

CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG TƯ DUY ĐỊNH LƯỢNG

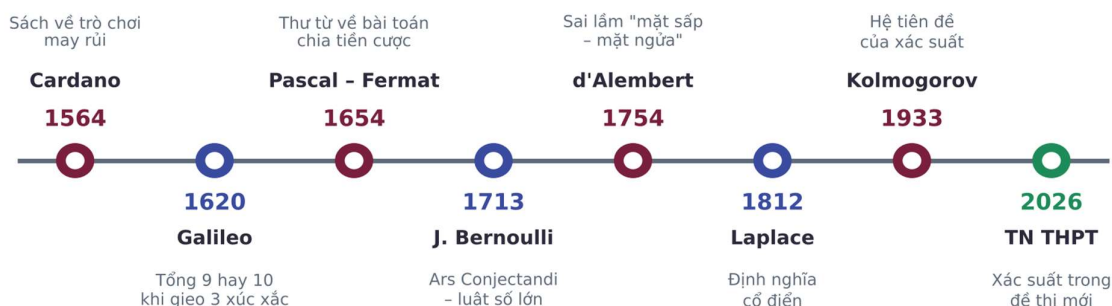


XÁC SUẤT CỔ ĐIỂN

ĐỀ ĐỂ ĐO MAY RỦI

*Từ những lá thư Pascal – Fermat (1654), sai lầm của d'Alembert (1754)
đến đề thi tốt nghiệp THPT 2018 – 2026, đề thi thử các trường và đề thi học sinh giỏi*

12 DẠNG TOÁN · 42 VÍ DỤ MẪU · 12 CÂU ĐỀ BỘ · 50 BÀI LUYỆN TẬP CÓ LỜI GIẢI



Dành cho học sinh lớp 10, 11, 12, ôn thi tốt nghiệp THPT, Đánh giá năng lực (HSA),
Đánh giá tư duy (TSA) và bồi dưỡng học sinh giỏi

MỤC LỤC

I. ĐẶT VẤN ĐỀ – CHỈ DẪN LỊCH SỬ	3
1. Câu hỏi của chàng hiệp sĩ mê xúc xắc	3
2. Những người đặt nền móng	4
3. Khi các bậc thầy cũng đếm sai	5
4. Dòng thời gian	5
5. Vị trí trong chương trình và trong các kì thi	6
II. CƠ SỞ LÝ THUYẾT	7
1. Phép thử và không gian mẫu	7
2. Biến cố	7
3. Định nghĩa cổ điển của xác suất	7
4. Ba cách mô tả không gian mẫu	8
5. Bộ công cụ đếm	9
6. Nguyên lý xác suất bé	10
7. Quy trình bốn bước	10
III. CÁC DẠNG TOÁN VÀ VÍ DỤ MINH HOẠ	11
Dạng 1. Mô tả không gian mẫu và biến cố	11
Dạng 2. Gieo xúc xắc, đồng xu – bảng và đếm có thứ tự	12
Dạng 3. Chọn đồ vật – dùng tổ hợp	13
Dạng 4. Chọn người theo nhiều thuộc tính	14
Dạng 5. Bài toán về số và chữ số	15
Dạng 6. Chẵn lẻ, số dư và cấp số cộng	16
Dạng 7. Xếp hàng, xếp bàn tròn, xếp chỗ đối diện	17
Dạng 8. Đa giác đều – tam giác vuông, tù, nhọn, cân	19
Dạng 9. Chia nhóm, bốc thăm, phát quà	21
Dạng 10. Phân phối, chia kẹo và dòi chỉ số	22
Dạng 11. Biến cố đối và bao hàm – loại trừ	23
Dạng 12. Bài toán ngược, đường đi và chọn mô hình đúng	25
Tổng kết các dạng toán	28
IV. ỨNG DỤNG THỰC TẾ	29
V. TUYỂN CHỌN ĐỀ THI CỦA BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO (2018 – 2026)	32
VI. NHỮNG BÀI TOÁN ĐẸP TỪ ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI VÀ ĐỀ THI THỬ	37
VII. BÀI TẬP LUYỆN TẬP THEO ĐỊNH DẠNG ĐỀ THI	41
A. Câu hỏi trắc nghiệm 4 phương án	41
B. Câu hỏi Đúng/Sai	42
C. Câu hỏi trả lời ngắn	43
D. Bài tập tự luận – bồi dưỡng học sinh giỏi	44
VIII. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI	45
IX. KẾT LUẬN VÀ LỜI KHUYÊN KHI LÀM BÀI	51
X. TÀI LIỆU THAM KHẢO	52

I. ĐẶT VẤN ĐỀ – CHỈ DẪN LỊCH SỬ

1. Câu hỏi của chàng hiệp sĩ mê xúc xắc

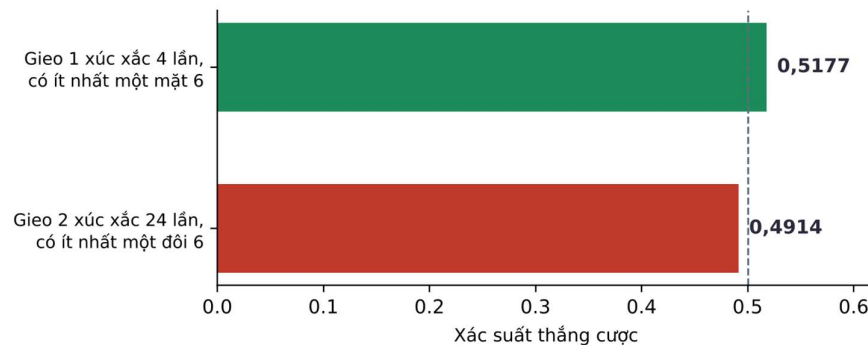
Paris, mùa hè năm 1654. Antoine Gombaud – người đời quen gọi là **Chevalier de Méré** (“hiệp sĩ de Méré”) – là một quý tộc mê trò xúc xắc.

Ông có hai thắc mắc không sao tự giải được.

Thắc mắc thứ nhất: ông thường **thắng** khi đặt cược “gieo một con xúc xắc 4 lần, có ít nhất một lần ra mặt 6 chấm”, nhưng lại hay **thua** khi đặt cược “gieo hai con xúc xắc 24 lần, có ít nhất một lần ra đôi 6”. Theo lập luận tỉ lệ của ông, hai trò phải ngang nhau: một lần gieo một con có $\frac{1}{6}$ cơ hội, 4 lần là “ $\frac{4}{6}$ ”; một lần gieo đôi có $\frac{1}{36}$ cơ hội, 24 lần là “ $\frac{24}{36}$ ” – bằng nhau!

Thắc mắc thứ hai, gọi là **bài toán chia tiền cược**: hai người chơi đặt cược như nhau, ai thắng trước một số ván thì được cả số tiền. Nếu cuộc chơi phải dừng giữa chừng thì chia tiền thế nào cho công bằng?

De Méré mang các câu hỏi đến **Blaise Pascal**. Pascal viết thư trao đổi với **Pierre de Fermat** – một luật sư ở Toulouse, người làm toán “nghệp dư” nhưng thuộc hàng vĩ đại nhất thế kỉ XVII. Chuỗi thư mùa hè năm 1654 giữa hai người được coi là **giấy khai sinh của lý thuyết xác suất**. Ý tưởng then chốt của họ rất giản dị: *liệt kê mọi khả năng có thể xảy ra như nhau, rồi đếm xem bao nhiêu khả năng có lợi*. Đó chính là **định nghĩa cổ điển của xác suất** mà chuyên đề này xoay quanh.

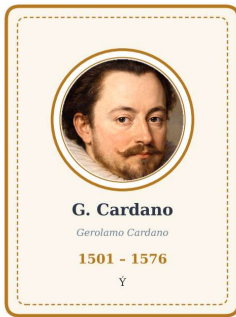


Hình 1. Hai trò cược của de Méré: chênh lệch chỉ khoảng 2,6%, vậy mà một con bạc lão luyện vẫn cảm nhận được qua hàng nghìn ván chơi

Lời giải đáp cho de Méré

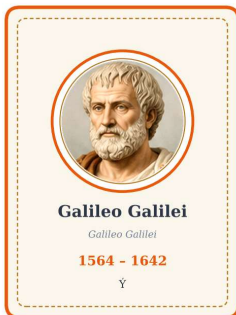
Gieo một con xúc xắc 4 lần có $6^4 = 1296$ kết quả đồng khả năng; số kết quả **không** có mặt 6 là $5^4 = 625$. Vậy xác suất thắng của trò thứ nhất là $1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} \approx 0,518 > \frac{1}{2}$. Với trò thứ hai, mỗi lần gieo đôi có 36 kết quả, 24 lần gieo có 36^{24} kết quả, trong đó 35^{24} kết quả không có đôi 6, nên xác suất thắng là $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,491 < \frac{1}{2}$. Sai lầm của de Méré: **không được cộng dồn xác suất** của các lần gieo, vì các khả năng “ra 6 ở lần 1”, “ra 6 ở lần 2”,... có thể xảy ra đồng thời và bị đếm trùng. Cách đúng là đi qua **biến cố đối** – một kĩ thuật ta sẽ gặp lại rất nhiều lần (Dạng 11).

2. Những người đặt nền móng



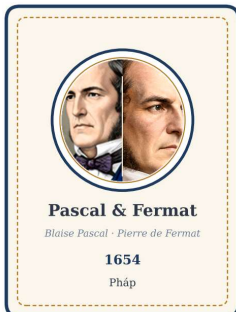
Bác sĩ, nhà toán học và... con bạc **Gerolamo Cardano** (Ý) viết *Liber de Ludo Aleae* – *Sách về trò chơi may rủi* khoảng năm 1564. Lần đầu tiên trong lịch sử, ông đề xuất đo “cơ hội” bằng **tỉ số giữa số trường hợp thuận lợi và số trường hợp có thể** khi gieo xúc xắc công bằng.

Tiếc thay, cuốn sách nằm trong ngăn kéo gần một thế kỉ, mãi đến năm 1663 mới được in – khi Pascal và Fermat đã đi trước.



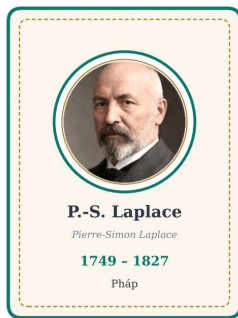
Khoảng năm 1620, các tay chơi ở Florence hỏi **Galileo Galilei**: khi gieo ba con xúc xắc, tổng 9 và tổng 10 đều có 6 cách phân tích (chẳng hạn $9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = \dots$), vậy sao kinh nghiệm cho thấy tổng 10 xuất hiện thường hơn?

Trong bài viết ngắn *Sopra le scoperte dei dadi*, Galileo trả lời bằng cách **đếm có thứ tự** cả $6^3 = 216$ kết quả: tổng 9 có 25 kết quả, tổng 10 có 27 kết quả (xem Dạng 2). Bài học: *các “cách phân tích” không đồng khả năng, các bộ có thứ tự mới đồng khả năng*.



Trong các lá thư năm 1654, **Pascal** và **Fermat** giải trọn bài toán chia tiền cược bằng hai cách khác nhau nhưng cùng một đáp số: Fermat liệt kê mọi kịch bản có thể của các ván còn lại, Pascal lập luận truy hồi bằng “kì vọng”.

Ba năm sau (1657), **Christiaan Huygens** (Hà Lan) viết *De ratiociniis in ludo aleae* – cuốn sách in đầu tiên về xác suất, dựa trên những ý tưởng này.



Năm 1812, **Pierre-Simon Laplace** xuất bản *Théorie analytique des probabilités*, phát biểu tường minh **định nghĩa cổ điển**: xác suất của một biến cố là tỉ số giữa số trường hợp thuận lợi và số trường hợp có thể, với điều kiện các trường hợp là đồng khả năng – đúng công thức $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$ trong SGK.

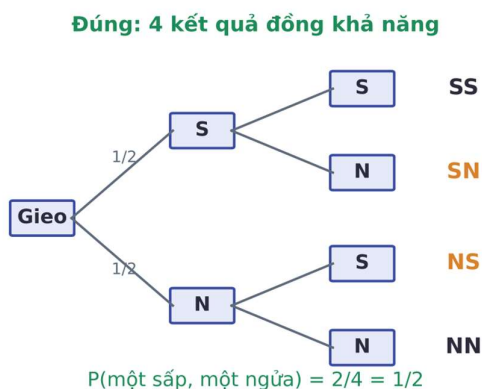
Ông viết: “*Lý thuyết xác suất suy cho cùng chỉ là lẽ thường được quy thành phép tính.*” Năm 1933, **A. N. Kolmogorov** (Nga) xây dựng xác suất trên hệ tiên đề chặt chẽ như ngày nay.

3. Khi các bậc thầy cũng đếm sai

Định nghĩa cổ điển chỉ đúng khi **các kết quả đồng khả năng**. Điều kiện tường nhiên này đã đánh lừa nhiều bộ óc lớn:

- **Leibniz** (thế kỉ XVII) cho rằng khi gieo hai con xúc xắc, tổng 11 và tổng 12 có khả năng như nhau, vì “mỗi tổng chỉ có một cách”: $11 = 5 + 6$, $12 = 6 + 6$. Thực ra 11 ứng với hai kết quả (5; 6), (6; 5), còn 12 chỉ ứng với (6; 6): xác suất lần lượt là $\frac{2}{36}$ và $\frac{1}{36}$.
- **Jean le Rond d'Alembert**, trong mục từ “Croix ou pile” (Sấp hay ngửa) của bộ *Bách khoa toàn thư* năm 1754, lập luận rằng gieo hai đồng xu thì chỉ có 3 kết quả “hai sấp, một sấp một ngửa, hai ngửa”, nên xác suất có ít nhất một mặt ngửa là $\frac{2}{3}$.

Đáp số đúng là $\frac{3}{4}$ (Hình 2).



d'Alembert (1754): 3 "kết quả"

Hai sấp	1 cách
Một sấp, một ngửa	2 cách!
Hai ngửa	1 cách

Không đồng khả năng $\Rightarrow$ không được dùng $n(A)/n(\Omega)$

Hình 2. Sai lầm của d'Alembert: ba “kết quả” của ông không đồng khả năng – “một sấp, một ngửa” xảy ra theo hai cách

Nhìn lại bằng con mắt lịch sử

Cardano (≈ 1564) đặt ra ý tưởng tỉ số $\rightarrow$ Galileo (≈ 1620) dạy cách **đếm có thứ tự** $\rightarrow$ Pascal – Fermat (1654) **liệt kê kịch bản** $\rightarrow$ Huygens (1657) viết sách $\rightarrow$ J. Bernoulli (1713) chứng minh **luật số lớn** $\rightarrow$ d'Alembert (1754) vấp vào **đồng khả năng** $\rightarrow$ Laplace (1812) phát biểu chặt **định nghĩa cổ điển** $\rightarrow$ Kolmogorov (1933) tiên đề hoá. Một ý tưởng xuyên suốt: *muốn đo may rủi, trước hết phải biết đếm cho đúng – và đếm những thứ thật sự “ngang nhau”*.

4. Dòng thời gian

Thời điểm	Sự kiện
≈ 1564	Cardano viết <i>Sách về trò chơi may rủi</i> (in năm 1663): lần đầu dùng tỉ số “thuận lợi / có thể”.
≈ 1620	Galileo giải thích vì sao tổng 10 xuất hiện thường hơn tổng 9 khi gieo ba con xúc xắc.
1654	Thư từ Pascal – Fermat về bài toán chia tiền cược và các câu hỏi của de Méré.
1657	Huygens xuất bản cuốn sách in đầu tiên về xác suất.
1713	Sách <i>Ars Conjectandi</i> của Jacob Bernoulli (in sau khi ông mất): luật số lớn – tần suất tiến gần tới xác suất.
1754	d'Alembert mắc sai lầm “sấp – ngã” trong <i>Bách khoa toàn thư</i> .
1812	Laplace phát biểu định nghĩa cổ điển của xác suất.
1933	Kolmogorov xây dựng hệ tiên đề của lý thuyết xác suất.
2018 – 2026	Xác suất cổ điển trở thành câu “phân loại” quen thuộc trong đề thi THPT quốc gia và tốt nghiệp THPT.

5. Vị trí trong chương trình và trong các kì thi

Theo Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018, định nghĩa cổ điển của xác suất được học ở **lớp 10**. Trong bộ sách *Kết nối tri thức với cuộc sống*, đó là **Chương IX. Tính xác suất theo định nghĩa cổ điển**, gồm Bài 26 “Biến cố và định nghĩa cổ điển của xác suất” và Bài 27 “Thực hành tính xác suất theo định nghĩa cổ điển”; công cụ đếm được chuẩn bị ở **Chương VIII. Đại số tổ hợp** (quy tắc cộng, quy tắc nhân, hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp). Lên lớp 11 học sinh học thêm các quy tắc cộng, nhân xác suất; lớp 12 học xác suất có điều kiện.

Trong các kì thi, xác suất cổ điển xuất hiện đều đặn ở mức **vận dụng – vận dụng cao**: đề minh hoạ và đề chính thức THPT quốc gia 2018, 2019; đề tốt nghiệp THPT 2020 – 2024 (dạng trắc nghiệm 4 phương án), rồi đề tốt nghiệp THPT 2025, 2026 theo định dạng mới (12

câu trắc nghiệm, 4 câu Đúng/Sai, 6 câu trả lời ngắn), trong đó câu xác suất cổ điển thường là một câu **trả lời ngắn** khó (bài “mật thư” năm 2025, bài “lắp đèn trên đa giác đều” năm 2026). Đề thi thử của các Sở và trường chuyên, đề HSG cấp tỉnh rất ưa các chủ đề: đa giác đều, xếp chỗ, chữ số – chia hết, điền số vào bảng, cấp số cộng.

II. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

1. Phép thử và không gian mẫu

Hãy bắt đầu bằng một câu hỏi rất đời thường: *giao một đồng xu, khả năng ra mặt ngửa là bao nhiêu?* Ai cũng trả lời “một nửa”. Đằng sau câu trả lời nhanh ấy là ba bước ngầm: ta hình dung **mọi kết quả có thể** (sấp, ngửa), tin rằng chúng **có khả năng như nhau**, rồi **đếm**. Toán học chỉ việc gọi tên các bước đó.

Phép thử – Không gian mẫu

Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một hoạt động mà ta không đoán trước được kết quả của nó, nhưng biết được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra.

Không gian mẫu, kí hiệu Ω , là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử. Số phần tử của Ω kí hiệu là $n(\Omega)$.

Chẳng hạn, gieo một con xúc xắc: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $n(\Omega) = 6$. Gieo hai đồng xu phân biệt: $\Omega = \{SS; SN; NS; NN\}$, $n(\Omega) = 4$. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh từ một tổ 10 người: mỗi kết quả là một tập con 3 phần tử, nên $n(\Omega) = C_{10}^3 = 120$ – lúc này ta **không liệt kê** mà **đếm** bằng công cụ của Chương VIII.

2. Biến cố

Biến cố – Biến cố đối

Mỗi **biến cố** A liên quan đến phép thử được mô tả bởi một tập con của không gian mẫu; mỗi phần tử của tập con đó gọi là một **kết quả thuận lợi** cho A . Ta dùng chung kí hiệu A cho biến cố và tập con, và $n(A)$ là số kết quả thuận lợi.

- ▶ Ω là **biến cố chắc chắn**, $\emptyset$ là **biến cố không thể**.
- ▶ **Biến cố đối** của A , kí hiệu $\bar{A}$, là biến cố “ A không xảy ra”; tập hợp $\bar{A} = \Omega \setminus A$, nên $n(\bar{A}) = n(\Omega) - n(A)$.

Ngôn ngữ tập hợp rất tiện khi đếm. “ A hoặc B ” ứng với $A \cup B$; “ A và B ” ứng với $A \cap B$.

Khi đếm hợp của hai tập, ta dùng **quy tắc bao hàm – loại trừ**: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$; với ba tập: $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$.

3. Định nghĩa cổ điển của xác suất

Định nghĩa (SGK Toán 10 – Kết nối tri thức)

Cho phép thử T có không gian mẫu Ω gồm hữu hạn kết quả **có cùng khả năng xảy ra**. Với mỗi biến cố A , xác suất của A là

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Tính chất: $0 \leq P(A) \leq 1$; $P(\Omega) = 1$; $P(\emptyset) = 0$; $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Công thức $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ tuy ngắn nhưng là **vũ khí mạnh nhất** của chuyên đề: mỗi khi đề bài có chữ “ít nhất”, “có... hay không”, “không có hai... nào”, ta nên tự hỏi biến cố đối có dễ đếm hơn không.

