SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THANH HÓA
CỤM CÁC TRƯỜNG THPT

Mã đề 1001

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI
LẦN 5 NĂM HỌC 2026 – 2027
MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài: 90 phút
Ngày khảo sát: 29/10/2026
(Đề gồm 6 trang)

Họ tên thí sinh……..; SBD……;.Chữ kí của CBCT:……

PHẦN I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ được chọn 1 phương án.

Câu 1. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x}+1}{3x-9\sqrt{x}+6}$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 2. Cho hàm số $y=\log_2\left(x^2-4x+5\right)$ có đồ thị là (C). Giả sử đồ thị hàm số (C) cắt đường thẳng $(d):y=1$ tại hai điểm A, B.Khoảng cách AB bằng.

A. 5. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 3. Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a, gọi M là trung điểm cạnh CD. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$ bằng

A. $\dfrac{a^2}{4}$. **B.** $\dfrac{a^2}{2}$. **C.** $\dfrac{a^2}{3}$. **D.** a^2.

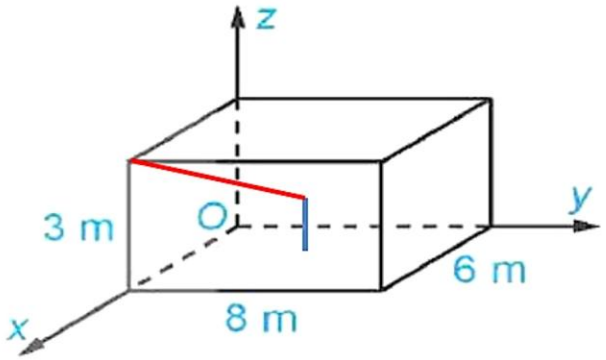
Câu 4. Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=4,|\vec{a}+\vec{b}|=6$. Tính $|\vec{a}-\vec{b}|$. (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

A. 4,74 . **B.** 2,74 . **C.** 3,84. **D.** 3,74.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;3;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(1;1;-2)$.Khi đó H là trực tâm tam giác ABC có tọa độ là.

A. $H\left(\dfrac{2}{15};\dfrac{29}{15};\dfrac{1}{3}\right)$ **B.** $H\left(\dfrac{2}{15};-\dfrac{29}{15};-\dfrac{1}{3}\right)$ **C.** $H\left(\dfrac{2}{15};\dfrac{29}{15};-\dfrac{1}{3}\right)$ **D.** $H\left(\dfrac{2}{15};\dfrac{29}{15};-\dfrac{1}{15}\right)$

Câu 6. Trong một phòng học được thiết kế dạng hình hộp chữ nhật, với chiều dài $8m$, chiều rộng $6m$ và chiều cao $3m$. Hai bạn An và Bình làm nhiệm vụ trực nhật, mạng nhện cần quét ở góc ngoài cùng trên trần nhà (như hình vẽ), An bảo không nên đứng ngay vị trí đó ở nền nhà quét vì sẽ bụi rơi xuống người mình, An lại đố bạn Bình "nếu mình đứng ở chính giữa nhà quét thì chổi quét phải dài mấy mét (làm tròn đến hàng phần trăm) để quét được vị trí mạng nhện, biết An cầm chổi cao $1,5m$ ''. Bình trả lời đứng vị trí đó chổi dài $5m$ cũng không tới. Hỏi Bình đã tính được bao nhiêu mét *(làm tròn đến hàng phần trăm)?*



A. 5,22 . **B.** 5,74 . **C.** 5,32. **D.** 5,42.

Câu 7. Cho bảng số liệu dưới đây về thời gian (phút) tập thể dục buổi sáng của bạn Bình trong 30 ngày.

Thời gian	$[15;20)$	$[20;25)$	$[25;30)$	$[30;35)$	$[35;40)$
Số ngày	5	8	10	4	3

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng của bạn Bình là: $Q_1 = \frac{a}{b}$ (phân số này tối giản; $a;b$ là các số tự nhiên).Tính $2a-b$.

A. 675. **B.** 674. **C.** 676. **D.** 677.

Câu 8. Kết quả điều tra về số giờ xem ti vi của một số hộ gia đình được biểu diễn ở biểu đồ dưới



Giá trị trung bình của mẫu số liệu trên là:

A. 9,5. **B.** 10. **C.** 12,25. **D.** 10,25.

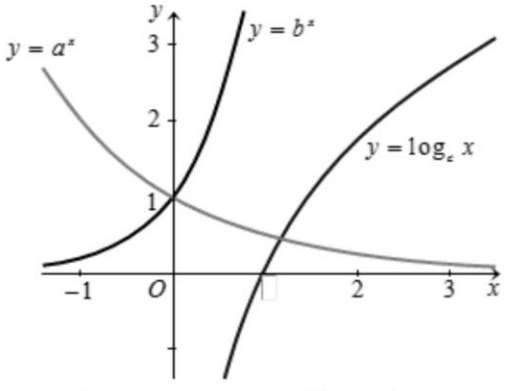
Câu 9. Từ một vị trí ban đầu trong không gian, vệ tinh X chuyển động theo quỹ đạo là một đường tròn quanh Trái Đất và luôn cách tâm Trái Đất một khoảng bằng $9200km$. Sau 2 giờ thì vệ tinh X hoàn thành hết một vòng di chuyển. Quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1 giờ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) là:

A. $28902,65(km)$. **B.** $29802,65(km)$. **C.** $32102,65(km)$. **D.** $28905(km)$.

Câu 10. Tổng các nghiệm của phương trình lượng giác: $3-\sqrt{3}\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$ trong khoảng $\left(\frac{-\pi}{4};\frac{2\pi}{3}\right)$ bằng

A. $\frac{2\pi}{3}$ **B.** $\frac{\pi}{4}$ **C.** $\frac{\pi}{2}$ **D.** $\frac{\pi}{6}$

Câu 11. Trong hình vẽ bên có đồ thị các hàm số $y=a^x$, $y=b^x$, $y=\log_c x$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây?



A. $a<c<b$ **B.** $c<a<b$ **C.** $a<b=c$ **D.** $b<c<a$

Câu 12. Ba số theo thứ tự lập thành một cấp số nhân có số hạng cuối lớn hơn số hạng đầu 16 đơn vị. Ba số đó là các số hạng thứ nhất, thứ hai và thứ năm của một cấp số cộng. Tìm ba số đó.

