

Câu 1(5,0 điểm). Xét dãy số $(x_n)_{n \geq 1}$ cho bởi $x_1 = \frac{3}{4}$, $(n+2)^2 x_{n+1} = n^2 x_n - (n+1)$ với mọi $n \geq 1$.

a) Tìm giới hạn của dãy $(x_n)_{n \geq 1}$.

b) Đặt $y_n = \frac{16}{4x_n + 1}$ với mọi số nguyên dương n , tìm tất cả đa thức hệ số nguyên $P(x)$ thỏa mãn $\lim(P(n) - y_n) = 0$.

Câu 2(5,0 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

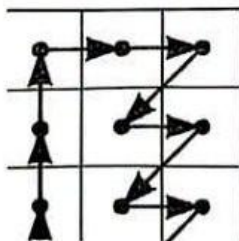
$$xf(x+f(y)) = (x-y)f(f(-x)) \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 3(5,0 điểm). Cho tam giác ABC có góc $\hat{B} > 90^\circ$, các đường phân giác trong BE , CF ($E \in AC$, $F \in AB$) cắt nhau tại I . Kí hiệu (XYZ) là đường ngoại tiếp tam giác XYZ . Gọi N là điểm trên đường tròn (AEF) sao cho góc $\widehat{IAN} = 90^\circ$. Đường thẳng NI cắt lại đường tròn (AEF) tại L . Gọi K là tâm của đường tròn (AIL) .

a) Chứng minh rằng KA tiếp xúc với đường tròn (AEF) .

b) Chứng minh rằng 3 điểm K, B, C thẳng hàng.

Câu 4(5,0 điểm). Cho số nguyên $n \geq 2$ và một bảng vuông kích thước $3n \times 3n$ (gồm $9n^2$ ô vuông đơn vị). Một quân cờ T được đặt ở một ô nào đó trên bảng và di chuyển như sau: mỗi bước đi quân cờ T hoặc di chuyển lên trên một ô, hoặc sang phải một ô hoặc đi chéo xuống-sang trái một ô (như hình minh họa bên dưới, mỗi bước đi thực chất chỉ di chuyển sang một ô chung đỉnh). Xuất phát từ ô đó, quân cờ T thực hiện một số bước đi và không bao giờ đi qua một ô hai lần, rồi quay trở lại ô xuất phát. Xác định số bước đi lớn nhất có thể mà quân cờ T đã thực hiện.



.....Hết.....

Họ và tên học sinh:.....Số báo danh:.....

Chữ ký giám thị 1:..... Chữ ký giám thị 2:.....

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề có 01 trang, gồm 03 câu)

KIỂM TRA KHẢO SÁT CHỌN HỌC SINH
DỰ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN CỦA TỈNH
THI CHỌN HSG CẤP QUỐC GIA NĂM HỌC 2026 - 2027

Môn: **TOÁN**

Ngày kiểm tra: 22/8/2026

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 5 (6,0 điểm). Trong một bảng ô vuông có kích thước 200×200 , tại một số ô có đặt các quân cờ màu đỏ hoặc màu xanh. Hai quân cờ được gọi là “nhìn” nhau nếu chúng nằm trên cùng một hàng hoặc cùng một cột. Hãy tìm số quân cờ lớn nhất có thể đặt trong bảng, để mỗi quân cờ “nhìn” đúng 5 quân cờ có màu khác với màu của nó.

Câu 6 (7,0 điểm). Tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

- (i) Số lượng các ước số dương của n là một số chẵn;
- (ii) Tập tất cả các ước số dương của n có thể chia thành từng cặp phân biệt (mỗi ước số chỉ xuất hiện trong một cặp), sao cho tổng của hai số trong mỗi cặp là một lũy thừa của 3.

Câu 7 (7,0 điểm). Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Dựng các tam giác đều ABK, ACL về phía ngoài tam giác ABC (hai điểm K, C nằm về hai phía khác nhau đối với đường thẳng AB và hai điểm L, B nằm về hai phía khác nhau đối với đường thẳng AC). Gọi T, S, R lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng BL và CK , AB và CK , AC và BL . Chứng minh rằng tâm đẳng phương của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác KSB, BTC và LRC nằm trên đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC .

..... **Hết**

Họ và tên học sinh: Số báo danh:

Chữ ký giám thị 1: Chữ ký giám thị 2:

CHỌN ĐT LAM SƠN (THANH HOÁ) 2026 – NGÀY 1

Bài toán 0.1. (Lim Olympic - Lam Sơn TST - P1)

Xét dãy số $(x_n)_{n \geq 1}$ cho bởi $x_1 = \frac{3}{4}$, $(n+2)^2 x_{n+1} = n^2 x_n - (n+1)$ với mọi $n \geq 1$.

- ① Tìm giới hạn của dãy $(x_n)_{n \geq 1}$.
- ② Đặt $y_n = \frac{16}{4x_n + 1}$ với mọi số nguyên dương n , tìm tất cả đa thức hệ số nguyên $P(x)$ thỏa mãn $\lim(P(n) - y_n) = 0$.

