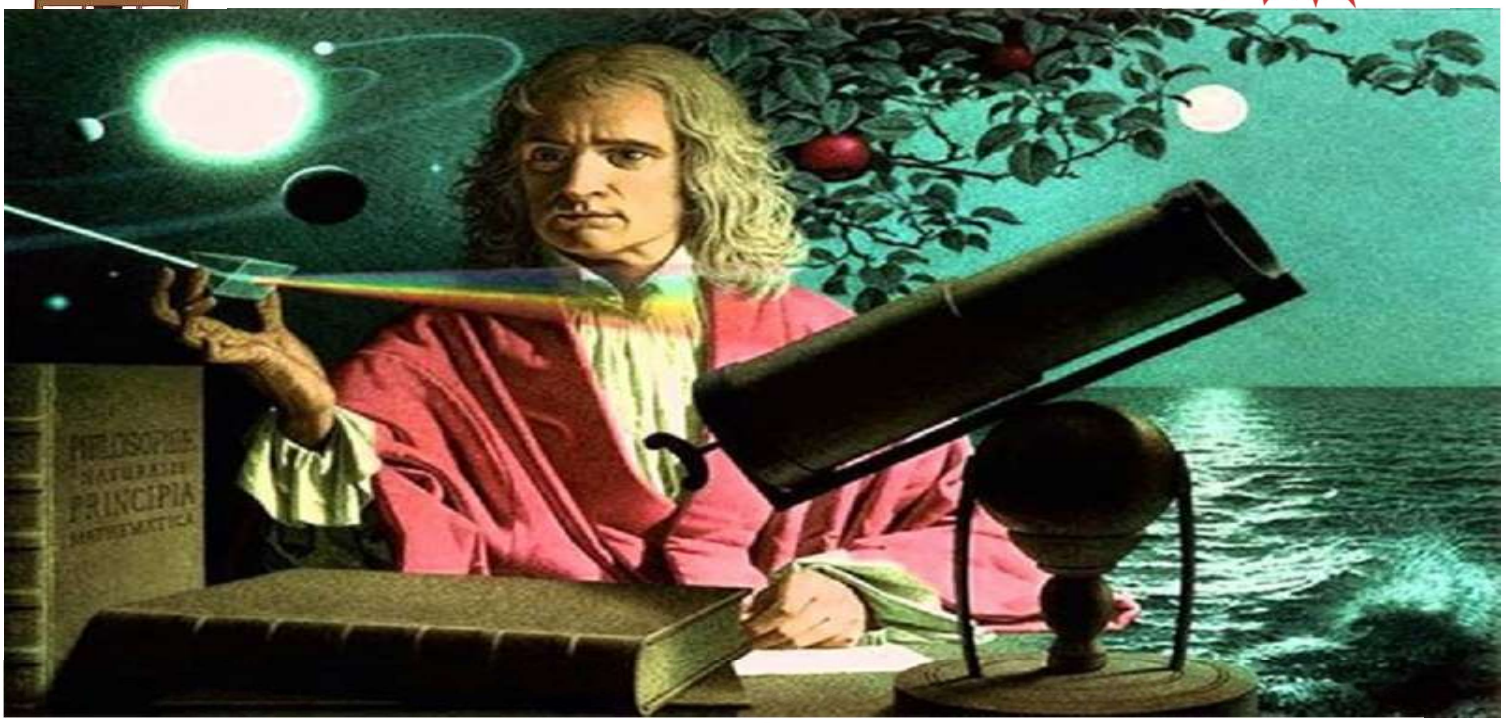


LỚP TOÁN THẦY CƯ- XÃ TẮC- TP HUẾ

Trung tâm ứng dụng CN và dạy học MTC

SĐT: 0834 332 133

NEW



Bài giảng TOÁN 11

(Từ cơ bản đến nâng cao)

Bản Có lời giải dành cho giáo viên

Năm học 2022-2023

TOANTHAYCU.COM

CHƯƠNG I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. LÝ THUYẾT

I – ĐỊNH NGHĨA

1) Hàm số sin

Quy tắc đặt tương ứng với mỗi số thực x với số thực $\sin x$

$$\begin{aligned}\sin:\ &\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ &x\mapsto y=\sin x\end{aligned}$$

được gọi là hàm số sin, kí hiệu là $y=\sin x.$

Tập xác định của hàm số $\sin$ là $\mathbb{R}.$

2) Hàm số côsin

Quy tắc đặt tương ứng với mỗi số thực x với số thực $\cos x$

$$\begin{aligned}\cos:\ &\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ &x\mapsto y=\cos x\end{aligned}$$

được gọi là hàm số sin, kí hiệu là $y=\cos x.$

Tập xác định của hàm số cô $\sin$ là $\mathbb{R}.$

3) Hàm số tang

Hàm số tang là hàm số được xác định bởi công thức $y=\dfrac{\sin x}{\cos x}\ (\cos x\neq 0)$, kí hiệu là $y=\tan x.$

Tập xác định của hàm số $y=\tan x$ là $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}.$

4) Hàm số côtang

Hàm số côtang là hàm số được xác định bởi công thức $y=\dfrac{\cos x}{\sin x}\ (\sin x\neq 0)$, kí hiệu là $y=\cot x.$

Tập xác định của hàm số $y=\cot x$ là $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}.$

II – TÍNH TUẦN HOÀN VÀ CHU KÌ CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1) Định nghĩa

Hàm số $y=f(x)$ có tập xác định D được gọi là hàm số tuần hoàn, nếu tồn tại một số $T\neq 0$ sao cho với mọi $x\in\mathrm{D}$ ta có:

- $x-T\in\mathrm{D}$ và $x+T\in\mathrm{D}.$

- $f(x+T)=f(x)$.

Số dương T nhỏ nhất thỏa mãn các tính chất trên được gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn đó.

Người ta chứng minh được rằng hàm số $y=\sin x$ tuần hoàn với chu kì $T=2\pi$; hàm số $y=\cos x$ tuần hoàn với chu kì $T=2\pi$; hàm số $y=\tan x$ tuần hoàn với chu kì $T=\pi$; hàm số $y=\cot x$ tuần hoàn với chu kì $T=\pi$.

2) Chú ý

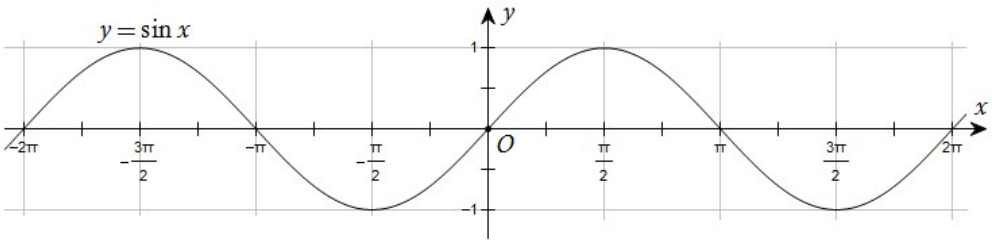
- Hàm số $y=\sin(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0=\dfrac{2\pi}{|a|}$.
- Hàm số $y=\cos(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0=\dfrac{2\pi}{|a|}$.
- Hàm số $y=\tan(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0=\dfrac{\pi}{|a|}$.
- Hàm số $y=\cot(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0=\dfrac{\pi}{|a|}$.
- Hàm số $y=f_1(x)$ tuần hoàn với chu kì T_1 và hàm số $y=f_2(x)$ tuần hoàn với chu kì T_2 thì hàm số $y=f_1(x)\pm f_2(x)$ tuần hoàn với chu kì T_0 là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2.

Lưu ý 2 số thực không xác đinh được bội chung nn, nên là $T_0=mT_1=nT_2$ với m,n là 2 số tự nhiên nguyên tố cùng nhau)

III – SỰ BIẾN THIÊN VÀ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

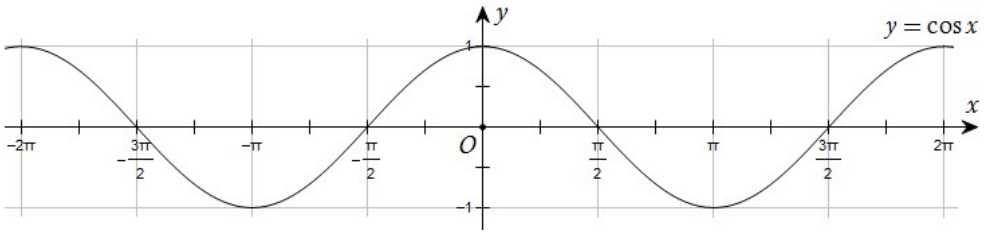
1) Hàm số $y=\sin x$

- Tập xác định $\mathrm{D}=\mathbb{R}$, có nghĩa và xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$;
- Tập giá trị $T=[-1;1]$, có nghĩa $-1\le\sin x\le 1$;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π, có nghĩa $\sin(x+k2\pi)=\sin x$ với $k\in\mathbb{Z}$;
- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\right), k\in\mathbb{Z}$;
- Là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.



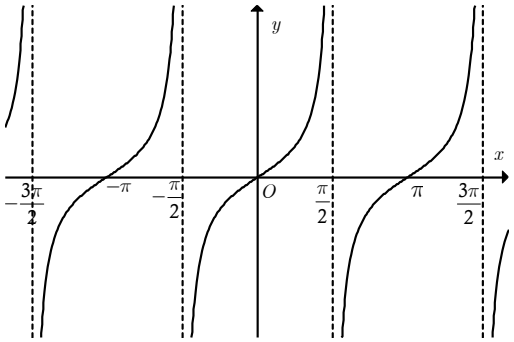
2) Hàm số $y=\cos x$

- Tập xác định $D=\mathbb{R}$, có nghĩa và xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.
- Tập giá trị $T=[-1;1]$, có nghĩa $-1\le\cos x\le 1$;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π, có nghĩa $\cos(x+k2\pi)=\cos x$ với $k\in\mathbb{Z}$;
- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi+k2\pi;k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi;\pi+k2\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$;
- Là hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.



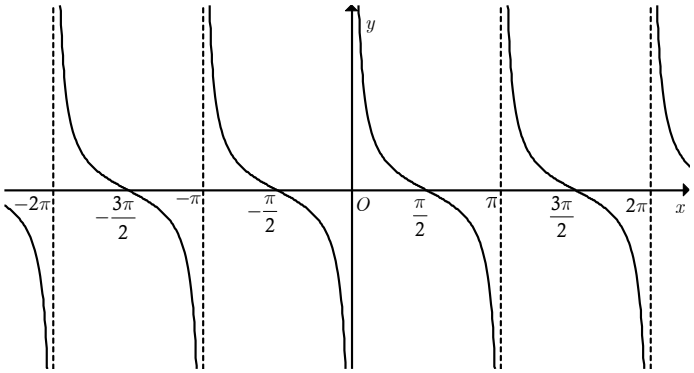
3) Hàm số $y=\tan x$

- Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$;
- Tập giá trị $T=\mathbb{R}$;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì π, có nghĩa $\tan(x+k\pi)=\tan x$ với $k\in\mathbb{Z}$;
- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$;
- Là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.



4) Hàm số $y=\cot x$

- Tập xác định $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$;
- Tập giá trị $T=\mathbb{R}$;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì π, có nghĩa $\tan(x+k\pi)=\tan x$ với $k\in\mathbb{Z}$;
- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(k\pi;\pi+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$;
- Là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.



B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm tập xác đinh của hàm số

1. Phương pháp

Để tìm tập xác định của hàm số ta cần lưu ý các điểm sau

- $y=\sqrt{u(x)}$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x)\ge 0$.
- $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ có nghĩa khi và chỉ $u(x)$, $v(x)$ xác định và $v(x)\ne 0$.
- $y=\dfrac{u(x)}{\sqrt{v(x)}}$ có nghĩa khi và chỉ $u(x)$, $v(x)$ xác định và $v(x)>0$.
- Hàm số $y=\sin x$, $y=\cos x$ xác định trên $\mathbb{R}$ và tập giá trị của nó là:
  $-1\le\sin x\le 1$; $-1\le\cos x\le 1$.

  Như vậy, $y=\sin[u(x)]$, $y=\cos[u(x)]$ xác định khi và chỉ khi $u(x)$ xác định.
- $y=\tan u(x)$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x)\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$
- $y=\cot u(x)$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x)\ne k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

2. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\sin\left(\frac{5x}{x^2-1}\right)$; b) $y=\cos\sqrt{4-x^2}$; d) $y=\sqrt{2-\sin x}$.

Giải

a) Hàm số $y=\sin\left(\frac{5x}{x^2-1}\right)$ xác định $\Leftrightarrow x^2-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq\pm 1.$

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$.

b) Hàm số $y=\cos\sqrt{x^2-4}$ xác định $\Leftrightarrow 4-x^2\geq 0\Leftrightarrow x^2\leq 4\Leftrightarrow -2\leq x\leq 2.$

Vậy $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-2\leq x\leq 2\}$.

c) Ta có: $-1\leq \sin x\leq 1\Rightarrow 2-\sin x>0$.

Do đó, hàm số luôn luôn xác định hay $D=\mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; b) $y=\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$; c) $y=\frac{\sin x}{\cos(x-\pi)}$; d) $y=\frac{1}{\tan x-1}$.

Giải

a) Hàm số $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ xác định $\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{2\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b) Hàm số $y=\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ xác định $\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3}\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq-\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

c) Hàm số $y=\frac{\sin x}{\cos(x-\pi)}$ xác định $\Leftrightarrow\cos(x-\pi)\neq 0\Leftrightarrow x-\pi\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{3\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Vậy $y=g(x)$

d) Hàm số $y=\frac{1}{\tan x-1}$ xác định $\tan x\neq 1\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Ví dụ 3. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\cos 2x+\dfrac{1}{\cos x}$; b) $y=\dfrac{3\cos 2x}{\sin 3x\cos 3x}$.

Giải

a) Hàm số $y=\cos 2x+\dfrac{1}{\cos x}$ xác định $\Leftrightarrow \cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}.$

b) Hàm số $y=\dfrac{3\cos 2x}{\sin 3x\cos 3x}$ xác định $\Leftrightarrow$

$\sin 3x\cos 3x\neq 0\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin 6x\neq 0\Leftrightarrow 6x\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq \dfrac{k\pi}{6},k\in\mathbb{Z}.$

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{6},k\in\mathbb{Z}\right\}.$

Ví dụ 4. Tìm m để hàm số sau đây xác định trên $\mathbb{R}$: $y=\sqrt{2m-3\cos x}$.

Giải

Hàm số đã cho xác định trên R khi và chỉ khi $2m-3\cos x\geq 0\Leftrightarrow \cos x\leq \dfrac{2m}{3}$

Bất đẳng thức trên đúng với mọi x khi $1\leq \dfrac{2m}{3}\Leftrightarrow m\geq \dfrac{3}{2}.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\dfrac{2021}{\sin x}$.

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}.$ **B.** $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}.$

C. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}.$ **D.** $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}.$

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

Vật tập xác định $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}.$

Câu 2. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\dfrac{1+\sin x}{\cos x-1}$.

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

B. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

D. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{k2\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\cos x-1\neq 0\Leftrightarrow\cos x\neq 1\Leftrightarrow x\neq k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{k2\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

Câu 3. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\dfrac{\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$.

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

C. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{(1+2k)\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{(1+2k)\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định $\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\neq 0\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{2}\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 4. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\dfrac{2021}{\sin x-\cos x}$.

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

B. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định $\Leftrightarrow\sin x-\cos x\neq 0\Leftrightarrow\tan x\neq 1\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 5. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\cot\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin 2x$.

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B. $\mathrm{D}=\varnothing$.

C. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{4}\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 6. Tìm tập xác định D của hàm số $y=3\tan^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$.

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định $\Leftrightarrow\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0\Leftrightarrow\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{3\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 7. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\frac{3\tan x-5}{1-\sin^2 x}$.

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pi+k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.

D. $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định khi và chỉ khi $1-\sin^2 x\neq 0$ và $\tan x$ xác định

$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2 x\neq 1\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 8. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{\sin x+2}$.

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}$. **B.** $\mathrm{D}=[-2;+\infty)$. **C.** $\mathrm{D}=[0;2\pi]$. **D.** $\mathrm{D}=\varnothing$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $-1\le \sin x\le 1 \longrightarrow 1\le \sin x+2\le 3, \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó luôn tồn tại căn bậc hai của $\sin x+2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Vậy tập xác định $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

Câu 9. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{\sin x-2}$.

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$. **C.** $\mathrm{D}=[-1;1]$. **D.** $\mathrm{D}=\varnothing$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $-1\le \sin x\le 1 \longrightarrow -3\le \sin x-2\le -1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó không tồn tại căn bậc hai của $\sin x-2$.

Vậy tập xác định $\mathrm{D}=\varnothing$.

Câu 10. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin x}}$.

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$. **B.** $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$. **D.** $\mathrm{D}=\varnothing$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định khi và chỉ khi $1-\sin x>0\Leftrightarrow \sin x<1$. $(*)$

Mà $-1\le \sin x\le 1$ nên $(*)\Leftrightarrow \sin x\ne 1\Leftrightarrow x\ne\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 11. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{1-\sin 2x}-\sqrt{1+\sin 2x}$.

A. $\mathrm{D}=\varnothing$. **B.** $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

C. $\mathrm{D}=\left[\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\right], k\in\mathbb{Z}$. **D.** $\mathrm{D}=\left[\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi;\dfrac{13\pi}{6}+k2\pi\right], k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $-1 \le \sin 2x \le 1 \Rightarrow \begin{cases} 1+\sin 2x \ge 0 \\ 1-\sin 2x \ge 0 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}.$

Vậy tập xác định $\mathrm{D} = \mathbb{R}.$

Câu 12. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \tan\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right).$

A. $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

B. $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

C. $\mathrm{D} = \mathbb{R}.$

D. $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\frac{\pi}{2}.\cos x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \cos x \ne 1 + 2k.$ $(*)$

Do $k \in \mathbb{Z}$ nên $(*) \Leftrightarrow \cos x \ne \pm 1 \Leftrightarrow \sin x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy tập xác định $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

Dạng 2: Xét tính chẵn lẻ của hàm số

1. Phương pháp:

Giả sử ta cần xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y = f(x)$

- Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số; kiểm chứng D là tập đối xứng qua số 0 tức là $y = sinx + cosx = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ (1)
- Bước 2: Tính $f(-x)$ và so sánh $f(-x)$ với $f(x)$
  - Nếu $f(-x) = f(x)$ thì $f(x)$ là hàm số chẵn trên D (2)
  - Nếu $f(-x) = -f(x)$ thì $f(x)$ là hàm số lẻ trên D (3)

Chú ý:

- Nếu điều kiện (1) không nghiệm đúng thì $f(x)$ là hàm không chẵn và không lẻ trên D;
- Nếu điều kiện (2) và (3) không nghiệm đúng, thì $f(x)$ là hàm không chẵn và cũng không lẻ trên D.

Lúc đó, để kết luận $f(x)$ là hàm không chẵn và không lẻ ta chỉ cần chỉ ra điểm $x_0 \in D$ sao cho $\begin{cases} f(-x_0) \ne f(x_0) \\ f(-x_0) \ne -f(x_0) \end{cases}$

2. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) y = sin2x; b) y = $\tan|x|$; c) $y = sin^4 x$.

Giải

a) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có: $f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có: $f(-x) = \tan|-x| = \tan|x| = f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có: $f(-x) = \sin^4(-x) = \sin^4 x = f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Ví dụ 2. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) y = tanx + cotx; b) y = sinx.cosx.

Giải

a) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có: $f(-x) = \tan(-x) + \cot(-x) = -\tan x - \cot x = -(\tan x + \cot x) = -f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có: $f(-x) = \sin(-x).\cos(-x) = -\sin x \cos x = -f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Ví dụ 3. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) y = 2sinx + 3; b) $y = sinx + cosx$.

Giải

a) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có:

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)+3=1$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+3=5$

Nhận thấy $\begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\neq f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\neq -f\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

Do đó hàm số không chẵn không lẻ.

b) TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Ta có: $y=sinx+cosx=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=0;\quad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$

Nhận thấy $\begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\neq f\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\neq -f\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$

Do đó hàm số không chẵn không lẻ.

Ví dụ 4. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y=\frac{\sin x-\tan x}{\sin x+\cot x}$; b) $y=\frac{\cos^3 x+1}{\sin^3 x}$.

Giải

a) Hàm số xác định khi

$$\begin{cases} \cos x\neq 0 \\ \sin x\neq 0 \\ \sin x+\cot x\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \cos x\neq 0 \\ \sin x\neq 0 \\ \sin^2 x+\cos x\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \cos x\neq 0 \\ \sin x\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}.$$

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$ Suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Ta có: $f(-x)=\frac{\sin(-x)-\tan(-x)}{\sin(-x)+\cot(-x)}=\frac{-\sin x+\tan x}{-\sin x-\cot x}=\frac{\sin x-\tan x}{\sin x+\cot x}=f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

b) TXĐ: $\cot x=\pm 1\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi\ \ (k\in Z)$ Suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Ta có: $f(-x)=\dfrac{\cos^3(-x)+1}{\sin^3(-x)}=\dfrac{\cos^3 x+1}{-\sin^3 x}=-\dfrac{\cos^3 x+1}{\sin^3 x}=-f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Ví dụ 5. Xác định tham số m để hàm số sau: $y=f(x)=3m\sin 4x+\cos 2x$ là hàm số chẵn.

Giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Ta có:

$f(-x)=3m\sin(-4x)+\cos(-2x)=-3m\sin 4x+\cos 2x$

Để hàm số đã cho là hàm số chẵn thì:

$f(-x)=f(x),\forall x\in D\Leftrightarrow 3m\sin 4x+\cos 2x=-3m\sin 4x+\cos 2x,\forall x\in D$

$\Leftrightarrow 6m\sin 4x=0\Leftrightarrow m=0$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y=\sin x$. **B.** $y=\cos x$. **C.** $y=\tan x$. **D.** $y=\cot x$.

Lời giải

Chọn B

Nhắc lại kiến thức cơ bản:

- Hàm số $y=\sin x$ là hàm số lẻ.
- Hàm số $y=\cos x$ là hàm số chẵn.
- Hàm số $y=\tan x$ là hàm số lẻ.
- Hàm số $y=\cot x$ là hàm số lẻ.

Vậy B là đáp án đúng.

Câu 2: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y=-\sin x$. **B.** $y=\cos x-\sin x$. **C.** $y=\cos x+\sin^2 x$. **D.** $y=\cos x\sin x$.

Lời giải

Chọn C

Tất các các hàm số đều có TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Do đó $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

Bây giờ ta kiểm tra $f(-x)=f(x)$ hoặc $f(-x)=-f(x)$.

- Với $y=f(x)=-\sin x$. Ta có $f(-x)=-\sin(-x)=\sin x=-(-\sin x)$

$\longrightarrow f(-x)=-f(x)$. Suy ra hàm số $y=-\sin x$ là hàm số lẻ.

● Với $y=f(x)=\cos x-\sin x.$ Ta có $f(-x)=\cos(-x)-\sin(-x)=\cos x+\sin x$

$\longrightarrow f(-x)\neq\{-f(x),f(x)\}$. Suy ra hàm số $y=\cos x-\sin x$ không chẵn không lẻ.

● Với $y=f(x)=\cos x+\sin^2 x$. Ta có $f(-x)=\cos(-x)+\sin^2(-x)$

$=\cos(-x)+[\sin(-x)]^2=\cos x+[-\sin x]^2=\cos x+\sin^2 x$

$\longrightarrow f(-x)=f(x)$. Suy ra hàm số $y=\cos x+\sin^2 x$ là hàm số chẵn.

● Với $y=f(x)=\cos x\sin x.$ Ta có $f(-x)=\cos(-x).\sin(-x)=-\cos x\sin x$

$\longrightarrow f(-x)=-f(x)$. Suy ra hàm số $y=\cos x\sin x$ là hàm số lẻ.

Câu 3: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y=\sin 2x.$ **B.** $y=x\cos x.$ **C.** $y=\cos x.\cot x.$ **D.** $y=\dfrac{\tan x}{\sin x}.$

Lời giải

Chọn D

● Xét hàm số $y=f(x)=\sin 2x.$

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Do đó $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D.$

Ta có $f(-x)=\sin(-2x)=-\sin 2x=-f(x)\longrightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

● Xét hàm số $y=f(x)=x\cos x.$

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Do đó $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D.$

Ta có $f(-x)=(-x).\cos(-x)=-x\cos x=-f(x)\longrightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

● Xét hàm số $y=f(x)=\cos x\cot x.$

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\}.$ Do đó $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D.$

Ta có $f(-x)=\cos(-x).\cot(-x)=-\cos x\cot x=-f(x)\longrightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

● Xét hàm số $y=f(x)=\dfrac{\tan x}{\sin x}.$

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\dfrac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})\right\}.$ Do đó $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D.$

Ta có $f(-x)=\dfrac{\tan(-x)}{\sin(-x)}=\dfrac{-\tan x}{-\sin x}=\dfrac{\tan x}{\sin x}=f(x)\longrightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 4: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y=|\sin x|$. **B.** $y=x^2\sin x$. **C.** $y=\dfrac{x}{\cos x}$. **D.** $y=x+\sin x$.

Lời giải

Chọn A

Ta kiểm tra được A là hàm số chẵn, các đáp án B, C, D là hàm số lẻ.

Câu 5: Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua trục tung?

A. $y=\sin x\cos 2x$. **B.** $y=\sin^3 x.\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$. **C.** $y=\dfrac{\tan x}{\tan^2 x+1}$. **D.** $y=\cos x\sin^3 x$.

Lời giải

Chọn B

Ta dễ dàng kiểm tra được A, C, D là các hàm số lẻ nên có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O.

Xét đáp án B, ta có $y=f(x)=\sin^3 x.\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin^3 x.\sin x=\sin^4 x$. Kiểm tra được đây là hàm số chẵn nên có đồ thị đối xứng qua trục tung.

Câu 6: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y=\cos x+\sin^2 x$. **B.** $y=\sin x+\cos x$.

C. $y=-\cos x$. **D.** $y=\sin x.\cos 3x$.

Lời giải

Chọn D

Ta kiểm tra được đáp án A và C là các hàm số chẵn. Đáp án B là hàm số không chẵn, không lẻ. Đáp án D là hàm số lẻ.

Câu 7: Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

A. $y=\cot 4x$. **B.** $y=\dfrac{\sin x+1}{\cos x}$. **C.** $y=\tan^2 x$. **D.** $y=|\cot x|$.

Lời giải

Chọn A

Ta kiểm tra được đáp án A là hàm số lẻ nên có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

Đáp án B là hàm số không chẵn, không lẻ. Đáp án C và D là các hàm số chẵn.

Câu 8: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$. **B.** $y=\sin^2 x$. **C.** $y=\dfrac{\cot x}{\cos x}$. **D.** $y=\dfrac{\tan x}{\sin x}$.

Lời giải

Chọn C

Viết lại đáp án A là $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x.$

Ta kiểm tra được đáp án A, B và D là các hàm số chẵn. Đáp án C là hàm số lẻ.

Câu 9: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y=1-\sin^2 x.$ **B.** $y=|\cot x|.\sin^2 x.$

C. $y=x^2\tan 2x-\cot x.$ **D.** $y=1+|\cot x+\tan x|.$

Lời giải

Chọn C

Ta kiểm tra được đáp án A, B và D là các hàm số chẵn. Đáp án C là hàm số lẻ.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=\sin 2x$ và $g(x)=\tan^2 x.$ Chọn mệnh đề đúng

A. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ.

B. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn.

C. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số chẵn.

D. $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm số lẻ.

Lời giải

Chọn B

- Xét hàm số $f(x)=\sin 2x.$

TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$. Do đó $\forall x\in \mathrm{D}\Rightarrow -x\in \mathrm{D}.$

Ta có $f(-x)=\sin(-2x)=-\sin 2x=-f(x)\longrightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

- Xét hàm số $g(x)=\tan^2 x.$

TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\right\}.$ Do đó $\forall x\in \mathrm{D}\Rightarrow -x\in \mathrm{D}.$

Ta có $g(-x)=\left[\tan(-x)\right]^2=(-\tan x)^2=\tan^2 x=g(x)\longrightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 11: Cho hai hàm số $f(x)=\frac{\cos 2x}{1+\sin^2 3x}$ và $g(x)=\frac{|\sin 2x|-\cos 3x}{2+\tan^2 x}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $f(x)$ lẻ và $g(x)$ chẵn. **B.** $f(x)$ và $g(x)$ chẵn.

C. $f(x)$ chẵn, $g(x)$ lẻ. **D.** $f(x)$ và $g(x)$ lẻ.

Lời giải

Chọn B

● Xét hàm số $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{1+\sin^2 3x}$.

TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$. Do đó $\forall x\in \mathrm{D}\Rightarrow -x\in \mathrm{D}$.

Ta có $f(-x)=\dfrac{\cos(-2x)}{1+\sin^2(-3x)}=\dfrac{\cos 2x}{1+\sin^2 3x}=f(x)\longrightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.

● Xét hàm số $g(x)=\dfrac{|\sin 2x|-\cos 3x}{2+\tan^2 x}$.

TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\right\}$. Do đó $\forall x\in \mathrm{D}\Rightarrow -x\in \mathrm{D}$.

Ta có $g(-x)=\dfrac{|\sin(-2x)|-\cos(-3x)}{2+\tan^2(-x)}=\dfrac{|\sin 2x|-\cos 3x}{2+\tan^2 x}=g(x)\longrightarrow g(x)$ là hàm số chẵn.

Vậy $f(x)$ và $g(x)$ chẵn.

Câu 12: Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

A. $y=\dfrac{1}{\sin^3 x}$. **B.** $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. **C.** $y=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$. **D.** $y=\sqrt{\sin 2x}$.

Lời giải

Chọn A

Viết lại đáp án B là $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)$.

Viết lại đáp án C là $y=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin x+\cos x$.

Kiểm tra được đáp án A là hàm số lẻ nên có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

Ta kiểm tra được đáp án B và C là các hàm số không chẵn, không lẻ.

Xét đáp án **D.**

● Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin 2x\ge 0\Leftrightarrow 2x\in[k2\pi;\pi+k2\pi]\Leftrightarrow x\in\left[k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right]$

$\longrightarrow D=\left[k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right]\ (k\in\mathbb{Z})$.

● Chọn $x=\dfrac{\pi}{4}\in \mathrm{D}$ nhưng $-x=-\dfrac{\pi}{4}\notin \mathrm{D}$. Vậy $y=\sqrt{\sin 2x}$ không chẵn, không lẻ.

Câu 13: Mệnh đề nào sau đây là **sai?**

A. Đồ thị hàm số $y=|\sin x|$ đối xứng qua gốc tọa độ O.

B. Đồ thị hàm số $y=\cos x$ đối xứng qua trục Oy.

C. Đồ thị hàm số $y=|\tan x|$ đối xứng qua trục Oy.

D. Đồ thị hàm số $y=\tan x$ đối xứng qua gốc tọa độ O.

Lời giải

Chọn A

Ta kiểm tra được hàm số $y=|\sin x|$ là hàm số chẵn nên có đồ thị đối xứng qua trục Oy.

Do đó đáp án A sai.

Dạng 3. Tìm giá trị lớn nhất và và giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác

1. Phương pháp:

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D

- $M=\max\limits_{D} f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\le M,\forall x\in D\\ \exists x_0\in D: f(x_0)=M\end{cases}$
- $m=\min\limits_{D} f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge m,\forall x\in D\\ \exists x_0\in D: f(x_0)=m\end{cases}$

Lưu ý:

- $-1\le \sin x\le 1;\ \ -1\le \cos x\le 1.$
- $0\le \sin^2 x\le 1;\ \ 0\le \cos^2 x\le 1.$
- $0\le \sqrt{\sin x}\le 1;\ \ 0\le \sqrt{\cos x}\le 1.$
- Dùng điều kiện có nghiệm của phương trình cơ bản
  - Phương trình bậc hai: $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm $x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases}\Delta\ge 0\\ a\ne 0\end{cases}$
  - Phương trình $a\sin x+b\cos x=c$ có nghiệm $x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a^2+b^2\ge c^2$
  - Nếu hàm số có dạng: $y=\dfrac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a_2\sin x+b_2\cos x+c_2}$

    Ta tìm miền xác định của hàm số rồi quy đồng mẫu số, đưa về phương trình $a\sin x+b\cos x=c$.

2. Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+1$; b) $y=2\sqrt{\cos x+1}-3$.

Giải

a) Ta có:

$$-1\le \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1\Rightarrow -2\le 2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 2\Rightarrow -1\le 2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1\le 3$$

Hay $-1\le y\le 3$. Suy ra:

$$Maxy=3 \text{ khi } \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$$

$$Miny=-1 \text{ khi } \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1\Leftrightarrow x=-\frac{3\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$$

b) Ta có:

$$-1\le \cos x\le 1\Rightarrow 0\le \cos x+1\le 2\Rightarrow 0\le \sqrt{\cos x+1}\le \sqrt{2}$$
$$\Rightarrow 0\le 2\sqrt{\cos x+1}\le 2\sqrt{2}\Rightarrow -3\le 2\sqrt{\cos x+1}-3\le 2\sqrt{2}-3$$

Hay $-3\le y\le 2\sqrt{2}-3$ Suy ra

$$Maxy=2\sqrt{2}-3 \text{ khi } \cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$$

$$Miny=-3 \text{ khi } \cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$$

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y=sinx+cosx$; b) $y=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$.

Giải

a) Ta có: $y=sinx+cosx=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow -\sqrt{2}\le y\le\sqrt{2}$.

Suy ra:

$$Maxy=\sqrt{2} \text{ khi } \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$$

$$Miny=-\sqrt{2} \text{ khi } \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1\Leftrightarrow x=-\frac{3\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$$

b) Ta có: $y=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

Suy ra: $-2\le y\le 2$. Do đó:

$$Maxy=2 \text{ khi } \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=1\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$$

$$Miny=-2 \text{ khi } \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=-1\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=3\sin x-2.$

A. $M=1,\ m=-5.$ **B.** $M=3,\ m=1.$

C. $M=2,\ m=-2.$ **D.** $M=0,\ m=-2.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $-1\le \sin x\le 1\longrightarrow -3\le 3\sin x\le 3\longrightarrow -5\le 3\sin x-2\le 1$

$\longrightarrow -5\le y\le 1\longrightarrow \begin{cases} M=1 \\ m=-5 \end{cases}.$

Câu 2: Tìm tập giá trị T của hàm số $y=3\cos 2x+5.$

A. $T=[-1;1].$ **B.** $T=[-1;11].$ **C.** $T=[2;8].$ **D.** $T=[5;8].$

Lời giải

Chọn C

Ta có $-1\le \cos 2x\le 1\longrightarrow -3\le 3\cos 2x\le 3\longrightarrow 2\le 3\cos 2x+5\le 8$

$\longrightarrow 2\le y\le 8\longrightarrow T=[2;8].$

Câu 3: Tìm tập giá trị T của hàm số $y=5-3\sin x.$

A. $T=[-1;1].$ **B.** $T=[-3;3].$ **C.** $T=[2;8].$ **D.** $T=[5;8].$

Lời giải

Chọn C

Ta có $-1\le \sin x\le 1\longrightarrow 1\ge -\sin x\ge -1\longrightarrow 3\ge -3\sin x\ge -3$

$\longrightarrow 8\ge 5-3\sin x\ge 2\longrightarrow 2\le y\le 8\longrightarrow T=[2;8].$

Câu 4: Hàm số $y=5+4\sin 2x\cos 2x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=5+4\sin 2x\cos 2x=5+2\sin 4x$.

Mà $-1\le \sin 4x\le 1\longrightarrow -2\le 2\sin 4x\le 2\longrightarrow 3\le 5+2\sin 4x\le 7$

$\longrightarrow 3\le y\le 7\xrightarrow{y\in\mathbb{Z}} y\in\{3;4;5;6;7\}$ nên y có 5 giá trị nguyên.

Câu 5: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=-\sqrt{2}\sin(2016x+2017)$.

A. $m=-2016\sqrt{2}.$ **B.** $m=-\sqrt{2}.$ **C.** $m=-1.$ **D.** $m=-2017\sqrt{2}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $-1\le \sin(2016x+2017)\le 1 \longrightarrow \sqrt{2}\ge -\sqrt{2}\sin(2016x+2017)\ge -\sqrt{2}.$

Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số là $-\sqrt{2}.$

Câu 6: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=\dfrac{1}{\cos x+1}.$

A. $m=\dfrac{1}{2}.$ **B.** $m=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$ **C.** $m=1.$ **D.** $m=\sqrt{2}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $-1\le \cos x\le 1$.

Ta có $\dfrac{1}{\cos x+1}$ nhỏ nhất khi và chỉ chi $\cos x$ lớn nhất $\Leftrightarrow \cos x=1$.

Khi $\cos x=1\longrightarrow y=\dfrac{1}{\cos x+1}=\dfrac{1}{2}.$

Câu 7: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin x+\cos x$. Tính $P=M-m.$

A. $P=4.$ **B.** $P=2\sqrt{2}.$ **C.** $P=\sqrt{2}.$ **D.** $P=2.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right).$

Mà $-1\le \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\le 1\longrightarrow -\sqrt{2}\le \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\le \sqrt{2}$

$\longrightarrow \begin{cases} M=\sqrt{2} \\ m=-\sqrt{2} \end{cases} \rightarrow P=M-m=2\sqrt{2}.$

Câu 8: Tập giá trị T của hàm số $y=\sin 2017x-\cos 2017x.$

A. $T=[-2;2].$ **B.** $T=[-4034;4034].$ **C.** $T=\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right].$ **D.** $T=\left[0;\sqrt{2}\right].$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=\sin 2017x-\cos 2017x=\sqrt{2}\sin\left(2017x-\dfrac{\pi}{4}\right).$

Mà $-1\le \sin\left(2017x-\frac{\pi}{4}\right)\le 1\longrightarrow -\sqrt{2}\le \sqrt{2}\sin\left(2017x-\frac{\pi}{4}\right)\le \sqrt{2}$

$\longrightarrow -\sqrt{2}\le y\le \sqrt{2}\longrightarrow T=\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right].$

Câu 9: Hàm số $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$, ta có

$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right).$

Ta có $-1\le \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\le 1\longrightarrow -1\le y\le 1\xrightarrow{y\in\mathbb{Z}} y\in\{-1;0;1\}.$

Câu 10: Hàm số $y=\sin^4 x-\cos^4 x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=x_0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0=k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **B.** $x_0=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

C. $x_0=\pi+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x_0=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y=\sin^4 x-\cos^4 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)=-\cos 2x.$

Mà $-1\le \cos 2x\le 1\longrightarrow -1\ge -\cos 2x\ge 1\longrightarrow -1\ge y\ge 1$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \cos 2x=1\Leftrightarrow 2x=k2\pi\Leftrightarrow x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$

Câu 11: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=1-2|\cos 3x|$.

A. $M=3,\ m=-1.$ **B.** $M=1,\ m=-1.$

C. $M=2,\ m=-2.$ **D.** $M=0,\ m=-2.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $-1\le \cos 3x\le 1\longrightarrow 0\le |\cos 3x|\le 1\longrightarrow 0\ge -2|\cos 3x|\ge -2$

$\longrightarrow 1\ge 1-2|\cos 3x|\ge -1\longrightarrow 1\ge y\ge -1\longrightarrow \begin{cases}M=1\\ m=-1\end{cases}.$

Câu 12: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=4\sin^2 x+\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

A. $M=\sqrt{2}$. **B.** $M=\sqrt{2}-1$.

C. $M=\sqrt{2}+1$. **D.** $M=\sqrt{2}+2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y=4\sin^2 x+\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=4\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)+\sin 2x+\cos 2x$

$=\sin 2x-\cos 2x+2=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+2.$

Mà $-1\le\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\le 1\longrightarrow -\sqrt{2}+2\le\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+2\le\sqrt{2}+2$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $2+\sqrt{2}$.

Câu 13: Tìm tập giá trị T của hàm số $y=\sin^6 x+\cos^6 x$.

A. $T=[0;2]$. **B.** $T=\left[\frac{1}{2};1\right]$. **C.** $T=\left[\frac{1}{4};1\right]$. **D.** $T=\left[0;\frac{1}{4}\right]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=\sin^6 x+\cos^6 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$

$=1-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{4}.\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x.$

Mà $-1\le\cos 4x\le 1\longrightarrow\frac{1}{4}\le\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x\le 1\longrightarrow\frac{1}{4}\le y\le 1.$

Câu 14: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của hàm số $y=\sin^2 x+2\cos^2 x$.

A. $M=3,\ m=0$. **B.** $M=2,\ m=0$. **C.** $M=2,\ m=1$. **D.** $M=3,\ m=1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=\sin^2 x+2\cos^2 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)+\cos^2 x=1+\cos^2 x$

Do $-1\le\cos x\le 1\longrightarrow 0\le\cos^2 x\le 1\longrightarrow 1\le 1+\cos^2 x\le 2\longrightarrow\begin{cases}M=2\\ m=1\end{cases}$.

Câu 15: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=\frac{2}{1+\tan^2 x}$.

A. $M=\frac{1}{2}.$ **B.** $M=\frac{2}{3}.$ **C.** $M=1.$ **D.** $M=2.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y=\frac{2}{1+\tan^2 x}=\frac{2}{\frac{1}{\cos^2 x}}=2\cos^2 x$.

Do $0\le\cos^2 x\le 1\longrightarrow 0\le y\le 2\longrightarrow M=2.$

Câu 16: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=8\sin^2 x+3\cos 2x$. Tính $P=2M-m^2.$

A. $P=1.$ **B.** $P=2.$ **C.** $P=112.$ **D.** $P=130.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=8\sin^2 x+3\cos 2x=8\sin^2 x+3\left(1-2\sin^2 x\right)=2\sin^2 x+3.$

Mà $-1\le\sin x\le 1\longrightarrow 0\le\sin^2 x\le 1\longrightarrow 3\le 2\sin^2 x+3\le 5$

$\longrightarrow 3\le y\le 5\longrightarrow\begin{cases}M=5\\m=3\end{cases}\longrightarrow P=2M-m^2=1.$

Câu 17: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x$.

A. $m=2-\sqrt{3}.$ **B.** $m=-1.$ **C.** $m=1.$ **D.** $m=-\sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y=2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x=1-\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x$

$=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+1=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+1$

$=2\left(\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\cos 2x\right)+1=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1.$

Mà $-1\le\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\le 1\longrightarrow -1\le 1+2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\le 3\longrightarrow -1\le y\le 3.$

Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số là $-1.$

Câu 18: Tìm tập giá trị T của hàm số $y=12\sin x-5\cos x.$

A. $T=[-1;1].$ **B.** $T=[-7;7].$ **C.** $T=[-13;13].$ **D.** $T=[-17;17].$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=12\sin x-5\cos x=13\left(\frac{12}{13}\sin x-\frac{5}{13}\cos x\right).$

Đặt $\frac{12}{13}=\cos\alpha\longrightarrow\frac{5}{13}=\sin\alpha$. Khi đó $y=13\left(\sin x\cos\alpha-\sin\alpha\cos x\right)=13\sin\left(x-\alpha\right)$

$\longrightarrow-13\le y\le 13\longrightarrow T=[-13;13].$

Câu 19: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=4\sin 2x-3\cos 2x.$

A. $M=3.$ **B.** $M=1.$ **C.** $M=5.$ **D.** $M=4.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=4\sin 2x-3\cos 2x=5\left(\frac{4}{5}\sin 2x-\frac{3}{5}\cos 2x\right).$

Đặt $\frac{4}{5}=\cos\alpha\longrightarrow\frac{3}{5}=\sin\alpha$. Khi đó $y=5\left(\cos\alpha\sin 2x-\sin\alpha\cos 2x\right)=5\sin\left(2x-\alpha\right)$

$\longrightarrow-5\le y\le 5\longrightarrow M=5.$

Câu 20: Gọi $M,\ m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^2 x-4\sin x+5$. Tính $P=M-2m^2.$

A. $P=1.$ **B.** $P=7.$ **C.** $P=8.$ **D.** $P=2.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y=\sin^2 x-4\sin x+5=\left(\sin x-2\right)^2+1.$

Do $-1\le\sin x\le 1\longrightarrow-3\le\sin x-2\le-1\longrightarrow 1\le\left(\sin x-2\right)^2\le 9$

$\longrightarrow 2\le\left(\sin x-2\right)^2+1\le 10\longrightarrow\begin{cases}M=10\\m=2\end{cases}P=M-2m^2=2.$

Câu 21: Hàm số $y=\cos^2 x-\cos x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=\cos^2 x-\cos x=\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}.$

Mà $-1\le\cos x\le 1\longrightarrow-\frac{3}{2}\le\cos x-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}\longrightarrow 0\le\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{9}{4}$

$\longrightarrow -\frac{1}{4} \le \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \le 2 \longrightarrow -\frac{1}{4} \le y \le 2 \xrightarrow{y \in \mathbb{Z}} y \in \{0;1;2\}$ nên có 3 giá trị thỏa mãn.

Câu 22: Hàm số $y = \cos^2 x + 2\sin x + 2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0 = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$ **B.** $x_0 = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

C. $x_0 = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$ **D.** $x_0 = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = \cos^2 x + 2\sin x + 2 = 1 - \sin^2 x + 2\sin x + 2$

$= -\sin^2 x + 2\sin x + 3 = -(\sin x - 1)^2 + 4.$

Mà $-1 \le \sin x \le 1 \longrightarrow -2 \le \sin x - 1 \le 0 \longrightarrow 0 \le (\sin x - 1)^2 \le 4$

$\longrightarrow 0 \ge -(\sin x - 1)^2 \ge -4 \longrightarrow 4 \ge -(\sin x - 1)^2 + 4 \ge 0$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0.

Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 23: Tìm giá trị lớn nhất M và nhất m của hàm số $y = \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1$

A. $M = 2,\ m = -2.$ **B.** $M = 1,\ m = 0.$

C. $M = 4,\ m = -1.$ **D.** $M = 2,\ m = -1.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y = \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1 = \sin^4 x - 2(1 - \sin^2 x) + 1 = (\sin^2 x + 1)^2 - 2.$

Do $0 \le \sin^2 x \le 1 \longrightarrow 1 \le \sin^2 x + 1 \le 2 \longrightarrow 1 \le (\sin^2 x + 1)^2 \le 4$

$\longrightarrow -1 \le (\sin^2 x + 1)^2 - 2 \le 2 \longrightarrow \begin{cases} M = 2 \\ m = -1 \end{cases}.$

Câu 24: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 4\sin^4 x - \cos 4x$.

A. $m = -3.$ **B.** $m = -1.$ **C.** $m = 3.$ **D.** $m = -5.$

Lời giải.

Chọn B

Ta có $y = 4\sin^4 x - \cos 4x = 4.\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 - (2\cos^2 2x - 1)$

$=-\cos^2 2x-2\cos 2x+2=-(\cos 2x+1)^2+3\le 3.$

Mà $-1\le\cos 2x\le 1\longrightarrow 0\le\cos 2x+1\le 2\longrightarrow 0\le(\cos 2x+1)^2\le 4$

$\longrightarrow -1\le-(\cos 2x+1)^2+3\le 3\longrightarrow m=-1.$

Câu 25: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=\sqrt{7-3\cos^2 x}$.

A. $M=\sqrt{10},\ m=2.$ **B.** $M=\sqrt{7},\ m=2.$ **C.** $M=\sqrt{10},\ m=\sqrt{7}.$ **D.** $M=0,\ m=1.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $-1\le\cos x\le 1\longrightarrow 0\le\cos^2 x\le 1$

$\longrightarrow 4\le 7-3\cos^2 x\le 7\longrightarrow 2\le\sqrt{7-3\cos^2 x}\le\sqrt{7}$.

Câu 26: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t của năm 2017 được cho bởi một hàm số $y=4\sin\left[\frac{\pi}{178}(t-60)\right]+10$ với $t\in\mathbb{Z}$ và $0<t\le 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

A. 28 tháng 5. **B.** 29 tháng 5. **C.** 30 tháng 5. **D.** 31 tháng 5.

Lời giải

Chọn B

Vì $\sin\left[\frac{\pi}{178}(t-60)\right]\le 1\longrightarrow y=4\sin\left[\frac{\pi}{178}(t-60)\right]+10\le 14.$

Ngày có ánh sáng mặt trời nhiều nhất $\Leftrightarrow y=14\Leftrightarrow\sin\left[\frac{\pi}{178}(t-60)\right]=1$

$\Leftrightarrow\frac{\pi}{178}(t-60)=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow t=149+356k.$

Do $0<t\le 365\longrightarrow 0<149+356k\le 365\Leftrightarrow-\frac{149}{356}<k\le\frac{54}{89}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k=0$.

Với $k=0\longrightarrow t=149$ rơi vào ngày 29 tháng 5 (vì ta đã biết tháng 1 và 3 có 31 ngày, tháng 4 có 30 ngày, riêng đối với năm 2017 thì không phải năm nhuận nên tháng 2 có 28 ngày hoặc dựa vào dữ kiện $0<t\le 365$ thì ta biết năm này tháng 2 chỉ có 28 ngày).

Câu 27: Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày bởi công thức $h=3\cos\left(\frac{\pi t}{8}+\frac{\pi}{4}\right)+12$. Mực nước của kênh cao nhất khi:

A. $t=13$ (giờ). **B.** $t=14$ (giờ). **C.** $t=15$ (giờ). **D.** $t=16$ (giờ).

Lời giải

. Chọn B

Mực nước của kênh cao nhất khi h lớn nhất

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{8}+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{8}+\frac{\pi}{4}=k2\pi \text{ với } 0<t\le 24 \text{ và } k\in\mathbb{Z}.$$

Lần lượt thay các đáp án, ta được đáp án B thỏa mãn

Vì với $t=14 \longrightarrow \Leftrightarrow \frac{\pi t}{8}+\frac{\pi}{4}=2\pi$ (đúng với $k=1\in\mathbb{Z}$).

Dạng 4. Tìm chu kì tuần hoàn của hàm số

1. Phương pháp

- Hàm số $y=\text{A}.\sin(ax+b)\ (\text{A}.a\neq 0)$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì $\text{T}=\frac{2\pi}{|a|}$
- Hàm số $y=\text{A}.\cos(ax+b)\ (\text{A}.a\neq 0)$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì $\text{T}=\frac{2\pi}{|a|}$
- Hàm số $y=\text{A}.\tan(ax+b)\ (\text{A}.a\neq 0)$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì $\text{T}=\frac{\pi}{|a|}$
- Hàm số $y=\text{A}.\cot(ax+b)\ (\text{A}.a\neq 0)$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì $\text{T}=\frac{\pi}{|a|}$
- Nếu hàm số $y=f(x)$ chỉ chứa các hàm số lượng giác có chu kì lần lượt là $\text{T}_1,\text{T}_2,...,\text{T}_n$ thì hàm số f có chu kì T là bội chung nhỏ nhất của $\text{T}_1,\text{T}_2,...,\text{T}_n$.
- Nếu hàm số $y=f(x)$ tuần hoàn với chu kì T thì hàm số $y=f(x)+c$ (c là hằng số) cũng là hàm số tuần hoàn với chu kì T.

2. Ví dụ mẫu

Câu 1: Tìm chu kì của hàm số $y=3\sin\frac{x}{2}$

Lời giải: .....
.....
.....

Câu 2: Tìm chu kì của hàm số $y=\cot\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$

Lời giải: .....
.....
.....

Câu 3: Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì (nếu có) của hàm số sau: $y=\cos^2 x-1$.

Lời giải: .....
.....
.....

.....
.....

Câu 4: Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì (nếu có) của hàm số sau: $y=\sin\left(\frac{2}{5}x\right).\cos\left(\frac{2}{5}x\right)$.

Lời giải: .....
.....
.....
.....
.....

Câu 5: Tìm chu kì tuần hoàn T của hàm số $y=\sin\frac{3x}{2}+\sin\frac{5x}{2}$.

Lời giải: .....
.....
.....
.....
.....
.....

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Mệnh đề nào sau đây là **sai?**

A. Hàm số $y=\sin x$ tuần hoàn với chu kì 2π.

B. Hàm số $y=\cos x$ tuần hoàn với chu kì 2π.

C. Hàm số $y=\tan x$ tuần hoàn với chu kì 2π.

D. Hàm số $y=\cot x$ tuần hoàn với chu kì π.

Lời giải

Chọn C

Vì hàm số $y=\tan x$ tuần hoàn với chu kì π.

Câu 2: Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số tuần hoàn?

A. $y=\sin x$ **B.** $y=x+\sin x$ **C.** $y=x\cos x$. **D** $y=\frac{\sin x}{x}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=x+\sin x$ không tuần hoàn. Thật vậy:

- Tập xác định $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.
- Giả sử $f(x+T)=f(x),\ \forall x\in\mathrm{D}$

$\Leftrightarrow (x+T)+\sin(x+T)=x+\sin x,\ \forall x\in\mathrm{D}$

$\Leftrightarrow T+\sin(x+T)=\sin x,\ \forall x\in \mathrm{D}$. (*)

Cho $x=0$ và $x=\pi$, ta được $\begin{cases} T+\sin x=\sin 0=0 \\ T+\sin(\pi+T)=\sin\pi=0 \end{cases}$

$\longrightarrow 2T+\sin T+\sin(\pi+T)=0\Leftrightarrow T=0$. Điều này trái với định nghĩa là $T>0$.

Vậy hàm số $y=x+\sin x$ không phải là hàm số tuần hoàn.

Tương tự chứng minh cho các hàm số $y=x\cos x$ và $y=\dfrac{\sin x}{x}$ không tuần hoàn.

Câu 3: Trong các hàm số sau đây, hàm số nào không tuần hoàn?

A. $y=\cos x.$ **B.** $y=\cos 2x.$ **C.** $y=x^2\cos x$. **D.** $y=\dfrac{1}{\sin 2x}.$

Lời giải.

Chọn C

Câu 4: Tìm chu kì T của hàm số $y=\sin\left(5x-\dfrac{\pi}{4}\right).$

A. $T=\dfrac{2\pi}{5}.$ **B.** $T=\dfrac{5\pi}{2}.$ **C.** $T=\dfrac{\pi}{2}.$ **D.** $T=\dfrac{\pi}{8}.$

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=\sin(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T=\dfrac{2\pi}{|a|}$.

Áp dụng: Hàm số $y=\sin\left(5x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T=\dfrac{2\pi}{5}.$

Câu 5: Tìm chu kì T của hàm số $y=\cos\left(\dfrac{x}{2}+2016\right).$

A. $T=4\pi.$ **B.** $T=2\pi.$ **C.** $T=-2\pi.$ **D.** $T=\pi.$

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=\cos(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T=\dfrac{2\pi}{|a|}$.

Áp dụng: Hàm số $y=\cos\left(\dfrac{x}{2}+2016\right)$ tuần hoàn với chu kì $T=4\pi.$

Câu 6: Tìm chu kì T của hàm số $y=-\dfrac{1}{2}\sin(100\pi x+50\pi).$

A. $T=\frac{1}{50}$. **B.** $T=\frac{1}{100}$. **C.** $T=\frac{\pi}{50}$. **D.** $T=200\pi^2$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=-\frac{1}{2}\sin(100\pi x+50\pi)$ tuần hoàn với chu kì $T=\frac{2\pi}{100\pi}=\frac{1}{50}$.

Câu 7: Tìm chu kì T của hàm số $y=\cos 2x+\sin\frac{x}{2}$.

A. $T=4\pi$. **B.** $T=\pi$. **C.** $T=2\pi$. **D.** $T=\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=\cos 2x$ tuần hoàn với chu kì $T_1=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

Hàm số $y=\sin\frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kì $T_2=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$.

Suy ra hàm số $y=\cos 2x+\sin\frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kì $T=4\pi$.

Nhận xét. T là của T_1 và T_2.

Câu 8: Tìm chu kì T của hàm số $y=\cos 3x+\cos 5x$.

A. $T=\pi$. **B.** $T=3\pi$. **C.** $T=2\pi$. **D.** $T=5\pi$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=\cos 3x$ tuần hoàn với chu kì $T_1=\frac{2\pi}{3}$.

Hàm số $y=\cos 5x$ tuần hoàn với chu kì $T_2=\frac{2\pi}{5}$.

Suy ra hàm số $y=\cos 3x+\cos 5x$ tuần hoàn với chu kì $T=2\pi$.

Câu 9: Tìm chu kì T của hàm số $y=3\cos(2x+1)-2\sin\left(\frac{x}{2}-3\right)$.

A. $T=2\pi$. **B.** $T=4\pi$ **C.** $T=6\pi$ **D.** $T=\pi$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=3\cos(2x+1)$ tuần hoàn với chu kì $T_1=\dfrac{2\pi}{2}=\pi.$

Hàm số $y=-2\sin\left(\dfrac{x}{2}-3\right).$ tuần hoàn với chu kì $T_2=\dfrac{2\pi}{\dfrac{1}{2}}=4\pi.$

Suy ra hàm số $y=3\cos(2x+1)-2\sin\left(\dfrac{x}{2}-3\right)$ tuần hoàn với chu kì $T=4\pi.$

Câu 10: Tìm chu kì T của hàm số $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right).$

A. $T=2\pi.$ **B.** $T=\pi.$ **C.** $T=3\pi.$ **D.** $T=4\pi.$

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T_1=\dfrac{2\pi}{2}=\pi.$

Hàm số $y=2\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T_2=\dfrac{2\pi}{3}.$

Suy ra hàm số $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T=2\pi.$

Câu 11: Tìm chu kì T của hàm số $y=\tan 3\pi x.$

A. $T=\dfrac{\pi}{3}.$ **B.** $T=\dfrac{4}{3}.$ **C.** $T=\dfrac{2\pi}{3}.$ **D.** $T=\dfrac{1}{3}.$

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=\tan(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T=\dfrac{\pi}{|a|}.$

Áp dụng: Hàm số $y=\tan 3\pi x$ tuần hoàn với chu kì $T=\dfrac{1}{3}.$

Câu 12: Tìm chu kì T của hàm số $y=\tan 3x+\cot x.$

A. $T=4\pi.$ **B.** $T=\pi.$ **C.** $T=3\pi.$ **D.** $T=\dfrac{\pi}{3}.$

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=\cot(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T=\dfrac{\pi}{|a|}.$

Áp dụng: Hàm số $y=\tan 3x$ tuần hoàn với chu kì $T_1=\frac{\pi}{3}$.

Hàm số $y=\cot x$ tuần hoàn với chu kì $T_2=\pi$.

Suy ra hàm số $y=\tan 3x+\cot x$ tuần hoàn với chu kì $T=\pi$.

Nhận xét. T là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2.

Câu 13: Tìm chu kì T của hàm số $y=\cot\frac{x}{3}+\sin 2x$.

A. $T=4\pi$. **B.** $T=\pi$. **C.** $T=3\pi$. **D.** $T=\frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=\cot\frac{x}{3}$ tuần hoàn với chu kì $T_1=3\pi$.

Hàm số $y=\sin 2x$ tuần hoàn với chu kì $T_2=\pi$.

Suy ra hàm số $y=\cot\frac{x}{3}+\sin 2x$ tuần hoàn với chu kì $T=3\pi$.

Câu 14: Tìm chu kì T của hàm số $y=\sin\frac{x}{2}-\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

A. $T=4\pi$. **B.** $T=\pi$. **C.** $T=3\pi$. **D.** $T=2\pi$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=\sin\frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kì $T_1=4\pi$.

Hàm số $y=-\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T_2=\frac{\pi}{2}$.

Suy ra hàm số $y=\sin\frac{x}{2}-\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T=4\pi$.

Câu 15: Tìm chu kì T của hàm số $y=2\cos^2 x+2017$.

A. $T=3\pi$. **B.** $T=2\pi$. **C.** $T=\pi$. **D.** $T=4\pi$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=2\cos^2 x+2017=\cos 2x+2018$.

Suy ra hàm số tuần hoàn với chu kì $T=\pi$.

Câu 16: Tìm chu kì T của hàm số $y=2\sin^2 x+3\cos^2 3x.$

A. $T=\pi.$ **B.** $T=2\pi.$ **C.** $T=3\pi.$ **D.** $T=\frac{\pi}{3}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=2.\frac{1-\cos 2x}{2}+3.\frac{1+\cos 6x}{2}=\frac{1}{2}(3\cos 6x-2\cos 2x+5).$

Hàm số $y=3\cos 6x$ tuần hoàn với chu kì $T_1=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}.$

Hàm số $y=-2\cos 2x$ tuần hoàn với chu kì $T_2=\pi.$

Suy ra hàm số đã cho tuần hoàn với chu kì $T=\pi.$

Câu 17: Tìm chu kì T của hàm số $y=\tan 3x-\cos^2 2x.$

A. $T=\pi.$ **B.** $T=\frac{\pi}{3}.$ **C.** $T=\frac{\pi}{2}.$ **D.** $T=2\pi.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=\tan 3x-\frac{1+\cos 4x}{2}=\frac{1}{2}(2\tan 3x-\cos 4x-1).$

Hàm số $y=2\tan 3x$ tuần hoàn với chu kì $T_1=\frac{\pi}{3}.$

Hàm số $y=-\cos 4x$ tuần hoàn với chu kì $T_2=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$

Suy ra hàm số đã cho tuần hoàn với chu kì $T=\pi.$

Dạng 5. Đồ thị của hàm số lượng giác

1. Phương pp

1/ Vẽ □ồ thị ℍm số lượng gic:

- Tìm tập ẋc ịnh D.
- Tìm chu kỳ T_0 của ℍm số.
- Ẋc ịnh tính chẵn – lẻ (nếu cần).
- Lập bảng biến thĩn tĩn một oạn cĩ ộ đi bằng chu kỳ T_0 cĩ thể chọn:

$$x\in[0,T_0] \text{ hoặc } x\in\left[-\frac{T_0}{2},\frac{T_0}{2}\right].$$

- Vẽ đồ thị trn đoạn cĩ độ đi bằng chu kỳ.
- Rồi suy ra phần đồ thị cịn lại bằng phếp tịnh tiến theo vếc tơ $\vec{v} = k.T_0.\vec{i}$ về bn trái vì phải song song với trục hồnh Ox (với $\vec{i}$ là vếc tơ đơn vị trn trục Ox).

2/ Một số phếp biến đổi đồ thị:

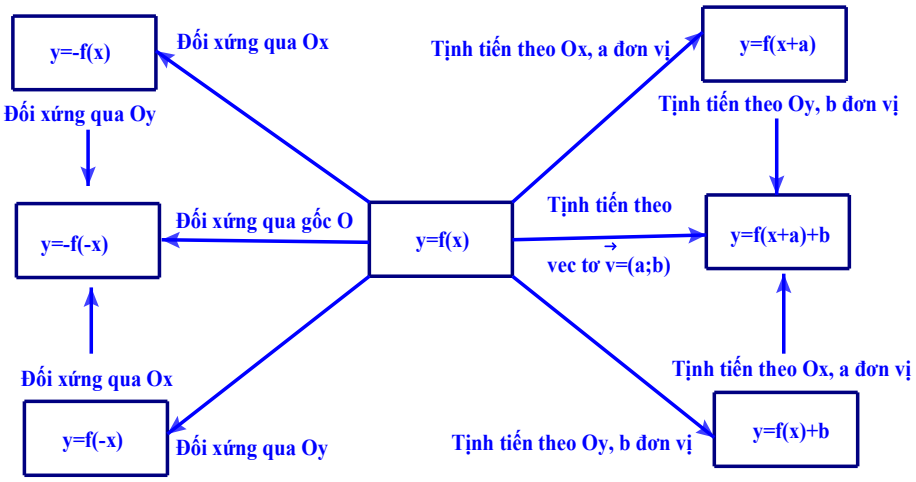
a) Từ đồ thị hm số y = f(x), suy ra đồ thị hm số y = f(x) + a bằng cách tịnh tiến đồ thị y = f(x) lin trn trục hồnh a đơn vị nếu a > 0 vì tịnh tiến xuống phía dưới trục hồnh a đơn vị nếu a < 0.

b) Từ đồ thị hm số y = f(x), suy ra đồ thị hm số $y = f(x+a)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị y = f(x) sang phải trục hồnh a đơn vị nếu a > 0 vì tịnh tiến sang trái trục hồnh a đơn vị nếu a < 0.

c) Từ đồ thị y = f(x), suy ra đồ thị y = –f(x) bằng cách lấy đối xứng đồ thị y = f(x) qua trục hồnh.

d) Đồ thị $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{neáu } f(x) \ge 0 \\ -f(x), & \text{neáu } f(x) < 0 \end{cases}$ nn suy ra đồ thị y = f(x) bằng cách giữ nguyn hần đồ thị y = f(x) phía trn trục hồnh vì lấy đối xứng y = f(x) phía dưới trục hồnh qua trục hồnh

Mối lin hệ đồ thị giữa cc hm số



2. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Vẽ đồ thị các hàm số sau: y = sin 4x

Hướng dẫn giải

a) Haøm soá y = sin 4x.

Mieàn xaùc ñònh: D=ℝ.

Ta chæ caàn veõ ñoà thò haøm soá treân mieàn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

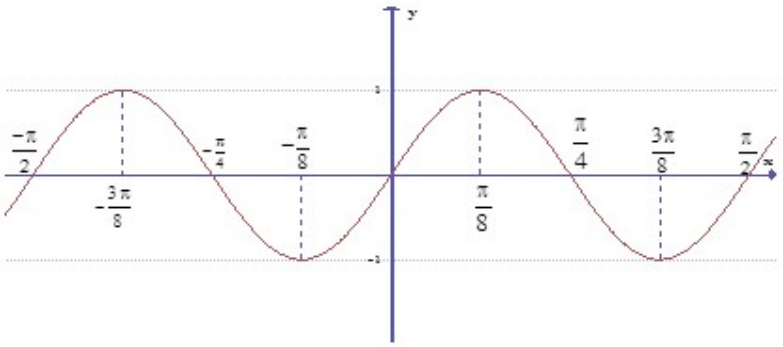
(*Do chu* kì tuaàn hoaøn T=$\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$)

Baûng giaù trò cuûa haøm soá y =sin 4x treân ñoaïn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ laø:

x	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{5\pi}{24}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
y	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

Ta có đồ thị của hàm số y = sin4x trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ và sau đó tịnh tiến cho các

đoạn: ...,$\left[-\frac{\pi}{2},0\right],\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$,....



Ví dụ 2: Vẽ đồ thị hàm số y = $\cos\frac{x}{3}$.

Hướng dẫn giải

Haøm soá y = $\cos\frac{x}{3}$.

Mieàn xaùc ñònh: D=ℝ.

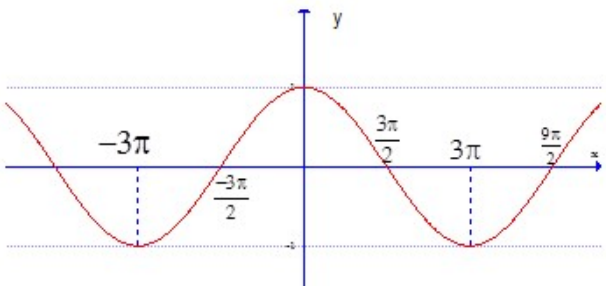
Ta chæ caàn veõ ñoà thò haøm soá treân mieàn $[0;6\pi]$

(*Do chu* kì tuaàn hoaøn T=$\frac{2\pi}{1/3}=6\pi$)

Baûng giaù trò cuûa haøm soá y = $\cos\frac{x}{3}$ treân ñoaïn $[0;6\pi]$ laø:

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{21\pi}{6}$	3π	$\frac{15\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{2}$	$\frac{33\pi}{6}$	6π
y	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Ta có đồ thị của hàm số $y=\cos\frac{x}{3}$ trên đoạn $[0;6\pi]$ và sau đó tịnh tiến cho các đoạn: $...,[-6\pi,0],[6\pi,12\pi],....$

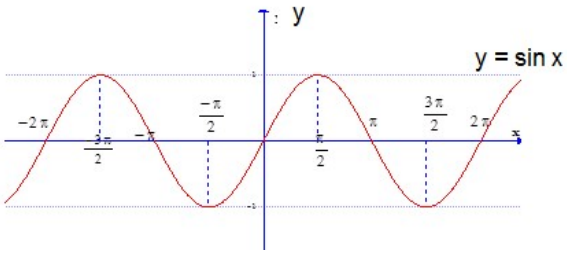


Ví dụ 3. Cho đồ thị của hàm số y =sinx, (C) . Hãy vẽ các đồ thị của các hàm số sau:

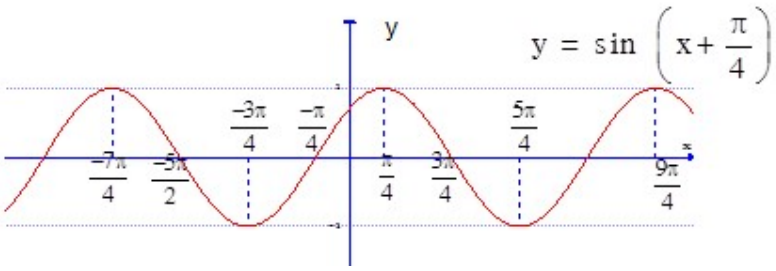
a) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ b) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2.$

Hướng dẫn giải

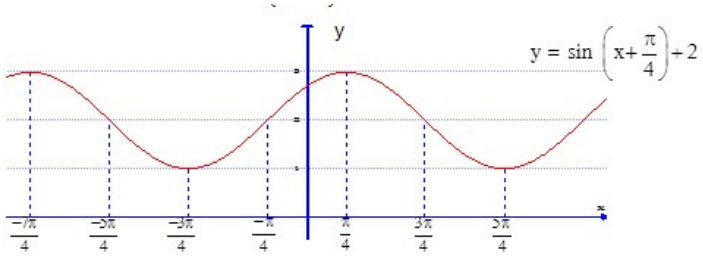
Từ đồ thị của hàm số y = sinx, (C) như sau:



a) Từ đồ thị (C), ta có đồ thị $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ bằng cách tịnh tiến (C) sang trái một đoạn là $\frac{\pi}{4}$ đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, (C') như (hình 8) sau:

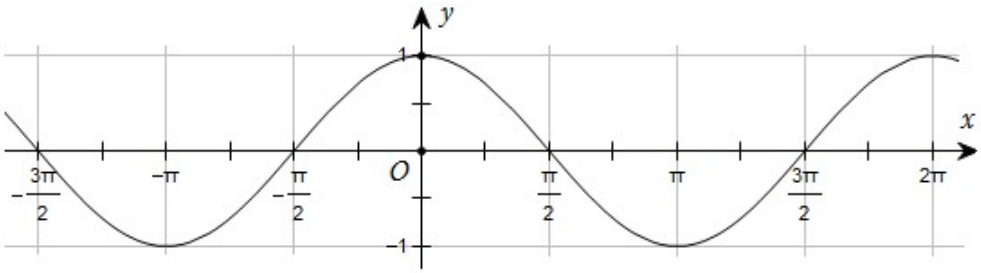


b) Từ đồ thị (C') của hàm số $y = \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, ta có đồ thị hàm số $y = \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2$ bằng cách tịnh tiến (C') lên trên một đoạn là 2 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y = \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2$, (C") như sau:



3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C,D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = 1+\sin 2x$. **B.** $y = \cos x$. **C.** $y = -\sin x$. **D.** $y = -\cos x$.

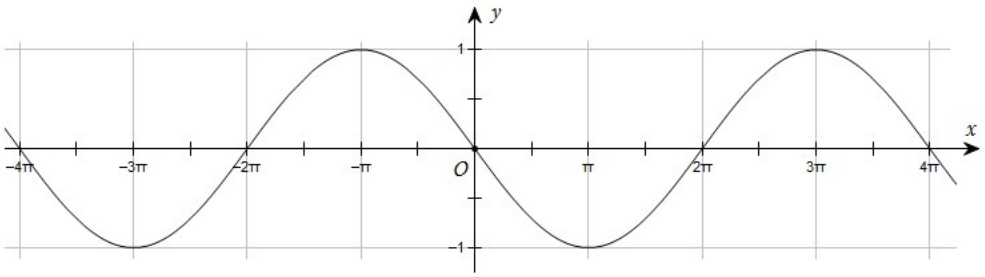
Lời giải

Chọn B

Ta thấy tại $x = 0$ thì $y = 1$. Do đó loại đáp án C và D.

Tại $x=\frac{\pi}{2}$ thì $y=0$. Do đó chỉ có đáp án B thỏa mãn.

Câu 2: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C,D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y=\sin\frac{x}{2}$. **B.** $y=\cos\frac{x}{2}$. **C.** $y=-\cos\frac{x}{4}$. **D.** $y=\sin\left(-\frac{x}{2}\right)$.

Lời giải

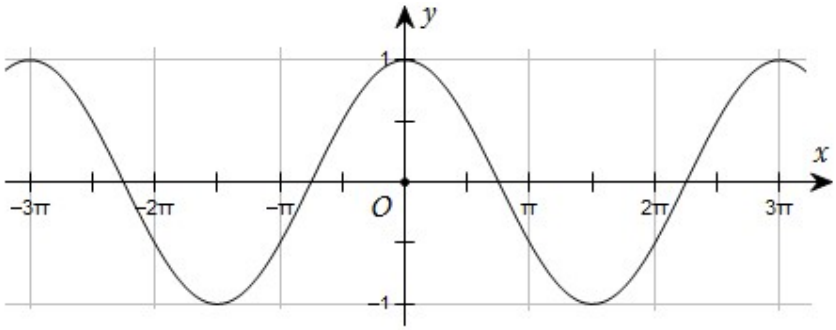
Chọn D

Ta thấy:

Tại $x=0$ thì $y=0$. Do đó loại B và C.

Tại $x=\pi$ thì $y=-1$. Thay vào hai đáp án còn lại chỉ có D thỏa.

Câu 3: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y=\cos\frac{2x}{3}$. **B.** $y=\sin\frac{2x}{3}$. **C.** $y=\cos\frac{3x}{2}$. **D.** $y=\sin\frac{3x}{2}$.

Lời giải

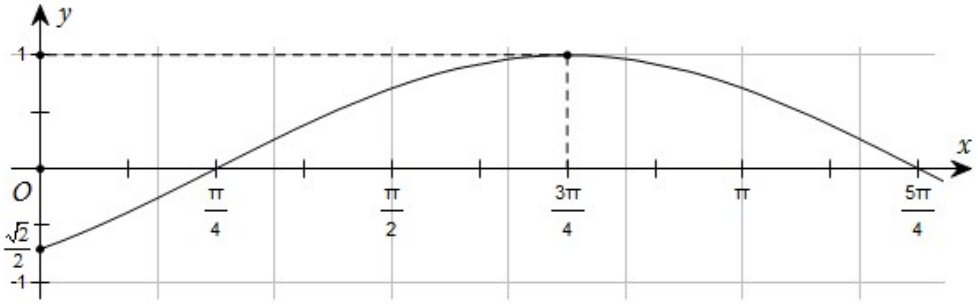
Chọn A

Ta thấy:

Tại $x=0$ thì $y=1$. Do đó ta loại đáp án B và D.

Tại $x=3\pi$ thì $y=1$. Thay vào hai đáp án A và C thì chit có A thỏa mãn.

Câu 4: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C,**D.**



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. **B.** $y=\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$. **C.** $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. **D.** $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

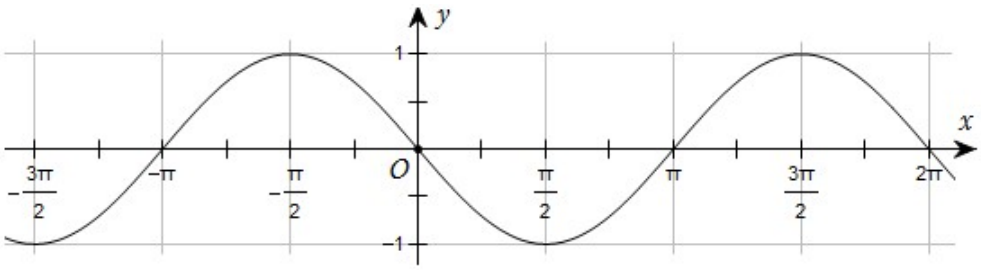
Chọn A

Ta thấy hàm số có GTLN bằng 1 và GTNN bằng -1. Do đó loại đáp án **C.**

Tại $x=0$ thì $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Do đó loại đáp án **D.**

Tại $x=\frac{3\pi}{4}$ thì $y=1$. Thay vào hai đáp án còn lại chỉ có A thỏa mãn.

Câu 5: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C,**D.**



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y=\sin x$. **B.** $y=|\sin x|$. **C.** $y=\sin|x|$. **D.** $y=-\sin x$.

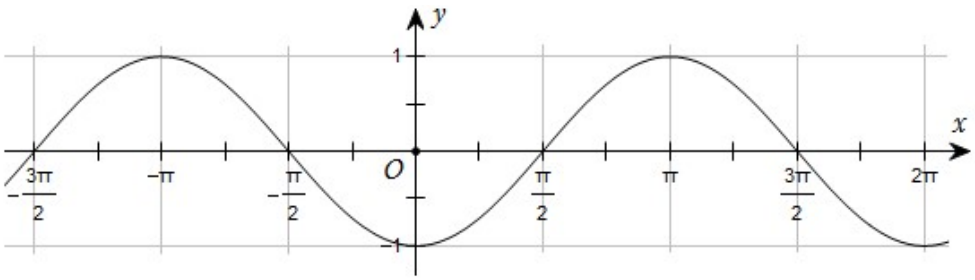
Lời giải

Chọn D

Ta thấy tại $x=0$ thì $y=0$. Cả 4 đáp án đều thỏa.

Tại $x=\frac{\pi}{2}$ thì $y=-1$. Do đó chỉ có đáp án D thỏa mãn.

Câu 6: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, **D.**



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

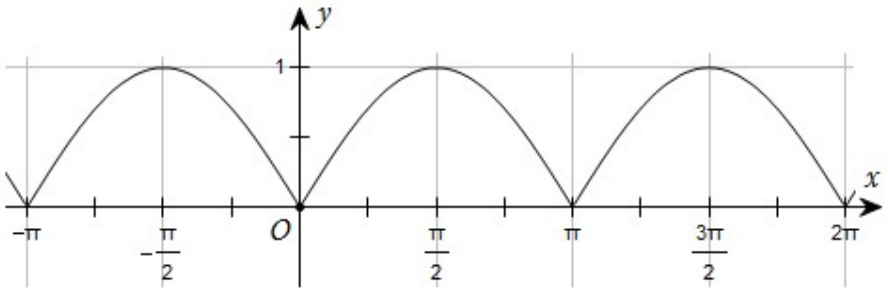
A. $y=\cos x$. **B.** $y=-\cos x$ **C.** $y=\cos|x|$. **D.** $y=|\cos x|$.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy tại $x=0$ thì $y=-1$. Do đó chỉ có đáp án B thỏa mãn.

Câu 7: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B,C,D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y=|\sin x|$. **B.** $y=\sin|x|$. **C.** $y=\cos|x|$. **D.** $y=|\cos x|$.

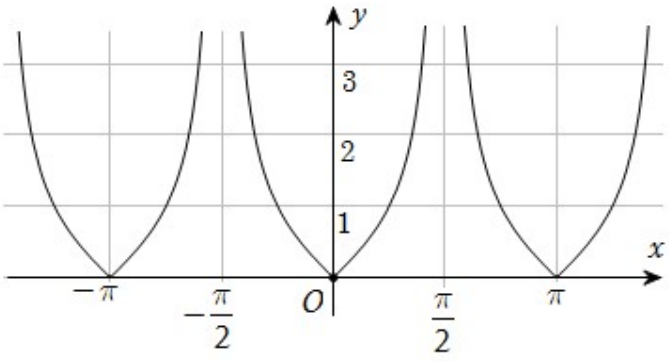
Lời giải

Chọn A

Ta thấy hàm số có GTNN bằng 0. Do đó chỉ có A hoặc D thỏa mãn.

Ta thấy tại $x=0$ thì $y=0$. Thay vào hai đáp án A và D chỉ có duy nhất A thỏa mãn.

Câu 8: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C,**D.**



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y=\tan x$. **B.** $y=\cot x$. **C.** $y=|\tan x|$. **D.** $y=|\cot x|$.

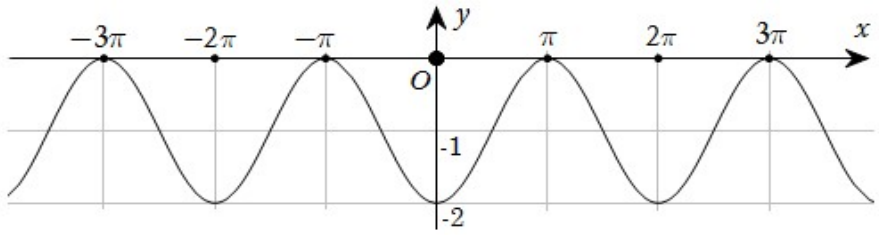
Lời giải

Chọn C

Ta thấy hàm số có GTNN bằng 0. Do đó ta loại đáp án A và B.

Hàm số xác định tại $x=\pi$ và tại $x=\pi$ thì $y=0$. Do đó chỉ có C thỏa mãn.

Câu 9: .Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C,D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-1$. **B.** $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

C. $y=-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-1$. **D.** $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1$.

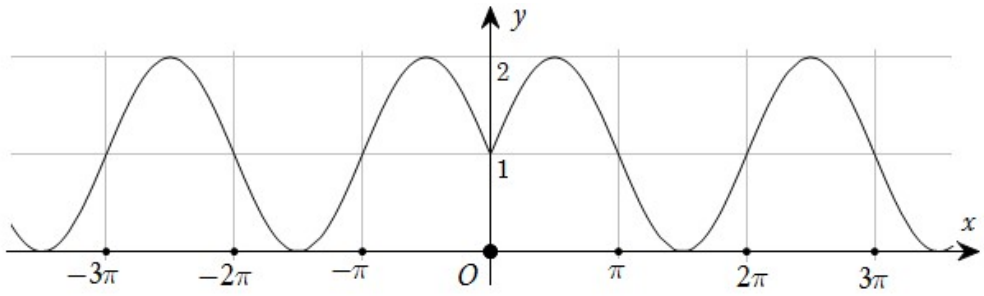
Lời giải

Chọn A

Ta thấy hàm số có GTLN bằng 0, GTNN bằng -2. Do đó ta loại đán án B vì $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\in[-2;2]$.

Tại $x=0$ thì $y=-2$. Thử vào các đáp án còn lại chỉ có A thỏa mãn.

Câu 10: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y=1+\sin|x|$. **B.** $y=|\sin x|$. **C.** $y=1+|\cos x|$. **D.** $y=1+|\sin x|$.

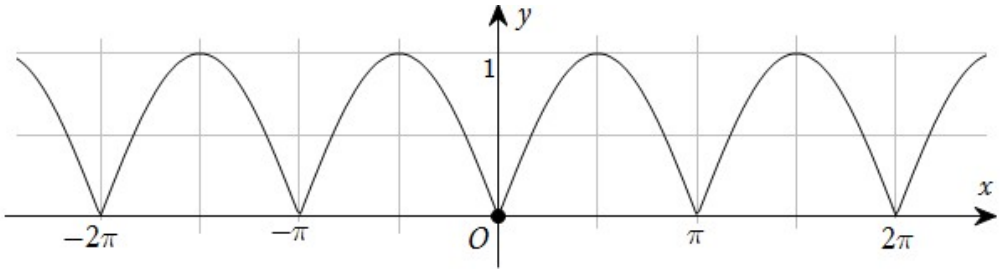
Lời giải

Chọn A

Ta có $y=1+|\cos x|\geq 1$ và $y=1+|\sin x|\geq 1$ nên loại C và D.

Ta thấy tại $x=0$ thì $y=1$. Thay vào hai đáp án A và B thì chỉ có A thỏa mãn.

Câu 11: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, **D.**



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y=1+\sin|x|$. **B.** $y=|\sin x|$. **C.** $y=1+|\cos x|$. **D.** $y=1+|\sin x|$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y=1+|\cos x|\geq 1$ và $y=1+|\sin x|\geq 1$ nên loại C và D.

Ta thấy tại $x=\pi$ thì $y=0$. Thay vào hai đáp án A và B thì chỉ có B thỏa.

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

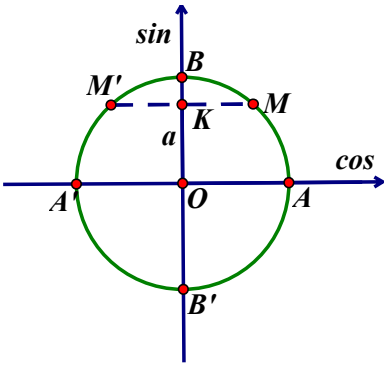
1. Phương trình $\sin x = a$

Xét phương trình $\sin x = a$.

Trường hợp $|a| > 1$

Phương trình (1) vô nghiệm, vì $|\sin x| \le 1$ với mọi x.

Trường hợp $|a| \le 1$



Vẽ đường tròn lượng giác tâm O, trục hoành là trục cosin, trục tung là trục sin. Trên trục sin lấy điểm K sao cho $\overline{OK} = a$. Từ K kẻ đường vuông góc với trục sin, cắt đường tròn lượng giác tại M và M' đối xứng với nhau qua trục sin (nếu $|a| = 1$ thì M trùng với M'). Từ đó ta thấy số đo của cung lượng giác $\overset{\frown}{AM}$ và $\overset{\frown}{AM'}$ là tất cả các nghiệm của phương trình (1).

Gọi α là số đo radian của cung lượng giác $\overset{\frown}{AM}$ ta có:

$$\text{Sđ } \overset{\frown}{AM} = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{Sđ } \overset{\frown}{AM} = \pi - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Nếu số thực α thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} \frac{-\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \\ \sin\alpha = a \end{cases}$ thì ta biết $\alpha = \arcsin\alpha$ (đọc là ac – sin – a, nghĩa là cung có sin bằng a). Khi đó nghiệm của phương trình $\sin x = a$ được viết là:

$$x = \arcsin\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{và } x = \pi - \arcsin\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Chú ý

a) Phương trình $\sin x = \sin\alpha$, với α là số cho trước, có các nghiệm là:

$$x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ và}$$
$$x = \pi - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Tổng quát,

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

b) Phương trình $\sin x = \sin\beta^o$ có nghiệm là

$$x = \beta^o + k360^o, k \in \mathbb{Z} \text{ và}$$

$$x = 180^o - \beta^o + k360^o, k \in \mathbb{Z}$$

c) Trong công thức nghiệm của phương trình lượng giác không được dùng đồng thời hai đơn vị độ và radian.

d) Các trường hợp đặc biệt:

- $a = 1$: phương trình $\sin x = 1$ có nghiệm là $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $a = -1$: phương trình $\sin x = -1$ có các nghiệm là $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- $a=0$: phương trình $\sin x=0$ có nghiệm là $x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\sin x=\dfrac{1}{7}$.

Giải

a) Vì $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sin\dfrac{\pi}{4}$ nên $\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \sin x=\sin\dfrac{\pi}{4}$.

Vậy phương trình có các nghiệm là

$x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$ và $x=\pi-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

b) Ta có $\sin x=\dfrac{1}{7}$ khi $x=\arcsin\dfrac{1}{7}$. Vậy phương trình $\sin x=\dfrac{1}{7}$ có các nghiệm là

$x=\arcsin\dfrac{1}{7}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$ và $x=\pi-\arcsin\dfrac{1}{7}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

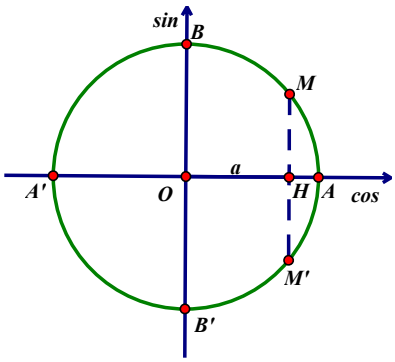
2. Phương trình $\cos x=a$

Trường hợp $|a|>1$

Phương trình (1) vô nghiệm, vì $|\cos x|\le 1$ với mọi x.

Trường hợp $|a|\le 1$

Tương tự trường hợp $\sin x=a$. Trên trục cosin lấy điểm H sao cho $\overline{OH}=a$. Từ H kẻ đường vuông góc với trục cosin, cắt đường tròn lượng giác tại M và M' đối xứng với nhau qua trục cosin (nếu $|a|=1$ thì M trùng với M'). Từ đó ta thấy số đo của cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{AM}$ và $\overset{\curvearrowright}{AM'}$ là tất cả các nghiệm của phương trình $\cos x=a$.



Gọi α là số đo radian của cung lượng giác $\overset{\frown}{AM}$, ta có:

$$\text{Sđ } \overset{\curvearrowright}{AM}=\alpha+k2\pi, k\in\mathbb{Z};$$

$$\text{Sđ } \overset{\curvearrowright}{AM}=-\alpha+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình $\cos x=a$ có nghiệm là

$$\boxed{x=\pm\alpha+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.}$$

Chú ý

a) Phương trình $\cos x=\cos\alpha$, với α là số cho trước, có các nghiệm là:

$x=\pm\alpha+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Tổng quát, $\cos f(x)=\cos g(x)\Leftrightarrow f(x)=\pm g(x)+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

b) Phương trình $\cos x=\cos\beta^o$ có nghiệm là

$$x=\pm\beta^o+k360^o, k\in\mathbb{Z}.$$

c) Nếu số thực α thỏa mãn điều kiện $\begin{cases}0\le\alpha\le\pi\\ \cos\alpha=a\end{cases}$ thì ta biết $\alpha=\arccos a$ (đọc là ac – cosin – a, nghĩa là cung có cosin bằng a). Khi đó nghiệm của phương trình $\cos x=a$ được viết là:

$$x=\arccos\alpha+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

d) Các trường hợp đặc biệt:

- $a=1$: phương trình $\cos x=1$ có nghiệm là $x=k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.
- $a=-1$: phương trình $\cos x=-1$ có các nghiệm là $x=\pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.
- $a=0$: phương trình $\cos x=0$ có nghiệm là $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $\cos 2x=\cos\frac{\pi}{3}$; b) $\sin(x+60^o)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Giải

a) $\cos 2x=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

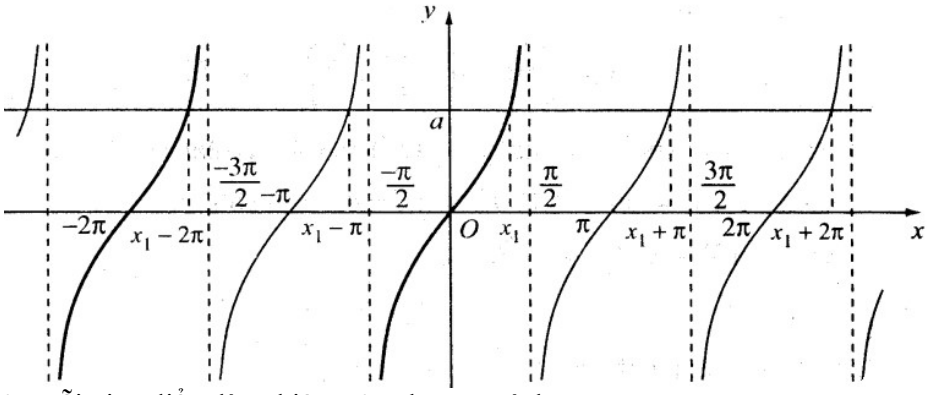
b) Vì $\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos 45^o$ nên $\cos(x+60^o)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\cos(x+60^o)=\cos 45^o\Leftrightarrow x+60^o=\pm 45^o+k360^o$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-15^o+k360^o\\x=-105^o+k360^o\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

3. Phương trình $\tan x=a$

Điều kiện của phương trình là $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

Căn cứ vào đồ thị $y=\tan x$, ta thấy với mỗi số a thì đồ thị $y=\tan x$ cắt đường thẳng $y=a$ tại các hoành độ sai khác nhau một bội của π.



Hoành độ của mỗi giao điểm là nghiệm của phương trình $\tan x=a$

Gọi x_1 là hoành độ giao điểm $(\tan x_1=a)$ thỏa mãn điều kiện $-\frac{\pi}{2}<x_1<\frac{\pi}{2}$.

Ký hiệu $x_1=\arctan a$ (đọc là ac – tan – a, nghĩa là cung có tang bằng a). Khi đó, nghiệm của phương trình $\tan x=a$ là

$$\boxed{x=\arctan a+k\pi, k\in\mathbb{Z}.}$$

Chú ý

a) Phương trình $\tan x=\tan\alpha$, với α là số cho trước, có các nghiệm là $x=\alpha+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Tổng quát $\tan f(x)=\tan g(x)\Rightarrow f(x)=g(x)+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

a) Phương trình $\tan x=\tan\beta^o$ có nghiệm là

$$x=\beta^o+k180^o, k\in\mathbb{Z}.$$

Ví dụ. Giải các phương trình sau:

a) $\tan x = \tan\frac{\pi}{5}$; b) $\tan 2x = -\frac{1}{3}$; c) $\tan(3x+15^o) = \tan 60^o$.

Giải

a) $\tan x = \tan\frac{\pi}{5} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) $\tan 2x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 2x = \arctan(-\frac{1}{3}) + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\arctan(-\frac{1}{3}) + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

c) Vì $\sqrt{3} = \tan 60^o$ nên

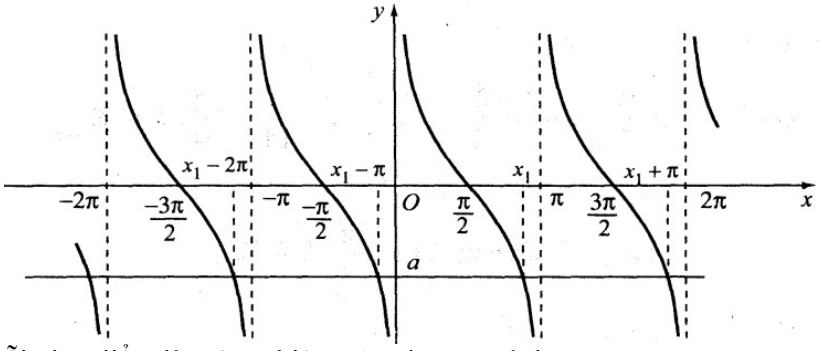
$\tan(3x+15^o) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan(3x+15^o) = \tan(60^o) \Leftrightarrow 3x+15^o = 60^o + k180^o \Leftrightarrow 3x = 45^o + k180^o$

$\Leftrightarrow x = 15^o + k60^o, k \in \mathbb{Z}$.

4. Phương trình $\cot x = a$

Điều kiện của phương trình là $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Căn cứ vào đồ thị $y = \cot x$, ta thấy với mỗi số a thì đồ thị $y = \cot x$ cắt đường thẳng $y = a$ tại các hoành độ sai khác nhau một bội của π.



Hoành độ của mỗi giao điểm là một nghiệm của phương trình $\cot x = a$.

Gọi x_1 là hoành độ giao điểm ($\cot x_1 = a$) thỏa mãn điều kiện $0 < x_1 < \pi$.

Ký hiệu $x_1 = \text{arccot}\, a$ (đọc là ac – cotang – a, nghĩa là cung có côtang bằng a) Khi đó, nghiệm của phương trình $\cot x = a$ là

$$\boxed{x = \text{arc}\cot a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.}$$

Chú ý

a) Phương trình $\cot x = \cot\alpha$, với α là số cho trước, có các nghiệm là $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Tổng quát, $\cot f(x) = \cot g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Phương trình $\cot x = \cot\beta^o$ có nghiệm là

$$x = \beta^o + k180^o, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ: Giải các phương trình sau:

a) $\cot 4x = \cot\frac{2\pi}{7}$; b) $\cot 3x = -2$; c) $\cot(2x-10^o) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Giải

a) $\cot 4x = \cot\frac{2\pi}{7} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{7} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{14} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.

b) $\cot 3x = -2 \Leftrightarrow x = \text{arccot}(-2) + k\pi \Leftrightarrow \frac{1}{3}\text{arc}\cot(-2) + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

c) Vì $\frac{1}{\sqrt{3}} = \cot 60^o$ nên $\cot(2x-10^o) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cot(2x-10^o) = \cot 60^o$

$\Leftrightarrow 2x-10^o=60^o+k180^o \Leftrightarrow 2x=70^o+k180^o \Leftrightarrow x=35^o+k90^o, k\in\mathbb{Z}.$

Ghi nhớ

Mỗi phương trình

$\sin x=a(|a|\le 1)$; $\cos x=a(|a|\le 1)$; $\tan x=a$; $\cot x=a$ có vô số nghiệm.

Giải các phương trình trên làm tìm tất cả các nghiệm của chúng.

B. CÁC VÍ DỤ RÈN LUYỆN KĨ NĂNG

Ví dụ 1. Giải các phương trình

a) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=0$; b) $\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=1$; c) $\cos\left(\frac{\pi}{5}-x\right)=-1$;

d) $\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=0$ e) $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=1$; f) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)=-1$;

Hướng Dẫn Giải

a) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=0\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{6}=k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$

b) $\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=1\Leftrightarrow 4x-\frac{\pi}{3}=k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{5}-x\right)=-1\Leftrightarrow \frac{\pi}{5}-x=\pi+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{-4\pi}{5}-k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

d) $\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow 3x+\frac{\pi}{3}=k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$

e) $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow \frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{2}+k4\pi,k\in\mathbb{Z}$

f) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)=-1\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}+2x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Ví dụ 2. Giải phương trình

a) $\sin 3x=\frac{1}{2}$ (1) ; b) $\cos 2x=-\frac{1}{2}$ (2)

c) $\tan\frac{x}{3}=2$ (3); d) $\cot\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$ (4)

Giải

a) Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow \sin 3x=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\3x=\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}\\x=\frac{5\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x=\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3};x=\frac{5\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3},k\in\mathbb{Z}.$

b) Ta có:

$$(2)\Leftrightarrow \cos 2x=\cos\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\2x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k\pi\\x=-\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là: $x=\pm\frac{\pi}{3}=k\pi,k\in\mathbb{Z}$

c) $(3)\Leftrightarrow x=3\arctan 2+k3\pi,k\in\mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=3\arctan 2+k3\pi,k\in\mathbb{Z}$

d) Ta có:

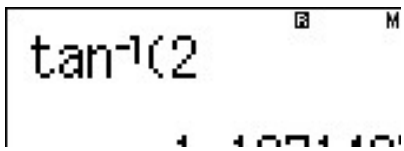
$$(4)\Leftrightarrow \cot\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\cot\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=-\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}.$

Lời bình: Những phương trình ch trên là nhưng phương trình lượng giác cơ bản. Sử dụng MTCT ta có thể tìm được các giá trị đặc biệt của hàm số lượng giác

- Ở câu a) $\sin 3x=\frac{1}{2}$. Dùng MTCT (ở chế độ rad) ta ấn $\boxed{SHIF}\boxed{\sin}\boxed{1}\boxed{\div}\boxed{2}\boxed{=}$ ta được kết quả là $\frac{\pi}{6}$. Do đó: $\sin 3x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$
- Hoàn toàn tương tự cho câu b) $\cos 2x=-\frac{1}{2}$. Ta ấn:

  $\boxed{SHIF}\boxed{\cos}\boxed{-}\boxed{1}\boxed{\div}\boxed{2}\boxed{=}$ ta được kết quả là $\frac{2\pi}{3}$. Do đó: $\cos 2x=-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}$
- Ở câu c) nếu ta dùng MTCT: Thử ấn $\boxed{SHIFT}\boxed{\tan}\boxed{2}\boxed{=}$ ta được kết quả



Do đó, phương trình $\tan\frac{x}{3}=2$ ta chỉ có thể ghi $\frac{x}{3}=\arctan 2+k\pi$

- Trên MTCT không có hàm cot, tuy nhiên ta thừa biết $\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}$. Do đó, đối với câu d) $\cot\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$ ta ấn máy như sau:

$\boxed{SHIT}\boxed{\tan}\boxed{1}\boxed{\div}\boxed{\sqrt{3}}\boxed{=}$ ta được kết quả là $\frac{\pi}{6}$. Do đó: $\cot\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}=\cot\frac{\pi}{6}$

Ví dụ 3. Giải phương trình

a) $\sin 4x=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$; b) $\cot g\left(x+30^0\right)=\cot g\frac{x}{2}$.

c) $\cos^2 x=\frac{\sqrt{3}+2}{4}$; d) $\sin 2x=\cos 3x$.

Giải

a) Ta có:

$$\sin 4x=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x=x+\frac{\pi}{3}+k2\pi\\4x=\pi-\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3}\\x=\frac{2\pi}{15}+\frac{k2\pi}{5}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=\frac{\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3};x=\frac{2\pi}{15}+\frac{k2\pi}{5}$

b) Điều kiện: $\begin{cases}x+30^0\neq k.180^0\\\frac{x}{2}\neq n.180^0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -30^0\\x\neq n.360^0\end{cases}(k,n\in\mathbb{Z})$

$$\cot g\left(x+30^0\right)=\cot g\frac{x}{2}\Leftrightarrow x+30^0=\frac{x}{2}+k.180^0\Leftrightarrow 2x+60^0=x+k.360^0$$
$$\Leftrightarrow x=-60^0+k.360^0,k\in\mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=-60^0+k.360^0,k\in\mathbb{Z}$

c) Ta có

$$\cos^2 x=\frac{\sqrt{3}+2}{4}\Leftrightarrow\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{\sqrt{3}+2}{4}\Leftrightarrow 2\left(1+\cos 2x\right)=\sqrt{3}+2$$
$$\Leftrightarrow\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow 2x=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=\frac{\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Nhận xét: Ngoài cách giải trên ta có thể giải theo cách sau:

$$\cos^2 x=\frac{\sqrt{3}+2}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{\sqrt{3}+2}{4}\\ \cos x=-\dfrac{\sqrt{3}+2}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}+2}{4}\right)+k2\pi\\ x=\pm\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}+2}{4}\right)+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$$

Tuy nhiên không nên giải theo cách này vì mất đi cái vẻ đẹp của toán học. Lời giải ban đầu sử dụng dụng công thức hạ bậc với các phép biến đổi hết sức đơn giản đưa về phương trình rất đẹp với đáp số.

d) Ta có

$$\sin 2x=\cos 3x\Leftrightarrow\cos 3x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x=\dfrac{\pi}{2}-2x+k2\pi\\ 3x=-\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)+k2\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{k2\pi}{5}\\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của (*) là $x=\frac{\pi}{10}+\frac{k2\pi}{5};x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

Nhận xét: Phương trình $\sin 2x=\cos 3x$ được chuyển thành $\cos 3x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$, ta cũng có thể chuyển thành dạng sau: $\sin 2x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$.

Ví dụ 4. Giải và biện luận phương trình $\sin x=4m-1(*)$

Giải

- Trường hợp 1: $|4m-1|>1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4m-1>1\\ 4m-1<-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>\dfrac{1}{2}\\ m<0\end{array}\right.$

Phương trình (*) vô nghiệm

- Trường hợp 2: $|4m-1|\le 1\Leftrightarrow -1\le 4m-1\le 1\Leftrightarrow 0\le m\le\frac{1}{2}$

Phương trình (*) có nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=\arcsin(4m-1)+k2\pi\\ x=\pi-\arcsin(4m-1)+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

Tóm lại:

• Nếu $\left[\begin{array}{l} m>\frac{1}{2} \\ m<0 \end{array}\right.$ thì phương trình (*) vô nghiệm

Nếu $0 \le m \le \frac{1}{2}$ thì phương trình (*) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=\arcsin(4m-1)+k2\pi \\ x=\pi-\arcsin(4m-1)+k2\pi \end{array}\right.$

Ví dụ 5. Tìm m để phương trình $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=m$ có nghiệm $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Giải

Ta có: $0<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{4}<x+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$

Phương trình đã cho có nghiệm $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ khi $\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{m}{\sqrt{2}}\le 1\Leftrightarrow 1<m\le\sqrt{2}$

Ví dụ 6. Giải phương trình

a) $\sin 2x-\sin 2x\cos x=0\ \ (1)$; b) $\sin x\cos 2x=\sin 2x\cos 3x\ \ (2)$.

Giải

a) Ta có

$$(1)\Leftrightarrow\sin 2x(1-\cos x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ \cos x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=k\pi\\ x=k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

Lưu ý: Một số học sinh mắc sai lầm nghiệm trọng (lỗi rất cơ bản) là rút gọn phương trình ban đầu cho $\sin 2x$, dẫn đến thiếu nghiệm

b) **Định hướng:** Cả hai vế phương trình đều cho dưới dạng tích của hai hàm lượng giác. Thông thường ta sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng.

Ta nhắc lại: $\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right]$

Ta có

$$(2)\Leftrightarrow\frac{1}{2}(\sin 3x-\sin x)=\frac{1}{2}(\sin 5x-\sin x)\Leftrightarrow\sin 5x=\sin 3x$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5x=3x+k2\pi\\ 5x=\pi-3x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=k\pi; x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}$

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Nghiệm của phương trình $\sin\frac{x}{5}=-\frac{1}{2}$ là

A. $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ và $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

B. $x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ và $x=\frac{35\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=-\frac{5\pi}{6}+10k\pi, k\in\mathbb{Z}$ và $x=\frac{35\pi}{6}+10k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

D. $x=-\frac{5\pi}{6}+k1800^{o}, k\in\mathbb{Z}$ và $x=\frac{35\pi}{6}+k1800^{o}, k\in\mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

CHỌN C.

$$\sin\frac{x}{5}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x}{5}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ \frac{x}{5}=\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{5\pi}{6}+10k\pi\\ x=\frac{35\pi}{6}+10k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Câu 2. Nghiệm của phương trình $\sin x=1$ là

A. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$ **B.** $x=\frac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$ **C.** $x=\pi+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$ **D.** $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

Hướng dẫn giải

CHỌN D.

$\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 3. Nghiệm của phương trình $\sin x=-1$ là

A. $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$ **B.** $x=\pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$ **C.** $x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$ **D.** $x=-\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN C.

$\sin x=-1\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 4. Nghiệm của phương trình $\sin x = 0$ là

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **C.** $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = \pi + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN C.

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 5. Nghiệm của phương trình $\cos x = 1$ là

A. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **C.** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN A.

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 18. Nghiệm của phương trình $\cos x = -1$ là

A. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ **C.** $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = -\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN B.

$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 6. Nghiệm của phương trình $\cos x = 0$ là

A. $x = 180^o + k360^o, k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = 90^o + k180^o, k \in \mathbb{Z}$

C. $x = 90^o + k360^o, k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = k90^o, k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN B.

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = 90^o + k180^o, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 7. Nghiệm của phương trình $\tan x = 1$ là

A. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **C.** $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN B.

$\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 8. Nghiệm của phương trình $\tan x = -1$ là

A. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

C. $x = (-1)^{2k+1}\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN C.

$\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi = (-1)^{2k+1}.\frac{\pi}{4} + k\pi$.

Câu 9. Phương trình $\tan x = 0$ có nghiệm là

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **C.** $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN B.

$\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 10. Phương trình $\cot x = 1$ có nghiệm là

A. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ **C.** $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN D.

$\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 11. Phương trình $\cot x = -1$ có nghiệm là

A. $x = (-1)^{2k+1}\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

C. $x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$ **D.** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN A.

$\cot x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}=(-1)^{2k+1}.\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$

Câu 12. Phương trình $\cot x=0$ có nghiệm là

A. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ **B.** $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$ **C.** $x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$ **D.** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN A.

$\cot x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$

Câu 13. Nghiệm của phương trình $\cos x=\frac{1}{2}$ là

A. $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$ **B.** $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ **C.** $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ **D.** $x=\pm\frac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN A.

$\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$

Câu 14. Nghiệm của phương trình $\cos 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ là

A. $x=\pm\frac{5\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ **B.** $x=\pm\frac{5\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ **C.** $x=\pm\frac{\pi}{8}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ **D.** $x=\pm\frac{5\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN B.

Ta có: $\cos 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{5\pi}{6}\Leftrightarrow 2x=\pm\frac{5\pi}{6}+k2\pi\Leftrightarrow x=\pm\frac{5\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$

Câu 15. Nghiệm của phương trình $\tan 2x=-\sqrt{3}$ là

A. $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ **B.** $x=\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ **C.** $x=-\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$ **D.** $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN D.

Ta có: $\tan 2x=-\sqrt{3}=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow 2x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 16. Nghiệm của phương trình $\cot x=-\sqrt{3}$ là

A. $x=\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ **B.** $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ **C.** $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ **D.** $x=\frac{4\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN B.

Ta có: $\cot x=-\sqrt{3}=\cot\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 17. Nghiệm của phương trình $\tan x=\tan 25^o$ là

A. $x=25^o+k360^o$ và $x=155^o+k360^o, k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x=25^o+k180^o$ và $x=155^o+k180^o, k\in\mathbb{Z}$

C. $x=25^o+k360^o$ và $x=-25^o+k360^o, k\in\mathbb{Z}$ **D.** $x=25^o+k180^o, k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN D.

Câu 18. Nghiệm của phương trình $\tan\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=5$ là

A. $x=20^o+k180^o, k\in\mathbb{Z}$ **B.** $x=15^o+5+k180^o, k\in\mathbb{Z}$

C. $x=15^o+\arctan 5+k180^o, k\in\mathbb{Z}$ **D.** $x=\frac{\pi}{12}+\arctan 5+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN D.

$\tan\left(x-15^{o}\right)=5\Leftrightarrow\tan\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\arctan 5$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{12}=\arctan 5+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+\arctan 5+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Câu 19: Giải phương trình $\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=0$.

A. $x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$ **B.** $x=\frac{2\pi}{3}+\frac{k3\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z}).$

C. $x=\frac{\pi}{3}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$ **D.** $x=\frac{\pi}{2}+\frac{k3\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z}).$

Lời giải.

Chọn D

Phương trình $\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}=k\pi$

$\Leftrightarrow\frac{2x}{3}=\frac{\pi}{3}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\frac{k3\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z}).$

Câu 20: Số nghiệm của phương trình $\sin\left(2x-40^{0}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ với $-180^{0}\le x\le 180^{0}$ là?

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $\sin\left(2x-40^{0}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\sin\left(2x-40^{0}\right)=\sin 60^{0}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-40^{0}=60^{0}+k360^{0}\\2x-40^{0}=180^{0}-60^{0}+k360^{0}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=100^{0}+k360^{0}\\2x=160^{0}+k360^{0}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=50^{0}+k180^{0}\\x=80^{0}+k180^{0}\end{array}\right.$.

- Xét nghiệm $x=50^{0}+k180^{0}$. Vì $-180^{0}\le x\le 180^{0}\longrightarrow-180^{0}\le 50^{0}+k180^{0}\le 180^{0}$

$\Leftrightarrow-\frac{23}{18}\le k\le\frac{13}{18}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}\left[\begin{array}{l}k=-1\to x=-130^{0}\\k=0\to x=50^{0}\end{array}\right.$.

- Xét nghiệm $x=80^{0}+k180^{0}$. Vì $-180^{0}\le x\le 180^{0}\longrightarrow-180^{0}\le 80^{0}+k180^{0}\le 180^{0}$

$\Leftrightarrow-\frac{13}{9}\le k\le\frac{5}{9}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}\left[\begin{array}{l}k=-1\to x=-100^{0}\\k=0\to x=80^{0}\end{array}\right.$.

Vậy có tất cả 4 nghiệm thỏa mãn bài toán.

Cách 2 (CASIO). Ta có $-180^{0}\le x\le 180^{0}\longrightarrow-360^{0}\le 2x\le 360^{0}.$

Chuyển máy về chế độ DEG, dùng chức năng TABLE nhập hàm $f(X)=\sin(2X-40)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ với các thiết lập $\text{Start}=-360,\ \text{End}=360,\ \text{Step}=40$. Quan sát bảng giá trị của $f(X)$ ta suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 21: Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$ trên đường tròn lượng giác là?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

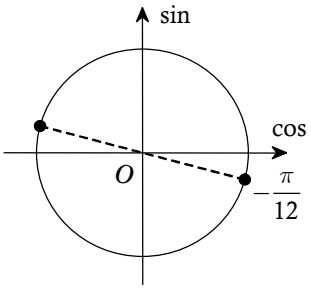
Lời giải

Chọn C

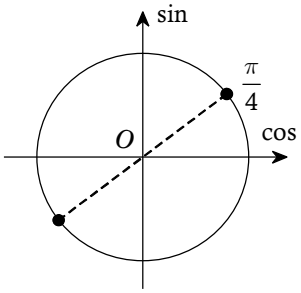
Phương trình $\Leftrightarrow \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\2x+\dfrac{\pi}{3}=\pi-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{12}+k\pi\\x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$

Biểu diễn nghiệm $x=-\dfrac{\pi}{12}+k\pi$ trên đường tròn lượng giác ta được 2 vị trí (hình 1).

Biểu diễn nghiệm $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ trên đường tròn lượng giác ta được 2 vị trí (hình 2).



Hình 1



Hình 2

Vậy có tất cả 4 vị trí biểu diễn các nghiệm các nghiệm của phương trình.

Cách trắc nghiệm. Ta đưa về dạng $x=\alpha+k\dfrac{2\pi}{n}\longrightarrow$ số vị trí biểu diễn trên đường tròn lượng giác là n.

- Xét $x=-\dfrac{\pi}{12}+k\pi\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{2\pi}{2}\longrightarrow$ có 2 vị trí biểu diễn.
- Xét $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{2\pi}{2}\longrightarrow$ có 2 vị trí biểu diễn.

Nhận xét. Cách trắc nghiệm tuy nhanh nhưng cẩn thận các vị trí có thể trùng nhau.

Câu 22: Với những giá trị nào của x thì giá trị của các hàm số $y=\sin 3x$ và $y=\sin x$ bằng nhau?

A. $\left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$

C. $x=k\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbb{Z}).$ **D.** $x=k\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z}).$

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\sin 3x=\sin x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=x+k2\pi \\ 3x=\pi-x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$

Câu 23: Gọi x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\dfrac{2\cos 2x}{1-\sin 2x}=0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right).$ **B.** $x_0\in\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right].$ **C.** $x_0\in\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{4}\right).$ **D.** $x_0\in\left[\dfrac{3\pi}{4};\pi\right].$

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $1-\sin 2x\neq 0\Leftrightarrow \sin 2x\neq 1.$

Phương trình $\dfrac{2\cos 2x}{1-\sin 2x}=0\Leftrightarrow \cos 2x=0\xrightarrow{\sin^2 2x+\cos^2 2x=1}\left[\begin{array}{l} \sin 2x=1(\text{loại}) \\ \sin 2x=-1(\text{thỏa mãn}) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \sin 2x=-1\Leftrightarrow 2x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$

Cho $-\dfrac{\pi}{4}+k\pi>0\longrightarrow k>\dfrac{1}{4}.$

Do đó nghiệm dương nhỏ nhất ứng với $k=1\rightarrow x=\dfrac{3\pi}{4}\in\left[\dfrac{3\pi}{4};\pi\right].$

Câu 24: Hỏi trên đoạn $[-2017;2017]$, phương trình $(\sin x+1)\left(\sin x-\sqrt{2}\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 4034. **B.** 4035. **C.** 641. **D.** 642.

Lời giải.

Chọn D

Phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=-1 \\ \sin x=\sqrt{2}(\text{vo nghiem}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$

Theo giả thiết $-2017 \le -\frac{\pi}{2}+k2\pi \le 2017 \Leftrightarrow \frac{-2017+\frac{\pi}{2}}{2\pi} \le k \le \frac{2017+\frac{\pi}{2}}{2\pi}$

$\xrightarrow{\text{xap xi}} -320,765 \le k \le 321,265 \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k \in \{-320;-319;...;321\}.$

Vậy có tất cả 642 giá trị nguyên của k tương ứng với có 642 nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 25: Tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ bằng:

A. $\frac{\pi}{9}$. **B.** $-\frac{\pi}{6}$. **C.** $\frac{\pi}{6}$. **D.** $-\frac{\pi}{9}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 3x-\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=\frac{7\pi}{12}+k2\pi \\ 3x=\frac{11\pi}{12}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{7\pi}{36}+\frac{k2\pi}{3} \\ x=\frac{11\pi}{36}+\frac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$

TH1. Với $x=\frac{7\pi}{36}+\frac{k2\pi}{3} \xrightarrow{\text{Cho}} \left[\begin{array}{l} x>0 \Leftrightarrow k>-\frac{7}{24} \Rightarrow k_{\min}=0 \to x=\frac{7\pi}{36} \\ x<0 \Leftrightarrow k<-\frac{7}{24} \Rightarrow k_{\max}=-1 \to x=-\frac{17\pi}{36} \end{array}\right.$.

TH2. Với $x=\frac{11\pi}{36}+\frac{k2\pi}{3} \xrightarrow{\text{Cho}} \left[\begin{array}{l} x>0 \Leftrightarrow k>-\frac{11}{24} \Rightarrow k_{\min}=0 \to x=\frac{11\pi}{36} \\ x<0 \Leftrightarrow k<-\frac{11}{24} \Rightarrow k_{\max}=-1 \to x=-\frac{13\pi}{36} \end{array}\right.$.

So sánh bốn nghiệm ta được nghiệm âm lớn nhất là $x=-\frac{13\pi}{36}$ và nghiệm dương nhỏ nhất là $x=\frac{7\pi}{36}$. Khi đó tổng hai nghiệm này bằng $-\frac{13\pi}{36}+\frac{7\pi}{36}=-\frac{\pi}{6}$.

Câu 26: Tổng các nghiệm của phương trình $\tan\left(2x-15^0\right)=1$ trên khoảng $\left(-90^0;90^0\right)$ bằng:

A. 0^0. **B.** -30^0. **C.** 30^0. **D.** -60^0.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\tan\left(2x-15^0\right)=1 \Leftrightarrow 2x-15^0=45^0+k180^0 \Leftrightarrow x=30^0+k90^0 \ (k\in\mathbb{Z}).$

Do $x\in(-90^0;90^0)\longrightarrow -90^0<30^0+k90^0<90^0\Leftrightarrow -\frac{4}{3}<k<\frac{2}{3}$

$\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}\left[\begin{array}{l}k=-1\to x=-60^0\\k=0\to x=30^0\end{array}\right.\longrightarrow -60^0+30^0=-30^0.$

Câu 27: Giải phương trình $\cot(3x-1)=-\sqrt{3}$.

A. $x=\frac{1}{3}+\frac{5\pi}{18}+k\frac{\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z})$.

B. $x=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{18}+k\frac{\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z})$.

C. $x=\frac{5\pi}{18}+k\frac{\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z})$.

D. $x=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{6}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\cot(3x-1)=-\sqrt{3}\Leftrightarrow\cot(3x-1)=\cot\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow 3x-1=-\frac{\pi}{6}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{18}+k\frac{\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z})\xrightarrow{k=1}x=\frac{1}{3}+\frac{5\pi}{18}$.

Câu 28: Số nghiệm của phương trình $\tan x=\tan\frac{3\pi}{11}$ trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4};2\pi\right)$ là?

A. 1 **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\tan x=\tan\frac{3\pi}{11}\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{11}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Do $x\in\left(\frac{\pi}{4};2\pi\right)\to\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{11}+k\pi<2\pi\xrightarrow[\text{xap xi}]{\text{CASIO}}-0,027<k<1,72\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{0;1\}$.

Câu 29: Tổng các nghiệm của phương trình $\tan 5x-\tan x=0$ trên nửa khoảng $[0;\pi)$ bằng:

A. π. **B.** $\frac{3\pi}{2}$. **C.** 2π. **D.** $\frac{5\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\tan 5x-\tan x=0\Leftrightarrow\tan 5x=\tan x\Leftrightarrow 5x=x+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{4}\ (k\in\mathbb{Z})$.

Vì $x\in[0;\pi)$, suy ra $0\le\frac{k\pi}{4}<\pi\Leftrightarrow 0\le k<4\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k=\{0;1;2;3\}$.

Suy ra các nghiệm của phương trình trên $[0;\pi)$ là $\left\{0;\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right\}$.

Suy ra $0+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$.

Câu 30: Giải phương trình $\tan 3x.\cot 2x=1$.

A. $x=k\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$. **B.** $x=-\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$.

C. $x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$. **D.** Vô nghiệm.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases}\cos 3x\neq 0\\ \sin 2x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\\ x\neq k\frac{\pi}{2}\end{cases}\ (k\in\mathbb{Z})$.

Phương trình $\Leftrightarrow\tan 3x=\frac{1}{\cot 2x}\Leftrightarrow\tan 3x=\tan 2x\Leftrightarrow 3x=2x+k\pi\Leftrightarrow x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Đối chiếu điều kiện, ta thấy nghiệm $x=k\pi$ không thỏa mãn $x\neq k\frac{\pi}{2}$.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 31: Giải phương trình $\cos 2x\tan x=0$.

A. $x=k\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$. **B.** $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=k\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

C. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\\ x=k\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$. **D.** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Phương trình $\cos 2x\tan x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \tan x=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}(\text{thỏa mãn})\\ x=k\pi(\text{thỏa mãn})\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

Câu 32: Tìm tất các các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sin x=m$ có nghiệm.

A. $m\leq 1$. **B.** $m\geq -1$. **C.** $-1\leq m\leq 1$. **D.** $m\leq -1$.

Lời giải

Chọn C

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta luôn có $-1 \le \sin x \le 1$.

Do đó, phương trình $\sin x = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \le m \le 1$.

Câu 33: Tìm tất các các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos x - m = 0$ vô nghiệm.

A. $m \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$.

B. $m \in (1;+\infty)$.

C. $m \in [-1;1]$.

D. $m \in (-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng điều kiện có nghiệm của phương trình $\cos x = a$.

- Phương trình có nghiệm khi $|a| \le 1$.
- Phương trình vô nghiệm khi $|a| > 1$.

Phương trình $\cos x - m = 0 \Leftrightarrow \cos x = m$.

Do đó, phương trình $\cos x = m$ vô nghiệm $\Leftrightarrow |m| > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1 \end{array}\right.$.

Câu 34: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos x = m + 1$ có nghiệm?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng điều kiện có nghiệm của phương trình $\cos x = a$.

- Phương trình có nghiệm khi $|a| \le 1$.
- Phương trình vô nghiệm khi $|a| > 1$.

Do đó, phương trình $\cos x = m + 1$ có nghiệm khi và chỉ khi $|m+1| \le 1$

$\Leftrightarrow -1 \le m + 1 \le 1 \Leftrightarrow -2 \le m \le 0 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-2;-1;0\}$.

Câu 35: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - m = 2$ có nghiệm. Tính tổng T của các phần tử trong S.

A. $T = 6$.

B. $T = 3$.

C. $T = -2$.

D. $T = -6$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-m=2 \Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=m+2.$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -1\le m+2\le 1 \Leftrightarrow -3\le m\le -1$

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} S=\{-3;-2;-1\} \longrightarrow T=(-3)+(-2)+(-1)=-6.$

BÀI 3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

A. KIẾN THỨC LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1) Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác

Định nghĩa. Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác là phương trình có dạng

$$\boxed{at+b=0} \ (1)$$

trong đó a, b là các hằng số $(a\neq 0)$ và t là một hàm số lượng giác.

Cách giải. Chuyển vế rồi chia hai vế phương trình cho a, ta đưa về phương trình lượng giác cơ bản.

2) Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$

Định nghĩa. Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$ là phương trình có dạng

$$\boxed{a\sin x+b\cos x=c}$$

Cách giải. Điều kiện để phương trình có nghiệm: $a^2+b^2\geq c^2$.

Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{a^2+b^2}$, ta được

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Do $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$ nên đặt $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha\longrightarrow\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha.$

Khi đó phương trình trở thành

$$\cos\alpha\sin x+\sin\alpha\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow\sin\left(x+\alpha\right)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

3) Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

Định nghĩa. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác là phương trình có dạng

$$\boxed{at^2+bt+c=0}$$

trong đó a, b, c là các hằng số $(a\neq 0)$ và t là một hàm số lượng giác.

Cách giải. Đặt biểu thức lượng giác làm ẩn phụ và đặt điều kiện cho ẩn phụ (nếu có) rồi giải phương trình theo ẩn phụ này. Cuối cùng, ta đưa về việc giải các phương trình lượng giác cơ bản.

4) Phương trình bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$

Định nghĩa. Phương trình bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$ là phương trình có dạng

$$\boxed{a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0}$$

Cách giải.

● Kiểm tra $\cos x = 0$ có là nghiệm của phương trình.

● Khi $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta thu được phương trình

$$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0.$$

Đây là phương trình bậc hai đối với $\tan x$ mà ta đã biết cách giải.

Đặc biệt. Phương trình dạng $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$ ta làm như sau:

Phương trình $\Leftrightarrow a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d.1$

$\Leftrightarrow a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$

$\Leftrightarrow \left(a-d\right)\sin^2 x + b\sin x\cos x + \left(c-d\right)\cos^2 x = 0.$

5) Phương trình chứa $\sin x \pm \cos x$ và $\sin x.\cos x$

Định nghĩa. Phương trình chứa $\sin x \pm \cos x$ và $\sin x.\cos x$

$$\boxed{a\left(\sin x \pm \cos x\right) + b\sin x\cos x + c = 0}$$

Cách giải. Đặt $t = \sin x \pm \cos x$ (điều kiện $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$)

Biểu diễn $\sin x.\cos x$ theo t ta được phương trình cơ bản.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁO GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác

1. Phương pháp

Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác là phương trình có dạng

$$\boxed{at + b = 0} \quad (1)$$

trong đó a, b là các hằng số $\left(a \neq 0\right)$ và t là một hàm số lượng giác.

Cách giải. Chuyển vế rồi chia hai vế phương trình cho a, ta đưa về phương trình lượng giác cơ bản.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Giải phương trình $2\cos x - \sqrt{3} = 0$.

Lời giải

Ta có $2\cos x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \cos\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right).$

Ví dụ 2: Giải phương trình $2\sin x-1=0$

Lời giải

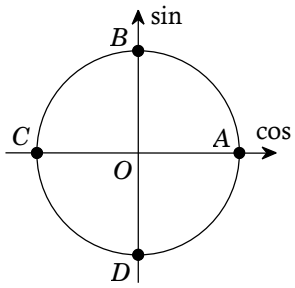
Ta có: $2\sin x-1=0\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}$

Ví dụ 3: Giải phương trình $\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}=0$

Lời giải

Ta có $\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}=0\Leftrightarrow \tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}\Leftrightarrow \tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+k\pi\Leftrightarrow 2x=k\pi\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}\ \ (k\in\mathbb{Z}).$



Quá dễ để nhận ra có 4 vị trí biểu diễn nghiệm của phương trình đã cho trên đường tròn lượng giác là A, B, C,D.

Cách trắc nghiệm. Ta có $x=\frac{k\pi}{2}=k\frac{2\pi}{4}\longrightarrow$ có 4 vị trí biểu diễn.

Ví dụ 4: Hỏi trên đoạn $[0;2018\pi]$, phương trình $\sqrt{3}\cot x-3=0$ có bao nhiêu nghiệm?

Lời giải

Ta có $\cot x=\sqrt{3}\Leftrightarrow \cot x=\cot\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z}).$

Theo giả thiết, ta có $0\le\frac{\pi}{6}+k\pi\le 2018\pi\xrightarrow{\text{xap xi}}-\frac{1}{6}\le k\le 2017,833$

$3\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{0;1;...;2017\}$. Vậy có tất cả \$2018\$ giá trị nguyên của k tương ứng với có 2018 nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Phương trình $2\sin x+1=0$ có nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=-\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi \\ x=-\dfrac{7\pi}{6}+k\pi \end{array}\right.$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2\sin x+1=0 \Leftrightarrow \sin x=-\dfrac{1}{2}=\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

Câu 2: Giải phương trình $\left(2\cos\dfrac{x}{2}-1\right)\left(\sin\dfrac{x}{2}+2\right)=0$

A. $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$ **B.** $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

C. $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k4\pi,(k\in\mathbb{Z})$ **D.** $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k4\pi,(k\in\mathbb{Z})$

Lời giải

Chọn D

Vì $-1\le\sin\dfrac{x}{2}\le 1,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\sin\dfrac{x}{2}+2>0$

Vậy phương trình tương đương

$$2\cos\frac{x}{2}-1=0\Leftrightarrow\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$$
$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+k4\pi,(k\in\mathbb{Z})$$

Câu 3: Phương trình $2\sin x-\sqrt{3}=0$ có tập nghiệm là:

A. $\left\{\pm\dfrac{\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B.** $\left\{\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $\left\{\frac{\pi}{6}+k2\pi,\frac{5\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **D.** $\left\{\frac{\pi}{3}+k2\pi,\frac{2\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

$$2\sin x-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\left\{\frac{\pi}{3}+k2\pi,\frac{2\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$

Câu 4: Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $2\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)-1=0.$

A. $x=\frac{\pi}{4}.$ **B.** $x=\frac{7\pi}{24}.$ **C.** $x=\frac{\pi}{8}.$ **D.** $x=\frac{\pi}{12}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $2\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)-1=0\Leftrightarrow\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\4x-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\4x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\\x=\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

TH1. Với $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\xrightarrow{\text{Cho}>0}\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}>0\Leftrightarrow k>-\frac{1}{4}\to k_{\min}=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{8}.$

TH2. Với $x=\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\xrightarrow{\text{Cho}>0}\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}>0\Leftrightarrow k>-\frac{7}{12}\to k_{\min}=0\Rightarrow x=\frac{7\pi}{24}.$

So sánh hai nghiệm ta được $x=\frac{\pi}{8}$ là nghiệm dương nhỏ nhất.

Câu 5: Giải phương trình $4\sin^2 x=3$.

A. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z}).$ **B.** $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z}).$

C. $\left\{\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{3}\\k\neq3\ell\end{array}\right.(k,\ell\in\mathbb{Z}).$ **D.** $\left\{\begin{array}{l}x=\frac{k\pi}{3}\\k\neq3\ell\end{array}\right.(k,\ell\in\mathbb{Z}).$

Lời giải

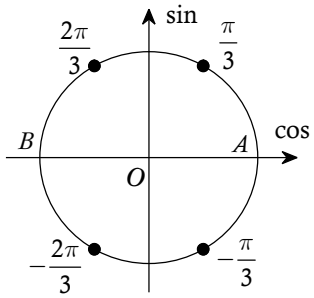
Chọn D

Ta có $4\sin^2 x = 3 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

● Với $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

● Với $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Nhận thấy chưa có đáp án nào phù hợp. Ta biểu diễn các nghiệm trên đường tròn lượng giác (hình vẽ).



Nếu tính luôn hai điểm A, B thì có tất cả 6 điểm cách đều nhau nên ta gộp được 6 điểm này thành một họ nghiệm, đó là $x = k\frac{\pi}{3}$.

Suy ra nghiệm của phương trình $\left\{\begin{array}{l} x = k\frac{\pi}{3} \\ k\frac{\pi}{3} \neq l\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{3} \\ k \neq 3\ell \end{array}\right. (k, \ell \in \mathbb{Z})$.

Câu 6: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{3}\cos x + m - 1 = 0$ có nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\sqrt{3}\cos x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1-m}{\sqrt{3}}$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \le \frac{1-m}{\sqrt{3}} \le 1 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{3} \le m \le 1 + \sqrt{3} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{0;1;2\}$.

Vậy có tất cả 3 giá trị nguyên của tham số m.

Câu 7: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2108;2018]$ để phương trình $m\cos x+1=0$ có nghiệm?

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 4036. **D.** 4038.

Lời giải

Chọn A

Ta có $m\cos x+1=0\Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{m}$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -1\le -\frac{1}{m}\le 1\Leftrightarrow m\ge 1\xrightarrow[m\in[-2018;2018]]{m\in\mathbb{Z}} m\in\{1;2;3;...;2018\}$.

Vậy có tất cả 2018 giá trị nguyên của tham số m.

Câu 8: Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $(m-2)\sin 2x=m+1$ nhận $x=\frac{\pi}{12}$ làm nghiệm.

A. $m\ne 2$. **B.** $m=\frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}-2}$. **C.** $m=-4$. **D.** $m=-1$.

Lời giải

Chọn C

Vì $x=\frac{\pi}{12}$ là một nghiệm của phương trình $(m-2)\sin 2x=m+1$ nên ta có:

$(m-2).\sin\frac{2\pi}{12}=m+1\Leftrightarrow\frac{m-2}{2}=m+1\Leftrightarrow m-2=2m+2\Leftrightarrow m=-4$.

Vậy $m=-4$ là giá trị cần tìm.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m+1)\sin x+2-m=0$ có nghiệm.

A. $m\le -1$. **B.** $m\ge\frac{1}{2}$. **C.** $-1<m\le\frac{1}{2}$. **D.** $m>-1$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $(m+1)\sin x+2-m=0\Leftrightarrow(m+1)\sin x=m-2\Leftrightarrow\sin x=\frac{m-2}{m+1}$.

Để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -1\le\frac{m-2}{m+1}\le 1$

$\Leftrightarrow\begin{cases}0\le 1+\frac{m-2}{m+1}\\ \frac{m-2}{m+1}-1\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2m-1}{m+1}\ge 0\\ -\frac{3}{m+1}\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge\frac{1}{2}\\ m<-1\\ m>-1\end{cases}\Leftrightarrow m\ge\frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m-2)\sin 2x = m+1$ vô nghiệm.

A. $m \in \left[\frac{1}{2};2\right]$.

B. $m \in \left(-\infty;\frac{1}{2}\right) \cup (2;+\infty)$.

C. $m \in \left(\frac{1}{2};2\right) \cup (2;+\infty)$.

D. $m \in \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn D

TH1. Với $m=2$, phương trình $(m-2)\sin 2x = m+1 \Leftrightarrow 0 = 3$: vô lý.

Suy ra $m=2$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

TH2. Với $m \neq 2$, phương trình $(m-2)\sin 2x = m+1 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{m+1}{m-2}$.

Để phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \frac{m+1}{m-2} \notin [-1;1] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{m+1}{m-2} > 1 \\ \frac{m+1}{m-2} < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ \frac{1}{2} < m < 2 \end{array}\right.$.

Kết hợp hai trường hợp, ta được $m > \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Dạng 2. Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$

1. Phương pháp

Cách 1

- Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{a^2+b^2}$ ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

- Đặt: $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $(\alpha \in [0, 2\pi])$ phương trình trở thành:

$$\sin\alpha.\sin x + \cos\alpha.\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta$$
$$\Leftrightarrow x = \alpha \pm \beta + k2\pi \quad (k \in Z)$$

- Điều kiện để phương trình có nghiệm là:

$$\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1 \Leftrightarrow a^2+b^2 \ge c^2.$$

Cách 2

- Xét $x = \pi + k2\pi \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ có là nghiệm hay không?

- Xét $x \neq \pi + k2\pi \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} \neq 0.$

Đặt: $t = \tan\frac{x}{2}$, thay $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, ta được phương trình bậc hai theo t:

$$(b+c)t^2 - 2at + c - b = 0 \quad (3)$$

Vì $x \neq \pi + k2\pi \Leftrightarrow b + c \neq 0$, nên (3) có nghiệm khi:

$$\Delta' = a^2 - (c^2 - b^2) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2.$$

Giải (3), với mỗi nghiệm t_0, ta có phương trình: $\tan\frac{x}{2} = t_0$.

Ghi chú

1/ Cách 2 thường dùng để giải và biện luận.

2/ Cho dù cách 1 hay cách 2 thì điều kiện để phương trình có nghiệm: $a^2 + b^2 \geq c^2$.

3/ Bất đẳng thức B.C.S:

$$|y| = |a.\sin x + b.\cos x| \leq \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow \min y = -\sqrt{a^2+b^2} \text{ và } \max y = \sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{a} = \frac{\cos x}{b} \Leftrightarrow \tan x = \frac{a}{b}$$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Giải phương trình

a) $\sin x + 2\cos x = 5$; b) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$; c) $5\cos x + 3\sin x = 4\sqrt{2}$.

Giải

a) Ta thấy $a^2 + b^2 = 5 < c^2 = 25 \Rightarrow$ phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Chia hai vế của (1) cho $\sqrt{a^2+b^2} = 2$, ta được :

$$\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{3} - \cos x\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) Chia hai vế của (1) cho $\sqrt{a^2+b^2}=34$, ta được :

$$\frac{5}{\sqrt{34}}\cos x+\frac{3}{\sqrt{34}}\sin x=\frac{4}{\sqrt{17}}(*)$$

Đặt $\cos\varphi=\frac{5}{\sqrt{34}},\sin\varphi=\frac{3}{\sqrt{34}},\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Lúc đó : $pt\Leftrightarrow\cos(x-\varphi)=\frac{4}{\sqrt{17}}\Leftrightarrow x=\pm\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}+\varphi+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

Ví dụ 2. Tìm nghiệm của phương trình $\cos 7x-\sqrt{3}\sin 7x=-\sqrt{2}(*)$ thỏa mãn điều kiện $\frac{2\pi}{5}<x<\frac{6\pi}{7}$.

Giải

Ta có :

$$(*)\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cos 7x-\frac{3}{2}\sin 7x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\sin\frac{\pi}{6}\cos 7x-\cos\frac{\pi}{6}\sin 7x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow\sin\left(\frac{\pi}{6}-7x\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\sin\left(7x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}7x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\7x-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{4}+m2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{5\pi}{84}+\frac{k2\pi}{7}\\x=\frac{11\pi}{84}+\frac{m2\pi}{7}\end{array}\right.(k,m\in\mathbb{Z})$$

Do

$$\frac{2\pi}{5}<x<\frac{6\pi}{7}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\frac{2\pi}{5}<\frac{5\pi}{84}+\frac{k2\pi}{7}<\frac{6\pi}{7}\\k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}\frac{2\pi}{5}<\frac{11\pi}{84}+\frac{m2\pi}{7}<\frac{6\pi}{7}\\m\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\frac{2}{5}-\frac{5}{84}<\frac{2k}{7}<\frac{6}{7}-\frac{5}{84}\\k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}\frac{2}{5}-\frac{11}{84}<\frac{2m}{7}<\frac{6}{7}-\frac{11}{84}\\m\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\frac{7}{5}-\frac{5}{24}<k<3-\frac{5}{24}\\k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}\frac{7}{5}-\frac{11}{24}<m<3-\frac{11}{24}\\m\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=2\\m=1\\m=2\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=\frac{52\pi}{84};x=\frac{35\pi}{84};x=\frac{59\pi}{84}$.

Ví dụ 3. Xác định m để phương trình $\sqrt{2}\sin x+m\cos x=m-\sqrt{2}(*)$ có nghiệm.

Định hướng : Phương trình $a\sin x+b\cos x=c$ có nghiệm khi $a^2+b^2\geq c^2$.

Giải

Ta có :

(*) có nghiệm $\Leftrightarrow \sqrt{2^2}+m^2 \geq \left(m-\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2+m^2 \geq m^2-2\sqrt{2}m+2 \Leftrightarrow m \geq 0$

Vậy $m \geq 0$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $\cos 2x-\sin 2x=1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\frac{\pi}{4} \in S$. **B.** $\frac{\pi}{2} \in S$. **C.** $\frac{3\pi}{4} \in S$. **D.** $\frac{5\pi}{4} \in S$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ 2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=k\pi \\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Xét nghiệm $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, với $k=1$ ta được $x=\frac{3\pi}{4}$.

Câu 2: Số nghiệm của phương trình $\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=\sqrt{3}$ trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 2x+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=k\pi \\ x=\frac{\pi}{6}+k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

- $0<k\pi<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0<k<\frac{1}{2} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}$ không có giá trị k thỏa mãn.
- $0<\frac{\pi}{6}+k\pi<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{6}<k<\frac{1}{3} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=0 \rightarrow x=\frac{\pi}{6}$.

Câu 3: Tính tổng T các nghiệm của phương trình $\cos^2 x-\sin 2x=\sqrt{2}+\sin^2 x$ trên khoảng $(0;2\pi)$.

A. $T=\frac{7\pi}{8}$. **B.** $T=\frac{21\pi}{8}$. **C.** $T=\frac{11\pi}{4}$. **D.** $T=\frac{3\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $\Leftrightarrow \cos^2 x-\sin^2 x-\sin 2x=\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos 2x-\sin 2x=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{4}=k2\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{8}+k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$.

Do $0<x<2\pi \longrightarrow 0<-\frac{\pi}{8}+k\pi<2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{8}<k<\frac{17}{8} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} \left[\begin{array}{l} k=1\rightarrow x=\frac{7\pi}{8} \\ k=2\rightarrow x=\frac{15\pi}{8} \end{array}\right.$

$\longrightarrow T=\frac{7\pi}{8}+\frac{15\pi}{8}=\frac{11}{4}\pi$.

Câu 4: Số nghiệm của phương trình $\sin 5x+\sqrt{3}\cos 5x=2\sin 7x$ trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 5x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x=\sin 7x \Leftrightarrow \sin\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 7x$

$\Leftrightarrow \sin 7x=\sin\left(5x+\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x=5x+\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 7x=\pi-\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{6} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$.

- $0<\frac{\pi}{6}+k\pi<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{6}<k<\frac{1}{3} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=0\rightarrow x=\frac{\pi}{6}$.
- $0<\frac{\pi}{18}+k\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{3}<k<\frac{8}{3} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} \left[\begin{array}{l} k=0\rightarrow x=\frac{\pi}{18} \\ k=1\rightarrow x=\frac{2\pi}{9} \\ k=2\rightarrow x=\frac{7\pi}{18} \end{array}\right.$.

Vậy có 4 nghiệm thỏa mãn.

Câu 5: Giải phương trình $\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin 2x$.

A. $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{18}+k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{18}+k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$

C. $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{18}+k\dfrac{2\pi}{3} \\ x=-\dfrac{\pi}{18}+k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin x$ và $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos x$.

Do đó phương trình $\Leftrightarrow -\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin 2x\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x+\cos x=-2\sin 2x$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x=-\sin 2x\Leftrightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sin 2x\Leftrightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin(-2x)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{\pi}{6}=-2x+k2\pi \\ x+\dfrac{\pi}{6}=\pi+2x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{18}+k\dfrac{2\pi}{3} \\ x=-\dfrac{5\pi}{6}-k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$

Xét nghiệm $x=-\dfrac{5\pi}{6}-k2\pi \xrightarrow[k\in\mathbb{Z},\ k'\in\mathbb{Z}]{k=-1-k'} x=\dfrac{7\pi}{6}+k'2\pi$.

Vậy phương trình có nghiệm $x=-\dfrac{\pi}{18}+k\dfrac{2\pi}{3},\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k'2\pi\ (k,k'\in\mathbb{Z}).$

Câu 6: Gọi x_0 là nghiệm âm lớn nhất của $\sin 9x+\sqrt{3}\cos 7x=\sin 7x+\sqrt{3}\cos 9x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0\in\left(-\dfrac{\pi}{12};0\right).$ **B.** $x_0\in\left[-\dfrac{\pi}{6};-\dfrac{\pi}{12}\right].$ **C.** $x_0\in\left[-\dfrac{\pi}{3};-\dfrac{\pi}{6}\right).$ **D.** $x_0\in\left[-\dfrac{\pi}{2};-\dfrac{\pi}{3}\right).$

Lời giải

Chọn A

Phương trình $\Leftrightarrow \sin 9x-\sqrt{3}\cos 9x=\sin 7x-\sqrt{3}\cos 7x$

$\Leftrightarrow \sin\left(9x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left(7x-\dfrac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9x-\dfrac{\pi}{3}=7x-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \\ 9x-\dfrac{\pi}{3}=\pi-\left(7x-\dfrac{\pi}{3}\right)+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{48}+\dfrac{k\pi}{8} \end{array}\right.$

$\xrightarrow{\text{Cho x <0}}\left[\begin{array}{l} k\pi<0\Leftrightarrow k<0\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k_{\max}=-1\to x=-\pi \\ \dfrac{5\pi}{48}+\dfrac{k\pi}{8}<0\Leftrightarrow k<-\dfrac{5}{6}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k_{\max}=-1\to x=-\dfrac{\pi}{48}\end{array}\right.$. So sánh hai nghiệm ta được nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $x=-\dfrac{\pi}{48}\in\left(-\dfrac{\pi}{12};0\right)$.

Câu 7: Biến đổi phương trình $\cos 3x-\sin x=\sqrt{3}(\cos x-\sin 3x)$ về dạng $\sin(ax+b)=\sin(cx+d)$ với b, d thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$. Tính $b+d$.

A. $b+d=\dfrac{\pi}{12}$. **B.** $b+d=\dfrac{\pi}{4}$. **C.** $b+d=-\dfrac{\pi}{3}$. **D.** $b+d=\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 3x+\cos 3x=\sin x+\sqrt{3}\cos x$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x+\dfrac{1}{2}\cos 3x=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x\Leftrightarrow \sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Suy ra $b+d=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$.

Câu 8: Giải phương trình $\dfrac{\cos x-\sqrt{3}\sin x}{\sin x-\dfrac{1}{2}}=0$.

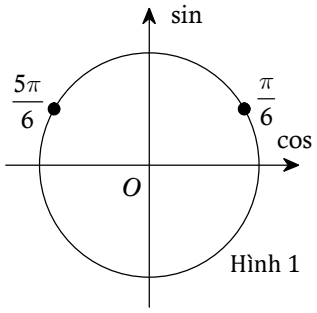
A. $x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x=\dfrac{7\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\sin x-\dfrac{1}{2}\neq 0\Leftrightarrow \sin x\neq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \sin x\neq\sin\dfrac{\pi}{6}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x\neq\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x\neq\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

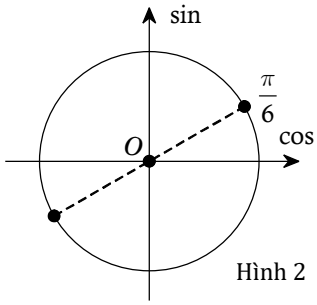


Hình 1

Điều kiện bài toán tương đương với bỏ đi vị trí hai điểm trên đường tròn lượng giác (Hình 1).

Phương trình $\Leftrightarrow \cos x-\sqrt{3}\sin x=0\Leftrightarrow \cos x=\sqrt{3}\sin x$

$\Leftrightarrow \cot x=\sqrt{3}\Leftrightarrow \cot x=\cot\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+l\pi\ (l\in\mathbb{Z}).$



Hình 2

Biểu diễn nghiệm $x=\frac{\pi}{6}+l\pi$ trên đường tròn lượng giác ta được 2 vị trí như Hình 2.

Đối chiếu điều kiện, ta loại nghiệm $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$. Do đó phương trình có nghiệm $x=\frac{7\pi}{6}+2l\pi\ (l\in\mathbb{Z}).$

Câu 9: Hàm số $y=\frac{2\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x-\cos 2x+3}$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y=\frac{2\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x-\cos 2x+3}\Leftrightarrow (y-2)\sin 2x-(y+1)\cos 2x=-3y.$

Điều kiện để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (y-2)^2+(y+1)^2\geq(-3y)^2\Leftrightarrow 7y^2+2y-5\leq 0$

$\Leftrightarrow -1 \le y \le \frac{5}{7} \xrightarrow{y\in\mathbb{Z}} y \in \{-1;0\}$ nên có 2 giá trị nguyên.

Câu 10: Gọi x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x + \sqrt{3}\sin x - \cos x = 2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0 \in \left(0;\frac{\pi}{12}\right]$. **B.** $x_0 \in \left[\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{6}\right]$. **C.** $x_0 \in \left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$. **D.** $x_0 \in \left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = 1$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}+2x\right) + \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = 1$.

Đặt $t = x - \frac{\pi}{6} \longrightarrow x = t + \frac{\pi}{6} \to 2x = 2t + \frac{\pi}{3} \to 2x + \frac{\pi}{6} = 2t + \frac{\pi}{2}$.

Phương trình trở thành $\Leftrightarrow \sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right) + \sin t = 1 \Leftrightarrow \cos 2t + \sin t = 1$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 t - \sin t = 0 \Leftrightarrow \sin t(2\sin t - 1) = 0.$

- $\sin t = 0 \Leftrightarrow t = k\pi \longrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{6} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k_{\min} = 0 \to x = \frac{\pi}{6}$.
- $\sin t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{6} + k2\pi \longrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{6} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k_{\min} = 0 \to x = \frac{\pi}{3}. \\ t = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \longrightarrow x = \pi + k2\pi > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{2} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k_{\min} = 0 \to x = \pi. \end{array}\right.$

Suy ra nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình là $x = \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{6}\right]$.

Câu 11: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để phương trình $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = 2m$ vô nghiệm.

A. 21. **B.** 20. **C.** 18. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow 1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 < (2m)^2 \Leftrightarrow 4m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1 \end{array}\right.$

$\xrightarrow[m\in[-10;10]]{m\in\mathbb{Z}} m \in \{-10;-9;-8;...;-2;2;...;8;9;10\} \longrightarrow$ có 18 giá trị.

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\left(m^2+1\right)$ vô nghiệm.

A. $m\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **B.** $m\in[-1;1]$.

C. $m\in(-\infty;+\infty)$ **D.** $m\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow 1^2+1^2<\left[\sqrt{2}\left(m^2+1\right)\right]^2$

$\Leftrightarrow m^4+2m^2>0\Leftrightarrow m^2\left(m^2+2\right)>0\Leftrightarrow m^2>0\Leftrightarrow m\neq 0.$

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để phương trình $(m+1)\sin x-m\cos x=1-m$ có nghiệm.

A. 21. **B.** 20. **C.** 18. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (m+1)^2+m^2\geq(1-m)^2\Leftrightarrow m^2+4m\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\geq 0\\ m\leq -4\end{array}\right.$

$\xrightarrow[m\in[-10;10]]{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-10;-9;-8;...;-4;0;1;2;...;8;9;10\}\longrightarrow$ có 18 giá trị.

Câu 14: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2018;2018]$ để phương trình $(m+1)\sin^2 x-\sin 2x+\cos 2x=0$ có nghiệm.

A. 4037. **B.** 4036. **C.** 2019. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $\Leftrightarrow (m+1)\dfrac{1-\cos 2x}{2}-\sin 2x+\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow -2\sin 2x+(1-m)\cos 2x=-m-1.$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow(-2)^2+(1-m)^2\geq(-m-1)^2\Leftrightarrow 4m\leq 4\Leftrightarrow m\leq 1$

$\xrightarrow[m\in[-2018;2018]]{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-2018;-2017;...;0;1\}\longrightarrow$ có 2020 giá trị.

Dạng 3. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

1. Phương pháp

Phương trình bậc hai đối với phương trình lương giác là phương trình có một trong 4 dạng sau:

1. $a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$. Cách giải: $t = \sin x, -1 \le t \le 1$
2. $a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$. Cách giải: $t = \cos x, -1 \le t \le 1$
3. $a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$. Cách giải: $t = \tan x, x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
4. $a\cot^2 x + b\cot x + c = 0$. Cách giải: $t = \cot x, x \ne k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

a) $2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0$; b) $\tan^2 x + \left(1 - \sqrt{3}\right)\tan x - \sqrt{3} = 0$

c) $\tan^2 x + \cot^2 x = 2$; d) $\cot^2 2x - 4\cot 2x + 3 = 0$

Hướng dẫn giải

a)

$$2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\left(1 - \cos^2 x\right) + 5\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow -2\cos^2 x + 5\cos x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) Điều kiện: $\cos x \ne 0$

$$\tan^2 x + \left(1 - \sqrt{3}\right)\tan x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = \sqrt{3} \\ \tan x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

a) Điều kiện: $\sin 2x \ne 0$

Đặt $t = \tan^2 x$, phương trình đã cho trở thành

$$t + \frac{1}{t} - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \tan^2 x = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) Điều kiện: $\sin x \ne 0$

$$\cot^2 2x - 4\cot 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot 2x = 3 \\ \cot 2x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\operatorname{arc}\cot 3 + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau

a) $\cos 2x + 9\cos x + 5 = 0$; b) $\frac{1}{\cos^2 x} - \left(3 + \sqrt{3}\right)\tan x - 3 + \sqrt{3} = 0$

Hướng dẫn giải

a) $\cos 2x+9\cos x+5=0\Leftrightarrow 2\cos^2 x+9\cos x+4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-\dfrac{1}{2}\\ \cos x=4\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

b) Điều kiện: $\cos x\neq 0$

$$\frac{1}{\cos^2 x}-\left(3+\sqrt{3}\right)\tan x+1+\sqrt{3}=0\Leftrightarrow \tan^2 x-\left(3+\sqrt{3}\right)\tan x+\sqrt{3}+2=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=\sqrt{3}+2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\arctan\left(\sqrt{3}+2\right)+k\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$$

Ví dụ 3. Xác định m để phương trình $\cos^2 x-2m\cos x+6m-9=0$ có nghiệm $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\cos x$. Với $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow 0<t\leq 1$

Ta có $t^2-2m+6m-9=0\Leftrightarrow t=2m-3$ hoặc $t=3>1$ (loại)

Phương trình (*) có nghiệm $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow 0<2m-3\leq 1\Leftrightarrow\dfrac{3}{2}<m\leq 2.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Hỏi trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, phương trình $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $2\sin^2 x-3\sin x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{2}\\ \sin x=1\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=\sin\dfrac{\pi}{6}\\ \sin x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

Theo giả thiết $0 \le x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \frac{\pi}{6} + k2\pi < \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \frac{5\pi}{6} + k2\pi < \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \frac{\pi}{2} + k2\pi < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{12} < k < \frac{1}{6} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k = 0 \to x = \frac{\pi}{6} \\ -\frac{5}{12} < k < -\frac{1}{12} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k \in \varnothing \\ -\frac{1}{4} < k < 0 \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k \in \varnothing \end{cases}$.

Vậy phương trình có duy nhất một nghiệm trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 2: Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $2\cos^2 x + 5\cos x + 3 = 0$ trên đường tròn lượng giác là?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 5\cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos x = -\frac{3}{2} (\text{loại}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Suy ra có duy nhất 1 vị trí biểu diễn nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác.

Câu 3: Cho phương trình $\cot^2 3x - 3\cot 3x + 2 = 0$. Đặt $t = \cot 3x$, ta được phương trình nào sau đây?

A. $t^2 - 3t + 2 = 0$. **B.** $3t^2 - 9t + 2 = 0$. **C.** $t^2 - 9t + 2 = 0$. **D.** $t^2 - 6t + 2 = 0$.

Lời giải

Chọn A

Câu 4: Số nghiệm của phương trình $4\sin^2 2x - 2\left(1+\sqrt{2}\right)\sin 2x + \sqrt{2} = 0$ trên $(0;\pi)$ là?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $4\sin^2 2x - 2\left(1+\sqrt{2}\right)\sin 2x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases}$.

- $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \xrightarrow{(0;\pi)} x = \frac{\pi}{8} \\ x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \xrightarrow{(0;\pi)} x = \frac{3\pi}{8} \end{cases}$.

● $\sin 2x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \xrightarrow{(0;\pi)} x = \frac{\pi}{12} \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \xrightarrow{(0;\pi)} x = \frac{5\pi}{12} \end{array}\right.$.

Vậy có tất cả 4 nghiệm thỏa mãn.

Câu 5: Số nghiệm của phương trình $\sin^2 2x - \cos 2x + 1 = 0$ trên đoạn $[-\pi; 4\pi]$ là?

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $\sin^2 2x - \cos 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow -\cos^2 2x - \cos 2x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = -2 (\text{loại}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Do $x \in [-\pi; 4\pi] \longrightarrow -\pi \le k\pi \le 4\pi \Leftrightarrow -1 \le k \le 4 \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k \in \{-1;0;1;2;3;4\}$.

Vậy phương trình có 6 nghiệm thỏa mãn.

Câu 6: Tính tổng T tất cả các nghiệm của phương trình $2\sin^2\frac{x}{4} - 3\cos\frac{x}{4} = 0$ trên đoạn $[0;8\pi]$.

A. $T = 0$. **B.** $T = 8\pi$. **C.** $T = 16\pi$. **D.** $T = 4\pi$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $2\sin^2\frac{x}{4} - 3\cos\frac{x}{4} = 0 \Leftrightarrow 2\left(1 - \cos^2\frac{x}{4}\right) - 3\cos\frac{x}{4} = 0$

$\Leftrightarrow -2\cos^2\frac{x}{4} - 3\cos\frac{x}{4} + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\frac{x}{4} = \frac{1}{2} \\ \cos\frac{x}{4} = -2 (\text{loại}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos\frac{x}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{x}{4} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{4} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{x}{4} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{4\pi}{3} + k8\pi \xrightarrow{x\in[0;8\pi]} x = \frac{4\pi}{3} \\ x = -\frac{4\pi}{3} + k8\pi \xrightarrow{x\in[0;8\pi]} x = \frac{20\pi}{3} \end{array}\right. \rightarrow T = \frac{4\pi}{3} + \frac{20\pi}{3} = 8\pi.$

Câu 7: Số nghiệm của phương trình $\frac{1}{\sin^2 x} - \left(\sqrt{3} - 1\right)\cot x - \left(\sqrt{3} + 1\right) = 0$ trên $(0;\pi)$ là?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\sin x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

Phương trình $\Leftrightarrow \left(1+\cot^2 x\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)\cot x-\left(\sqrt{3}+1\right)=0 \Leftrightarrow \cot^2 x-\left(\sqrt{3}-1\right)\cot x-\sqrt{3}=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cot x=-1\\ \cot x=\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cot x=\cot\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\\ \cot x=\cot\dfrac{\pi}{6}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \xrightarrow{x\in(0;\pi)} x=\dfrac{3\pi}{4}\left(\text{thỏa mãn}\right)\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi \xrightarrow{x\in(0;\pi)} x=\dfrac{\pi}{6}\left(\text{thỏa mãn}\right)\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm thỏa mãn.

Câu 8: Tính tổng T tất cả các nghiệm của phương trình $2\cos 2x+2\cos x-\sqrt{2}=0$ trên đoạn $[0;3\pi]$.

A. $T=\dfrac{17\pi}{4}$. **B.** $T=2\pi$. **C.** $T=4\pi$. **D.** $T=6\pi$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $2\cos 2x+2\cos x-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow 2\left(2\cos^2 x-1\right)+2\cos x-\sqrt{2}=0$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 x+2\cos x-2-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos x=-\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\left(\text{loại}\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \xrightarrow{x\in[0;3\pi]} x=\dfrac{\pi}{4}; x=\dfrac{9\pi}{4}\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \xrightarrow{x\in[0;3\pi]} x=\dfrac{7\pi}{4}\end{array}\right. \longrightarrow T=\frac{\pi}{4}+\frac{9\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}=\frac{17\pi}{4}.$$

Câu 9: Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $\cos 2x+3\sin x+4=0$ trên đường tròn lượng giác là?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $\Leftrightarrow \left(1-2\sin^2 x\right)+3\sin x+4=0 \Leftrightarrow -2\sin^2 x+3\sin x+5=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin x=\dfrac{5}{2}\left(\text{loại}\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \ \ (k\in\mathbb{Z}).$$

Suy ra có duy nhất 1 vị trí đường tròn lượng giác biểu diễn nghiệm.

Câu 10: Cho phương trình $\cos x+\cos\dfrac{x}{2}+1=0$. Nếu đặt $t=\cos\dfrac{x}{2}$, ta được phương trình nào sau đây?

A. $2t^2+t=0$. **B.** $-2t^2+t+1=0$. **C.** $2t^2+t-1=0$. **D.** $-2t^2+t=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$.

Do đó phương trình $\Leftrightarrow \left(2\cos^2\frac{x}{2} - 1\right) + \cos\frac{x}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 0$.

Đặt $t = \cos\frac{x}{2}$, phương trình trở thành $2t^2 + t = 0$.

Câu 11: Số nghiệm của phương trình $\cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{5}{2}$ thuộc $[0;2\pi]$ là?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 - 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

Do đó phương trình $\Leftrightarrow -2\cos^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \frac{3}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{2} \\ \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{3}{2}(\text{loại})\end{array}\right. \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} - x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Ta có $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \xrightarrow{x\in[0;2\pi]} x = \frac{11\pi}{6}$; $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \xrightarrow{x\in[0;2\pi]} x = \frac{\pi}{2}$.

Vậy có hai nghiệm thỏa mãn.

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\tan x + m\cot x = 8$ có nghiệm.

A. $m > 16$. **B.** $m < 16$. **C.** $m \geq 16$. **D.** $m \leq 16$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $\tan x + m\cot x = 8 \Leftrightarrow \tan x + \frac{m}{\tan x} = 8 \Leftrightarrow \tan^2 x - 8\tan x + m = 0$.

Để phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' = (-4)^2 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 16$.

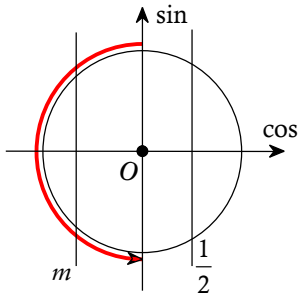
Câu 13: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0$ có nghiệm trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$.

A. $-1 \leq m \leq 0$. **B.** $-1 \leq m < 0$. **C.** $-1 < m < 0$. **D.** $-1 \leq m < \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $\Leftrightarrow 2\cos^2 x-(2m+1)\cos x+m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{2}\\ \cos x=m\end{array}\right.$.



Nhận thấy phương trình $\cos x=\frac{1}{2}$ không có nghiệm trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ (Hình vẽ). Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \cos x=m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)\Leftrightarrow -1\le m<0$.

Dạng 4. Phương trình bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$

1. Phương pháp

Cách 1:

- Kiểm tra cosx = 0 có thoả mãn hay không?

  Lưu ý: $\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow \sin^2 x=1\Leftrightarrow \sin x=\pm 1$.

- Khi $\cos x\neq 0$, chia hai vế phương trình (1) cho $\cos^2 x\neq 0$ ta được:

  $a.\tan^2 x+b.\tan x+c=d(1+\tan^2 x)$

- Đặt: t = tanx, đưa về phương trình bậc hai theo t:

  $(a-d)t^2+b.t+c-d=0$

Cách 2: Dùng công thức hạ bậc

$(1)\Leftrightarrow a.\frac{1-\cos 2x}{2}+b.\frac{\sin 2x}{2}+c.\frac{1+\cos 2x}{2}=d$

$\Leftrightarrow b.\sin 2x+(c-a).\cos 2x=2d-a-c$

(đây là phương trình bậc nhất đối với sin2x và cos2x)

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sin^2 x+3\sin x\cos x-4\cos^2 x=0(*)$.

Giải

Khi $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=0\\ \sin^2 x=1\end{cases}$

Ta có $VT(*)=1\neq VP\Rightarrow(*)$ không có nghiệm trên $\Rightarrow\cos^2 x\neq 0$

Chia hai vế của (*) cho $\cos^2 x$, ta được: $\tan^2 x+3\tan x-4=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=1=\tan\frac{\pi}{4}\\ \tan x=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\arctan(-4)+k\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của (*) là $x=\frac{\pi}{4}+k\pi;x=\arctan(-4)+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Ví dụ 2. Giải phương trình $2\sin^2 x+3\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2 x=2(*)$

Giải

Khi $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=0\\ \sin^2 x=1\end{cases}$

Ta có: $VT(*)=2=VP(*)\Rightarrow(*)$ có nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Khi $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}:\cos^2 x\neq 0$, chia hai vế của (*) cho $\cos^2 x$

$$\Leftrightarrow\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z};x=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Ví dụ 3. Giải phương trình $\cos^3 x+2\sin x\cos^2 x-3\sin^3 x=0(*).$

Giải

Khi $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=0\\ \sin^2 x=1\end{cases}$

Ta có: $VT(*)=\pm 3\neq VP(*)$ không có nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\Rightarrow\cos^3 x\neq 0$

Chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$, ta được:

$$1+2\tan x-3\tan^3 x=0\Leftrightarrow(\tan x-1)\underbrace{\left(3\tan^2 x+3\tan x+1\right)}_{\Delta<0}=0$$

$$\Leftrightarrow\tan x=1=\tan\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Ví dụ 4. Giải phương trình $\cos^3 x+\sin x-3\sin^2 x\cos x=0(*)$.

Giải

Khi $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=0\\ \sin^2 x=1\end{cases}$

Ta có: $VT(*)=\pm1\neq VP\Rightarrow(*)$ không có nghiệm trên $\Rightarrow\cos^3 x\neq 0$

Chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$, ta được $1+\tan x\left(1+\tan^2 x\right)-3\tan^2 x=0$

$\Leftrightarrow\tan^3 x-2\tan^2 x+\tan+1=0\Leftrightarrow(\tan x-1)\left(\tan^2 x-2\tan x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x-1=0\\ \tan^2 x-2\tan x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=1\pm\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}\\ x=\arctan\left(1\pm\sqrt{2}\right)+k\pi\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của (*) là $x=\frac{\pi}{4};x=\arctan\left(1\pm\sqrt{2}\right)+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Ví dụ 5. Xác định a để $a\sin^2 x+2\sin 2x+3a\cos^2 x=2(*)$ có nghiệm.

Giải

$$(*)\Leftrightarrow a\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)+2\sin 2x+3a\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)=2$$
$$\Leftrightarrow 2\sin 2x+a\cos 2x=2-2a(1)$$

(*) có nghiệm $\Leftrightarrow(1)$ có nghiệm $\Leftrightarrow 2^2+a^2\geq(2-2a)^2$

$\Leftrightarrow 4+a^2\geq 4-8a+4a^2\Leftrightarrow 3a^2-8a\leq 0\Leftrightarrow 0\leq a\leq\frac{8}{3}$

Vậy với $0\leq a\leq\frac{8}{3}$ thì phương trình đã cho có nhiệm.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giải phương trình $\sin^2 x-\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=0.$

A. $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$

B. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$

C. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$

D. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$

Lời giải

Chọn D

Phương trình $\Leftrightarrow \tan^2 x-\left(\sqrt{3}+1\right)\tan x+\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=\sqrt{3}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$

Câu 2: Phương trình nào dưới đây có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình $\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x=1$?

A. $\cos x\left(\cot^2 x-3\right)=0$.

B. $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right).\left[\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-2-\sqrt{3}\right]=0$.

C. $\left[\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)-1\right].\left(\tan x-\sqrt{3}\right)=0$.

D. $(\sin x-1)\left(\cot x-\sqrt{3}\right)=0$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $\Leftrightarrow \sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x=\sin^2 x+\cos^2 x$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2 x=0 \Leftrightarrow \cos x\left(\sqrt{3}\sin x-\cos x\right)=0.$

- $\cos x=0 \Leftrightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=0.$
- $\sqrt{3}\sin x-\cos x=0 \Leftrightarrow \tan x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

Ta có $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan x+\tan\dfrac{\pi}{4}}{1-\tan x.\tan\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{3}}+1}{1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}.1}=2+\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-2-\sqrt{3}=0.$

Vậy phương trình đã cho tương đương với $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right).\left[\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-2-\sqrt{3}\right]=0$.

Câu 3: Số vị trí biểu diễn các nghiệm phương trình $\sin^2 x-4\sin x\cos x+4\cos^2 x=5$ trên đường tròn lượng giác là?

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $\Leftrightarrow \sin^2 x-4\sin x\cos x+4\cos^2 x=5\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$

$\Leftrightarrow -4\sin^2 x-4\sin x\cos x-\cos^2 x=0\Leftrightarrow (2\sin x+\cos x)^2=0\Leftrightarrow 2\sin x+\cos x=0$

$\Leftrightarrow \tan x=-\frac{1}{2}\longrightarrow$ có 2 vị trí biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng gác.

Câu 4: Số nghiệm của phương trình $\cos^2 x-3\sin x\cos x+2\sin^2 x=0$ trên $(-2\pi;2\pi)$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $\Leftrightarrow 1-3\tan x+2\tan^2 x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\arctan\frac{1}{2}+k\pi\end{array}\right.$.

- Vì $x\in(-2\pi;2\pi)\longrightarrow -2\pi<\frac{\pi}{4}+k\pi<2\pi\rightarrow -\frac{9}{4}<k<\frac{7}{4}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{-2;-1;0;1\}$.

- Vì $x\in(-2\pi;2\pi)\longrightarrow -2\pi<\arctan\frac{1}{2}+k\pi<2\pi$

$\xrightarrow[\text{xapxi}]{\text{CASIO}}-28,565<k<-24,565\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{-28;-27;-26;-25\}$.

Vậy có tất cả 8 nghiệm.

Câu 5: Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $4\sin^2 x+3\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x=4$ là:

A. $\frac{\pi}{12}$. **B.** $\frac{\pi}{6}$. **C.** $\frac{\pi}{4}$. **D.** $\frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $\Leftrightarrow 4\sin^2 x+3\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x=4\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{3}\sin 2x-6\cos^2 x=0\Leftrightarrow 6\cos x\left(\sqrt{3}\sin x-\cos x\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.\xrightarrow{\text{Cho}>0}\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{2}+k\pi>0\Leftrightarrow k>-\frac{1}{2}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k_{\min}=0\rightarrow x=\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{6}+k\pi>0\Leftrightarrow k>-\frac{1}{6}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k_{\min}=0\rightarrow x=\frac{\pi}{6}\end{array}\right.$.

So sánh hai nghiệm ta được $x=\frac{\pi}{6}$ là nghiệm dương nhỏ nhất.

Câu 6: Nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $2\sin^2 x+\left(1-\sqrt{3}\right)\sin x\cos x+\left(1-\sqrt{3}\right)\cos^2 x=1$.

A. $-\frac{\pi}{6}$. **B.** $-\frac{\pi}{4}$. **C.** $-\frac{2\pi}{3}$. **D.** $-\frac{\pi}{12}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin^2 x+\left(1-\sqrt{3}\right)\sin x\cos x+\left(1-\sqrt{3}\right)\cos^2 x=\sin^2 x+\cos^2 x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x+\left(1-\sqrt{3}\right)\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos^2 x=0$

$\Leftrightarrow \tan^2 x+\left(1-\sqrt{3}\right)\tan x-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \tan x=\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.$

$\xrightarrow{\text{Cho } x<0}\left[\begin{array}{l}-\frac{\pi}{4}+k\pi<0\Leftrightarrow k<\frac{1}{4}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k_{\max}=0\to x=-\frac{\pi}{4}\\ \frac{\pi}{3}+k\pi<0\Leftrightarrow k<-\frac{1}{3}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k_{\max}=-1\to x=-\frac{2\pi}{3}\end{array}\right.$.

So sánh hai nghiệm ta được $x=-\frac{\pi}{4}$ là nghiệm âm lớn nhất.

Câu 7: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để phương trình $11\sin^2 x+(m-2)\sin 2x+3\cos^2 x=2$ có nghiệm?

A. 16. **B.** 21. **C.** 15. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $\Leftrightarrow 9\sin^2 x+(m-2)\sin 2x+\cos^2 x=0$

$\Leftrightarrow 9.\frac{1-\cos 2x}{2}+(m-2)\sin 2x+\frac{1+\cos 2x}{2}=0\Leftrightarrow(m-2)\sin 2x-4\cos 2x=-5.$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (m-2)^2+16\geq 25\Leftrightarrow (m-2)^2\geq 9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\geq 5\\ m\leq -1\end{array}\right.$

$\xrightarrow[m\in[-10;10]]{m\in\mathbb{Z}}m\in\{-10;-9;...;-1;5;6;...;10\}\longrightarrow$ có 16 giá trị nguyên.

Câu 8: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc để phương trình $\sin^2 x-2(m-1)\sin x\cos x-(m-1)\cos^2 x=m$ có nghiệm?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $\Leftrightarrow (1-m)\sin^2 x-2(m-1)\sin x\cos x-(2m-1)\cos^2 x=0$

$\Leftrightarrow (1-m).\frac{1-\cos 2x}{2}-(m-1)\sin 2x-(2m-1).\frac{1+\cos 2x}{2}=0$

$\Leftrightarrow 2(m-1)\sin 2x + m\cos 2x = 2-3m.$

Phương trình có nghiệm $4(m-1)^2 + m^2 \geq (2-3m)^2 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1$

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m \in \{0;1\} \longrightarrow$ có 2 giá trị nguyên.

Câu 9: Tìm điều kiện để phương trình $a\sin^2 x + a\sin x\cos x + b\cos^2 x = 0$ với $a \neq 0$ có nghiệm.

A. $a \geq 4b$. **B.** $a \leq -4b$. **C.** $\frac{4b}{a} \leq 1$. **D.** $\left|\frac{4b}{a}\right| \leq 1$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $a\tan^2 x + a\tan x + b = 0$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = a^2 - 4ab \geq 0 \Leftrightarrow a(a-4b) \geq 0$

$\Leftrightarrow a(4b-a) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4b-a}{a} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4b}{a} \leq 1.$

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2\sin^2 x + m\sin 2x = 2m$ vô nghiệm.

A. $0 \leq m \leq \frac{4}{3}$. **B.** $m < 0$, $m > \frac{4}{3}$.

C. $0 < m < \frac{4}{3}$. **D.** $m < -\frac{4}{3}$, $m > 0$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $\Leftrightarrow 2.\frac{1-\cos 2x}{2} + m\sin 2x = 2m \Leftrightarrow m\sin 2x - \cos 2x = 2m-1.$

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow m^2 + 1 < (2m-1)^2 \Leftrightarrow 3m^2 - 4m > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > \frac{4}{3} \end{array}\right.$.

Câu 11: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-3;3]$ để phương trình $(m^2+2)\cos^2 x - 2m\sin 2x + 1 = 0$ có nghiệm.

A. 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $\Leftrightarrow (m^2+2).\frac{1+\cos 2x}{2} - 2m\sin 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4m\sin 2x - (m^2+2)\cos 2x = m^2 + 4.$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 16m^2+\left(m^2+2\right)^2\ge\left(m^2+4\right)^2\Leftrightarrow 12m^2\ge 12\Leftrightarrow m^2\ge 1\Leftrightarrow |m|\ge 1$

$\xrightarrow[m\in[-3;3]]{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-3;-2;-1;1;2;3\}\longrightarrow$ có 6 giá trị nguyên.

Dạng 5. Phương trình chứa $\sin x\pm\cos x$ và $\sin x\cos x$.

1. Phương pháp

Bài toán 1: a.(sinx ± cosx) + b.sinx.cosx + c = 0

- Đặt: $t=\cos x\pm\sin x=\sqrt{2}.\cos\left(x\mp\frac{\pi}{4}\right);\ |t|\le\sqrt{2}.$

$\Rightarrow t^2=1\pm 2\sin x.\cos x\ \Rightarrow\ \sin x.\cos x=\pm\frac{1}{2}(t^2-1).$

- Thay vào phương trình đã cho, ta được phương trình bậc hai theo t. Giải phương trình này tìm t thỏa $|t|\le\sqrt{2}$. Suy ra x.

Lưu ý dấu

- $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$
- $\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

Bài toán 2: a.|sinx ± cosx| + b.sinx.cosx + c = 0

- Đặt: $t=\left|\cos x\pm\sin x\right|=\sqrt{2}.\left|\cos\left(x\mp\frac{\pi}{4}\right)\right|;$ Đk : $0\le t\le\sqrt{2}.$

$\Rightarrow \sin x.\cos x=\pm\frac{1}{2}(t^2-1).$

- Tương tự dạng trên. Khi tìm x cần lưu ý phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Giải các phương trình

a) $\sin x+\cos x+2\sin x\cos x-1=0\ (1)$

b) $6(\sin x-\cos x)-\sin x\cos x-6=0(2)$

Giải

a) Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(x+\frac{\pi}{4}\right),|t|\le\sqrt{2}$

Phương trình (1) trở thành: $t+2\left(\frac{t^2-1}{2}\right)-1=0\Leftrightarrow t^2+t-2=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-2<-\sqrt{2}\end{array}\right.\Rightarrow\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x=k2\pi;x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

b) Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right),|t|\le\sqrt{2}$

Phương trình (2) trở thành: $6t-\left(\frac{1-t^2}{2}\right)-6=0\Leftrightarrow t^2+12t-13=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-13<-\sqrt{2}\end{array}\right.\Rightarrow\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\x=\pi+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (2) là $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi;x=\pi+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Ví dụ 2. Giải phương trình: $\sin2x-2\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)=5$.

Giải

Đặt $\sin x+\cos x=t\ \left(|t|\le\sqrt{2}\right)\Rightarrow\sin2x=t^2-1.$

PT $\Leftrightarrow t^2-2\sqrt{2}t-6=0\Leftrightarrow t=-\sqrt{2}$ (thỏa mãn)

Giải phương trình

$$\sin x+\cos x=-\sqrt{2}\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{4}+k2\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\frac{5\pi}{4}+k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giải phương trình $\sin x\cos x+2(\sin x+\cos x)=2$.

A. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$

B. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$

C. $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$

D. $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Vì $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[-1;1]\Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Ta có $t^2=(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

Khi đó, phương trình đã cho trở thành $\frac{t^2-1}{2}+2t=2\Leftrightarrow t^2+4t-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-5(\text{loại}) \end{array}\right.$.

Với $t=1$, ta được $\sin x+\cos x=1\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Câu 2: Cho phương trình $3\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+2\sin 2x+4=0$. Đặt $t=\sin x+\cos x$, ta được phương trình nào dưới đây?

A. $2t^2+3\sqrt{2}t+2=0.$

B. $4t^2+3\sqrt{2}t+4=0.$

C. $2t^2+3\sqrt{2}t-2=0.$

D. $4t^2+3\sqrt{2}t-4=0.$

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sin x+\cos x\longrightarrow \sin 2x=t^2-1.$

Phương trình đã cho trở thành $3\sqrt{2}t+2(t^2-1)+4=0\Leftrightarrow 2t^2+3\sqrt{2}t+2=0.$

Câu 3: Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\sin x+\cos x=1-\frac{1}{2}\sin 2x$ là:

A. $-\frac{\pi}{2}$. **B.** $-\pi$. **C.** $-\frac{3\pi}{2}$. **D.** -2π.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Điều kiện $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$.

Ta có $t^2=(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x\Rightarrow\sin 2x=t^2-1$.

Phương trình đã cho trở thành $t=1-\frac{t^2-1}{2}\Leftrightarrow t^2+2t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-3(\text{loại})\end{array}\right.$.

Với $t=1$, ta được $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\x+\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$.

TH1. Với $x=k2\pi<0\Leftrightarrow k<0\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k_{\max}=-1\to x=-2\pi$.

TH2. Với $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi<0\Leftrightarrow k<-\frac{1}{4}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k_{\max}=-1\to x=-\frac{3\pi}{2}$.

Vậy nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $x=-\frac{3\pi}{2}$.

Câu 4: Từ phương trình $\left(1+\sqrt{3}\right)(\cos x+\sin x)-2\sin x\cos x-\sqrt{3}-1=0$, nếu ta đặt $t=\cos x+\sin x$ thì giá trị của t nhận được là:

A. $t=1$ hoặc $t=\sqrt{2}$. **B.** $t=1$ hoặc $t=\sqrt{3}$.

C. $t=1$. **D.** $t=\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sin x-\cos x\ \left(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\right)\longrightarrow\sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$.

Phương trình trở thành $\left(1+\sqrt{3}\right)t-\left(t^2-1\right)-\sqrt{3}-1=0$

$\Leftrightarrow t^2-\left(1+\sqrt{3}\right)t+\sqrt{3}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=\sqrt{3}(\text{loại})\end{array}\right.\Leftrightarrow t=1$.

Câu 5: Cho x thỏa mãn $2\sin 2x-3\sqrt{6}|\sin x+\cos x|+8=0$. Tính $\sin 2x$.

A. $\sin 2x=-\frac{1}{2}$. **B.** $\sin 2x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\sin 2x=\frac{1}{2}$. **D.** $\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=|\sin x+\cos x|=\sqrt{2}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. Vì $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[-1;1]\Rightarrow t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$.

Ta có $t^2=(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x\Rightarrow\sin 2x=t^2-1$.

Phương trình đã cho trở thành $2\left(t^2-1\right)-3\sqrt{6}t+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{\sqrt{6}}{2}\\t=\sqrt{6}\,(\text{loại})\end{array}\right.$

$\sin 2x=t^2-1=\frac{1}{2}$.

Câu 6: Hỏi trên đoạn $[0;2018\pi]$, phương trình $|\sin x-\cos x|+4\sin 2x=1$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 4037. **B.** 4036. **C.** 2018. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=|\sin x-\cos x|=\sqrt{2}\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|$. Vì $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\in[-1;1]\Rightarrow t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$.

Ta có $t^2=(\sin x-\cos x)^2=\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x\Rightarrow\sin 2x=1-t^2$.

Phương trình đã cho trở thành $t+4\left(1-t^2\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-\frac{3}{4}(\text{loại})\end{array}\right.$.

Với $t=1$, ta được $\sin 2x=0\Leftrightarrow 2x=k\pi\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

Theo giả thiết $x\in[0;2018\pi]\longrightarrow 0\le\frac{k\pi}{2}\le 2018\pi\Leftrightarrow 0\le k\le 4046$

$\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{0;1;2;3;...;4036\}\longrightarrow$ có 4037 giá trị của k nê có 4037 nghiệm.

Câu 7: Từ phương trình $\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\tan x+\cot x$, ta tìm được $\cos x$ có giá trị bằng:

A. 1. **B.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\left\{\begin{array}{l}\sin x\ne 0\\\cos x\ne 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\sin 2x\ne 0$.

Ta có $\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\tan x+\cot x \Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x} \Leftrightarrow 2\sin x\cos x.\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=2.$

Đặt $t=\sin x+\cos x\ \left(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\right)\longrightarrow \sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}.$

Phương trình trở thành $\Leftrightarrow \sqrt{2}\,t\left(t^2-1\right)=2 \Leftrightarrow t^3-t-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow t=\sqrt{2}$

$\Rightarrow \sin x+\cos x=\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin x=\sqrt{2}-\cos x.$

Mà $\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow \cos^2 x+\left(\sqrt{2}-\cos x\right)^2=1\Leftrightarrow 2\cos^2 x-2\sqrt{2}\cos x+1=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\cos x-1\right)^2=0\Leftrightarrow \cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

Câu 8: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sin x\cos x-\sin x-\cos x+m=0$ có nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sin x+\cos x\ \left(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\right)\longrightarrow \sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}.$

Phương trình trở thành $\dfrac{t^2-1}{2}-t+m=0\Leftrightarrow -2m=t^2-2t-1\Leftrightarrow (t-1)^2=-2m+2.$

Do $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\longrightarrow -\sqrt{2}-1\le t-1\le\sqrt{2}-1\longrightarrow 0\le(t-1)^2\le 3+2\sqrt{2}.$

Vậy để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 0\le -2m+2\le 3+2\sqrt{2}\Leftrightarrow -\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}\le m\le 1$

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-1;0;1\}.$

CHƯƠNG 2. TỔ HỢP XÁC SUẤT

BÀI 1. QUY TẮC ĐẾM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. QUI TẮC CỘNG

Một công việc nào đó có thể được thực hiện theo một trong hai phương án A hoặc B. Nếu phương án A có m cách thực hiện, phương án B có n cách thực hiện và không trùng với bất kì cách nào trong phương án A thì công việc đó có m + n cách thực hiện.

Quy tắc cộng được phát biểu ở trên thực chất là cách đếm số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn không giao nhau, được phát biểu như sau:

Nếu A và B là các tập hữu hạn không giao nhau thì

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Chú ý: Quy tắc công có thể mở rộng cho nhiều hành động

Ví dụ 1: Từ thành phố A đến thành phố B có 3 đường bộ và 2 đường thuỷ. Cần chọn một đường để đi từ A đến B. Hỏi có mấy cách chọn?

Giải

Chọn đường bộ thì có 3 cách; chọn đường thủy có 2 cách.

Vậy có : $3+2=5$ cách chọn.

Ví dụ 2: Một nhà hàng có 3 loại rượu, 4 loại bia và 6 loại nước ngọt. Thực khách cần chọn đúng 1 loại thức uống. Hỏi có mấy cách chọn ?

Giải

Chọn rượi có 3 cách, chọn bia có 4 cách, chọn nước ngọt có 6 cách

Vậy có : $3+4+6=13$ cách chọn.

II. QUI TẮC NHÂN

Một công việc được hoàn thành bao gồm hai công đoạn A và B (hai hành động liên tiếp). Nếu công đoạn A có m cách thực hiện và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện công đoạn B thì công việc đó có m.n cách thực hiện.

Ví dụ 1: Giữa thành phố Hồ Chí Minh và Hà Nội có 3 loại phương tiện giao thông: đường bộ, đường sắt và đường hàng không. Hỏi có mấy cách chọn phương tiện giao thông để đi từ thành phố Hồ Chí Minh đến Hà Nội rồi quay về?

Giải

Đi từ Hồ Chí Minh đến Hà Nội có 3 cách chọn phương tiện.

Khi đi về từ Hà Nội đến HCM có 3 cách.

Vậy có : $3\times 3=9$ cách chọn.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Ví dụ 2: Một hội đồng nhân dân có 15 người, cần bầu ra 1 chủ tịch, 1 phó chủ tịch, 1 uỷ viên thư ký và không được bầu 1 người vào 2 hay 3 chức vụ. Hỏi có mấy cách bầu?

Giải

Có 15 cách chọn chủ tịch. Với mỗi cách chọn chủ tịch, có 14 cách chọn phó chủ tịch. Với mỗi cách chọn chủ tịch và phó chủ tịch, có 13 cách chọn thư ký.

Vậy có : $15\times14\times3=2730$ cách chọn.

3. Các dấu hiệu chia hết {kiến thức bổ sung}

- *Chia hết cho 2:* số tận cùng là 0, 2, 4, 6, 8.
- *Chia hết cho 3:* tổng các chữ số chia hết cho 3 (ví dụ: 276).
- *Chia hết cho 4:* số tận cùng là 00 hay hai chữ số cuối hợp thành số chia hết cho 4 (ví dụ : 1300, 2512, 708).
- *Chia hết cho 5*: số tận cùng là 0, 5.
- *Chia hết cho 6:* số chia hết cho 2 và chia hết cho 3.
- *Chia hết cho 8*: số tận cùng là 000 hay ba chữ số cuối hợp thành số chia hết cho 8 (ví dụ : 15000, 2016, 13824).
- *Chia hết cho 9*: tổng các chữ số chia hết cho 9 (ví dụ : 2835).
- *Chia hết cho 25*: số tận cùng là 00, 25, 50, 75.
- *Chia hết cho 10*: số tận cùng là 0.

Ví dụ. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 3 chữ số đôi một khác nhau không chia hết cho 9.

Giải

Gọi $n=\overline{abc}$ là số cần lập.

$m=\overline{a'b'c'}$ là số gồm 3 chữ số khác nhau.

$m'=\overline{a_1b_1c_1}$ là số gồm 3 chữ số khác nhau mà chia hết cho 9.

Ta có : Tập các số n Tập các số m Tập các số

* Tìm m : có 5 cách chọn a' (vì $a'\neq0$), có 5 cách chọn b' (vì $b'\neq a'$), có 4 cách chọn c' (vì $c'\neq a'$ và $c'\neq b'$). Vậy có : $5.5.4=100$ số m.

* Tìm m' : trong các chữ số đã cho, 3 chữ số có tổng chia hết cho 9 là {0,4,5}, {1,3,5}, {2,3,4}

  – Với {0,4,5}: có 2 cách chọn a_1, 2 cách chọn b_1, 1 cách chọn c_1, được $2.2.1=4$ số m'

  – Với {1,3,5}: có 3! = 6 số m'

  – Với {2,3,4}: có 3! = 6 số m'

  – Vậy có : 4 + 6 + 6 = 16 số m'

Suy ra có : 100 – 16 = 84 số n.

Chú ý: Qua ví dụ trên, ta thấy nếu số cách chọn thỏa tính chất p nào đó quá nhiều, ta có thể làm như sau: Số cách chọn thỏa p bằng số cách chọn tuỳ ý trừ số cách chọn không thỏa p. Người ta còn gọi cách làm này là dùng "phần bù".

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Quy tắc cộng

1. Phương pháp

Một công việc nào đó có thể được thực hiện theo một trong hai phương án A hoặc B. Nếu phương án A có m cách thực hiện, phương án B có n cách thực hiện và không trùng với bất kì cách nào trong phương án A thì công việc đó có m + n cách thực hiện.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Một bó hoa gồm có: 5 bông hồng trắng, 6 bông hồng đỏ và 7 bông hồng vàng. Hỏi có mấy cách chọn lấy 1 bông hoa?

Hướng dẫn giải

* TH 1: Chọn bông hồng trắng có 5 cách chọn

* TH 2: Chọn bông hồng đỏ có 6 cách chọn

* TH 3: Chọn bông hồng vàng có 7 cách chọn

Vậy có $5+6+7=18$ cách.

Ví dụ 2: Trong một hộp có 10 quả cầu trắng và 5 quả cầu đen. Có bao nhiêu cách chọn một trong các quả cầu ấy?

Hướng dẫn giải

Có 10 cách chọn một quả cầu trắng và 5 cách chọn một quả cầu đen.

Vậy cách chọn một trong các quả cầu ấy là: $10+5=15$ (cách).

Ví dụ 3: Lớp 11A có 30 học sinh và lớp 11B có 32 học sinh, có bao nhiêu cách chọn 1 học sinh từ 2 lớp trên để tham gia đội công tác xã hội?

Hướng dẫn giải

Có 30 cách chọn một học sinh lớp 11A và 32 cách chọn một học sinh lớp 11B.Vậy số cách chọn một học sinh từ 2 lớp trên là: $30+32=62$ (cách).

Ví dụ 4: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm một chữ số?

A. 36. **B.** 720. **C.** 6. **D.** 120.

Hướng dẫn giải

Nếu gọi $\overline{x}$ là số tự nhiên gồm một chữ số thì $\overline{x}=1$ hoặc $\overline{x}=2$ hoặc $\overline{x}=3$ hoặc $\overline{x}=4$ hoặc $\overline{x}=5$ hoặc $\overline{x}=6$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Vậy có 6 số tự nhiên gồm một chữ số.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Giả sử bạn muốn mua một áo sơ mi cỡ 39 hoặc cỡ 40. Áo cỡ 39 có 5 màu khác nhau, áo cỡ 40 có 4 màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu sự lựa chọn (về màu áo và cỡ áo)?

A. 9. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

- Nếu chọn cỡ áo 39 thì sẽ có 5 cách.
- Nếu chọn cỡ áo 40 thì sẽ có 4 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $5+4=9$ cách chọn mua áo.

Câu 2. Một người có 4 cái quần khác nhau, 6 cái áo khác nhau, 3 chiếc cà vạt khác nhau. Để chọn một cái quần hoặc một cái áo hoặc một cái cà vạt thì số cách chọn khác nhau là:

A. 13. **B.** 72. **C.** 12. **D.** 30.

Lời giải

Chọn A

- Nếu chọn một cái quần thì sẽ có 4 cách.
- Nếu chọn một cái áo thì sẽ có 6 cách.
- Nếu chọn một cái cà vạt thì sẽ có 3 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $4+6+3=13$ cách chọn.

Câu 3. Trên bàn có 8 cây bút chì khác nhau, 6 cây bút bi khác nhau và 10 cuốn tập khác nhau. Một học sinh muốn chọn một đồ vật duy nhất hoặc một cây bút chì hoặc một cây bút bi hoặc một cuốn tập thì số cách chọn khác nhau là:

A. 480. **B.** 24. **C.** 48. **D.** 60.

Lời giải

Chọn B

- Nếu chọn một cây bút chì thì sẽ có 8 cách.
- Nếu chọn một cây bút bi thì sẽ có 6 cách.
- Nếu chọn một cuốn tập thì sẽ có 10 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $8+6+10=24$ cách chọn.

Câu 4. Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ. Nhà trường cần chọn một học sinh ở khối 11 đi dự dạ hội của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

A. 45. **B.** 280. **C.** 325. **D.** 605.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Lời giải

Chọn D

- Nếu chọn một học sinh nam có 280 cách.
- Nếu chọn một học sinh nữ có 325 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $280+325=605$ cách chọn.

Câu 5. Một trường THPT được cử một học sinh đi dự trại hè toàn quốc. Nhà trường quyết định chọn một học sinh tiên tiến lớp $11A$ hoặc lớp $12B$. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn, nếu biết rằng lớp $11A$ có 31 học sinh tiên tiến và lớp $12B$ có 22 học sinh tiên tiến?

A. 31. **B.** 9. **C.** 53. **D.** 682.

Lời giải

Chọn C

- Nếu chọn một học sinh lớp $11A$ có 31 cách.
- Nếu chọn một học sinh lớp $12B$ có 22 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $31+22=53$ cách chọn.

Câu 6. Trong một hộp chứa sáu quả cầu trắng được đánh số từ 1 đến 6 và ba quả cầu đen được đánh số $7, 8, 9$. Có bao nhiêu cách chọn một trong các quả cầu ấy?

A. 27. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Vì các quả cầu trắng hoặc đen đều được đánh số phân biệt nên mỗi lần lấy ra một quả cầu bất kì là một lần chọn.

- Nếu chọn một quả trắng có 6 cách.
- Nếu chọn một quả đen có 3 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $6+3=9$ cách chọn.

Câu 7. Giả sử từ tỉnh A đến tỉnh B có thể đi bằng các phương tiện: ô tô, tàu hỏa, tàu thủy hoặc máy bay. Mỗi ngày có 10 chuyến ô tô, 5 chuyến tàu hỏa, 3 chuyến tàu thủy và 2 chuyến máy bay. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ tỉnh A đến tỉnh B?

A. 20. **B.** 300. **C.** 18. **D.** 15.

Lời giải

Chọn A

- Nếu đi bằng ô tô có 10 cách.
- Nếu đi bằng tàu hỏa có 5 cách.
- Nếu đi bằng tàu thủy có 3 cách.

- Nếu đi bằng máy bay có 2 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $10+5+3+2=20$ cách chọn.

Câu 8. Trong một cuộc thi tìm hiểu về đất nước Việt Nam, ban tổ chức công bố danh sách các đề tài bao gồm: 8 đề tài về lịch sử, 7 đề tài về thiên nhiên, 10 đề tài về con người và 6 đề tài về văn hóa. Mỗi thí sinh được quyền chọn một đề tài. Hỏi mỗi thí sinh có bao nhiêu khả năng lựa chọn đề tài?

