

CHƯƠNG 6. CUNG LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

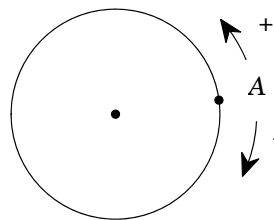
BÀI 1. CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

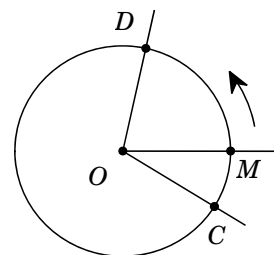
I – KHÁI NIỆM CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

1. Đường tròn định hướng và cung lượng giác

Đường tròn định hướng là một đường tròn trên đó ta chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương, chiều ngược lại là chiều âm. Ta quy ước chọn chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ làm chiều dương.



Trên đường tròn định hướng cho hai điểm A và B . Một điểm M di động trên đường tròn luôn theo một chiều (âm hoặc dương) từ A đến B tạo nên một **cung lượng giác** có điểm đầu A điểm cuối B .



Với hai điểm A, B đã cho trên đường tròn định hướng ta có vô số cung lượng giác điểm đầu A , điểm cuối B . Mỗi cung như vậy đều được kí hiệu là $\widehat{AB}$.

2. Góc lượng giác

Trên đường tròn định hướng cho một cung lượng giác $\widehat{CD}$. Một điểm M chuyển động trên đường tròn từ C tới D tạo nên cung lượng giác $\widehat{CD}$ nói trên. Khi đó tia OM quay xung quanh gốc O từ vị trí OC tới vị trí OD . Ta nói tia OM tạo ra một **góc lượng giác**, có tia đầu là OC , tia cuối là OD . Kí hiệu góc lượng giác đó là (OC, OD) .

3. Đường tròn lượng giác

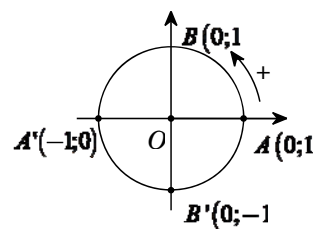
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ đường tròn định hướng tâm O bán kính $R = 1$.

Đường tròn này cắt hai trục tọa độ tại bốn điểm

$A(1;0)$, $A'(-1;0)$, $B(0;1)$, $B'(0;-1)$.

Ta lấy $A(1;0)$ làm điểm gốc của đường tròn đó.

Đường tròn xác định như trên được gọi là **đường tròn lượng giác** (gốc A).



II – SỐ ĐO CỦA CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

1. Độ và radian

a) Đơn vị radian

Trên đường tròn tùy ý, cung có độ dài bằng bán kính được gọi là cung có số đo 1 rad.

b) Quan hệ giữa độ và radian

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \quad \text{và} \quad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ.$$

c) Độ dài của một cung tròn

Trên đường tròn bán kính R , cung nửa đường tròn có số đo là $\pi \text{ rad}$ và có độ dài là πR . Vậy cung có số đo $\alpha \text{ rad}$ của đường tròn bán kính R có độ dài

$$\ell = R\alpha.$$

2. Số đo của một cung lượng giác

Số đo của một cung lượng giác $\widehat{AM}$ ($A \neq M$) là một số thực âm hay dương.

Kí hiệu số đo của cung $\widehat{AM}$ là $sđ \widehat{AM}$.

Ghi nhớ

Số đo của các cung lượng giác có cùng điểm đầu và điểm cuối sai khác nhau một bội của 2π .

Ta viết

$$sđ \widehat{AM} = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

trong đó α là số đo của một cung lượng giác tùy ý có điểm đầu là A , điểm cuối là M .

3. Số đo của một góc lượng giác

Số đo của góc lượng giác (OA, OC) là số đo của cung lượng giác $\widehat{AC}$ tương ứng.

Chú ý Vì mỗi cung lượng giác ứng với một góc lượng giác và ngược lại, đồng thời số đo của các cung và góc lượng giác tương ứng là trùng nhau, nên từ nay về sau khi ta nói về cung thì điều đó cũng đúng cho góc và ngược lại.

4. Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác

Chọn điểm gốc $A(1;0)$ làm điểm đầu của tất cả các cung lượng giác trên đường tròn lượng giác. Để biểu diễn cung lượng giác có số đo α trên đường tròn lượng giác ta cần chọn điểm cuối M của cung này. Điểm cuối M được xác định bởi hệ thức $sđ \widehat{AM} = \alpha$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng toán 1 : xác định các yếu tố liên quan đến cung và góc lượng giác.

1. Phương pháp

Ngoài việc sử dụng định nghĩa góc và cung lượng giác, công thức tính độ dài cung tròn khi biết số đo, mối liên hệ giữa đơn vị độ, radian và hệ thức salơ chúng ta cần lưu ý đến kết quả sau:

Nếu một góc(cung) lượng giác có số đo a^0 (hay $\alpha \text{ rad}$) thì mọi góc(cung) lượng giác cùng tia đầu(điểm đầu), tia cuối(điểm cuối) với nó có số đo dạng $a^0 + k360^0$ (hay $\alpha + k2\pi \text{ rad}$, $k \in \mathbb{Z}$), mỗi góc(cung) ứng với mỗi giá trị của k . Từ đó hai góc lượng giác có cùng tia đầu và tia cuối thì sai khác nhau một bội của 2π

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: a) Đổi số đo của các góc sau ra radian: $72^0, 600^0, -37^045'30''$.

b) Đổi số đo của các góc sau ra độ: $\frac{5\pi}{18}, \frac{3\pi}{5}, -4$.

Lời giải

a) Vì $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$ nên $72^\circ = 72 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{5}$, $600^\circ = 600 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{10\pi}{3}$,

$$-37^\circ 45' 30'' = -37^\circ - \left(\frac{45}{60}\right)^\circ - \left(\frac{30}{60 \cdot 60}\right)^\circ = \left(\frac{4531}{120}\right)^\circ = \frac{4531}{120} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,6587$$

b) Vì $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ nên $\frac{5\pi}{18} = \left(\frac{5\pi}{18} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 50^\circ$, $\frac{3\pi}{5} = \left(\frac{3\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 108^\circ$,

$$-4 = -\left(4 \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = -\left(\frac{720}{\pi}\right)^\circ \approx -2260^\circ 48'.$$

Ví dụ 2: Một đường tròn có bán kính $36m$. Tìm độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo là

a) $\frac{3\pi}{4}$

b) 51°

c) $\frac{1}{3}$

Lời giải

Theo công thức tính độ dài cung tròn ta có $l = R\alpha = \frac{\pi a}{180} \cdot R$ nên

a) Ta có $l = R\alpha = 36 \cdot \frac{3\pi}{4} = 27\pi \approx 84,8m$

b) Ta có $l = \frac{\pi a}{180} \cdot R = \frac{\pi 51}{180} \cdot 36 = \frac{51\pi}{5} \approx 32,04m$

c) Ta có $l = R\alpha = 36 \cdot \frac{1}{3} = 12m$

Ví dụ 3: Cho hình vuông $A_0A_1A_2A_3$ nội tiếp đường tròn tâm O (các đỉnh được sắp xếp theo chiều

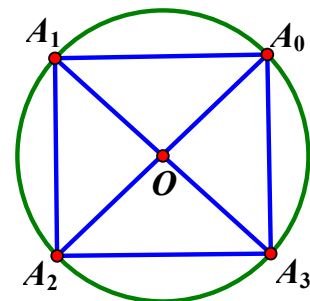
ngược chiều quay của kim đồng hồ). Tính số đo của các cung lượng giác $\overset{\text{b}}{A_0A_i}, \overset{\text{b}}{A_iA_j}$ ($i, j = 0, 1, 2, 3, i \neq j$).

Lời giải

Ta có $\overset{\text{b}}{A_0OA_0} = 0$ nên $\overset{\text{b}}{A_0A_0} = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\overset{\text{b}}{A_0OA_1} = \frac{\pi}{2} \text{ nên } \overset{\text{b}}{A_0A_1} = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\overset{\text{b}}{A_0OA_2} = \pi \text{ nên } \overset{\text{b}}{A_0A_2} = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$



$$\widehat{A_0OA_3} = \frac{\pi}{2} \text{ nên } \overset{\text{p}}{\text{sđ}} A_0A_3 = 2\pi - \frac{\pi}{2} + k2\pi = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in Z$$

$$\text{Nhu vậy } \overset{\text{p}}{\text{sđ}} A_0A_i = \frac{i\pi}{2} + k2\pi, i = 0,1,2,3, k \in Z$$

$$\text{Theo hệ thức salơ ta có } \overset{\text{p}}{\text{sđ}} A_iA_j = \overset{\text{p}}{\text{sđ}} A_0A_j - \overset{\text{p}}{\text{sđ}} A_0A_i + k2\pi = (j-i) \cdot \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z.$$

Ví dụ 4: Tìm số đo α của góc lượng giác (Ou, Ov) với $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, biết một góc lượng giác cùng tia đầu, tia cuối với góc đó có số đo là:

$$\text{a) } \frac{33\pi}{4} \qquad \text{b) } -\frac{291983\pi}{3} \qquad \text{c) } 30$$

Lời giải

$$\text{a) Mọi góc lượng giác } (Ou, Ov) \text{ có số đo là } \frac{33\pi}{4} + k2\pi, k \in Z$$

$$\text{Vì } 0 \leq \alpha \leq 2\pi \text{ nên } 0 \leq \frac{33\pi}{4} + k2\pi \leq 2\pi, k \in Z \Leftrightarrow 0 \leq \frac{33}{4} + k2 \leq 2, k \in Z$$

$$\Leftrightarrow -\frac{33}{8} \leq k \leq -\frac{25}{8}, k \in Z \Leftrightarrow k = -4$$

$$\text{Suy ra } \alpha = \frac{33\pi}{4} + (-4) \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{b) Mọi góc lượng giác } (Ou, Ov) \text{ có số đo là } -\frac{291983\pi}{3} + k2\pi, k \in Z$$

$$\text{Vì } 0 \leq \alpha \leq 2\pi \text{ nên } 0 \leq -\frac{291983\pi}{3} + k2\pi \leq 2\pi, k \in Z \Leftrightarrow 0 \leq -\frac{291983}{3} + k2 \leq 2, k \in Z$$

$$\Leftrightarrow \frac{291983}{6} \leq k \leq \frac{291989}{6}, k \in Z \Leftrightarrow k =$$

$$\text{Suy ra } \alpha = -\frac{291983\pi}{3} + 48664 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{c) Mọi góc lượng giác } (Ou, Ov) \text{ có số đo là } 30 + k2\pi, k \in Z$$

$$\text{Vì } 0 \leq \alpha \leq 2\pi \text{ nên } 0 \leq 30 + k2\pi \leq 2\pi, k \in Z \Leftrightarrow 0 \leq \frac{15}{\pi} + k \leq 1, k \in Z$$

$$\Leftrightarrow -\frac{15}{\pi} \leq k \leq \frac{\pi-15}{\pi}, k \in Z \Leftrightarrow k = -4$$

Suy ra $\alpha = 30 + (-4).2\pi = 30 - 8\pi \approx 4,867$.

Ví dụ 5: Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo $-\frac{\pi}{7}$. Trong các số $-\frac{29\pi}{7}$; $-\frac{22}{7}$; $\frac{6\pi}{7}$; $\frac{41\pi}{7}$, những số nào là số đo của một góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho?

Lời giải

Hai góc có cùng tia đầu, tia cuối thì sai khác nhau một bội của 2π do đó

Vì $-\frac{29\pi}{7} - \left(-\frac{\pi}{7}\right) = (-2).2\pi$, $-\frac{22}{7} - \left(-\frac{\pi}{7}\right) = -3\pi$, $\frac{6\pi}{7} - \left(-\frac{\pi}{7}\right) = \pi$ và $\frac{41\pi}{7} - \left(-\frac{\pi}{7}\right) = 3.2\pi$ nên các số $-\frac{29\pi}{7}$; $\frac{41\pi}{7}$ là số đo của một góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho.

Ví dụ 6: Cho $sđ(Ou, Ov) = \alpha$ và $sđ(Ou', Ov') = \beta$. Chứng minh rằng hai góc hình học uOv , $u'Ov'$ bằng nhau khi và chỉ khi hoặc $\beta - \alpha = k2\pi$ hoặc $\beta + \alpha = k2\pi$ với $k \in Z$.

Lời giải

Ta có $sđ(Ou, Ov) = \alpha$ và $sđ(Ou', Ov') = \beta$ suy ra tồn tại α_0 , $\pi < \alpha_0 \leq \pi$, ϕ_0 , $\pi < \beta_0 \leq \pi$ và số nguyên k_0, l_0 sao cho $\alpha = \alpha_0 + k_0 2\pi$, $\beta = \beta_0 + l_0 2\pi$.

Khi đó $|\alpha_0|$ là số đo của $\widehat{uOv}$ và $|\beta_0|$ là số đo của $\widehat{u'Ov'}$.

Hai góc hình học uOv , $u'Ov'$ bằng nhau khi và chỉ khi $|\alpha_0| = |\beta_0| \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \beta_0 \\ \alpha_0 = -\beta_0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \beta - \alpha = k2\pi$ hoặc $\beta + \alpha = k2\pi$ với $k \in Z$.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Khẳng định nào sau đây là **đúng** khi nói về "đường tròn định hướng"?

- A. Mỗi đường tròn là một đường tròn định hướng.
- B. Mỗi đường tròn đã chọn một điểm là gốc đều là một đường tròn định hướng.
- C. Mỗi đường tròn đã chọn một chiều chuyển động và một điểm là gốc đều là một đường tròn định hướng.
- D. Mỗi đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương và chiều ngược lại được gọi là chiều âm là một đường tròn định hướng.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào SGK cơ bản trang 134 ở dòng 2.

- Câu 2:** Quy ước chọn chiều dương của một đường tròn định hướng là:
- A. Luôn cùng chiều quay kim đồng hồ.
 - B. Luôn ngược chiều quay kim đồng hồ.
 - C. Có thể cùng chiều quay kim đồng hồ mà cũng có thể là ngược chiều quay kim đồng hồ.
 - D. Không cùng chiều quay kim đồng hồ và cũng không ngược chiều quay kim đồng hồ.

Lời giải

Chọn B

Theo SGK cơ bản trang 134 ở dòng 6, ta **chọn B**.

- Câu 3:** Trên đường tròn định hướng, mỗi cung lượng giác AB xác định:
- A. Một góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .
 - B. Hai góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .
 - C. Bốn góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .
 - D. Vô số góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .

Lời giải

Chọn D

Theo SGK cơ bản trang 134 ở dòng cuối, ta **chọn D**.

- Câu 4:** Khẳng định nào sau đây là **đúng** khi nói về "góc lượng giác"?
- A. Trên đường tròn tâm O bán kính $R = 1$, góc hình học AOB là góc lượng giác.
 - B. Trên đường tròn tâm O bán kính $R = 1$, góc hình học AOB có phân biệt điểm đầu A và điểm cuối B là góc lượng giác.
 - C. Trên đường tròn định hướng, góc hình học AOB là góc lượng giác.
 - D. Trên đường tròn định hướng, góc hình học AOB có phân biệt điểm đầu A và điểm cuối B là góc lượng giác.

Lời giải

Chọn D

- Câu 5:** Khẳng định nào sau đây là **đúng** khi nói về "đường tròn lượng giác"?
- A. Mỗi đường tròn là một đường tròn lượng giác.
 - B. Mỗi đường tròn có bán kính $R = 1$ là một đường tròn lượng giác.
 - C. Mỗi đường tròn có bán kính $R = 1$, tâm trùng với gốc tọa độ là một đường tròn lượng giác.
 - D. Mỗi đường tròn định hướng có bán kính $R = 1$, tâm trùng với gốc tọa độ là một đường tròn lượng giác.

Lời giải

Chọn D

- Câu 6:** Trên đường tròn cung có số đo 1 rad là?
- A. Cung có độ dài bằng 1.
 - B. Cung tương ứng với góc ở tâm 60° .
 - C. Cung có độ dài bằng đường kính.
 - D. Cung có độ dài bằng nửa đường kính.

Lời giải

Chọn D

Cung có độ dài bằng bán kính (nửa đường kính) thì có số đo bằng 1 rad.

- Câu 7:** Khẳng định nào sau đây là **đúng**?
- A. $\pi \text{ rad} = 1^\circ$.
 - B. $\pi \text{ rad} = 60^\circ$.
 - C. $\pi \text{ rad} = 180^\circ$.
 - D.

$$\pi \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0.$$

Lời giải

Chọn C

$\pi \text{ rad}$ tương ứng với 180^0 .

Câu 8: Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A.** $1 \text{ rad} = 1^0$. **B.** $1 \text{ rad} = 60^0$. **C.** $1 \text{ rad} = 180^0$. **D.**

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0.$$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\pi \text{ rad}$ tương ứng với 180^0 .

Suy ra 1 rad tương ứng với x^0 . Vậy $x = \frac{180.1}{\pi}$.

Câu 9: Nếu một cung tròn có số đo là a^0 thì số đo radian của nó là:

- A.** $180\pi a$. **B.** $\frac{180\pi}{a}$. **C.** $\frac{a\pi}{180}$. **D.** $\frac{\pi}{180a}$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $\alpha = \frac{a.\pi}{180}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

Câu 10: Nếu một cung tròn có số đo là $3a^0$ thì số đo radian của nó là:

- A.** $\frac{a\pi}{60}$. **B.** $\frac{a\pi}{180}$. **C.** $\frac{180}{a\pi}$. **D.** $\frac{60}{a\pi}$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\alpha = \frac{a.\pi}{180}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

Trong trường hợp này là $3a \longrightarrow \alpha = \frac{3a.\pi}{180} = \frac{a\pi}{60}$.

Câu 11: Đổi số đo của góc 70^0 sang đơn vị radian.

- A.** $\frac{70}{\pi}$. **B.** $\frac{7}{18}$. **C.** $\frac{7\pi}{18}$. **D.** $\frac{7}{18\pi}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1. Áp dụng công thức $\alpha = \frac{a.\pi}{180}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

$$\text{Ta có } \alpha = \frac{a.\pi}{180} = \frac{70\pi}{180} = \frac{7\pi}{18}.$$

Cách 2. Bấm máy tính:

Bước 1. Bấm shift mode 4 để chuyển về chế độ rad.

Bước 2. Bấm 70 shift DRG 1 =

Câu 12: Đổi số đo của góc 108^0 sang đơn vị radian.

- A.** $\frac{3\pi}{5}$. **B.** $\frac{\pi}{10}$. **C.** $\frac{3\pi}{2}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Tương tự như câu trên.

Câu 13: Đổi số đo của góc $45^{\circ}32'$ sang đơn vị radian với độ chính xác đến hàng phần nghìn.

- A. 0,7947. B. 0,7948. C. 0,795. D. 0,794.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $\alpha = \frac{a \cdot \pi}{180}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

Trước tiên ta đổi $45^{\circ}32' = \left(45 + \frac{32}{60}\right)^{\circ}$.

Áp dụng công thức, ta được $\alpha = \frac{\left(45 + \frac{32}{60}\right) \cdot \pi}{180} = 0,7947065861$.

Cách 2. Bấm máy tính:

Bước 1. Bấm shift mode 4 để chuyển về chế độ rad.

Bước 2. Bấm $45^{\circ}32^0 = \text{shift DRG } 1 =$

Câu 14: Đổi số đo của góc $40^{\circ}25'$ sang đơn vị radian với độ chính xác đến hàng phần trăm.

- A. 0,705. B. 0,70. C. 0,7054. D. 0,71.

Lời giải

Chọn D

Cách 1. Áp dụng công thức $\alpha = \frac{a \cdot \pi}{180}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

Trước tiên ta đổi $40^{\circ}25' = \left(40 + \frac{25}{60}\right)^{\circ}$.

Áp dụng công thức, ta được $\alpha = \frac{\left(40 + \frac{25}{60}\right) \cdot \pi}{180} = \frac{97\pi}{432} = 0,705403906$.

Cách 2. Bấm máy tính:

Bước 1. Bấm shift mode 4 để chuyển về chế độ rad.

Bước 2. Bấm $40^{\circ}25^0 = \text{shift DRG } 1 =$

Câu 15: Đổi số đo của góc $-125^{\circ}45'$ sang đơn vị radian.

- A. $-\frac{503\pi}{720}$. B. $\frac{503\pi}{720}$. C. $\frac{251\pi}{360}$. D. $-\frac{251\pi}{360}$.

Lời giải

Chọn A

Tương tự như câu trên.

Câu 16: Đổi số đo của góc $\frac{\pi}{12}$ rad sang đơn vị độ, phút, giây.

- A. 15° . B. 10° . C. 6° . D. 5° .

Lời giải

Chọn A

Cách 1. Từ công thức $\alpha = \frac{a \cdot \pi}{180} \longrightarrow a = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi}\right)^{\circ}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

Ta có $a = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi} \right)^0 = \left(\frac{\frac{\pi}{12} \cdot 180}{\pi} \right)^0 = 15^0$.

Cách 2. Bấm máy tính:

Bước 1. Bấm shift mode 3 để chuyển về chế độ độ, phút, giây.

Bước 2. Bấm (shift $\pi \div 12$) shift DRG 2 =

Màn hình hiện ra kết quả bất ngờ.

Câu 17: Đổi số đo của góc $-\frac{3\pi}{16}$ rad sang đơn vị độ, phút, giây.

- A. $33^0 45'$. B. $-29^0 30'$. C. $-33^0 45'$. D. $-32^0 55'$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $a = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi} \right)^0 = \left(\frac{-\frac{3\pi}{16} \cdot 180}{\pi} \right)^0 = \left(-\frac{135}{4} \right)^0 = -33^0 45'$.

Cách 2. Bấm máy tính:

Bước 1. Bấm shift mode 3 để chuyển về chế độ độ, phút, giây.

Bước 2. Bấm (shift $-3\pi \div 16$) shift DRG 2 =

Câu 18: Đổi số đo của góc -5 rad sang đơn vị độ, phút, giây.

- A. $-286^0 44' 28''$. B. $-286^0 28' 44''$. C. -286^0 . D. $286^0 28' 44''$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Ta có $a = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi} \right)^0 = \left(\frac{-5 \cdot 180}{\pi} \right)^0 = -286^0 28' 44''$.

Cách 2. Bấm máy tính:

Bước 1. Bấm shift mode 3 để chuyển về chế độ độ, phút, giây.

Bước 2. Bấm -5 shift DRG 2 =

Câu 19: Đổi số đo của góc $\frac{3}{4}$ rad sang đơn vị độ, phút, giây.

- A. $42^0 97' 18''$. B. $42^0 58'$. C. $42^0 97'$. D. $42^0 58' 18''$.

Lời giải

Chọn D

Tương tự như câu trên.

Câu 20: Đổi số đo của góc -2 rad sang đơn vị độ, phút, giây.

- A. $-114^0 59' 15''$. B. $-114^0 35'$. C. $-114^0 35' 29''$. D. $-114^0 59'$.

Lời giải

Chọn C

Tương tự như câu trên.

Câu 21: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Số đo của cung tròn tỉ lệ với độ dài cung đó.
B. Độ dài của cung tròn tỉ lệ với bán kính của nó.
C. Số đo của cung tròn tỉ lệ với bán kính của nó.
D. Độ dài của cung tròn tỉ lệ nghịch với số đo của cung đó.

Lời giải

Chọn A

Từ công thức $\ell = R\alpha \longrightarrow \ell$ và α tỷ lệ nhau.

Câu 22: Tính độ dài ℓ của cung trên đường tròn có bán kính bằng 20cm và số đo $\frac{\pi}{16}$.

- A. $\ell = 3,93\text{cm}$. B. $\ell = 2,94\text{cm}$. C. $\ell = 3,39\text{cm}$. D. $\ell = 1,49\text{cm}$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\ell = R\alpha = 20 \cdot \frac{\pi}{16} \approx 3,93\text{cm}$.

Câu 23: Tính độ dài của cung trên đường tròn có số đo 1,5 và bán kính bằng 20 cm .

- A. 30cm . B. 40cm . C. 20cm . D. 60cm .

Lời giải

Chọn A

Ta có $\ell = \alpha R = 1,5 \cdot 20 = 30\text{ cm}$.

Câu 24: Một đường tròn có đường kính bằng 20cm . Tính độ dài của cung trên đường tròn có số đo 35° (lấy 2 chữ số thập phân).

- A. 6,01cm . B. 6,11cm . C. 6,21cm . D. 6,31cm .

Lời giải

Chọn B

Cung có số đo 35° thì có số đo radian là $\alpha = \frac{\alpha\pi}{180} = \frac{35\pi}{180} = \frac{7\pi}{36}$.

Bán kính đường tròn $R = \frac{20}{2} = 10\text{ cm}$.

Suy ra $\ell = \alpha R = \frac{7\pi}{36} \cdot 10 \approx 6,11\text{ cm}$.