 Lời giải.

- ① Đặt $u_n = n^2(n+1)^2 x_n$ với mọi $n \geq 1$ thì với mọi $n \geq 1$ ta có $u_{n+1} = u_n - (n+1)^3$.

Mặt khác $u_1 = 3$ nên $u_n = 4 - \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ hay $x_n = \frac{4}{n^2(n+1)^2} - \frac{1}{4}$ với mọi $n \geq 1$.

Từ đó suy ra được $\lim x_n = -\frac{1}{4}$.

- ② Ta có $y_n = \frac{16}{4x_n + 1} = n^2(n+1)^2 = n^4 + 2n^3 + n^2$ với mọi $n \geq 1$.

Khi đó đa thức $P_0(x) = x^4 + 2x^3 + x^2$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Ngược lại giả sử đa thức $P(x)$ hệ số nguyên thỏa mãn yêu cầu và xét $Q(x) = P(x) - P_0(x)$ có hệ số nguyên và $Q(n) \rightarrow 0$. Nếu $Q \neq 0$ và có bậc dương thì $|Q(n)| \rightarrow \infty$, còn nếu Q là hằng số thì hằng số đấy phải bằng 0.

Vì vậy $P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2$ là đa thức duy nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 0.2. (Lim Olympic - Lam Sơn TST - P2)

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$xf(x + f(y)) = (x - y)f(f(-x))$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

 Lời giải.

Kí hiệu mệnh đề đã cho bởi $\mathcal{P}(x, y)$ và đặt $a = f(0)$.

Từ $\mathcal{P}(0, y)$, ta được $f(a) = 0$. Từ $\mathcal{P}(x, 0)$, với $x \neq 0$, ta có $f(f(-x)) = f(x + a)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Vì thế phương trình ban đầu cho ta

$$f(x + f(y)) = \left(1 - \frac{y}{x}\right) f(x + a) \quad (x \neq 0)$$

Nếu $f \equiv 0$ thì hiển nhiên hàm này thỏa mãn.

Xét trường hợp $f \not\equiv 0$. Chọn $t \in \mathbb{R}$ sao cho $f(t) \neq 0$. Vì $f(a) = 0$ nên $t \neq a$.

Đặt $x_0 = t - a$, khi đó $x_0 \neq 0$ và $f(x_0 + a) = f(t) \neq 0$.

Giả sử $f(u) = f(v)$. Thay $y = u$ và $y = v$, ta có

$$\left(1 - \frac{u}{x_0}\right) f(t) = f(x_0 + f(u)) = f(x_0 + f(v)) = \left(1 - \frac{v}{x_0}\right) f(t).$$

Vì $x_0 f(t) \neq 0$, suy ra $u = v$. Vậy f là đơn ánh.

Cho $y = x \neq 0$ trong phương trình ban đầu, ta được $f(x + f(x)) = 0 = f(a)$, kết hợp f đơn ánh nên $x + f(x) = a$ với mọi $x \neq 0$. Đồng thức này cũng đúng khi $x = 0$ do $f(0) = 0$. Vậy

$$f(x) = a - x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

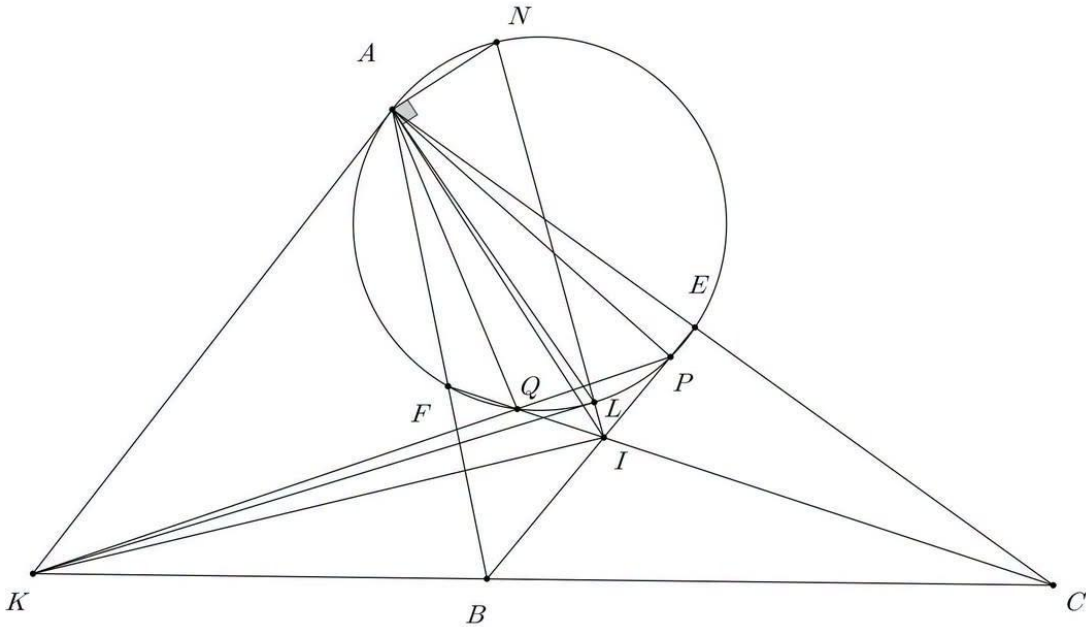
Thử lại thấy hàm số này thoả mãn với mọi $a \in \mathbb{R}$.

