Nhóm toán anh Dúi

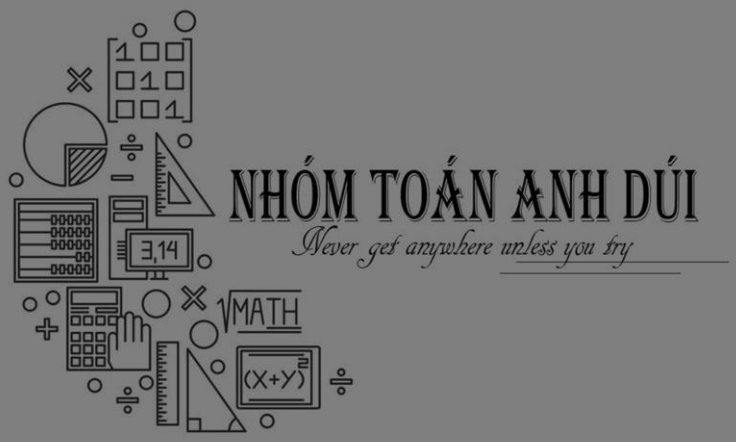
Nguyễn Thành Nhân
Phan Thành Tường

Phá đường dây

Hàm số

NHÓM TOÁN ANH DÚI

- Nắm chắc lý thuyết toán lớp 12
- Tư duy nhanh các bài toán trắc nghiệm
- Phân tích sâu các lỗi sai HS thường mắc phải
- Hệ thống câu hỏi đa dạng có chọn lọc
- Đánh giá năng lực theo thang 4 mức độ
- Extra Techniques bổ sung kinh nghiệm thực chiến đề



Nguyễn Thành Nhân



Đại học An Giang K21
Khoa Toán - Anh
Sinh nhật: 24/09/2002
Châm ngôn sống: Better late than never
Facebook: Nguyễn Thành Nhân
Youtube: Nhóm toán anh Dúi

Phan Thành Tường



Cao đẳng Kinh Tế Đối Ngoại TPHCM K24
Khoa Thương Mại Quốc Tế
Sinh nhật: 20/09/2002
Châm ngôn sống: Có làm có giỏi
Facebook: Kaito Tường

CHỦ ĐỀ 1:

HÀM SỐ & ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM

I.I. Tính đơn điệu của hàm số

A. Lý thuyết cần nắm

1. Đơn điệu là gì?

Một hàm số được gọi là đơn điệu nếu nó hoặc đồng biến hoặc nghịch biến trên K, trong đó K có thể là một khoảng (đoạn), nửa khoảng (nửa đoạn).

2. Mối quan hệ giữa tính đơn điệu và dấu của đạo hàm

Điều kiện cần để một hàm số đơn điệu:

Giả sử hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng I. Khi đó:

(i) Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến thì $f'(x)\geq 0, \forall x\in I$

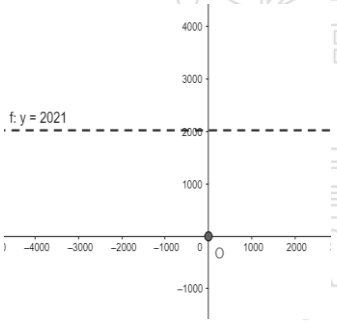
(ii) Nếu hàm số $y=f(x)$ nghịch biến thì $f'(x)\leq 0, \forall x\in I$

Lưu ý: Điều ngược lại **chưa chắc** đúng. (Xem **Ví dụ 1**)

Ví dụ 1: Xét hàm số $y=2021$.

Dễ thấy, $y'=0\geq 0$ (hoặc ≤ 0).

Tuy nhiên, $y=2021$ là một hàm hằng (hàm không đổi trên trường số thực $\mathbb{R}$).



Đồ thị I.I.1

Điều kiện đủ để một hàm số đơn điệu trên khoảng:

Giả sử hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng I. Khi đó:

(i) Nếu $f'(x)\geq 0, \forall x\in I$ và dấu "$=$" chỉ xảy ra ở hữu hạn điểm của khoảng I thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên I.