A. 20. **B.** 3360. **C.** 31. **D.** 30.

Lời giải

Chọn C

- Nếu chọn đề tài về lịch sử có 8 cách.
- Nếu chọn đề tài về thiên nhiên có 7 cách.
- Nếu chọn đề tài về con người có 10 cách.
- Nếu chọn đề tài về văn hóa có 6 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $8+7+10+6=31$ cách chọn.

Dạng 2. Quy tắc nhân

1. Phương pháp

Một công việc được hoàn thành bao gồm hai công đoạn A và B (hai hành động liên tiếp). Nếu công đoạn A có m cách thực hiện và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện công đoạn B thì công việc đó có m.n cách thực hiện.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Một đội văn nghệ chuẩn bị được 2 vở kịch, 3 điệu múa và 6 bài hát. Tại hội diễn, mỗi đội chỉ được trình diễn 1 vở kịch, 1 điệu múa và 1 bài hát. Hỏi đội văn nghệ trên có bao nhiêu cách chọn chương trình biểu diễn, biết rằng chất lượng các vở kịch, điệu múa, các bài hát là như nhau?

Hướng dẫn giải

Mỗi đội chỉ được trình diễn 1 vở kịch, 1 điệu múa và 1 bài hát (gồm 3 tiết mục thuộc ba thể loại khác nhau)

- Chọn 1 vở kịch có: 2 cách chọn
- Chọn 1 điệu múa có: 3 cách chọn
- Chọn 1 bài hát có: 6 cách

Vậy có: $2\times3\times6=36$ cách.

Ví dụ 2: Dãy x_1, x_2, x_3, x_4 với mỗi kí tự x_i chỉ nhận giá trị 0 hoặc 1. Hỏi có bao nhiêu dãy như vậy?

Hướng dẫn giải

Mỗi kí tự x_i có hai cách chọn (0 hoặc 1).

Vậy có tất cả: $2\times2\times2\times2=16$ dãy x_1, x_2, x_3, x_4.

Ví dụ 3: Trong một lớp học có 20 học sinh nam và 24 học sinh nữ. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn hai học sinh: 1 nam và 1 nữ tham gia đội cờ đỏ. Hỏi giáo viên chủ nhiệm đó có bao nhiêu cách chọn?

Hướng dẫn giải

Có 20 cách chọn một học sinh nam và 24 cách chọn một học sinh nữ.

Vì vậy có $20\times24=480$ cách chọn hai học sinh (1 nam, 1 nữ).

Ví dụ 4: Số các số chẵn có hai chữ số là:

Hướng dẫn giải

Số chẵn có hai chữ số có dạng $\overline{ab}$ với $a\neq0,$ b chẵn.

+ Chọn $a\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\},$ có 9 cách chọn.

+ Chọn $b\in\{0,2,4,6,8\},$ có 5 cách chọn.

Vậy có tất cả $9\times5=45$ số.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Có 3 kiểu mặt đồng hồ đeo tay (vuông, tròn, elip) và 4 kiểu dây (kim loại, da, vải và nhựa). Hỏi có bao nhiêu cách chọn một chiếc đồng hồ gồm một mặt và một dây?

A. 4. **B.** 7. **C.** 12. **D.** 16.

Lời giải

Chọn C

Để chọn một chiếc đồng hồ, ta có:

- Có 3 cách chọn mặt.
- Có 4 cách chọn dây.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $3\times4=12$ cách.

Câu 2: Một người có 4 cái quần, 6 cái áo, 3 chiếc cà vạt. Để chọn mỗi thứ một món thì có bao nhiêu cách chọn bộ "quần-áo-cà vạt" khác nhau?

A. 13. **B.** 72. **C.** 12. **D.** 30.

Lời giải

Chọn B

Để chọn một bộ "quần-áo-cà vạt", ta có:

- Có 4 cách chọn quần.

- Có 6 cách chọn áo.
- Có 3 cách chọn cà vạt.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4\times6\times3=72$ cách.

Câu 3: Một thùng trong đó có 12 hộp đựng bút màu đỏ, 18 hộp đựng bút màu xanh. Số cách khác nhau để chọn được đồng thời một hộp màu đỏ, một hộp màu xanh là?

A. 13. **B.** 12. **C.** 18. **D.** 216.

Lời giải

Chọn D

Để chọn một hộp màu đỏ và một hộp màu xanh, ta có:

- Có 12 cách chọn hộp màu đỏ.
- Có 18 cách chọn hộp màu xanh.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $12\times18=216$ cách.

Câu 4: Trên bàn có 8 cây bút chì khác nhau, 6 cây bút bi khác nhau và 10 cuốn tập khác nhau. Số cách khác nhau để chọn được đồng thời một cây bút chì, một cây bút bi và một cuốn tập.

A. 24. **B.** 48. **C.** 480. **D.** 60.

Lời giải

Chọn C

Để chọn "một cây bút chì - một cây bút bi - một cuốn tập", ta có:

- Có 8 cách chọn bút chì.
- Có 6 cách chọn bút bi.
- Có 10 cách chọn cuốn tập.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $8\times6\times10=480$ cách.

Câu 5: Một bó hoa có 5 hoa hồng trắng, 6 hoa hồng đỏ và 7 hoa hồng vàng. Hỏi có mấy cách chọn lấy ba bông hoa có đủ cả ba màu.

A. 240. **B.** 210. **C.** 18. **D.** 120.

Lời giải

Chọn B

Để chọn ba bông hoa có đủ cả ba màu (nghĩa là chọn một bông hoa hồng trắng- một bông hoa hồng đỏ- hoa hồng vàng), ta có:

- Có 5 cách chọn hoa hồng trắng.
- Có 6 cách chọn hoa hồng đỏ.
- Có 7 cách chọn hoa hồng vàng.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $5\times6\times7=210$ cách.

Câu 6: Một người vào cửa hàng ăn, người đó chọn thực đơn gồm một món ăn trong năm món, một loại quả tráng miệng trong năm loại quả tráng miệng và một nước uống trong ba loại nước uống. Có bao nhiêu cách chọn thực đơn.

A. 25. **B.** 75. **C.** 100. **D.** 15.

Lời giải

Chọn B

Để chọn thực đơn, ta có:

- Có 5 cách chọn món ăn.
- Có 5 cách chọn quả tráng miệng.
- Có 3 cách chọn nước uống.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $5\times5\times3=75$ cách.

Câu 7: Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ. Nhà trường cần chọn hai học sinh trong đó có một nam và một nữ đi dự trại hè của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

A. 910000. **B.** 91000. **C.** 910. **D.** 625.

Lời giải

Chọn B

Để chọn một nam và một nữ đi dự trại hè, ta có:

- Có 280 cách chọn học sinh nam.
- Có 325 cách chọn học sinh nữ.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $280\times325=91000$ cách.

Câu 8: Một đội học sinh giỏi của trường THPT, gồm 5 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11, 3 học sinh khối 10. Số cách chọn ba học sinh trong đó mỗi khối có một em?

A. 12. **B.** 220. **C.** 60. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Để chọn một nam và một nữ đi dự trại hè, ta có:

- Có 5 cách chọn học sinh khối 12.
- Có 4 cách chọn học sinh khối 11.
- Có 3 cách chọn học sinh khối 10.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $5\times4\times3=60$ cách.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Câu 9: Có 10 cặp vợ chồng đi dự tiệc. Tổng số cách chọn một người đàn ông và một người đàn bà trong bữa tiệc phát biểu ý kiến sao cho hai người đó không là vợ chồng?

A. 100. **B.** 91. **C.** 10. **D.** 90.

Lời giải

Chọn D

Để chọn một người đàn ông và một người đàn bà không là vợ chồng, ta có

- Có 10 cách chọn người đàn ông.
- Có 9 cách chọn người đàn bà.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $9\times10=90$ cách.

Câu 10: An muốn qua nhà Bình để cùng Bình đến chơi nhà Cường. Từ nhà An đến nhà Bình có 4 con đường đi, từ nhà Bình tới nhà Cường có 6 con đường đi. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn đường đi đến nhà Cường?

A. 6. **B.** 4. **C.** 10. **D.** 24.

Lời giải

Chọn D

- Từ An $\longrightarrow$ Bình có 4 cách.
- Từ Bình $\longrightarrow$ Cường có 6 cách.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4\times6=24$ cách.

Câu 11: Các thành phố A, B, C, D được nối với nhau bởi các con đường như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến D mà qua B và C chỉ một lần?



A. 9. **B.** 10. **C.** 18. **D.** 24.

Lời giải

Chọn D

- Từ $\text{A}\longrightarrow\text{B}$ có 4 cách.
- Từ $\text{B}\longrightarrow\text{C}$ có 2 cách.
- Từ $\text{C}\longrightarrow\text{D}$ có 2 cách.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4\times2\times3=24$ cách.

Câu 12: Các thành phố A, B, C, D được nối với nhau bởi các con đường như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến D rồi quay lại A?

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133



A. 1296. **B.** 784. **C.** 576. **D.** 324.

Lời giải

Chọn C

Từ kết quả câu trên, ta có:

- Từ $A \longrightarrow D$ có 24 cách.
- Tương tự, từ $D \longrightarrow A$ có 24 cách.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $24 \times 24 = 576$ cách.

Câu 13: Trong một tuần bạn A dự định mỗi ngày đi thăm một người bạn trong 12 người bạn của mình. Hỏi bạn A có thể lập được bao nhiêu kế hoạch đi thăm bạn của mình (thăm một bạn không quá một lần)?

A. 3991680. **B.** 12!. **C.** 35831808. **D.** 7!.

Lời giải

Chọn A

Một tuần có bảy ngày và mỗi ngày thăm một bạn.

- Có 12 cách chọn bạn vào ngày thứ nhất.
- Có 11 cách chọn bạn vào ngày thứ hai.
- Có 10 cách chọn bạn vào ngày thứ ba.
- Có 9 cách chọn bạn vào ngày thứ tư.
- Có 8 cách chọn bạn vào ngày thứ năm.
- Có 7 cách chọn bạn vào ngày thứ sáu.
- Có 6 cách chọn bạn vào ngày thứ bảy.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3991680$ cách.

Câu 14: Nhãn mỗi chiếc ghế trong hội trường gồm hai phần: phần đầu là một chữ cái (trong bảng 24 chữ cái tiếng Việt), phần thứ hai là một số nguyên dương nhỏ hơn 26. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu chiếc ghế được ghi nhãn khác nhau?

A. 624. **B.** 48. **C.** 600. **D.** 26.

Lời giải

Chọn C

Một chiếc nhãn gồm phần đầu và phần thứ hai $\in \{1;2;...;25\}$.

- Có 24 cách chọn phần đầu.

- Có 25 cách chọn phần thứ hai.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $24\times 25=600$ cách.

Câu 15: Biển số xe máy của tỉnh A (nếu không kể mã số tỉnh) có 6 kí tự, trong đó kí tự ở vị trí đầu tiên là một chữ cái (trong bảng 26 cái tiếng Anh), kí tự ở vị trí thứ hai là một chữ số thuộc tập $\{1;2;...;9\}$, mỗi kí tự ở bốn vị trí tiếp theo là một chữ số thuộc tập $\{0;1;2;...;9\}$. Hỏi nếu chỉ dùng một mã số tỉnh thì tỉnh A có thể làm được nhiều nhất bao nhiêu biển số xe máy khác nhau?

A. 2340000. **B.** 234000. **C.** 75. **D.** 2600000.

Lời giải

Chọn A

Giả sử biển số xe là $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$.

- Có 26 cách chọn a_1
- Có 9 cách chọn a_2
- Có 10 cách chọn a_3
- Có 10 cách chọn a_4
- Có 10 cách chọn a_5
- Có 10 cách chọn a_6

Vậy theo qui tắc nhân ta có $26\times 9\times 10\times 10\times 10\times 10=2340000$ biển số xe.

Câu 16: Số 253125000 có bao nhiêu ước số tự nhiên?

A. 160. **B.** 240. **C.** 180. **D.** 120.

Lời giải

Chọn C

Ta có $253125000=2^3.3^4.5^8$ nên mỗi ước số tự nhiên của số đã cho đều có dạng $2^m\times 3^n\times 5^p$ trong đó $m,\ n,\ p\in\mathbb{N}$ sao cho $0\le m\le 3;\ 0\le n\le 4;\ 0\le p\le 8.$

- Có 4 cách chọn $m.$
- Có 5 cách chọn $n.$
- Có 9 cách chọn $p.$

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4\times 5\times 9=180$ ước số tự nhiên.

Câu 17: Từ các chữ số $1,\ 5,\ 6,\ 7$ có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên có 4 chữ số (không nhất thiết phải khác nhau)?

A. 324. **B.** 256. **C.** 248. **D.** 124.

Lời giải

Chọn B

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $(a,b,c,d)\in A=\{1,\ 5,\ 6,\ 7\}$.

Vì số cần tìm có 4 chữ số không nhất thiết khác nhau nên:

- a được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- b được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- c được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- d được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.

Như vậy, ta có $4\times4\times4\times4=256$ số cần tìm.

Câu 18: Từ các chữ số $1,\ 5,\ 6,\ 7$ có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau?

A. 36. **B.** 24. **C.** 20. **D.** 14.

Lời giải

Chọn B

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $(a,b,c,d)\in A=\{1,5,6,7\}$.

Vì số cần tìm có 4 chữ số khác nhau nên:

- a được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- b được chọn từ tập $A\backslash\{a\}$ (có 3 phần tử) nên có 3 cách chọn.
- c được chọn từ tập $A\backslash\{a,\ b\}$ (có 2 phần tử) nên có 2 cách chọn.
- d được chọn từ tập $A\backslash\{a,\ b,\ c\}$ (có 1 phần tử) nên có 1 cách chọn.

Như vậy, ta có $4\times3\times2\times1=24$ số cần tìm.

Câu 19: Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà hai chữ số đều chẵn?

A. 99. **B.** 50. **C.** 20. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{ab}$ với $(a,\ b)\in A=\{0,2,4,6,8\}$ và $a\neq0$.

Trong đó:

- a được chọn từ tập $A\backslash\{0\}$ (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- b được chọn từ tập A (có 5 phần tử) nên có 5 cách chọn.

Như vậy, ta có $4\times5=20$ số cần tìm.

Câu 20: Từ các chữ số $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên bé hơn 100 ?

A. 36. **B.** 62. **C.** 54. **D.** 42.

Lời giải

Chọn D

Các số bé hơn 100 chính là các số có một chữ số và hai chữ số được hình thành từ tập $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. Từ tập A có thể lập được 6 số có một chữ số.

Gọi số có hai chữ số có dạng $\overline{ab}$ với $(a,b)\in A$.

Trong đó:

- a được chọn từ tập A (có 6 phần tử) nên có 6 cách chọn.
- b được chọn từ tập A (có 6 phần tử) nên có 6 cách chọn.

Như vậy, ta có $6\times 6=36$ số có hai chữ số.

Vậy, từ A có thể lập được $36+6=42$ số tự nhiên bé hơn 100.

Câu 21: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số lẻ gồm 4 chữ số khác nhau?

A. 154. **B.** 145. **C.** 144. **D.** 155.

Lời giải

Chọn C

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $(a,b,c,d)\in A=\{0,1,2,3,4,5\}$.

Vì $\overline{abcd}$ là số lẻ $\Rightarrow d=\{1,3,5\}\Rightarrow d:$ có 3 cách chọn.

Khi đó $a:$ có 4 cách chọn (khác 0 và d), $b:$ có 4 cách chọn và $c:$ có 3 cách chọn.

Vậy có tất cả $3\times 4\times 4\times 3=144$ số cần tìm.

Câu 22: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau?

A. 156. **B.** 144. **C.** 96. **D.** 134.

Lời giải

Chọn A

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $(a,b,c,d)\in A=\{0,1,2,3,4,5\}$.

Vì $\overline{abcd}$ là số chẵn $\Rightarrow d=\{0,2,4\}$.

TH1. Nếu $d=0$, số cần tìm là $\overline{abc0}$. Khi đó:

- a được chọn từ tập $A\backslash\{0\}$ nên có 5 cách chọn.
- b được chọn từ tập $A\backslash\{0,a\}$ nên có 4 cách chọn.
- c được chọn từ tập $A\backslash\{0,a,b\}$ nên có 3 cách chọn.

Như vậy, ta có $5\times 4\times 3=60$ số có dạng $\overline{abc0}$.

TH2. Nếu $d=\{2,4\}\Rightarrow d:$ có 2 cách chọn.

Khi đó $a:$ có 4 cách chọn (khác 0 và d), $b:$ có 4 cách chọn và $c:$ có 3 cách chọn.

Như vậy, ta có $2\times 4\times 4\times 3=96$ số cần tìm như trên.

Vậy có tất cả $60+96=156$ số cần tìm.

BÀI 2. HOÁN VỊ- CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. HOÁN VỊ

1. Định nghĩa

Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n \geq 1)$

Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.

Nhận xét:

Hai hoán vị của n phần tử chỉ khác nhau ở thứ tự sắp xếp.

Chẳng hạn, hai hoán vị abc và acb của ba phân tử a, b, c là khác nhau.

2. Số hoán vị

Kí hiệu P_n là số hoán vị của n phần tử. Ta có công thức sau: $P_n = n!$

Ví dụ 1. Sắp xếp 5 người vào một băng ghế có 5 chỗ. Hỏi có bao nhiêu cách.

Giải

Mỗi cách đổi chỗ 1 trong 5 người trên băng ghế là 1 hoán vị.

Vậy có $P_5 = 5! = 120$ cách sắp.

Ví dụ 2. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có thể lập được mấy số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau.

Giải

Gọi $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ với $a_1 \neq 0$ và a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 phân biệt là số cần lập.

- *Bước 1:* chữ số $a_1 \neq 0$ nên có 4 cách chọn a_1.
- *Bước 2:* sắp 4 chữ số còn lại vào 4 vị trí có $4! = 24$ cách.

Vậy có $4 \times 24 = 96$ số.

II. CHỈNH HỢP

1. Định nghĩa

Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n \geq 1)$. Mỗi cách sắp xếp k phần tử của A theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử của tập A.

2. Số các chỉnh hợp

Số chỉnh hợp chập k của n phần tử:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}, 1 \leq k \leq n$$

Công thức trên cũng đúng cho trường hợp $k = 0$ hoặc $k = n$.

Khi $k = n$ thì $A_n^n = P_n = n!$.

Ví dụ 3: Có bao nhiêu số điện thoại bắt đầu bằng 2 chữ cái khác nhau lấy từ 26 chữ cái A, B, C, …, Z và tiếp theo là 5 chữ số khác nhau không có số 0.

Giải

Chọn 2 chữ cái trong 26 chữ cái, xếp vào hai vị trí đầu tiên, đây là chỉnh hợp chập 2 của 26 phần tử. Tiếp theo, chọn 5 chữ số trong 9 chữ số khác 0, xếp vào 5 vị trí, đây là chỉnh hợp chập 5 của 9 phần tử.

Vậy có : $A_{26}^2.A_9^5 = 9828000$ số.

Ví dụ 4: Một đội bóng đá có 18 cầu thủ. Cần chọn ra 11 cầu thủ phân vào 11 vị trí trên sân để thi đấu chính thức. Hỏi có mấy cách chọn nếu:

a) Ai cũng có thể chơi ở bất cứ vị trí nào?

b) Chỉ có cầu thủ A làm thủ môn được, các cầu thủ khác chơi ở vị trí nào cũng được?

c) Có 3 cầu thủ chỉ có thể làm thủ môn được, các cầu thủ khác chơi ở vị trí nào cũng được?

Giải

a) Chọn 11 người trong 18 người, xếp vào 11 vị trí. Đây là chỉnh hợp chập 11 của 18 phần tử. Có : $A_{18}^{11} = 1270312243$ cách.

b) Chọn A làm thủ môn. Tiếp đến, chọn 10 người trong 17 người còn lại, xếp vào 10 vị trí.

Vậy có : $A_{17}^{10} = 705729024$ cách.

c) Chọn 1 trong 3 người làm thủ môn, có 3 cách. Tiếp đến, chọn 10 người trong 15 người kia, xếp vào 10 vị trí, có A_{15}^{10} cách.

Vậy, có: $3A_{15}^{10} = 326918592$ cách.

III. TỔ HỢP

1. Định nghĩa

Cho tập A gồm n phần tử $(n \geq 1)$. Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.

Chú ý:

Số k trong định nghĩa cần thỏa điều kiện $1 \leq k \leq n$.

Tuy vậy, tập hợp không có phần tử nào là tập rỗng nên ta quy ước gọi tập rỗng là tổ hợp chập 0 của n phần tử.

2. Số các tổ hợp

Số các tổ hợp chập k của n phần tử: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Ví dụ: Một nhóm có 5 nam và 3 nữ. Chọn ra 3 người sao cho trong đó có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách.

Giải

Cách 1: Ta có các trường hợp sau

- 3 người được chọn gồm 1 nữ và 2 nam.

chọn ra 1 trong 3 nữ ta có 3 cách.

chọn ra 2 trong 5 nam ta có C_5^2 cách

Suy ra có $3C_5^2$ cách chọn

- 3 người được chọn gồm 2 nữ và 1 nam.

chọn ra 2 trong 3 nữ có C_3^2 cách.

chọn ra 1 trong 5 nam có 5 cách.

Suy ra có $5C_3^2$ cách chọn.

- 3 người chọn ra gồm 3 nữ có 1 cách.

Vậy có $3C_5^2+5C_3^2+1=46$ cách chọn.

Cách 2: Số cách chọn 3 người bất kì là: C_8^3

Số cách chọn 3 người nam cả là: C_5^3

Vậy số cách chọn 3 người thỏa yêu cầu bài toán là:

$$C_8^3-C_5^3=46 \text{ cách.}$$

3. Tính chất của các số C_n^k

a) Tính chất 1: $C_n^k=C_n^{n-k}$

b) Tính chất 2: $C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Hoán vị

1. Phương pháp

Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n\geq 1)$

Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.

Kí hiệu P_n là số hoán vị của n phần tử. Ta có công thức sau: $P_n=n!$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Số các số có năm chữ số khác nhau lập nên từ năm chữ số 1, 2, 3, 4, 5 là:

Hướng dẫn giải

Một số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau lập nên từ năm chữ số 1, 2, 3, 4, 5 là một hoán vị của năm chữ số đó. Vậy có tất cả $5!=120$ (số).

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Ví dụ 2: Người ta xếp 5 quyển sách Toán, 4 quyển sách Hóa và 3 quyển sách Lý lên một giá sách theo từng môn. Số cách sắp xếp sẽ là:

Hướng dẫn giải

Có 3 môn học nên có $3!$ cách xếp sách theo môn.

Trong đó có $5!$ cách xếp sách Toán, $4!$ cách xếp sách Hóa, và $3!$ cách xếp sách Lý. Vậy số cách xếp tất cả là: $3!\times 4!\times 5!\times 3!$.

Ví dụ 3: Một nhóm học sinh gồm 5 nam và 5 nữ xếp thành một hàng ngang. Số cách xếp để cho học sinh nam và nữ xen kẽ nhau là:

A. $5!$. **B.** $10!$.

C. $2.(5!)^2$. **D.** $(5!)^2$.

Hướng dẫn giải

Ví dụ 4: Số cách sắp xếp chỗ cho 10 khách ngồi quanh một bàn tròn (hai cách xếp được coi là như nhau nếu cách này nhận được từ cách kia bằng cách xoay bàn đi một góc nào đó) là:

Hướng dẫn giải

Ví dụ 5: Long và Hưng cùng 8 bạn rủ nhau đi xem bóng đá. Số cách xếp nhóm bạn trên vào 10 chỗ ngồi sắp hàng ngang sao cho Long và Hưng ngồi cạnh nhau là:

Hướng dẫn giải

Ví dụ 6: Có bao nhiêu cách dán 5 con tem khác nhau vào 5 phong bì khác nhau và mỗi phong bì một tem?

Hướng dẫn giải

Số cách dán 5 con tem vào 5 phong bì theo đề bài là số cách xếp có thứ tự 5 con tem vào 5 vị trí. Đó chính là số hoán vị của 5 phần tử.

Do đó đáp số là P_5.

Ví dụ 7: Có bao nhiêu cách xếp 5 nam và 3 nữ ngồi trên một băng ghế dài sao cho nam ngồi kề nhau và nữ ngồi kề nhau?

Hướng dẫn giải

- Xem 5 nam và 3 nữ lần lượt như 2 phần tử α và β.
- Số cách sắp xếp α và β vào 2 vị trí là: $P_2 = 2$ (cách).
- Mỗi cách hoán vị 5 nam và 3 nữ cho nhau trong cùng một vị trí ta luôn thêm $5!\times 3!$ cách xếp khác nhau.

Vậy số cách xếp theo yêu cầu bài toán là: $2\times 5!\times 3! = 1440$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Có bao nhiêu khả năng có thể xảy ra đối với thứ tự giữa các đội trong một giải bóng có 5 đội bóng? (giả sử rằng không có hai đội nào có điểm trùng nhau)

A. 120. **B.** 100. **C.** 80. **D.** 60.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Lời giải

Chọn A

Số các khả năng có thể xảy ra đối với thứ tự giữa các đội trong một giải bóng có 5 đội bóng là một hoán vị của 5 phần tử nên có $5!=120$ cách.

Câu 2: Có bao nhiêu cách xếp khác nhau cho 5 người ngồi vào một bàn dài?

A. 120 **B.** 5 **C.** 20 **D.** 25

Lời giải

Chọn A

Số cách sắp xếp khác nhau cho 5 người ngồi vào một bàn dài là một hoán vị của 5 phần tử nên có $5!=120$ cách.

Câu 3: Số cách sắp xếp 6 nam sinh và 4 nữ sinh vào một dãy ghế hàng ngang có 10 chỗ ngồi là:

A. $6!4!$. **B.** $10!$. **C.** $6!-4!$. **D.** $6!+4!$.

Lời giải

Chọn B

Số cách sắp xếp 6 nam sinh và 4 nữ sinh vào một dãy ghế hàng ngang có 10 chỗ là một hoán vị của 10 phần tử nên có $10!$ cách.

Câu 4: Sắp xếp năm bạn học sinh An, Bình, Chi, Dũng, Lệ vào một chiếc ghế dài có 5 chỗ ngồi. Số cách sắp xếp sao cho bạn Chi luôn ngồi chính giữa là

A. 24. **B.** 120. **C.** 60. **D.** 16.

Lời giải

Chọn A

Xếp bạn Chi ngồi giữa có 1 cách. Số cách xếp 4 bạn sinh An, Bình, Dũng, Lệ vào 4 chỗ còn lại là một hoán vị của 4 phần tử nên có có $4!$ cách. Vậy có 24 cách xếp.

Câu 5: Sắp xếp năm bạn học sinh An, Bình, Chi, Dũng, Lệ vào một chiếc ghế dài có 5 chỗ ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho bạn An và bạn Dũng luôn ngồi ở hai đầu ghế?

A. 120. **B.** 16 **C.** 12. **D.** 24.

Lời giải

Chọn C

Xếp An và Dũng ngồi hai đầu ghế có $2!$ cách xếp. Số cách xếp 3 bạn Bình, Chi, Lệ vào 3 ghế còn lại là một hoán vị của 3 phần tử nên có có $3!$ cách. Vậy có $2!.3!=12$ cách.

Câu 6: Sắp xếp năm bạn học sinh An, Bình, Chi, Dũng, Lệ vào một chiếc ghế dài có 5 chỗ ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho bạn An và bạn Dũng không ngồi cạnh nhau?

A. 24. **B.** 48. **C.** 72. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

Số cách xếp 5 bạn vào 5 chỗ trên ghế dài là một hoán vị của 5 phần tử nên có $5!=120$ cách.

Số cách xếp sao cho bạn An và bạn Dũng luôn ngồi cạnh nhau là $2.4!=48$ cách (An và Dũng ngồi cạnh nhau xem như 1 bạn; xếp 4 bạn vào 4 chỗ có $4!$ cách; cách xếp An và Dũng ngồi cạnh nhau là $2!=2$)

Vậy số cách sắp xếp sao cho bạn An và bạn Dũng không ngồi cạnh nhau là $120-48=72$ cách.

Câu 7: Có 3 viên bi đen khác nhau, 4 viên bi đỏ khác nhau, 5 viên bi xanh khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các viên bi trên thành một dãy sao cho các viên bi cùng màu ở cạnh nhau?

A. 345600. **B.** 725760. **C.** 103680. **D.** 518400.

Lời giải

Chọn C

Số các hoán vị về màu bi khi xếp thành dãy là $3!$

Số cách xếp 3 viên bi đen khác nhau thành dãy là $3!$

Số cách xếp 4 viên bi đỏ khác nhau thành dãy là $4!$

Số cách xếp 5 viên bi xanh khác nhau thành dãy là $5!$

$\Rightarrow$ Số cách xếp các viên bi trên thành một dãy sao cho các viên bi cùng màu ở cạnh nhau là $3!.3!.4!.5!=103680$ cách.

Câu 8: Cô dâu và chú rể mời 6 người ra chụp ảnh kỉ niệm, người thợ chụp hình có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho cô dâu, chú rể đứng cạnh nhau.

A. $8!-7!$. **B.** $2.7!$. **C.** $6.7!$. **D.** $2!+6!$.

Lời giải

Chọn B

Khi cô dâu, chú rể đứng cạnh nhau (có thể thay đổi vị trí cho nhau), ta coi đó là một phần tử và đứng với 6 vị khách mời để chụp ảnh nên có $2.7!$ cách sắp xếp.

Câu 9: Trên giá sách muốn xếp 20 cuốn sách khác nhau. Có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho tập 1 và tập 2 đặt cạnh nhau.

A. $20!-18!$. **B.** $20!-19!$. **C.** $20!-18!.2!$. **D.** $19!.18$.

Lời giải

Chọn D

Sắp xếp 20 cuốn sách trên giá là một hoán vị của 20 phần tử nên ta có $20!$ cách sắp xếp.

Khi hai cuốn tập 1 và tập 2 đặt cạnh nhau (thay đổi vị trí cho nhau), ta coi đó là một phần tử và cùng sắp xếp với 18 cuốn sách còn lại trên giá nên có $2.19!$ cách sắp xếp.

Vậy có tất cả $20!-2.19!=19!.18$ cách sắp xếp theo yêu cầu bài toán.

Câu 10: Có bao nhiêu cách sắp xếp 4 người vào 4 ghế ngồi được bố trí quanh một bàn tròn?

A. 12. **B.** 24. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Chọn 1 người ngồi vào 1 vị trí bất kì. Xếp 3 người còn lại vào 3 ghế trống của bàn là một hoán vị của 3 phần tử nên có có $3!=6$ cách.

Câu 11: Có 4 nữ sinh tên là Huệ, Hồng, Lan, Hương và 4 nam sinh tên là An, Bình, Hùng, Dũng cùng ngồi quanh một bàn tròn có 8 chỗ ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp biết nam và nữ ngồi xen kẽ nhau?

A. 576. **B.** 144. **C.** 2880. **D.** 1152.

Lời giải

Chọn B

Giả sử các ghế ngồi đánh số từ 1 đến 8.

Chọn 1 bạn bất kì ngồi vào 1 vị trí ngẫu nhiên trên bàn tròn có 1 cách. (Nếu chọn 8 cách thì tức là nhầm với bàn dài). Xếp 3 bạn cùng giới tính còn lại vào 3 ghế (có số ghế cùng tính chẵn hoặc lẻ với bạn đầu) có $3!$ cách.

Xếp 4 bạn còn lại ngồi xen kẽ 4 bạn đã xếp ở trên có $4!$ cách.

Vậy có $3!.4!=144$ cách.

Câu 12: Từ các số tự nhiên 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau:

A. 4^4. **B.** 24. **C.** 1. **D.** 42.

Lời giải

Chọn B

Số các số tự nhiện có 4 chữ số khác nhau được tạo thành là một hoán vị của 4 phần tử bằng $4!=24$.

Dạng 2. Chỉnh hợp

1. Phương pháp

Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n\ge 1)$. Mỗi cách sắp xếp k phần tử của A theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử của tập A.

Số chỉnh hợp chập k của n phần tử:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}, 1\le k\le n$$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Từ 10 bông hoa có chủng loại khác nhau và 4 cái lọ khác nhau, có bao nhiêu cách cắm 4 bông hoa vào 4 lọ và mỗi lọ 1 bông hoa?

Hướng dẫn giải

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Số cách cắm 4 bông hoa từ 10 bông hoa khác nhau vào 4 lọ khác nhau là một bộ 4 bông hoa có thứ tự.

Ví dụ: Gọi 4 bông hoa được chọn là A, B, C, D và 4 lọ hoa là $\alpha,\beta,\gamma,\delta$. Hai cách cắm sau đây là khác nhau:

α	β	γ	δ
A	B	C	D

α	β	γ	δ
B	A	C	D

Do đó số cách cắm bông theo yêu cầu bài toán là A_{10}^4.

Ví dụ 2: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể thành lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số khác nhau và trong đó phải có chữ số 1?

Hướng dẫn giải

Cách 1: Đem chữ số 1 xếp trước

– Số cách xếp chữ số 1 vào 1 trong 4 vị trí là: 4 (cách)
– Số cách xếp 4 chữ số còn lại vào 3 vị trí còn lại là A_4^3 (cách)

Vậy số các số tự nhiên cần tìm là: $4\times A_4^3=96$ (số).

Cách 2: Dùng phần bù:

– Số các số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau (không cần biết có hay không có chữ số 1) lấy từ $\{1,2,3,4,5\}$ là $A_5^4=120$ (số)
– Phần bù của tập các số phải có chữ số 1 là tập các số không có chữ số 1.

Số các số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau (và không có chữ số 1) lấy từ $\{2,3,4,5\}$ là $P_4=24$ (số)

Vậy số các số tự nhiên cần tìm là: $120-24=96$ (số).

Ví dụ 3: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập thành bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau đôi một?

Hướng dẫn giải

Do đó số cách thành lập các số tự nhiên theo yêu cầu bài toán là số các chỉnh hợp chập 3 của 6 (chữ số): A_6^3.

Ví dụ 4: Từ 10 điểm phân biệt và không có ba điểm nào thẳng hàng, có thể lập được bao nhiêu vectơ?

Hướng dẫn giải

Để có một vectơ ta cần có 2 điểm phân biệt và để ý hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$ là khác nhau. Do vậy số cách thành lập các vectơ là số cách chọn 2 điểm có thứ tự từ 10 điểm của đề bài.

Nghĩa là số cách thành lập các vectơ là số các chỉnh hợp chập 2 của 10 (điểm): A_{10}^2.

Ví dụ 5: Một lớp có 30 học sinh gồm 20 nam và 10 nữ. Có bao nhiêu cách chọn 2 học sinh nam thi toán, lý và 2 học sinh nữ thi hóa, sinh? (Mỗi học sinh thi một môn).

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 2 trong 20 nam thi toán, lý là A_{20}^2 (cách)

Số cách chọn 2 trong 10 nữ thi hóa, sinh là A_{10}^2 (cách)

Vậy số cách chọn theo yêu cầu bài toán là $A_{20}^2 \times A_{10}^2 = 34200$ (cách).

Ví dụ 6: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể thành lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số trong đó phải có chữ số lẻ?

Hướng dẫn giải

- Số các số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau (không cần biết có hay không có chữ số lẻ) lấy từ các chữ số $\{1,2,3,4,5,6\}$ là $A_6^3 = 120$ (số).
- Số các số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau (cả 3 chữ số đều chẵn) lấy từ $\{2,4,6\}$ là $P_3 = 6$ (số)

Vậy số các số tự nhiên cần tìm là: $120 - 16 = 114$ (số).

Ví dụ 7: Có bao nhiêu số có hai chữ số, mà các chữ số đều là số lẻ và khác nhau?

Hướng dẫn giải

Xét tập $A = \{1,3,5,7,9\}$; có 5 phần tử.

Số $n = \overline{ab};\ a,b \in A, a \neq b$. Vậy có $A_5^2 = 20$.

Ví dụ 8: Có thể có tối đa là bao nhiêu số điện thoại gồm 7 chữ số và các chữ số đều khác nhau?

Hướng dẫn giải

Xét tập $A = \{0,1,2,...,9\}$.

Số điện thoại $x = abcdefg$. Số $a \in A$ có 10 cách chọn. Vì $b \neq a$ và $b \in A$ nên có 9 cách chọn. Vậy có: $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 604800$ cách.

Cách giải khác: Các số a, b, c, d, e, f khác nhau từng đôi một nên ta có số cách chọn là $A_{10}^7 = 604800$.

Nhận xét: Các bài toán dùng quy tắc nhân, bạn cũng nên dùng công thức tính số chỉnh hợp chập k của n, A_n^k cho nhanh.

Ví dụ 9: Có 10 môn học và một ngày học 5 tiết. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các môn học trong ngày đó?

Hướng dẫn giải

Chọn 5 môn trong 10 môn cho ngày hôm đó, sau đó thay đổi thứ tự 5 môn học, ta có: $A_{10}^5 = 30240$.

Ví dụ 10: Cho tập $A = \{1,2,3,...,9\}$. Có thể lập được bao nhiêu số có 5 chữ số, các chữ số đôi một khác nhau và các chữ số 2; 4; 5 đồng thời có mặt?

A. 1800. **B.** 3600. **C.** 10800. **D.** 4320.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Hướng dẫn giải

Xét ba vị trí trong 5 vị trí của số có 5 chữ số cần tìm để cho các chữ số 2, 4, 5. Ta có A_5^3 cách chọn.

Còn lại hai vị trí cho các số khác trong $A\setminus\{2,4,5\}$. Ta còn 6 chữ số. Vậy có A_6^2 cách chọn.

Cuối cùng, ta được: $A_5^3.A_6^2=1800$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Có bao nhiêu cách xếp khác nhau cho 6 người ngồi vào 4 chỗ trên một bàn dài?

A. 15. **B.** 720. **C.** 30. **D.** 360.

Lời giải

Chọn D

Số cách xếp khác nhau cho 6 người ngồi vào 4 chỗ trên một bàn dài là một chỉnh hợp chập 4 của 6 phần tử. Suy ra có $A_6^4=360$ cách.

Câu 2: Giả sử có bảy bông hoa khác nhau và ba lọ hoa khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách cắm ba bông hoa vào ba lọ đã cho (mội lọ cắm một bông)?

A. 35. **B.** 30240. **C.** 210. **D.** 21.

Lời giải

Chọn C

Số cách xếp bảy bông hoa khác nhau vào ba lọ hoa khác nhau là một chỉnh hợp chập 3 của 7 phần tử. Suy ra có $A_7^3=210$ cách.

Câu 3: Có bao nhiêu cách cắm 3 bông hoa vào 5 lọ khác nhau (mội lọ cắm không quá một một bông)?

A. 60. **B.** 10. **C.** 15. **D.** 720.

Lời giải

Chọn A

Số cách cắm 3 bông hoa vào ba lọ hoa khác nhau là một chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử. Suy ra có $A_5^3=60$ cách.

Câu 4: Có bao nhiêu cách mắc nối tiếp 4 bóng đèn được chọn từ 6 bóng đèn khác nhau?

A. 15. **B.** 360. **C.** 24. **D.** 17280.

Lời giải

Chọn B

Số cách mắc nối tiếp 4 bóng đèn được chọn từ 6 bóng đèn khác nhau là một chỉnh hợp chập 4 của 6 phần tử. Suy ra có $A_6^4=360$ cách.

Câu 5: Trong mặt phẳng cho một tập hợp gồm 6 điểm phân biệt. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối thuộc tập hợp điểm này?

A. 15. **B.** 12. **C.** 1440. **D.** 30.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Lời giải

Chọn D

Mỗi cặp sắp thứ tự gồm hai điểm (A,B) cho ta một vectơ có điểm đầu A và điểm cuối B và ngược lại. Như vậy, mỗi vectơ có thể xem là một chỉnh hợp chập 2 của tập hợp 6 điểm đã cho. Suy ra có $A_6^2=30$ cách.

Câu 6: Trong trận chung kết bóng đá phải phân định thắng thua bằng đá luân lưu 11 mét. Huấn luyện viên mỗi đội cần trình với trọng tài một danh sách sắp thứ tự 5 cầu thủ trong số 11 cầu thủ để đá luân lưu 5 quả 11 mét. Hãy tính xem huấn luyện viên của mỗi đội có bao nhiêu cách lập danh sách gồm 5 cầu thủ.

A. 462. **B.** 55. **C.** 55440. **D.** 11!.5!

Lời giải

Chọn C

Số cách lập danh sách gồm 5 cầu thủ đá 5 quả 11 mét là số các chỉnh hợp chập 5 của 11 phần tử. Vậy có $A_{11}^5=55440$.

Câu 7: Giả sử có 8 vận động viên tham gia chạy thi. Nếu không kể trường hợp có hai vận động viên về đích cùng lúc thì có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra đối với các vị trí nhất, nhì, ba?

A. 336. **B.** 56. **C.** 24. **D.** 120.

Lời giải

Chọn A

Số kết quả có thể xảy ra đối với các vị trí nhất, nhì, ba là số các chỉnh hợp chập 3 của 8 phần tử. Vậy có $A_8^3=336$.

Câu 8: Trong một ban chấp hành đoàn gồm 7 người, cần chọn ra 3 người vào ban thường vụ. Nếu cần chọn ban thường vụ gồm ba chức vụ Bí thư, Phó bí thư, Ủy viên thường vụ thì có bao nhiêu cách chọn?

A. 210. **B.** 200. **C.** 180. **D.** 150.

Lời giải

Chọn A

Số cách chọn ban thường vụ gồm ba chức vụ Bí thư, Phó bí thư, Ủy viên thường vụ từ 7 người là số các chỉnh hợp chập ba của bảy phần tử. Vậy có $A_7^3=210$.

Câu 9: Một cuộc thi có 15 người tham dự, giả thiết rằng không có hai người nào có điểm bằng nhau. Nếu kết quả của cuộc thi là việc chọn ra các giải nhất, nhì, ba thì có bao nhiêu kết quả có thể?

A. 2730. **B.** 2703. **C.** 2073. **D.** 2370.

Lời giải

Chọn A

Nếu kết quả của cuộc thi là việc chọn ra các giải nhất, nhì, ba thì mỗi kết quả ứng với một chỉnh hợp chập ba của 15 phần tử, do đó ta có: $A_{15}^3 = 2730$ kết quả.

Câu 10: Trong một dạ hội cuối năm ở một cơ quan, ban tổ chức phát ra 100 vé xổ số đánh số từ 1 đến 100 cho 100 người. Xổ số có 4 giải: 1 giải nhất, 1 giải nhì, 1 giải ba, 1 giải tư. Kết quả là việc công bố ai trúng giải nhất, giải nhì, giải ba, giải tư. Hỏi có bao nhiêu kết quả có thể?

A. 94109040. **B.** 94109400. **C.** 94104900. **D.** 94410900.

Lời giải

Chọn B

Mỗi kết quả ứng với một chỉnh hợp chập 4 của 100 phần tử, do đó ta có: $A_{100}^4 = 94109400$ kết quả.

Câu 11: Trong một dạ hội cuối năm ở một cơ quan, ban tổ chức phát ra 100 vé xổ số đánh số từ 1 đến 100 cho 100 người. Xổ số có 4 giải: 1 giải nhất, 1 giải nhì, 1 giải ba, 1 giải tư. Kết quả là việc công bố ai trúng giải nhất, giải nhì, giải ba, giải tư. Hỏi có bao nhiêu kết quả có thể nếu biết rằng người giữ vé số 47 được giải nhất?

A. 944109. **B.** 941409. **C.** 941094. **D.** 941049.

Lời giải

Chọn C

Vì người giữ vé số 47 trúng giải nhất nên mỗi kết quả ứng với một chỉnh hợp chập 3 của 99 phần tử, do đó ta có: $A_{99}^3 = 941094$ kết quả.

Câu 12: Trong một dạ hội cuối năm ở một cơ quan, ban tổ chức phát ra 100 vé xổ số đánh số từ 1 đến 100 cho 100 người. Xổ số có 4 giải: 1 giải nhất, 1 giải nhì, 1 giải ba, 1 giải tư. Kết quả là việc công bố ai trúng giải nhất, giải nhì, giải ba, giải tư. Hỏi có bao nhiêu kết quả có thể nếu biết rằng người giữ vé số 47 trúng một trong bốn giải?

A. 3766437. **B.** 3764637. **C.** 3764367. **D.** 3764376.

Lời giải

Chọn D

Nếu người giữ vé số 47 trúng một trong bốn giải thì:

- Người giữ vé số 47 có 4 cách chọn giải.
- Ba giải còn lại ứng với một chỉnh hợp chấp 3 của 99 phần tử, do đó ta có $A_{99}^3 = 941094$ cách.

Vậy số kết quả bằng $4 \times A_{99}^3 = 4 \times 941094 = 3764376$ kết quả.

Câu 13: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được lập từ các số $1, 2, \ldots, 9$?

A. 15120. **B.** 9^5. **C.** 5^9. **D.** 126.

Lời giải

Chọn A

Mỗi cách xếp số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau từ các số $1, 2, \ldots, 9$ là một chỉnh hợp chập 5 của 9 phần tử. Vậy có $A_9^5 = 15120$.

Câu 14: Cho tập $A = \{0,1, 2, \ldots, 9\}$. Số các số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau lấy ra từ tập A là?

A. 30420. **B.** 27162. **C.** 27216. **D.** 30240.

Lời giải

Chọn C

Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}, a \neq 0$.

- Chọn a có 9 cách.
- Chọn b,c,d,e từ 9 số còn lại có $A_9^4 = 3024$ cách.

Vậy có $9 \times 3024 = 27216$.

Câu 15: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số khác nhau đôi một, trong đó chữ số 2 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 3?

A. 249. **B.** 7440. **C.** 3204. **D.** 2942.

Lời giải

Chọn B

Ta chia thành các trường hợp sau:

- TH1: Nếu số 123 đứng đầu thì có A_7^4 số.
- TH2: Nếu số 321 đứng đầu thì có A_7^4 số.
- TH3: Nếu số $123;321$ không đứng đầu

Khi đó có 6 cách chọn số đứng đầu (khác $0;1;2;3$), khi đó còn 6 vị trí có 4 cách xếp 3 số 321 hoặc 123, còn lại 3 vị trí có A_6^3 cách chọn các số còn lại. Do đó trường hợp này có $6.2.4.A_6^3 = 5760$

Suy ra tổng các số thoả mãn yêu cầu là $2A_7^4 + 5760 = 7440$.

Dạng 3. Tổ hợp

1. Phương pháp

Cho tập A gồm n phần tử $(n \geq 1)$. Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.

Số các tổ hợp chập k của n phần tử: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho tập M có 10 phần tử. Số tập con gồm 2 phần tử của M là:

Hướng dẫn giải

Số tập con gồm 2 phần tử của M là số cách chọn 2 phần tử bất kì trong 10 phần tử của M. Do đó số tập con gồm hai phần tử của M là C_{10}^2.

Ví dụ 2: Có bao nhiêu cách phân công hai bạn từ một tổ có 10 bạn để làm trực nhật?

Hướng dẫn giải

Kết quả của sự phân công một nhóm gồm 2 bạn là một tổ hợp chập 2 của 10. Vậy số cách phân công là: $C_{10}^2 = \frac{10!}{2!.8!} = 45.$

Ví dụ 3: Tìm số đường chéo của một đa giác lồi 15 cạnh

Hướng dẫn giải

Số đoạn thẳng có hai đầu mút là hai đỉnh của đa giác đã cho là C_{15}^2, trong đó số cạnh của đa giác là 15.

Vậy số các đường chéo là: $C_{15}^2 - 15 = 105 - 15 = 90.$

Ví dụ 4: Có bao nhiêu cách phân công 8 bạn học sinh thành hai nhóm: một nhóm có 5 bạn, nhóm kia có 3 bạn?

Hướng dẫn giải

Số cách phân nhóm 5 bạn trong số 8 bạn học sinh là C_8^5.

Sau khi phân nhóm 5 bạn sẽ còn lại 3 bạn được phân công vào nhóm còn lại.

Vì vậy sẽ có $C_8^5 = 56$ cách.

Ví dụ 5: Lớp 11 của một trường THPT có 45 học sinh. Cần chọn 4 bạn vào Đội Cờ đỏ và 3 bạn vào Ban Chấp hành Đoàn. Số cách chọn là:

Hướng dẫn giải

Chon 4 bạn trong số 45 bạn vào Đội Cờ đỏ nên có C_{45}^4 cách chọn. Sau khi chọn 4 bạn rồi, chọn 3 bạn trong số $45 - 4 = 41$ bạn còn lại vào Ban Chấp hành Đoàn nên có C_{41}^3 cách chọn. Từ đó, theo quy tắc nhân có $C_{45}^4 \times C_{41}^3$ cách chọn.

Ví dụ 6: Từ 10 điểm phân biệt trong mặt phẳng và không có ba điểm nào thẳng hàng, có thể vẽ được bao nhiêu tam giác?

Hướng dẫn giải

Từ 3 điểm không thẳng hàng ta có một tam giác và để ý các tam giác ABC, BCA, CAB,… là giống nhau.

Do đó số tam giác có thể vẽ được là số cách chọn 3 điểm không có thứ tự từ 10 điểm của đề bài. Vậy đáp số là C_{10}^3.

Ví dụ 7: Số đường chéo của một đa giác có 10 cạnh là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Một đa giác có 10 cạnh thì có 10 đỉnh.

Số đoạn thẳng được thành lập từ 10 đỉnh của đa giác là C_{10}^2

Số đường chéo của đa giác là số đoạn thẳng vừa tìm ở trên và bỏ đi số cạnh của đa giác.

Vậy số đường chéo cần tìm là: $C_{10}^2 - 10 = 35$ (đường chéo).

Ví dụ 8: Một người nông dân có 10 cây giống khác nhau gồm 6 cây xoài và 4 cây mít. Người ấy muốn chọn 4 cây để trồng sao cho phải có đủ 2 loại xoài và mít. Hỏi người ấy có mấy cách để chọn?

Hướng dẫn giải

Nhận xét: Phải có xoài và mít là phải có không cụ thể. Phải có cây mít nào? Và phải có cây xoài nào? Do đó ta dùng cách chia trường hợp như sau:

TH1: 1 cây xoài và 3 cây mít.

Số cách chọn 1 trong 6 cây xoài là 6 (cách)

Số cách chọn 3 trong 4 cây mít là $C_4^3 = 4$ (cách)

Suy ra TH1 có $6 \times 4 = 24$ (cách).

TH2: 2 cây xoài và 2 cây mít.

Tương tự, ta có: $C_6^2 \times C_4^2 = 90$ (cách)

TH3: 3 cây xoài và 1 cây mít.

Tương tự ta có: $C_6^3 \times 4 = 80$ (cách)

Vậy số cách chọn theo yêu cầu bài toán là: $24 + 90 + 8 = 194$ (cách).

Ví dụ 9: Từ 3 bông hồng vàng, 4 bông hồng trắng và 5 bông hồng đỏ (các bông xem như đôi một khác nhau), có bao nhiêu cách chọn một bó hoa gồm 5 bông trong đó có đúng 1 bông hồng đỏ?

A. 175. **B.** 4200.

C. 1650. **D.** 787.

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 1 trong 5 bông hồng đỏ là 5 (cách).

Số cách chọn 4 trong 7 bông hồng (vàng và trắng) là: $C_7^4 = 35$ (cách)

Vậy số cách chọn một bó bông theo yêu cầu bài toán là: $5 \times 35 = 175$ (cách).

Ví dụ 10: Một lớp có 20 học sinh trong đó có 15 nam và 5 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập một đội gồm 4 học sinh trong đó có ít nhất một nữ?

Hướng dẫn giải

Cách 1: Chia trường hợp

TH1: 1 nữ và 3 nam.

Số cách chọn 1 trong 5 nữ là 5 (cách)

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Số cách chọn 3 trong 15 nam là $C_{15}^3 = 455$ (cách)

Suy ra TH1 có $5 \times 455 = 2275$ (cách).

TH2: 2 nữ và 2 nam.

Tương tự ta có: $C_5^2 \times C_{15}^2 = 1050$ (cách).

TH3: 3 nữ và 1 nam.

Tương tự ta có: $C_5^3 \times 15 = 150$ (cách).

TH4: 4 nữ.

Tương tự ta có: $C_5^4 = 5$ (cách).

Vậy số cách chọn theo yêu cầu bài toán là:

$2275 + 1050 + 150 + 5 = 3480$ (cách).

Cách 2: Dùng phần bù

- Số cách chọn 4 học sinh không phân biệt nam, nữ từ 20 học sinh là: $C_{20}^4 = 4845$ (cách)
- Số cách chọn 4 học sinh nam từ 15 học sinh nam là: $C_{15}^4 1365$ (cách)

Vậy số cách chọn theo yêu cầu bài toán là: $4845 - 1365 = 3480$ (cách).

Ví dụ 11: Có 20 quyển sách khác nhau gồm 15 quyển sách toán và 5 quyển sách lý. Có bao nhiêu cách chọn 5 quyển sách toán và 2 quyển sách lý để xếp có thứ tự lên 1 kệ sách dài?

Hướng dẫn giải

- Số cách chọn 5 trong 15 quyển sách toán là $C_{15}^5 = 3003$ (cách)
- Số cách chọn 2 trong 5 quyển sách lý là $C_5^2 = 10$ (cách)
- Số cách xếp 7 quyển sách toán, lý vừa chọn lên kệ sách dài là: $P_7 = 5040$ (cách). Vậy số cách xếp theo yêu cầu bài toán là:

$3003 \times 10 \times 5040 = 151351200$ (cách).

Ví dụ 12: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể thành lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau trong đó có 3 chữ số lẻ và 2 chữ số chẵn?

Hướng dẫn giải

- Số cách chọn 3 trong 5 chữ số lẻ $\{1,3,5,7,9\}$ là: $C_5^3 = 10$ (cách)
- Số cách chọn 2 trong 4 chữ số chẵn $\{2,4,6,8\}$ là: $C_4^2 = 6$ (cách)
- Số cách xếp 5 chữ số vừa chọn vào 5 vị trí là: $P_5 = 120$ (cách)

Vậy số các số tự nhiên cần tìm là: $10 \times 6 \times 20 = 7200$ (số)

Ví dụ 13: Một học sinh có 10 cây viết khác nhau. Học sinh đó có bao nhiêu cách chọn 3 trong 10 cây viết đó để đi học?

Hướng dẫn giải

Gọi 3 cây viết được chọn là A, B, C không có thứ tự, nghĩa là A, B, C hoặc B, C, A hoặc C, A, B,… là giống nhau.

Do đó đáp số là C_{10}^3.

Ví dụ 14: Một lớp có 30 học sinh. Giáo viên chủ nhiệm có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh làm ban cán sự lớp?

Hướng dẫn giải

Đề bài chỉ yêu cầu chọn 3 học sinh làm ban cán sự lớp mà không phân công cụ thể công việc của 3 học sinh đó.

Do vậy 3 học sinh được chọn không có thứ tự. Nghĩa là số cách chọn theo yêu cầu bài toán là C_{30}^3 (cách).

Ví dụ 15: Một hộp đựng 10 quả cầu khác nhau gồm 5 quả cầu trắng và 5 quả cầu đen. Có bao nhiêu cách chọn 2 quả cầu trắng và 2 quả cầu đen từ hộp đó?

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 2 trong 5 quả cầu trắng là C_5^2 (cách).

Số cách chọn 2 trong 5 quả cầu đen là C_5^2 (cách).

Vậy số cách chọn theo yêu cầu bài toán là $C_5^2 \times C_5^2$ (cách).

Ví dụ 16: Một lớp có 30 học sinh gồm 20 nam và 10 nữ. Có bao nhiêu cách chọn 6 học sinh nam thi bóng chuyền và 2 học sinh nữ thi cầu lông?

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 6 trong 20 học sinh nam thi bóng chuyền là C_{20}^6 (cách).

Số cách chọn 2 trong 10 học sinh nữ thi cầu lông là C_{10}^2 (cách).

Vậy số cách chọn theo yêu cầu bài toán là $C_{20}^6 \times C_{10}^2$ (cách).

Ví dụ 17: Một lớp có 30 học sinh gồm 20 nam và 10 nữ. Có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh nam thi toán và 2 học sinh nữ thi lý, hóa? (Mỗi học sinh thi một môn).

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 3 trong 20 học sinh nam thi toán là C_{20}^3 (cách)

Số cách chọn 2 trong 10 học sinh nữ thi lý, hóa là A_{10}^2 (cách)

Vậy số cách chọn theo yêu cầu bài toán là $C_{20}^3 \times A_{10}^2$ (cách).

Ví dụ 18: Một lớp có 30 học sinh. Có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh tham gia văn nghệ và 2 học sinh tham gia phong trào thể thao của nhà trường?

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 3 trong 30 học sinh tham gia văn nghệ là C_{30}^3 (cách)

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Như vậy đã chọn được 3 học sinh và chỉ còn lại 27 học sinh.

Số cách chọn 2 trong 27 học sinh còn lại để tham gia phong trào thể thao là C_{27}^2 (cách). Vậy số cách chọn theo yêu cầu bài toán là $C_{30}^3 \times C_{27}^2$ (cách).

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Chọn 3 học sinh để tham gia vệ sinh công cộng toàn trường, hỏi có bao nhiêu cách chọn như trên?

A. 9880. **B.** 59280. **C.** 2300. **D.** 455.

Lời giải

Chọn A

Nhóm học sinh 3 người được chọn (không phân biệt nam, nữ - công việc) là một tổ hợp chập 3 của 40 (học sinh).

Vì vậy, số cách chọn nhóm học sinh là $C_{40}^3 = \frac{40!}{37!.3!} = 9880.$

Câu 2: Một tổ có 10 người gồm 6 nam và 4 nữ. Cần lập một đoàn đại biểu gồm 5 người, hỏi có bao nhiêu cách lập?

A. 25. **B.** 252. **C.** 50. **D.** 455.

Lời giải

Chọn D

Mỗi đoàn được lập là một tổ hợp chập 5 của 10 (người). Vì vậy, số đoàn đại biểu có thể có là $C_{10}^5 = \frac{10!}{5!.5!} = 252.$

Câu 3: Trong một ban chấp hành đoàn gồm 7 người, cần chọn 3 người trong ban thường vụ. Nếu không có sự phân biệt về chức vụ của 3 người trong ban thường vụ thì có bao nhiêu các chọn?

A. 25. **B.** 42. **C.** 50. **D.** 35.

Lời giải

Chọn D

Vì không xét đến sự phân biệt chức vụ của 3 người trong ban thường vụ nên mỗi cách chọn ứng với một tổ hợp chập 3 của 7 phần tử.

Như vậy, ta có $C_7^5 = \frac{7!}{2!.5!} = 35$ cách chọn ban thường vụ.

Câu 4: Một cuộc thi có 15 người tham dự, giả thiết rằng không có hai người nào có điểm bằng nhau. Nếu kết quả cuộc thi và việc chọn ra 4 người có điểm cao nhất thì có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra?

A. 1635. **B.** 1536. **C.** 1356. **D.** 1365.

Lời giải

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Chọn D

Nếu kết quả cuộc thi là việc chọn ra 4 người có điểm cao nhất thì mỗi kết quả ứng với một tổ hợp chập 4 của 15 phần tử.

Như vậy, ta có $C_{15}^4 = 1365$ kết quả.

Câu 5: Một hộp đựng 5 viên bi màu xanh, 7 viên bi màu vàng. Có bao nhiêu cách lấy ra 6 viên bi bất kỳ?

A. 665280. **B.** 924. **C.** 7. **D.** 942.

Lời giải

Chọn B

Số cách lấy 6 viên bi bất kỳ (không phân biệt màu) trong 12 viên bi là một tổ hợp chập 6 của 12 (viên bi). Vậy ta có $C_{12}^6 = 924$ cách lấy.

Câu 6: Có bao nhiêu cách lấy hai con bài từ cỗ bài tú lơ khơ gồm 52 con?

A. 104. **B.** 450. **C.** 1326. **D.** 2652.

Lời giải

Chọn C

Mỗi cách lấy 2 con bài từ 52 con là một tổ hợp chập 2 của 52 phần tử.

Vậy số cách lấy hai con bài từ cỗ bài tú lơ khơ 52 con là $C_{52}^2 = 1326$.

Câu 7: Có 15 đội bóng đá thi đấu theo thể thức vòng tròn tính điểm. Hỏi cần phải tổ chức bao nhiêu trận đấu?

A. 100. **B.** 105. **C.** 210. **D.** 200.

Lời giải

Chọn B

Lấy hai đội bất kỳ trong 15 đội bóng tham gia thi đấu ta được một trận đấu.

Vậy số trận đấu chính là một tổ hợp chập 2 của 15 phần tử (đội bóng đá).

Như vậy, ta có $C_{15}^2 = \dfrac{15!}{13!.2!} = 105$ trận đấu.

Câu 8: Có bao nhiêu cách cắm 3 bông hoa giống nhau vào 5 lọ khác nhau (mỗi lọ cắm không quá một bông)?

A. 10. **B.** 30. **C.** 6. **D.** 60.

Lời giải

Chọn A

Cắm 3 bông hoa giống nhau, mỗi bông vào 1 lọ nên ta sẽ lấy 3 lọ bất kỳ trong 5 lọ khác nhau để cắm bông. Vậy số cách cắm bông chính là một tổ hợp chập 3 của 5 phần tử (lọ hoa). Như vậy, ta có $C_5^3 = \dfrac{5!}{2!.3!} = 10$ cách.

Câu 9: Trong mặt phẳng cho tập hợp P gồm 2018 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng mà hai đầu mút thuộc P ?

A. $\frac{2018!}{2016!}$. **B.** $\frac{2016!}{2!}$. **C.** $\frac{2018!}{2!}$. **D.** $\frac{2018!}{2016!.2!}$.

Lời giải

Chọn D

Với hai điểm bất kỳ trong n điểm ta luôn được một đoạn thẳng.

Vậy số đoạn thẳng cần tìm chính là một tổ hợp chập 2 của 2018 phần tử (điểm).

Như vậy, ta có $C_{2018}^2 = \frac{2018!}{2016!.2!}$ đoạn thẳng.

Câu 10: Cho 10 điểm, không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng khác nhau tạo bởi 2 trong 10 điểm nói trên?

A. 90. **B.** 20. **C.** 45. **D.** Một số khác.

Lời giải

Chọn C

Với hai điểm bất kỳ trong n điểm ta luôn được một đoạn thẳng.

Vậy số đoạn thẳng cần tìm chính là một tổ hợp chập 2 của 10 phần tử (điểm).

Như vậy, ta có $C_{10}^2 = \frac{10!}{8!.2!} = 45$ đường thẳng.

Câu 11: Trong mặt phẳng, cho 6 điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của nó thuộc tập điểm đã cho?

A. 15. **B.** 20. **C.** 60. **D.** Một số khác.

Lời giải

Chọn B

Cứ 3 điểm phân biệt không thẳng hàng tạo thành một tam giác.

Lấy 3 điểm bất kỳ trong 6 điểm phân biệt thì số tam giác cần tìm chính là một tổ hợp chập 3 của 6 phần từ (điểm). Như vậy, ta có $C_6^3 = 20$ tam giác.

Câu 12: Cho 10 điểm phân biệt $A_1, A_2, ..., A_{10}$ trong đó có 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 thẳng hàng, ngoài ra không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh được lấy trong 10 điểm trên?

A. 96 tam giác. **B.** 60 tam giác. **C.** 116 tam giác. **D.** 80 tam giác.

Lời giải

Chọn C

Số cách lấy 3 điểm từ 10 điểm phân biệt là $C_{10}^3 = 120$.

Số cách lấy 3 điểm bất kì trong 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 là $C_4^3 = 4$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Khi lấy 3 điểm bất kì trong 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 thì sẽ không tạo thành tam giác.

Như vậy, số tam giác tạo thành $120-4=116$ tam giác.

Câu 13: Cho mặt phẳng chứa đa giác đều (H) có 20 cạnh. Xét tam giác có 3 đỉnh được lấy từ các đỉnh của (H). Hỏi có bao nhiêu tam giác có đúng 1 cạnh là cạnh của (H).

A. 1440. **B.** 320. **C.** 112. **D.** 816.

Lời giải

Chọn B

Lấy một cạnh bất kỳ của (H) làm cạnh của một tam giác có 20 cách.

Lấy một điểm bất kỳ trong 16 đỉnh còn lại của (H) (trừ đi hai đỉnh của một cạnh, hai đỉnh 2 bên của cạnh kề) có 16 cách. Vậy số tam giác cần tìm là $20.18=320$.

Câu 14: Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2. Trên d_1 lấy 17 điểm phân biệt, trên d_2 lầy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác mà có các đỉnh được chọn từ 37 điểm này.

A. 5690. **B.** 5960. **C.** 5950. **D.** 5590.

Lời giải

Chọn C

Một tam giác được tạo bởi ba điểm phân biệt nên ta xét:

TH1. Chọn 1 điểm thuộc d_1 và 2 điểm thuộc $d_2 \longrightarrow$ có $C_{17}^1.C_{20}^2$ tam giác.

TH2. Chọn 2 điểm thuộc d_1 và 1 điểm thuộc $d_2 \longrightarrow$ có $C_{17}^2.C_{20}^1$ tam giác.

Như vậy, ta có $C_{17}^1.C_{20}^2+C_{17}^2.C_{20}^1=5950$ tam giác cần tìm.

Câu 15: Số giao điểm tối đa của 5 đường tròn phân biệt là:

A. 10. **B.** 20. **C.** 18. **D.** 22.

Lời giải

Chọn B

Hai đường tròn cho tối đa hai giao điểm. Và 5 đường tròn phân biệt cho số giao điểm tối đa khi 2 đường tròn bất kỳ trong 5 đường tròn đôi một cắt nhau.

Vậy số giao điểm tối đa của 5 đường tròn phân biệt là $2.C_5^2=20$.

Câu 16: Số giao điểm tối đa của 10 đường thẳng phân biệt là:

A. 50. **B.** 100. **C.** 120. **D.** 45.

Lời giải

Chọn D

Số giao điểm tối đa của 10 đường thẳng phân biệt khi không có ba đường thẳng nào đồng quy và không có hai đường thẳng nào song song.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Và cứ hai đường thẳng ta có một giao điểm suy ra số giao điểm chính là số cặp đường thẳng bất kỳ được lấy từ 10 đường thẳng phân biệt. Như vậy, ta có $C_{10}^2=45$ giao điểm.

Câu 17: Với đa giác lồi 10 cạnh thì số đường chéo là

A. 90. **B.** 45. **C.** 35. **D.** Một số khác.

Lời giải

Chọn C

Đa giác lồi 10 cạnh thì có 10 đỉnh. Lấy hai điểm bất kỳ trong 10 đỉnh của đa giác lồi ta được số đoạn thẳng gồm cạnh và đường chéo của đa giác lồi.

Vậy số đường chéo cần tìm là $C_{10}^2-10=\dfrac{10!}{8!.2!}-10=35$.

Câu 18: Cho đa giác đều n đỉnh, $n\in\mathbb{N}$ và $n\geq 3$. Tìm n biết rằng đa giác đã cho có 135 đường chéo.

A. $n=15$. **B.** $n=27$. **C.** $n=8$. **D.** $n=18$.

Lời giải

Chọn D

Đa giác lồi n đỉnh thì có n cạnh. Nếu vẽ tất cả các đoạn thẳng nối từng cặp trong n đỉnh này thì có một bộ gồm các cạnh và các đường chéo.

Vậy để tính số đường chéo thì lấy tổng số đoạn thẳng dựng được trừ đi số cạnh, với

- Tất cả đoạn thẳng dựng được là bằng cách lấy ra 2 điểm bất kỳ trong n điểm, tức là số đoạn thẳng chính là số tổ hợp chập 2 của n phần tử.

  Như vậy, tổng số đoạn thẳng là C_n^2.

- Số cạnh của đa giác lồi là n.

Suy ra số đường chéo của đa giác đều n đỉnh là $C_n^2-n=\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Theo bài ra, ta có $\begin{cases}n\geq 3\\ \dfrac{n(n-3)}{2}=135\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n\geq 3\\ n^2-3n-270=0\end{cases}\Leftrightarrow n=18$.

Câu 19: Trong mặt phẳng có bao nhiêu hình chữ nhật được tạo thành từ bốn đường thẳng phân biệt song song với nhau và năm đường thẳng phân biệt vuông góc với bốn đường thẳng song song đó.

A. 60. **B.** 48. **C.** 20. **D.** 36.

Lời giải

Chọn B

Cứ 2 đường thẳng song song với 2 đường thẳng vuông góc với chúng cắt nhau tại bốn điểm là 4 đỉnh của hình chữ nhật.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Vậy lấy 2 đường thẳng trong 4 đường thẳng song song và lấy 2 đường thẳng trong 5 đường thẳng vuông góc với 4 đường đó ta được số hình chữ nhật là $C_4^2.C_5^2=60$.

Câu 20: Một lớp có 15 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách chọn 5 bạn học sinh sao cho trong đó có đúng 3 học sinh nữ?

A. 110790. **B.** 119700. **C.** 117900. **D.** 110970.

Lời giải

Chọn B

Số cách chọn 3 học sinh nữ là: $C_{20}^3=1140$ cách.

Số cách chọn 2 bạn học sinh nam là: $C_{15}^2=105$ cách.

Số cách chọn 5 bạn thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $1140\times 105=119700$.

Câu 21: Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau và khác 0 mà trong mỗi số luôn luôn có mặt hai chữ số chẵn và hai chữ số lẻ?

A. $4!C_4^1C_5^1$. **B.** $3!C_3^2C_5^2$. **C.** $4!C_4^2C_5^2$. **D.** $3!C_4^2C_5^2$.

Lời giải

Chọn C

Số cách chọn 2 số chẵn trong tập hợp $\{2;4;6;8\}$ là: C_4^2 cách.

Số cách chọn 2 số lẻ trong tập hợp $\{1;3;5;7;9\}$ là: C_5^2 cách.

Số cách hoán vị 4 chữ số đã chọn lập thành 1 số tự nhiên là: $4!$ cách.

Vậy có $4!\times C_4^2\times C_5^2$ số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 22: Một túi đựng 6 bi trắng, 5 bi xanh. Lấy ra 4 viên bi từ túi đó. Hỏi có bao nhiêu cách lấy mà 4 viên bi lấy ra có đủ hai màu.

A. 300. **B.** 310. **C.** 320. **D.** 330.

Lời giải

Chọn B

Các viên bi lấy ra có đủ cả 2 màu nên ta có các trường hợp:

Số bi trắng	Số bi xanh	Số cách chọn
1	3	$C_6^1\times C_5^3$
2	2	$C_6^2\times C_5^2$
3	1	$C_6^3\times C_5^1$

Vậy có tất cả $C_6^1\times C_5^3+C_6^2\times C_5^2+C_6^3\times C_5^1=310$ cách lấy thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2. Dùng phần bù. Số cách chọn 4 viên bi tùy ý từ 11 viên bi là: C_{11}^5 cách.

Số cách chọn 4 viên bi màu trắng là: C_6^4 cách.

Số cách chọn 4 viên bi là màu xanh là: C_5^4 cách.

Vậy có $C_{11}^5-\left(C_6^4+C_5^4\right)=310$ cách chọn 4 viên bi trong đó có cả 2 màu.

Câu 23: Một nhóm học sinh có 6 bạn nam và 5 bạn nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 học sinh trong đó có cả nam và nữ?

A. 455. **B.** 7. **C.** 456. **D.** 462.

Lời giải

Chọn A

Số cách chọn 5 học sinh tùy ý là: C_{11}^5 cách.

Số cách chọn 5 học sinh nam là: C_6^5 cách.

Số cách chọn 5 học sinh nữ là: C_5^5 cách.

Vậy có $C_{11}^5-C_6^5-C_5^5=455$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2. Do trong 5 học sinh được chọn có cả nam cả nữ nên ta có các trường hợp sau:

Số học sinh nam	Số học sinh nữ	Số cách chọn
1	4	$C_6^1\times C_5^4$
2	3	$C_6^2\times C_5^3$
3	2	$C_6^3\times C_5^2$
4	1	$C_6^4\times C_5^1$

Vậy có $C_6^1\times C_5^4+C_6^2\times C_5^3+C_6^3\times C_5^2+C_6^4\times C_5^1=455$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 24: Để chào mừng kỉ niệm ngày thành lập Đoàn TNCS Hồ Chí Minh, nhà trường tổ chức cho học sinh cắm trại. Lớp 10A có 19 học sinh nam và 16 học sinh nữ. Giáo viên cần chọn 5 học sinh để trang trí trại. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 5 học sinh sao cho có ít nhất 1 học sinh nữ? Biết rằng học sinh nào trong lớp cũng có khả năng trang trí trại.

A. C_{19}^5. **B.** $C_{35}^5-C_{19}^5$. **C.** $C_{35}^5-C_{16}^5$. **D.** C_{16}^5.

Lời giải

Chọn B

Tổng số học sinh lớp 10A là 35.

Có C_{35}^5 cách chọn 5 học sinh từ 35 học sinh lớp 10**A.**

Có C_{19}^5 cách chọn 5 học sinh từ 19 học sinh nam của lớp 10**A.**

Do đó có $C_{35}^5-C_{19}^5$ cách chọn 5 học sinh sao cho có ít nhất một học sinh nữ.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Câu 25: Một lớp học có 40 học sinh, trong đó có 25 nam và 15 nữ. Giáo viên cần chọn 3 học sinh tham gia vệ sinh công cộng toàn trường. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh trong đó có **nhiều nhất** 1 học sinh nam?

A. 2625. **B.** 455. **C.** 2300. **D.** 3080.

Lời giải

Chọn D

Do trong 3 học sinh được chọn có nhiều nhất 1 học sinh nam nên ta có các trường hợp sau:

Số học sinh nam	Số học sinh nữ	Số cách chọn
1	2	$C_{25}^{1}\times C_{15}^{2}$
0	3	$C_{25}^{0}\times C_{15}^{3}$

Vậy có $C_{25}^{1}\times C_{15}^{2}+C_{25}^{0}\times C_{15}^{3}=3080$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2. Số cách chọn 3 học sinh bất kì trong lớp là: C_{40}^{3} cách.

Số cách chọn 3 học sinh trong đó có 2 học sinh nam, 1 học sinh nữ là: $C_{25}^{2}\times C_{15}^{1}$ cách.

Số cách chọn 3 học sinh nam là: $C_{25}^{3}\times C_{15}^{0}$ cách.

Vậy có $C_{40}^{3}-\left(C_{25}^{2}\times C_{15}^{1}+C_{25}^{3}\times C_{15}^{0}\right)=3080$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 26: Từ 20 người cần chọn ra một đoàn đại biểu gồm 1 trưởng đoàn, 1 phó đoàn, 1 thư kí và 3 ủy viên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn đoàn đại biểu?

A. 4651200. **B.** 4651300. **C.** 4651400. **D.** 4651500.

Lời giải

Chọn A

Số cách chọn 1 người trong 20 người làm trưởng đoàn là: C_{20}^{1} cách.

Số cách chọn 1 người trong 19 người còn lại làm phó đoàn là: C_{19}^{1} cách.

Số cách chọn 1 người trong 18 người còn lại làm thư kí là: C_{18}^{1} cách.

Số cách chọn 3 người trong 17 người còn lại làm ủy viên là: C_{17}^{3} cách.

Vậy số cách chọn đoàn đại biểu là $C_{20}^{1}\times C_{19}^{1}\times C_{18}^{1}\times C_{17}^{3}=4651200$.

Câu 27: Một tổ gồm 10 học sinh. Cần chia tổ đó thành ba nhóm có 5 học sinh, 3 học sinh và 2 học sinh. Số các chia nhóm là:

A. 2880. **B.** 2520. **C.** 2515. **D.** 2510.

Lời giải

Chọn B

Số cách chọn ra nhóm có 5 học sinh từ 10 học sinh là: C_{10}^5 cách.

Số cách chọn ra nhóm 3 học sinh từ 5 học sinh còn lại là: C_5^3 cách.

Số cách chọn ra nhóm 2 học sinh từ 2 học sinh còn lại là: C_2^2 cách.

Vậy có $C_{10}^5 \times C_5^3 \times C_2^2 = 2520$ cách chia nhóm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 28: Một nhóm đoàn viên thanh niên tình nguyện về sinh hoạt tại một xã nông thôn gồm có 21 đoàn viên nam và 15 đoàn viên nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân chia 3 nhóm về 3 ấp để hoạt động sao cho mỗi ấp có 7 đoàn viên nam và 5 đoàn viên nữ?

A. $3C_{36}^{12}$. **B.** C_{36}^{12}. **C.** $3C_{21}^7 C_{15}^5$. **D.** $C_{21}^7 C_{15}^5 C_{14}^7 C_{10}^5$.

Lời giải

Chọn D

Số cách chọn nhóm thứ nhất là: $C_{21}^7 \times C_{15}^5$ cách.

Số cách chọn nhóm thứ hai là: $C_{14}^7 \times C_{10}^5$ cách.

Số cách chọn nhóm thứ ba là: $C_7^7 \times C_5^5$ cách.

Vậy có $\left(C_{21}^7 \times C_{15}^5\right) \times \left(C_{14}^7 \times C_{10}^5\right) \times \left(C_7^7 \times C_5^5\right) = C_{21}^7 C_{15}^5 C_{14}^7 C_{10}^5$ cách chia nhóm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 29: Trong một giỏ hoa có 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng và 4 bông hồng đỏ (các bông hoa coi như đôi một khác nhau). Người ta muốn làm một bó hoa gồm 7 bông được lấy từ giỏ hoa đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn hoa biết bó hoa có đúng 1 bông hồng đỏ?

A. 56. **B.** 112. **C.** 224. **D.** 448.

Lời giải

Chọn B

Số cách chọn 1 bông hồng đỏ từ giỏ hoa là: C_4^1.

Bó hoa gồm 7 bông hồng mà có đúng 1 bông hồng đỏ nên tổng số bông hồng vàng và bông hồng trắng là 6. Ta có các trường hợp sau:

Số bông hồng vàng	Số bông hồng trắng	Số cách chọn
5	1	$C_5^5 \times C_3^1$
4	2	$C_5^4 \times C_3^2$
3	3	$C_5^3 \times C_3^3$

Vậy có $C_4^1\left(C_5^5 \times C_3^1 + C_5^4 \times C_3^2 + C_5^3 \times C_3^3\right) = 112$ cách chọn bó hoa thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 30: Một hộp có 6 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 4 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi sao cho có đủ cả ba màu. Số cách chọn là:

A. 2163. **B.** 3843. **C.** 3003. **D.** 840.

Lời giải

Chọn A

Số cách chọn 5 viên bi bất kì trong hộp là: C_{15}^5 cách.

Số cách chọn 5 viên bi mà trong đó không có viên bi nào màu vàng là: C_{11}^5 cách.

Số cách chọn 5 viên bi mà trong đó không có viên bi nào màu đỏ là: C_{10}^5 cách.

Số cách chọn 5 viên bi mà trong đó không có viên bi nào màu xanh là: C_9^5 cách.

Vậy có $C_{15}^5-\left(C_{11}^5+C_{10}^5+C_9^5\right)=2163$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 31: Đội văn nghệ của nhà trường gồm 4 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 2 học sinh lớp 12**C.** Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh từ đội văn nghệ để biểu diễn trong lễ bế giảng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho lớp nào cũng có học sinh được chọn?

A. 126. **B.** 102. **C.** 98. **D.** 100.

Lời giải

Chọn C

Do trong 5 học sinh có đủ học sinh ở các lớp 12A, 12B, 12C nên ta có các trường hợp sau:

Số học sinh lớp 12A	Số học sinh lớp 12B	Số học sinh lớp 12C	Số cách chọn
2	1	2	$C_4^2\times C_3^1\times C_2^2$
1	2	2	$C_4^1\times C_3^2\times C_2^2$
2	2	1	$C_4^2\times C_3^2\times C_2^1$
3	1	1	$C_4^3\times C_3^1\times C_2^1$
1	3	1	$C_4^1\times C_3^3\times C_2^1$

Vậy có $C_4^2\times C_3^1\times C_2^2+C_4^1\times C_3^2\times C_2^2+C_4^2\times C_3^2\times C_2^1+C_4^3\times C_3^1\times C_2^1+C_4^1\times C_3^3\times C_2^1=98$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2. Tổng số học sinh trong đội văn nghệ của nhà trường là 9 học sinh.

Số cách chọn 5 học sinh bất kì trong 9 học sinh là: C_9^5 cách.

Số cách chọn 5 học sinh mà trong đó không có học sinh lớp 12A là: C_5^5 cách.

Số cách chọn 5 học sinh mà trong đó không có học sinh lớp 12B là: C_6^5 cách.

Số cách chọn 5 học sinh mà trong đó không có học sinh lớp 12C là: C_7^5 cách.

Vậy có $C_9^5-\left(C_5^5+C_6^5+C_7^5\right)=98$ cách thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Câu 32: Có 12 học sinh giỏi gồm 3 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 6 học sinh trong số học sinh giỏi đó sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh?

A. 85. **B.** 58. **C.** 508. **D.** 805.

Lời giải

Chọn D

Số cách chọn 6 học sinh bất kì trong 12 học sinh là: C_{12}^6 cách.

Số cách chọn 6 học sinh mà trong đó không có học sinh khối 10 là: C_7^6 cách.

Số cách chọn 6 học sinh mà trong đó không có học sinh khối 11 là: C_8^6 cách.

Số cách chọn 6 học sinh mà trong đó không có học sinh khối 12 là: C_9^6 cách.

Vậy có $C_{12}^6-\left(C_7^6+C_8^6+C_9^6\right)=805$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 33: Đội học sinh giỏi cấp trường môn Tiếng Anh của trường THPT X theo từng khối như sau: khối 10 có 5 học sinh, khối 11 có 5 học sinh và khối 12 có 5 học sinh. Nhà trường cần chọn một đội tuyển gồm 10 học sinh tham gia IOE cấp tỉnh. Tính số cách lập đội tuyển sao cho có học sinh cả ba khối và có nhiều nhất 2 học sinh khối 10.

A. 50. **B.** 500. **C.** 502. **D.** 501.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết suy ra có 2 khả năng xảy ra như sau:

TH1: Có đúng 1 học sinh khối 10.

Số cách chọn 1 học sinh khối 10 là: C_5^1 cách.

Số cách chọn 9 học sinh còn lại khối 11 và 12 là: C_{10}^9 cách.

TH2: Có đúng 2 học sinh khối 10.

Số cách chọn 2 học sinh khối 10 là: C_5^2 cách.

Số cách chọn 8 học sinh còn lại từ khối 11 và 12 là: C_{10}^8 cách.

Vậy có $C_5^1\times C_{10}^9+C_5^2\times C_{10}^8=500$ cách lập đội thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 34: Đội văn nghệ của một nhà trường gồm 4 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 2 học sinh lớp 12**C.** Cần chọn ngẫu nhiên 5 học sinh từ đội văn nghệ đó để biểu diễn trong lễ bế giảng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho lớp nào cũng có học sinh được chọn và có ít nhất 2 học sinh lớp 12A?

A. 80. **B.** 78. **C.** 76. **D.** 98.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết suy ra có 3 khả năng xảy ra như sau:

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Số học sinh lớp 12A	Số học sinh lớp 12B	Số học sinh lớp 12C	Số cách chọn
2	2	1	$C_4^2 \times C_3^2 \times C_2^1$
2	1	2	$C_4^2 \times C_3^1 \times C_2^2$
3	1	1	$C_4^3 \times C_3^1 \times C_2^1$

Vậy có $C_4^2 \times C_3^2 \times C_2^1 + C_4^2 \times C_3^1 \times C_2^2 + C_4^3 \times C_3^1 \times C_2^1 = 78$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 35: Một hộp đựng 8 viên bi màu xanh, 5 viên bi đỏ, 3 viên bi màu vàng. Có bao nhiêu cách chọn từ hộp đó ra 4 viên bi sao cho số bi xanh bằng số bi đỏ?

A. 280. **B.** 400. **C.** 40. **D.** 1160.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết suy ra có 2 trường hợp xảy ra như sau:

Số viên bi xanh	Số viên bi đỏ	Số viến bi vàng	Số cách chọn
1	1	2	$C_8^1 \times C_5^1 \times C_3^2$
2	2	0	$C_8^2 \times C_5^2 \times C_3^0$

Vậy có $C_8^1 \times C_5^1 \times C_3^2 + C_8^2 \times C_5^2 \times C_3^0 = 400$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 36: Một hộp bi có 5 viên bi đỏ, 3 viên bi vàng và 4 viên bi xanh. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 4 viên bi trong đó số viên bi đỏ lớn hơn số viên bi vàng.

A. 654. **B.** 275. **C.** 462. **D.** 357.

Lời giải

Chọn B

Tổng số bi lấy ra có 4 viên mà bi đỏ nhiều hơn bi vàng nên có 2 trường hợp xảy ra:

TH1: Không có bi vàng, khi đó số bi đỏ phải từ 1 viên trở lên.

Số cách lấy 4 viên bi bất kì trong tổng số 9 viên bi (gồm 5 đỏ và 4 xanh) là: C_9^4 cách.

Số cách lấy 4 viên bi xanh là: C_4^4 cách.

$\Rightarrow$ Số cách lấy thỏa mãn trong trường hợp này là: $C_9^4 - C_4^4 = 125$ cách.

TH2: Có 1 viên bi vàng, khi đó số bi đỏ phải từ 2 viên trở lên. Số cách lấy 1 viên bi vàng: C_3^1 cách.

Số cách lấy 3 viên bi còn lại trong đó có 2 bi đỏ và 1 bi xanh là: $C_5^2 \times C_4^1$ cách.

Số cách lấy 3 viên bi còn lại đều là bi đỏ là: $C_5^3 \times C_4^0$ cách.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

$\Rightarrow$ Số cách lấy thỏa mãn trong trường hợp này là: $C_3^1\times\left(C_5^2\times C_4^1+C_5^3\times C_4^0\right)=150$ cách.

Vậy có $125+150=275$ cách lấy thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 37: Có 5 tem thư khác nhau và 6 bì thư khác nhau. Từ đó người ta muốn chọn ra 3 tem thư, 3 bì thư và dán 3 tem thư ấy lên 3 bì đã chọn. Hỏi có bao nhiêu cách làm như thế?

A. 1000. **B.** 1200. **C.** 2000. **D.** 2200.

Lời giải

Chọn B

Số cách chọn 3 tem thư trong 5 tem thư khác nhau là: C_5^3 cách.

Số cách chọn 3 bì thư trong 6 bì thư khác nhau là: C_6^3 cách.

Số cách dán tem thư thứ nhất vào 3 bì thư là: C_3^1 cách.

Số cách dán tem thư thứ hai vào 2 bì thư còn lại là: C_2^1 cách.

Số cách dán tem thư thứ hai vào bì thư cuối cùng là: C_1^1 cách.

Vậy có $\left(C_5^3\times C_6^3\right)\times\left(C_3^1\times C_2^1\times C_1^1\right)=1200$ cách làm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 38: Cho 10 câu hỏi, trong đó có 4 câu lý thuyết và 6 câu bài tập, người ta cấu tạo thành các đề thi. Biết rằng trong đề thi phải gồm 3 câu hỏi trong đó có ít nhất 1 câu lý thuyết và 1 câu hỏi bài tập. Hỏi có thể tạo được bao nhiêu đề như trên?

A. 69. **B.** 88. **C.** 96. **D.** 100.

Lời giải

Chọn C

Theo bài ra, một đề thi gồm 3 câu hỏi vừa có câu hỏi lý thuyết vừa có câu hỏi bài tập nên ta xét:

TH1: Đề thi gồm 1 câu lý thuyết, 2 câu bài tập. Lấy 1 câu lý thuyết trong 4 câu lý thuyết có C_4^1 cách, tương ứng lấy 2 câu bài tập trong 6 câu bài tập có C_6^2 cách. Vậy có $C_4^1.C_6^2$ đề.

TH2: Đề thi gồm 2 câu lý thuyết, 1 câu bài tập. Lập luận tương tự **TH1**, ta sẽ tạo được $C_4^2.C_6^1$ đề.

Vậy có thể tạo được $C_4^1\times C_6^2+C_4^2\times C_6^1=96$ đề thi thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 4. Phương Trình – Bất Phương Trình

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tìm n biết $n!=2!(n-2)!$.

Hướng dẫn giải

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Điều kiện $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$.

Khi đó $n! = 2!(n-2)! \Leftrightarrow (n-2)!(n-1)n = 2(n-2)! \Leftrightarrow (n-1)n = 2$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -1 \\ n = 2. \end{array}\right.$$

Ví dụ 2: Tìm n thỏa mãn phương trình $\frac{P_n - P_{n-1}}{P_{n+1}} = \frac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{N}$. Ta có: $\frac{P_n - P_{n-1}}{P_{n+1}} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{n! - (n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{6}$

$$\frac{(n-1)!n - (n-1)!}{(n-1)!n(n-1)!} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{n-1}{n(n+1)} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow n^2 - 5n + 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 2 \\ n = 3. \end{array}\right.$$

Ví dụ 4: Giải bất phương trình $A_x^3 + 5A_x^2 \leq 12x$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \geq 3$ và $x \in \mathbb{N}$.

Ta có:

$$A_x^3 + 5A_x^5 \leq 21x \Leftrightarrow \frac{x!}{(x-1)!} + 5.\frac{x!}{(x-2)!} \leq 21x$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)!(x-2)(x-1)x}{(x-3)!} + 5.\frac{(x-2)!(x-1)x}{(x-2)!} \leq 21x$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-1) + 5(x-1) \leq 21 \quad (\text{vì } x \geq 3)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 \leq 0 \Leftrightarrow -6 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 4 \quad (\text{vì } x \geq 3)$$

$$\Leftrightarrow x = 3, x = 4. \quad (\text{vì } x \in \mathbb{N})$$

Ví dụ 5: Giải phương trình $C_n^5 = 17C_n^4$?

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $n \geq 5$ và $n \in \mathbb{N}$. Ta có: $C_n^5 = 17C_n^4 \Leftrightarrow \frac{n!}{5!(n-5)!} = 17.\frac{n!}{4!(n-4)!}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4!5(n-5)!} = 17.\frac{1}{4!(n-5)!(n-4)} \Leftrightarrow \frac{1}{5} = \frac{17}{n-4} \Leftrightarrow n = 89.$$

Ví dụ 6: Giải phương trình $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = \frac{7n}{2}$?

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $n \geq 3$ và $n \in \mathbb{N}$. Ta có: $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = \frac{7n}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{n!}{1!(n-1)!}+\frac{n!}{2!(n-2)!}+\frac{n!}{3!(n-3)!}=\frac{7n}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{(n-1)!n}{(n-1)!}+\frac{(n-2)!n(n-1)}{2(n-2)!}+\frac{(n-3)!n(n-1)(n-2)}{6(n-3)!}=\frac{7n}{2}$

$\Leftrightarrow n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=\frac{7n}{2}$

$\Leftrightarrow 1+\frac{n-1}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{6}=\frac{7}{2}$ (Vì $n\geq 3$) $\Leftrightarrow n^2=16.$

$\Leftrightarrow n=4$ (Vì $n\geq 3$).

Ví dụ 7: Giải bất phương trình $C_{13}^{m}<C_{13}^{m+2}$?

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $0\leq m\leq 11$ và $m\in\mathbb{N}.$

Ta có: $C_{13}^{m}<C_{13}^{m+2}\Leftrightarrow \frac{13!}{m!(13-m)!}<\frac{13!}{(m+2)!(11-m)!}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{m!(11-m)!(12-m)(13-m)}<\frac{1}{m!(m+1)(m+2)(11-m)!}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{(12-m)(13-m)}<\frac{1}{(m+1)(m+2)}$

$\Leftrightarrow (m+1)(m+2)<(12-m)(13-m)$ (vì $0\leq m\leq 11$)

$\Leftrightarrow m^2+3m+2<m^2-25m+156\Leftrightarrow m<\frac{11}{2}\Leftrightarrow 0\leq m\leq 5$

$\Leftrightarrow m\in\{0,1,2,3,4,\}.$

Ví dụ 8: Giải hệ phương trình $\begin{cases}C_n^k-C_n^{k+1}=0\\4C_n^k-5C_n^{k-1}=0\end{cases}$?

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $n\geq k+1,k\geq 1$ và $n,k\in\mathbb{N}$

Ta có: $\begin{cases}C_n^k-C_n^{k+1}=0 & (1)\\4C_n^k-5C_n^{k-1}=0 & (2)\end{cases}$

$(1)\Leftrightarrow C_n^k=C_n^{k+1}\Leftrightarrow \begin{bmatrix}k=k+1\\k+k+1=n\end{bmatrix}\Leftrightarrow n=2k+1$ (vì $k=k+1$ loại)

$(2)\Leftrightarrow 4C_n^k=5C_n^{k-1}\Leftrightarrow 4C_{2k+1}^k=5C_{2k+1}^{k-1}\Leftrightarrow 4.\frac{(2k+1)!}{k!(k+1)!}=5\frac{(2k+1)!}{(k-1)!(k+2)!}$

$\Leftrightarrow 4.\frac{1}{k!k(k+1)!}=5\frac{1}{(k-1)!(k+1)!(k+2)!}\Leftrightarrow \frac{4}{k}=\frac{5}{k+2}\Leftrightarrow k=8\Rightarrow n=17.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị $x \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $6(P_x - P_{x-1}) = P_{x+1}$.

A. $x = 2$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = 2;\ x = 3$. **D.** $x = 5$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x \geq 1$ và $x \in \mathbb{N}$.

Ta có $6(P_x - P_{x-1}) = P_{x+1} \Leftrightarrow 6\left[x! - (x-1)!\right] = (x+1)! \Leftrightarrow 6(x-1)!.(x-1) = (x-1)!.x(x+1)$

$\Leftrightarrow 6.(x-1) = x(x+1) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \ (\text{thỏa mãn}) \\ x = 3 \ (\text{thỏa mãn}) \end{array}\right.$.

Câu 2: Tính tổng S của tất cả các giá trị của x thỏa mãn $P_2.x^2 - P_3.x = 8$.

A. $S = -4$. **B.** $S = -1$. **C.** $S = 4$. **D.** $S = 3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P_2.x^2 - P_3.x = 8 \Leftrightarrow 2!.x^2 - 3!.x = 8 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 4 \end{array}\right.$

$\longrightarrow S = -1 + 4 = 3$.

Câu 3: Có bao nhiêu số tự nhiên x thỏa mãn $3A_x^2 - A_{2x}^2 + 42 = 0$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x \geq 2$ và $x \in \mathbb{N}$.

Ta có $3A_x^2 - A_{2x}^2 + 42 = 0 \Leftrightarrow 3.\dfrac{x!}{(x-2)!} - \dfrac{(2x)!}{(2x-2)!} + 42 = 0$

$\Leftrightarrow 3.(x-1).x - (2x-1).2x + 42 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 42 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -7 (\text{loại}) \\ x = 6 (\text{thỏa mãn}) \end{array}\right.$.

Câu 4: Cho số tự nhiên x thỏa mãn $A_x^{10} + A_x^9 = 9A_x^8$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. x là số chính phương. **B.** x là số nguyên tố.

C. x là số chẵn. **D.** x là số chia hết cho 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x \geq 10$ và $x \in \mathbb{N}$.

Ta có $A_x^{10}+A_x^9=9A_x^8 \Leftrightarrow \frac{x!}{(x-10)!}+\frac{x!}{(x-9)!}=9\frac{x!}{(x-8)!}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1}+\frac{1}{x-9}=\frac{9}{(x-9)(x-8)} \Leftrightarrow x^2-16x+55=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=11(\text{thỏa mãn}) \\ x=5(\text{loại}) \end{array}\right.$.

Câu 5: Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $A_n^3+5A_n^2=2(n+15)$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $n\geq 3$ và $n\in\mathbb{N}$.

Ta có $A_n^3+5A_n^2=2(n+15) \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!}+5.\frac{n!}{(n-2)!}-2n-30=0$

$\Leftrightarrow (n-2).(n-1).n+5.(n-1).n-2n-30=0 \Leftrightarrow n^3+2n^2-5n-30=0 \Leftrightarrow n=3.$

Câu 6: Tìm giá trị $n\in\mathbb{N}$ thỏa mãn $C_{n+1}^1+3C_{n+2}^2=C_{n+1}^3$.

A. $n=12$. **B.** $n=9$. **C.** $n=16$. **D.** $n=2$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $n\geq 2$ và $n\in\mathbb{N}$.

Ta có $C_{n+1}^1+3C_{n+2}^2=C_{n+1}^3 \Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{1!.n!}+3.\frac{(n+2)!}{2!.n!}=\frac{(n+1)!}{3!.(n-2)!}$

$\Leftrightarrow n+1+3.\frac{(n+1).(n+2)}{2}=\frac{(n-1).n.(n+1)}{6} \Leftrightarrow 1+3.\frac{(n+2)}{2}=\frac{(n-1).n.}{6}$

$\Leftrightarrow 6+9n+18=n^2-n \Leftrightarrow n^2-10n-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=-2(\text{loại}) \\ n=12(\text{thỏa mãn}) \end{array}\right.$.

Câu 7: Tính tích P của tất cả các giá trị của x thỏa mãn $C_{14}^x+C_{14}^{x+2}=2C_{14}^{x+1}$.

A. $P=4$. **B.** $P=32$. **C.** $P=-32$. **D.** $P=12$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $0\leq x\leq 12$ và $x\in\mathbb{N}$.

Ta có $C_{14}^x+C_{14}^{x+2}=2C_{14}^{x+1} \Leftrightarrow \frac{14!}{x!(14-x)!}+\frac{14!}{(x+2)!(12-x)!}=2\frac{14!}{(x+1)!(13-x)!}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{(14-x)(13-x)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}=2.\frac{1}{(x+1)(13-x)}$

$\Leftrightarrow (x+1)(x+2)+(14-x)(13-x)=2(x+2)(14-x)$

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

$\Leftrightarrow x^2-12x+32=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=8\end{array}\right.\longrightarrow P=4.8=32.$

Câu 8: Tính tổng S của tất cả các giá trị của n thỏa mãn $\frac{1}{C_n^1}-\frac{1}{C_{n+1}^2}=\frac{7}{6C_{n+4}^1}$.

A. $S=8$. **B.** $S=11$. **C.** $S=12$. **D.** $S=15$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $n\geq 1$ và $n\in\mathbb{N}$.

Ta có $\frac{1}{C_n^1}-\frac{1}{C_{n+1}^2}=\frac{7}{6C_{n+4}^1}\Leftrightarrow\frac{(n-1)!}{n!}-\frac{2!.(n-1)!}{(n+1)!}=\frac{7(n+3)!}{6(n+4)!}\Leftrightarrow\frac{1}{n}-\frac{2}{n(n+1)}=\frac{7}{6(n+4)}$

$\Leftrightarrow n^2-11n+24=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=3(\text{thỏa mãn})\\n=8(\text{thỏa mãn})\end{array}\right.\longrightarrow S=3+8=11.$

Câu 9: Tìm giá trị $x\in\mathbb{N}$ thỏa mãn $C_x^0+C_x^{x-1}+C_x^{x-2}=79$.

A. $x=13$. **B.** $x=17$. **C.** $x=16$. **D.** $x=12$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x\in\mathbb{N}$.

Ta có $C_x^0+C_x^{x-1}+C_x^{x-2}=79\Leftrightarrow C_x^0+C_x^1+C_x^2=79$

$\Leftrightarrow 1+x+\frac{x(x-1)}{2}=79\Leftrightarrow x^2+x-156=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=12(\text{thỏa mãn})\\x=-13(\text{loại})\end{array}\right.$.

Câu 10: Tìm giá trị $n\in\mathbb{N}$ thỏa mãn $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^n=7(n+3)$.

A. $n=15$. **B.** $n=18$. **C.** $n=16$. **D.** $n=12$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $n\in\mathbb{N}$.

Ta có $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^n=7(n+3)\Leftrightarrow C_{n+4}^3-C_{n+3}^3=7(n+3)$

$\Leftrightarrow\frac{(n+4)(n+2)}{3!}-\frac{(n+2)(n+1)}{3!}=7\Leftrightarrow 3n-36=0\Leftrightarrow n=12(\text{thỏa mãn}).$

Câu 11: Tìm giá trị $n\in\mathbb{N}$ thỏa mãn $C_n^1+C_n^2+C_n^3=\frac{7n}{2}$.

A. $n=3$. **B.** $n=4$. **C.** $n=6$. **D.** $n=8$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $C_n^1+C_n^2+C_n^3=\frac{7n}{2}\Leftrightarrow\frac{n!}{(n-1)!}+\frac{n!}{2!.(n-2)!}+\frac{n!}{3!(n-3)!}=\frac{7n}{2}$

$\Leftrightarrow n^2-16=0\longrightarrow n=4.$

Câu 12: Tính tổng S của tất cả các giá trị của x thỏa $C_x^1+6C_x^2+6C_x^3=9x^2-14x.$

A. $S=2.$ **B.** $S=7.$ **C.** $S=9.$ **D.** $S=14.$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x\geq 3$ và $x\in\mathbb{N}.$

Ta có $C_x^1+6C_x^2+6C_x^3=9x^2-14x\Leftrightarrow\frac{x!}{1!.(x-1)!}+6.\frac{x!}{2!.(x-2)!}+6.\frac{x!}{3!.(x-3)!}=9x^2-14x$

$\Leftrightarrow x+3x(x-1)+(x-2)(x-1)x=9x^2-14x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0(\text{loại})\\x=2(\text{loại})\\x=7(\text{thỏa mãn})\end{array}\right.$.

Câu 13: Tìm giá trị $n\in\mathbb{N}$ thỏa mãn $C_n^6+3C_n^7+3C_n^8+C_n^9=2C_{n+2}^8.$

A. $n=18.$ **B.** $n=16.$ **C.** $n=15.$ **D.** $n=14.$

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $n\geq 9$ và $n\in\mathbb{N}.$

Áp dụng công thức $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$, ta có $C_n^6+3C_n^7+3C_n^8+C_n^9=2C_{n+2}^8$

$\Leftrightarrow C_n^6+C_n^7+2\left(C_n^7+C_n^8\right)+C_n^8+C_n^9=2C_{n+2}^8\Leftrightarrow C_{n+1}^7+2C_{n+1}^8+C_{n+1}^9=2C_{n+2}^8$

$\Leftrightarrow\left(C_{n+1}^7+C_{n+1}^8\right)+\left(C_{n+1}^8+C_{n+1}^9\right)=2C_{n+2}^8\Leftrightarrow C_{n+2}^8+C_{n+2}^9=2C_{n+2}^8$

$\Leftrightarrow C_{n+2}^9=C_{n+2}^8\longrightarrow n+2=9+8\Leftrightarrow n=15.$

Câu 14: Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

A. $C_{2007}^7=C_{2006}^7+C_{2006}^6.$ **B.** $C_{2007}^7=C_{2006}^{2000}+C_{2006}^6.$

C. $C_{2007}^7=C_{2006}^{2000}+C_{2006}^{1999}.$ **D.** $C_{2007}^7=C_{2006}^7+C_{2006}^{2000}.$

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$, ta có $C_{2006}^6+C_{2006}^7=C_{2007}^7$. Do đó A đúng.

Áp dụng công thức $C_n^k=C_n^{n-k}\longrightarrow\left\{\begin{array}{l}C_{2006}^6=C_{2006}^{2000}\\C_{2006}^7=C_{2006}^{1999}\end{array}\right.$.

Suy ra $C_{2007}^7=C_{2006}^6+C_{2006}^7=C_{2006}^{2000}+C_{2006}^{1999}=C_{2006}^{2000}+C_{2006}^7$. Do đó C, D đúng; B sai.

Câu 15: Đẳng thức nào sau đây là đúng?

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

A. $1+2+3+4+...+n=C_{n+1}^{2}$.

B. $1+2+3+4+...+n=A_{n+1}^{2}$.

C. $1+2+3+4+...+n=C_{n}^{1}+C_{n}^{2}+....+C_{n}^{n}$.

D. $1+2+3+4+...+n=A_{n}^{1}+A_{n}^{2}+....+A_{n}^{n}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $1+2+3+4+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ và $C_{n+1}^{2}=\dfrac{(n+1)!}{2!(n+1-2)!}=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Do đó A đúng.

Câu 16: Tính tích P của tất cả các giá trị của n thỏa mãn $P_nA_n^2+72=6\left(A_n^2+2P_n\right)$.

A. $P=12$. **B.** $P=5$. **C.** $P=10$. **D.** $P=6$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $n\geq 2$ và $n\in\mathbb{N}$.

Ta có $P_nA_n^2+72=6\left(A_n^2+2P_n\right)\Leftrightarrow n!.\dfrac{n!}{(n-2)!}+72=6\left[\dfrac{n!}{(n-2)!}+2.n!\right]$

$\Leftrightarrow n!.(n-1).n+72=6\left[(n-1)n+2.n!\right]\Leftrightarrow (n!-6)\left(n^2-n-12\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n^2-n-12=0\\ n!-6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=4(\text{thỏa mãn})\\ n=-3(\text{loại})\\ n=3(\text{thỏa mãn})\end{array}\right.\longrightarrow P=4.3=12.$

Câu 17: Tính tích P của tất cả các giá trị của x thỏa mãn $7\left(A_{x+1}^{x-1}+2P_{x-1}\right)=30P_x$.

A. $P=7$. **B.** $P=4$. **C.** $P=28$. **D.** $P=14$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x\geq 1$ và $x\in\mathbb{N}$.

Ta có $7\left(A_{x+1}^{x-1}+2P_{x-1}\right)=30P_x\Leftrightarrow 7\left[\dfrac{(x+1)!}{2!}+2.(x-1)!\right]=30.x!$

$\Leftrightarrow 7\left[\dfrac{x(x+1)}{2}+2\right]=30x\Leftrightarrow 7x^2-53x+28=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=7(\text{thỏa mãn})\\ x=\dfrac{4}{7}(\text{loại})\end{array}\right.\longrightarrow P=7.$

Câu 18: Tìm giá trị $n\in\mathbb{N}$ thỏa mãn $C_{n+8}^{n+3}=5A_{n+6}^{3}$.

A. $n=15$. **B.** $n=17$. **C.** $n=6$. **D.** $n=14$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $C_n^k = C_n^{n-k}$, ta có $C_{n+8}^{n+3} = 5A_{n+6}^3 \Leftrightarrow C_{n+8}^5 = 5.A_{n+6}^3$

$\Leftrightarrow \dfrac{(n+8)(n+7)}{5!} = 5 \Leftrightarrow n^2 + 15n - 544 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 17 \text{(thỏa mãn)} \\ n = -32 \text{(loại)} \end{array}\right.$.

Câu 19: Tìm giá trị $x \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $A_x^2.C_x^{x-1} = 48.$

A. $x = 4.$ **B.** $x = 3.$ **C.** $x = 7.$ **D.** $x = 12.$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x \geq 2$ và $x \in \mathbb{N}$.

Ta có $A_x^2.C_x^{x-1} = 48 \Leftrightarrow \dfrac{x!}{(x-2)!}.\dfrac{x!}{(x-1)!.1!} = 48$

$\Leftrightarrow (x-1)x.x = 48 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 48 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{(thỏa mãn)}.$

Câu 20: Tìm giá trị $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $A_n^2 - C_{n+1}^{n-1} = 5.$

A. $n = 3.$ **B.** $n = 5.$ **C.** $n = 4.$ **D.** $n = 6.$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{N}.$

Ta có $A_n^2 - C_{n+1}^{n-1} = 5 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-2)!} - \dfrac{(n+1)!}{(n-1)!2!} = 5 \Leftrightarrow (n-1).n - \dfrac{n(n+1)}{2} - 5 = 0$

$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -2 \text{ (loại)} \\ n = 5 \text{(thỏa mãn)} \end{array}\right.$.

Câu 21: Tính tích P của tất cả các giá trị của n thỏa mãn $A_n^2 - 3C_n^2 = 15 - 5n.$

A. $P = 5.$ **B.** $P = 6.$ **C.** $P = 30.$ **D.** $P = 360.$

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{N}.$

Ta có $A_n^2 - 3C_n^2 = 15 - 5n \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-2)!} - 3.\dfrac{n!}{2!.(n-2)!} = 15 - 5n$

$\Leftrightarrow n(n-1) - 3\dfrac{n(n-1)}{2} = 15 - 5n \Leftrightarrow -n^2 + 11n - 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 6 \text{(thỏa mãn)} \\ n = 5 \text{(thỏa mãn)} \end{array}\right.$

$\longrightarrow P = 5.6 = 30.$

Câu 22: Tìm giá trị $x\in\mathbb{N}$ thỏa mãn $3A_x^4=24\left(A_{x+1}^3-C_x^{x-4}\right)$.

A. $x=3$. **B.** $x=1$. **C.** $x=5$. **D.** $x=1;\ x=5$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x\geq 4$ và $x\in\mathbb{N}$.

Ta có $3A_x^4=24\left(A_{x+1}^3-C_x^{x-4}\right)\Leftrightarrow 23.\dfrac{x!}{(x-4)!}=24.\left[\dfrac{(x+1)!}{(x-2)!}-\dfrac{x!}{(x-4)!.4!}\right]$

$\Leftrightarrow 23.\dfrac{1}{(x-4)!}=24.\left[\dfrac{x+1}{(x-2)!}-\dfrac{1}{(x-4)!.4!}\right]\Leftrightarrow 23.\dfrac{1}{1}=24.\left[\dfrac{x+1}{(x-2)(x-3)}-\dfrac{1}{1.24}\right]$

$\Leftrightarrow 23=24.\dfrac{x+1}{(x-2)(x-3)}-1\Leftrightarrow\dfrac{x+1}{(x-2)(x-3)}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1(\text{loại})\\x=5(\text{thỏa mãn})\end{array}\right.$.

Câu 23: Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $\dfrac{A_{n+4}^4}{(n+2)!}<\dfrac{15}{(n-1)!}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $n\in\mathbb{N}$.

Ta có $\dfrac{A_{n+4}^4}{(n+2)!}<\dfrac{15}{(n-1)!}\Leftrightarrow\dfrac{(n+4)!}{(n+2)!.n!}<\dfrac{15}{(n-1)!}\Leftrightarrow\dfrac{(n+3)(n+4)}{n}<15$

$\Leftrightarrow(n+3)(n+4)<15n\Leftrightarrow n^2-8n+12<0\Leftrightarrow 2<n<6\xrightarrow{n\in\mathbb{N}}n\in\{3;\ 4;\ 5\}$.

Câu 24: Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $2C_{n+1}^2+3A_n^2-20<0$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $n\geq 2$ và $n\in\mathbb{N}$.

Ta có $2C_{n+1}^2+3A_n^2-20<0\Leftrightarrow 2\dfrac{(n+1)!}{2!.(n-1)!}+3.\dfrac{n!}{(n-2)!}-20<0$

$\Leftrightarrow n(n+1)+3(n-1)n-20<0\Leftrightarrow 2n^2-n-10<0\Leftrightarrow -2<n<\dfrac{5}{2}\xrightarrow[n\in\mathbb{N}]{n\geq 2}n=2$.

Câu 25: Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $2C_{n+1}^2+3A_n^2<30$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{N}$.

Ta có $2C_{n+1}^2 + 3A_n^2 < 30 \Leftrightarrow 2.\dfrac{(n+1)!}{2!(n-1)!} + 3.\dfrac{n!}{(n-2)!} < 30$

$\Leftrightarrow n(n+1) + 3(n-1)x < 30 \Leftrightarrow 2n^2 - n - 15 < 0 \Leftrightarrow -\dfrac{5}{2} < n < 3 \xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{n \geq 2} n = 2.$

Câu 26: Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $14.P_3C_{n-1}^{n-3} < A_{n+1}^4$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $n \geq 3$ và $n \in \mathbb{N}$.

Ta có $14.P_3C_{n-1}^{n-3} < A_{n+1}^4 \Leftrightarrow 14.3!.\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!.2!} < \dfrac{(n+1)!}{(n-3)!}$

$\Leftrightarrow 42(n-2)(n-1) < (n-2)(n-1)n(n+1) \Leftrightarrow 42 < n(n+1) \Leftrightarrow n^2 + n - 42 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n < -7 \\ n > 6 \end{array}\right.$

$\xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{n \geq 3} \left\{\begin{array}{l} n \geq 7 \\ n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$.

Câu 27: Giải hệ phương trình $\left\{\begin{array}{l} C_x^y - C_x^{y+1} = 0 \\ 4C_x^y - 5C_x^{y-1} = 0 \end{array}\right.$.

A. $\left\{\begin{array}{l} x = 17 \\ y = 8 \end{array}\right.$. **B.** $\left\{\begin{array}{l} x = 17 \\ y = -8 \end{array}\right.$. **C.** $\left\{\begin{array}{l} x = 9 \\ y = 8 \end{array}\right.$. **D.** $\left\{\begin{array}{l} x = 7 \\ y = 9 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x \geq y+1$ và $x, y \in \mathbb{N}$.

Ta có $\left\{\begin{array}{ll} C_x^y - C_x^{y+1} = 0 & (1) \\ 4C_x^y - 5C_x^{y-1} = 0 & (2) \end{array}\right.$.

Phương trình $(1) \Leftrightarrow C_x^y = C_x^{y+1} \Leftrightarrow y + y + 1 = x \Leftrightarrow x - 2y - 1 = 0$.

Phương trình $(2) \Leftrightarrow 4C_x^y = 5C_x^{y-1} \Leftrightarrow 4.\dfrac{x!}{y!.(x-y)!} = 5.\dfrac{x!}{(y-1)!.(x-y+1)!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{y} = \dfrac{5}{x-y+1} \Leftrightarrow 4x - 9y + 4 = 0.$

Do đó hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - 2y - 1 = 0 \\ 4x - 9y + 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 17 \\ y = 8 \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Câu 28: Tìm cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $\dfrac{C_{x+1}^y}{6} = \dfrac{C_x^{y+1}}{5} = \dfrac{C_x^{y-1}}{2}$.

A. $(x;y) = (8;3)$. **B.** $(x;y) = (3;8)$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

C. $(x;y)=(-1;0)$. **D.** $(x;y)=(-1;0),\ (x;y)=(8;3)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x\ge y+1$ và $x,y\in\mathbb{N}$.

- $\dfrac{C_{x+1}^{y}}{6}=\dfrac{C_{x}^{y+1}}{5}\Leftrightarrow 5.C_{x+1}^{y}=6.C_{x}^{y+1}\Leftrightarrow \dfrac{5(x+1)!}{y!(x+1-y)!}=\dfrac{6x!}{(y+1)!(x-y-1)!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{5(x+1)}{(x-y)(x-y+1)}=\dfrac{6}{(y+1)}\Leftrightarrow 5(y+1)(x+1)=6(x-y)(x-y+1).\ (1)$

- $\dfrac{C_{x}^{y+1}}{5}=\dfrac{C_{x}^{y-1}}{2}\Leftrightarrow 2.C_{x}^{y+1}=5.C_{x}^{y-1}\Leftrightarrow \dfrac{x!}{5.(y+1)!.(x-y-1)!}=\dfrac{x!}{2.(y-1)!.(x-y+1)!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{5.y(y+1)}=\dfrac{1}{2.(x-y)(x-y+1)}$

$\Leftrightarrow 5.y(y+1)=2.(x-y)(x-y+1)\Leftrightarrow 15.y(y+1)=6.(x-y)(x-y+1).\ (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $\Leftrightarrow 5(y+1)(x+1)=15.y(y+1)\Leftrightarrow x+1=3y$. Thay vào (1), ta được

$\Leftrightarrow 15(y+1)y=6(2y-1)2y\Leftrightarrow 3y^2-9y=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0\longrightarrow x=-1(\text{loại})\\ y=3\longrightarrow x=8(\text{thỏa mãn})\end{array}\right.$.

Câu 29: Giải hệ phương trình $\begin{cases} C_y^x:C_{y+2}^x=\dfrac{1}{3}\\ C_y^x:A_y^x=\dfrac{1}{24}\end{cases}$.

A. $\begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=4\\y=8\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=4\\y=1\end{cases},\ \begin{cases}x=4\\y=8\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1\\y=8\end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $y\ge x$ và $x,y\in\mathbb{N}$.

Ta có $\begin{cases} C_y^x:C_{y+2}^x=\dfrac{1}{3} & (1)\\ C_y^x:A_y^x=\dfrac{1}{24} & (2)\end{cases}$.

Phương trình $(2)\Leftrightarrow \dfrac{C_y^x}{A_y^x}=\dfrac{1}{24}\Leftrightarrow 24C_y^x=A_y^x\Leftrightarrow 24.\dfrac{y!}{x!(y-x)!}=\dfrac{y!}{(y-x)!}\Leftrightarrow \dfrac{24}{x!}=1\Leftrightarrow x=4$.

Thay $x=4$ vào (1), ta được $\dfrac{C_y^4}{C_{y+2}^4}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow 3C_y^4=C_{y+2}^4\Leftrightarrow 3.\dfrac{y!}{4!.(y-4)!}=\dfrac{(y+2)!}{4!.(y-2)!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{1}=\dfrac{(y+1)(y+2)}{(y-3)(y-2)}\Leftrightarrow y^2-9y+8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1<4=x(\text{loại})\\ y=8>4=x(\text{thỏa mãn})\end{array}\right.$.

Câu 30: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases}$.

A. $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 20 \\ y = 10 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x \geq y$ và $x, y \in \mathbb{N}$.

Đặt $\begin{cases} u = A_x^y \\ v = C_x^y \end{cases}$, ta được $\begin{cases} 2u + 5v = 90 \\ 5u - 2v = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 20 \\ v = 10 \end{cases}$.

Ta có $A_n^k = k!C_n^k \longrightarrow u = y!.v \Leftrightarrow 20 = y!.10 \Leftrightarrow y! = 2 \Leftrightarrow y = 2.$

Với $u = 20$, suy ra $A_x^y = 20 \Leftrightarrow A_x^2 = 20 \Leftrightarrow \dfrac{x!}{(x-2)!} = 20 \Leftrightarrow (x-1)x = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -4 (\text{loại}) \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$.

BÀI 3. NHỊ THỨC NIU-TƠN

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

Ta thừa nhận công thức nhị thức Niu-ton sau:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = C_n^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \ldots + C_n^{n-1} a^{n-1} b^1 + C_n^n a^n.$$

Hệ quả:

- Với $a=b=1$ ta có $2^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$.
- Với $a=1, b=-1$ ta có $0 = C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^k C_n^k + \ldots + (-1)^n C_n^n$.

Chú ý:

- Số các số hạng của khai triển bằng $n+1$.
- Tổng các số mũ của a và b trong mỗi số hạng bằng n.
- Số hạng tổng quát (thứ $k+1$) có dạng:

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k, (k = 0,1,2,\ldots,n).$$

- Các hệ số của các cặp số hạng cách đều số hạng đầu và cuối thì bằng nhau: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định hệ số hoặc số hạng chứa x^k

1. Phương pháp

Tìm hệ số của số hạng chứa x^m trong khai triển $(ax^p + bx^q)^n$.

Cho khai triển: $(ax^p + bx^q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (ax^p)^{n-k} (bx^q)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k x^{np-pk+qk}$.

Số hạng chứa x^m ứng với giá trị k thỏa $np - pk + qk = m$.

Từ đó tìm $k = \dfrac{m-np}{p-q}$. Vậy hệ số của số hạng chứa x^m là: $C_n^k a^{n-k} b^k$ với giá trị k đã tìm được ở trên.

Nếu k không nguyên hoặc $k > n$ thì trong khai triển không chứa x^m, hệ số phải tìm bằng 0.

Lưu ý. Tìm số hạng không chứa x thì ta đi tìm giá trị k thỏa $np - pk + qk = 0$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Số hạng không chứa x trong khai triển $(x^2 + \dfrac{1}{x^3})^{10}$ là:

Hướng dẫn giải

Số hạng tổng quát thứ $k+1$ trong khai triển $(x^2 + \dfrac{1}{x^3})^{10}$ có dạng:

$C_{10}^{k}(x^2)^{10-k}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{k}=C_{10}^{k}x^{20-2k}x^{-3k}=C_{10}^{k}x^{20-5k}.$

Từ yêu cầu bài toán ta có $20-5k=0\Leftrightarrow k=4.$

Do đó số hạng không chứa x là $C_{10}^{4}=210.$

Ví dụ 2: Trong khai triển $\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right)^{12}$, hệ số của số hạng chứa x^4 bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Số hạng tổng quát thứ $k+1$ trong khai triển $\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right)^{12}$ là:

$(-1)^{k}C_{12}^{k}\left(\frac{3}{x}\right)^{12-k}\left(\frac{x}{3}\right)^{k}=(-1)^{k}C_{12}^{k}x^{12-k}x^{-k}3^{k-12}3^{k}=(-1)^{k}C_{12}^{k}x^{12-2k}3^{2k-12}.$

Từ yêu cầu bài toán ta có: $12-2k=4\Leftrightarrow k=4.$

Suy ra hệ số cần tìm là: $(-1)^{4}.C_{12}^{4}.3^{-4}=\frac{55}{9}.$

Ví dụ 3: Khai triển và rút gọn $P(x)=(1+x)^2+(1+x)^3+...+(1+x)^{10}$ ta được $P(x)=a_0+a_1x^2+a_2x^3+...+a_{10}x^{10}$. Hệ số a_9 bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Nhận xét: Trong khai triển $(1+x)^n$ thì đơn thức có bậc cao nhất là n.

Do đó a_9 là hệ số của x^9 chỉ có trong đa thức $(1+x)^9+(1+x)^{10}$.

Hệ số của x^9 trong $(1+x)^9$ là $C_9^9=1$

Hệ số của x^9 trong $(1+x)^{10}$ là $C_{10}^9=10$

Suy ra $a_9=10+1=11$

Ví dụ 4: Tìm hệ số của $x^{25}y^{10}$ trong khai triển $\left(x^3+xy\right)^{15}$.

Hướng dẫn giải

Xét số hạng: $T_{k+1}=C_{15}^{k}\left(x^3\right)^{15-k}(xy)^{k}=C_{15}^{k}x^{45-3k+k}y^{k}=C_{15}^{k}x^{45-2k}y^{k}$

Ta có: $\begin{cases}45-2k=25\\k=10\end{cases}\Leftrightarrow k=10.$

Vậy hệ số của $x^{25}y^{10}$ là của $C_{15}^{10}=3003.$

Ví dụ 5: Tổng các hệ số của khai triển $\left(\frac{1}{x}+x^3\right)^n$ bằng 1024. Tìm hệ số của x^6 trong khai triển.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\left(\frac{1}{x}+x^3\right)^n = C_n^0\left(\frac{1}{x}\right)^n + C_n^1\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}x^3 + ... + C_n^n x^{3n}$.

Tổng hệ số của khai triển là: $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$.

Vậy $2^n = 1024 \Leftrightarrow 2^n = 2^{10} \Leftrightarrow n = 10$.

Xét số hạng $T_{k+1} = C_{10}^k\left(\frac{1}{x}\right)^{10-k}x^{3k} = C_{10}^k\frac{x^{3k}}{x^{10-k}} = C_{10}^k x^{4k-10}$.

Ta được $4k-10=6 \Leftrightarrow k=4$. Vậy $C_{10}^4 = 210$.

Ví dụ 6. Với n là số nguyên dương thỏa $C_n^1 + C_n^2 = 55$, Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^3+\frac{2}{x^2}\right)^n$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{Z}$

Ta có

$$C_n^1 + C_n^2 = 55 \Leftrightarrow \frac{n!}{1!(n-1)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} = 55 \Leftrightarrow n^2 + n - 110 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 10 \\ n = -11(L) \end{array}\right.$$

Với $n=10$ ta có khai triển $\left(x^3+\frac{2}{x^2}\right)^{10}$

Số hạng tổng quát của khai triển là $C_{10}^k x^{3(10-k)}.\left(\frac{2}{x^2}\right)^k = C_{10}^k 2^k x^{30-5k}$, với $0 \leq k \leq 10$.

Số hạng không chứ x ứng với k thoải $30-5k=0 \Leftrightarrow k=6$.

Vậy số hạng không chứa x là $C_{10}^6 2^6 = 13440$.

Dạng 2 : Tìm số hạng đứng chính giữa

1. Phương pháp

- Khi n chẵn thì số hạng đứng giữa là số hạng thứ: $\frac{n}{2}+1$.
- Khi n lẻ thì coó hai số hạng đứng giữa là $\frac{n+1}{2}$ và $\frac{n+1}{2}+1$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Trong khai triển $(2x+3y)^8$, hệ số của số hạng đứng chính giữa bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Trong khai triển $(2x+3y)^8$ có tất cả 9 số hạng

Do đó số hạng đứng giữa là số hạng thứ 5: $C_8^4(2x)^4(3y)^4$.

Suy ra hệ số cần tìm là: $C_8^4.2^4.3^4=90720$.

Dạng 3: Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $(a+b)^n$

1. Phương pháp

Bước 1: Số hạng tổng quát thứ $k+1$ là: $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k$

Đặt $u_k=C_n^k a^{n-k}b^k,(0\le k\le n)$.

Bước 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases}u_k\ge u_{k+1}\\ u_k\ge u_{k-1}\end{cases}\Rightarrow k_0$.

Bước 3: Hệ số lớn nhất trong khai triển là $C_n^{k_0}a^{n-k_0}b^{k_0}$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển thành đa thức biến x của $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x\right)^4$?

Hướng dẫn giải

Ta có: $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x\right)^4=\frac{1}{256}+\frac{3}{64}x+\frac{27}{128}x^2+\frac{27}{64}x^3+\frac{27}{256}x^4$.

Vậy hệ số lớn nhất là $\frac{27}{64}$.

Ví dụ 2: Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển $(1+x)^n$, biết tổng các hệ số bằng 4096.

Hướng dẫn giải

Ta có: $C_n^0+C_n^1+...+C_n^n=2^n-2096\Leftrightarrow 2^n=2^{12}\Leftrightarrow n=12$.

Xét $C_{12}^k\ge C_{12}^{k-1}(1\le k\le 12)\Leftrightarrow\frac{12!}{k!(12-k)!}\ge\frac{12!}{(k-1)!(13-k)!}\Leftrightarrow 13-k\ge k\Leftrightarrow k\le 6$.

Tương tự $C_{12}^{k+1}\le C_{12}^k\Rightarrow k\ge 6$.

Vậy $k=6$. Khi đó $T_7=C_{12}^6=924$.

Dạng 4: Tính tổng hoặc chứng minh đẳng thức

1. Phương pháp

- Khi các số hạng của tổng đó có dạng $C_n^k a^{n-k}b^k$ thì ta dùng trực tiếp nhị thức Niu-ton

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b^1+...+C_n^{n-1}a^1b^{n-1}+C_n^nb^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}=C_n^0b^n+C_n^1a^1b^{n-1}+...+C_n^{n-1}a^{n-1}b^1+C_n^na^n.$$

Việc còn lại chỉ chỉ khóe léo chọn a,b.

Lưu ý hai kết quả thường dùng là:

- Với $a=b=1$ ta có $2^n=C_n^0+C_n^1+...+C_n^n.$
- Với $a=1,b=-1$ ta có $0=C_n^0-C_n^1+...+(-1)^kC_n^k+...+(-1)^nC_n^n.$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính tổng $C_{2007}^1+C_{2007}^2+C_{2007}^3+...+C_{2007}^{2007}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $(1+1)^{2007}=C_{2007}^1+C_{2007}^2+C_{2007}^3+...+C_{2007}^{2007}.$

Vậy $C_{2007}^1+C_{2007}^2+C_{2007}^3+...+C_{2007}^{2007}=2^{2007}-1.$

Ví dụ 2: Tính tổng của $\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+...+\left(C_n^n\right)^2$ bằng:

Hướng dẫn giải

Khai triển: $C=C_{2n}^0x^{2n}+C_{2n}^1x^{2n-1}+...+C_{2n}^nx^n+...+C_{2n}^{2n}.$

Mặt khác

$$(x+1)^{2n}=(x+1)^n(x+1)^n=(C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+...+C_n^n)(C_n^0+C_n^1x+...+C_n^nx^n).$$

Trong cách khai triển đầu, hệ số của x^n là C_{2n}^n. Trong cách sau, hệ số của x^n là: $\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+...+\left(C_n^n\right)^2.$

Vậy $\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+...+\left(C_n^n\right)^2=C_{2n}^n.$

Ví dụ 3: Tính giá trị của biểu thức: $B=2^{2006}C_{2007}^1+2^{2004}C_{2007}^3+2^{2002}C_{2007}^5+...+2^0C_{2007}^{2007}$

Hướng dẫn giải

- Ta có: $(1+2x)^{2007}=C_{2007}^0x^{2007}.2^{2007}+C_{2007}^12^{2006}.2^{2006}+...+C_{2007}^{2007}$

Cho $x=1$ ta có: $3^{2007}=A+B$ (1)

- Mặt khác: $(1-2x)^{2007}=-C_{2007}^0x^{2007}.2^{2007}+C_{2007}^12^{2006}.2^{2006}-...+C_{2007}^{2007}$

Cho $x=1$ ta có: $1=A-B$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $A=\frac{1}{2}\left(3^{2007}+1\right); B=\frac{1}{2}\left(3^{2007}-1\right).$

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tìm hệ số của x^{12} trong khai triển $\left(2x-x^2\right)^{10}$.

A. C_{10}^8. **B.** $C_{10}^2 2^8$. **C.** C_{10}^2. **D.** $-C_{10}^2 2^8$.

Lời giải

Chọn B

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(2x-x^2\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k.(2x)^{10-k}.\left(-x^2\right)^k=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k.(2)^{10-k}.x^{10-k+2k}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k.(2)^{10-k}.x^{10+k}.$$

Hệ số của x^{12} ứng với $10+k=12\Leftrightarrow k=2\longrightarrow$ hệ số cần tìm $C_{10}^2 2^8$.

Câu 2: Khai triển đa thức $P(x)=(5x-1)^{2007}$ ta được $P(x)=a_{2007}x^{2007}+a_{2006}x^{2006}+...+a_1x+a_0$.

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a_{2000}=-C_{2007}^7.5^7$. **B.** $a_{2000}=C_{2007}^7.5^7$. **C.** $a_{2000}=-C_{2007}^{2000}.5^{2000}$. **D.** $a_{2000}=C_{2007}^7.5^7$.

Lời giải

Chọn C

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$(5x-1)^{2007}=\sum_{k=0}^{2017}C_{2017}^k.(5x)^{2017-k}.(-1)^k=\sum_{k=0}^{2017}C_{2017}^k.(5)^{2017-k}.(-1)^k.x^{2017-k}.$$

Hệ số của x^{2000} ứng với $2017-k=2000\Leftrightarrow k=7$

$\longrightarrow$ hệ số cần tìm $-C_{2017}^7.(5)^{2000}=-C_{2007}^{2000}.5^{2000}$.

Câu 3: Đa thức $P(x)=32x^5-80x^4+80x^3-40x^2+10x-1$ là khai triển của nhị thức nào dưới đây?

A. $(1-2x)^5$. **B.** $(1+2x)^5$. **C.** $(2x-1)^5$. **D.** $(x-1)^5$.

Lời giải

Chọn C

Nhận thấy $P(x)$ có dấu đan xen nên loại đáp án **B.**

Hệ số của x^5 bằng 32 nên loại đáp án D và còn lại hai đáp án A và C thì chỉ có C phù hợp (vì khai triển số hạng đầu tiên của đáp án C là $32x^5$.)

Câu 4: Tìm số hạng chứa x^7 trong khai triển $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{13}$.

A. $-C_{13}^4x^7$. **B.** $-C_{13}^3$. **C.** $-C_{13}^3x^7$. **D.** $C_{13}^3x^7$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Lời giải

Chọn C

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^{13}=\sum_{k=0}^{13}C_{13}^{k}.x^{13-k}.\left(-\frac{1}{x}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{13}C_{13}^{k}.(-1)^{k}.x^{13-2k}.$$

Hệ số của x^7 ứng với $13-2k=7\Leftrightarrow k=3\longrightarrow$ số hạng cần tìm $-C_{13}^{3}x^7$.

Câu 5: Tìm số hạng chứa x^3 trong khai triển $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^9$.

A. $-\frac{1}{8}C_9^3x^3$. **B.** $\frac{1}{8}C_9^3x^3$. **C.** $-C_9^3x^3$. **D.** $C_9^3x^3$.

Lời giải

Chọn B

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(x+\frac{1}{2x}\right)^{9}=\sum_{k=0}^{9}C_{9}^{k}.x^{9-k}.\left(\frac{1}{2x}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{9}C_{9}^{k}.\left(\frac{1}{2}\right)^{k}.x^{9-2k}.$$

Hệ số của x^3 ứng với $9-2k=3\Leftrightarrow k=3\longrightarrow$ số hạng cần tìm $\frac{1}{8}C_9^3x^3$.

Câu 6: Tìm số hạng chứa x^{31} trong khai triển $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{40}$.

A. $-C_{40}^{37}x^{31}$. **B.** $C_{40}^{37}x^{31}$. **C.** $C_{40}^{2}x^{31}$. **D.** $C_{40}^{4}x^{31}$.

Lời giải

Chọn B

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{40}=\sum_{k=0}^{40}C_{40}^{k}.x^{40-k}.\left(\frac{1}{x^2}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{40}C_{40}^{k}.x^{40-3k}.$$

Hệ số của x^{31} ứng với $40-3k=31\Leftrightarrow k=3\longrightarrow$ số hạng cần tìm $C_{40}^{37}x^{31}$.

Câu 7: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^6$.

A. $2^4C_6^2$. **B.** $2^2C_6^2$. **C.** $-2^4C_6^4$. **D.** $-2^2C_6^4$.

Lời giải

Chọn A

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^6=\sum_{k=0}^{6}C_6^k.\left(x^2\right)^{6-k}.\left(\frac{2}{x}\right)^k=\sum_{k=0}^{6}C_6^k.(2)^k.x^{12-3k}.$$

Số hạng không chứa x ứng với $12-3k=0\Leftrightarrow k=4$

$\longrightarrow$ số hạng cần tìm $C_6^4.2^4=2^4C_6^2$.

Câu 8: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(xy^2-\frac{1}{xy}\right)^8$.

A. $70y^4$. **B.** $60y^4$. **C.** $50y^4$. **D.** $40y^4$.

Lời giải

Chọn A

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(xy^2-\frac{1}{xy}\right)^8=\sum_{k=0}^{8}C_8^k.\left(xy^2\right)^{8-k}.\left(-\frac{1}{xy}\right)^k=\sum_{k=0}^{8}C_8^k.(-1)^k.x^{8-2k}.y^{16-3k}.$$

Số hạng không chứa x ứng với $8-2k=0\Leftrightarrow k=4$

$\longrightarrow$ số hạng cần tìm $C_8^4y^4=70y^4$.

Câu 9: Tìm số hạng chứa x^3y trong khai triển $\left(xy+\frac{1}{y}\right)^5$.

A. $3x^3y$. **B.** $5x^3y$. **C.** $10x^3y$. **D.** $4x^3y$.

Lời giải

Chọn C

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(xy+\frac{1}{y}\right)^5=\sum_{k=0}^{5}C_5^k.(xy)^{5-k}.\left(\frac{1}{y}\right)^k=\sum_{k=0}^{5}C_5^k.x^{5-k}.y^{5-2k}.$$

Hệ số của x^3y ứng với $\begin{cases}5-k=3\\5-2k=1\end{cases}\Leftrightarrow k=2\longrightarrow$ số hạng cần tìm $C_5^2x^3y=10x^3y$.

Câu 10: Tìm hệ số của x^6 trong khai triển $\left(\frac{1}{x}+x^3\right)^{3n+1}$ với $x\neq 0$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $3C_{n+1}^2+nP_2=4A_n^2$.

A. $210x^6$. **B.** $120x^6$. **C.** 120. **D.** 210.

Lời giải

Chọn D

Từ phương trình $3C_{n+1}^2+nP_2=4A_n^2\longrightarrow n=3$.

Với $n=3$, ta có $\left(\frac{1}{x}+x^3\right)^{3n+1}=\left(\frac{1}{x}+x^3\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k.\left(\frac{1}{x}\right)^{10-k}.\left(x^3\right)^k=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k.x^{4k-10}.$

Hệ số của x^6 ứng với $4k-10=6\Leftrightarrow k=4\longrightarrow$ hệ số cần tìm $C_{10}^4=210.$

Câu 11: Tìm hệ số của x^9 trong khai triển $\left(1-\sqrt{3}x\right)^{2n}$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $\frac{2}{C_n^2}+\frac{14}{3C_n^3}=\frac{1}{n}.$

A. $-C_{18}^9\left(\sqrt{3}\right)^9.$ **B.** $-C_{18}^9\left(\sqrt{3}\right)^9x^9.$ **C.** $C_{18}^9\left(\sqrt{3}\right)^9x^9.$ **D.** $C_{18}^9\left(\sqrt{3}\right)^9.$

Lời giải

Chọn A

Từ phương trình $\frac{2}{C_n^2}+\frac{14}{3C_n^3}=\frac{1}{n}\longrightarrow n=9.$

Với $n=9$, ta có $\left(1-\sqrt{3}x\right)^{2n}=\left(1-\sqrt{3}x\right)^{18}=\sum_{k=0}^{18}C_{18}^k.(1)^{18-k}\left(-\sqrt{3}x\right)^k=\sum_{k=0}^{18}C_{18}^k.\left(-\sqrt{3}\right)^k.x^k.=\sum_{k=0}^{18}C_{18}^k.(-1)^k\left(\sqrt{3}\right)^k.x^k$

Hệ số của x^9 ứng với $k=9\longrightarrow$ hệ số cần tìm $-C_{18}^9\left(\sqrt{3}\right)^9.$

Câu 12: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(2x-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{2n}$ với $x\neq0$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^3+2n=A_{n+1}^2.$

A. $-C_{16}^{12}.2^4.3^{12}.$ **B.** $C_{16}^0.2^{16}.$ **C.** $C_{16}^{12}.2^4.3^{12}.$ **D.** $C_{16}^{16}.2^0.$

Lời giải

Chọn C

Từ phương trình $C_n^3+2n=A_{n+1}^2\longrightarrow n=8.$

Với $n=8$, ta có

$$\left(2x-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{2n}=\left(2x-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}=\sum_{k=0}^{16}C_{16}^k.(2x)^{16-k}.\left(-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^k=\sum_{k=0}^{16}C_{16}^k.2^{16-k}.(-3)^k.x^{16-\frac{4k}{3}}.$$

Số hạng không chứa x ứng với $16-\frac{4k}{3}=0\Leftrightarrow k=12$

$\longrightarrow$ số hạng cần tìm $C_{16}^{12}.2^4.3^{12}.$

Câu 13: Tìm hệ số của x^7 trong khai triển $\left(3x^2-\frac{2}{x}\right)^n$ với $x\neq0$, biết hệ số của số hạng thứ ba trong khai triển bằng $1080.$

A. $1080.$ **B.** $-810.$ **C.** $810.$ **D.** $1080.$

Lời giải

Chọn B

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(3x^2-\frac{2}{x}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k.\left(3x^2\right)^{n-k}.\left(-\frac{2}{x}\right)^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k.3^{n-k}\left(-2\right)^k.x^{2n-3k}.$$

Số hạng thứ 3 ứng với $k=2$, kết hợp với giả thiết ta có

$$C_n^2.3^{n-2}.4=1080\Leftrightarrow n\left(n-1\right).3^n=4.5.3^5\Leftrightarrow n=5.$$

Hệ số của x^7 ứng với $2n-3k=7\Leftrightarrow 10-3k=7\Leftrightarrow k=1$

$\longrightarrow$ hệ số cần tìm $C_5^1 3^4\left(-2\right)=-810.$

Câu 14: Tìm số tự nhiên n, biết hệ số của số hạng thứ 3 theo số mũ giảm dần của x trong khai triển $\left(x-\frac{1}{3}\right)^n$ bằng 4.

A. 8. **B.** 17. **C.** 9. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^{n-k}.\left(-\frac{1}{3}\right)^k=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}.\left(-\frac{1}{3}\right)^1+C_n^2x^{n-2}.\left(-\frac{1}{3}\right)^2+...+C_n^n\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

$\longrightarrow$ số hạng thứ 3 theo số mũ giảm dần của x là $C_n^2\left(-\frac{1}{3}\right)^2x^{n-2}.$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow C_n^2\left(-\frac{1}{3}\right)^2=4\Leftrightarrow\frac{n!}{2!(n-2)!}.\frac{1}{9}=4\longrightarrow n=9.$

Do $n\in\mathbb{N}$ nên ta chọn $n=9$ thỏa mãn.

Câu 15: Tìm số hạng đứng giữa trong khai triển $\left(x^3+xy\right)^{21}$.

A. $C_{21}^{10}x^{40}y^{10}.$ **B.** $C_{21}^{10}x^{43}y^{10}.$

C. $C_{21}^{11}x^{41}y^{11}.$ **D.** $C_{21}^{10}x^{43}y^{10}$; $C_{21}^{11}x^{41}y^{11}.$

Lời giải

Chọn D

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(x^3+xy\right)^{21}=\sum_{k=0}^{21}C_{21}^k.\left(x^3\right)^{21-k}.\left(xy\right)^k=\sum_{k=0}^{21}C_{21}^k.x^{63-2k}.y^k.$$

Suy ra khai triển $\left(x^3+xy\right)^{21}$ có 22 số hạng nên có hai số hạng đứng giữa là số hạng thứ 11 (ứng với $k=10$) và số hạng thứ 12 (ứng với $k=11$).

Vậy hai số hạng đứng giữa cần tìm là $C_{21}^{10}x^{43}y^{10}$; $C_{21}^{11}x^{41}y^{11}$.

Câu 16: Tính tổng S tất cả các hệ số trong khai triển $(3x-4)^{17}$.

A. $S=1$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=0$. **D.** $S=8192$.

Lời giải

Chọn B

Tính tổng các hệ số trong khai triển $\longrightarrow$ cho $x=1$.

Khi đó $S=(3.1-4)^{17}=-1$.

Câu 17: Khai triển đa thức $P(x)=(2x-1)^{1000}$ ta được $P(x)=a_{1000}x^{1000}+a_{999}x^{999}+\ldots+a_1x+a_0$.

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a_{1000}+a_{999}+\ldots+a_1=2^n$. **B.** $a_{1000}+a_{999}+\ldots+a_1=2^n-1$.

C. $a_{1000}+a_{999}+\ldots+a_1=1$. **D.** $a_{1000}+a_{999}+\ldots+a_1=0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P(x)=a_{1000}x^{1000}+a_{999}x^{999}+\ldots+a_1x+a_0$.

Cho $x=1$ ta được $P(1)=a_{1000}+a_{999}+\ldots+a_1+a_0$.

Mặt khác $P(x)=(2x-1)^{1000}\longrightarrow P(1)=(2.1-1)^{1000}=1$.

Từ đó suy ra $a_{1000}+a_{999}+\ldots+a_1+a_0=1\longrightarrow a_{1000}+a_{999}+\ldots+a_1=1-a_0$.

Mà là số hạng không chứa x trong khai triển $P(x)=(2x-1)^{1000}$ nên

$$a_0=C_{1000}^{1000}(2x)^0(-1)^{1000}=C_{1000}^{1000}=1.$$

Vậy $a_{1000}+a_{999}+\ldots+a_1=0$.

Câu 18: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $P(x)=x(1-2x)^5+x^2(1+3x)^{10}$.

A. 80. **B.** 3240. **C.** 3320. **D.** 259200.

Lời giải

Chọn C

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$x(1-2x)^5=x.\sum_{k=0}^{5}C_5^k.(-2x)^{5-k}=\sum_{k=0}^{5}C_5^k.(-2)^{5-k}.x^{6-k}.$$

$\longrightarrow$ số hạng chứa x^5 tương ứng với $6-k=5\Leftrightarrow k=1$.

Tương tự, ta có $x^2(1+3x)^{10}=x^2.\sum_{l=0}^{10}C_{10}^{l}.(3x)^{10-l}=\sum_{l=0}^{10}C_{10}^{l}.3^{10-l}.x^{12-l}$.

$\longrightarrow$ số hạng chứa x^5 tương ứng với $12-l=5\Leftrightarrow l=7$.

Vậy hệ số của x^5 cần tìm $P(x)$ là $C_5^1.(2)^4+C_{10}^7.3^3=3320$.

Câu 19: Tìm hệ số chứa x^{10} trong khai triển $f(x)=\left(\frac{1}{4}x^2+x+1\right)^2(x+2)^{3n}$ với n là số tự nhiên thỏa mãn hệ thức $A_n^3+C_n^{n-2}=14n$.

A. $2^5C_{19}^{10}$. **B.** $2^5C_{19}^{10}x^{10}$. **C.** $2^9C_{19}^{10}$. **D.** $2^9C_{19}^{10}x^{10}$.

Lời giải

Chọn A

Từ phương trình $A_n^3+C_n^{n-2}=14n\longrightarrow n=5.$

Với $n=5$, ta có $f(x)=\left(\frac{1}{4}x^2+x+1\right)^2(x+2)^{3n}=\frac{1}{16}(x+2)^4(x+2)^{15}=\frac{1}{16}(x+2)^{19}$.

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có $f(x)=\frac{1}{16}(x+2)^{19}=\frac{1}{16}\sum_{k=0}^{19}C_{19}^{k}.2^k.x^{19-k}$.

Số hạng chứa x^{10} trong khai triển tương ứng với $19-k=10\Leftrightarrow k=9$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển là $\frac{1}{16}C_{19}^{10}2^9=2^5C_{19}^{10}$.

Câu 20: Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $P(x)=(1-x-3x^3)^n$ với n là số tự nhiên thỏa mãn hệ thức $C_n^{n-2}+6n+5=A_{n+1}^2$.

A. 210. **B.** 840. **C.** 480. **D.** 270.

Lời giải

Chọn C

Từ phương trình $C_n^{n-2}+6n+5=A_{n+1}^2\longrightarrow n=10.$

Với $n=10$, khi đó $P(x)=(1-x-3x^3)^n=(1-x-3x^3)^{10}$.

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$P(x)=(1-x-3x^3)^{10}=\left[1-(x+3x^3)\right]^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}(-1)^k(x+3x^3)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}(-1)^k x^k(1+3x^2)^k=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}\sum_{l=0}^{k}C_k^l(-1)^k3^l x^{k+2l}.$$

Số hạng chứa x^4 trong khai triển tương ứng với $\begin{cases} k+2l=4 \\ 0\le k\le 10 \\ 0\le l\le k \end{cases} \Leftrightarrow (k;l)=\{(4;0),(2;1)\}$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển là $C_{10}^4C_4^0+C_{10}^2C_2^1 3=480$.

Câu 21: Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển $\left(1+x+x^2+x^3\right)^5$.

A. 5. **B.** 50. **C.** 101. **D.** 105.

Lời giải

Chọn C

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(1+x+x^2+x^3\right)^5=(1+x)^5\left(1+x^2\right)^5=\sum_{k=0}^{5}C_5^kx^k.\sum_{l=0}^{5}C_5^l\left(x^2\right)^l=\sum_{k=0}^{5}C_5^k.\sum_{l=0}^{5}C_5^l.x^{k+2l}.$$

Số hạng chứa x^{10} trong khai triển tương ứng với $k+2l=10\Leftrightarrow k=10-2l$.

Kết hợp với điều kiện ta có hệ $\begin{cases} k+2l=10 \\ 0\le k\le 5,\ 0\le l\le 5 \\ k,l\in\mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow (k;l)=\{(0;5),(2;4),(4;3)\}$.

Vậy hệ số cần tìm là $C_5^0.C_5^5+C_5^2.C_5^4+C_5^4.C_5^3=101$.

Câu 22: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $P(x)=(1+x)+2(1+x)^2+...+8(1+x)^8$.

A. 630. **B.** 635. **C.** 636. **D.** 637.

Lời giải

Chọn C

Các biểu thức $(1+x),\ (1+x)^2,\cdots,(1+x)^4$ không chứa số hạng chứa x^5.

Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $5(1+x)^5$ là $5C_5^5$.

Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $6(1+x)^6$ là $6C_6^5$.

Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $7(1+x)^7$ là $7C_7^5$.

Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $8(1+x)^8$ là $8C_8^5$.

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển $P(x)$ là $5C_5^5+6C_6^5+7C_7^5+8C_8^5=636$.

Câu 23: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $C_{2n}^0+C_{2n}^1+...+C_{2n}^n=C_{2n}^{n+1}+C_{2n}^{n+2}+...+C_{2n}^{2n}$.

B. $C_{2n}^0+C_{2n}^1+...+C_{2n}^{n-1}=C_{2n}^{n+1}+C_{2n}^{n+2}+...+C_{2n}^{2n}$.

C. $C_{2n}^0+C_{2n}^1+...+C_{2n}^{n-2}=C_{2n}^{n+1}+C_{2n}^{n+2}+...+C_{2n}^{2n}$.

D. $C_{2n}^0+C_{2n}^1+\ldots+C_{2n}^{n+1}=C_{2n}^{n+1}+C_{2n}^{n+2}+\ldots+C_{2n}^{2n}$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $C_n^k=C_n^{n-k}$, ta có $\begin{cases}C_{2n}^0=C_{2n}^{2n}\\C_{2n}^1=C_{2n}^{2n-1}\\\ldots\\C_{2n}^{n-1}=C_{2n}^{n+1}\end{cases}$.

Cộng vế theo vế, ta được $C_{2n}^0+C_{2n}^1+\ldots+C_{2n}^{n-1}=C_{2n}^{n+1}+C_{2n}^{n+2}+\ldots+C_{2n}^{2n}$.

Câu 24: Tính tổng $S=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n$.

A. $S=2^n-1$. **B.** $S=2^n$. **C.** $S=2^{n-1}$. **D.** $S=2^n+1$.

Lời giải

Chọn B

Khai triển nhị thức Niu-tơn của $(1+x)^n$, ta có

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n.$$

Cho $x=1$, ta được $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=(1+1)^n=2^n$.

Câu 25: Tính tổng $S=C_{2n}^0+C_{2n}^1+C_{2n}^2+\ldots+C_{2n}^{2n}$.

A. $S=2^{2n}$. **B.** $S=2^{2n}-1$. **C.** $S=2^n$. **D.** $S=2^{2n}+1$.

Lời giải

Chọn A

Khai triển nhị thức Niu-tơn của $(1+x)^{2n}$, ta có

$$(1+x)^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2+\cdots+C_{2n}^{2n}x^{2n}.$$

Cho $x=1$, ta được $C_{2n}^0+C_{2n}^1+C_{2n}^2+\cdots+C_{2n}^{2n}=(1+1)^{2n}=2^{2n}$.

Câu 26: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+\ldots+C_{2n+1}^n=2^{20}-1$.

A. $n=8$. **B.** $n=9$. **C.** $n=10$. **D.** $n=11$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $(1+1)^{2n+1}=C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+\ldots+C_{2n+1}^{2n+1}$. (1)

Lại có $C_{2n+1}^0=C_{2n+1}^{2n+1}$; $C_{2n+1}^1=C_{2n+1}^{2n}$; $C_{2n+1}^2=C_{2n+1}^{2n-1}$; …; $C_{2n+1}^n=C_{2n+1}^{n+1}$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+\ldots+C_{2n+1}^n=\dfrac{2^{2n+1}}{2}$

$\Leftrightarrow C_{2n+1}^1+\ldots+C_{2n+1}^n=2^{2n}-1\Leftrightarrow 2^{20}-1=2^{2n}-1\Leftrightarrow n=10$.

Vậy $n=10$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 27: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^3+\ldots+C_{2n+1}^{2n+1}=1024$.

A. $n=5$. **B.** $n=9$. **C.** $n=10$. **D.** $n=4$.

Lời giải

Chọn A

Xét khai triển $(x+1)^{2n+1}=C_{2n+1}^0x^{2n+1}+C_{2n+1}^1x^{2n}+\ldots+C_{2n+1}^{2n+1}$.

Cho $x=1$, ta được $2^{2n+1}=C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+\ldots+C_{2n+1}^{2n+1}$. (1)

Cho $x=-1$, ta được $0=-C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1-\ldots+C_{2n+1}^{2n+1}$. (2)

Cộng (1) và (2) vế theo vế, ta được

$2^{2n+1}=2\left(C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^3+\ldots+C_{2n+1}^{2n+1}\right)\Leftrightarrow 2^{2n+1}=2.1024\Leftrightarrow n=5$.

Câu 28: Tính tổng $S=C_n^0+3C_n^1+3^2C_n^3+\ldots+3^nC_n^n$.

A. $S=3^n$. **B.** $S=2^n$. **C.** $S=3.2^n$. **D.** $S=4^n$.

Lời giải

Chọn D

Khai triển nhị thức Niu-tơn của $(1+x)^n$, ta có

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n.$$

Cho $x=3$, ta được $C_n^0+3C_n^1+3^2C_n^3+\ldots+3^nC_n^n=(1+3)^n=4^n$.

Câu 29: Khai triển đa thức $P(x)=(1+2x)^{12}=a_0+a_1x+\ldots+a_{12}x^{12}$. Tìm hệ số a_k $(0\le k\le 12)$ lớn nhất trong khai triển trên.

A. $C_{12}^8.2^8$. **B.** $C_{12}^9.2^9$. **C.** $C_{12}^{10}.2^{10}$. **D.** $1+C_{12}^8.2^8$.

Lời giải

Chọn A

Khai triển nhị thức Niu-tơn của $(1+2x)^{12}$, ta có

$$(1+2x)^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k(2x)^k=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k2^kx^k.$$

Suy ra $a_k=C_{12}^k2^k$.

Hệ số a_k lớn nhất khi $\begin{cases} a_k \ge a_{k+1} \\ a_k \ge a_{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k C_{12}^k \ge 2^{k+1} C_{12}^{k+1} \\ 2^k C_{12}^k \ge 2^{k-1} C_{12}^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{12-k} \ge \dfrac{2}{k+1} \\ \dfrac{2}{k} \ge \dfrac{1}{12-k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{23}{3} \le k \le \dfrac{26}{3}.$

$\xrightarrow[k\in\mathbb{N}]{0\le k\le 12} k = 8$. Vậy hệ số lớn nhất là $a_8 = C_{12}^8 2^8$.

Câu 30: Khai triển đa thức $P(x) = \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}x\right)^{10} = a_0 + a_1 x + ... + a_9 x^9 + a_{10} x^{10}$. Tìm hệ số a_k $(0 \le k \le 10)$ lớn nhất trong khai triển trên.

A. $1 + \dfrac{2^7}{3^{10}} C_{10}^7$. **B.** $\dfrac{2^7}{3^{10}} C_{10}^7$. **C.** $\dfrac{2^6}{3^{10}} C_{10}^6$. **D.** $\dfrac{2^8}{3^{10}} C_{10}^8$.

Lời giải

Chọn B

Khai triển nhị thức Niu-tơn của $\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}x\right)^{10}$, ta có

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} \left(\frac{2}{3}x\right)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} \left(\frac{2}{3}\right)^k x^k.$$

Suy ra $a_k = C_{10}^k \left(\dfrac{1}{3}\right)^{10-k} \left(\dfrac{2}{3}\right)^k$.

Giả sử a_k là hệ số lớn nhất, khi đó $\begin{cases} a_k \ge a_{k+1} \\ a_k \ge a_{k-1} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_{10}^k \left(\dfrac{1}{3}\right)^{10-k} \left(\dfrac{2}{3}\right)^k \ge C_{10}^{k+1} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{10-(k+1)} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k+1} \\ C_{10}^k \left(\dfrac{1}{3}\right)^{10-k} \left(\dfrac{2}{3}\right)^k \ge C_{10}^{k-1} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{10-(k-1)} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \ge \dfrac{19}{3} \\ k \le \dfrac{22}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{19}{3} \le k \le \frac{22}{3} \xrightarrow[k\in\mathbb{N}]{0\le k\le 10} k = 7.$$

Vậy hệ số lớn nhất là $a_7 = \dfrac{2^7}{3^{10}} C_{10}^7$.

BÀI 4&5. BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

A. KIẾN THỨC LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

I. PHÉP THỬ, KHÔNG GIAN MẪU

1. Phép thử

Gieo một đồng tiền kim loại (gọi tắt là đồng tiền), rút một quân bài từ cỗ bài tú lơ khơ (cỗ bài 52 lá) hay bắn một viên đạn vào bia,… là những ví dụ về phép thử.

Khi gieo một đồng tiền, ta không thể đoán trước được mặt ghi số (mặt ngửa, viết tắt là N) hay mặt kia (mặt sấp, viết tắt là S) sẽ xuất hiện). Đó là phép thử ngẫu nhiên

Phép thử ngẫu nhiên là phép thử mà ta không đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó.

Để đơn gian, từ nay phép thử ngẫu nhiên được gọi tắt là phép thử.

2. Không gian mẫu

Tập hợp các kết quả có thể xảy ra của một phép thử được gọi là không gian mẫu của phép thử và kí hiệu là Ω (đọc là ô-mê-ga)

II. BIẾN CỐ

- **Biến cố** là một tập con của không gian mẫu. Người ta thường kí hiệu các biến cố bằng các chữ in hoa A, B, C, …
- Tập $\varnothing$ được gọi là biến cố không thể (gọi tắt là **biến cố không**). Còn tập Ω được gọi là **biến cố chắc chắn**.
- Ta nói rằng biến cố A xảy ra trong một phép thử nào đó khi và chỉ khi kết quả của phép thử đó là một phần tử của A (hay thuận lợi cho A)

III. PHÉP TOÁN TRÊN CÁC BIẾN CỐ

Giả sử A là biến cố liên quan đến phép thử

- Biến cố đối của A kí hiệu là $\overline{A} = \Omega \setminus A$
- Hợp hai biến cố A và B kí hiệu là $A \cup B$
- Giao hai biến cố A và B kí hiệu là $A \cap B$ (hoặc A.B)
- $A \cap B = \varnothing$ thì ta nói A và B xung khắc.

IV. ĐỊNH NGHĨA CỔ ĐIỂN CỦA XÁC SUẤT

1. Định nghĩa

Giả sử A là biến cố liên quan đến một phép thử với không gian mẫu Ω chỉ có một số hữu hạn kết quả đồng khả năng xảy ra xuất hiện.

Ta gọi tỉ số $\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$ là xác suất của biến cố A, kí hiệu là $P(A)$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

Chú ý:

$n(A)$ là số phần tử của A hay cũng là số các kết quả thuận lợi cho biến cố A, còn $n(\Omega)$ là số các kết quả có thể xảy ra của phép thử.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Bộ bài tú - lơ khơ có 52 quân bài. Rút ngẫu nhiên ra 4 quân bài. Tìm xác suất của các biến cố:

A: "Rút ra được tứ quý K ‘’

B: "4 quân bài rút ra có ít nhất một con Át"

C: "4 quân bài lấy ra có ít nhất hai quân bích’’

Giải

Ta có số cách chọn ngẫu nhiên 4 quân bài là: $C_{52}^4=270725$

Suy ra $n(\Omega)=270725$

Vì bộ bài chỉ có 1 tứ quý K nên ta có $n(A)=1$

Vậy $P(A)=\frac{1}{270725}$

Vì có C_{48}^4 cách rút 4 quân bài mà không có con Át nào,

suy ra $N(B)=C_{52}^4-C_{48}^4\Rightarrow P(B)=\frac{15229}{54145}$

Vì trong bộ bài có 13 quân bích, số cách rút ra bốn quân bài mà trong đó số quân bích không ít hơn 2 là: $C_{13}^2.C_{39}^2+C_{13}^3C_{39}^1+C_{13}^4.C_{39}^0=69667$

Suy ra $n(C)=69667\Rightarrow P(C)=\frac{5359}{20825}.$

Ví dụ 2. Trong một chiếc hộp có 20 viên bi, trong đó có 8 viên bi màu đỏ, 7 viên bi màu xanh và 5 viên bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên ra 3 viên bi. Tìm xác suất để:

1. 3 viên bi lấy ra đều màu đỏ **2.** 3 viên bi lấy ra có không quá hai màu.

Giải

Gọi biến cố A :" 3 viên bi lấy ra đều màu đỏ"

B : "3 viên bi lấy ra có không quá hai màu"

Số các lấy 3 viên bi từ 20 viên bi là: C_{20}^3 nên ta có: $|\Omega|=C_{20}^3=1140$

1. Số cách lấy 3 viên bi màu đỏ là: $C_8^3 = 56$ nên $|\Omega_A| = 56$

Do đó: $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{56}{1140} = \dfrac{14}{285}$.

2. Ta có:

- Số cách lấy 3 viên bi chỉ có một màu: $C_8^3 + C_7^3 + C_5^3 = 101$
- Số các lấy 3 viên bi có đúng hai màu

  Đỏ và xanh: $C_{15}^3 - \left(C_8^3 + C_7^3\right)$

  Đỏ và vàng: $C_{13}^3 - \left(C_8^3 + C_5^3\right)$

  Vàng và xanh: $C_{12}^3 - \left(C_5^3 + C_7^3\right)$

Nên số cách lấy 3 viên bi có đúng hai màu:

$$C_{15}^3 + C_{13}^3 + C_{12}^3 - 2\left(C_8^3 + C_7^3 + C_5^3\right) = 759$$

Do đó: $|\Omega_B| = 860$. Vậy $P(B) = \dfrac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \dfrac{43}{57}$.

V. TÍNH CHẤT CỦA XÁC SUẤT

1. Định lí

Định lí

a) $P(\varnothing) = 0, P(\Omega) = 1.$

b) $0 \le P(A) \le 1,$ với mọi biến cố A.

c) Nếu A và B xung khắc thì

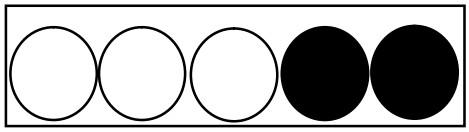
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Hệ quả: Với mọi biến cố A, ta có $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

2. Ví dụ

Ví dụ 3: Cho hộp chứ ba quả cầu trắng và hai quả cầu đen như hình, lấy ngẫu nhiên đồng thời hai quả. Hãy tính xác suất sao cho hai quả đó:

a) khác màu; b) Cùng màu.



Giải

Mỗi lần lấy đồng thời hai quả cầu cho ta một tổ hợp chập hai của năm phần tử. Do đó, không gian mẫu gồm các tổ hợp chập hai của năm phần tử và $n(\Omega)=C_5^2=10.$

Vì việc lấy quả cầu là ngẫu nhiên nên các kết quả đó là đồng khả năng. Ký hiệu A :"Hai quả cầu khác màu", B :"Hai quả cầu cùng màu".

Vì chỉ có hai màu đen hoặc trắng nên ta thấy $B=\overline{A}.$

a) theo quy tắc nhân, $n(A)=2.3=6.$

Do đó: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}.$

b) Vì $B=\overline{A}$ nên theo hệ quả ta có: $P(B)=P(\overline{A})=1-P(A)=1-\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{5}.$

Ví dụ 4: Một hộp chứa 20 quả cầu đánh số từ 1 đến $20.$ Lấy ngẫu nhiên một quả. Tính xác suất các biến cố sau:

a) A :"Nhận được quả cầu ghi số chẵn";

b) B :"Nhận được quả cầu ghi số chia hết cho 3"

c) $A\cap B;$

d) C :"Nhận được quả cầu ghi số không chia hết cho 6"

Giải

Không gian mẫu được mô tả là $\Omega=\{1,2,...,20\}$ gồm 20 kết quả đồng khả năng, $n(\Omega)=20.$

a) $A=\{2,4,6,8,10,12,14,`6,18,20\},n(A)=10$ nên

$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{2}.$

b) $B=\{3,6,9,15,18\},n(B)=6.$ Từ đó:

$P(B)=\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}=\dfrac{6}{20}=\dfrac{3}{10}.$

c) $A\cap B=\{6,12,18\},n(A\cap B)=3$ nên

$P(A\cap B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(\Omega)}=\dfrac{3}{20}.$

d) Vì $A\cap B=\{6,12,18\},$ nên $A\cap B$ là biến cố "Nhận được quả cầu ghi số chia hết cho 6". Do đó, C là biến cố đối của biến cố $A\cap B,$ ta có $C=\overline{A\cap B}$ và

$$P(C)=1-P(A\cap B)=1-\frac{3}{20}=\frac{17}{20}.$$

VI. CÁC BIẾN CỐ ĐỘC LẬP, CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT

Ví dụ 5: Bạn thứ nhất có một đồng tiền, bạn thứ hai có con súc sắc (cân đối, đồng chất). Xét phép thử "Bạn thứ nhất gieo đồng tiền, sau đó bạn thứ hai gieo con súc sắc" (hình.a).

a) Mô tả không gian mẫu của phép thử này.

b) Tính xác suất của các biến cố sau:

A : "Đồng tiền xuất hiện mặt sấp";

B : "Con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm";

C : "Con súc sắc xuất hiện mặt lẻ".

c) Chứng tỏ: $P(A.B)=P(A).P(B); P(A.C)=P(A).P(C)$.

Giải

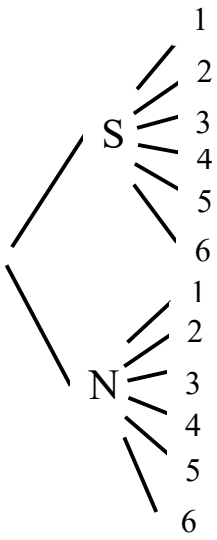
a) Không gian mẫu của phép thử có dạng

$$\Omega=\{S1,S2,S3,S4,S5,S6,N1,N2,N3,N4,N5,N6\}.$$

Theo giả thiết, Ω gồm 12 kết quả đồng khả năng xuất hiện.(hình.b)



Hình a



Hình b

b) Ta thấy $A=\{S1,S2,S3,S4,S5,S6\}, n(A)=6;$

$B=\{S6,N6\}, n(B)=2;$

$C=\{N1,N3,N5,S1,S3,S5\}, n(C)=6.$

Từ đó $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2};$

$P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6};$

$P(C)=\frac{n(C)}{n(\Omega)}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}.$

c) Rõ ràng $A.B=\{S6\}$ và $P(A.B)=\frac{n(A.B)}{n(\Omega)}=\frac{1}{12}.$

Ta có

$P(A.B)=\frac{1}{12}=\frac{1}{2}.\frac{1}{6}=P(A)P(B).$

Tương tự $A.C=\{S1,S3,S5\};$

$P(A.C)=\frac{n(A.C)}{n(\Omega)}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=P(A)P(C).$

Trong ví dụ trên, xác suất xuất hiện mỗi mặt của con súc sắc là $\frac{1}{6}$, không phụ thuộc vào đồng tiền xuất hiện mặt "sấp" hoặc "ngữa".

Nếu sự xảy ra của một biến cố không ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của một biến cố khác thì ta nói hai biến cố đó độc lập. Như vậy trong ví dụ trên biến cố A và B độc lập và cũng vậy, A và C độc lập.

Tổng quát, đối với hai biến cố bất kỳ thì ta có mối liên hệ sau:

A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi

$$P(A.B)=P(A).P(B).$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tính xác suất dựa vào định nghĩa cổ điển

1. Phương pháp

- Tính xác suất theo thống kê ta sử dụng công thức:

$$P(A)=\frac{\text{Số lần xuất hiện của biến cố A}}{N}.$$

- Tính xác suất của biến cố theo định nghĩa cổ điển ta sử dụng công thức :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Một tổ có 8 nam và 4 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 người từ tổ đó. Xác suất để chọn được cả 2 nam bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Tổng số học sinh trong tổ là $8+4=12$ học sinh.

Số cách chọn 2 trong 12 học sinh trong tổ là $C_{12}^2=66$ (cách).

Suy ra $n(\Omega)=66.$

Gọi A là biến cố: "Chọn được 2 nam"

Suy ra $n(A)=C_8^2=28.$

Vậy $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{28}{66}=\dfrac{14}{33}.$

Ví dụ 2: Một hộp đựng 4 viên bi đỏ và 5 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp đó. Xác suất để chọn được đúng một viên bi đỏ là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Tổng số viên bi trong hộp là $4+5=9$ (viên bi).

Số cách chọn 3 trong 9 viên bi là: $C_9^3=84$ (cách).

Suy ra: $n(\Omega)=84.$

Gọi A là biến cố: "Chọn 3 viên bi và được đúng 1 viên bi đỏ".

Số cách chọn 1 trong 4 viên bi đỏ là 4 (cách).

Số cách chọn 2 trong 5 viên bi trắng là $C_5^2=10$ (cách)

Suy ra $n(A)=4\times 10=40.$

Vậy $P(A)=\dfrac{40}{84}=\dfrac{10}{21}.$

Ví dụ 3: Trong một hộp đựng 10 cây viết trong đó có 4 cây viết hư. Lấy ngẫu nhiên 3 cây viết. Xác suất để chọn được cả 3 cây đều tốt là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 3 trong 10 cây viết là $C_{10}^3=120$ (cách).

Suy ra $n(\Omega)=120.$

Gọi A là biến cố: "Chọn được cả 3 cây đều tốt".

Số cây viết còn tốt là $10-4=6$ (cây viết).

Số cách chọn 3 trong 6 cây viết còn tốt là $C_6^3 = 20$ (cách).

Suy ra $n(A) = 20.$

Vậy $P(A) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$

Ví dụ 4: Gieo 2 con súc sắc. Xác suất để số chấm xuất hiện trên hai con súc sắc giống nhau là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Ta có: $n(\Omega) = 6^2 = 36.$

Gọi A là biến cố: "Số hiệu xuất hiện trên 2 con súc sắc giống nhau".

Suy ra $A = \{(1;1),(2;2),(3;3),(4;4),(5;5),(6;6)\} \Rightarrow n(A) = 6.$

Vậy $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$

Ví dụ 5: Gieo một đồng tiền 5 lần. Xác suất để cả 5 lần đều xuất hiện mặt ngửa là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Ta có: $n(\Omega) = 2^5 = 32.$

Gọi A là biến cố: "Cả 5 lần xuất hiện mặt ngửa".

Suy ra $A = \{(N\ N\ N\ N\ N)\} \Rightarrow n(A) = 1.$

Vậy $P(A) = \frac{1}{32}.$

Ví dụ 6: Từ cỗ bài tú lơ khơ 52 con rút ngẫu nhiên 4 con. Xác suất để được 1 con át và 3 con K là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Ta có: $n(\Omega) = C_{52}^4 = 270725.$

Gọi A là biến cố: "Rút được 1 con át và 3 con K".

Số cách rút được 1 trong 4 con át là 4 cách.

Số cách rút được 3 trong 4 con K là $C_4^3 = 4$ (cách).

Suy ra $n(A) = 4 \times 4 = 16.$

Vậy $P(A) = \frac{16}{270725}.$

Ví dụ 7: Có 6 quả cầu được đánh số từ 1 đến 6 và đựng trong một hộp. Lấy ngẫu nhiên 4 quả và xếp chúng theo thứ tự thành hàng ngang từ trái sáng phải. Xác suất để được tổng các chữ số bằng 10 là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Lấy 4 quả cầu từ 6 quả cầu và xếp chúng có thứ tự là số chỉnh hợp chập 4 của 6 (cách xếp).

Suy ra $n(\Omega)=A_6^4=360.$

Gọi A là biến cố: "Tổng 4 chữ số trên 4 quả cầu bằng 10".

Các chữ số trên 4 quả cầu chỉ có thể là 1, 2, 3, 4.

Vậy mỗi phần tử của A là một hoán vị của 4 chữ số 1, 2, 3, 4.

Suy ra $P(A)=\frac{24}{360}=\frac{1}{15}.$

Ví dụ 8: Trong 100 vé số có 1 vé trúng 10.000 đồng, 5 vé trúng 5.000 đồng và 10 vé trúng 1.000 đồng. Một người mua ngẫu nhiên 3 vé. Xác suất để người đó trúng thưởng đúng 3.000 đồng là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Số cách mua 3 trong 100 vé số là $C_{100}^3=161700$ (cách)

Suy ra $n(\Omega)=161700.$

Gọi A là biến cố: "Mua 3 vé và trúng đúng 3000 đồng".

Như vậy phải mua đúng 3 vé số loại trúng 1000 đồng.

Suy ra $n(A)=C_{10}^3=120.$

Suy ra $P(A)=\frac{120}{161700}=\frac{2}{2695}.$

Ví dụ 9: Một hộp đựng 100 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 100. Lấy ngẫu nhiên từ hộp một thẻ. Xác suất để số ghi trên thẻ lấy ra đó chia hết cho 2 hoặc 5 là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Ta có: $n(\Omega)=100.$

Gọi A là biến cố: "Số ghi trên thẻ chia hết cho 2 hoặc cho 5".

Nhận xét: Một số vừa chia hết cho 2 và vừa chia hết cho 5 thì số đó có chữ số tận cùng là chữ số 0. Do đó cách đếm số phần tử của A như sau:

- Các số chẵn từ 2 đến 100 có 50 số.
- Các số chia hết cho 5 và có chữ số tận cùng khác chữ số 0 từ 5 đến 95 có 10 số.

Suy ra $n(A)=50+10=60.$

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Suy ra $P(A)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$.

Ví dụ 10: Cho 8 quả cân có trọng lượng lần lượt là 1kg, 2kg, 3kg, 4kg, 5kg, 6kg, 7kg, 8kg. Chọn ngẫu nhiên ba quả cân trong số đó. Xác suất để tổng trọng lượng 3 quả cân được chọn không vượt quá 9kg là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 3 trong 8 quả cân là $C_8^3=56$ (cách).

Suy ra $n(\Omega)=56$.

Gọi A là biến cố: "Tổng trọng lượng 3 quả cân không vượt quá 9kg".

Suy ra 3 quả cân được chọn chỉ có thể là:

1kg	1kg	1kg	1kg	1kg	1kg	2kg
2kg	2kg	2kg	2kg	3kg	3kg	3kg
3kg	4kg	5kg	6kg	4kg	5kg	4kg

Suy ra $n(A)=7$.

Suy ra $P(A)=\frac{7}{56}=\frac{1}{8}$.

Ví dụ 11: Một hộp chứa 10 viên bi gồm 6 viên bi màu trắng và 4 viên bi màu đỏ. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp đó. Xác suất để lấy được 2 viên bi màu trắng và 2 viên bi màu đỏ là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 4 trong 10 viên bi là $C_{10}^4=210$ (cách).

Suy ra $n(\Omega)=210$.

Gọi A là biến cố: "Lấy được 2 viên bi trắng và 2 viên bi đỏ".

Số cách chọn 2 trong 6 viên bi trắng là $C_6^2=15$ (cách).

Số cách chọn 2 trong 4 viên bi đỏ là $C_4^2=6$ (cách).

Suy ra $n(A)=15\times 6=90$.

Suy ra $P(A)=\frac{90}{210}=\frac{3}{7}$.

Ví dụ 12. Một hộp chứa 11 quả cầu gồm 5 quả cầu xanh và 6 quả cầu đỏ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu từ hộp đó. Xác suất để chọn ra 2 quả cầu cùng màu bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Số cách chọn ngẫu nhiên 2 quả cầu từ 11 quả cầu là $C_{11}^2 = 55$.

Số các chọn hai quả cầu cùng màu là $C_5^2 + C_6^2 = 25$.

Xác suất để chọn ra hai quả cầu cùng màu là $\frac{25}{55} = \frac{5}{11}$.

Ví dụ 13. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 5 học sinh lớp 12C thành một hang ngang. Tính xác suất để trong 10 học sinh trên không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau.

Hướng dẫn giải

Số cách xếp 10 học sinh vào 10 vị trí: $n(\Omega) = 10!$ cách.

Gọi A là biến cố : "10 học sinh trên không có hai học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau".

Xếp 5 học sinh lớp 12C vào 5 vị trí có $5!$ cách.

Ứng mỗi cách xếp 5 học sinh lớp 12C sẽ có 6 khoảng trống gồm 4 vị trí ở giữa và 2 vị trí ở đầu để xếp các học sinh còn lại.

	C1		C2		C3		C4		C5	

TH1: Xếp 3 học sinh lớp 12B vào 4 vị trí ở giữa (không xếp vào hai đầu), có A_4^3 cách.

Ứng với mỗi cách xếp đó, chọn lấy 1 học sinh lớp 12A xếp vào vị trí thứ 4 (để hai học sinh lớp 12C không được ngồi cạnh nhau), có 2 cách.

Học sinh lớp 12A còn lại có 8 vị trí để xếp, có 8 cách.

Theo quy tắc nhân, ta có $5!.A_4^3.2.8$ cách.

TH2: Xếp hai học sinh trong 3 học sinh lớp 12B vào 4 vị trí ở giữa và học sinh còn lại xếp ở vị trí đầu có $C_3^1.2.A_4^2$ cách.

Ứng với mỗi cách xếp đó còn hai vị trí trống ở giữa, xếp 2 học sinh lớp 12A vào hai vị trí đó. Có 2 cách.

Theo quy tắc nhân, ta có $5!.C_3^1.2.A_4^2.2$ cách.

Do đó số cách xếp không có học sinh cùng lớp ngồi cạnh nhau là:

$n(\text{A}) = 5!.A_4^3.2.8 + 5!.C_3^1.2.A_4^2.2 = 63360$ cách.

Vậy $P(\text{A}) = \frac{n(\text{A})}{n(\Omega)} = \frac{63360}{10!} = \frac{11}{630}$.

Dạng 2: Quy tắc tính xác suất

1. Phương pháp

Quy tắc cộng xác suất

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Nếu hai biến cố A và B xung khắc thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

- Mở rộng quy tắc cộng xác suất

Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ đôi một xung khắc. Khi đó:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k).$$

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

- Giải sử A và B là hai biến cố tùy ý cùng liên quan đến một phép thử. Lúc đó:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Quy tắc nhân xác suất

- Ta nói hai biến cố A và B độc lập nếu sự xảy ra (hay không xảy ra) của A không làm ảnh hưởng đến xác suất của B.

- Hai biến cố A và B độc lập khi và chỉ khi $P(AB) = P(A).P(B)$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Một hộp đựng 20 viên bi gồm 12 viên bi màu đỏ và 8 viên bi màu xanh. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp đó. Xác suất để có ít nhất một viên bi màu đỏ là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 3 trong 20 viên bi là $C_{20}^3 = 1140$ (cách).

Suy ra $n(\Omega) = 1140$.

Gọi A là biến cố: "Có ít nhất một viên màu đỏ".

Suy ra $\overline{A}$ là biến cố: "Cả 3 viên bi đều màu xanh".

Suy ra $n(\overline{A}) = C_8^3 - 56$. Suy ra $P(\overline{A}) = \frac{56}{1140} = \frac{14}{285}$.

Ta có: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{14}{285} = \frac{271}{285}$.

Ví dụ 2: Gieo liên tiếp 4 lần một đồng tiền cân đối và đồng chất. Xác suất của biến cố A: "Có ít nhất một lần mặt ngửa xuất hiện" là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Ta có: $n(\Omega) = 2^4 = 16$.

Biến cố $\overline{A}$ là: "Không có mặt ngửa xuất hiện". Nghĩa là cả 4 lần đều xuất hiện mặt sấp.

Suy ra $n(\overline{A}) = 1$. Suy ra $P(\overline{A}) = \frac{1}{16}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Ta có: $P(A)=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}.$

Ví dụ 3: Một tổ có 10 nam và 5 nữ. Chọn ngẫu nhiên 4 người. Xác suất để có ít nhất một nữ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Số người trong tổ là $10+5=15$ (người).

Số cách chọn 4 trong 15 người là $C_{15}^4=1365$ (cách).

Suy ra $n(\Omega)=1365.$

Gọi A là biến cố: "Có ít nhất một nữ".

Suy ra $\overline{A}$ là biến cố: "Không có nữ". Nghĩa là có 4 nam.

Suy ra $n(\overline{A})=C_{10}^4=210.$ Suy ra $P(\overline{A})=\frac{210}{1365}=\frac{2}{13}.$

Ta có: $P(A)=1-\frac{2}{13}=\frac{11}{13}.$

Ví dụ 4: Có hai bình, mỗi bình chứa 6 viên bi. Bình thứ nhất có 3 bi xanh, 2 bi vàng và 1 bi đỏ. Bình thứ hai có 2 bi xanh, 1 bi vàng và 3 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi bình 1 viên bi. Xác suất để được 2 bi xanh là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Mỗi bình có 6 viên bi và lấy mỗi bình 1 viên nên $n(\Omega)=6.$

Gọi A là biến cố: "Lấy được một viên bi xanh ở bình thứ nhất".

Suy ra $n(A)=3.$ Suy ra $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$

Gọi B là biến cố: "Lấy được một viên bi xanh ở bình thứ hai".

Suy ra $n(B)=2.$ Suy ra $P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$

Ta có: $A.B$ là biến cố: "Lấy được 1 viên bi xanh ở bình thứ nhất và 1 viên bi xanh ở bình thứ 2".

Vì A và B là hai biến cố độc lập nên $P(A.B)=P(A).P(B)=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$

Ví dụ 5: Hai xạ thủ cùng bắn mỗi người một phát vào bia. Xác suất trúng đích của người thứ nhất là 0,9; người thứ hai và 0,7. Xác suất cả 2 người đều trúng là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Gọi A là biến cố: "Người thứ nhất bắn trúng".

Gọi B là biến cố: "Người thứ hai bắn trúng".

Như vậy $A.B$ là biến cố "Hai người đều bắn trúng".

Vì A và B là hai biến cố độc lập nên $P(A.B)=P(A).P(B)=0,9.0,7=0,63.$

Ví dụ 6: Có 2 xạ thủ loại I và 8 xạ thủ loại II. Xác suất bắn trúng đích của các xạ thủ theo thứ tự là 0,9 và 0,8. Lấy ngẫu nhiên ra một xạ thủ và xạ thủ đó bắn một viên đạn. Xác suất để viên đạn đó trúng đích là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Gọi A là biến cố: "Lấy 1 xạ thủ loại I bắn trúng đích".

Có 2 xạ thủ loại I nên $P(A)=\frac{0,9}{2}=0,45.$

Gọi B là biến cố: "Lấy 1 xạ thủ loại II bắn trúng đích".

Có 8 xạ thủ loại II nên $P(B)=\frac{0,8}{8}=0,1.$

Ta có: $A\cup B$ là biến cố: "Lấy ngẫu nhiên một xạ thủ và xạ thủ này bắn trúng".

Vì A và B là biến cố xung khắc nên: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0,45+0,1=0,55.$

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Gieo một đồng tiền cân đối và đồng chất bốn lần. Xác suất để cả bốn lần xuất hiện mặt sấp là?

A. $\frac{4}{16}.$ **B.** $\frac{2}{16}.$ **C.** $\frac{1}{16}.$ **D.** $\frac{6}{16}.$

Lời giải

Chọn B

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=2.2.2.2=16.$

Gọi A là biến cố "Cả bốn lần gieo xuất hiện mặt sấp" $\longrightarrow|\Omega_A|=1.$

Vậy xác suất cần tính $P(A)=\frac{1}{16}.$

Câu 2: Gieo một con súc sắc hai lần. Xác suất để ít nhất một lần xuất hiện mặt sáu chấm là?

A. $\frac{12}{36}.$ **B.** $\frac{11}{36}.$ **C.** $\frac{6}{36}.$ **D.** $\frac{8}{36}.$

Lời giải

Chọn B

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=6.6=36.$

Gọi A là biến cố "Ít nhất một lần xuất hiện mặt sáu chấm". Để tìm số phần tử của biến cố A, ta đi tìm số phần tử của biến cố đối $\overline{A}$ là "Không xuất hiện mặt sáu chấm" $\longrightarrow |\Omega_{\overline{A}}| = 5.5 = 25 \longrightarrow |\Omega_A| = 36 - 25 = 11.$

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \dfrac{11}{36}$.

Câu 3: Gieo một con xúc xắc cân đối đồng chất 2 lần. Tính xác suất để biến cố có tổng hai mặt bằng 8.

A. $\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{5}{36}$. **C.** $\dfrac{1}{9}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 6.6 = 36.$

Gọi A là biến cố "Số chấm trên mặt hai lần gieo có tổng bằng 8".

Gọi số chấm trên mặt khi gieo lần một là x, số chấm trên mặt khi gieo lần hai là y.

Theo bài ra, ta có $\begin{cases} 1 \le x \le 6 \\ 1 \le y \le 6 \\ x + y = 8 \end{cases} \Rightarrow (x;y) = \{(2;6), (3;5), (6;2), (5;3), (4;4)\}.$

Khi đó số kết quả thuận lợi của biến cố là $|\Omega_A| = 5.$

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}.$

Câu 4: Gieo một con xúc xắc cân đối đồng chất 2 lần, tính xác suất để biến cố có tích 2 lần số chấm khi gieo xúc xắc là một số chẵn.

A. $0,25$. **B.** $0,5$. **C.** $0,75$. **D.** $0,85$.

Lời giải

Chọn C

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 6.6 = 36.$

Gọi A là biến cố "Tích hai lần số chấm khi gieo xúc xắc là một số chẵn".

Ta xét các trường hợp:

TH1. Gieo lần một, số chấm xuất hiện trên mặt là **số lẻ** thì khi gieo lần hai, số chấm xuất hiện phải là số **chẵn**. Khi đó có $3.3 = 9$ cách gieo.

TH2. Gieo lần một, số chấm xuất hiện trên mặt là số chẵn thì có hai trường hợp xảy ra là số chấm xuất hiện trên mặt khi gieo lần hai là số lẻ hoặc số chẵn. Khi đó có $3.3 + 3.3 = 18$ cách gieo.

Suy ra số kết quả thuận lợi cho biến cố là $|\Omega_A| = 9 + 18 = 27.$

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Vậy xác suất cần tìm tính $P(A)=\frac{27}{36}=0,75.$

Câu 5: Gieo ba con súc sắc. Xác suất để số chấm xuất hiện trên ba con súc sắc như nhau là?

A. $\frac{12}{216}.$ **B.** $\frac{1}{216}.$ **C.** $\frac{6}{216}.$ **D.** $\frac{3}{216}.$

Lời giải

Chọn C

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=6.6.6=36.$

Gọi A là biến cố "Số chấm xuất hiện trên ba con súc sắc như nhau". Ta có các trường hợp thuận lợi cho biến cố A là $(1;1;1),\ (2;2;2),\ (3;3;3),\ \cdots,(6;6;6).$

Suy ra $|\Omega_A|=6.$

Vậy xác suất cần tính $P(A)=\frac{6}{216}.$

Câu 6: Một đội gồm 5 nam và 8 nữ. Lập một nhóm gồm 4 người hát tốp ca, tính xác suất để trong 4 người được chọn có ít nhất 3 nữ.

A. $\frac{70}{143}.$ **B.** $\frac{73}{143}.$ **C.** $\frac{56}{143}.$ **D.** $\frac{87}{143}.$

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu là chọn tùy ý 4 người từ 13 người.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=C_{13}^4=715.$

Gọi A là biến cố "4 người được chọn có ít nhất 3 nữ". Ta có hai trường hợp thuận lợi cho biến cố A như sau:

- **TH1:** Chọn 3 nữ và 1 nam, có $C_8^3C_5^1$ cách.
- **TH2:** Chọn cả 4 nữ, có C_8^4 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A|=C_8^3C_5^1+C_8^4=350.$

Vậy xác suất cần tính $P(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\frac{350}{715}=\frac{70}{143}.$

Câu 7: Một hộp có 5 viên bi xanh, 6 viên bi đỏ và 7 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi trong hộp, tính xác suất để 5 viên bi được chọn có đủ màu và số bi đỏ bằng số bi vàng.

A. $\frac{313}{408}.$ **B.** $\frac{95}{408}.$ **C.** $\frac{5}{102}.$ **D.** $\frac{25}{136}.$

Lời giải

Chọn B

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 5 viên bi từ hộp chứa 18 viên bi. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{18}^5 = 8568$.

Gọi A là biến cố "5 viên bi được chọn có đủ màu và số bi đỏ bằng số bi vàng". Ta có các trường hợp thuận lợi cho biến cố A là:

● **TH1:** Chọn 1 bi đỏ, 1 bi vàng và 3 bi xanh nên có $C_6^1.C_7^1.C_5^3$ cách.

● **TH2:** Chọn 2 bi đỏ, 2 bi vàng và 1 bi xanh nên có $C_6^2.C_7^2.C_5^1$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_6^1.C_7^1.C_5^3 + C_6^2.C_7^2.C_5^1 = 1995$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{1995}{8568} = \dfrac{95}{408}$.

Câu 8: Một hộp có 5 viên bi đỏ, 3 viên bi vàng và 4 viên bi xanh. Chọn ngẫu nhiên từ hộp 4 viên bị, tính xác suất để 4 viên bi được chọn có số bi đỏ lớn hơn số bi vàng và nhất thiết phải có mặt bi xanh.

A. $\dfrac{1}{12}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{16}{33}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp chứa 12 viên bi. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{12}^4 = 495$.

Gọi A là biến cố "4 viên bi được chọn có số bi đỏ lớn hơn số bi vàng và nhất thiết phải có mặt bi xanh". Ta có các trường hợp thuận lợi cho biến cố A là:

● **TH1:** Chọn 1 bi đỏ và 3 bi xanh nên có $C_5^1.C_4^3$ cách.

● **TH2:** Chọn 2 bi đỏ và 2 bi xanh nên có $C_5^2C_4^2$ cách.

● **TH3:** Chọn 3 bi đỏ và 1 bi xanh nên có $C_5^3.C_4^1$ cách.

● **TH4:** Chọn 2 bi đỏ, 1 bi vàng và 1 bi xanh nên có $C_5^2C_3^1C_4^1$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_5^1.C_4^3 + C_5^2C_4^2 + C_5^3.C_4^1 + C_5^2C_3^1C_4^1 = 240$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{240}{495} = \dfrac{16}{33}$.

Câu 9: Có 3 bó hoa. Bó thứ nhất có 8 hoa hồng, bó thứ hai có 7 bông hoa ly, bó thứ ba có 6 bông hoa huệ. Chọn ngẫu nhiên 7 hoa từ ba bó hoa trên để cắm vào lọ hoa, tính xác suất để trong 7 hoa được chọn có số hoa hồng bằng số hoa ly.

A. $\dfrac{3851}{4845}$. **B.** $\dfrac{1}{71}$. **C.** $\dfrac{36}{71}$. **D.** $\dfrac{994}{4845}$.

Lời giải

Chọn D

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 7 hoa từ ba bó hoa gồm 21 hoa.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{21}^7 = 116280$.

Gọi A là biến cố "7 hoa được chọn có số hoa hồng bằng số hoa ly". Ta có các trường hợp thuận lợi cho biến cố A là:

● **TH1:** Chọn 1 hoa hồng, 1 hoa ly và 5 hoa huệ nên có $C_8^1.C_7^1.C_6^5$ cách.

● **TH2:** Chọn 2 hoa hồng, 2 hoa ly và 3 hoa huệ nên có $C_8^2.C_7^2.C_6^3$ cách.

● **TH3:** Chọn 3 hoa hồng, 3 hoa ly và 1 hoa huệ nên có $C_8^3.C_7^3.C_6^1$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_8^1.C_7^1.C_6^5 + C_8^2.C_7^2.C_6^3 + C_8^3.C_7^3.C_6^1 = 23856$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{23856}{116280} = \dfrac{994}{4845}$.

Câu 10: Có 13 học sinh của một trường THPT đạt danh hiệu học sinh xuất sắc trong đó khối 12 có 8 học sinh nam và 3 học sinh nữ, khối 11 có 2 học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh bất kỳ để trao thưởng, tính xác suất để 3 học sinh được chọn có cả nam và nữ đồng thời có cả khối 11 và khối 12.

A. $\dfrac{57}{286}$. **B.** $\dfrac{24}{143}$. **C.** $\dfrac{27}{143}$. **D.** $\dfrac{229}{286}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 3 học sinh từ 13 học sinh.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{13}^3 = 286$.

Gọi A là biến cố "3 học sinh được chọn có cả nam và nữ đồng thời có cả khối 11 và khối 12". Ta có các trường hợp thuận lợi cho biến cố A là:

● **TH1:** Chọn 1 học sinh khối 11; 1 học sinh nam khối 12 và 1 học sinh nữ khối 12 nên có $C_2^1C_8^1C_3^1 = 48$ cách.

● **TH2:** Chọn 1 học sinh khối 11; 2 học sinh nữ khối 12 có $C_2^1C_3^2 = 6$ cách.

● **TH3:** Chọn 2 học sinh khối 11; 1 học sinh nữ khối 12 có $C_2^2C_3^1 = 3$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 48 + 6 + 3 = 57$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{57}{286}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Câu 11: Một chiếc hộp đựng 7 viên bi màu xanh, 6 viên bi màu đen, 5 viên bi màu đỏ, 4 viên bi màu trắng. Chọn ngẫu nhiên ra 4 viên bi, tính xác suất để lấy được ít nhất 2 viên bi cùng màu.

A. $\frac{2808}{7315}$. **B.** $\frac{185}{209}$. **C.** $\frac{24}{209}$. **D.** $\frac{4507}{7315}$.

Lời giải

Chọn B

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 4 viên bi từ 22 viên bi đã cho.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{22}^4 = 7315$.

Gọi A là biến cố "Lấy được 4 viên bi trong đó có ít nhất hai viên bi cùng màu". Để tìm số phần tử của A, ta đi tìm số phần tử của biến cố $\overline{A}$, với biến cố $\overline{A}$ là lấy được 4 viên bi trong đó không có hai viên bi nào cùng màu.

Suy ra số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là $|\Omega_{\overline{A}}| = C_7^1 C_6^1 C_5^1 C_4^1 = 840$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = |\Omega| - |\Omega_{\overline{A}}| = 6475$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{6475}{7315} = \frac{185}{209}$.

Câu 12: Một hộp đựng 8 quả cầu trắng, 12 quả cầu đen. Lần thứ nhất lấy ngẫu nhiên 1 quả cầu trong hộp, lần thứ hai lấy ngẫu nhiên 1 quả cầu trong các quả cầu còn lại. Tính xác suất để kết quả của hai lần lấy được 2 quả cầu cùng màu.

