=0$ là một nghiệm của (**).

Mặt khác: $h\left(\sqrt{x_0}\right).h(2)=\left(f(x_0)-2\sqrt{x_0}\right)\left(f(4)-4\right)<0\Rightarrow\exists x_1\in\left(\sqrt{x_0};2\right):h(x_1)=0$.

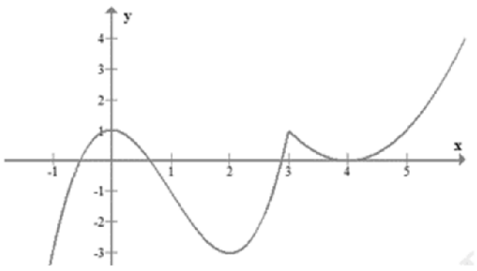
Nên (**) có nghiệm $x_1\in\left(\sqrt{x_0};2\right)$.

Vì $h(x)$ có một điểm cực trị, nên (**) có không quá 2 nghiệm.

Vậy $h(x)=f\left(x^2\right)-2x=0$ có hai nghiệm phân biệt. (2)

Từ (1) và (2) ta được: hàm số $g(x)=\left|f\left(x^2\right)-2x\right|$ có 3 điểm cực trị.

Câu 59. **(Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(4;+\infty)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(2|x|-2)$ bằng



A. 7 . **B.** 5. **C.** 4 . **D.** 9 .

Lời giải

Chọn D

$$g(x)=f(2|x|-2)\Rightarrow g'(x)=\left(2|x|-2\right)'f'(2|x|-2)=\left(2\sqrt{x^2}-2\right)'f'(2|x|-2)=\frac{x}{|x|}f'(2|x|-2)$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x}{|x|}f'(2|x|-2)=0\Leftrightarrow f'(2|x|-2)=0\left(x\neq 0\right)$$

Dựa vào đồ thị ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x=3\\x=4\end{array}\right.$

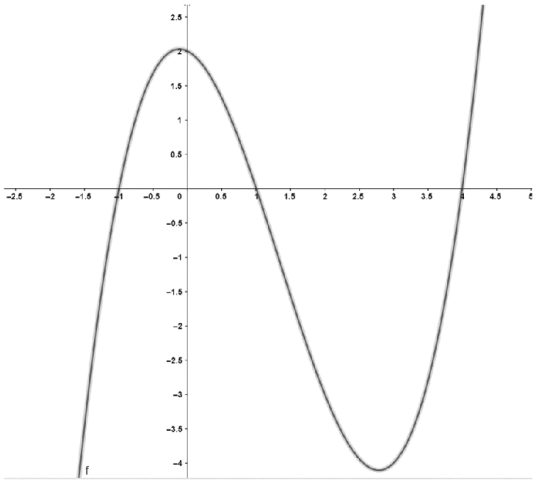
$$\rightarrow f'(2|x|-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2|x|-2=0\\2|x|-2=2\\2|x|-2=3\\2|x|-2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x|=1\\|x|=2\\|x|=\frac{5}{2}\\|x|=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x=\pm2\\x=\pm\frac{5}{2}\\x=\pm3\end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	-3	$\frac{-5}{2}$	-2	-1	0	1	2	$\frac{5}{2}$	3	$+\infty$
$g'(x)$	−	0 +	0	− 0 +	0	‖ +	0 −	0 +	0	− 0	+

Suy ra hàm số $y=f(2|x|-2)$ có 9 điểm cực trị

Câu 60. **(Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Tìm điểm cực đại của hàm số $y=2019^{-f(x)}-2020^{f(x)}$.

A. 2 . **B.** 3 . **C.** 0 . **D.** 1 .

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng xét dấu của $y=f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		4	$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+

Xét hàm số $y=2019^{-f(x)}-2020^{f(x)} \Rightarrow y'=-f'(x)\left(2019^{-f(x)}\ln 2019+2020^{f(x)}\ln 2020\right)$

Vì $2019^{-f(x)}\ln 2019+2020^{f(x)}\ln 2020>0$

Nên $y'=-f'(x)\left(2019^{-f(x)}\ln 2019+2020^{f(x)}\ln 2020\right)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		-1		1		4	$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	0	-

Vậy hàm số $y=2019^{-f(x)}-2020^{f(x)}$ có hai điểm cực đại.

Câu 61. **(Kìm Thành - Hải Dương - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ là một hàm đa thức có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^2-|x|\right)$

A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g(x)=f\left(x^2-|x|\right)=f\left(|x|^2-|x|\right)$. Số điểm cực trị của hàm số $f\left(|x|\right)$ bằng hai lần số điểm cực trị dương của hàm số $f(x)$ cộng thêm 1.

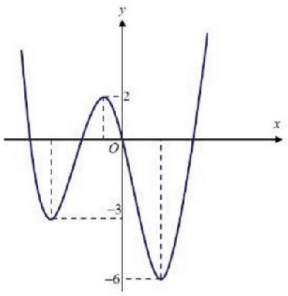
Xét hàm số $h(x)=f\left(x^2-x\right)\Rightarrow h'(x)=(2x-1)f'\left(x^2-x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\x^2-x=-1\\x^2-x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu hàm số $h(x)=f\left(x^2-x\right)$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$h'(x)$	−	0	+	0	−	0	+	

Hàm số $h(x)=f\left(x^2-x\right)$ có 2 điểm cực trị dương, vậy hàm số $g(x)=f\left(x^2-|x|\right)=f\left(|x|^2-|x|\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 62. **(Trần Phú - Quảng Ninh - 2020)** Cho đồ thị $y=f(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f\left(x+2018\right)+\frac{1}{3}m^2\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các giá trị của các phần tử trong tập S bằng

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Đặt $g\left(x\right)=\left|f\left(x+2018\right)+\frac{1}{3}m^2\right|\Rightarrow g'\left(x\right)=\frac{f'\left(x+2018\right)\left[f\left(x+2018\right)+\frac{1}{3}m^2\right]}{\left|f\left(x+2018\right)+\frac{1}{3}m^2\right|}$

Phương trình $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(x+2018\right)=0\ \left(1\right)\\f\left(x+2018\right)=-\frac{m^2}{3}\ \left(2\right)\end{array}\right.$

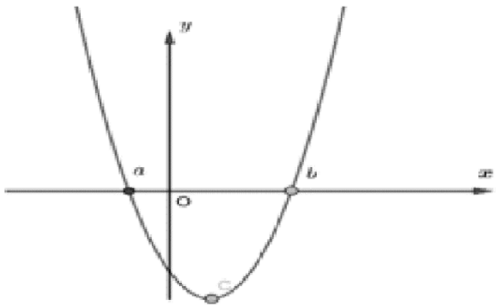
Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $\left(1\right)$ luôn có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy để đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ có 5 điểm cực trị thì phương trình $\left(2\right)$ phải có 2 nghiệm đơn phân biệt $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\frac{m^2}{3}>2\\-6<-\frac{m^2}{3}\le-3\end{array}\right.\left(m\in\mathbb{N}^*\right)\Leftrightarrow m\in\left\{3;4\right\}.$

Vậy tổng các phần tử là 7.

Dạng 3. Tìm m để hàm số f(u) thỏa mãn điều kiện cho trước

Câu 1. **(Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020)** Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị của hàm đạo hàm $f'\left(x\right)$ như hình vẽ và $f\left(b\right)=1$. Số giá trị nguyên của $m\in\left[-5;5\right]$ để hàm số $g\left(x\right)=\left|f^2\left(x\right)+4f\left(x\right)+m\right|$ có đúng 5 điểm cực trị là



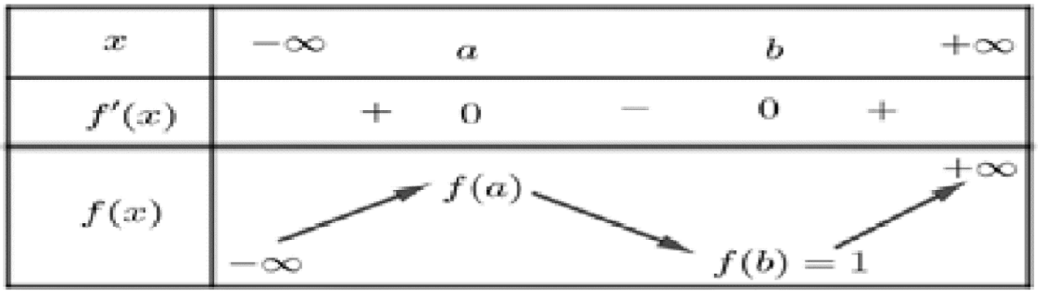
A. 8. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Ta có bảng biến thiên của $f\left(x\right)$:



Xét hàm số $h\left(x\right)=f^2\left(x\right)+4f\left(x\right)+m$

$\Rightarrow h'\left(x\right)=2f'\left(x\right)f\left(x\right)+4f'\left(x\right)$

$\Rightarrow h'\left(x\right)=2f'\left(x\right)\left[f\left(x\right)+2\right]$

$h'\left(x\right)=0\Rightarrow 2f'\left(x\right)\left[f\left(x\right)+2\right]=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(x\right)=0\\f\left(x\right)=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a;x=b\\x=c\left(c\langle a\right)\end{array}\right.$

Pt có 3 nghiệm phân biệt $\Rightarrow$có 3 điểm cực trị

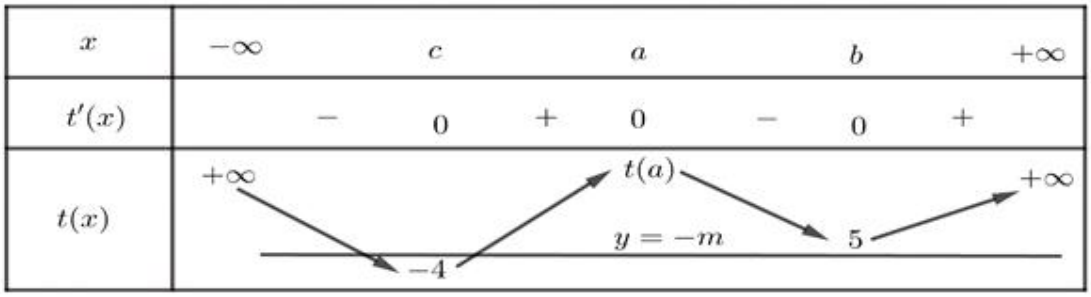
Xét $h\left(x\right)=0$

$\Leftrightarrow f^2\left(x\right)+4f\left(x\right)=-m\left(2\right)$

Để $g\left(x\right)=\left|h\left(x\right)\right|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi PT $\left(2\right)$ có 2 nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ phân biệt

Xét hàm số $t\left(x\right)=f^2\left(x\right)+4f\left(x\right)$

Ta có Bảng biến thiên của $t\left(x\right)$:



Từ YCBT $\Leftrightarrow t\left(x\right)=-m$ có hai nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ pb

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}-m\geq t\left(a\right)>5\\-4<-m\leq 5\end{array}\right.\\-5\leq m\leq 5;m\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m\leq -t\left(a\right)<-5\\-4<-m\leq 5\end{array}\right.\\-5\leq m\leq 5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-5\leq m<4\\m\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow m\in\left\{-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3\right\}.$

Cách 2:

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$:

x	$-\infty$		a		b		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(a)$	↘	$f(b)=1$	↗	$+\infty$

Xét hàm số $h\left(x\right)=f^2\left(x\right)+4f\left(x\right)+m$

$\Rightarrow h'\left(x\right)=2f'\left(x\right)f\left(x\right)+4f'\left(x\right)$

$\Rightarrow h'\left(x\right)=2f'\left(x\right)\left[f\left(x\right)+2\right]$

$h'\left(x\right)=0\Rightarrow 2f'\left(x\right)\left[f\left(x\right)+2\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'\left(x\right)=0 \\ f\left(x\right)=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a;x=b \\ x=c\left(c<a\right) \end{array}\right.$

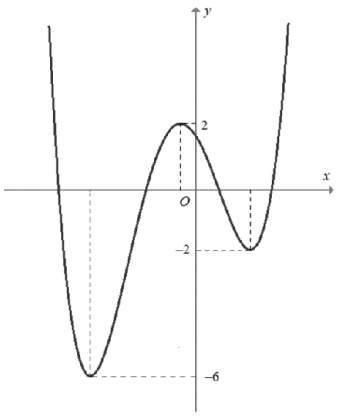
x	$-\infty$		c		a		b		$+\infty$
$h'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h\left(x\right)$	$+\infty$	↘	$-4+m$	↗	$h(a)$	↘	$5+m$	↗	$+\infty$

Từ YCBT $g\left(x\right)=\left|h\left(x\right)\right|=\left|f^2\left(x\right)+4f\left(x\right)+m\right|$ có 5 điểm cực trị khi:

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} h\left(a\right)\le 0 \\ -4+m<0\le 5+m \end{array}\right. \\ m\in\mathbb{Z};m\in\left[-5;5\right] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m\le f^2\left(a\right)+4f(\mathrm{a})<-5 \\ -5\le m<4 \end{array}\right. \\ m\in\mathbb{Z};m\in\left[-5;5\right] \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow m\in\left\{-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3\right\}$

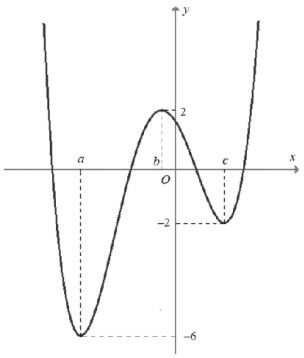
Câu 2. **(Sở Bình Phước - 2020)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x+2020\right)+m^2\right|$ có 5 điểm cực trị?



A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B



Gọi a,b,c $(a<b<c)$ là ba điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$.

Khi đó: $f(a)=-6; f(b)=-2; f(c)=2$.

Xét hàm $h(x)=f(x+2020)$ với $x\in\mathbb{R}$.

Khi đó: $h'(x)=f'(x+2020).(x+2020)'=f'(x+2020)$.

$$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a-2020\\x=b-2020\\x=c-2020\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm $h(x)$

x	$-\infty$		$a-2020$		$b-2020$		$c-2020$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	-6	↗	2	↘	-2	↗	

Hàm số $g(x)=\left|f(x+2020)+m^2\right|$ có 5 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f(x+2020)+m^2=0$ có đúng 2 nghiệm không thuộc $\{a-2020;b-2020;c-2020\}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2=2\\m^2=-2\\2<m^2<6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm\sqrt{2}\\-\sqrt{6}<m<-\sqrt{2}\\\sqrt{2}<m<\sqrt{6}\end{array}\right.$$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m là $m=2$ và $m=-2$ thì hàm số $g(x)=\left|f(x+2020)+m^2\right|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 3. **(Chuyên Lào Cai - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+2)^4(x+4)^3\left[x^2+2(m+3)x+6m+18\right]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có **đúng** một điểm cực trị?

B. 7. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ (x+2)^4=0 \\ (x+4)^3=0 \\ x^2+2(m+3)x+6m+18=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ x=-4 \\ x^2+2(m+3)x+6m+18=0 \ (*) \end{array}\right.$

Để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ vô nghiệm, có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có nghiệm là -4.

Trường hợp 1. Phương trình $(*)$ vô nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta = 4m^2+24m+36-24m-72 = 4m^2-36<0$

$\Leftrightarrow -3<m<3 \Rightarrow m \in \{-2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\}$

Trường hợp 2. Phương trình $(*)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 4m^2-36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-3 \end{array}\right.$.

Trường hợp 3. Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Trong đó $x_1=-4$.

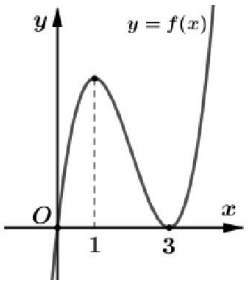
Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, $x_2 \Leftrightarrow \Delta = 4m^2-36>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>3 \end{array}\right.$.

Theo định lí Viète ta có $\begin{cases} S=x_1+x_2=-4+x_2=-2m-6 \\ P=x_1.x_2=-4.x_2=6m+18 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2=-2m-2 \\ x_2=-\dfrac{3}{2}m-\dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2m-2=-\dfrac{3}{2}m-\dfrac{9}{2} \Leftrightarrow m=5$.

Vậy $m \in \{-3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 5\}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 4. **(THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+2f(x)+2m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $m>1$ **B.** $m\geq 1$ **C.** $m\leq 2$ **D.** $m>2$

Lời giải

Chọn B

Số cực trị của hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+2f(x)+2m\right|$ bằng số cực trị của hàm số $y(x)=f^2(x)+2f(x)+2m$ cộng với số giao điểm (khác điểm cực trị) của đồ thị hàm số $y(x)=f^2(x)+2f(x)+2m$ và $y=0$.

Xét hàm số $g(x)=f^2(x)+2f(x)+2m$

$g'(x)=2f(x).f'(x)+2f'(x)=2f'(x)\left[f(x)+1\right]$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'(x)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \\ x=\alpha\,(\alpha<0) \end{array}\right.$$

BBT

x	$-\infty$		α		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-1+2m$	↗	CĐ	↘	$2m$	↗	$+\infty$

Hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow 2m\ge 0 \Leftrightarrow m\ge \dfrac{1}{2}$. Đáp án B là gần kết quả nhất

Câu 5. **(THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-a)(13x-15)^3$. Tập hợp các giá trị của a để hàm số $y=f\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)$ có 6 điểm cực trị là

A. $\left[-\dfrac{5}{4};\dfrac{5}{4}\right]\setminus\left\{0;\dfrac{15}{13}\right\}$. **B.** $\left(-\dfrac{5}{4};\dfrac{5}{4}\right)\setminus\left\{0;\dfrac{15}{13}\right\}$. **C.** $\left(-\dfrac{5}{4};\dfrac{5}{4}\right)\setminus\{0\}$. **D.** $\left(-\dfrac{5}{4};\dfrac{5}{4}\right)\setminus\left\{\dfrac{15}{13}\right\}$.

Lời giải

$$y'=f'\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)=\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)'.\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)^2\left(\frac{5x}{x^2+4}-a\right)\left(13\frac{5x}{x^2+4}-15\right)^3$$

$$=\frac{20-5x^2}{\left(x^2+4\right)^2}.\frac{25x^2}{\left(x^2+4\right)^2}\left(\frac{-ax^2+5x-4a}{x^2+4}\right)\left(\frac{-15x^2+65x-60}{x^2+4}\right)^3.$$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=\pm 2 & \\ x=0 & \\ x=3 & (x=0 \text{ là nghiệm kép}). \\ x=\dfrac{4}{3} & \\ -ax^2+5x-4a=0 \quad (1) & \end{array}\right.$$

đặt $g(x)=-ax^2+5x-4a$

Ycbt thỏa mãn khi phương trình $y'=0$ có 6 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $\pm 2;0;1;4$. (Nếu $g(0)=0$ thì $y'=0$ chỉ có 5 nghiệm bội lẻ).

Điều kiện: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 5^2 - 4a.4a > 0 \\ g(2) \neq 0 \\ g(-2) \neq 0 \\ g(0) \neq 0 \\ g(3) \neq 0 \\ g\left(\frac{4}{3}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ -\frac{5}{4} < a < \frac{5}{4} \\ a \neq \pm\frac{5}{4} \\ a \neq 0 \\ a \neq \frac{15}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{4} < a < \frac{5}{4} \\ a \neq 0 \\ a \neq \frac{15}{13} \end{cases}$.

Câu 6. **(Chuyên Vinh - 2018)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x^2-8x+m)$ có 5 điểm cực trị?

A. 15. **B.** 17. **C.** 16 **D.** 18

Lời giải

Đặt $g(x) = f(x^2-8x+m)$

$f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x) \Rightarrow g'(x) = (2x-8)(x^2-8x+m-1)^2(x^2-8x+m)(x^2-8x+m-2)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x^2-8x+m-1 = 0 \quad (1) \\ x^2-8x+m = 0 \quad (2) \\ x^2-8x+m-2 = 0 \quad (3) \end{cases}$

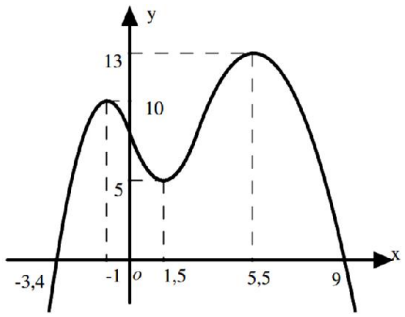
Các phương trình (1), (2), (3) không có nghiệm chung từng đôi một và $(x^2-8x+m-1)^2 \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi (2) và (3) có hai nghiệm phân biệt khác 4

$\Leftrightarrow \begin{cases} 16-m > 0 \\ 16-m+2 > 0 \\ 16-32+m \neq 0 \\ 16-32+m-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 16 \\ m < 18 \\ m \neq 16 \\ m \neq 18 \end{cases} \Leftrightarrow m < 16$.

m nguyên dương và $m < 16$ nên có 15 giá trị m cần tìm.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết rằng $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (-\infty; -3,4) \cup (9; +\infty)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - mx + 5$ có **đúng** hai điểm cực trị.



A. 7. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

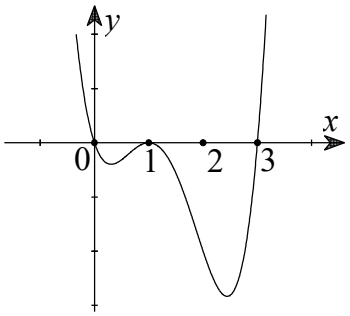
$g'(x)=f'(x)-m$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng số nghiệm đơn (bội lẻ) của phương trình $f'(x)=m.$

Dựa và đồ thị ta có điều kiện $\left[\begin{array}{l}0<m\le 5\\10\le m<13\end{array}\right.$.

Vậy có 8 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn.

Câu 8. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tìm m để hàm số $y=f(x^2+m)$ có 3 điểm cực trị.

A. $m\in(3;+\infty)$. **B.** $m\in[0;3]$. **C.** $m\in[0;3)$. **D.** $m\in(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn C

Do hàm số $y=f(x^2+m)$ là hàm chẵn nên hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi hàm số này có đúng 1 điểm cực trị dương.

$y=f(x^2+m)\Rightarrow y'=2xf'\left(x^2+m\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(x^2+m\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2+m=0\\x^2+m=1\\x^2+m=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=-m\\x^2=1-m\\x^2=3-m\end{array}\right.$$

Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tiếp xúc trục hoành tại điểm có hoành độ là $x=1$ nên các nghiệm của pt $x^2=1-m$ (nếu có) không làm $f'\left(x^2+m\right)$ đổi dấu khi x đi qua, do đó các điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2+m)$ là các điểm nghiệm của hệ $\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=-m\\x^2=3-m\end{array}\right.$

Hệ trên có duy nhất nghiệm dương khi và chỉ khi $\left\{\begin{array}{l}-m\le 0\\3-m>0\end{array}\right.\Leftrightarrow 0\le m<3$.

Câu 9. **(THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa - 2019)** Cho hàm số $f'(x)=(x-2)^2\left(x^2-4x+3\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên

dương của m để hàm số $y=f\left(x^2-10x+m+9\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 18. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 15.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=1\\x=3\end{array}\right.$, $x=2$ là nghiệm kép nên khi qua giá trị $x=2$ thì $f'(x)$ không bị đổi dấu.

Đặt $g(x)=f\left(x^2-10x+m+9\right)$ khi đó $g'(x)=f'(u).(2x-10)$ với $u=x^2-10x+m+9$.

Nên $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-10=0\\\left(x^2-10x+m+9-2\right)^2=0\\x^2-10x+m+9=1\\x^2-10x+m+9=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\\left(x^2-10x+m+9-2\right)^2=0\\x^2-10x+m+8=0\ (1)\\x^2-10x+m+6=0\ (2)\end{array}\right.$

Hàm số $y=f\left(x^2-10x+m+9\right)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $g'(x)$ đổi dấu 5 lần

Hay phương trình (1) và phương trình (2) phải có hai nghiệm phân biệt khác 5

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\Delta_1'>0\\\Delta_2'>0\\h(5)\neq0\\p(5)\neq0\end{array}\right.$, (Với $h(x)=x^2-10x+m+8$ và $p(x)=x^2-10x+m+6$).

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}17-m>0\\19-m>0\\-17+m\neq0\\-19+m\neq0\end{array}\right.\Leftrightarrow m<17$.

Vậy có 16 giá trị nguyên dương m thỏa mãn.

Câu 10. **(Chuyên Bắc Giang - Lần 4 - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)^2(x-1)\left(x^2-2(m+1)x+m^2-1\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x)=f\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào cách vẽ đồ thị hàm số $g(x)=f\left(|x|\right)$, số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)=f\left(|x|\right)$ bằng số điểm cực trị dương của đồ thị hàm số $y=f(x)$ cộng thêm 1.

Để hàm số $g(x)=f\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 2 cực trị dương.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2.\\x^2-2(m+1)x+m^2-1=0\ \ (*)\end{array}\right.$

Có $x=2$ là nghiệm bội 2, $x=1$ là nghiệm đơn.

Vậy $x^2-2(m+1)x+m^2-1=0$ có hai nghiệm phân biệt, có một nghiệm dương $x\neq 1$, có một nghiệm $x\le 0$

Trường hợp 1: Có nghiệm $x=0$ khi đó $x^2-2(m+1)x+m^2-1=0\Leftrightarrow m^2-1=0\Leftrightarrow m=\pm 1$

Với $m=1$, có $x^2-2(m+1)x+m^2-1=0\Leftrightarrow x^2-4x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$ (TM)

Với $m=-1$, có $x^2-2(m+1)x+m^2-1=0\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$ (Loại)

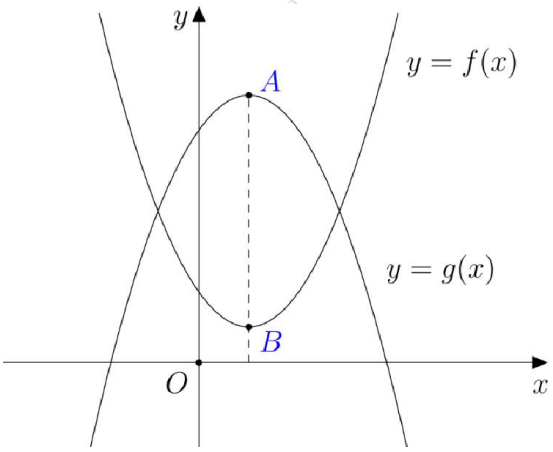
Trường hợp 2: $x^2-2(m+1)x+m^2-1=0$ có hai nghiệm phân biệt, có một nghiệm dương $x\neq 1$, có một nghiệm âm

Điều kiện tương đương $\left\{\begin{array}{l} m^2-1<0 \\ 1^2-2(m+1).1+m^2-1\neq 0 \end{array}\right.\left\{\begin{array}{l} m\in(-1;1) \\ m\neq 1\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=0$

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn.

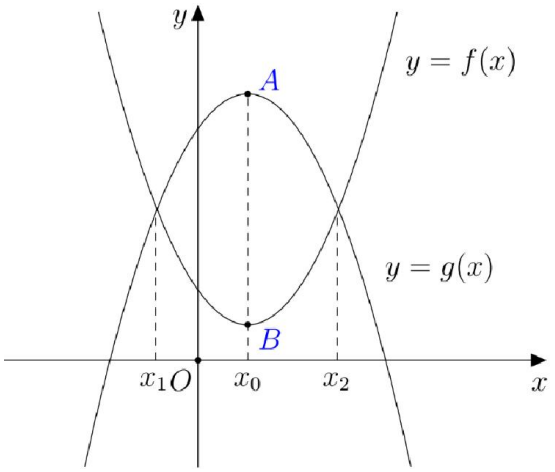
Câu 11. **(Sở GD Quảng Nam - 2019)** Cho hai hàm đa thức $y=f(x)$, $y=g(x)$ có đồ thị là hai đường cong ở hình vẽ. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đúng một điểm cực trị là A, đồ thị hàm số $y=g(x)$ có đúng một điểm cực trị là B và $AB=\dfrac{7}{4}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-5;5)$ để hàm số $y=\left|\left|f(x)-g(x)\right|+m\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?



A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B



Đặt $h(x)=f(x)-g(x)$, ta có: $h'(x)=f'(x)-g'(x)$; $h'(x)=0\Leftrightarrow x=x_0$;

$h(x)=0\Leftrightarrow x=x_1$ hoặc $x=x_2$ $(x_1<x_0<x_2)$;

$h(x_0)=f(x_0)-g(x_0)=-\dfrac{7}{4}$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=h(x)$ là:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{7}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=k(x)=\left|f(x)-g(x)\right|$ là:

x	$-\infty$		x_1		x_0		x_2		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
$k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{7}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó, hàm số $y=k(x)+m$ cũng có ba điểm cực trị.

Vì số điểm cực trị hàm số $y=\left|k(x)+m\right|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $y=k(x)+m$ và số nghiệm đơn và số nghiệm bội lẻ của phương trình $k(x)+m=0$, mà hàm số $y=k(x)+m$ cũng có ba điểm cực trị nên hàm số $y=\left\|f(x)-g(x)\right|+m\Big|$ có đúng năm điểm cực trị khi phương trình $k(x)+m=0$ có đúng hai nghiệm đơn (hoặc bội lẻ).

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=k(x)$, phương trình $k(x)+m=0$ có đúng hai nghiệm đơn (hoặc bội lẻ) khi và chỉ khi $-m\ge\dfrac{7}{4}\Leftrightarrow m\le-\dfrac{7}{4}$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$, $m\le-\dfrac{7}{4}$ và $m\in(-5;5)$ nên $m\in\{-4;-3;-2\}$.

Câu 12. **(Sở GD Bạc Liêu - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số

m để hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị là $\left(\frac{a}{b};c\right)$, (với a, b, c là các số nguyên, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của biểu thức $M=a^2+b^2+c^2$ là

A. $M=40$. **B.** $M=11$. **C.** $M=31$. **D.** $M=45$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=f\left(x\right)=x^3-\left(2m-1\right)x^2+\left(2-m\right)x+2$ có đạo hàm là

$y'=f'\left(x\right)=3x^2-2\left(2m-1\right)x+\left(2-m\right)$

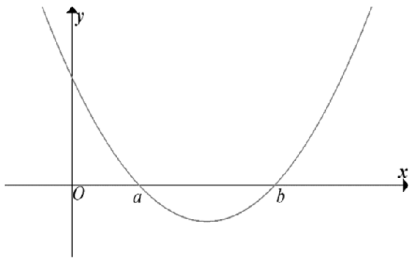
- Để hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị thì hàm số $y=f\left(x\right)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 dương.

Tương đương với phương trình $f'\left(x\right)=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=\left(2m-1\right)^2-3\left(2-m\right)>0\\ S=\frac{2\left(2m-1\right)}{3}>0\\ P=\frac{2-m}{3}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m^2-m-5>0\\ m>\frac{1}{2}\\ m<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<-1\vee m>\frac{5}{4}\\ m>\frac{1}{2}\\ m<2\end{cases}\Leftrightarrow\frac{5}{4}<m<2.$$

Suy ra $\begin{cases}a=5\\ b=4\\ c=2\end{cases}\Rightarrow M=a^2+b^2+c^2=45$.

Câu 13. **(Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - Lần 3 - 2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tập hợp S tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g\left(x\right)=\left|2f^2\left(x\right)+3f\left(x\right)+m\right|$ có đúng 7 điểm cực trị, biết phương trình $f'(x)=0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt, $f\left(a\right)=1, f\left(b\right)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=-\infty$.

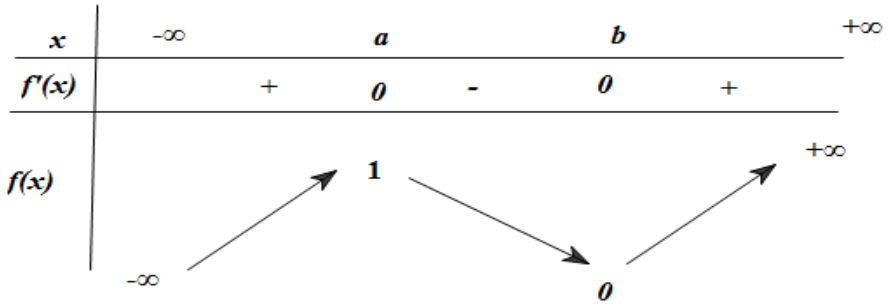


A. $S=\left(-5;0\right)$. **B.** $S=\left(-8;0\right)$. **C.** $S=\left(-8;\frac{1}{6}\right)$. **D.** $S=\left(-5;\frac{9}{8}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Từ gt ta có BBT của $f(x)$



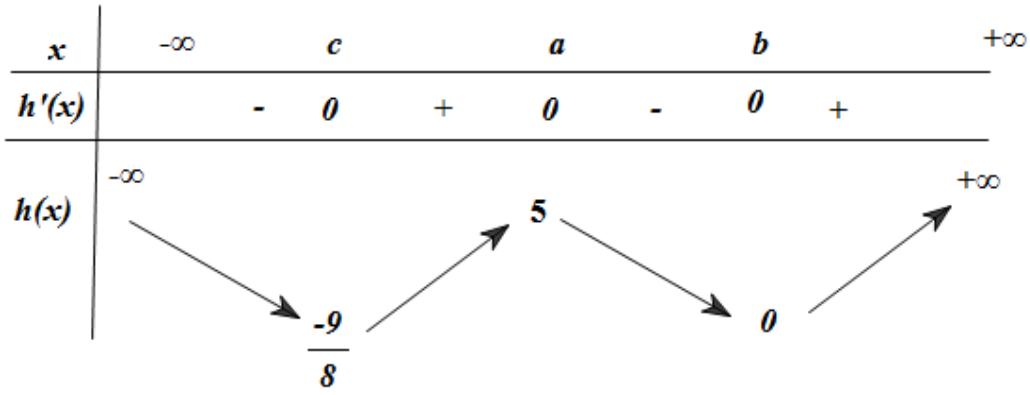
Xét hàm số $h(x)=2f^2(x)+3f(x)$, có $h'(x)=4f(x).f'(x)+3f'(x)$

$h'(x)=0\Leftrightarrow 4f(x).f'(x)+3f'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=0\vee 4f(x)+3=0$

$\Leftrightarrow x=a\vee x=b\vee f(x)=-3/4$

$f(x)=-3/4\Leftrightarrow x=c<a$ (theo BBT)

BBT của $h(x)$



Để hàm số $g(x)=|2f^2(x)+3f(x)+m|=|h(x)+m|$ có đúng 7 điểm cực trị thì phương trình $h(x)=-m$ phải có 4 nghiệm phân biệt, hay $0<-m<5\Leftrightarrow -5<m<0$

Câu 14. **(THPT Thanh Chương - Nghệ An - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số

$y=\frac{1}{3}|x^3|-(3-m)x^2+(3m+7)|x|-1$ có 5 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Ta có $y=\begin{cases}\frac{x^3}{3}-(3-m)x^2+(3m+7)x-1, khi & x\ge 0\\ -\frac{x^3}{3}-(3-m)x^2-(3m+7)x-1, khi & x<0\end{cases}$

$\Rightarrow y'=\begin{cases}x^2-2(3-m)x+(3m+7), khi & x>0\\ -x^2-2(3-m)x-(3m+7), khi & x<0\end{cases}$.

Dễ thấy tại $x=0$ đạo hàm không tồn tại $\Rightarrow x=0$ là một điểm cực trị

Để hàm số có 5 điểm cực trị thì phương trình $x^2-2(3-m)x+(3m+7)=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ P>0\\ S>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>\frac{9+\sqrt{73}}{2}\\ m<\frac{9-\sqrt{73}}{2}\end{array}\right.\\ m<3\\ m>-\frac{7}{3}\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{7}{3}<m<\frac{9-\sqrt{73}}{2}$.

Do m nguyên nên $m\in\{-2;-1;0\}$.

---------- HẾT ----------

Chuyên đề 5 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH (MỨC 5-6 ĐIỂM)

Dạng 1. Xác định giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số thông qua đồ thị, bảng biến thiên

- Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$

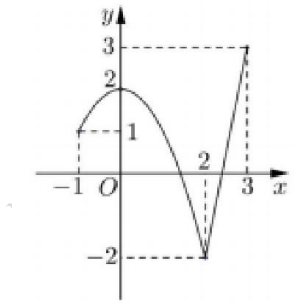
Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f'(x_i)=0, x_i \in [a;b]$. Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ là $M=\max\{f(a),f(b),f(x_i)\}$

- Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f'(x_i)=0, x_i \in [a;b]$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ là $m=Min\{f(a),f(b),f(x_i)\}$

- Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\underset{[a;b]}{Max}\, f(x)=f(b); \underset{[a;b]}{Min}\, f(x)=f(a)$
- Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\underset{[a;b]}{Max}\, f(x)=f(a); \underset{[a;b]}{Min}\, f(x)=f(b)$

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M-m$ bằng



A. 1 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 0

Câu 2. **(Đề Minh Họa 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

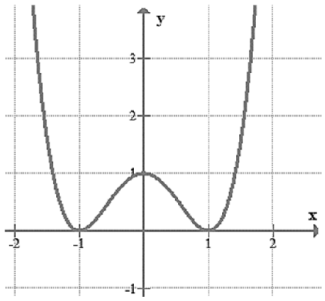
A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

D. Hàm số có đúng một cực trị.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;1]$. Giá trị của $M-m$ bằng

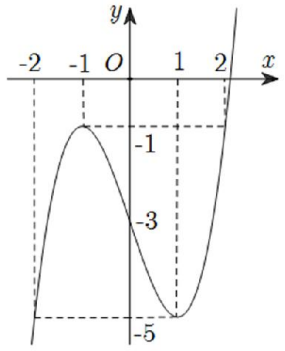
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như sau. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$. Tính $M+m$.

x	-3		-1		0		1		2
$f(x)$	-2	↗	3	↘	0	↗	2	↘	1

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 5. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$.



A. $m=-5;M=-1$. **B.** $m=-2;M=2$. **C.** $m=-1;M=0$. **D.** $m=-5;M=0$.

Câu 6. **(THPT Ba Đình 2019)** Xét hàm số $y=f(x)$ với $x\in[-1;5]$ có bảng biến thiên như sau:

x	-1		0		2		5
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	3	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng

A. Hàm số đã cho không tồn tại GTLN trên đoạn $[-1;5]$

B. Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x=-1$ và $x=2$ trên đoạn $[-1;5]$

C. Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x=-1$ và đạt GTLN tại $x=5$ trên đoạn $[-1;5]$

D. Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x=0$ trên đoạn $[-1;5]$

Câu 7. **(Chuyên Lê Thánh Tông 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$+$	‖	$-$	
y	$+\infty$	↘	-3	↗		↗	2	↘	-4

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào ***sai***?

A. Hàm số có hai điểm cực trị.

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3.

C. Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận.

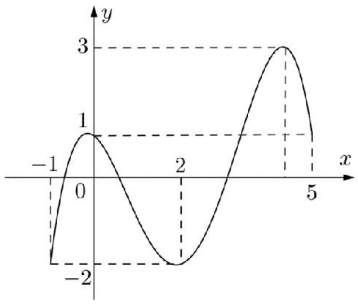
D. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1),(2;+\infty)$.

Câu 8. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1;3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây ***đúng***?

x	-1		0		2		3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	↗	5	↘	1	↗	4

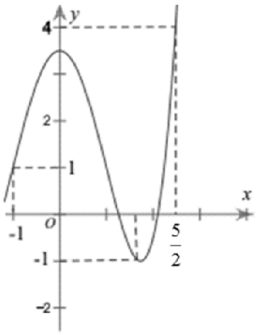
A. $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(0)$. **B.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(3)$. **C.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(2)$. **D.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(-1)$.

Câu 9. **(VTED 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;5]$ và có đồ thị trên đoạn $[-1;5]$ như hình vẽ bên dưới. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;5]$ bằng



A. -1 **B.** 4 **C.** 1 **D.** 2

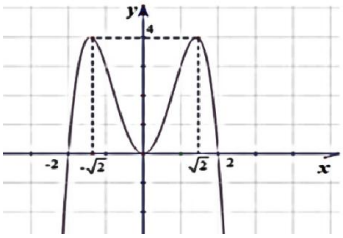
Câu 10. **(THPT Yên Mỹ Hưng Yên 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1,\dfrac{5}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1,\dfrac{5}{2}\right]$ là:

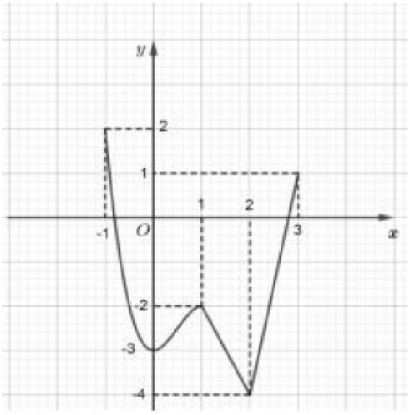
A. $M=4,m=1$ **B.** $M=4,m=-1$ **C.** $M=\dfrac{7}{2},m=-1$ **D.** $M=\dfrac{7}{2},m=1$

Câu 11. **(THPT Nghĩa Hưng Nam Định 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;2]$ là:



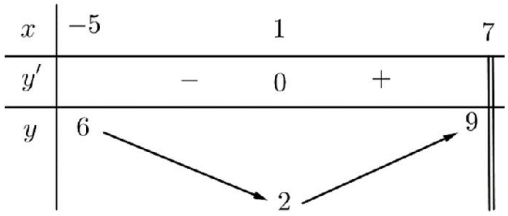
A. $\underset{[0;2]}{Max}\, f(x)=2$. **B.** $\underset{[0;2]}{Max}\, f(x)=\sqrt{2}$. **C.** $\underset{[0;2]}{Max}\, f(x)=4$. **D.** $\underset{[0;2]}{Max}\, f(x)=0$.

Câu 12. **(Sở Bắc Giang 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M+m$ là



A. 2 **B.** -6 **C.** -5 **D.** -2

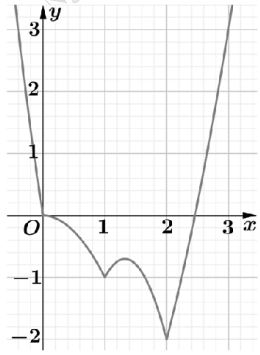
Câu 13. **(Sở Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên trên $[-5;7)$ như sau



Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

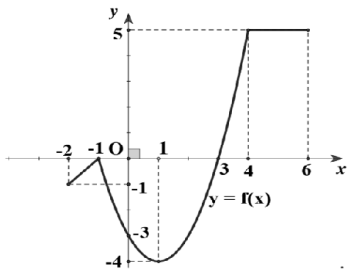
A. $\min\limits_{[-5;7)} f(x)=6$. **B.** $\min\limits_{[-5;7)} f(x)=2$. **C.** $\max\limits_{[-5;7)} f(x)=9$. **D.** $\max\limits_{[-5;7)} f(x)=6$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;3]$. Giá trị của $M+m$ bằng?



A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

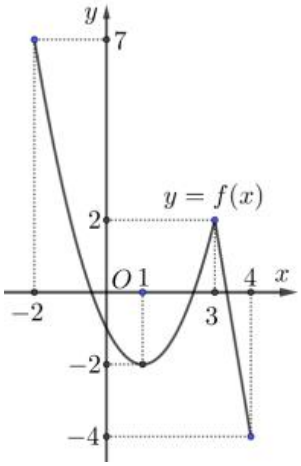
Câu 15. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;6]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;6]$. Giá trị của $M-m$ bằng

A. 9. **B.** -8. **C.** -9. **D.** 8.

Câu 16. **(VTED 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đồ thị trên đoạn $[-2;4]$ như hình vẽ bên. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;4]$ bằng



A. 5 **B.** 3 **C.** 0 **D.** −2

Câu 17. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $\max\limits_{(-1;1]} f(x)=f(0)$ **B.** $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x)=f(1)$ **C.** $\min\limits_{(-\infty;-1)} f(x)=f(-1)$ **D.** $\min\limits_{(-1;+\infty)} f(x)=f(0)$

Dạng 2. Xác định giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn

□ ***Bước 1***: Hàm số đã cho $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Tìm các điểm $x_1,x_2,...,x_n$ trên khoảng $(a;b)$, tại đó $f'(x)=0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

□ ***Bước 2***: Tính $f(a),f(x_1),f(x_2),...,f(x_n),f(b)$.

□ ***Bước 3***: Khi đó:

$$\max_{[a,b]} f(x)=max\{f(x_1),f(x_2),...,f(x_n),f(a),f(b)\}.$$

$$\min_{[a,b]} f(x)=min\{f(x_1),f(x_2),...,f(x_n),f(a),f(b)\}.$$

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=-x^4+12x^2+1$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng:

A. 1. **B.** 37. **C.** 33. **D.** 12.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-10x^2+2$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. 2. **B.** −23. **C.** −22. **D.** −7.

Câu 3. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-24x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. $32\sqrt{2}$. **B.** −40. **C.** $-32\sqrt{2}$. **D.** −45.

Câu 4. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-21x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. −36. **B.** $-14\sqrt{7}$. **C.** $14\sqrt{7}$. **D.** −34.

Câu 5. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-30x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. $20\sqrt{10}$. **B.** −63. **C.** $-20\sqrt{10}$. **D.** −52.

Câu 6. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-33x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. -72. **B.** $-22\sqrt{11}$. **C.** -58. **D.** $22\sqrt{11}$.

Câu 7. **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-10x^2-4$ trên $[0;9]$ bằng

A. -28. **B.** -4. **C.** -13. **D.** -29.

Câu 8. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-12x^2-4$ trên đoạn $[0;9]$ bằng

A. -39. **B.** -40. **C.** -36. **D.** -4.

Câu 9. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-10x^2-2$ trên đoạn $[0;9]$ bằng

A. -2. **B.** -11. **C.** -26. **D.** -27.

Câu 10. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-12x^2-1$ trên đoạn $[0;9]$ bằng

A. -28. **B.** -1. **C.** -36. **D.** -37.

Câu 11. **(Mã 102 - 2019)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x+2$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. 0. **B.** -16. **C.** 20. **D.** 4.

Câu 12. **(Mã 110 2017)** Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=x^4-2x^2+3$ trên đoạn $\left[0;\sqrt{3}\right]$.

A. $M=6$ **B.** $M=1$ **C.** $M=9$ **D.** $M=8\sqrt{3}$

Câu 13. **(Đề Minh Họa 2017)** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.

A. $\min\limits_{[2;4]} y=-3$ **B.** $\min\limits_{[2;4]} y=\dfrac{19}{3}$ **C.** $\min\limits_{[2;4]} y=6$ **D.** $\min\limits_{[2;4]} y=-2$

Câu 14. **(Mã 103 - 2019)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. -2. **B.** 18. **C.** 2. **D.** -18.

Câu 15. **(Mã 104 2018)** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^4-x^2+13$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. 85 **B.** $\dfrac{51}{4}$ **C.** 13 **D.** 25

Câu 16. **(Mã 104 2017)** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^2+\dfrac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

A. $m=5$ **B.** $m=3$ **C.** $m=\dfrac{17}{4}$ **D.** $m=10$

Câu 17. **(Chuyên Bắc Ninh 2018)** Tìm tập giá trị của hàm số $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{9-x}$

A. $T=[1;\ 9]$. **B.** $T=\left[2\sqrt{2};\ 4\right]$. **C.** $T=(1;\ 9)$. **D.** $T=\left[0;\ 2\sqrt{2}\right]$.

Câu 18. **(Mã 123 2017)** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^3-7x^2+11x-2$ trên đoạn $[0\ ;2]$.

A. $m=3$ **B.** $m=0$ **C.** $m=-2$ **D.** $m=11$

Câu 19. **(Mã 101 2018)** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^4-4x^2+9$ trên đoạn $[-2;3]$ bằng

A. 201 **B.** 2 **C.** 9 **D.** 54

Câu 20. **(Đề Tham Khảo 2018)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^4-4x^2+5$ trêm đoạn $[-2;3]$ bằng

A. 122 **B.** 50 **C.** 5 **D.** 1

Câu 21. **(Mã 105 2017)** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^4-x^2+13$ trên đoạn $[-2;3]$.

A. $m=13$ **B.** $m=\dfrac{51}{4}$ **C.** $m=\dfrac{51}{2}$ **D.** $m=\dfrac{49}{4}$

Câu 22. **(Mã 104 2019)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. -18. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 18.

Câu 23. **(Mã 103 2018)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3+3x^2$ trên đoạn $[-4;-1]$ bằng

A. -16 **B.** 0 **C.** 4 **D.** -4

Câu 24. **(Mã 102 2018)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3+2x^2-7x$ trên đoạn $[0;4]$ bằng

A. -259 **B.** 68 **C.** 0 **D.** -4

Câu 25. **(Mã 101 - 2019)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x+2$ trên đoạn $[-3;3]$ là

A. 4. **B.** -16. **C.** 20. **D.** 0.

Câu 26. **(SGD Nam Định)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2+\dfrac{2}{x}$ trên đoạn $[2;3]$ bằng

A. $\dfrac{15}{2}$. **B.** 5. **C.** $\dfrac{29}{3}$. **D.** 3.

Câu 27. **(Sở Quảng Trị 2019)** Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0;2]$

A. $M=\dfrac{1}{3}$. **B.** $M=-\dfrac{1}{3}$. **C.** $M=5$. **D.** $M=-5$

Câu 28. **(Sở Nam Định-2019)** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{4-x^2}$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 29. **(Chuyên Bắc Ninh 2018)** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^2 x-4\sin x-5$.

A. -20. **B.** -8. **C.** -9. **D.** 0.

Câu 30. **(THPT Hoa Lư A 2018)** Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2}x-\sqrt{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$. Tính tổng $S=2m+3M$.

A. $S=-\dfrac{7}{2}$. **B.** $S=-\dfrac{3}{2}$. **C.** -3. **D.** $S=4$.

Câu 31. **(Chuyên ĐHSPHN - 2018)** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\sin x+\cos 2x$ trên $[0;\pi]$ là

A. $\dfrac{9}{8}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 32. **(THPT Hà Huy Tập - 2018)** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=2\cos x-\dfrac{4}{3}\cos^3 x$ trên $[0;\pi]$.

A. $\max\limits_{[0;\pi]} y=\dfrac{2}{3}$. **B.** $\max\limits_{[0;\pi]} y=\dfrac{10}{3}$. **C.** $\max\limits_{[0;\pi]} y=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\max\limits_{[0;\pi]} y=0$.

Câu 33. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{3\sin x+2}{\sin x+1}$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Khi đó giá trị của M^2+m^2 là

A. $\dfrac{31}{2}$. **B.** $\dfrac{11}{2}$. **C.** $\dfrac{41}{4}$. **D.** $\dfrac{61}{4}$.

Câu 34. **(THPT Can Lộc - Hà Tĩnh - 2018)** Cho hàm số $y=\dfrac{\sin x+1}{\sin^2 x+\sin x+1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Chọn mệnh đề **đúng**.

A. $M=m+\dfrac{3}{2}$. **B.** $M=\dfrac{3}{2}m$. **C.** $M=m+1$. **D.** $M=m+\dfrac{2}{3}$.

Dạng 3. Xác định giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng (a;b)

□ *Bước 1:* Tính đạo hàm $f'(x)$.

□ *Bước 2:* Tìm tất cả các nghiệm $x_i \in (a;b)$ của phương trình $f'(x)=0$ và tất cả các điểm $\alpha_i \in (a;b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.

□ *Bước 3.* Tính $A=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $B=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$, $f(x_i)$, $f(\alpha_i)$.

□ *Bước 4.* So sánh các giá trị tính được và kết luận $M=\max\limits_{(a;b)} f(x)$, $m=\min\limits_{(a;b)} f(x)$.

Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì ta kết luận không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2017)** Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3x+\dfrac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $\min\limits_{(0;+\infty)} y=\dfrac{33}{5}$ **B.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=2\sqrt[3]{9}$ **C.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=3\sqrt[3]{9}$ **D.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=7$

Câu 2. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x-1+\dfrac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$. Tìm m?

A. $m=5$. **B.** $m=4$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Câu 3. **(THPT Minh Châu Hưng Yên 2019)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x-5+\dfrac{1}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ bằng bao nhiêu?

A. 0 **B.** -1 **C.** -3 **D.** -2

Câu 4. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\dfrac{4}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Tìm m

A. $m=4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=3$.

Câu 5. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ trên nửa khoảng $[2;+\infty)$ là:

A. 2 **B.** $\dfrac{5}{2}$ **C.** 0 **D.** $\dfrac{7}{2}$

Câu 6. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\dfrac{4}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Tìm m.

A. $m=3$. **B.** $m=4$. **C.** $m=2$. **D.** $m=1$.

Câu 7. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{4-x}+\sqrt{3}$ trên tập xác định của nó là

A. $2+\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 0. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 8. Với giá trị nào của x thì hàm số $y=x^2+\dfrac{1}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Câu 9. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\dfrac{2}{x}-\left(1+\sqrt{2}\right)^2$ trên khoảng $(0;+\infty)$

A. không tồn tại. **B.** -3. **C.** $-1+\sqrt{2}$. **D.** 0.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ với x thuộc $D=(-\infty;-1]\cup\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\max\limits_D f(x)=0;\min\limits_D f(x)=-\sqrt{5}$. **B.** $\max\limits_D f(x)=0$; không tồn tại $\min\limits_D f(x)$.

C. $\max\limits_D f(x)=0;\min\limits_D f(x)=-1$. **D.** $\min\limits_D f(x)=0$; không tồn tại $\max\limits_D f(x)$.

Câu 11. **(Cụm liên trường Hải Phòng 2019)** Mệnh đề nào sau đây là đúng về hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+5}}$ trên tập xác định của nó.

A. Hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.
B. Hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất.
C. Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.
D. Hàm số có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

---------- **HẾT** ----------

Chuyên đề 5 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ 7-8 ĐIỂM

Dạng. Định m để GTLN-GTNN của hàm số thỏa mãn điều kiện cho trước

Bước 1. Tìm nghiệm $x_i (i=1,2,...)$ của $y'=0$ thuộc $[a;b]$

Bước 2. Tính các giá trị $f(x_i); f(a); f(b)$ theo tham số

Bước 3. So sánh các giá trị, suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Bước 4. Biện luận m theo giả thuyết đề để kết luận

Lưu ý:

- Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\underset{[a;b]}{Max} f(x)=f(b); \underset{[a;b]}{Min} f(x)=f(a)$
- Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\underset{[a;b]}{Max} f(x)=f(a); \underset{[a;b]}{Min} f(x)=f(b)$

Câu 1. **(Mã 123 2017)** Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y=3$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $m>4$ **B.** $3<m\le 4$ **C.** $m<-1$ **D.** $1\le m<3$

Câu 2. **(Mã 110 2017)** Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thoả mãn $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=\dfrac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m>4$ **B.** $2<m\le 4$ **C.** $m\le 0$ **D.** $0<m\le 2$

Câu 3. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m>10$. **B.** $8<m<10$. **C.** $0<m<4$. **D.** $4<m<8$.

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m^2-2}{x-m}$ trên đoạn $[0;4]$ bằng -1.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 5. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-m^2}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[-3;-2]} y=\dfrac{1}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $3<m\le 4$. **B.** $-2<m\le 3$. **C.** $m>4$. **D.** $m\le -2$.

Câu 6. Tìm giá trị dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{m^2x-1}{x+2}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 1.

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=\sqrt{3}$. **C.** $m=4$. **D.** $m=2$.

Câu 7. Cho hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x+8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng -3. Giá trị m_0 thuộc khoảng nào trong các khoảng cho dưới đây?

A. $(2;5)$. **B.** $(1;4)$. **C.** $(6;9)$. **D.** $(20;25)$.

Câu 8. **(THPT Hai Bà Trưng - Huế 2019)** Tìm giá trị của tham số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2x+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;4]$ bằng 3.

A. $m=3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=7$. **D.** $m=5$

Câu 9. **(Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa 2019)** Tìm các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -2.

A. $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-2 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Câu 10. **(THPT Lê Văn Thịnh Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[0;1]} y=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1\le m<3$ **B.** $m>6$ **C.** $m<1$ **D.** $3<m\le 6$

Câu 11. **(Chuyên KHTN 2019)** Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ trên $[1;2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m>10$. **B.** $8<m<10$. **C.** $0<m<4$. **D.** $4<m<8$.

Câu 12. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Gọi A,B lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x+m^2+m}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A+B=\dfrac{13}{2}$.

A. $m=1;m=-2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=\pm 2$. **D.** $m=-1;m=2$.

Câu 13. **(Sở Hưng Yên)** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-m^2}{x+8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng -3. Giá trị m_0 thuộc khoảng nào trong các khoảng cho dưới đây?

A. $(20;25)$. **B.** $(5;6)$. **C.** $(6;9)$. **D.** $(2;5)$.

Câu 14. **(Chuyên - Vĩnh Phúc 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0.

A. $m=2$. **B.** $m=6$. **C.** $m=0$. **D.** $m=4$.

Câu 15. **(Sở Quảng Trị 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng $\sqrt{2}$

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=2+\sqrt{2}$. **C.** $m=4+\sqrt{2}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=2+\sqrt{2} \\ m=4+\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Câu 16. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Có một giá trị m_0 của tham số m để hàm số $y=x^3+\left(m^2+1\right)x+m+1$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[0;1]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $2018m_0-m_0^2\ge 0$. **B.** $2m_0-1<0$. **C.** $6m_0-m_0^2<0$. **D.** $2m_0+1<0$.

Câu 17. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Nếu hàm số $y=x+m+\sqrt{1-x^2}$ có giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{2}$ thì giá trị của m là

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $-\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 18. **(THPT Ngô Gia Tự Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $y=2x^3-3x^2-m$. Trên $[-1;1]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất là -1. Tính m?

A. $m=-6$. **B.** $m=-3$. **C.** $m=-4$. **D.** $m=-5$.

Câu 19. Biết S là tập giá trị của m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^4-m^2x^3-2x^2-m$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -16. Tính tích các phần tử của S.

A. 2. **B.** -2. **C.** -15. **D.** -17.

Câu 20. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ tại một điểm $x_0\in(0;2)$.

A. $0<m<1$ **B.** $m>1$ **C.** $m>2$ **D.** $-1<m<1$

Câu 21. **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{1-m\sin x}{\cos x+2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;10]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số nhỏ hơn -2?

A. 1. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 22. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=ax^3+cx+d,\ a\neq 0$ có $\min\limits_{x\in(-\infty;0)} f(x)=f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

A. $d-11a$. **B.** $d-16a$. **C.** $d+2a$. **D.** $d+8a$.

Câu 23. **(THPT Nghĩa Hưng Nam Định 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+m}{x^2+x+1}$ có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$ nhỏ hơn hoặc bằng 1.

A. $m\le 1$. **B.** $m\ge 1$. **C.** $m\ge -1$. **D.** $m\le -1$.

Câu 24. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x^3+x^2-m}{x+1}$ trên $[0;2]$ bằng 5. Tham số m nhận giá trị là

A. -5. **B.** 1. **C.** -3. **D.** -8.

Câu 25. Cho hàm số $y=\left(x^3-3x+m\right)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1 là

A. 1. **B.** -4. **C.** 0. **D.** 4.

Câu 26. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2018)** Tìm tất cả các giá trị của $m>0$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x+1$ trên đoạn $[m+1;m+2]$ luôn bé hơn 3.

A. $m\in(0;2)$. **B.** $m\in(0;1)$. **C.** $m\in(1;+\infty)$. **D.** $m\in(0;+\infty)$.

Câu 27. **(Chuyên Đh Vinh 2018)** Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=mx+\dfrac{36}{x+1}$ trên $[0;3]$ bằng 20. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0<m\le 2$. **B.** $4<m\le 8$. **C.** $2<m\le 4$. **D.** $m>8$.

Câu 28. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x+2020$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 3.

Câu 29. **(Sở Bình Phước - 2020)** Cho hàm số $f(x)=m\sqrt{x-1}$ (m là tham số thực khác 0). Gọi m_1,m_2 là hai giá trị của m thoả mãn $\min\limits_{[2;5]} f(x)+\max\limits_{[2;5]} f(x)=m^2-10$. Giá trị của m_1+m_2 bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 2.

Câu 30. **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020)** Cho hàm số $y=\dfrac{m\sin x+1}{\cos x+2}$ có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5;5]$

để giá trị nhỏ nhất của y nhỏ hơn -1.

A. 4. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 31. **(Lê Lai - Thanh Hóa - 2020)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{34}{\sqrt{\left(x^3-3x+2m\right)^2+1}}$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 8. **B.** -8. **C.** -6. **D.** -1.

Câu 32. **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho hàm số $y=\left(x^3-3x+m+1\right)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[-1;1\right]$ bằng 1 là

A. -2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 0.

Câu 33. **(Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)=m^2\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)+4\sqrt{4-x^2}+m+1$. Tính tổng tất cả các giá trị của m để hàm số $y=f\left(x\right)$ có giá trị nhỏ nhất bằng 4.

A. $-\dfrac{7}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 34. **(Chuyên Nguyễn Trãi - Hải Dương - Lần 2 - 2020)** Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2x-m}{x+1}$ với $m\neq -2$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\max\limits_{[1;3]} f\left(x\right)=\max\left\{\dfrac{2-m}{2};\dfrac{6-m}{4}\right\}$.

B. $\max\limits_{[1;3]} f\left(x\right)=\dfrac{6-m}{4}$ khi $m<-2$.

C. $\min\limits_{[1;3]} f\left(x\right)=\min\left\{\dfrac{2-m}{2};\dfrac{6-m}{4}\right\}$.

D. $\min\limits_{[1;3]} f\left(x\right)=\dfrac{2-m}{2}$ khi $m>-2$.

Câu 35. **(Chuyên Sư Phạm Hà Nội - 2020)** Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $\left[-20\,;\,20\right]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x+m+6}{x-m}$ trên đoạn $\left[1\,;\,3\right]$ là số dương?

A. 9. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 10.

---------- HẾT ----------

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 5 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI – MỨC ĐỘ 9-10 ĐIỂM

Dạng 1. Định m để GTLN-GTNN của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối thỏa mãn điều kiện cho trước

Dạng 1: Tìm m để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y=\left|f\left(x\right)+m\right|=a\ \ (a>0)$.

Phương pháp:

Cách 1: Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f\left(x\right)=K;\qquad \min\limits_{[\alpha;\beta]} f\left(x\right)=k\ \left(K>k\right)$.

Kiểm tra $\max\left\{\left|m+K\right|,\left|m+k\right|\right\}\ge\dfrac{\left|m+K\right|+\left|m+k\right|}{2}\ge\dfrac{\left|m+K-m-k\right|}{2}=\dfrac{\left|K-k\right|}{2}$.

TH1: $\dfrac{\left|K-k\right|}{2}\le a$. Để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y=a\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m+k=-a\\m+K=a\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-a-k\\m=a-K\end{array}\right.\Rightarrow m\in\left\{-a-k;a-K\right\}$.

TH2: $\dfrac{\left|K-k\right|}{2}>a\ \Rightarrow m\in\varnothing$.

Cách 2: Xét trường hợp

TH1: $Max=\left|m+K\right|\Leftrightarrow\begin{cases}\left|m+K\right|=a\\\left|m+K\right|\ge\left|m+k\right|\end{cases}$

TH2: $Max=\left|m+k\right|\Leftrightarrow\begin{cases}\left|m+k\right|=a\\\left|m+k\right|\ge\left|m+K\right|\end{cases}$

Dạng 2: Tìm m để $\min\limits_{[\alpha;\beta]} y=\left|f\left(x\right)+m\right|=a\ \ (a>0)$.

Phương pháp:

Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f\left(x\right)=K;\qquad \min\limits_{[\alpha;\beta]} f\left(x\right)=k\ \left(K>k\right)$.

Để $\min\limits_{[\alpha;\beta]} y=a\Leftrightarrow\begin{cases}m+k=a\\m+k>0\end{cases}\vee\begin{cases}m+K=-a\\m+K<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=a-k\\m>-k\end{cases}\vee\begin{cases}m=-a-K\\m<-K\end{cases}$. Vậy $m\in S_1\cup S_2$.

Dạng 3: Tìm m để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y=\left|f\left(x\right)+m\right|$ không vượt quá giá trị M cho trước.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f\left(x\right)=K;\qquad \min\limits_{[\alpha;\beta]} f\left(x\right)=k\ \left(K>k\right)$.

Để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y\le M\Rightarrow\begin{cases}m+k\ge-M\\m+K\le M\end{cases}\Leftrightarrow-M-k\le m\le M-K.$

Dạng 4: Tìm m để $\min\limits_{[\alpha;\beta]} y=\left|f\left(x\right)+m\right|$ không vượt quá giá trị a cho trước.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f\left(x\right)=K;\qquad \min\limits_{[\alpha;\beta]} f\left(x\right)=k\ \left(K>k\right)$.

Để

$\min\limits_{[\alpha;\beta]} y\le a\Leftrightarrow\begin{cases}m+k\le a\\m+k\ge0\end{cases}\vee\begin{cases}m+K\ge-a\\m+K\le0\end{cases}\vee\left(m+K\right)\left(m+k\right)<0\Leftrightarrow\begin{cases}m\le a-k\\m\ge-k\end{cases}\vee\begin{cases}m\ge-a-K\\m\le-K\end{cases}\vee-K<m<-k.$

Dạng 5: Tìm m để $\max\limits_{[a;b]} y=\left|f\left(x\right)+m\right|$ đạt min.

Phương pháp:

Trước tiên tìm $\max\limits_{[a;b]} f(x)=K;\quad \min\limits_{[a;b]} f(x)=k\ (K>k)$.

Đề hỏi tìm $m\Rightarrow m=-\dfrac{K+k}{2}$. Đề hỏi tìm min của $\max\limits_{[a;b]} y\Rightarrow$ giá trị này là $\dfrac{K-k}{2}$.

Dạng 6: Tìm m để $\min\limits_{[a;b]} y=\left|f(x)+m\right|$ đạt min.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[a;b]} f(x)=K;\quad \min\limits_{[a;b]} f(x)=k\ (K>k)$.

Đề hỏi tìm $m\Rightarrow (m+K)(m+k)\le 0\Leftrightarrow -K\le m\le -k$. Đề hỏi tìm min của $\min\limits_{[a;b]} y\Rightarrow$ giá trị này là 0.

Dạng 7: Cho hàm số $y=\left|f(x)+m\right|$.Tìm m để $\max\limits_{[a;b]} y\le h.\min\limits_{[a;b]} y\,(h>0)$ hoặc $Min+\max=$

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[a;b]} f(x)=K;\quad \min\limits_{[a;b]} f(x)=k\ (K>k)$.

TH1: $\left|K+m\right|\le h\left|k+m\right|\xrightarrow[K+m\ \text{cung dau}\ k+m]{|K+m|\ge|k+m|} m\in S_1$.

TH2: $\left|k+m\right|\le h\left|K+m\right|\xrightarrow[K+m\ \text{cung dau}\ k+m]{|k+m|\ge|K+m|} m\in S_2$.

Vậy $m\in S_1\cup S_2$.

Dạng 8: Cho hàm số $y=\left|f(x)+m\right|$.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[a;b]} f(x)=K;\quad \min\limits_{[a;b]} f(x)=k\ (K>k)$.

BT1: Tìm m để $\min\limits_{[a;b]} y+\max\limits_{[a;b]} y=\alpha\Leftrightarrow |m+K|+|m+k|=\alpha$.

BT2: Tìm m để $\min\limits_{[a;b]} y*\max\limits_{[a;b]} y=\beta\Leftrightarrow |m+K|*|m+k|=\beta$.

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2018)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 0 **B.** 6 **C.** 1 **D.** 2

Câu 2. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của S là:

A. -16. **B.** 16. **C.** -12. **D.** -2.

Câu 3. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[0;1]}\left|f(x)\right|+\min\limits_{[0;1]}\left|f(x)\right|=2$. Số phần tử của S là

A. 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 4. **(THPT Đông Sơn 1 - Thanh Hóa 2019)** Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x+2m-1\right|$ trên đoạn $[0;2]$ là nhỏ nhất. Giá trị của m thuộc khoảng nào?

A. $\left(-\dfrac{3}{2};-1\right)$. **B.** $\left(\dfrac{2}{3};2\right)$. **C.** $[-1;0]$. **D.** $(0;1)$.

Câu 5. **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 5.

A. -1. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 1.

Câu 6. **(THPT Nguyễn Huệ 2018)** Cho hàm số $y=\left|x^2+2x+a-4\right|$ (a là tham số). Tìm a để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;1]$ đạt giá trị nhỏ nhất

A. $a=1$. **B.** $a=3$. **C.** $a=2$. **D.** $a=5$.

Câu 7. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{x^2+mx+m}{x+1}\right|$ trên $[1;2]$ bằng 2. Số phần tử của tập S

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 8. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Xét hàm số $f(x)=\left|x^2+ax+b\right|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a+2b$.

A. 2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 3.

Câu 9. Cho hàm số $y=\left|x^3+x^2+\left(m^2+1\right)x+27\right|$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3;-1]$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. 26. **B.** 18. **C.** 28. **D.** 16.

Câu 10. **(Sở Quảng Nam - 2018)** Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2+2x+m-4\right|$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng 4?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 11. **(Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai - Sóc Trăng - 2018)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x^2-9x+m\right|$ trên đoạn $[-2;4]$ bằng 16. Số phần tử của S là

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 12. **(Chuyên Hạ Long 2018)** Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{19}{2}x^2+30x+m-20\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

A. 210. **B.** -195. **C.** 105. **D.** 300.

Câu 13. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\sin^2 x-2\sin x+m\right|$ bằng 1. Số phần tử của S là

A. 0 **B.** 1 **B.** 4 **D.** 3

Câu 14. **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Cho hàm số $y=\left|\dfrac{x^4+ax+a}{x+1}\right|$, với a là tham số thực. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[1;2]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để $M\geq 2m$?

A. 10. **B.** 14. **C.** 5. **D.** 20.

Câu 15. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 30. Tổng giá trị các phần tử của tập hợp S bằng bao nhiêu?

A. 120. **B.** 210. **C.** 108. **D.** 136.

Câu 16. **(Chuyên Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2020)** Cho hàm số $f(x)=\left|3e^{4x}-4e^{3x}-24e^{2x}+48e^{x}+m\right|$. Gọi A, B lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

của hàm số đã cho trên $[0;\ln 2]$.Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-23;10)$ thỏa mãn $A \le 3B$. Tổng các phần tử của tập S bằng

A. -33. **B.** 0. **C.** -111. **D.** -74.

Câu 17. **(Chuyên Bến Tre - 2020)** Cho hàm số $y=\left|x^4-2x^3+x^2+a\right|$. Có bao nhiêu số thực a để $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=10$?

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 18. **(Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020)** Cho hàm số $f(x)=\left|x^3-3x^2+m\right|$. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ không lớn hơn 2020?

A. 4045. **B.** 4046. **C.** 4044. **D.** 4042.

Câu 19. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Xét hàm số $f(x)=\left|\dfrac{mx-2\sqrt{x+4}}{2x+4}\right|$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu số nguyên m thỏa mãn điều kiện $0<\min\limits_{[-1;1]} f(x)<1$?

A. 4. **B.** 8. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 20. **(Chuyên Sơn La - 2020)** Gọi S là tập hợp những giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^3-12x+m\right|$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 12.Tổng tất cả các phần tử của tập S bằng

A. 25. **B.** 4. **C.** 15. **D.** 21.

Câu 21. **(Chuyên Thái Nguyên - 2020)** Gọi S_0 là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m\right|$ trên đoạn $[2;4]$ không vượt quá 30. Số phần tử của S là

A. 50. **B.** 49. **C.** 66. **D.** 73.

Câu 22. **(Đại Học Hà Tĩnh - 2020)** Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của ham số $f(x)=\left|e^{2x}-4e^x+m\right|$ trên đoạn $[0;\ln 4]$ bằng 6?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 23. **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020)** Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{1}{3}x^3-9x+m+10\right|$ trên đoạn $[0;3]$ không vượt quá 12. Tổng giá trị các phần tử của S bằng bao nhiêu?

A. -7. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 12.

Câu 24. **(Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 30. Tổng tất cả các giá trị của S là

A. 180. **B.** 136. **C.** 120. **D.** 210.

Câu 25. **(Liên trường Nghệ An - 2020)** Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)=\left|2x^3-15x+m-5\right|+9x$ trên $[0;3]$ bằng 60. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số thực m.

A. 48. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 62.

Câu 26. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 2. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 27. **(Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Cho hàm số $f(x)=\left|x^4-2x^3+x^2+m\right|$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\min\limits_{[-1;2]} f(x)+\max\limits_{[-1;2]} f(x)=10$. Số phần tử của S là?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 1.

Câu 28. **(Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x)=\left|\dfrac{2mx-2\sqrt{4x+8}}{x+2}\right|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ là a thỏa mãn $0<a<1$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 29. **(Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020)** Cho hàm số $y=\left|x^4-2x^2+3m\right|$ với m là tham số. Biết rằng có đúng hai giá trị m_1, m_2 của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[-1;2]$ bằng 2021. Tính giá trị $\left|m_1-m_2\right|$.

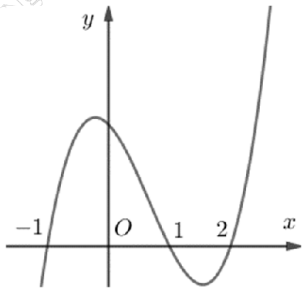
A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{4052}{3}$. **C.** $\dfrac{8}{3}$. **D.** $\dfrac{4051}{3}$.

Câu 30. **(Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+m+1$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ sao cho $\max\limits_{[1;4]}\left|f(x)\right|\le 3\min\limits_{[1;4]}\left|f(x)\right|$. Số phần tử của S là

A. 4003. **B.** 4002. **C.** 4004. **D.** 4001.

Dạng 2. Giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất hàm ẩn, hàm hợp

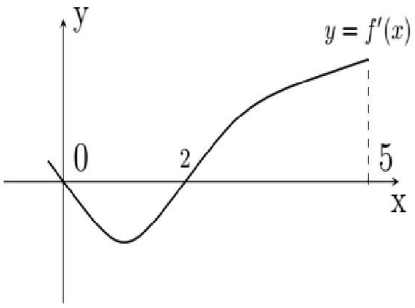
Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ là

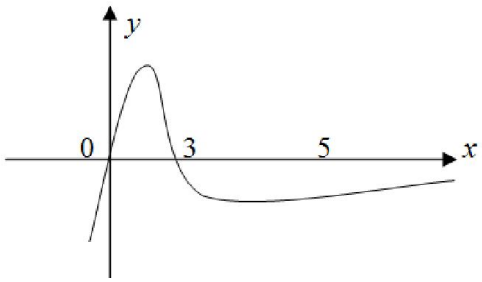
A. $f(1)$. **B.** $f(-1)$. **C.** $f(2)$. **D.** $f(0)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ. Biết rằng $f(0)+f(3)=f(2)+f(5)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $y=f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ lần lượt là:



A. $f(2);\ f(5)$. **B.** $f(0);\ f(5)$. **C.** $f(2);\ f(0)$. **D.** $f(1);\ f(5)$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0)+f(1)-2f(3)=f(5)-f(4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$.



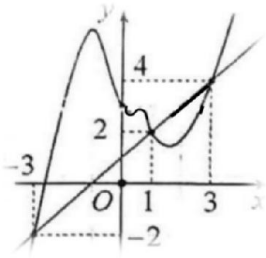
A. $m=f(5), M=f(3)$ **B.** $m=f(5), M=f(1)$
C. $m=f(0), M=f(3)$ **D.** $m=f(1), M=f(3)$

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f\left(4x-x^2\right)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+\frac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

A. 15. **B.** $\frac{25}{3}$. **C.** $\frac{19}{3}$. **D.** 12.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$. Mệnh đề dưới đây đúng.



A. $\max\limits_{[-3;3]} g(x)=g(3)$. **B.** $\min\limits_{[-3;3]} g(x)=g(1)$. **C.** $\max\limits_{[-3;3]} g(x)=g(0)$. **D.** $\max\limits_{[-3;3]} g(x)=g(1)$.

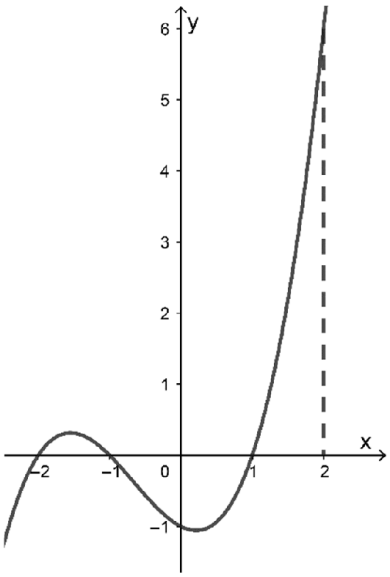
Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0)=3$, $f'(2)=-2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(x+2017)+2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-2017)$ **B.** $(2017;+\infty)$ **C.** $(0;2)$ **D.** $(-2017;0)$

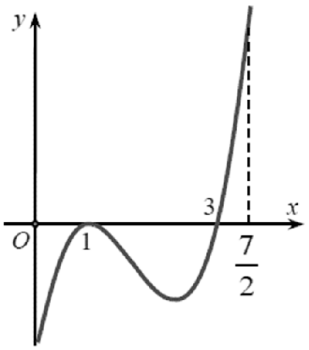
Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây:



Biết rằng $f(-1)+f(0)<f(1)+f(2)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ lần lượt là:

A. $f(1);\ f(2)$. **B.** $f(2);\ f(0)$. **C.** $f(0);\ f(2)$. **D.** $f(1);\ f(-1)$.

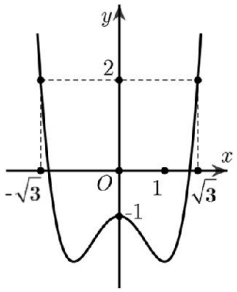
Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{7}{2}\right]$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\frac{7}{2}\right]$ tại điểm x_0 nào dưới đây?

A. $x_0=0$. **B.** $x_0=\frac{7}{2}$. **C.** $x_0=1$. **D.** $x_0=3$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ

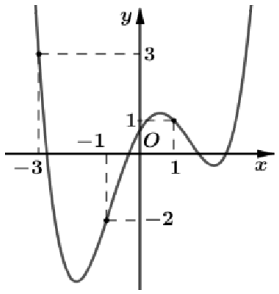


Đặt $h(x)=3f(x)-x^3+3x$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x)=3f(1)$. **B.** $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x)=3f\left(-\sqrt{3}\right)$.

C. $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x)=3f\left(\sqrt{3}\right)$. **D.** $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x)=3f(0)$.

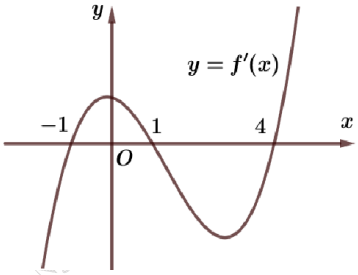
Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ ở hình vẽ bên. Xét hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+2018$, mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $\min\limits_{[-3;1]} g(x)=g(-1)$. **B.** $\min\limits_{[-3;1]} g(x)=\frac{g(-3)+g(1)}{2}$.

C. $\min\limits_{[-3;1]} g(x)=g(-3)$. **D.** $\min\limits_{[-3;1]} g(x)=g(1)$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình sau:



Cho bốn mệnh đề sau:

1) Hàm số $y=f(x)$ có hai cực trị

2) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

3) $f(1)>f(2)>f(4)$.

4) Trên đoạn $[-1;4]$, giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ là $f(1)$.

Số mệnh đề đúng trong bốn mệnh đề trên là:

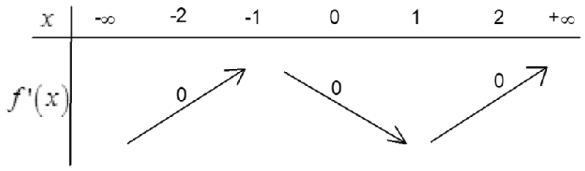
A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f\left(4x-x^2\right)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+\frac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-3	↗	5	↘	$-\infty$

A. $\frac{25}{3}$. **B.** 15. **C.** $\frac{19}{3}$. **D.** 12.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(2x)-\sin^2 x$ trên đoạn $[-1;1]$ là

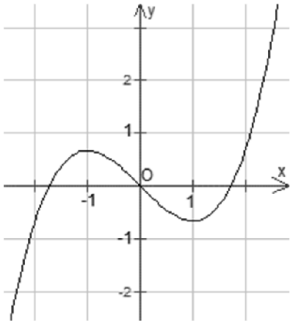


A. $f(-1)$. **B.** $f(0)$. **C.** $f(2)$. **D.** $f(1)$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=3$. Xét hàm số $g(x)=f(3x-1)+m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\max\limits_{[0;1]} g(x)=-10$.

A. 13. **B.** -7. **C.** -13. **D.** -1.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(\dfrac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{2}\right)$ trên đoạn $\left[-\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{\pi}{6}\right]$ bằng

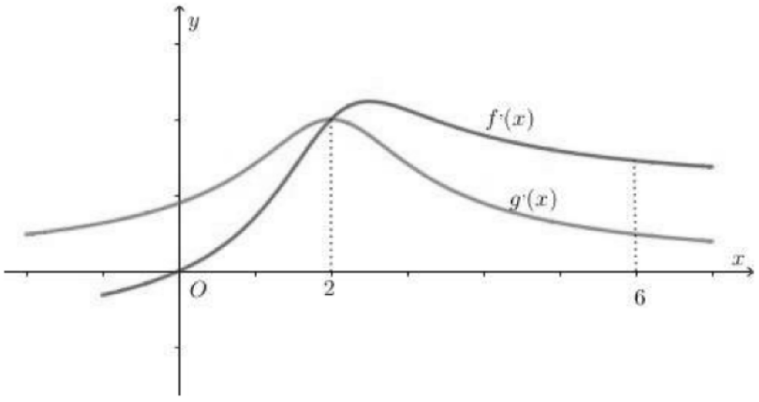
A. $f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$. **B.** $f(0)$. **C.** $f\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$. **D.** $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max\limits_{x\in[0;10]} f(x)=f(2)=4$. Xét hàm số $g(x)=f\left(x^3+x\right)-x^2+2x+m$. Giá trị của tham số m để $\max\limits_{x\in[0;2]} g(x)=8$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** -1. **D.** 3.

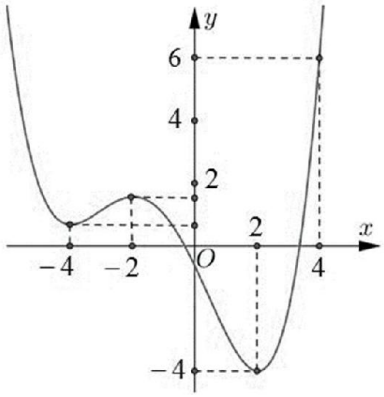
Câu 17. Cho hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$, $g'(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và $g'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng $f(0)-f(6)<g(0)-g(6)$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x)=f(x)-g(x)$ trên đoạn $[0;6]$ lần lượt là:

A. $h(6),h(2)$. **B.** $h(2),h(6)$. **C.** $h(0),h(2)$. **D.** $h(2),h(0)$.

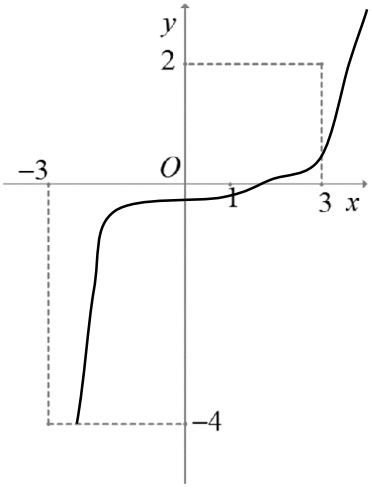
Câu 18. **(Chuyên Lào Cai - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|f\left(\dfrac{8x}{x^2+1}\right)+m-1\right|$ có giá trị lớn nhất không vượt quá 2020?

A. 4029. **B.** 4035. **C.** 4031. **D.** 4041.

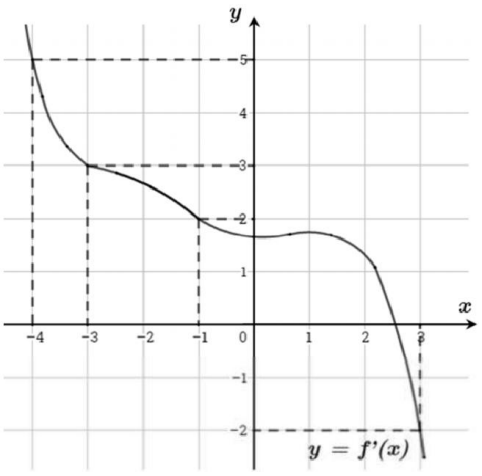
Câu 19. **(Sở Hưng Yên - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)-(x-1)^2$.



Khi đó $y=g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3;3]$ tại

A. $x=-3$. **B.** $x=3$. **C.** $x=0$. **D.** $x=1$.

Câu 20. **(Kim Liên - Hà Nội - 2020)** Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Trên $[-4;3]$, hàm số $g(x)=2f(x)+(1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm



A. $x=-3$. **B.** $x=-4$. **C.** $x=3$. **D.** $x=-1$.

Câu 21. **(Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0)=3, f'(2)=f'(-2018)=0$, và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(|x-1|-2018)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-2015)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-1009;2)$. **D.** $(-2015;1)$.

Câu 22. **(THPT Anh Sơn - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0)=3$, $f'(2)=-2020$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như hình sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(x+2019)+2020x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-2019)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2019;0)$. **D.** $(2019;+\infty)$.

Dạng 3. Ứng dụng gtln-gtnn giải bài toán thực tế

Câu 1. **(Chuyên Quang Trung - Bình Phước - Lần 2 - 2020)** Cho số $a>0$. Trong số các tam giác vuông có tổng một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng a, tam giác có diện tích lớn nhất bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}a^2$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}a^2$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{9}a^2$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{18}a^2$.

Câu 2. **(Mã 101 2018)** Ông A dự định dùng hết $6,5m^2$ kính để làm một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

A. $2,26\ m^3$ **B.** $1,61\ m^3$ **C.** $1,33\ m^3$ **D.** $1,50\ m^3$

Câu 3. **(Mã 104 2017)** Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{3}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 243 (m/s) **B.** 27 (m/s) **C.** 144 (m/s) **D.** 36 (m/s)

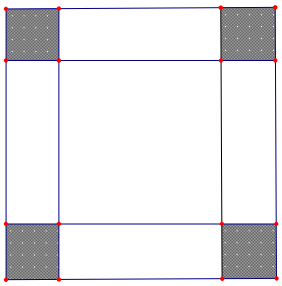
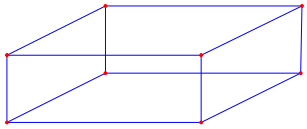
Câu 4. **(Mã 103 2018)** Ông A dự định sử dụng hết $5\ m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $1,01\ m^3$ **B.** $0,96\ m^3$ **C.** $1,33\ m^3$ **D.** $1,51\ m^3$

Câu 5. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được cho bởi công thức $c(t)=\frac{t}{t^2+1}$ (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

A. 4 giờ. **B.** 1 giờ. **C.** 3 giờ. **D.** 2 giờ.

Câu 6. **(Đề Minh Họa 2017)** Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

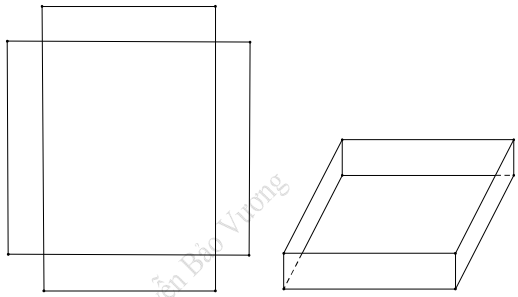



A. $x=3$ **B.** $x=2$ **C.** $x=4$ **D.** $x=6$

Câu 7. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Một sợi dây có chiều dài $28m$ được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài (theo đơn vị mét) của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất?

A. $\frac{56}{4+\pi}$. **B.** $\frac{112}{4+\pi}$. **C.** $\frac{84}{4+\pi}$. **D.** $\frac{92}{4+\pi}$.

Câu 8. **(THPT Minh Châu Hưng Yên 2019)** Cho một tấm nhôm hình chữ nhật có chiều dài bằng $10cm$ và chiều rộng bằng $8cm$. Người ta cắt bỏ ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(cm)$, rồi gập tấm nhôm lại (như hình vẽ) để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

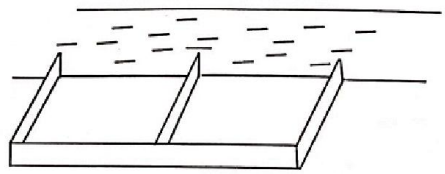


A. $x=\frac{8-2\sqrt{21}}{3}$ **B.** $x=\frac{10-2\sqrt{7}}{3}$ **C.** $x=\frac{9+\sqrt{21}}{9}$. **D.** $x=\frac{9-\sqrt{21}}{3}$

Câu 9. **(Mã 103 2018)** Ông A dự định sử dụng hết $5\,m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $1,01\,m^3$. **B.** $0,96\,m^3$. **C.** $1,33\,m^3$. **D.** $1,51\,m^3$.

Câu 10. Một người nông dân có 15.000.000 đồng muốn làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60.000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50.000 đồng một mét. Tìm diện tích lớn nhất của đất rào thu được

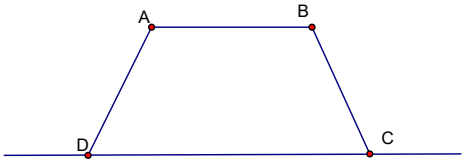


A. $3125\,m^2$. **B.** $50\,m^2$. **C.** $1250\,m^2$. **D.** $6250\,m^2$.

Câu 11. **(Chuyên Long An-2019)** Ông Khoa muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $288\,\mathrm{m}^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/m^2. Nếu ông Khoa biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi ông Khoa trả chi phí thấp nhất để xây dựng bể đó là bao nhiêu (Biết độ dày thành bể và đáy bể không đáng kể)?

A. 90 triệu đồng. **B.** 168 triệu đồng. **C.** 54 triệu đồng. **D.** 108 triệu đồng.

Câu 12. **(Kinh Môn - Hải Dương L2 2019)** Một người nông dân có 3 tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài $12(m)$ và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ (bờ sông là đường thẳng DC không phải rào, mỗi tấm là một cạnh của hình thang). Hỏi ông ta có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu m^2 ?

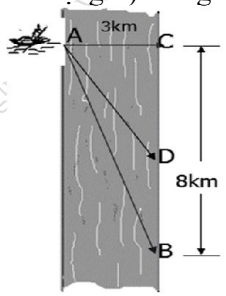


A. $100\sqrt{3}$. **B.** $106\sqrt{3}$. **C.** $108\sqrt{3}$. **D.** $120\sqrt{3}$.

Câu 13. **(Sở GD Quảng Nam - 2019)** Cho nửa đường tròn đường kính $AB=2$ và hai điểm C, D thay đổi trên nửa đường tròn đó sao cho $ABCD$ là hình thang. Diện tích lớn nhất của hình thang $ABCD$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **C.** 1. **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 14. **(THPT Lương Văn Tụy - Ninh Bình 2018)** Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B, hay có thể chèo trực tiếp đến B, hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B. Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường $BC=8$ km. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tính khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: giờ) để người đàn ông đến B.



A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{9}{\sqrt{7}}$. **C.** $\frac{\sqrt{73}}{6}$. **D.** $1+\frac{\sqrt{7}}{8}$.

Dạng 4. Dùng phương pháp hàm số để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Câu 1. **(HSG 12 - Sở Quảng Nam - 2019)** Cho ba số thực x,y,z thỏa mãn $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 1$, $x+y+z=2$.Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P=xyz$ bằng $\frac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $2a+b$ bằng

A. 5. **B.** 43. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 2. **(Chuyên Bắc Giang Nam 2019)** Cho $x^2-xy+y^2=2$. Giá trị nhỏ nhất của $P=x^2+xy+y^2$ bằng:

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{1}{6}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 2

Câu 3. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x+y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P=x^2+y^2+2(x+1)(y+1)+8\sqrt{4-x-y}$. Tính giá trị $M+m$

A. 42 **B.** 41 **C.** 43 **D.** 44

Câu 4. **(Chuyên Lê Quý Đôn - Quảng Trị -2019)** Cho x, $y>0$ thỏa mãn $x+y=\frac{3}{2}$ và biểu thức $P=\frac{4}{x}+\frac{1}{4y}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính x^2+y^2.

A. $\frac{153}{100}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{2313}{1156}$. **D.** $\frac{25}{16}$.

Câu 5. **(Chuyên Hà Tĩnh - 2019)** Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2+y^2-xy=1$ và hàm số $f(t)=2t^3-3t^2+1$. Gọi M, m tương ứng là GTLN và GTNN của $Q=f\left(\frac{5x-y+2}{x+y+4}\right)$. Tổng $M+m$ bằng:

A. $-4-3\sqrt{2}$. **B.** $-4-5\sqrt{2}$. **C.** $-4-4\sqrt{2}$. **D.** $-4-2\sqrt{2}$.

Câu 6. **(Sở Lào Cai - 2019)** Cho hàm số $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ít nhất một giao điểm với trục hoành. Bất đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $a^2+b^2+c^2>\frac{4}{3}$. **B.** $a^2+b^2+c^2<\frac{4}{3}$. **C.** $a^2+b^2+c^2\ge\frac{4}{3}$. **D.** $a^2+b^2+c^2\le\frac{4}{3}$.

Câu 7. **(THPT Trần Nhân Tông 2018)** Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $9x^3+\left(2-y\sqrt{3xy-5}\right)x+\sqrt{3xy-5}=0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x^3+y^3+6xy+3\left(3x^2+1\right)(x+y-2)$

A. $\frac{296\sqrt{15}-18}{9}$. **B.** $\frac{36+296\sqrt{15}}{9}$. **C.** $\frac{36-4\sqrt{6}}{9}$. **D.** $\frac{-4\sqrt{6}+18}{9}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 8. **(THPT Nguyễn Huệ - Ninh Bình - 2018)** Cho $x, y>0$ và $x+y=\frac{5}{4}$ sao cho biểu thức $P=\frac{4}{x}+\frac{1}{4y}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó

A. $x^2+y^2=\frac{25}{32}$. **B.** $x^2+y^2=\frac{17}{16}$. **C.** $x^2+y^2=\frac{25}{16}$. **D.** $x^2+y^2=\frac{13}{16}$.

Câu 9. **(Xuân Trường - Nam Định -2018)** Cho x, y là hai số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $(xy+1)\left(\sqrt{xy+1}-\sqrt{y}\right)\le 1-x-\frac{1}{y}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+3y^2}}-\frac{x-2y}{6(x+y)}$?

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}-\frac{7}{30}$. **B.** $\frac{7}{30}-\frac{\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{7}{30}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}+7}{30}$.

Câu 10. **(THPT Lê Xoay - 2018)** Cho các số thực x, y thỏa mãn $x+y+1=2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}\right)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $M=3^{x+y-4}+(x+y+1).2^{7-x-y}-3\left(x^2+y^2\right)$ bằng

A. $-\frac{9476}{243}$. **B.** -76. **C.** $\frac{193}{3}$. **D.** $\frac{148}{3}$.

Câu 11. **(Cụm 5 Trường Chuyên - Đbsh - 2018)** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|\sin x+\cos x+\tan x+\cot x+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\right|$

A. $\sqrt{2}-1$. **B.** $2\sqrt{2}+1$. **C.** $\sqrt{2}+1$. **D.** $2\sqrt{2}-1$.

Câu 12. **(Sở Phú Thọ - 2018)** Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=4$ và $xy+yz+zx=5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ bằng:

A. 20. **B.** 25. **C.** 15. **D.** 35.

Câu 13. **(Sở Bắc Ninh - 2018)** Gọi M, m lần lượt là giá lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^{2018}x+\cos^{2018}x$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó:

A. $M=2, m=\frac{1}{2^{1008}}$. **B.** $M=1$, $m=\frac{1}{2^{1009}}$. **C.** $M=1$, $m=0$. **D.** $M=1$, $m=\frac{1}{2^{1008}}$.

Câu 14. **(Chuyên Long An - 2018)** Cho các số thực x, y thỏa mãn $x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(x^2+y^2\right)+15xy$.

A. $\min P=-80$. **B.** $\min P=-91$. **C.** $\min P=-83$. **D.** $\min P=-63$.

Câu 15. **(THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2018)** Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $2y^3+7y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}+3\left(2y^2+1\right)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+2y$.

A. $P=10$ **B.** $P=4$. **C.** $P=6$. **D.** $P=8$.

Câu 16. **(Chuyên Trần Phú - Hải Phòng 2018)** Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases}x^2-xy+3=0\\2x+3y-14\le 0\end{cases}$. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3x^2y-xy^2-2x^3+2x$

A. 8. **B.** 0. **C.** 12. **D.** 4.

Câu 17. **(Sở Nam Định - 2018)** Biết rằng bất phương trình $m\left(|x|+\sqrt{1-x^2}+1\right)\le 2\sqrt{x^2-x^4}+\sqrt{x^2}+\sqrt{1-x^2}+2$ có nghiệm khi và chỉ khi $m\in\left(-\infty;a\sqrt{2}+b\right]$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của $T=a+b$.

A. $T=3$. **B.** $T=2$. **C.** $T=0$. **D.** $T=1$.

Câu 18. **(THPT Nguyễn Huệ 2018)** Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn $2\left(x^2+y^2\right)+xy=(x+y)(xy+2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}\right)-9\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)$.

A. $-\frac{25}{4}$. **B.** 5. **C.** $-\frac{23}{4}$. **D.** -13.

Câu 19. **(THPT Kim Liên - Hà Nội - 2018)** Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $2x+y=\frac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=\frac{2}{x}+\frac{1}{4y}$.

A. $P_{\min}=\frac{34}{5}$. **B.** $P_{\min}=\frac{65}{4}$. **C.** $P_{\min}$ không tồn tại. **D.** $P_{\min}=5$.

---------- HẾT ----------

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 5 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH (5-6 ĐIỂM)

Dạng 1. Xác định giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số thông qua đồ thị, bảng biến thiên

◆ Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f'(x_i)=0, x_i \in [a;b]$. Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ là $M=\max\{f(a),f(b),f(x_i)\}$

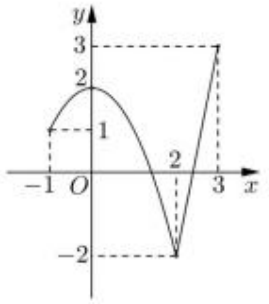
◆ Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f'(x_i)=0, x_i \in [a;b]$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ là $m=Min\{f(a),f(b),f(x_i)\}$

◆ Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\underset{[a;b]}{Max}\, f(x)=f(b); \underset{[a;b]}{Min}\, f(x)=f(a)$

◆ Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\underset{[a;b]}{Max}\, f(x)=f(a); \underset{[a;b]}{Min}\, f(x)=f(b)$

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M-m$ bằng



A. 1 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 0

Lời giải

Chọn C

Dựa và đồ thị suy ra $M=f(3)=3;\ m=f(2)=-2$

Vậy $M-m=5$

Câu 2. **(Đề Minh Họa 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1 .

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1 .

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

D. Hàm số có đúng một cực trị.

Lời giải

Chọn C

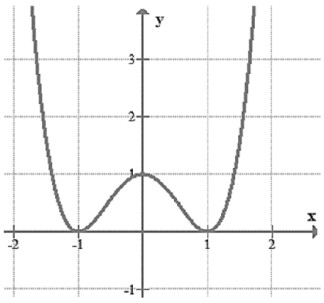
Đáp án A sai vì hàm số có 2 điểm cực trị.

Đáp án B sai vì hàm số có giá trị cực tiểu $y=-1$ khi $x=0$.

Đáp án C sai vì hàm số không có GTLN và GTNN trên $\mathbb{R}$.

Đáp án D đúng vì hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;1]$. Giá trị của $M-m$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy $M=1, m=0$ nên $M-m=1$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như sau. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$. Tính $M+m$.

x	-3		-1		0		1		2
$f(x)$	-2	↗	3	↘	0	↗	2	↘	1

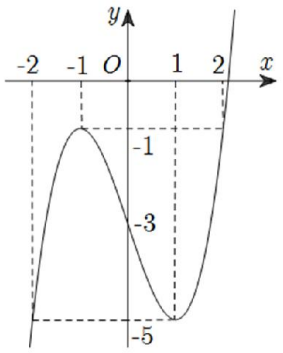
A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Trên đoạn $[-1;2]$ ta có giá trị lớn nhất $M=3$ khi $x=-1$ và giá trị nhỏ nhất $m=0$ khi $x=0$.

Khi đó $M+m=3+0=3$.

Câu 5. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$.



A. $m=-5;M=-1$. **B.** $m=-2;M=2$. **C.** $m=-1;M=0$. **D.** $m=-5;M=0$.

Lời giải

Nhìn vào đồ thị ta thấy:

$M=\max\limits_{[-2;2]} f(x)=-1$ khi $x=-1$ hoặc $x=2$.

$m=\min\limits_{[-2;2]} f(x)=-5$ khi $x=-2$ hoặc $x=1$.

Câu 6. **(THPT Ba Đình 2019)** Xét hàm số $y=f(x)$ với $x\in[-1;5]$ có bảng biến thiên như sau:

x	-1		0		2		5
y'		+	0	-	0	+	
y	3	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng

A. Hàm số đã cho không tồn tại GTLN trên đoạn $[-1;5]$

B. Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x=-1$ và $x=2$ trên đoạn $[-1;5]$

C. Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x=-1$ và đạt GTLN tại $x=5$ trên đoạn $[-1;5]$

D. Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x=0$ trên đoạn $[-1;5]$

Lời giải

A. Đúng. Vì $\lim\limits_{x\to 5^-} y=+\infty$ nên hàm số không có GTLN trên đoạn $[-1;5]$.

B. Sai. Hàm số đã cho chỉ đạt GTNN tại $x=2$ trên đoạn $[-1;5]$.

C. Sai. Hàm số đã cho chỉ đạt GTNN tại $x=2$ trên đoạn $[-1;5]$ và $\lim\limits_{x\to 5} y=+\infty$.

D. Sai. Hàm số đã cho chỉ đạt GTNN tại $x=2$ trên đoạn $[-1;5]$.

Câu 7. **(Chuyên Lê Thánh Tông 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
y'		−	||	+	0	+	||	−	
y	$+\infty$	↘	-3	↗		↗	2	↘	-4

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào ***sai***?

A. Hàm số có hai điểm cực trị.

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3.

C. Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận.

D. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$, $(2;+\infty)$.

Lời giải

Dựa vào BBT ta thấy hàm số không có GTLN, GTNN.

Câu 8. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1;3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây ***đúng***?

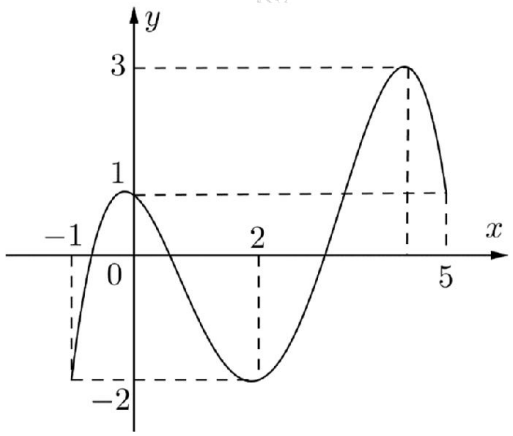
x	-1		0		2		3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	↗	5	↘	1	↗	4

A. $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(0)$. **B.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(3)$. **C.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(2)$. **D.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(-1)$.

Lời giải

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(0)$.

Câu 9. **(VTED 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;5]$ và có đồ thị trên đoạn $[-1;5]$ như hình vẽ bên dưới. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;5]$ bằng

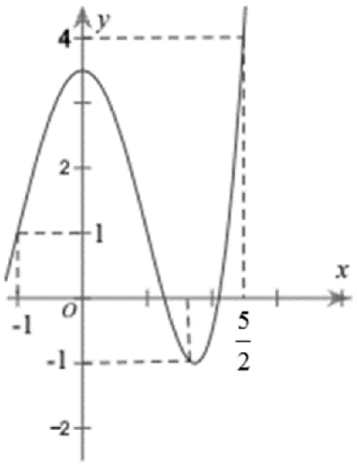


A. -1 **B.** 4 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy: $\begin{cases} M=\max\limits_{[-1;5]} f(x)=3 \\ n=\min\limits_{[-1;5]} f(x)=-2 \end{cases} \Rightarrow M+n=1.$

Câu 10. **(THPT Yên Mỹ Hưng Yên 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1,\dfrac{5}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1,\frac{5}{2}\right]$ là:

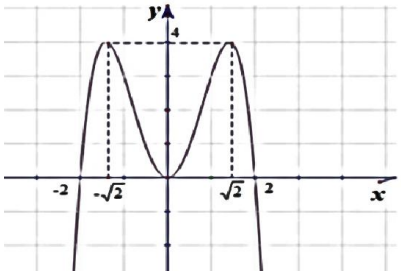
A. $M=4,m=1$ **B.** $M=4,m=-1$ **C.** $M=\frac{7}{2},m=-1$ **D.** $M=\frac{7}{2},m=1$

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị $M=4,\ m=-1$.

Câu 11. **(THPT Nghĩa Hưng Nam Định 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;2]$ là:



A. $\underset{[0;2]}{Max}\, f(x)=2$. **B.** $\underset{[0;2]}{Max}\, f(x)=\sqrt{2}$.

C. $\underset{[0;2]}{Max}\, f(x)=4$. **D.** $\underset{[0;2]}{Max}\, f(x)=0$.

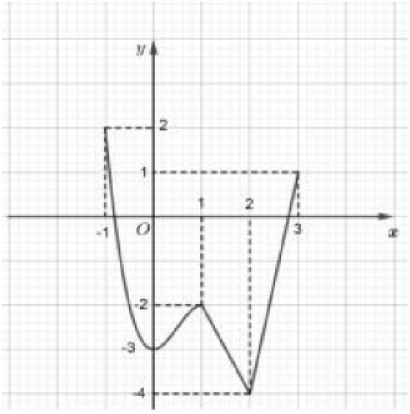
Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta thấy trên đoạn $[0;2]$ hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 4 khi $x=\sqrt{2}$

Suy ra $\underset{[0;2]}{Max}\, f(x)=4$

Câu 12. **(Sở Bắc Giang 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M+m$ là



A. 2 **B.** -6 **C.** -5 **D.** -2

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy GTLN của hàm số trên đoạn $[-1;3]$ là $M=2$ đạt được tại $x=-1$ và GTNN của hàm số số trên đoạn $[-1;3]$ là $m=-4$ đạt được tại $x=2$

$\Rightarrow M+m=2+(-4)=-2$

Câu 13. **(Sở Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên trên $[-5;7)$ như sau

x	-5		1		7
y'		$-$	0	$+$	
y	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	9

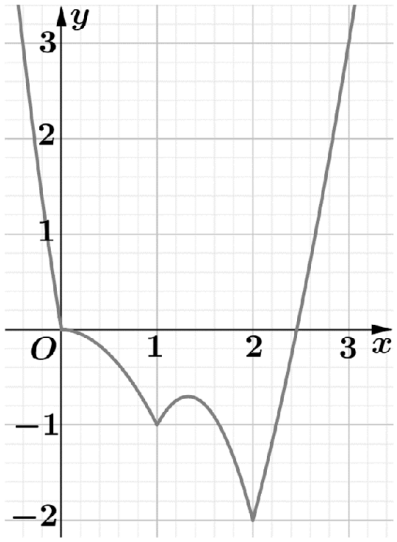
Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\underset{[-5;7)}{\text{Min}}\, f(x)=6$. **B.** $\underset{[-5;7)}{\text{Min}}\, f(x)=2$. **C.** $\underset{[-5;7)}{\text{Max}}\, f(x)=9$. **D.** $\underset{[-5;7)}{\text{Max}}\, f(x)=6$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên trên $[-5;7)$, ta có: $\underset{[-5;7)}{\text{Min}}\, f(x)=f(1)=2$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;3]$. Giá trị của $M+m$ bằng?

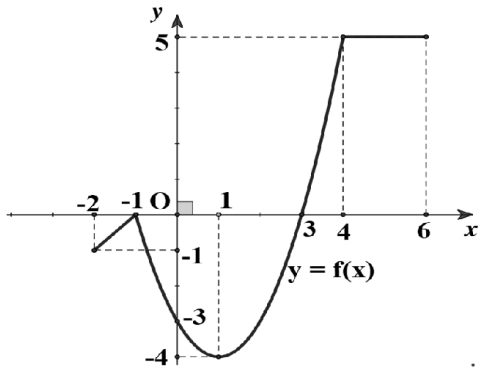


A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Dựa vào hình vẽ ta có: $M=3$, $m=-2$ nên $M+m=1$.

Câu 15. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;6]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;6]$. Giá trị của $M-m$ bằng

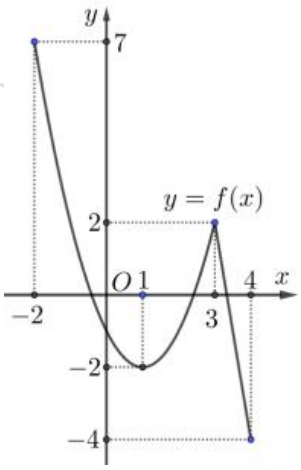
A. 9. **B.** -8. **C.** -9. **D.** 8.

Lời giải

Từ đồ thị suy ra $-4\le f(x)\le 5\ \ \forall x\in[-2;6];\ f(1)=-4; f(4)=5$

$\Rightarrow \begin{cases} M=5 \\ m=-4 \end{cases} \Rightarrow M-m=9.$

Câu 16. **(VTED 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đồ thị trên đoạn $[-2;4]$ như hình vẽ bên. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;4]$ bằng



A. 5 **B.** 3 **C.** 0 **D.** -2

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số ta có

$m=\min\limits_{x\in[-2;4]} f(x)=-4,\ M=\max\limits_{x\in[-2;4]} f(x)=7$

Khi đó $M+m=3$

Câu 17. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

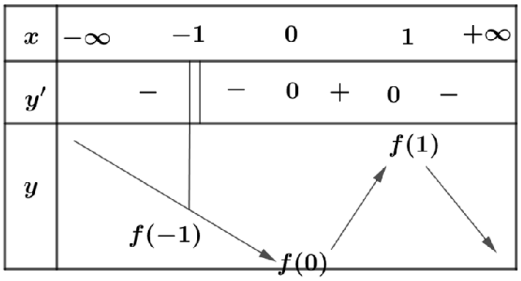
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $\max\limits_{(-1;1]} f(x)=f(0)$ **B.** $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x)=f(1)$ **C.** $\min\limits_{(-\infty;-1)} f(x)=f(-1)$ **D.** $\min\limits_{(-1;+\infty)} f(x)=f(0)$

Lời giải

Chọn B



Dạng 2. Xác định giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn

□ ***Bước 1***: Hàm số đã cho $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Tìm các điểm $x_1,x_2,...,x_n$ trên khoảng $(a;b)$, tại đó $f'(x)=0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

□ ***Bước 2***: Tính $f(a),f(x_1),f(x_2),...,f(x_n),f(b)$.

□ ***Bước 3***: Khi đó:

$\max\limits_{[a,b]} f(x)=max\{f(x_1),f(x_2),...,f(x_n),f(a),f(b)\}$.

$\min\limits_{[a,b]} f(x)=min\{f(x_1),f(x_2),...,f(x_n),f(a),f(b)\}$.

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=-x^4+12x^2+1$ trên đoạn $[-1;2]$bằng:

A. 1. **B.** 37. **C.** 33. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

$f(x)=-x^4+12x^2+1$ liên tục trên $[-1;2]$ và $f'(x)=-4x^3+24x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt{6}\quad(L)\\x=-\sqrt{6}\quad(L)\end{array}\right.$

Ta có:

$f(-1)=12;f(2)=33;f(0)=1$

Vậy, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=-x^4+12x^2+1$ trên đoạn $[-1;2]$bằng 33 tại $x=2$

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-10x^2+2$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. 2. **B.** −23. **C.** −22. **D.** −7.

Lời giải

Chọn C

Hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[-1;2]$.

Ta có: $f'(x)=4x^3-20x, f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Xét hàm số trên đoạn $[-1;2]$ có: $f(-1)=-7; f(0)=2; f(2)=-22$.

Vậy $\min\limits_{x\in[-1;2]} f(x)=-22$.

Câu 3. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-24x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. $32\sqrt{2}$. **B.** -40. **C.** $-32\sqrt{2}$. **D.** -45.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $f'(x)=3x^2-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\sqrt{2}\in[2;19] \\ x=-2\sqrt{2}\notin[2;19] \end{array}\right.$.

$f(2)=2^3-24.2=-40$; $f\left(2\sqrt{2}\right)=\left(2\sqrt{2}\right)^3-24.2\sqrt{2}=-32\sqrt{2}$; $f(19)=19^3-24.19=6403$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-24x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng $-32\sqrt{2}$.

Câu 4. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-21x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. -36. **B.** $-14\sqrt{7}$. **C.** $14\sqrt{7}$. **D.** -34.

Lời giải

Chọn B

Trên đoạn $[2;19]$, ta có: $y'=3x^2-21 \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{7}\notin[2;19] \\ x=\sqrt{7}\in[2;19] \end{array}\right.$.

Ta có: $y(2)=-34$; $y\left(\sqrt{7}\right)=-14\sqrt{7}$; $y(19)=6460$. Vậy $m=-14\sqrt{7}$.

Câu 5. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-30x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. $20\sqrt{10}$. **B.** -63. **C.** $-20\sqrt{10}$. **D.** -52.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=3x^2-30 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-30=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{10}\ (n) \\ x=-\sqrt{10}\ (l) \end{array}\right.$.

Khi đó $f(2)=-52$; $f\left(\sqrt{10}\right)=-20\sqrt{10}$ và $f(19)=6289$.

Vậy $\min\limits_{x\in[2;19]} f(x)=f\left(\sqrt{10}\right)=-20\sqrt{10}$.

Câu 6. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-33x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. -72. **B.** $-22\sqrt{11}$. **C.** -58. **D.** $22\sqrt{11}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=3x^2-33=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{11}\in[2;19] \\ x=-\sqrt{11}\notin[2;19] \end{array}\right.$.

Khi đó ta có $f(2)=-58$, $f\left(\sqrt{11}\right)=-22\sqrt{11}$, $f(19)=6232$. Vậy $f_{\min}=f\left(\sqrt{11}\right)=-22\sqrt{11}$.

Câu 7. **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-10x^2-4$ trên $[0;9]$ bằng

A. -28. **B.** -4. **C.** -13. **D.** -29.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;9]$.

Có $f'(x)=4x^3-20x$, $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt{5}\\x=-\sqrt{5}\notin[0;9]\end{array}\right.$

Ta có $f(0)=-4$, $f\left(\sqrt{5}\right)=-29$, $f(9)=5747$

Do đó $\min\limits_{[0;9]}f(x)=f\left(\sqrt{5}\right)=-29$.

Câu 8. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-12x^2-4$ trên đoạn $[0;9]$ bằng

A. -39. **B.** -40. **C.** -36. **D.** -4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)=4x^3-24x$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{6}\end{array}\right.$

Tính được: $f(0)=-4$; $f(9)=5585$ và $f\left(\sqrt{6}\right)=-40$.

Suy ra $\min\limits_{[0;9]}f(x)=-40$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 9. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-10x^2-2$ trên đoạn $[0;9]$ bằng

A. -2. **B.** -11. **C.** -26. **D.** -27.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=4x^3-20x$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 4x^3-20x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin(0;9)\\x=\sqrt{5}\in(0;9)\\x=-\sqrt{5}\notin(0;9)\end{array}\right.$

$f(0)=-2$; $f\left(\sqrt{5}\right)=-27$; $f(9)=5749$.

Vậy $\min\limits_{[0;9]}f(x)=-27$.

Câu 10. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-12x^2-1$ trên đoạn $[0;9]$ bằng

A. -28. **B.** -1. **C.** -36. **D.** -37.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=4x^3-24x$.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-24x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[0;9] \\ x=\sqrt{6}\in[0;9] \\ x=-\sqrt{6}\notin[0;9] \end{array}\right. .$$

$f(0)=-1,\ f\left(\sqrt{6}\right)=-37,\ f(9)=5588$

Câu 11. **(Mã 102 - 2019)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x+2$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. 0. **B.** -16. **C.** 20. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:Mode 7 $f(x)=x^3-3x+2$.

Start -3

end3step 1

$\Rightarrow$ Chọn B

Cách 2: $f'(x)=3x^2-3$. $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm1\in[-3;3]$.

$f(-3)=-16;\ f(-1)=4;\ f(1)=0;\ f(3)=20$.

$\Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất là -16.

Câu 12. **(Mã 110 2017)** Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=x^4-2x^2+3$ trên đoạn $\left[0;\sqrt{3}\right]$.

A. $M=6$ **B.** $M=1$ **C.** $M=9$ **D.** $M=8\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=4x^3-4x=4x\left(x^2-1\right)$

$$y'=0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1(l) \end{array}\right.$$

Ta có : $y(0)=3$; $y(1)=2$; $y\left(\sqrt{3}\right)=6$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^4-2x^2+3$ trên đoạn $\left[0;\sqrt{3}\right]$ là $M=y\left(\sqrt{3}\right)=6$

Câu 13. **(Đề Minh Họa 2017)** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.

A. $\min\limits_{[2;4]} y=-3$ **B.** $\min\limits_{[2;4]} y=\dfrac{19}{3}$ **C.** $\min\limits_{[2;4]} y=6$ **D.** $\min\limits_{[2;4]} y=-2$

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ xác định và liên tục trên đoạn $[2;4]$

Ta có $y'=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}; y'=0\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow x=3$ hoặc $x=-1$ (loại)

Suy ra $y(2)=7; y(3)=6; y(4)=\dfrac{19}{3}$. Vậy $\min\limits_{[2;4]} y=6$ tại $x=3$.

Câu 14. **(Mã 103 - 2019)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. -2. **B.** 18. **C.** 2. **D.** -18.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=3x^2-3=0\Leftrightarrow x=\pm 1$

$f(-3)=-18;\ f(-1)=2;\ f(1)=-2;\ f(3)=18$.

Câu 15. **(Mã 104 2018)** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^4-x^2+13$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. 85 **B.** $\frac{51}{4}$ **C.** 13 **D.** 25

Lời giải

Chọn D

$y=f(x)=x^4-x^2+13$

$y'=4x^3-2x$

$$4x^3-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in[-1;2]\\x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\in[-1;2]\\x=\frac{1}{\sqrt{2}}\in[-1;2]\end{array}\right.$$

$f(-1)=13;f(2)=25;f(0)=13;f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{51}{4};f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{51}{4}$

Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^4-x^2+13$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 25.

Câu 16. **(Mã 104 2017)** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^2+\frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

A. $m=5$ **B.** $m=3$ **C.** $m=\frac{17}{4}$ **D.** $m=10$

Lời giải

Chọn B

Đặt $y=f(x)=x^2+\frac{2}{x}$.

Ta có $y'=2x-\frac{2}{x^2}=\frac{2x^3-2}{x^2}$, $y'=0\Rightarrow x=1\in\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Khi đó $f(1)=3,f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{4},f(2)=5$.

Vậy $m=\min\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]}f(x)=f(1)=3$.

Câu 17. **(Chuyên Bắc Ninh 2018)** Tìm tập giá trị của hàm số $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{9-x}$

A. $T=[1;\ 9]$. **B.** $T=\left[2\sqrt{2};\ 4\right]$. **C.** $T=(1;\ 9)$. **D.** $T=\left[0;\ 2\sqrt{2}\right]$.

Lời giải

Tập xác định: $D=[1;\ 9]$

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{9-x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{9-x} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ 9-x = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$.

$f(1) = f(9) = 2\sqrt{2}$; $f(5) = 4$

Vậy tập giá trị là $T = \left[2\sqrt{2};\ 4\right]$.

Câu 18. **(Mã 123 2017)** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ trên đoạn $[0\ ;2]$.

A. $m = 3$ **B.** $m = 0$ **C.** $m = -2$ **D.** $m = 11$

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số trên đoạn $[0\ ;2]$. Ta có $y' = 3x^2 - 14x + 11$ suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Tính $f(0) = -2; f(1) = 3, f(2) = 0$. Suy ra $\min\limits_{[0;2]} f(x) = f(0) = -2 = m$.

Câu 19. **(Mã 101 2018)** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 9$ trên đoạn $[-2;3]$ bằng

A. 201 **B.** 2 **C.** 9 **D.** 54

Lời giải

Chọn D

$y' = 4x^3 - 8x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Ta có $y(-2) = 9$; $y(3) = 54$; $y(0) = 9$; $y\left(\pm\sqrt{2}\right) = 5$.

Vậy $\max\limits_{[-2;3]} y = 54$.

Câu 20. **(Đề Tham Khảo 2018)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$ trêm đoạn $[-2;3]$ bằng

A. 122 **B.** 50 **C.** 5 **D.** 1

Lời giải

Chọn B

$f'(x) = 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right. \in [-2;3]$;

$f(0) = 5; f\left(\pm\sqrt{2}\right) = 1; f(-2) = 5; f(3) = 50$

Vậy $\mathop{Max}\limits_{[-2;3]} y = 50$

Câu 21. **(Mã 105 2017)** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2;3]$.

A. $m = 13$ **B.** $m = \dfrac{51}{4}$ **C.** $m = \dfrac{51}{2}$ **D.** $m = \dfrac{49}{4}$

Lời giải

Chọn B

$y' = 4x^3 - 2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-2;3] \\ x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \in [-2;3] \end{array}\right.$;

Tính $y(-2) = 25$, $y(3) = 85$, $y(0) = 13$, $y\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{51}{4} = 12{,}75$;

Kết luận: giá trị nhỏ nhất m của hàm số là $m=\frac{51}{4}$.

Câu 22. **(Mã 104 2019)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. -18. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 18.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)==3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

Mà $f(-3)=-18;\ f(-1)=2;\ f(1)=-2;\ f(3)=18$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng -18.

Câu 23. **(Mã 103 2018)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3+3x^2$ trên đoạn $[-4;-1]$ bằng

A. -16 **B.** 0 **C.** 4 **D.** -4

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=3x^2+6x$; $y'=0\Rightarrow 3x^2+6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=0 & \notin[-4;-1]\\x=-2 & \in[-4;-1]\end{array}\right.$.

Khi đó $y(-4)=-16$; $y(-2)=4$; $y(-1)=2$.

Nên $\min\limits_{[-4;-1]}y=-16$.

Câu 24. **(Mã 102 2018)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3+2x^2-7x$ trên đoạn $[0;4]$ bằng

A. -259 **B.** 68 **C.** 0 **D.** -4

Lời giải

Chọn D

TXĐ $D=\mathbb{R}$.

Hàm số liên tục trên đoạn $[0;4]$.

Ta có $y'=3x^2+4x-7$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in[0;4]\\x=-\frac{7}{3}\notin[0;4]\end{array}\right.$

$y(0)=0;y(1)=-4;y(4)=68$.

Vậy $\min\limits_{[0;4]}y=-4$.

Câu 25. **(Mã 101 - 2019)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x+2$ trên đoạn $[-3;3]$ là

A. 4. **B.** -16. **C.** 20. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

$f(x)=x^3-3x+2$ tập xác định $\mathbb{R}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow x=\pm1\in[-3;3]$.

$f(1)=0;f(-1)=4;f(3)=20;f(-3)=-16$.

Từ đó suy ra $\max\limits_{[-3;3]}f(x)=f(3)=20$.

Câu 26. **(SGD Nam Định)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2+\frac{2}{x}$ trên đoạn $[2;3]$ bằng

A. $\frac{15}{2}$. **B.** 5. **C.** $\frac{29}{3}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

+ Ta có hàm số $y=f(x)=x^2+\frac{2}{x}$ xác định và liên tục trên $[2;3]$.

+ $y'=f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1\notin[2;3]$ mà $f(2)=5$, $f(3)=\frac{29}{3}$.

+ Vậy $\min\limits_{[2;3]} y=5$ tại $x=2$.

Câu 27. **(Sở Quảng Trị 2019)** Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=\frac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0;2]$

A. $M=\frac{1}{3}$. **B.** $M=-\frac{1}{3}$. **C.** $M=5$. **D.** $M=-5$

Lời giải

Chọn A

Trên đoạn $[0;2]$ ta luôn có $y'=-\frac{8}{(x-3)^2}<0\ \forall x\in(0;2)$ (đạo hàm vô nghiệm trên (0; 2))

Vì $y(0)=\frac{1}{3}, y(2)=-5$ nên $M=\max\limits_{[0;2]} y=\frac{1}{3}$.

Câu 28. **(Sở Nam Định-2019)** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{4-x^2}$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

• Tập xác định: $D=[-2;2]$

• Ta có: $y'=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=0\in(-2;2)$

• Ta có: $\begin{cases} y(-2)=y(2)=0 \\ y(0)=2 \end{cases}\Rightarrow \max\limits_{[-2;2]} y=2$.

Câu 29. **(Chuyên Bắc Ninh 2018)** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^2 x-4\sin x-5$.

A. -20. **B.** -8. **C.** -9. **D.** 0.

Lời giải

Đặt $t=\sin x, t\in[-1;1]$. Xét $f(t)=t^2-4t-5, t\in[-1;1]$.

$f'(t)=2t-4=0\Leftrightarrow t=2\notin[-1;1]$.

$f(1)=-8, f(-1)=0$.

Ta thấy $\min\limits_{[-1;1]} f(t)=f(1)=-8$. Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là -8.

Câu 30. **(THPT Hoa Lư A 2018)** Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\frac{1}{2}x-\sqrt{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$. Tính tổng $S=2m+3M$.

A. $S=-\frac{7}{2}$. **B.** $S=-\frac{3}{2}$. **C.** -3. **D.** $S=4$.

Lời giải

Ta có: $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{x+1}-1}{2\sqrt{x+1}}$, cho $f'(x)=0\Rightarrow\sqrt{x+1}=1\Leftrightarrow x=0\in[0;3]$.

Khi đó: $f(0)=-1$, $f(3)=-\frac{1}{2}$ nên $m=-1$ và $M=-\frac{1}{2}$.

Vậy $S=2m+3M=-\frac{7}{2}$.

Câu 31. **(Chuyên ĐHSPHN - 2018)** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\sin x+\cos 2x$ trên $[0;\pi]$ là

A. $\frac{9}{8}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

$f(x)=\sin x+\cos 2x=\sin x+1-2\sin^2 x$

Đặt $\sin x=t\ \ (0\le t\le 1)$

$f(t)=-2t^2+t+1$, $f'(t)=-4t+1$

$f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{4}$

$f(0)=1$, $f(1)=0$, $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{8}$

Vậy $\max\limits_{[0;1]}f(x)=\frac{9}{8}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 32. **(THPT Hà Huy Tập - 2018)** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=2\cos x-\frac{4}{3}\cos^3 x$ trên $[0;\pi]$.

A. $\max\limits_{[0;\pi]}y=\frac{2}{3}$. **B.** $\max\limits_{[0;\pi]}y=\frac{10}{3}$. **C.** $\max\limits_{[0;\pi]}y=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\max\limits_{[0;\pi]}y=0$.

Lời giải

Đặt: $t=\cos x\Rightarrow t\in[-1;1]\ \Rightarrow y=2t-\frac{4}{3}t^3$.

$y'=2-4t^2$ $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{-1}{\sqrt{2}}\in[-1;1]\\ x=\frac{1}{\sqrt{2}}\in[-1;1]\end{array}\right.$.

Tính: $y(-1)=\frac{-2}{3}$, $y\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{-2\sqrt{2}}{3}$, $y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $y(1)=\frac{2}{3}$.

Vậy: $\max\limits_{[0;\pi]}y=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 33. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{3\sin x+2}{\sin x+1}$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Khi đó giá trị của M^2+m^2 là

A. $\frac{31}{2}$. **B.** $\frac{11}{2}$. **C.** $\frac{41}{4}$. **D.** $\frac{61}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sin x$, $t\in[0;1]$.

Xét hàm $f(t)=\frac{3t+2}{t+1}$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ có $f'(t)=\frac{1}{(t+1)^2}>0, t\in[0;1]$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $[0;1]$.

$\Rightarrow M=\underset{[0;1]}{\text{Max}}\, f(t)=f(1)=\frac{5}{2}$ và $m=\underset{[0;1]}{\text{Min}}\, f(t)=f(0)=2$.

Khi đó $M^2+m^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+2^2=\frac{41}{4}$.

Câu 34. **(THPT Can Lộc - Hà Tĩnh - 2018)** Cho hàm số $y=\frac{\sin x+1}{\sin^2 x+\sin x+1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Chọn mệnh đề **đúng**.

A. $M=m+\frac{3}{2}$. **B.** $M=\frac{3}{2}m$. **C.** $M=m+1$. **D.** $M=m+\frac{2}{3}$.

Lời giải

Đặt $\sin x=t$, $(-1\le t\le 1)$ ta được $y=\frac{t+1}{t^2+t+1}$.

Nguyễn Bảo Vương

Xét hàm số $y=\frac{t+1}{t^2+t+1}$ trên đoạn $[-1;1]$ ta có $y'=\frac{-t^2-2t}{(t^2+t+1)^2}$.

Giải phương trình $y'=0\Leftrightarrow -t^2-2t=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\ (t/m) \\ t=-2\ (loai)\end{array}\right.$.

Vì $y(-1)=0$; $y(0)=1$; $y(1)=\frac{2}{3}$ nên

$\underset{[-1;1]}{\max} y=y(0)=1\Rightarrow M=1$; $\underset{[-1;1]}{\min} y=y(-1)=0\Rightarrow m=0$.

Vậy $M=m+1$.

Dạng 3. Xác định giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng (a;b)

□ *Bước 1:* Tính đạo hàm $f'(x)$.

□ *Bước 2:* Tìm tất cả các nghiệm $x_i\in(a;b)$ của phương trình $f'(x)=0$ và tất cả các điểm $\alpha_i\in(a;b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.

□ *Bước 3.* Tính $A=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $B=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$, $f(x_i)$, $f(\alpha_i)$.

□ *Bước 4.* So sánh các giá trị tính được và kết luận $M=\max\limits_{(a;b)} f(x)$, $m=\min\limits_{(a;b)} f(x)$.

Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì ta kết luận không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2017)** Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3x+\frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $\min\limits_{(0;+\infty)} y=\frac{33}{5}$ **B.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=2\sqrt[3]{9}$ **C.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=3\sqrt[3]{9}$ **D.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=7$

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

$$y=3x+\frac{4}{x^2}=\frac{3x}{2}+\frac{3x}{2}+\frac{4}{x^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{3x}{2}.\frac{3x}{2}.\frac{4}{x^2}}=3\sqrt[3]{9}$$

Dấu " = " xảy ra khi $\frac{3x}{2}=\frac{4}{x^2}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$.

Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} y=3\sqrt[3]{9}$

Cách 2:

Xét hàm số $y=3x+\frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$

Ta có $y=3x+\frac{4}{x^2}\Rightarrow y'=3-\frac{8}{x^3}$

Cho $y'=0\Leftrightarrow\frac{8}{x^3}=3\Leftrightarrow x^3=\frac{8}{3}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$

x	0		$\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$		$+\infty$
y'	‖	$-$	0	$+$	
y	‖	↘	$3\sqrt[3]{9}$	↗	

$$\Rightarrow \min_{(0;+\infty)} y=y\left(\sqrt[3]{\frac{8}{3}}\right)=3\sqrt[3]{9}$$

Câu 2. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x-1+\frac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$. Tìm m?

A. $m=5$. **B.** $m=4$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=R\setminus\{1\}$.

$$y'=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2},y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		0	$+$	
y		↗	4	↘	$+\infty$		↗	$+\infty$

$\Rightarrow m=\min\limits_{(1;+\infty)} y=4$ khi $x=3$

Câu 3. **(THPT Minh Châu Hưng Yên 2019)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x-5+\dfrac{1}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ bằng bao nhiêu?

A. 0 **B.** -1 **C.** -3 **D.** -2

Lời giải

Chọn C

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có:

$y=x+\dfrac{1}{x}-5\geq 2\sqrt{x.\dfrac{1}{x}}-5=-3$

Dấu bằng xảy ra khi $x=\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=1$ (vì $x>0$).

Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} y=-3$

Câu 4. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\dfrac{4}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Tìm m

A. $m=4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=3$.

Lời giải

$y'=1-\dfrac{4}{x^2}$

$y'=0\Leftrightarrow x=\pm 2;\quad x=2\in(0;+\infty)$.

Nguyễn Bảo Vương

Bảng biến thiên:

x	0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $y(2)=4\Rightarrow m=4$.

Câu 5. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ trên nửa khoảng $[2;+\infty)$ là:

A. 2 **B.** $\dfrac{5}{2}$ **C.** 0 **D.** $\dfrac{7}{2}$

Lời giải

Chọn B

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta được: $f(x)=x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3x}{4}+\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{x}\geq\dfrac{3.2}{4}+2\sqrt{\dfrac{x}{4}.\dfrac{1}{x}}=\dfrac{5}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x=2$.

Câu 6. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\dfrac{4}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Tìm m.

A. $m=3$. **B.** $m=4$. **C.** $m=2$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Hàm số $y=x+\frac{4}{x}$ liên tục và xác định trên $(0;+\infty)$.

Ta có $y'=1-\frac{4}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\in(0;+\infty)\\x=-2\notin(0;+\infty)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất là $m=4$ khi $x=2$.

Cách 2:

Với $x\in(0;+\infty)\Rightarrow x;\frac{4}{x}>0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $x+\frac{4}{x}\geq 2\sqrt{x.\frac{4}{x}}=4$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\left\{\begin{array}{l}x>0\\x=\frac{4}{x}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=2$. Vậy $m=4$ khi $x=2$.

Câu 7. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{4-x}+\sqrt{3}$ trên tập xác định của nó là

A. $2+\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 0. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số là: $D=(-\infty;4]$.

Ta có $y'=\frac{-1}{2\sqrt{4-x}}<0,\forall x\in D$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		4
y'		-	
y	$+\infty$	↘	$\sqrt{3}$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min\limits_{(-\infty;4]}y=\sqrt{3}$ khi $x=4$ .Vậy chọn D .

Câu 8. Với giá trị nào của x thì hàm số $y=x^2+\frac{1}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Lời giải

Chọn D

TXD: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$y'=2x-\frac{1}{x^2}$, $y'=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\mid$ $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT thì $x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên $(0;+\infty)$.

Câu 9. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\frac{2}{x}-\left(1+\sqrt{2}\right)^2$ trên khoảng $(0;+\infty)$

A. không tồn tại. **B.** -3. **C.** $-1+\sqrt{2}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định và liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$.

$y'=1-\frac{2}{x^2}=\frac{x^2-2}{x^2}$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2}\\x=-\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$	$+\infty$ $\mid$ $+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} y=f\left(\sqrt{2}\right)=-3$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ với x thuộc $D=(-\infty;-1]\cup\left[1;\frac{3}{2}\right]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\max\limits_D f(x)=0;\min\limits_D f(x)=-\sqrt{5}$. **B.** $\max\limits_D f(x)=0$; không tồn tại $\min\limits_D f(x)$.

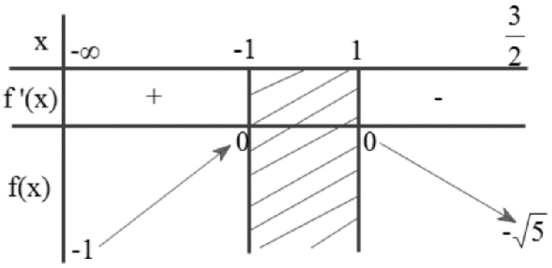
C. $\max\limits_{D} f(x)=0;\min\limits_{D} f(x)=-1$. **D.** $\min\limits_{D} f(x)=0$; không tồn tại $\max\limits_{D} f(x)$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định và liên tục trên $D=(-\infty;-1]\cup\left[1;\frac{3}{2}\right]$.

$f'(x)=\frac{-2x+1}{(x-2)^2\sqrt{x^2-1}}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\notin D$



Vậy $\max\limits_{D} f(x)=0;\min\limits_{D} f(x)=-\sqrt{5}$.

Câu 11. **(Cụm liên trường Hải Phòng 2019)** Mệnh đề nào sau đây là đúng về hàm số $y=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+5}}$ trên tập xác định của nó.

A. Hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

B. Hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

D. Hàm số có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$$y'=\frac{\sqrt{x^2+5}-(x+1)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}}}{x^2+5}=\frac{x^2+5-x^2-x}{\sqrt{x^2+5}(x^2+5)}=\frac{5-x}{\sqrt{x^2+5}(x^2+5)}.$$

$$y'=0\Leftrightarrow\frac{5-x}{\sqrt{x^2+5}(x^2+5)}=0\Leftrightarrow 5-x=0\Leftrightarrow x=5.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		5		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	-1	↗	$\frac{\sqrt{30}}{5}$	↘	1

Từ bảng biến thiên có $\max\limits_{\mathbb{R}} y=y(5)=\frac{\sqrt{30}}{5}$ khi $x=5$.