A. 2,6,18. **B.** 4,8,20. **C.** $\frac{1}{3},\frac{7}{3},\frac{49}{3}$. **D.** $4,4\sqrt{5},20$.

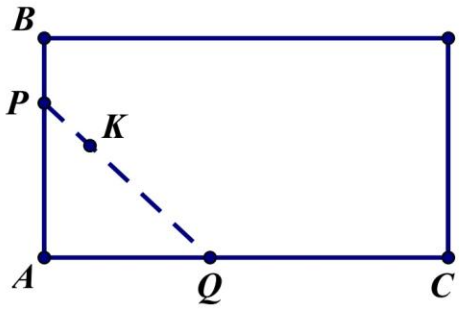
Câu 13. Biết rằng $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-2}+ax-b\right)=-5$ và $a,b\in R$ cho trước. Tính tổng $a+b$.

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 5.

Câu 14. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để các chữ số của số đó đôi một khác nhau và phải có mặt chữ số 0 và 1.

A. $\frac{7}{125}$. **B.** $\frac{7}{150}$. **C.** $\frac{189}{1250}$. **D.** $\frac{7}{375}$.

Câu 15. Một cái hồ rộng có hình chữ nhật. Tại một góc nhỏ của hồ người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là 1 m và cách bờ AC là 8 m, rồi dùng một cây sào ngăn một góc nhỏ của hồ để thả bèo (như hình vẽ). Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB, AC và cây cọc K (bỏ qua đường kính của sào).



A. $\frac{5\sqrt{65}}{4}$. **B.** $5\sqrt{5}$. **C.** $9\sqrt{2}$. **D.** $\frac{5\sqrt{71}}{4}$.

Câu 16. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BB'. Cosin của góc hợp bởi MN và AC' bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{5}$

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp cụt $ABC.A'B'C'$ có đáy là các tam giác đều. Biết các đỉnh A, B, C thuộc mặt phẳng (Oxy), Biết $B'(0;4;3)$, điểm C' thuộc trục Oz và A' có hoành độ dương. Biết rằng khi $\left|\overrightarrow{CA'}+3\overrightarrow{CB'}+2\overrightarrow{CC'}\right|$ nhỏ nhất thì tọa độ điểm $C(a;b;0)$. Giá trị của a^2+b^2 là

A. $\frac{35}{9}$ **B.** $\frac{41}{9}$ **C.** $\frac{47}{9}$ **D.** $\frac{52}{9}$

Câu 18. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để tồn tại đúng hai cặp số $(x;y)$ thỏa mãn các điều kiện $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y$ và $y=\log_3\left(\frac{x+7-m}{2m}\right)$. Tổng các phần tử của tập S bằng

A. 10. **B.** 18. **C.** 12. **D.** 6.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Cạnh bên SB lần lượt tạo với mặt phẳng đáy và mặt phẳng (SAM) các góc bằng $30°$ và $45°$, khoảng cách từ S đến cạnh BC bằng a. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. a^3. **B.** $\frac{a^3}{2}$. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** $\frac{a^3}{6}$.

Câu 20. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, trên tia Ox lấy 12 điểm phân biệt (khác O) là $A_1, A_2, ..., A_{12}$ và trên tia Oy lấy 12 điểm phân biệt (khác O)là $B_1, B_2, ..., B_{12}$ thỏa mãn $OA_1 = A_1A_2 = ... = A_{11}A_{12} = OB_1 = B_1B_2 = ... = B_{11}B_{12} = 1$(đơn vị). Chọn ngẫu nhiên một tam giác có 3 đỉnh nằm trong 24 điểm $A_1, A_2, ..., A_{12}, B_1, B_2, ..., B_{12}$. Xác suất để tam giác chọn được có đường tròn ngoại tiếp tiếp xúc với một trong hai trục Ox hoặc Oy là $p=\frac{n}{m}$. Tính giá trị của $m-n$; biết m, n

nguyên dương và $\frac{n}{m}$ là phân số tối giản.

A. 820. **B.** 810. **C.** 798 **D.** 787.

Phần II. Trắc nghiệm đúng - sai. *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.*

Câu 1. Giám đốc một nhà hát A đang phân vân trong việc xác định mức giá vé xem các chương trình được trình chiếu trong nhà hát. Việc này rất quan trọng nó sẽ quyết định nhà hát thu được bao nhiêu lợi nhuận từ các buổi trình chiếu. Theo những cuốn sổ ghi chép của mình, ông ta xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là 20 USD/1 người thì trung bình có 1000 người đến xem. Nhưng nếu giảm đi 1 USD/ 1 người thì sẽ có thêm 100 khách hàng đến xem. Biết rằng, trung bình mỗi khách hàng còn đem lại 2 USD lợi nhuận cho nhà hát trong các dịch vụ đi kèm.

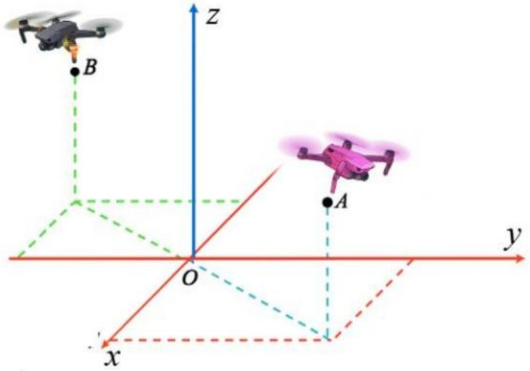
a) Gọi p (USD) là giá vé vào cửa của một người vào xem, x là số người vào xem (là số vé bán ra), khi đó hàm cầu là: $p(x)=-\frac{1}{100}x+30$.

b) Nhà hát giảm giá vé đi 4 (USD) /1 người thì doanh thu của nhà hát(gồm cả dịch vụ đi kèm) là lớn nhất.

c) Nếu hàm chi phí một buổi trình chiếu là $C(x)=15000+4x$ (USD), trong đó x là số người vào xem (là số vé bán ra) thì lợi nhuận là cao nhất khi có 1800 người vào xem.

d) Nếu hàm chi phí một buổi trình chiếu là $C(x)=15000+4x$ (USD), trong đó x là số người vào xem (là số vé bán ra) thì nhà hát nên đặt giá bán vé là 12 (USD) /1 người vào xem để lợi nhuận là lớn nhất.