Vậy tất cả các nghiệm hàm là $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = a - x, \forall x \in \mathbb{R}$ với $a \in \mathbb{R}$.

Bài toán 0.3. (Lim Olympic - Lam Sơn TST - P3)

Cho tam giác ABC có góc $\widehat{B} > 90^\circ$, các đường phân giác trong BE, CF ($E \in AC, F \in AB$) cắt nhau tại I . Kí hiệu (XYZ) là đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ . Gọi N là điểm trên đường tròn (AEF) sao cho góc $\widehat{IAN} = 90^\circ$. Đường thẳng NI cắt lại đường tròn (AEF) tại L . Gọi K là tâm của đường tròn (AIL) .

- ① Chứng minh rằng KA tiếp xúc với đường tròn (AEF) .
- ② Chứng minh rằng 3 điểm K, B, C thẳng hàng.



Lời giải.

- ① Do K là tâm $(AIL) \Rightarrow \angle KAL = 90 - \frac{\angle AKL}{2} = 90 - \angle AIL = \angle ANL$

$\Rightarrow KA$ là tiếp tuyến của (AEF) .

- ② Gọi BE, CF cắt (AEF) lần lượt tại P, Q . Gọi PQ cắt tiếp tuyến tại A của (AEF) tại K' .

Áp dụng định lí Pascal cho bộ các điểm $\begin{pmatrix} A & Q & E \\ P & A & F \end{pmatrix}$ ta được K', B, C thẳng hàng.

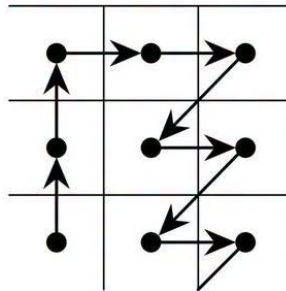
$$\text{Ta có } \frac{IF}{IE} = \frac{IF}{AI} \cdot \frac{AI}{IE} = \frac{\sin IAF}{\sin AFI} \cdot \frac{\sin AEI}{\sin IAE} = \frac{\sin AEI}{\sin AFI} = \frac{\sin AEP}{\sin AFQ} = \frac{AP}{AQ} \Rightarrow \frac{IF}{IE} = \frac{AP}{AQ}.$$

$$\text{Mà } \frac{IF}{IE} = \frac{IP}{IQ} \Rightarrow \frac{IP}{IQ} = \frac{AP}{AQ} = \frac{K'P^2}{K'Q^2} \Rightarrow IK' \text{ là tiếp tuyến của } (IPQ).$$

$$\Rightarrow K'I^2 = KP \cdot KQ = K'A^2 \Rightarrow K' \text{ nằm trên trung trực } AI \Rightarrow K' \text{ trùng } K \text{ hay } K, B, C \text{ thẳng hàng.}$$

Bài toán 0.4. (Lim Olympic - Lam Sơn TST - P4)

Cho số nguyên $n \geq 2$ và một bảng vuông kích thước $3n \times 3n$ (gồm $9n^2$ ô vuông đơn vị). Một quân cờ T được đặt ở một ô nào đó trên bảng và di chuyển như sau: mỗi bước đi quân cờ T hoặc di chuyển lên trên một ô, hoặc sang phải một ô hoặc đi chéo xuống-sang trái một ô (như hình minh họa bên dưới, mỗi bước đi thực chất chỉ di chuyển sang một ô chung đỉnh). Xuất phát từ ô đó, quân cờ T thực hiện một số bước đi và không bao giờ đi qua một ô hai lần, rồi quay trở lại ô xuất phát. Xác định số bước đi lớn nhất có thể mà quân cờ T đã thực hiện.



Lời giải.

Đặt $m = 3n$. Ta đánh số các ô bởi (i, j) , trong đó $1 \leq i, j \leq m$, chỉ số i tăng từ trái sang phải và chỉ số j tăng từ dưới lên trên và L là số bước đi.

- ① Trong một hành trình khép kín, gọi R, U, D lần lượt là số bước sang phải, đi lên và đi chéo xuống-sang trái. Để ý $R - D = U - D = 0$ nên $R = U = D$ và số bước đi luôn là một bội của 3.

Ta chứng minh quân cờ không thể đi qua cả m^2 ô. Giả sử ngược lại. Nối tâm các ô liên tiếp trong hành trình, ta được một đa giác đơn nằm trong hình chữ nhật có bốn đỉnh là tâm của ô góc bảng.