Điều kiện “đồng khả năng” – cái bẫy kinh điển

Công thức $\frac{n(A)}{n(\Omega)}$ **chỉ đúng** khi các phần tử của Ω đồng khả năng. Ba dấu hiệu cảnh báo:

- (1) Gộp các kết quả theo “kiểu” (tổng số chấm, “một sấp một ngựa”, “hai bi cùng màu”...) – các kiểu thường **không** đồng khả năng (Leibniz, d’Alembert ở mục I).
- (2) Đồ vật “giống nhau” (bi cùng màu, sách cùng loại): khi tính xác suất nên **đánh số** chúng để các kết quả đồng khả năng. Đây chính là lí do đếm bằng tổ hợp C_n^k của các vật phân biệt.
- (3) Đi ngẫu nhiên trên lưới “mỗi bước chọn hướng như nhau” **khác** với “chọn ngẫu nhiên một đường đi” (xem Dạng 12).

4. Ba cách mô tả không gian mẫu

Liệt kê – dùng khi $n(\Omega)$ nhỏ (dưới khoảng 20 phần tử). **Bảng** – dùng cho phép thử gồm hai giai đoạn, mỗi giai đoạn ít khả năng (giao hai con xúc xắc). **Sơ đồ hình cây** – dùng cho phép thử nhiều giai đoạn nối tiếp (giao đồng xu nhiều lần, rút thẻ lần lượt). Khi số kết quả lớn, ta không mô tả mà **đếm** bằng quy tắc cộng, quy tắc nhân, hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp.

		Con thứ hai					
Con thứ nhất	+	1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Hình 3. Bảng 36 kết quả khi gieo hai con xúc xắc – mỗi ô ghi tổng số chấm; các ô màu vàng có tổng bằng 7

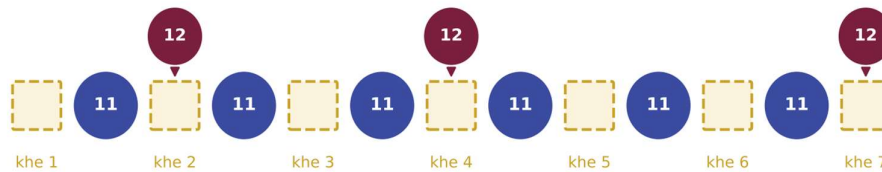
Nhìn bảng, ta thấy ngay: tổng 7 nằm trên đường chéo dài nhất (6 ô) nên là tổng “dễ ra” nhất, $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$; tổng 2 và tổng 12 chỉ có một ô. Cái “bảng 6×6” này là bản đồ của rất nhiều bài toán xúc xắc.

5. Bộ công cụ đếm

Định nghĩa cổ điển biến bài toán xác suất thành **hai bài toán đếm**. Bảng dưới tổng hợp các công cụ, từ cơ bản (SGK) đến nâng cao (thường gặp ở câu vận dụng cao và đề HSG).

Công cụ	Khi nào dùng	Công thức / ý tưởng
Quy tắc cộng, quy tắc nhân	Chia trường hợp; công việc nhiều công đoạn	Cộng các trường hợp rời nhau; nhân số cách ở mỗi công đoạn
Hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp	Xếp có thứ tự / chọn không thứ tự	$P_n = n!$, $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Biến cố đối	“ít nhất một”, “không có hai... nào”	$n(A) = n(\Omega) - n(\overline{A})$
Buộc khối	Các đối tượng phải đứng liền nhau	Coi cả nhóm là một phần tử, rồi hoán vị bên trong
Vách ngăn (khe trống)	Các đối tượng không được đứng cạnh nhau	Xếp nhóm còn lại trước, chèn vào các khe
Chia kẹo Euler	Số nghiệm nguyên của $x_1 + \dots + x_k = n$	Nghiệm nguyên dương: C_{n-1}^{k-1} ; nguyên không âm: C_{n+k-1}^{k-1}
Dời chỉ số (song ánh)	Chọn k số trong $1..n$ không có hai số liên tiếp	$b_i = a_i - (i - 1)$, số cách là C_{n-k+1}^k

Công cụ	Khi nào dùng	Công thức / ý tưởng
Bao hàm – loại trừ	Hợp của nhiều điều kiện “xấu”	$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
Phân lớp đồng dư	Tổng, tích chia hết cho m	Chia tập số theo số dư khi chia cho m



Hình 4. Kỹ thuật vách ngăn: xếp 6 bạn lớp 11 trước, tạo ra 7 khe; mỗi bạn lớp 12 đứng vào một khe khác nhau thì không có hai bạn lớp 12 nào đứng cạnh nhau

Số nghiệm nguyên dương của $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ là $C(9, 3) = 84$

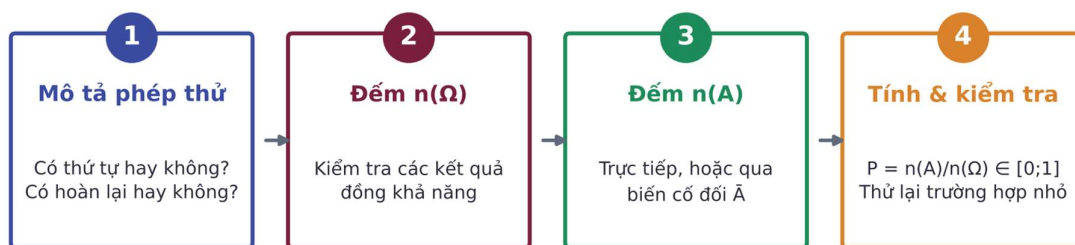


Hình 5. Bài toán chia kẹo Euler: mỗi cách đặt 3 vách ngăn vào 9 khe giữa 10 viên kẹo cho một nghiệm nguyên dương của phương trình

6. Nguyên lý xác suất bé

Trong thực tế, một biến cố có xác suất rất nhỏ (chẳng hạn dưới 0,01) được coi là **gần như không xảy ra** trong một lần thử – đó là **nguyên lý xác suất bé**. Ngưỡng “bé” tùy bối cảnh: một hãng hàng không không thể chấp nhận xác suất tai nạn 0,001, nhưng ta hoàn toàn yên tâm ra đường dù có một xác suất rất nhỏ trời mưa đá. Ngược lại, khi một biến cố xác suất rất nhỏ **lại xảy ra**, đó là tín hiệu để nghi ngờ giả thiết ban đầu (chẳng hạn: xúc xắc không cân đối).

7. Quy trình bốn bước



Hình 6. Quy trình bốn bước giải một bài toán xác suất cổ điển

Bốn câu hỏi tự kiểm tra trước khi tính

(1) Phép thử có **thứ tự** không? (rút lần lượt, xếp hàng, gieo nhiều lần $\rightarrow$ có thứ tự). (2) Có **hoàn lại** / **lắp** không? (3) Không gian mẫu và biến cố có được đếm **cùng một cách** (cùng có thứ tự hoặc cùng không thứ tự) không? (4) Kết quả có nằm trong $[0; 1]$ và có hợp lí không? – thử lại với trường hợp nhỏ nếu có thể.

Dấu hiệu trong đề	Hướng xử lí	Công cụ
“chọn ngẫu nhiên đồng thời k...”, “lấy k quả”	Không thứ tự	C_n^k
“lần lượt”, “xếp thành hàng”, “lập số”	Có thứ tự	$A_n^k, n!$, quy tắc nhân
“mỗi bạn viết / chọn ngẫu nhiên” (có thể trùng)	Có lắp	m^k
“ít nhất một”, “có ít nhất hai”	Đi qua biến cố đối	$1 - P(\overline{A})$
“không có hai... đứng cạnh nhau”	Vách ngăn	Xếp nhóm kia trước
“tổng chia hết cho 3”, “tổng là số chẵn”	Phân lớp theo số dư	Đếm theo lớp
“biết xác suất bằng..., tìm n”	Lập phương trình theo n	Giải phương trình tổ hợp

III. CÁC DẠNG TOÁN VÀ VÍ DỤ MINH HOẠ

Mười hai dạng toán dưới đây được sắp theo độ khó tăng dần.

Mỗi dạng mở đầu bằng **phương pháp**, sau đó là các ví dụ từ cơ bản đến vận dụng cao; ví dụ nào lấy từ đề thi đều ghi nguồn bên cạnh tiêu đề.

Dạng 1. Mô tả không gian mẫu và biến cố

Phương pháp

Liệt kê có hệ thống (theo thứ tự từ điển hoặc sơ đồ cây) để không sót, không trùng. Viết biến cố dưới dạng tập con, đếm số phần tử rồi áp dụng định nghĩa. Với phép thử nhiều giai đoạn, quy tắc nhân cho ngay $n(\Omega)$.

Ví dụ 1

Gieo một đồng xu cân đối ba lần liên tiếp.

- Mô tả không gian mẫu.
- Tính xác suất của biến cố A : “có đúng hai lần xuất hiện mặt ngửa”.
- Tính xác suất của biến cố B : “có ít nhất một lần xuất hiện mặt ngửa”.

Lời giải. a) Mỗi lần gieo có 2 kết quả nên $n(\Omega) = 2^3 = 8$:

$$\Omega = \{SSS; SSN; SNS; SNN; NSS; NSN; NNS; NNN\}.$$

b) $A = \{SNN; NSN; NNS\}$, nên $P(A) = \frac{3}{8}$.

c) Biến cố đối $\bar{B}$: “cả ba lần đều sấp” = $\{SSS\}$. Vậy $P(B) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

Ví dụ 2

Một hộp có 4 tấm thẻ đánh số 1, 2, 3, 4. Rút ngẫu nhiên lần lượt hai thẻ, không hoàn lại.

- Tính số phần tử của không gian mẫu.
- Tính xác suất để số trên thẻ rút lần hai lớn hơn số trên thẻ rút lần một.
- Tính xác suất để tổng hai số là số lẻ.

Lời giải. a) Mỗi kết quả là một cặp có thứ tự $(a; b)$ với $a \neq b$, nên $n(\Omega) = A_4^2 = 12$.

b) Mỗi cặp hai số khác nhau $\{a; b\}$ ứng với đúng hai kết quả $(a; b)$ và $(b; a)$, đúng một trong hai thoả mãn. Do đó $n(B) = 6$ và $P(B) = \frac{1}{2}$ – một **lập luận đối xứng** đáng nhớ.

c) Tổng lẻ khi một số chẵn, một số lẻ: chọn số chẵn (2 cách), số lẻ (2 cách), thứ tự rút (2 cách), được 8 kết quả. $P = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Dạng 2. Gieo xúc xắc, đồng xu – bảng và đếm có thứ tự

Phương pháp

Gieo k con xúc xắc (hoặc một con k lần): $n(\Omega) = 6^k$, mỗi kết quả là một **bộ có thứ tự**. Với $k = 2$, dùng bảng 6×6 (Hình 3). Với $k \geq 3$, đếm số bộ có thứ tự theo từng “kiểu” phân tích: bộ 3 số đôi một khác nhau cho $3! = 6$ hoán vị, bộ có đúng hai số bằng nhau cho 3 hoán vị, bộ ba số bằng nhau cho 1.

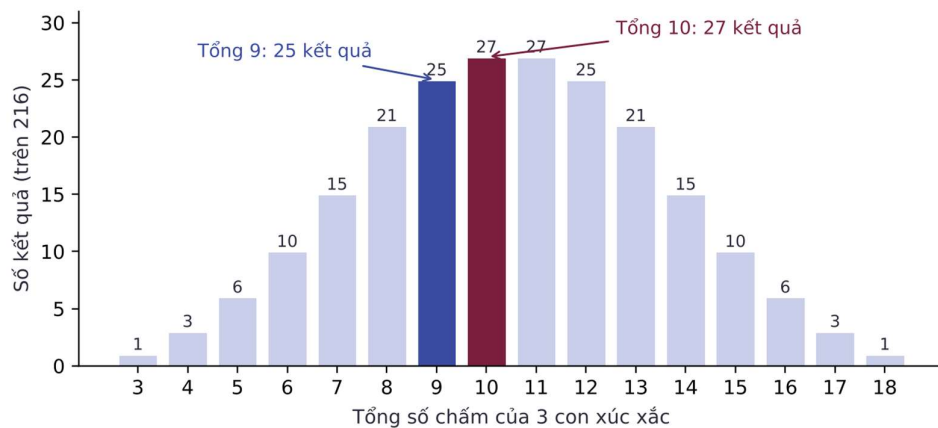
Ví dụ 3. (Câu hỏi của Galileo)

Gieo đồng thời ba con xúc xắc cân đối. Xác suất để tổng số chấm bằng 9 và xác suất để tổng số chấm bằng 10, cái nào lớn hơn?

Lời giải. $n(\Omega) = 6^3 = 216$. Liệt kê các cách phân tích (không kể thứ tự) và số hoán vị của mỗi cách:

Tổng 9	Tổng 10
$1 + 2 + 6: 6; 1 + 3 + 5: 6; 1 + 4 + 4: 3$	$1 + 3 + 6: 6; 1 + 4 + 5: 6; 2 + 2 + 6: 3$
$2 + 2 + 5: 3; 2 + 3 + 4: 6; 3 + 3 + 3: 1$	$2 + 3 + 5: 6; 2 + 4 + 4: 3; 3 + 3 + 4: 3$
Cộng: 25 kết quả	Cộng: 27 kết quả

Vậy $P(\text{tổng } 9) = \frac{25}{216} < P(\text{tổng } 10) = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$. Sáu “cách phân tích” không đồng khả năng: bộ $3 + 3 + 3$ chỉ ứng với **một** kết quả, còn $1 + 2 + 6$ ứng với **sáu**.



Hình 7. Phân bố số kết quả theo tổng số chấm khi gieo ba con xúc xắc: tổng 10 và 11 là “đỉnh”

Ví dụ 4

Gieo một con xúc xắc cân đối hai lần; gọi a, b lần lượt là số chấm xuất hiện. Tính xác suất để phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có nghiệm.

Lời giải. $n(\Omega) = 36$. Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = a^2 - 4b \geq 0 \Leftrightarrow b \leq \frac{a^2}{4}$. Đếm theo a :

a	1	2	3	4	5	6
Giá trị b thoả mãn	–	1	1; 2	1; ...; 4	1; ...; 6	1; ...; 6
Số giá trị	0	1	2	4	6	6

Vậy $n(A) = 19$ và $P(A) = \frac{19}{36}$.

Ví dụ 5

Gieo hai con xúc xắc cân đối. Tính xác suất để tích số chấm trên hai mặt chia hết cho 6.

Lời giải. Dùng bảng 6×6 và đếm theo con thứ nhất a : $a = 6$ thì mọi b đều được (6 cách); $a = 3$ cần b chẵn (3 cách); $a = 2$ hoặc $a = 4$ cần $b \in \{3; 6\}$ (mỗi trường hợp 2 cách); $a = 1$ hoặc $a = 5$ cần $b = 6$ (mỗi trường hợp 1 cách). Tổng $6 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 = 15$, nên $P = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

Dạng 3. Chọn đồ vật – dùng tổ hợp

Phương pháp

“Lấy ngẫu nhiên đồng thời k vật từ n vật” cho $n(\Omega) = C_n^k$ (các vật được coi là phân biệt kể cả khi cùng màu). Đếm biến cố bằng cách chia trường hợp theo số vật mỗi loại rồi nhân các tổ hợp. Với điều kiện “đủ các loại”, “ít nhất một”, nên xét biến cố đối.

Ví dụ 6

Một hộp có 6 bi đỏ, 5 bi xanh và 4 bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi. Tính xác suất để: a) bốn viên bi có đủ ba màu; b) số bi đỏ bằng số bi vàng.

Lời giải. $n(\Omega) = C_{15}^4 = 1365$.

a) Đủ ba màu thì có đúng một màu được lấy 2 viên:

$$n(A) = C_6^2 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot C_5^2 \cdot 4 + 6 \cdot 5 \cdot C_4^2 = 300 + 240 + 180 = 720$$

$$\text{nên } P(A) = \frac{720}{1365} = \frac{48}{91}.$$

b) Đỏ = vàng = 0 (4 xanh): $C_5^4 = 5$; đỏ = vàng = 1 (2 xanh): $6 \cdot 4 \cdot C_5^2 = 240$; đỏ = vàng = 2: $C_6^2 C_4^2 = 90$. Tổng 335, $P = \frac{335}{1365} = \frac{67}{273}$.

Ví dụ 7

Một người có 10 đôi giày khác nhau. Trong lúc vội, người đó lấy ngẫu nhiên 4 chiếc. Tính xác suất để trong 4 chiếc lấy ra có ít nhất một đôi.

Lời giải. $n(\Omega) = C_{20}^4 = 4845$. Biến cố đối: 4 chiếc thuộc 4 đôi khác nhau – chọn 4 đôi (C_{10}^4 cách), mỗi đôi lấy chiếc trái hoặc phải (2^4 cách): $n(\overline{A}) = 210 \cdot 16 = 3360$. Vậy

$$P(A) = 1 - \frac{3360}{4845} = \frac{99}{323} \approx 0,31$$

Ví dụ 8

Một hộp có 30 quả cầu đánh số từ 1 đến 30. Lấy ngẫu nhiên 3 quả. Tính xác suất để có đúng một quả ghi số lẻ và tích ba số ghi trên ba quả chia hết cho 8.

Lời giải. $n(\Omega) = C_{30}^3 = 4060$. Chọn quả lẻ: 15 cách. Hai quả chẵn còn lại phải có tích chia hết cho 8. Chia 15 số chẵn thành hai nhóm: X gồm 7 số chia hết cho 4 (4; 8; ...; 28) và Y gồm 8 số chẵn không chia hết cho 4. Hai số cùng thuộc Y thì tích chỉ chia hết cho 4 – loại. Số cách chọn hai số chẵn thỏa mãn là $C_7^2 + 7 \cdot 8 = 21 + 56 = 77$. Vậy

$$P = \frac{15 \cdot 77}{4060} = \frac{1155}{4060} = \frac{33}{116}$$

Dạng 4. Chọn người theo nhiều thuộc tính

Phương pháp

Lập **bảng phân loại** (giới tính $\times$ môn học, lớp $\times$ năng lực...). Trước khi đếm, hãy **rút gọn điều kiện**: nhiều khi một điều kiện kéo theo điều kiện khác (“có nữ thì có Toán” vì mọi nữ đều học Toán). Sau đó dùng bao hàm – loại trừ hoặc chia trường hợp.

Ví dụ 9 (Đề thi thử TN THPT – Sở GD&ĐT Cà Mau, 2026)

Trường THPT X có 8 giáo viên Toán (3 nữ, 5 nam) và 4 giáo viên Vật lí (đều là nam). Chọn ngẫu nhiên một đoàn kiểm tra gồm 3 người. Tính xác suất để đoàn có đủ hai môn Toán và Vật lí, đồng thời có cả giáo viên nam và giáo viên nữ.

Lời giải. $n(\Omega) = C_{12}^3 = 220$. Nhận xét: mọi giáo viên nữ đều dạy Toán, mọi giáo viên Lí đều là nam. Vậy “có Toán, có Lí, có nam, có nữ” $\Leftrightarrow$ “có ít nhất 1 nữ và ít nhất 1 giáo viên Lí”. Theo bao hàm – loại trừ trên các biến cố đối (“không có nữ”, “không có Lí”):

$$n(A) = C_{12}^3 - C_9^3 - C_5^3 + C_5^3 = 220 - 84 - 56 + 10 = 90$$

Vậy $P(A) = \frac{90}{220} = \frac{9}{22} \approx 0,41$.

Ví dụ 10 (Đề thi HSG lớp 11 tỉnh Nghệ An, năm học 2016 – 2017)

Thầy X có 15 cuốn sách đôi một khác nhau gồm 4 cuốn Văn, 5 cuốn Sử và 6 cuốn Địa. Thầy chọn ngẫu nhiên 8 cuốn để làm phần thưởng. Tính xác suất để số sách còn lại của thầy có đủ ba môn.