Câu 2. Hai chiếc flycam được điều khiển cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc flycam thứ nhất bay đến vị trí điểm A cách mặt đất $5m$, cách điểm xuất phát $3m$ về phía nam và $2m$ về phía đông. Chiếc flycam thứ hai bay đến điểm B cách mặt đất $5m$, cách điểm xuất phát $6m$ về phía bắc và $6m$ về phía tây. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc flycam, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (coi như phẳng) có trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (đơn vị đo mỗi trục là mét).



a) Toạ độ điểm $A(3;2;5)$, $B(6;6;5)$.

b) Có 4 vị trí của điểm I thuộc trục Oy để ΔIAB là tam giác vuông.

c) Điểm $C(0;0;5)$ thuộc trục Oz để AC song song với mặt phẳng Oxy.

d) Điểm M trên mặt đất, người ta xác định được một vị trí sao cho tổng khoảng cách từ vị trí đó đến hai chiếc flycam ngắn nhất. Khi đó toạ độ điểm $M\left(\frac{3}{2};2;0\right)$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = h$. Các điểm A', C' thỏa mãn $\overrightarrow{SA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{SC}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $A'C'$ cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D' (B', D' không trùng S).

a) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.

b) $\frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = 7$.

c) $A'C' \perp SB$ khi $h = \sqrt{2}$.

d) Khi $h = \sqrt{3}$ thì khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C'$ và BD bằng $\frac{5\sqrt{14}}{14}$.

Câu 4. Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{30}$ có 30 đỉnh nội tiếp trong một đường tròn. Chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của đa giác đó.

a) Số tứ giác có thể tạo thành từ các đỉnh của đa giác là 27405.

b) Số hình chữ nhật tạo thành từ các đỉnh của đa giác là 105.

c) Xác suất để 4 đỉnh được chọn tạo thành một tứ giác có đúng 2 cạnh là cạnh của đa giác ban đầu bằng $\frac{60}{9135}$.

d) Số tam giác có đúng một góc tù tạo thành từ các đỉnh của đa giác là 3640.

Câu 5. Một công ty cung cấp nước sạch thống kê lượng nước các hộ gia đình ở khu vực A tiêu thụ trong một tháng ở bảng sau:

Lượng nước tiêu thụ (m^3)	$[3;6)$	$[6;9)$	$[9;12)$	$[12;15)$	$[15;18)$
Số hộ gia đình	24	57	42	29	8

a) Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là 9,375.

b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho xấp xỉ bằng 5,94.(kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

c) Mốt của mẫu số liệu là $M_O = 8,0625$.

d) Mức sử dụng nước của các hộ gia đình ở khu A đồng đều hơn các hộ gia đình ở khu B. Biết rằng người ta tính được độ lệch chuẩn của mẫu số liệu thống kê lượng nước các hộ gia đình ở khu B sử dụng xấp xỉ bằng 2,75.

Câu 6. Hàng ngày mực nước tại một cảng biển lên xuống theo thuỷ triều. Chiều cao $h(m)$ của mực nước theo thời gian t (giờ) trong một ngày được cho bởi công thức $h = 14 + 8\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ với $0 \le t \le 24$.

a) Lúc 6 giờ sáng thì chiều cao của mực nước tại bến cảng là cao nhất.

b) Chiều cao của mực nước tại bến cảng thấp nhất vào lúc 12 giờ.

c) Mực nước tại bến cảng cao $18m$ vào lúc 2 giờ và 10 giờ.

d) Biết tàu chỉ vào được cảng khi mực nước trong cảng không thấp hơn $18m$. Vậy thời gian tàu vào được cảng là từ 2 giờ đến 10 giờ.

Phần III. Trắc nghiệm trả lời ngắn. *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.*

Câu 1. Chi phí về nhiên liệu của một con tàu được chia làm hai phần. Phần chi phí thứ nhất không phụ thuộc vào tốc độ tàu và bằng 960 nghìn đồng mỗi giờ. Chi phí phần thứ hai cho quãng đường 10 *km* tỉ lệ thuận với lập phương tốc độ của tàu ;khi tốc độ bằng 40 *km/h* thì chi phí phần thứ hai cho 10 *km* đường là 25 nghìn đồng . Giả sử con tàu đó luôn giữ nguyên tốc độ di chuyển, để tổng chi phí nhiên liệu trên

10 km đường là nhỏ nhất thì tốc độ của con tàu đó bằng bao nhiêu? (đơn vị: km/h ;làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Câu 2. Đường đi của một khinh khí cầu được gắn trong hệ trục tọa độ Oxy là một đường cong $y=\dfrac{x^2+bx+c}{dx+e}$ có đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm có tọa độ là $(1;0)$ và $(8;0)$ với đơn vị trên hệ trục tọa độ là 1 (km). Biết rằng điểm cực đại của đồ thị hàm số là điểm $(6;5)$. Sau khi khí cầu đi qua điểm cực đại và cách mặt đất 3875 (m) thì khí cầu cách gốc tọa độ theo phương ngang bao nhiêu? (đơn vị: km).

Câu 3. Một công ty thiết kế mái che hình chóp cho một sân chơi. Phần khung dưới là một hình bình hành $ABCD$ trên mặt sàn; trên một đỉnh của hình bình hành người ta dựng một trụ thẳng đứng để tạo thành chóp $S.ABCD$ (đỉnh S là tâm của hệ khung phía trên). Biết rằng tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A. Trục đứng từ A lên đỉnh S vuông góc với mặt đáy. Kỹ sư thiết kế sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng chứa tam giác SBC bằng 3 mét**.** Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$. Người ta cần thiết kế sao cho thể tích khối chóp $S.ABCD$ là nhỏ nhất. Khi đó, góc α bằng bao nhiêu? (kết quả theo đơn vị độ và làm tròn đến hàng phần mười).