Tại ô góc dưới bên phải $(m, 1)$, bước đi vào duy nhất có thể là từ $(m - 1, 1)$ sang phải và bước đi ra duy nhất có thể là đi lên $(m, 2)$. Vì thế, theo chiều đi của hành trình, đa giác quay ngược chiều kim đồng hồ tại đỉnh này. Trái lại, tại ô góc trên bên trái $(1, m)$, hành trình buộc phải đi vào từ $(1, m - 1)$ rồi đi ra sang phải tới $(2, m)$, nên đa giác quay theo chiều kim đồng hồ.

Điều này là không thể, bởi tại các đỉnh thuộc bao lồi của một đa giác đơn, chiều quay phải thỏa mãn việc tất cả đều ngược chiều kim đồng hồ nếu đa giác được định hướng dương, và tất cả đều theo chiều kim đồng hồ nếu đa giác được định hướng âm.

Vậy hành trình không thể đi qua toàn bộ m^2 ô.

Vì $m^2 = 9n^2$ chia hết cho 3 và số bước là một bội của 3, ta có số bước không vượt quá $m^2 - 3$.

2 Trước hết, trong ba cột đầu tiên ta xét hành trình

$$\begin{aligned} (1, 1) &\rightarrow (2, 1) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (3, 2) \rightarrow \cdots \rightarrow (3, m) \\ &\rightarrow (2, m-1) \rightarrow (1, m-2) \rightarrow (2, m-2) \rightarrow (1, m-3) \rightarrow (2, m-3) \rightarrow \cdots \\ &\rightarrow (1, 2) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (1, 1). \end{aligned}$$

Ở phần có dấu ba chấm trên dòng thứ hai, ta luân phiên một bước sang phải và một bước chéo xuống-sang trái. Chu trình này đi qua mọi ô trong ba cột đầu, trừ đúng ba ô $(1, m-1)$, $(1, m)$, $(2, m)$ và nó chứa cạnh đi lên $(3, m-2) \rightarrow (3, m-1)$.

Bây giờ giả sử ta đã có một chu trình đi qua các cột từ 1 đến c , trong đó $c = 3t$, vẫn chỉ bỏ ba ô trống, đồng thời chu trình chứa cạnh $(c, m-2) \rightarrow (c, m-1)$, ta thay cạnh này bởi đường đi sau:

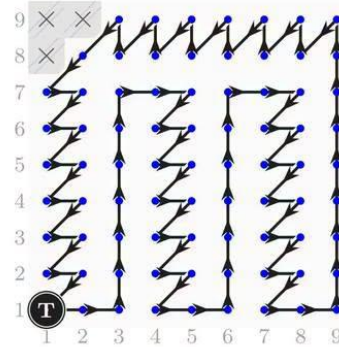
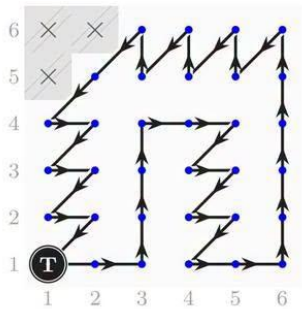
$$\begin{aligned} (c, m-2) &\rightarrow (c+1, m-2) \rightarrow (c+2, m-2) \\ &\rightarrow (c+1, m-3) \rightarrow (c+2, m-3) \rightarrow \cdots \rightarrow (c+1, 1) \rightarrow (c+2, 1) \\ &\rightarrow (c+3, 1) \rightarrow (c+3, 2) \rightarrow \cdots \rightarrow (c+3, m) \\ &\rightarrow (c+2, m-1) \rightarrow (c+2, m) \rightarrow (c+1, m-1) \rightarrow (c+1, m) \rightarrow (c, m-1). \end{aligned}$$

Đường đi vừa viết đi qua mỗi ô của ba cột mới $c+1, c+2, c+3$ đúng một lần và chứa cạnh

$$(c+3, m-2) \rightarrow (c+3, m-1),$$

nên ta có thể tiếp tục lặp lại phép ghép. Bắt đầu từ $c = 3$ và thực hiện $n-1$ lần, ta thu được một chu trình trên cả $m = 3n$ cột, chỉ bỏ đúng ba ô trống, hành trình này có $m^2 - 3 = 9n^2 - 3$ bước.

Hình vẽ dưới đây minh họa quá trình trên với $n = 2$ và $n = 3$:



Vậy số bước đi lớn nhất mà quân cờ T thực hiện là $9n^2 - 3$ bước.

CHỌN ĐT LAM SƠN (THANH HOÁ) 2026 – NGÀY 2

Bài toán 0.5. (Lim Olympic - Lam Sơn TST - P5)

Trong một bảng ô vuông có kích thước 200×200 , tại một số ô có đặt các quân cờ màu đỏ hoặc màu xanh. Hai quân cờ được gọi là **nhìn** nhau nếu chúng nằm trên cùng một hàng hoặc cùng một cột. Hãy tìm số quân cờ lớn nhất có thể đặt trong bảng, để mỗi quân cờ **nhìn** đúng 5 quân cờ có màu khác với màu của nó.