A. $\frac{14}{95}$. **B.** $\frac{48}{95}$. **C.** $\frac{47}{95}$. **D.** $\frac{81}{95}$.

Lời giải

Chọn C

Không gian mẫu là lấy 2 quả cầu trong hộp một cách lần lượt ngẫu nhiên.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{20}^1 . C_{19}^1 = 380$.

Gọi A biến cố "2 quả cầu được lấy cùng màu". Ta có các trường hợp thuận lợi cho biến cố A như sau:

● **TH1:** Lần thứ nhất lấy quả màu trắng và lần thứ hai cũng màu trắng.

Do đó trường hợp này có $C_8^1 . C_7^1$ cách.

● **TH2:** Lần thứ nhất lấy quả màu đen và lần thứ hai cũng màu đen.

Do đó trường hợp này có $C_{12}^1 . C_{11}^1$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_8^1 . C_7^1 + C_{12}^1 . C_{11}^1$.

Vậy xác suất cần tính $P(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\frac{C_8^1.C_7^1+C_{12}^1.C_{11}^1}{C_{20}^1.C_{19}^1}=\frac{47}{95}$.

Câu 13: Một hộp chứa 12 viên bi kích thước như nhau, trong đó có 5 viên bi màu xanh được đánh số từ 1 đến 5; có 4 viên bi màu đỏ được đánh số từ 1 đến 4 và 3 viên bi màu vàng được đánh số từ 1 đến 3. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp, tính xác suất để 2 viên bi được lấy vừa khác màu vừa khác số.

A. $\frac{8}{33}$. **B.** $\frac{14}{33}$. **C.** $\frac{29}{66}$. **D.** $\frac{37}{66}$.

Lời giải

Chọn D

Không gian mẫu là số sách lấy tùy ý 2 viên từ hộp chứa 12 viên bi.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=C_{12}^2=66$.

Gọi A là biến cố "2 viên bi được lấy vừa khác màu vừa khác số".

● Số cách lấy 2 viên bi gồm: 1 bi xanh và 1 bi đỏ là $4.4=16$ cách (do số bi đỏ ít hơn nên ta lấy trước, có 4 cách lấy bi đỏ. Tiếp tục lấy bi xanh nhưng không lấy viên trùng với số của bi đỏ nên có 4 cách lấy bi xanh).

● Số cách lấy 2 viên bi gồm: 1 bi xanh và 1 bi vàng là $3.4=12$ cách.

● Số cách lấy 2 viên bi gồm: 1 bi đỏ và 1 bi vàng là $3.3=9$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A|=16+12+9=37$.

Vậy xác suất cần tính $P(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\frac{37}{66}$.

Câu 14: Một hộp chứa 3 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 6 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 6 viên bi từ hộp, tính xác suất để 6 viên bi được lấy ra có đủ cả ba màu.

A. $\frac{810}{1001}$. **B.** $\frac{191}{1001}$. **C.** $\frac{4}{21}$. **D.** $\frac{17}{21}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 6 viên bi từ hộp chứa 14 viên bi. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=C_{14}^6=3003$.

Gọi A là biến cố "6 viên bi được lấy ra có đủ cả ba màu". Để tìm số phần tử của biến cố A ta đi tìm số phần tử của biến cố $\overline{A}$ tức là 6 viên bi lấy ra không có đủ ba màu như sau:

● **TH1:** Chọn 6 viên bi chỉ có một màu (chỉ chọn được màu vàng).

Do đó trường hợp này có $C_6^6=1$ cách.

● **TH2:** Chọn 6 viên bi có đúng hai màu xanh và đỏ, có C_8^6 cách.

Chọn 6 viên bi có đúng hai màu đỏ và vàng, có $C_{11}^6 - C_6^6$ cách.

Chọn 6 viên bi có đúng hai màu xanh và vàng, có $C_9^6 - C_6^6$ cách.

Do đó trường hợp này có $C_8^6 + \left(C_{11}^6 - C_6^6\right) + \left(C_9^6 - C_6^6\right) = 572$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là $\left|\Omega_{\overline{A}}\right| = 1 + 572 = 573$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $\left|\Omega_A\right| = \left|\Omega\right| - \left|\Omega_{\overline{A}}\right| = 3003 - 573 = 2430$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \dfrac{\left|\Omega_A\right|}{\left|\Omega\right|} = \dfrac{2430}{3003} = \dfrac{810}{1001}$.

Câu 15: Trong một hộp có 50 viên bi được đánh số từ 1 đến 50. Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi trong hộp, tính xác suất để tổng ba số trên 3 viên bi được chọn là một số chia hết cho 3.

A. $\dfrac{816}{1225}$. **B.** $\dfrac{409}{1225}$. **C.** $\dfrac{289}{1225}$. **D.** $\dfrac{936}{1225}$.

Lời giải

Chọn B

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp chứa 50 viên bi. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $\left|\Omega\right| = C_{50}^3 = 19600$.

Gọi A là biến cố "3 viên bi được chọn là một số chia hết cho 3". Trong 50 viên bi được chia thành ba loại gồm: 16 viên bi có số chia hết cho 3; 17 viên bi có số chia cho 3 dư 1 và 17 viên bi còn lại có số chia cho 3 dư 2. Để tìm số kết quả thuận lợi cho biến cố A, ta xét các trường hợp

- **TH1:** 3 viên bi được chọn cùng một loại, có $\left(C_{16}^3 + C_{17}^3 + C_{17}^3\right) = 1920$ cách.
- **TH2:** 3 viên bi được chọn có mỗi viên mỗi loại, có $C_{16}^1.C_{17}^1.C_{17}^1 = 4624$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $\left|\Omega_A\right| = \left(C_{16}^3 + C_{17}^3 + C_{17}^3\right) + C_{16}^1.C_{17}^1.C_{17}^1 = 6544$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \dfrac{\left|\Omega_A\right|}{\left|\Omega\right|} = \dfrac{6544}{19600} = \dfrac{409}{1225}$.

Câu 16: Cho tập hợp $A = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$. Gọi S là tập hợp các số có 3 chữ số khác nhau được lập thành từ các chữ số của tập A. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn có chữ số cuối gấp đôi chữ số đầu.

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** $\dfrac{23}{25}$. **C.** $\dfrac{2}{25}$. **D.** $\dfrac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi số cần tìm của tập S có dạng $\overline{abc}$. Trong đó $\begin{cases} a,b,c \in A \\ a \neq 0 \\ a \neq b; b \neq c; c \neq a \end{cases}$.

Khi đó

● Số cách chọn chữ số a có 5 cách chọn vì $a \neq 0$.

● Số cách chọn chữ số b có 5 cách chọn vì $b \neq a$.

● Số cách chọn chữ số c có 4 cách chọn vì $c \neq a$ và $c \neq b$.

Do đó tập S có $5.5.4 = 100$ phần tử.

Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên 1 số từ tập S.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{100}^1 = 100$.

Gọi X là biến cố "Số được chọn có chữ số cuối gấp đôi chữ số đầu". Khi đó ta có các bộ số là $\overline{1b2}$ hoặc $\overline{2b4}$ thỏa mãn biến cố X và cứ mỗi bộ thì b có 4 cách chọn nên có tất cả 8 số thỏa yêu cầu.

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X| = 8$.

Vậy xác suất cần tính $P(X) = \dfrac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \dfrac{8}{100} = \dfrac{2}{25}$.

Câu 17: Cho tập hợp $A = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập thành từ các chữ số của tập A. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn mà trong mỗi số luôn luôn có mặt hai chữ số chẵn và hai chữ số lẻ.

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** $\dfrac{3}{35}$. **C.** $\dfrac{17}{35}$. **D.** $\dfrac{18}{35}$.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử của tập S là $A_7^4 = 840$.

Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên 1 số từ tập S.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{840}^1 = 840$.

Gọi X là biến cố "Số được chọn luôn luôn có mặt hai chữ số chẵn và hai chữ số lẻ".

● Số cách chọn hai chữ số chẵn từ bốn chữ số $2; 4; 6; 8$ là $C_4^2 = 6$ cách.

● Số cách chọn hai chữ số lẻ từ ba chữ số $3; 5; 7$ là $C_3^2 = 3$ cách.

● Từ bốn chữ số được chọn ta lập số có bốn chữ số khác nhau, số cách lập tương ứng với một hoán vị của 4 phần tử nên có $4!$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X| = C_4^2.C_3^2.4! = 432$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Vậy xác suất cần tính $P(X)=\frac{|\Omega_X|}{|\Omega|}=\frac{432}{840}=\frac{18}{35}$.

Câu 18: Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau được lập thành từ các chữ số $1;2;3;4;6$. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác xuất để số được chọn chia hết cho 3.

A. $\frac{1}{10}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{1}{15}$.

Lời giải

Chọn C

Số phần tử của S là $A_5^3=60$.

Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên 1 số từ tập S.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=C_{60}^1=60$.

Gọi A là biến cố "Số được chọn chia hết cho 3". Từ 5 chữ số đã cho ta có 4 bộ gồm ba chữ số có tổng chia hết cho 3 là $(1;2;3)$, $(1;2;6)$, $(2;3;4)$ và $(2;4;6)$. Mỗi bộ ba chữ số này ta lập được $3!=6$ số thuộc tập hợp S.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A|=6.4=24$.

Vậy xác suất cần tính $P(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\frac{24}{60}=\frac{2}{5}$.

Câu 19: Cho tập hợp $A=\{1;2;3;4;5\}$. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có ít nhất 3 chữ số, các chữ số đôi một khác nhau được lập thành từ các chữ số thuộc tập A. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác xuất để số được chọn có tổng các chữ số bằng 10.

A. $\frac{1}{30}$. **B.** $\frac{3}{25}$. **C.** $\frac{22}{25}$. **D.** $\frac{2}{25}$.

Lời giải

Chọn B

Ta tính số phần tử thuộc tập S như sau:

- Số các số thuộc S có 3 chữ số là A_5^3.
- Số các số thuộc S có 4 chữ số là A_5^4.
- Số các số thuộc S có 5 chữ số là A_5^5.

Suy ra số phần tử của tập S là $A_5^3+A_5^4+A_5^5=300$.

Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên 1 số từ tập S.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=C_{300}^1=300$.

Gọi X là biến cố "Số được chọn có tổng các chữ số bằng 10". Các tập con của A có tổng số phần tử bằng 10 là $A_1=\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, $A_2=\{2;\ 3;\ 5\}$, $A_3=\{1;\ 4;\ 5\}$.

- Từ A_1 lập được các số thuộc S là $4!$.
- Từ A_2 lập được các số thuộc S là $3!$.
- Từ A_3 lập được các số thuộc S là $3!$.

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X|=4!+3!+3!=36.$

Vậy xác suất cần tính $P(X)=\dfrac{|\Omega_X|}{|\Omega|}=\dfrac{36}{300}=\dfrac{3}{25}.$

Câu 20: Một hộp đựng 10 chiếc thẻ được đánh số từ 0 đến 9. Lấy ngẫu nhiên ra 3 chiếc thẻ, tính xác suất để 3 chữ số trên 3 chiếc thẻ được lấy ra có thể **ghép thành một số chia** hết cho 5.

A. $\dfrac{8}{15}$. **B.** $\dfrac{7}{15}$. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu là số cách lấy ngẫu nhiên 3 chiếc thẻ từ 10 chiếc thẻ.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=C_{10}^3=120$.

Gọi A là biến cố "3 chữ số trên 3 chiếc thẻ được lấy ra có thể ghép thành một số chia hết cho 5". Để cho biến cố A xảy ra thì trong 3 thẻ lấy được phải có thẻ mang chữ số 0 hoặc chữ số 5. Ta đi tìm số phần tử của biến cố $\overline{A}$, tức 3 thẻ lấy ra không có thẻ mang chữ số 0 và cũng không có thẻ mang chữ số 5 là C_8^3 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A|=C_{10}^3-C_8^3$.

Vậy xác suất cần tính $P(A)=\dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\dfrac{C_{10}^3-C_8^3}{C_{10}^3}=\dfrac{8}{15}.$

Câu 21: Có 20 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 20. Chọn ngẫu nhiên ra 8 tấm thẻ, tính xác suất để có 3 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10.

A. $\dfrac{560}{4199}$. **B.** $\dfrac{4}{15}$. **C.** $\dfrac{11}{15}$. **D.** $\dfrac{3639}{4199}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu là cách chọn 8 tấm thể trong 20 tấm thẻ.

Suy ra số phần tử của không mẫu là $|\Omega|=C_{20}^8=25970$.

Gọi A là biến cố " 3 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10 ". Để tìm số phần tử của A ta làm như sau:

● Đầu tiên chọn 3 tấm thẻ trong 10 tấm thẻ mang số lẻ, có C_{10}^3 cách.

● Tiếp theo chọn 4 tấm thẻ trong 8 tấm thẻ mang số chẵn (không chia hết cho 10), có C_8^4 cách.

● Sau cùng ta chọn 1 trong 2 tấm thẻ mang số chia hết cho 10, có C_2^1 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_{10}^3.C_8^4.C_2^1 = 16800$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{C_{10}^3.C_8^4.C_2^1}{C_{20}^8} = \dfrac{560}{4199}$.

Câu 22: Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có hai chữ số. Chọn ngẫu nhiên đồng thời hai số từ tập hợp S. Tính xác suất để hai số được chọn có chữ số hàng đơn vị giống nhau.

A. $\dfrac{8}{89}$. **B.** $\dfrac{81}{89}$. **C.** $\dfrac{36}{89}$. **D.** $\dfrac{53}{89}$.

Lời giải

Chọn A

Số phần tử của tập S là $9.10 = 90$.

Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên 2 số từ tập S.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{90}^2 = 4005$.

Gọi X là biến cố " Số được chọn có chữ số hàng đơn vị giống nhau". Ta mô tả không gian của biến cố X nhưu sau:

● Có 10 cách chọn chữ số hàng đơn vị (chọn từ các chữ số $\{0;\ 1;\ 2;\ 3;...;\ 9\}$).

● Có C_9^2 cách chọn hai chữ số hàng chục (chọn từ các chữ số $\{1;\ 2;\ 3;...;\ 9\}$).

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X| = 10.C_9^2 = 360$.

Vậy xác suất cần tính $P(X) = \dfrac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \dfrac{360}{4005} = \dfrac{8}{89}$.

Câu 23: Gọi S là tập hợp các số tự nhiên gồm 9 chữ số khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để chọn được một số gồm 4 chữ số lẻ và chữ số 0 luôn đứng giữa hai chữ số lẻ (hai số hai bên chữ số 0 là số lẻ).

A. $\dfrac{49}{54}$. **B.** $\dfrac{5}{54}$. **C.** $\dfrac{1}{7776}$. **D.** $\dfrac{45}{54}$.

Lời giải

Chọn B

Số phần tử của tập S là $9.A_9^8$.

Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên 1 số từ tập S.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 9.A_9^8 = 3265920$.

Gọi X là biến cố "Số được chọn gồm 4 chữ số lẻ và chữ số 0 luôn đứng giữa hai chữ số lẻ". Do số 0 luôn đứng giữa 2 số lẻ nên số 0 không đứng ở vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng. Ta có các khả năng

● Chọn 1 trong 7 vị trí để xếp số 0, có C_7^1 cách.

● Chọn 2 trong 5 số lẻ và xếp vào 2 vị trí cạnh số 0 vừa xếp, có A_5^2 cách.

● Chọn 2 số lẻ trong 3 số lẻ còn lại và chọn 4 số chẵn từ $\{2; 4; 6; 8\}$ sau đó xếp 6 số này vào 6 vị trí trống còn lại có $C_3^2.C_4^4.6!$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X| = C_7^1.A_5^2.C_3^2.C_4^4.6! = 302400$.

Vậy xác suất cần tính $P(X) = \dfrac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \dfrac{C_7^1.A_5^2.C_3^2.C_4^4.6!}{9.A_9^8} = \dfrac{5}{54}$.

Câu 24: Giải bóng chuyền **VTV Cup** gồm 9 đội bóng tham dự, trong đó có 6 đội nước ngoài và 3 đội của Việt Nam. Ban tổ chức cho bốc thăm ngẫu nhiên để chia thành 3 bảng A, B, C và mỗi bảng có 3 đội. Tính xác suất để 3 đội bóng của Việt Nam ở 3 bảng khác nhau.

A. $\dfrac{3}{56}$. **B.** $\dfrac{19}{28}$. **C.** $\dfrac{9}{28}$. **D.** $\dfrac{53}{56}$.

Lời giải

Chọn C

Không gian mẫu là số cách chia tùy ý 9 đội thành 3 bảng.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_9^3.C_6^3.C_3^3$.

Gọi X là biến cố "3 đội bóng của Việt Nam ở 3 bảng khác nhau".

● Bước 1. Xếp 3 đội Việt Nam ở 3 bảng khác nhau nên có 3! cách.

● Bước 2. Xếp 6 đội còn lại vào 3 bảng A, B, C này có $C_6^2.C_4^2.C_2^2$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X| = 3!.C_6^2.C_4^2.C_2^2$.

Vậy xác suất cần tính $P(X) = \dfrac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \dfrac{3!.C_6^2.C_4^2.C_2^2}{C_9^3.C_6^3.C_3^3} = \dfrac{540}{1680} = \dfrac{9}{28}$.

Câu 25: Trong giải cầu lông kỷ niệm ngày truyền thống học sinh sinh viên có 8 người tham gia trong đó có hai bạn Việt và Nam. Các vận động viên được chia làm hai bảng A và B, mỗi bảng gồm 4 người. Giả sử việc chia bảng thực hiện bằng cách bốc thăm ngẫu nhiên, tính xác suất để cả 2 bạn Việt và Nam nằm chung 1 bảng đấu.

A. $\dfrac{6}{7}$. **B.** $\dfrac{5}{7}$. **C.** $\dfrac{4}{7}$. **D.** $\dfrac{3}{7}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Lời giải

Chọn D

Không gian mẫu là số cách chia tùy ý 8 người thành 2 bảng.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_8^4.C_4^4$.

Gọi X là biến cố "2 bạn Việt và Nam nằm chung 1 bảng đấu".

● Bước 1. Xếp 2 bạn Việt và Nam nằm chung 1 bảng đấu nên có C_2^1 cách.

● Bước 2. Xếp 6 bạn còn lại vào 2 bảng A, B cho đủ mỗi bảng là 4 bạn thì có $C_6^2.C_4^4$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X| = C_2^1.C_6^2.C_4^4$.

Vậy xác suất cần tính $P(X) = \dfrac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \dfrac{C_8^4.C_4^4}{C_2^1.C_6^2.C_4^4} = \dfrac{3}{7}$.

Câu 26: Một bộ đề thi toán học sinh giỏi lớp 12 mà mỗi đề gồm 5 câu được chọn từ 15 câu dễ, 10 câu trung bình và 5 câu khó. Một đề thi được gọi là "Tốt" nếu trong đề thi có cả ba câu dễ, trung bình và khó, đồng thời số câu dễ không ít hơn 2. Lấy ngẫu nhiên một đề thi trong bộ đề trên. Tìm xác suất để đề thi lấy ra là một đề thi "Tốt".

A. $\dfrac{941}{1566}$. **B.** $\dfrac{2}{5}$. **C.** $\dfrac{4}{5}$. **D.** $\dfrac{625}{1566}$.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{30}^5 = 142506$.

Gọi A là biến cố "Đề thi lấy ra là một đề thi "Tốt"".

Vì trong một đề thi "Tốt" có cả ba câu dễ, trung bình và khó, đồng thời số câu dễ không ít hơn 2 nên ta có các trường hợp sau đây thuận lợi cho biến cố A.

● Đề thi gồm 3 câu dễ, 1 câu trung bình và 1 câu khó: có $C_{15}^3C_{10}^1C_5^1$ đề.

● Đề thi gồm 2 câu dễ, 2 câu trung bình và 1 câu khó: có $C_{15}^3C_{10}^1C_5^1$ đề.

● Đề thi gồm 2 câu dễ, 1 câu trung bình và 2 câu khó: có $C_{15}^2C_{10}^1C_5^2$ đề.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_{15}^3C_{10}^1C_5^1 + C_{15}^3C_{10}^1C_5^1 + C_{15}^2C_{10}^1C_5^2 = 56875$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{56875}{142506} = \dfrac{625}{1566}$.

Câu 27: Trong một kỳ thi vấn đáp thí sinh A phải đứng trước ban giám khảo chọn ngẫu nhiên 3 phiếu câu hỏi từ một thùng phiếu gồm 50 phiếu câu hỏi, trong đó có 4 cặp phiếu câu hỏi mà mỗi cặp phiếu có nội dung khác nhau từng đôi một và trong mỗi một cặp phiếu có nội

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

dung giống nhau. Tính xác suất để thí sinh A chọn được 3 phiếu câu hỏi có nội dung khác nhau.

A. $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{12}{1225}$. **C.** $\frac{4}{7}$. **D.** $\frac{1213}{1225}$.

Lời giải

Chọn D

Không gian mẫu là số cách chọn tùy ý 3 phiếu câu hỏi từ 50 phiếu câu hỏi.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega_A| = C_{50}^3$.

Gọi X là biến cố "Thí sinh A chọn được 3 phiếu câu hỏi khác nhau".

Để tìm số phần tử của X ta tìm số phần tử của biến cố $\overline{X}$, lúc này cần chọn được 1 cặp trong 4 cặp phiếu có câu hỏi giống nhau và chọn 1 phiếu trong 48 phiếu còn lại.

Suy ra số phần tử của biến cố $\overline{X}$ là $|\Omega_{\overline{X}}| = C_4^1.C_{48}^1$.

Vậy xác suất cần tính $P(X) = \frac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \frac{|\Omega| - |\Omega_{\overline{X}}|}{|\Omega|} = \frac{C_{50}^3 - C_4^1.C_{48}^1}{C_{50}^3} = \frac{1213}{1225}$.

Câu 28: Có 6 học sinh lớp 11 và 3 học sinh lớp 12 được xếp ngẫu nhiên vào 9 ghế thành một dãy. Tính xác suất để xếp được 3 học sinh lớp 12 xen kẽ giữa 6 học sinh lớp 11.

A. $\frac{5}{12}$. **B.** $\frac{7}{12}$. **C.** $\frac{1}{1728}$. **D.** $\frac{5}{72}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu là số cách sắp xếp tất cả 9 học sinh vào một ghế dài.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 9!$.

Gọi A là biến cố "Xếp 3 học sinh lớp 12 xen kẽ giữa 6 học sinh lớp 11". Ta mô tả khả năng thuận lợi của biến cố A như sau:

● Đầu tiên xếp 6 học sinh lớp 11 thành một dãy, có $6!$ cách.

● Sau đó xem 6 học sinh này như 6 vách ngăn nên có 7 vị trí để xếp 3 học sinh lớp 12 (gồm 5 vị trí giữa 6 học sinh và 2 vị trí hai đầu). Do đó có A_7^3 cách xếp 3 học sinh lớp 12.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 6!.A_7^3$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{6!.A_7^3}{9!} = \frac{5}{12}$.

Câu 29: Đội tuyển học sinh giỏi của một trường THPT có 8 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Trong buổi lễ trao phần thưởng, các học sinh trên được xếp thành một hàng ngang. Tính xác suất để khi xếp sao cho 2 học sinh nữ không đứng cạnh nhau.

A. $\frac{653}{660}$. **B.** $\frac{7}{660}$. **C.** $\frac{41}{55}$. **D.** $\frac{14}{55}$.

Lời giải

Chọn D

Không gian mẫu là số cách sắp xếp tất cả 12 học sinh thành một hàng ngang. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=12!$.

Gọi A là biến cố "Xếp các học sinh trên thành một hàng ngang mà 2 học sinh nữ không đứng cạnh nhau". Ta mô tả khả năng thuận lợi của biến cố A như sau:

● Đầu tiên xếp 8 học sinh nam thành một hàng ngang, có $8!$ cách.

● Sau đó xem 8 học sinh này như 8 vách ngăn nên có 9 vị trí để xếp 4 học sinh nữ thỏa yêu cầu bài toán (gồm 7 vị trí giữa 8 học sinh và 2 vị trí hai đầu). Do đó có A_9^4 cách xếp 4 học sinh nữ.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A|=8!.A_9^4$.

Vậy xác suất cần tính $P(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\frac{8!A_9^4}{12!}=\frac{14}{55}$.

Câu 30: Có 3 bì thư giống nhau lần lượt được đánh số thứ tự từ 1 đến 3 và 3 con tem giống nhau lần lượt đánh số thứ tự từ 1 đến 3. Dán 3 con tem đó vào 3 bì thư sao cho không có bì thư nào không có tem. Tính xác suất để lấy ra được 2 bì thư trong 3 bì thư trên sao cho mỗi bì thư đều có số thứ tự giống với số thứ tự con tem đã dán vào nó.

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Không gian mẫu là số cách dán 3 con tem trên 3 bì thư, tức là hoán vị của 3 con tem trên 3 bì thư. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=3!=6$.

Gọi A là biến cố "2 bì thư lấy ra có số thứ tự giống với số thứ tự con tem đã dán vào nó". Thế thì bì thư còn lại cũng có số thứ tự giống với số thứ tự con tem đã dán vào nó. Trường hợp này có 1 cách duy nhất.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A|=1$.

Vậy xác suất cần tính $P(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\frac{1}{6}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Câu 31: Trong thư viện có 12 quyển sách gồm 3 quyển Toán giống nhau, 3 quyển Lý giống nhau, 3 quyển Hóa giống nhau và 3 quyển Sinh giống nhau. Có bao nhiêu cách xếp thành một dãy sao cho 3 quyển sách thuộc cùng 1 môn không được xếp liền nhau?

A. 16800. **B.** 1680. **C.** 140. **D.** 4200.

Lời giải

Chọn A

Xếp 3 cuốn sách Toán kề nhau. Xem 3 cuốn sách Toán là 3 vách ngăn, giữa 3 cuốn sách Toán có 2 vị trí trống và thêm hai vị trí hai đầu, tổng cộng có 4 vị trí trống.

Bước 1. Chọn 3 vị trí trống trong 4 vị trí để xếp 3 cuốn Lý, có C_4^3 cách.

Bước 2. Giữa 6 cuốn Lý và Toán có 5 vị trí trống và thêm 2 vị trí hai đầu, tổng cộng có 7 vị trí trống. Chọn 3 vị trí trong 7 vị trí trống để xếp 3 cuốn Hóa, có C_7^3 cách.

Bước 3. Giữa 9 cuốn sách Toán, Lý và Hóa đã xếp có 8 vị trí trống và thêm 2 vị trí hai đầu, tổng cộng có 10 vị trí trống. Chọn 3 vị trí trong 10 vị trí trống để xếp 3 cuốn Sinh, có C_{10}^3 cách. Vậy theo quy tắc nhân có $C_4^3.C_7^3.C_{10}^3=16800$ cách.

Câu 32: Xếp 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ vào một bàn tròn 10 ghế. Tính xác suất để không có hai học sinh nữ ngồi cạnh nhau.

A. $\frac{37}{42}$. **B.** $\frac{5}{42}$. **C.** $\frac{5}{1008}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Cố định 1 vị trí cho một học sinh nam (hoặc nữ), đánh dấu các ghế còn lại từ 1 đến 9.

Không gian mẫu là hoán vị 9 học sinh (còn lại không cố định) trên 9 ghế đánh dấu.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=9!$.

Gọi A là biến cố "không có hai học sinh nữ ngồi cạnh nhau". Ta mô tả khả năng thuận lợi của biến cố A như sau:

● Đầu tiên ta cố định 1 học sinh nam, 5 học sinh nam còn lại có 5! cách xếp.

● Ta xem 6 học sinh nam như 6 vách ngăn trên vòng tròn, thế thì sẽ tạo ra 6 ô trống để ta xếp 4 học sinh nữ vào (mỗi ô trống chỉ được xếp 1 học sinh nữ). Do đó có A_6^4 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A|=5!.A_6^4$.

Vậy xác suất cần tính $P(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\frac{5!.A_6^4}{9!}=\frac{5}{42}$.

Câu 33: Có 4 hành khách bước lên một đoàn tàu gồm 4 toa. Mỗi hành khách độc lập với nhau và chọn ngẫu nhiên một toa. Tính xác suất để 1 toa có 3 người, 1 toa có 1 người, 2 toa còn lại không có ai.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{3}{16}$. **C.** $\frac{13}{16}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Không gian mẫu là số cách sắp xếp 4 hành khách lên 4 toa tàu. Vì mỗi hành khách có 4 cách chọn toa nên có 4^4 cách xếp.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 4^4$.

Gọi A là biến cố "1 toa có 3 người, 1 toa có 1 người, 2 toa còn lại không có ai". Để tìm số phần tử của A, ta chia làm hai giai đoạn như sau:

● **Giai đoạn thứ nhất.** Chọn 3 hành khách trong 4 hành khách, chọn 1 toa trong 4 toa và xếp lên toa đó 3 hành khách vừa chọn. Suy ra có $C_4^3.C_4^1$ cách.

● **Giai đoạn thứ hai.** Chọn 1 toa trong 3 toa còn lại và xếp lên toa đó 1 một hành khách còn lại. Suy ra có C_3^1 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_4^3.C_4^1.C_3^1$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{C_4^3.C_4^1.C_3^1}{4^4} = \frac{48}{4^4} = \frac{3}{16}$.

Câu 34: Có 8 người khách bước ngẫu nhiên vào một cửa hàng có 3 quầy. Tính xác suất để 3 người cùng đến quầy thứ nhất.

A. $\frac{10}{13}$. **B.** $\frac{3}{13}$. **C.** $\frac{4769}{6561}$. **D.** $\frac{1792}{6561}$.

Lời giải

Chọn D

Không gian mẫu là số cách sắp xếp 8 người khách vào 3 quầy. Vì mỗi người khách có 3 cách chọn quầy nên có 3^8 khả năng xảy ra.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 3^8$.

Gọi A là biến cố "Có 3 người cùng đến quầy thứ nhất, 5 người còn lại đến quầy thứ hai hoặc ba". Để tìm số phần tử của A, ta chia làm hai giai đoạn như sau:

● **Giai đoạn thứ nhất.** Chọn 3 người khách trong 8 người khách và cho đến quầy thứ nhất, có C_8^3 cách.

● **Giai đoạn thứ hai.** Còn lại 5 người khách xếp vào 2 quầy. Mỗi người khách có 2 cách chọn quầy. Suy ra có 2^5 cách xếp.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_8^3.2^5$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{C_8^3.2^5}{3^8} = \frac{1792}{6561}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Câu 35: Trong một buổi liên hoan có 10 cặp nam nữ, trong đó có 4 cặp vợ chồng. Chọn ngẫu nhiên 3 người để biểu diễn một tiết mục văn nghệ. Tính xác suất để 3 người được chọn không có cặp vợ chồng nào.

A. $\frac{94}{95}$. **B.** $\frac{1}{95}$. **C.** $\frac{6}{95}$. **D.** $\frac{89}{95}$.

Lời giải

Chọn D

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 3 người trong 20 người.

Suy ra số phần tử không gian mẫu là $|\Omega| = C_{20}^3 = 1140$.

Gọi A là biến cố "3 người được chọn không có cặp vợ chồng nào". Để tìm số phần tử của A, ta đi tìm số phần tử của biến cố $\overline{A}$, với biến cố $\overline{A}$ là 3 người được chọn luôn có 1 cặp vợ chồng.

● Chọn 1 cặp vợ chồng trong 4 cặp vợ chồng, có C_4^1 cách.

● Chọn thêm 1 người trong 18 người, có C_{18}^1 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là $|\Omega_{\overline{A}}| = C_4^1.C_{18}^1 = 72$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 1140 - 72 = 1068$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{1068}{1140} = \frac{89}{95}$.

Câu 36: Một lớp học có 40 học sinh trong đó có 4 cặp anh em sinh đôi. Trong buổi họp đầu năm thầy giáo chủ nhiệm lớp muốn chọn ra 3 học sinh để làm cán sự lớp gồm lớp trưởng, lớp phó và bí thư. Tính xác suất để chọn ra 3 học sinh làm cán sự lớp mà không có cặp anh em sinh đôi nào.

A. $\frac{64}{65}$. **B.** $\frac{1}{65}$. **C.** $\frac{1}{256}$. **D.** $\frac{255}{256}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 3 học sinh trong 40 học sinh.

Suy ra số phần tử không gian mẫu là $|\Omega| = C_{40}^3 = 9880$.

Gọi A là biến cố "3 học sinh được chọn không có cặp anh em sinh đôi nào". Để tìm số phần tử của A, ta đi tìm số phần tử của biến cố $\overline{A}$, với biến cố $\overline{A}$ là 3 học sinh được chọn luôn có 1 cặp anh em sinh đôi.

● Chọn 1 cặp em sinh đôi trong 4 cặp em sinh đôi, có C_4^1 cách.

● Chọn thêm 1 học sinh trong 38 học sinh, có C_{38}^1 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là $|\Omega_{\overline{A}}| = C_4^1.C_{38}^1 = 152$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 9880 - 152 = 9728$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{9728}{9880} = \frac{64}{65}$.

Câu 37: Một người có 10 đôi giày khác nhau và trong lúc đi du lịch vội vã lấy ngẫu nhiên 4 chiếc. Tính xác suất để trong 4 chiếc giày lấy ra có ít nhất một đôi.

A. $\frac{3}{7}$. **B.** $\frac{13}{64}$. **C.** $\frac{99}{323}$. **D.** $\frac{224}{323}$.

Lời giải

Chọn C

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 4 chiếc giày từ 20 chiếc giày.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{20}^4 = 4845$.

Gọi A là biến cố "4 chiếc giày lấy ra có ít nhất một đôi". Để tìm số phần tử của biến cố A, ta đi tìm số phần tử của biến cố $\overline{A}$, với biến cố $\overline{A}$ là 4 chiếc giày được chọn không có đôi nào.

● Số cách chọn 4 đôi giày từ 10 đôi giày là C_{10}^4.

● Mỗi đôi chọn ra 1 chiếc, thế thì mỗi chiếc có C_2^1 cách chọn. Suy ra 4 chiếc có $\left(C_2^1\right)^4$ cách chọn.

Suy ra số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là $|\Omega_{\overline{A}}| = C_{10}^4.\left(C_2^1\right)^4 = 3360$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 4845 - 3360 = 1485$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{1485}{4845} = \frac{99}{323}$.

Câu 38: Một trường THPT có 10 lớp 12, mỗi lớp cử 3 học sinh tham gia vẽ tranh cổ động. Các lớp tiến hành bắt tay giao lưu với nhau (các học sinh cùng lớp không bắt tay với nhau). Tính số lần bắt tay của các học sinh với nhau, biết rằng hai học sinh khác nhau ở hai lớp khác nhau chỉ bắt tay đúng 1 lần.

A. 405. **B.** 435. **C.** 30. **D.** 45.

Lời giải

Chọn A

Mỗi lớp cử ra 3 học sinh nên 10 lớp cử ra 30 học sinh.

Suy ra số lần bắt tay là C_{30}^2 (bao gồm các học sinh cùng lớp bắt tay với nhau).

Số lần bắt tay của các học sinh học cùng một lớp là $10.C_3^2$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Vậy số lần bắt tay của các học sinh với nhau là $C_{30}^2 - 10.C_3^2 = 405$.

Câu 39: Có 5 đoạn thẳng có độ dài lần lượt là $2cm$, $4cm$, $6cm$, $8cm$ và $10cm$. Lấy ngẫu nhiên 3 đoạn thẳng trong 5 đoạn thẳng trên, tính xác suất để 3 đoạn thẳng lấy ra lập thành một tam giác.

A. $\frac{3}{10}$. **B.** $\frac{9}{10}$. **C.** $\frac{7}{10}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu là số cách lấy 3 đoạn thẳng từ 5 đoạn thẳng.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_5^3 = 10$.

Gọi A là biến cố "3 đoạn thẳng lấy ra lập thành một tam giác". Để ba đoạn thẳng tạo thành một tam giác chỉ có các trường hợp: $(4cm, 6cm, 8cm)$ hoặc $(6cm, 8cm, 10cm)$ hoặc $(4cm, 8cm, 10cm)$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 3$.

Vậy xác suất cần tìm $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{3}{10}$.

Câu 40: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Ở góc phần tư thứ nhất ta lấy 2 điểm phân biệt; cứ thế ở các góc phần tư thứ hai, thứ ba, thứ tư ta lần lượt lấy $3, 4, 5$ điểm phân biệt (các điểm không nằm trên các trục tọa độ). Trong 14 điểm đó ta lấy 2 điểm bất kỳ. Tính xác suất để đoạn thẳng nối hai điểm đó cắt hai trục tọa độ.

A. $\frac{68}{91}$. **B.** $\frac{23}{91}$. **C.** $\frac{8}{91}$. **D.** $\frac{83}{91}$.

Lời giải

Chọn B

Không gian mẫu là số cách chọn 2 điểm bất kỳ trong 14 điểm đã cho.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{14}^2 = 91$.

Gọi A là biến cố "Đoạn thẳng nối 2 điểm được chọn cắt hai trục tọa độ". Để xảy ra biến cố A thì hai đầu đoạn thẳng đó phải ở góc phần tư thứ nhất và thứ ba hoặc phần tư thứ hai và thứ tư.

- Hai đầu đoạn thẳng ở góc phần tư thứ nhất và thứ ba, có $C_2^1 C_4^1$ cách.
- Hai đầu đoạn thẳng ở góc phần tư thứ hai và thứ tư, có $C_3^1 C_5^1$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_2^1 C_4^1 + C_3^1 C_5^1 = 23$.

Vậy xác suất cần tính $P(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\frac{23}{91}$.

Câu 41: Một lớp học có 30 học sinh gồm có cả nam và nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh để tham gia hoạt động của Đoàn trường. Xác suất chọn được 2 nam và 1 nữ là $\frac{12}{29}$. Tính số học sinh nữ của lớp.

A. 16. **B.** 14. **C.** 13. **D.** 17.

Lời giải

Chọn B

Gọi số học sinh nữ của lớp là $n\ \left(n\in\mathbb{N}^*,n\le 28\right)$.

Suy ra số học sinh nam là $30-n$.

Không gian mẫu là chọn bất kì 3 học sinh từ 30 học sinh.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=C_{30}^3$.

Gọi A là biến cố "Chọn được 2 học sinh nam và 1 học sinh nữ".

● Chọn 2 nam trong $30-n$ nam, có C_{30-n}^2 cách.

● Chọn 1 nữ trong n nữ, có C_n^1 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A|=C_{30-n}^2.C_n^1$.

Do đó xác suất của biến cố A là $P(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\frac{C_{30-n}^2.C_n^1}{C_{30}^3}$.

Theo giả thiết, ta có $P(A)=\frac{12}{29}\Leftrightarrow\frac{C_{30-n}^2.C_n^1}{C_{30}^3}=\frac{12}{29}\longrightarrow n=14.$

Vậy số học sinh nữ của lớp là 14 học sinh.

Câu 42: Một chi đoàn có 3 đoàn viên nữ và một số đoàn viên nam. Cần lập một đội thanh niên tình nguyện (TNTN) gồm 4 người. Biết xác suất để trong 4 người được chọn có 3 nữ bằng $\frac{2}{5}$ lần xác suất 4 người được chọn toàn nam. Hỏi chi đoàn đó có bao nhiêu đoàn viên.

A. 9. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

Lời giải

Chọn A

Gọi số đoàn viên trong chi đoàn đó là $n\ \left(n\ge 7,n\in\mathbb{N}^*\right)$.

Suy ra số đoàn viên nam trong chi đoàn là $n-3$.

Xác suất để lập đội TNTN trong đó có 3 nữ là $\frac{C_3^3.C_{n-3}^1}{C_n^4}$.

Xác suất để lập đội TNTN có toàn nam là $\frac{C_{n-3}^4}{C_n^4}$.

Theo giả thiết, ta có $\frac{C_3^3.C_{n-3}^1}{C_n^4}=\frac{2}{5}.\frac{C_{n-3}^4}{C_n^4}\Leftrightarrow C_{n-3}^1=\frac{2}{5}.C_{n-3}^4\longrightarrow n=9.$

Vậy cho đoàn có 9 đoàn viên.

Câu 43: Một hộp có 10 phiếu, trong đó có 2 phiếu trúng thưởng. Có 10 người lần lượt lấy ngẫu nhiên mỗi người 1 phiếu. Tính xác suất người thứ ba lấy được phiếu trúng thưởng.

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Không gian mẫu là mỗi người lấy ngẫu nhiên 1 phiếu.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=10!$.

Gọi A là biến cố "Người thứ ba lấy được phiếu trúng thưởng". Ta mô tả khả năng thuận lợi của biến cố A như sau:

- Người thứ ba có $C_2^1=2$ khả năng lấy được phiếu trúng thưởng.
- 9 người còn lại có số cách lấy phiếu là $9!$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A|=2.9!$.

Vậy xác suất cần tính $P(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\frac{2.9!}{10!}=\frac{1}{5}$.

Câu 44: Trong kỳ thi THPT Quốc Gia, mỗi lớp thi gồm 24 thí sinh được sắp xếp vào 24 bàn khác nhau. Bạn Nam là một thí sinh dự thi, bạn đăng ký 4 môn thi và cả 4 lần thi đều thi tại một phòng duy nhất. Giả sử giám thị xếp thí sinh vào vị trí một cách ngẫu nhiên, tính xác xuất để trong 4 lần thi thì bạn Nam có đúng 2 lần ngồi cùng vào một vị trí.

A. $\frac{253}{1152}$. **B.** $\frac{899}{1152}$. **C.** $\frac{4}{7}$. **D.** $\frac{26}{35}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu là số cách ngẫu nhiên chỗ ngồi trong 4 lần thi của Nam.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=24^4$.

Gọi A là biến cố "4 lần thi thì bạn Nam có đúng 2 lần ngồi cùng vào một vị trí". Ta mô tả không gian của biến cố A như sau:

● Trong 4 lần có 2 lần trùng vị trí, có C_4^2 cách.

● Giả sử lần thứ nhất có 24 cách chọn chỗ ngồi, lần thứ hai trùng với lần thứ nhất có 1 cách chọn chỗ ngồi. Hai lần còn lại thứ ba và thứ tư không trùng với các lần trước và cũng không trùng nhau nên có 23.22 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_4^2.24.23.22$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{C_4^2.24.23.22}{24^4} = \dfrac{C_4^2.23.22}{24^3} = \dfrac{253}{1152}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

CHƯƠNG 3. DÃY SỐ- CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

BÀI 1. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Để chứng minh những mệnh đề liên quan đến số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$ là đúng với mọi n mà không thể thử trực tiếp thì có thể làm như sau:

• Bước 1. Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với $n=1$.

• Bước 2. Giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì $n=k\geq 1$ (gọi là giả thiết quy nạp), chứng minh rằng nó cũng đúng với $n=k+1$.

Đó là phương pháp quy nạp toán học, hay còn gọi tắt là phương pháp quy nạp.

Một cách đơn giản, ta có thể hình dung như sau: Mệnh đề đã đúng khi $n=1$ nên theo kết quả ở bước 2, nó cũng đúng với $n=1+1=2$. Vì nó đúng với $n=2$ nên lại theo kết quả ở bước \$2,\$ nó đúng với $n=2+1=3,...$ Bằng cách ấy, ta có thể khẳng định rằng mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$.

Chú ý: Nếu phải chứng minh mệnh đề là đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên) thì:

• Bước 1, ta phải kiểm tra mệnh đề đúng với $n=p$;

• Bước 2, giả thiết mệnh đề đúng với số tự nhiên bất kì $n=k\geq p$ và phải chứng minh rằng nó cũng đúng với $n=k+1$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Chứng minh đẳng thức

Ví dụ 1 . Chứng minh rằng: $1.2+2.5+3.8+...+n\left(3n-1\right)=n^2\left(n+1\right), vôùi\, n\in N^*$ (1)

Lời giải

- Bước 1: Với n=1, vế trái bằng 1.2=2, vế phải bằng 2. hệ thức (1) đúng
- Bước 2: Đặt vế trái bằng S_n.

Giả sử hệ thức (1) đúng voi $n=k\geq 1$, tức là :

$S_k=1.2+2.5+...+k(3k-1)=k^2(k+1)$(giả thiết quy nạp)

Ta phải chứng minh rằng (1) cũng đúng với n=k+1, tức là :

$$S_{k+1}=\left(k+1\right)^2\left(k+2\right)$$

Thậ vậy, từ giả thiết quy nạp ta có:

$S_{k+1}=S_k+\left(k+1\right)\left[3\left(k+1-1\right)\right]=k^2\left(k+1\right)+\left(k+1\right)\left(3k+2\right)$

$=(k+1)(k^2+3k+2)=\left(k+1\right)^2\left(k+2\right)$

Vậy hệ thức (1) đúng với mọi n $\in \mathbb{N}^*$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng: $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Lời giải

Bước 1: Với $n=1$ thì vế trái bằng $1^2=1$, vế phải bằng $\dfrac{1(1+1)(2.1+1)}{6}=1$.

Vậy đẳng thức đúng với $n=1$.

- Bước 2: Giả sử đẳng thức đúng với $n=k\geq 1$, nghĩa là ta có

$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Ta phải chứng minh đẳng thức cũng đúng với $n=k+1$, tức là chứng minh

$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\dfrac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có

$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$.

Mà $\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Suy ra $1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Do đó đẳng thức đúng với n=k+1. Suy ra có điều phải chứng minh.

Ngoài kết quả nêu trong ví du 1, chúng ta có thể đề cập đến các kết quả tương tự như sau:

1) $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2) $1^3+2^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

3) $1^4+2^4+\ldots+n^4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30}$.

4) $1^5+2^5+\ldots+n^5=\dfrac{n^2(n+1)^2\left(2n^2+2n-1\right)}{12}$

5) $1.2.3+23.4+\ldots+n(n+1)(n+2)$

Dạng 2. Chứng minh bất đẳng thức

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với mọi $n\geq 3$ ta có: $3^n>n^2+4n+5$ (1)

Lời giải

Với n=3, vế trái bằng 27, còn vế phải bằng 26.

Bất đẳng thức (4) đúng.

Giải sử bất đẳng thức (4) đúng với n=k ≥ 3. tức là:

$$3^k > k^2 + 4k + 5. \quad (1')$$

Ta phải chứng minh nó cũng đúng với n=k+1, tức là:

$$3^{k+1} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5$$

Thật vậy, nhân hai vế của bất đẳng thức (1') với 3 ta có:

$$3^{k+1} > 3k^2 + 12k + 15 = (k+1)^2 + 4(k+1) + 5 + 2k^2 + 6k + 5$$

Vì $2k^2 + 6k + 5 > 0 \, nên \quad 3^{k+1} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5$

Đăng thức (1) đã được chứng minh

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với mọi $n \geq 4$ ta có: $2^{n+1} > n^2 + 3n \quad (1)$

Lời giải

- Bước 1: Với $n = 4$ thì vễ trái bằng $2^{4+1} = 2^5 = 32$, còn vế phải bằng $4^2 + 3.4 = 28$.

Do $32 > 28$ nên bất đẳng thức đúng với $n = 4$.

- Bước 2: Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 4$, nghĩa là $2^{k+1} > k^2 + 3k$.

Ta phải chứng minh bất đẳng thức cũng đúng với $n = k+1$, tức là phải chứng minh $2^{(k+1)+1} > (k+1)^2 + 3(k+1)$ hay $2^{k+2} > k^2 + 5k + 4$.

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có $2^{k+1} > k^2 + 3k$.

Suy ra $2.2^{k+1} > 2(k^2 + 3k)$ hay $2^{k+2} > 2k^2 + 6k$.

Mặt khác $2k^2 + 6k - (k^2 + 5k + 4) = k^2 + k - 4 \geq 4^2 + 4 - 4 = 16$, với mọi $k \geq 4$.

Do đó $2^{k+2} > 2(k^2 + 3k) > k^2 + 5k + 4$ hay bất đẳng thức đúng với $n = k+1$.

Suy ra bất đẳng thức được chứng minh.

Dạng 3. Chứng minh một tính chất

Ví dụ. Chứng minh rằng: $n^7 - n$ chia heát cho 7 vôùi moïi $n \in N^*$

Giải

Đặt $A_n = n^7 - n.$

Khi n=1 thì $A_1 = 0$ chia hết cho 7

Giả sử đã có: $A_k = (k^7 - k) \vdots 7$

Thật vây, áp dụng công thức nhị thức Niu-ton ta có:

$$A_{k+1} = (k+1)^7 - (k+1) = k^7 + 7k^6 + 21k^5 + 35k^4 + 35k^3 + 21k^2 + 7k + 1 - k - 1$$
$$= k^7 - k + 7(k^6 + 3k^5 + 5k^4 + 5k^3 + 3k^2 + k)$$

Theo giả thiết quy nạp thì $A_k = k^7 - k$ chia hết cho 7, do đó $A_{k+1} \vdots 7$

Vậy $n^7 - n$ chia hết cho 7 với mọi $n \in N^*$

Dạng 4. Một số bài toán khác

Ví dụ. Chứng minh rằng: $\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

Giải

Đặt vế trái của hệ thức (1) bằng C_n.

Khi n=1, vế trái bằng $\sqrt{2}$, vế phải bằng $2\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$; hệ thức (1) đúng

Giả sử hệ thức (1) đúng với $n=k\geq 1$, tức là $C_k=2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$

ta phải chứng minh: $C_{k+1}=2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có:

$$C_{k+1}=\sqrt{2+C_k}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}=\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}\left(\text{ vì } \cos\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)$$

Vậy hệ thức (1) đã được chứng minh

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Dùng quy nạp chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n\geq p$ (p là một số tự nhiên). Ở bước 1 (bước cơ sở) của chứng minh quy nạp, bắt đầu với n bằng:

A. $n=1.$ **B.** $n=p.$ **C.** $n>p.$ **D.** $n\geq p.$

Lời giải.

Chọn B

Câu 2: Dùng quy nạp chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n\geq p$ (p là một số tự nhiên). Ở bước 2 ta giả thiết mệnh đề $A(n)$ đúng với $n=k$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $k>p.$ **B.** $k\geq p.$ **C.** $k=p.$ **D.** $k<p.$

Lời giải.

Chọn B

Câu 3: Khi sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n\geq p$ (p là một số tự nhiên), ta tiến hành hai bước:

- Bước 1, kiểm tra mệnh đề $A(n)$ đúng với $n=p.$
- Bước 2, giả thiết mệnh đề $A(n)$ đúng với số tự nhiên bất kỳ $n=k\geq p$ và phải chứng minh rằng nó cũng đúng với $n=k+1.$

Trong hai bước trên:

A. Chỉ có bước 1 đúng. **B.** Chỉ có bước 2 đúng.

C. Cả hai bước đều đúng. **D.** Cả hai bước đều sai.

Lời giải.

Chọn C

Câu 4: Một học sinh chứng minh mệnh đề "8^n+1 chia hết cho $7, \forall n\in\mathbb{N}^*$" $(*)$ như sau:

- Giả sử $(*)$ đúng với $n=k$, tức là 8^k+1 chia hết cho 7.
- Ta có: $8^{k+1}+1=8\left(8^k+1\right)-7$, kết hợp với giả thiết 8^k+1 chia hết cho 7 nên suy ra được $8^{k+1}+1$ chia hết cho 7. Vậy đẳng thức $(*)$ đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Học sinh trên chứng minh đúng.

B. Học sinh chứng minh sai vì không có giả thiết qui nạp.

C. Học sinh chứng minh sai vì không dùng giả thiết qui nạp.

D. Học sinh không kiểm tra bước 1 (bước cơ sở) của phương pháp qui nạp.

Lời giải.

Chọn D

Thiếu bước 1 là kiểm tra với $n=1$, khi đó ta có $8^1+1=9$ không chi hết cho 7.

Câu 5: Cho $S_n=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+...+\dfrac{1}{n.\left(n+1\right)}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_3=\dfrac{1}{12}$. **B.** $S_2=\dfrac{1}{6}$. **C.** $S_2=\dfrac{2}{3}$. **D.** $S_3=\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Chọn C

Lưu ý rằng S_n là tổng n số hạng đầu tiên nên.

Do đó với $n=2$, ta có $S_2=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}=\dfrac{2}{3}$.

Câu 6: Cho $S_n=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+...+\dfrac{1}{n.\left(n+1\right)}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n=\dfrac{n-1}{n}$. **B.** $S_n=\dfrac{n}{n+1}$. **C.** $S_n=\dfrac{n+1}{n+2}$. **D.** $S_n=\dfrac{n+2}{n+3}$.

Lời giải.

Chọn B

Cách trắc nghiệm: Ta tính được $S_1=\frac{1}{2}$, $S_2=\frac{2}{3}$, $S_3=\frac{3}{4}$. Từ đó ta thấy quy luật là từ nhỏ hơn mẫu đúng 1 đơn vị.

Cách tự luận. Ta có $S_1=\frac{1}{2}$, $S_2=\frac{2}{3}$, $S_3=\frac{3}{4}\longrightarrow$ dự đoán $S_n=\frac{n}{n+1}$.

• Với $n=1$, ta được $S_1=\frac{1}{1.2}=\frac{1}{1+1}$: đúng.

• Giả sử mệnh đề đúng khi $n=k\ \left(k\ge 1\right)$, tức là $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{k\left(k+1\right)}=\frac{k}{k+1}$.

• Ta có $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{k\left(k+1\right)}=\frac{k}{k+1}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{k\left(k+1\right)}+\frac{1}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{k\left(k+1\right)}+\frac{1}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}=\frac{k^2+2k+1}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{k\left(k+1\right)}+\frac{1}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

Suy ra mệnh đề đúng với $n=k+1$.

Câu 7: Cho $S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{\left(2n-1\right)\cdot\left(2n+1\right)}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n=\frac{n-1}{2n-1}$. **B.** $S_n=\frac{n}{2n+1}$. **C.** $S_n=\frac{n}{3n-2}$. **D.** $S_n=\frac{n+2}{2n+5}$.

Lời giải.

Chọn B

Cho $\begin{cases} n=1\longrightarrow S_1=\frac{1}{3} \\ n=2\longrightarrow S_2=\frac{6}{15} \\ n=3\longrightarrow S_3=\frac{3}{7} \end{cases}$. Kiểm tra các đáp án chỉ cho B thỏa.

Câu 8: Cho $P_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ với $n\ge 2$ và $n\in\mathbb{N}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P_n=\frac{n+1}{n+2}$. **B.** $P_n=\frac{n-1}{2n}$. **C.** $P_n=\frac{n+1}{n}$. **D.** $P_n=\frac{n+1}{2n}$.

Lời giải.

Chọn D

Vì $n \ge 2$ nên ta cho $\begin{cases} n=2 \longrightarrow P_2 = \left(1-\dfrac{1}{2^2}\right) = \dfrac{3}{4} \\ n=3 \longrightarrow P_3 = \left(1-\dfrac{1}{2^2}\right).\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right) = \dfrac{2}{3} \end{cases}$.

Kiểm tra các đáp án chỉ cho D thỏa.

Câu 9: Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, hệ thức nào sau đây là **sai**?

A. $1+2+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

B. $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$.

C. $1^2+2^2+...+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

D. $2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2 = \dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Lời giải.

Chọn D

Bằng cách thử với $n=1$, $n=2$, $n=3$ là ta kết luận được.

Câu 10: Xét hai mệnh đề sau:

I) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, số n^3+3n^2+5n chia hết cho 3.

II) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ I. **B.** Chỉ II. **C.** Không có. **D.** Cả I và II.

Lời giải.

Chọn A

- Ta chứng minh I) đúng.

Với $n=1$, ta có $u_1 = 1^3+3.1^2+5.1 = 9 \vdots 3$: đúng.

Giả sử mệnh đề đúng khi $n=k$ $(k \ge 1)$, tức là $u_k = k^3+3k^2+5k \vdots 3$.

Ta có $u_{k+1} = (k^3+3k^2+5k)+3k^2+9k+9 = u_k+3(k^2+3k+3) \vdots 3$. Kết thúc chứng minh.

- Mệnh đề II) sai vì với $n=1$, ta có $\text{VT} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{12}{24} > \dfrac{13}{24}$: Vô lý.

BÀI 2. DÃY SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – ĐỊNH NGHĨA

1. Định nghĩa dãy số

Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số). Kí hiệu:

$$u:\ \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u(n).$$

Người ta thường viết dãy số dưới dạng khai triển $u_1,\ u_2,\ u_3,\ ...,\ u_n,\ ...,$

trong đó $u_n = u(n)$ hoặc viết tắt là (u_n), và gọi u_1 là số hạng đầu, u_n là số hạng thứ n và là số hạng tổng quát của dãy số.

2. Định nghĩa dãy số hữu hạn

Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1, 2, 3, ..., m\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn.

Dạng khai triển của nó là $u_1,\ u_2,\ u_3,\ ...,\ u_n,$ trong đó u_1 là số hạng đầu, u_m là số hạng cuối.

II –CÁCH CHO MỘT DÃY SỐ

1. Dãy số cho bằng công thức của số hạng tổng quát

Ví dụ 1. Cho dãy số (x_n) với $x_n = \dfrac{n}{3^{n+1}}$.

Dãy số cho bằng cách này có ưu điểm là chúng ta có thể xác định được ngay số hạng bất kỳ của dãy số. Chẳng hạn, $x_{10} = \dfrac{10}{3^{11}} = \dfrac{10}{177147}$.

2. Dãy số cho bằng phương pháp mô tả

3. Dãy số cho bằng phương pháp truy hồi

Cách cho một dãy số bằng phương pháp truy hồi, tức là:

a) Cho số hạng đầu (hay vài số hạng đầu).

b) Cho hệ thức truy hồi, tức là hệ thức biểu thị số hạng thứ n qua số hạng (hay vài số hạng) đứng trước nó.

Ví dụ 2. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = 3a_n - 7, \forall n \geq 1$.

III – DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM VÀ DÃY SỐ BỊ CHẶN

1. Dãy số tăng, dãy số giảm

Định nghĩa 1

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Chú ý: Không phải mọi dãy số đều tăng hoặc giảm. Chẳng hạn, dãy số (u_n) với $u_n = (-3)^n$ tức là dãy $-3, 9, -27, 81, \ldots$ không tăng cũng không giảm.

Ví dụ 3. a) Cho dãy số (x_n) với $x_n = n^2 - 2n + 3$ là một dãy số tăng.

Chứng minh: Ta có $x_{n+1} = (n+1)^2 - 2(n+1) + 3 = n^2 + 2$.

Suy ra $x_{n+1} - x_n = (n^2 + 2) - (n^2 - 2n + 3) = 2n - 1 > 0, \forall n \geq 1$ hay $x_{n+1} > x_n, \forall n \geq 1$.

Vậy (x_n) là một dãy số tăng.

b) Dãy số (y_n) với $y_n = \dfrac{n+2}{5^n}$ là một dãy số giảm.

Chứng minh:

Cách 1: Ta có $y_{n+1} = \dfrac{n+3}{5^{n+1}}$. Suy ra $y_{n+1} - y_n = \dfrac{n+3}{5^{n+1}} - \dfrac{n+2}{5^n} = -\dfrac{4n+7}{5^{n+1}} < 0, \forall n \geq 1$ hay $y_{n+1} < y_n, \forall n \geq 1$. Vậy (y_n) là một dãy số giảm.

Cách 2: Với $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có $y_n > 0$ nên ta xét tỉ số $\dfrac{y_{n+1}}{y_n}$.

Ta có $y_{n+1} = \dfrac{n+3}{5^{n+1}}$ nên $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \dfrac{n+3}{5(n+2)} < 1, \forall n \geq 1$. Vậy (y_n) là một dãy số giảm.

c) Dãy số (z_n) với $z_n = (-1)^n$ không phải là một dãy số tăng cũng không phải là một dãy số giảm vì $z_{n+1} - z_n = (-1)^{n+1} - (-1)^n = -2(-1)^n$ không xác định được dương hay âm. Đây là dãy số đan dấu.

NHƯ VẬY:

Để chứng minh dãy số (b_n) là dãy số giảm hoặc dãy số tăng, chúng ta thường sử dụng một trong 2 hướng sau đây:

(1): Lập hiệu $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$. Sử dụng các biến đổi đại sốvà các kết quả đã biết để chỉ ra $\Delta u_n > 0$ (dãy số tăng) hoặc $\Delta u_n < 0$ (dãy số giảm)

(2): Nếu $u_n > 0, \forall n \geq 1$ thì ta có thể lập tỉ số $T_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Sử dụng các biến đổi đại số và các kết quả đã biết để chỉ ra $T_n > 1$ (dãy số tăng), $T_n < 1$ (dãy số giảm).

2. Dãy số bị chặn

Định nghĩa 2

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \geq m, \forall n \in N^*$

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m, M sao cho $m \le u_n \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm số hạng của dãy số

1. Phương pháp

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho dãy số (u_n), tìm u_n

a) $(u_n): \begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$; b) $(u_n): \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 4u_n \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$u_1 = 5$

$u_2 = 5 + 1.3$

$u_3 = 5 + 2.3$

$u_4 = 5 + 3.3$

...

$u_n = 5 + (n-1).3$ (*)

b) Ta có

$u_1 = 3$

$u_2 = 3.4$

$u_3 = 3.4^2$

$u_4 = 3.4^3$

...

$u_n = 3.4^{n-1}$ (*)

Ví dụ 2. Cho dãy số (u_n), tìm u_n

a) $(u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$; b) $(u_n): \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2} \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$u_1 = 1 = 2^2 - 3$

$u_2 = 5 = 2^3 - 3$

$u_3 = 13 = 2^4 - 3$

$u_4 = 29 = 2^5 - 3$

...

$u_n = 2^{n+1} - 3$(*)

b) Ta có

$u_1 = 3 = \sqrt{3^2 + 0}$

$u_2 = \sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1}$

$u_3 = \sqrt{11} = \sqrt{3^2 + 2}$

$u_4 = \sqrt{12} = \sqrt{3^2 + 3}$

...

$u_n = \sqrt{3^3 + n - 1}\ (*)$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \frac{-n}{n+1}$. Năm số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $-\frac{1}{2};-\frac{2}{3};-\frac{3}{4};-\frac{4}{5};-\frac{5}{6}$.

B. $-\frac{2}{3};-\frac{3}{4};-\frac{4}{5};-\frac{5}{6};-\frac{6}{7}$.

C. $\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{5}{6}$.

D. $\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{5}{6};\frac{6}{7}$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có $u_1 = -\frac{1}{2}; u_2 = -\frac{2}{3}; u_3 = -\frac{3}{4}; u_4 = -\frac{4}{5}; u_5 = -\frac{5}{6}$.

Nhận xét: (i) Dùng MTCT chức năng CALC để kiểm tra (tính) nhanh.

(ii) Ta thấy dãy (u_n) là dãy số âm nên loại các phương án C, D . Đáp án đúng là A hoặc B. Ta chỉ cần kiểm tra một số hạng nào đó mà cả hai đáp án khác nhau là được. Chẳng hạng kiểm tra u_1 thì thấy $u_1 = -\frac{1}{2}$

Câu 2: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \frac{n}{3^n - 1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8}$.

B. $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{3}{26}$.

C. $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{16}$.

D. $\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4}$.

Lời giải.

Chọn B

Dùng MTCT chức năng CALC: ta có

$u_1 = \frac{1}{2}; u_2 = \frac{2}{3^2 - 1} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}; u_3 = \frac{3}{3^3 - 1} = \frac{3}{26}$.

Câu 3: Cho dãy số (u_n), biết $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ với $n \geq 0$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó là lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $-1;2;5.$ **B.** $1;4;7.$ **C.** $4;7;10.$ **D.** $-1;3;7.$

Lời giải.

Chọn A

Ta có $u_1 = -1; u_2 = u_1 + 3 = 2; u_3 = u_2 + 3 = 5.$

Nhận xét: (i) Dùng chức năng "lặp" của MTCT để tính:

Nhập vào màn hình: $X = X + 3.$

Bấm CALC và cho $X = -1$ (ứng với $u_1 = -1$)

Để tính u_n cần bấm "=" ra kết quả liên tiếp $n-1$ lần. Ví dụ để tính u_2 ta bấm "=" ra kết quả lần đầu tiên, bấm "=" ra kết quả thứ hai chính là u_3,...

(ii) Vì $u_1 = -1$ nên loại các đáp án B, C. Còn lại các đáp án A, C; để biết đáp án nào ta chỉ cần kiểm tra u_2 (vì u_2 ở hai đáp án là khác nhau): $u_2 = u_1 + 3 = 2$

Câu 4: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{2n^2 - 1}{n^2 + 3}$. Tìm số hạng u_5.

A. $u_5 = \dfrac{1}{4}.$ **B.** $u_5 = \dfrac{17}{12}.$ **C.** $u_5 = \dfrac{7}{4}.$ **D.** $u_5 = \dfrac{71}{39}.$

Lời giải.

Chọn C

Thế trực tiếp hoặc dùng chức năng CALC: $u_5 = \dfrac{2.5^2 - 1}{5^2 + 3} = \dfrac{49}{28} = \dfrac{7}{4}.$

Câu 5: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = (-1)^n .2n.$ Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $u_1 = -2.$ **B.** $u_2 = 4.$ **C.** $u_3 = -6.$ **D.** $u_4 = -8.$

Lời giải.

Chọn D

Thay trực tiếp hoặc dùng chức năng CALC:

$$u_1 = -2.1 = -2; u_2 = (-1)^2 .2.2 = 4, u_3 = (-1)^3 2.3 = -6; u_4 = (-1)^4 2.4 = 8.$$

Nhận xét: Dễ thấy $u_n > 0$ khi n chẵn và ngược lại nên đáp án D sai.

Câu 6: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = (-1)^n . \dfrac{2^n}{n}$. Tìm số hạng u_3.

A. $u_3=\frac{8}{3}$. **B.** $u_3=2$. **C.** $u_3=-2$. **D.** $u_3=-\frac{8}{3}$.

Lời giải.

Chọn D

Thay trực tiếp hoặc dùng chức năng CALC: $u_3=(-1)^3.\frac{2^3}{3}=-\frac{8}{3}$.

Câu 7: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases}u_1=2\\ u_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n+1)\end{cases}$. Tìm số hạng u_4.

A. $u_4=\frac{5}{9}$. **B.** $u_4=1$. **C.** $u_4=\frac{2}{3}$. **D.** $u_4=\frac{14}{27}$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có

$$u_2=\frac{1}{3}(u_1+1)=\frac{1}{3}(2+1)=1;\ u_3=\frac{1}{3}(u_2+1)=\frac{2}{3};\ u_4=\frac{1}{3}(u_3+1)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}+1\right)=\frac{5}{9}.$$

Nhận xét: Có thể dùng chức năng "lặp" trong MTCT để tính nhanh.

Câu 8: Cho dãy (u_n) xác định bởi $\begin{cases}u_1=3\\ u_{n+1}=\frac{u_n}{2}+2\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $u_2=\frac{5}{2}$. **B.** $u_3=\frac{15}{4}$. **C.** $u_4=\frac{31}{8}$. **D.** $u_5=\frac{63}{16}$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có $\begin{cases}u_2=\frac{u_1}{2}+2=\frac{3}{2}+2=\frac{7}{2};\ u_3=\frac{u_2}{2}+2=\frac{7}{4}+2=\frac{15}{4}\\ u_4=\frac{u_3}{2}+2=\frac{15}{8}+2=\frac{31}{8};\ u_5=\frac{u_4}{2}+2=\frac{31}{16}+2=\frac{63}{16}.\end{cases}$

Nhận xét: Dùng chức năng "lặp" trong MTCT để tính nhanh.

Câu 9: Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\frac{n+1}{2n+1}$. Số $\frac{8}{15}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 8. **B. 6.** **C. 5.** **D. 7.**

Lời giải.

Chọn D

Ta cần tìm n sao cho $u_n=\dfrac{n+1}{2n+1}=\dfrac{8}{15}\Leftrightarrow 15n+15=16n+8\Leftrightarrow n=7.$

Nhận xét: Có thể dùng chức năng CALC để kiểm tra nhanh.

Câu 10: Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\dfrac{2n+5}{5n-4}$. Số $\dfrac{7}{12}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 8. **B. 6.** **C. 9.** **D. 10.**

Lời giải.

Chọn A

Dùng chức năng "lặp" để kiểm tra đáp án. Hoặc giải cụ thể như sau:

$u_n=\dfrac{2n+5}{5n-4}=\dfrac{7}{12}\Leftrightarrow 24n+60=35n-28\Leftrightarrow 11n=88\Leftrightarrow n=8.$

Câu 11: Cho dãy số (u_n), biết $u_n=2^n$. Tìm số hạng u_{n+1}.

A. $u_{n+1}=2^n.2.$ **B.** $u_{n+1}=2^n+1.$ **C.** $u_{n+1}=2(n+1).$ **D.** $u_{n+1}=2^n+2.$

Lời giải.

Chọn A

Thay n bằng $n+1$ trong công thức u_n ta được: $u_{n+1}=2^{n+1}=2.2^n$.

Câu 12: Cho dãy số (u_n), biết $u_n=3^n$. Tìm số hạng u_{2n-1}.

A. $u_{2n-1}=3^2.3^n-1.$ **B.** $u_{2n-1}=3^n.3^{n-1}.$ **C.** $u_{2n-1}=3^{2n}-1.$ **D.** $u_{2n-1}=3^{2(n-1)}.$

Lời giải.

Chọn B

Ta có $u_n=3^n\xrightarrow{n\leftrightarrow 2n-1}u_{2n-1}=3^{2n-1}=3^n.3^{n-1}.$

Câu 13: Cho dãy số (u_n), với $u_n=5^{n+1}$. Tìm số hạng u_{n-1}.

A. $u_{n-1}=5^{n-1}.$ **B.** $u_{n-1}=5^n.$ **C.** $u_{n-1}=5.5^{n+1}.$ **D.** $u_{n-1}=5.5^{n-1}.$

Lời giải.

Chọn B

$u_n=5^{n+1}\xrightarrow{n\leftrightarrow n-1}u_{n-1}=5^{(n-1)+1}=5^n.$

Câu 14: Cho dãy số (u_n), với $u_n=\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}$. Tìm số hạng u_{n+1}.

A. $u_{n+1}=\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2(n+1)+3}.$ **B.** $u_{n+1}=\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2(n-1)+3}.$

C. $u_{n+1}=\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{2n+3}$. **D.** $u_{n+1}=\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$.

Lời giải.

Chọn D

$u_n=\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}\xrightarrow{n\leftrightarrow n+1}u_{n+1}=\left(\dfrac{(n+1)-1}{(n+1)+1}\right)^{2(n+1)+3}=\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$.

Câu 15: Dãy số có các số hạng cho bởi: $0;\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{4};\dfrac{4}{5};\cdots$. có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

A. $u_n=\dfrac{n+1}{n}$. **B.** $u_n=\dfrac{n}{n+1}$. **C.** $u_n=\dfrac{n-1}{n}$. **D.** $u_n=\dfrac{n^2-n}{n+1}$.

Lời giải.

Chọn C

Vì $u_1=0$ nên loại các đáp án A và B. Ta kiểm tra $u_2=\dfrac{1}{2}$ ở các đáp án C, D:

Xét đáp án C: $u_n=\dfrac{n-1}{n}\longrightarrow u_2=\dfrac{1}{2}$

Xét đáp án D: $u_n=\dfrac{n^2-n}{n+1}\longrightarrow u_2=\dfrac{2}{3}\neq\dfrac{1}{2}\longrightarrow$ loại

Nhận xét: $u_1=0=\dfrac{1-1}{1};u_2=\dfrac{1}{2}=\dfrac{2-1}{2};u_3=\dfrac{2}{3}=\dfrac{3-1}{3},\ldots$ nên đoán $u_n=\dfrac{n-1}{n}$.

Câu 16: Dãy số có các số hạnh cho bởi: $-1;1;-1;1;-1;\cdots$. có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

A. $u_n=1$. **B.** $u_n=-1$. **C.** $u_n=(-1)^n$. **D.** $u_n=(-1)^{n+1}$.

Lời giải.

Chọn C

Vì dãy số đa cho không phải là dãy hằng nên loại các đáp án A và B. Ta kiểm tra $u_1=-1$ ở các đáp án C, D:

Xét đáp án C: $u_n=(-1)^n\longrightarrow u_1=-1$

Xét đáp án D: $u_n=(-1)^{n+1}\longrightarrow u_1=(-1)^2=1\neq-1\longrightarrow$ loại D.

Câu 17: Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-2;0;2;4;6;\cdots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là công thức nào dưới đây?

A. $u_n=-2n$. **B.** $u_n=n-2$. **C.** $u_n=-2(n+1)$. **D.** $u_n=2n-4$.

Lời giải.

Chọn D

Kiểm tra $u_1=-2$ ta loại các đáp án B, C. Ta kiểm tra $u_2=0$ ở các đáp án A, D:

Xét đáp án A: $u_n=2n\Rightarrow u_2=4\neq 0\longrightarrow$ loại A.

Xét đáp án D: $u_n=2n-4=2.2-4=0$

Nhận xét: Dãy $2;4;6;...$ có công thức là $2n\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ nên dãy $-2;0;2;4;6;\cdots$. có được bằng cách "tịnh tiến" $2n$ sang trái 4 đơn vị, tức là $2n-4$.

Câu 18: Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}=2u_n\end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n=n^{n-1}$. **B.** $u_n=2^n$. **C.** $u_n=2^{n+1}$. **D.** $u_n=2$.

Lời giải.

Chọn B

Từ công thức $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}=2u_n\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}u_1=2\\u_2=2u_1=2.2=4\\u_3=2u_2=2.4=8\end{cases}$.

Xét đáp án A với $n=1\longrightarrow u_1=1^{1-1}=1^0=1\longrightarrow$ A loại.

Xét đáp án B, ta thấy đều thỏa mãn.

Xét đáp án C với $n=1\longrightarrow u_1=2^{1+1}=2^2=4\longrightarrow$ C loại.

Dễ thấy đáp án D không thỏa mãn.

Câu 19: Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases}u_1=\dfrac{1}{2}\\u_{n+1}=u_n-2\end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n=\dfrac{1}{2}+2(n-1)$. **B.** $u_n=\dfrac{1}{2}-2(n-1)$. **C.** $u_n=\dfrac{1}{2}-2n$. **D.** $u_n=\dfrac{1}{2}+2n$.

Lời giải.

Chọn B

Từ công thức $\begin{cases}u_1=\dfrac{1}{2}\\u_{n+1}=u_n-2\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}u_1=\dfrac{1}{2}\\u_2=u_1-2=\dfrac{1}{2}-2=-\dfrac{3}{2}\\u_3=u_2-2=-\dfrac{3}{2}-2=-\dfrac{7}{2}\end{cases}$.

Xét đáp án A với $n=2\longrightarrow u_2=\frac{1}{2}+2(2-1)=\frac{5}{2}\longrightarrow$ A loại.

Xét đáp án B, ta thấy đều thỏa mãn.

Xét đáp án C với $n=2\longrightarrow u_2=\frac{1}{2}-2.2=\frac{1}{2}-4=-\frac{7}{2}\longrightarrow$ C loại.

Xét đáp án D với $n=1\longrightarrow u_1=\frac{1}{2}+2.1=\frac{5}{2}\longrightarrow$ D loại.

Câu 20: Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}-u_n=2n-1\end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n=2+(n-1)^2$.

B. $u_n=2+n^2$.

C. $u_n=2+(n+1)^2$.

D. $u_n=2-(n-1)^2$.

Lời giải.

Chọn A

Kiểm tra $u_1=2$ ta loại các đáp án B và C. Ta có $u_2=u_1+2.1-1=3.$

Xét đáp án A: $u_n=2+(n-1)^2\longrightarrow u_2=3$

Hoặc kiểm tra: $u_{n+1}-u_n=n^2-(n-1)^2=2n-1.$

Xét đáp án D: $u_n=2-(n-1)^2\longrightarrow u_2=1\longrightarrow$ loại D. Hoặc kiểm tra:

$u_{n+1}-u_n=(n-1)^2-n^2=-2n+1\neq 2n-1.$

Câu 21: Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=u_n+n^2\end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n=1+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

B. $u_n=1+\frac{n(n-1)(2n+2)}{6}$.

C. $u_n=1+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$.

D. $u_n=1+\frac{n(n+1)(2n-2)}{6}$.

Lời giải.

Chọn C

Kiểm tra $u_1=1$ ta loại đáp án A. Ta có $u_2=u_1+1^2=2.$

Xét đáp án B: $u_n=1+\frac{n(n-1)(2n+2)}{6}\longrightarrow u_2=1+\frac{2.1.6}{6}=3\neq 2\longrightarrow$ B loại.

Xét đáp án C: $u_n=u_n=1+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\longrightarrow u_2=1+\frac{2.1.3}{6}=2$

Xét đáp án D: $u_n = 1+\frac{n(n+1)(2n-2)}{6}. \longrightarrow u_2 = 1+\frac{2.3.2}{6} = 3 \neq 2 \longrightarrow$ D loại.

Câu 22: Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = \frac{-n+1}{n}$. **B.** $u_n = \frac{n+1}{n}$. **C.** $u_n = -\frac{n+1}{n}$. **D.** $u_n = -\frac{n}{n+1}$.

Lời giải.

Chọn C

Kiểm tra $u_1 = -2$ ta loại các đáp án A, B. Ta có $u_2 = -2 - \frac{1}{u_1} = -\frac{3}{2}$.

Xét đáp án C: $u_n = -\frac{n+1}{n} \longrightarrow u_2 = -\frac{3}{2}$

Xét đáp án D : $u_n = -\frac{n}{n+1} \longrightarrow u_2 = -\frac{2}{3} \longrightarrow$ D loại.

Câu 23: Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 1+n$. **B.** $u_n = 1-n$. **C.** $u_n = 1+(-1)^{2n}$. **D.** $u_n = n$.

Lời giải.

Chọn D

Kiểm tra $u_1 = 1$ ta loại đáp án A, B và C

Câu 24: Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 2(3^n)$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Công thức truy hồi của dãy số đó là:

A. $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 6u_{n-1},\ n>1 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 3u_{n-1},\ n>1 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = 3u_{n-1},\ n>1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = 6u_{n-1},\ n>1 \end{cases}$.

Lời giải.

Chọn B

Vì $u_1 = 2.3^1 = 6$ nên ta loại các đáp án C và D. Ta có $u_2 = 2.3^2 = 18$.

Xét đáp án A: $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 6u_{n-1},\ n>1 \end{cases} \longrightarrow u_2 = 6u_1 = 6.6 = 36 \longrightarrow$ A loại.

Xét đáp án B: $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 3u_{n-1},\ n > 1 \end{cases} \longrightarrow u_2 = 3u_1 = 3.6 = 18$

Câu 25: Cho dãy số (a_n), được xác định $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n,\ n \geq 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{93}{16}$.

B. $a_{10} = \frac{3}{512}$.

C. $a_{n+1} + a_n = \frac{9}{2^n}$.

D. $a_n = \frac{3}{2^n}$.

Lời giải.

Chọn D

Ta có $a_1 = 3; a_2 = \frac{u_1}{2}; a_3 = \frac{u_2}{2} = \frac{u_1}{2^2}; a_4 = \frac{u_3}{2} = \frac{u_1}{2^3}, \ldots \longrightarrow u_n = \frac{u_1}{2^{n-1}} = \frac{3}{2^{n-1}}$ nên suy ra đáp án D sai.

Xét đáp án A:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 3\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right) = 3.\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{93}{16} \longrightarrow \text{A đúng.}$$

Xét đáp án B: $a_{10} = \frac{3}{2^9} = \frac{3}{512} \longrightarrow$ B đúng.

Xét đáp án **C.** $a_{n+1} + a_n = \frac{3}{2^n} + \frac{3}{2^{n-1}} = \frac{3 + 3.2}{2^n} = \frac{9}{2^n} \longrightarrow$ C đúng.

Dạng 2. Tính tăng giảm và bị chặn của dãy số

1. Phương pháp

Xét tính tăng giảm

- (u_n) là dãy số tăng $\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n,\ \forall n \in N^*$.

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0,\ \forall n \in N^* \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1,\ \forall n \in N^*\ (u_n > 0).$$

- (u_n) là dãy số giảm $\Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$ với $\forall n \in N^*$.

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0,\ \forall n \in N^* \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1,\ \forall n \in N^*\ (u_n > 0).$$

Dãy số bị chặn

- (u_n) là dãy số bị chăn trên $\Leftrightarrow \exists M \in R: u_n \leq M,\ \forall n \in N^*$.
- (u_n) là dãy số bị chặn dưới $\Leftrightarrow \exists m \in R: u_n \geq m,\ \forall n \in N^*$.

- (u_n) là dãy số bị chặn $\Leftrightarrow \exists m, M \in R: m \le u_n \le M, \forall n \in N^*$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) biết

a) $u_n = \dfrac{2n+1}{3n-2}$; b) $u_n = \dfrac{2-n}{\sqrt{n}}$

Hướng dẫn giải

a) $u_n = \dfrac{2n+1}{3n-2} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{\frac{7}{3}}{3(n+1)-2}$; $u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy dãy giảm

b)

$u_n = \dfrac{2-n}{\sqrt{n}} = \dfrac{2}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$

$u_{n+1} - u_n = \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right)\left(\dfrac{2}{\sqrt{n(n+1)}} + 1\right) < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy giảm

Ví dụ 2. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) biết

a) $u_n = \dfrac{5^n}{3^{n+1}}$; b) $u_n = \dfrac{2^{n+2}}{\sqrt{n}}$.

Hướng dẫn giải

a) Xét $u_{n+1} - u_n = (-1)^{n+1}.\dfrac{2n+5}{(n+3)(n+2)} = \begin{cases} \dfrac{2n+5}{(n+3)(n+2)} > 0, n = 2k+1 \\ \dfrac{2n+5}{(n+3)(n+2)} < 0, n = 2k \end{cases}$

Vậy dãy đã cho không tăng không giảm

b) Xét $u_{n+1} - u_n = (-1)^{n+1}.\dfrac{1}{(n+4)(n+5)} = \begin{cases} \dfrac{1}{(n+4)(n+5)} > 0, n = 2k+1 \\ \dfrac{1}{(n+4)(n+5)} < 0, n = 2k \end{cases}$

Vậy dãy đã cho không tăng không giảm

Ví dụ 3. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n)

a) $u_n = \dfrac{n^2+2n}{n^2+n+1}$; b) $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$

Hướng dẫn giải

a) $u_n = \dfrac{n^2+2n}{n^2+n+1} = 1 + \dfrac{n-1}{n^2+n+1}$

Ta có:

$0 \le \dfrac{n-1}{n^2+n+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra: $1 \le u_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số đã cho bị chặn

b) $u_n=\dfrac{n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1}\Rightarrow 0<u_n<\dfrac{1}{2},\forall n\in\mathbb{N}^*$

Ví dụ 4. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n)

a) $u_n=(-1)^n\cos\dfrac{\pi}{2n}$; b) $u_n=\dfrac{4\sin n+4\cos\left(3n^2+1\right)}{5n^2+n}$

Hướng dẫn giải

a) $u_n=(-1)^n\cos\dfrac{\pi}{2n}\Rightarrow|u_n|=\left|(-1)^n\cos\dfrac{\pi}{2n}\right|=\left|\cos\dfrac{\pi}{2n}\right|\le 1$

$\Rightarrow -1\le u_n\le 1$

Vậy dãy đã cho bị chặn.

b) $u_n=\dfrac{4\sin n+4\cos\left(3n^2+1\right)}{5n^2+n}\Rightarrow|u_n|=\dfrac{\left|4\sin n+4\cos\left(3n^2+1\right)\right|}{5n^2+n}<\dfrac{5}{5n^2}<1$

Suy ra: $-1<u_n<1,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Vậy dãy đã cho bị chặn.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho các dãy số sau. Dãy số nào là dãy số tăng?

A. $1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\cdots$ **B.** $1;\ -\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{4};\ -\dfrac{1}{8};\ \dfrac{1}{16};\cdots$

C. $1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\cdots$ **D.** $1;\ \dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{8};\ \dfrac{1}{16};\cdots$

Lời giải.

Chọn C

Xét đáp án A: $1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\cdots$ đây là dãy hằng nên không tăng không giảm.

Xét đáp án B: $1;\ -\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{4};\ -\dfrac{1}{8};\ \dfrac{1}{16};\cdots\longrightarrow u_1>u_2<u_3\longrightarrow$ loại B

Xét đáp án C: $1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\cdots\longrightarrow u_n<u_{n+1},\ n\in\mathbb{N}^*$

Xét đáp án D: $1;\ \dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{8};\ \dfrac{1}{16};\cdots\longrightarrow u_1>u_2>u_3\ldots>u_n>\ldots\longrightarrow$ loại D.

Câu 2: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n=\dfrac{1}{2^n}$. **B.** $u_n=\dfrac{1}{n}$. **C.** $u_n=\dfrac{n+5}{3n+1}$. **D.** $u_n=\dfrac{2n-1}{n+1}$.

Lời giải.

Chọn D

Vì $2^n;n$ là các dãy dương và tăng nên $\frac{1}{2^n};\frac{1}{n}$ là các dãy giảm, do đó loại A,B.

Xét đáp án C: $u_n=\frac{n+5}{3n+1}\longrightarrow\begin{cases}u_1=\frac{3}{2}\\u_2=\frac{7}{6}\end{cases}\longrightarrow u_1>u_2\longrightarrow$ loại C

Xét đáp án D: $u_n=\frac{2n-1}{n+1}=2-\frac{3}{n+1}\Rightarrow u_{n+1}-u_n=3\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)>0$

Câu 3: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n=\frac{2}{3^n}.$ **B.** $u_n=\frac{3}{n}.$ **C.** $u_n=2^n.$ **D.** $u_n=(-2)^n.$

Lời giải.

Chọn C

Xét đáp án C: $u_n=2^n\longrightarrow u_{n+1}-u_n=2^{n+1}-2^n=2^n>0\longrightarrow$

Vì $2^n;n$ là các dãy dương và tăng nên $\frac{1}{2^n};\frac{1}{n}$ là các dãy giảm, do đó loại các đáp án A và B.

Xét đáp án D: $u_n=(-2)^n\longrightarrow\begin{cases}u_2=4\\u_3=-8\end{cases}\longrightarrow u_2>u_3\longrightarrow$ loại D.

Câu 4: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n=\frac{1}{2^n}.$ **B.** $u_n=\frac{3n-1}{n+1}.$ **C.** $u_n=n^2.$ **D.** $u_n=\sqrt{n+2}.$

Lời giải.

Chọn A

Vì 2^n là dãy dương và tăng nên $\frac{1}{2^n}$ là dãy giảm $\longrightarrow$

Xét B: $u_n=\frac{3n-1}{n+1}\longrightarrow\begin{cases}u_1=1\\u_2=\frac{5}{3}\end{cases}\longrightarrow u_1<u_2\longrightarrow$ loại B. Hoặc

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3n+2}{n+2}-\frac{3n-1}{n+1}=\frac{4}{(n+1)(n+2)}>0$$ nên (u_n) là dãy tăng.

Xét C: $u_n=n^2\longrightarrow u_{n+1}-u_n=(n+1)^2-n^2=2n+1>0\longrightarrow$ loại C.

Xét D: $u_n=\sqrt{n+2}\longrightarrow u_{n+1}-u_n=\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}=\frac{1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}>0\longrightarrow$ loại D.

Câu 5: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = \sin n.$ **B.** $u_n = \dfrac{n^2+1}{n}.$

C. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$ **D.** $u_n = (-1)^n.(2^n+1).$

Lời giải.

Chọn C

A. $u_n = \sin n \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 2\cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\sin\dfrac{1}{2}$ có thể dương hoặc âm phụ thuộc n nên đáp án A sai. Hoặc dễ thấy $\sin n$ có dấu thay đổi trên $\mathbb{N}^*$ nên dãy $\sin n$ không tăng, không giảm.

B. $u_n = \dfrac{n^2+1}{n} = n + \dfrac{1}{n} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 1 + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n^2+n-1}{n(n+1)} > 0$ nên dãy đã cho tăng nên B sai.

C. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$, dãy $\sqrt{n}+\sqrt{n-1} > 0$ là dãy tăng nên suy ra u_n giảm.

D. $u_n = (-1)^n(2^n+1)$ là dãy thay dấu nên không tăng không giảm.

Cách trắc nghiệm.

A. $u_n = \sin n$ có dấu thay đổi trên $\mathbb{N}^*$ nên dãy này không tăng không giảm.

B. $u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$, ta có $\begin{cases} n=1 \to u_1 = 2 \\ n=2 \to u_2 = \dfrac{5}{2} \end{cases} \longrightarrow u_1 < u_2 \longrightarrow u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$ không giảm.

C. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, ta có $\begin{cases} n=1 \to u_1 = 1 \\ n=2 \to u_2 = \sqrt{2}-1 \end{cases} \longrightarrow u_1 > u_2$ nên dự đoán dãy này giảm.

D. $u_n = (-1)^n(2^n+1)$ là dãy thay dấu nên không tăng không giảm.

Cách CASIO.

- Các dãy $\sin n; (-1)^n(2^n+1)$ có dấu thay đổi trên $\mathbb{N}^*$ nên các dãy này không tăng không giảm nên loại các đáp án A, **D.**
- Còn lại các đáp án B, C ta chỉ cần kiểm tra một đáp án bằng chức năng TABLE.

Chẳng hạn kiểm tra đáp án B, ta vào chức năng TABLE nhập $F(X) = \dfrac{X^2+1}{X}$ với thiết lập $\text{Start} = 1,\ \text{End} = 10,\ \text{Step} = 1.$

Nếu thấy cột $F(X)$ các giá trị tăng thì loại B và chọn C, nếu ngược lại nếu thấy cột $F(X)$ các giá trị giảm dần thị chọn B và loại **C.**

Câu 6: Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số $u_n = \dfrac{1}{n} - 2$ là dãy tăng. **B.** Dãy số $u_n = (-1)^n(2^n+1)$ là dãy giảm.

C. Dãy số $u_n=\dfrac{n-1}{n+1}$ là dãy giảm. **D.** Dãy số $u_n=2n+\cos\dfrac{1}{n}$ là dãy tăng.

Lời giải.

Chọn D

Xét đáp án A: $u_n=\dfrac{1}{n}-2\longrightarrow u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}<0\longrightarrow$ loại A.

Xét đáp án B: $u_n=(-1)^n\left(2^n+1\right)$ là dãy có dấu thay đổi nên không giảm nên loại B.

Xét đáp án C: $u_n=\dfrac{n-1}{n+1}=1-\dfrac{2}{n+1}\longrightarrow u_{n+1}-u_n=2\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)>0\longrightarrow$ loại C.

Xét đáp án D: $u_n=2n+\cos\dfrac{1}{n}\longrightarrow u_{n+1}-u_n=\left(2-\cos\dfrac{1}{n+1}\right)+\cos\dfrac{1}{n+2}>0$ nên

Câu 7: Mệnh đề nào sau đây **sai?**

A. Dãy số $u_n=\dfrac{1-n}{\sqrt{n}}$ là dãy giảm. **B.** Dãy số $u_n=2n^2-5$ là dãy tăng.

C. Dãy số $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ là dãy giảm. **D.** Dãy số $u_n=n+\sin^2 n$ là dãy tăng.

Lời giải.

Chọn C

Xét A: $u_n=\dfrac{1-n}{\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{n}\longrightarrow u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{n}-\sqrt{n+1}<0$ nên dãy (u_n) là dãy giảm nên C đúng.

Xét đáp án B: $u_n=2n^2-5$ là dãy tăng vì n^2 là dãy tăng nên B đúng. Hoặc

$$u_{n+1}-u_n=2(2n+1)>0 \text{ nên } (u_n) \text{ là dãy tăng.}$$

Xét đáp án C: $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n>0\longrightarrow\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{n+2}{n+1}.\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^n>1\longrightarrow(u_n)$ là dãy tăng nên

Xét đáp án D: $u_n=n+\sin^2 n\longrightarrow u_{n+1}-u_n=\left(1-\sin^2(n+1)\right)+\sin^2 n>0$ nên D đúng.

Câu 8: Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\dfrac{3n-1}{3n+1}$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 0.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $u_n=\dfrac{3n-1}{3n+1}=1-\dfrac{2}{3n+1}<1.$ Mặt khác: $u_2=\dfrac{5}{7}>\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{2}>0$ nên suy ra dãy (u_n) bị chặn trên bởi số 1.

Câu 9: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn trên?

A. $u_n=n^2.$ **B.** $u_n=2^n.$ **C.** $u_n=\dfrac{1}{n}.$ **D.** $u_n=\sqrt{n+1}.$

Lời giải.

Chọn C

Các dãy số $n^2;2^n;n+1$ là các dãy tăng đến vô hạn khi n tăng lên vô hạn nên chúng không bị chặn trên (có thể dùng chức năng TABLE của MTCT để kiểm tra).

Nhận xét: $u_n=\dfrac{1}{n}\le 1$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$ nên dãy (u_n) bị chặn trên bởi 1.

Câu 10: Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\cos n+\sin n.$ Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

A. 0. **B.** 1.

C. $\sqrt{2}.$ **D.** Không bị chặn trên.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $u_n\xrightarrow{MTCT}u_1=\sin 1+\cos 1>1>0$ nên loại các đáp án A và B (dùng TABLE của MTCT để kiểm tra, chỉ cần 1 số hạn nào đó của dãy số lớn hơn α thì dãy số đó không thể bị chặn trên bởi $\alpha.$)

Ta có $u_n=\cos n+\sin n=\sqrt{2}\sin\left(n+\dfrac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$

Câu 11: Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\sin n-\cos n.$ Dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi số nào dưới đây?

A. 0. **B.** $-1.$

C. $-\sqrt{2}.$ **D.** Không bị chặn dưới.

Lời giải.

Chọn C

$u_n\xrightarrow{MTCT}u_5=\sin 5-\cos 5<-1<0\longrightarrow$ loại A và B (dùng TABLE của MTCT để kiểm tra, chỉ cần có một số hạng nào đó của dãy số nhỏ hơn α thì dãy số đó không thể bị chặn dưới với số $\alpha.$)

Ta có $u_n=\sqrt{2}\sin\left(n-\dfrac{\pi}{4}\right)\ge-\sqrt{2}$

Câu 12: Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\sqrt{3}\cos n-\sin n.$ Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m và M nào dưới đây?

A. $m=-2;\ M=2.$ **B.** $m=-\frac{1}{2};\ M=\sqrt{3}+1.$

C. $m=-\sqrt{3}+1;\ M=\sqrt{3}-1.$ **D.** $m=-\frac{1}{2};\ M=\frac{1}{2}.$

Lời giải.

Chọn A

$u_n \xrightarrow{MTCT(TABLE)} u_1 > \sqrt{3}-1 > \frac{1}{2} \longrightarrow$ loại C và D.

$u_n \xrightarrow{MTCT(TABLE)} u_4 < -\frac{1}{2} \longrightarrow$ loại B. Vậy

Nhận xét: $u_n = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin n - \frac{1}{2}\cos n\right) = 2\sin\left(n-\frac{\pi}{6}\right) \longrightarrow -2 \le u_n \le 2.$

Câu 13: Cho dãy số (u_n), biết $u_n=(-1)^n.5^{2n+5}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Lời giải.

Chọn D

Nếu n chẵn thì $u_n=5^{2n+1}>0$ tăng lên vô hạn (dương vô cùng) khi n tăng lên vô hạn nên dãy (u_n) không bị chặn trên.

Nếu n lẻ thì $u_n=-5^{2n+1}<0$ giảm xuống vô hạn (âm vô cùng) khi n tăng lên vô hạn nên dãy (u_n) không bị chặn dưới.

Vậy dãy số đã cho không bị chặn.

Câu 14: Cho dãy số (u_n), với $u_n=\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+...+\frac{1}{n(n+3)}, \forall n=1;\ 2;\ 3\cdots$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $u_n>0\longrightarrow(u_n)$ bị chặn dưới bởi 0. Mặt khác $\frac{1}{k(k+3)}<\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$ nên suy ra:

$$u_n<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}<1$$

nên dãy (u_n) bị chặn trên, do đó dãy (u_n) bị chặn.

Câu 15: Cho dãy số (u_n), với $u_n=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2},\forall n=2;\ 3;\ 4;\cdots$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $u_n>0\longrightarrow(u_n)$ bị chặn dưới bởi 0. Mặt khác $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\left(k\in\mathbb{N}^*,k\geq 2\right)$ nên suy ra:

$$u_n<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}<1$$

nên dãy (u_n) bị chặn trên, do đó dãy (u_n) bị chặn.

Câu 16: Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là dãy số bị chặn?

A. $u_n=\sqrt{n^2+1}.$ **B.** $u_n=n+\frac{1}{n}.$ **C.** $u_n=2^n+1.$ **D.** $u_n=\frac{n}{n+1}.$

Lời giải.

Chọn D

Các dãy số $n^2;\ n;\ 2^n$ dương và tăng lên vô hạn (dương vô cùng) khi n tăng lên vô hạn, nên các dãy $\sqrt{n^2+1};\ n+\frac{1}{n};\ 2^n+1$ cũng tăng lên vô hạn (dương vô cùng), suy ra các dãy này không bị chặn trên, do đó chúng không bị chặn.

Nhận xét: $0<u_n=\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}<1.$

Câu 17: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n=\frac{1}{2^n}$. **B.** $u_n=3^n$. **C.** $u_n=\sqrt{n+1}$. **D.** $u_n=n^2$.

Lời giải.

Chọn A

Các dãy số $n^2; n; 3^n$ dương và tăng lên vô hạn (dương vô cùng) khi n tăng lên vô hạn nên các dãy $n^2; \sqrt{n+1}; 3^n$ cũng tăng lên vô hạn (dương vô cùng), suy ra các dãy này không bị chặn trên, do đó chúng không bị chặn.

Nhận xét: $0<u_n=\frac{1}{2^n}\le\frac{1}{2}$.

Câu 18: Cho dãy số (u_n), xác định bởi $\begin{cases}u_1=6\\u_{n+1}=\sqrt{6+u_n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sqrt{6}\le u_n<\frac{5}{2}$. **B.** $\sqrt{6}\le u_n<3$.

C. $\sqrt{6}\le u_n<2$. **D.** $\sqrt{6}\le u_n\le 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Chọn D

Ta có $u_2=\sqrt{12}>3>\frac{5}{2}>2$ nên loại các đáp án A, B, **C.**

Nhận xét: Ta có

$$\begin{cases}u_1=6\\u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}u_1=6\\u_{n+1}\ge 0\end{cases}\longrightarrow u_n\ge 0\longrightarrow\begin{cases}u_1=6\\u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}\ge\sqrt{6}\end{cases}\longrightarrow u_n\ge\sqrt{6}.$$

Ta chứng minh quy nạp $u_n\le 2\sqrt{3}$.

$$u_1\le 2\sqrt{3}; u_k\le 2\sqrt{3}\longrightarrow u_{k+1}=\sqrt{6+u_{k+1}}\le\sqrt{6+2\sqrt{3}}<\sqrt{6+6}=2\sqrt{3}.$$

Câu 19: Cho dãy số (u_n), với $u_n=\sin\frac{\pi}{n+1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Số hạng thứ $n+1$ của dãy là $u_{n+1}=\sin\frac{\pi}{n+1}$.

B. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

C. Dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

D. Dãy số (u_n) không tăng không giảm.

Lời giải.

Chọn B

$u_n = \sin\dfrac{\pi}{n+1} \longrightarrow u_{n+1} = \sin\dfrac{\pi}{(n+1)+1} = \sin\dfrac{\pi}{n+2} \longrightarrow$ A sai.

$u_n = \sin\dfrac{\pi}{n+1} \longrightarrow -1 \le u_n \le 1 \longrightarrow$ B đúng.

$u_{n+1} - u_n = \sin\dfrac{\pi}{n+2} - \sin\dfrac{\pi}{n+1} < 0 \left(0 < \dfrac{\pi}{n+2} < \dfrac{\pi}{n+1} \le \dfrac{\pi}{2}\right) \longrightarrow$ C, D sai.

Câu 20: Cho dãy số (u_n), với $u_n = (-1)^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) là dãy số tăng.

B. Dãy số (u_n) là dãy số giảm.

C. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

D. Dãy số (u_n) là dãy số không bị chặn.

Lời giải.

Chọn C

$u_n = (-1)^n$ là dãy thay dấu nên không tăng, không giảm $\longrightarrow$ A, B sai.

Tập giá trị của dãy $u_n = (-1)^n$ là $\{-1;1\} \longrightarrow -1 \le u_n \le 1 \longrightarrow$ C đúng.

BÀI 3. CẤP SỐ CỘNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – ĐỊNH NGHĨA

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d.

Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

Nếu (u_n) là cấp số cộng với công sai d ta có công thức truy hồi $u_{n+1}=u_n+d$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Đặc biệt khi $d=0$ thì cấp số cộng là một dãy số không đổi (tất cả các số hạng đều bằng nhau).

II – SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

Định lí 1

Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức: $u_n=u_1+(n-1)d$, $n\geq 2$.

III – TÍNH CHẤT CÁC SỐ HẠNG CỦA CẤP SỐ CỘNG

Định lí 2

Trong một cấp số cộng, mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là $u_k=\dfrac{u_{k-1}+u_{k+1}}{2}$, $k\geq 2$.

IV – TỔNG n SỐ HẠNG ĐẦU CỦA MỘT CẤP SỐ CỘNG

Định lí 3

Cho cấp số cộng (u_n). Đặt $S_n=u_1+u_2+u_3+...+u_n$. Khi đó $\boxed{S_n=\dfrac{n(u_1+u_n)}{2}.}$

Chú ý: Vì $u_n=u_1+(n-1)d$ nên công thức trên có thể viết lại là $S_n=nu_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Nhận dạng 1 dãy số là cấp số cộng

1. Phương pháp

Sử dụng định nghĩa (u_n) là một cấp số cộng khi và chỉ khi $u_{n+1}-u_n=d$, với d là một hằng số.

Để chứng minh dãy số (u_n) là một cấp số cộng, ta xét $d=u_{n+1}-u_n$

- Nếu d là hằng số thì (u_n) là một cấp số cộng với công sai d.
- Nếu d phụ thuộc vào n thì (u_n) không là cấp số cộng.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Chứng minh các dãy số sau là cấp số cộng.

a) Dãy số (u_n) với $u_n=2020n-2021$.

b) Dãy số (u_n) với $u_n=-2n+5$.

Hướng dẫn giải

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 2020n - 2021$.

Ta có $u_{n+1} - u_n = 2020(n+1) - 2021 - (2020n - 2021) = 2020$.

Vậy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 2020$.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = -2n + 5$.

Ta có $u_{n+1} - u_n = -2(n+1) + 5 - (-2n + 5) = -2$.

Vậy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = -2$.

Ví dụ 2. Chứng minh các dãy số sau không phải là cấp số cộng.

a) Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n + 3n$.

Hướng dẫn giải

a) Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$.

Ta có $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + (n+1) + 1 - (n^2 + n + 1) = 2n + 2$ phụ thuộc vào n.

Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n + 3n$.

Ta có $u_{n+1} - u_n = (-1)^{n+1} + 3(n+1) - \left[(-1)^n + 3n\right] = -(-1)^n + 3 - (-1)^n = 3 - 2(-1)^n$ phụ thuộc vào n.

Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

Dạng 2. Xác định số hạng , công sai và số hạng của cấp số cộng

1. Phương pháp

- Xác định một cấp số cộng là xác định số hạng đầu u_1 và công sai d
- Từ những giải thiết ta thường lập hệ phương trình theo ẩn số u_1 và d rồi giải hệ đó.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 = 15$ và $d = -2$. Tìm u_n.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} 15 = u_3 = u_1 + 2d \\ d = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 19 \\ d = -2 \end{cases} \rightarrow u_n = u_1 + (n-1)d = -2n + 21.$

Ví dụ 2: Một cấp số cộng có 8 số hạng. Số hạng đầu là 5, số hạng thứ tám là 40. Khi đó công sai d của cấp số cộng đó là bao nhiêu?

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} u_1 = 5 \\ 40 = u_8 = u_1 + 7d \end{cases} \longrightarrow d = 5$

Ví dụ 3: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$ và $u_3 - u_{15} = 84$. Tìm số hạng u_{17}.

Lời giải.

Ta có công sai của cấp số cộng là $d = \dfrac{u_3 - u_{15}}{3-15} = \dfrac{84}{-12} = -7$.

Suy ra $u_{17} = u_1 + (17-1)d = 11$.

Ví dụ 4: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$ và $u_3 - u_{15} = 84$. Tìm số hạng u_{17}.

Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 + 2u_5 = 0$ và $S_4 = 14$. Tính số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng.

Lời giải.

Ta có $u_1 + 2u_5 = 0 \Leftrightarrow u_1 + 2(u_1 + 4d) = 0 \Leftrightarrow 3u_1 + 8d = 0$.

$$S_4 = 14 \Leftrightarrow \frac{4(2u_1 + 3d)}{2} = 14 \Leftrightarrow 2u_1 + 3d = 7$$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3u_1 + 8d = 0 \\ 2u_1 + 3d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 \\ d = -3 \end{cases}$.

Dạng 3. Tính tổng các số hạng trong một cấp số cộng

1. Phương pháp

Tính tổng n số hạng đầu tiên nhờ công thức: $S_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2} = \dfrac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2}$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 4$ và $d = -5$. Tính tổng 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

Lời giải.

$$S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \longrightarrow S_{100} = 100u_1 + \frac{100.99}{2}d = -24350$$

Ví dụ 2: Xét các số nguyên dương chia hết cho 3. Tính tổng số 50 số nguyên dương đầu tiên

Lời giải.

Số nguyên dương chia hết cho 3 có dạng $3n\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ nên chúng lập thành cấp số cộng

$$u_n = 3n \longrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{50} = 150 \end{cases} \longrightarrow S_{50} = \frac{50}{2}(u_1 + u_{50}) = 3825$$

Chú ý: $S_n = \dfrac{n}{2}(u_1 + u_n) = nu_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d.$

Ví dụ 3: Tính tổng $S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 + ... + (2n-1) - 2n$ với $n \geq 1$ và $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải.

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $(2n-1) - 2n = -1$.

Ta có $S=(1-2)+(3-4)+(5-6)+\cdots+((2n-1)-2n)$. Do đó ta xem S là tổng của n số hạng, mà mỗi số hạng đều bằng -1 nên $S=-n$.

Nhận xét: Ta có $1;3;5;\cdots;2n-1$ và $2;4;6;\cdots;2n$ là các cấp số cộng có n số hạng nên

$$S=(1+3+5+\cdots+2n-1)-(2+4+6+\cdots+2n)$$

$$=\frac{n}{2}(1+2n-1)-\frac{n}{2}(2+2n)=n^2-(n^2+n)=-n.$$

Ví dụ 4: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_2+u_8+u_9+u_{15}=100$. Tính tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho.

Lời giải.

Ta có $u_2+u_8+u_9+u_{15}=100\Leftrightarrow 4u_1+30d=100\Leftrightarrow 2u_1+15d=50.$

Khi đó $S_{16}=\frac{16}{2}(u_1+u_{16})=8(2u_1+15d)=8.50=400$

Ví dụ 5: Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d=-3$ và $u_2^2+u_3^2+u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng S_{100} của 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

Lời giải.

Đặt $a=u_1$ thì

$u_2^2+u_3^2+u_4^2=(a+d)^2+(a+2d)^2+(a+3d)^2=3a^2-36a+126=3(a-6)^2+18\geq 18$ với mọi a. Dấu bằng xảy ra khi $a-6=0\Leftrightarrow a=6$ .Suy ra $u_1=6$.

Ta có $S_{100}=\frac{100.\left[2u_1+(100-1)d\right]}{2}=-14250$.

Ví dụ 5. Biết $u_4+u_8+u_{12}+u_{16}=224$. Tính S_{19}.

Hướng dẫn giải

Ta có $u_4+u_8+u_{12}+u_{16}=224$

$\Leftrightarrow u_1+3d+u_1+7d+u_1+11d+u_1+15d=224\Leftrightarrow 4u_1+36d=224\Leftrightarrow u_1+9d=56.$

Ta có $S_{19}=\frac{19}{2}(2u_1+18d)=19(u_1+9d)=19.56=1064.$

Dạng 4: Giải phương trình (tìm x trong cấp số cộng)

1. Phương pháp

Ba số a,b,c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $a+c=2b$.

Sử dụng các tính chất của cấp số cộng

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho các số $-4;1;6;x$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tìm x.

Lời giải.

Vì các số $-4;1;6;x$ theo thứ tự u_1,u_2,u_3,u_4 lập thành cấp số cộng nên

$u_4-u_3=u_3-u_2\longrightarrow x-6=6-1\Leftrightarrow x=11$

Ví dụ 2: Nếu các số $5+m;\ 7+2m;\ 17+m$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì m bằng bao nhiêu?

Lời giải.

Ba số $5+m;\ 7+2m;\ 17+m$ theo thứ tự u_1,u_2,u_3 lập thành cấp số cộng nên

$u_1+u_3=2u_2 \Leftrightarrow (5+m)+(17+m)=2(7+2m) \Leftrightarrow m=4$

Nhận xét: Ta có thể dùng tính chất $u_3-u_2=u_2=u_1$.

Ví dụ 3: Với giá trị nào của x và y thì các số $-7;\ x;\ 11;\ y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng?

Lời giải.

Bốn số $-7;\ x;\ 11;\ y$ theo thứ tự u_1,u_2,u_3,u_4 lập thành cấp số cộng nên

$$\begin{cases} u_4-u_3=u_3-u_2 \\ u_4-u_3=u_2-u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-11=11-x \\ y-11=x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=22 \\ x-y=-18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=20 \end{cases}$$

Dạng 5. Chứng minh một hệ thức trong cấp số cộng lập thành cấp số cộng, bài toán có sử dụng yếu tố cấp số cộng

1. Phương pháp

Nếu (u_n) là một cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối cùng đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là

$u_k=\dfrac{u_{k-1}+u_{k+1}}{2}$.

Hệ quả: Ba số a,b,c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $a+c=2b$.

Sử dụng các tính chất của cấp số cộng

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Chứng minh rằng ba số dương a,b,c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi các số $\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}},\dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}},\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh bằng phép biến đổi tương đương.

Ba số $\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}},\dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}},\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi

$$\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{c})}=\frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}+\sqrt{a})}$$

$\Leftrightarrow (\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})=(\sqrt{c}-\sqrt{b})(\sqrt{c}+\sqrt{b})$

$\Leftrightarrow \quad b-a=c-b \Leftrightarrow a,b,c$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

Ví dụ 2. Cho a,b,c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, chứng minh rằng

a) $a^2+2bc=c^2+2ab$. b) $a^2+8bc=(2b+c)^2$.

Hướng dẫn giải

Vì a,b,c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng nên $a+c=2b\Leftrightarrow a=2b-c.$

a) Ta có $a^2-2ab=(2b-c)^2-2(2b-c).b=4b^2-4bc+c^2-4b^2+2bc$

$=c^2-2bc.$

Vậy $a^2-2ab=c^2-2bc\Leftrightarrow a^2+2bc=c^2+2ab.$

b) Ta có $a^2+8bc=(2b-c)^2+8bc=4b^2-4bc+c^2+8bc$

$=4b^2+4bc+c^2=(2b+c)^2.$

Ví dụ 3. Một tam giác vuông có chu vi bằng 3a và ba cạnh lập thành một cấp số cộng. Tính độ dài ba cạnh của tam giác theo a.

Hướng dẫn giải

Gọi x,y,z theo thứ tự là độ dài ba cạnh của tam giác $(x<y<z).$

Chu vi của tam giác là $x+y+z=3a.\ (1)$

Theo tính chất của cấp số cộng, ta có $x+z=2y.\qquad(2)$

Tam giác đã cho vuông nên $x^2+y^2=z^2.\quad(3)$

Thay (2) và (1), ta được $3y=3a\Leftrightarrow y=a.$

Thay $y=a$ vào (2), ta được $x+z=2a\Rightarrow x=2a-z.$

Thay $x=2a-z$ và $y=a$ vào (3), ta được

$$(2a-z)^2+a^2=z^2\Leftrightarrow 5a^2-4az=0\Leftrightarrow z=\frac{5a}{4}\Rightarrow x=\frac{3a}{4}.$$

Vậy độ dài ba cạnh của tam giác là $\frac{3a}{4},a,\frac{5a}{4}.$

Ví dụ 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng: $x^3-3mx^2+2m(m-4)x+9m^2-m=0$.

Lời giải.

- *Điều kiện cần:* Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3 lập thành một cấp số cộng. Theo định lý Vi-ét đối với phương trình bậc ba, ta có $x_1+x_2+x_3=3m$. Vì x_1,x_2,x_3 lập thành cấp số cộng nên $x_1+x_3=2x_2$. Suy ra $3x_2=3m\Leftrightarrow x_2=m$. Thay $x_2=m$ vào phương trình đã cho, ta được

$$m^3-3m.m^2+2m(m-4).m+9m^2-m=0\Leftrightarrow m^2-m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=1\end{array}\right.$$

- *Điều kiện đủ:*

+ Với $m=0$ thì ta có phương trình $x^3=0\Leftrightarrow x=0$ (phương trình có nghiệm duy nhất). Do đó $m=0$ không phải giá trị cần tìm.

+ Với $m=1$, ta có phương trình $x^3-3x^2-6x+8=0\Leftrightarrow x=1;\ x=-2;\ x=4.$

Ba nghiệm $-2;\ 1;\ 4$ lập thành một cấp số cộng nên $m=1$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 5. Tìm giá trị của tham số m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng: $x^4-10x^2+2m^2+7m=0$.

Lời giải.

Đặt $t=x^2\ \left(t\ge 0\right)$. Khi đó ta có phương trình: $t^2-10t+2m^2+7m=0\ \ (*)$.

Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases}5^2-(2m^2+7m)>0\\ 2m^2+7m>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<2m^2+7m<25.$

(do tổng hai nghiệm bằng $10>0$ nên không cần điều kiện này).

+ Với điều kiện trên thì $(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt là $t_1,\ t_2\ (t_1<t_2)$.

Khi đó phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt là $-\sqrt{t_2};-\sqrt{t_1};\sqrt{t_1};\sqrt{t_2}$.

Bốn nghiệm này lập thành một cấp số cộng khi

$$-\sqrt{t_1}-\left(-\sqrt{t_2}\right)=\sqrt{t_1}-\left(-\sqrt{t_1}\right)=\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}\Leftrightarrow t_2=9t_1.$$

Theo định lý Vi-ét ta có: $t_1+t_2=10;\ \ t_1.t_2=2m^2+7m$.

Suy ra ta có hệ phương trình $\begin{cases}t_2=9t_1\\ t_1+t_2=10\\ t_1.t_2=2m^2+7m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=1\\ t_2=9\\ 2m^2+7m=9\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-\dfrac{9}{2}\end{array}\right.$.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Dãy số nào sau đây **không** phải là cấp số cộng?

A. $-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};0;\frac{1}{3};\frac{2}{3};1;\frac{4}{3}....$

B. $15\sqrt{2};12\sqrt{2};9\sqrt{2};6\sqrt{2};....$

C. $\frac{4}{5};1;\frac{7}{5};\frac{9}{5};\frac{11}{5};....$

D. $\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{2\sqrt{3}}{3};\sqrt{3};\frac{4\sqrt{3}}{3};\frac{5}{\sqrt{3}};...$

Lời giải.

Chọn C

Chỉ cần tồn tại hai cặp số hạng liên tiếp của dãy số có hiệu khác nhau: $u_{m+1}-u_m\ne u_{k+1}-u_k$ thì ta kết luận ngay dãy số đó không phải là cấp số cộng.

Xét đáp án A: $-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};0;\frac{1}{3};\frac{2}{3};1;\frac{4}{3}....\longrightarrow\frac{1}{3}=u_2-u_1=u_3-u_2=u_4-u_3=\cdots\longrightarrow$ loại A

Xét đáp án B:

$15\sqrt{2};12\sqrt{2};9\sqrt{2};6\sqrt{2};....\longrightarrow -3\sqrt{3}=u_2-u_1=u_3-u_2=u_4-u_3=\cdots\longrightarrow$ loại B

Xét đáp án C: $\frac{4}{5};1;\frac{7}{5};\frac{9}{5};\frac{11}{5};....\longrightarrow\frac{1}{5}=u_2-u_1\ne u_3-u_2=\frac{2}{5}\longrightarrow$ Chọn C

Xét đáp án D: $\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{2\sqrt{3}}{3};\sqrt{3};\frac{4\sqrt{3}}{3};\frac{5}{\sqrt{3}};...\longrightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}=u_2-u_1=u_3-u_2=u_4-u_3\longrightarrow$ loại D

Câu 2: Cho cấp số cộng có số hạng đầu $u_1=-\frac{1}{2}$, công sai $d=\frac{1}{2}$. Năm số hạng liên tiếp đầu tiên của cấp số này là:

A. $-\frac{1}{2};0;1;\frac{1}{2};1.$

B. $-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}.$

C. $\frac{1}{2};1;\frac{3}{2};2;\frac{5}{2}.$

D. $-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}.$

Lời giải:

Chọn D

Ta dùng công thức tổng quát $u_n = u_1 + (n-1)d = -\frac{1}{2} + (n-1)\frac{1}{2} = -1 + \frac{n}{2}$, hoặc $u_{n+1} = u_n + d = u_n + \frac{1}{2}$ để tính các số hạng của một cấp số cộng.

Ta có $u_1 = -\frac{1}{2}; d = \frac{1}{2} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2} \\ u_2 = u_1 + d = 0 \\ u_3 - u_2 + d = \frac{1}{2} \\ u_4 = u_3 + d = 1 \\ u_5 = u_4 + d = \frac{3}{2} \end{cases}$

Nhận xét: Dùng chức năng "lặp" của MTCT để tính:

Nhập: $X = X + \frac{1}{2}$ (nhập $X = X + d$).

Bấm CALC: nhập $-\frac{1}{2}$ (nhập u_1).

Để tính 5 số hạng đầu ta bấm dấu "=" liên tiếp để ra kết quả 4 lần nữa!

Câu 3: Viết ba số hạng xen giữa các số 2 và 22 để được một cấp số cộng có năm số hạng.

A. 7; 12; 17, **B.** 6; 10; 14. **C.** 8; 13; 18. **D.** 6; 12; 18.

Lời giải.

Chọn A

Giữa 2 và 22 có thêm ba số hạng nữa lập thành cấp số cộng, xem như ta có một cấp số cộng có 5 số hạng với $u_1 = 2; u_5 = 22;$ ta cần tìm u_2, u_3, u_4.

Ta có $u_5 = u_1 + 4d \Leftrightarrow d = \frac{u_5 - u_1}{4} = \frac{22-2}{4} = 5 \longrightarrow \begin{cases} u_2 = u_1 + d = 7 \\ u_3 = u_1 + 2d = 12 \\ u_4 = u_1 + 3d = 17 \end{cases}$

Câu 4: Cho hai số -3 và 23. Xen kẽ giữa hai số đã cho n số hạng để tất cả các số đó tạo thành cấp số cộng có công sai $d = 2$. Tìm n.

A. $n = 12$. **B.** $n = 13$. **C.** $n = 14$. **D.** $n = 15$.

Lời giải.

Chọn A

Theo giả thiết thì ta được một cấp số cộng có $n+2$ số hạng với $u_1 = -3, u_{n+2} = 23$.

Khi đó $u_{n+2} = u_1 + (n+1)d \Leftrightarrow n+1 = \frac{u_{n+2} - u_1}{d} = \frac{23-(-3)}{2} = 13 \Leftrightarrow n = 12 \longrightarrow A$

Câu 5: Biết các số $C_n^1; C_n^2; C_n^3$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với $n > 3$. Tìm n.

A. $n = 5$. **B.** $n = 7$. **C.** $n = 9$. **D.** $n = 11$.

Lời giải.

Chọn B

Ba số $C_n^1;\ C_n^2;\ C_n^3$ theo thứ tự u_1, u_2, u_3 lập thành cấp số cộng nên

$$u_1+u_3=2u_2 \Leftrightarrow C_n^1+C_n^3=2C_n^2\ (n\ge 3) \Leftrightarrow n+\frac{(n-2)(n-1)n}{6}=2.\frac{(n-1)n}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{n^2-3n+2}{6}=n-1 \Leftrightarrow n^2-9n+14 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=2 \\ n=7 \end{array}\right. \Leftrightarrow n=7 (n\ge 3).$$

Nhận xét: Nếu u_{k-1}, u_k, u_{k+1} là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng thì ta có $u_{k-1}+u_{k+1}=2u_k$.

Câu 6: Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đầu lần lượt là 5; 9; 13; 17; ⋯. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng.

A. $u_n=5n+1$. **B.** $u_n=5n-1$. **C.** $u_n=4n+1$. **D.** $u_n=4n-1$.

Lời giải.

Chọn C

Các số 5; 9; 13; 17; ⋯ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng (u_n) nên

$$\left\{\begin{array}{l} u_1=5 \\ d=u_2-u_1=4 \end{array}\right. \xrightarrow{CTTQ} u_n=u_1+(n-1)d=5+4(n-1)=4n+1$$

Câu 7: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=-3$ và $d=\frac{1}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $u_n=-3+\frac{1}{2}(n+1)$. **B.** $u_n=-3+\frac{1}{2}n-1$.

C. $u_n=-3+\frac{1}{2}(n-1)$. **D.** $u_n=-3+\frac{1}{4}(n-1)$.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $\left\{\begin{array}{l} u_1=-3 \\ d=\frac{1}{2} \end{array}\right. \xrightarrow{CTTQ} u_n=u_1+(n-1)d=-3+\frac{1}{2}(n-1)$

Câu 8: Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n=7-3n$. **B.** $u_n=7-3^n$. **C.** $u_n=\frac{7}{3n}$. **D.** $u_n=7.3^n$.

Lời giải.

Chọn A

Dãy (u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow u_n=an+b$ (a,b là hằng số).

Câu 9: Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n=(-1)^n(2n+1)$. **B.** $u_n=\sin\dfrac{\pi}{n}$. **C.** $\begin{cases}u_1=1\\u_n=u_{n-1}-1\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}u_1=1\\u_n=2u_{n-1}\end{cases}$.

Lời giải.

Chọn C

Dãy (u_n) là một cấp số cộng $\Leftrightarrow u_n=u_{n-1}+d$ (d là hằng số).

Câu 10: Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào không phải là cấp số cộng?

A. $u_n=-4n+9$. **B.** $u_n=-2n+19$. **C.** $u_n=-2n-21$. **D.** $u_n=-2^n+15$.

Lời giải.

Chọn D

Dãy số $u_n=-2^n+15$ không có dạng $an+b$ nên có không phải là cấp số cộng.

Câu 11: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=-5$ và $d=3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_{15}=34$. **B.** $u_{15}=45$. **C.** $u_{13}=31$. **D.** $u_{10}=35$.

Lời giải.

Chọn C

$$\begin{cases}u_1=-5\\d=3\end{cases}\longrightarrow u_n=3n-8\longrightarrow\begin{cases}u_{15}=37\\u_{13}=31\\u_{10}=22\end{cases}$$

Câu 12: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=\dfrac{1}{4}$ và $d=-\dfrac{1}{4}$. Gọi S_5 là tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_5=-\dfrac{5}{4}$. **B.** $S_5=\dfrac{4}{5}$. **C.** $S_5=\dfrac{5}{4}$. **D.** $S_5=-\dfrac{4}{5}$.

Lời giải.

Chọn A

$$\begin{cases}u_1=\dfrac{1}{4}\\d=-\dfrac{1}{5}\end{cases}\longrightarrow S_5=5u_1+\frac{5.4}{2}d=5.\frac{1}{4}+10.\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{5}{4}$$

Câu 13: Cho cấp số cộng (u_n) có $d=-2$ và $S_8=72$. Tìm số hạng đầu tiên u_1.

A. $u_1=16$. **B.** $u_1=-16$. **C.** $u_1=\dfrac{1}{16}$. **D.** $u_1=-\dfrac{1}{16}$.

Lời giải.

Chọn A

$$\begin{cases} d=-2 \\ 72=S_8=8u_1+\dfrac{8.7}{2}d \end{cases} \longrightarrow 72=8u_1+28.(-2) \Leftrightarrow u_1=16$$

Câu 14: Một cấp số cộng có số hạng đầu là 1, công sai là 4, tổng của n số hạng đầu là 561. Khi đó số hạng thứ n của cấp số cộng đó là u_n có giá trị là bao nhiêu?

A. $u_n=57$. **B.** $u_n=61$. **C.** $u_n=65$. **D.** $u_n=69$.

Lời giải.

Chọn C

$$\begin{cases} u_1=1,\ d=4 \\ 561=S_n=nu_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d \end{cases} \longrightarrow 561=n+\frac{n^2-n}{2}.4 \Leftrightarrow 2n^2-n-561=0 \Leftrightarrow n=17.$$

$u_n=u_{17}=u_1+16d=1+16.4=65 \longrightarrow C$

Câu 15: Một cấp số cộng có 12 số hạng. Biết rằng tổng của 12 số hạng đó bằng 144 và số hạng thứ mười hai bằng 23. Khi đó công sai d của cấp số cộng đã cho là bao nhiêu?

A. $d=2$. **B.** $d=3$. **C.** $d=4$. **D.** $d=5$.

Lời giải.

Chọn A

$$\begin{cases} u_{12}=23 \\ S_{12}=144 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_1+11d=23 \\ \dfrac{12}{2}(u_1+u_{12})=144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=1 \\ d=\dfrac{23-u_1}{11}=2 \end{cases}$$

Câu 16: Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng là $S_n=\dfrac{3n^2-19n}{4}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng đã cho.

A. $u_1=2;\ d=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $u_1=-4;\ d=\dfrac{3}{2}$. **C.** $u_1=-\dfrac{3}{2};\ d=-2$. **D.** $u_1=\dfrac{5}{2};\ d=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $\dfrac{3n^2-19n}{4}=\dfrac{3}{4}n^2-\dfrac{19}{4}n=S_n=nu_1+\dfrac{n^2-n}{2}d=\dfrac{d}{2}n^2+\left(u_1-\dfrac{d}{2}\right)n$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{2}=\dfrac{3}{4} \\ u_1-\dfrac{d}{2}=-\dfrac{19}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=-4 \\ d=\dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

Câu 17: Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng là $S_n=n^2+4n$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng đã cho.

A. $u_n=2n+3$. **B.** $u_n=3n+2$. **C.** $u_n=5.3^{n-1}$. **D.** $u_n=5.\left(\dfrac{8}{5}\right)^{n-1}$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có $n^2+4n=S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(u_1-\frac{d}{2}\right)n \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{d}{2}=1\\ u_1-\frac{d}{2}=4\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}u_1=5\\ d=2\end{cases} \longrightarrow u_n=2n+3$

Câu 18: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2=2001$ và $u_5=1995$. Khi đó u_{1001} bằng:

A. $u_{1001}=4005$. **B.** $u_{1001}=4003$. **C.** $u_{1001}=3$. **D.** $u_{1001}=1$.

Lời giải.

Chọn C

$\begin{cases}2001=u_2=u_1+d\\ 1995=u_5=u_1+4d\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u_1=2003\\ d=-2\end{cases} \longrightarrow u_{1001}=u_1+1000d=3$

Câu 19: Cho cấp số cộng (u_n), biết: $u_n=-1, u_{n+1}=8$. Tính công sai d cảu cấp số cộng đó.

A. $d=-9$. **B.** $d=7$. **C.** $d=-7$. **D.** $d=9$.

Lời giải.

Chọn D

$d=u_{n+1}-u_n=8-(-1)=9$

Câu 20: Cho cấp số cộng (u_n). Hãy chọn hệ thức đúng trong các hệ thức sau:

A. $\frac{u_{10}+u_{20}}{2}=u_5+u_{10}$. **B.** $u_{90}+u_{210}=2u_{150}$. **C.** $u_{10}.u_{30}=u_{20}$. **D.** $\frac{u_{10}.u_{30}}{2}=u_{20}$.

Lời giải.

Chọn B

Xét đáp án A: $\begin{cases}\frac{u_{10}+u_{30}}{2}=\frac{u_1+9d+u_1+29d}{2}=u_1+19d\\ u_5+u_{10}=u_1+4d+u_1+9d=2u_2+13d\end{cases} \longrightarrow$ loại

Xét đáp án B: $\begin{cases}u_{90}+u_{210}=2u_2+298d=2(u_1+149d)\\ 2u_{150}=2(u_1+159d)\end{cases}$

Nhận xét: Có thể lấy một cấp số cộng cụ thể để kiểm tra, ví dụ $u_n=n\ (n\in\mathbb{N}^*)$.

Câu 21: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_2+u_{23}=60$. Tính tổng S_{24} của \$24\$ số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho.

A. $S_{24}=60$. **B.** $S_{24}=120$. **C.** $S_{24}=720$. **D.** $S_{24}=1440$.

Lời giải.

Chọn C

$u_2+u_{23}=60 \Leftrightarrow (u_1+d)+(u_1+22d)=60 \Leftrightarrow 2u_1+23d=60.$

Khi đó $S_{24}=\frac{24}{2}(u_1+u_{24})=12\left(u_1+(u_1+23d)\right)=12(2u_1+23d)=12.60=720.$

Câu 22: Một cấp số cộng có 6 số hạng. Biết rằng tổng của số hạng đầu và số hạng cuối bằng 17; tổng của số hạng thứ hai và số hạng thứ tư bằng 14. Tìm công sai d của cấp số cộng đã cho.

A. $d=2.$ **B.** $d=-3.$ **C.** $d=4.$ **D.** $d=5.$

Lời giải.

Chọn B

$\begin{cases}u_1+u_6=17\\u_2+u_4=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2u_1+5d=17\\2u_1+6d=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=16\\d=-3\end{cases}$

Câu 23: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}u_7-u_3=8\\u_2u_7=75\end{cases}$. Tìm công sai d của cấp số cộng đã cho.

A. $d=\frac{1}{2}.$ **B.** $d=\frac{1}{3}.$ **C.** $d=2.$ **D.** $d=3.$

Lời giải.

Chọn C

$\begin{cases}u_7-u_3=8\\u_2u_7=75\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(u_1+6d)-(u_1+2d)=8\\(u_1+d)(u_1+6d)=75\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=2\\(u_1+2)(u_1+12)=75\end{cases}$

Câu 24: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}u_1+u_7=26\\u_2^{\,2}+u_6^{\,2}=466\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases}u_1=13\\d=-3\end{cases}.$ **B.** $\begin{cases}u_1=10\\d=-3\end{cases}.$ **C.** $\begin{cases}u_1=1\\d=4\end{cases}.$ **D.** $\begin{cases}u_1=13\\d=-4\end{cases}.$

Lời giải.

Chọn C

Ta có $\begin{cases}u_1+u_7=26\\u_2^{\,2}+u_6^{\,2}=466\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2u_1+6d=26\\(u_1+d)^2+(u_1+5d)^2=466\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=13-3d&(1)\\(u_1+d)^2+(u_1+5d)^2=466&(2)\end{cases}.$

Thay (1) và (2) ta được: $(13-2d)^2+(13+2d)^2=466\Leftrightarrow 8d^2+338=466$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=4\Rightarrow u_1=1\\d=-4\Rightarrow u_1=25\end{array}\right.$

Câu 25: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}u_1-u_3+u_5=15\\u_1+u_6=27\end{cases}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\begin{cases}u_1=21\\d=3\end{cases}.$ **B.** $\begin{cases}u_1=21\\d=-3\end{cases}.$ **C.** $\begin{cases}u_1=18\\d=3\end{cases}.$ **D.** $\begin{cases}u_1=21\\d=4\end{cases}.$

Lời giải.

Chọn B

Ta có $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 15 \\ u_1 + u_6 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - (u_1 + 2d) + (u_1 + 4d) = 15 \\ u_1 + (u_1 + 5d) = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 15 \\ 2u_1 + 5d = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 21 \\ d = -3 \end{cases}.$

Câu 26: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = 36 \\ u_2 u_3 = 54 \end{cases}$. Tìm công sai d của cấp số cộng (u_n) biết $d < 10$.

A. $d = 3$. **B.** $d = 4$. **C.** $d = 5$. **D.** $d = 6$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = 36 \\ u_2 u_3 = 54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + d) + (u_1 + 3d) + (u_1 + 5d) = 36 \\ (u_1 + d)(u_1 + 2d) = 54 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 12 & (1) \\ (u_1 + d)(u_1 + 2d) = 54 & (2) \end{cases}$. Từ (1) suy ra $u_1 = 12 - 3d$. Thay vào (2), ta được $(12 - 2d)(12 - d) = 54 \Leftrightarrow d^2 - 18d + 45 = 0 \Leftrightarrow d = 3$ hoặc $d = 15$.

Câu 27: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275 \end{cases}$. Tính u_2.

A. $u_2 = 3$. **B.** $u_2 = 6$. **C.** $u_2 = 9$. **D.** $u_2 = 12$.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + (u_1 + d) + (u_1 + 2d) = 27 \\ u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 275 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d = 9 & (1) \\ u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 275 & (2) \end{cases}$.

Từ (1) suy ra $d = 9 - u_1$. Thay vào (2), ta được

$u_1^2 + (u_1 + 9 - u_1)^2 + [u_1 + 2(9 - u_1)]^2 = 275 \Leftrightarrow u_1^2 - 18u_1 + 65 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 13$ hoặc $u_1 = 5$.

Vậy $\begin{cases} u_1 = 13 \\ d = -4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = 5 \\ d = 4 \end{cases} \longrightarrow u_2 = u_1 + d = 9$

Câu 28: Tính tổng $T = 15 + 20 + 25 + ... + 7515$.

A. $T = 5651265$. **B.** $T = 5651256$. **C.** $T = 5651625$. **D.** $T = 5651526$.

Lời giải.

Chọn A

Ta thấy các số hạng của tổng T tạo thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 15$ và công sai $d = 5$.

Giả sử tổng trên có n số hạng thì $u_n = 7515$

$\Leftrightarrow u_1+(n-1)d=7515 \Leftrightarrow 15+(n-1)5=7515 \Leftrightarrow n=1501$.

Vậy $T=S_{1501}=\dfrac{(2u_1+1500d).1501}{2}=\dfrac{(2.15+1500.5).1501}{2}=5651265$

Câu 29: Tính tổng $T=1000^2-999^2+998^2-997^2+...+2^2-1^2$.

A. $T=500500$. **B.** $T=500005$. **C.** $T=505000$. **D.** $T=500050$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có $T=1.(1000+999)+1.(998+997)+...+1.(2+1)=1999+1995+...+3$.

Ta thấy các số hạng của tổng T tạo thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1=1999$ và công sai $d=-4$.

Giả sử tổng trên có n số hạng thì

$u_n=3 \Leftrightarrow u_1+(n-1)d=3 \Leftrightarrow 1999+(n-1)(-4)=3 \Leftrightarrow n=500$.

Vậy $T=S_{500}=\dfrac{(u_1+u_{500}).500}{2}=\dfrac{(1999+3).500}{2}=500500$

Câu 30: Cho cấp số cộng $u_1; u_2; u_3; \cdots; u_n$ có công sai d, các số hạng của cấp số cộng đã cho đều khác \$0.\$ Với giá trị nào của d thì dãy số $\dfrac{1}{u_1}; \dfrac{1}{u_2}; \dfrac{1}{u_3}; \cdots; \dfrac{1}{u_n}$ là một cấp số cộng?

A. $d=-1$. **B.** $d=0$. **C.** $d=1$. **D.** $d=2$.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $\begin{cases}u_2-u_1=d\\u_3-u_2=d\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{u_2}-\dfrac{1}{u_1}=-\dfrac{d}{u_1u_2}\\\dfrac{1}{u_3}-\dfrac{1}{u_2}=-\dfrac{d}{u_2u_3}\end{cases}$.

Theo yêu cầu bài toán thì ta phải có $\dfrac{1}{u_2}-\dfrac{1}{u_1}=\dfrac{1}{u_3}-\dfrac{1}{u_2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}d=0\\\dfrac{1}{u_1}=\dfrac{1}{u_3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}d=0\\u_1=u_3=u_1+2d\end{array}\right. \Leftrightarrow d=0$

Câu 31: Ba góc của một tam giác vuông tạo thành cấp số cộng. Hai góc nhọn của tam giác có số đo (độ) là:

A. 20° và 70°. **B.** 45° và 45°. **C.** 20° và 45°. **D.** 30° và 60°.

Lời giải.

Chọn D

Ba góc A, B, C của một tam giác vuông theo thứ tự đó ($A<B<C$) lập thánh cấp số cộng nên $C=90,\ C+A=2B$.

Ta có $\begin{cases} A+B+C=180 \\ A+C=2B \\ C=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3B=180 \\ A+C=2B \\ C=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=60 \\ A=30 \\ C=90 \end{cases}$

Câu 32: Ba góc $A,B,C\left(A<B<C\right)$ của tam giác tạo thành cấp số cộng, biết góc lớn nhất gấp đôi góc bé nhất. Hiệu số đo độ của góc lớn nhất với góc nhỏ nhất bằng:

A. 40°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 80°.

Lời giải.

Chọn A

Ba góc $A,\ B,\ C$ của một tam giác theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng thỏa yêu cầu, thì $C=2A,\ C+A=2B$. Ta có

$$\begin{cases} A+B+C=180^0 \\ A+C=2B \\ C=2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3B=180^0 \\ A+C=2B \\ C=2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=60^0 \\ A+C=120^0 \\ C=2A \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A=40^0 \\ B=60^0 \\ C=80^0 \end{cases} \longrightarrow C-A=40^0.$$

Câu 33: Một tam giác vuông có chu vi bằng 3 và độ dài các cạnh lập thành một cấp số cộng. Độ dài các cạnh của tam giác đó là:

A. $\frac{1}{2};\ 1;\ \frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{3};\ 1;\ \frac{5}{3}$. **C.** $\frac{3}{4};\ 1;\ \frac{5}{4}$. **D.** $\frac{1}{4};\ 1;\ \frac{7}{4}$.

Lời giải.

Chọn C

Ba cạnh $a,b,c\ (a<b<c)$ của một tam giác theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng thỏa yêu cầu thì $\begin{cases} a^2+b^2=c^2 \\ a+b+c=3 \\ a+c=2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=c^2 \\ 3b=3 \\ a+c=2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=c^2 \\ b=1 \\ a=2b-c-2-c \end{cases}$.

Ta có $a^2+b^2=c^2 \xrightarrow[a=2-c]{b=1} (2-c)^2+1=c^2 \Leftrightarrow -4c+5=0 \Leftrightarrow c=\frac{5}{4} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{4} \\ b=1 \\ c=\frac{5}{4} \end{cases}$.

Câu 34: Một rạp hát có 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 25 ghế. Mỗi dãy sau có hơn dãy trước 3 ghế. Hỏi rạp hát có tất cả bao nhiêu ghế?

A. 1635. **B.** 1792. **C.** 2055. **D.** 3125.

Lời giải.

Chọn C

Số ghế của mỗi dãy (bắt đầu từ dãy đầu tiên) theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng có 30 số hạng có công sai $d=3$ và $u_1=25.$

Tổng số ghế là $S_{30}=u_1+u_2+\cdots+u_{30}=30u_1+\frac{30.29}{2}d=2055$

Câu 35: Người ta trồng 3003 cây theo một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ ba trồng 3 cây,.Hỏi có tất cả bao nhiêu hàng cây?

A. 73. **B.** 75. **C.** 77. **D.** 79.

Lời giải.

Chọn C

Số cây mỗi hàng (bắt đầu từ hàng thứ nhất) lập thành một cấp số cộng (u_n) có $u_1=1, d=1.$ Giả sử có n hàng cây thì $u_1+u_2+\cdots+u_n=3003=S_n.$

Ta có $3003=S_n=nu_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d \Leftrightarrow n^2+n-6006=0 \Leftrightarrow n=77$

Câu 36: Một chiếc đồng hồ đánh chuông, kể từ thời điểm 0 (giờ) thì sau mỗi giờ thì số tiếng chuông được đánh đúng bằng số giờ mà đồng hồ chỉ tại thời điểm đánh chuông. Hỏi một ngày đồng hồ đó đánh bao nhiêu tiếng chuông?

A. 78. **B.** 156. **C.** 300. **D.** 48.

Lời giải.

Chọn C

Kể từ lúc 1 (giờ) đến 24 (giời) số tiếng chuông được đánh lập thành cấp số cộng có 24 số hạng với $u_1=1,$ công sai $d=1.$ Vậy số tiếng chuông được đánh trong 1 ngày là:

$S=S_{24}=\dfrac{24}{2}(u_1+u_{24})=12(1+24)=300$

Câu 37: Trên một bàn cờ có nhiều ô vuông, người ta đặt 7 hạt dẻ vào ô đầu tiên, sau đó đặt tiếp vào ô thứ hai số hạt nhiều hơn ô thứ nhất là 5, tiếp tục đặt vào ô thứ ba số hạt nhiều hơn ô thứ hai là 5,… và cứ thế tiếp tục đến ô thứ n. Biết rằng đặt hết số ô trên bàn cờ người ta phải sử dụng 25450 hạt. Hỏi bàn cờ đó có bao nhiêu ô vuông?

A. 98. **B.** 100. **C.** 102. **D.** 104.

Lời giải.

Chọn B

Số hạt dẻ trên mỗi ô (bắt đầu từ ô thứ nhất) theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng (u_n) có $u_1=7, d=5.$ Gọi n là số ô trên bàn cờ thì $u_1+u_2+\cdots+u_n=25450=S_n.$ Ta có

$25450=S_n=nu_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=7n+\dfrac{n^2-n}{2}.5$

$\Leftrightarrow 5n^2+9n-50900=0 \Leftrightarrow n=100$

Câu 38: Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước đến để khoan giếng nước. Biết giá của mét khoan đầu tiên là 80.000 đồng, kể từ mét khoan thứ 2 giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 50m mới có nước. Vậy hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?

A. 5.2500.000 đồng. **B.** 10.125.000 đồng.

C. 4.000.000 đồng. **D.** 4.245.000 đồng.

Lời giải.

Chọn B

Giá tiền khoang mỗi mét (bắt đầu từ mét đầu tiên) lập thành cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 80\,000,\ d = 5000.$ Do cần khoang 50 mét nên tổng số tiền cần trả là

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{50} = S_{50} = 50u_1 + \frac{50.49}{2}d = 50.80\,000 + 1225.5\,000 = 10125\,000$$

BÀI 4. CẤP SỐ NHÂN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – ĐỊNH NGHĨA

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q.

Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.

Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội q, ta có công thức truy hồi:

$$\boxed{u_{n+1} = u_n q \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.}$$

Đặc biệt:

- Khi $q = 0$, cấp số nhân có dạng $u_1, 0, 0, ..., 0, ...$
- Khi $q = 1$, cấp số nhân có dạng $u_1, u_1, u_1, ..., u_1, ...$
- Khi $u_1 = 0$ thì với mọi q, cấp số nhân có dạng $0, 0, 0, ..., 0, ...$

II - SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

Định lí 1

Nếu cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức

$$\boxed{u_n = u_1.q^{n-1} \text{ với } n \geq 2.}$$

III – TÍNH CHẤT CÁC SỐ HẠNG CỦA CẤP SỐ NHÂN

Định lí 2

Trong một cấp số nhân, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là tích của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là

$$\boxed{u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1} \text{ với } k \geq 2.}$$

IV – TỔNG n SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA MỘT CẤP SỐ NHÂN

Định lí 3

Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Khi đó

$$\boxed{S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}.}$$

Chú ý: Nếu $q = 1$ thì cấp số nhân là $u_1, u_1, u_1, ..., u_1, ...$ khi đó $S_n = nu_1$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định cấp số nhân, số hạng , công bội của cấp số nhân

1. Phương pháp

- Xác định một cấp số nhân là xác định số hạng đầu u_1 và công bội q
- Từ những giải thiết ta thường lập hệ phương trình theo ẩn số u_1 và q rồi giải hệ đó.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $128;\ -64;\ 32;\ -16;\ 8;\ ...$ **B.** $\sqrt{2};\ 2;\ 4;\ 4\sqrt{2};\ ....$

C. $5;\ 6;\ 7;\ 8;\ ...$ **D.** $15;\ 5;\ 1;\ \frac{1}{5};\ ...$

Lời giải.

Chọn A

Dãy (u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_n = qu_{n-1}\ (n \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \cdots = q\ (u_n \neq 0)$, q gọi là công bội.

Xét đáp án A: $128;\ -64;\ 32;\ -16;\ 8;\ ... \longrightarrow \frac{u_2}{u_1} = -\frac{1}{2} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3}$

Xét đáp án B: $\sqrt{2};\ 2;\ 4;\ 4\sqrt{2};\ .... \longrightarrow \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 2 = \frac{u_3}{u_2} \longrightarrow$ loại B.

Tương tự, ta cũng loại các đáp án C, D.

Ví dụ 2: Với giá trị x nào dưới đấy thì các số $-4;\ x;\ -9$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân?

A. $x = 36.$ **B.** $x = -\frac{13}{2}.$ **C.** $x = 6.$ **D.** $x = -36.$

Lời giải.

Chọn C

Nhận xét: ba số $a; b; c$ theo thứ tự đó lấp thành cấp số nhân $\Leftrightarrow ac = b^2.$

Ví dụ 3: Tìm $b > 0$ để các số $\frac{1}{\sqrt{2}};\ \sqrt{b};\ \sqrt{2}$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $b = -1.$ **B.** $b = 1.$ **C.** $b = 2.$ **D.** $b = -2.$

Lời giải.

Chọn B

Cấp số nhân $\frac{1}{\sqrt{2}};\ \sqrt{b};\ \sqrt{2} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2} = \left(\sqrt{b}\right)^2 \Leftrightarrow b = 1$

Ví dụ 4: Cho cấp số nhân $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\cdots;\frac{1}{4096}$. Hỏi số $\frac{1}{4096}$ là số hạng thứ mấy trong cấp số nhân đã cho?

A. 11. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 13.

Lời giải.

Chọn B

Cấp số nhân: $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\cdots;\frac{1}{4096}\longrightarrow\begin{cases}u_1=\frac{1}{2}\\ q=\frac{u_2}{u_1}=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow u_n=\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^n}.$

$u_n=\frac{1}{4096}\Leftrightarrow\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{12}}\Leftrightarrow n=12$

Ví dụ 5: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa $\begin{cases}u_1+u_2+u_3=14\\ u_1.u_2.u_3=64\end{cases}$. Tính u_2.

A. $u_2=4.$ **B.** $u_2=6.$ **C.** $u_2=8.$ **D.** $u_2=10.$

Lời giải.

Chọn A

Từ $u_1.u_2.u_3=64\Leftrightarrow u_1.u_1q.u_1q^2=64\Leftrightarrow(u_1q)^3=64\Leftrightarrow u_1q=4$ hay $u_2=4$.

Thay vào hệ ban đầu ta được $\begin{cases}u_1+4+u_3=14\\ u_1.4.u_3=64\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+u_3=10\\ u_1.u_3=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=8\\ u_3=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}u_1=2\\ u_3=8\end{cases}$.

Vậy $\begin{cases}u_1=8\\ q=\frac{1}{2}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}u_1=2\\ q=2\end{cases}\longrightarrow u_2=u_1q=4.$

Ví dụ 6: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa $\begin{cases}u_1-u_3+u_5=65\\ u_1+u_7=325\end{cases}$. Tính u_3.

A. $u_3=10.$ **B.** $u_3=15.$ **C.** $u_3=20.$ **D.** $u_3=25.$

Lời giải.

Chọn C

Ta có $\begin{cases}u_1-u_3+u_5=65\\ u_1+u_7=325\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1-u_1q^2+u_1q^4=65\\ u_1+u_1q^6=325\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1\left(1-q^2+q^4\right)=65 & (1)\\ u_1\left(1+q^6\right)=325 & (2)\end{cases}$.

Lấy (2) chia (1), ta được $\frac{1+q^6}{1-q^2+q^4}=\frac{325}{65}\Leftrightarrow 1+q^2=5\Leftrightarrow q=\pm 2$.

Vậy $\begin{cases}u_1=5\\ q=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}u_1=5\\ q=-2\end{cases}\longrightarrow u_3=u_1q^2=5.4=20.$

Dạng 2. Tính tổng của cấp số nhân

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2=-2$ và $u_5=54$. Tính tổng 1000 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

A. $S_{1000}=\dfrac{1-3^{1000}}{4}$. **B.** $S_{1000}=\dfrac{3^{1000}-1}{2}$. **C.** $S_{1000}=\dfrac{3^{1000}-1}{6}$. **D.** $S_{1000}=\dfrac{1-3^{1000}}{6}$.

Lời giải.

Chọn D

Ta có $\begin{cases}-2=u_2=u_1q\\54=u_5=u_1q^4=u_1q.q^3=-2q^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=\dfrac{2}{3}\\q=-3\end{cases}$. Khi đó

$$S_{100}=u_1.\frac{1-q^{100}}{1-q}=\frac{2}{3}.\frac{1-(-3)^{100}}{1-(-3)}=\frac{1-3^{100}}{6}$$

Ví dụ 2: Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $\dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{2};\ 1;\ \cdots;\ 2048$. Tính tổng S của tất cả các số hạng của cấp số nhân đã cho.

A. $S=2047,75$. **B.** $S=2049,75$. **C.** $S=4095,75$. **D.** $S=4096,75$.

Lời giải.

Chọn A

Cấp số nhân đã cho có

$$\begin{cases}u_1=\dfrac{1}{4}\\q=2\end{cases}\longrightarrow 2048=2^{11}=u_1q^{n-1}=\frac{1}{2}.2^{n-1}=2^{n-2}\Leftrightarrow n=13.$$

Vậy cấp số nhân đã cho có tất cả 13 số hạng. Vậy

$$S_{13}=u_1.\frac{1-q^{13}}{1-q}=\frac{1}{4}.\frac{1-2^{13}}{1-2}=2047,75$$

Ví dụ 3: Tính tổng $S=-2+4-8+16-32+64-\ldots+(-2)^{n-1}+(-2)^n$ với $n\geq 1,\ n\in\mathbb{N}$.

A. $S=2n$. **B.** $S=2^n$.

C. $S=\dfrac{-2\left(1-2^n\right)}{1-2}$. **D.** $S=-2.\dfrac{1-(-2)^n}{3}$.

Lời giải.

Chọn D

Các số hạng $-2;4;-8;16;-32;64;...;(-2)^{n-1};(-2)^n$ trong tổng S gồm có n số hạng theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân có $u_1=-2,\ q=-2.$ Vậy

$$S=S_n=u_1.\frac{1-q^n}{1-q}=-2.\frac{1-(-2)^n}{1-(-2)}=-2.\frac{1-(-2)^n}{3}$$

Ví dụ 4: Gọi $S=9+99+999+...+999...9$ (n số 9) thì S nhận giá trị nào sau đây?

A. $S=\frac{10^n-1}{9}.$ **B.** $S=10\left(\frac{10^n-1}{9}\right).$

C. $S=10\left(\frac{10^n-1}{9}\right)-n.$ **D.** $S=10\left(\frac{10^n-1}{9}\right)+n.$

Lời giải.

Chọn C

Ta có $S=9+99+999+...+\underbrace{99...9}_{\text{n số 9}}=(10-1)+(10^2-1)+...+(10^n-1)$

$=10+10^2+...+10^n-n=10.\frac{1-10^n}{1-10}-n.$

Ví dụ 5 : Cho cấp số nhân (u_n) có tổng của hai số hạng đầu tiên bằng 4, tổng của ba số hạng đầu tiên bằng 13. Tính tổng của năm số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho, biết công bội của cấp số nhân là một số dương.

A. $S_5=\frac{181}{16}.$ **B.** $S_5=141.$ **C.** $S_5=121.$ **D.** $S_5=\frac{35}{16}.$

Lời giải.

Chọn C

$$\begin{cases}4=S_2=u_1+u_2=u_1(1+q)\\13=S_3=u_1(1+q+q^2)\end{cases}\Leftrightarrow 4(1+q+q^2)=13(1+q)\Leftrightarrow q=3\ (q>0)\Rightarrow u_1=1.$$

Khi đó $S_5=u_1.\frac{1-q^5}{1-q}=1.\frac{1-3^5}{1-3}=121$

Dạng 3. Các bài toán thực tế

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nữa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp (có diện tích là $12\ 288\ m^2$). Tính diện tích mặt trên cùng.

A. $6m^2$. **B.** $8m^2$. **C.** $10m^2$. **D.** $12m^2$.

Lời giải.

Chọn A

Diện tích bề mặt của mỗi tầng (kể từ 1) lập thành một cấp số nhân có công bội $q=\frac{1}{2}$ và $u_1=\frac{12288}{2}=6144$. Khi đó diện tích mặt trên cùng là

$u_{11}=u_1q^{10}=\frac{6144}{2^{10}}=6$

Ví dụ 2: Một du khách vào chuồng đua ngựa đặt cược, lần đầu đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi lần tiền đặt cọc trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khác trên thắng hay thua bao nhiêu?

A. Hòa vốn. **B.** Thua 20000 đồng.

C. Thắng 20000 đồng. **D.** Thua 40000 đồng.

Lời giải.

Chọn C

Số tiền du khác đặt trong mỗi lần (kể từ lần đầu) là một cấp số nhân có $u_1=20\,000$ và công bội $q=2$.

Du khách thua trong 9 lần đầu tiên nên tổng số tiền thua là:

$$S_9=u_1+u_2+...+u_9=\frac{u_1\left(1-p^9\right)}{1-p}=10220000$$

Số tiền mà du khách thắng trong lần thứ 10 là $u_{10}=u_1.p^9=10240000$

Ta có $u_{10}-S_9=20\,000>0$ nên du khách thắng 20 000.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các dãy số sau, dãy số nào **không** phải là một cấp số nhân?

A. $2;\ 4;\ 8;\ 16;\ \ldots$ **B.** $1;\ -1;\ 1;\ -1;\ \cdots$

C. $1^2;\ 2^2;\ 3^2;\ 4^2;\ \cdots$ **D.** $a;\ a^3;\ a^5;\ a^7;\ \cdots(a\neq 0)$.

Lời giải.

Chọn C

Xét đáp án C: $1^2;\ 2^2;\ 3^2;\ 4^2;\ \cdots\longrightarrow\frac{u_2}{u_1}=4\neq\frac{9}{4}=\frac{u_3}{u_2}$

Các đáp án A, B, D đều là các cấp số nhân.

Nhận xét: Dãy (u_n) với $u_n \neq 0$ là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_n = a.q^n$, tức là các số hạng của nó đều được biểu diễn dưới dạng lũy thừa của cùng một cơ số q (công bội), các số hạng liên tiếp (kể từ số hạng thứ hai) thì số mũ của chúng cách đều nhau. Ví dụ

$2;\ 4;\ 8;\ 16;\ \ldots \longrightarrow$ là cấp số nhân và $u_n = 2^n$.

$1;\ -1;\ 1;\ -1;\ \cdots \longrightarrow$ là cấp số nhân và $u_n = (-1)^n$.

$a;\ a^3;\ a^5;\ a^7;\ \cdots (a \neq 0) \longrightarrow$ là cấp số nhân và $u_n = a^{2n-1} = \frac{1}{a}.\left(a^2\right)^n$.

Câu 2: Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

A. $1;\ 2;\ 4;\ 8;\ \cdots$

B. $3;\ 3^2;\ 3^3;\ 3^4;\ \cdots$

C. $4;\ 2;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \cdots$

D. $\frac{1}{\pi};\ \frac{1}{\pi^2};\ \frac{1}{\pi^4};\ \frac{1}{\pi^6};\ \cdots$

Lời giải.

Chọn D

Các đáp án A, B, C đều là các cấp số nhân công bội lần lượt là $2;3;\frac{1}{2}$.

Xét đáp án D: $\frac{1}{\pi};\ \frac{1}{\pi^2};\ \frac{1}{\pi^4};\ \frac{1}{\pi^6};\ \cdots \longrightarrow \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{\pi} \neq \frac{1}{\pi^2} = \frac{u_3}{u_2}$

Câu 3: Dãy số $1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 16;\ 32;\ \cdots$ là một cấp số nhân với:

A. Công bội là 3 và số hạng đầu tiên là 1.

B. Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 1.

C. Công bội là 4 và số hạng đầu tiên là 2.

D. Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 2.

Lời giải.

Chọn B

Cấp số nhân: $1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 16;\ 32;\ldots \longrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ q = \frac{u_2}{u_1} = 2 \end{cases}$

Câu 4: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -2$ và $q = -5$. Viết bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

A. $-2;\ 10;\ 50;\ -250$.

B. $-2;\ 10;\ -50;\ 250$.

C. $-2;\ -10;\ -50;\ -250$.

D. $-2;\ 10;\ 50;\ 250$.

Lời giải.

Chọn B

$$\begin{cases} u_1 = -2 \\ q = -5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = -2 \\ u_2 = u_1 q = 10 \\ u_3 = u_2 q = -50 \\ u_4 = u_3 q = 250 \end{cases}$$

Câu 5: Một cấp số nhân có hai số hạng liên tiếp là 16 và 36. Số hạng tiếp theo là:

A. 720. **B.** 81. **C.** 64. **D.** 56.

Lời giải.

Chọn B

Ta có cấp số nhân (u_n) có:

$$\begin{cases} u_k = 16 \\ u_{k+1} = 36 \end{cases} \Rightarrow q = \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{9}{4} \longrightarrow u_{k+2} = u_{k+1} q = 81$$

Câu 6: Tìm x để các số $2;\ 8;\ x;\ 128$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x = 14$. **B.** $x = 32$. **C.** $x = 64$. **D.** $x = 68$.

Lời giải.

Chọn B

Cấp số nhân $2;\ 8;\ x;\ 128$ theo thứ tự đó sẽ là $u_1; u_2; u_3; u_4$, ta có

$$\begin{cases} \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} \\ \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8}{2} = \frac{x}{8} \\ \frac{128}{x} = \frac{x}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 32 \\ x^2 = 1024 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 32 \\ \left[\begin{array}{l} x = 32 \\ x = -32 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 32$$

Câu 7: Tìm tất cả giá trị của x để ba số $2x-1;\ x;\ 2x+1$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $x = \pm\frac{1}{3}$. **C.** $x = \pm\sqrt{3}$. **D.** $x = \pm 3$.

Lời giải.

Chọn A

Cấp số nhân $2x-1;\ x;\ 2x+1 \longrightarrow (2x-1)(2x+1) = x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 8: Tìm x để ba số $1+x;\ 9+x;\ 33+x$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x = 1$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = 7$. **D.** $x = 3;\ x = 7$.

Lời giải.

Chọn B

Cấp số nhân $1+x;\ 9+x;\ 33+x \longrightarrow (1+x)(33+x) = (9+x)^2 \Leftrightarrow x = 3$.

Câu 9: Với giá trị x, y nào dưới đây thì các số hạng lần lượt là $-2;\ x;\ -18;\ y$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân?

A. $\begin{cases} x=6 \\ y=-54 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-10 \\ y=-26 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-6 \\ y=-54 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-6 \\ y=54 \end{cases}$.

Lời giải.

Chọn C

Cấp số nhân: $-2;\ x;\ -18;\ y \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{-2}=\dfrac{-18}{x} \\ \dfrac{-18}{x}=\dfrac{y}{-18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 6 \\ y=\dfrac{324}{x}=\pm 54 \end{cases}$. Vậy

$(x;y)=(6;54)$ hoặc $(x;y)=(-6;-54)$

Câu 10: Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $x;\ 12;\ y;\ 192$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x=1; y=144$. **B.** $x=2; y=72$. **C.** $x=3; y=48$. **D.** $x=4; y=36$.

Lời giải.

Chọn C

Cấp số nhân: $x;\ 12;\ y;\ 192 \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{12}{x}=\dfrac{y}{12} \\ \dfrac{y}{12}=\dfrac{192}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{144}{y} \\ y^2=2304 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 3 \\ y=\pm 48 \end{cases}$.

Câu 11: Thêm hai số thực dương x và y vào giữa hai số 5 và 320 để được bốn số $5;\ x;\ y;\ 320$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhận. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\begin{cases} x=25 \\ y=125 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=20 \\ y=80 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=15 \\ y=45 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=30 \\ y=90 \end{cases}$.

Lời giải.

Chọn B

Cấp số nhân: $5;\ x;\ y;\ 320 \longrightarrow \begin{cases} u_1=5 \\ q=\dfrac{x}{5} \\ y=u_3=u_1q^2=\dfrac{x^2}{5} \\ 320=u_4=u_1q^3=\dfrac{x^3}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=80 \end{cases}$.

Câu 12: Ba số hạng đầu của một cấp số nhân là $x-6;\ x$ và y. Tìm y, biết rằng công bội của cấp số nhân là 6.

A. $y=216$. **B.** $y=\dfrac{324}{5}$. **C.** $y=\dfrac{1296}{5}$. **D.** $y=12$.

Lời giải.

Chọn C

Cấp số nhân $x-6;\ x$ và y có công bội $q=6$ nên ta có

$$\begin{cases} u_1 = x-6,\ q=6 \\ x = u_2 = u_1 q = 6(x-6) \\ y = u_3 = u_2 q^2 = 36x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{36}{5} \\ y = 36.\dfrac{36}{5} = \dfrac{1296}{5} \end{cases}$$

Câu 13: Hai số hạng đầu của của một cấp số nhân là $2x+1$ và $4x^2-1$. Số hạng thứ ba của cấp số nhân là:

A. $2x-1$.

B. $2x+1$.

C. $8x^3-4x^2-2x+1$.

D. $8x^3+4x^2-2x-1$.

Lời giải.

Chọn C

Công bội của cấp số nhân là: $q=\dfrac{4x^2-1}{2x+1}=2x-1$. Vậy số hạng thứ ba của cấp số nhân là:

$(4x^2-1)(2x-1)=8x^3-4x^2-2x+1$

Câu 14: Dãy số nào sau đây là cấp số nhân?

A. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 1,\ n \ge 1 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = -3u_n,\ n \ge 1 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3,\ n \ge 1 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} u_1 = \dfrac{\pi}{2} \\ u_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{n-1}\right),\ n \ge 1 \end{cases}$.

Lời giải.

Chọn B

(u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_{n+1} = qu_n \longrightarrow$

Câu 15: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{3}{2}.5^n$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (u_n) không phải là cấp số nhân.

B. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q=5$ và số hạng đầu $u_1 = \dfrac{3}{2}$.

C. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q=5$ và số hạng đầu $u_1 = \dfrac{15}{2}$.

D. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q=\dfrac{5}{2}$ và số hạng đầu $u_1 = 3$.

Lời giải.

Chọn C

$u_n = \frac{3}{2}.5^n$ là cấp số nhân công bội $q = 5$ và $u_1 = \frac{15}{2}$

Câu 16: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $u_n = \frac{1}{3^{n-2}}$. **B.** $u_n = \frac{1}{3^n} - 1$. **C.** $u_n = n + \frac{1}{3}$. **D.** $u_n = n^2 - \frac{1}{3}$.

Lời giải.

Chọn A

Dãy $u_n = \frac{1}{3^{n-2}} = 9.\left(\frac{1}{3}\right)^n$ là cấp số nhân có $\begin{cases} u_1 = 3 \\ q = \frac{1}{3} \end{cases}$

Câu 17: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $u_n = 7 - 3n$. **B.** $u_n = 7 - 3^n$. **C.** $u_n = \frac{7}{3n}$. **D.** $u_n = 7.3^n$.

Lời giải.

Chọn D

Dãy $u_n = 7.3^n$ là cấp số nhân có $\begin{cases} u_1 = 21 \\ q = 3 \end{cases} \longrightarrow$

Câu 18: Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N}^*$. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

A. $u_1; u_3; u_5; \ldots$ **B.** $3u_1; 3u_2; 3u_3; \ldots$

C. $\frac{1}{u_1}; \frac{1}{u_2}; \frac{1}{u_3}; \ldots$ **D.** $u_1 + 2; u_2 + 2; u_3 + 2; \ldots$

Lời giải.

Chọn D

Giả sử (u_n) là cấp số nhân công bội q, thì

Dãy $u_1; u_3; u_5; \ldots$ là cấp số nhân công bội q^2.

Dãy $3u_1; 3u_2; 3u_3; \ldots$ là cấp số nhân công bội $2q$.

Dãy $\frac{1}{u_1}; \frac{1}{u_2}; \frac{1}{u_3}; \ldots$ là cấp số nhân công bội $\frac{1}{q}$.

Dãy $u_1 + 2; u_2 + 2; u_3 + 2; \ldots$ không phải là cấp số nhân.

Nhận xét: Có thể lấy một cấp số nhân cụ thể để kiểm tra, ví dụ $u_n = 2^n$.

Câu 19: Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $3;\ 9;\ 27;\ 81;\ \ldots$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số nhân đã cho.

A. $u_n = 3^{n-1}$. **B.** $u_n = 3^n$. **C.** $u_n = 3^{n+1}$. **D.** $u_n = 3+3^n$.

Lời giải.

Chọn B

Cấp số nhân $3;\ 9;\ 27;\ 81;\ \ldots \longrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ q = \dfrac{9}{3} = 3 \end{cases} \Rightarrow u_n = u_1 q^{n-1} = 3.3^{n-1} = 3^n$.

Câu 20: Một cấp số nhân có 6 số hạng, số hạng đầu bằng 2 và số hạng thứ sáu bằng 486. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho.

A. $q = 3$. **B.** $q = -3$. **C.** $q = 2$. **D.** $q = -2$.

Lời giải.

Chọn A

Theo giải thiết ta có: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_6 = 486 \end{cases} \longrightarrow 486 = u_6 = u_1 q^5 = 2q^5 \Leftrightarrow q^5 = 243 \Leftrightarrow q = 3.$

Câu 21: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và $q = \dfrac{2}{3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_5 = -\dfrac{27}{16}$. **B.** $u_5 = -\dfrac{16}{27}$. **C.** $u_5 = \dfrac{16}{27}$. **D.** $u_5 = \dfrac{27}{16}$.

Lời giải.

Chọn B

$\begin{cases} u_1 = -3 \\ q = \dfrac{2}{3} \end{cases} \longrightarrow u_5 = u_1 q^4 = -3.\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = -3.\dfrac{16}{81} = -\dfrac{16}{27}.$

Câu 22: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$ và $u_2 = -8$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_6 = 130$. **B.** $u_5 = 256$. **C.** $S_5 = 256$. **D.** $q = -4$.

Lời giải.

Chọn D

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = -8 = u_1 q = 2q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ q = -4 \\ S_5 = u_1.\dfrac{1-q^5}{1-q} = 2.\dfrac{1-(-4)^5}{1+4} = 410 \\ S_6 = 2.\dfrac{1-(-4)^6}{1+4} = -1638 \\ u_5 = u_1 q^4 = 2.(-4)^4 = 512. \end{cases}$$

Câu 23: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $q = -2$. Số 192 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

A. Số hạng thứ 5. **B.** Số hạng thứ 6.

C. Số hạng thứ 7. **D.** Không là số hạng của cấp số đã cho.

Lời giải.

Chọn C

$192 = u_n = u_1 q^{n-1} = 3.(-2)^{n-1} \Leftrightarrow (-1)^{n-1}.2^{n-1} = 64 = (-1)^6.2^6 \Leftrightarrow n = 7.$

Câu 24: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1$ và $q = -\dfrac{1}{10}$. Số $\dfrac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

A. Số hạng thứ 103. **B.** Số hạng thứ 104.

C. Số hạng thứ 105. **D.** Không là số hạng của cấp số đã cho.

Lời giải.

Chọn B

$$\frac{1}{10^{103}} = u_n = u_1 q^{n-1} = -1.\left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{(-1)^n}{10^{n-1}} \Leftrightarrow \begin{cases} n \text{ chan} \\ n-1 = 103 \end{cases} \Leftrightarrow n = 104.$$

Câu 25: Một cấp số nhân có công bội bằng 3 và số hạng đầu bằng 5. Biết số hạng chính giữa là 32805. Hỏi cấp số nhân đã cho có bao nhiêu số hạng?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 9.

Lời giải.

Chọn B

$32805 = u_n = u_1 q^{n-1} = 5.3^{n-1} \Leftrightarrow 3^{n-1} = 6561 = 3^8 \Leftrightarrow n = 9.$ Vậy u_9 là số hạng chính giữa của cấp số nhân, nên cấp số nhân đã cho có 17 số hạng.

Câu 26: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_n = 81$ và $u_{n+1} = 9.$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $q = \dfrac{1}{9}.$ **B.** $q = 9.$ **C.** $q = -9.$ **D.** $q = -\dfrac{1}{9}.$

Lời giải.

Chọn A

Công bội $q=\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{9}{81}=\frac{1}{9}$

Câu 27: Một dãy số được xác định bởi $u_1=-4$ và $u_n=-\frac{1}{2}u_{n-1},\ n\geq 2$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số đó là:

A. $u_n=2^{n-1}$.

B. $u_n=(-2)^{n-1}$.

C. $u_n=-4\left(2^{-n+1}\right)$.

D. $u_n=-4\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Lời giải.

Chọn D

$$\begin{cases}u_1=-4\\ u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}u_1=-4\\ q=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow u_n=u_1q^{n-1}=-4.\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Câu 28: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-3$ và $q=-2$. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

A. $S_{10}=-511$.

B. $S_{10}=-1025$.

C. $S_{10}=1025$.

D. $S_{10}=1023$.

Lời giải.

Chọn D

$$\begin{cases}u_1=-3\\ q=-2\end{cases}\longrightarrow S_{10}=u_1.\frac{1-q^{10}}{1-q}=-3.\frac{1-(-2)^{10}}{1-(-2)}=1023.$$

Câu 29: Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là 1; 4; 16; 64; ⋯ Gọi S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n=4^{n-1}$.

B. $S_n=\frac{n\left(1+4^{n-1}\right)}{2}$.

C. $S_n=\frac{4^n-1}{3}$.

D. $S_n=\frac{4\left(4^n-1\right)}{3}$.

Lời giải.

Chọn C

Cấp số nhân đã cho có $\begin{cases}u_1=1\\ q=4\end{cases}\longrightarrow S_n=u_1.\frac{1-q^n}{1-q}=1.\frac{1-4^n}{1-4}=\frac{4^n-1}{3}$.

Câu 30: Một cấp số nhân có 6 số hạng với công bội bằng 2 và tổng số các số hạng bằng 189. Tìm số hạng cuối u_6 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_6=32$.

B. $u_6=104$.

C. $u_6=48$.

D. $u_6=96$.

Lời giải.

Chọn D

Theo giả thiết: $\begin{cases} q=2 \\ S_6=189=u_1\dfrac{1-q^6}{1-q}=u_1.\dfrac{1-2^6}{1-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=2 \\ u_1=3 \end{cases} \Rightarrow u_6=u_1q^5=3.2^5=96.$

Câu 31: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-6$ và $q=-2$. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho bằng 2046. Tìm n.

A. $n=9$. **B.** $n=10$. **C.** $n=11$. **D.** $n=12$.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $2046=S_n=u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q}=-6.\dfrac{1-(-2)^n}{1-(-2)}=2\left((-2)^n-1\right)\Rightarrow(-2)^n=1024\Leftrightarrow n=10.$

Câu 32: Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n=5^n-1$. Tìm số hạng thứ 4 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_4=100$. **B.** $u_4=124$. **C.** $u_4=500$. **D.** $u_4=624$.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $5^{n-1}-1=S_n=u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q}=\dfrac{u_1}{q-1}\left(q^n-1\right)\Leftrightarrow\begin{cases} u_1=q-1 \\ q=5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} u_1=4 \\ q=5 \end{cases}$. Khi đó

$u_4=u_1q^3=4.5^3=50$

Câu 33: Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n=\dfrac{3^n-1}{3^{n-1}}$. Tìm số hạng thứ 5 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_5=\dfrac{2}{3^4}$. **B.** $u_5=\dfrac{1}{3^5}$. **C.** $u_5=3^5$. **D.** $u_5=\dfrac{5}{3^5}$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có $\dfrac{3^n-1}{3^{n-1}}=3\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)=S_n=\dfrac{u_1}{1-q}\left(1-q^n\right)\Leftrightarrow\begin{cases} u_1=3(1-q) \\ q=\dfrac{1}{3} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} u_1=2 \\ q=\dfrac{1}{3} \end{cases}$. Khi đó

$u_5=u_1q^4=\dfrac{2}{3^4}$

Câu 34: Một cấp số nhân có số hạng thứ bảy bằng $\dfrac{1}{2}$, công bội bằng $\dfrac{1}{4}$. Hỏi số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng bao nhiêu?

A. 4096. **B.** 2048. **C.** 1024. **D.** $\frac{1}{512}$.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $\begin{cases} q=\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}=u_7=u_1q^6=\frac{u_1}{4^6} \end{cases} \Rightarrow u_1=\frac{4^6}{2}=2048$

Câu 35: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2=-6$ và $u_6=-486$. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho, biết rằng $u_3>0$.

A. $q=-3$. **B.** $q=-\frac{1}{3}$. **C.** $q=\frac{1}{3}$. **D.** $q=3$.

Lời giải.

Chọn D

$\begin{cases} -6=u_2=u_1q \\ -486=u_6=u_1q^5=u_1q.q^4=-6.q^4 \end{cases} \Rightarrow q^4=81=3^4 \Rightarrow q=3.$

Câu 36: Cho cấp số nhân $u_1;\ u_2;\ u_3;\ \cdots$ với $u_1=1$. Tìm công bội q để $4u_2+5u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $q=-\frac{2}{5}$. **B.** $q=0$. **C.** $q=\frac{2}{5}$. **D.** $q=1$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có $4u_2+5u_3=4u_1q+5u_1q^2=5q^2+4q=5\left(q+\frac{2}{5}\right)^2-\frac{4}{5}\geq-\frac{4}{5}$. Vậy

$\min\left(4u_2+5u_3\right)=-\frac{4}{5}$ khi $q=-\frac{2}{5}$

Câu 37: Một cấp số nhân có số hạng thứ hai bằng 4 và số hạng thứ sáu bằng 64, thì số hạng tổng quát của cấp số nhân đó có thể tính theo công thức nào dưới đây?

A. $u_n=2^{n-1}$. **B.** $u_n=2^n$ **C.** $u_n=2^{n+1}$. **D.** $u_n=2n$.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $\begin{cases} 4=u_2=u_1q \\ 64=u_6=u_1q^5=u_1q.q^4=4q^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=2 \\ q=2 \end{cases} \Rightarrow u_n=u_1q^{n-1}=2.2^{n-1}=2^n.$

Câu 38: Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_k=u_1.q^{k-1}$. **B.** $u_k=\frac{u_{k-1}+u_{k+1}}{2}$.

C. $u_k=\sqrt{u_{k+1}.u_{k+2}}$. **D.** $u_k=u_1+(k-1)q$.

Lời giải.

Chọn A

Câu 39: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1\neq 0$ và $q\neq 0$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $u_7=u_4.q^3$. **B.** $u_7=u_4.q^4$. **C.** $u_7=u_4.q^5$. **D.** $u_7=u_4.q^6$.

Lời giải.

Chọn A

$$\begin{cases}u_4=u_1q^3\\ u_7=u_1q^6\end{cases}\longrightarrow u_7=\left(u_1q^3\right).q^3=u_4q^3$$

Câu 40: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1\neq 0$ và $q\neq 0$. Với $1<k<m$, đẳng thức nào dưới đây là đúng?

A. $u_m=u_k.q^k$. **B.** $u_m=u_k.q^m$. **C.** $u_m=u_k.q^{m-k}$. **D.** $u_m=u_k.\mathrm{q}^{m+k}$.

Lời giải.

Chọn C

$$u_k=u_1q^{k-1}\longrightarrow u_m=u_1q^{m-1}=\left(u_1q^{k-1}\right).q^{m-k}=u_kq^{m-k}$$

Câu 41: Cho một cấp số nhân có n số hạng $(n>k>55)$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $u_1.u_n=u_2.u_{n-1}$. **B.** $u_1.u_n=u_5.u_{n-4}$.

C. $u_1.u_n=u_{55}.u_{n-55}$. **D.** $u_1.u_n=u_k.u_{n-k+1}$.

Lời giải.

Chọn C

$u_1u_n=u_1.u_1q^{n-1}=\left(u_1q^{k-1}\right).\left(u_1q^{m-1}\right)=u_k.u_m$ với $k+m=n+1$.

Câu 42: Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân (u_n), biết $\begin{cases}u_6=192\\ u_7=384\end{cases}$.

A. $\begin{cases}u_1=5\\ q=2\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}u_1=6\\ q=2\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}u_1=6\\ q=3\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}u_1=5\\ q=3\end{cases}$.

Lời giải.

Chọn B

$$\begin{cases}192=u_6=u_1q^5\\ 384=u_7=u_1q^6=\left(u_1q^5\right)q=192q\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}q=2\\ u_1=\dfrac{192}{q^5}=6\end{cases}.$$

Câu 43: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}u_4-u_2=36\\ u_5-u_3=72\end{cases}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ q = 2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 2 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} u_1 = 9 \\ q = 2 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = 9 \\ q = 3 \end{cases}$.

Lời giải.

Chọn B

$$\begin{cases} 36 = u_4 - u_2 = u_1 q\left(q^2 - 1\right) \\ 72 = u_5 - u_3 = u_1 q^2\left(q^2 - 1\right) = \left[u_1 q\left(q^2 - 1\right)\right] q = 36q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = \dfrac{36}{q\left(q^2 - 1\right)} = 6 \end{cases}.$$

Câu 44: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_1 + u_5 = 272 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $q = 2$. **B.** $q = -4$. **C.** $q = 4$. **D.** $q = -2$.

Lời giải.

Chọn A

$$\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_1 + u_5 = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^{19} = 8u_1 q^{16} \\ u_1\left(1 + q^4\right) = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = 8 \\ u_1 = \dfrac{272}{1 + q^4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 16 \end{cases}.$$

Câu 45: Một cấp số nhân có năm số hạng mà hai số hạng đầu tiên là các số dương, tích của số hạng đầu và số hạng thứ ba bằng 1, tích của số hạng thứ ba và số hạng cuối bằng $\frac{1}{16}$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân đã cho.

A. $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ q = 2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = 2 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} u_1 = -2 \\ q = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = -\dfrac{1}{2} \\ q = -2 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{cases} u_1, \\ u_2 > 0 \\ u_1 . u_3 = 1 \\ u_3 . u_5 = \dfrac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 > 0, \\ q > 0 \\ u_1^2 q^2 = 1 \\ \dfrac{1}{16} = u_1^2 q^6 = \left(u_1^2 q^2\right) q^4 = q^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \dfrac{1}{2} \\ u_1 = \dfrac{1}{q} = 2 \end{cases}.$$

Câu 46: Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 49\left(\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \dfrac{1}{u_3} + \dfrac{1}{u_4} + \dfrac{1}{u_5}\right) \\ u_1 + u_3 = 35 \end{cases}.$$

Tính $P = u_1 + 4q^2$.

A. $P = 24$. **B.** $P = 29$. **C.** $P = 34$. **D.** $P = 39$.

Lời giải.

Chọn B

Nhận xét: Nếu $u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5$ là một cấp số nhân với công bội q thì $\frac{1}{u_1},\ \frac{1}{u_2},\ \frac{1}{u_3},\ \frac{1}{u_4},\ \frac{1}{u_5}$ cũng tạo thành cấp số nhân với công bội $\frac{1}{q}$.

Do đó từ giả thiết ta có $\begin{cases} u_1.\dfrac{q^5-1}{q-1}=49\left(\dfrac{1}{u_1}.\dfrac{\frac{1}{q^5}-1}{\frac{1}{q}-1}\right) & (1) \\ u_1+u_1q^2=35 & (2) \end{cases}$.

Phương trình $(1)\Leftrightarrow u_1.\dfrac{q^5-1}{q-1}=\dfrac{49}{u_1}\left(\dfrac{q^5-1}{q^4(q-1)}\right)\Leftrightarrow u_1^2q^4=49\Leftrightarrow u_1q^2=\pm 7$.

Với $u_1q^2=-7$. Thay vào (2), ta được $u_1-7=35\Leftrightarrow u_1=42$. Suy ra $q^2=-\frac{7}{42}$: vô lý.

Với $u_1q^2=7$. Thay vào (2), ta được $u_1+7=35\Leftrightarrow u_1=28$. Vậy $\begin{cases} u_1=28 \\ q=\frac{1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1=28 \\ q=-\frac{1}{2} \end{cases}$. Khi đó $u_1+4q^2=29.$

Câu 47: Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=26 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=364 \end{cases}$. Tìm q biết rằng $q>1$.

A. $q=\frac{5}{4}$. **B.** $q=4$. **C.** $q=\frac{4}{3}$. **D.** $q=3$.

Lời giải.

Chọn D

Ta có $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=26 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=364 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right)=26 \\ u_1^2\left(1+q^2+q^4\right)=364 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} u_1^2\left(1+q+q^2\right)^2=26^2 & (1) \\ u_1^2\left(1+q^2+q^4\right)=364 & (2) \end{cases}$.

Lấy (1) chia (2), ta

được $\dfrac{\left(1+q+q^2\right)^2}{1+q^2+q^4}=\dfrac{26^2}{364}\Leftrightarrow 3q^4-7q^3-4q^2-7q+3=0\Leftrightarrow 3\left(q^2+\dfrac{1}{q^2}\right)-7\left(q+\dfrac{1}{q}\right)-4=0$.

Đặt $t=q+\frac{1}{q}$, $|t|\ge 2$. Phương trình trở thành $3t^2-7t-10=0\Leftrightarrow\begin{cases} t=-1\ (\text{loại}) \\ t=-\frac{10}{3} \end{cases}$.

Với $t=-\frac{10}{3}$, suy ra $q+\frac{1}{q}=-\frac{10}{3}\Leftrightarrow 3q^2-10q+3=0\Leftrightarrow q=3$ hoặc $q=\frac{1}{3}$. Vì $q>1$ nên $q=3$.

Câu 48: Các số $x+6y,\ 5x+2y,\ 8x+y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số $x-1,\ y+2,\ x-3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính x^2+y^2.

A. $x^2+y^2=40$. **B.** $x^2+y^2=25$. **C.** $x^2+y^2=100$. **D.** $x^2+y^2=10$.

Lời giải.

Chọn A

Theo giả thiết ta có $\begin{cases}(x+6y)+(8x+y)=2(5x+2y)\\(x-1)(x-3y)=(y+2)^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=3y\\(3y-1)(3y-3y)=(y+2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3y\\0=(y+2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-6\\y=-2\end{cases}.$$

Suy ra $x^2+y^2=40$.

Câu 49: Ba số $x;\ y;\ z$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội q khác 1; đồng thời các số $x;\ 2y;\ 3z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với công sai khác 0. Tìm giá trị của q.

A. $q=\dfrac{1}{3}$. **B.** $q=\dfrac{1}{9}$. **C.** $q=-\dfrac{1}{3}$. **D.** $q=-3$.

Lời giải.

Chọn A

$$\begin{cases}y=xq;\ z=xq^2\\x+3z=2(2y)\end{cases}\Rightarrow x+3xq^2=4xq\Rightarrow x\left(3q^2-4q+1\right)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\3q^2-4q+1=0\end{cases}.$$

Nếu $x=0\Rightarrow y=z=0\Rightarrow$ công sai của cấp số cộng: $x;\ 2y;\ 3z$ bằng 0 (vô lí).

Nếu $3q^2-4q+1=0\Leftrightarrow\begin{cases}q=1\\q=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow q=\dfrac{1}{3}\ (q\neq 1)$.

Câu 50: Cho dãy số tăng $a,\ b,\ c\ (c\in\mathbb{Z})$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân; đồng thời $a,\ b+8,\ c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và $a,\ b+8,\ c+64$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tính giá trị biểu thức $P=a-b+2c$.

A. $P=\dfrac{184}{9}$. **B.** $P=64$. **C.** $P=\dfrac{92}{9}$. **D.** $P=32$.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $\begin{cases}ac=b^2\\a+c=2(b+8)\\a(c+64)=(b+8)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ac=b^2 & (1)\\a-2b=16-c & (2)\\ac+64a=(b+8)^2 & (3)\end{cases}$.

Thay (1) vào (3) ta được: $b^2+64a=b^2+16b+64\Leftrightarrow 4a-b=4\ (4)$.

Kết hợp (2) với (4) ta được: $\begin{cases} a-2b=16-c \\ 4a-b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{c-8}{7} \\ b=\dfrac{4c-60}{7} \end{cases}$ (5)

Thay (5) vào (1) ta được:

$$7(c-8)c=(4c-60)^2 \Leftrightarrow 9c^2-424c+3600=0 \Leftrightarrow \begin{cases} c=36 \\ c=\dfrac{100}{9} \end{cases} \Leftrightarrow c=36\ (c\in\mathbb{Z}).$$

Với $c=36 \Rightarrow a=4, b=12 \Rightarrow P=4-12+72=64.$

Câu 51: Số hạng thứ hai, số hạng đầu và số hạng thứ ba của một cấp số cộng với công sai khác 0 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội q. Tìm q.

A. $q=2.$ **B.** $q=-2.$ **C.** $q=-\dfrac{3}{2}.$ **D.** $q=\dfrac{3}{2}.$

Lời giải.

Chọn B

Giả sử ba số hạng $a;b;c$ lập thành cấp số cộng thỏa yêu cầu, khi đó $b;a;c$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân công bội q. Ta có

$$\begin{cases} a+c=2b \\ a=bq; c=bq^2 \end{cases} \Rightarrow bq+bq^2=2b \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ q^2+q-2=0 \end{cases}.$$

Nếu $b=0 \Rightarrow a=b=c=0$ nên $a;b;c$ là cấp số cộng công sai $d=0$ (vô lí).

Nếu $q^2+q-2=0 \Leftrightarrow q=1$ hoặc $q=-2$. Nếu $q=1 \Rightarrow a=b=c$ (vô lí), do đó $q=-2.$

Câu 52: Cho bốn số a,b,c,d biết rằng a,b,c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân công bội $q>1$; còn b,c,d theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Tìm q biết rằng $a+d=14$ và $b+c=12.$

A. $q=\dfrac{18+\sqrt{73}}{24}.$ **B.** $q=\dfrac{19+\sqrt{73}}{24}.$ **C.** $q=\dfrac{20+\sqrt{73}}{24}.$ **D.** $q=\dfrac{21+\sqrt{73}}{24}.$

Lời giải.

Chọn B

Giả sử a,b,c lập thành cấp số cộng công bội q. Khi đó theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} b=aq,\ c=aq^2 \\ b+d=2c \\ a+d=14 \\ b+c=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} aq+d=2aq^2 & (1) \\ a+d=14 & (2) \\ a\left(q+q^2\right)=12 & (3) \end{cases}$$

Nếu $q=0 \Rightarrow b=c=0=d$ (vô lí)

Nếu $q=-1 \Rightarrow b=-a; c=a \Rightarrow b+c=0$ (vô lí).

Vậy $q\neq 0, q\neq -1,$ từ (2) và (3) ta có: $d=14-a$ và $a=\dfrac{12}{q+q^2}$ thay vào (1) ta được:

$$\frac{12q}{q+q^2}+\frac{14q^2+14q-12}{q+q^2}=\frac{24q^3}{q+q^2}\Leftrightarrow 12q^3-7q^2-13q+6=0$$

$$\Leftrightarrow (q+1)\left(12q^2-19q+6\right)=0\Leftrightarrow q=\frac{19\pm\sqrt{73}}{24}$$

Vì $q>1$ nên $q=\dfrac{19+\sqrt{73}}{24}.$

Câu 53: Gọi $S=1+11+111+...+111...1$ (n số 1) thì S nhận giá trị nào sau đây?

A. $S=\dfrac{10^n-1}{81}.$ **B.** $S=10\left(\dfrac{10^n-1}{81}\right).$

C. $S=10\left(\dfrac{10^n-1}{81}\right)-n.$ **D.** $S=\dfrac{1}{9}\left[10\left(\dfrac{10^n-1}{9}\right)-n\right].$

Lời giải.

Chọn D

Ta có $S=\dfrac{1}{9}\left(9+99+999+...+\underbrace{99...9}_{\text{n số 9}}\right)=\dfrac{1}{9}.\left[10.\dfrac{1-10^n}{1-10}-n\right].$

Câu 54: Biết rằng $S=1+2.3+3.3^2+...+11.3^{10}=a+\dfrac{21.3^b}{4}.$ Tính $P=a+\dfrac{b}{4}.$

A. $P=1.$ **B.** $P=2.$ **C.** $P=3.$ **D.** $P=4.$

Lời giải.

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $3S=3+2.3^2+3.3^3+...+11.3^{11}$. Do đó

$$-2S=S-3S=1+3+3^2+...+3^{10}-10.3^{11}=\frac{1-3^{11}}{1-3}-11.3^{11}=-\frac{1}{2}-\frac{21.3^{11}}{2}\Rightarrow S=\frac{1}{4}+\frac{21}{4}.3^{11}.$$

Vì $S=\dfrac{1}{4}+\dfrac{21.3^{11}}{4}=a+\dfrac{21.3^b}{4}\Rightarrow a=\dfrac{1}{4},\ b=11\longrightarrow P=\dfrac{1}{4}+\dfrac{11}{4}=3.$

Câu 55: Một cấp số nhân có ba số hạng là $a,\ b,\ c$ (theo thứ tự đó) trong đó các số hạng đều khác 0 và công bội $q\neq 0.$ Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{bc}.$ **B.** $\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{ac}.$ **C.** $\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{1}{ba}.$ **D.** $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{2}{c}.$

Lời giải.

Chọn B

Ta có $ac = b^2 \Rightarrow \frac{1}{b^2} = \frac{1}{ac}$

Câu 56: Bốn góc của một tứ giác tạo thành cấp số nhân và góc lớn nhất gấp 27 lần góc nhỏ nhất. Tổng của góc lớn nhất và góc bé nhất bằng:

A. 56^0. **B.** 102^0. **C.** 252^0. **D.** 168^0.

Lời giải.

Chọn C

Giả sử 4 góc A, B, C, D (với $A < B < C < D$) theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân thỏa yêu cầu với công bội q. Ta có

$$\begin{cases} A+B+C+D=360 \\ D=27A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\left(1+q+q^2+q^3\right)=360 \\ Aq^3=27A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=3 \\ A=9 \\ D=Aq^3=243 \end{cases} \Rightarrow A+D=252.$$

CHƯƠNG 4. GIỚI HẠN

BÀI 1. GIỚI HẠN DÃY SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1

Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Định nghĩa 2

Ta nói dãy số (v_n) có giới hạn là a (hay v_n dần tới a) khi $n \to +\infty$, nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - a) = 0$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$ hay $v_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

2. Một vài giới hạn đặc biệt

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ với k nguyên dương;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$;

c) Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c = c$.

Chú ý: Từ nay về sau thay cho $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ ta viết tắt là $\lim u_n = a$.

II – ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN

Định lí 1

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì

- $\lim(u_n + v_n) = a + b$
- $\lim(u_n - v_n) = a - b$
- $\lim(u_n.v_n) = a.b$
- $\lim\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{a}{b}$ (nếu $b \neq 0$).

b) Nếu $\begin{cases}\lim u_n = a \\ u_n \geq 0, \forall n\end{cases}$ thì $\begin{cases}\lim\sqrt{u_n} = \sqrt{a} \\ a \geq 0\end{cases}$.

III – TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q, với $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn:

$$\boxed{S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \frac{u_1}{1-q} \quad (|q| < 1).}$$

IV – GIỚI HẠN VÔ CỰC

1. Định nghĩa

• Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.

• Dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu $\lim(-u_n) = +\infty$.

Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \to -\infty$ khi $n \to +\infty$.

Nhận xét: $u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = -\infty$.

2. Một vài giới hạn đặc biệt

Ta thừa nhận các kết quả sau

a) $\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương;

b) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

3. Định lí 2

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

b) Nếu $\lim u_n = a > 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0, \forall n > 0$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$.

c) Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim u_n.v_n = +\infty$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Giới hạn hữu tỉ

1. Phương pháp

Chú ý : Cho $P(n), Q(n)$ lần lượt là các đa thức bậc m, k theo biến n:

$$P(x) = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0 \ (a_m \neq 0)$$
$$Q(n) = b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0 \ (b_k \neq 0)$$

Khi đó $\lim \dfrac{P(n)}{Q(n)} = \lim \dfrac{a_m n^m}{b_k n^k}$, viết tắt $\dfrac{P(n)}{Q(n)} \sim \dfrac{a_m n^m}{b_k n^k}$, ta có các trường hợp sau :

Nếu « bậc tử » $<$ « bậc mẫu ($m < k$) thì $\lim \dfrac{P(n)}{Q(n)} = 0$.

Nếu « bậc tử » $=$ « bậc mẫu ($m = k$) thì $\lim \dfrac{P(n)}{Q(n)} = \dfrac{a_m}{b_k}$.

Nếu « bậc tử » $>$ « bậc mẫu ($m > k$) thì $\lim \dfrac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} +\infty \ khi \ a_m b_k > 0 \\ -\infty \ khi \ a_m b_k < 0 \end{cases}$.

Để ý rằng nếu $P(n), Q(n)$ có chứa « căn » thì ta vẫn tính được bậc của nó. Cụ thể $\sqrt[m]{n^k}$ tì có bậc là $\dfrac{k}{n}$. Ví dụ $\sqrt{n}$ có bậc là $\dfrac{1}{2}$, $\sqrt[3]{n^4}$ có bậc là $\dfrac{4}{3}$,...

Trong các bài sau ta có thể dùng dấu hiệu trên để chỉ ra kết quả một cách nhanh chóng !

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Tính $\lim\dfrac{3n^3-5n^2+1}{2n^3+6n^2+4n+5}$.