Câu 4. Trong một nhà xưởng cao tầng, hệ toạ độ $Oxyz$ được gắn sao cho: Mặt phẳng sàn nhà là mặt phẳng (Oxy), trục Oz hướng thẳng đứng lên. Ba bộ phát tín hiệu cảm biến được gắn cố định tại ba vị trí: $A(3;0;0)$, $B(0;3;0), C(0;0;3)$. Trên sàn nhà (Oxy) có một robot dò đường tại vị trí $M(x;y;0)$. Để tối ưu năng lượng và thời gian kết nối, hệ thống trung tâm sẽ tạo ra một điểm thu tín hiệu tạm thời N trên cùng tia OM sao cho $OM\cdot ON=27$. Người thiết kế muốn điểm thu N ở vị trí "cân bằng tín hiệu" nhất đối với ba bộ phát A,B,C, nghĩa là $P=NA^2+NB^2+NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Câu 5. Nhân dịp Tết Trung thu cô giáo tặng quà cho 3 bạn Vũ, Hồng, Ngọc. Trong hộp quà có 9 cây bút và 8 quyển vở được sắp xếp một cách lộn xộn. Cô giáo gọi 3 bạn đứng xếp hàng có thứ tự, Vũ đứng trước được tặng quà trước, Hồng đứng sau nhận quà sau và Ngọc đứng sau cùng nên nhận quà sau cùng. Xác suất để Ngọc nhận được quà là cây bút bằng bao nhiêu, biết rằng cô giáo tặng quà bằng cách rút ngẫu nhiên và mỗi bạn chỉ nhận được một phần quà trong hộp.*(Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).*

Câu 6. Cho hàm số bậc ba $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ có $f(1)=\dfrac{35}{2}$ và bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\dfrac{35}{2}$	↗	$+\infty$

Xét bất phương trình: $1+\log_2(2-x)-2\log_2\left(f(4m)-\dfrac{x}{2}+4\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}\right)\right)\le -\log_2(x+1)$ (1)**.** Gọi m_0 là giá trị nhỏ nhất để bất phương trình (1) có nghiệm. Tính giá trị biểu thức $T=2024m_0+2025$.

------ HẾT ------

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI THAM KHẢO

Được thực hiện bởi AI & TOANMATH.com

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN.

Câu 1. Điều kiện: $x \ge 0$, $3x - 9\sqrt{x} + 6 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne 1$, $x \ne 4$.

Ta có $3x - 9\sqrt{x} + 6 = 3\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} - 2\right)$ và tử số $\sqrt{x} + 1 > 0$ nên $\lim\limits_{x \to 1^+} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 4^+} y = +\infty$.

Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng là $x = 1$, $x = 4$. Chọn C.

Câu 2. Phương trình hoành độ giao điểm:
$\log_2\left(x^2 - 4x + 5\right) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.

Suy ra $A(1;1)$, $B(3;1)$, $AB = 2$. Chọn C.

Câu 3. Vì M là trung điểm CD nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{2}\left(a^2 \cos 60^\circ + a^2 \cos 60^\circ\right) = \frac{a^2}{2}$. Chọn B.

Câu 4. $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow 36 = 9 + 16 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 11$.

$\left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2 = 9 + 16 - 11 = 14 \Rightarrow \left|\vec{a} - \vec{b}\right| = \sqrt{14} \approx 3{,}74$. Chọn D.

Câu 5. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3;-1;-1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1;-2;-3)$, $\overrightarrow{BC} = (2;-1;-2)$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -3$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 6$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8$, $\overrightarrow{AC}^2 = 14$.

Vì $H \in (ABC)$ nên đặt $\overrightarrow{AH} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC}$, khi đó $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB} = (u-1)\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC}$.

H là trực tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3u + 6v = 0 \\ 8(u-1) + 14v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{8}{15} \\ v = \frac{4}{15} \end{cases}$.

Suy ra $\overrightarrow{AH} = \frac{8}{15}(-3;-1;-1) + \frac{4}{15}(-1;-2;-3) = \left(-\frac{28}{15}; -\frac{16}{15}; -\frac{4}{3}\right)$.

Vậy $H\left(\frac{2}{15}; \frac{29}{15}; -\frac{1}{3}\right)$. Chọn C.

Câu 6. Với hệ trục như hình vẽ (đơn vị mét), vị trí mạng nhện là $E(6;0;3)$.

Tâm của nền nhà là điểm $(3;4;0)$, An cầm chổi ở độ cao $1{,}5$ m nên vị trí tay cầm chổi là $F(3;4;1{,}5)$.

Độ dài chổi cần có: $EF=\sqrt{(6-3)^2+(0-4)^2+(3-1,5)^2}=\sqrt{27,25}\approx 5,22$ (m). Chọn A.

Câu 7. $n=30$, $\frac{n}{4}=7,5$ nên nhóm chứa Q_1 là $[20;25)$.

$Q_1=20+\frac{7,5-5}{8}\cdot 5=\frac{345}{16}$. Suy ra $a=345$, $b=16$, $2a-b=674$. Chọn B.

Câu 8. Các giá trị đại diện lần lượt là $2,5$; $7,5$; $12,5$; $17,5$; $22,5$ với tần số tương ứng 20; 35; 25; 10; 10, $n=100$.

$\overline{x}=\frac{20\cdot 2,5+35\cdot 7,5+25\cdot 12,5+10\cdot 17,5+10\cdot 22,5}{100}=10,25$. Chọn D.

Câu 9. Coi vệ tinh chuyển động đều trên quỹ đạo. Chu vi quỹ đạo là $2\pi\cdot 9200=18400\pi$ (km). Sau 2 giờ vệ tinh đi hết một vòng nên sau 1 giờ vệ tinh đi được nửa vòng, quãng đường là $9200\pi\approx 28902,65$ (km). Chọn A.

Câu 10. $3-\sqrt{3}\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow \tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

$-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}<\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow -\frac{7}{6}<k<\frac{2}{3}$, mà $k\in\mathbb{Z}$ nên $k\in\{-1;0\}$.

Các nghiệm là $x=-\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{3}$, tổng các nghiệm bằng $\frac{\pi}{6}$. Chọn D.

Câu 11. Hàm số $y=a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $0<a<1$; các hàm số $y=b^x$, $y=\log_c x$ đồng biến nên $b>1$, $c>1$.

Từ đồ thị hàm số $y=\log_c x$ ta có $\log_c 2>1\Leftrightarrow c<2$.