 Lời giải.

Gọi một hàng hoặc một cột là **tím** mộng mơ nếu nó chứa quân cờ của cả hai màu.

Giả sử có R hàng tím, C cột tím và có tất cả N quân cờ.

Trước hết, mỗi hàng tím chứa không quá 5 quân đỏ và không quá 5 quân xanh. Thật vậy, nếu một hàng tím chứa nhiều hơn 5 quân đỏ thì một quân xanh trên hàng đó đã nhìn thấy nhiều hơn 5 quân khác màu, trái với giả thiết. Tương tự đối với các cột tím.

Do đó, mỗi hàng tím hoặc cột tím chứa không quá 10 quân cờ.

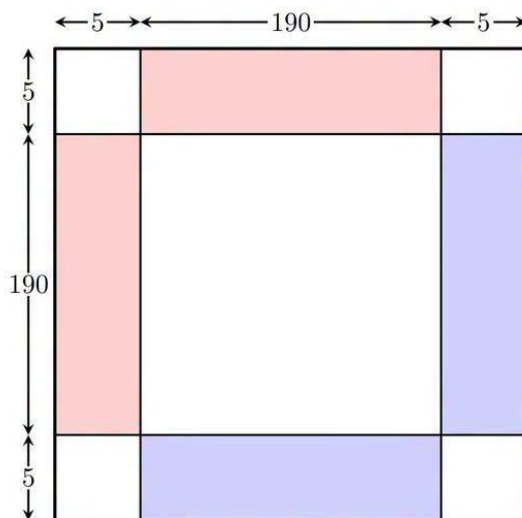
Mặt khác, mỗi quân cờ phải nằm trên ít nhất một hàng tím hoặc một cột tím, vì nó nhìn thấy 5 quân khác màu. Bởi vậy ta có được $N \leq 10R + 10C$.

Nếu $R + C \leq 379$ thì $N \leq 3790 < 3800$.

Xét trường hợp $R + C \geq 380$. Không mất tính tổng quát, giả sử $R \geq C$, khi đó $R \geq 190$.

Trong R hàng tím có nhiều nhất $10R$ quân. Mỗi quân nằm ngoài các hàng tím phải thuộc một trong C cột tím, nên số quân như vậy không vượt quá $(200 - R)C$. Do đó với $190 \leq R \leq 200$ ta có:

$$N \leq 10R + (200 - R)C \leq 10R + (200 - R)R = 210R - R^2 \leq 210 \cdot 190 - 190^2 = 3800$$



Dấu bằng đạt được trong cách xây dựng ở trên, ứng với $R = C = 190$.

Vậy số quân cờ lớn nhất có thể đặt là **3800**

Bài toán 0.6. (Lim Olympic - Lam Sơn TST - P6)

Tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

- ◆ Số lượng các ước số dương của n là một số chẵn;
- ◆ Tập tất cả các ước số dương của n có thể chia thành từng cặp phân biệt (mỗi ước số chỉ xuất hiện trong một cặp), sao cho tổng của hai số trong mỗi cặp là một lũy thừa của 3.

** Lời giải.**

Nếu hai ước x, y được ghép thành một cặp thì $x + y = 3^k$, khi đó $v_3(x) = v_3(y)$.

Mọi lũy thừa của 3 xuất hiện ở đây đều lẻ, nên mỗi cặp gồm đúng một ước lẻ và một ước chẵn.

Viết $n = 3^a m = 2^s 3^a u$ với a là số tự nhiên và m nguyên dương không chia hết cho 3, u lẻ và $\gcd(u, 3) = 1$.

Số ước lẻ của n là $(a + 1)\tau(u)$ còn số ước chẵn của n là $s(a + 1)\tau(u)$ nên $s = 1$.

Do đó $m = 2u$ với $\gcd(u, 6) = 1$.

Vì hai ước được ghép với nhau có cùng v_3 nên tập các ước của n không chia hết cho 3 được ghép cặp bên trong chính nó, và các ước này chính là của $2u$.

Các ước lẻ của $2u$ có dạng d với $d \mid u$, còn các ước chẵn có dạng $2e$ với $e \mid u$, do đó tồn tại một hoán vị f của tập các ước dương của u sao cho $d + 2f(d)$ là lũy thừa của 3 với mọi $d \mid u$.

Ta sẽ chứng minh u là số square-free.

Lấy một số nguyên tố $p \mid u$. Trong các ước của u , số ước chia hết cho p là $\frac{v_p(u)}{v_p(u) + 1} \tau(u)$.

