SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ
TRƯỜNG THPT TRẦN PHÚ

(Đề thi có ___ trang)

KIỂM TRA KIẾN THỨC LẦN 1
NĂM HỌC 2026 - 2027
MÔN: TOÁN - 12
Thời gian làm bài: 90 phút
(không kể thời gian phát đề)

Họ và tên: ..... Số báo danh: ..... **Mã đề 1203**

PHẦN I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

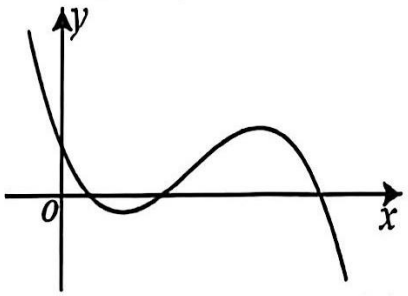
Câu 1. Cho hàm số $y=ln(2x-1)$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x=1$ là:

A. $y=2x-2$. **B.** $y=2x+2$. **C.** $y=x+2$. **D.** $y=x-2$.

Câu 2. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x^3+3x-2$. **B.** $y=\dfrac{x-1}{x+2}$. **C.** $y=x^4+x^2$. **D.** $y=-x^3+x^2$.

Câu 3. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a<0,b<0,c<0,d>0$. **B.** $a>0,b>0,c>0,d<0$.
C. $a>0,b>0,c<0,d>0$. **D.** $a<0,b>0,c<0,d>0$.

Câu 4. Tập nghiệm của phương trình $\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ là

A. $S=\left\{\dfrac{5\pi}{6}+k\pi;-\dfrac{5\pi}{6}+k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B.** $S=\left\{\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi;-\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.
C. $S=\left\{\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi;\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **D.** $S=\left\{\dfrac{5\pi}{6}+k\pi;\dfrac{\pi}{6}+k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

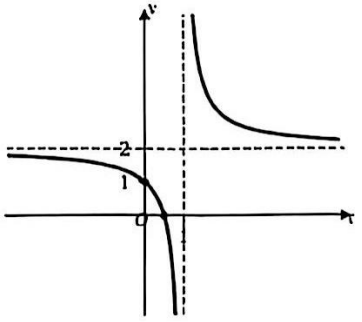
Câu 5. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\dfrac{4}{x}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

A. $\dfrac{13}{3}$. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 6. Phương trình $10^{2x}-10^x-2=0$ có nghiệm là

A. $\log 2$. **B.** $\log_5 2$. **C.** $\log_2 5+1$. **D.** $\log_2 10$.

Câu 7. Đồ thị ở hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x-1}{2x-1}$.

Câu 8. Tìm hiểu thời gian hoàn thành một bài tập (đơn vị: phút) của một số học sinh thu được kết quả

Thời gian (phút)	$[0;4)$	$[4;8)$	$[8;12)$	$[12;16)$	$[16;20)$
Số học sinh	2	4	7	4	3

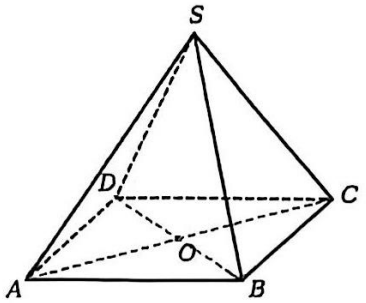
Thời gian trung bình (phút) để hoàn thành một bài tập của các em học sinh là

A. 7. **B.** 12,5. **C.** 10,4. **D.** 11,3.

Câu 9. Cho elip có phương trình $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, độ dài tiêu cự của elip (E) là:

A. 10. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O (xem hình vẽ bên). Vectơ $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}$ bằng vectơ nào sau đây?

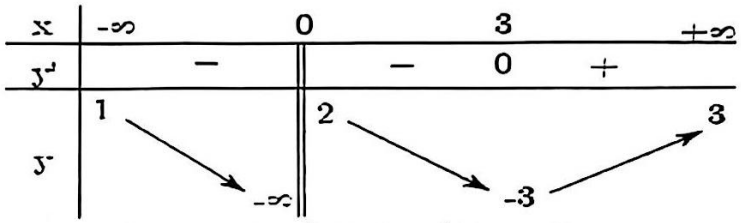


A. $\overrightarrow{SO}$. **B.** $4\overrightarrow{SO}$. **C.** $3\overrightarrow{SO}$. **D.** $2\overrightarrow{SO}$.

Câu 11. Cho a; b; c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng với $a=2;b=6$, khi đó c bằng bao nhiêu?

