

PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN
SỬ DỤNG SƠ ĐỒ ĐƯỜNG CHÉO

I. NHẮC LẠI KIẾN THỨC .

- Công thức : $\int u dv = vu - \int v du$
- Áp dụng với các dạng nguyên hàm : $\int p(x).e^{ax+b} dx$; $\int p(x).\sin(ax+b)dx$;
 $\int p(x).\cos(ax+b)dx$; $\int p(x).\ln^n(ax+b)dx$;...
- Cách đặt :
 - Ưu tiên đặt “u” theo : logarit (ln) _ đa thức (p(x)) _ lượng giác
(sin x, cos x) _ mũ (e^x). *Nhất “log”, nhì “đa”, tam “lượng”, tứ “mũ”*
 - Phần còn lại là “dv”

II. PHƯƠNG PHÁP .

- Chia thành 2 cột
 - Cột 1 (cột trái : cột u) luôn lấy đạo hàm tới 0
 - Cột 2 (cột phải : cột dv) luôn lấy nguyên hàm cho tới khi tương ứng với cột 1
- Nhân chéo kết quả của hai cột với nhau.
- Dấu của phép nhân đầu tiên sẽ có dấu (+), sau đó đan dấu (-), (+), (-)...

III. PHÂN DẠNG VÀ VÍ DỤ MINH HOẠ .

Dạng 1 : $\int f(x).e^{ax+b} dx$

VD1: Tính nguyên hàm : $I = \int (2x^2 - 3).e^x dx$

(đạo hàm) $u = 2x^2 - 3$	dấu	(nguyên hàm) $dv = e^x dx$
4x	+	e^x
4	-	e^x
0	+	e^x

$$\Rightarrow I = e^x (2x^2 - 3) - 4x.e^x + 4e^x + C$$

$$= e^x (2x^2 - 4x + 1) + C$$

VD2: Tính nguyên hàm : $I = \int (x^3 + 2x).e^{x^2} dx$

Ta biến đổi đưa I về dạng thuần túy : $I = \int (x^2 + 2).e^{x^2} .xdx = \frac{1}{2} \int (x^2 + 2).e^{x^2} d(x^2)$

$$\xrightarrow{u = x^2} I = \frac{1}{2} \int (u + 2).e^u .du$$

(đạo hàm)	dấu	(nguyên hàm)
$u+2$		e^u
1	+	e^u
0	-	e^u

$$\Rightarrow I = e^u(u+2) - 1e^u + C$$

$$= e^u \cdot (u+1) + C = e^{x^2} (x^2 + 1) + C$$

VD3: Tính nguyên hàm $I = \int x^3 \cdot e^{2x+1} dx$

Ta biến đổi $I = \frac{1}{16} \int (2x)^3 e^{2x+1} d(2x) \xrightarrow{2x=u} I = \frac{1}{16} \int u^3 \cdot e^{u+1} du = \frac{e}{16} \int u^3 \cdot e^u du$

(đạo hàm)	dấu	(nguyên hàm)
u^3		e^u
$3u^2$	+	e^u
$6u$	-	e^u
6	+	e^u
0	-	e^u

$$\Rightarrow I = \frac{e}{16} [u^3 \cdot e^u - 3u^2 \cdot e^u + 6u \cdot e^u - 6e^u] + C$$

$$= \frac{e^{u+1}}{16} (u^3 - 3u^2 + 6u - 6) + C$$

$$= \frac{e^{2x+1}}{16} (8x^3 - 12x^2 + 12x - 6) + C$$

Dạng 2: $\int f(x) \cdot \sin(ax+b) dx; \int f(x) \cdot \cos(ax+b) dx$

VD1: Tính nguyên hàm $I = \int (2x+1) \cdot \cos x dx$

(đạo hàm)	dấu	(nguyên hàm)
$2x+1$		$\cos x$
2	+	$\sin x$
0	-	$-\cos x$

$$\Rightarrow I = (2x+1) \sin x - 2(-\cos x) + C$$

$$= (2x+1) \sin x + \cos x + C$$

VD2: Tính nguyên hàm $I = \int (x^2 - 2x) \cdot \sin x dx$

(đạo hàm)	dấu	(nguyên hàm)
$x^2 - 2x$		$\sin x$
$2x - 2$	+	$-\cos x$
2	-	$-\sin x$
0	+	$\cos x$