Câu 25: Tính số đo cung có độ dài của cung bằng $\frac{40}{3}\text{cm}$ trên đường tròn có bán kính 20 cm .

- A. 1,5 rad . B. 0,67 rad . C. 80° . D. 88° .

Lời giải

Chọn B

Ta có $\ell = \alpha R \Leftrightarrow \alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{\frac{40}{3}}{20} = \frac{2}{3} \approx 0,67\text{ rad}$.

Câu 26: Một cung tròn có độ dài bằng 2 lần bán kính. Số đo radian của cung tròn đó là

- A. 1 . B. 2 . C. 3 . D. 4 .

Lời giải

Chọn B

$\ell = \alpha R \Leftrightarrow \alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{2R}{R} = 2\text{ rad}$.

Câu 27: Trên đường tròn bán kính R , cung tròn có độ dài bằng $\frac{1}{6}$ độ dài nửa đường tròn thì có số đo (tính bằng radian) là:

- A. $\pi/2$. B. $\pi/3$. C. $\pi/4$. D. $\pi/6$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\ell = \alpha R \Leftrightarrow \alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{\frac{1}{6}\pi R}{R} = \frac{\pi}{6}$.

Câu 28: Một cung có độ dài 10cm , có số đo bằng radian là $2,5$ thì đường tròn của cung đó có bán kính là:

A. $2,5\text{cm}$.

B. $3,5\text{cm}$.

C. 4cm .

D. $4,5\text{cm}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } l = R\alpha \Leftrightarrow R = \frac{l}{\alpha} = \frac{10}{2,5} = 4.$$

Câu 29: Bánh xe đạp của người đi xe đạp quay được 2 vòng trong 5 giây. Hỏi trong 2 giây, bánh xe quay được 1 góc bao nhiêu?

A. $\frac{8}{5}\pi$.

B. $\frac{5}{8}\pi$.

C. $\frac{3}{5}\pi$.

D. $\frac{5}{3}\pi$.

Lời giải

Chọn A.

Trong 2 giây bánh xe đạp quay được $\frac{2.2}{5} = \frac{4}{5}$ vòng tức là quay được cung có độ dài là

$$l = \frac{4}{5} \cdot 2\pi R = \frac{8}{5}\pi R.$$

$$\text{Ta có } l = R\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{l}{R} = \frac{\frac{8}{5}\pi R}{R} = \frac{8}{5}\pi.$$

Câu 30: Một bánh xe có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là:

A. 30° .

B. 40° .

C. 50° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn C.

72 răng có chiều dài là $2\pi R$ nên 10 răng có chiều dài $l = \frac{10 \cdot 2\pi R}{72} = \frac{5\pi}{18}R$.

$$\text{Theo công thức } l = R\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{l}{R} = \frac{\frac{5}{18}\pi R}{R} = \frac{5}{18}\pi \text{ mà } a = \frac{180\alpha}{\pi} = \frac{180 \cdot \frac{5}{18}\pi}{\pi} = 50^\circ.$$

Cách khác: 72 răng tương ứng với 360° nên 10 răng tương ứng với $\frac{10 \cdot 360}{72} = 50^\circ$.

Câu 31: Cho góc lượng giác $(Ox, Oy) = 22^\circ 30' + k360^\circ$. Với giá trị k bằng bao nhiêu thì góc $(Ox, Oy) = 1822^\circ 30'$?

A. $k \in \emptyset$.

B. $k = 3$.

C. $k = -5$.

D. $k = 5$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Theo đề } (Ox, Oy) = 1822^\circ 30' \longrightarrow 22^\circ 30' + k \cdot 360^\circ = 1822^\circ 30' \longrightarrow k = 5.$$

Câu 32: Cho góc lượng giác $\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. Tìm k để $10\pi < \alpha < 11\pi$.

A. $k = 4$.

B. $k = 5$.

C. $k = 6$.

D. $k = 7$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } 10\pi < \alpha < 11\pi \longrightarrow \frac{19\pi}{2} < k2\pi < \frac{21\pi}{2} \longrightarrow k = 5.$$

Câu 33: Một chiếc đồng hồ, có kim chỉ giờ OG chỉ số 9 và kim phút OP chỉ số 12. Số đo của góc lượng giác (OG, OP) là

A. $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

B. $-270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

C. $270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

D. $\frac{9\pi}{10} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Lời giải

Chọn A.

Góc lượng giác (OG, OP) chiếm $\frac{1}{4}$ đường tròn. Số đo là $\frac{1}{4}.2\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 34: Trên đường tròn lượng giác có điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 45° . Gọi N là điểm đối xứng với M qua trục Ox , số đo cung lượng giác AN bằng

A. $-45^\circ.$

B. $315^\circ.$

C. 45° hoặc $315^\circ.$

D.

$-45^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

Lời giải

Chọn D.

Vì số đo cung AM bằng 45° nên $\widehat{AOM} = 45^\circ$, N là điểm đối xứng với M qua trục Ox nên $\widehat{AON} = 45^\circ$. Do đó số đo cung AN bằng 45° nên số đo cung lượng giác AN có số đo là $-45^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 35: Trên đường tròn với điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 60° . Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua trục Oy , số đo cung AN là:

A. $120^\circ.$

B. $-240^\circ.$

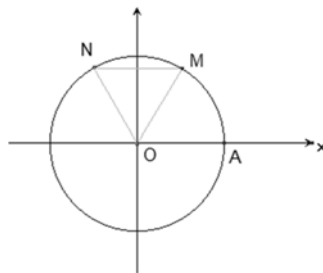
C. -120° hoặc $240^\circ.$

D.

$120^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

Lời giải

Chọn A.



Ta có $\widehat{AOM} = 60^\circ, \widehat{MON} = 60^\circ$

Nên $\widehat{AON} = 120^\circ$. Khi đó số đo cung AN bằng 120° .

Câu 36: Trên đường tròn lượng giác với điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 75° . Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua gốc tọa độ O , số đo cung lượng giác AN bằng:

A. $255^\circ.$

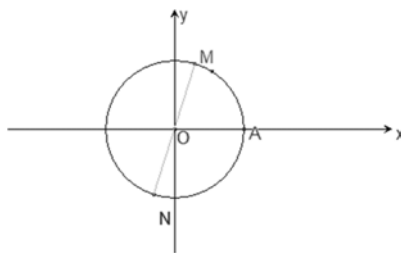
B. $-105^\circ.$

C. -105° hoặc $255^\circ.$

D. $-105^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

Lời giải

Chọn D.



Ta có $\widehat{AOM} = 75^\circ$, $\widehat{MON} = 180^\circ$

Nên cung lượng giác AN có số đo bằng $-105^\circ + k360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 37: Cho bốn cung (trên một đường tròn định hướng): $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{25\pi}{3}$, $\delta = \frac{19\pi}{6}$.

Các cung nào có điểm cuối trùng nhau?

A. α và β ; γ và δ .

B. β và γ ; α và δ .

C. α , β , γ .

D. β , γ , δ .

Lời giải

Chọn B.

Cách 1. Ta có $\delta - \alpha = 4\pi \Rightarrow$ hai cung α và δ có điểm cuối trùng nhau.

Và $\gamma - \beta = 8\pi \Rightarrow$ hai cung β và γ có điểm cuối trùng nhau.

Cách 2. Gọi A , B , C , D là điểm cuối của các cung α , β , γ , δ

Biểu diễn các cung trên đường tròn lượng giác ta có $B \equiv C$, $A \equiv D$.

Câu 38: Các cặp góc lượng giác sau ở trên cùng một đường tròn đơn vị, cùng tia đầu và tia cuối. Hãy nêu kết quả **SAI** trong các kết quả sau đây:

A. $\frac{\pi}{3}$ và $-\frac{35\pi}{3}$.

B. $\frac{\pi}{10}$ và $\frac{152\pi}{5}$.

C. $-\frac{\pi}{3}$ và $\frac{155\pi}{3}$.

D. $\frac{\pi}{7}$ và $\frac{281\pi}{7}$.

Lời giải

Chọn B.

Cặp góc lượng giác a và b ở trên cùng một đường tròn đơn vị, cùng tia đầu và tia cuối.

Khi đó $a = b + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ hay $k = \frac{a-b}{2\pi}$.

Dễ thấy, ở **đáp án B** vì $k = \frac{\frac{\pi}{10} - \frac{152\pi}{5}}{2\pi} = -\frac{303}{20} \notin \mathbb{Z}$.

Câu 39: Trên đường tròn lượng giác gốc A , cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành tam giác đều?

A. $\frac{k2\pi}{3}$.

B. $k\pi$.

C. $\frac{k\pi}{2}$.

D. $\frac{k\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Tam giác đều có góc ở đỉnh là 60° nên góc ở tâm là 120° tương ứng $\frac{k2\pi}{3}$.

Câu 40: Trên đường tròn lượng giác gốc A , cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành hình vuông?

A. $\frac{k\pi}{2}$.

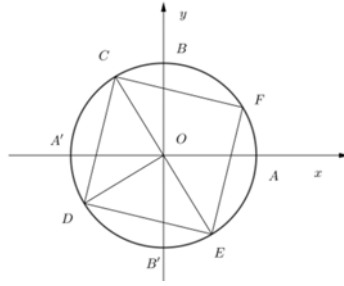
B. $k\pi$.

C. $\frac{k2\pi}{3}$.

D. $\frac{k\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn A.



Hình vuông $CDEF$ có góc $\widehat{DCE}$ là 45° nên góc ở tâm là 90° tương ứng $\frac{k\pi}{2}$.

BÀI 2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC MỘT CUNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CUNG α

1. Định nghĩa

Trên đường tròn lượng giác cho cung $\widehat{AM}$ có số đo $\widehat{AM}$ (còn viết $\widehat{AM}$)

- Tung độ $y = \overline{OK}$ của điểm M gọi là sin của α và kí hiệu là $\sin \alpha$.

$$\boxed{\sin \alpha = \overline{OK}.}$$

- Hoành độ $x = \overline{OH}$ của điểm M gọi là cosin của α và kí hiệu là $\cos \alpha$.

$$\boxed{\cos \alpha = \overline{OH}.}$$

- Nếu $\cos \alpha \neq 0$, tỉ số $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ gọi là tang của α và kí hiệu là $\tan \alpha$ (người ta còn dùng kí hiệu $\operatorname{tg} \alpha$)

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

- Nếu $\sin \alpha \neq 0$, tỉ số $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ gọi là cotang của α và kí hiệu là $\cot \alpha$ (người ta còn dùng kí hiệu $\operatorname{cotg} \alpha$)

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Các giá trị $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ được gọi là các **giá trị lượng giác của cung** α .

Ta cũng gọi trục tung là **trục sin**, còn trục hoành là **trục cosin**

2. Hệ quả

- $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$. Hơn nữa, ta có

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(\alpha + k2\pi) &= \sin \alpha, \forall k \in \mathbb{Z}; \\ \cos(\alpha + k2\pi) &= \cos \alpha, \forall k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}}$$

- Vì $-1 \leq \overline{OK} \leq 1$; $-1 \leq \overline{OH} \leq 1$ nên ta có

$$\boxed{\begin{aligned} -1 &\leq \sin \alpha \leq 1 \\ -1 &\leq \cos \alpha \leq 1. \end{aligned}}$$

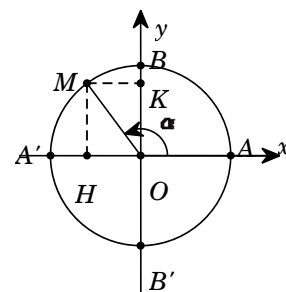
- Với mọi $m \in \mathbb{R}$ mà $-1 \leq m \leq 1$ đều tồn tại α và β sao cho $\sin \alpha = m$ và $\cos \beta = m$.

- $\tan \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

- $\cot \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

- Dấu của các giá trị lượng giác của góc α phụ thuộc vào vị trí điểm cuối của cung $\widehat{AM} = \alpha$ trên đường tròn lượng giác.

Bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác



Góc phần tư Giá trị lượng giác	I	II	III	IV
$\cos \alpha$	+	–	–	+
$\sin \alpha$	+	+	–	–
$\tan \alpha$	+	–	+	–
$\cot \alpha$	+	–	+	–

3. Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định
$\cot \alpha$	Không xác định	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

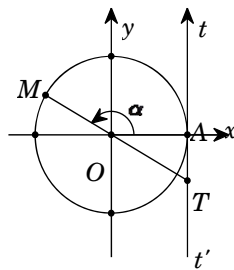
II – Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA TANG VÀ CÔTANG

1. Ý nghĩa hình học của $\tan \alpha$

Từ A vẽ tiếp tuyến $t'At$ với đường tròn lượng giác. Ta coi tiếp tuyến này là một trục số bằng cách chọn gốc tại A .

Gọi T là giao điểm của OM với trục $t'At$.

$\tan \alpha$ được biểu diễn bởi độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{AT}$ trên trục $t'At$. Trục $t'At$ được gọi là **trục tang**.

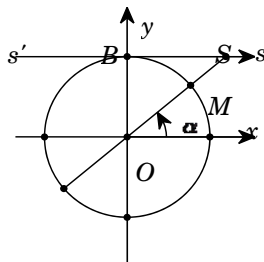


2. Ý nghĩa hình học của $\cot \alpha$

Từ B vẽ tiếp tuyến $s'Bs$ với đường tròn lượng giác. Ta coi tiếp tuyến này là một trục số bằng cách chọn gốc tại B .

Gọi S là giao điểm của OM với trục $s'Bs$

$\cot \alpha$ được biểu diễn bởi độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{BS}$ trên trục $s'Bs$. Trục $s'Bs$ được gọi là **trục cotang**.



III – QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

1. Công thức lượng giác cơ bản

Đối với các giá trị lượng giác, ta có các hằng đẳng thức sau

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

2. Giá trị lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt

1) Cung đối nhau: α và $-\alpha$

$\begin{aligned} \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(-\alpha) &= -\cot \alpha \end{aligned}$

2) Cung bù nhau: α và $\pi - \alpha$

$$\begin{aligned}\sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(\pi - \alpha) &= -\cot \alpha\end{aligned}$$

3) Cung hơn kém π : α và $(\alpha + \pi)$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \pi) &= -\sin \alpha \\ \cos(\alpha + \pi) &= -\cos \alpha \\ \tan(\alpha + \pi) &= \tan \alpha \\ \cot(\alpha + \pi) &= \cot \alpha\end{aligned}$$

4) Cung phụ nhau: α và $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cot \alpha \\ \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \tan \alpha\end{aligned}$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng toán 1: biểu diễn góc và cung lượng giác.

1. Phương pháp giải.

Để biểu diễn các góc lượng giác trên đường tròn lượng giác ta thường sử dụng các kết quả sau

- Góc α và góc $\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.
- Số điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn bởi số đo có dạng $\alpha + \frac{k2\pi}{m}$ (với k là số nguyên và m là số nguyên dương) là m . Từ đó để biểu diễn các góc lượng giác đó ta lần lượt cho k từ 0 tới $(m - 1)$ rồi biểu diễn các góc đó.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Biểu diễn các góc(cung) lượng giác trên đường tròn lượng giác có số đo sau:

a) $\frac{\pi}{4}$

b) $-\frac{11\pi}{2}$

c) 120°

d) -765°

Lời giải

a) Ta có $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{8} \cdot 2\pi$. Ta chia đường tròn thành tám phần bằng nhau.

Khi đó điểm M_1 là điểm biểu diễn bởi góc có số đo $\frac{\pi}{4}$.

b) Ta có $-\frac{13\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + (-3) \cdot 2\pi$ do đó điểm biểu diễn bởi góc $-\frac{13\pi}{2}$ trùng với góc $-\frac{\pi}{2}$ và là điểm B' .

c) Ta có $\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$. Ta chia đường tròn thành ba phần bằng nhau.

Khi đó điểm M_2 là điểm biểu diễn bởi góc có số đo 120° .

d) Ta có $-765^\circ = -45^\circ + (-2) \cdot 360^\circ$ do đó điểm biểu diễn bởi góc -765° trùng với góc -45° .

$\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$. Ta chia đường tròn làm tám phần bằng nhau (chú ý góc âm)

Khi đó điểm M_3 (điểm chính giữa cung nhỏ $\widehat{AB'}$) là điểm biểu diễn bởi góc có số đo -765° .

Ví dụ 2 : Trên đường tròn lượng giác gốc A . Biểu diễn các góc lượng giác có số đo sau (với k là số nguyên tùy ý).

$$x_1 = k\pi;$$

$$x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi;$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

Các góc lượng giác trên có thể viết dưới dạng công thức duy nhất nào?

Lời giải

- Ta có $x_1 = \frac{k2\pi}{2}$ do đó có hai điểm biểu diễn bởi góc có số đo dạng $x_1 = k\pi$

Với $k = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ được biểu diễn bởi điểm A

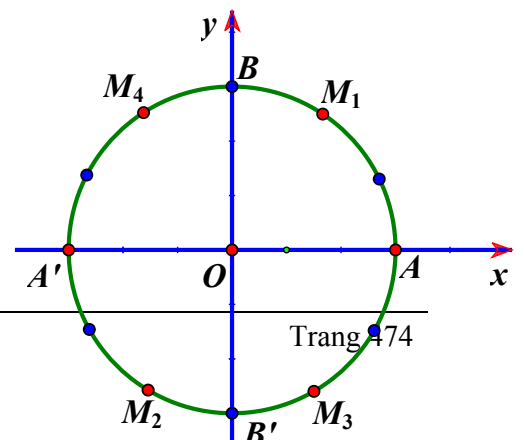
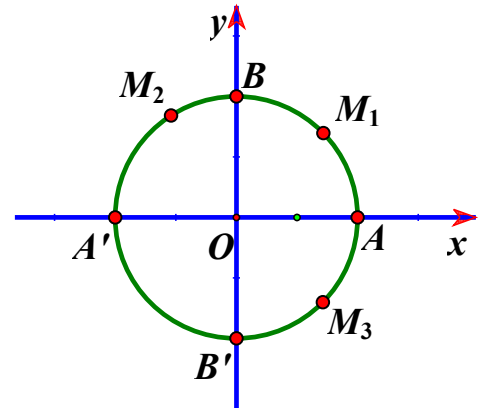
$k = 1 \Rightarrow x_1 = \pi$ được biểu diễn bởi A'

- $x_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{2}$ do đó có hai điểm biểu diễn bởi góc có

số đo dạng $x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi$

$k = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{3}$ được biểu diễn bởi M_1

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3}$ được biểu diễn bởi M_2



- $x_3 = -\frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{2}$ do đó có hai điểm biểu diễn bởi góc có số đo dạng $x_3 = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

$k = 0 \Rightarrow x_3 = -\frac{\pi}{3}$ được biểu diễn bởi M_3

$k = 1 \Rightarrow x_6 = \frac{2\pi}{3}$ được biểu diễn bởi M_4 .

- Do các góc lượng giác x_1, x_2, x_3 được biểu diễn bởi đỉnh của đa giác đều $AM_1M_4A'M_2M_3$ nên các góc lượng giác đó có thể viết dưới dạng một công thức duy nhất là $x = \frac{k\pi}{3}$.

Dạng toán 2 : xác định giá trị của biểu thức chứa góc đặc biệt, góc liên quan đặc biệt và dấu của giá trị lượng giác của góc lượng giác.

1. Phương pháp giải.

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản và giá trị lượng giác của góc liên quan đặc biệt
- Để xác định dấu của các giá trị lượng giác của một cung (góc) ta xác định điểm ngọn của cung (tia cuối của góc) thuộc góc phần tư nào và áp dụng bảng xét dấu các giá trị lượng giác.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin \frac{7\pi}{6} + \cos 9\pi + \tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + \cot \frac{7\pi}{2}$

b) $B = \frac{1}{\tan 368^\circ} + \frac{2 \sin 2550^\circ \cos(-188^\circ)}{2 \cos 638^\circ + \cos 98^\circ}$

c) $C = \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 65^\circ$

d) $D = \tan^2 \frac{\pi}{8} \cdot \tan \frac{3\pi}{8} \cdot \tan \frac{5\pi}{8}$

Lời giải

a) Ta có $A = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \cos(\pi + 4.2\pi) - \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{2} + 3\pi\right)$

$$\Rightarrow A = -\sin \frac{\pi}{6} + \cos \pi - \tan \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2} - 1 - 1 + 0 = -\frac{5}{2}$$

b) Ta có $B = \frac{1}{\tan(8^\circ + 360^\circ)} + \frac{2 \sin(30^\circ + 7.360^\circ) \cos(8^\circ + 180^\circ)}{2 \cos(-90^\circ + 8^\circ + 2.360^\circ) + \cos(90^\circ + 8^\circ)}$

$$B = \frac{1}{\tan 8^0} + \frac{2 \sin 30^0 (-\cos 8^0)}{2 \cos(8^0 - 90^0) - \sin 8^0} = \frac{1}{\tan 8^0} + \frac{2 \cdot \frac{1}{2} (-\cos 8^0)}{2 \cos(90^0 - 8^0) - \sin 8^0} =$$

$$= \frac{1}{\tan 8^0} - \frac{\cos 8^0}{2 \sin 8^0 - \sin 8^0} = \frac{1}{\tan 8^0} - \frac{\cos 8^0}{\sin 8^0} = 0$$

c) Vì $25^0 + 65^0 = 90^0 \Rightarrow \sin 65^0 = \cos 25^0$ do đó

$$C = (\sin^2 25^0 + \cos^2 25^0) + \sin^2 45^0 + \sin^2 60^0 = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Suy ra $C = \frac{7}{4}$.

$$d) D = -\left[\tan \frac{\pi}{8} \cdot \tan \frac{3\pi}{8}\right] \cdot \left[\tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) \tan \frac{5\pi}{8}\right]$$

$$\text{Mà } \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \frac{3\pi}{8} = \cot \frac{\pi}{8}, \tan \frac{5\pi}{8} = \cot\left(-\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\text{Nên } D = -\left[\tan \frac{\pi}{8} \cdot \cot \frac{\pi}{8}\right] \cdot \left[\tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) \cot\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right] = -1.$$

Ví dụ 2: Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xác định dấu của các biểu thức sau:

$$a) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

$$b) \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$c) \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \tan(\pi - \alpha)$$

$$d) \sin \frac{14\pi}{9} \cdot \cot(\pi + \alpha)$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \pi < \frac{\pi}{2} + \alpha < \frac{3\pi}{2} \text{ suy ra } \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) < 0$$

$$b) \text{ Ta có } -\frac{\pi}{2} > -\alpha > -\pi \Rightarrow 0 > \frac{3\pi}{2} - \alpha > -\frac{\pi}{2} \text{ suy ra } \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) < 0$$

$$c) \text{ Ta có } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow 0 < -\frac{\pi}{2} + \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ suy ra } \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) > 0$$

$$\text{Và } 0 < \pi - \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ suy ra } \tan(\pi - \alpha) > 0$$

$$\text{Vậy } \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \tan(\pi - \alpha) > 0.$$

d) Ta có $\frac{3\pi}{2} < \frac{14\pi}{9} < 2\pi \Rightarrow \sin \frac{14\pi}{9} < 0$.

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < \pi + \alpha < 2\pi$ suy ra $\cot(\pi + \alpha) < 0$.

Vậy $\sin \frac{14\pi}{9} \cdot \cot(\pi + \alpha) > 0$.

Dạng toán 3 : chứng minh đẳng thức lượng giác, chứng minh biểu thức không phụ thuộc góc x , đơn giản biểu thức.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản, các hằng đẳng thức đáng nhớ và sử dụng tính chất của giá trị lượng giác để biến đổi

+ Khi chứng minh một đẳng thức ta có thể biến đổi vế này thành vế kia, biến đổi tương đương, biến đổi hai vế cùng bằng một đại lượng khác.