Giải

$$\lim\frac{3n^3-5n^2+1}{2n^3+6n^2+4n+5}=\lim\frac{3-\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^3}}{2+\dfrac{6}{n}+\dfrac{4}{n^2}+\dfrac{5}{n^3}}=\frac{3}{2}$$

Ví dụ 2: Tính $\lim\dfrac{n+2n^2}{n^3+3n-1}$

Lời giải

Ta có $\lim\dfrac{n+2n^2}{n^3+3n-1}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}}=\dfrac{0}{1}=0.$

Giải nhanh : Dạng « bậc tử » $<$ « bậc mẫu » nên kết quả bằng 0.

Ví dụ 3: Tính $\lim\dfrac{n^7+n^2}{n^3+3n-1}$

Lời giải

$$\lim\frac{n^7+n^2}{n^3+3n-1}\approx\frac{n^7}{n^3}=n^4=+\infty$$

Ví dụ 4: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{2n+b}{5n+3}$ trong đó b là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, giá trị của b bằng bào nhiêu

Lời giải

Ta có $\lim u_n=\lim\dfrac{2n+b}{5n+3}=\lim\dfrac{2+\dfrac{b}{n}}{5+\dfrac{3}{n}}=\dfrac{2}{5}\ (\forall b\in\mathbb{R})$

Giải nhanh : $\dfrac{2n+b}{5n+3}\sim\dfrac{2n}{5n}=\dfrac{2}{5}$ với mọi $b\in\mathbb{R}$.

Ví dụ 5: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{4n^2+n+2}{an^2+5}$. Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2, giá trị của a bằng bao nhiêu

Lời giải

$$2=\lim u_n=\lim\frac{4n^2+n+2}{an^2+5}=\lim\frac{4+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}{a+\dfrac{5}{n^2}}=\frac{4}{a}\ (a\neq 0)\Leftrightarrow a=2.$$

Giải nhanh : $2\sim\dfrac{4n^2+n+2}{an^2+5}\sim\dfrac{4n^2}{an^2}=\dfrac{4}{a}\Leftrightarrow a=2.$

Ví dụ 6: Tính giới hạn $L=\lim\dfrac{\left(n^2+2n\right)\left(2n^3+1\right)(4n+5)}{\left(n^4-3n-1\right)\left(3n^2-7\right)}$.

Lời giải

$$L=\lim\frac{\left(n^2+2n\right)\left(2n^3+1\right)(4n+5)}{\left(n^4-3n-1\right)\left(3n^2-7\right)}=\lim\frac{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{n^3}\right)\left(4+\dfrac{5}{n}\right)}{\left(1-\dfrac{3}{n^3}-\dfrac{1}{n^4}\right)\left(3-\dfrac{7}{n^2}\right)}=\frac{1.2.4}{1.3}=\frac{8}{3}.$$

Giải nhanh: $\dfrac{\left(n^2+2n\right)\left(2n^3+1\right)(4n+5)}{\left(n^4-3n-1\right)\left(3n^2-7\right)}\sim\dfrac{n^2.2n^3.4n}{n^4.3n^2}=\dfrac{8}{3}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim\dfrac{-3}{4n^2-2n+1}$ là:

A. $-\dfrac{3}{4}$. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\dfrac{-3}{4n^2-2n+1}=\lim\dfrac{\dfrac{-3}{n^2}}{4-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{0}{4}=0.$

Giải nhanh : Dạng « bậc tử » $<$ « bậc mẫu » nên kết quả bằng 0.

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim\dfrac{3n^3-2n+1}{4n^4+2n+1}$ là:

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{2}{7}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim\dfrac{3n^3-2n+1}{4n^4+2n+1}=\lim\dfrac{\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n^4}}{4+\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}}=\dfrac{0}{4}=0.$

Giải nhanh : Dạng « bậc tử » $<$ « bậc mẫu » nên kết quả bằng 0.

Câu 3: Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n=\dfrac{1}{n+1}$ và $v_n=\dfrac{2}{n+2}$. Khi đó $\lim\dfrac{v_n}{u_n}$ có giá trị bằng:

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\dfrac{v_n}{u_n}=\lim\dfrac{n+1}{n+2}=\lim\dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{2}{n}}=\dfrac{1}{1}=1.$

Giải nhanh : $\dfrac{n+1}{n+2}\sim\dfrac{n}{n}=1.$

Câu 4: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{an+4}{5n+3}$ trong đó a là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn bằng 2, giá trị của a là:

A. $a=10.$ **B.** $a=8.$ **C.** $a=6.$ **D.** $a=4.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim u_n=\lim\dfrac{an+4}{5n+3}=\lim\dfrac{a+\dfrac{4}{n}}{5+\dfrac{3}{n}}=\dfrac{a}{5}.$ Khi đó

$\lim u_n=2\Leftrightarrow\dfrac{a}{5}=2\Leftrightarrow a=10$

Giải nhanh : $2\sim\dfrac{an+4}{5n+3}\sim\dfrac{an}{5n}=\dfrac{a}{5}\Leftrightarrow a=10.$

Câu 5: Tính giới hạn $L=\lim\dfrac{n^2+n+5}{2n^2+1}.$

A. $L=\dfrac{3}{2}.$ **B.** $L=\dfrac{1}{2}.$ **C.** $L=2.$ **D.** $L=1.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $L=\lim\dfrac{n^2+n+5}{2n^2+1}=\lim\dfrac{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{5}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{1}{2}$

Giải nhanh: $\dfrac{n^2+n+5}{2n^2+1}\sim\dfrac{n^2}{2n^2}=\dfrac{1}{2}.$

Câu 6: Tính giới hạn $L=\lim\dfrac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}.$

A. $L=-\dfrac{3}{2}.$ **B.** $L=\dfrac{1}{5}.$ **C.** $L=\dfrac{1}{2}.$ **D.** $L=0.$

Lời giải

Chọn A

$L=\lim\dfrac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{n}-3}{2+\dfrac{5}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}}=\dfrac{-3}{2}$

Giải nhanh: $\dfrac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}\sim\dfrac{-3n^3}{2n^3}=-\dfrac{3}{2}.$

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị của tham số a để $L=\lim\dfrac{5n^2-3an^4}{(1-a)n^4+2n+1}>0.$

A. $a\le 0;a\ge 1.$ **B.** $0<a<1.$ **C.** $a<0;\ a>1.$ **D.** $0\le a<1.$

Lời giải

Chọn C

$$L=\lim\frac{5n^2-3an^4}{(1-a)n^4+2n+1}=\lim\frac{\frac{5}{n^2}-3a}{(1-a)+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}}=\frac{-3a}{(1-a)}>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a<0\\a>1\end{array}\right.$$

Câu 8: Tính giới hạn $L=\lim\frac{(2n-n^3)(3n^2+1)}{(2n-1)(n^4-7)}$.

A. $L=-\frac{3}{2}$. **B.** $L=1$. **C.** $L=3$. **D.** $L=+\infty$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$L=\lim\frac{(2n-n^3)(3n^2+1)}{(2n-1)(n^4-7)}=\lim\frac{n^3\left(\frac{2}{n^2}-1\right).n^2\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(2-\frac{1}{n}\right).n^4\left(1-\frac{7}{n^4}\right)}=\lim\frac{\left(\frac{2}{n^2}-1\right)\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{7}{n^4}\right)}=\frac{-1.3}{2.1}=-\frac{3}{2}.$$

Giải nhanh: $\frac{(2n-n^3)(3n^2+1)}{(2n-1)(n^4-7)}\sim\frac{-n^3.3n^2}{2n.n^4}=-\frac{3}{2}$.

Câu 9: Kết quả của giới hạn $\lim\frac{n^3-2n}{1-3n^2}$ là:

A. $-\frac{1}{3}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$\lim\frac{n^3-2n}{1-3n^2}=\lim\frac{n^3\left(1-\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{1}{n^2}-3\right)}=\lim n.\frac{1-\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-3}$. Ta có

$$\begin{cases}\lim n=+\infty\\ \lim\frac{1-\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-3}=-\frac{1}{3}<0\end{cases}\longrightarrow \text{im}\frac{n^3-2n}{1-3n^2}=\lim n.\frac{1-\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-3}=-\infty$$

Giải nhanh : $\frac{n^3-2n}{1-3n^2}\sim\frac{n^3}{-3n^2}=-\frac{1}{3}n\longrightarrow-\infty$.

Câu 10: Kết quả của giới hạn $\lim\frac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1}$ là:

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $+\infty$. **C.** 0 **D.** $\frac{5}{7}$.

Lời giải

Chọn B

$\lim\frac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1}=\lim\frac{n^3\left(\frac{2}{n^2}+3\right)}{n^2\left(4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\lim n.\frac{\frac{2}{n^2}+3}{4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$. Ta có

$$\begin{cases}\lim n=+\infty \\ \lim\dfrac{\dfrac{2}{n^2}+3}{4+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{3}{4}>0\end{cases}\longrightarrow \lim\frac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1}=\lim n.\frac{\dfrac{2}{n^2}+3}{4+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=+\infty.$$

Giải nhanh : $\dfrac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1}\sim\dfrac{3n^3}{4n^2}=\dfrac{3}{4}.n\longrightarrow+\infty.$

Câu 11: Kết quả của giới hạn $\lim\dfrac{3n-n^4}{4n-5}$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$\lim\dfrac{3n-n^4}{4n-5}=\lim\dfrac{n^4\left(\dfrac{3}{n^3}-1\right)}{n\left(4-\dfrac{5}{n}\right)}=\lim n^3.\dfrac{\dfrac{3}{n^3}-1}{4-\dfrac{5}{n}}$. Ta có

$$\begin{cases}\lim n^3=+\infty \\ \lim\dfrac{\dfrac{3}{n^3}-1}{4-\dfrac{5}{n}}=-\dfrac{1}{4}<0\end{cases}\longrightarrow \lim\frac{3n-n^4}{4n-5}=1\lim n^3.\frac{\dfrac{3}{n^3}-1}{4-\dfrac{5}{n}}=-\infty.$$

Giải nhanh : $\dfrac{3n-n^4}{4n-5}\sim\dfrac{-n^4}{4n}=-\dfrac{1}{4}.n^3\longrightarrow-\infty.$

Câu 12: Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

A. $\lim\dfrac{3+2n^3}{2n^2-1}$. **B.** $\lim\dfrac{2n^2-3}{-2n^3-4}$. **C.** $\lim\dfrac{2n-3n^3}{-2n^2-1}$. **D.** $\lim\dfrac{2n^2-3n^4}{-2n^4+n^2}$.

Lời giải

Chọn B

. Theo dấu hiệu ở đã nêu ở phần **Chú ý** trên thì ta chọn giới hạn nào rơi vào trường hợp « bậc tử » $<$ « bậc mẫu » !

$\lim\dfrac{3+2n^3}{2n^2-1}=+\infty$: « bậc tử » $>$ « bậc mẫu » và $a_mb_k=2.2=4>0.$

$\lim\dfrac{2n^2-3}{-2n^3-4}=0$: « bậc tử » $<$ « bậc mẫu ».

$\lim\dfrac{2n-3n^3}{-2n^2-1}=+\infty$: « bậc tử » $>$ « bậc mẫu » và $a_nb_k=(-3).(-2)>0.$

$\lim\dfrac{2n^2-3n^4}{-2n^4+n^2}=\dfrac{-3}{-2}=\dfrac{3}{2}$: « bậc tử » $=$ « bậc mẫu » và $\dfrac{a_m}{b_k}=\dfrac{-3}{-2}=\dfrac{3}{2}.$

Câu 13: Dãy số nào sau đây có giới hạn là $-\infty$?

A. $\dfrac{1+2n}{5n+5n^2}$. **B.** $u_n=\dfrac{n^3+2n-1}{-n+2n^3}$. **C.** $u_n=\dfrac{2n^2-3n^4}{n^2+2n^3}$. **D.** $u_n=\dfrac{n^2-2n}{5n+1}$.

Lời giải

Chọn C

Ta chọn đáp án dạng « bậc tử » = « bậc mẫu » và $a_m b_k < 0$.

$u_n = \dfrac{2n^2 - 3n^4}{n^2 + 2n^3}$: « bậc tử » > « bậc mẫu » và $a_m b_k = -3.2 = -6 < 0 \longrightarrow \lim u_n = -\infty$.

Chú ý : (i) $\lim\left(a_m n^m + a_{n-1} n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0\right) = \begin{cases} +\infty & khi\ a_n > 0 \\ -\infty & khi\ a_n < 0 \end{cases}$.

(ii) Giả sử $|q| > \max\{|q_i| : i = 1;2\ldots;m\}$ thì

$$\lim\left(a.q^n + a_m q_m^n + \cdots + a_1 q_1^n + a_0\right) = \begin{cases} a_0 & khi\ |q| < 1 \\ +\infty & khi\ a > 0,\ q > 1. \\ -\infty & khi\ a < 0,\ q > 1 \end{cases}$$

Ta dùng « dấu hiệu nhanh » này để đưa ra kết quả nhanh chóng cho các bài sau.

Câu 14: Tính giới hạn $L = \lim\left(3n^2 + 5n - 3\right)$.

A. $L = 3$. **B.** $L = -\infty$. **C.** $L = 5$. **D.** $L = +\infty$.

Lời giải

Chọn D

. $L = \lim\left(3n^2 + 5n - 3\right) = \lim n^2\left(2 + \dfrac{5}{n} - \dfrac{3}{n^2}\right) = +\infty$ vì $\begin{cases} \lim n^2 = +\infty \\ \lim\left(2 + \dfrac{5}{n} - \dfrac{3}{n^2}\right) = 2 > 0 \end{cases}$.

Giải nhanh : $3n^2 + 5n - 3 \sim 3n^2 \longrightarrow +\infty$.

Câu 15: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(-10;10)$ để $L = \lim\left(5n - 3\left(a^2 - 2\right)n^3\right) = -\infty$.

A. 17. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\left(5n - 3\left(a^2 - 2\right)n^3\right) = \lim n^3\left(\dfrac{5}{n^2} - 3\left(a^2 - 2\right)\right) = -\infty$

$\Leftrightarrow \lim\left(\dfrac{5}{n^2} - 3\left(a^2 - 2\right)\right) = a^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < -\sqrt{2} \\ a > \sqrt{2} \end{array}\right.$

Câu 16: Tính giới hạn $\lim\left(3n^4 + 4n^2 - n + 1\right)$.

A. $L = 7$. **B.** $L = -\infty$. **C.** $L = 3$. **D.** $L = +\infty$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$\lim\left(3n^4 + 4n^2 - n + 1\right) = \lim n^4\left(3 + \dfrac{4}{n^2} - \dfrac{1}{n^3} + \dfrac{1}{n^4}\right) = +\infty$ vì $\begin{cases} \lim n^4 = +\infty \\ \lim\left(3 + \dfrac{4}{n^2} - \dfrac{1}{n^3} + \dfrac{1}{n^4}\right) = 3 > 0 \end{cases}$.

Giải nhanh : $3n^4+4n^2-n+1\sim 3n^4\longrightarrow+\infty.$

Dạng 3. Dãy số chứa căn thức

1. Phương pháp

- Nếu biểu thức chứa căn thức cần nhân một lượng liên hiệp để đưa về dạng cơ bản.

$$\begin{array}{ll} A-B & \text{lượng liên hiệp là: } A+B \\ \sqrt{A}-B & \text{lượng liên hiệp là: } \sqrt{A}+B \\ \sqrt{A}-\sqrt{B} & \text{lượng liên hiệp là: } \sqrt{A}+\sqrt{B} \\ \sqrt[3]{A}-B & \text{lượng liên hiệp là: } \left(\sqrt[3]{A^2}+B\sqrt[3]{A}+B^2\right) \\ \sqrt[3]{A}+B & \text{lượng liên hiệp là: } \left(\sqrt[3]{A^2}-B\sqrt[3]{A}+B^2\right) \end{array}$$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Tính $\lim\left(\sqrt{n^2+7}-\sqrt{n^2+5}\right)$

Giải

$$\lim\left(\sqrt{n^2+7}-\sqrt{n^2+5}\right)=\lim\frac{n^2+7-n^2-5}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+5}}=\lim\frac{2}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+5}}=0$$

Ví dụ 2. Tính $\lim\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2}\right)$

Giải

$$\lim\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2}\right)=\lim\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2}}=\lim\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1}}=\frac{3}{2}$$

Ví dụ 3. Tính $\lim\left(\sqrt{n^2-n+1}-n\right)$

Lời giải

. $\sqrt{n^2-n+1}-n\sim\sqrt{n^2}-n=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt{n^2-n+1}-n\right)=\lim\frac{-n+1}{\sqrt{n^2-n+1}+n}=\lim\frac{-1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=-\frac{1}{2}$$

Giải nhanh : $\sqrt{n^2-n+1}-n=\frac{-n+1}{\sqrt{n^2-n+1}+n}\sim\frac{-n}{\sqrt{n^2}+n}=-\frac{1}{2}.$

Ví dụ 4. Tính $\lim\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)$

Lời giải

$\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\sim\sqrt[3]{-n^3}+n=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)=\lim\frac{n^2}{\sqrt[3]{\left(n^2-n^3\right)^2}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2}=\lim\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n}-1\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{1}{n}-1}+1}=\frac{1}{3}.$$

Giải nhanh : $\sqrt[3]{n^2-n^3}+n=\dfrac{n^2}{\sqrt[3]{\left(n^2-n^3\right)^2}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2}\sim\dfrac{n^2}{\sqrt[3]{n^6}-n\sqrt[3]{-n^3}+n^2}=\dfrac{1}{3}.$

Ví dụ 5. Tính $\lim\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right]$

Lời giải

$\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sim\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n}\right)=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}$$

Giải nhanh : $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sim\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2}.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1}\right)$ bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

$\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1}\sim\sqrt{n}-\sqrt{n}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1}\right)=\lim\frac{4}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+1}}=0$$

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{3n^2+2}\right)$ là:

A. -2. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn C

$\lim\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{3n^2+2}\right)=\lim n\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt{3+\dfrac{2}{n^2}}\right)=-\infty$ vì

$$\lim n=+\infty,\ \lim\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}-\sqrt{3+\frac{2}{n^2}}\right)=1-\sqrt{3}<0.$$

Giải nhanh : $\sqrt{n^2-1}-\sqrt{3n^2+2}\sim\sqrt{n^2}-\sqrt{3n^2}=\left(1-\sqrt{3}\right)n\longrightarrow-\infty.$

Câu 3: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\right)$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

$\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\sim\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\right)=\lim\frac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}=\lim\frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}=2.$$

Giải nhanh : $\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}=\dfrac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}\sim\dfrac{4n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}=2.$

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị của a để $\lim\left(\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1}\right)=0.$

A. $0.$ **B.** $2.$ **C.** $1.$ **D.** $3.$

Lời giải

Chọn B

$\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1}\sim\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp:

Ta có $\lim\left(\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1}\right)=\lim\dfrac{\left(a^2-a-2\right)n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}$

$=\lim\dfrac{a^2-a-2-\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}=\dfrac{a^2-a-2}{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=2\end{array}\right.$.

Câu 5: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2}\right)$ là:

A. $0.$ **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$ **C.** $-\infty.$ **D.** $+\infty.$

Lời giải

Chọn B

$\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2}\sim\sqrt{2n^2}-\sqrt{2n^2}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2}\right)=\lim\frac{2n-1}{\sqrt{2n^2-n+1}+\sqrt{2n^2-3n+2}}$$

$$=\lim\frac{2-\dfrac{1}{n}}{\sqrt{2-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Giải nhanh :

$$\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2}=\frac{2n-1}{\sqrt{2n^2-n+1}+\sqrt{2n^2-3n+2}}\sim\frac{2n}{\sqrt{2n^2}+\sqrt{2n^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 6: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{2n^2+n}\right)$ là:

A. $-1.$ **B.** $1-\sqrt{2}.$ **C.** $-\infty.$ **D.** $+\infty.$

Lời giải

Chọn C

Giải nhanh : $\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{2n^2+n}\sim\sqrt{n^2}-\sqrt{2n^2}=\left(1-\sqrt{2}\right)n\longrightarrow-\infty.$

Cụ thể : $\lim\left(\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{2n^2+n}\right)=\lim n.\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt{2+\dfrac{1}{n}}\right)=-\infty$ vì

$$\lim n=+\infty,\ \lim\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}-\sqrt{2+\frac{1}{n}}\right)=1-\sqrt{2}<0$$

Câu 7: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thỏa $\lim\left(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\right)=0$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Nếu $\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\sim\sqrt{n^2}-n=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

Ta có $\lim\left(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\right)=\lim\dfrac{\left(2a^2-8\right)n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\dfrac{2a^2-8}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}$

$=a^2-4=0\Leftrightarrow a=\pm 2.$

Câu 8: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)$ là:

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn A

$\sqrt{n^2-2n+3}-n\sim\sqrt{n^2}-n=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)=\lim\frac{-2n+3}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}=\lim\frac{-2+\dfrac{3}{n}}{\sqrt{1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}+1}=-1$$

Giải nhanh : $\sqrt{n^2-2n+3}-n=\dfrac{-2n+3}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}\sim\dfrac{-2n}{\sqrt{n^2}+n}=-1.$

Câu 9: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}$, trong đó a là tham số thực. Tìm a để $\lim u_n=-1$.

A. 3. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -3.

Lời giải

Chọn C

$\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}\sim\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$-1=\lim u_n=\lim\left(\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}\right)=\lim\frac{an+4}{\sqrt{n^2+an+5}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$=\lim\frac{a+\dfrac{4}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{a}{n}+\dfrac{5}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}=\frac{a}{2}\Leftrightarrow a=-2.$$

Giải nhanh :

$$-1\sim\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}=\frac{an+4}{\sqrt{n^2+an+5}+\sqrt{n^2+1}}\sim\frac{an}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}=\frac{a}{2}\Leftrightarrow a=-2.$$

Câu 10: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+2}\right)$ bằng:

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

$\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+2}\sim\sqrt[3]{n^3}-\sqrt[3]{n^3}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+2}\right)=\lim\frac{-1}{\sqrt[3]{\left(n^3+1\right)^2}+\sqrt[3]{n^3+1}.\sqrt[3]{n^3+2}+\sqrt[3]{\left(n^3+2\right)}}=0.$$

Câu 11: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right)$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

$\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\sim\sqrt[3]{n^3}-n=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right)=\lim\frac{-2n^2}{\sqrt[3]{\left(n^3-2n^2\right)^2}+n.\sqrt[3]{n^3-2n^2}+n^2}=\lim\frac{-2}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}}+1}=-\frac{2}{3}.$$

Giải nhanh : $\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n=\frac{-2n^2}{\sqrt[3]{\left(n^3-2n^2\right)^2}+n.\sqrt[3]{n^3-2n^2}+n^2}\sim\frac{-2n^2}{\sqrt[3]{n^6}+n.\sqrt[3]{n^3}+n^2}=-\frac{2}{3}.$

Câu 12: Giá trị của giới hạn $\lim\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\right]$ là:

A. -1. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

$\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\sim\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n}\right)=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)=\lim\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\lim\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=1$$

Giải nhanh : $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)=\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\sim\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=1.$

Câu 13: Giá trị của giới hạn $\lim\left[n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3}\right)\right]$ bằng:

A. -1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

$n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3}\right)\sim n\left(\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}\right)=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3}\right)=\lim\frac{4n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-3}}=\lim\frac{4}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{n^2}}}=2$$

Giải nhanh : $n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3}\right)=\frac{4n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-3}}\sim\frac{4n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}=2.$

Câu 14: Giá trị của giới hạn $\lim\left[n\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}\right)\right]$ là:

A. $\sqrt{7}-1$. **B.** 3. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn C

$n\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}\right)\sim n\left(\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}\right)=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim n\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}\right)=\lim\frac{7n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+n-6}}$$
$$=\lim\frac{7}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{6}{n^2}}}=\frac{7}{2}.$$

Giải nhanh : $n\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}\right)=\frac{7n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+n-6}}\sim\frac{7n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}=\frac{7}{2}.$

Câu 15: Giá trị của giới hạn $\lim\frac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}$ là:

A. 1. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn C

$\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}\sim\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\frac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}=\lim-\frac{1}{2}\left(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+4}\right)=\lim n.\left[-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}\right)\right]=-\infty$$

vì $\lim n=+\infty,\ \lim\left[-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}\right)\right]=-1<0$

Giải nhanh :

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+4}\right)\sim-\frac{1}{2}\left(\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}\right)=-n\longrightarrow-\infty.$$

Câu 16: Giá trị của giới hạn $\lim\frac{\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}}{3n-2}$ là:

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn A

$\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}\sim\sqrt{9n^2}=3n\neq0\longrightarrow$ giải nhanh :

$$\frac{\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}}{3n-2}\sim\frac{\sqrt{9n^2}}{3n}=1$$

Cụ thể : $\lim\frac{\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}}{3n-2}=\lim\frac{\sqrt{9-\frac{1}{n}}-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}{3-\frac{2}{n}}=\frac{\sqrt{9}}{3}=1.$

Câu 17: Giá trị của giới hạn $\lim\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}-n}$ là:

A. 2. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

$\sqrt[3]{n^3+1}-n\sim\sqrt[3]{n^3}-n=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3+1}-n\right)=\lim\frac{1}{\sqrt[3]{\left(n^3+1\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3+1}+n^2}=0$$

Dạng 4. Tính giới hạn của Dãy số chứa hàm mũ

1. Phương pháp

Trong tính giới hạn $\lim\frac{u_n}{v_n}$ mà $u_n;v_n$ là hàm số mũ thì chia cả tử và mẫu cho a^n với a là cơ số lớn nhất.

Sau đó sử dụng công thức: $\lim q^n=0$ với $|q|<1$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim\frac{3^n-2.5^{n+1}}{2^{n+1}+5^n}$

Lời giải

Giải nhanh : $\frac{3^n-2.5^{n+1}}{2^{n+1}+5^n}\sim\frac{-2.5^{n+1}}{5^n}=-10$

Cụ thể : $\lim\frac{3^n-2.5^{n+1}}{2^{n+1}+5^n}=\lim\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n-10}{2.\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}=-10.$

Ví dụ 2: Tính $\lim\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2^n+4^n}$

Lời giải

Giải nhanh : $\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2^n+4^n}\sim\frac{3^n}{4^n}=\left(\frac{3}{4}\right)^n\longrightarrow 0.$

Cụ thể : $\lim\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2^n+4^n}=\lim\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n-8.\left(\frac{1}{2}\right)^n-3.\left(\frac{1}{4}\right)^n}{3.\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}=\frac{0}{1}=0.$

Ví dụ 3: Tính $\lim\frac{(-1)^n 2^{5n+1}}{3^{5n+2}}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

Ta có: $\lim\dfrac{(-1)^n 2^{5n+1}}{3^{5n+2}}=\lim(-1)^n.\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=0.$

Cách 2: *Mẹo giải nhanh*

$$\frac{(-1)^n 2^{5n+1}}{3^{5n+2}}\sim(-1)^n.\left(\frac{2}{3}\right)^{5n}=0.$$

Ví dụ 4: Tính $\lim\dfrac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2^n+4^n}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

Ta có: $\dfrac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2^n+4^n}=\dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n-4.2\left(\dfrac{2}{4}\right)^n-\dfrac{3}{n^4}}{3.\left(\dfrac{2}{4}\right)^n+1}$ (chia tử và mẫu cho n^4).

Suy ra $\lim\dfrac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2^n+4^n}=\dfrac{0}{1}=0.$

Cách 2: *Mẹo giải nhanh*

$$\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2^n+4^n}\sim\frac{3^n}{4^n}=\left(\frac{3}{4}\right)^n=0.$$

Ví dụ 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thuộc $(0;20)$ sao cho $\lim\sqrt{3+\dfrac{an^2-1}{3+n^2}-\dfrac{1}{2^n}}$ là một số nguyên.

Lời giải

Ta có $\begin{cases}\lim\dfrac{an^2-1}{3+n^2}=\lim\dfrac{a-\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{3}{n^2}+1}=a\\ \lim\dfrac{1}{2^n}=\lim\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0\end{cases}\Rightarrow\lim\sqrt{3+\dfrac{an^2-1}{3+n^2}-\dfrac{1}{2^n}}=\sqrt{3+a}.$

Ta có $\begin{cases}a\in(0;20),\ a\in\mathbb{Z}\\ \sqrt{a+3}\in\mathbb{Z}\end{cases}\longrightarrow a\in\{1;6;13\}.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Kết quả của giới hạn $\lim\dfrac{2-5^{n+2}}{3^n+2.5^n}$ bằng:

A. $-\dfrac{25}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** 1. **D.** $-\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Cụ thể : $\lim\dfrac{2-5^{n+2}}{3^n+2.5^n}=\lim\dfrac{2\left(\dfrac{1}{5}\right)^n-25}{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+2}=-\dfrac{25}{2}.$

Giải nhanh : $\dfrac{2-5^{n+2}}{3^n+2.5^n}\sim\dfrac{-5^{n+2}}{2.5^n}=-\dfrac{25}{2}$

Câu 2: Kết quả của giới hạn $\lim\dfrac{3^n-1}{2^n-2.3^n+1}$ bằng:

A. $-1.$ **B.** $-\dfrac{1}{2}.$ **C.** $\dfrac{1}{2}.$ **D.** $\dfrac{3}{2}.$

Lời giải

Chọn B

Giải nhanh : $\dfrac{3^n-1}{2^n-2.3^n+1}\sim\dfrac{3^n}{-2.3^n}=-\dfrac{1}{2}$

Cụ thể : $\lim\dfrac{3^n-1}{2^n-2.3^n+1}=\lim\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}=-\dfrac{1}{2}.$

Câu 3: Biết rằng $\lim\left(\dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^n-2^{n+1}+1}{5.2^n+\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}-3}+\dfrac{2n^2+3}{n^2-1}\right)=\dfrac{a\sqrt{5}}{b}+c$ với $a, b, c\in\mathbb{Z}.$ Tính giá trị của biểu thức $S=a^2+b^2+c^2.$

A. $S=26.$ **B.** $S=30.$ **C.** $S=21.$ **D.** $S=31.$

Lời giải

Chọn B

$$\lim\left(\frac{\left(\sqrt{5}\right)^n-2^{n+1}+1}{5.2^n+\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}-3}++\frac{2n^2+3}{n^2-1}\right)=\lim\left(\frac{1-2.\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n}{5.\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n+\sqrt{5}-.\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n}+\frac{2+\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}+2=\frac{\sqrt{5}}{5}+2.$$

Giải nhanh :

$$\frac{\left(\sqrt{5}\right)^n-2^{n+1}+1}{5.2^n+\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}-3}+\frac{2n^2+3}{n^2-1}\sim\frac{\left(\sqrt{5}\right)^n}{\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}}+\frac{2n^2}{n^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}+2=\frac{\sqrt{5}}{5}+2\longrightarrow\begin{cases}a=1\\b=5.\\c=2\end{cases}$$

Vậy $S=1^2+5^2+2^2=30.$

Câu 4: Kết quả của giới hạn $\lim\dfrac{\pi^n+3^n+2^{2n}}{3\pi^n-3^n+2^{2n+2}}$ là:

A. $1.$ **B.** $\dfrac{1}{3}.$ **C.** $+\infty.$ **D.** $\dfrac{1}{4}.$

Lời giải

Chọn D

Giải nhanh: $\frac{\pi^n+3^n+2^{2n}}{3\pi^n-3^n+2^{2n+2}}=\frac{\pi^n+3^n+4^n}{3\pi^n-3^n+4.4^n}\sim\frac{4^n}{4.4^n}=\frac{1}{4}$

Cụ thể : $\lim\frac{\pi^n+3^n+2^{2n}}{3\pi^n-3^n+2^{2n+2}}=\lim\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}{3.\left(\frac{\pi}{4}\right)^n-3.\left(\frac{3}{4}\right)^n+4}=\frac{1}{4}.$

Câu 5: Kết quả của giới hạn $\lim\left[3^n-\sqrt{5}^n\right]$ là:

A. $3.$ **B.** $-\sqrt{5}.$ **C.** $-\infty.$ **D.** $+\infty.$

Lời giải

Chọn D

Giải nhanh : Vì $3>\sqrt{5}$ nên $3^n-\sqrt{5}^n\sim 3^n\longrightarrow+\infty.$

Cụ thể : $\lim\left[3^n-\sqrt{5}^n\right]=\lim 3^n\left(1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n\right)=+\infty$ vì $\begin{cases}\lim 3^n=+\infty\\ \lim 1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n=1>0\end{cases}.$

Câu 6: Kết quả của giới hạn $\lim\left(3^4.2^{n+1}-5.3^n\right)$ là:

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}.$ **B.** $-1.$ **C.** $-\infty.$ **D.** $\frac{1}{3}.$

Lời giải

Chọn C

Giải nhanh : $3^4.2^{n+1}-5.3^n\sim-5.3^n=-\infty\left(-5<0\right).$

Cụ thể : $\lim\left(3^4.2^{n+1}-5.3^n\right)=\lim 3^n\left(162.\left(\frac{2}{3}\right)^n-5\right)=-\infty$ vì $\begin{cases}\lim 3^n=+\infty\\ \lim\left(162.\left(\frac{2}{3}\right)^n-5\right)=-5<0\end{cases}.$

Câu 7: Kết quả của giới hạn $\lim\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2n+4^n}$ là:

A. $0.$ **B.** $1.$ **C.** $-\infty.$ **D.** $+\infty.$

Lời giải

Chọn A

Giải nhanh : $\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2n+4^n}\sim\frac{3^n}{4^n}=\left(\frac{3}{4}\right)^n\longrightarrow 0.$

Cụ thể : $0\le\left|\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2n+4^n}\right|\le\frac{8.3^{n+1}}{4^n}=24.\left(\frac{3}{4}\right)^n\to 0\longrightarrow\lim\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2n+4^n}=0.$

Câu 8: Kết quả của giới hạn $\lim\frac{2^{n+1}+3n+10}{3n^2-n+2}$ là:

A. $+\infty.$ **B.** $\frac{2}{3}.$ **C.** $\frac{3}{2}.$ **D.** $-\infty.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $2^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k \Rightarrow 2^n \geq C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\sim\frac{n^3}{6}\Rightarrow\begin{cases}\frac{n}{2^n}\to 0\\ \frac{2^n}{n^2}\to+\infty\end{cases}$. Khi đó:

$$\lim\frac{2^{n+1}+3n+10}{3n^2-n+2}=\lim\frac{2^n}{n^2}.\frac{2+3.\frac{n}{2^n}+10.\left(\frac{1}{2}\right)^n}{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}=+\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim\frac{2^n}{n^2}=+\infty\\ \lim\frac{2+3.\frac{n}{2^n}+10.\left(\frac{1}{2}\right)^n}{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{2}{3}>0\end{cases}.$$

Câu 9: Tìm tất cả giá trị nguyên của a thuộc $(0;2018)$ để $\lim\sqrt[4]{\frac{4^n+2^{n+1}}{3^n+4^{n+a}}}\leq\frac{1}{1024}$.

A. 2007. **B.** 2008. **C.** 2017. **D.** 2016.

Lời giải

Chọn B

$$\lim\sqrt[4]{\frac{4^n+2^{n+1}}{3^n+4^{n+a}}}=\lim\sqrt[4]{\frac{1+2.\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+4^a}}=\sqrt{\frac{1}{4^a}}=\sqrt{\frac{1}{\left(2^a\right)^2}}=\frac{1}{2^a}.$$

Giải nhanh: $\sqrt[4]{\frac{4^n+2^{n+1}}{3^n+4^{n+2}}}\sim\sqrt[4]{\frac{4^n}{4^{n+a}}}=\frac{1}{2^a}\leq\frac{1}{1024}\Leftrightarrow 2^a\geq 1024=2^{10}\Leftrightarrow a\geq 10.$

Mà $a\in(0;2018)$ và $a\in\mathbb{Z}$ nên $a\in\{10;2017\}\longrightarrow$ có 2008 giá trị a.

Câu 10: Kết quả của giới hạn $\lim\left(\frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\left(\frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)=\lim\frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}+\lim\frac{(-1)^n}{3^n}$. Ta có

$$\begin{cases}\lim\frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}=\lim\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{3-\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}\\ 0\leq\left|\frac{(-1)^n}{3^n}\right|\leq\left(\frac{1}{3}\right)^n\to 0\Rightarrow\lim\frac{(-1)^n}{3^n}=0\end{cases}\Rightarrow\lim\left(\frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)=\frac{1}{3}.$$

Câu 11: Kết quả của giới hạn $\lim\left(\frac{\sqrt{3n}+(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}\right)$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

$\lim\left(\frac{\sqrt{3n}+(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}\right)=\lim\left(\frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{n}-1}+\frac{(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}}\right)$. Ta có :

$$\begin{cases}\lim\frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{n}-1}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}\\ 0\le\left|\frac{(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}\right|\le\frac{1}{\sqrt{n}-1}\to 0\Rightarrow\lim\frac{(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}=0\end{cases}\Rightarrow\lim\left(\frac{\sqrt{3n}+(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}\right)=\sqrt{3}.$$

Câu 12: Kết quả của giới hạn $\lim\sqrt{2.3^n-n+2}$ là:

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\sqrt{2.3^n-n+2}=\lim\sqrt{3^n}.\sqrt{2-\frac{n}{3^n}+2.\left(\frac{1}{3}\right)^n}$. Vì

$$\left.\begin{array}{l}\lim\sqrt{3^n}=+\infty\\ 0\le\frac{n}{3^n}\le\frac{n}{C_n^2}=\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{2}{n-1}\to 0\Rightarrow\lim\frac{n}{3^n}=0\\ \lim\left(\frac{1}{3}\right)^n=0\end{array}\right\}\longrightarrow\begin{cases}\lim\sqrt{3^n}=+\infty\\ \lim\sqrt{2-\frac{n}{3^n}+2.\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\sqrt{2}>0\end{cases},$$

do đó $\lim\sqrt{2.3^n-n+2}=+\infty$.

Dạng 5. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

1. Phương pháp

Cấp số nhân lùi vô hạn là cấp số nhân vô hạn và có công bội là $|q|<1$.

- ✓ Tổng các số hạng của một cấp số nhân lùi vô hạn (u_n)

$$S=u_1+u_2+...+u_n+...=\frac{u_1}{1-q}$$

- ✓ Mọi số thập phân đều được biểu diễn dưới dạng luỹ thừa của 10

$$X=N,a_1a_2a_3...a_n...=N+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+...+\frac{a^n}{10^n}+...$$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},...,\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},...$

Hướng dẫn giải

Theo đề cho ta có: $u_1=1, q=-\frac{1}{2}$.

$S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$

Ví dụ 2: Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn $a=0,212121...$ (chu kỳ là 21). Tìm a dưới dạng phân số.

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

Ta có: $a=0,212121...$

$=0,21+0,0021+0,000021+...$

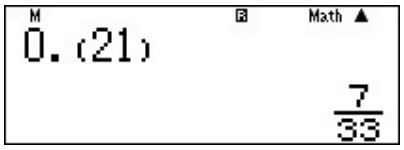
$=21\left(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^6}+...\right)$

Tổng $S=\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^6}+...$ là tổng cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1=\frac{1}{10^2}, q=\frac{1}{10^2}.$

$S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{10^2}}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{1}{99}.$ Do đó $A=21.\frac{1}{99}=\frac{7}{33}.$

Cách 3: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $0,(21)$ và ấn phím $=$ ta được kết quả $\frac{7}{33}.$



Ví dụ 3: Tổng $S_n=1+0,9+(0,9)^2+(0,9)^3+...+(0,9)^{n-1}+...$ có kết quả bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

$S=1+0,9+(0,9)^2+(0,9)^3+...+(0,9)^{n-1}+...$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạng có $u_1=1, q=0,9.$

$S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{1}{1-0,9}=10.$

Ví dụ 4: Cho $S=1+q+q^2+q^3+..., |q|<1$

$T=1+Q+Q^2+Q^3+..., |Q|<1$

$E=1+qQ+q^2Q^2+q^3Q^3+...$

Biểu thị biểu thức E theo S,T

Hướng dẫn giải

- $S=1+q+q^2+q^3+..., |q|<1$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn, có $u_1=1, q=q.$

Khi đó: $S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{1}{1-q}\Rightarrow q=\frac{S-1}{S}.$ (1)

- Tương tự: $T=\frac{1}{1-Q}\Rightarrow Q=\frac{T-1}{T}.$ (2)
- $E=1+q.Q+q^2.Q^2+q^3.Q^3+...$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạng công bội qQ (vì $|qQ|<1$, và $u_1=1$).

$$E=\frac{u_1}{1-qQ} \quad (3)$$

Thay (1), (2) vào (3): $E=\frac{u_1}{1-\frac{T-1}{T}.\frac{S-1}{S}}\Rightarrow E=\frac{ST}{S+T-1}.$

Ví dụ 5: Tìm số hạng U_1 của cấp số nhân lùi vô hạn, biết $S=4; q=\frac{1}{2}.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $S=\frac{u_1}{1-q}\left(|q|<1\right)\Rightarrow 4-\frac{u_1}{1-\frac{1}{2}}\Rightarrow u_1=2.$

Ví dụ 6: Tìm công bội của cấp số nhân lùi vô hạn, biết $S=-6; U_1=-3.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $S=\frac{u_1}{1-q}\left(|q|<1\right)\Rightarrow -6=\frac{-3}{1-q}\Rightarrow q=\frac{1}{2}.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn bằng 2, tổng của ba số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng $\frac{9}{4}$. Số hạng đầu u_1 của cấp số nhân đó là:

A. $u_1=3.$ **B.** $u_1=4.$ **C.** $u_1=\frac{9}{2}.$ **D.** $u_1=5.$

Lời giải

Chọn A

Gọi q là công bội của cấp số nhân, ta có :

$$\begin{cases}\frac{u_1}{1-q}=2\\ S_3=u_1.\frac{1-q^3}{1-q}=\frac{9}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=2(1-q)\\ 2\left(1-q^3\right)=\frac{9}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}q=-\frac{1}{2}\\ u_1=2\left(1+\frac{1}{2}\right)=3\end{cases}.$$

Câu 2: Tính tổng $S=9+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^{n-3}}+\cdots.$

A. $S=\frac{27}{2}.$ **B.** $S=14.$ **C.** $S=16.$ **D.** $S=15.$

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$S=9+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^{n-3}}+\cdots=9\left(\underbrace{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}+\cdots}_{CSN\ lvh:\ u_1=1,q=\frac{1}{3}}\right)=9\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)=\frac{27}{2}.$$

Câu 3: Tính tổng $S=\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\right)$.

A. $S=\sqrt{2}+1$. **B.** $S=2$. **C.** $S=2\sqrt{2}$. **D.** $S=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$S=\sqrt{2}\left(\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots}_{CSN\ lvh:\ u_1=1,\ q=\frac{1}{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)=2\sqrt{2}.$$

Câu 4: Tính tổng $S=1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\cdots+\frac{2^n}{3^n}+\cdots$.

A. $S=3$. **B.** $S=4$. **C.** $S=5$. **D.** $S=6$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$S=1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\cdots+\frac{2^n}{3^n}+\cdots=\underbrace{1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n+\cdots}_{CSN\ lvh:\ u_1=1,\ q=\frac{2}{3}}=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3.$$

Câu 5: Tổng của cấp số nhân vô hạn $\frac{1}{2},-\frac{1}{6},\frac{1}{18},\ldots,\frac{(-1)^{n+1}}{2.3^{n-1}},\ldots$ bằng:

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{8}$.

Lời giải

Chon D

. Ta có :

$$S=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{2.3^{n-1}}+\cdots=\frac{1}{2}\left(\underbrace{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n-1}}}_{CSN\ lvh:u_1=1,\ q=-\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right)=\frac{3}{8}.$$

Câu 6: Tính tổng $S=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)+\ldots$.

A. 1. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$S=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)+\ldots$$

$$=\left(\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots}_{CSN\ lvh:\ u_1=q=\frac{1}{2}}\right)-\left(\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots}_{CSN\ lvh:u_1=q=\frac{1}{3}}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Câu 7: Giá trị của giới hạn $\lim\frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}(|a|<1,|b|<1)$ bằng:

A. 0. **B.** $\frac{1-b}{1-a}$. **C.** $\frac{1-a}{1-b}$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn B

Ta có $1+a+a^2+\ldots+a^n$ là tổng $n+1$ số hạng đầu tiên của cấp số nhân với số hạng đầu là 1 và công bội là a, nên $1+a+a^2+\ldots+a^n=\frac{1.\left(1-a^{n+1}\right)}{1-a}=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

Tương tự: $1+b+b^2+\ldots+b^n=\frac{1\left(1-b^{n+1}\right)}{1-b}=\frac{1-b^{n+1}}{1-b}$.

Do đó $\lim\frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}=\lim\frac{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\frac{1-b^{n+1}}{1-b}}=\lim\frac{1-b}{1-a}.\frac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}}=\frac{1-b}{1-a}\ (|a|<1,|b|<1)$.

Câu 8: Rút gọn $S=1+\cos^2x+\cos^4x+\cos^6x+\cdots+\cos^{2n}x+\cdots$ với $\cos x\neq\pm1$.

A. $S=\sin^2x$. **B.** $S=\cos^2x$. **C.** $S=\frac{1}{\sin^2x}$. **D.** $S=\frac{1}{\cos^2x}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$S=\underbrace{1+\cos^2x+\cos^4x+\cos^6x+\cdots+\cos^{2n}x+\cdots}_{CSN\ lvh:\ u_1=1,\ q=\cos^2x}=\frac{1}{1-\cos^2x}=\frac{1}{\sin^2x}.$$

Câu 9: Rút gọn $S=1-\sin^2x+\sin^4x-\sin^6x+\cdots+(-1)^n.\sin^{2n}x+\cdots$ với $\sin x\neq\pm1$.

A. $S=\sin^2x$. **B.** $S=\cos^2x$. **C.** $S=\frac{1}{1+\sin^2x}$. **D.** $S=\tan^2x$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$S=\underbrace{1-\sin^2x+\sin^4x-\sin^6x+\cdots+(-1)^n.\sin^{2n}x+\cdots}_{CSN\ lvh:\ u_1=1,\ q=-\sin^2x}=\frac{1}{1+\sin^2x}.$$

Câu 10: Thu gọn $S=1-\tan\alpha+\tan^2\alpha-\tan^3\alpha+\ldots$ với $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$.

A. $S=\frac{1}{1-\tan\alpha}$. **B.** $S=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}$. **C.** $S=\frac{\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$. **D.** $S=\tan^2\alpha$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\tan\alpha\in(0;1)$ với mọi $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$, do đó

$$S=\underbrace{1-\tan\alpha+\tan^2\alpha-\tan^3\alpha+\ldots}_{\text{CSN lvh: } u_1=1,\,q=-\tan\alpha}=\frac{1}{1+\tan\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Câu 11: Cho m,n là các số thực thuộc $(-1;1)$ và các biểu thức:

$$M=1+m+m^2+m^3+\cdots$$
$$N=1+n+n^2+n^3+\cdots$$
$$A=1+mn+m^2n^2+m^3n^3+\cdots$$

Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $A=\frac{MN}{M+N-1}$. **B.** $A=\frac{MN}{M+N+1}$.

C. $A=\frac{1}{M}+\frac{1}{N}-\frac{1}{MN}$. **D.** $A=\frac{1}{M}+\frac{1}{N}+\frac{1}{MN}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\begin{cases}M=\frac{1}{1-m}\\ N=\frac{1}{1-n}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=1-\frac{1}{M}\\ n=1-\frac{1}{N}\end{cases}$, khi đó

$$A=\frac{1}{1-mn}=\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{M}\right)\left(1-\frac{1}{N}\right)}=\frac{MN}{M+N-1}.$$

Câu 12: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,5111\cdots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính tổng $T=a+b$.

A. 17. **B.** 68. **C.** 133. **D.** 137.

Lời giải

Chọn B

Ta có $0,5111\cdots=0,5+10^{-2}+10^{-3}+\cdots+10^{-n}+\cdots$

Dãy số $10^{-2};10^{-3};\ldots;10^{-n};\ldots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu bằng $u_1=10^{-2}$, công bội bằng $q=10^{-1}$ nên $S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{10^{-2}}{1-10^{-1}}=\frac{1}{90}$.

Vậy $0,5111\ldots=0,5+S=\frac{46}{90}=\frac{23}{45}\longrightarrow\begin{cases}a=23\\ b=45\end{cases}\longrightarrow T=a+b=68.$

Câu 13: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $A=0,353535...$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $T=ab.$

A. 3456. **B.** 3465. **C.** 3645. **D.** 3546.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$A=0,353535...=0,35+0,0035+...=\frac{35}{10^2}+\frac{35}{10^4}+...=\frac{\frac{35}{10^2}}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{35}{99}\Rightarrow\begin{cases}a=35\\b=99\end{cases}\Rightarrow T=3465..$$

Câu 14: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $B=5,231231...$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $T=a-b.$

A. 1409. **B.** 1490. **C.** 1049. **D.** 1940.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$B=5,231231...=5+0,231+0,000231+...$$

$$=5+\frac{231}{10^3}+\frac{231}{10^6}+...=5+\frac{\frac{231}{10^3}}{1-\frac{1}{10^3}}=5+\frac{231}{999}=\frac{1742}{333}\longrightarrow\begin{cases}a=1742\\b=333\end{cases}\Rightarrow T=1409$$

Câu 15: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,17232323...$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a-b>2^{15}.$ **B.** $a-b>2^{14}.$ **C.** $a-b>2^{13}.$ **D.** $a-b>2^{12}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$0,17232323...=0,17+23\left(\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{10^8}\cdots\right)$$

$$=\frac{17}{100}+23.\frac{\frac{1}{10000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{17}{100}+\frac{23}{100.99}=\frac{1706}{9900}=\frac{853}{4950}.$$

$$\longrightarrow\begin{cases}a=853\\b=4950\end{cases}\Rightarrow 2^{12}<T=4097<2^{13}.$$

Dạng 6: Phương pháp sai phân và quy nạp tính giới hạn

1. Phương pháp

1) Dạng tổng các phân số.

Ví Dụ: $A=\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)},n\geq 2,n\in N$

Ta phân tích : $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.(1)$

Để tính A ta thay k từ $2,3,,n$ vào biểu thức (1) ta tính dễ dàng

2) Dạng tích các phân số:

Ví dụ: $B=\frac{2^2-1}{2^2}.\frac{3^2-1}{3^2}\ldots,n\geq 2,n\in N$

Ta phân tích: $\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{k-1}{k}:\frac{k}{k+1}.(2)$

Để tính B ta thay k từ $2,3,,n$ vào biểu thức (2) ta tính dễ dàng

3) Dang đa thức:

a) Mỗi đơn thức ở dạng tích:

Ví Dụ: $C=1.2.3+2.3.4+\ldots 99.100.101$

Ta tách:

$4k(k+1)(k+2):4=k(k+1)(k+2)[(k+3)-(k-1)]\quad ,k\geq 1,k\in N$

$=(-(k-1)k(k+1)(k+2)+k(k+1)(k+2)(k+3)):4\quad (3)$

Để tính C ta thay k từ : 1,2,3,…, 99 vào biểu thức (3) ta tính được dễ dàng

Ví dụ: $D=3.5.7+5.7.9+\ldots+(2n+1)(2n+3)(2n+5),n\geq 1,n\in N$

Ta tách: $(2k+1)(2k+3)(2k+5)=(2k+1)(2k+3)(2k+5)[(2k+7)-(2k+1)]:8$

$=((2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)-(2k-1)(2k+1)(2k+3)\ (2k+5)):8\quad (4)$

Đề tính D ta thay k từ : $1,2,3,,n$ vào biểu thức (4) ta tính dễ dàng

4) Đơn thức dạng lũy thừa

Ví Dụ: Tính $E=1^3+2^3+\ldots+n^3,\quad n\in N.n\geq 1$

Ta dùng hằng đẳng thức : $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$.

$x=1\quad 2^3=1^3\ldots+3.1^2+3.1+1$

$x=2\quad 3^3=2^3\cdot+3\cdot 2^2+3\cdot 2+1$

…

$x=n\quad (n+1)^3=n^3\ldots+3\cdot n^2+3\cdot n+1$

Cộng vế theo vế

$(n+1)^3-1^3=3\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)+3(1+2+3+\ldots\ldots n)+n$

$n^3+3n^2+3n=3E+\frac{3n(n+1)}{2}+n$

$3E=n^3+3n^2+3n-\left(\frac{3\cdot n(n+1)}{2}+n\right)=\frac{2n^3+3n^2+n}{2}$

$\Rightarrow E=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Ngoài ra ta có thể dự đoán được số hạng tổng quát, có thể kết hợp quy nạp để khẳng đinh.

Có thể ùng vòng lặp MTCT để giải quyết các bài toán này.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho $u_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}$. Tính $\lim u_n$

Hướng dẫn giải

Ta luôn có: $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ áp dụng vào u_n :

- $u_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}$

$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$

Do đó: $\lim u_n=\lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$

Ví dụ 2: Cho $u_n=\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Tính $\lim u_n$

Hướng dẫn giải

Ta luôn có: $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right).$

$u_n=\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+...+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}\right).$

Do đó $\lim u_n=\lim\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{6}.$

Ví dụ 3: $\lim\frac{1+2+3+...+n}{2n^2}$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Vì $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ nên: $\lim\frac{1+2+3+...+n}{2n^2}=\lim\frac{n(n+1)}{4n^2}=\frac{1}{4}.$

Ví dụ 4: Tính giới hạn: $\lim\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right].$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{2^2-1}{2^2}.\frac{3^2-1}{3^2}...\frac{n^2-1}{n^2}$

$=\frac{(2+1).(2-1).(3+1).(3-1)...(n+1)(n-1)}{2^2.3^2...n^2}=\frac{n+1}{2n}.$

Vậy $\lim\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]=\frac{1}{2}.$

Ví dụ 5: Tìm giới hạn của dãy: $\begin{cases}U_1=2\\U_{n+1}=\frac{U_n+1}{2};\ n\in\mathbb{N}^*\end{cases}.$

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

Ta chứng minh dãy (U_n) là bị chặn: $1<U_n\le 2.$

Dãy (U_n) là dãy giảm.

Thật vậy ta xét $U_{k+1}<U_k\Leftrightarrow\frac{U_n+1}{2}<U_k\Leftrightarrow 2U_k>U_k+1\Leftrightarrow U_k>1$ (đúng).

Vậy dãy (U_n) có giới hạn. Đặt $\lim U_n=a$.

Ta có: $\lim(U_{n+1})=\lim\left(\frac{U_n+1}{2}\right)$ hay $a=\frac{a+1}{2}\Leftrightarrow a=1.$

Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Khai báo: $1\to X$ {biến đếm}; $2\to A$ {giá trị u_1 }

Ghi vào màn hình: $X=X+1:A=\frac{A+1}{2}$

Ấn CALC và lặp lại phím $=$, quan sát ta thấy dãy giảm và bị chặn dưới bởi 1. Vậy $\lim U_n=1.$

Ví dụ 6: Tìm giới hạn của dãy: $\begin{cases}U_1=\sqrt{2}\\U_{n+1}=\sqrt{2+U_n};\ n\in\mathbb{N}^*\end{cases}.$

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

Ta sẽ chứng minh dãy bị chặn: $\sqrt{2}\le U_n<2$ (bằng phương pháp quy nạp).

- $U_1=\sqrt{3}$ (đúng).
- Giả sử $U_k\ge\sqrt{2},\forall k\ge 1.$

Ta có: $U_{k+1}=\sqrt{2+U_k}\ge\sqrt{2+\sqrt{2}}>\sqrt{2}\ (\forall k\ge 1).$

Vậy $U_k\ge\sqrt{2}\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$

Tương tự: $U_n<2\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$ Ta chứng minh dãy (U_n) là dãy tăng (bằng phương pháp quy nạp).

$+\ U_1=\sqrt{2};U_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}\Rightarrow U_1<U_2.$

+ Giả sử $U_{k-1}<U_k\ \forall k\ge 2$. Ta xét $U_k<U_{k+1};\forall k\in\mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow U_k<\sqrt{2+U_m}\Leftrightarrow U_k^2<2+U_k\Leftrightarrow U_k^2-U_k-2<0$

$\Leftrightarrow -1 < U_k < 2$ (luôn đúng vì $\sqrt{2} < U_k < 2, \forall k \in \mathbb{N}^*$)

Vậy dãy (U_n) tăng; bị chặn trên nên có giới hạn, gọi $a = \lim U_n = \lim U_{n+1}$.

Ta có: $\lim U_n = \sqrt{2 + \text{Lim}U_n} \Leftrightarrow a = \sqrt{2+a} \Leftrightarrow a^2 = 2 + a$

$\Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \text{ (nhận)} \\ a = -1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Khai báo: $1 \to X$ {biến đếm}; $\sqrt{2} \to A$ {giá trị u_1 }

Ghi vào màn hình: $X = X + 1 : A = \sqrt{2 + A}$

Ấn CALC và lặp lại phím $=$, quan sát ta thấy dãy tăng và bị chặn dưới bởi 2. Vậy $\lim U_n = 2$.

Ví dụ 7: Tìm giới hạn của dãy: $\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{3}{U_n}\right); n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có: $U_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có: $U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{3}{U_n}\right) \ge \sqrt{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy (U_n) là dãy bị chặn dưới.

Vì $U_n \ge \sqrt{3} \Rightarrow U_n^2 \ge 3 \Rightarrow U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{3}{U_n}\right) \le \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{U_n^2}{U_n}\right)$

$= \frac{1}{2}(U_n + U_n) = U_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy đã cho là giảm. Vậy dãy có giới hạn. Đặt $\lim U_{n+1} = \lim U_n = a$.

Ta có: $\lim U_n = \lim\left[\frac{1}{2}\left(U_n + \frac{3}{U_n}\right)\right]$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{3}{a}\right) \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}$.

3. Bài tập trắc nghệm

Câu 1: Tính giới hạn: $\lim \frac{1+3+5+...+(2n+1)}{3n^2+4}$.

A. 0. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 1.

Lời giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$.

Vậy: $\lim\dfrac{1+3+5+...+(2n+1)}{3n^2+4}=\lim\dfrac{(n+1)^2}{3n^2+4}$

$=\lim\dfrac{n^2+2n+1}{3n^2+4}=\lim\dfrac{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{3+\dfrac{4}{n^2}}=\dfrac{1}{3}.$

Câu 2: Tính giới hạn: $\lim\left[\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}\right].$

A. 0. **B.** 1.

C. $\dfrac{3}{2}$. **D.** Không có giới hạn.

Lời giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $\lim\left[\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]=\lim\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=\lim\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1.$

Câu 3: Tính giới hạn: $\lim\left[\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+...+\dfrac{1}{n(2n-1)(2n+1)}\right].$

A. 1. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $\lim\left[\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+...+\dfrac{1}{n(2n-1)(2n+1)}\right]$

$=\dfrac{1}{2}\lim\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+...+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}\lim\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}.$

Câu 4: Tính giới hạn: $\lim\left[\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{2.4}+...+\dfrac{1}{n(n+2)}\right].$

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+...+\frac{1}{n(n+2)}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

Vậy $\lim\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+...+\frac{1}{n(n+2)}\right]=\frac{3}{4}$.

Câu 5: Tính giới hạn: $\lim\left[\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+...+\frac{1}{n(n+3)}\right]$.

A. $\frac{11}{18}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+...+\frac{1}{n(n+3)}$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+...+\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)$ vậy:

$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$

$\lim\left[\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+...+\frac{1}{n(n+3)}\right]=\frac{11}{18}$.

Câu 6: Cho dãy (u_n) với $u_n=\frac{1+2+3+...+n}{n^2+1}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $\lim u_n=0$. **B.** $\lim u_n=\frac{1}{2}$.

C. $\lim u_n=1$. **D.** $\lim u_n$ không tồn tại.

Lời giải

ĐÁP ÁN B

- Dãy số 1, 2, 3, …, n là cấp số cộng có số hạng đầu là $u_1=1$ số hạng cuối cùng $u_n=n$, công sai $d=1$.

Khi đó $S_n=1+2+3+...+n=\frac{n(u_1+n)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$.

- Viết lại: $u_n=\frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$

$$\lim u_n = \lim \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)} = \lim \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(2+\frac{2}{n^2}\right)} = \lim \frac{1}{2}.$$

Câu 7: Tìm giới hạn của dãy: $\begin{cases} U_1 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{U_n^2}{2}; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

A. 2. **B.** 1.

C. $\sqrt{2}$. **D.** Không có giới hạn.

Lời giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $U_1 = \frac{1}{2}; U_2 = \frac{5}{8}; U_3 = \frac{57}{64}; ...$

Ta chứng minh: $U_n < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ (bằng phương pháp quy nạp). Vậy dãy bị chặn trên.

Ta chứng minh (U_n) là dãy tăng. Thật vậy:

Ta có: $U_{n+1} > U_n \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{U_n^2}{2} > U_n$

$\Leftrightarrow U_n^2 - 2U_n + 1 > 0 \Leftrightarrow (U_n - 1)^2 > 0$ luôn đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$, vì $U_n < 1$.

Vậy dãy có giới hạn. Đặt $a = \lim U_n = \lim U_{n+1}$.

Ta có: $\lim U_{n+1} = \lim\left(\frac{1}{2} + \frac{U_n^2}{2}\right) \Rightarrow a = \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2} \Rightarrow 2a = 1 + a^2$

$\Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$.

Câu 8: Tìm giới hạn của dãy: $\begin{cases} U_1 = 5 \\ U_{n+1} = \frac{2 + U_n^2}{2U_n}; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

A. 1. **B.** $\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{3}$. **D.** Không có giới hạn.

Lời giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $U_{n+1} = \frac{1}{U_n} + \frac{1}{2}U_n \geq \sqrt{2}$ (theo bất đẳng thức Cô-si với $U_n > 0$). Vậy (U_n) là dãy bị chặn dưới.

Dấu "=" không xảy ra, nên $U_n > \sqrt{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lại có: $\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{2+U_n^2}{2U_n^2}=\frac{1}{U_n^2}+\frac{1}{2}$. Vì $U_n>\sqrt{2}\Rightarrow U_n^2>2$

$\Rightarrow \frac{1}{U_n^2}<\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{1}{U_n^2}+\frac{1}{2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\Rightarrow U_{n+1}<U_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Vậy dãy giảm, khi đó U_n có giới hạn. Đặt $\lim U_{n+1}=\lim U_n=a\ (a>0)$.

Ta có: $\lim U_{n+1}=\lim\frac{2+U_n^2}{2U_n}\Rightarrow a=\frac{2+a^2}{2a}\Rightarrow 2a^2=2+a^2$

$\Rightarrow a^2=2\Rightarrow a=\sqrt{2}$ (vì $a>0$).

Câu 9: Tìm giới hạn của dãy: $\begin{cases}U_1=\sqrt{2}\\ U_{n+1}=\sqrt{2.U_n};\ n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$

A. 2. **B.** $1+\sqrt{2}$.

C. $\frac{1+\sqrt{7}}{2}$. **D.** Không có giới hạn.

Lời giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $U_1=\sqrt{2};U_2=\sqrt{2\sqrt{2}}$;…

- Ta sẽ chứng minh $U_n<2;\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ (bằng phương pháp quy nạp).

$n=1, U_1=\sqrt{2}<2$. Giả sử $U_k<2,\forall k\ge 1$.

Ta có: $U_{k+1}=\sqrt{2U_k}<\sqrt{2.2}=\sqrt{4}=2.$

Vậy $U_n<2,\forall n\in\mathbb{N}$. Lại có: $U_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

- Lại có: $\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{\sqrt{2U_n}}{U_n}=\sqrt{\frac{2}{U_n}}>\sqrt{\frac{2}{2}}=1\Rightarrow$ dãy tăng.

Vậy dãy đã cho có giới hạn. Đặt $\lim U_{n+1}=\lim U_n=a\ (a>0)$

Ta có: $\lim U_{n+1}=\lim\sqrt{2U_n}\Rightarrow a=\sqrt{2a}\Rightarrow a^2=2a\Rightarrow a=2.$

BÀI 2. GIỚI HẠN HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

1. Định nghĩa

Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y=f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K\setminus\{x_0\}$. **Ta nói hàm số** $y=f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần đến x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n\in K\setminus\{x_0\}$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to x_0$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=L\Leftrightarrow \forall (x_n), x_n\in K\setminus\{x_0\}, x_n\to x_0\Rightarrow f(x_n)\to L}$$

2. Định lí về giới hạn hữu hạn:

Ta thừa nhận định lý sau:

a) Giải sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$. Khi đó:

* $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=L\pm M;$

* $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]=L.M;$

* $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{L}{M}$ $(\text{nếu } M\neq 0)$.

b) Nếu $f(x)\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ thì: $L\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$.

$(\text{Dấu của } f(x) \text{ được xác định trên khoảng đang tìm giới hạn, với } x\neq x_0)$

3. Giới hạn một bên

*** Định nghĩa:**

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;b)$.

  Số L được gọi là giới hạn bên phải của hàm số $y=f(x)$ khi $x\to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0<x_n<b$ và $x_n\to x_0$ ta có: $f(x_n)\to L$.

  Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L\Leftrightarrow \forall (x_n), x_0<x_n<b, x_n\to x_0\Rightarrow f(x_n)\to L}$$

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;x_0)$. Số L được gọi là giới hạn bên trái của hàm số $y=f(x)$ khi $x\to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a<x_n<x_0$ và $x_n\to x_0$ ta có: $f(x_n)\to L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$.

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L\Leftrightarrow \forall(x_n), a<x_n<x_0, x_n\to x_0\Rightarrow f(x_n)\to L.$$

*** Định lí**

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=L\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L.}$$

II. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

*** Định nghĩa**

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn là số L khi khi $x\to+\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) bất kì, $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$ ta có: $f(x_n)\to L$. .

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L\Leftrightarrow \forall(x_n), x_n>a, x_n\to+\infty\Rightarrow f(x_n)\to L.$$

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty;a)$. Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn là số L khi khi $x\to-\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) bất kì, $x_n<a$ và $x_n\to-\infty$ ta có: $f(x_n)\to L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L\Leftrightarrow \forall(x_n), x_n<a, x_n\to+\infty\Rightarrow f(x_n)\to L.$$

III. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ

1. Giới hạn vô cực

Các định nghĩa về giới hạn $+\infty$ (hoặc $-\infty$) của hàm số được phát biểu tương tự các định nghĩa 1,2 hay 3 ở trên. Chẳng hạn, giới hạn $-\infty$ của hàm số $y=f(x)$ khi x dần đến dương vô vực được định nghĩa như sau:

*** Định nghĩa:** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$.

Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn là $-\infty$ khi $x\to+\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) bất kì, $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$, ta có: $f(x_n)\to-\infty$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ hay $f(x)\to-\infty$ khi $x\to+\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty\Leftrightarrow \forall(x_n), x_n>a, x_n\to+\infty\Rightarrow f(x_n)\to-\infty.}$$

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)=-\infty.$

2. Các giới hạn đặc biệt

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c=c$ $\qquad\qquad \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{c}{x}=0$ với c là hằng số
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=\begin{cases}+\infty & \text{nếu k nguyên dương}\\ 0 & \text{nếu k nguyên âm}\end{cases}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=\begin{cases}+\infty & \text{nếu k chẵn}\\ -\infty & \text{nếu k lẻ}\end{cases}$

3. Một vài quy tắc về giới hạn vô cực:

a) Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x).g(x)$

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L\neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty\left(\text{hoặc}-\infty\right)$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ được tính theo quy tắc trong bảng sau:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x).g(x)$
$L>0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L<0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

b) Quy tắc tìm giới hạn của tích $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	Dấu của g(x)	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tuỳ ý	0
$L>0$	0	+	$+\infty$
		-	$-\infty$
$L<0$		+	$-\infty$
		-	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp

$x \to x_0^+, x \to x_0^-, x \to +\infty, x \to -\infty$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Dãy số có giới hạn hữu hạn

1. Phương pháp

Nếu hàm số $f(x)$ xác định trên $K \supset x_0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim\limits_{x \to -1}\left(x^2 - x + 7\right)$.

Hướng dẫn giải

$\lim\limits_{x \to -1}\left(x^2 - x + 7\right) = 1 + 1 + 7 = 9.$

Ví dụ 2: Tính $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x^6 + 1}$

Hướng dẫn giải

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x^6 + 1} = \dfrac{3 - 2}{5 + 3 + 1} = \dfrac{1}{9}.$

Ví dụ 3: Tính $\lim\limits_{x \to -1}\left|4x^3 - 2x - 3\right|$

Hướng dẫn giải

$\lim\limits_{x \to -1}\left|4x^3 - 2x - 3\right| = \left|-4 + 2 - 3\right| = 5.$

Ví dụ 4: Tính $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2 + 3} - 2}$

Hướng dẫn giải

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2 + 3} - 2} = \dfrac{-1 + 1}{\sqrt[3]{4} - 2} = 0.$

Ví dụ 5: Tính $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{\dfrac{x^4 - 4x^2 + 3}{7x^2 + 9x - 1}}$

Hướng dẫn giải

$\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{\dfrac{x^4 - 4x^2 + 3}{7x^2 + 9x - 1}} = \sqrt{\dfrac{16 - 16 + 3}{28 - 18 - 1}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x \to 2}\left(3x^2 + 7x + 11\right)$ là:

A. 37. **B.** 38. **C.** 39. **D.** 40.

Lời giải

Chọn A

$\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2+7x+11\right)=3.2^2+7.2+11=37$

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left|x^2-4\right|$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left|x^2-4\right|=\left|\left(\sqrt{3}\right)^2-4\right|=1$

Câu 3: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{2}$ là:

A. $\sin\dfrac{1}{2}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{2}=0.\sin\dfrac{1}{2}=0$

Câu 4: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3}{x^3+2}$ là:

A. 1. **B.** -2. **C.** 2. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3}{x^3+2}=\dfrac{(-1)^2-3}{(-1)^3+2}=-2$

Câu 5: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^3}{(2x-1)\left(x^4-3\right)}$ là:

A. 1. **B.** -2. **C.** 0. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^3}{(2x-1)\left(x^4-3\right)}=\dfrac{1-1^3}{(2.1-1)\left(1^4-3\right)}=0$

Câu 6: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x-1|}{x^4+x-3}$ là:

A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x-1|}{x^4+x-3}=\dfrac{|-1-1|}{1-1-3}=-\dfrac{2}{3}$

Câu 7: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}$ là:

A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}=\dfrac{\sqrt{3+1}+1}{-1-1}=-\dfrac{3}{2}$

Câu 8: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{9x^2-x}{(2x-1)(x^4-3)}}$ là:

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

$\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{9x^2-x}{(2x-1)(x^4-3)}}=\sqrt{\dfrac{9.3^2-3}{(2.3-1)(3^4-3)}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Câu 9: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{\dfrac{x^2-x+1}{x^2+2x}}$ là:

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn B

$\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{\dfrac{x^2-x+1}{x^2+2x}}=\sqrt{\dfrac{2^2-2+1}{2^2+2.2}}=\dfrac{1}{2}$

Câu 10: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x^2-4}-\sqrt{3x-2}}{x+1}$ là:

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3x^2-4}-\sqrt{3x-2}}{x+1}=\frac{\sqrt[3]{12-4}-\sqrt{6-2}}{3}=\frac{0}{3}=0$

Dạng 2. giới hạn một bên

1. Phương pháp

Ta cần nắm các tính chất sau

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L\Leftrightarrow \forall (x_n), x_0<x_n<b, \lim_{n\to+\infty} x_n=x_0\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n)=L$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L\Leftrightarrow \forall (x_n), a<x_n<x_0, \lim_{n\to+\infty} x_n=x_0\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n)=L$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=L$$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{|x-3|}{2x-6}$

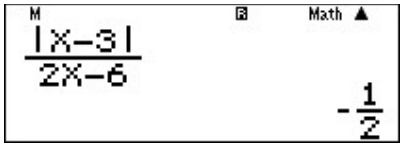
Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{|x-3|}{2x-6}=\lim_{x\to 3^+}\frac{x-3}{2(x-3)}=\frac{1}{2}.$$

Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\frac{|x-3|}{2x-6}$ và ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $3+10^{-5}$ $\boxed{=}$ ta được kết quả



Ví dụ 2: Tính $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{\frac{1-x^3}{3x^2+x}}$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x\to 1^-}\sqrt{\frac{1-x^3}{3x^2+x}}=\sqrt{\frac{0}{4}}=0.$$

Ví dụ 3: Tính $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x^3-2x+3}{x^2+2x}$

Hướng dẫn giải

Tử số có giới hạn là -1, mẫu số có giới hạn 0 và khi $x<-2$ thì $x^2+2x>0.$

Do đó $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x^3-2x+3}{x^2+2x}=-\infty.$

Ví dụ 4: Tính $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x+\sqrt{x}}{5x-\sqrt{x}}$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2x+\sqrt{x}}{5x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(5\sqrt{x}-1\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(2\sqrt{x}+1\right)}{\left(5\sqrt{x}-1\right)}=\frac{-1}{1}=-1.$$

Ví dụ 5: Tính $\lim\limits_{x\to (-1)^+}\dfrac{x^2+4x+3}{\sqrt{x^3+x^2}}$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x\to (-1)^+}\frac{x^2+4x+3}{\sqrt{x^3+x^2}}=\lim_{x\to (-1)^+}\frac{(x+1)(x+3)}{\sqrt{x^2(x+1)}}=\lim_{x\to (-1)^+}\frac{\sqrt{x+1}(x+3)}{\sqrt{x^2}}=\frac{0}{1}=0.$$

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{1-x} & \text{với } x<1\\ \sqrt{2x-2} & \text{với } x\ge 1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+1}{1-x}=+\infty$ vì tử số có giới hạn là 2, mẫu số có giới hạn 0 và $1-x>0$ với $x<1.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-15}{x-2}$ là:

A. $-\infty.$ **B.** $+\infty.$ **C.** $-\dfrac{15}{2}.$ **D.** $1.$

Lời giải

Chọn A

Vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}(x-15)=-13<0\\ \lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0 \ \& \ x-2>0,\forall x>2\end{cases}\longrightarrow \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-15}{x-2}=-\infty.$

Câu 2: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$ là:

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$.

C. $-\dfrac{15}{2}$. **D.** Không xác định.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x+2}=2>0\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=0 \ \& \ \sqrt{x-2}>0,\forall x>2\end{cases}\longrightarrow \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}=+\infty.$$

Câu 3: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{|3x+6|}{x+2}$ là:

A. $-\infty$. **B.** 3.

C. $+\infty$. **D.** Không xác định.

Lời giải

Chọn B

Ta có $|x+2|=x+2$ với mọi $x>-2$, do đó :

$$\lim_{x\to(-2)^+}\frac{|3x+6|}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{3|x+2|}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{3(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^+}3=3$$

Câu 4: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$ là:

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2-x}{(2-x)(1-2x)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{1-2x}=-\dfrac{1}{3}$.

Câu 5: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{x^2+13x+30}{\sqrt{(x+3)(x^2+5)}}$ là:

A. -2. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{15}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $x+3>0$ với mọi $x>-3$, nên:

$$\lim_{x\to -3^+}\frac{x^2+13x+30}{\sqrt{(x+3)(x^2+5)}}=\lim_{x\to -3^+}\frac{(x+3)(x+10)}{\sqrt{(x+3)(x^2+5)}}=\lim_{x\to -3^+}\frac{\sqrt{x+3}.(x+10)}{\sqrt{x^2+5}}=\frac{\sqrt{-3+3}(-3+7)}{\sqrt{(-3)^2+5}}=0.$$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\sqrt{1-x}} & \text{với } x<1\\ \sqrt{3x^2+1} & \text{với } x\ge 1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$ là:

A. $+\infty$. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{3x^2+1}=\sqrt{3.1^2+1}=2$

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{1-x} & \text{với } x<1\\ \sqrt{2x-2} & \text{với } x\ge 1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$ là:

A. $+\infty$. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+1}{1-x}=+\infty$ vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1)=2\\ \lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)=0 \ \&\ 1-x>0\ (\forall x<1)\end{cases}$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-3 & \text{với } x\ge 2\\ x-1 & \text{với } x<2\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ là:

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-3)=1\\ \lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x-1)=1\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=1\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}f(x)=1.$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-2}+3 & \text{với } x\ge 2\\ ax-1 & \text{với } x<2\end{cases}$. Tìm a để tồn tại $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

A. $a=1$. **B.** $a=2$. **C.** $a=3$. **D.** $a=4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(ax-1)=2a-1\\ \lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(\sqrt{x-2}+3)=3\end{cases}$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ tồn tại $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\Leftrightarrow 2a-1=3\Leftrightarrow a=2.$

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3 & \text{với } x>3\\ 1 & \text{với } x=3.\\ 3-2x^2 & \text{với } x<3\end{cases}$ Khẳng định nào dưới đây sai?

A. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=6.$

B. Không tồn tại $\lim\limits_{x\to 3} f(x).$

C. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=6.$

D. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-15.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(x^2-2x+3\right)=6\\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(3-2x^2\right)=-15\end{cases}\longrightarrow \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

$\longrightarrow$ không tồn tại giới hạn khi $x\to 3.$

Vậy chỉ có khẳng định C sai.

Dạng 3. Giới hạn tại vô cực

1. Phương pháp

Giới hạn hữu hạn tại vô cực

> Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L\Leftrightarrow$ với mọi dãy số (x_n), $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$ ta đều có $\lim f(x)=L$.

LƯU Ý: Định nghĩa $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ được phát biểu hoàn toàn tương tự.

Giới hạn vô cực tại vô cực

> Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\Leftrightarrow$ với mọi dãy số (x_n), $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$ ta đều có $\lim f(x)=+\infty$.

LƯU Ý: Các định nghĩa: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ được phát biểu hoàn toàn tương tự.

Một số giới hạn đặc biệt

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{c}{x^k}=0$ (c là hằng số, k nguyên dương).

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty$ với k nguyên dương; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=-\infty$ nếu k là số nguyên lẻ; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=+\infty$ nếu k là số nguyên chẵn.

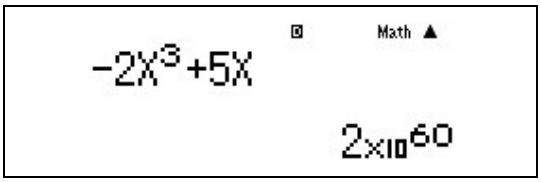
Nhận xét: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-f(x)\right]=-\infty$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^3+5x\right)$

Lời giải

Cách 1: Sử dụng MTCT tính giá trị của $f\left(x\right)=-2x^3+5x$ tại một điểm có giá trị âm rất nhỏ (do ta đang xét giới hạn của hàm số khi $x\to-\infty$), chẳng hạn tại -10^{20}. Máy hiển thị kết quả như hình:



Đó là một giá trị dương rất lớn. Vậy chọn đáp án C , tức $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^3+5x\right)=+\infty$.

Cách 2: Ta có $-2x^3+5x=x^3\left(-2+\dfrac{5}{x^2}\right)$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2+\dfrac{5}{x^2}\right)=-2<0$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(-2+\dfrac{5}{x^2}\right)=+\infty$.

Vậy theo Quy tắc 1, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^3+5x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(-2+\dfrac{5}{x^2}\right)=+\infty$.

Ví dụ 2: Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^4-2x^2+1\right)$

Lời giải

Cách 1: Theo nhận xét trên thì $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^4-2x^2+1\right)=+\infty$ ($x\to-\infty$, k chẵn và $a_k>0$).

Thật vậy, ta có $3x^4-2x^2+1=x^4\left(3-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}\right)$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x^4=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}\right)=3>0$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^4-2x^2+1\right)=+\infty$.

Nhận xét:

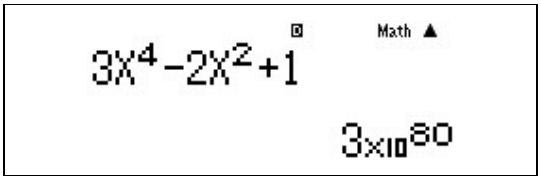
- Giới hạn tại vô cực của hàm đa thức là vô cực, chỉ phụ thuộc vào số hạng chứa lũy thừa bậc cao nhất.

- Giới hạn của hàm đa thức tại $+\infty$ phụ thuộc vào hệ số của lũy thừa bậc cao nhất. (Giống với giới hạn của dãy số dạng đa thức).

- Giới hạn của hàm đa thức tại $-\infty$ phụ thuộc vào bậc và hệ số của lũy thừa bậc cao nhất.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số $f\left(x\right)=3x^4-2x^2+1$ tại $x=-10^{20}$, ta được kết quả như hình :

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133



Kết quả là một số dương rất lớn. Do đó chọn đáp án A,

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$. Tính $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Lời giải

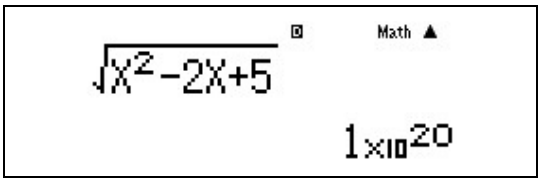
Hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Có thể giải nhanh như sau : Vì x^2-2x+5 là một hàm đa thức của x nên có giới hạn tại vô cực. Mà $\sqrt{x^2-2x+5}>0$ với mọi x nên giới hạn của $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$ tại $-\infty$ chắc chắn là $+\infty$.

Thật vậy, ta có $\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}|x|=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=1>0$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x+5}=+\infty$.

Hoặc ta có thể sử dụng MTCT để tính giá trị của $f(x)$ tại một giá trị âm rất nhỏ của x, chẳng hạn tại $x=-10^{20}$ ta được kết quả như hình:



Kết quả này là một số dương rất lớn. Do đó ta chọn đáp án B. (Dễ thấy kết quả hiển thị trên máy tính như trên chỉ là kết quả gần đúng do khả năng tính toán hạn chế của MTCT. Tuy nhiên kết quả đó cũng giúp ta lựa chọn được đáp án chính xác).

Lưu ý:

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}|x|=+\infty$.

Khi $x\to-\infty$ thì $x<0$.

Với $x<0$ ta có $\sqrt{x^2}=-x$.

Cần đặc biệt lưu ý các điều trên khi tính giới hạn tại $-\infty$ của hàm chứa căn thức.

Ví dụ 4: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}\right)$

Lời giải

Cách 1: Ta có:

$$\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}=\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}-|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}$$

$$=|x|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)$$

Mà $\lim\limits_{x\to-\infty}|x|=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)=1-2=-1<0$.

Vậy $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[|x|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)\right]=-\infty$.

Lưu ý:

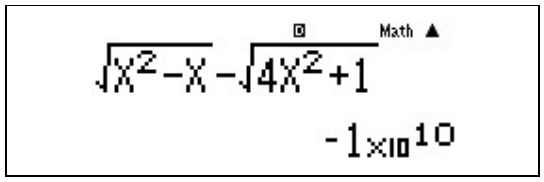
- Độc giả nên đọc lại phần giới hạn dãy số có chứa căn thức để hiểu hơn tại sao lại có định hướng giải như vậy (mà không đi nhân chia với biểu thức liên hợp).

- Có thể thấy như sau: Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+1}=+\infty$.

Mà hệ số của x^2 trong $4x^2+1$ lớn hơn hệ số của x^2 trong x^2-x nên suy ra

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}\right)=-\infty.$$

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=-10^{10}$ ta được kết quả như hình.



3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-x^3+1\right)$ là:

A. 1. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn D

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x-x^3+1\right)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(\frac{1}{x^2}-1+\frac{1}{x^3}\right)=+\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}-1+\frac{1}{x^3}\right)=-1<0\end{cases}.$$

Giải nhanh: $x-x^3+1\sim(-1)x^3\longrightarrow+\infty$ khi $x\to-\infty$.

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(|x|^3+2x^2+3|x|\right)$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$\lim_{x\to-\infty}\left(|x|^3+2x^2+3|x|\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x^3+2x^2-3x\right)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(-1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)=+\infty.$$

Giải nhanh: $|x|^3+2x^2+3|x|\sim|x|^3\to+\infty$ khi $x\to-\infty$.

Câu 3: Giá trị của giới hạn $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $\sqrt{2}-1$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

Giải nhanh: $x\to+\infty:\sqrt{x^2+1}+x\sim\sqrt{x^2}+x=2x\to+\infty$.

Đặt x làm nhân tử chung:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)=+\infty$$

vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to2^+}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1=2>0\end{cases}$.

Câu 4: Giá trị của giới hạn $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)$ là:

A. $\sqrt[3]{3}+1$. **B.** $+\infty$. **C.** $\sqrt[3]{3}-1$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

Giải nhanh: $x\to+\infty:\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\sim\sqrt[3]{3x^3}+\sqrt{x^2}=\left(\sqrt[3]{3}+1\right)x\to+\infty.$

Đặt x làm nhân tử chung:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{3-\frac{1}{x^3}}+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)=+\infty$$

vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{3-\frac{1}{x^3}}+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)=\sqrt[3]{3}+1>0\end{cases}$.

Câu 5: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right)$ là:

A. 4. **B.** $-\infty$. **C.** 6. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn D

Đặt x^2 làm nhân tử chung:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2\right)=+\infty$$

vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2\right)=4>0\end{cases}$.

Giải nhanh: $x\to+\infty: x\left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right)\sim x\left(\sqrt{4x^2}+2x\right)=4x^2\to+\infty.$

Dạng 4. Dạng vô định $\frac{0}{0}$

1. Phương pháp

✓ Nhận dạng vô định $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}$ khi $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=0.$

✓ Phân tích tử và mẫu thành các nhân tử và giản ước

$$\lim_{x\to x_o}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim_{x\to x_o}\frac{(x-x_0)A(x)}{(x-x_0)B(x)}=\lim_{x\to x_o}\frac{A(x)}{B(x)}$$ và tính $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{A(x)}{B(x)}$.

Nếu phương trình $f(x)=0$ có nghiệm là x_0 thì $f(x)=(x-x_0).g(x)$

Đặc biệt:

- Nếu tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$, mà $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thì $f(x)$ được phân tích thành $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$
- Phương trình bậc 3: $ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a\neq 0)$
  - $a+b+c+d=0$ thì pt có một nghiệm là $x_1=1$, để phân tích thành nhân tử ta dùng phép chia đa thức hoặc dùng sơ đồ Hooc-ner
  - $a-b+c-d=0$ thì pt có một nghiệm là $x_1=-1$, để phân tích thành nhân tử ta dùng phép chia đa thức hoặc dùng sơ đồ Hooc-ner
- Nếu $u(x)$ và $v(x)$ có chứa dấu căn thì có thể nhân tử và mẫu với biểu thức liên hiệp, sau đó phân tích chúng thành tích để giản ước.

$A-B$ lượng liên hiệp là: $A+B$.

$\sqrt{A}-B$ lượng liên hiệp là: $\sqrt{A}+B$.

$\sqrt{A}-\sqrt{B}$ lượng liên hiệp là: $\sqrt{A}+\sqrt{B}$.

$\sqrt[3]{A}-B$ lượng liên hiệp là: $\left(\sqrt[3]{A^2}+B\sqrt[3]{A}+B^2\right)$.

$\sqrt[3]{A}+B$ lượng liên hiệp là: $\left(\sqrt[3]{A^2}-B\sqrt[3]{A}+B^2\right)$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$

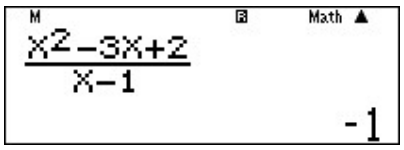
Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to}(x-2)=-1.$$

Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\dfrac{X^2-3X+2}{X-1}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $1+10^{-10}$ $\boxed{=}$ ta được kết quả



Ví dụ 2: Tính $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{1-x^2}$.

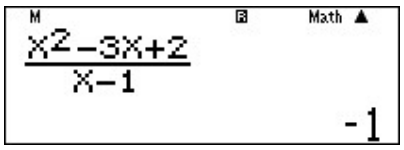
Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+1}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x-1)(x-1)}{(1-x)(1+x)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(2x-1)}{(1+x)}=\frac{-1}{2}.$$

Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\dfrac{2X^2-3X+1}{1-X^2}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $1+10^{-10}$ $\boxed{=}$ ta được kết quả



Ví dụ 3: Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-1}$

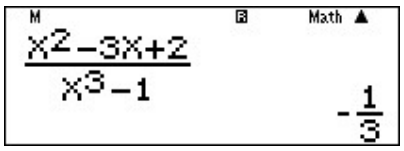
Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x^2+x+1}=\frac{-1}{3}.$$

Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\frac{x^2-3x+2}{x^3-1}$ ấn CALC $1+10^{-10}$ = ta được kết quả



Ví dụ 4: Tính $\lim_{t\to a}\frac{t^4-a^4}{t-a}$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{t\to a}\frac{t^4-a^4}{t-a}=\lim_{t\to a}\left(t^3+t^2a+ta^2+a^3\right)=4a^3.$$

Ví dụ 5: Tính $\lim_{y\to 1}\frac{y^4-1}{y^3-1}$

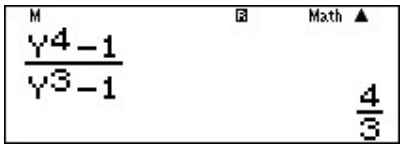
Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$$\lim_{y\to 1}\frac{y^4-1}{y^3-1}=\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)(y^3+y^2+y+1)}{(y-1)(y^2+y+1)}=\lim_{y\to 1}\frac{y^3+y^2+y+1}{y^2+y+1}=\frac{4}{3}.$$

Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\frac{Y^4-1}{Y^3-1}$ ấn CALC $1+10^{-10}$ = ta được kết quả



Ví dụ 6: Tính $\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{\sqrt{x+7}-3}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

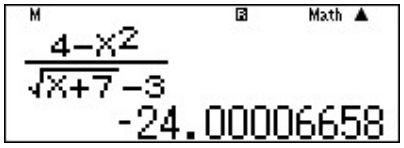
$$\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{\sqrt{x+7}-3}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{-\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)} = \lim_{x\to 2}\frac{-\left(x-2\right)\left(x+2\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{x+7-9}$$

$$= \lim_{x\to 2}\left[\left(x+2\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)\right] = -24.$$

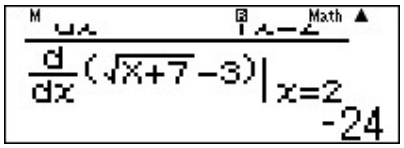
Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\frac{4-X^2}{\sqrt{X+7}-3}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $1+10^{-5}$ $\boxed{=}$ ta được kết quả ≈ -24.



Lưu ý: Để ra kết quả chính xác -24 ta có thể tính theo quy tắc Lô-pi-tan như sau:

Nhập $\frac{\frac{d}{dx}\left(4-X^2\right)\Big|_{x=2}}{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{X+7}-3\right)\Big|_{x=2}}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả chính xác -24.



Ví dụ 7: Tính $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

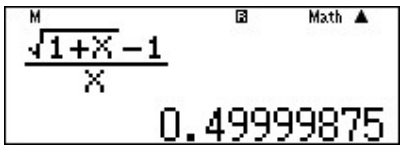
Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}.$$

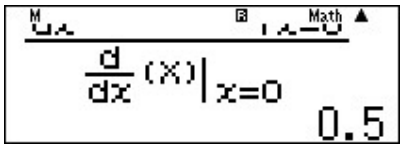
Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $0+10^{-5}$ $\boxed{=}$ ta được kết quả $\approx \frac{1}{2}$.



Lưu ý: Để ra kết quả chính xác $\frac{1}{2}$ ta có thể tính theo quy tắc Lô-pi-tan như sau:

Nhập $\dfrac{\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{1+X}-1\right)\Big|_{x=0}}{\dfrac{d}{dx}\left(X\right)\Big|_{x=0}}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả chính xác $0,5=\dfrac{1}{2}$.



Ví dụ 8: Tính $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{\sqrt{x}-2}$

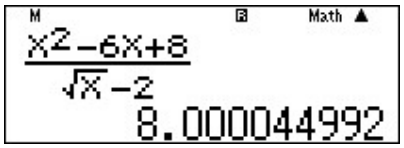
Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-2)(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x-2)(\sqrt{x}+2)=2\times 4=8.$$

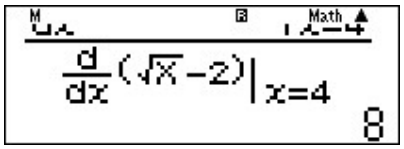
Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\dfrac{x^2-6x+8}{\sqrt{x}-2}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $4+10^{-5}$ $\boxed{=}$ ta được kết quả ≈ 8.



Lưu ý: Để ra kết quả chính xác 8 ta có thể tính theo quy tắc Lô-pi-tan như sau:

Nhập $\dfrac{\dfrac{d}{dx}\left(X^2-6X+8\right)\Big|_{x=4}}{\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{X}-2\right)\Big|_{x=4}}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả chính xác 8.



Ví dụ 9: Tính $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+4}-2}{4-\sqrt{2x^2+8}}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$$E=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x^2+4}-2}{4-\sqrt{2x^2+8}}$$

Nhân tử và mẫu hai lượng liên hợp:

$$\left[\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)^2+2\sqrt[3]{x^2+4}+4\right]\left[4+\sqrt{2x^2+8}\right]$$

$$E=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt[3]{x^2+4}-2\right)\left[\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)^2+2\sqrt[3]{x^2+4}+4\right]\left(4+\sqrt{2x^2+8}\right)}{\left(4-\sqrt{2x^2+8}\right)\left(4+\sqrt{2x^2+8}\right)\left[\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)^2+2\sqrt[3]{x^2+4}+4\right]}$$

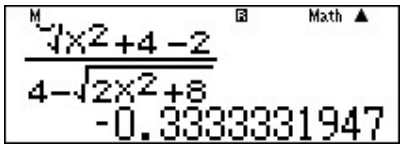
$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2+4-8\right)\left(4+\sqrt{2x^2+8}\right)}{\left(16-2x^2-8\right)\left[\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)^2+2\sqrt[3]{x^2+4}+4\right]}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-4\right)\left(4+\sqrt{2x^2+8}\right)}{\left[-2\left(x^2-4\right)\right]\left[\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)^2+2\sqrt[3]{x^2+4}+4\right]}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{4+\sqrt{2x^2+8}}{-2\left[\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)^2+2\sqrt[3]{x^2+4}+4\right]}=\frac{8}{-24}=-\frac{1}{3}.$$

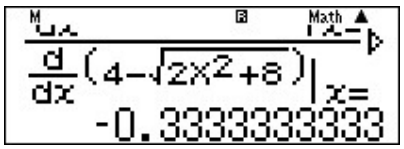
Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\frac{\sqrt[3]{x^2+4}-2}{4-\sqrt{2x^2+8}}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $4+10^{-5}$ $\boxed{=}$ ta được kết quả $\approx -\frac{1}{3}$.



Lời bình: Nếu ta dùng quy tắc Lô-pi-tan

Nhập $\left.\frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2+4}-2\right)}{\frac{d}{dx}\left(4-\sqrt{2x^2+8}\right)}\right|_{x=2}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả $-0,(3)=-\frac{1}{3}$.



Ví dụ 10: Tính $\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[4]{x^2+12}-2}{x^2-4}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$$E=\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[4]{x^2+12}-2}{x^2-4}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{\left(\sqrt[4]{x^2+12}-2\right)\left(\sqrt[4]{x^2+12}+2\right)}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt[4]{x^2+12}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x^2+12}-4}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt[4]{x^2+12}+2\right)}$$ (vẫn còn dạng vô định $\frac{0}{0}$)

$$=\lim_{x\to -2}\frac{\left(\sqrt{x^2+12}-4\right)\left(\sqrt{x^2+12}+4\right)}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt[4]{x^2+12}+2\right)\left(\sqrt{x^2+12}+4\right)}$$

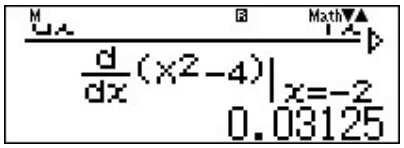
$$=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+12-16}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt[4]{x^2+12}+2\right)\left(\sqrt{x^2+12}+4\right)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{1}{\left(\sqrt[4]{x^2+12}+2\right)\left(\sqrt{x^2+12}+4\right)}=\frac{1}{32}.$$

Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Ta dùng quy tắc Lô-pi-tan

Nhập $\dfrac{\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt[4]{x^2+12}-2\right)\Big|_{x=-2}}{\dfrac{d}{dx}\left(x^2-4\right)\Big|_{x=-2}}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả $0,03125=\frac{1}{32}$.



Ví dụ 11: Tính $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[6]{x}-1}{x^2-1}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$$E=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[6]{x}-1}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[6]{x}-1\right)\left(\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{x}+1\right)}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{x}+1\right)}$$ (Vẫn dạng vô định $\frac{0}{0}$)

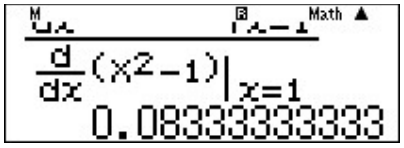
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\left(x+1\right)\left(\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{1}{12}.$$

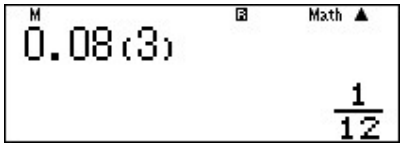
Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Ta dùng quy tắc Lô-pi-tan

Nhập $\left.\frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt[6]{x}-1\right)\right|_{x=1}}{\left.\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right)\right|_{x=1}}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả $0,08\left(3\right)=\frac{1}{12}$.



Để chuyển $0,08\left(3\right)=\frac{1}{12}$ ta bấm như sau 0.08Qs3=



3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$.

C. 3. **D.** Không xác định.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}=\frac{12}{4}=3$

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+1}{x^3+1}$ là:

A. $-\dfrac{3}{5}$. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** $-\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^5+1}{x^3+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(x^4-x^3+x^2-x+1\right)}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^4-x^3+x^2-x+1}{x^2-x+1}=\frac{5}{3}.$$

Câu 3: Biết rằng $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{2x^3+6\sqrt{3}}{3-x^2}=a\sqrt{3}+b$. Tính a^2+b^2.

A. 10. **B.** 25. **C.** 5. **D.** 13.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{2x^3+3\sqrt{3}}{3-x^2}=\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{2\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x^2-\sqrt{3}x+3\right)}{\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)}=\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{2\left(x^2-\sqrt{3}x+3\right)}{\sqrt{3}-x}$

$$=\frac{2\left[\left(-\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{3}.\left(-\sqrt{3}\right)+3\right]}{\sqrt{3}-\left(-\sqrt{3}\right)}=\frac{18}{2\sqrt{3}}=3\sqrt{3}\longrightarrow\begin{cases}a=3\\b=1\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2=10\,.$$

Câu 4: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -3}\left|\dfrac{-x^2-x+6}{x^2+3x}\right|$ là:

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{x\to -3}\left|\frac{-x^2-x+6}{x^2+3x}\right|=\lim_{x\to -3}\left|\frac{(x+3)(x-2)}{x(x+3)}\right|=\lim_{x\to -3}\left|\frac{x-2}{x}\right|=\left|\frac{-3-2}{-3}\right|=\frac{5}{3}.$$

Câu 5: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{3-x}{\sqrt{27-x^3}}$ là:

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $3-x>0$ với mọi $x<3$, do đó:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{3-x}{\sqrt{27-x^3}}=\lim_{x\to 3^-}\frac{3-x}{\sqrt{(3-x)\left(9+3x+x^2\right)}}$$

$$=\lim_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{9+3x+x^2}}=\frac{\sqrt{3-3}}{\sqrt{9+3.3+3^2}}=0.$$

Câu 6: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2+\pi^{21}\right)\sqrt[7]{1-2x}-\pi^{21}}{x}$ là:

A. $-\dfrac{2\pi^{21}}{7}$. **B.** $-\dfrac{2\pi^{21}}{9}$. **C.** $-\dfrac{2\pi^{21}}{5}$. **D.** $\dfrac{1-2\pi^{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+\pi^{21}\right)\sqrt[7]{1-2x}-\pi^{21}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+\pi^{21}\right)\left(\sqrt[7]{1-2x}-1\right)}{x}+\lim_{x\to 0}x=-\frac{2\pi^{21}}{7}.$$

Câu 7: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{x^2}$ là:

A. 0. **B.** $-\infty$. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(x^2+x\right)-x}{x^2\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}=+\infty$

vì $1>0$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}\right)=0$ và $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}>0$ với mọi $x>0$.

Câu 8: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}$ là:

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2}+2\sqrt[3]{4x+4}+4\right)}{(4x+4-8)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2}+2\sqrt[3]{4x+4}+4\right)}{4\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}=\frac{12}{12}=1.$$

Câu 9: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$ là:

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{13}{12}$. **C.** $\frac{11}{12}$. **D.** $-\frac{13}{12}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2\sqrt{1+x}-2}{x}+\frac{2-\sqrt[3]{8-x}}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}+1}+\frac{1}{4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}}\right)=1+\frac{1}{12}=\frac{13}{12}.$

Câu 10: Biết rằng $b>0, a+b=5$ và $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}=2$. Khẳng định nào dưới đây sai?

A. $1<a<3.$ **B.** $b>1.$ **C.** $a^2+b^2>10.$ **D.** $a-b<0.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{ax+1}-1}{x}+\frac{1-\sqrt{1-bx}}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{ax}{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}+\frac{bx}{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a}{\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}+\frac{b}{\left(1+\sqrt{1-x}\right)}\right)=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=2.$

Vậy ta được: $\begin{cases}a+b=5\\ \frac{a}{3}+\frac{b}{2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=5\\ 2a+3b=12\end{cases}\Leftrightarrow a=3, b=2$

Dạng 5. Dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

1. Phương pháp

✓ Nhận biết dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}$ khi $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=\pm\infty, \lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\pm\infty.$

$\lim\limits_{x\to \pm\infty}\frac{u(x)}{v(x)}$ khi $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=\pm\infty, \lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\pm\infty.$

✓ Chia tử và mẫu cho x^n với n là số mũ cao nhất của biến ở mẫu (Hoặc phân tích thành tích chứa nhân tử x^n rồi giản ước)

✓ Nếu u(x) hoặc v(x) có chứa biến x trong dấu căn thì đưa x^k ra ngoài dấu căn (Với k là mũ cao nhất của biến x trong dấu căn), sau đó chia tử và mẫu cho luỹ thừa cao nhất của x (thường là bậc cao nhất ở mẫu).

✓ Cách tính giới hạn dạng này hoàn toàn tương tự giới hạn dãy số.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^4+x^3-2x^2-3}{x-2x^4}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

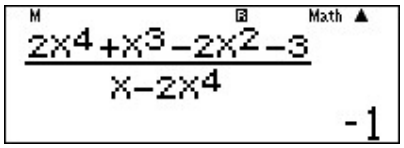
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4+x^3-2x^2-3}{x-2x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x^4}}{\dfrac{1}{x^3}-2}=-1.$$

Cách 2: *Mẹo giải nhanh*

$$\frac{2x^4+x^3-2x^2-3}{x-2x^4}\sim\frac{2x^4}{-2x^4}=-1.$$

Cách 3: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\dfrac{2x^4+x^3-2x^2-3}{x-2x^4}$ ấn CALC 10^{15} = ta được kết quả -1.



Lời bình: "Bậc tử bằng bậc mẫu" nên kết quả $\dfrac{2}{-2}=-1$.

Ví dụ 2: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4-2x^5}{5x^4+3x+2}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4-2x^5}{5x^4+3x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-2x}{5+\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{2}{x^4}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(5+\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}\right)=5>0;\ \lim_{x\to+\infty}\left(3-2x\right)=-\infty.$$

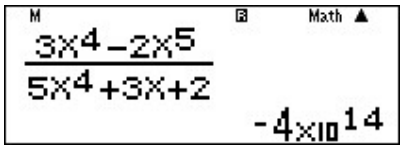
Do đó: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4-2x^5}{5x^4+3x+2}=-\infty.$

Cách 2: *Mẹo giải nhanh*

$$\frac{3x^4-2x^5}{5x^4+3x+2}\sim\frac{-2x^5}{5x^4}=-\frac{2}{5}x=-\infty.$$

Cách 3: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\frac{3x^4-2x^5}{5x^4+3x+2}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $10^{15}\boxed{=}$ ta được kết quả $\approx-\infty$.



Lời bình: Bậc tử lớn hơn bậc mẫu nên kết quả là ∞.

Ví dụ 3: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^4-2x^5}{5x^4+3x^6+2}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

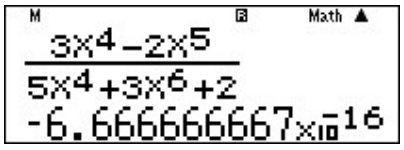
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4-2x^5}{5x^4+3x^6+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}}{\frac{5}{x^2}+3+\frac{2}{x^6}}=\frac{0}{3}=0.$$

Cách 2: *Mẹo giải nhanh*

$$\frac{3x^4-2x^5}{5x^4+3x^6+2}\sim\frac{-2x^5}{3x^6}=-\frac{2}{3}.\frac{1}{x}=0.$$

Cách 3: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\frac{3x^4-2x^5}{5x^4+3x^6+2}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $10^{15}\boxed{=}$ ta được kết quả ≈ 0.



Lời bình: "Bậc tử bé hơn bậc mẫu" nên kết quả là 0.

Ví dụ 4: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3x^4+4x^5+2}{9x^5+5x^4+4}}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

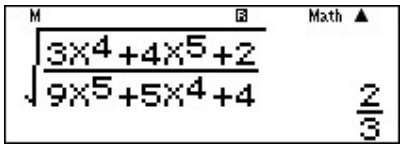
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3x^4+4x^5+2}{9x^5+5x^4+4}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{\frac{3}{x}+4+\frac{2}{x^5}}{9+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^5}}}=\frac{2}{3}.$$

Cách 2: *Mẹo giải nhanh*

$$\sqrt{\frac{3x^4+4x^5+2}{9x^5+5x^4+4}} \sim \sqrt{\frac{4x^5}{9x^5}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}.$$

Cách 3: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\sqrt{\frac{3x^4+4x^5+2}{9x^5+5x^4+4}}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ 10^{15} $\boxed{=}$ ta được kết quả ≈ 0.



Ví dụ 5: Tính $L = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$.

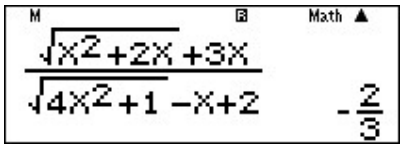
Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}+3x}{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{2}{x}}+3}{-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-1+\frac{2}{x}} = \frac{2}{-3}.$$

Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\frac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ -10^{15} $\boxed{=}$ ta được kết quả $\frac{2}{3}$.



Ví dụ 6: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{x+5}}{2x-7}$

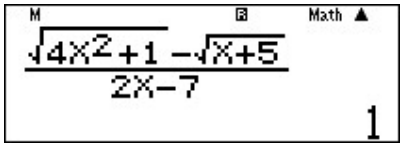
Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{x+5}}{2x-7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}}{2-\frac{7}{x}} = \frac{2-0}{2-0} = 1.$$

Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\dfrac{\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{x+5}}{2x-7}$ ấn CALC 10^{25} = ta được kết quả



Ví dụ 7: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+5\right)\sqrt{\dfrac{x}{x^3-1}}$

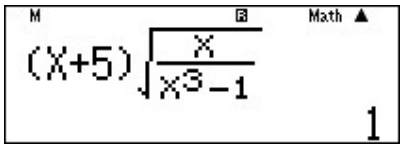
Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+5\right)\sqrt{\frac{x}{x^3-1}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x\left(x+5\right)^2}{x^3-1}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^2}{1-\dfrac{1}{x^3}}}=1.$$

Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\left(x+5\right)\sqrt{\dfrac{x}{x^3-1}}$ ấn CALC 10^{25} = ta được kết quả



Ví dụ 8: Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(-x^2+1\right)^3\left(1-2x\right)^{94}}{2x^{100}+3}$

Hướng dẫn giải

$$E=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(-x^2+1\right)^3\left(1-2x\right)^{94}}{2x^{100}+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left[x^2\left(-1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right]^3\left[x\left(\dfrac{1}{x}-2\right)\right]^{94}}{x^{100}\left(2+\dfrac{3}{x^{100}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^6\left(-1+\dfrac{1}{x^2}\right)^3x^{94}\left(\dfrac{1}{x}-2\right)^{94}}{x^{100}\left(2+\dfrac{3}{x^{100}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(-1+\dfrac{1}{x^2}\right)^3\left(\dfrac{1}{x}-2\right)^{94}}{2+\dfrac{3}{x^{100}}}=\frac{\left(-1\right)^3.\left(-2\right)^{94}}{2}=-2^{93}.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}$ là:

A. -2. **B.** $+\infty$. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=2$.

Giải nhanh : khi $x\to-\infty$ thì : $\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}\sim\dfrac{2x^2}{x^2}=2.$

Câu 2: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+5x^2-3}{x^2+6x+3}$ là:

A. -2. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+5x^2-3}{x^2+6x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}x.\dfrac{2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^3}}{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=-\infty.$

Giải nhanh : khi $x\to-\infty$ thì : $\dfrac{2x^3+5x^2-3}{x^2+6x+3}\sim\dfrac{2x^3}{x^2}=2x\to-\infty.$

Câu 3: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-7x^2+11}{3x^6+2x^5-5}$ là:

A. -2. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-7x^2+11}{3x^6+2x^5-5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{7}{x^4}+\dfrac{11}{x^6}}{3+\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^6}}=\dfrac{0}{3}=0.$

Giải nhanh : khi $x\to-\infty$ thì : $\dfrac{2x^3-7x^2+11}{3x^6+2x^5-5}\sim\dfrac{2x^3}{3x^6}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{x^3}\to0.$

Câu 4: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$ là:

A. -2. **B.** $+\infty$. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải

Chọn D

Khi $x\to-\infty$ thì $\sqrt{x^2}=-x\longrightarrow\sqrt{x^2+1}-x\sim\sqrt{x^2}-x=-x-x=-2x\neq 0$

$\longrightarrow$ chia cả tử và mẫu cho x, ta được $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1}=-1$.

Câu 5: Biết rằng $\dfrac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x\to+\infty$ (với a là tham số). Tính giá trị nhỏ nhất của $P=a^2-2a+4$.

A. $P_{\min}=1$. **B.** $P_{\min}=3$. **C.** $P_{\min}=4$. **D.** $P_{\min}=5$.

Lời giải

Chọn B

Khi $x\to+\infty$ thì $\sqrt{x^2}=x\longrightarrow\sqrt{x^2+1}-x\sim\sqrt{x^2}-x=x-x=0$

$\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((2-a)x-3\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(2-a-\dfrac{3}{x}\right)\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)$.

Vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)=4>0\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}=+\infty$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-a-\dfrac{3}{x}\right)=2-a>0\Rightarrow a<2$.

Giải nhanh : ta có $x\to+\infty\longrightarrow\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$

$=\left((2-a)x-3\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\sim(2-a)x.\left(\sqrt{x^2}+x\right)=2(2-a)x\to+\infty\Leftrightarrow a<2$.

Khi đó $P=a^2-2a+4=(a-1)^2+3\geq 3,\ P=3\Leftrightarrow a=1<2\Rightarrow P_{\min}=3$.

Câu 6: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}$ là:

A. -2. **B.** -1. **C.** -2. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn C

Giải nhanh: khi $x\to-\infty\longrightarrow\dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}\sim\dfrac{\sqrt{4x^2}}{x}=\dfrac{-2x}{x}=-2$.

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{4-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{-\sqrt{4}}{1}=-2.$

Câu 7: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}$ là:

A. $-\dfrac{1}{5}.$ **B.** $+\infty.$ **C.** $-\infty.$ **D.** $\dfrac{1}{5}.$

Lời giải

Chọn D

Giải nhanh : khi

$$x\to+\infty\longrightarrow\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}\sim\dfrac{\sqrt{4x^2}-x}{\sqrt{9x^2}+2x}=\dfrac{2x-x}{3x+2x}=\dfrac{1}{5}.$$

Cụ thể : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{2}{x}-1}{\sqrt{9-\dfrac{3}{x}}+2}=\dfrac{1}{5}.$

Câu 8: Biết rằng $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{ax^2-3x}+bx}>0$ là hữu hạn (với a,b là tham số). Khẳng định nào dưới đây đúng.

A. $a\geq 0.$ **B.** $L=-\dfrac{3}{a+b}$ **C.** $L=\dfrac{3}{b-\sqrt{a}}$ **D.** $b>0.$

Lời giải

Chọn B

Ta phải có $ax^2-3x>0$ trên $(-\infty;\alpha)\Leftrightarrow a\geq 0.$

Ta có $x\to-\infty\longrightarrow\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x\sim\sqrt{4x^2}-x=-3x\neq 0.$

Như vậy xem như "tử" là một đa thức bậc 1. Khi đó $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{ax^2-3x}+bx}>0$ khi và chỉ khi $\sqrt{ax^2-3x}+bx$ là đa thức bậc 1.

Ta có $\sqrt{ax^2-3x}+bx\sim\sqrt{ax^2}+bx=\left(-\sqrt{a}+b\right)x\longrightarrow-\sqrt{a}+b\neq 0.$

Khi đó $\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{ax^2-3x}+bx}\sim\dfrac{-3x}{\left(-\sqrt{a}+b\right)x}=\dfrac{3}{b-\sqrt{a}}=L>0\Leftrightarrow b-\sqrt{a}>0\Rightarrow b>\sqrt{a}.$

Câu 9: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}}$ là:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** 0. **C.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Giải nhanh: $x\to-\infty\longrightarrow\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}}\sim\frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt{2x^2}}=\frac{x}{-\sqrt{2}x}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}}{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị của a để $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}+ax\right)$ là $+\infty$.

A. $a>\sqrt{2}$. **B.** $a<\sqrt{2}$. **C.** $a>2$. **D.** $a<2$.

Lời giải

Chọn B

Giải nhanh: $x\to-\infty\longrightarrow\sqrt{2x^2+1}+ax\sim\sqrt{2x^2}+x$

$=-\sqrt{2}x+ax=\left(a-\sqrt{2}\right)x\to+\infty\Leftrightarrow a-\sqrt{2}<0\Leftrightarrow a<\sqrt{2}$.

Cụ thể: vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}+ax\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+a\right)=+\infty$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+a\right)=a-\sqrt{2}<0\Leftrightarrow a<\sqrt{2}$.

Dạng 6. Dạng vô định $\infty-\infty, 0.\infty$

1. Phương pháp

- ✓ Nếu biểu thức chứa biến số dưới dấu căn thì nhân và chia với biểu thức liên hợp
- ✓ Nếu biểu thức chứa nhiều phân thức thì quy đồng mẫu và đưa về cùng một biểu thức.
- ✓ Thông thường, các phép biến đổi này có thể cho ta khử ngay dạng vô định $\infty-\infty;0.\infty$ hoặc chuyển về dạng vô định $\frac{\infty}{\infty};\frac{0}{0}$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-3}\right)$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x+3}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4}{\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)}=0.$$

Ví dụ 2: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)=\lim_{x\to+\infty} x\frac{x^2+5-x^2}{\sqrt{x^2+5}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+1}=\frac{5}{2}.$$

Ví dụ 3: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)$

Hướng dẫn giải

$$E=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)$$

Nhân và chia liên hợp $x+\sqrt{x^2+5x}$

$$E=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)\left(x+\sqrt{x^2+5x}\right)}{x+\sqrt{x^2+5x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2-5x}{x+|x|\sqrt{1+\frac{5}{x}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x}{x+x\sqrt{1+\frac{5}{x}}}\ (\text{Vì}=\lim_{x\to+\infty}|x|=\lim_{x\to+\infty}x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5}{1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}}=\frac{-5}{1+\sqrt{1+0}}=-\frac{5}{2}.$$

Ví dụ 4: Tính $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1}-1\right)$

Hướng dẫn giải

$$E=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1}-1\right)\ (\text{Dạng vô định } 0.\infty)$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{1-x-1}{x(x+1)}=\lim_{x\to0^-}\frac{-1}{x+1}=-1.$$

Ví dụ 6: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sqrt{x^2+5}=0.$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sqrt{x^2+5}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{5}{x}}=1.$$

Ví dụ 7: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty} x\frac{x^2+2-x^2}{\sqrt{x^2+2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+1}=\frac{2}{2}=1.$$

Ví dụ 8: Tính $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x}$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x+1-x^2-x-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{0}{2}=0$$

Ví dụ 9: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-7}\right)$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-7}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+5-x+7}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-7}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{12}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-7}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{12}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}}}=\frac{0}{2}=0.$$

Ví dụ 10: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x}-x\right)=\dfrac{2}{5}$.

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-5x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x}{\sqrt{x^2-5x}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5}{\sqrt{1-\frac{5}{x}}+1}=-\frac{5}{2}.$$

Ví dụ 11: Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}\sqrt{x^2+5}=1$.

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|.\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}=-1.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-x^2\right)$ là:

A. 1. **B.** $+\infty$. **C.** -1. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn D

Giải nhanh : $x\to-\infty\longrightarrow 2x^3-x^2\sim 2x^3\to-\infty$.

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3-x^2)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(2-\frac{1}{x}\right)=-\infty$ vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2>0\end{cases}$.

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to2^-}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-4}\right)$ là:

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to2^-}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to2^-}\left(\frac{x+2-1}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to2^-}\left(\frac{x+1}{x^2-4}\right)=-\infty$

Vì $\lim\limits_{x\to2^-}(x+1)=3>0;\ \lim\limits_{x\to2^-}\left(x^2-4\right)=0$ và $x^2-4<0$ với mọi $x\in(-2;2)$.

Câu 3: Biết rằng $a+b=4$ và $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{a}{1-x}-\frac{b}{1-x^3}\right)$ hữu hạn. Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{b}{1-x^3}-\frac{a}{1-x}\right)$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{a}{1-x}-\frac{b}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to1}\frac{a+ax+ax^2-b}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to1}\frac{a+ax+ax^2-b}{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{a}{1-x}-\frac{b}{1-x^3}\right)$ hữu hạn $\Leftrightarrow 1+a.1+a.1^2-b=0\Leftrightarrow 2a-b=-1$.

Vậy ta có $\begin{cases}a+b=4\\ 2a-b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=3\end{cases}\Rightarrow L=-\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{a}{1-x}-\frac{b}{1-x^3}\right)$

$=-\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}=-\lim\limits_{x\to1}\frac{-(x+2)}{1+x+x^2}=1$.

Câu 4: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+2x^2}-x\right)$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $\sqrt{2}-1$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+2x^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+2}-1\right)=+\infty$

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+2}-1\right)=\sqrt{2}-1>0.$

Giải nhanh : $x\to+\infty\longrightarrow\sqrt{1+2x^2}-x\sim\sqrt{2x^2}-x=\sqrt{2}x-x=\left(\sqrt{2}-1\right)x\to+\infty.$

Câu 5: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn A

$x\to+\infty\longrightarrow\sqrt{x^2+1}-x\sim\sqrt{x^2}-x=x-x=0\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp.

Giải nhanh: $x\to+\infty\longrightarrow\sqrt{x^2+1}-x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\sim\frac{1}{\sqrt{x^2}+x}=\frac{1}{2x}\to 0.$

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{0}{2}=0.$

Câu 6: Biết rằng $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\right)=a\sqrt{5}+b.$ Tính $S=5a+b.$

A. $S=1$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=5$. **D.** $S=-5$.

Lời giải

Chọn A

$x\to-\infty\longrightarrow\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\sim\sqrt{5x^2}+x\sqrt{5}=-\sqrt{5}x+x\sqrt{5}=0$

$\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

Giải nhanh: $x\to-\infty\longrightarrow\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}$

$=\frac{2x}{\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}}\sim\frac{2x}{\sqrt{5x^2}-x\sqrt{5}}=\frac{2x}{-2\sqrt{5}x}=-\frac{1}{\sqrt{5}}.$

Cụ thể: Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{-\sqrt{5+\frac{2}{x}}+\sqrt{5}} = \frac{2}{-2\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{5}\sqrt{5} \longrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \Rightarrow S = -1. \\ b = 0 \end{cases}$$

Câu 7: Giá trị của giới hạn $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\right)$ là:

A. $\frac{7}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

. Khi $x\to+\infty \longrightarrow \sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x} \sim \sqrt{x^2}-\sqrt{x^2}=0$

$\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

Giải nhanh: $x\to+\infty \longrightarrow \sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}$

$$= \frac{-x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+4x}} \sim \frac{-x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}} = \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

Cụ thể: $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\right) =$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+4x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}}} = -\frac{1}{2}.$$

Câu 8: Giá trị của giới hạn $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)$ là:

A. $\sqrt[3]{3}+1$. **B.** $+\infty$. **C.** $\sqrt[3]{3}-1$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn D

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right) = \lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt[3]{3-\frac{1}{x^3}}-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right) = -\infty$$

Vì $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{3-\frac{1}{x^3}}-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right) = \sqrt[3]{3}-1 > 0.$

Giải nhanh:

$$x\to-\infty \longrightarrow \sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2} \sim \sqrt[3]{3x^3}+\sqrt{x^2} = \left(\sqrt[3]{3}-1\right)x \to -\infty.$$

Câu 9: Giá trị của giới hạn $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)$ là:

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $+\infty$. **C.** -1. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn A

Khi $x\to+\infty\longrightarrow\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\sim\sqrt{x^2}--\sqrt[3]{x^3}=x-x=0$

$\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x+x-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}+\frac{x^2}{x^2+x\sqrt[3]{x^3-1}+\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}.$$

Giải nhanh: $\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}=\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)+\left(x-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}+\frac{x^2}{x^2+x\sqrt[3]{x^3-1}+\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}}\sim\frac{x}{\sqrt{x^2}+x}+\frac{x^2}{x^2+x\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[6]{x^6}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}\,(x\to+\infty).$$

Câu 10: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$ **C.** -1. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn A

$x\to+\infty\longrightarrow\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\sim\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{2x}=0\longrightarrow$nhân lượng liên hợp:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{(2x-1)(2x+1)}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}}=0.$$

Giải nhanh: $\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}=$

$$\frac{-2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{4x^2-1}-\sqrt[3]{(2x+1)^2}}\sim\frac{-2}{\sqrt[3]{4x^2}+\sqrt[3]{4x^2}+\sqrt[3]{4x^2}}=\frac{-2}{3\sqrt[3]{4x^2}}\to 0.$$

Câu 11: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to0}\left[x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]$ là:

A. $+\infty$ **B.** -1. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim\limits_{x\to0}\left[x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to0}(x-1)=0-1=-1.$

Câu 12: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$ là:

A. 1. **B.** $+\infty$ **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x-2}.\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}=\dfrac{0.\sqrt{2}}{2}=0$.

Câu 13: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x^3+x^2+2}}$ là:

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $+\infty$ **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

$$\lim_{x\to+\infty}x\sqrt{\frac{2x+1}{3x^3+x^2+2}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2(2x+1)}{3x^3+x^2+2}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2+\dfrac{1}{x}}{3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Giải nhanh:

$$x\to+\infty\longrightarrow x\sqrt{\frac{2x+1}{3x^3+x^2+2}}\sim x.\sqrt{\frac{2x}{3x^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.x.\frac{1}{\sqrt{x^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.x.\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 14: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}x^2\left(\sin\pi x-\dfrac{1}{x^2}\right)$ là:

A. 0. **B.** –1. **C.** π. **D.** $+\infty$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}x^2\left(\sin\pi x-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\sin\pi x-1\right)=-1.$

Câu 15: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(x^3+1\right)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$ là:

A. 3. **B.** $+\infty$ **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn C

Với $x\in(-1;0)$ thì $x+1>0$ và $\dfrac{x}{x-1}>0$.

Do đó $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(x^3+1\right)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)\left(x^2-x+1\right)\sqrt{\dfrac{x}{(x-1)(x+1)}}$

$=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\sqrt{x+1}\left(x^2-x+1\right)\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}=0$

BÀI 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa 1

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

II – HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

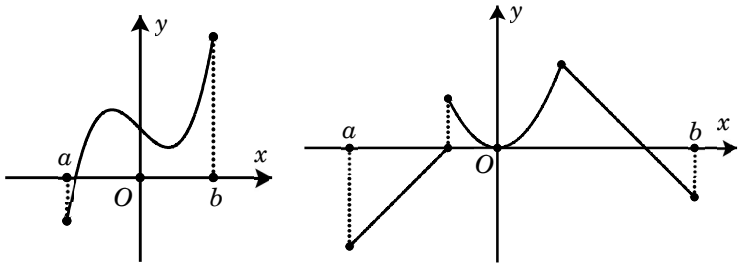
Định nghĩa 2

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a), \quad \lim_{x\to b^-} f(x)=f(b).$$

Nhận xét: Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó.



Hàm số liên tục trên khoảng $(a;b)$ Hàm số không liên tục trên khoảng $(a;b)$

III – MỘT SỐ ĐỊNH LÍ CƠ BẢN

Định lí 1

a) Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.

b) Hàm số phân thức hữu tỉ và hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

Định lí 2

Giả sử $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0. Khi đó:

a) Các hàm số $y=f(x)+g(x)$, $y=f(x)-g(x)$ và $y=f(x).g(x)$ liên tục tại x_0;

b) Hàm số $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0)\neq 0$.

Định lí 3

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0,$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=0$.

Định lí 3 có thể phát biểu theo một dạng khác như sau:

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0,$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a;b)$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Hàm số liên tục tại một điểm

1. Phương pháp

Ta cần phải nắm vững định nghĩa:

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0\in K$. Hàm số $y=f(x)$ gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0).$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}}{x}$ với $x\neq 0$. Phải bổ sung thêm giá trị $f(0)$ bằng bao nhiêu thì hàm số liên tục tại $x=0$?

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+2-2+x}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Như vậy để hàm số liên tục tại $x=0$ thì phải bổ sung thêm giá trị $f(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}a-x^2 & \text{với } x\neq 1 \text{ và } a\in\mathbb{R}\\ 3 & \text{với } x=1\end{cases}$. Giá trị của a để $f(x)$ liên tục tại $x=1$ là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có:

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(a-x^2\right)=a-1.$

Để hàm số liên tục tại $x=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)\Leftrightarrow a-1=3\Leftrightarrow a=4.$

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^3-x+6}} & \text{với } x\neq 3 \text{ và } x\neq -2\\ b+3 & \text{với } x=3 \text{ và } b\in\mathbb{R}\end{cases}$. Tìm b để $f(x)$ liên tục tại $x=3$.

Hướng dẫn giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có:

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^3-x+6}}=\frac{\sqrt{3}}{3};\ f(3)=b+3.$$

Để hàm số liên tục tại $x=3\Leftrightarrow \lim_{x\to 3} f(x)=f(3)\Leftrightarrow b+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow b=\frac{-2\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} a-2 & \text{khi } x<2 \\ \sin\frac{\pi}{x} & \text{khi } x\ge 2 \end{cases}$. Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục tại $x=2$.

Hướng dẫn giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(2)=\sin\frac{\pi}{2}=1 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(a-2)=a-2 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\sin\frac{\pi}{2}=1 \end{array}\right\}$$

Hàm số liên tục tại $x=2$ khi $a-1=2\Leftrightarrow a=3$.

Ví dụ 5: Tìm số a để hàm số sau liên tục tại điểm x_0.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{nếu } x>2 \\ ax+2 & \text{nếu } x\le 2 \end{cases};\ x_0=2.$$

Hướng dẫn giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{3(x-2)}{(x-2)\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+2\sqrt[3]{3x+2}+4\right]}=\frac{1}{4}.$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=ax+2=2a+2.$$

Lại có: $f(2)=2a+2$.

Hàm số liên tục tại $x_0=2$ nếu $2a+2=\frac{1}{4}\Rightarrow a=-\frac{7}{8}$.

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+5}} & \text{với } -5<x<4 \\ mx+2 & \text{với } x=4 \\ \dfrac{\sqrt{x}}{3} & \text{với } x>4 \end{cases}$. Tìm giá trị của m để $f(x)$ liên tục tại $x=4$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}\frac{x-2}{\sqrt{x+5}}=\frac{2}{3};\ \lim\limits_{x\to 4^+}\frac{\sqrt{x}}{3}=\frac{2}{3}$.

Và $f(4)=4m+2$

Để hàm số liên tục tại $x=4$ thì $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=f(4)$

$\Leftrightarrow 4m+2=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{3}.$

Ví dụ 7: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{x^2-4x+3} & \text{nếu } x<1\\ \dfrac{1}{6}\cos\pi x+a^2-x & \text{nếu } x\ge 1\end{cases}$. Tìm giá trị của a để $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

Hướng dẫn giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

- $f(1)=\dfrac{1}{6}\cos\pi+a^2-1=-\dfrac{1}{6}+a^2-1.$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{6}\cos\pi x+a^2-x\right)=-\dfrac{1}{6}+a^2-1.$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+8}-3\right)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}{\left(x^2-4x+3\right)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+8-9}{\left(x^2-4x+3\right)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-3)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{(x-3)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}=-\frac{1}{6}.$$

Để hàm số liên tục tại $x=1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{6}+a^2-1=-\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow a=\pm 1.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x\ne 2\\ m & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

A. $m=0$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$, chứa $x=2$. Theo giả thiết thì ta phải có

$$m=f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+1)=3.$$

Câu 2: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3x+m & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

A. $m=0$. **B.** $m=2$. **C.** $m=4$. **D.** $m=6$.

Lời giải

Chọn A

. Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$. Theo giả thiết ta phải có

$$3+m=f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+2)=3\Leftrightarrow m=0.$$

Câu 3: Tìm giá trị thực của tham số k để hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ k+1 & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

A. $k=\dfrac{1}{2}$. **B.** $k=2$. **C.** $k=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $k=0$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x)$ có TXĐ: $D=[0;+\infty)$. Điều kiện bài toán tương đương với

Ta có: $k+1=y(1)=\lim_{x\to 1}y=\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow k=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 4: Biết rằng hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x\neq 3\\ m & \text{khi } x=3\end{cases}$ liên tục tại $x=3$ (với m là tham số).

Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $m\in(-3;0)$. **B.** $m\leq -3$. **C.** $m\in[0;5)$. **D.** $m\in[5;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $(-1;+\infty)$. Theo giả thiết ta phải có

$$m=f(3)=\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to 3}\frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}=-\lim_{x\to 3}(\sqrt{x+1}+2)=-4.$$

Câu 5: Hàm số $f(x)=\begin{cases}3 & \text{khi } x=-1\\ \dfrac{x^4+x}{x^2+x} & \text{khi } x\neq -1, x\neq 0\\ 1 & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục tại:

A. mọi điểm trừ $x=0, x=1$.

B. mọi điểm $x\in\mathbb{R}$.

C. mọi điểm trừ $x=-1$.

D. mọi điểm trừ $x=0$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=f(x)$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y=f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;-1),(-1;0)$ và $(0;+\infty)$.

(i) Xét tại $x=-1$, ta có

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^4+x}{x^2+x}=\lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)}=\lim_{x\to -1}(x^2-x+1)=3=f(-1).$$

$\longrightarrow$ hàm số $y=f(x)$ liên tục tại $x=-1$.

(ii) Xét tại $x=0$, ta có

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+x}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0}(x^2-x+1)=1=f(0).$$

$\longrightarrow$ hàm số $y=f(x)$ liên tục tại $x=0$.

Câu 6: Số điểm gián đoạn của hàm số $f(x)=\begin{cases}0,5 & \text{khi } x=-1\\ \dfrac{x(x+1)}{x^2-1} & \text{khi } x\neq -1, x\neq 1\\ 1 & \text{khi } x=1\end{cases}$ là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=f(x)$ có TXĐ $D=\mathbb{R}$.

Hàm số $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ và $(1;+\infty)$.

(i) Xét tại $x=-1$, ta có $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{2}=f(-1)\longrightarrow$ Hàm số liên tục tại $x=-1$.

(ii) Xét tại $x=1$, ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{x-1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{x-1}=-\infty\end{cases}\longrightarrow$

Hàm số $y=f(x)$ gián đoạn tại $x=1$.

Dạng 3. Hàm số liên tục trên một khoảng

1. Phương pháp

- Để chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên một khoảng, đoạn ta dùng các định nghĩa về hàm số liên tục trên khoảng, đoạn và các nhận xét để suy ra kết luận.
- Khi nói xét tính liên tục của hàm số (mà không nói rõ gì hơn) thì ta hiểu phải xét tính liên tục trên tập xác định của nó.
- Tìm các điểm gián đoạn của hàm số tức là xét xem trên tập xác định của nó hàm số không liên tục tại các điểm nào

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a,b]$ nếu nó liên tục trên (a,b) và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a),\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b).$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng :

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x+2} & khi\ x\neq -2\\ -4 & khi\ x=-2\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} & khi\ x\neq \sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & khi\ x=\sqrt{2}\end{cases}$

Lời giải

a) Hàm số $f(x)$ liên tục với $\forall x\neq -2$ (1)

- $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4.$
- $f(-2)=-4\Rightarrow \lim\limits_{x\to -2} f(x)=f(-2)\Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x=-2$ (2)
- Từ (1) và (2) ta có $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x)$ liên tục với $\forall x\neq \sqrt{2}$ (1)

- $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\dfrac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{x-\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}(x+\sqrt{2})=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}.$
- $f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}\Rightarrow \lim\limits_{x\to \sqrt{2}} f(x)=f(\sqrt{2})\Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x=\sqrt{2}$ (2)

- Từ (1) và (2) ta có $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Tìm các giá trị của m để các hàm số sau liên tục trên tập xác định của chúng:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & khi\ x\neq -2\\ m & khi\ x=-2\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}x^2+x & khi\ x<1\\ 2 & khi\ x=1\\ mx+1 & khi\ x>1\end{cases}$

Lời giải

a) Hàm số $f(x)$ liên tục với $\forall x\neq 2$.

- Do đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=2\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)\quad (1)$
- Ta có $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=2+1=3; f(2)=m.$
- Khi đó $(1)\Leftrightarrow 3=m\Leftrightarrow m=3$.

b) Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(mx+1)=m+1;\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+x)=1+1=2; f(1)=2.$

- Từ YCBT $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)\Leftrightarrow m+1=2\Leftrightarrow m=1.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}m^2x^2 & \text{khi } x\le 2\\ (1-m)x & \text{khi } x>2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Hàm số liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;2)$; $(2;+\infty)$.

Khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=2$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2).\qquad (*)$

Ta có $\begin{cases}f(2)=4m^2\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left[(1-m)x\right]=2(1-m)\longrightarrow (*)\Leftrightarrow 4m^2=2(1-m)\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} m^2x^2=4m^2\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Câu 2: Biết rằng hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{khi } x\in[0;4]\\ 1+m & \text{khi } x\in(4;6]\end{cases}$ tục trên $[0;6]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m<2$. **B.** $2\le m<3$. **C.** $3<m<5$. **D.** $m\ge 5$.

Lời giải

Chọn A

Dễ thấy $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(0;4)$ và $(4;6)$. Khi đó hàm số liên tục trên đoạn $[0;6]$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x=4, x=0, x=6$.

Tức là ta cần có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\\ \lim\limits_{x\to 6^-} f(x)=f(6)\\ \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=f(4)\end{cases}$. $(*)$

- $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0\\ f(0)=\sqrt{0}=0\end{cases}$;
- $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 6^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 6^-}(1+m)=1+m\\ f(6)=1+m\end{cases}$;
- $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}\sqrt{x}=2\\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}(1+m)=1+m;\text{Khi đó } (*) \text{ trở thành } 1+m=2\Leftrightarrow m=1<2.\\ f(4)=1+m\end{cases}$

Câu 3: Có bao nhiêu giá trị của tham số a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|} & \text{khi } x\ne 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. Khi đó hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi nó liê tục tại $x=1$, tức là ta cần có

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1).\quad (*)$$

Ta có $f(x)=\begin{cases}x-2 & \text{khi } x>1\\ a & \text{khi } x=1\\ 2-x & \text{khi } x<1\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2-x)=1\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-2)=-1\end{cases}\longrightarrow (*)$ không tỏa mãn với mọi $a\in\mathbb{R}$. Vậy không tồn tại giá trị a thỏa yêu cầu.

Câu 4: Biết rằng $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{khi } x\neq 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ (với a là tham số). Khẳng định nào dưới đây về giá trị a là đúng?

A. a là một số nguyên. **B.** a là một số vô tỉ. **C.** $a>5$. **D.** $a<0$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định và liên tục trên $[0;1)$. Khi đó $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$. $(*)$

Ta có $\begin{cases}f(1)=a\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\left[(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)\right]=4\end{cases}\longrightarrow (*)\Leftrightarrow a=4.$

Câu 5: Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & \text{khi } x<1\\ -2x & \text{khi } x\geq 1\end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$. **B.** $f(x)$ không liên tục trên $(0;2)$.

C. $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$. **D.** $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases}f(1)=-2\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(-2x)=-2\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\left[-\left(\sqrt{2-x}+1\right)\right]=-2\end{cases}\longrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=1$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{4x-3}-x} & \text{khi } x>3\\ 1-a^2x & \text{khi } x\leq 3\end{cases}$ liên tục tại $x=3$.

A. $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** $-\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện bài toán trở thành: $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=f(3)$. $(*)$

Ta có $\begin{cases} f(3)=1-3a^2 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{4x-3}-x}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{(x-2)\left(\sqrt{4x-3}+x\right)}{1-x}=-3 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(1-a^2x\right)=1-3a^3. \end{cases}$

$\longrightarrow (*)\Leftrightarrow a=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}\longrightarrow a_{\min}=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}.$

Câu 7: Tìm giá trị lớn nhất của a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x>2 \\ a^2x+\dfrac{1}{4} & \text{khi } x\le 2\end{cases}$ liên tục tại $x=2.$

A. $a_{\max}=3.$ **B.** $a_{\max}=0.$ **C.** $a_{\max}=1.$ **D.** $a_{\max}=2.$

Lời giải

Chọn C

Ta cần có $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2).\quad (*)$

Ta có $\begin{cases} f(2)=2a^2-\dfrac{7}{4} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}=\dfrac{1}{4} \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(a^2x+\dfrac{1}{4}\right)=2a^2-\dfrac{7}{4} \end{cases}\longrightarrow (*)\Leftrightarrow a=\pm 1\longrightarrow a_{\max}=1.$

Câu 8: Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}1-\cos x & \text{khi } x\le 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x>0\end{cases}.$ Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(x)$ liên tục tại $x=0.$ **B.** $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;1).$

C. $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}.$ **D.** $f(x)$ gián đoạn tại $x=1.$

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Ta có $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty).$

Mặt khác $\begin{cases} f(0)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-\cos x)=1-\cos 0=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x+1}=\sqrt{0+1}=1 \end{cases}\longrightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x=0.$

Câu 9: Tìm các khoảng liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{khi } |x|\le 1 \\ x-1 & \text{khi } |x|>1\end{cases}.$ Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Hàm số liên tục tại $x=-1.$

B. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty,-1);(1;+\infty)$.

C. Hàm số liên tục tại $x=1$.

D. Hàm số liên tục trên khoảng $(-1,1)$.

Lời giải

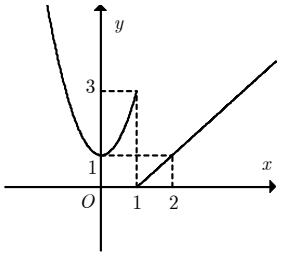
Chọn A

Ta có $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;-1),(-1;1),(1;+\infty)$.

- Ta có $\begin{cases} f(-1)=\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}(x-1)=-2 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x=-1$.

- Ta có $\begin{cases} f(1)=\cos\dfrac{\pi}{2}=0 \\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0 \\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\cos\dfrac{\pi x}{2}=0 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=1$.

Câu 10: Hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên không liên tục tại điểm có hoành độ là bao nhiêu?



A. $x=0$.

B. $x=1$.

C. $x=2$.

D. $x=3$.

Lời giải

Chọn B

Dễ thấy tại điểm có hoành độ $x=1$ đồ thị của hàm số bị "đứt" nên hàm số không liên tục tại đó.

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=0\neq3=\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ nên $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{x} & \text{khi } x<1,\ x\neq0 \\ 0 & \text{khi } x=0 \\ \sqrt{x} & \text{khi } x\geq1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

A. mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.

B. mọi điểm trừ $x=0$.

C. mọi điểm trừ $x=1$.

D. mọi điểm trừ $x=0$ và $x=1$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=f(x)$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y=f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;0),(0;1)$ và $(1;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases} f(0)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-} x=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=0.$

Ta có $\begin{cases} f(1)=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 1^-} x=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x}=1 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=1.$

Vậy hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x<3,\ x\neq 1 \\ 4 & \text{khi } x=1 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x\geq 3 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

A. mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.

B. mọi điểm trừ $x=1$.

C. mọi điểm trừ $x=3$.

D. mọi điểm trừ $x=1$ và $x=3$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=f(x)$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y=f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;1),(1;3)$ và $(3;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases} f(1)=4 \\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x=1.$

Ta có $\begin{cases} f(3)=2 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 3^-}(x+1)=4 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x=3.$

Câu 13: Số điểm gián đoạn của hàm số $h(x)=\begin{cases} 2x & \text{khi } x<0 \\ x^2+1 & \text{khi } 0\leq x\leq 2 \\ 3x-1 & \text{khi } x>2 \end{cases}$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=h(x)$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y=h(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;0),(0;2)$ và $(2;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases} h(0)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2x=0 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ không liên tục tại $x=0$.

Ta có $\begin{cases} h(2)=5 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2+1\right)=5 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(3x-1)=5 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=2$.

Câu 14: Tính tổng S gồm tất cả các giá trị m để hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{khi } x<1 \\ 2 & \text{khi } x=1 \\ m^2x+1 & \text{khi } x>1 \end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

A. $S=-1$. **B.** $S=0$. **C.** $S=1$. **D.** $S=2$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Điều kiện bài toán trở thành $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$. (*)

Ta có $\begin{cases} f(1)=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(m^2x+1\right)=m^2+1 \longrightarrow (*)\Leftrightarrow m^2+1=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+x\right)=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m=\pm 1 \longrightarrow S=0$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} -x\cos x & \text{khi } x<0 \\ \dfrac{x^2}{1+x} & \text{khi } 0\le x<1 \\ x^3 & \text{khi } x\ge 1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

A. mọi điểm thuộc $x\in\mathbb{R}$. **B.** mọi điểm trừ $x=0$.

C. mọi điểm trừ $x=1$. **D.** mọi điểm trừ $x=0;\ x=1$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=f(x)$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Dễ thấy $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;0),(0;1)$ và $(1;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases} f(0)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x\cos x)=0 \longrightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x=0. \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{1+x}=0 \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} f(1)=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{1+x}=\dfrac{1}{2} \longrightarrow f(x) \text{ không liên tục tại } x=1. \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim x^3_{x\to 1^+}=1 \end{cases}$

Dạng 3. Số nghiệm của phương trình trên một khoảng

1. Phương pháp

✓ Chứng minh phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm

- Tìm hai số a và b sao cho $f(a).f(b)<0$
- Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$
- Phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm $x_0\in(a;b)$

✓ Chứng minh phương trình $f(x)=0$ có ít nhất k nghiệm

- Tìm k cặp số a_i,b_i sao cho các khoảng $(a_i;b_i)$ **rời nhau** và

$$f(a_i)f(b_i)<0,\ i=1,...,k$$

- Phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm $x_i\in(a_i;b_i)$.

✓ Khi phương trình $f(x)=0$ có chứa tham số thì cần chọn a, b sao cho :

- $f(a)$, $f(b)$ không còn chứa tham số hoặc chứa tham số nhưng dấu không đổi.
- Hoặc $f(a)$, $f(b)$ còn chứa tham số nhưng tích f(a).f(b) luôn âm.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $m(x-1)(x+2)+2x+1=0.$

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x)=m(x-1)(x+2)+2x+1.$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f(1)=3; f(-2)=-3\Rightarrow f(1).f(-2)<0.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm với mọi m.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số:

a) $(1-m^2)(x+1)^3+x^2-x-3=0$

b) $\cos x+m\cos 2x=0$

c) $m\left(2\cos x-\sqrt{2}\right)=2\sin 5x+1$

Lời giải

a) Xét $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \end{array}\right.$. Phương trình có dạng $x^2-x-3=0$ nên PT có nghiệm

- Với $\left\{\begin{array}{l} m\neq 1 \\ m\neq 1 \end{array}\right.$ giả sử $f(x)=\left(1-m^2\right)(x+1)^3+x^2-x-3$
- $f(x)$ liên tục trên R nên $f(x)$ liên tục trên $[-1;0]$
- Ta có $f(-1)=m^2+1>0;\ \mathrm{f}(0)=-1<0\Rightarrow f(-1).\mathrm{f}(0)<0$
- Do đó PT luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m

b) Đặt $f(x)=\cos x+m\cos 2x\Rightarrow f(x)$ liên tục trên R

- Ta có $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}>0;\ \mathrm{f}\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}<0\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right).\mathrm{f}\left(\frac{3\pi}{4}\right)<0$
- Do đó PT luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m

c) Đặt $f(x)=m\left(2\cos x-\sqrt{2}\right)-2\sin 5x-1\Rightarrow f(x)$ liên tục trên R

- Ta có $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}-1<0;\ f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1>0\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right).\mathrm{f}\left(\frac{3\pi}{4}\right)<0$
- Do đó PT luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=-4x^3+4x-1$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. Phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm trên khoảng $(-\infty;1)$.

C. Phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trên khoảng $(-2;0)$.

D. Phương trình $f(x)=0$ có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $\left(-3;\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B

(i) Hàm $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}\longrightarrow$ A đúng.

(ii) Ta có $\left\{\begin{array}{l} f(-1)=-1<0 \\ f(-2)=23>0 \end{array}\right.\longrightarrow f(x)=0$ có nghiệm x_1 trên $(-2;1)$, mà

$(-2;-1)\subset(-2;0)\subset(-\infty;1)\longrightarrow$ B sai và C đúng

(iii) Ta có $\begin{cases} f(0)=-1<0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}>0 \end{cases} \longrightarrow f(x)=0$ có nghiệm x_2 thuộc $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. Kết hợp với (1) suy ra $f(x)=0$ có các nghiệm x_1, x_2 thỏa: $-3<x_1<-1<0<x_2<\frac{1}{2} \longrightarrow$ D đúng.

Câu 2: Cho phương trình $2x^4-5x^2+x+1=0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-1;1)$.

B. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-2;0)$.

C. Phương trình chỉ có một nghiệm trong khoảng $(-2;1)$.

D. Phương trình có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(0;2)$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $f(x)=2x^4-5x^2+x+1$ là hàm đa thức có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có

(i) $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(-1)=-3 \end{cases} \Rightarrow f(-1).f(0)<0 \longrightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm x_1 thuộc $(-1;0)$

.

(ii) $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=-1 \end{cases} \Rightarrow f(0).f(1)<0 \longrightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm x_2 thuộc $(0;1)$.

(iii) $\begin{cases} f(1)=-1 \\ f(2)=15 \end{cases} \Rightarrow f(1).f(2)<0 \longrightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm x_3 thuộc $(1;2)$.

Vậy phương trình $f(x)=0$ đã cho có các nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa

$$-1<x_1<0<x_2<1<x_3<2$$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x-1$. Số nghiệm của phương trình $f(x)=0$ trên $\mathbb{R}$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $f(x)=x^3-3x-1$ là hàm đa thức có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó hàm số liên tục trên mỗi khoảng $(-2;-1)$, $(-1;0)$, $(0;2)$.

Ta có

- $\begin{cases} f(-2)=-3 \\ f(-1)=1 \end{cases} \Rightarrow f(-2)f(-1)<0 \longrightarrow (1)$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-2;-1)$.

- $\begin{cases} f(-1)=1 \\ f(0)=-1 \end{cases} \Rightarrow f(-1)f(0)<0 \longrightarrow (1)$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1;0)$.

- $\begin{cases} f(2)=1 \\ f(0)=-1 \end{cases} \Rightarrow f(2)f(0)<0 \longrightarrow (1)$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0;2)$.

Như vậy phương trình (1) có ít nhất ba thuộc khoảng $(-2;2)$. Tuy nhiên phương trình $f(x)=0$ là phương trình bậc ba có nhiều nhất ba nghiệm. Vậy phương trình $f(x)=0$ có đúng nghiệm trên $\mathbb{R}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;4]$ sao cho $f(-1)=2$, $f(4)=7$. Có thể nói gì về số nghiệm của phương trình $f(x)=5$ trên đoạn $[-1;4]$:

A. Vô nghiệm. **B.** Có ít nhất một nghiệm.

C. Có đúng một nghiệm. **D.** Có đúng hai nghiệm.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=5 \Leftrightarrow f(x)-5=0$. Đặt $g(x)=f(x)-5$. Khi đó

$$\begin{cases} g(-1)=f(-1)-5=2-5=-3 \\ g(4)=f(4)-5=7-5=2 \end{cases} \Rightarrow g(-1)g(4)<0.$$

Vậy phương trình $g(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1;4)$ hay phương trình $f(x)=5$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1;4)$.

Câu 5: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-10;10)$ để phương trình $x^3-3x^2+(2m-2)x+m-3=0$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1<-1<x_2<x_3$?

A. 19. **B.** 18. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2+(2m-2)x+m-3$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

● Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1<-1<x_2<x_3$. Khi đó $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

Ta có $f(-1)=(-1-x_1)(-1-x_2)(-1-x_3)>0$ (do $x_1<-1<x_2<x_3$).

Mà $f(-1)=-m-5$ nên suy ra $-m-5>0 \Leftrightarrow m<-5$.

● Thử lại: Với $m<-5$, ta có

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ nên tồn tại $a<-1$ sao cho $f(a)<0$. (1)
- Do $m<-5$ nên $f(-1)=-m-5>0$. (2)
- $f(0)=m-3<0$. (3)
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ nên tồn tại $b>0$ sao cho $f(b)>0$. (4)

Từ (1) và (2), suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(-\infty;-1)$; Từ (2) và (3), suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$; Từ (3) và (4), suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(0;+\infty)$.

Vậy khi $m<-5$ thỏa mãn $\xrightarrow[m\in(-10;10)]{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-9;-8;-7;-6\}$.

CHƯƠNG 5. ĐẠO HÀM

BÀI 1. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA ĐẠO HÀM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – ĐẠO HÀM TẠI MỘT ĐIỂM

1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0\in(a;b)$. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn)

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại x_0 và kí hiệu là $f'(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$), tức là

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Chú ý:

Đại lượng $\Delta x=x-x_0$ gọi là số gia của đối số x tại x_0.

Đại lượng $\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ được gọi là số gia tương ứng của hàm số. Như vậy

$$\boxed{y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.}$$

2. Cách tính đạo hàm bằng định nghĩa

Bước 1. Giả sử Δx là số gia của đối số x tại x_0, tính $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Bước 2. Lập tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Bước 3. Tìm $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

3. Quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số

Định lí 1

Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại x_0.

Chú ý:

a) Nếu $y=f(x)$ gián đoạn tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại x_0.

b) Nếu $y=f(x)$ liên tục tại x_0 thì có thể không có đạo hàm tại x_0.

4. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Định lí 2

Đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của đồ thị hàm số tại điểm $M_0(x_0;f(x_0))$.

Định lí 3

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ là

trong đó $y_0=f(x_0)$.

5. Ý nghĩa vật lí của đạo hàm

Vận tốc tức thời: $v(t_0) = s'(t_0)$.

Cường độ tức thời: $I(t_0) = Q'(t_0)$.

II – ĐẠO HÀM TRÊN MỘT KHOẢNG

Định nghĩa

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm x trên khoảng đó.

Khi đó, ta gọi hàm số $f' : (a;b) \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f'(x)$$

là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a;b)$, kí hiệu là y' hay $f'(x)$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Tìm Số gia của hàm số

1. Phương pháp

- Số gia của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
- Chú ý rằng số gia Δy của hàm số là một hàm số của số gia biến số Δx.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tìm số gia của hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, biết rằng $x_0 = 1$; $\Delta x = -0,1$.

Lời giải

Ta có $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_0) = f(0,9) - f(1) = 0,9^3 - 3.0,9^2 + 2 - (1^3 - 3.1^2 + 2) = 0,229$.

Ví dụ 2: Tính số gia của hàm số $y = 2x + 3$ theo x và Δx.

Lời giải

$$\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_0) = 2(x_o + \Delta x) + 3 - (2x_0 + 3) = 2\Delta x$$

Ví dụ 3: Tính $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y = 2x^3 - 3x^2$ theo x và Δx.

Lời giải

$$\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_0) = 2(x_o + \Delta x)^3 - 3(x_o + \Delta x)^2 - (2x_0^3 - 3x_0^2)$$
$$= 2(x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3) - 3(x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2) - (2x_0^3 - 3x_0^2)$$
$$= \Delta x(6x_0^2 + 6x_0\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 6x_0 - 3\Delta x)$$

Suy ra $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(6x_0^2 + 6x_0\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 6x_0 - 3\Delta x)}{\Delta x} = 6x_0^2 + 6x_0\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 6x_0 - 3\Delta x$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tính số gia của hàm số $y = x^2 + 2$ tại điểm $x_0 = 2$ ứng với số gia $\Delta x = 1$.

A. $\Delta y = 13$. **B.** $\Delta y = 9$. **C.** $\Delta y = 5$. **D.** $\Delta y = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(2+1)-f(2)=f(3)-f(2)$

$=(3^2+2)-(2^2+2)=5.$

Câu 2: Tính số gia của hàm số $y=x^3+x^2+1$ tại điểm x_0 ứng với số gia $\Delta x=1$.

A. $\Delta y=3x_0^2+5x_0+3.$ **B.** $\Delta y=2x_0^3+3x_0^2+5x_0+2.$

C. $\Delta y=3x_0^2+5x_0+2.$ **D.** $\Delta y=3x_0^2-5x_0+2.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x_0+1)-f(x_0)$

$=\left[(x_0+1)^3+(x_0+1)^2+1\right]-\left[x_0^3+x_0^2+1\right]=3x_0^2+5x_0+2.$

Câu 3: Tính số gia của hàm số $y=\dfrac{x^2}{2}$ tại điểm $x_0=-1$ ứng với số gia Δx.

A. $\Delta y=\dfrac{1}{2}(\Delta x)^2-\Delta x.$ **B.** $\Delta y=\dfrac{1}{2}\left[(\Delta x)^2-\Delta x\right].$

C. $\Delta y=\dfrac{1}{2}\left[(\Delta x)^2+\Delta x\right].$ **D.** $\Delta y=\dfrac{1}{2}(\Delta x)^2+\Delta x.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(-1+\Delta x)-f(-1)$

$\dfrac{(-1+\Delta x)^2}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1-2\Delta x+(\Delta x)^2}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}(\Delta x)^2-\Delta x.$

Câu 4: Tính số gia của hàm số $y=x^2-4x+1$ tại điểm x_0 ứng với số gia Δx là:

A. $\Delta y=\Delta x(\Delta x+2x_0-4).$ **B.** $\Delta y=2x_0+\Delta x.$

C. $\Delta y=\Delta x(2x_0-4\Delta x).$ **D.** $\Delta y=2x_0-4\Delta x.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\left[(x_0+\Delta x)^2-4(x_0+\Delta x)+1\right]-\left[x_0^2-4x_0+1\right]$

$=\Delta x(\Delta x+2x_0-4).$

Câu 5: Tính số gia của hàm số $y=\dfrac{1}{x}$ tại điểm x (bất kì khác 0) ứng với số gia Δx.

A. $\Delta y=\dfrac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}.$ **B.** $\Delta y=-\dfrac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}.$ **C.** $\Delta y=-\dfrac{\Delta x}{x+\Delta x}.$ **D.** $\Delta y=\dfrac{\Delta x}{x+\Delta x}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}.$

Câu 6: Tính tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y=3x+1$ theo x và Δx.

A. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=0.$ **B.** $\frac{\Delta y}{\Delta x}=1.$ **C.** $\frac{\Delta y}{\Delta x}=2.$ **D.** $\frac{\Delta y}{\Delta x}=3.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=[3(x+\Delta x)+1]-[3x+1]=3\Delta x \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=3.$

Câu 7: Tính tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y=x^2-1$ theo x và Δx.

A. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=0.$ **B.** $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x+2x.$ **C.** $\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x.$ **D.** $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\left[(x+\Delta x)^2-1\right]-\left(x^2-1\right)=2x\Delta x+(\Delta x)^2$

$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x.$

Câu 8: Tính tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y=2x^3$ theo x và Δx.

A. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x^3-2(\Delta x)^3}{\Delta x}.$ **B.** $\frac{\Delta y}{\Delta x}=2(\Delta x)^2.$

C. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=6x^2+6x\Delta x+2(\Delta x)^2.$ **D.** $\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=2(x+\Delta x)^3-2x^3=6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3$

$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=6x^2+6x\Delta x+2(\Delta x)^2.$

Câu 9: Tính tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y=\frac{1}{x}$ theo x và Δx.

A. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x(x+\Delta x)}.$ **B.** $\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x(x+\Delta x)}.$ **C.** $\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x+\Delta x}.$ **D.** $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x+\Delta x}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$

$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x(x+\Delta x)}.$

Câu 10: Đạo hàm của hàm số $f(x)=x^2-x$ tại điểm x_0 ứng với số gia Δx là:

A. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left((\Delta x)^2+2x\Delta x-\Delta x\right).$ **B.** $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x-1).$

C. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x+1).$ **D.** $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left((\Delta x)^2+2x\Delta x+\Delta x\right).$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\Delta y = f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)=\left[\left(x_0+\Delta x\right)^2-\left(x_0+\Delta x\right)\right]-\left(x_0^2-x_0\right)$

$=\left(\Delta x\right)^2+2x_0\Delta x-\Delta x \Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x+2x_0-1.$

Khi đó $f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x+2x_0-1\right).$

Dạng 2. Tính đạo hàm bằng định nghĩa

1. Phương pháp

- Tính số gia của hàm số $\Delta y = f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right).$
- Lập tỉ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}.$
- Tính giới hạn $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}.$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính đạo hàm (bằng định nghĩa) của hàm số $y=2x^2+x+1$ tại $x_0=2$.

Lời giải

Cho $x_0=2$ một số gia Δx. Khi đó hàm số nhận một số gia tương ứng:

$\Delta y = f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)=2\left(2+\Delta x\right)^2+\left(2+\Delta x\right)+1-\left(2.2^2+2+1\right)=\Delta x\left(9+2\Delta x\right)$

Ta có $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x\left(9+2\Delta x\right)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(9+2\Delta x\right)=9.$

Vậy $f'\left(2\right)=9$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm (bằng định nghĩa) của mỗi hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra $y=\sqrt{x^2+3}$ tại $x;\forall x\in\mathbb{R}$

Lời giải

Ta có: $f'\left(1\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{\left(\Delta x+x\right)^2+3}-\sqrt{x^2+3}}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+2\Delta x.x+x^2+3}-\sqrt{x^2+3}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\left(\Delta x\right)^2+2\Delta x.x}{\Delta x.\left(\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+2\Delta x.x+x^2+3}+\sqrt{x^2+3}\right)}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x+2x}{\left(\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+2\Delta x.x+x^2+3}+\sqrt{x^2+3}\right)}=\dfrac{2x}{2.\sqrt{x^2+3}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}.$

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$ tại $x=0$.

Lời giải

Ta có : $f(0)=0$, do đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2+1}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^3+x^2+1}+1}=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 4: Tìm a,b để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+x & \text{khi } x\le 1\\ ax+b & \text{khi } x>1\end{cases}$ có đạo hàm tại $x=1$.

Lời giải

Điều kiện cần:

$f(1)=2$

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+x)=2$

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b$

Để hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x=1$ thì $f(x)$ liên tục tại $x=1$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=f(1)\Leftrightarrow a+b=2$

Điều kiện đủ:

$f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+2)=3$

$f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{ax+b-(a+b)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{ax-a}{x-1}=a$

Để hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x=1$ thì $f'(1^+)=f'(1^-)\Leftrightarrow a=3\Rightarrow b=-1$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Nếu hàm số $y=f(x)$ không liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.

B. Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó không liên tục tại điểm đó.

C. Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

D. Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.

Lời giải

Chọn C

Câu 2: Cho f là hàm số liên tục tại x_0. Đạo hàm của f tại x_0 là:

A. $f(x_0)$.

B. $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

C. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

D. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

Lời giải

Chọn C

Ta có Cho f là hàm số liên tục tại x_0.

Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ thì $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Đặt $h=x-x_0\Rightarrow f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

B. $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

C. $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

D. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x+x_0)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)\Rightarrow f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Đặt $h=\Delta x=x-x_0\Rightarrow f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x\neq 0\\ \dfrac{1}{4} & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0)=\dfrac{1}{4}$.

B. $f'(0)=\dfrac{1}{16}$.

C. $f'(0)=\dfrac{1}{32}$.

D. Không tồn tại.

Lời giải

Chọn B

Xét $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{3-\sqrt{4-x}}{4}-\dfrac{1}{4}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{4-x}}{4x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(2-\sqrt{4-x}\right)\left(2+\sqrt{4-x}\right)}{4x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{4x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{4\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\dfrac{1}{16}$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0)=0$.

B. $f'(0)=1$.

C. $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

D. Không tồn tại.

Lời giải

Chọn C

Xét $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ bởi $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2-3x+2} & \text{khi } x\neq 1\\ 0 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tính $f'(1)$.

A. $f'(1)=\dfrac{3}{2}$. **B.** $f'(1)=1$. **C.** $f'(1)=0$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn D

Xét $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-3)}{x-2}=2.$

Ta thấy: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$. Do đó, hàm số không tiên tục tại điểm $x=1$.

Vậy hàm số không tồn tại đạo hàm tại điểm $x=1$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{khi } x\geq 0\\ -x^2 & \text{khi } x<0\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hàm số không liên tục tại $x=0$. **B.** Hàm số có đạo hàm tại $x=2$.

C. Hàm số liên tục tại $x=2$. **D.** Hàm số có đạo hàm tại $x=0$.

Lời giải

Chọn D

Xét các giới hạn $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-1)=-1\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x^2)=0\end{cases}$.

Do $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ nên hàm số không liên tục tại $x=0$.

Do đó, hàm số không có đạo hàm tại $x=0$.

Câu 8: Tìm tham số thực b để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{khi } x\leq 2\\ -\dfrac{x^2}{2}+bx-6 & \text{khi } x>2\end{cases}$ có đạo hàm tại $x=2$.

A. $b=3$. **B.** $b=6$. **C.** $b=1$. **D.** $b=-6$.

Lời giải

Chọn B

Để hàm số có đạo hàm tại $x=2$ trước tiên hàm số phải liên tục tại $x=2$, tức là

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)\Leftrightarrow\lim_{x\to 2^+}\left(-\frac{x^2}{2}+bx-6\right)=\lim_{x\to 2^-} x^2\Leftrightarrow -2+2b-6=4\Leftrightarrow b=6.$$

Thử lại với $b=6$, ta có

- $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-\frac{x^2}{2}+bx-10}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-\frac{x^2}{2}+6x-10}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x-2)(10-x)}{2(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{10-x}{2}=4;$

- $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4.$

Vì $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ nên hàm số có đạo hàm tại $x=2$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} mx^2+2x+2 & \text{khi } x>0 \\ nx+1 & \text{khi } x\le 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số $m,\ n$ sao cho $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x=0$.

A. Không tồn tại m, n. **B.** $m=2, \forall n$.

C. $n=2, \forall m$. **D.** $m=n=2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$\begin{cases} f(0)=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{mx^2+2x+2-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{mx^2+2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(mx+2)=2. \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{nx+2-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{nx}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}n=n \end{cases}$$

Hàm số có đạo hàm tại $x=0$ khi và chỉ khi tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\Leftrightarrow n=2$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{khi } x\le 1 \\ ax+b & \text{khi } x>1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số $a,\ b$ sao cho $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x=1$.

A. $a=1, b=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{1}{2}$. **C.** $a=\dfrac{1}{2}, b=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $a=1, b=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

- Hàm số có đạo hàm tại $x=1$, do đó hàm số liên tục tại $x=1$.

$\Rightarrow a+b=\dfrac{1}{2}$. (1)

- Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{ax+b-(a.1+b)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{a(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}a=a \\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x+1)(x-1)}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x+1)}{2}=1 \end{cases}$.

Hàm số có đạo hàm tại $x=1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\Leftrightarrow a=1$. (2)

Từ (1) và (2), ta có $a=1, b=-\dfrac{1}{2}$.

Dạng 3. Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

1. Phương pháp

❶. *Vận tốc tức thời* tại thời điểm t_0 của chất điểm chuyển động với phương trình $s=s(t)$ là

$$v(t_0)=s'(t_0).$$

❷. *Cường độ tức thời* tại thời điểm t_0 của một dòng điện với điện lượng $Q=Q(t)$ là

$$I(t_0)=Q'(t_0).$$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là:

$s=f(t)=t^2+4t+6$ (t được tính bằng giây, s được tính bằng mét)

a) Tính đạo hàm của hàm số $f(t)$ tại điểm t_0.

b) Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t=5$.

Lời giải

a) Ta có: $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{t^2+4t+6-(t_0^2+4t_0+6)}{t-t_0}==\lim\limits_{t\to t_0}(t+t_0+4)=2t_0+4.$

Vậy $f'(t_0)=2t_0+4$.

b) Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t=5$ là $v_{tt}=f'(5)=2.5+4=14$ (m/s).

Ví dụ 2: Cho biết điện lượng trong một dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q=6t+5$ (t được tính bằng giây, Q được tính bằng Coulomb). Tính cường độ của dòng điện trong dây dẫn tại thời điểm $t=10$.

Lời giải

Vì $Q'(t)=6\Rightarrow$ Cường độ của dòng điện trong dây dẫn tại thời điểm $t=10$ là $I_{tt}=Q'(10)=6$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 11: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=t^2$, trong đó $t>0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t=2$ giây.

A. 2m/s. **B.** 3m/s. **C.** 4m/s. **D.** 5m/s.

Lời giải

Chọn C

Ta tính được $s'(t)=2t.$

Vận tốc của chất điểm $v(t)=s'(t)=2t\Rightarrow v(2)=2.2=4\text{m/s}.$

Câu 12: Một viên đạn được bắn lên cao theo phương trình $s(t)=196t-4,9t^2$ trong đó $t>0$, t tính bằng giây kể từ thời điểm viên đạn được bắn lên cao và $s(t)$ là khoảng cách của viên đạn so với mặt đất được tính bằng mét. Tại thời điểm vận tốc của viên đạn bằng 0 thì viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét?

A. 1690m. **B.** 1069m. **C.** 1906m. **D.** 1960m.

Lời giải

Chọn D

Ta tính được $s'(t)=196-9,8t.$

Vận tốc của viên đạn $v(t)=s'(t)=196-9,8t\Rightarrow v(t)=0\Leftrightarrow 196-9,8t=0\Leftrightarrow t=20.$

Khi đó viên đạn cách mặt đất một khoảng $h = s(20) = 196.20 - 4,9.20^2 = 1960\text{m}$.

Câu 13: Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 9t + 2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Hỏi tại thời điểm nào thì bận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $t = 1\text{s}$. **B.** $t = 2\text{s}$. **C.** $t = 3\text{s}$. **D.** $t = 6\text{s}$.

Lời giải

Chọn A

Ta tính được $s'(t) = 3t^2 - 6t + 9$.

Vận tốc của chất điểm $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 9 = 3(t-1)^2 + 6 \ge 6$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t = 1$.

Câu 14: Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 8t + 3t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng mét/giây. Tìm gia tốc của chất điểm tại thời điểm mà vận tốc chuyển động là 11 *mét / giây*

A. 6m/s^2. **B.** 11m/s^2. **C.** 14m/s^2. **D.** 20m/s^2.

Lời giải

Chọn C

Ta tính được $v'(t) = 8 + 6t$.

Ta có $v(t) = 11 \Leftrightarrow 8t + 3t^2 = 11 \Leftrightarrow t = 1 \ (t > 0)$.

Gia tốc của chất điểm $a(t) = v'(t) = 8 + 6t \Rightarrow a(1) = v'(1) = 8 + 6.1 = 14\text{m/s}^2$.

Câu 15: Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9,8\text{m/s}^2$ là gia tốc trọng trường. Tìm vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ t $(t = 5\text{s})$ đến $t + \Delta t$ với $\Delta t = 0,001\text{s}$.

A. $v_{tb} = 49\text{m/s}$. **B.** $v_{tb} = 49,49\text{m/s}$.

C. $v_{tb} = 49,0049\text{m/s}$. **D.** $v_{tb} = 49,245\text{m/s}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $v_{tb} = \dfrac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \dfrac{\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{\Delta t} = gt + \frac{1}{2}g\Delta t = 49,0049\text{m/s}$.

Dạng 4. Phương trình tiếp tuyến

1. Phương pháp

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Nếu tiếp tuyến có hệ số góc k thì ta giải phương trình $f'(x_0) = k$ tìm hoành độ tiếp điểm.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị (C) và điểm $M_0(x_0;f(x_0))\in(C)$. Phương trình của tiếp tuyến với (C) tại M_0 là:

A. $y=f'(x_0)(x-x_0)$.
B. $y=f'(x)(x-x_0)+y_0$.
C. $y-y_0=f'(x_0)x$.
D. $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Phương trình tiếp tuyến của đường cong tại $M(x_0;y_0)\in(C)$:

$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$ hoặc $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)=x^2+5$ có $f'(x)=2x$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của hàm số tại điểm M có hoành độ $x_0=-1$.

A. $y=-2(x-1)+6$.
B. $y=2(x-1)+6$.
C. $y=-2(x+1)-6$.
D. $y=-2(x+1)+6$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$x_0=-1\Rightarrow f(x_0)=(-1)^2+5=6$

$f'(-1)=-2$.

Phương trình tiếp tuyến: $y=-2(x+1)+6$.

Ví dụ 3: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)=x^4$ tại điểm có hoành độ bằng -1 là:

A. $y=-4x-3$. **B.** $y=-4x-4$. **C.** $y=-4x-5$. **D.** $y=-4x+5$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $f(1)=1; f'(x)=4x^3$, do đó $f'(-1)=-4$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-4(x+1)+1=-4x-3$.

Ví dụ 4: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)=x^3$ tại điểm mà tiếp điểm có tung độ bằng -1 có phương trình là:

A. $y=3x-4$. **B.** $y=3x$. **C.** $y=3x+2$. **D.** $y=-3x-4$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có: Khi $y=-1$ thì $x^3=-1$, do đó $x=-1$.

$f(-1)=-1; f'(x)=3x^2$, do đó $f'(-1)=3$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=3(x+1)-1=3x+2$.

Ví dụ 5: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)=x^4$ có hệ số góc bằng 4.

A. $y=4x-3$. **B.** $y=4x$. **C.** $y=4x+5$. **D.** $y=4x-4$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $f'(x)=4x^3$.

Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 4 nên $4x^3=4$, do đó $x=1$; $f(1)=1$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=4(x-1)+1=4x-3$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 16: Tìm hệ số góc k của tiếp tuyến của parabol $y=x^2$ tại điểm có hoành độ $\frac{1}{2}$.

A. $k=0$. **B.** $k=1$. **C.** $k=\frac{1}{4}$. **D.** $k=-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Vậy $k=y'\left(\frac{1}{2}\right)=1$.

Câu 17: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=x^3$ tại điểm $(-1;-1)$.

A. $y=-3x-4$. **B.** $y=-1$. **C.** $y=3x-2$. **D.** $y=3x+2$.

Lời giải

Chọn D

Ta tính được $k=y'(-1)=3$.

Ta có $\begin{cases}x_0=-1\\y_0=-1\\k=3\end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y+1=3(x+1)\Leftrightarrow y=3x+2$.

Câu 18: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=\frac{1}{x}$ tại điểm có hoành độ bằng -1.

A. $x+y+2=0$. **B.** $y=x+2$. **C.** $y=x-2$. **D.** $y=-x+2$.

Lời giải

Chọn A

Ta tính được $k=y'(-1)=-1$.

Với $x_0=-1\Rightarrow y_0=-1$.

Ta có $\begin{cases}x_0=-1\\y_0=-1\\k=-1\end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y+1=-1(x+1)\Leftrightarrow y=-x-2$.

Câu 19: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=x^3$ tại điểm có tung độ bằng 8.

A. $y=8$. **B.** $y=-12x+16$. **C.** $y=12x-24$. **D.** $y=12x-16$.

Lời giải

Chọn D

Với $y_0=8\Rightarrow x_0=2$.

Ta tính được $k=y'(2)=12$.

Ta có $\begin{cases}x_0=2\\y_0=8\\k=12\end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y-8=12(x-2)\Leftrightarrow y=12x-16$.

Câu 20: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với trục tung.

A. $y=2x.$ **B.** $y=2.$ **C.** $y=0.$ **D.** $y=-2.$

Lời giải

Chọn B

Ta có : $x_0=0; y_0=2; y'=3x^2-6x \Rightarrow k=y'(0)=0$

Ta có : $\begin{cases} x_0=0 \\ y_0=2 \\ k=0 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=2.$

Câu 21: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2.$ Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với đường thẳng $y=-2.$

A. $y=-9x+7;\ y=-2.$ **B.** $y=-2.$

C. $y=9x+7;\ y=-2.$ **D.** $y=9x+7;\ y=2.$

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm : $y=x^3-3x^2+2=-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Với $x=-1 \to \begin{cases} y=-2 \\ k=y'(-1)=9 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=9x+7.$

Với $x=2 \to \begin{cases} y=-2 \\ k=y'(-2)=0 \end{cases}$. suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=-2.$

Câu 22: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2.$ Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=9x+7.$

A. $y=9x+7;\ y=9x-25.$ **B.** $y=9x-25.$

C. $y=9x-7;\ y=9x+25.$ **D.** $y=9x+25.$

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta tính được $k=y'(x_0)=3x_0^2-6x_0.$ Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=9x+7$ nên có $k=9 \Leftrightarrow 3x_0^2-6x_0=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1 \\ x_0=3 \end{array}\right.$.

Với $x_0=-1 \to \begin{cases} y_0=-2 \\ k=9 \end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=9x+7(loaïi)$ (vì trùng với đường thẳng đã cho).

Với $x_0=3 \to \begin{cases} y_0=2 \\ k=9 \end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=9x-25.$

Câu 23: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2.$ Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{45}x.$

A. $y=45x-173;\ y=45x+83.$ **B.** $y=45x-173.$

C. $y=45x+173;\ y=45x-83.$ **D.** $y=45x-83.$

Lời giải

Chọn A

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta tính được $k=y'\left(x_0\right)=3x_0^2-6x_0.$ Do tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{45}x$ nên có $k.\left(-\frac{1}{45}\right)=-1\Leftrightarrow k=45\Leftrightarrow 3x_0^2-6x_0=45\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=5\\x_0=-3\end{array}\right.$.

Với $x_0=5\rightarrow\begin{cases}y_0=52\\k=45\end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=45x-173.$

Với $x_0=-3\rightarrow\begin{cases}y_0=-52\\k=45\end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=45x+83.$

Câu 24: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=\frac{1}{x}$ biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}.$

A. $x+4y-1=0;\ x+4y+1=0.$ **B.** $x+4y-4=0;\ x+4y+4=0.$

C. $y=-\frac{1}{4}x-4;\ y=-\frac{1}{4}x+4.$ **D.** $y=-\frac{1}{4}x.$

Lời giải

Chọn B

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta tính được $k=y'\left(x_0\right)=-\frac{1}{x_0^2}.$

Theo giả thiết ta có $k=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow-\frac{1}{x_0^2}=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow x_0^2=4\Leftrightarrow x_0=\pm2.$

- Với $x_0=2\rightarrow y_0=\frac{1}{2}.$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=-\frac{1}{4}\left(x-2\right)+\frac{1}{2}\Leftrightarrow x+4y-4=0.$
- Với $x_0=-2\rightarrow y_0=-\frac{1}{2}.$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=-\frac{1}{4}\left(x+2\right)-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x+4y+4=0.$

Câu 25: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2.$ Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết cosin góc tạo bởi tiếp tuyến và đường thẳng $\Delta:4x-3y=0$ bằng $\frac{3}{5}.$

A. $y=2;\ y=1.$ **B.** $y=-2;\ y=1.$ **C.** $y=-2;\ y=-1.$ **D.** $y=2;\ y=-2.$

Lời giải

Chọn D

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ tiếp điểm $\Rightarrow k=y'\left(x_0\right)=3x_0^2-6x_0.$

Phương trình tiếp tuyến d có dạng $y+y_0=k\left(x-x_0\right).$

Suy ra tiếp tuyến d có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_d=(-k;1)$.

Đường thẳng Δ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_\Delta=(4;-3)$.

Theo đề bài ta có: $\cos(d,\Delta)=\dfrac{|-4k-3|}{\sqrt{k^2+1}\sqrt{16+9}}=\dfrac{3}{5}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k=0\\k=-\dfrac{24}{7}.\end{array}\right.$

Với $k=-\dfrac{24}{7}\Rightarrow 3x_0^2-6x_0=-\dfrac{24}{7}$: vô nghiệm.

Với $k=0\Rightarrow 3x_0^2-6x_0=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=2.\end{array}\right.$

- $x_0=0\Rightarrow y_0=2\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y-2=0\Leftrightarrow y=2.$
- $x_0=2\Rightarrow y_0=-2\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y+2=0\Leftrightarrow y=-2.$

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

BÀI 2. QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

Định lý 1: Hàm số $y=x^n\left(n\in\mathbb{N},n>1\right)$ có đạo hàm tại mọi $x\in\mathbb{R}$ và

$$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}.$$

Nhận xét

$$\left(c\right)'=0$$
$$\left(x\right)'=1.$$

Định lý 2: Hàm số $y=\sqrt{x}$ có đạo hàm tại mọi x dương và $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

II. ĐẠO HÀM CỦA TỔNG, HIỆU, TÍCH, THƯƠNG

1. Định lý

Định lý 3: Giả sử $u=u\left(x\right),v=v\left(x\right)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Ta có

$$\left(u+v\right)'=u'+v'$$
$$\left(u-v\right)'=u'-v'$$
$$\left(uv\right)'=u'v+v'u$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}\ \left(v\neq 0\right)$$

Bằng quy nạp toán học, ta chứng minh được

$$\boxed{\left(u_1\pm u_2\pm\ldots\pm u_n\right)'=u_1'\pm u_2'\pm\ldots\pm u_n'.}$$

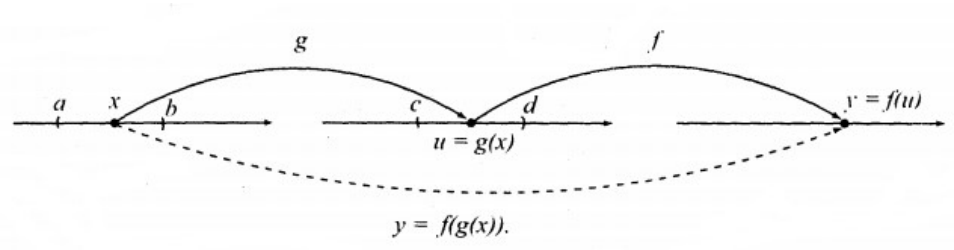
2. Hệ quả

Hệ quả 1: Nếu k là một hằng số thì $\left(ku\right)'=ku'$

Hệ quả 2: $'\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2},\left(u\neq 0\right).$

III. ĐẠO HÀM CỦA HÀM HỢP

1. Hàm hợp



Giả sử $u=g(x)$ là hàm số của x, xác định trên khoảng (a,b) và lấy giá trị trên khoảng (c,d); $f(u)$ là hàm số của u, xác định trên (c,d) và lấy giá trị trên $\mathbb{R}$. Khi đó, ta lập một hàm số xác định trên (a,b) và lấy giá trị trên $\mathbb{R}$ theo quy tắc sau: $x \mapsto f(g(x))$.

Ta gọi hàm số $y=f(g(x))$ là hàm hợp của hàm số $y=f(u)$ với $u=g(x)$.

2. Đạo hàm của hàm hợp

Định lý: Nếu hàm số $u=g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y=f(u)$ có đại hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y=f(g(x))$ có đạo hàm tại x là $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

DẠNG 1. ĐẠO HÀM CỦA HÀM ĐA THỨC

1. Phương pháp

Chủ yếu ta dùng các công thức sau

$(x^n)' = nx^{n-1}$.

$(c)' = 0; \quad (x)' = 1$.

$(u+v)' = u'+v'$

$(u-v)' = u'-v'$

$(uv)' = u'v+v'u$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=2x^3-3x^2-5$. Tìm x để $y'=0$

Hướng dẫn giải

$y=2x^3-3x^2-5$

$\Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow 6x^2-6x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=3x^3+x^2+1$. Giải bất phương trình $y' \le 0$.

Hướng dẫn giải

$y=3x^3+x^2+1 \Rightarrow y'=9x^2+2x$

$y' \le 0 \Leftrightarrow 9x^2+2x \le 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{9} \le x \le 0$.

Ví dụ 3: Cho hai hàm số $f(x)=\frac{1}{2}x^2+4x;\ g(x)=9x-\frac{3}{2}x^2$. Tìm x để $f'(x)=g'(x)$

Hướng dẫn giải

$f'(x)=x+4; g'(x)=9-3x.$

Do đó $f'(x)=g'(x)\Leftrightarrow 4x=5\Leftrightarrow x=\frac{5}{4}.$

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)=mx-\frac{1}{3}x^3$. Tìm m để $x=-1$ là nghiệm của bất phương trình $f'(x)<2$

Hướng dẫn giải

Ta có: $f'(x)=m-x^2$. Giá trị $x=-1$ là nghiệm của bất phương trình $f'(x)<2$ khi và chỉ khi: $m-1<2\Leftrightarrow m<3.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 11: Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2\sqrt{2}x^2+8x-1$, có đạo hàm là $f'(x)$. Tập hợp những giá trị của x để $f'(x)=0$ là:

A. $\{-2\sqrt{2}\}$. **B.** $\{2;\sqrt{2}\}$. **C.** $\{-4\sqrt{2}\}$. **D.** $\{2\sqrt{2}\}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)=x^2-4\sqrt{2}x+8$.

Phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-4\sqrt{2}x+8=0\Leftrightarrow x=2\sqrt{2}$.

Câu 12: Cho hàm số $y=3x^3+x^2+1$, có đạo hàm là y'. Để $y'\le 0$ thì x nhận các giá trị thuộc tập nào sau đây?

A. $\left[-\frac{2}{9};0\right]$. **B.** $\left[-\frac{9}{2};0\right]$.

C. $\left(-\infty;-\frac{9}{2}\right]\cup[0;+\infty)$. **D.** $\left(-\infty;-\frac{2}{9}\right]\cup[0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=9x^2+2x$.

Do đó, $y'\le 0\Leftrightarrow y'=9x^2+2x\le 0\Leftrightarrow -\frac{2}{9}\le x\le 0 x\in\left[-\frac{2}{9};0\right]$.

Câu 13: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=-x^4+4x^3-3x^2+2x+1$ tại điểm $x=-1$.

A. $f'(-1)=4.$ **B.** $f'(-1)=14.$ **C.** $f'(-1)=15.$ **D.** $f'(-1)=24.$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)=-4x^3+12x^2-6x+2$.

Suy ra $f'(-1)=-4(-1)^3+12(-1)^2-6(-1)+2=24$.

Câu 14: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(2m+1)x^2-mx-4$, có đạo hàm là y'. Tìm tất cả các giá trị của m để $y'\geq 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

A. $m\in\left(-1;-\frac{1}{4}\right)$.

B. $m\in\left[-1;-\frac{1}{4}\right]$.

C. $m\in(-\infty;-1]\cup\left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$.

D. $m\in\left[-1;\frac{1}{4}\right]$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=x^2-2(2m+1)x-m$.

Khi đó, $y'\geq 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x^2-2(2m+1)x-m\geq 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\Delta'=(2m+1)^2+m\leq 0\Leftrightarrow 4m^2+5m+1\leq 0\Leftrightarrow -1\leq m\leq -\frac{1}{4}$.

Câu 15: Cho hàm số $y=-\frac{1}{3}mx^3+(m-1)x^2-mx+3$, có đạo hàm là y'. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=6$.

A. $m=-1+\sqrt{2}$; $m=-1-\sqrt{2}$.

B. $m=-1-\sqrt{2}$.

C. $m=1-\sqrt{2}$; $m=1+\sqrt{2}$.

D. $m=-1+\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=-mx^2+2(m-1)x-m$.

Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow -mx^2+2(m-1)x-m=0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ \Delta'=(m-1)^2-m^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ m<\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Khi đó, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=\frac{2(m-1)}{m}\\ x_1x_2=1\end{cases}$.

Ta có: $x_1^2+x_2^2=6\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=6\Leftrightarrow\left(\frac{2(m-1)}{m}\right)^2-2=6$

$\Leftrightarrow m^2+2m-1=0\Leftrightarrow m=-1\pm\sqrt{2}$.

So với điều kiện thì $m=-1\pm\sqrt{2}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 16: Biết hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a>0)$ có đạo hàm $f'(x)>0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $b^2-3ac>0$. **B.** $b^2-3ac\geq 0$. **C.** $b^2-3ac<0$. **D.** $b^2-3ac\leq 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Vì $a>0$ và $f'(x)>0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ nên $\Delta'<0$ tức là $b^2-3ac<0$.

Câu 17: Biết hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a<0)$ có đạo hàm $f'(x)<0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $b^2-3ac>0$. **B.** $b^2-3ac\geq 0$. **C.** $b^2-3ac<0$. **D.** $b^2-3ac\leq 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Vì $a<0$ và $f'(x)<0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ nên $\Delta'<0$ tức là $b^2-3ac<0$.

Câu 18: Tính đạo hàm của của hàm số $y=(x^3-2x^2)^2$.

A. $f'(x)=6x^5-20x^4+16x^3$. **B.** $f'(x)=6x^5+16x^3$.

C. $f'(x)=6x^5-20x^4+4x^3$. **D.** $f'(x)=6x^5-20x^4-16x^3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=2(x^3-2x^2)'(x^3-2x^2)=2(3x^2-4x)(x^3-2x^2)=6x^5-20x^4+16x^3$.

Câu 19: Cho hàm số $y=(2x^2+1)^3$, có đạo hàm là y'. Để $y'\geq 0$ thì x nhận các giá trị nào sau đây?

A. Không có giá trị nào của x.

B. $(-\infty;0]$. **C.** $[0;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 3\left(2x^2+1\right)'\left(2x^2+1\right)^2 = 3.4x\left(2x^2+1\right)^2 = 12x\left(2x^2+1\right)^2$.

Do đó, $y' \ge 0 \Leftrightarrow 12x\left(2x^2+1\right)^2 \Leftrightarrow x \ge 0$.

Câu 20: Tính đạo hàm của hàm số $y = \left(1-x^3\right)^5$.

A. $y' = 5x^2\left(1-x^3\right)^4$.

B. $y' = -15x^2\left(1-x^3\right)^4$.

C. $y' = -3x^2\left(1-x^3\right)^4$.

D. $y' = -5x^2\left(1-x^3\right)^4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 5\left(1-x^3\right)'\left(1-x^3\right)^4 = 5\left(-3x^2\right)\left(1-x^3\right)^4 = -15x^2\left(1-x^3\right)^4$.

Câu 21: Tính đạo hàm của hàm số $y = \left(x^3-2x^2\right)^{2016}$.

A. $y' = 2016\left(x^3-2x^2\right)^{2015}$.

B. $y' = 2016\left(x^3-2x^2\right)^{2015}\left(3x^2-4x\right)$.

C. $y' = 2016\left(x^3-2x^2\right)\left(3x^2-4x\right)$.

D. $y' = 2016\left(x^3-2x^2\right)\left(3x^2-2x\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 2016\left(x^3-2x^2\right)'\left(x^3-2x^2\right)^{2015} = 2016\left(3x^2-4x\right)\left(x^3-2x^2\right)^{2015}$.

Câu 22: Tính đạo hàm của hàm số $y = \left(x^2-2\right)(2x-1)$.

A. $y' = 4x$.

B. $y' = 3x^2-6x+2$.

C. $y' = 2x^2-2x+4$.

D. $y' = 6x^2-2x-4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = \left(x^2-2\right)'(2x-1)+\left(x^2-2\right)(2x-1)' = 2x(2x-1)+2\left(x^2-2\right) = 6x^2-2x-4$

Câu 23: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x(x-1)(x-2)...(x-2018)$ tại điểm $x=0$.

A. $f'(0) = 0$.

B. $f'(0) = -2018!$.

C. $f'(0) = 2018!$.

D. $f'(0) = 2018$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = f_0(x)f_1(x)f_2(x)...f_n(x)$ $(n \ge 1; n \in \mathbb{Z})$.

Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được:

$$f'(x)=f_0'(x)f_1(x)...f_n(x)+f_0(x)f_1'(x)...f_n(x)+...+f_0(x)f_1(x)...f_n'(x)$$

Áp dụng công thức trên cho hàm số $f(x)=x(x-1)(x-2)...(x-2018)$ và thay $x=0$ với chú ý $f_0(0)=0$ ta được:

$$f'(0)=(-1).(-2)...(-2018)+0.(-2)....(-2018)+0.(-1)...(-2017)=2018!.$$

Câu 24: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=x(x+1)(x+2)...(x+2018)$ tại điểm $x=-1004$.

A. $f'(-1004)=0.$ **B.** $f'(-1004)=1004!.$

C. $f'(-1004)=-1004!.$ **D.** $f'(-1004)=(1004!)^2.$

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x)=f_0(x)f_1(x)f_2(x)...f_n(x)\ (n\geq 1;n\in\mathbb{Z})$.

Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được:

$$f'(x)=f_0'(x)f_1(x)...f_n(x)+f_0(x)f_1'(x)...f_n(x)+...+f_0(x)f_1(x)...f_n'(x).$$

Áp dụng công thức trên cho hàm số $f(x)=x(x+1)(x+2)...(x+2018)$ và thay $x=-1004$ với chú ý $f_{1004}(-1004)=0$ ta được

$$f'(-1004)=\left[(-1004).(-1004+1)...(-1004+1003)\right].\left[(-1004+1005)...(-1004+2018)\right]$$
$$=(-1).1.(-2).2.....(-1004).1004=(1004!)^2.$$

DẠNG 2. ĐẠO HÀM CỦA HÀM PHÂN THỨC

1. Phương pháp

Ta thường sử dụng các công thức sau:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}\ (v\neq 0)$$

$$'\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2},(u\neq 0).$$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: $y=\dfrac{x(1-3x)}{x+1}$

Hướng dẫn giải

$$y=\frac{x(1-3x)}{x+1}\Rightarrow y'=\frac{(1-6x)(x+1)-1(x-3x^2)}{(x+1)^2}=\frac{-3x^2-6x+1}{(x+1)^2}.$$

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{2x+3}{2x-1}$

Hướng dẫn giải

Dùng công thức nhanh: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Do đó, với $y=\dfrac{2x+3}{2x-1}$ thì $y'=-\dfrac{8}{(2x-1)^2}$.

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{x^2+1}$

Hướng dẫn giải

$$y'=\frac{-\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Ví dụ 4: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$?

Hướng dẫn giải

$$y=\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{x^2-1+2}{x^2-1}=1+\frac{2}{x^2-1}$$

Do đó $y'=\dfrac{-2\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2}=\dfrac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}$.

Ví dụ 5: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{x^2+x-1}$

Hướng dẫn giải

$$y'=\frac{-\left(x^2+x-1\right)'}{\left(x^2+x-1\right)^2}=\frac{-2x-1}{\left(x^2+x-1\right)^2}.$$

Ví dụ 6: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x^2+x+3}{x^2+x-1}$

Hướng dẫn giải

$$y=\frac{x^2+x+3}{x^2+x-1}=\frac{x^2+x-1+4}{x^2+x-1}=1+\frac{4}{x^2+x-1}.$$

Do đó: $y'=\dfrac{-4\left(x^2+x-1\right)'}{\left(x^2+x-1\right)^2}=\dfrac{-4(2x+1)}{\left(x^2+x-1\right)^2}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ tại điểm $x=-1$.

A. $f'(-1)=1$. **B.** $f'(-1)=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $f'(-1)=-2$. **D.** $f'(-1)=0$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{-2}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(-1)=-\dfrac{1}{2}$

Câu 2: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x+2}$.

A. $y'=1+\dfrac{3}{(x+2)^2}$. **B.** $y'=\dfrac{x^2+6x+7}{(x+2)^2}$.

C. $y'=\dfrac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}$. **D.** $y'=\dfrac{x^2+8x+1}{(x+2)^2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=x-\dfrac{3}{x+2}\Rightarrow y'=1+\dfrac{3}{(x+2)^2}$.

Câu 3: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x(1-3x)}{x+1}$.

A. $y'=\dfrac{-9x^2-4x+1}{(x+1)^2}$. **B.** $y'=\dfrac{-3x^2-6x+1}{(x+1)^2}$. **C.** $y'=1-6x^2$. **D.** $y'=\dfrac{1-6x^2}{(x+1)^2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y=\dfrac{x(1-3x)}{x+1}=\dfrac{x-3x^2}{x+1}$

$\Rightarrow y'=\dfrac{(x-3x^2)'(x+1)-(x-3x^2)(x+1)'}{(x+1)^2}=\dfrac{(1-6x)(x+1)-(x-3x^2)}{(x+1)^2}=\dfrac{-3x^2-6x+1}{(x+1)^2}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1-3x+x^2}{x-1}$. Giải bất phương trình $f'(x)>0$.

A. $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **B.** $x\in\varnothing$. **C.** $x\in(1;+\infty)$. **D.** $x\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x)=\dfrac{\left(1-3x+x^2\right)'(x-1)-\left(1-3x+x^2\right)(x-1)'}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{(-3+2x)(x-1)-\left(1-3x+x^2\right)}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}$.

Bất phương trình $f'(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}>0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+2>0\\x\neq1\end{cases}\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$. Phương trình $f'(x)=0$ có tập nghiệm S là:

A. $S=\left\{0;\dfrac{2}{3}\right\}$. **B.** $S=\left\{-\dfrac{2}{3};0\right\}$. **C.** $S=\left\{0;\dfrac{3}{2}\right\}$. **D.** $S=\left\{-\dfrac{3}{2};0\right\}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=\dfrac{\left(x^3\right)'(x-1)-x^3(x-1)'}{(x-1)^2}=\dfrac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2}=\dfrac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}$.

Phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow2x^3-3x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

Câu 6: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{-2x^2+x-7}{x^2+3}$.

A. $y'=\dfrac{-3x^2-13x-10}{\left(x^2+3\right)^2}$. **B.** $y'=\dfrac{-x^2+x+3}{\left(x^2+3\right)^2}$.

C. $y'=\dfrac{-x^2+2x+3}{\left(x^2+3\right)^2}$. **D.** $y'=\dfrac{-7x^2-13x-10}{\left(x^2+3\right)^2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=\dfrac{\left(-2x^2+x-7\right)'\left(x^2+3\right)-\left(x^2+3\right)'\left(-2x^2+x-7\right)}{\left(x^2+3\right)^2}$

$y'=\dfrac{(-4x+1)(x^2+3)-2x.\left(-2x^2+x-7\right)}{\left(x^2+3\right)^2}=\dfrac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$

.DẠNG 3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM CHỨA CĂN

1. Phương pháp

Ta thường dùng các công thức sau

Hàm số $y=\sqrt{x}$ có đạo hàm tại mọi x dương và $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ngoài ra, đối với hàm hợp $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=4x-\sqrt{x}$. Tìm x để $y'=0$?

Hướng dẫn giải

$y=4x-\sqrt{x}\Rightarrow y'=4-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$y'=0\Leftrightarrow 4-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=0\Leftrightarrow \sqrt{x}=\dfrac{1}{8}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{64}.$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số $y=x^3-\sqrt{x}+1$

Hướng dẫn giải

$y'=3x^2-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

Ví dụ 3: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1}{3}x^3-3\sqrt{2}x^2+18x-7.$ Tìm x để $f'\left(x\right)\le 0$

Hướng dẫn giải

$f'\left(x\right)=x^2-6\sqrt{2}x+18=\left(x-3\sqrt{2}\right)^2.$

$f'\left(x\right)\le 0\Leftrightarrow \left(x-3\sqrt{2}\right)^2\le 0\Leftrightarrow x=3\sqrt{2}.$

Ví dụ 4: Cho hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{1+x}$. Tính $f\left(3\right)+\left(x-3\right).f'\left(3\right)$?

Hướng dẫn giải

Ta có: $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}\Rightarrow f'\left(3\right)=\dfrac{1}{4}.$

Lại có: $f\left(3\right)=2.$ Vậy $f\left(3\right)+\left(x-3\right).f'\left(3\right)=2+\left(x-3\right).\dfrac{1}{4}=\dfrac{x+5}{4}.$

Ví dụ 5: Tính đạo hàm của hàm số: $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$?

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=\dfrac{\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\dfrac{-x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}.$

Ví dụ 6: Tính đạo hàm của hàm số: $y=x\sqrt{x^2+1}$?

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = \sqrt{x^2+1} + x.\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Ví dụ 7: Tính đạo hàm của hàm số: $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$?

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = \dfrac{1}{1-x}\left(\sqrt{1-x} + \dfrac{1+x}{2\sqrt{1-x}}\right) = \dfrac{1}{1-x}.\dfrac{2-2x+1+x}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hàm số $y = -2\sqrt{x} + 3x$. Tập nghiệm S của bất phương trình $y' > 0$ là:

A. $S = (-\infty; +\infty)$. **B.** $S = \left(-\infty; \dfrac{1}{9}\right)$. **C.** $S = \left(\dfrac{1}{9}; +\infty\right)$. **D.** $S = \varnothing$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = -2\sqrt{x} + 3x \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{\sqrt{x}} + 3$.

Do đó $y' > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{\sqrt{x}} + 3 > 0 \Leftrightarrow 3 > \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{9}$

Câu 2: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x-1}$ tại điểm $x = 1$.

A. $f'(1) = \dfrac{1}{2}$. **B.** $f'(1) = 1$. **C.** $f'(1) = 0$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

Tại $x = 1$ thì $f'(x)$ không xác định.

Câu 3: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{1-2x^2}$.

A. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1-2x^2}}$. **B.** $y' = \dfrac{-4x}{\sqrt{1-2x^2}}$. **C.** $y' = \dfrac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}$. **D.** $y' = \dfrac{2x}{\sqrt{1-2x^2}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = \dfrac{\left(1-2x^2\right)'}{2\sqrt{1-2x^2}} = \dfrac{-4x}{2\sqrt{1-2x^2}} = \dfrac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}$.

Câu 4: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{x^2-4x^3}$.

A. $y'=\dfrac{x-6x^2}{\sqrt{x^2-4x^3}}$.

B. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$.

C. $y'=\dfrac{x-12x^2}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$.

D. $y'=\dfrac{x-6x^2}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\dfrac{2x-12x^2}{2\sqrt{x^2-4x^3}}=\dfrac{x-6x^2}{\sqrt{x^2-4x^3}}$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$. Tập nghiệm S của bất phương trình $f'(x)\ge f(x)$ có bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=\dfrac{\left(x^2-2x\right)'}{2\sqrt{x^2-2x}}=\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$.

Khi đó, $f'(x)\ge f(x)\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}\ge\sqrt{x^2-2x}$

$\Leftrightarrow x-1\ge x^2-2x\Leftrightarrow x^2-3x+1\le 0\Leftrightarrow\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\le x\le\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Vì $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\{1;2\}\Rightarrow$ tập S có 2 giá trị nguyên.

Câu 6: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=x\sqrt{x}$.

A. $f'(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$.

B. $f'(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

C. $f'(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

D. $f'(x)=\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=x'.\sqrt{x}+x.\left(\sqrt{x}\right)'=\sqrt{x}+x.\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{2}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

Câu 7: Tính đạo hàm của hàm số $y=x\sqrt{x^2-2x}$.

A. $y'=\dfrac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}}$.

B. $y'=\dfrac{3x^2-4x}{\sqrt{x^2-2x}}$.

C. $y'=\dfrac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x}}$.

D. $y'=\dfrac{2x^2-2x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=\sqrt{x^2-2x}+x.\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}=\dfrac{x^2-2x+x^2-x}{\sqrt{x^2-2x}}=\dfrac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x}}$.

Câu 8: Tính đạo hàm của hàm số $y=(2x-1)\sqrt{x^2+x}$.

A. $y'=2\sqrt{x^2+x}-\dfrac{4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

B. $y'=2\sqrt{x^2+x}+\dfrac{4x^2-1}{\sqrt{x^2+x}}$.

C. $y'=2\sqrt{x^2+x}+\dfrac{4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

D. $y'=2\sqrt{x^2+x}+\dfrac{4x^2+1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=(2x-1)'.\sqrt{x^2+x}+(2x-1).\left(\sqrt{x^2+x}\right)'$

$=2.\sqrt{x^2+x}+\dfrac{(2x-1)(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x}}=2\sqrt{x^2+x}+\dfrac{4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

Câu 9: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

A. $y'=\dfrac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

B. $y'=-\dfrac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

C. $y'=\dfrac{x}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

D. $y'=-\dfrac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\dfrac{-\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1}=\dfrac{-\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)}$

$=\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)}$.

Câu 10: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$.

A. $y'=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

B. $y'=\dfrac{1+x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

C. $y'=\dfrac{2(x+1)}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

D. $y'=\dfrac{x^2-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=\dfrac{(x-1)'.\sqrt{x^2+1}-(x-1)\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-(x-1)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$

$=\dfrac{x^2+1-x^2+x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}=\dfrac{1+x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

Câu 11: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}}$.

A. $y'=\dfrac{5}{(2x-1)^2}.\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}$.

B. $y'=\dfrac{1}{2}.\dfrac{5}{(2x-1)^2}.\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}$.

C. $y'=\dfrac{1}{2}.\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}$.

D. $y'=\dfrac{1}{2}.\dfrac{5}{(x+2)^2}.\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}}}.\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)'=\dfrac{1}{2}.\dfrac{5}{(x+2)^2}.\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}$.

Câu 12: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}$.

A. $y'=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

B. $y'=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$.

C. $y'=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

D. $y'=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}}\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)' = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right).$

Câu 13: Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}.$

A. $y' = -\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)^2}.$ **B.** $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}+2\sqrt{x-1}}.$

C. $y' = \dfrac{1}{4\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{4\sqrt{x-1}}.$ **D.** $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} = \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}.$

$\Rightarrow y' = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\right) = \dfrac{1}{4\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{4\sqrt{x-1}}.$

Câu 14: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{3x^2+2x+1}{2\sqrt{3x^3+2x^2+1}}$ tại điểm $x = 0.$

A. $f'(0) = 0.$ **B.** $f'(0) = \dfrac{1}{2}.$ **C.** Không tồn tại. **D.** $f'(0) = 1.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = \dfrac{\left(3x^2+2x+1\right)'.2\sqrt{3x^3+2x^2+1}-\left(3x^2+2x+1\right).\left(2\sqrt{3x^3+2x^2+1}\right)'}{\left(2\sqrt{3x^3+2x^2+1}\right)^2}$

$= \dfrac{(6x+2)2\sqrt{3x^3+2x^2+1}-\left(3x^2+2x+1\right)\dfrac{9x^2+4x}{\sqrt{3x^3+2x^2+1}}}{\left(2\sqrt{3x^3+2x^2+1}\right)^2} = \dfrac{9x^4+6x^3-9x^2+8x+4}{4\left(3x^3+2x^2+1\right)\sqrt{3x^3+2x^2+1}}$

$\Rightarrow f'(0) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}.$

Câu 15: Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{a^3}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (a là hằng số).

A. $y' = \dfrac{a^3 x}{\left(a^2 - x^2\right)\sqrt{a^2 - x^2}}$.

B. $y' = \dfrac{a^3 x}{a^2 - x^2}$.

C. $y' = \dfrac{a^3 x}{2\left(a^2 - x^2\right)\sqrt{a^2 - x^2}}$.

D. $y' = \dfrac{a^3\left(3a^2 - 2x\right)}{2\left(a^2 - x^2\right)\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = \dfrac{-a^3\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)'}{a^2 - x^2} = \dfrac{-a^3(-2x)}{2\sqrt{a^2 - x^2}.\left(a^2 - x^2\right)} = \dfrac{a^3 x}{\left(a^2 - x^2\right)\sqrt{a^2 - x^2}}$.

BÀI 3. ĐẠO HÀM HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Giới hạn của $\dfrac{\sin x}{x}$

Định lý 1

$$\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.}$$

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}=1$.

2. Đạo hàm của hàm số $y=\sin x$

Định lý 2

Hàm số $y=\sin x$ có đạo hàm tại mọi $x\in\mathbb{R}$ và $\boxed{(\sin x)'=\cos x}$.

Nếu $y=\sin u$ và $u=u(x)$ thì $\boxed{(\sin u)'=u'.\cos u}$.

3. Đạo hàm của hàm số $y=\cos x$

Định lý 3

Hàm số $y=\cos x$ có đạo hàm tại mọi $x\in\mathbb{R}$ và $\boxed{(\cos x)'=-\sin x}$.

Nếu $y=\cos u$ và $u=u(x)$ thì $\boxed{(\cos u)'=-u'\sin u}$.

4. Đạo hàm của hàm số $y=\tan x$

Định lý 4

Hàm số $y=\tan x$ có đạo hàm tại mọi $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ và $\boxed{(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}}$.

Nếu $y=\tan u$ và $u=u(x)$ thì $\boxed{(\tan u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}}$.

5. Đạo hàm của hàm số $y=\cot x$

Định lý 5

Hàm số $y=\cot x$ có đạo hàm tại mọi $x\neq k\pi$ và $\boxed{(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}}$.

Nếu $y=\cot u$ và $u=u(x)$ thì $\boxed{(\cot u)'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}}$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Tính Đạo Hàm của các hàm số lượng gics

1. Phương pháp

- Áp dụng quy tắc tính đạo hàm.
- Áp dụng các đạo hàm lượng giác cơ bản.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của hàm số $y=\tan 7x$

Hướng dẫn giải

$$y'=\frac{(7x)'}{\cos^2 7x}=\frac{7}{\cos^2 7x}.$$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\cos x}$

Hướng dẫn giải

$$y'=\frac{(\cos x)'}{2\sqrt{\cos x}}=\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}.$$

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\cos 2x}$

Hướng dẫn giải

$$y'=\frac{(\cos 2x)'}{2\sqrt{\cos 2x}}=\frac{-2\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}}=\frac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}.$$

Ví dụ 4: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\sin x}$

Hướng dẫn giải

$$y=\sqrt{\sin x}\Rightarrow y'=\frac{(\sin x)'}{2\sqrt{\sin x}}=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$$

Ví dụ 5: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\sin 3x}$

Hướng dẫn giải

$$y'=\frac{(\sin 3x)'}{2\sqrt{\sin 3x}}=\frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}.$$

Ví dụ 6: Tính đạo hàm của hàm số $y=\tan^2 5x$

Hướng dẫn giải

$$y'=2\tan 5x.\frac{(5x)'}{\cos^2 5x}=\frac{10\sin 5x}{\cos^3 5x}.$$

Ví dụ 7: Tính đạo hàm của hàm số $y=\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)$

Hướng dẫn giải

$$y=\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)\Rightarrow y'=\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)'.\left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)\right)=3\sin\left(\frac{\pi}{3}-3x\right).$$

Ví dụ 8: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$

Hướng dẫn giải

$y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\cos 2x\Rightarrow y'=-2\sin 2x.$

Ví dụ 9: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=2\sin 2x+\cos 2x$

Hướng dẫn giải

$y'=2(\sin 2x)'+(\cos 2x)'=4\cos 2x-2\sin 2x.$

Ví dụ 10: Cho $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$. Tính $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

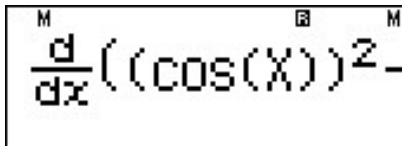
Ta có $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$. Do đó $f'(x)=-2\sin 2x.$

Vậy $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2\sin\frac{\pi}{2}=-2.$

Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Chuyển sang chế độ rad bằng cách ấn phím SHIFT MODE 4

Nhập vào màn hình $\frac{d}{dx}\left((\cos(X))^2+(\sin(X))^2\right)\Big|_{X=\frac{\pi}{4}}$ rồi ấn phím $=$ ta được kết quả



Ví dụ 11: Tính đạo hàm của hàm số $y=\cos^3 4x$

Hướng dẫn giải

$y=\cos^3 4x\Rightarrow y'=3\cos^2 4x.(\cos 4x)'=3\cos^2 4x.(-4\sin 4x)=-12\cos^2 4x.\sin 4x.$

Ví dụ 12: Với $y=\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$ thì $\frac{y'\left(\frac{\pi}{8}\right)}{y'\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ có giá trị bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$y=\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\Rightarrow y'=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$

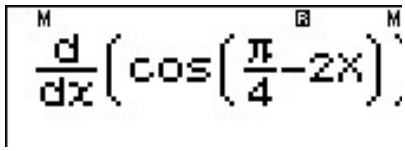
$y'\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\left(\sin\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=0;\ y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)\neq 0$

$\Rightarrow\frac{y'\left(\frac{\pi}{8}\right)}{y'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=0.$

Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Chuyển sang chế độ rad bằng cách ấn phím SHIFT MODE 4

Nhập vào màn hình $\dfrac{\dfrac{d}{dx}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-2X\right)\right)\Big|_{x=\frac{\pi}{8}}}{\dfrac{d}{dx}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-2X\right)\right)\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả



3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)$.

A. $y'=3\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)$.

B. $y'=-3\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)$.

C. $y'=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)$.

D. $y'=-3sin\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)'.\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)=-3.\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)$.

Câu 2: Tính đạo hàm của hàm số $y=-\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x^2\right)$.

A. $y'=x\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x^2\right)$.

B. $y'=\dfrac{1}{2}x^2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$.

C. $y'=\dfrac{1}{2}x\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$.

D. $y'=\dfrac{1}{2}x\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x^2\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=-\dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{\pi}{3}-x^2\right)'.\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x^2\right)=-\dfrac{1}{2}.(-2x).\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x^2\right)=x.\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x^2\right)$.

Câu 3: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin\left(x^2-3x+2\right)$.

A. $y'=\cos\left(x^2-3x+2\right)$.

B. $y'=(2x-3).\sin\left(x^2-3x+2\right)$.

C. $y'=(2x-3).\cos\left(x^2-3x+2\right)$.

D. $y'=-(2x-3).\cos\left(x^2-3x+2\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = \left(x^2 - 3x + 2\right)'.\cos\left(x^2 - 3x + 2\right) = \left(2x - 3\right).\cos\left(x^2 - 3x + 2\right).$

Câu 4: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2 \tan x + \sqrt{x}$.

A. $y' = 2x\tan x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$ **B.** $y' = 2x\tan x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}.$

C. $y' = 2x\tan x + \dfrac{x^2}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$ **D.** $y' = 2x\tan x + \dfrac{x^2}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = \left(x^2\right)'\tan x + \left(\tan x\right)'.x^2 + \left(\sqrt{x}\right)' = 2x\tan x + \dfrac{x^2}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

Câu 5: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2\cos x^2$.

A. $y' = -2\sin x^2.$ **B.** $y' = -4x\cos x^2.$

C. $y' = -2x\sin x^2.$ **D.** $y' = -4x\sin x^2.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = -2.\left(x^2\right)'.\sin x^2 = -2.2x.\sin x^2 = -4x\sin x^2.$

Câu 6: Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan\dfrac{x+1}{2}.$

A. $y' = \dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x+1}{2}}.$ **B.** $y' = \dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x+1}{2}}.$

C. $y' = -\dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x+1}{2}}.$ **D.** $y' = -\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x+1}{2}}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = \left(\tan\dfrac{x+1}{2}\right)' = \dfrac{\left(\dfrac{x+1}{2}\right)'}{\cos^2\dfrac{x+1}{2}} = \dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x+1}{2}}.$

Câu 7: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin\sqrt{2+x^2}$.

A. $y'=\dfrac{2x+2}{\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}$.

B. $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}$.

C. $y'=\dfrac{x}{\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}$.

D. $y'=\dfrac{x+1}{\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=\left(\sqrt{2+x^2}\right)'\cos\sqrt{2+x^2}=\dfrac{\left(2+x^2\right)'}{2\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}=\dfrac{x}{\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}$

Câu 8: Tính đạo hàm của hàm số $y=\cos\sqrt{2x+1}$.

A. $y'=-\dfrac{\sin\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$.

B. $y'=\dfrac{\sin\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$.

C. $y'=-\sin\sqrt{2x+1}$.

D. $y'=-\dfrac{\sin\sqrt{2x+1}}{2\sqrt{2x+1}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=-\left(\sqrt{2x+1}\right)'\sin\sqrt{2x+1}=\dfrac{\left(2x+1\right)'}{2\sqrt{2x+1}}\sin\sqrt{2x+1}=-\dfrac{\sin\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$.

Câu 9: Tính đạo hàm của hàm số $y=\cot\sqrt{x^2+1}$.

A. $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}.\sin^2\sqrt{x^2+1}}$.

B. $y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}.\sin^2\sqrt{x^2+1}}$.

C. $y'=-\dfrac{1}{\sin^2\sqrt{x^2+1}}$.

D. $y'=\dfrac{1}{\sin^2\sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=-\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\sin^2\sqrt{x^2+1}}=-\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sin^2\sqrt{x^2+1}}=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}.\sin^2\sqrt{x^2+1}}$.

Câu 10: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin\left(\sin x\right)$.

A. $y'=\cos\left(\sin x\right)$.

B. $y'=\cos\left(\cos x\right)$.

C. $y'=\cos x.\cos\left(\sin x\right)$.

D. $y'=\cos x.\cos\left(\cos x\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = \left[\sin\left(\sin x\right)\right]' = \left(\sin x\right)'.\cos\left(\sin x\right) = \cos x.\cos\left(\sin x\right).$

Câu 11: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos\left(\tan x\right).$

A. $y' = \sin\left(\tan x\right)\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot$ **B.** $y' = -\sin\left(\tan x\right)\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot$

C. $y' = \sin\left(\tan x\right).$ **D.** $y' = \sin\left(\tan x\right).$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = -\left(\tan x\right)'\sin\left(\tan x\right) = -\dfrac{1}{\cos^2 x}.\sin\left(\tan x\right).$

Câu 12: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2\sin^2 x - \cos 2x + x.$

A. $y' = 4\sin x + \sin 2x + 1.$ **B.** $y' = 4\sin 2x + 1.$

C. $y' = 4\cos x + 2\sin 2x + 1.$ **D.** $y' = 4\sin x - 2\sin 2x + 1.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 2.2\left(\sin x\right)'.\sin x + \left(2x\right)'\sin 2x + 1 = 4\cos x\sin x + 2\sin 2x + 1$

$= 2\sin 2x + 2\sin 2x + 1 = 4\sin 2x + 1$

Câu 13: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) + \dfrac{\pi}{2}x - \dfrac{\pi}{4}.$

A. $y' = -2\sin\left(\pi - 4x\right) + \dfrac{\pi}{2}\cdot$ **B.** $y' = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \dfrac{\pi}{2}.$

C. $y' = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \dfrac{\pi}{2}x.$ **D.** $y' = -2\sin\left(\pi - 4x\right).$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) + \dfrac{\pi}{2}x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1 - \cos\left(\pi - 4x\right)}{2} + \dfrac{\pi}{2}x - \dfrac{\pi}{4}$

$= -\dfrac{1}{2}\cos\left(\pi - 4x\right) + \dfrac{\pi}{2}x + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$

Suy ra $y'=\left(-\frac{1}{2}\cos\left(\pi-4x\right)+\frac{\pi}{2}x+\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right)'$

$=\frac{1}{2}\left(\pi-4x\right)'\sin\left(\pi-4x\right)+\frac{\pi}{2}=-2\sin\left(\pi-4x\right)+\frac{\pi}{2}.$

Câu 14: Tính đạo hàm của hàm số $y=\cos^3\left(2x-1\right)$.

A. $y'=-3\sin\left(4x-2\right)\cos\left(2x-1\right).$ **B.** $y'=3\cos^2\left(2x-1\right)\sin\left(2x-1\right).$

C. $y'=-3\cos^2\left(2x-1\right)\sin\left(2x-1\right).$ **D.** $y'=6\cos^2\left(2x-1\right)\sin\left(2x-1\right).$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\left[\cos^3\left(2x-1\right)\right]'=3\cos^2\left(2x-1\right)\left[\cos\left(2x-1\right)\right]'$

$=-6\sin\left(2x-1\right)\cos^2\left(2x-1\right)$

$=-3\left[2\sin\left(2x-1\right)\cos\left(2x-1\right)\right]\cos\left(2x-1\right)=-3\sin\left(4x-2\right)\cos\left(2x-1\right).$

Câu 15: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin^3\left(1-x\right)$.

A. $y'=\cos^3\left(1-x\right).$ **B.** $y'=-\cos^3\left(1-x\right).$

C. $y'=-3\sin^2\left(1-x\right).\cos\left(1-x\right).$ **D.** $y'=3\sin^2\left(1-x\right).\cos\left(1-x\right).$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=\left[\sin^3\left(1-x\right)\right]'=3.\left[\sin\left(1-x\right)\right]'.\sin^2\left(1-x\right)=-3.\cos\left(1-x\right).\sin^2\left(1-x\right).$

Câu 16: Tính đạo hàm của hàm số $y=\tan^3 x+\cot 2x$.

A. $y'=3\tan^2 x.\cot x+2\tan 2x.$ **B.** $y'=-\frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}+\frac{2}{\sin^2 2x}.$

C. $y'=3\tan^2 x-\frac{1}{\sin^2 2x}.$ **D.** $y'=\frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}-\frac{2}{\sin^2 2x}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=\left(\tan^3 x+\cot 2x\right)'=3\tan^2 x\left(\tan x\right)'-\frac{2}{\sin^2 2x}=\frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}-\frac{2}{\sin^2 2x}$

Câu 17: Tính đạo hàm của hàm số $y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$.

A. $y'=\dfrac{-\sin 2x}{(\sin x-\cos x)^2}$.

B. $y'=\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{(\sin x-\cos x)^2}$.

C. $y'=\dfrac{2-2\sin 2x}{(\sin x-\cos x)^2}$.

D. $y'=\dfrac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}=\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{-\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}=-\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Suy ra $y'=-\dfrac{1}{\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}=-\dfrac{1}{\left(\dfrac{\cos x-\sin x}{\sqrt{2}}\right)^2}=\dfrac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$.

Câu 18: Tính đạo hàm của hàm số $y=-\dfrac{2}{\tan(1-2x)}$.

A. $y'=\dfrac{4x}{\sin^2(1-2x)}$.

B. $y'=\dfrac{-4}{\sin(1-2x)}$.

C. $y'=\dfrac{-4x}{\sin^2(1-2x)}$.

D. $y'=\dfrac{-4}{\sin^2(1-2x)}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=-\dfrac{-2\left(\tan(1-2x)\right)'}{\tan^2(1-2x)}=\dfrac{-4.\dfrac{1}{\cos^2(1-2x)}}{\tan^2(1-2x)}=\dfrac{-4}{\sin^2(1-2x)}$.

Câu 19: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{\cos 2x}{3x+1}$.

A. $y'=\dfrac{-2(3x+1)\sin 2x-3\cos 2x}{(3x+1)^2}$.

B. $y'=\dfrac{-2(3x+1)\sin 2x-3\cos 2x}{3x+1}$.

C. $y'=\dfrac{-(3x+1)\sin 2x-3\cos 2x}{(3x+1)^2}$.

D. $y'=\dfrac{2(3x+1)\sin 2x+3\cos 2x}{(3x+1)^2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = \dfrac{(\cos 2x)'(3x+1) - (3x+1)'.\cos 2x}{(3x+1)^2} = \dfrac{-2(3x+1)\sin 2x - 3\cos 2x}{(3x+1)^2}$.

Câu 20: Cho $f(x) = 2x^2 - x + 2$ và $g(x) = f(\sin x)$. Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$.

A. $g'(x) = 2\cos 2x - \sin x$. **B.** $g'(x) = 2\sin 2x + \cos x$.

C. $g'(x) = 2\sin 2x - \cos x$. **D.** $g'(x) = 2\cos 2x + \sin x$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g(x) = f(\sin x) = 2\sin^2 x - \sin x + 2$

$\Rightarrow g'(x) = (2\sin^2 x - \sin x + 2)' = 2.2\sin x.\cos x - \cos x = 2\sin 2x - \cos x$.

Dạng 2. Tính đạo hàm tại một điểm

1. Phương pháp

- Vận dụng các công thức đạo hàm bốn hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ và hàm hợp của nó.
- Vận dụng phối hợp các quy tắc đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương và hàm số hợp
- Tính f '(x_0)

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x) = 2\sin\left(\dfrac{5\pi}{6} + x\right)$. Tính $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 2\cos\left(\dfrac{5\pi}{6} + x\right) \Rightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -2$

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$. Tính $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Ta có: $f(x) = \cos 2x \Rightarrow f'(x) = -2\sin 2x$. Do đó : $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -2$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{\tan x + \cot x}$. Tính $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = \dfrac{(\tan x + \cot x)'}{2\sqrt{\tan x + \cot x}} = \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\sin^2 x}}{2\sqrt{\tan x + \cot x}} \Rightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=5\sin x-3\cos x$ tại điểm $x=\frac{\pi}{2}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=3.$ **B.** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-3.$ **C.** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-5.$ **D.** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=5.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=(5\sin x-3\cos x)'=5(\sin x)'-3(\cos x)'=5\cos x+3\sin x$.

Suy ra $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=5\cos\frac{\pi}{2}+3\sin\frac{\pi}{2}=3$

Câu 2: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=2\sin\left(\frac{3\pi}{5}-2x\right)$ tại điểm $x=-\frac{\pi}{5}$.

A. $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right)=4.$ **B.** $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right)=-4.$ **C.** $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right)=2.$ **D.** $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right)=-2.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=\left[2\sin\left(\frac{3\pi}{5}-2x\right)\right]'=2\left(\frac{3\pi}{5}-2x\right)'\cos\left(\frac{3\pi}{5}-2x\right)=-4\cos\left(\frac{3\pi}{5}-2x\right).$

Suy ra $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right)=-4\cos\left(\frac{3\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}\right)=-4\cos\pi=4$.

Câu 3: Hàm số $f(x)=x^4$ có đạo hàm là $f'(x)$, hàm số $g(x)=2x+\sin\frac{\pi x}{2}$ có đạo hàm là $g'(x)$.

Tính giá trị biểu thức $P=\frac{f'(1)}{g'(1)}.$

A. $P=\frac{4}{3}.$ **B.** $P=2.$ **C.** $P=-2.$ **D.** $P=-\frac{4}{3}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=4x^3$ và $g'(x)=\left(2x+\sin\frac{\pi x}{2}\right)'=2+\frac{\pi}{2}.\cos\frac{\pi x}{2}.$

Suy ra $P=\frac{f'(1)}{g'(1)}=\frac{4}{2+\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}}=2.$

Câu 4: Hàm số $f(x)=4x$ có đạo hàm là $f'(x)$, hàm số $g(x)=4x+\sin\frac{\pi x}{4}$ có đạo hàm là $g'(x)$. Tính giá trị biểu thức $P=\frac{f'(2)}{g'(2)}$.

A. $P=1$. **B.** $P=\frac{16}{16+\pi}$. **C.** $P=\frac{16}{17}$. **D.** $P=\frac{1}{16}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=4$ và $g'(x)=4+\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi x}{4}$.

Suy ra $P=\frac{f'(2)}{g'(2)}=\frac{4}{4+\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi.2}{4}}=1$

Câu 5: Hàm số $f(x)=a\sin x+b\cos x+1$ có đạo hàm là $f'(x)$. Để $f'(0)=\frac{1}{2}$ và $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=1$ thì giá trị của a và b bằng bao nhiêu?

A. $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a=\frac{\sqrt{2}}{2};b=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $a=\frac{1}{2};b=-\frac{1}{2}$. **D.** $a=b=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=a\cos x-b\sin x$. Khi đó $\begin{cases}f'(0)=\frac{1}{2}\\ f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a\cos 0-b\sin 0=\frac{1}{2}\\ a\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+b\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{1}{2}\\ a=\frac{1}{2}\end{cases}$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)-\cos^2 x$ với $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các biểu thức dưới đây, biểu thức nào xác định hàm số $f(x)$ thỏa mãn $y'(x)=1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$?

A. $f(x)=x+\frac{1}{2}\cos 2x$. **B.** $f(x)=x-\frac{1}{2}\cos 2x$.

C. $f(x)=x-\sin 2x$. **D.** $f(x)=x+\sin 2x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'(x)=f'(x)+2\sin x\cos x=f'(x)+\sin 2x$.

Suy ra $y'(x)=1\Leftrightarrow f'(x)+\sin 2x=1\Leftrightarrow f'(x)=1-\sin 2x.$

Đến đây ta lần lượt xét từng đáp án, ví dụ xét đáp án A ta có

$f'(x)=\left(x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)'=x'+\frac{1}{2}(\cos 2x)'=1-\sin 2x$ (thỏa mãn)

Dạng 3: Giải phương trình $f'(x)=0$

1. Phương pháp

- ✓ Tính đạo hàm $f'(x)$
- ✓ Để giải phương trình $f'(x)=0,$ ta áp dụng cách giải các phương trình lượng giác cơ bản và một số phương trình lượng giác thường gặp.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}x\right)$. Giải phương trình $y'=0$.

Hướng dẫn giải

$y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}x\right)\Rightarrow y'=\frac{-1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}x\right)$

$y'=0\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}x\right)=0\Leftrightarrow\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}-k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)$.Giải phương trình $y'=0$.

Hướng dẫn giải

$y=\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)\Rightarrow y'=-2\sin\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)$

$y'=0\Leftrightarrow\sin\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)=0\Leftrightarrow\frac{2\pi}{3}+2x=k\pi$

$\Leftrightarrow 2x=-\frac{2\pi}{3}+k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}.$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=\cot^2\frac{x}{4}$, Giải phương trình $y'=0$.

Hướng dẫn giải

$y=\cot^2\frac{x}{4}\Rightarrow y'=2\cot\frac{x}{4}.\left(-\frac{1}{4}\right).\frac{1}{\sin^2\frac{x}{4}}=-\frac{1}{2}\frac{\cos\frac{x}{4}}{\sin^3\frac{x}{4}}$

$y'=0\Leftrightarrow\cos\frac{x}{4}=0\Leftrightarrow x=2\pi+k4\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Ví dụ 4: Giải phương trình: $f'(x)=0,$ biết $f(x)=\cos x-\sin x+x.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $f'(x)=-\sin x-\cos x+1.$

Vậy: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \sin x+\cos x=1 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right..$$

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x)=\frac{\sin 3x}{3}+\cos x-\sqrt{3}\left(\sin x+\frac{\cos 3x}{3}\right)$. Tìm tập nghiệm của $f'(x)=0$

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(x)=\frac{\sin 3x}{3}+\cos x-\sqrt{3}\left(\sin x+\frac{\cos 3x}{3}\right)$

$f'(x)=\cos 3x-\sin x-\sqrt{3}(\cos x-\sin 3x)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \cos 3x-\sin x-\sqrt{3}(\cos x-\sin 3x)=0$

$\Leftrightarrow \cos 3x+\sqrt{3}\sin 3x=\sin x+\sqrt{3}\cos x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 3x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos 3x+\sin\frac{\pi}{3}\sin 3x=\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x$

$\Leftrightarrow \cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}-x+k2\pi \\ 3x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}+x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{12}+k\pi \end{array}\right. ; k\in\mathbb{Z}.$$

3. Bài tập Trắc nghiệm

Câu 1: Cho hàm số $y=\cos^2 x+\sin x$. Phương trình $y'=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$.

A. 1 nghiệm. **B.** 2 nghiệm.

C. 3 nghiệm. **D.** 4 nghiệm.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$y'=-2\cos x\sin x+\cos x=\cos x(1-2\sin x)$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \sin x=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. ;(k\in\mathbb{Z})$$

Vì $x\in(0;\pi)\Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right\}$. Vậy có 3 nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$

Câu 2: Cho hàm số $y=(m+1)\sin x+m\cos x-(m+2)x+1$. Tìm giá trị của *m* để $y'=0$ có nghiệm?

A. $\left[\begin{array}{l} m \le -1 \\ m \ge 3 \end{array}\right.$. **B.** $m \ge 2$.

C. $-1 \le m \le 3$. **D.** $m \le -2$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$y' = (m+1)\cos x - m\sin x - (m+2)$

Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow (m+1)\cos x - m\sin x = (m+2)$

Điều kiện phương trình có nghiệm là $a^2 + b^2 \ge c^2$

$\Leftrightarrow (m+1)^2 + m^2 \ge (m+2)^2 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -1 \\ m \ge 3 \end{array}\right.$

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$. Biểu diễn nghiệm của phương trình lượng giác $f'(x) = 0$ trên đường tròn lượng giác ta được mấy điểm phân biệt?

A. 1 điểm. **B.** 2 điểm.

C. 3 điểm. **D.** 4 điểm.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$$f'(x) = \frac{-\sin x.\sqrt{\cos 2x} - \cos x \dfrac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}(-\sin 2x)}{\cos 2x} = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos 2x}}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ta biểu diễn được 2 điểm phân biệt trên đường tròn lượng giác.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = -\cos x + \sin x - \cos 2x$. Phương trình $f'(x) = 1$ tương đương với phương trình nào sau đây?

A. $\sin x = 0$. **B.** $\sin x - 1 = 0$.

C. $(\sin x - 1)(\cos x - 1) = 0$. **D.** $\cos x = 0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$f'(x) = \sin x + \cos x + 2\sin 2x$

$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2\sin 2x = 1$

Đặt $t = \sin x + \cos x \quad (|t| \le \sqrt{2}) \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow 2t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\dfrac{3}{2} \quad (l) \end{array}\right.$

Với $t = 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in Z)$

Nghiệm trên cũng là nghiệm của phương trình $(\sin x - 1)(\cos x - 1) = 0$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = 2\dfrac{\cos^3 x}{3} + \sin^3 x - 2\cos x - 3\sin x$. Biểu diễn nghiệm của phương trình lượng giác $f'(x)$ trên đường tròn ta được mấy điểm phân biệt?

A. 1 điểm. **B.** 2 điểm.
C. 4 điểm. **D.** 6 điểm.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$f'(x) = 2\sin^3 x - 3\cos^3 x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \tan^3 x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \tan x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.

Vậy có hai điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

BÀI 4. VI PHÂN

A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$ và có đạo hàm tại $x\in(a;b)$. Giả sử Δx là số gia của x.

Ta gọi tích $f'(x)\Delta x$ là vi phân của hàm số $y=f(x)$ tại x ứng với số gia Δx, kí hiệu là $df(x)$ hoặc dy, tức là : $\boxed{dy=df(x)=f'(x)\Delta x.}$

Chú ý:

Áp dụng định nghĩa trên vào hàm số $y=x$ ta có

$$dx=d(x)=x'\Delta x=1.\Delta x=\Delta x.$$

Do đó, với hàm số $y=f(x)$ ta có

$$dy=df(x)=f'(x)dx.$$

2. Ứng dụng phép tính gần đúng

$$\boxed{f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x}$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Tìm vi phân của hàm số y=f(x)

1. Phương pháp

✓ Tính đạo hàm $y=f(x)$

✓ Vi phân của hàm số $y=f(x)$ tại x là $df(x)=f'(x)dx$

✓ Vi phân của hàm số $y=f(x)$ tại x_0 là $df(x_0)=f'(x_0)dx$

✓ Suy ra vi phân của hàm số tại x_0 ứng với số gia Δx là $df(x_0)=f'(x_0).\Delta x$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính vi phân của hàm số $f(x)=3x^2-x$ tại điểm $x=2$, ứng với $\Delta x=0,1$

Hướng dẫn giải

Ta có: $f'(x)=6x-1\Rightarrow f'(2)=11$

$df(2)=f'(2)\Delta x=11.0,1=1,1$

Ví dụ 2: Tính vi phân của hàm số $y = 2x^5 - \frac{2}{x} + 5$

Hướng dẫn giải

$y = 2x^5 - \frac{2}{x} + 5$ thì $y' = 10x^4 + \frac{2}{x^2}$.

Vậy $dy = \left(10x^4 + \frac{2}{x^2}\right)dx$.

Ví dụ 3: Tính vi phân của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 5x}$ bằng biểu thức nào sau đây?

Hướng dẫn giải

$y = \sqrt{x^2 - 5x}$ thì $y' = \frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x}}$.

Vậy $dy = \frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x}}dx$.

Ví dụ 4: Tính vi phân của hàm số $y = \frac{2x+3}{2x-1}$ bằng biểu thức nào sau đây?

Hướng dẫn giải

$y = \frac{2x+3}{2x-1}$ thì $y' = -\frac{8}{(2x-1)^2}$. Vậy $dy = -\frac{8}{(2x-1)^2}dx$.

Ví dụ 5: Tính vi phân của hàm số $y = \tan 5x$ bằng biểu thức nào sau đây?

Hướng dẫn giải

$y = \tan 5x$ thì $y' = \frac{5}{\cos^2 5x}$.

Vậy $dy = \frac{5}{\cos^2 5x}dx$.

Ví dụ 6: Tính vi phân của hàm số $y = \sqrt{\cos x}$ bằng biểu thức nào sau đây?

Hướng dẫn giải

$y = \sqrt{\cos x}$ thì $y' = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$. Vậy $dy = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}dx$.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = 5\sin 2x$. Tính vi phân của hàm số tại $x = \frac{\pi}{3}$

Hướng dẫn giải

$y = 5\sin 2x \Rightarrow y' = 10\cos 2x.$

$dy = y'dx \Rightarrow dx = 10\cos 2xdx.$

Vi phân của hàm tại $x = \frac{\pi}{3}$: $dy = 10\cos\left(2.\frac{\pi}{3}\right)dx.$

$dy = -5dx.$

3. Bài tập rèn luyện tốc độ

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$. Vi phân của hàm số tại x là:

A. $dy = \frac{-4}{\left(1+x^2\right)^2}dx.$ **B.** $dy = \frac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2}dx.$

C. $dy = \frac{-dx}{\left(1+x^2\right)^2}.$ **D.** $dy = \frac{-4}{1+x^2}dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Câu 2: Vi phân của hàm số $y = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$ là:

A. $dy = \frac{-2x^2-2x-5}{\left(x^2+x-2\right)^2}dx.$ **B.** $dy = \frac{x^2-x-5}{\left(x^2+x-2\right)^2}dx.$

C. $dy = \frac{-2x^2+x-1}{\left(x^2+x-2\right)^2}dx.$ **D.** $dy = \frac{2x-5}{\left(x^2+x-2\right)}dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $dy = y'dx = \frac{(2x+1)'\left(x^2+x-2\right)-(2x+1)\left(x^2+x-2\right)'}{\left(x^2+x-2\right)^2} = \frac{-2x^2-2x-5}{\left(x^2+x-2\right)^2}dx.$

Câu 3: Vi phân của hàm số $y = (5x-3)\sqrt{9x^2+1}$ là:

A. $dy = \frac{-2x+3}{2\sqrt{9x^2+1}}dx.$ **B.** $dy = \frac{90x^2-27x+5}{\sqrt{9x^2+1}}dx.$

C. $dy = -\frac{5}{\sqrt{9x^2+1}}dx.$ **D.** $dy = \frac{x^2-2x+2}{\sqrt{9x^2+1}}dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có:

$$dy = y'dx = \left[(5x-3)'\sqrt{9x^2+1} + (5x-3)\left(\sqrt{9x^2+1}\right)' \right] dx$$

$$= \left(5\sqrt{9x^2+1} + (5x-3)\frac{\left(9x^2+1\right)'}{2\sqrt{9x^2+1}} \right) dx = \left(5\sqrt{9x^2+1} + (5x-3).\frac{18x}{2\sqrt{9x^2+1}} \right) dx$$

$$= \left(5\sqrt{9x^2+1} + (5x-3)\frac{9x}{\sqrt{9x^2+1}} \right) dx$$

$$= \frac{5\left(9x^2+1\right)+(5x-3)9x}{\sqrt{9x^2+1}} dx = \frac{90x^2-27x+5}{\sqrt{9x^2+1}} dx$$

Câu 4: Vi phân của hàm số $y = \sin^2 x + \cos 2x - x$ là:

A. $dy = (1-\cos 2x)dx.$ **B.** $dy = (x+\sin 2x)dx.$

C. $dy = -(\sin 2x+1)dx.$ **D.** $dy = (\sin 2x+1)dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có: $dy = y'dx = \left[2\sin x(\sin x)' - \sin 2x.(2x)' - 1 \right] dx$

$$= \left[2\sin x\cos x - 2\sin 2x - 1 \right] dx = -(\sin 2x+1)dx .$$

Câu 5: Vi phân của hàm số $y = \sqrt{1+2\tan x}$ là:

A. $dy = \frac{\tan x}{\sqrt{1+2\tan x}} dx.$ **B.** $dy = \frac{1+\tan^2 x}{2\sqrt{1+2\tan x}} dx.$

C. $dy = \frac{2\tan x}{\sqrt{1+2\tan x}} dx.$ **D.** $dy = \frac{1+\tan^2 x}{\sqrt{1+2\tan x}} dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $y = \sqrt{1+2\tan x} \Rightarrow dy = y'dx = \left(\sqrt{1+2\tan x}\right)' dx$

$$= \left(\frac{(1+2\tan x)'}{2\sqrt{1+2\tan x}} \right) dx = \frac{1+\tan^2 x}{\sqrt{1+2\tan x}} dx .$$

Câu 6: Vi phân của hàm số $y=\dfrac{2-2x+x^2}{x^2-1}$ là:

A. $dy=\dfrac{-2x^2-6x+2}{\left(x^2-1\right)^2}dx.$ **B.** $dy=\dfrac{-6x+2}{\left(x^2-1\right)^2}dx.$

C. $dy=\dfrac{-2x-3}{\left(x^2-1\right)^2}dx.$ **D.** $dy=\dfrac{-2x^2-x+1}{\left(x^2-1\right)^2}dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $y=\dfrac{2-2x+x^2}{x^2-1}\Rightarrow dy=y'dx=\left(\dfrac{2-2x+x^2}{x^2-1}\right)'dx=\dfrac{-2x^2-6x+2}{\left(x^2-1\right)^2}dx.$

Câu 7: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\left(x-1\right)^2$. Biểu thức nào sau đây chỉ vi phân của hàm số f?

A. $dy=2\left(x-1\right)dx.$ **B.** $dy=\left(x-1\right)^2dx.$

C. $dy=2\left(x-1\right)dx.$ **D.** $dy=\left(x-1\right)dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Câu 8: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ được xác định bởi biểu thức $\sin y=\cos x$ và $0<x,y<\dfrac{\pi}{2}$. Chọn kết quả đúng:

A. $y'=\tan x.$ **B.** $y'=-\tan x.$ **C.** $y'=1.$ **D.** $y'=-1.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$\cos ydy=-\sin xdx.$

$\Rightarrow y'=\dfrac{-\sin x}{\cos y}=\dfrac{-\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\dfrac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=\dfrac{-\sin x}{\left|\sin x\right|}=-1$

Câu 9: Xét hàm số $y=f\left(x\right)=\sqrt{1+\cos^2 2x}$. Chọn câu đúng:

A. $df\left(x\right)=\dfrac{-\sin 4x}{2\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx.$ **B.** $df\left(x\right)=\dfrac{-\sin 4x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx.$

C. $df(x)=\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx.$ **D.** $df(x)=\dfrac{-\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$$df(x)=\frac{\left(1+\cos^2 2x\right)'}{2\sqrt{1+\cos^2 2x}}=\frac{-\sin 4x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx.$$

Câu 10: Vi phân của hàm số $y=2x^3-\sqrt{x}+1$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $dy=\left(6x^2+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+1\right)dx.$ **B.** $dy=\left(6x^2+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx.$

C. $dy=\left(6x^2-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx.$ **D.** $dy=\left(6x^2-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$y=2x^3-\sqrt{x}+1\Rightarrow y'=6x^2-\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Do đó: $dy=\left(6x^2-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx.$

Câu 11: Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{1-2x}$. Vi phân của hàm số tại $x=-3$ là:

A. $dy=\dfrac{1}{7}dx.$ **B.** $dy=7dx.$

C. $dy=-\dfrac{1}{7}dx.$ **D.** $dy=-7dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có $y'=\dfrac{7}{(1-2x)^2}\Rightarrow y'(-3)=\dfrac{1}{7}$. Do đó $dy=\dfrac{1}{7}dx.$

Câu 12: Vi phân của $y=\tan 5x$ là:

A. $dy=\dfrac{5x}{\cos^2 5x}dx.$ **B.** $dy=-\dfrac{5}{\sin^2 5x}dx.$

C. $dy=\dfrac{5}{\cos^2 5x}dx.$ **D.** $dy=-\dfrac{5}{\cos^2 5x}dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$y=\tan 5x\Rightarrow y'=\dfrac{5}{\cos^2 5x}$. Do đó $dy=\dfrac{5}{\cos^2 5x}dx$

Câu 13: Cho hàm số $y=\cos^2 2x$. Vi phân của hàm số là:

A. $dy=4\cos 2x\sin 2xdx.$ **B.** $dy=2\cos 2x\sin 2xdx.$

C. $dy=-2\cos 2x\sin 2xdx.$ **D.** $dy=-2\sin 4xdx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $dy=d\left(\cos^2 2x\right)=2\cos 2x.(\cos 2x)'dx=-4\cos 2x.\sin 2xdx=-2\sin 4xdx.$

Câu 14: Cho hàm số $y=\tan\sqrt{x}$. Vi phân của hàm số là:

A. $dy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}\cos^2 x}dx.$ **B.** $dy=\dfrac{1}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}dx.$

C. $dy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}dx.$ **D.** $dy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có : $dy=d\left(\tan\sqrt{x}\right)=\left(\dfrac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\right).(\sqrt{x})'dx=\dfrac{1}{2\sqrt{x}.\cos^2\sqrt{x}}dx.$

Câu 15 : Cho hàm số $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$. Vi phân của hàm số là:

A. $dy=\dfrac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2}dx.$ **B.** $dy=\dfrac{-4}{\left(1+x^2\right)^2}dx.$

C. $dy=\dfrac{-4}{1+x^2}dx.$ **D.** $dy=\dfrac{-dx}{\left(1+x^2\right)^2}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có : $dy = d\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}dx.$

Dạng 2: Tính gần đúng giá trị của một biểu thức

1. Phương pháp

Lập hàm số $y = f(x)$ và chọn x_0, Δx một cách thích hợp

1. Tính đạo hàm $f(x), f(x_0)$ và $f(x_0)$
2. Giá trị gần đúng của biểu thức $P = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Dùng vi phân tính gần đúng giá trị của $\sqrt[3]{26,7}$

Hướng dẫn giải

Xét $f(x) = \sqrt[3]{x}$ thì $f'(x) = \frac{1}{3.\sqrt[3]{x^2}}$. Cho $x_0 = 27,\ \Delta x = -0,3.$

Theo công thức gần đúng $f(x_0 + \Delta x) \approx f'(x_0).\Delta x + f(x_0)$

$\Rightarrow \sqrt[3]{27,3} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{27}(-0,3) \approx 2,999.$

Ví dụ 2: Dùng vi phân tính gần đúng giá trị của $\sin 29°$

Hướng dẫn giải

Xét $f(x) = \sin x$ với $29° = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}$ (rad).

Có $f'(x) = \cos x.$

Chọn $x_0 = \frac{\pi}{6}$,

$\Delta x = -\frac{\pi}{180} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right).\left(-\frac{\pi}{180}\right) \approx 0,4849.$

3. Bài tập rèn luyện tốc độ

Câu 1: Dùng vi phân tính gần đúng $\frac{1}{0,9995}$ có giá trị là:

A. 1,0005. **B.** 1,005. **C.** 1,0015. **D.** 1,05.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

Ta có: $\frac{1}{0,9995}=f(1-0,0005)\approx f(1)-f'(1).0,0005=1+1.0,0005=1,0005.$

Câu 2: Dùng vi phân tính gần đúng $\cos 45^o30'$ có giá trị là:

A. 0,7. **B.** 0,7009. **C.** 0,7019. **D.** 0,8.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Xét hàm số $f(x)=\cos x\Rightarrow f'(x)=-\sin x.$

Khi đó

$\cos 45^o30'=f(45^o+30^o)\approx f(45^o)+f'(45^o).\frac{3,14}{6}=0,7009.$

Câu 3: Dùng vi phân tính gần đúng $\frac{1}{\sqrt{20,3}}$ có giá trị là:

A. 0,7. **B.** 0,7009. **C.** 0,7019. **D.** 0,8.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

Khi đó: $\frac{1}{\sqrt{20,3}}=f(20,25+0,05)\approx f(20,25)+f'(20,25).0,05=0,222.$

BÀI 5. ĐẠO HÀM CẤP HAI

A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN NẮM

I. Định nghĩa

Giả sử hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại mỗi điểm $x\in(a,b)$. Khi đó, hệ thức $y'=f'(x)$ xác định một hàm số mới trên khoảng (a,b). Nếu hàm số $y'=f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm cấp hai của hàm số $y=f(x)$ tại x và kí hiệu là y'' hoặc $f''(x)$.

Chú ý

- Đạo hàm cấp 3 của hàm số $y=f(x)$ được định nghĩa tương tự và kí hiệu y''' hoặc $f'''(x)$ hoặc $f^{(3)}(x)$.
- Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp $n-1$, kí hiệu $f^{(n-1)}(x)$ $(n\in\mathbb{N},n\geq 4)$. Nếu $f^{(n-1)}(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp n của $y=f(x)$, kí hiệu $y^{(n)}$ hoặc $f^{(n)}(x)$.

$$\boxed{f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'.}$$

II. Ý NGHĨA CƠ HỌC CỦA ĐẠO HÀM CẤP HAI

Đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động $s=f(t)$ tại thời điểm t.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Tính đạo hàm cấp cao của hàm số $y=f(x)$

1. Phương pháp

- ✓ **Tính đạo hàm cấp 1:** f'(x)
- ✓ **Tính đạo hàm cấp 2:** $f''(x)=\left[f'(x)\right]'$
- ✓ **Tính đạo hàm cấp 3:** $f^{(3)}(x)=\left[f''(x)\right]'$
- ✓ **Tính đạo hàm cấp 4:** $f^{(4)}(x)=\left[f^{(3)}(x)\right]'$
- ✓ **Tính đạo hàm đến cấp được chỉ ra**

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x)=\frac{4}{5}x^5-3x^2-x+4$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $16x^3-6$. **B.** $16x^3-6x$. **C.** $4x^3-6$. **D.** $16x^2-6$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$f(x)=\frac{4}{5}x^5-3x^2-x+4$ thì $f'(x)=4x^4-6x-1$, do đó: $f''(x)=16x^3-6$.

Ví dụ 2: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y=\cos 2x$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $-2\sin 2x$. **B.** $-4\cos 2x$. **C.** $-4\sin 2x$. **D.** $4\cos 2x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$y=\cos 2x$ thì $y'=-2\sin 2x$. Do đó $y''=-4\cos 2x$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-12x-1$. Tập hợp các giá trị x để đạo hàm cấp 2 của $f(x)$ không âm là:

A. $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$. **B.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-12x-1$ thì $f'(x)=x^2+x-12; f''(x)=2x+1.$

Do đó $f''(x)\ge 0\Leftrightarrow x\ge -\frac{1}{2}.$

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=\frac{1}{x+1}$. Tính y''?

A. $y''=\frac{2}{(x+1)^4}$. **B.** $y''=\frac{2}{(x+1)^3}$. **C.** $y''=\frac{-2}{(x+1)^3}$. **D.** $y''=\frac{-2}{(x+1)^4}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $y'=-\frac{1}{(x+1)^2}\Rightarrow y''=\frac{2}{(x+1)^3}.$

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=\frac{x-3}{x+4}$. Tính $M=2(y')^2+(1-y).y''$.

A. $M=0.$ **B.** $M=1.$ **C.** $M=\frac{1}{x+4}.$ **D.** $M=\frac{2x}{(x+4)^2}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $y'=\frac{7}{(x+4)^2}\Rightarrow y''=-\frac{14}{(x+4)^3}$

Lại có $1-y=1-\frac{x-3}{x+4}=\frac{7}{x+4}$

Vậy: $M=2(y')^2+(1-y).y''=2.\frac{49}{(x+4)^4}+\frac{7}{x+4}.\left(-\frac{14}{(x+4)^3}\right)=0.$

Ví dụ 6: Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^2+x+1$. Tính $y'^2-2y.y''$.

A. 0. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có: $y'=x+1\Rightarrow y''=1.$

Vậy: $y'^2-2y.y''=(x+1)^2-2\left(\frac{1}{2}x^2+x+1\right).1=x^2+2x+1-x^2-2x-2=-1.$

Ví dụ 7: Cho hàm số $y=x\sin x$. Tính $xy-2(y'-\sin x)+xy''$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** $\sin x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $y' = \sin x + \cos x \Rightarrow y'' = \cos x + \left(\cos x - x\sin x\right) = 2\cos x - x\sin x.$

Vậy:

$xy - 2\left(y' - \sin x\right) + xy'' = x^2\sin x - 2\left(\sin x + x\cos x - \sin x\right) + 2x\cos x - x^2\sin x = 0.$

Ví dụ 8: Cho hàm số $y = A\sin\left(\omega x + \varphi\right).$ Tính $M = y'' + \omega^2.y.$

A. $M = 1.$ **B.** $M = -1.$

C. $M = \cos^2\left(\omega x + 4\right).$ **D.** $M = 0.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $y' = A\omega\cos\left(\omega x + \varphi\right) \Rightarrow y' = -A\omega^2\sin\left(\omega x + \varphi\right)$

$\Rightarrow y'' + \omega^2 y = -A\omega^2\sin\left(\omega x + \varphi\right) + A\omega^2\sin\left(\omega x + \varphi\right) = 0.$

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = \sin 2x - \cos 2x$. Giải phương trình $y'' = 0.$

A. $x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$ **B.** $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

C. $x = \frac{\pi}{8} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$ **D.** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $y' = 2\cos 2x + 2\sin 2x \Rightarrow y'' = -4\sin 2x + 4\cos 2x.$

Phương trình $y'' = 0 \Leftrightarrow -4\sin 2x + 4\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 10: Cho hàm số: $y = \left(m - 4\right)\frac{x^2}{2} + \cos x.$

Tìm m sao cho $y'' \le 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}.$

A. $m \le 3.$ **B.** $m \le 2.$ **C.** $m \ge 3.$ **D.** $m \ge 2.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $y' = \left(m - 4\right)x - \sin x \Rightarrow y'' = m - 4 - \cos x$

$y'' \le 0 \Leftrightarrow m - 4 - \cos x \le 0 \Leftrightarrow \cos x \ge m - 4 (*)$

Vì $\cos x \ge -1, \forall x \in \mathbb{R}.$

Vậy bất phương trình (*) luôn nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -1 \ge m - 4 \Leftrightarrow m \le 3.$

Ví dụ 11: Cho hàm số $y = \frac{3x - 2}{1 - x}.$ Giải bất phương trình $y'' > 0.$

A. $x > 1.$ **B.** $x < 1.$ **C.** $x \ne 1.$ **D.** Vô nghiệm.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $y' = \frac{1}{\left(1 - x\right)^2} \Rightarrow y'' = \frac{2}{\left(1 - x\right)^3}.$

Vậy $y'' > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{(1-x)^3} > 0 \Leftrightarrow 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1.$

Ví dụ 12: Cho hàm số $y = -3x^3 + 3x^2 - x + 5;\ y^{(3)}(3)$ bằng:

A. $y^{(3)}(3) = -162$. **B.** $y^{(3)}(3) = 0$.

C. $y^{(3)}(3) = 54$. **D.** $y^{(3)}(3) = -18$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$y = -3x^3 + 3x^2 - x + 5 \Rightarrow y' = -9x^2 + 6x - 1$

$y'' = -18x + 6$

$y^{(3)} = -18 \Rightarrow y^{(3)}(3) = -18.$

Ví dụ 13: Cho hàm số $y = \sin^2 x$. Đạo hàm cấp 4 của hàm số là:

A. $-\cos^2 2x.$ **B.** $8\cos 2x.$

C. $-8\cos 2x.$ **D.** Một kết quả khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$y = \sin^2 x$

$y' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$

$y'' = 2\cos 2x$

$y''' = -4\sin 2x$

$y^{(4)} = -8\cos 2x.$

Ví dụ 14: Cho hàm số $y = f(x) = \sin 2x.$ Hãy chọn câu đúng.

A. $4y - y'' = 0.$ **B.** $4y + y'' = 0.$ **C.** $y = y'\tan 2x.$ **D.** $y^2 + (y')^2 = 4.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$\begin{cases} y' = 2\cos 2x \\ y'' = -4\sin 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y - y'' = 8\sin 2x \\ 4y + y'' = 0 \end{cases}.$

Ví dụ 15: Cho hàm số $y = \sqrt{x^2+1}$. Xét hai quan hệ:

(I) $y.y' = 2x;$

(II) $y^2.y'' = y'.$

Quan hệ nào đúng?

A. Chỉ (I). **B.** Chỉ (II).

C. Cả hai đều đúng. **D.** Cả hai đều sai.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có:

$y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ và $y'' = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, suy ra $y.y' = x$ và $y^2.y'' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \neq y'.$

3. Bài tập rèn luyện tốc độ

Câu 1: Đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x) = 2x^5 - \dfrac{4}{x} + 1$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $40x^3-\frac{4}{x^3}$. **B.** $40x^3+\frac{4}{x^3}$. **C.** $40x^3-\frac{8}{x^3}$. **D.** $40x^3+\frac{8}{x^3}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$f(x)=2x^5-\frac{4}{x}+1$ thì $f'(x)=10x^4+\frac{4}{x^2}$, do đó $f''(x)=40x^3-\frac{8}{x^3}$.

Câu 2: Cho hàm số $y=\frac{2}{1+x}$; $y^{(3)}(1)$ bằng:

A. $-\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{3}{4}$.

C. $-\frac{4}{3}$. **D.** Một kết quả khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$y=\frac{2}{1+x}\Rightarrow y^{(3)}=\frac{-12}{(1+x)^4}$

$y^{(3)}(1)=\frac{-12}{16}=\frac{-3}{4}$.

Câu 7: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y=\sin 2x$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $-\sin 2x$. **B.** $-4\sin x$. **C.** $-4\sin 2x$. **D.** $-2\sin 2x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$y=\sin 2x$ thì $y'=2\cos 2x$. Do đó $y''=-4\sin 2x$.

Câu 8: Cho hàm số $y=\cos^2 x$. Tính y''?

A. $y''=-2\cos 2x$. **B.** $y''=-4\cos 2x$. **C.** $y''=2\cos 2x$. **D.** $y''=4\cos 2x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $y'=-2\cos x\sin x=-\sin 2x\Rightarrow y''=-2\cos 2x$.

Câu 9: Cho hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$. Tính $M=y^3.y''+1$.

A. -2. **B.** 0. **C.** -1. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $y'=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Rightarrow y''=\frac{1}{(2x-x^2)}.\left[-1.\sqrt{2x-x^2}-\frac{(1-x)^2}{\sqrt{2x-x^2}}\right]$

$=\frac{-1}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}\Rightarrow y^3.y''=-1\Rightarrow y^3.y''+1=0$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=(x+1)^4$. Tính $f''(2)$.

A. 27. **B.** 81. **C.** 96. **D.** 108.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $f'(x)=4(x+1)^3 \Rightarrow f''(x)=12(x+1)^2$. Vậy $f''(2)=108$.

Câu 11: Cho hàm số $y=\sin^3 x$. Tính $M=y''+9y$.

A. $\sin x$. **B.** $6\sin x$. **C.** $6\cos x$. **D.** $-6\sin x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $y'=3\sin^2 x\cos x \Rightarrow y''=6\sin x\cos^2 x-3\sin^3 x$.

Vậy:

$M=y''+9y=6\sin x\cos^2 x-3\sin^3 x+9\sin^3 x=6\sin x\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=6\sin x$.

Câu 12: Cho hàm số $y=3x^5-5x^4+3x-2$. Giải bất phương trình $y''<0$.

A. $x\in(-\infty;1)\setminus\{0\}$. **B.** $x\in(1;+\infty)$.

C. $x\in(-1;1)$. **D.** $x\in(-2;2)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $y'=15x^4-20x^3+3 \Rightarrow y''=60x^3-60x^2$.

$y''<0 \Leftrightarrow 60x^3-60x^2<0 \Leftrightarrow 60x^2(x-1)<0 \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ x\neq 0 \end{cases}$.

Câu 13: Cho hàm số $y=\dfrac{1}{(x+1)^3}$. Giải bất phương trình $y''<0$.

A. $x<-1$. **B.** $x>-1$. **C.** $x\neq 1$. **D.** Vô nghiệm.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $y'=\dfrac{-3}{(x+1)^4} \Rightarrow y''=\dfrac{12}{(x+1)^5}$.

Vậy $y''<0 \Leftrightarrow \dfrac{12}{(x+1)^5}<0 \Leftrightarrow x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)=\sin x$. Hãy chọn câu **sai**.

A. $y'=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$. **B.** $y''=\sin(x+\pi)$.

C. $y'''=\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)$. **D.** $y^{(4)}=\sin(2\pi-x)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$y^{(4)}=\cos\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)=\sin x$.

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{-2x^2+3x}{1-x}$. Đạo hàm cấp 2 của f là:

A. $y''=2+\dfrac{1}{(1-x)^2}$. **B.** $y''=\dfrac{2}{(1-x)^3}$.

C. $y''=\frac{-2}{(1-x)^3}$. **D.** $y''=\frac{2}{(1-x)^4}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$y=2x-1+\frac{1}{1-x}\Rightarrow y'=2+\frac{1}{(1-x)^2}\Rightarrow y''=\frac{2(1-x)(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^3}$.

Câu 16: Cho hàm số: $y=(2-m)x^4+2x^3+2mx^2+2m-1$.

Tìm m để phương trình $y''=0$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right)\setminus\{2\}$. **B.** $m\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{2\}$.

C. $m\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{2\}$. **D.** $m\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)\setminus\{2\}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $y'=4(2-m)x^3+6x^2+4mx\Rightarrow y''=12(2-m)x^2+12x+4m$.

Phương trình $y''=0$ có hai nghiệm phân biệt hay phương trình: $3(2-m)x^2+3x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2-m\neq 0\\ \Delta>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2-m\neq 0\\ 4m^2-8m+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 2\\ \left[\begin{array}{l}m<\frac{1}{2}\\ m>\frac{3}{2}\end{array}\right.\end{cases}.$$

Dạng 2: Tìm đạo hàm cấp n của hàm số y=f(x)

1. Phương pháp

- ✓ Tính đạo hàm $f'(x), f''(x), f^{(3)}(x)$.
- ✓ Dự đoán công thức đạo hàm cấp n của hàm số.
- ✓ Chứng minh công thức dự đoán bằng quy nạp toán học.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=\sin x$, dự đoán công thức $y^{(n)}(x)$ bằng:

A. $y^{(n)}=\sin(x+n\pi)$. **B.** $y^{(n)}=\cos(x+n\pi)$.

C. $y^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$. **D.** $y^{(n)}=\cos\left(x-n.\frac{\pi}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta chứng minh bằng quy nạp

- ☐ Với n = 1, ta có $y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ đúng.
- ☐ Giả sử công thức đúng với n = k, tức là $y^{(k)}=\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)$.
- ☐ Ta chứng minh công thức đúng với n = k + 1, tức là chứng minh:

$y^{(k+1)} = \sin\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$. Thật vậy:

$y^{(k+1)} = \left[y^{(k)}\right]' = \left[\sin(x + k\frac{\pi}{2})\right]' = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$. Vậy, ta được $y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \frac{1}{2x+1}$, dự đoán công thức $y^{(n)}(x)$ bằng:

A. $y^{(n)} = \sin(x + n\pi)$. **B.** $y^{(n)} = \cos(x + n\pi)$.

C. $y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$. **D.** $y^{(n)} = \cos\left(x - n.\frac{\pi}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

$y' = -\frac{2}{(2x+1)^2}$; $y'' = \frac{2^2.2}{(2x+1)^3}$ và $y''' = -\frac{2^3.2.3}{(1+x)^4}$.

Dự đoán:

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n.2^n.n!}{(2x+1)^{n+1}}.$$

Ta đi chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp.

- Với n = 1, ta có:

$$y' = \frac{(-1).2.1!}{(2x+1)^{1+1}} = -\frac{2}{(2x+1)^2} \text{ đúng.}$$

- Giả sử công thức đúng với n = k, tức là $y^{(k)} = \frac{(-1)^k.2^k.k!}{(2x+1)^{k+1}}$. (*)

- Ta đi chứng minh (2) đúng với n = k + 1, tức là chứng minh:

$$y^{(k+1)} = \frac{(-1)^{k+1}.2^{k+1}.(k+1)!}{(2x+1)^{k+2}}.$$

Thật vậy:

$y^{(k+1)} = [y^{(k)}]' = [\frac{(-1)^k.2^k.k!}{(2x+1)^{k+1}}]' = (-1)^k.2^k.k!\left[\frac{1}{(2x+1)^{k+1}}\right]'$

$= (-1)^k.2^k.k!\left[-\frac{2(k+1)}{(2x+1)^{k+2}}\right] = \frac{(-1)^{k+1}.2^{k+1}.(k+1)!}{(2x+1)^{k+2}}$, đpcm.

Vậy, ta được: $y^{(n)} = \frac{(-1)^n.2^n.n!}{(2x+1)^{n+1}}$.

3. Bài tập rèn luyện tốc độ

Câu 19: Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = \frac{2x+1}{x^2-5x+6}$.

A. $y^{(n)} = \frac{(2)^n.7.n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(1)^n.5.n!}{(x-3)^{n+1}}$.

B. $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}.7.n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^{n+1}.5.n!}{(x-3)^{n+1}}$.

C. $y^{(n)}=\frac{(-1)^n.7.n!}{(x-2)^n}-\frac{(-1)^n.5.n!}{(x-3)^n}.$

D. $y^{(n)}=\frac{(-1)^n.7.n!}{(x-2)^{n+1}}-\frac{(-1)^n.5.n!}{(x-3)^{n+1}}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $2x+1=7(x-2)-5(x-3)$; $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

Suy ra $y=\frac{7}{x-3}-\frac{5}{x-2}.$

Mà $\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n.1^n.n!}{(x-2)^{n+1}}=\frac{(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}},\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n.n!}{(x-3)^{n+1}}$

Nên $y^{(n)}=\frac{(-1)^n.7.n!}{(x-2)^{n+1}}-\frac{(-1)^n.5.n!}{(x-3)^{n+1}}.$

Câu 20: Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y=\cos 2x.$

A. $y^{(n)}=(-1)^n\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right).$

B. $y^{(n)}=2^n\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right).$

C. $y^{(n)}=2^{n+1}\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right).$

D. $y^{(n)}=2^n\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right).$

Hướng dẫn giải:

ĐÁP ÁN D

Ta có $y'=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right),y''=2^2\cos\left(2x+2\frac{\pi}{2}\right),$

$y'''=2^3\cos\left(2x+3\frac{\pi}{2}\right).$

Bằng quy nạp ta chứng minh được $y^{(n)}=2^n\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right).$

Câu 21: Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y=\sqrt{2x+1}.$

A. $y^{(n)}=\frac{(-1)^{n+1}.3.5...(3n-1)}{\sqrt{(2x+1)^{2n-1}}}.$

B. $y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}.3.5...(2n-1)}{\sqrt{(2x+1)^{2n-1}}}.$

C. $y^{(n)}=\frac{(-1)^{n+1}.3.5...(2n-1)}{\sqrt{(2x+1)^{2n+1}}}.$

D. $y^{(n)}=\frac{(-1)^{n+1}.3.5...(2n-1)}{\sqrt{(2x+1)^{2n-1}}}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có $y' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}, y'' = -\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}, y''' = \frac{3}{\sqrt{(2x+1)^5}}$

Bằng quy nạp ta chứng minh được: $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}.3.5...(2n-1)}{\sqrt{(2x+1)^{2n-1}}}$.

Câu 22: Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = \frac{2x+1}{x^2-3x+2}$.

A. $y^{(n)} = \frac{5.(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}} + \frac{3.(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}$.

B. $y^{(n)} = \frac{5.(-1)^n.n!}{(x+2)^{n+1}} - \frac{3.(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}$.

C. $y^{(n)} = \frac{5.(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}} : \frac{3.(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}$.

D. $y^{(n)} = \frac{5.(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{3.(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $y = \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x-1}$

Bằng quy nạp ta chứng minh được: $y^{(n)} = \frac{5.(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{3.(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}$.

Câu 23: Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = \frac{x}{x^2+5x+6}$

A. $y^{(n)} = \frac{(-1)^n.3.n!}{(x+3)^{n+1}} + \frac{(-1)^n.2.n!}{(x+2)^{n+1}}$.

B. $y^{(n)} = \frac{(-1)^n.3.n!}{(x+3)^n} - \frac{(-1)^n.2.n!}{(x+2)^n}$.

C. $y^{(n)} = \frac{(-1)^n.3.n!}{(x+3)^{n+1}} - \frac{(-1)^n.2.n!}{(x+2)^{n+1}}$.

D. $y^{(n)} = \frac{(-1)^n.3.n!}{(x+3)^{n-1}} - \frac{(-1)^n.2.n!}{(x+2)^{n-1}}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có: $x = 3(x+2) - 2(x+3)$; $x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$

Suy ra $y = \frac{3}{x+3} - \frac{2}{x+2}$.

Mà $\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n.1^n.n!}{(x+2)^{n+1}} = \frac{(-1)^n.n!}{(x+2)^{n+1}}$, $\left(\frac{1}{x+3}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n.n!}{(x+)^{n+1}}$

Nên ta có: $y^{(n)}=\frac{(-1)^n.3.n!}{(x+3)^{n+1}}-\frac{(-1)^n.2.n!}{(x+2)^{n+1}}$.

Câu 24: Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y=\cos 2x$.

A. $y^{(n)}=2^n\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)$.

B. $y^{(n)}=2^{n-1}\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)$.

C. $y^{(n)}=2^n\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$.

D. $y^{(n)}=2^{n+1}\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có :

$y'=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right), y''=2^2\cos\left(2x+2\frac{\pi}{2}\right), y'''=2^3\cos\left(2x+3\frac{\pi}{2}\right)$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được $y^{(n)}=2^n\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)$.

Dạng 3: Ý nghĩa vật lý của đạo hàm cấp hai

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S=t^3-3t^2$
(t: tính bằng giây, s: tính bằng mét).
Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Vận tốc của chuyển động khi $t=3s$ là $v=12m/s$.

B. Vận tốc của chuyển động khi $t=3s$ là $v=24m/s$.

C. Gia tốc của chuyển động khi $t=4s$ là $a=18m/s^2$.

D. Gia tốc của chuyển động khi $t=4s$ là $a=9m/s^2$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

- $S=t^3-3t^2\Rightarrow v(t)=S'=3t^2-6t$

$\Rightarrow v(3)=3.3^2-18=9(m/s)$.

- $S=t^3-3t^2\Rightarrow a=S''=6t-6$

$a_{(t=4s)}=6.4-6=18(m/s^2)$.

Ví dụ 2: Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình: $S=t^3-3t^2+5t+2$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t=3$ là:

A. $24(m/s^2)$. **B.** $17(m/s^2)$. **C.** $14(m/s^2)$. **D.** $12(m/s^2)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Gia tốc của chuyển động khi $t=3$ bằng $S''(3)$.

$S'(t)=3t^2-6t+5; S''(t)=6t-6$ nên $S''(3)=18-6=12\left(m/s^2\right)$.

3. bài tập rèn luyện tốc độ

Câu 25: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình:

$$S=t^3-3t^2-9t+2$$ (t: tính bằng giây, s tính bằng mét).

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Vận tốc của chuyển động bằng 0 khi $t=0$ hoặc $t=3$.

B. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t=1$ là $a=12m/s^2$.

C. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t=3$ là $a=12m/s^2$.

D. Gia tốc của chuyển động bằng 0 khi $t=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

- $S=t^3-3t^2-9t+2$

$\Rightarrow v(t)=S3t^2-6t-9$

$$v(t)=0\Leftrightarrow 3t^2-6t-9=0\Leftrightarrow t^2-2t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=3\end{array}\right.$$

- $S=t^3-3t^2-9t+2$

$\Rightarrow a=S''=6t-6$

$\Rightarrow a_{(t=3s)}=6.3-6=12\left(m/s^2\right)$.

Câu 26: Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình: $S=t^3-2t^2+4t+1$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t=2$ là:

A. $12\left(m/s^2\right)$. **B.** $8\left(m/s^2\right)$. **C.** $7\left(m/s^2\right)$. **D.** $6\left(m/s^2\right)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Gia tốc của chuyển động khi $t=2$ bằng $S''(2)$.

$S'(t)=3t^2-4t+4; S''(t)=6t-4$ nên $S''(2)=12-4=8\left(m/s^2\right)$.

CHƯƠNG I. PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

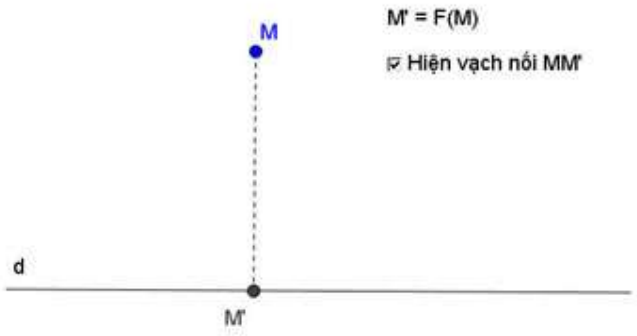
BÀI 1. PHÉP BIẾN HÌNH

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Đặt vấn đề: Trong mặt phẳng cho đường thẳng d và điểm M. Dựng hình chiếu vuông góc M' của điểm M lên đường thẳng d.

Ta đã biết rằng với mỗi điểm M có một điểm M' duy nhất là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng d cho trước (hình 1.1).



Hình 1.1

Ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa: *Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M của mặt phẳng với một điểm xác định duy nhất M' của mặt phẳng đó được gọi là phép biến hình trong mặt phẳng.*

Nếu kí hiệu phép biến hình là F thì ta viết F(M) = M' hay M' = F(M) và gọi điểm M' là ảnh của điểm M qua phép biến hình F.

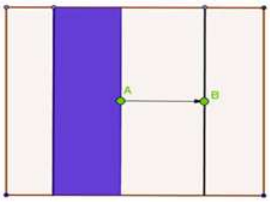
Nếu H là một hình nào đó trong mặt phẳng thì ta kí hiệu H ' = F(H) là tập các điểm $M' = F(M)$, với mọi điểm M thuộc H. Khi đó ta nói F biến hình H thành hình H ', hay hình H ' là ảnh của hình H qua phép biến hình F.

Phép biến hình biến mỗi điểm M thành chính nó được gọi là phép đồng nhất.

BÀI 2. PHÉP TỊNH TIẾN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Khi đẩy một cánh cửa trượt sao cho chốt cửa dịch chuyển từ vị trí A đến vị trí B ta thấy từng điểm của cánh cửa cũng được dịch chuyển một đoạn bằng AB và theo hướng từ A đến B (h.1.2). Khi đó ta nói cánh cửa được tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$.

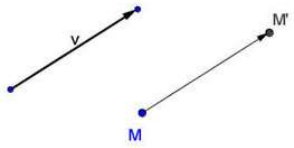


Hình 1.2

I. Định nghĩa

Trong mặt phẳng cho vectơ $\vec{v}$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ được gọi là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ thường được ký hiệu là $T_{\vec{v}}, \vec{v}$ được gọi là vectơ tịnh tiến.



Hình 1.3

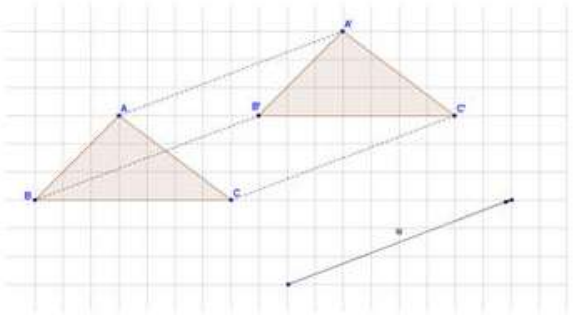
Như vậy: $T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$

Phép tịnh tiến theo vectơ – không chính là phép đồng nhất.

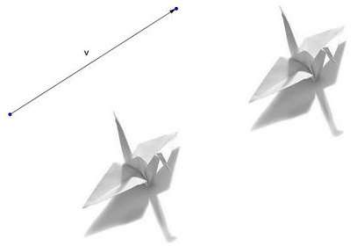
Ví dụ:

a)Phép tịnh tiến $T_{\vec{a}}$ biến các điểm A, B, C tương ứng thành các điểm A', B', C' (H.1.4a)

b) Phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ biến hình H thành hình H' (h.1.4b).



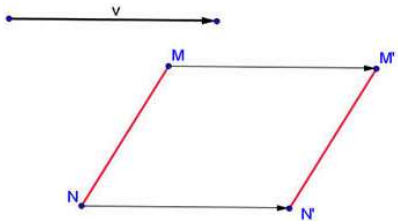
Hình 1.4 a



Hình 1.4 b

II. Tính chất

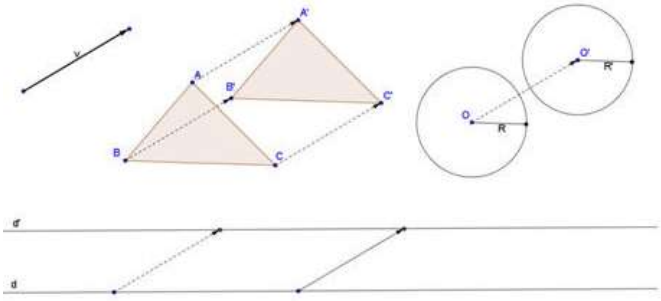
Tính chất 1. Nếu $T_{\vec{v}}(M)=M',\ T_{\vec{v}}(N)=N'$ thì $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$ và từ đó suy ra $M'N'=MN$



Nói cách khác, phép tính tiến bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ. Từ tính chất 1 ta chứng minh được tính chất sau.

Tính chất 2

Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính (h.1.7).



Hình 1.7

III. Biểu thức tọa độ

Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(x;y)$ và vectơ $\vec{v}=(a;b)$. Gọi $M'(x';y')=T_{\vec{v}}(M)$. Ta có:

$$\begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases}$$

Đây là biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Xá định ảnh của một điểm, tạo ảnh hoặc vecto tinh tiến

1. Phương pháp giải:

Ta có thể sử dụng định nghĩa $T_{\vec{v}}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{v}$

Ta sử dụng biểu thức tọa độ: cho điểm $M(x;y)$ và vectơ $\vec{v}=(a;b)$.

Gọi $M'(x';y')=T_{\vec{v}}(M)$. Ta có: $\begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases}$

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ biến điểm $A(1;3)$ thành điểm $A'(1;7)$. Tìm tọa độ của vectơ tịnh tiến $\vec{v}$.

Lời giải

Ta có: $T_{\vec{v}}(A)=A' \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'}=\vec{v} \rightarrow \vec{v}=(0;4)$.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho $A(1;9)$, $B(3;-2)$, $T_{\vec{v}}(B)=A$. Tìm $\vec{v}$.

Lời giải

Ta có $T_{\vec{v}}(B)=A \Rightarrow \vec{v}=\overrightarrow{BA}=(-2;11)$.

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, biết $M'(-3;0)$ là ảnh của $M(1;-2)$ qua $T_{\vec{u}}$, $M''(2;3)$ là ảnh của M' qua $T_{\vec{v}}$. Tọa độ $\vec{u}+\vec{v}$

Lời giải

Ta có: $T_{\vec{u}}(M)=M' \Leftrightarrow \vec{u}=\overrightarrow{MM'}=(-4;2)$;

$T_{\vec{v}}(M')=M'' \Leftrightarrow \vec{v}=\overrightarrow{M'M''}=(5;3)$.

Khi đó $\vec{u}+\vec{v}=(1;5)$.

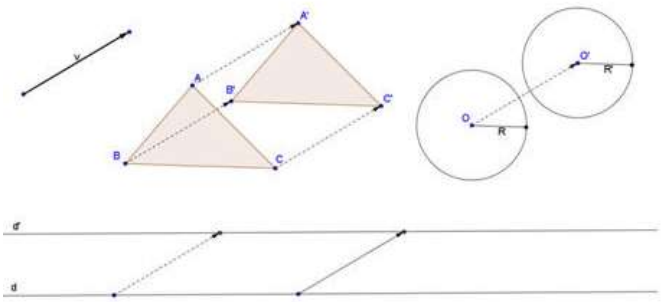
Dạng 1. Xác định ảnh của một hình qua một phép tịnh tiến

1. Phương pháp giải:

Dùng định nghĩa, tính chất hoặc biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến.

Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính (h.1.7).

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133



Hình 1.7

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{v}=(2;-1)$ và đường thẳng d có phương trình $5x+3y-1=0$. Tìm phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

Giải

Cách 1. Vì $d'=T_{\vec{v}}(d)$ nên $d'\parallel d$. Do đó $d':5x+3y+c=0$. Lấy $M(-1;2)\in d$. Khi đó $M'=T_{\vec{v}}(M)=(-1+2;2-1)=(1;1)$. Mà $M'\in d'$ nên: $5.1+3.1+c=0\Leftrightarrow c=-8$. Vậy $d':5x+3y-8=0$.

Cách 2. Ta có: $\begin{cases}x'=x+2\\y'=y-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x'-2\\y=y'+1\end{cases}$

Thế x, y vào phương trình của d', ta được: $5.(x'-2)+3.(y'+1)-1=0\Leftrightarrow 5x'+3y'-8=0$.

Vậy phương trình đường thẳng $d':5x+3y-8=0$.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-4x+2y-4=0$. Tìm ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(3;2)$.

Giải

Cách 1. Biểu thức tọa độ của $T_{\vec{v}}$ là: $\begin{cases}x'=x+3\\y'=y+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'-3\\y=y'-2\end{cases}$.

Thay vào phương trình của (C) ta được:

$$(x'-3)^2+(y'-2)^2-4(x'-3)+2(y'-2)-4=0\Leftrightarrow x'^2+y'^2-10x'-2y'+17=0$$

Vậy ảnh của (C) qua $T_{\vec{v}}$ là: $(C'):x^2+y^2-10x-2y+17=0$.

Cách 2. Đường tròn có tâm $I(2;-1)$ và bán kính $r=3$. Ảnh $I'=T_{\vec{v}}(I)$ có tọa độ $(x'=2+3;y'=1)=(5;1)$. Đường tròn ảnh (C') có tâm $I'(5;1)$ và bán kính $r'=r=3$ nên có phương trình: $(x-5)^2+(y-1)^2=9\Leftrightarrow x^2+y^2-10x-2y+17=0$.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , ta xét phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u}=(a;b)$ biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$. Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến này là:

A. $\begin{cases}x'=x+b\\y'=y+a\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x'=x+a\\y'=y+b\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=x'+a\\y=y'+b\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x'=y+a\\y'=x+b\end{cases}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu phép tịnh tiến biến điểm $A(3;2)$ thành điểm $A'(2;3)$ thì nó biến điểm $B(2;5)$ thành:

A. điểm $B'(5;2)$ **B.** điểm $B'(1;6)$ **C.** điểm $B'(5;5)$ **D.** điểm $B'(1;1)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phải có $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AA'}$.

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu phép tịnh tiến biến điểm $M(4;2)$ thành điểm $M'(4;5)$ thì nó biến điểm $A(2;5)$ thành:

A. điểm $A'(5;2)$ **B.** điểm $A'(1;6)$ **C.** điểm $A'(2;8)$ **D.** điểm $A'(2;5)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Phải có $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{MM'}$.

Câu 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(4;6)$ biến đường thẳng a có phương trình $x+y-1=0$ thành:

A. đường thẳng $x+y+9=0$ **B.** đường thẳng $x+y-9=0$

C. đường thẳng $x-y+9=0$ **D.** đường thẳng $-x+y+9=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phép tịnh tiến đó biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ sao cho $x'-x=4$ và $y'-y=6$ hay $x=x'+4$ và $y=y'+6$. Nếu $M\in a$ thì $x+y+1=0$ nên $x'+4+y'+6-1=0$ hay $x'+y'+9=0$. Vậy M' nằm trên đường thẳng $x+y+9=0$.

Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu phép tịnh tiến biến điểm $A(2;-1)$ thành điểm $A'(3;0)$ thì nó biến đường thẳng nào sau đây thành chính nó?

A. $x+y-1=0$ **B.** $x-y-100=0$ **C.** $2x+y-4=0$ **D.** $2x-y-1=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Vectơ tịnh tiến là $\vec{u}=\overrightarrow{AA'}=(1;1)$, đường thẳng biến thành chính nó khi và chỉ khi nó có vectơ chỉ phương là $\vec{u}$.

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu phép tịnh tiến biến điểm $A(2;-1)$ thành điểm $A'(1;2)$ thì nó biến đường thẳng a có phương trình $2x-y+1=0$ thành đường thẳng có phương trình:

A. $2x-y+1=0$ **B.** $2x-y=0$ **C.** $2x-y+6=0$ **D.** $2x-y-1=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Lấy điểm $M(0;1)$ nằm trên a, M biến thành $M'(-1;4)$ mà M' nằm trên đường thẳng có phương trình $2x-y+6=0$ nên đó là đường thẳng ảnh của a.

Câu 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho vectơ $\vec{u}(3;-1)$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ biến điểm $M(1;-4)$ thành:

A. điểm $M'(4;-5)$ **B.** điểm $M'(-2;-3)$ **C.** điểm $M'(3;-4)$ **D.** điểm $M'(4;5)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phải có $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$.

Câu 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng song song a và a' lần lượt có phương trình $3x-2y=0$ và $3x-2y+1=0$. Phép tịnh tiến theo vectơ nào sau đây biến đường thẳng a thành đường thẳng a'?

A. $\vec{u}(-1;-1)$ **B.** $\vec{u}(1;-1)$ **C.** $\vec{u}(1;-2)$ **D.** $\vec{u}(-1;2)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Lấy điểm $O(0;0)$ nằm trên a, một điểm $M(x;y)$ nằm trên a' nếu $3x-2y+1=0$.

Vectơ tịnh tiến là $\vec{u}=\overrightarrow{OM}=(x;y)$ với điều kiện $3x-2y+1=0$. Vectơ $\vec{u}(-1;-1)$ ở phương án A thỏa mãn điều kiện đó.

Câu 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng song song a và a' lần lượt có phương trình $2x-3y-1=0$ và $2x-3y+5=0$. Phép tịnh tiến theo vectơ nào sau đây **không** biến đường thẳng a thành đường thẳng a'?

A. $\vec{u}(0;2)$ **B.** $\vec{u}(-3;0)$ **C.** $\vec{u}(3;4)$ **D.** $\vec{u}(1;-1)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Nếu vectơ tịnh tiến là $\vec{u}(a;b)$ thì điểm $M(x;y)$ biến thành điểm $M'(x';y')$ sao cho $x'=x+a$, $y'=y+b$ hay $x=x'-a, y=y'-b$. Vậy đường thẳng $2x-3y-1=0$ biến thành đường thẳng $2(x'-a)-3(y'-b)-1=0$ hay $2x'-3y'-2a+3b-1=0$. Muốn đường thẳng này trùng với đường thẳng $a':2x-3y+5=0$ ta phải có $-2a+3b-1=5$ hay $-2a+3b=6$. Vectơ $\vec{u}$ ở phương án D không thỏa mãn điều kiện đó.

Câu 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng song song a và a' lần lượt có phương trình $3x-4y+5=0$ và $3x-4y=0$. Phép tịnh tiến theo $\vec{u}$ biến đường thẳng a thành đường thẳng a'. Khi đó độ dài bé nhất của vectơ $\vec{u}$ bằng bao nhiêu?

A. 5 **B.** 4 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng a và a'.

Câu 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng a có phương trình $3x-2y-5=0$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(1;-2)$ biến đường thẳng đó thành đường thẳng a' có phương trình:

A. $3x-2y-4=0$ **B.** $3x+2y=0$ **C.** $3x-2y+10=0$ **D.** $3x-2y-7=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phép tịnh tiến có biểu thức tọa độ $x'=x+1; y'=y-2$. Như vậy $x=x'-1; y=y'+2$, thay vào phương trình của a ta được phương trình của a' là $3(x'-1)-2(y'-2)-5=0$, vậy a' có phương trình $3x-2y-4=0$.

Câu 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol có đồ thị $y=x^2$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(2;-3)$ biến parabol đó thành đồ thị của hàm số:

A. $y=x^2+4x+1$ **B.** $y=x^2-4x+1$ **C.** $y=x^2-4x-1$ **D.** $y=x^2+4x-1$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phép tịnh tiến biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ mà $x=x'-2; y=y'+3$ nếu M thuộc parabol đã cho thì $y'+3=(x'-2)^2$ hay $y'=x'^2-4x'+1$. Vậy M thuộc parabol có đồ thị như phương án B.

Câu 13. Trong hệ tọa độ Oxy, cho phép biến hình f biến mỗi điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ sao cho $x'=2x; y'=-y+2$. Phép biến hình f biến đường thẳng $\Delta: x+3y+5=0$ thành đường thẳng d có phương trình là:

A. $x+2y-4=0$ **B.** $x-6y+22=0$ **C.** $2x-4y+5=0$ **D.** $3x+2y-4=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Từ giả thiết suy ra: $x=\frac{x'}{2}$ và $y=-y'+2$.

Thế vào phương trình của Δ ta được: $\frac{x'}{2}+3\left(-y'+2\right)+5=0\Leftrightarrow x'-6y'+22=0$.

Vậy ảnh của Δ là đường thẳng có phương trình $x-6y+22=0$.

Câu 14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $4x-y+3=0$. Ảnh của đường thẳng qua phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u}=\left(2;-1\right)$ có phương trình là:

A. $4x-y+5=0$ **B.** $4x-y+10=0$ **C.** $4x-y-6=0$ **D.** $x-4y-6=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến: $\begin{cases}x'=x+2\\y'=y-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'-2\\y=y'+1\end{cases}$

Thế vào phương trình của Δ ta được: $4\left(x'-2\right)-\left(y'+1\right)+3=0\Leftrightarrow 4x'-y'-6=0$.

Vậy ảnh của Δ là đường thẳng Δ' có phương trình: $4x-y-6=0$.

Câu 15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, parabol (P) có phương trình $y=x^2$. Phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u}=\left(3;2\right)$ biến (P) thành parabol (P') có phương trình là:

A. $y=x^2-6x+11$ **B.** $y=x^2-4x+3$ **C.** $y=x^2+4x+6$ **D.** $y=x^2+2x-4$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến: $\begin{cases}x'=x+3\\y'=y+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'-3\\y=y'-2\end{cases}$

Thế vào phương trình của (P) ta được: $y'-2=\left(x'-3\right)^2\Leftrightarrow y'=x'^2-6x'+11$.

Vậy ảnh của (P) là parabol (P') có phương trình: $y=x^2-6x+11$.

Câu 16. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $3x-4y+1=0$. Thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về bên phải một đơn vị, đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình là:

A. $3x-4y+5=0$ **B.** $3x-4y-2=0$ **C.** $3x-4y+3=0$ **D.** $3x-4y-10=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về bên phải một đơn vị, tức là thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{i}=\left(1;0\right)$. Do đó đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình: $3\left(x-1\right)-4y+1=0\Leftrightarrow 3x-4y-2=0$.

Câu 17. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $2x-y+3=0$. Thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về bên trái hai đơn vị, đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình là:

A. $2x-y+7=0$ **B.** $2x-y-2=0$ **C.** $2x-y+8=0$ **D.** $2x-y-6=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về bên trái 2 đơn vị, tức là thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(-2;0)$. Do đó đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình: $2(x+2)-y+3=0\Leftrightarrow 2x-y+7=0$.

Câu 18. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $y=5x-3$. Thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục tung về phía trên 3 đơn vị, đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình là:

A. $y=5x+4$ **B.** $y=5x-12$ **C.** $y=5x$ **D.** $y=5x-7$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục tung về phía trên 3 đơn vị, tức là thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(0;3)$. Do đó đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình: $y-3=5x-3\Leftrightarrow y=5x$.

Câu 19. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $y=-4x+3$. Thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục tung về phía dưới 4 đơn vị, đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình là:

A. $y=-4x+14$ **B.** $y=-4x+1$ **C.** $y=-4x-2$ **D.** $y=-4x-1$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục tung về phía dưới 4 đơn vị, tức là thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(0;-4)$. Do đó đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình: $y+4=-4x+3\Leftrightarrow y=-4x-1$.

Câu 20. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $y=-3x+2$. Thực hiện liên tiếp hai phép tịnh tiến theo các vectơ $\vec{u}=(-1;2)$ và $\vec{v}=(3;1)$, đường thẳng Δ biến thành đường thẳng d có phương trình là:

A. $y=-3x+1$ **B.** $y=-3x-5$ **C.** $y=-3x+9$ **D.** $y=-3x+15$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Từ giả thiết suy ra d là ảnh của Δ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}$.

Ta có: $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}=(-1+3;2+1)\Rightarrow\vec{a}=(2;3)$

Do đó đường thẳng có phương trình là: $y-3=-3(x-2)\Leftrightarrow y=-3x+9$.

Câu 21. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y=x^2-2x+3$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(-1;2)$ biến parabol (P) thành parabol (P') có phương trình là:

A. $y=x^2+4$ **B.** $y=x^2+4-3$ **C.** $y=x^2+2x+2$ **D.** $y=x^2-4x+5$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến, ta có: $\begin{cases}x'=x-1\\y'=y+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'+1\\y=y'-2\end{cases}$

Thế vào phương trình của (P) ta được: $y'-2=(x'+1)^2-2(x'+1)+3\Leftrightarrow y'=x'^2+4$.

Vậy phương trình của (P') là: $y=x^2+4$.

Câu 22. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y=-2x^2+x-1$. Phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về bên phải 2 đơn vị, biến parabol (P) thành parabol (P') có phương trình là:

A. $y=-2x^2+9x-11$ **B.** $y=-2x^2-x+3$ **C.** $y=-2x^2+3x+2$ **D.** $y=-2x^2-5x+6$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về bên phải 2 đơn vị, tức là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(2;0)$. Do đó phương trình của (P') là: $y=-2(x-2)^2+(x-2)-1\Leftrightarrow y=-2x^2+9x-11$.

Câu 23. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y=-x^2+2x+3$. Phép tịnh tiến theo phương của trục tung về dưới 3 đơn vị, biến parabol (P) thành parabol (P') có phương trình là:

A. $y=-x^2+2x$ **B.** $y=-x^2+5x-2$ **C.** $y=-x^2-3x+4$ **D.** $y=-x^2+7x+5$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phép tịnh tiến theo phương của trục tung về bên dưới 3 đơn vị, tức là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(0;-3)$.

Do đó phương trình của (P') là: $y+3=-x^2+2x+3\Leftrightarrow y=-x^2+2x$.

Câu 24. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y=x^2-x+1$. Thực hiện liên tiếp hai phép tịnh tiến theo các vectơ $\vec{u}=(1;-2)$ và $\vec{v}=(2;3)$, parabol (P) biến thành parabol (Q) có phương trình là:

A. $y=x^2-7x+14$ **B.** $y=x^2+3x+2$ **C.** $y=x^2+5x+2$ **D.** $y=x^2-9x+5$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Từ giả thiết ta suy ra, (Q) là ảnh của (P) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}$.

Ta có: $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}=(3;1)$.

Do đó phương trình của (Q) là: $y-1=(x-3)^2-(x-3)+1\Leftrightarrow y=x^2-7x+14$.

Câu 25. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (T) có phương trình $x^2+y^2-2x-8=0$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(3;-1)$, biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình là:

A. $x^2+y^2-8x+2y+8=0$ **B.** $x^2+y^2+4x-y-5=0$

C. $x^2+y^2-4x+4y-3=0$ **D.** $x^2+y^2+6x-4y+2=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến: $\begin{cases}x'=x+3\\y'=y-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'-3\\y=y'+1\end{cases}$

Thế vào phương trình của (T) ta có: $(x'-3)^2+(y'+1)^2-2(x'-3)-8=0\Leftrightarrow x'^2+y'^2-8x'+2y'+8=0$.

Vậy phương trình của (T') là: $x^2+y^2-8x+2y+8=0$.

Câu 26. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (T) có phương trình $x^2+y^2-4x-2y=0$. Gọi I là tâm của (T). Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(5;-1)$ biến điểm I thành điểm I' có tọa độ là:

A. $(-7;2)$ **B.** $(7;0)$ **C.** $(3;-2)$ **D.** $(5;3)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phương trình đường tròn (T) viết lại: $(x-2)^2+(y-1)^2=5$.

Như thế (T) có tâm $I(2;1)$.

Suy ra, phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(5;-1)$ biến điểm I thành điểm $I'(7;0)$.

Câu 27. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường tròn (T_1) và (T_2) bằng nhau có phương trình lần lượt là $(x-1)^2+(y+2)^2=16$ và $(x+3)^2+(y-4)^2=16$. Giả sử f là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ biến (T_1) thành (T_2), khi đó tọa độ của $\vec{u}$ là:

A. $(-4;6)$ **B.** $(4;-6)$ **C.** $(3;-5)$ **D.** $(8;-10)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Hai đường tròn (T_1) và (T_2) có tâm lần lượt là: $I_1(1;-2)$ và $I_2(-3;4)$.

Vậy phép tịnh tiến T biến (T_1) thành (T_2) là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{I_1I_2}=(-4;6)$.

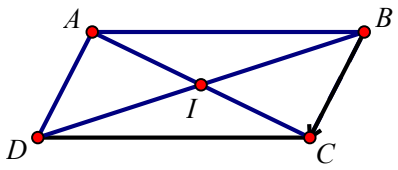
Câu 28. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD với $A(1;4), B(-2;1), C(7;-1)$. Nếu T là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ biến đoạn thẳng AB thành đoạn thẳng CD thì vectơ $\vec{u}$ có tọa độ là:

A. $(-9;3)$ **B.** $(5;-4)$ **C.** $(9;-2)$ **D.** $(8;5)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Dễ thấy phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{BC}=(9;-2)$ biến đoạn thẳng AB thành đoạn thẳng CD.



Câu 29. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng song song a và b có phương trình lần lượt là $2x-y+4=0$ và $2x-y-1=0$. Nếu phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u}=(m;-3)$ biến đường thẳng a thành đường thẳng b thì giá trị của m bằng:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Trên đường thẳng a ta lấy điểm $A(0;4)$. Phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u}=(m;-3)$ biến điểm A thành điểm A' định bởi: $\begin{cases}x'=0+m\\y'=4+(-3)\end{cases}\Rightarrow A'(m;1)$.

Vì T biến a thành b nên: $A'\in b\Leftrightarrow 2m-2=0\Leftrightarrow m=1$.

BÀI 3. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. Định nghĩa

1. – Cho đường thẳng d. Phép đối xứng qua đường thẳng d, kí hiệu là $Đ_d$, là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua d (Khi đó d là đường trung trực của đoạn MM').

- Phép đối xứng qua đường thẳng còn gọi đơn giản là phép đối xứng trục.
- Đường thẳng d gọi là trục của phép đối xứng, hay đơn giản là trục đối xứng.
- Gọi M_0 là hình chiếu vuông góc của M trên d. Ta có: $Đ_d(M)=M' \Rightarrow \overrightarrow{M_0M'}=-\overrightarrow{M_0M}$.

2. Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình (H) nếu $Đ_d$ biến (H) thành chính nó. Khi đó (H) gọi là hình có trục đối xứng.

II. Biểu thức tọa độ

Trong mặt phẳng Oxy, gọi $M(x;y)$ và $M'=Đ_d(M)=(x';y')$.

- Nếu d là trục Ox thì: $\begin{cases}x'=x\\y'=-y\end{cases}$.
- Nếu d là trục Oy thì: $\begin{cases}x'=-x\\y'=y\end{cases}$.

III. Tính chất

Phép đối xứng trục:

1. Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
2. Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm tương ứng.
3. Biến một đường thẳng thành đường thẳng.
4. Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.
5. Biến một đường tròn thành đường tròn có bán kính bằng bán kính của đường tròn đã cho.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định ảnh của một điểm, của một đường qua phép đối xứng trục

1. Phương pháp giải:

Dùng định nghĩa, tính chất hoặc biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục.

Trong mặt phẳng Oxy, gọi $M(x;y)$ và $M'=Đ_d(M)=(x';y')$.

- Nếu d là trục Ox thì: $\begin{cases}x'=x\\y'=-y\end{cases}$.
- Nếu d là trục Oy thì: $\begin{cases}x'=-x\\y'=y\end{cases}$.
- Nếu d : $y=x$ là trục đối xứng thì: $\begin{cases}x'=y\\y'=x\end{cases}$.
- Nếu d : $y=-x$ là trục đối xứng thì: $\begin{cases}x'=-y\\y'=-x\end{cases}$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu phép đối xứng trục biến điểm $M(2;3)$ thành điểm $M'(3;2)$ thì nó biến điểm $C(1;-6)$ thành điểm:

A. $C'(6;1)$. **B.** $C'(1;6)$.

C. $C'(-6;-1)$. **D.** $C'(-6;1)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Trục của phép đối xứng là đường thẳng $y=x$. Phép đối xứng đó biến điểm $M(a;b)$ thành điểm $M'(b;a)$.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu phép đối xứng trục biến điểm $M(3;1)$ thành điểm $M'(-1;-3)$ thì nó biến điểm $N(-3;-4)$ thành điểm:

A. $N'(3;4)$. **B.** $N'(3;-4)$.

C. $N'(4;-3)$. **D.** $N'(4;3)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Trục của phép đối xứng là đường thẳng $y=-x$. Phép đối xứng đó biến điểm $M(a;b)$ thành điểm $M'(-b;-a)$.

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $5x+y-3=0$. Đường thẳng đối xứng của Δ qua trục tung có phương trình là:

A. $5x+y+3=0$. **B.** $5x-y+3=0$. **C.** $x+5y+3=0$. **D.** $x-5y+3=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Hai điểm $M(x;y)$ và $M'(-x;y)$ thì đối xứng với nhau qua trục tung. Do đó đường thẳng đối xứng của $\Delta: 5x+y-3=0$ qua trục tung có phương trình là: $-5x+y-3=0 \Leftrightarrow 5x-y+3=0$

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y=2x^2+x+5$. Phép đối xứng trục $Đ_{Oy}$ biến parabol (P) thành parabol (P') có phương trình là:

A. $y=-2x^2+x-5$. **B.** $y=2x^2-x+5$. **C.** $y=-2x^2-x-5$. **D.** $y=-2x^2+x-5$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Hai điểm $M(x;y)$ và $M'(-x;y)$ thì đối xứng với nhau qua trục tung. Do đó phương trình của (P') là: $y=2(-x)^2+(-x)+5\Leftrightarrow y=2x^2-x+5$.

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $M(-4;3)$ và đường thẳng d có phương trình: $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\end{cases}$. Tìm ảnh của M và d qua phép đối xứng trục có trục đối xứng là d_1 là đường thẳng $2x+y-1=0$.

Giải

- Gọi $d'=Đ_{d_1}(d)$. Vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(2;1)$, vectơ chỉ phương của d_1 là $\vec{u_1}=(-1;2)$. Ta có: $\vec{u}.\vec{u_1}=0\Rightarrow d\perp d_1$.

Vậy: $d'\perp d_1$ và d' trùng với d.

- Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với $d_1:2x+y-1=0$, thì $\Delta:x-2y+c=0$.

Cho Δ qua $M(-4;3)$, ta có: $x=10$. Vậy $\Delta:x-2y+10=0$.

Gọi I là giao điểm của Δ và d_1 thì tọa độ của I là nghiệm của hệ: $\begin{cases}2x+y-1=0\\x-2y+10=0\end{cases}$.

Suy ra $I\left(-\frac{8}{5};\frac{21}{5}\right)$. Mà I là trung điểm của MM' nên $M'\left(\frac{4}{5};\frac{27}{5}\right)$.

Ví dụ 6: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ và đường elip $(E):x^2+4y^2=1$.

a. Tìm ảnh của (C) qua $Đ_d$ với $d:x+y=0$.

b. Tìm ảnh của (E) qua $Đ_{Oy}$.

Giải

a. Ảnh của (C) qua $Đ_d$: Gọi Δ là đường thẳng qua $I(-1;2)$ và vuông góc với $d:x+y=0$, ta có $\Delta:x-y+3=0$.

Tọa độ giao điểm H của Δ và d là: $H\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Gọi $I'=Đ_d(I)$, ta có: $\begin{cases}x'=2x_H-x\\y'=2y_H-y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'=-2\\y=1\end{cases}$.

Do đó: $I'(-2;1)$.

Mặt khác, (C') có bán kính $R'=3$ nên $(C'):(x+2)^2+(y-1)^2=9$.

b. Ảnh (E') của (E) qua $Đ_{Oy}$: Biểu thức tọa độ của $Đ_{Oy}$ là: $\begin{cases}x'=-x\\y'=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-x'\\y=y'\end{cases}$.

Do đó, $(E'):(-x')^2+4y'^2=1$ hay $x^2+4y^2=1$.

Cách khác: (E) có trục đối xứng là Oy, nên (E) không đổi qua $Đ_{Oy}$. Do đó $(E'): x^2 + 4y^2 = 1$.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu phép đối xứng trục biến điểm $A(0;1)$ thành điểm $A'(-1;0)$ thì nó biến điểm $B(-5;5)$ thành điểm:

A. $B(-5;5)$. **B.** $B'(5;5)$.

C. $B'(5;-5)$. **D.** $B'(-1;1)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép đối xứng qua đường thẳng $x+y=0$ biến đường thẳng $4x-5y+1=0$ thành đường thẳng có phương trình:

A. $-4x+5y+1=0$. **B.** $5x-4y+1=0$.

C. $5x+4y+1=0$. **D.** $4x+5y+1=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua đường thẳng $x+y=0$ là $x'=-y$ và $y'=-x$. Bởi vậy từ phương trình $4x-5y+1=0$ ta suy ra $-4y'+5x'+1=0$.

Vậy đường thẳng $4x-5y+1=0$ biến thành đường thẳng $5x-4y+1=0$.

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép đối xứng qua đường thẳng $x-y=0$ biến đường tròn có phương trình $x^2+y^2-2x-1=0$ thành đường tròn có phương trình:

A. $x^2+y^2-2y-1=0$. **B.** $x^2+y^2+2x-1=0$.

C. $x^2+y^2+2y-1=0$. **D.** $x^2+y^2-2x-1=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng đã cho là $x'=y$ và $y'=x$. Bởi vậy, từ phương trình $x^2+y^2-2x-1=0$ ta suy ra $y'^2+x'^2-2y'-1=0$, đó là tập hợp những điểm $(x';y')$ thỏa mãn phương trình đường tròn $x^2+y^2-2y-1=0$.

Câu 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-2x+3y-1=0$. Phép đối xứng qua trục Ox biến đường tròn đó thành đường tròn (C') có phương trình:

A. $x^2+y^2-2x+3y-1=0$. **B.** $x^2+y^2-2x-3y-1=0$.

C. $x^2+y^2+2x+3y-1=0$. **D.** $x^2+y^2-2x+3y+1=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Chỉ việc thay y bằng $-y$ trong phương trình đường tròn đã cho.

Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-2x+3y-1=0$. Phép đối xứng qua trục Oy biến đường tròn đó thành đường tròn (C') có phương trình:

A. $x^2+y^2-2x+3y-1=0$. **B.** $x^2+y^2-2x-3y-1=0$.

C. $x^2+y^2+2x+3y-1=0$. **D.** $x^2+y^2-2x+3y+1=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Chỉ việc thay x bằng $-x$ trong phương trình đường tròn đã cho.

Câu 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $2x-3y-6=0$. Đường thẳng đối xứng của Δ qua trục hoành có phương trình là:

A. $2x+3y+6=0$. **B.** $2x+3y-6=0$. **C.** $4x-y-6=0$. **D.** $3x+2y-6=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Hai điểm $M(x;y)$ và $M'(x;-y)$ thì đối xứng với nhau qua trục hoành. Do đó đường thẳng đối xứng của $\Delta: 2x-3y+6=0$ qua trục hoành có phương trình là: $2x+3y+6=0$.

Câu 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, gọi a là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất. Phép đối xứng trục $Đ_a$ biến điểm $A(4;3)$ thành điểm A' có tọa độ là:

A. $(-4;-3)$. **B.** $(4;-3)$. **C.** $(-4;3)$. **D.** $(3;4)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta có thể chứng minh được rằng: hai điểm $M(x;y)$ và $M'(y;x)$ thì đối xứng nhau qua a là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất của hệ tọa độ Oxy.

Suy ra: $A'(3;4)$.

Câu 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $2x-y+1=0$ và điểm $A(3;2)$. Trong các điểm dưới đây, điểm nào là điểm đối xứng của A qua đường thẳng Δ?

A. $M(-1;4)$. **B.** $N(-2;5)$. **C.** $P(6;-3)$. **D.** $Q(1;6)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Đường thẳng $\Delta: 2x-y+1=0$ có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(1;2)$. Gọi d là đường thẳng qua $A(3;2)$ vuông góc với Δ thì $\vec{a}$ là vectơ pháp tuyến của d. Phương trình của d là: $1(x-3)+2(y-2)=0 \Leftrightarrow x+2y-7=0$.

Tọa độ của điểm H là hình chiếu vuông góc của A trên Δ nghiệm đúng hệ phương trình: $\begin{cases}2x-y+1=0\\x+2y-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}\Rightarrow H(1;3)$.

Gọi B là điểm đối xứng của A qua Δ, thì H là trung điểm của AB nên: $\begin{cases}x_B=2x_H-x_A=-1\\y_B=2y_H-y_A=4\end{cases}\Rightarrow B(-1;4)$.

Chú ý: Vì đây là bài tập trắc nghiệm, nên để chọn câu đúng cho nhanh ta chỉ cần kiểm tra các lựa chọn. Ví dụ nếu chọn $M(-1;4)$ ta thấy ngay trung điểm của AM là $I(1;3)\in\Delta$, sau đó chỉ cần kiểm tra vectơ $\overrightarrow{AM}$ vuông góc với vectơ chỉ phương $\vec{a}=(1;2)$ của Δ.

Câu 9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (T) có phương trình $x^2+y^2-2x+y-5=0$. Phép đối xứng trục $Đ_{Ox}$ biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình là:

A. $x^2+y^2-2x-y-5=0$.
B. $x^2+y^2+2x+y-5=0$.
C. $x^2+y^2+2x-y-5=0$.
D. $x^2+y^2-x-2y+5=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Thay y bởi $-y$ ta được phương trình của đường tròn (T') là: $x^2+y^2-2x-y-5=0$.

Câu 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (T) có phương trình $(x-2)^2+(y+3)^2=16$. Phép đối xứng trục $Đ_{Oy}$ biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình là:

A. $(x+3)^2+(y-2)^2=16$.
B. $(x+2)^2+(y+3)^2=16$.
C. $(x+2)^2+(y-3)^2=16$.
D. $(x-2)^2+(y-3)^2=16$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Thay x bởi $-x$ ta được phương trình của đường tròn (T') là:

$(-x-2)^2+(y+3)^2=16\Leftrightarrow(x+2)^2+(y+3)^2=16$

Câu 11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, gọi b là đường phân giác của góc phần tư thứ hai. Phép đối xứng trục $Đ_b$ biến điểm $P(5;-2)$ thành điểm P' có tọa độ là:

A. $(5;2)$.
B. $(-5;2)$.
C. $(2;-5)$.
D. $(-2;5)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có thể chứng minh được rằng: Hai điểm $M(x;y)$ và $M'(-y;-x)$ thì đối xứng qua b là đường phân giác của góc phần tư thứ hai của hệ tọa độ Oxy.

Suy ra: $P'(2;-5)$.

Ghi chú: Đường phân giác của góc phần tư thứ hai là đường thẳng có phương trình $y=-x$.

Câu 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, gọi a là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất. Ta xét đường tròn (T) có phương trình $(x-2)^2+(y+3)^2=9$. Phép đối xứng trục $Đ_a$ biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình là:

A. $(x+3)^2+(y-2)^2=9$. **B.** $(x+2)^2+(y-3)^2=9$.

C. $(x-3)^2+(y+2)^2=9$. **D.** $(x+3)^2+(y+2)^2=9$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Thay x bởi y và y bởi x ta được phương trình của (T') là:

$(y-2)^2+(x+3)^2=9\Leftrightarrow(x+3)^2+(y-2)^2=9$.

Câu 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, gọi a là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất. Ta xét đường thẳng Δ có phương trình $3x-4y+5=0$. Phép đối xứng trục $Đ_a$ biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ' có phương trình là:

A. $4x-3y-5=0$. **B.** $3x+4y-5=0$. **C.** $4x-3y+5=0$. **D.** $3x+4y+5=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Thay x bởi y và y bởi x ta được phương trình của Δ' là: $3y-4x+5=0\Leftrightarrow 4x-3y-5=0$.

Câu 14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, gọi b là đường phân giác của góc phần tư thứ hai. Ta xét đường tròn (T) có phương trình $x^2+y^2-6x+4y-2=0$. Phép đối xứng trục $Đ_b$ biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình là:

A. $x^2+y^2+6x-4y-2=0$. **B.** $x^2+y^2+4x-6y-2=0$.

C. $x^2+y^2-6x+2y+2=0$. **D.** $x^2+y^2-4x+6y-2=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Thay x bởi $-y$ và y bởi $-x$ ta được phương trìn của (T') là:

$(-y)^2+(-x)^2-6(-y)+4(-x)-2=0\Leftrightarrow x^2+y^2-4x+6y-2=0$.

Câu 15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(2;6)$, $B(-1;2)$, $C(6;1)$. Gọi G là trọng tâm của ΔABC. Phép đối xứng trục $Đ_{Ox}$ biến điểm G thành điểm G' có tọa độ là:

A. $\left(\frac{2}{3};4\right)$. **B.** $(3;-3)$. **C.** $\left(\frac{7}{3};-3\right)$. **D.** $\left(\frac{4}{3};-4\right)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Từ giả thiết suy ra: $G\left(\frac{7}{3};3\right)\Rightarrow G'\left(\frac{7}{3};-3\right)$.

Câu 16. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(1;5)$, $B(-1;2)$, $C(6;-4)$. Gọi G là trọng tâm của ΔABC. Phép đối xứng trục $Đ_{Oy}$ biến điểm G thành điểm G' có tọa độ là:

A. $(-2;-1)$. **B.** $(2;-4)$. **C.** $(0;-3)$. **D.** $(-2;1)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Từ giả thiết suy ra: $G(2;1)\Rightarrow G'(-2;1)$.

Câu 17. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(0;4)$, $B(-2;3)$, $C(6;-4)$. Gọi G là trọng tâm của ΔABC và a là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất. Phép đối xứng trục $Đ_a$ biến điểm G thành điểm G' có tọa độ là:

A. $\left(\frac{4}{3};1\right)$. **B.** $\left(-\frac{4}{3};1\right)$. **C.** $\left(1;\frac{4}{3}\right)$. **D.** $\left(-1;-\frac{4}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $G\left(\frac{4}{3};1\right)\Rightarrow G'\left(1;\frac{4}{3}\right)$.

BÀI 4. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. Phép đối xứng tâm

1. Định nghĩa

- Phép đối xứng qua điểm O là một phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua O, có nghĩa là $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}=\vec{0}$.

$$Đ_O(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}=\vec{0}$$

- Điểm O gọi là tâm của phép đối xứng, hay đơn giản là tâm đối xứng.
- Phép đối xứng qua một điểm còn gọi đơn giản là phép đối xứng tâm.

2. Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm

Trong hệ tọa độ Oxy, cho điểm $I(a;b)$. Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ thì: $\begin{cases}x'=2a-x\\y'=2b-y\end{cases}$.

Công thức này gọi là biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm $Đ_I$.

Khi điểm $I\equiv O$ thì biểu thức tọa độ trở thành $\begin{cases}x'=-x\\y'=-y\end{cases}$

3. Tâm đối xứng của một hình

Điểm O gọi là tâm đối xứng của một hình H nếu phép đối xứng $Đ_O$ biến hình H thành chính nó, nghĩa là $Đ_O(H)=H$.

Ví dụ:

a. Các hình như hình bình hành, hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi đề có tâm đối xứng. Đó là giao điểm của hai đường chéo của mỗi hình.

b. Đường tròn có một tâm đối xứng, đó là tâm của nó.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm ảnh của 1 điểm, một đường qua phép đối xứng tâm

Câu 1: Trong mặt phẳng Oxy. Phép đối xứng tâm $O(0;0)$ biến điểm $M(-2;3)$ thành điểm:

A. $M'(-4;2)$. **B.** $M'(2;-3)$. **C.** $M'(-2;3)$. **D.** $M'(2;3)$.

Lời giải

Chọn B

+ Thay biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm $O(0;0)$ ta có :

$$\begin{cases}x'=2.0-x=-(-2)=2\\y'=2.0-y=-3\end{cases}$$

Vậy $M'(2;-3)$.

Câu 2: Trong mặt phẳng Oxy, ảnh của điểm $A(5;3)$ qua phép đối xứng tâm $I(4;1)$ là:

A. $A'(5;3)$. **B.** $A'(-5;-3)$. **C.** $A'(3;-1)$. **D.** $A'\left(\frac{9}{2};2\right)$.

Lời giải

Chọn C

Thay biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm $I(4;1)$ ta được: $\begin{cases} x' = 2.4 - 5 = 3 \\ y' = 2.1 - 3 = -1 \end{cases}$

Câu 3: Trong mặt phẳng Oxy, tìm phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$ qua phép đối xứng tâm $I(1;0)$.

A. $x^2 + (y-2)^2 = 1$ **B.** $(x+2)^2 + y^2 = 1$

C. $(x-2)^2 + y^2 = 1$ **D.** $x^2 + (y+2)^2 = 1$

Lời giải

Chọn C

Đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$, bán kính $R = 1$.

Gọi O' là ảnh của O qua phép đối xứng tâm $I(1;0)$.

Ta có: $\begin{cases} \frac{x_O + x_{O'}}{2} = x_I \\ \frac{y_O + y_{O'}}{2} = y_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{O'} = 2x_I - x_O \\ y_{O'} = 2y_I - y_O \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{O'} = 2.1 - 0 \\ y_{O'} = 2.0 - 0 \end{cases} \Rightarrow O'(2;0)$.

Đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép đối xứng tâm $I(1;0)$.

(C') có tâm $O'(2;0)$, bán kính $R' = R = 1$.

Phương trình đường tròn (C') là: $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

Câu 4: Cho điểm $I(1;1)$ và đường thẳng $d: x + 2y + 3 = 0$. Tìm ảnh của d qua phép đối xứng tâm I.

A. $d': x + y - 3 = 0$. **B.** $d': x + 2y - 7 = 0$.

C. $d': 2x + 2y - 3 = 0$. **D.** $d': x + 2y - 3 = 0$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1. Lấy điểm $M(x;y) \in d \Rightarrow x + 2y + 3 = 0 \quad (*)$

Gọi $M'(x';y') = Đ_I(M)$ thì $\begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - x' \\ y = 2 - y' \end{cases}$.

Thay vào $(*)$ ta được $(2 - x') + 2(2 - y') + 3 = 0 \Leftrightarrow x' + 2y' - 9 = 0$

Vậy ảnh của d là đường thẳng $d': x + 2y - 3 = 0$.

Cách 2. Gọi d' là ảnh của d qua phép đối xứng tâm I, thì d' song song hoặc trùng với d nên phương trình d' có dạng $x + 2y + c = 0$.

Lấy $N(-3;0)\in d$, gọi $N'=Đ_I(N)$ thì $N'(5;2)$.

Lại có $N'\in d'\Rightarrow 5+2.2+c=0\Leftrightarrow c=-9$.

Vậy $d':x+2y-3=0$.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép đối xứng tâm có tâm là điểm gốc tọa độ. Khi đó nó biến đường thẳng $3x-4y+13=0$ thành đường thẳng:

A. $3x+4y+13=0$ **B.** $3x+4y-13=0$ **C.** $3x-4y-13=0$ **D.** $-3x+4y+13=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Phép đối xứng qua O biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(-x;-y)$.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép đối xứng tâm với tâm là điểm $I(1;-1)$. Khi đó nó biến đường thẳng $2x-3y+5=0$ thành đường thẳng:

A. $2x-3y-7=0$ **B.** $2x-3y+7=0$ **C.** $2x+3y+7=0$ **D.** $2x-3y+4=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Điểm I phải cách đều đường thẳng đã cho và ảnh của nó.

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng song song a và b lần lượt có phương trình $3x+4y-1=0$ và $3x+4y+5=0$. Nếu phép đối xứng tâm biến a thành b thì tâm đối xứng phải là điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $I(2;-2)$ **B.** $I(2;2)$ **C.** $I(-2;2)$ **D.** $I(2;0)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Tâm đối xứng phải cách đều hai đường thẳng đã cho.;

Câu 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho điểm $I(a;b)$. Thực hiện phép đối xứng tâm I biến điểm $M(x;y)$ thành $M'(x';y')$. Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm này là:

A. $\begin{cases}x'=2b-x\\y'=2a-y\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x'=2a-x\\y'=2b-y\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x'=a-2x\\y'=b-2y\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x'=a-2y\\y'=b-2x\end{cases}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y=x^2+x$. Phương trình của parabol (Q) đối xứng với (P) qua gốc tọa độ O là:

A. $y=-x^2+x$. **B.** $y=x^2-x$. **C.** $y=-x^2-x$. **D.** $y=x^2-2x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Hai điểm $M(x;y)$ và $M'(-x;-y)$ thì đối xứng với nhau qua gốc tọa độ O. Do đó phương trình của parabol (Q) là: $-y=(-x)^2+(-x)\Leftrightarrow y=-x^2+x$.

Câu 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $I(2;-1)$ và đường thẳng Δ có phương trình $x+2y-2=0$. Ảnh của Δ qua phép đối xứng tâm $Đ_I$ là đường thẳng có phương trình:

A. $x+2y+2=0$. **B.** $x-2y+3=0$. **C.** $x+2y+6=0$. **D.** $2x-y+4=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm, ta có: $\begin{cases}x'=4-x\\y'=-2-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4-x'\\y=-2-y'\end{cases}$

Thế vào phương trình của Δ ta được: $(4-x')+2(-2-y')-2=0\Leftrightarrow -x'-2y'-2=0\Leftrightarrow x'+2y'+2=0$

Vậy phương trình ảnh của Δ là: $x+2y+2=0$.

Câu 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $I(2;-1)$ và đường tròn (T) có phương trình $x^2+y^2=9$. Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình là:

A. $x^2+y^2-8x+4y+11=0$. **B.** $x^2+y^2+4x+6y+5=0$.

C. $x^2+y^2-2x+4y=0$. **D.** $x^2+y^2-6x+2y-2=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm, ta có: $\begin{cases}x'=4-x\\y'=-2-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4-x'\\y=-2-y'\end{cases}$

Thế vào phương trình của (T) ta được: $(4-x')^2+(-2-y')^2=9\Leftrightarrow x'^2+y'^2-8x'+4y'+11=0$.

Vậy phương trình của (T') là: $x^2+y^2-8x+4y+11=0$.

Câu 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-8x+10y+32=0$. Phương trình của đường tròn (C') đối xứng của (C) qua gốc tọa độ O có phương trình là:

A. $(x+4)^2+(y-5)^2=9$. **B.** $(x-4)^2+(y-5)^2=16$.

C. $(x+4)^2+(y+5)^2=4$. **D.** Một phương trình khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Thay x bởi $-x$ và y bởi $-y$ ta được phương trình của (C') là:

$x^2+y^2+8x-10y+32=0\Leftrightarrow(x+4)^2+(y-5)^2=9$.

Câu 9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y = x^2 - 2x$ và điểm $I(-3;1)$. Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến parabol (P) thành parabol (P') có phương trình là:

A. $y = -x^2 - 14x - 46$. **B.** $y = -x^2 + 14x - 5$. **C.** $y = -x^2 - 7x + 12$. **D.** $y = -x^2 + 6x + 3$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm, ta có: $\begin{cases} x' = -6 - x \\ y' = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 - x' \\ y = 2 - y' \end{cases}$

Thế vào phương trình của (P) ta được: $2 - y' = (-6 - x')^2 - 2(-6 - x') \Leftrightarrow y' = -x'^2 - 14x' - 46$.

Vậy phương trình của (P') là: $y = -x^2 - 14x - 46$.

Câu 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $I(2;-1)$ và tam giác ABC với $A(1;4)$, $B(-2;3)$, $C(7;2)$. Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến trọng tâm G của tam giác ABC thành điểm G' có tọa độ là:

A. $(-2;5)$. **B.** $(2;-5)$. **C.** $(-1;-4)$. **D.** $(0;-5)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Trọng tâm của ΔABC là $G(2;3)$.

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm, ta được $G'(0;-5)$.

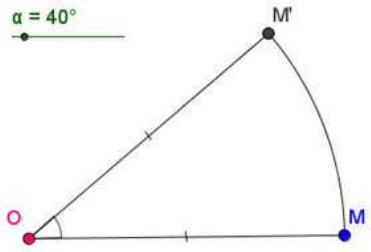
BÀI 5. PHÉP QUAY

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa

Cho điểm O và góc lượng giác α. Phép biến hình biến O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho OM' = OM và góc lượng giác (OM' OM') bằng α được gọi là phép quay tâm O góc α (h.1.27).

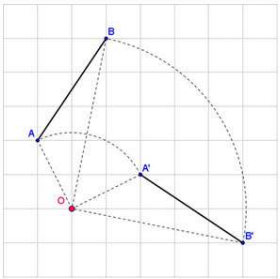


Hình 1.27

Điểm O được gọi là tâm quay còn α được gọi là góc quay của phép quay.

Phép quay tâm O góc α thường được kí hiệu là $Q(O;\alpha)$

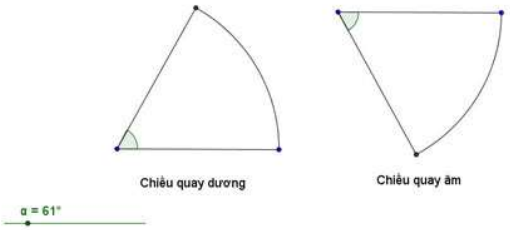
Ví dụ 1. Trên hình 1.28 ta có các điểm A', B', O tương ứng là ảnh của các điểm A, B, O qua phép quay tâm O, và góc quay $-\frac{\pi}{2}$



Hình 1.28

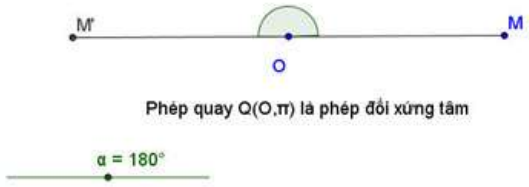
Nhận xét:

1) Chiều dương của phép quay là chiều dương của đường tròn lượng giác nghĩa là chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ.



Hình 1.30

2) Với k là số nguyên ta luôn có phép quay $Q_{(O, 2k\pi)}$ là phép đồng nhất.
Phép quay $Q_{(O, (2k+1)\pi)}$ là phép đối xứng tâm O (h. 1.32).



Hình 1.32

II. TÍNH CHẤT

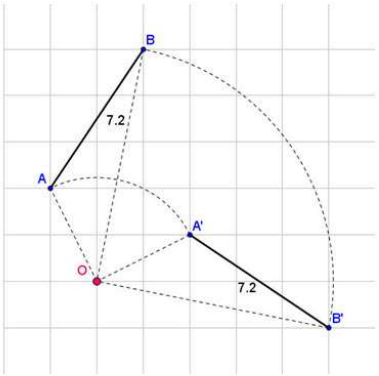
Quan sát chiếc tay lái (vô lăng) trên tay người lái xe ta thấy khi người lái xe quay tay lái một góc nào đó thì hai điểm A và B trên tay lái cũng quay theo. (h.1.34). Tuy vị trí A và B thay đổi nhưng khoảng cách giữa chúng không thay đổi. Điều đó được thể hiện trong tính chất sau của phép quay.



Hình 1.34

Tính chất 1.

Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.



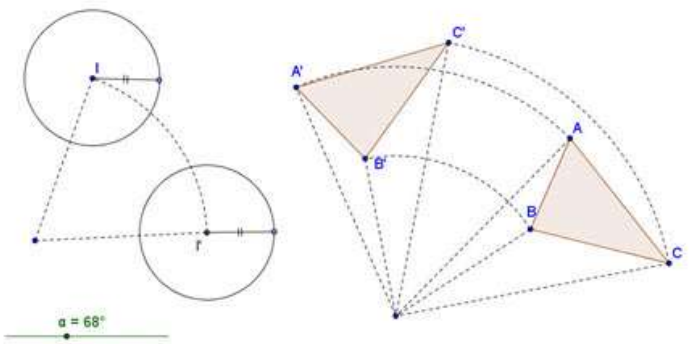
Hình 1.35

(Phép quay tâm O, góc (OA; OA') biến điểm A thành A', B thành B'.
Khi đó, ta có: A'B' = AB)

Tính chất 2.

Phép quay biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính (h.1.36).

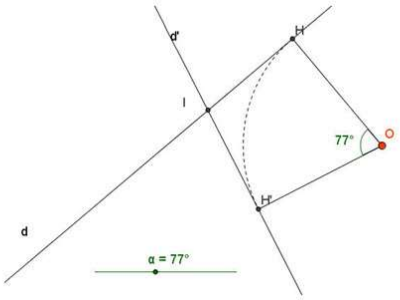
Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133



Hình 1.36

Nhận xét

Phép quay góc α với $0<\alpha<\pi$, biến đường thẳng d thành đường thẳng d ' sao cho góc giữa d và d' băng $\alpha\left(0<\alpha\le\frac{\pi}{2}\right)$, hoặc băng $\pi-\alpha$ (nếu $\frac{\pi}{2}\le\alpha<\pi$) (h.1.37).



Hình 1.37

III. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA PHÉP QUAY

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $I(a;b)$ cố định. Xét phép quay tâm I, góc quay φ. Giả sử cho điểm $M(x;y)$ và điểm $M'\left(x';y'\right)$ là ảnh của điểm M qua phép quay tâm 1 . Khi đố ta có:

$$\begin{cases}x'=(x-a)\cos\varphi-(y-b)\sin\varphi+a\\y'=(x-a)\sin\varphi+(y-b)\cos\varphi+b\end{cases}$$

Trường hợp đăc biệt:

Trong nhiều bài toán người ta cho tâm quay I là điểm $O(0;0)$. Khi đó biểu thức tọa độ của phép quay tâm O có dạng như sau:

$$\begin{cases}x'=x\cos\varphi-y\sin\varphi\\y'=x\sin\varphi+y\cos\varphi\end{cases}$$

- Nếu phép quay tâm O, góc quay $90^0\left(hay\frac{\pi}{2}\right)$ ta có biểu thứ tọa độ $\begin{cases}x'=-y\\y'=x\end{cases}$

- Nếu phép quay tâm O, góc quay -90^0 $\left(hay\ -\frac{\pi}{2}\right)$ ta có biểu thứ tọa độ $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$
- Nếu phép quay tâm O, góc quay $\pm 180^0$ $\left(hay \pm \pi\right)$ ta có biểu thứ tọa độ $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm ảnh của một điểm, của đường thẳng, đường tròn qua phép quay

1. Phương pháp giải: Ta thực hiện các bước sau:

- Sử dụng định nghĩa và tính chất của phép quay.
- Biểu thức tọa độ:

Ta cần lưu ý các trường hợp đặc biệt sau:

- Nếu phép quay tâm O, góc quay 90^0 $\left(hay \frac{\pi}{2}\right)$ ta có biểu thứ tọa độ $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$
- Nếu phép quay tâm O, góc quay -90^0 $\left(hay\ -\frac{\pi}{2}\right)$ ta có biểu thứ tọa độ $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$
- Nếu phép quay tâm O, góc quay $\pm 180^0$ $\left(hay \pm \pi\right)$ ta có biểu thứ tọa độ $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ảnh của điểm $M(-6;1)$ qua phép quay $Q_{(O,-90^0)}$ là

A. $M'(1;6)$. **B.** $M'(-6;-1)$. **C.** $M'(6;1)$. **D.** $M'(-1;-6)$.

Lời giải

Chọn A

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép quay tâm O góc quay 90° biến điểm $M\left(-1;2\right)$ thành điểm M'. Tìm tọa độ điểm M'.

A. $M'\left(-2;1\right)$. **B.** $M'\left(2;1\right)$. **C.** $M'\left(2;-1\right)$. **D.** $M'\left(-2;-1\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $d: x-y-4=0$. Viết phương trình đường thẳng d' với d' là ảnh của d qua phép quay tâm $I(1;1)$ góc quay $-\frac{\pi}{2}$.

A. $d': x-y-1=0$. **B.** $d': x+y+2=0$.

C. $d': x-y-2=0$. **D.** $d': x+y-2=0$.

Lời giải

Chọn B

Lấy $A\left(1;-3\right) \in d$, ảnh A' của A qua phép quay tâm $I(1;1)$ góc quay $-\frac{\pi}{2}$ là $A'\left(-3;1\right)$.

Nên d' có phương trình $x+y+2=0$.

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng có $d: 2x-y+1=0$, ảnh d' của d qua phép quay tâm O, góc quay -90^0 là:

A. $d': x-2y-1=0$ **B.** $d': x+2y-1=0$

C. $d': 2x-y+1=0$ **D.** $d': x+2y+1=0$

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x,y)\in d, M'(x',y')\in d'$ sao cho $Q_{(O,-90^0)}(M)=M' \Rightarrow \begin{cases} x=-y' \\ y=x' \end{cases}$

$M(x,y)\in d \Rightarrow x'+2y'-1=0 \Rightarrow d': x+2y-1=0$

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-3)^2+(y+1)^2=4$. $Q_{(O,90^\circ)}((C))=((C'))$. Viết phương trình đường tròn (C).

A. $(x+3)^2+(y-1)^2=4$. **B.** $(x-1)^2+(y+3)^2=4$.

C. $(x-1)^2+(y-3)^2=4$. **D.** $(x+1)^2+(y+3)^2=4$.

Lời giải

Chọn D

Đường tròn (C) có tâm $I(3;-1)$, bán kính $R=2$.

$Q_{(O,90^\circ)}(C)=(C') \Leftrightarrow Q_{(O,-90^\circ)}(C')=(C) \Leftrightarrow \begin{cases} Q_{(O,-90^\circ)}(I')=(I) \\ R'=R=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OI'=OI \\ (OI',OI)=-90^\circ \end{cases}$.

$\Rightarrow I'(-1;-3)$.

Vậy $(C'):(x+1)^2+(y+3)^2=4$.

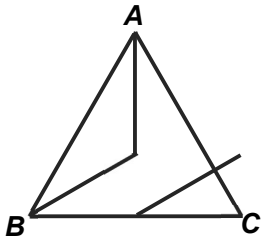
Dạng 2. Tìm ảnh của một hình qua phép quay, tìm số phép quay

1. Phương pháp giải:

Sử dụng định nghĩa và tính chất của phép quay.

2. Các ví dụ

Câu 1: Cho tam giác ABC đều tâm O (hình vẽ)



Hãy cho biết phép quay nào trong các phép quay dưới đây biến ΔOAB thành ΔOBC?

A. $Q_{(O;-60^\circ)}$. **B.** $Q_{(O;-120^\circ)}$. **C.** $Q_{(O;120^\circ)}$. **D.** $Q_{(O;60^\circ)}$.

Lời giải

Chọn C

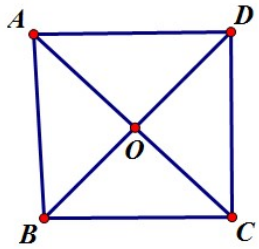
Ta có: Điểm A sẽ biến thành điểm B, điểm B sẽ biến thành điểm C qua phép quay tâm O góc quay $120°$.

Câu 2: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O. Ảnh của đường thẳng AB qua phép quay tâm O góc quay -180^0 là đường thẳng nào sau đây?

A. CD. **B.** AD. **C.** BC. **D.** AB.

Lời giải

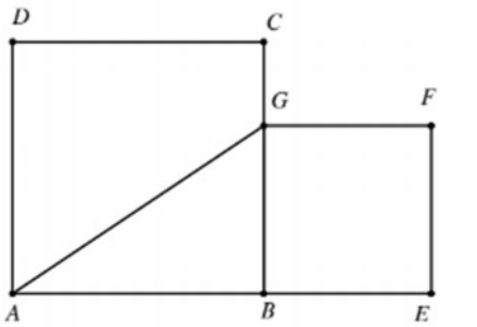
Chọn A



Phép quay tâm O góc quay -180^0 chính là phép đối xứng tâm O.

Vậy ảnh của đường thẳng AB qua phép quay tâm O góc quay -180^0 là đường thẳng CD.

Câu 3: Cho hai hình vuông $ABCD$ và $BEFG$ như hình vẽ. Tìm ảnh của tam giác ABG qua phép quay tâm B, góc quay $-90°$.



A. ΔBCD. **B.** ΔABD. **C.** ΔCBE. **D.** ΔDCG.

Lời giải

Chọn C

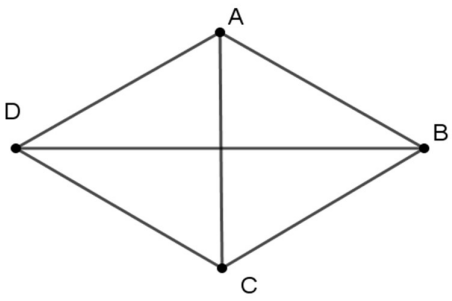
Dễ thấy $Q_{(B;-90°)}(B)=B$; $Q_{(B;-90°)}(A)=C$; $Q_{(B;-90°)}(G)=E$, nên $Q_{(B;-90°)}(\Delta ABG)=\Delta CBE$

Câu 4: Cho hình thoi $ABCD$ có góc $\widehat{ABC}=60^o$ (các đỉnh của hình thoi ghi theo chiều kim đồng hồ). Ảnh của cạnh CD qua phép quay $Q_{(A;60^o)}$ là

A. AB. **B.** CD. **C.** BC. **D.** DA.

Lời giải

Chọn C

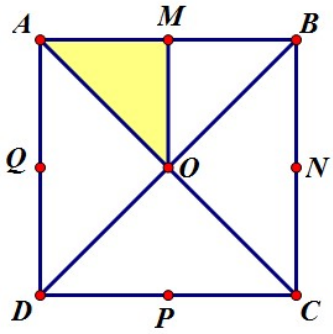


Ta có: $Q_{(A;60^o)}(C)=B$ và

$Q_{(A;60^o)}(D)=C$ nên

$Q_{(A;60^o)}(CD)=BC$.

Câu 5: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O như hình bên. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tìm ảnh của tam giác OAM qua phép quay tâm O góc quay 90^0 ?



A. Tam giác ODQ.

B. Tam giác OBN.

C. Tam giác OAQ.

D. Tam giác OCN.

Lời giải

Chọn A

Theo định nghĩa phép quay ta có: $Q_{(O,\alpha)}(M)=N \Leftrightarrow \begin{cases} OM=ON \\ (OM,\ ON)=\alpha \end{cases}$

Góc quay bằng $90^0 \Rightarrow$ hướng quay ngược chiều kim đồng hồ.

Dựa vào hình vẽ ta có: $\begin{cases} Q_{(O,90^0)}(O)=O \\ Q_{(O,90^0)}(A)=D \\ Q_{(O,90^0)}(M)=Q \end{cases}$

$\Rightarrow Q_{(O,90^0)}(\Delta OAM)=\Delta ODQ$.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tam giác đều ABC với trọng tâm G. Phép quay tâm G với góc quay nào dưới đây biến tam giác ABC thành chính nó?

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 120°.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Câu 2. Cho hình vuông ABCD có tâm O. Phép quay tâm O với góc quay nào dưới đây biến hình vuông ABCD thành chính nó?

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 90°. **D.** 120°.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép quay tâm O biến điểm $A(1;0)$ thành điểm $A'(0;1)$. Khi đó nó biến điểm $M(1;-1)$ thành điểm:

A. $M'(-1;-1)$. **B.** $M'(1;1)$. **C.** $M'(-1;1)$. **D.** $M'(1;0)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 4. Cho phép quay $Q(O;\varphi)$ biến điểm A thành điểm A' và biến điểm M thành điểm M'. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{A'M'}$. **B.** $(OA,OA')=(OM,OM')=\varphi$.

C. $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{A'M'})=\varphi$. **D.** $AM=A'M'$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 5. Cho tam giác ABC đều tâm O (O là tâm của đường tròn ngoại tiếp). Ta thực hiện phép quay tâm O biến tam giác ABC thành chính nó. Một số đo của góc quay φ là:

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 120°.

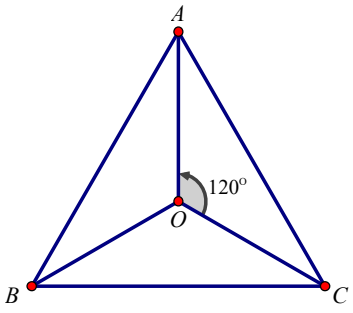
Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Trong tam giác đều ABC tâm O, ta có: $\widehat{COA}=120^o$.

Như vậy phép quay tâm O với góc quay $\varphi=120^o$ sẽ biến tam giác ABC thành chính nó.

Dĩ nhiên phép quay tâm O với góc quay bằng $k180^o$ cũng biến tam giác ABC thành chính nó.



Câu 6. Cho hình vuông ABCD tâm O. Ta xét các mệnh đề sau:

1. Phép quay $Q(O;45^o)$ biến hình vuông ABCD thành chính nó.
2. Phép quay $Q(O;60^o)$ biến hình vuông ABCD thành chính nó.
3. Phép quay $Q(O;90^o)$ biến hình vuông ABCD thành chính nó.
4. Phép quay $Q(O;180^o)$ biến hình vuông ABCD thành chính nó.

Trong các mệnh đề trên:

A. Có duy nhất một mệnh đề đúng. **B.** Có hai mệnh đề đúng.

C. Có ba mệnh đề đúng. **D.** Tất cả bốn mệnh đề đều đúng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Hai đường chéo của hình vuông vuông góc với nhau tại O. Dễ thấy các phép quay $Q\left(O;k90^o\right)$ biến hình vuông ABCD thành chính nó.

Câu 7. Cho phép quay $Q\left(O;\varphi\right)$ biến điểm M thành điểm M'. Chọn câu **sai** trong các câu sau:

A. Phép quay $Q\left(O;\varphi\right)$ là một phép dời hình.

B. Phép quay $Q\left(O;\varphi\right)$ có O là một điểm bất động.

C. Ta luôn có $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}$ và $\widehat{MOM'}=\varphi$.

D. Ta luôn có $OM=OM'$ và $\left(OM,OM'\right)=\varphi$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, có hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $2x+y+5=0$ và $x-2y-3=0$. Nếu có phép quay biến đường thẳng này thành đường thẳng kia thì số đo của góc quay φ là:

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 120°.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta thấy ngay hai đường thẳng a và b có phương trình $2x+y+5=0$ và $x-2y-3=0$ là vuông góc với nhau. Suy ra $\varphi=90^o$.

Câu 9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, có hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $4x+3y+5=0$ và $x+7y-4=0$. Nếu có phép quay biến đường thẳng này thành đường thẳng kia thì số đo của góc quay φ là:

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 120°.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Đường thẳng $a:4x+3y+5=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{u}=\left(4;3\right)$.

Đường thẳng $b:x+7y-4=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{v}=\left(1;7\right)$.

Gọi α là góc tạo bởi a và b ta có: $\cos\alpha=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right|=\dfrac{\left|4.1+3.7\right|}{\sqrt{4^2+3^2}.\sqrt{1^2+7^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $\alpha=45^o$.

Vậy $\varphi = 45^o$.

Câu 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(4;1)$. Phép quay $Q(O;90^o)$ biến điểm M thành điểm M' có tọa độ là:

A. $(1;4)$. **B.** $(-1;4)$. **C.** $(1;-4)$. **D.** $(-1;-4)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Nhận thấy:

+ $OM = OM' = \sqrt{17}$.

+ $\overrightarrow{OM} = (4;1)$, $\overrightarrow{OM'} = (-1;4) \Rightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = 0$

Do đó $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{OM'}$.

Vậy, phép quay $Q(O;90^o)$ biến điểm M thành điểm $M'(-1;4)$.

Câu 11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(1;4)$, $B(-2;2)$, $C(7;-9)$. Phép quay $Q(O;90^o)$ biến trọng tâm G của ΔABC thành điểm G' có tọa độ là:

A. $(1;-2)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(3;-1)$. **D.** $(-3;1)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có $G(2;-1)$. Suy ra $G'(1;2)$.

Câu 12. Cho tam giác đều ABC có tâm O và các đường cao AA', BB', CC' (các đỉnh của tam giác ghi theo chiều kim đồng hồ). Ảnh của đường cao AA' qua phép quay $Q(O;240^o)$ là:

A. AA'. **B.** BB'.

C. CC'. **D.** Một đoạn thẳng qua O song song với BC.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phép quay $Q(O;240^o)$ biến A thành B; A' thành B'.

Vậy ảnh của AA' là BB'.

Câu 13. Cho hình vuông ABCD tâm O (các đỉnh ghi theo chiều kim đồng hồ). Ảnh của cạnh AB qua phép quay $Q(O;270^o)$ là:

A. AB. **B.** BC. **C.** CD. **D.** DA.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phép quay $Q\left(O;270^o\right)$ biến A thành B, B thành C.

Vậy ảnh của AB là BC.

Câu 14. Cho hình thoi ABCD có góc $\widehat{ABC}=60^o$ (các đỉnh của hình thoi ghi theo chiều kim đồng hồ). Ảnh của cạnh CD qua qua phép quay $Q\left(A;60^o\right)$ là:

A. AB. **B.** BC. **C.** CD. **D.** DA.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phép quay $Q\left(A;60^o\right)$ biến C thành B; D thành C.

Vậy ảnh của CD là BC.

BÀI 6. KHÁI NIỆM PHÉP DỜI HÌNH VÀ HAI HÌNH BẰNG NHAU

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. Khái niệm về phép dời hình

Các phép tịnh tiến, đối xứng trục, đối xứng tâm và phép quay đều có một tính chất chung là bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ. Người ta dùng tính chất đó để định nghĩa phép biến hình sau đây.

Định nghĩa

Phép dời hình là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Nếu phép dời hình F biến các điểm M, N lần lượt thành các điểm M', N' thì MN = M'N'.

Nhận xét

1) Các phép đồng nhất, tịnh tiến, đối xứng trục, đối xứng tâm và phép quay đều là những phép dời hình.

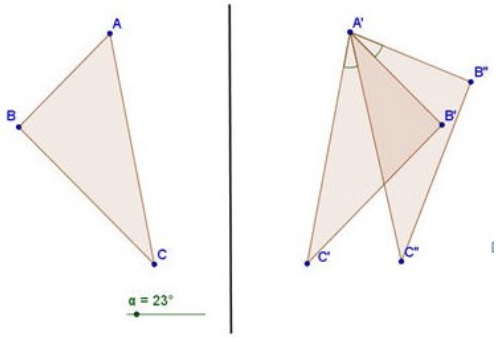
2) Phép biến hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép dời hình cũng là một phép dời hình.

Ví dụ 1.

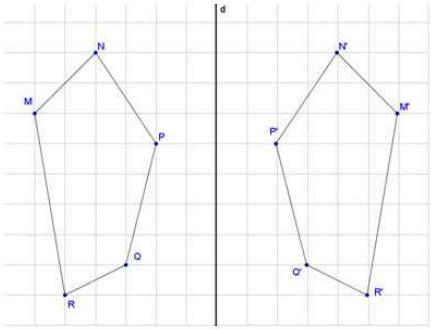
a) Tam giác A'B''C'' là ảnh của tam giác ABC qua phép dời hình (h.1.39a).

b) Ngũ giác MNPQR là ảnh của ngũ giác M'N'P'Q'R' qua phép dời hình (h.1.39b).

c) Hình $\mathscr{H}'$ là ảnh của hình $\mathscr{H}$ qua phép dời hình (h.1.40)



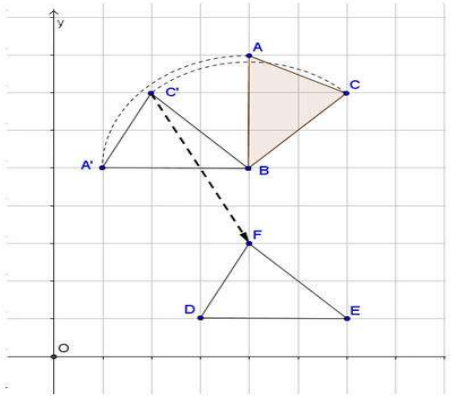
Hình 1.39 a



Hình 1.39 b

Ví dụ 2.

Trong hình 1.42 tam giác DEF là ảnh của tam giác ABC qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm B góc 90^0và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{C'F} = (2;-4)$



Hình 1.42

II. Tính chất

Phép dời hình:

1) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm;

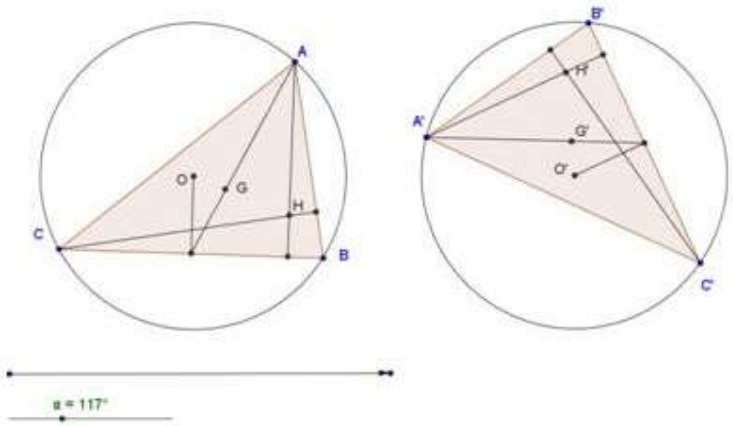
2) Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó;

3)Biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến góc thành góc bằng nó.

4) Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

Chú ý.

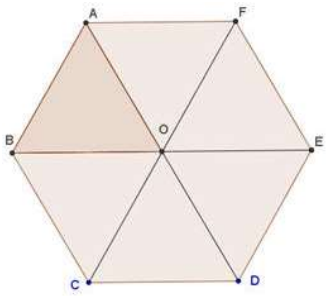
a) Nếu một phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C' thì nó cũng biến trọng tâm, trực tâm, tâm các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác ABC tương ứng thành trọng tâm, trực tâm, tâm các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác A'B'C' (h.1.44).



Hình 1.44

b) Phép dời hình biến đa giác n cạnh thành đa giác n cạnh, biến đỉnh thành đỉnh, biến cạnh thành cạnh.

Ví dụ 3. Cho lục giác đều ABCDEF, O là tâm đường tròn ngoại tiếp của nó (h.1.45). Tìm ảnh của tam giác OAB qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O, góc 60^0 và phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OE}$.

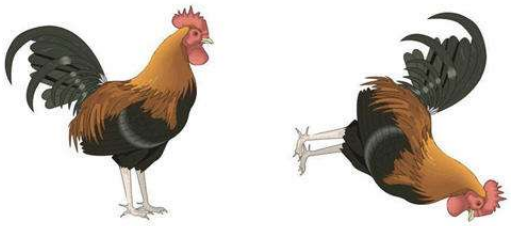


Hình 1.45

Giải

Gọi phép dời hình đã cho là F. Chỉ cần xác định ảnh của các đỉnh của tam giác OAB qua phép dời hình F. Ta có phép quay tâm O, góc 60^0biến O, A và B lần lượt thành O, B, C. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OE}$. biến O, B và C lần lượt thành E, O và D. Từ đó suy ra F(O) = E, F(A) = O, F(B)=D. Vậy ảnh của tam giác OAB qua phép dời hình F là tam giác EOD.

II. Khái niệm hai hình bằng nhau



Hình 1.47

Quan sát hình hai con gà trong tranh dân gian (h.1.47), vì sao có thể nói hai hình $\mathscr{H}$ và $\mathscr{H}'$ bằng nhau?

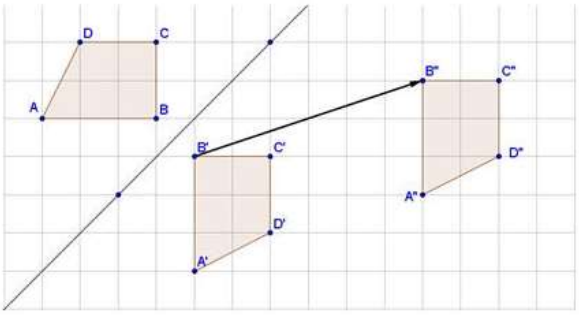
Chúng ta đã biết phép dời hình biến một tam giác thành tam giác bằng nó. Người ta cũng chứng minh được rằng với hai tam giác bằng nhau luôn có một phép dời hình biến tam giác này thành tam giác kia. Vậy hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi có một phép dời hình biến tam giác này thành tam giác kia. Người ta dùng tiêu chuẩn đó để định nghĩa hai hình bằng nhau.

Định nghĩa

Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

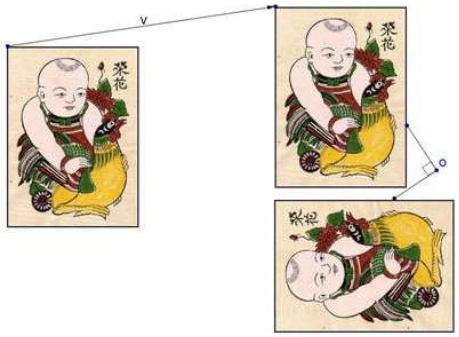
Ví dụ 4

a) Trên hình 1.48, hai hình thang ABCD và A''B''C''D'' bằng nhau vì có một phép dời hình biến hình thang ABCD thành hình thang A''B''C''D''.



Hình 1.48

b) Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến hình $\mathscr{A}$ thành hình $\mathscr{B}$, phép quay tâm O góc 90^0 biến hình $\mathscr{B}$ thành hình $\mathscr{C}$. Do đó phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ và phép quay tâm O góc 90^0 biến hình $\mathscr{A}$ thành hình $\mathscr{C}$. Từ đó suy ra hai hình $\mathscr{A}$ và $\vec{v}$ bằng nhau (h.1.49).



Hình 1.49

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Xác định ảnh, tính chất khi thực hiện phép dời hình

1. Phương pháp

- *Để chứng minh một phép biến hình là phép dời hình thì cần nắm chắc tính chất "bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ".*
- Tức là *phải chỉ rõ* $\forall M,N:\begin{cases}F(M)=M'\\F(N)=N'\end{cases}\Rightarrow M'N'=MN$

2. Ví dụ

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $M(-1;4)$ và $N(5;3)$. Qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(-4;-2)$ và phép quay tâm O góc quay $45°$ thì M,N lần lượt biến thành M', N'. Tính độ dài $M'N'$.

A. $\frac{\sqrt{26}}{2}$. **B.** $\sqrt{65}$. **C.** $\frac{\sqrt{74}}{2}$. **D.** $\sqrt{37}$.

Lời giải

Chọn D

Theo tính chất: $MN = M'N' = \sqrt{\left(x_N - x_M\right)^2 + \left(y_N - y_M\right)^2} = \sqrt{37}$.

Câu 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-3)^2 + y^2 = 24$. Tìm bán kính của đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép dời hình F có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua trục Ox, phép quay tâm O góc $90°$ và phép tịnh tiến theo $\vec{u}$?

A. $2\sqrt{6}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** 24. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Đường tròn (C) có bán kính $R = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

Vì các phép đối xứng trục, phép quay và phép tịnh tiến đều biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính nên qua phép dời hình F, ảnh (C') của đường tròn (C) có bán kính $R' = R = 2\sqrt{6}$.

Câu 3: Cho tam giác ABC vuông tại A có đường trung tuyến AM, biết $AB = 6; AC = 8$. Phép dời hình biến điểm A thành điểm A', biến M thành M'. Khi đó đồ dài đoạn thẳng $A'M'$ bằng:

A. 5. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác ABC vuông tại A.

$BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

Độ dài đường trung tuyến AM là: 5.

Do đó Phép dời hình biến đường thẳng AM thành đường thẳng $A'M'$ có cùng độ dài nên $A'M' = 5$.

Dạng 2: Xác định ảnh của một hình qua phép dời hình, chứng minh 2 hình bằng nhau

1. Phương pháp

Ta thường sử dụng tính chất và định nghĩa hai hình bằng nhau

1) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm;

2) Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó;

3)Biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến góc thành góc bằng nó.

4) Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

* Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

2. Ví dụ

Câu 1: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi E, F, H, K, O, I, J lần lượt là trung điểm của các đoạn $AB, BC, CD, DA, KF, HC, KO$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. Hai hình thang $BJEF$ và $OKDH$ bằng nhau.

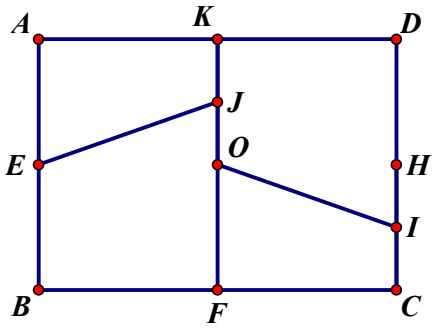
B. Hai hình thang $AEJK$ và $DHOK$ bằng nhau.

C. Hai hình thang $AEJK$ và $FOIC$ bằng nhau.

D. Hai hình thang $BEJO$ và $FOIC$ bằng nhau.

Lời giải

Chọn C



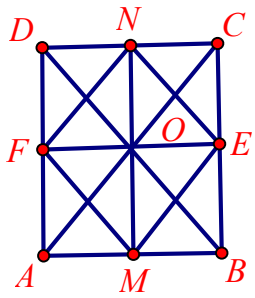
Thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{KD}$ và phép đối xứng qua đường thẳng OH biến hình thang $AEJK$ thành hình thang $FOIC$ nên hai hình thang này nằng nhau.

Câu 2: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, gọi M, N, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, DC, BC, AD. Qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc quay 90^0 và phép tịnh tiến theo véc tơ $\overrightarrow{BM}$. Ảnh của hình vuông $MBEO$ là

A. Hình vuông $ECNO$.
B. Hình vuông $AMOF$.
C. Hình vuông $ONDF$.
D. Hình vuông $ODNF$.

Lời giải

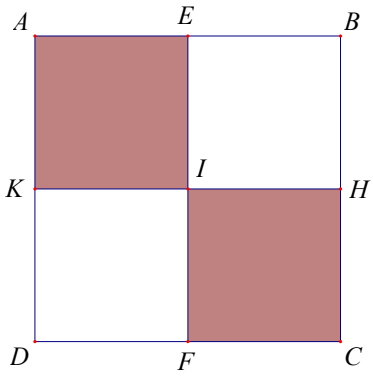
Chọn C



Xét $Q_{(O,90^0)}(M,B,E,O)=E,C,N,O$.

Lại có $T_{\overrightarrow{BM}}(E,C,N,O)=O,N,D,F$.

Câu 3: Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E,F,H,I,K theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB,CD,BC,EF,AD. Hãy tìm phép dời hình biến tam giác FCH thành tam giác AKI.



A. Phép dời hình có được bằng cách thực hiện liêp tiếp phép quay tâm H góc quay $-90°$ và phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{EA}$.

B. Phép quay tâm I, góc quay $-90°$.

C. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{HI}$.

D. Phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{HI}$ và phép quay tâm I góc quay $-90°$.

Lời giải

Chọn A

Thực hiện phép quay tâm H góc quay $-90°$ ta được tam giác HIE.

Nếu tịnh tiến tam giác HIE theo vectơ $\overrightarrow{EA}$ ta được tam giác AKI.

Do đó, phép dời hình cần tìm là phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép phép quay tâm H góc quay $-90°$ và phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{EA}$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh tương ứng là $3,4,5$. Phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác gì?

A. Tam giác vuông cân.
B. Tam giác cân.
C. Tam giác vuông.
D. Tam giác đều.

Lời giải

Chọn C

Tam giác ABC có độ dài ba cạnh tương ứng là $3,4,5$ nên tam giác ABC vuông.

Do đó Phép dời hình biến tam giác ABC vuông thành tam giác vuông.

Câu 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-3)^2+y^2=24$. Tìm bán kính của đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép dời hình F có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua trục Ox, phép quay tâm O góc $90°$ và phép tịnh tiến theo $\vec{u}$?

A. $2\sqrt{6}$.
B. $3\sqrt{2}$.
C. 24.
D. $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Đường tròn (C) có bán kính $R=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$.

Vì các phép đối xứng trục, phép quay và phép tịnh tiến đều biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính nên qua phép dời hình F, ảnh (C') của đường tròn (C) có bán kính $R' = R = 2\sqrt{6}$.

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $M(-1;4)$ và $N(5;3)$. Qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-4;-2)$ và phép quay tâm O góc quay $45°$ thì M, N lần lượt biến thành M', N'. Tính độ dài $M'N'$.

A. $\frac{\sqrt{26}}{2}$. **B.** $\sqrt{65}$. **C.** $\frac{\sqrt{74}}{2}$. **D.** $\sqrt{37}$.

Lời giải

Chọn D

Theo tính chất: $MN = M'N' = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = \sqrt{37}$.

Câu 4: Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$. Phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua trục Oy và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (2;3)$ biến (C) thành đường tròn nào trong các đường tròn có phương trình sau?

A. $x^2 + y^2 = 4$. **B.** $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 4$.

C. $(x-2)^2 + (x-3)^2 = 4$. **D.** $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$.

Lời giải

Chọn D

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R = 2$.

$Đ_{Oy}(I) = I' \Rightarrow I'(-1;-2)$.

$T_{\vec{v}}(I') = I'' \Rightarrow \overrightarrow{II''} = \vec{v} \Rightarrow I''(1;1)$.

Đường tròn cần tìm nhận $I''(1;1)$ làm tâm và bán kính $R = 2$ hay $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$.

Câu 5: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Thực hiện liên tiếp hai phép tịnh tiến ta được một phép tịnh tiến.

B. Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng trục ta được một phép đối xứng trục.

C. Thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua tâm và phép đối xứng trục ta được một phép đối xứng tâm.

D. Thực hiện liên tiếp phép quay và phép tịnh tiến ta được một phép tịnh tiến.

Lời giải

Chọn A

Thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vec tơ $\vec{u}$ và vec tơ $\vec{v}$ ta được một phép tịnh tiến theo vec tơ $\vec{u} + \vec{v}$.

Câu 6: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C)(x+1)^2+(y-2)^2=9$. Phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép dời hình có được khi thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}(3;1)$ và phép quay tâm O góc quay 90^0 là

A. $(x+3)^2+(y-2)^2=9$. **B.** $(x+3)^2+(y-2)^2=3$.

C. $(x-3)^2+(y+2)^2=9$. **D.** $(x-3)^2+(y+2)^2=3$.

Lời giải

Chọn A

Đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=3$.

Qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}(3;1)$, đường tròn (C) biến thành đường tròn (C_1) có tâm $I_1(2;3)$, bán kính $R_1=3$.

Qua phép quay tâm O góc quay 90^0, đường tròn (C_1) biến thành đường tròn (C_2) có tâm $I_2(-3;2)$, bán kính $R_2=3$. Vậy (C_2)có phương trình $(x+3)^2+(y-2)^2=9$.

Câu 7: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x+1)^2+(y-2)^2=9$. Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép, phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v}(3;1)$ và phép quay tâm O góc quay 90^0.

A. $(C'):(x+3)^2+(y-2)^2=9$. **B.** $(C'):(x+3)^2+(y-2)^2=3$.

C. $(C'):(x-3)^2+(y+2)^2=9$. **D.** $(C'):(x-3)^2+(y+2)^2=3$.

Lời giải

Chọn A

Đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$ và bán kính $r=3$.

Gọi I_1 là ảnh của I qua phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v}(3;1)\Rightarrow I_1(2;3)$.

Gọi I' là ảnh của I_1 qua $Q_{(O,90^0)}\Rightarrow I'(-3;2)$

Đường tròn (C') có tâm là $I'(-3;2)$ và bán kính $r=3\Rightarrow(C'):(x+3)^2+(y-2)^2=9$.

Câu 8: Trong mặt phẳng Oxy, cho $A(1;-3)$ và $\vec{v}=(2;4)$. Tọa độ ảnh của điểm A qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp $T_{\vec{v}}$ và $Q_{(O;-90^\circ)}$ là?

A. $(1;3)$. **B.** $(-1;3)$. **C.** $(-1;-3)$. **D.** $(1;-3)$.

Lời giải

Chọn D

$T_{\vec{v}}(A)=A'$ thì $A'(1+2;-3+4)$ hay $A'(3;1)$

$Q_{(O;-90^\circ)}(A')=A''$ thì $\begin{cases}x''=y'\\y''=-x'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x''=1\\y''=-3\end{cases}\Rightarrow A''\equiv A$.

Câu 9: Cho đường thẳng d có phương trình $x+y-2=0$. Phép hợp thành của phép đối xứng tâm O và phép tịnh tiến theo $\vec{v}=(3;2)$ biến d thành đường thẳng nào sau đây?

A. $x+y-4=0.$ **B.** $3x+3y-2=0.$ **C.** $2x+y+2=0.$ **D.** $x+y-3=0.$

Lời giải.

Chọn D

Giả sử d' là ảnh của d qua phép hợp thành trên (do d' song song hoặc trùng với d)
$\Rightarrow d': x+y+c=0$.

Lấy $M(1;1)\in d$.

Giả sử M' là ảnh của M qua phép đối xứng tâm $O \Rightarrow M'(-1;-1)$.

Giả sử $T_{\vec{v}}(M')=N \Rightarrow N(2;1)$.

Ta có $N\in d' \Rightarrow 1+1+c=0 \Rightarrow c=-3$.

Vậy phương trình $d': x+y-3=0$.

Câu 10: Tìm ảnh của điểm $N(2;-4)$ qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc quay $-90°$ và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(-1;2)$.

A. $N'(-5;0)$. **B.** $N'(-2;-4)$. **C.** $N'(-4;-2)$. **D.** $N'(2;-4)$.

Lời giải

Chọn A

Ảnh của điểm $N(2;-4)$ qua phép quay tâm O góc quay $-90°$ là $N_1(-4;-2)$.

Ảnh của điểm $N_1(-4;-2)$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(-1;2)$ là $N'(-5;0)$.

Vậy ảnh của điểm $N(2;-4)$ qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc quay -90^0 và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(-1;2)$ là $N'(-5;0)$.

Câu 11: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(-2;0)$, gọi N là ảnh của M qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc $-90°$ và phép tịnh tiến theo vec-tơ $\vec{v}=(-3;4)$. Tọa độ điểm N là

A. $(-3;6)$. **B.** $(-5;4)$. **C.** $(-3;2)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi H là ảnh của M qua phép quay tâm O góc $-90^0 \Rightarrow \begin{cases} x_H = y_M \\ y_H = -x_M \end{cases} \Rightarrow H(0;2)$.

Suy ra tọa độ điểm N là $\begin{cases} x_N = x_H - 3 = -3 \\ y_N = y_H + 4 = 6 \end{cases} \Rightarrow N(-3;6)$.

Câu 12: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho vectơ $\vec{u}=(3;1)$ và đường thẳng $d:2x-y=0$. Ảnh của đường thẳng d qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay $Q_{(O,90^\circ)}$ và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ là đường thẳng d' có phương trình

A. $x+2y-5=0$. **B.** $x+2y+5=0$. **C.** $2x+y-7=0$. **D.** $2x+y+7=0$

Lời giải

Chọn A

Biểu thức tọa độ của phép quay $Q_{(O,90^\circ)}:\begin{cases}x'=-y\\y'=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y'\\y=-x'\end{cases}$ nên $Q_{(O,90^\circ)}$ biến d thành đường thẳng $d_1:2y+x=0$.

Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}:\begin{cases}x'=x+3\\y'=y+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'-3\\y=y'-1\end{cases}$ nên $Q_{(O,90^\circ)}$ biến d_1 thành đường thẳng $d':2(y-1)+x-3=0\Leftrightarrow x+2y-5=0$.

Câu 13: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(3;-2)$. Phép dời hình bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(1;-3)$ và phép quay tâm O góc quay $90°$ biến điểm A thành điểm có tọa độ nào trong các tọa độ sau:

A. $(5;4)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-5;-4)$.

Lời giải

Chọn A

Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(1;-3)$ biến điểm $A(3;-2)$ thành điểm $A'(a;b)$, nên $\overrightarrow{AA'}=\vec{v}$,

Hay $\begin{cases}a-3=1\\b+2=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=-5\end{cases}\Rightarrow A'(4;-5)$.

Lại có $Q_{(O,90^0)}(A')=A_1(x;y)\Rightarrow\begin{cases}x=5\\y=4\end{cases}$.

Câu 14: Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2=4$. Hỏi phép dời hình có được bằng cách thự hiện liên tiếp phép đối xứng qua trụ Oy và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(2;3)$ biến (C) thành đường tròn nào trong các đường tròn có phương trình sau?

A. $x^2+y^2=4$. **B.** $(x-2)^2+(y-6)^2=4$.

C. $(x-2)^2+(x-3)^2=4$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2=4$.

Lời giải

Chọn D

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R=2$.

$Đ_{Oy}(I)=I'\Rightarrow I'(-1;-2)$

$T_{\vec{v}}(I')=I''\Rightarrow\overrightarrow{I'I''}=\vec{v}\Rightarrow I''(1;1)$.

Đường tròn cần tìm nhận $I''(1;1)$ làm tâm và bán kính $R=2$.

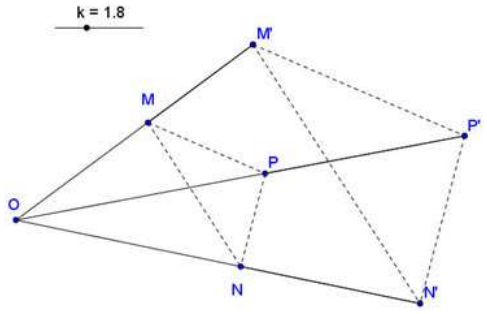
BÀI 7. PHÉP VỊ TỰ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ĐỊNH NGHĨA

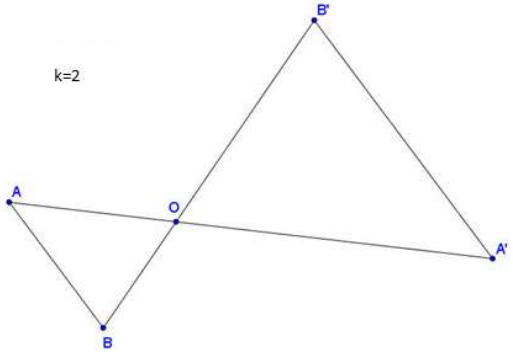
Định nghĩa

Cho điểm O và số $k \neq 0$ *.Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho* $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ *được gọi là phép vị tự tâm O, tỉ số k (h.1.50).*

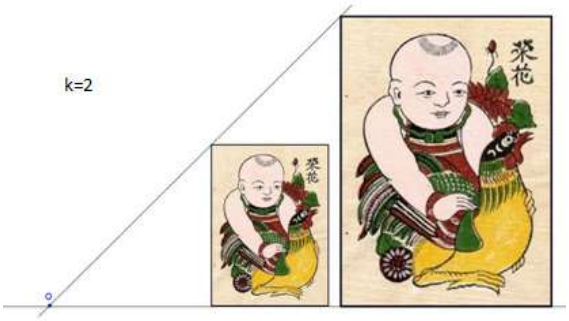


Hình 1.50

Phép vị tự tâm O, tỉ số k thường được kí hiệu là $V_{(O;k)}$



Hình 1.51 a



Hình 1.51b

Ví dụ 1

a) Trên hình 1.51a các điểm A', B', O lần lượt là ảnh của các điểm A, B, O qua phép vị tự tâm O tỉ số -2.

b) Trong hình 1.51b phép vị tự tâm O, tỉ số 2 biến hình H thành hình H '.

1. Cho tam giác ABC. Gọi E và F tương ứng là trung điểm AB và AC. Tìm một phép tự biến B và C tương ứng thành E và F.

Nhận xét

1) Phép vị tự biến tâm vị tự thành chính nó.

2) Khi k = 1, phép vị tự là phép đồng nhất

3) Khi k = -1, phép vị tự là phép đối xứng qua tâm vị tự.

4) $M' = V_{(O,k)}(M) \Leftrightarrow M = V_{(O,\frac{1}{k})}(M')$.

II. TÍNH CHẤT

Tính chất 1

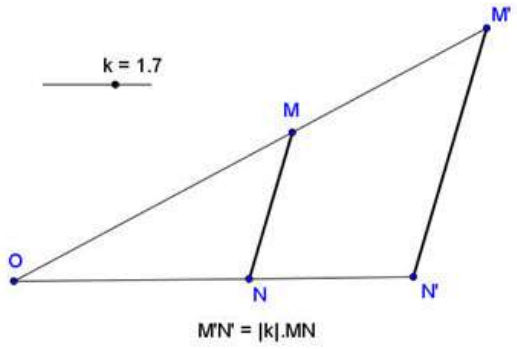
Nếu phép vị tự tỉ số k biến điểm M, N tùy ý theo thứ tự thành điểm M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k| \cdot MN$

Chứng minh

Gọi O là tâm của phép vị tự tỉ số k. Theo định nghĩa của phép vị tự ta có: $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{ON}$ (h.1.52). Do đó:

$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{ON} - k\overrightarrow{OM} = k(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) = k \cdot \overrightarrow{MN}$

Tư đó suy ra $M'N' = |k| \cdot MN$.



Hình 1.52

Ví dụ 2: Gọi A', B', C' theo thứ tự là ảnh của A, B, C qua phép vị tự tỉ số k. Chứng minh.

$\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AC}, t \in R \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = t\overrightarrow{A'C'}$

Giải

Gọi O là tâm của phép vị tự tỉ số k, ta có: $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{AC}$.

Do đó: $\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \frac{1}{k}\overrightarrow{A'B'} = t\frac{1}{k}\overrightarrow{A'C'} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = t\overrightarrow{A'C'}$

Tính chất 2

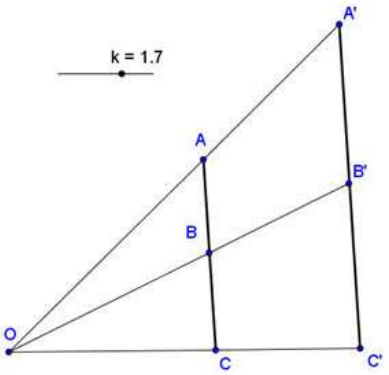
Phép vị tự tỉ số k:

a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy (h.1.53).

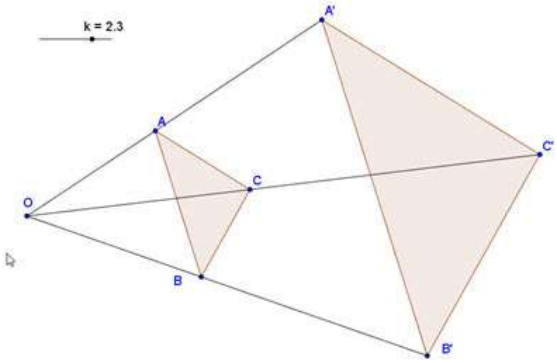
b)Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

c) Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó, biến góc thành góc bằng nó (h.1.54).

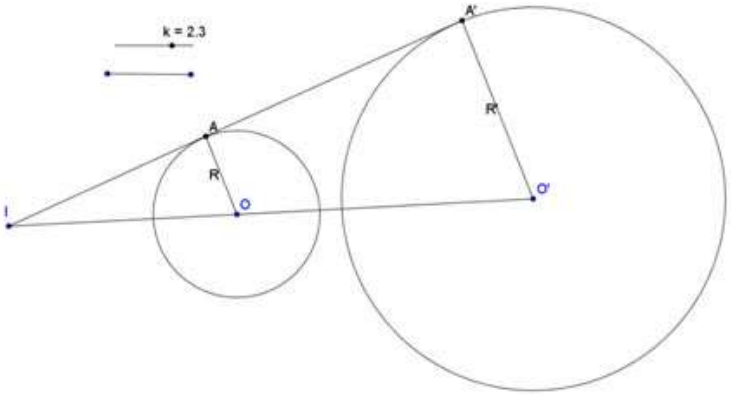
d) Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính $|k|R$ (h.1.55)



Hình 1.53



Hình 1.54



Hình 1.55

II. TÂM VỊ TỰ CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Ta đã biết phép vị tự biến đường tròn thành đường tròn. Ngược lại, ta có định lý sau:

Định lý

Với hai đường tròn bất kỳ luôn có một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Tâm của phép vị tự đó được gọi là *tâm vị tự của hai đường tròn.*

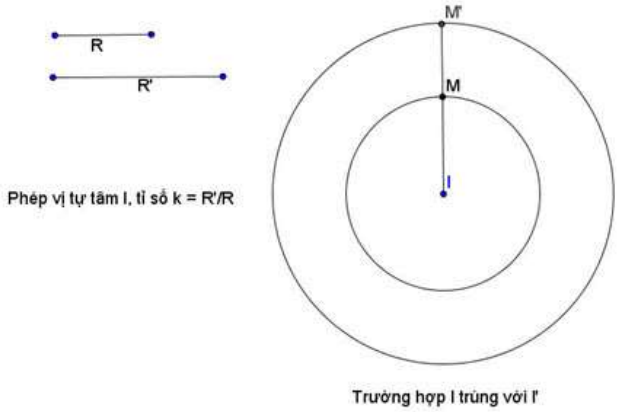
Cách tìm tâm vị tự của hai đường tròn

Cho hai đường tròn (I; R) và (I';R').

Có ba trường hợp xảy ra:

+ Trường hợp I trùng với I'

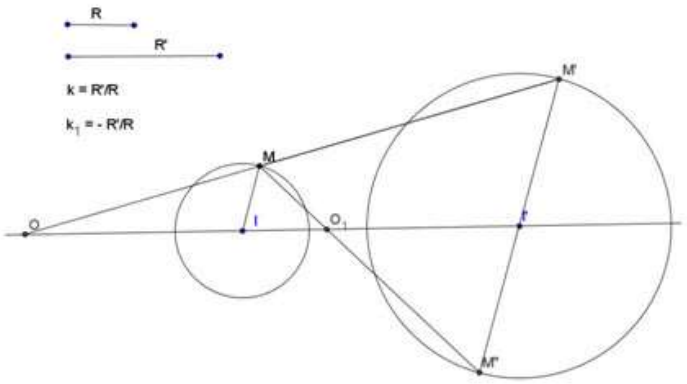
Khi đó, phép vị tự tâm I tỉ số $\frac{R'}{R}$ và phép vị tự tâm I tỉ số $-\frac{R'}{R}$ biến đường tròn (I; R) thành đường tròn (I; R') (h.1.58).



Hình 1.58

+ *Trường hợp I khác I' và* $R \neq R'$

Lấy điểm M bất kỳ thuộc đường trong (I; R). đường thẳng qua I' song song với IM cắt đường tròn (I'; R') tại M' và M''. Giả sử M, M' nằm cùng phía đối với đường thẳng II' còn M, M'' nằm khác phía đối với đường thẳng II'. Giả sử đường thẳng MM' cắt đường thẳng II' tại điểm O nằm ngoài đoạn thẳng II', còn đường thẳng MM'' cắt đường thẳng II' tại điểm O_1 nằm trong đoạn thẳng II'.



Hình 1.59

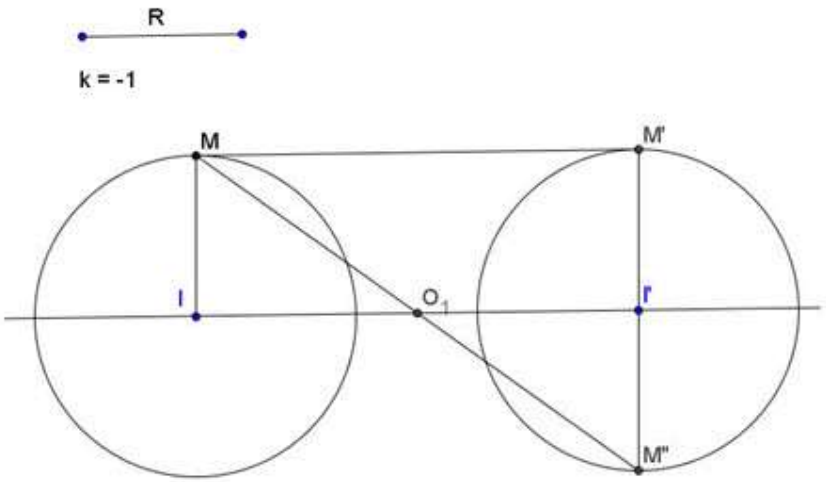
Khi đó phép vị tự tâm O tỉ số $k=\frac{R'}{R}$ và phép vị tự tâm O_1 tỉ số $k_1=-\frac{R'}{R}$ sẽ biến đường tròn (I; R) thành đường tròn (I'; R'). Ta gọi O là tâm vị tự ngoài còn O_1 là *tâm vị tự trong*

của hai đường tròn nói trên.

+ Trường hợp I khác I' và R = R'.

Khi đó $MM'//II'$ nên chỉ có phép vị tự tâm O_1 tỉ số $k=-\frac{R}{R}=-1$

biến đường tròn (I;R) thành đường tròn (I'; R'). Nó chính là phép đối xứng tâm O_1.



Hình 1.60

III. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA PHÉP VỊ TỰ

Cho điểm $M(x;y)$. Phép vị tự tâm $I(a;b)$, tỉ số k biến điểm M thành $M'(x';y')$

$$\begin{cases} x' = kx + (1-k)a \\ y' = ky + (1-k)b \end{cases}$$

Trường hợp đặc biệt khi $I \equiv O(0,0)$ thì biểu thức tọa độ trở thành

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

B. PHÂN DẠNG VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm ảnh của một điểm qau phép vị tự

1. Phương pháp giải:

Ta sử dụng định nghĩa hoặc dùng biểu thức tọa độ sau

Cho điểm $M(x;y)$. Phép vị tự tâm $I(a;b)$, tỉ số k biến điểm M thành $M'(x';y')$

$$\begin{cases} x' = kx + (1-k)a \\ y' = ky + (1-k)b \end{cases}$$

Trường hợp đặc biệt khi $I \equiv O(0,0)$ thì biểu thức tọa độ trở thành

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

2. Ví dụ

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Câu 1: Tìm ảnh A' của điểm $A(3;4)$ qua phép vị tự tâm $I(2;5), k=2$

Lời giải

Ta có $V_{(I;2)}: A \to A'$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = 2.3 + (1-2).2 = 4 \\ y' = 2.4 + (1-2).5 = 3 \end{cases} \Rightarrow A'(4;3)$$

Câu 2: Cho $I(-2;1), M(1;1), M'(-1;1)$, phép vị tâm I biến điểm M thành M' có hệ số k bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{IM}(3;0), \overrightarrow{IM'}(1;0)$; $\Rightarrow \overrightarrow{IM'} = 3.\overrightarrow{IM} \Rightarrow k = 3$.

Câu 3: Cho $M(-3;5), M'(4;6)$. Tìm tâm I phép vị biến điểm M thành M' có hệ số $k=2$.

Lời giải

Ta có $V_{(I;2)}: M \to M'$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 = (-3).2 + (1-2).a \\ 6 = 5.2 + (1-2).b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -10 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow I(-10;4)$$

Câu 4: Cho ba điểm $A(0;3), B(2;-1), C(-1;5)$. Tồn tại hay không tồn tại một phép vị tự tâm A tỉ số k để biến B thành C?

Lời giải

Giả sử tồn tại một phép vị tự tâm A, tỉ số k biến B thành C.

Có $C = V_{(A;k)}(B) \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = k.2 \\ 2 = k.(-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$ (đúng). Kết luận tồn tại phép vị tự tâm A tỉ số $k = -\frac{1}{2}$ để biến B thành C.

Dạng 2. Dùng phép vị tự tìm ảnh của một đường

1. Phương pháp giải:

Sử dụng biểu thức tọa độ và tính chất của phép vị tự

2. Ví dụ :

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình $x-2y+1=0$. Ảnh của (d) qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k=-2$ là:

A. $x-2y+3=0$. **B.** $x-2y+2=0$. **C.** $2x+y+1=0$. **D.** $x-2y-2=0$

Lời giải

Chọn D

Gọi (d') là ảnh của đường thẳng (d) qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k=-2$.

Giả sử $M(x;y)\in(d), M'(x';y')\in(d')$.

Ta có: $V_{(O;k=-2)}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'}=-2\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=-2x \\ y'=-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{x'}{2} \\ y=-\dfrac{y'}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\dfrac{x'}{2};-\dfrac{y'}{2}\right)$.

Do $M\in(d)$ nên tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình đường thẳng (d):

$-\dfrac{x'}{2}-2\left(-\dfrac{y'}{2}\right)+1=0 \Leftrightarrow x'-2y'-2=0$

Mà $M'(x';y')\in(d') \Rightarrow$ phương trình đường thẳng (d') là: $x-2y-2=0$.

Câu 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x=0$, phép vị tự tâm O tỉ số 2 biến đường tròn (C) thành đường tròn (C'). Phương trình đường tròn (C') là

A. $x^2+y^2+4x=0$. **B.** $x^2+y^2-4x=0$.

C. $x^2+y^2+4y=0$. **D.** $x^2+y^2-4y=0$.

Lời giải

Chọn B

(C) có tâm $I(1;0)$, bán kính $R=1$. Gọi $I'=V_{(O,2)}(I)$ thì: $\overrightarrow{OI'}=2\overrightarrow{OI} \Rightarrow I'(2;0)$.

Khi đó (C') nhận $I'(2;0)$ làm tâm và có bán kính $R'=2R=2$.

Suy ra $(C'):(x-2)^2+(y-0)^2=2^2 \Leftrightarrow (C'):x^2+y^2-4x=0$.

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $(x+2)^2+(y-5)^2=9$. Phép vị tự tâm $A(-3;2)$, tỉ số $k=-2$ biến đường tròn (C) thành đường tròn (C') có phương trình là

A. $(x+1)^2+(y+4)^2=36$. **B.** $(x+5)^2+(y+4)^2=9$.

C. $(x+5)^2+(y+4)^2=36$. **D.** $x^2+(y-11)^2=36$.

Lời giải

Chọn C

Đường tròn (C) có: tâm $I(-2;5)$ bán kính là $R=3$.

Gọi I' là ảnh của I qua $V_A^{-2} \Rightarrow \overrightarrow{AI'}=-2\overrightarrow{AI} \Rightarrow I'(-5;-4)$.

(C') là ảnh của (C) qua V_A^{-2}, do đó (C') có tâm $I'(-5;-4)$ bán kính $R'=2R=6$.

Vậy phương trình của (C') là $(x+5)^2+(y+4)^2=36$.

Dạng 3: Tìm ảnh của một hình qua phép tịnh tiến

1. Phương pháp giải:

2. Ví dụ

Câu 1: Cho tam giác ABC, gọi M,N,E lần lượt là trung điểm cạnh BC,AC,AB; G là trọng tâm của tam giác ABC. Tam giác MNE là ảnh của tam giác ABC qua phép vị tự tâm G tỉ số k bằng

A. 2. **B.** -2. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

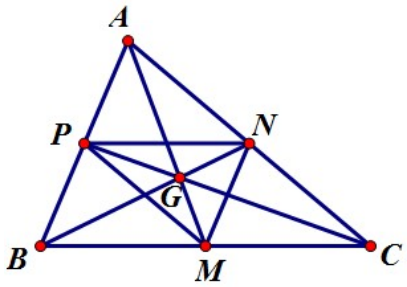
Ta có $\overrightarrow{GM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$

$\overrightarrow{GN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$

$\overrightarrow{GE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$

Vậy Tam giác MNE là ảnh của tam giác ABC qua phép vị tự tâm G tỉ số k bằng $-\frac{1}{2}$.

Câu 2: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC, AB. Phép vị tự nào trong các phép vị tự sau biến tam giác ABC thành tam giác MNP ?



A. Phép vị tự tâm G, tỉ số $\frac{-1}{2}$. **B.** Phép vị tự tâm G, tỉ số $\frac{1}{2}$.

C. Phép vị tự tâm G, tỉ số 2. **D.** Phép vị tự tâm G, tỉ số -2.

Lời giải

Chọn A

Theo định nghĩa phép vị tự ta có $V_{(O,k)}(M)=N \Leftrightarrow \overrightarrow{ON}=k\overrightarrow{OM}$.

Ta có G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow \overrightarrow{GM}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{GA} \Rightarrow V_{\left(G,\frac{-1}{2}\right)}(A)=M$ (1)

Tương tự ta có: $V_{(G,\frac{-1}{2})}(B)=N$ và $V_{(G,\frac{-1}{2})}(C)=P$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow V_{(O,\frac{-1}{2})}(\Delta ABC)=\Delta MNP$.

Câu 3: Cho hình thoi $ABCD$ tâm O. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. Phép vị tự tâm O, tỉ số $k=-1$ biến tam giác ABD thành tam giác CDB.

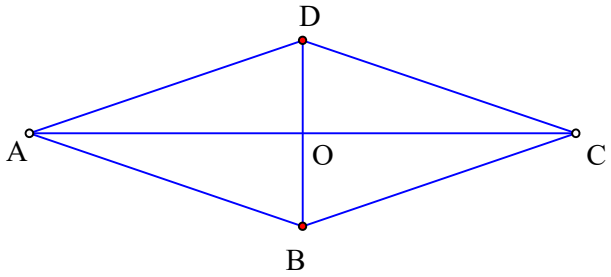
B. Phép quay tâm O, góc $\frac{\pi}{2}$ biến tam giác OBC thành tam giác OCD.

C. Phép vị tự tâm O, tỉ số $k=1$ biến tam giác OBC thành tam giác ODA.

D. Phép tịnh tiến theo véc tơ $\overrightarrow{AD}$ biến tam giác ABD thành tam giác DCB.

Lời giải

Chọn A



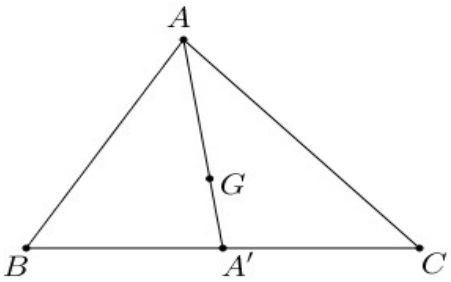
Ta có: $V_{(O,-1)}(A)=C$; $V_{(O,-1)}(B)=D$; $V_{(O,-1)}(D)=B$. Nên chọn phương án

Câu 4: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Ảnh của điểm A qua phép vị tự tâm G tỉ số $-\frac{1}{2}$ là:

A. Trung điểm của đoạn thẳng GA.
B. Trung điểm của đoạn thẳng AB.
C. Trung điểm của đoạn thẳng BC.
D. Trung điểm của đoạn thẳng CA.

Lời giải

Chọn C

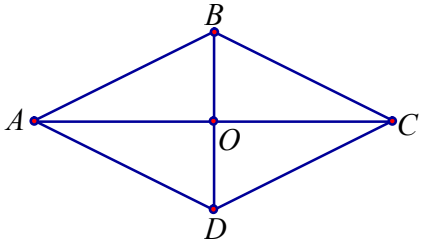


Gọi A' là ảnh của điểm A qua phép vị tự tâm G tỉ số $-\frac{1}{2}$.