Trong một cặp $(d, 2f(d))$, không thể đồng thời có $p \mid d$ và $p \mid f(d)$, vì khi đó $p \mid d + 2f(d) = 3^k$, trái với $p \neq 3$. Khi d đi qua tất cả các ước của u , cả d và $f(d)$ đều xuất hiện trong tập đầy đủ 1 lần. Do đó

$$2 \cdot \frac{v_p(u)}{v_p(u) + 1} \tau(u) \leq \tau(u),$$

suy ra $v_p(u) \leq 1$. Từ đó u là số square-free.

Dấu bằng xảy ra nên $(d, 2f(d))$ có đúng một trong hai số chia hết cho p nên buộc $f(d) = \frac{u}{d}$ với mọi $d \mid u$.

Cho $d = 1$ và $d = u$ suy ra $1 + 2u$ và $u + 2$ đều phải là lũy thừa của 3.

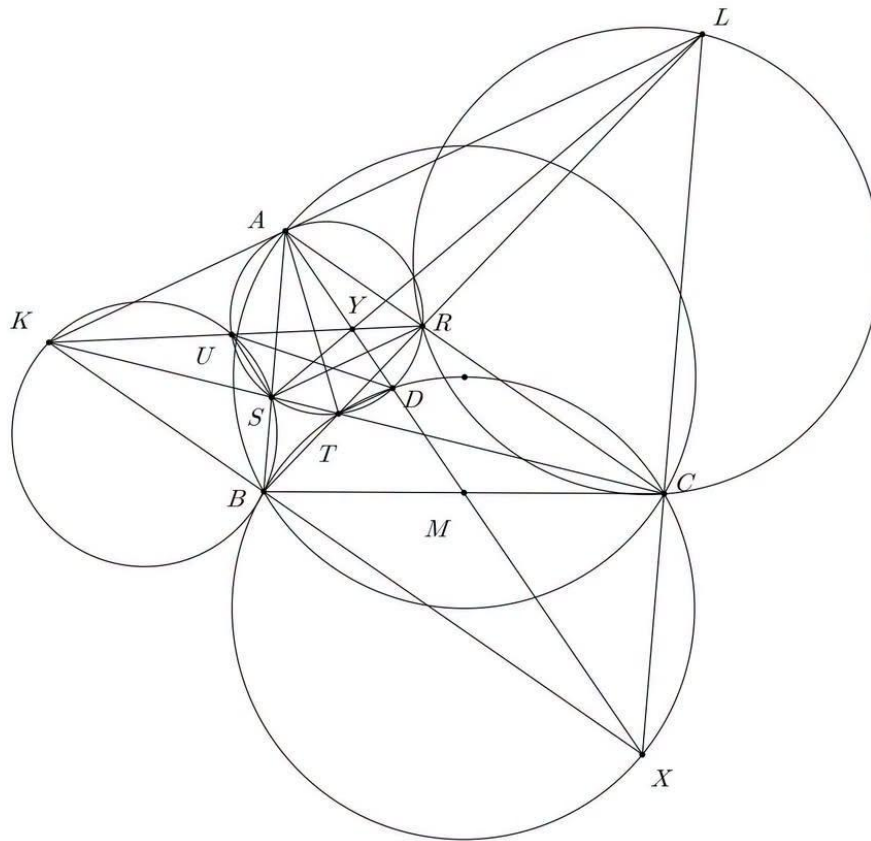
Đặt $1 + 2u = 3^r$, $u + 2 = 3^s$ với r, s nguyên dương thì $3^r = 2 \cdot 3^s - 3 = 3(2 \cdot 3^{s-1} - 1)$.

Nếu $s \geq 2$ thì $2 \cdot 3^{s-1} - 1$ không chia hết cho 3, do đó $s = 1$ nên $u = 1$, từ đó $m = 2$ hay $n = 3^a \cdot 2$ với mọi số tự nhiên a , thử lại bằng cách ghép cặp $(3^i, 2 \cdot 3^i)$ với $0 \leq i \leq a$ thấy thỏa mãn.

Vậy tất cả số nguyên dương n cần tìm là **$n = 3^a \cdot 2$** với a tự nhiên.

Bài toán 0.7. (Lim Olympic - Lam Sơn TST - P7)

Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Dựng các tam giác đều ABK, ACL về phía ngoài tam giác ABC (hai điểm K, C nằm về hai phía khác nhau đối với đường thẳng AB và hai điểm L, B nằm về hai phía khác nhau đối với đường thẳng AC). Gọi T, S, R lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng BL và CK , AB và CK , AC và BL . Chứng minh rằng tâm đẳng phương của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác KSB, BTC và LRC nằm trên đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC .



Lời giải.

Cách 1. Do $\angle ABK = \angle BAC = 60^\circ \Rightarrow BK \parallel AC$, tương tự $CL \parallel AB$. Gọi KB cắt CL tại X thì $ABXC$ là hình bình hành nên trung điểm M của BC là trung điểm AX .

