

BỘ TÀI LIỆU ÔN THI H-SCA ANH TÚ DẠY TOÁN
CHÍNH PHỤC KÌ THI H-SCA MÔN TOÁN



KÌ THI ĐÁNH GIÁ NĂNG LỰC CHUYÊN BIỆT HCMUE
HCMUE Specialized Competency Assessment

TÀI LIỆU CHUYÊN ĐỀ
TOÁN THỰC TẾ VỀ OXYZ

Thực hiện biên soạn
Phạm Thanh Tú

Zalo
0382164170

Tiktok
Anh Tú Dạy Toán

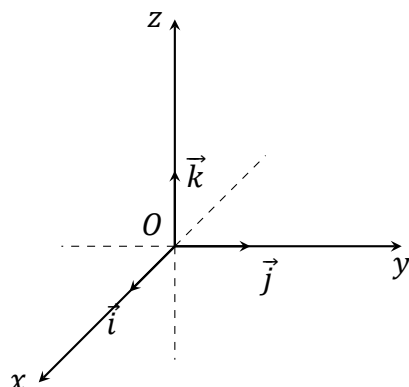
Tài Liệu Lưu Hành Nội Bộ

Mục lục

1	TỌA ĐỘ ĐIỂM, VECTƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN	2
1.1	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	2
1.2	BÀI TẬP ÁP DỤNG	4
2	PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG	10
2.1	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	10
2.2	BÀI TẬP ÁP DỤNG	11
3	PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG	14
3.1	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	14
3.2	BÀI TẬP ÁP DỤNG	15
4	PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU	20
4.1	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	20
4.2	BÀI TOÁN PHƯƠNG TÍCH CỦA MỘT ĐIỂM VỚI MẶT CẦU	20
4.3	BÀI TẬP ÁP DỤNG	23
5	BÀI TẬP RÈN LUYỆN	26

1 TỌA ĐỘ ĐIỂM, VECTƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN

1.1 LÝ THUYẾT CẦN NHỚ



- Trong không gian, cho ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc. Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là ba vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy và Oz . Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$ trong không gian hay đơn giản là hệ tọa độ $Oxyz$.
- Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M . Nếu $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(x; y; z)$ là tọa độ của điểm M đối với hệ trục tọa độ $Oxyz$ và viết $M = (x; y; z)$ hoặc $M(x; y; z)$ trong đó x là hoành độ, y là tung độ, z là cao độ của điểm M .
- Trong không gian $Oxyz$ cho vectơ $\vec{a}$. Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ là tọa độ của vectơ $\vec{a}$ đối với hệ tọa độ $Oxyz$ và viết $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ hoặc $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$.
- Tọa độ của điểm M là tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$, tức là

$$M = (x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$$

- Điều kiện để hai vectơ bằng nhau: Cho $\vec{a} = (x; y; z), \vec{b} = (x'; y'; z')$. Khi đó:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
- Chiếu điểm $M(a; b; c)$ lên mặt phẳng tọa độ hoặc hệ trục tọa độ thì thành phần bị khuyết bằng 0. Chẳng hạn: $M(1; 2; 3)$ chiếu lên Oxy thì $z = 0$ nên hình chiếu khi đó là $M_1(1; 2; 0)$.
- Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
- Tọa độ các điểm đặc biệt:

• $M \in Ox \Rightarrow M(x; 0; 0)$	• $M \in Oy \Rightarrow M(0; y; 0)$	• $M \in Oz \Rightarrow M(0; 0; z)$
• $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x; y; 0)$	• $M \in (Oxz) \Rightarrow M(x; 0; z)$	• $M \in (Oyz) \Rightarrow M(0; y; z)$

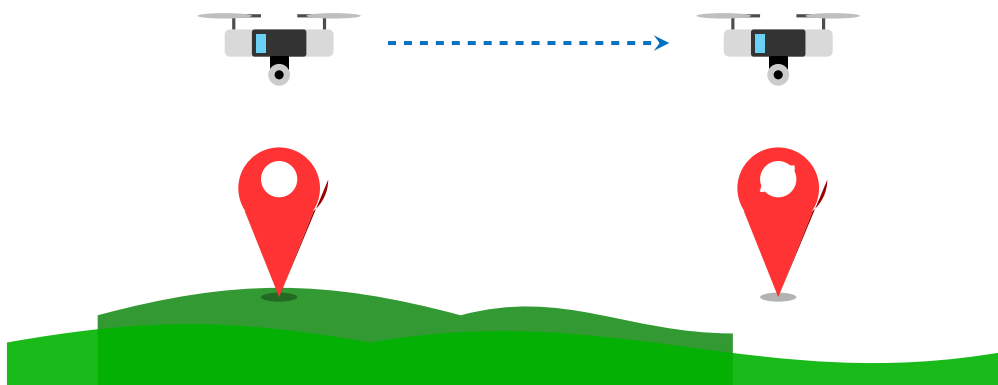
- Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$. Khi đó ta có:
 - $\vec{a} + \vec{b} = (x + x'; y + y'; z + z')$
 - $\vec{a} - \vec{b} = (x - x'; y - y'; z - z')$
 - $k\vec{a} = (kx; ky; kz)$ với k là một số thực.
- Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vector $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$ được xác định bởi công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = xx' + yy' + zz'$
 - Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $xx' + yy' + zz' = 0$.
 - Nếu $\vec{a} = (x; y; z)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
 - Nếu $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$ là hai vector khác $\vec{0}$ thì

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

- Trong không gian $Oxyz$, tọa độ trung điểm và trọng tâm được xác định như sau:
 - Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$
 - Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$

Kỹ năng chuẩn hóa vector trong không gian Oxyz

Bài toán gốc: Cho điểm A bất kì biết tọa độ. Sau thời gian t điểm A di chuyển theo vector định hướng $\vec{u}$ với tốc độ v tới điểm A' . Xác định tọa độ của điểm A' .



Bước 1: Ta chuẩn hóa vector $\vec{u}$ thành vector $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ có độ dài bằng 1 và bảo toàn chiều (hướng).

Khi đó vector vận tốc xác định hướng và độ lớn di chuyển của A là: $\vec{v} = v \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$.

Bước 2: Ta có: $\overrightarrow{AA'} = t \cdot \vec{v}$, từ đây ta rút được công thức tìm tọa độ A' theo thời gian t như sau:

$$A' = A + t \cdot \vec{v} \quad (*)$$

Công thức mở rộng

Nếu điểm A di chuyển với vector vận tốc $\vec{a}$ và chịu ảnh hưởng của vector vận tốc $\vec{b}$
Thì điểm A sẽ chuyển động với vector vận tốc mới là $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

1.2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

Câu 1. Một máy bay xuất phát từ $A(1; 2; 3)$ di chuyển theo hướng vector $\vec{a} = (2; -1; 2)$ với vận tốc là 150 (km/h). Xác định tọa độ điểm A' sau 10 giờ biết gió thổi theo hướng vector $\vec{b} = (3; 4; 0)$ với vận tốc 100 (km/h).