A. 10. **B.** 9. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

PHẦN II. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)=\cos 2x+2\sin x$, xét trên đoạn $[0;\ 2\pi]$.

a) Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0;\ 2\pi]$ bằng -1.

b) $f'(x)=2\cos x(1-2\sin x)$.

c) Phương trình $f'(x)=0$ có đúng 3 nghiệm trên đoạn $[0;\ 2\pi]$.

d) Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0;\ 2\pi]$ bằng $\frac{3}{2}$.

Câu 2. Một xưởng cần làm một bể nước bằng inox có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, đáy là hình vuông và thể tích bằng 32 m^3. Gọi $x\ (m)$ là độ dài cạnh đáy $(x>0)$, $h\ (m)$ là chiều cao của bể và $S(m^2)$ là tổng diện tích inox cần dùng (gồm đáy và bốn mặt bên).

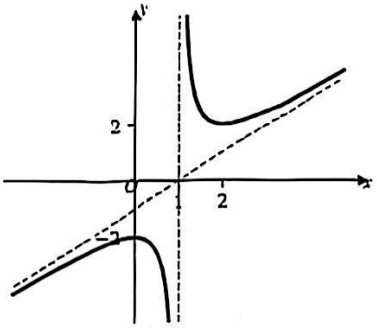
a) Diện tích inox cần dùng là $S(x)=x^2+\frac{64}{x}$.

b) Diện tích inox cần dùng ít nhất là 48 m^2.

c) Chiều cao của bể được tính theo x bởi công thức $h=\frac{32}{x^2}$.

d) $S'(x)=0$ khi và chỉ khi $x=4$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$ và tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x-1$.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

c) A và B là hai điểm thuộc đồ thị và nằm về hai phía khác nhau đối với đường tiệm cận đứng, giá trị nhỏ nhất của đoạn AB là 4,47 (*kết quả được làm tròn tới hàng phần trăm*)

d) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bằng $2\sqrt{5}$.

Câu 4. Cho khối chóp đều S.ABCD, có tất cả các cạnh đều bằng 2

a) $BD\perp(SAC)$.

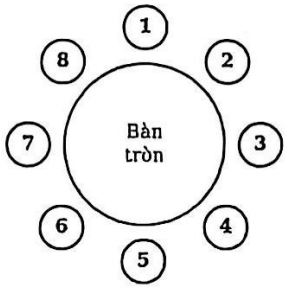
b) Tam giác SAC là tam giác vuông.

c) Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

d) Góc tạo bởi SC và mặt phẳng (SBD) là 45^0.

PHẦN III. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Một nhà hàng có một bàn tròn gồm 8 ghế được đánh số từ 1 đến 8 (xem hình vẽ). Có 4 cặp vợ chồng đến dự tiệc và được xếp ngẫu nhiên vào 8 ghế đó. Gọi P là xác suất để không có cặp vợ chồng nào ngồi cạnh nhau. Giá trị của $105P$ bằng bao nhiêu?



Câu 2. Một cơ sở sản xuất loại sản phẩm X. Mỗi tháng cơ sở phải chi:

Chi phí cố định của cơ sở sản xuất: 90 triệu đồng (thuê xưởng, lương nhân viên, khấu hao máy móc).

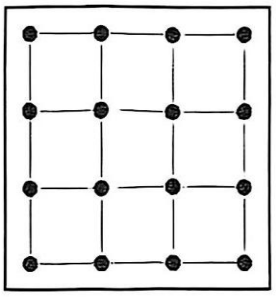
Chi phí cho mỗi sản phẩm X: 70 nghìn đồng cho mỗi sản phẩm làm ra.

Cơ sở niêm yết giá bán "đã gồm thuế giá trị gia tăng (VAT) 10% " là 143 nghìn đồng/sản phẩm. Khoản thuế VAT này cơ sở thu hộ rồi nộp lại ngân sách nhà nước, không tính vào doanh thu của cơ sở. Giả sử mỗi tháng cơ sở sản xuất bao nhiêu thì bán hết bấy nhiêu. Hỏi mỗi tháng cơ sở sản xuất phải bán ít nhất bao nhiêu sản phẩm X để có lãi (lợi nhuận) tối thiểu 60 triệu đồng?