$V_{\left(G,-\frac{1}{2}\right)}(A)=A' \Leftrightarrow \overrightarrow{GA'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$. Ta có hai vecto $\overrightarrow{GA'}$, $\overrightarrow{GA}$ là hai vecto ngược hướng, và

$GA'=\frac{1}{2}GA$. Vậy A' là trung điểm của đoạn thẳng BC.

Câu 5: Cho hình thoi $ABCD$ tâm O (như hình vẽ). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?



A. Phép tịnh tiến theo véc tơ $\overrightarrow{DA}$ biến tam giác DCB thành tam giác ABD.

B. Phép vị tự tâm O, tỉ số $k=-1$ biến tam giác CDB thành tam giác ABD.

C. Phép quay tâm O, góc $-\frac{\pi}{2}$ biến tam giác OCD thành tam giác OBC.

D. Phép vị tự tâm O, tỉ số $k=1$ biến tam giác ODA thành tam giác OBC.

Lời giải

Chọn B

Ta có O là trung điểm của AC và BD nên ta có $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow V_{(O,-1)}(C)=A;V_{(O,-1)}(D)=B;V_{(O,-1)}(B)=D \Rightarrow V_{(O,-1)}(\Delta CDB)=\Delta ABD$.

Câu 6: Cho tam giác ABC có M,N,P lần lượt là trung điểm của BC,AC,AB. Gọi I là trung điểm của PN,G là trọng tâm tam giác ABC. Tìm khẳng định **sai**.

A. $T_{\overrightarrow{AN}}(PAN)=PMN$.

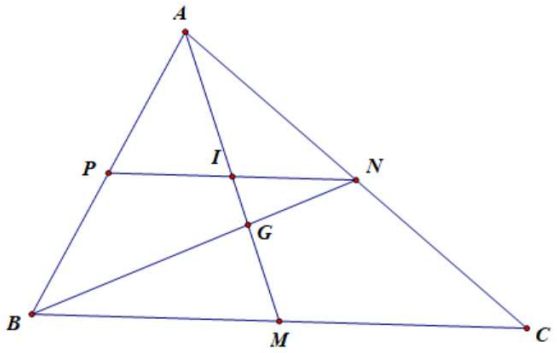
B. $T_{\overrightarrow{NM}}(PAN)=BPM$.

C. $D_I(PAN)=NMP$

D. $V_{\left(G;-\frac{1}{2}\right)}(ABC)=MNP$.

Lời giải

Chọn A



Do $T_{\overrightarrow{AN}}(PAN)=MNC$ nên A sai.

Câu 7: Cho đường tròn (O), AB và CD là hai đường kính. Gọi E là trung điểm của AO; CE cắt AD tại F. Tìm tỷ số k của phép vị tự tâm E biến C thành F.

A. $k=-\frac{1}{3}$.

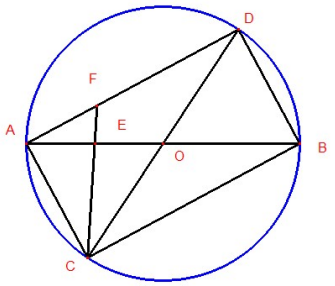
B. $k=-\frac{1}{2}$.

C. $k=\frac{1}{3}$.

D. $k=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Xét hai tam giác AEF và BEC đồng dạng với nhau nên $\frac{EF}{EC}=\frac{AE}{EB}=\frac{1}{3}$ (do E là trung điểm của AO).

Suy ra $\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$ nên tỷ số phép vị tự $k=-\frac{1}{3}$.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho phép vị tự tỉ số $k=2$ biến điểm A thành điểm B và biến điểm C thành điểm D. Khi đó:

A. $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CD}$. **B.** $2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. **C.** $2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$. **D.** $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BD}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 2. Cho hình thang ABCD có hai cạnh đáy là AB và CD mà $AB=3CD$. Phép vị tự biến điểm A thành điểm C và biến điểm B thành điểm D có tỉ số là:

A. $k=3$. **B.** $k=-\frac{1}{3}$. **C.** $k=\frac{1}{3}$. **D.** $k=-3$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Tâm vị tự là giao điểm hai đường chéo của hình thang.

Câu 3. Cho tam giác ABC có trọng tâm G, gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Với giá trị nào của k thì phép vị tự $V(G;k)$ biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'?

A. $k=2$. **B.** $k=-2$. **C.** $k=\frac{1}{2}$. **D.** $k=-\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Câu 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép vị tự tâm $I(3;-1)$ có tỉ số $k=-2$. Khi đó nó biến điểm $M(5;4)$ thành điểm:

A. $M'(-1;-11)$. **B.** $M'(-7;11)$. **C.** $M'(1;9)$. **D.** $M'(1;-9)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta phải có: $\overrightarrow{IM'}=-2\overrightarrow{IM}$.

Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép vị tự tỉ số $k=2$ và biến điểm $A(1;-2)$ thành điểm $A'(-5;1)$. Khi đó nó biến điểm $B(0;1)$ thành điểm:

A. $B'(0;2)$. **B.** $B'(12;-5)$. **C.** $B'(-7;7)$. **D.** $B'(11;6)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta phải có $\overrightarrow{A'B'}=2\overrightarrow{AB}$.

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép vị tự tâm $I(1;1)$ tỉ số $k=-\frac{1}{3}$. Khi đó nó biến đường thẳng $5x-y+1=0$ thành đường thẳng có phương trình:

A. $15x+3y+10=0$. **B.** $15x-3y-23=0$. **C.** $15x+3y-23=0$. **D.** $5x-3y-8=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Điều kiện cần là hai đường thẳng phải có cùng vectơ chỉ phương nên có thể loại ngay ba phương án A, C, D.

Câu 7. Cho hai đường thẳng song song a và b lần lượt có phương trình: $x+4y-1=0$ và $x+4y+3=0$. Phép vị tự có tâm $O(0;0)$ biến đường thẳng a thành đường thẳng b phải có tỉ số vị tự k bằng bao nhiêu?

A. $k=\frac{1}{3}$. **B.** $k=-\frac{1}{3}$. **C.** $k=3$. **D.** $k=-3$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Đường thẳng Ox cắt a và b lần lượt tại $A(1;0)$ và $B(-3;0)$. Nếu k là tỉ số vị tự thì $\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OA}$. Vậy $k=-3$.

Câu 8. Phép vị tự tâm O với tỉ số k $(k\neq 0)$ là một phép biến hình biến điểm M thàn điểm M' sao cho:

A. $\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OM'}$. **B.** $\overrightarrow{OM'}=k\overrightarrow{OM}$. **C.** $OM'=kOM$. **D.** $\overrightarrow{OM'}=\frac{1}{k}\overrightarrow{OM}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 9. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Phép vị tự biến tam giác ABC thành tam giác MNP là phép vị tự:

A. Tâm A, tỉ số $k=2$.

B. Tâm O, tỉ số $k=\frac{1}{2}$ với O là tâm của ΔABC.

C. Tâm G, tỉ số $k=-\frac{1}{2}$ với G là trọng tâm của ΔABC.

D. Tâm H, tỉ số $k=-2$ với H là trực tâm của ΔABC.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Theo tính chất của trọng tâm ta có: $\overrightarrow{GI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$.

Do đó phép vị tự $V\left(G;-\frac{1}{2}\right)$ biến ΔABC thành ΔMNP nên biến đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC thành đường tròn ngoại tiếp của tam giác MNP.

Ghi chú: Nhận thấy H là trực tâm tam giác ABC và O là trực tâm ΔMNP, nên H và O là hai điểm đối xứng với nhau qua phép vị tự $V\left(G;-\frac{1}{2}\right)$. Từ đó ta suy ra phép vị tự $V\left(H;\frac{1}{2}\right)$ biến đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thành đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP.

Câu 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(-2;5)$. Phép vị tự $V(O;3)$ biến điểm A thành điểm A' có tọa độ là:

A. $(-6;15)$. **B.** $(15;6)$. **C.** $(-15;6)$. **D.** $(-6;-15)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có: $\overrightarrow{OA'}=3\overrightarrow{OA}$.

Mà $A(-2;5)$, suy ra $\overrightarrow{OA'}=(-6;15)$.

Vậy $A'(-6;15)$.

Câu 11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(-1;4)$, $B(-3;2)$, $C(7;0)$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Phép vị tự $V(O;-2)$ biến điểm G thành điểm G' có tọa độ là:

A. $(4;6)$. **B.** $(-4;2)$. **C.** $(-2;-4)$. **D.** $(6;-8)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $G(1;2)$.

Suy ra: $\overrightarrow{OG'}=-2\overrightarrow{OG}=(-2;-4)$.

Vậy $G'(-2;-4)$.

Câu 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y=x^2+2x+4$. Phép vị tự $V\left(O;-\frac{1}{2}\right)$ biến parabol (P) thành parabol (P') có phương trình là:

A. $y=2x^2+x+4$. **B.** $y=-2x^2-x+2$. **C.** $y=-x^2+4x-2$. **D.** $y=-4x^2+x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Giả sử phép vị tự $V\left(O;-\frac{1}{2}\right)$ biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$.

Ta có: $\overrightarrow{OM'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OM}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=-2\overrightarrow{OM'}$.

Suy ra: $\begin{cases}x=-2x'\\y=-2y'\end{cases}$

Thay vào phương trình của (P) ta được:

$-2y'=(-2x')^2+(-2x')+3\Leftrightarrow -2y'=4x'^2-2x'+4\Leftrightarrow y'=2x'^2-x'+2$.

Vậy phương trình của parabol (P) là: $y=2x^2-x+2$.

Câu 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $2x+4y-1=0$. Phép vị tự $V(O;2)$ biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ' có phương trình là:

A. $x+2y-1=0$. **B.** $x-2y+1=0$. **C.** $3x+6y+5=0$. **D.** $2x+4y+7=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Giả sử phép vị tự $V\left(O;-\frac{1}{2}\right)$ biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$.

Ta có: $\overrightarrow{OM'}=2\overrightarrow{OM}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OM'}$

Suy ra: $\begin{cases}x=\frac{x'}{2}\\y=\frac{y'}{2}\end{cases}$

Thay vào phương trình của Δ ta được: $2.\frac{x'}{2}+4.\frac{y'}{2}-1=0\Leftrightarrow x'+2y'-1=0$.

Vậy phương trình của Δ' là $x+2y-1=0$.

Câu 14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tòn (T) có phương trình $(x-2)^2+(y+1)^2=4$. Phép vị tự $V(O;4)$ biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình là:

A. $(x-8)^2+(y+4)^2=64$. **B.** $(x-4)^2+(y+2)^2=16$.

C. $(x-12)^2+(y+8)^2=16$. **D.** $(x+8)^2+(y-4)^2=64$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Nếu phép vị tự $V(O;4)$ biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$.

Ta có: $\overrightarrow{OM'}=4\overrightarrow{OM}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OM'}$

Suy ra: $\begin{cases} x = \dfrac{x'}{4} \\ y = \dfrac{y'}{4} \end{cases}$

Thay vào phương trình của (T) ta được: $\left(\dfrac{x'}{4}-2\right)^2+\left(\dfrac{y'}{4}+1\right)^2=4 \Leftrightarrow (x'-8)^2+(y'+4)=64$.

Vậy phương trình của (T') là: $(x-8)^2+(y+4)^2=64$.

Câu 15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $I(1;-2)$. Phép vị tự $V(I;3)$ biến điểm $M(-3;2)$ thành điểm M' có tọa độ là:

A. $(-11;10)$. **B.** $(6;-8)$. **C.** $(11;-10)$. **D.** $(-6;2)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có: $\overrightarrow{IM'}=3\overrightarrow{IM}$.

Do đó: $\begin{cases} x'-1=3(-3-1) \\ y'+2=3(2+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=-11 \\ y'=10 \end{cases}$

Câu 16. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $I(1;2)$ và tam giác ABC với $A(0;7)$, $B(-3;2)$, $C(9;3)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Phép vị tự $V\left(I;-\dfrac{1}{2}\right)$ biến điểm G thành điểm G' có tọa độ là:

A. $(-2;4)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{1}{3};4\right)$. **D.** $(1;-4)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Trọng tâm của tam giác ABC là $G(2;4)$.

Ta có: $\overrightarrow{IG'}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{IG}$

Do đó: $\begin{cases} x'-1=-\dfrac{1}{2}(2-1) \\ y'-2=-\dfrac{1}{2}(4-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=\dfrac{1}{2} \\ y'=1 \end{cases}$

Vậy $G'\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Câu 17. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(5;-2)$ và đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-6x+2y-15=0$. Phép vị tự $V(A;-2)$ biến đường tròn (C) thành đường tròn (C') có phương trình là:

A. $(x-9)^2+(y+4)^2=100$.

B. $(x-4)^2+(y+6)^2=64$.

C. $(x+5)^2+(y-4)^2=36$.

D. $(x-6)^2+(y+8)^2=25$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phương trình của (C) viết lại là: $(x-3)^2+(y+1)^2=25$.

Suy ra (C) có tâm $I(3;-1)$ bán kính $R=5$.

Phép vị tự $V(A;-2)$ biến điểm I thành điểm $I'(a;b)$ với $\overrightarrow{AI'}=-2\overrightarrow{AI}$.

Suy ra: $\begin{cases}a-5=-2(3-5)\\b+2=-2(-1+2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=9\\b=-4\end{cases}$

Bán kính của (C') là: $R'=|-2|.5=10$.

Vậy phương trình của (C') là: $(x-9)^2+(y+4)^2=100$.

Câu 18: Cho tam giác ABC có diện tích bằng $6\ \text{cm}^2$. Phép vị tự tỷ số $k=-2$ biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. Tính diện tích tam giác $A'B'C'$?

A. $12\ \text{cm}^2$. **B.** $24\ \text{cm}^2$. **C.** $6\ \text{cm}^2$. **D.** $3\ \text{cm}^2$.

Lời giải

Chọn B

Phép vị tự tỉ số k biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số $|k|$.

Theo đề bài ta có phép vị tự tỉ số $k=-2$ biến biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ nên

$\frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}}=k^2\Leftrightarrow S_{\Delta A'B'C'}=k^2.S_{\Delta ABC}\Leftrightarrow S_{\Delta A'B'C'}=2^2.S_{\Delta ABC}\Leftrightarrow S_{\Delta A'B'C'}=4.6\Leftrightarrow S_{\Delta A'B'C'}=24\ \text{cm}^2$.

Câu 19: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A và có $A(1;-1)$, $B(0;1)$, $C(-5;-4)$. Gọi $A'B'C'$ là ảnh của tam giác ABC qua phép vị tự tâm O, tỉ số $-\frac{3}{2}$. Tính diện tích tam giác $A'B'C'$.

A. $\frac{45}{2}$. **B.** $\frac{135}{8}$. **C.** $\frac{45}{4}$. **D.** $\frac{135}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}.\sqrt{5}.\sqrt{45}=\frac{15}{2}$.

Do $A'B'C'$ là ảnh của tam giác ABC qua phép vị tự tâm O, tỉ số $-\frac{3}{2}$ nên

$S_{A'B'C'}=\frac{9}{4}S_{ABC}=\frac{135}{8}$.

BÀI 8. PHÉP ĐỒNG DẠNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Phép biến hình f gọi là phép đồng dạng với tỉ số k $(k>0)$ nếu với hai điểm bất kì M, N và ảnh M', N' của chúng, ta có: $M'N' = kMN$.

2. Định lí: Mọi phép đồng dạng f tỉ số k $(k>0)$ đều là hợp thành của một phép vị tự V tỉ số k và một phép dời hình D.

3. Tính chất của phép đồng dạng

Phép đồng dạng:

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự ba điểm đó;
- Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia;
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với k (k là tỉ số đồng dạng);
- Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số k;
- Biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $R' = kR$;
- Biến một góc thành một góc bằng nó.

4. Hai hình đồng dạng

Định nghĩa: Hai hình gọi là đồng dạng với nhau nếu có phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định ảnh của một điểm, một đường qua phép đồng dạng

1. Phương pháp giải:

Phép biến hình f gọi là phép đồng dạng với tỉ số k $(k>0)$ nếu với hai điểm bất kì M, N và ảnh M', N' của chúng, ta có: $M'N' = kMN$.

Sử dụng các biểu thức tọa độ của phép dời hình, phép vị tự để tìm các điểm, các đường thẳng

2. Ví dụ

Câu 1: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(2;4)$. Hỏi phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k=\frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc quay -90° sẽ biến điểm M thành điểm M' có tọa độ là:

A. $(2;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(1;-2)$. **D.** $(2;-1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $V_{\left(O,\frac{1}{2}\right)}: M \mapsto M_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OM} \Rightarrow M_1(1;2)$

$Q_{(O,-90^0)}: M_1 \mapsto M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM' = OM_1 \\ (OM_1, OM') = -90^0 \end{cases} \Rightarrow M'(2;-1)$

Vậy, toạ độ điểm cần tìm là $M'(2;-1)$.

Câu 2: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x-2\sqrt{2}=0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k=\frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc 45^0.

Lời giải

Gọi d_1 là ảnh của d qua phép vị tử tâm O, tỉ số $k=\frac{1}{2}$. Vì d_1 song song hoặc trùng với d nên phương trình của d_1 có dạng: $x+C=0$.

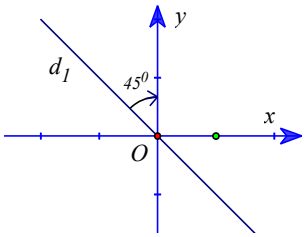
Lấy $M\left(2\sqrt{2};0\right)$ thuộc d, thì ảnh của nó qua phép vị tự nói trên là $N\left(\sqrt{2};0\right)$ thuộc d_1.

Vậy phương trình của $d_1: x-\sqrt{2}=0$.

Xét hai điểm $A\left(\sqrt{2};0\right)$ và $B\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$ thuộc d_1 thì ảnh của nó qua phép quay nói trên là $A'(1;1)$ và $B'(2;0)$ thuộc d'. Vậy phương trình $d': x+y-2=0$.

Câu 3: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x+y-2=0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm $I(-1;-1)$, tỉ số $k=\frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc -45^0.

Lời giải



Gọi d_1 là ảnh của d qua phép vị tử tâm $I(-1;-1)$, tỉ số $k=\frac{1}{2}$. Vì d_1 song song hoặc trùng với d nên phương trình của d_1 có dạng: $x+y+C=0$.

Lấy $M(1;1)$ thuộc d, thì ảnh của nó qua phép vị tự nói trên là O thuộc d_1.

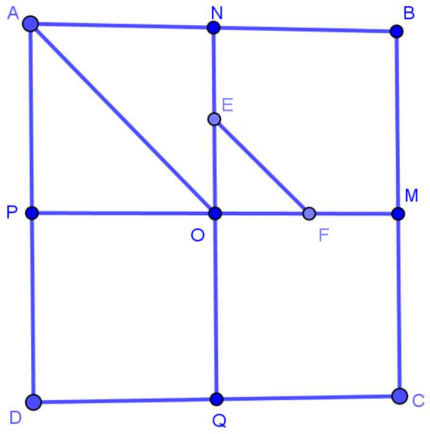
Vậy phương trình của $d_1: x+y=0$. Ảnh của d_1 qua phép quay tâm O góc -45^0 là đường thẳng Oy. Vậy phương trình của d' là $x=0$.

Dạng 2. Tìm ảnh của một hình qua phép đồng dạng và chứng minh hai hình đồng dạng

1. Phương pháp giải:

2. Ví dụ:

Câu 1: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O. Gọi M, N, P, Q, E, F lần lượt là trung điểm của BC, AB, AD, CD, ON, OM. Tìm phép đồng dạng biến tam giác OEF thành tam giác NOA.



A. Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép $T_{\overrightarrow{DP}}$ và $V_{(O,-2)}$.

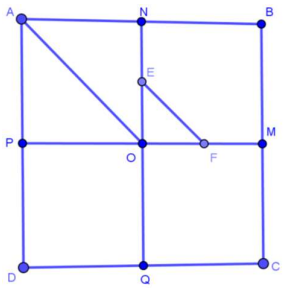
B. Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép $Q_{(O,180^0)}$ và $V_{(O,-2)}$.

C. Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép $Q_{(O,90^0)}$ và $V_{(O,-2)}$.

D. Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép $V_{(O,-2)}$ và $T_{\overrightarrow{DP}}$.

Lời giải

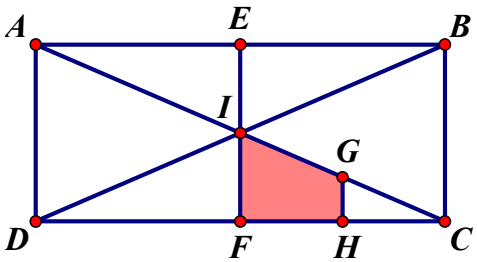
Chọn D



$V_{(O,-2)}: \Delta OEF \to \Delta OQP$

$T_{\overrightarrow{DP}}: \Delta OQP \to \Delta NOA$.

Câu 2: Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm I. Gọi E,F,G,H lần lượt là trung điểm của AB,CD,CI,FC. Phép đồng dạng hợp thành bởi phép vị tự tâm C tỉ số $k=2$ và phép đối xứng tâm I biến tứ giác $IGHF$ thành



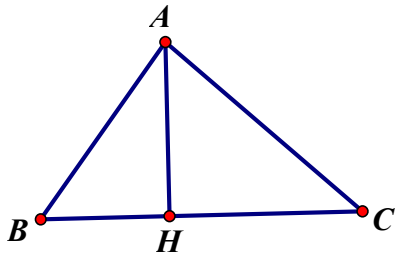
A. $AIFD$ **B.** $BCFI$ **C.** $CIEB$ **D.** $DIEA$

Lời giải

Chọn C

Có $V_{(I,2)}: IGHI \to AIFD$; Và $D_I: AIFD \to CIEB$

Câu 3: Cho tam giác ABC, đường cao AH (H thuộc cạnh BC). Biết $AH=4; HB=2; HC=8$. Phép đồng dạng F biến ΔHBA thành ΔHAC. Phép biến hình F có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép biến hình nào sau đây?



A. Phép vị tự tâm H tỉ số $k=2$ và phép quay tâm H góc quay bằng $-90°$.

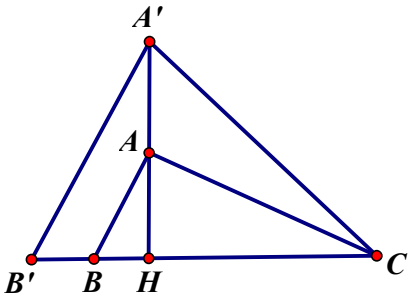
B. Phép tịnh tiến theo vec tơ $\overrightarrow{BA}$ và phép vị tự tâm H tỉ số $k=2$.

C. Phép quay $Q_{(H;-180°)}$ và phép vị tự tâm H tỉ số $k=\frac{1}{2}$.

D. Phép vị tự tâm H tỉ số $k=2$ và phép quay tâm H góc quay $90°$.

Lời giải

Chọn A



Phép vị tự tâm H tỉ số $k=2$ biến ΔHBA thành $\Delta HB'A'$

Phép quay tâm H góc quay bằng $-90°$ biến $\Delta HB'A'$ thành ΔHAC

Phép biến hình F có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm H tỉ số $k=2$ và phép quay tâm H góc quay bằng $-90°$.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(-2;1), B(0;3), C(1;-3), D(2;4)$. Nếu có phép đồng dạng biến đoạn thẳng AB thành đoạn thẳng CD thì tỉ số k của phép đồng dạng đó bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;2)$ và $\overrightarrow{CD}=(1;7)$.

Suy ra $AB=2\sqrt{2}$ và $CD=5\sqrt{2}$.

Suy ra tỉ số của phép đồng dạng là $k=\dfrac{CD}{AB}=\dfrac{5}{2}$.

Câu 2: Cho tam giác ABC có cạnh là $3,5,7$. Phép đồng dạng tỉ số $k=2$ biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ có diện tích là:

A. $\dfrac{15\sqrt{3}}{2}$. **B.** $15\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{15\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Tam giác ABC có diện tích là $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$.

Do đó diện tích tam giác $A'B'C'$ là $S'=k^2S=4.S=15\sqrt{3}$.

Câu 3: Phép đồng dạng tỷ số $k=\dfrac{2}{3}$ biến tam giác ABC có diện tích bằng $9\,\text{cm}^2$ thành tam giác $A'B'C'$ có diện tích bằng

A. $4cm^2$. **B.** $6cm^2$. **C.** $12cm^2$. **D.** $8cm^2$.

Lời giải

Chọn A

Sử dụng tính chất phép đồng dạng suy ra tam giác $A'B'C'$ và tam giác ABC đồng dạng với tỉ số $k=\dfrac{2}{3}$.

Khi đó $\dfrac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=k^2=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\Rightarrow S_{A'B'C'}=\dfrac{4}{9}S_{ABC}=4cm^2$.

Câu 4: Cho tam giác ABC có $AB=4;AC=5;\widehat{BAC}=60°$. Phép đồng dạng tỉ số $k=2$ biến A thành A', biến B thành B', biến C thành C'. Khi đó diện tích tam giác $A'B'C'$ bằng

A. $20\sqrt{3}$. **B.** $10\sqrt{3}$. **C.** 20. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}.AB.AC.\sin 60°=\dfrac{1}{2}.4.5.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$

$\Delta A'B'C'$ đồng dạng ΔABC theo tỉ số $k=2$ nên $S_{A'B'C'}=4S_{ABC}=20\sqrt{3}$.

Câu 5: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=9$. Phép đồng dạng là phép thực hiện liên tiếp qua phép vị tự tâm $I(1;-1)$ tỉ số $k=\dfrac{1}{3}$ và phép tịnh tiến theo $\vec{v}(3;4)$ sẽ biến đường tròn (C) thành đường tròn có phương trình:

A. $(x-4)^2+(y-4)^2=9$. **B.** $(x-4)^2+(y-4)^2=1$.

C. $(x+4)^2+(y+4)^2=1$. **D.** $(x-1)^2+y^2=1$.

Lời giải

Chọn B

Đường tròn (C) có tâm $A(1;2)$, bán kính $R=3$

$V_{(1,\frac{1}{3})}(A)=A_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{IA_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IA} \Rightarrow A_1(1;0), R_1=\frac{1}{3}.3=1$

Mà $T_{\vec{v}}(A_1)=A_2 \Rightarrow A_2(4;4), R_2=R_1=1$

Ảnh của đường tròn (C) qua phép đồng dạng có phương trình là: $(x-4)^2+(y-4)^2=1$.

Câu 6: Trong mặt phẳng Oxy, tọa độ ảnh của điểm $M(-1;3)$ qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp $Q_{(O;-90^\circ)}$ và $V_{(O;2)}$ là

A. $(-2;6)$. **B.** $(-6;-2)$. **C.** $(6;2)$. **D.** $(2;-6)$.

Lời giải

Chọn B

$Q_{(O;-90^\circ)}(M)=M' \Rightarrow M'(-3;-1)$.

$V_{(O;2)}(M')=M'' \Rightarrow M''(-6;-2)$.

Câu 7: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d: x+2y-3=0$. Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k=2$ và phép tịnh tiến theo vecto $\vec{v}=(1;2)$ biến đường thẳng d thành đường thẳng d' có phương trình

A. $x+2y+11=0$. **B.** $x+2y-11=0$.

C. $x+2y-6=0$. **D.** $x+2y+6=0$.

Lời giải

Chọn B

Gọi Δ là ảnh của d qua phép vị tự tâm O tỉ số 2.

Lấy $M(x;y)\in d$ $M_1=V_{(O,2)}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM_1}=2\overrightarrow{OM}$ với $M_1(x_1;y_1)\in\Delta$.

Ta có $\begin{cases}x_1=2x\\y_1=2y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{2}x_1\\y=\frac{1}{2}y_1\end{cases}$. Vì $M(x;y)\in d$ nên $\frac{1}{2}x_1+2.\frac{1}{2}y_1-3=0$.

Vậy phương trình Δ là $x+2y-6=0$.

Gọi d' là ảnh của Δ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(1;2)$. Khi đó

$$M'=T_{\vec{v}}(M_1)\Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M'}=\vec{v}\Leftrightarrow \begin{cases}x'=x_1+1\\ y'=y_1+2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x_1=x'-1\\ y_1=y'-2\end{cases}$$

Vì $M_1(x_1;y_1)\in\Delta$ nên $x'-1+2(y'-2)-6=0$.

Vậy phương trình d' là $x+2y-11=0$

Câu 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(-2;-3), B(4;1)$. Phép đồng dạng tỉ số $k=\frac{1}{2}$ biến điểm A thành A', biến điểm B thành B'. Tính độ dài A'B'

A. $A'B'=\frac{\sqrt{50}}{2}$. **B.** $A'B'=\sqrt{50}$. **C.** $A'B'=\frac{\sqrt{52}}{2}$. **D.** $A'B'=\sqrt{52}$.

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết ta có $A'B'=|k|AB=\frac{1}{2}.\sqrt{(4+2)^2+(1+3)^2}=\frac{\sqrt{52}}{2}$.

Câu 9: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-2)^2+(y+1)^2=9$. Gọi (C') là ảnh của đường tròn (C) qua việc thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k=-\frac{1}{3}$ và tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(1;-3)$. Tính bán kính R' của đường tròn (C').

A. $R'=27$. **B.** $R'=9$. **C.** $R'=3$. **D.** $R'=1$

Lời giải

Chọn D

Theo đề ra bán kính của đường tròn (C) là $R=3$

Do phép tịnh tiến không làm thay đổi khoảng cách nên $R'=\frac{1}{3}R=1$.

Câu 10: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-2)^2+(y+1)^2=9$. Gọi (C') là ảnh của đường tròn (C) qua việc thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O, tỉ số $k=-\frac{1}{3}$ và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(1;-3)$. Tính bán kính R' của đường tròn (C').

A. $R'=9$. **B.** $R'=3$. **C.** $R'=27$. **D.** $R'=1$.

Lời giải

Chọn D

Đường tròn (C) có bán kính $R=3$.

Qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k=-\frac{1}{3}$, đường tròn (C) biến thành đường tròn (C_1) có bán kính là $R_1=|k|.R=\frac{1}{3}.3=1$.

Qua phép tính tiến theo vecto $\vec{v}=(1;-3)$, đường tròn (C_1) biến thành đường tròn (C') có bán kính $R'=R_1=1$.

Vậy R' của đường tròn (C') là $R'=1$.

Câu 11: Ảnh của đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=4$ sau khi thực hiện liên tiếp phép đối xứng trục Ox và phép vị tự tâm $I(1;1)$ tỉ số $k=3$, có phương trình là

A. $(x-3)^2+(y+6)^2=36$.

B. $(x-1)^2+(y+8)^2=12$.

C. $(x-1)^2+(y-4)^2=36$.

D. $(x-1)^2+(y-4)^2=12$.

Lời giải

Chọn C

Đường tròn (C) có tâm $A(1;-2)$ và bán kính $R=2$.

Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép đối xứng trục Ox. Giả sử (C') có tâm A' và bán kính R'.

Khi đó A' đối xứng với A qua trục Ox nên $A'(1;2)$; $R'=R=2$.

Gọi (C'') là ảnh của (C') qua $V_{(I;k)}$. Giả sử (C'') có tâm A'', bán kính R''.

Khi đó, $V_{(I;3)}(A')=A''(x;y)\Leftrightarrow \overrightarrow{IA''}=3\overrightarrow{IA'}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=3(1-1)\\y-1=3(2-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=4\end{cases}\Rightarrow A''(1;4)$.

$R''=3R'=6$.

Vậy (C'') có phương trình $(x-1)^2+(y-4)^2=36$.

Câu 12: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d:3x-4y+1=0$. Thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k=-3$ và phép tịnh tiến theo vecto $\vec{v}=(1;2)$ thì đường thẳng d biến thành đường thẳng d' có phương trình là

A. $3x-4y+2=0$.

B. $3x-4y-2=0$.

C. $3x-4y+5=0$.

D. $3x-4y-5=0$.

Lời giải

Chọn A

Vì qua phép vị tự và phép tịnh tiến một đường thẳng biến thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó nên đường thẳng d' có dạng $3x-4y+c=0$.

Chọn $A(1;1)\in d$, qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k=-3$, điểm A biến thành $A_1(-3;-3)$.

Qua phép tịnh tiến theo vecto $\vec{v}=(1;2)$, điểm A_1 biến thành điểm $A'(-2;-1)$.

Vì $A'\in d'$ nên $3(-2)-4(-1)+c=0\Leftrightarrow c=2$.

Câu 13: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d:x-2y+1=0$, phép vị tự tâm $I(0;1)$ tỉ số $k=-2$ biến đường thẳng d thành đường thẳng d', phép đối xứng trục Ox biến đường

thẳng d' thành đường thẳng d_1. Khi đó, phép đồng dạng biến đường thẳng thẳng d thành đường thẳng d_1 có phương trình là

A. $x+2y+8=0$. **B.** $2x-y+4=0$. **C.** $x+2y+4=0$. **D.** $x+2y-4=0$

Lời giải

Chọn C

Lấy hai điểm $A(1;1)$ và $B(-1;0)$ thuộc đường thẳng $d: x-2y+1=0$.

Ta có $V_{(I;-2)}(A)=A' \Leftrightarrow \overrightarrow{IA'}=-2\overrightarrow{IM} \Rightarrow A'(-2;1)$; $A_1=Đ_{Ox}(A') \Rightarrow A_1(-2;-1)$.

Tương tự $V_{(I;-2)}(B)=B' \Leftrightarrow \overrightarrow{IB'}=-2\overrightarrow{IB} \Rightarrow B'(2;3)$; $B_1=Đ_{Ox}(B') \Rightarrow B_1(2;-3)$.

Đường thẳng d_1 đi qua hai điểm A_1 và B_1 nên có phương trình $x+2y+4=0$.

Câu 14: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-2)^2=4$. Hỏi phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k=\frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc quay 90° sẽ biến (C) thành đường tròn nào sau đây?

A. $(x+2)^2+(y-1)^2=1$. **B.** $(x-2)^2+(y-2)^2=1$.

C. $(x+1)^2+(y-1)^2=1$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

Lời giải

Chọn C

Đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-2)^2=4$ có tâm $I(2;2)$ và bán kính $R=2$.

Gọi đường tròn (C_1) có tâm I_1 bán kính R_1 là ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=\frac{1}{2}$.

$$\longrightarrow \begin{cases} V_{(O,k)}(I)=I_1 \\ R_1=|k|.R \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OI_1}=k\overrightarrow{OI} \\ R_1=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} I_1(1;1) \\ R_1=1 \end{cases}$$

Gọi đường tròn (C_2) có tâm I_2 bán kính R_2 là ảnh của đường tròn (C_1) qua phép quay tâm O góc quay 90°.

$$\longrightarrow \begin{cases} Q_{(O,90^\circ)}(I_1)=I_2 \\ R_2=R_1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} OI_2=OI_1 \\ (OI_1,OI_2)=90^\circ \\ R_2=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} I_2(-1;1) \\ R_2=1 \end{cases}.$$

Vậy (C_2) là ảnh của (C) qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k=\frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc quay 90° có phương trình là:

$(x+1)^2+(y-1)^2=1$.

Câu 15: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-2y-2=0$. Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc quay $45°$ và phép vị tự tâm O tỉ số $\sqrt{2}$. Phương trình của (C') là:

A. $(C'): x^2+y^2-4x-4y-4=0$. **B.** $(C'): x^2+y^2-4x-4y=0$.

C. $(C'): x^2+y^2-4y-4=0$. **D.** $(C'): x^2+y^2+4y-4=0$.

Lời giải

Chọn C

Đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-2y-2=0$ có tâm $I(1;1)$, bán kính $R=2$.

Gọi (C_1) có tâm là $I_1(x_1;y_1)$, bán kính R_1 là ảnh của (C) qua phép quay tâm O góc quay $45°$, (C') có tâm là $I'(x';y')$, bán kính R'.

Theo đề ta có:

$(C)\xrightarrow{Q_{(O;45°)}}(C_1)\xrightarrow{V_{(O;\sqrt{2})}}(C')$ nên suy ra : $\begin{cases} I\xrightarrow{Q_{(O;45°)}}I_1\xrightarrow{V_{(O;\sqrt{2})}}I' \\ R'=\sqrt{2}R_1=\sqrt{2}R=2\sqrt{2} \end{cases}$.

Tâm I_1: $\begin{cases} x_1=\cos 45°-\sin 45°=0 \\ y_1=\sin 45°+\cos 45°=\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow I_1(0;\sqrt{2})$.

Tâm I': $\begin{cases} x=\sqrt{2}x_1=0 \\ y=\sqrt{2}y_1=2 \end{cases} \Rightarrow I'(0;2)$.

Phương trình của (C') có dạng: $x^2+(y-2)^2=8 \Leftrightarrow x^2+y^2-4y-4=0$.

Câu 16: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(1;0)$. Tìm tọa điểm M'' là ảnh của điểm M qua phép đồng dạng có được bằng cách thự hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(-3;4)$ và phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$.

A. $M''(4;8)$. **B.** $M''(4;-8)$. **C.** $M''(-4;8)$. **D.** $M''(-4;-8)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M'(x';y')=T_{\vec{u}}(M)$

Theo biểu th tọa của phép tịnh tiến $\begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=1-3 \\ y'=0+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=-2 \\ y'=4 \end{cases} \Rightarrow M'(-2;4)$

Gọi $M''=V_{(O,-2)}(M') \Leftrightarrow \overrightarrow{OM''}=-2\overrightarrow{OM'}=(4;-8) \Rightarrow M''(4;-8)$.

Câu 17: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): (x-2)^2+(y-1)^2=4$. Hỏi phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo $\vec{v}=(4;-3)$ và phép vị tự tâm O, tỉ số $\frac{1}{2}$ biến (C) thành đường tròn nào sau đây?

A. $(C):(x-3)^2+(y-1)^2=4$.

B. $(C):(x-3)^2+(y+1)^2=1$.

C. $(C):(x-3)^2+(y+1)^2=4$.

D. $(C):(x-3)^2+(y-1)^2=1$.

Lời giải

Chọn B

Đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=4$ có bán kính $R=2$, tâm $I(2;1)$.

Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo $\vec{v}=(4;-3)$ và phép vị tự tâm O, tỉ số $\frac{1}{2}$ biến (C) thành đường tròn (C') có bán kính $R'=1$, tâm I''.

$T_{\vec{v}}(I)=I'$ thì $I'(4+2;-3+1)\Rightarrow I'(6;-2)$.

$V_{\left(O;\frac{1}{2}\right)}(I')=I''\Rightarrow \overrightarrow{OI''}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OI'}\Rightarrow I''=(3;-1)$.

CHƯƠNG II. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN
QUAN HỆ SONG SONG
BÀI 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

A. LÝ THUYẾT

1. Mở đầu về hình học không gian

Hình học không gian có các đối tượng cơ bản là điểm, đường thẳng và mặt phẳng.

Quan hệ thuộc: Trong không gian:

a. Với một điểm A và một đường thẳng d có thể xảy ra hai trường hợp:

• Điểm A thuộc đường thẳng d, kí hiệu $A \in d$.

• Điểm A không thuộc đường thẳng, kí hiệu $A \notin d$.

b. Với một điểm A và một mặt phẳng (P) có thể xảy ra hai trường hợp:

• Điểm A thuộc mặt thẳng (P), kí hiệu $A \in (P)$.

• Điểm A không thuộc đường thẳng, kí hiệu $A \notin (P)$.

2. Các tính chất thừa nhận của hình học không gian

Tính chất thừa nhận 1: Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.

Tính chất thừa nhận 2: Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.

Tính chất thừa nhận 3: Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.

Tính chất thừa nhận 4: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.

Tính chất thừa nhận 5: Trong mỗi mặt phẳng, các kết đã biết của hình học phẳng đều đúng.

Định lí: Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

3. Điều kiện xác định mặt phẳng

Có bốn cách xác định trong một mặt phẳng:

Cách 1: Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng của mặt phẳng, kí hiệu (ABC).

Cách 2: Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua một đường thẳng d và một điểm A không thuộc d, kí hiệu (A, d).

Cách 3: Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua hai đường thẳng a, b cắt nhau, kí hiệu (a, b).

Cách 4: Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua hai đường thẳng a, b song song, kí hiệu (a, b).

4. Hình chóp và tứ diện

Định nghĩa: Cho đa giác $A_1A_2...A_n$ và cho điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác đó. Nối S với các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta được n miền đa giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_{n-1}A_n$.

Hình gồm n tam giác đó và đa giác $A_1A_2A_3...A_n$ được gọi là hình chóp $S.A_1A_2A_3...A_n$.

Trong đó:

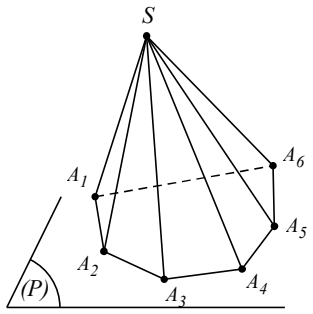
• Điểm S gọi là đỉnh của hình chóp.

• Đa giác $A_1A_2...A_n$ gọi là mặt đáy của hình chóp.

• Các đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n$ gọi là các cạnh đáy của hình chóp.

• Các đoạn thẳng $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ gọi là các cạnh bên của hình chóp.

• Các miền tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_{n-1}A_n$ gọi là các mặt bên của hình chóp.



Nếu đáy của hình chóp là một miền tam giác, tứ giác, ngũ giác,… thì hình chóp tương ứng gọi là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác,…

Chú ý

a. Hình chóp tam giác còn được gọi là hình tứ diện.

b. Hình tứ diện có bốn mặt là những tam giác đều hay có tất cả các cạnh bằng nhau được gọi là hình tứ diện đều.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬPCÂ

Dạng 1: Dạng toán lý thuyết

1. Phương pháp

- Nắm vững các tính chất thừa nhận
- Năm các cách xác đinh mặt phẳng
- Có thể sử dụng nhưng vật thể xung quanh để minh họa cho học sinh

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Câu 1: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A. Qua 2 điểm phân biệt có duy nhất một mặt phẳng.

B. Qua 3 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.

C. Qua 3 điểm không thẳng hàng có duy nhất một mặt phẳng.

D. Qua 4 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.

Lời giải

Chọn C

• A sai. Qua 2 điểm phân biệt, tạo được 1 đường thẳng, khi đó chưa đủ điều kiện để lập một mặt phẳng xác định. Có vô số mặt phẳng đi qua 2 điểm đã cho.

• B sai. Trong trường hợp 3 điểm phân biệt thẳng hàng thì chỉ tạo được đường thẳng, khi đó có vô số mặt phẳng đi qua 3 điểm phân biệt thẳng hàng.

• D sai. Trong trường hợp 4 điểm phân biệt thẳng hàng thì có vô số mặt phẳng đi qua 4 điểm đó hoặc trong trường hợp 4 điểm mặt phẳng không đồng phẳng thì sẽ tạo không tạo được mặt phẳng nào đi qua cả 4 điểm.

Câu 2: Trong không gian, cho 4 điểm không đồng phẳng. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ các điểm đã cho?

A. 6. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Với 3 điểm phân biệt không thẳng hàng, ta luôn tạo được 1 mặt phẳng xác định.

Khi đó, với 4 điểm không đồng phẳng ta tạo được tối đa $C_4^3 = 4$ mặt phẳng.

Câu 3: Các yếu tố nào sau đây xác định một mặt phẳng duy nhất?

A. Ba điểm phân biệt. **B.** Một điểm và một đường thẳng.

C. Hai đường thẳng cắt nhau. **D.** Bốn điểm phân biệt.

Lời giải

Chọn C

• A sai. Trong trường hợp 3 điểm phân biệt thẳng hàng thì sẽ có vô số mặt phẳng chứa 3 điểm thẳng hàng đã cho.

• B sai. Trong trường hợp điểm thuộc đường thẳng đã cho, khi đó ta chỉ có 1 đường thẳng, có vô số mặt phẳng đi qua đường thẳng đó.

• D sai. Trong trường hợp 4 điểm phân biệt thẳng hàng thì có vô số mặt phẳng đi qua 4 điểm đó hoặc trong trường hợp 4 điểm mặt phẳng không đồng phẳng thì sẽ tạo không tạo được mặt phẳng nào đi qua cả 4 điểm.

Câu 4: Cho tứ giác ABCD. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng chứa tất cả các đỉnh của tứ giác ABCD?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

4 điểm A, B, C, D tạo thành 1 tứ giác, khi đó 4 điểm A, B, C, D đã đồng phẳng và tạo thành 1 mặt phẳng duy nhất là mặt phẳng $(ABCD)$.

Câu 5: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A. Nếu 3 điểm A, B, C là 3 điểm chung của 2 mặt phẳng (P) và (Q) thì A, B, C thẳng hàng.

B. Nếu A, B, C thẳng hàng và (P), (Q) có điểm chung là A thì B, C cũng là 2 điểm chung của (P) và (Q).

C. Nếu 3 điểm A, B, C là 3 điểm chung của 2 mặt phẳng (P) và (Q) phân biệt thì A, B, C không thẳng hàng.

D. Nếu A, B, C thẳng hàng và A, B là 2 điểm chung của (P) và (Q) thì C cũng là điểm chung của (P) và (Q).

Lời giải

Chọn D

Hai mặt phẳng phân biệt không song song với nhau thì chúng có duy nhất một giao tuyến.

• A sai. Nếu (P) và (Q) trùng nhau thì 2 mặt phẳng có vô số điểm chung. Khi đó, chưa đủ điều kiện để kết luận A, B, C thẳng hàng.

• B sai. Có vô số đường thẳng đi qua A, khi đó B, C chưa chắc đã thuộc giao tuyến của (P) và (Q).

• C sai. Hai mặt phẳng (P) và (Q) phân biệt giao nhau tại 1 giao tuyến duy nhất, nếu 3 điểm A, B, C là 3 điểm chung của 2 mặt phẳng thì A, B, C cùng thuộc giao tuyến.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Trong mặt phẳng (α), cho 4 điểm A, B, C, D trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Điểm S không thuộc mặt phẳng (α). Có mấy mặt phẳng tạo bởi S và 2 trong 4 điểm nói trên?

A. 4. **B. 5.** **C. 6.** **D. 8.**

Lời giải

Chọn C

Với điểm S không thuộc mặt phẳng (α) và 4 điểm A, B, C, D thuộc mặt phẳng (α), ta có C_4^2 cách chọn 2 trong 4 điểm A, B, C, D cùng với điểm S lập thành 1 mặt phẳng xác định. Vậy số mặt phẳng tạo được là 6.

Câu 2: Cho 5 điểm A, B, C, D, E trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tạo bởi 3 trong 5 điểm đã cho?

A. 10. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 14.

Lời giải

Chọn A

Với 3 điểm phân biệt không thẳng hàng, ta luôn tạo được 1 mặt phẳng xác định.

Ta có C_5^3 cách chọn 3 điểm trong 5 điểm đã cho để tạo được 1 mặt phẳng xác định. Số mặt phẳng tạo được là 10.

Câu 3: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

A. Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác nữa.

B. Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

C. Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

D. Hai mặt phẳng cùng đi qua 3 điểm A, B, C không thẳng hàng thì hai mặt phẳng đó trùng nhau.

Lời giải

Chọn B

Nếu 2 mặt phẳng trùng nhau, khi đó 2 mặt phẳng có vô số điểm chung và chung nhau vô số đường thẳng.

Câu 4: Cho 3 đường thẳng d_1, d_2, d_3 không cùng thuộc một mặt phẳng và cắt nhau từng đôi. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. 3 đường thẳng trên đồng quy.

B. 3 đường thẳng trên trùng nhau.

C. 3 đường thẳng trên chứa 3 cạnh của một tam giác.

D. Các khẳng định ở A, B, C đều sai.

Lời giải

Chọn A

• B sai. Nếu 3 đường thẳng trùng nhau thì chúng sẽ cùng thuộc 1 mặt phẳng.

• C sai. Nếu 3 đường thẳng trên chứa 3 cạnh của một tam giác khi đó sẽ tạo được 3 điểm phân biệt không thẳng hàng (là 3 đỉnh của tam giác), chúng lập thành 1 mặt phẳng xác định, 3 đường thẳng sẽ cùng thuộc 1 mặt phẳng.

Câu 5: Thiết diện của 1 tứ diện có thể là:

A. Tam giác.

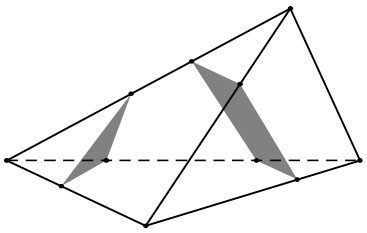
B. Tứ giác.

C. Ngũ giác.

D. Tam giác hoặc tứ giác.

Lời giải

Chọn D



Khi thiết diện cắt 3 mặt của tứ diện thì sẽ tạo thành 3 giao tuyến. Ba giao tuyến lập thành 1 hình tam giác.

Khi thiết diện cắt cả 4 mặt của tứ diện thì sẽ tạo thành 4 giao tuyến. Bốn giao tuyến lập thành 1 hình tứ giác.

Thiết diện không thể là ngũ giác vì thiết diện có 4 mặt, số giao tuyến tối đa là 4.

Dạng 2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

1. Phương pháp

Muốn tìm giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt ta tìm hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng đó. Đường thẳng qua hai điểm chung đó là giao tuyến của hai mặt phẳng.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là tứ giác lồi ABCD có các cạnh đối không song song với nhau. Gọi M là điểm trên cạnh SA. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

a. (SAC) và (SBD) b. (SAB) và (SCD)

c. (SBC) và (SAD) d. (BCM) và (SAD)

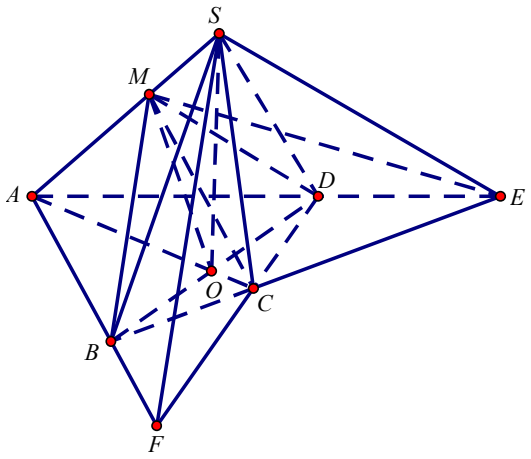
e. (CDM) và (SAB) f. (BDM) và (SAC)

Giải

a. Trong mp (ABCD):

$$\left.\begin{array}{l} AC\cap BD=\{O\} \\ AC\subset (SAC) \\ BD\subset (SBD) \end{array}\right\}\Rightarrow O\in (SAC)\cap (SBD)$$

Mà $S\in (SAC)\cap (SBD)$ nên $SO=(SAC)\cap (SBD)$.



b. Trong (ABCD) ta có:

$$\left.\begin{array}{l} AB\cap CD=\{F\} \\ AB\subset (SAB) \\ CD\subset (SCD) \end{array}\right\}\Rightarrow F\in (SAB)\cap (SCD)$$

Mà $S\in (SAB)\cap (SCD)$ nên $SF=(SAB)\cap (SCD)$.

c. Trong (ABCD) ta có:

$$\left.\begin{array}{l} BC\cap AD=\{E\} \\ BC\subset (SBC) \\ AD\subset (SAD) \end{array}\right\}\Rightarrow E\in (SAD)\cap (SBC)$$

Mà $S\in (SAD)\cap (SBC)$ nên $SE=(SAD)\cap (SBC)$.

d. Ta có: $M\in (MBC)\cap (SAD)$

$E\in BC\cap AD\Rightarrow E\in (MBC)\cap (SAD)$

Nên $ME=(MBC)\cap (SAD)$.

e. Ta có: $M\in (MCD)\cap (SAB)$

$F=AB\cap CD\Rightarrow F\in (MCD)\cap (SAB)$

Vậy $MF=(MCD)\cap (SAB)$.

f. Ta có: $M\in (BDM)\cap (SAC)$

$O\in (BDM)\cap (SAC)$

Do đó $MO=(BDM)\cap (SAC)$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P là ba điểm lần lượt nằm trên ba cạnh AB, CD, AD. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

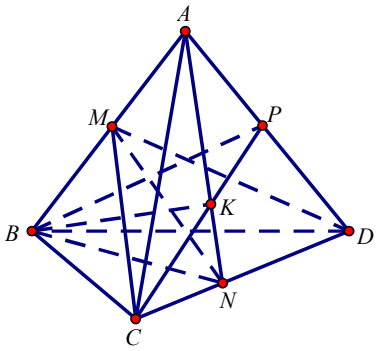
a. (ABN) và (CDM); b. (ABN) và (BCP).

Giải

a. Ta có M và N là hai điểm chung của hai mặt phẳng (ABN) và (CDM), nên giao tuyến của hai mặt phẳng này chính là đường thẳng MN.

b. Trong mặt phẳng (ACD): AN cắt CP tại K. Do đó K là điểm chung của hai mặt phẳng (BCP) và (ABN).

Mà B cũng là điểm chung của hai mặt phẳng này nên giao tuyến của chúng là đường thẳng BK.



3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang $ABCD$ $(AB \| CD)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hình chóp S.ABCD có 4 mặt bên.

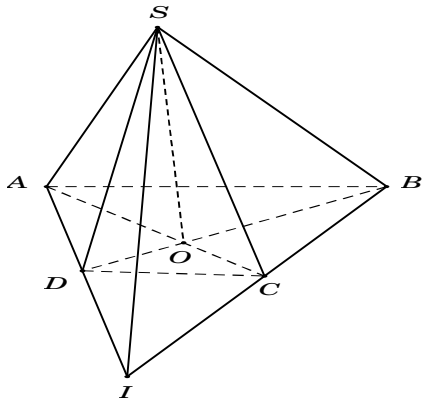
B. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO (O là giao điểm của AC và BD).

C. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là SI (I là giao điểm của AD và BC).

D. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là đường trung bình của ABCD.

Lời giải

Chọn D



- Hình chóp S.ABCD có 4 mặt bên: $(SAB),(SBC),(SCD),(SAD)$. Do đó A đúng.
- S là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

$\begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \Rightarrow O \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow O$ là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

$\longrightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO$. Do đó B đúng.

- Tương tự, ta có $(SAD) \cap (SBC) = SI$. Do đó C đúng.

• $(SAB)\cap(SAD)=SA$ mà SA không phải là đường trung bình của hình thang ABCD. Do đó D sai.

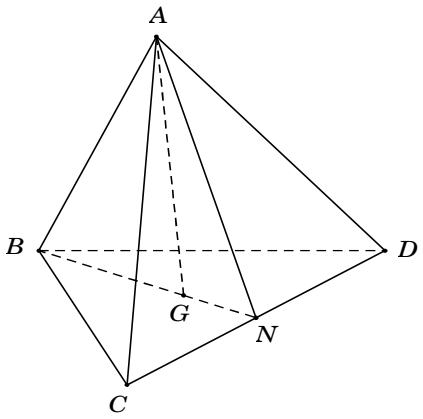
Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Giao tuyến của mặt phẳng (ACD) và (GAB) là:

A. AM (M là trung điểm của AB). **B.** AN (N là trung điểm của CD).

C. AH (H là hình chiếu của B trên CD). **D.** AK (K là hình chiếu của C trên BD).

Lời giải

Chọn B



• A là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (ACD) và (GAB).

• Ta có $BG\cap CD=N\longrightarrow\begin{cases}N\in BG\subset(ABG)\Rightarrow N\in(ABG)\\N\in CD\subset(ACD)\Rightarrow N\in(ACD)\end{cases}\Rightarrow N$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (ACD) và (GAB).

Vậy $(ABG)\cap(ACD)=AN$.

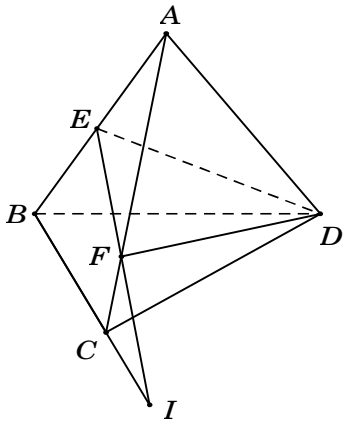
Câu 3: Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) chứa tam giác BCD. Lấy E, F là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC. Khi EF và BC cắt nhau tại I, thì I không phải là điểm chung của hai mặt phẳng nào sau đây?

A. (BCD) và (DEF). **B.** (BCD) và (ABC).

C. (BCD) và (AEF). **D.** (BCD) và (ABD).

Lời giải

Chọn D



Điểm I là giao điểm của EF và BC mà $\begin{cases} EF \subset (DEF) \\ EF \subset (ABC) \\ EF \subset (AEF) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = (BCD) \cap (DEF) \\ I = (BCD) \cap (ABC) \\ I = (BCD) \cap (AEF) \end{cases}$.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, CD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (MBD) và (ABN) là:

A. đường thẳng MN.

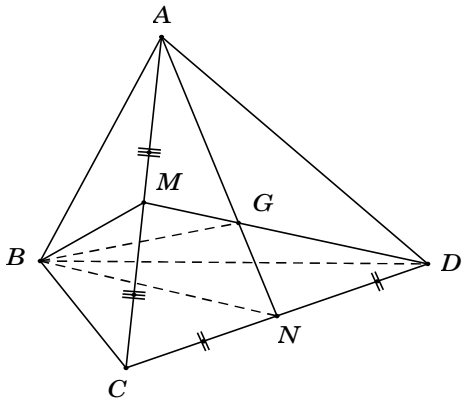
B. đường thẳng AH (H là trực tâm tam giác ACD).

C. đường thẳng BG (G là trọng tâm tam giác ACD).

D. đường thẳng AM.

Lời giải

Chọn C



- B là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABN).
- Vì M, N lần lượt là trung điểm của AC, CD nên suy ra AN, DM là hai trung tuyến của tam giác ACD. Gọi $G = AN \cap DM$

$\Rightarrow \begin{cases} G \in AN \subset (ABN) \Rightarrow G \in (ABN) \\ G \in DM \subset (MBD) \Rightarrow G \in (MBD) \end{cases} \Rightarrow G$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABN).

Vậy $(ABN) \cap (MBD) = BG$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là:

A. SD.

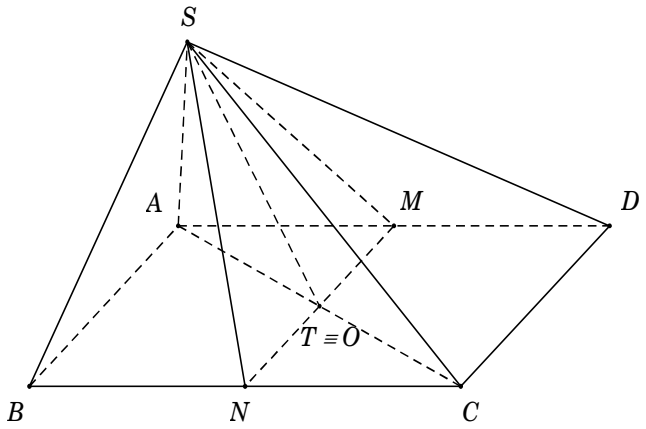
B. SO (O là tâm hình bình hành $ABCD$).

C. SG (G là trung điểm AB).

D. SF (F là trung điểm CD).

Lời giải

Chọn B



- S là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (SMN) và (SAC).
- Gọi $O = AC \cap BD$ là tâm của hình hình hành.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $T = AC \cap MN$

$\Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in MN \subset (SMN) \Rightarrow O \in (SMN) \end{cases} \Rightarrow O$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (SMN) và (SAC).

Vậy $(SMN) \cap (SAC) = SO$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trung điểm SA, SB. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $IJCD$ là hình thang.

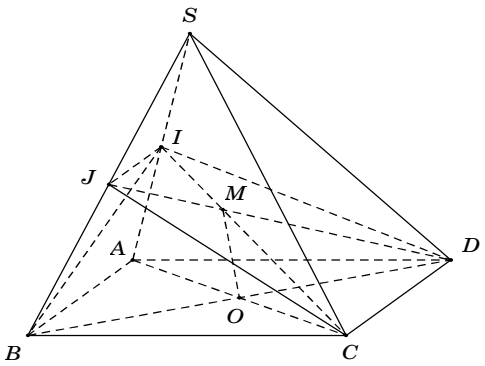
B. $(SAB) \cap (IBC) = IB$.

C. $(SBD) \cap (JCD) = JD$.

D. $(IAC) \cap (JBD) = AO$ (O là tâm $ABCD$).

Lời giải

Chọn D



- Ta có IJ là đường trung bình của tam giác $SAB \Rightarrow IJ \parallel AB \parallel CD \Rightarrow IJ \parallel CD$

$\Rightarrow IJCD$ là hình thang. Do đó A đúng.

- Ta có $\begin{cases} IB \subset (SAB) \\ IB \subset (IBC) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (IBC) = IB.$ Do đó B đúng.

- Ta có $\begin{cases} JD \subset (SBD) \\ JD \subset (JBD) \end{cases} \Rightarrow (SBD) \cap (JBD) = JD.$ Do đó C đúng.

- Trong mặt phẳng $(IJCD)$, gọi $M = IC \cap JD \Rightarrow (IAC) \cap (JBD) = MO.$ Do đó D sai.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ $(AD \parallel BC)$. Gọi M là trung điểm CD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là:

A. SI (I là giao điểm của AC và BM).

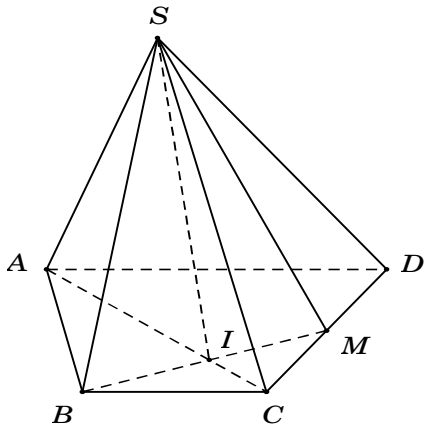
B. SJ (J là giao điểm của AM và BD).

C. SO (O là giao điểm của AC và BD).

D. SP (P là giao điểm của AB và CD).

Lời giải

Chọn A



- S là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (MSB) và (SAC).

• Ta có $\begin{cases} I \in BM \subset (SBM) \Rightarrow I \in (SBM) \\ I \in (AC) \in (SAC) \Rightarrow I \in (SAC) \end{cases} \Rightarrow I$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (MSB) và (SAC).

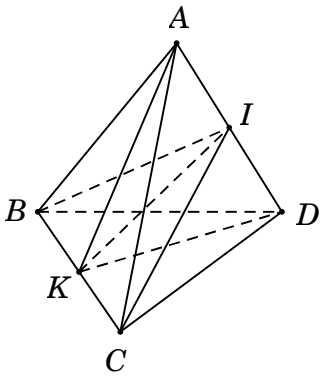
Vậy $(MSB) \cap (SAC) = SI$.

Câu 8: Cho 4 điểm không đồng phẳng A, B, C, D. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AD và BC. Giao tuyến của (IBC) và (KAD) là:

A. IK. **B.** BC. **C.** AK. **D.** DK.

Lời giải

Chọn A



Điểm K là trung điểm của BC suy ra $K \in (IBC) \Rightarrow IK \subset (IBC)$.

Điểm I là trung điểm của AD suy ra $I \in (KAD) \Rightarrow IK \subset (KAD)$.

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (KAD) là IK.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD$. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Trên cạnh SB lấy điểm M. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ADM) và (SAC).

A. SI.

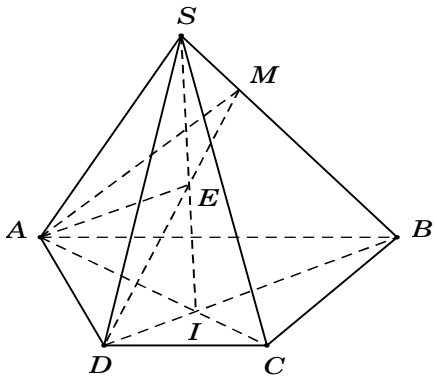
B. AE (E là giao điểm của DM và SI).

C. DM.

D. DE (E là giao điểm của DM và SI).

Lời giải

Chọn B



Ta có A là điểm chung thứ nhất của (ADM) và (SAC). Trong mặt phẳng (SBD), gọi $E = SI \cap DM$.

Ta có:

- $E \in SI$ mà $SI \subset (SAC)$ suy ra $E \in (SAC)$.
- $E \in DM$ mà $DM \subset (ADM)$ suy ra $E \in (ADM)$.

Do đó E là điểm chung thứ hai của (ADM) và (SAC).

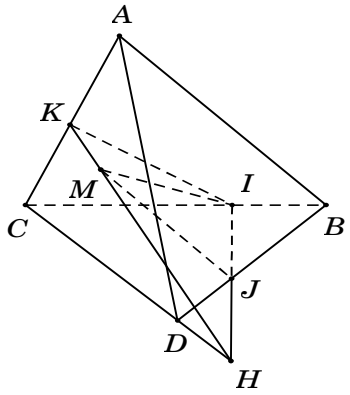
Vậy AE là giao tuyến của (ADM) và (SAC).

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thuộc miền trong của tam giác ACD. Gọi I và J lần lượt là hai điểm trên cạnh BC và BD sao cho IJ không song song với CD. Gọi H, K lần lượt là giao điểm của IJ với CD của MH và AC. Giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (IJM) là:

A. KI. **B.** KJ. **C.** MI. **D.** MH.

Lời giải

Chọn A



Trong mặt phẳng (BCD), IJ cắt CD tại $H \Rightarrow H \in (ACD)$.

Điểm $H \in IJ$ suy ra bốn điểm M, I, J, H đồng phẳng.

Nên trong mặt phẳng (IJM), MH cắt IJ tại H và $MH \subset (IJM)$.

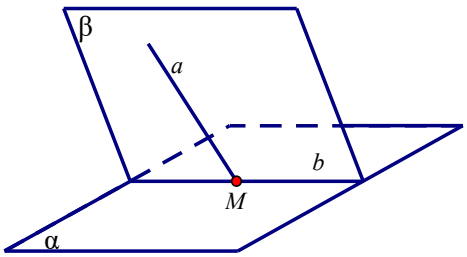
Mặt khác $\begin{cases} M \in (ACD) \\ H \in (ACD) \end{cases} \Rightarrow MH \subset (ACD)$. Vậy $(ACD) \cap (IJM) = MH$.

Dạng 3. Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

1. Phương pháp

Muốn tìm giao điểm của một đường thẳng a và mặt phẳng (α), ta tìm giao điểm của a và một đường thẳng b nằm trong (α).

$$\left.\begin{array}{l} a\cap b=M \\ b\subset(\alpha) \end{array}\right\}\Rightarrow M=a\cap(\alpha)$$



Phương pháp:

- Bước 1: Xác định mp(β) chứa a.

- Bước 2: Tìm giao tuyến $b=(\alpha)\cap(\beta)$.

- Bước 3: Trong $(\beta): a\cap b=M$, mà $b\subset(\alpha)$, suy ra $M=a\cap(\alpha)$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Cho tứ giác ABCD (không có cặp cạnh đối nào song song) nằm trong mặt phẳng (α). S là điểm không nằm trên (α).

a. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng: (SAC) và (SBD), (SAB) và (SCD).
b. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SC và SD. Tìm giao điểm P của đường thẳng BN với mặt phẳng (SAC).
c. Gọi Q và R lần lượt là trung điểm của SA và SB. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, Q, R đồng phẳng.

Giải

a. * Giao tuyến của mặt mp(SAC) và mp(SBD): Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Ta có:

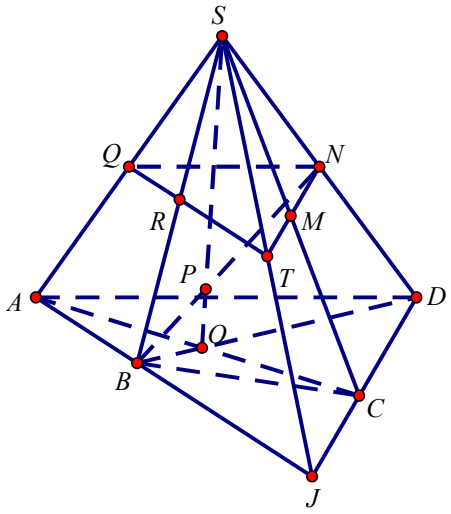
$$\left.\begin{array}{l} S\in(SAC) \\ S\in(SBD) \end{array}\right\}\Rightarrow S\in(SAC)\cap(SBD)$$

Từ (1) suy ra S là điểm chung thứ nhất của mp(SAC) và mp(SBD).

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} O\in AC \\ AC\subset(SAC) \end{array}\right\}\Rightarrow O\in(SAC) \\ \left.\begin{array}{l} O\in BD \\ BD\subset(SBD) \end{array}\right\}\Rightarrow O\in(SBD) \end{array}\right\}\Rightarrow O\in(SAC)\cap(SBD)\ \ (2)$$

Từ (2) suy ra O là điểm chung thứ hai của mp(SAC) và mp(SBD).

Vậy $SO=(SAC)\cap(SBD)$.



* Giao tuyến của mp(SAB) và mp(SCD): Gọi E là giao điểm của AB và CD. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} S \in (SAB) \\ S \in (SCD) \end{array}\right\} \Rightarrow S \in (SAB) \cap (SCD) \qquad (3)$$

Từ (3) suy ra S là điểm chung thứ nhất của mp(SAB) và mp(SCD).

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} E \in AB \\ AB \subset (SAB) \end{array}\right\} \Rightarrow E \in (SAB) \\ \left.\begin{array}{l} E \in CD \\ CD \subset (SCD) \end{array}\right\} \Rightarrow E \in (SCD) \end{array}\right\} \Rightarrow E \in (SAB) \cap (SCD) \qquad (4)$$

Từ (4) suy ra E là điểm chung thứ hai của mp(SAB) và mp(SCD).

Vậy: $SE = (SAB) \cap (SCD)$.

b. Trong mp(SBD), hai đường thẳng SO, BN cắt nhau tại P, ta có:

$$\left\{\begin{array}{l} P \in BN \\ P \in SO \subset (SAC) \Rightarrow P \in (SAC) \end{array}\right. \Rightarrow$$ P là giao điểm của BN và (SAC).

Vậy P là giao điểm cần tìm.

c. Chứng minh bốn điểm M, N, Q, R đồng phẳng:

- Trong mp(SCD), gọi T là giao điểm của MN và SE. Ta có MN là đường trung bình của tam giác SCD nên $MN \parallel CD$. Xét tam giác SDE, ta có:

$$\left.\begin{array}{l} MN \parallel CD \\ N \text{ là trung điểm của } SD \end{array}\right\} \Rightarrow$$ T là trung điểm của SE.

- Tương tự, QR là đường trung bình của tam giác SAB nên $QR \parallel AB$. Xét tam giác SAE, ta có:

$$\left.\begin{array}{l} QR \parallel AB \\ Q \text{ là trung điểm của } SA \end{array}\right\} \Rightarrow$$ QR đi qua trung điểm T của SE.

Như vậy, bốn điểm M, N, Q, R nằm trong mặt phẳng tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau TN và TQ nên chúng đồng phẳng.

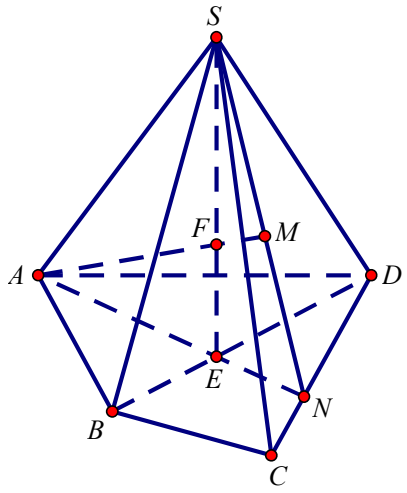
Ví dụ 2. Trong mặt phẳng (α), cho tứ giác ABCD. Gọi S là điểm không thuộc (α), M là điểm nằm trong tam giác SCD.

a. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAM) và (SBD).

b. Xác định giao điểm của AM và mặt phẳng (SBD).

Giải

a. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAM) và (SBD): Gọi N là giao điểm của SM và CD, gọi E là giao điểm của aN và BD. Rõ ràng $\text{mp}(SAM) \equiv \text{mp}(SAN)$. Ta có:



$$\left.\begin{array}{l} E \in AN \Rightarrow E \in (SAM) \\ E \in BD \Rightarrow E \in (SBD) \end{array}\right\} \Rightarrow E \in (SAM) \cap (SBD) \qquad (1)$$

Mặt khác: $S \in (SAM) \cap (SBD)$ $\qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $SE = (SAM) \cap (SBD)$.

b. Xác định giao điểm của AM và mặt phẳng (SBD). Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} (SAM) \supset AM \\ (SAM) \cap (SBD) = SE \\ F \in AM \cap SE \subset (SAM) \end{array}\right\} \Rightarrow F = AM \cap (SBD)$$

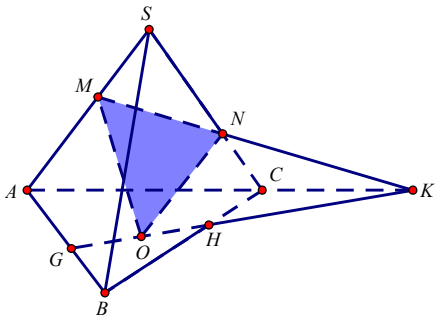
Ví dụ 3. Cho tứ diện SABC. Trên cạnh SA lấy điểm M, trên cạnh SC lấy điểm N, sao cho MN không song song với AC. Cho điểm O nằm trong tam giác ABC. Tìm giao điểm của mặt phẳng (OMN) với các đường thẳng AC, BC và AB.

Giải

Trong mp(SAC): $MN \cap AC = \{K\}$, mà $MN \subset (OMN)$ nên $\{K\} = AC \cap (OMN)$.

Trong mp(ABC): $OK \cap BC = \{H\}$, mà $OK \subset (OMN)$ nên $\{H\} = BC \cap (OMN)$.

Ta có: $OK \cap AB = \{G\}$, mà $OK \subset (OMN)$ nên $\{G\} = AB \cap (OMN)$.



Ví dụ 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD. Gọi E và F là hai điểm lần lượt nằm trên hai cạnh SB và CD.

a. Tìm giao điểm của EF với mặt phẳng (SAC).

b. Tìm giao điểm của mặt phẳng (AEF) với các đường thẳng BC và SC.

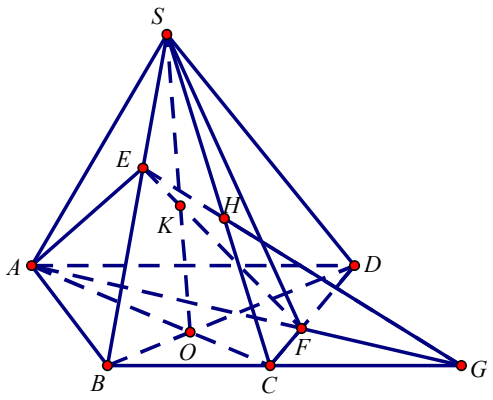
Giải

a. Ta có $EF \subset (SBF)$.

Trong mp(ABCD): $BF \cap AC = \{O\}$, suy ra $(SAC) \cap (SBF) = SO$.

Trong mp(SBF): $EF \cap SO = \{K\}$, mà $SO \subset (SAC)$, suy ra $\{K\} = EF \cap (SAC)$.

b. Trong mp(ABCD): $AF \cap BC = \{G\}$, mà $AF \subset (AEF)$, suy ra $\{G\} = BC \cap (AEF)$.



Khi đó: $(AEF) \equiv (AEG)$.

Trong mp(SBC): $EG \cap SC = \{H\}$, mà $EG \subset (AEF)$, suy ra $\{H\} = SC \cap (AEF)$.

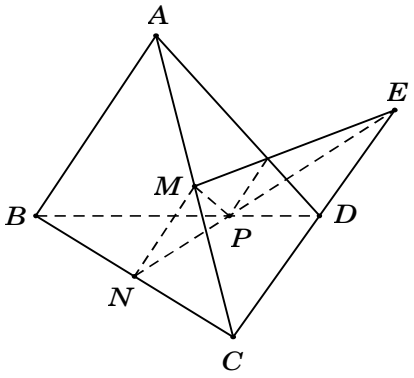
3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$. Giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của

A. CD và NP. **B.** CD và MN. **C.** CD và MP. **D.** CD và AP.

Lời giải

Chọn A



Cách 1. Xét mặt phẳng BCD chứa CD. Do NP không song song CD nên NP cắt CD tại E.

Điểm $E \in NP \Rightarrow E \in (MNP)$. Vậy $CD \cap (MNP)$ tại E.

Cách 2. Ta có $\begin{cases} N \in BC \\ P \in BD \end{cases} \Rightarrow NP \subset (BCD)$ suy ra NP, CD đồng phẳng.

Gọi E là giao điểm của NP và CD mà $NP \subset (MNP)$ suy ra $CD \cap (MNP) = E$.

Vậy giao điểm của CD và $mp(MNP)$ là giao điểm E của NP và CD.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD; G là trọng tâm tam giác BCD. Giao điểm của đường thẳng EG và mặt phẳng (ACD) là:

A. điểm F.

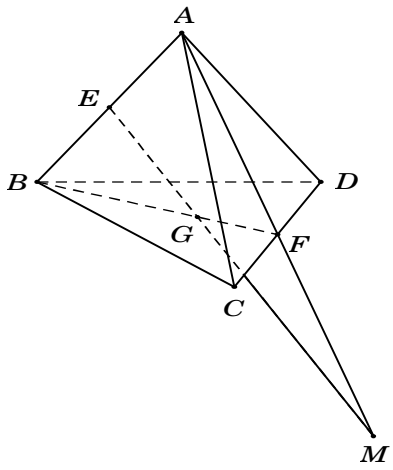
B. giao điểm của đường thẳng EG và AF.

C. giao điểm của đường thẳng EG và AC.

D. giao điểm của đường thẳng EG và CD.

Lời giải

Chọn B



Vì G là trọng tâm tam giác BCD, F là trung điểm của $CD \Rightarrow G \in (ABF)$.

Ta có E là trung điểm của $AB \Rightarrow E \in (ABF)$.

Gọi M là giao điểm của EG và AF mà $AF \subset (ACD)$ suy ra $M \in (ACD)$.

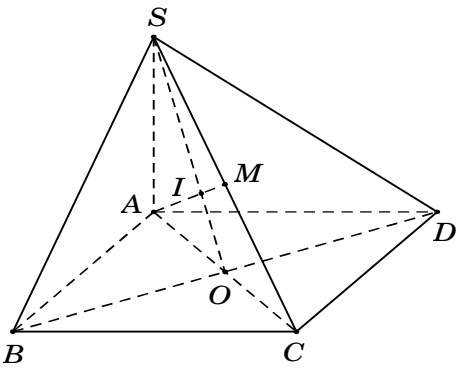
Vậy giao điểm của EG và $mp\,(ACD)$ là giao điểm $M = EG \cap AF$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC. Gọi I là giao điểm của AM với mặt phẳng (SBD). Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IM}$. **B.** $\overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{IM}$. **C.** $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IM}$. **D.** $IA = 2{,}5IM$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$ suy ra O là trung điểm của AC.

Nối AM cắt SO tại I mà $SO \subset (SBD)$ suy ra $I = AM \cap (SBD)$.

Tam giác SAC có M, O lần lượt là trung điểm của SC, AC.

Mà $I = AM \cap SO$ suy ra I là trọng tâm tam giác $SAC \Rightarrow AI = \frac{2}{3}AM \Leftrightarrow IA = 2IM$.

Điểm I nằm giữa A và M suy ra $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{MI} = -2\overrightarrow{IM}$.

Câu 4: Cho tứ giác $ABCD$ có AC và BD giao nhau tại O và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn SC lấy một điểm M không trùng với S và C. Giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM) là:

A. giao điểm của SD và AB.

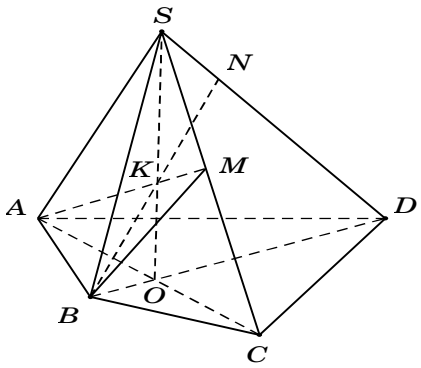
B. giao điểm của SD và AM.

C. giao điểm của SD và BK (với $K = SO \cap AM$).

D. giao điểm của SD và MK (với $K = SO \cap AM$).

Lời giải

Chọn C



● Chọn mặt phẳng phụ (SBD) chứa SD.

● Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBD) và (ABM).

Ta có B là điểm chung thứ nhất của (SBD) và (ABM).

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$. Trong mặt phẳng (SAC), gọi $K = AM \cap SO$. Ta có:

▪ $K \in SO$ mà $SO \subset (SBD)$ suy ra $K \in (SBD)$.

▪ $K \in AM$ mà $AM \subset (ABM)$ suy ra $K \in (ABM)$.

Suy ra K là điểm chung thứ hai của (SBD) và (ABM).

Do đó $(SBD) \cap (ABM) = BK$.

● Trong mặt phẳng (SBD), gọi $N = SD \cap BK$. Ta có:

▪ $N \in BK$ mà $BK \subset (ABM)$ suy ra $N \in (ABM)$.

▪ $N \in SD$.

Vậy $N = SD \cap (ABM)$.

Câu 5: Cho bốn điểm A, B, C, S không cùng ở trong một mặt phẳng. Gọi I, H lần lượt là trung điểm của SA, AB. Trên SC lấy điểm K sao cho IK không song song với AC (K không trùng với

các đầu mút). Gọi E là giao điểm của đường thẳng BC với mặt phẳng (IHK). Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. E nằm ngoài đoạn BC về phía B.

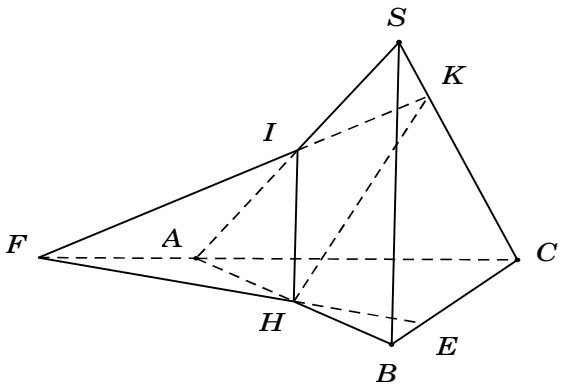
B. E nằm ngoài đoạn BC về phía C.

C. E nằm trong đoạn BC.

D. E nằm trong đoạn BC và $E \neq B$, $E \neq C$.

Lời giải

Chọn D



● Chọn mặt phẳng phụ (ABC) chứa BC.

● Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (IHK).

Ta có H là điểm chung thứ nhất của (ABC) và (IHK).

Trong mặt phẳng (SAC), do IK không song song với AC nên gọi $F = IK \cap AC$. Ta có

▪ $F \in AC$ mà $AC \subset (ABC)$ suy ra $F \in (ABC)$.

▪ $F \in IK$ mà $IK \subset (IHK)$ suy ra $F \in (IHK)$.

Suy ra F là điểm chung thứ hai của (ABC) và (IHK).

Do đó $(ABC) \cap (IHK) = HF$.

● Trong mặt phẳng (ABC), gọi $E = HF \cap BC$. Ta có

▪ $E \in HF$ mà $HF \subset (IHK)$ suy ra $E \in (IHK)$.

▪ $E \in BC$.

Vậy $E = BC \cap (IHK)$.

Dạng 4. Thiết diện

1. Phương pháp

Tìm các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau của mặt cắt với hình chóp cho đến khi khép kín thành một đa giác phẳng. Đa giác đó chính là thiết diện cần tìm. Mỗi đoạn giao tuyến là cạnh của thiết diện.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P là ba điểm nằm trên AB, BC, SO. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP).

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Giải

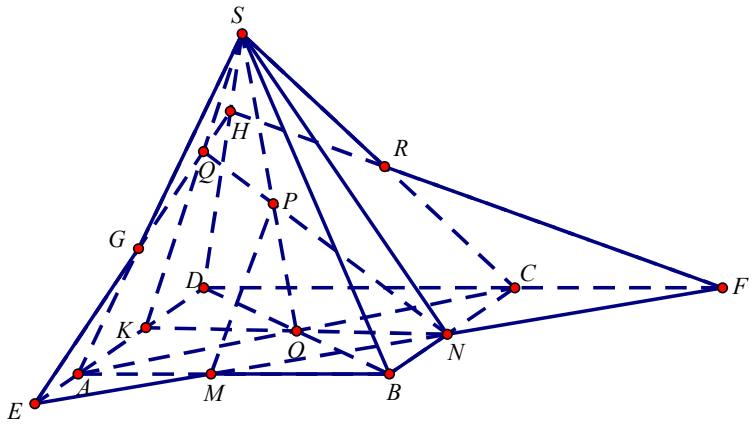
Trong mp(ABCD):

$$\begin{cases} MN \cap AD = \{E\} \\ MN \cap CD = \{F\} \\ NO \cap AD = \{K\} \end{cases}$$

Trong mp(SKN): $NP \cap SK = \{Q\}$.

Trong mp(SAD):

$$\begin{cases} EQ \cap SA = \{G\} \\ EQ \cap SD = \{H\} \end{cases}$$



Khi đó: $(MNP) \equiv (HEF)$

Trong mp(SCD): $HF \cap SC = \{R\}$.

Vậy ta có các đoạn giao tuyến do mp(MNP) cắt các mặt của hình chóp là:

$(MNP) \cap (ABCD) = MN$; $(MNP) \cap (SAD) = GH$; $(MNP) \cap (SAB) = MG$;
$(MNP) \cap (SCD) = HR$; $(MNP) \cap (SBC) = RN$.

Do đó thiết diện cần tìm là ngũ giác MNRHG.

Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang với đáy lớn AD. Gọi M là một điểm trên cạnh SB. Tìm thiết diện của hình chóp được cắt bởi mặt phẳng (AMD).

Giải

Trong mp(ABCD): $AB \cap CD = \{E\}$.

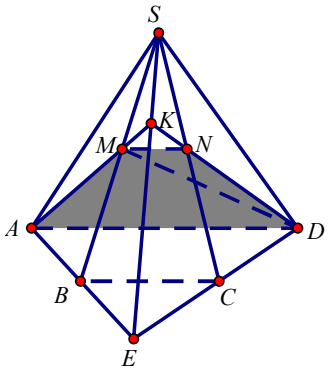
Trong mp(SAB): $AM \cap SE = \{K\}$.

Do đó $mp(AMD) \equiv mp(AKD)$.

Trong mp(SCD): $KD \cap SC = \{N\}$

Do đó $MN = (AMD) \cap (SBC)$, $ND = (AMD) \cap (SCD)$.

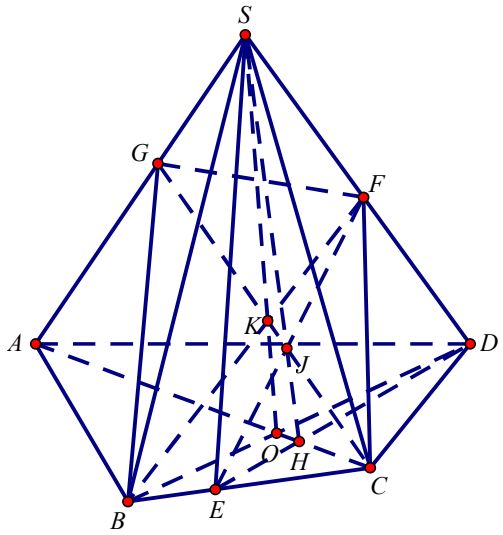
Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác AMND.



Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD, E là một điểm trên cạnh BC, F là một điểm trên cạnh SD.

a. Tìm giao điểm K của BF và mp(SAC).
b. Tìm giao điểm J của EF và mp(SAC).
c. Chứng minh ba điểm C, K, J thẳng hàng.
d. Xác định thiết diện của hình chóp được cắt bởi mặt phẳng (BCF).

Giải



a. Ta có: $BF \subset (SBD)$.

Trong mp(ABCD): $AC \cap BD = \{O\}$

Do đó $SO = (SAC) \cap (SBD)$.

Trong mp(SBD): $BF \cap SO = \{K\}$

Do đó $\{K\} = BF \cap (SAC)$.

b. Ta có $EF \subset (SED)$

Trong mp(ABCD): $AC \cap ED = \{H\}$

Trong mp(SED): $EF \cap SH = \{J\}$

Mà $SH \subset (SAC)$ nên $\{J\} = EF \cap (SAC)$.

c. Ta có:

$$\begin{cases} \{K\} = BF \cap (SAC) \\ \{J\} = EF \cap (SAC) \\ BF \subset (BCF), EF \subset (BCF) \end{cases} \Rightarrow K, J \in (BCF) \cap (SAC)$$

Mà $C \in (BCF) \cap (SAC)$, nên K, J, C là ba điểm chung của hai mặt phẳng (BCF) và (SAC), suy ra chúng thẳng hàng.

d. Trong mp(SAC): $CK \cap SA = \{G\}$, suy ra $mp(BCF) \equiv mp(BCFG)$.

Vậy ta có các đoạn giao tuyến của mp(BCF) với các mặt của hình chóp là: $BG = (BCF) \cap (SAB)$, $GF = (BCF) \cap (SAD)$, $FC = (BCF) \cap (SCD)$.

Do đó thiết diện cần tìm là tứ giác BCFG.

Ví dụ 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và AD; G là trọng tâm tam giác SAD. Đường thẳng BN cắt CD tại K.

a. Chứng minh ba điểm M, G, K thẳng hàng.

b. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MCG).

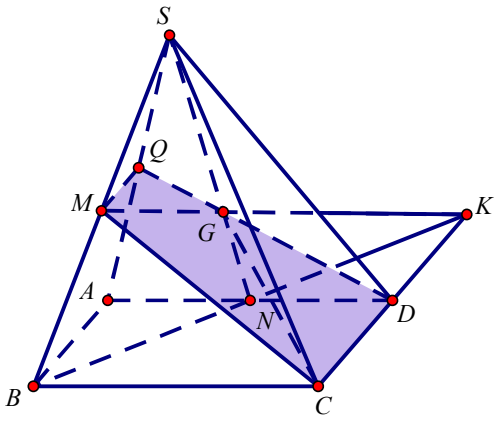
Tính tỉ số mà thiết diện chia đoạn SA. Từ đó cho biết thiết diện là hình gì?

Giải

a. Ta có SN là đường trung tuyến của tam giác SAD.

G là trọng tâm của tam giác SAD nên:

$\frac{SG}{SN}=\frac{2}{3}$.



Xét tam giác BCK có: ND$\parallel$ BC và $ND=\frac{1}{2}BC$ (do N là trung điểm của AD) nên SN là đường trung tuyến của tam giác SBK. Mà $\frac{SG}{SN}=\frac{2}{3}$ nên G cũng là trọng tâm của tam giác SBK.

Ta lại có MK là đường trung tuyến của tam giác SBK. Do đó KM đi qua trọng tâm G.

Vậy ba điểm M, G, K thẳng hàng.

b. Do ba điểm M, G, K thẳng hàng nên $mp(MCG)\equiv mp(MCK)$, suy ra $CD\subset(MCG)$ và $DG\subset(MCG)$.

Trong mp(SAD): $DG\cap SA=\{Q\}$, suy ra $DQ=(MCG)\cap(SAD)$ và $MQ=(MCG)\cap(SAB)$.

Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác MCDQ.

Vì G là trọng tâm tam giác SAD nên DG là đường trung tuyến của tam giác SAD. Do đó Q là trung điểm của SA.

Vậy thiết diện chia đoạn SA theo tỉ số $\frac{QS}{QA}=1$.

Như vậy MQ là đường trung bình của tam giác SAB.

Do đó MQ$\parallel$ AB, mà AB$\parallel$ CD nên MQ$\parallel$ CD.

Vậy thiết diện MCDQ là hình thang.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AC, E là điểm trên cạnh CD với $ED=3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là:

A. Tam giác MNE.

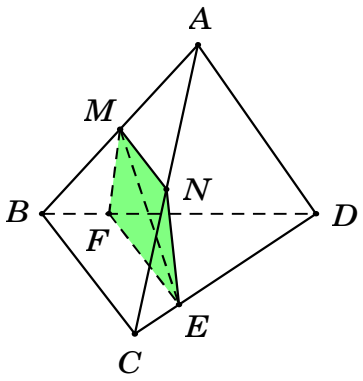
B. Tứ giác $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD.

C. Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà EF // BC.

D. Hình thang $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà EF // BC.

Lời giải

Chọn D



Tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC.

Suy ra MN là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow MN // BC$.

Từ E kẻ đường thẳng d song song với BC và cắt BD tại $F \Rightarrow EF // BC$.

Do đó $MN // EF$ suy ra bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng và $MNEF$ là hình thang.

Vậy hình thang $MNEF$ là thiết diện cần tìm.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC. Trên đường thẳng CD lấy điểm M nằm ngoài đoạn CD. Thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (HKM) là:

A. Tứ giác $HKMN$ với $N \in AD$.

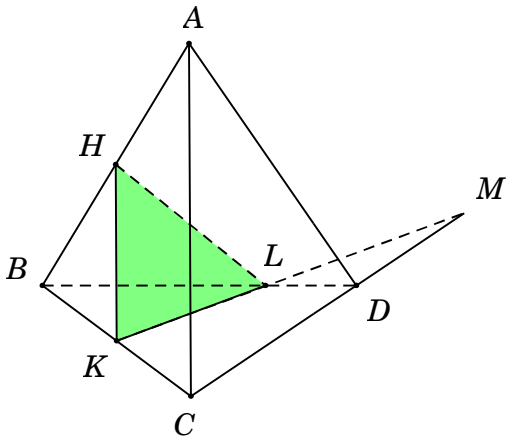
B. Hình thang $HKMN$ với $N \in AD$ và $HK // MN$.

C.Tam giác HKL với $L = KM \cap BD$.

D. Tam giác HKL với $L = HM \cap AD$.

Lời giải

Chọn C



Ta có HK, KM là đoạn giao tuyến của (HKM) với (ABC) và (BCD).

Trong mặt phẳng (BCD), do KM không song song với BD nên gọi $L = KM \cap BD$.

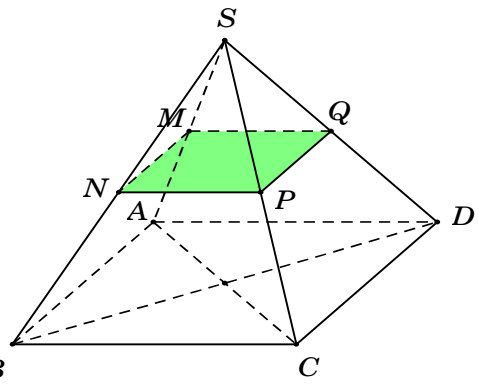
Vậy thiết diện là tam giác HKL.

Câu 3: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a $(a>0)$. Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC. Mặt phẳng (MNP) cắt hình chóp theo một thiết diện có diện tích bằng:

A. a^2. **B.** $\frac{a^2}{2}$. **C.** $\frac{a^2}{4}$. **D.** $\frac{a^2}{16}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi Q là trung điểm của SD.

Tam giác SAD có M, Q lần lượt là trung điểm của SA, SD suy ra $MQ // AD$.

Tam giác SBC có N, P lần lượt là trung điểm của SB, SC suy ra $NP // BC$.

Mặt khác $AD // BC$ suy ra $MQ // NP$ và $MQ = NP \Rightarrow MNPQ$ là hình vuông.

Khi đó M, N, P, Q đồng phẳng $\Rightarrow (MNP)$ cắt SD tại Q và $MNPQ$ là thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với $mp(MNP)$.

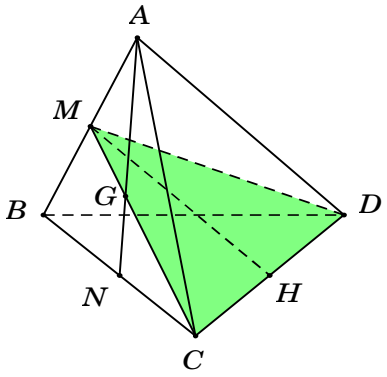
Vậy diện tích hình vuông $MNPQ$ là $S_{MNPQ} = \frac{S_{ABCD}}{4} = \frac{a^2}{4}$.

Câu 4: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Mặt phẳng (GCD) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích là:

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC suy ra $AN \cap MC = G$.

Dễ thấy mặt phẳng (GCD) cắt đường thẳng AB tại điểm M.

Suy ra tam giác MCD là thiết diện của mặt phẳng (GCD) và tứ diện $ABCD$.

Tam giác ABD đều, có M là trung điểm AB suy ra $MD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác ABC đều, có M là trung điểm AB suy ra $MC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi H là trung điểm của $CD \Rightarrow MH \perp CD \Rightarrow S_{\Delta MCD} = \frac{1}{2}.MH.CD$

Với $MH = \sqrt{MC^2 - HC^2} = \sqrt{MC^2 - \frac{CD^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

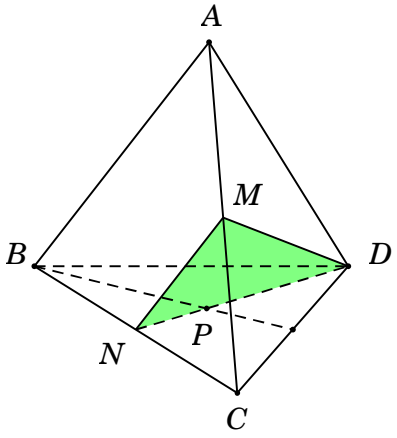
Vậy $S_{\Delta MCD} = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

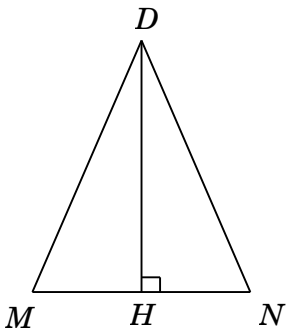
Câu 5: Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng $2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BC; P là trọng tâm tam giác BCD. Mặt phẳng (MNP) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích là:

A. $\frac{a^2\sqrt{11}}{2}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{11}}{4}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C





Trong tam giác BCD có: P là trọng tâm, N là trung điểm BC. Suy ra N, P, D thẳng hàng.

Vậy thiết diện là tam giác MND.

Xét tam giác MND, ta có $MN=\frac{AB}{2}=a$; $DM=DN=\frac{AD\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.

Do đó tam giác MND cân tại D.

Gọi H là trung điểm MN suy ra $DH\perp MN$.

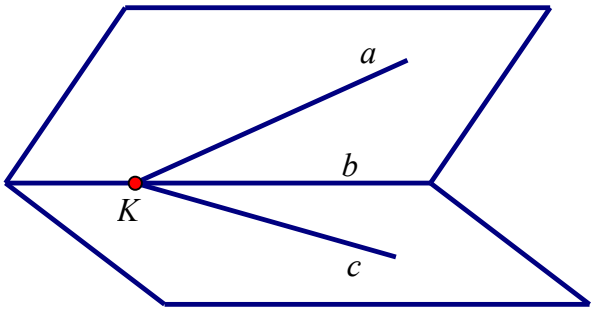
Diện tích tam giác $S_{\Delta MND}=\frac{1}{2}MN.DH=\frac{1}{2}MN.\sqrt{DM^2-MH^2}=\frac{a^2\sqrt{11}}{4}$.

Dạng 5. Ba điểm thẳng hàng ba đường thẳng đồng quy

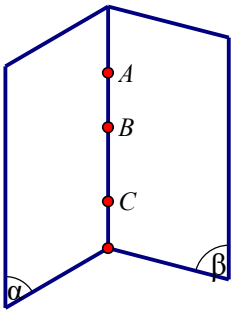
1. Phương pháp

- Muốn chứng minh ba đường thẳng đồng quy ta chứng minh có hai đường thẳng cắt nhau và giao điểm đó nằm trên đường thẳng thứ 3 (Hình a).

- Muốn chứng minh ba điểm thẳng hàng ta chứng minh chúng cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt (Hình b).



Hình a.



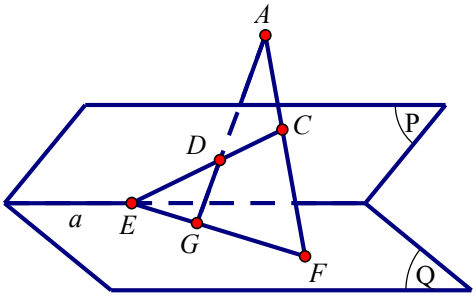
Hình b.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Gọi a là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q); A là điểm không nằm trên cả hai mặt phẳng này; C và D là hai điểm nằm trên (P). Gọi E là giao điểm của a với CD; F và G lần lượt là giao điểm của AC, AD với (Q). Chứng minh rằng ba điểm E, F và G thẳng hàng.

Giải

Ta thấy D và C thuộc mp(P), A không thuộc mp(P) nên A, C và D không thẳng hàng. Do đó, tồn tại mặt phẳng (ACD). Ta có:



$$\left.\begin{array}{l}F\in AC\Rightarrow F\in(ACD)\\ F\in(Q)\end{array}\right\}\Rightarrow F\in(ACD)\cap(Q)\quad(1)$$

$$\left.\begin{array}{l}G\in AD\Rightarrow G\in(ACD)\\ G\in(Q)\end{array}\right\}\Rightarrow G\in(ACD)\cap(Q)\quad(2)$$

$$\left.\begin{array}{l}E\in CD\Rightarrow E\in(ACD)\\ E\in a\subset(Q)\Rightarrow E\in(Q)\end{array}\right\}\Rightarrow E\in(ACD)\cap(Q)\quad(3)$$

Như vậy, F, G, E nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (Q) nên chúng thẳng hàng.

Ví dụ 2. Cho ba đường thẳng a, b, c không cùng nằm trong một mặt phẳng, sao cho chúng đôi một cắt nhau. Chứng minh chúng đồng quy.

Giải

Theo giả thiết a và b cắt nhau, giả sử tại O.

Ta chứng minh O thuộc c.

Do a và c cắt nhau nên tồn tại mp(a,c).

Do b và c cắt nhau nên tồn tại mp(b,c). Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} O\in a\Rightarrow O\in(a,c) \\ O\in b\Rightarrow O\in(b,c) \end{array}\right\}\Rightarrow O\in(a,c)\cap(b,c)$$

Mà $(a,c)\cap(b,c)=c$ nên $O\in c$.

Vậy ba đường thẳng a, b, c đồng quy tại O.

Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD, AC và BD cắt nhau tại O. Một mặt phẳng cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D'. Giả sử AD cắt BC tại E; A'D' cắt B'C' tại E'. Chứng minh:

a. S, E, E' thẳng hàng.

b. A'C', B'D', SO đồng quy.

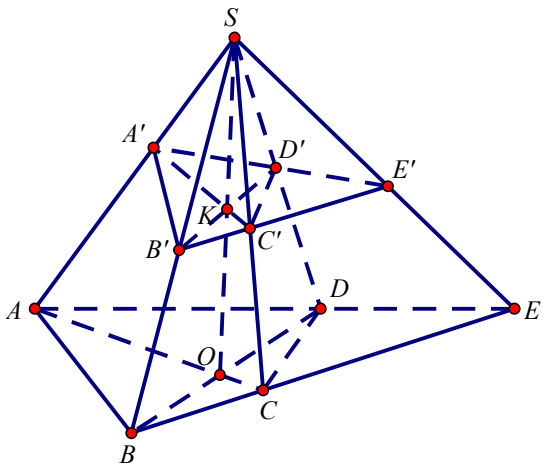
Giải

a. $\left\{\begin{array}{l} BC\cap AD=\{E\} \\ BC\subset(SBC) \\ AD\subset(SAD) \end{array}\right.\Rightarrow E\in(SBC)\cap(SAD)\quad(1)$

$\left\{\begin{array}{l} B'C'\cap A'D'=\{E'\} \\ B'C'\subset(SB'C') \\ A'D'\subset(SA'D') \end{array}\right.\Rightarrow E'\in(SB'C')\cap(SA'D')\quad(2)$

Mà $S\in(SBC)\cap(SAD)\quad(3)$

Kết hợp (1), (2), (3) ta có ba điểm S, E, E' cùng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD). Do đó ba điểm đó thẳng hàng.



b. Trong mp(A'B'C'D'):

$\left.\begin{array}{l} A'C'\cap B'D'=\{K\} \\ A'C'\subset(SAC) \\ B'D'\subset(SBD) \end{array}\right\}\Rightarrow K\in(SAC)\cap(SBD)\quad(i)$

Mà $(SAC)\cap(SBD)=SO\quad(ii)$ nên từ (i), (ii) suy ra $K\in SO$.

Vậy ba đường thẳng SO, A'C', B'D' đồng quy.

Ví dụ 4. Cho tứ diện SABC. Gọi I, J và K lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh SB, SC và AB, sao cho IJ không song song với BC, IK không song song với SA.

a. Tìm giao điểm D của (IJK) và BC.

b. Gọi E là giao điểm của DK và AC. Chứng minh ba đường thẳng SA, KI, EJ đồng quy.

Giải

a. Trong mp(SBC): $IJ \cap BC = \{D\}$ (do IJ không song song với BC).

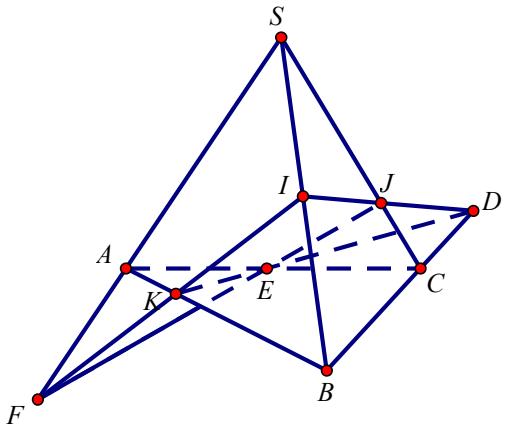
Mà $IJ \subset (IJK)$ nên $D = (IJK) \cap BC$.

b. Ta có IK không song song với SA nên trong mp(ABC): $IK \cap SA = \{F\}$.

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} IK \cap SA = \{F\} \\ IK \subset (IJK), SA \subset (SAC) \\ EJ = (IJK) \cap (SAC) \end{array}\right\} \Rightarrow F \in EJ.$$

Vậy ba đường thẳng SA, IK, EJ đồng quy.



Ví dụ 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD không là hình thang. Gọi O là giao điểm của AC và BD, K là một điểm trên cạnh SD.

a. Tìm giao điểm E của mặt phẳng (ABK) với CD.
b. Tìm giao điểm F của mặt phẳng (ABK) với SC.
c. Chứng minh các đường thẳng AF, BK và SO đồng quy.

Giải

a. Trong mp(ABCD): $AB \cap CD = \{E\}$.

Mà $AB \subset (ABK)$ nên $E \in (ABK) \cap CD$.

b. Ta có: $(ABK) \equiv (AEK)$

Trong mp(SCD): $EK \cap SC = \{F\}$.

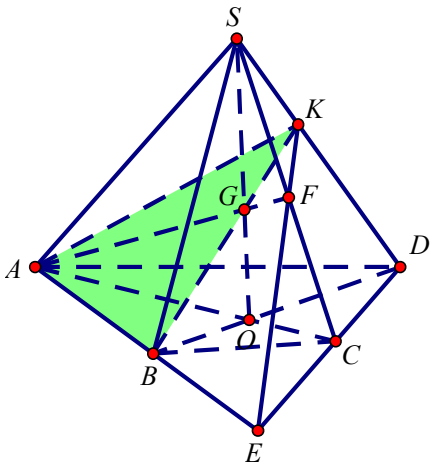
Mà $EK \subset (ABK)$ nên $F \in (ABK) \cap SC$.

c. Trong mp(ABK): $AF \cap BK = \{G\}$.

Mà $AF \subset (SAC)$, $BK \subset (SBD)$

nên $G \in (SAC) \cap (SBD) = SO$.

Vậy ba đường thẳng AF, BK và SO đồng quy.



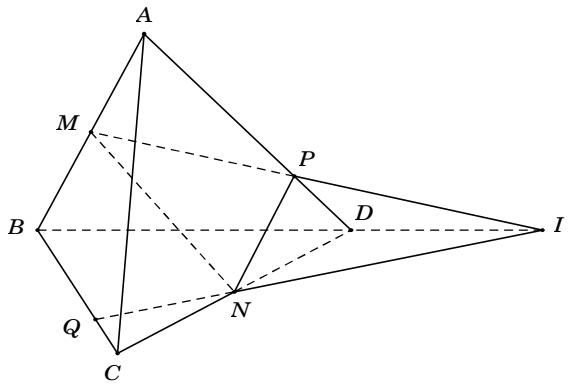
3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Mặt phẳng (α) qua MN cắt AD, BC lần lượt tại P và Q. Biết MP cắt NQ tại I. Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

A. I, A, C. **B.** I, B, D. **C.** I, A, B. **D.** I, C, D.

Lời giải

Chọn B



Ta có $(ABD)\cap(BCD)=BD$.

Lại có $\begin{cases} I\in MP\subset(ABD) \\ I\in NQ\subset(BCD) \end{cases}\Rightarrow I$ thuộc giao tuyến của (ABD) và (BCD)

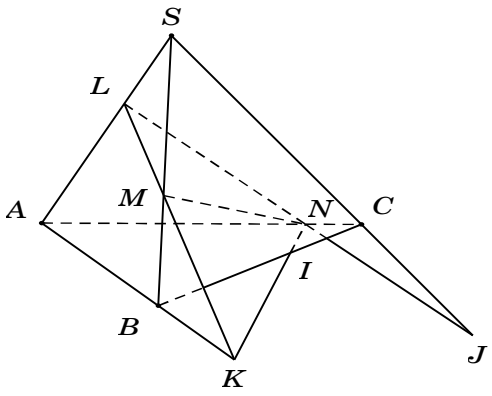
$\Rightarrow I\in BD\Rightarrow I,\ B,\ D$ thẳng hàng.

Câu 2: Cho tứ diện $SABC$. Gọi $L,\ M,\ N$ lần lượt là các điểm trên các cạnh $SA,\ SB$ và AC sao cho LM không song song với AB, LN không song song với SC. Mặt phẳng (LMN) cắt các cạnh $AB,\ BC,\ SC$ lần lượt tại $K,\ I,\ J$. Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

A. $K,\ I,\ J$. **B.** $M,\ I,\ J$. **C.** $N,\ I,\ J$. **D.** $M,\ K,\ J$.

Lời giải

Chọn B



Ta có

- $M\in SB$ suy M là điểm chung của (LMN) và (SBC).
- I là điểm chung của (LMN) và (SBC).
- J là điểm chung của (LMN) và (SBC).

Vậy $M,\ I,\ J$ thẳng hàng vì cùng thuộc giao tuyến của (LMN) và (SBC).

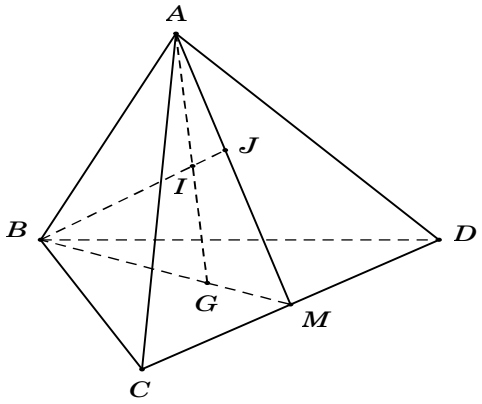
Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD, M là trung điểm CD, I là điểm ở trên đoạn thẳng AG, BI cắt mặt phẳng (ACD) tại J. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $AM=(ACD)\cap(ABG)$. **B.** $A,\ J,\ M$ thẳng hàng.

C. J là trung điểm của AM. **D.** $DJ=(ACD)\cap(BDJ)$.

Lời giải

Chọn C



Ta có A là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (ACD) và (GAB).

Do $BG\cap CD=M\Rightarrow\begin{cases}M\in BG\subset(ABG)\Rightarrow M\in(ABG)\\ M\in CD\subset(ACD)\Rightarrow M\in(ACD)\end{cases}\Rightarrow M$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (ACD) và (GAB).

$\Rightarrow(ABG)\cap(ACD)=AM\longrightarrow$ A đúng.

Ta có $\begin{cases}BI\subset(ABG)\\ AM\subset(ABM)\\ (ABG)\equiv(ABM)\end{cases}\Rightarrow AM,BI$ đồng phẳng.

$\Rightarrow J=BI\cap AM\Rightarrow A,J,M$ thẳng hàng $\longrightarrow$ B đúng.

Ta có $\begin{cases}DJ\subset(ACD)\\ DJ\subset(BDJ)\end{cases}\Rightarrow DJ=(ACD)\cap(BDJ)\longrightarrow$ D đúng.

Điểm I di động trên AG nên J có thể không phải là trung điểm của AM

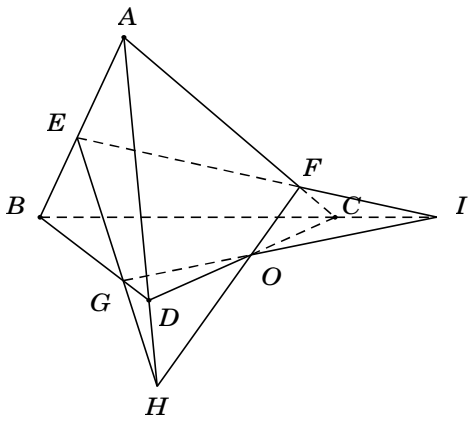
$\longrightarrow$ C sai.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F, G là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại I, EG cắt AD tại H. Ba đường thẳng nào sau đây đồng quy?

A. CD, EF, EG. **B.** CD, IG, HF. **C.** AB, IG, HF. **D.** AC, IG, BD.

Lời giải

Chọn B



Phương pháp: Để chứng minh ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng quy ta chứng minh giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β); đồng thời d_3 là giao tuyến (α) và (β).

Gọi $O = HF \cap IG$. Ta có

- $O \in HF$ mà $HF \subset (ACD)$ suy ra $O \in (ACD)$.
- $O \in IG$ mà $IG \subset (BCD)$ suy ra $O \in (BCD)$.

Do đó $O \in (ACD) \cap (BCD)$. (1)

Mà $(ACD) \cap (BCD) = CD$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $O \in CD$.

Vậy ba đường thẳng CD, IG, HF đồng quy.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ không phải là hình thang. Trên cạnh SC lấy điểm M. Gọi N là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMB). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Ba đường thẳng AB, CD, MN đôi một song song.

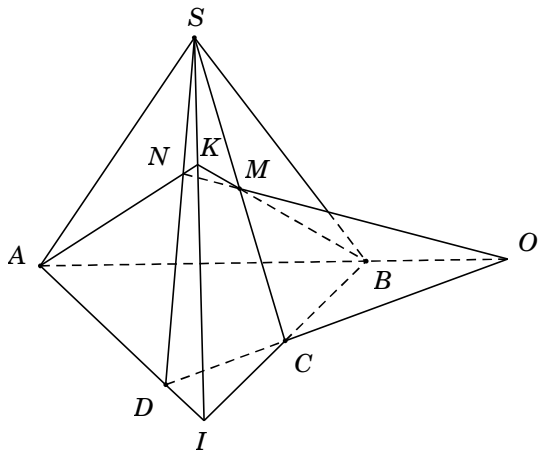
B. Ba đường thẳng AB, CD, MN đôi một cắt nhau.

C. Ba đường thẳng AB, CD, MN đồng quy.

D. Ba đường thẳng AB, CD, MN cùng thuộc một mặt phẳng.

Lời giải

Chọn C



Gọi $I = AD \cap BC$. Trong mặt phẳng (SBC), gọi $K = BM \cap SI$. Trong mặt phẳng (SAD), gọi $N = AK \cap SD$.

Khi đó N là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMB).

Gọi $O = AB \cap CD$. Ta có:

- $O \in AB$ mà $AB \subset (AMB)$ suy ra $O \in (AMB)$.
- $O \in CD$ mà $CD \subset (SCD)$ suy ra IJ, MN, SE.

Do đó $O \in (AMB) \cap (SCD)$. (1)

Mà $(AMB) \cap (SCD) = MN$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $O \in MN$. Vậy ba đường thẳng AB, CD, MN đồng quy.

Dạng 5. Tìm tập hợp giao điểm của hai đường thẳng.

1. Phương pháp

Áp dụng kết quả: $\left.\begin{array}{l} I = a \cap b \\ a \subset (P), b \cap (Q) \\ (P) \cap (Q) = c \end{array}\right\} \Rightarrow I \in c$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện aBCD. Gọi K là trung điểm của cạnh BC, H là một điểm cố định trên cạnh AC. Mặt phẳng (P) di động chứa HK, cắt các cạnh BD và AD lần lượt tại M và N.

a. Giả sử cho trước điểm M không là trung điểm của BD, hãy xác định điểm N.

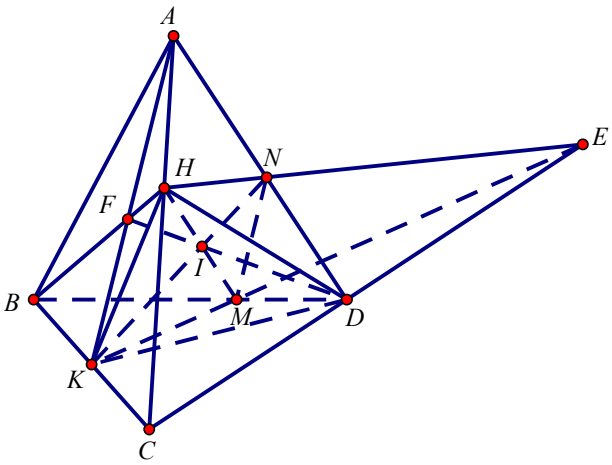
b. Tìm tập hợp giao điểm I của hai đường HM và KN khi M di động trên canh BD.

Giải

a. Trong mp(BCD): $KM \cap CD = \{E\}$.

Trong mp(ACD): $HE \cap AD = \{N\}$.

Mà $HE \subset (P)$ nên $N = AD \cap (P)$ là điểm cần tìm.



b. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} I = HM \cap KN \\ HM \subset (HBD) \\ KN \subset (AKD) \end{array}\right\} \Rightarrow I \in (HBD) \cap (AKD) \quad (1)$$

Trong mp(ABC): $BH \cap AK = \{F\}$

$\Rightarrow F \in (HBD) \cap (AKD)$

Mà $D \in (HBD) \cap (AKD)$, nên $DF = (HBD) \cap (AKD)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra I chạy trên đường thẳng cố định DF.

Giới hạn:

Cho $M \to D$ thì $N \to D$. Khi đó $I \to D$.

Cho $M \to B$ thì $N \to A$. Khi đó $I \to F$.

Vậy tập hợp điểm I là đoạn DF.

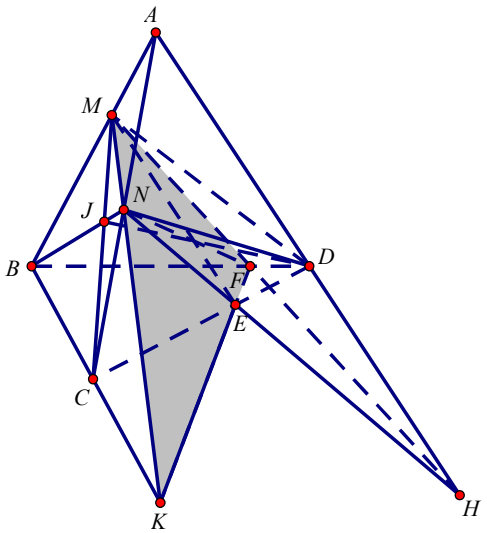
Ví dụ 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là hai điểm trên hai cạnh AB và AC, sao cho MN không song song với BC. Mặt phẳng (P) thay đổi luôn chứa MN, cắt các cạnh CD và BD lần lượt tại E và F.

a. Chứng minh EF luôn đi qua điểm cố định.
b. Tìm tập hợp giao điểm của ME và NF.
c. Tìm tập hợp giao điểm của MF và NE.

Giải

a. Trong mp(ABC): $MN \cap BC = K$.

Khi đó K là điểm chung của (BCD) và (P), mà EF là giao tuyến của (BCD) và (P) nên EF đi qua điểm K cố định.



b. Gọi I là giao điểm của ME và NF thì I là điểm chung của (NBD) và (MCD), suy ra I thuộc giao tuyến DJ của mp(MCD) và (NBD).

Giới hạn: Tập hợp cần tìm là đoạn DJ.

c. Gọi H là giao điểm của MF và NE thì H là điểm chung của (ABD) và (ACD), suy ra H thuộc giao tuyến AD của mp(ABD) và mp(ACD).

Giới hạn: Tập hợp điểm cần tìm là đường thẳng AD trừ đi đoạn AD.

BÀI 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU VÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng phân biệt

Cho hai đường thẳng a và b. Căn cứ vào sự đồng phẳng và số điểm chung của hai đường thẳng ta có bốn trường hợp sau:

a. Hai đường thẳng song song: cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung, tức là $a \parallel b \Leftrightarrow \begin{cases} a \subset (P); b \subset (P) \\ a \cap b = \varnothing \end{cases}$.

b. Hai đường thẳng cắt nhau: chỉ có một điểm chung.

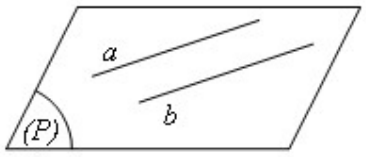
a cắt b khi và chỉ khi $a \cap b = I$.

c. Hai đường thẳng trùng nhau: có hai điểm chung phân biệt.

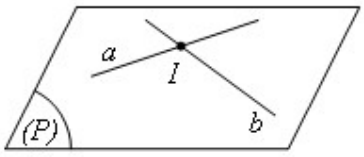
$a \cap b = \{A, B\} \Leftrightarrow a \equiv b$.

d. Hai đường thẳng chéo nhau: không cùng thuộc một mặt phẳng.

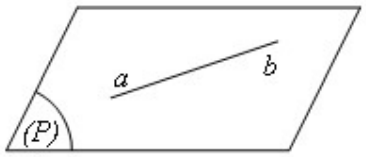
a chéo b khi và chỉ khi a, b không đồng phẳng.



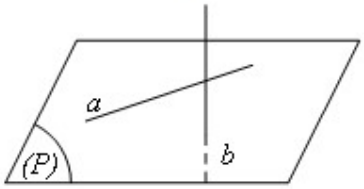
a song song với b



a cắt b tại giao điểm I



a và b cắt nhau tại vô số điểm (trùng)



a và b chéo nhau

2. Hai đường thẳng song song

Tính chất 1: Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

Tính chất 2: Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Định lí (về giao tuyến của hai mặt phẳng): Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Hệ quả: Nếu hai mặt phẳng lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó (hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó).

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Câu hỏi lý thuyết

1. Phương pháp

Cần nắm vững định nghĩa, các tính chất, định lý và hệ quả

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.

B. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.

C. Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt không chéo nhau thì hoặc cắt nhau hoặc song song.

Lời giải

Chọn A

Hai đường thẳng không có điểm chung thì chúng song song (khi chúng đồng phẳng) hoặc chéo nhau (khi chúng không đồng phẳng).

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác.

B. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không điểm chung.

C. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.

D. Hai đường thẳng chéo nhau khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.

Lời giải

Chọn D

- A sai. Trong trường hợp 2 đường thẳng cắt nhau thì chúng chỉ có 1 điểm chung.
- B và C sai. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng đồng phẳng và không có điểm chung.

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì trùng nhau.

C. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc trùng nhau.

D. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng song song.

Lời giải

Chọn C

Câu 4: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Hai đường thẳng chéo nhau thì chúng có điểm chung.

B. Hai đường thẳng không có điểm chung là hai đường thẳng song song hoặc chéo nhau.

C. Hai đường thẳng song song với nhau khi chúng ở trên cùng một mặt phẳng.

D. Khi hai đường thẳng ở trên hai mặt phẳng phân biệt thì hai đường thẳng đó chéo nhau.

Lời giải

Chọn B

- A sai. Hai đường thẳng chéo nhau thì chúng không có điểm chung.
- C sai. Có thể xảy ra trường hợp hai đường thẳng đó hoặc cắt nhau hoặc trùng nhau.

• D sai. Có thể xảy ra trường hợp hai đường thẳng đó song song.

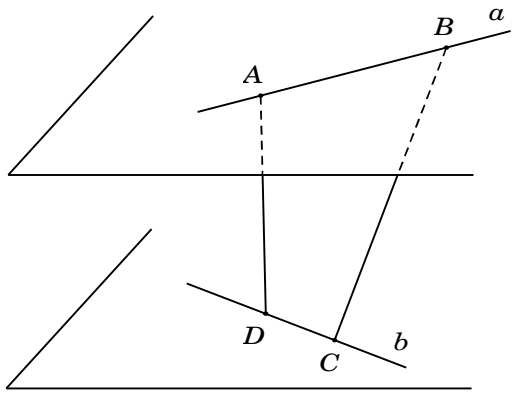
Câu 5: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Lấy A, B thuộc a và C, D thuộc b. Khẳng định nào sau đây **đúng** khi nói về hai đường thẳng AD và BC?

A. Có thể song song hoặc cắt nhau. **B.** Cắt nhau.

C. Song song với nhau. **D.** Chéo nhau.

Lời giải

Chọn D



Theo giả thiết, a và b chéo nhau $\Rightarrow$ a và b không đồng phẳng.

Giả sử AD và BC đồng phẳng.

• Nếu $AD \cap BC = I \Rightarrow I \in (ABCD) \Rightarrow I \in (a;b)$. Mà a và b không đồng phẳng, do đó, không tồn tại điểm I.

• Nếu $AD \parallel BC \Rightarrow$ a và b đồng phẳng (Mâu thuẫn với giả thiết).

Vậy điều giả sử là sai. Do đó AD và BC chéo nhau.

Câu 6: Cho ba mặt phẳng phân biệt (α), (β), (γ) có $(\alpha)\cap(\beta) = d_1$; $(\beta)\cap(\gamma) = d_2$; $(\alpha)\cap(\gamma) = d_3$. Khi đó ba đường thẳng d_1, d_2, d_3:

A. Đôi một cắt nhau. **B.** Đôi một song song.

C. Đồng quy. **D.** Đôi một song song hoặc đồng quy.

Lời giải

Chọn D

Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyền ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Câu 7: Trong không gian, cho 3 đường thẳng a, b, c, biết $a \parallel b$, a và c chéo nhau. Khi đó hai đường thẳng b và c:

A. Trùng nhau hoặc chéo nhau. **B.** Cắt nhau hoặc chéo nhau.

C. Chéo nhau hoặc song song. **D.** Song song hoặc trùng nhau.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $b \parallel c \Rightarrow c \parallel a$ (mâu thuẫn với giả thiết).

Câu 8: Trong không gian, cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c trong đó $a \parallel b$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Nếu $a \parallel c$ thì $b \parallel c$.

B. Nếu c cắt a thì c cắt b.

C. Nếu $A \in a$ và $B \in b$ thì ba đường thẳng a, b, AB cùng ở trên một mặt phẳng.

D. Tồn tại duy nhất một mặt phẳng qua a và b.

Lời giải

Chọn B

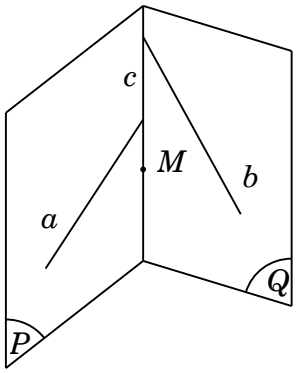
Nếu c cắt a thì c cắt b hoặc c chéo b.

Câu 9: Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b và điểm M ở ngoài a và ngoài b. Có nhiều nhất bao nhiêu đường thẳng qua M cắt cả a và b?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A



Gọi (P) là mặt phẳng tạo bởi đường thẳng a và M; (Q) là mặt phẳng tạo bởi đường thẳng b và M.

Giả sử c là đường thẳng qua M cắt cả a và b.

$\Rightarrow \begin{cases} c \in (P) \\ c \in (Q) \end{cases} \Rightarrow c = (P) \cap (Q)$.

Vậy chỉ có 1 đường thẳng qua M cắt cả a và b.

Câu 10: Trong không gian, cho 3 đường thẳng a, b, c chéo nhau từng đôi. Có nhiều nhất bao nhiêu đường thẳng cắt cả 3 đường thẳng ấy?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D

Gọi M là điểm bất kì nằm trên a.

Giả sử d là đường thẳng qua M cắt cả b và c. Khi đó, d là giao tuyến của mặt phẳng tạo bởi M và b với mặt phẳng tạo bởi M và c.

Với mỗi điểm M ta được một đường thẳng d.

Vậy có vô số đường thẳng cắt cả 3 đường thẳng a, b, c.

Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng song song

1. Phương pháp

Cách 1. (Dùng định nghĩa) chứng minh hai đường thẳng đồng phẳng và không có điểm chung.

Cách 2. Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song với một đường thẳng.

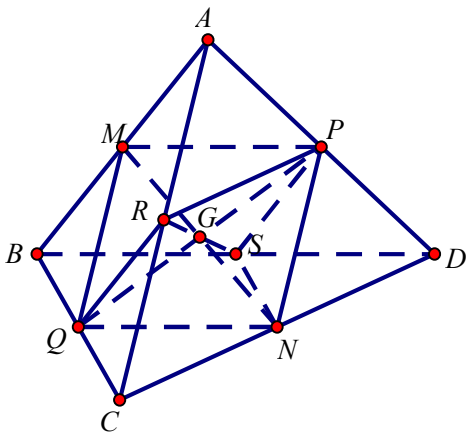
Cách 3. Dùng định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Chứng minh ba đoạn nối trung điểm các cạnh đối diện của một tứ diện đồng quy tại trung điểm của mỗi đoạn.

Giải

Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các đoạn AB, CD, AD, BC, AC, BD. Ta cần chứng minh các đoạn MN, PQ, RS đồng quy tại trung điểm của chúng.



Ta có:

MP là đường trung bình của ΔABD nên

$MP \parallel BD$ và $MP = \frac{1}{2}BD$ (1)

NQ là đường trung bình của ΔBCD nên

$NQ \parallel BD$ và $NQ = \frac{1}{2}BD$ (2)

Vậy tứ giác MPNQ là hình bình hành.

Gọi G là giao điểm của hai đường chéo MN và PQ. Khi đó ta có G là trung điểm của MN và PQ.

Tương tự ta chứng minh được tứ giác PSQR là hình bình hành. Suy ra trung điểm G của đường chéo PQ cũng là trung điểm của đường chéo RS.

Vậy ba đoạn MN, PQ, RS đồng quy tại trung điểm G của mỗi đường.

Chú ý: Điểm G nói trên được gọi là trọng tâm của tứ diện.

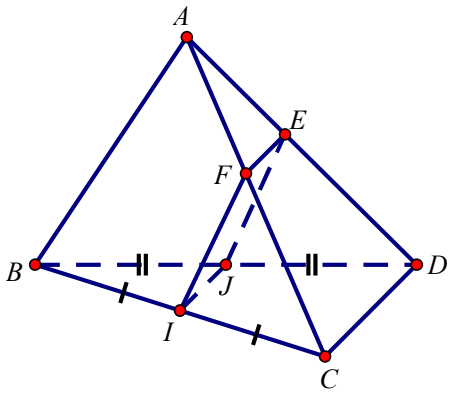
Ví dụ 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của BC và BD; E là một điểm trên cạnh AD nhưng không trùng với A và D.

a. Xác định thiết diện của tứ diện với mp(IJE).
b. Xác định vị trí của điểm E trên AD sao cho thiết diện đó là hình bình hành.
c. Tìm điều kiện của tứ diện ABCD và vị trí của điểm E trên AD sao cho thiết diện đó là hình thoi.

Giải

a. Xác định thiết diện của tứ diện với mp (IJE): Ta có IJ là đường trung bình của ΔBCD nên: $IJ \parallel CD$ (1)

$$\left.\begin{array}{l} IJ \subset (IJE) \\ CD \subset (ACD) \\ IJ \parallel CD \\ E \in (IJE) \cap (ACD) \end{array}\right\} \Rightarrow (IJE) \cap (ACD) = EF \parallel IJ \ (F \in AC) \quad (2)$$



Như vậy, mp(IJE) cắt các mặt của tứ diện theo các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau IJ, JE, EF và FI, nên thiết diện cần tìm là tứ giác IJEF có $EF \parallel IJ$ (theo (2)) nên thiết diện này là hình thang.

b. Xác định vị trí của điểm E trên AD sao cho thiết diện là hình bình hành: IJEF là hình bình hành khi và chỉ khi $JE \parallel IF \parallel AB$, tức là E là trung điểm của AD.

c. Tìm điều kiện của tứ diện ABCD và vị trí của điểm E trên AD để thiết diện là hình thoi: IJEF là hình thoi khi và chỉ khi IJEF là hình bình hành và $IJ = JE$, tức là E là trung điểm của AD và $AB = CD$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi E, F, G, H lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BC, AD, SD, SC sao cho $EH \parallel SB$, $EF \parallel AB$, $GH \parallel CD$.

a. Chứng minh 4 điểm E, F, G, H đồng phẳng.

b. Chứng minh $GF \parallel SA$.

c. Gọi I là giao điểm của EH và FG. Chứng minh rằng khi E di động trên BC thì I chạy trên một đường thẳng cố định.

Giải

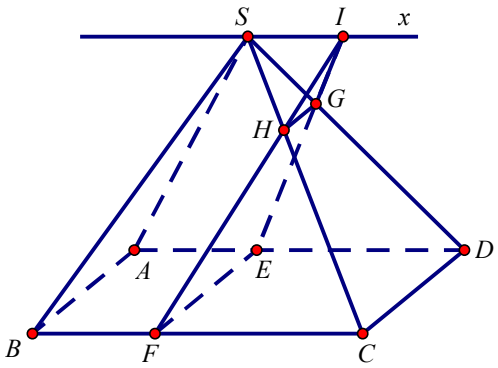
a. Chứng minh 4 điểm E, F, G, H đồng phẳng. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} EF \parallel AB \\ AB \parallel CD \end{array}\right\} \Rightarrow EF \parallel CD \quad (1)$$

Mặt khác: $GH \parallel CD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $EF \parallel GH$ (3)

(3) chứng tỏ tồn tại duy nhất mặt phẳng qua hai đường thẳng song song EF và GH. Vậy bốn điểm E, F, G, H đồng phẳng (cùng thuộc $mp(EF,GH)$).



b. Chứng minh $GF \parallel SA$:

ΔSCD có $GH \parallel CD$ nên: $\dfrac{DG}{DS} = \dfrac{CH}{CS}$ (4)

ΔCBS có $EH \parallel SB$ nên: $\dfrac{CH}{CS} = \dfrac{CE}{CB}$ (5)

Hình bình hành ABCD có $EF \parallel AB \parallel CD$ nên: $\dfrac{CE}{CB} = \dfrac{DF}{DA}$ (6)

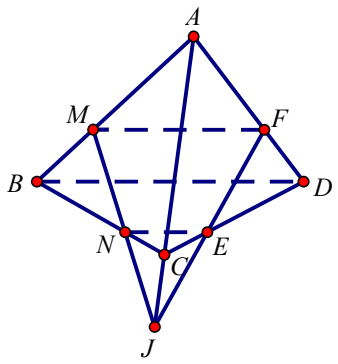
Từ (4), (5), (6) suy ra: $\dfrac{DG}{DS} = \dfrac{DF}{DA} \Rightarrow GF \parallel SA$.

c. Chứng minh I chạy trên đường thẳng cố định. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} I \in EH \subset (SBC) \Rightarrow I \in (SBC) \\ I \in FG \subset (SAD) \Rightarrow I \in (SAD) \end{array}\right\} \Rightarrow I \in (SBC) \cap (SAD)$$

Điều này chứng tỏ I chạy trên giao tuyến cố định Sx của hai mặt phẳng cố định (SBC) và (SAD) khi E chạy trên BC.

Ví dụ 4. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, E, F là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB, BC, CD và DA. Giả sử MN cắt EF. Chứng minh rằng MN, AC và EF đồng quy.



Giải

Vì MN cắt EF nên bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng.

Giả sử MN cắt EF tại J. Áp dụng định lí 3 (định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng) cho ba mặt phẳng (ABC), (ACD) và (NJF), ta có ba giao tuyến MN, AJ và EF đồng quy tại J.

Ví dụ 5. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác SAB và SAD; E là trung điểm của cạnh BC.

a. Chứng minh $MN \parallel BD$.

b. Xác định thiết diện của hình chóp với mp(MNE).

c. Gọi H và L lần lượt là các giao điểm của mp(MNE) với các cạnh SB và SD. Chứng minh rằng $LH \parallel BD$.

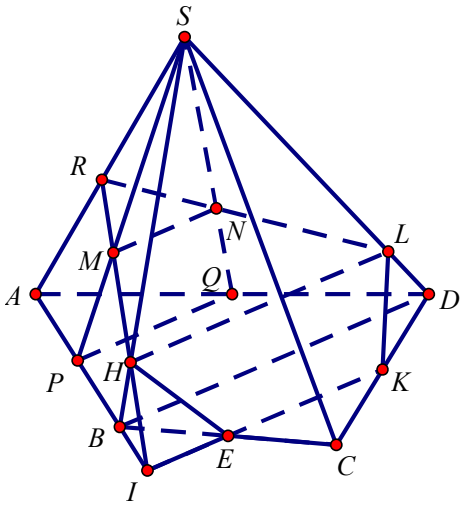
Giải

a. Chứng minh $MN \parallel BD$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và AD. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} M \in SP, N \in SQ \\ \dfrac{PM}{PS} = \dfrac{QN}{QS} = \dfrac{1}{3} \text{ (tính chất trọng tâm)} \end{array}\right\} \Rightarrow MN \parallel PQ \qquad (1)$$

Mặt khác: PQ là đường trung bình của ΔABD nên: $PQ \parallel BD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $MN \parallel BD$.



b. Xác định thiết diện của hình chóp với mp(MNE). Theo hệ quả của định lí 3, ta có:

$$\left.\begin{array}{l} MN \subset (MNE) \\ BD \subset (ABCD) \\ MN \parallel BD \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow (ABCD) \cap (MNE) = EK \parallel MN \parallel BD \left(K \in CD\right)$$

Trong mp(ABCD), gọi $I = AB \cap EK$.

Trong mp(SAB), gọi $R = IM \cap SA$, $H = IM \cap SB$.

Trong mp(SAD), gọi $L = RN \cap SD$.

Như vậy, mp(MNE) cắt các mặt (ABCD), (SBC), (SAB), (SAD), (SCD) lần lượt theo các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau KE, EH, HR, RL, LK. Do đó thiết diện cần tìm là ngũ giác KEHRL.

c. Chứng minh $LH \parallel BD$:

$$\left.\begin{array}{l} MN \subset (MNE) \\ BD \subset (SBD) \\ MN \parallel BD \\ (SBD) \cap (MNE) = HL \end{array}\right\} \Rightarrow LH \parallel BD.$$

Dạng 3. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

1. Phương pháp

Cách 1. Tìm hai điểm chung phân biệt (đã đề cập ở bài 1).

Cách 2. (Dùng hệ quả định lí về giao tuyến của hai mặt phẳng).

$$\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ a \subset (P), b \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = c \end{array}\right\} \Rightarrow c \parallel a \parallel b$$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện SABC. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và AB, G là một điểm trên cạnh AC. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

a. (SAC) và (EFC).

b. (SAC) và (EFG).

Giải

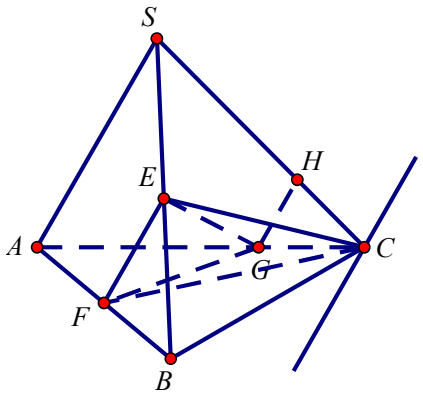
a. Ta có: EF là đường trung bình của tam giác SAB

$\Rightarrow EF \parallel SA$

Mà

$$\left.\begin{array}{l} EF \subset (EFC), SA \subset (SAC) \\ C \in (EFC) \cap (SAC) \end{array}\right\}$$

Suy ra $(EFC) \cap (SAC) = Cx \parallel EF \parallel SA$



b. Ta có: $EF \parallel SA$

Mà

$$\left.\begin{array}{l} EF \subset (EFG), SA \subset (SAC) \\ G \in (EFG) \cap (SAC) \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow (EFG) \cap (SAC) = Gy \parallel EF \parallel SA$

Trong mp(SAC): Gy cắt SC tại H. Vậy $GH = (EFG) \cap (SAC)$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SB, P là một điểm trên cạnh BC. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

a. (SBC) và (SAD).

b. (SAB) và (SCD).

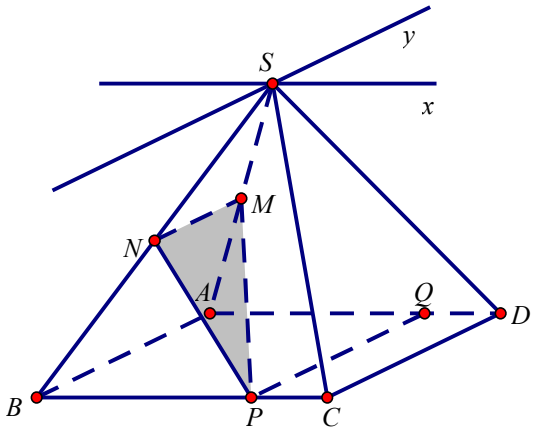
c. (MNP) và (ABCD).

Giải

a. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} BC \parallel AD \\ BC \subset (SBC), AD \subset (SAD) \\ S \in (SBC) \cap (SAD) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow (SBC) \cap (SAD) = Sx \parallel BC \parallel AD.$$



b. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sy \parallel AB \parallel CD.$$

c. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} MN \parallel AB \\ MN \subset (MNP), AB \subset (ABCD) \\ P \in (MNP) \cap (ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow (MNP) \cap (ABCD) = PQ \parallel AB \parallel MN \ (Q \in AD).$$

Ví dụ 3. Cho tứ diện ABCD. Gọi G và J lần lượt là trọng tâm tam giác BCD và tam giác ACD.

a. Chứng minh $GJ \parallel AB$.

b. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (GJD).

Giải

a. Gọi K là trung điểm của CD.

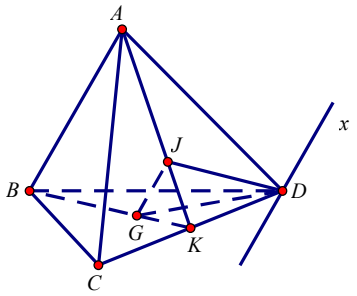
Theo tính chất trọng tâm tam giác ta có:

$$\frac{KG}{KB} = \frac{KJ}{KA} = \frac{1}{3} \Rightarrow GJ \parallel AB.$$

b. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} GJ \parallel AB \\ GJ \subset (GJD), AB \subset (ABD) \\ D \in (GJD) \cap (ABD) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow (GJD) \cap (ABD) = Dx \parallel AB \parallel GJ$$



Ví dụ 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD tâm O và I là một điểm trên đoạn SO.

a. Tìm giao điểm E và F của mặt phẳng (ICD) lần lượt với các đường SA và SB. Chứng minh $EF \parallel AB$.

b. Gọi K là giao điểm của DE và CF. Chứng minh $SK \parallel BC$.

Giải

a. Trong mp(SAC): $IC\cap SA=\{E\}$

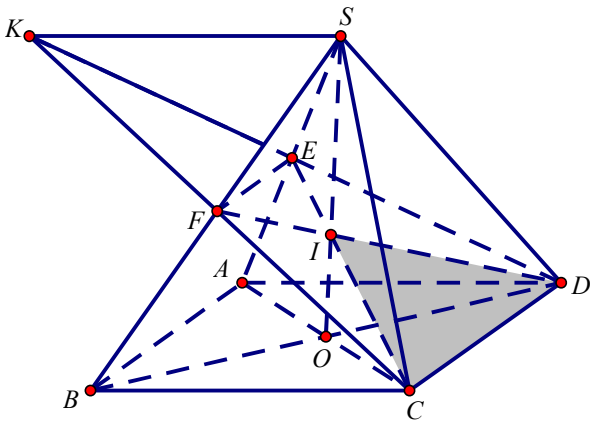
Trong mp(SBD): $ID\cap SB=\{F\}$

Mà $IC\subset(ICD), ID\subset(ICD)$

nên $E=(ICD)\cap SA, F=(ICD)\cap SB$.

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} EF=(SAB)\cap(ICD) \\ AB\parallel CD \\ AB\subset(SAB), CD\subset(SCD) \end{array}\right\}\Rightarrow EF\parallel AB\parallel CD.$$



b. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} CF\cap DE=\{K\} \\ CF\subset(SBC) \\ DE\subset(SAD) \end{array}\right\}\Rightarrow K\in(SBC)\cap(SAD).$$

Mà $S\in(SBC)\cap(SAD)$ nên $SK=(SBC)\cap(SAD)$.

Vậy:

$$\left.\begin{array}{l} SK=(SBC)\cap(SAD) \\ BC\parallel AD \\ BC\subset(SBC), AD\subset(SAD) \end{array}\right\}\Rightarrow SK\parallel BC\parallel AD.$$

Dạng 4. Bài tập áp dụng

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. IJ song song với CD.

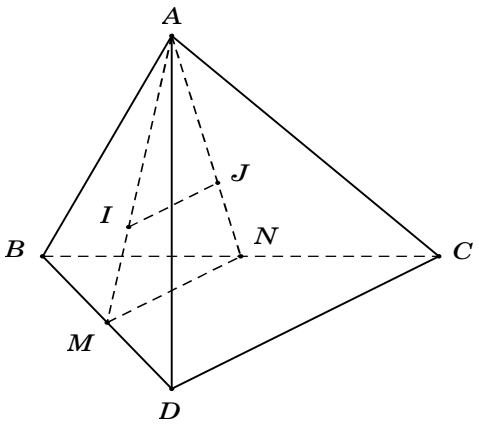
B. IJ song song với AB.

C. IJ chéo CD.

D. IJ cắt AB.

Lời giải

Chọn A



Gọi M,N lần lượt là trung điểm của $BC, BD.$

$\Rightarrow$ MN là đường trung bình của tam giác $BCD \Rightarrow MN//CD$ (1)

I,J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và $ABD \Rightarrow \dfrac{AI}{AM}=\dfrac{AJ}{AN}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow IJ // MN$ (2)

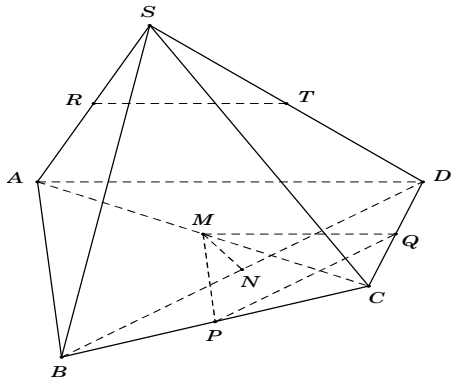
Từ (1) và (2) suy ra: $IJ // CD.$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có AD không song song với BC. Gọi $M,N,$ P,Q,R,T lần lượt là trung điểm $AC,BD,BC,CD,SA,SD.$ Cặp đường thẳng nào sau đây song song với nhau?

A. MP và $RT.$ **B.** MQ và $RT.$ **C.** MN và $RT.$ **D.** PQ và $RT.$

Lời giải

Chọn B



Ta có: M,Q lần lượt là trung điểm của AC,CD

$\Rightarrow MQ$ là đường trung bình của tam giác $CAD \Rightarrow MQ // AD$ (1)

Ta có: R,T lần lượt là trung điểm của SA,SD

$\Rightarrow RT$ là đường trung bình của tam giác $SAD \Rightarrow RT // AD$ (2)

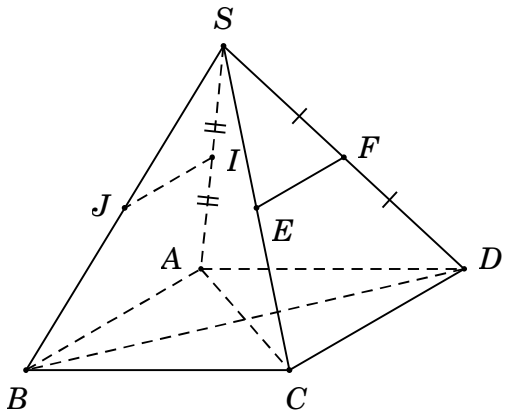
Từ $(1),(2)$ suy ra: $MQ // RT.$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I,J,E,F lần lượt là trung điểm $SA,SB,SC,SD.$ Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào không song song với IJ?

A. $EF.$ **B.** $DC.$ **C.** $AD.$ **D.** $AB.$

Lời giải

Chọn C



Ta có $IJ \parallel AB$ (tính chất đường trung bình trong tam giác SAB) và $EF \parallel CD$ (tính chất đường trung bình trong tam giác SCD).

Mà $CD \parallel AB$ (đáy là hình bình hành) $\longrightarrow CD \parallel AB \parallel EF \parallel IJ$.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng AB; P,Q là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng CD. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng MP,NQ.

A. $MP \parallel NQ$.

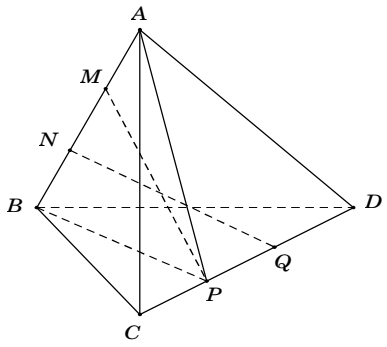
B. $MP \equiv NQ$.

C. MP cắt NQ.

D. MP,NQ chéo nhau.

Lời giải

Chọn D



Xét mặt phẳng (ABP).

Ta có: M,N thuộc $AB \Rightarrow M,N$ thuộc mặt phẳng (ABP).

Mặt khác: $CD \cap (ABP) = P$.

Mà: $Q \in CD \Rightarrow Q \notin (ABP) \Rightarrow M,N,P,Q$ không đồng phẳng.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC). Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. d qua S và song song với BC.

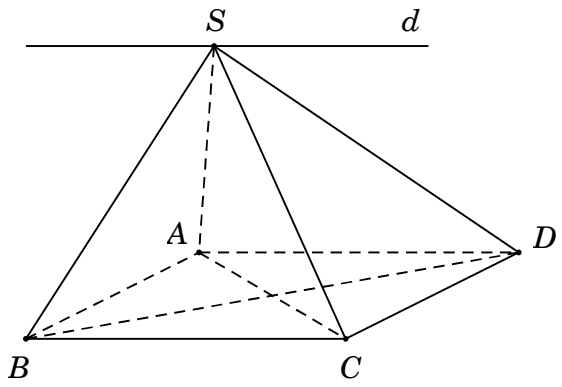
B. d qua S và song song với DC.

C. d qua S và song song với AB.

D. d qua S và song song với BD.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\begin{cases}(SAD)\cap(SBC)=S\\ AD\subset(SAD),BC\subset(SBC)\\ AD\parallel BC\end{cases}\longrightarrow (SAD)\cap(SBC)=Sx\parallel AD\parallel BC$ (với $d\equiv Sx$).

Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J theo thứ tự là trung điểm của AD và AC,G là trọng tâm tam giác BCD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng:

A. qua I và song song với AB.

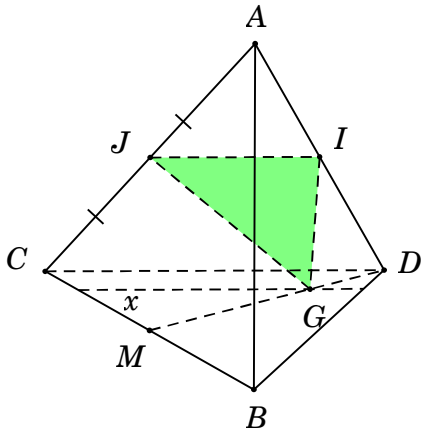
B. qua J và song song với BD.

C. qua G và song song với CD.

D. qua G và song song với BC.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases}(GIJ)\cap(BCD)=G\\ IJ\subset(GIJ),CD\subset(BCD)\\ IJ\parallel CD\end{cases}\longrightarrow (GIJ)\cap(BCD)=Gx\parallel IJ\parallel CD.$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AD và BC và G là trọng tâm của tam giác SAB. Giao tuyến của (SAB) và (IJG) là

A. SC.

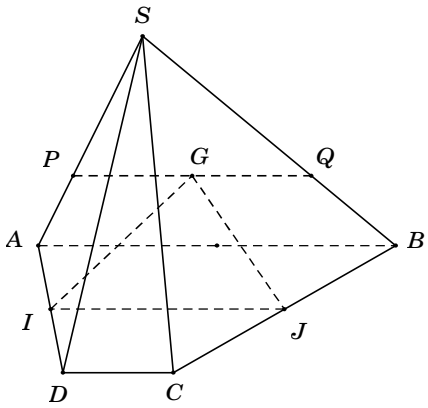
B. đường thẳng qua S và song song với AB.

C. đường thẳng qua G và song song với DC.

D. đường thẳng qua G và cắt BC.

Lời giải

Chọn C



Ta có: I,J lần lượt là trung điểm của AD và BC

$\Rightarrow IJ$ là đường trunh bình của hình thang $ABCD \Rightarrow IJ // AB // CD$.

Gọi $d = (SAB) \cap (IJG)$

Ta có: G là điểm chung giữa hai mặt phẳng (SAB) và (IJG)

Mặt khác: $\begin{cases} (SAB) \supset AB; (IJG) \supset IJ \\ AB // IJ \end{cases}$

$\Rightarrow$ Giao tuyến d của (SAB) và (IJG) là đường thẳng qua G và song song với AB và IJ.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I là trung điểm SA. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (IBC) là:

A. Tam giác IBC.

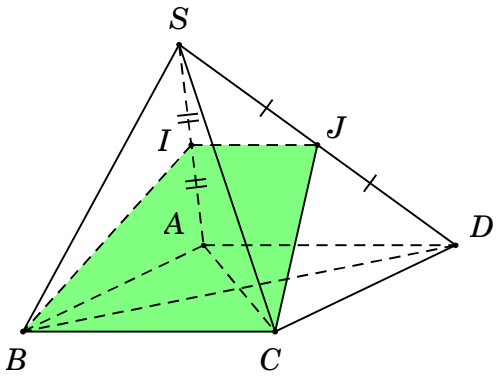
B. Hình thang $IBCJ$ (J là trung điểm SD).

C. Hình thang $IGBC$ (G là trung điểm SB).

D. Tứ giác $IBCD$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\begin{cases}(IBC)\cap(SAD)=I\\ BC\subset(IBC),AD\subset(SAD)\longrightarrow(IBC)\cap(SAD)=Ix\ /\!/\ BC\ /\!/\ AD\\ BC\ /\!/\ AD\end{cases}$

Trong mặt phẳng (SAD): $Ix\ /\!/\ AD$, gọi $Ix\cap SD=J\longrightarrow IJ\ /\!/\ BC$

Vậy thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (IBC) là hình thang $IBCJ$.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$, M và N lần lượt là trung điểm AB và AC. Mặt phẳng (α) qua MN cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là đa giác (T). Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. (T) là hình chữ nhật.

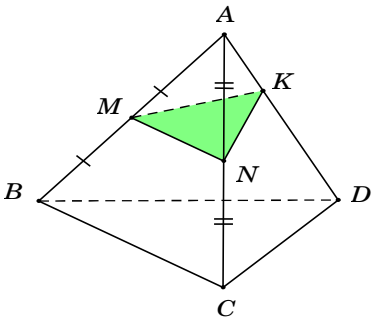
B. (T) là tam giác.

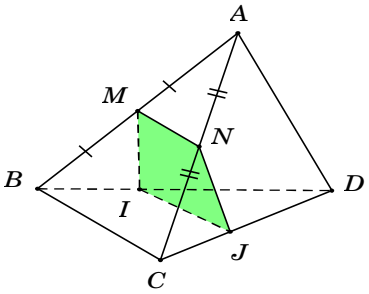
C. (T) là hình thoi.

D. (T) là tam giác; hình thang hoặc hình bình hành.

Lời giải

Chọn D





Trường hợp $(\alpha)\cap AD=K$

$\longrightarrow(T)$ là tam giác MNK. Do đó A và C sai.

Trường hợp $(\alpha)\cap(BCD)=IJ$, với $I\in BD,J\in CD$; I,J không trùng D.

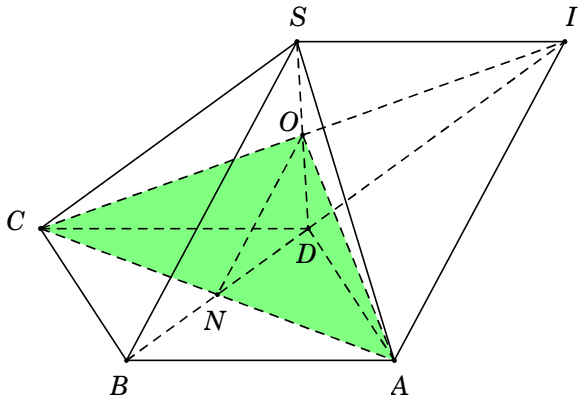
$\longrightarrow(T)$ là tứ giác. Do đó B đúng.

Câu 10: Cho hai hình vuông $ABCD$ và $CDIS$ không thuộc một mặt phẳng và cạnh bằng 4. Biết tam giác SAC cân tại S, $SB=8$. Thiết diện của mặt phẳng (ACI) và hình chóp $S.ABCD$ có diện tích bằng:

A. $6\sqrt{2}$. **B.** $8\sqrt{2}$. **C.** $10\sqrt{2}$. **D.** $9\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $O=SD\cap CI; N=AC\cap BD$.

$\Rightarrow O,N$ lần lượt là trung điểm của $DS, DB \Rightarrow ON=\frac{1}{2}SB=4$.

Thiết diện của $mp(ACI)$ và hình chóp $S.ABCD$ là tam giác ΔOCA.

Tam giác ΔSAC cân tại $S \Rightarrow SC=SA \Rightarrow \Delta SDC=\Delta SDA$

$\Rightarrow CO=AO$ (cùng là đường trung tuyến của 2 định tương ứng) $\Rightarrow \Delta OCA$ cân tại O

$\Rightarrow S_{\Delta OCA}=\frac{1}{2}ON.AC=\frac{1}{2}.4.4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$.

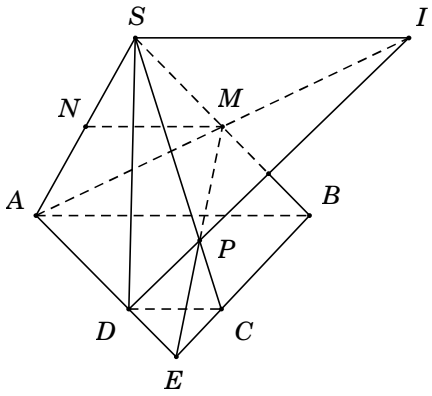
Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AB đáy nhỏ CD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB. Gọi P là giao điểm của SC và (AND). Gọi I là giao điểm của AN và DP. Hỏi tứ giác $SABI$ là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình chữ nhật.

C. Hình vuông. **D.** Hình thoi.

Lời giải

Chọn A



Gọi $E = AD \cap BC$, $P = NE \cap SC$. Suy ra $P = SC \cap (AND)$.

Ta có

- S là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD);
- $I = DP \cap AN \Rightarrow I$ là điểm chugn thứ hai của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Suy ra $SI = (SAB) \cap (SCD)$. Mà $AB \parallel CD \longrightarrow SI \parallel AB \parallel CD$.

Vì MN là đường trung bình của tam giác SAB và chứng minh được cũng là đường trung bình của tam giác SAI nên suy ra $SI = AB$.

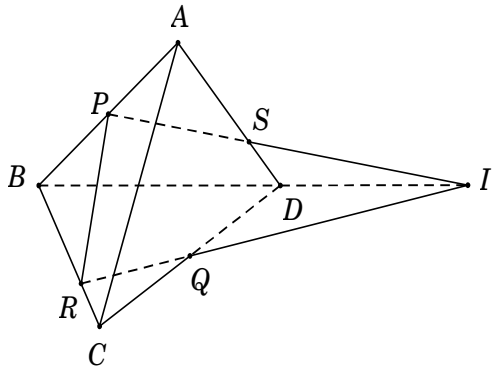
Vậy $SABI$ là hình bình hành.

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD; điểm R nằm trên cạnh BC sao cho $BR = 2RC$. Gọi S là giao điểm của mặt phẳng (PQR) và cạnh AD. Tính tỉ số $\frac{SA}{SD}$.

A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là giao điểm của BD và RQ. Nối P với I, cắt AD tại S.

Xét tam giác BCD bị cắt bởi IR, ta có $\frac{DI}{IB}.\frac{BR}{RC}.\frac{CQ}{QD} = 1 \Leftrightarrow \frac{DI}{IB}.2.1 = 1 \Leftrightarrow \frac{DI}{IB} = \frac{1}{2}$.

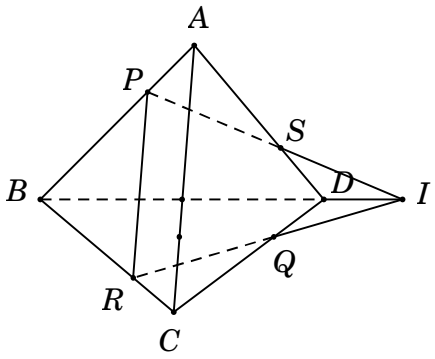
Xét tam giác ABD bị cắt bởi PI, ta có $\frac{AS}{SD}.\frac{DI}{IB}.\frac{BP}{PA}=1\Leftrightarrow\frac{SA}{SD}.\frac{1}{2}.1=1\Leftrightarrow\frac{SA}{SD}=2.$

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$ và ba điểm P, Q, R lần lượt lấy trên ba cạnh AB, CD, BC. Cho $PR // AC$ và $CQ=2QD$. Gọi giao điểm của AD và (PQR) là S. Chọn khẳng định **đúng**?

A. $AD=3DS.$ **B.** $AD=2DS.$ **C.** $AS=3DS.$ **D.** $AS=DS.$

Lời giải

Chọn A



Gọi I là giao điểm của BD và RQ. Nối P với I, cắt AD tại S.

Ta có $\frac{DI}{IB}.\frac{BR}{RC}.\frac{CQ}{QD}=1$ mà $\frac{CQ}{QD}=2$ suy ra $\frac{DI}{IB}.\frac{BR}{RC}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{DI}{IB}=\frac{1}{2}.\frac{RC}{BR}.$

Vì PR song song với AC suy ra $\frac{RC}{BR}=\frac{AP}{PB}\Rightarrow\frac{DI}{IB}=\frac{1}{2}.\frac{AP}{PB}.$

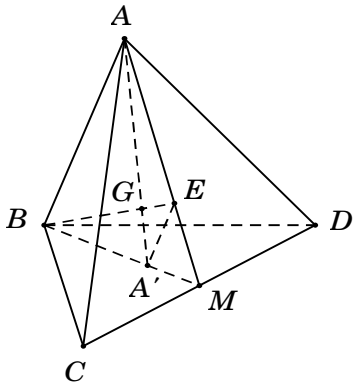
Lại có $\frac{SA}{SD}.\frac{DI}{IB}.\frac{BP}{PA}=1\Rightarrow\frac{SA}{SD}.\frac{1}{2}.\frac{AP}{PB}.\frac{BP}{PA}=1\Leftrightarrow\frac{SA}{SD}=2\longrightarrow AD=3DS.$

Câu 14: Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Gọi A' là trọng tâm của tam giác BCD. Tính tỉ số $\frac{GA}{GA'}$.

A. $2.$ **B.** $3.$ **C.** $\frac{1}{3}.$ **D.** $\frac{1}{2}.$

Lời giải

Chọn B



Gọi E là trọng tâm của tam giác ACD, M là trung điểm của CD.

Nối BE cắt AA' tại G suy ra G là trọng tâm tứ diện.

Xét tam giác MAB, có $\frac{ME}{MA}=\frac{MA'}{MB}=\frac{1}{3}$ suy ra $A'E//AB\Rightarrow\frac{A'E}{AB}=\frac{1}{3}$.

Khi đó, theo định lí Talet suy ra $\frac{A'E}{AB}=\frac{A'G}{AG}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{GA}{GA'}=3$.

Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$ trong đó có tam giác BCD không cân. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD và G là trung điểm của đoạn MN. Gọi A_1 là giao điểm của AG và (BCD). Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. A_1 là tâm đường tròn tam giác BCD.

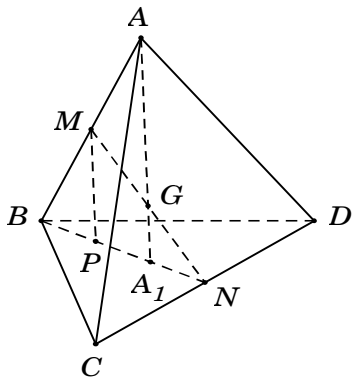
B. A_1 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD.

C. A_1 là trực tâm tam giác BCD.

D. A_1 là trọng tâm tam giác BCD.

Lời giải

Chọn D



Mặt phẳng (ABN) cắt mặt phẳng (BCD) theo giao tuyến BN.

Mà $AG\subset(ABN)$ suy ra AG cắt BN tại điểm A_1.

Qua M dựng $MP//AA_1$ với $M\in BN$.

Có M là trung điểm của AB suy ra P là trung điểm $BA_1\Rightarrow BP=PA_1$ (1).

Tam giác MNP có $MP//GA_1$ và G là trung điểm của MN.

$\Rightarrow$ A_1 là trung điểm của $NP\Rightarrow PA_1=NA_1$ (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra $BP=PA_1=A_1N\Rightarrow\frac{BA_1}{BN}=\frac{2}{3}$ mà N là trung điểm của CD.

Do đó, A_1 là trọng tâm của tam giác BCD.

BÀI 3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

A. LÝ THUYẾT

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P). Căn cứ vào số điểm chung của đường thẳng và mặt phẳng ta có ba trường hợp sau:

a. Đường thẳng a và mặt phẳng (P) không có điểm chung, tức là:

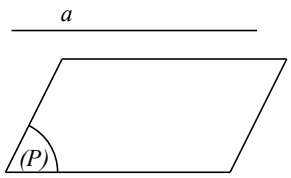
$a \cap (P) = \varnothing \Leftrightarrow a \,//\, (P).$

b. Đường thẳng a và mặt phẳng (P) chỉ có một điểm chung, tức là:

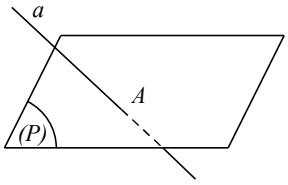
$a \cap (P) = A \Leftrightarrow a$ cắt (P) tại A.

c. Đường thẳng a và mặt phẳng (P) có hai điểm chung, tức là:

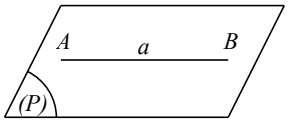
$a \cap (P) = \{A, B\} \Leftrightarrow a \subset (P).$



$a \cap (P) = \varnothing \Leftrightarrow a \,//\, (P).$



$a \cap (P) = \{A\} \Leftrightarrow a$ cắt (P).



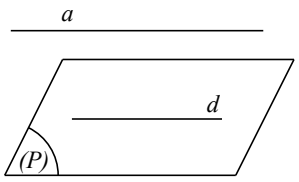
$a \cap (P) = \{A, B\} \Leftrightarrow a \subset (P).$

2. Điều kiện để một đường thẳng song song với một mặt phẳng

Định lí 1: Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng nào đó trong (P) thì a song song với (P).

Tức là, $a \not\subset (P)$ thì nếu:

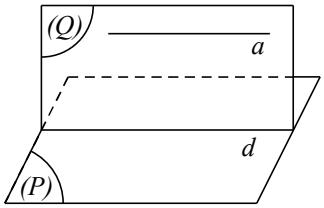
$a \,//\, d \subset (P) \Rightarrow a \,//\, (P).$



3. Tính chất

Định lí 2: Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) thì mọi mặt phẳng (Q) chứa a mà cắt (P) thì sẽ cắt theo một giao tuyến song song với a.

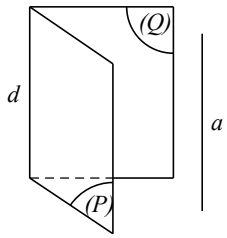
Tức là, nếu $\begin{cases} a \,//\, (P) \\ a \subset (Q) \end{cases} \left[(Q) \cap (P) = d\right] \Rightarrow a \,//\, d.$



Hệ quả 1: Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì nó song song với một đường thẳng nào đó trong mặt phẳng.

Hệ quả 2: Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến (nếu có) của chúng song song với đường thẳng đó.

Tức là: $\begin{cases}(P)\cap(Q)=d\\(P)\parallel a\\(Q)\parallel a\end{cases}\Rightarrow d\parallel a.$



Hệ quả 3: Nếu a và b là hai đường thẳng chéo nhau thì qua a có một và chỉ một mặt phẳng song song với b.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

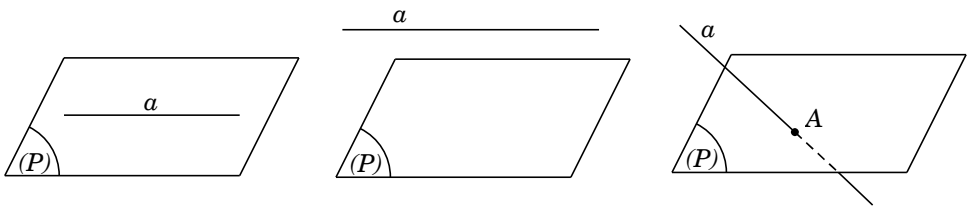
Dạng 1. Câu hỏi lý thuyết

Câu 1: Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối của a và (P)?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B



Có 3 vị trí tương đối của a và (P), đó là: a nằm trong (P), a song song với (P) và a cắt (P).

Câu 2: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Giả sử $a\parallel b$, $b\parallel(\alpha)$. Khi đó:

A. $a\parallel(\alpha)$. **B.** $a\subset(\alpha)$.

C. a cắt (α). **D.** $a\parallel(\alpha)$ hoặc $a\subset(\alpha)$.

Lời giải

Chọn D

Câu 3: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Giả sử $a \parallel (\alpha)$, $b \subset (\alpha)$. Khi đó:

A. $a \parallel b$.

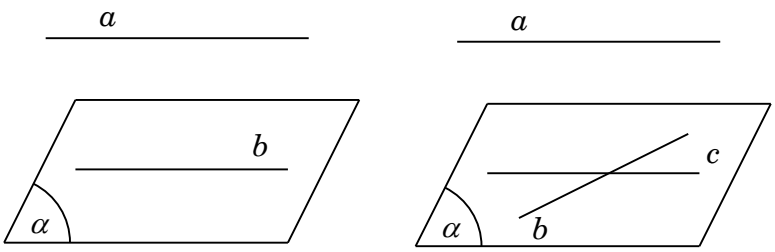
B. a, b chéo nhau.

C. $a \parallel b$ hoặc a, b chéo nhau.

D. a, b cắt nhau.

Lời giải

Chọn C



Vì $a \parallel (\alpha)$ nên tồn tại đường thẳng $c \subset (\alpha)$ thỏa mãn $a \parallel c$. Suy ra b, c đồng phẳng và xảy ra các trường hợp sau:

• Nếu b song song hoặc trùng với c thì $a \parallel b$.

• Nếu b cắt c thì b cắt $(\beta) \equiv (a, c)$ nên a, b không đồng phẳng. Do đó a, b chéo nhau.

Câu 4: Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α). Giả sử $b \not\subset (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$.

B. Nếu b cắt (α) thì b cắt a.

C. Nếu $b \parallel a$ thì $b \parallel (\alpha)$.

D. Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt cả a và b.

Lời giải

Chọn C

• A sai. Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$ hoặc a, b chéo nhau.

• B sai. Nếu b cắt (α) thì b cắt a hoặc a, b chéo nhau.

• D sai. Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt a hoặc song song với a.

Câu 5: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Giả sử $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. a và b không có điểm chung.

B. a và b hoặc song song hoặc chéo nhau.

C. a và b hoặc song song hoặc chéo nhau hoặc cắt nhau.

D. a và b chéo nhau.

Lời giải

Chọn C

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Câu 6: Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng song song a và b. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Nếu (P) song song với a thì (P) cũng song song với b.

B. Nếu (P) cắt a thì (P) cũng cắt b.

C. Nếu (P) chứa a thì (P) cũng chứa b.

D. Các khẳng định A, B, C đều sai.

Lời giải

Chọn B

Gọi $(Q)\equiv(a,b)$.

• A sai. Khi $b=(P)\cap(Q)\Rightarrow b\subset(P)$.

• C sai. Khi $(P)\neq(Q)\Rightarrow b\parallel(P)$.

• Xét khẳng định B, giả sử (P) không cắt b khi đó $b\subset(P)$ hoặc $b\parallel(P)$. Khi đó, vì $b\parallel a$ nên $a\subset(P)$ hoặc a cắt (P) (mâu thuẫn với giả thiết (P) cắt a).

Vậy khẳng định B đúng.

Câu 7: Cho $d\parallel(\alpha)$, mặt phẳng (β) qua d cắt (α) theo giao tuyến d'. Khi đó:

A. $d\parallel d'$. **B.** d cắt d'. **C.** d và d' chéo nhau. **D.** $d\equiv d'$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $d'=(\alpha)\cap(\beta)$. Do d và d' cùng thuộc (β) nên d cắt d' hoặc $d\parallel d'$.

Nếu d cắt d'. Khi đó, d cắt (α) (mâu thuẫn với giả thiết).

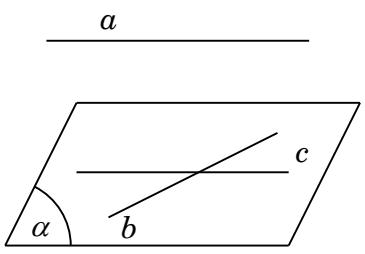
Vậy $d\parallel d'$.

Câu 8: Có bao nhiêu mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng chéo nhau?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D



Gọi a và b là 2 đường thẳng chéo nhau, c là đường thẳng song song với a và cắt b.

Gọi $(\alpha)\equiv(b,c)$. Do $a\parallel c\Rightarrow a\parallel(\alpha)$.

Giả sử $(\beta)\parallel(\alpha)$. Mà $b\in(\alpha)\Rightarrow b\parallel(\beta)$.

Mặt khác, $a\parallel(\alpha)\Rightarrow a\parallel(\beta)$.

Có vô số mặt phẳng $(\beta)//(\alpha)$. Vậy có vô số mặt phẳng song song với 2 đường thẳng chéo nhau.

Câu 9: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Có duy nhất một mặt phẳng song song với a và b.

B. Có duy nhất một mặt phẳng qua a và song song với b.

C. Có duy nhất một mặt phẳng qua điểm M, song song với a và b (với M là điểm cho trước).

D. Có vô số đường thẳng song song với a và cắt b.

Lời giải

Chọn A

Có có vô số mặt phẳng song song với 2 đường thẳng chéo nhau.

Do đó A sai.

Câu 10: Cho ba đường thẳng đôi một chéo nhau a, b, c. Gọi (P) là mặt phẳng qua a, (Q) là mặt phẳng qua b sao cho giao tuyến của (P) và (Q) song song với c. Có nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng (P) và (Q) thỏa mãn yêu cầu trên?

A. Một mặt phẳng (P), một mặt phẳng (Q).

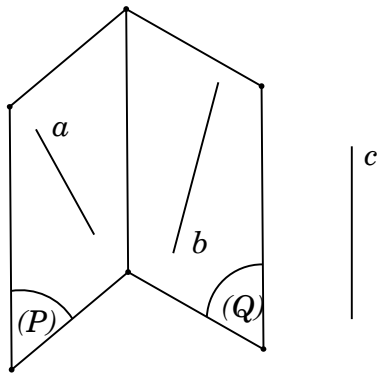
B. Một mặt phẳng (P), vô số mặt phẳng (Q).

C. Một mặt phẳng (Q), vô số mặt phẳng (P).

D. Vô số mặt phẳng (P) và (Q).

Lời giải

Chọn A



Vì c song song với giao tuyến của (P) và (Q) nên $c//(P)$ và $c//(Q)$.

Khi đó, (P) là mặt phẳng chứa a và song song với c, mà a và c chéo nhau nên chỉ có một mặt phẳng như vậy.

Tương tự cũng chỉ có một mặt phẳng (Q) chứa b và song song với c.

Vậy có nhiều nhất một mặt phẳng (P) và một mặt phẳng (Q) thỏa yêu cầu bài toán.

Dạng 2. Chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (P)

1. Phương pháp

(Dùng định lí 1)

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

$$\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ b \subset (P) \\ a \not\subset (P) \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel (P)$$

Nếu không có sẵn đường thẳng b trong mặt phẳng (P) thì ta tìm đường thẳng b bằng cách chọn một mặt phẳng (Q) chứa a và cắt (P), giao tuyến của (P) và (Q) chính là đường thẳng b cần tìm.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai hình bình hành ABCD và ABEF.

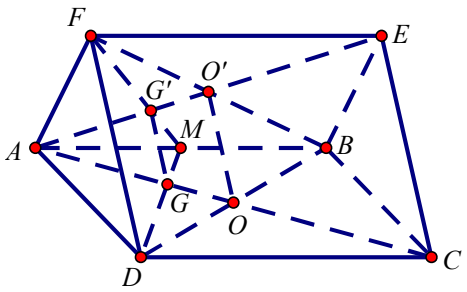
a. Chứng minh OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).

b. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác ABD và ABF. Chứng minh $GG' \parallel (DCEF)$.

Giải

a. Ta có OO' là đường trung bình của tam giác ACE và tam giác BDF nên: $OO' \parallel CE$ và $OO' \parallel DF$.

Mà $CE \subset (BCE), DF \subset (ADF)$ nên $OO' \parallel (BCE)$ và $OO' \parallel (ADF)$.



b. Theo tính chất của trọng tâm tam giác, ta có:

$\frac{AG}{AO} = \frac{AG'}{AO'} = \frac{2}{3}$

Vậy $GG' \parallel OO'$ Cd $OO' \parallel CE$ nên $GG' \parallel CE$.

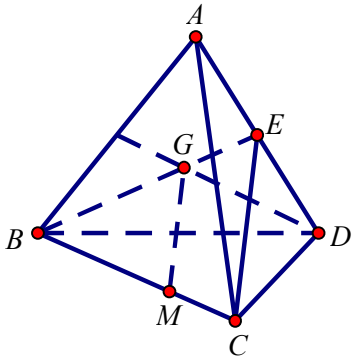
Mà $CE \subset (CDEF)$ nên $GG' \parallel (DCEF)$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện ABCD, G là trọng tâm tam giác ABD. M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$.

Chứng minh $MG \parallel (ACD)$.

Giải

Gọi E là trung điểm của AD. Ta có: $\frac{BG}{BE} = \frac{2}{3}$ (do G là trọng tâm của tam giác ABD).



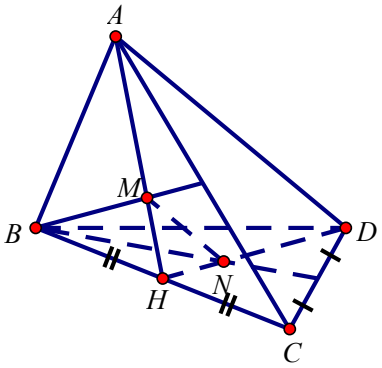
Mà $\frac{BM}{BC} = \frac{2}{3}$ (do $MB = 2MC$) nên $\frac{BG}{BE} = \frac{BM}{BC}$.

Suy ra $MG \parallel CE$.

Mà $CE \subset (ACD)$ do đó $MG \parallel (ACD)$.

Ví dụ 3. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và BCD. Chứng minh rằng $MN \parallel (ABD)$ và $MN \parallel (ACD)$.

Giải



Gọi H là trung điểm của BC, ta có: $M \in AH,\ N \in DH$. Do đó:

$\frac{HM}{HA}=\frac{HN}{HD}=\frac{1}{3}$ (tính chất trọng tâm tam giác) $\Rightarrow MN \parallel AD$.

Như vậy:

$$\left.\begin{array}{l} MN \parallel AD \\ AD \subset (ABD) \end{array}\right\} \Rightarrow MN \parallel (ABD)$$

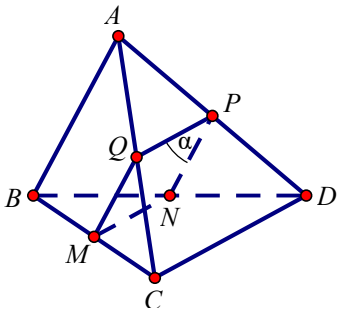
$$\left.\begin{array}{l} MN \parallel AD \\ AD \subset (ACD) \end{array}\right\} \Rightarrow MN \parallel (ACD)$$

Ví dụ 4. Cho tứ diện ABCD. Gọi M là một điểm bất kì trên cạnh BC; (α) là mặt phẳng qua M và song song với AB và CD, cắt các cạnh BD, AD, AC lần lượt tại N, P, Q. Chứng minh rằng MNPQ là hình bình hành.

Giải

Ta có: $\left.\begin{array}{l} AB \parallel (\alpha) \\ (ABC) \supset AB \\ (ABC) \cap (\alpha) = MQ \end{array}\right\} \Rightarrow MQ \parallel AB$ (1)

Tương tự, ta có: $NP \parallel AB$ (2)



$\left.\begin{array}{l} CD \parallel (\alpha) \\ (ACD) \supset CD \\ (ACD) \cap (\alpha) = PQ \end{array}\right\} \Rightarrow PQ \parallel CD$ (3)

Tương tự, ta có: $MN \parallel CD$ (4)

Từ (1) và (2) suy ra: $MQ \parallel NP$ (5)

Từ (3) và (4) suy ra: $PQ \parallel MN$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra MNPQ là hình bình hành.

Ví dụ 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là ABCD là hình bình hành; F, G lần lượt là trung điểm của AB và CD.

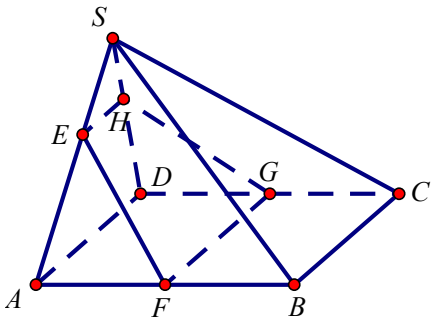
a. Chứng minh rằng FG song song với các mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b. Gọi E là trung điểm của SA. Chứng minh rằng SB, SC song song với mặt phẳng (FGE).

Giải

a. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} FG \parallel AD \\ AD \subset (SAD) \end{array}\right\} \Rightarrow FG \parallel (SAD)$$



Chứng minh tương tự, ta cũng có: $FG \parallel (SBC)$

b. Gọi $(EFG) \cap SD = H$. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} (ABCD) \cap (EFG) = FG \\ (ABCD) \cap (SAD) = AD \\ (SAD) \cap (EFG) = EH \\ FG \parallel AD \end{array}\right\} \Rightarrow EH \parallel AD \parallel FG$$

Suy ra H là trung điểm của SD.

Như vậy:

$$\left.\begin{array}{l} GH \parallel SC \text{ (tính chất đường trung bình)} \\ HG \subset (EFG) \end{array}\right\} \Rightarrow SC \parallel (EFG).$$

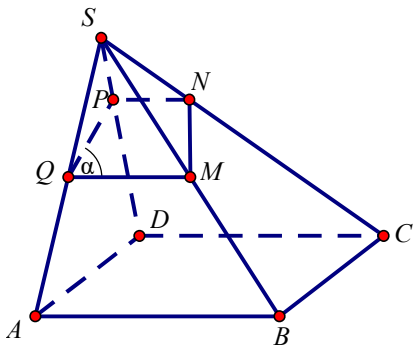
Tương tự, ta có: $SB \parallel (EFG)$.

Ví dụ 6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. (α) là mặt phẳng đi qua trung điểm M của cạnh SB, song song với cạnh AB, cắt các cạnh SA, SD, SC lần lượt tại Q, P và N. Hãy xác định hình tính của tứ giác MNPQ?

Giải

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel (\alpha) \\ M \in (\alpha) \cap (SAB) \end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = MQ \parallel AB \qquad (1)$$



Mặt khác:

$$\left.\begin{array}{l} DC \parallel AB \Rightarrow DC \overset{(1)}{\parallel} QM \ (*) \\ QM \subset (\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow DC \parallel (\alpha)$$

Như vậy:

$$\left.\begin{array}{l} DC \parallel (\alpha) \\ PN = (\alpha) \cap (SCD) \end{array}\right\} \Rightarrow PN \parallel DC \qquad (2)$$

Từ (*) và (2) suy ra MNPQ là hình bình thang.

Dạng 3. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng. Thiết diện qua một điểm và song song với một đường thẳng

1. Phương pháp

Ngoài hai cách đã đề cập ở Bài 1 và Bài 2 ta có hai cách sau để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng.

Cách 1. Dùng định lí 2.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

$$\left.\begin{array}{l} a \parallel (P) \\ a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \end{array}\right\} \Rightarrow d \parallel a$$

Cách 2. Dùng hệ quả 2.

$$\left.\begin{array}{l} (P) \parallel a \\ (Q) \parallel a \\ (P) \cap (Q) = d \end{array}\right\} \Rightarrow d \parallel a$$

Tìm thiết diện là tìm các đoạn giao tuyến theo phương pháp tìm giao tuyến được nêu ở trên, cho đến khi các giao tuyến khép kín ta được thiết diện.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SD.

a. Chứng minh $MN \parallel (SBC)$, $SB \parallel (OMN)$, $SC \parallel (OMN)$.

b. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (OMN). Thiết diện là hình gì?

Giải

a. Ta có $MN \parallel AD$ (MN là đường trung bình của tam giác SAD) và $AD \parallel BC$ (tứ giác ABCD là hình bình hành), suy ra $MN \parallel BC$.

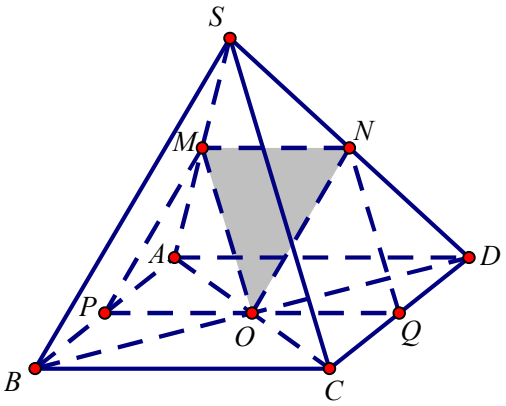
Mà $BC \subset (SBC)$ nên $MN \parallel (SBC)$.

Ta có: $ON \parallel SB$ (ON là đường trung bình của tam giác SBD) nên $ON \subset (OMN)$.

Do đó: $SB \parallel (OMN)$.

Ta có $OM \parallel SC$ (OM là đường trung bình của ΔSAC) và $OM \subset (OMN)$.

Vậy $SC \parallel (OMN)$.



b. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Từ đó có: $PQ \parallel AD$, suy ra $PQ \parallel MN$.

Vậy MN và PQ đồng phẳng, nghĩa là $(OMN) \equiv (MNPQ)$.

Ta có thiết diện do mp(OMN) cắt hình chóp là hình thang MNPQ $(MN \parallel PQ)$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD, M là một điểm trên đoạn IJ. Gọi (P) là mặt phẳng qua M, song song với AB và CD.

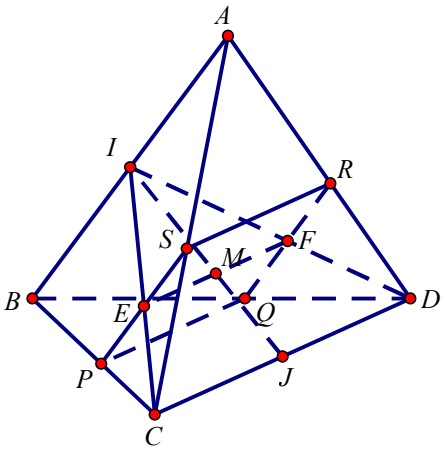
a. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ICD).

b. Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (P). Thiết diện là hình gì?

Giải

a. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}(P)\parallel CD\\ CD\subset(ICD)\\ M\in(P)\cap(ICD)\end{array}\right\}\Rightarrow(P)\cap(ICD)=Mx\parallel CD.$$



Trong mp(ICD) ta có Mx cắt IC tại E và cắt ID tại F. Suy ra $EF=(P)\cap(ICD)$.

b. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}(P)\parallel AB\\ AB\subset(ABC)\\ E\in(P)\cap(ABC)\end{array}\right\}\Rightarrow(P)\cap(ABC)=Ey\parallel AB.$$

Trong mp(ABC) ta có Ey cắt BC tại P và cắt AC tại S.

Suy ra $PS=(P)\cap(ABC)$.

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}(P)\parallel AB\\ AB\subset(ABD)\\ F\in(P)\cap(ABD)\end{array}\right\}\Rightarrow(P)\cap(ABD)=Ft\parallel AB.$$

Trong mp(ABD) ta có Ft cắt BD tại Q và cắt AD tại R.

Suy ra $QR=(P)\cap(ABD)$.

Khi đó: $PQ=(P)\cap(CBD)$ và $RS=(P)\cap(ACD)$.

Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác PQRS.

Theo chứng minh trên ta có thể suy ra được: $PS\parallel AB, QR\parallel AB$ nên $PS\parallel QR$. (1)

Mặt khác, ta có:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}(P)\parallel CD\\ RS=(P)\cap(ACD)\end{array}\right\}\Rightarrow RS\parallel CD\\ \left.\begin{array}{l}(P)\parallel CD\\ PQ=(P)\cap(BCD)\end{array}\right\}\Rightarrow PQ\parallel CD\end{array}\right\}\Rightarrow RS\parallel PQ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra thiết diện PQRS là hình bình hành.

Dạng 4. Bài tập ứng dụng

Câu 1: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. MN // $mp\,(ABCD)$.

B. MN // $mp\,(SAB)$.

C. MN // $mp\,(SCD)$.

D. MN // $mp\,(SBC)$.

Lời giải

Chọn A

Xét tam giác SAC có M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC.

Suy ra $MN // AC$ mà $AC \subset (ABCD) \longrightarrow MN // mp(ABCD)$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M và N là hai điểm trên SA, SB sao cho $\frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SB}=\frac{1}{3}$. Vị trí tương đối giữa MN và $(ABCD)$ là:

A. MN nằm trên $mp(ABCD)$.

B. MN cắt $mp(ABCD)$.

C. MN song song $mp(ABCD)$.

D. MN và $mp(ABCD)$ chéo nhau.

Lời giải

Chọn C

Theo định lí Talet, ta có $\frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SB}$ suy ra MN song song với AB.

Mà AB nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$ suy ra $MN // (ABCD)$.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, Q thuộc cạnh AB sao cho $AQ=2QB$, P là trung điểm của AB. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $MN // (BCD)$.

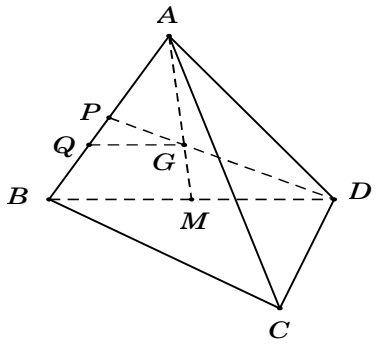
B. $GQ // (BCD)$.

C. MN cắt (BCD).

D. Q thuộc mặt phẳng (CDP).

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của BD.

Vì G là trọng tâm tam giác $ABD \Rightarrow \frac{AG}{AM}=\frac{2}{3}$.

Điểm $Q \in AB$ sao cho $AQ=2QB \Leftrightarrow \frac{AQ}{AB}=\frac{2}{3}$. Suy ra $\frac{AG}{AM}=\frac{AQ}{AB} \longrightarrow GQ // BD$.

Mặt khác BD nằm trong mặt phẳng (BCD) suy ra $GQ // (BCD)$.

Câu 4: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O, O_1 lần lượt là tâm của $ABCD, ABEF$. M là trung điểm của CD. Khẳng định nào sau đây **sai**?

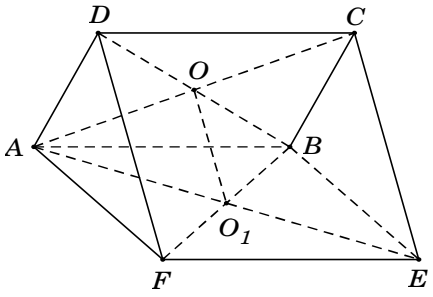
A. $OO_1 // (BEC)$.

B. $OO_1 // (AFD)$.

C. $OO_1 // (EFM)$.

D. MO_1 cắt (BEC).

Lời giải



Chọn D

Xét tam giác ACE có O, O_1 lần lượt là trung điểm của AC, AE.

Suy ra OO_1 là đường trung bình trong tam giác $ACE \Rightarrow OO_1 // EC$.

Tương tự, OO_1 là đường trung bình của tam giác BFD nên $OO_1 // FD$.