Lời giải. $n(\Omega) = C_{15}^8 = 6435$. Hãy nhìn vào **7 cuốn còn lại**. Biến cố đối: 7 cuốn còn lại thiếu ít nhất một môn. Vì không môn nào có đủ 7 cuốn nên 7 cuốn đó thuộc đúng hai môn: Văn – Sử ($C_9^7 = 36$), Văn – Địa ($C_{10}^7 = 120$), Sử – Địa ($C_{11}^7 = 330$). Vậy

$$P = 1 - \frac{36 + 120 + 330}{6435} = 1 - \frac{486}{6435} = \frac{661}{715}$$

Ví dụ 11

Một trường có 50 học sinh giỏi, trong đó có 4 cặp anh em sinh đôi. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh đi dự trại hè. Tính xác suất để trong 3 em được chọn không có cặp sinh đôi nào.

Lời giải. $n(\Omega) = C_{50}^3 = 19600$. Ba em không thể chứa hai cặp sinh đôi, nên biến cố đối “có một cặp sinh đôi” có $4 \cdot 48 = 192$ kết quả (chọn cặp, chọn em thứ ba).

Vậy $P = 1 - \frac{192}{19600} = \frac{1213}{1225}$.

Dạng 5. Bài toán về số và chữ số

Phương pháp

Gọi số cần lập là $\overline{a_1 a_2 \dots a_k}$ và luôn nhớ **điều kiện** $a_1 \neq 0$. Thứ tự ưu tiên: xử lý chữ số “khó” trước (chữ số đầu, chữ số cuối khi xét chẵn lẻ, chia hết cho 5), các vị trí còn lại sau. Các mẹo hay dùng: **chọn tập rồi thứ tự tự động** (chữ số tăng dần), **nhìn phần bù** (tổng các chữ số bị bỏ ra), **dấu hiệu chia hết** cho 3, 9, 11.

Ví dụ 12

Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau. Tính xác suất để các chữ số của số đó tăng dần từ trái sang phải.

Lời giải. $n(\Omega) = 9 \cdot A_9^4 = 27216$. Số có chữ số tăng dần không thể chứa chữ số 0 (nếu có, 0 phải đứng đầu). Mỗi tập 5 chữ số lấy từ $\{1; 2; \dots; 9\}$ cho **đúng một** số tăng dần, nên $n(A) = C_9^5 = 126$ và

$$P = \frac{126}{27216} = \frac{1}{216}$$

Ví dụ 13 (Đề thi HSG lớp 11 Đà Nẵng 2010 – 2011; HSG lớp 12 Thanh Hoá 2013 – 2014)

Từ tập hợp các số tự nhiên có năm chữ số mà các chữ số đều khác 0, lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để trong số lấy ra chỉ có mặt đúng ba chữ số khác nhau.

Lời giải. $n(\Omega) = 9^5 = 59049$. Chọn bộ ba chữ số: $C_9^3 = 84$ cách. Năm vị trí được tô bằng ba chữ số, mỗi chữ số xuất hiện ít nhất một lần, theo hai kiểu số lần xuất hiện:

- Kiểu (3; 1; 1): chọn chữ số xuất hiện 3 lần (3 cách), xếp $\frac{5!}{3!} = 20$ cách: 60.

- Kiểu (2; 2; 1): chọn chữ số xuất hiện 1 lần (3 cách), xếp $\frac{5!}{2!2!} = 30$ cách: 90.

Vậy $n(A) = 84 \cdot 150 = 12600$ và $P = \frac{12600}{59049} = \frac{1400}{6561}$.

Ví dụ 14 (Đề thi HSG lớp 11 tỉnh Hà Nam, năm học 2016 – 2017)

Từ các chữ số 1; 2; ...; 8 lập các số tự nhiên có tám chữ số đôi một khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số vừa lập. Tính xác suất để số đó chia hết cho 1111.

Lời giải. $n(\Omega) = 8! = 40320$. Tổng các chữ số là 36 nên mọi số lập được đều chia hết cho 9. Vì $9999 = 9 \cdot 1111$ và $\gcd(9; 1111) = 1$, ta có: số N chia hết cho 1111 $\Leftrightarrow N$ chia hết cho 9999.

Viết $N = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4} \cdot 10^4 + \overline{b_1 b_2 b_3 b_4} = x \cdot 10^4 + y = 9999x + (x + y)$. Suy ra $9999 \mid x + y$. Vì $0 < x + y < 2 \cdot 9999$ nên $x + y = 9999$, tức là $a_i + b_i = 9$ với $i = 1; 2; 3; 4$ (phép cộng không có nhớ).

Các cặp có tổng 9 là $\{1; 8\}, \{2; 7\}, \{3; 6\}, \{4; 5\}$: xếp 4 cặp vào 4 cột (4! cách), mỗi cặp chọn số nào ở trên (2^4 cách). Vậy $n(A) = 24 \cdot 16 = 384$ và $P = \frac{384}{40320} = \frac{1}{105}$.

Ví dụ 15 (Đề thi thử TN THPT – Sở GD&ĐT Thanh Hoá, 2026)

Một công ty tổ chức tiệc có 4320 người tham dự. Người ta làm các lá thăm ghi các số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau dạng $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}$ lập từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; mỗi người bốc một lá và các lá thăm được bốc hết. Người có số thỏa mãn $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6$ được nhận thưởng đặc biệt. Tính xác suất để anh Huy, một người dự tiệc, trúng thưởng.

Lời giải. Số lá thăm là $6 \cdot A_6^5 = 4320$ – đúng bằng số người, nên $n(\Omega) = 4320$. Gọi d là chữ số bị bỏ ra và s là tổng mỗi cặp: $3s = (0 + 1 + \dots + 6) - d = 21 - d$, nên $d \in \{0; 3; 6\}$.

- $d = 0$: các cặp $\{1; 6\}, \{2; 5\}, \{3; 4\}$: $3! \cdot 2^3 = 48$ số.
- $d = 3$: các cặp $\{0; 6\}, \{1; 5\}, \{2; 4\}$: 48 cách xếp, trừ $2! \cdot 2^2 = 8$ cách có $a_1 = 0$, còn 40 số.
- $d = 6$: các cặp $\{0; 5\}, \{1; 4\}, \{2; 3\}$: tương tự, 40 số.

Vậy $n(A) = 128$ và $P = \frac{128}{4320} = \frac{4}{135} \approx 0,03$.

Dạng 6. Chẵn lẻ, số dư và cấp số cộng

Phương pháp

Chia tập số thành các **lớp** theo số dư khi chia cho m ($m = 2$: chẵn/lẻ; $m = 3$: dư 0, 1, 2...). Tổng (hay tích) chia hết cho m chỉ phụ thuộc vào lớp của từng số. Đặc biệt: ba số $a < b < c$ lập **cấp số cộng** $\Leftrightarrow a + c = 2b \Leftrightarrow a$ và c **cùng tính chẵn lẻ** (khi đó b được xác định duy nhất).

Ví dụ 16

Chọn ngẫu nhiên ba số khác nhau từ tập $\{1; 2; \dots; 30\}$. Tính xác suất để tổng ba số chia hết cho 3.

Lời giải. $n(\Omega) = C_{30}^3 = 4060$. Ba lớp dư 0, 1, 2 mỗi lớp có 10 số. Tổng chia hết cho 3 khi ba số cùng một lớp, hoặc mỗi số một lớp:

$$n(A) = 3C_{10}^3 + 10^3 = 360 + 1000 = 1360 \Rightarrow P = \frac{1360}{4060} = \frac{68}{203}$$

Ví dụ 17 (Đề thi thử TN THPT – Sở GD&ĐT Ninh Bình, 2025)

Lớp 12A8 có 41 học sinh được đánh số thứ tự từ 1 đến 41. Cô giáo chọn ngẫu nhiên 3 bạn. Xác suất để số thứ tự của 3 bạn lập thành một cấp số cộng là $\frac{a}{b}$ (tối giản). Tính $S = 2a + b$.

Lời giải. $n(\Omega) = C_{41}^3 = 10660$. Ba số lập cấp số cộng $\Leftrightarrow$ số nhỏ nhất và số lớn nhất cùng tính chẵn lẻ (số giữa tự xác định). Có 21 số lẻ, 20 số chẵn nên $n(A) = C_{21}^2 + C_{20}^2 = 210 + 190 = 400$. Do đó $P = \frac{400}{10660} = \frac{20}{533}$ và $S = 2 \cdot 20 + 533 = 573$.

Ví dụ 18 (Đề thi thử TN THPT – Sở GD&ĐT Quảng Trị, 2026)

Cho tập $S = \{1; 2; \dots; 18\}$. Lấy ngẫu nhiên 3 số khác nhau thuộc S . Xác suất để 3 số lấy ra (sắp theo một thứ tự thích hợp) lập thành cấp số cộng hoặc cấp số nhân là $\frac{a}{b}$ (tối giản). Tính $a + b$.

Lời giải. $n(\Omega) = C_{18}^3 = 816$. **Cấp số cộng:** a, c cùng tính chẵn lẻ: $2C_9^2 = 72$ bộ. **Cấp số nhân** $a < b < c$, $ac = b^2$: ngoài các bộ công bội nguyên $(1; 2; 4)$, $(1; 3; 9)$, $(1; 4; 16)$, $(2; 4; 8)$, $(2; 6; 18)$, $(3; 6; 12)$, $(4; 8; 16)$ còn **các bộ công bội phân số** $(4; 6; 9)$, $(8; 12; 18)$, $(9; 12; 16)$ – tổng cộng 10 bộ. Ba số phân biệt không thể vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân. Vậy $P = \frac{82}{816} = \frac{41}{408}$, $a + b = 449$.

Bầy “công bội phân số”

Học sinh hay chỉ tìm cặp số nhân có công bội nguyên ($b = aq$) và bỏ sót (4; 6; 9) với $q = \frac{3}{2}$. Cách an toàn là xét điều kiện $ac = b^2$: với mỗi b , tìm các cặp ước $a < b < c$ của b^2 .

Dạng 7. Xếp hàng, xếp bàn tròn, xếp chỗ đối diện**Phương pháp**

Xếp n người vào hàng: $n(\Omega) = n!$. **Phải đứng cạnh nhau** $\rightarrow$ buộc khối. **Không đứng cạnh nhau** $\rightarrow$ vách ngăn (xếp nhóm còn lại trước, chèn vào khe). **Xếp xen kẽ** $\rightarrow$ cố định mẫu vị trí. Với bàn tròn có ghế đánh số, coi như xếp hàng; nếu chỉ quan tâm vị trí tương đối, cố định một người. Khi chỉ quan tâm **lớp/nhóm** của người đứng ở mỗi vị trí, có thể đếm theo **mẫu màu** (hoán vị lặp) cho gọn.

Ví dụ 19 (Đề thi thử TN THPT – Sở GD&ĐT Thái Nguyên)

Có 6 học sinh lớp 11 và 3 học sinh lớp 12 được xếp ngẫu nhiên thành một hàng ngang. Tính xác suất để không có hai học sinh lớp 12 nào đứng cạnh nhau.

Lời giải. $n(\Omega) = 9!$. Xếp 6 bạn lớp 11 ($6!$ cách), tạo ra 7 khe (kể cả hai đầu hàng, Hình 4). Đặt 3 bạn lớp 12 vào 3 khe khác nhau, có thứ tự: $A_7^3 = 210$ cách. Vậy

$$P = \frac{6! \cdot A_7^3}{9!} = \frac{210}{504} = \frac{5}{12}$$

Ví dụ 20

Xếp ngẫu nhiên 4 bạn nam và 4 bạn nữ thành một hàng ngang. Tính xác suất để:

- nam, nữ đứng xen kẽ;
- bốn bạn nữ đứng liền nhau;
- đầu hàng là một bạn nam và cuối hàng là một bạn nữ.

Lời giải. $n(\Omega) = 8! = 40320$.

- a) Có 2 mẫu xen kẽ (NMNM... hoặc MNMN...), mỗi mẫu xếp nam và nữ theo $4! \cdot 4!$ cách:

$$P = \frac{2 \cdot 4! \cdot 4!}{8!} = \frac{1}{35}.$$

- b) Buộc 4 nữ thành một khối ($4!$ cách bên trong), xếp khối cùng 4 nam ($5!$ cách):

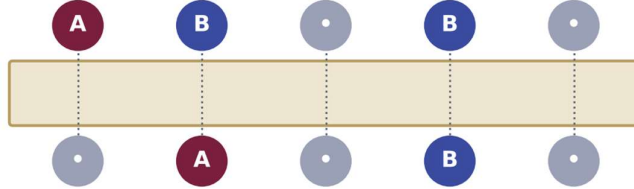
$$P = \frac{4! \cdot 5!}{8!} = \frac{1}{14}.$$

- c) Chọn nam đứng đầu (4 cách), nữ đứng cuối (4 cách), 6 người còn lại ($6!$ cách):

$$P = \frac{16 \cdot 6!}{8!} = \frac{2}{7}.$$

Ví dụ 21 (Đề thi thử TN THPT – THPT chuyên Phan Bội Châu (Hà Tĩnh), 2025)

Đội tuyển có 10 bạn gồm 2 bạn lớp 12A, 3 bạn lớp 12B và 5 bạn đến từ 5 lớp khác nhau (mỗi lớp một bạn). Thầy giáo xếp ngẫu nhiên các bạn vào một bàn dài có 10 ghế, mỗi bên 5 ghế đối diện nhau. Tính xác suất để không có hai bạn cùng lớp ngồi đối diện nhau (làm tròn đến hàng phần chục).



Hình 8. Năm cặp ghế đối diện; điều kiện “xấu” là có hai bạn cùng lớp ở cùng một cặp ghế

Lời giải. $n(\Omega) = 10!$. Gọi X : “hai bạn 12A ngồi đối diện”, Y : “có hai bạn 12B ngồi đối diện”.

- ▶ $n(X)$: chọn cặp ghế (5 cách), xếp hai bạn 12A (2 cách), 8 bạn còn lại ($8!$): $10 \cdot 8!$.
- ▶ $n(Y)$: chọn cặp ghế (5), chọn và xếp hai trong ba bạn 12B ($A_3^2 = 6$), còn lại $8!$: $30 \cdot 8!$.
- ▶ $n(X \cap Y)$: chọn hai cặp ghế có thứ tự cho 12A và 12B ($5 \cdot 4$), xếp 12A (2), xếp 12B (A_3^2), còn lại $6!$: $240 \cdot 6!$.

$$P = 1 - \frac{10 \cdot 8! + 30 \cdot 8! - 240 \cdot 6!}{10!} = 1 - \frac{40}{90} + \frac{240}{5040} = \frac{38}{63} \approx 0,6$$

Ví dụ 22 (Đề thi thử TN THPT – Sở GD&ĐT Phú Thọ, 2025)

Có 8 bạn ngồi quanh một bàn tròn, mỗi bạn cầm một đồng xu cân đối. Tất cả cùng tung đồng xu; bạn có đồng xu ngửa thì đứng lên, sấp thì ngồi yên. Tính xác suất để không có hai bạn ngồi cạnh nhau cùng đứng lên.

Lời giải. $n(\Omega) = 2^8 = 256$. Đếm số cách chọn k bạn đứng, đôi một không kề nhau trên vòng tròn 8 vị trí.

- ▶ $k = 0$: 1 cách; $k = 1$: 8 cách.
- ▶ $k = 2$: $C_8^2 - 8 = 20$ (trừ 8 cặp kề nhau).
- ▶ $k = 3$: cố định một bạn đứng X (8 cách); hai bạn còn lại chọn trong 5 vị trí không kề X , xếp thành một hàng thẳng, không kề nhau: $C_4^2 = 6$ cách; mỗi bộ ba bị đếm 3 lần: $\frac{8 \cdot 6}{3} = 16$.
- ▶ $k = 4$: chỉ có 2 cách (các vị trí lẻ hoặc các vị trí chẵn).

Vậy $n(A) = 1 + 8 + 20 + 16 + 2 = 47$ và $P = \frac{47}{256} \approx 0,18$.

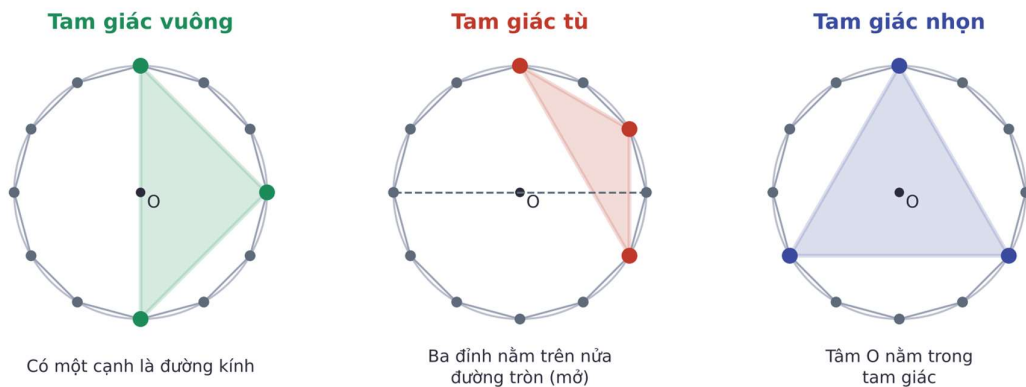
Em có biết?

Với n bạn xếp **thẳng hàng**, số cách không có hai bạn kề nhau cùng đứng là số **Fibonacci** F_{n+2} (với 8 bạn: 55). Với **vòng tròn** thì đó là số **Lucas** L_n : $L_8 = 47$. Hai dãy số nổi tiếng này xuất hiện từ một trò chơi tung đồng xu!

Dạng 8. Đa giác đều – tam giác vuông, tù, nhọn, cân

Phương pháp (đa giác đều n đỉnh nội tiếp đường tròn tâm O)

- ▶ **Tam giác vuông** ($n = 2m$ chẵn): cạnh huyền là đường kính. Có m đường kính, mỗi đường kính ghép với $2m - 2$ đỉnh: $m(2m - 2)$ tam giác, $P = \frac{3}{2m-1}$.
- ▶ **Tam giác tù**: chọn đỉnh góc tù A ; hai đỉnh còn lại nằm cùng một phía của đường kính qua A , trên một nửa đường tròn **mở**. Với $n = 2m$: $n \cdot C_{m-1}^2$ tam giác tù.
- ▶ **Tam giác nhọn** = tổng – vuông – tù (khi đó tâm O nằm trong tam giác).
- ▶ **Tam giác cân**: mỗi đỉnh là đỉnh cân của $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ tam giác; tam giác đều (khi $3 \mid n$) bị đếm 3 lần.
- ▶ **Hình chữ nhật** ($n = 2m$): mỗi hình chữ nhật ứng với một cặp đường kính: C_m^2 ; trong đó có $\frac{m}{2}$ hình vuông nếu m chẵn.



Hình 9. Phân loại tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác đều (minh họa với 12 đỉnh)

Ví dụ 23 (Đề thi HSG lớp 12 tỉnh Thái Bình, năm học 2017 – 2018)

Cho đa giác đều $2n$ đỉnh ($n \geq 2$) nội tiếp đường tròn tâm O . Chọn ngẫu nhiên một tam giác có ba đỉnh là đỉnh của đa giác. Biết xác suất chọn được tam giác vuông là $\frac{1}{13}$. Tìm n .

Lời giải. Mỗi tam giác vuông có cạnh huyền là một trong n đường kính, đỉnh góc vuông là một trong $2n - 2$ đỉnh còn lại:

$$P = \frac{n(2n-2)}{C_{2n}^3} = \frac{n(2n-2) \cdot 6}{2n(2n-1)(2n-2)} = \frac{3}{2n-1} = \frac{1}{13} \Leftrightarrow n = 20$$

Ví dụ 24 (Đề thi thử – THPT chuyên Phan Bội Châu (Nghệ An), 2018)

Cho đa giác đều 100 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh. Tính xác suất để ba đỉnh được chọn là ba đỉnh của một tam giác tù.

Lời giải. Tam giác là tù $\Leftrightarrow$ ba đỉnh nằm trên một nửa đường tròn **mở** (không chứa hai đầu một đường kính). Với mỗi tam giác tù, gọi A là đỉnh “đầu tiên” của bộ ba khi đi theo chiều kim đồng hồ trên cung nhỏ chứa cả ba đỉnh; khi đó hai đỉnh còn lại nằm trong 49 đỉnh kế tiếp A (chưa tới đỉnh đối tâm của A). Ngược lại, mỗi cách chọn A (100 cách) và hai đỉnh trong 49 đỉnh kế tiếp (C_{49}^2 cách) cho đúng một tam giác tù. Số tam giác tù là $100 \cdot C_{49}^2 = 117600$, và

$$P = \frac{117600}{C_{100}^3} = \frac{117600}{161700} = \frac{8}{11}$$

Ví dụ 25 (Đề thi HSG lớp 12 tỉnh Vĩnh Phúc, năm học 2015 – 2016)

Cho đa giác đều 15 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên một tam giác có ba đỉnh là đỉnh của đa giác. Tính xác suất để tam giác được chọn là tam giác cân nhưng không phải tam giác đều.