Từ đồ thị hàm số $y=b^x$ ta có $b^1>2\Leftrightarrow b>2$.

Vậy $a<c<b$. Chọn A.

Câu 12. Gọi ba số là số hạng thứ nhất, thứ hai, thứ năm của cấp số cộng có công sai d: u_1, u_1+d, u_1+4d.

Số hạng cuối lớn hơn số hạng đầu 16 đơn vị nên $4d=16\Rightarrow d=4$. Ba số là u_1, u_1+4, u_1+16.

Ba số lập thành cấp số nhân nên $(u_1+4)^2=u_1(u_1+16)\Leftrightarrow 8u_1=16\Leftrightarrow u_1=2$.

Ba số cần tìm là $2;6;18$. Chọn A.

Câu 13. Ta có $\frac{x^2+1}{x-2}=x+2+\frac{5}{x-2}$ nên $\frac{x^2+1}{x-2}+ax-b=(1+a)x+2-b+\frac{5}{x-2}$.

Giới hạn hữu hạn nên $1+a=0 \Leftrightarrow a=-1$, khi đó giới hạn bằng $2-b=-5 \Leftrightarrow b=7$. Vậy $a+b=6$. Chọn A.

Câu 14. $n(\Omega)=9\cdot 10^5=900000$.

Số có 6 chữ số đôi một khác nhau và có mặt chữ số 0 và 1: xếp chữ số 0 vào 1 trong 5 vị trí (khác vị trí đầu tiên) có 5 cách; xếp chữ số 1 vào 1 trong 5 vị trí còn lại có 5 cách; 4 vị trí còn lại chọn và xếp từ 8 chữ số còn lại có $A_8^4=1680$ cách.

$n(A)=5\cdot 5\cdot 1680=42000$. Vậy $P(A)=\dfrac{42000}{900000}=\dfrac{7}{150}$. Chọn B.

Câu 15. Chọn hệ trục Oxy với $O\equiv A$, tia Ox chứa AC, tia Oy chứa AB (đơn vị mét). Khi đó $K(1;8)$.

Gọi $Q(q;0)$ với $q>1$. Đường thẳng QK cắt Oy tại $P\left(0;\dfrac{8q}{q-1}\right)$.

$PQ^2=q^2+\dfrac{64q^2}{(q-1)^2}=f(q)$ với $q>1$.

$f'(q)=2q-\dfrac{128q}{(q-1)^3}$; $f'(q)=0 \Leftrightarrow (q-1)^3=64 \Leftrightarrow q=5$.

Lập bảng biến thiên ta được $\min\limits_{(1;+\infty)} f(q)=f(5)=125$, khi đó $AQ=5$ m, $AP=10$ m (hồ rộng nên P, Q nằm trên hai bờ AB, AC).

Vậy chiều dài ngắn nhất của cây sào là $5\sqrt{5}$ (m). Chọn B.

Câu 16. Gắn hệ trục tọa độ với $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $A'(0;0;1)$ (cạnh hình lập phương bằng 1).

Khi đó $M\left(0;\dfrac{1}{2};0\right)$, $N\left(1;0;\dfrac{1}{2}\right)$, $C'(1;1;1)$, $\overrightarrow{MN}=\left(1;-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{AC'}=(1;1;1)$.

$\cos\left(MN,AC'\right)=\dfrac{\left|1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right|}{\sqrt{\dfrac{3}{2}}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. Chọn B.

Câu 17. Hai đáy song song nên $(A'B'C')$ là mặt phẳng $z=3$, do đó $C'(0;0;3)$.

Gọi $A'(x;y;3)$ với $x>0$. Tam giác $A'B'C'$ đều nên $A'B'=A'C'=B'C'=4 \Rightarrow y=2$, $x=2\sqrt{3}$, tức là $A'\left(2\sqrt{3};2;3\right)$.

Ta có $\overrightarrow{CA'}+3\overrightarrow{CB'}+2\overrightarrow{CC'}=\left(2\sqrt{3}-6a;14-6b;18\right)$.

$\left|\overrightarrow{CA'}+3\overrightarrow{CB'}+2\overrightarrow{CC'}\right|^2=\left(2\sqrt{3}-6a\right)^2+(14-6b)^2+324\geq 324$.

Dấu bằng xảy ra khi $a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $b=\dfrac{7}{3}$. Vậy $a^2+b^2=\dfrac{1}{3}+\dfrac{49}{9}=\dfrac{52}{9}$. Chọn D.

Câu 18. Điều kiện: $x>-1$, $\dfrac{x+7-m}{2m}>0$.

$\log_3(3x+3)+x=2y+9^y \Leftrightarrow \log_3(x+1)+(x+1)=2y+3^{2y}$.

Đặt $u=\log_3(x+1)$ thì $x+1=3^u$, phương trình trở thành $u+3^u=2y+3^{2y}$.

Hàm số $g(t)=t+3^t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $u=2y \Leftrightarrow x+1=9^y$.

Đặt $t=3^y>0$, ta có $x=t^2-1$. Điều kiện thứ hai:

$3^y=\dfrac{x+7-m}{2m} \Leftrightarrow 2mt=t^2+6-m \Leftrightarrow t^2-2mt+6-m=0$ (*) (với $m\neq 0$).

Mỗi nghiệm $t>0$ của (*) cho đúng một cặp $(x;y)$ thỏa mãn. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2+m-6>0 \\ S=2m>0 \\ P=6-m>0 \end{cases} \Leftrightarrow 2<m<6.$$

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{3;4;5\}$, tổng các phần tử của S bằng 12. Chọn C.

Câu 19. Tam giác ABC cân tại A nên $AM\perp BC$, mà $SA\perp BC$ nên $BC\perp(SAM)$, suy ra $SM\perp BC$ và $d(S,BC)=SM=a$.

Góc giữa SB và (ABC) là $\widehat{SBA}=30^\circ$; vì $BM\perp(SAM)$ nên góc giữa SB và (SAM) là $\widehat{BSM}=45^\circ$.

Tam giác SMB vuông cân tại M nên $BM=SM=a$, $SB=a\sqrt{2}$, $BC=2a$.

$SA=SB\sin 30^\circ=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $AM=\sqrt{SM^2-SA^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SA\cdot\dfrac{1}{2}AM\cdot BC=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot 2a=\dfrac{a^3}{6}$. Chọn D.