$$I = (-\cos x)(x^2 - 2x) - (2x - 2)(-\sin x) + 2 \cos x + C$$

$$= \cos x(-x^2 + 2x + 2) + (2x + 2) \sin x + C$$

VD3: Tính nguyên hàm $I = \int (x^7 - 2x) \cdot \cos(x^2) dx$

Ta biến đổi $I = \frac{1}{2} \int (x^6 - 2) \cdot \cos(x^2) d(x^2) \xrightarrow{u = x^2} I = \frac{1}{2} \int (u^3 - 2) \cdot \cos u du$

(đạo hàm)	dấu	(nguyên hàm)
$u^3 - 2$		$\cos u$
$3u^2$	+	$\sin u$
$6u$	-	$-\cos u$
6	+	$-\sin u$
0	-	$\cos u$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \sin u(u^3 - 2) - 3u^2(-\cos u) \\ &+ 6u(-\sin u) - 6\cos u + C \\ &= \sin u(u^3 - 6u - 2) + \cos u(3u^2 - 6) + C \\ &= \sin(x^2) \left[x^6 - 6x^2 - 2 \right] \\ &+ \cos(x^2) \left[3x^4 - 6 \right] + C \end{aligned}$$

Dạng 3: $\int f(x) \cdot \ln^n(ax+b) dx$

Chú ý : Dạng $\int f(x) \cdot \ln^n(ax+b) dx$ thì ưu tiên đặt $u = \ln^n(ax+b)$ vì vậy khi đạo hàm “u” sẽ không bằng 0 được, do vậy cần phải điều chỉnh hệ số rút gọn (nhân ngang $\rightarrow$ đơn giản tử mẫu) rồi sau đó mới làm tiếp.

VD1: Tính nguyên hàm $I = \int x \ln x dx$

(đạo hàm)	dấu	(nguyên hàm)
$\ln x$		x
$\frac{1}{x}$	+	$\frac{x^2}{2}$
(đơn giản) $\frac{1}{2}$		(đơn giản) x
0	-	$\frac{x^2}{2}$

Đơn giản bằng cách nhân kết quả ở 2 cột ta được $\frac{x}{2}$ tách ra 2 cột

(đạo hàm)	(nguyên hàm)
$\frac{1}{2}$	x

(Cách hiểu : do $\frac{1}{x}$ từ cột đạo hàm đã “nhảy” sang cột nguyên hàm để triệt tiêu với x nên $\frac{1}{2}$ phải “nhảy” ngược lại sang cột đạo hàm để bù)

$$\Rightarrow I = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + C$$

VD2: Tính nguyên hàm $I = \int x \cdot \ln^2 x dx$

(đạo hàm)	dấu	(nguyên hàm)
$\ln^2 x$		x
$\frac{2 \cdot \ln x}{x}$	+	$\frac{x^2}{2}$
(đơn giản) $\ln x$		x
$\frac{1}{x}$	-	$\frac{x^2}{2}$
(đơn giản) $1/2$		x
0	+	$\frac{x^2}{2}$

$$I = \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \cdot \ln x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \left[\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2} \right] + C$$

VD3: Tính nguyên hàm $I = \int (x^3 - 3) \ln x dx$

(đạo hàm)	dấu	(nguyên hàm)
$\ln x$		$x^3 - 3$
$1/x$	+	$x^4/4 - 3x$
(đơn giản) 1		$x^3/4 - 3$
0	-	$x^4/16 - 3x$

$$\Rightarrow I = \left(\frac{x^4}{4} - 3x \right) \ln x - \left(\frac{x^4}{16} - 3x \right) + C$$