Lời giải. $n(\Omega) = C_{15}^3 = 455$. Mỗi đỉnh là đỉnh cân của 7 tam giác cân (chọn một cặp đỉnh đối xứng qua đường kính đi qua đỉnh đó), cho $15 \cdot 7 = 105$ lượt đếm. Có $\frac{15}{3} = 5$ tam giác đều, mỗi tam giác bị đếm 3 lần. Số tam giác cân không đều là $105 - 3 \cdot 5 = 90$,

$$\text{nên } P = \frac{90}{455} = \frac{18}{91}.$$

Ví dụ 26 (Đề thi HSG lớp 11 tỉnh Quảng Nam, năm học 2016 – 2017)

Một đa giác đều có 24 đỉnh; tất cả các cạnh được sơn màu xanh, tất cả các đường chéo được sơn màu đỏ. Chọn ngẫu nhiên một tam giác có ba đỉnh là đỉnh của đa giác. Tính xác suất để tam giác có ba cạnh cùng màu.

Lời giải. Ba cạnh không thể cùng xanh, nên chỉ xét tam giác ba cạnh đỏ – tức là **không có cạnh nào là cạnh của đa giác**. $n(\Omega) = C_{24}^3 = 2024$. Số tam giác có 2 cạnh là cạnh đa giác: 24 (ba đỉnh liên tiếp). Số tam giác có đúng 1 cạnh là cạnh đa giác: chọn cạnh (24 cách), đỉnh thứ ba không kề hai đầu cạnh ($24 - 4 = 20$ cách): 480. Vậy

$$P = \frac{2024 - 24 - 480}{2024} = \frac{1520}{2024} = \frac{190}{253}$$

Ví dụ 27 (Đề thi HSG lớp 11 Yên Lạc – Vĩnh Phúc, 2015 – 2016)

Cho đa giác đều 24 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh. Tính xác suất để 4 đỉnh chọn được là 4 đỉnh của một hình chữ nhật không phải hình vuông.

Lời giải. Có 12 đường kính; mỗi cặp đường kính cho một hình chữ nhật: $C_{12}^2 = 66$ hình. Hình vuông ứng với cặp đường kính vuông góc: $\frac{12}{2} = 6$ hình. Vậy $n(A) = 60$ và

$$P = \frac{60}{C_{24}^4} = \frac{60}{10626} = \frac{10}{1771}$$

Điểm chính

Lời giải lưu hành của bài này cho đáp số $\frac{C_{12}^2}{C_{24}^4} = \frac{1}{161}$ – tức là **quên trừ 6 hình vuông**. Chữ “không phải” trong đề luôn là tín hiệu phải loại trường hợp đặc biệt.

Ví dụ 28 (Đề thi thử TN THPT – Sở GD&ĐT Bắc Ninh, 2026)

Cho đa giác đều 36 cạnh. Chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh. Tính xác suất để 4 đỉnh được chọn tạo thành một tứ giác có hai góc ở hai đỉnh kề nhau (chung một cạnh của tứ giác) đều là góc tù (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$.

- ▶ Nếu tứ giác **không có góc vuông**: trong cặp $\{\hat{A}; \hat{C}\}$ có đúng một góc tù, trong cặp $\{\hat{B}; \hat{D}\}$ cũng vậy. Một đỉnh thuộc cặp thứ nhất và một đỉnh thuộc cặp thứ hai luôn kề nhau, nên biến cố **luôn** xảy ra.
- ▶ Nếu tứ giác **có góc vuông** thì góc đối diện cũng vuông, chỉ còn tối đa một góc tù: biến cố không xảy ra.

Vậy biến cố đối là “tứ giác có góc vuông” $\Leftrightarrow$ “có một đường chéo là đường kính”. Số tứ giác có đường chéo AC là đường kính: 18 đường kính, mỗi nửa đường tròn chọn một đỉnh (17 cách): $18 \cdot 17 \cdot 17 = 5202$; hình chữ nhật (hai đường chéo đều là đường kính) bị đếm hai lần, có $C_{18}^2 = 153$ hình. Do đó $n(\overline{A}) = 5202 - 153 = 5049$ và

$$P = 1 - \frac{5049}{C_{36}^4} = 1 - \frac{5049}{58905} = \frac{32}{35} \approx 0,91$$

Dạng 9. Chia nhóm, bốc thăm, phát quà

Phương pháp

Chia n người vào các nhóm **có tên** (bảng A, B, C...): chọn lần lượt cho từng nhóm. Chia thành các cặp **không tên**: số cách là $\frac{(2m)!}{2^m m!} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m - 1)$. Với bài phát quà giống nhau theo loại, hãy **lập hệ phương trình** để biết số phần quà mỗi loại trước khi đếm.

Ví dụ 29

Giải bóng chuyền có 9 đội tham dự, trong đó có 3 đội Việt Nam. Ban tổ chức bốc thăm ngẫu nhiên chia thành ba bảng A, B, C, mỗi bảng 3 đội. Tính xác suất để ba đội Việt Nam ở ba bảng khác nhau.

Lời giải. $n(\Omega) = C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = 1680$. Xếp 3 đội Việt Nam vào 3 bảng ($3! = 6$ cách), 6 đội còn lại chia đều mỗi bảng 2 đội ($C_6^2 C_4^2 C_2^2 = 90$ cách). $P = \frac{540}{1680} = \frac{9}{28}$.

Ví dụ 30 (Đề thi HSG lớp 12 tỉnh Thanh Hoá 2015 – 2016; HSG lớp 12 Hải Phòng 2017 – 2018)

Dùng 7 cuốn sách Toán, 6 cuốn Vật lý và 5 cuốn Hoá học (các cuốn cùng loại giống nhau) làm phần thưởng cho 9 học sinh, mỗi học sinh nhận hai cuốn **khác loại**. Trong 9 học sinh có An và Bình. Tính xác suất để An và Bình nhận phần thưởng giống nhau.

Lời giải. Gọi x, y, z lần lượt là số phần quà (Toán, Lí), (Toán, Hoá), (Lí, Hoá). Ta có $x + y = 7$, $x + z = 6$, $y + z = 5$, suy ra $x = 4$, $y = 3$, $z = 2$. Phát quà = chọn 4 học sinh nhận (T,L), 3 học sinh nhận (T,H): $n(\Omega) = C_9^4 \cdot C_5^3 = 1260$.

An và Bình cùng nhận (T,L): $C_7^2 \cdot C_5^3 = 210$; cùng nhận (T,H): $C_7^1 \cdot C_6^4 = 105$ (chọn thêm 1 bạn nhận (T,H), rồi 4 bạn nhận (T,L) trong 6 bạn còn lại); cùng nhận (L,H): $C_7^4 = 35$. Vậy $P = \frac{350}{1260} = \frac{5}{18}$.

Ví dụ 31 (Đề thi thử TN THPT – Sở GD&ĐT Đà Nẵng, 2026)

Một giải eSports có 8 đội thi đấu loại trực tiếp từ vòng Tứ kết; các đội được đánh số hạt giống từ 1 (mạnh nhất) đến 8. Bốc thăm ngẫu nhiên 4 cặp Tứ kết (các cặp Bán kết cũng được bốc thăm ngẫu nhiên). Đội có số nhỏ hơn luôn thắng đội có số lớn hơn, trừ hai ngoại lệ: Đội 8 luôn thắng Đội 1 và Đội 7 luôn thắng Đội 2. Tính xác suất để Đội 3 vô địch.

Lời giải. Đội 3 chỉ thua Đội 1 và Đội 2, nên hai đội này phải bị loại trước khi gặp Đội 3. Chỉ Đội 8 thắng được Đội 1, nhưng Đội 8 thua mọi đội khác – nên Đội 8 phải gặp Đội 1 **ngay ở Tứ kết**. Tương tự, cặp $\{2; 7\}$ phải gặp nhau ở Tứ kết. Khi đó Đội 3 thắng tất cả các đội còn lại ở mọi vòng (kể cả Đội 7, Đội 8), bất kể bốc thăm Bán kết. Số cách chia 8 đội thành 4 cặp

là $\frac{8!}{2^4 \cdot 4!} = 105$; số cách có hai cặp $\{1; 8\}, \{2; 7\}$ là số cách ghép 4 đội $\{3; 4; 5; 6\}$: 3 cách. Vậy $P = \frac{3}{105} = \frac{1}{35} \approx 0,03$.

Dạng 10. Phân phối, chia kẹo và dôi chỉ số

Phương pháp

Phân phối k vật khác nhau vào m hộp (mỗi người chọn ngẫu nhiên một phòng...): $n(\Omega) = m^k$; đếm theo **kiểu phân bố** số lượng rồi nhân với hoán vị lặp.

Chia kẹo: số nghiệm nguyên dương của $x_1 + \dots + x_k = n$ là C_{n-1}^{k-1} .

Dôi chỉ số: dãy không giảm $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$ ứng với dãy tăng ngặt

$a_1 < a_2 + 1 < \dots < a_k + k - 1$; dãy “cách nhau ít nhất 2” ứng với dãy tăng $b_i = a_i - (i - 1)$.

Ví dụ 32 (Đề thi HSG lớp 12 tỉnh Phú Thọ, năm học 2015 – 2016)

Một dãy phố có 5 cửa hàng quần áo. Có 5 khách đến mua, mỗi người vào ngẫu nhiên một trong năm cửa hàng. Tính xác suất để có ít nhất một cửa hàng có nhiều hơn 2 khách vào.

Lời giải. $n(\Omega) = 5^5 = 3125$. Liệt kê kiểu phân bố có một cửa hàng từ 3 khách trở lên:

Kiểu	Cách đếm	Số cách
(3; 2)	chọn cửa hàng 3 khách, chọn 3 khách, chọn cửa hàng 2 khách: $5 \cdot C_5^3 \cdot 4$	200
(3; 1; 1)	$5 \cdot C_5^3 \cdot A_4^2$	600
(4; 1)	$5 \cdot C_5^4 \cdot 4$	100
(5)	5	5

Tổng 905, nên $P = \frac{905}{3125} = \frac{181}{625}$.

Ví dụ 33 (Đề thi thử THPT quốc gia – THPT chuyên Hạ Long (Quảng Ninh), 2017 – 2018)

Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có 4 chữ số. Tính xác suất để số được chọn có dạng $\overline{abcd}$ với $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 9$.

Lời giải. $n(\Omega) = 9000$. Đặt $a' = a$, $b' = b + 1$, $c' = c + 2$, $d' = d + 3$ thì $1 \leq a' < b' < c' < d' \leq 12$. Đây là song ánh giữa các số cần đếm và các tập con 4 phần tử của $\{1; \dots; 12\}$, nên $n(A) = C_{12}^4 = 495$ và $P = \frac{495}{9000} = \frac{11}{200}$.

Ví dụ 34 (Đề thi HSG lớp 11 tỉnh Nam Định, năm học 2015 – 2016)

Chọn ngẫu nhiên ba số đôi một khác nhau từ tập $\{1; 2; \dots; 20\}$. Tính xác suất để trong ba số được chọn không có hai số tự nhiên liên tiếp.

Lời giải. $n(\Omega) = C_{20}^3 = 1140$. Với $a < b < c$ không có hai số liên tiếp, đặt $a' = a$, $b' = b - 1$, $c' = c - 2$ thì $1 \leq a' < b' < c' \leq 18$ – song ánh.

Vậy $n(A) = C_{18}^3 = 816$ và $P = \frac{816}{1140} = \frac{68}{95}$.

Ví dụ 35 (Đề thi thử TN THPT – Sở GD&ĐT Bắc Ninh, 2026)

Một thanh gỗ dài 15 cm có 14 vạch chia đều (cách nhau 1 cm). Cắt ngẫu nhiên hai nhát tại hai vạch để được 3 đoạn. Tính xác suất để ba đoạn ghép được thành một tam giác (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. $n(\Omega) = C_{14}^2 = 91$. Gọi độ dài ba đoạn là $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, $x + y + z = 15$.

Ghép được tam giác $\Leftrightarrow$ mỗi đoạn nhỏ hơn nửa chu vi 7,5 $\Leftrightarrow$ mỗi đoạn ≤ 7 .

Biến cố đối: có một đoạn ≥ 8 (không thể có hai đoạn như vậy).

Nếu $x \geq 8$, đặt $x' = x - 7 \geq 1$: $x' + y + z = 8$

có $C_7^2 = 21$ nghiệm; nhân 3 cho ba đoạn: 63. Vậy $P = 1 - \frac{63}{91} = \frac{4}{13} \approx 0,31$.

Ví dụ 36 (Đề thi thử TN THPT – THPT chuyên Lê Khiết (Quảng Ngãi), 2025)

Cho $A = \{1; 2; \dots; 100\}$. Gọi S là tập hợp các tập con gồm 3 phần tử của A có tổng ba phần tử bằng 91. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của S . Tính xác suất để chọn được tập có ba số lập thành một cấp số nhân **có công bội nguyên dương**.

Lời giải. Đếm $|S|$. Số nghiệm nguyên dương (có thứ tự) của $a + b + c = 91$ là $C_{90}^2 = 4005$. Số nghiệm có hai số bằng nhau: $a = b$, $2a + c = 91$ có 45 nghiệm, nhân 3 vị trí: 135; không có nghiệm ba số bằng nhau vì $3 \nmid 91$.

Vậy số bộ ba số đôi một khác nhau là $4005 - 135 = 3870$, và $|S| = \frac{3870}{3!} = 645$.

Đếm cấp số nhân. $a(1 + q + q^2) = 91 = 7 \cdot 13$ với $q \geq 2$ nguyên: $1 + q + q^2 \in \{7; 13; 91\}$ cho $q = 2$ ($a = 13$), $q = 3$ ($a = 7$), $q = 9$ ($a = 1$): các tập $\{13; 26; 52\}$, $\{7; 21; 63\}$, $\{1; 9; 81\}$. Vậy $P = \frac{3}{645} = \frac{1}{215}$.

Dạng 11. Biến cố đối và bao hàm – loại trừ

Phương pháp

Mỗi khi gặp “ít nhất một”, “mỗi... đều có...”, “không có... nào”, hãy viết biến cố đối và kiểm tra xem nó có đơn giản hơn không. Nếu biến cố đối là **hợp** của nhiều điều kiện “xấu” chồng lấn nhau, dùng bao hàm – loại trừ. Bài toán kinh điển: **bài toán ngày sinh**, **bài toán bỏ thư** (hoán vị không điểm bất động), **điền số vào bảng**.

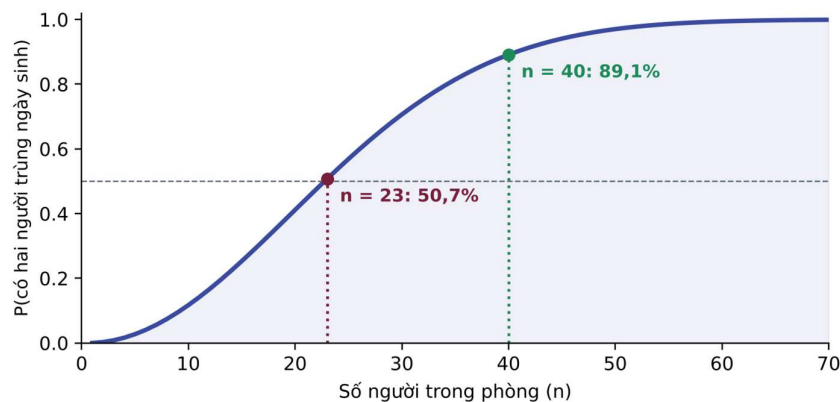
Ví dụ 37. (Bài toán ngày sinh)

Một lớp học có n học sinh ($n \leq 365$). Giả sử ngày sinh của mỗi bạn là một trong 365 ngày của năm với khả năng như nhau. Tính xác suất để có ít nhất hai bạn trùng ngày sinh. Tính giá trị với $n = 23$ và $n = 40$.

Lời giải. Không gian mẫu gồm các bộ n ngày sinh (có thứ tự, có thể trùng): $n(\Omega) = 365^n$. Biến cố đối “mọi bạn có ngày sinh khác nhau” có $A_{365}^n = 365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)$ kết quả. Vậy

$$P_n = 1 - \frac{A_{365}^n}{365^n}$$

Tính bằng máy tính: $P_{23} \approx 0,507$ – chỉ cần 23 người là xác suất trùng ngày sinh đã vượt 50%; $P_{40} \approx 0,891$.



Hình 10. Xác suất có hai người trùng ngày sinh tăng rất nhanh theo số người – trái hẳn trực giác

Ví dụ 38. (Bài toán bỏ thư)

Nam và Thắng mỗi người độc lập sắp xếp thứ tự 5 địa điểm tham quan A, B, C, D, E theo sở thích. Tính xác suất để hai bản sắp xếp có ít nhất một địa điểm ở cùng một vị trí (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. Cố định thứ tự của Nam; thứ tự của Thắng là một hoán vị bất kì: $n(\Omega) = 5! = 120$. Biến cố đối: không địa điểm nào trùng vị trí. Gọi T_i là tập các hoán vị có địa điểm thứ i trùng vị trí; theo bao hàm – loại trừ, số hoán vị có ít nhất một vị trí trùng là

$$C_5^1 \cdot 4! - C_5^2 \cdot 3! + C_5^3 \cdot 2! - C_5^4 \cdot 1! + C_5^5 \cdot 0! = 120 - 60 + 20 - 5 + 1 = 76$$

Vậy $P = \frac{76}{120} = \frac{19}{30} \approx 0,63$.

Ví dụ 39 (Đề thi HSG lớp 12 tỉnh Hà Tĩnh, 2026 (cũng có trong đề thi thử Liên trường Hà Nội, 2026))

Cho một bảng ô vuông 3×3 . Điền ngẫu nhiên 9 số thuộc tập $X = \{0; 1; 2; \dots; 9\}$ vào 9 ô, mỗi ô một số, các số đôi một khác nhau. Tính xác suất của biến cố Y : “mỗi hàng, mỗi cột đều có ít nhất một số lẻ”.

Thoả mãn			Không thoả (hàng 2 toàn chẵn)		
3	8	5	2	7	4
6	1	0	8	0	6
9	4	7	5	1	3

Hình 11. Chỉ cần quan tâm vị trí các số lẻ (ô vàng)

Lời giải. $n(\Omega) = A_{10}^9 = 10!$. Bảng dùng 9 trong 10 số, tức bỏ ra đúng một số. Chỉ vị trí các số lẻ là quan trọng.

- **Bỏ ra một số chẵn** (5 cách): bảng có 5 số lẻ, 4 số chẵn. Một hàng (hoặc cột) “toàn chẵn” dùng 3 số chẵn, nên không thể có hai đường toàn chẵn. Số cách chọn 5 ô lẻ để có một đường toàn chẵn: $6 \cdot C_6^5 = 36$; số cách tốt: $C_9^5 - 36 = 90$.

- **Bỏ ra một số lẻ** (5 cách): bảng có 4 số lẻ, 5 số chẵn.

Số cách chọn 4 ô lẻ có ít nhất một hàng hoặc cột trống:

$$3C_6^4 + 3C_6^4 - 9 \cdot C_4^4 = 45 + 45 - 9 = 81; \text{ số cách tốt: } C_9^4 - 81 = 45.$$

Mỗi cách chọn vị trí, ta xếp các số lẻ và số chẵn vào vị trí tương ứng ($5! \cdot 4!$ cách trong cả hai trường hợp). Vậy

$$P(Y) = \frac{5 \cdot 90 \cdot 5! \cdot 4! + 5 \cdot 45 \cdot 4! \cdot 5!}{10!} = \frac{675 \cdot 2880}{3628800} = \frac{15}{28}$$

Dạng 12. Bài toán ngược, đường đi và chọn mô hình đúng

Phương pháp

Bài toán ngược: biểu diễn xác suất theo ẩn n , lập phương trình, chú ý điều kiện của n và chia trường hợp n chẵn/lẻ nếu cần. **Đường đi trên lưới:** số đường đi ngắn nhất từ $(0; 0)$ đến $(p; q)$ là C_{p+q}^p . **Chọn mô hình:** đọc kĩ “cái gì được chọn ngẫu nhiên” – mỗi bước, hay cả đường đi, hay cả kịch bản – vì các mô hình khác nhau cho đáp số khác nhau.