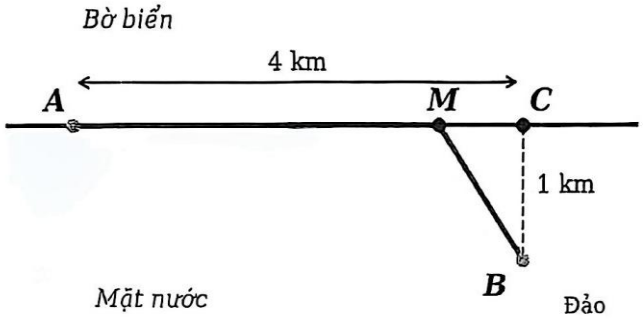
Câu 3. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a=3$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là 60^0. Độ dài cạnh SA bằng bao nhiêu?

Câu 4. Trên một tấm bảng có lưới ô vuông kích thước 4×4 gồm 16 nút lưới (hai nút liền kề trên cùng một hàng hoặc một cột cách nhau 1 đơn vị, xem hình vẽ). Chọn ngẫu nhiên 3 nút trong 16 nút đó. Xác

suất để ba nút được chọn là ba đỉnh của một tam giác vuông bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Câu 5. Một trạm điện A nằm trên bờ biển cần kéo dây điện ra hòn đảo B. Biết đảo B cách bờ biển một khoảng $BC = 1$ km (với BC vuông góc với bờ biển) và $AC = 4$ km (xem hình vẽ). Người ta kéo dây từ A dọc theo bờ đến điểm M nằm giữa A và C, rồi kéo dây từ M thẳng dưới nước tới B. Chi phí kéo mỗi km dây điện trên bờ là 300 triệu đồng, dưới nước là 500 triệu đồng. Tổng chi phí nhỏ nhất để kéo dây điện từ A đến B là bao nhiêu triệu đồng?



Câu 6. Đầu mỗi tháng, anh Nam gửi vào ngân hàng 20 triệu đồng theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,5%/tháng. Hỏi sau đúng 4 năm (48 tháng) kể từ lần gửi đầu tiên, tổng số tiền (cả vốn lẫn lãi) anh Nam có trong tài khoản là bao nhiêu triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của triệu đồng.)

------ HẾT ------

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI THAM KHẢO

Được thực hiện bởi AI & TOANMATH.com

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN.

Câu 1. Ta có $y'=\dfrac{2}{2x-1}$, $y(1)=0$, $y'(1)=2$. Phương trình tiếp tuyến: $y=2(x-1)+0=2x-2$. Chọn A.

Câu 2. Hàm số $y=x^3+3x-2$ có $y'=3x^2+3>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên đồng biến trên $\mathbb{R}$. Chọn A.

Câu 3. Khi $x\to+\infty$ thì $y\to-\infty$ nên $a<0$. Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d>0$. Hàm số có hai điểm cực trị với hoành độ x_1,x_2 đều dương, đây là hai nghiệm của $y'=3ax^2+2bx+c=0$. Theo định lí Viète: $x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}>0$, mà $a<0$ nên $b>0$; $x_1x_2=\dfrac{c}{3a}>0$, mà $a<0$ nên $c<0$. Chọn D.

Câu 4. $\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\cos x=\cos\dfrac{5\pi}{6}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$. Chọn B.

Câu 5. $y'=1-\dfrac{4}{x^2}$, $y'=0\Leftrightarrow x=2\in[1;3]$ (loại $x=-2$). $y(1)=5$, $y(2)=4$, $y(3)=\dfrac{13}{3}$. Vậy $\min\limits_{[1;3]}y=4$. Chọn D.

Câu 6. Đặt $t=10^x>0$, ta có $t^2-t-2=0\Leftrightarrow t=2$ (loại $t=-1$). Khi đó $10^x=2\Leftrightarrow x=\log 2$. Chọn A.

Câu 7. Đồ thị có tiệm cận ngang $y=2$ nên loại D (tiệm cận ngang $y=\dfrac{1}{2}$). Đồ thị đi qua điểm $(0;1)$, trong ba hàm số còn lại chỉ có $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ thỏa mãn $y(0)=1$. Chọn B.

Câu 8. Giá trị đại diện các nhóm là $2;6;10;14;18$, cỡ mẫu $n=20$. Thời gian trung bình: $\overline{x}=\dfrac{2\cdot2+4\cdot6+7\cdot10+4\cdot14+3\cdot18}{20}=\dfrac{208}{20}=10,4$. Chọn C.