A. (1101; 482; 1003).

B. (1061; 322; 1003).

C. (1001; 502; 1003).

D. (1061; 402; 1003).

Câu 2. Trạm kiểm soát không lưu đang theo dõi hai máy bay. Giả sử trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đơn vị đo lấy theo kilômét, tại cùng một thời điểm theo dõi ban đầu: máy bay thứ nhất ở tọa độ $A(0; 35; 10)$, bay theo hướng vector $\vec{v}_1 = (3; 4; 0)$ với tốc độ không đổi 900 (km/h) và máy bay thứ hai ở tọa độ $B(31; 10; 11)$, bay theo hướng vector $\vec{v}_2 = (5; 12; 0)$ với tốc độ không đổi 910 (km/h). Biết rằng khoảng cách an toàn tối thiểu giữa hai máy bay là 5 hải lý (khoảng 9,3 km). Nếu hai máy bay tiếp tục duy trì hướng và tốc độ bay như trên thì sau ít nhất bao nhiêu phút (kể từ thời điểm theo dõi ban đầu), hai máy bay vi phạm khoảng cách an toàn (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. 1,52 phút.

B. 1,67 phút.

C. 2,15 phút.

D. 2,48 phút.

Câu 3. Cho điểm $A(1; 2; 3)$ di chuyển theo hướng vector $\vec{u} = (2; -1; 2)$ với vận tốc là 6 (km/h). Xác định tọa độ điểm A' sau t giờ.

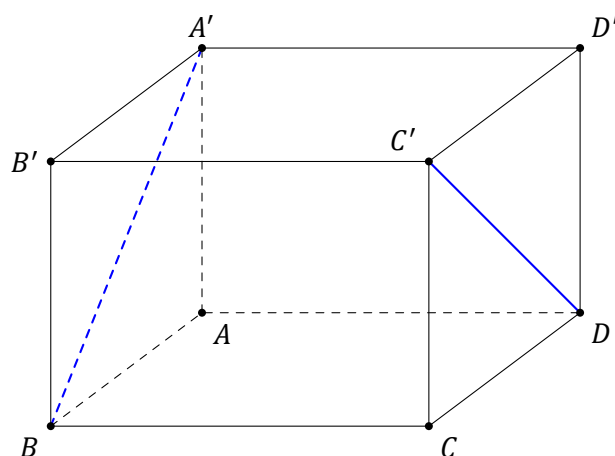
A. $(1 + 4t; 2 - 2t; 3 + 4t)$.

B. $(1 + 2t; 2 - t; 3 + 2t)$.

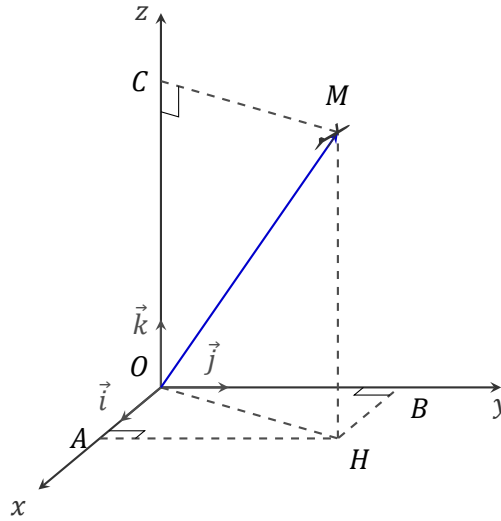
C. $(1 + 6t; 2 - 6t; 3 + 6t)$.

D. $(1 + 2t; 2 - 2t; 3 + 2t)$.

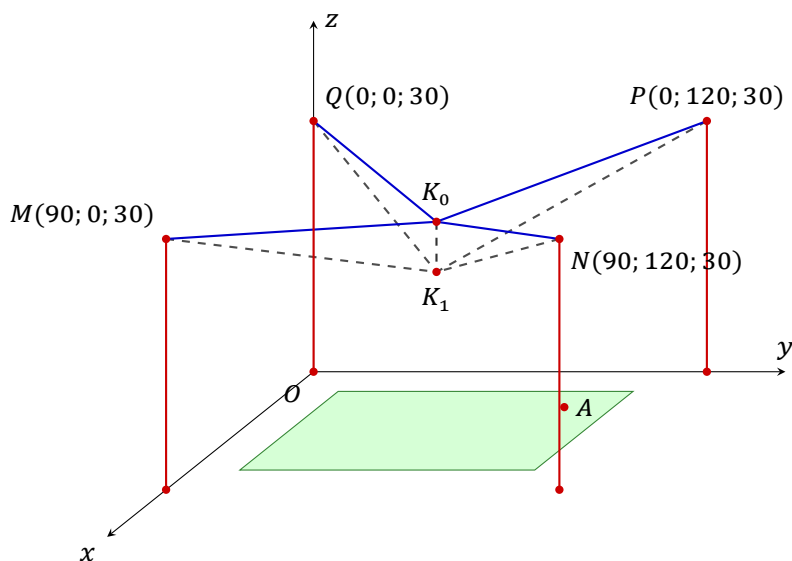
Câu 4. Trong một căn phòng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 3$; $AD = 6$; $AA' = 4$. Ông Tú già đang nằm trên vồng ngủ trưa thì quan sát thấy 2 con thạch sùng tại 2 góc nhà B và D . Con thạch sùng tại B bò dọc theo đường chéo BA' với vận tốc 2 (m/s), còn con tại D bò dọc theo đường chéo DC' với vận tốc 3 (m/s).



Câu 5. Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy) . Biết rằng $OM = 79$; $(\vec{i}, \overrightarrow{OH}) = 68^\circ$; $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}) = 50^\circ$. Gọi tọa độ điểm $M(a; b; c)$. Giá trị của $a + b + c$ là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần mười).



Câu 6. Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn. Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90; 0; 30)$, $N(90; 120; 30)$, $P(0; 120; 30)$, $Q(0; 0; 30)$. Giả sử K_0 là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$. Để theo dõi quả bóng đến vị trí A , camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 có cao độ bằng 19. (Nguồn: <https://www.abiturloesung.de>; Abitur Bayern 2016 Geometrie VI). Biết rằng vector $\overrightarrow{K_0K_1}$ có tọa độ là $(a; b; c)$; $a, b, c \in \mathbb{R}$. Khi đó $a + b + c$ bằng bao nhiêu?



2 PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

2.1 LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

- Vector $\vec{n} \neq \vec{0}$ là vector pháp tuyến (VTPT) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với mặt phẳng (α) .

Chú ý:

- Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của mặt phẳng (α) thì $k\vec{n}$ cũng là một VTPT của mặt phẳng (α) .
- Một mặt phẳng được xác định duy nhất nếu biết một điểm nó đi qua và một VTPT của nó.
- Nếu $\vec{u}, \vec{v}$ có giá song song hoặc nằm trên mặt phẳng (α) thì $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}]$ là một VTPT của (α) .
- Trong không gian $Oxyz$, mọi mặt phẳng đều có dạng phương trình:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{với } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

- Nếu mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ thì nó có một VTPT là $\vec{n}(A; B; C)$.
- Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận vector $\vec{n}(A; B; C)$ khác $\vec{0}$ là VTPT là:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Các trường hợp riêng

Xét phương trình mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

- Nếu $D = 0$ thì mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ O .
- Nếu $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Ox .
- Nếu $A \neq 0, B = 0, C \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Oy .
- Nếu $A \neq 0, B \neq 0, C = 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Oz .
- Nếu $A = B = 0, C \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oxy) .
- Nếu $A = C = 0, B \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oxz) .
- Nếu $B = C = 0, A \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oyz) .