+ Chứng minh biểu thức không phụ thuộc góc x hay đơn giản biểu thức ta cố gắng làm xuất hiện nhân tử chung ở tử và mẫu để rút gọn hoặc làm xuất hiện các hạng tử trái dấu để rút gọn cho nhau.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Chứng minh các đẳng thức sau(giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $\cos^4 x + 2\sin^2 x = 1 + \sin^4 x$

b) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x} = \cot^3 x + \cot^2 x + \cot x + 1$

c) $\frac{\cot^2 x - \cot^2 y}{\cot^2 x \cdot \cot^2 y} = \frac{\cos^2 x - \cos^2 y}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y}$

d) $\sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x} = 3 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$

Lời giải

a) Đẳng thức tương đương với $\cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x + (\sin^2 x)^2$

$\Leftrightarrow \cos^4 x = (1 - \sin^2 x)^2$ (*)

Mà $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Do đó (*) $\Leftrightarrow \cos^4 x = (\cos^2 x)^2$ (đúng) ĐPCM.

b) Ta có $VT = \frac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x} = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin^3 x}$

Mà $\cot^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$ và $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ nên

$$VT = \cot^2 x + 1 + \cot x (\cot^2 x + 1) = \cot^3 x + \cot^2 x + \cot x + 1 = VP \text{ ĐPCM.}$$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có } VT &= \frac{\cot^2 x - \cot^2 y}{\cot^2 x \cdot \cot^2 y} = \frac{1}{\cot^2 y} - \frac{1}{\cot^2 x} = \tan^2 y - \tan^2 x \\ &= \left(\frac{1}{\cos^2 y} - 1 \right) - \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = \frac{1}{\cos^2 y} - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \cos^2 y}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y} = VP \text{ ĐPCM.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } VT &= \sqrt{\sin^4 x + 4(1 - \sin^2 x)} + \sqrt{\cos^4 x + 4(1 - \cos^2 x)} \\ &= \sqrt{(\sin^2 x)^2 - 4\sin^2 x + 4} + \sqrt{(\cos^2 x)^2 - 4\cos^2 x + 4} = \sqrt{(\sin^2 x - 2)^2} + \sqrt{(\cos^2 x - 2)^2} \\ &= (2 - \sin^2 x) + (2 - \cos^2 x) = 4 - (\sin^2 x + \cos^2 x) = 3 \end{aligned}$$

Mặt khác vì $\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ nên

$$VP = 3 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 3 \Rightarrow VT = VP \text{ ĐPCM.}$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$\frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{A + 2B + C}{2}\right)} - \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{A + 2B + C}{2}\right)} = \tan A \cdot \cot(B + C)$$

Lời giải

Vì $A + B + C = \pi$ nên

$$VT = \frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}\right)} - \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}\right)} = \frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{-\sin \frac{B}{2}} - \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} = -\left(\sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2}\right) = -1$$

$$VP = \tan A \cdot \cot(\pi - A) = \tan A \cdot (-\cot A) = -1$$

Suy ra $VT = VP$. ĐPCM

Ví dụ 3: Đơn giản các biểu thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

$$\text{a) } A = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$$

$$\text{b) } B = \frac{\sin(900^\circ + x) - \cos(450^\circ - x) + \cot(1080^\circ - x) + \tan(630^\circ - x)}{\cos(450^\circ - x) + \sin(x - 630^\circ) - \tan(810^\circ + x) - \tan(810^\circ - x)}$$

$$c) C = \sqrt{2} - \frac{1}{\sin(x + 2013\pi)} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}} \text{ với } \pi < x < 2\pi$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } \cos(5\pi - x) = \cos(\pi - x + 2.2\pi) = \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

$$\cot(3\pi - x) = \cot(-x) = -\cot x$$

$$\text{Suy ra } A = -\cos x - (-\cos x) + \cot x + (-\cot x) = 0$$

$$b) \text{ Ta có } \sin(900^\circ + x) = \sin(180^\circ + 2.360^\circ + x) = \sin(180^\circ + x) = -\sin x$$

$$\cos(450^\circ - x) = \cos(90^\circ + 360^\circ - x) = \cos(90^\circ - x) = \sin x$$

$$\cot(1080^\circ - x) = \cot(3.360^\circ - x) = \cot(-x) = -\cot x$$

$$\tan(630^\circ - x) = \tan(3.180^\circ + 90^\circ - x) = \tan(90^\circ - x) = \cot x$$

$$\sin(x - 630^\circ) = \sin(x - 2.360^\circ + 90^\circ) = \sin(x + 90^\circ) = \cos x$$

$$\tan(810^\circ + x) = \tan(4.180^\circ + 90^\circ + x) = \tan(90^\circ + x) = -\cot x$$

$$\tan(810^\circ - x) = \tan(4.180^\circ + 90^\circ - x) = \tan(90^\circ - x) = \cot x$$

$$\text{Vậy } B = \frac{-\sin x - \sin x - \cot x + \cot x}{\sin x + \cos x - (-\cot x) - \cot x} = \frac{-2\sin x}{\sin x + \cos x}$$

$$c) \text{ Ta có } \sin(x + 2013\pi) = \sin(x + \pi + 1006.2\pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x \text{ nên}$$

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos x + 1 + \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}} \\ &= \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{1 - \cos^2 x}} = \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{\sin^2 x}} = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{\sin x |\sin x|} \right) \end{aligned}$$

Vì $\pi < x < 2\pi \Rightarrow \sin x < 0$ nên

$$C = \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = -\sqrt{2} \cot^2 x$$

Ví dụ 4: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x .

$$\text{a) } A = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x + 2}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1}$$

$$\text{b) } B = \frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} - \frac{2 + 2 \cot^2 x}{(\tan x - 1)(\tan^2 x + 1)}$$

$$\text{c) } C = \sqrt{\sin^4 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos^4 x} + \sqrt{\cos^4 x + 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x}$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)$$

$$= \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\text{Do đó } A = \frac{1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2}{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 1} = \frac{3(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)}{2(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)} = \frac{3}{2}$$

Vậy A không phụ thuộc vào x .

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } B &= \frac{1 + \frac{1}{\tan x}}{1 - \frac{1}{\tan x}} - \frac{2 + \frac{2 \cos^2 x}{\sin^2 x}}{(\tan x - 1) \frac{1}{\sin^2 x}} \\ &= \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1} - \frac{2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\tan x - 1} = \frac{\tan x + 1 - 2}{\tan x - 1} = 1 \end{aligned}$$

Vậy B không phụ thuộc vào x .

$$\begin{aligned} \text{c) } C &= \sqrt{(1 - \cos^2 x)^2 + 6 \cos^2 x + 3 \cos^4 x} + \sqrt{(1 - \sin^2 x)^2 + 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x} \\ &= \sqrt{4 \cos^4 x + 4 \cos^2 x + 1} + \sqrt{4 \sin^4 x + 4 \sin^2 x + 1} \\ &= \sqrt{(2 \cos^2 x + 1)^2} + \sqrt{(2 \sin^2 x + 1)^2} \\ &= 2 \cos^2 x + 1 + 2 \sin^2 x + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Vậy C không phụ thuộc vào x .

Dạng toán 4 : tính giá trị của một biểu thức lượng giác khi biết một giá trị lượng giác.

1. Phương pháp giải.

- Từ hệ thức lượng giác cơ bản là mối liên hệ giữa hai giá trị lượng giác, khi biết một giá trị lượng giác ta sẽ suy ra được giá trị còn lại. Cần lưu ý tới dấu của giá trị lượng giác để chọn cho phù hợp.

- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ trong đại số.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Tính giá trị lượng giác còn lại của góc α biết:

a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $90^0 < \alpha < 180^0$.

b) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

c) $\tan \alpha = -2\sqrt{2}$ và $0 < \alpha < \pi$

d) $\cot \alpha = -\sqrt{2}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

Lời giải

a) Vì $90^0 < \alpha < 180^0$ nên $\cos \alpha < 0$ mặt khác $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ suy ra

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Do đó } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

b) Vì $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nên $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$

$$\text{Mà } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha < 0 \text{ suy ra } \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{Ta có } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{-\sqrt{5}}{3}}{\frac{-2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ và } \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{-2}{3}}{\frac{-\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

c) Vì $\tan \alpha = -2\sqrt{2} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$$\text{Ta có } \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{1}{(-2\sqrt{2})^2 + 1} = \frac{1}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{3}.$$

Vì $0 < \alpha < \pi \Rightarrow \sin \alpha > 0$ và $\tan \alpha = -2\sqrt{2} < 0$ nên $\cos \alpha < 0$

Vì vậy $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$

Ta có $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

d) Vì $\cot \alpha = -\sqrt{2}$ nên $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\text{Ta có } \cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{\cot^2 \alpha + 1} = \frac{1}{(-\sqrt{2})^2 + 1} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Do } \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha < 0 \text{ và } \cot \alpha = -\sqrt{2} < 0 \text{ nên } \sin \alpha > 0$$

$$\text{Do đó } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Ta có } \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \cot \alpha \cdot \sin \alpha = -\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Ví dụ 2: a) Tính giá trị lượng giác còn lại của góc α biết $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ và $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$

$$\text{b) Cho } 3\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2}. \text{ Tính } A = 2\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha.$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = 25 \Rightarrow \cot^2 \alpha = 24 \text{ hay } \cot \alpha = \pm 2\sqrt{6}$$

Vì $\tan \alpha, \cot \alpha$ cùng dấu và $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$ nên $\tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0$

$$\text{Do đó } \cot \alpha = -2\sqrt{6}. \text{ Ta lại có } \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = -\frac{1}{2\sqrt{6}}.$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \cot \alpha \sin \alpha = -2\sqrt{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{-2\sqrt{6}}{5}$$

$$\text{b) Ta có } 3\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3\sin^4 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 6\sin^4 \alpha - 2(1 - 2\sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha) = 1 \Leftrightarrow 4\sin^4 \alpha + 4\sin^2 \alpha - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin^2 \alpha - 1)(2\sin^2 \alpha + 3) = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 \alpha - 1 = 0 \text{ (Do } 2\sin^2 \alpha + 3 > 0 \text{)}$$

$$\text{Suy ra } \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ta lại có } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra } A = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Ví dụ 3: a) Cho $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. Tính $A = \frac{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.

b) Cho $\tan \alpha = 3$. Tính $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$

c) Cho $\cot \alpha = \sqrt{5}$. Tính $C = \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } A = \frac{\tan \alpha + 3 \frac{1}{\tan \alpha}}{\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{\tan^2 \alpha + 3}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 2}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = 1 + 2 \cos^2 \alpha$$

$$\text{Suy ra } A = 1 + 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{17}{9}$$

$$\text{b) } B = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{3 \cos^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{2 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha}} = \frac{\tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1) - (\tan^2 \alpha + 1)}{\tan^3 \alpha + 3 + 2 \tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1)}$$

$$\text{Suy ra } B = \frac{3(9+1) - (9+1)}{27 + 3 + 2 \cdot 3(9+1)} = \frac{2}{9}$$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có } C &= \sin^2 \alpha \cdot \frac{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \sin^2 \alpha \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} (1 - \cot \alpha + \cot^2 \alpha) = \frac{1}{1 + (\sqrt{5})^2} (1 - \sqrt{5} + 5) = \frac{6 - \sqrt{5}}{6} \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Biết $\sin x + \cos x = m$

a) Tìm $\sin x \cos x$ và $|\sin^4 x - \cos^4 x|$

b) Chứng minh rằng $|m| \leq \sqrt{2}$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2 \sin x \cos x \quad (*)$$

$$\text{Mặt khác } \sin x + \cos x = m \text{ nên } m^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha \text{ hay } \sin \alpha \cos \alpha = \frac{m^2 - 1}{2}$$

Đặt $A = |\sin^4 x - \cos^4 x|$. Ta có

$$A = |(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)| = |(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)|$$

$$\Rightarrow A^2 = (\sin x + \cos x)^2 (\sin x - \cos x)^2 = (1 + 2 \sin x \cos x)(1 - 2 \sin x \cos x)$$

$$\Rightarrow A^2 = \left(1 + \frac{m^2 - 1}{2}\right) \left(1 - \frac{m^2 - 1}{2}\right) = \frac{3 + 2m^2 - m^4}{4}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{\sqrt{3 + 2m^2 - m^4}}{2}$$

b) Ta có $2 \sin x \cos x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ kết hợp với (*) suy ra

$$(\sin x + \cos x)^2 \leq 2 \Rightarrow |\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } |m| \leq \sqrt{2}$$

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho α thuộc góc phần tư thứ nhất của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

A. $\sin \alpha > 0$.

B. $\cos \alpha < 0$.

C. $\tan \alpha < 0$.

D. $\cot \alpha < 0$.

Lời giải

$$\alpha \text{ thuộc góc phần tư thứ nhất} \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha > 0 \\ \tan \alpha > 0 \\ \cot \alpha > 0 \end{cases} \longrightarrow \text{Chọn A.}$$

Câu 2: Cho α thuộc góc phần tư thứ hai của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

A. $\sin \alpha > 0$; $\cos \alpha > 0$.

B. $\sin \alpha < 0$; $\cos \alpha < 0$. **C.** $\sin \alpha > 0$; $\cos \alpha < 0$. **D.**

$\sin \alpha < 0$; $\cos \alpha > 0$.

Lời giải

$$\alpha \text{ thuộc góc phần tư thứ hai} \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases} \longrightarrow \text{Chọn C.}$$

Câu 3: Cho α thuộc góc phần tư thứ ba của đường tròn lượng giác. Khẳng định nào sau đây là sai ?

A. $\sin \alpha > 0$.

B. $\cos \alpha < 0$.

C. $\tan \alpha > 0$.

D. $\cot \alpha > 0$.

Lời giải

$$\alpha \text{ thuộc góc phần tư thứ ba} \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha < 0 \\ \tan \alpha > 0 \\ \cot \alpha > 0 \end{cases} \longrightarrow \text{Chọn A.}$$

Câu 4: Cho α thuộc góc phần tư thứ tư của đường tròn lượng giác. Khẳng định nào sau đây là

đúng ?

A. $\sin \alpha > 0$.

B. $\cos \alpha > 0$.

C. $\tan \alpha > 0$.

D. $\cot \alpha > 0$.

Lời giải

$$\alpha \text{ thuộc góc phần tư thứ hai} \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha > 0 \\ \tan \alpha < 0 \\ \cot \alpha < 0 \end{cases} \longrightarrow \text{Chọn B.}$$

Câu 5: Điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ mấy nếu $\sin \alpha, \cos \alpha$ cùng dấu?

A. Thứ II.
III.

B. Thứ IV.

C. Thứ II hoặc IV.

D. Thứ I hoặc

Lời giải

Chọn D.

Câu 6: Điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ mấy nếu $\sin \alpha, \tan \alpha$ trái dấu?

A. Thứ I.
IV.

B. Thứ II hoặc IV.

C. Thứ II hoặc III.

D. Thứ I hoặc

Lời giải

Chọn C.

Câu 7: Điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ mấy nếu $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.

A. Thứ II.
IV.

B. Thứ I hoặc II.

C. Thứ II hoặc III.

D. Thứ I hoặc

Lời giải

$$\text{Ta có } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos \alpha = \sqrt{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos \alpha = |\cos \alpha| \Leftrightarrow \cos \alpha.$$

Đẳng thức $|\cos \alpha| \Leftrightarrow \cos \alpha \longrightarrow \cos \alpha \geq 0 \longrightarrow$ điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ I hoặc IV. **Chọn D.**

Câu 8: Điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ mấy nếu $\sqrt{\sin^2 \alpha} = \sin \alpha$.

A. Thứ III.
IV.

B. Thứ I hoặc III.

C. Thứ I hoặc II.

D. Thứ III hoặc

Lời giải

$$\text{Ta có } \sqrt{\sin^2 \alpha} = \sin \alpha \Leftrightarrow |\sin \alpha| = \sin \alpha.$$

Đẳng thức $|\sin \alpha| = \sin \alpha \longrightarrow \sin \alpha \geq 0 \longrightarrow$ điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ I hoặc II. **Chọn C.**

Câu 9: Cho $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\tan \alpha > 0$; $\cot \alpha > 0$.

B. $\tan \alpha < 0$; $\cot \alpha < 0$.

C. $\tan \alpha > 0$; $\cot \alpha < 0$.

D. $\tan \alpha < 0$; $\cot \alpha > 0$.

Lời giải

Ta có $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2} \longrightarrow$ điểm cuối cung $\alpha - \pi$ thuộc góc phần tư thứ I

$$\longrightarrow \begin{cases} \tan \alpha > 0 \\ \cot \alpha > 0 \end{cases} \text{ Chọn A.}$$

Câu 10: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin(\alpha - \pi) \geq 0$.

B. $\sin(\alpha - \pi) \leq 0$.

C. $\sin(\alpha - \pi) < 0$.

D. $\sin(\alpha - \pi) < 0$.

Lời giải

Ta có $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow -\pi < \alpha - \pi < -\frac{\pi}{2} \longrightarrow$ điểm cuối cung $\alpha - \pi$ thuộc góc phần tư thứ III $\longrightarrow \sin(\alpha - \pi) < 0$. **Chọn D.**

Câu 11: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) > 0$.

B. $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \geq 0$.

C. $\tan(\alpha + \pi) < 0$.

D. $\tan(\alpha + \pi) > 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{2} < \pi \longrightarrow \cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < 0 \\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow \pi < \alpha + \pi < \frac{3\pi}{2} \longrightarrow \tan(\alpha + \pi) > 0 \end{cases} \text{ Chọn D.}$$

Câu 12: Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Giá trị lượng giác nào sau đây luôn dương?

A. $\sin(\pi + \alpha)$.

B. $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

C. $\cos(-\alpha)$.

D. $\tan(\pi + \alpha)$.

Lời giải

Ta có

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha; \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha; \cos(-\alpha) = \cos \alpha; \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha.$$

$$\text{Do } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \\ \tan \alpha < 0 \end{cases} \longrightarrow \text{Chọn B.}$$

Câu 13: Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) < 0.$

B. $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) > 0.$

C. $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) \leq 0.$

D. $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) \geq 0.$

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \rightarrow 0 < \frac{3\pi}{2} - \alpha < \frac{\pi}{2} \longrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) > 0 \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) > 0 \end{cases} \longrightarrow \tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) > 0.$$

Câu 14: Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xác định dấu của biểu thức $M = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \tan(\pi - \alpha)$.

A. $M \geq 0.$

B. $M > 0.$

C. $M \leq 0.$

D. $M < 0.$

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow 0 < -\frac{\pi}{2} + \alpha < \frac{\pi}{2} \longrightarrow \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) > 0 \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow 0 < \pi - \alpha < \frac{\pi}{2} \longrightarrow \tan(\pi - \alpha) > 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow M > 0.$$

Câu 15: Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Xác định dấu của biểu thức $M = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cot(\pi + \alpha)$.

A. $M \geq 0.$

B. $M > 0.$

C. $M \leq 0.$

D. $M < 0.$

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \rightarrow -\frac{3\pi}{2} < -\alpha < -\pi \rightarrow -\pi < \frac{\pi}{2} - \alpha < -\frac{\pi}{2} \longrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) < 0 \\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi < \pi + \alpha < \frac{5\pi}{2} \longrightarrow \cot(\pi + \alpha) > 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow M < 0.$$

Câu 16: Tính giá trị của $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right]$.

A. $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

B. $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

C. $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = -\frac{1}{2}.$

D. $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Lời giải

Chọn B.

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] &= \cos\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) = \cos\frac{5\pi}{4} \\ &= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Câu 17: Tính giá trị của $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right]$.

$$\begin{aligned}\text{A. } \cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] &= -\frac{\sqrt{3}}{2}. & \text{B. } \cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] &= \frac{1}{2}. \\ \text{C. } \cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] &= -\frac{1}{2}. & \text{D. } \cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] &= \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi + k2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Câu 18: Tính giá trị biểu thức $P = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 80^\circ$.

$$\text{A. } P = 0. \qquad \text{B. } P = 2. \qquad \text{C. } P = 4. \qquad \text{D. } P = 8.$$

Lời giải

Do $10^\circ + 80^\circ = 20^\circ + 70^\circ = 30^\circ + 60^\circ = 40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$ nên các cung lượng giác tương ứng đôi một phụ nhau. Áp dụng công thức $\sin(90^\circ - x) = \cos x$, ta được

$$\begin{aligned}P &= (\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ) + (\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ) \\ &\quad + (\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ) + (\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ) \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 = 4. \text{ Chọn C.}\end{aligned}$$

Câu 19: Tính giá trị biểu thức $P = \tan 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \dots \tan 80^\circ$.

$$\text{A. } P = 0. \qquad \text{B. } P = 1. \qquad \text{C. } P = 4. \qquad \text{D. } P = 8.$$

Lời giải

Áp dụng công thức $\tan x \cdot \tan(90^\circ - x) = \tan x \cdot \cot x = 1$.

Do đó $P = 1$. **Chọn B.**

Câu 20: Tính giá trị biểu thức $P = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ$.

$$\text{A. } P = 0. \qquad \text{B. } P = 1. \qquad \text{C. } P = 2. \qquad \text{D. } P = 3.$$

Lời giải

Áp dụng công thức $\tan x \cdot \tan(90^\circ - x) = \tan x \cdot \cot x = 1$.

Do đó $P = 1$. **Chọn B.**

Câu 21: Với góc α bất kì. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$. B. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
C. $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = 1$. D. $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1$.

Lời giải

Chọn B.

Câu 22: Với góc α bất kì. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\sin 2\alpha^2 + \cos^2 2\alpha = 1$. B. $\sin(\alpha^2) + \cos(\alpha^2) = 1$.
C. $\sin^2 \alpha + \cos^2(180^\circ - \alpha) = 1$. D. $\sin^2 \alpha - \cos^2(180^\circ - \alpha) = 1$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \longrightarrow \cos^2(180^\circ - \alpha) = \cos^2 \alpha$.

Do đó $\sin^2 \alpha + \cos^2(180^\circ - \alpha) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Câu 23: Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$; $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$. B. $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ($\cos \alpha \neq 0$).
C. $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ($\sin \alpha \neq 0$). D. $\sin^2(2018\alpha) + \cos^2(2018\alpha) = 2018$.

Lời giải

Chọn D.

Vì $\sin^2(2018\alpha) + \cos^2(2018\alpha) = 1$.

Câu 24: Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$. B. $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$. C. $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$. D. $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$.

Lời giải

Chọn C.

Câu 25: Đễ $\tan x$ có nghĩa khi

- A. $x = \pm \frac{\pi}{2}$. B. $x = 0$. C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. D. $x \neq k\pi$.

Lời giải

Chọn C.

Câu 26: Điều kiện trong đẳng thức $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ là

- A. $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. B. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

$\cot\left(x - \frac{\pi}{2018}\right)$ có nghĩa khi $x - \frac{\pi}{2018} \neq k\pi \longleftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2018} + k\pi$. **Chọn D.**

Câu 27: Điều kiện để biểu thức $P = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \cot\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ xác định là

A. $\alpha \neq \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $\alpha \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $\alpha \neq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $\alpha \neq -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1$.

Đẳng thức xác định khi $\begin{cases} \cos \alpha \neq 0 \\ \sin \alpha \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \alpha \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \neq k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 28: Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sin 60^\circ < \sin 150^\circ$.

B. $\cos 30^\circ < \cos 60^\circ$.

C. $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ$.

D. $\cot 60^\circ > \cot 240^\circ$.

Lời giải

Chọn C.

Biểu thức xác định khi $\begin{cases} \alpha + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \alpha - \frac{\pi}{6} \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 29: Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan 45^\circ > \tan 46^\circ$.

B. $\cos 142^\circ > \cos 143^\circ$.

C. $\sin 90^\circ 13' < \sin 90^\circ 14'$.

D. $\cot 128^\circ > \cot 126^\circ$.

Lời giải

Dùng MTCT kiểm tra từng đáp án. **Chọn C.**

Câu 30: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha.$

B. $\sin(\pi+\alpha)=\sin\alpha.$

C. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha.$

D. $\tan(\pi+2\alpha)=\cot(2\alpha).$

Lời giải

Chọn B.

Trong khoảng giá trị từ 90° đến 180° , khi giá trị góc tăng thì giá trị cos của góc tương ứng giảm.

Câu 31: Với mọi số thực α , ta có $\sin\left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)$ bằng

A. $-\sin\alpha.$

B. $\cos\alpha.$

C. $\sin\alpha.$

D. $-\cos\alpha.$

Lời giải

Ta có $\sin\left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha.$ **Chọn B.**

Câu 32: Cho $\cos\alpha=\frac{1}{3}$. Khi đó $\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$ bằng

A. $-\frac{2}{3}.$

B. $-\frac{1}{3}.$

C. $\frac{1}{3}.$ **D.** $\frac{2}{3}.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}-2\pi\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha=\frac{1}{3}.$

Câu 33: Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ thì $\tan(2017\pi+\alpha)$ bằng

A. $-\tan\alpha.$

B. $\cot\alpha.$

C. $\tan\alpha.$

D. $-\cot\alpha.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\tan(2017\pi+\alpha)=\tan\alpha.$

Câu 34: Đơn giản biểu thức $A=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin(\alpha-\pi)$, ta được

A. $A=\cos\alpha+\sin\alpha.$

B. $A=2\sin\alpha.$

C. $A=\sin\alpha-\cos\alpha.$

D. $A=0.$

Lời giải

Chọn D.

Ta có $A=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin(\alpha-\pi)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha-\sin\alpha=0.$

Câu 35: Rút gọn biểu thức $S = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin(\pi - x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos(\pi - x)$ ta được

A. $S = 0$.

B. $S = \sin^2 x - \cos^2 x$.

C. $S = 2 \sin x \cos x$.

D. $S = 1$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $S = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \sin(\pi - x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(\pi - x)$

$$= \sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot (-\cos x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Câu 36: Cho $P = \sin(\pi + \alpha) \cdot \cos(\pi - \alpha)$ và $Q = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $P + Q = 0$.

