

Câu 1 (2,0 điểm) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$ (C_m)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (C) ứng với $m = 1$
2. Tìm m để hàm số (C_m) có cực trị đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số đến O bằng $\sqrt{2}$ lần khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đến O (O là gốc tọa độ).

Câu 2 (1,0 điểm) Giải phương trình: $2\cos 3x \cdot \cos x + \sqrt{3}(1 + \sin 2x) = 2\sqrt{3}\cos^2(2x + \frac{\pi}{4})$

Câu 3 (1,0 điểm) Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan(x - \frac{\pi}{4})}{\cos 2x} dx$.

Câu 4 (1,0 điểm)

1. Tìm số phức z thỏa mãn:
$$\begin{cases} 2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i| \\ |z^2 - (\bar{z})^2| = 4 \end{cases}$$

2. Một hộp đựng 3 viên bi xanh, 4 viên bi đỏ, 5 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên từ hộp đó ra 3 viên bi. Tính xác suất để 3 viên bi vừa lấy ra có đúng 2 viên bi cùng màu.

Câu 5 (1,0 điểm) Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm $I(2; 0; -2)$, mặt phẳng (P): $2x - y - 2z + 1 = 0$. Lập phương trình mặt cầu (S) tâm I cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích là 16π

Câu 6 (1,0 điểm) Cho hình chóp S.ABC có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC), $SA = a\sqrt{6}$, $AB = AC = a\sqrt{3}$, góc BAC bằng 120° ; lấy điểm M trên cạnh BC sao cho $MC = 2MB$. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC.

Câu 7 (1,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 2my + m^2 - 24 = 0$ có tâm I và đường thẳng Δ : $mx + 4y = 0$. Tìm m biết đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn diện tích tam giác IAB bằng 12.

Câu 8 (1,0 điểm) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x\sqrt{x^2 + y} + y = \sqrt{x^4 + x^3} + x \\ x + \sqrt{y} + \sqrt{x-1} + \sqrt{y(x-1)} = \frac{9}{2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

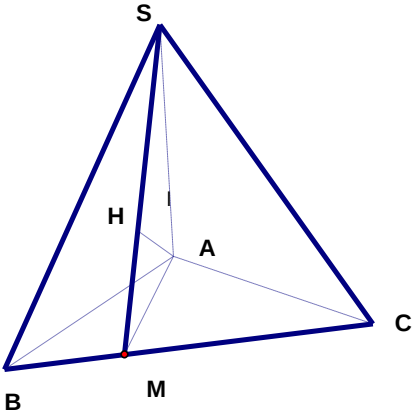
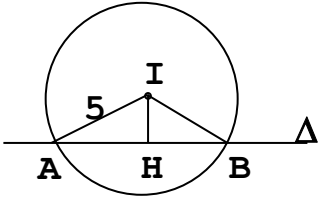
Câu 9 (1,0 điểm) Cho x, y, z là ba số thực dương có tổng bằng 3.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz$.

-----Hết-----

ĐÁP ÁN

Câu	NỘI DUNG
1.2	Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$ Đề hàm số có cực trị thì PT $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt}$ $\Leftrightarrow \Delta = 1 > 0, \forall m$ Cực đại của đồ thị hàm số là $A(m-1; 2-2m)$ và cực tiểu của đồ thị hàm số là $B(m+1; -2-2m)$ Theo giả thiết ta có $OA = \sqrt{2}OB \Leftrightarrow m^2 + 6m + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 + 2\sqrt{2} \\ m = -3 - 2\sqrt{2} \end{cases}$ Vậy có 2 giá trị của m là $m = -3 - 2\sqrt{2}$ và $m = -3 + 2\sqrt{2}$.
2	$PT \Leftrightarrow \cos 4x + \cos 2x + \sqrt{3}(1 + \sin 2x) = \sqrt{3}\left(1 + \cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ $\Leftrightarrow \cos 4x + \sqrt{3} \sin 4x + \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = 0$ $\Leftrightarrow \sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$ $\Leftrightarrow 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$ Vậy PT có hai nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}$.
3	$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^2 x + 1}{(t \tan x + 1)^2} dx$ Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (\tan^2 x + 1) dx$ $x = 0 \Rightarrow t = 0$ $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ Suy ra $I = -\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{(t+1)^2} = \frac{1}{t+1} \Big _0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.
4.1	+ Gọi số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2 x + (y-1)i = (2y+2)i \\ 4xyi = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{4} \\ y = \frac{1}{x} \vee y = -\frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{4} \\ y = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \end{cases}$ Vậy số phức cần tìm là: $z = \sqrt[3]{4} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}i$
4.2	
5	