Hàm số $y=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+5}}$ không có giá trị nhỏ nhất.

Vậy hàm số có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

---------- HẾT ----------

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 5 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG KHÁ – MỨC ĐỘ 7-8 ĐIỂM

Dạng. Định m để GTLN-GTNN của hàm số thỏa mãn điều kiện cho trước

Bước 1. Tìm nghiệm $x_i (i=1,2,...)$ của $y'=0$ thuộc $[a;b]$

Bước 2. Tính các giá trị $f(x_i); f(a); f(b)$ theo tham số

Bước 3. So sánh các giá trị, suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Bước 4. Biện luận m theo giả thuyết đề để kết luận

Lưu ý:

- Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\underset{[a;b]}{Max} f(x)=f(b); \underset{[a;b]}{Min} f(x)=f(a)$
- Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\underset{[a;b]}{Max} f(x)=f(a); \underset{[a;b]}{Min} f(x)=f(b)$

Câu 1. **(Mã 123 2017)** Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y=3$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $m>4$ **B.** $3<m\le 4$ **C.** $m<-1$ **D.** $1\le m<3$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\dfrac{-1-m}{(x-1)^2}$

* TH 1. $-1-m>0\Leftrightarrow m<-1$ suy ra y đồng biến trên $[2;4]$ suy ra

$\min\limits_{[2;4]} f(x)=f(2)=\dfrac{2+m}{1}=3\Leftrightarrow m=1$ (loại)

* TH 2. $-1-m<0\Leftrightarrow m>-1$ suy ra y nghịch biến trên $[2;4]$ suy ra

$\min\limits_{[2;4]} f(x)=f(4)=\dfrac{4+m}{3}=3\Leftrightarrow m=5$ suy ra $m>4$.

Câu 2. **(Mã 110 2017)** Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thoả mãn $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=\dfrac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m>4$ **B.** $2<m\le 4$ **C.** $m\le 0$ **D.** $0<m\le 2$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

☑ Nếu $m=1\Rightarrow y=1,\ \forall x\ne -1$. Không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

☑ Nếu $m<1\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[1;2]$.

Khi đó: $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=\dfrac{16}{3}\Leftrightarrow y(1)+y(2)=\dfrac{16}{3}\Leftrightarrow \dfrac{m+1}{2}+\dfrac{m+2}{3}=\dfrac{16}{3}\Leftrightarrow m=5$ (loại).

☑ Nếu $m>1\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên đoạn $[1;2]$.

Khi đó: $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=\dfrac{16}{3}\Leftrightarrow y(2)+y(1)=\dfrac{16}{3}\Leftrightarrow \dfrac{2+m}{3}+\dfrac{1+m}{2}=\dfrac{16}{3}\Leftrightarrow m=5$ (t/m)

Câu 3. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m>10$. **B.** $8<m<10$. **C.** $0<m<4$. **D.** $4<m<8$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=\dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

- Nếu $m=1\Rightarrow y=1$ (loại).

- Nếu $m\neq 1$khi đó $y'<0,\forall x\in[1;2]$ hoặc $y'>0,\forall x\in[1;2]$ nên hàm số đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất tại $x=1, x=2$.

Theo bài ra: $\max\limits_{[1;2]} y+\min\limits_{[1;2]} y=8\Leftrightarrow y(1)+y(2)=\dfrac{1+m}{2}+\dfrac{2+m}{3}=8\Leftrightarrow m=\dfrac{41}{5}\in(8;10)$.

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m^2-2}{x-m}$ trên đoạn $[0;4]$ bằng -1.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

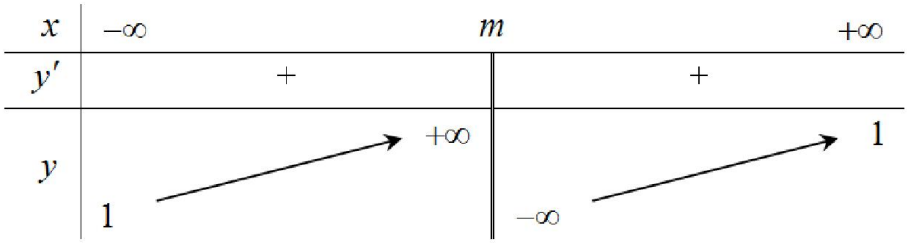
Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

$y'=\dfrac{m^2-m+2}{(x-m)^2}>0,\forall x\neq m$. Do đó hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;m)$ và $(m;+\infty)$.

Bảng biến thiên của hàm số:



Từ bảng biến thiên suy ra, hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;4]$ bằng -1 khi $\begin{cases}m<0\\ f(4)=-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ \dfrac{2-m^2}{4-m}=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ m^2+m-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ m=2,m=-3\end{cases}\Leftrightarrow m=-3$.

Câu 5. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-m^2}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[-3;-2]} y=\dfrac{1}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $3<m\leq 4$. **B.** $-2<m\leq 3$. **C.** $m>4$. **D.** $m\leq -2$.

Lời giải

Chọn B

+TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{m^2\}, [-3;-2]\subset D$.

+ Ta có $y'=\dfrac{-m^2-1}{(x-m^2)^2}<0, \forall x\in D$. Nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Nên $\min\limits_{[-3;-2]} y=\dfrac{1}{2}=y(-2)=\dfrac{-2+1}{-2-m^2}\Rightarrow -2-m^2=-2\Leftrightarrow m=0\Rightarrow -2<m\le 3$.

Câu 6. Tìm giá trị dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{m^2x-1}{x+2}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 1.

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=\sqrt{3}$. **C.** $m=4$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{2m^2+1}{(x+2)^2}>0, \forall x\ne -2$.

Hàm số đồng biến trên đoạn $[1;3]$ nên $\max\limits_{[1;3]} y=y(3)\Leftrightarrow\dfrac{3m^2-1}{5}=1\Leftrightarrow m=\sqrt{2}$ (vì $m>0$).

Câu 7. Cho hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x+8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng -3. Giá trị m_0 thuộc khoảng nào trong các khoảng cho dưới đây?

A. $(2;5)$. **B.** $(1;4)$. **C.** $(6;9)$. **D.** $(20;25)$.

Lời giải

Chọn A

+ TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-8\}$.

+ $y'=\dfrac{8+m^2}{(x+8)^2}>0, \forall x\in D$

Vậy hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x+8}$ đồng biến trên $[0;3]$.

$\Rightarrow \min\limits_{[0;3]} y=y(0)=\dfrac{-m^2}{8}$

Để $\min\limits_{[0;3]} y=-3\Leftrightarrow\dfrac{-m^2}{8}=-3\Leftrightarrow m=\pm 2\sqrt{6}$.

$\Rightarrow m_0=2\sqrt{6}\in(2;5)$. Vậy chọn**A.**

Câu 8. **(THPT Hai Bà Trưng - Huế 2019)** Tìm giá trị của tham số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2x+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;4]$ bằng 3.

A. $m=3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=7$. **D.** $m=5$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=\dfrac{2-m}{(x+1)^2}$.

+ Xét $m=2$.

$\Rightarrow$ Hàm số trở thành: $y=2$ là hàm số hằng nên không đạt giá trị nhỏ nhất bằng 3

$\Rightarrow m=2$ (loại)

+ Xét $m>2$.

$\Rightarrow y'=\dfrac{2-m}{(x+1)^2}<0\ (\forall x\neq -1) \Rightarrow \min\limits_{[0;4]} y=y(4)=\dfrac{8+m}{5}$.

$\Rightarrow \dfrac{8+m}{5}=3\Leftrightarrow m=7$ (thoả mãn).

+ Xét $m<2$.

$\Rightarrow y'=\dfrac{2-m}{(x+1)^2}>0\ (\forall x\neq -1) \Rightarrow \min\limits_{[0;4]} y=y(0)=m$.

$\Rightarrow m=3$ (loại).

Vậy $m=7$.

Câu 9. **(Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa 2019)** Tìm các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -2.

A. $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-2 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Hàm số đã cho liên tục trên $[0;1]$.

Ta có: $y'=\dfrac{1-(-m^2+m)}{(x+1)^2}=\dfrac{m^2-m+1}{(x+1)^2}>0;\ \forall x\in D$.

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[0;1]$.

Trên $[0;1]$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=0$.

Ta có: $y(0)=-2\Leftrightarrow -m^2+m=-2\Leftrightarrow m^2-m-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Câu 10. **(THPT Lê Văn Thịnh Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[0;1]} y=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1\le m<3$ **B.** $m>6$ **C.** $m<1$ **D.** $3<m\le 6$

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Với $m=1\Rightarrow y=1,\ \forall x\in[0;1]$ thì $\min\limits_{[0;1]} y\neq 3$.

Suy ra $m \neq 1$. Khi đó $y' = \dfrac{1-m}{(x+1)^2}$ không đổi dấu trên từng khoảng xác định.

TH 1: $y' > 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì $\min\limits_{[0;1]} y = y(0) \Rightarrow m = 3$ (loại).

TH 2: $y' < 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì $\min\limits_{[0;1]} y = y(1) \Rightarrow m = 5$ (thỏa mãn).

Câu 11. **(Chuyên KHTN 2019)** Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x+m}{x+1}$ trên $[1;2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m > 10$. **B.** $8 < m < 10$. **C.** $0 < m < 4$. **D.** $4 < m < 8$.

Lời giải

Nếu $m = 1$ thì $y = 1$ (không thỏa mãn tổng của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất bằng 8)

Nếu $m \neq 1$ thì hàm số đã cho liên tục trên $[1;2]$ và $y' = \dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

Khi đó đạo hàm của hàm số không đổi dấu trên đoạn $[1;2]$.

Do vậy $\underset{x\in[1;2]}{Min}\, y + \underset{x\in[1;2]}{Max}\, y = y(1) + y(2) = \dfrac{m+1}{2} + \dfrac{m+2}{3} = 8 \Leftrightarrow m = \dfrac{41}{5}$.

Câu 12. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Gọi A, B lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x+m^2+m}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A + B = \dfrac{13}{2}$.

A. $m = 1; m = -2$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = \pm 2$. **D.** $m = -1; m = 2$.

Lời giải

Nguyễn Bảo Vương

Xét hàm số $y = \dfrac{x+m^2+m}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$.

$y' = \dfrac{-m^2-m-1}{(x-1)^2} < 0 \ \forall x \in [2;3] \Rightarrow A = f(3) = \dfrac{m^2+m+3}{2}, B = f(2) = \dfrac{m^2+m+2}{1}$.

$A + B = \dfrac{13}{2} \Leftrightarrow \dfrac{m^2+m+3}{2} + \dfrac{m^2+m+2}{1} = \dfrac{13}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -2 \end{array}\right.$.

Câu 13. **(Sở Hưng Yên)** Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x-m^2}{x+8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng -3. Giá trị m_0 thuộc khoảng nào trong các khoảng cho dưới đây?

A. $(20;25)$. **B.** $(5;6)$. **C.** $(6;9)$. **D.** $(2;5)$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x-m^2}{x+8}$ trên đoạn $[0;3]$.

Ta có: $y' = \dfrac{8+m^2}{(x+8)^2} > 0, \forall x \in [0;3] \Rightarrow$ hàm số $f(x) = \dfrac{x-m^2}{x+8}$ đồng biến trên đoạn $[0;3]$

$\Rightarrow \min\limits_{[0;3]} f(x) = f(0) = \dfrac{-m^2}{8}$.

Theo giả thiết, ta có: $\min\limits_{[0;3]} f(x) = -3 \Leftrightarrow \dfrac{-m^2}{8} = -3 \Leftrightarrow m^2 = 24 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2\sqrt{6} \\ m = -2\sqrt{6} \end{array}\right.$.

Mà $m > 0, m \in \mathbb{R} \Rightarrow m = 2\sqrt{6} \approx 4,9 \in (2;5)$.

Câu 14. **(Chuyên - Vĩnh Phúc 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0.

A. $m = 2$. **B.** $m = 6$. **C.** $m = 0$. **D.** $m = 4$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1;1]$, ta có $y' = -3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;1] \\ x = -2 \notin [-1;1] \end{array}\right.$

Mà $\begin{cases} y'(-1) = \text{m} - 2 \\ y'(0) = \text{m} \\ y'(1) = \text{m} - 4 \end{cases}$

Do đó $\min\limits_{[-1;1]} y = -4 + m = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

Vậy $m = 4$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 15. **(Sở Quảng Trị 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng $\sqrt{2}$

A. $m = \sqrt{2}$. **B.** $m = 2 + \sqrt{2}$. **C.** $m = 4 + \sqrt{2}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m = 2 + \sqrt{2} \\ m = 4 + \sqrt{2} \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn C

$y' = 3x^2 - 6x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Trên $[-1;1]$ thì $y'_{(-1)} = m - 4; y'_{(0)} = m; y'_{(1)} = m - 2$

nên $\underset{[-1;1]}{Miny} = \sqrt{2} \Leftrightarrow m - 4 = \sqrt{2} \Leftrightarrow m = 4 + \sqrt{2}$

Câu 16. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Có một giá trị m_0 của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[0;1]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $2018m_0 - m_0^2 \geq 0$. **B.** $2m_0 - 1 < 0$. **C.** $6m_0 - m_0^2 < 0$. **D.** $2m_0 + 1 < 0$.

Lời giải

+ Đặt $f(x)=x^3+(m^2+1)x+m+1$.

+ Ta có: $y'=3x^2+m^2+1$. Dễ thấy rằng $y'>0$ với mọi x, m thuộc $\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số đồng biến trên $[0;1]$. Vì thế $\min\limits_{[0;1]} y=\min\limits_{[0;1]} f(x)=f(0)=m+1$.

+ Theo bài ra ta có: $m+1=5$, suy ra $m=4$.

+ Như vậy $m_0=4$ và mệnh đề đúng là $2018m_0-m_0^2\geq 0$.

Câu 17. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Nếu hàm số $y=x+m+\sqrt{1-x^2}$ có giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{2}$ thì giá trị của m là

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $-\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Xét hàm số $y=x+m+\sqrt{1-x^2}$

Tập xác định: $D=[-1;1]$.

Ta có: $y'=1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$y'=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{1-x^2}=x\\1-x^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1>x\geq 0\\\sqrt{1-x^2}=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1>x\geq 0\\2x^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1>x\geq 0\\\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Nguyễn Bảo Vương

Ta có: $y(-1)=-1+m$, $y(1)=1+m$, $y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}+m$.

Do hàm số $y=x+m+\sqrt{1-x^2}$ liên tục trên $[-1;1]$ nên $\max\limits_{[-1;1]} y=m+\sqrt{2}$.

Theo bài ra thì $\max\limits_{[-1;1]} y=2\sqrt{2}$, suy ra $m+\sqrt{2}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow m=\sqrt{2}$.

Câu 18. **(THPT Ngô Gia Tự Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $y=2x^3-3x^2-m$. Trên $[-1;1]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất là -1. Tính m?

A. $m=-6$. **B.** $m=-3$. **C.** $m=-4$. **D.** $m=-5$.

Lời giải

Chọn C

Xét $[-1;1]$ có $y'=6x^2-6x$.

$$y'=0\Leftrightarrow 6x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in[-1;1]\\x=1\in[-1;1]\end{array}\right.$$

Khi đó

$y(-1)=-5-m$; $y(0)=-m$; $y(1)=-1-m$

Ta thấy $-5-m<-1-m<-m$ nên $\min\limits_{[-1;1]} y=-5-m$.

Theo bài ra ta có $\min\limits_{[-1;1]} y=-1$ nên $-5-m=-1\Leftrightarrow m=-4$.

Câu 19. Biết S là tập giá trị của m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^4-m^2x^3-2x^2-m$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -16. Tính tích các phần tử của S.

A. 2. **B.** -2. **C.** -15. **D.** -17.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=4x^3-3m^2x^2-4x$

$$y'=0\Leftrightarrow 4x^3-3m^2x^2-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\4x^2-3m^2x-4=0\ (\Delta=9m^2+64)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{3m^2+\sqrt{9m^4+64}}{8}>1\\x=\dfrac{3m^2-\sqrt{9m^4+64}}{8}<0\end{array}\right.$$

Nên hàm số đơn điệu trên $(0;1)$.

Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;1]$ bằng -16 nên $y(0)+y(1)=-16\Leftrightarrow -m+(-m^2-m-1)=-16\Leftrightarrow -m^2-2m+15=0$.

Vậy $m_1.m_2=-15$.

Câu 20. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ tại một điểm $x_0\in(0;2)$.

A. $0<m<1$ **B.** $m>1$ **C.** $m>2$ **D.** $-1<m<1$

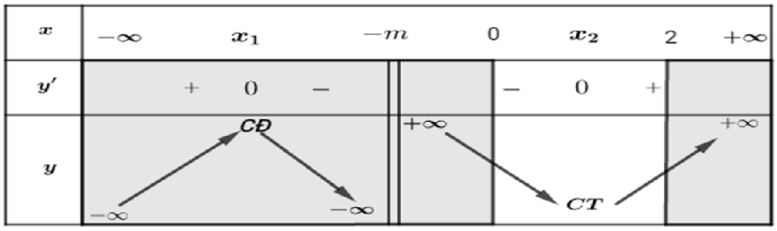
Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$. Hàm số liên tục trên $[0;2]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-m<0\\-m>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>0\\m<-2\end{array}\right.$

Ta có $y'=\dfrac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}=\dfrac{(x+m)^2-1}{(x+m)^2}$. Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-m-1\\x_2=-m+1\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên



Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0\in(0;2)$ nên $0<-m+1<2\Leftrightarrow -1<m<1$

So với điều kiện hàm số liên tục trên đoạn $[0;2]$. Ta có $0<m<1$.

CÓ THỂ GIẢI NHƯ SAU:

Điều kiện xác định $x\neq -m$

Hàm số liên tục trên đoạn $[0;2]$ nên $-m \notin [0;2] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -m<0 \\ -m>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>0 \\ m<-2 \end{array}\right. (*)$

$y' = \dfrac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2} = \dfrac{(x+m)^2-1}{(x+m)^2}$

$y'=0$ có hai nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x_1=-m+1 \\ x_2=-m-1 \end{array}\right.$,

$x_1-x_2=2$ nên chỉ có nhiều nhất một nghiệm thuộc $(0;2)$

Ta thấy $-m+1>-m-1, \forall m$ và do đó để hàm số liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;2]$ tại một điểm $x_0 \in (0;2)$ thì $0<-m+1<2 \Leftrightarrow -1<m<1 (**)$

Từ $(*),(**)$ ta có $0<m<1$

Câu 21. **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{1-m\sin x}{\cos x+2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;10]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số nhỏ hơn -2?

A. 1. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y=\dfrac{1-m\sin x}{\cos x+2} \Leftrightarrow y\cos x+m\sin x=1-2y$.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi: $y^2+m^2 \geq 1-4y+4y^2 \Leftrightarrow 3y^2-4y+1-m^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2-\sqrt{1+3m^2}}{3} \leq y \leq \dfrac{2+\sqrt{1+3m^2}}{3}$.

Theo đề bài, ta có: $\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}} y = \dfrac{2-\sqrt{1+3m^2}}{3} < -2 \\ m \in [0;10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+3m^2}>8 \\ m\in[0;10] \\ m\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2>63 \\ m\in[0;10] \\ m\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2>21 \\ m\in[0;10] \\ m\in\mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow m \in \{5,6,7,8,9,10\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 22. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=ax^3+cx+d$, $a\neq 0$ có $\min\limits_{x\in(-\infty;0)} f(x)=f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

A. $d-11a$. **B.** $d-16a$. **C.** $d+2a$. **D.** $d+8a$.

Lời giải

Vì $y=ax^3+cx+d$, $a\neq 0$ là hàm số bậc ba và có $\min\limits_{x\in(-\infty;0)} f(x)=f(-2)$ nên $a<0$ và $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

Ta có $y'=3ax^2+c=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow ac<0$.

Vậy với $a<0, c>0$ thì $y'=0$ có hai nghiệm đối nhau $x=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{3a}}$

Từ đó suy ra $\min\limits_{x\in(-\infty;0)} f(x)=f\left(-\sqrt{-\dfrac{c}{3a}}\right) \Leftrightarrow -\sqrt{-\dfrac{c}{3a}}=-2 \Leftrightarrow \sqrt{-\dfrac{c}{3a}}=2 \Leftrightarrow c=-12a$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		1		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$					0	$-$			
y	$+\infty$	↘	$f(-2)$	↗					$f(2)$	↘			$-\infty$

Ta suy ra $\max\limits_{x\in[1;3]} f(x)=f(2)=8a+2c+d=-16a+d$.

Câu 23. **(THPT Nghĩa Hưng Nam Định 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+m}{x^2+x+1}$ có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$ nhỏ hơn hoặc bằng 1.

A. $m\le 1$. **B.** $m\ge 1$. **C.** $m\ge -1$. **D.** $m\le -1$.

Lời giải

Chọn A

+ TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

+ $\lim\limits_{x\to\infty} y=0$

+ $y'=\dfrac{-x^2-2mx+1-m}{\left(x^2+x+1\right)^2}$.

$y'=0 \Leftrightarrow -x^2-2mx+1-m=0$ (*)

$\Delta'_{(*)}=m^2-m+1>0, \forall m\in\mathbb{R}$ nên (*) có 2 nghiệm phân biệt $x_1<x_2$, $\forall m\in\mathbb{R}$

+ BBT:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	↘	$f(x_1)$	↗	$f(x_2)$	↘	0

Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất là $f(x_2)=\dfrac{1}{2x_2+1}$ với $x_2=-m+\sqrt{m^2-m+1}$

$YCBT \Leftrightarrow \dfrac{1}{-2m+2\sqrt{m^2-m+1}+1}\le 1 \Leftrightarrow 1-2m+2\sqrt{m^2-m+1}\ge 1$ (vì $f(x_2)>0 \Rightarrow 2x_2+1>0$)

$\Leftrightarrow \sqrt{m^2-m+1}\ge m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ \begin{cases} m\ge 0 \\ m^2-m+1\ge m^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m\le 1$

Câu 24. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x^3+x^2-m}{x+1}$ trên $[0;2]$ bằng 5. Tham số m nhận giá trị là

A. -5. **B.** 1. **C.** -3. **D.** -8.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}\Rightarrow[0;2]\subset D$.

Ta có: $y=\dfrac{x^3+x^2-m}{x+1}\Rightarrow y'=\dfrac{2x^3+4x^2+2x+m}{(x+1)^2}$.

$y'=0\Leftrightarrow 2x^3+4x^2+2x+m=0\Leftrightarrow -(2x^3+4x^2+2x)=m$ (1).

Ta có $y(0)=-m; y(2)=4-\dfrac{m}{3}$

Đặt $g(x)=-(2x^3+4x^2+2x)\Rightarrow g'(x)=-(6x^2+8x+2)=0\Leftrightarrow x=-1\vee x=-\dfrac{1}{3}$.

Trên $[0;2]$ ta có bảng biến thiên:

x	0		2
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	↘	-36

Từ bảng biến thiên ta có $g(x)\in[-36;0],\forall x\in[0;2]$.

Trường hợp 1: $m>0\Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ vô nghiệm.

Dễ thấy $y(0)=-m<y(2)=4-\dfrac{m}{3}$ *khi* $m>0$.

Khi đó $\underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=y(2)=4-\dfrac{m}{3}=5\Leftrightarrow m=-3$ loại do $m>0$.

Trường hợp 2: $m<-36\Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ vô nghiệm.

Dễ thấy $y(0)=-m>y(2)=4-\dfrac{m}{3}$ *khi* $m<-36$.

Khi đó $\underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=y(0)=-m=5\Leftrightarrow m=-5$ loại do $m<-36$.

Trường hợp 3: $m\in[-36;0]\Rightarrow$ phương trình $y'=0$ có nghiệm duy nhất (giả sử $x=x_0$).

Trên $[0;2]$ ta có bảng biến thiên:

x	0	x_0	2
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	$y(x_0)$	-36

Nhìn vào bảng biến thiên ta có:

$+ x = x_0 : g(x) = m \Leftrightarrow -\left(2x^3 + 4x^2 + 2x\right) = m \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + 2x + m = 0 \Leftrightarrow y' = 0$.

$+ x \in (0; x_0) : g(x) > m \Leftrightarrow -\left(2x^3 + 4x^2 + 2x\right) > m \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + 2x + m < 0 \Leftrightarrow y' < 0$.

$+ x \in (x_0; 0) : g(x) < m \Leftrightarrow -\left(2x^3 + 4x^2 + 2x\right) < m \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + 2x + m > 0 \Leftrightarrow y' > 0$.

Ta có bảng biến thiên sau:

x	0	x_0	2
y'	$-$	0	$+$
y	$y(0)$	$y(x_0)$	$y(2)$

Từ bảng biến thiên ta thấy $\underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y \in \{y(2); y(0)\}$.

Nếu $m \in [-36; -6] \Rightarrow y(0) \geq y(2) \Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y = y(0) = -m = 5 \Leftrightarrow m = -5\ (l)$.

Nếu $m \in [-6; 0] \Rightarrow y(0) \leq y(2) \Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y = y(2) = 4 - \frac{m}{3} = 5 \Leftrightarrow m = -3\ (n)$.

Vậy $m = -3$ thỏa đề.

Cách 2:

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\} \Rightarrow [0;2] \subset D$.

Ta có: $y = \frac{x^3 + x^2 - m}{x+1} = x^2 - \frac{m}{x+1} \Rightarrow y' = 2x + \frac{m}{(x+1)^2}$.

Trường hợp 1: $m \geq 0 \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \in [0;2] \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $[0;2]$.

$\Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y = y(2) = 4 - \frac{m}{3} = 5 \Leftrightarrow m = -3$ loại do $m > 0$.

Trường hợp 2: $m < 0$, giả sử $\Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y = y(x_0)$ với $x_0 \in (0;2)$. Do hàm số liên tục trên $[0;2]$

$$\Rightarrow \begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y(x_0)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2x_0(x_0+1)^2 \\ \dfrac{x_0^3+x_0^2-m}{x_0+1}=5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_0^3+x_0^2+2x_0(x_0+1)^2=5(x_0+1) \Leftrightarrow x_0=\frac{-5}{3} \vee x=1(n) \Rightarrow m=-8.$$

Khi đó: $y'=2x+\dfrac{-8}{(x+1)^2}=\dfrac{2x^3+4x^2+2x-8}{(x+1)^2} \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow x=1.$

Ta có bảng biên thiên:

x	0		1		2
y'		$-$	0	$+$	
y	8	↘	5	↗	$\frac{20}{3}$

$\Rightarrow m=-8$ không thỏa yêu cầu đề.

Nên không tồn tại $x_0 \in (0;2)$ để $\underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=y(x_0)$.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=y(2) \Rightarrow m=-5 \\ \underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=y(0) \Rightarrow m=-3 \end{array}\right.$$

Nếu $m=-5 \Rightarrow y(0)=5; y(2)=\dfrac{17}{3} \Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=y(2)=\dfrac{17}{3} \neq 5 \Rightarrow m=-5(l)$.

Nếu $m=-3 \Rightarrow y(0)=3; y(2)=5 \Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=y(2)=5 \Rightarrow m=-3(n)$.

Vậy $m=-3$ thỏa đề.

Câu 25. Cho hàm số $y=(x^3-3x+m)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1 là

A. 1. **B.** -4. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

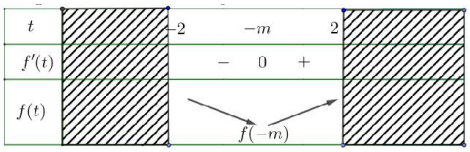
$D=\mathbb{R}$.

Đặt $t=x^3-3x,\ x\in[-1;1] \Rightarrow t\in[-2;2]$.

Khi đó ta có hàm số $f(t)=(t+m)^2$.

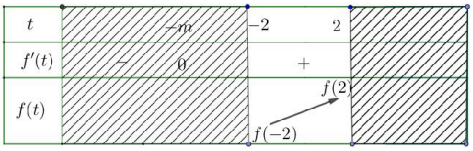
$f'(t)=2(t+m); f'(t)=0 \Leftrightarrow t=-m.$

Trường hợp 1: $-2<-m<2 \Leftrightarrow -2<m<2.$



Từ bảng biến thiên ta thấy: $\min\limits_{[-2;2]} f(t) = f(-m) = 0$ không thỏa mãn yêu cầu.

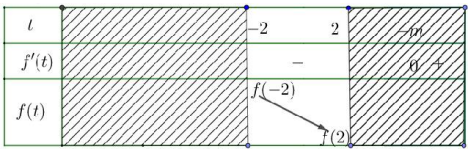
Trường hợp 2: $-m \le -2 \Leftrightarrow m \ge 2$



Từ bảng biến thiên ta thấy: $\min\limits_{[-2;2]} f(t) = f(-2) = (m-2)^2$.

Theo yêu cầu bài toán: $(m-2)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=1 \end{array}\right. \xrightarrow{m \ge 2} m = 3.$

Trường hợp 3: $-m \ge 2 \Leftrightarrow m \le -2$



Từ bảng biến thiên ta thấy: $\min\limits_{[-2;2]} f(t) = f(2) = (m+2)^2$.

Theo yêu cầu bài toán: $(m+2)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=-1 \end{array}\right. \xrightarrow{m \le -2} m = -3.$

Vậy tổng các giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu là: $3+(-3)=0$.

Câu 26. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2018)** Tìm tất cả các giá trị của $m>0$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[m+1; m+2]$ luôn bé hơn 3.

A. $m \in (0;2)$. **B.** $m \in (0;1)$. **C.** $m \in (1;+\infty)$. **D.** $m \in (0;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ do đó $y_{CT} = y(1) = -1$ và $y_{CD} = y(-1) = 3$.

Thấy ngay với $m>0$ thì trên đoạn $[m+1; m+2]$ hàm số luôn đồng biến.

Vậy GTNN của hàm số đã cho trên đoạn $[m+1; m+2]$ là $y(m+1) = (m+1)^3 - 3(m+1) + 1$.

GTNN luôn bé hơn $3 \Leftrightarrow (m+1)^3 - 3(m+1) - 2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 < 2 \\ m+1 \ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \ne -2 \end{cases}$.

Kết hợp điều kiện $m>0$ ta được $m \in (0;1)$.

Câu 27. **(Chuyên Đh Vinh 2018)** Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = mx + \dfrac{36}{x+1}$ trên $[0;3]$ bằng 20. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0 < m \le 2$. **B.** $4 < m \le 8$. **C.** $2 < m \le 4$. **D.** $m > 8$.

Lời giải

$y = mx + \dfrac{36}{x+1} \Rightarrow y' = m - \dfrac{36}{(x+1)^2}$

Trường hợp 1: $m = 0$, ta có $y' = -\dfrac{36}{(x+1)^2} < 0, \forall x \neq -1$. Khi đó $\min\limits_{x\in[0;3]} y = y(3) = 9$ (loại).

Trường hợp 2: $m \neq 0$

□ Nếu $m < 0$, ta có $y' < 0$, $\forall x \neq -1$ Khi đó $\min\limits_{x\in[0;3]} y = y(3) \Leftrightarrow 20 = 3m + 9 \Leftrightarrow m = \dfrac{11}{3}$ (loại).

□ Nếu $m > 0$, khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow m - \dfrac{36}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = \dfrac{36}{m} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{6}{\sqrt{m}} - 1 \\ x = -\dfrac{6}{\sqrt{m}} - 1 \ (l) \end{array}\right.$.

□ $0 < \dfrac{6}{\sqrt{m}} - 1 \le 3 \Leftrightarrow \dfrac{4}{9} < m \le 36$, $\min\limits_{x\in[0;3]} y = y\left(\dfrac{6}{\sqrt{m}} - 1\right) = 12\sqrt{m} - m = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = 100 (l) \end{array}\right.$.

□ $\dfrac{6}{\sqrt{m}} - 1 > 3 \Leftrightarrow m < \dfrac{9}{4}$, $\min\limits_{x\in[0;3]} y = y(3) \Leftrightarrow 20 = 3m + 9 \Leftrightarrow m = \dfrac{11}{3} (l)$.

Câu 28. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 2020$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = m - 1 \\ x_2 = m + 1 \end{array}\right.$.

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$ thì $x_1 \le 0 < x_2$ hoặc $0 < x_1 < x_2$.

TH1: $x_1 \le 0 < x_2 \Leftrightarrow m - 1 \le 0 < m + 1 \Leftrightarrow -1 < m \le 1$. Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0;1\}$.

BBT của hàm số:

x	0		$m+1$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		↘		↗	

TH2: $0 < x_1 < x_2$.

BBT của hàm số

x	0		$m-1$		$m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↗	

Hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m - 1 > 0 \\ y(m+1) \le y(0) \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ (m+1)^3 - 3m(m+1)^2 + 3(m^2 - 1)(m+1) + 2020 \le 2020 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ (m+1)^2(m-2)\le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ \left[\begin{array}{l} m\le 2 \\ m=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 1<m\le 2.$

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=2$.

Vậy $m\in\{0;1;2\}$.

Câu 29. **(Sở Bình Phước - 2020)** Cho hàm số $f(x)=m\sqrt{x-1}$ (m là tham số thực khác 0). Gọi m_1, m_2 là hai giá trị của m thoả mãn $\min\limits_{[2;5]} f(x)+\max\limits_{[2;5]} f(x)=m^2-10$. Giá trị của m_1+m_2 bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=m.\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$;

Do $m\neq 0$ nên $f'(x)$ khác 0 và có dấu không thay đổi với $\forall x\in(1;+\infty)$.

Nếu $m>0$ thì $f'(x)>0,\forall x\in[2;5]$. Do đó $\min\limits_{[2;5]} f(x)=f(2)=m;\ \max\limits_{[2;5]} f(x)=f(5)=2m.$

$\min\limits_{[2;5]} f(x)+\max\limits_{[2;5]} f(x)=m^2-10$

$\Leftrightarrow m+2m=m^2-10$

$\Leftrightarrow m^2-3m-10=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1=-2 \\ m_2=5 \end{array}\right.$

Do $m>0$ nên nhận $m_2=5$.

Nếu $m<0$ thì $f'(x)<0,\forall x\in[2;5]$. Do đó $\min\limits_{[2;5]} f(x)=f(5)=2m;\ \max\limits_{[2;5]} f(x)=f(2)=m.$

$\min\limits_{[2;5]} f(x)+\max\limits_{[2;5]} f(x)=m^2-10$

$\Leftrightarrow 2m+m=m^2-10$

$\Leftrightarrow m^2-3m-10=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1=-2 \\ m_2=5 \end{array}\right.$

Do $m<0$ nên nhận $m_1=-2$.

Vậy $m_1+m_2=3$.

Câu 30. **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020)** Cho hàm số $y=\dfrac{m\sin x+1}{\cos x+2}$ có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5;5]$

để giá trị nhỏ nhất của y nhỏ hơn -1.

A. 4. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\cos x+2\neq 0$ luôn đúng $\forall x\in\mathbb{R}$.

$y=\dfrac{m\sin x+1}{\cos x+2}\Leftrightarrow y(\cos x+2)=m\sin x+1$ (do $\cos x+2\neq 0$ luôn đúng $\forall x\in\mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow m\sin x - y\cos x = 2y-1(*)$.

Phương trình (*) có nghiệm

$\Leftrightarrow m^2+y^2 \ge (2y-1)^2 \Leftrightarrow 3y^2-4y+1-m^2 \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-\sqrt{1+3m^2}}{3} \le y \le \dfrac{2+\sqrt{1+3m^2}}{3}$.

Vậy $\underset{\mathbb{R}}{Min}\, y = \dfrac{2-\sqrt{1+3m^2}}{3}$.

$\underset{\mathbb{R}}{Min}\, y < -1 \Leftrightarrow \dfrac{2-\sqrt{1+3m^2}}{3} < -1 \Leftrightarrow \sqrt{1+3m^2} > 5 \Leftrightarrow m^2-8>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2\sqrt{2} \approx 2,82 \\ m < -2\sqrt{2} \approx -2,82 \end{array}\right.$.

Mà $m \in \mathbb{Z}, m \in [-5;5]$ nên $m \in \{-5;-4;-3;3;4;5\}$.

Câu 31. **(Lê Lai - Thanh Hóa - 2020)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{34}{\sqrt{(x^3-3x+2m)^2+1}}$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 8. **B.** -8. **C.** -6. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\sqrt{(x^3-3x+2m)^2} = |x^3-3x+2m|$

Nhận thấy $\min\limits_{[0;3]} f(x) = 2 \Leftrightarrow \max\limits_{[0;3]} |x^3-3x+2m| = 16 \quad (1)$.

Xét hàm số $g(x) = x^3-3x+2m$ trên $[0;3]$, ta có:

+ $g'(x) = 3x^2-3$, $g'(x) = 3x^2-3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in (0;3) \\ x = -1 \notin (0;3) \end{array}\right.$

+ $g(0) = 2m$, $g(1) = 2m-2$, $g(3) = 2m+18$

Do đó $2m-2 \le g(x) \le 2m+18, \forall x \in [0;3]$, tức $\max\limits_{[0;3]} |x^3-3x+2m| = \max\limits_{[0;3]} \{|2m-2|;|2m+18|\}$.

Từ đây ta có $(1) \Leftrightarrow \max\limits_{[0;3]} \{|2m-2|;|2m+18|\} = 16$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |2m+18| > |2m-2| \\ |2m+18| = 16 \end{cases} \\ \begin{cases} |2m+18| \le |2m-2| \\ |2m-2| = 16 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = -7 \end{array}\right.$. Suy ra $S = \{-7;-1\}$. Vậy, tổng các phần tử của S là -8.

Câu 32. **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho hàm số $y = (x^3-3x+m+1)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1 là

A. -2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Đặt $y = f(x) = (x^3-3x+m+1)^2$ là hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-1;1]$.

Ta có $y' = f'(x) = 2(x^3-3x+m+1)(3x^2-3)$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ m=-x^3+3x-1=g(x) \end{array}\right.$.

Ta khảo sát hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-1;1]$.

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Nếu $m \in [-3;1]$ thì luôn tồn tại $x_0 \in [-1;1]$ sao cho $m=g(x_0)$ hay $f(x_0)=0$. Suy ra $\min\limits_{[-1;1]} y=0$, tức là không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $m \notin [-3;1]$ thì $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1 \in [-1;1]$.

Ta có: $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=\min\{f(1);f(-1)\}=\min\{(m-1)^2;(m+3)^2\}$

Trường hợp 1: $m>1$ tức là $m+3>m-1>0$ suy ra

$$\min_{[-1;1]} f(x)=(m-1)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \ (TM) \\ m=0 \ (KTM) \end{array}\right.$$

Trường hợp 2: $m<-3$ tức là $m-1<m+3<0$ suy ra

$$\min_{[-1;1]} f(x)=(m+3)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-4 \ (TM) \\ m=-2 \ (KTM) \end{array}\right.$$

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán: $m=2; m=-4$, từ đó tổng tất cả các giá trị của m là -2.

Câu 33. **(Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)=m^2\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)+4\sqrt{4-x^2}+m+1$. Tính tổng tất cả các giá trị của m để hàm số $y=f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng 4.

A. $-\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=[-2;2]$.

Đặt $t=\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}$; $t \in \left[2;2\sqrt{2}\right]$.

$\Leftrightarrow t^2=4+2\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow 2\sqrt{4-x^2}=t^2-4$.

$\Rightarrow y=g(t)=m^2t+2\left(t^2-4\right)+m+1=2t^2+m^2t+m-7$ với $t \in \left[2;2\sqrt{2}\right]$.

Ta có: $g'(t)=4t+m^2$.

$g'(t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{-m^2}{4}<0; \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow g(t)$ đồng biến trên $\left[2;2\sqrt{2}\right] \Rightarrow \min\limits_{[2;2\sqrt{2}]} g(t)=g(2)=4$.

Mà $g(2)=2m^2+m+1 \Leftrightarrow 2m^2+m+1=4 \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\frac{3}{2} \end{array}\right.$.

Tổng các giá trị của m thỏa mãn ycbt là $S=1+\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}$.

Câu 34. **(Chuyên Nguyễn Trãi - Hải Dương - Lần 2 - 2020)** Cho hàm số $f(x)=\frac{2x-m}{x+1}$ với $m\neq -2$.

Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\max\limits_{[1;3]} f(x)=\max\left\{\frac{2-m}{2};\frac{6-m}{4}\right\}$.

B. $\max\limits_{[1;3]} f(x)=\frac{6-m}{4}$ khi $m<-2$.

C. $\min\limits_{[1;3]} f(x)=\min\left\{\frac{2-m}{2};\frac{6-m}{4}\right\}$.

D. $\min\limits_{[1;3]} f(x)=\frac{2-m}{2}$ khi $m>-2$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x)=\frac{2x-m}{x+1}$ với $m\neq -2$.

Tập xác định $x\neq -1$.

Ta có $f'(x)=\frac{2+m}{(x+1)^2}$ suy đạo hàm không đổi dấu $x\in[1;3]$ suy ra

$$\max_{[1;3]} f(x)=\max\{f(1);f(3)\}=\max\left\{\frac{2-m}{2};\frac{6-m}{4}\right\};$$

$$\min_{[1;3]} f(x)=\min\{f(1);f(3)\}=\min\left\{\frac{2-m}{2};\frac{6-m}{4}\right\}.$$

Xét với $m<-2\Rightarrow f'(x)<0\ \forall x\in[1;3]$. Vậy

$$\forall x\in[1;3]\Rightarrow f(x)\le f(1)=\frac{2-m}{2}\Rightarrow \max_{[1;3]} f(x)=\frac{2-m}{2}.$$

Xét với $m>-2\Rightarrow f'(x)>0\ \forall x\in[1;3]$. Vậy

$$\forall x\in[1;3]\Rightarrow f(x)\ge f(1)=\frac{2-m}{2}\Rightarrow \min_{[1;3]} f(x)=\frac{2-m}{2}.$$

Câu 35. **(Chuyên Sư Phạm Hà Nội - 2020)** Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-20\,;\,20]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{x+m+6}{x-m}$ trên đoạn $[1\,;\,3]$ là số dương?

A. 9. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Để hàm số có giá trị lớn nhất trên $[1\,;\,3]$ thì $m\notin[1\,;\,3]$.

$$y'=\frac{-2m-6}{(x-m)^2}.$$

Trường hợp 1: $-2m-6>0\Leftrightarrow m<-3$.

Khi đó $\max\limits_{x\in[1\,;\,3]} y=y(3)=\frac{m+9}{3-m}$.

Để giá trị lớn nhất trên đoạn $[1\,;\,3]$ là số dương thì $\frac{m+9}{3-m}>0\Leftrightarrow m+9>0\Leftrightarrow m>-9$.

Vậy các số nguyên m thỏa là -8, -7, -6, -5, -4.

Trường hợp 2: $-2m-6<0\Leftrightarrow m>-3$.

Khi đó $\max\limits_{x\in[1;3]} y = y(1) = \dfrac{m+7}{1-m}$.

Để giá trị lớn nhất trên đoạn $[1;3]$ là số dương thì $\dfrac{m+7}{1-m} > 0 \Leftrightarrow 1-m > 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Vậy các số nguyên m thỏa mãn là $-2,\ -1,\ 0$.

Trường hợp 3: $-2m-6=0 \Leftrightarrow m=-3$.

Khi đó $y=1$. Nên $\max\limits_{x\in[1;3]} y = 1$.

Vậy $m=-3$ thỏa.

Kết luận: có 9 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

---------- HẾT ----------

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 5 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI – MỨC ĐỘ 9-10 ĐIỂM

Dạng 1. Định m để GTLN-GTNN của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối thỏa mãn điều kiện cho trước

Dạng 1: Tìm m để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y=\left|f\left(x\right)+m\right|=a\ \ (a>0)$.

Phương pháp:

Cách 1: Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f\left(x\right)=K;\qquad \min\limits_{[\alpha;\beta]} f\left(x\right)=k\ \left(K>k\right)$.

Kiểm tra $\max\left\{\left|m+K\right|,\left|m+k\right|\right\}\ge\dfrac{\left|m+K\right|+\left|m+k\right|}{2}\ge\dfrac{\left|m+K-m-k\right|}{2}=\dfrac{\left|K-k\right|}{2}$.

TH1: $\dfrac{\left|K-k\right|}{2}\le a$. Để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y=a\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m+k=-a\\m+K=a\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-a-k\\m=a-K\end{array}\right.\Rightarrow m\in\left\{-a-k;a-K\right\}$.

TH2: $\dfrac{\left|K-k\right|}{2}>a\ \Rightarrow m\in\varnothing$.

Cách 2: Xét trường hợp

TH1: $Max=\left|m+K\right|\Leftrightarrow\begin{cases}\left|m+K\right|=a\\\left|m+K\right|\ge\left|m+k\right|\end{cases}$

TH2: $Max=\left|m+k\right|\Leftrightarrow\begin{cases}\left|m+k\right|=a\\\left|m+k\right|\ge\left|m+K\right|\end{cases}$

Dạng 2: Tìm m để $\min\limits_{[\alpha;\beta]} y=\left|f\left(x\right)+m\right|=a\ \ (a>0)$.

Phương pháp:

Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f\left(x\right)=K;\qquad \min\limits_{[\alpha;\beta]} f\left(x\right)=k\ \left(K>k\right)$.

Để $\min\limits_{[\alpha;\beta]} y=a\Leftrightarrow\begin{cases}m+k=a\\m+k>0\end{cases}\vee\begin{cases}m+K=-a\\m+K<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=a-k\\m>-k\end{cases}\vee\begin{cases}m=-a-K\\m<-K\end{cases}$. Vậy $m\in S_1\cup S_2$.

Dạng 3: Tìm m để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y=\left|f\left(x\right)+m\right|$ không vượt quá giá trị M cho trước.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f\left(x\right)=K;\qquad \min\limits_{[\alpha;\beta]} f\left(x\right)=k\ \left(K>k\right)$.

Để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y\le M\Rightarrow\begin{cases}m+k\ge-M\\m+K\le M\end{cases}\Leftrightarrow-M-k\le m\le M-K.$

Dạng 4: Tìm m để $\min\limits_{[\alpha;\beta]} y=\left|f\left(x\right)+m\right|$ không vượt quá giá trị a cho trước.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f\left(x\right)=K;\qquad \min\limits_{[\alpha;\beta]} f\left(x\right)=k\ \left(K>k\right)$.

Để

$\min\limits_{[\alpha;\beta]} y\le a\Leftrightarrow\begin{cases}m+k\le a\\m+k\ge0\end{cases}\vee\begin{cases}m+K\ge-a\\m+K\le0\end{cases}\vee\left(m+K\right)\left(m+k\right)<0\Leftrightarrow\begin{cases}m\le a-k\\m\ge-k\end{cases}\vee\begin{cases}m\ge-a-K\\m\le-K\end{cases}\vee-K<m<-k.$

Dạng 5: Tìm m để $\max\limits_{[a;b]} y=\left|f\left(x\right)+m\right|$ đạt min.

Phương pháp:

Trước tiên tìm $\max\limits_{[a;b]} f(x)=K;\quad \min\limits_{[a;b]} f(x)=k\ (K>k)$.

Đề hỏi tìm $m\Rightarrow m=-\dfrac{K+k}{2}$. Đề hỏi tìm min của $\max\limits_{[a;b]} y\Rightarrow$ giá trị này là $\dfrac{K-k}{2}$.

Dạng 6: Tìm m để $\min\limits_{[a;b]} y=\left|f(x)+m\right|$ đạt min.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[a;b]} f(x)=K;\quad \min\limits_{[a;b]} f(x)=k\ (K>k)$.

Đề hỏi tìm $m\Rightarrow (m+K)(m+k)\le 0\Leftrightarrow -K\le m\le -k$. Đề hỏi tìm min của $\min\limits_{[a;b]} y\Rightarrow$ giá trị này là 0.

Dạng 7: Cho hàm số $y=\left|f(x)+m\right|$.Tìm m để $\max\limits_{[a;b]} y\le h.\min\limits_{[a;b]} y\,(h>0)$ hoặc $Min+\max=$

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[a;b]} f(x)=K;\quad \min\limits_{[a;b]} f(x)=k\ (K>k)$.

TH1: $|K+m|\le h|k+m|\xrightarrow[K+m \text{ cung dau } k+m]{|K+m|\ge|k+m|} m\in S_1$.

TH2: $|k+m|\le h|K+m|\xrightarrow[K+m \text{ cung dau } k+m]{|k+m|\ge|K+m|} m\in S_2$.

Vậy $m\in S_1\cup S_2$.

Dạng 8: Cho hàm số $y=\left|f(x)+m\right|$.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[a;b]} f(x)=K;\quad \min\limits_{[a;b]} f(x)=k\ (K>k)$.

BT1: Tìm m để $\min\limits_{[a;b]} y+\max\limits_{[a;b]} y=\alpha\Leftrightarrow |m+K|+|m+k|=\alpha$.

BT2: Tìm m để $\min\limits_{[a;b]} y*\max\limits_{[a;b]} y=\beta\Leftrightarrow |m+K|*|m+k|=\beta$.

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2018)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 0 **B.** 6 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x+m$, ta có $f'(x)=3x^2-3$. Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	0		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	m	↘	$-2+m$	↗	$2+m$

TH 1 : $2+m<0\Leftrightarrow m<-2$. Khi đó $\max\limits_{[0;2]}\left|f(x)\right|=-(-2+m)=2-m$

$2-m=3\Leftrightarrow m=-1$ (loại).

TH 2 : $\begin{cases}2+m>0\\ m<0\end{cases}\Leftrightarrow -2<m<0$. Khi đó : $|m-2|=2-m>2>2+m$

$\Rightarrow \max\limits_{[0;2]}\left|f(x)\right|=-(-2+m)=2-m$

$2-m=3\Leftrightarrow m=-1$ (thỏa mãn).

TH 3 : $\begin{cases}m>0\\ -2+m<0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<2$. Khi đó : $|m-2|=2-m<2<2+m\ \Rightarrow \max\limits_{[0;2]}\left|f(x)\right|=2+m$

$2+m=3\Leftrightarrow m=1$ (thỏa mãn).

TH 4: $-2+m>0\Leftrightarrow m>2$. Khi đó $\max\limits_{[0;2]}\left|f\left(x\right)\right|=2+m$

$2+m=3\Leftrightarrow m=1$ (loại).

Câu 2. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $\left[0;3\right]$ bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của S là:

A. -16. **B.** 16. **C.** -12. **D.** -2.

Lời giải

Chọn A

Xét $u=x^3-3x+m$ trên đoạn $\left[0;3\right]$ có $u'=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow x=1\in\left[0;3\right]$.

Khi đó $\begin{cases}\max\limits_{[0;3]}\mathrm{u}=\max\left\{u\left(0\right),u\left(1\right),u\left(3\right)\right\}=\max\left\{\mathrm{m},\mathrm{m}-2,\mathrm{m}+18\right\}=m+18\\ \min\limits_{[0;3]}\mathrm{u}=\min\left\{u\left(0\right),u\left(1\right),u\left(3\right)\right\}=\min\left\{\mathrm{m},\mathrm{m}-2,\mathrm{m}+18\right\}=m-2\end{cases}$.

Suy ra $M\underset{[0;3]}{\mathrm{ax}}\,f\left(x\right)=\max\left\{\left|m-2\right|,\left|m+18\right|\right\}=16\Leftrightarrow\left[\begin{cases}\left|m+18\right|=16\\ \left|m+18\right|\geq\left|m-2\right|\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{cases}\left|m-2\right|=16\\ \left|m-2\right|\geq\left|m+18\right|\end{cases}\right.\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\ m=-14\end{array}\right.$.

Do đó tổng tất cả các phần tử của S bằng -16.

Câu 3. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|+\min\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=2$. Số phần tử của S là

A. 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Do hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x+m}{x+1}$ liên tục trên $\left[0;1\right]$.

Khi $m=1$ hàm số là hàm hằng nên $\max\limits_{[0;1]}f\left(x\right)=\min\limits_{[0;1]}f\left(x\right)=1$

Khi $m\neq 1$ hàm số đơn điệu trên đoạn $\left[0;1\right]$ nên

+ Khi $f\left(0\right);f\left(1\right)$ cùng dấu thì $\max\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|+\min\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=\left|f\left(0\right)\right|+\left|f\left(1\right)\right|=\left|m\right|+\left|\dfrac{m+1}{2}\right|$.

+ Khi $f\left(0\right);f\left(1\right)$ trái dấu thì

$\min\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=0,\max\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=\max\left\{\left|f\left(0\right)\right|;\left|f\left(1\right)\right|\right\}=\max\left\{\left|m\right|;\left|\dfrac{m+1}{2}\right|\right\}$.

TH1: $f\left(0\right).f\left(1\right)\geq 0\Leftrightarrow m(m+1)\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\leq -1\\ m\geq 0\end{array}\right.$.

$\max\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|+\min\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=2\Leftrightarrow\left|m\right|+\left|\dfrac{m+1}{2}\right|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-\dfrac{5}{3}\end{array}\right.$ (thoả mãn).

TH2: $f(0).f(1)<0 \Leftrightarrow m(m+1)<0 \Leftrightarrow -1<m<0$

$\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}|m|=2\\left|\dfrac{m+1}{2}\right|=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=\pm 2\\m=-5\\m=3\end{array}\right.$ (không thoả mãn).

Số phần tử của S là 2.

Câu 4. **(THPT Đông Sơn 1 - Thanh Hóa 2019)** Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x+2m-1\right|$ trên đoạn $[0;2]$ là nhỏ nhất. Giá trị của m thuộc khoảng nào?

A. $\left(-\dfrac{3}{2};-1\right)$. **B.** $\left(\dfrac{2}{3};2\right)$. **C.** $[-1;0]$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y=f(x)=x^3-3x+2m-1$ trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $f'(x)=3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\notin[0;2]\\x=1\end{array}\right.$.

Ta có $f(0)=2m-1$, $f(1)=2m-3$ và $f(2)=2m+1$

Suy ra $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=max\{|2m-1|;|2m-3|;|2m+1|\}=max\{|2m-3|;|2m+1|\}=P$.

Trường hợp 1: Xét $|2m-3|\geq|2m+1| \Leftrightarrow -4(4m-2)\geq 0 \Leftrightarrow m\leq\dfrac{1}{2}$.

Khi đó $P=|2m-3|\geq 2, \forall m\leq\dfrac{1}{2}$. Suy ra $P_{\min}=2 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

Trường hợp 2: Xét $|2m-3|<|2m+1| \Leftrightarrow -4(4m-2)<0 \Leftrightarrow m>\dfrac{1}{2}$.

Khi đó $P=|2m+1|>2, \forall m>\dfrac{1}{2}$. Suy ra $P_{\min}$ không tồn tại.

Vậy $m=\dfrac{1}{2}$.

Câu 5. **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 5.

A. -1. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $y'=\dfrac{2x-2}{\left|x^2-2x+m\right|}$, $y'=0 \Rightarrow x=1$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương $\max\{y(-1),y(2),y(1)\}=5$.

$\Leftrightarrow \max\{|3+m|,|m|,|m-1|\}=5$.

+ Trường hợp $m\geq -1$, ta có $\max\{|3+m|,|m|,|m-1|\}=5 \Leftrightarrow |3+m|=5 \Rightarrow m=2$.

+ Trường hợp $m<-1$ ta có $\max\{|3+m|,|m|,|m-1|\}=5 \Leftrightarrow |m-1|=5 \Rightarrow m=-4$.

Vậy tổng các giá trị m bằng -2.

Câu 6. **(THPT Nguyễn Huệ 2018)** Cho hàm số $y=\left|x^2+2x+a-4\right|$ (a là tham số). Tìm a để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;1]$ đạt giá trị nhỏ nhất

A. $a=1$. **B.** $a=3$. **C.** $a=2$. **D.** $a=5$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-2;1]$.

Ta có: $y=\left|x^2+2x+a-4\right|=\left|(x+1)^2+a-5\right|$ $(*)$

Đặt $t=(x+1)^2$, $x\in[-2;1]\Rightarrow a\in[0;4]$.

Lúc đó hàm số trở thành: $f(t)=|t+a-5|$ với $t\in[0;4]$.

Nên $\max\limits_{x\in[-2;1]} y=\max\limits_{t\in[0;4]} f(t)=\max\limits_{t\in[0;4]}\{f(0);f(4)\}=\max\limits_{t\in[0;4]}\{|a-5|;|a-1|\}$

$\geq\dfrac{|a-1|+|a-5|}{2}\geq\dfrac{|a-1+5-a|}{2}=2$

Đẳng thức xảy ra khi $|a-1|=|a-5|=2\Leftrightarrow a=3$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của $\max\limits_{t\in[0;4]} f(t)$ là 2 khi $a=3$.

Câu 7. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{x^2+mx+m}{x+1}\right|$ trên $[1;2]$ bằng 2. Số phần tử của tập S

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Xét $y=\dfrac{x^2+mx+m}{x+1}$. Ta có: $f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin[1;2]\\x=-2\notin[1;2]\end{array}\right.$.

Mà $f(1)=\dfrac{2m+1}{2}$, $f(2)=\dfrac{3m+4}{3}\Rightarrow\max\limits_{x\in[1;2]} y=\left\{\left|\dfrac{2m+1}{2}\right|;\left|\dfrac{3m+4}{3}\right|\right\}$.

Trường hợp 1: $\max\limits_{x\in[1;2]} y=\left|\dfrac{2m+1}{2}\right|=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{3}{2}\\m=-\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$.

• Với $m=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\left|\dfrac{3m+4}{3}\right|=\dfrac{17}{6}>2$ (loại)

• Với $m=-\dfrac{5}{2}\Rightarrow\left|\dfrac{3m+4}{3}\right|=\dfrac{7}{6}<2$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: $\max\limits_{x\in[1;2]} y=\left|\dfrac{3m+4}{3}\right|=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}3m+4=6\\3m+4=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{2}{3}\\m=-\dfrac{10}{3}\end{array}\right.$.

• Với $m=\dfrac{2}{3}\Rightarrow\left|\dfrac{2m+1}{2}\right|=\dfrac{7}{6}<2$ (thỏa mãn)

• Với $m=-\dfrac{10}{3}\Rightarrow\left|\dfrac{2m+1}{2}\right|=\dfrac{17}{6}>2$ (loại)

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 8. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Xét hàm số $f(x)=\left|x^2+ax+b\right|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a+2b$.

A. 2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 3.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=\left|x^2+ax+b\right|$. Theo đề bài, M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$.

Suy ra $\begin{cases} M\ge f(-1) \\ M\ge f(3) \\ M\ge f(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M\ge \left|1-a+b\right| \\ M\ge \left|9+3a+b\right| \\ M\ge \left|1+a+b\right| \end{cases} \Rightarrow 4M\ge \left|1-a+b\right|+\left|9+3a+b\right|+2\left|-1-a-b\right|$

$\ge \left|1-a+b+9+3a+b+2(-1-a-b)\right| \Rightarrow 4M\ge 8 \Rightarrow M\ge 2$.

Nếu $M=2$ thì điều kiện cần là $\left|1-a+b\right|=\left|9+3a+b\right|=\left|-1-a-b\right|=2$ và $1-a+b$, $9+3a+b$, $-1-a-b$ cùng dấu $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-a+b=9+3a+b=-1-a-b=2 \\ 1-a+b=9+3a+b=-1-a-b=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases}$.

Ngược lại, khi $\begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases}$ ta có, hàm số $f(x)=\left|x^2-2x-1\right|$ trên $[-1;3]$.

Xét hàm số $g(x)=x^2-2x-1$ xác định và liên tục trên $[-1;3]$.

$g'(x)=2x-2$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x=1\in[-1;3]$

M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-1;3] \Rightarrow M=\max\left\{\left|g(-1)\right|;\left|g(3)\right|;\left|g(1)\right|\right\}=2$.

Vậy $\begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases}$. Ta có: $a+2b=-4$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 9. Cho hàm số $y=\left|x^3+x^2+\left(m^2+1\right)x+27\right|$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3;-1]$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. 26. **B.** 18. **C.** 28. **D.** 16.

Lời giải

Chọn B

Xét $u=x^3+x^2+\left(m^2+1\right)x+27$ trên đoạn $[-3;-1]$ ta có: $u'=3x^2+2x+m^2+1>0,\ \forall x$.

Do đó $A=\max\limits_{[-3;-1]}u=u(-1)=26-m^2$; $a=\min\limits_{[-3;-1]}u=u(-3)=6-3m^2$.

Do $M=\max\limits_{[-3;-1]}y=\max\left\{\left|26-m^2\right|,\left|6-3m^2\right|\right\}$ và $4M\ge 3\left|26-m^2\right|+\left|6-3m^2\right|\ge 72$.

Vậy $M\ge 18$.

Dấu bằng xảy ra khi $\left|26-m^2\right|=\left|6-3m^2\right|=18\Leftrightarrow m=\pm 2\sqrt{2}$.

Câu 10. **(Sở Quảng Nam - 2018)** Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2+2x+m-4\right|$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng 4?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

$f(x)=x^2+2x+m-4$ có $f'(x)=2x+2$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$. Do đó

$\max\limits_{[-2;1]}\left|x^2+2x+m-4\right|=\max\left\{\left|m-1\right|;\left|m-4\right|;\left|m-5\right|\right\}$.

Ta thấy $m-5<m-4<m-1$ với mọi $m\in\mathbb{R}$, suy ra $\max\limits_{[-2;1]}y$ chỉ có thể là $\left|m-5\right|$ hoặc $\left|m-1\right|$.

Nếu $\max\limits_{[-2;1]} y=|m-5|$ thì $\begin{cases}|m-5|=4\\|m-5|\ge|m-1|\end{cases}\Leftrightarrow m=1$.

Nếu $\max\limits_{[-2;1]} y=|m-1|$ thì $\begin{cases}|m-1|=4\\|m-1|\ge|m-5|\end{cases}\Leftrightarrow m=5$.

Vậy $m\in\{1;5\}$.

Câu 11. **(Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai - Sóc Trăng - 2018)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x^3-3x^2-9x+m|$ trên đoạn $[-2;4]$ bằng 16. Số phần tử của S là

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x+m$ trên đoạn $[-2;4]$.

$f'=3x^2-6x-9$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$ (thỏa mãn).

$f(-2)=-2+m$; $f(-1)=5+m$; $f(3)=-27+m$; $f(4)=-20+m$

$\Rightarrow \min\limits_{[-2;4]} f(x)=m-27;\max\limits_{[-2;4]} f(x)=m+5\Rightarrow \max\limits_{[-2;4]}|f(x)|=\max\{|m-27|;|m+5|\}$.

+) Trường hợp 1: Nếu $|m-27|\le|m+5|$ $(*)$

$\Rightarrow \max\limits_{[-2;4]}|f(x)|=|m+5|\Rightarrow|m+5|=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=11\\m=-21\end{array}\right.$. Đối chiếu điều kiện $(*)\Rightarrow m=11$.

+) Trường hợp 1: Nếu $|m-27|>|m+5|$ $(**)$

$\Rightarrow \max\limits_{[-2;4]}|f(x)|=|m-27|\Rightarrow|m-27|=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=43\\m=11\end{array}\right.$ (Không thỏa mãn điều kiện $(**)$).

Vậy $S=\{11\}\Rightarrow S$ có 1 phần tử.

Câu 12. **(Chuyên Hạ Long 2018)** Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m-20\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

A. 210. **B.** -195. **C.** 105. **D.** 300.

Lời giải

Xét hàm số $g(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m-20$ trên đoạn $[0;2]$

Ta có $g'(x)=x^3-19x+30$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5\notin[0;2]\\x=2\\x=3\notin[0;2]\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-5		0		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$					$g(0)$	$\nearrow$	$g(2)$				

$g(0)=m-20$; $g(2)=m+6$.

Để $\max\limits_{[0;2]}|g(x)|\le 20$ thì $\begin{cases}|g(0)|\le 20\\ |g(2)|\le 20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|m-20|\le 20\\ |m+6|\le 20\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m\le 14$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0;1;2;...;14\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là 105.

Câu 13. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=|\sin^2 x-2\sin x+m|$ bằng 1. Số phần tử của S là

A. 0 **B.** 1 **B.** 4 **D.** 3

Lời giải

Chọn A

Đặt $\sin x=t\ (t\in[-1;1])\Rightarrow y=|t^2-2t+m|$

Xét hàm số $f(t)=t^2-2t+m$ có $f'(t)=2t-2=0\Leftrightarrow t=1\in[-1;1]$

Có $f(-1)=m+3,\ f(1)=m-1$. Khi đó $\begin{cases}\max\limits_{[-1;1]}f(x)=\max\{m+3;\ m-1\}=m+3\\ \min\limits_{[-1;1]}f(x)=\min\{m+3;\ m-1\}=m-1\end{cases}$

TH1: $|m+3|\ge|m-1|\Leftrightarrow m\ge -1$

$\Rightarrow\max f(x)=|m+3|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\ (l)\\ m=-4\ (l)\end{array}\right.$

TH1: $|m+3|<|m-1|\Leftrightarrow m<-1$

$\Rightarrow\max f(x)=|m-1|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\ (l)\\ m=0\ (l)\end{array}\right.$

Nguyễn Bảo Vương

$\Rightarrow$ Không tồn tại m thỏa mãn

Câu 14. **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Cho hàm số $y=\left|\dfrac{x^4+ax+a}{x+1}\right|$, với a là tham số thực. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[1;2]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để $M\ge 2m$?

A. 10. **B.** 14. **C.** 5. **D.** 20.

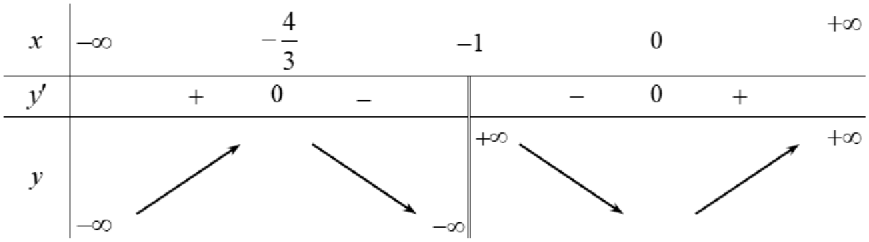
Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=\dfrac{x^4+ax+a}{x+1}=\dfrac{x^4}{x+1}+a$.

Ta có $y'=\dfrac{3x^4+4x^3}{(x+1)^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{4}{3}\\ x=0\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên suy ra $M=\max\left\{\left|a+\frac{1}{2}\right|;\left|a+\frac{16}{3}\right|\right\}$ và $m=\min\left\{\left|a+\frac{1}{2}\right|;\left|a+\frac{16}{3}\right|\right\}$.

Trường hợp 1. $a+\frac{1}{2}\ge 0\Leftrightarrow a\ge -\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}M=\left|a+\frac{16}{3}\right|=a+\frac{16}{3}\\ m=\left|a+\frac{1}{2}\right|=a+\frac{1}{2}\end{cases}$.

Khi đó $M\ge 2m\Leftrightarrow a+\frac{16}{3}\ge 2\left(a+\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow a\le\frac{13}{3}$.

Kết hợp điều kiện, ta có $-\frac{1}{2}\le a\le\frac{13}{3}\Rightarrow$ có 5 giá trị nguyên thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 2. $a+\frac{16}{3}\le 0\Leftrightarrow a\le -\frac{16}{3}\Rightarrow\begin{cases}M=\left|a+\frac{1}{2}\right|=-a-\frac{1}{2}\\ m=\left|a+\frac{16}{3}\right|=-a-\frac{16}{3}\end{cases}$.

$M\ge 2m\Leftrightarrow -a-\frac{1}{2}\ge 2\left(-a-\frac{16}{3}\right)\Leftrightarrow a\ge -\frac{61}{6}$.

Kết hợp điều kiện ta có $-\frac{61}{6}\le a\le -\frac{16}{3}$. Suy ra có 5 giá trị nguyên của a thỏa mãn.

Trường hợp 3. $\begin{cases}a+\frac{1}{2}<0\\ a+\frac{16}{3}>0\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{16}{3}<a<-\frac{1}{2}$.

Nếu $\left|a+\frac{1}{2}\right|>\left|a+\frac{16}{3}\right|\Leftrightarrow -a-\frac{1}{2}>a+\frac{16}{3}\Leftrightarrow a<-\frac{35}{12}$ thì

$\begin{cases}M=-a-\frac{1}{2}\\ m=a+\frac{16}{3}\end{cases}\Rightarrow M\ge 2m\Leftrightarrow -a-\frac{1}{2}\ge 2\left(a+\frac{16}{3}\right)\Leftrightarrow a\le -\frac{67}{18}$.

Kết hợp điều kiện, ta có $-\frac{16}{3}<a\le -\frac{67}{18}$. Suy ra có 2 giá trị nguyên của a thỏa mãn điều kiện.

Nếu $\left|a+\frac{1}{2}\right|\le\left|a+\frac{16}{3}\right|\Leftrightarrow -a-\frac{1}{2}\le a+\frac{16}{3}\Leftrightarrow a\ge -\frac{35}{12}$ thì

$\begin{cases}M=a+\frac{16}{3}\\ m=-a-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow M\ge 2m\Leftrightarrow a+\frac{16}{3}\ge 2\left(-a-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow a\ge -\frac{19}{9}$.

Kết hợp điều kiện, ta có $-\frac{19}{9}\le a<-\frac{1}{2}$. Suy ra có 2 giá trị nguyên của a thỏa mãn điều kiện.

Vậy có 14 giá trị nguyên của a thỏa mãn điều kiện.

Câu 15. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 30. Tổng giá trị các phần tử của tập hợp S bằng bao nhiêu?

A. 120. **B.** 210. **C.** 108. **D.** 136.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x)=\frac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30$ là hàm số xác định và liên tục trên $[0;2]$.

Với mọi $x\in[0;2]$ ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x^3-28x+48=0\Leftrightarrow x=2$.

Suy ra $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=\max\{|f(0)|;|f(2)|\}$.

Theo đề $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|\le 30\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|m-30|\le 30\\|m+14|\le|m-30|\end{cases}\\\begin{cases}|m+14|\le 30\\|m-30|\le|m+14|\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}|m-30|\le 30\\|m+14|\le 30\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-30\le m-30\le 30\\-30\le m+14\le 30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le m\le 60\\-44\le m\le 16\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m\le 16$.

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in S=\{0;1;2;...;16\}$. Vậy tổng tất cả 17 giá trị trong tập S là 136.

Câu 16. **(Chuyên Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2020)** Cho hàm số $f(x)=\left|3e^{4x}-4e^{3x}-24e^{2x}+48e^{x}+m\right|$. Gọi A, B lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;\ln 2]$.Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-23;10)$ thỏa mãn $A\le 3B$. Tổng các phần tử của tập S bằng

A. -33. **B.** 0. **C.** -111. **D.** -74.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=e^x, x\in[0;\ln 2]\Rightarrow t\in[1;2]$

Xét hàm số $h(t)=|3t^4-4t^3-24t^2+48t+m|$ trên $[1;2]$.

Đặt $g(t)=3t^4-4t^3-24t^2+48t+m$

$g'(t)=12t^3-12t^2-48t+48$; $g'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\notin[1;2]\\t=2\\t=1\end{array}\right.$;

$g(1)=m+23$, $g(2)=m+16$.

TH1: $-16\le m<10\Rightarrow m+23\ge m+16\ge 0\Rightarrow A=\max\limits_{[1;2]}h(t)=m+23$; $B=\min\limits_{[1;2]}h(t)=m+16$.

Suy ra:: $\begin{cases}-16\le m<10\\m+23\le 3m+48\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-16\le m<10\\m\ge\frac{-25}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{-25}{2}\le m<10$.

Do đó: có 22 giá trị

TH2: $-23\le m<-16\Rightarrow|m+23|=m+23,\ |m+16|=-m-16$.

Dễ thấy $B=0$. Suy ra $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m+23<-m-16\\-m-16\le 0\end{cases}\\\begin{cases}m+23\ge-m-16\\m+23\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-16\le m<-19.5\\-19.5\le m\le-23\end{array}\right.(VL)$

Vậy $S=\{-12;-11;...;0;1;...9\}$ và tổng các phần tử của tập S bằng $-12+(-11)+(-10)=-33$.

Câu 17. **(Chuyên Bến Tre - 2020)** Cho hàm số $y=\left|x^4-2x^3+x^2+a\right|$. Có bao nhiêu số thực a để $\min\limits_{[1;2]}y+\max\limits_{[1;2]}y=10$?

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Chọn C.

Đặt $y=\left|x^4-2x^3+x^2+a\right|=\left|f(x)\right|$.

Xét hàm số $f(x)=x^4-2x^3+x^2+a$

Khi đó $f'(x)=4x^3-6x^2+2x=2x(2x^2-3x+1)=0\Leftrightarrow x\in\left\{0;\frac{1}{2};1\right\}$.

$\Rightarrow f'(x)\geq 0,\forall x\in[1;2]$ và $f(1)=a;f(2)=a+4$

Ta có $\forall x\in[1;2]$ thì $\begin{cases}\max y\in\{|a|,|a+4|\}\\ \min y\in\{|a|,0,|a+4|\}\end{cases}$.

Xét các trường hợp

+ $a\geq 0\Rightarrow \max y=a+4;\min y=a\Rightarrow 2a+4=10\Rightarrow a=3$, nhận.

+ $a\leq -4\Rightarrow \max y=-a;\min y=-a-4\Rightarrow -a-4-a=10\Rightarrow a=-7$, nhận.

+ $\begin{cases}a<0\\ a+4>0\end{cases}\Leftrightarrow -4<a<0\Rightarrow \min y=0;\max y\in\{a+4;-a\}$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a+4=10\\ -a=10\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=6\\ a=-10\end{array}\right.$ (Loại).

Vậy tồn tại hai giá trị a thỏa mãn.

Câu 18. **(Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020)** Cho hàm số $f(x)=\left|x^3-3x^2+m\right|$. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ không lớn hơn 2020?

A. 4045. **B.** 4046. **C.** 4044. **D.** 4042.

Lời giải

Chọn A

Với $u=x^3-3x^2+m$ có $u'=3x^2-6x;u'=0\Leftrightarrow x=0;x=2$

Do đó $\begin{cases}\min\limits_{[1;3]}u=\min\{u(1);u(3);u(2)\}=\min\{m-2;m;m-4\}=m-4\\ \max\limits_{[1;3]}u=\max\{u(1);u(3);u(2)\}=\max\{m-2;m;m-4\}=m\end{cases}$

* Nếu $m-4\geq 0\Leftrightarrow m\geq 4\Rightarrow \min\limits_{[1;3]}f(x)=m-4\leq 2020\Leftrightarrow m\leq 2024\Rightarrow m\in\{4,...,2024\}$.

* Nếu $m\leq 0\Rightarrow \min\limits_{[1;3]}f(x)=-m\leq 2020\Leftrightarrow -2020\leq m\Rightarrow m\in\{-2020;...;0\}$.

* Nếu $0<\mathrm{m}<4$ khi đó $\min\limits_{[1;3]}u<0;\max\limits_{[1;3]}u>0\Rightarrow \min\limits_{[1;3]}f(x)=0$ (thỏa mãn).

Vậy $m\in\{-2020,...,2024\}$ có tất cả 4045 số nguyên thỏa mãn.

Câu 19. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Xét hàm số $f(x)=\left|\frac{mx-2\sqrt{x+4}}{2x+4}\right|$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu số nguyên m thỏa mãn điều kiện $0<\min\limits_{[-1;1]}f(x)<1$?

A. 4. **B.** 8. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Xét hàm số $g(x)=\frac{mx-2\sqrt{x+4}}{2x+4}$ liên tục trên $[-1;1]$ và $f(x)=\left|g(x)\right|$.

Ta có $g(0)=-1;g(1)=\frac{m-2\sqrt{5}}{6};g(-1)=\frac{-m-2\sqrt{3}}{2}$.

- Nếu $\begin{bmatrix} g(-1)\ge 0 \\ g(1)\ge 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m\ge 2\sqrt{5} \\ m\le -2\sqrt{3} \end{bmatrix}$ thì $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=0$, không thỏa mãn bài toán.

- Nếu $\begin{cases} g(-1)<0 \\ g(1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow -2\sqrt{3}<m<2\sqrt{5}$

Mà m nguyên nên $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{4m+\dfrac{2x+12}{\sqrt{x+4}}}{(2x+4)^2}$.

TH1: $m\ge 0$.

Khi đó $g'(x)>0\,\forall x\in[-1;1]$. Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[-1;1]$.

Mà $g(0)=-1\Rightarrow g(1)>-1$. Do đó $-1<g(1)<0$. Vậy $0<\min\limits_{[-1;1]} f(x)<1$ hay $m\in\{0;1;2;3;4\}$ thỏa mãn bài toán.

TH2: $m<0$.

Xét hàm số $h(x)=\dfrac{2x+12}{\sqrt{x+4}}$ trên $[-1;1]$. Ta có $h'(x)=\dfrac{x+2}{(x+4)\sqrt{x+4}}>0\,\forall x\in[-1;1]$.

Khi đó dễ thấy $h(x)\in\left[\dfrac{10}{\sqrt{3}};\dfrac{14}{\sqrt{5}}\right]$.

* Khi $m=-1\Rightarrow 4m+h(x)>0\ \forall x\in[-1;1]\Rightarrow g'(x)>0\ \forall x\in[-1;1]$ hay hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[-1;1]$. Khi đó $-1<g(1)<0$ nên $0<\min\limits_{[-1;1]} f(x)<1$. Vậy $m=-1$ thỏa mãn.

* Khi $m\in\{-3;-2\}\Rightarrow 4m+h(x)<0\ \forall x\in[-1;1]\Rightarrow g'(x)<0\ \forall x\in[-1;1]$ hay hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $[-1;1]$. Khi đó $g(-1)>g(0)\Rightarrow -1<g(-1)<0$ nên $0<\min\limits_{[-1;1]} f(x)<1$. Vậy $m\in\{-3;-2\}$ thỏa mãn.

Do đó $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$ hay có 8 giá trị nguyên của m.

Cách 2

Nhận thấy $f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$ nên tồn tại giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[-1;1]$.

Ta có $\begin{cases} f(x)\ge 0,\forall x\in[-1;1] \\ f(0)=1 \end{cases}$ nên suy ra $0\le\min\limits_{x\in[-1;1]} f(x)\le 1$.

Vậy điều kiện $0<\min\limits_{x\in[-1;1]} f(x)<1\Leftrightarrow\begin{cases} \min\limits_{x\in[-1;1]} f(x)>0\ (1) \\ \min\limits_{x\in[-1;1]} f(x)\ne 1\ (2) \end{cases}$.

□ Ta có $(1)\Leftrightarrow$ Phương trình $mx-2\sqrt{x+4}=0$ vô nghiệm trên $[-1;1]$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $m=\dfrac{2\sqrt{x+4}}{x}$ vô nghiệm trên $[-1;1]\setminus\{0\}$

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{2\sqrt{x+4}}{x}$, $\forall x\in[-1;1]\setminus\{0\}$

$g'(x)=\dfrac{-x-8}{x^2\sqrt{x+4}}<0,\forall x\in[-1;1]\setminus\{0\}$

Bảng biến thiên

x		-1	0	1	
$g'(x)$		$-$	$-$		
$g(x)$		$-2\sqrt{3}$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $2\sqrt{5}$		

Từ bảng biến thiên suy ra điều kiện phương trình $m=\dfrac{2\sqrt{x+4}}{x}$ vô nghiệm trên $[-1;1]\setminus\{0\} \Leftrightarrow -2\sqrt{3}<m<2\sqrt{5}$.

Do m nguyên nên $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

□ Để giải (2) trước hết ta đi tìm điều kiện để $\min\limits_{x\in[-1;1]} f(x)=1$.

Do $f(0)=1$ nên $\min\limits_{x\in[-1;1]} f(x)=f(0)$, mà $0\in(-1;1)$, suy ra $x=0$ là điểm cực trị của hàm số $f(x)$.

Đặt $h(x)=\dfrac{mx-2\sqrt{x+4}}{2x+4} \Rightarrow h'(0)=0 \Leftrightarrow m=-\dfrac{3}{2}$. Do đó với m nguyên thì (2) chắc chắn xảy ra.

Vậy $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$ thỏa mãn điều kiện (2)

Kết luận: Có 8 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 20. **(Chuyên Sơn La - 2020)** Gọi S là tập hợp những giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^3-12x+m\right|$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 12. Tổng tất cả các phần tử của tập S bằng

A. 25. **B.** 4. **C.** 15. **D.** 21.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=x^3-12x+m\ (1\le x\le 3)$ $g'(x)=3x^2-12=0 \Leftrightarrow x=2,\ x=-2$.

$g(1)=m-11,\ g(2)=m-16,\ g(3)=m-9$.

Suy ra $\max\limits_{[1;3]} f(x)=\{\left|m-16\right|;\left|m-9\right|\}$.

Giả sử $\left|m-16\right|=12 \Leftrightarrow m=28,\ m=4$ thử lại ta thấy $m=4$ nhận.

Giả sử $\left|m-9\right|=12 \Leftrightarrow m=21,\ m=-3$ thử lại ta thấy $m=21$ nhận.

Vậy $m=4$ và $m=21$.

Câu 21. **(Chuyên Thái Nguyên - 2020)** Gọi S_0 là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m\right|$ trên đoạn $[2;4]$ không vượt quá 30. Số phần tử của S là

A. 50. **B.** 49. **C.** 66. **D.** 73.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m$.

$f'(x)=x^3-28x+48$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-6\,(ktm) \\ x=4\,(tm) \\ x=2\ (tm) \end{array}\right.$.

$f(2)=m+44;\ f(4)=m+32$.

$\Rightarrow \min\limits_{[2;4]} f(x)=m+32;\ \max\limits_{[2;4]} f(x)=m+4$.

$\Rightarrow \max\limits_{[2;4]} y=\max\left\{|m+44|;|m+32|\right\}$.

Để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m\right|$ trên đoạn $[2;4]$ không vượt quá 30 thì

$\left\{\begin{array}{l} |m+44|\le 30 \\ |m+32|\le 30 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -74\le m\le -14 \\ -62\le m\le -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow -62\le m\le -14$.

Câu 22. **(Đại Học Hà Tĩnh - 2020)** Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của ham số $f(x)=\left|e^{2x}-4e^{x}+m\right|$ trên đoạn $[0;\ln 4]$ bằng 6?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=e^x$, vì $x\in[0;\ln 4]\Rightarrow t\in[1;4]$.

Khi đó yêu cầu bài toán trở thành tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(t)=\left|t^2-4t+m\right|$ trên đoạn $[1;4]$ bằng 6.

Đặt $s=t^2-4t$, vì $t\in[1;4]\Rightarrow s\in[-4;0]$.

Xét hàm số $g(s)=s+m$ với $s\in[-4;0]$ suy ra hàm số $g(s)$ đồng biến trên đoạn $[-4;0]$.

Khi đó giá trị nhỏ nhất của $f(s)=|s+m|$, $s\in[-4;0]$ chỉ đạt tại các đầu mút.

TH1: $\left\{\begin{array}{l} \min\limits_{[-4;0]} f(s)=|m-4|=6 \\ |m|>|m-4| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m=10 \\ m=-2 \end{array}\right. \\ |m|>|m-4| \end{array}\right. \Leftrightarrow m=10$ thỏa mãn.

TH2: $\left\{\begin{array}{l} \min\limits_{[-4;0]} f(s)=|m|=6 \\ |m|<|m-4| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m=6 \\ m=-6 \end{array}\right. \\ |m|>|m-4| \end{array}\right. \Leftrightarrow m=-6$ thỏa mãn.

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 23. **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020)** Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{3}x^3-9x+m+10\right|$ trên đoạn $[0;3]$ không vượt quá 12. Tổng giá trị các phần tử của S bằng bao nhiêu?

A. -7. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 12.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=\frac{1}{3}x^3-9x+m+10$. Dễ thấy hàm số $g(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$.

Ta có $g'(x)=x^2-9$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-3\notin[0;3] \end{array}\right.$

Ta có $g(0)=m+10$; $g(3)=m-8$.

Theo yêu cầu bài toán, $\max\limits_{[0;3]} y=\max\limits_{[0;3]}\left|g\left(x\right)\right|\le 12 \Leftrightarrow \begin{cases}\left|g\left(0\right)\right|\le 12\\ \left|g\left(3\right)\right|\le 12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left|m+10\right|\le 12\\ \left|m-8\right|\le 12\end{cases} \Leftrightarrow -4\le m\le 2$

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\left\{-4;-3;-2;-1;0;1;2\right\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là -7.

Câu 24. **(Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30\right|$ trên đoạn $\left[0;2\right]$ không vượt quá 30. Tổng tất cả các giá trị của S là

A. 180. **B.** 136. **C.** 120. **D.** 210.

Lời giải

Chọn B

Xét $u=\frac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30$ trên đoạn $\left[0;2\right]$.

$u'=0\Leftrightarrow x^3-28x+48=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-6\notin\left[0;2\right]\\ x=2\in\left[0;2\right]\\ x=4\notin\left[0;2\right]\end{array}\right.$.

Khi đó $\max\limits_{[0;2]} u=\max\left\{u(0),u\left(2\right)\right\}=\max\left\{m-30,m+14\right\}=m+14$.

Suy ra $\underset{[0;2]}{Max}\, y=\max\left\{\left|m-30\right|,\left|m+14\right|\right\}$.

Trường hợp 1: $\underset{[0;2]}{Max}\, y=\left|m+14\right|$

$\begin{cases}\left|m+14\right|\ge\left|m-30\right|\\ \left|m+14\right|\le 30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|m+14\right|^2\ge\left|m-30\right|^2\\ -30\le m+14\le 30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}88m\ge 704\\ -44\le m\le 16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge 8\\ -44\le m\le 16\end{cases}$

$\Leftrightarrow 8\le m\le 16$, mà $m\in\mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow m\in\left\{8;9;10;...;16\right\}$.

Trường hợp 2: $\underset{[0;2]}{Max}\, y=\left|m-30\right|$

$\begin{cases}\left|m-30\right|\ge\left|m+14\right|\\ \left|m-30\right|\le 30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|m+14\right|^2\le\left|m-30\right|^2\\ -30\le m-30\le 30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}88m\le 704\\ 0\le m\le 60\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 8\\ 0\le m\le 60\end{cases}$

$\Leftrightarrow 0\le m\le 8$, mà $m\in\mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow m\in\left\{0;1;2;...;8\right\}$.

Vậy tổng các giá trị m thỏa mãn là: $0+1+2+...+16=136$.

Câu 25. **(Liên trường Nghệ An - 2020)** Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(x\right)=\left|2x^3-15x+m-5\right|+9x$ trên $\left[0;3\right]$ bằng 60. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số thực m.

A. 48. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 62.

Lời giải

Chọn C

Có $\max\limits_{[0;3]} f\left(x\right)=60\Leftrightarrow f\left(x\right)\le 60,\forall x\in\left[0;3\right]$ và $\exists x_0\in\left[0;3\right]$ sao cho $f\left(x_0\right)=60$.

Có $f(x)\le 60 \Leftrightarrow \left|2x^3-15x+m-5\right|+9x\le 60 \Leftrightarrow \left|2x^3-15x+m-5\right|\le 60-9x$

$\Leftrightarrow 9x-60\le 2x^3-15x+m-5\le 60-9x \Leftrightarrow -2x^3+24x-55\le m\le -2x^3+6x+65, \forall x\in[0;3].$

Có $-2x^3+6x+65\ge 29, \forall x\in[0;3]$ nên $m\le -2x^3+6x+65, \forall x\in[0;3] \Leftrightarrow m\le 29.$

Tương tự $-2x^3+24x-55\le -23$ nên $-2x^3+24x-55\le m, \forall x\in[0;3] \Leftrightarrow m\ge -23.$

Vậy $-23\le m\le 29$ thì $f(x)\le 60, \forall x\in[0;3].$

Để $\exists x_0\in[0;3]$ sao cho $f(x_0)=60$ thì $\left[\begin{array}{l}-2x^3+24x-55=m\\-2x^3+6x+65=m\end{array}\right.$ có nghiệm trên $[0;3]$.

Hay $\left[\begin{array}{l}m\ge 29\\m\le -23\end{array}\right.$. Vậy $\left[\begin{array}{l}m=29\\m=-23\end{array}\right.$ thì $\max\limits_{[0;3]} f(x)=60.$

Khi đó tổng các giá trị của m là $29-23=6$.

Câu 26. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 2. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x+m$, ta có $g'(x)=3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\notin[0;2]\\x=1\in[0;2]\end{array}\right.$.

$g(0)=m$, $g(1)=m-2$, $g(2)=m+2$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^3-3x+m\right|$ bằng max của $F=\{|m|;|m-2|;|m+2|\}$

TH1: $|m|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=3\\m=-3\end{array}\right.$.

Với $m=3 \Rightarrow F=\{3;1;5\}$ loại vì max bằng 5.

Với $m=-3 \Rightarrow F=\{3;5;1\}$ loại vì max bằng 5.

TH2: $|m-2|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=5\\m=-1\end{array}\right.$.

Với $m=5 \Rightarrow F=\{5;3;7\}$ loại vì max bằng 7.

Với $m=-1 \Rightarrow F=\{1;3;1\}$ có max bằng 3. Chọn $m=-1$.

TH3: $|m+2|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\m=-5\end{array}\right.$.

Với $m=1 \Rightarrow F=\{1;1;3\}$ có max bằng 3. Chọn $m=1$.

Với $m=-5 \Rightarrow F=\{5;7;3\}$ loại vì max bằng 7.

Vậy $S=\{-1;1\} \Rightarrow$ có 2 giá trị m thoả mãn yêu cầu đề bài.

Câu 27. **(Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Cho hàm số $f(x)=\left|x^4-2x^3+x^2+m\right|$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\min\limits_{[-1;2]} f(x)+\max\limits_{[-1;2]} f(x)=10$. Số phần tử của S là?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Nguyễn Bảo Vương

Đặt $g(x)=x^4-2x^3+x^2+m \Rightarrow g'(x)=4x^3-6x^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \\ x=1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm $g(x)$

x	-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$m+4$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$m+\frac{1}{16}$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$m+4$

Dựa vào bảng biến thiên của $g(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của

$f(x)=|g(x)|=|x^4-2x^3+x^2+m|$. Ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m \geq 0$. Bảng biến thiên của $f(x)=|g(x)|=|x^4-2x^3+x^2+m|$

x	-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2
$f(x)$	$m+4$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$m+\frac{1}{16}$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$m+4$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{[-1;2]} f(x)+\max\limits_{[-1;2]} f(x)=10 \Leftrightarrow m+m+4=10 \Leftrightarrow m=3$ (TM)

Trường hợp 2: $m<0<m+\dfrac{1}{16} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{16}<m<0$. Bảng biến thiên:

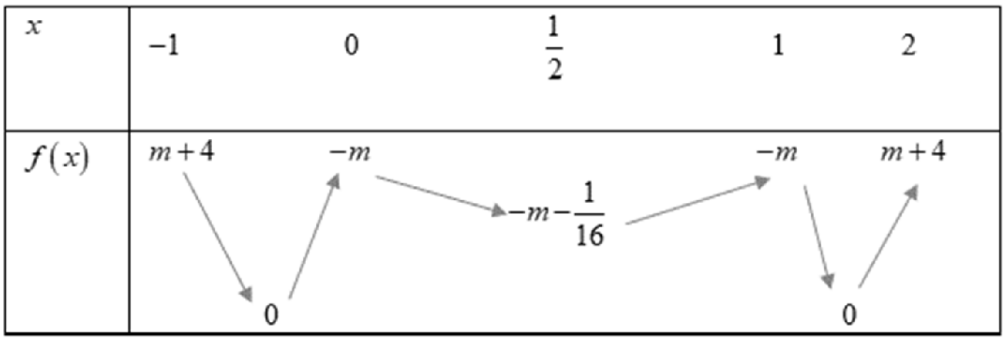
x	-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2
$f(x)$	$m+4$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-m$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$m+\frac{1}{16}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-m$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$m+4$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{[-1;2]} f(x)+\max\limits_{[-1;2]} f(x)=10 \Leftrightarrow 0+m+4=10 \Leftrightarrow m=6$ (Loại)

Trường hợp 3: $m+\dfrac{1}{16}=0 \Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{16}$. Tương tự ta có:

$\min\limits_{[-1;2]} f(x)+\max\limits_{[-1;2]} f(x)=10 \Leftrightarrow 0+m+4=10 \Leftrightarrow m=6$ (Loại)

Trường hợp 4: $m+\dfrac{1}{16}<0<m+4 \Leftrightarrow -4<m<-\dfrac{1}{16}$. Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta có $\left[\begin{array}{l}\min\limits_{[-1;2]} f(x)+\max\limits_{[-1;2]} f(x)=10\\ \min\limits_{[-1;2]} f(x)+\max\limits_{[-1;2]} f(x)=10\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0+m+4=10\\ 0+(-m)=10\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=6\\ m=-10\end{array}\right.$ (Loại)

Trường hợp 5: $m+4=0 \Leftrightarrow m=-4$. Ta có:

$\min\limits_{[-1;2]} f(x)+\max\limits_{[-1;2]} f(x)=10 \Leftrightarrow 0-m=10 \Leftrightarrow m=-10$ (Loại)

Trường hợp 6: $m+4<0 \Leftrightarrow m<-4$. Ta có:

$\min\limits_{[-1;2]} f(x)+\max\limits_{[-1;2]} f(x)=10 \Leftrightarrow -m-m-4=10 \Leftrightarrow m=-7$ (Thỏa mãn)

Vậy $m\in\{-7;3\}$.

Câu 28. **(Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x)=\left|\dfrac{2mx-2\sqrt{4x+8}}{x+2}\right|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ là a thỏa mãn $0<a<1$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D.

Đặt $t=\sqrt{x+2}, x\in[-1;1]\Rightarrow t\in[1;\sqrt{3}]; x=t^2-2$.

Hàm số đã cho trở thành $g(t)=\left|\dfrac{2mt^2-4t-4m}{t}\right|$.

Xét hàm $h(t)=\dfrac{2mt^2-4t-4m}{t}$ trên đoạn $[1;\sqrt{3}]$.

Ta có $h'(t)=\dfrac{2m(t^2+2)}{t^2}$

Th1: $m=0$ thì $h(t)=-4\Rightarrow g(t)=4\forall t\in[1;\sqrt{3}]\Rightarrow a=4$ (loại).

Th2: $m\neq 0$ thì hàm số $h(t)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên $[1;\sqrt{3}]$

Ta có $h(1)=-2m-4; h(\sqrt{3})=\dfrac{2m-4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

Nếu $h(1).h(\sqrt{3})\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\le -2\\ m\ge 2\sqrt{3}\end{array}\right.$ và hàm số $h(t)$ liên tục trên đoạn $[1;\sqrt{3}]$ suy ra đồ thị hàm số $h(t)$ trên đoạn $[1;\sqrt{3}]$ cắt trục hoành $\Rightarrow a=0$ (loại).

Nếu $h(1).h(\sqrt{3})>0 \Leftrightarrow -2<m<2\sqrt{3}$. Khi đó, $h(1)<0; h(\sqrt{3})<0$

$\Rightarrow a=\left|\dfrac{2m-4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right|$. Suy ra $\left[\begin{array}{l}m=3\\ m=4\end{array}\right.$ là các giá trị nguyên dương để $0<a<1$.

Câu 29. **(Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020)** Cho hàm số $y=\left|x^4-2x^2+3m\right|$ với m là tham số. Biết rằng có đúng hai giá trị m_1, m_2 của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[-1;2]$ bằng 2021. Tính giá trị $\left|m_1-m_2\right|$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{4052}{3}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{4051}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x)=x^4-2x^2+3m$, ta có $f'(x)=4x^3-4x=4x\left(x^2-1\right)$ $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số trên $[-1;2]$:

x	-1		0		1		2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$3m-1$	↗	$3m$	↘	$3m-1$	↗	$3m+8$

Vì $\min\limits_{[-1;2]} y=2021\Rightarrow$ phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm thuộc $[-1;2]$.

Trường hợp 1 : $3m-1>0\Leftrightarrow m>\frac{1}{3}$. Ta có $\min\limits_{[-1;2]} y=\left|3m-1\right|=3m-1=2021\Leftrightarrow m=\frac{2022}{3}$

Trường hợp 2 : $3m+8<0\Leftrightarrow m<-\frac{8}{3}$. Ta có

$\min\limits_{[-1;2]} y=\left|3m+8\right|=-3m-8=2021\Leftrightarrow m=-\frac{2029}{3}$.

Vậy $\left|m_1-m_2\right|=\left|\frac{2022}{3}+\frac{2029}{3}\right|=\frac{4051}{3}$.

Câu 30. **(Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+m+1$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ sao cho $\max\limits_{[1;4]}\left|f(x)\right|\le 3\min\limits_{[1;4]}\left|f(x)\right|$. Số phần tử của S là

A. 4003. **B.** 4002. **C.** 4004. **D.** 4001.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+m+1\Rightarrow y'=f'(x)=3x^2-6x$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0(l)\\x=2\end{array}\right.$.

$f(1)=m-1;\ f(2)=m-3;\ f(4)=17+m$.

$\max\limits_{[1;4]} f(x)=m+17;\ \min\limits_{[1;4]} f(x)=m-3$.

+Nếu $m-3\ge 0\Leftrightarrow m\ge 3$ thì $\max\limits_{[1;4]}\left|f(x)\right|=m+17$, $\min\limits_{[1;4]}\left|f(x)\right|=m-3$. Khi đó:

$\max\limits_{[1;4]}\left|f(x)\right|\le 3\min\limits_{[1;4]}\left|f(x)\right|\Leftrightarrow 17+m\le 3(m-3)\Leftrightarrow m\ge 13$.

+Nếu $m+17\le 0\Leftrightarrow m\le -17$ thì $\max\limits_{[1;4]}\left|f(x)\right|=-m+3$, $\min\limits_{[1;4]}\left|f(x)\right|=-17-m$.

Khi đó: $\max\limits_{[1;4]}|f(x)|\le 3\min\limits_{[1;4]}|f(x)|\Leftrightarrow -m+3\le 3(-17-m)\Leftrightarrow m\le -27$.

+Nếu $(m-3)(m+17)<0\Leftrightarrow -17<m<3$ thì

$\max\limits_{[1;4]}|f(x)|=\max\{|m+17|,|m-3|\}=\max\{m+17,3-m\}>0;\min\limits_{[1;4]}|f(x)|=0$.

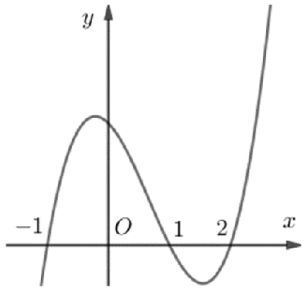
Khi đó, không thỏa điều kiện $\max\limits_{[1;4]}|f(x)|\le 3\min\limits_{[1;4]}|f(x)|$.

Do đó: $\left[\begin{array}{l} m\le -27 \\ m\ge 13 \end{array}\right.$ kết hợp với $m\in[-2020;2020]$ ta có $m\in[-2020;-27]\cup[13;2020]$

Vậy 4002 giá trị nguyên của m cần tìm.

Dạng 2. Giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất hàm ẩn, hàm hợp

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ là

A. $f(1)$. **B.** $f(-1)$. **C.** $f(2)$. **D.** $f(0)$.

Lời giải

Nguyễn Bảo Vương

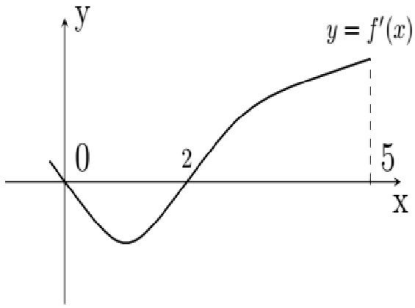
$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Từ đồ thị hàm $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		$f(-1)$	↗	$f(1)$	↘	$f(2)$		$+\infty$

Từ đó suy ra giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;2]$ là $f(1)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ. Biết rằng $f(0)+f(3)=f(2)+f(5)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $y=f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ lần lượt là:



A. $f(2);\ f(5)$. **B.** $f(0);\ f(5)$. **C.** $f(2);\ f(0)$. **D.** $f(1);\ f(5)$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có bảng biến thiên.

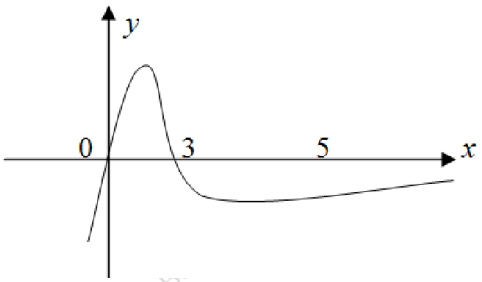
x	0		2		5
f'	0		0		
f	$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(5)$

Khi đó: $\begin{cases} \min\limits_{[0;5]} f(x) = f(2) \\ f(3) > f(2) \end{cases}$,

mà $f(0)+f(3)=f(2)+f(5) \Rightarrow f(0)+f(2)<f(2)+f(5) \Rightarrow f(0)<f(5)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $y=f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ lần lượt là: $f(2)$; $f(5)$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0)+f(1)-2f(3)=f(5)-f(4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$.



A. $m=f(5), M=f(3)$ **B.** $m=f(5), M=f(1)$

C. $m=f(0), M=f(3)$ **D.** $m=f(1), M=f(3)$

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$

x	0		3		5
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(3)$	$\searrow$	$f(5)$

$\Rightarrow M=f(3)$ và $f(1)<f(3), f(4)<f(3)$

$f(5)-f(0)=f(1)-f(3)+f(4)-f(3)<0 \Rightarrow f(5)<f(0) \Rightarrow m=f(5)$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f\left(4x-x^2\right)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+\frac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

A. 15. **B.** $\frac{25}{3}$. **C.** $\frac{19}{3}$. **D.** 12.

Lời giải

$g'(x)=(4-2x)f'(4x-x^2)+x^2-6x+8=(2-x)\left[2f'(4x-x^2)+4-x\right]$.

Với $x\in[1;3]$ thì $4-x>0$; $3\le 4x-x^2\le 4$ nên $f'(4x-x^2)>0$.

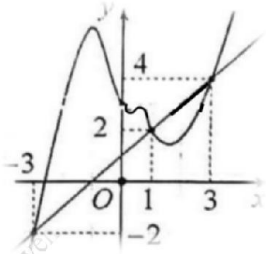
Suy ra $2f'(4x-x^2)+4-x>0$, $\forall x\in[1;3]$.

Bảng biến thiên

x	1		2		3
g'		+	0	−	
g	$g(1)$	↗	$g(2)$	↘	$g(3)$

Suy ra $\max\limits_{[1;3]} g(x)=g(2)=f(4)+7=12$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$. Mệnh đề dưới đây đúng.



A. $\max\limits_{[-3;3]} g(x)=g(3)$. **B.** $\min\limits_{[-3;3]} g(x)=g(1)$. **C.** $\max\limits_{[-3;3]} g(x)=g(0)$. **D.** $\max\limits_{[-3;3]} g(x)=g(1)$.

Lời giải

Chọn D

$g(x)=2f(x)-(x+1)^2\Rightarrow g'(x)=2f'(x)-2(x+1)$

Dựa vào đồ thị ta thấy

$$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=1\\x=3\end{array}\right.$$

Và

với $x\in(-\infty;-3)$: $f'(x)<x+1\Rightarrow g'(x)<0$

với $x\in(-3;1)$: $f'(x)>x+1\Rightarrow g'(x)>0$,

với $x\in(1;3)$: $f'(x)<x+1\Rightarrow g'(x)<0$

với $x\in(3;+\infty)$: $f'(x)>x+1\Rightarrow g'(x)>0$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{[-3;3]} g(x)=g(1)$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0)=3$, $f'(2)=-2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(x+2017)+2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-2017)$ **B.** $(2017;+\infty)$ **C.** $(0;2)$ **D.** $(-2017;0)$

Lời giải

Dựa vào bảng xét dấu của $f''(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f'(x)$		↗	3	↘	-2018	↗	

Đặt $t=x+2017$.

Ta có $y=f(x+2017)+2018x=f(t)+2018t-2017.2018=g(t)$.

$g'(t)=f'(t)+2018$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ suy ra phương trình $g'(t)$ có một nghiệm đơn $\alpha\in(-\infty;0)$ và một nghiệm kép $t=2$.

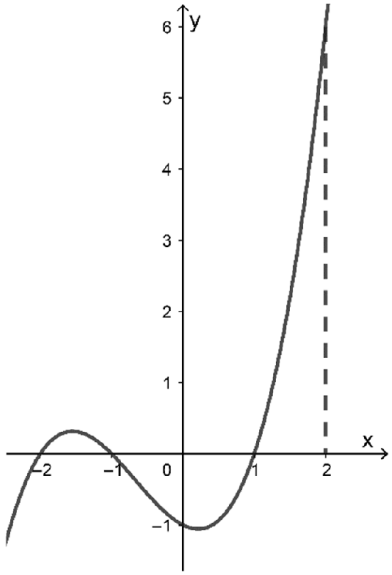
Ta có bảng biến thiên $g(t)$

Hàm số $g(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $t_0=\alpha\in(-\infty;0)$.

Suy ra hàm số $y=f(x+2017)+2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 mà

$x_0+2017\in(-\infty;0)\Leftrightarrow x_0\in(-\infty;-2017)$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây:

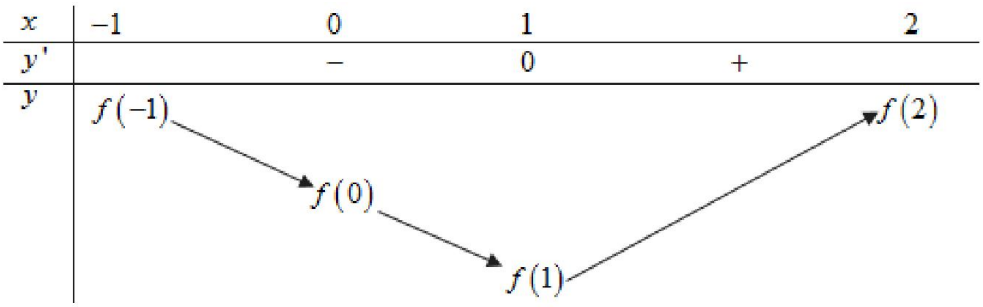


Biết rằng $f(-1)+f(0)<f(1)+f(2)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ lần lượt là:

A. $f(1);\ f(2)$. **B.** $f(2);\ f(0)$. **C.** $f(0);\ f(2)$. **D.** $f(1);\ f(-1)$.

Lời giải

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ như sau



Nhận thấy

$\min\limits_{[-1;2]} f(x)=f(1)$.

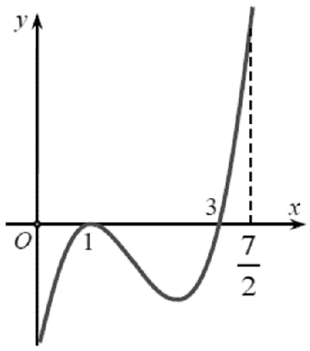
Để tìm $\max\limits_{[-1;2]} f(x)$ ta so sánh $f(-1)$ và $f(2)$.

Theo giả thiết, $f(-1)+f(0)<f(1)+f(2)\Leftrightarrow f(2)-f(-1)>f(0)-f(1)$.

Từ bảng biến thiên, ta có $f(0)-f(1)>0$. Do đó $f(2)-f(-1)>0\Leftrightarrow f(2)>f(-1)$.

Hay $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=f(2)$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{7}{2}\right]$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



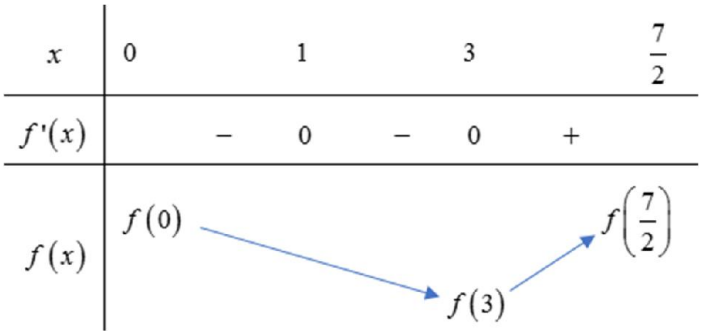
Hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\frac{7}{2}\right]$ tại điểm x_0 nào dưới đây?

A. $x_0=0$. **B.** $x_0=\frac{7}{2}$. **C.** $x_0=1$. **D.** $x_0=3$.

Lời giải

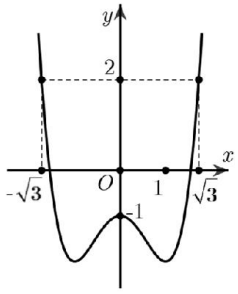
Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên trên đoạn $\left[0;\frac{7}{2}\right]$ như sau:



Do đó hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 3$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ



Đặt $h(x) = 3f(x) - x^3 + 3x$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x) = 3f(1)$. **B.** $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x) = 3f(-\sqrt{3})$.

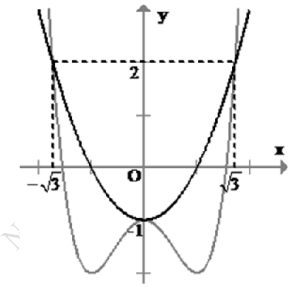
C. $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x) = 3f(\sqrt{3})$. **D.** $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x) = 3f(0)$.

Lời giải

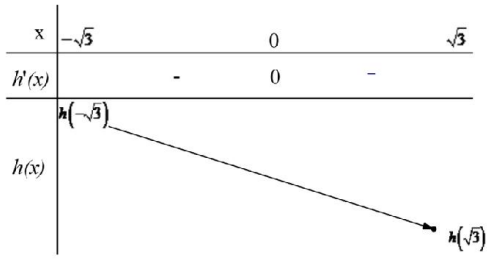
Chọn B

Ta có: $h'(x) = 3f'(x) - 3x^2 + 3 \Leftrightarrow h'(x) = 3\left[f'(x) - (x^2 - 1)\right]$.

Đồ thị hàm số $y = x^2 - 1$ là một parabol có toạ độ đỉnh $C(0;-1)$, đi qua $A(-\sqrt{3};2)$, $B(\sqrt{3};2)$.



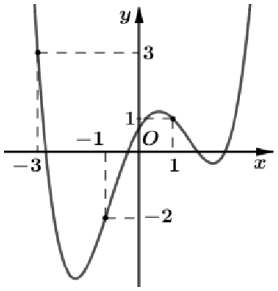
Từ đồ thị hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = x^2 - 1$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$.



Với $h(-\sqrt{3}) = 3f(-\sqrt{3})$, $h(\sqrt{3}) = 3f(\sqrt{3})$.

Vậy $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x) = 3f(-\sqrt{3})$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ ở hình vẽ bên. Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

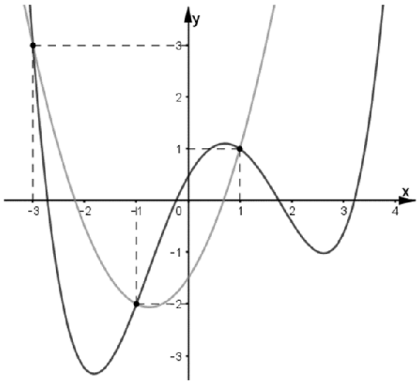


A. $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$. **B.** $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = \dfrac{g(-3)+g(1)}{2}$.

C. $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$. **D.** $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(1)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $g'(x) = f'(x) - x^2 - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{2} = f'(x) - \left(x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}\right)$.

Vẽ parabol $(P): y = x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}$. Ta thấy (P) đi qua các điểm có toạ độ $(-3;3)$, $(-1;2)$, $(1;1)$.

□ Trên khoảng $(-3;-1)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía dưới (P) nên

$f'(x) < \left(x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow g'(x) < 0$.

□ Trên khoảng $(-1;1)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên (P) nên

$f'(x) > \left(x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow g'(x) > 0$.

□ Trên khoảng $(1;+\infty)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía dưới (P) nên

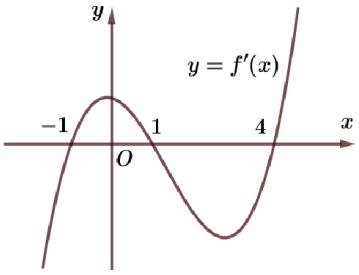
$f'(x) < \left(x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow g'(x) < 0$.

Bảng biến thiên

x	-3		-1		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$+$	
g	$g(-3)$	↘	$g(-1)$	↗	$g(1)$	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau:



Cho bốn mệnh đề sau:

1) Hàm số $y=f(x)$ có hai cực trị

2) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

3) $f(1)>f(2)>f(4)$.

4) Trên đoạn $[-1;4]$, giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ là $f(1)$.

Số mệnh đề đúng trong bốn mệnh đề trên là:

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta thấy:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=4\end{array}\right.$$

$$f'(x)<0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(1;4)$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow x\in(-1;1)\cup(4;+\infty)$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$	-1		1		4	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0 $+$
$f(x)$		CT		$CĐ$		CT	

Dựa vào bảng biến thiên đáp án đúng là mệnh đề số 3 và 4

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(4x-x^2)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+\frac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$				5		
			-3				$-\infty$

A. $\frac{25}{3}$. **B.** 15. **C.** $\frac{19}{3}$. **D.** 12.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=f'(4x-x^2).(4-2x)+x^2-6x+8=2(2-x)\left[f'(4x-x^2)+\frac{4-x}{2}\right]$

Xét thấy $\forall x\in[1;3]\Rightarrow 3\le 4x-x^2\le 4\Rightarrow f'(4x-x^2)>0$

Mặt khác $\frac{4-x}{2}>0\ \forall x\in[1;3]$

Suy ra $g'(x)=0\Leftrightarrow x=2$

$g(1)=f(3)+\frac{19}{3}<f(4)+\frac{17}{3}=5+\frac{17}{3}=\frac{32}{3}$

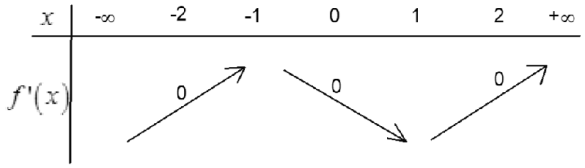
$g(3)=f(3)+\frac{19}{3}<f(4)+\frac{19}{3}=5+\frac{19}{3}=\frac{34}{3}$

$g(2)=5+7=12.$

$\Rightarrow g(1)<g(3)<g(2)$

Vậy $\max\limits_{[1;3]}g(x)=12$ tại $x=2.$

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(2x)-\sin^2 x$ trên đoạn $[-1;1]$ là



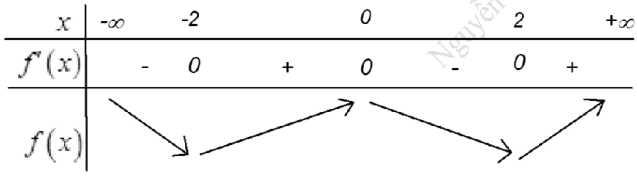
A. $f(-1)$. **B.** $f(0)$. **C.** $f(2)$. **D.** $f(1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $x\in[-1;1]\Rightarrow 2x\in[-2;2]$.

Từ bảng biến thiên của $y=f'(x)$ thì bảng biến thiên $y=f(x)$ như sau:



Ta thấy $\forall x\in[-1;1]$ ta có $\begin{cases}f(2x)\le f(0)\\ -\sin^2 x\le 0=\sin(0)\end{cases}$, do đó $g(x)\le g(0)=f(0)$.

Dấu "=" xảy ra khi $x=0$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max\limits_{[-1;2]}f(x)=3$. Xét hàm số $g(x)=f(3x-1)+m$.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\max\limits_{[0;1]}g(x)=-10$.

A. 13. **B.** -7. **C.** -13. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

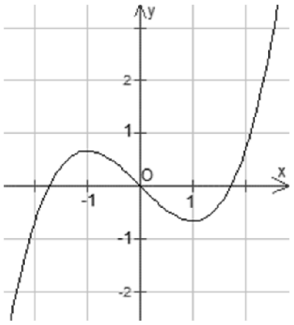
Đặt $u=3x-1\Rightarrow g(x)=f(u)+m$.

$x\in[0;1]\Rightarrow u\in[-1;2]$.

Do $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $\max\limits_{[0;1]}g(x)=\max\limits_{[-1;2]}(f(u)+m)=\max\limits_{[-1;2]}f(u)+m=3+m$.

Để $\max\limits_{[0;1]}g(x)=10\Leftrightarrow m=-13$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(\dfrac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{2}\right)$ trên đoạn $\left[-\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{\pi}{6}\right]$ bằng

A. $f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$. **B.** $f(0)$. **C.** $f\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$. **D.** $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\dfrac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{2}=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Vì $x\in\left[-\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{\pi}{6}\right]\Rightarrow x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow t\in[-1;1]$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có bảng biến thiên

t	-1		0		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$f(-1)$	↗	$f(0)$	↘	$f(1)$

Ta có: $\max\limits_{\left[-\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]} f\left(\dfrac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{2}\right)=\max\limits_{[-1;1]} f(t) \Leftrightarrow t=0\Leftrightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{3}$.

Vậy $\max\limits_{\left[-\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]} f\left(\dfrac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{2}\right)=f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max\limits_{x\in[0;10]} f(x)=f(2)=4$. Xét hàm số $g(x)=f\left(x^3+x\right)-x^2+2x+m$. Giá trị của tham số m để $\max\limits_{x\in[0;2]} g(x)=8$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x^3+x$. Vì $x\in[0;2]\Rightarrow t\in[0;10]$.

Ta có: $\max\limits_{x\in[0;2]} g(x)=\max\limits_{x\in[0;2]}\left[f\left(x^3+x\right)-x^2+2x+m\right]\le \max\limits_{x\in[0;2]} f\left(x^3+x\right)+\max\limits_{x\in[0;2]}\left[-x^2+2x+m\right]$

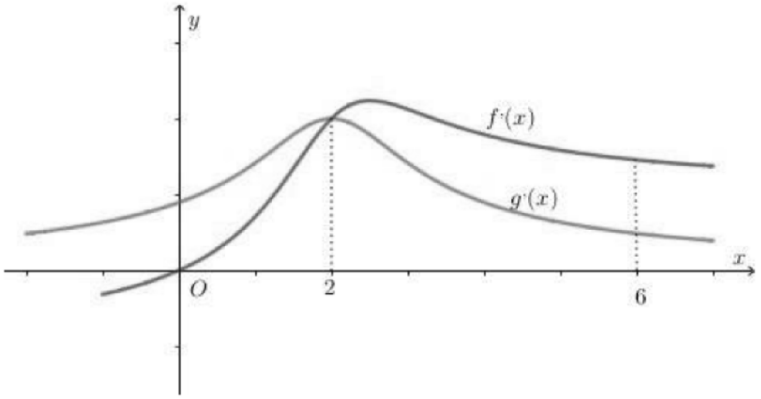
$=\max\limits_{t\in[0;10]} f(t)+1+m$ (với $t=x^3+x$ và $\max\limits_{x\in[0;2]}\left[-x^2+2x+m\right]=1+m$).

$\le \max\limits_{x\in[0;10]} f(x)+1+m=4+1+m=5+m$.

Suy ra: $\max\limits_{x\in[0;2]} g(x)=5+m\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\t=2\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Theo giả thiết, ta có: $\max\limits_{x\in[0;2]} g(x)=8\Leftrightarrow m+5=8\Leftrightarrow m=3$.

Câu 17. Cho hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$, $g'(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và $g'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng $f(0)-f(6)<g(0)-g(6)$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x)=f(x)-g(x)$ trên đoạn $[0;6]$ lần lượt là:

A. $h(6),h(2)$. **B.** $h(2),h(6)$. **C.** $h(0),h(2)$. **D.** $h(2),h(0)$.

Lời giải

Ta có $h'(x)=f'(x)-g'(x)$.

$h'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên:

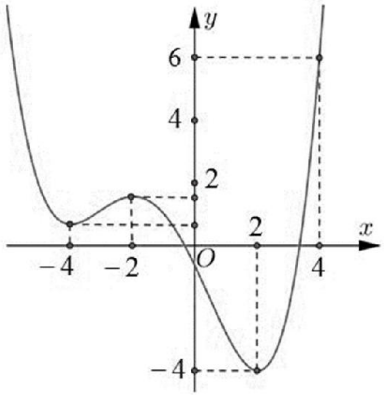
x	0		2		6
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$h(0)$	$\searrow$	$h(2)$	$\nearrow$	$h(6)$

Và $f(0)-f(6)<g(0)-g(6) \Leftrightarrow f(0)-g(0)<f(6)-g(6)$.

Hay $h(0)<h(6)$.

Vậy $\max\limits_{[0;6]} h(x)=h(6)$; $\min\limits_{[0;6]} h(x)=h(2)$.

Câu 18. **(Chuyên Lào Cai - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|f\left(\dfrac{8x}{x^2+1}\right)+m-1\right|$ có giá trị lớn nhất không vượt quá 2020?

A. 4029. **B.** 4035. **C.** 4031. **D.** 4041.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\dfrac{8x}{x^2+1}$. Ta có: $t'=\dfrac{-8x^2+8}{\left(x^2+1\right)^2}$; $t'=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

BBT:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
t'		$-$	0	$+$	0	$-$	
t	0	↘	-4	↗	4	↘	0

$\Rightarrow t\in\left[-4;4\right]$.

Hàm số $y=\left|f\left(\dfrac{8x}{x^2+1}\right)+m-1\right|$ trở thành $g\left(t\right)=\left|f\left(t\right)+m-1\right|,t\in\left[-4;4\right]$.

Đặt $h\left(t\right)=f\left(t\right)+m-1,t\in\left[-4;4\right]$, ta có: $h'\left(t\right)=f'\left(t\right)$.

$$h'\left(t\right)=0\Leftrightarrow f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-4\in\left[-4;4\right]\\t=-2\in\left[-4;4\right]\\t=2\in\left[-4;4\right]\end{array}\right.$$

Ta có: $h\left(-4\right)\approx 0,8+m-1=m-0,2$;

$h\left(4\right)=6+m-1=m+5$;

$h\left(-2\right)\approx 1,6+m-1=m+0,6$;

$h\left(2\right)=-4+m-1=m-5$.

$\underset{\mathbb{R}}{\text{Max}}\, y=\underset{[-4;4]}{\text{Max}}\left|h\left(t\right)\right|=\text{Max}\left\{\left|m+5\right|;\left|m-5\right|\right\}$.

Yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left|m+5\right|\le 2020\\\left|m-5\right|\le 2020\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2020\le m+5\le 2020\\-2020\le m-5\le 2020\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2025\le m\le 2015\\-2015\le m\le 2025\end{cases}$$

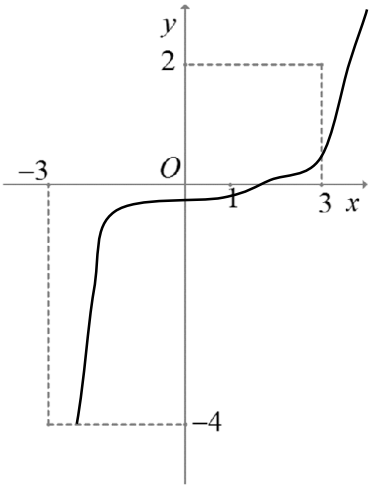
$\Leftrightarrow -2015\le m\le 2015$.

Vậy có tất cả 4031 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 19. **(Sở Hưng Yên - 2020)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y=f'\left(x\right)$ như hình bên.

Đặt $g\left(x\right)=2f\left(x\right)-\left(x-1\right)^2$.

Nguyễn Bảo Vương



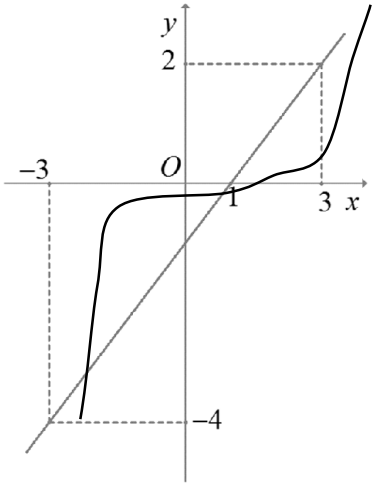
Khi đó $y=g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3;3]$ tại

A. $x=-3$. **B.** $x=3$. **C.** $x=0$. **D.** $x=1$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có $g(x)=2f(x)-(x-1)^2 \Rightarrow g'(x)=2\left(f'(x)-(x-1)\right)$. Vẽ đồ thị hàm số $y=x-1$ trên cùng hệ trục tọa độ với đồ thị hàm số $y=f'(x)$.



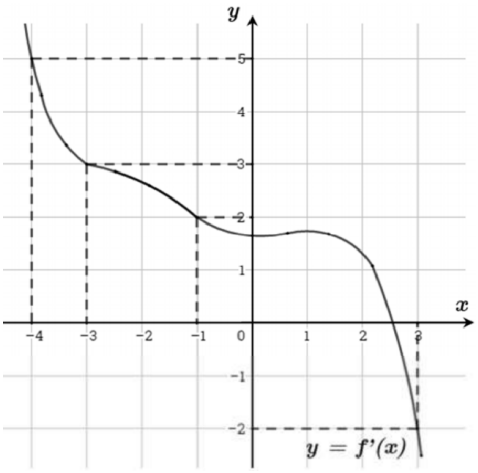
Dựa vào đồ thị ta thấy

+ $\int_{-3}^{1} g'(x)\mathrm{d}x>0 \Rightarrow g(1)>g(-3); \int_{1}^{3} g'(x)\mathrm{d}x<0 \Rightarrow g(1)>g(3)$. Do đó $y=g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3;3]$ tại $x=3$ hoặc $x=-3$.

+ Phần hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x); y=x-1; x=-3; x=1$ có diện tích lớn hơn phần hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x); y=x-1; x=1; x=3$ nên $\int_{-3}^{1}\left|g'(x)\right|\mathrm{d}x>\int_{1}^{3}\left|g'(x)\right|\mathrm{d}x \Rightarrow g(3)>g(-3)$.

Vậy $y=g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3;3]$ tại $x=-3$.

Câu 20. **(Kim Liên - Hà Nội - 2020)** Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Trên $[-4;3]$, hàm số $g(x)=2f(x)+(1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm



A. $x=-3$. **B.** $x=-4$. **C.** $x=3$. **D.** $x=-1$.

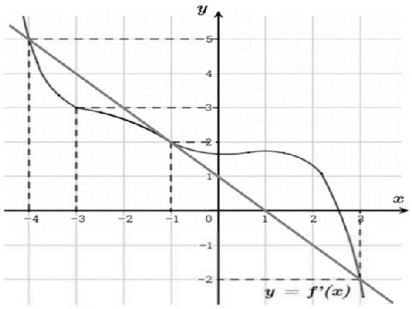
Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x)=2f(x)+(1-x)^2$ trên $[-4;3]$.

Ta có: $g'(x)=2f'(x)-2(1-x)$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=1-x$. Trên đồ thị hàm số $f'(x)$ ta vẽ thêm đường thẳng $y=1-x$.



Từ đồ thị ta thấy $f'(x)=1-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau:

x	-4		-1		3
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$	$g(-4)$	↘	$g(-1)$	↗	$g(3)$

Vậy $\min\limits_{[-4;3]} g(x)=g(-1) \Leftrightarrow x=-1$.

Câu 21. **(Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0)=3, f'(2)=f'(-2018)=0$, và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

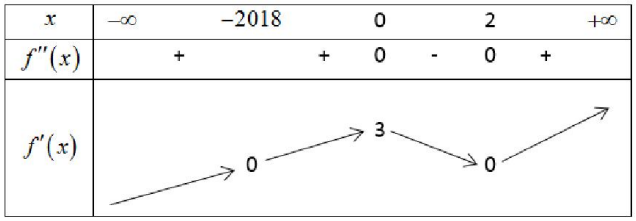
Hàm số $y=f(|x-1|-2018)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-2015)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-1009;2)$. **D.** $(-2015;1)$.

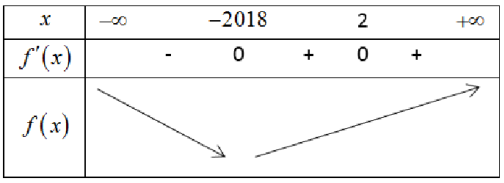
Lời giải.

Chọn C

Từ bảng xét dấu của $f''(x)$ và giả thiết $f'(0)=3, f'(2)=f'(-2018)=0$ suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ như sau



Từ đó suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$:



Hàm số $y=f(|x-1|-2018)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $|x-1|-2018=-2018 \Leftrightarrow |x-1|=0 \Leftrightarrow x=1\in(-1009;2)$.

Câu 22. **(THPT Anh Sơn - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0)=3$, $f'(2)=-2020$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như hình sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

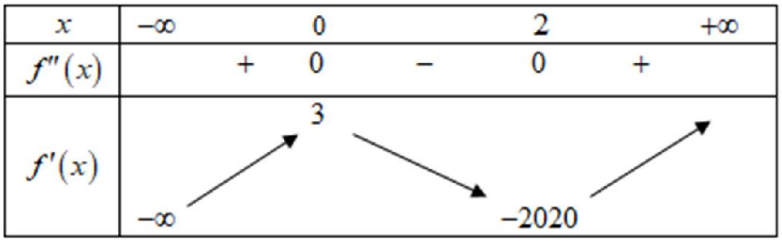
Hàm số $y=f(x+2019)+2020x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-2019)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2019;0)$. **D.** $(2019;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

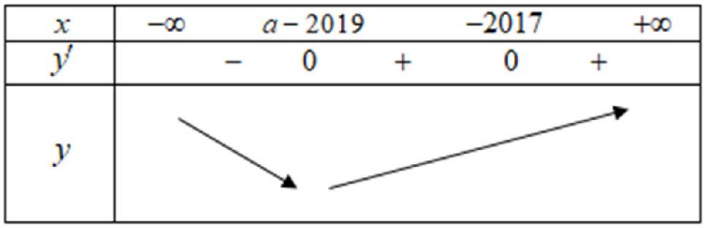
Theo giả thiết ta có



Ta có $y'=f'(x+2019)+2020 \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow f'(x+2019)=-2020$.

Từ bảng biến thiên trên ta có $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2019=a \\ x+2019=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a-2019 \\ x=-2017 \end{array}\right.$, với $a<0$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x+2019)+2020x$



Từ bảng biến thiên có hàm số $y=f(x+2019)+2020x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=a-2019$.

Vì $a<0$ nên $x_0\in(-\infty;-2019)$.

Dạng 3. Ứng dụng gtln-gtnn giải bài toán thực tế

Câu 1. **(Chuyên Quang Trung - Bình Phước - Lần 2 - 2020)** Cho số $a>0$. Trong số các tam giác vuông có tổng một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng a, tam giác có diện tích lớn nhất bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}a^2$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}a^2$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{9}a^2$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{18}a^2$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử tam giác ABC vuông ở A thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Giả sử $AB+BC=a \Rightarrow AB=a-BC$

Đặt $BC=x; 0<x<a$.

$\Rightarrow AB=a-x$ và $AC=\sqrt{x^2-(a-x)^2}=\sqrt{2ax-a^2}$

Diện tích tam giác ABC là $S=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-a^2}$

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-a^2}$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2ax-a^2}+(a-x).\frac{a}{\sqrt{2ax-a^2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{-2ax+a^2+a^2-ax}{\sqrt{2x^2-a^2}}\right)=\frac{1}{2}.\frac{2a^2-3ax}{\sqrt{2x^2-a^2}}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{2a}{3}$.

x	0		$\frac{2a}{3}$		a
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

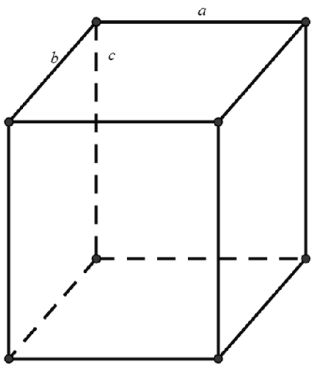
Vậy diện tích lớn nhất của tam giác ABC là $S=f\left(\frac{2a}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{18}a^2$.

Câu 2. **(Mã 101 2018)** Ông A dự định dùng hết $6,5m^2$ kính để làm một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

A. $2,26\ m^3$ **B.** $1,61\ m^3$ **C.** $1,33\ m^3$ **D.** $1,50\ m^3$

Lời giải

Chọn D



Giả sử hình hộp chữ nhật có kích thước như hình vẽ. Ta có dung tích của bể cá: $V=abc$

Mặt khác theo giả thiết ta có: $\begin{cases}ab+2bc+2ac=6,5\\a=2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2b^2+6bc=6,5\\a=2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=\frac{6,5-2b^2}{6b}\\a=2b\end{cases}$

Khi đó $V=2b^2.\dfrac{6,5-2b^2}{6b}\Leftrightarrow V=\dfrac{6,5b-2b^3}{3}$.

Xét hàm số: $f(b)=\dfrac{6,5b-2b^3}{3}$. Có BBT

b	0		$\dfrac{\sqrt{39}}{6}$		$+\infty$
$f'(b)$		$+$	0	$-$	
$f(b)$	0	↗	$f\left(\dfrac{\sqrt{39}}{6}\right)$	↘	$-\infty$

Vậy bể cá có dung tích lớn nhất là: $f\left(\dfrac{\sqrt{39}}{6}\right)=1,50\,m^3$.

Câu 3. **(Mã 104 2017)** Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\dfrac{1}{3}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 243 (m/s) **B.** 27 (m/s) **C.** 144 (m/s) **D.** 36 (m/s)

Lời giải

Chọn D

Ta có: $v=s'=-t^2+12t$; $v'=-2t+12$; $v'=0\Leftrightarrow t=6$.

BBT

t	0		6		9
v'		$+$	0	$-$	
v		↗	36	↘	

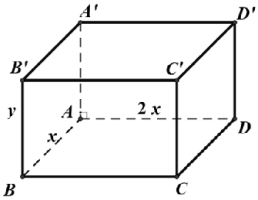
Nhìn bbt ta thấy vận tốc đạt giá trị lớn nhất khi $t=6$. Giá trị lớn nhất là $v(6)=36\text{m/s}$.

Câu 4. **(Mã 103 2018)** Ông A dự định sử dụng hết $5\,m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $1,01\,m^3$ **B.** $0,96\,m^3$ **C.** $1,33\,m^3$ **D.** $1,51\,m^3$

Lời giải

Chọn A



Gọi x,y lần lượt là chiều rộng và chiều cao của bể cá (điều kiện $x,y>0$).

Ta có thể tích bể cá $V=2x^2y$.

Theo đề bài ta có: $2xy+2.2xy+2x^2=5\Leftrightarrow 6xy+2x^2=5$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{5-2x^2}{6x}$ (Điều kiện kiện $y>0\Leftrightarrow 5-2x^2>0\Rightarrow 0<x<\sqrt{\dfrac{5}{2}}$)

$\Rightarrow V=2x^2\dfrac{5-2x^2}{6x}=\dfrac{5x-2x^3}{3}\Rightarrow V'=\dfrac{5-6x^2}{3}\Rightarrow V'=0\Leftrightarrow 5-6x^2=0\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{5}{6}}$

x	0		$\sqrt{\frac{5}{6}}$		$\sqrt{\frac{5}{2}}$
V'		$+$	0	$-$	
V	0	↗	$\frac{5\sqrt{30}}{27}$	↘	0

$\Rightarrow V_{\max}=\dfrac{5\sqrt{30}}{27}\approx 1{,}01\,m^3$.

Câu 5. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được cho bởi công thức $c(t)=\dfrac{t}{t^2+1}$ (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

A. 4 giờ. **B.** 1 giờ. **C.** 3 giờ. **D.** 2 giờ.

Lời giải

Xét hàm số $c(t)=\dfrac{t}{t^2+1}$, $(t>0)$.

$c'(t)=\dfrac{1-t^2}{\left(t^2+1\right)^2}$.

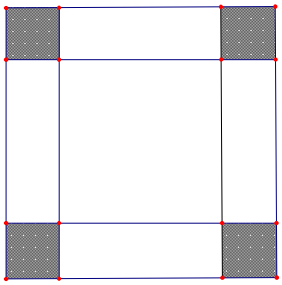
$c'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-1\end{array}\right.$.

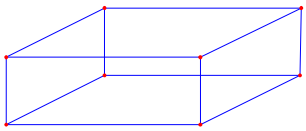
Nguyễn Bảo Vương

t	0		1		$+\infty$
$c'(t)$		$+$	0	$-$	
$c(t)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

Với $t=1$ giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất.

Câu 6. **(Đề Minh Họa 2017)** Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.





A. $x=3$ **B.** $x=2$ **C.** $x=4$ **D.** $x=6$

Lời giải

Chọn B

Ta có : $h=x\,(cm)$ là đường cao hình hộp

Vì tấm nhôm được gấp lại tạo thành hình hộp nên cạnh đáy của hình hộp là: $12-2x\,(cm)$

Vậy diện tích đáy hình hộp $S=(12-2x)^2\,(cm^2)$. Ta có: $\begin{cases}x>0\\12-2x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x<6\end{cases}\Leftrightarrow x\in(0;6)$

Thể tích của hình hộp là: $V=S.h=x.(12-2x)^2$

Xét hàm số: $y=x.(12-2x)^2\ \forall x\in(0;6)$

Ta có : $y'=(12-2x)^2-4x(12-2x)=(12-2x)(12-6x)$;

$y'=0\Leftrightarrow(12-2x).(12-6x)=0\Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=6$ (loại).

x	0		2		6
y'	‖	+	0	−	‖
y	‖	↗		↘	‖

Suy ra với $x=2$ thì thể tích hộp là lớn nhất và giá trị lớn nhất đó là $y(2)=128$.