Câu 20. Tam giác có hai đỉnh thuộc một tia và một đỉnh thuộc tia còn lại nên $n(\Omega)=2\cdot 12\cdot C_{12}^2=1584$.

Trường hợp 1: tam giác có hai đỉnh $A(a;0)$, $C(c;0)$ thuộc tia Ox $(a<c)$ và một đỉnh $B(0;b)$ thuộc tia Oy, với $a,b,c\in\{1;2;...;12\}$. Đường tròn ngoại tiếp cắt Ox tại hai điểm nên chỉ có thể tiếp xúc với Oy, tiếp điểm là B.

Khi đó tâm I nằm trên đường trung trực của AC và $IB\perp Oy$ nên $I\left(\frac{a+c}{2};b\right)$.

$IA=IB\Leftrightarrow\left(\frac{c-a}{2}\right)^2+b^2=\left(\frac{a+c}{2}\right)^2\Leftrightarrow b^2=ac$.

Viết mỗi số từ 1 đến 12 dưới dạng $k\cdot n^2$ với k không chia hết cho số chính phương nào lớn hơn 1; khi đó ac là số chính phương khi và chỉ khi a, c có cùng k.

Các nhóm có từ hai số trở lên là $\{1;4;9\}$, $\{2;8\}$, $\{3;12\}$ nên số cặp $(a;c)$ là $C_3^2+1+1=5$, gồm $(1;4)$, $(1;9)$, $(4;9)$, $(2;8)$, $(3;12)$ với b tương ứng là $2;3;6;4;6$. Có 5 tam giác.

Trường hợp 2: tam giác có hai đỉnh thuộc tia Oy, lập luận tương tự có 5 tam giác có đường tròn ngoại tiếp tiếp xúc với Ox.

$p=\frac{10}{1584}=\frac{5}{792}\Rightarrow n=5$, $m=792$. Vậy $m-n=787$. Chọn D.

<u>PHẦN II</u>. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI.

Câu 1.

a) Khi giá vé giảm $20-p$ (USD) thì số người xem tăng thêm $100(20-p)$ nên

$x=1000+100(20-p)\Leftrightarrow p=-\frac{1}{100}x+30$. Đúng.

b) Tổng tiền bán vé và lợi nhuận từ dịch vụ đi kèm: $R(x)=x\cdot p(x)+2x=-\frac{x^2}{100}+32x$, đạt giá trị lớn nhất khi $x=1600$, khi đó $p=14$, tức là giảm giá vé 6 USD. Sai.

c) Lợi nhuận: $L(x)=x\cdot p(x)+2x-C(x)=-\frac{x^2}{100}+28x-15000$, đạt giá trị lớn nhất khi $x=1400$. Sai.

d) Lợi nhuận lớn nhất khi $x=1400$, khi đó giá vé $p=-\frac{1400}{100}+30=16$ (USD). Sai.

Câu 2.

a) $A(3;2;5)$; điểm B cách điểm xuất phát 6 m về phía bắc và 6 m về phía tây nên $B(-6;-6;5)$. Sai.

b) Gọi $I(0;t;0)$. Ta có $\overrightarrow{IA}=(3;2-t;5)$, $\overrightarrow{IB}=(-6;-6-t;5)$, $\overrightarrow{AB}=(-9;-8;0)$.

Tam giác vuông tại I: $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=0\Leftrightarrow t^2+4t-5=0\Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=-5$.

Tam giác vuông tại A: $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow 43-8t=0\Leftrightarrow t=\dfrac{43}{8}$.

Tam giác vuông tại B: $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}=0\Leftrightarrow 102+8t=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{51}{4}$.

Vậy có 4 vị trí của điểm I. Đúng.

c) $\overrightarrow{AC}=(-3;-2;0)$ vuông góc với $\vec{k}=(0;0;1)$ và $A\notin(Oxy)$ nên $AC\,||\,(Oxy)$. Đúng.

d) A, B nằm cùng phía đối với (Oxy). Gọi $B'(-6;-6;-5)$ là điểm đối xứng với B qua (Oxy).

$MA+MB=MA+MB'\geq AB'$, dấu bằng xảy ra khi $M=AB'\cap(Oxy)$, tức M là trung điểm AB': $M\left(-\dfrac{3}{2};-2;0\right)$. Sai.

Câu 3.

a) Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, ta có $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$. Đúng.

b) Gọi $J=A'C'\cap SO$. Vì J thuộc cả (P) và (SBD), mà $(P)\cap(SBD)=B'D'$ nên $J\in B'D'$. Đặt $x=\dfrac{SB}{SB'}$, $y=\dfrac{SD}{SD'}$, $\overrightarrow{SJ}=k\overrightarrow{SO}$.

$\overrightarrow{SJ}=\dfrac{k}{2}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}\right)=\dfrac{3k}{2}\overrightarrow{SA'}+2k\overrightarrow{SC'}$; vì $J\in A'C'$ nên $\dfrac{3k}{2}+2k=1\Rightarrow k=\dfrac{2}{7}$.

$\overrightarrow{SJ}=\dfrac{k}{2}\left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}\right)=\dfrac{kx}{2}\overrightarrow{SB'}+\dfrac{ky}{2}\overrightarrow{SD'}$; vì $J\in B'D'$ nên $\dfrac{k(x+y)}{2}=1\Rightarrow x+y=\dfrac{2}{k}=7$. Đúng.

c) Gắn hệ trục tọa độ với gốc tại A, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $S(0;0;h)$. Khi đó $C(1;1;0)$, $A'\left(0;0;\dfrac{2h}{3}\right)$, $C'\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4};\dfrac{3h}{4}\right)$.

$\overrightarrow{A'C'}=\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4};\dfrac{h}{12}\right)$, $\overrightarrow{SB}=(1;0;-h)$.

$A'C'\perp SB\Leftrightarrow\dfrac{1}{4}-\dfrac{h^2}{12}=0\Leftrightarrow h=\sqrt{3}$. Sai.

d) Khi $h=\sqrt{3}$ thì $A'C'\perp SB$ (theo câu c); mặt khác $BD\perp(SAC)$ nên $A'C'\perp BD$. Suy ra $A'C'\perp(SBD)$.