6	*) Diện tích tam giác ABC là: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} \text{ (đvdt)}.$ Vậy thể tích hình chóp S.ABC là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{6} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{4} \text{ (đvtt)}.$ *) Áp dụng định lí hàm cosin vào tam giác ABC ta có : $BC^2 = 2AB^2 - 2AB^2 \cos 120^\circ \Rightarrow BC = 3a \Rightarrow MB = a.$ Áp dụng định lí hàm cosin vào tam giác ABM ta có: $AM^2 = AB^2 + MB^2 - 2AB \cdot MB \cos 30^\circ = a^2 \Rightarrow AM = a \Rightarrow AM = BM = a.$ Do đó tam giác AMB cân tại M nên $\angle BAM = \angle ABM = 30^\circ \Rightarrow \angle MAC = 90^\circ \Rightarrow AM \perp AC \quad (1)$ Mặt khác: $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AC \quad (2)$ Từ (1) và (2) ta có: $AC \perp (SAM) \quad (3)$ Kẻ $AH \perp SM \quad (H \in SM) \quad (4)$ Từ (3) và (4) ta được: $d(AC, SM) = AH$ Trong tam giác ASM vuông tại A ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{7}{6a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{42}}{7}.$ Vậy $d(AC, SM) = \frac{a\sqrt{42}}{7}.$ 
7	Đường tròn (C) có tâm I(1; m), bán kính R = 5. Gọi H là trung điểm của dây cung AB. Ta có IH là đường cao của tam giác IAB. $IH = d(I, \Delta) = \frac{ m + 4m }{\sqrt{m^2 + 16}} = \frac{ 5m }{\sqrt{m^2 + 16}}$ $AH = \sqrt{IA^2 - IH^2} = \sqrt{25 - \frac{(5m)^2}{m^2 + 16}} = \frac{20}{\sqrt{m^2 + 16}}$ Diện tích tam giác IAB là $S_{\triangle IAB} = 12 \Leftrightarrow 2S_{\triangle IAH} = 12$ $\Leftrightarrow d(I, \Delta) \cdot AH = 12 \Leftrightarrow 25 m = 3(m^2 + 16) \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 3 \\ m = \pm \frac{16}{3} \end{cases}$ 
8	Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{x^2 + y} + y = \sqrt{x^4 + x^3} + x & (1) \\ x + \sqrt{y} + \sqrt{x-1} + \sqrt{y(x-1)} = \frac{9}{2} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$ ĐK: $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$ (1) $\Leftrightarrow x(\sqrt{x^2 + y} - \sqrt{x^2 + x}) + (x - y) = 0$ $\Leftrightarrow x \frac{y - x}{\sqrt{x^2 + y} + \sqrt{x^2 + x}} + x - y = 0 \Leftrightarrow (x - y)(\sqrt{x^2 + y} + \sqrt{x^2 + x} - x) = 0$

	Do đó $x=y$ thay vào pt (2) : $x + \sqrt{x} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x(x-1)} = \frac{9}{2}$ Đặt $t = \sqrt{x} + \sqrt{x-1} (t \geq 0) \Rightarrow t^2 = 2x-1 + 2\sqrt{x(x-1)}$ Pt trở thành $t^2+1+2t=9$ hay $t^2+2t-8=0$ chỉ lấy $t=2 \Rightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{x} = 2$ $2\sqrt{x(x-1)} = 5-2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{2} \\ 4x^2 - 4x = 25 - 20x + 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{25}{16}$ Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(\frac{25}{16}; \frac{25}{16})$																		
9	Ta có: $P = 3[(x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx)] - 2xyz$ $= 3[9 - 2(xy+yz+zx)] - 2xyz$ $= 27 - 6x(y+z) - 2yz(x+3)$ $\geq 27 - 6x(3-x) - \frac{(y+z)^2}{2}(x+3)$ $= \frac{1}{2}(-x^3 + 15x^2 - 27x + 27)$ Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 15x^2 - 27x + 27$, với $0 < x < 3$ $f'(x) = -3x^2 + 30x - 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=9 \end{cases}$ <table border="1"><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>1</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>y</td><td></td><td>27</td><td>14</td><td>54</td><td></td></tr></table> Từ bảng biến thiên suy ra $\text{Min}P = 7 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.	x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$	y'		-	0	+		y		27	14	54	
x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$														
y'		-	0	+															
y		27	14	54															