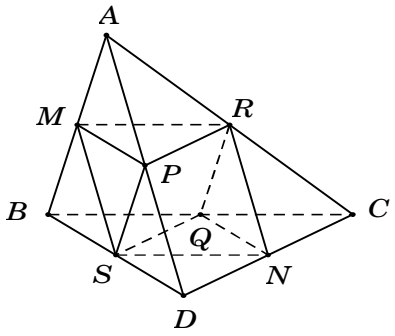
Vậy $OO_1 // (BEC)$, $OO_1 // (AFD)$ và $OO_1 // (EFC)$. Chú ý rằng: $(EFC) = (EFM)$.

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AC, BD, AB, CD, AD, BC. Bốn điểm nào sau đây không đồng phẳng?

A. P, Q, R, S. **B.** M, P, R, S. **C.** M, R, S, N. **D.** M, N, P, Q.

Lời giải

Chọn C



Theo tính chất của đường trung bình của tam giác ta có

$PS // AC // QR$ suy ra P, Q, R, S đồng phẳng

Tương tự, ta có được $PM // BC // NQ$ suy ra P, M, N, Q đồng phẳng.

Và $NR // CD // SN$ suy ra M, R, S, N đồng phẳng.

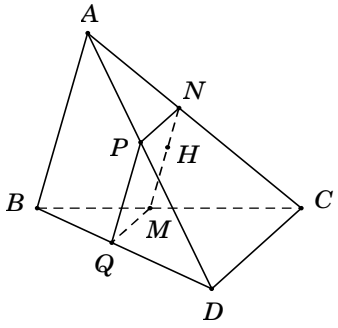
Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H là một điểm nằm trong tam giác ABC, (α) là mặt phẳng đi qua H song song với AB và CD. Mệnh đề nào sau đây **đúng** về thiết diện của (α) của tứ diện?

A. Thiết diện là hình vuông. **B.** Thiết diện là hình thang cân.

C. Thiết diện là hình bình hành. **D.** Thiết diện là hình chữ nhật.

Lời giải

Chọn C



Qua H kẻ đường thẳng (d) song song AB và cắt BC, AC lần lượt tại M, N.

Từ N kẻ NP song song với CD $(P \in CD)$. Từ P kẻ PQ song song với AB $(Q \in BD)$.

Ta có $MN // PQ // AB$ suy ra M, N, P, Q đồng phẳng và $AB // (MNPQ)$.

Suy ra $MNPQ$ là thiết diện của (α) và tứ diện.

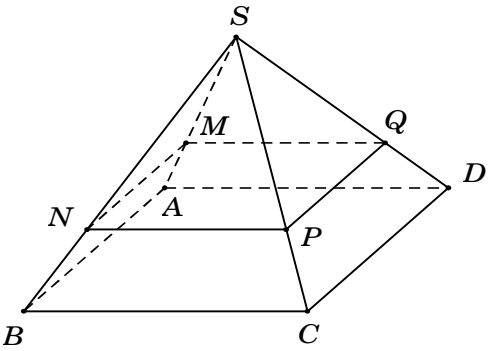
Vậy thiết diện là hình bình hành.

Câu 7: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. M là điểm trên SA sao cho $\frac{SM}{SA}=\frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và CD, cắt hình chóp theo một tứ giác có diện tích là:

A. $\frac{400}{9}$. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** $\frac{4}{9}$. **D.** $\frac{16}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $(\alpha) // AB$ và CD mà A, B, C, D đồng phẳng suy ra $(\alpha) // (ABCD)$.

Giả sử (α) cắt các mặt bên $(SAB), (SBC), (SCD), (SDA)$ lần lượt tại các điểm N, P, Q với $N \in SB$, $P \in SC$, $Q \in SD$ suy ra $(\alpha) \equiv (MNPQ)$.

Khi đó $MN // AB \Rightarrow MN$ là đường trung bình tam giác $SAB \Rightarrow \frac{SM}{SA}=\frac{MN}{AB}=\frac{2}{3}$.

Tương tự, ta có được $\frac{NP}{BC}=\frac{PQ}{CD}=\frac{QM}{DA}=\frac{2}{3}$ và $MNPQ$ là hình vuông.

Suy ra $S_{MNPQ}=\left(\frac{2}{3}\right)^2 S_{ABCD}=\frac{4}{9}S_{ABCD}=\frac{4}{9}.10.10=\frac{400}{9}$.

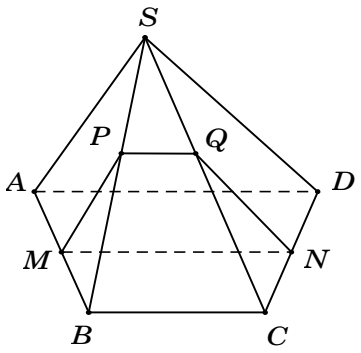
Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang cân đáy lớn AD. M, N lần lượt là hai trung điểm của AB và CD. (P) là mặt phẳng qua MN và cắt mặt bên (SBC) theo một giao tuyến. Thiết diện của (P) và hình chóp là

A. Hình bình hành. **B.** Hình thang.

C. Hình chữ nhật. **D.** Hình vuông

Lời giải

Chọn B



Xét hình thang $ABCD$, có M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Suy ra MN là đường trung bình của hình thang $ABCD \Rightarrow MN // BC$.

Lấy điểm $P \in SB$, qua P kẻ đường thẳng song song với BC và cắt BC tại Q.

Suy ra $(P) \cap (SBC) = PQ$ nên thiết diện (P) và hình chóp là tứ giác $MNQP$ có $MN // PQ // BC$.

Vậy thiết diện là hình thang $MNQP$.

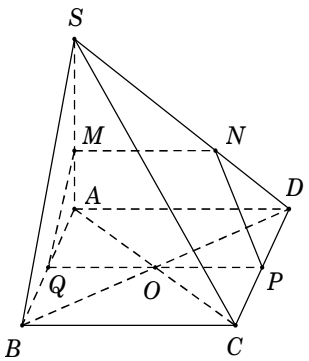
Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là điểm thuộc cạnh SA (không trùng với S hoặc A). (P) là mặt phẳng qua OM và song song với AD. Thiết diện của (P) và hình chóp là

A. Hình bình hành. **B.** Hình thang.

C. Hình chữ nhật. **D.** Hình tam giác.

Lời giải

Chọn B



Qua M kẻ đường thẳng $MN // AD$ và cắt SD tại $N \Rightarrow MN // AD$.

Qua O kẻ đường thẳng $PQ // AD$ và cắt AB, CD lần lượt tại $Q, P \Rightarrow PQ // AD$.

Suy ra $MN // PQ // AD \longrightarrow M, N, P, Q$ đồng phẳng $\Rightarrow (P)$ cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình thang $MNPQ$.

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt thuộc cạnh AD, BC sao cho $IA = 2ID$ và $JB = 2JC$. Gọi (P) là mặt phẳng qua IJ và song song với AB. Thiết diện của (P) và tứ diện $ABCD$ là

A. Hình thang.

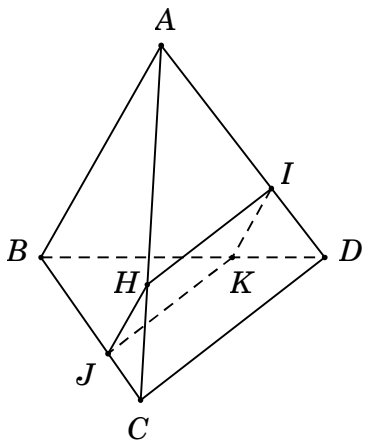
B. Hình bình hành.

C. Hình tam giác.

D. Tam giác đều.

Lời giải

Chọn B



Giả sử (P) cắt các mặt của tứ diện (ABC) và (ABD) theo hai giao tuyến JH và IK.

Ta có $(P) \cap (ABC) = JH$, $(P) \cap (ABD) = IK$

$(ABC) \cap (ABD) = AB$, $(P) // AB \longrightarrow JH // IK // AB$.

Theo định lí Thalet, ta có $\frac{JB}{JC} = \frac{HA}{HC} = 2$ suy ra $\frac{HA}{HC} = \frac{IA}{ID} \Rightarrow IH // CD$.

Mà $IH \in (P)$ suy ra IH song song với mặt phẳng (P).

Vậy (P) cắt các mặt phẳng (ABC), (ABD) theo các giao tuyến IH, JK với $IH // JK$.

Do đó, thiết diện của (P) và tứ diện $ABCD$ là hình bình hành.

BÀI 4. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

A. LÝ THUYẾT

1. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng phân biệt

Cho 2 mặt phẳng (P) và (Q). Căn cứ vào số đường thẳng chung của 2 mặt phẳng ta có ba trường hợp sau:

a. Hai mặt phẳng (P) và (Q) không có đường thẳng chung, tức là:

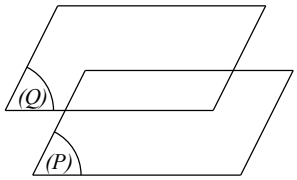
$$(P)\cap(Q)=\varnothing \Leftrightarrow (P)\,//\,(Q).$$

b. Hai mặt phẳng (P) và (Q) chỉ có một đường thẳng chung, tức là:

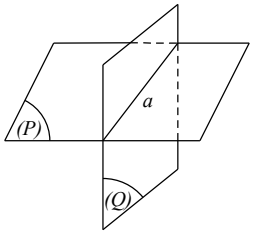
$$(P)\cap(Q)=a \Leftrightarrow (P) \text{ cắt } (Q).$$

c. Hai mặt phẳng (P) và (Q) có 2 đường thẳng chung phân biệt, tức là:

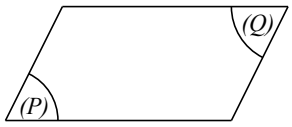
$$(P)\cap(Q)=\{a,\,b\} \Leftrightarrow (P)\equiv(Q).$$



$(P)\cap(Q)=\varnothing \Leftrightarrow (P)\,//\,(Q).$



$(P)\cap(Q)=a \Leftrightarrow (P)$ cắt $(Q).$

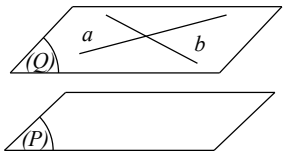


$(P)\cap(Q)=\{a,\,b\} \Leftrightarrow (P)\cap(Q).$

2. Điều kiện để hai mặt phẳng song song

Định lí 1: Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng $a,\,b$ cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song (Q).

Tức là: $\begin{cases} a,\,b\in(P) \\ a\cap b=\{I\} \\ a\,//\,(Q),\,b\,//\,(Q) \end{cases} \Rightarrow (P)\,//\,(Q).$



3. Tính chất

Tính chất 1: Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

Tức là: $O\notin(P)\Rightarrow \exists!\,(Q):\begin{cases} O\in(Q) \\ (P)\,//\,(Q) \end{cases}.$

Cách dựng:

- Trong (P) dựng $a,\,b$ cắt nhau.

- Qua O dựng $a_1 // a, b_1 // b.$

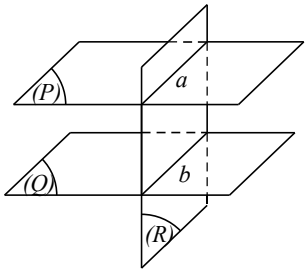
- Mặt phẳng (a_1, b_1) là mặt phẳng qua O và song song với (P).

Hệ quả 1: Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q) thì qua a có một và chỉ một mặt phẳng (P) song song với (Q).

Hệ quả 2: Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Tính chất 2: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song.

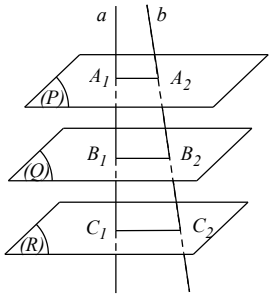
Tức là: $\begin{cases}(P) // (Q)\\ a = (P)\cap(R)\\ b = (Q)\cap(R)\end{cases} \Rightarrow a // b.$



Định lí Ta – let trong không gian:

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ.

Tức là: $\begin{cases}(P) // (Q) // (R)\\ a\cap(P) = A_1;\ a\cap(Q) = B_1;\ a\cap(R) = C_1\\ b\cap(P) = A_2;\ b\cap(Q) = B_2;\ b\cap(P) = C_2\end{cases} \Rightarrow \frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}.$



4. Hình lăng trụ và hình hộp

Định nghĩa hình lăng trụ:

Hình lăng trụ là một hình đa diện có hai mặt nằm trong hai mặt phẳng song song gọi là hai đáy và tất cả các cạnh không thuộc hai cạnh đáy đều song song với nhau.

Trong đó:

- Các mặt khác với hai đáy gọi là các mặt bên của hình lăng trụ.
- Cạnh chung của hai mặt bên gọi là cạnh bên của hình lăng trụ.

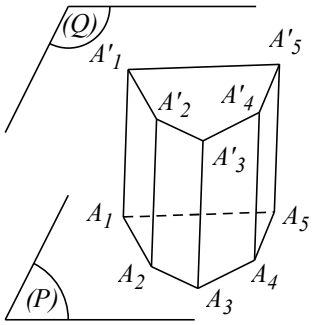
 Tùy theo đa giác đáy, ta có hình lăng trụ tam giác, lăng trụ tứ giác …

Từ định nghĩa của hình lăng trụ, ta lần lượt suy ra các tính chất sau:

a. Các cạnh bên song song và bằng nhau.

b. Các mặt bên và các mặt chéo là những hình bình hành.

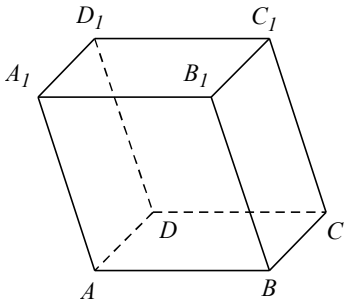
c. Hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và bằng nhau.

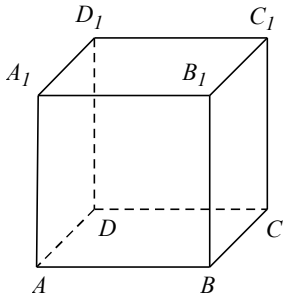


Định nghĩa hình hộp: Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành gọi là hình hộp.

a. Hình hộp có tất cả các mặt bên và các mặt đáy đều là hình chữ nhật gọi là hình hộp chữ nhật.

b. Hình hộp có tất cả các mặt bên và các mặt đáy đều là hình vuông gọi là hình lập phương.





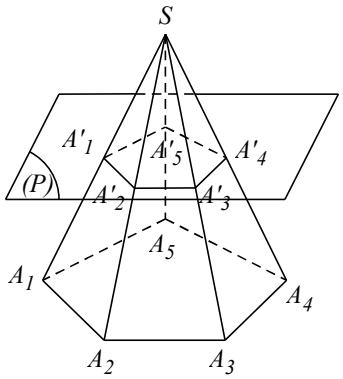
Chú ý: Các đường chéo của hình hộp cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

5. Hình chóp cụt

Định nghĩa: Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$. Một mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng chứa đa giác đáy cắt các cạnh $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ theo thứ tự tại $A_1', A_2', ..., A_n'$. Hình tạo bởi thiết diện $A_1'A_2'...A_n'$ và đáy $A_1A_2...A_n$ của hình chóp cùng với các mặt bên $A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$, ..., $A_nA_1A_1'A'_n$ gọi là một hình chóp cụt.

Trong đó:

 Đáy của hình chóp gọi là đáy lớn của hình chóp cụt, còn thiết diện gọi là đáy nhỏ của hình chóp cụt.



- Các mặt còn lại gọi là các mặt bên của hình chóp cụt.
- Cạnh chung của hai mặt bên kề nhau như A_1A_1', A_2A_2', ..., A_nA_n' gọi là cạnh bên của hình chóp cụt.

Tùy theo đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác,… ta có hình chóp cụt tam giác, hình chóp cụt tứ giác, hình chụp cụt ngũ giác,…

Tính chất: Với hình chóp cụt, ta có các tính chất sau:

1. Hai đáy của hình chóp cụt là hai đa giác đồng dạng.
2. Các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang.
3. Các cạnh bên của hình chóp cụt đồng quy tại một điểm.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Bài toán lý thuyết

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Hai mặt phẳng không cắt nhau thì song song.

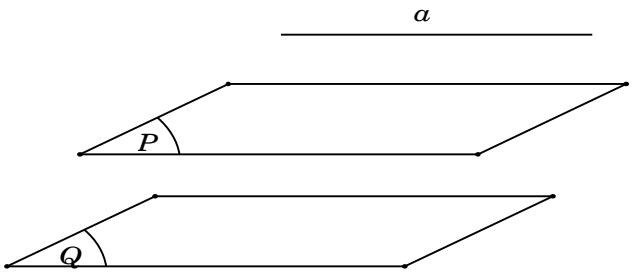
B. Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì cắt nhau.

C. Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

D. Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có vô số mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

Lời giải

Chọn C



Trong không gian, hai mặt phẳng có 3 vị trí tương đối: trùng nhau, cắt nhau, song song với nhau. Vì vậy, 2 mặt phẳng không cắt nhau thì có thể song song hoặc trùng nhau $\Rightarrow$ A là mệnh đề sai.

Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì chúng có thể song song với nhau (hình vẽ) $\Rightarrow$ B là mệnh đề sai.

Ta có: $a \parallel (P), a \parallel (Q)$ nhưng (P) và (Q) vẫn có thể song song với nhau.

Mệnh đề C là tính chất nên C đúng.

Câu 2: Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận $mp(\alpha) \parallel mp(\beta)$?

A. $(\alpha) \parallel (\gamma)$ và $(\beta) \parallel (\gamma)$ ((γ) là mặt phẳng nào đó).

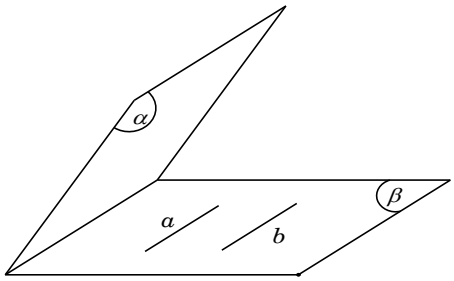
B. $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt thuộc (β).

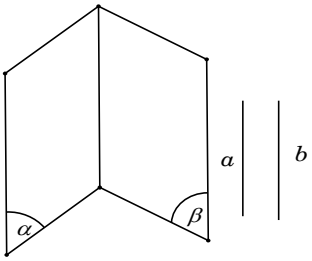
C. $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt cùng song song với (β).

D. $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng cắt nhau thuộc (β).

Lời giải

Chọn D





Trong trường hợp: $(\alpha) \parallel (\gamma)$ và $(\beta) \parallel (\gamma)$ ((γ) là mặt phẳng nào đó) thì (α) và (β) có thể trùng nhau $\Rightarrow$ Loại **A.**

$(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt thuộc (β) thì (α) và (β) vẫn có thể cắt nhau (hình 1) $\Rightarrow$ Loại **B.**

$(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt cùng song song với (β) thì (α) và (β) vẫn có thể cắt nhau (hình 2) $\Rightarrow$ Loại **C.**

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Nếu mặt phẳng $(\alpha) \parallel (\beta)$ thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với (β).

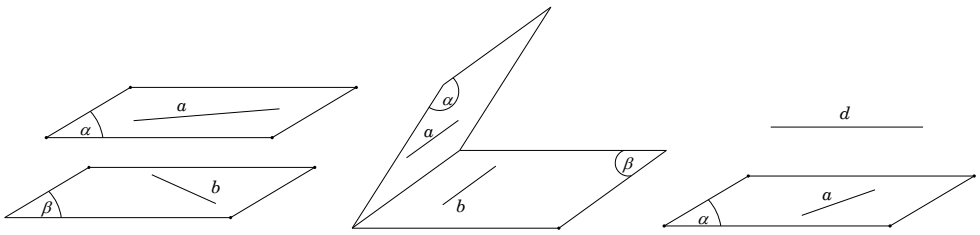
B. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì bất kì đường thẳng nào nằm trong (α) cũng song song với bất kì đường thẳng nào nằm trong (β).

C. Nếu hai đường thẳng phân biệt a và b song song lần lượt nằm trong hai mặt phẳng (α) và (β) phân biệt thì $(a) \parallel (\beta)$.

D. Nếu đường thẳng d song song với $mp(\alpha)$ thì nó song song với mọi đường thẳng nằm trong $mp(\alpha)$.

Lời giải

Chọn A



Hình 1 Hình 2 Hình 3

Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì hai đường thẳng bất kì lần lượt thuộc (α) và (β) có thể chéo nhau (Hình 1) $\Rightarrow$ Loại **B.**

Nếu hai đường thẳng phân biệt a và b song song lần lượt nằm trong hai mặt phẳng (α) và (β) phân biệt thì hai mặt phẳng (α) và (β) có thể cắt nhau (Hình 2) $\Rightarrow$ Loại **C.**

Nếu đường thẳng d song song với $mp(\alpha)$ thì nó có thể chéo nhau với một đường thẳng nào đó nằm trong (α). (Hình 3).

Câu 4: Cho hai mặt phẳng song song (α) và (β), đường thẳng $a \parallel (\alpha)$. Có mấy vị trí tương đối của a và (β).

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Trong không gian, giữa đường thẳng và mặt phẳng có 3 vị trí tương đối: đường thẳng cắt mặt phẳng, đường thẳng song song với mặt phẳng, đường thẳng nằm trên mặt phẳng.

$a \parallel (\alpha)$ mà $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow a$ và (α) không thể cắt nhau.

Vậy còn 2 vị trí tương đối.

Câu 5: Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên (P) và (Q). Gọi I là trung điểm của MN. Chọn khẳng định **đúng**.

A. Tập hợp các điểm I là đường thẳng song song và cách đều (P) và (Q).

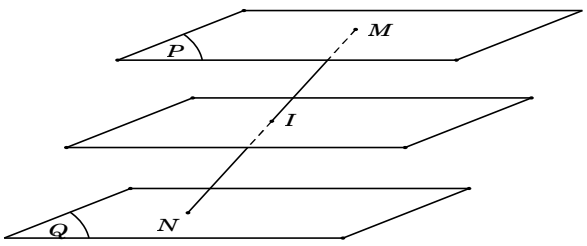
B. Tập hợp các điểm I là mặt phẳng song song và cách đều (P) và (Q).

C. Tập hợp các điểm I là một mặt phẳng cắt (P).

D. Tập hợp các điểm I là một đường thẳng cắt (P).

Lời giải

Chọn B



Ta có: I là trung điểm của MN

$\Rightarrow$ Khoảng cách từ I đến (P) bằng khoảng cách từ I đến (Q)

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm I là mặt phẳng song song và cách đều (P) và (Q).

Câu 6: Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận đường thẳng a song song với mặt phẳng (P)?

A. $a \parallel b$ và $b \subset (P)$.

B. $a \parallel b$ và $b \parallel (P)$.

C. $a \parallel (Q)$ và $(Q) \parallel (P)$.

D. $a \subset (Q)$ và $b \subset (P)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $a \parallel b$ và $b \subset (P)$ suy ra $a \parallel (P)$ hoặc $a \subset (P) \Rightarrow$ Loại **A.**

$a \parallel b$ và $b \parallel (P)$ suy ra $a \parallel (P)$ hoặc $a \subset (P) \Rightarrow$ Loại **B.**

$a \parallel (Q)$ và $(Q) \parallel (P)$ suy ra $a \parallel (P)$ hoặc $a \subset (P) \Rightarrow$ Loại **C.**

Câu 7: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì $a \parallel b$.

B. Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì a và b chéo nhau.

C. Nếu $a \parallel b$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.

D. Nếu $(\gamma) \cap (\alpha) = a, (\gamma) \cap (\beta) = b$ và $(\alpha) \parallel (\beta)$ thì $a \parallel b$.

Lời giải

Chọn D

Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì $a \parallel b$ hoặc a chéo $b \Rightarrow$ A, B sai.

Nếu $a \parallel b$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$ hoặc (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến song song với a và b.

Câu 8: Cho đường thẳng $a \subset mp(P)$ và đường thẳng $b \subset mp(Q)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel b$.

B. $a \parallel b \Rightarrow (P) \parallel (Q)$.

C. $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel (Q)$ và $b \parallel (P)$.

D. a và b chéo nhau.

Lời giải

Chọn C

Với đường thẳng $a \subset mp(P)$ và đường thẳng $b \subset mp(Q)$

Khi $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel b$ hoặc a, b chéo nhau $\Rightarrow$ A sai.

Khi $a \parallel b \Rightarrow (P) \parallel (Q)$ hoặc $(P), (Q)$ cắt nhau theo giao tuyến song song với a và $b \Rightarrow$ B sai.

a và b có thể chéo nhau, song song hoặc cắt nhau $\Rightarrow$ D sai.

Câu 9: Hai đường thẳng a và b nằm trong $mp(\alpha)$. Hai đường thẳng a' và b' nằm trong $mp(\beta)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Nếu $a \parallel a'$ và $b \parallel b'$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.

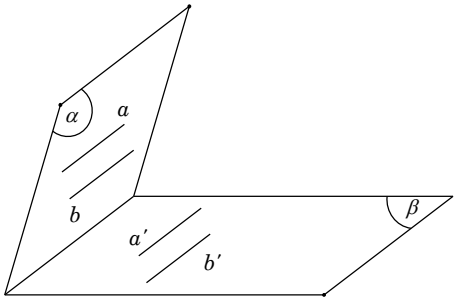
B. Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ thì $a \parallel a'$ và $b \parallel b'$.

C. Nếu $a \parallel b$ và $a' \parallel b'$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.

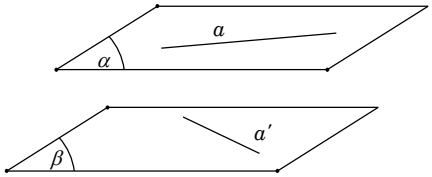
D. Nếu a cắt b và $a \parallel a', b \parallel b'$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.

Lời giải

Chọn D



Hình 1



Hình 2

Nếu $a \parallel a'$ và $b \parallel b'$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$ hoặc (α) cắt (β) (Hình 1) $\Rightarrow$ A sai.

Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ thì $a \parallel a'$ hoặc a, a' chéo nhau (Hình 2) $\Rightarrow$ B sai.

Nếu $a \parallel b$ và $a' \parallel b'$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$ hoặc (α) cắt CC'. (Hình 1) $\Rightarrow$ C sai.

Câu 10: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Hai đường thẳng p và q lần lượt nằm trong (P) và (Q). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. p và q cắt nhau.

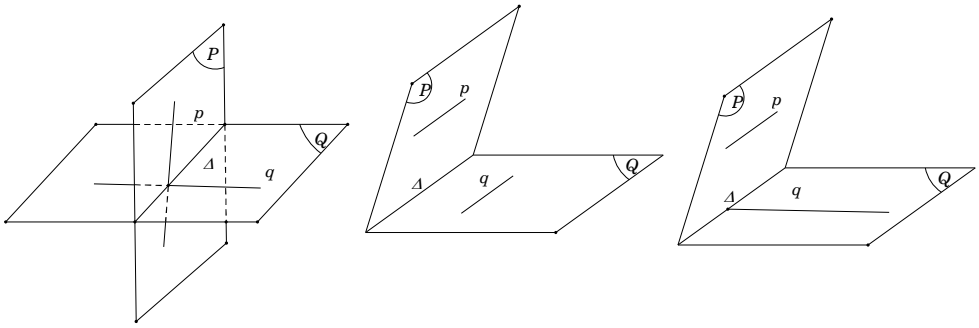
B. p và q chéo nhau.

C. p và q song song.

D. Cả ba mệnh đề trên đều sai.

Lời giải

Chọn D



Ta có p và q có thể cắt nhau, song song, chéo nhau (hình vẽ).

Dạng 2. Chứng minh hai mặt phẳng song song

1. Phương pháp

Áp dụng kết quả sau:

$$\left.\begin{array}{l} a \parallel c,\ b \parallel d \\ a, b \subset (P) \\ c, d \subset (Q) \\ a \cap b = \{A\} \end{array}\right\} \Rightarrow (P) \parallel (Q)$$

Áp dụng: Chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (P).

$$\left.\begin{array}{l} a \subset (Q) \\ (Q) \parallel (P) \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel (P)$$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD, $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$. Gọi E, F, I lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, AD, SD.

a. Chứng minh $(EFB) \parallel (SCD)$. Từ đó chứng minh $CI \parallel (EFB)$.

b. Tìm giao tuyến của (SBC) và (SAD). Tìm giao điểm K của FI với giao tuyến này, chứng minh $(SBF) \parallel (KCD)$.

Giải

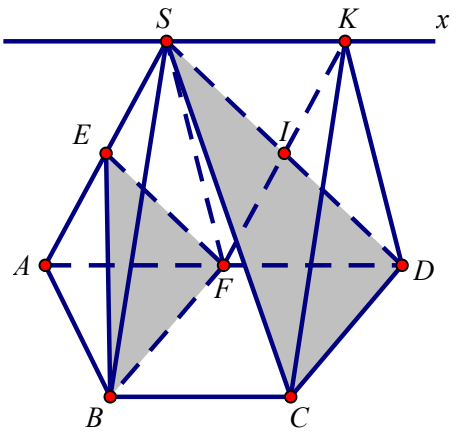
a. Ta có:

$EF \parallel SD$ (EF là đường trung bình của tam giác SAD).

$BF \parallel CD$ $(BC \parallel FD, BC = FD)$.

Suy ra $(EFB) \parallel (SCD)$.

Mà $CI \subset (SCD)$ nên $CI \parallel (EFB)$.



b. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} BC \parallel AD \\ BC \subset (SBC),\ AD \subset (SAD) \\ S \in (SBC) \cap (SAD) \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow (SBC) \cap (SAD) = Sx,\ Sx \parallel AD \parallel BC$

Trong mp(SAD): FI cắt Sx tại K.

Ta có: $SK \parallel FD,\ IS = ID$ nên $IK = IF$.

Vậy tứ giác SKDF là hình bình hành, suy ra $SF \parallel KD$.

Mặt khác $BF \parallel CD$ nên $(SBF) \parallel (KCD)$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và CD.

a. Chứng minh mặt phẳng (OMN) và mặt phẳng (SBC) song song với nhau.

b. Giả sử hai tam giác SAD và ABC đều là tam giác cân tại A. Gọi AE và AF lần lượt là các đường phân giác trong của các tam giác ACD và SAB. Chứng minh EF song song với mặt phẳng (SAD).

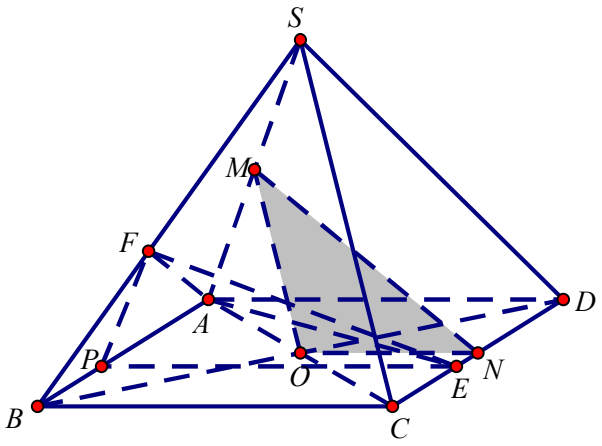
Giải

a. Ta có:

$ON \parallel BC$ (ON là đường trung bình của tam giác BCD).

$OM \parallel SC$ (OM là đường trung bình của tam giác SAC)

Vì $OM, ON \subset (OMN); BC, SC \subset (SBC)$ nên $(OMN) \parallel (SBC)$.



b. Từ E kẻ đường thẳng $EP \parallel AD$ (P thuộc AB)

Khi đó theo tính chất đường phân giác và tam giác cân ta có:

$$\frac{PB}{PA}=\frac{EC}{ED}=\frac{AC}{AD}=\frac{AB}{AS}=\frac{FB}{FA}$$

Do đó: $PF \parallel SA$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(PEF) \parallel (SAD)$.

Mặt khác $EF \subset (PEF)$ nên $EF \parallel (SAD)$.

Ngoài ra ta có thể dùng định lí Thales để chứng minh $EF \parallel (SAD)$ như sau:

Theo tính chất đường phân giác và tính chất của tam giác cân ta chứng minh được:

$$\frac{AB}{AS}=\frac{AC}{AD}=\frac{FB}{FS}=\frac{EC}{ED}.$$

Theo định lí Thales ta suy ra ba đường thẳng BC, EF và SD nằm trong ba mặt phẳng song song, suy ra EF song song với mặt phẳng chứa BC và song song với mặt phẳng chứa SD. Mặt khác $BC \parallel AD$ nên EF song song với mặt phẳng (SAD).

Ví dụ 3. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có các cạnh AA', BB', CC', DD' song song với nhau.

a. Chứng minh hai mặt phẳng (BDA') và (B'D'C) song song với nhau.

b. Chứng minh rằng đường chéo AC' đi qua trọng tâm G và G' lần lượt của hai tam giác BDA' và B'D'C.

c. Chứng minh G và G' chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

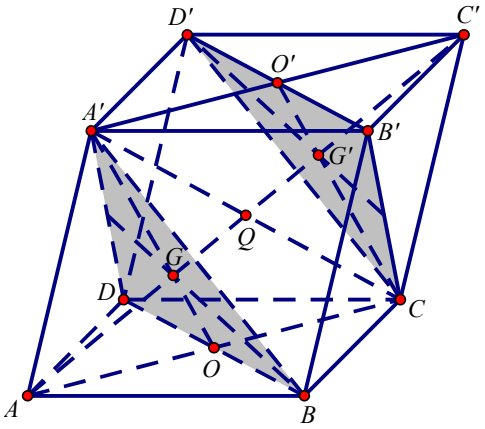
Giải

a. Ta có:

$A'B \parallel D'C$ (vì tứ giác A'BCD' là hình bình hành).

$BD \parallel B'D'$ (vì tứ giác BB'D'D là hình bình hành), suy ra $mp(BDA') \parallel mp(B'D'C)$.

b. Gọi O, O' và Q lần lượt là tâm các hình bình hành ABCD, A'B'C'D và AA'C'C.



Ta có: A'O là đường trung tuyến và G là trọng tâm của tam giác BDA' nên $\frac{A'G}{A'O}=\frac{2}{3}$.

Do đó G cũng là trọng tâm tam giác A'AC (vì A'O là đường trung tuyến của tam giác A'AC).

Mà AQ là đường trung tuyến của tam giác A'AC nên G thuộc AQ, G thuộc AC' . (1)

Tương tự ta có G' là trọng tâm của tam giác B'D'C và cũng là trọng tâm của tam giác A'C'C.

Mà C'Q là đường trung tuyến của tam giác A'C'C nên G' thuộc C'Q. Suy ra G' thuộc AC'. (2)

Từ (1) và (2) suy ra đường chéo AC' đi qua hai trọng tâm G và G' lần lượt của hai tam giác BDA' và B'D'C.

c. Ta có:

G là trọng tâm tam giác A'AC nên $\frac{AG}{AQ}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{AG}{AC'}=\frac{1}{3}\left(AC'=2AQ\right)$. Suy ra $AG=\frac{1}{3}AC'$.

G' là trọng tâm tam giác A'C'C nên $\frac{C'G'}{C'Q}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{C'G'}{C'A}=\frac{1}{3}\left(AC'=2C'Q\right)$. Suy ra $C'G'=\frac{1}{3}AC'$.

Vậy $AG=GG'=C'G'=\frac{1}{3}AC'$. Tức là G và G' chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

Dạng 3. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng và tìm thiết diện qua một điểm và song song với một mặt phẳng

1. Phương pháp

Dùng tính chất thứ 2.

$$\left.\begin{array}{l}(P)\parallel(Q)\\(\alpha)\cap(P)=a\\(\alpha)\cap(Q)=b\end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel b$$

2. Các ví dụ

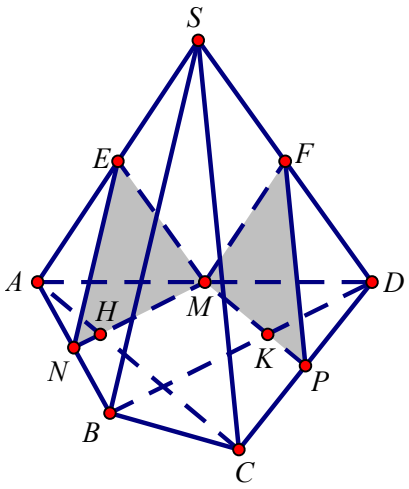
Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M là trung điểm của AD. Gọi (α) và (β) là mặt phẳng qua điểm M và lần lượt song song với mặt phẳng (SBD) và (SAC).

a. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mp(α).

b. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mp(β).

c. Gọi H và K lần lượt là giao điểm của (α) và (β) với AC và BD. Chứng minh tứ giác OHMK là hình bình hành.

Giải



a. $\left.\begin{array}{l}(\alpha)\parallel(SBD)\\(ABCD)\cap(SBD)=BD\\M\in(ABCD)\cap(\alpha)\end{array}\right\}$

$\Rightarrow(ABCD)\cap(\alpha)=MN\parallel BD\ (N\in AB)$

Gọi M là trung điểm của AD nên N là trung điểm của AB. Ta có:

$\left.\begin{array}{l}(\alpha)\parallel(SBD)\\(SAB)\cap(SBD)=SB\\N\in(SAB)\cap(\alpha)\end{array}\right\}\Rightarrow(SAB)\cap(\alpha)=NE\parallel SB\ (E\in SA)$

Mà N là trung điểm của AB nên E là trung điểm của SA.

Khi đó: $ME=(\alpha)\cap(SAD)$.

Vậy thiết diện cần tìm là tam giác MNE.

b. $\left.\begin{array}{l}(\beta)\parallel(SAC)\\(ABCD)\cap(SAC)=AC\\M\in(ABCD)\cap(\beta)\end{array}\right\}\Rightarrow(ABCD)\cap(\beta)=MP\parallel AC\ (P\in CD)$

Mà M là trung điểm của AD nên P là trung điểm của CD.

Ta có:

$\left.\begin{array}{l}(\beta)\parallel(SAC)\\(SCD)\cap(SAC)=SC\\P\in(SCD)\cap(\beta)\end{array}\right\}\Rightarrow(SCD)\cap(\beta)=PF\parallel SC\ (F\in SD)$

Mà P là trung điểm của CD nên F là trung điểm của SD.

Vậy thiết diện cần tìm là tam giác MPF.

c. Trong mp(ABCD): AC cắt MN tại H, BD cắt MP tại K. Do MN chứa trong $mp(\alpha)$ và MP chứa trong $mp(\beta)$ nên H chính là giao điểm của AC với $mp(\alpha)$ và K chính là giao điểm của BD với $mp(\beta)$.

Ta có $MN\parallel BD$ nên $MH\parallel OK$, $MP\parallel AC$ nên $MK\parallel HO$. Vậy tứ giác OHMK là hình bình hành.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành ABCD. Ta dựng các nửa đường thẳng song song với nhau và nằm về một phía đối với (P) lần lượt đi qua các điểm A, B, C, D. Một mặt phẳng (P') cắt bốn nửa đường thẳng nói trên tại A', B', C', D'. Chứng minh:

a. Tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành.

b. $AA'+CC'=BB'+DD'$.

Giải

a. Ta có $AB\parallel CD$ và $Ax\parallel Dt$ nên $mp(Ax,By)\parallel mp(Cz,Dt)$.

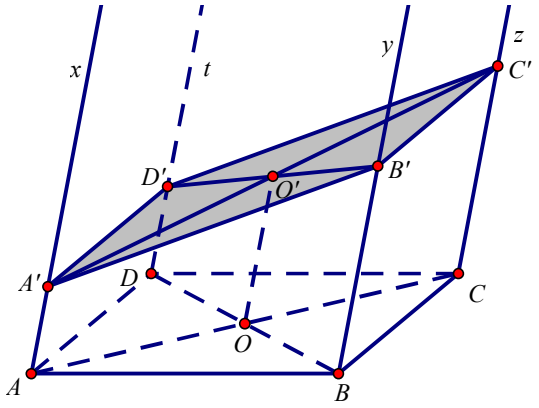
Mà $(P')\cap(Ax,By)=A'B'$; $(P')\cap(Cz,Dt)=C'D'$ nên $A'B'\parallel C'D'$ (1)

Tương tự:

$$\left.\begin{array}{l} mp(Ax,Dt) \parallel mp(By,Cz) \\ (P')\cap(Ax,Dt)=A'D' \\ (P')\cap(By,Cz)=B'C' \end{array}\right\} \Rightarrow A'D' \parallel B'C'$$

(2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành.



b. Gọi O và O' lần lượt là tâm các hình bình hành ABCD và A'B'C'D'.

Khi đó ta có OO' là đường trung bình của hình thang AA'C'C và hình thang BB'D'D.

Do đó: $AA'+CC'=2OO'$ và $BB'+DD'=2OO'$.

Vậy $AA'+CC'=BB'+DD'$.

Ví dụ 3. Cho tứ diện ABCD và M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Mặt phẳng (α) chứa MN cắt các cạnh AD và BC lần lượt là P và Q.

a. Cho trước điểm P, hãy nói cách dựng điểm Q.

b. Gọi K là giao điểm của MN và PQ. Chứng minh rằng $KP=KQ$.

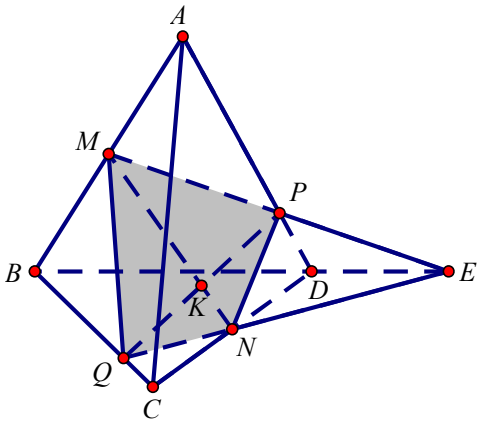
Giải

a. Ta có (α) là mp(MNP).

Trong mp(ABD): MP cắt BD tại E.

Trong mp(BCD): EN cắt BC tại Q.

Vậy (α) chính là mp(MPNQ). Q là điểm cần tìm.



b. Trên hai đường thẳng chéo nhau AB và CD lần lượt có các điểm A, M, B và C, N, D định ra các tỉ số bằng nhau:

$$\frac{MA}{MB}=\frac{ND}{NC}=1.$$

Theo định lí Thales ta suy ra AD, MN, BC nằm trên ba mặt phẳng song song.

Mà PQ là cát tuyến cắt ba mặt phẳng song song lần lượt tại P, K, Q nên: $\frac{KP}{KQ}=\frac{MA}{MB}=\frac{ND}{NC}=1$.

Vậy K là trung điểm của PQ.

Dạng 3. Tìm thiết diện của lăng trụ, hình chóp cụt

1. Phương pháp

Tìm thiết diện của lăng trụ hay hình chóp cụt cũng thực hiện tương tự như xác định thiết diện của hình chóp.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CC'.

a. Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng (A'MN). Tính tỉ số mà thiết diện chia cạnh AB.

b. Gọi P là điểm đối xứng của C qua A. Hãy xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng (MNP). Tính tỉ số các đoạn thẳng mà thiết diện chia các cạnh AA' và AB.

Giải

a. Trong mp(BCC'B'): MN cắt BB' tại D.

Khi đó mp(A'MN) chính là mp(A'DN).

Trong mp(AA'B'B): A'D cắt AB tại E.

Vậy thiết diện do mp(A'MN) cắt lăng trụ là tứ giác A'EMN.

Ta có: $\frac{EA}{EB}=\frac{AA'}{BD}=\frac{2CN}{BD}=2\frac{MC}{MB}=2$ (vì $AA'=CC'=2CN$, $CN\parallel BD$ và $MB=MC$). Do đó $\frac{EA}{EB}=2$.

b. Trong mp(ABC): MP cắt AC tại F. Khi đó mp(MNP) chính là mp(MNF).

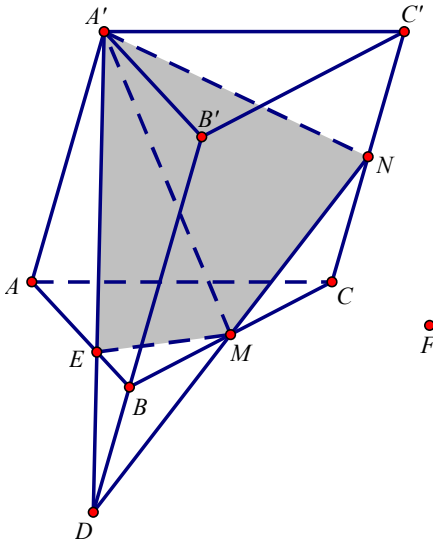
Trong mp(AA'C'C): NF cắt AA' tại K. Vậy thiết diện do mp(MNP) cắt lăng trụ là tứ giác MNPK.

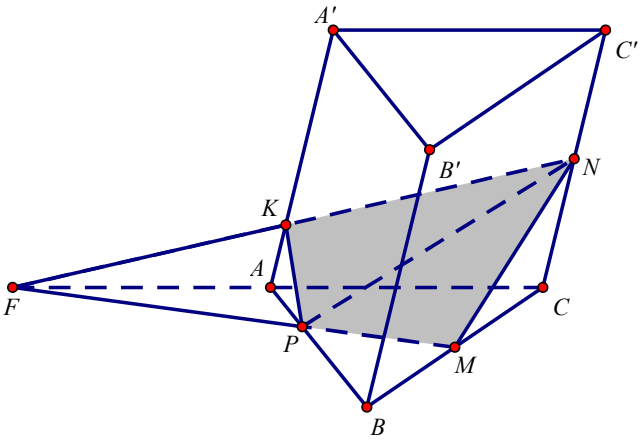
Ta có: $\frac{KA}{AA'}=\frac{KA}{CC'}=\frac{1}{2}.\frac{KA}{CN}=\frac{1}{2}.\frac{FA}{FC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ (vì $AA'=CC'=2CN$, $KA\parallel CN$).

Vậy $\frac{KA}{KA'}=\frac{1}{3}$.

Tam giác FBC có FM và BA là hai đường trung tuyến cắt nhau tại P nên P là trọng tâm tam giác FBC.

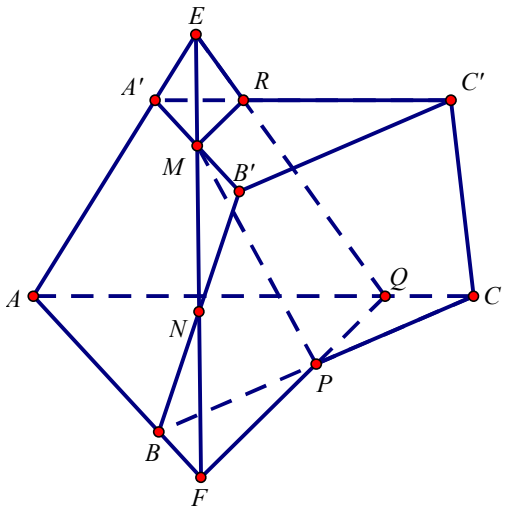
Vậy theo tính chất trọng tâm ta có $\frac{PA}{PB}=\frac{1}{2}$.





Ví dụ 2. Cho hình chóp cụt ABC.A'B'C'. Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh A'B', B'B và BC. Xác định thiết diện của hình chóp cụt cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Giải



Gọi (α) là mp(MNP).

Trong mp(AA'B'B): MN cắt AB tại F và cắt AA' tại E.

Trong mp(ABC): FP cắt AC tại Q.

Trong mp(AA'C'C): QE cắt A'C' tại R.

Khi đó:

$MN=(\alpha)\cap(AA'B'B)$

$NP=(\alpha)\cap(BB'C'C)$

$PQ=(\alpha)\cap(ABC)$

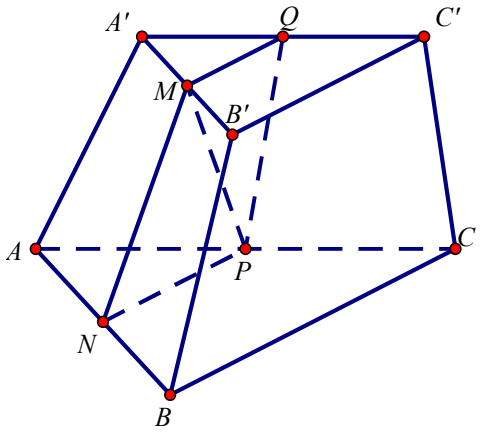
$QR=(\alpha)\cap(AA'C'C)$

$RM=(A)\cap(A'B'C')$

Vậy thiết diện cần tìm là ngũ giác MNPQR.

Ví dụ 3. Cho hình chóp cụt ABC.A'B'C'. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của các cạnh A'B' và AC. Xác định thiết diện của hình chóp cụt cắt bởi mặt phẳng chứa MP và song song với mặt phẳng (BB'C'C).

Giải



Gọi (α) là mặt phẳng chứa MP và song song với mp(BB'C'C).

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha)\parallel(BB'C'C)\\(ABC)\cap(BB'C'C)=BC\\P\in(ABC)\cap(\alpha)\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow(ABC)\cap(\alpha)=PN\parallel BC\ (N\in AB)$

Vì P là trung điểm của AC nên N là trung điểm của AB.

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha)\parallel(BB'C'C)\\(A'B'C')\cap(BB'C'C)=B'C'\\M\in(A'B'C')\cap(\alpha)\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow(A'B'C')\cap(\alpha)=MQ\parallel B'C'\ (Q\in A'C')$

Vì M là trung điểm của A'B' nên Q là trung điểm của A'C'.

Khi đó: $\begin{cases}MN=(\alpha)\cap(AA'B'B)\\PQ=(\alpha)\cap(AA'C'C)\end{cases}$

Vậy thiết diện cần tìm là hình thang MNPQ $(MQ\parallel NP)$.

Dạng 4: Bài tập áp dụng

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, I theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và AB. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (NOM) cắt (OPM).

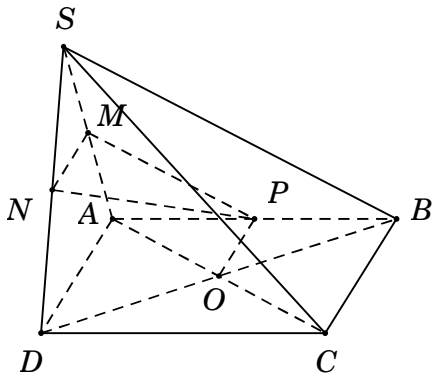
B. $(MON)//(SBC)$.

C. $(PON)\cap(MNP)=NP$.

D. $(NMP)//(SBD)$.

Lời giải

Chọn B



Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAD suy ra $MN // AD$. (1)

Và OP là đường trung bình của tam giác BAD suy ra $OP // AD$. (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra $MN // OP // AD \Rightarrow M, N, O, P$ đồng phẳng.

Lại có $MP // SB$, $OP // BC$ suy ra $(MNOP)//(SBC)$ hay $(MON)//(SBC)$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Tam giác SBD đều. Một mặt phẳng (P) song song với (SBD) và qua điểm I thuộc cạnh AC (không trùng với A hoặc C). Thiết diện của (P) và hình chóp là hình gì?

A. Hình hình hành.

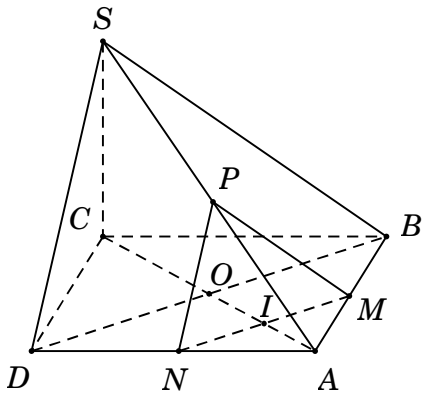
B. Tam giác cân.

C. Tam giác vuông.

D. Tam giác đều.

Lời giải

Chọn D



Gọi MN là đoạn thẳng giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt đáy $(ABCD)$.

Vì $(P)//(SBD)$, $(P)\cap(ABCD)=MN$ và $(SBD)\cap(ABCD)=MN$ suy ra $MN//BD$.

Lập luận tương tự, ta có

(P) cắt mặt (SAD) theo đoạn giao tuyến NP với $NP//SD$.

(P) cắt mặt (SAB) theo đoạn giao tuyến MP với $MP//SB$.

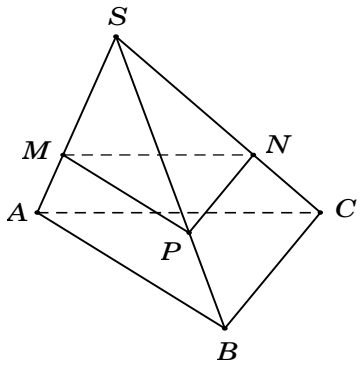
Vậy tam giác MNP đồng dạng với tam giác SBD nên thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là tam giác đều MNP.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC thỏa mãn $AB=AC=4$, $\widehat{BAC}=30°$. Mặt phẳng (P) song song với (ABC) cắt đoạn SA tại M sao cho $SM=2MA$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{16}{9}$. **B.** $\frac{14}{9}$. **C.** $\frac{25}{9}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A



Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{BAC}=\frac{1}{2}.4.4.\sin 30^0=4$.

Gọi N, P lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (P) và các cạnh SB, SC.

Vì $(P)//(ABC)$ nên theoo định lí Talet, ta có $\frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SB}=\frac{SP}{SC}=\frac{2}{3}$.

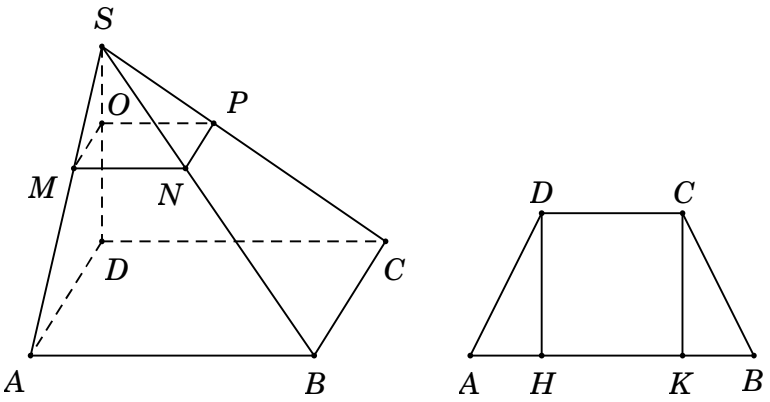
Khi đó (P) cắt hình chóp $S.ABC$ theo thiết diện là tam giác MNP đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số $k=\frac{2}{3}$. Vậy $S_{\Delta MNP}=k^2.S_{\Delta ABC}=\left(\frac{2}{3}\right)^2.4=\frac{16}{9}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với cạnh bên $BC=2$, hai đáy $AB=6$, $CD=4$. Mặt phẳng (P) song song với $(ABCD)$ và cắt cạnh SA tại M sao cho $SA=3SM$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{5\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** 2. **D.** $\frac{7\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của D, C trên AB.

$ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow \begin{cases} AH = BK;\ CD = HK \\ AH + HK + BK = AB \end{cases} \Rightarrow BK = 1.$

Tam giác BCK vuông tại K, có $CK = \sqrt{BC^2 - BK^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$

Suy ra diện tích hình thang $ABCD$ là $S_{ABCD} = CK.\dfrac{AB + CD}{2} = \sqrt{3}.\dfrac{4+6}{2} = 5\sqrt{3}.$

Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của (P) và các cạnh SB, SC, SD.

Vì $(P)//(ABCD)$ nên theo định lí Talet, ta có $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{NP}{BC} = \dfrac{PQ}{CD} = \dfrac{QM}{AD} = \dfrac{1}{3}.$

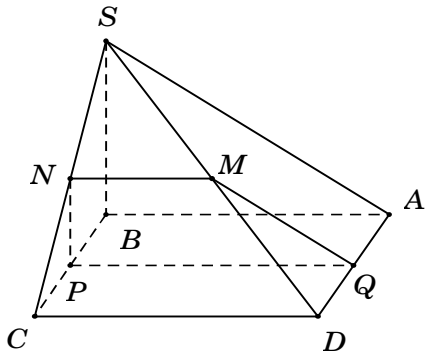
Khi đó (P) cắt hình chóp theo thiết diện $MNPQ$ có diện tích $S_{MNPQ} = k^2.S_{ABCD} = \dfrac{5\sqrt{3}}{9}.$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có tâm O, $AB = 8$, $SA = SB = 6$. Gọi (P) là mặt phẳng qua O và song song với (SAB). Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là:

A. $5\sqrt{5}$. **B.** $6\sqrt{5}$. **C.** 12. **D.** 13.

Lời giải

Chọn B



Qua O kẻ đường thẳng (d) song song AB và cắt BC, AD lần lượt tại P, Q.

Kẻ PN song song với SB $(N \in SB)$, kẻ QM song song với SA $(M \in SA)$.

Khi đó $(MNPQ)//(SAB) \Rightarrow$ thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $MNPQ$

Vì P, Q là trung điểm của BC, AD suy ra N, M lần lượt là trung điểm của SC, SD.

Do đó MN là đường trung bình tam giác $SCD \Rightarrow MN = \frac{CD}{2} = \frac{AB}{2} = 4$.

Và $NP = \frac{SB}{2} = 3;\ QM = \frac{SA}{2} = 3 \Rightarrow NP = QM \Rightarrow MNPQ$ là hình thang cân.

Hạ NH, MK vuông góc với PQ. Ta có $PH = KQ \Rightarrow PH = \frac{1}{2}(PQ - MN) = 2$.

Tam giác PHN vuông, có $NH = \sqrt{5}$.

Vậy diện tích hình thang $MNPQ$ là $S_{MNPQ} = NH.\frac{PQ + NM}{2} = 6\sqrt{5}$.

Câu 6: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Hình lăng trụ có các cạnh bên song song và bằng nhau.

B. Hai mặt đáy của hình lăng trụ nằm trên hai mặt phẳng song song.

C. Hai đáy của lăng trụ là hai đa giác đều.

D. Các mặt bên của lăng trụ là các hình bình hành.

Lời giải

Chọn C

Xét hình lăng trụ có đáy là một đa giác (tam giác, tứ giác,…), ta thấy rằng

Hình lăng trụ luôn có các cạnh bên song song và bằng nhau.

Hai mặt đáy của hình lăng trụ nằm trên hai mặt phẳng song song.

Hai đáy của lăng trụ là hai đa giác bằng nhau (tam giác, tứ giác,…)

Các mặt bên của lăng trụ là các hình bình hành vì có hai cạnh là hai cạnh bên của hình lăng trụ, hai cạnh còn lại thuộc hai đáy song song.

Câu 7: Trong các mệnh đều sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Các cạnh bên của hình lăng trụ bằng nhau và song song với nhau.

B. Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành.

C. Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành bằng nhau.

D. Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

Lời giải

Chọn C

Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình hình hành, chúng bằng nhau nếu hình lăng trụ có đáy là tam giác đều.

Câu 8: Trong các mệnh đều sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Các cạnh bên của hình chóp cụt đôi một song song.

B. Các cạnh bên của hình chóp cụt là các hình thang.

C. Hai đáy của hình chóp cụt là hai đa giác đồng dạng.

D. Cả 3 mệnh đề trên đều sai.

Lời giải

Chọn C

Xét hình chóp cụt có đáy là đa giác (tam giác, tứ giác,…) ta thấy rằng:

Các cạnh bên của hình chóp cụt đôi một cắt nhau.

Các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang cân.

Hai đáy của hình chóp cụt là hai đa giác đồng dạng.

Câu 9: Trong các mệnh đều sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Trong hình chóp cụt thì hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và các tỉ số các cặp cạnh tương ứng bằng nhau.

B. Các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang.

C. Các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang cân.

D. Đường thẳng chứa các cạnh bên của hình chóp cụt đồng quy tại một điểm.

Lời giải

Chọn C

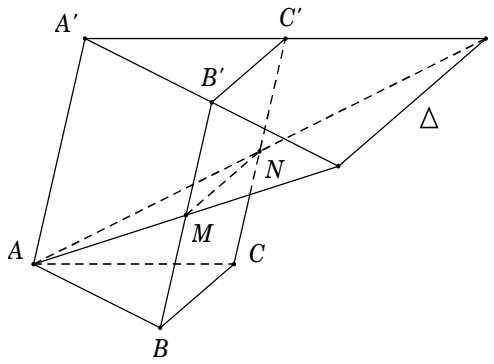
Với hình chóp cụt, các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang.

Câu 10: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB' và CC'. Gọi Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và $(A'B'C')$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\Delta \parallel AB$. **B.** $\Delta \parallel AC$. **C.** $\Delta \parallel BC$. **D.** $\Delta \parallel AA'$.

Lời giải

Chọn C



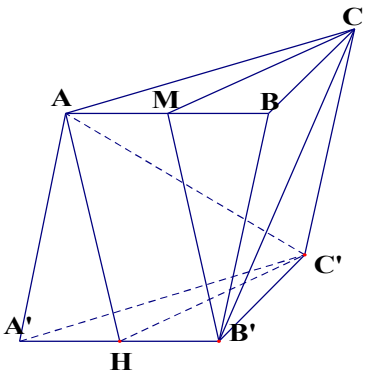
Ta có $\begin{cases} MN \subset (AMN) \\ B'C' \subset (A'B'C') \\ MN \parallel B'C' \end{cases} \longrightarrow \Delta$ là giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và $(A'B'C')$ sẽ song song với MN và $B'C'$. Suy ra $\Delta \parallel BC$.

Câu 11: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trung điểm của $A'B'$. Đường thẳng $B'C$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. (AHC'). **B.** $(AA'H)$. **C.** (HAB). **D.** $(HA'C)$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của AB suy ra $MB' \parallel AH \longrightarrow MB' \parallel (AHC')$. (1)

Vì MH là đường trung bình của hình bình hành $ABB'A'$ suy ra MH song song và bằng BB' nên MH song song và bằng $CC' \longrightarrow MHC'C$ là hình hình hành $\longrightarrow MC \parallel HC' \longrightarrow MC \parallel (AHC')$. (2)

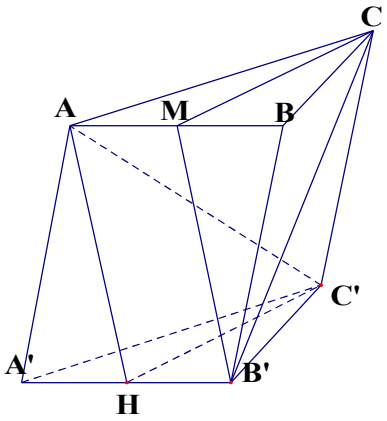
Từ (1) và (2), suy ra $(B'MC) \parallel (AHC') \longrightarrow B'C \parallel (AHC')$.

Câu 12: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trung điểm của $A'B'$. Mặt phẳng (AHC') song song với đường thẳng nào sau đây?

A. CB'. **B.** BB'. **C.** BC. **D.** BA'.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của AB suy ra $MB' \parallel AH \longrightarrow MB' \parallel (AHC')$. (1)

Vì MH là đường trung bình của hình bình hành $ABB'A'$ suy ra MH song song và bằng BB' nên MH song song và bằng $CC' \longrightarrow MHC'C$ là hình hình hành $\longrightarrow MC \parallel HC' \longrightarrow MC \parallel (AHC')$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $(B'MC) \parallel (AHC') \longrightarrow B'C \parallel (AHC')$.

Câu 13: Cho hình lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $(ABC) // (A_1B_1C_1)$. **B.** $AA_1 // (BCC_1)$.

C. $AB // (A_1B_1C_1)$. **D.** AA_1B_1B là hình chữ nhật.

Lời giải

Chọn D

Vì mặt bên AA_1B_1B là hình bình hành, còn nó là hình chữ nhật nếu $ABC.A_1B_1C_1$ là hình lăng trụ đứng.

Câu 14: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $ABCD$ là hình bình hành.

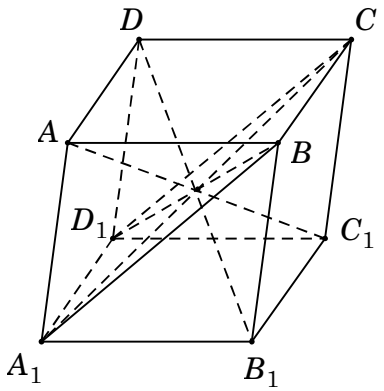
B. Các đường thẳng A_1C, AC_1, DB_1, D_1B đồng quy.

C. $(ADD_1A_1)//(BCC_1B_1)$.

D. AD_1CB là hình chữ nhật.

Lời giải

Chọn D



Dựa vào hình vẽ và tính chất của hình hộp chữ nhật, ta thấy rằng:

- Hình hộp có đáy $ABCD$ là hình bình hành.
- Các đường thẳng A_1C, AC_1, DB_1, D_1B cắt nhau tại tâm của AA_1C_1C, BDD_1B_1.
- Hai mặt bên (ADD_1A_1), (BCC_1B_1) đối diện và song song với nhau.
- AD_1 và CB là hai đường thẳng chéo nhau suy ra AD_1CB không phải là hình chữ nhật.

Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bên AA', BB', CC', DD'. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $(AA'B'B)//(DD'C'C)$.

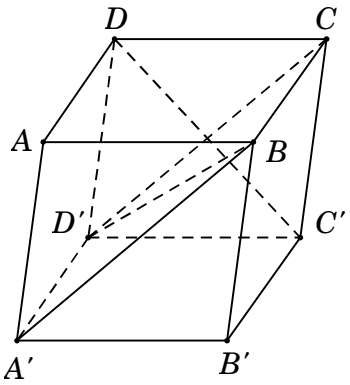
B. $(BA'D')//(ADC')$.

C. $A'B'CD$ là hình bình hành.

D. $BB'D'D$ là một tứ giác.

Lời giải

Chọn B



Dựa vào hình vẽ dưới và tính chất của hình hộp, ta thấy rằng:

- Hai mặt bên $(AA'B'B)$ và $(DD'C'C)$ đối diện, song song với nhau.
- Hình hộp có hai đáy $(ABCD)$, $(A'B'C'D')$ là hình bình hành $\Rightarrow A'B'=CD$ và $A'B'//CD$ suy ra $A'B'CD$ là hình hình hành.
- $BD//B'D'$ suy ra B, B', D', D đồng phẳng $\Rightarrow BB'D'D$ là tứ giác.
- Mặt phẳng $(BA'D')$ chứa đường thẳng CD' mà CD' cắt $C'D$ suy ra $(BA'D')$ không song song với (ADC').

Câu 16: Nếu thiết diện của một lăng trụ tam giác và một mặt phẳng là một đa giác thì đa giác đó có nhiều nhất mấy cạnh?

A. 3 cạnh. **B.** 4 cạnh. **C.** 5 cạnh. **D.** 6 cạnh.

Lời giải

Chọn C

Đa giác thiết diện của một lăng trụ tam giác và một mặt phẳng có nhiều nhất 5 cạnh với các cạnh thuộc các mặt của hình lăng trụ tam giác.

Câu 17: Nếu thiết diện của một hình hộp và một mặt phẳng là một đa giác thì đa giác đó có nhiều nhất mấy cạnh?

A. 4 cạnh. **B.** 5 cạnh. **C.** 6 cạnh. **D.** 7 cạnh.

Lời giải

Chọn C

Vì hình hộp là hình lăng trụ có đáy là tứ giác và có 6 mặt nên thiết diện của hình hộp và mặt phẳng bất kì là một đa giác có nhiều nhất 6 cạnh.

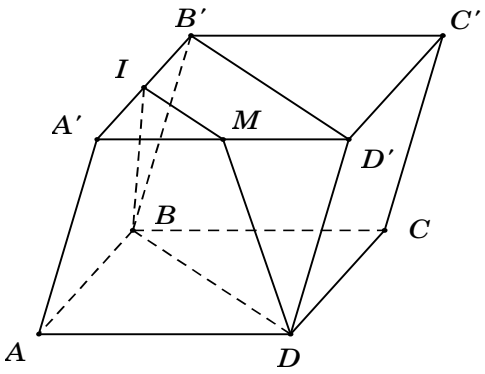
Câu 18: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là trung điểm của AB. Mặt phẳng $(IB'D')$ cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

A. Tam giác. **B.** Hình thang.

C. Hình bình hành. **D.** Hình chữ nhật.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\begin{cases} B'D' \subset (IB'D') \\ BD \subset (ABCD) \\ B'D' \parallel BD \end{cases} \longrightarrow$ Ggiao tuyến của $(IB'D')$ với $(ABCD)$ là đường thẳng d đi qua I và song song với BD.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $M = d \cap AD \longrightarrow IM \parallel BD \parallel B'D'$.

Khi đó thiết diện là tứ giác $IMB'D'$ và tứ giác này là hình thang.

Câu 19: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua một cạnh của hình hộp và cắt hình hộp theo thiết diện là một tứ giác (T). Khẳng định nào sau đây không **sai**?

A. (T) là hình chữ nhật.

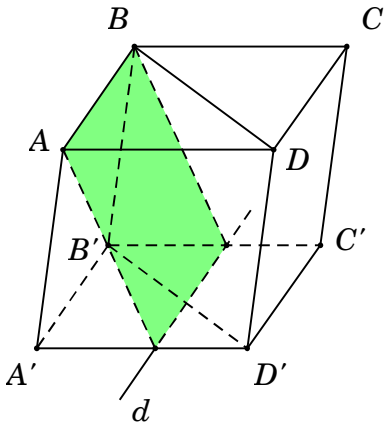
B. (T) là hình bình hành.

C. (T) là hình thoi.

D. (T) là hình vuông.

Lời giải

Chọn B



Giả sử mặt phẳng (α) đi qua cạnh AB và cắt hình hộp theo tứ giác (T).

Gọi d là đường thẳng giao tuyến của (α) và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

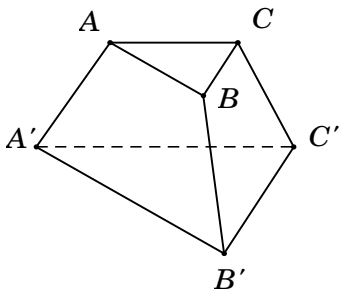
Ta chứng minh được $AB \parallel d$ suy ra tứ giác (T) là một hình bình hành.

Câu 20: Cho hình chóp cụt tam giác $ABC.A'B'C'$ có 2 đáy là 2 tam giác vuông tại A và A' và có $\frac{AB}{A'B'}=\frac{1}{2}$. Khi đó tỉ số diện tích $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B



Hình chóp cụt $ABC.A'B'C'$ có hai mặt đáy là hai mặt phẳng song song nên tam giác ABC đồng dạng tam giác $A'B'C'$ suy ra $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}}=\frac{\frac{1}{2}.AB.AC}{\frac{1}{2}.A'B'.A'C'}=\frac{AB}{A'B'}.\frac{AC}{A'C'}=\frac{1}{4}$.

BÀI 5. PHÉP CHIẾU SONG SONG

A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN NẮM

I. PHÉP CHIẾU SONG SONG

Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ cắt (α). Với mỗi điểm M trong không gian, đường thẳng đi qua M và song song hoặc trùng với Δ sẽ cắt Δ tại điểm M' xác định. Điểm M' được gọi là hình chiếu song song của điểm M trên mặt phẳng (α) theo phương của đường thẳng Δ hoặc nói gọn là theo phương Δ.

Mặt phẳng (α) gọi là mặt phẳng chiếu. Phương Δ gọi là phương chiếu.

Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với hình chiếu M' của nó trên mặt phẳng (α) được gọi là phép chiếu song song lên (α) theo phương Δ.

Nếu H là một hình nào đó thì tập hợp H' các hình chiếu M' của tất cả những điểm M thuộc H được gọi là hình chiếu của H' qua phép chiếu song song nói trên.

Chú ý. Nếu một đường thẳng có phương trùng với phương chiếu thì hình chiếu của đường thẳng đó là một điểm. Sau đây, ta chỉ xét các phép chiếu của những đường thẳng có phương không trùng với phương chiếu.

II. CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP CHIẾU SONG SONG

Định lí 1

a) Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.

b) Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

c) Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

d) Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

III. Hình biểu diễn của một hình không gian trên mặt phẳng

Hình biểu diễn của một hình H trong không gian là hình chiếu song song của hình H trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

Hình biểu diễn của các hình thường gặp

+ **Tam giác:** Một tam giác bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một tam giác có dạng tùy ý cho trước (có thể là tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông,v.v…)

+ **Hình bình hành:** Một hình bình hành bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình bình hành tùy ý cho trước (có thể là hình bình hành, hình vuông, hình thoi, hình chữ nhật…)

+ **Hình thang:** Một hình thang bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình thang tùy ý cho trước, miễn là tỉ số độ dài hai đáy của hình biểu diễn phải bằng tỉ số độ dài hai đáy của hình thang ban đầu.

+ **Hình tròn:** Người ta thường dùng hình elip để biểu diễn cho hình tròn

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1. Vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian

1. Phương pháp

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Để vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian, ta cần chú ý một số điểm sau:

- Nếu trên hình H có hai đoạn thẳng cùng phương thì trên hình H' hình chiếu của hai đoạn thẳng đó phải cùng phương.

- Trung điểm của một đoạn thẳng có hình chiếu là trung điểm của đoạn thẳng hình chiếu.

- Trong tam giác có một góc tù, ta cần chú ý chân đường cao kẻ từ đỉnh của góc nhọn không nằm trên cạnh đối diện mà nằm ở trên phần kéo dài của cạnh ấy.

- Một góc bất kì có thể biểu diễn cho mọi góc (nhọn, vuông, tù).

- Một tam giác bất kì có thể là hình biểu diễn của mọi tam giác (cân, đều, vuông).

- Hình bình hành có thể dùng làm hình biểu diễn cho các hình có tính chất của hình bình hành (vuông, thoi, chữ nhật,…)

- Một đường tròn được biểu diễn bởi một đường elip hoặc một đường tròn, hoặc đặc biệt có thể là một đoạn thẳng.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC. Hãy chọn mặt phẳng chiếu (P) và phương chiếu d để hình chiếu của tam giác ABC trên mặt phẳng (P) là:

a. Một tam giác cân.

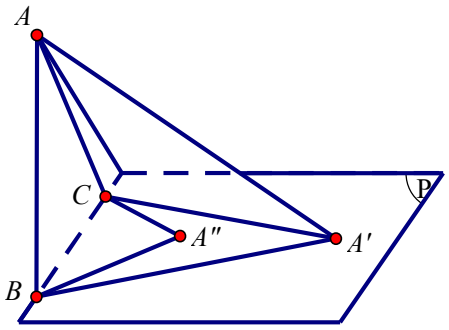
b. Một tam giác vuông.

Giải

Qua BC dựng mặt phẳng (P) không qua A.

a. Trong mặt phẳng (P), dựng tam giác BCA' cân tại A'. Khi đó, phép chiếu song song lên (P) theo phương chiếu AA' biến tam giác ABC thành tam giác BCA'.

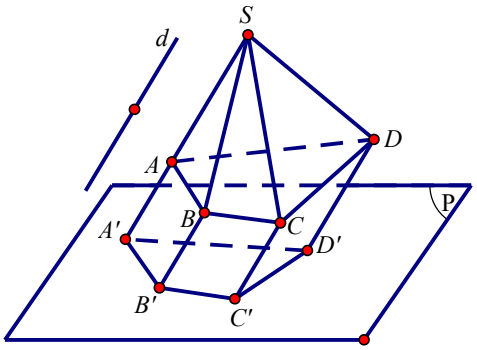
b. Trong mặt phẳng (P), dựng tam giác BCA" vuông tại A". Khi đó, phép chiếu song song lên (P) theo phương chiếu AA" biến tam giác ABC thành tam giác vuông A"BC.



Ví dụ 2. Vẽ hình chiếu của hình chóp S.ABCD lên mặt phẳng (P) theo phương chiếu SA (SA không song song với (P)).

Giải

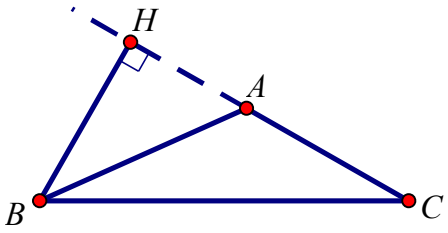
Vì phương chiếu d là SA nên SA cắt (P) tại A'. Các đỉnh B, C, D có hình chiếu trên (P) lần lượt là B', C', D' $\left(BB' \parallel AA', CC' \parallel AA', DD' \parallel AA'\right)$. Vậy hình chiếu của hình chóp S.ABCD lên (P) là tứ giác A'B'C'D'.



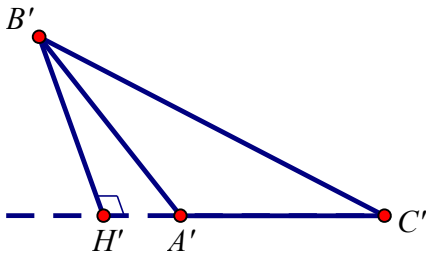
Ví dụ 3. Vẽ hình biểu diễn của tam giác ABC có góc A tù, đường cao BH.

Giải

Xem hình vẽ sau:



Hình thật



Hình biểu diễn

Ví dụ 4. Vẽ hình biểu diễn của đường tròn có hai đường kính vuông góc.

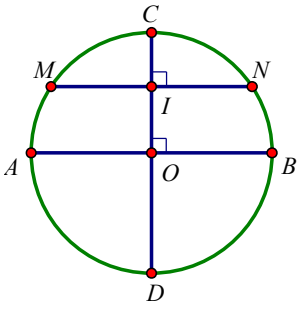
Giải

Giả sử trên hình thật ta có đường tròn tâm (O), tâm O, có hai đường kính AB và CD vuông góc. Nếu ta vẽ dây dung MN song song với AB thì CD sẽ cắt MN tại trung điểm I của MN.

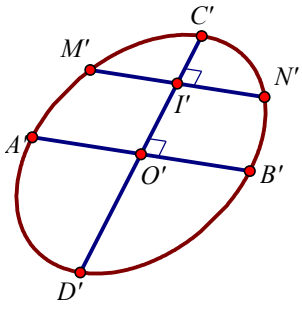
Suy ra cách vẽ hình biểu diễn như sau:

- Vẽ elip (E), tâm O' và đường kính A'B' (qua O') của nó.
- Vẽ dây cung $M'N' \parallel A'B'$.
- Lấy I' là trung điểm của M'N'.

Đường thẳng O'I' cắt elip (E) tại C', D'. Ta có A'B' và C'D' là hình biểu diễn hai đường kính vuông góc với nhau của đường tròn.



Hình thật



Hình biểu diễn

Ví dụ 5. Vẽ hình biểu diễn của một lục giác đều.

Giải

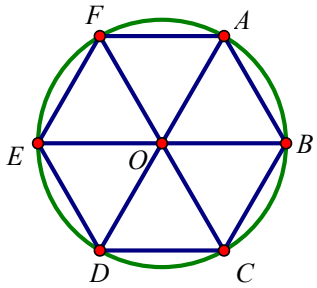
Xét hình lục giáo đều ABCDEF, ta thấy:

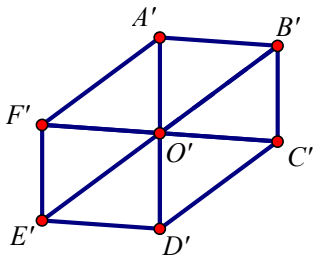
- Tứ giác OABC là một hình thoi.
- Các điểm D, E, F lần lượt là các điểm đối xứng của các điểm A, B, C qua tâm O. Suy ra cách vẽ như sau:

+ Vẽ hình bình hành O'A'B'C' biểu diễn cho hình thoi OABC.

+ Lấy các điểm D', E', F' đối xứng với các điểm A', B', C' qua O'.

+ A'B'C'D'E'F' là hình cần vẽ.





Hình biểu diễn lục giác đều

Ví dụ 6. Vẽ hình biểu diễn của một tam giác đều.

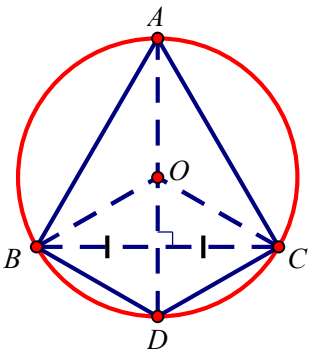
Giải

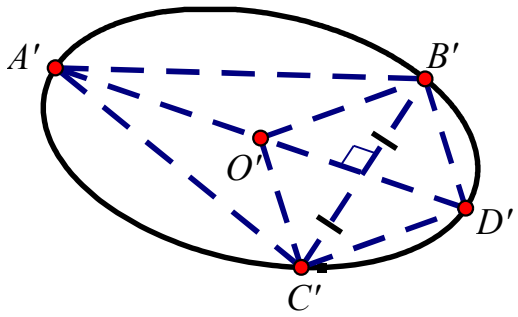
Xét tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là điểm đối xứng với A qua O, ta thấy tứ giác OBDC là hình thoi. Từ đó suy ra cách vẽ như sau:

+ Vẽ hình bình hành O'B'D'C' biểu diễn cho hình thoi OBDC.

+ Lấy điểm A' là điểm đối xứng của D' qua O'.

+ Tam giác A'B'C' là tam giác đều cần tìm.





Hình biểu diễn tam giác đều

Dạng 2. Các bài toán liên quan đến phép chiếu song song

1. Phương pháp

Các bài toán liên quan đến phép chiếu song song thường là dựa vào các tính chất của phép chiếu song song để chứng minh một vấn đề nào đó. Cần chú ý rằng trong các bài toán dạng này, việc tìm phương chiếu đóng vai trò khá quan trọng.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACD.

a. Chứng minh hình chiếu G' của điểm G trên mặt phẳng (BCD) theo phương chiếu AB là trọng tâm của tam giác BCD.

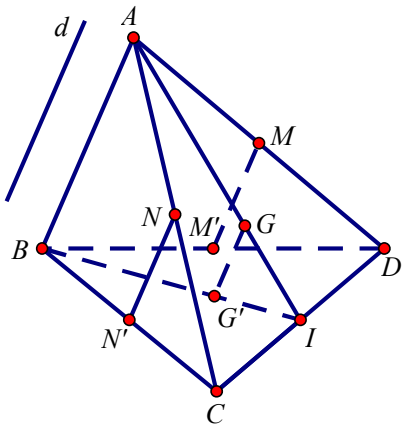
b. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và AC. Tìm hình chiếu song song của các điểm M, N theo phép chiếu nói trên.

Giải

a. Chứng minh G' là trọng tâm của tam giác BCD:

- Gọi I là trung điểm của CD. Qua phép chiếu song song phương AB thì IB là hình chiếu của IA trên mặt phẳng (BCD).

- Vì phép chiếu song song bảo toàn tính thẳng hàng và thứ tự ba điểm A, G, I nên hình biểu diễn G' của G nằm trên BI và ở giữa B và I.



Trong tam giác IAB, ta có:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{IG}{IA}=\dfrac{IG'}{IB}\\ \dfrac{IG}{IA}=\dfrac{1}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{IG'}{IB}=\dfrac{1}{3}.$$

Suy ra G' là trọng tâm của tam giác BCD.

b. Hình chiếu của M, N qua phép chiếu song song phương AB trên mặt phẳng (BCD). Ta thấy:

- BD là hình chiếu của AD trên mặt phẳng (BCD); M là trung điểm của AD nên M' là trung điểm của BD.

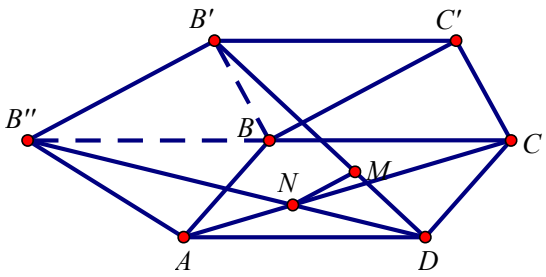
- BC là hình chiếu của AC trên mặt phẳng (BCD); N là trung điểm của AC nên N' là trung điểm của BC.

Ví dụ 2. Cho hai hình bình hành ABCD và BCC'B' nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Tìm điểm M trên đoạn DB', và điểm N trên đường chéo AC sao cho $MN \parallel BC'$.

Giải

- Phân tích:

Giả sử đã tìm được $M \in DB'$ và $N \in AC$ sao cho $MN \parallel BC'$.



Xét phép chiếu song song theo phương BC' lên mặt phẳng (ABCD). Khi đó qua phép chiếu này, hình chiếu của các điểm D, M, B' lần lượt là D, N, B''. Vì D, M, B' thẳng hàng nên D, N, B'' cũng thẳng hàng. Do đó, N là giao điểm của DB'' và AC. Từ đó, ta có cách dựng như sau:

- Cách dựng:

+ Dựng B'' là hình chiếu của B' qua phép chiếu theo phương BC' lên mặt phẳng (ABCD).

+ Dựng N là giao điểm của DB'' và AC.

+ Trong mặt phẳng (DB'B''), ta kẻ $NM \parallel B'B''$ cắt DB' tại M.

Vậy M và N là các điểm cần tìm.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng song song.

B. Hình chiếu song song của một hình bình hành là một hình bình hành.

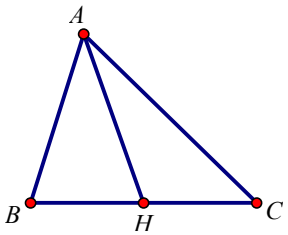
C. Phép chiếu song song biến một tam giác thành một tam giác nếu mặt phẳng chứa tam giác không cùng phương với phương chiếu.

D. Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng.

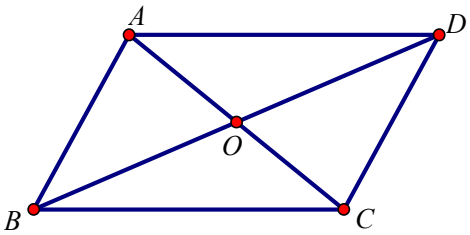
Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 2. Trên hình $\mathcal{A}$ có $\begin{cases} AH \perp BC \\ HB = HC \end{cases}$ và hình $\mathcal{B}$ có $\begin{cases} AB \parallel CD, AD \parallel BC \\ AC \perp BD \end{cases}$



Hình $\mathcal{A}$



Hình $\mathcal{B}$

Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. ABC là tam giác đều.

B. ABC là tam giác cân tại A.

C. ABCD là hình thoi.

D. B và C đúng.

Hướng dẫn giải

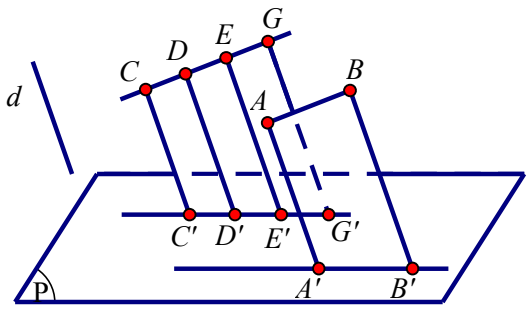
ĐÁP ÁN D.

Nhìn hình vẽ, ta thấy:

- Tam giác ABC có AH vừa là đường cao vừa là trung tuyến nên cân tại A → B đúng.

- Tứ giác ABCD có $AB \parallel CD, AC \parallel BD$ nên là hình bình hành. Mặt khác hai đường chéo của nó vuông góc nên ABCD là hình thoi → C đúng.

Câu 3. Trên hình $\mathcal{C}$, ta có phép chiếu song song theo phương d và mặt phẳng chiếu (P); $AB \parallel CG$ và $AB = DG$; A', B', C', D', E', G' lần lượt là hình chiếu của A, B, C, D, E, G qua phép chiếu nói trên.



Hình $\mathcal{C}$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{DG}{AB} = \frac{D'G'}{A'B'} = 1$.

B. $\frac{C'D'}{D'E'} = \frac{CD}{DE}$.

C. $D'G' = A'B'$.

D. Tất cả A, B, C đều đúng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

The định lí 2, ta thấy câu A và câu B đúng. Từ câu A đúng suy ra câu C đúng.

Câu 4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.

B. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau thì song song.

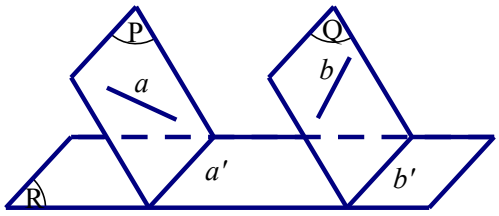
C. Hình chiếu song song của hai một hình vuông là một hình vuông.

D. Hình chiếu song song của một lục giác đều là một lục giác đều.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Dựng mặt phẳng (P) qua a và song song với b. Dựng mặt phẳng (Q) qua b và song song với a. Giả sử (P) song song với (Q). Ta chọn phương chiếu d song song với (P) và mặt phẳng chiếu (R) sao cho (R) cắt (P) và (Q) lần lượt theo hai giao tuyến a' và b'. Khi đó hình chiếu a', b' song song với nhau.



Câu 5. Qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P), hai đường thẳng chéo nhau a và b có hình chiếu là hai đường thẳng a' và b'. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. a' và b' luôn luôn cắt nhau.

B. a' và b' có thể trùng nhau.

C. a và b không thể song song.

D. a' và b' có thể cắt nhau hoặc song song với nhau.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Gọi l là phương chiếu, (α) và (β) là các mặt phẳng song song với l và lần lượt đi qua a và b. Khi đó nếu (α) và (β) cắt nhau thì a' và b' cắt nhau, nếu (α) và (β) song song thì a' và b' song song.

Câu 6. Qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P), hai đường thẳng a và b có hình chiếu là hai đường thẳng song song a' và b'. Khi đó:

A. a và b phải song song với nhau.

B. a và b phải cắt nhau.

C. a và b có thể chéo nhau hoặc song song với nhau.

D. a và b không thể song song.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Nếu $a' \parallel b'$ thì $mp(a,a') \parallel mp(b,b')$. Bởi vậy a và b có thể song song hoặc chéo nhau.

Câu 7. Cho bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D có hình chiếu song song trên mặt phẳng (P) lần lượt là bốn điểm A', B', C', D'. Những trường hợp nào sau đây không thể xảy ra?

A. A'B'C'D' là bốn đỉnh của một hình bình hành.

B. D' là trọng tâm tam giác A'B'C'.

C. D' là trung điểm cạnh A'B'.

D. Hai điểm B', C' nằm giữa hai điểm A' và D'.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Bốn điểm không đồng phẳng A', B', C', D' không thể thẳng hàng.

Câu 8. Hình chiếu song song của một hình thang ABCD không thể là hình nào dưới đây?

A. Hình bình hành. **B.** Hình tam giác cân.

C. Đoạn thẳng. **D.** Bốn điểm thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

BÀI 1. VECTO TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC PHÉP TOÁN VỀ VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Cho đoạn thẳng AB trong không gian. Nếu ta chọn điểm đầu là A, điểm cuối là B ta có một vectơ, được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.

1. Định nghĩa

Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng. Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu là A, điểm cuối B. Vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{x},\ \vec{y}$,…

Các khái niệm có liên quan đến vectơ như giá của vectơ, độ dài của vectơ, sự cùng phương, cùng hướng của hai vectơ, vectơ – không, sự bằng nhau của hai vectơ, … được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng.

2. Phép cộng và phép trừ vectơ trong không gian

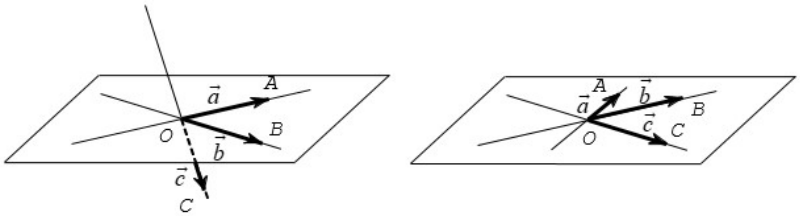
II – ĐIỀU KIỆN ĐỒNG PHẲNG CỦA BA VECTƠ

1. Khái niệm về sự đồng phẳng của ba vectơ trong không gian

Trong không gian cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đều khác vectơ-không. Nếu từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ thì có thể xả ra hai trường hợp:

- Trường hợp các đường thẳng OA,OB,OC không cùng nằm trong một mặt phẳng, khi đó ta nói rằng vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng.

- Trường hợp các đường thẳng OA,OB,OC cùng nằm trong một mặt phẳng thi ta nói ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng.



a) Ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng b) Ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng

Chú ý. Việc xác định sự đồng phẳng hoặc không đồng phẳng của ba vectơ nói trên không phụ thuộc vào việc chọn điểm O.

Từ đó ta có định nghĩa sau đây:

2. Định nghĩa

Trong không gian ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

3. Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Từ định nghĩa ba vectơ đồng phẳng và từ định lí về sự phân tích (hay biểu thị) một vectơ theo hai vectơ hai vectơ không cùng phương trong hình học phẳng chúng ta có thể chứng minh được định lí sau đây:

Định lí 1

Trong không gian cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương và vectơ $\vec{c}$. Khi đó ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m,n sao cho $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$. Ngoài ra cặp số m,n là duy nhất.

Định lí 2

Trong không gian cho ba vectơ không đồng phẳng $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$***. Khi đó với mọi vectơ*** $\vec{x}$ ***ta đều tìm được một bộ ba số*** m,n,p ***sao cho*** $\vec{x}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$***. Ngoại ra bộ ba số*** m,n,p ***là duy nhất.***

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Biểu diễn vectơ. Chứng minh 1 đẳng thức vectơ

1. Phương pháp giải

- Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b}$ và $\vec{c}$ không đồng phẳng.
  Với mọi vectơ $\vec{x}$, ta đều tìm được duy nhất một bộ số $(m;n;p)$ sao cho $\vec{x}=m.\vec{a}+n.\vec{b}+p.\vec{c}$

Một số hệ thức vectơ hay dùng

a) Hệ thức về trung điểm của đoạn thẳng I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Rightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$ (với O là một điểm bất kỳ).

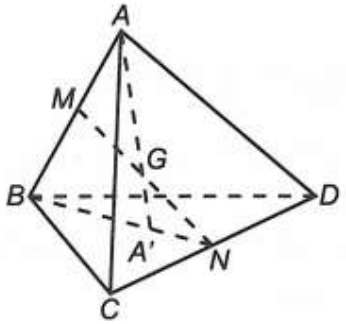
b) Hệ thức về trọng tâm của tam giác:

G là trọng tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$ (với O là một điểm bất kỳ)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ (với M là trung điểm cạnh BC).

c) Hệ thức về trọng tâm của tứ diện



G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OG}$ (với điểm O bất kỳ)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$ (với A' là trọng tâm của ΔBCD)

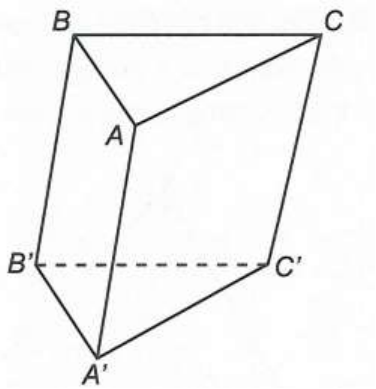
$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0}$ (với M, N là trung điểm một cặp cạnh đối diện).

2. Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{B'C},\overrightarrow{BC'}$ qua các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Hướng dẫn giải

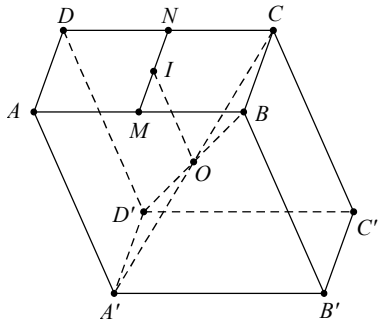


Ta có $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O. Gọi I là tâm của hình hình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'} = \vec{u}, \overrightarrow{CA'} = \vec{v}, \overrightarrow{BD'} = \vec{x}, \overrightarrow{DB'} = \vec{y}$. Phân tích $\overrightarrow{OI}$ theo $\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}, \vec{y}$

Lời giải



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Vì I là trung điểm của MN suy ra $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OI}$.

Kết hợp với $\begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{ON} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right).$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB'}\right) = -\frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}).$

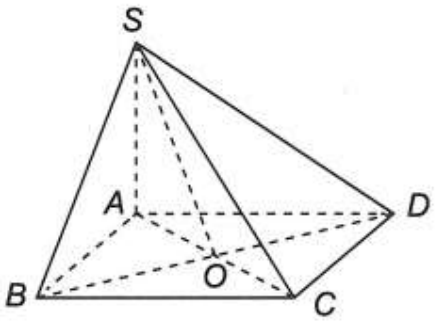
Suy ra: $\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{8}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

a) Chứng minh $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$

b) Nếu $ABCD$ là hình chữ nhật thì $\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2$

Hướng dẫn giải



a) Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$ thì O là trung điểm của mỗi đường chéo AC và BD.

Do đó $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}$ và $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$

Vậy $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$

b) Ta có $\overrightarrow{SA}^2=\left(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OA}\right)^2=\overrightarrow{SO}^2+\overrightarrow{OA}^2+2\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{OA}$,

$\overrightarrow{SC}^2=\left(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OC}\right)^2=\overrightarrow{SO}^2+\overrightarrow{OC}^2+2\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{OC}$.

Suy ra $\overrightarrow{SA}^2+\overrightarrow{SC}^2=2\overrightarrow{SO}^2+\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OC}^2+2\overrightarrow{SO}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)$

$=2\left(\overrightarrow{SO}^2+\overrightarrow{OA}^2\right)$ (vì $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OC}$ là hai vectơ đối nhau nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$)

$=2\left(SO^2+OA^2\right)$

Tương tự. $\overrightarrow{SB}^2+\overrightarrow{SD}^2=2\left(SO^2+OB^2\right)$

Mà $ABCD$ là hình chữ nhật nên $OA=OB$

Suy ra $\overrightarrow{SA}^2+\overrightarrow{SC}^2=\overrightarrow{SB}^2+\overrightarrow{SD}^2$

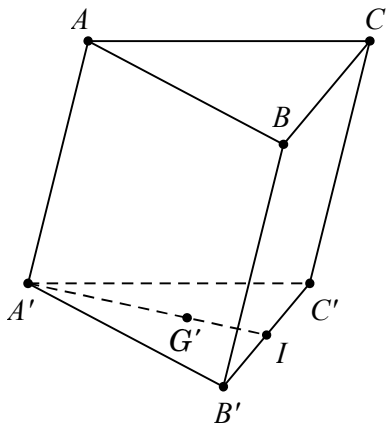
3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AA'}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Vectơ $\overrightarrow{AG'}$ bằng:

A. $\frac{1}{3}\left(\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}\right)$. **B.** $\frac{1}{3}\left(3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$. **C.** $\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}\right)$. **D.** $\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của $B'C'$.

Vì G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C' \Rightarrow \overrightarrow{A'G'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A'I}$.

Ta có $\overrightarrow{AG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G'} = \overrightarrow{AA'} + \frac{2}{3}\overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'}\right)$.

$= \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\left(3\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\left(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$.

Câu 2: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{B'C}$ theo các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

A. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

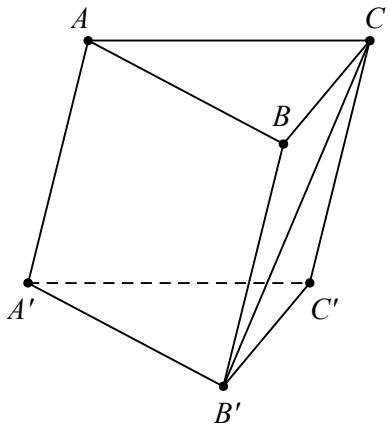
B. $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

C. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

D. $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Lời giải

Chọn D



Vì $BB'C'C$ là hình bình hành suy ra $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AA'}$

$= -\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Câu 3: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

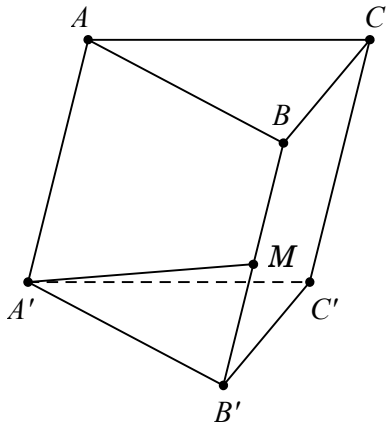
B. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$.

C. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

D. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

Lời giải

Chọn C



Vì M là trung điểm của $BB' \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = -\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

Câu 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Gọi I là trung điểm của $B'C'$, K là giao điểm của $A'I$ và $B'D'$. Mệnh đều nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}\left(4\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}\right)$.

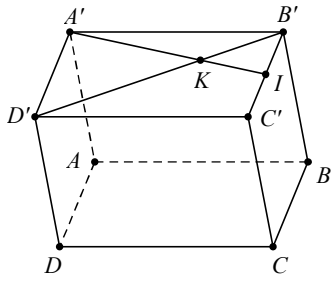
B. $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}\left(4\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}\right)$.

C. $\overrightarrow{DK} = 4\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$.

D. $\overrightarrow{DK} = 4\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$.

Lời giải

Chọn A



Vì I là trung điểm của $B'C' \Rightarrow \overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'C'}=2\overrightarrow{A'I}.$

Và K là giao điểm của $A'I, B'D'$ nên theo định lí Talet $\Rightarrow \overrightarrow{A'K}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A'I}.$

Ta có $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'K}=\overrightarrow{AA'}+\frac{2}{3}\overrightarrow{A'I}=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'C'}\right)=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}.$

Khi đó $\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AK}=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)+\overrightarrow{AK}.$

$=\vec{a}-\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}=\frac{4}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}+\vec{c}.$

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Mệnh đề nào sau đây là **sai?**

A. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right).$

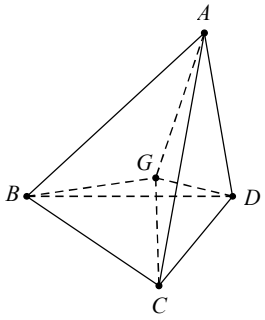
B. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right).$

C. $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right).$

D. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}.$

Lời giải

Chọn A



Vì G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ suy ra $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}.$

Khi đó $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}.4\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DG}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)\longrightarrow \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{AO}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right).$

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

$=\overrightarrow{AO}+\frac{1}{4}\left(4\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right).$

Vậy $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$ nên mệnh đề $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$ sai.

Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

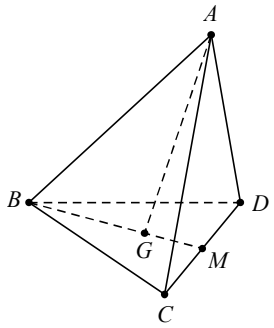
B. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

C. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

D. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của CD suy ra $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$.

Ta có $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)$.

$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đẳng thức nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right)$.

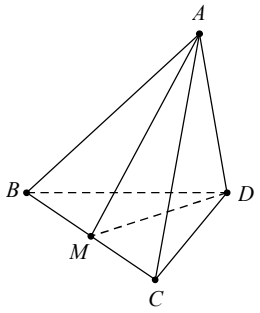
B. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

C. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}\right)$.

D. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}\right)$.

Lời giải

Chọn A



Vì M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Ta có $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$.

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right)$.

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}+\vec{b}\right)$.

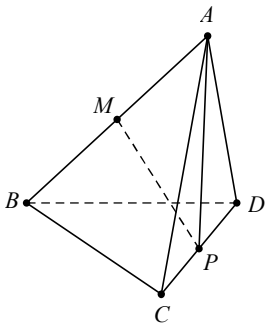
B. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{d}+\vec{b}-\vec{c}\right)$.

C. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{b}-\vec{d}\right)$.

D. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}\right)$.

Lời giải

Chọn D



Vì M, P lần lượt là trung điểm của $AB, CD \Rightarrow \begin{cases}2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AP}\end{cases}$.

Ta có $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}$.

Câu 9: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

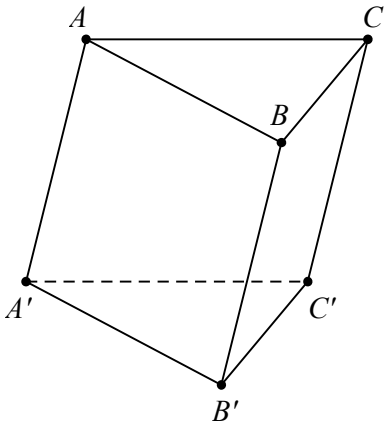
A. $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$.

B. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.

C. $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}.$ **D.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}.$

Lời giải

Chọn C



Ta có $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\vec{d}=\vec{c}-\vec{b}\Leftrightarrow\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}.$

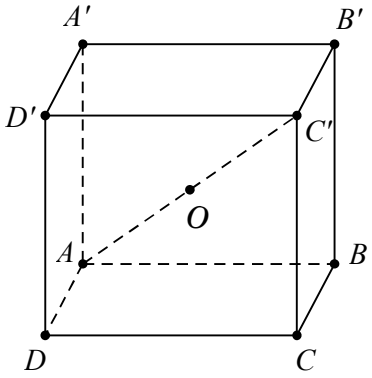
Câu 10: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'.$ Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right).$ **B.** $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right).$

C. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right).$ **D.** $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right).$

Lời giải

Chọn B



Theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}.$

Mà O là trung điểm của AC' suy ra $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right).$

Câu 11: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm $O.$ Khẳng định nào dưới đây là **sai?**

A. $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

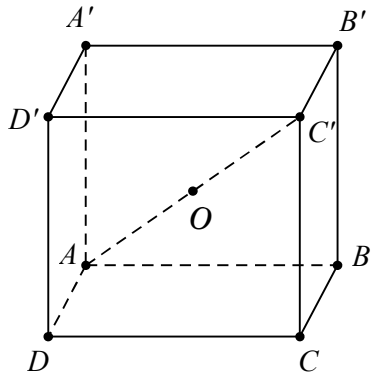
B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}$.

D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'O}+\overrightarrow{OC'}$.

Lời giải

Chọn C



Dựa vào đáp án, ta thấy rằng:

□ **A đúng**, vì theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

□ **B đúng**, vì $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}\\ \overrightarrow{BC'}=-\overrightarrow{D'A}\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$.

□ **C sai**, vì $\begin{cases}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB'}\\ \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AD'}\end{cases}$ mà $\overrightarrow{AB'}\neq\overrightarrow{AD'}\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}\neq\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}$.

□ **D đúng**, vì $\begin{cases}(1):\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}\\ (2):\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'O}+\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{AC'}\end{cases}\Rightarrow(1)=(2)$.

Câu 12: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_1A_1}$.

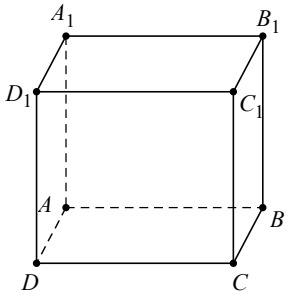
B. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{DC}$.

C. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BD_1}$.

D. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn D



Dựa vào đáp án, ta thấy rằng:

☐ **A đúng**, vì $\begin{cases}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}\\ \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B_1A_1}\end{cases}$ suy ra $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_1A_1}.$

☐ **B đúng**, vì $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}.$

☐ **C đúng**, vì $\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}$ (quy tắc hình hộp).

☐ **D sai**, vì $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{BD_1}\neq\overrightarrow{BC}.$

Câu 13: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1.$ Gọi M là trung điểm của $AD.$ Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}.$

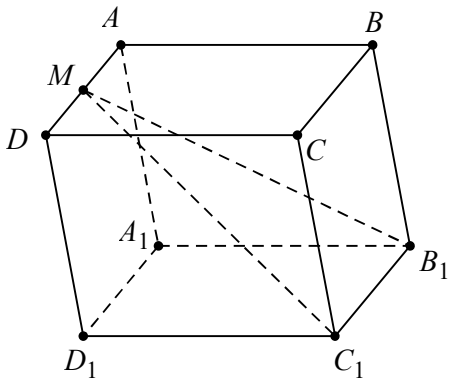
B. $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}.$

C. $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}.$

D. $\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=2\overrightarrow{B_1D}.$

Lời giải

Chọn B



Dựa vào đáp án, ta thấy rằng:

☐ **A sai**, vì $\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}\right)=\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1D_1}\right).$

$=\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}\right)=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1}.$

☐ **B đúng**, vì $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C_1A_1}+\overrightarrow{C_1D_1}\right).$

$=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C_1B_1}+\overrightarrow{C_1D_1}+\overrightarrow{C_1D_1}\right)=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}.$

☐ **C sai**, vì $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$ (từ B).

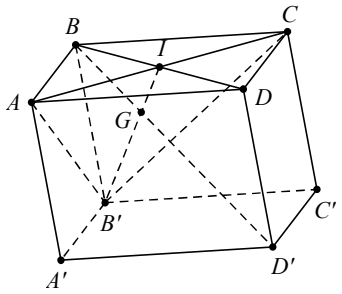
☐ **D sai**, vì $\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{BD_1}.$

Câu 14: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'C$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AC'}=3\overrightarrow{AG}.$ **B.** $\overrightarrow{AC'}=4\overrightarrow{AG}.$ **C.** $\overrightarrow{BD'}=4\overrightarrow{BG}.$ **D.** $\overrightarrow{BD'}=3\overrightarrow{BG}.$

Lời giải

Chọn D



Cách 1. Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD \Rightarrow I$ là trung điểm của BD.

Ta có $\Delta BIG \sim \Delta D'B'G \Rightarrow \frac{BG}{D'G}=\frac{BI}{D'B'}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{BG}{BD'}=\frac{1}{3}\Rightarrow\overrightarrow{BD'}=3\overrightarrow{BG}.$

Cách 2. Theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD'}.$

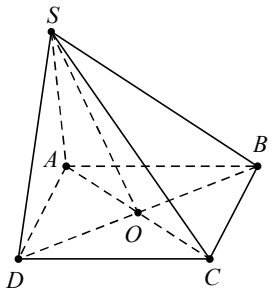
Do G là trọng tâm của tam giác $AB'C$ suy ra $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=3\overrightarrow{BG}\Leftrightarrow\overrightarrow{BD'}=3\overrightarrow{BG}.$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a},\overrightarrow{SB}=\vec{b},\ \overrightarrow{SC}=\vec{c},\overrightarrow{SD}=\vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}.$ **B.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}.$ **C.** $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}.$ **D.** $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}.$

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$.

Vì O là trung điểm của AC suy ra $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{SO}=\vec{a}+\vec{c}$ (1).

Và O là trung điểm của BD suy ra $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{SO}=\vec{b}+\vec{d}$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$.

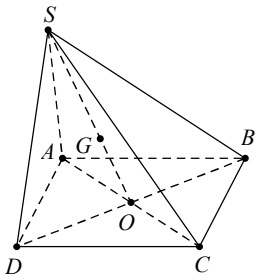
Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. G, S, O không thẳng hàng. **B.** $\overrightarrow{GS}=4\overrightarrow{OG}$.

C. $\overrightarrow{GS}=5\overrightarrow{OG}$. **D.** $\overrightarrow{GS}=3\overrightarrow{OG}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$ suy ra $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GS}+4\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

$\Leftrightarrow\overrightarrow{GS}+4\overrightarrow{GO}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GS}=4\overrightarrow{OG}\Rightarrow$ ba điểm G, S, O thẳng hàng.

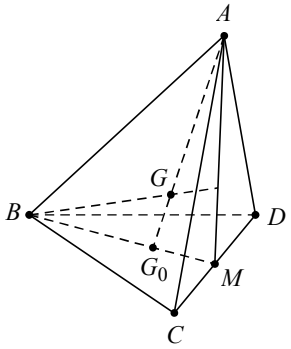
Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_0 là giao điểm của GA và mặt phẳng (BCD). Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{G_0G}$. **B.** $\overrightarrow{GA}=4\overrightarrow{G_0G}$. **C.** $\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{G_0G}$. **D.** $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{G_0G}$.

Lời giải

Chọn C

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133



Vì G_0 là giao điểm của đường thẳng AG với mặt phẳng (BCD).

Suy ra G_0 là trọng tâm của tam giác $BCD \Rightarrow \overrightarrow{G_0B}+\overrightarrow{G_0C}+\overrightarrow{G_0D}=\vec{0}$.

Theo bài ra, ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GG_0}+\underbrace{\overrightarrow{G_0B}+\overrightarrow{G_0C}+\overrightarrow{G_0D}}_{\vec{0}}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GG_0}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{G_0G}$.

Câu 18: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của MN. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$.

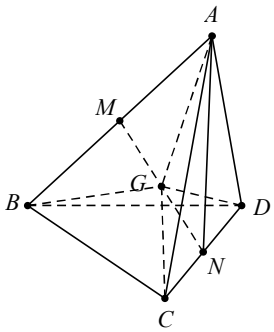
B. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GD}$.

C. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

D. $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0}$.

Lời giải

Chọn B



Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD suy ra $\begin{cases}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}\\ \overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN}\end{cases}$.

Mà G là trung điểm của $MN \Rightarrow \overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Khi đó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)=4\overrightarrow{MG}$.

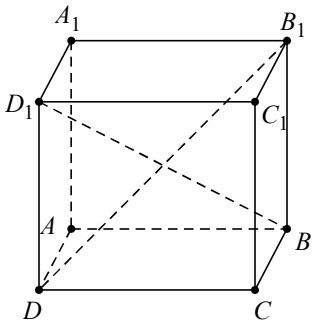
Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Câu 19: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=k\overrightarrow{AC_1}$.

A. $k=4$. **B.** $k=1$. **C.** $k=0$. **D.** $k=2$.

Lời giải

Chọn B



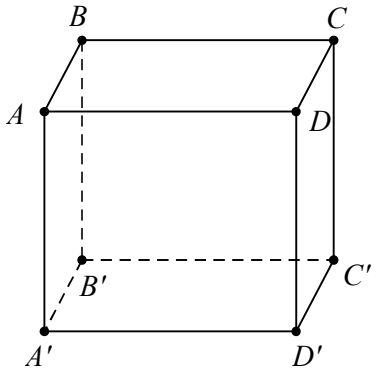
Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC_1}\Rightarrow k=1$.

Câu 20: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vectơ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+k\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}\right)=\vec{0}$.

A. $k=0$. **B.** $k=1$. **C.** $k=4$. **D.** $k=2$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD'}=\overrightarrow{AD'}$ và $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC'}=\overrightarrow{C'B}=\overrightarrow{D'A}$.

Suy ra $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+k\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}\right)=\overrightarrow{AD'}+k\overrightarrow{D'A}=\vec{0}\Leftrightarrow(k-1)\overrightarrow{D'A}=\vec{0}\Leftrightarrow k=1$.

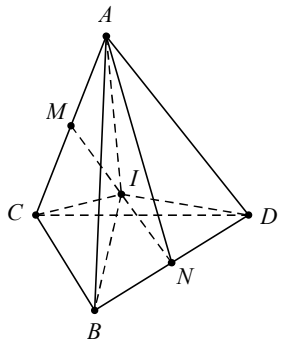
Câu 21: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm của đoạn MN. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vectơ $\overrightarrow{IA}+(2k-1)\overrightarrow{IB}+k\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

A. $k=2$. **B.** $k=4$. **C.** $k=1$. **D.** $k=0$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Lời giải

Chọn C



Vì M, N lần lượt là trung điểm của $AC, BD \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{IM} \\ \overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{IN} \end{cases}$.

Mặt khác $\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}=\vec{0}$ (I là trung điểm của MN) $\Rightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA}+(2k-1)\overrightarrow{IB}+k\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\underbrace{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}}_{\vec{0}}+(2k-2)\overrightarrow{IB}+(k-1)\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

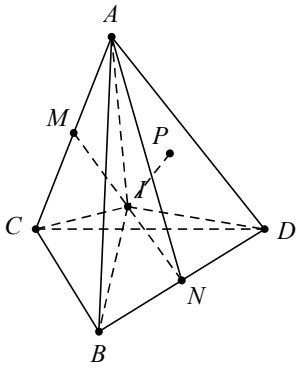
$\Leftrightarrow (k-1)\left(2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)=\vec{0}$ mà $2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\neq\vec{0}$ suy ra $k-1=0\Leftrightarrow k=1$.

Câu 22: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm của đoạn MN và P là một điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vectơ $\overrightarrow{PI}=k\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right)$.

A. $k=4$. **B.** $k=\frac{1}{2}$. **C.** $k=\frac{1}{4}$. **D.** $k=2$.

Lời giải

Chọn C



Vì M, N lần lượt là trung điểm của $AC, BD \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{IM} \\ \overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{IN} \end{cases}$.

Mặt khác $\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}=\vec{0}$ (I là trung điểm của MN) $\Rightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

Khi đó $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{PI}+\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)=4\overrightarrow{PI}$

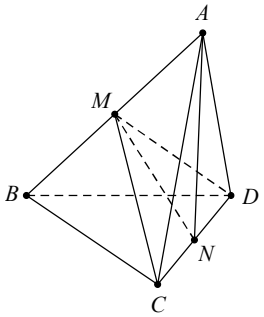
Mà $\overrightarrow{PI}=k\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right)$ nên suy ra $4k=1\Leftrightarrow k=\dfrac{1}{4}$.

Câu 23: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vecto $\overrightarrow{MN}=k\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$.

A. $k=\dfrac{1}{2}$. **B.** $k=\dfrac{1}{3}$. **C.** $k=3$. **D.** $k=2$.

Lời giải

Chọn A



Ta có N là trung điểm của $CD\Rightarrow \overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MN}$ (1).

Và M là trung điểm của AB suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ (2).

Từ (1),(2) suy ra $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$.

Kết hợp giả thiết $\overrightarrow{MN}=k\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)\Rightarrow k=\dfrac{1}{2}$.

Dạng 2. Chứng minh 3 vecto đồng phẳng, chứng minh 3 điểm thẳng hàng

1. Phương pháp giải

- Chứng minh ba vecto đồng phẳng, sử dụng một trong các cách sau.

+ Chứng minh ba vecto có giá cùng song song với một mặt phẳng.

+ Chứng minh hai vecto có giá cùng song song với mặt phẳng chứa giá của vecto còn lại.

+ Biến đổi vecto để được đẳng thức dạng $\vec{c}=m.\vec{a}+n.\vec{b}$

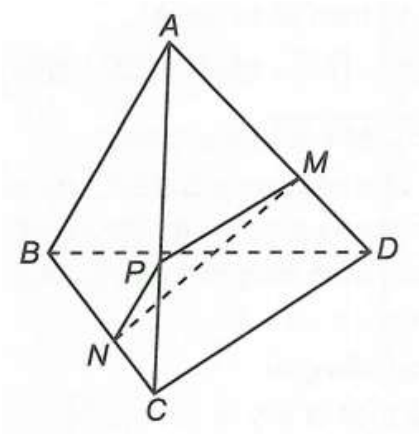
- Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng

$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}: \overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : k.\overrightarrow{MA} + (1-k).\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$

2. Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là các điểm trên các cạnh AD và BC sao cho $AM = 2MD, BC = 3NC$. Chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.



Hướng dẫn giải

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \\ 2\overrightarrow{MN} = 2\left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}\right) \end{cases}$

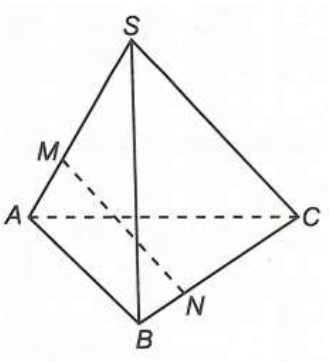
Cộng vế theo vế của hai đẳng thức này ta được $3\overrightarrow{MN} = \left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MD}\right) + \left(\overrightarrow{BN} + 2\overrightarrow{CN}\right) + \left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DC}\right)$

Do $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MD} = \vec{0}, \overrightarrow{BN} + 2\overrightarrow{CN} = \vec{0}$ nên $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

Vậy $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy điểm M và N sao cho $\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{NC} = -2\overrightarrow{NB}$. Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng.

Hướng dẫn giải



Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{MS} + 2\overrightarrow{MA} = \vec{0}; \overrightarrow{CN} + 2\overrightarrow{BN} = \vec{0}$

Lại có $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CN} \\ 2\overrightarrow{MN} = 2\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}\right) \end{cases}$

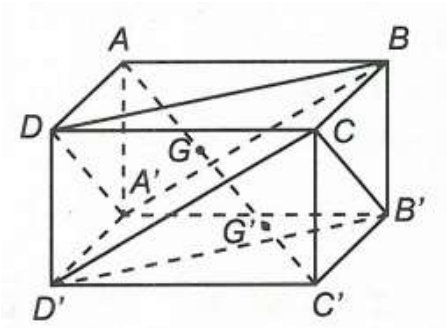
Cộng vế theo vế ta được

$3\overrightarrow{MN} = \left(\overrightarrow{MS} + 2\overrightarrow{MA}\right) + \left(\overrightarrow{CN} + 2\overrightarrow{BN}\right) + \overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{AB}$

Vậy $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng.

Ví dụ 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của các tam giác $BDA', CB'D'$. Chứng minh các điểm A, G, G', C' thẳng hàng.

Hướng dẫn giải



Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$

Ta có $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ (quy tắc hình hộp).

Theo quy tắc trọng tâm, ta có $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right) = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$

$\overrightarrow{AG'} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}\right) = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{a} + \vec{c} + \vec{b} + \vec{c}\right) = \frac{2}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$

Vậy $\overrightarrow{AC'} = 3\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG'}$ nên các điểm A, G, G', C' thẳng hàng.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Ba vectơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng.

B. Hai vectơ $\vec{x}, \vec{a}$ cùng phương.

C. Hai vectơ $\vec{x}, \vec{b}$ cùng phương.

D. Ba vectơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đôi một cùng phương.

Lời giải

Chọn A

Giả sử, ba vectơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng, khi đó $\vec{x} = m.\vec{y} + n.\vec{z}$.

Ta có $\begin{cases} m.\vec{y} = m.\vec{a} - m.\vec{b} - m.\vec{c} \\ n.\vec{z} = -3n.\vec{b} - 2n.\vec{c} \end{cases} \Rightarrow m.\vec{y} + n.\vec{z} = m.\vec{a} - (m+3n).\vec{b} - (m+2n).\vec{c}.$

Khi đó $2\vec{a} + \vec{b} = m.\vec{a} - (m+3n).\vec{b} - (m+2n).\vec{c} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m+3n = -1 \\ m+2n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = -1 \end{cases}.$

Vậy ba vectơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng.

Câu 2: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Ba vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c},\ \vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 6\vec{c},\ \vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 6\vec{c}$ đồng phẳng.

B. Ba vectơ $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c},\ \vec{y} = 3\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c},\ \vec{z} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 3\vec{c}$ đồng phẳng.

C. Ba vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c},\ \vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c},\ \vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 3\vec{c}$ đồng phẳng.

D. Ba vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c},\ \vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c},\ \vec{z} = -\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn B

Ba vectơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $\exists\, m, n : \vec{x} = m.\vec{y} + n.\vec{z}.$

Với $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c},\ \vec{y} = 3\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c},\ \vec{z} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 3\vec{c}.$

Suy ra $\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c} = m\left(3\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}\right) + n\left(2\vec{a} - 3\vec{b} - 3\vec{c}\right).$

$= (3m+2n)\vec{a} - 3(m+n)\vec{b} + (2m-3n)\vec{c} \Rightarrow \begin{cases} 3m+2n = 1 \\ -3m-3n = -2 \\ 2m-3n = 4 \end{cases} \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

Vậy ba vectơ kể trên không đồng phẳng.

Chú ý. Bạn đọc làm tương tự với các **A, C, D** để thấy được các vectơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng

Câu 3: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Điều kiện nào dưới đây khẳng định ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng?

A. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m+n+p = 0$ và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}.$

B. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m+n+p \neq 0$ và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}.$

C. Tồn tại ba số thực m, n, p sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}.$

D. Giá của $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng quy.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đáp án, ta thấy rằng:

□ Với $m+n+p=0 \Rightarrow m=n=p=0$ suy ra $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$ nên chưa kết luận được ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng.

□ Với $m+n+p\neq 0$ suy ra tồn tại ít nhất một số khác 0.

Giả sử $m\neq 0,$ ta có $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}\Leftrightarrow \vec{a}=-\frac{n}{m}.\vec{b}-\frac{p}{m}.\vec{c}.$

Suy ra tồn tại $n,\ p$ để ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng.

Câu 4: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BD_1},\overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng.

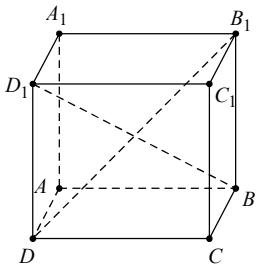
B. $\overrightarrow{CD_1},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{A_1B_1}$ đồng phẳng.

C. $\overrightarrow{CD_1},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng.

D. $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{C_1A}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{CD_1}$ suy ra $\overrightarrow{CD_1},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng.

Câu 5: Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi I là tâm của hình bình hành $ABEF$ và K là tâm của hình bình hành $BCGF$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AK},\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

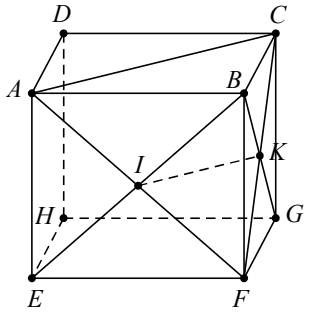
B. $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{IK},\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

C. $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{EK},\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

D. $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{IK},\overrightarrow{GC}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn B



Vì I, K lần lượt là trung điểm của AF và CF.

Suy ra IK là đường trung bình của tam giác $AFC \Rightarrow IK // AC \Rightarrow IK // (ABCD)$.

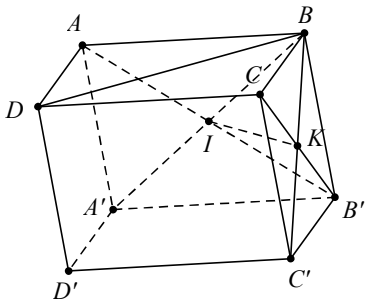
Mà $GF // (ABCD)$ và $BD \subset (ABCD)$ suy ra ba vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng

Câu 6: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I, K lần lượt là tâm của hình bình hành $ABB'A'$ và $BCC'B'$. Khẳng định nào dưới đây là **sai?**

A. $k = 4$. **B.** $k = 1$. **C.** $k = 0$. **D.** $k = 2$.

Lời giải

Chọn B



Dựa vào đáp án, ta thấy rằng:

□ **A đúng**, vì $\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{AC}$ cùng thuộc mặt phẳng $(B'AC)$.

□ **B đúng**, vì $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{B'K} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$.

□ **C sai**, vì $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{B'K}$

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC_1} \Rightarrow k = 1$..

Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định **sai?**

A. Ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

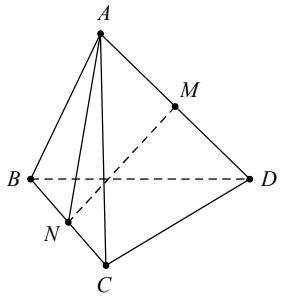
B. Ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

C. Ba vectơ $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

D. Ba vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn C



Vì M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC suy ra: $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)$ và $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}\right)$.

Khi đó, dựa vào đáp án, ta thấy rằng:

□ **A đúng**, vì $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)\Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

□ **B đúng**, vì MN không nằm trong mặt phẳng (ABC).

□ **C sai**, tương tự ta thấy AN không nằm trong mặt phẳng (MNC).

□ **D đúng**, vì $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}\right)\Rightarrow \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy điểm M, N sao cho $AM=3MD, BN=3NC$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AD và BC. Khẳng định nào dưới đây là **sai?**

A. Ba vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

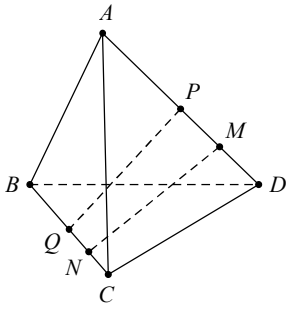
B. Ba vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.

C. Ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.

D. Ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn A



Theo bài ra, ta có M, N lần lượt là trung điểm của PD, QC.

Khi đó, dựa vào đáp án, ta thấy rằng:

☐ **A sai**, vì $\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BN}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}\\ 3\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{MD}+3\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{BN}\end{cases}$

Suy ra $4\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\Rightarrow\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

☐ **B đúng**, vì $\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}\end{cases}\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{DC}$

Suy ra $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{DC}\right)\Rightarrow\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

☐ **C đúng**, vì với cách biểu diễn $\overrightarrow{PQ}$ tương tự như trên, ta có $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)$.

☐ **D đúng**, vì biểu diễn giống **A**, ta được $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N xác định bởi $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ (1); $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DB}+x\overrightarrow{DC}$ (2). Tìm x để các đường thẳng AD, BC, MN cùng song song với một mặt phẳng.

A. $x=-1$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn B

Yêu cầu bài toán tương đương với tìm x để ba vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ đồng phẳng.

Hệ thức $(1)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-3\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}$.

Hệ thức $(2)\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+x\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}=(1+x)\overrightarrow{AB}-x\overrightarrow{AD}+x\overrightarrow{BC}$.

Từ (1) và (2), suy ra $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=(2+x)\overrightarrow{AB}-x\overrightarrow{AD}+(x+3)\overrightarrow{BC}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

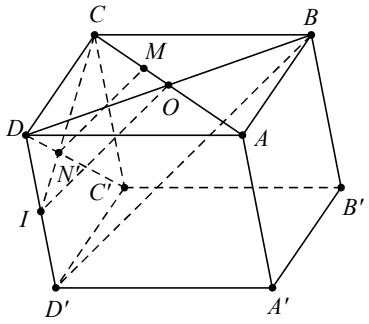
Vậy ba vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ đồng phẳng khi $2+x=0 \Leftrightarrow x=-2$.

Câu 10: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho $AC=3MC$. Lấy N trên đoạn $C'D$ sao cho $C'N=xC'D$. Với giá trị nào của x thì $MN \parallel BD'$.

A. $x=\frac{2}{3}$. **B.** $x=\frac{1}{3}$. **C.** $x=\frac{1}{4}$. **D.** $x=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm của hình hình hành $ABCD$ và I là trung điểm của DD'.

Nối $C'D$ cắt CI tại $N' \Rightarrow N'$ là trọng tâm của tam giác CDD'.

Ta có OI là đường trung bình của tam giác BDD' suy ra $OI \parallel BD'$.

Mặt khác $\frac{CN'}{CI}=\frac{CM}{CO}$ nên $MN' \parallel OI$ suy ra $MN' \parallel BD'$.

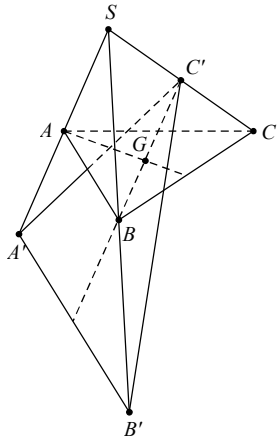
Theo bài ra, ta có $MN \parallel BD' \longrightarrow N \equiv N' \Rightarrow C'N=\frac{2}{3}C'D \Rightarrow x=\frac{2}{3}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho $\frac{SA}{SA'}=a, \frac{SB}{SB'}=b, \frac{SC}{SC'}=c,$ trong đó a, b, c là các số thay đổi. Để mặt phẳng $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm của tam giác ABC thì

A. $a+b+c=3$. **B.** $a+b+c=4$. **C.** $a+b+c=2$. **D.** $a+b+c=1$.

Lời giải

Chọn A



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC suy ra $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Khi đó $3\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\vec{0}$ mà $\overrightarrow{SA}=a.\overrightarrow{SA'}$, $\overrightarrow{SB}=b.\overrightarrow{SB'}$, $\overrightarrow{SC}=c.\overrightarrow{SC'}$.

Suy ra $3\overrightarrow{SG}=a.\overrightarrow{SA'}+b.\overrightarrow{SB'}+c.\overrightarrow{SC'}\Leftrightarrow\overrightarrow{SG}=\frac{a}{3}.\overrightarrow{SA'}+\frac{b}{3}.\overrightarrow{SB'}+\frac{c}{3}.\overrightarrow{SC'}$.

Vì $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm tam giác ABC suy ra $\overrightarrow{GA'}$, $\overrightarrow{GB'}$, $\overrightarrow{GC'}$ đồng phẳng.

Do đó, tồn tại ba số l, m, n sao cho $(l^2+m^2+n^2\neq 0)$ và $l.\overrightarrow{GA'}+m.\overrightarrow{GB'}+n.\overrightarrow{GC'}=\vec{0}$.

$\Leftrightarrow l.\left(\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{SA'}\right)+m.\left(\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{SB'}\right)+n.\left(\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{SB'}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow(l+m+n)\overrightarrow{SG}=l.\overrightarrow{SA'}+m.\overrightarrow{SB'}+n.\overrightarrow{SC'}$.

$\Leftrightarrow\overrightarrow{SG}=\frac{l}{l+m+n}.\overrightarrow{SA'}+\frac{m}{l+m+n}.\overrightarrow{SB'}+\frac{n}{l+m+n}.\overrightarrow{SC'}=\frac{a}{3}.\overrightarrow{SA'}+\frac{b}{3}.\overrightarrow{SB'}+\frac{c}{3}.\overrightarrow{SC'}$.

Suy ra $\frac{a}{3}+\frac{b}{3}+\frac{c}{3}=\frac{l}{l+m+n}+\frac{m}{l+m+n}+\frac{n}{l+m+n}=1\Rightarrow a+b+c=3$.

Dạng 3. Tìm điểm thỏa mãn đẳng thức vectơ

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Điểm M xác định bởi đẳng thức vectơ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng G.

B. M thuộc tia AG và $AM=3AG$.

C. G là trung điểm AM.

D. M là trung điểm AG.

Lời giải

Chọn B

Do G là trọng tâm tam giác BCD nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.

Kết hợp giả thiết, suy ra $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AG}$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Điểm N xác định bởi $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. N là trung điểm BD.

B. N là đỉnh thứ tư của hình bình hành $BCDN$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

C. N là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CDBN$.

C. N trùng với A.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{DC}$.

Đẳng thức chứng tỏ N là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CDBN$.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Ta định nghĩa "G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$". Khẳng định nào sau đây **sai?**

A. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AB và CD.

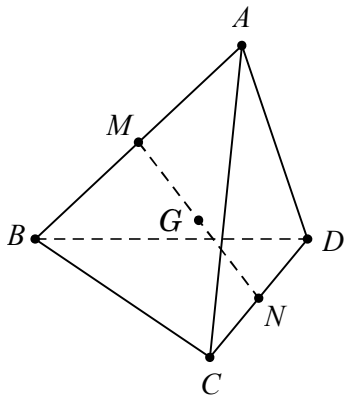
B. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AC và BD.

C. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AD và BC.

D. Cả A, B, C đều đúng.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}\right)+\left(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GJ}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}=\vec{0}$

$\longrightarrow G$ là trung điểm IJ . Do đó A đúng.

Tương tự, **B** và C đều đúng.

Vậy cả A, B, C đều đúng.

Câu 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Điểm M được xác định bởi đẳng thức vectơ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{MD'}=\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M là tâm của mặt đáy $ABCD$.

B. M là tâm của mặt đáy $A'B'C'D'$.

C. M là trung điểm của đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.

D. Tập hợp điểm M là đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.

Lời giải

Chọn C

Gọi $O = AC \cap BD$ và $O' = A'C' \cap B'D'$.

Khi đó $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{O'A'}+\overrightarrow{O'B'}+\overrightarrow{O'C'}+\overrightarrow{O'D'}=\vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}\right)$

$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+4\overrightarrow{MO}=\vec{0}+4\overrightarrow{MO}=4\overrightarrow{MO}$.

Tương tự, ta cũng có $\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{MD'}=4\overrightarrow{MO'}$.

Từ đó suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{MD'}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MO}+4\overrightarrow{MO'}=\vec{0}\Leftrightarrow 4\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MO'}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MO'}=\vec{0}$.

Vậy điểm M cần tìm là trung điểm của OO'.

Câu 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Điểm M xác định bởi đẳng thức vectơ $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm BB'.

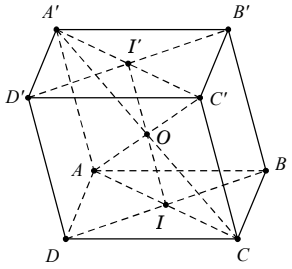
B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.

C. M là trung điểm CC'.

D. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I, I' lần lượt là tâm các mặt đáy $ABCD$, $A'B'C'D'$. Suy ra O là trung điểm của II'.

Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Theo giả thiết ta có $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{IB}$.

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên từ đẳng thức $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{IB}$ suy ra M là trung điểm BB'.

BÀI 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

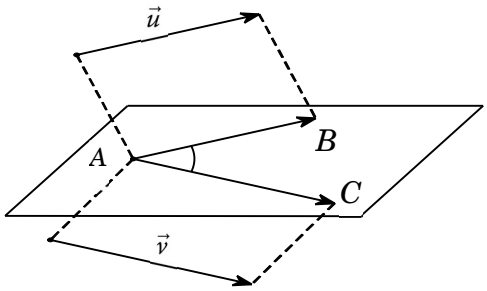
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

1. Góc giữa hai vectơ trong không gian

Định nghĩa

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB}=\vec{u},\ \overrightarrow{AC}=\vec{v}$. Khi đó ta gọi góc $\widehat{BAC}$ $\left(0^\circ\le\widehat{BAC}\le 180^\circ\right)$ là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ trong không gian, kí hiệu là $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$.



2. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

Định nghĩa

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ đều khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu là $\vec{u}.\vec{v}$, được xác định bởi công thức:

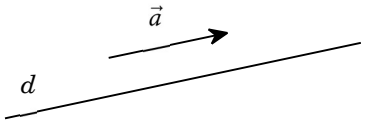
$$\boxed{\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)}.$$

Trong trường hợp $\vec{u}=\vec{0}$ hoặc $\vec{v}=\vec{0}$, ta quy ước $\vec{u}.\vec{v}=0$.

II – VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG

1. Định nghĩa

Vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của vectơ $\vec{a}$ song song hoặc trùng với đường thẳng d.



2. Nhận xét

a) Nếu $\vec{a}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d thì vectơ $k\vec{a}$ với $k\neq 0$ cũng là vectơ chỉ phương của d.

b) Một đường thẳng trong không gian hoàn toàn xác định nếu biết một điểm A thuộc d và một vectơ chỉ phương $\vec{a}$ của nó.

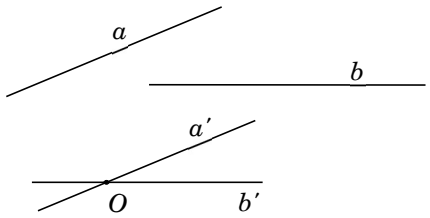
Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

c) Hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi chúng là hai đường thẳng phân biệt và có hai vectơ chỉ phương cùng phương.

III – GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

1. Định nghĩa

Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b.



2. Nhận xét

a) Để xác định góc giữa hai đường thẳng a và b ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng đó rồi vẽ một đường thẳng qua O và song song với đường thẳng còn lại.

b) Nếu $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng a và $\vec{v}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng b và $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\alpha$ thì góc giữa hai đường thẳng a và b bằng α nếu $0°\le\alpha\le 90°$ và bằng $180°-\alpha$ nếu $90°<\alpha\le 180°$. Nếu a và b song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng $0°$.

IV – HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

1. Định nghĩa

Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng $90°$.

Người ta kí hiệu hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau là $a\perp b$.

2. Nhận xét

a) Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của hai đường thẳng a và b thì: $a\perp b\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0$.

b) Cho hai đường thẳng song song. Nếu một đường thẳng vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

c) Hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tính góc giữa hai đường thẳng

1. Phương pháp

Cách 1: (Theo phương pháp hình học)

- Lấy điểm O tùy ý (ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng), qua đó vẽ các đường thẳng lần lượt song song (hoặc trùng) với hai đường thẳng đã cho.
- Tính một góc trong các góc được tạo bởi giữa hai đường thẳng cắt nhau tại O.
- Nếu góc đó nhọn thì đó là góc cần tìm, nếu góc đó tù thì góc cần tính là góc bù với góc đã tính.

Cách 2: (Theo phương pháp vectơ)

- Tìm $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 tính $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$
- Khi đó $\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{|\overrightarrow{u_1}|.|\overrightarrow{u_2}|}$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho tứ diện đều ABCD. Gọi I là trung điểm của BC. Tính côsin của góc tạo bởi hai đường thẳng DI và AB.

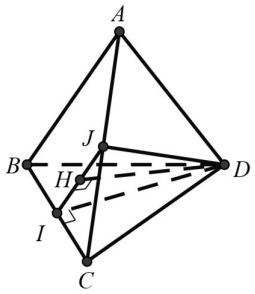
Hướng dẫn giải

Đặt cạnh của tứ diện có độ dài là a.

Gọi J là trung điểm của AC.

Ta có: $IJ//AB\Rightarrow\left(AB,DI\right)=\left(IJ,DI\right)=\widehat{DIJ}$

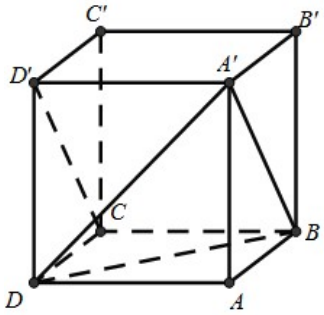
Kẻ $HD\perp IJ,\left(H\in IJ\right)$



Ta có: $\cos\widehat{DIJ}=\dfrac{IH}{DI}=\dfrac{\frac{a}{4}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Ví dụ 2: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Xác định Góc tạo bởi hai đường thẳng BD và CD'.

Hướng dẫn giải



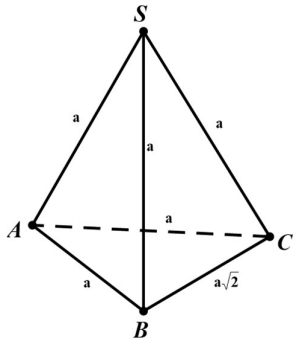
Do $BA'//CD'$ nên góc giữa BD và CD' là góc giữa BD và BA'

Mà $\Delta A'BD$ là tam giác đều nên góc giữa BD và BA' là 60°.

Vậy góc giữa BD và CD' là 60°.

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABC có $SA=SB=SC=AC=AB=a$ và $BC=a\sqrt{2}$. Xác định góc giữa hai đường thẳng CS và AB.

Hướng dẫn giải



Trước hết ta tính góc giữa hai vecto $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$

Từ giả thiết suy ra ΔABC vuông cân tại A

Ta có:

$$\cos\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{SC}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{SC}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB}+0}{\left|\overrightarrow{SC}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{a.a.\cos 120^\circ}{a.a}=\frac{-\frac{a^2}{2}}{a^2}=-\frac{1}{2}$$

Suy ra: $\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{AB}\right)=120^\circ.$

Vậy góc giữa hai đường thẳng SC và AB bằng $60^\circ.$

Ví dụ 4: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AD. Cho biết $AB=CD=2a$ và $MN=a\sqrt{3}$. Xác định góc tạo bởi hai đường thẳng AB và CD

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm của AC ta có:

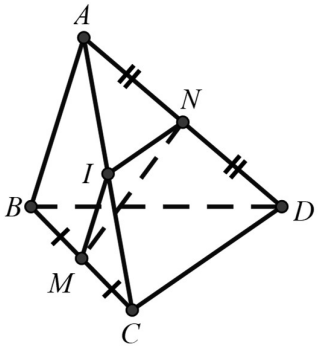
$$IM=IN=a$$

Áp dụng định lí côsin trong ΔIMN

$$MN^2=IM^2+IN^2-2IM.IN\cos\widehat{MIN}$$

$$3a^2=a^2+a^2-2a.a\cos\widehat{MIN}$$

$$\Rightarrow\cos\widehat{MIN}=-\frac{1}{2}$$



Suy ra: $\widehat{MIN}=120^\circ$

Vậy: $\left(\widehat{AB,CD}\right)=\left(\widehat{IM,IN}\right)=180^\circ-120^\circ=60^\circ.$

Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc trong không gian

1. Phương pháp

Cách 1: Dùng định nghĩa: $a\perp b\Leftrightarrow\left(\widehat{a,b}\right)=90^0$

Cách 2: Dùng định lí: $\begin{cases}b//c\\a\perp c\end{cases}\Rightarrow a\perp b$

Cách 3: Sử dụng tích vô hướng: $a \perp b \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABC có SA=SB=SC và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Chứng minh rằng: $SA \perp BC, SB \perp AC, SC \perp AB$

Hướng dẫn

Chứng minh: $SA \perp BC$

Xét: $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA}.\left(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}\right) = \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$

$= \left|\overrightarrow{SA}\right|.\left|\overrightarrow{SC}\right|\cos\widehat{ASC} - \left|\overrightarrow{SA}\right|.\left|\overrightarrow{SB}\right|\cos\widehat{ASB} = 0 \Rightarrow SA \perp BC$

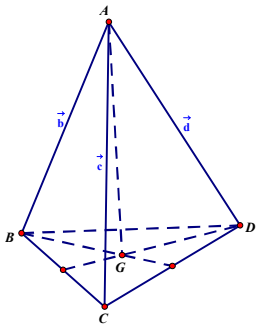
Ví dụ 2. Cho tứ diện ABCD đều. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD.

a) Chứng minh $AG \perp CD$

b) Gọi M là trung điểm của CD. Tính góc giữa AC và BM.

Hướng dẫn

a) Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}; \overrightarrow{AC} = \vec{c}; \overrightarrow{AD} = \vec{d}$



Chứng minh : $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{CD} = 0$

Với

$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{3}\left(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}\right)$

$\overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) = \left(\vec{d} - \vec{c}\right)$

Từ đó: $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{CD} = 0$

b) Ta có:

$\cos\left(\widehat{AC, BM}\right) = \frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BM}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{BM}\right|}$

Với

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \frac{a^2}{4}$

$\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{BM}\right| = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c khi b song song với c (hoặc b trùng với c).

B. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì b song song với c.

C. Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn.

D. Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai véctơ chỉ phương của hai đường thẳng đó.

Lời giải

Chọn A

A đúng theo định nghĩa.

B sai vì có thể b và c chéo nhau.

C sai vì có thể là góc vuông.

D sai. Nếu góc giữa hai vectơ chỉ phương là α với $0^0 \le \alpha \le 90^0$ thì góc giữa hai đường thẳng bằng α, nếu góc giữa hai vectơ chỉ phương là α với $90^0 < \alpha \le 180^0$ thì góc giữa hai đường thẳng bằng $180^0 - \alpha$.

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.

C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

Lời giải

Chọn D

Câu 3: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Nếu $b \perp (P)$ thì $b // a$.

B. Nếu $b // (P)$ thì $b \perp a$.

C. Nếu $b // a$ thì $b \perp (P)$.

D. Nếu $b \perp a$ thì $b // (P)$.

Lời giải

Chọn D

Vì b có thể nằm trong mặt phẳng (P).

Câu 4: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$?

A. 45^0.

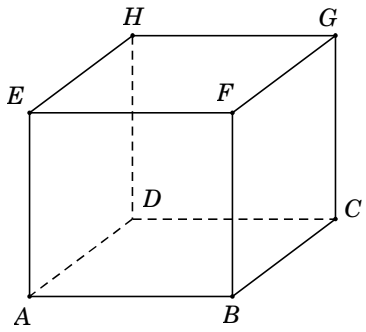
B. 90^0.

C. 120^0.

D. 60^0.

Lời giải

Chọn B



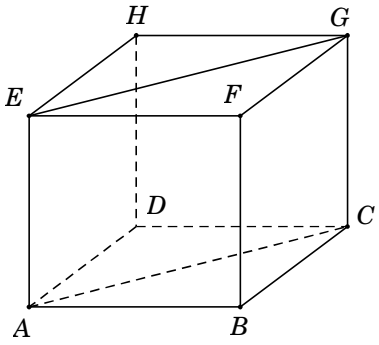
Vì $\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AE}$ ($ADHE$ là hình vuông) nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DH}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)=\widehat{BAE}=90^0$ ($ABFE$ là hình vuông).

Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

A. 90^0. **B.** 60^0. **C.** 45^0. **D.** 120^0.

Lời giải

Chọn C



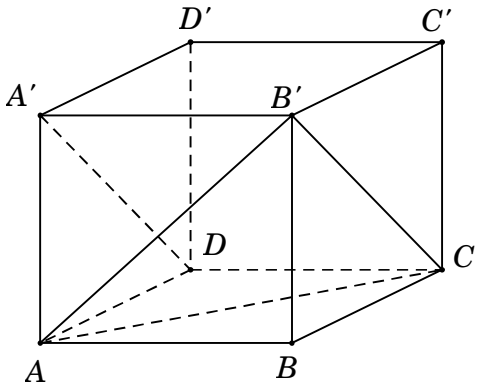
Vì $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AC}$ ($AEGC$ là hình chữ nhật) nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EG}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\widehat{BAC}=45^0$ ($ABCD$ là hình vuông).

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa AC và DA' là:

A. 45^0. **B.** 90^0. **C.** 60^0. **D.** 120^0.

Lời giải

Chọn C



Gọi a là độ dài cạnh hình lập phương. Khi đó, tam giác $AB'C$ đều ($AB' = B'C = CA = a\sqrt{2}$) do đó $\widehat{B'CA} = 60^0$.

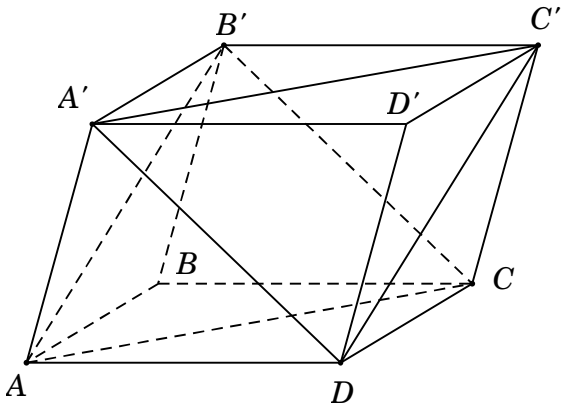
Lại có, DA' song song CB' nên $(AC, DA') = (AC, CB') = \widehat{ACB'} = 60^0$.

Câu 7: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử tam giác $AB'C$ và $A'DC'$ đều có ba góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc nào sau đây?

A. $\widehat{AB'C}$. **B.** $\widehat{DA'C'}$. **C.** $\widehat{BB'D}$. **D.** $\widehat{BDB'}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $AC \,//\, A'C'$ ($A'B'CD$ là hình bình hành) mà $\widehat{DA'C'}$ nhọn nên

$(AC, A'D) = (A'C', A'D) = \widehat{DA'C'}$.

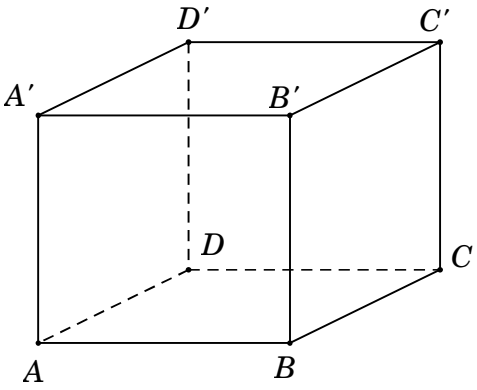
Câu 8: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn khẳng định **sai?**

A. Góc giữa AC và $B'D'$ bằng 90^0. **B.** Góc giữa $B'D'$ và AA' bằng 60^0.

C. Góc giữa AD và $B'C$ bằng 45^0. **D.** Góc giữa BD và $A'C'$ bằng 90^0.

Lời giải

Chọn B



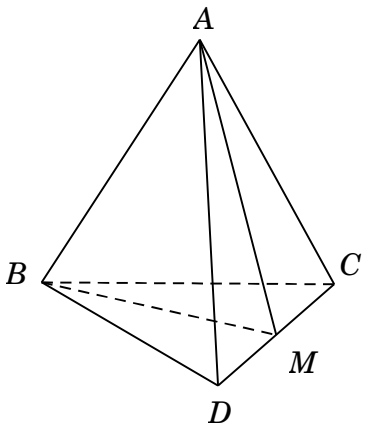
Ta có $(AA', B'D') = (BB', B'D') = \widehat{BB'C} = 90^0$. Khẳng định B sai.

Câu 9: Cho tứ diện đều $ABCD$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng:

A. 60^0. **B.** 30^0. **C.** 90^0. **D.** 45^0.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của CD.

Ta có $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AM} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Do đó $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\right) = \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ nên số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng 90^0.

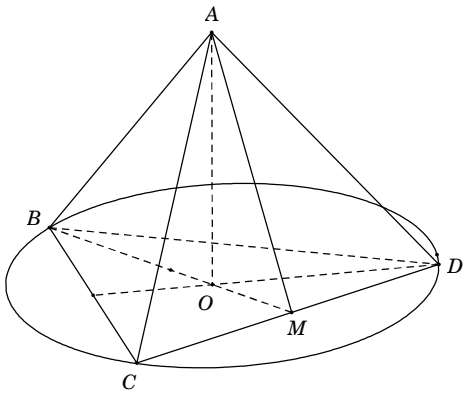
Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu?

A. 0^0. **B.** 30^0. **C.** 90^0. **D.** 60^0.

Lời giải

Chọn C

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133



Gọi M là trung điểm của CD.

Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên $AM \perp CD, OM \perp CD.$

Ta có $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{CD}.\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MO}\right) = \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{MO} = \vec{0}.$

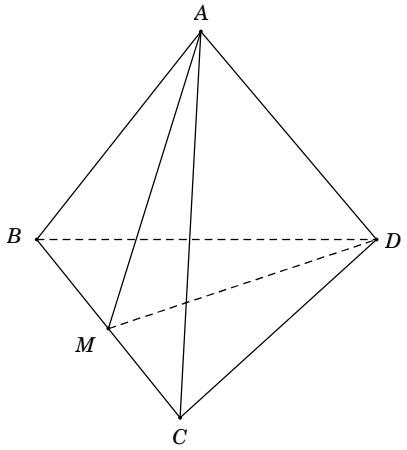
Suy ra $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{CD}$ nên số đo góc giữa hai đường thẳng AO và CD bằng 90^0.

Câu 11: Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos(AB, DM)$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử cạnh của tứ diện là a.

Tam giác BCD đều $\Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác ABC đều $\Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DM}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{DM}\right|}=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}}{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}$

Mặt khác: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

$=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AM}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}\right)-\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}\right)$

$=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AM}\right|.\cos 30^\circ-\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|.\cos 60^\circ$

$=a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}-a.a.\dfrac{1}{2}=\dfrac{3a^2}{4}-\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^2}{4}$

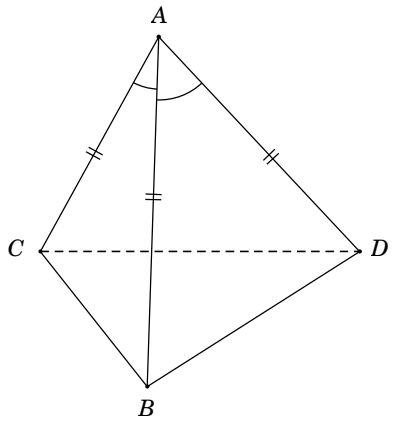
$\Rightarrow\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DM}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{6}>0\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DM}\right)=(AB,DM)\Rightarrow\cos(AB,DM)=\dfrac{\sqrt{3}}{6}.$

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=AC=AD$ và $\widehat{BAC}=\widehat{BAD}=60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?

A. 60°. **B.** 45°. **C.** 120°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}\right)-\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)$

$=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|.\cos 60^\circ-\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos 60^\circ.$

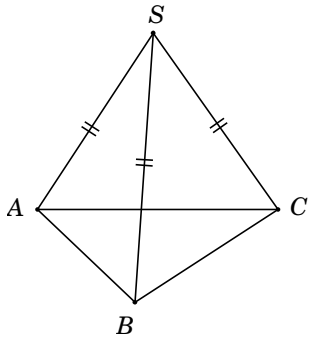
Mà $AC=AD\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=90^\circ$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC$ và $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$?

A. 120°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{SC}.\left(\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}\right)=\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA}$

$=\left|\overrightarrow{SC}\right|.\left|\overrightarrow{SB}\right|.\cos\left(\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SB}\right)-\left|\overrightarrow{SC}\right|.\left|\overrightarrow{SA}\right|.\cos\left(\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA}\right)$

$=SC.SB.\cos\widehat{BSC}-SC.SA.\cos\widehat{ASC}.$

Mà $SA=SB=SC$ và $\widehat{BSC}=\widehat{ASC}\Rightarrow\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}=0$.

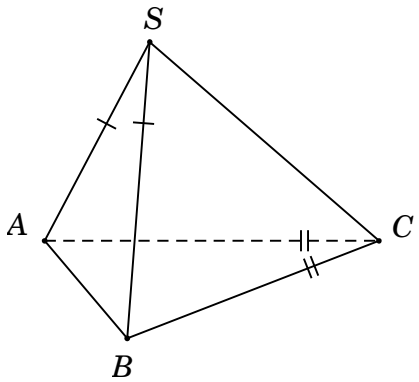
Do đó $\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{AB}\right)=90°$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB$ và $CA=CB$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và AB.

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn D



Xét $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CS}.\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{CS}.\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CS}.\overrightarrow{CB}$

$=CS.CA.\cos\widehat{SCA}-CS.CB.\cos\widehat{SCB}$

$=CS.CA.\dfrac{SC^2+CA^2-SA^2}{2SC.CA}-CS.CB.\dfrac{SC^2+CB^2-SB^2}{2SC.CB}$

$=\dfrac{SC^2+CA^2-SA^2}{2}-\dfrac{SC^2+CB^2-SB^2}{2}=0$ (do $SA=SB$ và $CA=CB$)

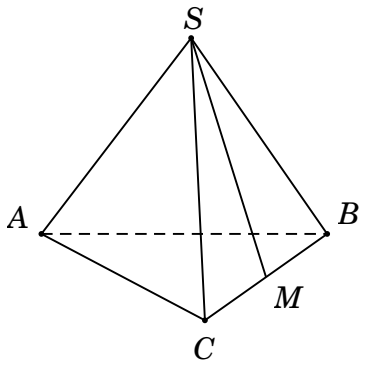
Vậy $SC \perp AB$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$ và $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng chéo nhau SA và BC.

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn D



Xét $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA}.\left(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}\right) = \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$

$= \left|\overrightarrow{SA}\right|.\left|\overrightarrow{SC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SC}\right) - \left|\overrightarrow{SA}\right|.\left|\overrightarrow{SB}\right|.\cos\widehat{SAB}$

$= SA.SC.\cos\widehat{ASC} - SA.SB.\cos\widehat{ASB}.\ (1)$

Ta có $\begin{cases} SA \text{ chung} \\ AB = AC \\ \widehat{SAB} = \widehat{SAC} \end{cases} \Rightarrow \Delta SAB = \Delta SAC\ (c-g-c)$.

Suy ra $\begin{cases} SC = SB \\ \widehat{ASC} = \widehat{ASB} \end{cases}.\ (2)$

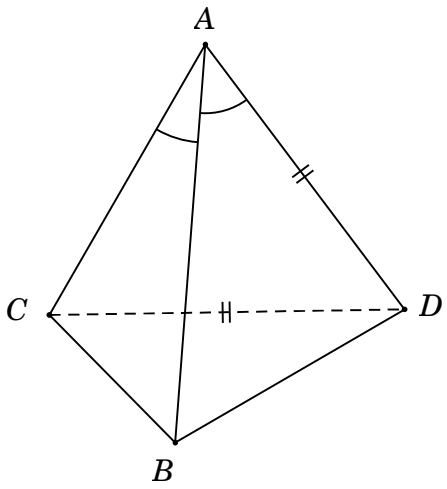
Từ (1) và (2), suy ra $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC} = 0$. Vậy $SA \perp BC$.

Câu 16: Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = \frac{3}{2}AD$, $\widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60°$, $CD = AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos\varphi = \frac{3}{4}$. **B.** $\varphi = 60°$. **C.** $\varphi = 30°$. **D.** $\cos\varphi = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\cos(AB,CD)=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}\right|}{AB.CD}$

Mặt khác $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}\right)-\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)$

$=AB.AD.\cos 60^\circ-AB.AC.\cos 60^\circ$

$=AB.AD.\dfrac{1}{2}-AB.\dfrac{3}{2}AD.\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4}AB.AD=-\dfrac{1}{4}AB.CD.$

Do có $\cos(AB,CD)=\dfrac{\left|-\dfrac{1}{4}AB.CD\right|}{AB.CD}=\dfrac{1}{4}$.

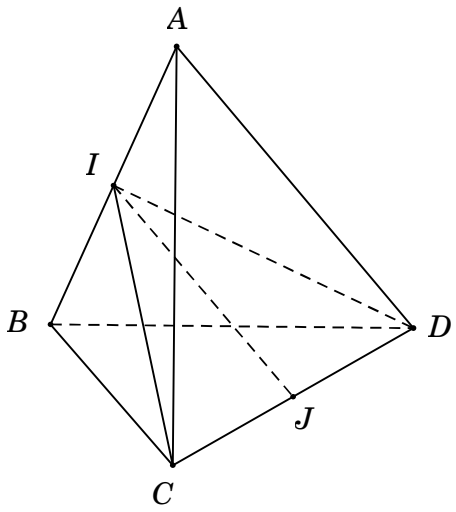
Vậy $\cos\varphi=\dfrac{1}{4}$.

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=AC=AD$ và $\widehat{BAC}=\widehat{BAD}=60^\circ$, $\widehat{CAD}=90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

A. 120°. **B.** 90°. **C.** 60°. **D.** 45°.

Lời giải

Chọn B



Xét tam giác ICD có J là trung điểm đoạn $CD \Rightarrow \overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)$.

Tam giác ABC có $AB=AC$ và $\widehat{BAC}=60^0 \Rightarrow \Delta ABC$ đều $\Rightarrow CI \perp AB$.

Tương tự, ta có ΔABD đều nên $DI \perp AB$.

Ta có $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right).\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{AB}=0$

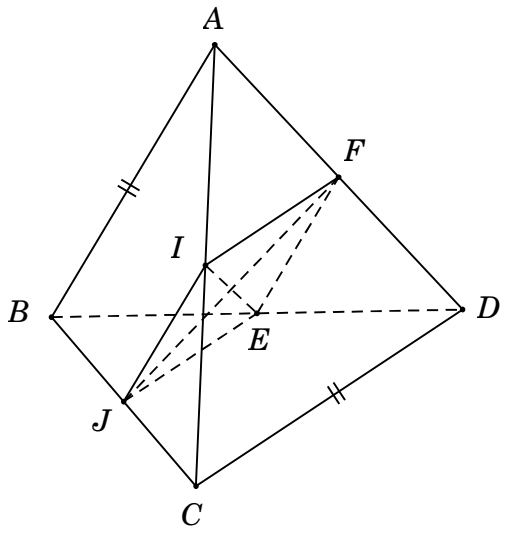
$\Rightarrow \overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{IJ}\right)=90°$.

Câu 18: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD. Góc (IE, JF) bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn D



Ta có IF là đường trung bình của $\Delta ACD \Rightarrow \begin{cases} IF \parallel CD \\ IF = \dfrac{1}{2}CD \end{cases}$.

Lại có JE là đường trung bình của $\Delta BCD \Rightarrow \begin{cases} JE \parallel CD \\ JE = \dfrac{1}{2}CD \end{cases}$.

$\Rightarrow \begin{cases} IF = JE \\ IF \parallel JE \end{cases} \Rightarrow$ Tứ giác $IJEF$ là hình bình hành.

Mặt khác: $\begin{cases} IJ = \dfrac{1}{2}AB \\ JE = \dfrac{1}{2}CD \end{cases}$. Mà $AB = CD \Rightarrow IJ = JE$.

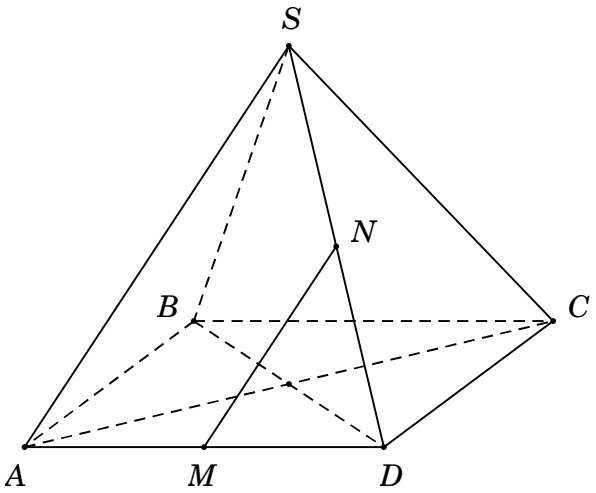
Do đó $IJEF$ là hình thoi. Suy ra $(IE, JF) = 90°$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc (MN, SC) bằng

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn C



Do $ABCD$ là hình vuông cạnh a $\Rightarrow AC = a\sqrt{2}$.

$\Rightarrow AC^2 = 2a^2 = SA^2 + SC^2 \Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S.

Từ giả thiết ta có MN là đường trung bình của $\Delta DSA \Rightarrow \overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA}$

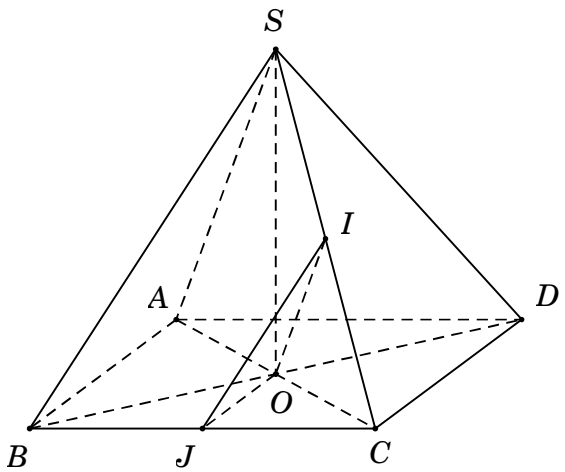
Khi đó $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} = 0 \Rightarrow MN \perp SC \Rightarrow (MN, SC) = 90°$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Số đo của góc (IJ, CD) bằng:

A. 90°. **B.** 45°. **C.** 30°. **D.** 60°.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD \Rightarrow OJ$ là đường trung bình của ΔBCD.

Suy ra $\begin{cases} OJ \parallel CD \\ OJ = \dfrac{1}{2}CD \end{cases}$.

Vì $CD \parallel OJ \Rightarrow (IJ,CD) = (IJ,OJ)$.

Xét tam giác IOJ, có $\begin{cases} IJ = \dfrac{1}{2}SB = \dfrac{a}{2} \\ OJ = \dfrac{1}{2}CD = \dfrac{a}{2} \\ IO = \dfrac{1}{2}SA = \dfrac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \Delta IOJ$ đều.

Vậy $(IJ,CD) = (IJ,OJ) = \widehat{IJO} = 60°$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA = x$, tất cả các cạnh còn lại đều bằng a. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng SA và SC.

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết, ta có $AB = BC = CD = DA = a$ nên $ABCD$ là hình thoi cạnh a.

Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có $\Delta CBD = \Delta SBD$ $(c-c-c)$.

Suy ra hai đường trung tuyến tương ứng CO và SO bằng nhau.

Xét tam giác SAC, ta có $SO = CO = \dfrac{1}{2}AC$.

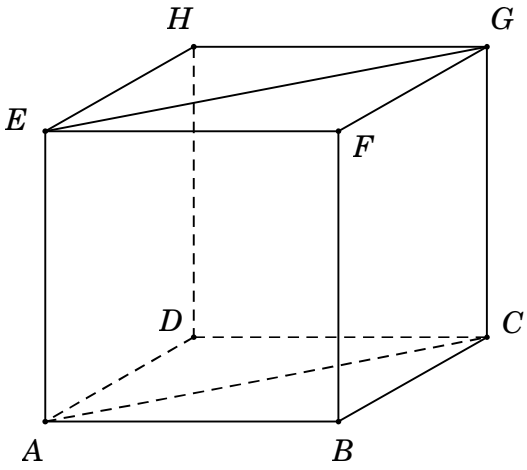
Do đó tam giác SAC vuông tại S (tam giác có đường trung tuyến bằng nửa cạnh đáy). Vậy $SA \perp SC$.

Câu 22: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$.

A. $a^2\sqrt{3}$. **B.** a^2. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $a^2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. Mặt khác $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

Vì $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AB\perp AD\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$

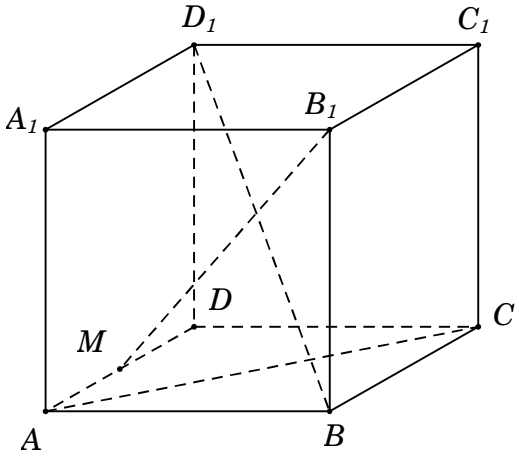
$\Rightarrow \overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=AB^2+0=a^2$.

Câu 23: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a. Gọi M là trung điểm AD. Giá trị $\overrightarrow{B_1M}.\overrightarrow{BD_1}$ là:

A. $\frac{1}{2}a^2$. **B.** a^2. **C.** $\frac{3}{4}a^2$. **D.** $a^2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\overrightarrow{B_1M}.\overrightarrow{BD_1}=\left(\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\right)\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}\right)$

$=\underbrace{\overrightarrow{BB_1}.\overrightarrow{BA}}_{=0}+\underbrace{\overrightarrow{BB_1}.\overrightarrow{AD}}_{=0}+\overrightarrow{B_1B}.\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BA}^2+\underbrace{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}}_{=0}+\underbrace{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DD_1}}_{=0}+\underbrace{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BA}}_{=0}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}+\underbrace{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DD_1}}_{=0}$

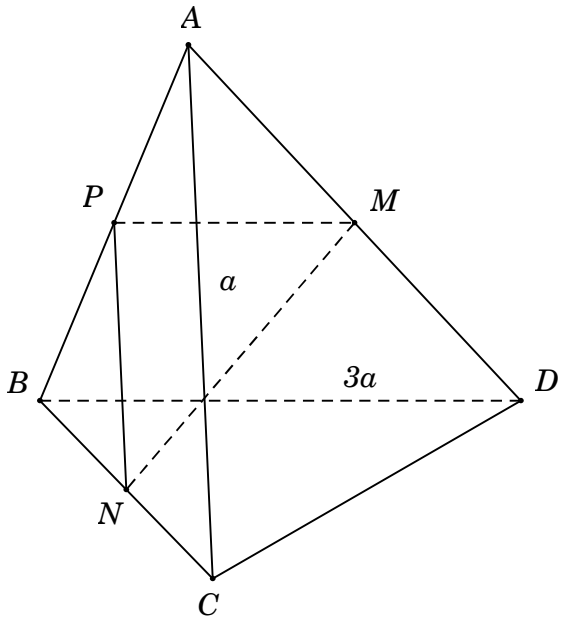
$= \overrightarrow{B_1B}.\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD} = -a^2 + a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$.

Câu 24: Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = a$, $BD = 3a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết AC vuông góc với BD. Tính MN.

A. $MN = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $MN = \frac{a\sqrt{10}}{2}$. **C.** $MN = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $MN = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi P là trung điểm của $AB \Rightarrow PN, PM$ lần lượt là đường trung bình của tam giác ΔABC và ΔABD. Suy ra $\begin{cases} PN = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2} \\ PM = \frac{1}{2}BD = \frac{3a}{2} \end{cases}$.

Ta có $AC \perp BD \Rightarrow PN \perp PM$ hay tam giác ΔPMN vuông tại P

Do đó $MN = \sqrt{PN^2 + PM^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.

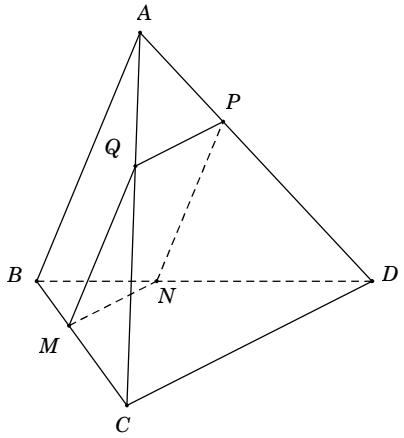
Câu 25: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD. Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình thang. **B.** Hình bình hành.

C. Hình chữ nhật. **D.** Tứ giác không phải hình thang.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases}(MNPQ)//AB\\(MNPQ)\cap(ABC)=MQ\end{cases}\Rightarrow MQ//AB.$

Tương tự ta có $MN//CD,\ NP//AB,\ QP//C\text{D}$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Lại có $MN\perp MQ(do\ AB\perp CD)$.

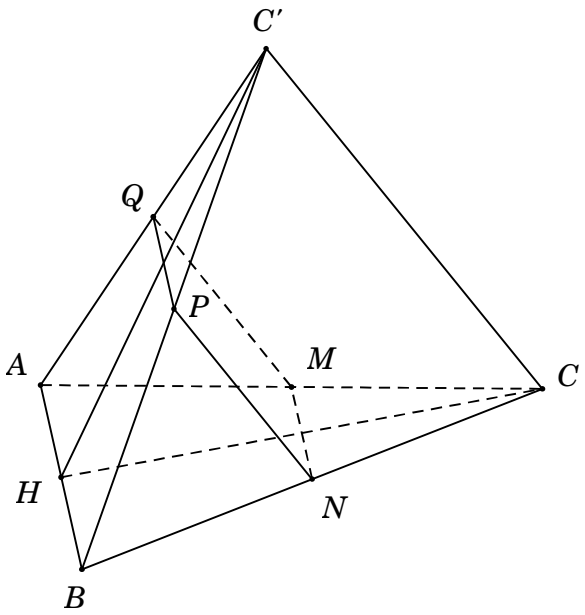
Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Câu 26: Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi $M,\ N,\ P,\ Q$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AC,\ CB,\ BC'$ và $C'A$. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình vuông. **D.** Hình thang.

Lời giải

Chọn B



Vì M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC' và $C'A$

$\Rightarrow \begin{cases} PQ = MN = \dfrac{1}{2}AB \\ PQ // AB // MN \end{cases} \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Gọi H là trung điểm của AB. Vì hai tam giác ABC và ABC' đều nên $\begin{cases} CH \perp AB \\ C'H \perp AB \end{cases}$.

Suy ra $AB \perp (CHC')$. Do đó $AB \perp CC'$.

Ta có $\begin{cases} PQ // AB \\ PN // CC' \Rightarrow PQ \perp PN \\ AB \perp CC' \end{cases}$.

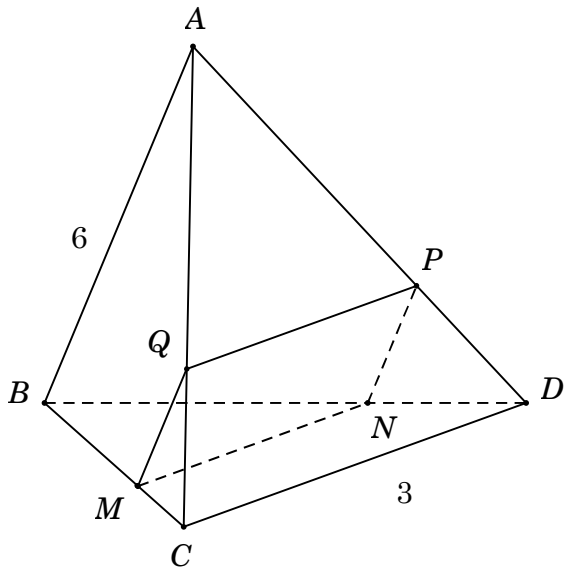
Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Câu 27: Cho tứ diện $ABCD$ trong đó $AB = 6, CD = 3$, góc giữa AB và CD là $60°$ và điểm M trên BC sao cho $BM = 2MC$. Mặt phẳng (P) qua M song song với AB và CD cắt BD, AD, AC lần lượt tại M, N, Q. Diện tích $MNPQ$ bằng:

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases}(MNPQ)//AB\\(MNPQ)\cap(ABC)=MQ\end{cases}\Rightarrow MQ//AB.$

Tương tự ta có $MN//CD,\ NP//AB,\ QP//CD$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Ta có $\left(\widehat{AB;CD}\right)=\left(\widehat{QM;MP}\right)=60^0$. Suy ra $S_{MNPQ}=QM.QN.\sin 60^0.$

Ta có $\Delta CMQ\backsim\Delta CBA\Rightarrow\dfrac{CM}{CB}=\dfrac{MQ}{AB}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow MQ=2.$

$\Delta AQN\backsim\Delta ACD\Rightarrow\dfrac{AQ}{AC}=\dfrac{QN}{CD}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow QN=2.$

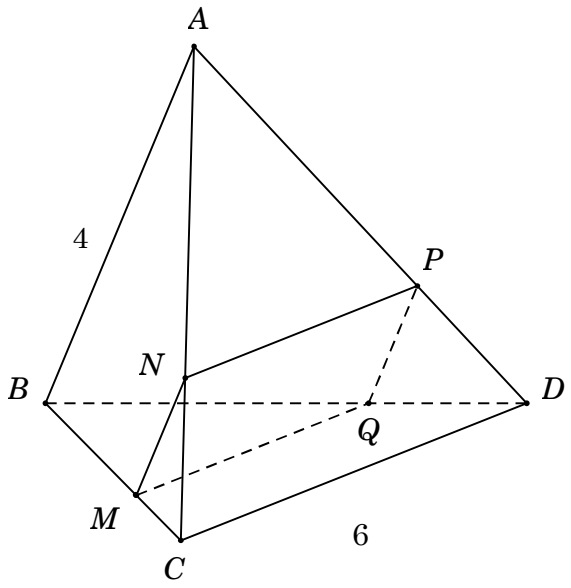
Vậy $S_{MNPQ}=QM.QN.\sin 60^0=2.2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}.$

Câu 28: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB=4,\ CD=6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC=2BM$. Mặt phẳng (P) đi qua M song song với AB và CD. Diện tích thiết diện của (P) với tứ diện là:

A. 5. **B.** 6. **C.** $\dfrac{17}{3}$. **D.** $\dfrac{16}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\begin{cases}(MNPQ)//AB\\(MNPQ)\cap(ABC)=MN\end{cases}\Rightarrow MN//AB.$

Tương tự ta có $MQ//CD, NP//CD, QP//AB$. Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Ta có $\left(\widehat{AB;CD}\right)=\left(\widehat{MN;MQ}\right)=\widehat{NMQ}=90^0\Rightarrow$ tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Lại có $\Delta CMN\backsim\Delta CBA\Rightarrow\dfrac{CM}{CB}=\dfrac{MN}{AB}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow MN=\dfrac{4}{3};$

$\Delta ANP\backsim\Delta ACD\Rightarrow\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{NP}{CD}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow MP=4.$

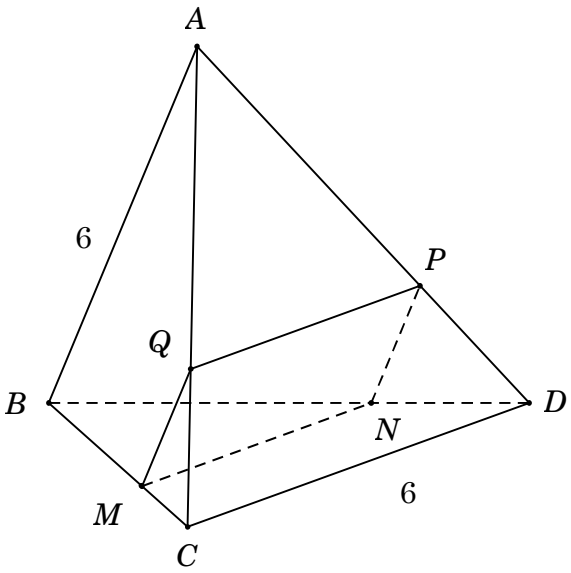
Vậy $S_{MNPQ}=MN.NP=\dfrac{16}{3}.$

Câu 29: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB=CD=6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC=x.BC\ (0<x<1)$. Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Diện tích lớn nhất của tứ giác bằng bao nhiêu?

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A



Xét tứ giác $MNPQ$ có $\begin{cases} MQ//NP//AB \\ MN//PQ//CD \end{cases} \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Mặt khác, $AB \perp CD \Rightarrow MQ \perp MN$. Do đó, $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Vì $MQ//AB$ nên $\frac{MQ}{AB} = \frac{CM}{CB} = x \Rightarrow MQ = x.AB = 6x$.

Theo giả thiết $MC = x.BC \Rightarrow BM = (1-x)BC$.

Vì $MN//CD$ nên $\frac{MN}{CD} = \frac{BM}{BC} = 1-x \Rightarrow MN = (1-x).CD = 6(1-x)$.

Diên tích hình chữ nhật $MNPQ$ là

$$S_{MNPQ} = MN.MQ = 6(1-x).6x = 36.x.(1-x) \le 36\left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2 = 9.$$

Ta có $S_{MNPQ} = 9$ khi $x = 1-x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Vậy diện tích tứ giác $MNPQ$ lớn nhất bằng 9 khi M là trung điểm của BC.

Câu 30: Trong không gian cho tam giác ABC. Tìm M sao cho giá trị của biểu thức $P = MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. M là trọng tâm tam giác ABC.

B. M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

C. M là trực tâm tam giác ABC.

D. M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Lời giải

Chọn A

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G$ cố định và $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$

$P=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$

$=3MG^2+2\overrightarrow{MG}.\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+GA^2+GB^2+GC^2$

$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2\geq GA^2+GB^2+GC^2.$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow M\equiv G.$

Vậy $P_{\min}=GA^2+GB^2+GC^2$ với $M\equiv G$ là trọng tâm tam giác $ABC.$

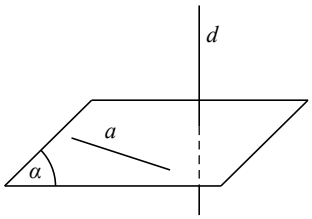
BÀI 3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α).

Kí hiệu $d \perp (\alpha)$.



2. Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Định lí

Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.

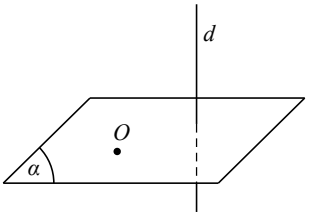
Hệ quả

Nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì nó cũng vuông góc với cạnh thứ ba của tam giác đó.

3. Tính chất

Tính chất 1

Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

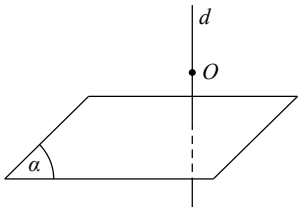


Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng

Người ta gọi mặt phẳng đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và vuông góc với AB là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

Tính chất 2

Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

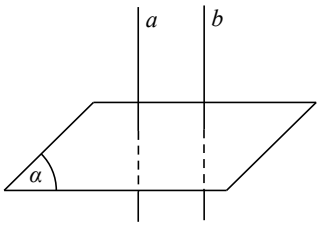


4. Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng.

Tính chất 1

Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

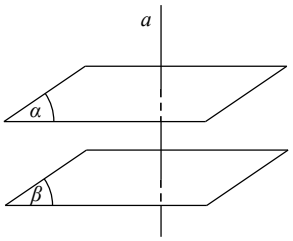
Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.



Tính chất 2

Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

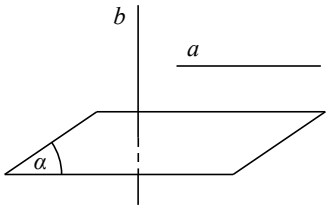
Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.



Tính chất 3

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với (α) thì cũng vuông góc với a.

Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.



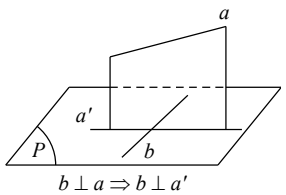
5. Định lí ba đường vuông góc

Định nghĩa

Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương vuông góc tới mặt phẳng (P) gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P).

Định lí (Định lí 3 đường vuông góc)

Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P). Khi đó điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).



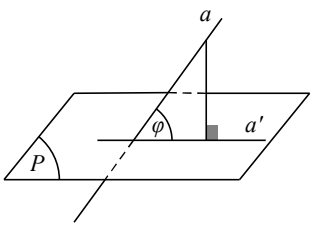
$b \perp a \Rightarrow b \perp a'$

6. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Định nghĩa

Nếu đường thẳng $a \perp (P)$ thì ta nói góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90^0.

Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P).



Chú ý: Nếu φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) thì ta luôn có $0^0 \le \varphi \le 90^0$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Câu hỏi lý thuyết

1. Phương pháp

Ta cần nắm vững các tính chất sau

Tính chất 1

a) Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Tính chất 2

a) Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Tính chất 3

a) Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với (α) thì cũng vuông góc với a.

b) Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho hai đường thẳng a, b và hai mặt phẳng (P), (Q). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\left.\begin{array}{l} a//b \\ (P) \perp a \end{array}\right\} \Rightarrow (P) \perp b.$

B. $\left.\begin{array}{l} a \perp b \\ b//(P) \end{array}\right\} \Rightarrow (P) \perp a.$

C. $\left.\begin{array}{l} a \perp b \\ b \perp (P) \end{array}\right\} \Rightarrow (P) // a.$

D. $\left.\begin{array}{l} a \perp (Q) \\ b \perp (P) \end{array}\right\} \Rightarrow (P) // (Q).$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$\left.\begin{array}{l} a // b \\ (P) \perp a \end{array}\right\} \Rightarrow (P) \perp b$ là mệnh đề đúng. Nghĩa là, cho hai đường thẳng song song, mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này sẽ vuông góc với đường thẳng kia.

Ví dụ 2: Cho hai đường thẳng a, b và hai mặt phẳng (P), (Q). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\left.\begin{array}{l} a \perp (P) \\ b \perp (P) \end{array}\right\} \Rightarrow a // b.$

B. $\left.\begin{array}{l} a \perp (P) \\ b \perp (P) \\ a \neq b \end{array}\right\} \Rightarrow a // b.$

C. $\left.\begin{array}{l} (P) // (Q) \\ a \perp (P) \end{array}\right\} \Rightarrow a // (Q).$

D. $\left.\begin{array}{l} a // (P) \\ (P) \perp (Q) \end{array}\right\} \Rightarrow a // (Q).$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

- Mệnh đề A sai. Vì khi đó hai đường thẳng a và b có thể song song hoặc trùng nhau. Mệnh đề A chỉ đúng khi a và b phân biệt.
- Mệnh đề B đúng. Thật vậy, ta thấy:

+ Nếu a cắt b tại M. Như vậy, qua điểm M ta vẽ được hai đường thẳng a và b cùng vuông góc với (P): Vô lí. Vậy a không cắt b.

+ Nếu a chéo b. Lấy điểm N trên a. Qua N vẽ đường thẳng $b' // b$.

Do $b \perp (P)$ nên $b' \perp (P)$. Như vậy từ điểm N ta có hai đường thẳng a và b' cùng vuông góc với (P): Vô lí. Vậy a và b không chéo nhau.

+ Trường hợp a trùng b không xảy ra vì $a \neq b$ (giả thiết).

Vậy $a // b$.

- Mệnh đề C sai. Mệnh đề đúng là $a \perp (Q)$.
- Mệnh đề D sai. Vì lúc này a có thể song song hoặc chứa trong (Q).

Ví dụ 3: Cho hai đường thẳng a, b và hai mặt phẳng (P), (Q). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\left.\begin{array}{l} a \perp b \\ a \perp c \\ c \subset (P) \end{array}\right\} \Rightarrow b // (P).$

B. $\left.\begin{array}{l} a \perp (P) \\ a \perp b \end{array}\right\} \Rightarrow b // (P).$

C. $\left.\begin{array}{l} a \perp (P) \\ a \perp b \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b // (P) \\ b \subset (P) \end{array}\right.$.

D. $\left.\begin{array}{l} a \perp (P) \\ a // (Q) \end{array}\right\} \Rightarrow (P) // (Q).$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

A sai: Lúc này b có thể chứa trong, hoặc cắt, hoặc song song với (P). Mệnh đề chỉ đúng khi $a \perp (P)$.

B sai: Vì lúc này b có thể chứa trong (P). Mệnh đề chỉ đúng khi $b \not\subset (P)$.

D sai: Thật vậy, nếu $(P)//(Q)$ hoặc $(P) \equiv (Q)$ thì do $a \perp (P)$ nên $a \perp (Q)$: Vô lí (Trái với giả thiết $a//(Q)$).

Ví dụ 4: Cho $\begin{cases} a,b,c \subset (\alpha) \\ c \perp a,\ c \perp b \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. a cắt b. **B.** $a//b$.

C. $a \equiv b$. **D.** $\left[\begin{array}{l} a//b \\ a \equiv b \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Vì a, b, c đồng phẳng và $c \perp a,\ c \perp b$ nên $a//b$ hoặc $a \equiv b$.

Ví dụ 5: Cho $\begin{cases} a,b \subset (\alpha) \\ c//(\alpha) \\ c \perp a,\ c \perp b \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. a cắt b. **B.** $a//b$.

C. $\left[\begin{array}{l} a//b \\ a \equiv b \end{array}\right.$. **D.** $a \equiv b$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ví dụ 6: Cho $\begin{cases} a,b \subset (\alpha) \\ c \text{ cắt } (\alpha) \\ c \perp a,\ c \perp b \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. a cắt b. **B.** $a//b$.

C. $\left[\begin{array}{l} a//b \\ a \equiv b \end{array}\right.$. **D.** $a \equiv b$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 31: Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong (α).

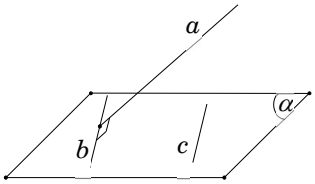
B. Nếu đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì d vuông góc với hai đường thẳng trong (α).

C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$.

D. Nếu $d \perp (\alpha)$ và đường thẳng $a // (\alpha)$ thì $d \perp a$.

Lời giải

Chọn C



Mệnh đề **C** sai vì thiếu điều kiện "cắt nhau" của hai đường thẳng nằm trong (α). Ví dụ: đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng b và c nằm trong (α) nhưng b và c song song với nhau thì khi đó a chưa chắc vuông góc với (α).

Câu 32: Trong không gian cho đường thẳng Δ không nằm trong mặt phẳng (P), đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mp (P) nếu:

A. vuông góc với hai đường thẳng phân biệt nằm trong mp (P).

B. vuông góc với đường thẳng a mà a song song với mp (P).

C. vuông góc với đường thẳng a nằm trong mp (P).

D. vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mp (P).

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu Δ vuông góc với mọi đường thẳng trong mặt phẳng (P).(Định nghĩa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng).

Câu 33: Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

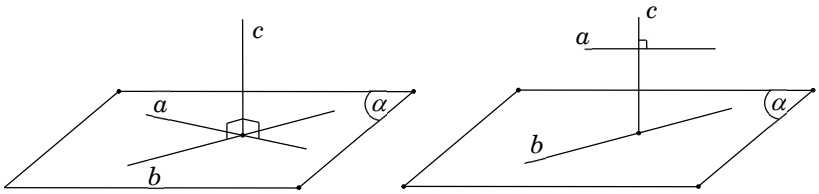
B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.

C. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

Lời giải

Chọn B



Mệnh đề ở câu B sai vì: Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì có thể cắt nhau, chéo nhau.

Câu 34: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

A. Nếu $b \perp (P)$ thì $a \parallel b$.

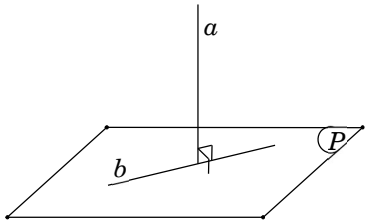
B. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.

C. Nếu $b \subset (P)$ thì $b \perp a$.

D. Nếu $a \perp b$ thì $b \parallel (P)$.

Lời giải

Chọn D



`Mệnh đề D sai vì b có thể nằm trong (P).

Câu 35: Cho hai đường thẳng a, b và mặt phẳng (P). Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.

B. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp (P)$ thì $a \perp b$.

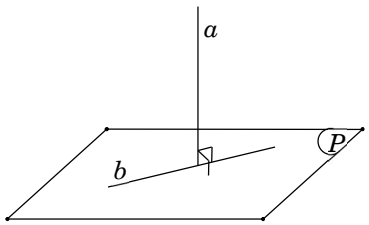
C. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.

D. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.

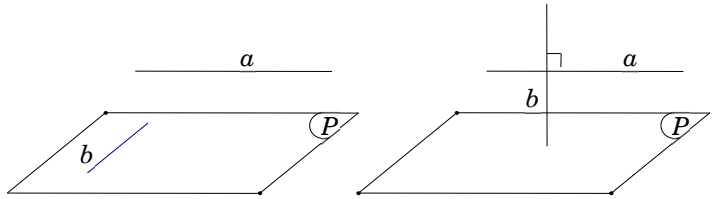
Lời giải

Chọn B

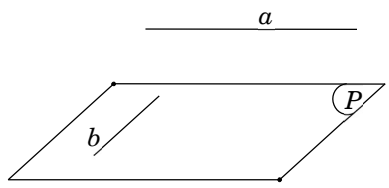
Mệnh đề A sai vì b có thể nằm trong (P).



Mệnh đề C sai vì b có thể cắt (P) hoặc b nằm trong (P).



Mệnh đề D sai vì b có thể nằm trong (P).



Câu 36: Cho a, b, c là các đường thẳng trong không gian. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \parallel c$.