$OJ\subset(SBD)$ nên $OJ\perp A'C'$; $OJ\subset(SAC)$ nên $OJ\perp BD$. Do đó OJ là đoạn vuông góc chung của $A'C'$ và BD.

Theo câu b) $\overrightarrow{SJ}=\frac{2}{7}\overrightarrow{SO}$ nên $d\left(A'C',BD\right)=OJ=\frac{5}{7}SO=\frac{5}{7}\sqrt{SA^2+AO^2}=\frac{5}{7}\sqrt{3+\frac{1}{2}}=\frac{5\sqrt{14}}{14}$. Đúng.

Câu 4.

a) Số tứ giác là $C_{30}^4=27405$. Đúng.

b) Đa giác đều 30 đỉnh có 15 đường chéo đi qua tâm, mỗi hình chữ nhật ứng với 2 đường chéo như vậy nên có $C_{15}^2=105$ hình chữ nhật. Đúng.

c) $n(\Omega)=C_{30}^4=27405$. Đếm số tứ giác có đúng 2 cạnh là cạnh của đa giác:

Trường hợp 1: hai cạnh kề nhau, tức là có 3 đỉnh liên tiếp $A_iA_{i+1}A_{i+2}$ (30 cách), đỉnh thứ tư không trùng và không kề với các đỉnh đó: $30-5=25$ cách. Có $30\cdot 25=750$ tứ giác.

Trường hợp 2: hai cạnh không kề nhau: chọn cạnh thứ nhất A_iA_{i+1} có 30 cách; cạnh thứ hai không được là một trong 5 cạnh $A_{i-2}A_{i-1}$, $A_{i-1}A_i$, A_iA_{i+1}, $A_{i+1}A_{i+2}$, $A_{i+2}A_{i+3}$ (vì trùng, có chung đỉnh hoặc tạo thêm một cạnh của đa giác) nên có $30-5=25$ cách; mỗi tứ giác được đếm 2 lần. Có $\frac{30\cdot 25}{2}=375$ tứ giác.

$P=\frac{750+375}{27405}=\frac{1125}{27405}=\frac{25}{609}$. Sai.

d) Tam giác tù khi ba đỉnh nằm trên một cung nhỏ hơn nửa đường tròn. Với mỗi tam giác tù, trong ba cung nối các đỉnh liên tiếp có đúng một cung lớn hơn nửa đường tròn; gọi đỉnh nằm ngay sau cung đó (theo chiều kim đồng hồ) là đỉnh đầu tiên A_i, khi đó hai đỉnh còn lại thuộc 14 đỉnh kế tiếp $A_{i+1},...,A_{i+14}$, nên mỗi tam giác tù được đếm đúng một lần.

Chọn A_i có 30 cách, chọn hai đỉnh còn lại có $C_{14}^2=91$ cách. Số tam giác tù là $30\cdot 91=2730$. Sai.

Câu 5. Các giá trị đại diện lần lượt là $4,5;\ 7,5;\ 10,5;\ 13,5;\ 16,5;\ n=160$.

a) $\overline{x}=\frac{24\cdot 4,5+57\cdot 7,5+42\cdot 10,5+29\cdot 13,5+8\cdot 16,5}{160}=\frac{1500}{160}=9,375$. Đúng.

b) $\frac{n}{4}=40$ nên $Q_1=6+\frac{40-24}{57}\cdot 3=\frac{130}{19}$; $\frac{3n}{4}=120$ nên $Q_3=9+\frac{120-81}{42}\cdot 3=\frac{165}{14}$.

$\Delta_Q=Q_3-Q_1=\frac{1315}{266}\approx 4,94$. Sai.

c) Nhóm chứa mốt là $[6;9)$: $M_O=6+\frac{57-24}{(57-24)+(57-42)}\cdot 3=8,0625$. Đúng.

d) $s_A^2=\frac{24\cdot 4,5^2+57\cdot 7,5^2+42\cdot 10,5^2+29\cdot 13,5^2+8\cdot 16,5^2}{160}-9,375^2=10,771875$

$\Rightarrow s_A \approx 3,28 > 2,75.$

Độ lệch chuẩn ở khu A lớn hơn nên mức sử dụng nước ở khu A kém đồng đều hơn khu B. Sai.

Câu 6.

a) $-1 \le \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) \le 1 \Rightarrow 6 \le h \le 22$. $h = 22 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) = 1 \Leftrightarrow t = 6$ (với $0 \le t \le 24$). Đúng.

b) $h = 6 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) = -1 \Leftrightarrow t = 18$ (với $0 \le t \le 24$). Mực nước thấp nhất lúc 18 giờ. Sai.

c) $h = 18 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{12}t = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \frac{\pi}{12}t = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$, với $0 \le t \le 24$ ta được $t = 2$, $t = 10$. Đúng.

d) $h \ge 18 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) \ge \frac{1}{2}$. Với $0 \le t \le 24$ thì $\frac{\pi}{12}t \in [0; 2\pi]$ nên $\frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{12}t \le \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow 2 \le t \le 10$. Đúng.

<u>PHẦN III</u>. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN.

Câu 1. Gọi v (km/h) là tốc độ của tàu, $v > 0$. Chi phí phần thứ hai cho 10 km là kv^3, mà $k \cdot 40^3 = 25 \Rightarrow k = \frac{1}{2560}$.

Thời gian đi 10 km là $\frac{10}{v}$ giờ nên chi phí phần thứ nhất là $960 \cdot \frac{10}{v} = \frac{9600}{v}$.

Tổng chi phí cho 10 km: $f(v) = \frac{9600}{v} + \frac{v^3}{2560}$ (nghìn đồng).

$f'(v) = -\frac{9600}{v^2} + \frac{3v^2}{2560}$; $f'(v) = 0 \Leftrightarrow v^4 = 8192000 \Leftrightarrow v = 16\sqrt[4]{125}$.

Lập bảng biến thiên, $f(v)$ nhỏ nhất khi $v = 16\sqrt[4]{125} \approx 53,5$ (km/h).

Đáp án: $53,5$.

Câu 2. Đồ thị cắt trục hoành tại $(1;0)$ và $(8;0)$ nên $x^2 + bx + c = (x-1)(x-8) = x^2 - 9x + 8$.