Ví dụ 40 (Đề thi thử TN THPT – Sở GD&ĐT Thanh Hoá (ý tưởng đã có trong đề HSG lớp 12 Bến Tre 2017 – 2018))

Một nhóm gồm n học sinh có tên khác nhau, trong đó có An, Bình, Cường, được xếp tùy ý vào một dãy ghế đánh số từ 1 đến n . Xác suất để số ghế của An bằng trung bình cộng số ghế của Bình và Cường là $\frac{7}{195}$. Tìm n .

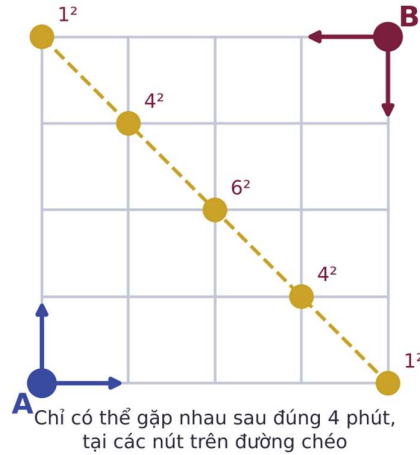
Lời giải. Chỉ cần xét ghế của ba bạn: A_n^3 cách. Số ghế của An được xác định duy nhất khi ghế của Bình và Cường **cùng tính chẵn lẻ** (và khác nhau).

- ▶ $n = 2k + 1$: có $k + 1$ ghế lẻ, k ghế chẵn; số cặp có thứ tự (Bình, Cường) cùng tính chẵn lẻ là $(k + 1)k + k(k - 1) = 2k^2$. $P = \frac{2k^2}{(2k+1) \cdot 2k \cdot (2k-1)} = \frac{k}{4k^2-1}$.
- ▶ $n = 2k$: số cặp là $2k(k - 1)$, $P = \frac{2k(k-1)}{2k(2k-1)(2k-2)} = \frac{1}{2(2k-1)}$ – không thể bằng $\frac{7}{195}$ vì khi đó $2(2k - 1) = \frac{195}{7}$ không phải số nguyên.

Giải $\frac{k}{4k^2-1} = \frac{7}{195} \Leftrightarrow 28k^2 - 195k - 7 = 0 \Leftrightarrow k = 7$ (loại nghiệm âm). Vậy $n = 15$.

Ví dụ 41. (Hai con kiến) (Đề thi HSG lớp 12 tỉnh Phú Thọ, năm học 2017 – 2018)

Cho lưới ô vuông 4×4 , mỗi ô có cạnh 1 m. Con kiến thứ nhất ở góc dưới trái A muốn đến góc trên phải B , con kiến thứ hai ở B muốn đến A . Con thứ nhất chỉ đi sang phải hoặc lên trên, con thứ hai chỉ đi sang trái hoặc xuống dưới; tại mỗi nút, mỗi con chọn ngẫu nhiên một trong hai hướng (nếu còn hai hướng). Hai con xuất phát cùng lúc, cùng vận tốc 1 m/phút. Tính xác suất để hai con kiến gặp nhau.



Hình 12. Hai con kiến chỉ có thể gặp nhau tại 5 nút trên đường chéo

Lời giải. Sau t phút, tổng tọa độ của kiến thứ nhất là t , của kiến thứ hai là $8 - t$; chúng chỉ có thể trùng nhau khi $t = 4$, tại một nút $(k; 4 - k)$ trên đường chéo. Trong 4 phút đầu chưa con nào chạm mép lưới, nên mỗi bước đều có đúng 2 lựa chọn đồng khả năng: không gian mẫu (4 bước đầu của mỗi con) gồm $2^4 \cdot 2^4 = 256$ kết quả đồng khả năng. Kiến thứ nhất đến $(k; 4 - k)$ theo C_4^k cách, kiến thứ hai cũng C_4^k cách. Vậy

$$P = \frac{\sum_{k=0}^4 (C_4^k)^2}{256} = \frac{1 + 16 + 36 + 16 + 1}{256} = \frac{70}{256} = \frac{35}{128}$$

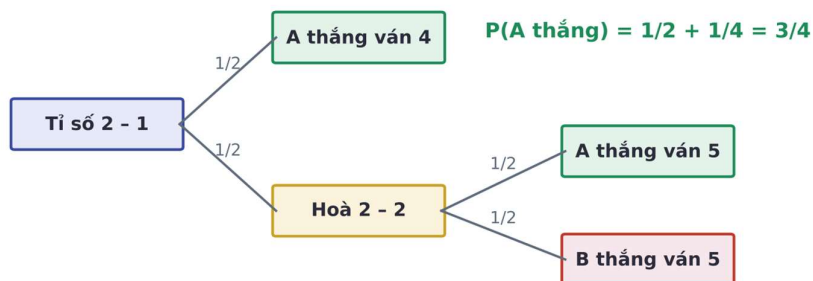
Chọn đúng mô hình

Đề thi thử TN THPT của Sở GD&ĐT Thái Nguyên năm 2025 dùng đúng bài này (hai rô bột giao hàng, mỗi bước chọn hướng với xác suất như nhau) nhưng đáp án công bố là 0,37. Con số đó ứng với mô hình **mỗi rô bột chọn ngẫu nhiên một trong $C_8^4 = 70$ đường đi ngắn nhất** – một mô hình khác (các đường đi sát mép có xác suất khác các đường đi giữa lưới khi chọn từng bước). Theo đúng giả thiết của đề, đáp số là $\frac{35}{128} \approx 0,27$.

Ví dụ 42. (Bài toán chia tiền cược của Pascal – Fermat)

Hai đấu thủ A và B ngang tài (mỗi ván, mỗi người thắng với khả năng như nhau, không có hoà). Ai thắng trước 3 ván thì được toàn bộ số tiền cược. Cuộc chơi phải dừng khi A đang dẫn 2 – 1. Nên chia tiền thế nào cho công bằng?

Lời giải (cách của Fermat). Cuộc chơi chắc chắn kết thúc sau tối đa 2 ván nữa. **Giả sử luôn chơi đủ 2 ván** (dù có thể kết thúc sớm): 4 kịch bản đồng khả năng AA, AB, BA, BB. A thắng chung cuộc trong 3 kịch bản AA, AB, BA (A chỉ cần thắng 1 ván). Vậy A nên nhận $\frac{3}{4}$ số tiền, B nhận $\frac{1}{4}$.



Hình 13. Sơ đồ cây của bài toán chia tiền cược: A thắng ngay ván 4, hoặc hoà 2 – 2 rồi thắng ván 5

Ý tưởng “chơi giả định đủ ván” của Fermat

Thêm các ván “giả định” để mọi kịch bản có **cùng độ dài** – khi đó các kịch bản đồng khả năng và ta được dùng định nghĩa cổ điển. Đây là một trong những ý tưởng đẹp nhất của lịch sử xác suất. Nếu tỉ số là 2 – 0 (A cần 1 ván, B cần 3 ván), giả định chơi đủ 3 ván: B chỉ thắng khi thắng cả 3, nên A nhận $\frac{7}{8}$.

Tổng kết các dạng toán

Dạng	Dấu hiệu nhận biết	Công cụ then chốt
1 – 2. Liệt kê, xúc xắc	$n(\Omega)$ nhỏ; gieo xúc xắc, đồng xu	Bảng 6×6 , sơ đồ cây, đếm có thứ tự
3 – 4. Chọn vật, chọn người	“lấy đồng thời”, “chọn ra”	Tổ hợp, chia trường hợp, rút gọn điều kiện
5 – 6. Số, chữ số, số dư	lập số; tổng/tích chia hết	$a_1 \neq 0$, phân lớp đồng dư, chẵn lẻ – CSC
7. Xếp chỗ	xếp hàng, bàn tròn, đối diện	Buộc khối, vách ngăn, mẫu màu
8. Đa giác đều	tam giác vuông/tù/cân, hình chữ nhật	Đường kính, nửa đường tròn, đỉnh mốc
9. Chia nhóm, phát quà	bốc thăm, chia bảng, quà theo loại	Chia lần lượt, ghép cặp, lập hệ
10. Phân phối, chia kẹo	người vào phòng; dãy không giảm	Kiểu phân bố, chia kẹo, dòi chỉ số
11. Biến cố đối	“ít nhất”, “mỗi... đều có”	$1 - P(\overline{A})$, bao hàm – loại trừ
12. Bài toán ngược, mô hình	“tìm n ”, đường đi, chia tiền	Lập phương trình; chọn không gian mẫu đúng

IV. ỨNG DỤNG THỰC TẾ

Xác suất cổ điển không chỉ sống trong sòng bạc thế kỉ XVII. Sáu tình huống dưới đây cho thấy cùng một công thức $\frac{n(A)}{n(\Omega)}$ giúp ta ra quyết định tỉnh táo hơn trong đời sống hằng ngày.

Tình huống 1. Xổ số tự chọn – giấc mơ một phần tám triệu

Xổ số Mega 6/45

Mỗi vé xổ số tự chọn Mega 6/45 gồm 6 số khác nhau chọn từ 1 đến 45; kết quả quay thưởng là 6 số khác nhau. Vé trúng giải đặc biệt (Jackpot) nếu trùng cả 6 số. Tính xác suất trúng Jackpot của một vé, và xác suất vé trùng **đúng 3 số**.

Lời giải. $n(\Omega) = C_{45}^6 = 8\,145\,060$. Trúng Jackpot: 1 kết quả, $P = \frac{1}{8\,145\,060} \approx 1,2 \cdot 10^{-7}$. Trùng đúng 3 số: chọn 3 số trùng trong 6 số của vé và 3 số còn lại trong 39 số không có trên vé: $C_6^3 \cdot C_{39}^3 = 20 \cdot 9139 = 182\,780$, nên $P = \frac{182\,780}{8\,145\,060} \approx 0,022$.

Một phần tám triệu lớn cỡ nào?

Nếu mỗi tuần mua 3 vé (mỗi kì quay một vé, 3 kì một tuần), trung bình phải chờ khoảng $\frac{8\,145\,060}{3 \cdot 52} \approx 52\,000$ **năm** mới trúng một lần. Theo nguyên lí xác suất bé, trúng Jackpot là biến cố “gần như không xảy ra” với một người cụ thể – dù ở quy mô cả nước, gần như chắc chắn sẽ có ai đó trúng sau đủ nhiều kì quay.

Tình huống 2. Mật khẩu và mã OTP

Một mã OTP gồm 6 chữ số (từ 000000 đến 999999) được sinh ngẫu nhiên. Kẻ gian đoán bừa một lần thì xác suất đúng là $\frac{1}{10^6}$. Nếu hệ thống cho phép thử tối đa 5 lần (mỗi lần đoán một mã khác nhau), xác suất đoán trúng là $\frac{5}{10^6} = 0,000005$ – vẫn rất nhỏ. Đó là lí do ngân hàng **khoá tài khoản sau vài lần nhập sai**: giới hạn số lần thử giữ cho xác suất “đoán mò” nằm dưới ngưỡng xác suất bé.

Ngược lại, mã PIN 4 chữ số mà người dùng hay đặt kiểu “1111”, “1234”, năm sinh... thì các kết quả **không còn đồng khả năng** – kẻ gian thử những mã phổ biến trước sẽ có xác suất thành công cao hơn rất nhiều. Một ví dụ đời thường cho thấy giả thiết “đồng khả năng” quan trọng đến mức nào.

Tình huống 3. Thi trắc nghiệm: “khoanh bừa” được bao nhiêu điểm?

Đoán mò cả bài (Đề thi HSG lớp 12 tỉnh Nam Định, năm học 2017 – 2018)

Một đề thi có 10 câu trắc nghiệm, mỗi câu có 4 phương án, chỉ một phương án đúng; mỗi câu đúng được 1 điểm. Một thí sinh chọn ngẫu nhiên đáp án cho cả 10 câu. Tính xác suất để thí sinh đạt từ 7 điểm trở lên.

Lời giải. $n(\Omega) = 4^{10}$. Đúng đúng k câu: chọn k câu đúng (C_{10}^k cách), mỗi câu sai có 3 cách chọn: $C_{10}^k \cdot 3^{10-k}$. Vậy

$$n(A) = C_{10}^7 \cdot 3^3 + C_{10}^8 \cdot 3^2 + C_{10}^9 \cdot 3 + C_{10}^{10} = 3240 + 405 + 30 + 1 = 3676$$

$$P = \frac{3676}{4^{10}} = \frac{919}{262144} \approx 0,0035$$

(Lời giải lưu hành tính nhầm $C_{10}^7 \cdot 27 = 1080$, dẫn đến đáp số sai $\frac{1516}{4^{10}}.$)

Khi đã biết loại trừ phương án (Đề thi thử TN THPT – Cụm trường Nghệ An, 2026)

Một bài kiểm tra có 20 câu trắc nghiệm, mỗi câu 4 phương án, chỉ một phương án đúng, mỗi câu đúng được 0,5 điểm. Bạn Tiến đã làm đúng 15 câu. Trong 5 câu còn lại, có hai câu bạn đã loại được một phương án sai; Tiến chọn ngẫu nhiên đáp án cho 5 câu còn lại (với hai câu kia, chọn ngẫu nhiên trong 3 phương án còn lại). Tính xác suất để Tiến được đúng 9 điểm.

Lời giải. $n(\Omega) = 3^2 \cdot 4^3 = 576$. Cần đúng thêm đúng 3 câu. Gọi i là số câu đúng trong 2 câu “3 phương án”, khi đó đúng $3 - i$ câu trong 3 câu “4 phương án”:

$$\triangleright i = 2: 1 \cdot C_3^1 \cdot 3^2 = 27; i = 1: C_3^1 \cdot 2 \cdot C_3^2 \cdot 3 = 36; i = 0: 2^2 \cdot 1 = 4.$$

Vậy $P = \frac{67}{576} \approx 0,12$. Loại được phương án sai làm xác suất tăng đáng kể so với đoán mò hoàn toàn.

Điểm phần Đúng/Sai của đề tốt nghiệp mới

Trong đề tốt nghiệp THPT môn Toán từ năm 2025, phần Đúng/Sai gồm 4 câu, mỗi câu 4 ý. Mỗi câu: đúng 1 ý được 0,1 điểm, đúng 2 ý được 0,25 điểm, đúng 3 ý được 0,5 điểm, đúng 4 ý được 1 điểm. Một thí sinh chọn Đúng/Sai ngẫu nhiên cho cả 16 ý. Tính xác suất thí sinh được đúng 2 điểm ở phần này.

Lời giải. $n(\Omega) = 2^{16} = 65536$. Mỗi câu có C_4^k cách để đúng k ý. Các bộ điểm của 4 câu có tổng 2 điểm (không kể thứ tự):

- ▶ $\{1; 1; 0; 0\}$: chọn 2 câu đạt 1 điểm ($C_4^2 = 6$), mỗi câu 1 cách, hai câu 0 điểm mỗi câu 1 cách: 6.
- ▶ $\{1; 0,5; 0,5; 0\}$: $4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 4^2 \cdot 1 = 192$.
- ▶ $\{1; 0,5; 0,25; 0,25\}$: $4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 6^2 = 1728$.

► $\{0,5; 0,5; 0,5; 0,5\}$: $4^4 = 256$.

Tổng 2182, nên $P = \frac{2182}{65\,536} \approx 0,033$. Thang điểm “thưởng nặng cho câu đúng trọn vẹn” khiến việc đoán mò rất khó đem lại điểm cao.

Tình huống 4. Trùng ngày sinh trong lớp học

Kết quả của bài toán ngày sinh (Dạng 11) có thể kiểm chứng ngay trong lớp: với lớp 40 học sinh, xác suất có hai bạn trùng ngày sinh khoảng 89%. Các nhà mật mã học dùng đúng hiện tượng này trong “tấn công ngày sinh” (birthday attack): khi số “dấu vân tay điện tử” có thể có là N , chỉ cần khoảng $\sqrt{N}$ mẫu là xác suất có hai mẫu trùng nhau đã đáng kể – nên các hàm băm an toàn phải có N cực lớn.

Tình huống 5. Biển số xe

Biển số đẹp (Đề thi HSG lớp 12 tỉnh Quảng Trị, 2026)

Biển số xe loại A của tỉnh có dạng $7xA-abc.de$, trong đó x là chữ số 3 hoặc 4, còn a, b, c, d, e là các chữ số không đồng thời bằng 0. Đếm số biển số loại A có mặt cả chữ số 3 lẫn chữ số 4 (tính cả chữ số x).

Lời giải. Tổng số biển là $2 \cdot (10^5 - 1) = 199\,998$. Nếu $x = 3$: cần $\overline{abcde}$ có chữ số 4, số cách là $10^5 - 9^5 = 40\,951$ (phần bù của “không có chữ số 4”; bộ toàn số 0 không chứa 4 nên không phải trừ thêm). Nếu $x = 4$: tương tự 40 951. Có 81 902 biển. Chọn ngẫu nhiên một biển thì xác suất biển có cả chữ số 3 và 4 là $\frac{81\,902}{199\,998} \approx 0,41$ – cao hơn nhiều người nghĩ, vì phần bù 9^5 của “không có chữ số 4” chỉ chiếm khoảng 59%.

Tình huống 6. Kiểm tra chất lượng bằng lấy mẫu

Lấy mẫu kiểm tra lô hàng

Một lô 50 sản phẩm có 4 sản phẩm lỗi. Bộ phận kiểm tra lấy ngẫu nhiên 5 sản phẩm; nếu không thấy sản phẩm lỗi nào thì lô được chấp nhận. Tính xác suất lô bị chấp nhận. Nếu lấy 10 sản phẩm thì sao?

Lời giải. Lấy 5 sản phẩm: $P = \frac{C_{46}^5}{C_{50}^5} = \frac{4257}{6580} \approx 0,65$. Lấy 10 sản phẩm: $P = \frac{C_{46}^{10}}{C_{50}^{10}} \approx 0,40$.

Với tỉ lệ lỗi tới 8%, quy trình lấy 5 mẫu vẫn chấp nhận lô hàng trong khoảng 65% trường hợp – quá “dễ dãi”. Tăng cỡ mẫu làm xác suất bỏ sót giảm, nhưng tốn chi phí hơn. Bài toán thiết kế cỡ mẫu chính là điểm gặp nhau giữa xác suất và kinh tế.

V. TUYỂN CHỌN ĐỀ THI CỦA BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO (2018 – 2026)

Mục này tập hợp các câu xác suất cổ điển trong đề minh hoạ và đề chính thức của Bộ GD&ĐT. Đề chính thức có nhiều mã đề với số liệu thay đổi đôi chút; mỗi câu dưới đây lấy theo một mã đề tiêu biểu. Các câu trắc nghiệm được trình bày dưới dạng **đề bài – đáp số** (không chép lại phương án nhiễu) để học sinh tự giải trước khi xem lời giải.

Năm	Nội dung	Kĩ thuật then chốt
MH 2018	Chọn 2 quả cầu cùng màu; xếp 10 học sinh không có hai bạn cùng lớp đứng cạnh nhau	Tổ hợp; vách ngăn nhiều tầng
2018	Lấy 3 quả cầu xanh; ba bạn viết số có tổng chia hết cho 3	Tổ hợp; phân lớp đồng dư
MH 2019, 2019	Tổng các chữ số lẻ; hai số có tổng chẵn	Chẵn lẻ, $a_1 \neq 0$
2020 – 2022	Không có hai chữ số liên tiếp cùng chẵn; hai số chẵn; tổng chẵn	Chia trường hợp vị trí, chẵn lẻ
2024	Hai quả bóng khác màu, tổng số chẵn	Kết hợp hai thuộc tính
2025	Mật thư – ba bộ ba lập cấp số cộng	Chẵn lẻ + cấp số cộng + loại suy biến
2026	Lắp đèn trên đa giác đều 12 cạnh	Phân hoạch đỉnh thành 3 hình vuông

Xu hướng rất rõ: từ những câu “đếm một bước” (2018 – 2022), đề thi chuyển dần sang các câu **tổng hợp nhiều ý tưởng** và **gắn hình học** (2025, 2026), ở dạng trả lời ngắn – không còn phương án để “thử ngược”.

Câu 1 (Đề minh hoạ THPT quốc gia 2018)

Một hộp chứa 11 quả cầu gồm 5 quả màu xanh và 6 quả màu đỏ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu từ hộp. Tính xác suất để 2 quả cầu chọn ra cùng màu.