B. $P + Q = -1$.

C. $P + Q = 1$.

D. $P + Q = 2$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $P = \sin(\pi + \alpha) \cdot \cos(\pi - \alpha) = -\sin \alpha \cdot (-\cos \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

Và $Q = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha) = -\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

Khi đó $P + Q = \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0$.

Câu 37: Biểu thức lượng giác $\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(10\pi + x)\right]^2 + \left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(8\pi - x)\right]^2$ có giá trị bằng?

A. 1.

B. 2.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$; $\sin(10\pi + x) = \sin x$.

Và $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$; $\cos(8\pi - x) = \cos x$.

Khi đó $\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(10\pi + x)\right]^2 + \left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(8\pi - x)\right]^2$

$$= (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$$

$$= \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x = 2.$$

Câu 38: Giá trị biểu thức $P = \left[\tan \frac{17\pi}{4} + \tan\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)\right]^2 + \left[\cot \frac{13\pi}{4} + \cot(7\pi - x)\right]^2$ bằng

A. $\frac{1}{\sin^2 x}$.

B. $\frac{1}{\cos^2 x}$.

C. $\frac{2}{\sin^2 x}$.

D. $\frac{2}{\cos^2 x}$.

Lời giải**Chọn C.**

Ta có $\tan \frac{17\pi}{4} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + 4\pi \right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$ và $\tan \left(\frac{7\pi}{2} - x \right) = \cot x$.

Và $\cot \frac{13\pi}{4} = \cot \left(\frac{\pi}{4} + 3\pi \right) = \cot \frac{\pi}{4} = 1$; $\cot(7\pi - x) = -\cot x$.

Suy ra $P = (1 + \cot x)^2 + (1 - \cot x)^2 = 2 + 2\cot^2 x = \frac{2}{\sin^2 x}$.

Câu 39: Biết rằng $\sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + \sin \frac{13\pi}{2} = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$ thì giá trị đúng của $\cos x$ là

A. 1.

B. -1.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải**Chọn C.**

Ta có $\sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = -\cos x$ và $\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \cos x$.

Kết hợp với giá trị $\sin \frac{13\pi}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 6\pi \right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Suy ra $\sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + \sin \frac{13\pi}{2} = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \Leftrightarrow -\cos x + 1 = \cos x \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$.

Câu 40: Nếu $\cot 1,25 \cdot \tan(4\pi + 1,25) - \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \cos(6\pi - x) = 0$ thì $\tan x$ bằng

A. 1.

B. -1.

C. 0.

D. Một giá trị

khác.

Lời giải**Chọn C.**

Ta có $\tan(4\pi + 1,25) = \tan 1,25$ suy ra $\cot 1,25 \cdot \tan 1,25 = 1$

Và $\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \cos x$; $\cos(6\pi - x) = \cos(x - 6\pi) = \cos x$.

Khi đó $\cot 1,25 \cdot \tan(4\pi + 1,25) - \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \cos(6\pi - x) = 1 - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$.

Mặt khác $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \longrightarrow \tan x = 0$.

Câu 41: Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC , mệnh đề nào sau đây đúng:

A. $\sin(A + C) = -\sin B$.

B. $\cos(A + C) = -\cos B$.

C. $\tan(A+C) = \tan B$.

D. $\cot(A+C) = \cot B$.

Lời giải

Chọn B.

Vì A, B, C là ba góc của một tam giác suy ra $A+C = \pi - B$.

Khi đó $\sin(A+C) = \sin(\pi - B) = \sin B$; $\cos(A+C) = \cos(\pi - B) = -\cos B$.

$\tan(A+C) = \tan(\pi - B) = -\tan B$; $\cot(A+C) = \cot(\pi - B) = -\cot B$.

Câu 42: Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC , khi đó

A. $\sin C = -\sin(A+B)$.

B. $\cos C = \cos(A+B)$.

C. $\tan C = \tan(A+B)$.

D. $\cot C = \cot(A+B)$.

Lời giải

Chọn D.

Vì A, B, C là các góc của tam giác ABC nên $C = 180^\circ - (A+B)$.

Do đó C và $A+B$ là 2 góc bù nhau $\Rightarrow \sin C = \sin(A+B)$; $\cos C = -\cos(A+B)$.

Và $\tan C = -\tan(A+B)$; $\cot C = \cot(A+B)$.

Câu 43: Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $\sin \frac{A+C}{2} = \cos \frac{B}{2}$.

B. $\cos \frac{A+C}{2} = \sin \frac{B}{2}$.

C. $\sin(A+B) = \sin C$.

D. $\cos(A+B) = \cos C$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $A+B+C = \pi \Leftrightarrow A+B = \pi - C$

Do đó $\cos(A+B) = \cos(\pi - C) = -\cos C$.

Câu 44: A, B, C là ba góc của một tam giác. Hãy tìm hệ thức **sai**:

A. $\sin A = -\sin(2A+B+C)$.

B. $\sin A = -\cos \frac{3A+B+C}{2}$.

C. $\cos C = \sin \frac{A+B+3C}{2}$.

D. $\sin C = \sin(A+B+2C)$.

Lời giải

A, B, C là ba góc của một tam giác $\Rightarrow A+B+C = 180^\circ \Leftrightarrow A+B = 180^\circ - C$.

Ta có $\sin(A+B+2C) = \sin(180^\circ - C + 2C) = \sin(180^\circ + C) = -\sin C$. **Chọn D.**

Câu 45: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos \alpha$.

A. $\cos \alpha = \frac{1}{13}$.

B. $\cos \alpha = \frac{5}{13}$.

C. $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$.

D. $\cos \alpha = -\frac{1}{13}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có
$$\begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{5}{13} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \longrightarrow \cos \alpha = -\frac{5}{13}.$$

Câu 46: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\tan \alpha$.

A. $\tan \alpha = -\frac{3}{\sqrt{5}}$.

B. $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

C. $\tan \alpha = -\frac{4}{\sqrt{5}}$.

D. $\tan \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có
$$\begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{2}{3} \\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \longrightarrow \sin \alpha = -\frac{2}{3} \longrightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Câu 47: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ và $\frac{2017\pi}{2} < \alpha < \frac{2019\pi}{2}$. Tính $\sin \alpha$.

A. $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$.

B. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.

C. $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$.

D. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có
$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \frac{2017\pi}{2} < \alpha < \frac{2019\pi}{2} \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} 1 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \frac{\pi}{2} + 504.2\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 504.2\pi \end{cases}$$

$\longrightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$. Mà $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \longleftrightarrow -\frac{4}{3} = \frac{\sin \alpha}{-\frac{3}{5}} \longrightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Câu 48: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\tan \alpha$.

A. $\tan \alpha = -\frac{12}{5}$.

B. $\tan \alpha = \frac{5}{12}$.

C. $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$.

D. $\tan \alpha = \frac{12}{5}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{5}{13} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi. \end{cases} \longrightarrow \sin \alpha = \frac{5}{13} \longrightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{5}{12}.$$

Câu 49: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$ và $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Tính $P = \cos \alpha + \sin \alpha$.

A. $P = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$. B. $P = 1 - \sqrt{5}$. C. $P = \frac{3\sqrt{5}}{2}$. D. $P = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{5} \rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 180^\circ < \alpha < 270^\circ \end{cases} \longrightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\longrightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}. \text{ Do đó, } \sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{5}} = -\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 50: Cho góc α thỏa $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\cot \alpha = -\frac{4}{5}$. B. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. C. $\tan \alpha = \frac{5}{4}$. D. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5} \\ 90^\circ < \alpha < 180^\circ \end{cases} \longrightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}.$$

Câu 51: Cho góc α thỏa $\cot \alpha = \frac{3}{4}$ và $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$. B. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. C. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. D. $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \\ 0^\circ < \alpha < 90^\circ \end{cases} \longrightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}.$$

Câu 52: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$.

A. $P = -3$.

B. $P = \frac{3}{7}$.

C. $P = \frac{12}{25}$.

D. $P = -\frac{12}{25}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có
$$\begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \longrightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5} \longrightarrow \tan \alpha = -\frac{3}{4}.$$

Thay $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ vào P , ta được $P = -\frac{12}{25}$.

Câu 53: Cho góc α thỏa $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính $P = \frac{2 \tan \alpha + 3 \cot \alpha + 1}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.

A. $P = \frac{19 + 2\sqrt{2}}{9}$.

B. $P = \frac{19 - 2\sqrt{2}}{9}$.

C. $P = \frac{26 - 2\sqrt{2}}{9}$.

D. $P = \frac{26 + 2\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có
$$\begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 90^\circ < \alpha < 180^\circ \end{cases} \longrightarrow \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \longrightarrow \begin{cases} \tan \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \cot \alpha = -2\sqrt{2} \end{cases}.$$

Thay
$$\begin{cases} \tan \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \cot \alpha = -2\sqrt{2} \end{cases}$$
 vào P , ta được $P = \frac{26 - 2\sqrt{2}}{9}$.

Câu 54: Cho góc α thỏa mãn $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \tan\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)$.

A. $P = 2\sqrt{2}$.

B. $P = -2\sqrt{2}$.

C. $P = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

D. $P = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $P = \tan\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\left(3\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$

Theo giả thiết: $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\sin \alpha = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{3}.$

Ta có
$$\begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \longrightarrow \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \longrightarrow P = -2\sqrt{2}.$$

Câu 55: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Tính $P = \sqrt{5 + 3 \tan \alpha} + \sqrt{6 - 4 \cot \alpha}$.

A. $P = 4$.

B. $P = -4$.

C. $P = 6$.

D. $P = -6$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5} \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \end{cases} \longrightarrow \sin \alpha = -\frac{4}{5} \longrightarrow \begin{cases} \tan \alpha = -\frac{4}{3} \\ \cot \alpha = -\frac{3}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Thay } \begin{cases} \tan \alpha = -\frac{4}{3} \\ \cot \alpha = -\frac{3}{4} \end{cases} \text{ vào } P, \text{ ta được } P = 4.$$

Câu 56: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $P = \sqrt{\tan^2 \alpha - 2 \tan \alpha + 1}$.

A. $P = -\frac{1}{3}$.

B. $P = \frac{1}{3}$.

C. $P = \frac{7}{3}$.

D. $P = -\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } P = \sqrt{(\tan \alpha - 1)^2} = |\tan \alpha - 1|. \text{ Vì } \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \longrightarrow \tan \alpha > 1 \longrightarrow P = \tan \alpha - 1.$$

$$\text{Theo giả thiết: } \begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5} \\ \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{cases} \longrightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5} \longrightarrow \tan \alpha = \frac{4}{3} \longrightarrow P = \frac{1}{3}.$$

Câu 57: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ và $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1$. Tính $P = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \sin \alpha$.

A. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $P = \frac{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{4}$.

C. $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $P = \frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi \longleftrightarrow \frac{3\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{9\pi}{4} \\ \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \longrightarrow \alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \longrightarrow \alpha = \pi.$$

$$\text{Thay } \alpha = \pi \text{ vào } P, \text{ ta được } P = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 58: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ và $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\alpha.$$

A. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

B. $P = 1.$

C. $P = -1.$

D. $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi \longleftrightarrow \frac{5\pi}{6} < \alpha + \frac{\pi}{3} < \frac{7\pi}{3} \\ \cot\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \end{cases} \longrightarrow \alpha + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{6} \longrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2}.$$

Thay $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ vào P , ta được $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Câu 59: Cho góc α thỏa mãn $\tan\alpha = -\frac{4}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \frac{\sin^2\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos^2\alpha}.$

A. $P = \frac{30}{11}.$

B. $P = \frac{31}{11}.$

C. $P = \frac{32}{11}.$

D. $P = \frac{34}{11}.$

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{9}{25} \rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{3}{5} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \longrightarrow \cos\alpha = -\frac{3}{5} \longrightarrow \sin\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{4}{5}.$$

Thay $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ và $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ vào P , ta được $P = \frac{31}{11}.$

Câu 60: Cho góc α thỏa mãn $\tan\alpha = 2$. Tính $P = \frac{3\sin\alpha - 2\cos\alpha}{5\cos\alpha + 7\sin\alpha}.$

A. $P = -\frac{4}{9}.$

B. $P = \frac{4}{9}.$

C. $P = -\frac{4}{19}.$

D. $P = \frac{4}{19}.$

Lời giải

Chọn D.

Chia cả tử và mẫu của P cho $\cos\alpha$ ta được $P = \frac{3\tan\alpha - 2}{5 + 7\tan\alpha} = \frac{3 \cdot 2 - 2}{5 + 7 \cdot 2} = \frac{4}{19}.$

Câu 61: Cho góc α thỏa mãn $\cot\alpha = \frac{1}{3}$. Tính $P = \frac{3\sin\alpha + 4\cos\alpha}{2\sin\alpha - 5\cos\alpha}.$

A. $P = -\frac{15}{13}.$

B. $P = \frac{15}{13}.$

C. $P = -13.$

D. $P = 13.$

Lời giải

Chọn D.

Chia cả tử và mẫu của P cho $\sin \alpha$ ta được $P = \frac{3+4 \cot \alpha}{2-5 \cot \alpha} = \frac{3+4 \cdot \frac{1}{3}}{2-5 \cdot \frac{1}{3}} = 13$.

Câu 62: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$. Tính $P = \frac{2 \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha}{5 \sin^2 \alpha + 6 \cos^2 \alpha}$.

A. $P = \frac{9}{13}$.

B. $P = \frac{9}{65}$.

C. $P = -\frac{9}{65}$.

D. $P = \frac{24}{29}$.

Lời giải

Chọn A.

Chia cả tử và mẫu của P cho $\cos^2 \alpha$ ta được

$$P = \frac{2 \tan^2 \alpha + 3 \tan \alpha + 4}{5 \tan^2 \alpha + 6} = \frac{2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 4}{5 \cdot 2^2 + 6} = \frac{9}{13}.$$

Câu 63: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $P = \frac{2 \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 4 \cos^2 \alpha}{5 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$.

A. $P = -\frac{8}{13}$.

B. $P = \frac{2}{19}$.

C. $P = -\frac{2}{19}$.

D. $P = -\frac{8}{19}$.

Lời giải

Chọn D.

Chia cả tử và mẫu của P cho $\cos^2 \alpha$ ta được

$$P = \frac{2 \tan^2 \alpha + 3 \tan \alpha - 4}{5 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} - 4}{5 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{8}{19}.$$

Câu 64: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 5$. Tính $P = \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$.

A. $P = \frac{9}{13}$.

B. $P = \frac{10}{13}$.

C. $P = \frac{11}{13}$.

D. $P = \frac{12}{13}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $P = (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$. (*)

Chia hai vế của (*) cho $\cos^2 \alpha$ ta được $\frac{P}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 1$

$$\Leftrightarrow P(1 + \tan^2 \alpha) = \tan^2 \alpha - 1 \Leftrightarrow P = \frac{\tan^2 \alpha - 1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{5^2 - 1}{1 + 5^2} = \frac{12}{13}.$$

Câu 65: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{5}{4}$. Tính $P = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

A. $P = \frac{9}{16}$.

B. $P = \frac{9}{32}$.

C. $P = \frac{9}{8}$.

D. $P = \frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn B.

Từ giả thiết, ta có $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{25}{16} \Leftrightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{25}{16} \longrightarrow P = \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{9}{32}$.

Câu 66: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{12}{25}$ và $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$. Tính $P = \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$.

A. $P = \frac{91}{125}$.

B. $P = \frac{49}{25}$.

C. $P = \frac{7}{5}$.

D. $P = \frac{1}{9}$.

Lời giải

Chọn A.

Áp dụng $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$, ta có

$$P = \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^3 - 3 \sin \alpha \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha).$$

Ta có $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + \frac{24}{25} = \frac{49}{25}$.

Vì $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$ nên ta chọn $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$.

Thay $\begin{cases} \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5} \\ \sin \alpha \cos \alpha = \frac{12}{25} \end{cases}$ vào P , ta được $P = \left(\frac{7}{5}\right)^3 - 3 \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{7}{5} = \frac{91}{125}$.

Câu 67: Cho góc α thỏa mãn $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ và $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Tính $P = \sin \alpha - \cos \alpha$.

A. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $P = \frac{1}{2}$.

C. $P = -\frac{1}{2}$.

D. $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2$.

Suy ra $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 - (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$.

Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ suy ra $\sin \alpha < \cos \alpha$ nên $\sin \alpha - \cos \alpha < 0$. Vậy $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 68: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Tính $P = |\sin \alpha - \cos \alpha|$.

- A. $P = 2 - m$. B. $P = 2 - m^2$. C. $P = m^2 - 2$. D. $P = \sqrt{2 - m^2}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2$.

Suy ra $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 - (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2 - m^2 \longrightarrow P = |\sin \alpha - \cos \alpha| = \sqrt{2 - m^2}$.

Câu 69: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$. Tính $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$.

- A. $P = 1$. B. $P = 2$. C. $P = 3$. D. $P = 4$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2 \tan \alpha \cot \alpha = 2^2 - 2.1 = 2$.

Câu 70: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha + \cot \alpha = 5$. Tính $P = \tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha$.

- A. $P = 100$. B. $P = 110$. C. $P = 112$. D. $P = 115$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $P = \tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha = (\tan \alpha + \cot \alpha)^3 - 3 \tan \alpha \cot \alpha (\tan \alpha + \cot \alpha) = 5^3 - 3.5 = 110$.

Câu 71: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tính $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$.

- A. $P = 12$. B. $P = 14$. C. $P = 16$. D. $P = 18$.

Lời giải

Ta có $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{4}$.

Chọn B.

Khi đó $P = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha \cos \alpha)^2} = 14$.

Câu 72: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\tan \alpha - \cot \alpha = 1$. Tính $P = \tan \alpha + \cot \alpha$.

- A. $P = 1$. B. $P = -1$. C. $P = -\sqrt{5}$. D. $P = \sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có

$$\tan \alpha - \cot \alpha = 1 \Leftrightarrow \tan \alpha - \frac{1}{\tan \alpha} = 1 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha - \tan \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ suy ra $\tan \alpha < 0$ nên $\tan \alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \longrightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{2}{1 - \sqrt{5}}.$

Thay $\tan \alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ và $\cot \alpha = \frac{2}{1 - \sqrt{5}}$ vào P , ta được $P = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1 - \sqrt{5}} = -\sqrt{5}.$

Câu 73: Cho góc α thỏa mãn $3 \cos \alpha + 2 \sin \alpha = 2$ và $\sin \alpha < 0$. Tính $\sin \alpha$.

A. $\sin \alpha = -\frac{5}{13}.$

B. $\sin \alpha = -\frac{7}{13}.$

C. $\sin \alpha = -\frac{9}{13}.$

D. $\sin \alpha = -\frac{12}{13}.$

Lời giải

Chọn A.

Ta có $3 \cos \alpha + 2 \sin \alpha = 2 \Leftrightarrow (3 \cos \alpha + 2 \sin \alpha)^2 = 4$

$$\Leftrightarrow 9 \cos^2 \alpha + 12 \cos \alpha \sin \alpha + 4 \sin^2 \alpha = 4 \Leftrightarrow 5 \cos^2 \alpha + 12 \cos \alpha \sin \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha (5 \cos \alpha + 12 \sin \alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ 5 \cos \alpha + 12 \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

• $\cos \alpha = 0 \Rightarrow \sin \alpha = 1$: loại (vì $\sin \alpha < 0$).

• $5 \cos \alpha + 12 \sin \alpha = 0$, ta có hệ phương trình $\begin{cases} 5 \cos \alpha + 12 \sin \alpha = 0 \\ 3 \cos \alpha + 2 \sin \alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = -\frac{5}{13} \\ \cos \alpha = \frac{12}{13} \end{cases}.$

Câu 74: Cho góc α thỏa mãn $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ và $\sin \alpha - 2 \cos \alpha = 1$. Tính $P = 2 \tan \alpha - \cot \alpha$.

A. $P = \frac{1}{2}.$

B. $P = \frac{1}{4}.$

C. $P = \frac{1}{6}.$

D. $P = \frac{1}{8}.$

Lời giải

Chọn C.

Với $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ suy ra $\begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}.$

Ta có $\begin{cases} \sin \alpha - 2 \cos \alpha = 1 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow (1 + 2 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$$\Leftrightarrow 5 \cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0 \text{ (loại)} \\ \cos \alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}.$$

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ (do $\sin \alpha < 0$) $\longrightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}$ và

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{4}{3}.$$

Thay $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ và $\cot \alpha = \frac{4}{3}$ vào P , ta được $P = \frac{1}{6}$.

Câu 75: Rút gọn biểu thức $M = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$.

A. $M = 1$.

B. $M = 2$.

C. $M = 4$.

D. $M = 4 \sin x \cdot \cos x$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x \\ (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x = 1 - 2 \sin x \cdot \cos x \end{cases}$$

Suy ra $M = 2$.

Câu 76: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 4x$. **B.** $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x$.

C. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$. **D.** $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x$.

Lời giải

Chọn C.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin^4 x + \cos^4 x &= (\sin^2 x)^2 + 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x + (\cos^2 x)^2 - 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{1}{2} (2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x. \end{aligned}$$

Câu 77: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \cos^2 x$. **B.** $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$.

C. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x$. **D.** $\sin^4 x - \cos^4 x = 2 \cos^2 x - 1$.

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin^4 x - \cos^4 x &= (\sin^2 x)^2 - (\cos^2 x)^2 = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= \sin^2 x - \cos^2 x = (1 - \cos^2 x) - \cos^2 x = 1 - 2 \cos^2 x. \end{aligned}$$

Câu 78: Rút gọn biểu thức $M = \sin^6 x + \cos^6 x$.

A. $M = 1 + 3 \sin^2 x \cos^2 x$.

B. $M = 1 - 3 \sin^2 x$.

C. $M = 1 - \frac{3}{2} \sin^2 2x.$

D. $M = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x.$

Lời giải

Chọn D.

Ta có $M = \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x.$$

Câu 79: Rút gọn biểu thức $M = \tan^2 x - \sin^2 x.$

A. $M = \tan^2 x.$

B. $M = \sin^2 x.$

C. $M = \tan^2 x \cdot \sin^2 x .$

D. $M = 1.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $M = \tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \sin^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = \sin^2 x \cdot \tan^2 x.$

Câu 80: Rút gọn biểu thức $M = \cot^2 x - \cos^2 x.$

A. $M = \cot^2 x.$

B. $M = \cos^2 x.$

C. $M = 1.$

D. $M = \cot^2 x \cdot \cos^2 x.$

Lời giải

Chọn D.

Ta có $M = \cot^2 x - \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \cos^2 x = \cos^2 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) = \cos^2 x \cdot \cot^2 x.$

Câu 81: Rút gọn biểu thức $M = (1 - \sin^2 x) \cot^2 x + (1 - \cot^2 x).$

A. $M = \sin^2 x.$

B. $M = \cos^2 x.$

C. $M = -\sin^2 x.$

D. $M = -\cos^2 x.$

Lời giải

Chọn A.

Ta biến đổi: $M = (\cot^2 x - \cos^2 x) + (1 - \cot^2 x) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x.$

Câu 82: Rút gọn biểu thức $M = \sin^2 \alpha \tan^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha - \tan^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha.$

A. $M = 1 + \sin^2 \alpha.$

B. $M = \sin \alpha.$

C. $M = 2 \sin \alpha.$

D. $M = 3.$

Lời giải

Chọn D.

Ta có $M = \tan^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 1) + 4 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha$

$$= \tan^2 \alpha (-\cos^2 \alpha) + 4 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha$$

$$= -\sin^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha = 3(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 3.$$

Câu 83: Rút gọn biểu thức $M = (\sin^4 x + \cos^4 x - 1)(\tan^2 x + \cot^2 x + 2)$.

A. $M = -4$.

B. $M = -2$.

C. $M = 2$.

D. $M = 4$.

Lời giải

Chọn D.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= (1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x - 1) \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 2 \right) \\ &= (-2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x) \left(\frac{\sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \right) = (-2) \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = -2. \end{aligned}$$

Câu 84: Đơn giản biểu thức $P = \sqrt{\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$.

A. $P = |\sin \alpha|$.

B. $P = \sin \alpha$.

C. $P = \cos \alpha$.

D. $P = |\cos \alpha|$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } P = \sqrt{\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \sqrt{\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} = \sqrt{\sin^2 \alpha} = |\sin \alpha|.$$

Câu 85: Đơn giản biểu thức $P = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$.

A. $P = 1 + 2 \tan^2 \alpha$.

B. $P = 1 - 2 \tan^2 \alpha$.

C. $P = -1 + 2 \tan^2 \alpha$.

D. $P = -1 - 2 \tan^2 \alpha$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } P = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \tan^2 \alpha = 1 + 2 \tan^2 \alpha.$$

Câu 86: Đơn giản biểu thức $P = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha}$.