VD4: Tính nguyên hàm $I = \int (2x+1) \cdot \ln^3(3x) dx$

(đạo hàm)	dấu	(nguyên hàm)
$\ln^3(3x)$		$2x+1$
$(3/x) \cdot \ln^2(3x)$	+	$\frac{x^2+x}{2}$
(đơn giản) $\ln^2(3x)$		$3x+3$
$(2/x) \cdot \ln(3x)$	-	$\frac{3x^2}{2} + 3x$
(đơn giản) $\ln(3x)$		$3x+6$
$1/x$	+	$\frac{3x^2}{2} + 6x$
(đơn giản) 1		$3x/2 + 6$
0	-	$3x^2/4 + 6x$

$$I = \ln^3(3x) \cdot (x^2 + x) - \ln^2(3x) \cdot \left(\frac{3x^2}{2} + 3x \right)$$

$$+ \ln(3x) \cdot \left(\frac{3x^2}{2} + 6x \right) - \left(\frac{3x^2}{4} + 6x \right) + C$$

VD5: Tính nguyên hàm $I = \int \ln^5(5x)dx$

Ta biến đổi $I = \frac{1}{5} \int \ln^5(5x)d(5x) \xrightarrow{u=5x} I = \frac{1}{5} \int \ln^5 u du$

(đạo hàm) $\ln^5 u$		(nguyên hàm) 1
$5. \frac{\ln^4 u}{u}$	+	u
(đơn giản) $\ln^4 u$		(đơn giản) 5
$4. \frac{\ln^3 u}{u}$	-	$5u$
(đơn giản) $\ln^3 u$		(đơn giản) 20
$3. \frac{\ln^2 u}{u}$	+	$20u$
(đơn giản) $\ln^2 u$		(đơn giản) 60
$2. \frac{\ln u}{u}$	-	$60u$
(đơn giản) $\ln u$		(đơn giản) 120
$\frac{1}{u}$	+	$20u$
(đơn giản) 1		(đơn giản) 120
0	-	$120u$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{5} \cdot [u \cdot \ln^5 u - 5u \cdot \ln^4 u + 20u \cdot \ln^3 u - 60u \cdot \ln^2 u + 120u \cdot \ln u - 120u] + C$$

$$= x \cdot [\ln^5(5x) - 5\ln^4(5x) + 20\ln^3(5x) - 60\ln^2(5x) + 120\ln(5x) - 120] + C$$

Dạng 4: Nguyên hàm lặp (tích phân lặp)

Nếu khi ta tính nguyên hàm (tích phân) theo sơ đồ đường chéo mà lặp lại nguyên hàm ban đầu cần tính (theo hàng ngang) thì dừng lại luôn ở hàng đó, không tính tiếp nữa.

1. Dấu hiệu khi dừng lại : nhận thấy trên cùng 1 hàng ngang tích của 2 phần tử ở 2 cột (không kể dấu và hệ số) giống nguyên hàm ban đầu cần tính.
2. Ghi kết quả (nhân theo đường chéo) như các ví dụ trên.
3. Nối 2 phần tử (ở dòng dừng lại), có thêm dấu $\int$ trước kết quả và coi gạch nối là 1 đường chéo, sử dụng quy tắc đan dấu.

VD1: Tính nguyên hàm $I = \int \sin x \cdot e^x \cdot dx$

(đạo hàm)	dấu	(nguyên hàm)
$\sin x$	+	e^x
$\cos x$		e^x
$-\sin x$	-	e^x (dùng lại)
	+	

$$\Rightarrow I = \sin x \cdot e^x - \cos x \cdot e^x + \int (-\sin x) \cdot e^x dx + C$$

$$= e^x (\sin x - \cos x) - \int \sin x \cdot e^x dx + C$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \cdot e^x (\sin x - \cos x) + C$$

VD2: Tính nguyên hàm $I = \int e^{2x+1} \cdot \sin^2(x - \frac{\pi}{4}) dx$

Ta biến đổi $I = \int e^{2x+1} \cdot \left[\frac{1 - \cos(2x - \frac{\pi}{2})}{2} \right] dx = \frac{1}{2} \int e^{2x+1} dx - \frac{1}{2} \int e^{2x+1} \cdot \sin(2x) dx = \frac{e^{2x+1}}{4} - I_1 + C$

$$I_1 = \frac{1}{4} \int e^{2x+1} \cdot \sin(2x) d(2x) \xrightarrow{u=2x} I_1 = \frac{1}{4} \int e^{u+1} \cdot \sin u du$$