Xét phép quay tâm A với góc 60° biến K thành B , C thành L nên nó biến CK cắt AB tại S thành BL cắt AC tại $R \Rightarrow \triangle ASR$ đều và $\angle KTL = 120^\circ$ (do phép quay) $\Rightarrow$ Tứ giác $ASTR$ nội tiếp và $\angle BXC = \angle BAC = 60^\circ$ nên tứ giác $BTCX$ nội tiếp.

Từ đó ta thấy $\triangle XKL$ và $\triangle ARS$ cùng là tam giác đều và có cạnh tương ứng song song nên XA, KR, LS đồng quy tại Y . Ta chứng minh Y là tâm đẳng phương của $(KSB), (BCT), (ACL)$.

Gọi YK cắt (BSK) tại U , AX cắt (BCT) tại D . Ta chứng minh U, D nằm trên (ASR) .

Ta có $\angle RUS = \angle KBS = 60^\circ = \angle SAR$ nên U nằm trên (ASR) .

Ta cũng có $\angle ADT = \angle TBX = 180^\circ - \angle KBR = \angle ARB$ (do $KB \parallel AR$) nên D nằm trên (ASR) .

Nên $\angle YUD = \angle DAC = \angle AXB$ (do $AC \parallel BX$) $\Rightarrow$ Tứ giác $UDXK$ nội tiếp $\Rightarrow YU.YK = YD.YX$.

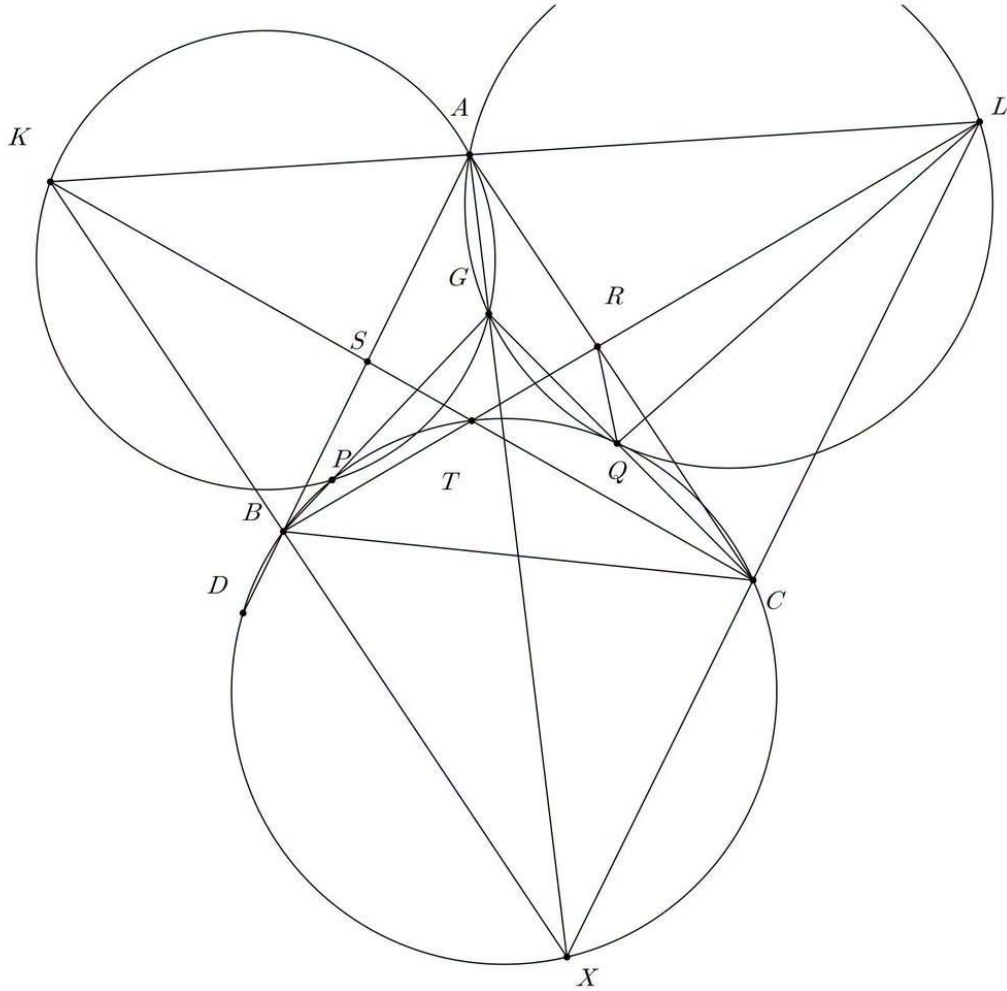
$\Rightarrow Y$ nằm trên trục đẳng phương của (BCT) và (BKS) .

Tương tự ta có Y nằm trên trục đẳng phương của (BCT) và (CLR) .

Vậy ta có Y là tâm đẳng phương của 3 đường tròn hay ta có điều cần chứng minh.

Cách 2. Ta xét thể hình như hình vẽ.