A. $P = -\frac{2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$.

B. $P = \frac{2}{\sin^2 \alpha}$.

C. $P = \frac{2}{1 + \cos \alpha}$.

D. $P = 0$.

Lời giải

Chọn D.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \\ &= \frac{1 - \cos \alpha}{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{1 + \cos \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} = 0. \end{aligned}$$

Câu 87: Đơn giản biểu thức $P = \frac{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \cos^2 \alpha$.

A. $P = \tan^2 \alpha$.

B. $P = 1$.

C. $P = -\cos^2 \alpha$.

D. $P = \cot^2 \alpha$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } P = \frac{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha.$$

Câu 88: Đơn giản biểu thức $P = \frac{2 \cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x}$.

A. $P = \cos x + \sin x$.

B. $P = \cos x - \sin x$.

C. $P = \cos 2x - \sin 2x$.

D. $P = \cos 2x + \sin 2x$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } P = \frac{2 \cos^2 x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin x + \cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} = \cos x - \sin x.$$

Câu 89: Đơn giản biểu thức $P = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\cot \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$.

A. $P = 2 \tan^2 \alpha$.

B. $P = \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha}$.

C. $P = 2 \cot^2 \alpha$.

D. $P = \frac{2}{\cos^2 \alpha}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\cot \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - 1}{\cos \alpha \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right)} \\ &= \frac{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha - 1}{\cos \alpha \cdot \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 2 \tan^2 \alpha. \end{aligned}$$

Câu 90: Đơn giản biểu thức $P = \left(\frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + 1} \right)^2 + 1$.

A. $P = 2$.

B. $P = 1 + \tan \alpha$.

C. $P = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

D. $P = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + 1} = \frac{\sin \alpha \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha} \right)}{\cos \alpha + 1} = \frac{\sin \alpha \left(\frac{\cos \alpha + 1}{\cos \alpha} \right)}{\cos \alpha + 1} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha. .$$

Suy ra $P = \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

Câu 91: Đơn giản biểu thức $P = \tan \alpha \left(\frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right)$.

A. $P = 2$.

B. $P = 2 \cos \alpha$.

C. $P = 2 \tan \alpha$.

D. $P = 2 \sin \alpha$.

Lời giải

Chọn B.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \tan \alpha \left(\frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right) = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right) \\ &= \frac{1}{\cos \alpha} + \cos \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{(1 - \sin^2 \alpha) + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = 2 \cos \alpha. \end{aligned}$$

Câu 92: Đơn giản biểu thức $P = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cot x}$.

A. $P = 1$.

B. $P = -1$.

C. $P = \frac{1}{2}$.

D. $P = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} = 1 - \frac{\cos^2 x}{\cot^2 x} = 1 - \cos^2 x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 - \sin^2 x.$$

$$\text{Và } \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x} = \sin x \cdot \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sin^2 x. \text{ Suy ra } P = 1 - \sin^2 x + \sin^2 x = 1.$$

BÀI 3. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC**A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM****I – CÔNG THỨC CỘNG**

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

II – CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

III – CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG, TỔNG THÀNH TÍCH**1. Công thức biến đổi tích thành tổng**

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)].$$

2. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng toán 1: tính giá trị lượng giác, biểu thức lượng giác.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng công thức lượng giác một cách linh hoạt để biến đổi biểu thức lượng giác nhằm triệt tiêu các giá trị lượng giác của góc không đặc biệt và đưa về giá trị lượng giác đặc biệt.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Tính các giá trị lượng giác sau: $\cos 795^\circ$, $\sin 18^\circ$, $\tan \frac{7\pi}{12}$, $\cot \frac{5\pi}{8}$.

Lời giải

- Vì $795^\circ = 75^\circ + 2.360^\circ = 30^\circ + 45^\circ + 2.360^\circ$ nên

$$\cos 795^\circ = \cos 75^\circ = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

- Vì $54^\circ + 36^\circ = 90^\circ$ nên $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ$

$$\text{Mà } \cos 36^\circ = \cos(2.18^\circ) = 1 - 2\sin^2 18^\circ$$

$$\sin 54^\circ = \sin(18^\circ + 36^\circ) = \sin 18^\circ \cos 36^\circ + \sin 36^\circ \cos 18^\circ$$

$$= \sin 18^\circ (1 - 2\sin^2 18^\circ) + 2\sin 18^\circ \cos^2 18^\circ = \sin 18^\circ (1 - 2\sin^2 18^\circ) + 2\sin 18^\circ (1 - \sin^2 18^\circ)$$

$$= 3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ$$

$$\text{Do đó } 3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ \Leftrightarrow (\sin 18^\circ - 1)(4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 18^\circ = 1 \text{ hoặc } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \text{ hoặc } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$\text{Vì } 0 < \sin 18^\circ < 1 \text{ nên } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

- $\tan \frac{7\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$

- $\cot \frac{5\pi}{8} = \cot\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = -\tan \frac{\pi}{8}$

Ta lại có $1 = \tan \frac{\pi}{4} = \tan \left(2 \cdot \frac{\pi}{8} \right) = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}}$ suy ra

$$1 - \tan^2 \frac{\pi}{8} = 2 \tan \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow \tan^2 \frac{\pi}{8} + 2 \tan \frac{\pi}{8} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{\pi}{8} = -1 - \sqrt{2} \text{ hoặc } \tan \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}$$

Do $\tan \frac{\pi}{8} > 0$ nên $\tan \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}$

Vậy $\cot \frac{5\pi}{8} = 1 - \sqrt{2}$

Ví dụ 2: Tính giá trị biểu thức lượng giác sau:

a) $A = \sin 22^\circ 30' \cos 202^\circ 30'$

b) $B = 4 \sin^4 \frac{\pi}{16} + 2 \cos \frac{\pi}{8}$

c) $C = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15}}{\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{15}}$

d) $D = \sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9}$

Lời giải

a) Cách 1: Ta có $\cos 202^\circ 30' = \cos (180^\circ + 22^\circ 30') = -\cos 22^\circ 30'$

Do đó $A = -\sin 22^\circ 30' \cos 22^\circ 30' = -\frac{1}{2} \sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

Cách 2: $A = \frac{1}{2} [\sin (22^\circ 30' + 202^\circ 30') + \sin (22^\circ 30' - 202^\circ 30')] = \frac{1}{2} [\sin 225^\circ + \sin (-180^\circ)]$

$$= \frac{1}{2} [\sin (180^\circ + 45^\circ) - \sin 180^\circ] = -\frac{1}{2} \sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

b) $B = \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{16} \right)^2 + 2 \cos \frac{\pi}{8} = \left[1 - \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{16} \right) \right]^2 + 2 \cos \frac{\pi}{8}$

$$= 1 - 2 \cos \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} + 2 \cos \frac{\pi}{8} = 1 + \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = 1 + \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{6 + \sqrt{2}}{4}$$

$$c) C = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15}}{\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{15}} = \frac{2 \cos \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{15} \right) \sin \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{15} \right)}{-2 \sin \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{15} \right) \sin \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{15} \right)} = -\frac{\cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = -\cot \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

$$d) D = \left(\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9} \right) - \sin \frac{5\pi}{9} = 2 \sin \frac{4\pi}{9} \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{9} = \sin \frac{4\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} = 0$$

Ví dụ 3: Tính giá trị biểu thức lượng giác sau:

$$a) A = \frac{1}{\cos 290^\circ} + \frac{1}{\sqrt{3} \sin 250^\circ}$$

$$b) B = (1 + \tan 20^\circ)(1 + \tan 25^\circ)$$

$$c) C = \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ$$

$$d) D = \sin^2 \frac{\pi}{9} + \sin^2 \frac{2\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9}$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } \cos 290^\circ = \cos(180^\circ + 90^\circ + 20^\circ) = -\cos(90^\circ + 20^\circ) = \sin 20^\circ$$

$$\sin 250^\circ = \sin(180^\circ + 90^\circ - 20^\circ) = -\sin(90^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\sqrt{3} \cos 20^\circ} = \frac{\sqrt{3} \sin 20^\circ - \sin 20^\circ}{\sqrt{3} \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ} = 4 \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 20^\circ - \frac{1}{2} \sin 20^\circ}{\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ} \\ &= 4 \frac{\sin 60^\circ \cos 20^\circ - \cos 60^\circ \sin 20^\circ}{\sqrt{3} \sin 40^\circ} = \frac{4 \sin 40^\circ}{\sqrt{3} \sin 40^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \text{ Cách 1: Ta có } B &= \left(1 + \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} \right) \left(1 + \frac{\sin 25^\circ}{\cos 25^\circ} \right) = \frac{\sin 20^\circ + \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} \cdot \frac{\sin 25^\circ + \cos 25^\circ}{\cos 25^\circ} \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{\sin 20^\circ \cos 45^\circ + \cos 20^\circ \sin 45^\circ}{\cos 20^\circ} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sin 25^\circ \cos 45^\circ + \cos 25^\circ \sin 45^\circ}{\cos 25^\circ} \\ &= 2 \frac{\sin 65^\circ \sin 70^\circ}{\cos 20^\circ \cos 25^\circ} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{Cách 2: Ta có } \tan 45^\circ = \tan(20^\circ + 25^\circ) = \frac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{1 - \tan 20^\circ \tan 25^\circ}$$

$$\text{Suy ra } 1 = \frac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{1 - \tan 20^\circ \tan 25^\circ} \Leftrightarrow \tan 20^\circ + \tan 25^\circ + \tan 20^\circ \tan 25^\circ = 1$$

$$\Leftrightarrow (1 + \tan 20^\circ)(1 + \tan 25^\circ) = 2.$$

Vậy $B = 2$

$$c) C = \tan 9^\circ + \tan 81^\circ - (\tan 27^\circ + \tan 63^\circ)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin 9^\circ \cos 81^\circ + \sin 81^\circ \cos 9^\circ}{\cos 9^\circ \cos 81^\circ} - \frac{\sin 27^\circ \cos 63^\circ + \sin 63^\circ \cos 27^\circ}{\cos 27^\circ \cos 63^\circ} \\
 &= \frac{1}{\cos 9^\circ \sin 9^\circ} - \frac{1}{\cos 27^\circ \sin 27^\circ} = \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = \frac{2(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} \\
 &= \frac{4 \cos 36^\circ \cdot \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ} = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } D &= \sin^2 \frac{\pi}{9} + \sin^2 \frac{2\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} = \left(\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{2\pi}{9} \right)^2 - \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} \\
 &= \left(2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{18} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{9} \right) = \cos^2 \frac{\pi}{18} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \cos \frac{\pi}{9} \right) \\
 &= \frac{1 + \cos \frac{\pi}{9}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \cos \frac{\pi}{9} \right) = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

Lưu ý: Biến đổi sau thường xuyên được sử dụng

- $\sin x \pm \sqrt{3} \cos x = 2 \left[\frac{1}{2} \sin x \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right] = 2 \sin \left(x \pm \frac{\pi}{3} \right)$
- $\sqrt{3} \sin x \pm \cos x = 2 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \pm \frac{1}{2} \cos x \right] = 2 \sin \left(x \pm \frac{\pi}{6} \right)$
- $\sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right] = \sqrt{2} \sin \left(x \pm \frac{\pi}{4} \right)$

Ví dụ 4: Tính giá trị biểu thức lượng giác sau:

$$\text{a) } A = \sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{8}$$

$$\text{b) } B = \sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ$$

$$\text{c) } C = \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5}$$

$$\text{d) } D = \cos^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{2\pi}{7} + \cos^2 \frac{3\pi}{7}$$

Lời giải

a)

$$A = \frac{1}{2} \left(2 \sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32} \right) \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{16}$$

$$\text{b) Ta có } B = \frac{1}{2} \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \text{ do đó}$$

$$16 \sin 20^\circ \cdot B = 8 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$$

$$\begin{aligned} &= 4 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \\ &= 2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ = \sin 160^\circ \end{aligned}$$

Suy ra $B = \frac{\sin 160^\circ}{16 \sin 20^\circ} = \frac{1}{16}$.

c) Ta có $C = 2 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}$. Vì $\sin \frac{\pi}{5} \neq 0$ nên

$$2 \sin \frac{\pi}{5} \cdot C = 4 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = 2 \sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{4\pi}{5}$$

Suy ra $C = \frac{1}{2}$

c) $D = \frac{1 + \cos \frac{2\pi}{7}}{2} + \frac{1 + \cos \frac{4\pi}{7}}{2} + \frac{1 + \cos \frac{6\pi}{7}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \right)$

Xét $T = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$, vì $\sin \frac{\pi}{7} \neq 0$ nên

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{\pi}{7} T &= 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} \\ &= \left(\sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \right) + \left(\sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} \right) + \left(\sin \pi - \sin \frac{5\pi}{7} \right) \\ &= -\sin \frac{\pi}{7} \end{aligned}$$

Suy ra $T = -\frac{1}{2}$.

Vậy $D = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{5}{4}$.

Ví dụ 5: Cho α, β thỏa mãn $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Tính $\cos(\alpha - \beta)$ và $\sin(\alpha + \beta)$.

Lời giải

- Ta có $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}$ (1)

$$\cos \alpha + \cos \beta = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta = \frac{3}{2}$$
 (2)

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta = 2$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2(\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta) = 2 \Leftrightarrow 2 \cos(\alpha - \beta) = 0$$

$$\text{Vậy } \cos(\alpha - \beta) = 0$$

$$\bullet \text{ Từ giả thiết ta có } (\sin \alpha + \sin \beta)(\cos \alpha + \cos \beta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) + \sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Mặt khác } \sin 2\alpha + \sin 2\beta = 2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = 0 \text{ (Do } \cos(\alpha - \beta) = 0 \text{)}$$

$$\text{Suy ra } \sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dạng toán 2: xác định giá trị của một biểu thức lượng giác có điều kiện.

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Cho $\cos 2x = -\frac{4}{5}$, với $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin x$, $\cos x$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Vì $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin x > 0$, $\cos x > 0$.

Áp dụng công thức hạ bậc, ta có :

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{9}{10} \Rightarrow \sin x = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Theo công thức cộng, ta có

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{10}}$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \sin 2x = -\frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{2}}{10}$$

Ví dụ 2: Cho $\cos 4\alpha + 2 = 6 \sin^2 \alpha$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\tan 2\alpha$.

Lời giải

Ta có $\cos 4\alpha + 2 = 6\sin^2 \alpha \Leftrightarrow 2\cos^2 2\alpha - 1 + 2 = 3(1 - \cos 2\alpha)$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2\alpha + 3\cos 2\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow (2\cos 2\alpha - 1)(\cos 2\alpha + 2) = 0 \Leftrightarrow \cos 2\alpha = \frac{1}{2}$ (Vì $\cos 2\alpha + 2 > 0$)

Ta có $1 + \tan^2 2\alpha = \frac{1}{\cos^2 2\alpha} \Rightarrow \tan^2 2\alpha = \frac{1}{\cos^2 2\alpha} - 1 = 3$

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \pi < \alpha < 2\pi$ nên $\sin 2\alpha < 0$. Mặt khác $\cos 2\alpha > 0$ do đó $\tan 2\alpha < 0$

Vậy $\tan 2\alpha = -\sqrt{3}$

Ví dụ 3: Cho $\frac{1}{\tan^2 \alpha} + \frac{1}{\cot^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 7$. Tính $\cos 4\alpha$.

Lời giải

Ta có $\frac{1}{\tan^2 \alpha} + \frac{1}{\cot^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 7$

$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 \alpha + 1}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha} = 7$

$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + 1) + \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha + 1)}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = 7$

$\Leftrightarrow \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 1 = 7\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

$\Leftrightarrow (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 1 = 7\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

$\Leftrightarrow 2 = 9\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

$\Leftrightarrow 8 = 9(2\sin \alpha \cos \alpha)^2$

$\Leftrightarrow 8 = 9\sin^2 2\alpha$

$\Leftrightarrow 16 = 9(1 - \cos 4\alpha)$

$\Leftrightarrow \cos 4\alpha = -\frac{7}{9}$

Vậy $\cos 4\alpha = -\frac{7}{9}$

Ví dụ 4: Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = \cot \frac{\alpha}{2}$ với $0 < \alpha < \pi$. Tính $\tan \left(\frac{\alpha + 2013\pi}{2} \right)$.

Lời giải

Ta có $\sin \alpha = 2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 1}$

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 1}$$

$$\text{Do đó } \sin \alpha + \cos \alpha = \cot \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 1} + \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 1} = \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{\alpha}{2} \left(1 + 2 \tan \frac{\alpha}{2} - \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) = 1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \tan^3 \frac{\alpha}{2} - \tan^2 \frac{\alpha}{2} - \tan \frac{\alpha}{2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\tan \frac{\alpha}{2} - 1 \right)^2 \left(\tan \frac{\alpha}{2} + 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \pm 1$$

$$\text{Vì } 0 < \alpha < \pi \Rightarrow 0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ do đó } \tan \frac{\alpha}{2} > 0 \text{ nên } \tan \frac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \cot \frac{\alpha}{2} = 1$$

$$\text{Ta có } \tan \left(\frac{\alpha + 2013\pi}{2} \right) = \tan \left(\frac{\alpha}{2} + 2006\pi + \frac{\pi}{2} \right) = -\cot \frac{\alpha}{2} = -1$$

$$\text{Vậy } \tan \left(\frac{\alpha + 2013\pi}{2} \right) = -1$$

Lưu ý: Ta có thể biểu diễn $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ qua $t = \tan \frac{\alpha}{2}$ như sau:

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tan \alpha = \frac{2t}{1-t^2}, \cot \alpha = \frac{1-t^2}{2t} \text{ với } \alpha \text{ làm các biểu thức có nghĩa.}$$

Ví dụ 5: Cho $\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}, \tan \alpha = -2 \tan \beta$.

$$\text{Tính } A = \sin \left(\alpha + \frac{3\pi}{8} \right) \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{8} \right) + \sin \left(\beta - \frac{5\pi}{12} \right) \sin \left(\beta - \frac{\pi}{12} \right).$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\tan \alpha = -2 \tan \beta \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \beta = -2 \sin \beta \cos \alpha \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta được } \begin{cases} \cos \alpha \sin \beta = -\frac{1}{3} \\ \sin \alpha \cos \beta = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = \frac{1}{9} \\ \sin^2 \alpha \cos^2 \beta = \frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta = \frac{1}{9} \\ \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) = \frac{4}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta = \frac{1}{9} \\ \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \left(1 - \sin^2 \beta - \frac{1}{3}\right) \sin^2 \beta = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \sin^4 \beta - \frac{2}{3} \sin^2 \beta + \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{3}\right)^2 = 0 \Rightarrow \sin^2 \beta = \frac{1}{3}$$

Do đó $\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Ta có $\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{8}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} \left[\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\frac{\pi}{4} \right] = \frac{1}{2} \left(\cos 2\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - 2\sin^2 \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - 2 \cdot \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{2 + 3\sqrt{2}}{12}$$

$$\sin\left(\beta - \frac{\pi}{12}\right) \cos\left(\beta - \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \left[\sin\left(2\beta - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\frac{\pi}{3} \right] = \frac{1}{2} \left[-\cos 2\beta + \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(-1 + 2\sin^2 \beta + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(-1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{-2 + 3\sqrt{2}}{12}$$

Do đó $A = -\frac{2 + 3\sqrt{2}}{12} + \frac{-2 + 3\sqrt{2}}{12} = -\frac{1}{3}$

Dạng toán 3: chứng minh đẳng thức, đơn giản biểu thức lượng giác và chứng minh biểu thức lượng giác không phụ thuộc vào biến.

1. Phương pháp giải.

Để chứng minh đẳng thức lượng giác ta có các cách biến đổi: vế này thành vế kia, biến đổi tương đương, biến đổi hai vế cùng bằng một đại lượng trung gian. Trong quá trình biến đổi ta cần sử dụng linh hoạt các công thức lượng giác.

Lưu ý: Khi biến đổi cần phải *hướng đích*, chẳng hạn biến đổi vế phải, ta cần xem vế trái có đại lượng nào để từ đó liên tưởng đến kiến thức đã có để làm sao xuất hiện các đại lượng ở vế trái. Và ta thường biến đổi vế phức tạp về vế đơn giản hơn.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi góc lượng giác α làm cho biểu thức xác định thì

a) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4\alpha}{4}$

b) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha$

$$c) \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \cot^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$

$$= 1 - \frac{1 - \cos 4\alpha}{4} = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4\alpha}{4}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha &= (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 \\ &+ 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{3}{8} (1 - \cos 4\alpha) \\ &= \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha \end{aligned}$$

$$c) \text{ Ta có } \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}$$

$$= \frac{\left[\sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right]^2}{\left[\sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right]^2} = \frac{2 \cos^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)}{2 \sin^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)} = \cot^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$$

Ví dụ 2: Cho $0 < \alpha < \pi, \alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng:

$$a) \sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha} = 2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$b) \frac{\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha}}{\sqrt{1 + \cos \alpha} - \sqrt{1 - \cos \alpha}} = \tan \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

Lời giải

$$a) \text{ Do } 0 < \alpha < \pi \text{ nên } \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) > 0, \sin \alpha > 0$$

Đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha} \right)^2 &= 4 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \\ \Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{1 + \cos \alpha} \sqrt{1 - \cos \alpha} &= 2 \left[1 - \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ \Leftrightarrow \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} &= \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ (luôn đúng)} \Rightarrow \text{ĐPCM.}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } VT &= \frac{(\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha})^2}{(\sqrt{1 + \cos \alpha} - \sqrt{1 - \cos \alpha})(\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha})} \\ &= \frac{2 + 2\sqrt{1 + \cos \alpha} \cdot \sqrt{1 - \cos \alpha}}{2 \cos \alpha} = \frac{1 + \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{1 + |\sin \alpha|}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

Vì $0 < \alpha < \pi$ nên $\sin \alpha > 0$ do đó

$$\begin{aligned} VT &= \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2}{\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right)} \\ &= \frac{\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{2} \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{2} \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} = \tan \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = VP \Rightarrow \text{ĐPCM.} \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng

$$\text{a) } \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

$$\text{b) } \cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2} = 2 \text{ với } \sin \alpha + \sin \beta = 3 \sin \left(\alpha + \beta \right), \alpha + \beta \neq k2\pi$$

$$\text{c) } \frac{\sin \alpha + \sin \beta \cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha - \sin \beta \sin(\alpha + \beta)} = \tan(\alpha + \beta)$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) &= -\frac{1}{2} [\cos 2\alpha - \cos 2\beta] \\ &= -\frac{1}{2} [(1 - 2 \sin^2 \alpha) - (1 - 2 \sin^2 \beta)] = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \end{aligned}$$

$$\text{b) Từ giả thiết ta có } 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 6 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\text{Do } \alpha + \beta \neq k2\pi \Rightarrow \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \neq 0 \text{ suy ra } \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 3 \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = 3 \left(\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2} = 2 \Rightarrow \text{ĐPCM}$$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có } VT &= \frac{\sin \alpha + \frac{1}{2}[\sin(\alpha + 2\beta) + \sin(-\alpha)]}{\cos \alpha - \left(-\frac{1}{2}\right)[\cos(\alpha + 2\beta) - \cos(-\alpha)]} = \frac{\sin \alpha + \sin(\alpha + 2\beta)}{\cos \alpha + \cos(\alpha + 2\beta)} \\ &= \frac{2 \sin(\alpha + \beta) \cos(-\beta)}{2 \cos(\alpha + \beta) \cos(-\beta)} = \tan(\alpha + \beta) = VP \Rightarrow \text{ĐPCM} \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x .

$$\text{a) } A = \cos^2 \alpha + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right)$$

$$\text{b) } B = \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \cdot \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos \left(\alpha + \frac{3\pi}{4} \right)$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } A &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[3 + \cos 2\alpha + \cos \left(\frac{4\pi}{3} + 2\alpha \right) + \cos \left(\frac{4\pi}{3} - 2\alpha \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[3 + \cos 2\alpha + 2 \cos \frac{4\pi}{3} \cos 2\alpha \right] = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Vì } \alpha + \frac{\pi}{6} &= \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \text{ và} \\ \cos \left(\alpha + \frac{3\pi}{4} \right) &= -\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \text{ nên} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \cdot \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \cdot \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \cos \left[\left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) - \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right] = \cos \left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

Ví dụ 5: Đơn giản biểu thức sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{\cos a + 2 \cos 2a + \cos 3a}{\sin a + \sin 2a + \sin 3a} & \text{b) } B &= \frac{\cos \left(a + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(a - \frac{\pi}{3} \right)}{\cot a - \cot \frac{a}{2}} \end{aligned}$$

c) $C = \cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \dots + \cos(a+nb)$ ($n \in \mathbb{N}$)

Lời giải

a) $A = \frac{(\cos a + \cos 3a) + 2 \cos 2a}{(\sin a + \sin 3a) + 2 \sin 2a} = \frac{2 \cos 2a \cos a + 2 \cos 2a}{2 \sin 2a \cos a + 2 \sin 2a} = \frac{2 \cos 2a (\cos a + 1)}{2 \sin 2a (\cos a + 1)} = \cot 2a$

b) Ta có $\cos\left(a + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(a - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos a \cos \frac{\pi}{3} = \cos a$ và

$$\cot a - \cot \frac{a}{2} = \frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\cos \frac{a}{2}}{\sin \frac{a}{2}} = \frac{\sin \frac{a}{2} \cos a - \cos \frac{a}{2} \sin a}{\sin a \sin \frac{a}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{a}{2} - a\right)}{\sin a \sin \frac{a}{2}} = \frac{-\sin \frac{a}{2}}{\sin a \sin \frac{a}{2}} = -\frac{1}{\sin a}$$

Suy ra $B = \frac{\cos a}{-\frac{1}{\sin a}} = -\sin a \cos a = -\frac{\sin 2a}{2}$.

c) Ta có $C \cdot 2 \sin \frac{b}{2} = 2 \sin \frac{b}{2} \cos a + 2 \sin \frac{b}{2} \cos(a+b) + 2 \sin \frac{b}{2} \cos(a+2b) + \dots + 2 \sin \frac{b}{2} \cos(a+nb)$

$$= \sin\left(\frac{b}{2} + a\right) + \sin\left(\frac{b}{2} - a\right) + \sin\left(\frac{3b}{2} + a\right) + \sin\left(-\frac{b}{2} - a\right) + \sin\left(\frac{5b}{2} + a\right) + \sin\left(-\frac{3b}{2} - a\right) + \dots + \sin\left(\frac{(2n+1)b}{2} + a\right) + \sin\left(-\frac{(2n-1)b}{2} - a\right)$$

$$\sin\left(\frac{b}{2} - a\right) + \sin\left(\frac{(2n+1)b}{2} + a\right) = 2 \sin(n+1)b \cos\left(\frac{nb}{2} - a\right)$$

Suy ra $C = \frac{\sin(n+1)b \cos\left(\frac{nb}{2} - a\right)}{\sin \frac{b}{2}}$

Ví dụ 6: Cho $\sin(a+b) = 2 \cos(a-b)$. Chứng minh rằng biểu thức $M = \frac{1}{2 - \sin 2a} + \frac{1}{2 - \sin 2b}$

không phụ thuộc vào a, b .