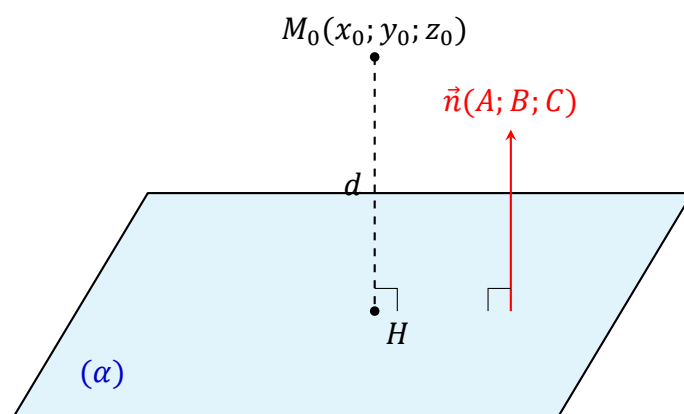
Chú ý:

- Nếu trong phương trình (α) không chứa ẩn nào thì (α) song song hoặc chứa trục tương ứng.
- Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn $(\alpha): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Ở đây (α) cắt các trục tọa độ tại các điểm $(a; 0; 0), (0; b; 0), (0; 0; c)$ với $abc \neq 0$.

Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính:

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

**Góc giữa 2 mặt phẳng**

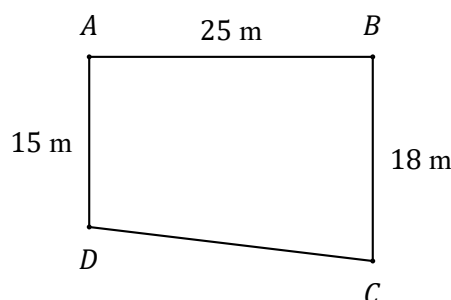
Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Góc giữa (α) và (β) bằng hoặc bù với góc giữa hai VTPT $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$. Tức là:

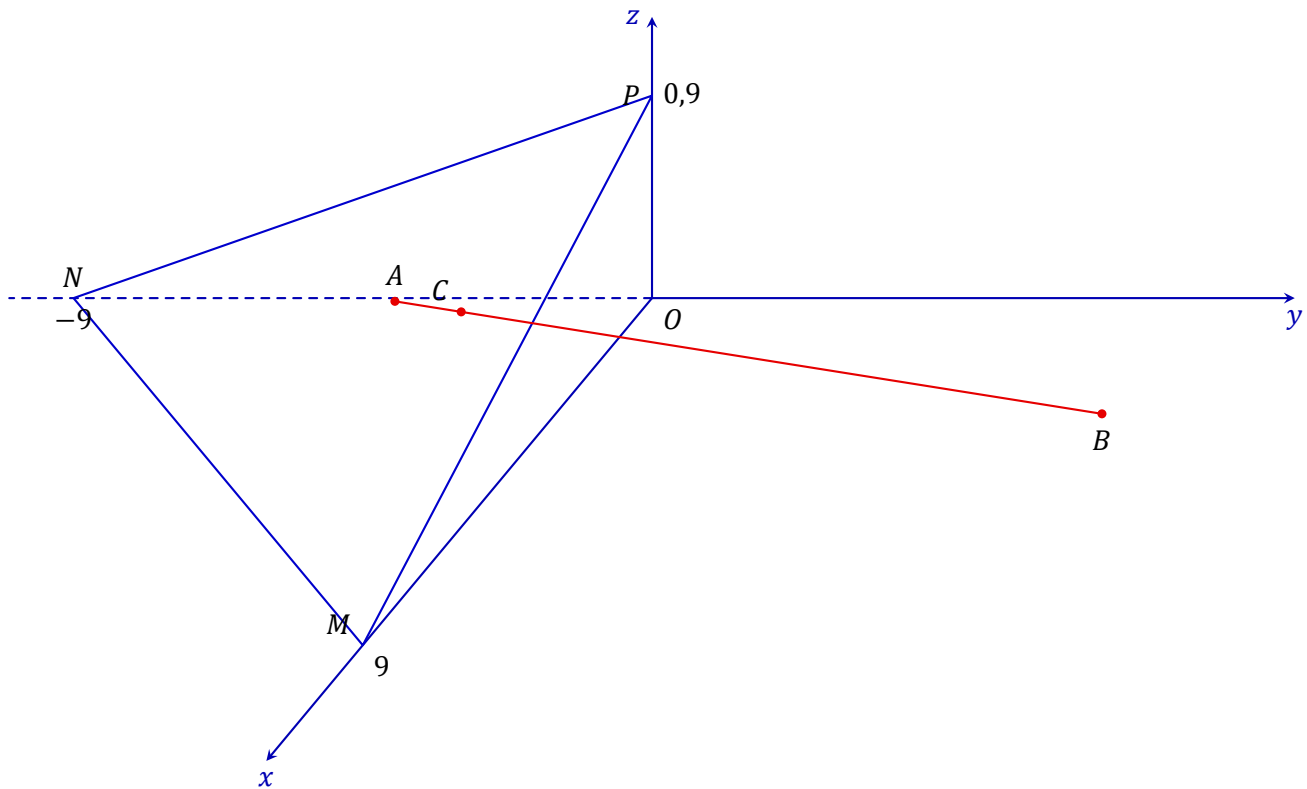
$$\cos((\alpha), (\beta)) = |\cos(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta)| = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

2.2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

Câu 7. Một phần sân trường được định vị bởi các điểm A, B, C, D , như hình vẽ bên dưới. Bước đầu chúng được lấy “thăng bằng” để có cùng độ cao, biết $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B với độ dài $AB = 25$ m, $AD = 15$ m, $BC = 18$ m. Do yêu cầu kỹ thuật, khi lát phẳng phần sân trường phải thoát nước về góc sân ở C nên người ta lấy độ cao ở các điểm B, C, D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là 10 cm, a cm, 6 cm tương ứng sao cho bốn điểm A, B', C', D' đồng phẳng. Tính giá trị của a (đơn vị cm).

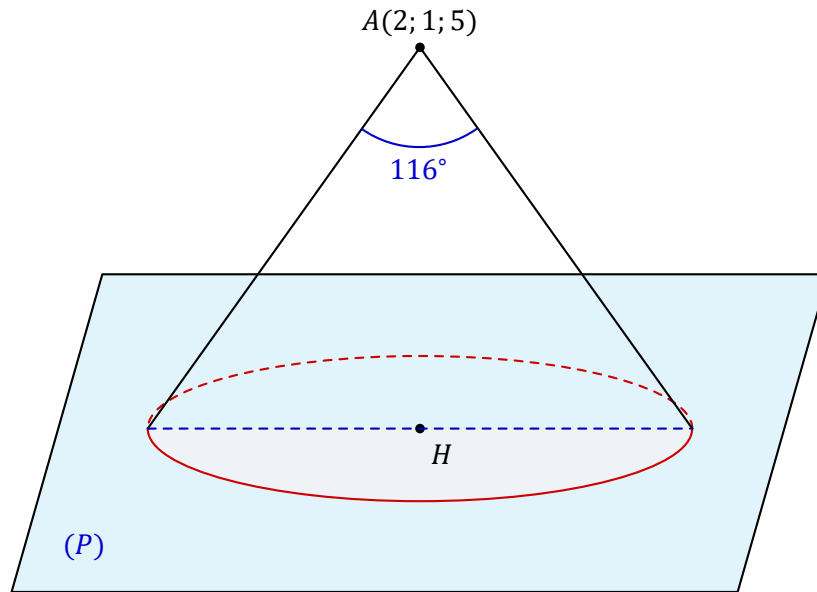


Câu 8. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là km), một máy bay đang ở vị trí $A(3; -2,5; 0,5)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(3; 8,5; 0)$ trên đường băng.



