

Bài 1. (4,0 điểm)

1) Tìm tập hợp $A \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) $A \neq \emptyset$

ii) A có không quá 5 phần tử

iii) Nếu $x \in A$ thì $\frac{1}{x} \in A$ và $(1-x) \in A$

2) Cho 101 số nguyên dương có tổng bằng 300 được viết trên một đường tròn. Chứng minh rằng luôn tồn tại một dãy các số viết liền nhau có tổng bằng 100.

Bài 2. (4,0 điểm)

Cho các số thực $\{a, b, c\} \subset \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; +\infty\right)$ và thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng

minh rằng:
$$\frac{1+a^2}{\sqrt{2a^2+3ab-c^2}} + \frac{1+b^2}{\sqrt{2b^2+3bc-a^2}} + \frac{1+c^2}{\sqrt{2c^2+3ca-b^2}} \geq 2(a+b+c)$$

Bài 3. (4,0 điểm)

1) Cho các số $m, a, b \in \mathbb{N}^*$ sao cho: $m^2 < a < b$. Chứng minh rằng nếu ab là số chính phương thì: $b > (m+1)^2$

2) Cho p là số nguyên tố khác 2; a và b là hai số tự nhiên lẻ sao cho $(a+b) \vdots p$ và $(a-b) \vdots (p-1)$. Chứng minh rằng $(a^b + b^a) \vdots (2p)$.

Bài 4. (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC có $BC = a, AC = b, AB = c$. Gọi G là trọng tâm tam giác đó; Gọi G_1, G_2, G_3 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của G lên BC, CA, AB ; R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Chứng minh hệ thức:

$$\frac{S_{G_1G_2G_3}}{S_{ABC}} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{36R^2}$$

Bài 5. (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Lấy F là một điểm bất kì thuộc cung AB (không chứa C) sao cho F không trùng với các điểm A, B . Gọi M là điểm chính giữa của cung BC (không chứa A) và N là điểm chính giữa của cung AC (không chứa B). Đường thẳng qua C song song với đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại điểm P (khác C). Gọi I, I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, FAC, FBC . Đường thẳng PI cắt đường tròn (O) tại

điểm G (khác P).

a) Chứng minh $NPMI$ là hình bình hành.

b) Chứng minh 4 điểm I_1, I_2, G, F cùng nằm trên một đường tròn.

-----Hết-----

Thí sinh không sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh:.....

Chữ kí giám thị 1:.....; Chữ kí giám thị 2:.....