Câu 9. Ta có $a=5$, $b=4$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=3$. Tiêu cự $2c=6$. Chọn D.

Câu 10. Vì O là trung điểm của AC và BD nên $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}$, $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$. Do đó $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$. Chọn B.

Câu 11. Ta có $a+c=2b\Rightarrow c=2b-a=12-2=10$. Chọn A.

Câu 12. Từ bảng biến thiên: $\lim\limits_{x\to0^-}y=-\infty$ nên $x=0$ là tiệm cận đứng; $\lim\limits_{x\to-\infty}y=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}y=3$ nên $y=1$, $y=3$ là hai tiệm cận ngang. Tổng số tiệm cận là 3. Chọn B.

PHẦN II. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI.

Câu 1.

b) Đúng. $f'(x) = -2\sin 2x + 2\cos x = -4\sin x\cos x + 2\cos x = 2\cos x(1 - 2\sin x)$.

c) Sai. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$. Trên $[0;2\pi]$ ta được $x \in \left\{\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2};\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{3\pi}{2}\right\}$, tức là có 4 nghiệm.

a) Sai. Ta có $f(0) = f(2\pi) = 1$, $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{3}{2}$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -3$. Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên $[0;2\pi]$ là -3.

d) Đúng. Từ các giá trị trên, giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên $[0;2\pi]$ là $\dfrac{3}{2}$.

Câu 2.

c) Đúng. Thể tích $V = x^2h = 32 \Rightarrow h = \dfrac{32}{x^2}$.

a) Sai. $S = x^2 + 4xh = x^2 + 4x\cdot\dfrac{32}{x^2} = x^2 + \dfrac{128}{x}$.

d) Đúng. $S'(x) = 2x - \dfrac{128}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 128}{x^2}$, $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 64 \Leftrightarrow x = 4$.

b) Đúng. $S'(x) < 0$ trên $(0;4)$ và $S'(x) > 0$ trên $(4;+\infty)$ nên $\min\limits_{(0;+\infty)} S(x) = S(4) = 16 + 32 = 48\,(\text{m}^2)$.

Câu 3. Tập xác định $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-1}$.

a) Đúng. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ nên $x = 1$ là tiệm cận đứng; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - (x-1)\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-1} = 0$ nên $y = x - 1$ là tiệm cận xiên.

b) Sai. Hàm số không xác định tại $x = 1 \in (0;2)$ nên không thể đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

c) Sai. Gọi $A\left(1-a;-a-\dfrac{1}{a}\right)$, $B\left(1+b;b+\dfrac{1}{b}\right)$ với $a,b>0$. Ta có

$AB^2 = (a+b)^2 + \left(a+b+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^2 = (a+b)^2\left[1+\left(1+\dfrac{1}{ab}\right)^2\right] \geq 4ab\left[1+\left(1+\dfrac{1}{ab}\right)^2\right]$ (vì $(a+b)^2 \geq 4ab$, dấu bằng xảy ra khi $a = b$). Đặt $t = ab > 0$, ta được

$AB^2 \geq 4t\left[1+\left(1+\frac{1}{t}\right)^2\right] = 8+8t+\frac{4}{t} \geq 8+2\sqrt{8t\cdot\frac{4}{t}} = 8+8\sqrt{2}$, dấu bằng xảy ra khi $8t=\frac{4}{t} \Leftrightarrow t=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy $AB_{\min} = \sqrt{8+8\sqrt{2}} \approx 4,39 \neq 4,47$, đạt được khi $a=b=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

d) Đúng. $f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=2$. Đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x=0$ và từ âm sang dương khi qua $x=2$. Hai điểm cực trị là $(0;-2)$ và $(2;2)$, khoảng cách giữa chúng là $\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

Câu 4. Gọi $O=AC\cap BD$, ta có $SO\perp(ABCD)$, $AC=BD=2\sqrt{2}$, $OA=OB=OC=\sqrt{2}$.

a) Đúng. $BD\perp AC$ (hình vuông) và $BD\perp SO$ nên $BD\perp(SAC)$.

b) Đúng. $SA^2+SC^2=4+4=8=AC^2$ nên tam giác SAC vuông tại S.

c) Sai. $SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$, $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$. Do đó $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

d) Đúng. $CO\perp BD$, $CO\perp SO$ nên $CO\perp(SBD)$, suy ra góc giữa SC và (SBD) là $\widehat{CSO}$. Ta có $\tan\widehat{CSO}=\frac{CO}{SO}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1\Rightarrow\widehat{CSO}=45^\circ$.