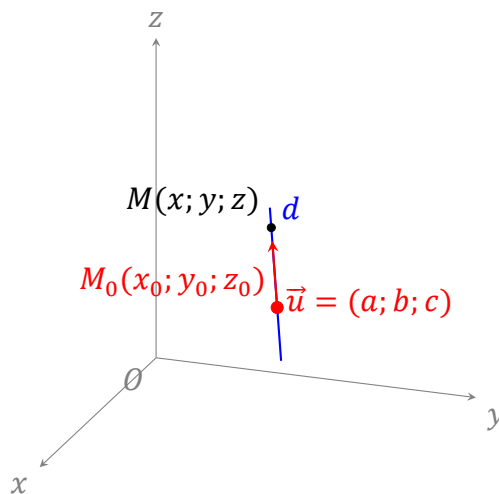
Có một lớp mây được mô phỏng bởi một mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $M(9; 0; 0)$, $N(0; -9; 0)$ và $P(0; 0; 0,9)$. Tính độ cao của máy bay khi máy bay xuyên qua đám mây để hạ cánh (đơn vị km).

Câu 9. Biết góc quan sát ngang của một camera là 116° . Trong không gian $Oxyz$, camera được đặt tại điểm $A(2; 1; 5)$ và chiếu thẳng về phía mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z + 13 = 0$. Hỏi vùng quan sát được trên mặt phẳng (P) của camera là hình tròn có đường kính bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến chữ số hàng chục)



3 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

3.1 LÝ THUYẾT CẦN NHỚ



- Đường thẳng d đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và vector chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$. Phương trình chính tắc của d :

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (abc \neq 0)$$

- Đường thẳng d đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và vector chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$. Phương trình tham số của d :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- Trong không gian cho hai đường thẳng Δ_1 đi qua M_1 và có một vector chỉ phương $\vec{u}_1$, Δ_2 đi qua M_2 và có vector chỉ phương $\vec{u}_2$. Khi đó vị trí tương đối của Δ_1 và Δ_2 được xác định như sau:

$$\Delta_1 \text{ và } \Delta_2 \text{ chéo nhau} \Leftrightarrow [\vec{u}_1; \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \neq 0.$$

$$\Delta_1 \text{ và } \Delta_2 \text{ cắt nhau} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1; \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0 \\ \vec{u}_1 \neq k \cdot \vec{u}_2 \end{cases}$$

$$\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1 = k \cdot \vec{u}_2 \\ M_1 \in \Delta_1, M_1 \notin \Delta_2 \end{cases}$$

$$\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1 = k \cdot \vec{u}_2 \\ M_1 \in \Delta_1, M_1 \in \Delta_2 \end{cases}$$

- Công thức khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng $d(A; \Delta) = \frac{|[\vec{u}_\Delta; \overrightarrow{AM}]|}{|\vec{u}_\Delta|}$; với M thuộc Δ .

- Công thức khoảng cách giữa hai đường thẳng $d(\Delta_1; \Delta_2) = \frac{|[\vec{u}_{\Delta_1}; \vec{u}_{\Delta_2}] \overrightarrow{M_1 M_2}|}{|[\vec{u}_{\Delta_1}; \vec{u}_{\Delta_2}]|}$
- Cho đường thẳng d đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ và mặt phẳng $(P) : Ax + By + Cz + D = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$. Khi đó:

$$d \text{ cắt } (P) \Leftrightarrow Aa + Bb + Cc \neq 0$$

$$d \parallel (P) \Leftrightarrow \begin{cases} Aa + Bb + Cc = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases}$$

$$d \subset (P) \Leftrightarrow \begin{cases} Aa + Bb + Cc = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$$

$$d \perp (P) \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{n}] = \vec{0}$$

- Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có các vector chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ và $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$. Khi đó:

$$\cos(\Delta_1; \Delta_2) = |\cos(\vec{u}_1; \vec{u}_2)| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

- Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có vector chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ và mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$. Khi đó:

$$\sin(\widehat{\Delta; (P)}) = |\cos(\vec{n}; \vec{u})| = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

3.2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

Câu 10. Một radar có thể quay 180° để quan sát máy bay quanh vùng phủ sóng của nó. Một máy bay cất cánh từ điểm A nằm trên mặt đất theo chiều cùng chiều với vector $\overrightarrow{AB}$. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ mặt đất là mặt phẳng (Oxy) , trục Oz hướng lên trời, điểm A nằm trên trục Oy cách gốc tọa độ $0,6$ km; điểm B nằm trên trục Oz có cao độ bằng $0,3$ km; radar đang nằm trên trục Ox có hoành độ bằng $0,4$ km. Máy bay đang ở điểm B bay theo hướng bay như cũ đến điểm $C(a; b; c)$ thì radar quay một góc bằng 60° . Tính $a + b + c$ theo đơn vị mét (làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 11. Một người đứng ở mặt đất điều khiển flycam để phục vụ chương trình truyền hình. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc tọa độ O là vị trí người điều khiển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất. Chiếc flycam đang ở vị trí $M(1; 2; 4)$ và chuyển động trên đường thẳng song song với mặt đất. Biết hướng chuyển động của flycam là $\vec{u} = (2; a; b)$ (a, b là các số nguyên) sao cho khoảng cách từ vị trí người điều khiển đến đường thẳng chuyển động của flycam là lớn nhất. Tính $a + b$.

Câu 12. Một phần mềm mô phỏng vận động viên tập bắn bia mục tiêu có kích thước nhỏ (42×42 cm) bằng súng tiểu liên AK trong không gian $Oxyz$. Cho biết vận động viên đó sử dụng thước ngắm 3 và đứng cách xa bia mục tiêu là 100 m, trục d của nòng súng và cọc đỡ bia d' lần lượt có phương trình

$$d : \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases} \quad \text{và} \quad d' : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 + 3t' \end{cases}$$

Để bắn trúng hồng tâm thì vận động viên phải ngắm bắn vào điểm $N(a; b; c) \in d'$ và cách giao điểm của d và d' một khoảng 6 cm. Khi $c < 0$, tính giá trị biểu thức $a - b + c$.

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10; 0; 3)$ và chuyển động theo đường cáp có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 2; 1)$. Hai cột trụ cáp treo đặt tại điểm B, C biết $x_B = 20; y_C = 120$. Thời gian cabin đi từ điểm B đến điểm C là 55 s. Hỏi vận tốc của cabin bằng bao nhiêu m/s?

Câu 14. Khi gán hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét) vào một sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay bay theo đường thẳng từ vị trí $A(5; 0; 5)$ đến vị trí $B(10; 10; 3)$ và hạ cánh tại vị trí $M(a; b; 0)$. Giá trị của $a + b$ bằng bao nhiêu (viết kết quả dưới dạng số thập phân)?