Câu 7. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Một sợi dây có chiều dài $28m$ được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài (theo đơn vị mét) của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất?

A. $\dfrac{56}{4+\pi}$. **B.** $\dfrac{112}{4+\pi}$. **C.** $\dfrac{84}{4+\pi}$. **D.** $\dfrac{92}{4+\pi}$.

Lời giải

Gọi chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông là $x\,(m)$ $(0<x<28)$

=> chiều dài của đoạn dây làm thành hình tròn là $28-x\ (m)$

+) Diện tích hình vuông là: $\left(\dfrac{x}{4}\right)^2=\dfrac{x^2}{16}$

+) Bán kính hình tròn là: R = $\dfrac{28-x}{2\pi}$

=> Diện tích hình tròn: $\pi R^2=\pi.\left(\dfrac{28-x}{2\pi}\right)^2=\dfrac{784-56x+x^2}{4\pi}$

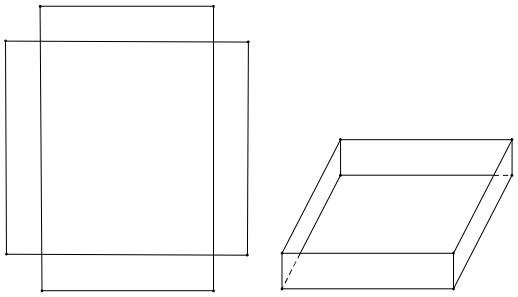
+) Tổng diện tích hai hình: $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{784-56x+x^2}{4\pi}=\left(\dfrac{\pi+4}{16\pi}\right)x^2-\dfrac{14}{\pi}x+\dfrac{196}{\pi}$

Xét $f(x)=\left(\dfrac{\pi+4}{16\pi}\right)x^2-\dfrac{14}{\pi}x+\dfrac{196}{\pi}$. Nhận thấy $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại

$x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{14}{\pi}.\dfrac{16\pi}{2(\pi+4)}=\dfrac{112}{\pi+4}$

Vậy chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông để tổng diện tích của hai hình đạt giá trị nhỏ nhất là $\dfrac{112}{4+\pi}\,m$

Câu 8. **(THPT Minh Châu Hưng Yên 2019)** Cho một tấm nhôm hình chữ nhật có chiều dài bằng $10cm$ và chiều rộng bằng $8cm$. Người ta cắt bỏ ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(cm)$, rồi gập tấm nhôm lại (như hình vẽ) để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. $x=\dfrac{8-2\sqrt{21}}{3}$ **B.** $x=\dfrac{10-2\sqrt{7}}{3}$ **C.** $x=\dfrac{9+\sqrt{21}}{9}$. **D.** $x=\dfrac{9-\sqrt{21}}{3}$

Lời giải

Chọn D

Ta có : $h=x\,(cm)$ là đường cao hình hộp

Vì tấm nhôm được gấp lại tạo thành hình hộp nên cạnh đáy của hình hộp là: $10-2x\,(cm)$ và $8-2x\,(cm)$

Vậy diện tích đáy hình hộp $S=(10-2x)(8-2x)(cm^2)$. Ta có:

$$\begin{cases}x>0\\10-2x>0\\8-2x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x<4\end{cases}\Leftrightarrow x\in(0;4)$$

Thể tích của hình hộp là: $V=S.h=x.(10-2x).(8-2x)$

Xét hàm số: $y=x.(10-2x).(8-2x)\,\forall x\in(0;4)$

Ta có : $y'=12x^2-72x+80$;

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{9+\sqrt{21}}{3}>4\ (l)\\x=\dfrac{9-\sqrt{21}}{3}\quad(n)\end{array}\right.$$

Nguyễn Bảo Vương

x	0		$\dfrac{9-\sqrt{21}}{3}$		4
y'		$+$	0	$-$	
y		↗		↘	

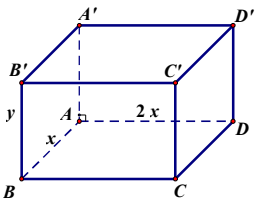
Suy ra với $x=\dfrac{9-\sqrt{21}}{3}$ thì thể tích hộp là lớn nhất và giá trị lớn nhất.

Câu 9. **(Mã 103 2018)** Ông A dự định sử dụng hết $5\,m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $1,01\,m^3$. **B.** $0,96\,m^3$. **C.** $1,33\,m^3$. **D.** $1,51\,m^3$.

Lời giải

Chọn A



Gọi x,y lần lượt là chiều rộng và chiều cao của bể cá (điều kiện $x,y>0$).

Ta có thể tích bể cá $V = 2x^2 y$.

Theo đề bài ta có: $2xy + 2.2xy + 2x^2 = 5 \Leftrightarrow 6xy + 2x^2 = 5$

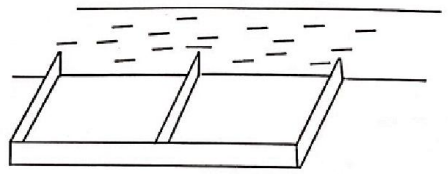
$\Leftrightarrow y = \dfrac{5-2x^2}{6x}$ (Điều kiện kiện $y > 0 \Leftrightarrow 5 - 2x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < \sqrt{\dfrac{5}{2}}$)

$\Rightarrow V = 2x^2 \dfrac{5-2x^2}{6x} = \dfrac{5x-2x^3}{3} \Rightarrow V' = \dfrac{5-6x^2}{3} \Rightarrow V' = 0 \Leftrightarrow 5 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{5}{6}}$

x	0		$\sqrt{\frac{5}{6}}$		$\sqrt{\frac{5}{2}}$
V'		$+$	0	$-$	
V	0	↗	$\frac{5\sqrt{30}}{27}$	↘	0

$\Rightarrow V_{\max} = \dfrac{5\sqrt{30}}{27} \approx 1,01\, m^3$.

Câu 10. Một người nông dân có 15.000.000 đồng muốn làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60.000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50.000 đồng một mét. Tìm diện tích lớn nhất của đất rào thu được



A. $3125\, m^2$. **B.** $50\, m^2$. **C.** $1250\, m^2$. **D.** $6250\, m^2$.

Lời giải

Chọn D

Gọi x là chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E (trong ba mặt song song, $x > 0$).

Gọi y là chiều dài mặt hàng rào hình chữ E song song với bờ sông ($y > 0$).

Số tiền phải làm là: $x.3.50000 + y.60000 = 15.000.000 \Leftrightarrow y = \dfrac{500-5x}{2}$.

Diện tích đất: $S = x.y = x.\dfrac{500-5x}{2} = 250x - \dfrac{5}{2}x^2$

Ta có: $S' = 250 - 5x$.

$S' = 0 \Leftrightarrow 250 - 5x \Leftrightarrow x = 50.$

Bảng biến thiên:

x	0		50		$+\infty$
S'		$+$	0	$-$	
S	0	↗	6250	↘	$-\infty$

Vậy: $\max\limits_{(0;+\infty)} S = 6250\ (m^2)$ khi $x = 50$.

Câu 11. **(Chuyên Long An-2019)** Ông Khoa muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $288\,\text{m}^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/m^2. Nếu ông Khoa biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi ông Khoa trả chi phí thấp nhất để xây dựng bể đó là bao nhiêu (Biết độ dày thành bể và đáy bể không đáng kể)?

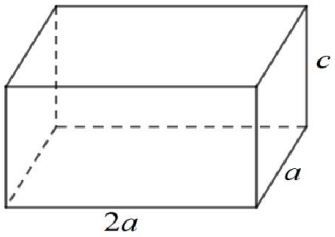
A. 90 triệu đồng. **B.** 168 triệu đồng. **C.** 54 triệu đồng. **D.** 108 triệu đồng.

Lời giải

Chọn D

Theo bài ra ta có để chi phí thuê nhân công là thấp nhất thì ta phải xây dựng bể sao cho tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy là nhỏ nhất.

Gọi ba kích thước của bể là a, $2a$, c $\left(a(m)>0, c(m)>0\right)$.



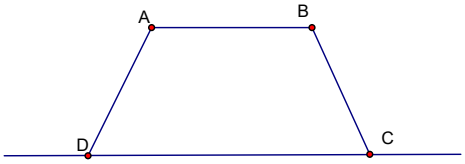
Ta có diện tích cách mặt cần xây là $S=2a^2+4ac+2ac=2a^2+6ac$.

Thể tích bể $V=a.2a.c=2a^2c=288\Rightarrow c=\dfrac{144}{a^2}$.

Suy ra $S=2a^2+6a.\dfrac{144}{a^2}=2a^2+\dfrac{864}{a}=2a^2+\dfrac{432}{a}+\dfrac{432}{a}\geq 3.\sqrt[3]{2a^2.\dfrac{432}{a}.\dfrac{432}{a}}=216$.

Vậy $S_{\min}=216\,\text{m}^2$, khi đó chi phí thấp nhất là $216.500000=108$ triệu đồng.

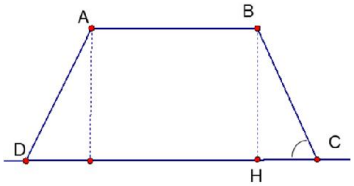
Câu 12. **(Kinh Môn - Hải Dương L2 2019)** Một người nông dân có 3 tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài $12(m)$ và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ (bờ sông là đường thẳng DC không phải rào, mỗi tấm là một cạnh của hình thang). Hỏi ông ta có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu m^2?



A. $100\sqrt{3}$. **B.** $106\sqrt{3}$. **C.** $108\sqrt{3}$. **D.** $120\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Kẻ đường cao BH, gọi số đo 2 góc ở đáy CD của hình thang là $x, x\in(0°;90°)$.

Diện tích mảnh vườn là:

$$S=\frac{1}{2}BH\left(AB+CD\right)=\frac{1}{2}BC.\sin x\left(2.AB+2BC.\cos x\right)=\frac{1}{2}AB^2\left(2\sin x+\sin 2x\right)$$

Xét hàm số $f(x)=2\sin x+\sin 2x$ với $x\in\left(0^0;90^0\right)$ có $f'(x)=2\cos x+2\cos 2x$.

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\cos x+2\cos 2x=0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x+\cos x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{1}{2}\\ \cos x=-1\end{array}\right.$

Do $x\in(0^0;90^0)$ nên ta nhận $\cos x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=60^0$. Ta có bảng biến thiên:

x	0^0		60^0		90^0
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	

Từ bảng biến thiên ta thấy: $\max\limits_{(0^0;90^0)} f(x)\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ đạt được tại $x=60^0$.

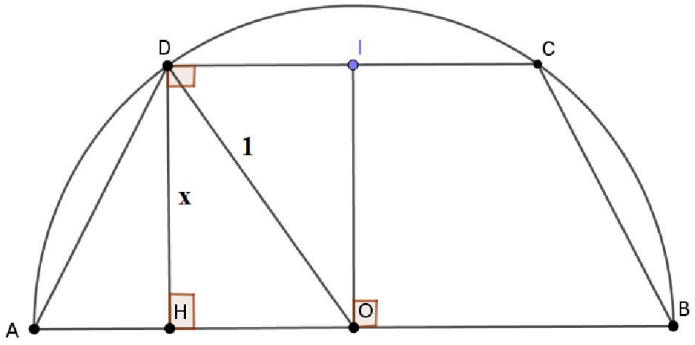
$\Rightarrow \max S=108\sqrt{3}\left(m^2\right)$ khi góc ở đáy CD của hình thang bằng 60^0 $\left(\widehat{C}=\widehat{D}=60^0\right)$.

Câu 13. **(Sở GD Quảng Nam - 2019)** Cho nửa đường tròn đường kính $AB=2$ và hai điểm C, D thay đổi trên nửa đường tròn đó sao cho $ABCD$ là hình thang. Diện tích lớn nhất của hình thang $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên AB, I là trung điểm của đoạn CD và O là trung điểm của AB. Đặt $DH=x$, $0<x<1$. Ta có $DC=2DI=2OH=2\sqrt{OD^2-DH^2}=2\sqrt{1-x^2}$.

Diện tích của hình thang $ABCD$ là $S=f(x)=\dfrac{(AB+CD)DH}{2}=\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)x$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}+1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. $f'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}+1-2x^2=0$ (*)

Đặt $t=\sqrt{1-x^2}$, (điều kiện $t\ge 0$) khi đó phương trình (*) trở thành $2t^2+t-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

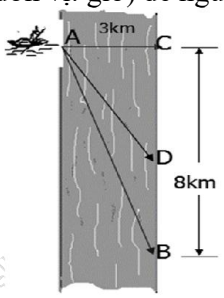
$t=-1$ loại. $t=\dfrac{1}{2}$ ta có $\sqrt{1-x^2}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x^2=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	1

Vậy diện tích lớn nhất của hình thang $ABCD$ bằng $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 14. **(THPT Lương Văn Tụy - Ninh Bình 2018)** Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B, hay có thể chèo trực tiếp đến B, hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B. Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8$ km. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tính khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: giờ) để người đàn ông đến B.



A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{9}{\sqrt{7}}$. **C.** $\frac{\sqrt{73}}{6}$. **D.** $1+\frac{\sqrt{7}}{8}$.

Lời giải

❍ Cách 1: Anh chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B

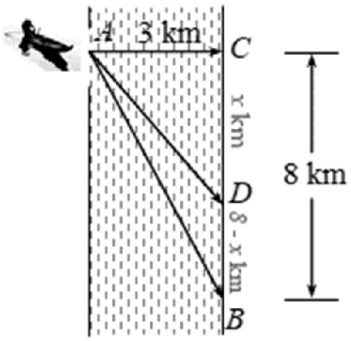
Thời gian chèo thuyền trên quãng đường AC: $\frac{3}{6} = 0,5$ (giờ)

Thời gian chạy trên quãng đường CB: $\frac{8}{8} = 1$ (giờ)

Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là 1,5 (giờ).

❍ Cách 2: chèo trực tiếp trên quãng đường $AB = \sqrt{3^2+8^2} = \sqrt{73}$ mất $\frac{\sqrt{73}}{6} \approx 1^h 26'$.

❍ Cách 3:



Gọi x (km) là độ dài quãng đường BD; $8-x$ (km) là độ dài quãng đường CD.

Thời gian chèo thuyền trên quãng đường $AD=\sqrt{x^2+9}$ là: $\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{6}$ (giờ)

Thời gian chạy trên quãng đường DB là: $\dfrac{8-x}{8}$ (giờ)

Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{6}+\dfrac{8-x}{8}$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{6}+\dfrac{8-x}{8}$ trên khoảng $(0;8)$

Ta có $f'(x)=\dfrac{x}{6\sqrt{x^2+9}}-\dfrac{1}{8}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+9}=4x\Leftrightarrow x=\dfrac{9}{\sqrt{7}}$

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{9}{\sqrt{7}}$		8
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\dfrac{3}{2}$	$\searrow$	$1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}$	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{73}}{6}$

Dựa vào BBT ta thấy thời gian ngắn nhất để di chuyển từ A đến B là $1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}\approx 1^{\text{h}}20'$.

Vậy khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến B là $1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}\approx 1^{\text{h}}20'$.

Dạng 4. Dùng phương pháp hàm số để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Câu 1. **(HSG 12 - Sở Quảng Nam - 2019)** Cho ba số thực x,y,z thỏa mãn $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 1$, $x+y+z=2$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P=xyz$ bằng $\dfrac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}^*$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $2a+b$ bằng

A. 5. **B.** 43. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $P=xyz\le\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2.z=\left(\dfrac{2-z}{2}\right)^2.z=\dfrac{1}{4}\left(4z-4z^2+z^3\right)$.

Xét hàm số $f(z)=\dfrac{1}{4}\left(4z-4z^2+z^3\right)$ trên $[1;2]$.

Ta có: $f'(z)=\dfrac{1}{4}\left(4-8z+3z^2\right); f'(z)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z=\dfrac{2}{3}(loai)\\ z=2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

z	1		2
$f'(z)$		$-$	
$f(z)$	$\dfrac{1}{4}$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $P\le\dfrac{1}{4}$.

Vậy $P_{\max}=\frac{1}{4}$ khi $\begin{cases} z=1 \\ x=y=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a=1;b=4 \Rightarrow 2a+b=6$.

Câu 2. **(Chuyên Bắc Giang Nam 2019)** Cho $x^2-xy+y^2=2$. Giá trị nhỏ nhất của $P=x^2+xy+y^2$ bằng:

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{1}{6}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 2

Lời giải

Chọn A

Xét $\frac{P}{2}=\frac{x^2+xy+y^2}{2}=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$

+nếu $y=0$ thì $x^2=2$. Do đó $P=x^2=2$ suy ra $\min P=2$

+nếu $y\neq 0$ ta chia tử mẫu cho y^2 ta được

$$\frac{P}{2}=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{1+\left(\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{x}{y}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

Đặt $t=\frac{x}{y}$, khi đó $\frac{P}{2}=\frac{1+t+t^2}{1-t+t^2}$

Xét $f(t)=\frac{1+t+t^2}{1-t+t^2} \Rightarrow f'(t)=\frac{-2t^2+2}{\left(1-t+t^2\right)^2}$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	↘	$\frac{1}{3}$	↗	3	↘	1

Khi đó $\min\frac{P}{2}=\frac{1}{3}$ do đó $\min P=\frac{2}{3}$.

Câu 3. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x+y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P=x^2+y^2+2(x+1)(y+1)+8\sqrt{4-x-y}$. Tính giá trị $M+m$

A. 42 **B.** 41 **C.** 43 **D.** 44

Lời giải

Chọn C

$(x+y)^2=\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2}\sqrt{y+1}\right)^2\le 3(x+y)\Leftrightarrow 0\le x+y\le 3$

$P=x^2+y^2+2(x+1)(y+1)+8\sqrt{4-x-y}=(x+y)^2+2(x+y)+2+8\sqrt{4-(x+y)}$

Đặt $t=\sqrt{4-(x+y)}, t\in[1;2]$.

Ta có: $f(t)=\left(4-t^2\right)^2+2\left(4-t^2\right)+2+8t=t^4-10t^2+8t+26$.

$f'(t)=4t^3-20t+8$

$$f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t^2+2t-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\in[1;2]\\t=-1+\sqrt{2}\notin[1;2]\\t=-1-\sqrt{2}\notin[1;2]\end{array}\right.$$

$f(1)=25; f(2)=18$.

Suy ra $m=\min\limits_{[1;2]}f(t)=f(2)=18; M=\max\limits_{[1;2]}f(t)=f(1)=25$.

Vậy $M+m=43$.

Câu 4. **(Chuyên Lê Quý Đôn - Quảng Trị -2019)** Cho x, $y>0$ thỏa mãn $x+y=\dfrac{3}{2}$ và biểu thức $P=\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{4y}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính x^2+y^2.

A. $\dfrac{153}{100}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** $\dfrac{2313}{1156}$. **D.** $\dfrac{25}{16}$.

Lời giải

Chọn A

Từ $x+y=\dfrac{3}{2}$ suy ra $y=\dfrac{3}{2}-x$. Ta có: $0<x,y<\dfrac{3}{2}$.

Xét hàm $P(x)=\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{4\left(\dfrac{3}{2}-x\right)}=\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{6-4x}$ trên khoảng $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$, ta có:

$P'(x)=-\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{-4}{(6-4x)^2}$.

$$P'(x)=0\Leftrightarrow\frac{4}{(6-4x)^2}=\frac{4}{x^2}\Leftrightarrow x^2=(6-4x)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6-4x\\x=4x-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{6}{5}\\x=2\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của $P(x)$ trên $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$:

x	0		$\dfrac{6}{5}$		$\dfrac{3}{2}$
$P'(x)$		$-$	0	$+$	
$P(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{25}{6}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{\left(0;\frac{3}{2}\right)}P(x)=\dfrac{25}{6}$ khi $x=\dfrac{6}{5}$.

Với $x=\frac{6}{5}$ thì $y=\frac{3}{10}$.

Như vậy $\min P=\frac{25}{6}$ khi $x=\frac{6}{5}$, $y=\frac{3}{10}$.

Khi đó, $x^2+y^2=\frac{153}{100}$.

Câu 5. **(Chuyên Hà Tĩnh - 2019)** Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2+y^2-xy=1$ và hàm số $f(t)=2t^3-3t^2+1$. Gọi M, m tương ứng là GTLN và GTNN của $Q=f\left(\frac{5x-y+2}{x+y+4}\right)$. Tổng $M+m$ bằng:

A. $-4-3\sqrt{2}$. **B.** $-4-5\sqrt{2}$. **C.** $-4-4\sqrt{2}$. **D.** $-4-2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\frac{5x-y+2}{x+y+4}$. Theo giả thiết, $x^2-xy+y^2=1\Leftrightarrow\frac{3}{4}(x-y)^2+\frac{1}{4}(x+y)^2=1$

nên ta đặt $\begin{cases}\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}(x-y)\\ \sin\varphi=\frac{1}{2}(x+y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi\\ x+y=2\sin\varphi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\varphi+\sin\varphi\\ y=-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\varphi+\sin\varphi\end{cases}(0\le\varphi\le2\pi)$.

Khi đó, $t=\frac{2\sqrt{3}\cos\varphi+4\sin\varphi+2}{2\sin\varphi+4}\Leftrightarrow(t-2).\sin\varphi-\sqrt{3}.\cos\varphi=1-2t\ \ (1)$.

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow(t-2)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2\ge(1-2t)^2\Leftrightarrow3t^2-6\le0\Leftrightarrow-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$.

Xét hàm số $Q=f(t)=2t^3-3t^2+1$, $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

$f'(t)=6t^2-6t$. Cho $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\\ t=1\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\end{array}\right.$.

$f\left(-\sqrt{2}\right)=-5-4\sqrt{2}$; $f(0)=1$; $f(1)=0$; $f\left(\sqrt{2}\right)=-5+4\sqrt{2}$.

$\Rightarrow\begin{cases}M=\max Q=\max\limits_{\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]}f(t)=f(0)=1\\ m=\min Q=\min\limits_{\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]}f(t)=f\left(-\sqrt{2}\right)=-5-4\sqrt{2}\end{cases}$.

Vậy $M+m=-4-4\sqrt{2}$.

Câu 6. **(Sở Lào Cai - 2019)** Cho hàm số $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ít nhất một giao điểm với trục hoành. Bất đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $a^2+b^2+c^2>\frac{4}{3}$. **B.** $a^2+b^2+c^2<\frac{4}{3}$. **C.** $a^2+b^2+c^2\ge\frac{4}{3}$. **D.** $a^2+b^2+c^2\le\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4+ax^3+bx^2+cx+1=0\,(1)$

Nhận xét $x=0$ không phải là nghiệm. Với $x\ne0$ phương trình trở thành

$(1)\Leftrightarrow ax^2+bx+c=-\left(x^3+\frac{1}{x}\right)(x\ne0)$

$\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^2=\left(ax^2+bx+c\right)^2\le\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^4+x^2+1\right)$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \ge \frac{\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^2}{x^4+x^2+1}=\frac{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2}{x^2+\frac{1}{x^2}+1}$$

$$t=x^2+\frac{1}{x^2} \Rightarrow t \ge 2 \Rightarrow f(t)=\frac{t^2}{t+1}, \forall t \ge 2 \Rightarrow f'(t)=\frac{t^2+2t}{(t+1)^2}>0, \forall t \ge 2$$

Bảng biến thiên

Vậy để đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ít nhất một giao điểm với trục hoành thì $a^2+b^2+c^2 \ge \frac{4}{3}$

Câu 7. **(THPT Trần Nhân Tông 2018)** Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $9x^3+\left(2-y\sqrt{3xy-5}\right)x+\sqrt{3xy-5}=0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x^3+y^3+6xy+3\left(3x^2+1\right)(x+y-2)$

A. $\frac{296\sqrt{15}-18}{9}$. **B.** $\frac{36+296\sqrt{15}}{9}$. **C.** $\frac{36-4\sqrt{6}}{9}$. **D.** $\frac{-4\sqrt{6}+18}{9}$.

Lời giải

Ta có $9x^3+\left(2-y\sqrt{3xy-5}\right)x+\sqrt{3xy-5}=0$

$\Leftrightarrow 27x^3+6x=(3xy-5)\sqrt{3xy-5}+2\sqrt{3xy-5}$.

Xét hàm $f(t)=t^3+2t$ với $t \in (0;+\infty)$

có $f'(t)=3t^2+2>0 \forall t \in (0;+\infty)$ nên hàm số liên tục và đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó ta có $3x=\sqrt{3xy-5} \Rightarrow x \ge 0$ và $9x^2=3xy-5$.

Với $x=0$ thì $0=-5(l)$.

với $x>0$ thì $P=x^3+y^3+6xy+3\left(3x^2+1\right)(x+y-2)$

$=x^3+y^3+6xy+\left(9x^2+3\right)(x+y-2)$

$=x^3+y^3+6xy+(3xy-2)(x+y-2)$

$=x^3+y^3+3x^2y+3xy^2-2(x+y)+4$

$=(x+y)^3-2(x+y)+4$

Mà $x+y=x+\frac{9x^2+5}{3x}=4x+\frac{5}{3x} \ge 2\sqrt{4x.\frac{5}{3x}}=\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$. Đặt $t=x+y$ thì $t \ge \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

Xét $f(t)=t^3-2t+4$ với $t \ge \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$. Khi đó $f'(t)=3t^2-2>0$ với $\forall t \ge \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

Do đó $f(t) \ge f\left(\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)=\frac{36+296\sqrt{15}}{9}$

Suy ra $P \ge \frac{36+296\sqrt{15}}{9}$. Vậy GTNN của P là $\frac{36+296\sqrt{15}}{9}$.

Câu 8. **(THPT Nguyễn Huệ - Ninh Bình - 2018)** Cho $x, y>0$ và $x+y=\frac{5}{4}$ sao cho biểu thức $P=\frac{4}{x}+\frac{1}{4y}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó

A. $x^2+y^2=\frac{25}{32}$. **B.** $x^2+y^2=\frac{17}{16}$. **C.** $x^2+y^2=\frac{25}{16}$. **D.** $x^2+y^2=\frac{13}{16}$.

Lời giải

Từ $x+y=\frac{5}{4}\Rightarrow y=\frac{5}{4}-x$, nên $P=\frac{4}{x}+\frac{1}{5-4x}$.

Xét hàm số $P=\frac{4}{x}+\frac{1}{5-4x}$ với $0<x<\frac{5}{4}$.

$P'=-\frac{4}{x^2}+\frac{4}{(5-4x)^2}$; $P'=0\Leftrightarrow x^2=(5-4x)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in\left(0;\frac{5}{4}\right)\\x=\frac{5}{3}\notin\left(0;\frac{5}{4}\right)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	0		1		$\frac{5}{4}$
P'		$-$	0	$+$	
P		$\searrow$	5	$\nearrow$	

Như vậy: $\min P=5$ khi $x=1$; $y=\frac{1}{4}$.

Khi đó $x^2+y^2=\frac{17}{16}$.

Câu 9. **(Xuân Trường - Nam Định -2018)** Cho x,y là hai số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $(xy+1)\left(\sqrt{xy+1}-\sqrt{y}\right)\le 1-x-\frac{1}{y}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+3y^2}}-\frac{x-2y}{6(x+y)}$?

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}-\frac{7}{30}$. **B.** $\frac{7}{30}-\frac{\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{7}{30}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}+7}{30}$.

Lời giải

$(xy+1)\left(\sqrt{xy+1}-\sqrt{y}\right)\le 1-x-\frac{1}{y}$

$\Leftrightarrow y(xy+1)\left(\sqrt{xy+1}-\sqrt{y}\right)+\left(\sqrt{xy+1}^2-\sqrt{y}^2\right)\le 0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{xy+1}-\sqrt{y}\right)\left[y(xy+1)+\left(\sqrt{xy+1}+\sqrt{y}\right)\right]\le 0$

$\Leftrightarrow\sqrt{xy+1}-\sqrt{y}\le 0\Leftrightarrow xy+1\le y$

$\Leftrightarrow\frac{x}{y}\le-\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\right)^2$

$\Rightarrow 0<\frac{x}{y}\le\frac{1}{4}$. Dấu bằng đạt được khi $y=2$, $x=\frac{1}{2}$.

$P=\frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+3y^2}}-\frac{x-2y}{6(x+y)}=\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}}-\frac{t-2}{6(t+1)}$ với $t=\frac{x}{y}$ và $t\in\left(0;\frac{1}{4}\right]$.

Ta có $\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}}\le\frac{\sqrt{5}}{27}(8t+7)$ với mọi $t\in\left(0;\frac{1}{4}\right]$

Thật vậy $\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}}\le\frac{\sqrt{5}}{27}(8t+7)\Leftrightarrow-\frac{1}{729}\frac{(4t-1)^2(20t^2+25t+6)}{t^2-t+3}\le 0$ với mọi $t\in\left(0;\frac{1}{4}\right]$.

$P \le \frac{\sqrt{5}}{27}(8t+7) - \frac{t-2}{6t+6} = f(t)$.

Khi đó $f'(t) = \frac{1}{54}.\frac{16\sqrt{5}t^2 + 32\sqrt{5}t + 16\sqrt{5} - 27}{(t+1)^2} > 0$ với mọi $t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$.

Vậy $P \le \frac{\sqrt{5}}{27}(8t+7) - \frac{t-2}{6t+6} = f(t) \le f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7+10\sqrt{5}}{30}$, dấu bằng đạt được khi $x = \frac{1}{2}$, $y = 2$.

Câu 10. **(THPT Lê Xoay - 2018)** Cho các số thực x, y thỏa mãn $x+y+1 = 2\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3}\right)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $M = 3^{x+y-4} + (x+y+1).2^{7-x-y} - 3\left(x^2+y^2\right)$ bằng

A. $-\frac{9476}{243}$. **B.** -76. **C.** $\frac{193}{3}$. **D.** $\frac{148}{3}$.

Lời giải

Điều kiện $x \ge 2; y \ge -3$.

$x+y+1 = 2\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3}\right) \Leftrightarrow (x+y+1)^2 = 4\left(x+y+1+2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3}\right)$.(*)

Vì $2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3} \le x+y+1$ nên từ (*) suy ra $(x+y+1)^2 \le 8(x+y+1) \Leftrightarrow x+y \le 7$.

Vì $2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3} \ge 0$ nên từ (*) suy ra

$(x+y+1)^2 \ge 4(x+y+1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y+1 \le 0 \\ x+y+1 \ge 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y+1 = 0 \\ x+y+1 \ge 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y = -1 \\ x+y \ge 3 \end{array}\right.$.

Do $x \ge 2$ nên $x^2 \ge 2x$, $y^2+1 \ge 2y$, suy ra $x^2+y^2+1 \ge 2(x+y)$. Từ đó ta có

$M = 3^{x+y-4} + (x+y+1).2^{7-x-y} - 3\left(x^2+y^2\right) \le 3^{x+y-4} + (x+y+1).2^{7-x-y} - 6(x+y) + 3$.

Đặt $t = x+y$ với $t = -1$ hoặc $3 \le t \le 7$.

Xét hàm số $f(t) = 3^{t-4} + (t+1)2^{7-t} - 6t + 3$, ta có $f(-1) = \frac{2188}{243}$.

$f'(t) = 3^{t-4}\ln 3 + 2^{7-t} - (t+1).2^{7-t}\ln 2 - 6$.

$f''(t) = 3^{t-4}\ln^2 3 + \left[(t+1)\ln 2 - 2\right]2^{7-t}.\ln 2 > 0$, $\forall t \in [3;7]$.

Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên $(3;7)$, mà $f'(t)$ liên tục trên $[3;7]$ và $f'(3).f'(7) < 0$ nên phương trình $f'(t) = 0$ có nghiệm duy nhất $t_0 \in (3;7)$.

t	3		t_o		7
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{148}{3}$	↘	$f(t_o)$	↗	-4

Suy ra $M = 3^{x+y-4} + (x+y+1).2^{7-x-y} - 3\left(x^2+y^2\right) \le \frac{148}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = 2$, $y = 1$.

Câu 11. **(Cụm 5 Trường Chuyên - Đbsh - 2018)** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left|\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right|$

A. $\sqrt{2}-1$. **B.** $2\sqrt{2}+1$. **C.** $\sqrt{2}+1$. **D.** $2\sqrt{2}-1$.

Lời giải

Ta có $y = \left|\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right| = \left|\sin x + \cos x + \frac{1+\sin x + \cos x}{\sin x.\cos x}\right|$.

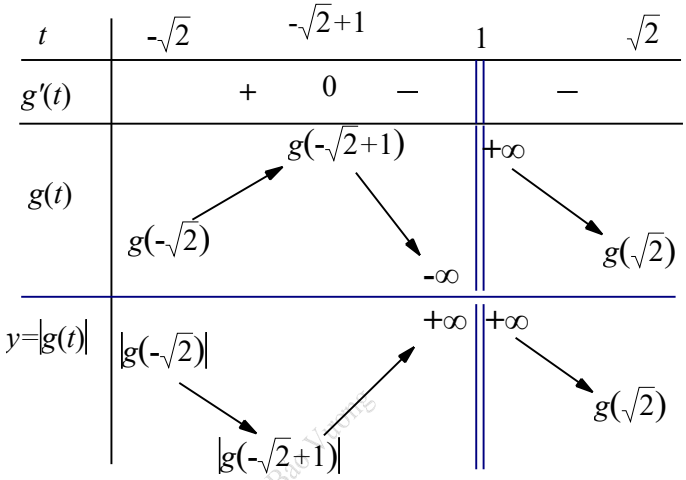
Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right), t\in\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]\setminus\{1\}$, $\sin x.\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$.

Suy ra $y=\left|t+\dfrac{1+t}{\dfrac{t^2-1}{2}}\right|=\left|t+\dfrac{2}{t-1}\right|$.

Xét hàm số $g(t)=t+\dfrac{2}{t-1}$, $g'(t)=1-\dfrac{2}{(t-1)^2}=\dfrac{(t-1)^2-2}{(t-1)^2}$, $g'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{2}+1(l)\\t=-\sqrt{2}+1(\text{t/m})\end{array}\right.$.

$g\left(\sqrt{2}\right)=3\sqrt{2}+2>0,\ g\left(-\sqrt{2}\right)<0,\ g\left(-\sqrt{2}+1\right)=-2\sqrt{2}+1<0$

Ta có bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên suy ra $y_{\min}=\left|y\left(-\sqrt{2}+1\right)\right|=2\sqrt{2}-1$.

Câu 12. **(Sở Phú Thọ - 2018)** Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=4$ và $xy+yz+zx=5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$ bằng:

A. 20. **B.** 25. **C.** 15. **D.** 35.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases}x+y+z=4\\xy+yz+zx=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=4-z\\xy=5-z(x+y)=5-4z+z^2\end{cases}$.

Lại có: $(x+y)^2\ge 4xy\Rightarrow(4-z)^2\ge 4\left(5-4z+z^2\right)\Rightarrow\dfrac{2}{3}\le z\le 2$. Dấu "=" xảy ra khi $x=y$.

Và $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y+z)(x+y)z+3xy(x+y)$

$\Rightarrow x^3+y^3+z^3=4^3-12(x+y)z-3xy(x+y)=64-3(4-z)\left(5+z^2\right)$.

Ta có: $P=\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=\left(3z^3-12z^2+15z+4\right)\left(\dfrac{5}{z^3-4z^2+5z}\right)$.

Đặt $t=z^3-4z^2+5z$, với $\dfrac{2}{3}\le z\le 2\Rightarrow\dfrac{50}{27}\le t\le 2$.

Do đó xét hàm số $f(t)=5\left(\dfrac{4}{t}+3\right)$, với $\dfrac{50}{27}\le t\le 2$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{-20}{t^2}<0,\ \forall t\in\left[\dfrac{50}{27};2\right]$ nên hàm số $f(t)$ liên tục và nghịch biến.

Do đó $P_{\min}=f(2)=25$ đạt tại $x=y=1,\ z=2$.

Câu 13. **(Sở Bắc Ninh - 2018)** Gọi M, m lần lượt là giá lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^{2018}x+\cos^{2018}x$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó:

A. $M=2, m=\frac{1}{2^{1008}}$. **B.** $M=1,\ m=\frac{1}{2^{1009}}$. **C.** $M=1,\ m=0$. **D.** $M=1,\ m=\frac{1}{2^{1008}}$.

Lời giải

Ta có: $y=\sin^{2018}x+\cos^{2018}x=\left(\sin^2x\right)^{1009}+\left(1-\sin^2x\right)^{1009}$.

Đặt $t=\sin^2x$, $0\le t\le 1$ thì hàm số đã cho trở thành $y=t^{1009}+(1-t)^{1009}$.

Xét hàm số $f(t)=t^{1009}+(1-t)^{1009}$ trên đoạn $[0;1]$.

Ta có: $f'(t)=1009.t^{1008}-1009.(1-t)^{1008}$

$f'(t)=0\Leftrightarrow 1009t^{1008}-1009(1-t)^{1008}=0$

$\Leftrightarrow\left(\frac{1-t}{t}\right)^{1008}=1\Leftrightarrow\frac{1-t}{t}=1\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$

Mà $f(1)=f(0)=1,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{1008}}$.

Suy ra $\max\limits_{[0;1]}f(t)=f(0)=f(1)=1,\ \min\limits_{[0;1]}f(t)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{1008}}$

Vậy $M=1,\ m=\frac{1}{2^{1008}}$.

Câu 14. **(Chuyên Long An - 2018)** Cho các số thực x, y thỏa mãn $x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(x^2+y^2\right)+15xy$.

A. $\min P=-80$. **B.** $\min P=-91$. **C.** $\min P=-83$. **D.** $\min P=-63$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge 3\\ y\ge -3\end{cases}$.

Ta có

$$x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)\Leftrightarrow(x+y)^2=4(x+y)+8\sqrt{x-3}.\sqrt{y+3}\ge 4(x+y)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y\ge 4\\ x+y\le 0\end{array}\right.\quad(1)$$

.

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta được:

$x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)\le 2\sqrt{2(x+y)}\Leftrightarrow x+y\le 8\ (2)$.

Từ (1) và (2) ta có $x+y\in[4;8]$

Ta lại có $(x+3)(y+3)\ge 0\Leftrightarrow xy\ge -3(x+y)-9$.

Đặt $t=x+y$ suy ra $P==4\left(x^2+y^2\right)+15xy=4(x+y)^2+7xy\ge 4t^2-21t-63$.

Xét hàm số $f(t)=4t^2-21t-63$, với $t\in[4;8]$

Ta có $f'(t)=8t-21=0\Leftrightarrow t=\frac{21}{8}\notin[4;8]$. Do đó $\min\limits_{[4;8]}f(t)=f(4)=-83$.

Do đó $P\ge -83$ suy ra $\min P=-83$ khi $\begin{cases}x+y=4\\ x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=7\\ y=-3\end{cases}$.

Câu 15. **(THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2018)** Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $2y^3+7y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}+3\left(2y^2+1\right)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+2y$.

A. $P=10$ **B.** $P=4$. **C.** $P=6$. **D.** $P=8$.

Lời giải

$2y^3+7y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}+3\left(2y^2+1\right)$.

$\Leftrightarrow 2\left(y^3-3y^2+3y-1\right)+\left(y-1\right)=2\left(1-x\right)\sqrt{1-x}+3\sqrt{1-x}-2\sqrt{1-x}$.

$\Leftrightarrow 2\left(y-1\right)^3+\left(y-1\right)=2\left(\sqrt{1-x}\right)^3+\sqrt{1-x}\ (1)$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=2t^3+t$ trên $\left[0;+\infty\right)$.

Ta có: $f'\left(t\right)=6t^2+1>0$ với $\forall t\ge 0\Rightarrow f\left(t\right)$ luôn đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$.

Vậy $(1)\Leftrightarrow y-1=\sqrt{1-x}\Leftrightarrow y=1+\sqrt{1-x}$.

$\Rightarrow P=x+2y=x+2+2\sqrt{1-x}$ với $\left(x\le 1\right)$.

Xét hàm số $g\left(x\right)=2+x+2\sqrt{1-x}$ trên $\left(-\infty;1\right]$.

Ta có: $g'\left(x\right)=1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}=\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}}$. $g'\left(x\right)=0\Rightarrow x=0$.

Bảng biến thiên $g\left(x\right)$:

x	$-\infty$		0		1
$g'\left(x\right)$		$+$	0	$-$	
$g\left(x\right)$		↗	4	↘	

Từ bảng biến thiên của hàm số $g\left(x\right)$ suy ra giá trị lớn nhất của P là: $\max\limits_{(-\infty;1]}g\left(x\right)=4$.

Câu 16. **(Chuyên Trần Phú - Hải Phòng 2018)** Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases}x^2-xy+3=0\\2x+3y-14\le 0\end{cases}$. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3x^2y-xy^2-2x^3+2x$

A. 8. **B.** 0. **C.** 12. **D.** 4.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $x^2-xy+3=0\Rightarrow y=\dfrac{x^2+3}{x}$

Từ bất phương trình $2x+3y-14\le 0\Leftrightarrow \dfrac{5x^2-4x+9}{x}\le 0\Leftrightarrow 1\le x\le \dfrac{9}{5}$.

Mặt khác ta có $\begin{cases}x^2=xy-3\\xy=x^2+3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^3=x^2y-3x\\xy^2=x^2y+3y\end{cases}$

Thay vào ta được $P=-3y+8x=-3\left(\dfrac{x^2+3}{x}\right)+8x=5x-\dfrac{9}{x}$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=5x-\dfrac{9}{x}$ trên đoạn $\left[1;\dfrac{9}{5}\right]$.

Ta có $f'\left(x\right)=5+\dfrac{9}{x^2}\ge 0,\forall x\in\left[1;\dfrac{9}{5}\right]$ do đó $\min\limits_{\left[1;\frac{9}{5}\right]}=f\left(1\right)=-4$ và $\max\limits_{\left[1;\frac{9}{5}\right]}=f\left(\dfrac{9}{5}\right)=4$.

Suy ra tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng 0.

Câu 17. **(Sở Nam Định - 2018)** Biết rằng bất phương trình $m\left(|x|+\sqrt{1-x^2}+1\right)\le 2\sqrt{x^2-x^4}+\sqrt{x^2}+\sqrt{1-x^2}+2$ có nghiệm khi và chỉ khi $m\in\left(-\infty;a\sqrt{2}+b\right]$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của $T=a+b$.

A. $T=3$. **B.** $T=2$. **C.** $T=0$. **D.** $T=1$.

Lời giải

Điều kiện: $-1\le x\le 1$.

$m\left(|x|+\sqrt{1-x^2}+1\right)\le 2\sqrt{x^2-x^4}+\sqrt{x^2}+\sqrt{1-x^2}+2$

$\Leftrightarrow m\left(\sqrt{x^2}+\sqrt{1-x^2}+1\right)\le 2\sqrt{x^2-x^4}+\sqrt{x^2}+\sqrt{1-x^2}+2$

Đặt $t=\sqrt{x^2}+\sqrt{1-x^2}\Rightarrow\begin{cases}1\le t\le\sqrt{2}\\ 2\sqrt{x^2-x^4}=t^2-1\end{cases}$. Khi đó, bất phương trình trở thành:

$m(t+1)\le t^2+t+1\Leftrightarrow m\le\dfrac{t^2+t+1}{t+1}$ (vì $t\in[1;2]$ nên $t+1>0$).

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+t+1}{t+1}$ trên $\left[1;\sqrt{2}\right]$.

$f'(t)=\dfrac{t^2+2t}{t+1}>0,\forall t\in\left[1;\sqrt{2}\right]$ suy ra hàm số đồng biến trên $\left[1;\sqrt{2}\right]$.

$\min\limits_{[1;\sqrt{2}]}f(t)=f(1)=\dfrac{3}{2}$; $\max\limits_{[1;\sqrt{2}]}f(t)=f\left(\sqrt{2}\right)=-1+2\sqrt{2}$.

Bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi bất phương trình

$m\le\dfrac{t^2+t+1}{t+1}$ có nghiệm $t\in\left[1;\sqrt{2}\right]\Leftrightarrow m\le\max\limits_{[1;\sqrt{2}]}f(t)\Leftrightarrow m\le-1+2\sqrt{2}$

$\Rightarrow a=2$, $b=-1\Rightarrow a+b=1$.

Câu 18. **(THPT Nguyễn Huệ 2018)** Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn $2\left(x^2+y^2\right)+xy=(x+y)(xy+2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(\dfrac{x^3}{y^3}+\dfrac{y^3}{x^3}\right)-9\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)$.

A. $-\dfrac{25}{4}$. **B.** 5. **C.** $-\dfrac{23}{4}$. **D.** -13.

Lời giải

Ta có $2\left(x^2+y^2\right)+xy=(x+y)(xy+2)\ge(x+y)2\sqrt{2xy}$.

Đặt $a=x^2+y^2;b=xy$ ta được: $(2a+b)^2\ge 8b(a+2b)\Leftrightarrow 4a^2-4ab-15b^2\ge 0$

$\Rightarrow\dfrac{a}{b}\ge\dfrac{5}{2}$. Suy ra: $\dfrac{x^2+y^2}{xy}\ge\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow t=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\ge\dfrac{5}{2}$.

Ta có:

$P=4\left(\dfrac{x^3}{y^3}+\dfrac{y^3}{x^3}\right)-9\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)=4\left(t^3-3t\right)-9\left(t^2-2\right)=4t^3-9t^2-12t+18=f(t)$ với $t\ge\dfrac{5}{2}$.

Khảo sát hàm số $f(t)$ với $t\ge\dfrac{5}{2}$ ta được $f(t)\ge-\dfrac{23}{4}$. Vậy chọn **C**

Câu 19. **(THPT Kim Liên - Hà Nội - 2018)** Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $2x+y=\dfrac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{4y}$.

A. $P_{\min}=\frac{34}{5}$. **B.** $P_{\min}=\frac{65}{4}$. **C.** $P_{\min}$ không tồn tại. **D.** $P_{\min}=5$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $y=\frac{5}{4}-2x$. Vì $y>0$ nên $\frac{5}{4}-2x>0\Rightarrow x<\frac{5}{8}$. Do đó $0<x<\frac{5}{8}$.

Ta có $P=\frac{2}{x}+\frac{1}{4\left(\frac{5}{4}-2x\right)}=\frac{2}{x}+\frac{1}{5-8x}=\frac{10-15x}{-8x^2+5x}$ với $0<x<\frac{5}{8}$.

$$P'=\frac{-15\left(-8x^2+5x\right)-\left(-16x+5\right)\left(10-15x\right)}{\left(-8x^2+5x\right)^2}=\frac{120x^2-75x-\left(-160x+240x^2+50-75x\right)}{\left(-8x^2+5x\right)^2}$$

$P'=\frac{-120x^2+160x-50}{\left(-8x^2+5x\right)^2}$. Có $P'=0\Rightarrow -120x^2+160x-50=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{5}{6}\notin\left(0;\frac{5}{8}\right)\\ x=\frac{1}{2}\in\left(0;\frac{5}{8}\right)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{8}$
y'	‖	$-$	0	$+$	‖
y	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P_{\min}=5$.

---------- **HẾT** ----------

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 6 TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH – MỨC 5-6 ĐIỂM

Dạng. Xác định đường tiệm cận thông qua bảng biến thiên, đồ thị

1.1.1 Đường tiệm cận ngang

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a;+\infty),(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$).

Đường thẳng $y=y_0$ là đường **tiệm cận ngang** (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=y_0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y_0$

1.1.2 Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x=x_0$ được gọi là đường **tiệm cận đứng** (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$

Lưu ý: Với đồ thị hàm phân thức dạng $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\left(c\neq 0;\ ad-bc\neq 0\right)$ luôn có tiệm cận ngang là $y=\dfrac{a}{c}$ và tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$.

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=1$ và $x=-1$.

B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=1$ và $y=-1$.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ là

A. $y=-2$. **B.** $y=1$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=2$.

Câu 3. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x+1}{x-1}$ là

A. $y=\dfrac{1}{4}$. **B.** $y=4$. **C.** $y=1$. **D.** $y=-1$.

Câu 4. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x+1}{x-1}$ là

A. $y=1$. **B.** $y=\dfrac{1}{5}$. **C.** $y=-1$. **D.** $y=5$.

Câu 5. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ là:

A. $y=\dfrac{1}{2}$. **B.** $y=-1$. **C.** $y=1$. **D.** $y=2$.

Câu 6. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-1}$ là:

A. $y=\frac{1}{3}$. **B.** $y=3$. **C.** $y=-1$. **D.** $y=1$.

Câu 7. **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{2x+2}{x-1}$ là

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

Câu 8. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x-3}$ là

A. $x=-3$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=3$.

Câu 9. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{2x-2}{x+1}$ là

A. $x=-2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=2$.

Câu 10. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{x+1}{x+3}$ là

A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=3$.

Câu 11. **(Mã 103 - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có báng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3	$+\infty$
y'		−		−	0	+
y	1	↘	$-\infty$ | 2	↘	-3	↗ 3

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 12. **(Mã 102 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1	$+\infty$
y'		−			0	
y	0	↘	$-\infty$ | 2	↘	-2	↗ $+\infty$

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

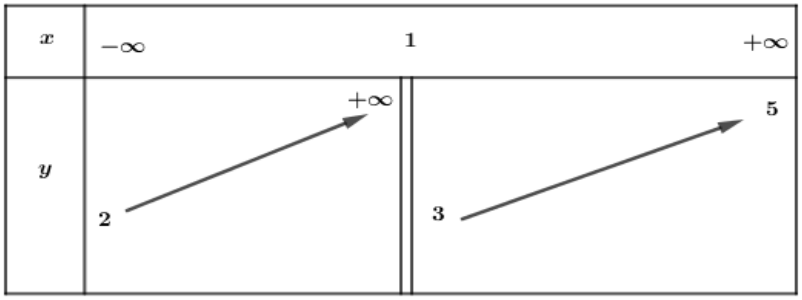
Câu 13. **(Mã 101 - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1	$+\infty$
y'		−		−	0	+
y	2	↘	-4 | $+\infty$	↘	-2	↗ $+\infty$

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

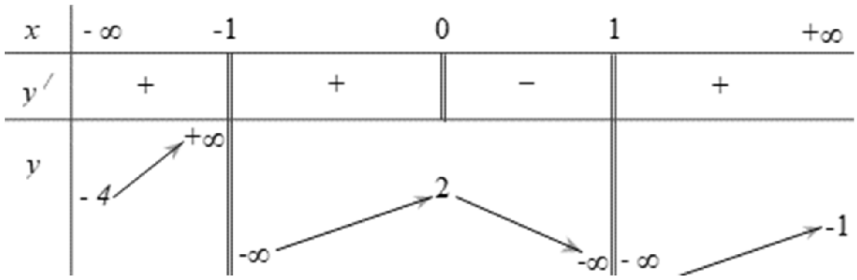
Câu 14. **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 3 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 1

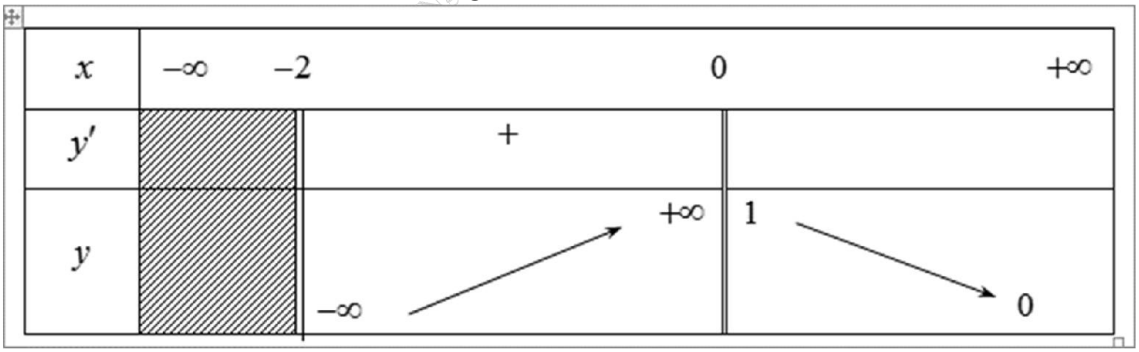
Câu 15. **(THPT - Yên Dịnh Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số có bảng biến thiên như hình sau



Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

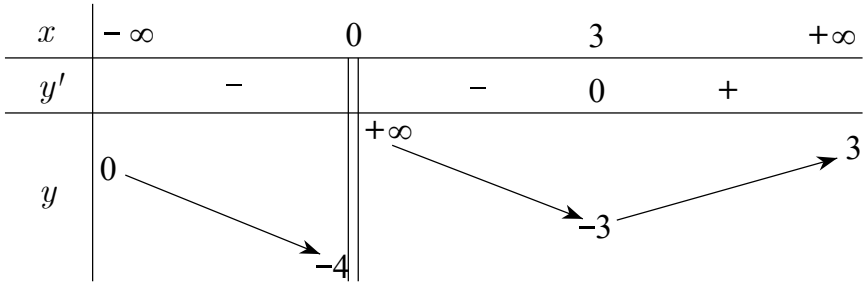
A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 16. **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?



A. 3 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 1

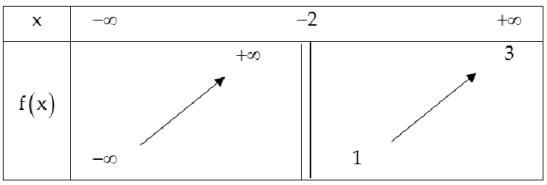
Câu 17. **(Mã 104 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

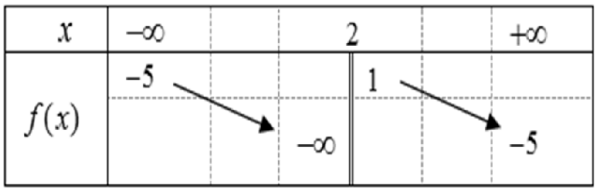
Câu 18. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

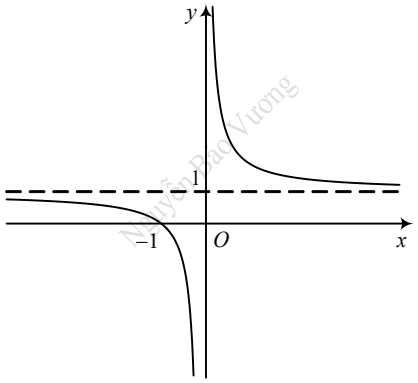
Câu 19. **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

Câu 20. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



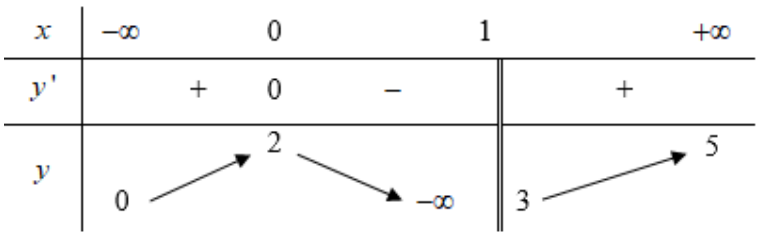
A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=0$, tiệm cận ngang $y=1$.

B. Hàm số có hai cực trị.

C. Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận.

D. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

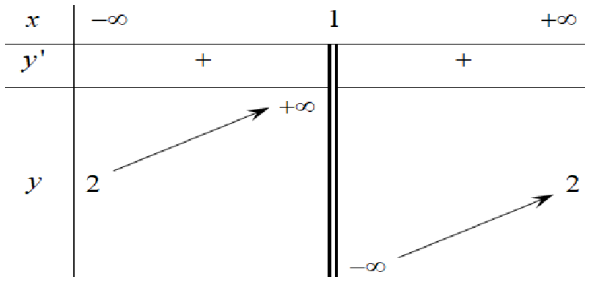
Câu 21. Cho hàmsố $f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

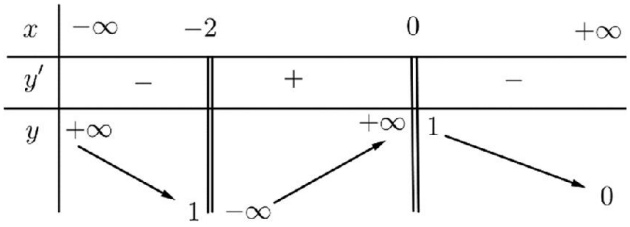
Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

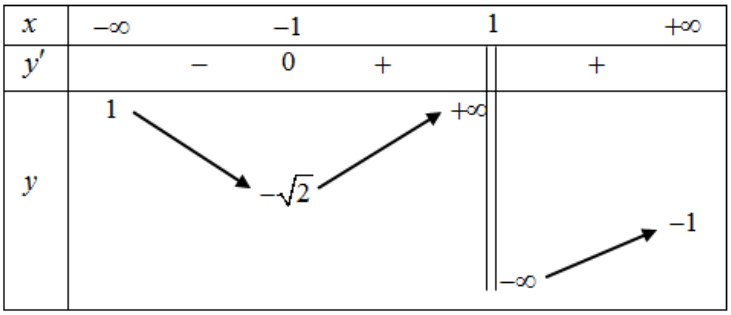
Câu 23. **(Sở Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho bằng

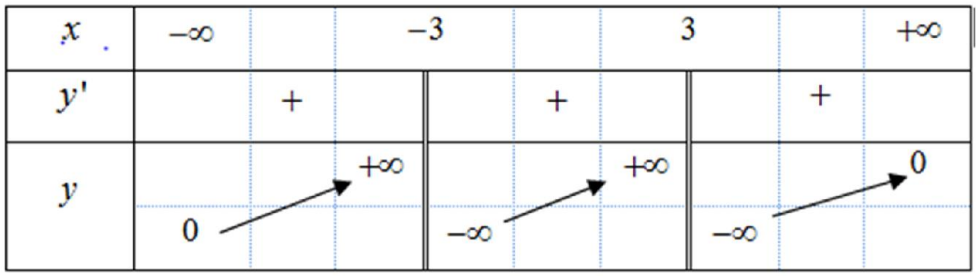
A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$



A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

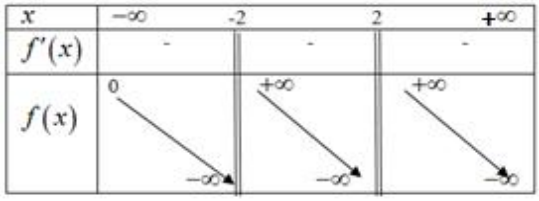
Câu 25. **(Cụm liên trường Hải Phòng 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến như sau:



Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là:

A. 3 **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 26. **(Thi thử cụm Vũng Tàu 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4 . **B.** 2 . **C.** 3 . **D.** 1 .

---------- HẾT ----------

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 6 TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – MỨC 7-8 ĐIỂM

Dạng 1. Xác định đường tiệm cận đồ thị hàm số thông hàm số cho trước

1 Đường tiệm cận ngang

Cho hàm số $y=f(x)$ có TXD: D

Điều kiện cần: D phải chứa $+\infty$ hoặc $-\infty$

Điều kiện đủ:

Dạng 1. $y=f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Nếu $degP(x)>degQ(x)$: thì không có tiệm cận ngang

Nếu $degP(x)>degQ(x)$: TCN $y=0$

Nếu $degP(x)=degQ(x)$: $y=k$ (k là tỉ số hệ số bậc cao nhất của tử và mẫu)

Dạng 2: $y=f(x)=u-\sqrt{v}$ (hoặc $\sqrt{u}-\sqrt{v}$): Nhân liên hợp $\Rightarrow y=f(x)=\dfrac{u^2-v}{u+\sqrt{v}}$ (hoặc $\dfrac{u-v}{\sqrt{u}+\sqrt{v}}$)

2 Đường tiệm cận đứng

Cho hàm số $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ có TXD: D

Đkiện cần: giải $Q(x)=0\Leftrightarrow x=x_0$ là TCĐ khi thỏa mãn đk đủ

Đkiện đủ:

Đkiện 1: x_0 làm cho $P(x)$ và $Q(x)$ xác định.

Đkiện 2: - x_0 không phải nghiệm $P(x)\Rightarrow x=x_0$ là TCĐ

- x_0 là nghiệm $P(x)\Rightarrow x=x_0$ là TCĐ nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2018)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ **B.** $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ **C.** $y=\sqrt{x^2-1}$ **D.** $y=\dfrac{x}{x+1}$

Câu 3. **(Mã 110 2017)** Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}$.

A. 2 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 1

Câu 4. **(Mã 123 2017)** Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số: $y=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}$

A. 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 0

Câu 5. **(Mã 104 2017)** Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ có mấy tiệm cận.

A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

Câu 6. **(Mã 101 2018)** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 3

Câu 7. **(Mã 102 2018)** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0

Câu 8. **(THPT Lê Văn Thịnh Bắc Ninh 2019)** Đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 1

Câu 9. Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$.

A. $x=3$ và $x=2$. **B.** $x=3$. **C.** $x=-3$ và $x=-2$. **D.** $x=-3$.

Câu 10. **(Mã 103 2018)** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+x}$ là

A. 3 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 1

Câu 11. **(Mã 104 2018)** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}$ là

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0

Câu 12. **(Chuyên Sơn La 2019)** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 13. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 14. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2}$ là?

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 4

Câu 15. **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 16. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Hàm số $y=\dfrac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x^3+x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 4

Câu 17. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}$ là

A. 4 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2

Câu 18. **(THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{5\sqrt{x^2+6}+x-12}{4x^3-3x-1}$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**

A. Đồ thị (C) của hàm số không có tiệm cận.

B. Đồ thị (C) của hàm số chỉ có một tiệm cận ngang $y=0$.

C. Đồ thị (C) của hàm số có một tiệm cận ngang $y=0$ và hai tiệm cận đứng $x=1; x=-\frac{1}{2}$.

D. Đồ thị (C) của hàm số chỉ có một tiệm cận ngang $y=0$ và một tiện cận đứng $x=1$

Câu 19. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Đồ thị hàm số $y=\frac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 20. Đồ thị hàm số $y=\frac{1-\sqrt{4-x^2}}{x^2-2x-3}$ có số đường tiệm cận đứng là m và số đường tiệm cận ngang là n. Giá trị của $m+n$ là

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

Câu 21. Gọi n,d lần lượt là số đường tiệm cận ngang và số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $n=0,d=2$. **B.** $n=d=1$. **C.** $n=1,d=2$. **D.** $n=0,d=1$.

Câu 22. **(Chuyên Long An-2019)** Đồ thị hàm số $y=\frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 23. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 24. Cho hàm số $y=\frac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 25. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Đồ thị hàm số $y=\frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 26. Đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Dạng 2. Định m để đồ thị hàm số có đường tiệm cận thỏa mãn điều kiện cho trước

1 Đường tiệm cận ngang

Cho hàm số $y=f(x)$ có TXD: D

Điều kiện cần: D phải chứa $+\infty$ hoặc $-\infty$

Điều kiện đủ:

Dạng 1. $y=f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Nếu $degP(x)>degQ(x)$: thì không có tiệm cận ngang

Nếu $degP(x)>degQ(x)$: TCN $y=0$

Nếu $degP(x)=degQ(x)$: $y=k$ (k là tỉ số hệ số bậc cao nhất của tử và mẫu)

Dạng 2: $y=f(x)=u-\sqrt{v}$ (hoặc $\sqrt{u}-\sqrt{v}$): Nhân liên hợp $\Rightarrow y=f(x)=\frac{u^2-v}{u+\sqrt{v}}$ (hoặc $\frac{u-v}{\sqrt{u}+\sqrt{v}}$)

2 Đường tiệm cận đứng

Cho hàm số $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ có TXD: D

Đkiện cần: giải $Q(x)=0 \Leftrightarrow x=x_0$ là TCĐ khi thỏa mãn đk đủ

Đkiện đủ:

Đkiện 1: x_0 làm cho $P(x)$ và $Q(x)$ xác định.

Đkiện 2: - x_0 không phải nghiệm $P(x) \Rightarrow x=x_0$ là TCĐ

- x_0 là nghiệm $P(x) \Rightarrow x=x_0$ là TCĐ nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang

A. $m<0$

B. $m=0$

C. $m>0$

D. Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài

Câu 2. **(Chuyên KHTN - 2020)** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-6x+2m}}$ có hai đường tiệm cận đứng. Số phần tử của S là

A. vô số. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 13.

Câu 3. **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-8x+m}$ có 3 đường tiệm cận?

A. 14. **B.** 8. **C.** 15. **D.** 16.

Câu 4. **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?

A. 4039. **B.** 4040. **C.** 4038. **D.** 4037.

Câu 5. **(Chuyên Sư Phạm Hà Nội - 2020)** Có bao nhiêu số nguyên của m thuộc đoạn $[-100;100]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{(x-m)\sqrt{2x-x^2}}$ có đúng hai đường tiệm cân?

A. 200. **B.** 2. **C.** 199. **D.** 0.

Câu 6. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. $m=-1$ **B.** $m\in\{1;4\}$ **C.** $m=4$ **D.** $m\in\{-1;-4\}$

Câu 7. **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{6x-3}{\left(mx^2-6x+3\right)\left(9x^2+6mx+1\right)}$ có đúng một đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 8. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2mx+4}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị có ba đường tiệm cận

A. $m>2$ **B.** $\begin{cases} m<-2 \\ m\neq -\dfrac{5}{2} \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ m\neq -\dfrac{5}{2} \end{cases}$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$

Câu 9. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Biết rằng đồ thị của hàm số $y=\dfrac{(n-3)x+n-2017}{x+m+3}$ (m,n là các số thực) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Tính tổng $m+n$.

A. 0 **B.** -3 **C.** 3 **D.** 6

Câu 10. **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{mx^2-8x+2}}$ có đúng bốn đường tiệm cận?

A. 8 **B.** 6 **C.** 7 **D.** Vô số

Câu 11. **(THPT Việt Đức Hà Nội 2019)** Với giá trị nào của hàm số m để đồ thị hàm số $y=x-\sqrt{mx^2-3x+7}$ có tiệm cạn ngang.

A. $m=1$ **B.** $m=-1$ **C.** $m=\pm 1$ **D.** Không có m

Câu 12. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$. Tìm a,b để đồ thị hàm số có $x=1$ là tiệm cận đứng và $y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.

A. $a=-1;b=2$. **B.** $a=4;b=4$. **C.** $a=1;b=2$. **D.** $a=-1;b=-2$.

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in[-10;10]$ sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{2x^2+6x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng?

A. 19. **B.** 15. **C.** 17. **D.** 18.

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ bằng 3?

A. 4. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** 3.

Câu 15. **(Thi thử Lômônôxốp - Hà Nội 2019)** Tổng các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$ có đúng một tiệm cận đứng.

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** -3. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 16. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-6;6]$ của tham số m để đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận?

A. 12. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 11.

Câu 17. **(THPT Yên Dũng 2-Bắc Giang)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận đứng.

A. $m=1$. **B.** $m>1$. **C.** $m=1$ và $m=0$. **D.** $m\neq 0$.

Câu 18. **(Cụm liên trường Hải Phòng 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2017;2017]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-4x+m}}$ có hai tiệm cận đứng.

A. 2019. **B.** 2021. **C.** 2018. **D.** 2020.

Câu 19. **(THPT Quỳnh Lưu- Nghệ An- 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2019m$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2020m^4$ (với m là tham số thực). Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y=f(x)$ có duy nhất một tiệm cận ngang?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 20. **(THPT Hai Bà Trưng - Huế - Lần 1- 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{1}{\left[x^2-(2m+1)x+2m\right]\sqrt{x-m}}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

A. $\begin{cases}0<m<1\\ m\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}m<1\\ m\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}$. **C.** $m>1$. **D.** $\begin{cases}0\le m\le 1\\ m\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Câu 21. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{6x-3}{\left(mx^2-6x+3\right)\left(9x^2+6mx+1\right)}$ có đúng 1 đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 22. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x+\sqrt{mx^2+1}$ có tiệm cận ngang.

A. $0<m<1$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-1$. **D.** $m>1$.

Câu 23. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{mx^2-2x+4}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 24. **(HSG Sở Nam Định-2019)** Gọi S là tập các giá trị nguyên của m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2019x}{\sqrt{17x^2-1}-m|x|}$ có bốn đường tiệm cận (bao gồm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang). Tính số phần tử của tập S.

A. Vô số **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

Câu 25. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^3+mx+1}-\sqrt[3]{x^4+x+1}+m^2x}$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó tổng các phần tử của S bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Câu 26. **(Trường THPT Thăng Long Lần 2019)** Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}$ có đúng ba đường tiệm cận?

A. 12. **B.** 11. **C.** 0. **D.** 10.

Câu 27. Tìm số giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019;2019]$ của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. 2007. **B.** 2010. **C.** 2009. **D.** 2008.

Câu 28. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{mx^2-2x+3}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận.

A. 2 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 1

Câu 29. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^3-3x^2+m-1}}$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có 4 đường thẳng tiệm cận.

A. $1<m<5$. **B.** $-1<m<2$. **C.** $m<1$ hoặc $m>5$. **D.** $m>2$ hoặc $m<-1$.

Câu 30. Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{3x+1}+ax+b}{(x-1)^2}$ không có tiệm cận đứng. Khi đó hiệu $a-b$ bằng:

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{3}{4}$. **C.** $-\dfrac{5}{4}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 31. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham để m đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{-x^2+2016x+2017}-24\sqrt{7}}{x-m}$ có tiệm cận đứng?

A. vô số. **B.** 2. **C.** 2017 **D.** 2019.

Câu 32. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^3+mx+1}-\sqrt[3]{x^4+x+1}+m^2x}$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó tổng các phần tử của S bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Câu 33. **(THPT Thăng Long 2019)** Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}$ có đúng ba đường tiệm cận?

A. 12. **B.** 11. **C.** 0. **D.** 10.

Câu 34. **(THPT Mai Anh Tuấn_Thanh Hóa 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}$ có đúng một đường tiệm cận.

A. $-1\le m<0$. **B.** $-1\le m\le 0$. **C.** $m<-1$. **D.** $m>0$.

---------- **HẾT** ----------

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 6 TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

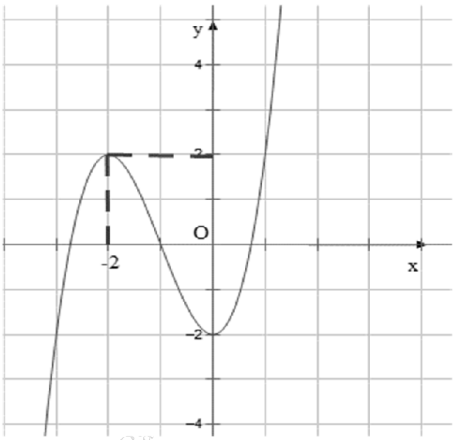
DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI – MỨC 9-10 ĐIỂM

Dạng. Xác định tiệm cận của đồ thị hàm số g khi biết bảng biến thiên hàm số f(x)

Câu 1. **(THPT Lương Văn Can - 2018)** Cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{3x-1}{x-1}$. Khi đó đường thẳng nào sau đây là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x\right)-2}$?

A. $x=1$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=2$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ



Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2019}{f\left(x\right)-1}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 3. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{-1\right\}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	2	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	-2
		$-\infty$			

Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x\right)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

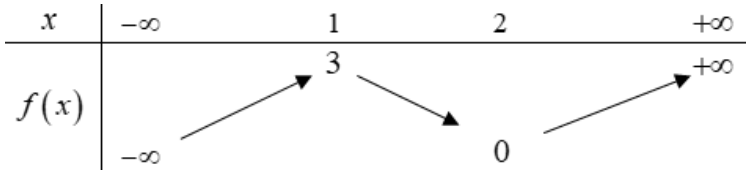
Câu 4. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=-1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=m$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x\right)+2}$ có duy nhất một tiệm cận ngang.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 5. **(Kim Liên - Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(\tan x)=\cos^4 x$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2019}{f(x)-m}$ có hai tiệm cận đứng.

A. $m<0$. **B.** $0<m<1$. **C.** $m>0$. **D.** $m<1$.

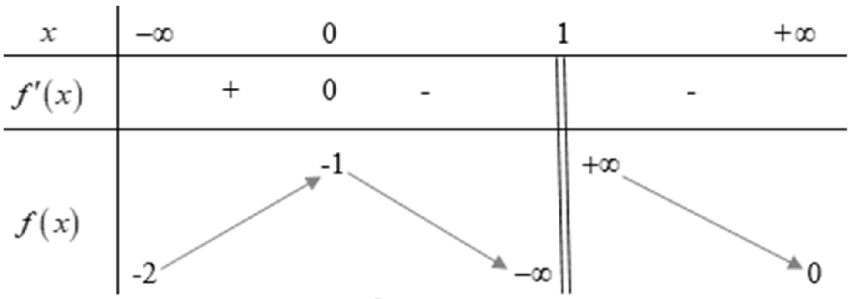
Câu 6. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới:



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-1}$ là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

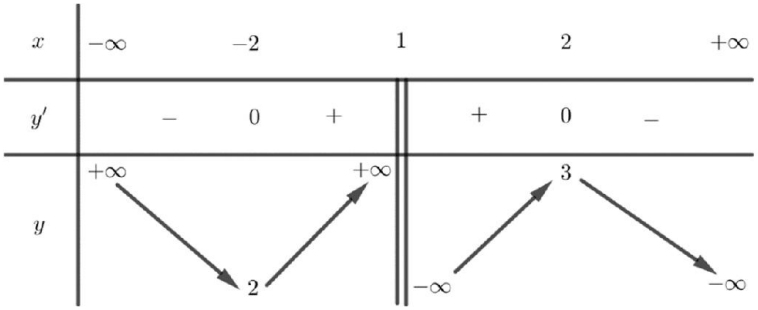
Câu 7. **(Bình Giang-Hải Dương -2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:



Đồ thị $y=\dfrac{1}{2f(x)+3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

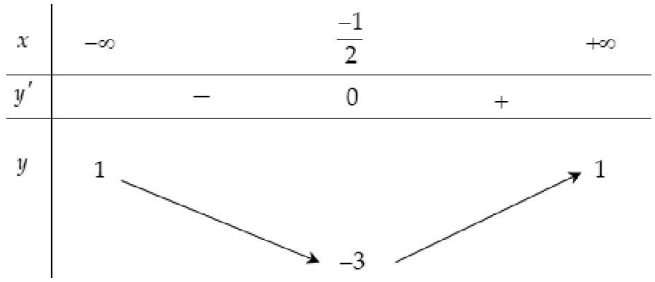
Câu 8. **(Chuyên Thoại Ngọc Hầu 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:



Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

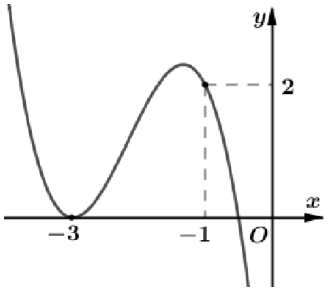
Câu 9. **(Chuyên Hưng Yên 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-1}$ là

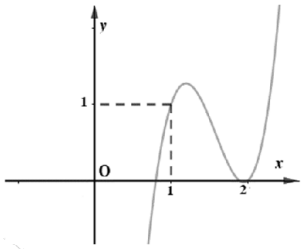
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 10. **(THPT Bạch Dằng Quảng Ninh 2019)** Cho hàm bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



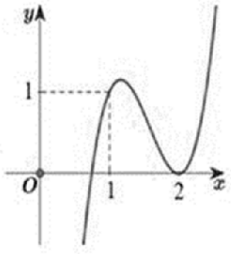
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 11. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2-3x+2)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?



A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

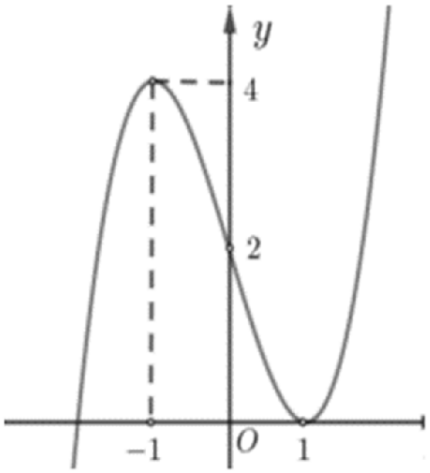
Câu 12. **(THPT Quỳnh Lưu- Nghệ An- 2019)** Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2-3x+2)\sqrt{x-1}}{(x+1)\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 13. **(THPT Thuận Thành 3 - Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số đa thức có đồ thì như hình vẽ dưới đây, đặt $g(x)=\dfrac{x^2-x}{f^2(x)-2f(x)}$. Hỏi đồ thị hàm số $y=g(x)$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?



A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

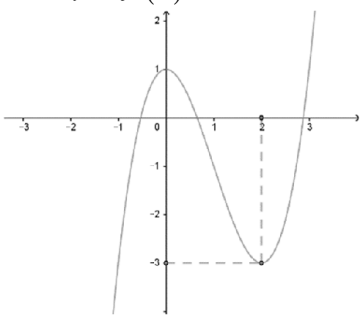
Câu 14. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	3	↘ 0	↗ $+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x^3+x\right)+3}$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

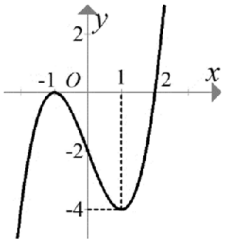
Câu 15. **(THPT Minh Khai 2020)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như bên dưới.



Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(x^2-2x\right)\sqrt{2-x}}{(x-3)\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 5.

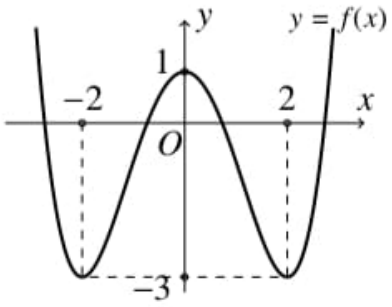
Câu 16. **(Yên Phong 1 - 2018)** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$, $(a\neq 0)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2(x^2-4x+3)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 17. **(Chuyên Quang Trung - 2020)** Cho hàm số trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x^2-4)(x^2+2x)}{[f(x)]^2+2f(x)-3}$ có tổng cộng bao nhiêu tiệm cận đứng?



A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

---------- HẾT ----------

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 6 TIỆM CẬN ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH – MỨC 5-6 ĐIỂM

Dạng. Xác định đường tiệm cận thông qua bảng biến thiên, đồ thị

1.1.1 Đường tiệm cận ngang

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a;+\infty),(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận ngang** (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y_0, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y_0$

1.1.2 Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường **tiệm cận đứng** (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$

Lưu ý: Với đồ thị hàm phân thức dạng $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0;\ ad - bc \neq 0)$ luôn có tiệm cận ngang là $y = \dfrac{a}{c}$ và tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c}$.

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2017)** Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.

B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào định nghĩa đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số ta chọn đáp án **D.**

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$ là

A. $y = -2$. **B.** $y = 1$. **C.** $x = -1$. **D.** $x = 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-2}{x+1} = 1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-2}{x+1} = 1$

Suy ra $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 3. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x+1}{x-1}$ là

A. $y = \dfrac{1}{4}$. **B.** $y = 4$. **C.** $y = 1$. **D.** $y = -1$.

Lời giải

Chọn B.

Tiệm cận ngang $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} y = \dfrac{4}{1} = 4$

Câu 4. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x+1}{x-1}$ là

A. $y=1$. **B.** $y=\dfrac{1}{5}$. **C.** $y=-1$. **D.** $y=5$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x+1}{x-1}=5\\ \lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x+1}{x-1}=5\end{cases}\Rightarrow y=5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 5. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ là:

A. $y=\dfrac{1}{2}$. **B.** $y=-1$. **C.** $y=1$. **D.** $y=2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=2$. Suy ra đồ thị hàm số có tiệmcận ngang là $y=2$.

Câu 6. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-1}$ là:

A. $y=\dfrac{1}{3}$. **B.** $y=3$. **C.** $y=-1$. **D.** $y=1$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn B

Ta có : $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+1}{x-1}=3$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+1}{x-1}=3$ nên $y=3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 7. **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+2}{x-1}$ là

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to1^-} y=-\infty;\lim\limits_{x\to1^+} y=+\infty$, suy ra đồ thị có tiệm cận đứng là $x=1$.

Câu 8. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-3}$ là

A. $x=-3$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=3$.

Lời giải.

Chọn D

$\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x-1}{x-3}=-\infty$. Suy ta tiệm cận đứng là đường thẳng $x=3$.

Câu 9. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$ là

A. $x=-2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to -1^+} y=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{2x-2}{x+1}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to -1^-} y=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{2x-2}{x+1}=+\infty$ nên đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 10. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+3}$ là

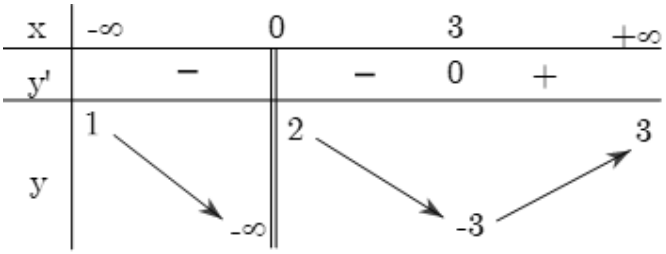
A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to -3^+} y=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to -3^-} y=+\infty$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=-3$ làm tiệm cận đứng.

Câu 11. **(Mã 103 - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có báng biến thiên như sau:



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

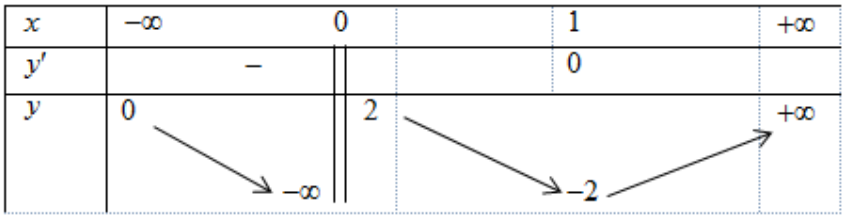
Nhìn bảng biến thiên ta thấy x=0 hàm số không xác định nên x=0 là TCĐ của đồ thị hàm số

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=3\Rightarrow y=3$ là TCN của đồ thị hàm số

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=1\Rightarrow y=1$ là TCN của đồ thị hàm số

Vậy hàm số có 3 tiệm cận

Câu 12. **(Mã 102 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

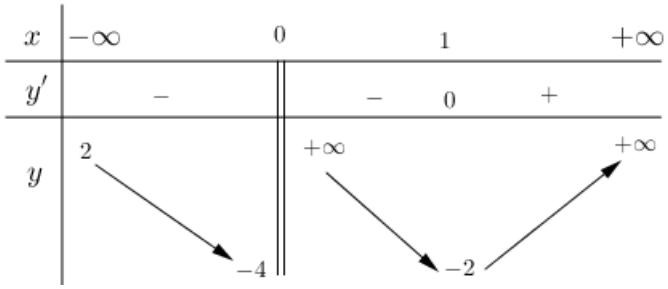
Từ bảng biến thiên đã cho ta có :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ nên đường thẳng $y=0$ là một tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$ nên đường thẳng $x=0$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận.

Câu 13. **(Mã 101 - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=f(x)$ có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ Không tồn tại tiệm cận ngang khi $x\to+\infty$.

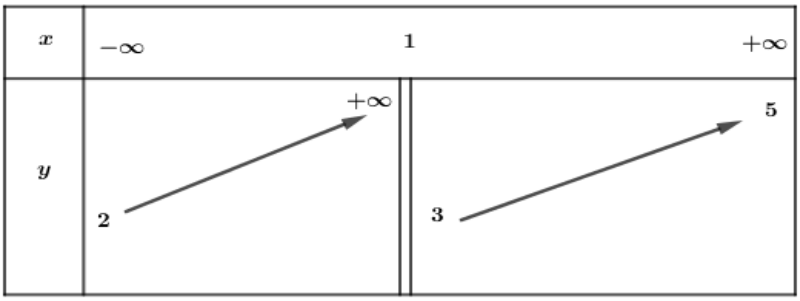
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ vậy hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận ngang $y=2$.

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-4$.

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=0$.

Vậy tổng số tiệm cận đứng và ngang là 2.

Câu 14. **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 3 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 1

Lời giải

Chọn A

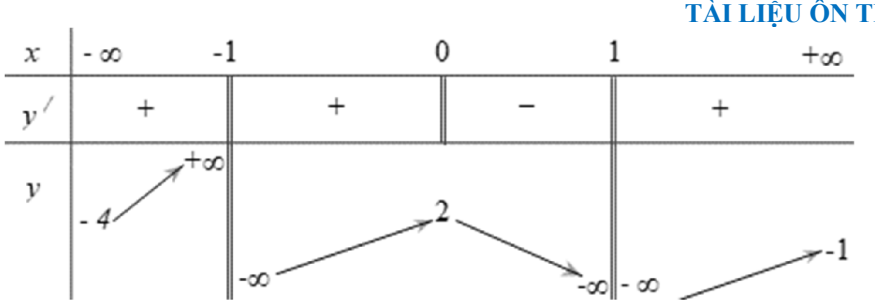
Từ bảng biến thiên ta có:

$\lim\limits_{x\to1^-} y=+\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=2, \lim\limits_{x\to+\infty} y=5$ nên đường thẳng $y=2$ và $y=5$ là các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là 3

Câu 15. **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số có bảng biến thiên như hình sau



Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

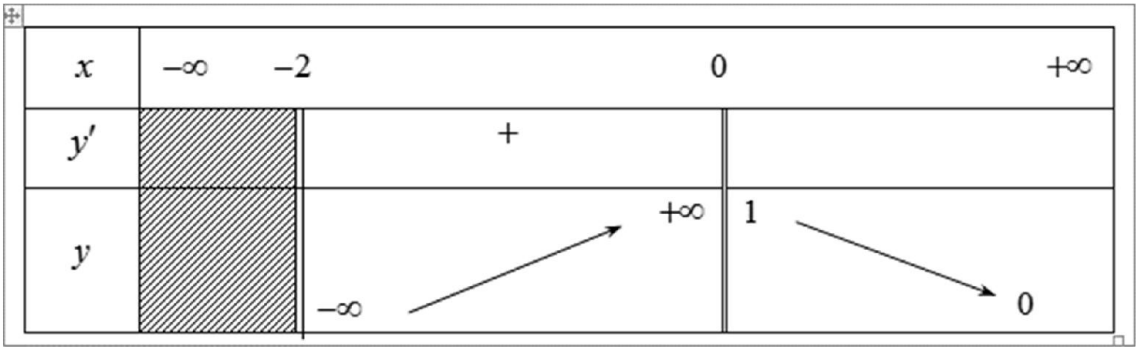
Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} y=4, \lim\limits_{x\to+\infty} y=-1 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y=-1$ và $y=4$.

$\lim\limits_{x\to-1^-} y=+\infty, \lim\limits_{x\to-1^+} y=-\infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to1^-} y=-\infty, \lim\limits_{x\to1^+} y=+\infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$.

Nên đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

Câu 16. **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?



A. 3 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 1

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên ta có :

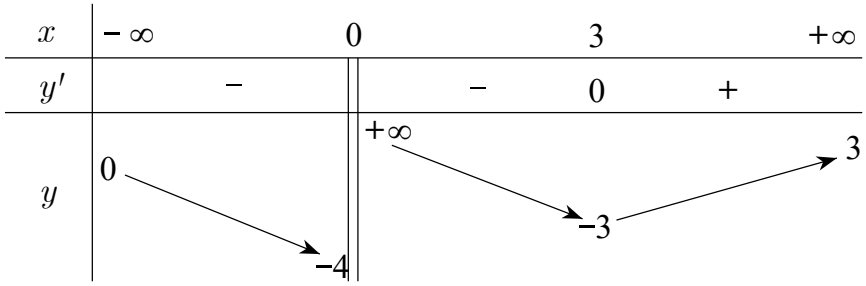
$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=-\infty$, suy ra đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=+\infty$, suy ra đường thẳng $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, suy ra đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

Câu 17. **(Mã 104 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

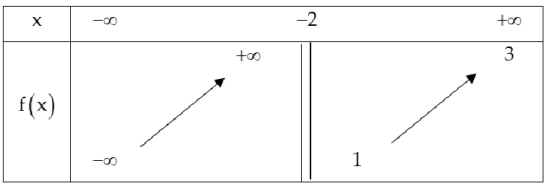
Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ nên đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là các đường thẳng có phương trình $y=3$ và $y=0$.

Và $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ nên hàm số có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng có phương trình $x=0$.

Câu 18. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là:

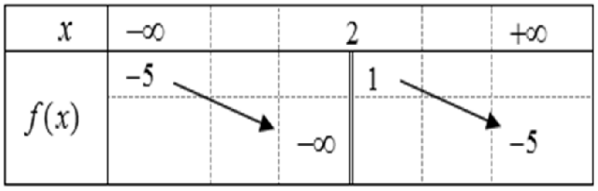
A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ ta được tiệm cận ngang $y=3$

$\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=+\infty$ ta được tiệm cận đứng $x=-2$

Câu 19. **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

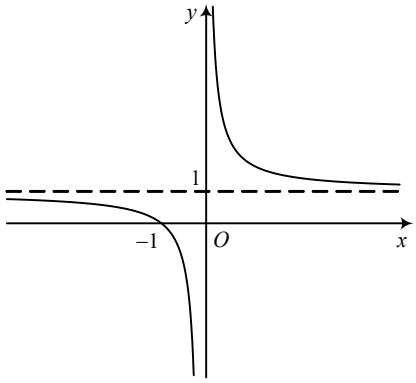
Lời giải

Từ bảng biến thiên ta có:

+ Tiệm cận ngang $y=-5$

+ Tiệm cận đứng $x=2$.

Câu 20. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



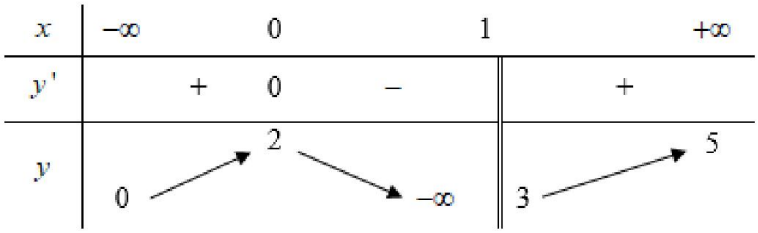
A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=0$, tiệm cận ngang $y=1$.

B. Hàm số có hai cực trị.

C. Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận.

D. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

Câu 21. Cho hàmsố $f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có:

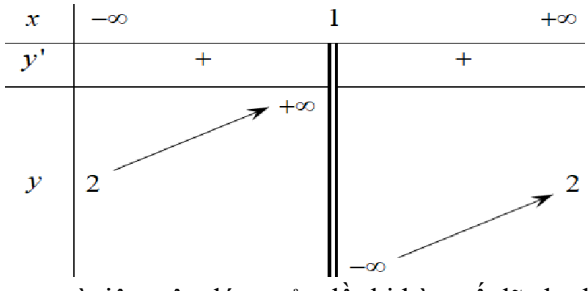
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0 \Rightarrow y=0$ là một tiệm cận ngang

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5 \Rightarrow y=5$ là một tiệm cận ngang

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty \Rightarrow x=1$ là một tiệm cận đứng

Vậy đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận là 3.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

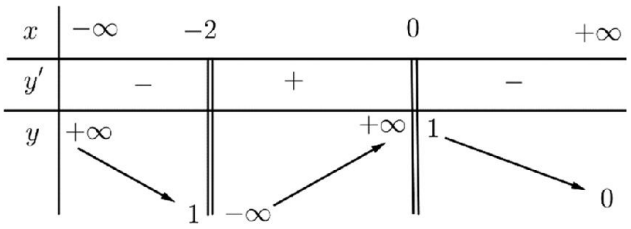
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=2 \Rightarrow y=2$ là một tiệm cận ngang

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty \Rightarrow x=1$ là một tiệm cận đứng

Vậy đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận là 2.

Câu 23. **(Sở Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Ta có

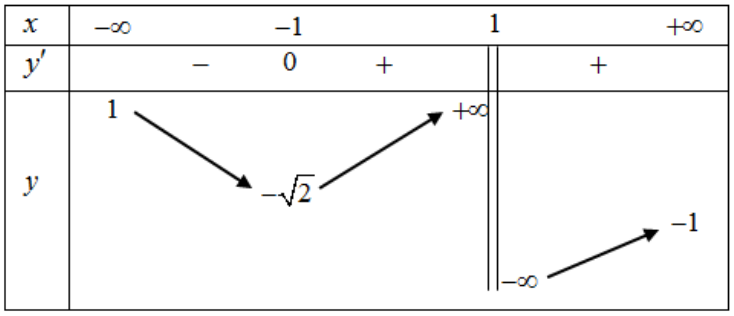
$\lim\limits_{x\to -2^+} y=-\infty \Rightarrow x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim\limits_{x\to 0^-} y=+\infty \Rightarrow x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim\limits_{x\to +\infty} y=0 \Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tổng đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là 3.

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$



A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Do $\lim\limits_{x\to 1^+} y=-\infty; \lim\limits_{x\to 1^-}=+\infty \Rightarrow$ TCĐ: $x=1$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} y=-1; \lim\limits_{x\to -\infty} y=1 \Rightarrow$ đồ thị có 2 tiệm cận ngang là $y=\pm 1$

Vậy, đồ thị hàm số đã cho có tổng số TCĐ và TCN là 3.

Câu 25. **(Cụm liên trường Hải Phòng 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến như sau:

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
y'		$+$		$+$		$+$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	0

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là:

A. 3 **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên của hàm số ta có:

+ $\lim\limits_{x\to-\infty} y=0;\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang.

+ $\lim\limits_{x\to(-3)^-} y=+\infty;\ \lim\limits_{x\to(-3)^+} =-\infty \Rightarrow$ đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=-3$ là tiệm cận đứng.

+ $\lim\limits_{x\to3^-} y=+\infty;\ \lim\limits_{x\to3^+} =-\infty \Rightarrow$ đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng.

Vậy số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là 3.

Câu 26. **(Thi thử cụm Vũng Tàu 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\searrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4 . **B.** 2 . **C.** 3 . **D.** 1 .

Lời giải

Chọn C

Ta có:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ nên đường thẳng $y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ nên đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có tiệm cận ngang khi $x\to+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=-\infty$ nên đường thẳng $x=-2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.
- $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-\infty$ nên đường thẳng $x=2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Vậy tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là 3 tiệm cận.

---------- **HẾT** ----------

Chuyên đề 6 TIỆM CẬN ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – MỨC 7-8 ĐIỂM

Dạng 1. Xác định đường tiệm cận đồ thị hàm số thông hàm số cho trước

1 Đường tiệm cận ngang

Cho hàm số $y=f(x)$ có TXD: D

Điều kiện cần: D phải chứa $+\infty$ hoặc $-\infty$

Điều kiện đủ:

Dạng 1. $y=f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Nếu $degP(x)>degQ(x)$: thì không có tiệm cận ngang

Nếu $degP(x)>degQ(x)$: TCN $y=0$

Nếu $degP(x)=degQ(x)$: $y=k$ (k là tỉ số hệ số bậc cao nhất của tử và mẫu)

Dạng 2: $y=f(x)=u-\sqrt{v}$ (hoặc $\sqrt{u}-\sqrt{v}$): Nhân liên hợp $\Rightarrow y=f(x)=\dfrac{u^2-v}{u+\sqrt{v}}$ (hoặc $\dfrac{u-v}{\sqrt{u}+\sqrt{v}}$)

2 Đường tiệm cận đứng

Cho hàm số $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ có TXD: D

Đkiện cần: giải $Q(x)=0\Leftrightarrow x=x_0$ là TCĐ khi thỏa mãn đk đủ

Đkiện đủ:

Đkiện 1: x_0 làm cho $P(x)$ và $Q(x)$ xác định.

Đkiện 2: - x_0 không phải nghiêm $P(x)\Rightarrow x=x_0$ là TCĐ

- x_0 là nghiêm $P(x)\Rightarrow x=x_0$ là TCĐ nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Tiệm cận ngang:

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(5-\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5-\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=5$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y=5$.

Tiệm cận đứng:

Cho $x^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1} y = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(5x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x+1}{x+1} = \dfrac{6}{2} = 3$ nên $x=1$ không là tiệm cận đứng.

$$\lim_{x\to(-1)^+} y = \lim_{x\to(-1)^+}\frac{5x^2-4x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to(-1)^+}\frac{5x^2-4x-1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to(-1)^+}\left(\frac{1}{x+1}.\frac{5x^2-4x-1}{x-1}\right) = -\infty$$

vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1}{x+1} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{5x^2-4x-1}{x-1} = -4 < 0\end{cases}$.

Khi đó, đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x=-1$.

Tổng cộng đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2018)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ **B.** $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ **C.** $y=\sqrt{x^2-1}$ **D.** $y=\dfrac{x}{x+1}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x}{x+1} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x}{x+1} = -\infty$ nên đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 3. **(Mã 110 2017)** Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}$.

A. 2 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 1

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}} = 1 \Rightarrow y=1$ là đường tiệm cận ngang.

Mặc khác:

$\lim\limits_{x\to 1} y = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-4)}{(x+1)} = -\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow x=1$ không là đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = \lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{(x-4)}{(x+1)} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} y = \lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{(x-4)}{(x+1)} = +\infty$

$\Rightarrow x=-1$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận

Câu 4. **(Mã 123 2017)** Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số: $y=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}$

A. 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 0

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}=\dfrac{x+1}{x+4}$ (với điều kiện xác định), do đó đồ thị hàm có 1 tiệm cận đứng.

Câu 5. **(Mã 104 2017)** Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ có mấy tiệm cận.

A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

Lời giải

Chọn C

Ta có $x^2-4=0\Leftrightarrow x=\pm 2$

$\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right)=\dfrac{1}{4}$ nên đường thẳng $x=2$ không phải là tiệm cân đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to -2^+}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{1}{x+2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to (-2)^-}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to (-2)^-}\dfrac{1}{x+2}=-\infty$, nên đường thẳng $x=-2$ là tiệm cân đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right)=0$ nên đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy có đồ thị có hai đường tiệm cận.

Câu 6. **(Mã 101 2018)** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 3

Lời giải

Chọn A

Tập xác định của hàm số: $D=[-9;+\infty)\setminus\{0;-1\}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to (-1)^+}y=\lim\limits_{x\to (-1)^+}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to (-1)^-}y=\lim\limits_{x\to (-1)^-}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}=-\infty$.

$\Rightarrow$ TCĐ: $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}y=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\left(x^2+x\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\dfrac{1}{6}$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}y=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{\left(x^2+x\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\dfrac{1}{6}$.

$\Rightarrow$ $x=0$ không là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Câu 7. **(Mã 102 2018)** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0

Lời giải

Chọn B

Tập xác định của hàm số: $D=[-4;+\infty)\setminus\{0;-1\}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}y=\dfrac{1}{4}$.

$\lim\limits_{x\to (-1)^+}y=\lim\limits_{x\to (-1)^+}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to (-1)^-}y=\lim\limits_{x\to (-1)^-}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}=-\infty$

$\Rightarrow$ TCĐ: $x=-1$.

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Câu 8. **(THPT Lê Văn Thịnh Bắc Ninh 2019)** Đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 1

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=[-1;+\infty)\setminus\{0\}$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\sqrt{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}}{1+\dfrac{2}{x}}=0\Rightarrow y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

• $\lim\limits_{x\to0} y=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(5x+1)^2-x-1}{(x^2+2x)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{25x^2+9x}{(x^2+2x)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{25x+9}{(x-2)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)}=\dfrac{-9}{4}$

$\Rightarrow x=0$ **không** là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 1 đường tiệm cận.

Câu 9. Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$.

A. $x=3$ và $x=2$. **B.** $x=3$. **C.** $x=-3$ và $x=-2$. **D.** $x=-3$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$

$\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{(2x-1)^2-\left(x^2+x+3\right)}{\left(x^2-5x+6\right)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{(2x-1)^2-\left(x^2+x+3\right)}{\left(x^2-5x+6\right)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{(3x+1)}{(x-3)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}=-\dfrac{7}{6}$

Tương tự $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=-\dfrac{7}{6}$. Suy ra đường thẳng $x=2$ **không** là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=+\infty;\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=-\infty$. Suy ra đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 10. **(Mã 103 2018)** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+x}$ là

A. 3 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 1

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=[-25;+\infty)\setminus\{-1;0\}$. Biến đổi $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+25}+5\right)}$.

Vì $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+25}+5\right)}=+\infty$ nên đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng $x=-1$.

Câu 11. **(Mã 104 2018)** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}$ là

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0

Lời giải

Chọn C

Tập xác định hàm số $D=[-16;+\infty)\setminus\{-1;0\}$.

Ta có

$$\lim_{x\to 0} y=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+16}-4}{(x+1)x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=\frac{1}{8}.$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} y=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\sqrt{x+16}-4}{(x+1)x}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=+\infty.$$

vì $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(\sqrt{x+16}+4\right)=\sqrt{15}+4>0$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)=0$ và $x\to(-1)^+$ thì $x>-1\Rightarrow x+1>0$.

Tương tự $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=-\infty$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là $x=-1$.

Câu 12. **(Chuyên Sơn La 2019)** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

TXĐ: $D=[-4;+\infty)\setminus\{-1;0\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}=-\infty$

Nên đường thẳng $x=-1$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$$\lim_{x\to 0} y=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x(x+1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\frac{1}{4}$$

Nên đường thẳng $x=0$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng $x=-1$.

Câu 13. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $D=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

TH1: $x<-1\Rightarrow x+1<0$. Khi đó $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{-\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}=-\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

Suy ra hàm số TCN $y=-1$, không có TCĐ.

TH2: $x>1\Rightarrow x+1>0$. Khi đó $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

Suy ra hàm số TCN $y=1$, TCĐ $x=1$.

Vậy hàm số có 2 TCN và 1 TCN

Câu 14. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2}$ là?

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 4

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{6}{x}}-\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}}=2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\frac{6}{x}}-\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}}=-2$$

$$\lim_{x\to-2^{\pm}}\frac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2}=\lim_{x\to-2^{\pm}}\frac{(x+2)(4x-2)}{(x+2)\left(\sqrt{x(4x+6)}+2\right)}=\lim_{x\to-2^{\pm}}\frac{4x-2}{\sqrt{x(4x+6)}+2}=\frac{-5}{2}$$

Vậy hàm số có hai tiệm cận ngang $y=\pm2$.

Câu 15. **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Điều kiện: $x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup(-1;1)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Do $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^4}}}=1\Rightarrow y=1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Có $\lim\limits_{x\to1^-}y=+\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng.

Có $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{(x+1)(x+2)}{\sqrt{(x+1)\left(x+\sqrt{2}\right)(x-1)\left(x-\sqrt{2}\right)}}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{(x+1)}(x+2)}{\sqrt{\left(x+\sqrt{2}\right)(x-1)\left(x-\sqrt{2}\right)}}=0$ nên đường thẳng $x=-1$ không là đường tiệm cận đứng.

Có $\lim\limits_{x\to\left(\sqrt{2}\right)^+} y=+\infty$ nên đường thẳng $x=\sqrt{2}$ là đường tiệm cận đứng.

Có $\lim\limits_{x\to\left(-\sqrt{2}\right)^-} y=+\infty$ nên đường thẳng $x=-\sqrt{2}$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận (1 tiệm cận ngang, 3 tiệm cận đứng).

Câu 16. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Hàm số $y=\dfrac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x^3+x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 4

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x^2}}\right)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x^2}}\right)=0$$

$\Rightarrow$ TCN: $y=0$

$\lim\limits_{x\to0^+} y=+\infty \Rightarrow$ TCĐ: $x=0$.

Câu 17. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}$ là

A. 4 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2

Lời giải

Chọn D

Đkxđ: $\begin{cases}x-2\ge0\\x^2-3x+2\ne0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge2\\x\ne2,x\ne1\end{cases}\Leftrightarrow x>2$

Ta có: $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\dfrac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}\right)=+\infty$ nên đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}\right)=0$ nên đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 18. **(THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{5\sqrt{x^2+6}+x-12}{4x^3-3x-1}$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**

A. Đồ thị (C) của hàm số không có tiệm cận.

B. Đồ thị (C) của hàm số chỉ có một tiệm cận ngang $y=0$.

C. Đồ thị (C) của hàm số có một tiệm cận ngang $y=0$ và hai tiệm cận đứng $x=1; x=-\frac{1}{2}$.

D. Đồ thị (C) của hàm số chỉ có một tiệm cận ngang $y=0$ và một tiện cận đứng $x=1$

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D=R\setminus\left\{1;-\frac{1}{2}\right\}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^-} y=-\infty; \lim\limits_{x\to 1^+} y=+\infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một TCĐ là $x=1$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một TCN là $y=0$

Câu 19. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=\dfrac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}$ có tập xác định $D=(-\infty;0]\cup[1;+\infty)\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Ta có

$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}} \dfrac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}} \dfrac{3x^2+x}{(3x+1)\left(2x-\sqrt{x^2-x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}} \dfrac{x}{2x-\sqrt{x^2-x}}=\dfrac{1}{4}$;

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}=0$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}=\dfrac{1}{2}$ nên đồ thị không có tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}} \dfrac{2x-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{3x+1}=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}} \dfrac{2-\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{3+\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{3}$,

và $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}} \dfrac{2x+x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{3x+1}=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}} \dfrac{2+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{3+\frac{1}{x}}=1$ nên đồ thị có hai tiệm cận ngang là

$y=\dfrac{1}{3}$ và $y=1$.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả hai đường tiệm cận.

Câu 20. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-\sqrt{4-x^2}}{x^2-2x-3}$ có số đường tiệm cận đứng là m và số đường tiệm cận ngang là n. Giá trị của $m+n$ là

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

Lời giải

Chọn A

$D=[-2;2]\setminus\{-1\}$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1-\sqrt{4-x^2}}{x^2-2x-3}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{1-\sqrt{4-x^2}}{x^2-2x-3}=-\infty$

$\Rightarrow x=-1$ là tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang.

Vậy $m+n=1$.

Câu 21. Gọi n,d lần lượt là số đường tiệm cận ngang và số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $n=0,d=2$. **B.** $n=d=1$. **C.** $n=1,d=2$. **D.** $n=0,d=1$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=(0;1)$.

Từ tập xác định suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang. $n=0$.

+) $\lim\limits_{x\to0^+} y=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-1}{\sqrt{1-x}\sqrt{x}}=-\infty$

+) $\lim\limits_{x\to1^-} y=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-1}{\sqrt{1-x}\sqrt{x}}=-\infty$

Suy ra đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng, $d=2$.

Câu 22. **(Chuyên Long An-2019)** Đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số là $D=[-1;0)\cup(2;+\infty)$. Ta có

$$\lim_{x\to0-} y=\lim_{x\to0-}\frac{25x^2+9x}{\left(x^2-2x\right)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to0-}\frac{25x+9}{(x-2)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)}=-\frac{9}{4}.$$

$\lim\limits_{x\to2+} y=+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}-\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}}{1-\frac{2}{x}}=0.$$

Vậy đồ thị của hàm số có hai đường tiệm cận có phương trình $x=2$ và $y=0$.

Câu 23. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\left[-\frac{1}{3};+\infty\right)\setminus\{1\}$

+ Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\left(4\sqrt{3x+1}+3x+5\right)}{-9(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{4\sqrt{3x+1}+3x+5}{-9(x-1)}=-\infty$

do đó đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{4\sqrt{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-3-\frac{5}{x}}=-\frac{1}{3}$ do đó đường thẳng $y=-\frac{1}{3}$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 24. Cho hàm số $y=\frac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

□ Tập xác định $D=\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup(-1;1)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

□ $\lim\limits_{x\to\left(-\sqrt{2}\right)^-}y=\lim\limits_{x\to\left(\sqrt{2}\right)^+}y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}y=\lim\limits_{x\to(1)^-}y=+\infty$.

$\Rightarrow$ Các đường tiệm cận đứng của đồ thị là $x=\pm\sqrt{2}$, $x=\pm 1$.

□ $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}y=1\Rightarrow$ đồ thị có một tiệm cận ngang $y=1$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 25. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Đồ thị hàm số $y=\frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-8}{x\sqrt{1-\frac{3}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{8}{x}}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}}=5$$

$\Rightarrow$ Đường thẳng $y=5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-8}{-x\sqrt{1-\frac{3}{x}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5-\frac{8}{x}}{-\sqrt{1-\frac{3}{x}}}=-5$$

$\Rightarrow$Đường thẳng $y=-5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x\to 0^-} y=\lim_{x\to 0^-}\frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}}=-\infty$$

(vì $\lim\limits_{x\to 0^-}(5x-8)=-8<0;\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{x^2-3x}=0;\sqrt{x^2-3x}>0\ \forall x\to 0^-$)

Suy ra: đường thẳng $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x\to 3^+} y=\lim_{x\to 3^+}\frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}}=+\infty$$

(vì $\lim\limits_{x\to 3^+}(5x-8)=7>0;\lim\limits_{x\to 3^+}\sqrt{x^2-3x}=0;\sqrt{x^2-3x}>0\ \forall x\to 3^+$)

Suy ra: đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 26. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}$ xác định $\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2+2x-1\ge 0\\ x+1\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}\\ x\ge\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}\end{array}\right.\\ x\ne -1\end{cases}$.

Tập xác định của hàm số đã cho là $D=(-\infty;-1)\cup\left(-1;\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}\right]\cup\left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4};+\infty\right)$.

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+x}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+x}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+1}{1+\dfrac{1}{x}}=-1.$$

$\Rightarrow y=-1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+x}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+x}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+1}{1+\dfrac{1}{x}}=3.$$

$\Rightarrow y=3$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to -1} y=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{4x^2+2x-1-x^2}{(x+1)\left(\sqrt{4x^2+2x-1}-x\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(3x-1)}{(x+1)\left(\sqrt{4x^2+2x-1}-x\right)}=-2.$$

Vậy đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}$ có 2 đường tiệm cận.

Dạng 2. Định m để đồ thị hàm số có đường tiệm cận thỏa mãn điều kiện cho trước

1 Đường tiệm cận ngang

Cho hàm số $y=f(x)$ có TXD: D

Điều kiện cần: D phải chứa $+\infty$ hoặc $-\infty$

Điều kiện đủ:

Dạng 1. $y=f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Nếu $degP(x)>degQ(x)$: thì không có tiệm cận ngang

Nếu $degP(x)>degQ(x)$: TCN $y=0$

Nếu $degP(x)=degQ(x)$: $y=k$ (k là tỉ số hệ số bậc cao nhất của tử và mẫu)

Dạng 2: $y=f(x)=u-\sqrt{v}$ (hoặc $\sqrt{u}-\sqrt{v}$): Nhân liên hợp $\Rightarrow y=f(x)=\frac{u^2-v}{u+\sqrt{v}}$ (hoặc $\frac{u-v}{\sqrt{u}+\sqrt{v}}$)

2 Đường tiệm cận đứng

Cho hàm số $y=\frac{P(x)}{Q(x)}$ có TXD: D

Đkiện cần: giải $Q(x)=0\Leftrightarrow x=x_0$ là TCĐ khi thỏa mãn đk đủ

Đkiện đủ:

Đkiện 1: x_0 làm cho $P(x)$ và $Q(x)$ xác định.

Đkiện 2: - x_0 không phải nghiêm $P(x)\Rightarrow x=x_0$ là TCĐ

- x_0 là nghiêm $P(x)\Rightarrow x=x_0$ là TCĐ nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang

A. $m<0$

B. $m=0$

C. $m>0$

D. Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài

Lời giải

Chọn C

Xét các trường hợp sau:

Với $m=0$: hàm số trở thành $y=x+1$ nên không có tiệm cận ngang.

Với $m<0$:

hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}=\dfrac{x+1}{\sqrt{1-|m|x^2}}$ có tập xác định là $D=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{|m|}};\dfrac{1}{\sqrt{|m|}}\right)$ suy ra không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y$ hay hàm số không có tiệm cận ngang.

Với $m>0$:

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{|x|\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{-x\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}}=-\dfrac{1}{\sqrt{m}}.$

và $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{|x|\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{m}}.$

Vậy hàm số có hai tiệm cận ngang là : $y=\dfrac{1}{\sqrt{m}};y=-\dfrac{1}{\sqrt{m}}$ khi $m>0$.

Câu 2. **(Chuyên KHTN - 2020)** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-6x+2m}}$ có hai đường tiệm cận đứng. Số phần tử của S là

A. vô số. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 13.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định $\begin{cases}x+2\ge 0\\ x^2-6x+2m>0\end{cases}$.

Để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng thì phương trình $x^2-6x+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 lớn hơn $-2\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=9-2m>0\\ x_1+x_2>-2\\ (-2)^2-6\cdot(-2)+2m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{9}{2}\\ 3>-2\\ 4+12+2m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{9}{2}\\ m>-8\end{cases}$.

Do đó tập $S=\{-7;-6;-5;...;4\}$ có 12 giá trị.

Câu 3. **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-8x+m}$ có 3 đường tiệm cận?

A. 14. **B.** 8. **C.** 15. **D.** 16.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x^2-8x+m}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x^2-8x+m}=0$ nên hàm số có một tiện cận ngang $y=0$.

Hàm số có 3 đường tiệm cận khi và chỉ khi hàm số có hai đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $x^2-8x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $1\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=16-m>0\\ m-7\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<16\\ m\ne 7\end{cases}$.

Kết hợp với điều kiện m nguyên dương ta có $m\in\{1;2;3;...;6;8;...;15\}$. Vậy có 14 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Câu 4. **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-2020;2020\right]$ để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?

A. 4039. **B.** 4040. **C.** 4038. **D.** 4037.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty} y=0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận ngang.

Do đó đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi nó có 3 tiệm cận đứng $(*)$.

Có $x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m=\left(x-m\right)\left(x^2-2mx+1\right)$

$x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x^2-2mx+1=0 \end{array}\right. \quad (2)$

$(*) \Leftrightarrow x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m=0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 3.

$\Leftrightarrow$ $m\neq 3$ và (2) có 2 nghiệm phân biệt khác m và khác 3.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 3 \\ m^2-2m.m+1\neq 0 \\ 3^2-2m.3+1\neq 0 \\ \Delta_2'=m^2-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 3, m\neq \dfrac{5}{3} \\ \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1 \end{array}\right. \end{cases}$$

Do đó tập tất cả giá trị nguyên của m thỏa ycbt là $\left\{-2020;-2019;...;-2;2;4;5;...;2020\right\}$.

Vậy có 4037 giá trị m thỏa ycbt.

Câu 5. **(Chuyên Sư Phạm Hà Nội - 2020)** Có bao nhiêu số nguyên của m thuộc đoạn $\left[-100;100\right]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{\left(x-m\right)\sqrt{2x-x^2}}$ có đúng hai đường tiệm cân?

A. 200. **B.** 2. **C.** 199. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có điều kiện xác định là $\begin{cases} x\neq m \\ x\in\left(0;2\right) \end{cases}$, khi đó đồ thị hàm số sẽ không có tiệm cận ngang.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} y=\infty,\ \lim\limits_{x\to 2^-} y=\infty$

Suy ra $x=0,\ x=2$ là hai đường tiệm cận đứng

Vậy để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận thì $\left[\begin{array}{l} m\leq 0 \\ m\geq 2 \end{array}\right.$, theo bài m thuộc đoạn $\left[-100;100\right]$.

Vậy có 200 số nguyên của m thỏa mãn đầu bài.

Câu 6. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. $m=-1$ **B.** $m\in\{1;4\}$ **C.** $m=4$ **D.** $m\in\{-1;-4\}$

Lời giải

$y=\dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2}=\dfrac{x^2+m}{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=1 \Rightarrow y=1$ là đường tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ pt $x^2+m=0$ nhận nghiệm $x=1$ hoặc $x=2$.

Khi đó: $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-4 \end{array}\right.$.

Với $m=-1$ có một tiệm cận đứng $x=2$.

Với $m=-4$ có một tiệm cận đứng $x=1$.

Vậy $m\in\{-1;-4\}$.

Câu 7. **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{6x-3}{\left(mx^2-6x+3\right)\left(9x^2+6mx+1\right)}$ có đúng một đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Kí hiệu (C) là đồ thị hàm số $y=\dfrac{6x-3}{\left(mx^2-6x+3\right)\left(9x^2+6mx+1\right)}$.

* Trường hợp 1: $m=0$.

Khi đó $y=\dfrac{6x-3}{\left(-6x+3\right)\left(9x^2+1\right)}$. Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận ngang $y=0$.

Do đó chọn $m=0$.

* Trường hợp 2: $m\neq 0$.

Xét phương trình $\left(mx^2-6x+3\right)\left(9x^2+6mx+1\right)=0\ (1)$

Nhận thấy: (C) luôn có một đường tiệm cận ngang $y=0$ và phương trình (1) không thể có duy nhất một nghiệm đơn với mọi m.

Do đó (C) có đúng một đường tiệm cận khi và chỉ khi (C) không có tiệm cận đứng $\Leftrightarrow (1)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 9-3m<0 \\ 9m^2-9<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>3 \\ -1<m<1 \end{cases}$, (không tồn tại m).

Kết hợp các trường hợp ta được $m=0$.

Câu 8. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2mx+4}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị có ba đường tiệm cận

A. $m>2$ **B.** $\begin{cases} m<-2 \\ m\neq -\dfrac{5}{2} \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ m\neq -\dfrac{5}{2} \end{cases}$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$

Lời giải

Chọn C

Để đồ thị có ba đường tiệm cận thì $x^2-2mx+4=0$ có hai nghiệm phân biệt $\neq -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (-1)^2 - 2m(-1) + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right. \\ m \neq -\dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Câu 9. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Biết rằng đồ thị của hàm số $y = \dfrac{(n-3)x + n - 2017}{x + m + 3}$ (m, n là các số thực) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Tính tổng $m + n$.

A. 0 **B.** -3 **C.** 3 **D.** 6

Lời giải

Chọn A

Theo công thức tìm nhanh tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ ta có

Đồ thị hàm số nhận $x = -\dfrac{d}{c} = -m - 3 = 0$ làm TCĐ $\Rightarrow m = -3$

Đồ thị hàm số nhận $y = \dfrac{a}{c} = n - 3 = 0$ làm TCN $\Rightarrow n = 3$.

Vậy $m + n = 0$.

Câu 10. **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x - 1}{\sqrt{mx^2 - 8x + 2}}$ có đúng bốn đường tiệm cận?

A. 8 **B.** 6 **C.** 7 **D.** Vô số

Lời giải

TH1: $m < 0$ suy ra tập xác định của hàm số là $D = (x_1; x_2)$, ($x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $mx^2 - 8x + 2 = 0$). Do đó $m < 0$ không thỏa yêu cầu của bài toán.

TH2: $m = 0 \Rightarrow y = \dfrac{x - 1}{\sqrt{-8x + 2}}$ suy ra tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; 4)$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty; \lim\limits_{x \to 4^-} y = -\infty$. Khi đó ta có $x = -4$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Do đó $m = 0$ không thỏa yêu cầu của bài toán

TH3: $m > 0$ suy ra tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ ($x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $mx^2 - 8x + 2 = 0$). Do đó đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận khi phương trình $mx^2 - 8x + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác

$1 \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 2m > 0 \\ m > 0; m \in \mathbb{Z} \\ m - 8 + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 8 \\ m > 0; m \in \mathbb{Z} \\ m \neq 6 \end{cases} \Rightarrow m = \{1; 2; 3; 4; 5; 7\}$. Suy ra có tất cả 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Câu 11. **(THPT Việt Đức Hà Nội 2019)** Với giá trị nào của hàm số m để đồ thị hàm số $y = x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}$ có tiệm cạn ngang.

A. $m = 1$ **B.** $m = -1$ **C.** $m = \pm 1$ **D.** Không có m

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang

$\Rightarrow$ Hàm số xác định trên một trong các miền $(-\infty; a), (-\infty; a], (a, +\infty)$ hoặc $[a; +\infty)$

$m \ge 0$

TH1: $m = 0 \Rightarrow y = x - \sqrt{-3x+7}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \pm\infty$ đồ thị không có tiệm cận ngang

TH2: $m > 0, y = x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}$

Khi $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - x\sqrt{m - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}}\right) = \frac{3}{2}$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi và chỉ khi $m = 1$.

Vậy $m = 1$

Cách trắc nghiệm:

Thay $m = 1 \Rightarrow y = x - \sqrt{x^2 - 3x + 7} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - \sqrt{x^2 - 3x + 7}\right) = \frac{3}{2}$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x - \sqrt{x^2 - 3x + 7}\right) = -\infty$ không có tiệm cận ngang.

Thay $m = -1 \Rightarrow y = x - \sqrt{-x^2 - 3x + 7} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - \sqrt{-x^2 - 3x + 7}\right)$ không xác định.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x - \sqrt{-x^2 - 3x + 7}\right)$ không xác định.

Vậy $m = 1$

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$. Tìm a, b để đồ thị hàm số có $x = 1$ là tiệm cận đứng và $y = \frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.

A. $a = -1; b = 2$. **B.** $a = 4; b = 4$. **C.** $a = 1; b = 2$. **D.** $a = -1; b = -2$.

Lời giải

Chọn C

+ $b = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{-2}$ không có tiệm cận.

+ $b \ne 0$, tập xác định của hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ là $D = R \setminus \left\{\frac{2}{b}\right\}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{ax+1}{bx-2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{a + \frac{1}{x}}{b - \frac{2}{x}} = \frac{a}{b}$.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = 2a$.

$\lim\limits_{x\to\frac{2}{b}^+} y = \lim\limits_{x\to\frac{2}{b}^+} \frac{ax+1}{bx-2} = \left[\begin{array}{l} +\infty \\ -\infty \end{array}\right.$.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = \frac{2}{b} \Rightarrow \frac{2}{b} = 1 \Leftrightarrow b = 2 \Rightarrow a = 1$.

Vậy $a = 1; b = 2$.

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-10; 10]$ sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{2x^2 + 6x - m - 3}$ có hai đường tiệm cận đứng?

A. 19. **B.** 15. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn C

Ta có đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{2x^2+6x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng khi phương trình

$2x^2+6x-m-3=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} 3^2-2(-m-3)>0 \\ 2.1^2+6.1-m-3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{15}{2} \\ m\neq 5 \end{cases}$

Từ đó ta suy ra tập các giá trị nguyên của m thỏa mãn là

$\{-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,6,7,8,9,10\}$. Vậy có 17 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ bằng 3?

A. 4. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ có nhiều nhất một tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.

Điều kiện để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ có 3 tiệm cận là nó có đúng 1 tiệm cận đứng và 2 tiệm cận ngang.

* Xét điều kiện tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y$

Trường hợp 1: $g(x)=mx^2+3mx+4\geq 0$ với $\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ \begin{cases} m>0 \\ \Delta=9m^2-16m\leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 0\leq m\leq\dfrac{16}{9}$

Trường hợp 2: $g(x)=mx^2+3mx+4\geq 0$ với $\forall x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$ với x_1; x_2 là nghiệm của $g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ \Delta=9m^2-16m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>\dfrac{16}{9}$

Vậy $m\geq 0$ thì tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y$

Khi đó:

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{m+\dfrac{3m}{x}+\dfrac{4}{x^2}}}{1+\dfrac{2}{x}}=\sqrt{m}$$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{m+\dfrac{3m}{x}+\dfrac{4}{x^2}}}{1+\dfrac{2}{x}}=-\sqrt{m}$$

Vậy điều kiện để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $m>0$

* Xét trường hợp $x=-2$ là nghiệm của tử số $\Rightarrow x=-2$ là nghiệm của $g(x)=mx^2+3mx+4$

$\Rightarrow g(-2)=0\Rightarrow m=2$

Khi đó $y=\dfrac{\sqrt{2x^2+6x+4}}{x+2}\Rightarrow\lim\limits_{x\to-2^-} y=\dfrac{\sqrt{2(x+1)(x+2)}}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2^-}\left[-\sqrt{\dfrac{2(x+1)}{x+2}}\right]=-\infty$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x=-2$.

$\Rightarrow$ $m=2$ thỏa mãn

* Xét trường hợp $x=-2$ không là nghiệm của tử số, để $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì $\begin{cases} g(-2)\neq 0 \\ g(-2)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow g(-2)>0 \Leftrightarrow 4-2m>0 \Leftrightarrow m<2$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng $x=-2$ với $\forall m\in(0;2]$

Vậy điều kiện để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ có 3 tiệm cận là $\forall m\in(0;2]$

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài là $m=1$; $m=2$.

Câu 15. **(Thi thử Lômônôxốp - Hà Nội 2019)** Tổng các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$ có đúng một tiệm cận đứng.

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** -3. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x)=x^2+2(m-1)x+m^2-2$

Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng khi và chỉ khi $f(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $x=1$ hoặc $f(x)=0$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}\Delta'>0 \\ f(1)=0\end{cases} \\ \Delta'=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}(m-1)^2-(m^2-2)>0 \\ 1+2(m-1)+m^2-2=0\end{cases} \\ m=\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}m<\dfrac{3}{2} \\ m=1;m=-3\end{cases} \\ m=\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3 \\ m=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Vậy tổng các giá trị m thỏa mãn là: $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 16. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-6;6]$ của tham số m để đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận?

A. 12. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 11.

Lời giải

Chọn B

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} y=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$.

Do đó, đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận khi phương trình $x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m=0$ có 3 nghiệm phân biệt $x\neq 3$.

Xét phương trình $x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m=0$ (*) ta có

$$x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m=0 \Leftrightarrow (x-m)(x^2-2mx+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x^2-2mx+1=0 \end{array}\right.$$

Phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt $x\neq 3$ khi và chỉ khi $m\neq 3$ và phương trình $x^2-2mx+1=0$ có hai nghiệm phân biệt $x\neq 3$ $\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 3\\ m^2-1>0\\ 3^2-2.3.m+1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 3\\ \left[\begin{array}{l}m>1\\ m<-1\end{array}\right.\\ m\neq\dfrac{5}{3}\end{cases}$.

Do m nguyên và $m\in[-6;6]$ nên $m\in\{-6;-5;-4;-3;-2;2;4;5;6\}$.

Vậy có 9 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 17. **(THPT Yên Dũng 2-Bắc Giang)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận đứng.

A. $m=1$. **B.** $m>1$. **C.** $m=1$ và $m=0$. **D.** $m\neq 0$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ $\mathbb{R}\backslash\{m\}$.

Có $\lim\limits_{x\to m}\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}=\lim\limits_{x\to m}\left(2x+2m-3+\dfrac{2m^2-2m}{x-m}\right)$.

Để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng thì phải tồn tại $\lim\limits_{x\to m}\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$,

$\Rightarrow 2m^2-2m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=1\end{array}\right.$

Vậy đáp án **C.**

Câu 18. **(Cụm liên trường Hải Phòng 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2017;2017]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-4x+m}}$ có hai tiệm cận đứng.

A. 2019. **B.** 2021. **C.** 2018. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn D

Để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-4x+m}}$ có hai tiệm cận đứng thì phương trình $x^2-4x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2

$\Leftrightarrow\begin{cases}4-m>0\\ 12+m\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2017\leq m<4\\ m\neq -12\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow m\in\{-2017;-2016;..;3\}\backslash\{-12\}$.

Do đó số giá trị nguyên của tham số m thỏa đề bài là: $3-(-2017)+1-1=2020$ giá trị.

Câu 19. (THPT Quỳnh Lưu- Nghệ An- 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2019m$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2020m^4$ (với m là tham số thực). Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y=f(x)$ có duy nhất một tiệm cận ngang?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có duy nhất một tiệm cận ngang

$$\Leftrightarrow 2019m=2020m^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\sqrt[3]{\dfrac{2019}{2020}} \end{array}\right. .$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa bài toán

Câu 20. (THPT Hai Bà Trưng - Huế - Lần 1- 2019) Cho hàm số $y=\dfrac{1}{\left[x^2-\left(2m+1\right)x+2m\right]\sqrt{x-m}}$.

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

A. $\begin{cases} 0<m<1 \\ m\neq\dfrac{1}{2} \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} m<1 \\ m\neq\dfrac{1}{2} \end{cases}$. **C.** $m>1$. **D.** $\begin{cases} 0\le m\le 1 \\ m\neq\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x>m$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0 \Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Xét phương trình $\left[x^2-\left(2m+1\right)x+2m\right]\sqrt{x-m}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x^2-\left(2m+1\right)x+2m=0\,(*) \end{array}\right.$

Để hàm số có 4 đường tiệm cận thì phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $m<x_1<x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(2m-1\right)^2>0 \\ \left(x_1-m\right)\left(x_2-m\right)>0 \\ x_1+x_2>2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq\dfrac{1}{2} \\ x_1x_2-m\left(x_1+x_2\right)-m^2>0 \\ 2m+1>2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq\dfrac{1}{2} \\ m-m^2>0 \\ 1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq\dfrac{1}{2} \\ 0<m<1 \end{cases} .$$

Câu 21. (THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{6x-3}{\left(mx^2-6x+3\right)\left(9x^2+6mx+1\right)}$ có đúng 1 đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f\left(x\right)=mx^2-6x+3$ và $g\left(x\right)=9x^2+6mx+1$. Ta xét các trường hợp:

+ Trường hợp 1: $m=0$ khi đó ta có $y=\dfrac{6x-3}{\left(-6x+3\right)\left(9x^2+1\right)}$ đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$ do đó $m=0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Trường hợp 2: $m \neq 0$ và cả hai tam thức $f(x)$ và $g(x)$ đều vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_f < 0 \\ \Delta'_g < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9-3m<0 \\ 9m^2-9<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>3 \\ -1<m<1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing$.

+ Trường hợp 3: Tam thức $g(x)$ nhận $x=\frac{1}{2}$ làm nghiệm $g\left(\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow m=-\frac{13}{12}$ khi đó $f(x)$ luôn có 2 nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số đã cho có nhiều hơn 1 đường tiệm cận.

Vậy có 1 giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=\frac{6x-3}{\left(mx^2-6x+3\right)\left(9x^2+6mx+1\right)}$ có đúng 1 đường tiệm cận

Câu 22. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x+\sqrt{mx^2+1}$ có tiệm cận ngang.

A. $0<m<1$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-1$. **D.** $m>1$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện cần và đủ để đồ thị hàm số: $y=x+\sqrt{mx^2+1}$ có tiệm cận ngang là tồn tại số thực k sao cho: $\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{mx^2+1})=\mathrm{k} \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{mx^2+1})=\mathrm{k} \end{array}\right.$

Hiển nhiên nếu $m \leq 0$ thì giới $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x+\sqrt{mx^2+1})$ không hữu hạn

Nếu $m>0$ ta có

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{mx^2+1})=+\infty$.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{y}=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{mx^2+1})=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2(1-m)-1}{x-\sqrt{mx^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{x}(1-m)-\frac{1}{x}}{1+\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}$

Để giới hạn trên hữu hạn khi và chỉ khi m=1.

Câu 23. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hàm số $y=\frac{x-2}{mx^2-2x+4}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Với $m=0$; ta có hàm số $y=\frac{x-2}{-2x+4}=-2 \Rightarrow$ Không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m \neq 0$, ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x-2}{mx^2-2x+4}=0 \Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ $mx^2-2x+4=0$ có nghiệm duy nhất hoặc $mx^2-2x+4=0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x=2$.

$mx^2-2x+4=0$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta'=0 \Leftrightarrow 1-4m=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{4}$.

$mx^2-2x+4=0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x=2$. $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ 4m=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<\dfrac{1}{4}\\ m=0\end{cases}$

$\Rightarrow$ $m=0$ không thỏa mãn điều kiện.

Vậy chỉ có một giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 24. **(HSG Sở Nam Định-2019)** Gọi S là tập các giá trị nguyên của m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2019x}{\sqrt{17x^2-1}-m|x|}$ có bốn đường tiệm cận (bao gồm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang). Tính số phần tử của tập S.

A. Vô số **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

Lời giải

Chọn C

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\dfrac{2019}{m-\sqrt{17}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\dfrac{2019}{\sqrt{17}-m}$.

Với $m\neq\sqrt{17}$ thì đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{2019}{m-\sqrt{17}}$, $y=\dfrac{2019}{\sqrt{17}-m}$.

Khi đó đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi phương trình $\sqrt{17x^2-1}-m|x|=0$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0.

Ta có: $(1)\Leftrightarrow \sqrt{17x^2-1}=m|x| \Leftrightarrow \begin{cases}m\geq 0\\ 17x^2-1=m^2x^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\geq 0\\ \left(17-m^2\right)x^2=1\ (2)\end{cases}$

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases}m\geq 0\\ 17-m^2>0\end{cases} \Leftrightarrow 0\leq m<\sqrt{17}$.

Suy ra $S=\{0,1,2,3,4\}$.

Câu 25. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^3+mx+1}-\sqrt[3]{x^4+x+1}+m^2x}$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó tổng các phần tử của S bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{x^3+mx+1}-\sqrt[3]{x^4+x+1}+m^2x}{x}}$.

Mà $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+mx+1}-\sqrt[3]{x^4+x+1}+m^2x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sqrt{x^3+mx+1}-1}{x}-\dfrac{\sqrt[3]{x^4+x+1}-1}{x}+\dfrac{m^2x}{x}\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x^3+mx}{x(\sqrt{x^3+mx+1}+1)}-\dfrac{x^4+x}{x(\sqrt[3]{(x^4+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^4+x+1}+1)}+m^2\right].$

Đồ thị hàm số $f(x)$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{(x^2+m)}{(\sqrt{x^3+mx+1}+1)}-\dfrac{(x^3+1)}{\sqrt[3]{(x^4+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^4+x+1}+1}+m^2)=0 \Leftrightarrow \dfrac{m}{2}-\dfrac{1}{3}+m^2=0.$

$\Leftrightarrow 6m^2+3m-2=0$ Vậy $m_1+m_2=-\dfrac{1}{2}.$

Câu 26. **(Trường THPT Thăng Long Lần 2019)** Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}$ có đúng ba đường tiệm cận?

A. 12. **B.** 11. **C.** 0. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Xét $g(x)=\sqrt{x(x-m)}-1$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}=-1$. Nên đồ thị hàm số luôn có hai đường tiệm cận ngang $y=1$ và $y=-1$.

Trường hợp 1: $m=0$ khi đó hàm số là $y=\dfrac{|x|-1}{x+2}$. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-2$.

Vậy $m=0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Trường hợp 2: $m>0$. Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $D=(-\infty;0]\cup[m;+\infty)$.

$x=-2\in D$. $g(-2)=\sqrt{2(m+2)}-1\neq 0$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

Vậy $m=1$, $m=2$,. $m=9$ thỏa mãn. Nên có 9 giá trị m.

Trường hợp 3: $m<0$. Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $D=(-\infty;m]\cup[0;+\infty)$.

Để $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì trước hết $x=-2\in D$ hay $m\geq -2$. Nên chỉ có $m=-2$, $m=-1$ thỏa mãn

Với $m=-1$ ta có $g(x)=\sqrt{x(x+1)}-1$, $g(-2)=\sqrt{2}-1\neq 0$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Với $m=-2$ ta có $g(x)=\sqrt{x(x+2)}-1$, $g(-2)=\sqrt{x(x+2)}-1=-1\neq 0$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy 12 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu.

Câu 27. Tìm số giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019;2019]$ của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. 2007. **B.** 2010. **C.** 2009. **D.** 2008.

Lời giải

Chọn D.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x-3\ge 0 \\ x^2+x\ne m \end{cases}$.

Dựa vào điều kiện xác định ta suy ra hàm số đã cho không có giới hạn khi $x\to -\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}=0, \forall m$.

$\Rightarrow y=0$ là pt đường tiệm cận ngang.

Xét hàm số $f(x)=x^2+x$.

$f'(x)=2x+1;\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
f'(x)		-	0	+			
f(x)	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	12	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Khi $m<12$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Khi $m\ge 12$ thì đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Do đó để hàm số có đúng 2 đường tiệm cận thì $m\in[12;2019]$.

Vậy có 2008 giá trị nguyên của m.

Câu 28. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{mx^2-2x+3}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận.

A. 2 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 1

Lời giải

Chọn B

Nhận xét:

+ $f(x)=mx^2-2x+3$ *có bậc* ≥ 1 *nên đồ thị hàm số luôn có* 1 *tiệm cận ngang.*

+ *Do đó: Yêu cầu bài toán* 9 *đồ thị hàm số có đúng* 1 *tiệm cận đứng.*

+ $m=0$, đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x=\dfrac{3}{2}\Rightarrow m=0$ thỏa bài toán.

+ $m\ne 0$, đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $mx^2-2x+3=0$ có nghiệm kép hoặc nhận $x=1$ làm nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta_f=0 \\ f(1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1}{3} \\ m=-1 \end{array}\right.$

+ KL: $m\in\left\{0;\dfrac{1}{3};-1\right\}$.