(đạo hàm)	dấu	(nguyên hàm)
$\sin u$	+	e^{u+1}
$\cos u$		e^{u+1}
$-\sin u$	-	e^{u+1} (dùng lại)
	+	

$$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{4} \cdot e^{u+1} (\sin u - \cos u) - \frac{1}{4} \int \sin u \cdot e^{u+1} du + C$$

$$= \frac{1}{5} \cdot e^{u+1} (\sin u - \cos u) + C$$

$$= \frac{1}{5} \cdot e^{2x+1} (\sin(2x) - \cos(2x)) + C$$

$$\Rightarrow I = \frac{e^{2x+1}}{4} - \frac{1}{5} \cdot e^{2x+1} (\sin(2x) - \cos(2x)) + C$$

IV. BÀI TẬP VẬN DỤNG (sưu tầm và biên soạn).

(Nguồn : Thầy Nguyễn Hà Hưng)

Câu 1. Nguyên hàm $I = \frac{1}{5} \int x \cdot \ln^2 x d(5x) = F(x) + C$. Giá trị của $F(e)$ bằng :

A. $\frac{e^2}{2}$

B. $-\frac{e^2}{4}$

C. $\frac{e^2}{4}$

D. $-\frac{e^2}{2}$

Câu 2. Nguyên hàm $I = \int x \cdot \sin x \cos^2 x dx = F(x) + C$. Giá trị của $F(\pi)$ bằng :

A. $-\frac{\pi}{3}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. π

D. $-\pi$

Câu 3. Nguyên hàm $I = \int e^x \cdot \cos(2x) dx = F(x) + C$. Giá trị của $F(0)$ bằng :

A. $-\frac{1}{5}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $-\frac{2}{5}$

D. $\frac{1}{5}$

(Nguồn : Thầy Lương Văn Huy)

Câu 4. Nguyên hàm $\int (x-2)\sin 3x dx = -\frac{(x-a)\cos 3x}{b} + \frac{\sin 3x}{c} + 2017$

thì tổng $S = ab + c$ bằng :

- A. $S = 14$ B. $S = 15$ C. $S = 3$ D. $S = 10$

Câu 5. Nguyên hàm $\int x^2 \cdot e^x dx = (x^2 + mx + n) \cdot e^x + C$ thì giá trị của mn là :

- A. 6 B. 4 C. 0 D. -4

Câu 6. Biết $I = \int_0^1 x \cdot \ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right) dx = -\frac{15}{2} \ln \frac{a}{b} - c$, với $a, b, c \in \mathbb{Q}^*$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản

Tìm khẳng định đúng :

- A. $a + b = 2c$ B. $b + b = 3c$ C. $a + b = c$ D. $a + b = 4c$

Câu 7. Biết $I = \int_1^2 (x^2 + x) \cdot \ln x dx = \frac{a}{3} \ln 2 - \frac{b}{c}$, với $a, b, c \in \mathbb{Q}^*$ và phân số $\frac{b}{c}$ tối giản

Tính tổng $S = ab + c$ bằng :

- A. 806 B. 559 C. 1445 D. 1994

Câu 8. Biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cdot \sin(3x) dx = \frac{a - b \cdot e^{\pi}}{c}$, chọn khẳng định đúng :

- A. a, b, c là số nguyên tố B. a, c là số nguyên tố
C. b, c là số nguyên tố D. a, b là số nguyên tố

(Nguồn : Ngô Quang Chiến)

Câu 9. Hàm số $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ là một nguyên hàm của $g(x) = x(1-x)e^{-x}$.

Tính tổng $a + b + c$:

- A. 4 B. -2 C. 3 D. 1

Câu 10. Nguyên hàm $I = -\int (x^2 - 3x + 2)(4 \cos^3 x - 3 \cos x) d(\cos x) = F(x) + C$.

Giá trị của $F(0)$ bằng :

- A. $-\frac{3}{64}$ B. $\frac{9}{64}$ C. $\frac{9}{32}$ D. Đáp án khác