4 PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

4.1 LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

- Cho không gian $Oxyz$ có mặt cầu (S) thỏa mãn điều kiện: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$. Ta có phương trình cơ bản của (S) như sau:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \quad (1)$$

Từ phương trình cơ bản, ta có công thức tính bán kính của (S) như sau:

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$$

- Ngoài ra, khi biết bán kính R , tâm $I(a; b; c)$ thì mặt cầu (S) trong không gian $Oxyz$ có phương trình chính tắc như sau:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

- Ta có công thức tính khoảng cách từ tâm I của mặt cầu đến mặt phẳng $(P) : Ax + By + Cz + D = 0$ để xét vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu:

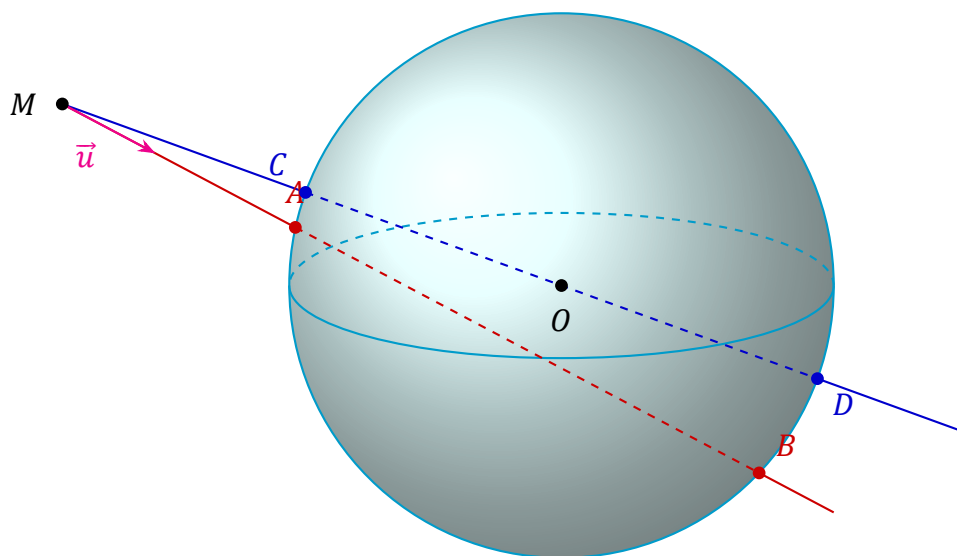
$$d(I, (P)) = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

4.2 BÀI TOÁN PHƯƠNG TÍCH CỦA MỘT ĐIỂM VỚI MẶT CẦU

Cho mặt cầu (S) tâm O , bán kính R và một điểm M cố định. Một đường thẳng Δ bất kỳ đi qua M cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A và B . Khi đó, tích vô hướng của hai vector $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ là một hằng số, không phụ thuộc vào vị trí của cát tuyến Δ . Hằng số đó được gọi là phương tích của điểm M đối với mặt cầu (S) , ký hiệu là $\mathcal{P}_{M/(S)}$.

Công thức:

$$\mathcal{P}_{M/(S)} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2 \quad (1)$$



Cách 1: Chứng minh bằng Hình học thuần túy (Mặt cắt)

Phương pháp này chuyển bài toán từ không gian 3D về bài toán phẳng 2D cực kỳ trực quan.

- **Bước 1:** Xét mặt phẳng (P) chứa điểm M và cát tuyến Δ (đường thẳng chứa A, B). Nếu tâm $O \notin \Delta$, ta hoàn toàn có thể chọn mặt phẳng (P) chứa điểm M , điểm O và cắt Δ dọc theo chính nó.
- **Bước 2:** Mặt phẳng (P) sẽ cắt mặt cầu (S) theo một **đường tròn lớn** (đường tròn tâm O , bán kính R). Lúc này, A, B chính là các điểm nằm trên đường tròn lớn đó.
- **Bước 3:** Kẻ cát tuyến thứ hai đi qua M và tâm O , cắt mặt cầu tại C và D . Tứ giác $ACBD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn lớn.
- **Bước 4:** Xét hai tam giác $\triangle MAC$ và $\triangle MDB$:
 - Góc $\widehat{M}$ chung.
 - $\widehat{MCA} = \widehat{MDB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AD).

Do đó, $\triangle MAC \sim \triangle MDB$ (g-g).

- **Kết luận:** Ta có tỉ số đồng dạng:

$$\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB} \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

Lại có C, D, O thẳng hàng, do đó khoảng cách $MC = MO - R$ và $MD = MO + R$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB = (MO - R)(MO + R) = MO^2 - R^2 \quad (\text{đpcm})$$

Cách 2: Chứng minh bằng Hình học Vector (Siêu gọn & Đỉnh cao)

Đây là cách tiếp cận bằng đại số vector, thể hiện bản chất nội tại của phương tích mà không cần kẻ vẽ phụ.

- **Bước 1:** Gọi $\vec{u}$ là vector đơn vị ($|\vec{u}| = 1$) nằm trên đường thẳng Δ có hướng từ M đi qua cát tuyến. Mọi điểm $X \in \Delta$ đều có thể biểu diễn dưới dạng tham số:

$$\overrightarrow{MX} = t\vec{u} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- **Bước 2:** Điểm X nằm trên mặt cầu (S) khi và chỉ khi khoảng cách từ X đến O bằng R :

$$OX^2 = R^2 \Leftrightarrow |\overrightarrow{MX} - \overrightarrow{MO}|^2 = R^2$$

- **Bước 3:** Thay $\overrightarrow{MX} = t\vec{u}$ vào phương trình, ta được:

$$|t\vec{u} - \overrightarrow{MO}|^2 = R^2 \Leftrightarrow t^2|\vec{u}|^2 - 2t(\overrightarrow{MO} \cdot \vec{u}) + MO^2 = R^2$$

Vì $|\vec{u}| = 1$, phương trình bậc hai theo t trở thành:

$$t^2 - 2(\overrightarrow{MO} \cdot \vec{u})t + (MO^2 - R^2) = 0$$

- **Bước 4:** Hai giao điểm A, B của đường thẳng và mặt cầu chính là 2 nghiệm t_1, t_2 của phương trình trên (tương ứng $\overrightarrow{MA} = t_1\vec{u}$ và $\overrightarrow{MB} = t_2\vec{u}$). Áp dụng định lý Viète:

$$t_1 \cdot t_2 = MO^2 - R^2$$

- **Kết luận:** Ta có tích vô hướng:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (t_1\vec{u}) \cdot (t_2\vec{u}) = t_1t_2|\vec{u}|^2 = t_1t_2$$

Suy ra:

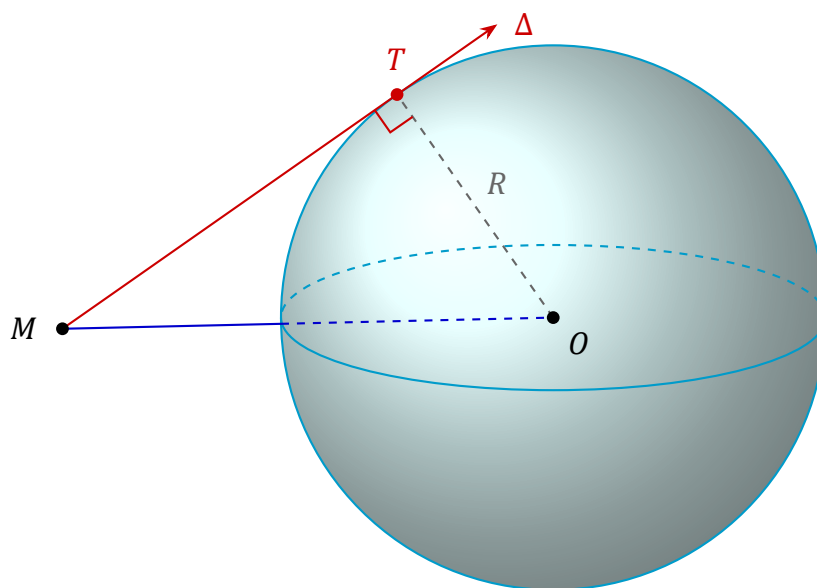
$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2 \quad (\text{đpcm})$$

Hệ quả: Trường hợp Δ là Tiếp tuyến

Khi đường thẳng Δ di chuyển ra xa tâm O và trở thành **tiếp tuyến** của mặt cầu (S) tại tiếp điểm T , hai giao điểm A và B chập làm một ($A \equiv B \equiv T$).