Câu 29. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^3-3x^2+m-1}}$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có 4 đường thẳng tiệm cận.

A. $1<m<5$. **B.** $-1<m<2$. **C.** $m<1$ hoặc $m>5$. **D.** $m>2$ hoặc $m<-1$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^3-3x^2+m-1}}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^3-3x^2+m-1}}$ không tồn tại. Suy ra $y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Do đó, để đồ thị hàm số đã cho có 4 đường thẳng tiệm cận thì phương trình $x^3-3x^2+m-1=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x^2+m-1$. Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$g'(x)=3x^2-6x$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$m-1$	↘	$m-5$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy phương trình $x^3-3x^2+m-1=0$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m-5<0<m-1\Leftrightarrow 1<m<5$.

Câu 30. Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{3x+1}+ax+b}{(x-1)^2}$ không có tiệm cận đứng. Khi đó hiệu $a-b$ bằng:

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{3}{4}$. **C.** $-\dfrac{5}{4}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn A

Do hàm số không có tiệm cận đứng nên $f(x)=\sqrt{3x+1}+ax+b=(x-1)^2\,g(x)$.

Suy ra $\begin{cases}f(1)=0\\f'(1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+2=0\\a+\dfrac{3}{4}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{3}{4}\\b=-\dfrac{5}{4}\end{cases}\Rightarrow a-b=\dfrac{1}{2}$ → đáp án **A.**

Chú ý: Với $f(x)=(x-x_0)^n\,g(x)$ thì ta luôn có $f(x_0)=f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$.

Câu 31. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham để m đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{-x^2+2016x+2017}-24\sqrt{7}}{x-m}$ có tiệm cận đứng?

A. vô số. **B.** 2. **C.** 2017 **D.** 2019.

Lời giải

Chọn C

Biểu thức: $\sqrt{-x^2+2016x+2017}$ có nghĩa khi $-x^2+2016x+2017\ge 0\Leftrightarrow -1\le x\le 2017$.

Đặt $f(x)=\sqrt{-x^2+2016x+2017}$.

Xét $x-m=0\Leftrightarrow x=m$. Vậy đồ thị nếu có tiệm cận đứng chỉ có thể là $x=m$, khi đó điều kiện là:

$\begin{cases}-1\le x\le 2017\\f(m)\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in[-1;2017] & (1)\\\sqrt{-m^2+2016m+2017}\ne 24\sqrt{7} & (*)\end{cases}$

Ta có $(*) \Leftrightarrow m^2-2016m+2015\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ m\neq 2015 \end{cases} (2)$

Từ $(1),(2) \Rightarrow m\in[-1;2017]\setminus\{1;2015\} \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}$ có $2019-2=2017$ số nguyên m thỏa mãn bài toán $\rightarrow$ đáp án **C.**

Câu 32. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^3+mx+1}-\sqrt[3]{x^4+x+1}+m^2x}$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó tổng các phần tử của S bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{x^3+mx+1}-\sqrt[3]{x^4+x+1}+m^2x}{x}}$.

Mà $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+mx+1}-\sqrt[3]{x^4+x+1}+m^2x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sqrt{x^3+mx+1}-1}{x}-\dfrac{\sqrt[3]{x^4+x+1}-1}{x}+\dfrac{m^2x}{x}\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x^3+mx}{x(\sqrt{x^3+mx+1}+1)}-\dfrac{x^4+x}{x(\sqrt[3]{(x^4+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^4+x+1}+1)}+m^2\right]$.

Đồ thị hàm số $f(x)$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(x^2+m)}{(\sqrt{x^3+mx+1}+1)}-\dfrac{(x^3+1)}{\sqrt[3]{(x^4+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^4+x+1}+1}+m^2\right)=0 \Leftrightarrow \dfrac{m}{2}-\dfrac{1}{3}+m^2=0$.

$\Leftrightarrow 6m^2+3m-2=0$ Vậy $m_1+m_2=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 33. **(THPT Thăng Long 2019)** Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}$ có đúng ba đường tiệm cận?

A. 12. **B.** 11. **C.** 0. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Xét $g(x)=\sqrt{x(x-m)}-1$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}=-1$. Nên đồ thị hàm số luôn có hai đường tiệm cận ngang $y=1$ và $y=-1$.

Trường hợp 1: $m=0$ khi đó hàm số là $y=\dfrac{|x|-1}{x+2}$. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-2$.

Vậy $m=0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Trường hợp 2: $m>0$. Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $D=(-\infty;0]\cup[m;+\infty)$.

$x=-2\in D$. $g(-2)=\sqrt{2(m+2)}-1\neq 0$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

Vậy $m=1$, $m=2$,.$m=9$ thỏa mãn. Nên có 9 giá trị m.

Trường hợp 3: $m<0$. Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $D=(-\infty;m]\cup[0;+\infty)$.

Để $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì trước hết $x=-2\in D$ hay $m\geq -2$. Nên chỉ có $m=-2$, $m=-1$ thỏa mãn

Với $m=-1$ ta có $g(x)=\sqrt{x(x+1)}-1$, $g(-2)=\sqrt{2}-1\neq 0$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Với $m=-2$ ta có $g(x)=\sqrt{x(x+2)}-1$, $g(-2)=\sqrt{x(x+2)}-1=-1\neq 0$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy 12 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu.

Câu 34. **(THPT Mai Anh Tuấn_Thanh Hóa 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}$ có đúng một đường tiệm cận.

A. $-1\leq m<0$. **B.** $-1\leq m\leq 0$. **C.** $m<-1$. **D.** $m>0$.

Lời giải

Chọn A

Nếu $m=0$ thì $y=\dfrac{1}{x+1}$. Hàm số này có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1}{x+1}=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$.

Vậy với $m=0$ thì đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận (loại).

Nếu $m>0$ thì $mx^2+1>0$ với mọi x và tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}=\sqrt{m}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}=-\sqrt{m}$. Suy ra đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y=\sqrt{m}$ và $y=-\sqrt{m}$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}=+\infty$ nên $x=-1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy $m>0$ không thỏa mãn.

Nếu $m<0$ thì tập xác định của hàm số là $D=\left[-\sqrt{-\dfrac{1}{m}};\sqrt{-\dfrac{1}{m}}\right]\setminus\{-1\}$.

Trường hợp này đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang. Để đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có một tiệm cận đứng. Điều này xảy ra khi

$-\sqrt{-\dfrac{1}{m}}\leq -1\Leftrightarrow\sqrt{-\dfrac{1}{m}}\geq 1\Leftrightarrow -\dfrac{1}{m}\geq 1\Leftrightarrow m\geq -1$.

Vậy với $-1\leq m<0$ thì đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận.

---------- **HẾT** ----------

Chuyên đề 6 TIỆM CẬN ĐỒ THỊ HÀM SỐ

DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI – MỨC 9-10 ĐIỂM

Dạng. Xác định tiệm cận của đồ thị hàm số g khi biết bảng biến thiên hàm số f(x)

Câu 1. **(THPT Lương Văn Can - 2018)** Cho đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{3x-1}{x-1}$. Khi đó đường thẳng nào sau đây là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-2}$?

A. $x=1$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=2$.

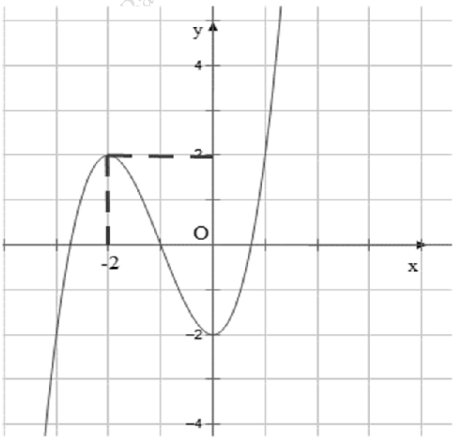
Lời giải

$f(x)=2\Leftrightarrow\dfrac{3x-1}{x-1}=2\Rightarrow 3x-1=2x-2\Leftrightarrow x=-1$.

Với $y=\dfrac{1}{f(x)-2}$ ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^+}y=-\infty;\ \lim\limits_{x\to(-1)^-}y=+\infty$

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-2}$ có đường tiệm cận đứng $x=-1$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2019}{f(x)-1}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị của hàm số $y=f(x)$ suy ra tập xác định của hàm số $y=f(x)$ là $D=\mathbb{R}$

Do đó số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2019}{f(x)-1}$ chính là số nghiệm của phương trình $f(x)=1$.

Qua đồ thị ta có: Đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $f(x)=1$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{2019}{f(x)-1}$ có 3 đường tiệm cận đứng.

Câu 3. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	2	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	-2
		$-\infty$			

Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=-\dfrac{1}{2}$.

Suy ra đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)}$ có hai đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{1}{2}$ và $y=-\dfrac{1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta thấy: phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<-1<x_2$.

Khi đó: $f(x_1)=f(x_2)=0$.

Ta có: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_1^-} f(x)=0\\ f(x)>0\,khi\,x\to x_1^-\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_1^-}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ và $\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_2^-} f(x)=0\\ f(x)>0\,khi\,x\to x_2^-\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_2^-}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)}$ có hai tiệm cận đứng là đường thẳng $x=x_1$ và $x=x_2$.

Do đó chọn **A.**

Câu 4. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=m$.

Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)+2}$ có duy nhất một tiệm cận ngang.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)+2}=1\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1$.

TH 1: Nếu $m=-1$ thì $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)+2}=1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)+2}=1$ thì đồ thị hàm số có một tiệm cận.

TH 2: Nếu $m\neq-1$

Để đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)+2}$ không có giá trị hữu hạn

$\Leftrightarrow m+2=0\Leftrightarrow m=-2$.

Vậy khi $m\in\{-2;-1\}$ thì đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận ngang.

Câu 5. **(Kim Liên - Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(\tan x)=\cos^4 x$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2019}{f(x)-m}$ có hai tiệm cận đứng.

A. $m<0$. **B.** $0<m<1$. **C.** $m>0$. **D.** $m<1$.

Lời giải

Chọn B

$f(\tan x)=\cos^4 x\Leftrightarrow f(\tan x)=\dfrac{1}{\left(1+\tan^2 x\right)^2}\Rightarrow f(t)=\dfrac{1}{(1+t^2)^2}$

Hàm số $g(x)=\dfrac{2019}{f(x)-m}\Rightarrow g(x)=\dfrac{2019}{\dfrac{1}{(1+x^2)^2}-m}$

Hàm số $g(x)$ có hai tiện cận đứng khi và chỉ khi phương trình $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}-m=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow(1+x^2)^2=\dfrac{1}{m}>1\Leftrightarrow 0<m<1$.

Câu 6. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-1}$ là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Đặt $h(x)=\dfrac{1}{2f(x)-1}$.

*) Tiệm cận ngang:

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2f(x)-1}=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2f(x)-1}=0$.

Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y=0$.

*) Tiệm cận đứng:

Xét phương trình: $2f(x)-1=0\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x)=\dfrac{1}{2}$ có ba nghiệm phân biệt a, b, c thỏa mãn $a<1<b<2<c$.

Đồng thời $\lim\limits_{x\to a^+} h(x)=\lim\limits_{x\to b^-} h(x)=\lim\limits_{x\to c^+} h(x)=+\infty$ nên đồ thị hàm số $y=h(x)$ có ba đường tiệm cận đứng là $x=a$, $x=b$ và $x=c$.

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=h(x)$ là 4.

Câu 7. **(Bình Giang-Hải Dương -2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	-2	↗	-1	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0

Đồ thị $y=\dfrac{1}{2f(x)+3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $y=g(x)=\dfrac{1}{2f(x)+3}$ có tử số là $1\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}$

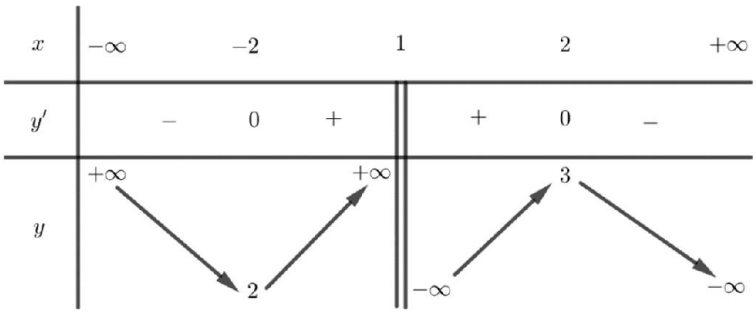
Ta có $2f(x)+3=0\Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{3}{2}$ (1).

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	-2	↗	-1	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0

Từ bảng biến thiên có phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt: $x_1\in(-\infty;0), x_2\in(0;1)$.

Do đó đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f\left(x\right)+3}$ có 2 đường tiệm cận đứng.

Câu 8. **(Chuyên Thoại Ngọc Hầu 2018)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:



Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f\left(x\right)-5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

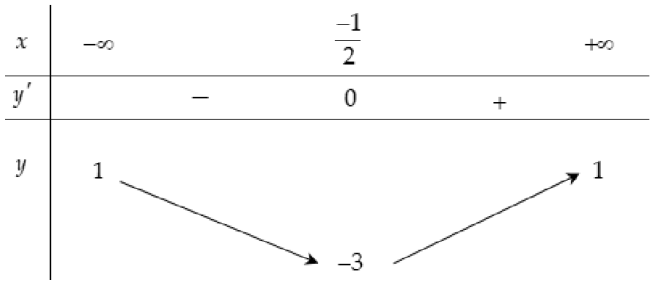
Lời giải

Ta có: $2f\left(x\right)-5=0\Leftrightarrow f\left(x\right)=\dfrac{5}{2}\left(1\right)$. Phương trình $\left(1\right)$ có 4 nghiệm phân biệt $x_1,x_2,x_3,x_4\neq 1$ và giới hạn của hàm số $y=\dfrac{1}{2f\left(x\right)-5}$ tại các điểm x_1,x_2,x_3,x_4 đều bằng $\pm\infty$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 1^{\pm}}\dfrac{1}{2f\left(x\right)-5}=0$ nên $x=1$ không phải tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f\left(x\right)-5}$ có 4 đường tiệm cận đứng.

Câu 9. **(Chuyên Hưng Yên 2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f\left(x\right)-1}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f\left(x\right)-1}$ đúng bằng số nghiệm thực của phương trình $2f\left(x\right)-1=0\Leftrightarrow f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}$.

Mà số nghiệm thực của phương trình $f(x)=\frac{1}{2}$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với đường thẳng $y=\frac{1}{2}$.

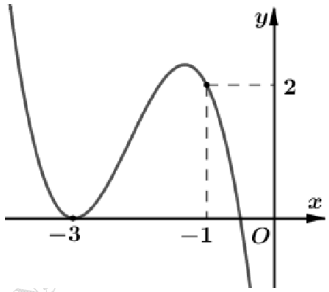
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y=\frac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 2 điểm phân biệt. Vậy đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2f(x)-1}$ có 2 tiệm cận đứng.

Lại có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2f(x)-1}=1\Rightarrow$ đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y=1$.

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2f(x)-1}$ là 3.

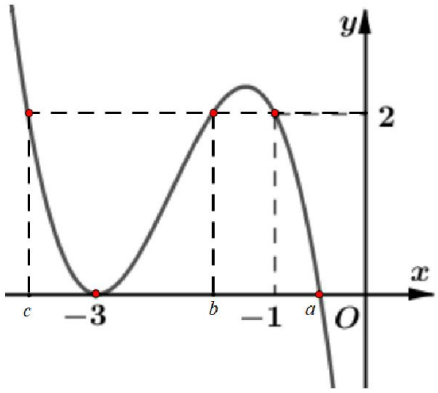
Câu 10. **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Cho hàm bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Hỏi đồ thị hàm số $y=\frac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải



$y=\frac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}=\frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).\left[f(x)-2\right]}$

Điều kiện tồn tại căn $\sqrt{x^2+x}$: $\left[\begin{array}{l}x\ge 0\\x\le -1\end{array}\right.$.

Xét phương trình $x\left[f^2(x)-2f(x)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f(x)=0\\f(x)=2\end{array}\right.$.

Với $x=0$ ta có $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).\left[f(x)-2\right]}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}.f(x).\left[f(x)-2\right]}=+\infty$. Suy ra $x=0$ là tiệm cận đứng.

Với $f(x)=0\Rightarrow x=-3$ (nghiệm bội 2) hoặc $x=a$ (loại vì $-1<a<0$).

Ta có: $\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).\left[f(x)-2\right]}=-\infty$ nên $x=-3$ là tiệm cận đứng.

Với $f(x)=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=b(-3<b<-1)\\x=c(c<-3)\end{array}\right.$ (nghiệm bội 1). Ta có:

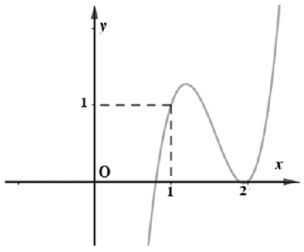
$\lim\limits_{x\to b^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).\left[f(x)-2\right]}=0$ $\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).\left[f(x)-2\right]}=0\\\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).\left[f(x)-2\right]}=0\end{array}\right.$ nên $x=-1$ không là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to b^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).\left[f(x)-2\right]}=+\infty$ (do $x\to b^+$ thì $f(x)\to2^+$) nên $x=b$ là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).\left[f(x)-2\right]}=+\infty$ (do $x\to c^+$ thì $f(x)\to2^-$) nên $x=c$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 4 tiệm cận đứng.

Câu 11. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?



A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Nhận xét 1: Với $x_0\ge1$ và $\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^-}g(x)$ có kết quả là $+\infty$ hoặc $-\infty$ thì $x=x_0$ là tiệm cận đứng của của đồ thị hàm số $g(x)$.

Nhận xét 2: Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$ ta có: $f(x)=a\left(x-x_1\right)(x-2)^2$.

Ta có $x\left[f^2(x)-f(x)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f(x)=0\\f(x)=1\end{array}\right.$.

$f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1,0<x_1<1\\x=2\end{array}\right.$.

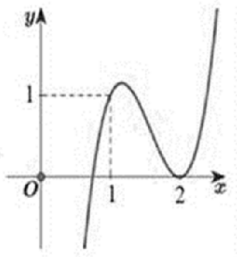
$f(x)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=x_2,1<x_2<2\\x=x_3,x_3>2\end{array}\right.$ suy ra $f(x)-1=a(x-1)(x-x_2)(x-x_3)$.

Khi đó ta có $g(x)=\dfrac{(x^2-3x+2)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}=\dfrac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{x.f(x)\left[f(x)-1\right]}$.

$g(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{x.a(x-x_1)(x-2)^2.a(x-1)(x-x_2)(x-x_3)}=\dfrac{\sqrt{x-1}}{a^2x(x-x_1)(x-2)(x-x_2)(x-x_3)}$.

$x=0,x=x_1$ không phải tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=g(x)$ không thỏa mãn điều kiện $x_0\geq 1$. Đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng là: $x=2,x=x_2,x=x_3$.

Câu 12. **(THPT Quỳnh Lưu- Nghệ An- 2019)** Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2-3x+2)\sqrt{x-1}}{(x+1)\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{(x+1)f(x)\left[f(x)-1\right]}$

Đkxđ: $\begin{cases}x\geq 1\\f(x)\neq 0\\f(x)\neq 1\end{cases}$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta có:

$f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=x_1\end{array}\right.$ với $x=2$ là nghiệm kép, $x_1\in(0;1)$.

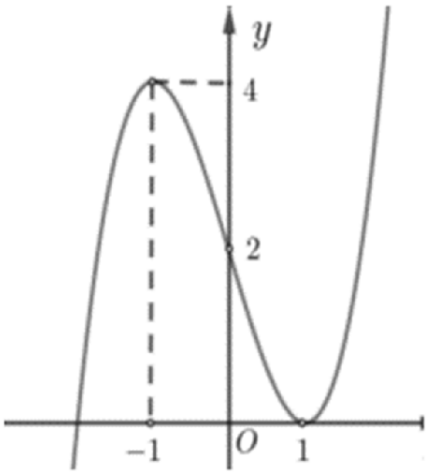
$f(x)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=x_2\\x=x_3\end{array}\right.$ với $x_2\in(1;2);x_3>2$.

Vậy $g(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{a^2(x+1)(x-2)^2(x-x_1)(x-1)(x-x_2)(x-x_3)}$

$=\dfrac{\sqrt{x-1}}{a^2(x+1)(x-2)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}$

Vậy đồ thị hàm số có 3 TCĐ $x=2;x=x_2;x=x_3$ (do $x\ge 1$ nên ta loại $x=-1;x=x_1$).

Câu 13. **(THPT Thuận Thành 3 - Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số đa thức có đồ thì như hình vẽ dưới đây, đặt $g(x)=\dfrac{x^2-x}{f^2(x)-2f(x)}$. Hỏi đồ thị hàm số $y=g(x)$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?



A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta xét phương trình $f^2(x)-2f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f(x)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=x_1<-1\\x=0\\x=x_2>1\\x=x_3<-1,x_3\ne x_1\end{array}\right.$. Khi đó

$g(x)=\dfrac{x^2-x}{ax(x-1)^2(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}=\dfrac{1}{a(x-1)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)};\ (a\ne 0)$.

Vậy đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 4 đường tiệm cận đứng.

Câu 14. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	3	↘ 0	↗ $+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x^3+x\right)+3}$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Tính tiệm cận ngang.

Ta có $x^3+x\xrightarrow{x\to+\infty}+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f\left(x^3+x\right)+3}=0$

$x^3+x\xrightarrow{x\to-\infty}-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f\left(x^3+x\right)+3}=0$

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y=0$.

Tính tiệm cận đứng.

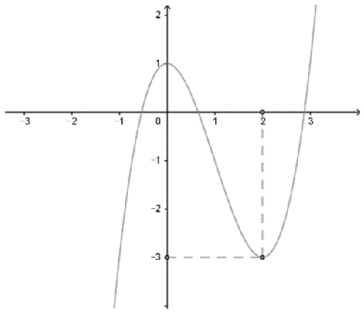
Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là số nghiệm của phương trình $f\left(x^3+x\right)+3=0$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f\left(x^3+x\right)+3=0\Leftrightarrow f\left(x^3+x\right)=-3\Leftrightarrow x^3+x=x_0\,;x_0\in(-\infty;1)$

Vì hàm số $y=x^3+x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ do đó $x^3+x=x_0\,;x_0\in(-\infty;1)$ có một nghiệm duy nhất.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x^3+x\right)+3}$ có 1 tiệm cần đứng.

Câu 15. **(THPT Minh Khai 2020)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như bên dưới.



Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(x^2-2x\right)\sqrt{2-x}}{(x-3)\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy hàm số đạt cực trị tại $x=0$, $x=2$. Do đó, ta có hệ

$$\begin{cases}y(0)=1\\y(2)=-3\\y'(0)=0\\y'(2)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=1\\c=0\\12a+4b=0\\8a+4b=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-3\\c=0\\d=1\end{cases}.$$

Vậy $y=f(x)=x^3-3x^2+1$.

Khi đó $y=\dfrac{(x^2-2x)\sqrt{2-x}}{(x-3)\left[f^2(x)-f(x)\right]}=\dfrac{(x^2-2x)\sqrt{2-x}}{(x-3)(x^3-3x^2+1)(x^3-3x^2)}=\dfrac{(x^2-2x)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3-3x^2+1)}$.

Ta có $x^2(x-3)^2(x^3-3x^2+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\\x=x_1\in(-1;0)\\x=x_2\in(0;1)\\x=x_3\in(2;3)\end{array}\right.$.

Hàm số $y=\dfrac{(x^2-2x)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3-3x^2+1)}$ có tập xác định $D=(-\infty;2]\setminus\{0;x_1;x_2\}$.

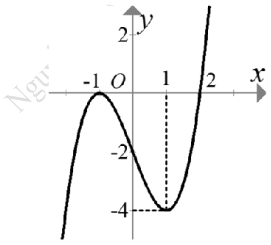
$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(x^2-2x)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3-3x^2+1)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x(x-2)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3-3x^2+1)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(x-2)\sqrt{2-x}}{x(x-3)^2(x^3-3x^2+1)}=-\infty$.

Suy ra $x=0$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to x_1^+}\dfrac{(x^2-2x)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3-3x^2+1)}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_2^+}\dfrac{(x^2-2x)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3-3x^2+1)}=+\infty$.

Suy ra $x=x_1$ và $x=x_2$ cũng là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 16. **(Yên Phong 1 - 2018)** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$, $(a\neq0)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2(x^2-4x+3)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

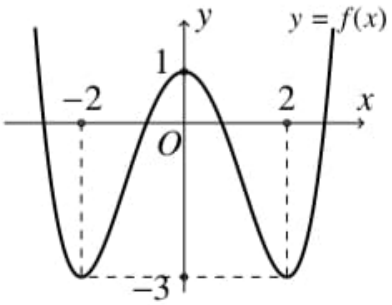
Lời giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases}f(x)\geq0\\x\neq-1\\x^2-4x+3\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq2\\x\neq-1\\x\neq1\\x\neq3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq2\\x\neq3\end{cases}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to3^+}g(x)=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2(x^2-4x+3)}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to3^-}g(x)=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2(x^2-4x+3)}=-\infty$.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2(x^2-4x+3)}$ có một đường tiệm cận đứng là: $x=3$.

Câu 17. **(Chuyên Quang Trung - 2020)** Cho hàm số trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(x^2-4\right)\left(x^2+2x\right)}{\left[f\left(x\right)\right]^2+2f\left(x\right)-3}$ có tổng cộng bao nhiêu tiệm cận đứng?



A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

$$y=\frac{\left(x^2-4\right)\left(x^2+2x\right)}{\left[f\left(x\right)\right]^2+2f\left(x\right)-3}=\frac{x\left(x+2\right)^2\left(x-2\right)}{\left[f\left(x\right)\right]^2+2f\left(x\right)-3}$$

Ta có: $\left[f\left(x\right)\right]^2+2f\left(x\right)-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=1 \\ f\left(x\right)=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m\left(m<-2\right) \\ x=0 \\ x=n\left(n>2\right) \\ x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Nguyễn Bảo Vương

Dựa vào đồ thị ta thấy các nghiệm $x=0;x=\pm 2$ là các nghiệm kép (nghiệm bội 2) và đa thức $\left[f\left(x\right)\right]^2+2f\left(x\right)-3$ có bậc là 8 nên $y=\dfrac{x\left(x+2\right)^2\left(x-2\right)}{a^2x^2\left(x+2\right)^2\left(x-2\right)^2\left(x-m\right)\left(x-n\right)}$

Vậy hàm số có các tiệm cận đứng là $x=0;x=2;x=m;x=n$.

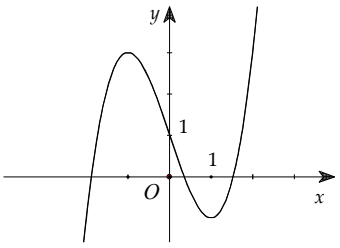
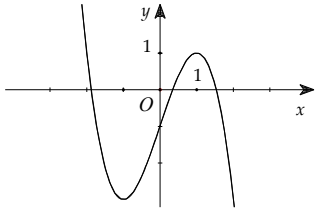
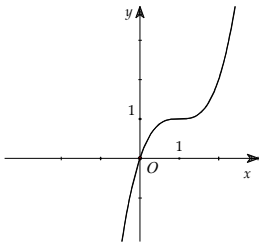
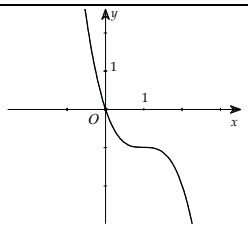
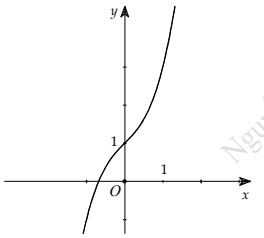
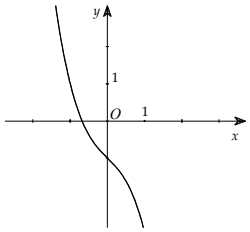
---------- **HẾT** ----------

Chuyên đề 7 ĐỌC ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

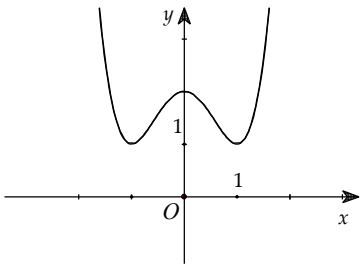
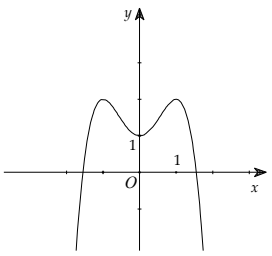
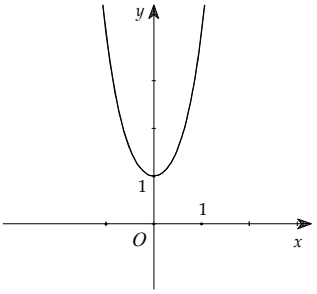
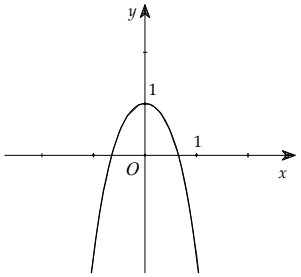
DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH 5-6 ĐIỂM

Dạng. Nhận dạng hàm số thường gặp thông qua đồ thị

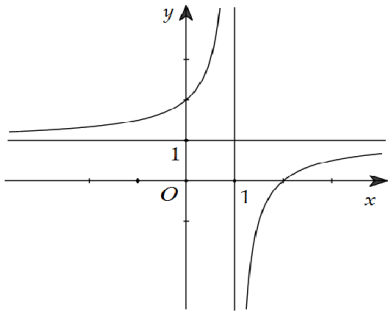
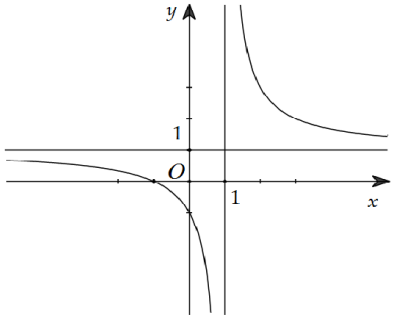
A. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$

TRƯỜNG HỢP	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt*		
Phương trình $y' = 0$ *có nghiệm kép*		
Phương trình $y' = 0$ *vô nghiệm*		

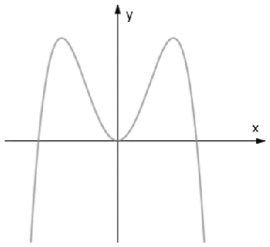
B. Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$

TRƯỜNG HỢP	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ *có 3 nghiệm phân biệt* (ab<0)		
Phương trình $y' = 0$ *có 1 nghiệm.*		

C. Hàm số nhất biến $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \quad (c \neq 0,\ ad - bc \neq 0)$

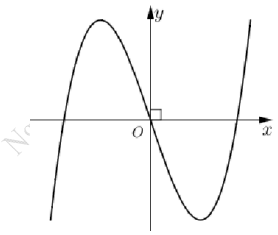
$D = ad - bc > 0$	$D = ad - bc < 0$
	

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong dưới đây?



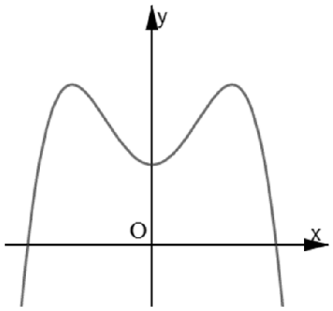
A. $y = -x^4 + 2x^2$. **B.** $y = x^4 - 2x^2$. **C.** $y = x^3 - 3x^2$. **D.** $y = -x^3 + 3x^2$.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



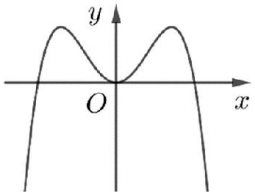
A. $y = x^3 - 3x$. **B.** $y = -x^3 + 3x$. **C.** $y = x^4 - 2x^2$. **D.** $y = -x^4 + 2x^2$.

Câu 3. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



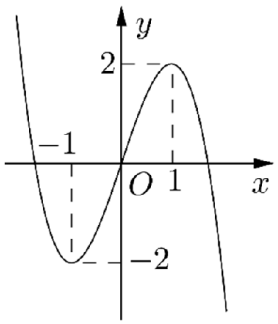
A. $y = x^3 - 3x^2 + 1$. **B.** $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. **C.** $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. **D.** $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Câu 4. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



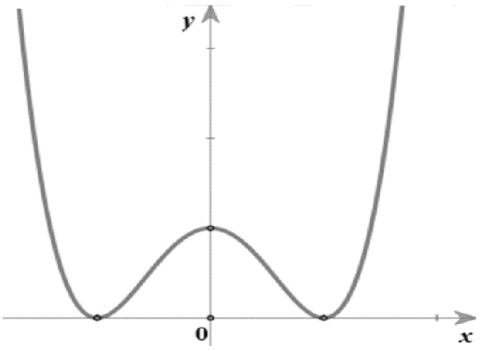
A. $y = -x^4 + 2x^2$. **B.** $y = -x^3 + 3x$. **C.** $y = x^4 - 2x^2$. **D.** $y = x^3 - 3x$.

Câu 5. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=1$ là



A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 6. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y=x^4-2x^2+1$. **B.** $y=-x^3+3x^2+1$. **C.** $y=x^3-3x^2+1$. **D.** $y=-x^4+2x^2+1$.

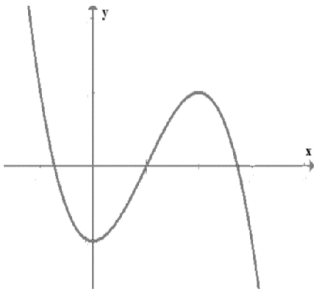
Câu 7. **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong hình bên

A. $y=x^4-2x^2-2$

B. $y=-x^3+2x^2-2$

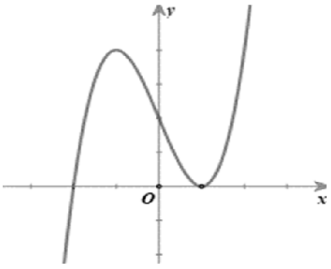
C. $y=x^3-3x^2-2$

D. $y=-x^4+2x^2-2$



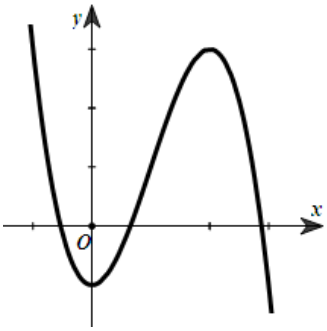
Nguyễn Bảo Vương

Câu 8. **(Mã 104 2017)** Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



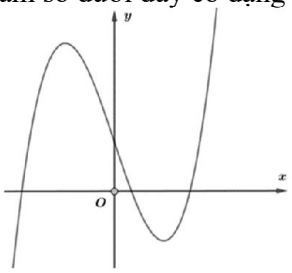
A. $y=-x^3+3x+2$ **B.** $y=x^4-x^2+1$ **C.** $y=x^4+x^2+1$ **D.** $y=x^3-3x+2$

Câu 9. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



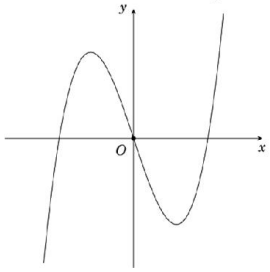
A. $y=-x^4+2x^2-1$. **B.** $y=x^4-2x^2-1$. **C.** $y=x^3-3x^2-1$. **D.** $y=-x^3+3x^2-1$.

Câu 10. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Đồ thị của hàm số dưới đây có dạng như đường cong bên?



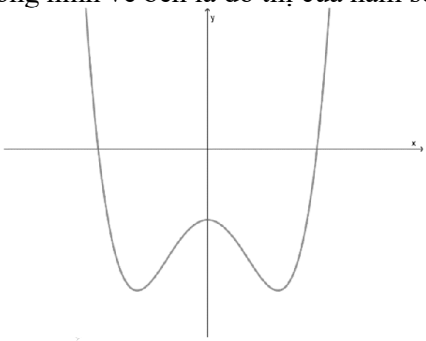
A. $y=x^3-3x+1$. **B.** $y=x^4-2x^2+1$. **C.** $y=-x^4+2x^2+1$. **D.** $y=-x^3+3x+1$.

Câu 11. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



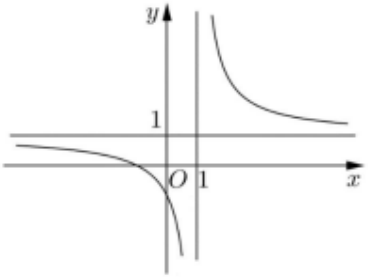
A. $y=x^4+2x^2$. **B.** $y=-x^3-3x$. **C.** $y=x^3-3x$. **D.** $y=-x^4+2x^2$.

Câu 12. **(Mã 102 2018)** Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



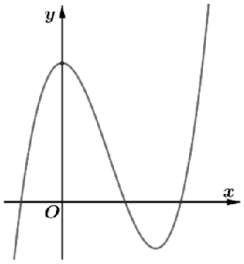
A. $y=-x^3+x^2-1$ **B.** $y=-x^4+2x^2-1$ **C.** $y=x^3-x^2-1$ **D.** $y=x^4-2x^2-1$

Câu 13. **(Đề Tham Khảo 2019)** Đường con trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



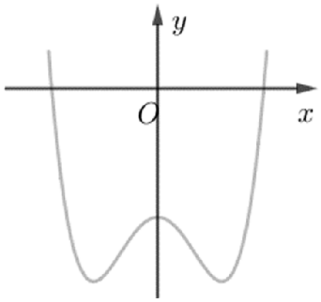
A. $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ **B.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ **C.** $y=x^4+x^2+1$ **D.** $y=x^3-3x-1$

Câu 14. **(Mã 110 2017)** Đường cong ở hình bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



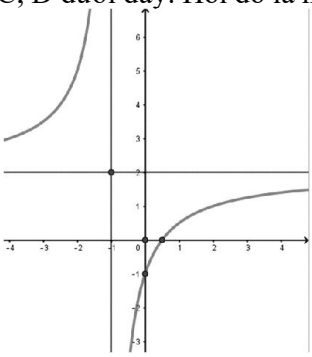
A. $y=-x^3+3x^2+1$ **B.** $y=x^3-3x^2+3$ **C.** $y=-x^4+2x^2+1$ **D.** $y=x^4-2x^2+1$.

Câu 15. **(Mã 103 2019)** Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



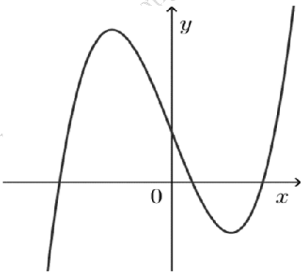
A. $y=x^3-3x^2-2$. **B.** $y=x^4-2x^2-2$. **C.** $y=-x^3+3x^2-2$. **D.** $y=-x^4+2x^2-2$.

Câu 16. **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho đường cong hình vẽ bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?



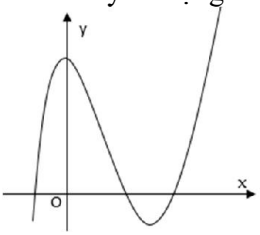
A. $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ **B.** $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ **C.** $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ **D.** $y=\dfrac{2x-2}{x-1}$

Câu 17. **(Đề Minh Họa 2017)** Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



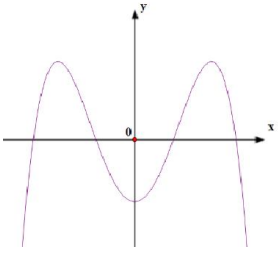
A. $y=x^3-3x+1$ **B.** $y=-x^3+3x+1$ **C.** $y=x^4-x^2+1$ **D.** $y=-x^2+x-1$

Câu 18. **(Mã 101 2019)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



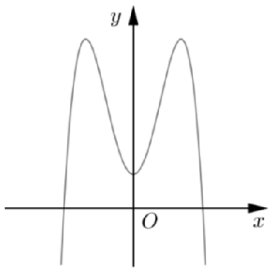
A. $y=x^3-3x^2+3$. **B.** $y=-x^3+3x^2+3$. **C.** $y=x^4-2x^2+3$. **D.** $y=-x^4+2x^2+3$.

Câu 19. **(Mã 101 2018)** Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



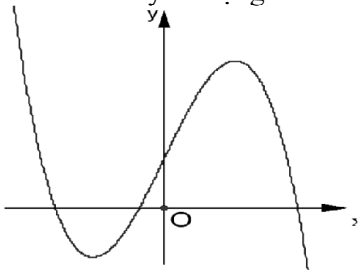
A. $y=x^3-3x^2-1$ **B.** $y=-x^3+3x^2-1$ **C.** $y=-x^4+3x^2-1$ **D.** $y=x^4-3x^2-1$

Câu 20. **(Mã 104 2019)** Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



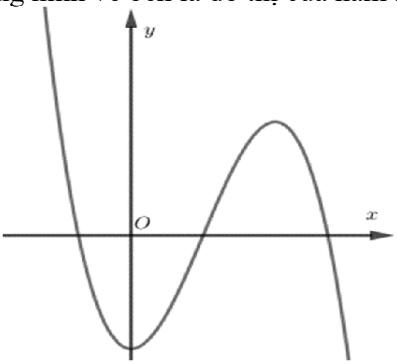
A. $y=2x^4-4x^2+1$ **B.** $y=-2x^3+3x+1$ **C.** $y=2x^3-3x+1$ **D.** $y=-2x^4+4x^2+1$

Câu 21. **(Mã 102 2019)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên



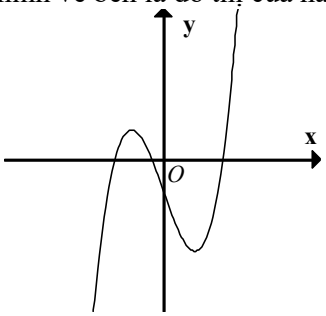
A. $y=-x^3+3x+1$. **B.** $y=x^3-3x+1$. **C.** $y=x^4-2x^2+1$. **D.** $y=-x^4+2x^2+1$.

Câu 22. **(Mã 104 2018)** Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



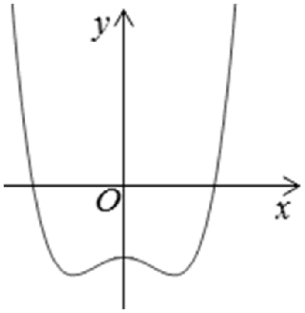
A. $y=x^4-x^2-2$ **B.** $y=-x^4+x^2-2$ **C.** $y=-x^3+3x^2-2$ **D.** $y=x^3-3x^2-2$

Câu 23. **(Mã 103 2018)** Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



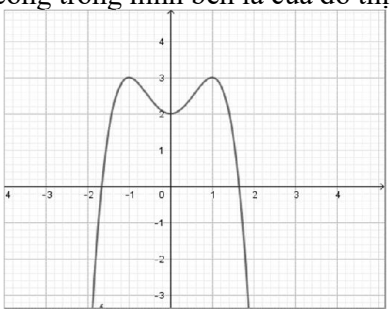
A. $y=x^3-3x-1$ **B.** $y=x^4-3x^2-1$ **C.** $y=-x^3-3x-1$ **D.** $y=-x^4+x^2-1$

Câu 24. **(Mã 123 2017)** Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



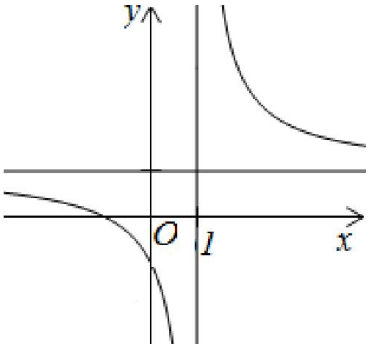
A. $y=x^4-x^2-1$ **B.** $y=-x^4+x^2-1$ **C.** $y=x^3-x^2-1$ **D.** $y=-x^3+x^2-1$

Câu 25. **(Đề Tham Khảo 2018)** Đường cong trong hình bên là của đồ thị hàm số nào dưới đây?



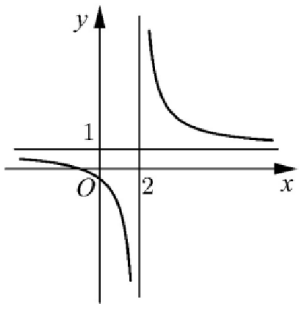
A. $y=x^3-3x^2+2$ **B.** $y=-x^3+3x^2+2$ **C.** $y=-x^4+2x^2+2$ **D.** $y=x^4-2x^2+2$

Câu 26. **(Mã 123 2017)** Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với a,b,c,d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



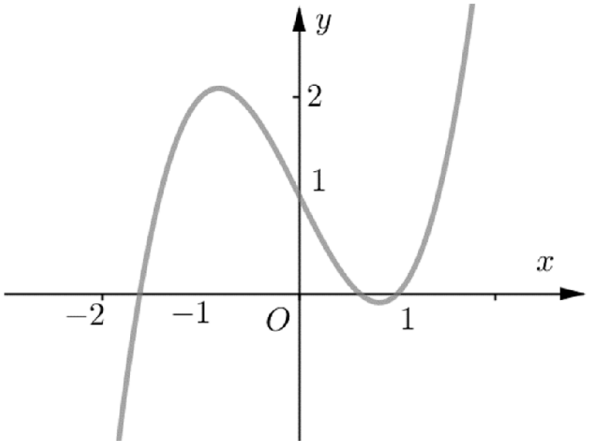
A. $y'<0,\forall x\in\mathbb{R}$ **B.** $y'>0,\forall x\neq 1$ **C.** $y'<0,\forall x\neq 1$ **D.** $y'>0,\forall x\in\mathbb{R}$

Câu 27. **(Mã 105 2017)** Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với a,b,c,d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



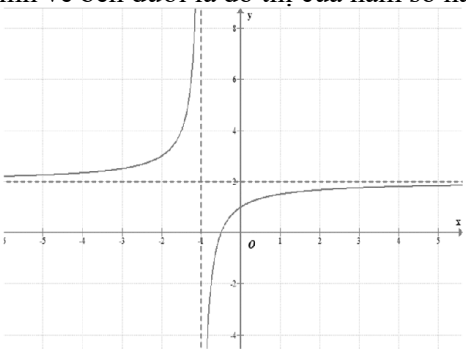
A. $y'>0,\forall x\neq 1$ **B.** $y'<0,\forall x\neq 1$ **C.** $y'<0,\forall x\neq 2$ **D.** $y'>0,\forall \neq 2$

Câu 28. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Hình vẽ sau đây là đồ thị của một trong bốn hàm số cho ở các đáp án A,B,C,D. Hỏi đó là hàm số nào?



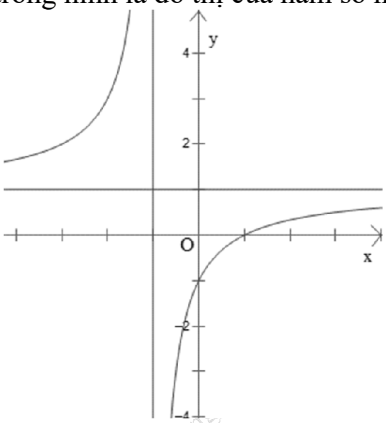
A. $y=x^3+2x+1$. **B.** $y=x^3-2x^2+1$. **C.** $y=x^3-2x+1$. **D.** $y=-x^3+2x+1$.

Câu 29. **(Sở Cần Thơ - 2019)** Hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào



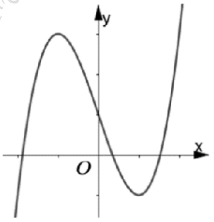
A. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{2x+5}{x+1}$.

Câu 30. **(SGD Nam Định)** Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{-2x+1}{2x+2}$. **C.** $y=x^4-3x^2$. **D.** $y=x^3-3x^2$.

Câu 31. **(Sở Gia Lai 2019)** Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?



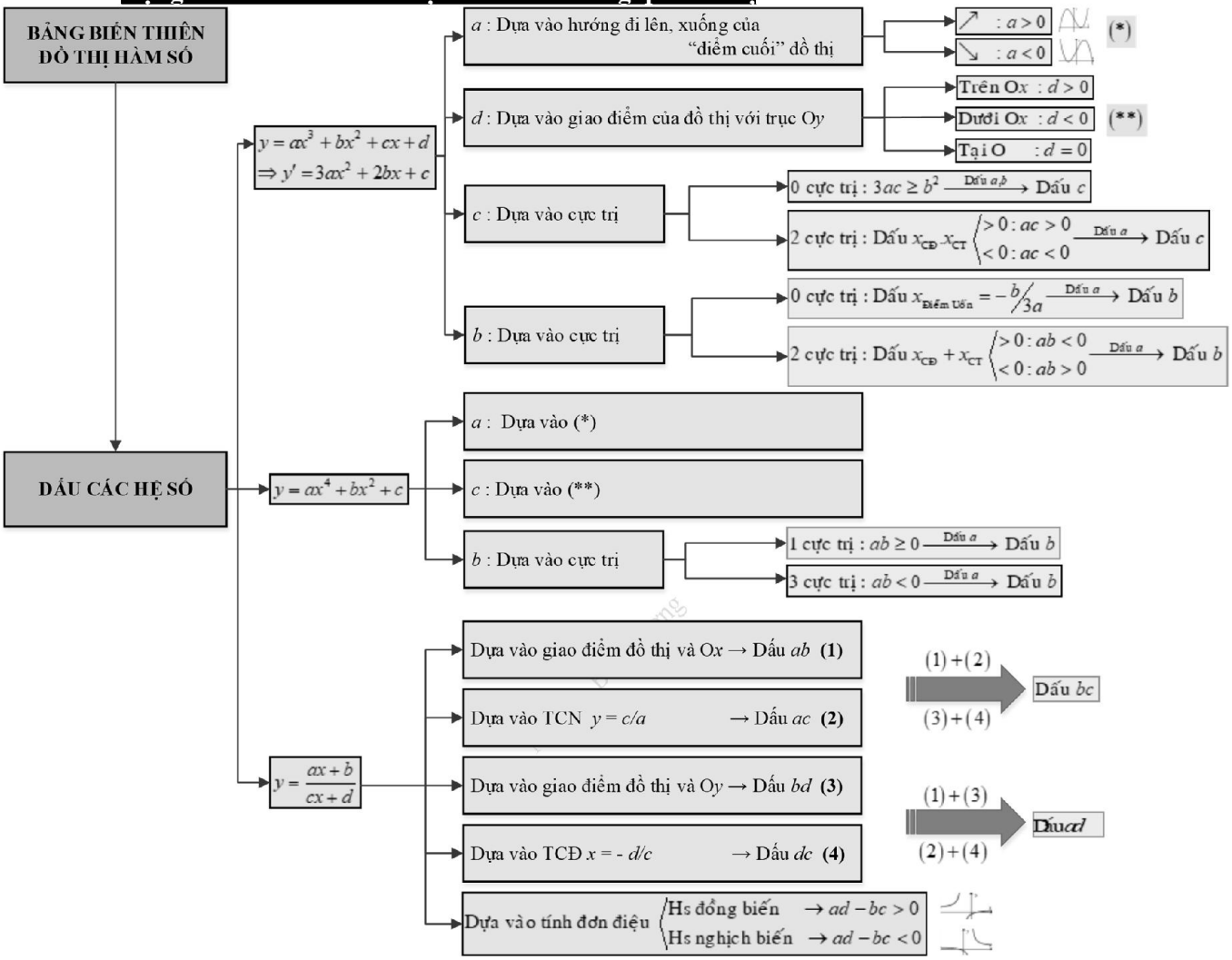
A. $y=-x^3+3x+1$. **B.** $y=x^4-x^2+1$. **C.** $y=-x^2+x-1$. **D.** $y=x^3-3x+1$.

---------- **HẾT** ----------

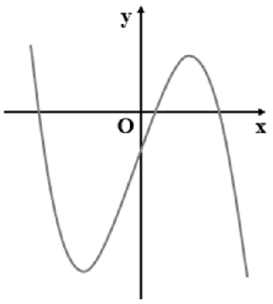
Chuyên đề 7 ĐỌC ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM

Dạng 1. Xét dấu của các hệ số hàm số thông qua đồ thị



Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hàm số $y = ax^3 + 3x + d\ (a;d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a > 0, d > 0$. **B.** $a < 0, d > 0$. **C.** $a > 0, d < 0$. **D.** $a < 0, d < 0$.

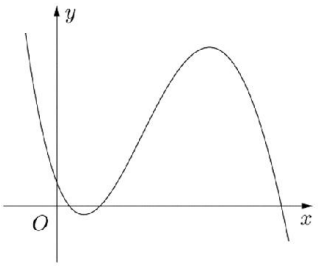
Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax+1}{bx+c}\ (a,b,c \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$	↗	1
			$-\infty$		

Trong các số a,b và c có bao nhiêu số dương?

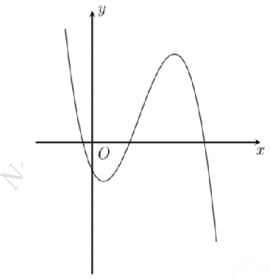
A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 3. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?



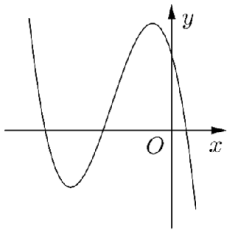
A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 4. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các hệ số a,b,c,d?



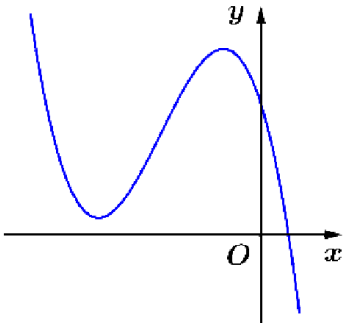
A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 5. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d?



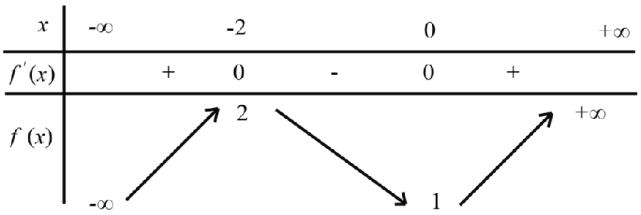
A. 4. **B.** 2.
C. 1. **D.** 3.

Câu 6. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d?



A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

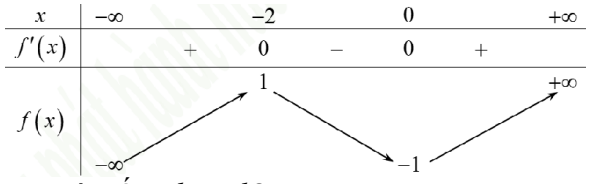
Câu 7. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau



Có bao nhiêu số dương trong các số $a,\ b,\ c,\ d$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

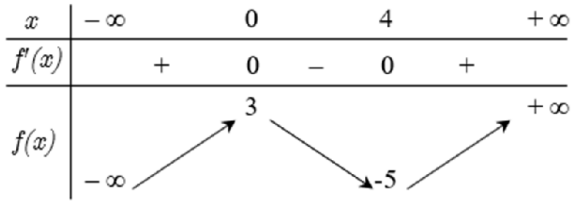
Câu 8. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:



Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d ?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

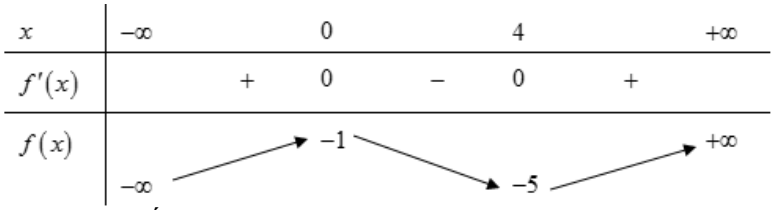
Câu 9. **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:



Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d ?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

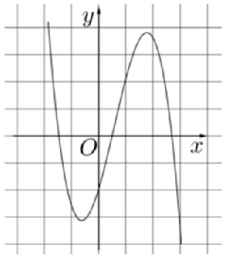
Câu 10. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:



Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d ?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

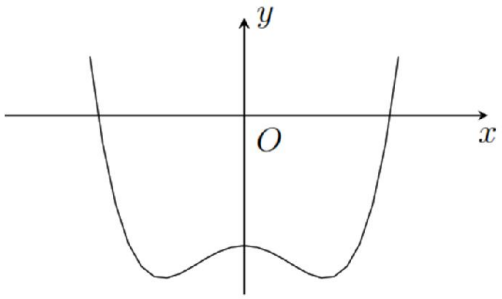
Câu 11. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a<0,\ b>0,\ c>0,\ d<0$ **B.** $a<0,\ b<0,\ c>0,\ d<0$.

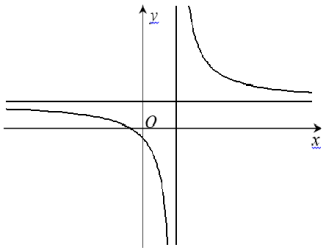
C. $a>0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$ **D.** $a<0,\ b>0,\ c<0,\ d<0$.

Câu 12. **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $a>0,b<0,c>0$ **B.** $a>0,b<0,c<0$ **C.** $a>0,b>0,c<0$ **D.** $a<0,b>0,c<0$

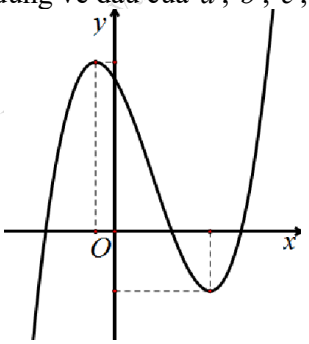
Câu 13. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như sau.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $ac>0;\ bd>0$ **B.** $ab<0;\ cd<0$ **C.** $bc>0;\ ad<0$ **D.** $ad>0;\ bd<0$

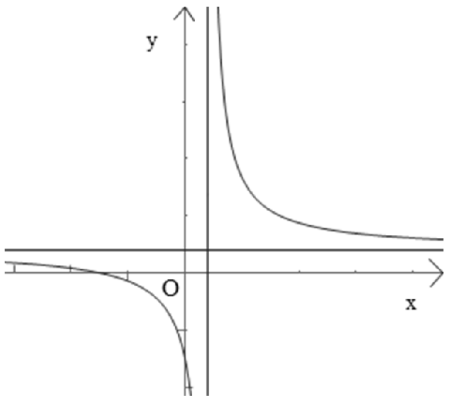
Câu 14. **(THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Chọn khẳng định đúng về dấu của a, b, c, d?



A. $a>0,b>0,\ d>0,c>0$ **B.** $a>0,\ c>0>b,\ d<0$

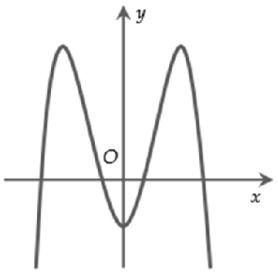
C. $a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0.$ **D.** $a>0,\ b<0,\ c<0,d>0$

Câu 15. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{(a-1)x+b}{(c-1)x+d}$, $d<0$ có đồ thị như hình trên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A. $a>1,b>0,c<1.$ **B.** $a>1,b<0,c>1.$ **C.** $a<1,b>0,c<1.$ **D.** $a>1,b>0,c>1.$

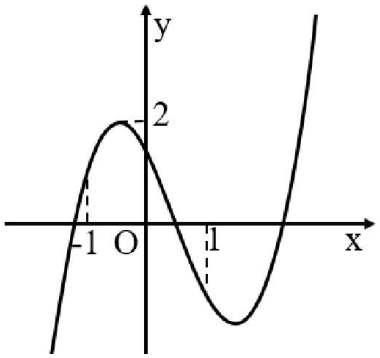
Câu 16. **(Sở Ninh Bình 2019)** Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ $(a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a<0,\ b>0,\ c<0$. **B.** $a<0,\ b<0,\ c>0$. **C.** $a<0,\ b>0,\ c>0$. **D.** $a<0,\ b<0,\ c<0$.

Câu 17. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:

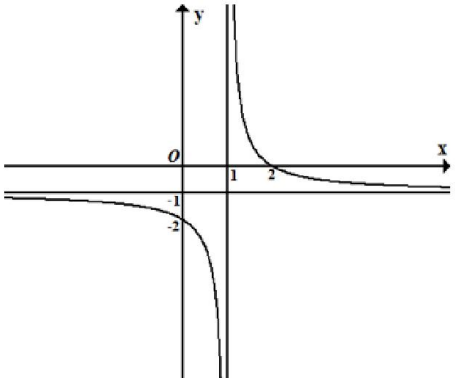


Khẳng định nào là đúng?

A. $a<0,\ b<0,\ c<0,\ d<0$. **B.** $a>0,\ b>0,\ c>0,\ d<0$.

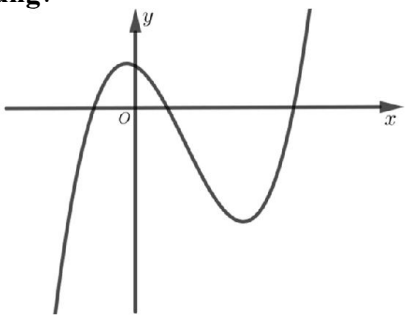
C. $a>0,\ b>0,\ c<0,\ d>0$. **D.** $a>0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$.

Câu 18. **(THPT Ba Đình 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên dưới, với $a,\ b,\ c\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+2b+3c$?



A. $T=-8$. **B.** $T=2$. **C.** $T=6$. **D.** $T=0$.

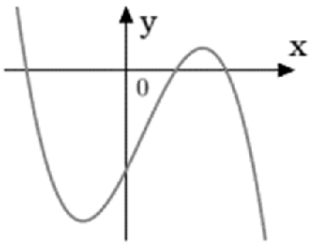
Câu 19. **(THPT Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **đúng**?



A. $ab<0,bc>0,cd<0$ **B.** $ab<0,bc<0,cd>0$

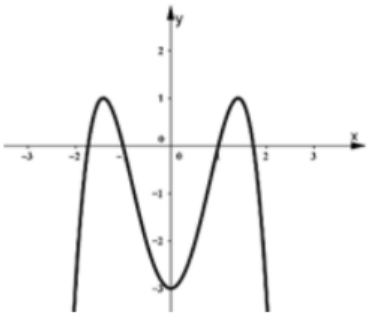
C. $ab>0,bc>0,cd<0$ **D.** $ab>0,bc>0,cd>0$

Câu 20. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình dưới. Khẳng định nào sau đây đúng ?



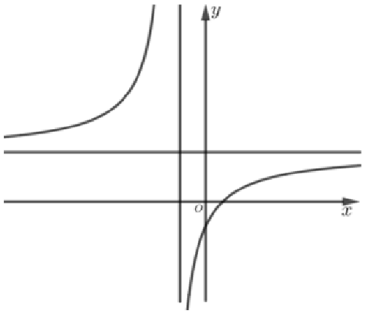
A. $a<0,b<0,c<0,d<0$ **B.** $a<0,b>0,c>0,d>0$
C. $a<0,b>0,c<0,d>0$ **D.** $a<0,b>0,c>0,d<0$

Câu 21. **(THPT Chuyên Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



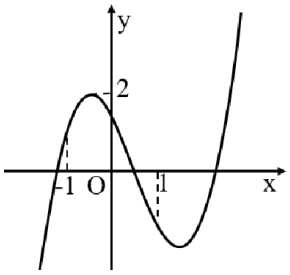
A. $a>0,b<0,c<0$. **B.** $a<0,b<0,c<0$. **C.** $a<0,b>0,c<0$. **D.** $a>0,b<0,c>0$

Câu 22. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như trong hình bên dưới. Biết rằng a là số thực dương, hỏi trong các số b,c,d có tất cả bao nhiêu số dương?



A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

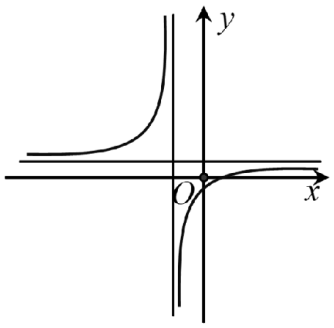
Câu 23. **(Cụm liên trường Hải Phòng 2019)** Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định nào là đúng?

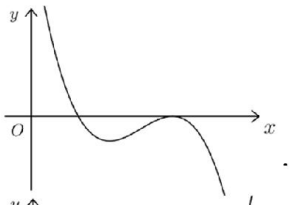
A. $a<0,\ b<0,\ c<0,\ d<0$. **B.** $a>0,\ b>0,\ c>0,\ d<0$.
C. $a>0,\ b>0,\ c<0,\ d>0$. **D.** $a>0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$.

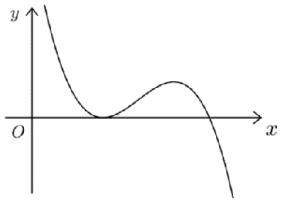
Câu 24. **(Chuyên Nguyễn Huệ 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

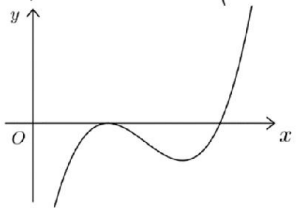


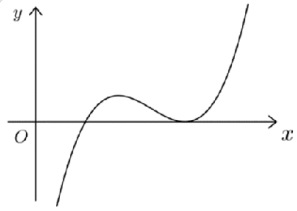
A. $\begin{cases} ad<0 \\ bc>0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} ad<0 \\ bc<0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} ad>0 \\ bc<0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} ad>0 \\ bc>0 \end{cases}$.

Câu 25. Tìm đồ thị hàm số $y=f(x)$ được cho bởi một trong các phương án dưới đây, biết $f(x)=(a-x)(b-x)^2$ với $a<b$.

A.


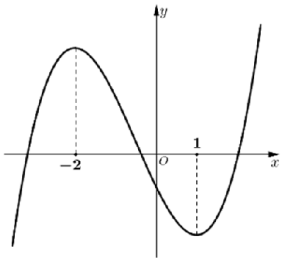
B.


C.


D.


Nguyễn Bảo Vương

Câu 26. Cho đường cong $(C): y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên.

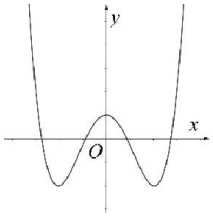


Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a>0, b<0, c<0, d<0$. **B.** $a>0, b>0, c<0, d>0$.

C. $a<0, b>0, c>0, d<0$. **D.** $a>0, b>0, c<0, d<0$.

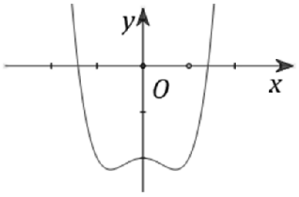
Câu 27. **(Gia Lai 2019)** Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a>0$, $b>0$, $c<0$. **B.** $a<0$, $b>0$, $c<0$.

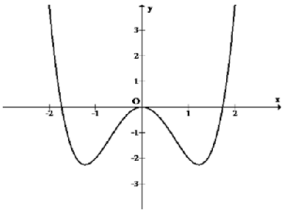
C. $a>0$, $b<0$, $c>0$. **D.** $a>0$, $b<0$, $c<0$.

Câu 28. **(THPT Thăng Long 2019)** Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm kết luận đúng



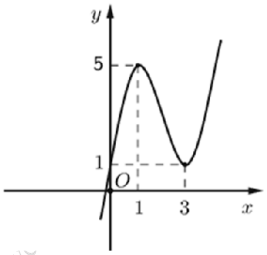
A. $a+b>0$. **B.** $bc>0$. **C.** $ab>0$. **D.** $ac>0$.

Câu 29. **(THPT Cẩm Bình Hà Tĩnh 2019)** Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c(a\neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Hãy chọn mệnh đề đúng.



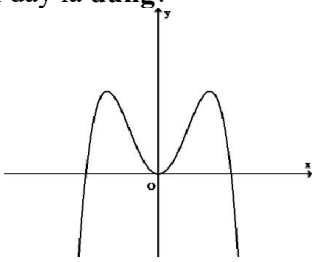
A. $a<0,b<0,c=0$. **B.** $a<0,b>0,c=0$. **C.** $a>0,b<0,c=0$. **D.** $a>0,b<0,c>0$.

Câu 30. **(Chuyên Long An 2019)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ ở bên. Mệnh đề nào
sau đây đúng?



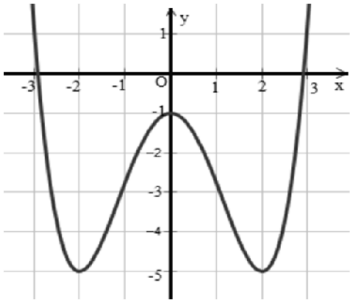
A. $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$. **B.** $a>0$, $b>0$, $c<0$, $d>0$.
C. $a>0$, $b<0$, $c>0$, $d>0$. **D.** $a<0$, $b<0$, $c>0$, $d<0$.

Câu 31. **(THPT Trần Phú 2019)** Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?



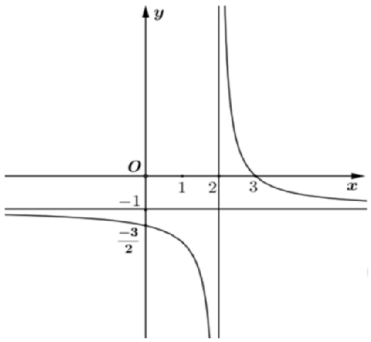
A. $a<0,b>0,c>0$. **B.** $a>0,b<0,c>0$. **C.** $a<0,b>0,c=0$. **D.** $a>0,b<0,c<0$.

Câu 32. **(THPT Cộng Hiền 2019)** Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi khẳng định nào sau đây đúng?



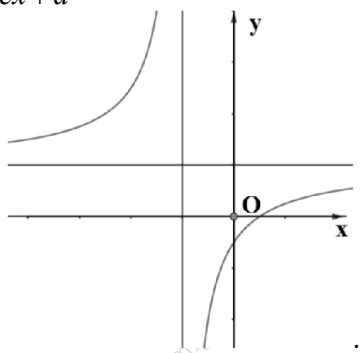
A. $a>0,b<0,c<0$. **B.** $a>0,b>0,c<0$. **C.** $a>0,b<0,c>0$. **D.** $a<0,b>0,c<0$.

Câu 33. **(SGD Điện Biên - 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{ax+3}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tính giá trị của $a-2c$.



A. $a-2c=3$. **B.** $a-2c=-3$. **C.** $a-2c=-1$. **D.** $a-2c=-2$.

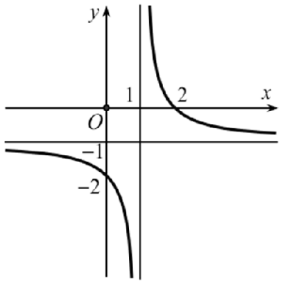
Câu 34. Hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.



Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $ad>0$ và $bd>0$. **B.** $ad>0$ và $ab<0$. **C.** $bd<0$ và $ab>0$. **D.** $ad<0$ và $ab<0$.

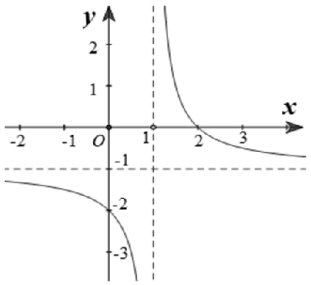
Câu 35. Cho hàm số $y=\dfrac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $b<a<0$. **B.** $a<b<0$. **C.** $b>a$ và $a<0$. **D.** $a<0<b$.

Câu 36. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ (với $a,b,c\in\mathbb{R}$).



Khi đó tổng $a+b+c$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 37. **(Chuyên Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2020)** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2-ax}{bx-c}\left(a,b,c\in\mathbb{R},b\neq 0\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	3	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	3

Tổng các số $\left(a+b+c\right)^2$ thuộc khoảng nào sau đây

A. $\left(1;2\right)$. **B.** $\left(2;3\right)$. **C.** $\left(0;\dfrac{4}{9}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{4}{9};1\right)$.

Câu 38. **(Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020)** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R}$ và $c\neq 0$). Biết rằng đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $\left(-1;7\right)$ và giao điểm hai tiệm cận là $\left(-2;3\right)$. Giá trị biểu thức $\dfrac{2a+3b+4c+d}{7c}$ bằng

A. 7. **B.** 4. **C.** 6. **D.** -5.

Câu 39. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ (a,b,c là các tham số) có bảng biến thiên như hình vẽ

Vương

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	1

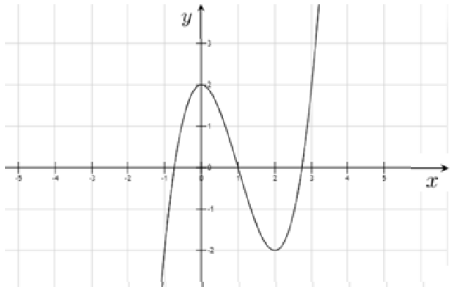
Xét các phát biểu sau: $(1):c>1$; $(2):a+b<0$; $(3):a+b+c=0$; $(4):a>0$. Số phát biểu đúng là?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 40. **(Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Ta xác định được các số a,b,c để đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ đi qua điểm $\left(1;0\right)$ và có điểm cực trị $\left(-2;0\right)$. Tính giá trị biểu thức $T=a^2+b^2+c^2$.

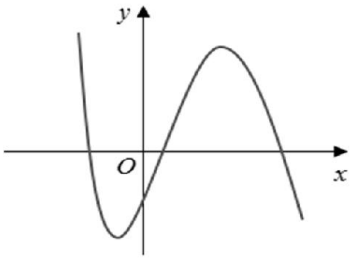
A. 25. **B.** -1. **C.** 7. **D.** 14.

Câu 41. **(Lê Lai - Thanh Hóa - 2020)** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $S=a+b$?



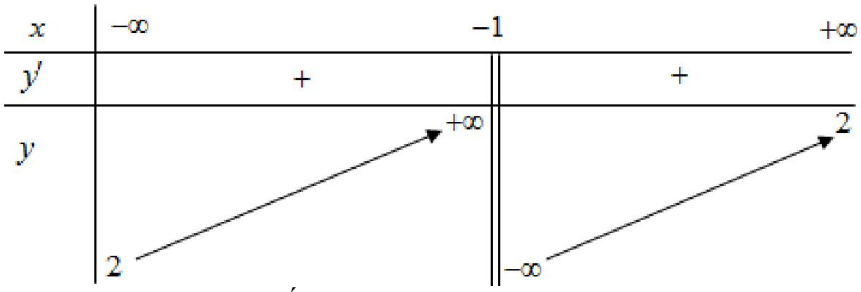
A. $S=-2$. **B.** $S=0$. **C.** $S=1$. **D.** $S=-1$.

Câu 42. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. $a<0,b<0,c>0,d<0$.
B. $a<0,b>0,c<0,d<0$.
C. $a>0,b<0,c<0,d>0$.
D. $a<0,b>0,c>0,d<0$.

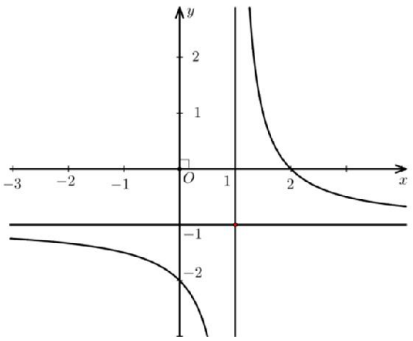
Câu 43. **(Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+1}\left(a,b,c\in\mathbb{R}\right)$ có bảng biến thiên như sau:



Tập các giá trị b là tập nghiệm của bất phương trình nào dưới đây?

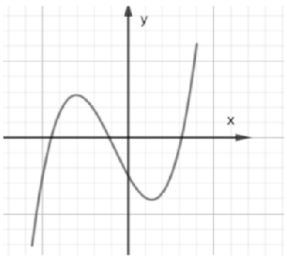
A. $b^3-8\le 0$.
B. $-b^2+4>0$.
C. $b^2-3b+2<0$.
D. $b^3-8<0$.

Câu 44. **(Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ (với a,b,c,d là số thực) có đồ thị như hình dưới đây. Tính giá trị biểu thức $T=\dfrac{a-2b+3d}{c}$.



A. $T=6$.
B. $T=0$.
C. $T=-8$.
D. $T=2$.

Câu 45. **(Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Trong các số a,b,c và d có bao nhiêu số dương?



A. 1.
B. 4.
C. 3.
D. 2.

Câu 46. **(Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020)** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax-6}{bx-c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\|$	$-$
$f(x)$	1 ↘	$\|$	$+\infty$ ↘ 1
		$-\infty$	

Trong các số a,b,c có bao nhiêu số âm?

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Dạng 2. Đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối (BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ)

Dạng 1

Từ đồ thị $(C):y=f(x)$ suy ra đồ thị $(C'):y=|f(x)|$.

Ta có: $y=|f(x)|=\begin{cases}f(x) & khi\ \ f(x)\ge 0\\ -f(x) & khi\ \ f(x)<0\end{cases}$

*** Cách vẽ (C') từ (C):**

□ *Giữ nguyên* phần đồ thị phía trên *Ox* của đồ thị (C): $y=f(x)$.

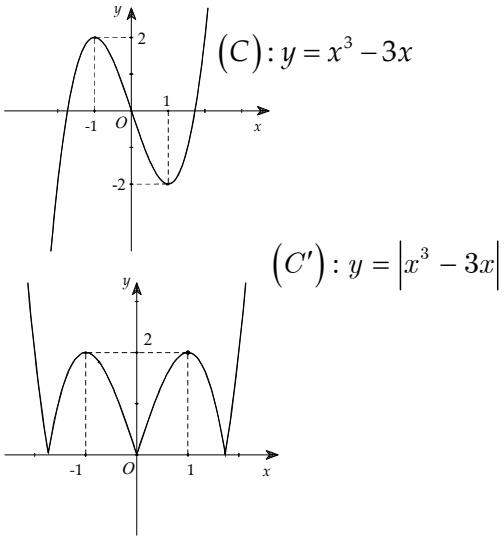
□ *Bỏ* phần đồ thị phía dưới *Ox* của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị *bị bỏ*** qua *Ox*.

Ví dụ: Từ đồ thị $(C):y=f(x)=x^3-3x$ suy ra đồ thị $y=|x^3-3x|$.

Biến đổi (C):

Bỏ phần đồ thị của (C) dưới Ox, giữ nguyên (C) phía trên Ox.

Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.



Dạng 2

Từ đồ thị $(C):y=f(x)$ suy ra đồ thị $(C'):y=f(|x|)$.

Ta có: $y=f(|x|)=\begin{cases}f(x) & khi\ \ x\ge 0\\ f(-x) & khi\ \ x<0\end{cases}$

và $y=f(|x|)$ là *hàm chẵn* nên đồ thị (C') nhận *Oy* làm trục đối xứng.

*** Cách vẽ (C') từ (C):**

□ *Giữ nguyên* phần đồ thị bên phải *Oy* của đồ thị $(C):y=f(x)$.

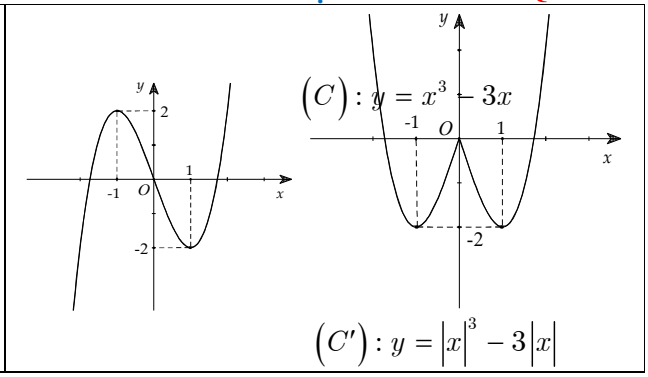
□ *Bỏ* phần đồ thị bên trái *Oy* của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị** *được giữ* qua *Oy*.

Ví dụ: Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $(C'): y = |x|^3 - 3|x|$.

Biến đổi (C):

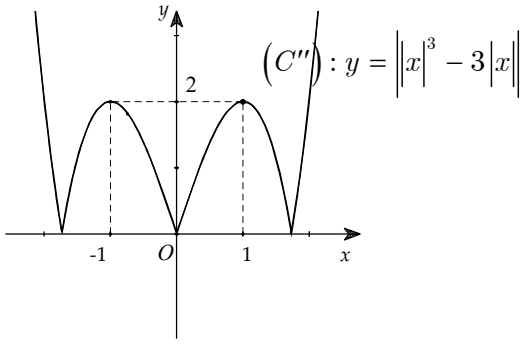
Bỏ phần đồ thị của (C) bên trái Oy, giữ nguyên (C) bên phải Oy.

Lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua Oy.



Chú ý với dạng: $y = |f(|x|)|$ ta lần lượt biến đổi 2 đồ thị $y = f(|x|)$ và $y = |f(x)|$

Ví dụ: Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $y = \left||x|^3 - 3|x|\right|$. Biến đổi (C) để được đồ thị $(C'): y = |x|^3 - 3|x|$. Biến đổi $(C'): y = |x|^3 - 3|x|$ ta được đồ thị $(C''): y = \left||x|^3 - 3|x|\right|$.



Dạng 3

Từ đồ thị $(C): y = u(x).v(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = |u(x)|.v(x)$.

Ta có: $y = |u(x)|.v(x) = \begin{cases} u(x).v(x) = f(x) & khi\ u(x) \ge 0 \\ -u(x).v(x) = f(x) & khi\ u(x) < 0 \end{cases}$

*** Cách vẽ (C') từ (C):**

□ *Giữ nguyên* phần đồ thị trên miền $u(x) \ge 0$ của đồ thị $(C): y = f(x)$.

□ *Bỏ* phần đồ thị trên miền $u(x) < 0$ của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị *bị bỏ*** qua Ox.

Ví dụ

a) Từ đồ thị $(C): y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ suy ra đồ thị $(C'): y = |x-1|(2x^2 - x - 1)$

$y = |x-1|(2x^2 - x - 1) = \begin{cases} f(x) & khi\ x \ge 1 \\ -f(x) & khi\ x < 1 \end{cases}$

Đồ thị (C'):

Giữ nguyên (C) với $x \ge 1$.

Bỏ (C) với $x < 1$. Lấy *đối xứng phần đồ thị bị bỏ* qua Ox.

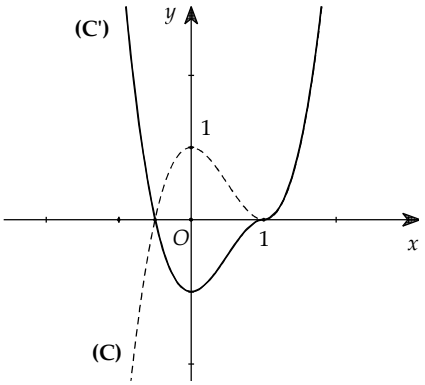
Ví dụ

b) Từ đồ thị $(C): y = f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ suy ra đồ thị $(C'): y = \dfrac{x}{|x-1|}$

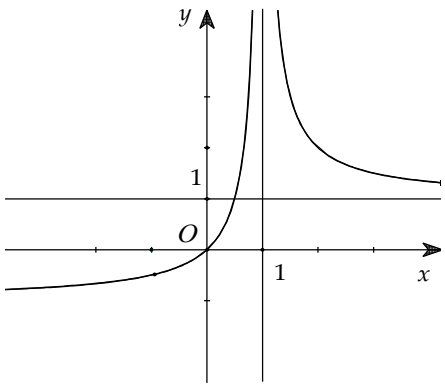
$y = \dfrac{x}{|x-1|} = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & khi\ x \in (1; +\infty) \\ -\dfrac{x}{x-1} & khi\ x \in (-\infty; 1) \end{cases}$. Đồ thị (C'):

Bỏ phần đồ thị của (C) với $x < 1$, giữ nguyên (C) với $x > 1$.

Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.

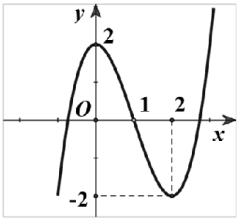


Nhận xét: Trong quá trình thực hiện phép suy đồ thị nên *lấy đối xứng các điểm đặc biệt* của (C): giao điểm với *Ox, Oy*, CĐ, CT…

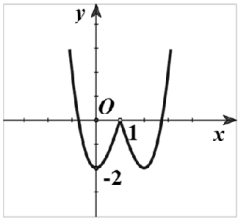


Nhận xét: Đối với hàm phân thức thì nên *lấy đối xứng các đường tiệm cận* để thực hiện phép suy đồ thị một cách tương đối chính xác.

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

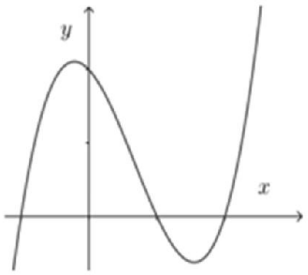
A. $y = \left|x^3 - 3x^2 + 2\right|$.

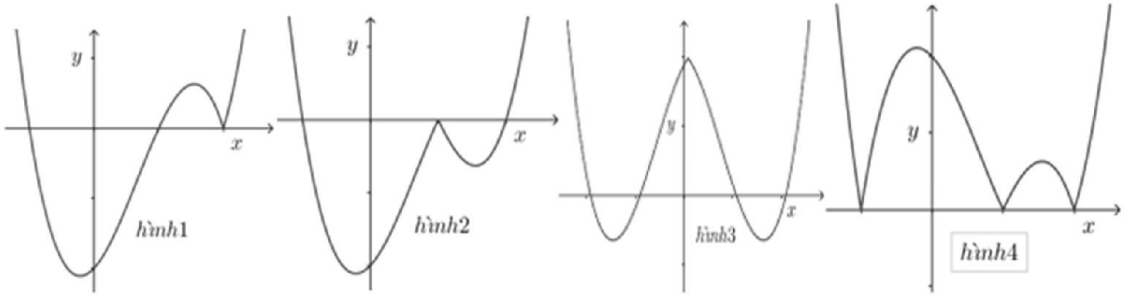
B. $y = |x|^3 - 3x^2 + 2$

C. $y = |x-1|\left(x^2 - 2x - 2\right)$.

D. $y = (x-1)\left|x^2 - 2x - 2\right|$.

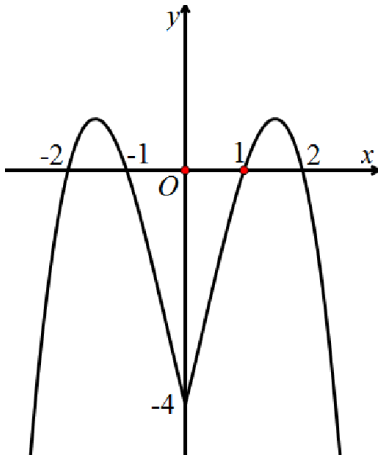
Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2017)** Hàm số $y = (x-2)\left(x^2 - 1\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = |x-2|\left(x^2 - 1\right)$?





A. Hình 1 **B.** Hình 2 **C.** Hình 3 **D.** Hình 4

Câu 3. **(THPT Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ như hình vẽ.



Chọn kết luận **đúng** trong các kết luận sau:

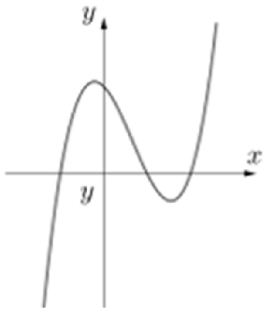
A. $f(x)=-x^3+x^2+4x-4$ **B.** $f(x)=x^3-x^2-4x+4$

C. $f(x)=-x^3-x^2+4x-4$ **D.** $f(x)=x^3+x^2-4x-4.$

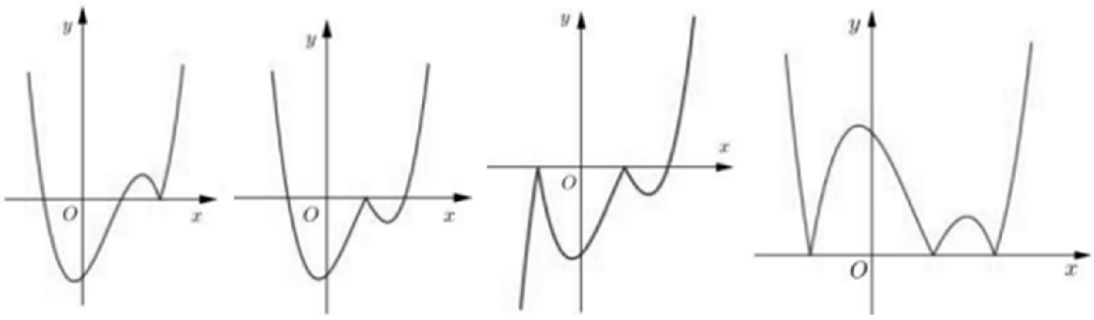
Câu 4. Biết phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0\ \ (a\neq 0)$ có đúng hai nghiệm thực. Hỏi đồ thị hàm số $y=\left|ax^3+bx^2+cx+d\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 5. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Cho hàm số $y=(x-2)(x^2-1)$ có đồ thị như hình vẽ



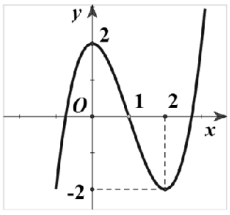
Một trong bốn hình dưới đây là đồ thị của hàm số $y=(x-2)\left|x^2-1\right|$. Hỏi đó là hình nào?



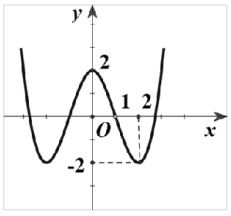
Hình 1 Hình 2 Hình 3 Hình 4

A. Hình 2. **B.** Hình 4. **C.** Hình 3. **D.** Hình 1.

Câu 6. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1

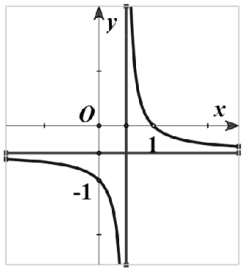


Hình 2

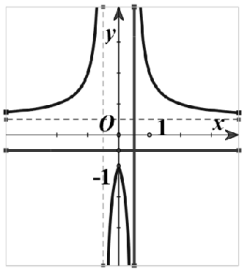
A. $y=\left|x^3-3x^2+2\right|.$ **B.** $y=\left|x\right|^3-3x^2+2$

C. $y=|x-1|\left(x^2-2x-2\right)$. **D.** $y=(x-1)\left|x^2-2x-2\right|$.

Câu 7. Cho hàm số $y=\dfrac{-x+1}{2x-1}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



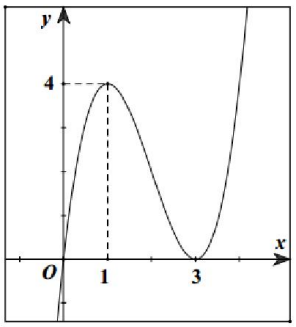
Hình 1



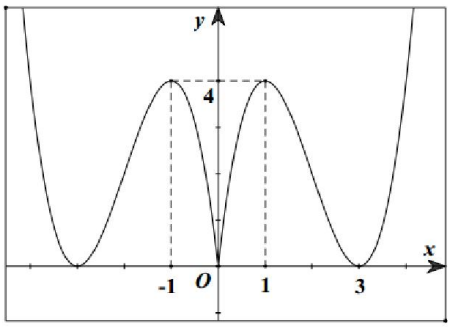
Hình 2

A. $y=\left|\dfrac{-x+1}{2x-1}\right|$ **B.** $y=\dfrac{|x|+1}{2|x|-1}$ **C.** $y=\dfrac{|-x+1|}{2x-1}$ **D.** $y=\dfrac{-x+1}{|2x-1|}$

Câu 8. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x$ có đồ thị như Hình 1. Khi đó đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1

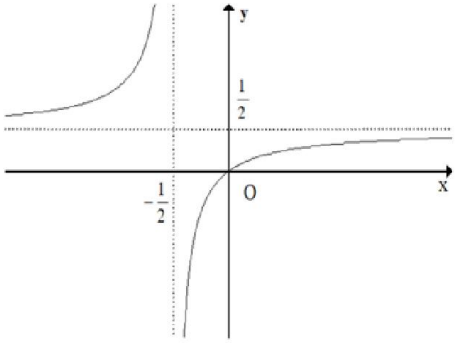


Hình 2

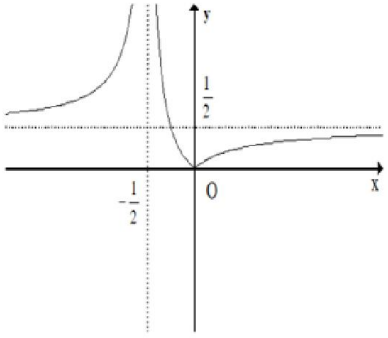
A. $y=-x^3+6x^2-9x$. **B.** $y=\left|x^3-6x^2+9x\right|$.

C. $y=|x|^3-6x^2+9|x|$. **D.** $y=|x|^3+6|x|^2+9|x|$.

Câu 9. **(Cụm liên trường Hải Phòng -2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{x}{2x+1}$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào trong các đáp án A, B, C, D dưới đây?



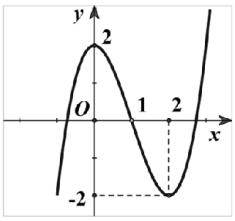
Hình 1



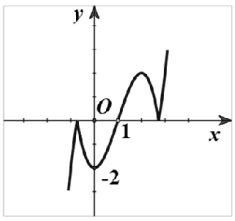
Hình 2

A. $y=\left|\dfrac{x}{2x+1}\right|$. **B.** $y=\dfrac{|x|}{2|x|+1}$ **C.** $y=\dfrac{x}{2|x|+1}$ **D.** $y=\left|\dfrac{|x|}{2|x|+1}\right|$

Câu 10. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

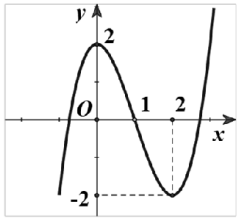
A. $y=\left|x^3-3x^2+2\right|$.

B. $y=\left|x\right|^3-3x^2+2$

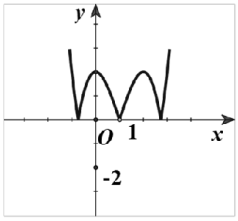
C. $y=\left|x-1\right|\left(x^2-2x-2\right)$.

D. $y=\left(x-1\right)\left|x^2-2x-2\right|$.

Câu 11. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

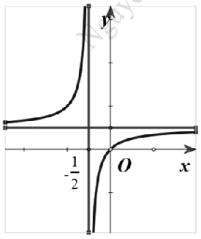
A. $y=\left|x^3-3x^2+2\right|$.

B. $y=\left|x\right|^3-3x^2+2$

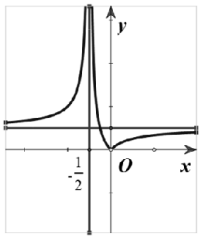
C. $y=\left|x-1\right|\left(x^2-2x-2\right)$.

D. $y=\left(x-1\right)\left|x^2-2x-2\right|$.

Câu 12. Cho hàm số $y=\dfrac{x}{2x+1}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

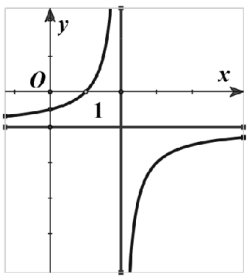
A. $y=\dfrac{x}{2\left|x\right|+1}$

B. $y=\dfrac{\left|x\right|}{2\left|x\right|+1}$

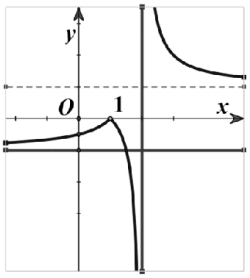
C. $y=\left|\dfrac{x}{2x+1}\right|$

D. $y=\left|\dfrac{\left|x\right|}{2\left|x\right|+1}\right|$

Câu 13. Cho hàm số $y=\dfrac{-x+1}{x-2}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

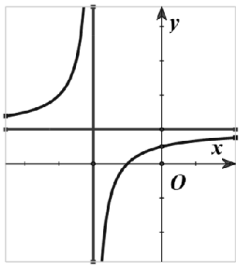
A. $y=\left|\dfrac{-x+1}{x-2}\right|$.

B. $y=\dfrac{\left|x\right|+1}{\left|x\right|-2}$.

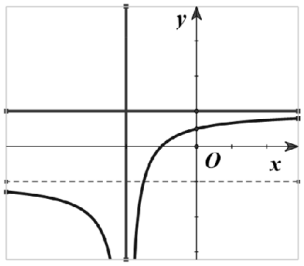
C. $y=\dfrac{\left|-x+1\right|}{x-2}$

D. $y=\dfrac{-x+1}{\left|x-2\right|}$

Câu 14. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



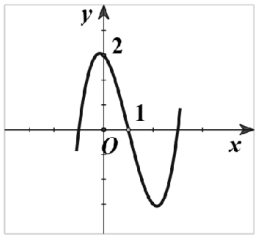
Hình 1



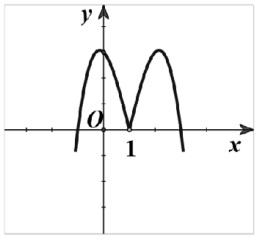
Hình 2

A. $y=\left|\dfrac{x+1}{x+2}\right|$. **B.** $y=\dfrac{|x|+1}{|x|+2}$. **C.** $y=\dfrac{|x+1|}{x+2}$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{|x+2|}$.

Câu 15. Cho hàm số $y=(x-1)\left(x^2-2x-3\right)$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



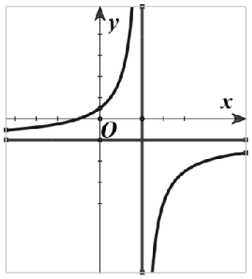
Hình 2

Nguyễn Bảo Vương

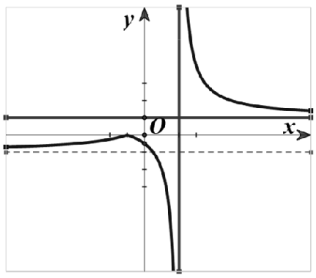
A. $y=\left|(x-1)\left(x^2-2x-3\right)\right|$. **B.** $y=|x-1|\left(x^2-2x-3\right)$.

C. $y=-|x-1|\left(x^2-2x-3\right)$ **D.** $y=(x-1)\left|x^2-2x-3\right|$

Câu 16. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{-x+2}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y=\left|\dfrac{x+1}{x+2}\right|$. **B.** $y=\dfrac{|x+1|}{x-2}$. **C.** $y=\dfrac{|x+1|}{-x+2}$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{|x+2|}$.

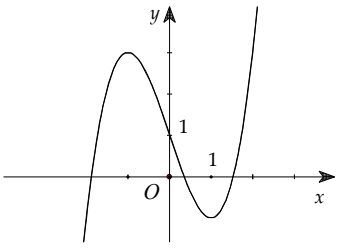
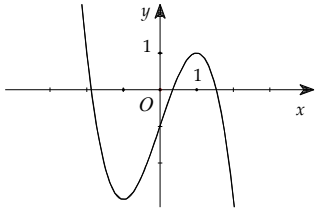
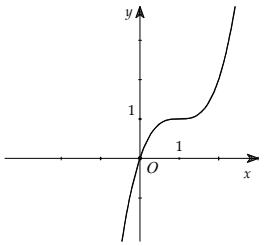
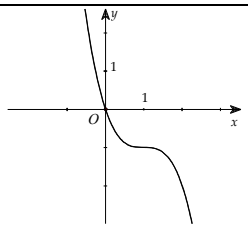
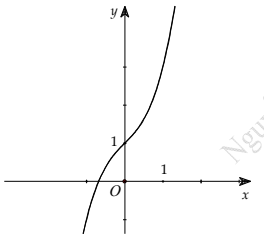
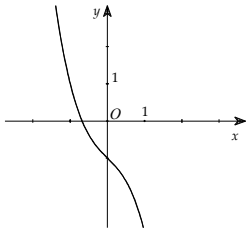
---------- HẾT ----------

Chuyên đề 7 ĐỌC ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

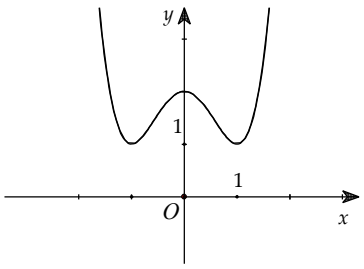
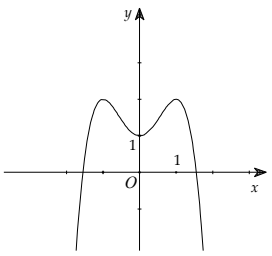
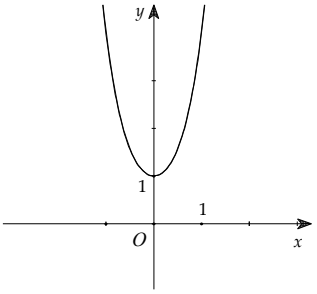
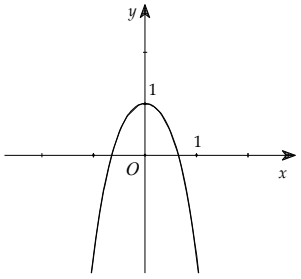
DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH 5-6 ĐIỂM

Dạng. Nhận dạng hàm số thường gặp thông qua đồ thị

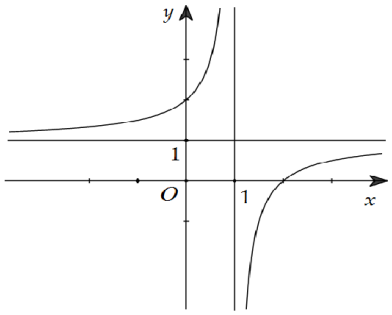
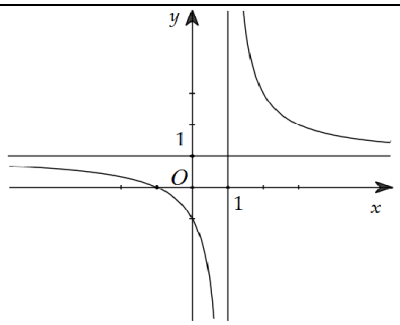
A. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$

TRƯỜNG HỢP	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt*		
Phương trình $y' = 0$ *có nghiệm kép*		
Phương trình $y' = 0$ *vô nghiệm*		

B. Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$

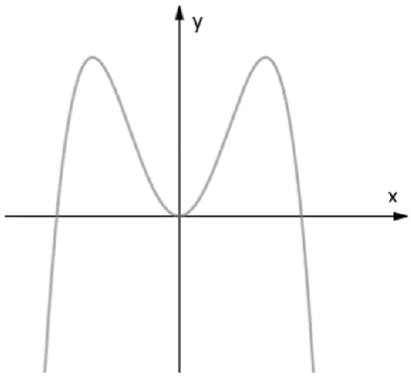
TRƯỜNG HỢP	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ *có 3 nghiệm phân biệt* (ab<0)		
Phương trình $y' = 0$ *có 1 nghiệm.*		

C. Hàm số nhất biến $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \quad (c \neq 0,\ ad - bc \neq 0)$

$D = ad - bc > 0$	$D = ad - bc < 0$
	

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong dưới đây?

A. $y = -x^4 + 2x^2$. **B.** $y = x^4 - 2x^2$. **C.** $y = x^3 - 3x^2$. **D.** $y = -x^3 + 3x^2$.



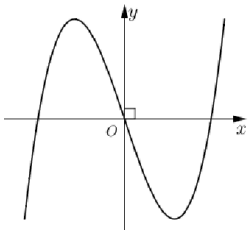
Lời giải

Chọn A

Từ hình dạng của đồ thị ta loại phương án C và **D.**

Nhận thấy $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$ suy ra hệ số của x^4 âm nên chọn phương án **A.**

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



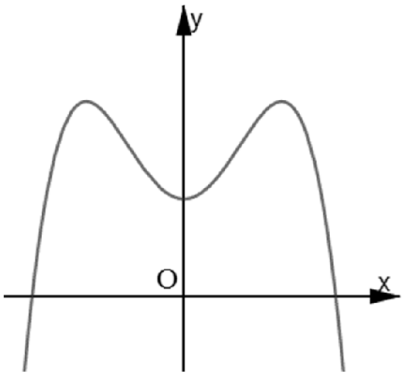
A. $y = x^3 - 3x$. **B.** $y = -x^3 + 3x$. **C.** $y = x^4 - 2x^2$. **D.** $y = -x^4 + 2x^2$.

Lời giải

Chọn A

Đường cong có dạng của đồ thị hàm số bậc 3 với hệ số $a > 0$ nên chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 3. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y=x^3-3x^2+1$. **B.** $y=-x^3+3x^2+1$.

C. $y=-x^4+2x^2+1$. **D.** $y=x^4-2x^2+1$.

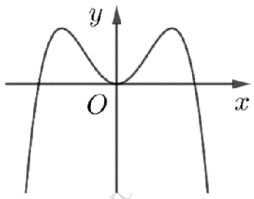
Lời giải

Chọn C.

Từ hình có đây là hình dạng của đồ thị hàm bậc 4.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \Rightarrow a<0$

Câu 4. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y=-x^4+2x^2$. **B.** $y=-x^3+3x$. **C.** $y=x^4-2x^2$. **D.** $y=x^3-3x$.

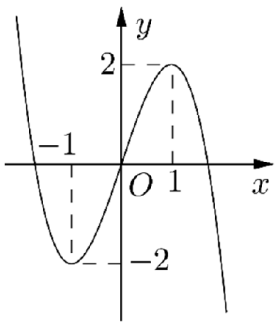
Nguyễn Bảo Vực

Lời giải

Chọn A

Đường cong trong hình là đồ thị hàm trùng phương $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$ có hệ số $a<0$.

Câu 5. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=1$ là



A. 1. **B.** 0.

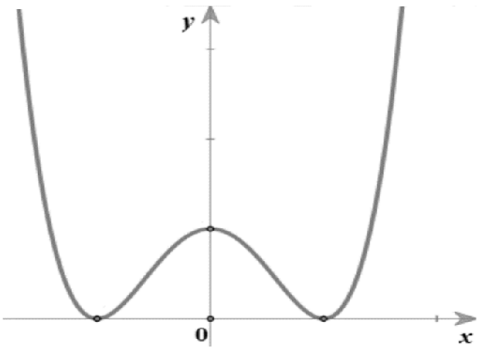
C. 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số ta có số nghiệm thực của phương trình $f(x)=1$ là 3.

Câu 6. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y=x^4-2x^2+1$. **B.** $y=-x^3+3x^2+1$. **C.** $y=x^3-3x^2+1$. **D.** $y=-x^4+2x^2+1$.

Lời giải

Chọn A

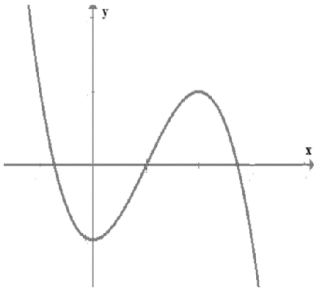
Dựa vào hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên loại các đáp án B và **C.**

Mặt khác, ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4-2x^2+1\right)=+\infty$ nên chọn đáp án **A.**

Câu 7. **(Mã 101 - 2020 Lần 2)**Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong hình bên

A. $y=x^4-2x^2-2$ **B.** $y=-x^3+2x^2-2$

C. $y=x^3-3x^2-2$ **D.** $y=-x^4+2x^2-2$



Lời giải

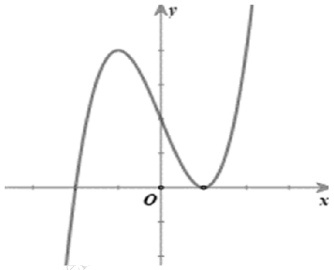
Chọn B

Qua đồ thị là hàm bậc 3 nên loại **A,** **D.**

Bên phải ngoài cùng của đồ thị đi xuống nên hệ số a < 0

$\Rightarrow$ loại đáp án **C**

Câu 8. **(Mã 104 2017)** Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



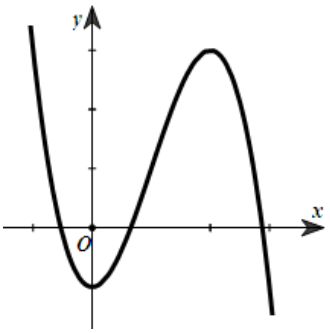
A. $y=-x^3+3x+2$ **B.** $y=x^4-x^2+1$ **C.** $y=x^4+x^2+1$ **D.** $y=x^3-3x+2$

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hình vẽ là đồ thị hàm số bậc ba có hệ số $a>0$ nên chỉ có hàm số $y=x^3-3x+2$ thỏa mãn điều kiện trên.

Câu 9. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



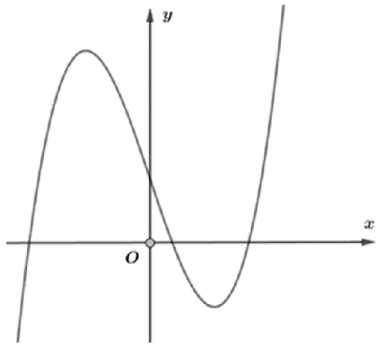
A. $y=-x^4+2x^2-1$. **B.** $y=x^4-2x^2-1$. **C.** $y=x^3-3x^2-1$. **D.** $y=-x^3+3x^2-1$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị có dạng đồ thị của hàm số bậc 3 có hệ số $a<0$ nên đáp án D đúng.

Câu 10. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Đồ thị của hàm số dưới đây có dạng như đường cong bên?



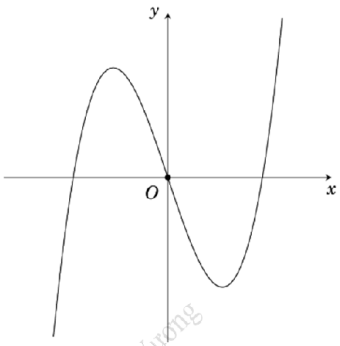
A. $y=x^3-3x+1$. **B.** $y=x^4-2x^2+1$.

C. $y=-x^4+2x^2+1$. **D.** $y=-x^3+3x+1$.

Lời giải

Chọn A

Câu 11. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y=x^4+2x^2$. **B.** $y=-x^3-3x$. **C.** $y=x^3-3x$. **D.** $y=-x^4+2x^2$.

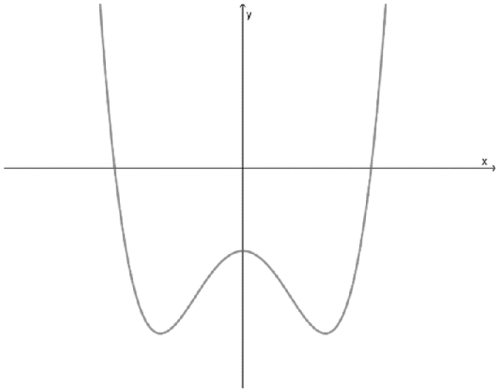
Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn C

Đây là đồ thị của hàm số bậc ba với hệ số $a>0$ nên chọn **C.**

Câu 12. **(Mã 102 2018)** Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=-x^3+x^2-1$ **B.** $y=-x^4+2x^2-1$ **C.** $y=x^3-x^2-1$ **D.** $y=x^4-2x^2-1$

Lời giải

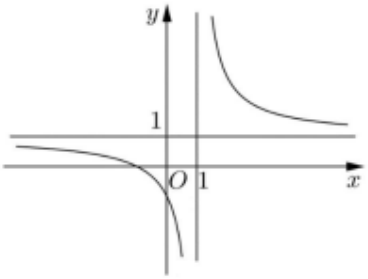
Chọn D

Dựa vào hình vẽ suy ra hàm số đã cho có 3 cực trị $\rightarrow$ loại C,

D.

Mặt khác nhánh bên tay phải của đồ thị hàm số đi lên suy ra hệ số $a>0\rightarrow$ Chọn D

Câu 13. **(Đề Tham Khảo 2019)** Đường con trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



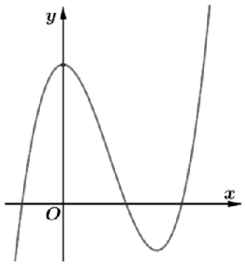
A. $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ **B.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ **C.** $y=x^4+x^2+1$ **D.** $y=x^3-3x-1$

Lời giải

Chọn B

Vì từ đồ thị ta suy ra đồ thị của hàm phân thức có tiệm cận đứng và ngang $x=1; y=1$

Câu 14. **(Mã 110 2017)** Đường cong ở hình bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



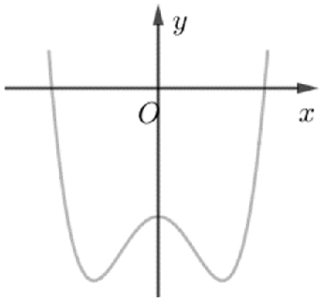
A. $y=-x^3+3x^2+1$ **B.** $y=x^3-3x^2+3$ **C.** $y=-x^4+2x^2+1$ **D.** $y=x^4-2x^2+1.$

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta thấy đây là hình ảnh đồ thị của hàm số bậc ba nên loại đáp án B và C; Mặt khác dựa vào đồ thị ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ nên hệ số của x^3 dương nên ta chọn đáp án $y=x^3-3x^2+3$

Câu 15. **(Mã 103 2019)** Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



A. $y=x^3-3x^2-2.$ **B.** $y=x^4-2x^2-2.$

C. $y=-x^3+3x^2-2.$ **D.** $y=-x^4+2x^2-2.$

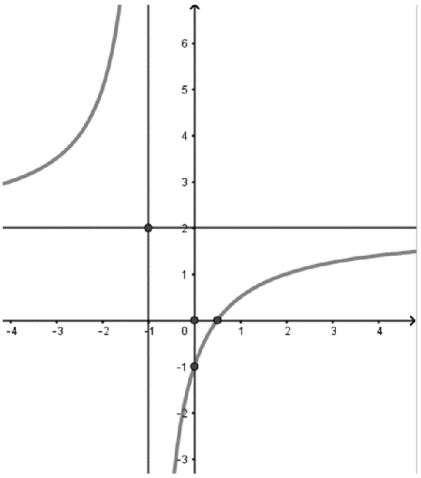
Lời giải

Chọn B

Quan sát đò thị ta thấy đây là đồ thị của hàm số $y=ax^4+bx^2+c\,(a>0)$. Vậy chọn

B.

Câu 16. **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho đường cong hình vẽ bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?



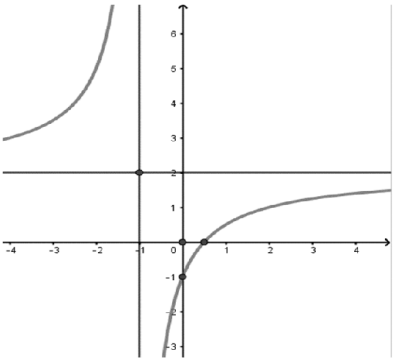
A. $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ **B.** $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ **C.** $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ **D.** $y=\dfrac{2x-2}{x-1}$

Lời giải

Chọn C

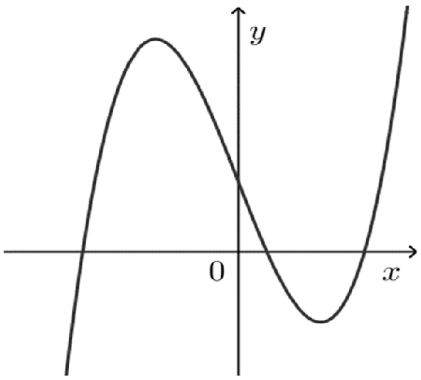
Dựa vào đồ thị suy ra tiệm cận đứng $x=-1$ loại C, D

Đồ thị hàm số giao với trục hoành có hoành độ dương suy ra chọn B



Nguyễn Bảo Vương

Câu 17. **(Đề Minh Họa 2017)** Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



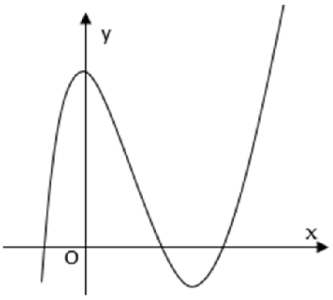
A. $y=x^3-3x+1$ **B.** $y=-x^3+3x+1$ **C.** $y=x^4-x^2+1$ **D.** $y=-x^2+x-1$

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị : $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ và đây là đồ thị hàm bậc ba nên ta chọn phương án $y=x^3-3x+1$.

Câu 18. **(Mã 101 2019)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



A. $y=x^3-3x^2+3$. **B.** $y=-x^3+3x^2+3$.

C. $y=x^4-2x^2+3$.s **D.** $y=-x^4+2x^2+3$.

Lời giải

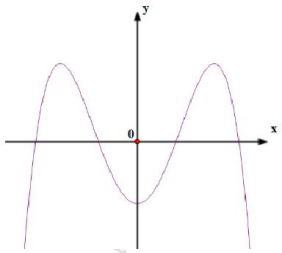
Chọn A

Dạng hàm bậc ba nên loại C

Từ đồ thị ta có $a>0$. Do đó loại B,

D.

Câu 19. **(Mã 101 2018)** Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=x^3-3x^2-1$ **B.** $y=-x^3+3x^2-1$ **C.** $y=-x^4+3x^2-1$ **D.** $y=x^4-3x^2-1$

Lời giải

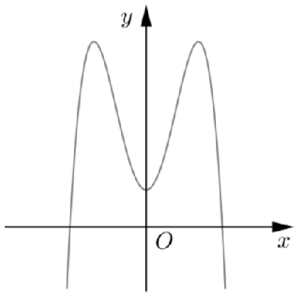
Chọn C

+ Nhìn đồ thị khẳng định đồ thị hàm trùng phương loại **B, C**

+ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=-\infty$ nên chọn

D.

Câu 20. **(Mã 104 2019)** Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



A. $y=2x^4-4x^2+1$ **B.** $y=-2x^3+3x+1$ **C.** $y=2x^3-3x+1$ **D.** $y=-2x^4+4x^2+1$

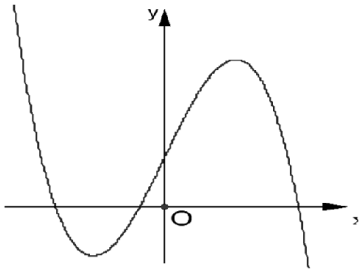
Lời giải

Chọn D

Dạng đồ thị hình bên là đồ thị hàm số trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ có hệ số $a<0$.

Do đó, chỉ có đồ thị ở đáp án B là thỏa mãn.

Câu 21. **(Mã 102 2019)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên



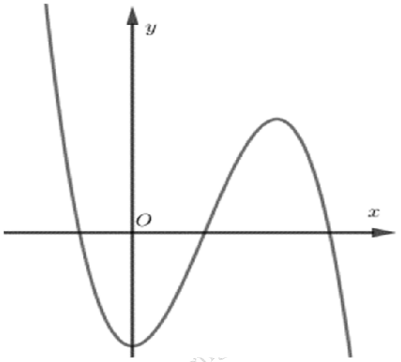
A. $y=-x^3+3x+1.$ **B.** $y=x^3-3x+1.$ **C.** $y=x^4-2x^2+1.$ **D.** $y=-x^4+2x^2+1.$

Lời giải

Chọn A

Trong bốn hàm số đã cho thì chỉ có hàm số $y=-x^3+3x+1$ (hàm số đa thức bậc ba với hệ số $a<0$) có dạng đồ thị như đường cong trong hình.

Câu 22. **(Mã 104 2018)** Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



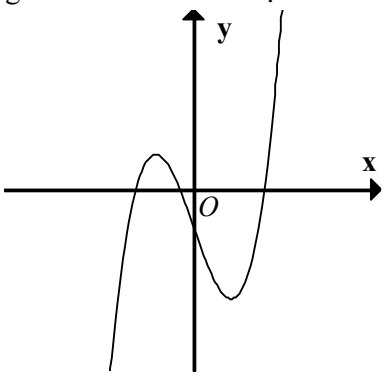
A. $y=x^4-x^2-2$ **B.** $y=-x^4+x^2-2$ **C.** $y=-x^3+3x^2-2$ **D.** $y=x^3-3x^2-2$

Lời giải

Chọn C

Dựa trên hình dáng đồ thị, ta loại $y=x^3-3x^2-2$ và $y=x^4-x^2-2$ Mặt khác từ đồ thị, ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$ nên loại $y=-x^4+x^2-2$

Câu 23. **(Mã 103 2018)** Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=x^3-3x-1$ **B.** $y=x^4-3x^2-1$ **C.** $y=-x^3-3x-1$ **D.** $y=-x^4+x^2-1$

Lời giải

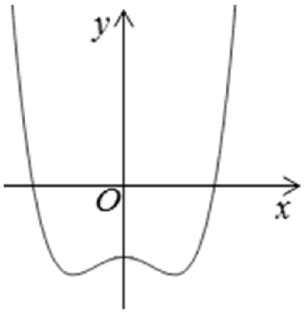
Chọn A

Đồ thị hàm số là đồ thị của hàm số bậc ba nên loại A và

B.

Đồ thi hàm số bậc ba có hệ số $a>0$ nên D đúng.

Câu 24. **(Mã 123 2017)** Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



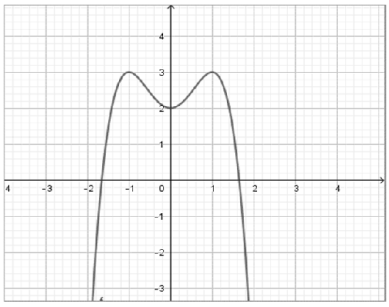
A. $y=x^4-x^2-1$ **B.** $y=-x^4+x^2-1$ **C.** $y=x^3-x^2-1$ **D.** $y=-x^3+x^2-1$

Lời giải

Chọn A

Đây là hình dáng của đồ thị hàm bậc bốn trùng phương có hệ số $a>0$

Câu 25. **(Đề Tham Khảo 2018)** Đường cong trong hình bên là của đồ thị hàm số nào dưới đây?



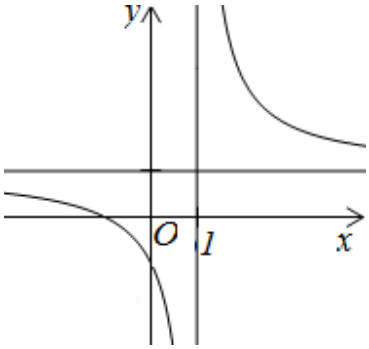
A. $y=x^3-3x^2+2$ **B.** $y=-x^3+3x^2+2$ **C.** $y=-x^4+2x^2+2$ **D.** $y=x^4-2x^2+2$

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số trên là đồ thị hàm trùng phương có 3 cực trị và có $a<0$

Câu 26. **(Mã 123 2017)** Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với a,b,c,d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

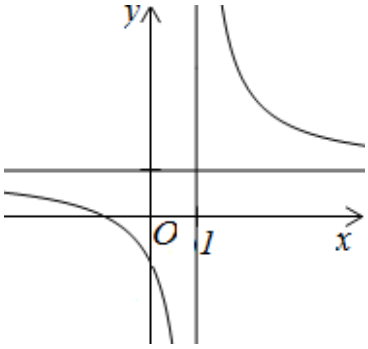


A. $y'<0,\forall x\in\mathbb{R}$ **B.** $y'>0,\forall x\neq 1$ **C.** $y'<0,\forall x\neq 1$ **D.** $y'>0,\forall x\in\mathbb{R}$

Lời giải

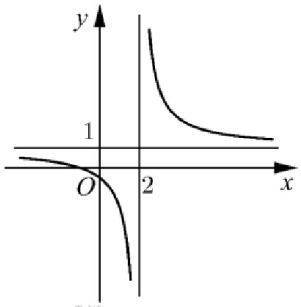
Chọn C

Ta có :



Dựa vào hình dáng của đồ thị ta được:
+ Điều kiện $x \neq 1$
+ Đây là đồ thị của hàm nghịch biến
Từ đó ta được $y' < 0, \forall x \neq 1.$

Câu 27. **(Mã 105 2017)** Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với a,b,c,d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



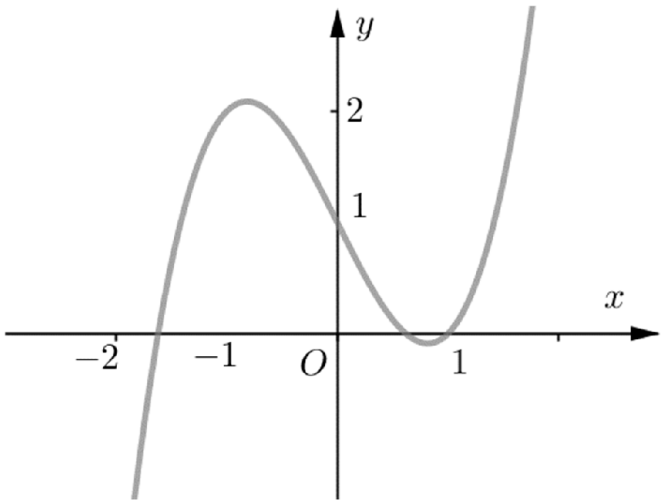
A. $y' > 0, \forall x \neq 1$ **B.** $y' < 0, \forall x \neq 1$ **C.** $y' < 0, \forall x \neq 2$ **D.** $y' > 0, \forall \neq 2$

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta nhận thấy tiệm cận đứng bằng 2, Hàm số nghịch biến vậy chọn B

Câu 28. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Hình vẽ sau đây là đồ thị của một trong bốn hàm số cho ở các đáp án A,B,C,D. Hỏi đó là hàm số nào?



A. $y = x^3 + 2x + 1.$ **B.** $y = x^3 - 2x^2 + 1.$ **C.** $y = x^3 - 2x + 1.$ **D.** $y = -x^3 + 2x + 1.$

Lời giải

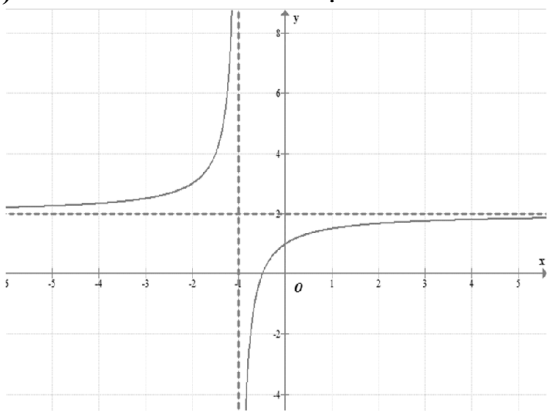
Dựa vào đồ thị, ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$, loại phương án D.

Xét phương án A có $y' = 3x^2 + 2 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, hàm số không có cực tri, loại phương án A.

Xét phương án B có $y' = 3x^2 - 6x$ và y' đổi dấu khi đi qua các điểm $x = 0,\ x = 2$ nên hàm số đạt cực tri tại $x = 0$ và $x = 2$, loại phương án B.

Vậy phương án đúng là C.

Câu 29. **(Sở Cần Thơ - 2019)** Hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào



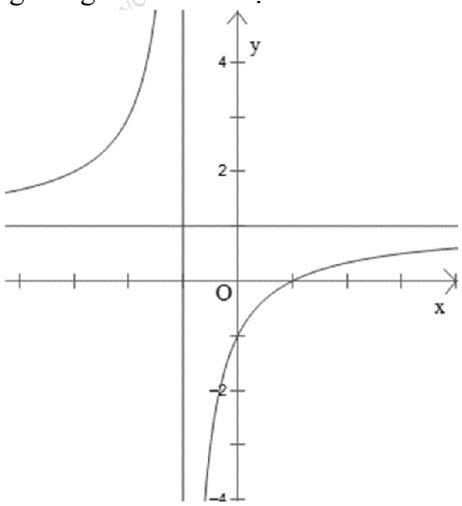
A. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$. **B.** $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$. **C.** $y = \dfrac{2x-3}{x+1}$. **D.** $y = \dfrac{2x+5}{x+1}$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số cắt trục Oy tai điểm có tọa độ $(0;1)$ nên chọn phương án **B.**

Câu 30. **(SGD Nam Định)** Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$. **B.** $y = \dfrac{-2x+1}{2x+2}$. **C.** $y = x^4 - 3x^2$. **D.** $y = x^3 - 3x^2$.

Lời giải

Chọn A

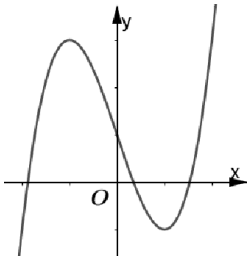
Hình vẽ trên là đồ thị của hàm số dạng $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}\ (c \neq 0; ad - bc \neq 0) \Rightarrow$ Loại phương án C, D

Ta thấy: Đồ thị có đường tiệm cận đứng là $x = -1$ và đường tiệm cận ngang là $y = 1$

Phương án B: Đồ thị có đường tiệm cận đứng là $x = -2 \Rightarrow$ loại B

$\Rightarrow$ A đúng.

Câu 31. **(Sở Gia Lai 2019)** Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?



A. $y=-x^3+3x+1$. **B.** $y=x^4-x^2+1$. **C.** $y=-x^2+x-1$. **D.** $y=x^3-3x+1$.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị đã cho có hình dạng của đồ thị hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ nên loại phương án **B** và **C**

Dựa vào đồ thị, ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty \Rightarrow a>0$ nên loại phương án **A**

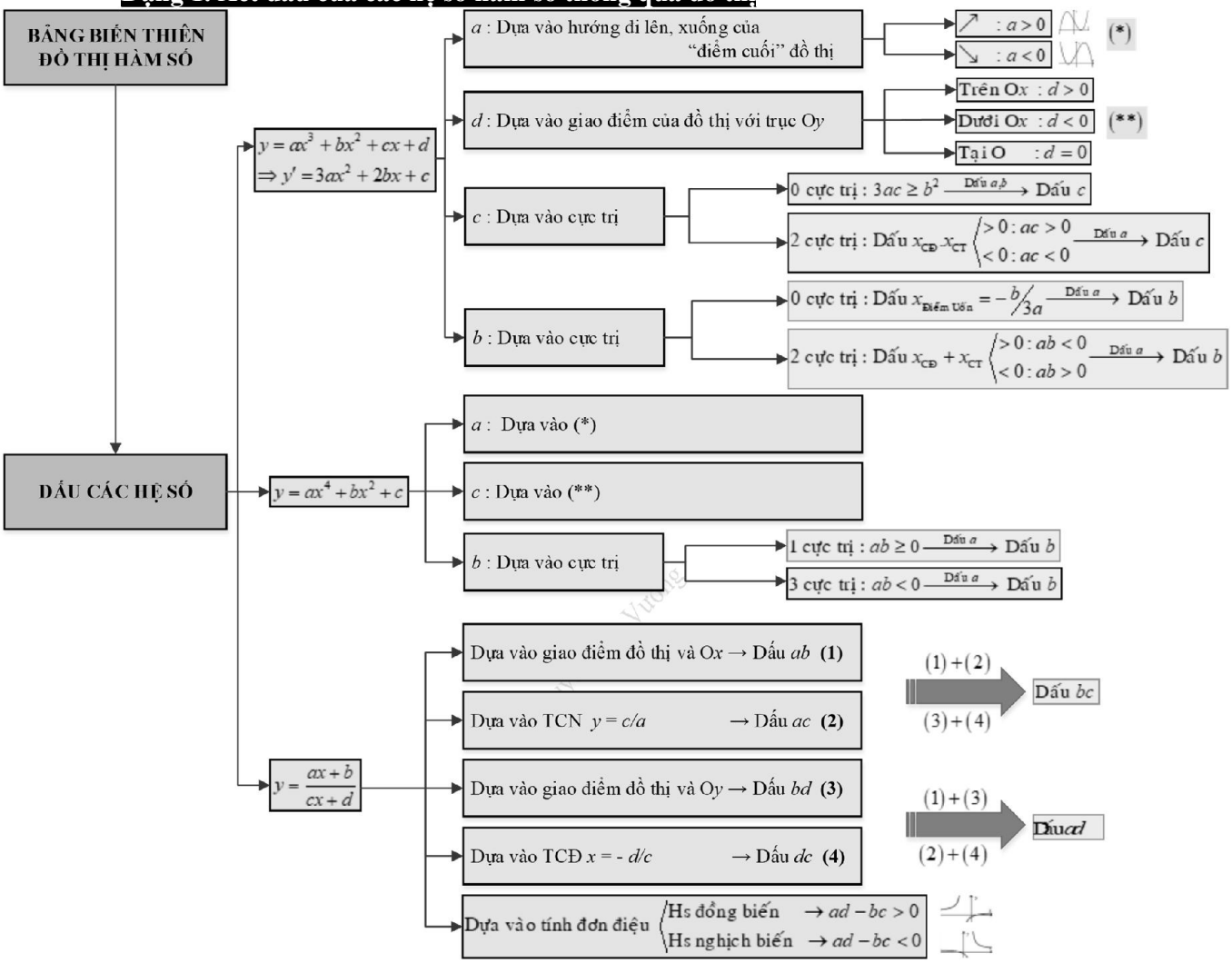
---------- HẾT ----------

Nguyễn Bảo Vương

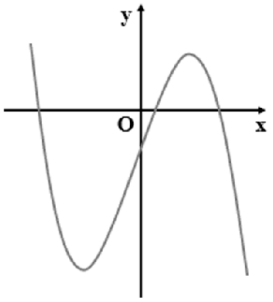
Chuyên đề 7 ĐỌC ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM

Dạng 1. Xét dấu của các hệ số hàm số thông qua đồ thị



Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hàm số $y=ax^3+3x+d\ (a;d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a>0,d>0$. **B.** $a<0,d>0$. **C.** $a>0,d<0$. **D.** $a<0,d<0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}=-\infty \Rightarrow$ đồ thị nhánh ngoài cùng của hàm số hướng đi xuống nên hệ số $a<0$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung $Oy: x=0$ là điểm nằm bên dưới trục hoành nên khi $x=0 \Rightarrow y=d<0$.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ / $-\infty$	$\nearrow$	1

Trong các số a,b và c có bao nhiêu số dương?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-\dfrac{c}{b}$ và đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{a}{b}$.

Từ bảng biến thiên ta có: $\begin{cases}-\dfrac{c}{b}=2\\ \dfrac{a}{b}=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=-\dfrac{c}{2}\ (1)$

Mặt khác: $f'(x)=\dfrac{ac-b}{(bx+c)^2}$.

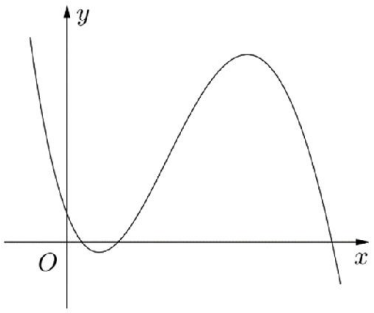
Vì hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$ nên

$f'(x)=\dfrac{ac-b}{(bx+c)^2}>0\Leftrightarrow ac-b>0\ (2)$

Thay (1) vào (2), ta được: $-\dfrac{c^2}{2}+\dfrac{c}{2}>0\Leftrightarrow -c^2+c>0\Leftrightarrow 0<c<1$.

Suy ra c là số dương và a, b là số âm.

Câu 3. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?



A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty\Rightarrow a<0$.

Gọi x_1, x_2 là hoành độ hai điểm cực trị của hàm số suy ra x_1, x_2 nghiệm phương trình $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ nên theo định lý Viet:

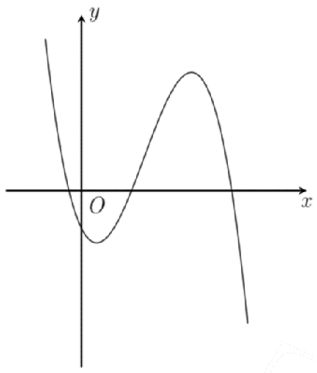
+) Tổng hai nghiệm $x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} > 0 \Rightarrow \dfrac{b}{a} < 0 \Rightarrow b > 0$.

+) Tích hai nghiệm $x_1 x_2 = \dfrac{c}{3a} > 0 \Rightarrow c < 0$.

Lại có đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Vậy có 2 số dương trong các số a, b, c, d.

Câu 4. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a,b,c,d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các hệ số a,b,c,d ?



A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

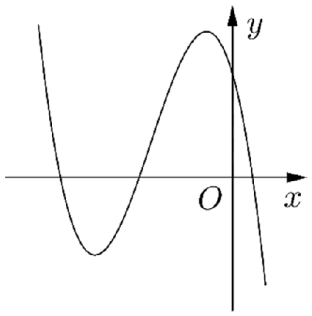
Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow a < 0$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm cùng phía của trục tung nên $ac > 0 \Rightarrow c < 0$

Đồ thị hàm số có điểm uốn nằm bên phải trục tung nên $ab < 0 \Rightarrow b > 0$

Đồ thị hàm số cắt trục tung ở dưới trục hoành $\Rightarrow d < 0$

Câu 5. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a,b,c,d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d ?