Lời giải

Ta có $M = \frac{4 - (\sin 2a + \sin 2b)}{(2 - \sin 2a)(2 - \sin 2b)} = \frac{4 - (\sin 2a + \sin 2b)}{4 - 2(\sin 2a + \sin 2b) + \sin 2a \sin 2b}$

Ta có $\sin 2a + \sin 2b = 2 \sin(a+b) \cos(a-b)$

Mà $\sin(a+b) = 2 \cos(a-b) \Rightarrow \sin^2(a+b) = 4 \cos^2(a-b)$ nên

$$\cos 2(a+b) - \cos 2(a-b) = 1 - 2 \sin^2(a+b) - [2 \cos^2(a-b) - 1]$$

$$= 2 - 2[\sin^2(a+b) + \cos^2(a-b)] = 2 - 10 \cos^2(a-b)$$

$$\text{Suy ra } M = \frac{4 - 4\cos^2(a-b)}{4 - 8\cos^2(a-b) - \frac{1}{2} \cdot [2 - 10\cos^2(a-b)]} = \frac{4 - 4\cos^2(a-b)}{3 - 3\cos^2(a-b)} = \frac{4}{3}$$

Ví dụ 7: Chứng minh rằng

$$\text{a) } \sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha = 4\sin \alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$$

$$\text{b) } \sin^3 \frac{\alpha}{3} + 3\sin^3 \frac{\alpha}{3^2} + \dots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{\alpha}{3^n} = \frac{1}{4} \left(3^n \sin \frac{\alpha}{3^n} - \sin \alpha \right).$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha$$

$$= 2\sin \alpha \cos^2 \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha$$

$$= 2\sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + (1 - 2\sin^2 \alpha) \sin \alpha$$

$$= 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } 4\sin \alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = -4\sin \alpha \cdot \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} - \cos(-2\alpha) \right)$$

$$= -2\sin \alpha \cdot \left(-\frac{1}{2} - \cos 2\alpha \right) = 2\sin \alpha \left(\frac{1}{2} + 1 - 2\sin^2 \alpha \right)$$

$$= 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra ĐPCM

$$\text{b) Theo câu a) ta có } \sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha \Rightarrow \sin^3 \alpha = \frac{3\sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$$

$$\text{Do đó } \sin^3 \frac{\alpha}{3} = \frac{3\sin \frac{\alpha}{3} - \sin \alpha}{4}, \sin^3 \frac{\alpha}{3^2} = \frac{3\sin \frac{\alpha}{3^2} - \sin \frac{\alpha}{3}}{4}, \dots, \sin^3 \frac{\alpha}{3^n} = \frac{3\sin \frac{\alpha}{3^n} - \sin \frac{\alpha}{3^{n-1}}}{4}$$

$$\text{Suy ra } VT = \frac{3\sin \frac{\alpha}{3} - \sin \alpha}{4} + 3 \frac{3\sin \frac{\alpha}{3^2} - \sin \frac{\alpha}{3}}{4} + \dots + 3^{n-1} \frac{3\sin \frac{\alpha}{3^n} - \sin \frac{\alpha}{3^{n-1}}}{4}$$

$$= -\frac{\sin \alpha}{4} + 3^{n-1} \frac{3\sin \frac{\alpha}{3^n}}{4} = \frac{1}{4} \left(3^n \sin \frac{\alpha}{3^n} - \sin \alpha \right) = VP \Rightarrow \text{ĐPCM.}$$

Lưu ý: Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$,
 $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$, hai công thức này được gọi là công thức nhân ba

Dạng toán 4: bất đẳng thức lượng giác và tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức lượng giác.

1. Phương pháp giải.

- Sử dụng phương pháp chứng minh đại số quen biết.
- Sử dụng các tính chất về dấu của giá trị lượng giác một góc.
- Sử dụng kết quả $|\sin \alpha| \leq 1, |\cos \alpha| \leq 1$ với mọi số thực α

2. Các ví dụ điển hình.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ thì

a) $2 \cot^2 \alpha \geq 1 + \cos 2\alpha$

b) $\cot \alpha \geq 1 + \cot 2\alpha$

Lời giải

a) Bất đẳng thức tương đương với

$$2 \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) \geq 2 \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \geq 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \sin^2 \alpha \geq 2 \Leftrightarrow \sin^4 \alpha - 2 \sin^2 \alpha + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 \alpha - 1)^2 \geq 0 \text{ (đúng) ĐPCM.}$$

b) Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \geq \frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \Leftrightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \geq \frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} (*)$$

$$\text{Vì } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{cases} \text{ nên}$$

$$(*) \Leftrightarrow 2 \cos^2 \alpha \geq \sin 2\alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \sin 2\alpha \text{ (đúng) ĐPCM.}$$

Ví dụ 2: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng $\left(\sin \alpha + \frac{1}{2 \cos \alpha} \right) \left(\cos \alpha + \frac{1}{2 \sin \alpha} \right) \geq 2$

Lời giải

$$\text{Ta có } \left(\sin \alpha + \frac{1}{2 \cos \alpha} \right) \left(\cos \alpha + \frac{1}{2 \sin \alpha} \right) = \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{4 \sin \alpha \cos \alpha} + 1$$

$$\text{Vì } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ nên } \sin \alpha \cos \alpha > 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có

$$\sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{4 \sin \alpha \cos \alpha} \geq 2 \sqrt{\sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{1}{4 \sin \alpha \cos \alpha}} = 1$$

$$\text{Suy ra } \left(\sin \alpha + \frac{1}{2 \cos \alpha} \right) \left(\cos \alpha + \frac{1}{2 \sin \alpha} \right) \geq 2 \text{ ĐPCM.}$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với $0 \leq \alpha \leq \pi$ thì

$$\left(2 \cos 2\alpha - 1 \right)^2 - 4 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) > \left(\sqrt{2 \sin \alpha} - 2 \right) (3 - 2 \cos 2\alpha).$$

Lời giải

Bất đẳng thức tương đương với

$$\Leftrightarrow \left(2 \cos 2\alpha - 1 \right)^2 - 2 \left[1 - \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \right] + 2(3 - 2 \cos 2\alpha) > \sqrt{2 \sin \alpha} [3 - 2(1 - 2 \sin^2 \alpha)]$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^2 2\alpha - 8 \cos 2\alpha + 5 + 2 \sin \alpha > \sqrt{2 \sin \alpha} (4 \sin^2 \alpha + 1)$$

$$\Leftrightarrow 4(1 - \cos 2\alpha)^2 + 1 + 2 \sin \alpha > \sqrt{2 \sin \alpha} (4 \sin^2 \alpha + 1)$$

$$\Leftrightarrow 16 \sin^4 \alpha + 2 \sin \alpha + 1 > \sqrt{2 \sin \alpha} (4 \sin^2 \alpha + 1)$$

$$\text{Đặt } \sqrt{2 \sin \alpha} = t, \text{ vì } 0 \leq \alpha \leq \pi \Rightarrow 0 \leq t \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{Bất đẳng thức trở thành } t^8 + t^2 + 1 > t(t^4 + 1) \Leftrightarrow t^8 - t^5 + t^2 - t + 1 > 0 (*)$$

$$+ \text{ Nếu } 0 \leq t < 1: (*) \Leftrightarrow t^8 + t^2(1 - t^3) + 1 - t > 0 \text{ đúng vì } 1 - t > 0, 1 - t^3 > 0, t^2 \geq 0 \text{ và } t^8 \geq 0.$$

$$+ \text{ Nếu } 1 \leq t \leq \sqrt{2}: (*) \Leftrightarrow t^5(t^3 - 1) + t(t - 1) + 1 > 0 \text{ đúng vì } t^5(t^3 - 1) \geq 0, t(t - 1) \geq 0$$

Vậy bất đẳng thức (*) đúng suy ra ĐPCM.

Ví dụ 4: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \sin x + \cos x$$

$$\text{b) } B = \sin^4 x + \cos^4 x$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } A^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin 2x$$

$$\text{Vì } \sin 2x \leq 1 \text{ nên } A^2 = 1 + \sin 2x \leq 1 + 1 = 2 \text{ suy ra } -\sqrt{2} \leq A \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{Khi } x = \frac{\pi}{4} \text{ thì } A = \sqrt{2}, x = -\frac{3\pi}{4} \text{ thì } A = -\sqrt{2}$$

$$\text{Do đó } \max A = \sqrt{2} \text{ và } \min A = -\sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } B &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} + \frac{1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} \\ &= \frac{2 + 2\cos^2 2x}{4} = \frac{2 + 1 + \cos 4x}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \cos 4x \end{aligned}$$

Vì $-1 \leq \cos 4x \leq 1$ nên $\frac{1}{2} \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \cos 4x \leq 1$ suy ra $\frac{1}{2} \leq B \leq 1$.

Vậy $\max B = 1$ khi $\cos 4x = 1$ và $\min B = \frac{1}{2}$ khi $\cos 4x = -1$.

Ví dụ 5: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức $A = 2 - 2\sin x - \cos 2x$

Lời giải

Ta có $A = 2 - 2\sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 2\sin^2 x - 2\sin x + 1$

Đặt $t = \sin x$, $|t| \leq 1$ khi đó biểu thức trở thành $A = 2t^2 - 2t + 1$

Xét hàm số $y = 2t^2 - 2t + 1$ với $|t| \leq 1$.

Bảng biến thiên:

t	-1	$\frac{1}{2}$	1
y	5	$\frac{1}{2}$	1

Từ bảng biến thiên suy ra $\max A = 5$ khi $t = -1$ hay $\sin x = -1$.

$\min A = \frac{1}{2}$ khi $t = \frac{1}{2}$ hay $\sin x = \frac{1}{2}$.

Dạng toán 5: chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức trong tam giác.

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

$$\text{a) } \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$\text{b) } \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$$

$$\text{c) } \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

Lời giải

$$a) VT = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$\text{Mặt khác trong tam giác } ABC \text{ ta có } A+B+C = \pi \Rightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$$

$$\text{Suy ra } \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}, \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } VT &= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2} = 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) \\ &= 4 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = VP \Rightarrow \text{ĐPCM.} \end{aligned}$$

$$b) VT = \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C = 2 - \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} - \cos^2 C$$

$$= 2 - \cos(A+B) \cos(A-B) - \cos^2 C$$

$$\text{Vì } A+B+C = \pi \Rightarrow \cos(A+B) = -\cos C \text{ nên}$$

$$\begin{aligned} VT &= 2 + \cos C \cos(A-B) + \cos C \cos(A+B) = 2 + \cos C [\cos(A-B) + \cos(A+B)] \\ &= 2 + \cos C \cdot 2 \cos A \cos B = 2(1 + \cos A \cos B \cos C) = VP \Rightarrow \text{ĐPCM.} \end{aligned}$$

$$c) VT = 2 \sin(A+B) \cos(A-B) + 2 \sin C \cos C$$

$$\text{Vì } A+B+C = \pi \Rightarrow \cos C = -\cos(A+B), \sin(A+B) = \sin C \text{ nên}$$

$$\begin{aligned} VT &= 2 \sin C \cos(A-B) - 2 \sin C \cos(A+B) = 2 \sin C [\cos(A-B) - \cos(A+B)] \\ &= 2 \sin C \cdot [-2 \sin A \sin(-B)] = 4 \sin A \sin B \sin C = VP \Rightarrow \text{ĐPCM.} \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Chứng minh trong mọi tam giác ABC không vuông ta đều có:

$$a) \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$$

$$b) \cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$$

Lời giải

$$a) \text{ Đẳng thức tương đương với } \tan A + \tan B = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C - \tan C$$

$$\Leftrightarrow \tan A + \tan B = \tan C (\tan A \tan B - 1) \quad (*)$$

$$\text{Do tam giác } ABC \text{ không vuông nên } A+B \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \tan A \tan B - 1 = \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B} - 1 = \frac{\sin A \sin B - \cos A \cos B}{\cos A \cos B} = -\frac{\cos(A+B)}{\cos A \cos B} \neq 0$$

Suy ra

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\tan A + \tan B}{\tan A \tan B - 1} = \tan C \Leftrightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C \Leftrightarrow \tan(A + B) = -\tan C$$

Đẳng thức cuối đúng vì $A + B + C = \pi \Rightarrow \text{ĐPCM}$.

$$\text{b) Vì } A + B + C = \pi \Rightarrow \cot(A + B) = -\cot C$$

Theo công thức cộng ta có:

$$\cot(A + B) = \frac{1}{\tan(A + B)} = \frac{1 - \tan A \tan B}{\tan A + \tan B} = \frac{1 - \frac{1}{\cot A \cot B}}{\frac{1}{\cot A} + \frac{1}{\cot B}} = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$$

$$\text{Suy ra } \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B} = -\cot C \Rightarrow \cot A \cot B - 1 = -\cot C (\cot A + \cot B)$$

$$\text{Hay } \cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1 \text{ ĐPCM.}$$

Ví dụ 3: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

$$\text{a) } \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{b) } \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{c) } \tan A \tan B \tan C \geq \sqrt{3} \text{ với } ABC \text{ là tam giác nhọn.}$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \cos A + \cos B + \cos C = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \cos C$$

$$\text{Vì } \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \text{ nên } \cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}$$

$$\text{Mặt khác } \cos C = 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} \text{ do đó}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} = -2 \left(\sin^2 \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= -2 \left(\sin^2 \frac{C}{2} - 2 \sin \frac{C}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \frac{1}{4} \cos^2 \frac{A-B}{2} \right) + 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{A-B}{2}$$

$$= -2 \left(\sin \frac{C}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{A-B}{2} \right)^2 + 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{A-B}{2}$$

$$\text{Vì } \left| \cos \frac{A-B}{2} \right| \leq 1 \Rightarrow \cos^2 \frac{A-B}{2} \leq 1 \text{ nên}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{ĐPCM.}$$

b) Trước tiên ta chứng minh bổ đề sau:

$$\text{Nếu } 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi \text{ thì } \frac{\sin x + \sin y}{2} \leq \sin \frac{x+y}{2}.$$

Thật vậy, do $0 \leq \frac{x+y}{2} \leq \pi \Rightarrow \sin \frac{x+y}{2} > 0$ và $\cos \frac{x-y}{2} \leq 1$ nên

$$\frac{\sin x + \sin y}{2} = \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \leq \sin \frac{x+y}{2}$$

$$\text{Áp dụng bổ đề ta có: } \frac{\sin A + \sin B}{2} \leq \sin \frac{A+B}{2}, \frac{\sin C + \sin \frac{\pi}{3}}{2} \leq \sin \frac{C + \frac{\pi}{3}}{2}$$

Suy ra

$$\frac{\sin A + \sin B}{2} + \frac{\sin C + \sin \frac{\pi}{3}}{2} \leq \sin \frac{A+B}{2} + \sin \frac{C + \frac{\pi}{3}}{2} \leq 2 \sin \frac{1}{2} \left(\frac{A+B}{2} + \frac{C + \frac{\pi}{3}}{2} \right) = 2 \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Do đó } \sin A + \sin B + \sin C \leq 3 \sin \frac{\pi}{3} \text{ hay } \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ ĐPCM.}$$

c) Vì ABC là tam giác nhọn nên $\tan A > 0, \tan B > 0, \tan C > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C}$

Theo ví dụ 2 ta có $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$ nên

$$\tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C} \left(\sqrt[3]{(\tan A \tan B \tan C)^2} - 3 \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(\tan A \tan B \tan C)^2} \geq 3 \Leftrightarrow \tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3} \text{ ĐPCM.}$$

Ví dụ 4: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

$$\text{a) } \sin A + \sin B + \sin C \leq \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}$$

$$\text{b) } \cos A \cos B \cos C \leq \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\text{c) } \tan A + \tan B + \tan C \geq \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \text{ Với tam giác } ABC \text{ không vuông.}$$

Lời giải

a) Vì $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2} > 0$ và $\cos \frac{A-B}{2} \leq 1$ nên

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \leq 2 \cos \frac{C}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta có $\sin B + \sin C \leq 2 \cos \frac{A}{2}$, $\sin C + \sin A \leq 2 \cos \frac{B}{2}$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên và rút gọn ta được

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}. \text{ ĐPCM.}$$

b) +TH1: Nếu tam giác ABC tù: không mất tính tổng quát giả sử $A > \frac{\pi}{2} \Rightarrow B < \frac{\pi}{2}, C < \frac{\pi}{2}$ suy ra $\cos A < 0, \cos B > 0, \cos C > 0$

$\cos A \cos B \cos C < 0$. Mà $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} > 0$ do đó bất đẳng thức luôn đúng.

+ TH2: Nếu tam giác ABC nhọn: $\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$.

Vì $\cos(A+B) = -\cos C$ và $\cos(A-B) \leq 1$ nên $\cos A \cos B \leq \frac{1}{2}(1 - \cos C) = \sin^2 \frac{C}{2}$.

Chứng minh tương tự ta có $\cos B \cos C \leq \sin^2 \frac{A}{2}$, $\cos C \cos A \leq \sin^2 \frac{B}{2}$.

Do các vế đều không âm nên nhân vế với vế các bất đẳng thức trên ta được

$$(\cos A \cos B)(\cos B \cos C)(\cos C \cos A) \leq \sin^2 \frac{C}{2} \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos A \cos B \cos C \leq \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \text{ ĐPCM.}$$

c) Ta có $\tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} = \frac{2 \sin(A+B)}{\cos(A+B) + \cos(A-B)}$

Mà $\sin(A+B) = \sin C$, $\cos(A+B) = -\cos C$ nên

$$\tan A + \tan B = \frac{2 \sin C}{-\cos C + \cos(A-B)} \geq \frac{2 \sin C}{1 - \cos C} = \frac{4 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{2 \sin^2 \frac{C}{2}} = 2 \cot \frac{C}{2}$$

Tương tự ta có $\tan B + \tan C \geq 2 \cot \frac{A}{2}$, $\tan C + \tan A \geq 2 \cot \frac{B}{2}$

Cộng vế với vế và rút gọn ta được

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \text{ ĐPCM.}$$

Nhận xét:

+ Để chứng minh $x + y + z \geq a + b + c$ ta có thể đi chứng minh $x + y \geq 2a$ (hoặc $2b, 2c$) rồi xây dựng bất đẳng thức tương tự. Cộng vế với vế suy ra đpcm.

+ Để chứng minh $xyz \geq abc$ với x, y, z, a, b, c không âm ta đi chứng minh $xy \geq a^2$ (hoặc b^2, c^2) rồi xây dựng bất đẳng thức tương tự. nhân vế với vế suy ra đpcm.

Ví dụ 5: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

$$a) \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} \leq 3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$b) \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \geq \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức $x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)}$ với mọi x, y không âm ta có

$$\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} \leq \sqrt{2(\sin A + \sin B)} = \sqrt{2 \cdot 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}} \leq 2\sqrt{\sin \frac{A+B}{2}}$$

$$\text{Tương tự ta có } \sqrt{\sin C} + \sqrt{\sin \frac{\pi}{3}} \leq 2\sqrt{\sin \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)}$$

Cộng vế với vế ta được

$$\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} + \sqrt{\sin \frac{\pi}{3}} \leq 2\left(\sqrt{\sin \frac{A+B}{2}} + \sqrt{\sin \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)}\right)$$

Mà

$$\sqrt{\sin \frac{A+B}{2}} + \sqrt{\sin \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)} \leq 2\sqrt{\sin \left[\frac{A+B}{2} + \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)\right]} = 2\sqrt{\sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} = 2\sqrt{\sin \frac{\pi}{3}}$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} + \sqrt{\sin \frac{\pi}{3}} \leq 4\sqrt{\sin \frac{\pi}{3}}$$

$$\text{Hay } \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} \leq 3\sqrt{\sin \frac{\pi}{3}} = 3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \text{ ĐPCM.}$$

$$b) \text{ Ta có } \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) = 1 + \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin A \sin B}.$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ với mọi x, y dương ta có

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} \geq \frac{4}{\sin A + \sin B} = \frac{4}{2\sqrt{\sin A \sin B}} = \frac{2}{\sqrt{\sin A \sin B}}$$

$$\text{Do đó } \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \geq 1 + \frac{2}{\sqrt{\sin A \sin B}} + \frac{1}{\sin A \sin B} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\sin A \sin B}}\right)^2$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \sin A \sin B &= -\frac{1}{2}[\cos(A+B) - \cos(A-B)] = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)] \\ &\geq \frac{\cos(A+B) + 1}{2} = \sin^2 \frac{A+B}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Nên } \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{A+B}{2}}\right)^2 \quad (1)$$

$$\text{Tương tự ta có } \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)}\right)^2 \quad (2)$$

Nhân vế với vế của (1) và (2) ta được

$$\left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{A+B}{2}}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)}\right)^2$$

Ta lại có

$$\left(1 + \frac{1}{\sin \frac{A+B}{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\left[\frac{A+B}{2} + \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)\right]}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right)^2$$

$$\text{Suy ra } \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right)^4$$

$$\text{Hay } \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right)^3 = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \quad \text{ĐPCM.}$$

Nhận xét: Cho tam giác ABC và hàm số f

- Để chứng minh $f(A) + f(B) + f(C) \geq 3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Ta đi chứng minh

$$f(A) + f(B) \geq 2f\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

khi đó $f(C) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq 2f\left(\frac{C + \frac{\pi}{3}}{2}\right)$ từ đó suy ra

$$f(A) + f(B) + f(C) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq 2\left[f\left(\frac{A+B}{2}\right) + f\left(\frac{C + \frac{\pi}{3}}{2}\right)\right] \geq 4f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Do đó $f(A) + f(B) + f(C) \geq 3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

- Để chứng minh $f(A)f(B)f(C) \geq f^3\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Ta đi chứng minh $f(A)f(B) \geq f^2\left(\frac{A+B}{2}\right)$

khi đó $f(C)f\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq f^2\left(\frac{C + \frac{\pi}{3}}{2}\right)$ từ đó suy ra

$$f(A)f(B)f(C)f\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq f^2\left(\frac{A+B}{2}\right)f^2\left(\frac{C + \frac{\pi}{3}}{2}\right) \geq f^4\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Do đó $f(A)f(B)f(C) \geq f^3\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Ví dụ 6: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\cos \frac{A}{2} \cos(B-C) + \cos A \cos \frac{B-C}{2} = 0$.