Khi đó, tam giác $\triangle MTO$ vuông tại T (do tiếp tuyến vuông góc với bán kính). Áp dụng định lý Pytago, công thức phương tích trở nên cực kỳ đơn giản:

$$\mathcal{P}_{M/(S)} = \overrightarrow{MT} \cdot \overrightarrow{MT} = MT^2 = MO^2 - R^2 \quad (2)$$



4.3 BÀI TẬP ÁP DỤNG

Câu 15. Phía trước của một sân vận động, người ta có đặt một quả bóng đá không lơ. Cách đó không xa, có một bóng đèn. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị đo là mét), giả sử mặt ngoài quả bóng (S) có phương trình $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 9$ và bóng đèn ở vị trí $M(15; 1; 6)$. Khi đó, khoảng cách xa nhất mà bóng đèn có thể chiếu đến một điểm trên quả bóng bằng MA , với MA chính là tiếp tuyến kẻ từ M đến (S) và A là tiếp điểm. Vậy MA bằng bao nhiêu mét?

Câu 16. Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là: Global Positioning System, viết tắt là GPS) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể trong không gian. Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống GPS trong không gian như sau: Trong cùng một thời điểm, tọa độ của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước, trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận phản hồi tín hiệu đó, mỗi máy thu tín hiệu xác định được khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí M cần tìm tọa độ. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn vệ tinh $A(0; 4; 5)$, $B(-3; -1; 3)$, $C(-2; 8; 9)$, $D(-7; 2; -3)$. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến điểm M biết rằng khoảng cách từ các vệ tinh đến điểm M lần lượt là $MA = 3, MB = 5, MC = 9, MD = 10$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

Câu 17. Hệ thống định vị toàn cầu GPS là một hệ thống cho phép xác định vị trí của một vật thể trong không gian. Trong cùng một thời điểm vị trí của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước nhờ các bộ thu phát tín hiệu đặt trên các vệ tinh. Giả sử trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mỗi đơn vị trên mỗi trục có độ dài 10 km, bốn vệ tinh có tọa độ lần lượt là $A(2; 1; -2)$, $B(2; 3; 1)$, $C(-4; -1; 2)$, $D(0; 7; 6)$ đang tiến hành theo dõi vật thể M (coi là một chất điểm). Các vệ tinh dùng sóng điện từ có tần số 1 MHz. Ở một thời điểm có 4 vệ tinh cùng phát tín hiệu về M thì nhận được tín hiệu trả về các vệ tinh ngay sau đó trong những khoảng thời gian là $t_A = 0,4$ ms, $t_B = 0,2$ ms, $t_C = \frac{2}{3}$ ms, $t_D = 0,4$ ms. Biết rằng vận tốc của sóng điện từ bằng vận tốc ánh sáng $c = 3 \cdot 10^8$ m/s và $1 \text{ s} = 1000 \text{ ms}$. Tính khoảng cách từ điểm M đến gốc tọa độ theo đơn vị đo chọn trong không gian $Oxyz$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

5 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài tập 1

Bài toán: Hệ thống định Toàn Cầu GPS hiện tại có 24 vệ tinh, mỗi vệ tinh cách Trái Đất 20000 km, ta coi Trái Đất là khối cầu có bán kính $R = 6$ (nghìn km). Với một hệ tọa độ $Oxyz$ đã chọn, O là tâm Trái Đất và đơn vị trên mỗi trục là nghìn km, hai vệ tinh có tọa độ $A(26; 0; 0)$, $B(0; 26; 0)$. Xét điểm $M(x; y; z)$ thuộc bề mặt Trái Đất. Tính giá trị nhỏ nhất của $MA + MB$ theo đơn vị nghìn km (làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài tập 2

Bài toán: Mặt cầu tâm I bán kính $R > 0$ là tập hợp tất cả các điểm trong không gian cách I một khoảng bằng R . Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên hệ trục là centimet, một tổ kiến có bề mặt là một mặt cầu tâm là gốc tọa độ và bán kính $R = 6$ cm, ở điểm $A(20; 0; 0)$ có 10 miếng mồi và ở điểm $B(0; 20; 0)$ có 3 miếng mồi. Một con kiến trên bề mặt tổ, mỗi lần đi đến A hoặc B tha đúng một miếng mồi về tổ. Hỏi tổng quãng đường ngắn nhất con kiến đó đi là bao nhiêu centimet để con kiến tha hết 13 miếng mồi về tổ (kết quả làm tròn hàng đơn vị)?

Bài tập 3

Bài toán: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (một đơn vị trên mỗi trục tương ứng với một km trên thực tế), xét một vùng phòng thủ hình cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 49$ và một hành lang bay an toàn được giới hạn bởi hai mặt phẳng song song $(P_1): x + y + z = 5$ và mặt phẳng $(P_2): x + y + z = -5$. Một máy bay trinh sát bắt đầu xâm nhập khu vực từ điểm $M_0(6; 0; 0)$ và bay theo đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-1; 1; 1)$. Tính chiều dài đoạn đường bay của máy bay nằm hoàn toàn trong phần giao của hành lang bay an toàn và vùng phòng thủ hình cầu (đơn vị: km).

Bài tập 4

Bài toán: Trong hệ toạ độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục tính là mét), một vườn hoa nằm trên mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 12 = 0$. Có hai bóng đèn chiếu sáng cố định được đặt tại các điểm $A(40; -40; 12)$, $B(-40; 50; 38)$. Để đảm bảo kĩ thuật chiếu sáng, các kỹ sư muốn thiết kế trên mặt vườn một đường ray để lắp đặt một đèn chiếu sáng M di động trên đường ray ấy. Yêu cầu kĩ thuật đặt ra là góc tạo bởi MA với mặt vườn và góc tạo bởi MB với mặt vườn phải luôn bằng nhau. Độ dài đường ray là bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

Bài tập 5

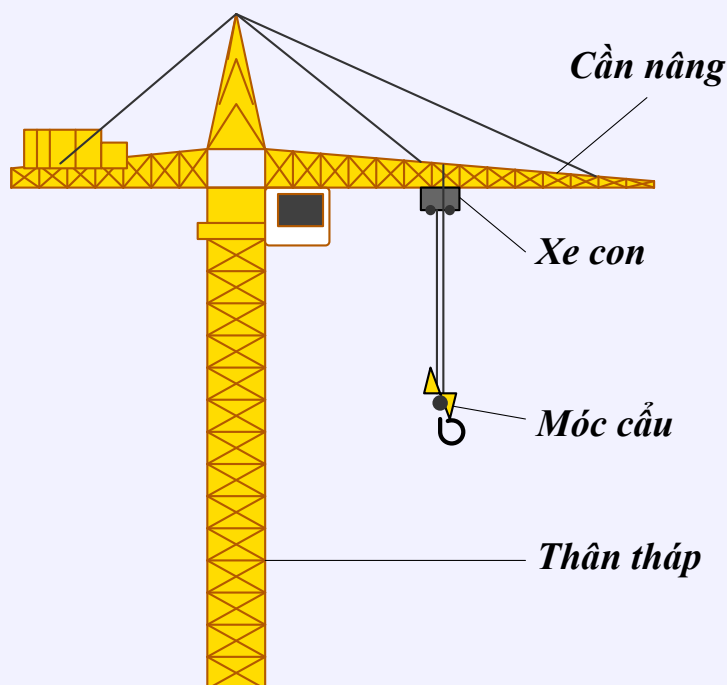
Bài toán: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét, một thiết bị phát tia laser được đặt tại điểm $A(5\sqrt{3}; 8; 15)$. Thiết bị này chiếu một tia sáng về phía bức tường phẳng trùng với mặt phẳng tọa độ (Oyz) . Biết rằng tia sáng phát ra luôn thay đổi nhưng luôn tạo với trục Ox một góc 60° . Gọi M là vị trí vệt sáng laser chiếu lên bức tường. Khoảng cách lớn nhất từ vệt sáng M đến gốc tọa độ O bằng bao nhiêu mét?