A. 4. **B.** 2.

C. 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

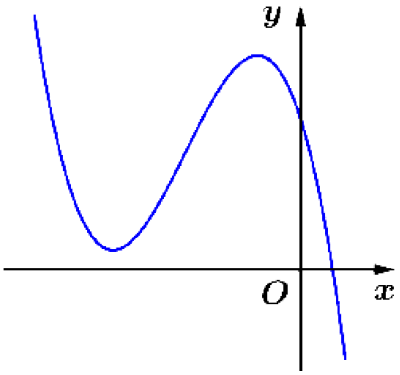
Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Dựa vào đồ thị ta thấy $a < 0$

Hàm số có 2 cực trị âm nên $\begin{cases} \Delta'_{y'} > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 9ac > 0 \\ -\dfrac{2b}{3a} < 0 \\ \dfrac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow\Rightarrow \begin{cases} b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0;d)$ nên $d > 0$.

Vậy có đúng một số dương trong các số a,b,c,d

Câu 6. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a,b,c,d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?



A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Dựa vào đồ thị ta thấy $a < 0$

Hàm số có 2 cực trị âm nên $\begin{cases} \Delta'_{y'} > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 9ac > 0 \\ -\dfrac{2b}{3a} < 0 \\ \dfrac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0;d)$ nên $d > 0$

Vậy có đúng 1 số dương trong các số a, b, c, d.

Câu 7. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ \ (a,b,c,d \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số $a,\ b,\ c,\ d$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Từ dáng điệu sự biến thiên hàm số ta có $a > 0$.

Khi $x = 0$ thì $y = d = 1 > 0$.

Mặt khác $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Từ bảng biến thiên ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \end{array}\right.$.

Từ đó suy ra $c = 0; \dfrac{-2b}{3a} = -2 \Rightarrow b = 3a > 0$.

Vậy có 3 số dương là $a,\ b,\ d$.

Câu 8. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a,b,c,d \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-1	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow a > 0.$
- $f(0) = -1 \Rightarrow d = -1 < 0.$
- $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$

Ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{2b}{3a} = -2 \\ \dfrac{c}{3a} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3a > 0 \\ c = 0 \end{cases}.$

Có 2 số dương là a, b

Câu 9. **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-5	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A.

Từ bảng biến thiên, ta có

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(4) = -5 \\ f'(0) = 0 \\ f'(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 3 \\ 64a + 16b + 4c + d = -5 \\ c = 0 \\ 48a + 8b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = -\dfrac{3}{2} \\ c = 0 \\ d = 3 \end{cases}$$

Vậy trong các số a, b, c, d có 2 số dương.

Câu 10. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\ \ (a,b,c,d \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d ?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

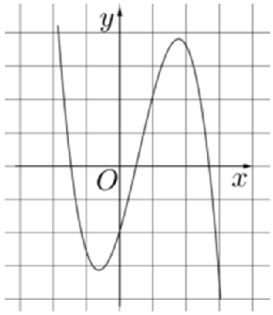
Ta có: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ \ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$

$\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$

Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị $A(0;-1),B(4;-5)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} f(0)=-1\\ f(4)=-5\\ f'(0)=0\\ f'(4)=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} d=-1\\ 64a+16b+4c+d=-5\\ c=0\\ 48a+8b+c=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=\dfrac{1}{8}\\ b=-\dfrac{3}{4}\\ c=0\\ d=-1 \end{cases}$$. Trong các số a,b,c,d có 1 số dương.

Câu 11. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a<0,\ b>0,\ c>0,\ d<0$ **B.** $a<0,\ b<0,\ c>0,\ d<0$.

C. $a>0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$ **D.** $a<0,\ b>0,\ c<0,\ d<0$.

Nguyễn Bảo

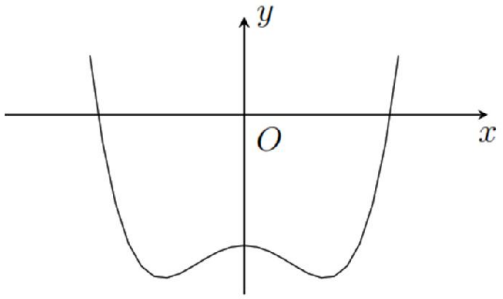
Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị suy ra hệ số $a<0\Rightarrow$loại phương án C

$y'=3ax^2+2bx+c=0$ có 2 nghiệm x_1,x_2 trái dấu (do hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm hai phía với Oy)$\Rightarrow 3a.c<0\Rightarrow c>0\Rightarrow$loại phương án **D.** Do $(C)\cap Oy=D(0;d)\Rightarrow d<0.$

Câu 12. **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



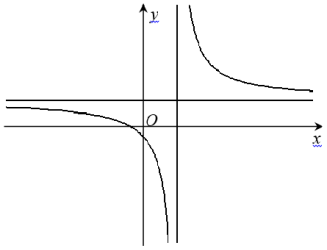
A. $a>0,b<0,c>0$ **B.** $a>0,b<0,c<0$ **C.** $a>0,b>0,c<0$ **D.** $a<0,b>0,c<0$

Lời giải

Chọn B

Ta có đồ thị có hình dạng như trên với hàm bậc bốn trùng phương có hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại nên $a>0,b<0$. Giá trị cực đại nhỏ hơn 0 nên $c<0$.

Câu 13. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như sau.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $ac>0;\ bd>0$ **B.** $ab<0;\ cd<0$ **C.** $bc>0;\ ad<0$ **D.** $ad>0;\ bd<0$

Lời giải

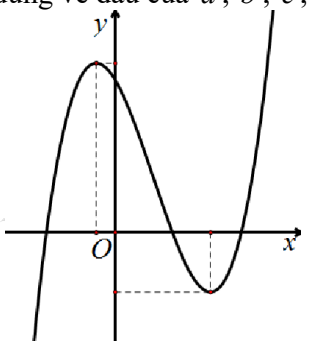
Theo đồ thị:

Tiệm cận ngang: $y=\dfrac{a}{c}>0\ \ (1)$

Tiệm cận đứng: $x=-\dfrac{d}{c}>0\Rightarrow\dfrac{d}{c}<0\ \ (2)$

$y=0\Rightarrow x=-\dfrac{b}{a}<0\Rightarrow\dfrac{b}{a}>0\ \ (3)$

Câu 14. **(THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Chọn khẳng định đúng về dấu của a, b, c, d?



A. $a>0, b>0, d>0, c>0$ **B.** $a>0,\ c>0>b,\ d<0$

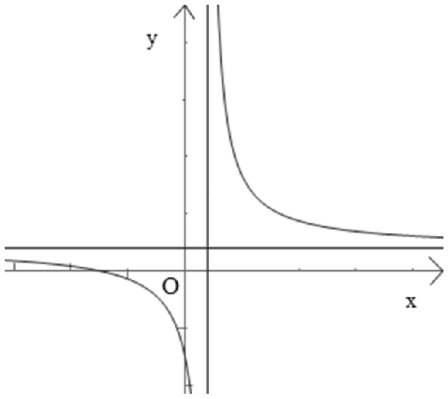
C. $a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0.$ **D.** $a>0,\ b<0,\ c<0, d>0$

lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta có $a>0$, đồ thị cắt Oy tại 1 điểm có tung độ dương nên $d>0$, đồ thị có 2 cực trị trái dấu nên $x_1.x_2<0\Rightarrow\dfrac{c}{a}<0\Rightarrow c<0$. Vậy đáp án D

Câu 15. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{(a-1)x+b}{(c-1)x+d}$, $d<0$ có đồ thị như hình trên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A. $a>1,b>0,c<1.$ **B.** $a>1,b<0,c>1.$ **C.** $a<1,b>0,c<1.$ **D.** $a>1,b>0,c>1.$

Lời giải

Theo bài ra, đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x=-\dfrac{d}{c-1}.$

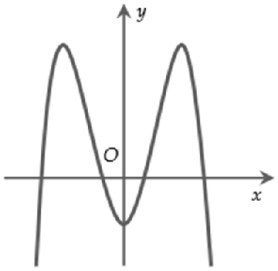
Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là: $y=\dfrac{a-1}{c-1}.$

Nhìn đồ thị ta thấy: $x=-\dfrac{d}{c-1}>0$ mà $d<0\Rightarrow c-1>0\Rightarrow c>1.$

$y=\dfrac{a-1}{c-1}>0\Rightarrow a-1>0\Rightarrow a>1.$

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $\dfrac{b}{d}<0\Rightarrow b>0.$

Câu 16. **(Sở Ninh Bình 2019)** Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ $(a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a<0,\ b>0,\ c<0.$ **B.** $a<0,\ b<0,\ c>0.$

C. $a<0,\ b>0,\ c>0.$ **D.** $a<0,\ b<0,\ c<0.$

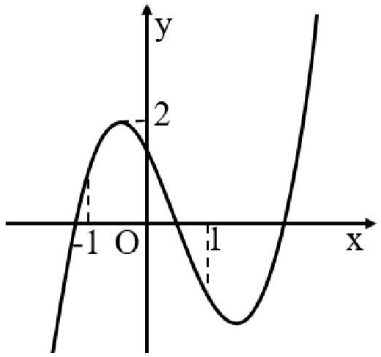
Lời giải

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0;c)$, từ đồ thị suy ra $c<0$

Mặt khác đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt, hay $y'=4ax^3+2bx=2x\left(2ax^2+b\right)=0$ có ba nghiệm phân biệt. Suy ra a,b trái dấu.

Mà $a<0\Rightarrow b>0$

Câu 17. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định nào là đúng?

A. $a<0,\ b<0,\ c<0,\ d<0$.
B. $a>0,\ b>0,\ c>0,\ d<0$.
C. $a>0,\ b>0,\ c<0,\ d>0$.
D. $a>0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$.

Lời giải

+ Dựa vào hình dạng đồ thị ta khẳng định được $a>0$.

+ Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $(0;d)$. Dựa vào đồ thị suy ra $d>0$.

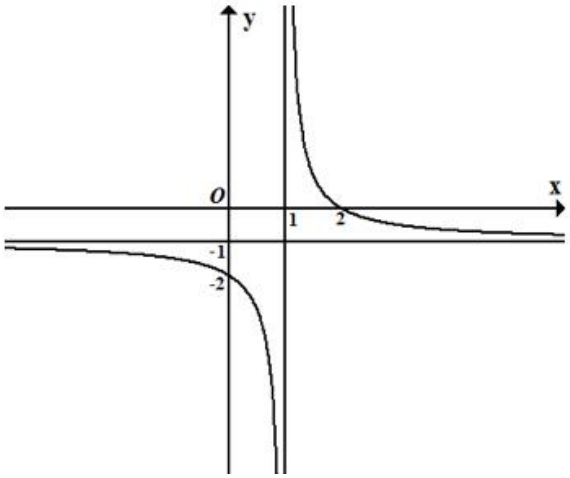
+ Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$. Hàm số có hai điểm cực trị $x_1,\ x_2\ (x_1<x_2)$ trái dấu nên phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ trái dấu. Vì thế $3a.c<0$, nên suy ra $c<0$.

+ Mặt khác từ đồ thị ta thấy $\begin{cases}x_1>-1\\x_2>1\end{cases}$ nên $x_1+x_2>0$.

Mà $x_1+x_2=\dfrac{-2b}{3a}$ nên suy ra $\dfrac{-2b}{3a}>0\Rightarrow b<0$.

Vậy $a>0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$.

Câu 18. **(THPT Ba Đình 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên dưới, với $a,\ b,\ c\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+2b+3c$?



A. $T=-8$.
B. $T=2$.
C. $T=6$.
D. $T=0$.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số, ta suy ra

- Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=-1$.
- Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(2;0)$, $B(0;-2)$.

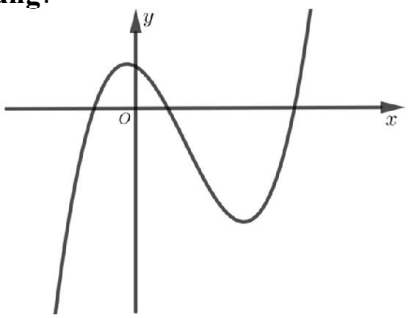
Từ biểu thức hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ (vì đồ thị hàm số là đồ thị hàm nhất biến nên $ac-b\neq 0$), ta suy ra

- Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-c$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=a$.
- Đồ thị hàm số đi qua $A\left(-\dfrac{b}{a};0\right)$, $B\left(0;\dfrac{b}{c}\right)$.

Đối chiếu lại, ta suy ra $c=-1$, $a=-1$, $b=2$.

Vậy $T=a+2b+3c=(-1)+2.2+3(-1)=0$.

Câu 19. **(THPT Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **đúng**?



A. $ab<0,bc>0,cd<0$ **B.** $ab<0,bc<0,cd>0$

C. $ab>0,bc>0,cd<0$ **D.** $ab>0,bc>0,cd>0$

Lời giải

Chọn A

Từ dáng điệu của đồ thị ta có ngay được:

$\oplus$ $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty;\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty\Rightarrow a>0$.

$\oplus$ Đồ thị hàm số cắt trục tung tại một điểm có tung độ dương nên $d>0$.

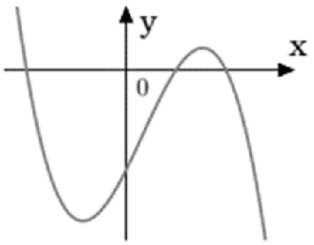
Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$

Mặt khác dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $y'=0$ có hai nghiệm trái dấu và tổng hai nghiệm này luôn dương nên $\begin{cases} ac<0 \\ -\dfrac{2b}{3a}> \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} c<0 \\ b<0 \end{cases}$ (do $a>0$)

Do đó: $ab<0,bc>,cd<0$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 20. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình dưới. Khẳng định nào sau đây đúng ?



A. $a<0,b<0,c<0,d<0$ **B.** $a<0,b>0,c>0,d>0$

C. $a<0,b>0,c<0,d>0$ **D.** $a<0,b>0,c>0,d<0$

Lời giải

Chọn D

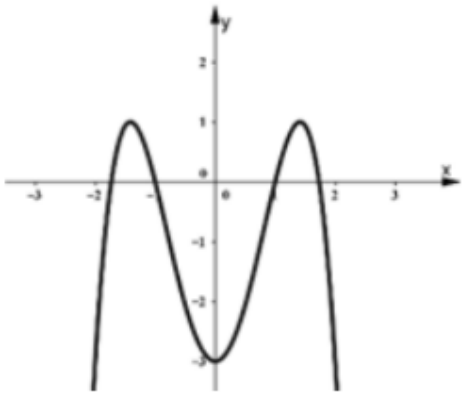
- Dựa vào hình dáng của đồ thị suy ra hệ số $a<0$.

- Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ âm nên $d<0$.

- Ta thấy đồ thị như hình vẽ có hai điểm cực trị, hoành độ các điểm cực trị trái dấu suy ra phương trình $y'=3ax^2+2bx+c=0$ có 2 nghiệm x_1,x_2 trái dấu kéo theo $3a.c<0\Rightarrow c>0$.

- Mặt khác $\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{b}{3a}>0\Rightarrow b>0$.

Câu 21. **(THPT Chuyên Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



A. $a>0,b<0,c<0$. **B.** $a<0,b<0,c<0$.

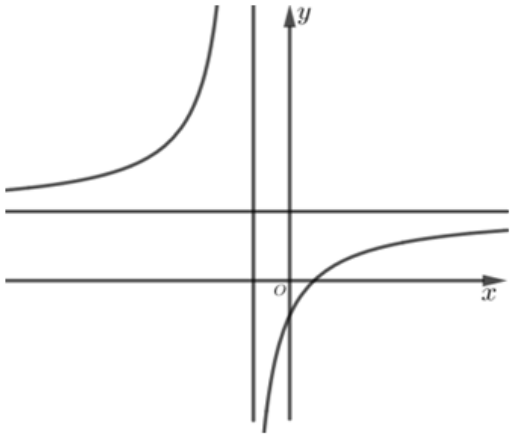
C. $a<0,b>0,c<0$. **D.** $a>0,b<0,c>0$

Lời giải

Chọn C

- Dựa vào hình dạng đồ thị suy ra $a<0$
- Hàm số có 3 điểm cực trị nên $ab<0\Rightarrow b>0$
- Giao điểm với trục tung nằm dưới trục hoành nên $c<0$.

Câu 22. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như trong hình bên dưới. Biết rằng a là số thực dương, hỏi trong các số b,c,d có tất cả bao nhiêu số dương?



A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

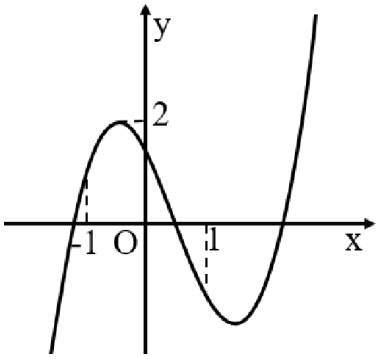
Nhìn vào đồ thị ta thấy

- tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$ nằm trên trục hoành nên $c>0$ (vì $a>0$)
- tiệm cận đứng $x=\dfrac{-d}{c}$ nằm bên trái trục tung nên $\dfrac{-d}{c}<0$. Suy ra $d>0$ (vì $c>0$)
- giao điểm của đồ thị và trục tung nằm bên dưới trục hoành nên $\dfrac{b}{d}<0$.

Suy ra $b<0$ (vì $d>0$)

Vậy $c>0,d>0$

Câu 23. **(Cụm liên trường Hải Phòng 2019)** Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định nào là đúng?

A. $a<0,\ b<0,\ c<0,\ d<0$.
B. $a>0,\ b>0,\ c>0,\ d<0$.
C. $a>0,\ b>0,\ c<0,\ d>0$.
D. $a>0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$.

Lời giải

Chọn D

+ Dựa vào hình dạng đồ thị ta khẳng định được $a>0$.

+ Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $(0;d)$. Dựa vào đồ thị suy ra $d>0$.

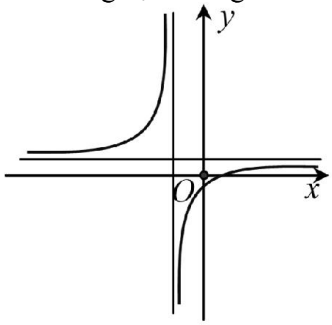
+ Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$. Hàm số có hai điểm cực trị $x_1,\ x_2\ (x_1<x_2)$ trái dấu nên phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ trái dấu. Vì thế $3a.c<0$, nên suy ra $c<0$.

+ Mặt khác từ đồ thị ta thấy $\begin{cases}x_1>-1\\x_2>1\end{cases}$ nên $x_1+x_2>0$.

Mà $x_1+x_2=\dfrac{-2b}{3a}$ nên suy ra $\dfrac{-2b}{3a}>0\Rightarrow b<0$.

Vậy $a>0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$.

Câu 24. **(Chuyên Nguyễn Huệ 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



A. $\begin{cases}ad<0\\bc>0\end{cases}$.
B. $\begin{cases}ad<0\\bc<0\end{cases}$.
C. $\begin{cases}ad>0\\bc<0\end{cases}$.
D. $\begin{cases}ad>0\\bc>0\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Nhận xét từ đồ thị:

+ Giao với trục hoành tại $x_o=-\dfrac{b}{a}>0\Rightarrow$ a và b trái dấu (1).

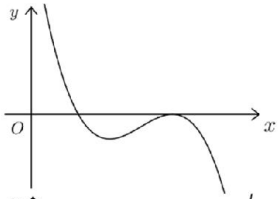
+ Giao với trục tung tại $y_o=\dfrac{b}{d}<0\Rightarrow b$ và d trái dấu (2).

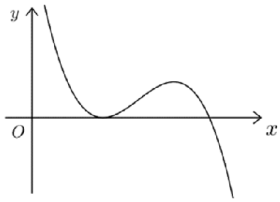
+ Tiệm cận đứng: $x=-\dfrac{d}{c}<0\Rightarrow d$ và c cùng dấu (3).

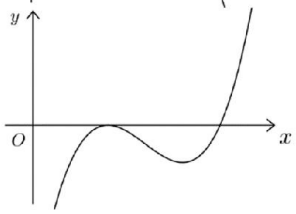
Từ (1) và (2) suy ra: a và d cùng dấu hay $ad>0$.

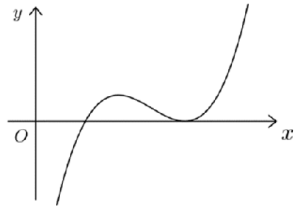
Từ (2) và (3) suy ra: b và c trái dấu hay $bc<0$.

Câu 25. Tìm đồ thị hàm số $y=f(x)$ được cho bởi một trong các phương án dưới đây, biết $f(x)=(a-x)(b-x)^2$ với $a<b$.

A.


B.


C.


D.


Lời giải

Chọn A

Có $f'(x)=-(b-x)^2+(a-x).(-2)(b-x)=-(b-x)(b-x+2a-2x)=-(b-x)(b+2a-3x)$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=b\\x=\dfrac{2a+b}{3}\end{array}\right.$$

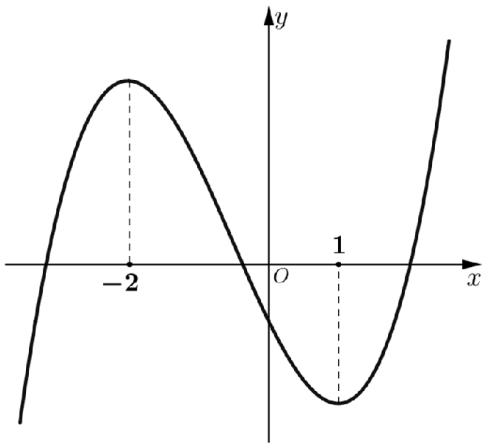
Có $\dfrac{2a+b}{3}<\dfrac{2b+b}{3}=b$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\dfrac{2a+b}{3}$		b		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Từ đó chọn đáp án A

Câu 26. Cho đường cong $(C):y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a>0,b<0,c<0,d<0$.

B. $a>0,b>0,c<0,d>0$.

C. $a<0,b>0,c>0,d<0$.

D. $a>0, b>0, c<0, d<0$.

Lời giải

Chọn D

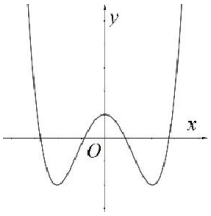
Từ đồ thị ta có $x=0 \Rightarrow y=d<0$, từ dạng đồ thị suy ra $a>0$.

Mặt khác $y'=3ax^2+2bx+c$ từ đồ thị ta có phương trình $y'=0$ có hai nghiệm trái dấu suy ra $ac<0$ mà $a>0$ suy ra $c<0$.

Hơn nữa phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}=-1$ suy ra $3a=2b \Rightarrow b>0$.

Vậy chọn đáp án **D.**

Câu 27. **(Gia Lai 2019)** Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a>0$, $b>0$, $c<0$. **B.** $a<0$, $b>0$, $c<0$.
C. $a>0$, $b<0$, $c>0$. **D.** $a>0$, $b<0$, $c<0$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị:

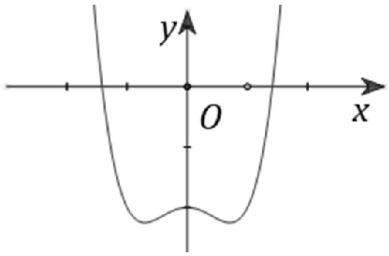
+ $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty \Rightarrow \boxed{a>0}$.

+ Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Rightarrow ab<0 \Rightarrow \boxed{b<0}$.

+ Giao điểm của đồ thị hàm số và trục tung có tung độ dương $\Rightarrow \boxed{c>0}$.

Vậy $a>0$, $b<0$, $c>0$.

Câu 28. **(THPT Thăng Long 2019)** Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm kết luận đúng



A. $a+b>0$. **B.** $bc>0$. **C.** $ab>0$. **D.** $ac>0$.

Lời giải

Chọn B

Từ hình vẽ ta thấy:

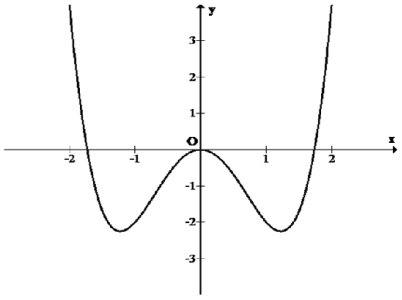
Đồ thị hàm số có bề lõm hướng lên $\Rightarrow a>0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow c<0$.

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị $\Rightarrow ab<0 \Rightarrow b<0$.

Vậy chỉ có $bc>0$.

Câu 29. **(THPT Cẩm Bình Hà Tĩnh 2019)** Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c(a\neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Hãy chọn mệnh đề đúng.

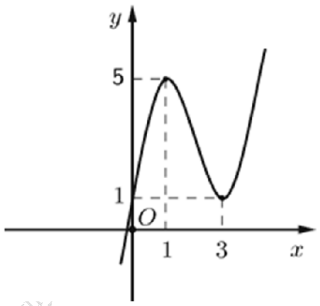


A. $a<0,b<0,c=0$. **B.** $a<0,b>0,c=0$.
C. $a>0,b<0,c=0$. **D.** $a>0,b<0,c>0$.

Lời giải

Chọn C
Dựa vào hình dạng đồ thị hàm số ta nhận thấy :
Hệ số $a>0$
Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa tọa $\Rightarrow c=0$
Hàm số có 3 điểm cực trị $\Rightarrow a.b<0\Rightarrow b<0$

Câu 30. **(Chuyên Long An 2019)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ ở bên. Mệnh đề nào
sau đây đúng?



A. $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$. **B.** $a>0$, $b>0$, $c<0$, $d>0$.
C. $a>0$, $b<0$, $c>0$, $d>0$. **D.** $a<0$, $b<0$, $c>0$, $d<0$.

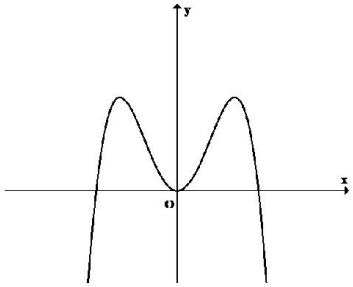
Lời giải

Chọn C
Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(0;1)$, $B(1;5)$ và $C(3;1)$ và đạt cực trị tại các điểm B và C.
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Ta có

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=5 \\ f'(1)=0 \\ f'(3)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=1 \\ a+b+c+d=5 \\ 3a+2b+c=0 \\ 27a+6b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-6 \\ c=9 \\ d=1 \end{cases}.$$

Câu 31. **(THPT Trần Phú 2019)** Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. $a<0,b>0,c>0$. **B.** $a>0,b<0,c>0$.
C. $a<0,b>0,c=0$. **D.** $a>0,b<0,c<0$.



Lời giải

Chọn C

Dựa vào hình dạng đồ thị hàm số ta nhận thấy :

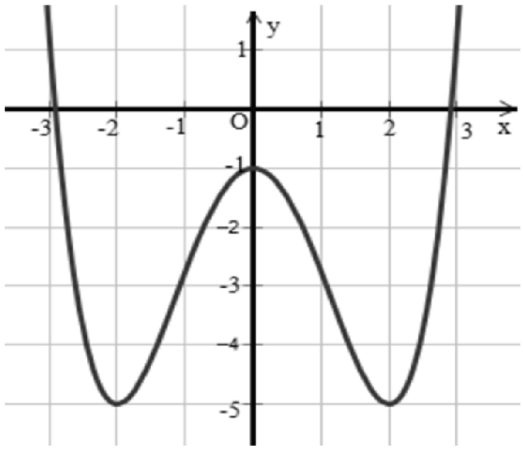
Hệ số $a<0$.

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Rightarrow a.b<0\Rightarrow b>0$.

Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa tọa $\Rightarrow c=0$.

Vậy $a<0,b>0,c=0$.

Câu 32. **(THPT Cộng Hiền 2019)** Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi khẳng định nào sau đây đúng?



A. $a>0,b<0,c<0$. **B.** $a>0,b>0,c<0$. **C.** $a>0,b<0,c>0$. **D.** $a<0,b>0,c<0$.

Lời giải

Chọn A

Nhìn vào đồ thị ta có:

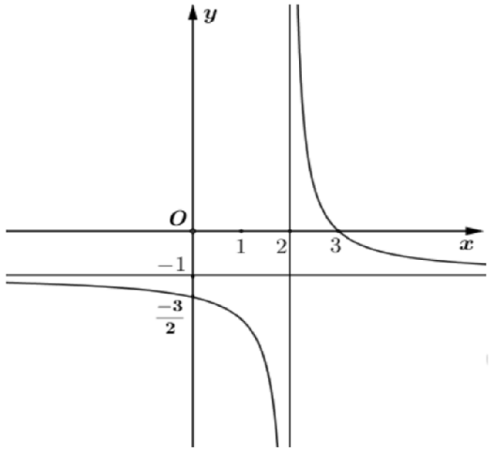
Khi $x\in(2;+\infty)$ hàm số đồng biến $\Rightarrow a>0$.

Hàm số có 3 điểm cực trị nên $a.b<0$ mà $a>0\Rightarrow b<0$.

$y(0)=-1=c\Rightarrow c<0$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 33. **(SGD Điện Biên - 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{ax+3}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tính giá trị của $a-2c$.



A. $a-2c=3$. **B.** $a-2c=-3$. **C.** $a-2c=-1$. **D.** $a-2c=-2$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số có TCN $y=-1\Leftrightarrow\dfrac{a}{1}=-1\Leftrightarrow a=-1$.

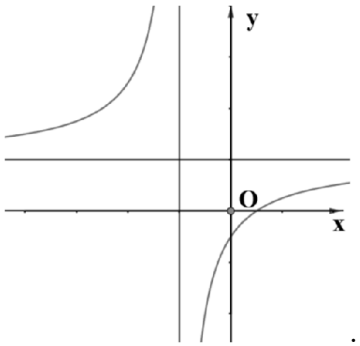
Mặt khác Đồ thị hàm số có TCĐ $x=2$ nên $2+c=0\Leftrightarrow c=-2$.

$\Rightarrow a-2c=-1-2.(-2)=3$.

Dựa vào đồ thị ta thấy các điểm $(3;0)$ và $\left(0;-\frac{3}{2}\right)$ thuộc vào đồ thị hàm số đã cho nên ta được hệ phương trình $\begin{cases}0=\frac{a.3+3}{3+c}\\-\frac{3}{2}=\frac{a.0+3}{0+c}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a+3=0\\-3c=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\c=-2\end{cases}$

$\Rightarrow a-2c=-1-2.(-2)=3.$

Câu 34. Hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$.



Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $ad>0$ và $bd>0$. **B.** $ad>0$ và $ab<0$. **C.** $bd<0$ và $ab>0$. **D.** $ad<0$ và $ab<0$.

Lời giải

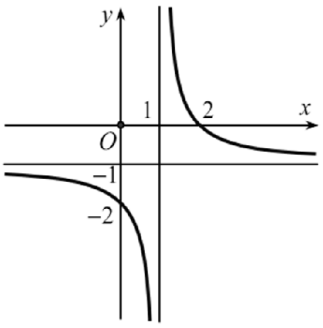
Chọn B

Đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm có hoành độ $x=-\frac{b}{a}$, giao với Oy tại điểm có tung độ $y=\frac{b}{d}$.

Dựa vào hình vẽ ta có $\begin{cases}-\frac{b}{a}>0\\\frac{b}{d}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{b}{a}<0\\\frac{b}{d}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ab<0\\bd<0\end{cases}\Rightarrow ad>0.$

Trong các phương án chỉ có phương án B thỏa mãn.

Câu 35. Cho hàm số $y=\frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $b<a<0$. **B.** $a<b<0$. **C.** $b>a$ và $a<0$. **D.** $a<0<b$.

Lời giải

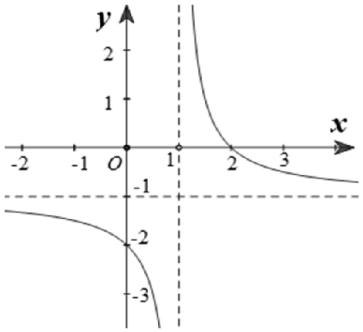
Chọn A

Ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=-1$ suy ra $a=-1$.

Do đồ thị hàm số đi qua điểm $(2;0)$ nên $2a-b=0\Leftrightarrow-2-b=0\Leftrightarrow b=-2$.

Vậy $b<a<0$.

Câu 36. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ (với $a,b,c\in\mathbb{R}$).



Khi đó tổng $a+b+c$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ có đường tiệm cận ngang $y=a$, đường tiệm cận đứng $x=-c$ và cắt Oy tại điểm $\left(0;\dfrac{b}{c}\right)$.

Từ đồ thị hàm số ta có đường tiệm cận ngang $y=-1$, đường tiệm cận đứng $x=1$ và cắt Oy tại điểm $(0;-2)$.

Từ đó suy ra: $\begin{cases}a=-1\\-c=1\\\dfrac{b}{c}=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\c=-1\\b=-2c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\c=-1\\b=2\end{cases}$. Vậy $a+b+c=-1-1+2=0$.

Câu 37. **(Chuyên Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2020)** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2-ax}{bx-c}\ (a,b,c\in\mathbb{R},b\neq 0)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$+$	$+$	
y	3 ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗ 3	

Tổng các số $(a+b+c)^2$ thuộc khoảng nào sau đây

A. $(1;2)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $\left(0;\dfrac{4}{9}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{4}{9};1\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-ax}{bx-c}=\dfrac{-a}{b}$, theo giả thiết suy ra $\dfrac{-a}{b}=3\Leftrightarrow a=-3b$

Hàm số không xác định tại $x=1\Rightarrow b-c=0\Leftrightarrow b=c$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định nên $f'(x)=\dfrac{ac-2b}{(bx-c)^2}>0$ với mọi x khác 1

Suy ra $ac-2b>0\Leftrightarrow -3b^2-2b>0\Leftrightarrow -\dfrac{2}{3}<b<0\Leftrightarrow 0<-b<\dfrac{2}{3}$

Lại có $a+b+c=-3b+b+b=-b$. Suy ra $(a+b+c)^2=b^2\in\left(0;\dfrac{4}{9}\right)$

Vậy tổng $a+b+c$ thuộc khoảng $\left(0;\dfrac{4}{9}\right)$.

Câu 38. **(Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020)** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R}$ và $c\neq 0)$. Biết rằng đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $(-1;7)$ và giao điểm hai tiệm cận là $(-2;3)$. Giá trị biểu thức $\dfrac{2a+3b+4c+d}{7c}$ bằng

A. 7. **B.** 4. **C.** 6. **D.** −5.

Lời giải

Chọn C

+ Ta có đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{a}{c}$, đường tiệm cận đứng là $x=\dfrac{-d}{c}$.

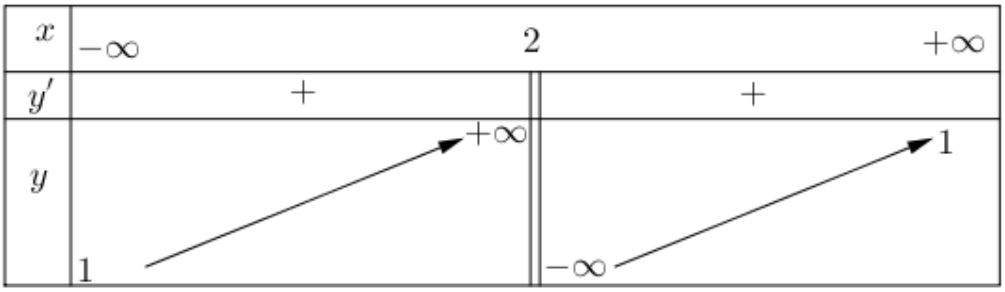
Theo bài ra, ta có: $\begin{cases}\dfrac{a}{c}=3\\ \dfrac{-d}{c}=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3c\\ d=2c\end{cases}$.

Nguyễn Bảo Vương

+ Điểm $(-1;7)$ thuộc đồ thị hàm số $f(x)$ nên $\dfrac{-a+b}{-c+d}=7\Leftrightarrow\dfrac{-3c+b}{-c+2c}=7\Leftrightarrow b=10c$.

Vậy $\dfrac{2a+3b+4c+d}{7c}=\dfrac{2.(3c)+3.(10c)+4c+2c}{7c}=6$.

Câu 39. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ (a,b,c là các tham số) có bảng biến thiên như hình vẽ



Xét các phát biểu sau: $(1):c>1$; $(2):a+b<0$; $(3):a+b+c=0$; $(4):a>0$. Số phát biểu đúng là?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} -\dfrac{c}{b}=2 \\ \dfrac{a}{b}=1 \\ ac-b>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-2b \\ a=b \\ ac-b>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-2b \\ a=b \\ -2b^2-b>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<c<1 \\ -\dfrac{1}{2}<a<0 \\ -\dfrac{1}{2}<b<0 \\ a+b+c=0 \end{cases}$$

Dựa vào hệ trên ta có các phát biểu $(1),(4)$ là sai, $(2),(3)$ đúng.

Câu 40. **(Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Ta xác định được các số a,b,c để đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ đi qua điểm $(1;0)$ và có điểm cực trị $(-2;0)$. Tính giá trị biểu thức $T=a^2+b^2+c^2$.

A. 25. **B.** -1. **C.** 7. **D.** 14.

Lời giải

Chọn A

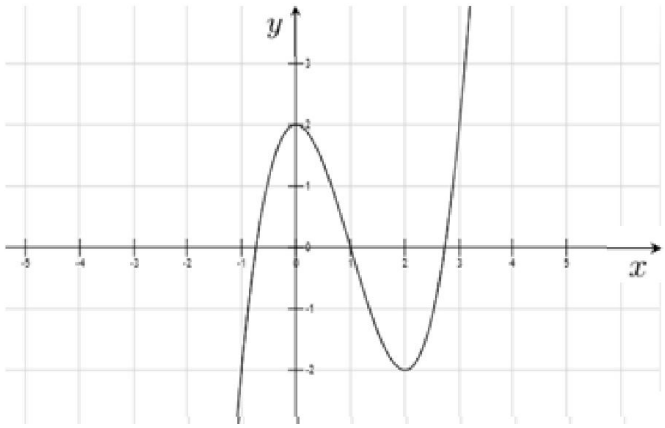
Ta có $y=x^3+ax^2+bx+c \Rightarrow y'=3x^2+2ax+b$.

Theo đề, ta có hệ phương trình $\begin{cases} y(1)=0 \\ y(-2)=0 \\ y'(-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=1^3+a.1^2+b.1+c \\ 0=(-2)^3+a.(-2)^2+b.(-2)+c \\ 0=3.(-2)^2+2a.(-2)+b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=-1 \\ 4a-2b+c=8 \\ -4a+b=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=0 \\ c=-4 \end{cases}$.

Vậy $T=a^2+b^2+c^2=3^2+0^2+(-4)^2=25$.

Câu 41. **(Lê Lai - Thanh Hóa - 2020)** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $S=a+b$?



A. $S=-2$. **B.** $S=0$. **C.** $S=1$. **D.** $S=-1$.

Lời giải

Chọn A

Vì đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $y=2$ nên $d=2$.

$y'=3ax^2+2bx+c$.

Hàm số đạt cực trị tại $x=0$ và $x=2$ nên

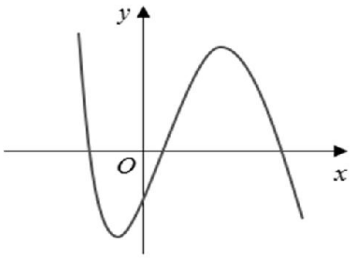
$\begin{cases} y'(0)=0 \\ y'(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ 12a+4b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ b=-3a \end{cases} \quad (1)$

Từ đồ thị ta nhận thấy $y(2)=-2 \Leftrightarrow 8a+4b+d=-2 \Leftrightarrow 8a+4b=-4 \Leftrightarrow 2a+b=-1 \quad (2)$

Thay (1) vào (2) ta tìm được $a=1, b=-3$.

Vậy $S=-2$.

Câu 42. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. $a<0, b<0, c>0, d<0$.
B. $a<0, b>0, c<0, d<0$.
C. $a>0, b<0, c<0, d>0$.
D. $a<0, b>0, c>0, d<0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$y'=3ax^2+2bx+c$, $y''=6ax+2b$

Từ đồ thị ta thấy:

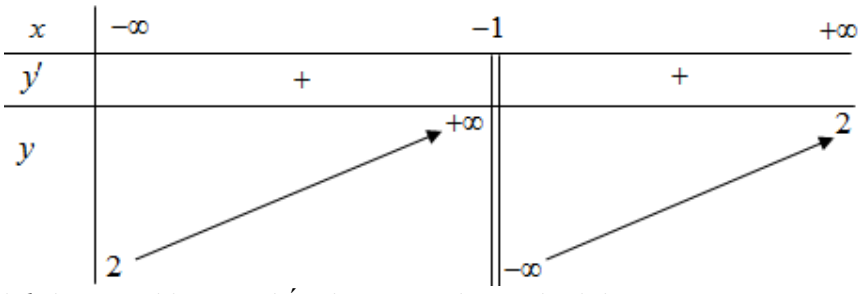
- $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$. Ta suy ra $a<0$.
- $y(0)<0 \Rightarrow d<0$ loại **C.**

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị với hoành độ x_1, x_2 trái dấu và $x_1+x_2>0$. Ta suy ra phương trình $y'=0$ có hai nghiệm trái dấu và $x_1+x_2>0$.

Ta suy ra $x_1x_2=\dfrac{c}{3a}<0, \Rightarrow c>0$ loại **B.**

Hơn nữa, $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{3a}>0 \\ a<0 \end{cases} \Rightarrow b>0$. Loại **A.**

Câu 43. **(Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+1}\ (a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:



Tập các giá trị b là tập nghiệm của bất phương trình nào dưới đây?

A. $b^3-8\le 0$.
B. $-b^2+4>0$.
C. $b^2-3b+2<0$.
D. $b^3-8<0$.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+1}$ có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-\dfrac{1}{c}$ và đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{a}{c}$.

Nhìn vào bảng biến thiên, ta thấy $-\dfrac{1}{c}=-1\Rightarrow c=1$ và $\dfrac{a}{c}=2\Rightarrow a=2$ (vì $c=1$).

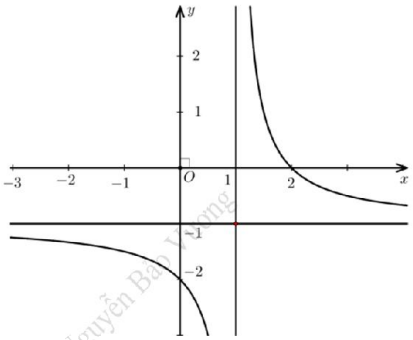
Ta có $y'=\dfrac{a-bc}{(cx+1)^2}$.

Vì hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$ nên

$y'=\dfrac{a-bc}{(bx+c)^2}>0\Leftrightarrow a-bc>0\Leftrightarrow 2-b>0\Leftrightarrow b<2\Leftrightarrow b^3<8\Leftrightarrow b^3-8<0$.

Vậy tập các giá trị b là tập nghiệm của bất phương trình $b^3-8<0$.

Câu 44. **(Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ (với a,b,c,d là số thực) có đồ thị như hình dưới đây. Tính giá trị biểu thức $T=\dfrac{a-2b+3d}{c}$.



A. $T=6$. **B.** $T=0$. **C.** $T=-8$. **D.** $T=2$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị ta có

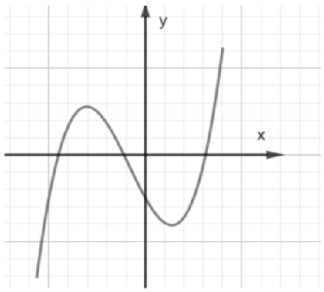
TCĐ: $x=1\Rightarrow\dfrac{-d}{c}=1\Rightarrow\dfrac{d}{c}=-1\Rightarrow d=-c$

TCN: $y=-1\Rightarrow\dfrac{a}{c}=-1\Rightarrow a=-c$

Đồ thị cắt trục hoành tại điểm: $x=2\Rightarrow\dfrac{-b}{a}=2\Rightarrow\dfrac{-b}{-c}=2\Rightarrow\dfrac{b}{c}=2\Rightarrow b=2c$

Vậy $T=\dfrac{a-2b+3d}{c}=\dfrac{-c-4c-3c}{c}=-8$

Câu 45. **(Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Trong các số a,b,c và d có bao nhiêu số dương?



A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Từ hình dạng đồ thị hàm số ta có $a>0$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow d<0$

Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$

Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu $\Rightarrow y'=0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ca<0$

Mà $a>0$ nên $c<0$

Ta lại có: $y''=6ax+2b$

$y''=0\Leftrightarrow 6ax+2b=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{b}{3a}$

Từ đồ thị hàm số ta thấy tâm đối xứng có hoành độ âm. Do đó $-\dfrac{b}{3a}<0$

Mà $a>0$ nên $b>0$

Vậy trong các số a,b,c và d có 2 số dương là a và b

Câu 46. **(Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020)** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax-6}{bx-c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	1

Trong các số a,b,c có bao nhiêu số âm?

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên của hàm số, ta thấy đồ thị có hai đường tiệm cận, trong đó tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

Suy ra $\begin{cases}\dfrac{c}{b}=-2\\ \dfrac{a}{b}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}bc<0\\ ab>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b>0,c<0,a>0\ (1)\\ b<0,c>0,a<0\ (2)\end{array}\right.$

Lại có hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định $f'(x)=\dfrac{-ac+6b}{(bx-c)^2}<0\Rightarrow ac>6b$.

Ta thấy (1) không thể xảy ra do nếu $b>0$ thì $ac>6b>0$; và (2) có thể xảy ra do nếu $c>0,a<0$ thì $6b<ac<0$.

Vậy trong các số a,b,c có hai số âm.

Dạng 2. Đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối (BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ)

Dạng 1

Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = |f(x)|$.

Ta có: $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & khi \ f(x) \ge 0 \\ -f(x) & khi \ f(x) < 0 \end{cases}$

*** Cách vẽ (C') từ (C):**

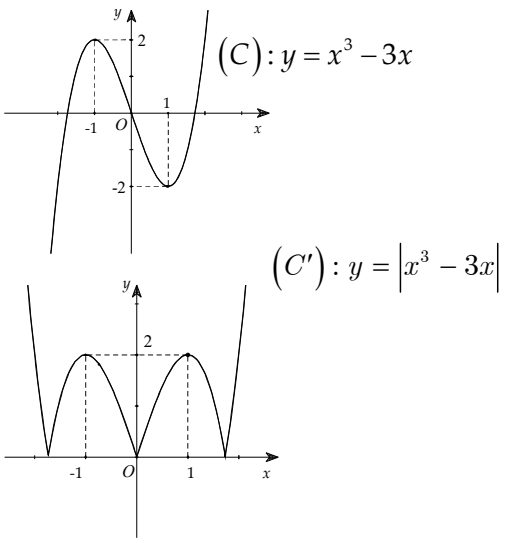
- *Giữ nguyên* phần đồ thị phía trên *Ox* của đồ thị (C): $y = f(x)$.
- *Bỏ* phần đồ thị phía dưới *Ox* của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị *bị bỏ*** qua *Ox*.

Ví dụ: Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $y = |x^3 - 3x|$.

Biến đổi (C):

Bỏ phần đồ thị của (C) dưới Ox, giữ nguyên (C) phía trên Ox.

Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.



Nguyễn Bảo Vương

Dạng 2

Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = f(|x|)$.

Ta có: $y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & khi \ x \ge 0 \\ f(-x) & khi \ x < 0 \end{cases}$

và $y = f(|x|)$ là *hàm chẵn* nên đồ thị (C') nhận *Oy* làm trục đối xứng.

*** Cách vẽ (C') từ (C):**

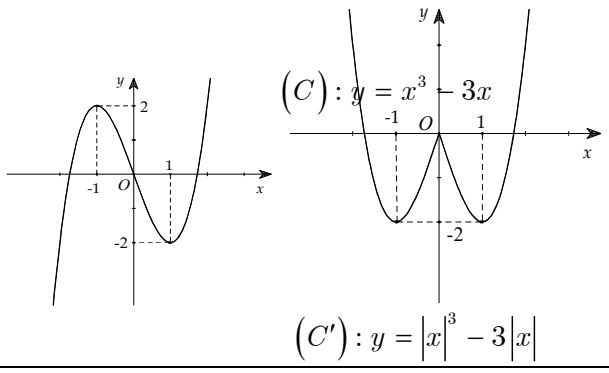
- *Giữ nguyên* phần đồ thị bên phải *Oy* của đồ thị $(C): y = f(x)$.
- *Bỏ* phần đồ thị bên trái *Oy* của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị** *được giữ* qua *Oy*.

Ví dụ: Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $(C'): y = |x|^3 - 3|x|$.

Biến đổi (C):

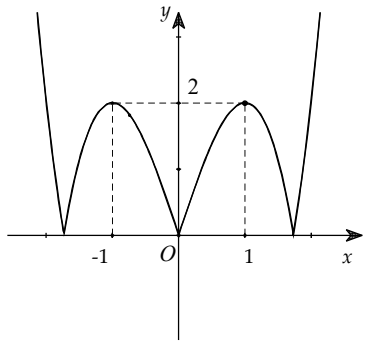
Bỏ phần đồ thị của (C) bên trái Oy, giữ nguyên (C) bên phải Oy.

Lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua Oy.



Chú ý với dạng: $y = |f(|x|)|$ ta lần lượt biến đổi 2 đồ thị $y = f(|x|)$ và $y = |f(x)|$

Ví dụ: Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $y = \left||x|^3 - 3|x|\right|$. Biến đổi (C) để được đồ thị $(C'): y = |x|^3 - 3|x|$. Biến đổi $(C'): y = |x|^3 - 3|x|$ ta được đồ thị $(C''): y = \left||x|^3 - 3|x|\right|$.



Dạng 3

Từ đồ thị $(C): y = u(x).v(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = |u(x)|.v(x)$.

Ta có: $y = |u(x)|.v(x) = \begin{cases} u(x).v(x) = f(x) & khi\ u(x) \ge 0 \\ -u(x).v(x) = f(x) & khi\ u(x) < 0 \end{cases}$

*** Cách vẽ (C') từ (C):**

- *Giữ nguyên* phần đồ thi trên miền $u(x) \ge 0$ của đồ thị $(C): y = f(x)$.
- *Bỏ* phần đồ thị trên miền $u(x) < 0$ của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị *bị bỏ*** qua *Ox*.

Ví dụ

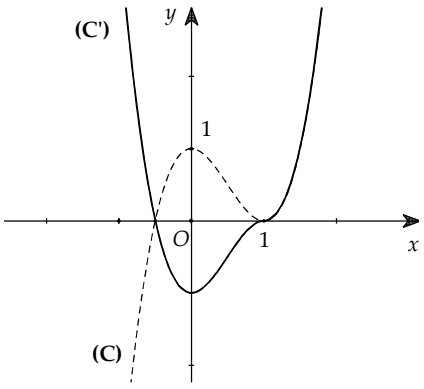
a) Từ đồ thị $(C): y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ suy ra đồ thị $(C'): y = |x-1|(2x^2 - x - 1)$

$y = |x-1|(2x^2 - x - 1) = \begin{cases} f(x) & khi\ x \ge 1 \\ -f(x) & khi\ x < 1 \end{cases}$

Đồ thị (C'):

Giữ nguyên (C) với $x \ge 1$.

Bỏ (C) với $x < 1$. Lấy *đối xứng phần đồ thị bị bỏ* qua *Ox*.



Nhận xét: Trong quá trình thực hiện phép suy đồ thị nên *lấy đối xứng các điểm đặc biệt* của (C): giao điểm với *Ox, Oy*, CĐ, CT…

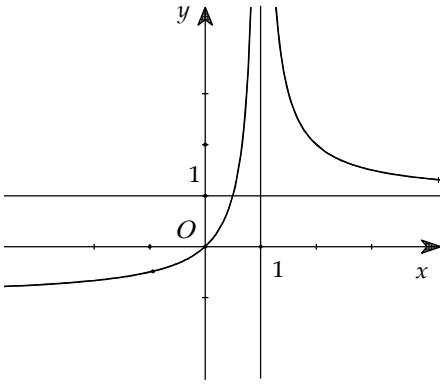
Ví dụ

b) Từ đồ thị $(C): y = f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ suy ra đồ thị $(C'): y = \dfrac{x}{|x-1|}$

$y = \dfrac{x}{|x-1|} = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & khi\ x \in (1;+\infty) \\ -\dfrac{x}{x-1} & khi\ x \in (-\infty;1) \end{cases}$. Đồ thị (C'):

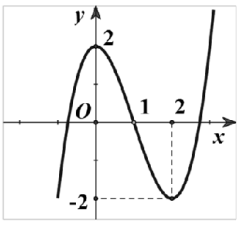
Bỏ phần đồ thị của (C) với $x < 1$, giữ nguyên (C) với $x > 1$.

Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.

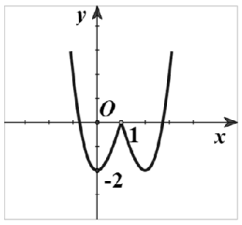


Nhận xét: Đối với hàm phân thức thì nên *lấy đối xứng các đường tiệm cận* để thực hiện phép suy đồ thị một cách tương đối chính xác.

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y=\left|x^3-3x^2+2\right|$. **B.** $y=|x|^3-3x^2+2$

C. $y=|x-1|\left(x^2-2x-2\right)$. **D.** $y=(x-1)\left|x^2-2x-2\right|$.

Hướng dẫn

Ta có: $y=x^3-3x^2+2=(x-1)\left(x^2-2x-2\right)$

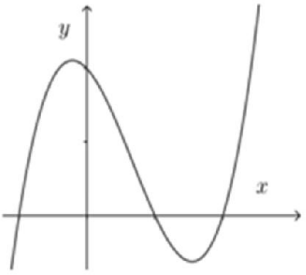
Từ đồ thị ban đầu (hình 1) sang đồ thị thứ 2 (hình 2) ta thấy

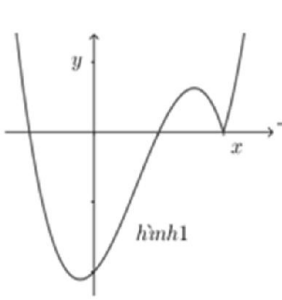
Toàn bộ đồ thị ứng với $x\ge 1$ được giữ nguyên.

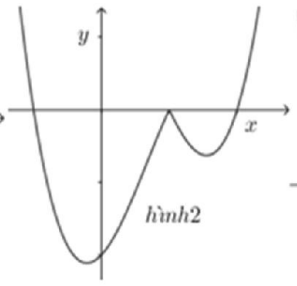
Phần đồ thị ứng với $x<1$ lấy đối xứng qua trục hoành.

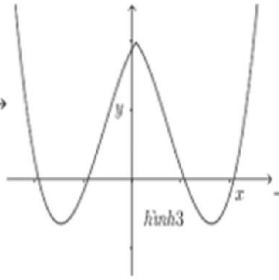
$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

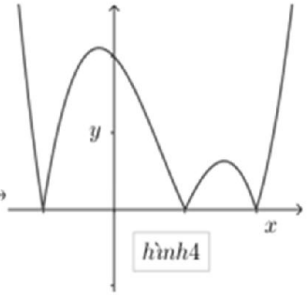
Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2017)** Hàm số $y=(x-2)\left(x^2-1\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y=|x-2|\left(x^2-1\right)$?











A. Hình 1 **B.** Hình 2 **C.** Hình 3 **D.** Hình 4

Lời giải

Chọn A

$y=|x-2|\left(x^2-1\right)=\begin{cases}(x-2)\left(x^2-1\right),x\ge 2\\-(x-2)\left(x^2-1\right),x<2\end{cases}$ Đồ thị gồm 2 phần:

+) Giữ nguyên phần đồ thị đã cho ứng với $x\ge 2$.

+) Lấy đối xứng phần đồ thị đã cho ứng với $x<2$ qua trục Ox

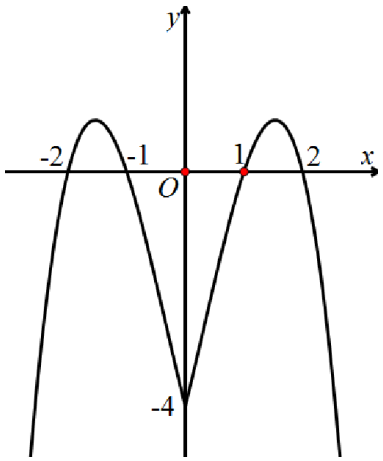
Hình 1 nhận vì đồ thị là hàm $y=|x-2|\left(x^2-1\right)$

Hình 2 loại vì đồ thị là hàm $y=(x-2)|x-1|(x+1)$

Hình 3 loại vì đồ thị hàm số $y=\left(|x|-2\right)\left(x^2-1\right)$

Hình 4 loại vì đồ thị hàm $y=\left|(x-2)\left(x^2-1\right)\right|$

Câu 3. **(THPT Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ như hình vẽ.



Chọn kết luận **đúng** trong các kết luận sau:

A. $f(x)=-x^3+x^2+4x-4$ **B.** $f(x)=x^3-x^2-4x+4$

C. $f(x)=-x^3-x^2+4x-4$ **D.** $f(x)=x^3+x^2-4x-4$.

Lời giải

Chọn A

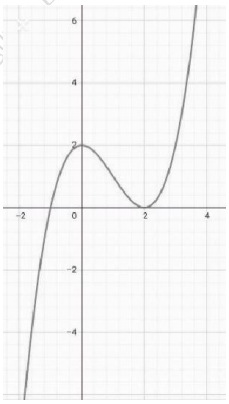
Do đồ thị giao với trục Oy tại điểm có tung độ bằng -4 và $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$.

Câu 4. Biết phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a\neq 0)$ có đúng hai nghiệm thực. Hỏi đồ thị hàm số $y=|ax^3+bx^2+cx+d|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D



Ta có:

Phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a\neq 0)$ có đúng hai nghiệm thực

Nên đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ được minh họa như hình vẽ.

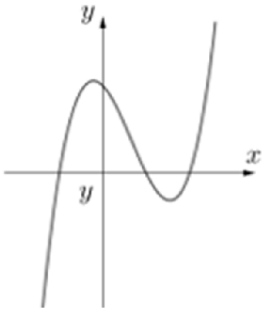
Gọi m là số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ và k là nghiệm bội lẻ

của phương trình $f(x)=0$.

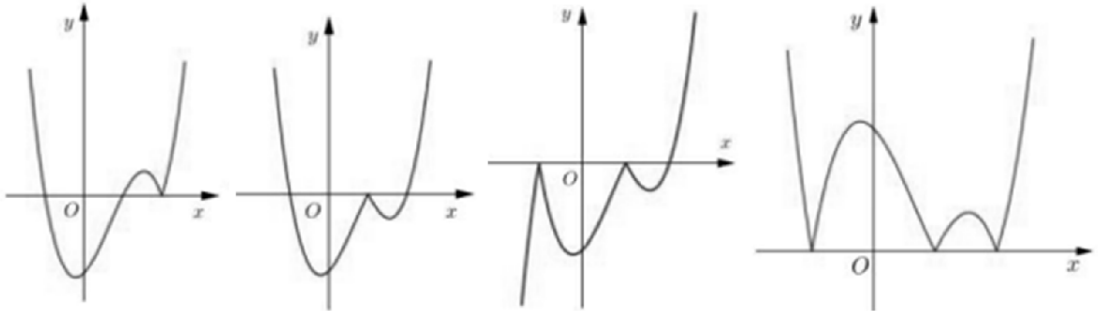
$\Rightarrow$ Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ là $m+k$.

Vậy đồ thị hàm số $y=|ax^3+bx^2+cx+d|$ có số điểm cực trị là $2+1$.

Câu 5. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Cho hàm số $y=(x-2)(x^2-1)$ có đồ thị như hình vẽ



Một trong bốn hình dưới đây là đồ thị của hàm số $y=(x-2)|x^2-1|$. Hỏi đó là hình nào?



Hình 1 Hình 2 Hình 3 Hình 4

A. Hình 2. **B.** Hình 4. **C.** Hình 3. **D.** Hình 1.

Lời giải

Chọn C

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=(x-2)(x^2-1)$.

Ta có $y=(x-2)|x^2-1|=\begin{cases}(x-2)(x^2-1) & khi\ x\le -1\ hay\ x\ge 1\\ -(x-2)(x^2-1) & khi\ -1<x<1\end{cases}$.

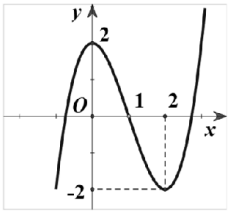
Cách vẽ đồ thi như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ (C) ứng với $x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$ ta được (C_1).

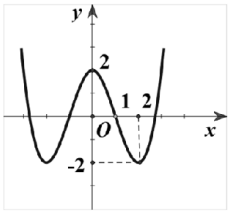
+ Lấy đối xứng phần (C) ứng với $x\in(-1;1)$ qua trục hoành ta được (C_2).

Khi đó đồ thị hàm số $y=(x-2)|x^2-1|$ gồm (C_1) và (C_2).

Câu 6. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y=|x^3-3x^2+2|$. **B.** $y=|x|^3-3x^2+2$

C. $y=|x-1|(x^2-2x-2)$. **D.** $y=(x-1)|x^2-2x-2|$.

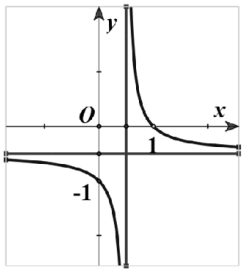
Hướng dẫn

Từ đồ thị ban đầu (hình 1) sang đồ thị thứ 2 (hình 2) ta thấy

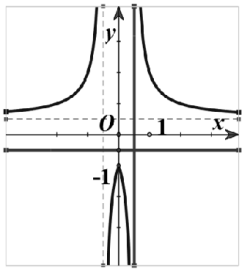
Toàn bộ đồ thị phía "phải" Oy sau đó lấy đối xứng sang trái.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 7. Cho hàm số $y=\dfrac{-x+1}{2x-1}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y=\left|\dfrac{-x+1}{2x-1}\right|$ **B.** $y=\dfrac{|x|+1}{2|x|-1}$ **C.** $y=\dfrac{|-x+1|}{2x-1}$ **D.** $y=\dfrac{-x+1}{|2x-1|}$

Hướng dẫn

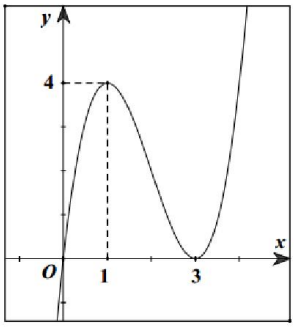
Từ đồ thị ban đầu (hình 1) sang đồ thị thứ 2 (hình 2) ta thấy

Toàn bộ đồ thị phía bên phải Oy được giữ nguyên

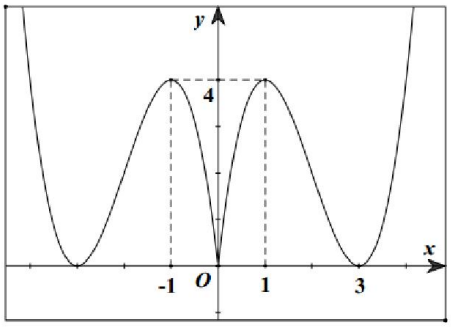
Sau đó, được lấy đối xứng sang trái.

Chọn đáp án B.

Câu 8. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x$ có đồ thị như Hình 1. Khi đó đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y=-x^3+6x^2-9x$. **B.** $y=\left|x^3-6x^2+9x\right|$.

C. $y=|x|^3-6x^2+9|x|$. **D.** $y=|x|^3+6|x|^2+9|x|$.

Lời giải

Chọn C

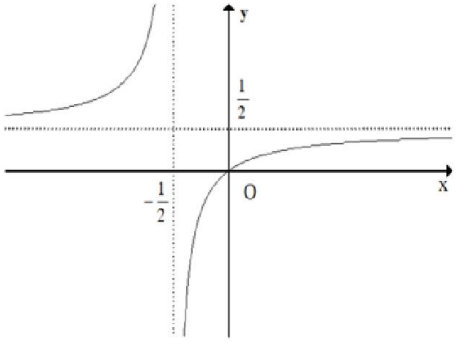
+/ Loại đáp án A vì: $y=-x^3+6x^2-9x=-\left(x^3-6x^2+9x\right)$

+/ Loại đáp án B, vì đồ thị của hàm số $y=\left|x^3-6x^2+9x\right|$ giữ lại phần đồ thị phía trên trục hoành và chỉ lấy đối xứng phần dưới trục hoành của đồ thị Hình 1.

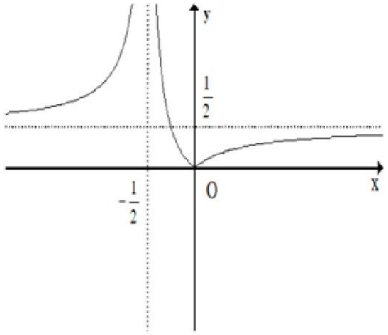
+/ Loại đáp án **D** vì hệ số của x^2 khác -6.

+/ Đồ thị ở đáp án C là đồ thị của hàm số dạng $y=f\left(|x|\right)$. Chọn đáp án **C**

Câu 9. **(Cụm liên trường Hải Phòng -2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{x}{2x+1}$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào trong các đáp án A, B, C, D dưới đây?



Hình 1



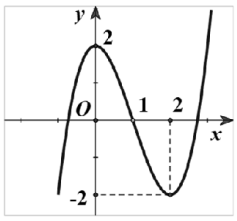
Hình 2

A. $y=\left|\dfrac{x}{2x+1}\right|$. **B.** $y=\dfrac{|x|}{2|x|+1}$ **C.** $y=\dfrac{x}{2|x|+1}$ **D.** $y=\left|\dfrac{|x|}{2|x|+1}\right|$

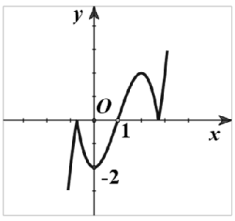
Lời giải

Chọn A

Câu 10. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

Nguyễn Bảo Vương

A. $y=\left|x^3-3x^2+2\right|$. **B.** $y=|x|^3-3x^2+2$

C. $y=|x-1|\left(x^2-2x-2\right)$. **D.** $y=(x-1)\left|x^2-2x-2\right|$.

Hướng dẫn

Ta có: $y=x^3-3x^2+2=(x-1)\left(x^2-2x-2\right)$

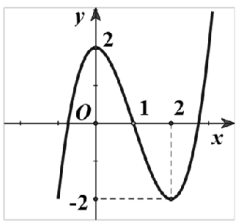
Từ đồ thị ban đầu (hình 1) sang đồ thị thứ 2 (hình 2) ta thấy

Toàn bộ đồ thị ứng với $\left[\begin{array}{l}x\ge 1+\sqrt{3}\\ x\le 1-\sqrt{3}\end{array}\right.$ được giữ nguyên.

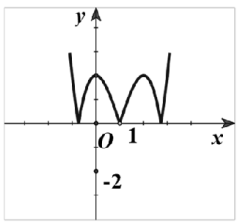
Phần đồ thị ứng với $1-\sqrt{3}\le x\le 1+\sqrt{3}$ lấy đối xứng qua trục hoành.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 11. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y=\left|x^3-3x^2+2\right|$. **B.** $y=|x|^3-3x^2+2$

C. $y=|x-1|\left(x^2-2x-2\right)$. **D.** $y=(x-1)\left|x^2-2x-2\right|$.

Hướng dẫn

Ta có: $y=x^3-3x^2+2=(x-1)(x^2-2x-2)$

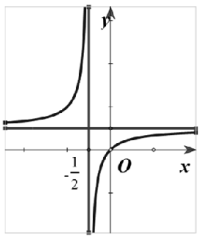
Từ đồ thị ban đầu (hình 1) sang đồ thị thứ 2 (hình 2) ta thấy

Toàn bộ đồ thị nằm phía trên Ox được giữ nguyên.

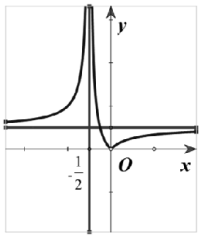
Phần đồ thị phía dưới Ox được lấy đối xứng qua Ox.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 12. Cho hàm số $y=\dfrac{x}{2x+1}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y=\dfrac{x}{2|x|+1}$ **B.** $y=\dfrac{|x|}{2|x|+1}$ **C.** $y=\left|\dfrac{x}{2x+1}\right|$ **D.** $y=\left|\dfrac{|x|}{2|x|+1}\right|$

Hướng dẫn

Từ đồ thị ban đầu (hình 1) sang đồ thị thứ 2 (hình 2) ta thấy

Toàn bộ đồ thị phía trên Ox giữ nguyên

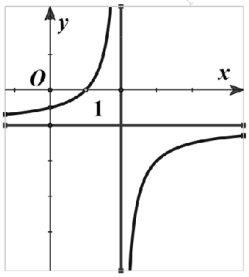
Toàn bộ phần phía dưới Ox được lấy đối xứng lên trên

$\Rightarrow$ dạng $|f(x)|$.

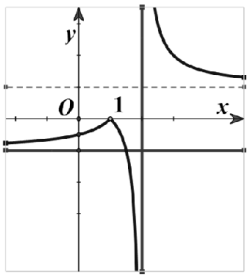
Chọn đáp án C.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 13. Cho hàm số $y=\dfrac{-x+1}{x-2}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y=\left|\dfrac{-x+1}{x-2}\right|$. **B.** $y=\dfrac{|x|+1}{|x|-2}$. **C.** $y=\dfrac{|-x+1|}{x-2}$ **D.** $y=\dfrac{-x+1}{|x-2|}$

Hướng dẫn

Từ đồ thị ban đầu (hình 1) sang đồ thị thứ 2 (hình 2) ta thấy

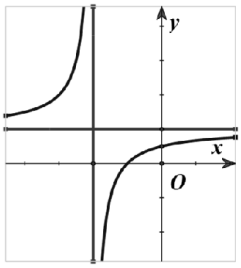
Toàn bộ đồ thị phía bên trái đường thẳng $x=1$ được giữ nguyên

Toàn bộ đồ thị phía bên phải đường thẳng $x=1$ lấy đối xứng qua Ox

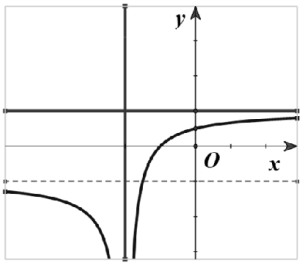
Chọn đáp án C.

Chú ý: $y=\dfrac{|-x+1|}{x-2}=\begin{cases}\dfrac{-x+1}{x-2}, \boxed{x\le 1}\\ -\dfrac{-x+1}{x-2}, \boxed{x>1}\end{cases}$

Câu 14. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y=\left|\dfrac{x+1}{x+2}\right|$. **B.** $y=\dfrac{|x|+1}{|x|+2}$. **C.** $y=\dfrac{|x+1|}{x+2}$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{|x+2|}$.

Hướng dẫn

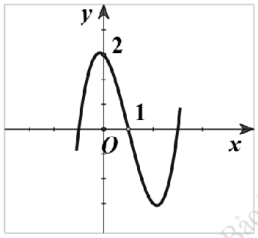
Từ đồ thị ban đầu (hình 1) sang đồ thị thứ 2 (hình 2) ta thấy

Toàn bộ đồ thị phía bên phải đường thẳng $x=-2$ được giữ nguyên

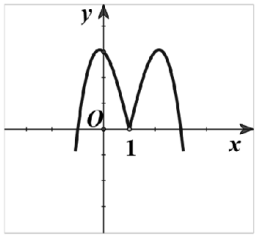
Toàn bộ đồ thị phía bên trái đường thẳng $x=-2$ lấy đối xứng qua Ox

Chọn đáp án D.

Câu 15. Cho hàm số $y=(x-1)\left(x^2-2x-3\right)$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

Nguyễn Bảo Vương

A. $y=\left|(x-1)\left(x^2-2x-3\right)\right|$. **B.** $y=|x-1|\left(x^2-2x-3\right)$.

C. $y=-|x-1|\left(x^2-2x-3\right)$ **D.** $y=(x-1)\left|x^2-2x-3\right|$

Hướng dẫn

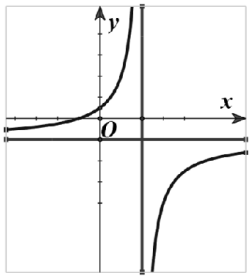
Từ đồ thị ban đầu (hình 1) sang đồ thị thứ 2 (hình 2) ta thấy

Toàn bộ đồ thị nằm bên trái (ứng với $x\le 1$) đường thẳng $x=1$ được giữ nguyên

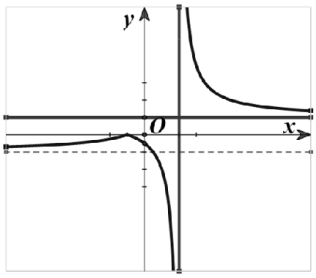
Toàn bộ đồ thị nằm bên phải (ứng với $x>1$) đường thẳng $x=1$ được lấy đối xứng qua Ox.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 16. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{-x+2}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y=\left|\dfrac{x+1}{x+2}\right|$. **B.** $y=\dfrac{|x+1|}{x-2}$. **C.** $y=\dfrac{|x+1|}{-x+2}$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{|x+2|}$.

Hướng dẫn

Từ đồ thị ban đầu (hình 1) sang đồ thị thứ 2 (hình 2) ta thấy

Toàn bộ đồ thị phía bên trái đường thẳng $x=-1$ (ứng với $x\le -1$) được giữ nguyên

Toàn bộ đồ thị phía bên phải đường thẳng $x=-1$ (ứng với $x\le -1$) được lấy đối xứng qua trục Ox.

Chọn đáp án B.

---------- HẾT ----------

Nguyễn Bảo Vương

DẠNG TOÁN DÀNH CHO HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

Dạng 1. Bài toán tương giao đồ thị thông qua đồ thị, bảng biến thiên

Nghiệm của phương trình $af(x)+b=0$ là số giao điểm của đường thẳng $y=\dfrac{-b}{a}$ với đồ thị hàm số $y=f(x)$

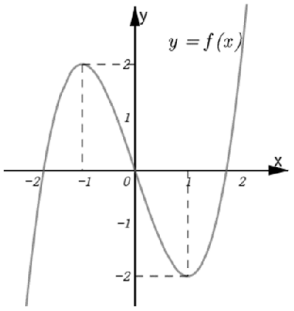
Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $3f(x)-2=0$ là

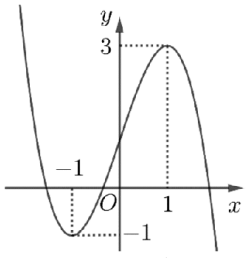
A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 2. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=-1$ là:



A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

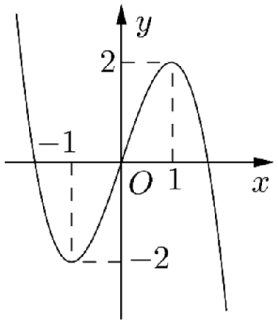
Câu 3. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=1$ là



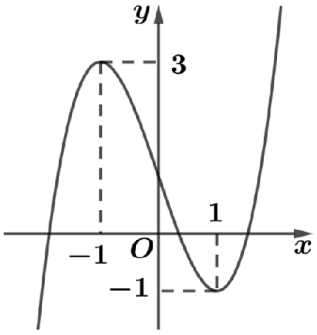
A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 4. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=1$ là

A. 1. **B.** 0.
C. 2. **D.** 3.



Câu 5. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=2$ là:

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

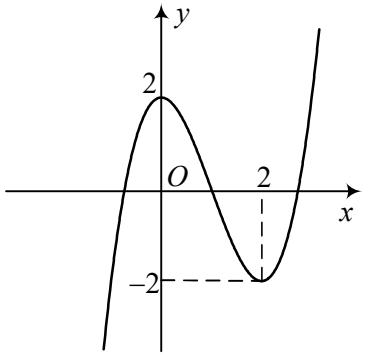
Câu 6. **(Mã 101 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)-3=0$ là

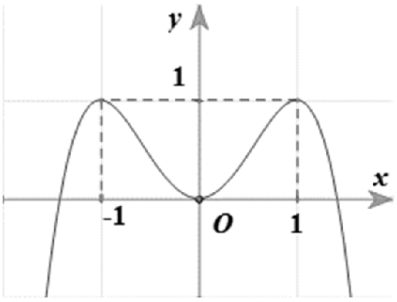
A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 7. **(Mã 101 2018)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x)+4=0$ là



A. 2 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 3

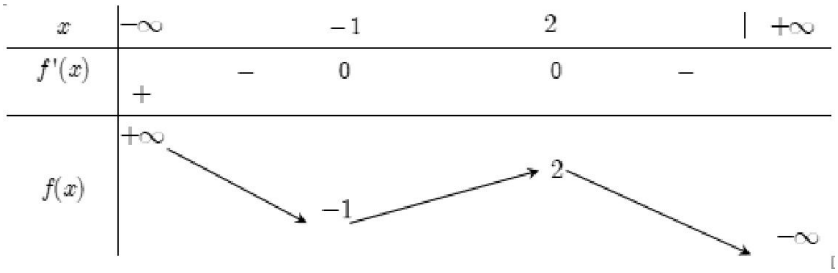
Câu 8. **(Mã 102 2018)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R})$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên.



Số nghiệm của phương trình $4f(x)-3=0$ là

A. 2 **B.** 0 **C.** 4 **D.** 3

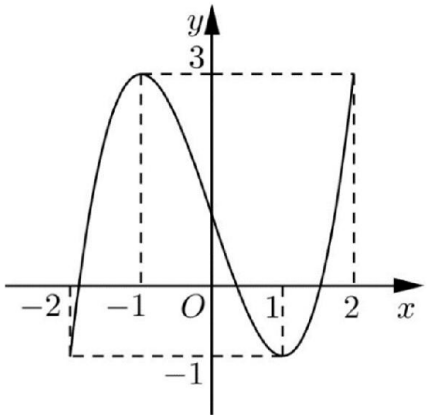
Câu 9. **(Mã 103 2019)** Cho hàm số $f(x)$ bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)-3=0$ là

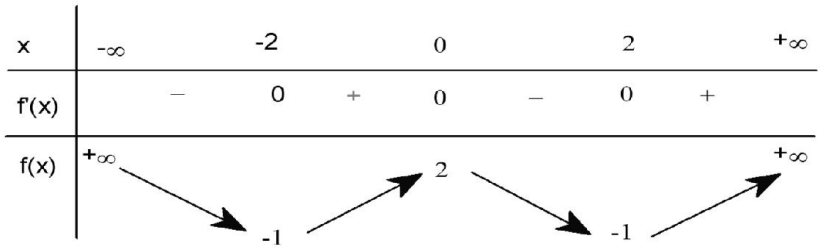
A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 10. **(Mã 103 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-2;2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x)-4=0$ trên đoạn $[-2;2]$ là



A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

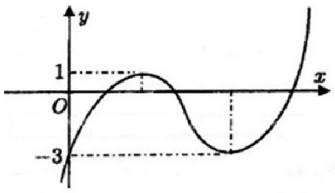
Câu 11. **(Mã 102 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Số nghiệm thực của phương trình $3f(x)-5=0$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 2.

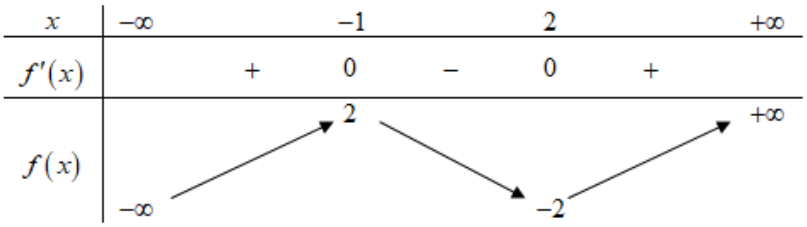
Câu 12. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $|f(x)|=2$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

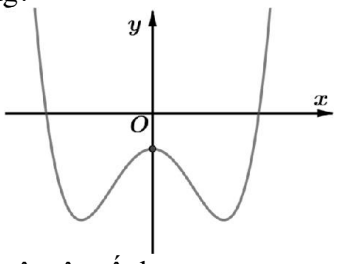
Câu 13. **(Mã 104 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)+3=0$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 14. **(Mã 110 2017)** Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y=ax^4+bx^2+c$, với a,b,c là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



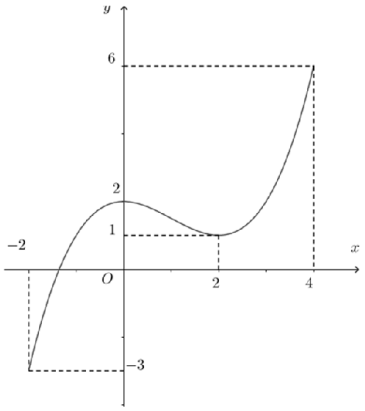
A. Phương trình $y'=0$ vô nghiệm trên tập số thực

B. Phương trình $y'=0$ có đúng một nghiệm thực

C. Phương trình $y'=0$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt

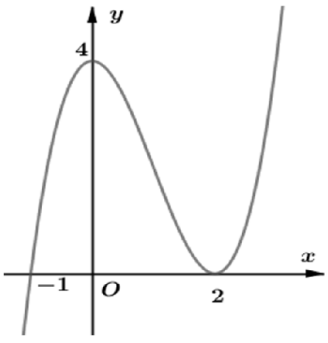
D. Phương trình $y'=0$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt

Câu 15. **(Mã 104 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x)-5=0$ trên đoạn $[-2;4]$ là



A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 3

Câu 16. **(THPT Cù Huy Cận 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thực của phương trình $4f(x)-7=0$

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 18. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau đây.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Hỏi phương trình $2.f(x)-5=0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 19. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	$+\infty$

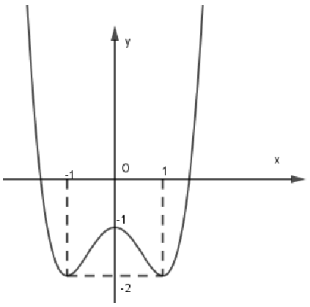
Số nghiệm của phương trình $f(x)-3=0$ là

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0

Câu 20. **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm của phương trình $|f(x)|=1$ trên đoạn $[-2;2]$.

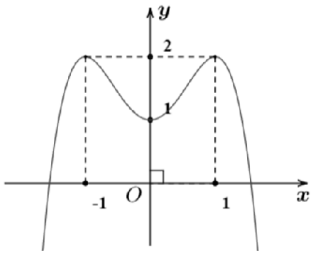
A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 21. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=-\dfrac{3}{2}$ là



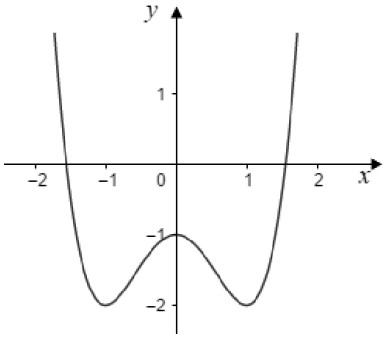
A. 4 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2

Câu 22. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=\dfrac{1}{2}$ là



A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

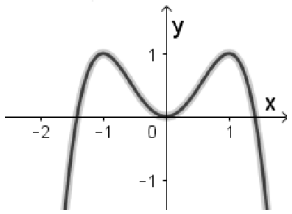
Câu 23. **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm của phương trình $f(x)=-\frac{1}{2}$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** $x=1$.

Câu 24. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=\frac{1}{2}$ là



A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Dạng 2. Bài toán tương giao đồ thị thông qua hàm số cho trước (không chứa tham số)

Cho hai đồ thị $y=f(x)$ và $y=g(x)$.

Bước 1. Giải phương trình $f(x)=g(x)$.

Bước 2. Tìm

- Số giao điểm?
- Hoành độ giao điểm?
- Tung độ giao điểm?

Câu 25. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ và trục hoành là

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 26. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ và đồ thị hàm số $y=3x^2+3x$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 27. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-x^2$ và đồ thị hàm số $y=-x^2+5x$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 28. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+x^2$ và đồ thị hàm số $y=x^2+5x$

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 29. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^2+3x$ và đồ thị hàm số $y=x^3-x^2$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3

Câu 30. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+7x$ với trục hoành là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 31. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+3x$ với trục hoành là

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 32. **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+6x$ với trục hoành là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 33. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+5x$ với trục hoành là:

A. 3 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 1

Câu 34. **(Mã 105 2017)** Cho hàm số $y=(x-2)(x^2+1)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (C) cắt trục hoành tại một điểm. **B.** (C) cắt trục hoành tại ba điểm.

C. (C) cắt trục hoành tại hai điểm. **D.** (C) không cắt trục hoành.

Câu 35. **(Đề Minh Họa 2017)** Biết rằng đường thẳng $y=-2x+2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+x+2$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0;y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0

A. $y_0=4$ **B.** $y_0=0$ **C.** $y_0=2$ **D.** $y_0=-1$

Câu 36. **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Gọi P là số giao điểm của hai đồ thị $y=x^3-x^2+1$ và $y=x^2+1$. Tìm P.

A. $P=0$. **B.** $P=2$. **C.** $P=1$. **D.** $P=3$.

Câu 37. **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho hàm số $y=x^3-3x$ có đồ thị (C). Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

A. 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 0

Câu 38. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình 2019)** Cho hàm số $y=x^4-3x^2$ có đồ thị (C). Số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $y=2$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 4.

Câu 39. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Biết rằng đường thẳng $y=4x+5$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2x+1$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0;y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0.

A. $y_0=10$. **B.** $y_0=13$. **C.** $y_0=11$. **D.** $y_0=12$.

Câu 40. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Đồ thị của hàm số $y=-x^4-3x^2+1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bao nhiêu

A. -3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 41. **(THPT Việt Đức Hà Nội 2019)** Số giao điểm của đường cong $y=x^3-2x^2+2x+1$ và đường thẳng $y=1-x$ là

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

Câu 42. đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2+1$ và đồ thị hàm số $y=-2x^2+7$ có bao nhiêu điểm chung?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 43. Cho hàm số $y=-2x^3+5x$ có đồ thị (C) Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 44. Cho hàm số $y=(x-3)(x^2+2)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (C)cắt trục hoành tại hai điểm. **B.** (C)cắt trục hoành tại một điểm.

C. (C)không cắt trục hoành. **D.** (C)cắt trục hoành tại ba điểm.

Câu 45. Biết rằng đường thẳng $y=x+2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-x^2+x+4$ tại điểm duy nhất, kí hiệu $(x_0;y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0.

A. $y_0 = 1$. **B.** $y_0 = 3$. **C.** $y_0 = -2$. **D.** $y_0 = 4$.

Câu 46. đồ thị hàm số nào sau đây cắt trục tung tại điểm có tung độ âm?

A. $y = \dfrac{x-1}{x-3}$. **B.** $y = \dfrac{x+1}{x+4}$. **C.** $y = \dfrac{x-1}{x+2}$. **D.** $y = \dfrac{2x-1}{x+5}$.

Câu 47. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x+1$ và đường cong $y = \dfrac{2x+4}{x-1}$. Khi đó hoành độ x_I của trung điểm I của đoạn MN bằng bao nhiêu?

A. $x_I = 2$. **B.** $x_I = 1$. **C.** $x_I = -5$. **D.** $x_I = -\dfrac{5}{2}$.

Câu 48. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-3}$ có đồ thị (C) và các đường thẳng $d_1 : y = 2x$, $d_2 : y = 2x-2$, $d_3 : y = 3x+3$, $d_4 : y = -x+3$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng trong bốn đường thẳng d_1, d_2, d_3, d_4 đi qua giao điểm của (C) và trục hoành.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 49. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^4 - 4} + 5$ và đường thẳng $y = x$

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

---------- HẾT ----------

DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7+8+9 ĐIỂM

Dạng 1. Bài toán tương giao đường thẳng với đồ thị hàm số bậc 3 (CHỨA THAM SỐ)

📖 **Bài toán tổng quát**: Tìm các giá trị của tham số m để để đường thẳng $d: y = px + q$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tại 3 điểm phân biệt thỏa điều kiện K ? **(dạng có điều kiện)**

✍ **Phương pháp giải**:

Bước 1. Lập phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $ax^3 + bx^2 + cx + d = px + q$

Đưa về phương trình bậc ba và nhẩm nghiệm đặc biệt $x = x_o$ để chia Hoocner được:

$$(x - x_o)\cdot(ax^2 + b'x + c') = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = x_o \\ g(x) = ax^2 + b'x + c' = 0 \end{bmatrix}.$$

Bước 2. Để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác $x_o \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{g(x)} > 0 \\ g(x_o) \neq 0 \end{cases}$. Giải hệ này, tìm được giá trị $m \in D_1$.

Bước 3. Gọi $A(x_o; px_o + q)$, $B(x_1; px_1 + q)$, $C(x_2; px_2 + q)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của $g(x) = 0$.

Theo Viét, ta có: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b'}{a}$ và $x_1 x_2 = \dfrac{c'}{a}$ (1)

Bước 4. Biến đổi điều kiện K về dạng tổng và tích của x_1, x_2 (2)

Thế (1) vào (2) sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến là m. Giải chúng sẽ tìm được giá trị $m \in D_2$.

Kết luận: $m \in D_1 \cap D_2$.

Một số công thức tính nhanh " thường gặp " liên quan đến cấp số

□ **Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.**

Điều kiện cần:

Giả sử x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Khi đó: $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, đồng nhất hệ số ta được $x_2 = -\dfrac{b}{3a}$

Thế $x_2 = -\dfrac{b}{3a}$ vào phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ta được điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số.

Điều kiện đủ:

Thử các điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số để phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

□ **Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số nhân.**

Điều kiện cần:

Giả sử x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Khi đó: $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, đồng nhất hệ số ta được $x_2 = \sqrt[3]{-\dfrac{d}{a}}$

Thế $x_2 = \sqrt[3]{-\dfrac{d}{a}}$ vào phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ta được điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị

của tham số.

Điều kiện đủ:

Thử các điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số để phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ *có 3 nghiệm phân biệt.*

Câu 1. **(Sở Ninh Bình 2020)** Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+2m$. Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 2. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ (C) cắt đường thẳng $d: y=m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt x_1, x_2, x_3.

A. $m>-2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m>-3$. **D.** $m=-3$.

Câu 3. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Đường thẳng Δ có phương trình $y=2x+1$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-x+3$ tại hai điểm A và B với tọa độ được kí hiệu lần lượt là $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ trong đó $x_B<x_A$. Tìm x_B+y_B?

A. $x_B+y_B=-5$ **B.** $x_B+y_B=-2$ **C.** $x_B+y_B=4$ **D.** $x_B+y_B=7$

Câu 4. **(THPT Ba Đình 2019)** Cho hàm số $y=x^3+3mx^2-m^3$ có đồ thị (C_m) và đường thẳng $d: y=m^2x+2m^3$. Biết rằng $m_1, m_2\ (m_1>m_2)$ là hai giá trị thực của m để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^4+x_2^4+x_3^4=83$. Phát biểu nào sau đây là ***đúng*** về quan hệ giữa hai giá trị m_1, m_2?

A. $m_1+m_2=0$. **B.** $m_1^2+2m_2>4$. **C.** $m_2^2+2m_1>4$. **D.** $m_1-m_2=0$.

Câu 5. **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$ cắt đường thẳng $y=m$ tại ba điểm phân biệt.

A. $m\in(-\infty;-4)$. **B.** $m\in(-4;0)$.

C. $m\in(0;+\infty)$. **D.** $m\in(-\infty;-4)\cup(0;+\infty)$.

Câu 6. **(Mã 123 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=mx-m+1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+x+2$ tại ba điểm A, B, C phân biệt sao $AB=BC$

A. $m\in\left(-\frac{5}{4};+\infty\right)$ **B.** $m\in(-2;+\infty)$

C. $m\in\mathbb{R}$ **D.** $m\in(-\infty;0)\cup[4;+\infty)$

Câu 7. **(Sở Cần Thơ - 2019)** Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+(m^2-2)x+2m^2+4$ cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 8 là

A. $m=\pm2$. **B.** $m=\pm1$. **C.** $m=\pm\sqrt{3}$. **D.** $m=\pm\sqrt{2}$.

Câu 8. **(Mã 110 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=-mx$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-m+2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB=BC$.

A. $m\in(-\infty;-1)$ **B.** $m\in(-\infty:+\infty)$ **C.** $m\in(1:+\infty)$ **D.** $m\in(-\infty;3)$

Câu 9. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3+3x^2-2=m$ có ba nghiệm phân biệt.

A. $m\in(2;+\infty]$. **B.** $m\in(-\infty;-2]$. **C.** $m\in(-2;2)$. **D.** $m\in[-2;2]$.

Câu 10. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Đường thẳng Δ có phương trình $y=2x+1$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-x+3$ tại hai điểm A và B với tọa độ được kí hiệu lần lượt là $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ trong đó $x_B<x_A$. Tìm x_B+y_B?

A. $x_B+y_B=-5$ **B.** $x_B+y_B=-2$ **C.** $x_B+y_B=4$ **D.** $x_B+y_B=7$

Câu 11. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3-3x^2=2m+1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{3}{2}$. **C.** $-\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 12. **(THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=-x+5$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+3(m-1)x+5$ tại 3 điểm phân biệt.

A. $\left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>2 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} m\neq\frac{2}{3} \\ m\leq 1 \end{array}\right. \\ m\geq 2 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} m\neq\frac{2}{3} \\ m<1 \end{array}\right. \\ m>2 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\leq 1 \\ m\geq 2 \end{array}\right.$.

Câu 13. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ, đường thẳng d có phương trình $y=x-1$. Biết phương trình $f(x)=0$ có ba nghiệm $x_1<x_2<x_3$. Giá trị của x_1x_3 bằng

A. -3. **B.** $-\frac{7}{3}$. **C.** -2. **D.** $-\frac{5}{2}$.

Câu 14. **(Chuyên Lê Thánh Tông 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2018;2019]$ để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+3$ và đường thẳng $y=3x+1$ có duy nhất một điểm chung?

A. 1. **B.** 2019. **C.** 4038. **D.** 2018.

Câu 15. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Phương trình $x^3-6mx+5=5m^2$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng khi

A. $m=0$. **B.** $m=-1\vee m=1$. **C.** $m=1$. **D.** $m\in\varnothing$.

Câu 16. Tính tổng tất cả các giá trị của m biết đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ và đường thẳng $y=x+4$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C sao cho diện tích tam giác IBC bằng $8\sqrt{2}$ với $I(1;3)$.

A. 3. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 5.

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2018;2019]$ để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+3$ và đường thẳng $y=3x+1$ có duy nhất một điểm chung?

A. 1. **B.** 2019. **C.** 4038. **D.** 2018.

Câu 18. Đường thẳng d có phương trình $y=x+4$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ tại 3 điểm phân biệt $A(0;4)$, B và C sao cho diện tích của tam giác MBC bằng 4, với $M(1;3)$. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

A. $m=3$. **B.** $m=2$ hoặc $m=3$.
C. $m=-2$ hoặc $m=-3$. **D.** $m=-2$ hoặc $m=3$

Câu 19. **(THPT Minh Khai - lần 1)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=-x+5$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+3(m-1)x+5$ tại ba điểm phân biệt.

A. $\left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>2 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} m\neq\dfrac{2}{3} \\ m\le 1 \end{array}\right. \\ m\ge 2 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} m\neq\dfrac{2}{3} \\ m<1 \end{array}\right. \\ m>2 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\le 1 \\ m\ge 2 \end{array}\right.$.

Câu 20. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3-3x^2=2m+1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{3}{2}$. **C.** $-\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 21. **(Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019)** Giá trị lớn nhất của m để đường thẳng $(d): y=x-m+1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2(m-2)x^2+(8-5m)x+m-5$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2+x_3^2=20$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Câu 22. Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $y=-2x^3-3m^2x^2+(m^3+2m)x+2$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 23. **(Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Tìm m để đồ thị (C) của $y=x^3-3x^2+4$ và đường thẳng $y=mx+m$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt $A(-1;0)$, B, C sao cho ΔOBC có diện tích bằng 64.

A. $m=14$. **B.** $m=15$. **C.** $m=16$. **D.** $m=17$.

Câu 24. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=x^3-8x^2+8x$ có đồ thị (C) và hàm số $y=x^2+(8-a)x-b$ (với $a,b\in\mathbb{R}$) có đồ thị (P). Biết đồ thị hàm số (C) cắt (P) tại ba điểm có hoành độ nằm trong $[-1;5]$. Khi a đạt giá trị nhỏ nhất thì tích ab bằng

A. -729. **B.** 375. **C.** 225. **D.** -384.

Câu 25. **(Sở Quảng Trị 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y=-mx+m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+mx^2+m$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $-1<x_1+x_2+x_3<3$?.

A. 6. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 26. **(Chuyên Nguyễn Huệ 2019)** Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ (C_m). Tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y=x+4$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$ với điểm $K(1;3)$ là:

A. $m=\dfrac{1+\sqrt{137}}{2}$. **B.** $m=\dfrac{\pm 1+\sqrt{137}}{2}$. **C.** $m=\dfrac{1\pm\sqrt{137}}{2}$. **D.** $m=\dfrac{1-\sqrt{137}}{2}$.

Câu 27. **(Chuyên Thái Nguyên - 2020)** Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^3-3x^2-m^3+3m^2=0$ có ba nghiệm phân biệt. Tổng tất cả các phần tử của T bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 28. **(Đại Học Hà Tĩnh - 2020)** Cho đồ thị hàm số $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}+\dfrac{1}{f'(x_3)}$.

A. $P=3+2b+c$. **B.** $P=0$. **C.** $P=b+c+d$. **D.** $P=\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{c}$.

Câu 29. **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị đi qua điểm $A(1;1),B(2;4),C(3;9)$. Các đường thẳng AB,AC,BC lại cắt đồ thị lần lượt tại các điểm M,N,P (M khác A và B, N khác A và C, P khác B và C. Biết rằng tổng các hoành độ của M,N,P bằng 5, giá trị của $f(0)$ là

A. -6. **B.** -18. **C.** 18. **D.** 6.

Câu 30. **(Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ cắt đường thẳng $d:y=m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_2^2>5$.

A. $m\ge -3$. **B.** $m\ge -2$ **C.** $m>-3$. **D.** $m>-2$.

Câu 31. **(Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020)** Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-9x+2m+1$ và trục Ox có đúng hai điểm chung phân biệt. Tính tổng T của các phần tử thuộc tập S

A. $T=-10$. **B.** $T=10$. **C.** $T=-12$. **D.** $T=12$.

Dạng 2. Bài toán tương giao của đường thẳng với đồ thị hàm số nhất biến (CHỨA THAM SỐ)

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị (C). Tìm tham số m để đường thẳng $d:y=\alpha x+\beta$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn điều kiện K?

Phương pháp giải

□ **Bước 1**. (Bước này giống nhau ở các bài toán tương giao của hàm nhất biến)

Lập phương trình hoành độ giao điểm giữa d và (C): $\dfrac{ax+b}{cx+d}=\alpha x+\beta$

$\Leftrightarrow g(x)=\alpha cx^2+(\beta c+\alpha d-a)x+\beta d-b=0,\ \forall x\ne -\dfrac{d}{c}$.

- Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x)=0$ có nghiệm nghiệm phân biệt $\ne -\dfrac{d}{c}\Leftrightarrow \begin{cases} c\alpha\ne 0;\ \Delta>0 \\ g\left(-\dfrac{d}{c}\right)\ne 0 \end{cases}$.

Giải hệ này, ta sẽ tìm được $m\in D_1$ (i)

-Gọi $A(x_1;\alpha x_1+\beta)$, $B(x_2;\alpha y_2+\beta)$ với x_1,x_2 là 2 nghiệm của $g(x)=0$ Theo Viét:

$S=x_1+x_2=-\dfrac{\beta c+\alpha d-a}{c\alpha}$; $P=x_1x_2=\dfrac{\beta d-b}{\alpha c}$ (ii)

□ **Bước 2**.

-Biến đổi điều kiện K cho trước về dạng có chứa tổng và tích của x_1,x_2 (iii)

-Thế (ii) vào (iii) sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến số là m. Giải nó sẽ tìm được $m\in D_2$ $(*)$

-Từ $(i),(*)\Rightarrow m\in(D_1\cap D_2)$ và kết luận giá trị m cần tìm.

Một số công thức tính nhanh " thường gặp " liên quan đến tương giao giữa đường thẳng $y=kx+p$ và đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

Giả sử $d:y=kx+p$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ tại 2 điểm phân biệt M,N.

Với $kx+p=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ cho ta phương trình có dạng: $Ax^2+Bx+C=0$ thỏa điều kiện $cx+d\ne 0$, có $\Delta=B^2-4AC$. Khi đó:

1). $M(x_1;kx_1+p), N(x_2;kx_2+p) \Rightarrow \overrightarrow{MN}=(x_2-x_1;k(x_2-x_1)) \Rightarrow MN=\sqrt{(k^2+1)\dfrac{\Delta}{A^2}}$

Chú ý: khi $\min MN$ *thì tồn tại* $\min \Delta, k = const$

2). $OM^2+ON^2=(k^2+1)(x_1^2+x_2^2)+(x_1+x_2)2kp+2p^2$

3). $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=(x_1.x_2)(1+k^2)+(x_1+x_2)kp+p^2$

4). $OM=ON \Leftrightarrow (x_1+x_2)(1+k^2)+2kp=0$

Câu 1. **(Sở Ninh Bình 2020)** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2020;2020]$ của tham số m để đường thẳng $y=x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt?

A. 4036. **B.** 4040. **C.** 4038. **D.** 4034.

Câu 2. **(ĐHQG TPHCM 2019)** Đường thẳng $y=x+2m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

A. $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>3 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ m\ge 3 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>1 \end{array}\right.$. **D.** $-3<m<1$.

Câu 3. **(Gia Lai 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=2x+m$ cắt đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.

A. $m\in(-\infty;+\infty)$. **B.** $m\in(-1;+\infty)$. **C.** $m\in(-2;4)$. **D.** $m\in(-\infty;-2)$.

Câu 4. Gọi A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng

A. $4\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 5. **(Chuyên Nguyễn Du ĐăkLăk 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}(C)$ và đường thẳng $d: y=-x+m$. Gọi S là tập các số thực m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác OAB (O là gốc tọa độ) có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $2\sqrt{2}$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 8.

Câu 6. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{1-x}$ (C) và đường thẳng $d: y=x+m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt

A. $m>-1$. **B.** $-5<m<-1$. **C.** $m<-5$. **D.** $m<-5$ hoặc $m>-1$.

Câu 7. **(Sở Cần Thơ 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=x-m$, với m là tham số thực. Biết rằng đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho điểm $G(2;-2)$ là trọng tâm của tam giác OAB (O là gốc toạ độ). Giá trị của m bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** -9. **D.** 5.

Câu 8. **(Sở Nam Định 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{3x-2m}{mx+1}$ với m là tham số. Biết rằng với mọi $m\neq 0$, đồ thị hàm số luôn cắt đường thẳng $d: y=3x-3m$ tại hai điểm phân biệt A, B. Tích tất cả các giá trị của m tìm được để đường thẳng d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại C, D sao cho diện tích ΔOAB bằng 2 lần diện tích ΔOCD bằng

A. $-\frac{4}{9}$. **B.** -4. **C.** -1. **D.** 0.

Câu 9. **(Gia Lai 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đường thẳng $y=-3x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho trọng tâm tam giác OAB (O là gốc tọa độ) thuộc đường thẳng $x-2y-2=0$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 10. Giả sử $m=-\frac{b}{a}$, $a,b\in\mathbb{Z}^+$, $(a,b)=1$ là giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d:y=-3x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $\Delta:x-2y-2=0$, với O là gốc toạ độ. Tính $a+2b$.

A. 2. **B.** 5. **C.** 11. **D.** 21.

Câu 11. Cho hàm số $y=\frac{3x+2}{x+2}$, (C) và đường thẳng $d:y=ax+2b-4$. Đường thẳng d cắt (C) tại A, B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O, khi đó $T=a+b$ bằng

A. $T=2$. **B.** $T=\frac{5}{2}$. **C.** $T=4$. **D.** $T=\frac{7}{2}$.

Câu 12. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d:\ y=-3x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm ΔOAB thuộc đường thẳng $\Delta:\ x-2y-2=0$, với O là gốc tọa độ.

A. $m=-\frac{11}{5}$. **B.** $m=-\frac{1}{5}$. **C.** $m=0$. **D.** $m=-2$.

Câu 13. Cho hàm số $y=\frac{2x}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm tập hợp tất cả các giá trị $a\in\mathbb{R}$ để qua điểm $M(0;a)$ có thể kẻ được đường thẳng cắt (C) tại hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua điểm M.

A. $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$.

Câu 14. **(Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa 2019)** Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho đường thẳng $y=x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $MN\le 10$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 15. Cho là đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}$. Tìm k để đường thẳng $d:y=kx+2k+1$ cắt tại hai điểm phân biệt A,B sao cho khoảng cách từ A đến trục hoành bằng khoảng cách từ B đến trục hoành.

A. 1. **B.** $\frac{2}{5}$ **C.** -3. **D.** -2.

Câu 16. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Tìm điều kiện của m để đường thẳng $y=mx+1$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.

A. $(-\infty;0]\cup[16;+\infty)$ **B.** $(16;+\infty)$ **C.** $(-\infty;0)$ **D.** $(-\infty;0)\cup(16;+\infty)$

Câu 17. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Gọi $M(a;b)$ là điểm trên đồ thị hàm số $y=\frac{x-2}{x}$ sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $d:y=2x+6$ nhỏ nhất. Tính $(4a+5)^2+(2b-7)^2$.

A. 162. **B.** 2. **C.** 18. **D.** 0.

Câu 18. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x}{1-x}$ cắt đường thẳng $y=x-m$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng 60^0 (với O là gốc tọa độ)?

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0

Câu 19. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Để đường thẳng $d: y=x-m+2$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho độ dài AB ngắn nhất thì giá trị của m thuộc khoảng nào?

A. $m\in(-4;-2)$ **B.** $m\in(2;4)$ **C.** $m\in(-2;0)$ **D.** $m\in(0;2)$

Câu 20. **(THPT Lương Tài Số 2 2019)** Biết rằng đường thẳng $y=2x+2m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt *A, B* với mọi giá trị của tham số *m*. Tìm hoành độ trung điểm của *AB*?

A. $m+1$ **B.** $-m-1$ **C.** $-2m-2$ **D.** $-2m+1$

Câu 21. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Gọi (H) là đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$. Điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc (H) có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất, với $x_0<0$ khi đó x_0+y_0 bằng

A. -1. **B.** -2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 22. **(Chuyên Bến Tre - 2020)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $d: y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB\le 2\sqrt{2}$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng

A. -6. **B.** -27. **C.** 9. **D.** 0.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 23. **(Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020)** Cho hàm số $y=\dfrac{2x-m^2}{x+1}$ có đồ thị (C_m), trong đó m là tham số thực. Đường thẳng $d: y=m-x$ cắt (C_m) tại hai điểm $A(x_A;y_A),B(x_B;y_B)$ với $x_A<x_B$; đường thẳng $d': y=2-m-x$ cắt (C_m) tại hai điểm $C(x_C;y_C),D(x_D;y_D)$ với $x_C<x_D$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $x_A.x_D=-3$. Số phần tử của tập S là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Dạng 3. Bài toán tương giao của đường thẳng với hàm số trùng phương (CHỨA THAM SỐ)

. **Bài toán tổng quát**: Tìm m để đường thẳng $d: y=\alpha$ cắt đồ thị $(C): y=f(x;m)=ax^4+bx^2+c$ tại n điểm phân biệt thỏa mãn điều kiện K cho trước?

Phương pháp giải:

Bước 1. Lập phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $ax^4+bx^2+c-\alpha=0$ (1)

Đặt $t=x^2\ge 0$ thì (1) $\Leftrightarrow at^2+bt+c-\alpha=0$ (2)

Tùy vào số giao điểm n mà ta biện luận để tìm giá trị $m\in D_1$. Cụ thể:

- Để $d\cap(C)=n=4$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa điều kiện: $0<t_1<t_2\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Rightarrow m\in D_1.$

- Để $d\cap(C)=n=3$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa điều kiện: $0 = t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} c - \alpha = 0 \\ \dfrac{b}{a} < 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1$.

- Để $d \cap (C) = n = 2$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm trái dấu hoặc có nghiệm kép dương $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ac < 0 \\ \begin{cases} \Delta = 0 \\ S > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow m \in D_1$.

- Để $d \cap (C) = n = 1$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có đúng 1 nghiệm

$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm kép $= 0$ hoặc $\begin{cases} t_1 < 0 \\ t_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ c - \alpha = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} c - \alpha = 0 \\ \dfrac{b}{a} > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1$.

Bước 2. Biến đổi điều kiện K về dạng có chứa tổng và tích của t_1, t_2 (3)

Thế biểu thức tổng, tích vào (3) sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến số là m. Giải chúng ta sẽ tìm được $m \in D_2$.

Kết luận: $m \in D_1 \cap D_2$.

□ **Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.**

Ta có: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (1), *đặt* $t = x^2 \geq 0$, *thì có:* $at^2 + bt + c = 0$ (2)

Để (1) *có* 4 *nghiệm phân biệt thì* (2) *có hai nghiệm phân biệt dương, tức là:* $\begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1.t_2 > 0 \end{cases}$

Khi đó (1) *có* 4 *nghiệm phân biệt lần lượt là* $-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$ *lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi:* $\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = \sqrt{t_1} - (-\sqrt{t_1}) \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$. *Theo định lý Vi – et* $t_1 + t_2 = -\dfrac{b}{a}$ *suy ra* $t_1 = -\dfrac{b}{10a}; t_2 = -\dfrac{9b}{10a}$, *kết hợp* $t_1.t_2 = \dfrac{c}{a}$ *nên có:* $9ab^2 = 100a^2c$

Tóm lại: Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ *cắt trục hoành tại* 3 *điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng, thì điều kiện cần và đủ là:* $\begin{cases} b^2 - 4ac > 0 \\ -\dfrac{b}{a} > 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \\ 9ab^2 = 100a^2c \end{cases}$

Câu 1. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 4x^2 + 3 + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt là

A. $(-1;3)$. **B.** $(-3;1)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(-3;0)$.

Câu 2. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2mx^2 + (2m-1) = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt là

A. $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}$. **B.** $(1; +\infty)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 3. **(THPT Lương Thế Vinh - Hn - 2018)** Cho hàm số $y=x^4-3x^2-2$. Tìm số thực dương m để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O, trong đó O là gốc tọa độ.

A. $m=2$. **B.** $m=\frac{3}{2}$. **C.** $m=3$. **D.** $m=1$.

Câu 4. Đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-x^2$ tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi

A. $-\frac{1}{4}<m<0$. **B.** $0<m<\frac{1}{4}$. **C.** $m>0$. **D.** $m>-\frac{1}{4}$

Câu 5. **(THPT Quỳnh Lưu- Nghệ An- 2019)** Một đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ là 0, 1, m, n. Tính $S=m^2+n^2$.

A. $S=1$. **B.** $S=0$. **C.** $S=3$. **D.** $S=2$.

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=x^4-4x^3+(m-2)x^2+8x+4$ cắt trục hoành tại đúng hai điểm có hoành độ lớn hơn 1.

A. 8. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 7. **(Sở Hà Nam - 2019)** Cho hàm số $f(x)=-4x^4+8x^2-1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình $f(x)=m$ có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

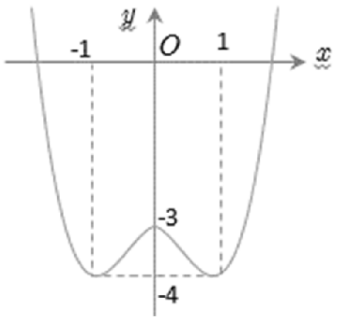
Câu 8. **(Sở Thanh Hóa 2018)** Cho hàm số $y=x^4+2mx^2+m$ (với m là tham số thực). Tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y=-3$ tại bốn điểm phân biệt, trong đó có một điểm có hoành độ lớn hơn 2 còn ba điểm kia có hoành độ nhỏ hơn 1, là khoảng $(a;b)$ (với $a,b\in\mathbb{Q}$, a,b là phân số tối giản). Khi đó, $15ab$ nhận giá trị nào sau đây?

A. -63. **B.** 63. **C.** 95. **D.** -95.

Câu 9. **(Chuyên Hà Tĩnh 2018)** Đường thẳng $y=m^2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-x^2-10$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông (O là gốc tọa độ). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m^2\in(5;7)$. **B.** $m^2\in(3;5)$. **C.** $m^2\in(1;3)$. **D.** $m^2\in(0;1)$.

Câu 10. **(Sở Bình Phước 2018)** Cho hàm số $y=x^4-2x^2-3$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Với giá trị nào của m thì phương trình $x^4-2x^2-3=2m-4$ có 2 nghiệm phân biệt.



A. $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m=\frac{1}{2} \end{array}\right.$. **B.** $m\le\frac{1}{2}$. **C.** $0<m<\frac{1}{2}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m>\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Câu 11. **(THPT Bình Giang - Hải Dương - 2018)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $-x^4+2x^2+3+2m=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $-2\le m\le-\frac{3}{2}$. **B.** $-\frac{3}{2}<m<2$. **C.** $-2<m<-\frac{3}{2}$. **D.** $3<m<4$.

Câu 12. **(THPT Vân Nội - Hà Nội - 2018)** Tất cả các giá trị thực của tham số m, để đồ thị hàm số $y=x^4-2(2-m)x^2+m^2-2m-2$ không cắt trục hoành.

A. $m \ge \sqrt{3}+1$. **B.** $m < 3$. **C.** $m > \sqrt{3}+1$. **D.** $m > 3$.

Câu 13. **(Sở Nam Định - 2018)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = (m+1)x^4 - 2(2m-3)x^2 + 6m + 5$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có các hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 < x_2 < x_3 < 1 < x_4$.

A. $m \in \left(-1; \frac{-5}{6}\right)$. **B.** $m \in (-3;-1)$. **C.** $m \in (-3;1)$. **D.** $m \in (-4;-1)$.

Câu 14. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để đường thẳng $d: y = -1$ cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

A. $-\frac{1}{3} < m < 1$ và $m \ne 0$ **B.** $-\frac{1}{2} < m < 1$ và $m \ne 0$

C. $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$ và $m \ne 0$ **D.** $-\frac{1}{3} < m < \frac{1}{2}$ và $m \ne 0$

---------- HẾT ----------

Nguyễn Bảo Vương

DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

Dạng 1. Biện luận m để phương trình có nghiệm thỏa mãn điều kiện k (hàm số khác)

Câu 1. **(Mã 101 2019)** (Mã đề 001) Cho hai hàm số $y=\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}$ và $y=|x+2|-x+m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $[2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2]$.

Câu 2. **(Mã 103 2019)** Cho hai hàm số $y=\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}$ và $y=|x+2|-x-m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là $(C_1),(C_2)$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $(-2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2]$. **C.** $[-2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Câu 3. **(Mã 102 2019)** Cho hai hàm số $y=\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+3}{x+4}$ và $y=|x+1|-x+m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biệt là

A. $(-\infty;3]$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $[3;+\infty)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 4. **(Mã 104 2019)** Cho hai hàm số $y=\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}$ và $y=|x+1|-x-m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $(-\infty;-3)$. **B.** $[-3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-3]$. **D.** $(-3;+\infty)$.

Câu 5. Cho hai hàm số $y=\frac{x^2-1}{x}+\frac{x^2-2x}{x-1}+\frac{x^2-4x+3}{x-2}+\frac{x^2-6x+8}{x-3}$ và $y=|x+2|-x+m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tính tổng tất cả các giá trị nguyên thuộc khoảng $(-15;20)$ của tham số m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại nhiều hơn hai điểm phân biệt.

A. 210. **B.** 85. **C.** 119. **D.** 105.

Câu 6. Cho hai hàm số $y=\frac{x}{x-1}+\frac{x+1}{x}+\frac{x+2}{x+1}$ và $y=e^x+2020+3m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Có bao nhiêu số nguyên m thuộc $(-2019;2020)$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại 3 điểm phân biệt?

A. 2692. **B.** 2691. **C.** 2690. **D.** 2693.

Câu 7. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hai hàm số $y=\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}$ và $y=\frac{11}{3x-4}-\frac{1}{2-x}+11+m$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-\infty;1]$. **D.** $(-\infty;2]$.

Câu 8. Cho hai hàm số $y=\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}$ và $y=2^{1-x}+2m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng năm điểm phân biệt là

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2]$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(-\infty;4)$.

Câu 9. Cho hai hàm số $y=\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{x-1}{x^2-2x}+\dfrac{x-2}{x^2-4x+3}$ và $y=x-|x+1|+m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Số các giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-20;20)$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại năm điểm phân biệt là

A. 22. **B.** 39. **C.** 21. **D.** 20.

Câu 10. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2x^4-(m+2)x^3+x^2+(m^2-1)x\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Số phần tử của tập S là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 11. Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ để bất phương trình $(x-1)(x+2)(ax^2+bx+2)\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 12. Trong số các cặp số thực $(a;b)$ để bất phương trình $(x-1)(x-a)(x^2+x+b)\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$, tích ab nhỏ nhất bằng

A. $-\dfrac{1}{4}$. **B.** -1. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** 1.

Câu 13. Cho 2 hàm số $y=x^7+x^5+x^3+3m-1$ và $y=|x-2|-x-2m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1), (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) cắt (C_2) là

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $m\in(2;+\infty)$. **C.** $m\in(-\infty;2)$. **D.** $m\in[2;+\infty)$.

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để phương trình $\sqrt{3+x}\left(2\sqrt{3+x}-m\right)+\sqrt{1-x}\left(5\sqrt{1-x}+2m\right)=4\sqrt{-x^2-2x+3}$ có nghiệm thực?

A. 2019. **B.** 4032. **C.** 4039. **D.** 4033.

Câu 15. **(Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Tập hợp tất cả các số thực của tham số m để phương trình $x^6+6x^4-m^3x^3+(15-3m^2)x^2-6mx+10=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$ là:

A. $2<m\le\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{5}\le m<3$. **C.** $\dfrac{11}{5}<m<4$. **D.** $0<m<\dfrac{9}{4}$.

Câu 16. **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020)** Có bao nhiêu m nguyên dương để hai đường cong $(C_1):y=\left|2+\dfrac{2}{x-10}\right|$ và $(C_2):y=\sqrt{4x-m}$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương?

A. 35. **B.** 37. **C.** 36. **D.** 34.

Câu 17. **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $f(x)=(x-1).(x-2)...(x-2020)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ để phương trình $f'(x)=m.f(x)$ có 2020 nghiệm phân biệt?

A. 2020. **B.** 4040. **C.** 4041. **D.** 2020.

Câu 18. **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Cho phương trình $4\cos^3x-12\cos^2x-33\cos x=4m+3\sqrt[3]{3\cos^2x+9\cos x+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm duy nhất thuộc $\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$.

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Câu 19. **(Sở Ninh Bình 2020)** Cho hai hàm số $y=\ln\left|\dfrac{x-2}{x}\right|$ và $y=\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{x}+4m-2020$, Tổng tất các các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hai hàm số cắt nhau tại một điểm duy nhất là

A. 506. **B.** 1011. **C.** 2020. **D.** 1010.

Câu 20. **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020)** Cho hai hàm số $y=(x+1)(2x+1)(3x+1)(m+2|x|)$; $y=-12x^4-22x^3-x^2+10x+3$ có đồ thị lần lượt là (C_1), (C_2). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-2020;2020]$ để (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt?

A. 4040. **B.** 2020. **C.** 2021. **D.** 4041.

Câu 21. **(Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020)** Cho hàm số $y=\dfrac{\left(x^2-2x+m\right)^2-3x-m}{x-3}$ (C) và đường thẳng $(d):y=2x$ (m là tham số thực).

Số giá trị nguyên của $m\in[-15;15]$ để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt là

A. 15. **B.** 30. **C.** 16. **D.** 17.

Câu 22. **(Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Cho hai hàm số $y=x^6+6x^4+6x^2+1$ và $y=x^3\sqrt{m-15x}\left(m+3-15x\right)$ có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Số phần tử của tập hợp S bằng

A. 2006. **B.** 2005. **C.** 2007. **D.** 2008.

Dạng 2. Tương giao hàm hợp, hàm ẩn

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$ của phương trình $2f(\sin x)+3=0$ là

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 8.

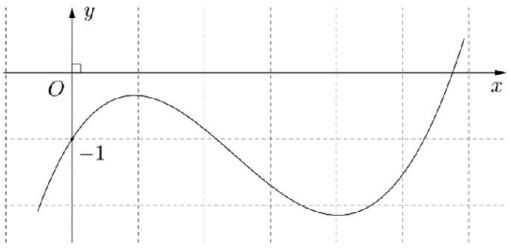
Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin x)=1$ là

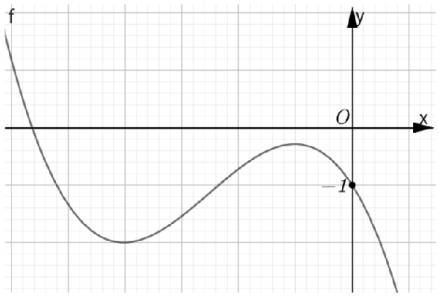
A. 7. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 3. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^3f(x)\right)+1=0$ là



A. 8. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

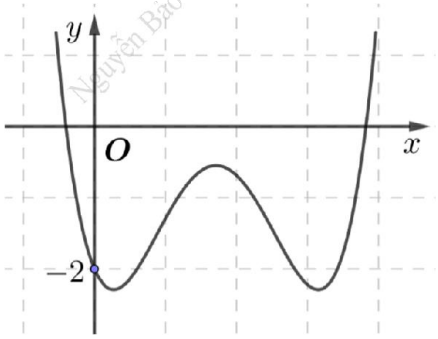
Câu 4. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên dưới.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^3f(x)\right)+1=0$ là

A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 8.

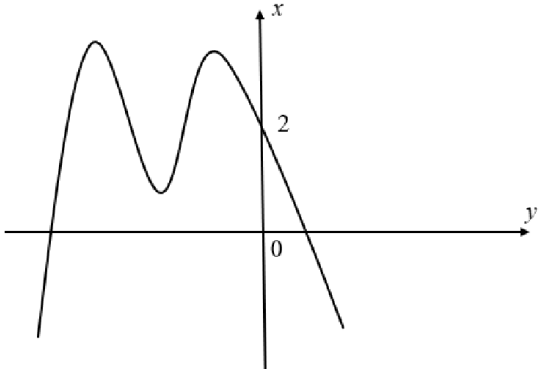
Câu 5. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^2f(x)\right)+2=0$ là

A. 8. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 9.

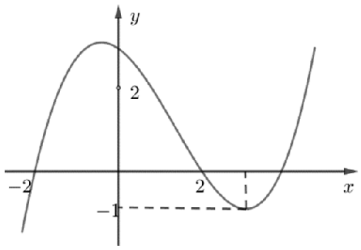
Câu 6. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x^2f(x)\right)=2$ là:

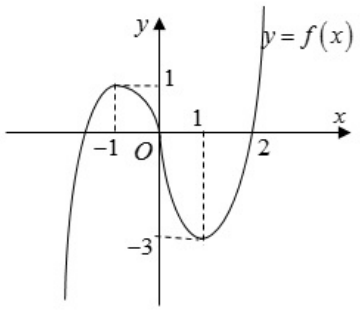
A. 6. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 7. **(Mã 103 2019)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\frac{3}{2}$ là



A. 7. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 4.

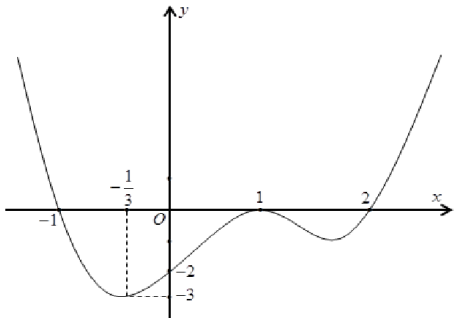
Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau



Số nghiệm của phương trình $f\left(2+f\left(e^x\right)\right)=1$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

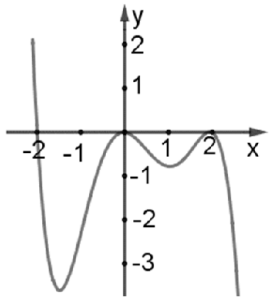
Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



Đặt $g(x)=f\left(f'(x)-1\right)$. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $g'(x)=0$. Số phần tử của tập S là

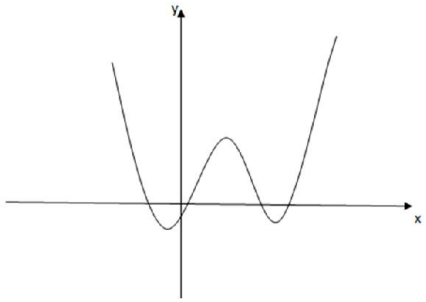
A. 8. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 10. **(THPT Cẩm Bình Hà Tĩnh 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x)=f\left(f(x)\right)$. Hỏi phương trình $g'(x)=0$ có mấy nghiệm thực phân biệt?



A. 14. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 12.

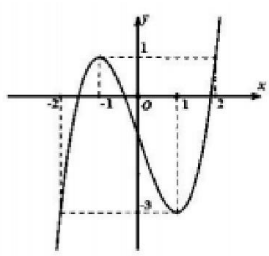
Câu 11. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ được cho như hình vẽ sau



Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left[f'(x)\right]^2-f''(x).f(x)$ và trục Ox là:

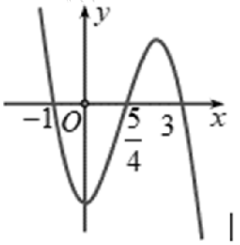
A. 4. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 12. **(Chuyên Lam Sơn 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f\left(f(x)-1\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

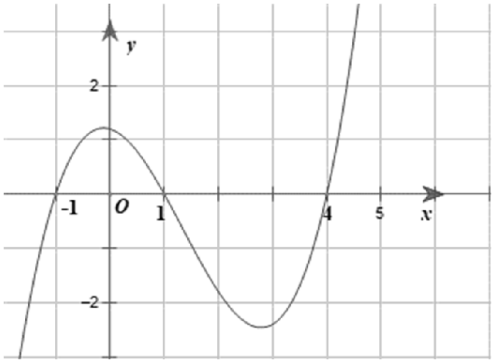
Câu 13. **(Đề tham khảo 2019)** Cho hàm số $f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$,. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của phương trình $f(x)=r$ có số phần tử là

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

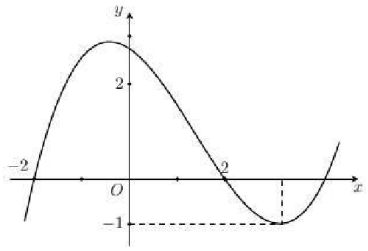
Câu 14. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho hàm số $y=f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$, trong đó $m,n,p,q,r\in\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ như hình vẽ dưới.



Tập nghiệm của phương trình $f(x)=16m+8n+4p+2q+r$ có tất cả bao nhiêu phần tử.

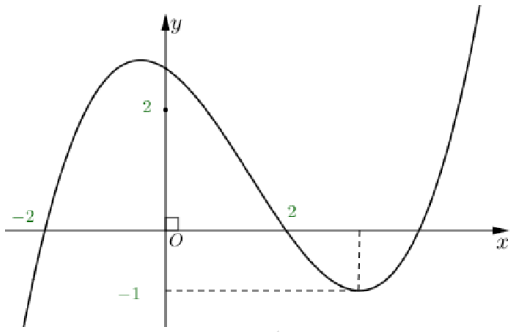
A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 15. **(Mã 104 2019)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\frac{2}{3}$ là



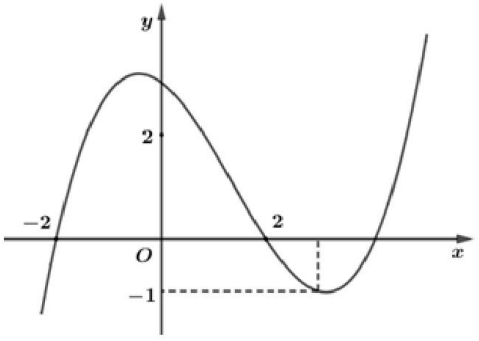
A. 10 **B.** 3 **C.** 9 **D.** 6

Câu 16. **(Mã 101 2019)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\frac{4}{3}$ là



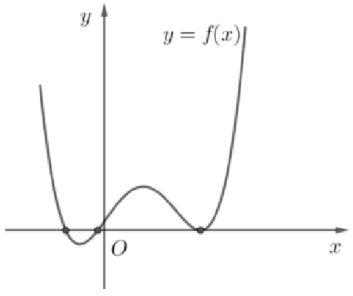
A. 7. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 8.

Câu 17. **(Mã 102 2019)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\frac{1}{2}$



A. 6. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 3.

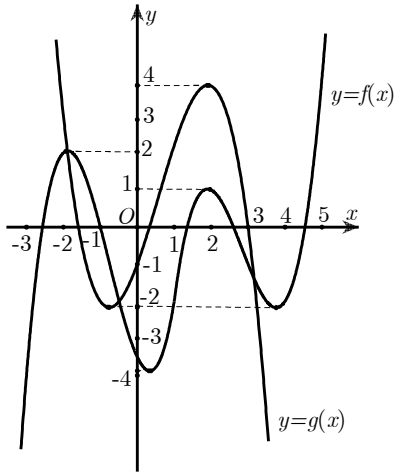
Câu 18. Cho $f(x)$ là một hàm đa thức bậc bốn có đồ thị như hình dưới đây.



Tập nghiệm của phương trình $\left[f'(x)\right]^2=f(x).f''(x)$ có số phần tử là

A. 1. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 0.

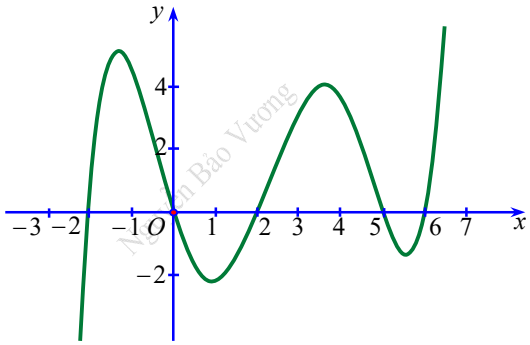
Câu 19. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Cho hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ có đồ thị như hình sau:



Khi đó tổng số nghiệm của hai phương trình $f(g(x))=0$ và $g(f(x))=0$ là

A. 25. **B.** 22. **C.** 21. **D.** 26.

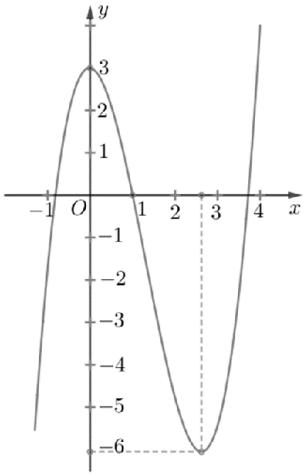
Câu 20. **(THPT Nghĩa Hưng 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Số nghiệm thuộc đoạn $[-2;6]$ của phương trình $f(x)=f(0)$ là

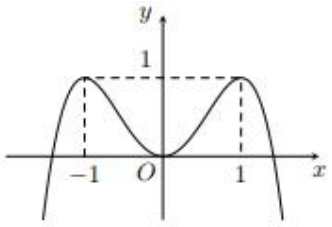
A. 5 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 21. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới. Đặt $g(x)=f[f(x)]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$.



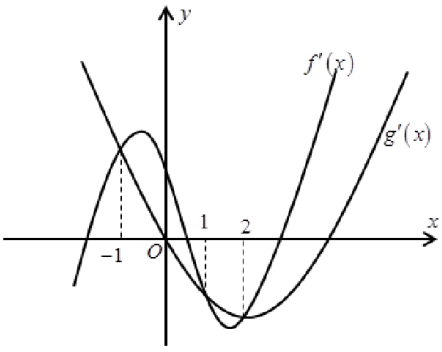
A. 2 **B.** 8 **C.** 4 **D.** 6

Câu 22. **(THPT Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có đồ thị như hình vẽ bên đây, trong đó a,b,c,d,e là các hệ số thực. Số nghiệm của phương trình $f\left(\sqrt{f(x)}\right)+f(x)+2\sqrt{f(x)}-1=0$ là



A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

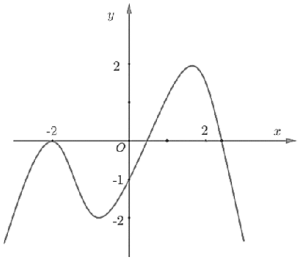
Câu 23. **(Sở Hưng Yên - 2019)** Cho các hàm số $f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$ và $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $(n,n,p,q,r,a,b,c,d\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $f(0)=g(0)$. Các hàm số $f'(x), g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Tập nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ có số phần tử là

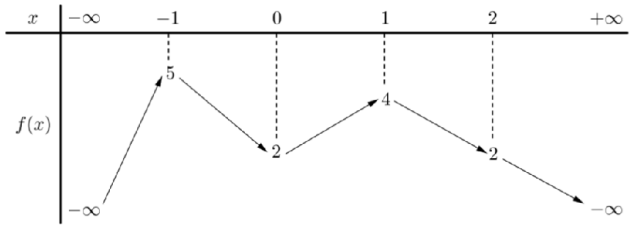
A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 24. **(Sở Hà Tĩnh - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp nghiệm của phương trình $f\left(f(x)\right)+1=0$ có bao nhiêu phần tử?



A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 9.

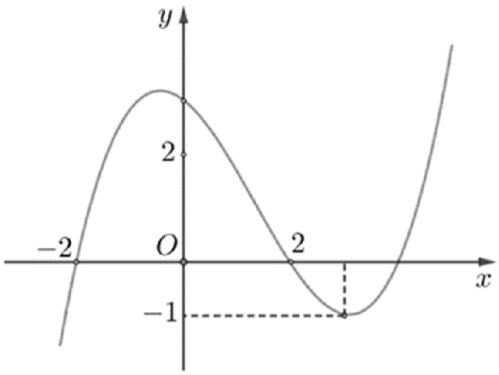
Câu 25. **(THPT Nguyễn Đức Cảnh - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên



Phương trình $f\left(\sqrt{2x-x^2}\right)=3$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

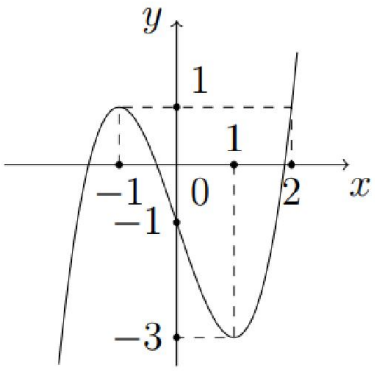
Câu 26. **(Chuyên Lam Sơn - 2020)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=1$ là

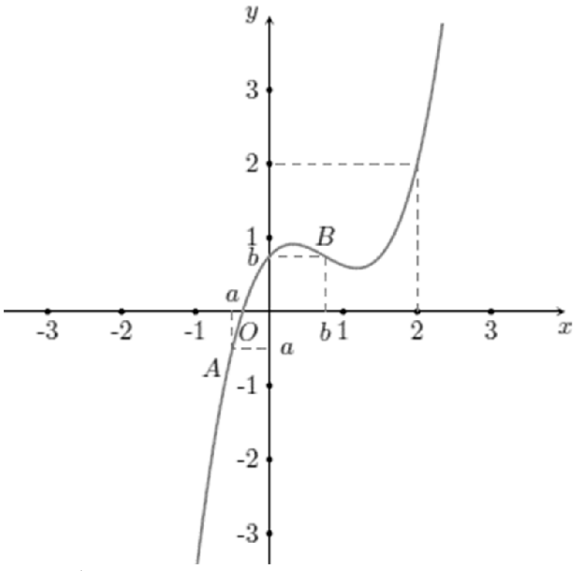
A. 10. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 27. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $f\left[f(\cos x)-1\right]=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$?



A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 28. **(Chuyên Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2020)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ:



Số nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};3\pi\right)$ của phương trình $f(\cos x+1)=\cos x+1$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

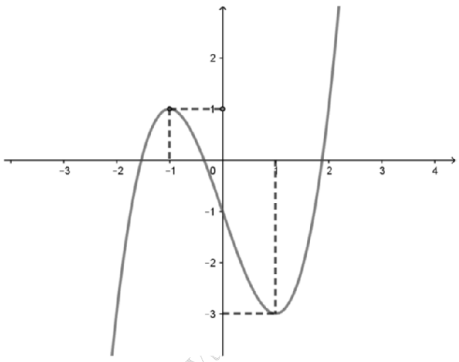
Câu 29. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	0	↗	2	↘	$-\infty$

Số nghiệm thuộc khoảng $(-\infty;\ln 2)$ của phương trình $2019f\left(1-e^x\right)-2021=0$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 30. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc 3 và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi phương trình $f\left(f\left(\cos x\right)-1\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0;3\pi]$?