Chứng minh rằng $\cos 2B + \cos 2C \leq 1$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có

$$\cos \frac{A}{2} \left(2 \cos^2 \frac{B-C}{2} - 1 \right) + \cos \frac{B-C}{2} \left(2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} \left(\cos \frac{B-C}{2} + \cos \frac{A}{2} \right) - \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \right) \left(2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} - 1 \right) = 0 \quad (1)$$

Vì $0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{A}{2} > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \frac{B-C}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{B-C}{2} > 0$ và

$$\frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \Rightarrow \cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B+C}{2} \text{ nên } (1) \Leftrightarrow 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = 1 \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 1$$

Áp dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$ suy ra $\sin^2 B + \sin^2 C \geq \frac{(\sin B + \sin C)^2}{2} = \frac{1}{2}$

Do đó $\cos 2y + \cos 2z = 2 - 2(\sin^2 y + \sin^2 z) \leq 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ ĐPCM.

Ví dụ 7: Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta luôn có

$$\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Lời giải

Do A, B, C bình đẳng nên không mất tính tổng quát giả sử

$$A \geq B \geq C \Rightarrow \frac{\pi}{2} > \frac{A}{2} \geq \frac{B}{2} \geq \frac{C}{2} > 0$$

Suy ra $\sin \frac{A}{2} \geq \sin \frac{B}{2} \geq \sin \frac{C}{2} > 0$, $\cos \frac{A}{2} \geq \cos \frac{B}{2} \geq \cos \frac{C}{2} > 0$

$$\Rightarrow \left(\sin \frac{A}{2} - \sin \frac{B}{2} \right) \left(\cos \frac{B}{2} - \cos \frac{C}{2} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \leq \sin \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

$$\text{Do đó } \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \leq \sin \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

Mà

$$\sin \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = \sin \left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2} \right) + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

(1)

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có:

$$\cos^2 \frac{B}{2} + \frac{3}{4} \geq 2\sqrt{\frac{3}{4}\cos^2 \frac{B}{2}} = \sqrt{3} \cos \frac{B}{2},$$

$$3\sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} \geq 2\sqrt{3\sin^2 \frac{B}{2}\cos^2 \frac{B}{2}} = 2\sqrt{3} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

$$\text{Suy ra } 2\left(\cos^2 \frac{B}{2} + \frac{3}{4}\right) + \left(3\sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2}\right) \geq 2\sqrt{3} \cos \frac{B}{2} + 2\sqrt{3} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

$$\text{Hay } 2\sqrt{3}\left(\cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}\right) \leq \frac{3}{2} + 3\left(\sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2}\right) = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \text{ĐPCM.}$$

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Rút gọn biểu thức $M = \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ$.

- A. $M = 1$. B. $M = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $M = \frac{1}{4}$. D. $M = 0$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ = (\cos^2 15^\circ)^2 - (\sin^2 15^\circ)^2 \\ &= (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ)(\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ) \\ &= \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos(2 \cdot 15^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Câu 2: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ + \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$.

- A. $M = \sqrt{3}$. B. $M = \frac{1}{2}$. C. $M = \frac{1}{4}$. D. $M = 0$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức nhân đôi $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= (\cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ) + (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) \\ &= (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ)(\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ) + (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) \\ &= (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) + (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) = \cos 30^\circ + \cos 30^\circ = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Câu 3: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos^6 15^\circ - \sin^6 15^\circ$.

- A. $M = 1$. B. $M = \frac{1}{2}$. C. $M = \frac{1}{4}$. D. $M = \frac{15\sqrt{3}}{32}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\begin{aligned}\cos^6 \alpha - \sin^6 \alpha &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha) \\ &= \cos 2\alpha \left[(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \right] \\ &= \cos 2\alpha \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha \right).\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } M = \cos 30^\circ \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 30^\circ \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{15\sqrt{3}}{32}.$$

Câu 4: Giá trị của biểu thức $\cos \frac{\pi}{30} \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{\pi}{5}$ là

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \cos \frac{\pi}{30} \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{\pi}{5} = \cos \left(\frac{\pi}{30} - \frac{\pi}{5} \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 5: Giá trị của biểu thức $P = \frac{\sin \frac{5\pi}{18} \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{5\pi}{18}}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12}}$ là

- A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Áp dụng công thức } \begin{cases} \sin a \cos b - \cos a \sin b = \sin(a - b) \\ \cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a + b) \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } \sin \frac{5\pi}{18} \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{5\pi}{18} = \sin \left(\frac{5\pi}{18} - \frac{\pi}{9} \right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Và } \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}. \text{ Vậy } P = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1.$$

Câu 6: Giá trị đúng của biểu thức $\frac{\tan 225^0 - \cot 81^0 \cdot \cot 69^0}{\cot 261^0 + \tan 201^0}$ bằng

- A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. B. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. C. $\sqrt{3}$. D. $-\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có :

$$\begin{aligned} \frac{\tan 225^0 - \cot 81^0 \cdot \cot 69^0}{\cot 261^0 + \tan 201^0} &= \frac{\tan(180^0 + 45^0) - \tan 9^0 \cdot \cot 69^0}{\cot(180^0 + 81^0) + \tan(180^0 + 21^0)} \\ &= \frac{1 - \tan 9^0 \cdot \tan 21^0}{\tan 9^0 + \tan 21^0} = \frac{1}{\tan(9^0 + 21^0)} = \frac{1}{\tan 30^0} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Câu 7: Giá trị của biểu thức $M = \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \sin \frac{7\pi}{24} \sin \frac{11\pi}{24}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{8}$. D. $\frac{1}{16}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sin \frac{7\pi}{24} = \cos \frac{5\pi}{24}$ và $\sin \frac{11\pi}{24} = \cos \frac{\pi}{24}$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó } M &= \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \cos \frac{5\pi}{24} \cos \frac{\pi}{24} = \frac{1}{4} \cdot \left(2 \cdot \sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \right) \cdot \left(2 \cdot \sin \frac{5\pi}{24} \cdot \cos \frac{5\pi}{24} \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left(\cos \frac{6\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{8} \cdot \left(0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Câu 8: Giá trị của biểu thức $A = \sin \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6}$ là

- A. $\frac{1}{32}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{8}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{16}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{32}$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức $\sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$, ta có

$$\begin{aligned} A &= \sin \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{16} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{32}. \end{aligned}$$

Câu 9: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$.

- A. $M = \frac{1}{16} \cos 10^\circ$. B. $M = \frac{1}{2} \cos 10^\circ$. C. $M = \frac{1}{4} \cos 10^\circ$. D. $M = \frac{1}{8} \cos 10^\circ$.

Lời giải

Chọn D

Vì $\sin 10^\circ \neq 0$ nên suy ra

$$M = \frac{16 \sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{8 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{16 \sin 10^\circ}$$

$$\Rightarrow M = \frac{4 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{16 \sin 10^\circ}.$$

$$\Rightarrow M = \frac{\sin 20^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{1}{8} \cos 10^\circ.$$

Câu 10: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$.

- A. $M = 0$. B. $M = -\frac{1}{2}$. C. $M = 1$. D. $M = 2$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$.

$$\text{Ta có } 2 \sin \frac{\pi}{7} M = 2 \cos \frac{2\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7} + 2 \cos \frac{4\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7} + 2 \cos \frac{6\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7}$$

$$= \sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{7\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{7}$$

$$= -\sin \frac{\pi}{7} + \sin \pi = -\sin \frac{\pi}{7}.$$

$$\text{Vậy giá trị biểu thức } M = -\frac{1}{2}.$$

Câu 11: Công thức nào sau đây sai?

- A. $\cos(a-b) = \sin a \sin b + \cos a \cos b$. B. $\cos(a+b) = \sin a \sin b - \cos a \cos b$.
C. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$. D. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Câu 12: Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\sin(2018a) = 2018 \sin a \cos a$.
- B. $\sin(2018a) = 2018 \sin(1009a) \cdot \cos(1009a)$.
- C. $\sin(2018a) = 2 \sin a \cos a$.
- D. $\sin(2018a) = 2 \sin(1009a) \cdot \cos(1009a)$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ta được

$$\sin(2018a) = 2 \sin(1009a) \cdot \cos(1009a).$$

Câu 13: Khẳng định nào sai trong các khẳng định sau?

- A. $\cos 6a = \cos^2 3a - \sin^2 3a$.
- B. $\cos 6a = 1 - 2 \sin^2 3a$.
- C. $\cos 6a = 1 - 6 \sin^2 a$.
- D. $\cos 6a = 2 \cos^2 3a - 1$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$, ta được

$$\cos 6a = \cos^2 3a - \sin^2 3a = 2 \cos^2 3a - 1 = 1 - 2 \sin^2 3a.$$

Câu 14: Khẳng định nào sai trong các khẳng định sau?

- A. $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.
- B. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.
- C. $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$.
- D. $\cos 3x = \cos^3 x - \sin^3 x$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.

Câu 15: Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

- A. $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$.
- B. $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$.
- C. $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$.
- D. $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 16: Có bao nhiêu đẳng thức dưới đây là đồng nhất thức?

1) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

2) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

3) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$

4) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

Câu 17: Công thức nào sau đây đúng?

A. $\cos 3a = 3 \cos a - 4 \cos^3 a.$

B. $\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a.$

C. $\cos 3a = 3 \cos^3 a - 4 \cos a.$

D. $\cos 3a = 4 \cos a - 3 \cos^3 a.$

Lời giải

Chọn B

Câu 18: Công thức nào sau đây đúng?

A. $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a.$

B. $\sin 3a = 4 \sin^3 a - 3 \sin a.$

C. $\sin 3a = 3 \sin^3 a - 4 \sin a.$

D. $\sin 3a = 4 \sin a - 3 \sin^3 a.$

Lời giải

Chọn A

Câu 19: Nếu $\cos(a+b) = 0$ thì khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|\sin(a+2b)| = |\sin a|.$

B. $|\sin(a+2b)| = |\sin b|.$

C. $|\sin(a+2b)| = |\cos a|.$

D. $|\sin(a+2b)| = |\cos b|.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có : } \cos(a+b) = 0 \Leftrightarrow a+b = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow a = -b + \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

$$\Rightarrow |\sin(a+2b)| = \left| \sin\left(-b + 2b + \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \right| = |\cos(b+k\pi)| = |\cos b|.$$

Câu 20: Nếu $\sin(a+b) = 0$ thì khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|\cos(a+2b)| = |\sin a|$.

B. $|\cos(a+2b)| = |\sin b|$.

C. $|\cos(a+2b)| = |\cos a|$.

D. $|\cos(a+2b)| = |\cos b|$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sin(a+b) = 0 \Leftrightarrow a+b = k\pi \rightarrow a = -b + k\pi$.

$\Rightarrow |\cos(a+2b)| = |\cos(-b+2b+k\pi)| = |\cos(b+k\pi)| = |\cos b|$.

Câu 21: Rút gọn $M = \sin(x-y)\cos y + \cos(x-y)\sin y$.

A. $M = \cos x$.

B. $M = \sin x$.

C. $M = \sin x \cos 2y$.

D. $M = \cos x \cos 2y$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$, ta được

$M = \sin(x-y)\cos y + \cos(x-y)\sin y = \sin[(x-y)+y] = \sin x$.

Câu 22: Rút gọn $M = \cos(a+b)\cos(a-b) - \sin(a+b)\sin(a-b)$.

A. $M = 1 - 2\cos^2 a$.

B. $M = 1 - 2\sin^2 a$.

C. $M = \cos 4a$.

D. $M = \sin 4a$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x+y)$, ta được

$M = \cos(a+b)\cos(a-b) - \sin(a+b)\sin(a-b) = \cos(a+b+a-b) = \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$.

Câu 23: Rút gọn $M = \cos(a+b)\cos(a-b) + \sin(a+b)\sin(a-b)$.

A. $M = 1 - 2\sin^2 b$.

B. $M = 1 + 2\sin^2 b$.

C. $M = \cos 4b$.

D. $M = \sin 4b$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x-y)$, ta được

$M = \cos(a+b)\cos(a-b) + \sin(a+b)\sin(a-b)$
 $= \cos(a+b-(a-b)) = \cos 2b = 1 - 2\sin^2 b$.

Câu 24: Giá trị nào sau đây của x thỏa mãn $\sin 2x \cdot \sin 3x = \cos 2x \cdot \cos 3x$?

A. 18° .

B. 30° .

C. 36° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = \cos(a+b)$, ta được

$$\sin 2x \cdot \sin 3x = \cos 2x \cdot \cos 3x \Leftrightarrow \cos 2x \cdot \cos 3x - \sin 2x \cdot \sin 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 5x = 0 \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}.$$

Câu 25: Đẳng thức nào sau đây đúng:

A. $\cot a + \cot b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \cdot \sin b}.$

B. $\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a).$

C. $\sin(a+b) = \frac{1}{2} \sin 2(a+b).$

D. $\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}.$

Lời giải

Chọn B

Xét các đáp án:

• Đáp án A.

$$\text{Ta có } \cot a + \cot b = \frac{\cos a}{\sin a} + \frac{\cos b}{\sin b} = \frac{\cos a \cdot \sin b + \sin a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b} = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \cdot \sin b}.$$

• Đáp án B.

$$\text{Ta có } \cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \Leftrightarrow \cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a).$$

Câu 26: Chọn công thức đúng trong các công thức sau:

A. $\sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)].$

B. $\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}.$

C. $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan a}.$

D. $\cos 2a = \sin^2 a - \cos^2 a.$

Lời giải

Chọn B

Câu 27: Rút gọn $M = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$

A. $M = \sqrt{2} \sin x.$

B. $M = -\sqrt{2} \sin x.$

C. $M = \sqrt{2} \cos x.$

D. $M = -\sqrt{2} \cos x.$

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$, ta được

$$\begin{aligned} M &= \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -2 \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{4} + x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{4} - x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \\ &= -2 \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = -\sqrt{2} \sin x. \end{aligned}$$

Câu 28: Tam giác ABC có $\cos A = \frac{4}{5}$ và $\cos B = \frac{5}{13}$. Khi đó $\cos C$ bằng

- A. $\frac{56}{65}$. B. $-\frac{56}{65}$. C. $\frac{16}{65}$. D. $\frac{33}{65}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có :

$$\begin{cases} \cos A = \frac{4}{5} \\ \cos B = \frac{5}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin A = \frac{3}{5} \\ \sin B = \frac{12}{13} \end{cases}. \text{ Mà } A + B + C = 180^\circ, \text{ do đó}$$

$$\begin{aligned} \cos C &= \cos[180^\circ - (A + B)] = -\cos(A + B) \\ &= -(\cos A \cos B - \sin A \sin B) = -\left(\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} - \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13}\right) = \frac{16}{65}. \end{aligned}$$

Câu 29: Cho A, B, C là ba góc nhọn thỏa mãn $\tan A = \frac{1}{2}, \tan B = \frac{1}{5}, \tan C = \frac{1}{8}$. Tổng $A + B + C$ bằng

- A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{5}$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. $\frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \tan(A + B) &= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{7}{9} \\ \Rightarrow \tan(A + B + C) &= \frac{\tan(A + B) + \tan C}{1 - \tan(A + B) \cdot \tan C} = \frac{\frac{7}{9} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{8}} = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A + B + C = \frac{\pi}{4}.$$

Câu 30: Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC . Khi đó $P = \sin A + \sin B + \sin C$ tương đương với:

A. $P = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$

B. $P = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$

C. $P = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$

D. $P = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Do } \begin{cases} \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \\ \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2} \\ \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2} \end{cases}.$$

Áp dụng, ta được

$$\begin{aligned} P &= (\sin A + \sin B) + \sin C = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) = 4 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}. \end{aligned}$$

Câu 31: Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC .

Khi đó $P = \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2}$ tương đương với:

A. $P = 1.$

B. $P = -1.$

C. $P = \left(\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} \right)^2.$

D. Đáp án khác.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Do } A + B + C = \pi \Rightarrow \frac{C+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \tan \left(\frac{C+B}{2} \right) = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) \Rightarrow \frac{\tan \frac{C}{2} + \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan \frac{C}{2} \tan \frac{B}{2}} = \cot \frac{A}{2} = \frac{1}{\tan \frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow \tan \frac{A}{2} \left(\tan \frac{C}{2} + \tan \frac{B}{2} \right) + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1.$$

Câu 32: Trong $\triangle ABC$, nếu $\frac{\sin B}{\sin C} = 2 \cos A$ thì $\triangle ABC$ là tam giác có tính chất nào sau đây?

- A. Cân tại B. B. Cân tại A. C. Cân tại C. D. Vuông tại B.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \frac{\sin B}{\sin C} = 2 \cos A \Rightarrow \sin B = 2 \sin C \cdot \cos A = \sin(C + A) + \sin(C - A)$$

$$\text{Mặt khác } A + B + C = \pi \Rightarrow B = \pi - (A + C) \Rightarrow \sin B = \sin(A + C).$$

$$\text{Do đó, ta được } \sin(C - A) = 0 \Rightarrow A = C.$$

Câu 33: Trong $\triangle ABC$, nếu $\frac{\tan A}{\tan C} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C}$ thì $\triangle ABC$ là tam giác gì?

- A. Tam giác vuông. B. Tam giác cân.
C. Tam giác đều. D. Tam giác vuông hoặc cân.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \frac{\tan A}{\tan C} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C} \Leftrightarrow \frac{\sin A \cos C}{\cos A \sin C} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C} \Leftrightarrow \sin 2C = \sin 2A$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2C = 2A \\ 2C = \pi - 2A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = A \\ A + C = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Câu 34: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Tính $P = \sin 2(\alpha + \pi)$.

- A. $P = -\frac{24}{25}$. B. $P = \frac{24}{25}$. C. $P = -\frac{12}{25}$. D. $P = \frac{12}{25}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P = \sin 2(\alpha + \pi) = \sin(2\alpha + 2\pi) = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$\text{Từ hệ thức } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ suy ra } \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{3}{5}.$$

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên ta chọn $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$.

Thay $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ và $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ vào P , ta được $P = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$.

Câu 35: Cho góc α thỏa mãn $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. Tính $P = \frac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$.

- A. $P = -\frac{2\sqrt{5}}{3}$. B. $P = \frac{3}{2}$. C. $P = -\frac{3}{2}$. D. $P = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{2 \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 2 \cos \alpha$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên ta chọn $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \longrightarrow P = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Câu 36: Biết $\sin(\pi - \alpha) = -\frac{3}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$.

- A. $P = -\frac{3}{5}$. B. $P = \frac{3}{5}$. C. $P = \frac{-4 - 3\sqrt{3}}{10}$. D. $P = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $-\frac{3}{5} = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5}$.

Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên ta chọn $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

Suy ra $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{-4 - 3\sqrt{3}}{10}$.

Câu 37: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Tính $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$.

- A. $P = \frac{11}{100}$. B. $P = -\frac{11}{100}$. C. $P = \frac{7}{25}$. D. $P = \frac{10}{11}$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$, ta được

$$P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos 2\alpha \right).$$

$$\text{Ta có } \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}.$$

$$\text{Thay vào } P, \text{ ta được } P = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{25} \right) = \frac{11}{100}.$$

Câu 38: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Tính $P = \cos 4\alpha$.

A. $P = \frac{527}{625}$. B. $P = -\frac{527}{625}$. C. $P = \frac{524}{625}$. D. $P = -\frac{524}{625}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25}.$$

$$\text{Suy ra } P = \cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2 \cdot \frac{49}{625} - 1 = -\frac{527}{625}.$$

Câu 39: Cho góc α thỏa mãn $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$. Tính $P = \sin \alpha - \cos \alpha$.

A. $P = \frac{3}{\sqrt{5}}$. B. $P = -\frac{3}{\sqrt{5}}$. C. $P = \frac{\sqrt{5}}{3}$. D. $P = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Vì } \frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi \text{ suy ra } \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases} \text{ nên } \sin \alpha - \cos \alpha > 0.$$

$$\text{Ta có } (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}. \text{ Suy ra } \sin \alpha - \cos \alpha = \pm \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Do } \sin \alpha - \cos \alpha > 0 \text{ nên } \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}. \text{ Vậy } P = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Câu 40: Cho góc α thỏa mãn $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$. Tính $P = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$.

A. $P = 1$. B. $P = \frac{17}{81}$. C. $P = \frac{7}{9}$. D. $P = \frac{9}{7}$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$.

Ta có $P = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = \frac{7}{9}$.

Câu 41: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $P = \tan 2\alpha$.

A. $P = -\frac{120}{119}$. B. $P = -\frac{119}{120}$. C. $P = \frac{120}{119}$. D. $P = \frac{119}{120}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $P = \tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2\cos^2 \alpha - 1}$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{12}{13}$.

Do $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên ta chọn $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$.

Thay $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ vào P , ta được $P = \frac{120}{119}$.

Câu 42: Cho góc α thỏa mãn $\cos 2\alpha = -\frac{2}{3}$. Tính $P = (1 + 3\sin^2 \alpha)(1 - 4\cos^2 \alpha)$.

A. $P = 12$. B. $P = \frac{21}{2}$. C. $P = 6$. D. $P = 21$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P = \left(1 + 3 \cdot \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\right) \left(1 - 4 \cdot \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\right) = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cos 2\alpha\right) (-1 - 2 \cos 2\alpha)$.

Thay $\cos 2\alpha = -\frac{2}{3}$ vào P , ta được $P = \left(\frac{5}{2} + 1\right) \left(-1 + \frac{4}{3}\right) = \frac{7}{6}$.

Câu 43: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $P = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

A. $P = \frac{3 + \sqrt{21}}{8}$. B. $P = \frac{3 - \sqrt{21}}{8}$. C. $P = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{7}}{8}$. D.

$P = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{7}}{8}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } P = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha.$$

$$\text{Từ hệ thức } \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \text{ suy ra } \sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

$$\text{Do } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \text{ nên ta chọn } \sin\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

$$\text{Thay } \sin\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4} \text{ và } \cos\alpha = \frac{3}{4} \text{ vào } P, \text{ ta được } P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{3 - \sqrt{21}}{8}.$$

Câu 44: Cho góc α thỏa mãn $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $P = -\frac{1}{7}.$

B. $P = \frac{1}{7}.$

C. $P = -7.$

D. $P = 7.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\alpha - 1}{1 + \tan\alpha}.$$

$$\text{Từ hệ thức } \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \text{ suy ra } \sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \pm\frac{3}{5}.$$

$$\text{Do } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \text{ nên ta chọn } \sin\alpha = -\frac{3}{5}. \text{ Suy ra } \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Thay } \tan\alpha = \frac{3}{4} \text{ vào } P, \text{ ta được } P = -\frac{1}{7}.$$

Câu 45: Cho góc α thỏa mãn $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $P = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $P = \frac{\sqrt{2}}{10}.$

B. $P = -\frac{\sqrt{2}}{10}.$

C. $P = -\frac{1}{5}.$

D. $P = \frac{1}{5}.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } P = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha).$$

$$\text{Từ hệ thức } \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1, \text{ suy ra } \sin 2\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2 2\alpha} = \pm\frac{3}{5}.$$

Do $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi$ nên ta chọn $\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$.

Thay $\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$ và $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$ vào P , ta được $P = -\frac{\sqrt{2}}{10}$.

Câu 46: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha}{2}$.

- A. $P = -\frac{39}{50}$. B. $P = \frac{49}{50}$. C. $P = -\frac{49}{50}$. D. $P = \frac{39}{50}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha}{2} = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha - \sin \alpha) = \frac{1}{2} \sin \alpha (2 \cos \alpha - 1)$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{3}{5}$.

Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên ta chọn $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$.

Thay $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ và $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ vào P , ta được $P = \frac{39}{50}$.

Câu 47: Cho góc α thỏa mãn $\cot\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = 2$. Tính $P = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $P = \frac{1}{2}$. B. $P = -\frac{1}{2}$. C. $P = 3$. D. $P = 4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $P = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha}$.

Từ giả thiết $\cot\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = 2 \Leftrightarrow \cot\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2 \Leftrightarrow \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2 \Leftrightarrow \tan \alpha = 2$.

Thay $\tan \alpha = 2$ vào P , ta được $P = -3$.

Câu 48: Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = 15$. Tính $P = \sin 2\alpha$.

- A. $P = \frac{11}{113}$. B. $P = \frac{13}{113}$. C. $P = \frac{15}{113}$. D. $P = \frac{17}{113}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\cot \alpha = 15 \Leftrightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 15 \Leftrightarrow \cos \alpha = 15 \sin \alpha$.

$$\text{Suy ra } P = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 30 \sin^2 \alpha = \frac{30}{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \frac{30}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{30}{1 + 15^2} = \frac{15}{113}.$$

Câu 49: Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = -3\sqrt{2}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \tan \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\alpha}{2}$.

- A. $P = 2\sqrt{19}$. B. $P = -2\sqrt{19}$. C. $P = \sqrt{19}$. D. $P = -\sqrt{19}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P = \tan \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Từ hệ thức } 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \longrightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{19}}.$$

$$\text{Do } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \longrightarrow \sin \alpha > 0 \text{ nên ta chọn } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{19}} \longrightarrow P = 2\sqrt{19}.$$

Câu 50: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ và $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$. Tính $P = \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}$.