Bài tập 6

Bài toán: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, bề mặt của Trái Đất là mặt cầu có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 6371 km trên thực tế); vị trí P có vĩ độ, kinh độ tương ứng là $\alpha^\circ\text{N}, \beta^\circ\text{E}$ ($0 < \alpha < 90, 0 < \beta < 180$) có tọa độ là $P(\cos \alpha^\circ \cos \beta^\circ; \cos \alpha^\circ \sin \beta^\circ; \sin \alpha^\circ)$. Ứng dụng Google Maps cho phép xác định khoảng cách giữa hai vị trí trên bề mặt Trái Đất khi biết vĩ độ và kinh độ của chúng. Khoảng cách giữa hai vị trí P và Q trên bề mặt Trái Đất là độ dài cung nhỏ PQ của đường tròn có tâm O và đi qua hai điểm P, Q . Tính khoảng cách trên mặt đất giữa hồ Hoàn Kiếm (Hà Nội) ở vị trí $21^\circ 02'\text{N}, 105^\circ 51'\text{E}$ và đảo Trường Sa ở vị trí $8^\circ 39'\text{N}, 111^\circ 56'\text{E}$ (đơn vị: km; kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài tập 7

Bài toán: Người ta thường dùng cầu trục tháp (như hình vẽ) để vận chuyển vật liệu xây dựng; thân tháp vuông góc với mặt đất, cần nâng vuông góc thân tháp dùng để làm điểm tựa nâng vật liệu, trên cần nâng có bộ phận gọi là xe con, có thể chạy dọc cần nâng nhằm di chuyển vật liệu. Ban đầu vật liệu ở mặt đất, cầu trục dùng móc cầu nâng vật liệu lên cao theo phương thẳng đứng và cao hơn 1 m so với vị trí cần đặt, sau đó giữ nguyên độ cao và cầu trục quay cần nâng một góc $\alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$ sao cho quỹ đạo tạo thành một cung tròn cho đến khi mặt phẳng (P) chứa cần nâng và điểm cần đặt vuông góc với mặt đất (vật liệu và điểm cần đặt cùng nằm trên một nửa mặt phẳng (P) so với thân tháp). Tiếp đến điều chỉnh xe con nhằm di chuyển và hạ vật liệu xuống 1 m theo phương thẳng đứng đúng vị trí cần đặt. Giả sử rằng trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, thân tháp là trục Oz và mặt đất là mặt phẳng Oxy (đơn vị tính bằng mét); vị trí ban đầu của vật liệu là điểm $A(6; 8; 0)$ và vị trí cần đặt vật liệu là điểm $B(4; -3; 15)$. Tính quãng đường vật liệu đã di chuyển (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Bài tập 8

Bài toán: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét), một kiến trúc sư cần lắp đặt một đèn chiếu sáng tại vị trí A cho một phòng triển lãm. Điểm A thay đổi trên một khung thép hình tròn là giao tuyến của mặt phẳng $(\alpha): x+y-z+4=0$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=6$. Đèn phát ra luồng sáng có dạng hình nón với góc ở đỉnh bằng 60° , trục của hình nón luôn vuông góc với mặt sàn $(P): x-2y+2z+10=0$. Để đảm bảo mật độ ánh sáng tập trung cao nhất cho khu vực trưng bày dưới sàn, kiến trúc sư cần điều chỉnh đèn đến vị trí sao cho diện tích vùng chiếu sáng trên mặt sàn (P) là nhỏ nhất. Hãy tính diện tích vùng chiếu sáng nhỏ nhất đó. (Không làm tròn các kết quả trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần mười của m^2).

Bài tập 9

Bài toán: Trong không gian $Oxyz$, một miếng bìa hình tròn (C) chặn không cho ánh sáng đi qua có phương trình $\begin{cases} z = 5 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$. Biết rằng có một mục tiêu đặt tại vị trí $A(1; 2; 3)$, cùng lúc đó bạn An Cô Đơn điều khiển một chiếc Drone quan sát mục tiêu xuất phát từ vị trí $B(1; -3; 5)$ và bay theo vector vận tốc $\vec{v} = (-1; 3; 5)$. Hỏi sau ít nhất bao lâu từ vị trí B thì Drone không nhìn thấy được mục tiêu tại A (Kết quả làm tròn đến chữ số hàng phần chục)?

Bài tập 10

Bài toán: Trong một game mô phỏng bắn súng. Mục tiêu xuất phát từ vị trí $A(-5; 4; 3)$ bay theo hướng vector $\vec{a} = (1; 2; 2)$ với vận tốc 6 m/s, sau 3 s thì dừng lại tại vị trí điểm B . Cùng lúc đó bạn Tú Bé Bông di chuyển trên mặt đất trùng với mặt phẳng (Oxy) quanh đường tròn tâm O bán kính 2 m. Hỏi khoảng cách ngắn nhất để ngắm bắn mục tiêu tại B là bao nhiêu mét (Biết đơn vị trên mỗi trục là mét và kết quả làm tròn đến chữ số hàng phần chục)?

Bài tập 11

Bài toán: Trạm kiểm soát không quân đang theo dõi hai máy bay chiến đấu *Su – 30* và *MiG – 31*. Giả sử trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đơn vị mỗi trục là 1 km và xem mặt phẳng (Oxy) là mặt đất, tại cùng một thời điểm theo dõi ban đầu: máy bay chiến đấu *Su – 30* ở tọa độ $A(0; 35; 10)$ bay theo hướng véc-tơ $\vec{v}_1 = (3; 4; 0)$ với tốc độ không đổi là 900 km/h và máy bay chiến đấu *MiG – 31* ở tọa độ $B(31; 10; 11)$, bay theo hướng của véc-tơ $\vec{v}_2 = (5; 12; 0)$ với tốc độ không đổi 910 km/h. Khu vực này có gió mạnh thổi với vận tốc bằng 80 km/h theo hướng véc-tơ $\vec{u} = (-3; 0; 4)$, gió ảnh hưởng đến hai máy bay trong quá trình bay. Một khu vực không phận bị hạn chế bay đã được một quốc gia khác thiết lập, có dạng hình trụ với tâm đáy tại $C(178; 430; 0)$, bán kính đáy 7 km, trục vuông góc với mặt đất và chiều cao 43 km, máy bay *MiG – 31* có nhiệm vụ bay vào khu vực không phận bị hạn chế để thăm dò. Tại thời điểm máy bay chiến đấu *MiG – 31* bay ra khỏi khu vực không phận bị hạn chế thì khoảng cách giữa hai máy bay chiến đấu là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Bài tập 12

Bài toán: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị mỗi trục là km), một UAV (thiết bị bay không người

lái) thực hiện nhiệm vụ trinh sát, bay theo một đường thẳng Δ :
$$\begin{cases} x = 8 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$
 Ngoài

ra, có một vệ tinh viễn thám đang chuyển động theo một đường tròn. Biết rằng quỹ đạo vệ tinh nằm trên đường tròn giao tuyến giữa mặt cầu $(S): (x - 7)^2 + (y - 6)^2 + (z - 8)^2 = 91$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 6 = 0$. Tìm khoảng cách nhỏ nhất giữa UAV và vệ tinh trong suốt quá trình hoạt động (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của km).