Lời giải. $P = \frac{C_5^2 + C_6^2}{C_{11}^2} = \frac{10+15}{55} = \frac{5}{11}.$

Câu 2 (Đề minh hoạ THPT quốc gia 2018 (cũng là đề HSG lớp 11 Thanh Hoá 2017 – 2018))

Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 5 học sinh lớp 12C thành một hàng ngang. Tính xác suất để trong 10 học sinh trên không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau.

Lời giải. $n(\Omega) = 10!$. Xếp 5 bạn 12C trước ($5!$ cách), tạo 6 khe đánh số 1 đến 6 (khe 1 và khe 6 ở hai đầu). Năm bạn 12A, 12B phải được đặt vào các khe sao cho **bốn khe giữa (2, 3,**

4, 5) đều có người (để hai bạn 12C không đứng cạnh nhau), và trong mỗi khe không có hai bạn cùng lớp đứng cạnh nhau.

- ▶ **Trường hợp 1:** dùng 5 khe liên tiếp (khe 1–5 hoặc 2–6), mỗi khe một bạn: $2 \cdot 5! = 240$ cách.
- ▶ **Trường hợp 2:** dùng đúng 4 khe giữa, một khe chứa 2 bạn (một 12A và một 12B, xếp AB hoặc BA), ba khe còn lại mỗi khe 1 bạn. Chọn khe chứa 2 bạn (4 cách), chọn một bạn 12A và một bạn 12B cho khe đó ($2 \cdot 3$ cách), thứ tự trong khe (2 cách), xếp 3 bạn còn lại vào 3 khe ($3!$ cách): $4 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 = 288$ cách.

Vậy $n(A) = 5! \cdot (240 + 288) = 63\,360$ và $P = \frac{63\,360}{10!} = \frac{11}{630}$.

Câu 3 (Đề thi THPT quốc gia 2018, mã đề 101)

Từ một hộp chứa 11 quả cầu màu đỏ và 4 quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Tính xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh.

Lời giải. $P = \frac{C_4^3}{C_{15}^3} = \frac{4}{455}$.

Câu 4 (Đề thi THPT quốc gia 2018, mã đề 101)

Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 17]$. Tính xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3.

Lời giải. $n(\Omega) = 17^3 = 4913$ (ba bạn viết độc lập, có thể trùng). Trong $[1; 17]$: lớp dư 0 có 5 số (3; 6; ...; 15), lớp dư 1 có 6 số, lớp dư 2 có 6 số. Tổng chia hết cho 3 khi ba số cùng lớp, hoặc ba số thuộc ba lớp khác nhau (có $3!$ cách gán lớp cho ba bạn):

$$n(A) = 5^3 + 6^3 + 6^3 + 3! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 = 125 + 216 + 216 + 1080 = 1637$$

Vậy $P = \frac{1637}{4913}$.

Câu 5 (Đề minh họa THPT quốc gia 2019)

Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Tính xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là số lẻ.

Lời giải. $n(\Omega) = 9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$. Tổng lẻ khi có 3 chữ số lẻ, hoặc 1 chữ số lẻ và 2 chữ số chẵn.

- ▶ Ba chữ số lẻ: $A_5^3 = 60$.
- ▶ Một lẻ, hai chẵn: chọn chữ số lẻ (5), hai chữ số chẵn trong $\{0; 2; 4; 6; 8\}$ ($C_5^2 = 10$), xếp 3 chữ số ($3!$): 300; trừ các số có chữ số 0 đứng đầu: bộ chứa 0 có $5 \cdot 4 = 20$ bộ, mỗi bộ có 2 cách xếp với 0 đứng đầu: 40. Còn 260.

Vậy $P = \frac{320}{648} = \frac{40}{81}$.

Câu 6 (Đề thi THPT quốc gia 2019, mã đề 101)

Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 25 số nguyên dương đầu tiên. Tính xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn.

Lời giải. Có 13 số lẻ, 12 số chẵn. Tổng chẵn khi hai số cùng tính chẵn lẻ:

$$P = \frac{C_{13}^2 + C_{12}^2}{C_{25}^2} = \frac{78+66}{300} = \frac{12}{25}.$$

Câu 7 (Đề thi tốt nghiệp THPT 2020 (đợt 1))

Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau và các chữ số thuộc tập $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S . Tính xác suất để số đó không có hai chữ số liên tiếp nào cùng chẵn.

Lời giải. $n(\Omega) = A_7^4 = 840$. Có 3 chữ số chẵn và 4 chữ số lẻ. Chia theo số chữ số chẵn có mặt:

- ▶ Không có chữ số chẵn: $4! = 24$.
- ▶ Một chữ số chẵn: chọn vị trí (4), chọn chữ số chẵn (3), xếp 3 chữ số lẻ vào 3 vị trí còn lại ($A_4^3 = 24$): 288.
- ▶ Hai chữ số chẵn không kề nhau: các cặp vị trí (1; 3), (2; 4), (1; 4); mỗi cặp có $A_3^2 \cdot A_4^2 = 72$ cách: 216.
- ▶ Ba chữ số chẵn: trong 4 vị trí luôn có hai chữ số chẵn kề nhau – loại.

Vậy $P = \frac{24+288+216}{840} = \frac{528}{840} = \frac{22}{35}.$

Câu 8 (Đề thi tốt nghiệp THPT 2021 (đợt 1))

Chọn ngẫu nhiên đồng thời hai số từ tập hợp gồm 17 số nguyên dương đầu tiên. Tính xác suất để chọn được hai số chẵn.

Lời giải. Có 8 số chẵn: $P = \frac{C_8^2}{C_{17}^2} = \frac{28}{136} = \frac{7}{34}.$

Câu 9 (Đề thi tốt nghiệp THPT 2022)

Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 21 số nguyên dương đầu tiên. Tính xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn.

Lời giải. Có 11 số lẻ, 10 số chẵn: $P = \frac{C_{11}^2 + C_{10}^2}{C_{21}^2} = \frac{55+45}{210} = \frac{10}{21}.$

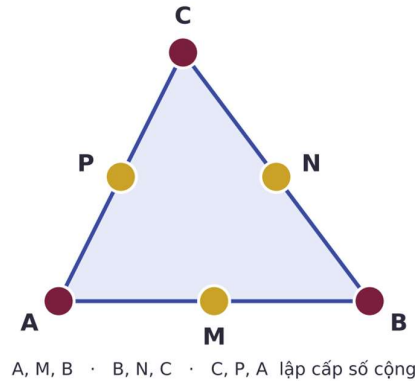
Câu 10 (Đề thi tốt nghiệp THPT 2024)

Một hộp chứa 15 quả cầu gồm 6 quả màu đỏ được đánh số từ 1 đến 6 và 9 quả màu xanh được đánh số từ 1 đến 9. Lấy ngẫu nhiên hai quả từ hộp. Tính xác suất để lấy được hai quả khác màu đồng thời tổng hai số ghi trên chúng là số chẵn.

Lời giải. $n(\Omega) = C_{15}^2 = 105$. Quả đỏ: 3 lẻ, 3 chẵn; quả xanh: 5 lẻ, 4 chẵn. Khác màu và tổng chẵn khi hai số cùng tính chẵn lẻ: $3 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 27$. Vậy $P = \frac{27}{105} = \frac{9}{35}$.

Câu 11 (trả lời ngắn) (Đề thi tốt nghiệp THPT 2025, mã đề 101)

Bạn Nam tham gia giải một mật thư. Người chơi chọn ra sáu số từ tập $S = \{11; 12; 13; \dots; 19\}$ rồi xếp mỗi số vào đúng một trong sáu vị trí A, B, C, M, N, P , trong đó A, B, C là ba đỉnh của một tam giác và M, N, P lần lượt nằm trên các cạnh AB, BC, CA . Mật thư được giải nếu các bộ ba số ở các bộ ba vị trí $(A; M; B)$, $(B; N; C)$, $(C; P; A)$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Nam chọn ngẫu nhiên sáu số trong S và xếp ngẫu nhiên vào các vị trí. Gọi a là xác suất Nam giải được mật thư. Tính $\frac{1}{a}$.



Hình 14. Sáu vị trí của mật thư (đề tốt nghiệp THPT 2025)

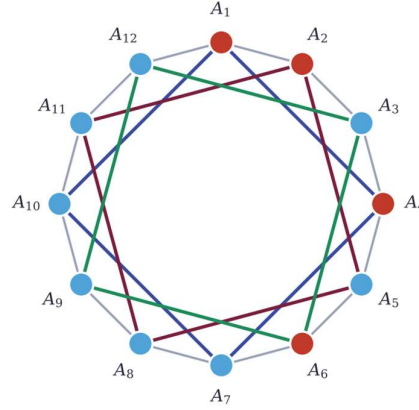
Lời giải. $n(\Omega) = A_6^6 = 60\,480$. Điều kiện: $2M = A + B$, $2N = B + C$, $2P = C + A$. Để M, N, P là số nguyên thì A, B, C cùng tính chẵn lẻ; khi đó M, N, P được xác định duy nhất và đôi một khác nhau (vì A, B, C khác nhau). Còn phải có $M, N, P \notin \{A; B; C\}$: chẳng hạn $M = \frac{A+B}{2} = C$ xảy ra khi và chỉ khi $\{A; B; C\}$ lập cấp số cộng. Vậy điều kiện là: A, B, C cùng tính chẵn lẻ và không lập cấp số cộng.

- ▶ Ba số lẻ từ $\{11; 13; 15; 17; 19\}$: $C_5^3 = 10$ bộ, trừ 4 bộ là cấp số cộng $\{11; 13; 15\}$, $\{13; 15; 17\}$, $\{15; 17; 19\}$, $\{11; 15; 19\}$: còn 6.
- ▶ Ba số chẵn từ $\{12; 14; 16; 18\}$: $C_4^3 = 4$ bộ, trừ $\{12; 14; 16\}$, $\{14; 16; 18\}$: còn 2.

Mỗi bộ có $3!$ cách gán vào A, B, C : $n = 8 \cdot 6 = 48$. Vậy $a = \frac{48}{60\,480} = \frac{1}{1260}$, nên $\frac{1}{a} = 1260$.

Câu 12 (trả lời ngắn) (Đề thi tốt nghiệp THPT 2026)

Một khung trang trí có dạng đa giác đều 12 cạnh $A_1A_2 \dots A_{12}$. Bạn Dũng có 12 bóng đèn công suất đôi một khác nhau, gồm 4 bóng màu đỏ và 8 bóng màu xanh, lắp ngẫu nhiên vào 12 đỉnh, mỗi đỉnh một bóng. Gọi P là xác suất để mỗi hình vuông có bốn đỉnh là đỉnh của đa giác đều đó đều có ít nhất một bóng đỏ. Tính $3190P$.



Hình 15. Ba hình vuông $A_1A_4A_7A_{10}$, $A_2A_5A_8A_{11}$, $A_3A_6A_9A_{12}$ chia 12 đỉnh thành ba nhóm rời nhau (chấm đỏ: một cách lắp thỏa mãn)

Lời giải. Chỉ vị trí của 4 bóng đỏ là quan trọng (các cách lắp còn lại nhân đều cho tử và mẫu): $n(\Omega) = C_{12}^4 = 495$. Đa giác đều 12 cạnh có đúng 3 hình vuông nội tiếp và chúng **phân hoạch** 12 đỉnh thành 3 nhóm 4 đỉnh. Mỗi hình vuông có bóng đỏ $\Leftrightarrow$ 4 bóng đỏ phân bố vào 3 nhóm theo kiểu $(2; 1; 1)$: chọn nhóm có 2 bóng (3 cách), chọn vị trí $C_4^2 \cdot 4 \cdot 4$: $n(A) = 3 \cdot 6 \cdot 16 = 288$. Vậy $P = \frac{288}{495} = \frac{32}{55}$ và $3190P = 1856$.

Nhận xét về hai câu năm 2025 – 2026

Cả hai câu đều có cùng “kịch bản”: **(1)** nhận ra một cấu trúc ẩn (tính chẵn lẻ của cấp số cộng; ba hình vuông rời nhau), **(2)** loại trường hợp suy biến (bộ A, B, C là cấp số cộng), **(3)** đếm bằng quy tắc nhân. Số liệu nhỏ nên học sinh hoàn toàn có thể **liệt kê để kiểm tra**. Đây là định hướng luyện tập đáng chú ý cho các năm tới.

VI. NHỮNG BÀI TOÁN ĐẸP TỪ ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI VÀ ĐỀ THI THỬ

Mười bài toán dưới đây được chọn vì **ý tưởng** chứ không vì độ dài tính toán: mỗi bài có một “chìa khoá” – một nhận xét khiến bài toán tưởng phức tạp trở nên gọn gàng.

Bài 1. Xúc xắc và định lý côsin (Đề thi thử TN THPT – Sở GD&ĐT Thái Nguyên, 2026)

Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối, khác nhau, ba lần. Cộng số chấm của hai con ở mỗi lần, ta được ba số a, b, t (mỗi số từ 2 đến 12). Xét tam giác có hai cạnh a, b và góc xen giữa bằng $(t - 1) \cdot 15^\circ$. Tính xác suất để tam giác đó là tam giác vuông (làm tròn đến hàng phần trăm).

Chìa khoá. Góc xen giữa nhận các giá trị $15^\circ; 30^\circ; \dots; 165^\circ$. Nếu góc vuông **không** phải góc xen giữa C , thì tam giác vuông tại đỉnh khác, khi đó $\cos C = \frac{b}{a}$ hoặc $\frac{a}{b}$ – một **số hữu tỉ**. Trong các góc nhọn $15^\circ, \dots, 75^\circ$ chỉ có $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ hữu tỉ.

Lời giải. Mỗi lần gieo có 36 kết quả; số cách được tổng s là $6 - |s - 7|$. $n(\Omega) = 36^3$.

- ▶ Góc xen giữa bằng 90° : $t = 7$ (6 cách), a, b tùy ý: $6 \cdot 36^2$ kết quả.
- ▶ Góc xen giữa bằng 60° ($t = 5, 4$ cách) và $a = 2b$ hoặc $b = 2a$. Số cặp tổng $(a; b)$ với $a = 2b$: $(4; 2), (6; 3), (8; 4), (10; 5), (12; 6)$ với số cách $3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 45$; nhân đôi cho trường hợp $b = 2a$: 90. Được $4 \cdot 90 = 360$ kết quả.

$$P = \frac{6 \cdot 36^2 + 360}{36^3} = \frac{113}{648} \approx 0,17$$

Bài 2. Ba thí sinh bốc phong bì (Đề thi thử TN THPT – Sở GD&ĐT Hải Phòng, 2026)

Có 12 câu hỏi khác nhau đựng trong 12 phong bì giống nhau. Ba thí sinh A, B, C lần lượt chọn ngẫu nhiên 4 phong bì (chọn xong thì trả lại). Tính xác suất để đồng thời: có ít nhất một câu mà cả ba thí sinh đều chọn, và tổng số câu khác nhau mà ba thí sinh đã chọn đúng bằng 9.

Chìa khoá – đếm theo “số lần thừa”. Ba thí sinh chọn tổng cộng $3 \cdot 4 = 12$ lượt câu hỏi nhưng chỉ có 9 câu khác nhau: tổng số lượt “thừa” là 3. Một câu được cả ba chọn đã chiếm 2 lượt thừa; lượt thừa còn lại phải là đúng một câu được đúng hai người chọn.

Lời giải. $n(\Omega) = (C_{12}^4)^3 = 495^3$. Đếm $n(A)$: chọn 9 câu được dùng ($C_{12}^9 = 220$), câu chung cả ba (9 cách), câu chung đúng hai người (8 cách) và cặp thí sinh đó (3 cách); 7 câu còn lại mỗi câu thuộc đúng một người, chia thành các phần 2, 2, 3 (hai người trong cặp mỗi người cần thêm 2 câu, người kia cần thêm 3 câu): $\frac{7!}{2!2!3!} = 210$. Vậy

$$P = \frac{220 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 210}{495^3} = \frac{9\,979\,200}{121\,287\,375} = \frac{448}{5445}$$

Bài 3. Bảng 3×3 với các số $-1; 0; 1$ (Đề thi thử TN THPT – THPT chuyên Khoa học Tự nhiên (Hà Nội), 2026 – phát biểu theo ngôn ngữ xác suất cổ điển)

Xét các bảng ô vuông 3×3 mà mỗi ô được điền một số thuộc $\{-1; 0; 1\}$ sao cho tổng các số trên mỗi hàng đều bằng 0. Chọn ngẫu nhiên một bảng như vậy. Tính xác suất để tổng các số trên mỗi cột cũng bằng 0.

Lời giải. Một hàng có tổng 0 là $(0; 0; 0)$ hoặc một hoán vị của $(1; -1; 0)$: 7 khả năng, nên $n(\Omega) = 7^3 = 343$. Gọi k là số hàng khác $(0; 0; 0)$.

- ▶ $k = 0$: 1 bảng. $k = 1$: cột chứa số 1 của hàng đó có tổng 1 – không có bảng nào.
- ▶ $k = 2$: tổng hai hàng khác không phải là $(0; 0; 0)$, nên hàng này là “đối” của hàng kia: chọn vị trí hàng 0 (3 cách), hàng thứ nhất (6 cách): 18 bảng.
- ▶ $k = 3$: mỗi hàng là hoán vị của $(1; -1; 0)$, bảng có đúng ba số 0. Nếu một cột toàn số 0 thì hai cột kia chỉ gồm ± 1 , tổng ba số ± 1 là số lẻ, khác 0 – vô lí. Vậy mỗi cột có đúng một số 0 và (để tổng bằng 0) một số 1, một số -1 : bảng là một **hình vuông Latin** cấp 3 trên $\{-1; 0; 1\}$, có $3! \cdot 2 = 12$ bảng.

Vậy $n(A) = 1 + 18 + 12 = 31$ và $P = \frac{31}{343}$. (Đề gốc hỏi 3430p, đáp số 310.)

Bài 4. Hai người bốc bóng – ai lớn hơn? (Đề thi thử TN THPT – THPT chuyên Trần Phú (Hải Phòng), 2026)

Hải có 9 quả bóng đánh số từ 1 đến 9; Sơn có 8 quả bóng đánh số từ 1 đến 8. Mỗi bạn bốc ngẫu nhiên 3 quả từ hộp của mình rồi xếp ba số theo thứ tự giảm dần để được một số có ba chữ số. Ai có số lớn hơn thì thắng. Tính xác suất để Sơn thua (làm tròn đến hàng phần trăm).

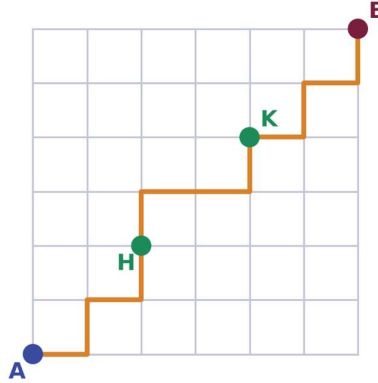
Chìa khoá – đối xứng. Nếu Hải không bốc quả số 9, hai bạn chọn từ cùng một tập $\{1; \dots; 8\}$ nên vai trò như nhau: xác suất Hải lớn hơn bằng xác suất Sơn lớn hơn.

Lời giải. $n(\Omega) = C_9^3 \cdot C_8^3 = 84 \cdot 56$. Hải bốc được quả số 9 ($C_8^2 = 28$ bộ): Hải chắc chắn thắng – $28 \cdot 56$ kết quả. Hải không bốc quả số 9 (56 bộ): trong $56 \cdot 56$ cặp, có 56 cặp hai số bằng nhau, số cặp còn lại chia đôi: Hải thắng $\frac{56 \cdot 55}{2}$. Vậy

$$P = \frac{28 \cdot 56 + 28 \cdot 55}{84 \cdot 56} = \frac{28 \cdot 111}{84 \cdot 56} = \frac{37}{56} \approx 0,66$$

Bài 5. Chú thỏ trên lưới (Kì thi Olympic lớp 11 – Cụm trường THPT số 10, Sở GD&ĐT Hà Nội, năm học 2025 – 2026)

Cho bảng 6×6 ô vuông, A là góc dưới bên trái, B là góc trên bên phải; H là nút lưới cách A hai bước sang phải và hai bước lên trên, K là nút cách A bốn bước sang phải và bốn bước lên trên. Một chú thỏ đi từ A đến B dọc theo cạnh các ô vuông, mỗi bước đi lên trên hoặc sang phải; giả sử mọi đường đi như vậy là đồng khả năng. a) Có bao nhiêu đường đi từ A đến B ? b) Tính xác suất để chú thỏ đi qua H hoặc K .