A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 31. **(Chuyên Thái Nguyên - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	-3	↗	$+\infty$

Phương trình $\left|f\left(3x+1\right)-2\right|=5$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

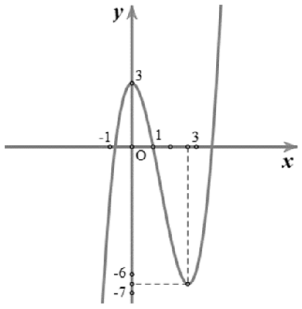
Câu 32. **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	3	↘	2	↗	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{5\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$ của phương trình $3f\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{2}}\right)-7=0$ là:

A. 6. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 33. **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Đặt $g(x)=f[f(x)]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$.



A. 8. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

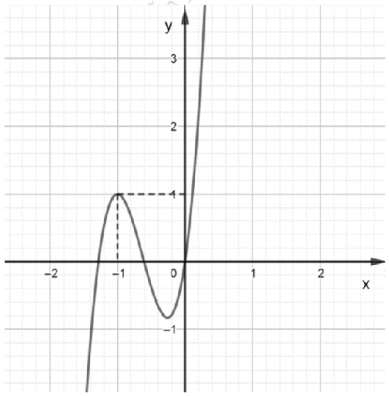
Câu 34. **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(2\sin x+1)=1$ là

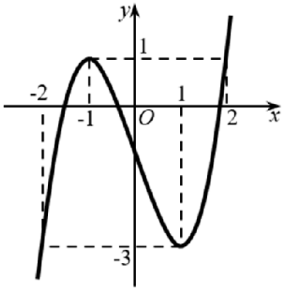
A. 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 35. **(Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $f\left(f\left(\sqrt{f(x)}\right)+f(x)+2\sqrt{f(x)}\right)-f(1)=0$ là



A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 36. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(f(x)-1)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

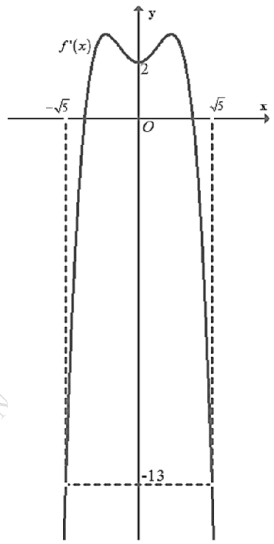
Câu 37. **(Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2020	$\nearrow$	2020	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $\left|f(x+2019)-2020\right|=2021$ là

A. 4. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 3.

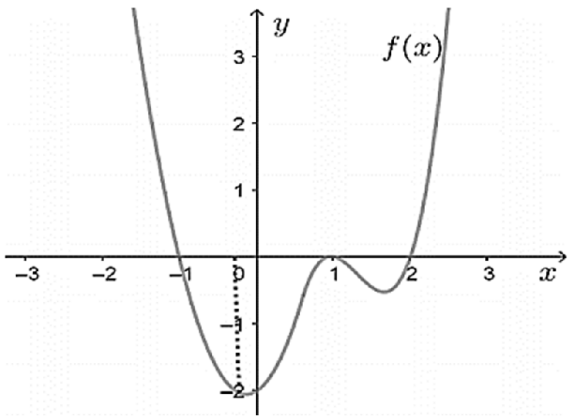
Câu 38. **(Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x)=2f(x)+2x^3-4x-3m-6\sqrt{5}$ với m là số thực. Để $g(x)\le 0, \forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ thì điều kiện của m là



A. $m\ge\frac{2}{3}f\left(-\sqrt{5}\right)-4\sqrt{5}$. **B.** $m\le\frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$.

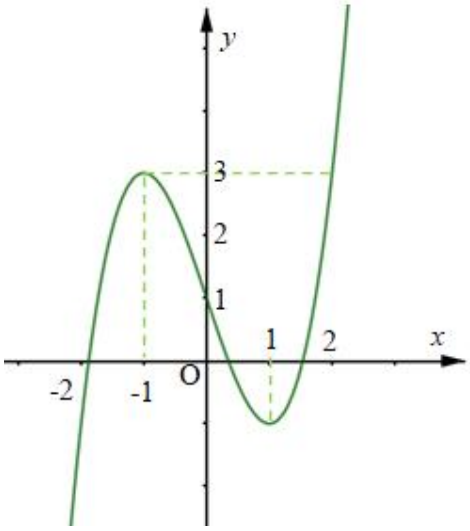
C. $m\le\frac{2}{3}f(0)-2\sqrt{5}$. **D.** $m\ge\frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$.

Câu 39. **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x)=f\left(f(x)-1\right)$. Số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là



A. 6. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 8.

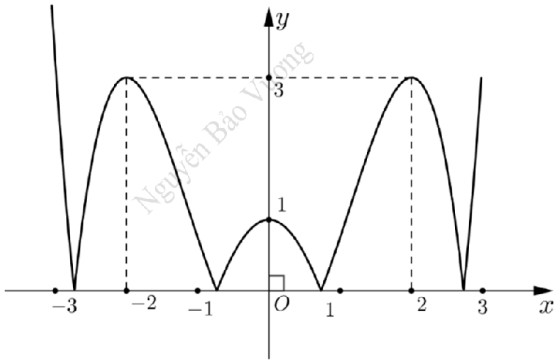
Câu 40. **(Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{7\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(f(\cos x))=0$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.

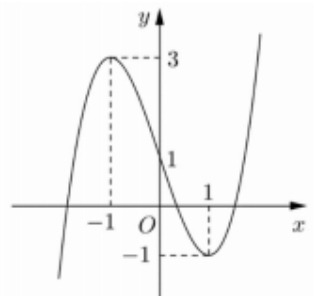
Câu 41. **(Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị nhưu hình vẽ bên. Tìm số nghiệm thuộc đoạn $\left[2017\pi;2020\pi\right]$ của phương trình $3f\left(2\cos x\right)=8$.



A. 8. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

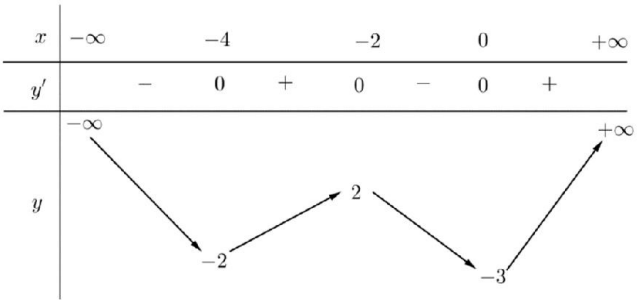
Dạng 3. Biện luận tương giao hàm hợp, hàm ẩn chứa THAM SỐ

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(\sin x\right)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\pi\right)$ là



A. $\left(-1;3\right)$ **B.** $\left[-1;1\right)$ **C.** $\left[-1;3\right)$ **D.** $\left(-1;1\right)$

Câu 2. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $6f\left(x^2-4x\right)=m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $\left(0;+\infty\right)$?

A. 25. **B.** 30. **C.** 29. **D.** 24.

Câu 3. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	-3	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3f\left(x^2-4x\right)=m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $\left(0;+\infty\right)$?

A. 15. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 13.

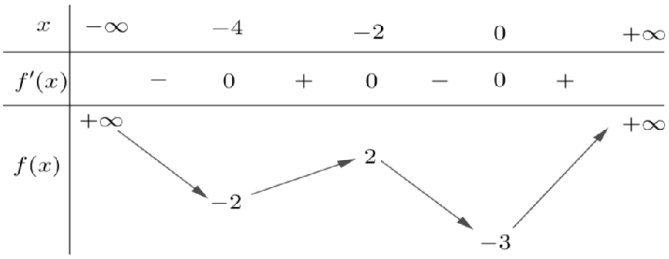
Câu 4. **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	-3	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $5f\left(x^2-4x\right)=m$ có ít nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(0;+\infty\right)$

A. 24. **B.** 21. **C.** 25. **D.** 20.

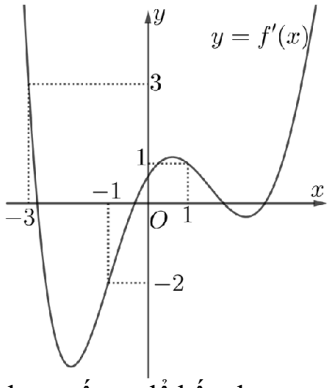
Câu 5. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4f\left(x^2-4x\right)=m$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $\left(0;+\infty\right)$?

A. 16. **B.** 19. **C.** 20. **D.** 17.

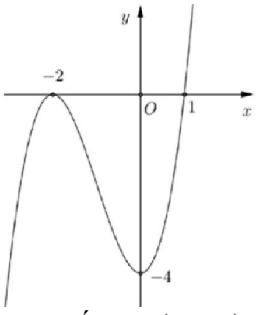
Câu 6. **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình sau.



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $2f(\sin x-2)-\frac{2\sin^3 x}{3}+\sin x>m+\frac{5\cos 2x}{4}$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $m\le 2f(-3)+\frac{11}{12}$. **B.** $m<2f(-1)+\frac{19}{12}$. **C.** $m\le 2f(-1)+\frac{19}{12}$. **D.** $m<2f(-3)+\frac{11}{12}$.

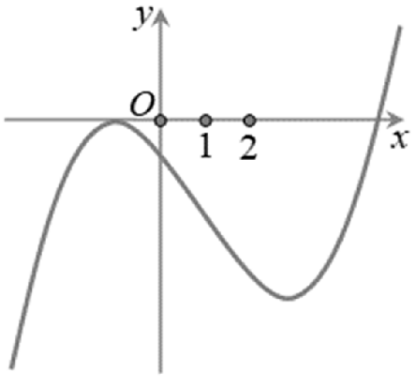
Câu 7. **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình dưới đây



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-5;5)$ để phương trình $f^2(x)-(m+4)|f(x)|+2m+4=0$ có 6 nghiệm phân biệt

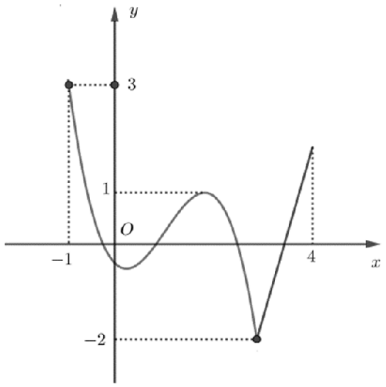
A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 8. **(Chuyên Lam Sơn - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x)>x^2-2x+m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x\in(1;2)$ khi và chỉ khi



A. $m\le f(2)-2$. **B.** $m\le f(1)+1$. **C.** $m\le f(1)-1$. **D.** $m\le f(2)$.

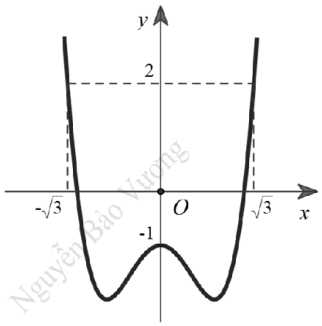
Câu 9. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;4]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10;10]$ để bất phương trình $|f(x)+m|<2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1;4]$.

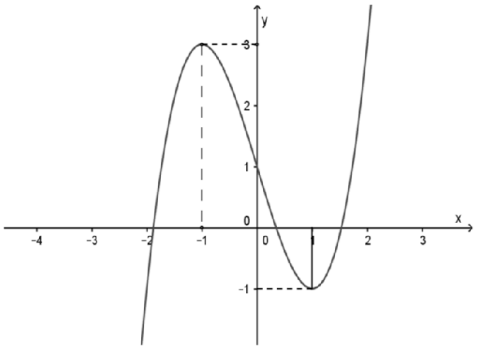
A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 10. **(Chuyên Bến Tre - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Cho bất phương trình $3f(x)\ge x^3-3x+m$ (m là tham số thực). Điều kiện cần và đủ để bất phương trình $3f(x)\ge x^3-3x+m$ đúng với mọi $x\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ là



A. $m\ge 3f(1)$. **B.** $m\ge 3f\left(-\sqrt{3}\right)$. **C.** $m\le 3f(0)$. **D.** $m\le 3f\left(\sqrt{3}\right)$.

Câu 11. **(Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x)-m+2=2\sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$. Tổng các phần tử của S bằng



A. 4. **B.** -1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 12. **(Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020)** Cho hàm số $f(x)=x^3+x+2$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m}\right)=-x^3-x+2$ có nghiệm $x\in[-1;2]$?

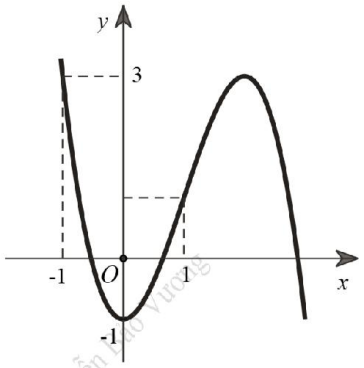
A. 1750. **B.** 1748. **C.** 1747. **D.** 1746.

Câu 13. **(Chuyên Quang Trung - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[2;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x+2\sqrt{x^2-2x}=m.f(x)$ có nghiệm thuộc đoạn $[2;4]$?

x	2		3		$\frac{7}{2}$		4
$f(x)$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	$\sqrt{11}$	$\searrow$	2

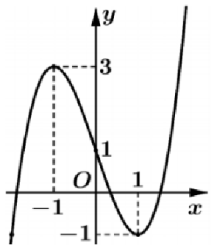
A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 14. **(Chuyên Sơn La - 2020)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2\left(\cos x\right)+\left(m-2019\right)f\left(\cos x\right)+m-2020=0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[0;2\pi\right]$ là



A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 15. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết $f(-1)=1;f\left(-\frac{1}{e}\right)=2$. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $f(x)<\ln(-x)+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-1;\frac{-1}{e}\right)$.



A. $m\geq 2$. **B.** $m\geq 3$. **C.** $m>2$. **D.** $m>3$.

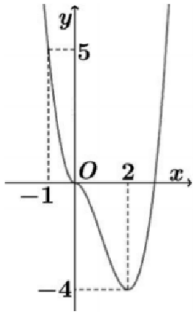
Câu 16. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(-1\right)=5,f\left(-3\right)=0$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Số giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $3f\left(2-x\right)+\sqrt{x^2+4}-x=m$ có nghiệm trong khoảng $\left(3;5\right)$ là

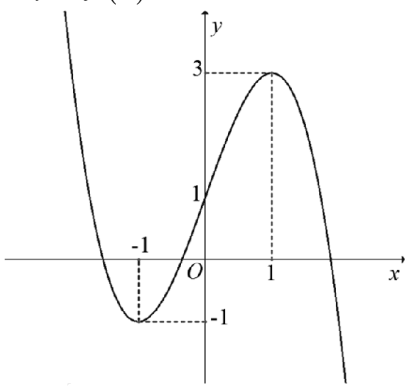
A. 16. **B.** 17. **C.** 0. **D.** 15.

Câu 17. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-1)=1$, $f\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=2$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Bất phương trình $f(x)<\ln(-x)+x^2+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-1;-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ khi và chỉ khi



A. $m>0$. **B.** $m>3-\frac{1}{\mathrm{e}^2}$. **C.** $m\geq 3-\frac{1}{\mathrm{e}^2}$. **D.** $m\geq 0$.

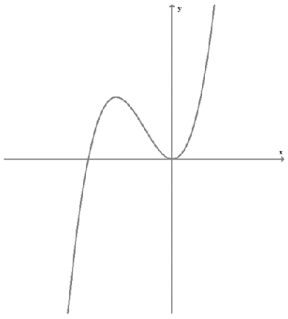
Câu 18. **(Sở Hà Tĩnh - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(\cos x))=m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

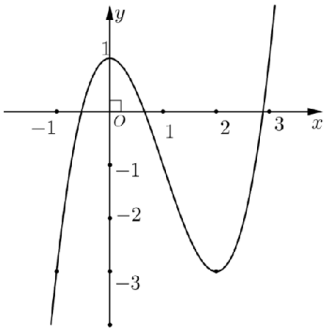
Câu 19. **(Sở Ninh Bình)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(2|\sin x|)=f(m^2+6m+10)$ có nghiệm?

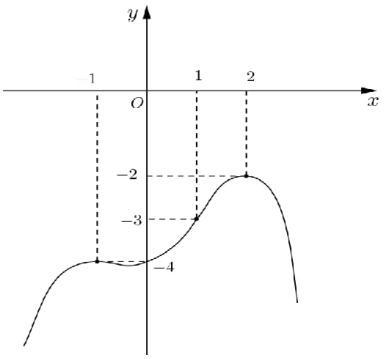
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 20. **(Sở Yên Bái - 2020)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x^3-3x^2+m)+3=0$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1;2]$.



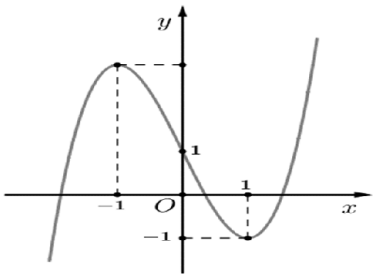
A. 7. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 5.

Câu 21. **(Sở Yên Bái - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $16.8^{f(x)} \le (-m^2+5m).4^{f(x)} - ((4-f^2(x)).16^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi số thực x là



A. 3. **B.** 5.
C. 1. **D.** 4.

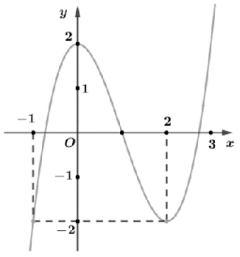
Câu 22. **(Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $m+e^x<f(x)$ có nghiệm với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi.



A. $m\le \min\left\{f(1)-e; f(-1)-\dfrac{1}{e}\right\}$. **B.** $m<f(0)-1$.

C. $m<\min\left\{f(1)-e; f(-1)-\dfrac{1}{e}\right\}$. **D.** $m\le f(0)-1$.

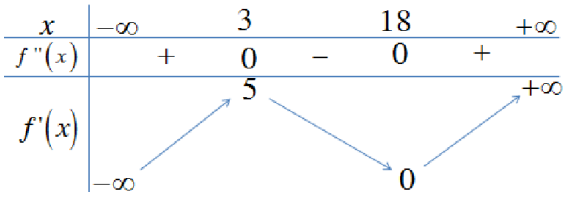
Câu 23. **(Liên trường Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn. Biết $f(0)=0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có hình vẽ bên dưới.



Tập nghiệm của phương trình $f\left(\left|2\sin x-1\right|-1\right)=m$ (với m là tham số) trên đoạn $[0;3\pi]$ có tất cả bao nhiêu phần tử?

A. 8. **B.** 20. **C.** 12. **D.** 16.

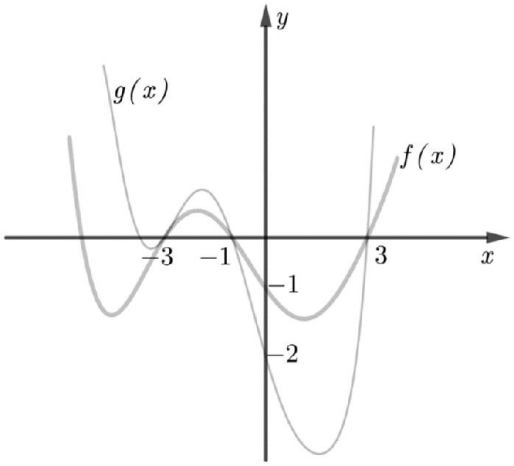
Câu 24. **(Kìm Thành - Hải Dương - 2020)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:



Bất phương trình $e^{\sqrt{x}}\ge m-f\left(x\right)$ có nghiệm $x\in\left[4;16\right]$ khi và chỉ khi:

A. $m<f\left(4\right)+e^2$. **B.** $m\le f\left(4\right)+e^2$. **C.** $m<f\left(16\right)+e^2$. **D.** $m\le f\left(16\right)+e^2$.

Câu 25. **(Kìm Thành - Hải Dương - 2020)** Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây đường đậm hơn là đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$. Biết rằng hai đồ thị tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ là -3 và cắt nhau tại hai điểm nữa có hoành độ lần lượt là -1 và 3. Tìm tập hợp tất các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f\left(x\right)\ge g\left(x\right)+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left[-3;3\right]$.

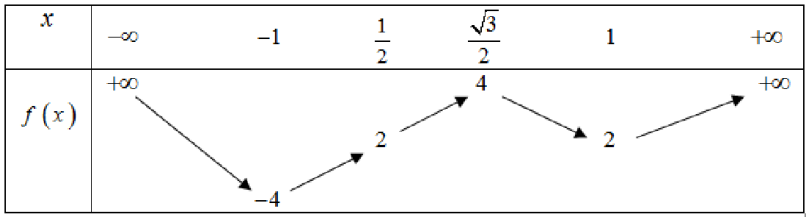


A. $\left(-\infty;\dfrac{12-10\sqrt{3}}{9}\right]$. **B.** $\left[\dfrac{12-8\sqrt{3}}{9};+\infty\right)$. **C.** $\left[\dfrac{12-10\sqrt{3}}{9};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\dfrac{12-8\sqrt{3}}{9}\right]$.

Câu 26. **(Kìm Thành - Hải Dương - 2020)** Cho hàm số $f\left(x\right)=x^5+3x^3-4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f\left(x\right)+m}\right)=x^3-m$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[1;2\right]$?

A. 18. **B.** 17. **C.** 15. **D.** 16.

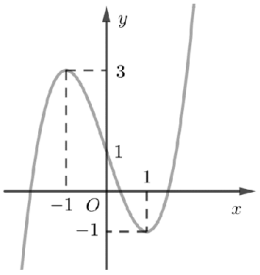
Câu 27. **(Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2\left(\cos x\right)+\left(3-m\right)f\left(\cos x\right)+2m-10=0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{3};\pi\right]$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 4.

Câu 28. **(Trần Phú - Quảng Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $y=f(\sin x)=3\sin x+m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$. Tổng các phần tử của S bằng



A. -5. **B.** -8. **C.** -6. **D.** -10.

Câu 29. **(NK HCM-2019)** Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên đoạn $[-2;9]$, biết $f(-1)=f(2)=f(9)=3$ và $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

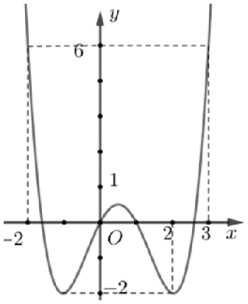
x	-2		0		6		9
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	↗	6	↘	-4	↗	3

Tìm m để phương trình $f(x)=f(m)$ có ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-2;9]$.

A. $m\in(-2;9]\setminus((-1;2)\cup\{6\})$. **B.** $m\in[-2;9]\setminus((-1;2)\cup\{6\})$.

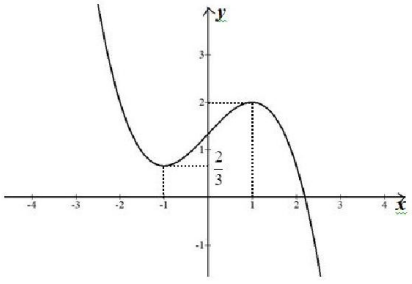
C. $m\in(-2;9]\setminus\{6\}$. **D.** $m\in[-2;9]\setminus\{-2;6\}$.

Câu 30. **(Chuyên Đại học Vinh 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x^3-3x)=m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?



A. 3. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 7.

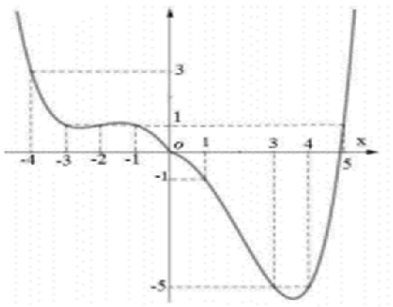
Câu 31. **(Hội 8 trường chuyên ĐBSH 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số giá trị nguyên dương của m để phương trình $f(x^2-4x+5)+1=m$ có nghiệm là

A. Vô số. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)=m-3$ có nghiệm



A. 13. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 33. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	3	↘	$-\infty$

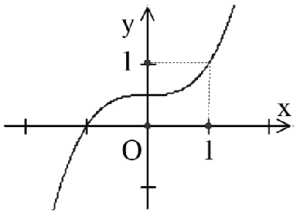
Tìm m để phương trình $f^2(2x)-2f(2x)-m-1=0$ có nghiệm trên $(-\infty;1)$

A. $(-1;+\infty)$. **B.** $[-2;+\infty)$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $[-1;+\infty)$.

Câu 34. **(Sở Hà Nam - 2019)** Cho hàm số $f(x)=x^2-4x+3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|)-(m-6)f(|x|)-m+5=0$ có 6 nghiệm thực phân biệt?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ



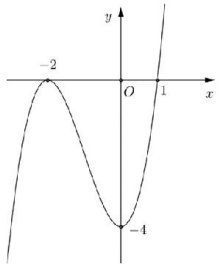
Gọi S là tập hợp các giá trị của $m(m\in\mathbb{R})$ sao cho

$(x-1)\left[m^3f(2x-1)-mf(x)+f(x)-1\right]\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}.$

Số phần tử của tập S là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2 **D.** 1.

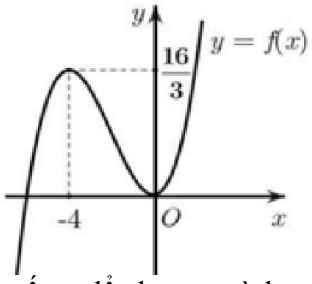
Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên dưới



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(x)-(m+5)|f(x)|+4m+4=0$ có 7 nghiệm phân biệt?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

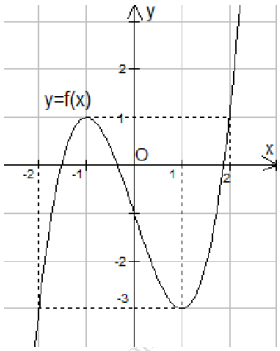
Câu 37. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|\right)=f\left(m^2+4m+4\right)$ có nghiệm.

A. 4. **B.** 5. **C.** Vô số. **D.** 3.

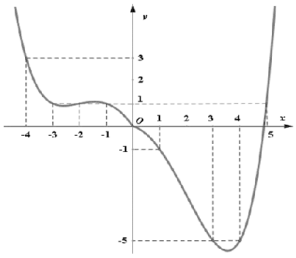
Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình bên.



Phương trình $f(2\sin x)=m$ có đúng ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$ khi và chỉ khi

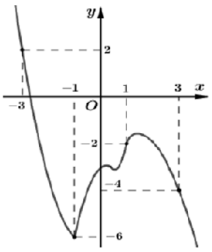
A. $m\in\{-3;1\}$.. **B.** $m\in(-3;1)$.. **C.** $m\in[-3;1)$.. **D.** $m\in(-3;1]$.

Câu 39. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2.f\left(3-3\sqrt{-9x^2+30x-21}\right)=m-2019$ có nghiệm.



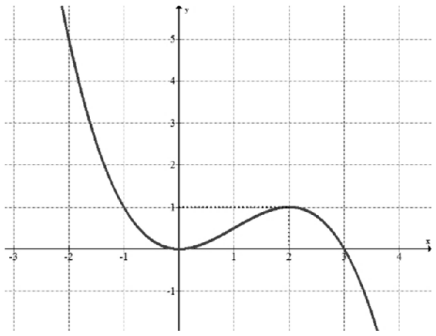
A. 15. **B.** 14. **C.** 10. **D.** 13.

Câu 40. **(Thi thử cụm Vũng Tàu - 2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)=m-3$ có nghiệm.



A. 9. **B.** 17. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 41. **(SGD Điện Biên - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ với $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, đạt cực trị tại điểm $O(0;0)$ và cắt trục hoành tại $A(3;0)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên $[-5;5]$ để phương trình $f(-x^2+2x+m)=e$ có bốn nghiệm phân biệt.



A. 0. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[-2;4]$ và có bảng biến thiên như sau

x	-2		0		1		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	↗	2	↘	$1,5$	↘	1	↗	6

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{9}{x^2}-4\ge 0\\ 6f(-2x+1)-8x^3+6x-m=0\end{cases}$ có ba nghiệm phân biệt?

Nguyễn Bảo Vương

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

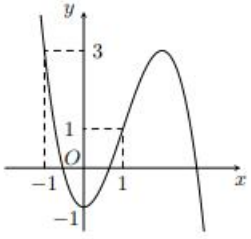
Câu 43. **(Hậu Lộc 2-Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$ và có bảng biến thiên như hình sau:

x	0		1		2		3		5
$f(x)$	4	↘	1	↗	3	↘	1	↗	3

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $mf(x)+\sqrt{3x}\le 2019f(x)-\sqrt{10-2x}$ nghiệm đúng với mọi $x\in[0;5]$.

A. 2014. **B.** 2015. **C.** 2019. **D.** Vô số.

Câu 44. **(Hậu Lộc 2-Thanh Hóa -2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(cosx)+(m-2018)f(cosx)+m-2019=0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;2\pi]$ là



A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

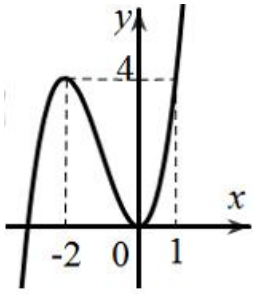
Câu 45. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm m để phương trình $2f(x+2019)-m=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

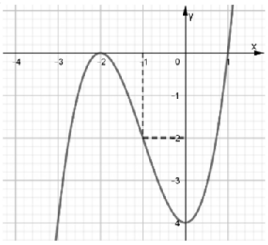
A. $m\in(0;2)$. **B.** $m\in(-2;2)$. **C.** $m\in(-4;2)$. **D.** $m\in(-2;1)$.

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x^2+2x-2)=3m+1$ có nghiệm thuộc khoảng $[0;1]$..



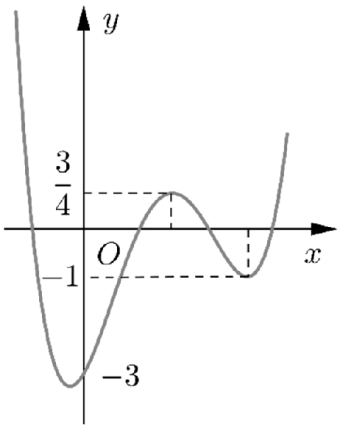
A. $[0;4]$. **B.** $[-1;0]$. **C.** $[0;1]$. **D.** $\left[-\frac{1}{3};1\right]$

Câu 47. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{4x-x^2}-1\right)=m$ có nghiệm là



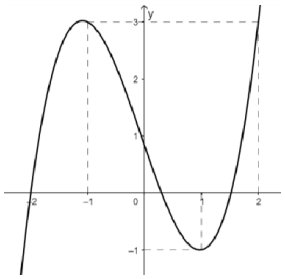
A. $[-2;0]$. **B.** $[-4;-2]$. **C.** $[-4;0]$. **D.** $[-1;1]$.

Câu 48. **(Sở Hà Nội 2019)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x+m|)=m$ có 4 nghiệm phân biệt là



A. 2. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 0.

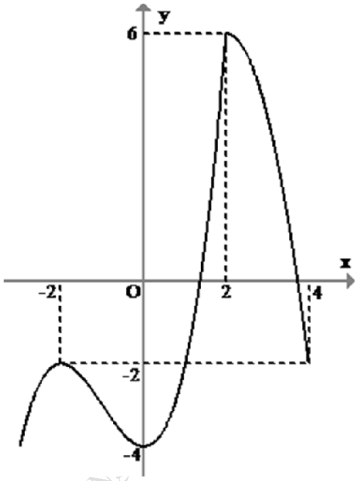
Câu 49. **(Chuyen Phan Bội Châu 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sqrt{4-x^2})=m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $[-\sqrt{2};\sqrt{3})$ là:

A. $[-1;3]$. **B.** $[-1;f(\sqrt{2})]$. **C.** $(-1;f(\sqrt{2})]$. **D.** $(-1;3]$.

Câu 50. **(Chuyên Dại Học Vinh 2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



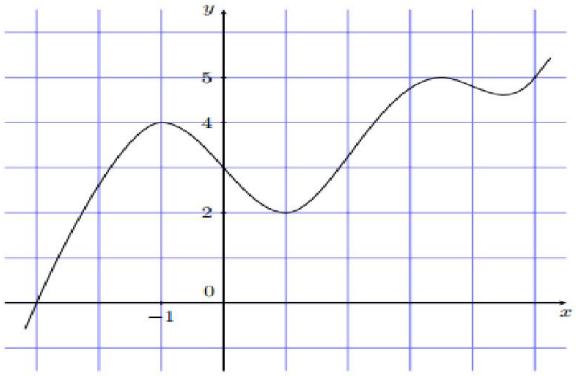
Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}+1\right)+x=m$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[-2;2\right]$?

A. 11 **B.** 9 **C.** 8 **D.** 10

Câu 51. **(THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019)** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $x^2\left(|x|-3\right)+2-m^2\left(|m|-3\right)=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

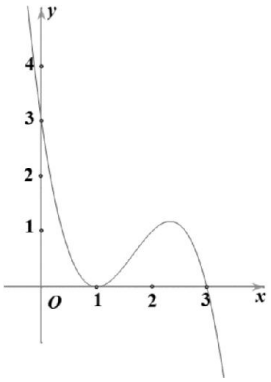
A. 3 **B.** 12 **C.** $T=7$ **D.** 5

Câu 52. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(x^2-2x\right)=m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$.



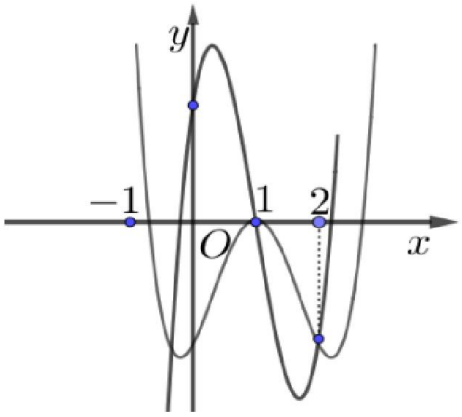
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 53. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0)=0$ và $f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Phương trình $\left|f(|x|)\right|=m$ (với m là tham số) có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?



A. 8 **B.** 6 **C.** 2 **D.** 4

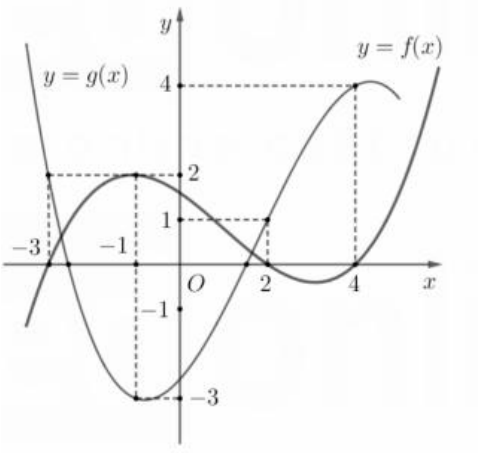
Câu 54. **(Thanh Tường Nghệ An 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức với hệ số thực. Hình vẽ bên dưới là một phần đồ thị của hai hàm số: $y=f(x)$ và $y=f'(x)$.



Tập các giá trị của tham số m để phương trình $f(x)=me^x$ có hai nghiệm phân biệt trên $[0;2]$ là nửa khoảng $[a;b)$. Tổng $a+b$ gần nhất với giá trị nào sau đây?

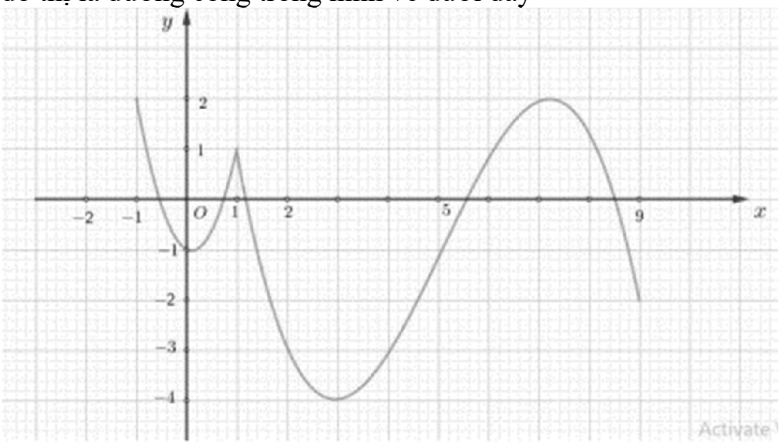
A. -0.81. **B.** -0.54. **C.** -0.27. **D.** 0.27.

Câu 55. **(VTED 2019)** Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là các hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên (trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y=f(x)$). Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(1-g\left(2x-1\right)\right)=m$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[-1;\frac{5}{2}\right]$.



A. 8 **B.** 3 **C.** 6 **D.** 4

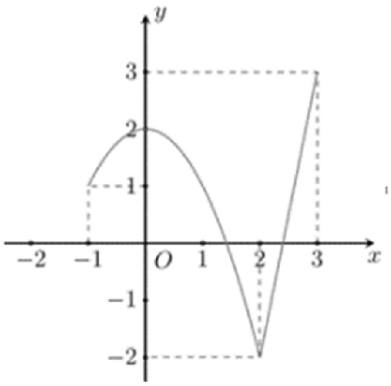
Câu 56. **(THPT Yên Khánh A - Ninh Bình - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;9]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $16.3^{f(x)}-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].4^{f(x)}\ge\left(m^2-3m\right).6^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi giá trị thuộc $[-1;9]$?

A. 32. **B.** 31. **C.** 5. **D.** 6.

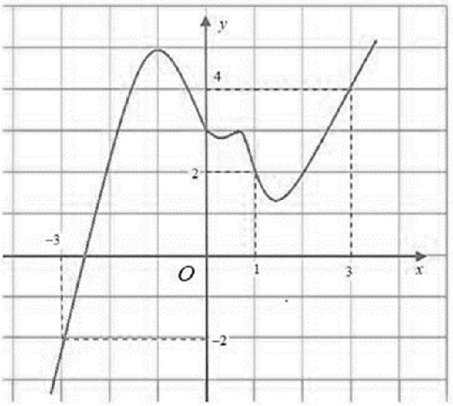
Câu 57. **(THPT Yên Khánh A - Ninh Bình - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Bất phương trình $f(x)+\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}\ge m$ có nghiệm thuộc $[-1;3]$ khi và chỉ khi

A. $m\le 7$. **B.** $m\ge 7$. **C.** $m\le 2\sqrt{2}-2$. **D.** $m\ge 2\sqrt{2}-2$.

Câu 58. **(THPT Yên Khánh A - Ninh Bình - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-3;3]$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Biết $f(1)=6$ và $g(x)=f(x)-\dfrac{(x+1)^2}{2}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**

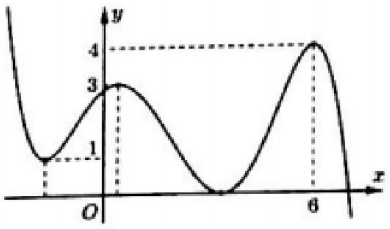
A. Phương trình $g(x)=0$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

B. Phương trình $g(x)=0$ không có nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

C. Phương trình $g(x)=0$ có đúng một nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

D. Phương trình $g(x)=0$ có đúng ba nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

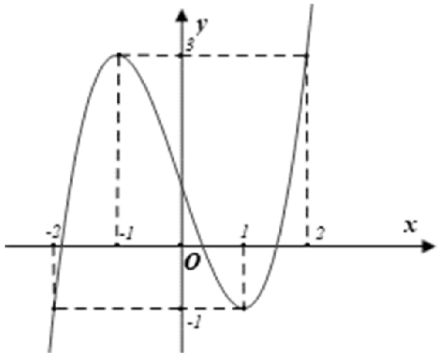
Câu 59. **(Chuyên Sơn La - Lần 2 - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Các giá trị của tham số m để phương trình $\dfrac{4m^3+m}{\sqrt{2f^2(x)+5}}=f^2(x)+3$ có ba nghiệm phân biệt là

A. $m=\dfrac{\sqrt{37}}{2}$. **B.** $m=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $m=\pm\dfrac{\sqrt{37}}{2}$. **D.** $m=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 60. **(THPT Ngô Quyền - Ba Vì - 2019)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ sau đây. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để phương trình $f(f(x))=m$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?



A. 5. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 61. **(THPT Nguyễn Đức Cảnh - Thái Bình - 2019)** Cho hàm số $g(x)=2x^3+x^2-8x$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\sqrt{g(g(x)+3)-m}=2g(x)+7$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt

A. 7. **B.** 8. **C.** 24. **D.** 25.

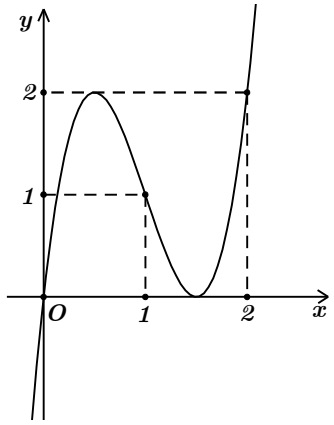
Câu 62. **(THPT Hà Nam - 2019)** Cho hàm số $f(x)=x^2-4x+3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|)-(m-6)f(|x|)-m+5=0$ có 6 nghiệm thực phân biệt?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 63. **(Sở GD Bạc Liêu - 2019)** Cho hàm số $f(x)=2x^3+x^2-8x+7$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\sqrt{f(f(x)-3)+m}=2f(x)-5$ có 6 nghiệm thực phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

A. 25. **B.** -66. **C.** 105. **D.** 91.

Câu 64. **(Quang Trung - Bình Phước - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Bất phương trình $f\left(2\sin x\right)-2\sin^2 x<m$ đúng với mọi $x\in\left(0;\pi\right)$ khi và chỉ khi

A. $m>f\left(0\right)-\dfrac{1}{2}$. **B.** $m>f\left(1\right)-\dfrac{1}{2}$. **C.** $m\geq f\left(1\right)-\dfrac{1}{2}$. **D.** $m\geq f\left(0\right)-\dfrac{1}{2}$.

Câu 65. **(Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)=x^5+3x^3-4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f\left(x\right)+m}\right)=x^3-m$ có nghiệm thuộc $\left[1;2\right]$?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

---------- HẾT ----------

Nguyễn Bảo Vương

DẠNG TOÁN DÀNH CHO HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

Dạng 1. Bài toán tương giao đồ thị thông qua đồ thị, bảng biến thiên

Nghiệm của phương trình $af(x)+b=0$ là số giao điểm của đường thẳng $y=\dfrac{-b}{a}$ với đồ thị hàm số $y=f(x)$

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $3f(x)-2=0$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

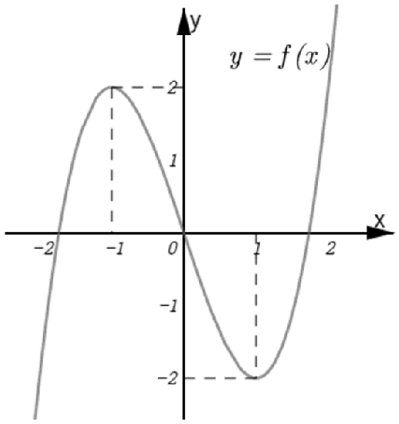
Ta có $3f(x)-2=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2}{3}$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

$y=\dfrac{2}{3}$

Căn cứ vào bảng biến thiên thì phương trinh $3f(x)-2=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2}{3}$ có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 2. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=-1$ là:

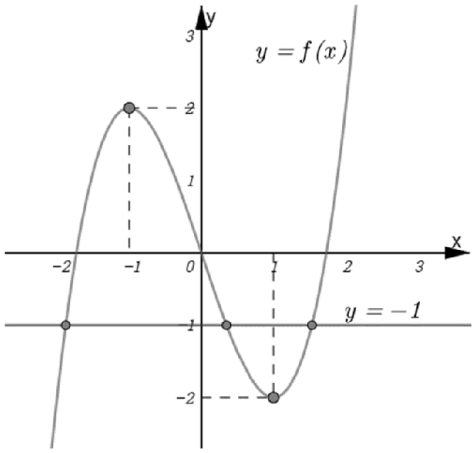


A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

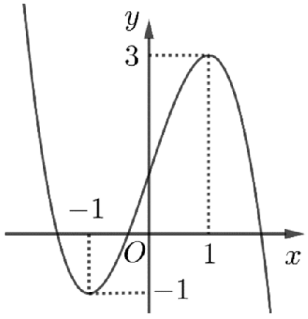
Chọn A.

Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=-1$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-1$.



Từ hình vẽ suy ra 3 nghiệm.

Câu 3. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=1$ là



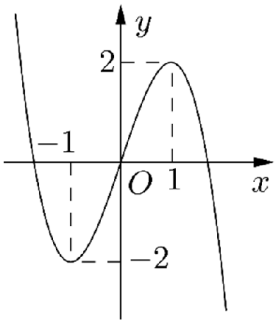
A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $f(x)=1$ có 3 nghiệm.

Câu 4. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=1$ là



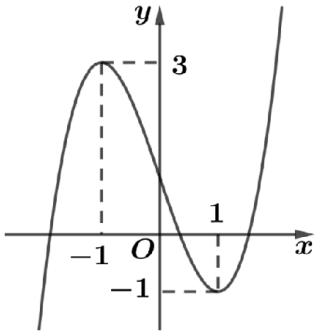
A. 1. **B.** 0.
C. 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số ta có số nghiệm thực của phương trình $f(x)=1$ là 3.

Câu 5. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=2$ là:

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với đường thẳng $y=2$.

Dựa vào đồ thị ta có phương trình có ba nghiệm phân biệt.

Câu 6. **(Mã 101 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	3	↘		↗	3	↘	
	$-\infty$				-1				$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)-3=0$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

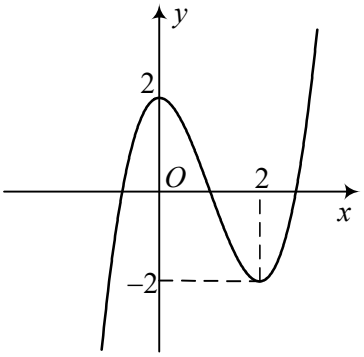
Chọn C

Ta có $2f(x)-3=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{3}{2}$.

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên của $f(x)$ ta có số giao điểm của đồ thị

Câu 7. **(Mã 101 2018)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x)+4=0$ là



A. 2 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 3

Lời giải

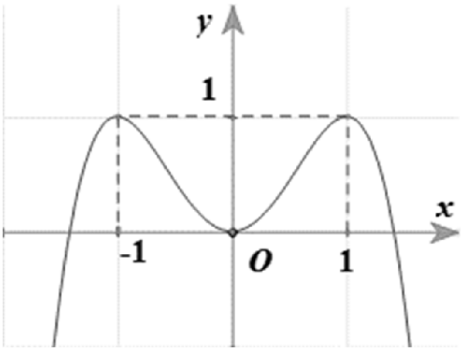
Chọn D

Ta có: $3f(x)+4=0 \Leftrightarrow f(x)=-\frac{4}{3}$ $(*)$

$(*)$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-\frac{4}{3}$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy $(*)$ có 3 nghiệm.

Câu 8. **(Mã 102 2018)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R})$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên.



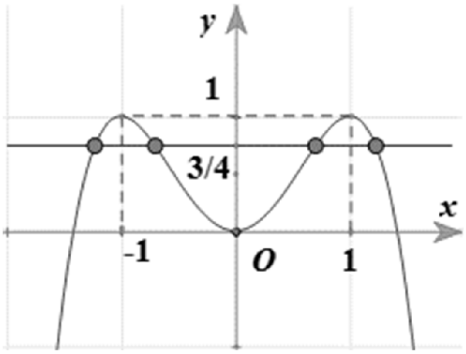
Số nghiệm của phương trình $4f(x)-3=0$ là

A. 2 **B.** 0 **C.** 4 **D.** 3

Lời giải

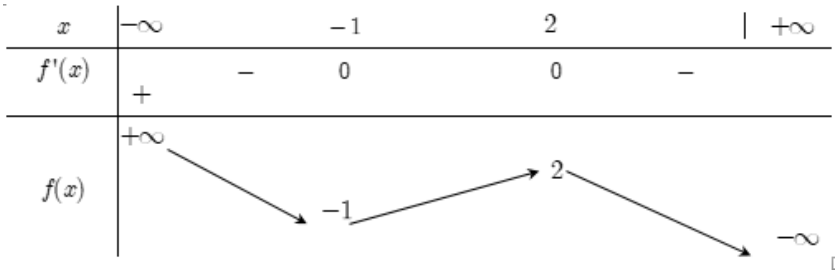
Chọn C

Ta có $4f(x)-3=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{3}{4}$



Đường thẳng $y=\frac{3}{4}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 4 điểm phân biệt nên phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 9. **(Mã 103 2019)** Cho hàm số $f(x)$ bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)-3=0$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

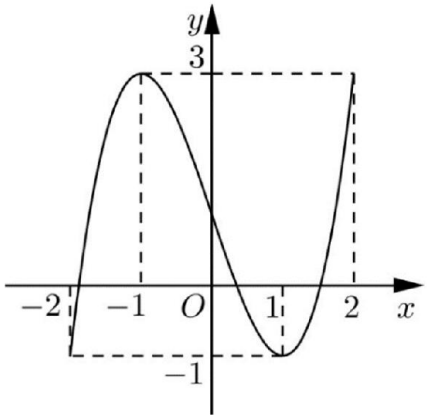
Ta có $2f(x)-3=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{3}{2}$ (1).

Số nghiệm thực của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với đường thẳng $y=\frac{3}{2}$.

Từ bảng biến thiên đã cho của hàm số $f(x)$, ta thấy đường thẳng $y=\frac{3}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt.

Do đó phương trình (1) có ba nghiệm thực phân biệt.

Câu 10. **(Mã 103 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-2;2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x)-4=0$ trên đoạn $[-2;2]$ là



A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

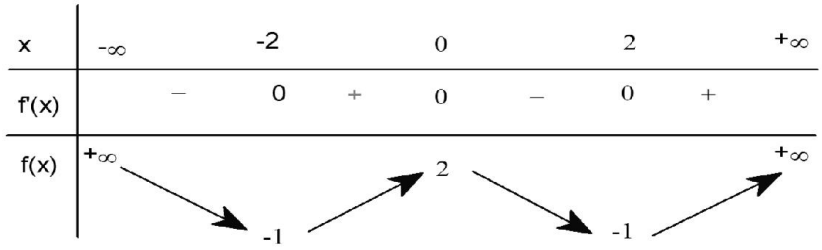
Lời giải

Chọn B

Ta có $3f(x)-4=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{4}{3}$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy đường thẳng $y=\frac{4}{3}$ cắt $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 11. (Mã 102 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như



sau

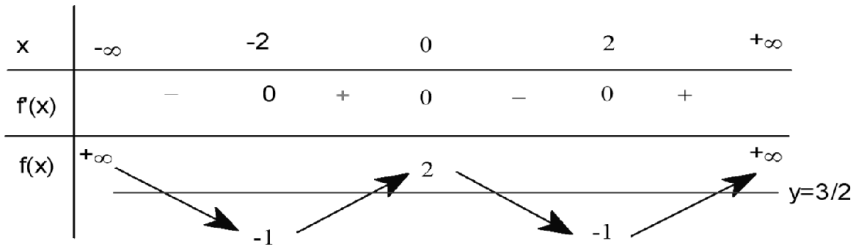
Số nghiệm thực của phương trình $3f(x)-5=0$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

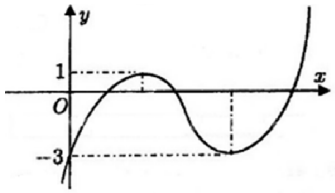
Bảng biến thiên



Xét phương trình $3f(x)-5=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{5}{3}$.

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $(C): y=f(x)$ và đường thẳng $d: y=\frac{3}{2}$. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt.

Câu 12. (THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



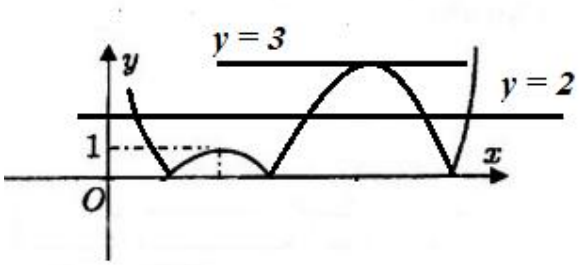
Số nghiệm của phương trình $|f(x)|=2$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

*Đồ thị $y=|f(x)|$

- Bước 1: Giữ nguyên phần đồ thị của $y=f(x)$ nằm phía trên Ox
- Bước 2: Lấy đối xứng phần đồ thị của $y=f(x)$ nằm phía dưới Ox qua trục hoàn.
- Bước 3: Xóa phần đồ thị của $y=f(x)$ nằm phía dưới trục hoành



Số nghiệm của phương trình $|f(x)|=2$ cũng chính là số giao điểm cũng đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ và đường thẳng $y=2$. Dựa vào hình vẽ trên, ta thấy có 4 giao điểm.

***Cách giải khác:**

$|f(x)|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=2 \\ f(x)=-2 \end{array}\right.$, dựa vào đồ thị suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm

Câu 13. **(Mã 104 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)+3=0$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

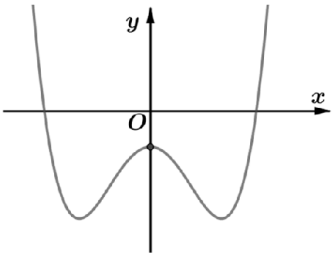
x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

$y=-\frac{3}{2}$

Ta có $2f(x)+3=0 \Leftrightarrow f(x)=-\frac{3}{2}$.

Nhìn bảng biến thiên ta thấy phương trình này có 3 nghiệm.

Câu 14. **(Mã 110 2017)** Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y=ax^4+bx^2+c$, với a,b,c là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. Phương trình $y'=0$ vô nghiệm trên tập số thực

B. Phương trình $y'=0$ có đúng một nghiệm thực

C. Phương trình $y'=0$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt

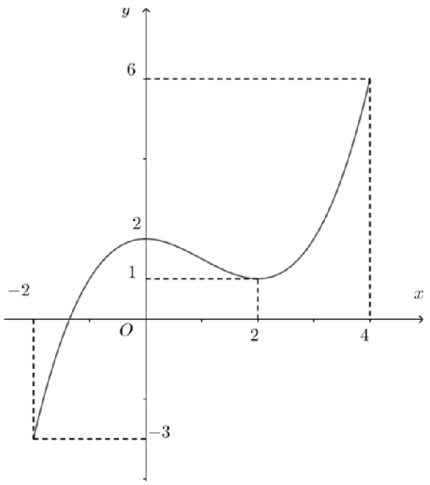
D. Phương trình $y'=0$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt

Lời giải

Chọn D

Dựa vào hình dáng của đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ ta thấy đây là đồ thị của hàm số bậc bốn trùng phương có 3 điểm cực trị nên phương trình $y'=0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

Câu 15. **(Mã 104 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x)-5=0$ trên đoạn $[-2;4]$ là



A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 3

Lời giải

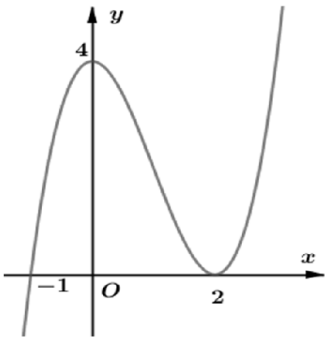
Chọn D

Ta có $3f(x)-5=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{5}{3}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y=\frac{5}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt thuộc đoạn $[-2;4]$.

Do đó phương trình $3f(x)-5=0$ có ba nghiệm thực.

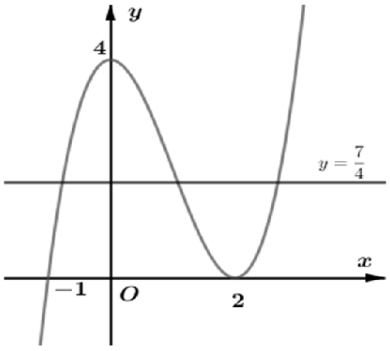
Câu 16. **(THPT Cù Huy Cận 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thực của phương trình $4f(x)-7=0$

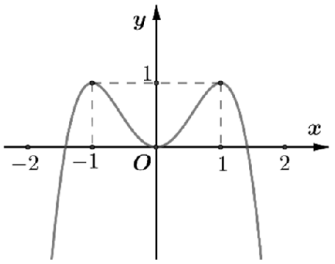
A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải



Ta có: $4f(x)-7=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{7}{4}$. Do đường thẳng $y=\frac{7}{4}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Câu 17. **(TRƯỜNG Thpt Lương Tài Số 2 2019)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $1-2.f(x)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?



A. 4 **B.** 3
C. Vô nghiệm **D.** 2

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình: $1-2.f(x)=0(1) \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x)(C) \\ y=\frac{1}{2}(d) \end{cases}$

Số giao điểm của đường thẳng (d) và đường cong (C) ứng với số nghiệm của phương trình (1).

Theo hình vẽ ta có 4 giao điểm => phương trình (1) sẽ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 18. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau đây.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Hỏi phương trình $2.f(x)-5=0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Phương trình $2.f(x)-5=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{5}{2}(*)$.

Số nghiệm của phương trình $(*)$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=\frac{5}{2}$. Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy 2 đồ thị $y=f(x)$ và $y=\frac{5}{2}$ có 3 điểm chung.

Vậy phương trình $2.f\left(x\right)-5=0$ có 3 nghiệm thực.

Câu 19. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)-3=0$ là

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0

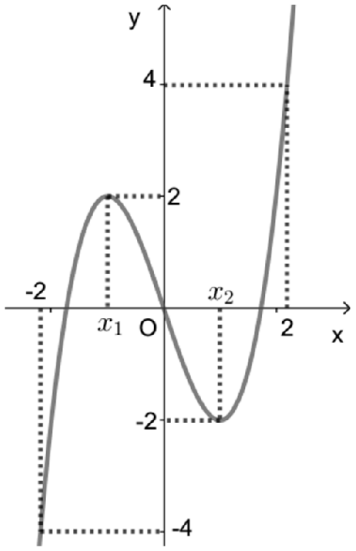
Lời giải

Chọn A

Ta có: $f\left(x\right)-3=0\Leftrightarrow f\left(x\right)=3$, theo bảng biến thiên ta có phương trình có 3 nghiệm.

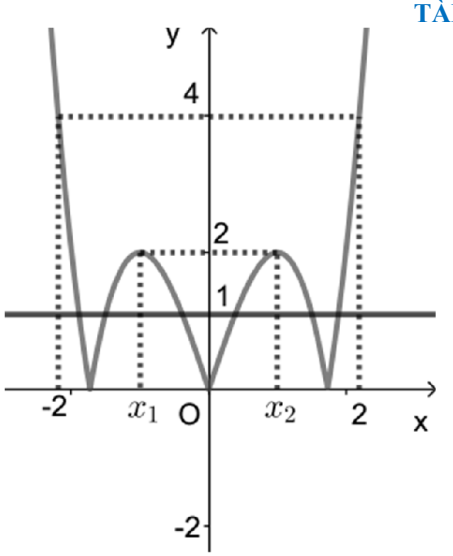
Câu 20. **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[-2;2\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm của phương trình $\left|f(x)\right|=1$ trên đoạn $\left[-2;2\right]$.

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.



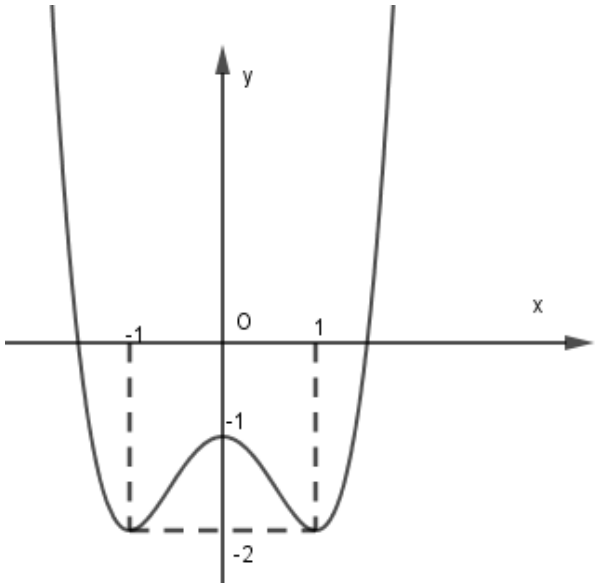
Lời giải

Ta có số nghiệm của phương trình $\left|f(x)\right|=1$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left|f(x)\right|$ với đường thẳng $y=1$.



Từ hình vẽ ta thấy đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ tại 6 điểm. Vậy số nghiệm của phương trình $|f(x)|=1$ là 6.

Câu 21. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=-\frac{3}{2}$ là

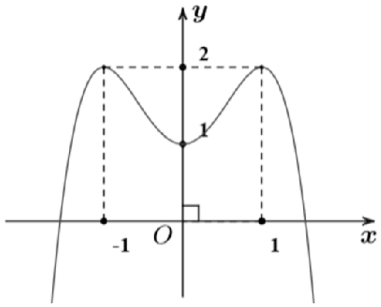


A. 4 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2

Lời giải

Từ đồ thị ta $f(x)=-\frac{3}{2}$ có 4 nghiệm phân biệt

Câu 22. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=\frac{1}{2}$ là

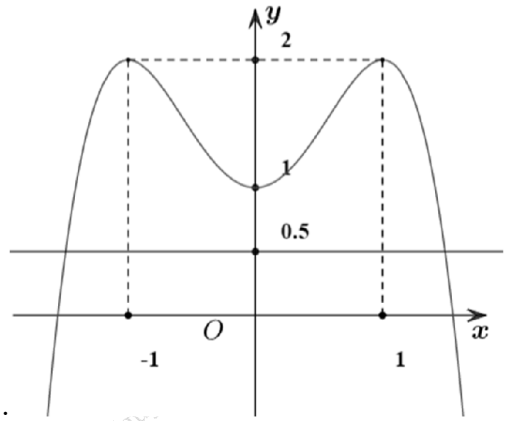


A. 2 . **B.** 4 . **C.** 1 . **D.** 3 .

Lời giải

Chọn A

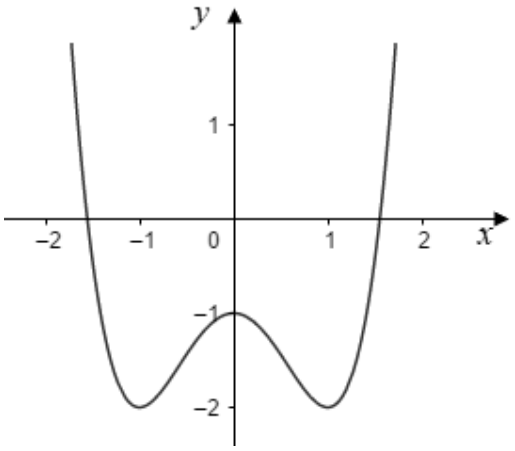
Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=\frac{1}{2}$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)$ với đường thẳng $y=\frac{1}{2}$



Dựa vào hình trên ta thấy đồ thị hàm số $f(x)$ với đường thẳng $y=\frac{1}{2}$ có 2 giao điểm.

Vậy phương trình $f(x)=\frac{1}{2}$ có hai nghiệm.

Câu 23. **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm của phương trình $f(x)=-\frac{1}{2}$ là

A. 3 . **B.** 4 . **C.** 2 . **D.** $x=1$.

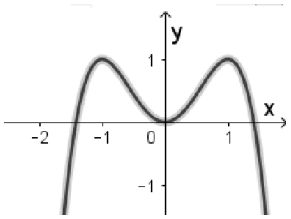
Lời giải

Số nghiệm của phương trình $f(x)=-\frac{1}{2}$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-\frac{1}{2}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy: đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-\frac{1}{2}$ cắt nhau tại 2 điểm.

Nên phương trình $f(x)=-\frac{1}{2}$ có 2 nghiệm.

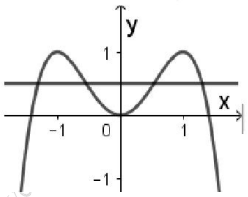
Câu 24. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=\frac{1}{2}$ là



A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A



Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=\frac{1}{2}$ bằng số giao điểm của đường thẳng $y=\frac{1}{2}$ và có đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Ta thấy đường thẳng $y=\frac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số tại 4 điểm nên phương trình $f(x)=\frac{1}{2}$ có 4 nghiệm.

Dạng 2. Bài toán tương giao đồ thị thông qua hàm số cho trước (không chứa tham số)

Cho hai đồ thị $y=f(x)$ và $y=g(x)$.

Bước 1. Giải phương trình $f(x)=g(x)$.

Bước 2. Tìm

- Số giao điểm?
- Hoành độ giao điểm?
- Tung độ giao điểm?

Câu 25. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ và trục hoành là

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-3=3\left(x^2-1\right); y'=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$y'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$y(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Câu 26. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ và đồ thị hàm số $y=3x^2+3x$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:

$$x^3+3x^2=3x^2+3x \Leftrightarrow x^3-3x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{array}\right. .$$

Hai đồ thị đã cho cắt nhau tại 3 điểm.

Câu 27. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-x^2$ và đồ thị hàm số $y=-x^2+5x$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-x^2$ và đồ thị hàm số $y=-x^2+5x$ chính là số nghiệm thực của phương trình $x^3-x^2=-x^2+5x \Leftrightarrow x^3-5x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Câu 28. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+x^2$ và đồ thị hàm số $y=x^2+5x$

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3+x^2=x^2+5x \Leftrightarrow x^3-5x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Vậy số giao điểm của 2 đồ thị là 3.

Câu 29. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^2+3x$ và đồ thị hàm số $y=x^3-x^2$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là $x^3-x^2=-x^2+3x \Leftrightarrow x^3-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Câu 30. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+7x$ với trục hoành là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục hoành là: $-x^3+7x=0$

$\Leftrightarrow x\left(x^2-7\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{7} \end{array}\right.$.

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+7x$ với trục hoành bằng 3.

Câu 31. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+3x$ với trục hoành là

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm $-x^3+3x=0 \Leftrightarrow x(-x^2+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Vậy có 3 giao điểm.

Câu 32. **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+6x$ với trục hoành là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+6x$ với trục hoành là nghiệm của phương trình $-x^3+6x=0$ (*) $\Leftrightarrow -x\left(x^2-6\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{6} \end{array}\right.$.

Phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt, do đó đồ thị hàm số $y=-x^3+6x$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

Câu 33. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+5x$ với trục hoành là:

A. 3 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 1

Lời giải

Chọn A.

Ta có $-x^3+5x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{5} \\ x=-\sqrt{5} \\ x=0 \end{array}\right.$

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+5x$ với trục hoành là 3

Câu 34. **(Mã 105 2017)** Cho hàm số $y=\left(x-2\right)\left(x^2+1\right)$ có đồ thị $\left(C\right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\left(C\right)$ cắt trục hoành tại một điểm. **B.** $\left(C\right)$ cắt trục hoành tại ba điểm.

C. $\left(C\right)$ cắt trục hoành tại hai điểm. **D.** $\left(C\right)$ không cắt trục hoành.

Lời giải

Chọn A

Dễ thấy phương trình $\left(x-2\right)\left(x^2+1\right)=0$ có 1 nghiệm $x=2 \Rightarrow \left(C\right)$ cắt trục hoành tại một điểm.

Câu 35. **(Đề Minh Họa 2017)** Biết rằng đường thẳng $y=-2x+2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+x+2$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0;y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0

A. $y_0=4$ **B.** $y_0=0$ **C.** $y_0=2$ **D.** $y_0=-1$

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-2x+2=x^3+x+2\Leftrightarrow x^3+3x=0\Leftrightarrow x=0$

Với $x_0=0\Rightarrow y_0=2$.

Câu 36. **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Gọi P là số giao điểm của hai đồ thị $y=x^3-x^2+1$ và $y=x^2+1$. Tìm P.

A. $P=0$. **B.** $P=2$. **C.** $P=1$. **D.** $P=3$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y=x^3-x^2+1$ và $y=x^2+1$:

$$x^3-x^2+1=x^2+1\Leftrightarrow x^3-2x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$$

Với $x=0\Rightarrow y=1$.

Với $x=2\Rightarrow y=5$.

Nên hai đồ thị trên có hai giao điểm là $(0;1)$ và $(2;5)$.

Vậy $P=2$.

Câu 37. **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho hàm số $y=x^3-3x$ có đồ thị (C). Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

A. 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 0

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành: $x^3-3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$

Vậy số giao điểm của (C) và trục hoành là 3.

Câu 38. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình 2019)** Cho hàm số $y=x^4-3x^2$ có đồ thị (C). Số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $y=2$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải

Số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $y=2$ là số nghiệm của phương trình sau:

$$x^4-3x^2=2\Leftrightarrow x^4-3x^2-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\\x^2=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}<0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}.$$

Phương trình hoành độ giao điểm có 2 nghiệm nên số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng là 2.

Câu 39. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Biết rằng đường thẳng $y=4x+5$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2x+1$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0;y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0.

A. $y_0=10$. **B.** $y_0=13$. **C.** $y_0=11$. **D.** $y_0=12$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^3+2x+1=4x+5\Leftrightarrow x^3-2x-4=0\Leftrightarrow x=2$

Với $x=2\Rightarrow y=13$. Vậy $y_0=13$

Câu 40. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Đồ thị của hàm số $y=-x^4-3x^2+1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bao nhiêu

A. -3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Trục tung có phương trình: $x=0$. Thay $x=0$ vào $y=-x^4-3x^2+1$ được: $y=1$.

Câu 41. **(THPT Việt Đức Hà Nội 2019)** Số giao điểm của đường cong $y=x^3-2x^2+2x+1$ và đường thẳng $y=1-x$ là

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$x^3-2x^2+2x+1=1-x$

$\Leftrightarrow x^3-2x^2+3x=0$

$\Leftrightarrow x\left(x^2-2x+3\right)=0\Leftrightarrow x=0$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 42. đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2+1$ và đồ thị hàm số $y=-2x^2+7$ có bao nhiêu điểm chung?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

Pthdgd:

$$x^4-3x^2+1=-2x^2+7\Leftrightarrow x^4-x^2-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=3\\x^2=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}.$$

Do pt có 2 nghiệm nên đồ thị hai hàm số có 2 điểm chung.

Câu 43. Cho hàm số $y=-2x^3+5x$ có đồ thị (C) Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B.

Pthd của (C) và trục hoành là:

$$-2x^3+5x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}\end{array}\right.\text{ có 3 giao điểm.}$$

Chú ý: Ở bài toán này hoàn toàn có thể giải trực tiếp bằng Casio với phương trình $-2x^3+5x=0$, nhưng chắc chắn thao tác bấm máy sẽ chậm hơn việc tính tay(thậm chí bài này không cần nháp

khi mà kết quả đã hiện ra luôn khi ta đọc đề xong). Vì vậy, Casio là điều không cần thiết với câu hỏi này.

Câu 44. Cho hàm số $y=(x-3)(x^2+2)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (C) cắt trục hoành tại hai điểm. **B.** (C) cắt trục hoành tại một điểm.

C. (C) không cắt trục hoành. **D.** (C) cắt trục hoành tại ba điểm.

Lời giải

Chọn B.

Pthd của (C) và trục hoành là:

$(x-3)(x^2+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x^2=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=3$ nghĩa là (C) cắt trục hoành tại một điểm

Câu 45. Biết rằng đường thẳng $y=x+2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-x^2+x+4$ tại điểm duy nhất, kí hiệu $(x_0;y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0.

A. $y_0=1$. **B.** $y_0=3$. **C.** $y_0=-2$. **D.** $y_0=4$.

Lời giải

Chọn A.

Pthdgd:

$x+2=x^3-x^2+x+4 \Leftrightarrow x^3-x^2+2=0 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow y_0=1$.

Câu 46. đồ thị hàm số nào sau đây cắt trục tung tại điểm có tung độ âm?

A. $y=\dfrac{x-1}{x-3}$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{x+4}$. **C.** $y=\dfrac{x-1}{x+2}$. **D.** $y=\dfrac{2x-1}{x+5}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn C

Trục tung có phương trình $x=0$, ta thay $x=0$ lần lượt vào các phương án thì chỉ có phương án C cho ta $y=-\dfrac{1}{2}<0$.

Câu 47. Gọi M,N là giao điểm của đường thẳng $y=x+1$ và đường cong $y=\dfrac{2x+4}{x-1}$. Khi đó hoành độ x_I của trung điểm I của đoạn MN bằng bao nhiêu?

A. $x_I=2$. **B.** $x_I=1$. **C.** $x_I=-5$. **D.** $x_I=-\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Pthdgd $\dfrac{2x+4}{x-1}=x+1 (x\neq 1) \Leftrightarrow x^2-2x-5=0$ (*)

Khi đó $x_I=\dfrac{x_M+x_N}{2}=1$.

Chú ý: có thể giải (*), tìm được $x_M=1+\sqrt{6}, x_N=1-\sqrt{6} \Rightarrow x_I=1$

Câu 48. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-3}$ có đồ thị (C) và các đường thẳng $d_1: y=2x$, $d_2: y=2x-2$, $d_3: y=3x+3$, $d_4: y=-x+3$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng trong bốn đường thẳng d_1,d_2,d_3,d_4 đi qua giao điểm của (C) và trục hoành.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A.

Ta có (C) cắt trục hoành $(y-0)$ tại điểm $M(-1;0)$.

Trong các đường thẳng d_1, d_2, d_3, d_4 chỉ có $M \in d_3$, có nghĩa là có 1 đường thẳng đi qua $M(-1;0)$.

Câu 49. (THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019) Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x^4-4}+5$ và đường thẳng $y=x$

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Cách 1: Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{x^4-4}+5=x \Leftrightarrow \sqrt{x^4-4}=x-5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x^4-4=(x-5)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x^4-x^2+10x-29=0 \quad (*) \end{cases}$$

Do $x \geq 5$ nên $x^4-x^2=x^2(x^2-1)>0$ và $10x-29>0$. Vì vậy (*) vô nghiệm

Như vậy phương trình $\sqrt{x^4-4}+5=x$ vô nghiệm hay đồ thị hàm số $y=\sqrt{x^4-4}+5$ và đường thẳng $y=x$ không có giao điểm nào.

Cách 2:

Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{x^4-4}+5=x$. Ta có điều kiện xác định $\left[\begin{array}{l} x \geq \sqrt{2} \\ x \leq -\sqrt{2} \end{array}\right.$

Với điều kiện trên ta có $\sqrt{x^4-4}+5=x \Leftrightarrow \sqrt{x^4-4}+5-x=0$

Xét hàm số $h(x)=\sqrt{x^4-4}+5-x$. Ta có $h'(x)=\dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4-4}}-1$;

$h'(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3=\sqrt{x^4-4}$

Với $x \geq \sqrt{2}$ ta có $2x^3>\sqrt{x^4-4}$. Với $x \leq -\sqrt{2}$ ta có $2x^3<\sqrt{x^4-4}$

Ta có Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$				$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$5+\sqrt{2}$		$5-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^4-4}+5=x$ là số giao điểm của đồ thị $y=h(x)=\sqrt{x^4-4}+5-x$ và trục hoành $y=0$. Dựa vào BBT ta thấy phương trình $\sqrt{x^4-4}+5=x$ vô nghiệm hay đồ thị hàm số $y=\sqrt{x^4-4}+5$ và đường thẳng $y=x$ không có giao điểm nào.

---------- HẾT ----------

DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7+8+9 ĐIỂM

Dạng 1. Bài toán tương giao đường thẳng với đồ thị hàm số bậc 3 (CHỨA THAM SỐ)

📖 **Bài toán tổng quát**: Tìm các giá trị của tham số m để để đường thẳng $d: y = px + q$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tại 3 điểm phân biệt thỏa điều kiện K ? **(dạng có điều kiện)**

✍ **Phương pháp giải**:

Bước 1. Lập phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $ax^3 + bx^2 + cx + d = px + q$

Đưa về phương trình bậc ba và nhẩm nghiệm đặc biệt $x = x_o$ để chia Hoocner được:

$$(x - x_o)\cdot(ax^2 + b'x + c') = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = x_o \\ g(x) = ax^2 + b'x + c' = 0 \end{bmatrix}.$$

Bước 2. Để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác $x_o \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{g(x)} > 0 \\ g(x_o) \neq 0 \end{cases}$. Giải hệ này, tìm được giá trị $m \in D_1$.

Bước 3. Gọi $A(x_o; px_o + q)$, $B(x_1; px_1 + q)$, $C(x_2; px_2 + q)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của $g(x) = 0$.

Theo Viét, ta có: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b'}{a}$ và $x_1 x_2 = \dfrac{c'}{a}$ (1)

Bước 4. Biến đổi điều kiện K về dạng tổng và tích của x_1, x_2 (2)

Thế (1) vào (2) sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến là m. Giải chúng sẽ tìm được giá trị $m \in D_2$.

Kết luận: $m \in D_1 \cap D_2$.

Một số công thức tính nhanh " thường gặp " liên quan đến cấp số

□ **Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.**

Điều kiện cần:

Giả sử x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Khi đó: $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, đồng nhất hệ số ta được $x_2 = -\dfrac{b}{3a}$

Thế $x_2 = -\dfrac{b}{3a}$ vào phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ta được điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số.

Điều kiện đủ:

Thử các điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số để phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

□ **Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số nhân.**

Điều kiện cần:

Giả sử x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Khi đó: $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, đồng nhất hệ số ta được $x_2 = \sqrt[3]{-\dfrac{d}{a}}$

Thế $x_2 = \sqrt[3]{-\dfrac{d}{a}}$ vào phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ta được điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị

của tham số.

Điều kiện đủ:

Thử các điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số để phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ *có 3 nghiệm phân biệt.*

Câu 1. **(Sở Ninh Bình 2020)** Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+2m$. Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3mx^2+2m=0$ $(*)$

Phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ có ba nghiệm lập thành cấp số cộng $\longrightarrow$ phương trình có một nghiệm $x_0=-\dfrac{b}{3a}$.

Suy ra phương trình $(*)$ có một nghiệm $x=m$.

Thay $x=m$ vào phương trình $(*)$, ta được $m^3-3m.m^2+2m=0\Leftrightarrow -2m^3+2m=0\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm 1\\ m=0\end{array}\right.$.

Thử lại:

● Với $m=1$, ta được $x^3-3x^2+2=0\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-\sqrt{3}\\ x=1\\ x=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Do đó $m=1$ thỏa mãn.

● Với $m=-1$, ta được $x^3+3x^2-2=0\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1+\sqrt{3}\\ x=-1\\ x=-1-\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Do đó $m=-1$ thỏa mãn.

● Với $m=0$, ta được $x^3=0\Leftrightarrow x=0$.

Do đó $m=0$ không thỏa mãn.

Vậy $m=\pm 1$ là hai giá trị cần tìm.

Câu 2. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ (C) cắt đường thẳng $d: y=m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt x_1,x_2,x_3.

A. $m>-2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m>-3$. **D.** $m=-3$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$x^3-3x^2+2=m(x-1)$ (1)

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^3-3x^2-mx+2+m=0\Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x-m-2)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=0\\ f(x)=x^2-2x-m-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ f(x)=x^2-2x-m-2=0\end{array}\right.$ (2)

Phương trình (1) luôn có nghiệm $x=1$, vậy để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt thì phương trình (2) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\Delta'=1+m+2>0\\ f(1)\neq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m>-3\\ m\neq -3\end{array}\right.\Leftrightarrow m>-3$.

Vậy $m>-3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Đường thẳng Δ có phương trình $y=2x+1$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-x+3$ tại hai điểm A và B với tọa độ được kí hiệu lần lượt là $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ trong đó $x_B<x_A$. Tìm x_B+y_B?

Nguyễn Bảo Vương

A. $x_B+y_B=-5$ **B.** $x_B+y_B=-2$ **C.** $x_B+y_B=4$ **D.** $x_B+y_B=7$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và $y=x^3-x+3$:

$$x^3-x+3=2x+1\Leftrightarrow x^3-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\Rightarrow y=-3\\x=1\Rightarrow y=3\end{array}\right.$$

Vậy $A(1;3);B(-2;-3)\Rightarrow x_B+y_B=-5$

Câu 4. **(THPT Ba Đình 2019)** Cho hàm số $y=x^3+3mx^2-m^3$ có đồ thị (C_m) và đường thẳng $d:y=m^2x+2m^3$. Biết rằng $m_1,m_2\,(m_1>m_2)$ là hai giá trị thực của m để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^4+x_2^4+x_3^4=83$. Phát biểu nào sau đây là ***đúng*** về quan hệ giữa hai giá trị m_1, m_2?

A. $m_1+m_2=0$. **B.** $m_1^2+2m_2>4$. **C.** $m_2^2+2m_1>4$. **D.** $m_1-m_2=0$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (C_m)

$$x^3+3mx^2-m^3=m^2x+2m^3$$
$$\Leftrightarrow x^3+3mx^2-m^2x-3m^3=0$$
$$\Leftrightarrow\left(x^3-m^2x\right)+\left(3mx^2-3m^3\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x\left(x^2-m^2\right)+3m\left(x^2-m^2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\left(x+3m\right)\left(x^2-m^2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3m\\x=m\\x=-m\end{array}\right.$$

Nguyễn Bảo Vương

Để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1,x_2,x_3\Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó, $x_1^4+x_2^4+x_3^4=83\Leftrightarrow m^4+(-m)^4+(-3m)^4=83$

$\Leftrightarrow 83m^4=83\Leftrightarrow m=\pm 1$

Vậy $m_1=1,m_2=-1$ hay $m_1+m_2=0$.

Câu 5. **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$ cắt đường thẳng $y=m$ tại ba điểm phân biệt.

A. $m\in(-\infty;-4)$. **B.** $m\in(-4;0)$.

C. $m\in(0;+\infty)$. **D.** $m\in(-\infty;-4)\cup(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y=x^3-3x^2\Rightarrow y'=3x^2-6x;\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$ cắt đường thẳng $y=m$ tại ba điểm phân biệt khi $-4<m<0$

Câu 6. **(Mã 123 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=mx-m+1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+x+2$ tại ba điểm A,B,C phân biệt sao $AB=BC$

A. $m\in\left(-\frac{5}{4};+\infty\right)$ **B.** $m\in(-2;+\infty)$

C. $m\in\mathbb{R}$ **D.** $m\in(-\infty;0)\cup[4;+\infty)$

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là:

$x^3-3x^2+x+2=mx-m+1\Leftrightarrow x^3-3x^2+x-mx+m+1=0\quad(1)$

$\Leftrightarrow(x-1)(x^2-2x-m-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x-m-1=0\end{array}\right.$. Để đường thẳng cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt thì phương trình $x^2-2x-m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1. Hay

$\begin{cases}1+m+1>0\\1-2-m-1\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-2\\m\neq-2\end{cases}\Leftrightarrow m>-2$. Với $m>-2$ thì phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt là $1,x_1,x_2$ (x_1,x_2 là nghiệm của $x^2-2x-m-1=0$). Mà $\frac{x_1+x_2}{2}=1$ suy ra điểm có hoành độ x=1 luôn là trung điểm của hai điểm còn lại. Nên luôn có 3 điểm A,B,C thoả mãn $AB=BC$

Vậy $m>-2$.

Câu 7. **(Sở Cần Thơ - 2019)** Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+(m^2-2)x+2m^2+4$ cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 8 là

A. $m=\pm2$. **B.** $m=\pm1$. **C.** $m=\pm\sqrt{3}$. **D.** $m=\pm\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục tung là $B(0;2m^2+4)$

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị đã cho với trục hoành là:

$x^3+(m^2-2)x+2m^2+4=0\Leftrightarrow(x+2)(x^2-2x+m^2+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\(x-1)^2+m^2+1=0\quad(vn)\end{array}\right.$

Giao điểm của đồ thị đã cho với trục hoành là $A(-2;0)$.

Diện tích tam giác ABC là: $S=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}.2.(2m^2+4)=8\Rightarrow m=\pm\sqrt{2}$.

Câu 8. **(Mã 110 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=-mx$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-m+2$ tại ba điểm phân biệt A,B,C sao cho $AB=BC$.

A. $m\in(-\infty;-1)$ **B.** $m\in(-\infty:+\infty)$ **C.** $m\in(1:+\infty)$ **D.** $m\in(-\infty;3)$

Lời giải

Chọn D

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình

$x^3-3x^2-m+2=-mx\Leftrightarrow(x-1)(x^2-2x+m-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x+m-2=0\end{array}\right.$

Đặt nghiệm $x_2=1$. Từ giải thiết bài toán trở thành tìm m để phương trình có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng.

Khi đó phương trình $x^2-2x+m-2=0$ phải có 2 nghiệm phân biệt (vì theo Viet rõ ràng $x_1+x_3=2=2x_2$)

Vậy ta chỉ cần $\Delta'=1-(m-2)>0\Leftrightarrow m<3$

Câu 9. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3+3x^2-2=m$ có ba nghiệm phân biệt.

A. $m\in(2;+\infty]$. **B.** $m\in(-\infty;-2]$. **C.** $m\in(-2;2)$. **D.** $m\in[-2;2]$.

Lời giải

Xét hàm số $y=x^3+3x^2-2$, $y'=3x^2+6x$.

Lập bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $x^3+3x^2-2=m(*)$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-2$ và đường thẳng $y=m$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra PT (*) có 3 nghiệm phân biệt khi $-2<m<2$.

Câu 10. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Đường thẳng Δ có phương trình $y=2x+1$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-x+3$ tại hai điểm A và B với tọa độ được kí hiệu lần lượt là $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ trong đó $x_B<x_A$. Tìm x_B+y_B?

A. $x_B+y_B=-5$ **B.** $x_B+y_B=-2$ **C.** $x_B+y_B=4$ **D.** $x_B+y_B=7$

Lời giải

Nguyễn Bảo Vương

Chọn C

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình: $x^3-x+3=2x+1$

Giải phương trình ta được $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$

Vì $x_B<x_A$ Vậy $x_B=1;y_B=3\Rightarrow x_B+y_B=4$

Câu 11. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3-3x^2=2m+1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{3}{2}$. **C.** $-\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Xét hàm số: $y=2x^3-3x^2\Rightarrow y'=6x^2-6x\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=0\vee x=1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của hai đồ thị:

$$\begin{cases}(C):y=2x^3-3x^2\\ d:y=2m+1\end{cases}$$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy: Phương trình đã cho có hai nghiệm phân

biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m+1=-1 \\ 2m+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow S=\left\{-1;-\dfrac{1}{2}\right\}$.

Vậy tổng các phần tử của S bằng $-1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{-3}{2}$.

Câu 12. **(THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=-x+5$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+3(m-1)x+5$ tại 3 điểm phân biệt.

A. $\left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>2 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} m\neq\dfrac{2}{3} \\ m\leq 1 \end{array}\right. \\ m\geq 2 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} m\neq\dfrac{2}{3} \\ m<1 \end{array}\right. \\ m>2 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\leq 1 \\ m\geq 2 \end{array}\right.$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm chung là: $x^3+2mx^2+3(m-1)x+5=-x+5$

$\Leftrightarrow x^3+2mx^2+(3m-2)x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+2mx+3m-2=0 \ (1) \end{array}\right.$

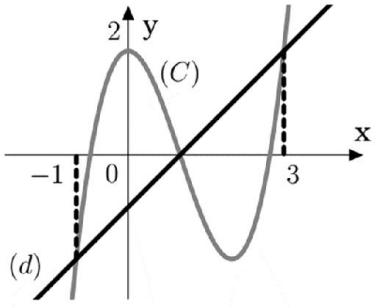
Đường thẳng $y=-x+5$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+3(m-1)x+5$ tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta'=m^2-3m+2>0 \\ 3m-2\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<1 \end{array}\right. \\ m\neq\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} m\neq\dfrac{2}{3} \\ m<1 \end{array}\right. \\ m>2 \end{array}\right.$.

Câu 13. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ, đường thẳng d có phương trình $y=x-1$. Biết phương trình $f(x)=0$ có ba nghiệm $x_1<x_2<x_3$. Giá trị của x_1x_3 bằng

A. -3. **B.** $-\dfrac{7}{3}$. **C.** -2. **D.** $-\dfrac{5}{2}$.



Lời giải

+Ta có: $f(x)=x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

$f(x)$ là hàm bậc ba nên $f(x)-(x-1)=a(x+1)(x-1)(x-3)$

$\Rightarrow f(x)=a(x+1)(x-1)(x-3)+x-1$; $f(0)=2 \Leftrightarrow a=1$.

$\Rightarrow f(x)=(x+1)(x-1)(x-3)+x-1$.

$+ f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1=x_2 \\ (x+1)(x-3)+1=0\ (2) \end{array}\right.$.

x_1, x_3 là các nghiệm của (2) nên ta có $x_1 x_3 = -2$.

thẳng $y=\dfrac{5}{2}$ nên từ đồ thị ta có phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 14. **(Chuyên Lê Thánh Tông 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2019]$ để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 3$ và đường thẳng $y = 3x + 1$ có duy nhất một điểm chung?

A. 1. **B.** 2019. **C.** 4038. **D.** 2018.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm:

$x^3 - 3mx + 3 = 3x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 3mx \Leftrightarrow 3m = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x}$ (1).

Xét hàm $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x} = x^2 - 3 + \dfrac{2}{x}$; $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 2}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m < 0$. Mà m nguyên và $m \in [-2018; 2019]$ nên có 2018 giá trị thỏa mãn.

Câu 15. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Phương trình $x^3 - 6mx + 5 = 5m^2$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng khi

A. $m = 0$. **B.** $m = -1 \vee m = 1$. **C.** $m = 1$. **D.** $m \in \varnothing$.

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương: $x^3 - 6mx + 5 - 5m^2 = 0$.

Đặt $y = f(x) = x^3 - 6mx + 5 - 5m^2$ có $f'(x) = 3x^2 - 6m$; $f''(x) = 6x$.

PT đã cho có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $f(x_1).f(x_2) < 0$.

3 nghiệm đó lập thành cấp số cộng nên $x_2 - x_1 = x_3 - x_2$.

Suy ra, x_2 là hoành độ của tâm đối xứng hay là nghiệm của $f''(x) = 0$.

Cho $f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Với $x = 0$ ta có: $5 - 5m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Thử lại:

• Với $m = 1$ thì ta có $x^3 - 6x + 5 = 5 \Leftrightarrow x(x^2 - 6) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{6} \end{array}\right.$

•Với $m = -1$ thì ta có: $x^3 + 6x + 5 = 5 \Leftrightarrow x(x^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Câu 16. Tính tổng tất cả các giá trị của m biết đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ và đường thẳng $y = x + 4$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C sao cho diện tích tam giác IBC bằng $8\sqrt{2}$ với $I(1;3)$.

A. 3. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

+) Gọi đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ là (C_m) và đồ thị hàm số $y=x+4$ là (d).

+) Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và (d) là

$$x^3+2mx^2+(m+3)x+4=x+4 \Leftrightarrow x^3+2mx^2+(m+2)x=0(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+2mx+m+2=0 \end{array}\right.$$

+) Gọi $g(x)=x^2+2mx+m+2$.

+) (d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta'_g>0 \\ g(0)\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m^2-m-2>0 \\ m+2\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \end{array}\right. \quad (a) \\ m\neq -2 \end{array}\right.$$

+) $x=0$ là hoành độ điểm A, hoành độ điểm B, C là hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình $g(x)=0$

+) $BC^2=(x_2-x_1)^2+\left[(x_2+4)-(x_1+4)\right]^2=2(x_2-x_1)^2$ (do B, C thuộc đường thẳng (d)

$=2\left[(x_2+x_1)^2-4x_1x_2\right]=8(m^2-m-2)$

+) Viết phương trình đường thẳng (d) dưới dạng $x-y+4=0$, ta có

$$d(I,(d))=\frac{|1-3+4|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

+) $S_{IBC}=8\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}BC.d(I,(d))=8\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4}BC^2.\left[d(I,(d))\right]^2=128$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}8(m^2-m-2).2=128$$

$$\Leftrightarrow m^2-m-34=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{1+\sqrt{137}}{2} \\ m=\frac{1-\sqrt{137}}{2} \end{array}\right. \text{ (thỏa điều kiện } (a))$$

+) Vậy tổng tất cả các giá trị m là 1.

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2018;2019]$ để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+3$ và đường thẳng $y=3x+1$ có duy nhất một điểm chung?

A. 1. **B.** 2019. **C.** 4038. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn D

+ Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3mx+3=3x+1 \Leftrightarrow 3mx=x^3-3x+2.(1)$

+ Dễ thấy $x=0$ không thỏa.

+ $(1) \Leftrightarrow 3m=x^2-3+\frac{2}{x}=f(x)$.

+ $f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}=\frac{2x^3-2}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=1$.

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
		$-\infty$					

+ Đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+3$ và đường thẳng $y=3x+1$ có duy nhất một điểm chung $\Leftrightarrow 3m<0\Leftrightarrow m<0$.

+ Do $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-2018;2019]$ nên có 2018 giá trị.

Câu 18. Đường thẳng d có phương trình $y=x+4$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ tại 3 điểm phân biệt $A(0;4)$, B và C sao cho diện tích của tam giác MBC bằng 4, với $M(1;3)$. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

A. $m=3$. **B.** $m=2$ hoặc $m=3$.

C. $m=-2$ hoặc $m=-3$. **D.** $m=-2$ hoặc $m=3$

Lời giải

Chọn A

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình

$$x^3+2mx^2+(m+3)x+4=x+4\Leftrightarrow x^3+2mx^2+(m+2)x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2+2mx+(m-2)=0\ (*)\end{array}\right.$$

Đường thẳng d cắt đồ thị hàm số (1) tại 3 điểm phân biệt khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m^2-m-2>0\\m+2\neq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>2\end{array}\right.\\m\neq -2\end{array}\right.$.

Giả sử $B(x_1;x_1+4)$; $C(x_2;x_2+4)$ với $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình (*) khi đó

$BC=\sqrt{2(x_1-x_2)^2}=\sqrt{2(x_1+x_2)^2-8x_1.x_2}=\sqrt{8m^2-8m-16}$.

$S_{MBC}=\frac{1}{2}BC.d(M,d)=\frac{1}{2}.BC.\frac{|1-3+4|}{\sqrt{2}}=4\Rightarrow BC=4\sqrt{2}$.

Ta có $m^2-m-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=3\end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện ta có $m=3$.

Câu 19. **(THPT Minh Khai - lần 1)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=-x+5$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+3(m-1)x+5$ tại ba điểm phân biệt.

A. $\left[\begin{array}{l}m<1\\m>2\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}m\neq\frac{2}{3}\\m\leq 1\end{array}\right.\\m\geq 2\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}m\neq\frac{2}{3}\\m<1\end{array}\right.\\m>2\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m\leq 1\\m\geq 2\end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn C

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $x^3+2mx^2+3(m-1)x+5=-x+5$

$\Leftrightarrow x^3+2mx^2+(3m-2)x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2+2mx+3m-2=0\ (1)\end{array}\right.$.

Yêu cầu bài toán tương đương phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0^2+2m.0+3m-2\neq 0 \\ \Delta'=m^2-3m+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq \dfrac{2}{3} \\ \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m\neq \dfrac{2}{3} \\ m<1 \end{cases} \\ m>2 \end{array}\right..$$

Câu 20. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3-3x^2=2m+1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{3}{2}$. **C.** $-\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số: $y=2x^3-3x^2 \Rightarrow y'=6x^2-6x \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của hai đồ thị:

$$\begin{cases} (C): y=2x^3-3x^2 \\ d: y=2m+1 \end{cases}$$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy: Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m+1=-1 \\ 2m+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow S=\left\{-1;-\dfrac{1}{2}\right\}$.

Vậy tổng các phần tử của S bằng $-1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{-3}{2}$.

Câu 21. **(Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019)** Giá trị lớn nhất của m để đường thẳng $(d): y=x-m+1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2(m-2)x^2+(8-5m)x+m-5$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2+x_3^2=20$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình

$x^3+2(m-2)x^2+(8-5m)x+m-5=x-m+1$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[x^2+(2m-2)x-m+3\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_3=2 \\ x^2+(2m-2)x-m+3=0 \quad (1) \end{array}\right..$$

Đường thẳng (d) cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=(m-1)^2+(m-3)>0 \\ 4+(2m-2).2-m+3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \end{array}\right. \\ m\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \end{array}\right.$ (2).

Khi đó, $\begin{cases} x_1+x_2=-(2m-2) \\ x_1x_2=-m+3 \end{cases}$.

Theo giả thiết $x_1^2+x_2^2+x_3^2=20 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2+x_3^2=20$

$\Leftrightarrow (2m-2)^2+2(m-3)+4=20 \Leftrightarrow 2m^2-3m-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$ (thỏa mãn (2)).

Vậy giá trị lớn nhất của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là 3.

Câu 22. Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $y=-2x^3-3m^2x^2+(m^3+2m)x+2$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là nghiệm của phương trình

$-2x^3-3m^2x^2+(m^3+2m)x+2=0. \ (*)$

Giả sử đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm có hoành độ x_1, x_2, x_3.

Khi đó ta có

$y=-2(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=-2x^3+2(x_1+x_2+x_3)x^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x+2x_1x_2x_3.$

Đồng nhất thức ta được

$$\begin{cases} 2(x_1+x_2+x_3)=-3m^2 \\ -2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=m^3+2m \\ 2x_1x_2x_3=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{3m^2}{2} & (1) \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-\dfrac{m^3+2m}{2} & (2) \\ x_1x_2x_3=1 & (3) \end{cases}$$

Vì x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số nhân nên $x_1x_3=x_2^2$. (4)

Từ (2) và (3): $x_2=1$. Thay vào phương trình $(*)$ rút ra được $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Với $m=0 \Rightarrow$ phương trình $(*)$: $-2x^3+2=0 \Leftrightarrow x=1$ (không thỏa mãn).

Với $m=1 \Rightarrow$ phương trình $(*)$: $-2x^3-3x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-2 \\ x_2=1 \\ x_3=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Với $m=2 \Rightarrow$ phương trình $(*)$: $x^3+6x^2-6x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-7-\sqrt{45}}{2} \\ x_2=1 \\ x_3=\dfrac{-7+\sqrt{45}}{2} \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn.

Câu 23. **(Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Tìm m để đồ thị (C) của $y=x^3-3x^2+4$ và đường thẳng $y=mx+m$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt $A(-1;0)$, B, C sao cho ΔOBC có diện tích bằng 64.

A. $m=14$. **B.** $m=15$. **C.** $m=16$. **D.** $m=17$.

Lời giải

Chọn C

$d\left(O,BC\right)=\dfrac{m}{\sqrt{m^2+1}}$

$BC=\sqrt{\left(x_B-x_C\right)^2+\left(y_b-y_c\right)^2}=\sqrt{\left(m^2+1\right)\left(x_B-x_C\right)^2}$

$=\sqrt{\left(m^2+1\right)\left[\left(x_B+x_C\right)^2-4x_Bx_C\right]}=\sqrt{\left(m^2+1\right)4m}$

$\Rightarrow S_{\Delta OBC}=\dfrac{1}{2}d\left(O,BC\right).BC=m\sqrt{m}=64\Leftrightarrow m=16.$

Cách 2:

Phương trình hoành độ giao điểm:

$x^3-3x^2+4=mx+m\Leftrightarrow\left(x+1\right)\left(x^2-4x+4-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\\left(x-2\right)^2=m\left(*\right)\end{array}\right.$

Để d cắt $\left(C\right)$ tại 3 điểm phân biệt phương trình $\left(*\right)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-1\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\m\neq9\end{cases}$

$\left(*\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2-\sqrt{m}\Rightarrow B\left(2-\sqrt{m};3m-m\sqrt{m}\right)\\x=2+\sqrt{m}\Rightarrow C\left(2+\sqrt{m};3m+m\sqrt{m}\right)\end{array}\right.$

$\overrightarrow{OB}=\left(2-\sqrt{m};3m-m\sqrt{m}\right),\overrightarrow{OC}=\left(2+\sqrt{m};3m+m\sqrt{m}\right)$

$\Rightarrow S_{\Delta OBC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]\right|=m\sqrt{m}=64\Rightarrow m=16.$

Câu 24. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=x^3-8x^2+8x$ có đồ thị $\left(C\right)$ và hàm số $y=x^2+(8-a)x-b$ (với $a,b\in\mathbb{R}$) có đồ thị $\left(P\right)$. Biết đồ thị hàm số $\left(C\right)$ cắt $\left(P\right)$ tại ba điểm có hoành độ nằm trong $\left[-1;5\right]$. Khi a đạt giá trị nhỏ nhất thì tích ab bằng

A. -729. **B.** 375. **C.** 225. **D.** -384.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^3-8x^2+8x=x^2+(8-a)x-b\Leftrightarrow x^3-9x^2+ax+b=0$ (1).

Gọi m,n,p là 3 nghiệm của phương trình (1) ta có $\begin{cases}m+n+p=9\\mn+np+pm=a\\mnp=-b\end{cases}$

Do $\left(C\right)$ cắt $\left(P\right)$ tại ba điểm có hoành độ nằm trong $\left[-1;5\right]$ nên

$\begin{cases}(m+1)(n+1)(p+1)\geq0\\(5-m)(5-n)(5-p)\geq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}mnp+(mn+np+pm)+(m+n+p)+1\geq0\\-mnp+5(mn+np+pm)-25(m+n+p)+125\geq0\end{cases}$

Cộng vế theo vế của hệ phương trình trên ta

có $6(mn+np+pm)-24(m+n+p)-124\geq0\Leftrightarrow mn+np+pm\geq15\Rightarrow a\geq15.$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}mnp\geq-25\\mnp\leq-25\end{cases}\Leftrightarrow mnp=-25\Rightarrow b=25$

Vậy tích $ab=375.$

Cách 2: Phương trình hoành độ giao điểm là

$x^3-8x^2+8x=x^2+(8-a)x-b\Leftrightarrow x^3-9x^2+ax+b=0$ (1).

Khi đó phương trình (1) có 3 nghiệm nằm trong $\left[-1;5\right]$.

Đặt $f(x)=x^3-9x^2+ax+b$ suy ra $f'(x)=3x^2-18x+a$. Để phương trình (1) có 3 nghiệm nằm trong $[-1;5]$ thì $f'(x)=3x^2-18x+a=0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc

$[-1;5] \Leftrightarrow a=-3x^2+18x$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[-1;5]$.

Xét hàm số $g(x)=-3x^2+18x$ suy ra $g'(x)=-6x+18$, ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=3$.

Bảng biến thiên của $y=g(x)$

x	-1		3		5
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	21	↗	27	↘	15

Từ BBT ta có $15 \le a < 27$ suy ra giá trị nhỏ nhất của a bằng 15 khi $x=5$, khi đó $b=25$.

Vậy tích $ab=375$.

Câu 25. **(Sở Quảng Trị 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y=-mx+m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+mx^2+m$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $-1<x_1+x_2+x_3<3$?.

A. 6. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

$(d)\ y=-mx+m$, $(C)\ y=x^3+mx^2+m$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C): $x^3+mx^2+mx=0$ (1).

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+mx+m=0\ (2) \end{array}\right.$

Gọi x_1,x_2 là 2 nghiệm của phương trình (2), $x_3=0$.

(1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm x_1,x_2 phân biệt và khác 0.

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta>0, \Delta=m^2-4m \\ m\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$.

(1) có 3 nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3 thỏa $-1<x_1+x_2+x_3<3$, với $x_1+x_2=-m$, $x_3=0$.

$\Leftrightarrow -1<-m<3$

$\Leftrightarrow -3<m<1$, mà $m\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$, $m\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow m\in\{-2;-1\}$. Vậy có 2 giá trị m.

Câu 26. **(Chuyên Nguyễn Huệ 2019)** Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ (C_m). Tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y=x+4$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$ với điểm $K(1;3)$ là:

A. $m=\dfrac{1+\sqrt{137}}{2}$. **B.** $m=\dfrac{\pm 1+\sqrt{137}}{2}$. **C.** $m=\dfrac{1\pm\sqrt{137}}{2}$. **D.** $m=\dfrac{1-\sqrt{137}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và (d) là:

$$x^3+2mx^2+(m+3)x+4=x+4 \quad (1)$$

$\Leftrightarrow x^3+2mx^2+(m+2)x=0$

$\Leftrightarrow x.\left[x^2+2mx+(m+2)\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=4 \\ x^2+2mx+m+2=0 \quad (2) \end{array}\right.$.

(d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow (1)$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ 0^2+2m.0+m+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m-2>0 \\ m+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-1 \end{array}\right. \\ m\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-1 \end{array}\right.$.

Khi đó, (2) có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 tương ứng cũng là hoành độ của B và C.

$\Rightarrow B(x_1;x_1+4)$ và $C(x_2;x_2+4)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{KB}=(x_1-1;x_2+1)$ và $\overrightarrow{KC}=(x_2-1;x_2+1)$.

$\Rightarrow S_{\Delta KBC}=\dfrac{\left|(x_1-1)(x_2+1)-(x_2-1)(x_1+1)\right|}{2}=|x_1-x_2|$.

Theo đề bài: $S_{\Delta KBC}=8\sqrt{2}\Leftrightarrow |x_1-x_2|=8\sqrt{2}\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2=128\Leftrightarrow S^2-4P=128$

$\Leftrightarrow (-2m)^2-4(m+2)=128\Leftrightarrow m=\dfrac{1\pm\sqrt{137}}{2}$ (nhận).

Vậy tất cả các giá trị m thỏa đề là $m=\dfrac{1\pm\sqrt{137}}{2}$.

Câu 27. **(Chuyên Thái Nguyên - 2020)** Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^3-3x^2-m^3+3m^2=0$ có ba nghiệm phân biệt. Tổng tất cả các phần tử của T bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

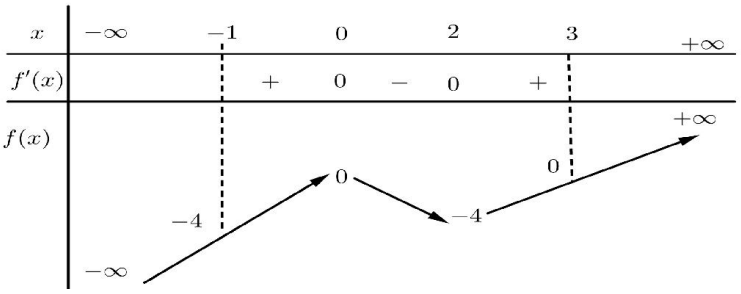
Cách 1: Ta có $x^3-3x^2-m^3+3m^2=0\Leftrightarrow x^3-3x^2=m^3-3m^2\Leftrightarrow f(x)=f(m)\,(1)$

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2$.

$f'(x)=3x^2-6x,\ f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

$f(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$.

$f(x)=-4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$.



Dựa vào bảng biến thiên, suy ra (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4 < f(m) < 0 \begin{cases} -1 < m < 3 \\ m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

Suy ra $T = \{1\}$. Vậy tổng tất cả các phần tử của T bằng 1.

Cách 2: Ta có $x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0 \Leftrightarrow (x^3 - m^3) - 3(x^2 - m^2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-m)\left[x^2 + (m-3)x + m^2 - 3m\right] = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x^2 + (m-3)x + m^2 - 3m = 0 \quad (*) \end{cases}$

Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt, khác m

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-3)^2 - 4(m^2 - 3m) > 0 \\ m^2 + (m-3)m + m^2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)(-3m-3) > 0 \\ 3m^2 - 6m \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 3 \\ m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Rightarrow m = 1$ (vì $m \in \mathbb{Z}$).

Suy ra $T = \{1\}$. Vậy tổng tất cả các phần tử của T bằng 1.

Câu 28. **(Đại Học Hà Tĩnh - 2020)** Cho đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} + \frac{1}{f'(x_3)}$.

A. $P = 3 + 2b + c$. **B.** $P = 0$. **C.** $P = b + c + d$. **D.** $P = \frac{1}{2b} + \frac{1}{c}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn B

Vì x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình bậc ba $f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Ta có $f'(x) = (x - x_1)(x - x_2) + (x - x_2)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_3)$.

Khi đó: $\begin{cases} f'(x_1) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \\ f'(x_2) = (x_2 - x_3)(x_2 - x_1) \\ f'(x_3) = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \end{cases}$

Suy ra $P = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{1}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)} + \frac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$.

$= \frac{(x_2 - x_3) - (x_1 - x_3) + (x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} = 0$.

Câu 29. **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị đi qua điểm $A(1;1), B(2;4), C(3;9)$. Các đường thẳng AB, AC, BC lại cắt đồ thị lần lượt tại các điểm M, N, P (M khác A và B, N khác A và C, P khác B và C. Biết rằng tổng các hoành độ của M, N, P bằng 5, giá trị của $f(0)$ là

A. -6. **B.** -18. **C.** 18. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thuyết bài toán ta giả sử $f(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + x^2$ ($a \neq 0$)

Ta có: $AB: y = 3x - 2$, $AC: y = 4x - 3$, $BC: y = 5x - 6$.

Khi đó:

Hoành độ của M là nghiệm của phương trình:
$a(x_M-1)(x_M-2)(x_M-3)+{x_M}^2=3x_M-2\Leftrightarrow a(x_M-1)(x_M-2)(x_M-3)+(x_M-1)(x_M-2)=0$
$\Leftrightarrow a(x_M-3)+1=0\Leftrightarrow x_M=3-\frac{1}{a}$.

Hoành độ của N là nghiệm của phương trình:
$a(x_N-1)(x_N-2)(x_N-3)+{x_N}^2=4x_N-3\Leftrightarrow a(x_N-1)(x_N-2)(x_N-3)+(x_N-1)(x_N-3)=0$
$\Leftrightarrow a(x_N-2)+1=0\Leftrightarrow x_N=2-\frac{1}{a}$.

Hoành độ của P là nghiệm của phương trình:
$a(x_P-1)(x_P-2)(x_P-3)+{x_P}^2=5x_P-6\Leftrightarrow a(x_P-1)(x_P-2)(x_P-3)+(x_P-2)(x_P-3)=0$
$\Leftrightarrow a(x_P-1)+1=0\Leftrightarrow x_P=1-\frac{1}{a}$.

Từ giả thuyết ta có; $x_M+x_N+x_P=5\Leftrightarrow 6-\frac{3}{a}=5\Leftrightarrow a=3$.

Do đó: $f(x)=3(x-1)(x-2)(x-3)+x^2$

$f(0)=-18$.

Câu 30. **(Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ cắt đường thẳng $d:y=m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_2^2>5$.

A. $m\ge -3$. **B.** $m\ge -2$ **C.** $m>-3$. **D.** $m>-2$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm:
$x^3-3x^2+2=m(x-1)\Leftrightarrow x^3-3x^2-mx+m+2=0$
$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x-m-2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ g(x)=x^2-2x-(m+2)=0\ (*)\end{array}\right.$.

Để hai đồ thị cắt nhau tại ba điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ g(1)\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}1^2+(m+2)>0\\ 1-2-m-2\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m>-3\\ m\ne -3\end{cases}\Leftrightarrow m>-3$.

Gọi x_2, x_3 là hai nghiệm phương trình $(*)$.

Theo định lý Viét ta có $\begin{cases}x_2+x_3=2\\ x_2.x_3=-(m+2)\end{cases}$.

Theo bài ta có $x_1^2+x_2^2+x_3^2>5\Leftrightarrow 1+x_2^2+x_3^2>5\Leftrightarrow x_2^2+x_3^2>4$
$\Leftrightarrow (x_2+x_3)^2-2x_2x_3>4\Leftrightarrow 4+2(m+2)>4\Leftrightarrow m>-2$.

So sánh với điều kiện ở trên suy ra $m>-2$.

Kết luận: $m>-2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 31. **(Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020)** Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-9x+2m+1$ và trục Ox có đúng hai điểm chung phân biệt. Tính tổng T của các phần tử thuộc tập S

A. $T=-10$. **B.** $T=10$. **C.** $T=-12$. **D.** $T=12$.

Lời giải

Chọn C

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-9x+2m+1$ và trục Ox là nghiệm của phương trình : $x^3+3x^2-9x+2m+1=0\Leftrightarrow -x^3-3x^2+9x=2m+1$.

Xét hàm số $f(x)=-x^3-3x^2+9x$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$f'(x)=-3x^2-6x+9,\ f'(x)=0\Leftrightarrow -3x^2-6x+9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-27	↗	5	↘	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-9x+2m+1$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y=2m+1$ cắt đồ thị hàm số $f(x)=-x^3-3x^2+9x$ tại hai điểm phân biệt.

Từ bảng biến thiên suy ra : $\left[\begin{array}{l}2m+1=5\\2m+1=-27\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=2\\m=-14\end{array}\right.\Rightarrow S=\{-14;2\}$.

Tổng của các phần tử thuộc tập S là : $T=-14+2=-12$.

Dạng 2. Bài toán tương giao của đường thẳng với đồ thị hàm số nhất biến (CHỨA THAM SỐ)

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị (C). Tìm tham số m để đường thẳng $d: y=\alpha x+\beta$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A,\ B$ thỏa mãn điều kiện K?

Phương pháp giải

□ **Bước 1**. (Bước này giống nhau ở các bài toán tương giao của hàm nhất biến)

Lập phương trình hoành độ giao điểm giữa d và (C): $\dfrac{ax+b}{cx+d}=\alpha x+\beta$

$\Leftrightarrow g(x)=\alpha cx^2+(\beta c+\alpha d-a)x+\beta d-b=0,\ \forall x\neq -\dfrac{d}{c}$.

- Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x)=0$ có nghiệm nghiệm phân biệt $\neq -\dfrac{d}{c}\Leftrightarrow \begin{cases}c\alpha\neq 0;\ \Delta>0\\ g\left(-\dfrac{d}{c}\right)\neq 0\end{cases}$.

Giải hệ này, ta sẽ tìm được $m\in D_1\ (i)$

-Gọi $A(x_1;\alpha x_1+\beta),\ B(x_2;\alpha y_2+\beta)$ với x_1,x_2 là 2 nghiệm của $g(x)=0$ Theo Viét:

$S=x_1+x_2=-\dfrac{\beta c+\alpha d-a}{c\alpha};\ P=x_1x_2=\dfrac{\beta d-b}{\alpha c}\ (ii)$

□ **Bước 2**.

-Biến đổi điều kiện K cho trước về dạng có chứa tổng và tích của $x_1,x_2\ (iii)$

-Thế (ii) vào (iii) sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến số là m. Giải nó sẽ tìm được $m\in D_2\ (*)$

-Từ $(i),(*)\Rightarrow m\in(D_1\cap D_2)$ và kết luận giá trị m cần tìm.

Một số công thức tính nhanh " thường gặp " liên quan đến tương giao giữa đường thẳng $y=kx+p$ và đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

Giả sử $d: y = kx + p$ *cắt đồ thị hàm số* $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ *tại 2 điểm phân biệt* M, N.

Với $kx + p = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ *cho ta phương trình có dạng:* $Ax^2 + Bx + C = 0$ *thỏa điều kiện* $cx + d \neq 0$, *có* $\Delta = B^2 - 4AC$. *Khi đó:*

1). $M(x_1; kx_1 + p), N(x_2; kx_2 + p) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1; k(x_2 - x_1)) \Rightarrow MN = \sqrt{(k^2+1)\dfrac{\Delta}{A^2}}$

Chú ý: khi $\min MN$ *thì tồn tại* $\min \Delta, k = const$

2). $OM^2 + ON^2 = (k^2+1)(x_1^2 + x_2^2) + (x_1 + x_2)2kp + 2p^2$

3). $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = (x_1.x_2)(1+k^2) + (x_1 + x_2)kp + p^2$

4). $OM = ON \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(1+k^2) + 2kp = 0$

Câu 1. **(Sở Ninh Bình 2020)** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ của tham số m để đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt?

A. 4036. **B.** 4040. **C.** 4038. **D.** 4034.

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = x + m$ và đường cong $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$

$x + m = \dfrac{2x-3}{x-1} \Leftrightarrow (x+m)(x-1) = 2x - 3 \ (x \neq 1)$.

$\Leftrightarrow x^2 + mx - x - m = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 + (m-3)x - m + 3 = 0 \quad (*)$

Ta có $\Delta = (m-3)^2 - 4(-m+3) = m^2 - 6m + 9 + 4m - 12 = m^2 - 2m - 3$.

Để đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 1^2 + (m-3).1 - m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 3 > 0 \\ 1 \neq 0 \quad (ld) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 3 \end{array}\right.$.

Theo giả thiết: $-2020 \leq m \leq 2020$ và $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 3 \end{array}\right.$ nên $\left[\begin{array}{l} -2020 \leq m < -1 \\ 3 < m \leq 2020 \end{array}\right.$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $-2020 \leq m < -1$, suy ra có $\dfrac{-2-(-2020)}{1} + 1 = 2019$ giá trị nguyên m.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $3 < m \leq 2020$, suy ra có $\dfrac{2020-4}{1} + 1 = 2017$ giá trị nguyên m.

Tóm lại có tất cả $2019 + 2017 = 4036$ giá trị nguyên của tham số m.

Câu 2. **(ĐHQG TPHCM 2019)** Đường thẳng $y = x + 2m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

A. $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 3 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 1 \end{array}\right.$. **D.** $-3 < m < 1$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số đã cho

$\dfrac{x-3}{x+1}=x+2m \Leftrightarrow \begin{cases}(x+2m)(x+1)=x-3\\ x\neq -1\end{cases} \Leftrightarrow x^2+2mx+2m+3=0\ (*)$. (vì khi $x=-1$ thì phương trình trở thành $0=-4$ vô lí).

Để đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt. Khi đó m phải thoả mãn $\Delta'_{(*)}>0 \Leftrightarrow m^2-2m-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>3\end{array}\right.$.

Vậy tập hợp các giá trị của tham số m là $\left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>3\end{array}\right.$.

Câu 3. **(Gia Lai 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=2x+m$ cắt đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.

A. $m\in(-\infty;+\infty)$. **B.** $m\in(-1;+\infty)$. **C.** $m\in(-2;4)$. **D.** $m\in(-\infty;-2)$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{x+3}{x+1}=2x+m$ (*), với điều kiện xác định $x\neq -1$.

Biến đổi (*) về thành: $2x^2+(m+1)x+m-3=0$ (**).

Theo yêu cầu đề bài, phương trình (**) cần có hai nghiệm phân biệt khác -1, tức là:

$\begin{cases}\Delta=(m+1)^2-4.2.(m-3)>0\\ 2.(-1)^2+(m+1).(-1)+m-3\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-6m+25>0\\ -2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow m\in(-\infty;+\infty)$.

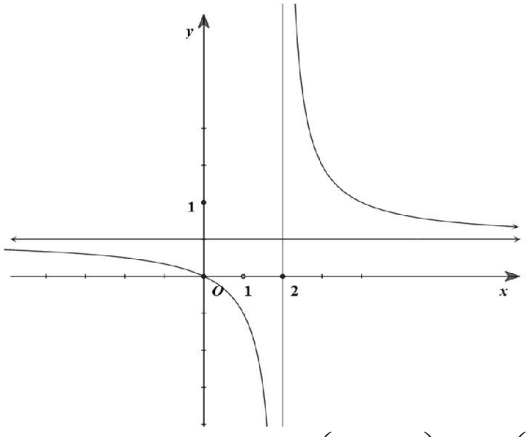
Nguyễn Bảo Vương

Câu 4. Gọi A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng

A. $4\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Hàm số $y=\dfrac{x}{x-2}$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Gọi $A\left(a;\dfrac{a}{a-2}\right)$ và $B\left(b;\dfrac{b}{b-2}\right)$ là hai điểm thuộc hai nhánh của (C) $(a<2<b)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=\left(b-a;\dfrac{b}{b-2}-\dfrac{a}{a-2}\right)=\left(b-a;\dfrac{b-a}{(b-2)(2-a)}\right)$.

Áp dụng BĐT Côsi ta có: $(b-2)(2-a)\le\dfrac{(b-a)^2}{4}$.

Suy ra: $AB^2=(b-a)^2+\dfrac{(b-a)^2}{\left[(b-2)(2-a)\right]^2}\ge(b-a)^2+\dfrac{64}{(b-a)^2}\ge 16$

$\Rightarrow AB\ge 4$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=2-\sqrt{2}$ và $b=2+\sqrt{2}$.

Vậy $AB_{\min}=4$.

Câu 5. **(Chuyên Nguyễn Du ĐăkLăk 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}(C)$ và đường thẳng $d:y=-x+m$. Gọi S là tập các số thực m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác OAB (O là gốc tọa độ) có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $2\sqrt{2}$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $\dfrac{x}{x-1}=-x+m$, (điều kiện $x\ne 1$).

Phương trình tương đương $x^2-mx+m=0\ (1)$.

Đồ thị (C) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x\ne 1$ điều kiện cần và đủ là $m<0\vee m>4$.

Khi đó hai giao điểm là $A(x_1;-x_1+m)$; $B(x_2;-x_2+m)$.

Ta có $OA=\sqrt{m^2-2m}$; $OB=\sqrt{m^2-2m}$; $AB=\sqrt{2(m^2-4m)}$; $d(O,d)=\dfrac{|m|}{\sqrt{2}}$.

$S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}.AB.d(O,d)=\dfrac{1}{2}.\dfrac{|m|}{\sqrt{2}}.\sqrt{2(m^2-4m)}=\dfrac{OA.OB.AB}{4R}$.

Suy ra $\dfrac{1}{2}.\dfrac{|m|}{\sqrt{2}}\sqrt{2(m^2-4m)}=\dfrac{(m^2-2m).\sqrt{2(m^2-4m)}}{4.2\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow m^2-2m=4|m|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\ (l)\\ m=6\ (n)\\ m=-2\ (n)\end{array}\right.$.

Vậy tổng các phần từ của S bằng 4.

Câu 6. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{1-x}\ (C)$ và đường thẳng $d:y=x+m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt

A. $m>-1$. **B.** $-5<m<-1$. **C.** $m<-5$. **D.** $m<-5$ hoặc $m>-1$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=\dfrac{2x-1}{1-x}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Lập phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x-1}{1-x}=x+m\ \ (x\ne 1)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1=x+m-x^2-mx\\ x\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+(m+1)x-(m+1)=0\ (*)\\ x\ne 1\end{cases}$

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $x \neq 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 1^2 + (m+1) - (m+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 6m + 5 > 0 \\ 1 \neq 0 \ \ (\text{t/m}) \end{cases} \Leftrightarrow m < -5$ hoặc $m > -1$.

Câu 7. **(Sở Cần Thơ 2019)** Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d : y = x - m$, với m là tham số thực. Biết rằng đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho điểm $G(2;-2)$ là trọng tâm của tam giác OAB (O là gốc toạ độ). Giá trị của m bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** -9. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+1}$ có $y' = \dfrac{-2}{(x+1)^2} < 0$, $\forall x \in D$ và đường thẳng $d : y = x - m$ có hệ số $a = 1 > 0$ nên d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ với mọi giá trị của tham số m.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $\dfrac{x+3}{x+1} = x - m$

$\Leftrightarrow x^2 - mx - m - 3 = 0 \quad (x \neq -1)$.

Suy ra x_A, x_B là 2 nghiệm của phương trình $x^2 - mx - m - 3 = 0$.

Theo định lí Viet, ta có $x_A + x_B = m$.

Mặt khác, $G(2;-2)$ là trọng tâm của tam giác OAB nên $x_A + x_B + x_O = 3x_G$

$\Leftrightarrow x_A + x_B = 6$

$\Leftrightarrow m = 6$.

Vậy $m = 6$ thoả mãn yêu cầu đề bài.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 8. **(Sở Nam Định 2019)** Cho hàm số $y = \dfrac{3x - 2m}{mx + 1}$ với m là tham số. Biết rằng với mọi $m \neq 0$, đồ thị hàm số luôn cắt đường thẳng $d : y = 3x - 3m$ tại hai điểm phân biệt A, B. Tích tất cả các giá trị của m tìm được để đường thẳng d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại C, D sao cho diện tích ΔOAB bằng 2 lần diện tích ΔOCD bằng

A. $-\dfrac{4}{9}$. **B.** -4. **C.** -1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A.

Với $m \neq 0$, xét phương trình $\dfrac{3x - 2m}{mx + 1} = 3x - 3m \Leftrightarrow 3x^2 - 3mx - 1 = 0$. (*)

Gọi tọa độ các giao điểm của d với đồ thị hàm số đã cho là: $A(x_1; 3x_1 - 3m)$, $B(x_2; 3x_2 - 3m)$.

Tọa độ các điểm C, D là $C(m;0)$ và $D(0;-3m)$.

Gọi $h = d_{(O,d)}$ thì h là chiều cao của các tam giác OAB và OCD.

Theo giả thiết: $S_{\triangle OAB} = 2S_{\triangle OCD} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} AB.h = 2.\dfrac{1}{2} CD.h \Leftrightarrow AB = 2CD \Leftrightarrow AB^2 = 4CD^2$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + \left[3(x_1 - x_2)\right]^2 = 4\left[m^2 + (-3m)^2\right]$

$\Leftrightarrow 10(x_1 - x_2)^2 = 40m^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4m^2$

$\Leftrightarrow m^2 + \dfrac{4}{3} = 4m^2 \Leftrightarrow m^2 = \dfrac{4}{9} \Leftrightarrow m = \pm\dfrac{2}{3}$.

Vậy tích các giá trị của m là $-\frac{4}{9}$.

Câu 9. **(Gia Lai 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đường thẳng $y=-3x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho trọng tâm tam giác OAB (O là gốc tọa độ) thuộc đường thẳng $x-2y-2=0$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm: $-3x+m=\frac{2x+1}{x-1}$ (*)

Với điều kiện $x\neq 1$, (*) $\Rightarrow 3x^2-(m+1)x+m+1=0$ (1)

Đường thẳng $y=-3x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1, điều kiện:

$\begin{cases}(m+1)^2-12(m+1)>0\\ 3.1^2-(m+1).1+m+1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-10m-11>0\\ 3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}m<-1\\ m>11\end{bmatrix}$. (**)

Không mất tính tổng quát, giả sử $A(x_1;-3x_1+m)$, $B(x_2;-3x_2+m)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt phương trình (1). Theo Vi-et ta có: $x_1+x_2=\frac{m+1}{3}$.

Gọi M là trung điểm AB, ta có: $M\left(\frac{m+1}{6};\frac{m-1}{2}\right)$. Giả sử $G(x;y)$ là trọng tâm tam giác OAB,

ta có $\overrightarrow{OG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{3}.\frac{m+1}{6}\\ y=\frac{2}{3}.\frac{m-1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{m+1}{9}\\ y=\frac{m-1}{3}\end{cases}$. Vậy $G\left(\frac{m+1}{9};\frac{m-1}{3}\right)$.

Mặt khác, điểm G thuộc đường thẳng $x-2y-2=0$ nên ta có: $\frac{m+1}{9}-2.\frac{m-1}{3}-2=0$

$\Leftrightarrow m=-\frac{11}{5}$(thỏa mãn (**)). Do đó không có giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10. Giả sử $m=-\frac{b}{a}$, $a,b\in\mathbb{Z}^+$, $(a,b)=1$ là giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d:y=-3x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $\Delta:x-2y-2=0$, với O là gốc toạ độ. Tính $a+2b$.

A. 2. **B.** 5. **C.** 11. **D.** 21.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{x-1}=-3x+m$, $x\neq 1$.

$\Rightarrow 3x^2-(m+1)x+m+1=0$ (*).

Để (C) cắt d tại hai điểm phân biệt thì (*) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1. Suy ra

$\begin{cases}(m+1)^2-12(m+1)>0\\ 3.1^2-(m+1).1+(m+1)\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}m+1<0\\ m+1>12\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}m<-1\\ m>11\end{bmatrix}$.

Khi đó $A(x_1;-3x_1+m)$, $B(x_2;-3x_2+m)$, với x_1 và x_2 là nghiệm của phương trình $(*)$ đồng thời thoả mãn $x_1+x_2=\frac{m+1}{3}$.

Gọi G là trọng tâm của ΔOAB, ta có $G\left(\frac{m+1}{9};\frac{m-1}{3}\right)$.

Mà $G\in\Delta$ nên $\frac{m+1}{9}-2\frac{m-1}{3}-2=0\Rightarrow m=-\frac{11}{5}$. Suy ra $\begin{cases}a=11\\b=5\end{cases}$.

Vậy $a+2b=21$.

Câu 11. Cho hàm số $y=\frac{3x+2}{x+2}$, (C) và đường thẳng $d: y=ax+2b-4$. Đường thẳng d cắt (C) tại A, B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O, khi đó $T=a+b$ bằng

A. $T=2$. **B.** $T=\frac{5}{2}$. **C.** $T=4$. **D.** $T=\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình hoành độ: $\frac{3x+2}{x+2}=ax+2b-4;x\neq-2.$

$\Leftrightarrow ax^2+(2a+2b-7)x-10=0(*).$

Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq0\\(2a+2b-7)^2-4a(4b-10)>0(2*)\\4\neq0\end{cases}$

Gọi $A(x_1;ax_1+2b-4);B(x_2;ax_2+2b-4)$.

Do A, B đối xứng nhau qua gốc O nên $\begin{cases}x_1+x_2=0\\4b-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=0\\b=2\end{cases}$

Theo Viét của phương trình (*) ta có $x_1+x_2=\frac{7-2a-2b}{a}$.

$\Rightarrow\frac{7-2a-2b}{a}=0\Leftrightarrow7-2a-2b=0\Rightarrow a=\frac{3}{2}.$

Thay $\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\b=2\end{cases}$ vào điều kiện (2*) tháy thỏa mãn.

Vậy $a+b=\frac{7}{2}.$

Câu 12. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d:\ y=-3x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm ΔOAB thuộc đường thẳng $\Delta:\ x-2y-2=0$, với O là gốc tọa độ.

A. $m=-\frac{11}{5}$. **B.** $m=-\frac{1}{5}$. **C.** $m=0$. **D.** $m=-2$.

Lời giải

Chọn A

Hoành độ hai điểm A, B là nghiệm của phương trình $-3x+m=\frac{2x+1}{x-1}$

$\Leftrightarrow(-3x+m)(x-1)=2x+1$ (vì $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình).

$\Leftrightarrow3x^2-(m+1)x+m+1=0$ (*)

Điều kiện: $\Delta > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 4.3(m+1) > 0 \Leftrightarrow (m+1)(m-11) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 11 \end{array}\right.$.

Khi đó phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_A, x_B thỏa mãn $x_A + x_B = \dfrac{m+1}{3}$.

Gọi $A(x_A; -3x_A + m)$, $B(x_B; -3x_B + m)$ thì trọng tâm của tam giác OAB là $G\left(\dfrac{x_A + x_B}{3}; \dfrac{-3(x_A + x_B) + 2m}{3}\right)$ hay $G\left(\dfrac{m+1}{9}; \dfrac{m-1}{3}\right)$.

$G \in \Delta \Leftrightarrow \dfrac{m+1}{9} - 2.\dfrac{m-1}{3} - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{11}{5}$.

Câu 13. Cho hàm số $y = \dfrac{2x}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm tập hợp tất cả các giá trị $a \in \mathbb{R}$ để qua điểm $M(0;a)$ có thể kẻ được đường thẳng cắt (C) tại hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua điểm M.

A. $(-\infty;0) \cup (2;+\infty)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(-\infty;-1] \cup [3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng có hệ số góc k đi qua điểm $M(0;a)$ có dạng $y = kx + a$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $y = kx + a$ là:

$$\frac{2x}{x-1} = kx + a \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 2x = kx^2 - kx + ax - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ kx^2 + (a-k-2)x - a = 0 (*) \end{cases}.$$

Ta cần tìm điều kiện của a để phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2 khác 1 và thỏa mãn $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$.

Nguyễn Bảo Vương

Điều kiện này tương đương với $\begin{cases} k \neq 0 \\ (a-k-2)^2 + 4ka > 0 \\ k.1^2 + (a-k-2).1 - a \neq 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ (a-k-2)^2 + 4ka > 0 \\ -2 \neq 0 \\ \dfrac{k+2-a}{k} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k = a-2 \\ 4(a-2)a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2 \neq 0 \\ k = a-2 \\ a \in (-\infty;0) \cup (2;+\infty) \end{cases} \Rightarrow a \in (-\infty;0) \cup (2;+\infty)$.

Câu 14. **(Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa 2019)** Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $MN \leq 10$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định của hàm số: $x \neq -1$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x-1}{x+1} = x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (m-1)x + m + 1 = 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$.

Đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt M, N khi và chỉ khi phương trình $x^2 + (m-1)x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m - 3 > 0 \\ 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 3 - 2\sqrt{3} \\ m > 3 + 2\sqrt{3} \end{array} \right.$ (*).

Gọi $M\left(x_1; x_1 + m\right)$, $N\left(x_2; x_2 + m\right)$ là tọa độ giao điểm đường thẳng $y = x + m$ và đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.

Theo bài cho $MN \le 10 \Leftrightarrow \sqrt{2\left(x_2 - x_1\right)^2} \le 10 \Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2 \le 50$

Áp dụng định lí Viét cho phương trình $x^2 + \left(m-1\right)x + m + 1 = 0$ ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - m \\ x_1.x_2 = m + 1 \end{cases}$.

Ta có $MN \le 10 \Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2 \le 50 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 53 \le \Leftrightarrow 3 - \sqrt{62} \le m \le 3 + \sqrt{62}$

Kết hợp với (*) thì $m \in \left(3 - \sqrt{62}; 3 - 2\sqrt{3}\right) \cup \left(3 + 2\sqrt{3}; 3 + \sqrt{62}\right)$.

Các số nguyên dương m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m = \{7, 8, 9, 10\}$.

Câu 15. Cho là đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$. Tìm k để đường thẳng $d: y = kx + 2k + 1$ cắt tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A đến trục hoành bằng khoảng cách từ B đến trục hoành.

A. 1. **B.** $\dfrac{2}{5}$ **C.** -3. **D.** -2.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm:

$\dfrac{2x+1}{x+1} = kx + 2k + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 (ld) \\ kx^2 + \left(3k-1\right)x + 2k = 0 \quad (1) \end{cases}$.

Ycbt tương đương có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $\left|kx_1 + 2k + 1\right| = \left|kx_2 + 2k + 1\right|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = k^2 - 6k + 1 > 0 \\ k\left(x_1 + x_2\right) + 4k + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k^2 - 6k + 1 > 0 \\ 1 - 3k + 4k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = -3 \end{cases} \Leftrightarrow k = -3.$

Câu 16. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Tìm điều kiện của m để đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.

A. $(-\infty; 0] \cup [16; +\infty)$ **B.** $(16; +\infty)$ **C.** $(-\infty; 0)$ **D.** $(-\infty; 0) \cup (16; +\infty)$

Lời giải

Chọn D

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình: $\dfrac{x-3}{x+1} = mx + 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = \left(mx+1\right)\left(x+1\right) \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + mx + 4 = 0 \quad (*) \\ x \neq -1 \end{cases}$

Để đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác -1 hay $\begin{cases} \Delta > 0 \\ m\left(-1\right)^2 + m\left(-1\right) + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 16m > 0 \\ 4 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m \in (-\infty; 0) \cup (16; +\infty)$.

Câu 17. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Gọi $M(a;b)$ là điểm trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x}$ sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $d: y=2x+6$ nhỏ nhất. Tính $(4a+5)^2+(2b-7)^2$.

A. 162. **B.** 2. **C.** 18. **D.** 0.

Lời giải

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d là:

$$\frac{x-2}{x}=2x+6 \Leftrightarrow 2x^2+5x+2=0 \ (x\neq 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=\dfrac{-1}{2}. \end{array}\right.$$

Suy ra đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $M_1(-2;2)$, $M_2\left(-\dfrac{1}{2};5\right)$.

Ta có $d(M;d)\geq 0, \forall M \Rightarrow \min d(M;d)=0$ khi $M\in d$.

Mà $M\in(C) \Rightarrow M=d\cap(C) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(-2;2) \\ M\left(-\dfrac{1}{2};5\right) \end{array}\right.$.

Với $M(-2;2)\Rightarrow a=-2, b=2 \Rightarrow (4a+5)^2+(2b-7)^2=18$.

Với $M\left(-\dfrac{1}{2};5\right)\Rightarrow a=-\dfrac{1}{2},\ b=5 \Rightarrow (4a+5)^2+(2b-7)^2=18$.

Câu 18. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x}{1-x}$ cắt đường thẳng $y=x-m$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng 60^0 (với O là gốc tọa độ)?