- A. $P = \sqrt{5}$. B. $P = -\sqrt{5}$. C. $P = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $P = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } P^2 = 1 + \sin \alpha. \text{ Với } \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right].$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} 0 \leq \sin \frac{\alpha}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 \leq \cos \frac{\alpha}{2} < -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \text{ suy ra } P = \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} < 0.$$

$$\text{Từ hệ thức } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ suy ra } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{16}{25}.$$

$$\text{Vì } \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \text{ nên ta chọn } \sin \alpha = -\frac{4}{5}.$$

$$\text{Thay } \sin \alpha = -\frac{4}{5} \text{ vào } P^2, \text{ ta được } P^2 = \frac{1}{5}. \text{ Suy ra } P = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 51: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -2$. Tính $P = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + 1}$.

A. $P = \frac{10}{9}$.

B. $P = \frac{9}{10}$.

C. $P = -\frac{10}{9}$.

D. $P = -\frac{9}{10}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $P = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + 1} = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha}$.

Nhắc lại công thức: Nếu đặt $t = \tan \alpha$ thì $\sin 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$ và $\cos 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Do đó $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = -\frac{4}{5}$, $\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = -\frac{3}{5}$.

Thay $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$ vào P , ta được $P = -\frac{10}{9}$.

Câu 52: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$ và $\sin \alpha = \frac{1}{5}$. Tính $P = \sin 2\alpha$.

A. $P = \frac{4\sqrt{6}}{25}$.

B. $P = -\frac{4\sqrt{6}}{25}$.

C. $P = \frac{2\sqrt{6}}{25}$.

D. $P = -\frac{2\sqrt{6}}{25}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $A = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

Từ hệ thức $\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 25 \Leftrightarrow \cot^2 \alpha = 24 \Rightarrow \cot \alpha = \pm 2\sqrt{6}$.

Vì $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ cùng dấu và $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$ nên $\tan \alpha < 0$, $\cot \alpha < 0$.

Do đó ta chọn $\cot \alpha = -2\sqrt{6}$. Suy ra $\cos \alpha = \cot \alpha \cdot \sin \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Thay $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ và $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$ vào P , ta được $P = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) = -\frac{4\sqrt{6}}{25}$.

Câu 53: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\sin \alpha + 2 \cos \alpha = -1$. Tính $P = \sin 2\alpha$.

A. $P = \frac{24}{25}$.

B. $P = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

C. $P = -\frac{24}{25}$.

D. $P = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Với } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ suy ra } \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sin \alpha + 2 \cos \alpha = -1 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow (-1 - 2 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow 5 \cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0 \text{ (loại)} \\ \cos \alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}.$$

$$\text{Từ hệ thức } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ suy ra } \sin \alpha = \frac{3}{5} \text{ (do } \sin \alpha > 0 \text{)}.$$

$$\text{Vậy } P = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$$

Câu 54: Biết $\sin a = \frac{5}{13}$; $\cos b = \frac{3}{5}$; $\frac{\pi}{2} < a < \pi$; $0 < b < \frac{\pi}{2}$. Hãy tính $\sin(a+b)$.

A. $\frac{56}{65}$.

B. $\frac{63}{65}$.

C. $-\frac{33}{65}$.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} \text{ mà } a \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \cos a = -\frac{12}{13}.$$

$$\text{Tương tự, ta có } \sin^2 b = 1 - \cos^2 b = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \text{ mà } b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin b = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Khi đó } \sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a = \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} - \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{33}{65}.$$

Câu 55: Nếu biết rằng $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$, $\cos \beta = \frac{3}{5}$ $\left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ thì giá trị đúng của biểu thức $\cos(\alpha - \beta)$ là

A. $\frac{16}{65}$.

B. $-\frac{16}{65}$.

C. $\frac{18}{65}$.

D. $-\frac{18}{65}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \sin \alpha = \frac{5}{13} \text{ với } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ suy ra } \cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\frac{12}{13}.$$

$$\text{Tương tự, có } \cos \beta = \frac{3}{5} \text{ với } 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \text{ suy ra } \sin \beta = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Vậy } \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{16}{65}.$$

Câu 56: Cho hai góc nhọn $a; b$ và biết rằng $\cos a = \frac{1}{3}$; $\cos b = \frac{1}{4}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \cos(a+b) \cdot \cos(a-b).$$

A. $-\frac{113}{144}$. B. $-\frac{115}{144}$. C. $-\frac{117}{144}$. D. $-\frac{119}{144}$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \cos(a+b) \cdot \cos(a-b) = (\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b)(\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b) \\ &= (\cos a \cdot \cos b)^2 - (\sin a \cdot \sin b)^2 = \cos^2 a \cdot \cos^2 b - (1 - \cos^2 a) \cdot (1 - \cos^2 b) \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{16} - \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) = -\frac{119}{144}. \end{aligned}$$

Câu 57: Nếu a, b là hai góc nhọn và $\sin a = \frac{1}{3}$; $\sin b = \frac{1}{2}$ thì $\cos 2(a+b)$ có giá trị bằng

A. $\frac{7-2\sqrt{6}}{18}$. B. $\frac{7+2\sqrt{6}}{18}$. C. $\frac{7+4\sqrt{6}}{18}$. D. $\frac{7-4\sqrt{6}}{18}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Vì } a, b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ nên suy ra } \begin{cases} \cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \cos b = \sqrt{1 - \sin^2 b} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-1+2\sqrt{6}}{6}.$$

$$\text{Vậy } \cos 2(a+b) = 2\cos^2(a+b) - 1 = 2 \cdot \left(\frac{-1+2\sqrt{6}}{6}\right)^2 - 1 = \frac{7-4\sqrt{6}}{18}.$$

Câu 58: Cho $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ và thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{1}{7}$, $\tan \beta = \frac{3}{4}$. Góc $\alpha + \beta$ có giá trị bằng

A. $\frac{\pi}{3}$. B. $\frac{\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{6}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{4}} = 1 \text{ suy ra } a + b = \frac{\pi}{4}.$$

Câu 59: Cho x, y là các góc nhọn và dương thỏa mãn $\cot x = \frac{3}{4}$, $\cot y = \frac{1}{7}$. Tổng $x + y$ bằng

- A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{3\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{3}$. D. π .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \cot(x + y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7} - 1}{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}} = -1.$$

Mặt khác $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$ suy ra $0 < x + y < \pi$. Do đó $x + y = \frac{3\pi}{4}$.

Câu 60: Nếu α, β, γ là ba góc nhọn thỏa mãn $\tan(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = \cos \gamma$ thì

- A. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$. B. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3}$.
C. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$. D. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{3\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\tan(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = \cos \gamma \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos \gamma$.

$$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos \gamma - \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = 0 \Rightarrow \cos(\alpha + \beta + \gamma) = 0.$$

Vậy tổng ba góc $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ (vì α, β, γ là ba góc nhọn).

Câu 61: Biết rằng $\tan a = \frac{1}{2}$ ($0 < a < 90^\circ$) và $\tan b = -\frac{1}{3}$ ($90^\circ < b < 180^\circ$) thì biểu thức $\cos(2a - b)$ có giá trị bằng

- A. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$. B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \cos 2a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{5} \text{ suy ra } \sin 2a = \sqrt{1 - \cos^2 2a} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Lại có } 1 + \tan^2 b = \frac{1}{\cos^2 b} \Rightarrow \cos b = -\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 b}} = -\frac{3}{\sqrt{10}} \text{ vì } 90^\circ < b < 180^\circ$$

$$\text{Mặt khác } \sin b = \tan b \cdot \cos b = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\text{Khi đó } \cos(2a - b) = \cos 2a \cdot \cos b + \sin 2a \cdot \sin b = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Câu 62: Nếu $\sin a - \cos a = \frac{1}{5}$ ($135^\circ < a < 180^\circ$) thì giá trị của biểu thức $\tan 2a$ bằng

A. $-\frac{20}{7}$. B. $\frac{20}{7}$. C. $\frac{24}{7}$. D. $-\frac{24}{7}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \sin a - \cos a = \frac{1}{5} \Rightarrow (\sin a - \cos a)^2 = \frac{1}{25} \Leftrightarrow 1 - \sin 2a = \frac{1}{25} \Leftrightarrow \sin 2a = \frac{24}{25}.$$

$$\text{Khi đó } \cos 2a = \sqrt{1 - \sin^2 2a} = \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2} = \frac{7}{25} \text{ vì } 270^\circ < 2a < 360^\circ.$$

$$\text{Vậy giá trị của biểu thức } \tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{24}{7}.$$

Câu 63: Nếu $\tan(a + b) = 7$, $\tan(a - b) = 4$ thì giá trị đúng của $\tan 2a$ là

A. $-\frac{11}{27}$. B. $\frac{11}{27}$. C. $-\frac{13}{27}$. D. $\frac{13}{27}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \tan 2a = \tan[(a + b) + (a - b)] = \frac{\tan(a + b) + \tan(a - b)}{1 + \tan(a + b) \cdot \tan(a - b)} = \frac{7 + 4}{1 - 7 \cdot 4} = -\frac{11}{27}.$$

Câu 64: Nếu $\sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin \beta$ với $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + l\pi$, ($k, l \in \mathbb{Z}$) thì

A. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \cot \alpha$. B. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \cot \beta$.
C. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \tan \beta$. D. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \tan \alpha$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin \beta = \sin[(\alpha + \beta) - \alpha]$.

$$\Leftrightarrow \sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) \cdot \sin \alpha.$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos \alpha \Rightarrow \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = 2 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \tan \alpha.$$

Câu 65: Nếu $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ và $\cot \alpha + \cot \gamma = 2 \cot \beta$ thì $\cot \alpha \cdot \cot \gamma$ bằng

A. $\sqrt{3}$.

B. $-\sqrt{3}$.

C. 3.

D. -3.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết, ta có $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \gamma)$.

$$\text{Suy ra } \cot \alpha + \cot \gamma = 2 \cot \beta = 2 \cdot \cot \left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \gamma) \right] = 2 \cdot \tan(\alpha + \gamma) = 2 \cdot \frac{\tan \alpha + \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \gamma}$$

$$\text{Mặt khác } \frac{\tan \alpha + \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \gamma} = \frac{\frac{1}{\cot \alpha} + \frac{1}{\cot \gamma}}{1 - \frac{1}{\cot \alpha} \cdot \frac{1}{\cot \gamma}} = \frac{\cot \alpha + \cot \gamma}{\cot \alpha \cdot \cot \gamma - 1} \text{ nên suy ra}$$

$$\cot \alpha + \cot \gamma = 2 \cdot \frac{\cot \alpha + \cot \gamma}{\cot \alpha \cdot \cot \gamma - 1} \Leftrightarrow \cot \alpha \cdot \cot \gamma - 1 = 2 \Leftrightarrow \cot \alpha \cdot \cot \gamma = 3.$$

Câu 66: Nếu $\tan \alpha$ và $\tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ ($q \neq 1$) thì $\tan(\alpha + \beta)$ bằng

A. $\frac{p}{q-1}$.

B. $-\frac{p}{q-1}$.

C. $\frac{2p}{1-q}$.

D. $-\frac{2p}{1-q}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $\tan \alpha, \tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ nên theo định lý Viet, ta

$$\text{có } \begin{cases} \tan \alpha + \tan \beta = -p \\ \tan \alpha \cdot \tan \beta = q \end{cases}. \text{ Khi đó } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{p}{q-1}.$$

Câu 67: Nếu $\tan \alpha; \tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - px + q = 0$ ($p, q \neq 0$). Và $\cot \alpha; \cot \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - rx + s = 0$ thì tích $P = rs$ bằng

- A. pq . B. $\frac{p}{q^2}$. C. $\frac{1}{pq}$. D. $\frac{q}{p^2}$.

Lời giải

Chọn B

Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} \tan \alpha + \tan \beta = p \\ \tan \alpha \cdot \tan \beta = q \end{cases}$ và $\begin{cases} \cot \alpha + \cot \beta = r \\ \cot \alpha \cdot \cot \beta = s \end{cases}$.

Khi đó $P = r \cdot s = (\cot \alpha + \cot \beta) \cdot \cot \alpha \cdot \cot \beta = \left(\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} \right) \cdot \frac{1}{\tan \alpha} \cdot \frac{1}{\tan \beta}$

$$= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{(\tan \alpha \cdot \tan \beta)^2} = \frac{p}{q^2}. \text{ Vậy } P = r \cdot s = \frac{p}{q^2}.$$

Câu 68: Nếu $\tan \alpha$ và $\tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - px + q = 0$ ($q \neq 0$) thì giá trị biểu thức $P = \cos^2(\alpha + \beta) + p \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) + q \sin^2(\alpha + \beta)$ bằng:

- A. p . B. q . C. 1. D. $\frac{p}{q}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $\tan \alpha, \tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - px + q = 0$ nên theo định lí Viet, ta

có $\begin{cases} \tan \alpha + \tan \beta = p \\ \tan \alpha \cdot \tan \beta = q \end{cases} \longrightarrow \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{p}{1 - q}.$

Khi đó $P = \cos^2(\alpha + \beta) \cdot [1 + p \cdot \tan(\alpha + \beta) + q \cdot \tan^2(\alpha + \beta)]$.

$$\begin{aligned} &= \frac{1 + p \cdot \tan(\alpha + \beta) + q \cdot \tan^2(\alpha + \beta)}{1 + \tan^2(\alpha + \beta)} = \frac{1 + p \cdot \frac{p}{1 - q} + q \cdot \left(\frac{p}{1 - q} \right)^2}{1 + \left(\frac{p}{1 - q} \right)^2} \\ &= \frac{(1 - q)^2 + p^2(1 - q) + q \cdot p^2}{(1 - q)^2 + p^2} = \frac{(1 - q)^2 + p^2 - p^2 \cdot q + q \cdot p^2}{(1 - q)^2 + p^2} = 1. \end{aligned}$$

Câu 69: Rút gọn biểu thức $M = \tan x - \tan y$.

- A. $M = \tan(x - y)$. B. $M = \frac{\sin(x + y)}{\cos x \cdot \cos y}$.
C. $M = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cdot \cos y}$. D. $M = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } M = \tan x - \tan y = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}.$$

Câu 70: Rút gọn biểu thức $M = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right).$

- A. $M = \sin 2\alpha.$ B. $M = \cos 2\alpha.$ C. $M = -\cos 2\alpha.$ D. $M = -\sin 2\alpha.$

Lời giải

Chọn D

Vì hai góc $\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ và $\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ phụ nhau nên $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right).$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } M &= \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Câu 71: Chọn đẳng thức đúng.

- A. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \sin a}{2}.$ B. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \sin a}{2}.$
C. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \cos a}{2}.$ D. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \cos a}{2}.$

Lời giải

Chọn A

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)}{2} = \frac{1 + \sin(-a)}{2} = \frac{1 - \sin a}{2}.$$

Câu 72: Gọi $M = \frac{\sin(y-x)}{\sin x \cdot \sin y}$ thì

- A. $M = \tan x - \tan y.$ B. $M = \cot x - \cot y$
C. $M = \cot y - \cot x.$ D. $M = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin y}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có :

$$\begin{aligned} M &= \frac{\sin y \cdot \cos x - \cos y \cdot \sin x}{\sin x \cdot \sin y} = \frac{\sin y \cdot \cos x}{\sin x \cdot \sin y} - \frac{\cos y \cdot \sin x}{\sin x \cdot \sin y} \\ &= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos y}{\sin y} = \cot x - \cot y \end{aligned}$$

Câu 73: Gọi $M = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$ thì

- A. $M = 2 \cos 2x (\cos x + 1)$. B. $M = 4 \cos 2x \cdot \left(\frac{1}{2} + \cos x \right)$.
C. $M = \cos 2x (2 \cos x - 1)$. D. $M = \cos 2x (2 \cos x + 1)$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } M &= \cos x + \cos 2x + \cos 3x = (\cos x + \cos 3x) + \cos 2x \\ &= 2 \cos 2x \cdot \cos x + \cos 2x = \cos 2x (2 \cos x + 1). \end{aligned}$$

Câu 74: Rút gọn biểu thức $M = \frac{\sin 3x - \sin x}{2 \cos^2 x - 1}$.

- A. $\tan 2x$ B. $\sin x$. C. $2 \tan x$. D. $2 \sin x$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \frac{\sin 3x - \sin x}{2 \cos^2 x - 1} = \frac{2 \cos 2x \sin x}{\cos 2x} = 2 \sin x.$$

Câu 75: Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2 \cos^2 x + \cos x - 1}$.

- A. $\cos x$. B. $2 \cos x - 1$. C. $2 \cos x$. D. $\cos x - 1$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \frac{(1 + \cos 2x) + (\cos x + \cos 3x)}{(2 \cos^2 x - 1) + \cos x} = \frac{2 \cos^2 x + 2 \cos 2x \cos x}{\cos x + \cos 2x} \\ &= \frac{2 \cos x (\cos x + \cos 2x)}{\cos x + \cos 2x} = 2 \cos x. \end{aligned}$$

Câu 76: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\tan \alpha - \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha} + \cos 2\alpha$.

- A. 0. B. $2 \cos^2 x$. C. 2. D. $\cos 2x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}}{\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -\cos 2\alpha.$$

Do đó $A = -\cos 2\alpha + \cos 2\alpha = 0$.

Câu 77: Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha}$.

- A. $\sin 2\alpha$. B. $\cos 2\alpha$. C. $\tan 2\alpha$. D. $\cot 2\alpha$.

Lời giải

Chọn C

Ta có :

$$\begin{aligned} A &= \frac{(1 - \cos 4\alpha) + \sin 4\alpha}{(1 + \cos 4\alpha) + \sin 4\alpha} = \frac{2\sin^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha} \\ &= \frac{2\sin 2\alpha(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)}{2\cos 2\alpha(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)} = \tan 2\alpha \end{aligned}$$

Câu 78: Biểu thức $A = \frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$ có kết quả rút gọn bằng:

- A. $-\tan^4 \alpha$. B. $\tan^4 \alpha$. C. $-\cot^4 \alpha$. D. $\cot^4 \alpha$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$; $\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2(1 - 2\sin^2 \alpha)^2 - 1$. Do đó:

$$A = \frac{3 - 4(1 - 2\sin^2 \alpha) + 2(1 - 2\sin^2 \alpha)^2 - 1}{3 + 4(2\cos^2 \alpha - 1) + 2(2\cos^2 \alpha - 1)^2 - 1} = \frac{8\sin^2 \alpha - 8\sin^2 \alpha + 8\sin^4 \alpha}{8\cos^2 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 8\cos^4 \alpha} = \tan^4 \alpha.$$

Câu 79: Khi $\alpha = \frac{\pi}{6}$ thì biểu thức $A = \frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2 \alpha}$ có giá trị bằng:

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{9}$. D. $\frac{1}{12}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$A = \frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2 \alpha} = \frac{4\sin^4 \alpha}{4(1 - \sin^2 \alpha) - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = \tan^4 \alpha.$$

Do đó giá trị của biểu thức A tại $\alpha = \frac{\pi}{6}$ là $\tan^4 \left(\frac{\pi}{6} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^4 = \frac{1}{9}$.

Câu 80: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha}$.

- A. $\tan \alpha$. B. $2 \tan \alpha$. C. $\tan 2\alpha + \tan \alpha$. D. $\tan 2\alpha$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } A = \frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha (2 \cos \alpha + 1)}{2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha (2 \cos \alpha + 1)}{\cos \alpha (2 \cos \alpha + 1)} = \tan \alpha.$$

Câu 81: Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 - \sin a - \cos 2a}{\sin 2a - \cos a}$.

- A. 1. B. $\tan \alpha$. C. $\frac{5}{2}$. D. $2 \tan \alpha$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } A = \frac{1 - \sin a + 2 \sin^2 a - 1}{2 \sin a \cdot \cos a - \cos a} = \frac{\sin a (2 \sin a - 1)}{\cos a (2 \sin a - 1)} = \frac{\sin a}{\cos a} = \tan a.$$

Câu 82: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin x + \sin \frac{x}{2}}{1 + \cos x + \cos \frac{x}{2}}$ được:

- A. $\tan \frac{x}{2}$. B. $\cot x$. C. $\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$. D. $\sin x$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \sin x = \sin \left(2 \cdot \frac{x}{2} \right) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

$$1 + \cos x = 1 + \cos \left(2 \cdot \frac{x}{2} \right) = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$\text{Do đó } A = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2} (2 \cos \frac{x}{2} + 1)}{\cos \frac{x}{2} (2 \cos \frac{x}{2} + 1)} = \tan \frac{x}{2}.$$

Câu 83: Rút gọn biểu thức $A = \sin \alpha \cdot \cos^5 \alpha - \sin^5 \alpha \cdot \cos \alpha$.

- A. $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$. B. $-\frac{1}{2} \sin 4\alpha$. C. $\frac{3}{4} \sin 4\alpha$. D. $\frac{1}{4} \sin 4\alpha$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin \alpha \cdot \cos^5 \alpha - \sin^5 \alpha \cdot \cos \alpha &= \sin \alpha \cdot \cos \alpha (\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha) \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos 2\alpha = \frac{1}{4} \sin 4\alpha. \end{aligned}$$

Câu 84: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của biểu thức $P = 3 \sin x - 2$.

- A. $M = 1, m = -5$. B. $M = 3, m = 1$.
C. $M = 2, m = -2$. D. $M = 0, m = -2$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } -1 \leq \sin x \leq 1 &\Rightarrow -3 \leq 3 \sin x \leq 3 \Rightarrow -5 \leq 3 \sin x - 2 \leq 1 \\ &\Rightarrow -5 \leq P \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} M = 1 \\ m = -5 \end{cases}. \end{aligned}$$

Câu 85: Cho biểu thức $P = -2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $P \geq -4, \forall x \in \mathbb{R}$. B. $P \geq 4, \forall x \in \mathbb{R}$.
C. $P \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. D. $P \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } -1 \leq \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1 &\Rightarrow 2 \geq -2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \geq -2 \\ &\Rightarrow 4 \geq -2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 2 \geq 0 \Rightarrow 4 \geq P \geq 0. \end{aligned}$$

Câu 86: Biểu thức $P = \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - \sin x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$, ta có

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin \frac{\pi}{6} = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Ta có $-1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq P \leq 1 \xrightarrow{P \in \mathbb{Z}} P \in \{-1; 0; 1\}$.

Câu 87: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của biểu thức $P = \sin^2 x + 2 \cos^2 x$.

A. $M = 3, m = 0$. B. $M = 2, m = 0$. C. $M = 2, m = 1$. D. $M = 3, m = 1$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } P = \sin^2 x + 2 \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x = 1 + \cos^2 x$$

$$\text{Do } -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1 + \cos^2 x \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} M = 2 \\ m = 1 \end{cases}.$$

Câu 88: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 8 \sin^2 x + 3 \cos 2x$. Tính $T = 2M - m^2$.

A. $T = 1$. B. $T = 2$. C. $T = 112$. D. $T = 130$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P = 8 \sin^2 x + 3 \cos 2x = 8 \sin^2 x + 3(1 - 2 \sin^2 x) = 2 \sin^2 x + 3.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 3 \leq 2 \sin^2 x + 3 \leq 5$$

$$\Rightarrow 3 \leq P \leq 5 \Rightarrow \begin{cases} M = 5 \\ m = 3 \end{cases} \Rightarrow T = 2M - m^2 = 1.$$

Câu 89: Cho biểu thức $P = \cos^4 x + \sin^4 x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $P \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$. B. $P \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. C. $P \leq \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R}$. D.

$$P \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } P = \cos^4 x + \sin^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \cos 4x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq P \leq 1.$$

Câu 90: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của biểu thức $P = \sin^4 x - \cos^4 x$.

A. $M = 2, m = -2$.

B. $M = \sqrt{2}, m = -\sqrt{2}$.

C. $M = 1, m = -1$.

D. $M = 1, m = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } P = \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = -\cos 2x.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \cos 2x \leq 1 \Rightarrow -1 \geq -\cos 2x \geq 1 \Rightarrow -1 \leq P \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} M = 1 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Câu 91: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của biểu thức $P = 1 - 2|\cos 3x|$.

A. $M = 3, m = -1$.

B. $M = 1, m = -1$.

C. $M = 2, m = -2$.

D.

$M = 0, m = -2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } -1 \leq \cos 3x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |\cos 3x| \leq 1 \Rightarrow 0 \geq -2|\cos 3x| \geq -2$$

$$\Rightarrow 1 \geq 1 - 2|\cos 3x| \geq -1 \Rightarrow 1 \geq P \geq -1 \Rightarrow \begin{cases} M = 1 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Câu 92: Tìm giá trị lớn nhất M của biểu thức $P = 4\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $M = \sqrt{2}$.

B. $M = \sqrt{2} - 1$.

C. $M = \sqrt{2} + 1$.

D. $M = \sqrt{2} + 2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } P = 4\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) + \sin 2x + \cos 2x$$

$$= \sin 2x - \cos 2x + 2 = \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow -\sqrt{2} + 2 \leq \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \leq \sqrt{2} + 2.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $2 + \sqrt{2}$.