Hình 16. Một đường đi của chú thỏ qua cả H và K

Lời giải. a) Mỗi đường đi gồm 6 bước sang phải và 6 bước lên trên: $C_{12}^6 = 924$ đường.

b) Qua H : $C_4^2 \cdot C_8^4 = 6 \cdot 70 = 420$ đường. Qua K : $C_8^4 \cdot C_4^2 = 420$ đường.

Qua cả H và K : $C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_4^2 = 216$ đường.

Theo bao hàm – loại trừ: $n(A) = 420 + 420 - 216 = 624$, nên $P = \frac{624}{924} = \frac{52}{77}$.

Bài 6. Số trên lục giác đều (Đề thi chọn HSG lớp 11 – THPT Đồng Quan (Hà Nội), năm học 2025 – 2026)

Cho tập $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ và lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Đặt ngẫu nhiên 7 số của X vào 6 đỉnh và tâm, mỗi vị trí một số. Tính xác suất để số ở tâm là số lẻ và tổng ba số ở ba vị trí thẳng hàng bất kì luôn bằng nhau.

Lời giải. $n(\Omega) = 7! = 5040$. Ba vị trí thẳng hàng chỉ có thể là $(A; O; D)$, $(B; O; E)$, $(C; O; F)$. Gọi x là số ở tâm; 6 số còn lại ghép thành 3 cặp đối tâm có cùng tổng s , nên $3s = 28 - x$, suy ra $x \in \{1; 4; 7\}$; x lẻ nên $x \in \{1; 7\}$.

► $x = 1$: các cặp $\{2; 7\}, \{3; 6\}, \{4; 5\}$; $x = 7$: các cặp $\{1; 6\}, \{2; 5\}, \{3; 4\}$.

Mỗi trường hợp: gán 3 cặp vào 3 đường chéo ($3!$) và đổi chỗ trong cặp (2^3): 48 cách.

$$P = \frac{96}{5040} = \frac{2}{105}.$$

Bài 7. Ghép cặp thỏ vào chuồng (Đề thi HSG lớp 12 tỉnh Quảng Ninh, 2026)

Một gia đình có 20 con thỏ: 2 con lông đen, 1 con lông xám, 1 con lông vàng, còn lại lông trắng; có 10 chuồng, mỗi chuồng nuôi đúng 2 con. Thả ngẫu nhiên các con thỏ vào chuồng sao cho mỗi chuồng có đúng 2 con. Tính xác suất để có một chuồng chứa cặp đen – xám, đồng thời không có chuồng nào chứa cặp đen – vàng.

Chìa khoá. Biến cố chỉ phụ thuộc vào **cách ghép cặp**. Số cách ghép $2m$ con thành m cặp là $(2m - 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m - 1)$ (con thứ nhất chọn bạn ghép: $2m - 1$ cách; lặp lại).

Lời giải. $n(\Omega) = 19!!$. Có cặp xám – đen: chọn con đen ghép với xám (2 cách), ghép 18 con còn lại: $2 \cdot 17!!$. Trong số đó, con đen còn lại ghép với con vàng: $2 \cdot 15!!$. Vậy

$$P = \frac{2 \cdot 17!! - 2 \cdot 15!!}{19!!} = \frac{2 \cdot (17 - 1)}{19 \cdot 17} = \frac{32}{323} \approx 0,10$$

Bài 8. Bốn số lập cấp số cộng (Đề thi HSG lớp 12 thành phố Hải Phòng, 2026)

Chọn ngẫu nhiên 4 số từ tập $S = \{1; 2; \dots; 200\}$. Xác suất để 4 số được chọn (sắp tăng dần) lập thành một cấp số cộng là $\frac{m}{n}$ (tối giản). Tính $m + n$.

Lời giải. Mỗi bộ 4 số lập cấp số cộng ứng với đúng một cặp (số hạng đầu a , công sai $d \geq 1$) thoả $a + 3d \leq 200$. Với mỗi d có $200 - 3d$ giá trị của a , và $d \leq 66$:

$$n(A) = \sum_{d=1}^{66} (200 - 3d) = 200 \cdot 66 - 3 \cdot \frac{66 \cdot 67}{2} = 13200 - 6633 = 6567$$

$$C_{200}^4 = 64\,684\,950 = 6567 \cdot 9850, \text{ nên } P = \frac{1}{9850} \text{ và } m + n = 9851.$$

Bài 9. Đẳng thức vector ngẫu nhiên

Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F phân biệt ở vị trí “tổng quát” trên một đường tròn (không có đẳng thức vector đặc biệt nào giữa chúng). Lập đẳng thức dạng $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{ZT} + \overrightarrow{UV} = \overrightarrow{X'Y'} + \overrightarrow{Z'T'} + \overrightarrow{U'V'}$ bằng cách điền các chữ cái vào 12 ô: ở vế trái điền 6 chữ cái **đôi một khác nhau**, ở vế phải điền **tuỳ ý** (có thể lặp). Tính xác suất thu được một đẳng thức đúng.

Chìa khoá – quy tắc ba điểm. Chọn gốc O , ta có $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}$. Vế trái bằng tổng ba vector “ngọn” trừ tổng ba vector “gốc”, trong đó tập ngọn H và tập gốc T là hai tập 3 điểm rời nhau phủ đủ 6 điểm. Ở vị trí tổng quát, đẳng thức đúng khi và chỉ khi vế phải cũng có đúng ba ngọn là các điểm của H và ba gốc là các điểm của T .

Lời giải. $n(\Omega) = 6! \cdot 6^6$. Với mỗi cách điền vế trái, vế phải có 3! cách xếp các ngọn và 3! cách xếp các gốc vào ba vector: 36 cách. Vậy $P = \frac{6! \cdot 36}{6! \cdot 6^6} = \frac{1}{1296}$. Một bài toán liên môn vector – xác suất rất hợp với chương trình lớp 10.

Bài 10. Tam giác có góc 120° (Đề thi thử TN THPT – Sở GD&ĐT Phú Thọ, 2026)

Cho đa giác đều 36 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm O . Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh. Biết xác suất để ba đỉnh tạo thành tam giác có một góc bằng 120° là P . Tính $595P$.

Lời giải. Mỗi cạnh của đa giác chắn cung 10° . Góc nội tiếp bằng $120^\circ \Leftrightarrow$ cung bị chắn (không chứa đỉnh góc) bằng 240° , tức 24 cung nhỏ; khi đó hai đỉnh còn lại căng một cung nhỏ gồm 12 cung, và đỉnh góc 120° nằm **bên trong** cung nhỏ này. Có 36 dây cung như vậy, mỗi dây có 11 vị trí cho đỉnh góc: $n(A) = 396$. $P = \frac{396}{C_{36}^3} = \frac{396}{7140} = \frac{33}{595}$, nên $595P = 33$.

VII. BÀI TẬP LUYỆN TẬP THEO ĐỊNH DẠNG ĐỀ THI

A. Câu hỏi trắc nghiệm 4 phương án

Câu 1. Gieo một con xúc xắc cân đối hai lần. Xác suất để số chấm xuất hiện ở lần thứ hai lớn hơn số chấm ở lần thứ nhất là

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{5}{12}$ C. $\frac{7}{12}$ D. $\frac{1}{3}$

Câu 2. Một hộp có 7 bi đỏ và 5 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Xác suất để lấy được bi có đủ hai màu là

- A. $\frac{9}{44}$ B. $\frac{7}{22}$ C. $\frac{15}{22}$ D. $\frac{35}{44}$

Câu 3. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ tập $\{1; 2; \dots; 20\}$. Xác suất để tích hai số là số chẵn bằng

- A. $\frac{29}{38}$ B. $\frac{9}{38}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{10}{19}$

Câu 4. Xếp ngẫu nhiên 5 bạn nam và 3 bạn nữ thành một hàng ngang. Xác suất để 3 bạn nữ đứng liền nhau là

- A. $\frac{1}{56}$ B. $\frac{3}{56}$ C. $\frac{3}{28}$ D. $\frac{1}{14}$

Câu 5. Gieo một đồng xu cân đối ba lần. Xác suất để có ít nhất một lần xuất hiện mặt ngửa là

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{7}{8}$

Câu 6. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có ba chữ số. Xác suất để số đó chia hết cho 9 là

- A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{10}$ C. $\frac{11}{100}$ D. $\frac{1}{8}$

Câu 7. Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh của một thập giác đều. Xác suất để 3 đỉnh đó tạo thành một tam giác vuông là

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 8. Lớp 10A có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 học sinh làm lớp trưởng và bí thư. Xác suất để cả hai đều là nữ là

- A. $\frac{7}{52}$ B. $\frac{7}{26}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{9}{64}$

Câu 9. Đội văn nghệ có 6 nam và 4 nữ. Chọn ngẫu nhiên 5 người. Xác suất để trong 5 người được chọn có ít nhất 2 nữ là

- A. $\frac{11}{42}$ B. $\frac{5}{21}$ C. $\frac{31}{42}$ D. $\frac{16}{21}$

Câu 10. Một mật khẩu gồm 4 chữ số (mỗi chữ số từ 0 đến 9, có thể lặp lại) được tạo ngẫu nhiên. Xác suất để 4 chữ số của mật khẩu đôi một khác nhau là

- A. $\frac{21}{50}$ B. $\frac{63}{125}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{5}$

Câu 11. Một bàn tròn có 6 ghế được đánh số. Xếp ngẫu nhiên 6 bạn, trong đó có An và Bình, vào bàn. Xác suất để An và Bình ngồi cạnh nhau là

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{2}{5}$

D. $\frac{1}{2}$

Câu 12. Chọn ngẫu nhiên hai đỉnh của một bát giác lồi. Xác suất để đoạn thẳng nối hai đỉnh đó là một đường chéo của bát giác là

A. $\frac{2}{7}$

B. $\frac{5}{7}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{1}{2}$

Câu 13. Ba bạn đến một khách sạn còn 5 phòng trống; mỗi bạn chọn ngẫu nhiên một phòng. Xác suất để ba bạn ở ba phòng khác nhau là

A. $\frac{12}{25}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{13}{25}$

Câu 14. Rút ngẫu nhiên 5 lá bài từ bộ bài tứ lơ khơ 52 lá (4 chất, mỗi chất 13 lá). Xác suất để 5 lá cùng một chất là

A. $\frac{1}{4165}$

B. $\frac{13}{16660}$

C. $\frac{33}{8330}$

D. $\frac{33}{16660}$

Câu 15. Chọn ngẫu nhiên 3 số khác nhau từ tập $\{1; 2; \dots; 15\}$. Xác suất để tổng ba số chia hết cho 3 là

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{31}{91}$

C. $\frac{25}{91}$

D. $\frac{30}{91}$

Câu 16. Chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của một đa giác đều 12 đỉnh. Xác suất để 4 đỉnh đó là 4 đỉnh của một hình chữ nhật là

A. $\frac{2}{33}$

B. $\frac{1}{55}$

C. $\frac{1}{99}$

D. $\frac{1}{33}$

B. Câu hỏi Đúng/Sai

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn Đúng hoặc Sai.

Câu 1. Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối, đồng chất.

- a) Không gian mẫu có 36 phần tử.
- b) Xác suất để tổng số chấm bằng 8 là $\frac{5}{36}$.
- c) Xác suất để tổng số chấm không nhỏ hơn 10 là $\frac{1}{4}$.
- d) Xác suất để tích số chấm là số chẵn là $\frac{3}{4}$.

Câu 2. Một hộp có 6 bi xanh và 4 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 viên bi.

- a) Số phần tử của không gian mẫu là 120.
- b) Xác suất để ba viên bi cùng màu là $\frac{1}{5}$.
- c) Xác suất để có đúng hai viên bi đỏ là $\frac{1}{4}$.
- d) Xác suất để có ít nhất một viên bi đỏ là $\frac{5}{6}$.

Câu 3. Xếp ngẫu nhiên 4 bạn nam và 4 bạn nữ thành một hàng ngang.

- a) Số phần tử của không gian mẫu là $8!$.
- b) Xác suất để nam và nữ đứng xen kẽ là $\frac{1}{35}$.

c) Xác suất để 4 bạn nữ đứng liền nhau là $\frac{1}{70}$.

d) Xác suất để người đứng đầu hàng là nam và người đứng cuối hàng là nữ là $\frac{1}{4}$.

Câu 4. Cho đa giác đều 20 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm O . Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh của đa giác.

a) Số phần tử của không gian mẫu là 1140.

b) Có 180 tam giác vuông có ba đỉnh là đỉnh của đa giác.

c) Xác suất để ba đỉnh tạo thành tam giác tù là $\frac{2}{3}$.

d) Xác suất để tâm O nằm trong tam giác tạo bởi ba đỉnh được chọn là $\frac{4}{19}$.

Câu 5. Gọi S là tập các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau lập từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S .

a) Tập S có 720 phần tử.

b) Xác suất để số được chọn là số chẵn là $\frac{7}{12}$.

c) Xác suất để số được chọn chia hết cho 5 là $\frac{1}{3}$.

d) Xác suất để các chữ số của số được chọn tăng dần từ trái sang phải là $\frac{1}{48}$.

Câu 6. Xổ số tự chọn Power 6/55: mỗi vé gồm 6 số khác nhau chọn từ 1 đến 55; kết quả quay thưởng (phần chính) là 6 số khác nhau trong 55 số.

a) Số kết quả có thể của phần quay thưởng chính là $C_{55}^6 = 28\,989\,675$.

b) Xác suất một vé trùng cả 6 số là $\frac{1}{28\,989\,675}$.

c) Xác suất một vé trùng đúng 5 số nhỏ hơn $\frac{1}{90\,000}$.

d) Xác suất một vé trùng ít nhất 3 số lớn hơn 2%.

C. Câu hỏi trả lời ngắn

Câu 1. Gieo một con xúc xắc cân đối hai lần, được số chấm lần lượt là a và b . Tính xác suất để phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có nghiệm (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 2. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ tập $\{1; 2; \dots; 30\}$. Tính xác suất để tổng hai số chia hết cho 3 (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 3. Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh của một đa giác đều 18 đỉnh. Xác suất để 3 đỉnh tạo thành một tam giác cân nhưng không đều là $\frac{a}{b}$ (tối giản).

Tính $b - a$.

Câu 4. Trong một giải bóng đá học sinh, các bạn trên khán đài được chia vào đúng một trong hai đội cổ vũ Xanh và Đỏ. Chọn ngẫu nhiên 2 bạn thì xác suất để 2 bạn cùng cổ vũ cho một

đội bằng đúng $\frac{1}{2}$. Biết tổng số bạn từ 300 đến 350 và đội Xanh đông hơn đội Đỏ. Hỏi đội Xanh có bao nhiêu bạn?

Câu 5. Một mã sê-ri gồm 6 chữ số được tạo ngẫu nhiên từ các chữ số 0; 1; ...; 9, chữ số đầu tiên khác 0. Mã “đặc biệt” là mã có tích các chữ số bằng 1400. Xác suất để một mã là mã đặc biệt bằng $\frac{a}{b}$ (tối giản). Tính $b - a$.

Câu 6. (Tinh hoa vận dụng cao Tổ hợp – Xác suất, Tư Duy Mở) Có 9 hành khách bước ngẫu nhiên lên 3 toa tàu. Tính xác suất để toa nào cũng có khách và có đúng một toa có nhiều hơn 3 khách (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 7. Một thanh sắt AB dài 21 cm. Lấy hai điểm M, N trên thanh với $AM = x$, $MN = y$, $NB = z$ (cm), trong đó x, y, z là các số nguyên dương được chọn ngẫu nhiên (mọi bộ $(x; y; z)$ thoả $x + y + z = 21$ đồng khả năng). Xác suất để khi gấp thanh tại M và N thì đầu A chạm được đầu B (tạo thành tam giác) là $\frac{a}{b}$ (tối giản). Tính $a + b$.

Câu 8. Một chi đoàn có 3 đoàn viên nữ và một số đoàn viên nam. Cần lập một đội tình nguyện 4 người. Biết xác suất để 4 người được chọn có 3 nữ bằng $\frac{2}{5}$ lần xác suất để 4 người được chọn đều là nam. Chi đoàn có bao nhiêu đoàn viên?

Câu 9. Một hộp đựng 9 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 9. Phải rút ít nhất bao nhiêu thẻ để xác suất có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 4 lớn hơn $\frac{5}{6}$?

Câu 10. Mỗi đội chơi có 10 người mặc 10 áo đánh số 0; 1; 2; ...; 9 và xếp ngẫu nhiên thành một hàng ngang. Đội thắng nếu mọi bộ ba bạn đứng liền nhau đều có tổng các số trên áo chia hết cho 3. Gọi a là xác suất để một đội thắng. Tính $\frac{3}{a}$.

Câu 11. (Phát triển từ đề thi thử Cụm trường Thanh Hoá, 2026) Một hộp có 20 viên bi đánh số từ 1 đến 20. Lấy ngẫu nhiên 4 viên. Xác suất để bốn số trên bốn viên bi (sắp tăng dần) lập thành một cấp số cộng là $\frac{1}{a}$. Tìm a .

Câu 12. (Đề thi thử TN THPT – Sở GD&ĐT Cao Bằng, 2026) Cho bát giác đều $ABCDEFGH$ nội tiếp đường tròn tâm O . Gắn ngẫu nhiên tám số 9; 10; ...; 16 vào tám đỉnh, mỗi đỉnh một số. Chọn ngẫu nhiên một tam giác có ba đỉnh là đỉnh của bát giác. Xác suất để thu được một tam giác vuông mà ba số ở ba đỉnh (theo một thứ tự nào đó) lập thành cấp số cộng là $\frac{m}{n}$ (tối giản). Tính $m + n$.

D. Bài tập tự luận – bồi dưỡng học sinh giỏi

Bài 1. (Kì thi SPT đợt 1 – Trường ĐHSPT Hà Nội, 2026) Cho bảng ô vuông kích thước 2×15 . Chọn ngẫu nhiên 5 ô vuông đơn vị để tô màu. Tính xác suất để không có hai ô được tô nào có chung đỉnh.

Bài 2. (Đề thi HSG lớp 11 tỉnh Vĩnh Phúc, 2017 – 2018) Gọi E là tập các số tự nhiên có 5 chữ số được lập từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc E . Tính xác suất để

số được chọn là số chẵn, có đúng hai chữ số 0 và hai chữ số 0 không đứng cạnh nhau, các chữ số còn lại có mặt không quá một lần.

Bài 3. (Phát triển từ chuyên đề “Sắp xếp số và đồ vật vào mô hình”) 16 nhân viên mang mã số từ 1 đến 16 đứng ngẫu nhiên vào một bảng 4×4 , mỗi ô một người. Nhóm được thưởng nếu tổng mã số trên mỗi hàng và mỗi cột đều là số lẻ. Tính xác suất nhóm được thưởng.

Bài 4. (Đề thi chọn đội tuyển HSG – THCS&THPT Bình Chánh, An Giang, 2026 – 2027) Một hộp có 6 bi xanh đánh số 1 đến 6, 5 bi vàng đánh số 1 đến 5 và 4 bi đỏ đánh số 1 đến 4. Bóc ngẫu nhiên 3 viên bi. Người chơi thắng nếu tổng các số trên 3 viên bi là một số chính phương. Tính xác suất thắng.

Bài 5. (Ý tưởng từ kì thi AIME 1993) Chọn ngẫu nhiên ba số khác nhau a_1, a_2, a_3 từ tập $\{1; 2; \dots; 1000\}$, sau đó chọn ngẫu nhiên ba số khác nhau b_1, b_2, b_3 từ 997 số còn lại. Tính xác suất để sau khi xoay thích hợp, một viên gạch kích thước $a_1 \times a_2 \times a_3$ đặt lọt được vào một chiếc hộp kích thước $b_1 \times b_2 \times b_3$ (các cạnh song song).

Bài 6. Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh của một đa giác đều 24 đỉnh. Tính xác suất để 3 đỉnh được chọn tạo thành một tam giác cân hoặc một tam giác vuông.