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x}{1-x}=x-m \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x^2-mx+m=0 \quad (*) \end{cases}$

Để có hia điểm phân biệt A, B thì phương trình (*) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\begin{cases} 1-m+m\neq 0 \\ m^2-4m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>4 \\ m<0 \end{array}\right.$$

Khi đó phương trình (*) có hai nghiệm phân biết x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1x_2=m \end{cases}$$

Giả sử $A(x_1;x_1-m), B(x_2;x_2-m)$, suy ra: $\overrightarrow{OA}(x_1;x_1-m), \overrightarrow{OB}(x_2;x_2-m)$

Theo giả thiết góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng 60^0 suy ra:

$$\cos\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=\cos 60^0 \Leftrightarrow \frac{\left|x_1x_2+(x_1-m)(x_2-m)\right|}{\sqrt{x_1^2+(x_1-m)^2}\sqrt{x_2^2+(x_2-m)^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|2x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2\right|}{\sqrt{x_1^2x_2^2+(x_1x_2-mx_2)^2+x_1^2(x_1x_2-m)^2+\left[(x_1-m)(x_2-m)\right]^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|2m-m^2+m^2\right|}{\sqrt{m^2+\left(m-mx_2\right)^2+\left(m-mx_1\right)^2+\left[x_1x_2-m\left(x_1+x_2\right)+m^2\right]^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|2m\right|}{\sqrt{m^2+\left(m-mx_2\right)^2+\left(m-mx_1\right)^2+\left[m-m^2+m^2\right]^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{2+\left(1-x_2\right)^2+\left(1-x_1\right)^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2+\left(1-x_2\right)^2+\left(1-x_1\right)^2=16$$

$$\Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2-2\left(x_1+x_2\right)=12$$

$$\Leftrightarrow m^2-4m-12=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m=6 \\ m=-2 \end{bmatrix}$$

Câu 19. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Để đường thẳng $d: y=x-m+2$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho độ dài AB ngắn nhất thì giá trị của m thuộc khoảng nào?

A. $m\in(-4;-2)$ **B.** $m\in(2;4)$ **C.** $m\in(-2;0)$ **D.** $m\in(0;2)$

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$\dfrac{2x}{x-1}=x-m+2 \Leftrightarrow x^2-(m+1)x+m-2=0$ $(*)$ (vì $x=1$ không phải là nghiệm).

Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt:

$\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

$\Leftrightarrow \Delta=(m+1)^2-4(m-2)=(m-1)^2+8>0, \forall m\in\mathbb{R}$.

Theo định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=m+1 \\ x_1.x_2=m-2 \end{cases}$

Khi đó $A(x_1;x_1-m+2)$, $B(x_2;x_2-m+2)$.

$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(x_2-m+2-x_1+m-2)^2}=\sqrt{2(x_2-x_1)^2}=\sqrt{2}\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_1x_2}$.

$=\sqrt{2}\sqrt{(m-1)^2+8}\geq 4$.

AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB=4 \Leftrightarrow m=1$.

Câu 20. **(THPT Lương Tài Số 2 2019)** Biết rằng đường thẳng $y=2x+2m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt *A, B* với mọi giá trị của tham số *m*. Tìm hoành độ trung điểm của *AB*?

A. $m+1$ **B.** $-m-1$ **C.** $-2m-2$ **D.** $-2m+1$

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$$\frac{x^2+3}{x+1}=2x+2m \Leftrightarrow x^2+2(1+m)x+2m-3=0 \ (1), (x\neq -1).$$

Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 2

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (1+m)^2 - (2m-3) > 0 \\ (-1)^2 + 2(1+m).(-1) + 2m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4 > 0, \forall m \\ -4 \neq 0 \end{cases}$.

Khi đó, gọi $A(x_1; 2x_1 + 2m)$; $B(x_2; 2x_2 + 2m)$

Hoành độ trung điểm của AB là $x_I = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = -\dfrac{2 + 2m}{2} = -m - 1$.

Câu 21. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Gọi (H) là đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$. Điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (H) có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất, với $x_0 < 0$ khi đó $x_0 + y_0$ bằng

A. -1. **B.** -2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Dễ thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $d_1 : x = -1$ và tiệm cận ngang $d_2 : y = 2$.

Do $M \in (H) \Rightarrow M\left(x_0; \dfrac{2x_0 + 3}{x_0 + 1}\right)$.

Xét $d(M, d_1) + d(M, d_2) = |x_0 + 1| + \left|\dfrac{2x_0 + 3}{x_0 + 1} - 2\right| = |x_0 + 1| + \left|\dfrac{1}{x_0 + 1}\right| \geq 2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $|x_0 + 1| = \left|\dfrac{1}{x_0 + 1}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{array}\right.$.

Theo đề bài, ta có $x_0 < 0$ nên nhận $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 1$.

Vậy $x_0 + y_0 = -1$.

Câu 22. **(Chuyên Bến Tre - 2020)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $d : y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB \leq 2\sqrt{2}$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng

A. -6. **B.** -27. **C.** 9. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{-2x+1}{x+1} = -x + m$ (1)

Điều kiện: $x \neq -1$.

Phương trình (1) $\Rightarrow \dfrac{-2x+1}{x+1} = -x + m$

$\Leftrightarrow -2x + 1 = (-x + m)(x + 1)$

$\Leftrightarrow -x^2 + (m+1)x + m - 1 = 0$ (2).

Để đường thẳng $d : y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B thì phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ -3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 6m - 3 > 0.$

$\Leftrightarrow m \in (-\infty; -3 - 2\sqrt{3}) \cup (-3 + 2\sqrt{3}; +\infty)$ (3).

Gọi $A(x_A; -x_A + m), B(x_B; -x_B + m)$ là tọa độ giao điểm:

Theo đề ta có:

$AB \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (x_B - x_A)^2} \leq 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2\left(x_B-x_A\right)^2=8 \Leftrightarrow x_B^2-2x_A.x_B+x_A^2-4\le 0$

$\Leftrightarrow \left(x_A+x_B\right)^2-4x_A.x_B-4\le 0$.

$\Leftrightarrow \left(m+1\right)^2-4\left(1-m\right)-4<0$

$\Leftrightarrow m^2+6m-7<0 \Leftrightarrow m\in\left(-7;1\right)$ (4)

Từ (3) và (4) ta có $m\in\left(-7;-3-2\sqrt{2}\right)\cup\left(-3+2\sqrt{2};1\right)$.

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\left\{-6;0\right\}$

Chọn **A.**

Câu 23. **(Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020)** Cho hàm số $y=\dfrac{2x-m^2}{x+1}$ có đồ thị $\left(C_m\right)$, trong đó m là tham số thực. Đường thẳng $d:y=m-x$ cắt $\left(C_m\right)$ tại hai điểm $A\left(x_A;y_A\right),B\left(x_B;y_B\right)$ với $x_A<x_B$; đường thẳng $d':y=2-m-x$ cắt $\left(C_m\right)$ tại hai điểm $C\left(x_C;y_C\right),D\left(x_D;y_D\right)$ với $x_C<x_D$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $x_A.x_D=-3$. Số phần tử của tập S là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Hoành độ điểm A và B là nghiệm phương trình: $2x-m^2=\left(x+1\right)\left(m-x\right)$

$\Leftrightarrow x^2+\left(3-m\right)x-m^2-m=0$ suy ra $x_A.x_B=-m^2-m;x_A+x_B=m-3$

Hoành độ điểm C và D là nghiệm phương trình: $2x-m^2=\left(x+1\right)\left(2-m-x\right)$

$\Leftrightarrow x^2+\left(m+1\right)x-m^2+m-2=0$ suy ra $x_C.x_D=-m^2+m-2;x_C+x_D=-m-1$

Mặc khác x_A và x_D là nghiệm của phương trình: $x^2-2x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_A=-3\\x_D=1\end{array}\right.$. Suy ra

$m^2+6m+9=5m^2-2m+9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=2\end{array}\right.$.

Nguyễn Bảo Vương

Dạng 3. Bài toán tương giao của đường thẳng với hàm số trùng phương (CHỨA THAM SỐ)

. **Bài toán tổng quát**: Tìm m để đường thẳng $d:y=\alpha$ cắt đồ thị $(C):y=f(x;m)=ax^4+bx^2+c$ tại n điểm phân biệt thỏa mãn điều kiện K cho trước?

Phương pháp giải:

Bước 1. Lập phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $ax^4+bx^2+c-\alpha=0$ (1)

Đặt $t=x^2\ge 0$ thì (1) $\Leftrightarrow at^2+bt+c-\alpha=0$ (2)

Tùy vào số giao điểm n mà ta biện luận để tìm giá trị $m\in D_1$. Cụ thể:

- Để $d\cap(C)=n=4$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa điều kiện: $0<t_1<t_2\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Rightarrow m\in D_1$.

- Để $d\cap(C)=n=3$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa điều kiện: $0=t_1<t_2\Leftrightarrow\begin{cases}c-\alpha=0\\\dfrac{b}{a}<0\end{cases}\Rightarrow m\in D_1$.

- Để $d\cap(C)=n=2$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm trái dấu hoặc có nghiệm kép dương $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ac<0 \\ \begin{cases}\Delta=0 \Rightarrow m\in D_1.\\ S>0\end{cases}\end{array}\right.$

- Để $d\cap(C)=n=1$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có đúng 1 nghiệm

$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm kép $=0$ hoặc $\begin{cases}t_1<0\\ t_2=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=0\\ c-\alpha=0\end{cases} \vee \begin{cases}c-\alpha=0\\ \dfrac{b}{a}>0\end{cases} \Rightarrow m\in D_1.$

Bước 2. Biến đổi điều kiện K về dạng có chứa tổng và tích của $t_1,\ t_2$ (3)

Thế biểu thức tổng, tích vào (3) sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến số là m. Giải chúng ta sẽ tìm được $m\in D_2$.

Kết luận: $m\in D_1\cap D_2$.

□ **Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.**

Ta có: $ax^4+bx^2+c=0$ (1), *đặt* $t=x^2\ge 0$, *thì có:* $at^2+bt+c=0$ (2)

Để (1) *có* 4 *nghiệm phân biệt thì* (2) *có hai nghiệm phân biệt dương, tức là:* $\begin{cases}\Delta>0\\ t_1+t_2>0\\ t_1.t_2>0\end{cases}$

Khi đó (1) *có* 4 *nghiệm phân biệt lần lượt là* $-\sqrt{t_2};-\sqrt{t_1};\sqrt{t_1};\sqrt{t_2}$ *lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi:*

$\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}=\sqrt{t_1}-(-\sqrt{t_1})\Leftrightarrow\sqrt{t_2}=3\sqrt{t_1}\Leftrightarrow t_2=9t_1$. *Theo định lý Vi – et* $t_1+t_2=-\dfrac{b}{a}$ *suy ra* $t_1=-\dfrac{b}{10a};t_2=-\dfrac{9b}{10a}$, *kết hợp* $t_1.t_2=\dfrac{c}{a}$ *nên có:* $9ab^2=100a^2c$

Tóm lại: Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ *cắt trục hoành tại* 3 *điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng,*

thì điều kiện cần và đủ là: $\begin{cases}b^2-4ac>0\\ -\dfrac{b}{a}>0\\ \dfrac{c}{a}>0\\ 9ab^2=100a^2c\end{cases}$

Câu 1. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4-4x^2+3+m=0$ có 4 nghiệm phân biệt là

A. $(-1;3)$. **B.** $(-3;1)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(-3;0)$.

Lời giải

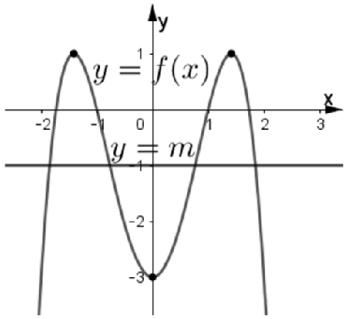
Chọn B

Ta có: $x^4-4x^2+3+m=0\Leftrightarrow -x^4+4x^2-3=m$.

Xét hàm số $y=-x^4+4x^2-3$, khi đó:

$y'=-4x^3+8x; y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\sqrt{2}\\ x=0\end{array}\right.$.

Suy ra $y_{CD}=1; y_{CT}=-3$.



Vậy để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt thì: $-3<m<1\Rightarrow m\in(-3;1)$.

Câu 2. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4-2mx^2+(2m-1)=0$ có 4 nghiệm thực phân biệt là

A. $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{1\}$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình: $x^4-2mx^2+(2m-1)=0$.

Đặt $x^2=t(t\ge 0)$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2-2mt+(2m-1)=0$ (*).

Để phương trình ban đầu có bốn nghiệm thực phân biệt thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2m+1>0\\2m>0\\2m-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\forall m\ne 1\\m>0\\m>\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>\frac{1}{2}\\m\ne 1\end{cases}\text{ hay } m\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{1\}.$$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 3. **(THPT Lương Thế Vinh - Hn - 2018)** Cho hàm số $y=x^4-3x^2-2$. Tìm số thực dương m để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O, trong đó O là gốc tọa độ.

A. $m=2$. **B.** $m=\frac{3}{2}$. **C.** $m=3$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình:

$x^4-3x^2-2=m\Leftrightarrow x^4-3x^2-2-m=0\quad(1)$.

Vì $m>0\Leftrightarrow -2-m<0$ hay phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn:

$$x^2=\frac{3+\sqrt{4m+17}}{2}\Rightarrow x_1=\sqrt{\frac{3+\sqrt{4m+17}}{2}}\text{ và }x_2=-\sqrt{\frac{3+\sqrt{4m+17}}{2}}.$$

Khi đó: $A(x_1;m)$, $B(x_2;m)$.

Ta có tam giác OAB vuông tại O, trong đó O là gốc tọa độ $\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow x_1.x_2+m^2=0$.

$$\Leftrightarrow\frac{3+\sqrt{4m+17}}{2}=m^2\Leftrightarrow\begin{cases}2m^2-3\ge 0\\4m^4-12m^2-4m-8=0\end{cases}\xleftarrow[2m^2-3\ge 0]{m>0}m=2.$$

Vậy $m=2$ là giá trị cần tìm.

Câu 4. Đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-x^2$ tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi

A. $-\frac{1}{4}<m<0$. **B.** $0<m<\frac{1}{4}$. **C.** $m>0$. **D.** $m>-\frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=x^4-x^2$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=4x^3-2x.$

$$y'=0\Leftrightarrow 4x^3-2x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\cdot$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-x^2$ tại 4 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{4}<m<0$.

Câu 5. **(THPT Quỳnh Lưu- Nghệ An- 2019)** Một đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ là 0, 1, m, n. Tính $S=m^2+n^2$.

A. $S=1$. **B.** $S=0$. **C.** $S=3$. **D.** $S=2$.

Lời giải

Chọn C

Tọa độ các giao điểm lần lượt là $A(0;0), B(1;-1), C\left(m;m^4-2m^2\right), D\left(n;n^4-2n^2\right)$.

Đường thẳng qua các điểm A,B,C,D có phương trình: $y=-x$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^4-2x^2=-x\Leftrightarrow x^4-2x^2+x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x^2+x-1=0\ (*)\end{array}\right.$

Vậy m,n là các nghiệm của phương trình $(*)$.

Khi đó: $S=m^2+n^2=(m+n)^2-2mn=3.$

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=x^4-4x^3+(m-2)x^2+8x+4$ cắt trục hoành tại đúng hai điểm có hoành độ lớn hơn 1.

A. 8. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4-4x^3+(m-2)x^2+8x+4=0$

Đồ thị hàm số $y=x^4-4x^3+(m-2)x^2+8x+4$ cắt trục hoành tại đúng hai điểm có hoành độ lớn hơn 1 $\Leftrightarrow$ có đúng hai nghiệm lớn hơn 1.

$(*)\Leftrightarrow x^4-4x^3+8x+4=(2-m)x^2$

$$\Leftrightarrow 2-m=x^2-4x+\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}$$

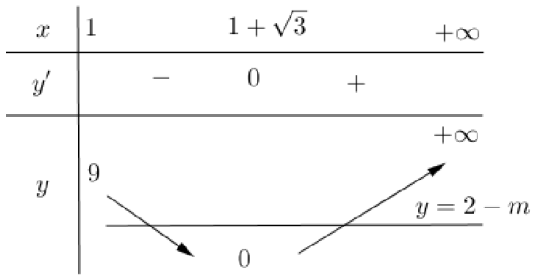
Đây là phương trình hoành độ giao điểm của $(C): y=x^2-4x+\dfrac{8}{x}+\dfrac{4}{x^2}\ (x>1)$ với đường thẳng $y=2-m$ song song với trục hoành.

Xét hàm số $y=x^2-4x+\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}\left(x>1\right)$.

$y'=2x-4-\frac{8}{x^2}-\frac{8}{x^3}=\frac{2x^4-4x^3-8x-8}{x^2}$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-\sqrt{3}\ (\text{loại})\\x=1+\sqrt{3}\ (\text{nhận})\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, ycbt $\Leftrightarrow 0<2-m<9\Leftrightarrow -7<m<2$.

Vì m nguyên nên $m\in\{-6,-5,...,1\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên của m thỏa bài toán.

Câu 7. **(Sở Hà Nam - 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)=-4x^4+8x^2-1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình $f\left(x\right)=m$ có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

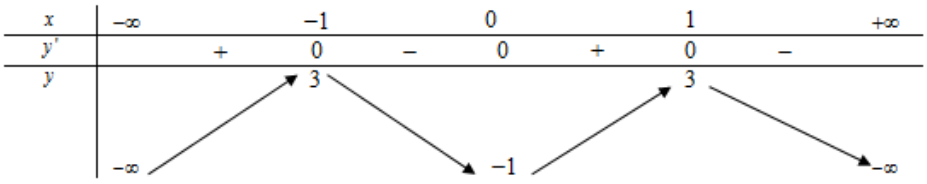
Lời giải

Chọn D

$f'\left(x\right)=-16x^3+16x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

Nguyễn Bảo Vương

Bảng biến thiên



Phương trình $f\left(x\right)=m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $f\left(x\right)=-4x^4+8x^2-1\ (C)$ và đường thẳng $y=m$.

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\m<-1\end{array}\right.$.

Vậy có 1 giá trị nguyên dương của m để phương trình $f\left(x\right)=m$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

Câu 8. **(Sở Thanh Hóa 2018)** Cho hàm số $y=x^4+2mx^2+m$ (với m là tham số thực). Tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y=-3$ tại bốn điểm phân biệt, trong đó có một điểm có hoành độ lớn hơn 2 còn ba điểm kia có hoành độ nhỏ hơn 1, là khoảng $(a;b)$ (với $a,b\in\mathbb{Q}$, a, b là phân số tối giản). Khi đó, $15ab$ nhận giá trị nào sau đây?

A. -63. **B.** 63. **C.** 95. **D.** -95.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^4+2mx^2+m=-3$. Đặt $x^2=t$, $t\ge 0$. Khi đó phương trình trở thành $t^2+2mt+m+3=0$ (1) và đặt $f(t)=t^2+2mt+m+3$.

Để đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y=-3$ tại 4 điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm thỏa mãn $0<t_1<t_2$ và khi đó hoành độ bốn giao điểm là $-\sqrt{t_2}<-\sqrt{t_1}<\sqrt{t_1}<\sqrt{t_2}$.

Do đó, từ điều kiện của bài toán suy ra $\begin{cases}\sqrt{t_2}>2\\ \sqrt{t_1}<1\end{cases}$ hay $0<t_1<1<4<t_2$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}f(0)>0\\ f(1)<0\\ f(4)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+3>0\\ 3m+4<0\\ 9m+19<0\end{cases}\Leftrightarrow -3<m<-\dfrac{19}{9}$.

Vậy $a=-3$, $b=-\dfrac{19}{9}$ nên $15ab=95$.

Câu 9. **(Chuyên Hà Tĩnh 2018)** Đường thẳng $y=m^2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-x^2-10$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông (O là gốc tọa độ). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m^2\in(5;7)$. **B.** $m^2\in(3;5)$. **C.** $m^2\in(1;3)$. **D.** $m^2\in(0;1)$.

Lời giải

$y'=4x^3-2x=2x(2x^2-1)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$-\frac{41}{4}$	↗	-10	↘	$-\frac{41}{4}$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đường thẳng $y=m^2\ge 0$ luôn phía trên trục hoành

Nên nó luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt A, B.

Gọi $A(\sqrt{a};m^2)$ và $B(-\sqrt{a};m^2)$ là giao điểm của hai đồ thị đã cho, với $a>0$

Ta có

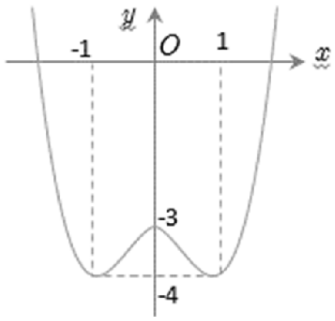
❍ $A\in(C)\Leftrightarrow a^2-a-10=m^2$ (1)

❍ Tam giác OAB cân tại O nên tam giác OAB vuông tại $O\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow m^4=a$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\Leftrightarrow m^8-m^4-m^2-10=0\Leftrightarrow t^4-t^2-t-10=0$, với $t=m^2>0$.

$\Leftrightarrow(t-2)(t^3+2t^2+3t+5)=0\Leftrightarrow t=2\Leftrightarrow m^2=2\in(1;3)$.

Câu 10. **(Sở Bình Phước 2018)** Cho hàm số $y=x^4-2x^2-3$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Với giá trị nào của m thì phương trình $x^4-2x^2-3=2m-4$ có 2 nghiệm phân biệt.



A. $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$. **B.** $m \le \dfrac{1}{2}$. **C.** $0<m<\dfrac{1}{2}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m>\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy, phương trình $x^4-2x^2-3=2m-4$ có hai nghiệm phân biệt khi

$$\left[\begin{array}{l} 2m-4=-4 \\ 2m-4>-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m>\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Câu 11. **(THPT Bình Giang - Hải Dương - 2018)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $-x^4+2x^2+3+2m=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $-2 \le m \le -\dfrac{3}{2}$. **B.** $-\dfrac{3}{2}<m<2$. **C.** $-2<m<-\dfrac{3}{2}$. **D.** $3<m<4$.

Lời giải

- Ta có: $-x^4+2x^2+3+2m=0 \Leftrightarrow x^4-2x^2-3=2m$.
- Lập bảng biến thiên của hàm số $y=x^4-2x^2-3$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

- Số nghiệm của phương trình đã cho là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2-3$ và đường thẳng $y=2m$.
- Từ BBT ta thấy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$-4<2m<-3 \Leftrightarrow -2<m<-\frac{3}{2}.$$

Câu 12. **(THPT Vân Nội - Hà Nội - 2018)** Tất cả các giá trị thực của tham số m, để đồ thị hàm số $y=x^4-2(2-m)x^2+m^2-2m-2$ không cắt trục hoành.

A. $m \ge \sqrt{3}+1$. **B.** $m<3$. **C.** $m>\sqrt{3}+1$. **D.** $m>3$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^4-2(2-m)x^2+m^2-2m-2=0 \quad (1)$

Đặt $t=x^2 \ge 0$. Phương trình (1) trở thành $t^2-2(2-m)t+m^2-2m-2=0 \quad (2)$

Đồ thị hàm số không cắt trục hoành $\Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow (2)$ vô nghiệm hoặc có nghiệm âm

Hay $\left[\begin{array}{l}\Delta'=-2m+6<0\\ \begin{cases}\Delta'=-2m+6\ge 0\\ 2-m<0\\ m^2-2m-2>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m>3\\ \begin{cases}m\le 3\\ m>2\\ \left[\begin{array}{l}m>1+\sqrt{3}\\ m<1-\sqrt{3}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m>3\\ 1+\sqrt{3}<m\le 3\end{array}\right. \Leftrightarrow m>1+\sqrt{3}.$

Câu 13. **(Sở Nam Định - 2018)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=(m+1)x^4-2(2m-3)x^2+6m+5$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có các hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1<x_2<x_3<1<x_4$.

A. $m\in\left(-1;\frac{-5}{6}\right)$. **B.** $m\in(-3;-1)$. **C.** $m\in(-3;1)$. **D.** $m\in(-4;-1)$.

Lời giải

C1: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là

$$(m+1)x^4-2(2m-3)x^2+6m+5=0 \quad (1)$$

Đặt $t=x^2\ge 0$ pt trở thành $(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5=0 \quad (2)$

$g(t)=(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5$

Để pt (1) có 4 nghiệm phân biệt thì pt (2) phải có 2 nghiệm dương phân biệt

Hay $\begin{cases}m+1\ne 0\\ \Delta'>0\\ t_1.t_2>0\\ t_1+t_2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\ne -1\\ (2m-3)^2-(m+1)(6m+5)>0\\ \frac{6m+5}{m+1}>0\\ \frac{2m-3}{m+1}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\ne -1\\ \frac{-23-\sqrt{561}}{4}<m<\frac{-23+\sqrt{561}}{4}\\ m<-1\vee m>-\frac{5}{6}\\ m<-1\vee m>\frac{3}{2}\end{cases} \quad (*)$

Nguyễn Bảo Vương

Để pt (1) có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1<x_2<x_3<1<x_4$

thì pt (2) phải có 2 nghiệm thỏa $0<t_1<1<t_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases}t_1-1<0\\ t_2-1>0\end{cases} \Leftrightarrow (t_1-1)(t_2-1)<0 \Leftrightarrow t_1t_2-(t_1+t_2)+1<0$

$\Leftrightarrow \frac{6m+5}{m+1}-\frac{2(2m-3)}{m+1}+1<0 \Leftrightarrow \frac{3m+12}{m+1}<0 \Leftrightarrow -4<m<-1$

Kết hợp với (*) ta có $m\in(-4;-1)$ thỏa yêu cầu bài toán.

C2:

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là

$$(m+1)x^4-2(2m-3)x^2+6m+5=0 \quad (1)$$

Đặt $t=x^2\ge 0$ pt trở thành $(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5=0 \quad (2)$

Để pt (1) có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1<x_2<x_3<1<x_4$

thì pt (2) phải có 2 nghiệm thỏa $0<t_1<1<t_2$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow m=\frac{-t^2-6t-5}{t^2-4t+6}$ (biểu thức $t^2-4t+6\ne 0, \forall t$)

Xét hàm số $f(t)=\frac{-t^2-6t-5}{t^2-4t+6}$, với $t\in(0;+\infty)$

Ta có $f(t)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ và có

$$f'(t)=\frac{10t^2-2t-56}{\left(t^2-4t+6\right)^2}$$

$$f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{1-\sqrt{561}}{10}<0\\ t=\dfrac{1+\sqrt{561}}{10}>1\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

t	0		1		$\frac{1+\sqrt{561}}{10}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$		0		$+$	
$f(t)$	$-\frac{5}{6}$	↘	-4	↘		↗	-1

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $f(t)=\dfrac{-t^2-6t-5}{t^2-4t+6}$ tại hai giao điểm có hoàng độ thỏa $0<t_1<1<t_2$ khi $-4<m<-1$.

Câu 14. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $y=x^4-(3m+2)x^2+3m$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để đường thẳng $d:y=-1$ cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

A. $-\dfrac{1}{3}<m<1$ và $m\neq 0$ **B.** $-\dfrac{1}{2}<m<1$ và $m\neq 0$

C. $-\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{1}{2}$ và $m\neq 0$ **D.** $-\dfrac{1}{3}<m<\dfrac{1}{2}$ và $m\neq 0$

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và đường thẳng d là $x^4-(3m+2)x^2+3m=-1$

$\Leftrightarrow x^4-(3m+2)x^2+3m+1=0$

Đặt $t=x^2$, $(t\geq 0)$, phương trình trở thành $t^2-(3m+2)t+3m+1=0$ (2)

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=3m+1\end{array}\right.$

Đường thẳng $d:y=-1$ cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2 khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $0<t_1<t_2<4$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3m+1\neq 1\\ 0<3m+1<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ -\dfrac{1}{3}<m<1\end{cases}$$

---------- HẾT ----------

DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

Dạng 1. Biện luận m để phương trình có nghiệm thỏa mãn điều kiện k (hàm số khác)

Câu 1. **(Mã 101 2019)** (Mã đề 001) Cho hai hàm số $y=\dfrac{x-3}{x-2}+\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}$ và $y=|x+2|-x+m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $[2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2]$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $\dfrac{x-3}{x-2}+\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}=|x+2|-x+m$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-3}{x-2}+\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}-|x+2|+x=m\,(1)$

Hàm số

$$p(x)=\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}-|x+2|+x=\begin{cases}\dfrac{x-3}{x-2}+\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}-2 & \text{khi } x\ge -2\\ \dfrac{x-3}{x-2}+\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+2x+2 & \text{khi } x<-2\end{cases}.$$

Ta có $p'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-2)^2}+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0,\forall x\in(-2;+\infty)\setminus\{-1;0;1;2\}\\ \dfrac{1}{(x-2)^2}+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+2>0,\forall x<-2\end{cases}$

nên hàm số $y=p(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;+\infty)$.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=2$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}p(x)=-\infty$.

Bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$g'(x)$		+	+	+	+	+	+
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $\frac{49}{12}$	$\nearrow$ $+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$ 2

Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có 4 nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=p(x)$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m\ge 2$.

Câu 2. **(Mã 103 2019)** Cho hai hàm số $y=\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}$ và $y=|x+2|-x-m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là $(C_1),(C_2)$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $(-2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2]$. **C.** $[-2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}=|x+2|-x-m\Leftrightarrow \frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}-|x+2|+x=-m\ (1)$$

Xét $f(x)=\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}-|x+2|+x, x\in D=\mathbb{R}\setminus\{-3;-2;-1;0\}$

Ta có $f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}-2, x\in(-2;+\infty)\cup D=D_1\\ \frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}+2x+2, x\in(-\infty;-2)\cup D=D_2\end{cases}$

Có $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}, \forall x\in D_1\\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+2, \forall x\in D_2\end{cases}$

Dễ thấy $f'(x)>0, \forall x\in D_1\cup D_2$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-2		1		0		$+\infty$
f'(x)		+		+		+		+		+	
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗	2

Hai đồ thị cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biện khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 4 nghiệm phân biệt, từ bảng biến thiên ta có: $-m\ge 2\Leftrightarrow m\le -2$.

Câu 3. **(Mã 102 2019)** Cho hai hàm số $y=\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+3}{x+4}$ và $y=|x+1|-x+m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biệt là

A. $(-\infty;3]$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $[3;+\infty)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x\ne -1; x\ne -2; x\ne -3$ và $x\ne -4$.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+3}{x+4}=|x+1|-x+m$$

$$\left(1-\frac{1}{x+1}\right)+\left(1-\frac{1}{x+2}\right)+\left(1-\frac{1}{x+3}\right)+\left(1-\frac{1}{x+4}\right)=|x-1|-x+m$$

$$\Leftrightarrow x-|x+1|+4-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right)=m$$

Đặt tập $D_1=(-1;+\infty)$ và $D_2=(-\infty;-4)\cup(-4;-3)\cup(-3;-2)\cup(-2;-1)$.

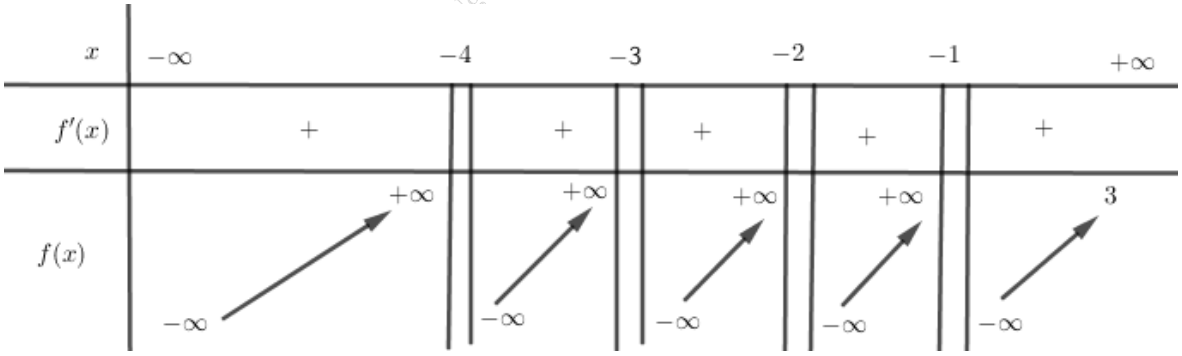
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right)=m, \quad \text{khi } x\in D_1\\ 2x+5-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right)=m, \text{ khi } x\in D_2\end{array}\right.$$

Đặt $f(x)=\begin{cases}3-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right), & \text{khi } x\in D_1\\ 2x+5-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right), & \text{khi } x\in D_2\end{cases}$.

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{1}{(x+4)^2}\right)>0, & \text{khi } x\in D_1\\ 2+\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{1}{(x+4)^2}\right)>0, & \text{khi } x\in D_2\end{cases}.$$

Vậy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ nên ta có bảng biến thiên



Do đó để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì $m\ge 3\Rightarrow m\in[3;+\infty)$.

Câu 4. **(Mã 104 2019)** Cho hai hàm số $y=\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}$ và $y=|x+1|-x-m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $(-\infty;-3)$. **B.** $[-3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-3]$. **D.** $(-3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ

$$\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}=|x+1|-x-m\Leftrightarrow\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}-|x+1|+x=-m\,(1)$$

Số nghiệm của (1) là số giao điểm của

$$F(x)=\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}-|x+1|+x=\begin{cases}\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}-1 & ,x>-1\\ \frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+2x+1, & x<-1\end{cases}$$

Ta có $F'(x)=\begin{cases}\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}, x\in(-1;+\infty)\setminus\{0;1\}\\ \frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+2, x\in(-\infty;-1)\setminus\{-2\}\end{cases}$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=3$

$\lim\limits_{x\to-2^+}F(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-2^-}F(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to-1^+}F(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to-1^-}F(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to0^-}F(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to1^+}F(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to1^-}F(x)=+\infty$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
$F'(x)$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$F(x)$	3	$\nearrow$ $+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$	

Để phương trình có 4 nghiệm thì $-m\le3\Leftrightarrow m\ge-3$.

Câu 5. Cho hai hàm số $y=\frac{x^2-1}{x}+\frac{x^2-2x}{x-1}+\frac{x^2-4x+3}{x-2}+\frac{x^2-6x+8}{x-3}$ và $y=|x+2|-x+m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tính tổng tất cả các giá trị nguyên thuộc khoảng $(-15;20)$ của tham số m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại nhiều hơn hai điểm phân biệt.

A. 210. **B.** 85. **C.** 119. **D.** 105.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x^2-1}{x}+\frac{x^2-2x}{x-1}+\frac{x^2-4x+3}{x-2}+\frac{x^2-6x+8}{x-3}=|x+2|-x+m$

$\Leftrightarrow\frac{x^2-1}{x}+\frac{x^2-2x}{x-1}+\frac{x^2-4x+3}{x-2}+\frac{x^2-6x+8}{x-3}-|x+2|+x=m$ (1).

Đặt $g(x)=\frac{x^2-1}{x}+\frac{x^2-2x}{x-1}+\frac{x^2-4x+3}{x-2}+\frac{x^2-6x+8}{x-3}-|x-2|+x$.

Ta có $g'(x)=4+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x-3)^2}+\frac{|x-2|-(x-2)}{|x-2|}>0$ với mọi x thuộc các khoảng sau $(-\infty;0)$, $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;3)$ và $(3;+\infty)$ nên hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng đó.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

Bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$

x	$-\infty$		0		1		2		3	$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y=m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y=g(x)$ tại năm điểm phân biệt nên (C_1) và (C_2) luôn cắt nhau tại đúng năm điểm phân biệt với mọi giá trị của m. Kết hợp điều kiện m nguyên thuộc $(-15;20)$ nên $m\in\{-14;-13;...;18;19\}$. Khi đó tổng tất cả các giá trị m là $S=15+16+17+18+19=85$.

Câu 6. Cho hai hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x+1}{x}+\dfrac{x+2}{x+1}$ và $y=e^x+2020+3m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Có bao nhiêu số nguyên m thuộc $(-2019;2020)$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại 3 điểm phân biệt?

A. 2692. **B.** 2691. **C.** 2690. **D.** 2693.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x+1}{x}+\dfrac{x+2}{x+1}=e^x+2020+3m$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x+1}{x}+\dfrac{x+2}{x+1}-e^x-2020=3m$ (1).

Đặt $g(x)=\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x+1}{x}+\dfrac{x+2}{x+1}-e^x-2020$.

Ta có $g'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2}-e^x<0$ với mọi x thuộc các khoảng sau $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$ và $(1;+\infty)$ nên hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-2017$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$.

Bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$+$		$+$			
$g(x)$	-2017	$\searrow$ $-\infty$	$+\infty$	$\searrow$ $-\infty$	$+\infty$	$\searrow$ $-\infty$	$+\infty$	$\searrow$ $-\infty$

Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có ba nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y=3m$ cắt đồ thị hàm số $y=g(x)$ tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi $3m\ge -2017\Leftrightarrow m\ge -\dfrac{2017}{3}\approx -672,3$.

Do m nguyên thuộc $(-2019;2020)$ nên $m\in\{-672;-671;...;2019\}$. Vậy có tất cả 2692 giá trị m thỏa mãn.

Câu 7. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hai hàm số $y=\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}$ và $y=\dfrac{11}{3x-4}-\dfrac{1}{2-x}+11+m$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-\infty;1]$. **D.** $(-\infty;2]$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}=\dfrac{11}{3x-4}-\dfrac{1}{2-x}+11+m \quad (*)$

Điều kiện: $\begin{cases} x-1\ge 0 \\ x\ne \dfrac{4}{3} \\ x\ne 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x\ne \dfrac{4}{3} \\ x\ne 2 \end{cases}$

Ta có:

$(*)\Leftrightarrow \left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}-\dfrac{11}{3x-4}+\dfrac{1}{2-x}-11=m$

Xét hàm số $f(x)=\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}-\dfrac{11}{3x-4}+\dfrac{1}{2-x}-11$ trên $[1;+\infty)\setminus\left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$

Nhận thấy, hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $\left[1;\dfrac{4}{3}\right),\left(\dfrac{4}{3};2\right),(2;+\infty)$

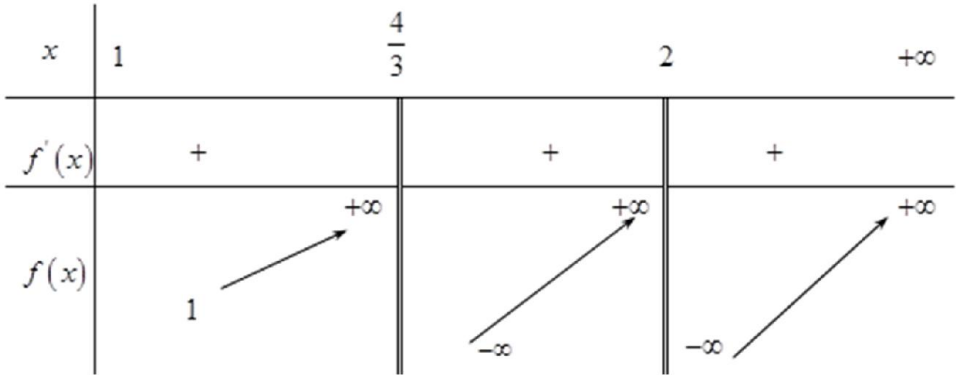
Ta có, $f'(x)=\left(\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}-\dfrac{11}{3x-4}+\dfrac{1}{2-x}-11\right)'$

$=4x\sqrt{x-1}+\left(2x^2+1\right)\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}+\dfrac{33}{(3x-4)^2}+\dfrac{1}{(2-x)^2}=\dfrac{10x^2-8x+1}{2\sqrt{x-1}}+\dfrac{33}{(3x-4)^2}+\dfrac{1}{(2-x)^2}>0$ với

$\forall x\in[1;+\infty)\setminus\left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$

Suy ra, hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1;+\infty)\setminus\left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta suy ra đồ thị hai hàm số $y=\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}$ và $y=\dfrac{11}{3x-4}-\dfrac{1}{2-x}+11+m$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt khi $m\in(-\infty;1]$.

Câu 8. Cho hai hàm số $y=\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}$ và $y=2^{1-x}+2m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng năm điểm phân biệt là

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2]$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(-\infty;4)$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}=2^{1-x}+2m$

$\Leftrightarrow \frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+3}{x+4}-2^{1-x}=2m$.

Đặt $g(x)=\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+3}{x+4}-2^{1-x}$.

Ta có $g'(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+2^{1-x}\ln 2>0$

với mọi x thuộc các khoảng sau $(-\infty;-3)$, $(-3;-2)(-2;-1)$, $(-1;0)$ và $(0;+\infty)$ nên hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng đó

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=4$ và và $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$.

Bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0	$+\infty$
$g'(x)$	+		+		+		+		+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗ 4

Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng năm điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có 5 nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y=2m$ cắt đồ thị hàm số $y=g(x)$ tại 5 điểm phân biệt khi và chỉ khi $2m<4\Leftrightarrow m<2$

Câu 9. Cho hai hàm số $y=\frac{x}{x^2-1}+\frac{x-1}{x^2-2x}+\frac{x-2}{x^2-4x+3}$ và $y=x-|x+1|+m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Số các giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-20;20)$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại năm điểm phân biệt là

A. 22. **B.** 39. **C.** 21. **D.** 20.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x}{x^2-1}+\frac{x-1}{x^2-2x}+\frac{x-2}{x^2-4x+3}=x-|x+1|+m$

$\Leftrightarrow \frac{x}{x^2-1}+\frac{x-1}{x^2-2x}+\frac{x-2}{x^2-4x+3}-x+|x+1|=m$ (1).

Đặt $g(x)=\frac{x}{x^2-1}+\frac{x-1}{x^2-2x}+\frac{x-2}{x^2-4x+3}-x+|x+1|$.

Ta có $g'(x)=\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}+\frac{-x^2+2x-2}{(x^2-2x)^2}+\frac{-x^2+4x-5}{(x^2-4x+3)^2}-1+\frac{x+1}{|x+1|}$

$$=\frac{-x^2-1}{\left(x^2-1\right)^2}+\frac{-(x-1)^2-1}{\left(x^2-2x\right)^2}+\frac{-(x-2)^2-1}{\left(x^2-4x+3\right)^2}+\frac{x+1-|x+1|}{|x+1|}<0$$

với mọi x thuộc các khoảng sau $(-\infty;-1),(-1;0),(0;1),(1;2),(2;3)$ và $(3;+\infty)$ nên hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ và và $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$.

Bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	1

Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng năm điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có năm nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=g(x)$ tại năm điểm phân biệt khi $m\le 1$, do m nguyên thuộc $(-20;20)$ nên $m\in\{-19;-18;...;0;1\}$. Vậy có tất cả 21 giá trị m thỏa mãn.

Câu 10. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2x^4-(m+2)x^3+x^2+\left(m^2-1\right)x\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Số phần tử của tập S là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x)=m^2x^4-(m+2)x^3+x^2+\left(m^2-1\right)x$

Ta có $f(x)=m^2x^4-(m+2)x^3+x^2+\left(m^2-1\right)x=x\left[m^2x^3-(m+2)x^2+x+\left(m^2-1\right)\right]$. Giả sử $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình $g(x)=m^2x^3-(m+2)x^2+x+\left(m^2-1\right)=0$ thì hàm số $f(x)=m^2x^4-(m+2)x^3+x^2+\left(m^2-1\right)x$ sẽ đổi dấu khi qua điểm $x=0$, nghĩa là $m^2x^4-(m+2)x^3+x^2+\left(m^2-1\right)x\ge 0$ không có nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Do đó, để yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì một điều kiện cần là $g(x)=m^2x^3-(m+2)x^2+x+\left(m^2-1\right)=0$ phải có nghiệm $x=0$, suy ra $m^2-1=0\Leftrightarrow m=\pm 1$

Điều kiện đủ:

Với $m=1, f(x)=x^4-3x^3+x^2=x^2\left(x^2-3x+1\right)$ khi đó $f(1)=-1<0$ không thỏa mãn điều kiện $m^2x^4-(m+2)x^3+x^2+\left(m^2-1\right)x\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. (loại)

Với $m=1, f(x)=x^4-x^3+x^2=x^2\left(x^2-x+1\right)\ge 0,\ x\in\mathbb{R}$.

Vậy $S=\{-1\}$.

Câu 11. Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ để bất phương trình $(x-1)(x+2)\left(ax^2+bx+2\right)\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x)=(x-1)(x+2)(ax^2+bx+2)$

Giả sử $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình $g(x)=(x+2)(ax^2+bx+2)=0$ thì hàm số $f(x)=(x-1)(x+2)(ax^2+bx+2)$ sẽ đổi dấu khi qua điểm $x=1$, nghĩa là $(x-1)(x+2)(ax^2+bx+2)\ge 0$ không có nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Do đó, để yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì một điều kiện cần là

$g(x)=(x+2)(ax^2+bx+2)=0$ có nghiệm $x=1$ suy ra $a+b+2=0$ (1)

Lí luận tương tự có $h(x)=(x-1)(ax^2+bx+2)=0$ cũng phải nhận $x=-2$ là nghiệm, suy ra $4a-2b+2=0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases}a+b+2=0\\4a-2b+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$

Điều kiện đủ:

Với $\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$ có $f(x)=(x-1)(x+2)(-x^2-x+2)=-(x-1)^2(x+2)^2\le 0$, $x\in\mathbb{R}$.

Vậy không tồn tại cặp số thực $(a;b)$ nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 12. Trong số các cặp số thực $(a;b)$ để bất phương trình $(x-1)(x-a)(x^2+x+b)\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$, tích ab nhỏ nhất bằng

A. $-\frac{1}{4}$. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x)=(x-1)(x-a)(x^2+x+b)$ và $g(x)=(x-a)(x^2+x+b)$

Giả sử $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình $g(x)=(x-a)(x^2+x+b)=0$ thì hàm số $f(x)=(x-1)(x-a)(x^2+x+b)$ sẽ đổi dấu khi qua điểm $x=1$, nghĩa $(x-1)(x-a)(x^2+x+b)\ge 0$ không có nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Do đó yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì một điều kiện cần là $g(x)=(x-a)(x^2+x+b)=0$ có nghiệm $x=1$ suy ra hoặc $\begin{cases}a=1\\x^2+x+b\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$ hoặc là phương trình $x^2+x+b=0$ có hai nghiệm $x=1$ và $x=a$

Trường hợp 1: $\begin{cases}a=1\\x^2+x+b\ge 0,\forall x\in R\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\1>0\\\Delta=1-4b\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b\ge\frac{1}{4}\end{cases}$

Trường hợp 2: phương trình $x^2+x+b=0$ có hai nghiệm $x=1$ và $x=a$

Ta thay $x=1$ vào phương trình $x^2+x+b=0$ có $1^2+1+b=0\Rightarrow b=-2$. Với $b=-2$ có phương trình $x^2+x+b=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$

Vì $x=a$ cũng là nghiệm của phương trình nên $a=-2$.

Trong trường hợp 1: $\begin{cases}a=1\\b\ge\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow ab\ge\frac{1}{4}$ suy ra tích ab nhỏ nhất khi $ab=\frac{1}{4}$

Và với $a=1, b=\frac{1}{4}$, tích $ab=\frac{1}{4}$ thì bất phương trình đã cho tương đương với

$(x-1)(x-1)\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$ thỏa mãn với mọi $x\in\mathbb{R}$ (nhận)

Trong trường hợp 2: Tích $ab=4>\frac{1}{4}$

Vậy tích ab nhỏ nhất khi $ab=\frac{1}{4}$.

Câu 13. Cho 2 hàm số $y=x^7+x^5+x^3+3m-1$ và $y=|x-2|-x-2m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1), (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) cắt (C_2) là

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $m\in(2;+\infty)$. **C.** $m\in(-\infty;2)$. **D.** $m\in[2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$x^7+x^5+x^3+3m-1=|x-2|-x-2m \Leftrightarrow x^7+x^5+x^3-|x-2|+x=-5m+1$ (1).

Xét hàm số $f(x)=x^7+x^5+x^3-|x-2|+x$.

Ta có $f(x)=\begin{cases}x^7+x^5+x^3+2 & \text{khi } x\in[2;+\infty)\\ x^7+x^5+x^3+2x-2 & \text{khi } x\in(-\infty;2)\end{cases}$.

$f'(x)=\begin{cases}7x^6+5x^4+3x^2>0 & \text{khi } x\in(2;+\infty)\\ 7x^6+5x^4+3x^2+2>0 & \text{khi } x\in(-\infty;2)\end{cases}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi $m\in\mathbb{R}$. Vậy để (C_1) cắt (C_2) thì $m\in\mathbb{R}$.

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để phương trình $\sqrt{3+x}\left(2\sqrt{3+x}-m\right)+\sqrt{1-x}\left(5\sqrt{1-x}+2m\right)=4\sqrt{-x^2-2x+3}$ có nghiệm thực?

A. 2019. **B.** 4032. **C.** 4039. **D.** 4033.

Lời giải

Chọn B

Đk: $x\in[-3;1]$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 11-3x-4\sqrt{(3+x)(1-x)}+m\left(2\sqrt{1-x}-\sqrt{3+x}\right)=0$. (*)

Đặt $t=2\sqrt{1-x}-\sqrt{3+x}=g(x)$, với $x\in[-3;1]\Rightarrow 11-3x-4\sqrt{(3+x)(1-x)}=t^2+4$.

Có $g'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{3+x}}<0,\forall x\in(-3;1)$. Suy ra $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$.

$\Rightarrow \min\limits_{[-3;1]} g(x)=g(1)=-2:\ \max\limits_{[-3;1]} g(x)=g(-3)=4\Rightarrow t\in[-2;4]$.

Từ (*) $\Rightarrow t^2+mt+4=0$.

Nếu $t=0\Rightarrow 0+4=0$ (vô lí).

Nếu $t\in[-2;4]\setminus\{0\}$, ta có $m=\dfrac{-t^2-4}{t}=-t-\dfrac{4}{t}=f(t)$.

Có $f'(t)=\dfrac{4-t^2}{t^2}, f'(t)=0\Leftrightarrow t=\pm 2$.

Bảng biến thiên

t	-2		0		2		4
$f'(t)$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(t)$	4	↗	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	↗	-4	↘	-5

Từ bảng biến thiên, suy ra phương trình có nghiệm thực khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m\ge 4\\ m\le -4\end{array}\right.$.

Do đó $\begin{cases} m\in[-2019;2019]\\ \left[\begin{array}{l} m\ge 4\\ m\le -4\end{array}\right.\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow m\in\{-2019;-2018;....;-4;4;..;2018;2019\}$.

Nguyễn Bảo Vương

Vậy có $(2019-4+1).2=4032$ giá trị nguyên của tham số thực m.

Câu 15. **(Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Tập hợp tất cả các số thực của tham số m để phương trình $x^6+6x^4-m^3x^3+(15-3m^2)x^2-6mx+10=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$ là:

A. $2<m\le\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{5}\le m<3$. **C.** $\dfrac{11}{5}<m<4$. **D.** $0<m<\dfrac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$x^6+6x^4-m^3x^3+(15-3m^2)x^2-6mx+10=0$

$\Leftrightarrow (x^2+2)^3+3(x^2+2)=(mx+1)^3+3(mx+1)$

$\Leftrightarrow f(x^2+2)=f(mx+1)(*)$

Với $f(t)=t^3+3t$. Do $f'(t)=3t^2+3>0,\forall t\in\mathbb{R}$

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nên $(*) \Leftrightarrow x^2+2=mx+1$

$\Leftrightarrow x^2-mx+1=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{x^2+1}{x}$.

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ trên $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$

Ta có: $g'(x)=1-\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên.

x	$\frac{1}{2}$		1		2
g'		$-$	0	$+$	
g	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$ khi và chỉ khi $2<m\le\dfrac{5}{2}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 16. **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020)** Có bao nhiêu m nguyên dương để hai đường cong $(C_1): y=\left|2+\dfrac{2}{x-10}\right|$ và $(C_2): y=\sqrt{4x-m}$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương?

A. 35. **B.** 37. **C.** 36. **D.** 34.

Lời giải.

ChọnC

Điều kiện: $\begin{cases} x\neq 10 \\ x\ge\dfrac{m}{4} \end{cases}$.

Xét trên $(0;+\infty)\setminus\{10\}$, phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là

$\left|2+\dfrac{2}{x-10}\right|=\sqrt{4x-m} \Leftrightarrow m=4x-\left(\dfrac{2x-18}{x-10}\right)^2$.

Đặt $g(x)=4x-\left(\dfrac{2x-18}{x-10}\right)^2$ với $x\in(0;+\infty)\setminus\{10\}$.

Ta có: $g'(x)=4\left(1+\dfrac{2x-18}{(x-10)^3}\right)$; $g''(x)=\dfrac{-4x+34}{(x-10)^4}$.

$g'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	0		$\frac{17}{2}$		10		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	
$g'(x)$	$4{,}072$	↗		↘ $-\infty$	$\|\|$ $+\infty$	↘	0

Suy ra phương trình $g'(x)=0$ có một nghiệm duy nhất $\alpha \in \left(\frac{17}{2};10\right)$. Lại có $g'(9,22)>0$ nên $\alpha \in (9,22;10)$. Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0;+\infty)\setminus\{10\}$:

x	0		9		α		10		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$g(x)$	$\frac{-81}{25}$	↗	36	↗	$g(\alpha)$	↘	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	↗	

Từ đó suy ra phương trình $m=g(x)$ có 3 nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi $\frac{-81}{25}<m<g(\alpha)$.

Trên khoảng $(9,22;10)$ thì $\begin{cases}4x<40\\ 3<\left(\frac{2x-18}{x-10}\right)^2\end{cases}$ nên $g(x)<37\Rightarrow g(\alpha)\in(36;37)$.

Vậy những giá trị m nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là 1; 2; 3; …; 36 hay có 36 giá trị của m cần tìm.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 17. **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $f(x)=(x-1).(x-2)...(x-2020)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ để phương trình $f'(x)=m.f(x)$ có 2020 nghiệm phân biệt?

A. 2020. **B.** 4040. **C.** 4041. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn B

Ta có nhận xét: khi $f(x)=0$ thì phương trình $f'(x)=m.f(x)$ vô nghiệm.

Do đó: $f'(x)=m.f(x)\Leftrightarrow m=\frac{f'(x)}{f(x)}$.

Xét hàm số $g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\ldots+\frac{1}{x-2020}$.

Ta có $g'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{-1}{(x-2)^2}+\frac{-1}{(x-3)^2}+\ldots+\frac{-1}{(x-2020)^2}<0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1;2;3...;2020\}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		3	$\cdots$	2020		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$\cdots$	$\|\|$	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\searrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\searrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\cdots$	$+\infty$ $\|\|$	$\searrow$	0

Dựa vào BBT, phương trình $f'(x)=m.f(x)$ có 2020 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m>0$ hoặc $m<0$.

Kết hợp với điều kiện m là số nguyên thuộc $[-2020;2020]$ nên

$m\in\{n\in\mathbb{Z}\,|\,-2020\le n\le 2020, n\ne 0\}$.

Vậy có tất cả 4040 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 18. **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Cho phương trình $4\cos^3 x-12\cos^2 x-33\cos x=4m+3\sqrt[3]{3\cos^2 x+9\cos x+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm duy nhất thuộc $\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$.

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\cos x$ với $x\in\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]\Rightarrow t\in\left[-\dfrac{1}{2};1\right]$, với mỗi $t\in\left[-\dfrac{1}{2};1\right]$ chỉ có một $x\in\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$

Ta có $4t^3-12t^2-33t=4m+3\sqrt[3]{3t^2+9t+m}\ \ (1)$

Bài toán trở thành tìm m để phương trình (1) có nghiệm duy nhất $t\in\left[-\dfrac{1}{2};1\right]$

Đặt $u=\sqrt[3]{3t^2+9t+m}\Rightarrow\begin{cases}4t^3-12t^2-33t=4m+3u\\ u^3=3t^2+9t+m\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4t^3=12t^2+33t+4m+3u\\ 4u^3=12t^2+36t+4m\end{cases}$

$\Rightarrow 4t^3-4u^3=3u-3t\Leftrightarrow(t-u)\left(4t^2+4ut+4u^2+3\right)=0\Leftrightarrow u=t,\left(4t^2+4ut+4u^2+3>0\right)$

Ta tìm m để phương trình $m=t^3-3t^2-9t$ có nghiệm duy $t\in\left[-\dfrac{1}{2};1\right]$

Xét $g(t)=t^3-3t^2-9t\Rightarrow g'(t)=3t^2-6t-9\Rightarrow g'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\,(l)\\ t=3\ \ (l)\end{array}\right.$

Vậy $g(1)\le m\le g\left(-\dfrac{1}{2}\right)\Leftrightarrow -11\le m\le\dfrac{29}{8}$ vậy có 15 giá trị nguyên của m.

Câu 19. **(Sở Ninh Bình 2020)** Cho hai hàm số $y=\ln\left|\dfrac{x-2}{x}\right|$ và $y=\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{x}+4m-2020$, Tổng tất các các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hai hàm số cắt nhau tại một điểm duy nhất là

A. 506. **B.** 1011. **C.** 2020. **D.** 1010.

Lời giải

Chọn A

+ Phương trình hoành độ điểm chung của hai đồ thị hàm số là

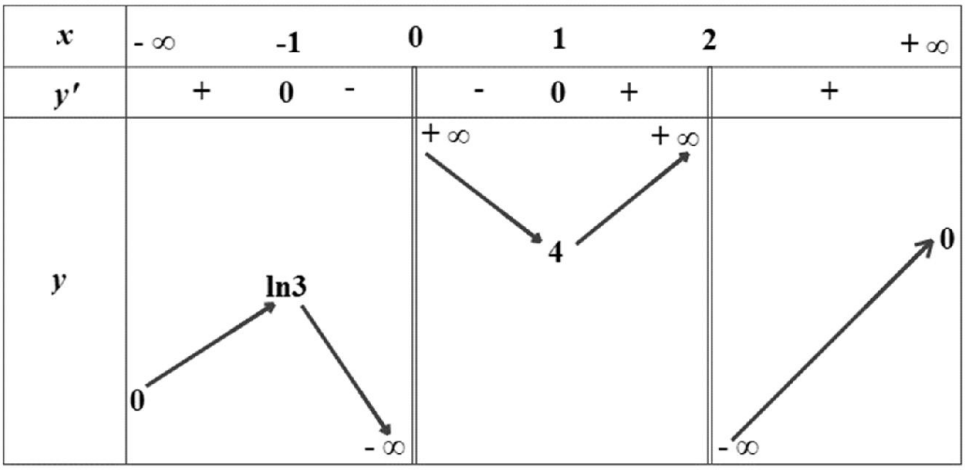
$$\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|=\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x}+4m-2020\Leftrightarrow\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|-\frac{3}{x-2}+\frac{1}{x}=4m-2020\quad(*)$$

Đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại một điểm duy nhất khi và chỉ khi (*) có duy nhất một nghiệm.

+ Xét hàm số $y=\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|-\frac{3}{x-2}+\frac{1}{x}=\begin{cases}g_1(x)=\ln(x-2)-\ln x-\frac{3}{x-2}+\frac{1}{x} & \text{khi } x>2\\ g_2(x)=\ln(2-x)-\ln x-\frac{3}{x-2}+\frac{1}{x} & \text{khi } 0<x<2\\ g_3(x)=\ln(2-x)-\ln(-x)-\frac{3}{x-2}+\frac{1}{x} & \text{khi } x<0\end{cases}$

Ta có $\begin{cases}g_1'(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}+\frac{3}{(x-2)^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } x>2\\ g_2'(x)=\frac{-1}{2-x}-\frac{1}{x}+\frac{3}{(x-2)^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } 0<x<2\\ g_3'(x)=\frac{-1}{2-x}-\frac{1}{x}+\frac{3}{(x-2)^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } x<0\end{cases}$, do vậy $y=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.$

bảng biến thiên hàm số như sau



+ Qua bảng biến thiên này ta có (*) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}4m-2020=4\\4m-2020=\ln 3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=506\in\mathbb{Z}\\m=\frac{2020+\ln 3}{4}\notin\mathbb{Z}\end{array}\right.$

+ Tư đây yêu cầu bài toán xãy ra khi và chỉ khi $m=506$.

Câu 20. **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020)** Cho hai hàm số $y=(x+1)(2x+1)(3x+1)(m+2|x|)$; $y=-12x^4-22x^3-x^2+10x+3$ có đồ thị lần lượt là (C_1), (C_2). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-2020;2020]$ để (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt?

A. 4040. **B.** 2020. **C.** 2021. **D.** 4041.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2):

$$(x+1)(2x+1)(3x+1)(m+2|x|)=-12x^4-22x^3-x^2+10x+3\ (1)$$

Để đồ thị (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt thì phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Với $x \in \left\{-1;-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right\}$: Không là nghiệm của phương trình (1).

Với $x \notin \left\{-1;-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right\}$ ta có:

$$(1) \Leftrightarrow m = \frac{-12x^4-22x^3-x^2+10x+3}{(x+1)(2x+1)(3x+1)} - 2|x| \Leftrightarrow m = -2x-2|x| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3x+1}.$$

Xét hàm số $f(x) = -2x-2|x| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3x+1}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1;-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right\}$.

Suy ra: $f'(x) = -2 - \frac{2x}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{3}{(3x+1)^2}$.

Ta có: $f'(x) = \begin{cases} -4 - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{3}{(3x+1)^2} & \text{khi } x \in (0;+\infty) \\ -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{3}{(3x+1)^2} & \text{khi } x(-\infty;0) \setminus \left\{-1;-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right\} \end{cases}$ và $f'(x)$ không xác định tại $x=0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	$+\infty$	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thì $m \geq 0$. Do đó có 2021 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 21. **(Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020)** Cho hàm số $y = \frac{(x^2-2x+m)^2 - 3x - m}{x-3}$ (C) và đường thẳng $(d): y = 2x$ (m là tham số thực).

Số giá trị nguyên của $m \in [-15;15]$ để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt là

A. 15. **B.** 30. **C.** 16. **D.** 17.

Lời giải

Chọn A

Xét pt hoành độ giao điểm của hai đồ thị:

$$\frac{(x^2-2x+m)^2-3x-m}{x-3} = 2x \Leftrightarrow (x^2-2x+m)^2 - 3x - m = 2x^2 - 6x \quad (x \neq 3)$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2x+m)^2 = 2x^2 - 3x + m \quad (x \neq 3) \quad (*)$$

Đặt: $x^2-2x+m=t$ ta được hệ: $\begin{cases}x^2-2x+m=t\\ t^2=2x^2-3x+m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x-t+m=0\\ 2x^2-t^2-3x+m=0\end{cases}$

$\Rightarrow x^2-t^2-x+t=0\Rightarrow(x-t)(x+t-1)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=x\\ t=1-x\end{array}\right.$

Suy ra: $\left[\begin{array}{l}x^2-2x+m=x\\ x^2-2x+m=1-x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-3x+m=0\ (1)\\ x^2-x+m-1=0\ (2)\end{array}\right.$

YCBT $\Leftrightarrow(*)$ phải có 4 nghiệm phân biệt khác 3 $\Leftrightarrow(1),(2)$ đều phải có hai nghiệm pb khác 3 và các nghiệm của chúng không trùng nhau.

-$(1),(2)$ đều có hai nghiệm pb khác 3 khi: $\begin{cases}9-4m>0\\ 3^3-3.3+m\neq 0\\ 1-4(m-1)>0\\ 3^2-3+m-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{9}{4}\\ m\neq 0\\ m<\dfrac{5}{4}\\ m\neq -5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1,25\\ m\neq 0\\ m\neq -5\end{cases}\ (**)$

-$(1),(2)$ không có nghiệm trùng nhau $\Leftrightarrow$ Hệ: $\begin{cases}x^2-3x+m=0\\ x^2-x+m-1=0\end{cases}$ Vô nghiệm

$\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1=0\\ x^2-3x+m=0\end{cases}$ Vô nghiệm

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ x^2-3x+m=0\end{cases}$ Vô nghiệm

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-3.\left(\dfrac{1}{2}\right)+m\neq 0$

$\Leftrightarrow m\neq\dfrac{5}{4}\ (***)$

Vậy số giá trị nguyên của $m\in[-15;15]$ đồng thời thỏa mãn $(**)$ và $(***)$ là 15.

Câu 22. **(Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Cho hai hàm số $y=x^6+6x^4+6x^2+1$ và $y=x^3\sqrt{m-15x}(m+3-15x)$ có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Số phần tử của tập hợp S bằng

A. 2006. **B.** 2005. **C.** 2007. **D.** 2008.

Lời giải

Chọn A

Ta biết (C_1) cắt (C_2) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình

$x^6+6x^4+6x^2+1=x^3\sqrt{m-15x}(m+3-15x)$ (1) có hai nghiệm phân biệt.

Điều kiện: $m-15x\geq 0\Leftrightarrow m\geq 15x$ $(*)$.

Nếu $x=0$ thì phương trình (1) vô nghiệm. Suy ra $x\neq 0$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow x^3+6x^2+6x+\dfrac{1}{x^3}=\sqrt{m-15x}(m+3-15x)$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(\sqrt{m-15x}\right)^3+3\sqrt{m-15x}$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t$. Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$f'(t)=3t^2+3>0,\forall t\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm số $f(t)=t^3+3t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=\sqrt{m-15x}\ \ (2)$.

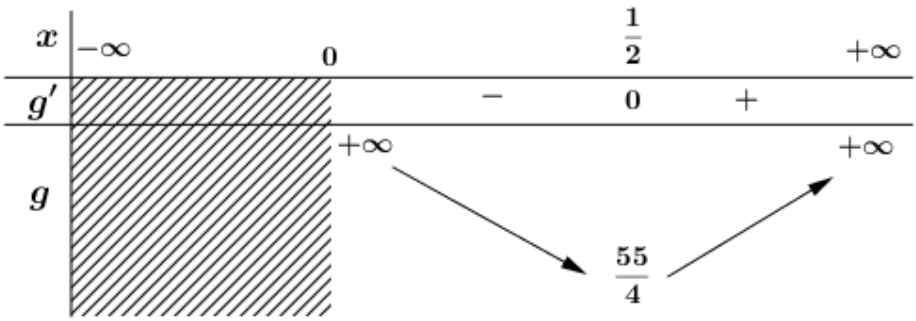
Nếu $x<0\Rightarrow x+\frac{1}{x}<0\Rightarrow$ Phương trình (2) vô nghiệm $\Rightarrow x>0$.

Khi đó $\begin{cases}m>0\\ x+\frac{1}{x}>0\end{cases}$ nên $(2)\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+2=m-15x\Leftrightarrow m=x^2+\frac{1}{x^2}+2+15x$.

Đặt $g(x)=x^2+\frac{1}{x^2}+2+15x, x>0$. $g'(x)=2x-\frac{2}{x^3}+15$.

Phương trình $g'(x)=0$ có một nghiệm $x=\frac{1}{2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Bảng biến thiên



Suy ra (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m>\frac{55}{4}$ (thỏa $m>0$).

Kết hợp với m nguyên và $m\in[-2019;2019]$ ta có được m nguyên và $m\in[14;2019]$.

Khi đó S có $2019-14+1=2006$ phần tử.

Dạng 2. Tương giao hàm hợp, hàm ẩn

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$ của phương trình $2f(\sin x)+3=0$ là

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sin x$. Do $x\in[-\pi;2\pi]$ nên $t\in[-1;1]$.

Khi đó ta có phương trình $2f(t)+3=0\Leftrightarrow f(t)=-\frac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(t)=-\frac{3}{2}$ có 2 nghiệm $t=a\in(-1;0)$ và $t=b\in(0;1)$.

Trường hợp 1: $t=a\in(-1;0)$

Ứng với mỗi giá trị $t\in(-1;0)$ thì phương trình có 4 nghiệm $-\pi<x_1<x_2<0<\pi<x_3<x_4<2\pi$.

Trường hợp 2: $t=b\in(0;1)$

Ứng với mỗi giá trị $t\in(0;1)$ thì phương trình có 4 nghiệm $0<x_5<x_6<\pi$.

Hiển nhiên cả 6 nghiệm trong 2 trường hợp trên đều khác nhau.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0	↗	2	↘	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin x)=1$ là

A. 7. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sin x$, $x\in\left[0;\frac{5\pi}{2}\right]\Rightarrow t\in[-1;1]$

Khi đó phương trình $f(\sin x)=1$ trở thành $f(t)=1,\forall t\in[-1;1]$

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $y=f(t)$ và đường thẳng $y=1$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(t)=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=a\in(-1;0)\\t=b\in(0;1)\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $t=a\in(-1;0)$

Ứng với mỗi giá trị $t\in(-1;0)$ thì phương trình $\sin x=t$ có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $\pi<x_1<x_2<2\pi$.

Trường hợp 2: $t=b\in(0;1)$

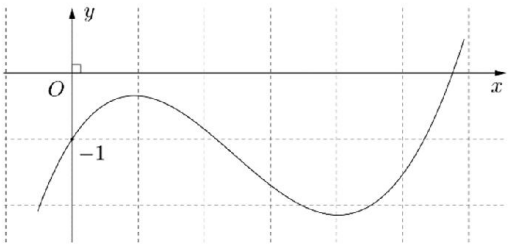
Ứng với mỗi giá trị $t \in (0;1)$ thì phương trình có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn

$0 < x_3 < x_4 < \pi;\ 2\pi < x_5 < \dfrac{5\pi}{2}$;

Hiển nhiên cả 5 nghiệm trong 2 trường hợp trên đều khác nhau.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Câu 3. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^3 f(x)\right) + 1 = 0$ là



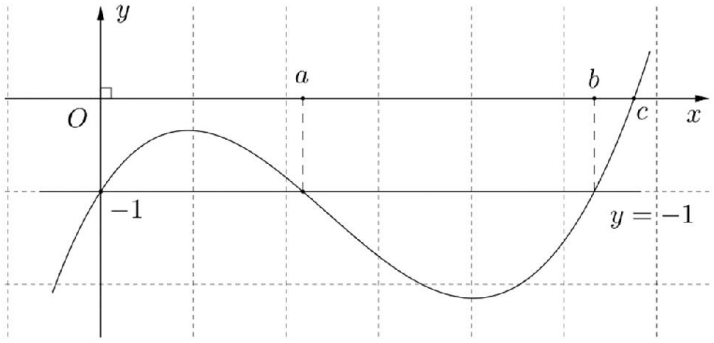
A. 8. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C.

$$f\left(x^3 f(x)\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow f\left(x^3 f(x)\right) = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 f(x) = 0 \\ x^3 f(x) = a > 0 \\ x^3 f(x) = b > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = \dfrac{a}{x^3} (\text{do } x \neq 0) \\ f(x) = \dfrac{b}{x^3} (\text{do } x \neq 0) \end{array}\right.$$

Nguyễn Bảo Vương



□ $f(x) = 0$ có một nghiệm dương $x = c$.

□ Xét phương trình $f(x) = \dfrac{k}{x^3}$ với $x \neq 0, k > 0$.

Đặt $g(x) = f(x) - \dfrac{k}{x^3}$.

$g'(x) = f'(x) + \dfrac{3k}{x^4}$.

□ Với $x > c$, nhìn hình ta ta thấy $f'(x) > 0 \Rightarrow g'(x) = f'(x) + \dfrac{3k}{x^4} > 0$

$\Rightarrow g(x)=0$ có tối đa một nghiệm.

Mặt khác $\begin{cases} g(c)<0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty \end{cases}$ và $g(x)$ liên tục trên $(c;+\infty)$

$\Rightarrow g(x)=0$ có duy nhất nghiệm trên $(c;+\infty)$.

□ Với $0<x<c$ thì $f(x)<0<\dfrac{k}{x^3} \Rightarrow g(x)=0$ vô nghiệm.

□ Với $x<0$, nhìn hình ta ta thấy $f'(x)>0 \Rightarrow g'(x)=f'(x)+\dfrac{3k}{x^4}>0$

$\Rightarrow g(x)=0$ có tối đa một nghiệm.

Mặt khác $\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^-} g(x)>0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty \end{cases}$ và $g(x)$ liên tục trên $(-\infty;0)$.

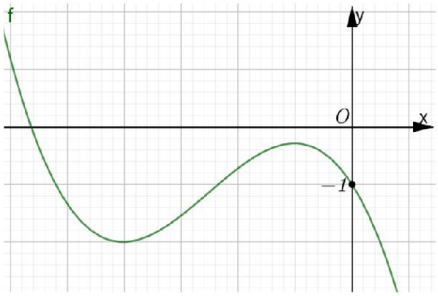
$\Rightarrow g(x)=0$ có duy nhất nghiệm trên $(-\infty;0)$.

Tóm lại $g(x)=0$ có đúng hai nghiệm trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Suy ra hai phương trình $f(x)=\dfrac{a}{x^3}$, $f(x)=\dfrac{b}{x^3}$ có 4 nghiệm phân biệt khác 0 và khác c.

Vậy phương trình $f\left(x^3 f(x)\right)+1=0$ có đúng 6 nghiệm.

Câu 4. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên dưới.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^3 f(x)\right)+1=0$ là

A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị, ta thấy $f\left(x^3 f(x)\right)+1=0 \Leftrightarrow f\left(x^3 f(x)\right)=-1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x^3 f(x)=a\in(-6;-5) & (1) \\ x^3 f(x)=b\in(-3;-2) & (2) \\ x^3 f(x)=0 & (3) \end{bmatrix}$

+ Phương trình (3) tương đương $\begin{bmatrix} x=0 \\ f(x)=0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \\ x=x_1,\ (-6<x_1<a<-5) \end{bmatrix}$.

+ Các hàm số $g(x)=\dfrac{a}{x^3}$ và $h(x)=\dfrac{b}{x^3}$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$, và nhận xét rằng $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình (1) nên:

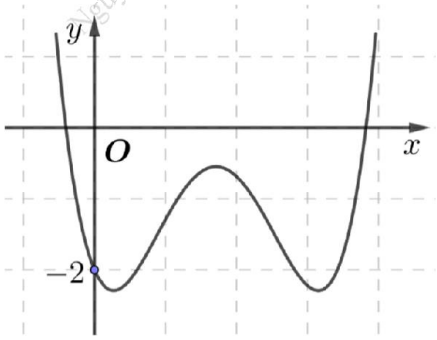
$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=g(x)\\f(x)=h(x)\end{array}\right.$$

+ Trên khoảng $(-\infty;0)$, ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=0\\ \lim\limits_{x\to0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}h(x)=+\infty\end{cases}$ nên các phương trình $f(x)=g(x)$ và $f(x)=h(x)$ có nghiệm duy nhất.

+ Trên khoảng $(0;+\infty)$, ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0\\ \lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=-\infty\end{cases}$ nên các phương trình $f(x)=g(x)$ và $f(x)=h(x)$ có nghiệm duy nhất.

Do đó, phương trình $f\left(x^3f(x)\right)+1=0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Câu 5. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.

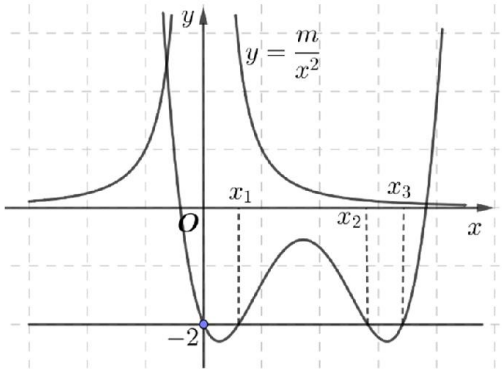


Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^2f(x)\right)+2=0$ là

A. 8. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D



$$f\left(x^2 f(x)\right)+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 f(x)=0 \\ x^2 f(x)=a\,(1) \\ x^2 f(x)=b\,(2) \\ x^2 f(x)=c\,(3) \end{array}\right. \text{ với } 0<a<b<c.$$

Xét phương trình $f(x)=\dfrac{m}{x^2}(1) \quad (m>0)$.

Gọi α,β là hoành độ giao điểm của $(C): y=f(x)$ và Ox; $\alpha<0<\beta$.

$(1) \Leftrightarrow f(x)-\dfrac{m}{x^2}=0$. Đặt $g(x)=f(x)-\dfrac{m}{x^2}$

Đạo hàm $g'(x)=f'(x)+\dfrac{2m}{x^3}$.

Trường hợp 1: $x<\alpha; f'(x)<0; \dfrac{2m}{x^3}<0 \Rightarrow g'(x)<0$

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty, g(\alpha)=-\dfrac{m}{\alpha^2}<0$. Phương trình $g(x)=0$ có một nghiệm thuộc $(-\infty;\alpha)$.

Trường hợp 2: $\alpha<x<\beta$

$f(x)<0$, $\dfrac{m}{x^2}>0$ suy ra $g(x)<0 \quad \forall x\in(\alpha,\beta)$.

Trường hợp 3: $x>\beta; f'(x)>0; \quad \dfrac{2m}{x^3}>0 \Rightarrow g'(x)>0$

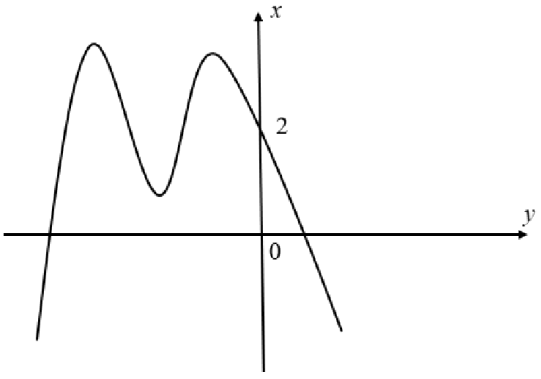
Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty, g(\beta)=-\dfrac{m}{\beta^2}<0$. Phương trình $g(x)=0$ có một nghiệm thuộc $(\beta;+\infty)$.

Vậy phương trình $f(x)=\dfrac{m}{x^2}$ có hai nghiệm $\forall m>0$.

Ta có: $x^2 f(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee f(x)=0$: có ba nghiệm.

Vậy phương trình (1) có 9 nghiệm.

Câu 6. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x^2 f(x)\right)=2$ là:

A. 6. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f\left(x^2 f\left(x\right)\right)=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 f\left(x\right)=0 \\ x^2 f\left(x\right)=a<0 \\ x^2 f\left(x\right)=b<0 \\ x^2 f\left(x\right)=c<0 \end{array}\right.$.

Xét phương trình: $x^2 f\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f\left(x\right)=0 \end{array}\right.$ mà $f\left(x\right)=0$ có hai nghiệm $\Rightarrow x^2.f\left(x\right)=0$ có ba nghiệm.

Xét phương trình: $x^2 f\left(x\right)=a<0$

Do $x^2 \geq 0$; $x=0$ không là nghiệm của phương trình $\Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{a}{x^2}<0$

Xét $g\left(x\right)=\dfrac{a}{x^2} \Rightarrow g'\left(x\right)=\dfrac{-2a}{x^3}$

Bảng biến thiên:

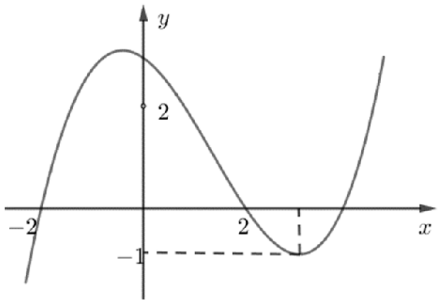
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	0

Từ bảng biến thiên với $f\left(x\right)<0 \Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{a}{x^2}$ có 2 nghiệm.

Tương tự: $x^2 f\left(x\right)=b$ và $x^2 f\left(x\right)=c$ $\left(b,c<0\right)$ mỗi phương trình cũng có hai nghiệm.

Vậy số nghiệm của phương trình $f\left(x^2 f\left(x\right)\right)=2$ là 9 nghiệm.

Câu 7. **(Mã 103 2019)** Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\dfrac{3}{2}$ là

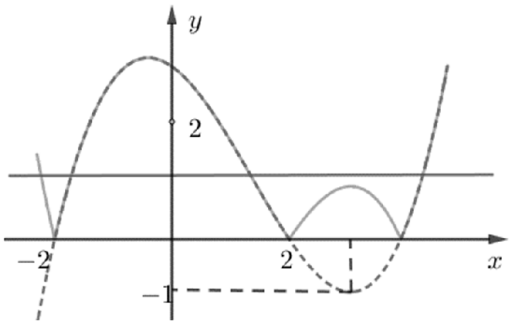


A. 7. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=x^3-3x$ ta có phương trình $\left|f\left(t\right)\right|=\dfrac{3}{2}$ $\left(*\right)$.



Từ đồ thị hàm số $y=\left|f\left(t\right)\right|$ và đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$ ta suy ra phương trình $\left(*\right)$ có 4 nghiệm $t_1<-2<t_2<0<t_3<2<t_4$

Xét hàm $t=x^3-3x$. Ta có $t'=3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$ Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
t'		+			-			+	
t	$-\infty$	↗	2	↘	0	↘	-2	↗	$+\infty$

Với $t_1<-2$ phương trình: $t_1=x^3-3x$ cho ta 1 nghiệm.

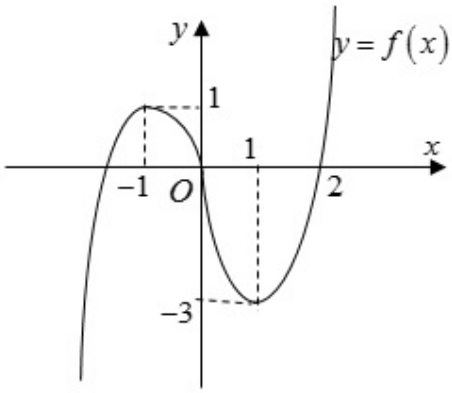
Với $-2<t_2<0$ phương trình: $t_2=x^3-3x$ cho ta 3 nghiệm.

Với $0<t_3<2$ phương trình: $t_3=x^3-3x$ cho ta 3 nghiệm.

Với $2<t_4$ phương trình: $t_4=x^3-3x$ cho ta 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có tất cả 8 nghiệm. Chọn C

Câu 8. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau



Số nghiệm của phương trình $f\left(2+f\left(\mathrm{e}^x\right)\right)=1$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

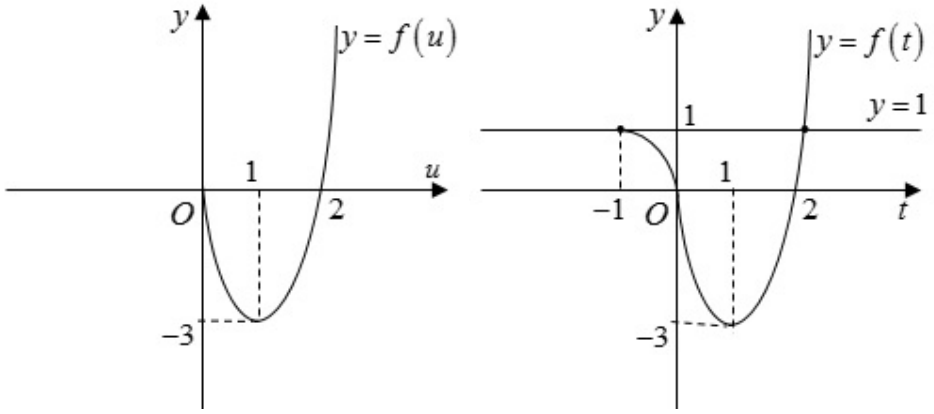
Đặt $u=\mathrm{e}^x>0$, từ đồ thị suy ra: $f\left(u\right)\geq-3,\forall u>0$.

Đặt $t=2+f\left(u\right)$, $t\geq-1$.

Ứng với mỗi nghiệm $t=-1$, có một nghiệm $u=1$.

Ứng với mỗi nghiệm $t\in\left(-1;2\right)$, có hai nghiệm $u\in\left(0;2\right)$.

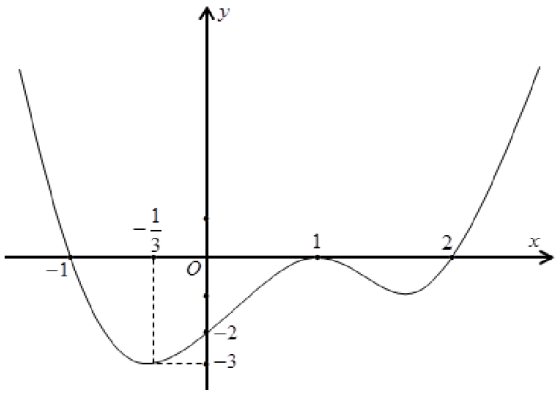
Ứng với mỗi nghiệm $t>2$, có một nghiệm $u>2$.



Phương trình $f(t)=1$ có một nghiệm $t=-1$ và một nghiệm $t>2$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



Đặt $g(x)=f\left(f'(x)-1\right)$. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $g'(x)=0$. Số phần tử của tập S là

A. 8. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ và $f'(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Do đó, tập xác định của hàm số $g(x)$ là $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x)=f''(x).f'\left(f'(x)-1\right)$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f''(x)=0 \\ f'\left(f'(x)-1\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1}{3} \\ x=1 \\ x=x_0\in(1;2) \\ f'(x)-1=-1 \\ f'(x)-1=1 \\ f'(x)-1=2 \end{array}\right.$

Từ đồ thị ta cũng có:

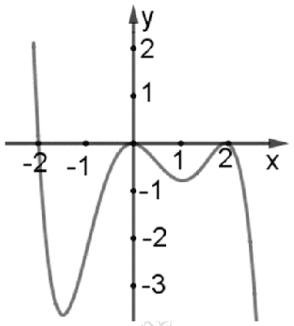
$\square$ $f'(x)-1=-1 \Leftrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

$\square$ $f'(x)-1=1 \Leftrightarrow f'(x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \in (-\infty\,;\,-1) \\ x=x_2 \in (2\,;\,+\infty) \end{array}\right.$.

$\square$ $f'(x)-1=2 \Leftrightarrow f'(x)=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_3 \in (-\infty\,;\,x_1) \\ x=x_4 \in (x_2\,;\,+\infty) \end{array}\right.$.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 9 nghiệm.

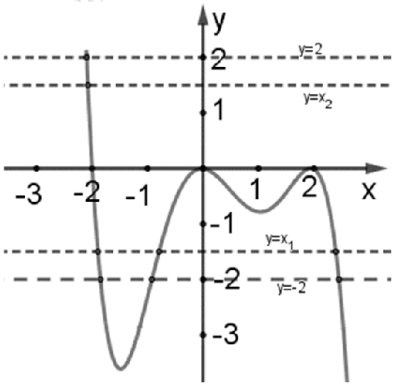
Câu 10. **(THPT Cẩm Bình Hà Tĩnh 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x)=f(f(x))$. Hỏi phương trình $g'(x)=0$ có mấy nghiệm thực phân biệt?



A. 14. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 12.

Lời giải

Chọn B



Ta có $g'(x)=f'(f(x)).f'(x)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(f(x))=0 \\ f'(x)=0 \end{array}\right.$

Có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1,(-2<x_1<-1) \\ x=0 \\ x=x_2,(1<x_2<2) \\ x=2 \end{array}\right.$; $f'(f(x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=x_1 \\ f(x)=0 \\ f(x)=x_2 \\ f(x)=2 \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị ta thấy:

$f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt là $x=-2, x=0, x=2$, trong đó có 2 nghiệm trùng với nghiệm của $f'(x)=0$.

$f(x)=x_1$ có 3 nghiệm phân biệt $x_3\in(-2;-1), x_4\in(-1;1), x_5\in(2;+\infty)$.

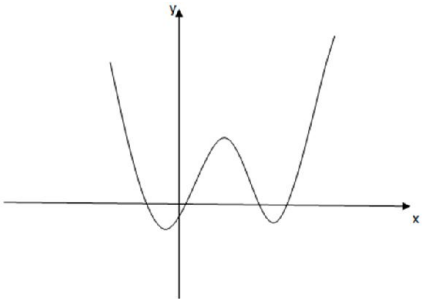
$f(x)=x_2$ có 1 nghiệm duy nhất $x_6\in(-\infty;-2)$.

$f(x)=2$ có 1 nghiệm duy nhất $x_7\in(-\infty;-2)$.

Cũng từ đồ thị có thể thấy các nghiệm $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, -2, 0, 2$ đôi một khác nhau.

Vậy $g'(x)=0$ có tổng cộng 10 nghiệm phân biệt.

Câu 11. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ được cho như hình vẽ sau



Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left[f'(x)\right]^2-f''(x).f(x)$ và trục Ox là:

A. 4. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4), a\neq 0, x_1<x_2<x_3<x_4$.

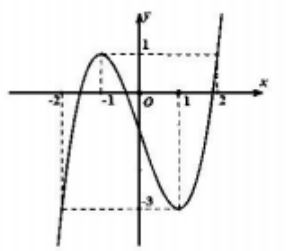
Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left[f'(x)\right]^2-f''(x).f(x)$ và trục Ox là

$$\left[f'(x)\right]^2-f''(x).f(x)=0\Rightarrow\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]'=0\Rightarrow\left[\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4}\right]'=0$$

$-\frac{1}{(x-x_1)^2}-\frac{1}{(x-x_2)^2}-\frac{1}{(x-x_3)^2}-\frac{1}{(x-x_4)^2}=0$ vô nghiệm.

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left[f'(x)\right]^2-f''(x).f(x)$ và trục Ox là 0.

Câu 12. **(Chuyên Lam Sơn 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f\left(f(x)-1\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \in (-2;-1) \\ x=x_2 \in (-1;0) \\ x=x_3 \in (1;2) \end{array}\right.$

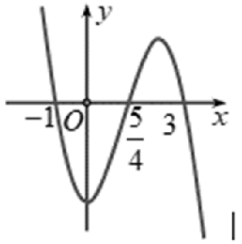
Khi đó: $f(f(x)-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)-1=x_1 \in (-2;-1) \\ f(x)-1=x_2 \in (-1;0) \\ f(x)-1=x_3 \in (1;2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=1+x_1 \in (-1;0) \\ f(x)=1+x_2 \in (0;1) \\ f(x)=1+x_3 \in (2;3) \end{array}\right.$

+ Ta thấy hai phương trình $f(x)=1+x_1 \in (-1;0)$; $f(x)=1+x_2 \in (0;1)$ đều có ba nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x)=1+x_3 \in (2;3)$ có một nghiệm.

Vậy phương trình $f(f(x)-1)=0$ có 7 nghiệm.

Câu 13. **(Đề tham khảo 2019)** Cho hàm số $f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$,. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của phương trình $f(x)=r$ có số phần tử là

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=4mx^3+3nx^2+2px+q \ (1)$

Dựa vào đồ thị $y=f'(x)$ ta thấy phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm đơn là -1, $\frac{5}{4}$, 3.

Do đó $f'(x)=m(x+1)(4x-5)(x-3)$ và $m\neq 0$. Hay $f'(x)=4mx^3-13mx^2-2mx+15m \ (2)$.

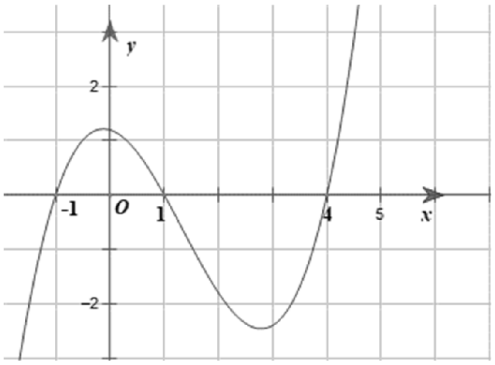
Từ (1) và (2) suy ra $n=-\frac{13}{3}m$, $p=-m$ và $q=15m$.

Khi đó phương trình $f(x)=r \Leftrightarrow mx^4+nx^3+px^2+qx=0 \Leftrightarrow m\left(x^4-\frac{13}{3}x^3-x^2+15x\right)=0$

$\Leftrightarrow 3x^4-13x^3-3x^2+45x=0 \Leftrightarrow x(3x+5)(x-3)^2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-\frac{5}{3} \vee x=3$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x)=r$ là $S=\left\{-\frac{5}{3};0;3\right\}$.

Câu 14. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho hàm số $y=f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$, trong đó $m,n,p,q,r\in\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ như hình vẽ dưới.



Tập nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=16m+8n+4p+2q+r$ có tất cả bao nhiêu phần tử.

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta thấy $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=-1\vee x=1\vee x=4$

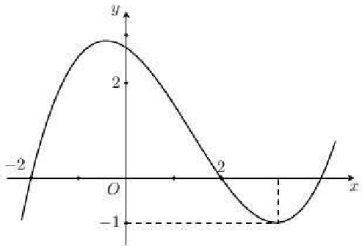
Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1	2	4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗		↘	
						$f(2)$			

Phương trình $f\left(x\right)=16m+8n+4p+2q+r\Leftrightarrow f\left(x\right)=f\left(2\right)$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có 4 nghiệm.

Câu 15. **(Mã 104 2019)** Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\frac{2}{3}$ là



A. 10 **B.** 3 **C.** 9 **D.** 6

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=g\left(x\right)=x^3-3x$ (1)

Ta có $g'\left(x\right)=3x^2-3=0\Leftrightarrow x\pm1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có với $t\in(-2;2)$ cho ta 3 giá trị x thỏa mãn (1)

$t\in\{-2;2\}$ cho ta 2 giá trị x thỏa mãn (1)

$t\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$ cho ta 1 giá trị x thỏa mãn (1).

Phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\frac{2}{3}$ (2) trở thành

$$\left|f(t)\right|=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(t)=\frac{2}{3}\\ f(t)=-\frac{2}{3}\end{array}\right.$$

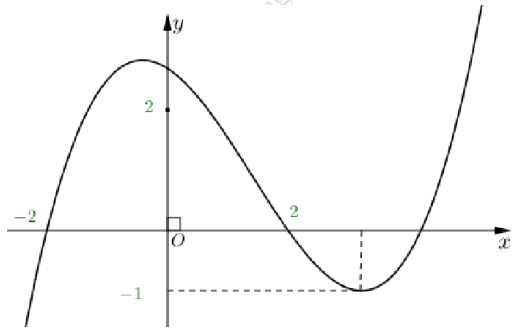
Dựa vào đồ thị ta có:

+ Phương trình $f(t)=\frac{2}{3}$ có 3 nghiệm thỏa mãn $-2<t_1<t_2<2<t_3\Rightarrow$ có 7 nghiệm của phương trình (2).

+ Phương trình $f(t)=-\frac{2}{3}$ có 3 nghiệm thỏa mãn $t_4<-2<2<t_5<t_6\Rightarrow$ có 3 nghiệm của phương trình (2).

Vậy phương trình đã cho có 10 nghiệm.

Câu 16. **(Mã 101 2019)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\frac{4}{3}$ là



A. 7. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 8.

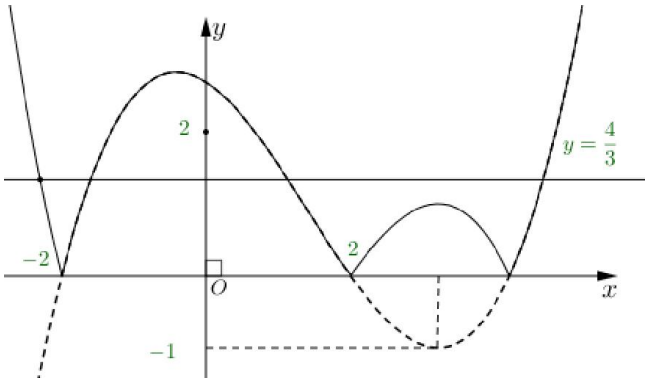
Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x^3-3x\Rightarrow t'=3x^2-3$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
t'		$+$	0	$-$	0	$+$	
t	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Khi đó $\left|f(t)\right|=\frac{4}{3}$ (1)



Dựa vào đồ thị hàm số $\left|f\left(t\right)\right|$ ta thấy phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $t_1 < -2$, $-2 < t_2 < 0,\ 0 < t_3 < 2,\ t_4 > 2$.

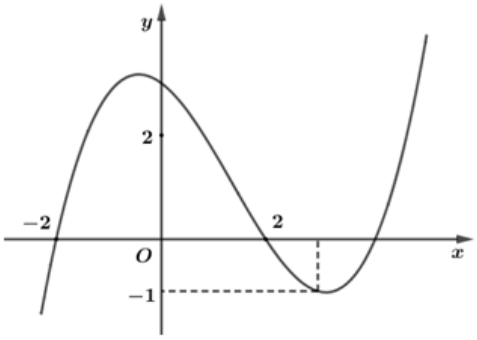
Mỗi nghiệm t của phương trình $\left(1\right)$, ta thay vào phương trình $t = x^3 - 3x$ để tìm nghiệm x.

Khi đó

+ $t_1 < -2 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm.
+ $-2 < t_2 < 0 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm.
+ $0 < t_3 < 2 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm.
+ $t_4 > 2 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình $\left|f\left(x^3 - 3x\right)\right| = \dfrac{4}{3}$ có 8 nghiệm.

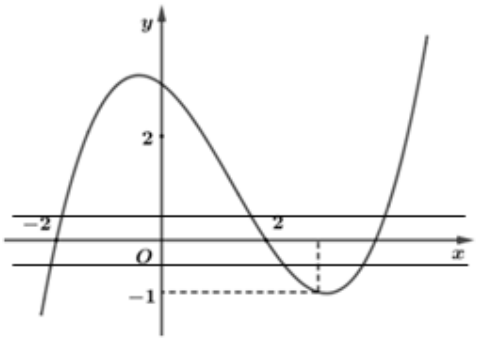
Câu 17. **(Mã 102 2019)** Cho hàm số bậc ba $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3 - 3x\right)\right| = \dfrac{1}{2}$



A. 6. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f\left(x^3-3x\right)=\frac{1}{2} \quad (1)\\ f\left(x^3-3x\right)=-\frac{1}{2} \quad (2)\end{array}\right.$

+) $(1)\Leftrightarrow f\left(x^3-3x\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x^3-3x=\alpha_1\left(-2<\alpha_1<0\right)\\ x^3-3x=\alpha_2\left(0<\alpha_2<2\right)\\ x^3-3x=\alpha_3\left(\alpha_3>2\right)\end{array}\right.$

+) $(2)\Leftrightarrow f\left(x^3-3x\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x^3-3x=\alpha_4\left(x_4<-2\right)\\ x^3-3x=\alpha_5\left(\alpha_5>2\right)\\ x^3-3x=\alpha_6\left(\alpha_6>2\right)\end{array}\right.$

Xét hàm số $y=x^3-3x,\ D=\mathbb{R}$

Ta có $y'=3x^2-3$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

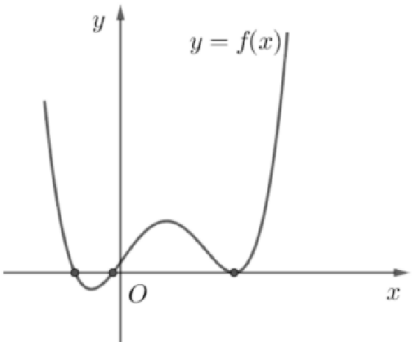
Phương trình: $x^3-3x=\alpha_1$ có 3 nghiệm.

Phương trình: $x^3-3x=\alpha_2$ có 3 nghiệm.

Mỗi phương trình $x^3-3x=\alpha_3,\ x^3-3x=\alpha_4,\ x^3-3x=\alpha_5,\ x^3-3x=\alpha_6$ đều có một nghiệm

Từ đó suy ra phương trình $\left|f\left(x^2-3x\right)\right|=\frac{1}{2}$ có 10 nghiệm.

Câu 18. Cho $f\left(x\right)$ là một hàm đa thức bậc bốn có đồ thị như hình dưới đây.



Tập nghiệm của phương trình $\left[f'(x)\right]^2 = f(x).f''(x)$ có số phần tử là

A. 1. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $\left[f'(x)\right]^2 = f(x).f''(x) \quad (1)$

Do $f(x)=0$ có ba nghiệm $x_1, x_2, x_2 (x_1 < x_2 < x_3)$ và $f'(x_3)=0$ suy ra x_3 là một nghiệm của (1)

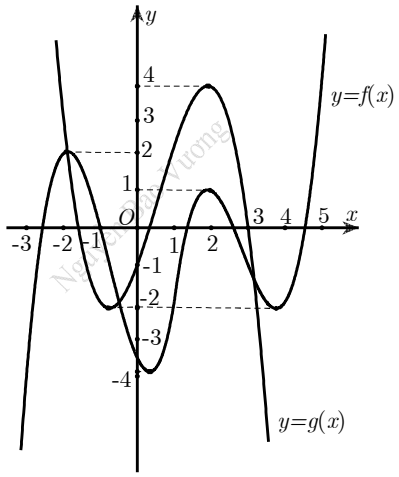
Ta có $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)^2, (a \neq 0)$

Với $x \neq x_3 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{2}{x-x_3}\right)' = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{(x-x_1)^2}-\frac{1}{(x-x_2)^2}-\frac{2}{(x-x_3)^2}=0$ vô nghiệm.

Vậy, phương trình (1) có đúng một nghiệm $x = x_3$.

Câu 19. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Cho hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ có đồ thị như hình sau:



Khi đó tổng số nghiệm của hai phương trình $f(g(x))=0$ và $g(f(x))=0$ là

A. 25. **B.** 22. **C.** 21. **D.** 26.

Lời giải

Chọn B.

Quan sát đồ thị ta thấy: $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 (-3<x_1<-2) \\ x=-1 \\ x=x_2 (1<x_2<2) \\ x=x_3 (2<x_3<3) \\ x=x_4 (4<x_4<5) \end{array}\right.$.

Do đó: $f\left(g\left(x\right)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g\left(x\right)=x_1\left(1\right) \\ g\left(x\right)=-1\left(2\right) \\ g\left(x\right)=x_2\left(3\right) \\ g\left(x\right)=x_3\left(4\right) \\ g\left(x\right)=x_4\left(5\right) \end{array}\right.$

Phương trình $\left(1\right)$ có đúng 1 nghiệm; Phương trình $\left(2\right)$ có đúng 3 nghiệm; Phương trình $\left(3\right)$ có đúng 3 nghiệm; Phương trình $\left(4\right)$ có đúng 3 nghiệm; Phương trình $\left(5\right)$ có đúng 1 nghiệm. Tất cả các nghiệm trên đều phân biệt nên phương trình $f\left(g\left(x\right)\right)=0$ có đúng 11 nghiệm.

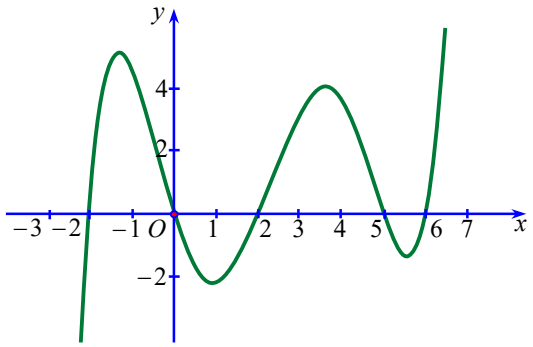
Quan sát đồ thị ta thấy: $g\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_5\left(-2<x_5<-1\right) \\ x=x_6\left(0<x_6<1\right) \\ x=3 \end{array}\right.$

Do đó $g\left(f\left(x\right)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=x_5\left(6\right) \\ f\left(x\right)=x_6\left(7\right) \\ f\left(x\right)=3\left(8\right) \end{array}\right.$

Phương trình $\left(6\right)$ có 5 nghiệm; Phương trình $\left(7\right)$ có 5 nghiệm; Phương trình $\left(8\right)$ có 1 nghiệm. Tất cả các nghiệm này đều phân biệt nên phương trình $g\left(f\left(x\right)\right)=0$ có đúng 11 nghiệm.

Vậy tổng số nghiệm của hai phương trình $f\left(g\left(x\right)\right)=0$ và $g\left(f\left(x\right)\right)=0$ là 22 nghiệm.

Câu 20. **(THPT Nghĩa Hưng 2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-2;6\right]$ của phương trình $f\left(x\right)=f\left(0\right)$ là

A. 5 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Từ đồ thị của hàm số $f'\left(x\right)$ ta có BBT

x	$-\infty$		-2		0		2		5		6		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$f\left(-2\right)$	↗	$f\left(0\right)$	↘	$f\left(2\right)$	↗	$f\left(5\right)$	↘	$f\left(6\right)$	↗	$+\infty$

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'\left(x\right);y=0;x=0;x=2$

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x);y=0;x=2;x=5$

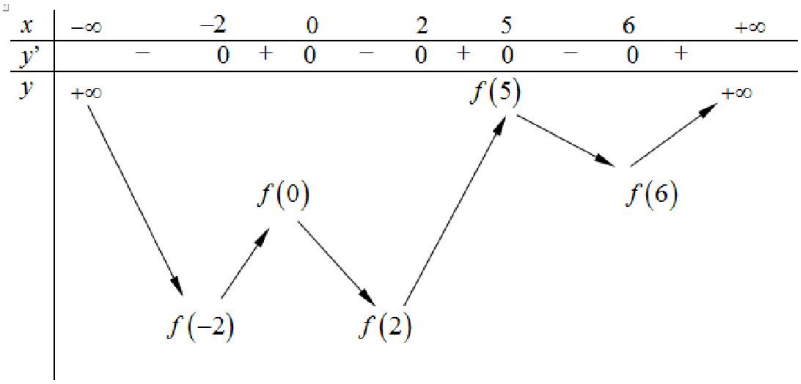
Gọi S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x);y=0;x=5;x=6$

$S_1=-\int_0^2 f'(x)dx=f(0)-f(2)$; $S_2=\int_2^5 f'(x)dx=f(5)-f(2)$; $S_3=-\int_5^6 f'(x)dx=f(5)-f(6)$

Từ đồ thị ta thấy $S_2>S_1\Rightarrow f(5)-f(2)>f(0)-f(2)\Rightarrow \boxed{f(5)>f(0)}$

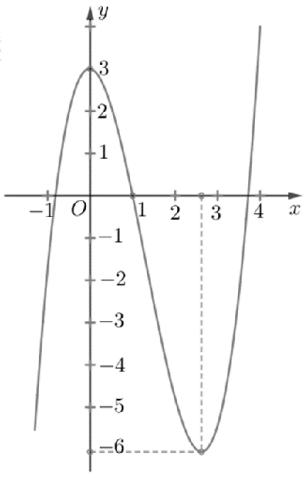
và $S_1+S_3<S_2\Rightarrow f(0)-f(2)+f(5)-f(6)<f(5)-f(2)\Rightarrow \boxed{f(6)>f(0)}$

Khi đó ta có BBT chính xác (dạng đồ thị chính xác) như sau:



Vậy phương trình $f(x)=f(0)$ có 2 nghiệm thuộc đoạn $[-2;6]$

Câu 21. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới. Đặt $g(x)=f[f(x)]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$.



A. 2 **B.** 8 **C.** 4 **D.** 6

Lời giải.

Ta có: $g'(x)=f'(x)f'[f(x)]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f'[f(x)]=0\end{array}\right.$ (*).

Theo đồ thị hàm số suy ra.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=a_1\end{array}\right.$, với $2<a_1<3$.

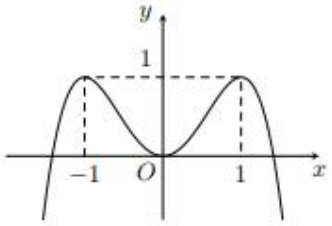
$f'[f(x)]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\ ,(1)\\f(x)=a_1\ ,(2)\end{array}\right.$.

Phương trình $(1): f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt khác nghiệm phương trình $(*)$.

Phương trình $(2): f(x)=a_1$ có 3 nghiệm phân biệt khác nghiệm phương trình (1) và phương trình $(*)$.

Vậy phương trình ban đầu có 8 nghiệm phân biệt.

Câu 22. **(THPT Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có đồ thị như hình vẽ bên đây, trong đó a,b,c,d,e là các hệ số thực. Số nghiệm của phương trình $f\left(\sqrt{f(x)}\right)+f(x)+2\sqrt{f(x)}-1=0$ là



A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Từ hình vẽ ta có dạng đồ thị của hàm trùng phương nên $b=d=0\Rightarrow f(x)=ax^4+cx^2+e$

Ta có $f'(x)=4ax^3+2cx.$

Từ đồ thị $\Rightarrow\begin{cases}f'(1)=0\\f(0)=0\\f(1)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a+2c=0\\e=0\\a+c+e=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\e=0\\c=2\end{cases}\Rightarrow f(x)=x^4+2x^2.$

$\Rightarrow f\left(\sqrt{x}\right)=x^2+2x$ và $f\left(\sqrt{f(x)}\right)=f^2(x)+2f(x).$

Như vậy phương trình $f\left(\sqrt{f(x)}\right)+f(x)+2\sqrt{f(x)}-1=0.$

$\Leftrightarrow f^2(x)+2f(x)+f(x)+2\sqrt{f(x)}-1=0$ với $f(x)\ge 0.$

Đặt $t=f(x)(t\ge 0)$ ta được phương trình $g(t)=0$ với $g(t)=t^2-3t-2\sqrt{t}+1.$

Nhận thấy: Hàm số $g(t)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $g(0).g(1)<0$

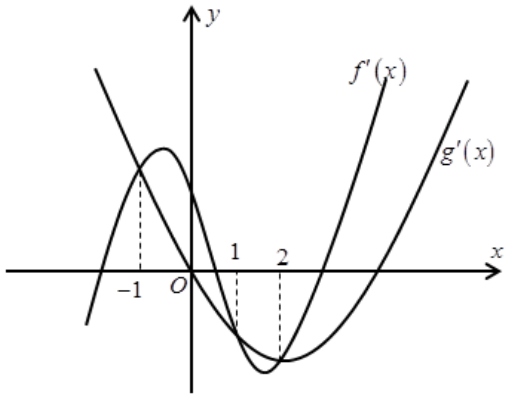
$\Rightarrow g(t)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0;1)$.

Hàm số $g(t)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và $g(1).g(4)<0$

$\Rightarrow g(t)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(1;4)$.

Mà $g(t)=0$ là phương trình bậc hai chỉ có tối hai nghiệm nên $g(t)=0$ có duy nhất một nghiệm thuộc $(0;1)$. Suy ra $f\left(\sqrt{f(x)}\right)+f(x)+2\sqrt{f(x)}-1=0$ có duy nhất một nghiệm $f(x)\in(0;1)$. Suy ra phương trình $f(x)=a$ với $a\in(0;1)$ luôn có 4 nghiệm x phân biệt.

Câu 23. **(Sở Hưng Yên - 2019)** Cho các hàm số $f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$ và $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $(n,n,p,q,r,a,b,c,d\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $f(0)=g(0)$. Các hàm số $f'(x), g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Tập nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ có số phần tử là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

+) Từ giả thiết $f(0)=g(0)$ suy ra $r=d$ do đó phương trình $f(x)=g(x)$ tương đương với:

$$x\left[mx^3+(n-a)x^2+(p-b)x+(q-c)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\mx^3+(n-a)x^2+(p-b)x+(q-c)=0\end{array}\right.$$

+) Từ đồ thị của các hàm số $f'(x), g'(x)$ suy ra $m\neq 0$

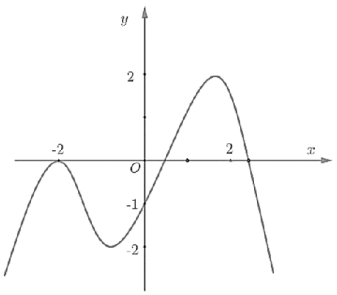
$$\text{và}\begin{cases}f'(-1)=g'(-1)\\f'(1)=g'(1)\\f'(2)=g'(2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4m+3(n-a)-2(p-b)+q-c=0\\4m+3(n-a)+2(p-b)+q-c=0\\32m+12(n-a)+4(p-b)+q-c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n-a=-\dfrac{8}{3}m\\p-b=-2m\\q-c=8m\end{cases}.$$

Từ đó ta có phương trình: $mx^3-\dfrac{8}{3}mx^2-2mx+8m=0\Leftrightarrow x^3-\dfrac{8}{3}x^2-2x+8=0$.

Sử dụng máy tính Casio ta được phương trình có 1 nghiệm và nghiệm đó khác 0.

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ có 2 phần tử.

Câu 24. **(Sở Hà Tĩnh - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp nghiệm của phương trình $f(f(x))+1=0$ có bao nhiêu phần tử?



A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D.

Dựa vào đồ thị ta có $f\left(f\left(x\right)\right)+1=0\ f\left(f\left(x\right)\right)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=a<-2\\f\left(x\right)=b\in\left(-2;-1\right)\\f\left(x\right)=0\\f\left(x\right)=c>2\end{array}\right.$.

+ Với $f\left(x\right)=a<-2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1<-2\\x=x_2>2\end{array}\right.$.

+ Với $f\left(x\right)=b\in\left(-2;-1\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_3<-2\\x=x_4\in\left(-2;-1\right)\\x=x_5\in\left(-1;0\right)\\x=x_6>2\end{array}\right.$.

+ Với $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_7=-2\\x=x_8\in\left(0;1\right)\\x=x_9\in\left(2;3\right)\end{array}\right.$.

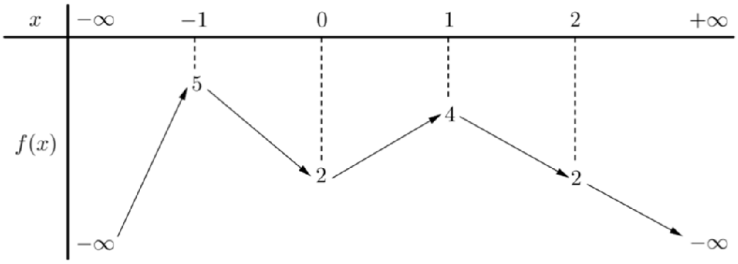
+ Với $f\left(x\right)=c>2$ vô nghiệm.

Ta thấy hàm số $y=f\left(x\right)$ đơn điệu trên $\left(-\infty;-2\right)$, $f\left(x_1\right)=a\neq b=f\left(x_3\right)$ nên $x_1\neq x_3$.

Hàm số $y=f\left(x\right)$ đơn điệu trên $\left(2;+\infty\right)$, $f\left(x_6\right)=b\neq0=f\left(x_9\right)$ nên $x_6\neq x_9$.

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm phân biệt.

Câu 25. **(THPT Nguyễn Đức Cảnh - 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên



Phương trình $f\left(\sqrt{2x-x^2}\right)=3$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

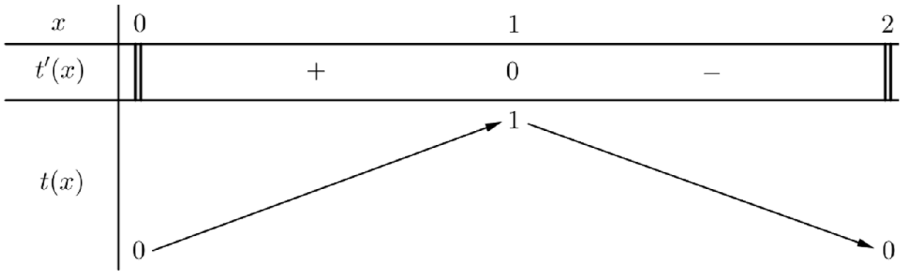
Lời giải

Chọn B

Trước hết, xét hàm số $t=t\left(x\right)=\sqrt{2x-x^2}$, $x\in\left[0;2\right]$.

Ta có $t'\left(x\right)=\dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}$, $x\in\left(0;2\right)$. $t'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=1\in\left(0;2\right)$.

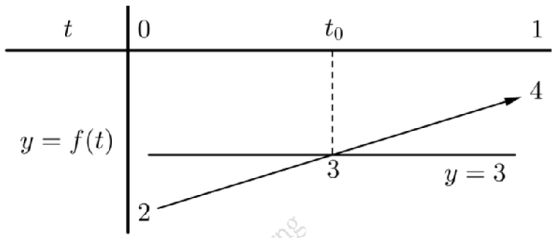
Bảng biến thiên của $t\left(x\right)$:



$\Rightarrow 0 \le t \le 1,\ \forall x \in [0;2]$.

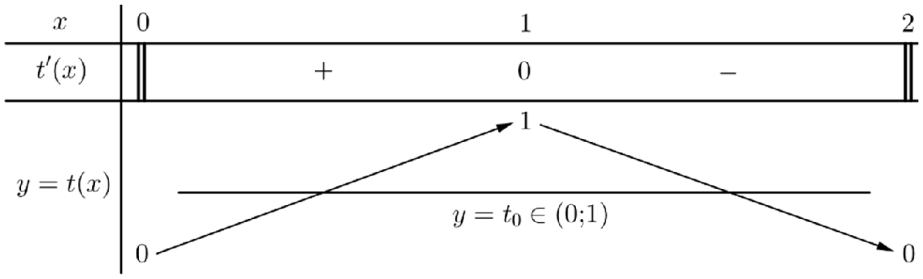
Lúc này, phương trình $f\left(\sqrt{2x-x^2}\right)=3$ trở thành $f(t)=3$ (1) với $t \in [0;1]$.

Theo bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên đoạn $[0;1]$ thì đường thẳng $y=3$ cắt đồ thị hàm số $y=f(t)$ tại đúng 1 điểm có hoành độ thuộc khoảng $(0;1)$ nên phương trình (2) có đúng 1 nghiệm $t=t_0$ với $t_0 \in (0;1)$.



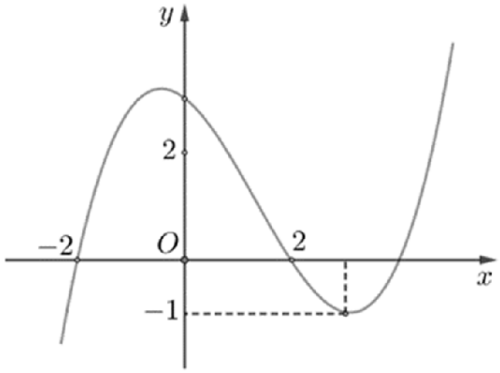
Khi đó, phương trình $(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x-x^2}=t_0$ (2), $t_0 \in (0;1)$.

Mặt khác, theo bảng biến thiên của hàm số $t(x)$, với mỗi $t_0 \in (0;1)$ thì đường thẳng $y=t_0$ cắt đồ thị hàm số $y=t(x)$ tại đúng 2 điểm phân biệt nên phương trình (2) có đúng 2 nghiệm phân biệt.



Vậy phương trình $f\left(\sqrt{2x-x^2}\right)=3$ có đúng 2 nghiệm.

Câu 26. **(Chuyên Lam Sơn - 2020)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=1$ là

A. 10. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=1$ (1)

Đặt $t=x^3-3x$, ta có bảng biến thiên của hàm số $t=g\left(x\right)=x^3-3x$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy

+ Với mỗi $t_0>2$ hoặc $t_0<-2$, phương trình $t_0=x^3-3x$ có một nghiệm;

+ Với mỗi $-2<t_0<2$, phương trình $t_0=x^3-3x$ có 3 nghiệm.

Khi đó, (1) trở thành $\left|f\left(t\right)\right|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(t\right)=1\\f\left(t\right)=-1\end{array}\right.$

* TH 1: $f\left(t\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=t_1\in\left(-2;0\right)\\t=t_2\in\left(0;2\right)\\t=t_3\in\left(2;+\infty\right)\end{array}\right.$

+ Với $t=t_1\in\left(-2;0\right)\Rightarrow$ Phương trình $t_1=x^3-3x$ có 3 nghiệm;

+ Với $t=t_2\in\left(0;2\right)\Rightarrow$ Phương trình $t_2=x^3-3x$ có 3 nghiệm;

+ Với $t=t_3\in\left(2;+\infty\right)\Rightarrow$ Phương trình $t_3=x^3-3x$ có 1 nghiệm;

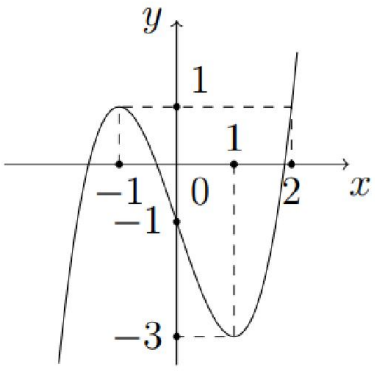
* TH 2: $f\left(t\right)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=t_4\in\left(-\infty;-2\right)\\t=t_5\in\left(2;+\infty\right)\end{array}\right.$

+ Với $t=t_4\in\left(-\infty;-2\right)\Rightarrow$ Phương trình $t_4=x^3-3x$ có 1 nghiệm;

+ Với $t=t_5\in\left(2;+\infty\right)\Rightarrow$ Phương trình $t_5=x^3-3x$ có 1 nghiệm.

Mặt khác, các nghiệm này đều phân biệt. Vậy phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=1$ có 9 nghiệm phân biệt.

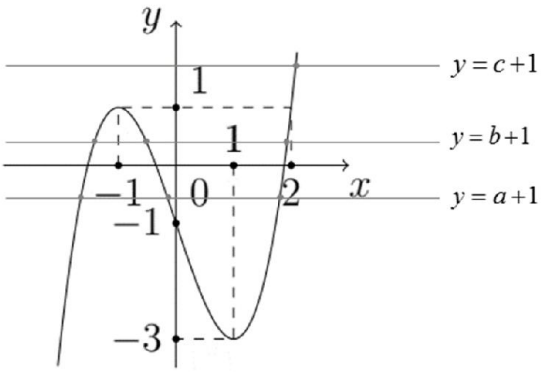
Câu 27. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $f\left[f(\cos x)-1\right]=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$?



A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C



Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy:

$$f\left[f(\cos x)-1\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(\cos x)-1=a\in(-2;-1)\\ f(\cos x)-1=b\in(-1;0)\\ f(\cos x)-1=c\in(1;2)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(\cos x)=a+1\in(-1;0)\\ f(\cos x)=b+1\in(0;1)\\ f(\cos x)=c+1\in(2;3)\end{array}\right.$$

• Xét phương trình $f(\cos x)=a+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\cos x=\alpha_1<-1 & (1)\\ \cos x=\alpha_2\in(-1;0) & (2)\\ \cos x=\alpha_3>1 & (3)\end{array}\right.$

Vì $\cos x\in[-1;1]$ nên phương trình $(1),(3)$ vô nghiệm và phương trình (2) có 2 nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$.

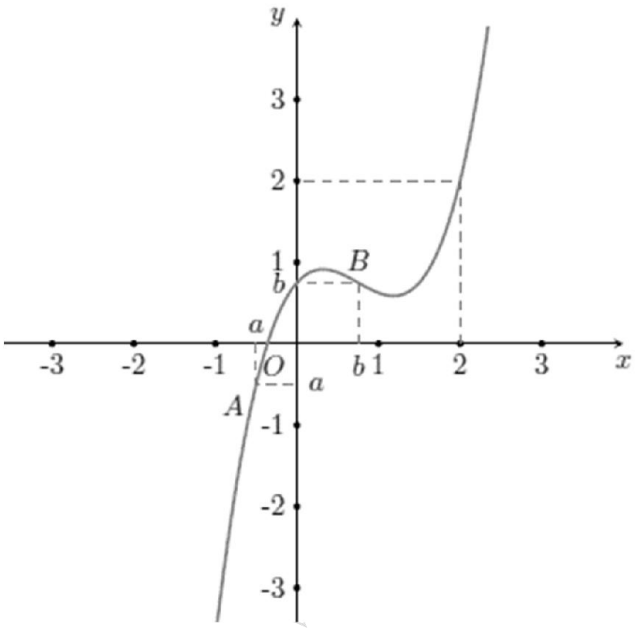
• Xét phương trình $f(\cos x)=b+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\cos x=\beta_1<-1 & (4)\\ \cos x=\beta_2\in(-1;0) & (5)\\ \cos x=\beta_3>1 & (6)\end{array}\right.$

Vì $\cos x\in[-1;1]$ nên phương trình $(4),(6)$ vô nghiệm và phương trình (5) có 2 nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$.

• Xét phương trình $f\left(\cos x\right)=c+1\Leftrightarrow \cos x=t>2$ (vô nghiệm)

Nhận xét hai nghiệm của phương trình $\left(5\right)$ không trùng với nghiệm nào của phương trình $\left(2\right)$ nên phương trình $f\left[f\left(\cos x\right)-1\right]=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 28. **(Chuyên Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2020)** Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ:

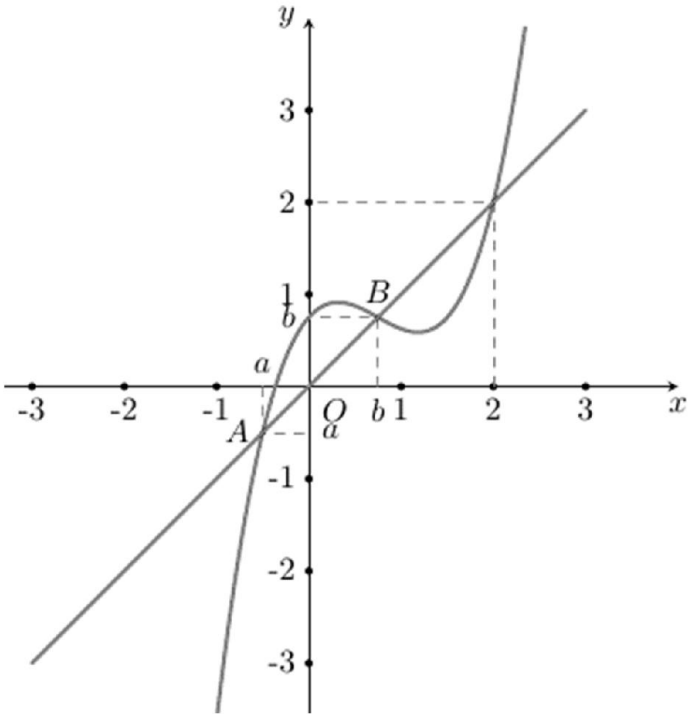


Số nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};3\pi\right)$ của phương trình $f\left(\cos x+1\right)=\cos x+1$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C



Từ đồ thị ta có $f(x)=x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in(-\infty;0) \\ x=b\in(0;1) \\ x=2 \end{array}\right.$

Do đó $f(\cos x+1)=\cos x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x+1=a\in(-\infty;0) \\ \cos x+1=b\in(0;1) \\ \cos x+1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x=a-1=t_1\in(-\infty;-1) & (VN) \\ \cos x=b-1=t_2\in(-1;0) & (1) \\ \cos x=1 & (2) \end{array}\right.$

Dựa vào đường tròn lượng giác, phương trình (1) có 3 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};3\pi\right)$.

Phương trình (2) có 2 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};3\pi\right)$.

Vậy phương trình ban đầu có tất cả 5 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};3\pi\right)$.

Câu 29. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	0	↗	2	↘	$-\infty$

Số nghiệm thuộc khoảng $(-\infty;\ln 2)$ của phương trình $2019f\left(1-e^x\right)-2021=0$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=1-e^x$; $x\in(-\infty;\ln 2)\Rightarrow t\in(-1;1)$.

Nhận xét: $x=\ln(1-t)\Rightarrow$ với mỗi giá trị của $t\in(-1;1)$ ta được một giá trị của $x\in(-\infty;\ln 2)$.

Phương trình tương đương: $f(t)=\frac{2021}{2019}$.

Sử dụng bảng biến thiên của $f(x)$ cho $f(t)$ như sau:

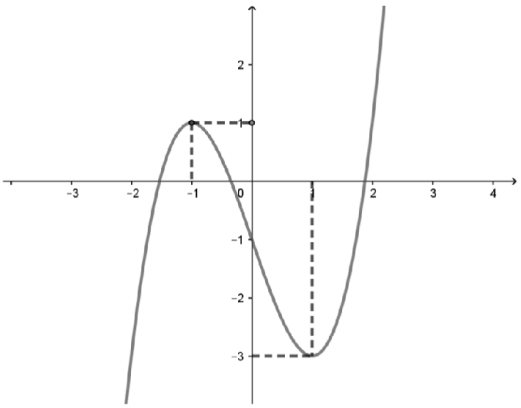
t	$-\infty$		-1		t_1		0		t_2		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\infty$	↗	2	↘		↘	0	↗		↗	2	↘	$-\infty$

$y=\frac{2021}{2019}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(t)=\dfrac{2021}{2019}$ có 2 nghiệm $t_1,t_2\in(-1;1)$.

Vậy phương trình $2019f\left(1-e^x\right)-2021=0$ có 2 nghiệm $x\in(-\infty;\ln 2)$.

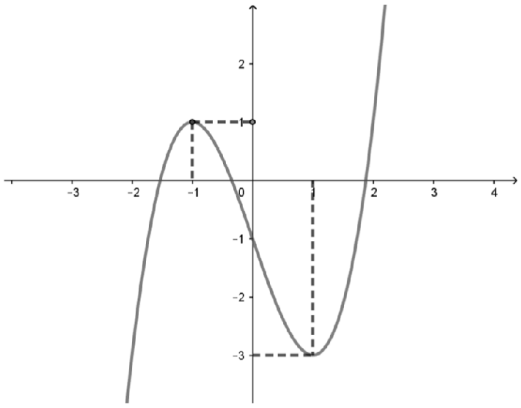
Câu 30. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc 3 và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi phương trình $f\left(f(\cos x)-1\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0;3\pi]$?



A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D



Đặt $t=\cos x$, với $x\in[0;3\pi]\Rightarrow t\in[-1;1]$.

Với $t=1$, phương trình $t=\cos x$ có hai nghiệm $x\in[0;3\pi]$.

Với $t=-1$, phương trình $t=\cos x$ có hai nghiệm $x\in[0;3\pi]$.

Với $-1<t<1$, phương trình $t=\cos x$ có ba nghiệm $x\in[0;3\pi]$.

Thay $t=\cos x$ vào phương trình $f\left(f(\cos x)-1\right)=0$, ta được phương trình:

$$f\left(f(t)-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(t)-1=a\in(-2;-1)\\ f(t)-1=b\in(-1;0)\\ f(t)-1=c\in(1;2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f(t)=a+1\in(-1;0) & (1)\\ f(t)=b+1\in(0;1) & (2).\\ f(t)=c+1\in(2;3) & (3)\end{array}\right.$$

Từ đồ thị ta có:

+) Phương trình (1) có 1 nghiệm $t\in(-1;0)$, suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm.

+) Phương trình (2) có 1 nghiệm $t\in(-1;0)$, suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm.

+) Phương trình (3) có 1 nghiệm $t>1$, suy ra phương trình đã cho vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm.

Câu 31. **(Chuyên Thái Nguyên - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	-3	↗	$+\infty$

Phương trình $\left|f(3x+1)-2\right|=5$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left|f(3x+1)-2\right|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(3x+1)-2=5 \\ f(3x+1)-2=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(3x+1)=7 \quad (1) \\ f(3x+1)=-3 \, (2) \end{array}\right.$.

Dựa vào bảng biến thiên,

+ Phương trình (1) có nghiệm duy nhất thỏa mãn $3x+1=a>3 \Leftrightarrow x=\dfrac{a-1}{3}>\dfrac{2}{3}$.

+ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\begin{cases} 3x_1+1=3 \\ 3x_2+1=b<-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{2}{3} \\ x_2=\dfrac{b-1}{3}<-\dfrac{2}{3} \end{cases}$.

Nguyễn Bảo Vương

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Câu 32. **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	3	↘	2	↗	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\dfrac{5\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4}\right]$ của phương trình $3f\left(\dfrac{\sin x-\cos x}{\sqrt{2}}\right)-7=0$ là:

A. 6. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

$\dfrac{\sin x-\cos x}{\sqrt{2}}=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$x \in \left[-\frac{5\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right] \Rightarrow x-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{3\pi}{2};\pi\right] \Rightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \in [-1;1]$

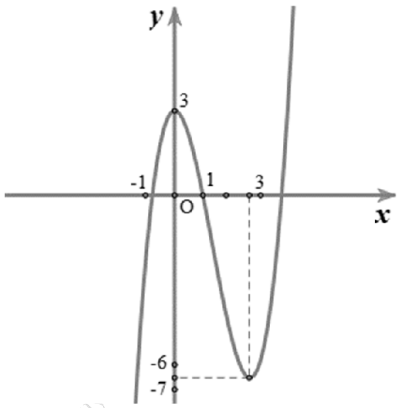
$3f\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{2}}\right)-7=0 \Leftrightarrow f\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{7}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=a \in (-1;0)\\ \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=b \in (0;1)\end{array}\right.$

$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=a \in (-1;0)$ có 2 nghiệm.

$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=b \in (0;1)$ có 3 nghiệm.

Vậy phương trình có 5 nghiệm.

Câu 33. **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Đặt $g(x)=f\left[f(x)\right]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$.



A. 8. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=f'(x).f'\left[f(x)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\ f'\left[f(x)\right]=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\ f(x)=0\\ f(x)=m \in (1;3)\end{array}\right.$.

Phương trình $f'(x)=0$ có 2 nghiệm

Phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm

Phương trình $f(x)=m \in (1;3)$ có 3 nghiệm

Vậy phương trình có 8 nghiệm.

Câu 34. **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(2\sin x+1)=1$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f\left(2\sin x+1\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\sin x+1=-1\\2\sin x+1=a\in\left(1;3\right)\\2\sin x+1=b\in\left(3;+\infty\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sin x=-1 & (1)\\\sin x=\dfrac{a-1}{2}\in\left(0;1\right) & (2)\\\sin x=\dfrac{b-1}{2}\in\left(1;+\infty\right) & (3)\end{array}\right.$

(1) có 2 nghiệm trong $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$.

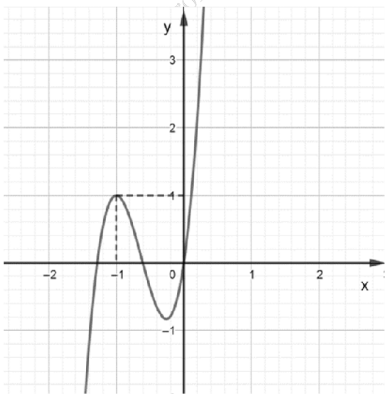
(2) có 5 nghiệm trong $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$.

(3) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm trong $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$.

Câu 35. **(Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d\ \left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $f\left(f\left(\sqrt{f\left(x\right)}\right)+f\left(x\right)+2\sqrt{f\left(x\right)}\right)-f\left(1\right)=0$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.



Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{f\left(x\right)}$, $t\ge0$.

Ta có: $f\left(f\left(t\right)+t^2+2t\right)-f\left(1\right)=0$ (*).

Xét $t=0$: (*) $\Leftrightarrow f\left(0\right)-f\left(1\right)=0$ (không thỏa).

Xét $t>0$: Ta có $f\left(t\right)>0$ và $f\left(t\right)+t^2+2t>0$

Theo đồ thị, hàm $f\left(u\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

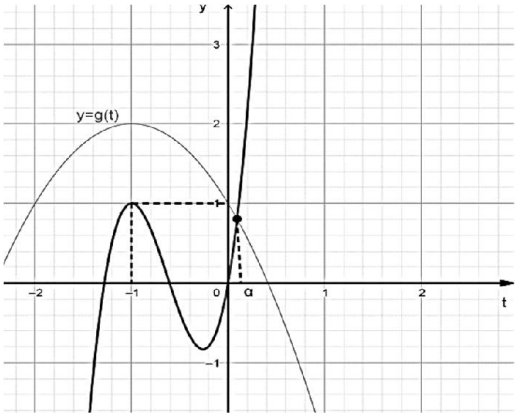
Do đó, (*) $\Leftrightarrow f\left(f\left(t\right)+t^2+2t\right)=f\left(1\right)\Leftrightarrow f\left(t\right)+t^2+2t=1$

$\Leftrightarrow f\left(t\right)=1-t^2-2t$

$\Leftrightarrow f\left(t\right)=g\left(t\right)$ (**)(với $g\left(t\right)=1-t^2-2t,t>0$)

Vì hàm $f(t)$ đồng biến và $g(t)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$ nên phương trình (**) có nghiệm duy nhất $t=\alpha$

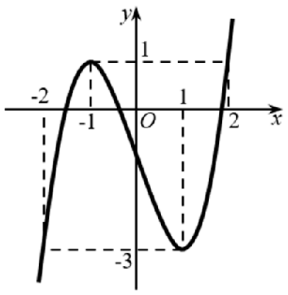
Theo đồ thị hàm $f(t), g(t)$ ta có $\alpha \in (0;1)$.



Khi đó, $t=\alpha \Leftrightarrow f(x)=\alpha^2$, $\alpha^2 \in (0;1)$ (***).

Vì đồ thị hàm $f(x)$ cắt đường thẳng $y=\alpha^2$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình (***) có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 36. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(f(x)-1)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

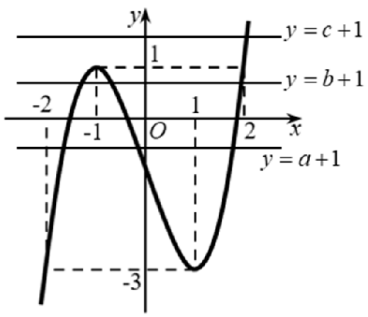
Từ đồ thị của hàm số $y=f(x)$ suy ra $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \in (-2;-1) \\ x=b \in (-1;0) \\ x=c \in (1;2) \end{array}\right.$

Suy ra $f(f(x)-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)-1=a \\ f(x)-1=b \\ f(x)-1=c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=a+1 \\ f(x)=b+1 \\ f(x)=c+1 \end{array}\right.$

+ Do $a \in (-2;-1) \Rightarrow a+1 \in (-1;0) \Rightarrow$ Phương trình $f(x)=a+1$ có 3 nghiệm phân biệt.

+ Do $b \in (-1;0) \Rightarrow b+1 \in (0;1) \Rightarrow$ Phương trình $f(x)=b+1$ có 3 nghiệm phân biệt.

+ Do $c \in (1;2) \Rightarrow c+1 \in (2;3) \Rightarrow$ Phương trình $f(x)=c+1$ có 1 nghiệm.