$y = \frac{x^2 - 9x + 8}{dx + e}$, $y' = \frac{(2x-9)(dx+e) - d\left(x^2 - 9x + 8\right)}{(dx+e)^2}$.

$y(6) = 5 \Leftrightarrow \frac{-10}{6d + e} = 5 \Leftrightarrow 6d + e = -2$.

$y'(6)=0 \Leftrightarrow 3(6d+e)+10d=0 \Leftrightarrow d=\dfrac{3}{5}$, suy ra $e=-\dfrac{28}{5}$.

Do đó $y=\dfrac{5\left(x^2-9x+8\right)}{3x-28}$; $y'=0 \Leftrightarrow x=6$ hoặc $x=\dfrac{38}{3}$, kiểm tra được $x=6$ là điểm cực đại.

Đổi 3875 m $=3{,}875$ km. Ta có $\dfrac{5\left(x^2-9x+8\right)}{3x-28}=\dfrac{31}{8} \Leftrightarrow 40x^2-453x+1188=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{36}{5}$ hoặc $x=\dfrac{33}{8}$.

Coi khí cầu di chuyển theo chiều tăng của x; khí cầu đã đi qua điểm cực đại nên $x>6$, chọn $x=\dfrac{36}{5}=7{,}2$.

Đáp án: $7{,}2$.

Câu 3. Đặt $AB=AC=x$ (m), $x>0$. Gọi I là trung điểm BC, kẻ $AH \perp SI$ tại H.

$BC \perp AI$, $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AH$, mà $AH \perp SI$ nên $AH \perp (SBC)$, do đó $AH=3$.

Góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ là $\alpha=\widehat{SIA}$, $0^\circ<\alpha<90^\circ$.

$AI=\dfrac{AH}{\sin\alpha}=\dfrac{3}{\sin\alpha}$, $SA=AI\tan\alpha=\dfrac{3}{\cos\alpha}$, $x=AI\sqrt{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sin\alpha}$.

$S_{ABCD}=2S_{ABC}=x^2=\dfrac{18}{\sin^2\alpha}$.

$V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SA\cdot S_{ABCD}=\dfrac{18}{\sin^2\alpha\cos\alpha}=\dfrac{18}{\left(1-\cos^2\alpha\right)\cos\alpha}$.

Đặt $t=\cos\alpha\in(0;1)$, xét $g(t)=t-t^3$; $g'(t)=1-3t^2=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lập bảng biến thiên, $g(t)$ lớn nhất tại $t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, khi đó V nhỏ nhất. $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha\approx 54{,}7^\circ$.

Đáp án: $54{,}7$.

Câu 4. $M\in(Oxy)$ và N thuộc tia OM nên $N(u;v;0)$, $N\neq O$.

$P=(u-3)^2+v^2+u^2+(v-3)^2+u^2+v^2+9=3u^2+3v^2-6u-6v+27=3(u-1)^2+3(v-1)^2+21\geq 21$.

Dấu bằng xảy ra khi $N(1;1;0)$, khi đó M thuộc tia ON với $OM=\dfrac{27}{ON}=\dfrac{27\sqrt{2}}{2}$ (luôn tồn tại).

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 21.

Đáp án: 21.

Câu 5. Hộp quà có $9+8=17$ phần quà. Số cách rút quà lần lượt cho Vũ, Hồng, Ngọc là $n(\Omega)=17\cdot16\cdot15$.

Ngọc nhận được bút: chọn bút cho Ngọc có 9 cách, Vũ và Hồng nhận 2 trong 16 phần quà còn lại theo thứ tự có $16\cdot15$ cách.

$P=\dfrac{9\cdot16\cdot15}{17\cdot16\cdot15}=\dfrac{9}{17}\approx0,53$.

Đáp án: $0,53$.

Câu 6. $f'(x)=3x^2+2ax+b$. Từ bảng biến thiên, $f'(1)=0$ và $f'(x)\geq0$ với mọi x nên $f'(x)=3(x-1)^2$, suy ra $a=-3$, $b=3$.

$f(1)=1-3+3+c=\dfrac{35}{2}\Rightarrow c=\dfrac{33}{2}$. Do đó $f(x)=(x-1)^3+\dfrac{35}{2}$.

Điều kiện: $-1<x<2$. Đặt $A=f(4m)-\dfrac{x}{2}+4\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}\right)$, điều kiện $A>0$.

$(1)\Leftrightarrow\log_2\left[2(2-x)(x+1)\right]\leq\log_2\left(A^2\right)\Leftrightarrow A\geq\sqrt{2(2-x)(x+1)}$ (khi đó $A>0$ thỏa mãn).

Đặt $t=\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}$, ta có $t^2=x+4+2\sqrt{2(2-x)(x+1)}\Rightarrow\sqrt{2(2-x)(x+1)}=\dfrac{t^2-x-4}{2}$.

$(1)\Leftrightarrow f(4m)-\dfrac{x}{2}+4t\geq\dfrac{t^2-x-4}{2}\Leftrightarrow f(4m)\geq\dfrac{t^2}{2}-4t-2$.

Xét $t(x)=\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}$ trên $(-1;2)$: $t'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}+\dfrac{1}{\sqrt{2x+2}}$; $t'(x)=0\Leftrightarrow x=1$; $t'(x)>0$ với $-1<x<1$, $t'(x)<0$ với $1<x<2$.

$t(1)=3$, $\lim\limits_{x\to-1^+}t(x)=\sqrt{3}$, $\lim\limits_{x\to2^-}t(x)=\sqrt{6}$ nên $t\in\left(\sqrt{3};3\right]$.

Hàm số $g(t)=\dfrac{t^2}{2}-4t-2$ nghịch biến trên $\left(\sqrt{3};3\right]$ nên $\min\limits_{\left(\sqrt{3};3\right]}g(t)=g(3)=-\dfrac{19}{2}$.

Bất phương trình (1) có nghiệm

$\Leftrightarrow f(4m)\geq-\dfrac{19}{2}\Leftrightarrow(4m-1)^3+\dfrac{35}{2}\geq-\dfrac{19}{2}\Leftrightarrow(4m-1)^3\geq-27\Leftrightarrow m\geq-\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $m_0=-\dfrac{1}{2}$, $T=2024\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+2025=1013$.

Đáp án: 1013.