VIII. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bảng đáp án

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
Đáp án	B	D	A	C	D	A	C	A

Câu	9	10	11	12	13	14	15	16
Đáp án	C	B	C	B	A	D	B	D

Đúng/Sai	a)	b)	c)	d)
Câu 1	Đ	Đ	S	Đ
Câu 2	Đ	Đ	S	Đ
Câu 3	Đ	Đ	S	S
Câu 4	Đ	Đ	S	Đ
Câu 5	Đ	Đ	S	Đ
Câu 6	Đ	Đ	Đ	S

Trả lời ngắn	1	2	3	4	5	6
Đáp số	0,53	0,33	115	171	1499	0,74

Trả lời ngắn	7	8	9	10	11	12
Đáp số	49	9	6	6300	85	107

Hướng dẫn giải – A. Trắc nghiệm

Câu 1. Có 6 kết quả hai lần bằng nhau; 30 kết quả còn lại chia đều cho “lần 2 lớn hơn” và “lần 1 lớn hơn”: $P = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

Câu 2. $P = 1 - \frac{C_7^3 + C_5^3}{C_{12}^3} = 1 - \frac{35+10}{220} = \frac{35}{44}$.

Câu 3. Tích lẻ khi cả hai số lẻ: $P = 1 - \frac{C_{10}^2}{C_{20}^2} = 1 - \frac{45}{190} = \frac{29}{38}$.

Câu 4. Buộc 3 nữ thành một khối: $P = \frac{3! \cdot 6!}{8!} = \frac{3}{28}$.

Câu 5. $P = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

Câu 6. Các số có ba chữ số chia hết cho 9 là 108; 117; ...; 999, gồm $\frac{999-108}{9} + 1 = 100$ số.

$$P = \frac{100}{900} = \frac{1}{9}.$$

Câu 7. Với $2n = 10$: $P = \frac{3}{2n-1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ (5 đường kính, mỗi đường kính với 8 đỉnh: 40 tam giác vuông trên $C_{10}^3 = 120$).

$$\text{Câu 8. } P = \frac{A_{15}^2}{A_{40}^2} = \frac{15 \cdot 14}{40 \cdot 39} = \frac{7}{52}.$$

Câu 9. Biến cố đối: không có nữ ($C_6^5 = 6$) hoặc đúng 1 nữ ($C_6^4 \cdot 4 = 60$): $P = 1 - \frac{66}{252} = \frac{31}{42}$.

$$\text{Câu 10. } P = \frac{A_{10}^4}{10^4} = \frac{5040}{10000} = \frac{63}{125}.$$

Câu 11. An ngồi ghế bất kì; Bình ngồi một trong 5 ghế còn lại, trong đó 2 ghế cạnh An: $P = \frac{2}{5}$.

$$\text{Câu 12. } P = \frac{C_8^2 - 8}{C_8^2} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7}.$$

$$\text{Câu 13. } P = \frac{A_5^3}{5^3} = \frac{60}{125} = \frac{12}{25}.$$

$$\text{Câu 14. } P = \frac{4 \cdot C_{13}^5}{C_{52}^5} = \frac{5148}{2\,598\,960} = \frac{33}{16660}.$$

$$\text{Câu 15.} \text{ Mỗi lớp dư có 5 số: } P = \frac{3C_5^3 + 5^3}{C_{15}^3} = \frac{30+1}{455} = \frac{31}{91}.$$

$$\text{Câu 16.} \text{ Có 6 đường kính, } C_6^2 = 15 \text{ hình chữ nhật: } P = \frac{15}{C_{12}^4} = \frac{15}{495} = \frac{1}{33}.$$

Hướng dẫn giải – B. Đúng/Sai

Câu 1. a) Đúng. b) Đúng: (2; 6), (3; 5), (4; 4), (5; 3), (6; 2). c) Sai: tổng 10, 11, 12 có $3 + 2 + 1 = 6$ kết quả, $P = \frac{1}{6}$. d) Đúng: tích lẻ khi cả hai số lẻ, $P = 1 - \frac{9}{36} = \frac{3}{4}$.

Câu 2. a) Đúng: $C_{10}^3 = 120$. b) Đúng: $\frac{C_6^3 + C_4^3}{120} = \frac{24}{120}$. c) Sai: $\frac{C_4^2 \cdot 6}{120} = \frac{3}{10}$. d) Đúng: $1 - \frac{C_6^3}{120} = \frac{5}{6}$.

Câu 3. a) Đúng. b) Đúng: $\frac{2 \cdot 4! \cdot 4!}{8!} = \frac{1}{35}$. c) Sai: $\frac{4! \cdot 5!}{8!} = \frac{1}{14}$. d) Sai: $\frac{4 \cdot 4 \cdot 6!}{8!} = \frac{2}{7}$.

Câu 4. a) Đúng: $C_{20}^3 = 1140$. b) Đúng: $10 \cdot 18 = 180$. c) Sai: số tam giác tù là $20 \cdot C_9^2 = 720$, $P = \frac{720}{1140} = \frac{12}{19}$. d) Đúng: tâm nằm trong tam giác $\Leftrightarrow$ tam giác nhọn; số tam giác nhọn là $1140 - 180 - 720 = 240$, $P = \frac{240}{1140} = \frac{4}{19}$.

Câu 5. a) Đúng: $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 720$. b) Đúng: tận cùng 0: $A_6^3 = 120$; tận cùng 2, 4 hoặc 6: $3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 = 300$; $P = \frac{420}{720} = \frac{7}{12}$. c) Sai: tận cùng 0: 120; tận cùng 5: $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$; $P = \frac{220}{720} = \frac{11}{36}$. d) Đúng: chữ số tăng dần thì không chứa 0, có $C_6^4 = 15$ số, $P = \frac{15}{720} = \frac{1}{48}$.

Câu 6. a), b) Đúng. c) Đúng: $\frac{C_6^5 \cdot C_{49}^1}{C_{55}^6} = \frac{294}{28\,989\,675} \approx \frac{1}{98\,604} < \frac{1}{90\,000}$. d) Sai: $\frac{\sum_{k=3}^6 C_6^k C_{49}^{6-k}}{C_{55}^6} = \frac{386\,415}{28\,989\,675} \approx 1,33\%$.

Hướng dẫn giải – C. Trả lời ngắn

Câu 1. Xem Dạng 2: $P = \frac{19}{36} \approx 0,53$.

Câu 2. Mỗi lớp dư có 10 số. Tổng chia hết cho 3 khi hai số cùng thuộc lớp dư 0 ($C_{10}^2 = 45$) hoặc một số dư 1, một số dư 2 (100): $P = \frac{145}{435} = \frac{1}{3} \approx 0,33$.

Câu 3. Mỗi đỉnh là đỉnh cân của $\frac{18-2}{2} = 8$ tam giác: 144 lượt; 6 tam giác đều bị đếm 3 lần nên có $144 - 12 = 132$ tam giác cân, trong đó 126 tam giác cân không đều. $P = \frac{126}{816} = \frac{21}{136}$, $b - a = 115$.

Câu 4. Gọi x, y là số bạn hai đội, $n = x + y$. Từ $C_x^2 + C_y^2 = \frac{1}{2}C_n^2$ biến đổi được $(x - y)^2 = x + y = n$. Vậy n là số chính phương trong $[300; 350]$: $n = 324$, $x - y = 18$, suy ra $x = 171$.

Câu 5. $1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$: mã có hai chữ số 5, một chữ số 7 và ba chữ số còn lại có tích 8: $\{2; 2; 2\}$, $\{1; 2; 4\}$, $\{1; 1; 8\}$ (chữ số 0 không thể có mặt, nên điều kiện chữ số đầu khác 0 tự thỏa). Số mã: $\frac{6!}{2!3!} + \frac{6!}{2!} + \frac{6!}{2!2!} = 60 + 360 + 180 = 600$. $P = \frac{600}{9 \cdot 10^5} = \frac{1}{1500}$, $b - a = 1499$.

Câu 6. $n(\Omega) = 3^9 = 19\,683$. Các bộ số khách (không kể thứ tự) thỏa mãn: $(7; 1; 1)$, $(6; 2; 1)$, $(5; 3; 1)$, $(5; 2; 2)$, $(4; 3; 2)$ (loại $(4; 4; 1)$ vì có hai toa hơn 3 khách, loại $(3; 3; 3)$). Số cách tương ứng: $3 \cdot \frac{9!}{7!} = 216$; $6 \cdot \frac{9!}{6!2!} = 1512$; $6 \cdot \frac{9!}{5!3!} = 3024$; $3 \cdot \frac{9!}{5!2!2!} = 2268$; $6 \cdot \frac{9!}{4!3!2!} = 7560$. Tổng 14 580, $P = \frac{20}{27} \approx 0,74$.

Câu 7. $n(\Omega) = C_{20}^2 = 190$. Tạo được tam giác $\Leftrightarrow x, y, z \leq 10$ (vì 21 lẻ nên không có trường hợp suy biến). Đặt $x' = 11 - x, \dots$ thì $x' + y' + z' = 12$ với $x', y', z' \geq 1$: $C_{11}^2 = 55$ nghiệm. $P = \frac{55}{190} = \frac{11}{38}$, $a + b = 49$.

Câu 8. Gọi n là số đoàn viên ($n \geq 7$): $\frac{C_{n-3}^1}{C_n^4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{C_{n-3}^4}{C_n^4} \Leftrightarrow (n-4)(n-5)(n-6) = 60 \Leftrightarrow n = 9$.

Câu 9. Rút x thẻ: $P = 1 - \frac{C_7^x}{C_9^x} = 1 - \frac{(9-x)(8-x)}{72} > \frac{5}{6} \Leftrightarrow (9-x)(8-x) < 12$. Với $x = 5$: 12 – không thỏa (dấu bằng); $x = 6$: $6 < 12$. Đáp số: 6.

Câu 10. Từ $x_i + x_{i+1} + x_{i+2}$ và $x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3}$ cùng chia hết cho 3 suy ra $x_{i+3} \equiv x_i \pmod{3}$. Các vị trí $\{1; 4; 7; 10\}$ cùng số dư, $\{2; 5; 8\}$ cùng số dư, $\{3; 6; 9\}$ cùng số dư. Các lớp chữ số: $\{0; 3; 6; 9\}$ (4 số), $\{1; 4; 7\}$, $\{2; 5; 8\}$ (3 số). Nhóm 4 vị trí phải nhận lớp dư 0; hai nhóm 3 vị trí nhận lớp dư 1 và 2 theo 2 cách (và $0 + 1 + 2$ chia hết cho 3). $n(A) = 2 \cdot 4! \cdot 3! \cdot 3! = 1728$, $a = \frac{1728}{10!} = \frac{1}{2100}$, $\frac{3}{a} = 6300$.

Câu 11. Đếm theo công sai d : số bộ là $\sum_{d=1}^6 (20 - 3d) = 120 - 63 = 57$. $P = \frac{57}{C_{20}^4} = \frac{57}{4845} = \frac{1}{85}$, $a = 85$.

Câu 12. Do tính đối xứng, có thể coi phép thử gồm “chọn tam giác” ($C_8^3 = 56$ cách) và “bộ ba số gắn trên ba đỉnh đó” (mọi bộ 3 số trong 8 số đồng khả năng: 56 bộ). Tam giác vuông: $4 \cdot 6 = 24$; bộ ba số lập cấp số cộng trong 8 số liên tiếp: $6 + 4 + 2 = 12$. $P = \frac{24}{56} \cdot \frac{12}{56} = \frac{9}{98}$, $m + n = 107$.

Hướng dẫn giải – D. Tự luận

Bài 1. $n(\Omega) = C_{30}^5 = 142\,506$. Hai ô chung đỉnh khi và chỉ khi chúng cùng cột hoặc ở hai cột kề nhau. Vậy 5 ô được tô nằm ở 5 cột đôi một không kề nhau, mỗi cột một ô. Chọn 5 cột không kề nhau trong 15 cột: $C_{11}^5 = 462$ (dời chỉ số); mỗi cột chọn ô trên hoặc ô dưới: 2^5 . $P = \frac{32 \cdot 462}{142\,506} = \frac{352}{3393}$.

Bài 2. $n(\Omega) = 5 \cdot 6^4 = 6480$. Gọi số là $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$.

- ▶ $a_5 = 0$: chữ số 0 còn lại ở a_2 hoặc a_3 (không kề a_5 , khác a_1): 2 cách; ba vị trí còn lại là ba chữ số khác nhau trong $\{1; \dots; 5\}$: $A_5^3 = 60$. Được 120.
- ▶ $a_5 \in \{2; 4\}$: hai chữ số 0 ở $\{a_2; a_3; a_4\}$ không kề nhau, chỉ có thể là a_2, a_4 ; a_1, a_3 là hai chữ số khác nhau, khác a_5 , trong $\{1; \dots; 5\}$: $A_4^2 = 12$. Được $2 \cdot 12 = 24$.

$$P = \frac{144}{6480} = \frac{1}{45}.$$

Bài 3. Chỉ vị trí của 8 số lẻ là quan trọng: $n(\Omega) = C_{16}^8 = 12\,870$ (mỗi mẫu vị trí ứng với $8! \cdot 8!$ cách xếp, giống nhau cho tử và mẫu). Mỗi hàng, mỗi cột phải chứa 1 hoặc 3 số lẻ; tổng 8 nên có đúng hai hàng chứa 3 số lẻ và hai hàng chứa 1 số lẻ. Chọn hai hàng “3 lẻ” ($C_4^2 = 6$ cách); hai hàng này có ô **không lẻ** lần lượt ở cột p và cột q ; hai hàng “1 lẻ” có ô lẻ ở cột u và cột v .

- ▶ Nếu $p = q$: cột p cần đúng một trong u, v bằng p ; mỗi cột trong ba cột còn lại đã có 2 số lẻ nên cần thêm một số lẻ nữa – tổng cộng cần ít nhất 4 vị trí cho u, v : vô lí.
- ▶ Nếu $p \neq q$ ($4 \cdot 3 = 12$ cách): cột p và cột q đang có 1 số lẻ, không được nhận thêm; hai cột còn lại đang có 2 số lẻ, mỗi cột cần thêm đúng 1. Vậy $\{u; v\}$ là hai cột còn lại, theo 2 cách.

$$\text{Số mẫu: } 6 \cdot 12 \cdot 2 = 144, P = \frac{144}{12\,870} = \frac{8}{715}.$$

Bài 4. $n(\Omega) = C_{15}^3 = 455$. Tổng ba số thuộc $[3; 16]$ nên chỉ có thể là 4, 9, 16. Số bi mang số k : số 1, 2, 3, 4 mỗi số có 3 bi (số 4: xanh, vàng, đỏ), số 5 có 2 bi, số 6 có 1 bi.

- ▶ Tổng 4 = $1 + 1 + 2$: $C_3^2 \cdot 3 = 9$. Tổng 16 = $6 + 5 + 5$: $1 \cdot C_2^2 = 1$.
- ▶ Tổng 9: $\{1; 2; 6\}$: $3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$; $\{1; 3; 5\}$: $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$; $\{1; 4; 4\}$: $3 \cdot C_3^2 = 9$; $\{2; 2; 5\}$: $C_3^2 \cdot 2 = 6$; $\{2; 3; 4\}$: 27; $\{3; 3; 3\}$: 1. Cộng 70.

$$P = \frac{9+1+70}{455} = \frac{80}{455} = \frac{16}{91}.$$

Bài 5. Chỉ thứ tự tương đối của 6 số là quan trọng. Gọi 6 số là $x_1 < x_2 < \dots < x_6$; mọi cách chia 3 số cho viên gạch là đồng khả năng: $C_6^3 = 20$ cách. Gạch lọt hộp $\Leftrightarrow$ sau khi sắp tăng, mỗi cạnh gạch nhỏ hơn cạnh hộp tương ứng. Điều này buộc x_1 thuộc gạch, x_6 thuộc hộp; liệt kê được 5 cách chia (gạch nhận $\{x_1; x_2; x_3\}$, $\{x_1; x_2; x_4\}$, $\{x_1; x_2; x_5\}$, $\{x_1; x_3; x_4\}$, $\{x_1; x_3; x_5\}$). $P = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$. (Số 5 là số Catalan C_3 .)

Bài 6. $n(\Omega) = C_{24}^3 = 2024$. Tam giác cân: mỗi đỉnh là đỉnh cân của $\frac{24-2}{2} = 11$ tam giác: 264 lượt; 8 tam giác đều bị đếm 3 lần: số tam giác cân là $264 - 16 = 248$. Tam giác vuông: $12 \cdot 22 = 264$. Tam giác vuông cân: $12 \cdot 2 = 24$. Theo bao hàm – loại trừ: $n(A) = 248 + 264 - 24 = 488$, $P = \frac{488}{2024} = \frac{61}{253}$.

IX. KẾT LUẬN VÀ LỜI KHUYÊN KHI LÀM BÀI

Từ câu hỏi của một quý tộc mê xúc xắc năm 1654 đến câu “mật thư” trong đề tốt nghiệp năm 2025, xác suất cổ điển vẫn xoay quanh đúng một ý: **đếm cho đúng những thứ ngang nhau**. Công thức $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$ thì ai cũng thuộc; điều phân biệt học sinh giỏi là khả năng chọn không gian mẫu phù hợp, nhìn ra cấu trúc ẩn và kiểm tra lại kết quả.

Mười lời khuyên khi làm bài

1. Luôn viết rõ phép thử và $n(\Omega)$ trước – một nửa số lỗi nằm ở bước này.
2. Đếm $n(\Omega)$ và $n(A)$ **cùng một cách** (cùng có thứ tự hoặc cùng không thứ tự).
3. Coi các vật cùng màu là **phân biệt** khi tính xác suất.
4. Gặp “ít nhất”, “không có... nào”, “mỗi... đều có” – thử ngay biên cố đối.
5. Lập số: nhớ $a_1 \neq 0$; xử lí chữ số “khó” (đầu, cuối) trước.
6. Chẵn lẻ và số dư là chìa khoá của các bài tổng, cấp số cộng, chia hết.
7. Đa giác đều: nghĩ đến **đường kính**, **nửa đường tròn** và **đỉnh mốc** để không đếm trùng.
8. Với đề trả lời ngắn, đọc kĩ yêu cầu cuối (tính $a + b$, $\frac{1}{a}$, làm tròn...) và kiểm tra phân số đã tối giản.
9. Kiểm tra $0 \leq P \leq 1$, so sánh với trực giác; thử lại với số liệu nhỏ nếu có thể.
10. Đề có giả thiết mô hình (“mỗi bước chọn ngẫu nhiên”, “mọi đường đi đồng khả năng”) – tôn trọng đúng giả thiết đó.

Hì vọng chuyên đề giúp các em không chỉ giải được các bài toán xác suất mà còn cảm nhận được vẻ đẹp của những lập luận giản dị mà sâu sắc – như cách Fermat thêm vào các ván “giả định” để mọi kịch bản trở nên ngang nhau.

Chúc các em học tốt!

X. TÀI LIỆU THAM KHẢO

- ▶ Bộ Giáo dục và Đào tạo (2018). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán* (ban hành kèm Thông tư 32/2018/TT-BGDĐT).
- ▶ Hà Huy Khoái (Tổng Chủ biên) và cộng sự. *Toán 10 – Kết nối tri thức với cuộc sống*, tập 2. NXB Giáo dục Việt Nam.
- ▶ Bộ Giáo dục và Đào tạo. Đề minh hoạ, đề chính thức kì thi THPT quốc gia 2018 – 2019 và kì thi tốt nghiệp THPT 2020 – 2026, môn Toán.
- ▶ Đề thi chọn học sinh giỏi cấp tỉnh/thành phố các năm 2010 – 2027 (Thanh Hoá, Nghệ An, Hà Tĩnh, Vĩnh Phúc, Nam Định, Hà Nam, Phú Thọ, Thái Bình, Quảng Nam, Quảng Ninh, Hải Phòng, Quảng Trị, An Giang, Hà Nội...) và đề thi thử tốt nghiệp THPT của các Sở GD&ĐT, các trường THPT chuyên 2018 – 2026 – theo các tuyển tập sưu tầm.
- ▶ Nguyễn Đăng Ái. *Tinh hoa vận dụng cao Tổ hợp – Xác suất* (Tur Duy Mở).
- ▶ *Một số file tài liệu tham khảo trên mạng từ nhiều nguồn*
- ▶ P.-S. Laplace (1812). *Théorie analytique des probabilités*. Paris: Courcier.
- ▶ I. Todhunter (1865). *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace*. Cambridge: Macmillan.
- ▶ MacTutor History of Mathematics Archive – Đại học St Andrews (mathshistory.st-andrews.ac.uk): tiểu sử Cardano, Galileo, Pascal, Fermat, Huygens, Laplace, d'Alembert.