B. Nếu a vuông góc với mặt phẳng (α) và $b \parallel (\alpha)$ thì $a \perp b$.

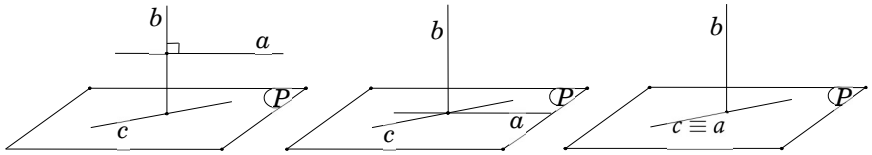
C. Nếu $a \parallel b$ và $b \perp c$ thì $c \perp a$.

D. Nếu $a \perp b$, $b \perp c$ và a cắt c thì b vuông góc với mặt phẳng (a,c).

Lời giải

Chọn D

Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \parallel c$ hoặc a cắt c hoặc a trùng c hoặc a chéo c.



Câu 37: Chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau. Khi đó có một và chỉ một mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.

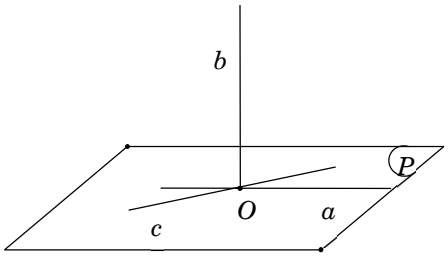
B. Qua một điểm O cho trước có một mặt phẳng duy nhất vuông góc với một đường thẳng Δ cho trước.

C. Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

D. Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Lời giải

Chọn C



Mệnh đề C sai vì qua một điểm O cho trước có **vô số** đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Câu 38: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

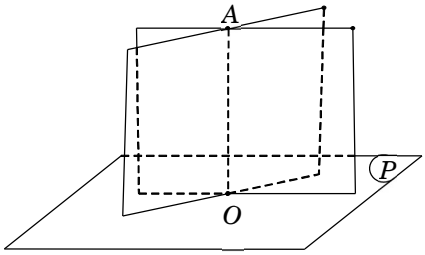
B. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

D. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Lời giải

Chọn D



Qua một điểm cho trước có thể kẻ được vô số mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng cho trước.

Câu 39: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

A. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

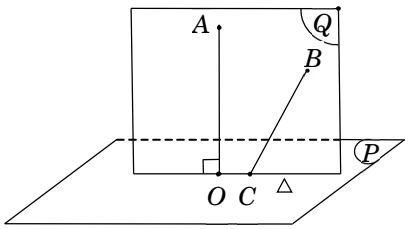
C. Với mỗi điểm $A \in (\alpha)$ và mỗi điểm $B \in (\beta)$ thì ta có đường thẳng AB vuông góc với giao tuyến d của (α) và (β).

D. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) đều vuông góc với mặt phẳng (γ) thì giao tuyến d của (α) và (β) nếu có sẽ vuông góc với (γ).

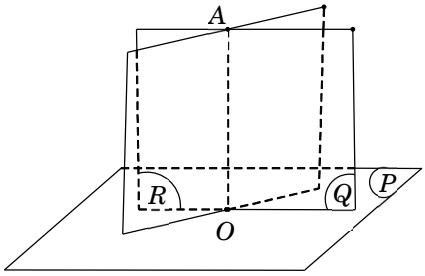
Lời giải

Chọn D

Mệnh đề A sai vì nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này vuông góc với giao tuyến sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.



Mệnh đề B sai vì còn trường hợp hai mặt phẳng cắt nhau.



Mệnh đề C sai vì đường thẳng AB có thể không vuông góc với giao tuyến.

Câu 40: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho.

B. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và đường thẳng b với b vuông góc với (P).

C. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q).

D. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì a song song với b.

Lời giải

Chọn A

Mệnh đề B sai vì hai góc này phụ nhau.

Mệnh đề C sai vì (P) có thể trùng (Q).

Mệnh đề D sai vì a có thể trùng b.

Dạng 2. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng. Từ đó suy ra đường thẳng vuông góc với đường thẳng

1. Phương pháp

Để chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng ta có thể sử dụng một ttrong các cách sau

1. $\begin{cases} a \perp b \subset (\alpha) \\ a \perp c \subset (\alpha) \\ b \cap c = A \end{cases} \Rightarrow a \perp (\alpha)$ (a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau)
2. $\begin{cases} a // b \\ b \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\alpha)$ (a song song với một đường thẳng b vuông góc (P))
3. $\begin{cases} a \perp (\beta) \\ (\alpha) // (\beta) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\alpha)$
4. $AB \perp (\alpha) = \{M \mid MA = MB\}$, (α) là mặt phăng trung trực của AB
5. $\begin{cases} \Delta ABC \subset (\alpha) \\ MA = MB = MC \Rightarrow MO \perp (\alpha) \\ OA = OB = OC \end{cases}$

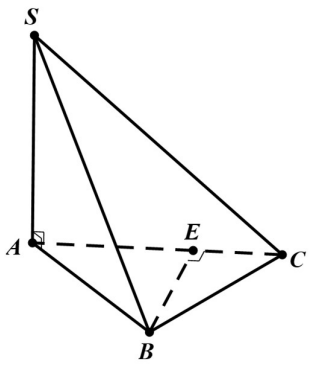
Để chứng minh đường thẳng vuông góc với đường thẳng ngoài 4 cách đã biết ở bài hai đường thẳng vuông góc ta có thểm sử dụng thêm các cách sau

1. $\begin{cases} a \perp (\alpha) \\ b \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp b$
2. $\begin{cases} a // (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp b$
3. $\begin{cases} a' = hch_{\alpha}(a) \\ b \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow b \perp a \Leftrightarrow b \perp a'$
4. $\begin{cases} \Delta ABC, a \perp AB \\ \qquad a \perp AC \end{cases} \Rightarrow a \perp BC$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho tứ diện SABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Kẻ BE vuông góc với AC $(E \in AC)$. Chứng minh $BE \perp (SAC)$.

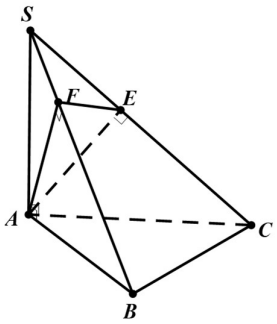
Hướng dẫn giải



Do $SA \perp BE, BE \perp AC \Rightarrow BE \perp (SAC)$.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông tại C. Kẻ $SA \perp (ABC)$, $AE \perp SC$ và $AF \perp SB$. Chứng ming: $BE \perp (SAC)$.

Hướng dẫn giải



Ta có:

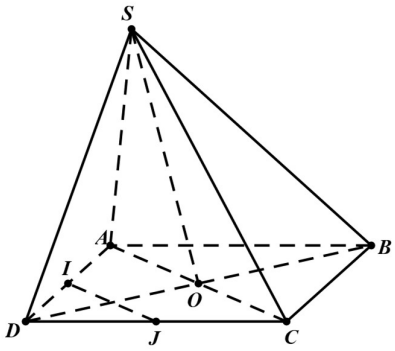
$$\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AE \ (1)$$

Theo giả thiết: $SC \perp AE \ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $AE \perp SB$ mà $AF \perp SB \Rightarrow SB \perp (AEF)$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O và $SA = SC$, $SB = SD$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB và BC. Chứng minh: $IJ \perp (SBD)$.

Hướng dẫn giải



$\Delta SAC, \Delta SBD$ cân $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$

$\Rightarrow SO \perp IJ$

$IJ // AC \Rightarrow IJ \perp BD$

$\Rightarrow IJ \perp (SBD)$.

Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SB = b$ và tam giác SAC cân tại S. Trên cạnh AB lấy một điểm M với $AM = x (0 < x < a)$. Mặt phẳng (α) qua M song song với AC và SB cắt BC, SB, SA lần lượt tại N, P, Q. Giá trị x để S_{MNPQ} lớn nhất

Phân tích: Trước hết ta phải xác định được MNPQ là hình chữ nhật

Vì $(\alpha) // SB$ và $(\alpha) // AC$ nên MNPQ là hình bình hành.

$$\left.\begin{array}{l} AC \perp SO \ (\Delta ACS \text{ cân}) \\ AC \perp BD \ (\text{đường chéo hình vuông}) \end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp (SBD)$$

$\Rightarrow AC \perp SB$, mà $MQ // SB \Rightarrow MN \perp MQ$

Vậy MNPQ là hình chữ nhật.

Hướng dẫn giải

Ta có: MN // AC

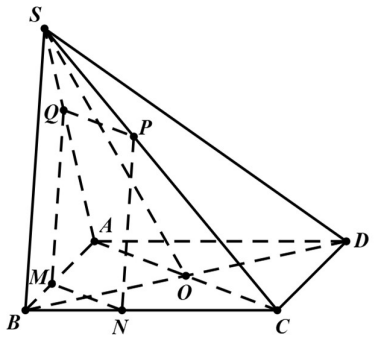
$$\Rightarrow MN = \frac{BM}{BA}.AC = \frac{a-x}{a}.a\sqrt{2} = (a-x)\sqrt{2}$$

ΔSAB có: MQ // SB $\Rightarrow MQ = \frac{AM}{AB}.SB = \frac{bx}{a}$

$$S_{MNPQ} = MN.MQ = \frac{b\sqrt{2}}{a}(a-x)x$$

Ta có: $\frac{(a-x)+x}{2} \geq \sqrt{(a-x)x} \Rightarrow \frac{a^2}{4} \geq (a-x)x$

$\Rightarrow S_{MNPQ}$ lớn nhất khi và chỉ khi $a - x = x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$.



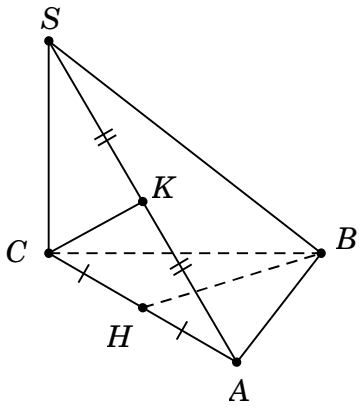
3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại C. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và SB. Khẳng định nào dưới đây sai?

A. $CH \perp AK$. **B.** $CH \perp SB$. **C.** $CH \perp SA$. **D.** $AK \perp SB$.

Lời giải

Chọn D



Vì H là trung điểm của AB, tam giác ABC cân suy ra $CH \perp AB$.

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp CH$ mà $CH \perp AB$ suy ra $CH \perp (SAB)$.

Mặt khác $AK \subset (SAB) \longrightarrow CH$ vuông góc với các đường thẳng SA, SB, AK.

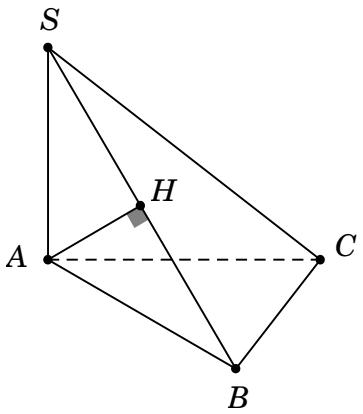
Và $AK \perp SB$ chỉ xảy ra khi và chỉ khi tam giác SAB cân tại S..

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác SAB. Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. $SA \perp BC$. **B.** $AH \perp BC$. **C.** $AH \perp AC$. **D.** $AH \perp SC$.

Lời giải

Chọn C



Theo bài ra, ta có $SA \perp (ABC)$ mà $BC \subset (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Tam giác ABC vuông tại B, có $AB \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.

Khi đó $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$.

Nếu $AH \perp AC$ mà $SA \perp AC$ suy ra $AC \perp (SAH) \Rightarrow AC \perp AB$ (vô lý).

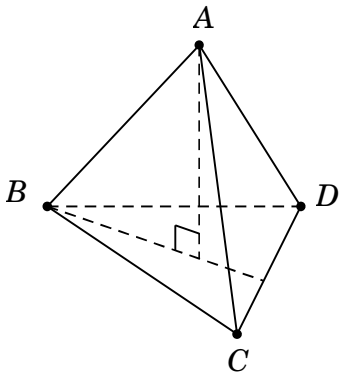
Câu 43: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H là trực tâm của tam giác BCD và AH vuông góc với mặt phẳng đáy. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $CD \perp BD$. **B.** $AC = BD$. **C.** $AB = CD$. **D.** $AB \perp CD$.

Lời giải

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Chọn D



Vì AH vuông góc với $mp\,(BCD)$ suy ra $AH \perp CD.$ (1)

Mà H là trực tâm của tam giác $BCD \Rightarrow BH \perp CD.$ (2)

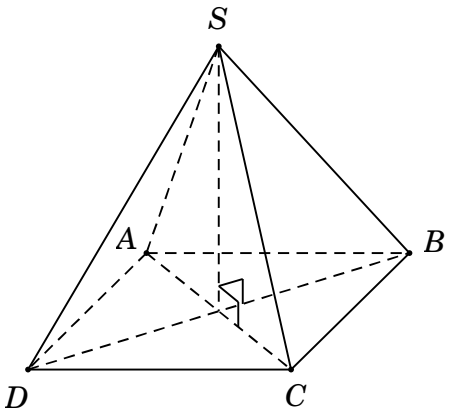
Từ $(1),(2)$ suy ra $\begin{cases} CD \perp AH \\ CD \perp BH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp AB.$

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm $O.$ Biết rằng $SA = SC,\ SB = SD.$ Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $AB \perp (SAC).$ **B.** $CD \perp AC.$ **C.** $SO \perp (ABCD).$ **D.** $CD \perp (SBD).$

Lời giải

Chọn C



Vì $SA = SC \Rightarrow \Delta SAC$ cân tại S mà O là trung điểm $AC \Rightarrow SO \perp AC.$

Tương tự, ta cũng có $SO \perp BD$ mà $AC \cap BD = O \subset (ABCD) \Rightarrow SO \perp (ABCD).$

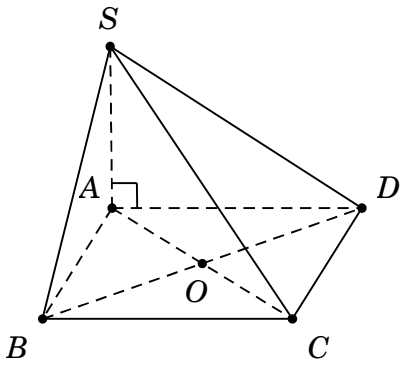
Câu 45: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm $O.$ Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $SA \perp BD.$ **B.** $SC \perp BD.$ **C.** $SO \perp BD.$ **D.** $AD \perp SC.$

Lời giải

Chọn D

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133



Vì SA vuông góc với $mp\,(ABCD) \Rightarrow SA \perp BD.$

Mà $ABCD$ là hình thoi tâm $O \Rightarrow AC \perp BD$ nên suy ra $BD \perp (SAC).$

Mặt khác $SO \subset (SAC)$ và $SC \subset (SAC)$ suy ra $\begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp SC \end{cases}.$

Và $AD,\ SC$ là hai đường thẳng chéo nhau.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm $O.$ Đường thẳng SA cuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi I là trung điểm của $SC.$ Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. $IO \perp (ABCD).$

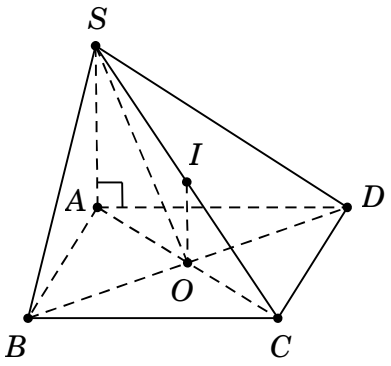
B. $BC \perp SB.$

C. Tam giác SCD vuông ở $D.$

D. (SAC) là mặt phẳng trung trực của $BD.$

Lời giải

Chọn D



Vì O, I lần lượt là trung điểm của AC, SC suy ra OI là đường trung bình của tam giác SAC $\Rightarrow OI \,//\, SA$ mà $SA \perp (ABCD) \Rightarrow OI \perp (ABCD).$

Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow BC \perp AB$ mà $SA \perp BC$ suy ra $BC \perp SB.$

Tương tự, ta có được $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \quad (SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow CD \perp SD.$

Nếu (SAC) là mặt phẳng trung trực của $BD \longrightarrow BD \perp AC$: điều này không thể xảy ra vì $ABCD$ là hình chữ nhật.

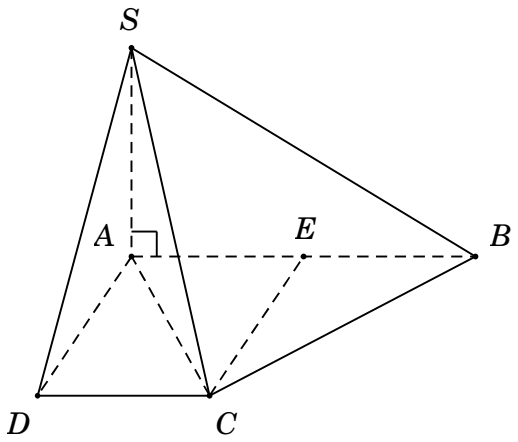
Câu 47: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, có $AD = CD = a$, $AB = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, E là trung điểm của AB. Chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. $CE \perp (SAB)$. **B.** $CB \perp (SAC)$.

C. Tam giác SDC vuông tại D. **D.** $CE \perp (SDC)$.

Lời giải

Chọn D



Từ giả thết suy ra $ADCE$ là hình vuông $\Rightarrow \begin{cases} CE \perp AB \\ CE = AD = a \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} CE \perp AB \\ CE \perp SA \ (\text{do } SA \perp ABCD) \end{cases} \Rightarrow CE \perp (SAB)$. Do đó A đúng.

Vì $CE = AD = a \Rightarrow CE = \frac{1}{2} AB \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại $C \Rightarrow CB \perp AB$. Kết hợp với $CB \perp SA$ (do $SA \perp (ABCD)$) nên suy ra $CB \perp (SAC)$. Do đó B đúng.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \ (\text{do } SA \perp ABCD) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$. Do đó C đúng.

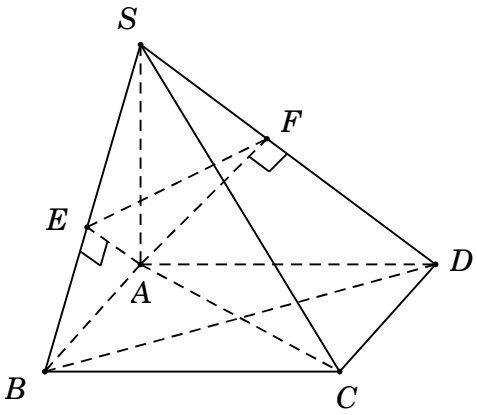
Dùng phương pháp loại trừ, suy ra D là đáp án sai.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi AE, AF lần lượt là đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $SC \perp (AFB)$. **B.** $SC \perp (AEC)$. **C.** $SC \perp (AED)$. **D.** $SC \perp (AEF)$.

Lời giải

Chọn D



Vì SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$.

Mà $AB \perp BC$ nên suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE \subset (SAB)$.

Tam giác SAB có đường cao $AE \Rightarrow AE \perp SB$ mà $AE \perp BC \Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC$.

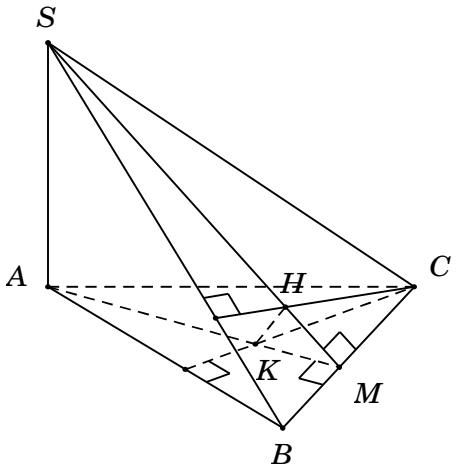
Tương tự, ta chứng minh được $AF \perp SC$. Do đó $SC \perp (AEF)$.

Câu 49: Cho hình chóp $SABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC và ABC. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $BC \perp (SAH)$. **B.** $SB \perp (CHK)$. **C.** $HK \perp (SBC)$. **D.** $BC \perp (SAB)$.

Lời giải

Chọn D



- Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH)$. Do đó A đúng.
- Ta có $\begin{cases} CK \perp AB \\ CK \perp SA \end{cases} \Rightarrow CK \perp (SAB) \Rightarrow CK \perp SB.$

Mặt khác có $CH \perp SB.$ Từ đó suy ra $SB \perp (CHK)$. Do đó B đúng.

- Ta có $\begin{cases} BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp HK \\ SB \perp (CHK) \Rightarrow SB \perp HK \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SBC)$. Do đó C đúng.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

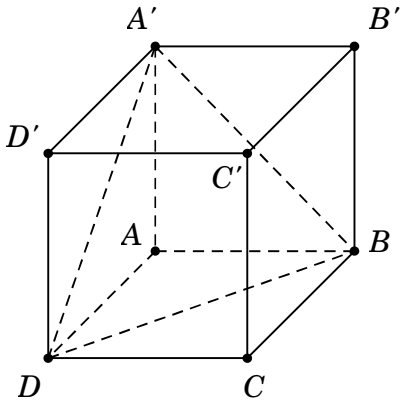
Dùng phương pháp lại trừ, suy ra D sai.

Câu 50: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $(A'BD)$. **B.** $(A'DC')$. **C.** $(A'CD')$. **D.** $(A'B'CD)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $AA'D'A$ là hình vuông suy ra $AD' \perp A'D.$ (1)

Và $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương suy ra $AB \perp A'D.$ (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra $A'D \perp (ABC'D') \Rightarrow A'D \perp AC'.$

Lại có $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC \perp BD$ mà $AA' \perp BD$ $(AA' \perp (ABCD))$

$\Rightarrow BD \perp (AA'C'C) \Rightarrow BD \perp AC'$. Kết hợp với $A'D \perp AC'$ suy ra $AC' \perp (A'BD).$

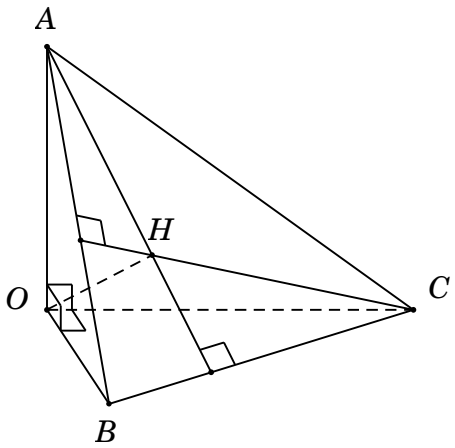
Câu 51: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC). Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $OA \perp BC.$ **B.** $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$

C. H là trực tâm $\Delta ABC.$ **D.** $3OH^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2.$

Lời giải

Chọn D



- $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC.$ Do đó A đúng. (1)

- Gọi $I = AH \cap BC.$

Theo giả thiết ta có $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $BC \perp (AOI) \Rightarrow BC \perp OI.$

Tam giác vuông BOC, ta có $\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$

Tam giác vuông AOI, ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$ Do đó B đúng.

- Từ chứng minh trên $BC \perp (AOI) \Rightarrow BC \perp AI.$ (3)

Gọi $J = BH \cap AC.$ Chứng mình tương tự ta có $AC \perp BJ$. (4)

Từ (3) và (4), suy ra H là trực tâm $\Delta ABC.$ Do đó C đúng.

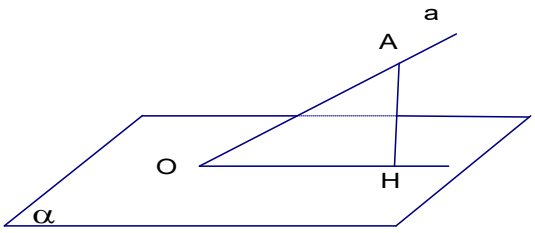
Vậy D là đáp án sai.

Dạng 3. Xác định góc – hình chiếu – tính độ dài

1. Phương pháp

- Bước 1: Tìm giao điểm O của a với α.
- Bước 2: Chọn $A \in a$ và dựng $AH \perp \alpha$, với $H \in \alpha$.

Khi đó: $\widehat{AOH} = \left(\widehat{a,\alpha}\right)$



- Bước 3: Tính số đo của $\widehat{AOH}$ dựa trên các hệ thức lượng trong tam giác.

Các trường hợp đặc biệt

- $a \perp (\alpha) \Rightarrow \widehat{[a,(\alpha)]} = 90^0$
- $\begin{bmatrix} a // (\alpha) \\ a \subset (\alpha) \end{bmatrix} \Rightarrow \widehat{[a,(\alpha)]} = 0^0$

Chú ý: Nếu $\widehat{\left[a,(\alpha)\right]}=\varphi$ thì $0\le\varphi<90^0$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

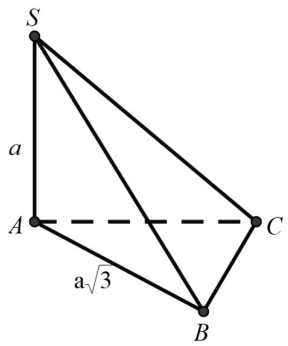
Ví dụ 1: Cho tứ diện SABC có $SA\perp(ABC)$ và $SA=a,\ AB=a\sqrt{3},$ tam giác SBC cân tại S.

a) Xác định và tính góc α giữa đường thẳng SB với mặt phẳng (ABC)

b) Xác định và tính góc β giữa đường thẳng SC với mặt phẳng (ABC)

Hướng dẫn giải

Xác định góc α và β. Ta có:



$SA\perp(ABC)$

$\Rightarrow\begin{cases}AB\text{ là hình chiếu của SB trên (ABC)}\\AC\text{ là hình chiếu của SC trên (ABC)}\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\widehat{SBA}\\\beta=\widehat{SCA}\end{cases}.$

a)

$SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp AB\Rightarrow\Delta SAB$ vuông tại A. Do đó:

$$\tan\alpha=\frac{SA}{AB}=\frac{a}{a\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\alpha=30°.$$

b)

$$\Delta SAB: SB^2=SA^2+AB^2=a^2+\left(a\sqrt{3}\right)^2=4a^2$$

Do đó: $SB=2a\Rightarrow SC=SB=2a$

Mặt khác: $SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp AC\Rightarrow\Delta SAC$ vuông tại A

$$\Rightarrow\sin\beta=\frac{SA}{SC}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}\Rightarrow\beta=30°.$$

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$. Cạnh SA vuông góc với đáy và $SA=a$.

a) Xác định và tính góc α giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABCD)

b) Xác định và tính góc β giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (ABCD) là

c) Xác định và tính góc γ giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB) là

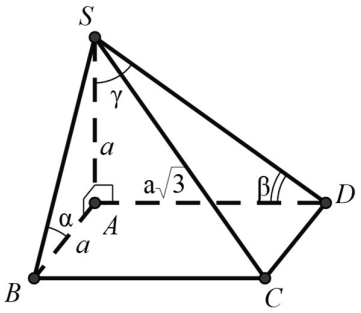
Hướng dẫn giải

Xác định góc α và β. Ta có:

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} AB \text{ là hình chiếu của SB trên (ABCD)} \\ AD \text{ là hình chiếu của SD trên (ABCD)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \widehat{SBA} \\ \beta = \widehat{SDA} \end{cases}$$

a)



Góc α giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABCD) là $\widehat{SBA}$

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow \Delta SAB$ vuông cân tại A

$\Rightarrow \widehat{SBA} = \alpha = 45°.$

b)

Góc β giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (ABCD) là $\widehat{SDA}$

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại A

$$\Rightarrow \tan\beta = \frac{SA}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \beta = 30°.$$

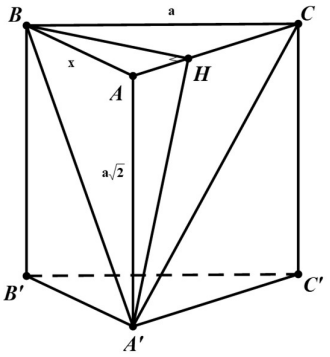
c)

$DA \perp (SAB) \Rightarrow$ SA là hình chiếu của SD trên (SAB) $\Rightarrow \gamma = \widehat{ASD}$

ΔSAD vuông tại A $\Rightarrow \tan\gamma = \frac{AD}{SA} = \sqrt{3} \Rightarrow \gamma = 60°.$

Ví dụ 3: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác cân tại A, $BC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$ và $\cos\widehat{BA'C} = \frac{5}{6}$. Xác định và tính góc giữa đường thẳng A'B và mặt phẳng (A A'C'C)

Hướng dẫn giải



Đặt $AB = x$ thì $A'B^2 = A'C^2 = x^2 + 2a^2$

Áp dụng định lí côsin trong $\Delta A'BC$, ta có:

$$\cos\widehat{BA'C} = \frac{A'B^2 + A'C^2 - BC^2}{2A'B.A'C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 4a^2 - a^2}{2(x^2 + 2a^2)} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = a$$

Kẻ $BH \perp AC$, khi đó $BH \perp (AA'C'C)$

Suy ra góc giữa đường thẳng A'B và mặt phẳng (AA'C'C) là góc $\widehat{BA'H}$.

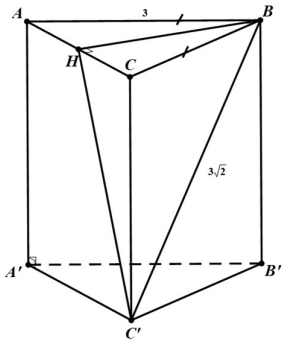
Trong tam giác vuông A'BH có

$$\sin\widehat{BA'H} = \frac{BH}{A'B} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BA'H} = 30°.$$

Ví dụ 4: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B. Biết $AB = 3\text{cm}, BC' = 3\sqrt{2}\text{cm}$. Xác định và tính góc hợp bởi đường thẳng BC' và mặt phẳng (ACC'A') bằng

Hướng dẫn giải

Gọi H là trung điểm của cạnh AC, suy ra HC' là hình chiếu của BC' lên mặt phẳng (ACC'A')



Do đó $\left(\widehat{BC',(ACC'A')}\right) = \left(\widehat{BC',HC'}\right)$

Ta có tam giác BHC' vuông tại H, cạnh

$BH = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ cm

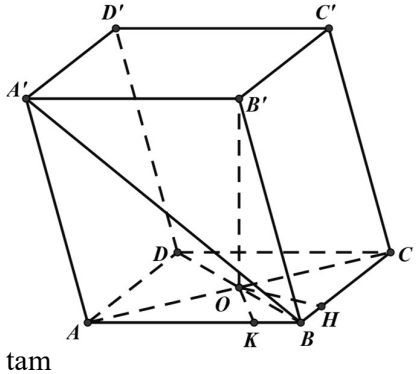
Ta có $\sin\widehat{HC'B} = \dfrac{BH}{BC'} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{HC'B} = 30°.$

Vậy $\left(\widehat{BC',(ACC'A')}\right) = 30°.$

Ví dụ 5: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{A} = 60°$. Chân đường vuông góc hạ từ B' xuống mặt phẳng (ABCD) trùng với giao điểm của hai đường chéo của đáy ABCD. Cho $BB' = a$. Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy

Hướng dẫn giải

Tính góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy.



Gọi $O = AC \cap BD$. Theo giả thiết ta có $B'O \perp (ABCD)$

$$\begin{cases} B'B \cap (ABCD) = B \\ B'O \perp (ABCD),\ O \in (ABCD) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hình chiếu B'B trên (ABCD) là OB

$\Rightarrow \left(B'B,(ABCD)\right) = (B'B,BO) = \widehat{B'BO}$

Tam giác ABD có $AB = AD = a$, $\widehat{BAD} = 60° \Rightarrow \Delta ABD$ là tam giác đều $\Rightarrow OB = \dfrac{a}{2}$

Trong tam giác vuông B'OB: $\cos\widehat{B'OB} = \dfrac{OB}{BB'} = \dfrac{\frac{a}{2}}{a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{B'OB} = 60°.$

Ví dụ 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông có cạnh bằng 4a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Tam giác SAB có diện tích bằng $\dfrac{8a^2\sqrt{6}}{3}$. Tính côsin của góc tạo bởi đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC)

Hướng dẫn giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên mặt phẳng (SBC)

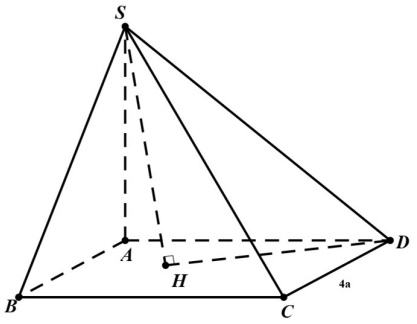
$\Rightarrow \left(\widehat{SD;(SBC)}\right) = \widehat{HSD} \Rightarrow \cos\left(\widehat{SD;(SBC)}\right) = \cos\widehat{DSH} = \dfrac{SH}{SD}$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}SA.AB=\frac{1}{2}SA.4a=\frac{8a^2\sqrt{6}}{3}\Rightarrow SA=\frac{4a\sqrt{6}}{3}$$

$V_{D.SBC}=\frac{1}{3}DH.S_{SBC}$ và

$$V_{D.SBC}=V_{S.BCD}=\frac{1}{3}.SA.S_{BCD}$$

$$=\frac{1}{3}.\frac{4a\sqrt{6}}{3}.\frac{1}{2}.4a.4a=\frac{32a^3\sqrt{6}}{9}$$



$$\Rightarrow \frac{1}{3}DH.S_{SBC}=\frac{32a^3\sqrt{6}}{9}\Rightarrow DH=\frac{32a^3\sqrt{6}}{3S_{SBC}}$$

Từ $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB\Rightarrow S_{SBC}=\frac{1}{2}BC.SB=\frac{1}{2}.4a.SB=2a.SB$

$$SB^2=SA^2+AB^2=\left(\frac{4a\sqrt{6}}{3}\right)^2+16a^2=\frac{80a^2}{3}\Rightarrow SB=a\sqrt{\frac{80}{3}}\Rightarrow S_{SBC}=2a^2\sqrt{\frac{80}{3}}$$

Thế vào (1) $\Rightarrow DH=\dfrac{32a^3\sqrt{6}}{3.2a^2\sqrt{\frac{80}{3}}}=\dfrac{4a\sqrt{10}}{5}$

$$SD^2=SA^2+AD^2=\left(\frac{4a\sqrt{6}}{3}\right)^2+16a^2=\frac{80a^2}{3}\Rightarrow SD=a\sqrt{\frac{80}{3}}$$

$$\Rightarrow SH^2=SD^2-HD^2=\frac{80a^2}{3}-\left(\frac{4a\sqrt{10}}{5}\right)^2=\frac{304a^2}{15}$$

$$\Rightarrow SA=a\sqrt{\frac{304}{15}}\Rightarrow\cos\left(\widehat{SD;(SBC)}\right)=\frac{SH}{SD}=\frac{a\sqrt{\frac{304}{15}}}{a\sqrt{\frac{80}{3}}}=\frac{\sqrt{19}}{5}.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, SB. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $(IJK)//(SAC)$.

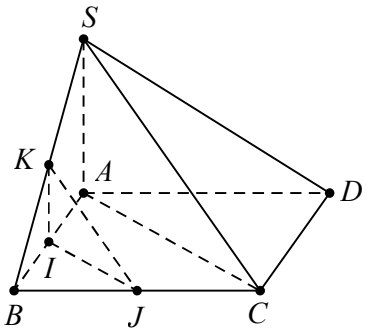
B. Góc giữa SC và BD bằng 60^0.

C. $BD\perp(IJK)$.

D. $BD\perp(SAC)$.

Lời giải

Chọn B



Xét tam giác SBC, có $\frac{BK}{BS}=\frac{BJ}{BC}=\frac{1}{2}$ suy ra JK song song với SC (1).

Tam giác SAB, có $\frac{BI}{BA}=\frac{BK}{BS}=\frac{1}{2}$ suy ra IK song song với SA (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra $mp(IJK)//mp(SAC)$ $(*)$.

Vì $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow BD\perp AC$ mà $SA\perp BD$ suy ra $BD\perp(SAC)$.

Kết hợp với $(*)$, ta được $BD\perp(IJK)$. Vậy góc giữa hai đường thẳng SC, BD bằng 90^0.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, BC, BD đôi một vuông góc với nhau. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. Góc giữa CD và mặt phẳng (ABD) là góc $\widehat{CBD}$.

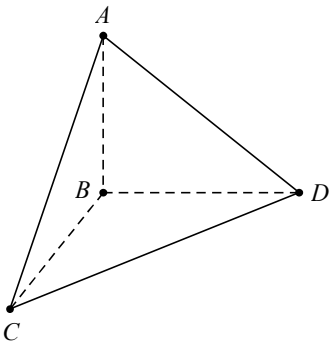
B. Góc giữa AC và mặt phẳng (BCD) là góc $\widehat{ACB}$.

C. Góc giữa AD và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{ADB}$.

D. Góc giữa AC và mặt phẳng (ABD) là góc $\widehat{CBA}$.

Lời giải

Chọn B



Dựa vào đáp án, ta thấy rằng:

□ **A sai**, vì $\begin{cases}CB\perp BD\\CB\perp BA\end{cases}\Rightarrow CB\perp(ABD)\Rightarrow B$ là hình chiếu của C trên $mp(ABD)$.

Suy ra góc giữa CD và mặt phẳng (ABD) là góc $\widehat{CDB}$.

□ **B đúng**, vì $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCD) \Rightarrow B$ là hình chiếu của A trên $mp\,(BCD)$.

Suy ra góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (BCD) là góc $\widehat{ACB}$.

□ **C sai**, vì $\begin{cases} BD \perp BA \\ BD \perp BC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (ABC) \Rightarrow B$ là hình chiếu của D trên $mp\,(ABC)$.

Suy ra góc giữa AD và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{DAB}$.

□ **D sai**, vì B là hình chiếu của C trên $mp\,(ABD)$ suy ra góc giữa AC và mặt phẳng (ABD) là góc $\widehat{CAB}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC. H là hình chiếu của O trên (ABC). Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. H là trung điểm của cạnh AB.

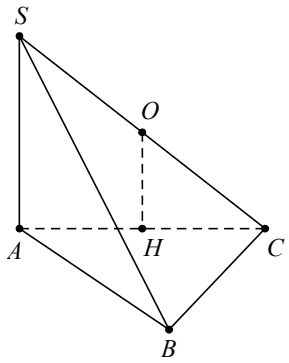
B. H là trung điểm của cạnh BC.

C. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

D. H là trọng tâm của tam giác ABC.

Lời giải

Chọn C



Ta có SA vuông góc với $mp\,(ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ mà $AB \perp BC$ suy ra $BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow$ tam giác SBC vuông tại $B \Rightarrow O$ là trung điểm của SC.

Theo bài ra, ta có $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \,//\, SA \Rightarrow H$ là trung điểm của AC.

Mà tam giác ABC vuông tại B nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác nhọn, cạnh bên $SA = SB = SC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC), khi đó

A. H là trực tâm của tam giác ABC.

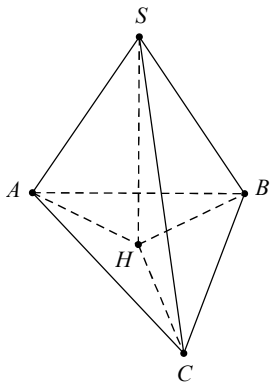
B. H là trọng tâm của tam giác ABC.

C. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

D. H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Lời giải

Chọn C



Vì H là hình chiếu vuông góc của S trên $mp\,(ABC)$ nên ta có

- Tam giác SAH vuông tại H, có $SA^2 = AH^2 + SH^2$.
- Tam giác SBH vuông tại H, có $SB^2 = BH^2 + SH^2$.
- Tam giác SCH vuông tại H, có $SC^2 = CH^2 + SH^2$.

Kết hợp điều kiện $SA = SB = SC$ suy ra $HA = HB = HC$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BSC} = 120^0, \widehat{CSA} = 60^0, \widehat{ASB} = 90^0$ và $SA = SB = SC$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC), khi đó

A. I là trung điểm của AB.

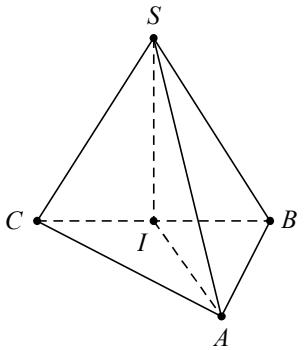
B. I là trọng tâm của tam giác ABC.

C. I là trung điểm của AC.

D. I là trung điểm của BC.

Lời giải

Chọn D



Đặt $SA = a$. Tam giác SAB vuông cân tại S, có $AB = \sqrt{SA^2 + SB^2} = a\sqrt{2}$.

Tam giác SAC cân tại S, có $\widehat{CSA} = 60^0$ suy ra $SA = SC = AC = a$.

Áp dụng định lí Cosin cho tam giác SBC, ta có $BC^2 = SB^2 + SC^2 - 2.SB.SC.\cos\widehat{BSC}$

$\Rightarrow BC^2 = a^2 + a^2 - 2a^2.\cos 120^0 = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3} = \sqrt{AB^2 + AC^2}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Khi đó, tam giác ABC vuông tại A mà I là hình chiếu của S trên $mp(ABC)$.

Suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC hay chính là trung điểm BC..

Câu 6: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $\widehat{BAD}=60^0$ và $A'A=A'B=A'D$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là

A. trung điểm của AO.

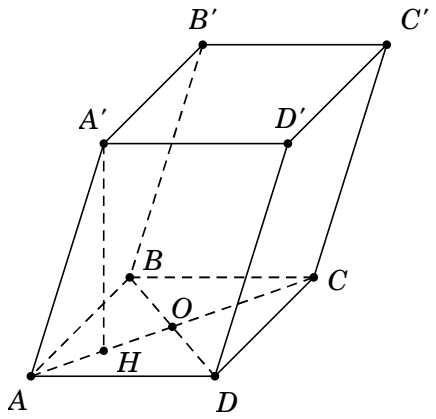
B. trọng tâm của tam giác ABD.

C. tâm O của hình thoi $ABCD$.

D. trọng tâm của tam giác BCD.

Lời giải

Chọn B



Vì $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AB=AD$ mà $\widehat{BAD}=60^0$ suy ra tam giác ABD đều (1).

Ta có $A'A=A'B=A'D$ nên hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có các mặt bên tạo với đáy một góc bằng nhau. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là

A. tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

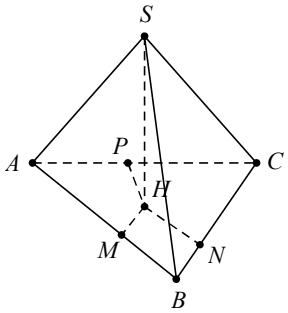
B. tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

C. trọng tâm của tam giác ABC.

D. giao điểm của hai đường thẳng AC và BD.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của S trên các cạnh AB, AC, BC.

Ta có $\begin{cases} SH \perp AB \\ SM \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHM) \Rightarrow AB \perp HM$, tương tự ta được $HN \perp AC, HP \perp BC$.

Khi đó $\widehat{(SAB);(ABC)} = \widehat{(SM;HM)} = \widehat{SMH}$, tương tự suy ra $\Rightarrow \widehat{SMH} = \widehat{SNH} = \widehat{SPH}$.

$\Rightarrow \Delta SMH = \Delta SNH = \Delta SPH \Rightarrow HM = HN = NP \Rightarrow H$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc với nhau và $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$. Độ dài đoạn thẳng AD bằng

A. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

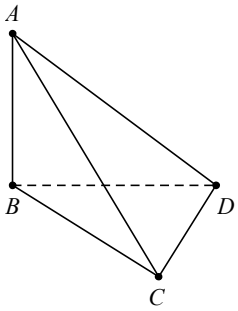
B. $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$.

C. $\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$.

D. $\sqrt{-a^2 + b^2 + c^2}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCD) \Rightarrow$ tam giác ABD vuông tại B.

Lại có $\begin{cases} AB \perp CD \\ BC \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABC) \Rightarrow$ tam giác BCD vuông tại C.

Khi đó $\begin{cases} AD^2 = AB^2 + BD^2 \\ BD^2 = BC^2 + CD^2 \end{cases} \Rightarrow AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 \Rightarrow AD = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc với nhau. Điểm nào dưới đây các đều bốn đỉnh A, B, C, D của tứ diện $ABCD$?

A. Trung điểm của cạnh BD.

B. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

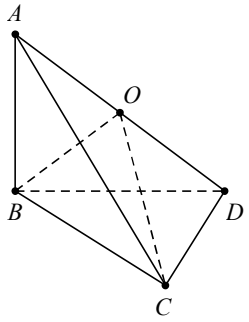
Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

C. Trung điểm của cạnh AD.

D. Trọng tâm của tam giác ACD.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCD) \Rightarrow$ tam giác ABD vuông tại B.

Suy ra $IA = IB = ID = \dfrac{AD}{2}$, với I là trung điểm của AD. (1)

Lại có $\begin{cases} AB \perp CD \\ BC \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABC) \Rightarrow$ tam giác ACD vuông tại C.

Suy ra $EA = EC = ED = \dfrac{AD}{2}$, với E là trung điểm của AD. (2)

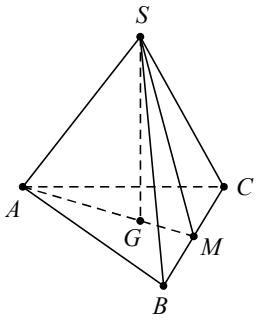
Từ $(1),(2)$ suy ra $I \equiv E$ nên trung điểm của cạnh AD cách đều A, B, C, D.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và độ dài các cạnh bên $SA = SB = SC = b$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Độ dài đoạn thẳng SG bằng

A. $\dfrac{\sqrt{9b^2+3a^2}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{b^2-3a^2}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{9b^2-3a^2}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{b^2+3a^2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Vì $SA = SB = SC$ và G là trọng tâm tam giác ABC

Suy ra G là chân đường cao kẻ từ đỉnh S xuống mặt phẳng (ABC).

Gọi M là trung điểm của BC suy ra $BM = CM = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Tam giác ABC đều cạnh a, có $GM=\frac{AM}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Tam giác SBM vuông tại M, có $SM=\sqrt{SB^2-MB^2}=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$.

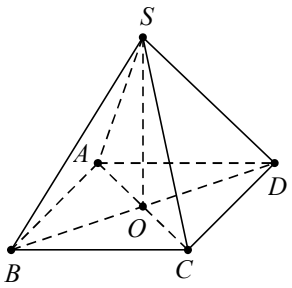
Tam giác SGM vuông tại G, có $SG=\sqrt{SM^2-GM^2}=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{12}}=\frac{\sqrt{9b^2-3a^2}}{3}$.

Câu 11: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, cạnh bằng $2a$. Trên đường thẳng qua O và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ lấy điểm S. Biết góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45^0. Độ dài cạnh SO bằng

A. $SO=a\sqrt{3}$. **B.** $SO=a\sqrt{2}$. **C.** $SO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $SO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Vì O là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Suy ra OA là hình chiếu của SA trên mặt phẳng $(ABCD)$

Khi đó $\widehat{SA;(ABCD)}=\widehat{(SA;OA)}=\widehat{SAO}=45^0\Rightarrow$ tam giác SAO vuông cân. (1)

Tam giác ABC vuông cân tại B, có $OA=\frac{AC}{2}=\frac{AB\sqrt{2}}{2}=a\sqrt{2}$. (2)

Từ (1),(2) suy ra $SO=OA=a\sqrt{2}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có cạnh $AB=a$, $BC=2a$. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, cạnh $SA=a\sqrt{15}$. Tính góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng (ABD).

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn C

Do $SA\perp(ABCD)$ nên $\widehat{SC,(ABD)}=\widehat{SC,(ABCD)}=\widehat{SC,AC}=\widehat{SCA}$.

Xét tam giác vuông SAC, ta có $\tan\widehat{SCA}=\frac{SA}{AC}=\frac{SA}{\sqrt{AB^2+BC^2}}=\sqrt{3}$.

Suy ra $\widehat{SCA}=60^0$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi φ là góc giữa SO và mặt phẳng $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi=2\sqrt{2}$. **B.** $\varphi=60^0$. **C.** $\tan\varphi=2.$. **D.** $\varphi=45^0$.

Lời giải

Chọn A

Vì $SA\perp(ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SO trên mặt đáy $(ABCD)$ là AO. Do đó $\widehat{(SO,(ABCD))}=\widehat{(SO,OA)}=\widehat{SOA}$.

Trong tam giác vuông SAO, ta có $\tan\widehat{SOA}=\dfrac{SA}{OA}=2\sqrt{2}$.

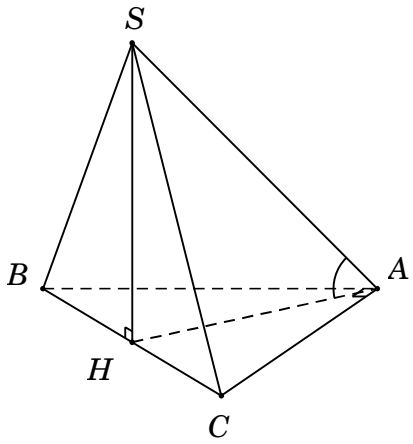
Vậy SO hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc nhọn φ thỏa mãn $\tan\varphi=2\sqrt{2}$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC}=60^\circ$, tam giác SBC là tam giác đều có cạnh bằng $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy (ABC)

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm của BC, suy ra $SH\perp(ABC)$.

Vì $SH\perp(ABC)$ nên HA là hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABC).

Do đó $\widehat{(SA,(ABC))}=\widehat{(SA,AH)}=\widehat{SAH}$.

- Tam giác SBC đều cạnh $2a$ nên $SH=a\sqrt{3}$.
- Tam giác ABC vuông tại A nên $AH=\dfrac{1}{2}BC=a$.

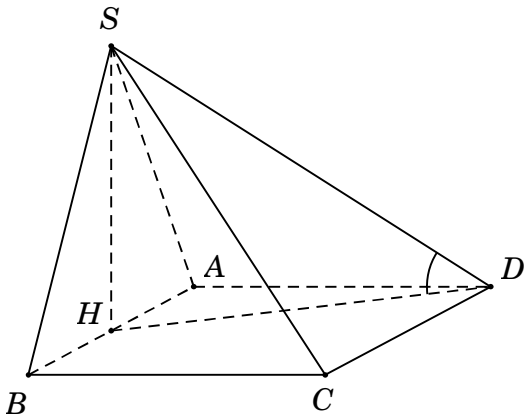
Tam giác vuông SAH, có $\tan\widehat{SAH}=\dfrac{SH}{AH}=\sqrt{3}$, suy ra $\widehat{SAH}=60^0$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi φ là góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\cot\varphi=\dfrac{5}{\sqrt{15}}$. **B.** $\cot\varphi=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\varphi=30^0$. **D.** $\cot\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm AB, suy ra $SH\perp AB\Rightarrow SH\perp(ABCD)$. Vì $SH\perp(ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SD trên mặt đáy $(ABCD)$ là HD.

Do đó $\widehat{SD,(ABCD)}=\widehat{(SD,HD)}=\widehat{SDH}$.

● Tam giác SAB đều cạnh a nên $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

● $HD=\sqrt{AH^2+AB^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Tam giác vuông SHD, có $\cot\widehat{SDH}=\dfrac{DH}{SH}=\dfrac{5}{\sqrt{15}}$.

Câu 16: Cho chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 2, cạnh bên bằng 3. Gọi φ là góc giữa giữa cạnh bên và mặt đáy. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi=\sqrt{7}$. **B.** $\varphi=60^0$. **C.** $\varphi=45^0$. **D.** $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi O là tâm mặt đáy $(ABCD)$, suy ra $SO\perp(ABCD)$.

Vì $SO\perp(ABCD)$, suy ra OA là hình chiếu của SA trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Do đó $\widehat{(SA,(ABCD))}=\widehat{(SA,AO)}=\widehat{SAO}$.

Tam giác vuông SOA, có $\tan\widehat{SAO}=\dfrac{SO}{AO}=\dfrac{\sqrt{SB^2-BO^2}}{AO}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$ đều. Gọi α là góc giữa AB và mặt phẳng (BCD). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\cos\alpha=0$. **D.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi H là trọng tâm tam giác đều $BCD\Rightarrow AH\perp(BCD)$.

Gọi a là độ dài cạnh của tứ diện $ABCD\Rightarrow BH=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

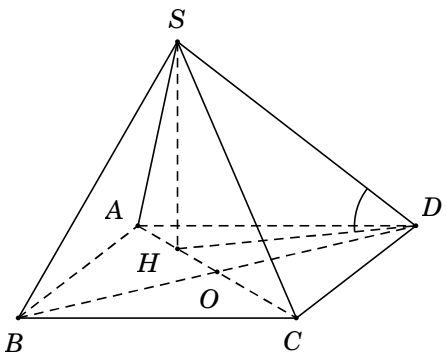
Khi đó $\alpha=\widehat{ABH}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{BH}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$..

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng $4a$. Cạnh bên $SA=2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của H của đoạn thẳng AO. Gọi α là góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\alpha=\sqrt{5}$. **B.** $\tan\alpha=1$. **C.** $\tan\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\tan\alpha=\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Vì $SH\perp(ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SD trên mặt phẳng $(ABCD)$ là HD.

Do đó $\widehat{SD,(ABCD)}=\widehat{(SD,HD)}=\widehat{SDH}$.

- Tính được $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=a\sqrt{2}$.
- Trong tam giác ADH, có $DH=\sqrt{AH^2+AD^2-2AH.AD.\cos45^0}=a\sqrt{10}$.

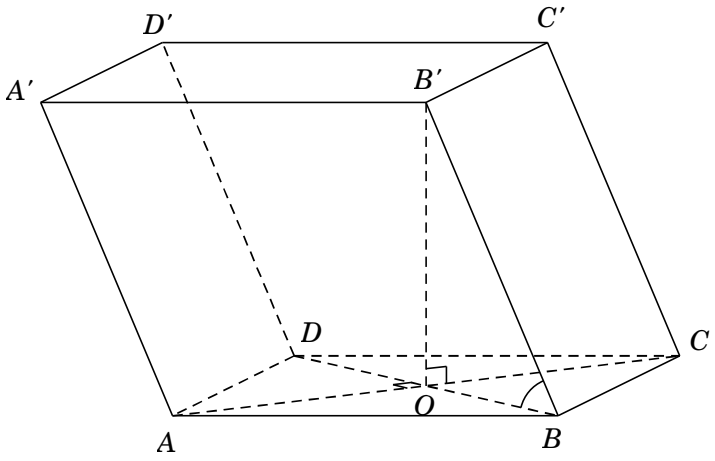
Tam giác vuông SHD, có $\tan\widehat{SDH}=\frac{SH}{HD}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 19: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD}=60^0$. Hình chiếu vuông góc của B' xuống mặt đáy trùng với giao điểm hai đường chéo của đáy và cạnh bên $BB'=a$. Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy.

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD$. Theo giả thiết $B'O \perp (ABCD)$.

Do đó $\widehat{BB',(ABCD)} = \widehat{BB',BO} = \widehat{B'BO}$.

Từ giả thiết suy ra tam giác ABD đều cạnh a, suy ra $BO = \frac{1}{2}BD = \frac{a}{2}$.

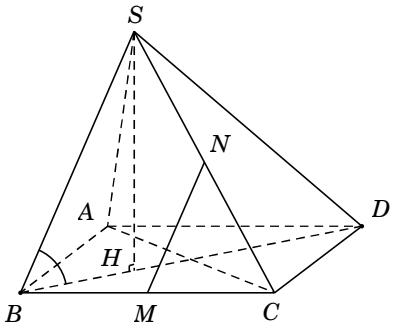
Tam giác vuông $B'BO$, có $\cos\widehat{B'BO} = \frac{BO}{BB'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{B'BO} = 60^0$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a,\ AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc H của S trên mặt đáy trùng với trọng tâm tam giác ABC và $SH = \frac{a}{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC và SC. Gọi α là góc giữa đường thẳng MN với mặt đáy $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\alpha = \frac{4}{3}$. **B.** $\tan\alpha = \frac{3}{4}$. **C.** $\tan\alpha = \frac{2}{3}$. **D.** $\tan\alpha = 1$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $MN \parallel SB$. Do đó $\widehat{MN,(ABCD)} = \widehat{SB,(ABCD)}$.

Do $SH \perp (ABCD)$ nên $\widehat{MN,(ABCD)} = \widehat{SB,(ABCD)} = \widehat{SB,HB} = \widehat{SBH}$.

Ta có $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=2a$; $BH=\dfrac{BD}{3}=\dfrac{2a}{3}$.

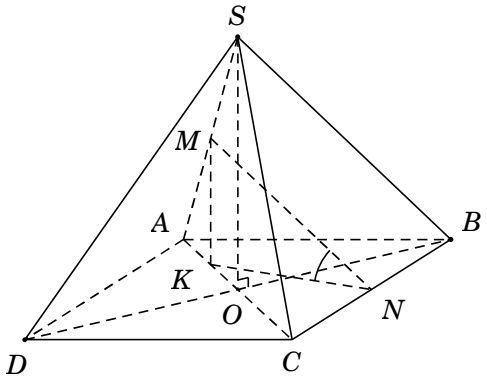
Tam giác SHB, có $\tan\widehat{SBH}=\dfrac{SH}{BH}=\dfrac{3}{4}$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng a, SO vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA và BC. Tính góc giữa đường thẳng MN với mặt phẳng $(ABCD)$, biết $MN=\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn C



Kẻ $MK\parallel SO$, do $SO\perp(ABCD)$, suy ra $MK\perp(ABCD)$.

Do đó $\widehat{MN,(ABCD)}=\widehat{MN,NK}=\widehat{MNK}$. Ta có $CK=\dfrac{3}{4}CA=\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Tam giác CNK, có $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\cos 45^0=\dfrac{CN^2+CK^2-KN^2}{2CN.CK}\Rightarrow KN=\dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.

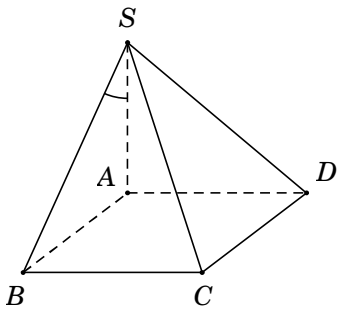
Tam giác vuông MNK, có $\cos\widehat{MNK}=\dfrac{NK}{MN}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{MNK}=60^0$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA=2a$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\cos\varphi=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\varphi=60^0$. **D.** $\varphi=30^0$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\begin{cases} BA \perp AD \\ BA \perp SA \end{cases} \Rightarrow BA \perp (SAD)$. Suy ra hình chiếu vuông góc của SB trên mặt phẳng (SAD) là SA. Do đó $\widehat{SB,(SAD)} = \widehat{(SB,SA)} = \widehat{BSA}.$

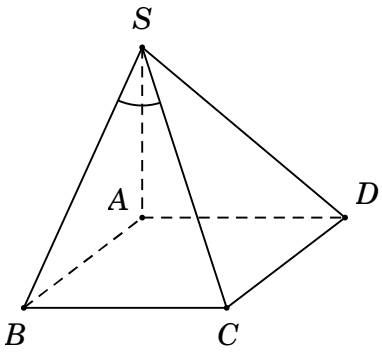
Tam giác vuông SAB, ta có $\cos\widehat{BSA} = \dfrac{SB}{SA} = \dfrac{SA}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}.$

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy. Gọi α là góc giữa SC và mặt phẳng (SAB). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{8}}.$ **B.** $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{7}}.$ **C.** $\alpha = 30^0.$ **D.** $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}}.$

Lời giải

Chọn B



Ta có $\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$. Suy ra hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (SAB) là SB. Do đó $\widehat{SC,(SAB)} = \widehat{(SC,SB)} = \widehat{CSB}.$

Tam giác vuông SAB, có $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{7}.$

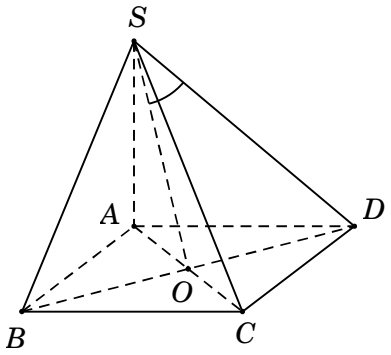
Tam giác vuông SBC, có $\tan\widehat{CSB} = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}.$

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc gữa SC và mặt đáy $(ABCD)$ bằng 45^0. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\tan\varphi=\sqrt{5}$. **C.** $\varphi=60^0$. **D.** $\varphi=45^0$.

Lời giải

Chọn A



Xác định $45^0=\widehat{SC,(ABCD)}=\widehat{SC,AC}=\widehat{SCA}$, suy ra $SA=AC=2a\sqrt{2}$.

Gọi $O=AC\cap BD$, ta có $\begin{cases}DO\perp AC\\DO\perp SA\end{cases}\Rightarrow DO\perp(SAC)$ nên hình chiếu vuông góc của SD trên mặt phẳng (SAC) là SO. Do đó $\widehat{SD,(SAC)}=\widehat{SD,SO}=\widehat{DSO}$.

Ta có $DO=\frac{1}{2}BD=a\sqrt{2}$; $SO=\sqrt{SA^2+AO^2}=\sqrt{SA^2+DO^2}=a\sqrt{10}$.

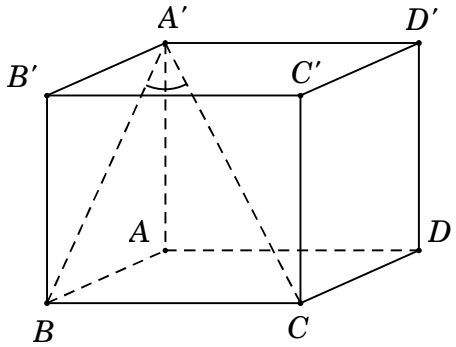
Tam giác vuông SOD, có $\tan\widehat{DSO}=\frac{OD}{OS}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 25: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2\sqrt{2}$, $AA'=4$. Tính góc giữa đường thẳng $A'C$ với mặt phẳng $(AA'B'B)$.

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp AA'\end{cases}\Rightarrow BC\perp(AA'B'B)$.

Do đó $\widehat{A'C,(AA'B'B)}=\widehat{(A'C,A'B)}=\widehat{CA'B}$.

Vì $BC \perp (AA'B'B) \Rightarrow BC \perp BA'$ nên tam giác $A'BC$ vuông tại B.

Tam giác vuông $A'BC$, có $\tan\widehat{CA'B} = \dfrac{BC}{A'B} = \dfrac{BC}{\sqrt{AA'^2 + AB^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

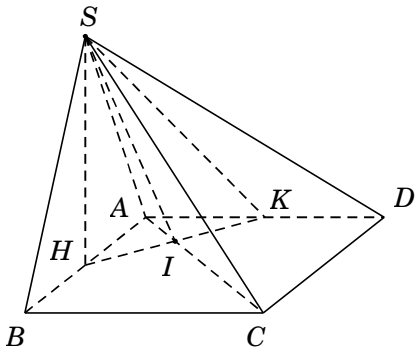
Vậy $A'C$ tạo với mặt phẳng $(AA'B'B)$ một góc 30^0.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SHK). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi = \sqrt{7}$. **B.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $I = HK \cap AC$. Do H, K lần lượt là trung điểm của AB và AD nên $HK \parallel BD$. Suy ra $HK \perp AC$. Lại có $AC \perp SH$ nên suy ra $AC \perp (SHK)$.

Do đó $\widehat{(SA,(SHK))} = \widehat{(SA,SI)} = \widehat{ASI}$.

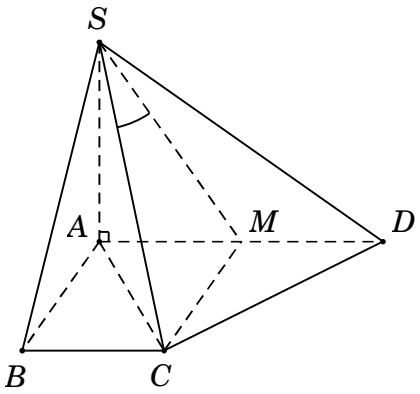
Tam giác SIA vuông tại I, có $\tan\widehat{ASI} = \dfrac{AI}{SI} = \dfrac{\frac{1}{4}AC}{\sqrt{SA^2 - AI^2}} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa đường thẳng SC với mặt phẳng (SAD).

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm AD, suy ra $ABCM$ là hình vuông nên $CM \perp AD$.

Ta có $\begin{cases} CM \perp AD \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAD)$.

Suy ra hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (SAD) là SM.

Do đó $\widehat{SC,(SAD)} = \widehat{SC,SM} = \widehat{CSM}$.

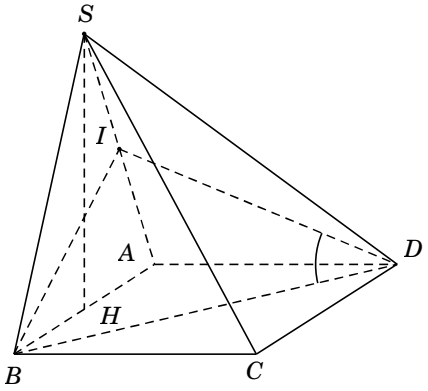
Tam giác vuông SMC, có $\tan\widehat{CSM} = \dfrac{CM}{SM} = \dfrac{AB}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \to \widehat{CSM} = 30^0$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác đều có đường cao SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa BD và mặt phẳng (SAD). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\alpha = 60^0$. **B.** $\alpha = 30^0$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. **D.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm SA. Do tam giác SAD đều nên $BI \perp SA$. (1)

Ta có $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SH \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAD) \Rightarrow AD \perp BI$. (2)

Từ (1) và (2), ta có $BI \perp (SAD)$ nên hình chiếu vuông góc của BD trên mặt phẳng (SAD) là ID. Do đó $\widehat{BD,(SAD)} = \widehat{BD,ID} = \widehat{BDI}$.

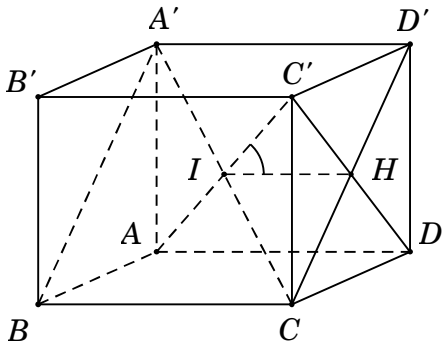
Tam giác BDI vuông tại I nên $\sin\widehat{BDI} = \dfrac{BI}{BD} = \dfrac{\frac{AB\sqrt{3}}{2}}{AB\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Câu 29: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi α là góc giữa AC' và mặt phẳng $(A'BCD')$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\alpha = 30^0$. **B.** $\tan\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** $\alpha = 45^0$. **D.** $\tan\alpha = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $A'C \cap AC' = I;\ C'D \cap CD' = H$.

Ta có $\begin{cases} C'D \perp CD' \\ C'D \perp A'D' \end{cases} \Rightarrow C'D \perp (A'BCD') \Rightarrow IH$ là hình chiếu vuông góc của AC' trên mặt phẳng $(A'BCD')$.

Do đó $\widehat{AC',(A'BCD')} = \widehat{C'I,(A'BCD')} = \widehat{C'I,HI} = \widehat{C'IH}$.

Trong tam giác vuông $C'HI$, có $\tan\widehat{C'IH} = \dfrac{C'H}{IH} = \dfrac{\frac{AB\sqrt{2}}{2}}{\frac{AB}{2}} = \sqrt{2}$.

Dạng 4. Thiết Diện

Phương pháp

Việc xác định thiết diện với một khối đa diện với một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước, trước hết ta phải tìm được điểm chung của một mặt phẳng đã cho với một mặt của khối đa diện, sau đó dựa vào mối quan hệ giữa tính song song và vuông góc để tìm ra phương của giao tuyến giữa mặt đã cho và các mặt của khối đa diện. Thường ta hay dùng hệ quả sau để tìm điểm chung

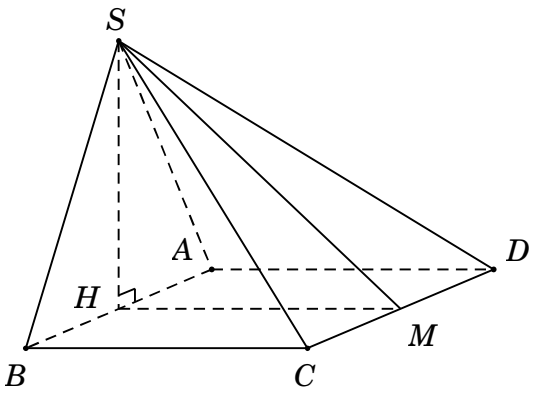
1) $\begin{cases} a \perp b \\ (\alpha) \perp b \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \subset (\alpha) \\ a\,//\,(\alpha) \end{array}\right.$; 2) $\begin{cases} O \in b \perp a \\ O \in (\alpha) \perp a \end{cases} \Rightarrow b \subset (\alpha)$

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a$, $BC=2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) đi qua S vuông góc với AB. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $S=a^2\sqrt{3}$. **D.** $S=\dfrac{a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm $AB\Rightarrow SH\perp AB.$ Suy ra:

- $SH\subset(\alpha)$.
- $SH\perp(ABCD)$ (do $(SAB)\perp(ABCD)$ theo giao tuyến AB).

Kẻ $HM\perp AB$ $(M\in CD)\Rightarrow HM\subset(\alpha).$

Do đó thiết diện là tam giác SHM vuông tại H.

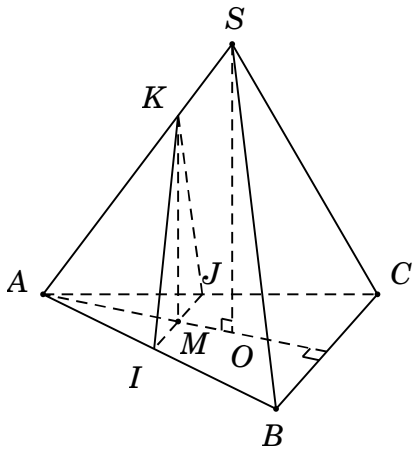
Ta có $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $HM=BC=2a.$ Vậy $S_{\Delta SHM}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.2a=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Câu 2: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tâm O; $SO=2a$. Gọi M là điểm thuộc đoạn AO $(M\neq A;M\neq O)$. Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AO. Đặt $AM=x$. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp $S.ABC$.

A. $S=2a^2$. **B.** $S=2x^2$. **C.** $S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(a-x)^2$. **D.** $S=2(a-x)^2$.

Lời giải

Chọn B



Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABC)$ (O là tâm của tam giác ABC).

Do đó $SO \perp AA'$ mà $(\alpha) \perp AA'$ suy ra $SO \parallel (\alpha)$.

Tương tự ta cũng có $BC \parallel (\alpha)$.

Qua M kẻ $IJ \parallel BC$ với $I \in AB,\ J \in AC$; kẻ $MK \parallel SO$ với $K \in SA$.

Khi đó thiết diện là tam giác KIJ.

Diện tích tam giác IJK là $S_{\Delta IJK} = \frac{1}{2} IJ.MK$.

Trong tam giác ABC, ta có $\frac{IJ}{BC} = \frac{AM}{AA'}$ suy ra $IJ = \frac{AM.BC}{AA'} = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$.

Tương tự trong tam giác SAO, ta có $\frac{MK}{SO} = \frac{AM}{AO}$ suy ra $MK = \frac{AM.SO}{AO} = 2x\sqrt{3}$.

Vậy $S_{\Delta IJK} = \frac{1}{2}\frac{2x\sqrt{3}}{3}.2x\sqrt{3} = 2x^2$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với trung tuyến SI của tam giác SBC. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S_{\Delta AMN} = \frac{2a^2\sqrt{21}}{49}$.

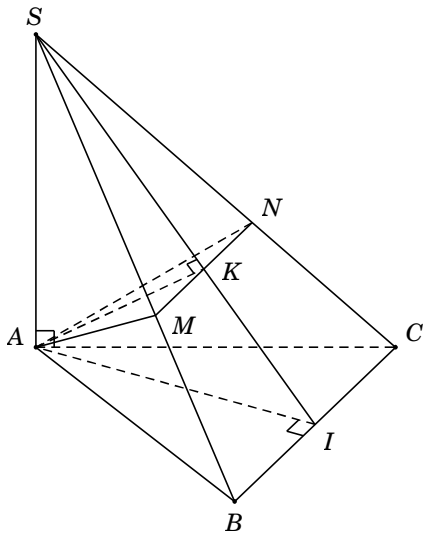
B. $S_{\Delta AMN} = \frac{4a^2\sqrt{21}}{49}$.

C. $S_{\Delta AMN} = \frac{a^2\sqrt{21}}{7}$.

D. $S_{\Delta AMN} = \frac{2a^2\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm $BC \Rightarrow AI \perp BC$. Kẻ $AK \perp SI$ $(K \in SI)$.

Từ K kẻ đường thẳng song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại M, N.

Khi đó thiết diện là tam giác AMN.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AK \Rightarrow MN \perp AK.$

Tam giác vuông SAI, có $AK = \dfrac{SA.AI}{\sqrt{SA^2 + AI^2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Tam giác SBC, có $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{SK}{SI} = \dfrac{SA^2}{SI^2} = \dfrac{SA^2}{SA^2 + AI^2} = \dfrac{4}{7} \Rightarrow MN = \dfrac{4a}{7}$.

Vậy $S_{\Delta AMN} = \dfrac{1}{2} AK.MN = \dfrac{2a^2\sqrt{21}}{49}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua trung điểm E của SC và vuông góc với AB. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S_{EFGH} = \dfrac{5a^2\sqrt{3}}{16}$.

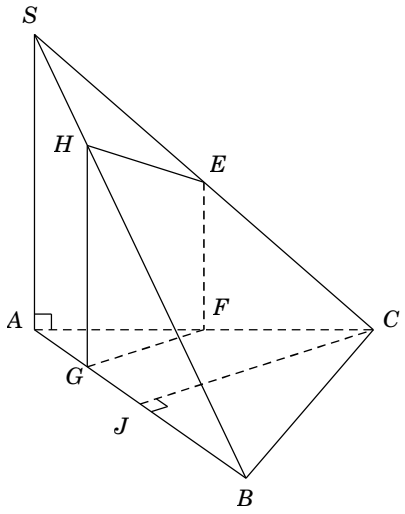
B. $S_{EFGH} = \dfrac{a^2\sqrt{7}}{32}$.

C. $S_{EFGH} = \dfrac{5a^2\sqrt{3}}{32}$.

D. $S_{EFGH} = \dfrac{5a^2\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi F là trung điểm AC, suy ra $EF \parallel SA$.

Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB$ nên $EF \perp AB$. (1)

Gọi J, G lần lượt là trung điểm AB, AG.

Suy ra $CJ \perp AB$ và $FG \parallel CJ$ nên $FG \perp AB$. (2)

Trong ΔSAB kẻ $GH \parallel SA$ $(H \in SB)$, suy ra $GH \perp AB$. (3)

Từ (1), (2) và (3), suy ra thiết diện cần tìm là hình thang vuông $EFGH$.

Do đó $S_{EFGH} = \frac{1}{2}(EF + GH).FG$.

Ta có $EF = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2}$; $FG = \frac{1}{2}CJ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$; $\frac{GH}{SA} = \frac{BG}{BA} \Rightarrow GH = BG = \frac{3a}{4}$.

Vậy $S_{EFGH} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{3a}{4}\right).\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{32}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với SC. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S_{\Delta BIH} = \frac{a^2\sqrt{15}}{10}$.

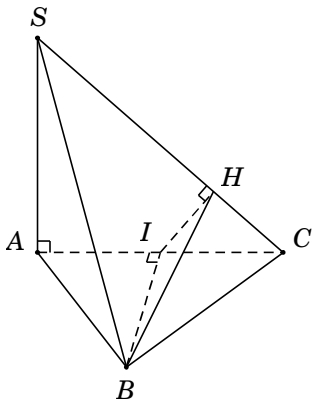
B. $S_{\Delta BIH} = \frac{a^2\sqrt{5}}{8}$.

C. $S_{\Delta BIH} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

D. $S_{\Delta BIH} = \frac{a^2\sqrt{15}}{20}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của AC, suy ra $BI \perp AC$.

Ta có $\begin{cases} BI \perp AC \\ BI \perp SA \end{cases} \Rightarrow BI \perp (SAC) \Rightarrow BI \perp SC$. (1)

Kẻ $IH \perp SC$ $(H \in SC)$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $SC \perp (BIH)$.

Vậy thiết diện cần tìm là tam giác IBH.

Do $BI \perp (SAC) \Rightarrow BI \perp IH$ nên ΔIBH vuông tại I.

Ta có BI đường cao của tam giác đều cạnh a nên $BI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác CHI đồng dạng tam giác CAS, suy ra

$$\frac{IH}{SA} = \frac{CI}{CS} \Rightarrow IH = \frac{CI.SA}{CS} = \frac{CI.SA}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

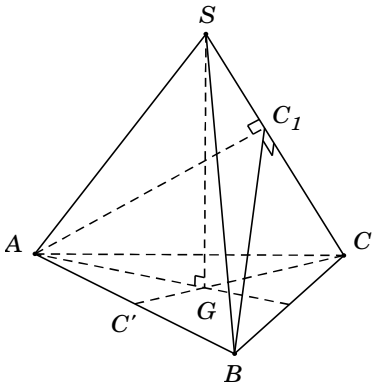
Vậy $S_{\Delta BIH} = \dfrac{1}{2} BI.IH = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{20}$.

Câu 6: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b. Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC. Tìm hệ thức giữa a và b để (α) cắt SC tại điểm C_1 nằm giữa S và C.

A. $a > b\sqrt{2}$. **B.** $a > b\sqrt{3}$. **C.** $a < b\sqrt{2}$. **D.** $a < b\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SG \perp (ABC)$.

Gọi C' là trung điểm AB. Suy ra C, C', G thẳng hàng.

Ta có $\begin{cases} AB \perp CC' \\ SG \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SCC') \Rightarrow AB \perp SC$. (1)

Trong tam giác SAC, kẻ $AC_1 \perp SC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $SC \perp (ABC_1)$.

Suy ra thiết diện cần tìm là tam giác ABC_1 thỏa mãn đi qua A và vuông góc với SC.

Tam giác SAC cân tại S nên để C_1 nằm giữa S và C khi và chỉ khi $\widehat{ASC} < 90^0$.

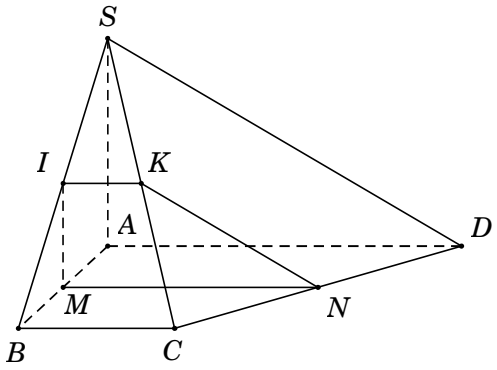
Suy ra $\cos \widehat{ASC} > 0 \Leftrightarrow SA^2 + SC^2 - AC^2 > 0 \Leftrightarrow 2b^2 - a^2 > 0 \rightarrow a < b\sqrt{2}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, đáy lớn $AD = 8$, $BC = 6$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = 6$. Gọi M là trung điểm AB. Gọi (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB. Thiết diện của (P) và hình chóp có diện tích bằng:

A. 10. **B.** 20. **C.** 15. **D.** 16.

Lời giải

Chọn C



Do $(P) \perp AB \Rightarrow (P) \parallel SA$.

Gọi I là trung điểm của $SB \Rightarrow MI \parallel SA \Rightarrow MI \subset (P)$.

Gọi N là trung điểm của $CD \Rightarrow MN \perp AB \Rightarrow MN \subset (P)$.

Gọi K là trung điểm của $SC \Rightarrow IK \parallel BC$, mà $MN \parallel BC \Rightarrow MN \parallel IK \Rightarrow IK \subset (P)$.

Vậy thiết diện của (P) và hình chóp là hình thang $MNKI$ vuông tại M.

Ta có:

MI là đường trung bình của tam giác $SAB \Rightarrow MI = \frac{1}{2}SA = 3$.

IK là đường trung bình của tam giác $SBC \Rightarrow IK = \frac{1}{2}BC = 3$.

MN là đường trung bình của hình thang $ABCD \Rightarrow MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = 7$.

Vậy $S_{MNKI}=\dfrac{IK+MN}{2}.MI=15.$

Câu 8: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tâm O, đường cao AA'; $SO=2a$. Gọi M là điểm thuộc đoạn OA' $(M\neq A';M\neq O)$. Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AA'. Đặt $AM=x$. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp $S.ABC$.

A. $S_{IJEF}=-2\left(8x^2-6\sqrt{3}ax+3a^2\right).$

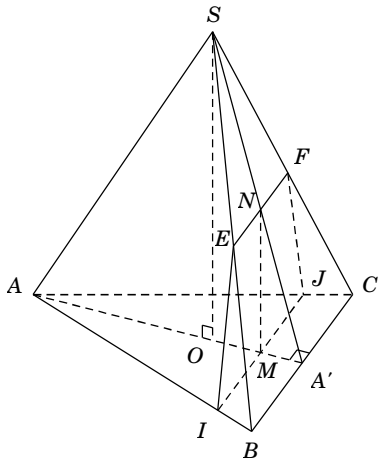
B. $S_{IJEF}=2\left(8x^2-6\sqrt{3}ax+3a^2\right).$

C. $S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(a-x)^2.$

D. $S=2(a-x)^2.$

Lời giải

Chọn A



Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO\perp(ABC)$ (O là tâm của tam giác ABC).

Do đó $SO\perp AA'$ mà $(\alpha)\perp AA'$ suy ra $SO\,//\,(\alpha)$.

Tương tự ta cũng có $BC\,//\,(\alpha)$.

Qua M kẻ $IJ\,//\,BC$ với $I\in AB,\ J\in AC$; kẻ $MN\,//\,SO$ với $N\in SA'$.

Qua N kẻ $EF\,//\,BC$ với $E\in SB,\ F\in SC$.

Khi đó thiết diện là hình thang $IJFE$.

Diện tích hình thang $S_{IJEF}=\dfrac{1}{2}(IJ+EF)MN$.

Tam giác ABC, có $\dfrac{IJ}{BC}=\dfrac{AM}{AA'}\Rightarrow IJ=\dfrac{AM.BC}{AA'}=\dfrac{2x\sqrt{3}}{3}.$

Tam giác SBC, có $\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{SN}{SA'}=\dfrac{OM}{OA'}\Rightarrow EF=\dfrac{OM.BC}{OA'}=2\left(x\sqrt{3}-a\right).$

Tam giác SOA', có $\dfrac{MN}{SO}=\dfrac{MA'}{OA'}\Rightarrow MN=\dfrac{SO.MA'}{OA'}=2\left(3a-2x\sqrt{3}\right).$

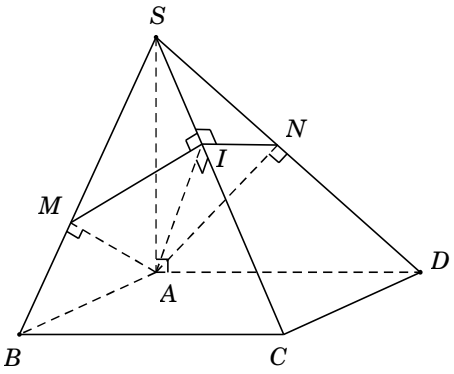
Vậy $S_{IJEF}=\dfrac{2}{3}\left(4x\sqrt{3}-3a\right)\left(3a-2x\sqrt{3}\right)=-2\left(8x^2-6\sqrt{3}ax+3a^2\right).$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) đi qua A vuông góc với SC. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S_{AMIN}=\dfrac{a^2\sqrt{6}}{7}$. **B.** $S_{AMIN}=\dfrac{12a^2\sqrt{6}}{35}$. **C.** $S_{AMIN}=\dfrac{6a^2\sqrt{6}}{35}$. **D.** $S_{AMIN}=\dfrac{a^2\sqrt{6}}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Trong tam giác SAC, kẻ $AI\perp SC$ $(I\in SC)$.

Trong mp(SBC), dựng đường thẳng đi qua I vuông góc với SC cắt SB tại M.

Trong mp(SCD), dựng đường thẳng qua I vuông góc với SC cắt SD tại N.

Khi đó thiết diện của hình chóp cắt bởi mp (α) là tứ giác $AMIN$.

Ta có $SC\perp(\alpha)\Rightarrow SC\perp AM$. (1)

Lại có $\begin{cases}BC\perp AB\\ BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AM$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $AM\perp(SBC)\Rightarrow AM\perp MI$.

Chứng minh tương tự, ta được $AN\perp NI$.

Do đó $S_{AMIN}=S_{\Delta AMI}+S_{\Delta ANI}=\dfrac{1}{2}AM.MI+\dfrac{1}{2}AN.NI$.

Vì AM, AI, AN là các đường cao của các tam giác vuông SAB, SAC, SAD nên

$AM=\dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$; $AI=\dfrac{SA.AC}{\sqrt{SA^2+AC^2}}=a\sqrt{2}$; $AN=\dfrac{SA.AD}{\sqrt{SA^2+AD^2}}=\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$.

Suy ra $MI=\sqrt{AI^2-AM^2}=\dfrac{a\sqrt{30}}{5}$ và $NI=\sqrt{AI^2-AN^2}=\dfrac{a\sqrt{14}}{7}$.

Vậy $S_{AMIN}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2a}{\sqrt{5}}.\dfrac{a\sqrt{30}}{5}+\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}.\dfrac{a\sqrt{14}}{7}\right)=\dfrac{12a^2\sqrt{6}}{35}$.

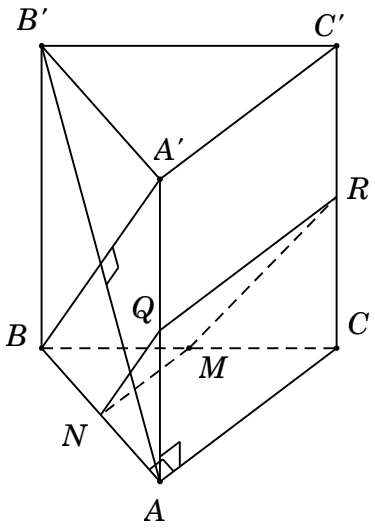
Câu 10: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A với $BC=a\sqrt{2}$; $AA'=a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua M là trung điểm của BC và vuông góc với AB'. Thiết diện tạo bởi (α) với hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

A. Hình thang cân. **B.** Hình thang vuông.

C. Tam giác. **D.** Hình chữ nhật.

Lời giải

Chọn B



Gọi N là trung điểm $AB \Rightarrow MN \perp AB$.

Ta có $\begin{cases} MN \perp AB \\ MN \perp AA' \end{cases} \Rightarrow MN \perp (ABB'A') \Rightarrow MN \perp AB' \Rightarrow MN \subset (\alpha).$

Từ giả thiết suy ra $AB = a = AA' \Rightarrow ABB'A'$ là hình vuông $\Rightarrow BA' \perp AB'$.

Trong mp $(ABB'A')$ kẻ $NQ \parallel BA'$ với $Q \in AA'$.

Trong mp $(ACC'A')$ kẻ $QR \parallel AC$ với $R \in CC'$.

Vậy thiết diện là hình thang $MNQR$ vuông (do MN và QR cùng song song với AC và $MN \perp NQ$).

BÀI 4. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. Góc giữa hai mặt phẳng

1. Định nghĩa: Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Nhận xét:

- Cho hai đường thẳng a và b lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q); $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của a và b. Gọi φ là góc giữa (P) và (Q). Khi đó, ta có:

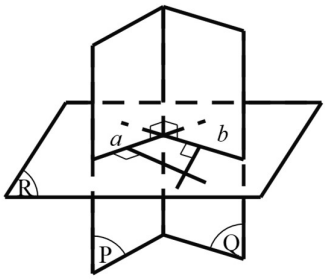
$$\begin{cases} \varphi = \left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right) & \text{nếu } \left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right) \le 90^o \\ \varphi = 180^o - \left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right) & \text{nếu } \left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right) > 90^o \end{cases}$$

Như vậy, góc giữa hai mặt phẳng luôn nhỏ hơn hoặc bằng 90°.

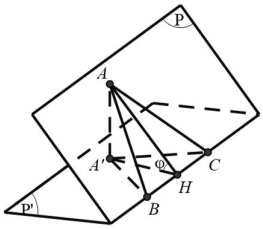
- Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) nếu nó nằm trên đường thẳng vuông góc với (P).

2. Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng

Khi hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến x, để tính góc giữa chúng, ta chỉ việc xét một mặt phẳng (R) vuông góc với x, lần lượt cắt (P) và (Q) theo các giao tuyến a và b. Lúc đó, góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa hai đường thẳng a và b.



3. Định lí 1. Gọi S là diện tích của đa giác H trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu H' của H trên mặt phẳng (P') thì $S' = S\cos\varphi$, trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P').



$$dt\left(\Delta A'BC\right) = dt\left(\Delta ABC\right).\cos\varphi$$

II. Hai mặt phẳng vuông góc

1. Định nghĩa. Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°.

Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, kí hiệu: $(P) \perp (Q)$ hay $(Q) \perp (P)$.

$(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \varphi = 90^o$ (Với φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q)).

Từ định nghĩa trên ta suy ra: $(P)\perp(Q)\Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$, với $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$ theo thứ tự là vectơ pháp tuyến của (P) và (Q).

2. Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

a) Định lí 2. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

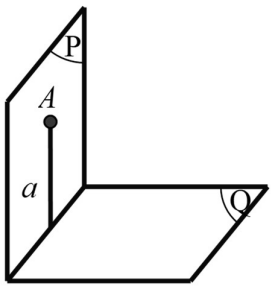
$$\left.\begin{array}{l}(P)\supset a\\ a\perp(Q)\end{array}\right\}\Rightarrow(P)\perp(Q)$$

Chú ý: Dùng định lí này để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc.

b) Các hệ quả

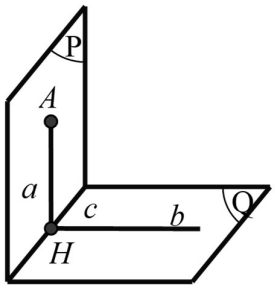
Hệ quả 1

- Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là điểm nằm trong (P) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P).



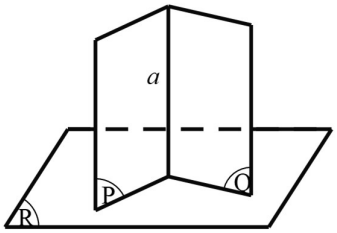
$$\left.\begin{array}{l}(P)\perp(Q)\\ A\in(P)\\ A\in a,\ a\perp(Q)\end{array}\right\}\Rightarrow a\subset(P)$$

- Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào thuộc (P), vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) sẽ vuông góc với mặt phẳng (Q).



$$\left.\begin{array}{l}(P)\perp(Q)\\ (P)\cap(Q)=c\\ a\subset(P),\ a\perp c\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp(Q)$$

Hệ quả 2. Hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.



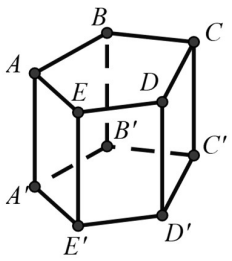
$$\left.\begin{array}{l}(P)\cap(Q)=a\\ (P)\perp(R)\\ (Q)\perp(R)\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp(R)$$

Hệ quả 3. Qua đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) có duy nhất một mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).

a không vuông góc với (P) $\Rightarrow \exists !(Q):\begin{cases}(Q)\supset a\\(Q)\perp(P)\end{cases}$.

III. Hình lăng trụ đứng. Hình hộp chữ nhật. Hình lập phương

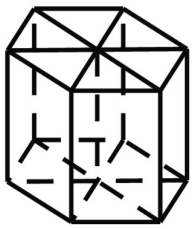
1. Hình lăng trụ đứng



a) ***Định nghĩa.*** Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

b) ***Nhận xét.*** Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.

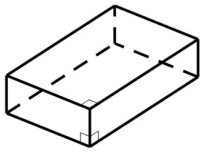
2. Hình lăng trụ đều



a) ***Định nghĩa.*** Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

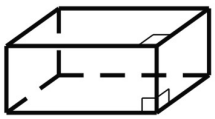
b) ***Nhận xét.*** Các mặt bên của hình lăng trụ đều là những hình chữ nhật bằng nhau. Ngoài ra, hình lăng trụ đều có các tính chất của hình lăng trụ đứng.

3. Hình hộp đứng

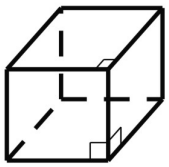


a) ***Định nghĩa.*** Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.

b) ***Nhận xét.*** Trong hình hộp đứng bốn mặt bên đều là hình chữ nhật.



4. Hình hộp chữ nhật



a) ***Định nghĩa.*** Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

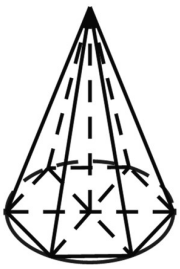
b) ***Nhận xét.*** Tất cả sáu mặt của hình hộp chữ nhật đều là hình chữ nhật.

5. Hình lập phương

Định nghĩa. Hình lập phương là hình hộp có tất cả các mặt là hình vuông.

IV. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều

1. Định nghĩa đều



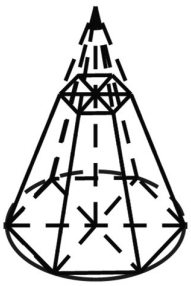
Định nghĩa. Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu đáy của nó là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

- Đường vuông góc với mặt đáy kẻ từ đỉnh gọi là đường cao của hình chóp.

Từ định nghĩa, suy ra:

- Một hình chóp là hình chóp đều khi và chỉ khi đáy của nó là đa giác đều và chân đường cao của hình chóp trùng với tâm của đáy.

Một hình chóp là hình chóp đều khi và chỉ khi đáy của nó là đa giác đều và các cạnh bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.



2. Hình chóp cụt đều

Khi cắt hình chóp đều bởi một mặt phẳng song song với đáy để được một hình chóp cụt thì hình chóp cụt đó được gọi là hình chóp cụt đều.

Đoạn thẳng nối tâm của hai đáy được gọi là đường cao của hình chóp cụt đều.

Từ định nghĩa suy ra: Các mặt bên của hình chóp cụt đều là những hình thang cân bằng nhau.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Câu hỏi lý thuyết

Câu 52: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q). Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q)?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D

Gọi d là đường thẳng qua M và vuông góc với (P). Do $(P)//(Q)\Rightarrow d\perp(Q)$.

Giả sử (R) là mặt phẳng chứa d. Mà $\begin{cases}d\perp(P)\\ d\perp(Q)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(R)\perp(P)\\ (R)\perp(P)\end{cases}$.

Có vô số mặt phẳng (R) chứa d. Do đó có vô số mặt phẳng qua M, vuông góc với (P) và (Q).

Câu 53: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Cho hai đường thẳng song song a và b và đường thẳng c sao cho $c \perp a, c \perp b$. Mọi mặt phẳng (α) chứa c thì đều vuông góc với mặt phẳng (a,b).

B. Cho $a \perp (\alpha)$, mọi mặt phẳng (β) chứa a thì $(\beta) \perp (\alpha)$.

C. Cho $a \perp b$, mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a.

D. Cho $a \perp b$, nếu $a \subset (\alpha)$ và $b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

Lời giải

Chọn B

A sai. Trong trường hợp a và b trùng nhau, sẽ tồn tại mặt phẳng chứa a và b không vuông góc với mặt phẳng (α) chứa c.

C sai. Trong trường hợp a và b cắt nhau, mặt phẳng (a,b) chứa b nhưng không vuông góc với a.

D sai. Trong trường hợp a và b vuông góc nhau và tréo nhau, nếu $(\alpha) \supset a$, $(\alpha) // b$ và $(\beta) \supset b$, $(\beta) // a$ thì $(\alpha) // (\beta)$.

Câu 54: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

B. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Lời giải

Chọn C

A sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ 3).

B sai. Qua một đường thẳng vô số mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

D sai. Qua một điểm có vô số mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Câu 55: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d. Với mỗi điểm A thuộc (P) và mỗi điểm B thuộc (Q) thì ta có AB vuông góc với d.

B. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với mặt phẳng (R) thì giao tuyến của (P) và (Q) nếu có cũng sẽ vuông góc với (R).

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

D. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Lời giải

Chọn B

A sai. Trong trường hợp $a \in d$, $b \in d$, khi đó AB trùng với d.

C sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ 3).

D sai. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau, đường thẳng thuộc mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

Câu 56: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Lời giải

Chọn D

A sai. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì đường thẳng nằm trong mặt phẳng này, vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

B, C sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao truyến vuông góc với mặt phẳng kia).

Câu 57: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước.

D. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Lời giải

Chọn C

A sai. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song hoặc trùng nhau.

B sai. Nếu đường thẳng vuông góc với mặt phẳng cho trước thì có vô số mặt phẳng qua đường thẳng và vuông góc với mặt phẳng đó. Nếu đường thẳng không vuông góc với mặt phẳng cho trước thì không có mặt phẳng nào vuông góc với mặt phẳng đó.

D sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao truyến vuông góc với mặt phẳng kia).

Câu 58: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Cho đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và b nằm trong mặt phẳng (P). Mọi mặt phẳng (Q) chứa a và vuông góc với b thì (P) vuông góc với (Q).

B. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và mặt phẳng (P) chứa a, mặt phẳng (Q) chứa b thì (P) vuông góc với (Q).

C. Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), mọi mặt phẳng (Q) chứa a thì (P) vuông góc với (Q).

D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Lời giải

Chọn B

Trong trường hợp a và b vuông góc nhau và tréo nhau, nếu $(P)\supset a$, $(P)/\!/b$ và $(Q)\supset b$, $(Q)/\!/a$ thì $(P)/\!/(Q)$.

Câu 59: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng góc nhọn giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) khi mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (R).

B. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng góc nhọn giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) khi mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (R) hoặc $(Q)\equiv(R)$.

C. Góc giữa hai mặt phẳng luôn là góc nhọn.

D. Cả 3 mệnh đề trên đều đúng.

Lời giải

Chọn D

Câu 60: Trong khẳng định sau về lăng trụ đều, khẳng định nào sai?

A. Đáy là đa giác đều.

B. Các mặt bên là những hình chữ nhật nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.

C. Các cạnh bên là những đường cao.

D. Các mặt bên là những hình vuông.

Lời giải

Chọn D

Vì lăng trụ đều là lăng trụ đứng nên các cạnh bên bằng nhau và cùng vuông góc với đáy. Do đó các mặt bên là những hình chữ nhật.

Câu 61: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu hình hộp có hai mặt là hình vuông thì nó là hình lập phương.

B. Nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó là hình lập phương.

C. Nếu hình hộp có bốn đường chéo bằng nhau thì nó là hình lập phương.

D. Nếu hình hộp có sau mặt bằng nhau thì nó là hình lập phương.

Lời giải

Chọn B

Dạng 2. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

1. Phương pháp

Để chứng minh hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau ta có thể dùng một trong các cách sau:

☞***Cách 1***. Xác định góc giữa hai mặt phẳng , rồi tính trực tiếp góc đó bằng 90^0.

$\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=90^0 \Rightarrow (\alpha)\perp(\beta)$.

☞***Cách 2.*** Chứng minh trong mặt phẳng này có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$\begin{cases} a\subset(\alpha) \\ a\perp(\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha)\perp(\beta)$.

☞***Cách 3.*** Tìm hai vec tơ $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$ lần lượt vuông góc với các mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ rồi chứng minh $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0$

.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại C, SAC là tam giác đều và nằm trong mp vuông góc với (ABC). Gọi I là trung điểm của SC.

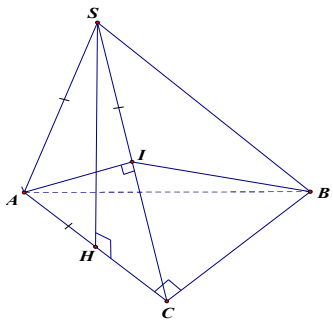
a). Chứng minh (SBC) $\perp$ (SAC).

b) Chứng minh (ABI) $\perp$ (SBC).

Lời giải

a)

- Gọi H trung điểm của AC . Ta có ΔSAC đều nên $SH\perp AC$, $AI\perp SC$.



- Có $\begin{cases}(SAC)\cap(ABC)=AC\\(SAC)\perp(ABC)\\SH\perp AC,\ SH\subset(SAC)\end{cases}\Rightarrow SH\perp mp(ABC).$
- Có $\begin{cases}BC\perp AC(gt),\ BC\perp SH\\AC,SH\subset(SAC)\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAC)$ mà $BC\subset(SBC)\Rightarrow(SBC)\perp(SAC)$

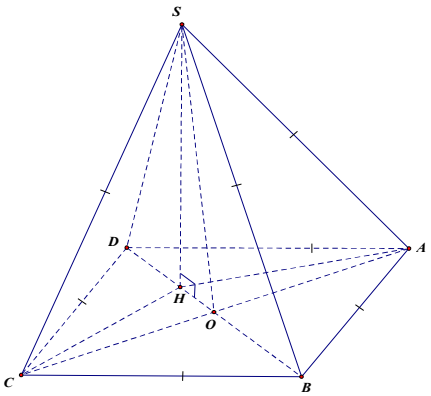
b)

- Có $\begin{cases}AI\perp SC(gt)\\AI\perp BC(BC\perp(SAC))\Rightarrow AI\perp(SBC)\\SC,BC\subset(SBC)\end{cases}$ mà $AI\subset(ABI)\Rightarrow(ABI)\perp(SBC)$

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh a và SA = SB = SC = a.

a). Chứng minh (SBD) $\perp$ (ABCD). b). Chứng minh tam giác **SBD vuông.**

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD)

Vì $SA=SB=SC$ nên $HA=HB=HC$

Suy ra H nằm trên đường trung trực của đoạn AC, vậy $H\in BD$

a). Chứng minh (SBD) $\perp$ (ABCD).

$\begin{cases}AC\perp BD\\AC\perp SO\\BD,SO\subset mp(SBD)\end{cases}$

$\Rightarrow AC\perp mp(SBD)$ mà $AC\subset(ABCD)\Rightarrow(ABCD)\perp(SBD).$

b) Chứng minh tam giác SBD vuông.

Ta có ba tam giác : $\Delta SAC=\Delta BAC=\Delta DAC(c.c.c)$. Suy ra ba đường trung tuyến xuất phát từ 3 đỉnh tương ứng bằng nhau thì bằng nhau , nghĩa là $SO=BO=DO$.

Trong tam giác SBD có SO là đường trung tuyến và $SO=\frac{1}{2}BD\Rightarrow\Delta SBD$ vuông tại O.

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy ABCD .

a). Chứng minh (SAC) $\perp$ (SBD).

b). Từ O kẻ OK $\perp$ BC. Chứng minh BC $\perp$ (SOK).

c). Chứng minh (SBC) $\perp$ (SOK).

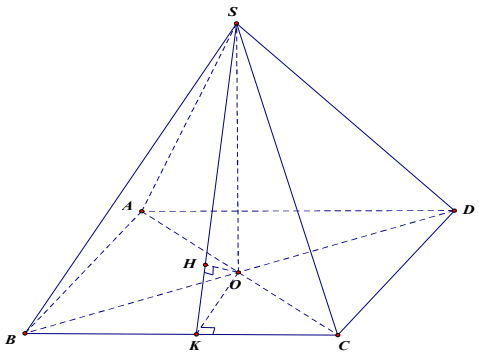
d). Kẻ OH $\perp$ SK tại H. Chứng minh OH $\perp$ (SBC).

Lời giải

a) Chứng minh (SAC) $\perp$ (SBD).

Ta có :

$\begin{cases}(SAC)\cap(SBD)=SO\\(SAC)\perp(ABCD)\\(SBD)\perp(ABCD)\end{cases}\Rightarrow SO\perp(ABCD)$.



Có $\begin{cases}AC\perp BD(ABCD \text{ hình thoi})\\AC\perp SO(\text{vì } SO\perp(ABCD))\\BD,SO\subset(SBD)\end{cases}$

$\Rightarrow AC\perp(SBD)$ mà $AC\subset(SAC)\Rightarrow(SAC)\perp(SBD)$.

b) Chứng minh $BC\perp(SOK)$.

$\begin{cases}BC\perp OK(gt),\ BC\perp SO(SO\perp(ABCD))\\OK,SO\subset(SOK)\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SOK)$ **c)**Chứng minh $(SBC)\perp(SOK)$.

vì $\begin{cases}BC\perp(SOK)\\BC\subset(SBC)\end{cases}\Rightarrow(SBC)\perp(SOK)$

d)Chứng minh $OH\perp(SBC)$.

$\begin{cases}OH\perp SK(gt),\ OH\perp BC(BC\perp(SOK))\\SK,BC\subset(SBC)\end{cases}\Rightarrow OH\perp(SBC)$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm AC. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $BM\perp AC$.

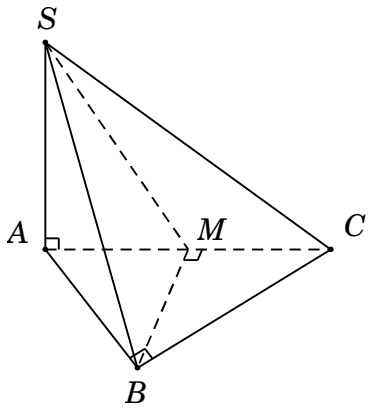
B. $(SBM)\perp(SAC)$.

C. $(SAB)\perp(SBC)$.

D. $(SAB)\perp(SAC)$.

Lời giải

Chọn D



Tam giác ABC cân tại B có M là trung điểm $AC\Rightarrow BM\perp AC$. Do đó A đúng.

Ta có $\begin{cases} BM \perp AC \\ BM \perp SA \ (\text{do } SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAC) \Rightarrow (SBM) \perp (SAC)$. Do đó B đúng.

Ta có $\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp SA \ (\text{do } SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$. Do đó C đúng.

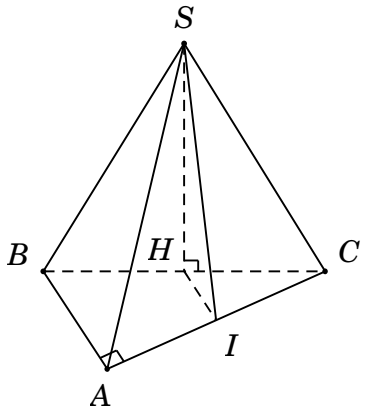
Dùng phương pháp loại trừ thì D là đáp án sai.

Câu 2: Cho tứ diện $SABC$ có SBC và ABC nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Tam giác SBC đều, tam giác ABC vuông tại A. Gọi H, I lần lượt là trung điểm của BC và AB. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $SH \perp AB$. **B.** $HI \perp AB$. **C.** $(SAB) \perp (SAC)$. **D.** $(SHI) \perp (SAB)$.

Lời giải

Chọn C



Do SBC là tam giác đều có H là trung điểm BC nên $SH \perp BC$.

Mà $(SBC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến $BC \Rightarrow SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp AB$. Do đó A đúng.

Ta có HI là đường trung bình của ΔABC nên $HI \parallel AC \Rightarrow HI \perp AB$. Do đó B đúng.

Ta có $\begin{cases} SH \perp AB \\ HI \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHI) \Rightarrow (SAB) \perp (SHI)$. Do đó D đúng.

Dùng phương pháp loại trừ thì C là đáp án sai.

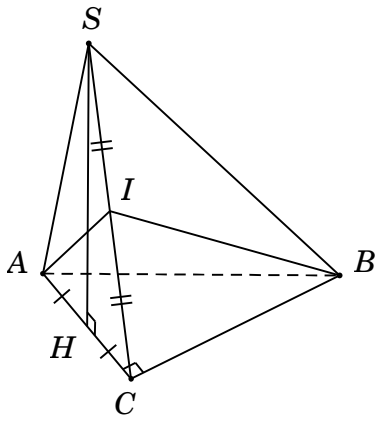
Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, mặt bên SAC là tam giác đều và mằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của SC. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $AI \perp SC$. **B.** $(SBC) \perp (SAC)$.

C. $AI \perp BC$. **D.** $(ABI) \perp (SBC)$.

Lời giải

Chọn B



Tam giác SAC đều có I là trung điểm của SC nên $AI \perp SC$. Do đó A đúng.

Gọi H là trung điểm AC suy ra $SH \perp AC$. Mà $(SAC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến AC nên $SH \perp (ABC)$ do đó $SH \perp BC$. Hơn nữa theo giả thiết tam giác ABC vuông tại C nên $BC \perp AC$. Từ đó suy ra $BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AI$. Do đó C đúng.

Từ mệnh đề A và C suy ra mệnh đề D đúng.

Dùng phương pháp loại trừ thì B là đáp án sai.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC và I là giao điểm của HK với mặt phẳng (ABC). Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $BC \perp AH$.

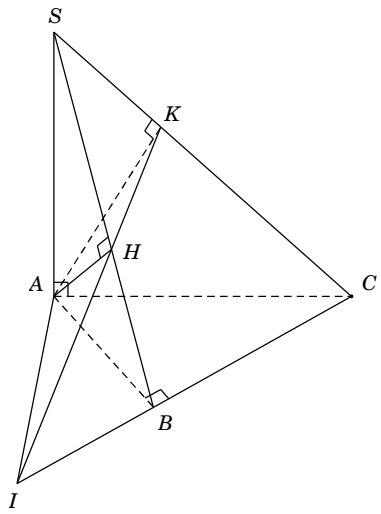
B. $(AHK) \perp (SBC)$.

C. $SC \perp AI$.

D. Tam giác IAC đều.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$. Do đó A đúng.

Lại có $AH \perp SB$. Từ đó suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$. (1)

Lại có theo giả thiết $SC \perp AK$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $SC \perp (AHK) \Rightarrow (SBC) \perp (AHK)$. Do đó B đúng.

Ta có $\begin{cases} SC \perp (AHK) \\ AI \subset (AHK) \end{cases} \Rightarrow SC \perp AI$. Do đó C đúng.

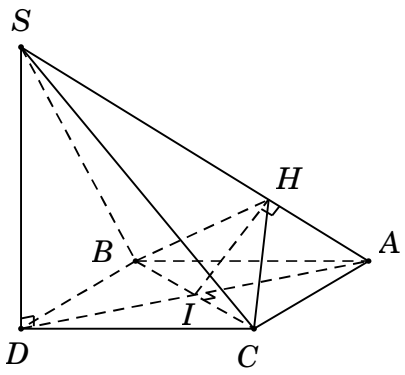
Dùng phương pháp loại trừ thì D là đáp án sai.

Câu 5: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi I là trung điểm BC; kẻ IH vuông góc SA $(H \in SA)$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $SA \perp BH$. **B.** $(SDB) \perp (SDC)$. **C.** $(SAB) \perp (SAC)$. **D.** $BH \perp HC$.

Lời giải

Chọn B



Từ giả thiết suy ra $ABDC$ là hình thoi nên $BC \perp AD$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SA$.

Lại có theo giả thiết $IH \perp SA$. Từ đó suy ra $SA \perp (HCB) \Rightarrow SA \perp BH$. Do đó A đúng.

Tính được $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AD = 2AI = a\sqrt{3}$, $SA^2 = \sqrt{AD^2 + SD^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $\Delta AHI \backsim \Delta ADS \Rightarrow \frac{IH}{SD} = \frac{AI}{AS} \Rightarrow IH = \frac{AI.SD}{AS} = \frac{a}{2} = \frac{BC}{2} \Rightarrow$ tam giác HBC có trung tuyến IH bằng nửa cạnh đáy BC nên $\widehat{BHC} = 90^0$ hay $BH \perp HC$. Do đó D đúng.

Từ mệnh đề A và D suy ra mệnh đề C đúng.

Dùng phương pháp loại trừ thì B là đáp án sai.

Dạng 3. Tính góc giữa hai mặt phẳng

1. Phương pháp

- Khi hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến x, để xác định góc giữa chúng, ta chỉ việc xét một mặt phẳng (K) vuông góc với x lần lượt cắt (P) và (Q) theo các giao tuyến a và b. Lúc đó, góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa hai đường thẳng a và b.
- Để tìm góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) ta thường làm như sau:

– Xác định một điểm A trên (P), vẽ $AH \perp (Q)$ (tại H).

– Vẽ $HO \perp x$ tại O thì $AO \perp x$.

– Góc $(OA,OH) \le 90^o$ là góc cần tìm.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho tứ diện SABC có ABC là tam giác đều cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC)

Hướng dẫn giải

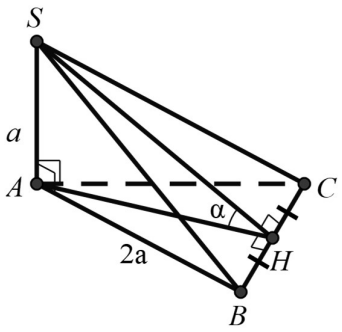
Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

Kẻ đường cao AH của ΔABC, ta có: $BC \perp AH$, AH là hình chiếu của SH trên mặt phẳng (ABC) nên suy ra $BC \perp SH$.

Vậy $\alpha = \widehat{SHA}$.

Tam giác SHA vuông tại A có: $SA = a$, $AH = a\sqrt{3}$ (đường cao của tam giác đều ABC).

Suy ra: $\tan\alpha = \dfrac{SA}{AH} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^o$.

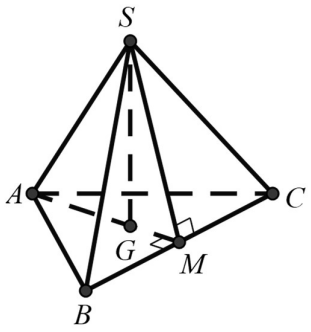


Ví dụ 2: Cho hình chóp đều S.ABC có ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên $SA = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$. Tính góc α giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC)

Hướng dẫn giải

Xác định góc α. Gọi G là trọng tâm của ΔABC, ta có $SG \perp (ABC)$. Kẻ $AM \perp BC$ thì trọng tâm G của ΔABC thuộc AM.

GM là hình chiếu của SM trên mặt phẳng (ABC) nên $BC \perp SM$. Suy ra góc cần tìm là $\alpha = \widehat{SMG}$.



Tính α. Ta có: $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao của tam giác đều ABC, cạnh a), suy ra

$GM = \frac{1}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Tam giác SMB vuông tại M nên:

$$SM^2 = SB^2 - BM^2 = \left(\frac{a\sqrt{21}}{6}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow SM = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Tam giác SGM vuông tại G nên:

$$\cos\alpha = \frac{GM}{SM} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.\frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^o.$$

Ví dụ 3: Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AB'C'). Tính $\cos\alpha$

Hướng dẫn giải

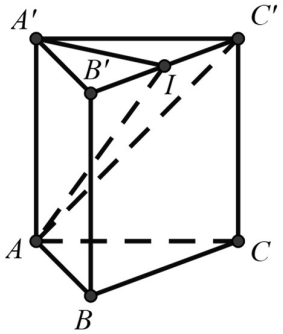
Do ABC.A'B'C' là hình lăng trụ đều nên B và C là hình chiếu vuông góc của B' và C' trên (ABC).

Tam giác AB'C' cân tại A. Gọi I là trung điểm của B'C' thì $AI \perp B'C'$.

Ta có $AA' \perp (A'B'C') \Rightarrow AA' \perp A'I \Rightarrow \Delta AA'I$ vuông tại A'.

Do đó: $AI^2 = AA'^2 + A'I^2 = 3a^2 + \frac{3a^2}{4} = \frac{15a^2}{4}$.

Suy ra $AI = \frac{a\sqrt{15}}{2}$.



+ Diện tích $\Delta AB'C': S = \frac{1}{2}B'C'.AI = \frac{a^2\sqrt{15}}{4}$.

+ Diện tích $\Delta ABC: S' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Áp dụng công thức diện tích hình chiếu của đa giác, ta có:

$$\cos\alpha=\frac{S'}{S}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{4}{a^2\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

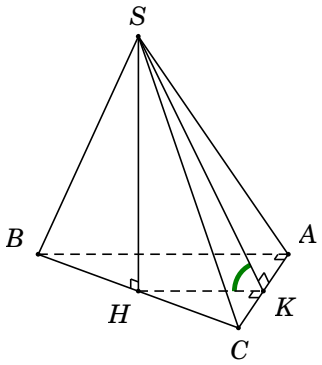
3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC}=60^\circ$, tam giác SBC là tam giác đều có bằng cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\varphi=60^0$. **B.** $\tan\varphi=2\sqrt{3}$. **C.** $\tan\varphi=\frac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\tan\varphi=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của BC, suy ra $SH\perp BC\Rightarrow SH\perp(ABC)$.

Gọi K là trung điểm AC, suy ra $HK\parallel AB$ nên $HK\perp AC$.

Ta có $\begin{cases}AC\perp HK\\AC\perp SH\end{cases}\Rightarrow AC\perp(SHK)\Rightarrow AC\perp SK.$

Do đó $\widehat{(SAC),(ABC)}=\widehat{(SK,HK)}=\widehat{SKH}.$

Tam giác vuông ABC, có $AB=BC.\cos\widehat{ABC}=a\Rightarrow HK=\frac{1}{2}AB=\frac{a}{2}.$

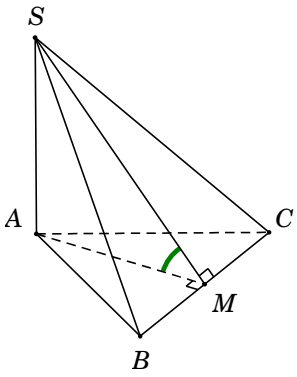
Tam giác vuông SHK, có $\tan\widehat{SKH}=\frac{SH}{HK}=2\sqrt{3}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA=a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC). Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\varphi=30^0$. **B.** $\sin\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\varphi=60^0$. **D.** $\sin\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của BC, suy ra $AM \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$.

Do đó $\widehat{(SBC),(ABC)} = \widehat{(SM,AM)} = \widehat{SMA}$.

Tam giác ABC đều cạnh a, suy ra trung tuyến $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác vuông SAM, có $\sin\widehat{SMA} = \dfrac{SA}{SM} = \dfrac{SA}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn C

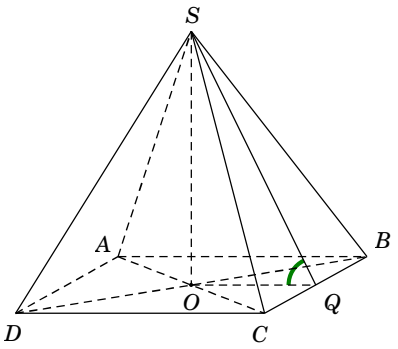
Gọi Q là trung điểm BC, suy ra $OQ \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp OQ \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOQ) \Rightarrow BC \perp SQ.$

Do đó $\widehat{(SBC),(ABCD)} = \widehat{SQ,OQ} = \widehat{SQO}$.

Tam giác vuông SOQ, có $\tan\widehat{SQO} = \dfrac{SO}{OQ} = \sqrt{3}$.

Vậy mặt phẳng (SBC) hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 60^0.

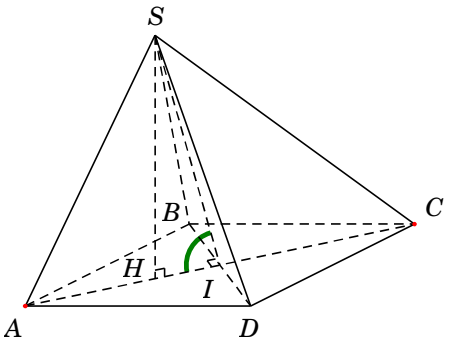


Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I, cạnh a, góc $\widehat{BAD}=60^0$, $SA=SB=SD=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi=\sqrt{5}$. **B.** $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\varphi=45^0$.

Lời giải

Chọn A



Từ giả thiết suy ra tam giác ABD đều cạnh a.

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$. Do $SA=SB=SD$ nên suy ra H cách đều các đỉnh của tam giác ABD hay H là tâm của tam gác đều ABD.

Suy ra $HI=\dfrac{1}{3}AI=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ và $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\dfrac{a\sqrt{15}}{6}$.

Vì $ABCD$ là hình thoi nên $HI\perp BD$. Tam giác SBD cân tại S nên $SI\perp BD$.

Do đó $\widehat{(SBD),(ABCD)}=\widehat{SI,AI}=\widehat{SIH}$.

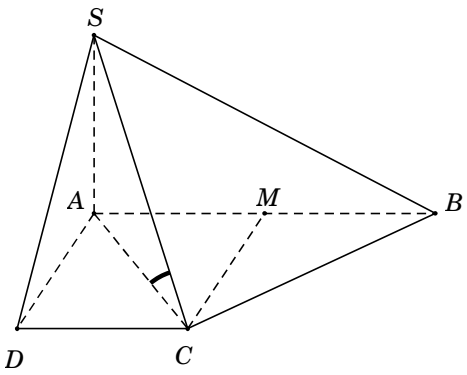
Trong tam vuông SHI, có $\tan\widehat{SIH}=\dfrac{SH}{HI}=\sqrt{5}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D, $AB=2a$, $AD=CD=a$. Cạnh bên $SA=a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\varphi=45^0$. **C.** $\varphi=60^0$. **D.** $\varphi=30^0$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow ADCM$ là hình vuông $CM = AD = a = \dfrac{AB}{2}$.

Suy ra tam giác ACB có trung tuyến bằng nửa cạnh đáy nên vuông tại C.

Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC.$

Do đó $\widehat{(SBC),(ABCD)} = \widehat{SC,AC} = \widehat{SCA}.$

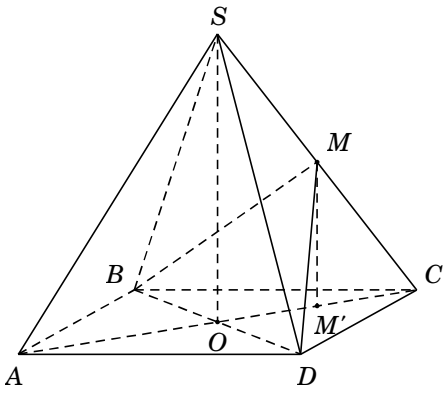
Tam giác SAC vuông tại $A \Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Câu 6: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm SC. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

A. $\varphi = 90°$. **B.** $\varphi = 60°$. **C.** $\varphi = 45°$. **D.** $\varphi = 30°$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M' là trung điểm $OC \Rightarrow MM' // SO \Rightarrow MM' \perp (ABCD).$

Theo công thức diện tích hình chiếu, ta có $S_{\Delta M'BD} = \cos\varphi . S_{\Delta MBD}$

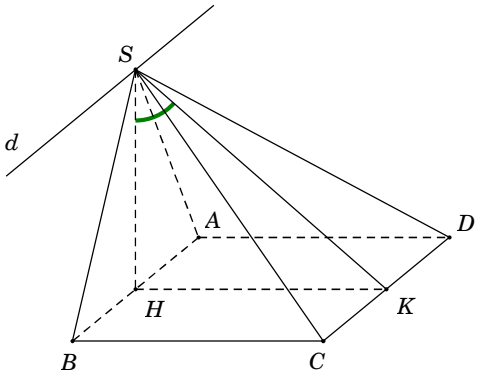
$\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{S_{\Delta M'BD}}{S_{\Delta MBD}} = \dfrac{BD.MO}{BD.M'O} = \dfrac{MO}{M'O} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^0.$

Câu 7: Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trên hai mặt phẳng vuông góc. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{3}.$ **B.** $\tan\varphi = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}.$ **C.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$ **D.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Lời giải

Chọn B



Dễ dàng xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng d đi qua S và song song với AB.

Trong mặt phẳng (SAB) có $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp d.$

Ta có $\begin{cases} CD \perp HK \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp SK \Rightarrow d \perp SK.$

Từ đó suy ra $\widehat{(SAB),(SCD)} = \widehat{SH,SK} = \widehat{HSK}.$

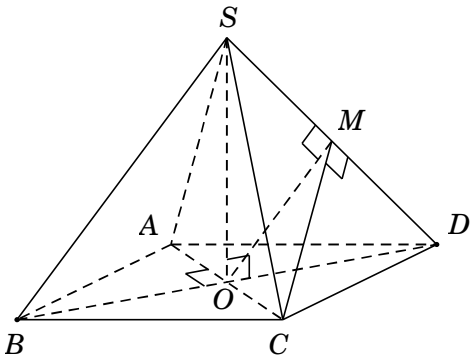
Trong tam giác vuông SHK, có $\tan\widehat{HSK} = \dfrac{HK}{SH} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}.$

Câu 8: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi = \sqrt{6}.$ **B.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$ **C.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$ **D.** $\tan\varphi = \sqrt{2}.$

Lời giải

Chọn D



Gọi $O = AC \cap BD$. Do hình chóp $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Gọi M là trung điểm của SD. Tam giác SCD đều nên $CM \perp SD$.

Tam giác SBD có $SB = SD = a$, $BD = a\sqrt{2}$ nên vuông tại $S \Rightarrow SB \perp SD \Rightarrow OM \perp SD.$

Do đó $\widehat{(SBD),(SCD)} = \widehat{OM,CM}$.

Ta có $\begin{cases} OC \perp BD \\ OC \perp SO \end{cases} \Rightarrow OC \perp (SBD) \Rightarrow OC \perp OM$.

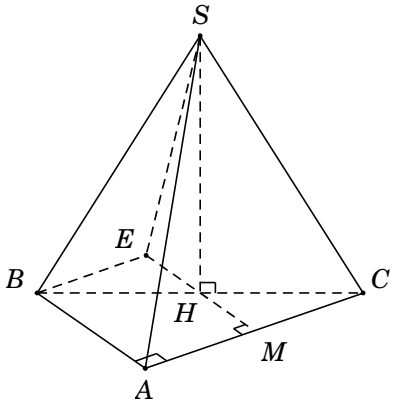
Tam giác vuông MOC, có $\tan\widehat{CMO} = \dfrac{OC}{OM} = \sqrt{2}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = AC = a$. Hình chiếu vuông góc H của S trên mặt đáy (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $SH = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng SB và AC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\cot\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{4}.$ **B.** $\cot\varphi = \sqrt{7}.$ **C.** $\cot\varphi = \dfrac{\sqrt{7}}{7}.$ **D.** $\cot\varphi = \dfrac{\sqrt{14}}{4}.$

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm BC. Tam giác ABC vuông tại A nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Theo giả thiết, ta có $SH \perp (ABC)$.

Qua B kẻ $Bx \parallel AC$. Khi đó $\widehat{SB,AC} = \widehat{SB,Bx}$.

Kẻ $HE \perp Bx$ tại E, cắt AC tại M.

Suy ra $AMEB$ là hình chữ nhật nên $\begin{cases} BE = AM = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a}{2} \\ HE = HM = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a}{2} \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} Bx \perp HE \\ Bx \perp SH \end{cases} \Rightarrow Bx \perp (SHE) \Rightarrow Bx \perp SE$.

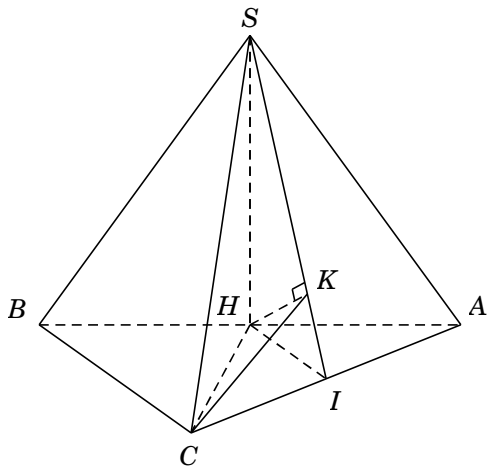
Tam giác vuông SEB, có $\cot \widehat{SBE} = \dfrac{BE}{SE} = \dfrac{AM}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C. Gọi H là trung điểm AB. Biết rằng SH vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB = SH = a$. Tính cosin của góc α tọa bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SAC).

A. $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp CH$. (1)

Tam giác ABC cân tại C nên $CH \perp AB$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $CH \perp (SAB)$.

Gọi I là trung điểm $AC \longrightarrow HI \parallel BC \xrightarrow{BC \perp AC} HI \perp AC$. (3)

Mặt khác $AC \perp SH$ (do $SH \perp (ABC)$). (4)

Từ (3) và (4), suy ra $AC \perp (SHI)$.

Kẻ $HK \perp SI$ $(K \in SI)$. (5)

Từ $AC \perp (SHI) \Rightarrow AC \perp HK$. (6)

Từ (5) và (6), suy ra $HK \perp (SAC)$.

Vì $\begin{cases} HK \perp (SAC) \\ HC \perp (SAB) \end{cases}$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SAB) bằng góc giữa hai đường thẳng HK và HC.

Xét tam giác CHK vuông tại K, có $CH = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$; $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2} \Rightarrow HK = \frac{a}{3}$.

Do đó $\cos\widehat{CHK} = \frac{HK}{CH} = \frac{2}{3}$.

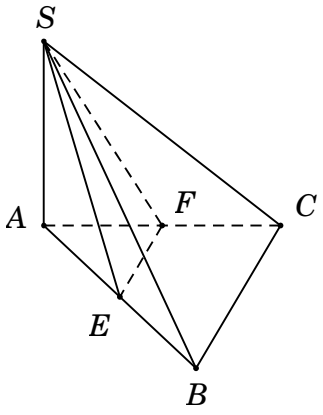
Nhận xét. Bài làm sử dụng lý thuyết "$\begin{cases} d_1 \perp (\alpha) \\ d_2 \perp (\beta) \end{cases} \Rightarrow \widehat{(\alpha),(\beta)} = \widehat{d_1, d_2}$". Nếu ta sử dụng lý thuyết quen thuộc "góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng và cùng vuông góc với giao tuyến" thì rất khó.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC. Góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) là

A. $\widehat{CSF}$. **B.** $\widehat{BSF}$. **C.** $\widehat{BSE}$. **D.** $\widehat{CSE}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi (d) là đường thẳng đi qua S và song song với EF.

Vì EF là đường trung bình tam giác ABC suy ra $EF // BC$.

Khi đó $(d) // EF // BC \Rightarrow (SEF) \cap (SBC) = (d)$ (1).

Ta có $\begin{cases} SA \perp BC \ \ (SA \perp (ABC)) \\ AB \perp BC \end{cases}$ suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow \begin{cases} BC \perp SE \\ BC \perp SB \end{cases} \quad (2).$

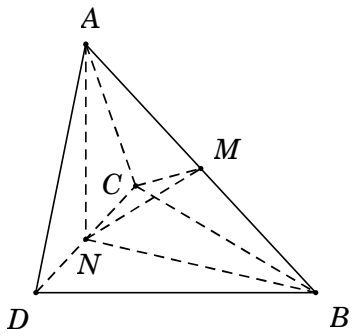
Từ $(1),(2)$ suy ra $\begin{cases} (d) \perp SE \\ (d) \perp SB \end{cases} \Rightarrow \widehat{(SEF);(SBC)} = \widehat{(SE;SB)} = \widehat{BSE}.$

Câu 12: Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a, CD = 2x.$ Với giá trị nào của x thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}.$ **B.** $\frac{a}{2}.$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}.$ **D.** $\frac{a}{3}.$

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $AB, CD.$

Ta có $AN \perp CD$ mà $(ACD) \perp (BCD)$ suy ra $AN \perp (BCD) \Rightarrow AN \perp BN.$

Tam giác ABC cân tại $C,$ có M là trung điểm của AB suy ra $CM \perp AB.$

Giả sử $(ABC) \perp (BCD)$ mà $CM \perp AB$ suy ra $CM \perp (ABD) \Rightarrow CM \perp DM.$

Khi đó, tam giác MCD vuông cân tại $M \Rightarrow MN = \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} \Rightarrow AB = CD = 2x.$

Lại có $AN = BN = \sqrt{AC^2 - AN^2} = \sqrt{a^2 - x^2},$ mà $AB^2 = AN^2 + BN^2.$

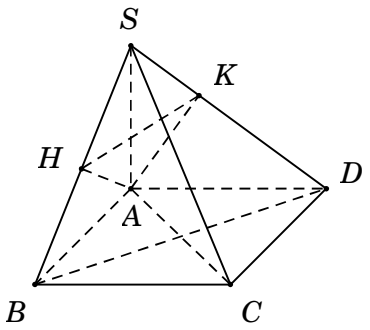
Suy ra $2\left(a^2 - x^2\right) = 4x^2 \Leftrightarrow a^2 = 3x^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a.$ Cạnh bên $SA = x$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD).$ Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) tạo với nhau một góc $60^0.$

A. $x = \frac{3a}{2}.$ **B.** $x = \frac{a}{2}.$ **C.** $x = a.$ **D.** $x = 2a.$

Lời giải

Chọn C



Từ A kẻ AH vuông góc với SB $(H \in SB)$.

Ta có $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ mà $AH \perp SB$ suy ra $AH \perp (SBC)$.

Từ A kẻ AK vuông góc với SD $(K \in SD)$, tương tự, chứng minh được $SK \perp (SCD)$.

Khi đó $SC \perp (AHK)$ suy ra $\widehat{(SBC);(SCD)} = \widehat{(AH;AK)} = \widehat{HAK} = 60^0$.

Lại có $\Delta SAB = \Delta SAD \Rightarrow AH = AK$ mà $\widehat{HAK} = 60^0$ suy ra tam giác AHK đều.

Tam giác SAB vuông tại S, có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \frac{xa}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

Suy ra $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{x^2}{x^2 + a^2}$.

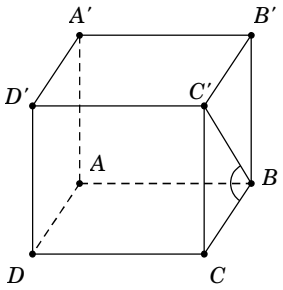
Vì $HK // BD$ suy ra $\frac{SH}{SB} = \frac{HK}{BD} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2 + a^2} = \frac{xa}{\sqrt{x^2 + a^2}.a\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = a.$

Câu 14: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy cạnh bằng a, góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') có số đo bằng 60^0. Độ dài cạnh bên của hình lăng trụ bằng

A. $2a$. **B.** $3a$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C



Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ tứ giác đều $\Rightarrow \begin{cases} AB \perp BB' \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BB'C'B)$.

Khi đó $\begin{cases} (ABC') \cap (BB'C'B) = BC' \\ (ABCD) \cap (BB'C'B) = BC \\ (ABC') \cap (ABCD) = AB \end{cases}$ suy ra $\widehat{(ABC');(ABCD)} = \widehat{(BC';BC)} = \widehat{C'BC} = 60^0$.

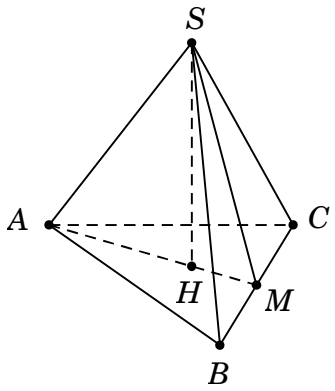
Đặt $AA' = x$, tam giác BCC' vuông tại C, có $\tan \widehat{C'BC} = \dfrac{CC'}{BC} \Rightarrow x = \tan 60^0 . a = a\sqrt{3}$.

Câu 15: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60^0. Tính độ dài đường cao SH của khối chóp.

A. $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $SH = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $SH = \dfrac{a}{2}$. **D.** $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là chân đường cao kẻ từ đỉnh S xuống mặt phẳng $(ABCD)$.

Vì $S.ABC$ là hình chóp đều có $SA = SB = SC$ nên suy ra H chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi M là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$.

Khi đó $\widehat{(SBC);(ABC)} = \widehat{(SM;AM)} = \widehat{SMA} = 60^0$.

Tam giác ABC đều có $AM = \sqrt{AB^2 - MB^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HM = \dfrac{AM}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Tam giác AHM vuông tại H, có $\tan \widehat{SMA} = \dfrac{SH}{HM} \Rightarrow SH = \tan 60^0 . \dfrac{a\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a}{2}$.

Vậy độ dài đường cao $SH = \dfrac{a}{2}$.

Dạng 4. Thiết diện

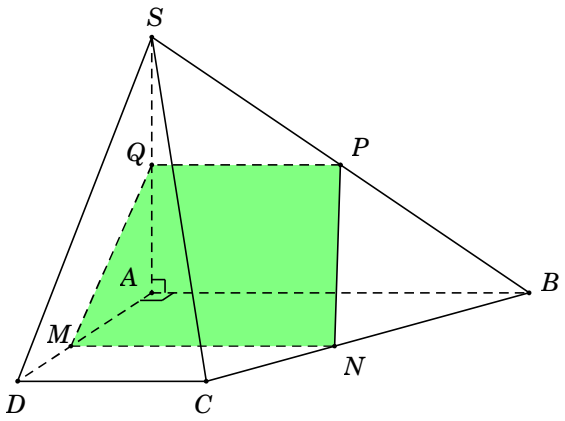
Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, đáy lớn AB; cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi Q là điểm trên cạnh SA và $Q \neq A,\ Q \neq S$; M là điểm trên đoạn AD và $M \neq A$. Mặt phẳng (α) qua QM và vuông góc với mặt phẳng (SAD). Thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho là:

A. tam giác. **B.** hình thang cân.

C. hình thang vuông. **D.** hình bình hành.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD)$. Mà $(\alpha) \perp (SAD)$ suy ra $AB \parallel (\alpha)$.

Qua M kẻ đường thẳng song song với AB cắt BC tại N.

Qua E kẻ đường thẳng song song với AB cắt SB tại P.

Khi đó thiết diện là hình thang $MNPQ$ (do $MN \parallel PQ$).

Vì $AB \perp (SAD)$ suy ra $MN \perp (SAD)$ nên $MN \perp EM$.

Do đó thiết diện $MNPE$ là hình thang vuông tại E và M.

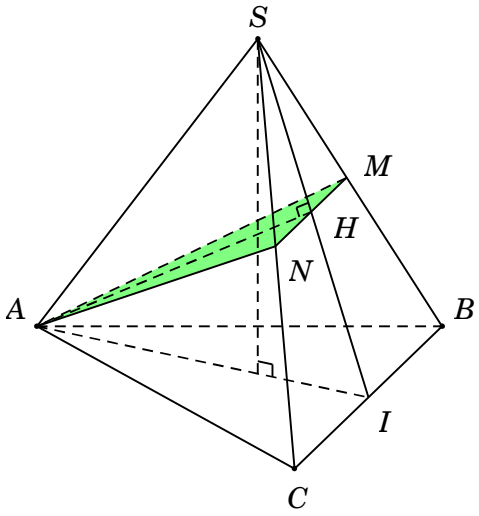
Câu 2: Cho hình chóp đều $SABC$. Mặt phẳng (α) qua A, song song với BC và vuông góc với mặt phẳng (SBC). Thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho là:

A. tam giác đều. **B.** tam giác cân. **C.** tam giác vuông. **D.** tứ giác.

Lời giải

Chọn B

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133



Gọi I là trung điểm BC.

Trong tam giác SAI kẻ $AH \perp SI$ $(H \in SI)$.

Trong tam giác SBC, qua H kẻ đường song song với BC, cắt SC ở M, cắt SB ở N.

Qua cách dựng ta có $BC \parallel (AMN)$. (1)

Ta có $\begin{cases} SI \perp AH \\ SI \perp MN \ (\text{do } SI \perp BC) \end{cases} \Rightarrow SI \perp (AMN) \Rightarrow (SBC) \perp (AMN)$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra thiết diện cần tìm là tam giác AMN.

Dễ thấy H là trung điểm của MN mà $AH \perp (SBC)$ suy ra $AH \perp MN$. Tam giác AMN có đường cao AH vừa là trung tuyến nên nó là tam giác cân đỉnh A.

Câu 3: Cho hình chóp đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (α) qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD). Thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho là:

A. tam giác cân.

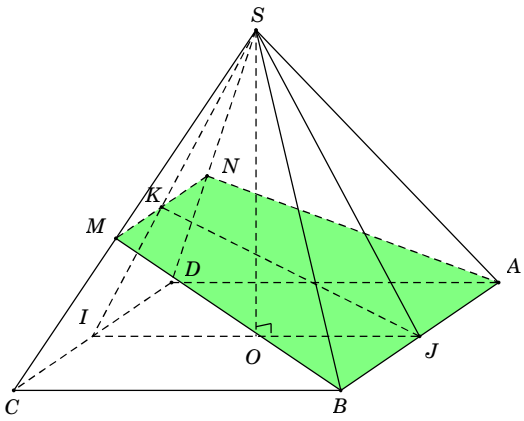
B. hình hình hành.

C. hình thang vuông.

D. hình thang cân.

Lời giải

Chọn D



Gọi I, J lần lượt là trung điểm của CD và AB.

Trong tam giac SIJ kẻ $JK \perp SI$.

Trong tam giac SIJ, qua K kẻ đường thẳng song song với CD cắt SC tại M, cắt SD tại N.

Ta dễ dàng chứng minh được $(ABMN) \perp (SCD)$.

Khi đó thiết diện cần tìm là hình thang $ABMN$.

Vì hình chóp đã cho là hình chóp đều nên suy ra $AN = BM$.

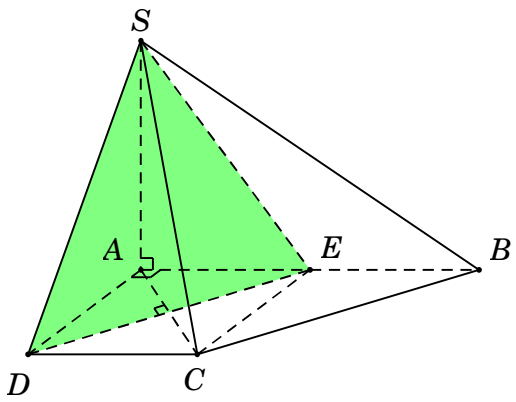
Vậy thiết diện là hình thang cân.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AB = 2a, AD = DC = a$; cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua SD và vuông góc với mặt phẳng (SAC). Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S = \dfrac{a^2}{2}$. **B.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **C.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **D.** $S = \dfrac{a^2}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi E là trung điểm AB, suy ra $AECD$ là hình vuông nên $DE \perp AC$. (1)

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp DE$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $DE \perp (SAC) \Rightarrow (SDE) \perp (SAC)$.

Ta có $\left.\begin{array}{l}(SDE) \supset SD \\ (SDE) \perp (SAC)\end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha) \equiv (SDE)$.

Vậy thiết diện là tam giác SDE.

Ta có $SD = \sqrt{SA^2 + DA^2} = a\sqrt{2}$; $SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = a\sqrt{2}$; $DE = AC = DC\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

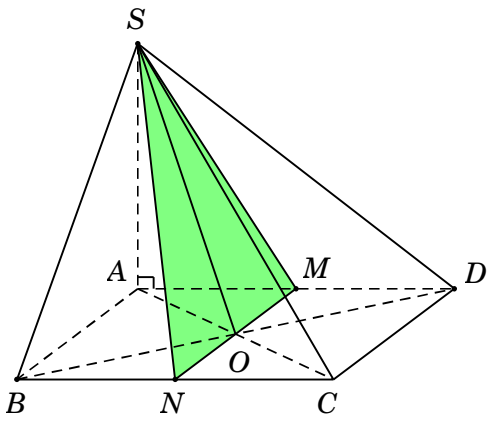
Do đó tam giác SDE đều có cạnh $a\sqrt{2}$ nên $S_{\Delta SDE} = \dfrac{SD^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O với $AB = a,\ AD = 2a.$ Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Gọi (α) là mặt phẳng qua SO và vuông góc với (SAD). Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp đã cho.

A. $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.$ **B.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}.$ **C.** $S = \dfrac{a^2}{2}.$ **D.** $S = a^2.$

Lời giải

Chọn B



Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm $AD,\ BC$. Khi đó:

- MN đi qua O.
- $\begin{cases} MN \perp AD \\ MN \perp SA \end{cases} \Rightarrow MN \perp (SAD)$.

Từ đó suy ra $(\alpha) \equiv (SMN)$ và thiết diện cần tìm là tam giác SMN.

Tam giác SMN vuông tại M nên $S_{\Delta SMN} = \dfrac{1}{2}SM.MN = \dfrac{1}{2}\sqrt{SA^2 + \left(\dfrac{AD}{2}\right)^2}.AB = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}.$

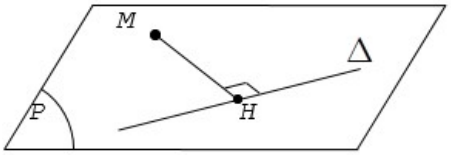
BÀI 5. KHOẢNG CÁCH

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG, ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

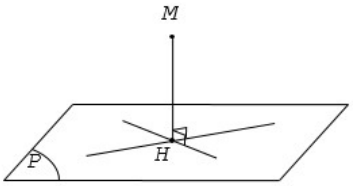
1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ là khoảng cách giữa hai điểm M và H trong đó H là hình chiếu của điểm M trên đường thẳng Δ.



2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

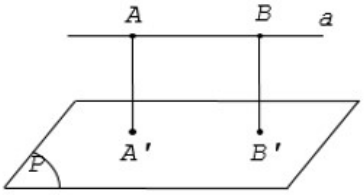
Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là khoảng cách giữa hai điểm M và H trong đó H là hình chiếu của điểm M trên mặt phẳng (P).



II – KHOẢNG CÁCH GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG, GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG.

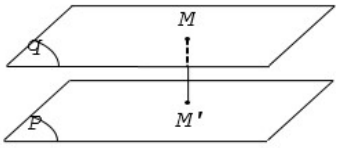
1. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm nào đó của a đến mặt phẳng (P).



2. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

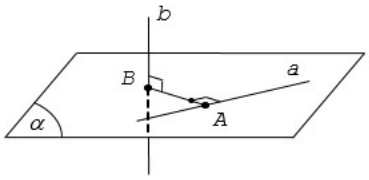


III – KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

1. Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau và $a \perp b$

- Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và vuông góc với b tại B.

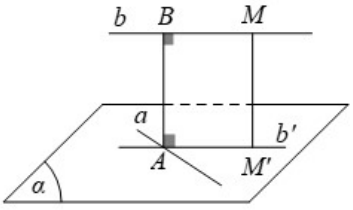
- Trong (α) dựng $BA \perp (\alpha)$ tại A, ta được độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.



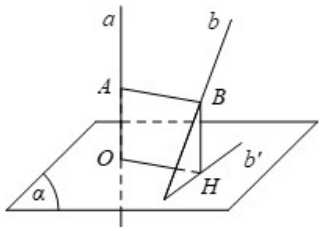
2. Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau nhưng không vuông góc với nhau

Cách 1

- Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và song song với b.



- Lấy một điểm M tùy ý trên b, dựng $MM' \perp (\alpha)$ tại M'.
- Từ M' dựng $b' // b$ cắt a tại A.
- Từ A dựng $AB // MM'$ cắt b tại B, độ dài đoạn thẳng AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.



Cách 2

- Ta dựng mặt phẳng $(\alpha) \perp a$ tại O, (α) cắt b tại I.
- Dựng hình chiếu vuông góc của b là b' trên mặt phẳng (α).
- Trong mặt phẳng (α), vẽ $OH \perp b'$, $H \in b'$.
- Từ H dựng đường thẳng song song với a và cắt b tại B.
- Từ B dựng đường thẳng song song với OH cắt a tại A.
- Độ dài đoạn thẳng AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

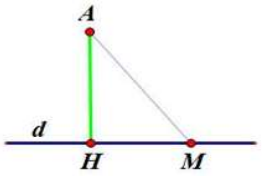
Dạng 1: Tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

1. Phương pháp:

①. Xác định hình chiếu H của A trên d

②. Khi đó ta có: $d(A,d) = AH$

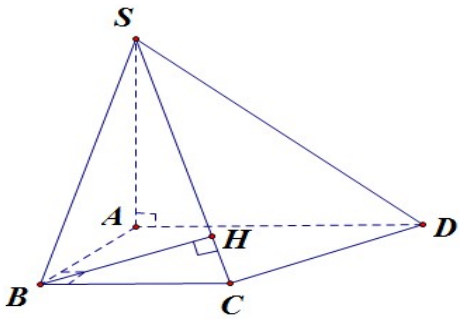
③. Tính độ dài AH bằng kiến thức hình học phẳng cơ bản, các định lý và hệ thức lượng trong tam giác.



2. Các ví dụ

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $ABCD$ là hình thang vuông có đáy lớn AD gấp đôi đáy nhỏ BC, đồng thời đường cao $AB = BC = a$. Biết $SA = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ đỉnh B đến đường thẳng SC

Lời giải



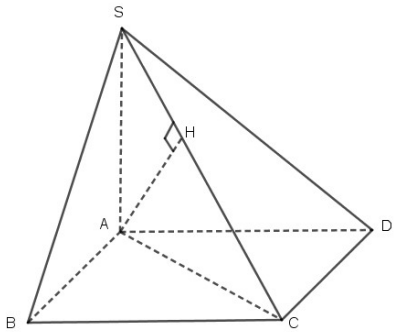
Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại B.

Trong ΔSBC dựng đường cao $BH \Rightarrow d\left(B;SC\right) = BH$.

$SB = 2a$; $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{BC^2} \Rightarrow BH = \dfrac{BS.BC}{\sqrt{BS^2 + BC^2}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp \left(ABCD\right)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách từ A đến đường thẳng SC.

Lời giải



+) Ta có: $SA \perp \left(ABCD\right) \Rightarrow SA \perp AC$.

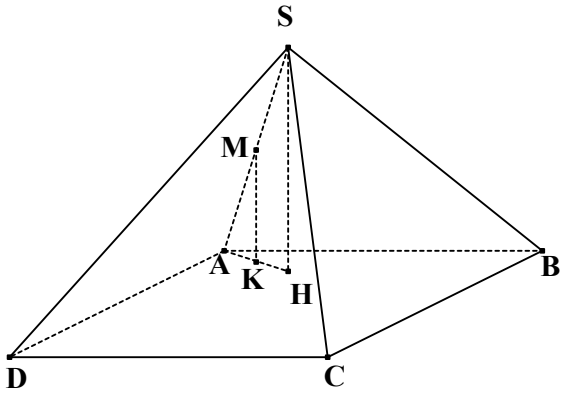
+) Kẻ $AH \perp SC$, suy ra $d\left(A;SC\right) = AH$.

+) Ta có tam giác ASC vuông tại A nên

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{3}{2a^2} \quad AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có khoảng cách từ đỉnh S đến mặt phẳng đáy bằng a. Tính khoảng cách từ trung điểm M của SA đến mặt phẳng đáy.

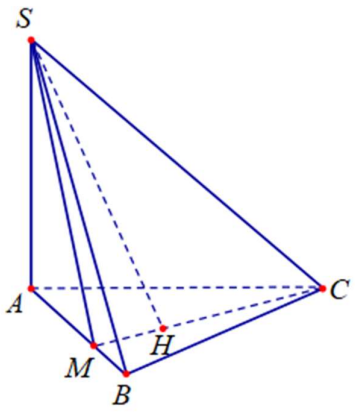
Lời giải



Ta có: $d\left(M,\left(ABCD\right)\right) = \dfrac{1}{2}d\left(S,\left(ABCD\right)\right) = \dfrac{a}{2}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=2a$, $AB=AC=a$. Gọi M là điểm thuộc AB sao cho $AM=\dfrac{2a}{3}$. Tính khoảng cách d từ điểm S đến đường thẳng CM.

Lời giải



Ta có $CM=\sqrt{a^2+\dfrac{a^2}{9}}=\dfrac{a\sqrt{10}}{3}$, $SM=\sqrt{4a^2+\dfrac{4a^2}{9}}=\dfrac{2a\sqrt{10}}{3}$, $SC=a\sqrt{6}$.

Đặt $p=\dfrac{SM+MC+SC}{2}$.

Diện tích tam giác SMC: $S_{\Delta SMC}=\sqrt{p(p-SM)(p-CM)(p-SC)}=\dfrac{a^2\sqrt{11}}{3}$

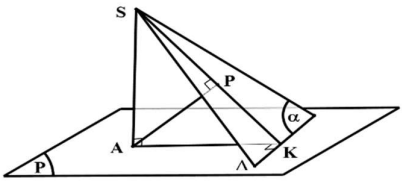
Suy ra khoảng cách từ S đến CM: $SH=\dfrac{2S_{\Delta SMC}}{CM}=\dfrac{a\sqrt{110}}{5}$.

Dạng 2: Tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

1. Phương pháp:

☑ Để tính được khoảng từ điểm M đến mặt phẳng (α) thì điều quan trọng nhất là ta phải xác định được hình chiếu của điểm M trên (α).

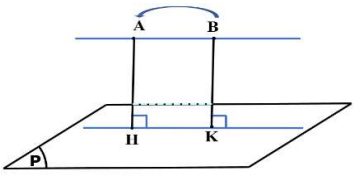
①. A là chân đường cao, tức là $A\equiv H$.



♦. Dựng $AK\perp\Delta\Rightarrow\Delta\perp(SAK)\Rightarrow(\alpha)\perp(SAK)$ và $(\alpha)\cap(SAK)=SK$.

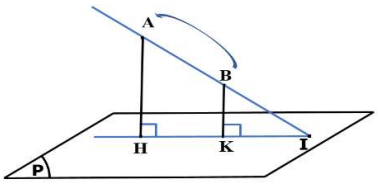
♦. Dựng $AP\perp SK\Rightarrow AP\perp(\alpha)\Rightarrow d\left(A,(\alpha)\right)=AP.$

②. Dựng đường thẳng $AB\parallel(P)$.



♦. Khi đó ta có: $d\left(B,(P)\right)=d\left(A,(P)\right)$.

③.Đường thẳng AB cắt (P) tại I:

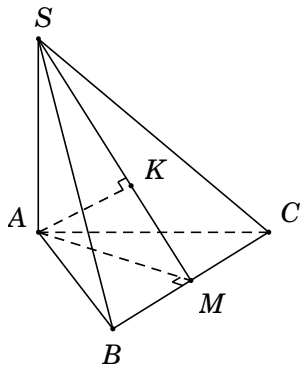


♦. Khi đó ta có: $\dfrac{d\left(B,(P)\right)}{d\left(A,(P)\right)}=\dfrac{BK}{AH}=\dfrac{BI}{AI}$

2. Các ví dụ

Câu 62: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA=a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC). Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC, suy ra $AM\perp BC$ và $AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi K là hình chiếu của A trên SM, suy ra $AK\perp SM$. (1)

Ta có $\begin{cases}AM\perp BC\\ BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAM)\Rightarrow BC\perp AK.$ (2)

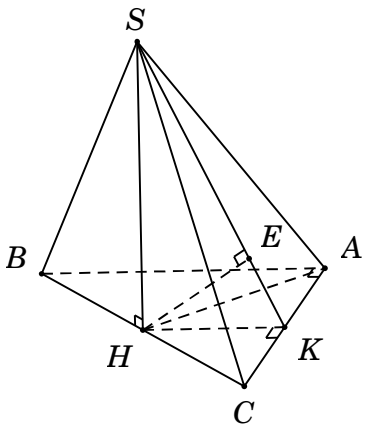
Từ (1) và (2), suy ra $AK\perp(SBC)$ nên $d\left[A,(SBC)\right]=AK.$

Trong ΔSAM, có $AK=\dfrac{SA.AM}{\sqrt{SA^2+AM^2}}=\dfrac{3a}{\sqrt{15}}=\dfrac{a\sqrt{15}}{5}.$

Vậy $d\left[A,(SBC)\right]=AK=\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Câu 63: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a,\ AC=a\sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SAC).

Lời giải



Gọi H là trung điểm của BC, suy ra $SH\perp BC\Rightarrow SH\perp(ABC)$.

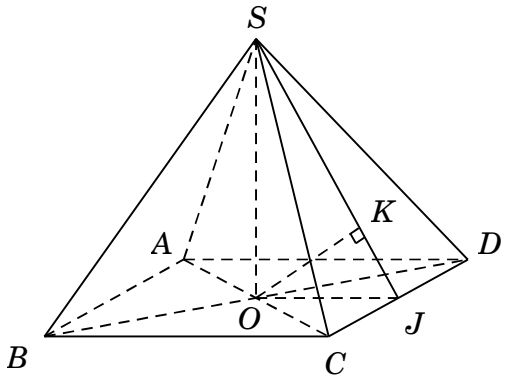
Gọi K là trung điểm AC, suy ra $HK\perp AC$.

Kẻ $HE\perp SK\ \ (E\in SK)$.

Khi đó $d\left[B,(SAC)\right]=2d\left[H,(SAC)\right]=2HE=2.\dfrac{SH.HK}{\sqrt{SH^2+HK^2}}=\dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 64: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $2a$. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải



Gọi O là tâm của đáy, suy ra $SO\perp(ABCD)$.

Ta có $d[A,(SCD)]=2d[O,(SCD)]$.

Gọi J là trung điểm CD, suy ra $OJ\perp CD$.

Gọi K là hình chiếu của O trên SJ, suy ra $OK\perp SJ$.

Khi đó $d[O,(SCD)]=OK=\dfrac{SO.OJ}{\sqrt{SO^2+OJ^2}}=\dfrac{a\sqrt{7}}{\sqrt{30}}$.

Vậy $d[A,(SCD)]=2OK=\dfrac{2a\sqrt{7}}{\sqrt{30}}$.

Dạng 3: Tính khoảng cách giữa hai đường thawnghr chéo nhau

1. Phương pháp:

1. Phương pháp

Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau, ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

- *Cách 1:* Dựng mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a và song song với b. Khoảng cách từ b đến (P) là khoảng cách cần tìm.
- *Cách 2:* Dựng hai mặt phẳng song song và lần lượt chứa hai đường thẳng. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó là khoảng cách cần tìm.
- *Cách 3:* Dựng đoạn vuông góc chung và tính độ dài đoạn đó.

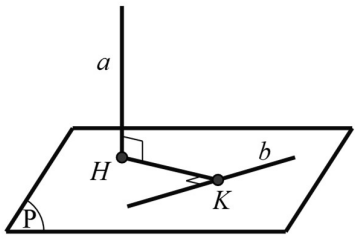
Cách dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau:

- *Cách 1:* Khi $a\perp b$

  + Dựng một $(P)\supset b, (P)\perp a$ tại H.

  + Trong (P) dựng $HK\perp b$ tại K.

  + Đoạn HK là đoạn vuông góc chung của a và b.

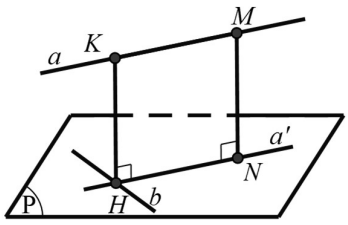


- *Cách 2:*

  + Dựng $(P)\supset b, (P)//a$.

  + Dựng $a'=hch_{(P)}a$, bằng cách lấy $M\in a$ dựng đoạn $MN\perp(\alpha)$, lúc đó a' là đường thẳng đi qua N và song song a.

  + Gọi $H=a'\cap b$, dựng $HK//MN\Rightarrow HK$ là đoạn vuông góc chung.



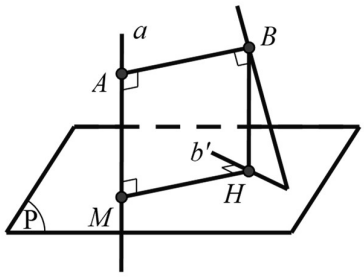
- *Cách 3:*

  + Dựng mặt phẳng (P) vuông góc với a tại điểm M.

+ Dựng hình chiếu b' của b trên (P).

+ Dựng hình chiếu vuông góc H của M trên b'.

+ Từ H dựng đường thẳng song song với a, cắt b tại điểm B.



+ Qua B dựng đường thẳng song song với MH, cắt a tại điểm A. Khi đó, AB là đoạn vuông góc chung của a và b.

2. Các ví dụ

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với $AC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, SB hợp với đáy góc 60^0. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AD và SC.

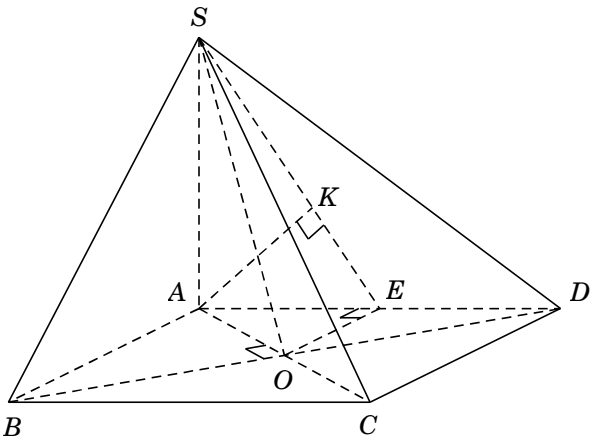
Lời giải

Ta có $d[AD,SC]=d[AD,(SBC)]=d[A,(SBC)]$.

Kẻ $AK\perp SB$. Khi đó $d[A,(SBC)]=AK=\frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{SBD}=60^0$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SO.

Lời giải



Ta có $\Delta SAB=\Delta SAD$ $(c-g-c)$, suy ra $SB=SD$.

Lại có $\widehat{SBD}=60^0$, suy ra ΔSBD đều cạnh $SB=SD=BD=a\sqrt{2}$.

Tam giác vuông SAB, có $SA=\sqrt{SB^2-AB^2}=a$.

Gọi E là trung điểm AD, suy ra $OE\parallel AB$ và $AE\perp OE$.

Do đó $d[AB,SO]=d[AB,(SOE)]=d[A,(SOE)]$.

Kẻ $AK \perp SE$.

Khi đó $d[A,(SOE)] = AK = \dfrac{SA.AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng 2. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \sqrt{3}$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BD.

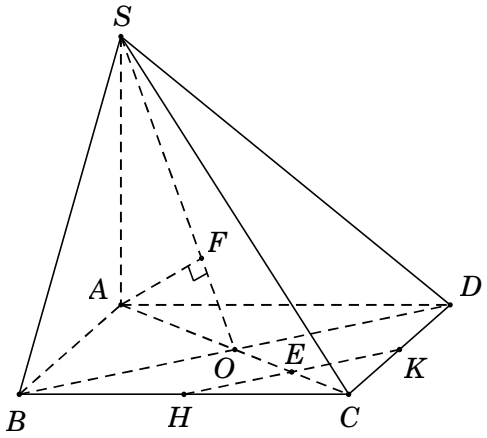
Lời giải

Ta có $BD \perp (SAC)$. Kẻ $OK \perp SA$.

Khi đó $d[SA, BD] = \dfrac{SO.OA}{\sqrt{SO^2 + OA^2}} = \dfrac{\sqrt{30}}{5}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của cạnh BC và CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD.

Lời giải



Gọi $E = HK \cap AC$.

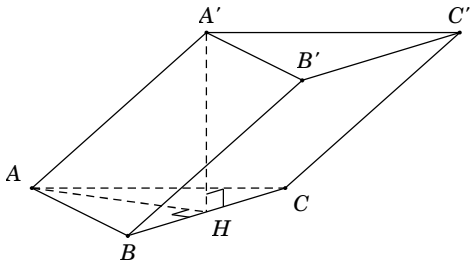
Do $HK \parallel BD$ nên $d[HK, SD] = d[HK, (SBD)] = d[E, (SBD)] = \dfrac{1}{2} d[A, (SBD)]$.

Kẻ $AF \perp SO$. Khi đó $d[A, (SBD)] = AF = \dfrac{SA.AO}{\sqrt{SA^2 + AO^2}} = \dfrac{2a}{3}$.

Vậy $d[HK, SD] = \dfrac{1}{2} AF = \dfrac{a}{3}$.

Câu 5: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh có độ dài bằng $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng BB' và $A'H$.

Lời giải



Do $BB' \parallel AA'$ nên $d\left[BB', A'H\right] = d\left[BB', (AA'H)\right] = d\left[B, (AA'H)\right]$.

Ta có $\begin{cases} BH \perp AH \\ BH \perp A'H \end{cases} \Rightarrow BH \perp (AA'H)$ nên $d\left[B, (AA'H)\right] = BH = \dfrac{BC}{2} = a.$

Vậy $d\left[BB', A'H\right] = a$.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ D đến mặt phẳng (SBC).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$. **B.** $d = a\sqrt{2}$. **C.** $d = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Do $AD \parallel BC$ nên $d\left[D, (SBC)\right] = d\left[A, (SBC)\right]$.

Gọi K là hình chiếu của A trên SB, suy ra $AK \perp SB$.

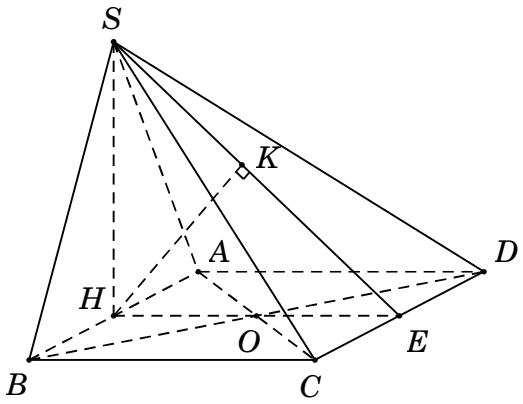
Khi $d\left[A, (SBC)\right] = AK = \dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ A đến (SCD).

A. $d = 1$. **B.** $d = \sqrt{2}$. **C.** $d = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $d = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm AB, suy ra $SH \perp AB.$ Do đó $SH \perp (ABCD).$

Do $AH \parallel CD$ nên $d[A,(SCD)] = d[H,(SCD)].$

Gọi E là trung điểm CD; K là hình chiếu vuông góc của H trên SE.

Khi đó $d[H,(SCD)] = HK = \dfrac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$

Vậy $d[A,(SCD)] = HK = \dfrac{\sqrt{21}}{7}.$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).

A. $d = a$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}.$ **C.** $d = a\sqrt{3}.$ **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Lời giải

Chọn B

Do $AB \parallel CD$ nên $d[B,(SCD)] = d[A,(SCD)]$. Kẻ $AE \perp SD$ tại E.

Khi đó $d[A,(SCD)] = AE.$

Tam giác vuông SAD, có $AE = \dfrac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}.$

Vậy $d[B,(SCD)] = AE = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}.$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Cạnh bên $SA = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SBC).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{285}}{19}.$ **B.** $d = \dfrac{\sqrt{285}}{38}.$ **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{285}}{38}.$ **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $d[O,(SBC)]=\frac{1}{2}d[A,(SBC)]$.

Gọi K là hình chiếu của A trên SB, suy ra $AK\perp SB$.

Khi đó $d[A,(SBC)]=AK$.

Tam giác vuông SAB, có $AK=\frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\frac{a\sqrt{285}}{19}$.

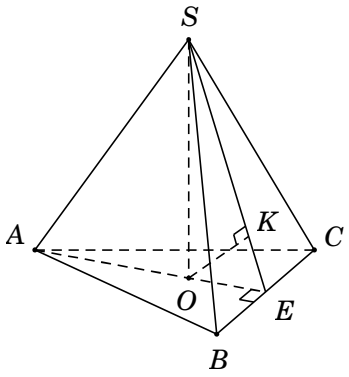
Vậy $d[O,(SBC)]=\frac{1}{2}AK=\frac{a\sqrt{285}}{38}$.

Câu 5: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{21}}{6}$. Tính khoảng cách d từ đỉnh A đến mặt phẳng (SBC).

A. $d=\frac{a}{4}$. **B.** $d=\frac{3a}{4}$. **C.** $d=\frac{3}{4}$. **D.** $d=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là tâm của tam giác đều ABC.

Do hình chóp $S.ABC$ đều nên suy ra $SO\perp(ABC)$.

Ta có $d[A,(SBC)]=3d[O,(SBC)]$.

Gọi E là trung điểm BC; Kẻ $OK\perp SE$.

Khi đó $d[O,(SBC)]=OK$.

Tính được $SO=\frac{a}{2}$ và $OE=\frac{1}{3}AE=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Tam giác vuông SOE, có $OK=\dfrac{SO.OE}{\sqrt{SO^2+OE^2}}=\dfrac{a}{4}$.

Vậy $d\left[A,(SBC)\right]=3OK=\dfrac{3a}{4}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, SB hợp với mặt đáy một góc $60°$. Tính khoảng cách d từ điểm D đến mặt phẳng (SBC).

A. $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $d=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $d=a$. **D.** $d=a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Xác định $60^0=\widehat{SB,(ABCD)}=\widehat{SB,AB}=\widehat{SBA}$, suy ra $SA=AB.\tan\widehat{SBA}=a\sqrt{3}$.

Ta có $AD\parallel BC\Rightarrow AD\parallel(SBC)$ nên $d\left[D,(SBC)\right]=d\left[A,(SBC)\right]$.

Kẻ $AK\perp SB$. Khi đó $d\left[A,(SBC)\right]=AK=\dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d\left[D,(SBC)\right]=AK=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 7: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 1, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60^0. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SBC).

A. $d=\dfrac{1}{2}$. **B.** $d=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $d=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. **D.** $d=\dfrac{\sqrt{42}}{14}$.

Lời giải

Chọn D

Xác định $60^0=\widehat{SB,(ABCD)}=\widehat{SB,OB}=\widehat{SBO}$ và $SO=OB.\tan\widehat{SBO}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Gọi M là trung điểm BC, kẻ $OK\perp SM$. Khi đó $d\left[O,(SBC)\right]=OK$.

Tam giác vuông SOM, có $OK=\dfrac{SO.OM}{\sqrt{SO^2+OM^2}}=\dfrac{\sqrt{42}}{14}$.

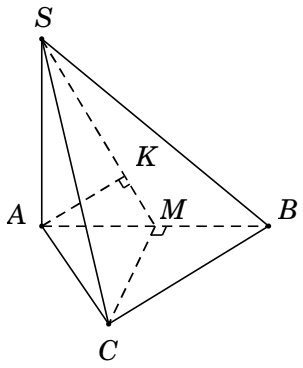
Vậy $d\left[O,(SBC)\right]=OK=\dfrac{\sqrt{42}}{14}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC); góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SMC).

A. $d=a\sqrt{3}.$ **B.** $d=\dfrac{a\sqrt{39}}{13}.$ **C.** $d=a.$ **D.** $d=\dfrac{a}{2}.$

Lời giải

Chọn B



Xác định $60^0=\widehat{SB,(ABC)}=\widehat{SB,AB}=\widehat{SBA}$ và $SA=AB.\tan\widehat{SBA}=a.\sqrt{3}=a\sqrt{3}$.

Do M là trung điểm của cạnh AB nên $d\left[B,(SMC)\right]=d\left[A,(SMC)\right]$.

Kẻ $AK\perp SM$. Khi đó $d\left[A,(SMC)\right]=AK.$

Tam giác vuông SAM, có $AK=\dfrac{SA.AM}{\sqrt{SA^2+AM^2}}=\dfrac{a\sqrt{39}}{13}.$

Vậy $d\left[B,(SMC)\right]=AK=\dfrac{a\sqrt{39}}{13}.$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC=2a,\ BC=a$. Đỉnh S cách đều các điểm $A,\ B,\ C$. Tính khoảng cách d từ trung điểm M của SC đến mặt phẳng (SBD).

A. $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}.$ **B.** $d=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}.$ **C.** $d=a\sqrt{5}.$ **D.** $d=a.$

Lời giải

Chọn A

Gọi O là trung điểm AC, suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Do đỉnh S cách đều các điểm $A,\ B,\ C$ nên $SO\perp(ABCD)$.

Ta có $d\left[M,(SBD)\right]=\dfrac{1}{2}d\left[C,(SBD)\right].$

Kẻ $CE\perp BD$. Khi đó $d\left[C,(SBD)\right]=CE=\dfrac{CB.CD}{\sqrt{CB^2+CD^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Vậy $d\left[M,(SBD)\right]=\dfrac{1}{2}CE=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}.$

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD=2BC$, $AB=BC=a\sqrt{3}$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi E là trung điểm của cạnh SC. Tính khoảng cách d từ điểm E đến mặt phẳng (SAD).

A. $d=a\sqrt{3}$. **B.** $d=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $d=\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $d\left[E,(SAD)\right]=\dfrac{1}{2}d\left[C,(SAD)\right]$.

Gọi M là trung điểm AD, suy ra $ABCM$ là hình vuông $\Rightarrow CM\perp AD$.

Do $\begin{cases}CM\perp AD\\ CM\perp SA\end{cases}\Rightarrow CM\perp(SAD)$ nên $d\left[C,(SAD)\right]=CM=AB=a\sqrt{3}$.

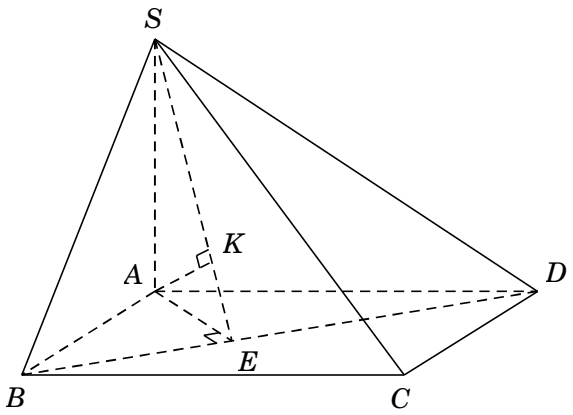
Vậy $d\left[E,(SAD)\right]=\dfrac{1}{2}CM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a$, $AD=2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc giữa SD với đáy bằng 60^0. Tính khoảng cách d từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) theo a.

A. $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $d=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $d=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **D.** $d=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Xác định $60^0=\widehat{SD,(ABCD)}=\widehat{SD,AD}=\widehat{SDA}$ và $SA=AD.\tan\widehat{SDA}=2a\sqrt{3}$.

Ta có $d\left[C,(SBD)\right]=d\left[A,(SBD)\right]$.

Kẻ $AE\perp BD$ và kẻ $AK\perp SE$. Khi đó $d\left[A,(SBD)\right]=AK$.

Tam giác vuông BAD, có $AE=\dfrac{AB.AD}{\sqrt{AB^2+AD^2}}=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Tam giác vuông SAE, có $AK=\dfrac{SA.AE}{\sqrt{SA^2+AE^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d\left[C,(SBD)\right]=AK=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ACBD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA=AB=BC=1$, $AD=2$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).

A. $d=\dfrac{2}{3}$. **B.** $d=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ **C.** $d=\dfrac{2a}{3}$. **D.** $d=1$.

Lời giải

Chọn A

Kẻ $AE\perp BD$, kẻ $AK\perp SE$. Khi đó $d\left[A,(SBD)\right]=AK$.

Tam giác vuông ABD, có $AE=\dfrac{AB.AD}{\sqrt{AB^2+AD^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Tam giác vuông SAE, có $AK=\dfrac{SA.AE}{\sqrt{SA^2+AE^2}}=\dfrac{2}{3}$.

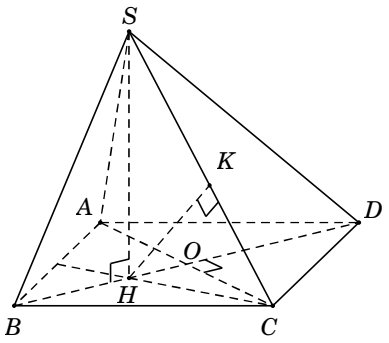
Vậy $d\left[A,(SBD)\right]=AK=\dfrac{2}{3}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. Tam giác ABC đều, hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Đường thẳng SD hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 30^0. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SCD) theo a.

A. $d=\dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$. **B.** $d=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $d=a$. **D.** $d=a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Xác định $30^0 = \widehat{SD,(ABCD)} = \widehat{SD,HD} = \widehat{SDH}$ và $SH = HD.\tan\widehat{SDH} = \dfrac{2a}{3}$.

Ta có $d\left[B,(SCD)\right] = \dfrac{BD}{HD}.d\left[H,(SCD)\right] = \dfrac{3}{2}.d\left[H,(SCD)\right]$.

Ta có $HC \perp AB \Rightarrow HC \perp CD$.

Kẻ $HK \perp SC$. Khi đó $d\left[H,(SCD)\right] = HK$.

Tam giác vuông SHC, có $HK = \dfrac{SH.HC}{\sqrt{SH^2 + HC^2}} = \dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$.

Vậy $d\left[B,(SCD)\right] = \dfrac{3}{2}HK = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a,\ AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

A. $d = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **B.** $d = a\sqrt{2}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ **D.** $d = 2a$.

Lời giải

Chọn C

Gọi M là trung điểm AD, suy ra $ABCM$ là hình vuông.

Do đó $CM = MA = \dfrac{AD}{2}$ nên tam gác ACD vuông tại C.

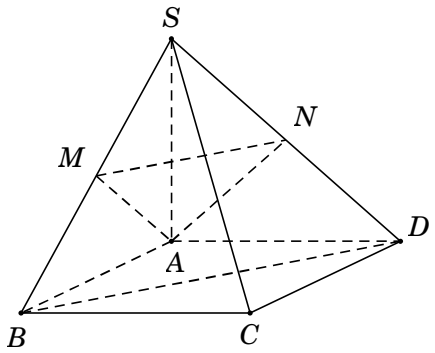
Kẻ $AK \perp SC$. Khi đó $d\left[A,(SCD)\right] = AK = \dfrac{SA.AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD = 2AB = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm của SB và SD. Tính khoảng cách d từ S đến mặt phẳng (AMN).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $d = 2a$. **C.** $d = \dfrac{3a}{2}$. **D.** $d = a\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A



Thể tích khối chóp $V_{S.ABD}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABD}.SA=\frac{2a^3}{3}$.

Vì $S_{\Delta SMN}=\frac{1}{4}S_{\Delta SBD}$ nên $V_{A.SMN}=\frac{1}{4}V_{A.SBD}=\frac{a^3}{6}$.

Ta có AM, AN là các đường trung tuyến trong tam giác vuông, MN là đường trung bình nên tính được $AM=\frac{a\sqrt{5}}{2}$, $AN=a\sqrt{2}$, $MN=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Từ đó tính được $S_{\Delta AMN}=\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$.

Vậy $d\left[S,(AMN)\right]=\frac{3V_{S.AMN}}{S_{\Delta AMN}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 16: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (BDA').

A. $d=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $d=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $d=\frac{\sqrt{6}}{4}$. **D.** $d=\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$, suy ra $AI\perp BD$.

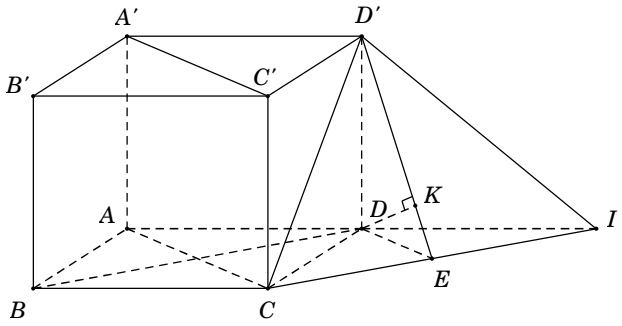
Kẻ $AK\perp A'I$. Khi đó $d\left[A,(BDA')\right]=AK=\frac{AA'.AI}{\sqrt{AA'^2+AI^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 17: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $AA'=2a$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng BD và CD'.

A. $d=a\sqrt{2}$. **B.** $d=2a$. **C.** $d=\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $d=\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là điểm đối xứng của A qua D, suy ra $BCID$ là hình bình hành nên $BD \parallel CI$.

Do đó $d[BD,CD'] = d[BD,(CD'I)] = d[D,(CD'I)]$.

Kẻ $DE \perp CI$ tại E, kẻ $DK \perp D'E$. Khi đó $d[D,(CD'I)] = DK$.

Xét tam giác IAC, ta có $DE \parallel AC$ (do cùng vuông góc với CI) và có D là trung điểm của AI nên suy ra DE là đường trung bình của tam giác. Suy ra $DE = \frac{1}{2}AC = a$.

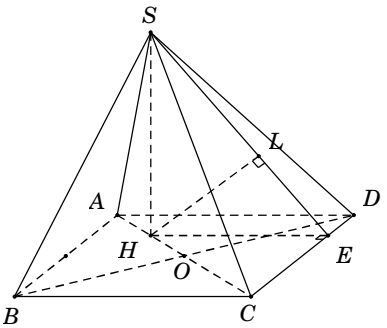
Tam giác vuông $D'DE$, có $DK = \frac{D'D.DE}{\sqrt{D'D^2 + DE^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng $4a$. Cạnh bên $SA = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của H của đoạn thẳng AO. Tính khoảng cách d giữa các đường thẳng SD và AB.

A. $d = \frac{4a\sqrt{22}}{11}$. **B.** $d = \frac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$. **C.** $d = 2a$. **D.** $d = 4a$.

Lời giải

Chọn A



Do $AB \parallel CD$ nên $d[SD,AB] = d[AB,(SCD)] = d[A,(SCD)] = \frac{4}{3}d[H,(SCD)]$.

Kẻ $HE \perp CD$, kẻ $HL \perp SE$.

Tính được $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=a\sqrt{2}$, $HE=\frac{3}{4}AD=3a.$

Khi đó $d\left[H,(SCD)\right]=HL=\frac{SH.HE}{\sqrt{SH^2+HE^2}}=\frac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}.$

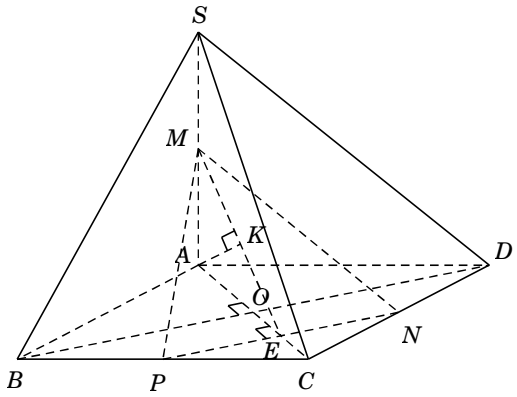
Vậy $d\left[SD,AB\right]=\frac{4}{3}HL=\frac{4a\sqrt{22}}{11}.$

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 10. Cạnh bện SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC=10\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD. Tính khoảng cách d giữa BD và MN.

A. $d=3\sqrt{5}.$ **B.** $d=\sqrt{5}.$ **C.** $d=5.$ **D.** $d=10.$

Lời giải

Chọn B



Gọi P là trung điểm BC và $E=NP\cap AC$, suy ra $PN\parallel BD$ nên $BD\parallel(MNP)$.

Do đó $d\left[BD,MN\right]=d\left[BD,(MNP)\right]=d\left[O,(MNP)\right]=\frac{1}{3}d\left[A,(MNP)\right].$

Kẻ $AK\perp ME$. Khi đó $d\left[A,(MNP)\right]=AK.$

Tính được $SA=\sqrt{SC^2-AC^2}=10\sqrt{3}\Rightarrow MA=5\sqrt{3}$; $AE=\frac{3}{4}AC=\frac{15\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác vuông MAE, có $AK=\frac{MA.AE}{\sqrt{MA^2+AE^2}}=3\sqrt{5}.$

Vậy $d\left[BD,MN\right]=\frac{1}{3}AK=\sqrt{5}$.

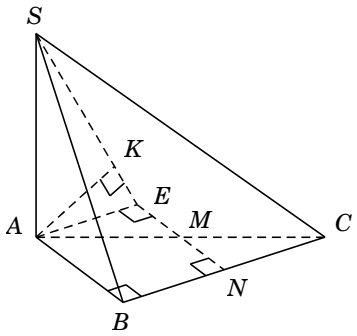
Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=3a$, $BC=4a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi giữa SC và đáy bằng 60^0. Gọi M là trung điểm của AC, tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SM.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. " Tránh mua các trang giả mạo và cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

A. $d=a\sqrt{3}$. **B.** $d=5a\sqrt{3}$. **C.** $d=\dfrac{5a}{2}$. **D.** $d=\dfrac{10a\sqrt{3}}{\sqrt{79}}$.

Lời giải

Chọn D



Xác định $60^0=\widehat{SC,(ABC)}=\widehat{SC,AC}=\widehat{SCA}$ và $SA=AC.\tan\widehat{SCA}=5a\sqrt{3}$.

Gọi N là trung điểm BC, suy ra $MN\parallel AB$.

Lấy điểm E đối xứng với N qua M, suy ra $ABNE$ là hình chữ nhật.

Do đó $d[AB,SM]=d[AB,(SME)]=d[A,(SME)]$.

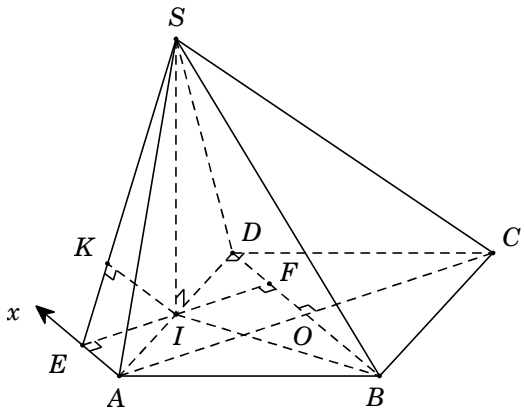
Kẻ $AK\perp SE$. Khi đó $d[A,(SME)]=AK=\dfrac{SA.AE}{\sqrt{SA^2+AE^2}}=\dfrac{10a\sqrt{3}}{\sqrt{79}}$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BD.

A. $d=\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **B.** $d=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $d=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $d=a$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là trung điểm của AD nên suy ra $SI \perp AD \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.

Kẻ $Ax \parallel BD$. Do đó $d[BD,SA] = d[BD,(SAx)] = d[D,(SAx)] = 2d[I,(SAx)]$.

Kẻ $IE \perp Ax$, kẻ $IK \perp SE$. Khi đó $d[I,(SAx)] = IK$.

Gọi F là hình chiếu của I trên BD, ta có $IE = IF = \dfrac{AO}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Tam giác vuông SIE, có $IK = \dfrac{SI.IE}{\sqrt{SI^2 + IE^2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$.

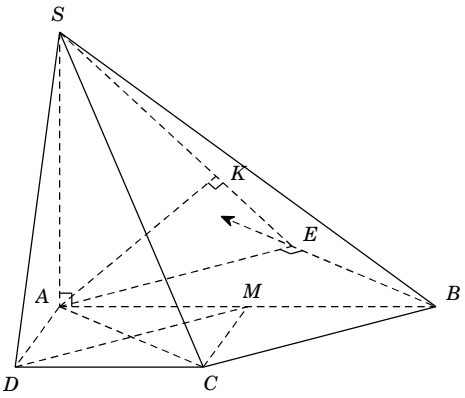
Vậy $d[BD,SA] = 2IK = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa SC và mặt đáy bằng 60^0. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AC và SB.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $d = 2a$. **C.** $d = a\sqrt{2}$. **D.** $d = \dfrac{2a\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Xác định $60^0 = \widehat{SC,(ABCD)} = \widehat{SC,AC} = \widehat{SCA}$ và $SA = AC.\tan\widehat{SCA} = a\sqrt{6}$.

Gọi M là trung điểm AB, suy ra $ADCM$ là hình vuông nên $CM = AD = a$.

Xét tam giác ACB, ta có trung tuyến $CM = a = \dfrac{1}{2}AB$ nên tam giác ACB vuông tại C.

Lấy điểm E sao cho $ACBE$ là hình chữ nhật, suy ra $AC \parallel BE$.

Do đó $d[AC,SB] = d[AC,(SBE)] = d[A,(SBE)]$. Kẻ $AK \perp SE$.

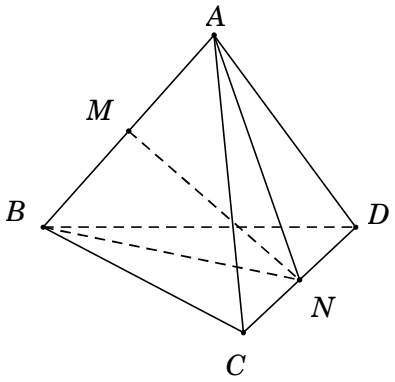
Khi đó $d[A,(SBE)] = AK = \dfrac{SA.AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 23: Tính khoảng cách d giữa hai cạnh đối của một tứ diện đều cạnh a.

A. $d=\dfrac{3a}{2}$. **B.** $d=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $d=a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Suy ra $\begin{cases} CD\perp BN \\ CD\perp AN \end{cases}\Rightarrow CD\perp (ABN)\Rightarrow CD\perp MN.$ (1)

Ta có $AN=BN=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \Delta ABN$ cân tại $N\Rightarrow MN\perp AB.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $d[AB,CD]=MN=\sqrt{BN^2-BM^2}=\sqrt{\dfrac{3a^2}{4}-\dfrac{a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 24: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng?

A. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\dfrac{a}{3}$.

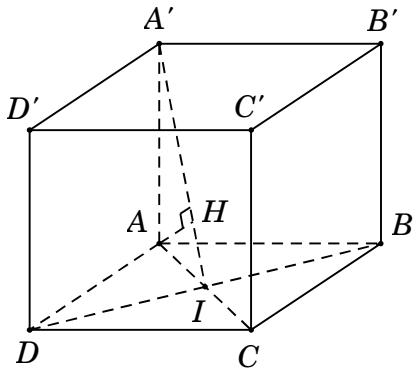
B. Độ dài đoạn AC' bằng $a\sqrt{3}$.

C. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(CDD'C')$ bằng $a\sqrt{2}$.

D. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $\dfrac{3a}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Xét các đáp án:

• **Chọn A** Gọi $I = BD \cap AC$ và H là hình chiếu của điểm A trên đường thẳng $A'I$

Dễ dàng chứng minh được $d\left(A,\left(A'BD\right)\right) = AH$

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3}{a^2} \longrightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Vậy A sai.

• **Chọn B** Đường chéo hình lập phương $AC' = a\sqrt{3}$. Vậy B đúng.

• **Chọn C** Ta có $AD \perp \left(CDD'C'\right) \longrightarrow d\left(A,\left(CDD'C'\right)\right) = AD = a$. Vậy C sai.

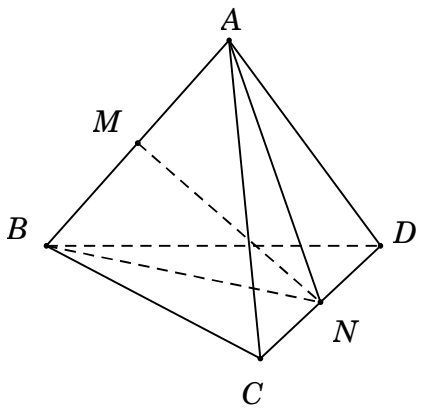
• **Chọn D** Ta có $AB \perp \left(BCC'B'\right) \longrightarrow d\left(A,\left(BCC'B'\right)\right) = AB = a$. Vậy D sai.

Câu 25: Khoảng cách giữa hai cạnh đối trong một tứ diện đều cạnh a bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{2a}{3}$. **D.** $2a$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Suy ra $\begin{cases} CD \perp BN \\ CD \perp AN \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABN) \Rightarrow CD \perp MN.$ (1)

Ta có $AN = BN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta ABN$ cân tại $N \Rightarrow MN \perp AB.$ (2)

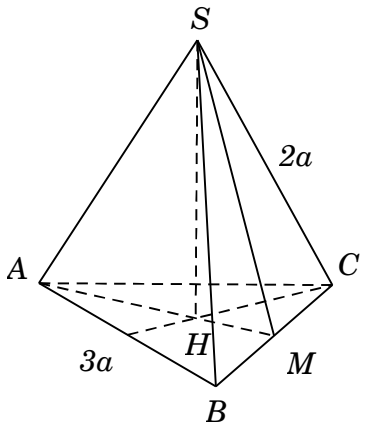
Từ (1) và (2), suy ra $d[AB,CD] = MN = \sqrt{BN^2 - BM^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$

Câu 26: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Khoảng cách từ đỉnh S đến mặt phẳng đáy là

A. $1,5a.$ **B.** $a.$ **C.** $a\sqrt{2}.$ **D.** $a\sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm BC và H là trọng tâm tam giác ABC.

Ta dễ dàng chứng minh được $SH \perp (ABC) \Rightarrow d(S,(ABC)) = SH$.

Ta có $AM = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$, $AH = \dfrac{2}{3}AM = a\sqrt{3} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - HA^2} = a$.

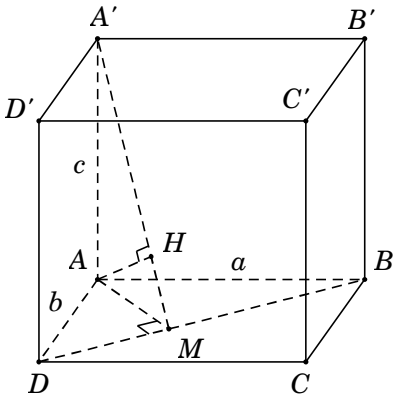
Câu 27: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Trong các kết quả sau đây, kết quả nào là sai?

A. $BD' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$ **B.** $d(AB,CC') = b.$

C. $d(BB',DD') = \sqrt{a^2 + b^2}.$ **D.** $d(A,(A'BD)) = \dfrac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$

Lời giải

Chọn D



Xét các đáp án:

• **Chọn A** Ta có $BD' = AC' = \sqrt{AB^2 + AD^2 + A'A^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Vậy A đúng.

• **Chọn B** Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp CC' \end{cases} \longrightarrow d(AB, CC') = BC = b.$ Vậy B đúng.

• **Chọn C** Ta có $BB' \parallel DD' \longrightarrow d(BB', DD') = BD = \sqrt{a^2 + b^2}$. Vậy C đúng.

• **Chọn D** Gọi M là hình chiếu của A trên AB, H là hình chiếu của A trên AM. Dễ dàng chứng minh được $AH \perp (A'BD) \longrightarrow d(A, (A'BD)) = AH$.

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{c^2} \longrightarrow AH = \sqrt{\frac{c^2(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2 + c^2}}$. Vậy D sai.