Đặt $\omega_1 = (KSB)$, $\omega_2 = (BTC)$, $\omega_3 = (LRC)$ và $AB = c$, $AC = b$.



- ① Ta có: $\angle KBA = \angle BAC = \angle LCA = 60^\circ$. Do đó: $KB \parallel AC$ và $LC \parallel AB$.

Gọi $X = KB \cap LC$. Khi đó $ABXC$ là hình bình hành, suy ra AX đi qua trung điểm của BC .

Vậy AX là đường trung tuyến của tam giác ABC .

Mặt khác, K, A, L thẳng hàng và $KL = KX = LX = b + c$.

Do đó $\triangle KXL$ đều. Ta có: $KL = LX$, $LC = XB = b$ và $\angle KLC = \angle LXB = 60^\circ$. Suy ra $\triangle KLC \cong \triangle LXB$, nên $\angle LKC = \angle XLB$. Từ đó: $\angle BTC = 120^\circ$. Lại có $\angle BXC = \angle BAC = 60^\circ$, suy ra B, T, C, X cùng thuộc một đường tròn. Vậy $X \in \omega_2$.

- ② Ta có: $\triangle KBS \sim \triangle CAS$ và $\triangle LCR \sim \triangle BAR$. Do đó: $AS = AR = \frac{bc}{b+c}$.

Lấy D trên tia AB sao cho $AD = AC = b$. Khi đó $\triangle ACD$ đều. Từ $ABXC$ là hình bình hành ta có: B, C, X, D cùng thuộc một đường tròn. Suy ra $D \in \omega_2$.

Trên các đường thẳng AB, AC ta lấy chiều dương lần lượt từ A đến B và từ A đến C . Khi đó:

$$\mathcal{P}_{A/(KSB)} = \overline{AS} \cdot \overline{AB} = \frac{bc^2}{b+c}, \quad \mathcal{P}_{A/(BTC)} = \overline{AD} \cdot \overline{AB} = bc, \quad \mathcal{P}_{A/(LRC)} = \overline{AR} \cdot \overline{AC} = \frac{b^2c}{b+c}.$$

Ta có: $\mathcal{P}_{X/(KSB)} = \overline{XB} \cdot \overline{XK} = (-b)(-(b+c)) = b(b+c)$.

Vì $X \in (BTC)$ nên $\mathcal{P}_{X/(BTC)} = 0$. $\mathcal{P}_{X/(LRC)} = \overline{XC} \cdot \overline{XL} = (-c)(-(b+c)) = c(b+c)$.

Bổ đề 0.1.

Đường thẳng UV cắt trục đẳng phương của hai đường tròn α, β tại G thì

$$\frac{\overline{UG}}{\overline{GV}} = -\frac{\mathcal{P}_{U/(\alpha)} - \mathcal{P}_{U/(\beta)}}{\mathcal{P}_{V/(\alpha)} - \mathcal{P}_{V/(\beta)}}.$$

Chứng minh. Thật vậy, hiệu $\mathcal{P}_{Y/(\alpha)} - \mathcal{P}_{Y/(\beta)}$ là một hàm bậc nhất theo điểm Y trên đường thẳng UV và bằng 0 tại G .

(Nội dung này các bạn đón chờ cuốn "**Biến đổi tỉ số trong Hình Học Phẳng**" tái bản nhé) $\square$

- 3 Gọi $G_1 = BP \cap AX$. Vì BP là trục đẳng phương của ω_1 và ω_2 , áp dụng bổ đề ta có:

$$\frac{\overline{AG_1}}{\overline{G_1X}} = -\frac{\mathcal{P}_{A/(KSB)} - \mathcal{P}_{A/(BTC)}}{\mathcal{P}_{X/(KSB)} - \mathcal{P}_{X/(BTC)}} = -\frac{\frac{bc^2}{b+c} - bc}{b(b+c)} = \frac{bc}{(b+c)^2}.$$

Gọi Q là giao điểm thứ hai của ω_2 và ω_3 khác C , đồng thời đặt $G_2 = CQ \cap AX$. Vì CQ là trục đẳng phương của ω_2 và ω_3 , tương tự:

$$\frac{\overline{AG_2}}{\overline{G_2X}} = -\frac{\mathcal{P}_{A/(BTC)} - \mathcal{P}_{A/(LRC)}}{\mathcal{P}_{X/(BTC)} - \mathcal{P}_{X/(LRC)}} = -\frac{bc - \frac{b^2c}{b+c}}{-c(b+c)} = \frac{bc}{(b+c)^2}.$$

Do đó: $\frac{\overline{AG_1}}{\overline{G_1X}} = \frac{\overline{AG_2}}{\overline{G_2X}}.$

Vì G_1, G_2 cùng thuộc đường thẳng AX nên $G_1 \equiv G_2$, gọi chung là điểm G . Suy ra BP, CQ, AX hay ta thu được tâm đẳng phương của $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ nằm trên đường trung tuyến AX .