Vậy phương trình $f\left(f\left(x\right)-1\right)=0$ có $3+3+1=7$ nghiệm.

Câu 37. **(Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2020	$\nearrow$	2020	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x+2019\right)-2020\right|=2021$ là

A. 4. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Nguyễn Bảo Vương

Chọn A

Ta có :

$$\left|f\left(x+2019\right)-2020\right|=2021\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x+2019\right)-2020=-2021\\f\left(x+2019\right)-2020=2021\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x+2019\right)=-1\\f\left(x+2019\right)=4041\end{array}\right..$$

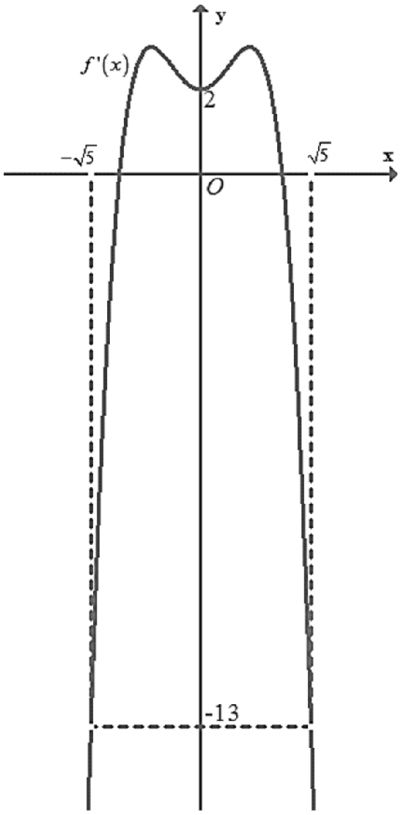
Từ bảng biến thiên suy ra:

+) Phương trình: $f\left(x+2019\right)=-1$ có 3 nghiệm.

+) Phương trình: $f\left(x+2019\right)=4041$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 38. **(Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g\left(x\right)=2f\left(x\right)+2x^3-4x-3m-6\sqrt{5}$ với m là số thực. Để $g\left(x\right)\le 0,\forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ thì điều kiện của m là



A. $m \ge \frac{2}{3} f\left(-\sqrt{5}\right) - 4\sqrt{5}$.

B. $m \le \frac{2}{3} f\left(\sqrt{5}\right)$.

C. $m \le \frac{2}{3} f\left(0\right) - 2\sqrt{5}$.

D. $m \ge \frac{2}{3} f\left(\sqrt{5}\right)$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

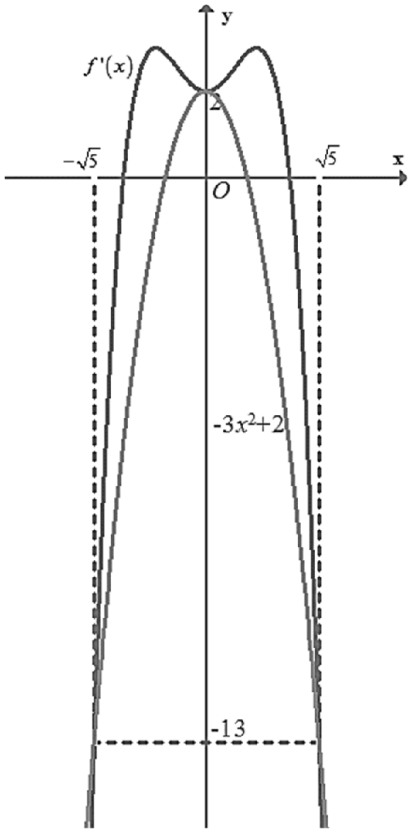
Chọn D

Ta có $g\left(x\right) \le 0 \Leftrightarrow 2f\left(x\right) + 2x^3 - 4x \le 3m + 6\sqrt{5}$.

Đặt $h\left(x\right) = 2f\left(x\right) + 2x^3 - 4x$ thì bất phương trình $g\left(x\right) \le 0 \Leftrightarrow h\left(x\right) \le 3m + 6\sqrt{5}$

$h'\left(x\right) = 2f'\left(x\right) + 2.3x^2 - 4 = 2\left(f'\left(x\right) - \left(-3x^2 + 2\right)\right)$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = -3x^2 + 2$ trên cùng hệ trục tọa độ với hàm số $y = f'\left(x\right)$.



Ta thấy $f'(x) \ge -3x^2+2 \ \forall x \in \left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ nên $h'(x) \ge 0, \forall x \in \left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$.

Suy ra $h(x) \le h\left(\sqrt{5}\right), \forall x \in \left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ hay $\max\limits_{\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]} h(x) = h\left(\sqrt{5}\right) = 2f\left(\sqrt{5}\right)+6\sqrt{5}$

Do đó $h(x) \le 3m+6\sqrt{5}, \forall x \in \left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right] \Leftrightarrow \max\limits_{\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]} h(x) \le 3m+6\sqrt{5}$

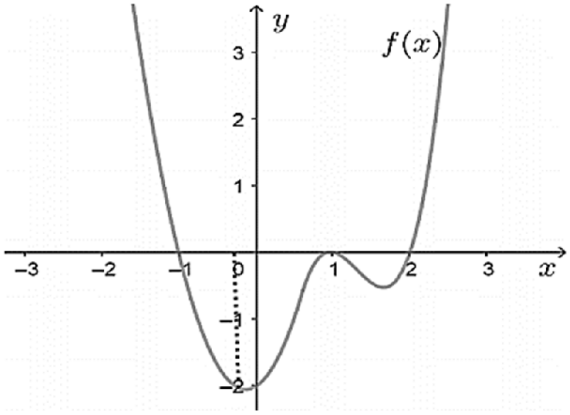
$\Leftrightarrow 2f\left(\sqrt{5}\right)+6\sqrt{5} \le 3m+6\sqrt{5} \Leftrightarrow m \ge \dfrac{2}{3} f\left(\sqrt{5}\right)$

Câu 39. **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x) = f\left(f(x)-1\right)$. Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là

A. 6. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C



Ta có $g'(x) = f'(x).f'\left(f(x)-1\right)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x).f'\left(f(x)-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'\left(f(x)-1\right)=0 \end{array}\right. .$$

+) $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a_1\left(a_1\in(-1;0)\right) \\ x=1 \\ x=a_2\left(a_2\in(1;2)\right) \end{array}\right.$

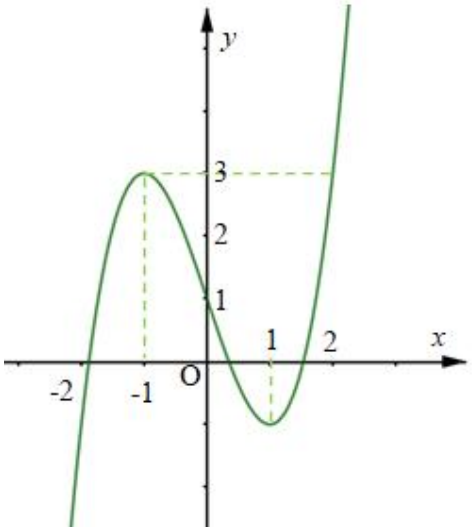
+) $f'\left(f(x)-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)-1=a_1 \\ f(x)-1=1 \\ f(x)-1=a_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x)=a_1+1\in(0;1) & (1) \\ f(x)=2 & (2) \\ f(x)=a_2+1\in(2;3) & (3) \end{array}\right.$

Từ đồ thị suy ra

- phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $b_1\in(-2;-1);b_2\in(2;3)$
- phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $c_1\in(-2;b_1);c_2\in(b_2;3)$
- phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt $d_1\in(-2;c_1);d_2\in(c_2;3)$

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm phân biệt.

Câu 40. **(Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{7\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(f(\cos x))=0$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(\cos x)=t$ ta được phương trình $f(t)=0$.

Quan sát đồ thị $y=f(x)$ ta suy ra $f(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=t_1\in\in(-2;-1) \\ t=t_2\in(0;1) \\ \mathrm{t}=\mathrm{t}_3\in(1;2) \end{array}\right.$.

* Với $t=t_1$ ta có $f(\cos x)=t_1$. Xét tương giao giữa hai đồ thị $y=f(x)$ và $y=t_1\in(-2;-1)\Rightarrow f(\cos x)=t_1 \Leftrightarrow \cos x=x_1<-1$ nên phương trình vô nghiệm.

* Với $t=t_2$ ta có $f(\cos x)=t_2$. Xét tương giao giữa hai đồ thị $y=f(x)$ và $y=t_2\in(0;1)\Rightarrow f(\cos x)=t_2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=x_2<-1\\ \cos x=x_3\in(0;1)\\ \cos x=x_4\in(1;2)\end{array}\right.$.

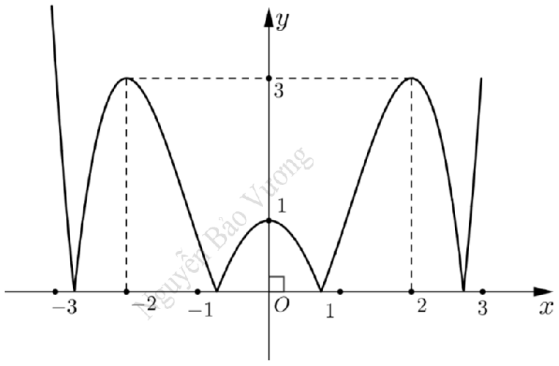
Chỉ có $\cos x=x_3$ thỏa mãn. Khi đó tồn tại 3 giá trị $x\in\left[0;\dfrac{7\pi}{2}\right]$ tương ứng để $\cos x=x_3$.

* Với $t=t_3$ tương tự ta có $\left[\begin{array}{l}\cos x=x_5<-1\\ \cos x=x_6\in(-1;0)\\ \cos x=x_7>1\end{array}\right.$.

Chỉ có $\cos x=x_6$ thỏa mãn. Khi đó tồn tại 2 giá trị $x\in\left[0;\dfrac{7\pi}{2}\right]$ tương ứng để $\cos x=x_6$.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Câu 41. **(Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị nhưu hình vẽ bên. Tìm số nghiệm thuộc đoạn $[2017\pi;2020\pi]$ của phương trình $3f(2\cos x)=8$.

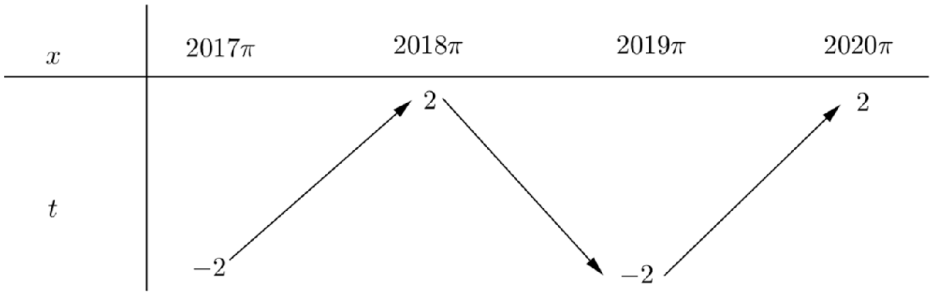


A. 8. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

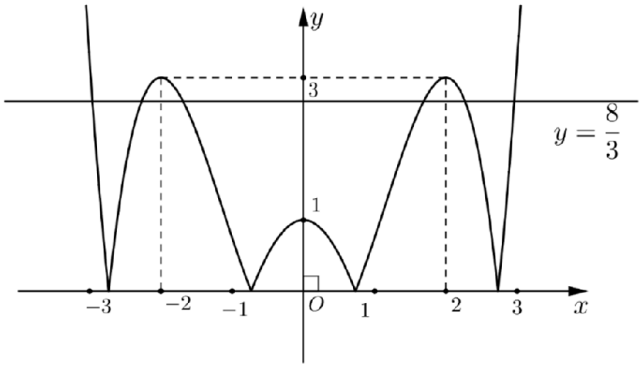
Chọn D

Đặt $t=2\cos x$, ta có bảng biến thiên của t như sau



Khi đó $3f(2\cos x)=8\Leftrightarrow f(t)=\dfrac{8}{3}$.

Vẽ thêm đường thẳng $y=\dfrac{8}{3}$ trên đồ thị $y=f(x)$ đã cho.



Xét trên đoạn $[-2;2]$, đường thẳng $y=\dfrac{8}{3}$ cắt đồ thị hàm số $f(t)$ tại hai điểm $t_1\in(-2;-1)$ và $t_2\in(1;2)$.

Từ bảng biến thiên của t, ứng với giá tị t_1, ta tìm được 3 nghiệm x thỏa $2\cos x=t_1$, tươngtự, ta cũng tìm được 3 nghiệm x thỏa $2\cos x=t_2$.

Vậy phương trình $3f(2\cos x)=8$ có 6 nghiệm x thuộc đoạn $[2017\pi;2020\pi]$

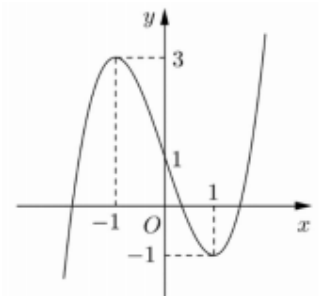
---------- HẾT ----------

Nguyễn Bảo Vương

DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI 9-10 ĐIỂM

Dạng 3. Biện luận tương giao hàm hợp, hàm ẩn chứa THAM SỐ

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sin x)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ là



A. $(-1;3)$ **B.** $[-1;1)$ **C.** $[-1;3)$ **D.** $(-1;1)$

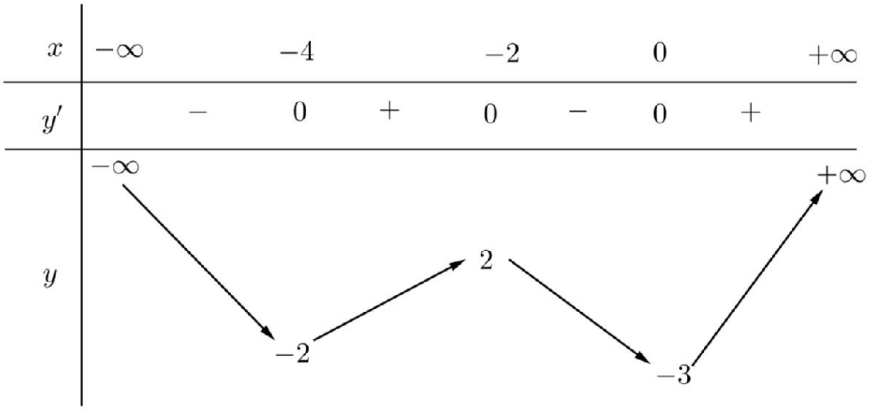
Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sin x \Rightarrow \forall x\in(0;\pi)\Rightarrow t\in(0;1]$

Vậy phương trình trở thành $f(t)=m$. Dựa và đồ thị hàm số suy ra $m\in[-1;1)$.

Câu 2. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $6f(x^2-4x)=m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$?

A. 25. **B.** 30. **C.** 29. **D.** 24.

Lời giải

Chọn B

Ta đặt: $g(x)=f(x^2-4x)$.

$g'(x)=(2x-4)f'(x^2-4x)$

$=2(x-2)(x^2-4x+4)(x^2-4x+2)(x^2-4x)$ (dựa vào bảng biến thiên)

$=2(x-2)^3(x^2-4x+2)x(x-4)$.

Mặt khác:

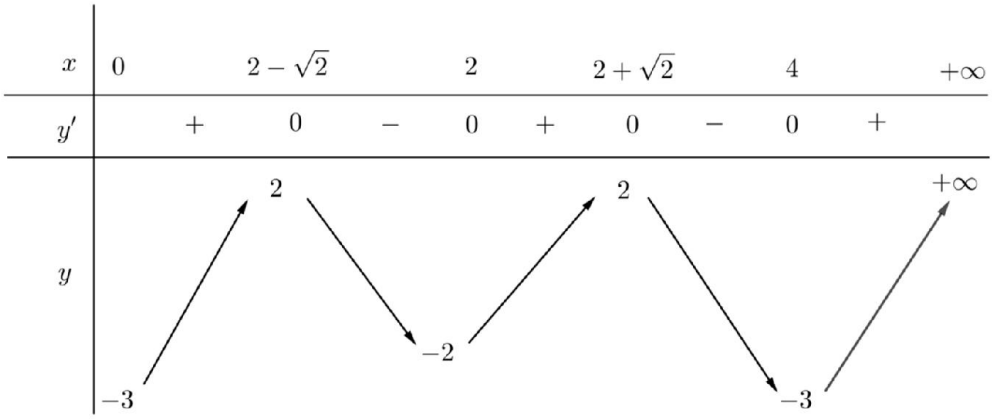
$g(0)=f(0)=-3$;

$g\left(2-\sqrt{2}\right)=g\left(2+\sqrt{2}\right)=f(-2)=2$;

$g(2)=f(-4)=-2$;

$g(4)=f(0)=-3$.

Ta có bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta được: yêu cầu bài toán tương đương $-3<\frac{m}{6}\le 2$

$\Leftrightarrow -18<m\le 12$.

Vậy có tất cả 30 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	-3	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3f\left(x^2-4x\right)=m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$?

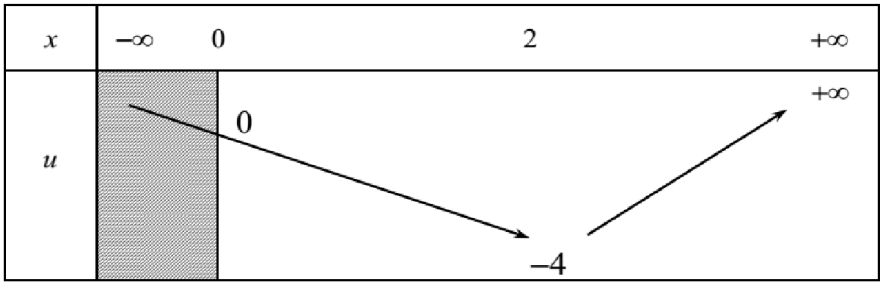
A. 15. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 13.

Lời giải

Chọn A

Đặt $u=x^2-4x$ (1)

Ta có BBT sau:



Ta thấy:

+ Với $u<-4$, phương trình (1) vô nghiệm.
+ Với $u=-4$, phương trình (1) có một nghiệm $x=2>0$.
+ Với $-4<u<0$, phương trình (1) có hai nghiệm $x>0$.
+ Vơi $u\ge 0$, phương trình (1) có một nghiệm $x>0$

Khi đó $3f\left(x^2-4x\right)=m\Rightarrow f\left(u\right)=\frac{m}{3}$ (2), ta thấy:

+ Nếu $\frac{m}{3}=-3\Leftrightarrow m=-9$, phương trình (2) có một nghiệm $u=0$ nên phương trình đã cho có một nghiệm $x>0$.

+ Nếu $-3<\frac{m}{3}<-2\Leftrightarrow -9<m<-6$, phương trình (2) có một nghiệm $u>0$ và một nghiệm $u\in\left(-2;0\right)$ nên phương trình đã cho có ba ngiệm $x>0$.

+ Nếu $\frac{m}{3}=-2\Leftrightarrow m=-6$, phương trình (2) có một nghiệm $u=-4$, một nghiệm $u\in\left(-2;0\right)$ và một nghiệm $u>0$ nên phương trình đã cho có bốn nghiệm $x>0$.

+ Nếu $-2<\frac{m}{3}<2\Leftrightarrow -6<m<6$, phương trình (2) có một nghiệm $u<-4$, hai nghiệm $u\in\left(-4;0\right)$ và một nghiệm $u>0$ nên phương trình đã cho có năm nghiệm $x>0$.

+ Nếu $\frac{m}{3}=2\Leftrightarrow m=6$, phương trình (2) có một nghiệm $u<-4$, một nghiệm $u=-2$ và một nghiệm $u>0$ nên phương trình đã cho có ba nghiệm $x>0$.

+ Nếu $\frac{m}{3}>2\Leftrightarrow m>6$, phương trình (2) có một nghiệm $u<-4$ và một nghiệm $u>0$ nên phương trình đã cho có một nghiệm $x>0$.

Vậy $-9<m\le 6\Rightarrow$ có 15 giá trị m nguyên thỏa ycbt.

Câu 4. **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	-3	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $5f\left(x^2-4x\right)=m$ có ít nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(0;+\infty\right)$

A. 24. **B.** 21. **C.** 25. **D.** 20.

Lời giải

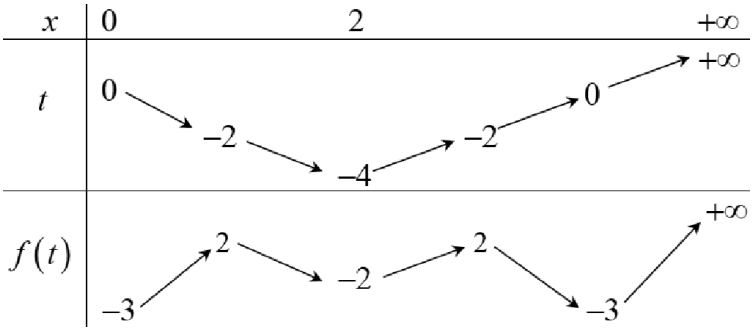
Chọn C.

Đặt $t=x^2-4x$. Ta có $t'=2x-4=0\Leftrightarrow x=2$

Bảng biến thiên

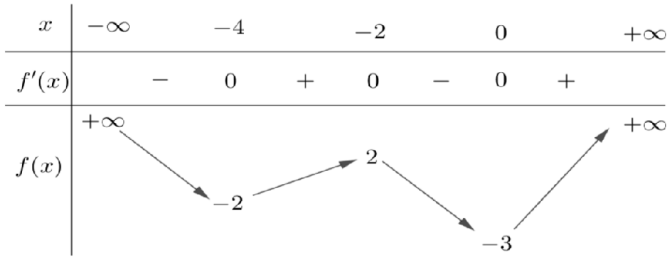
x	0		2		$+\infty$
t'		$-$	0	$+$	
t	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Với $t = x^2 - 4x$.



Dựa vào bảng biến thiên ta có $-3 < \frac{m}{5} \le 2 \Leftrightarrow -15 < m \le 10$. Vì m nguyên nên $m \in \{-14; -13; ....; 10\}$. Do đó có 25 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 5. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4f\left(x^2 - 4x\right) = m$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$?

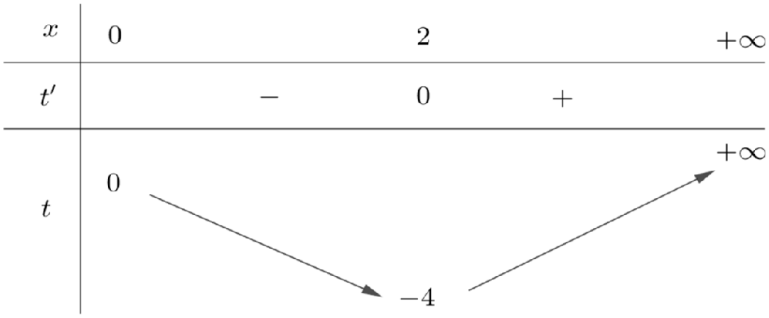
A. 16. **B.** 19. **C.** 20. **D.** 17.

Lời giải

Chọn C

Ta có $4f\left(x^2 - 4x\right) = m \Leftrightarrow f\left(x^2 - 4x\right) = \frac{m}{4}$

Đặt $t = x^2 - 4x \Rightarrow t' = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$



Vì $x \in (0; +\infty) \Rightarrow t \ge -4$

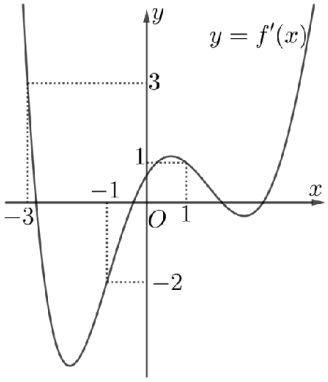
Ta có $f(t) = \frac{m}{4}$

Phương trình đã cho có ít nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$

$\Rightarrow -3 < \frac{m}{4} \le 2 \Leftrightarrow -12 < m \le 8$ mà m nguyên nên $m \in \{-11; -10; ...; 0; 1; ...; 8\}$

Vậy có 20 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 6. **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình sau.



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $2f(\sin x-2)-\frac{2\sin^3 x}{3}+\sin x>m+\frac{5\cos 2x}{4}$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $m\le 2f(-3)+\frac{11}{12}$. **B.** $m<2f(-1)+\frac{19}{12}$.

C. $m\le 2f(-1)+\frac{19}{12}$. **D.** $m<2f(-3)+\frac{11}{12}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$2f(\sin x-2)-\frac{2\sin^3 x}{3}+\sin x>m+\frac{5\cos 2x}{4}$$

$$\Leftrightarrow m<2f(\sin x-2)-\frac{2\sin^3 x}{3}+\sin x-\frac{5\left(1-2\sin^2 x\right)}{4}$$

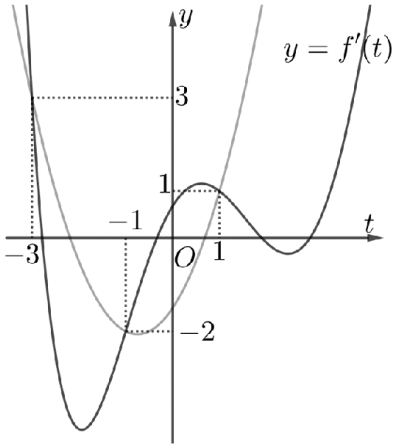
Đặt $t=\sin x-2$ (với $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ thì $t\in(-3;-1)$, khi đó bất phương trình được viết lại thành:

$$m<2f(t)-\frac{2(t+2)^3}{3}+(t+2)-\frac{5\left[1-2(t+2)^2\right]}{4}.$$

hay $m<2f(t)-\frac{2}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+3t+\frac{65}{12}$ $(*)$.

Xét hàm số $g(t)=2f(t)-\frac{2}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+3t+\frac{65}{12}$ trên đoạn $[-3;-1]$.

Ta có $g'(t)=2f'(t)-2t^2-3t+3$. Do đó $g'(t)=0\Leftrightarrow f'(t)=t^2+\frac{3}{2}t-\frac{3}{2}$.



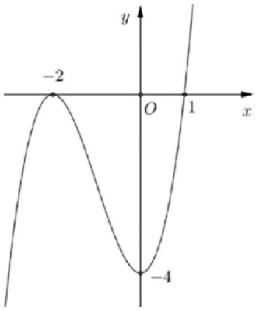
Dựa vào sự tương giao của đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và parabol $y=t^2+\frac{3}{2}t-\frac{3}{2}$ trên đoạn $[-3;-1]$ thì $g'(t)=0\Leftrightarrow t\in\{-3;-1\}$.

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(t)$ trên đoạn $[-3;-1]$ như sau:

t	-3		-1
$g'(t)$	0	$-$	0
$g(t)$	$g(-3)$	↘	$g(-1)$

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi bất phương trình $(*)$ nghiệm đúng với mọi $t\in(-3;-1)$. Điều đó tương đương với $m\le g(-1)=2f(-1)+\frac{19}{12}$ dựa vào tính liên tục của hàm số $g(t)$.

Câu 7. **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình dưới đây



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-5;5)$ để phương trình $f^2(x)-(m+4)|f(x)|+2m+4=0$ có 6 nghiệm phân biệt

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

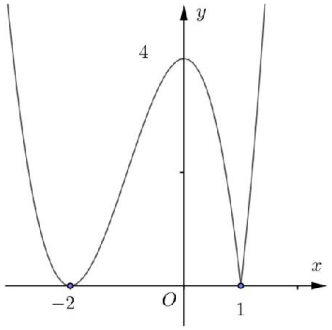
Chọn C

Ta có: $f^2(x)-(m+4)|f(x)|+2m+4=0\Leftrightarrow|f(x)|^2-m|f(x)|-4|f(x)|+2m+4=0$

$\Leftrightarrow(|f(x)|-2)^2-m(|f(x)|-2)=0\Leftrightarrow(|f(x)|-2)(|f(x)|-2-m)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |f(x)|-2=0 \\ |f(x)|-2-m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |f(x)|=2 \quad (1) \\ |f(x)|=m+2 \quad (2) \end{cases}$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ta có đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ như sau:



Dựa vào đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ suy ra phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

Suy ra phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt (2) có 2 nghiệm phân biệt khác các nghiệm của phương trình (1).

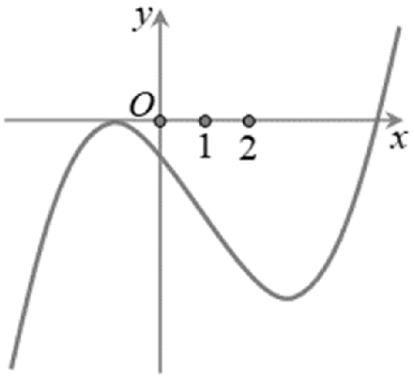
Ta có phương trình (2) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y=|f(x)|$ và $y=m+2$. Số nghiệm phương trình (2) là số giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ và $y=m+2$. Dựa vào hình vẽ đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ ta được phương trình $|f(x)|=m+2$ có 2 nghiệm phân biệt khác các nghiệm của phương trình $|f(x)|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+2=0 \\ m+2>4 \\ m+2\neq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m>2 \end{array}\right.$

Do $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in(-5;5) \Rightarrow m\in\{-2;3;4\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên $m\in(-5;5)$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Nguyễn Bảo Vương

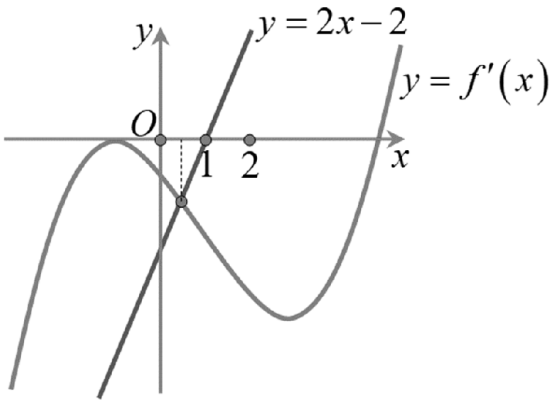
Câu 8. **(Chuyên Lam Sơn - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x)>x^2-2x+m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x\in(1;2)$ khi và chỉ khi



A. $m\le f(2)-2$. **B.** $m\le f(1)+1$. **C.** $m\le f(1)-1$. **D.** $m\le f(2)$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $f(x) > x^2 - 2x + m \ (\forall x \in (1;2)) \Leftrightarrow f(x) - x^2 + 2x > m \ (\forall x \in (1;2)) \ (*)$.

Gọi $g(x) = f(x) - (x^2 - 2x)$

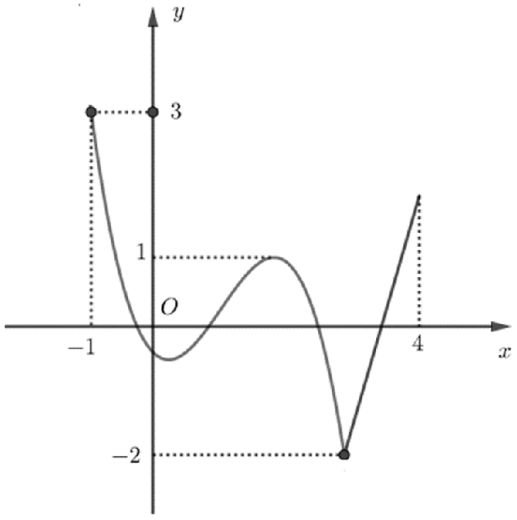
$\Rightarrow g'(x) = f'(x) - (2x - 2)$

Theo đồ thị ta thấy $f'(x) < (2x - 2) \ (\forall x \in [1;2]) \Rightarrow g'(x) < 0 \ (\forall x \in [1;2])$.

Vậy hàm số $y = g(x)$ liên tục và nghịch biến trên $[1;2]$

Do đó $(*) \Leftrightarrow m \le \min\limits_{[1;2]} g(x) = g(2) = f(2)$.

Câu 9. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;4]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10;10]$ để bất phương trình $|f(x) + m| < 2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1;4]$.

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Để bất phương trình $|f(x) + m| < 2m$ có nghiệm ta suy ra điều kiện $m > 0$.

$$|f(x) + m| < 2m \Leftrightarrow -2m < f(x) + m < 2m \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -3m \\ f(x) < m \end{cases}.$$

Bất phương trình $|f(x) + m| < 2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1;4] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -3m \\ f(x) < m \end{cases}$ đúng

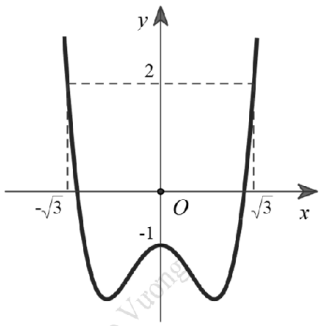
với mọi x thuộc đoạn $[-1;4] \Leftrightarrow \begin{cases} -3m < \min\limits_{[-1;4]} f(x) \\ m > \max\limits_{[-1;4]} f(x) \end{cases}$.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra $\min\limits_{[-1;4]} f(x) = -2;\ \max\limits_{[-1;4]} f(x) = 3$.

$\Rightarrow \begin{cases} -3m < \min\limits_{[-1;4]} f(x) \\ m > \max\limits_{[-1;4]} f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m < -2 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{2}{3} \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3$ (thỏa mãn điều kiện $m > 0$)

Vậy trên đoạn $[-10;10]$ có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 10. **(Chuyên Bến Tre - 2020)** Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Cho bất phương trình $3f(x) \geq x^3 - 3x + m$ (m là tham số thực). Điều kiện cần và đủ để bất phương trình $3f(x) \geq x^3 - 3x + m$ đúng với mọi $x \in \left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ là



A. $m \geq 3f(1)$. **B.** $m \geq 3f\left(-\sqrt{3}\right)$. **C.** $m \leq 3f(0)$. **D.** $m \leq 3f\left(\sqrt{3}\right)$.

Lời giải

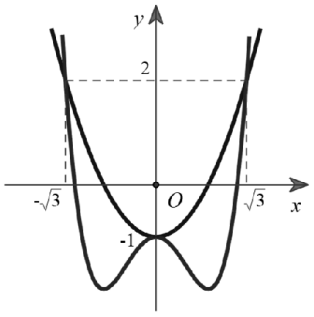
Chọn D

Ta có $3f(x) \geq x^3 - 3x + m \Leftrightarrow 3f(x) - x^3 + 3x \geq m$

Đặt $g(x) = 3f(x) - x^3 + 3x$. Tính $g'(x) = 3f'(x) - 3x^2 + 3$

Có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - 1$

Nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và parabol $y = x^2 - 1$



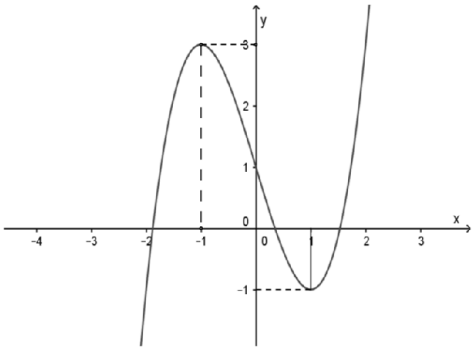
Dựa vào đồ thị hàm số ta có: $f'(x) = x^2 - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{3} \\ x = 0 \\ x = \sqrt{3} \end{array}\right.$

BBT

x	$-\sqrt{3}$		-1		$\sqrt{3}$
$g'(x)$	0	$-$	0	$-$	0
$g(x)$	$g(-\sqrt{3})$	$\searrow$		$\searrow$	$g(\sqrt{3})$

Để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ thì $m\le \min\limits_{\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]} g(x)=g\left(\sqrt{3}\right)=3f\left(\sqrt{3}\right)$.

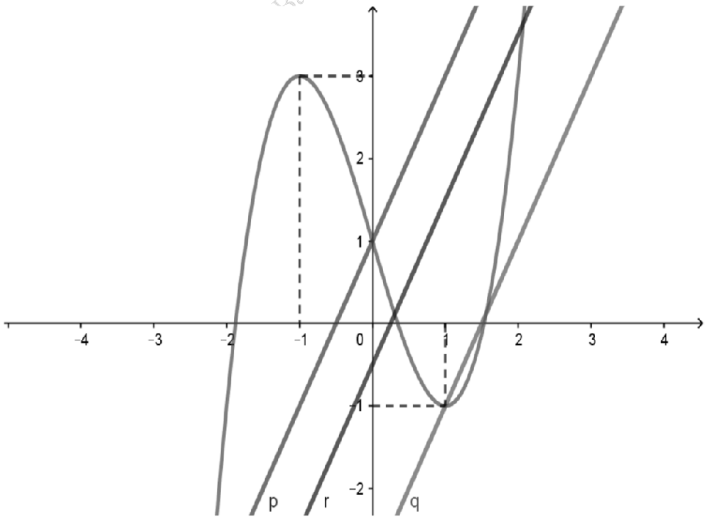
Câu 11. **(Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x)-m+2=2\sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$. Tổng các phần tử của S bằng



A. 4. **B.** -1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D



Đặt $t=\sin x$, với $x\in(0;\pi)\Rightarrow t\in(0;1]$.

Ta được phương trình: $f(t)-2t=m-2\Leftrightarrow f(t)=2t+m-2$ (1)

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(t)$ và đường thẳng $y=2t+m-2$ (r).

Gọi $(p):y=2x+1$ song song với đường thẳng $(\Delta):y=2t$ và đi qua điểm $A(0;1)$.

Gọi $q:y=2x-3$ song song với đường thẳng $(\Delta):y=2t$ và đi qua điểm $B(1;-1)$.

Để phương trình $f(\sin x)-m+2=2\sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ thì phương trình (1) phải có nghiệm $t\in(0;1]$, suy ra đường thẳng r nằm trong miền nằm giữa hai đường thẳng q và p (có thể trùng lên q và bỏ p)

$\Rightarrow -3\le m-2<1\Leftrightarrow -1\le m<3\Rightarrow m\in\{-1;0;1;2\}\Rightarrow S=\{-1;0;1;2\}$.

Do đó tổng các phần tử là: $-1+0+1+2=2$.

Câu 12. **(Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020)** Cho hàm số $f(x)=x^3+x+2$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m}\right)=-x^3-x+2$ có nghiệm $x\in[-1;2]$?

A. 1750. **B.** 1748. **C.** 1747. **D.** 1746.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(t)=t^3+t+2$, ta có $f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f\left(\sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m}\right)=f(-x)$

$\Leftrightarrow -x=\sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m}\Leftrightarrow f^3(x)+f(x)+x^3+m=0$ (1)

Xét $h(x)=f^3(x)+f(x)+x^3+m$ trên đoạn $[-1;2]$.

Ta có $h'(x)=3f'(x)\cdot f^2(x)+f'(x)+3x^2=f'(x)\left[3f^2(x)+1\right]+3x^2$.

Ta có $f'(x)=3x^2+1>0,\forall x\in[-1;2]\Rightarrow h'(x)>0,\forall x\in[-1;2]$.

Hàm số $h(x)$ đồng biến trên $[-1;2]$ nên $\min\limits_{[-1;2]}h(x)=h(-1)=m-1$, $\max\limits_{[-1;2]}h(x)=h(2)=m+1748$.

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\min_{[-1;2]}h(x)\cdot\max_{[-1;2]}h(x)\le 0 \Leftrightarrow h(-1)\cdot h(2)$$
$$\Leftrightarrow (m-1)(1748+m)\le 0$$
$$\Leftrightarrow -1748\le m\le 1.$$

Do m nguyên nên tập các giá trị m thỏa mãn là $S=\{-1748;-1747;\ldots;0;1\}$.

Vậy có tất cả 1750 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 13. **(Chuyên Quang Trung - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[2;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x+2\sqrt{x^2-2x}=m.f(x)$ có nghiệm thuộc đoạn $[2;4]$?

x	2		3		$\frac{7}{2}$		4
$f(x)$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	$\sqrt{11}$	$\searrow$	2

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\underset{[2;4]}{Min}\, f(x) = f(4) = 2$ và $\underset{[2;4]}{Max}\, f(x) = f(2) = 4$

Hàm số $g(x) = x + 2\sqrt{x^2 - 2x}$ liên tục và đồng biến trên $[2;4]$

Suy ra $\underset{[2;4]}{Min}\, g(x) = g(2) = 2$ và $\underset{[2;4]}{Max}\, g(x) = g(4) = 4 + 4\sqrt{2}$

Ta có $x + 2\sqrt{x^2 - 2x} = m.f(x) \Leftrightarrow \dfrac{x + 2\sqrt{x^2 - 2x}}{f(x)} = m \Leftrightarrow \dfrac{g(x)}{f(x)} = m$

Xét hàm số $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ liên tục trên $[2;4]$

Vì $g(x)$ nhỏ nhất và $f(x)$ lớn nhất đồng thời xảy ra tại $x = 2$ nên

$$\underset{[2;4]}{Min}\, h(x) = \frac{\underset{[2;4]}{Min}\, g(x)}{\underset{[2;4]}{Max}\, f(x)} = \frac{g(2)}{f(2)} = h(2) = \frac{1}{2}$$

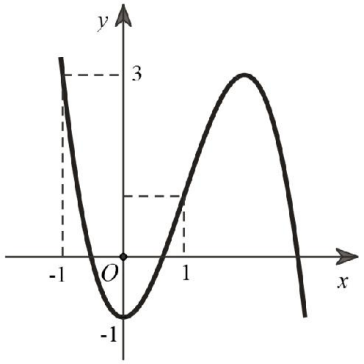
Vì $g(x)$ lớn nhất và $f(x)$ nhỏ nhất đồng thời xảy ra tại $x = 4$ nên

$$\underset{[2;4]}{Max}\, h(x) = \frac{\underset{[2;4]}{Max}\, g(x)}{\underset{[2;4]}{Min}\, f(x)} = \frac{g(4)}{f(4)} = h(4) = 2 + 2\sqrt{2}$$

Từ đó suy ra phương trình $h(x) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{1}{2} \le m \le 2 + 2\sqrt{2}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm.

Câu 14. **(Chuyên Sơn La - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (m - 2019) f(\cos x) + m - 2020 = 0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;2\pi]$ là



A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

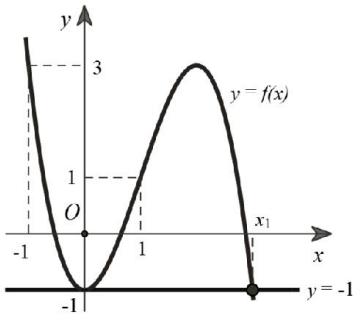
Chọn C

Ta có $f^2(\cos x) + (m - 2019) f(\cos x) + m - 2020 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(\cos x) = -1 \\ f(\cos x) = 2020 - m \end{array}\right.$ (1)

* Với $f(\cos x) = -1$

Dựa vào đồ thị ta có $f(\cos x) = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = x_1 \ (x_1 > 1)(VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Vì $x\in[0;2\pi]\Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\}$



* Với $f(\cos x)=2020-m$

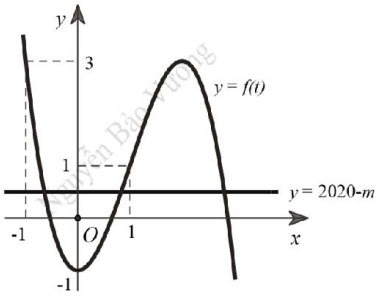
Đặt $t=\cos x\left(t\in[-1;1]\right)$

Với $t\in(-1;1]$ thì phương trình $t=\cos x$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[0;2\pi]$.

Với $t=-1$ thì phương trình $t=\cos x$ có một nghiệm thuộc $[0;2\pi]$

Phương trình trở thành $f(t)=2020-m$

Để phương trình (1) có tất cả 6 nghiệm phân biệt thì phương trình $f(\cos x)=2020-m$ có 4 nghiệm phân biệt, hay phương trình $f(t)=2020-m$ có hai nghiệm $t\in(-1;1]$

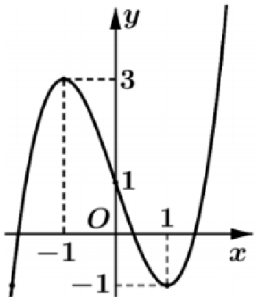


Dựa vào đồ thị ta có để phương trình $f(t)=2020-m$ có hai nghiệm $t\in(-1;1]$ thì $-1<2020-m\le 1\Leftrightarrow 2019\le m<2021$

Vì m nguyên nên $m\in\{2019;2020\}$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 15. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết $f(-1)=1;f\left(-\frac{1}{e}\right)=2$. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $f(x)<\ln(-x)+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-1;\frac{-1}{e}\right)$.



A. $m \ge 2$. **B.** $m \ge 3$. **C.** $m > 2$. **D.** $m > 3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) < \ln(-x) + m \Leftrightarrow m > f(x) - \ln(-x)$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - \ln(-x)$ trên $\left(-1; -\frac{1}{e}\right)$.

Có $g'(x) = f'(x) - \frac{1}{x}$.

Trên $\left(-1; -\frac{1}{e}\right)$ có $f'(x) > 0$ và $\frac{1}{x} < 0$ nên $g'(x) > 0, \forall x \in \left(-1; -\frac{1}{e}\right)$

$\Rightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left(-1; -\frac{1}{e}\right)$.

Vậy nên $f(x) < \ln(-x) + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left(-1; -\frac{1}{e}\right)$

$\Leftrightarrow m \ge g(x), \forall x \in \left(-1; -\frac{1}{e}\right)$

$\Leftrightarrow m \ge g\left(-\frac{1}{e}\right)$

$\Leftrightarrow m \ge 3$.

Câu 16. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(-1) = 5, f(-3) = 0$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Số giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $3f(2-x) + \sqrt{x^2+4} - x = m$ có nghiệm trong khoảng $(3;5)$ là

A. 16. **B.** 17. **C.** 0. **D.** 15.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x) = 3f(2-x) + \sqrt{x^2+4} - x$ với $x \in (3;5)$.

Ta có: $g'(x) = -3f'(2-x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - 1$.

Với $x \in (3;5)$:

Ta có: $2 - x \in (-3;-1)$ nên $f'(2-x) > 0$ suy ra $-3f'(2-x) < 0$.

Ta có: $\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} < \frac{x}{x} = 1$

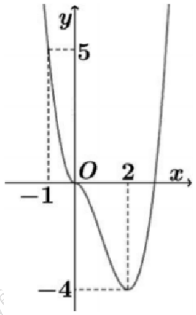
Suy ra $g'(x)=-3f'(2-x)+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}-1<0, \forall x\in(3;5)$ nên hàm số nghịch biến trên $(3;5)$.

Suy ra $\min\limits_{(3;5)} g(x)=g(5)=3f(-3)+\sqrt{5^2+4}-5=\sqrt{29}-5$;

$\max\limits_{(3;5)} g(x)=g(3)=3f(-1)+\sqrt{3^2+4}-3=12+\sqrt{13}$.

Để phương trình $3f(2-x)+\sqrt{x^2+4}-x=m$ có nghiệm thì $\sqrt{29}-5\le m\le 12+\sqrt{13}$ mà m nguyên dương nên $m\in\{1,2,...,15\}$ tức là có 15 giá trị

Câu 17. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-1)=1$, $f\left(-\dfrac{1}{e}\right)=2$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Bất phương trình $f(x)<\ln(-x)+x^2+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-1;-\dfrac{1}{e}\right)$ khi và chỉ khi



A. $m>0$. **B.** $m>3-\dfrac{1}{e^2}$. **C.** $m\ge 3-\dfrac{1}{e^2}$. **D.** $m\ge 0$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $-x>0\Leftrightarrow x<0$

Bất phương trình đã cho tương đương với $f(x)-\ln(-x)-x^2<m$ (*).

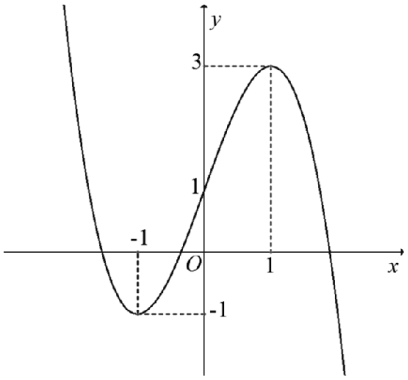
Xét hàm số $g(x)=f(x)-\ln(-x)-x^2$ trên $\left(-1;-\dfrac{1}{e}\right)$.

Ta có $g'(x)=f'(x)-\dfrac{1}{x}-2x$. Với $x\in\left(-1;-\dfrac{1}{e}\right)$ thì $f'(x)>0; -\dfrac{1}{x}-2x>0$ nên $g'(x)>0$.

Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left(-1;-\dfrac{1}{e}\right)$.

Suy ra (*) nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-1;-\dfrac{1}{e}\right)$ khi và chỉ khi $m\ge g\left(-\dfrac{1}{e}\right)=f\left(-\dfrac{1}{e}\right)-\ln\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{e^2}=3-\dfrac{1}{e^2}$.

Câu 18. **(Sở Hà Tĩnh - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(f\left(\cos x\right)\right)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải.

Chọn B

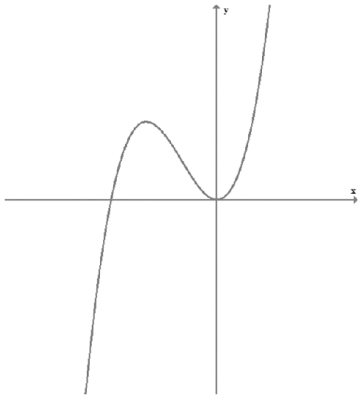
Khi $x\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ thì $\cos x\in\left[-1;0\right)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta thấy khi $\cos x\in\left[-1;0\right)$ thì $f\left(\cos x\right)\in\left[-1;1\right)$; khi đó $f\left(f\left(\cos x\right)\right)\in\left[-1;3\right)$.

Do đó phương trình $f\left(f\left(\cos x\right)\right)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi $-1\le m<3$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 19. **(Sở Ninh Bình)** Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(2\left|\sin x\right|\right)=f\left(m^2+6m+10\right)$ có nghiệm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải.

Chọn B

Từ đồ thị suy ra hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên nửa khoảng $\left[0;+\infty\right)$.

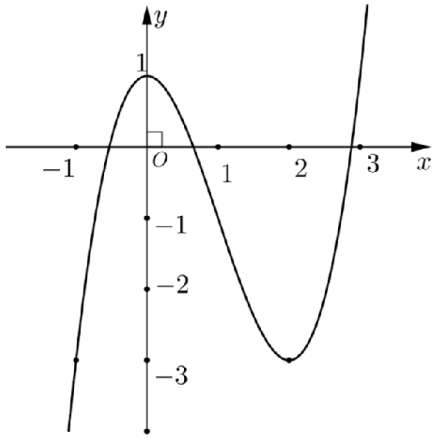
Do $2\left|\sin x\right|\ge 0;m^2+6m+10>0$ nên $f\left(2\left|\sin x\right|\right)=f\left(m^2+6m+10\right)\Leftrightarrow 2\left|\sin x\right|=m^2+6m+10$.

Mà $0\le 2\left|\sin x\right|\le 2$ nên yêu cầu bài toán tương đương

$0\le m^2+6m+10\le 2\Leftrightarrow m^2+6m+8\le 0\Leftrightarrow -4\le m\le -2$.

Vậy có 3 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 20. **(Sở Yên Bái - 2020)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(x^3-3x^2+m\right)+3=0$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1;2]$.



A. 7. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Từ hình vẽ, ta suy ra được hình vẽ là đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2+1$.

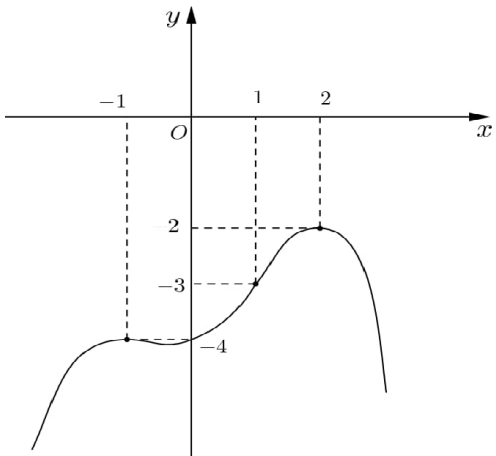
$$f\left(x^3-3x^2+m\right)+3=0\Leftrightarrow f\left(x^3-3x^2+m\right)=-3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-3x^2+m=-1\\x^3-3x^2+m=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-3x^2+1=-m\\x^3-3x^2+1=-m+3\end{array}\right.$$

Để phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $[-1;2]$ thì $\left[\begin{array}{l}-3\le -m\le 1\\-3\le -m+3\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\le m\le 3\\2\le m\le 6\end{array}\right.$.

$\Rightarrow m\in[-1;6]$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên có 8 giá trị m để phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 21. **(Sở Yên Bái - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $16.8^{f(x)}\le(-m^2+5m).4^{f(x)}-((4-f^2(x)).16^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi số thực x là



A. 3. **B.** 5.

C. 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

$16.8^{f(x)}\le(-m^2+5m).4^{f(x)}-((4-f^2(x)).16^{f(x)}\Leftrightarrow -m^2+5m\ge 16.2^{f(x)}+(4-f^2(x)).4^{f(x)}$

Vì. nên ta có $16.2^{f(x)}+(4-f^2(x)).4^{f(x)}\le 16.2^{-2}+0=4\,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow -m^2+5m\ge 4\Leftrightarrow m^2-5m+4\le 0\Leftrightarrow 1\le m\le 4$

Câu 22. **(Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $m+e^x<f(x)$ có nghiệm với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi.

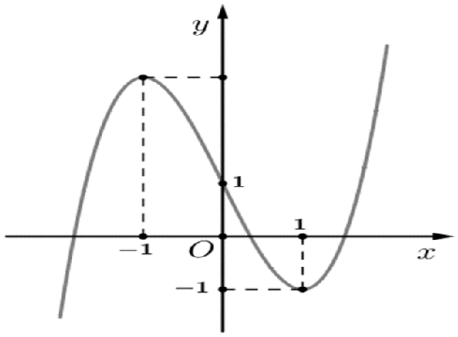
A. $m\le \min\left\{f(1)-e;f(-1)-\dfrac{1}{e}\right\}$.

B. $m<f(0)-1$.

C. $m<\min\left\{f(1)-e;f(-1)-\dfrac{1}{e}\right\}$.

D. $m\le f(0)-1$.

Lời giải



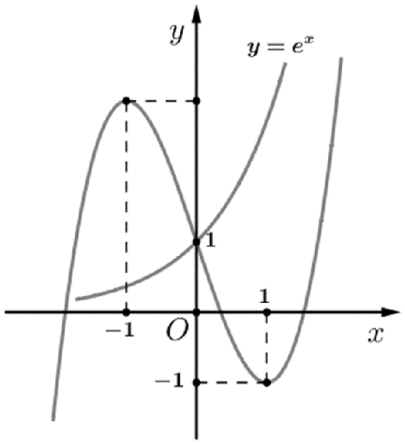
Chọn A

Ta có: $m+e^x<f(x)\Leftrightarrow m<f(x)-e^x$

Xét hàm số $g(x)=f(x)-e^x$ với $x\in(-1;1)$

$g'(x)=f'(x)-e^x;g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)-e^x=0\Leftrightarrow f'(x)=e^x$

Dễ thấy với $x\in(-1;1);f'(0)=1;e^0=1\Rightarrow x=0$ là nghiệm của phương trình $f'(x)=e^x$ hơn nữa là nghiệm duy nhất (Minh họa bằng hình vẽ)



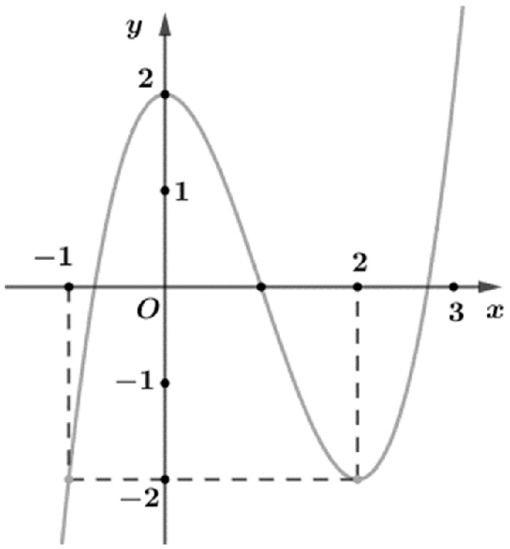
Dựa vào vị trí đồ thị hình vẽ trên ta có bảng biến thiên

x	-1		0		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$g(-1)$	↗	$g(0)$	↘	$g(1)$

Qua bảng biến thiên và chỉ xét trong khoảng $(-1;1)$

$m < g(x) \Leftrightarrow m \le \min\{g(-1); g(1)\} \Leftrightarrow m \le \min\left\{f(1)-e; f(-1)-\dfrac{1}{e}\right\}$.

Câu 23. **(Liên trường Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn. Biết $f(0)=0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có hình vẽ bên dưới.



Tập nghiệm của phương trình $f(|2\sin x-1|-1)=m$ (với m là tham số) trên đoạn $[0;3\pi]$ có tất cả bao nhiêu phần tử?

A. 8. **B.** 20. **C.** 12. **D.** 16.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn D

Đồ thị đã cho là đồ thị hàm số bậc ba có hai điểm cực trị $x=0$ và $x=2$ nên có dạng $f'(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

Lần lượt thay thế các dữ kiện từ hình vẽ, ta được $\begin{cases} d=2 \\ c=0 \\ 3\cdot a\cdot 2^2+2\cdot b\cdot 2=0 \\ -a^3+b+d=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=0 \\ d=2 \end{cases}$.

Suy ra $f'(x)=x^3-3x^2+2 \Rightarrow f(x)=\dfrac{x^4}{4}-x^3+2x+C$.

Mà $f(0)=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{x^4}{4}-x^3+2x$.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1-\sqrt{3} \\ x=1+\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$\frac{5}{4}$	↘	-1	↗	$+\infty$

Từ đó ta có bảng biến thiên của $f(x-1)$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		2		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x-1)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$\frac{5}{4}$	↘	-1	↗	$+\infty$

Vì $-1\le \sin x\le 1, \forall x\in[0;3\pi]$ nên $0\le |2\sin x-1|\le 3$.

Đặt $t=|2\sin x-1|$, $t\in[0;3]$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra phương trình $f(t-1)=m$ có tối đa 2 nghiệm $t=h$, $t=k$.

Do đó $\left[\begin{array}{l}2\sin x-1=\pm h\\2\sin x-1=\pm k\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{\pm h+1}{2}\\\sin x=\dfrac{\pm k+1}{2}\end{array}\right.$.

Trên $[0;3\pi]$, mỗi phương trình có nhiều nhất 4 nghiệm, do đó phương trình đã cho có nhiều nhất 16 nghiệm.

Câu 24. **(Kìm Thành - Hải Dương - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		3		18		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	0	↗	$+\infty$

Bất phương trình $e^{\sqrt{x}}\ge m-f(x)$ có nghiệm $x\in[4;16]$ khi và chỉ khi:

A. $m<f(4)+e^2$. **B.** $m\le f(4)+e^2$. **C.** $m<f(16)+e^2$. **D.** $m\le f(16)+e^2$.

Lời giải

Chọn B

Từ BBT suy ra $f'(x)>0, \forall x\in[4;16]$. Ta có: $e^{\sqrt{x}}\ge m-f(x)\Leftrightarrow m\le e^{\sqrt{x}}+f(x)$ (*).

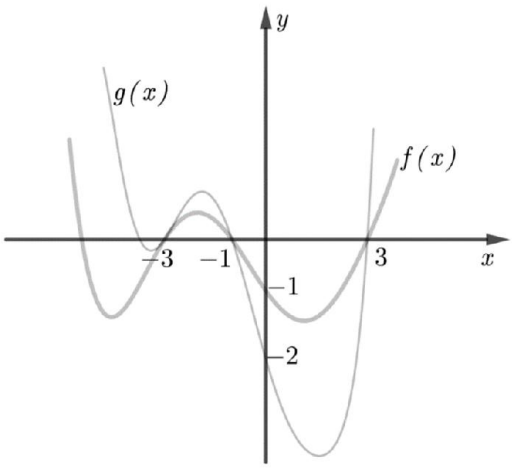
Đặt $g(x)=e^{\sqrt{x}}+f(x),\ \forall x\in[4;16]\Rightarrow g'(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}+f'(x)>0,\forall x\in[4;16]$

Bảng biến thiên:

x	4		16
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$f(4)+e^2$	$\nearrow$	$f(16)+e^4$

(*) thỏa mãn khi $m\le\min\limits_{[4;16]}g(x)=f(4)+e^2$.

Câu 25. **(Kìm Thành - Hải Dương - 2020)** Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây đường đậm hơn là đồ thị hàm số $y=f(x)$. Biết rằng hai đồ thị tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ là -3 và cắt nhau tại hai điểm nữa có hoành độ lần lượt là -1 và 3. Tìm tập hợp tất các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f(x)\ge g(x)+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-3;3]$.



A. $\left(-\infty;\dfrac{12-10\sqrt{3}}{9}\right]$. **B.** $\left[\dfrac{12-8\sqrt{3}}{9};+\infty\right)$. **C.** $\left[\dfrac{12-10\sqrt{3}}{9};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\dfrac{12-8\sqrt{3}}{9}\right]$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x)=f(x)-g(x)$.

Vì đồ thị hàm số $f(x)$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $g(x)$ tại điểm có hoành độ -3 và cắt nhau tại hai điểm nữa có hoành độ lần lượt là -1 và 3 suy ra

$h(x)=f(x)-g(x)=a(x+3)^2(x+1)(x-3)$.

Nhận xét từ đồ thị khi $x\to\pm\infty$ thì phần đồ thị $f(x)$ nằm dưới $g(x)$ nên $a<0$.

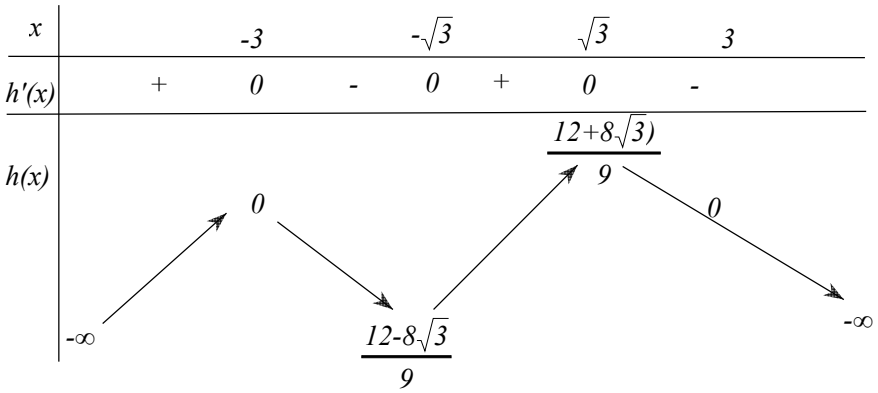
Mặt khác ta có $h(0)=27a=-2-(-1)=-1\Rightarrow a=\dfrac{-1}{27}$

Xét hàm $y=h(x)=\dfrac{-1}{27}(x+3)^2(x+1)(x-3)=\dfrac{-1}{27}(x^4+4x^3-6x^2-36x-27)$.

Ta có $y'=h'(x)=\frac{-1}{27}\left(4x^3+12x^2-12x-36\right)=\frac{-1}{27}(x+3)\left(4x^2-12\right)$.

Suy ra $y'=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=\sqrt{3}\\x=-\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Vậy tập hợp tất các giá trị thực của tham số m để bất phương trình

$f(x)\ge g(x)+m\Leftrightarrow f(x)-g(x)\ge m$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-3;3]$ là $m\le\frac{12-8\sqrt{3}}{9}$.

Câu 26. **(Kìm Thành - Hải Dương - 2020)** Cho hàm số $f(x)=x^5+3x^3-4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right)=x^3-m$ có nghiệm thuộc đoạn $[1;2]$?

A. 18. **B.** 17. **C.** 15. **D.** 16.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right)=x^3-m$ (1)

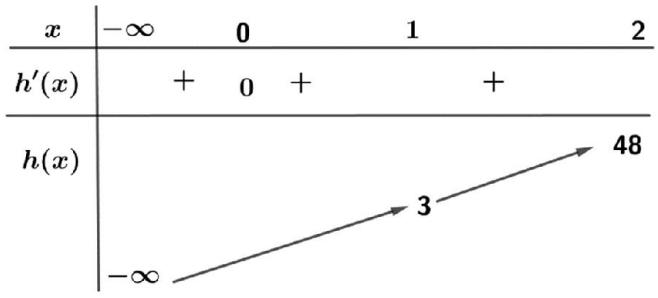
Đặt $t=\sqrt[3]{f(x)+m}$. Ta có $\left\{\begin{array}{l}f(t)=x^3-m\\f(x)=t^3-m\end{array}\right.\Rightarrow f(t)+t^3=f(x)+x^3$ (2)

Xét hàm số $g(u)=f(u)+u^3\Rightarrow g'(u)=f'(u)+3u^2=5u^4+12u^2\ge 0,\forall u$.

Khi đó (2) $\Leftrightarrow g(t)=g(x)\Leftrightarrow t=x\Leftrightarrow\sqrt[3]{f(x)+m}=x\Leftrightarrow x^3-f(x)=m\Leftrightarrow x^5+2x^3=3m$

Xét hàm số $h(x)=x^5+2x^3\Rightarrow h'(x)=5x^4+6x^2\ge 0,\forall x$

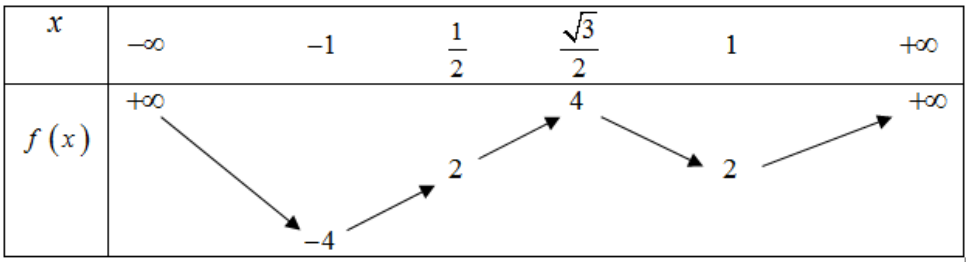
Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$:



Từ bảng biến thiên suy ra để (1) có nghiệm thuộc đoạn $[1;2]\Leftrightarrow 3\le 3m\le 48\Leftrightarrow 1\le m\le 16$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1;2;3;...;16\}$ suy ra có 16 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 27. **(Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x)+(3-m)f(\cos x)+2m-10=0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right]$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Xét $f^2(\cos x)+(3-m)f(\cos x)+2m-10=0$. Ta có $\Delta=(m-7)^2$.

Do đó $\left[\begin{array}{l} f(\cos x)=m-5 \ (1) \\ f(\cos x)=2 \quad (2) \end{array}\right.$.

Với $f(\cos x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=a<-1 \\ \cos x=\frac{1}{2} \\ \cos x=1 \end{array}\right.$.

Nguyễn Bảo Vương

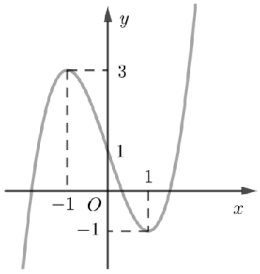
Trường hợp này được 3 nghiệm trong $\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right]$.

Để phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right]$ thì (1) có đúng 1 nghiệm trong $\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right]$ và không trùng với nghiệm của các phương trình $\cos x=\frac{1}{2};\cos x=1$

$\Leftrightarrow f(t)=m-5$ với $t=\cos x$ có đúng 1 nghiệm trong $\left[-1;\frac{1}{2}\right) \Rightarrow -4 \le m-5<2 \Leftrightarrow 1 \le m<7$.

Do m nguyên nên có 6 giá trị của m thỏa mãn.

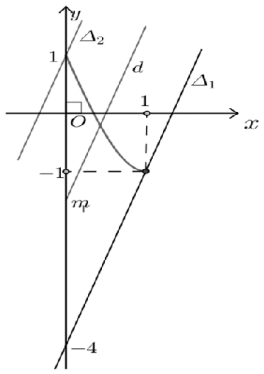
Câu 28. **(Trần Phú - Quảng Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $y=f(\sin x)=3\sin x+m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$. Tổng các phần tử của S bằng



A. −5. **B.** −8. **C.** −6. **D.** −10.

Lời giải

Chọn D



Đặt $t=\sin x$, $x\in(0;\pi)\Leftrightarrow t\in(0;1]$.

Phương trình $f(\sin x)=3\sin x+m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=3t+m$ có nghiệm thuộc $(0;1]$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $d: y=3x+m$ có điểm chung với hoành độ $x\in(0;1]$.

$\Delta_1: y=3x-4$ là đường thẳng qua điểm $(1;-1)$ và $\Delta_2: y=3x+1$ là đường thẳng qua điểm $(0;1)$

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ trên $(0;1]$ là phần đường cong nằm giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

Vậy phương trình $f(t)=3t+m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $(0;1]$ khi và chỉ khi d dao động trong miền giới hạn bởi Δ_1 và Δ_2 (không trùng với Δ_2) khi và chỉ khi $-4\le m<1\Leftrightarrow m\in\{-4;-3;-2;-1;0\}$.

Vậy tổng các giá trị của S bằng -10.

Câu 29. **(NK HCM-2019)** Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên đoạn $[-2;9]$, biết $f(-1)=f(2)=f(9)=3$ và $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	-2		0		6		9
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	↗	6	↘	-4	↗	3

Tìm m để phương trình $f(x)=f(m)$ có ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-2;9]$.

A. $m\in(-2;9]\setminus((-1;2)\cup\{6\})$. **B.** $m\in[-2;9]\setminus((-1;2)\cup\{6\})$.

C. $m\in(-2;9]\setminus\{6\}$. **D.** $m\in[-2;9]\setminus\{-2;6\}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $f(x)=f(m)$ có ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-2;9]$ khi $-4<f(m)\le 3$.

Trên $(-2;0)$, hàm số $f(x)$ đồng biến và $f(-1)=3$ nên $-4<f(m)\le 3\Leftrightarrow -2<m\le -1$.

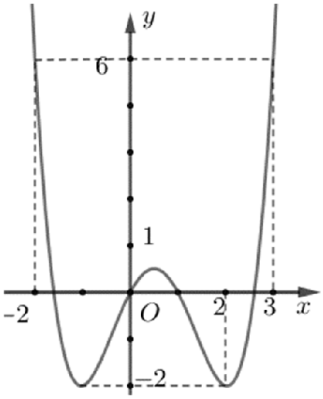
Trên $(0;6)$, hàm số $f(x)$ nghịch biến và $f(2)=3$ nên $-4<f(m)\le 3\Leftrightarrow 6>m\ge 2$.

Trên $(6;9)$, hàm số $f(x)$ đồng biến và $f(9)=3$ nên $-4<f(m)\le 3\Leftrightarrow 6<m\le 9$.

Vậy điều kiện của m là: $m\in(-2;-1]\cup[2;6)\cup(6;9]\Leftrightarrow m\in(-2;9]\setminus((-1;2)\cup\{6\})$.

Câu 30. **(Chuyên Đại học Vinh 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x^3-3x)=m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 7.



Lời giải

Chọn B

Đặt $t=g(x)=x^3-3x,\ x\in[-1;2]$

$g'(x)=3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $[-1;2]$

x	-1		1		2
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	2	↘	-2	↗	2

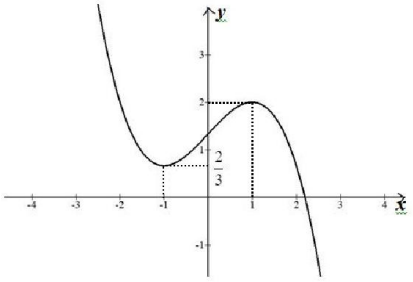
Suy ra với $t=-2$, có 1 giá trị của x thuộc đoạn $[-1;2]$.

$t\in(-2;2]$, có 2 giá trị của x thuộc đoạn $[-1;2]$.

Phương trình $f(x^3-3x)=m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=m$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(-2;2]$. (1)

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ và m nguyên ta có hai giá trị của m thỏa mãn điều kiện (1) là: $m=0,\ m=-1$.

Câu 31. **(Hội 8 trường chuyên ĐBSH 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số giá trị nguyên dương của m để phương trình $f\left(x^2-4x+5\right)+1=m$ có nghiệm là

A. Vô số. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x^2-4x+5$. Ta có $t=(x-2)^2+1\geq 1$.

Phương trình $f\left(x^2-4x+5\right)+1=m$ (1) trở thành phương trình $f(t)=m-1$ (2).

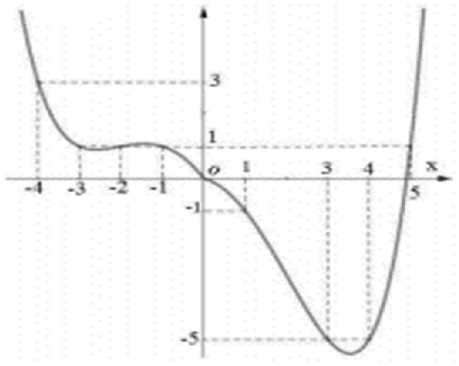
Sử dụng các nhận xét ở trên và đồ thị của hàm số $y=f(x)$ ta có

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm thuộc $[1;+\infty)$

$\Leftrightarrow m-1\leq 2\Leftrightarrow m\leq 3$

Vậy tập hợp các giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán là $\{1;2;3\}$.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)=m-3$ có nghiệm



A. 13. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $6x-9x^2\geq 0\Leftrightarrow 0\leq x\leq \dfrac{2}{3}$

Đặt $t=3-4\sqrt{6x-9x^2}$; $0\leq x\leq \dfrac{2}{3}$

Ta có: $t'(x)=\dfrac{12(3x-1)}{\sqrt{6x-9x^2}}$; $0<x<\dfrac{2}{3}$; $t'(x)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$ (nhận).

$t(0)=3; t\left(\frac{1}{3}\right)=-1; t\left(\frac{2}{3}\right)=3.$

Nên $-1\le t\le 3$.

Mặt khác: $f(t)=\frac{m-3}{2}$, $t\in[-1;3]$ có nghiệm.

Từ đồ thị ta có $-5\le\frac{m-3}{2}\le 1\Leftrightarrow -7\le m\le 5$.

Do m nguyên nên có 13 giá trị m là -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Câu 33. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	3	↘	$-\infty$

Tìm m để phương trình $f^2(2x)-2f(2x)-m-1=0$ có nghiệm trên $(-\infty;1)$

A. $(-1;+\infty)$. **B.** $[-2;+\infty)$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $[-1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f^2(2x)-2f(2x)-m-1=0\Leftrightarrow f^2(2x)-2f(2x)-1=m\ (1)$.

Đặt $t=f(2x)$, với $x\in(-\infty;1)$ thì $2x\in(-\infty;2)$, ki đó $t=f(2x)\in[0;+\infty)$.

Phương trình (1) trở thành: $t^2-2t-1=m(2)$.

(1) có nghiệm trên $(-\infty;1)$ tương ứng khi và chỉ khi (2) có nghiệm trên $[0;+\infty)$.

Xét $g(t)=t^2-2t-1, t\in[0;+\infty)$, có $g'(t)=2t-2, g'(t)=0\Leftrightarrow t=1$.

Bảng biến thiên của $g(t)$:

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình (2) có nghiệm $t\in[0;+\infty)$ khi và chỉ khi $m\ge -2$.

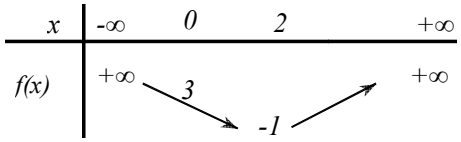
Câu 34. **(Sở Hà Nam - 2019)** Cho hàm số $f(x)=x^2-4x+3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|)-(m-6)f(|x|)-m+5=0$ có 6 nghiệm thực phân biệt?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

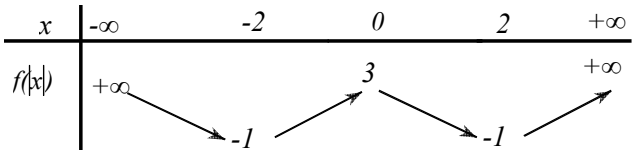
Lời giải

Chọn D

Hàm số $f(x)=x^2-4x+3$ có bảng biến thiên



Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có bảng biến thiên



Đặt $t=f\left(|x|\right)\geq -1(*)$

Nhận xét:

+ với $t_0<-1\xrightarrow{(*)}x\in\varnothing$

+ với $t_0=-1;t_0>3\xrightarrow{(*)}$ 2 nghiệm

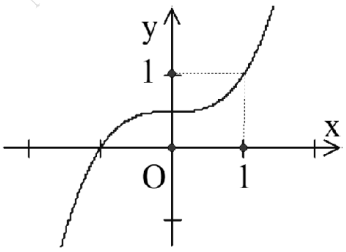
+ với $t_0=3\xrightarrow{(*)}$ 3 nghiệm

+ với $t_0\in(-1;3)\xrightarrow{(*)}$ 4 nghiệm

Phương trình trở thành $t^2-(m-6)t-m+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=m-5\end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán suy ra $-1<m-5<3\Leftrightarrow 4<m<8\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\{5;6;7\}$.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi S là tập hợp các giá trị của $m(m\in\mathbb{R})$ sao cho

$(x-1)\left[m^3f(2x-1)-mf(x)+f(x)-1\right]\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}.$

Số phần tử của tập S là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2 **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị ta thấy $f(x)$=1. Đặt $g(x)=m^3f(2x-1)-mf(x)+f(x)-1$.

$(x-1)\left[m^3f(2x-1)-mf(x)+f(x)-1\right]\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\quad(*)$

Từ giả thiết ta có điều kiện cần để có $(*)$ là $g(1)=0\Leftrightarrow m^3f(1)-mf(1)+f(1)-1=0\Leftrightarrow m^3-m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=\pm1\end{array}\right.$

Điều kiện đủ:

+)Với $m=0$ ta có $(*)\Leftrightarrow g(x)=(x-1)\left[f(x)-1\right]\geq 0$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Do đó $m=0$ thỏa mãn.

+)Với $m=1$ ta có $(x-1)\left[f(2x-1)-1\right]=\frac{1}{2}\left[(2x-1)-1\right]\left[f(2x-1)-1\right]\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$. Do đó $m=1$ thỏa mãn.

+) Với $m=-1$, $(*)\Leftrightarrow(x-1)\left[-f(2x-1)+2f(x)-1\right]\geq 0\ \ (**)$.

Xét $x>1$ ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(2x-1)+1}{2f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a(2x-1)^3+b(2x-1)^2+c(2x-1)+d+1}{2\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)}=4>0$

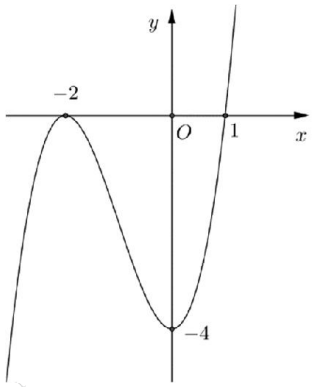
$\Rightarrow\exists\alpha\in\mathbb{R},\alpha>1: f(2\alpha-1)+1>2f(\alpha)$ hay $2f(\alpha)-f(2\alpha-1)-1<0$

$\Rightarrow(\alpha-1)\left[2f(\alpha)-f(2\alpha-1)-1\right]<0$ (không thỏa mãn $(**)$).

Do đó $m=-1$ không thỏa mãn

Vậy S có 2 phần tử.

Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên dưới



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(x)-(m+5)\left|f(x)\right|+4m+4=0$ có 7 nghiệm phân biệt?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

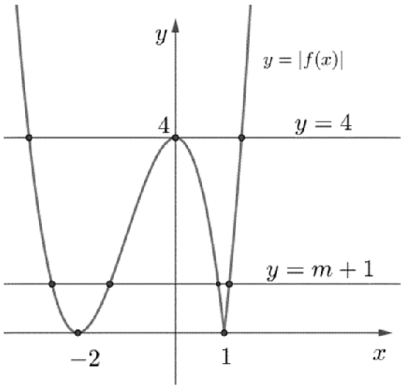
Phương trình tương đương với

$$f^2(x)-5\left|f(x)\right|+4-m\left(\left|f(x)\right|-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\left|f(x)\right|-4\right)\left(\left|f(x)\right|-1\right)-m\left(\left|f(x)\right|-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\left|f(x)\right|-4\right)\left(\left|f(x)\right|-1-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|f(x)\right|=4\ \ (1)\\ \left|f(x)\right|=m+1\ \ (2)\end{array}\right.$$

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta suy ra đồ thị hàm số $y=\left|f(x)\right|$ như sau



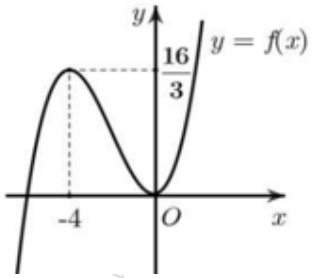
Dựa vào đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$, suy ra phương trình $\left(1\right)$ luôn có 3 nghiệm phân biệt.

Vì vậy, yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $\left(2\right)$ có 4 nghiệm phân biệt khác 4.

Suy ra $0<m+1<4\Leftrightarrow -1<m<3\Rightarrow m=0,\,1,\,2.$

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa bài toán.

Câu 37. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$f\left(\left|\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|\right)=f\left(m^2+4m+4\right)$ có nghiệm.

A. 4. **B.** 5. **C.** Vô số. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\left|\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|\geq 0,\ \forall x$ và $m^2+4m+4=\left(m+2\right)^2\geq 0,\ \forall m$. Nhìn vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$ suy ra phương trình đã cho tương đương

$\left|\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|=m^2+4m+4\quad(1)$

Đặt $P=\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}(*)$

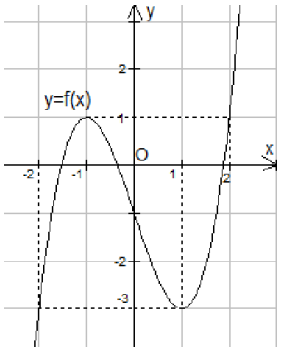
vì $2\cos x-\sin x+4>0,\ \forall x$

nên $(*)\Leftrightarrow(3-P)\sin x-(1+2P)\cos x=4P+1\ (2)$

Phương trình (2) có nghiệm $\Leftrightarrow(4P+1)^2\leq(3-P)^2+(1+2P)^2\Leftrightarrow\dfrac{-9}{11}\leq P\leq 1\Rightarrow|P|\leq 1$

Suy ra phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow m^2+4m+4\leq 1\Leftrightarrow m\in[-3;-1]\Rightarrow$ Có ba giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình bên.



Phương trình $f(2\sin x)=m$ có đúng ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$ khi và chỉ khi

A. $m\in\{-3;1\}$.. **B.** $m\in(-3;1)$..

C. $m\in[-3;1)$.. **D.** $m\in(-3;1]$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=2\sin x$ (*), $x\in[-\pi;\pi]\Rightarrow t\in[-2;2]$.

Khi đó phương trình $f(2\sin x)=m$ trở thành $f(t)=m$ (1). Số nghiệm của PT(1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(t)$ và đường thẳng $y=m$.

Nhận thấy:

Với $t\in\{-2;2\}$ thì PT(*) có 1 nghiệm $x\in[-\pi;\pi]$.

Với $t=0$ thì PT(*) có 3 nghiệm phân biệt $x\in[-\pi;\pi]$.

Với $t\in(-2;2)\setminus\{0\}$ thì PT(*) có 2 nghiệm phân biệt $x\in[-\pi;\pi]$.

Nguyễn Bảo Vương

Do đó, dựa vào đồ thị đã cho ta có:

+) TH 1: $m<-3$ thì phương trình (1) có một nghiệm $t<-2$. Suy ra $m<-3$ bị loại

+) TH 2: $m=-3$ thì PT(1) có hai nghiệm là $t=1$ và $t=-2$. Suy ra $m=-3$ là giá trị thỏa mãn.

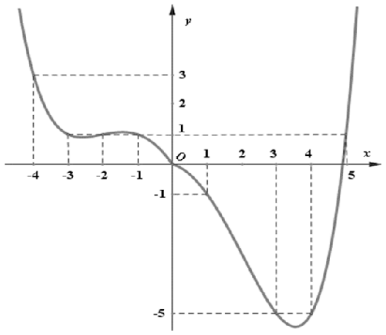
+) TH 3: $-3<m<1$ thì phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-2;2)$. Suy ra $-3<m<1$ bị loại.

+) TH 4: Xét trường hợp $m=1$ thì PT(1) có hai nghiệm là $t=-1$ và $t=2$. Suy ra $m=1$ là giá trị thỏa mãn.

+) TH 5: $m>1$ thì phương trình (1) có một nghiệm $t>2$. Do đó $m>1$ bị loại.

Vậy các giá trị m cần tìm là $m\in\{-3;1\}$. Chọn. **A.**

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2.f\left(3-3\sqrt{-9x^2+30x-21}\right)=m-2019$ có nghiệm.



A. 15. **B.** 14. **C.** 10. **D.** 13.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\sqrt{-9x^2+30x-21}=\sqrt{4-(3x-5)^2} \Rightarrow 0\le\sqrt{-9x^2+30x-21}\le 2$

$\Rightarrow -3\le 3-3\sqrt{-9x^2+30x-21}\le 3.$

Đặt $t=3-3\sqrt{-9x^2+30x-21}\Rightarrow t\in[-3;3].$

Khi đó, phương trình $2.f\left(3-3\sqrt{-9x^2+30x-21}\right)=m-2019 \quad (1) \Leftrightarrow 2f(t)=m-2019$

$\Leftrightarrow f(t)=\dfrac{m-2019}{2} \quad (2)$

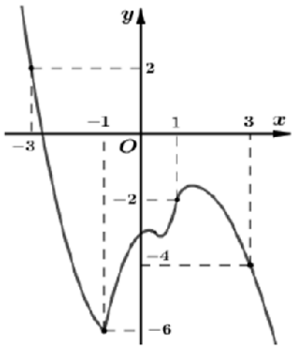
Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t\in[-3;3]$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta có, phương trình (2) có nghiệm $t\in[-3;3]$ khi và chỉ khi

$-5\le\dfrac{m-2019}{2}\le 1\Leftrightarrow -10\le m-2019\le 2\Leftrightarrow 2009\le m\le 2021$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{2009,2010,...,2021\}$. Vậy có 13 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 40. **(Thi thử cụm Vũng Tàu - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)=m-3$ có nghiệm.



A. 9. **B.** 17. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $6x-9x^2\ge 0\Leftrightarrow 0\le x\le\dfrac{2}{3}$.

Đặt $t=3-4\sqrt{6x-9x^2}, x\in\left[0;\frac{2}{3}\right]$.

Ta có: $t'=-4.\frac{6-18x}{2\sqrt{6x-9x^2}}=0\Rightarrow x=\frac{1}{3}\in\left(0;\frac{2}{3}\right)$.

Bảng biến thiên cho $t=3-4\sqrt{6x-9x^2}$ .Vì $x\in\left[0;\frac{2}{3}\right]\Rightarrow t\in[-1;3]$

Phương trình trở thành: $2f(t)=m-3\Leftrightarrow f(t)=\frac{m-3}{2}, t\in[-1;3]. (*)$

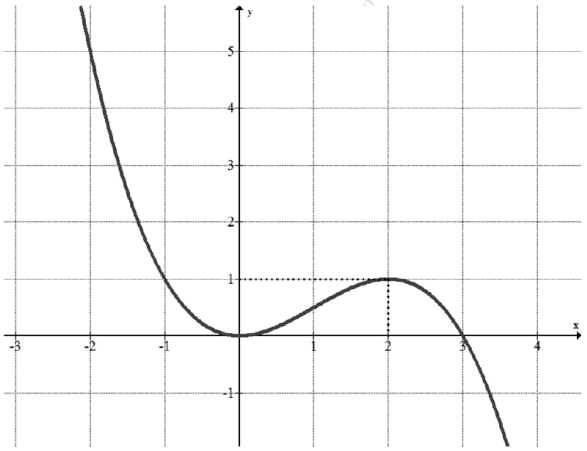
Phương trình $2f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)=m-3$ có nghiệm $\Leftrightarrow f(t)=\frac{m-3}{2}$ có nghiệm $t\in[-1;3]$

$\Leftrightarrow -6\le\frac{m-3}{2}\le -2+a\Leftrightarrow -12\le m-3\le -4+2a\Leftrightarrow -9\le m\le -1+2a$, với

$\max\limits_{[-1;3]} f(t)=a+2, a\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-9;-8;-7;..;-1\}\Rightarrow$ có 9 giá trị m nguyên thỏa ycbt.

Câu 41. **(SGD Điện Biên - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ với $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, đạt cực trị tại điểm $O(0;0)$ và cắt trục hoành tại $A(3;0)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên $[-5;5]$ để phương trình $f\left(-x^2+2x+m\right)=e$ có bốn nghiệm phân biệt.



A. 0. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B.

Theo hình vẽ ta có $y=f'(x)$ là hàm số bậc ba nên $a\neq 0$.

$f'(x)=4ax^3+3b^2x+2cx+d\Rightarrow f''(x)=12ax^2+6bx+2c$.

Theo giả thiết, ta có: $\begin{cases}f'(0)=0\\f'(3)=0\\f''(0)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=0\\108a+27b+6c+d=0\\c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-4a\\c=d=0\end{cases}$.

$\Rightarrow f(x)=ax^4-4ax^3+e$.

$\Rightarrow f(x)=e \Leftrightarrow ax^4-4ax^3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Khi đó $f\left(-x^2+2x+m\right)=e(1)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2+2x+m=0 \\ -x^2+2x+m=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)^2=1+m \\ (x-1)^2=m-3 \end{array}\right.$

PT(1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} 1+m>0 \\ m-3>0 \\ 1+m\neq m-3 \end{cases} \Leftrightarrow m>3$.

Mà $m\in\mathbb{Z}\cap[-5;5] \Rightarrow m\in\{4;5\}$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa đề bài.

Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[-2;4]$ và có bảng biến thiên như sau

x	-2		0		1		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	↗	2	↘	$1{,}5$	↘	1	↗	6

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{9}{x^2}-4\geq 0 \\ 6f\left(-2x+1\right)-8x^3+6x-m=0 \end{cases}$ có ba nghiệm phân biệt?

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\dfrac{9}{x^2}-4\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{9-4x^2}{x^2}\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 9-4x^2\geq 0 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{3}{2}\leq x\leq \dfrac{3}{2} \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]\setminus\{0\}$.

Xét phương trình $6f\left(-2x+1\right)-8x^3+6x-m=0 \Leftrightarrow m=6f\left(-2x+1\right)-8x^3+6x$ (1)

Xét hàm số $g(x)=6f\left(-2x+1\right)-8x^3+6x$, với $x\in\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]\setminus\{0\}$.

Ta có $g'(x)=-12f'\left(-2x+1\right)-24x^2+6=-6\left[2f'\left(-2x+1\right)+4x^2-1\right]$

Từ giả thiết ta suy ra $f'\left(-2x+1\right)<0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+1<2 \\ -2x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$;

$$f'(-2x+1)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2<-2x+1<0\\ 2<-2x+1<4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)=6f(-2x+1)-8x^3+6x$ trên $\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]\setminus\{0\}$.

x	$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$
$f'(-2x+1)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$4x^2-1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	54	$\searrow$	4	$\nearrow$	9	$\nearrow$	14	$\searrow$	-36

Từ bảng biến thiên ta suy ra hệ có đúng ba nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có đúng ba nghiệm $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]\setminus\{0\}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}4<m<14\\ m\neq 9\end{cases}$. Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=5;6;7;8;10;11;12;13$. Vậy có 8 số nguyên m.

Câu 43. **(Hậu Lộc 2-Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$ và có bảng biến thiên như hình sau:

x	0		1		2		3		5
$f(x)$	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	3

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $mf(x)+\sqrt{3x}\le 2019f(x)-\sqrt{10-2x}$ nghiệm đúng với mọi $x\in[0;5]$.

A. 2014. **B.** 2015. **C.** 2019. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Trên $[0;5]$, ta có: $mf(x)+\sqrt{3x}\le 2019f(x)-\sqrt{10-2x}\Leftrightarrow m\le 2019-\dfrac{\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}}{f(x)}$.

Xét hàm số $g(x)=\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}$ trên đoạn $[0;5]$.

$$g'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x}}-\frac{1}{\sqrt{10-2x}}=\frac{3\sqrt{10-2x}-2\sqrt{3x}}{2\sqrt{3x}.\sqrt{10-2x}}$$

Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=3 \in [0;5]$.

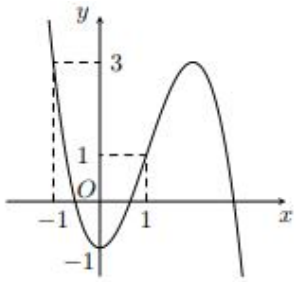
Do $g(0)=\sqrt{10}$, $g(3)=5$ và $g(5)=\sqrt{15}$ nên $\max\limits_{[0;5]} g(x)=g(3)=5$.

Mặt khác $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(3)=1$ nên

$$m \le 2019-\frac{\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}}{f(x)},\ \forall x \in [0;5]$$

$$\Leftrightarrow m \le \min\limits_{[0;5]}\left(2019-\frac{\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}}{f(x)}\right)=2019-\frac{5}{1}=2014.$$

Câu 44. **(Hậu Lộc 2-Thanh Hóa -2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(cosx)+(m-2018)f(cosx)+m-2019=0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;2\pi]$ là



A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f^2(cosx)+(m-2018)f(cosx)+m-2019=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(cosx)=-1 \\ f(cosx)=2019-m. \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị ta có: $f(\cos x)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \quad (1) \\ \cos x=k>1 \quad (2) \end{array}\right.$

PT có 2 nghiệm thỏa mãn, PT vô nghiệm.

Yêu cầu: phương trình $f(cosx)=2019-m\,(2019-m \ne 1)$ có thêm 4 nghiệm thuộc $[0;2\pi]$.

Nhận xét:

+ Với mỗi $t \notin [-1;1]$, phương trình $cosx=t$ vô nghiệm.

+ Với mỗi $t \in (-1;1]$, phương trình $cosx=t$ có 2 nghiệm $x \in [0;2\pi]$.

+ Với $t=-1$, phương trình $cosx=t$ có đúng 1 nghiệm $x \in [0;2\pi]$.

Như vậy, $-1<2019-m \le 1 \Leftrightarrow 2018 \le m \le 2020$.

Câu 45. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm m để phương trình $2f\left(x+2019\right)-m=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $m\in\left(0;2\right)$. **B.** $m\in\left(-2;2\right)$. **C.** $m\in\left(-4;2\right)$. **D.** $m\in\left(-2;1\right)$.

Lời giải

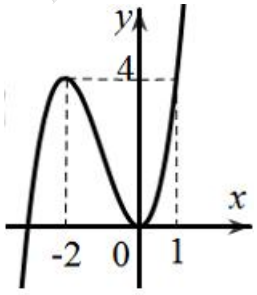
$2f\left(x+2019\right)-m=0 \Leftrightarrow f\left(x+2019\right)=\dfrac{m}{2}$ $(*)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(x+2019\right)$ như sau:

x	$-\infty$		-2021		-2019		-2017		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$
							$y=\dfrac{m}{2}$		

Phương trình $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt khi $-2<\dfrac{m}{2}<1 \Leftrightarrow -4<m<2$.

Câu 46. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(x^2+2x-2\right)=3m+1$ có nghiệm thuộc khoảng $\left[0;1\right]$..



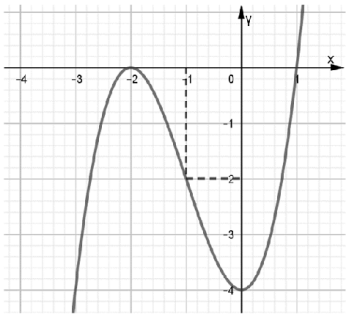
A. $\left[0;4\right]$. **B.** $\left[-1;0\right]$. **C.** $\left[0;1\right]$. **D.** $\left[-\dfrac{1}{3};1\right]$

Lời giải

Đặt $t=x^2+2x-2$. Với $x\in\left[0;1\right]\Rightarrow t\in\left[-2;1\right]$

Phương trình $f\left(x^2+2x-2\right)=3m+1$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;1\right]$ khi và chỉ khi phương trình $f\left(t\right)=3m+1$ có nghiệm thuộc $\left[-2;1\right] \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3}\le m\le 1$.

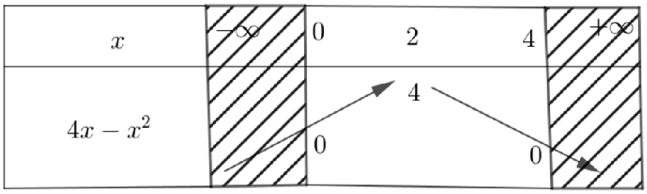
Câu 47. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{4x-x^2}-1\right)=m$ có nghiệm là



A. $[-2;0]$. **B.** $[-4;-2]$. **C.** $[-4;0]$. **D.** $[-1;1]$.

Lời giải

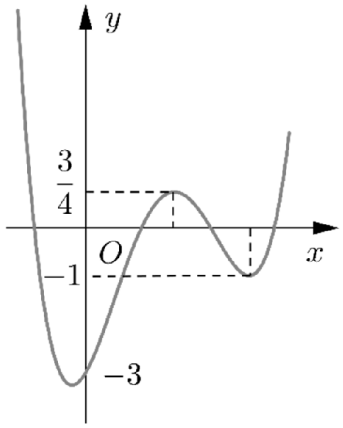
Phương trình $f\left(\sqrt{4x-x^2}-1\right)=m$ có điều kiện $0\le x\le 4$. Ta có bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên suy ra, với $0\le x\le 4$ thì $-1\le\sqrt{4x-x^2}-1\le 1$. Đặt $t=\sqrt{4x-x^2}-1$, $-1\le t\le 1$.(Có thể biến đổi $t=\sqrt{4-(x-2)^2}-1\Rightarrow -1\le t\le 1$).

Phương trình đã cho trở thành $f(t)=m$ (1). Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $t\in[-1;1]\Leftrightarrow -4\le m\le 0$.

Câu 48. **(Sở Hà Nội 2019)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(|x+m|\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt là



A. 2. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Đặt $t=|x+m|\ge 0$

Với $t=0\Rightarrow x=m$

Với mỗi giá trị $t>0$ sẽ ứng với 2 giá trị x

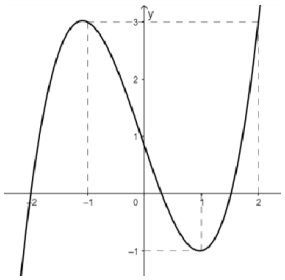
Ta có phương trình : $f(t)=m\ \ (t\ge 0)\ \ (*)$

Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt dương

Từ đồ thị của hàm số $y=f(t)$ trên miền $t\ge 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{3}{4} \\ m=-1 \end{array}\right.$

Vậy có 1 giá trị nguyên thỏa mãn

Câu 49. **(Chuyen Phan Bội Châu 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sqrt{4-x^2})=m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $[-\sqrt{2};\sqrt{3})$ là:

A. $[-1;3]$. **B.** $[-1;f(\sqrt{2})]$. **C.** $(-1;f(\sqrt{2})]$. **D.** $(-1;3]$.

Lời giải

Đặt $t=g(x)=\sqrt{4-x^2}$ với $x\in[-\sqrt{2};\sqrt{3})$.

Suy ra: $g'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow x=0\in[-\sqrt{2};3)$.

Ta có:

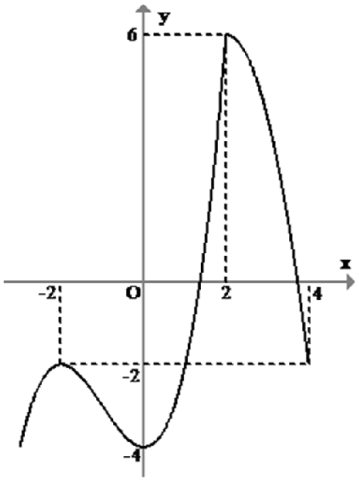
$g(0)=2$, $g(-\sqrt{2})=\sqrt{2}$, $g(\sqrt{3})=1$.

Mà hàm số $g(x)$ liên tục trên $[-\sqrt{2};\sqrt{3})$

Suy ra, $t\in(1;2]$.

Từ đồ thị, phương trình $f(t)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(1;2]$ khi $m\in(-1;3]$.

Câu 50. **(Chuyên Dại Học Vinh 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\dfrac{1}{3}f\left(\dfrac{x}{2}+1\right)+x=m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2;2]$?

A. 11 **B.** 9 **C.** 8 **D.** 10

Lời giải

Chọn C

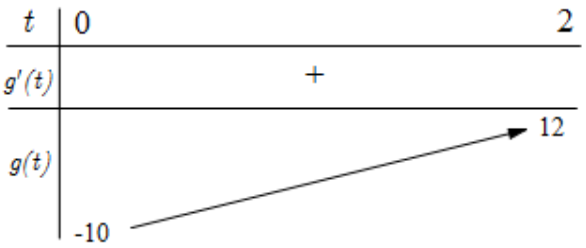
Đặt $t=\frac{x}{2}+1$, khi $-2\le x\le 2$ thì $0\le t\le 2$.

Phương trình đã cho trở thành $\frac{1}{3}f(t)+2t-2=m \Leftrightarrow f(t)+6t-6=3m$.

Xét hàm số $g(t)=f(t)+6t-6$ trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $g'(t)=f'(t)+6$. Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ nên $f'(t)>0,\forall t\in(0;2) \Rightarrow g'(t)>0,\forall t\in(0;2)$ và $g(0)=-10;\ g(2)=12$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(t)$ trên đoạn $[0;2]$



Phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $[-2;2]$ khi và chỉ khi phương trình $g(t)=3m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;2]$ hay $-10\le 3m\le 12 \Leftrightarrow -\frac{10}{3}\le m\le 4$.

Mặt khác m nguyên nên $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

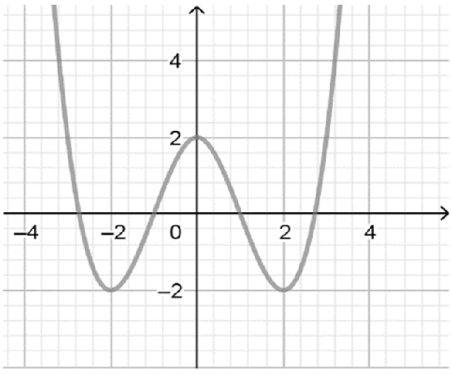
Vậy có 8 giá trị m thoả mãn bài toán.

Câu 51. **(THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019)** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $x^2(|x|-3)+2-m^2(|m|-3)=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. 3 **B.** 12 **C.** $T=7$ **D.** 5

Lời giải

Chọn A



Ta có $x^2(|x|-3)+2-m^2(|m|-3)=0 \Leftrightarrow |x|^3-3|x|^2+2=|m|^3-3|m|^2$ (*)

Xét hàm số: $y=f(x)=|x|^3-3|x|^2+2$ có đồ thị như hình vẽ:

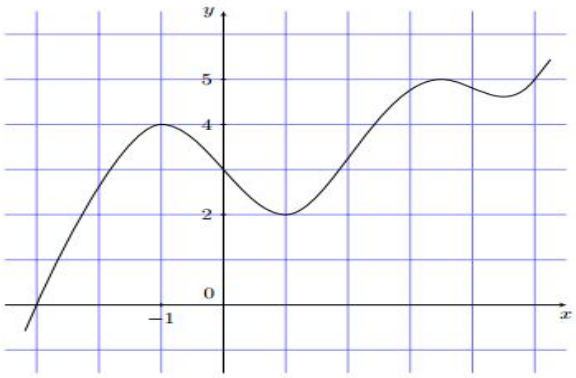
Từ đồ thị của hàm số ta có: Phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow -2<|m|^3-3|m|^2<2$

Mà $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow |m|^3-3|m|^2\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow m^2(|m|-3)\in\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow m^2\left(|m|-3\right)\in\{-1;0;1\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}|m|=3\\ m=0\\ m=1\quad (l)\\ m=-1\quad (l)\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm 3\\ m=0\end{array}\right.$$

Câu 52. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(x^2-2x\right)=m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$.



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $f\left(x^2-2x\right)=m\ \ (1)$

Đặt $t=x^2-2x$, với $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$.

Ta có $t'=2x-2$; $t'=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên của hàm số $t=x^2-2x$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$

x	$-\frac{3}{2}$		1		$\frac{7}{2}$
t'		$-$	0	$+$	
t	$\frac{21}{4}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{21}{4}$

.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $t\in\left[-1;\frac{21}{4}\right]$.

Xét $t=-1$ khi đó phương trình (1) thành $f\left(-1\right)=m\Rightarrow 4=m$.

Với $m=4$ phương trình $f\left(x^2-2x\right)=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x=-1\\ x^2-2x=a\end{array}\right.\ (*)$ với $2<a<3$.

Dễ thấy $(*)$ có tối đa 3 nghiệm (không thỏa mãn yêu cầu).

Xét $t_0\in\left(-1;\frac{21}{4}\right]$.

Nguyễn Bảo Vương

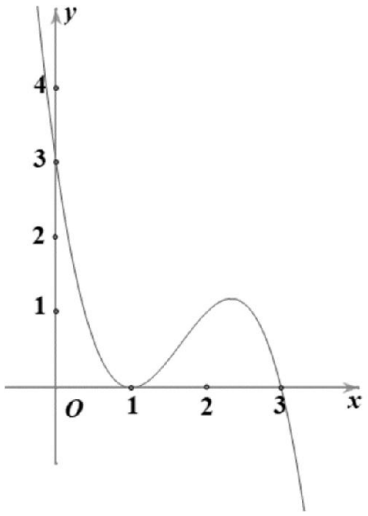
Nhận xét với mỗi $t_0 \in \left(-1;\frac{21}{4}\right]$ thì có 2 giá trị $x \in \left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$ thỏa mãn $t_0 = x^2 - 2x$.

Do đó phương trình $f\left(x^2-2x\right)=m$ có 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$ khi phương trình $f\left(t\right)=m$ có 2 nghiệm phân biệt $t \in \left(-1;\frac{21}{4}\right]$. Hay đường thẳng $y=m$ phải cắt đồ thị hàm số $y=f\left(t\right)$ tại 2 điểm với $t \in \left(-1;\frac{21}{4}\right]$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta có $m=3; m=5$ thỏa mãn yêu cầu.

KL: Có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài.

Câu 53. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0)=0$ và $f'\left(x\right)$ được cho như hình vẽ bên. Phương trình $\left|f(|x|)\right|=m$ (với m là tham số) có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?



A. 8 **B.** 6 **C.** 2 **D.** 4

Lời giải

Chọn B

BBT của hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$		0		3		∞
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$f(3)$	↘	$-\infty$

BBT của hàm số $y=f(|x|)$

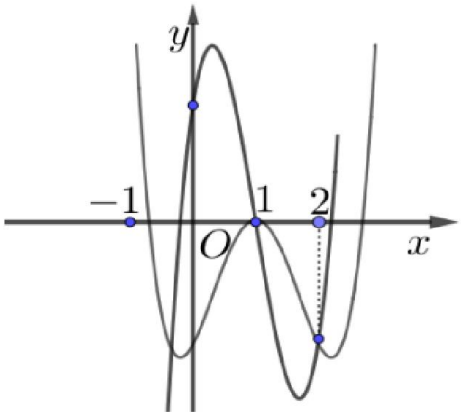
x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	$f(3)$	↘	0	↗	$f(3)$	↘	$-\infty$

BBT của hàm số $y=\left|f(|x|)\right|$

x			3	
	$+\infty$	f(3)		f(3)
y	↘	0 ↗	↘	0 ↗ ↘ 0 ↗

Suy ra phương trình $\left|f(|x|)\right|=m$ có nhiều nhất là 6 nghiệm.

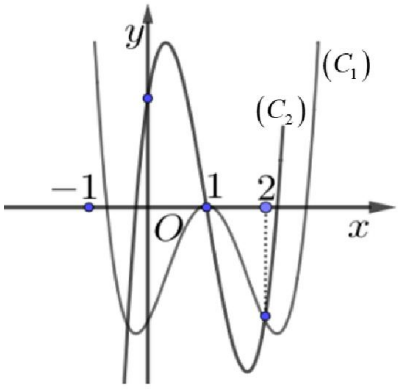
Câu 54. **(Thanh Tường Nghệ An 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức với hệ số thực. Hình vẽ bên dưới là một phần đồ thị của hai hàm số: $y=f(x)$ và $y=f'(x)$.



Tập các giá trị của tham số m để phương trình $f(x)=me^x$ có hai nghiệm phân biệt trên $[0;2]$ là nửa khoảng $[a;b)$. Tổng $a+b$ gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. -0.81. **B.** -0.54. **C.** -0.27. **D.** 0.27.

Lời giải



Nhận xét: Đồ thị hàm $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm x_0 thì x_0 là điểm cực trị của hàm $y=f(x)$. Dựa vào hai đồ thị đề bài cho, thì (C_1) là đồ thị hàm $y=f(x)$ và (C_2) là đồ thị hàm $y=f'(x)$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=me^x$ ta có:

$$f(x)=me^x \Leftrightarrow m=\frac{f(x)}{e^x}.$$

Đặt $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$ ta có:

$g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=f(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=x_0\in(-1;0) \end{array}\right. .$$

Dựa vào đồ thị của hai hàm số: $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ ta được:

x	0		1		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\frac{f(2)}{e^2}$

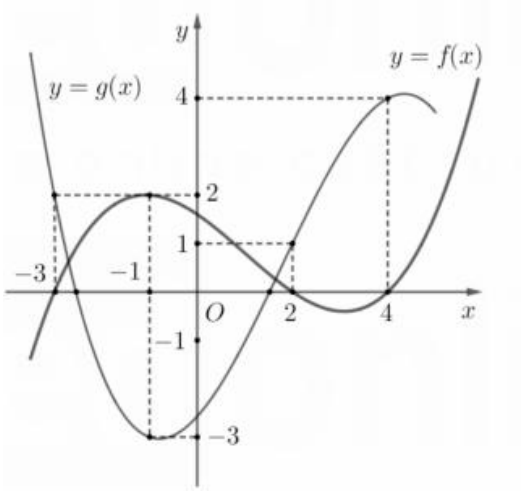
Yêu cầu bài toán ta suy ra: $\frac{f(2)}{e^2}\le m<0$ (dựa vào đồ thị ta nhận thấy $f(0)=f(2)\approx -2$)

$\Leftrightarrow -0,27\le m<0$.

Suy ra: $a=-0,27, b=0$.

Vậy $a+b=-0,27$.

Câu 55. **(VTED 2019)** Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là các hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên (trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y=f(x)$). Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(1-g(2x-1))=m$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[-1;\frac{5}{2}\right]$.



A. 8 **B.** 3 **C.** 6 **D.** 4

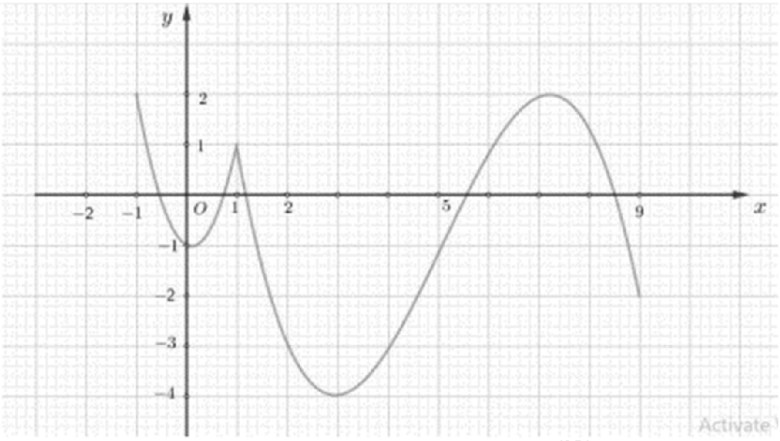
Lời giải

Chọn B

Với $x\in\left[-1;\frac{5}{2}\right]\Rightarrow 2x-1\in[-3;4]\Rightarrow g(2x-1)\in[-3;4]\Rightarrow t=1-g(2x-1)\in[-3;4]$

Vậy ta cần tìm m để phương trình $f(t)=m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-3;4]\Leftrightarrow \min\limits_{[-3;4]} f(t)\le m\le \max\limits_{[-3;4]} f(t)\Leftrightarrow \min\limits_{[-3;4]} f(t)\le m\le 2$ trong đó $\min\limits_{[-3;4]} f(t)\in(-1;0)$. Vậy các số nguyên cần tìm là $a\in\{0,1,2\}$

Câu 56. **(THPT Yên Khánh A - Ninh Bình - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;9]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $16.3^{f(x)}-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].4^{f(x)}\ge\left(m^2-3m\right).6^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi giá trị thuộc $[-1;9]$?

A. 32. **B.** 31. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Dễ thấy $-4\le f(x)\le 2,\ \forall x\in[-1;9]$ (1) nên $-\left[f(x)+4\right].\left[f(x)-2\right]\ge 0,\ \forall x\in[-1;9]$.

Do đó $-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right]\ge 0,\ \forall x\in[-1;9]$ (2).

Ta có $16.3^{f(x)}-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].4^{f(x)}\ge\left(m^2-3m\right).6^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;9]$

$\Leftrightarrow 16.\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].\left(\frac{2}{3}\right)^{f(x)}\ge m^2-3m$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;9]$

$\Leftrightarrow \alpha=\min\limits_{x\in[-1;9]}\left\{16.\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].\left(\frac{2}{3}\right)^{f(x)}\right\}\ge m^2-3m$ (3).

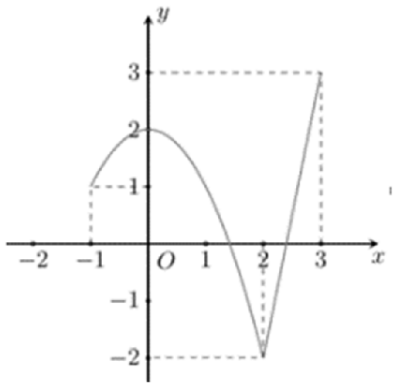
Từ (1) và (2) ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}\ge\left(\frac{1}{2}\right)^2$ và $-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].\left(\frac{2}{3}\right)^{f(x)}\ge 0,\ \forall x\in[-1;9]$.

Suy ra $16.\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].\left(\frac{2}{3}\right)^{f(x)}\ge 4,\ \forall x\in[-1;9]$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $f(x)=2\Leftrightarrow x=-1\vee x=a\ (7<a<8)$.

Do đó $\alpha=4$ và (3) $\Leftrightarrow 4\ge m^2-3m\Leftrightarrow -1\le m\le 4$. Vì m nguyên nên $m\in\{-1;0;1;2;3;4\}$.

Câu 57. **(THPT Yên Khánh A - Ninh Bình - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Bất phương trình $f(x)+\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}\ge m$ có nghiệm thuộc $[-1;3]$ khi và chỉ khi

A. $m\le 7$. **B.** $m\ge 7$. **C.** $m\le 2\sqrt{2}-2$. **D.** $m\ge 2\sqrt{2}-2$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình $f(x)+\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}\ge m$ có nghiệm thuộc $[-1;3]$ khi và chỉ khi

$m\le \underset{[1;3]}{\text{Max}}\left(f(x)+\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}\right)$.

Xét hàm số $g(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}$ trên đoạn $[-1;3]$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{7-x}}=\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{7-x}.\sqrt{x+1}}$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{7-x}-\sqrt{x+1}=0\Leftrightarrow x=3$.

$g(-1)=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $g(3)=2+2=4$.

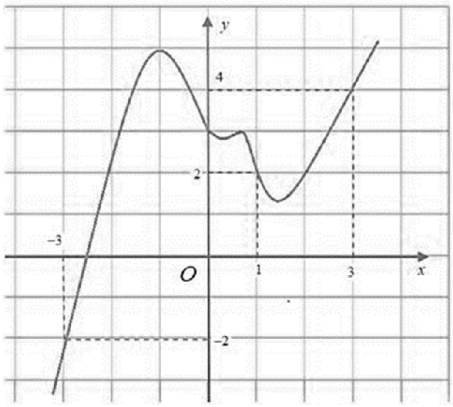
Suy ra $\underset{[-1;3]}{\text{Max}}\,g(x)=4$ tại $x=3$. (1)

Mặt khác, dựa vào đồ thị của $f(x)$ ta có $\underset{[-1;3]}{\text{Max}}\,f(x)=3$ tại $x=3$.(2)

Từ (1) và (2) suy ra $\underset{[1;3]}{\text{Max}}\left(f(x)+\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}\right)=7$ tại $x=3$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm thuộc $[-1;3]$ khi và chỉ khi $m\le 7$.

Câu 58. **(THPT Yên Khánh A - Ninh Bình - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-3;3]$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Biết $f(1)=6$ và $g(x)=f(x)-\dfrac{(x+1)^2}{2}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**

A. Phương trình $g(x)=0$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

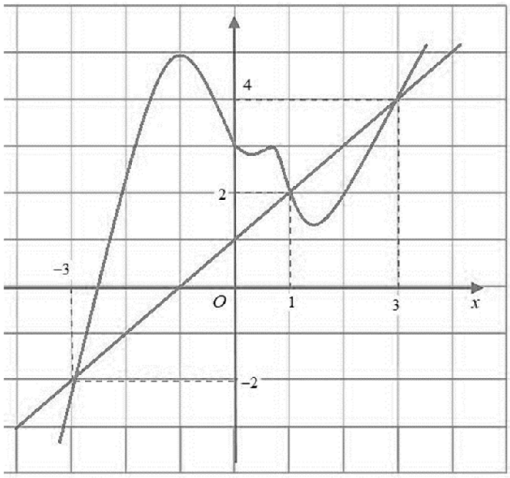
B. Phương trình $g(x)=0$ không có nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

C. Phương trình $g(x)=0$ có đúng một nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

D. Phương trình $g(x)=0$ có đúng ba nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $g(1)=f(1)-\dfrac{(1+1)^2}{2}=f(1)-2=4$ và $g'(x)=f'(x)-(x+1)$. Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và $y=x+1$ ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Xét hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f'(x);\ y=x+1;\ x=-3;x=1$ có diện tích $S_1>4\Leftrightarrow\int\limits_{-3}^{1}\left|f'(x)-(x+1)\right|dx>4\Leftrightarrow\int\limits_{-3}^{1}\left|g'(x)\right|dx>4\Leftrightarrow g(1)-g(-3)>4\Rightarrow g(-3)<g(1)-4=0$.

Xét hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f'(x);\ y=x+1;\ x=1;x=3$ có diện tích $S_2<4$

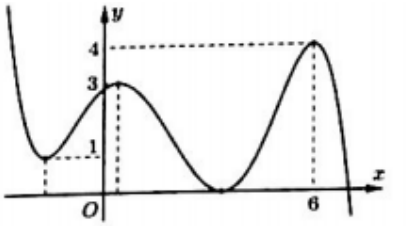
$\Leftrightarrow\int\limits_{1}^{3}\left|f'(x)-(x+1)\right|dx<4\Leftrightarrow\int\limits_{1}^{3}\left|g'(x)\right|dx<4\Leftrightarrow-g(3)+g(1)<4\Rightarrow g(3)>g(1)-4=0$.

Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm $y=g(x)$ trên $[-3;3]$

x	-3		1		3
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$g(-3)<0$	↗	4	↘	$g(3)>0$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $g(x)=0$ có đúng một nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

Câu 59. **(Chuyên Sơn La - Lần 2 - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Các giá trị của tham số m để phương trình $\dfrac{4m^3+m}{\sqrt{2f^2(x)+5}}=f^2(x)+3$ có ba nghiệm phân biệt là

A. $m=\dfrac{\sqrt{37}}{2}$. **B.** $m=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $m=\pm\dfrac{\sqrt{37}}{2}$. **D.** $m=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\frac{4m^3+m}{\sqrt{2f^2(x)+5}}=f^2(x)+3\Leftrightarrow 4m^3+m=\left(f^2(x)+3\right)\sqrt{2f^2(x)+5}$$

$$\Leftrightarrow (2m)^3+2m=\left(2f^2(x)+5\right)\sqrt{2f^2(x)+5}+\sqrt{2f^2(x)+5}$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(2m)=f\left(\sqrt{2f^2(x)+5}\right)\Leftrightarrow 2m=\sqrt{2f^2(x)+5}$$

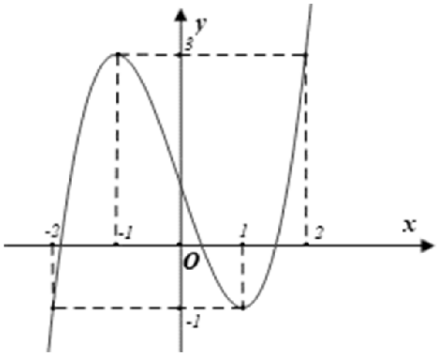
$$\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ f^2(x)=\dfrac{4m^2-5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ f(x)=\pm\sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}}\end{cases}$$

Với $f(x)=-\sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}}$ từ đồ thị ta thấy chỉ có 1 nghiệm.

Vậy để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì phương trình

$f(x)=\sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}}$ phải có hai nghiệm $\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}}=4\Leftrightarrow m=\dfrac{\sqrt{37}}{2},(m>0)$.

Câu 60. **(THPT Ngô Quyền - Ba Vì - 2019)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ sau đây. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để phương trình $f(f(x))=m$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?



A. 5. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x)=f(f(x))$.

$g'(x)=f'(f(x)).f'(x)$.

Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(f(x)).f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f'(f(x))=0\end{array}\right.$

+ $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$ (hoành độ các điểm cực trị).

+ $f'(f(x))=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=1\\f(x)=-1\end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị, ta có:

+ Khi $f(x)=1\Leftrightarrow x=0$; $x=a\in(-2;-1)$; $x=b\in(1;2)$.

+ Khi $f(x)=-1\Leftrightarrow x=1$; $x=-2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		0		1		b		2	$+\infty$
g'		0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
g			$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$		

Phương trình $f(f(x))=m$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$

$\Leftrightarrow -1<m<3$.

Mà m là số nguyên nên $m\in\{0;1;2\}$.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa đề bài.

Câu 61. **(THPT Nguyễn Đức Cảnh - Thái Bình - 2019)** Cho hàm số $g(x)=2x^3+x^2-8x$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\sqrt{g(g(x)+3)-m}=2g(x)+7$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt

A. 7. **B.** 8. **C.** 24. **D.** 25.

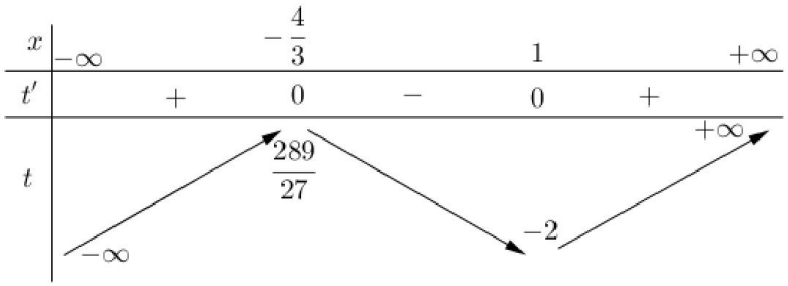
Lời giải

Chọn D

Đặt $t=g(x)+3\Rightarrow t=2x^3+x^2-8x+3\Rightarrow t'=6x^2+2x-8$.

$t' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{4}{3} \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên suy ra mỗi giá trị $t \in \left(-2; \dfrac{289}{27}\right)$ sẽ có tương ứng 3 giá trị x.

$$\sqrt{g\left(g\left(x\right)+3\right)-m} = 2g\left(x\right)+7 \Leftrightarrow \sqrt{g\left(t\right)-m} = 2\left(t+3\right)+7 \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge -\dfrac{1}{2} \\ g\left(t\right)-m = \left(2t+1\right)^2 \end{cases}$$

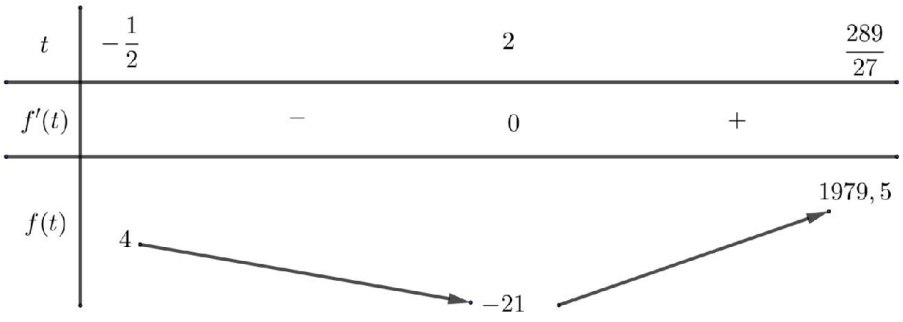
$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \ge -\dfrac{1}{2} \\ m = 2t^3+t^2-8t-4t^2-4t-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge -\dfrac{1}{2} \\ m = 2t^3-3t^2-12t-1 \left(1\right) \end{cases}.$$

Phương trình đã cho có 6 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình $\left(1\right)$ có 3 nghiệm phân biệt $t \in \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{289}{27}\right)$.

Xét hàm số $f\left(t\right) = 2t^3-3t^2-12t-1$ với $t \in \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{289}{27}\right)$.

$f'\left(t\right) = 6t^2-6t-12 \Rightarrow f'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên, phương trình đã cho có 6 nghiệm thực phân biệt $m \in \left(-21; 4\right]$.

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-20;-19;-18;...;4\}\Rightarrow$có 25 số nguyên thỏa mãn.

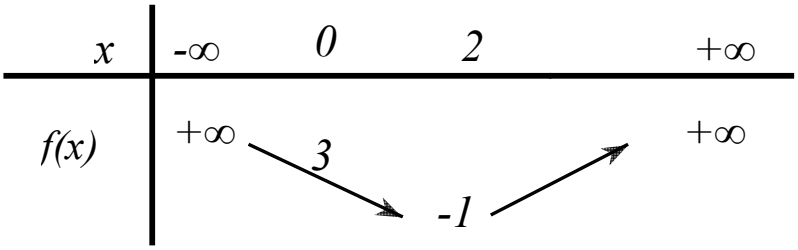
Câu 62. **(THPT Hà Nam - 2019)** Cho hàm số $f(x)=x^2-4x+3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|)-(m-6)f(|x|)-m+5=0$ có 6 nghiệm thực phân biệt?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

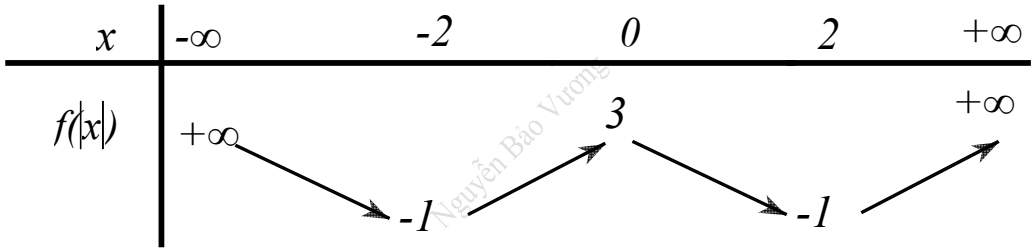
Lời giải

Chọn D

Hàm số $f(x)=x^2-4x+3$ có bảng biến thiên



Hàm số $y=f(|x|)$ có bảng biến thiên



Đặt $t=f(|x|)\geq -1(*)$

Nhận xét:

+ với $t_0<-1\xrightarrow{(*)}x\in\varnothing$ + với $t_0=-1;t_0>3\xrightarrow{(*)}$ 2 nghiệm

+ với $t_0=3\xrightarrow{(*)}$ 3 nghiệm + với $t_0\in(-1;3)\xrightarrow{(*)}$ 4 nghiệm

Phương trình trở thành $t^2-(m-6)t-m+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=m-5\end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán suy ra $-1<m-5<3\Leftrightarrow 4<m<8\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\{5;6;7\}$

Câu 63. **(Sở GD Bạc Liêu - 2019)** Cho hàm số $f(x)=2x^3+x^2-8x+7$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\sqrt{f(f(x)-3)+m}=2f(x)-5$ có 6 nghiệm thực phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

A. 25. **B.** −66. **C.** 105. **D.** 91.

Lời giải

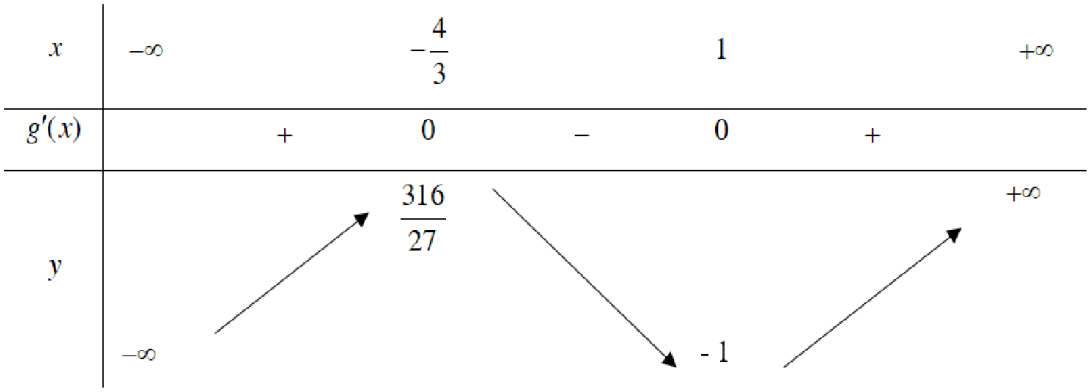
Chọn D

Đặt $t=f(x)-3$.

* $t=f(x)-3\Leftrightarrow t=2x^3+x^2-8x+4$ (1)

Đặt $g(x)=2x^3+x^2-8x+4$; $g'(x)=6x^2+2x-8$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=-1 \\ x=-\dfrac{4}{3} \Rightarrow y=\dfrac{316}{27} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên



Số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=g(x)$ và $y=t$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

+ $t<-1$ hoặc $t>\dfrac{316}{27}$ thì phương trình (1) có 1 nghiệm.

+ $t=-1$ hoặc $t=\dfrac{316}{27}$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm.

+ $-1<t<\dfrac{316}{27}$ thì phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.

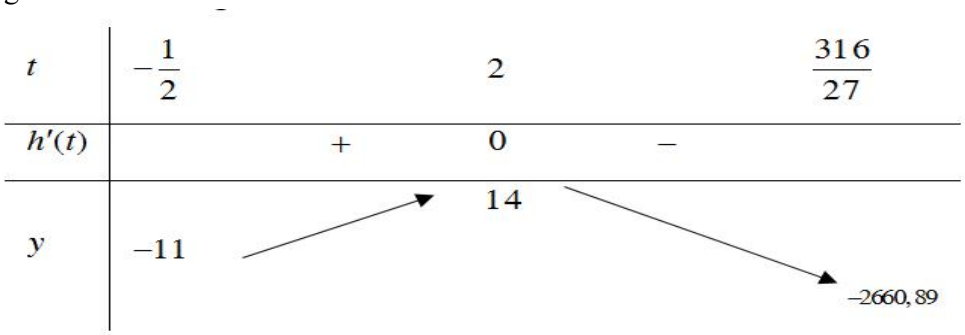
* Ta có $\sqrt{f(f(x)-3)+m}=2f(x)-5 \Leftrightarrow \sqrt{f(t)+m}=2t+1 \quad (2)$

Điều kiện để phương trình (2) có nghiệm $t \geq -\dfrac{1}{2}$

$(2) \Leftrightarrow f(t)+m=4t^2+4t+1 \Leftrightarrow m=4t^2+4t+1-f(t) \Leftrightarrow m=-2t^3+3t^2+12t-6$

Đặt $h(t)=-2t^3+3t^2+12t-6$; $h'(t)=-6t^2+6t+12$; $h(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên



Số nghiệm của phương trình (2) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=h(t)$ và $y=m$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

+ $m>14$ thì phương trình (2) vô nghiệm.

+ $m=14$ hoặc $m<-11$ thì phương trình (2) có 1 nghiệm.

+ $-11 \leq m<14$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

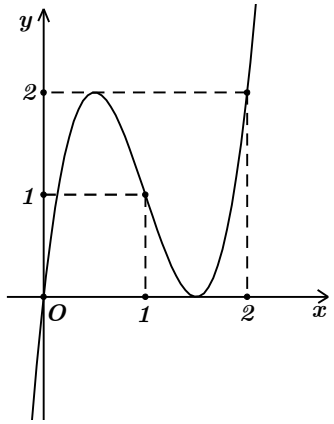
Phương trình $\sqrt{f(f(x)-3)+m}=2f(x)-5$ có 6 nghiệm thực phân biệt khi phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt và phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương $\sqrt{f(f(x)-3)+m}=2f(x)-5$ có 6 nghiệm thực phân biệt khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $-\frac{1}{2}\le t<\frac{316}{27}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta được kết quả là $-11\le m<14$. Suy ra $S=\{1;2;...;13\}$

Tổng các phần tử của $S=1+...+11+12+13=91$.

Câu 64. **(Quang Trung - Bình Phước - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Bất phương trình $f(2\sin x)-2\sin^2 x<m$ đúng với mọi $x\in(0;\pi)$ khi và chỉ khi

A. $m>f(0)-\frac{1}{2}$. **B.** $m>f(1)-\frac{1}{2}$. **C.** $m\ge f(1)-\frac{1}{2}$. **D.** $m\ge f(0)-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

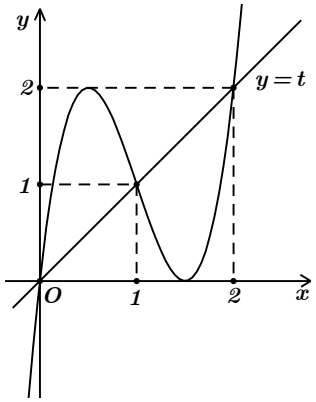
Đặt $2\sin x=t$. Vì $x\in(0;\pi)$ nên $t\in(0;2)$.

Bất phương trình trở thành $f(t)-\frac{t^2}{2}<m$. Đặt $g(t)=f(t)-\frac{t^2}{2}$ với $t\in(0;2)$.

Bất phương trình đúng với mọi $t\in(0;2)$ khi và chỉ khi $\max\limits_{(0;2)}g(t)<m$.

Ta có $g'(t)=f'(t)-t$.

$g'(t)=0\Leftrightarrow f'(t)=t$. Nghiệm phương trình này trên khoảng $(0;2)$ là hoành độ giao điểm của đồ thị $y=f'(t)$ và đường thẳng $y=t$ với $t\in(0;2)$.



Dựa vào đồ thị ta được nghiệm $t=1\in(0;2)$.

Cũng dựa vào đồ thị ta thấy khi $t\in(0;1)$ thì $f'(t)>t\Rightarrow g'(t)>0$, khi $t\in(1;2)$ thì $f'(t)<t\Rightarrow g'(t)<0$.

Bảng biến thiên:

t	0		1		2
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		↗	$f(1)-\frac{1}{2}$	↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\max\limits_{(0;2)} g(t) = g(1) = f(1) - \frac{1}{2}$.

Vậy bất phương trình đã cho đúng với mọi $x \in (0;\pi)$ khi và chỉ khi $m > f(1) - \frac{1}{2}$.

Câu 65. **(Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2019)** Cho hàm số $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right) = x^3 - m$ có nghiệm thuộc $[1;2]$?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sqrt[3]{f(x)+m} \Rightarrow t^3 = f(x) + m$.

Ta có hệ $\begin{cases} t^3 = f(x) + m \\ x^3 = f(t) + m \end{cases} \Rightarrow f(x) + x^3 = f(t) + t^3$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) + x^3, x \in [1;2] \Rightarrow g'(x) = f'(x) + 3x^2 > 0 \ \forall x \in [1;2]$.

$\Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ đồng biến trên đoạn $[1;2]$.

Vì $g(x) = g(t) \Leftrightarrow x = t \Rightarrow f(x) = x^3 - m$

$\Leftrightarrow x^5 + 3x^3 - 4m = x^3 - m \Rightarrow 3m = x^5 + 2x^3 \ (1)$

Xét hàm số $h(x) = x^5 + 2x^3, x \in [1;2] \Rightarrow h'(x) = 5x^4 + 6x^2 > 0 \ \forall x \in [1;2]$.

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow h(1) \le 3m \le h(2) \Leftrightarrow 3 \le 3m \le 48 \Leftrightarrow 1 \le m \le 16$.

Do $m \in Z \Rightarrow m \in \{1;2;3;4;...;16\}$.

Vậy có 16 giá trị nguyên của tham số m.

---------- HẾT ----------