PHẦN III. TRẢ LỜI NGẮN.

Câu 1. Mỗi cách xếp chỗ xác định một cách chia 8 ghế thành 4 cặp ghế (mỗi cặp vợ chồng ngồi vào một cặp ghế). Để chia 8 ghế thành 4 cặp, mỗi lượt ta lấy ghế có số nhỏ nhất chưa được ghép rồi chọn ghế ghép với nó, nên có $7\cdot 5\cdot 3\cdot 1=105$ cách chia. Ứng với mỗi cách chia có đúng $4!\cdot 2^4$ cách xếp người. Do đó $n(\Omega)=105\cdot 4!\cdot 2^4$ và $P=\frac{m\cdot 4!\cdot 2^4}{105\cdot 4!\cdot 2^4}=\frac{m}{105}$, với m là số cách chia 8 ghế thành 4 cặp mà không cặp nào gồm hai ghế cạnh nhau. Suy ra $105P=m$.

Đếm m: ghế 1 chỉ ghép được với ghế 3, 4, 5, 6 hoặc 7.

Ghế 1 ghép với ghế 3: ghế 2 ghép với ghế 4, 5, 6, 7 hoặc 8, số cách chia 4 ghế còn lại tương ứng là $1;1;2;1;1$, được 6 cách.

Ghế 1 ghép với ghế 4: ghế 2 ghép với ghế 5, 6, 7 hoặc 8, số cách chia 4 ghế còn lại tương ứng là $1;2;2;1$, được 6 cách.

Ghế 1 ghép với ghế 5: ghế 3 ghép với ghế 6, 7 hoặc 8, số cách chia 4 ghế còn lại tương ứng là $2;3;2$, được 7 cách.

Do tính đối xứng, ghế 1 ghép với ghế 7 có 6 cách (như ghế 3), ghép với ghế 6 có 6 cách (như ghế 4).

Vậy $m=6+6+7+6+6=31$, nên $105P=31$. Đáp số: 31.

Câu 2. Giá bán chưa gồm thuế VAT của mỗi sản phẩm là $143:1,1=130$ (nghìn đồng). Chênh lệch giữa giá bán chưa gồm VAT và chi phí cho mỗi sản phẩm là $130-70=60$ (nghìn đồng). Gọi x là số sản phẩm bán ra mỗi tháng, lợi nhuận mỗi tháng (nghìn đồng) là $60x-90000$. Yêu cầu bài toán: $60x-90000\ge 60000\Leftrightarrow x\ge 2500$. Đáp số: 2500.

Câu 3. Gọi $O=AC\cap BD$. Ta có $BC\perp AB$, $BC\perp SA$ nên $BC\perp (SAB)$, suy ra tam giác SBC vuông tại B. Kẻ $BH\perp SC$ $(H\in SC)$. Vì $BD\perp AC$, $BD\perp SA$ nên $BD\perp (SAC)\Rightarrow BD\perp SC$, do đó $SC\perp (BDH)\Rightarrow DH\perp SC$. Suy ra góc giữa (SBC) và (SCD) bằng góc giữa BH và DH, nên $\widehat{BHD}=60^\circ$ hoặc $\widehat{BHD}=120^\circ$. Hai tam giác SBC và SDC bằng nhau nên $BH=DH$. Nếu $\widehat{BHD}=60^\circ$ thì tam giác BHD đều, $BH=BD=3\sqrt{2}>BC$, vô lý vì BC là cạnh huyền của tam giác vuông BHC nên $BH<BC$. Vậy $\widehat{BHD}=120^\circ$. Vì O là trung điểm của BD nên HO vừa là đường cao vừa là đường phân giác của tam giác cân BHD, suy ra $\widehat{BHO}=60^\circ$ và

$BH=\dfrac{OB}{\sin 60^\circ}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}:\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}$. Đặt $SA=h>0$, ta có $SB=\sqrt{h^2+9}$, $SC=\sqrt{h^2+18}$,

$BH=\dfrac{SB\cdot BC}{SC}=\dfrac{3\sqrt{h^2+9}}{\sqrt{h^2+18}}$. Từ $BH=\sqrt{6}$ suy ra $\dfrac{9\left(h^2+9\right)}{h^2+18}=6\Leftrightarrow 3h^2=27\Leftrightarrow h=3$. Đáp số: 3.