Bài tập 13

Bài toán: Trong hệ trục $Oxyz$ cho trước (đơn vị trên trục là mét), cho một trạm thu phát sóng 5G có bán kính vùng phủ sóng của trạm ở ngưỡng 600 m được đặt ở vị trí $I(200; 450; 60)$. Tìm giá trị lớn nhất của m (làm tròn đến hàng đơn vị) để một người dùng điện thoại ở vị trí $A(m + 100; m + 370; 0)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm nói trên.

Bài tập 14

Bài toán: Trong không gian $Oxyz$ với đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét. Một hạt chuyển động với vận tốc không đổi 1 m/s từ điểm $A(1; -2; 6)$ sau đó bay thẳng và va chạm với mặt phẳng $(P): z + 3 = 0$ tại điểm M , 6 giây sau hạt đập thẳng và va chạm với điểm N thuộc mặt phẳng $(Q): z - 3 = 0$ và cuối cùng từ N hạt bay thẳng đến vị trí điểm $B(-2; 4; 9)$. Hỏi quãng đường hạt chuyển động từ điểm A đến điểm B ngắn nhất là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Bài tập 15

Bài toán: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị: mét), các véc-tơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các véc-tơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz . Một con chim ung đang bay lượn trên bầu trời. Một trạm quan trắc cố định được đặt tại điểm $N(5; -7; 10)$ đang quan sát con chim đó. Tại thời điểm $t = 0$ (giây) kể từ lúc bắt đầu quan sát, con chim đang ở vị trí $M(2; -1; 5)$. Vận tốc của chim thay đổi theo thời gian t (giây) bởi công thức $v(t) = 2t + C$ (m/s), với C là hằng số dương. Sau 5 giây, chim đã bay được quãng đường 30 mét. Biết rằng hướng bay của chim luôn song song với véc-tơ $\vec{u} = (1; -2; 2)$. Tại vị trí mà trạm quan trắc gần con chim nhất thì nó đã bay được bao nhiêu giây kể từ thời điểm quan sát (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bài tập 16

Bài toán: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, giả sử mặt đất trùng với mặt phẳng (Oxy) . Một bóng đèn trang trí dạng khối cầu có tâm $I(-1; 2; 4)$ và bán kính R được treo cố định lên trần nhà (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là m). Một con kiến bò tùy ý trên bóng đèn và một con kiến khác bò tùy ý trên mặt đất, giả sử véc-tơ tạo bởi tọa độ vị trí của 2 con kiến luôn cùng phương với đường thẳng có phương trình $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{2}$ (coi mỗi con kiến là một điểm). Biết lúc 2 con kiến gần nhau nhất có khoảng cách bằng $\frac{57}{10}$ (m). Bán kính của khối cầu có độ dài bao nhiêu cm?

Bài tập 17

Bài toán: Tại một công ty xăng dầu, người kĩ sư xây dựng cần thiết kế một bồn chứa xăng hình cầu. Trên bản thiết kế, trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, bồn chứa hình cầu (S) có tâm $I(10; 16; 12)$, bán kính $R = \sqrt{101}$. Mặt đất chính là mặt phẳng (Oxy). Từ điểm $A(5; 0; 0)$ người kĩ sư thiết kế một cầu thang thứ nhất đi thẳng lên đến mặt cầu tại điểm B thuộc mặt cầu, sao cho cầu thang AB là đường thẳng tiếp xúc mặt cầu (S) tại điểm B (hoành độ điểm B thỏa $x_B > 10$). Biết rằng đường thẳng AB tạo với mặt đất (Oxy) một góc nhọn α có $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Sau đó người kĩ sư thiết kế một cầu thang thứ hai có dạng cung tròn đi dọc theo mặt cầu, đi từ điểm B lên tới đỉnh cao nhất của mặt cầu so với mặt đất. Gọi T là tổng độ dài của cả hai cầu thang được thiết kế. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của T (không tính kích thước của nguyên vật liệu được sử dụng để làm hai đoạn cầu thang nói trên) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Bài tập 18

Bài toán: Xét một chiếc bàn phẳng, có hai viên bi hình cầu được đặt trên mặt bàn. Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt bàn, trục Oz hướng thẳng đứng lên trên so với mặt bàn và mỗi đơn vị trên các trục tương ứng với 1 cm. Ban đầu 2 viên bi này đứng yên trên mặt bàn, tâm của chúng lần lượt trùng với các điểm $I(-11; 5; 3)$ và $J(13; -2; 5)$. Tại một thời điểm, người ta đồng thời tác động cho 2 viên bi lăn về phía nhau trên mặt bàn theo cùng một đường thẳng với tốc độ không đổi là 5 cm/s và 4 cm/s (viên bi nhỏ hơn có tốc độ lớn hơn). Hỏi sau bao nhiêu giây kể từ khi tác động thì hai viên bi va chạm với nhau? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bài tập 19

Bài toán: Trong không gian $Oxyz$, hai trạm phát sóng di động được đặt lần lượt tại hai vị trí X và Y (đơn vị: km). Vùng phủ sóng của trạm X là một hình cầu có tâm $I(1; -1; 3)$, bán kính $R = 2$; còn vùng phủ sóng của trạm Y là một hình cầu có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6z + 7 = 0$. Hai vùng phủ sóng này giao nhau tạo thành một đường tròn nằm trên mặt phẳng (P) . Hai thiết bị giám sát M và N hoạt động trong khu vực giao nhau này và luôn duy trì khoảng cách giữa chúng là 1 km. Có hai thiết bị thu phát sóng di động được đặt lần lượt tại hai vị trí $A(0; -2; 0)$ và $B(3; 4; 5)$. Tính tổng khoảng cách nhỏ nhất từ trạm phát sóng A đến thiết bị M và từ trạm phát sóng B đến thiết bị N (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Bài tập 20

Bài toán: Ở trung tâm nghiên cứu X có một thiết bị được đặt trên một quả đồi thuộc vùng rừng núi để đo các thông số về thời tiết khí tượng của vùng đó (nhiệt độ, áp suất khí quyển, độ ẩm, mây, gió, mưa...). Cấu tạo bên ngoài của thiết bị gồm hai mặt cầu cắt nhau là (S_1) có tâm I , bán kính bằng 4 m và mặt cầu (S_2) có tâm J , bán kính bằng 2 m. Để đo các thông số cần thiết, người ta lắp đặt một tấm thiết bị điện tử hình chữ nhật (R) luôn tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1) , (S_2) và có thể di chuyển quanh các chỏm cầu để truyền tín hiệu tới hộp điều hành (đường truyền không dây). Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian với độ dài đơn vị trên mỗi trục tọa độ là 1 m và $O(0; 0; 0)$ là vị trí hộp điều hành thiết bị thì $I(2; 1; 1)$ và $J(2; 1; 5)$. Khi khoảng cách từ O đến tấm thiết bị điện tử (R) ngắn nhất là lúc đường truyền tín hiệu tốt nhất. Khoảng cách ngắn nhất này bằng bao nhiêu mét? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm, tham khảo mô tả thiết bị như hình trên).