Câu 4. $n(\Omega)=C_{16}^3=560$. Gắn các nút với tọa độ $(i;j)$, $i,j\in\{0;1;2;3\}$, và đếm số tam giác vuông PQR theo đỉnh góc vuông P. Giả sử $\overrightarrow{PQ}=m(p;q)$, $\overrightarrow{PR}=n(-q;p)$ với m,n là các số nguyên khác 0, p,q là các số nguyên không âm, nguyên tố cùng nhau. Nếu $p,q>0$ thì theo một trong hai tọa độ, hai vectơ $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ có thành phần trái dấu, nên hiệu tọa độ đó giữa Q và R (về giá trị tuyệt đối) ít nhất là $p+q$, suy ra $p+q\le 3$. Do đó ngoài phương song song với đường lưới, chỉ còn phương $(1;1)$ (đường chéo ô vuông) và phương $(1;2)$, $(2;1)$; với phương $(1;2)$ hoặc $(2;1)$, mỗi cạnh góc vuông chỉ dài đúng $\sqrt{5}$ vì đi hai bước sẽ vượt khỏi lưới.

Loại 1, hai cạnh góc vuông song song với đường lưới: chọn một nút cùng hàng và một nút cùng cột với P, mỗi nút có $3\cdot 3=9$ tam giác.

Loại 2, hai cạnh góc vuông theo phương $(1;1)$ và $(1;-1)$: nút ở góc bảng có 0 tam giác, mỗi nút biên còn lại có $2\cdot 1=2$ tam giác (ví dụ tại $(1;0)$: hai đỉnh còn lại là $(2;1)$ hoặc $(3;2)$ và $(0;1)$), mỗi nút bên trong có $3\cdot 2=6$ tam giác (ví dụ tại $(1;1)$: một đỉnh thuộc $\{(0;0);(2;2);(3;3)\}$, một đỉnh thuộc $\{(0;2);(2;0)\}$).

Loại 3, hai cạnh góc vuông cùng bằng $\sqrt{5}$: nút ở góc bảng có 0 tam giác, mỗi nút biên còn lại có 1 tam giác (ví dụ tại $(1;0)$: hai đỉnh còn lại là $(3;1)$ và $(0;2)$), mỗi nút bên trong có 2 tam giác (ví dụ tại $(1;1)$: $(2;3)$ và $(3;0)$, hoặc $(0;3)$ và $(3;2)$).

Như vậy mỗi nút góc có 9 tam giác, mỗi nút biên còn lại có 12 tam giác, mỗi nút bên trong có 17 tam giác. Số tam giác vuông là $4\cdot 9+8\cdot 12+4\cdot 17=200$. Xác suất cần tìm là $P=\dfrac{200}{560}=\dfrac{5}{14}\approx 0,36$. Đáp số: 0,36.

Câu 5. Đặt $MC = x\,(0 < x < 4)$, khi đó $AM = 4 - x$, $MB = \sqrt{x^2+1}$. Tổng chi phí (triệu đồng):

$T(x) = 300(4-x) + 500\sqrt{x^2+1}$. $T'(x) = -300 + \dfrac{500x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{100\left(5x - 3\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}$. Với $x > 0$,

$5x - 3\sqrt{x^2+1}$ cùng dấu với $25x^2 - 9\left(x^2+1\right) = 16x^2 - 9$, nên $T'(x) < 0$ trên $\left(0; \dfrac{3}{4}\right)$ và $T'(x) > 0$ trên

$\left(\dfrac{3}{4}; 4\right)$. Do đó chi phí nhỏ nhất là $T\left(\dfrac{3}{4}\right) = 300 \cdot \dfrac{13}{4} + 500 \cdot \dfrac{5}{4} = 1600$ (triệu đồng). Đáp số: 1600.

Câu 6. Tính số tiền sau đúng 48 tháng, ngay trước khi gửi khoản của đầu tháng thứ 49. Khoản gửi ở đầu tháng thứ k $(1 \le k \le 48)$ được tính lãi $49 - k$ tháng nên có giá trị $20 \cdot 1{,}005^{49-k}$. Tổng số tiền:

$S = 20\left(1{,}005 + 1{,}005^2 + \ldots + 1{,}005^{48}\right) = 20 \cdot 1{,}005 \cdot \dfrac{1{,}005^{48} - 1}{0{,}005} \approx 1087{,}37$ (triệu đồng). Đáp số: 1087.

---------- HẾT ----------