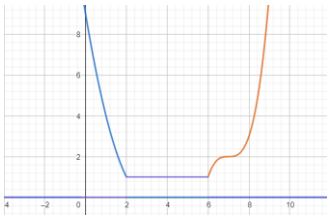
(ii) Nếu $f'(x)\leq 0, \forall x\in I$ và dấu "$=$" chỉ xảy ra ở hữu hạn điểm của khoảng I thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên I.

(iii) Nếu $f'(x)=0, \forall x\in I$ thì hàm số $y=f(x)$ không đơn điệu (không đổi) trên I.

Mở rộng khoảng đơn điệu trên nữa khoảng, đoạn:

Điều kiện đủ để một hàm số đơn điệu trên nữa khoảng:

Ví dụ 2: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ như hình 2 bên dưới



Đồ thị I.I.2

Ta có nhận xét như sau:

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

Hàm số $y=f(x)$ không đổi trên khoảng $(2;6)$.

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(6;+\infty)$.

Lưu ý: Trên khoảng $(6;+\infty)$ có một điểm (hữu hạn) làm đồ thị hàm số đi ngang (đạo hàm tại điểm đó bằng không).

Vì hàm số liên tục trên đoạn $\mathbb{R}$, nên hoàn toàn ta có thể thay các khoảng I thành các nửa khoảng, đoạn I' tương ứng.

Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[a;b)$ (hoặc $(a;b]$) và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$. Khi đó:

(i) Nếu $f'(x)\geq 0,\forall x\in(a;b)$ và dấu "=" chỉ xảy ra ở hữu hạn điểm của khoảng $(a;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $[a;b)$ (hoặc $(a;b]$).

(ii) Nếu $f'(x)\leq 0,\forall x\in(a;b)$ và dấu "=" chỉ xảy ra ở hữu hạn điểm của khoảng $(a;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên nửa khoảng $[a;b)$ (hoặc $(a;b]$).

(iii) Nếu $f'(x)=0,\forall x\in(a;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ không đơn điệu (không đổi) trên nửa khoảng $[a;b)$ (hoặc $(a;b]$).

Điều kiện đủ để một hàm số đơn điệu trên đoạn:

Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$. Khi đó:

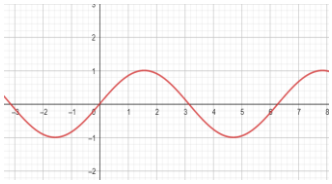
(i) Nếu $f'(x)\geq 0,x\in(a;b)$ và dấu "=" chỉ xảy ra ở hữu hạn điểm của khoảng $(a;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a;b]$.

(ii) Nếu $f'(x)\leq 0,x\in(a;b)$ và dấu "=" chỉ xảy ra ở hữu hạn điểm của khoảng $(a;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a;b]$.

(iii) Nếu $f'(x)=0,x\in(a;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ không đơn điệu (không đổi) trên đoạn $[a;b]$.

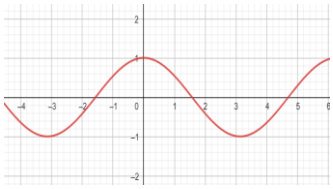
Nhận xét chiều biến thiên: *Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị hàm số có chiều hướng đi lên từ trái sang phải. Nếu hàm số nghịch biến thì đồ thị hàm số có chiều hướng đi xuống từ trái sang phải. Tất nhiên, hàm hằng thì chỉ là một đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành.* (Xem **Ví dụ 2**).

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try



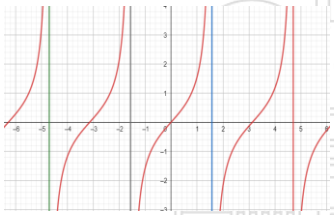
Hàm số $y=\sin x$

Đồ thị I.I.3



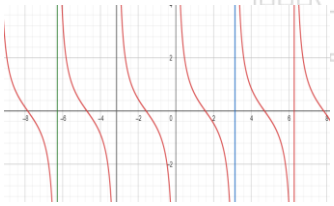
Hàm số $y=\cos x$

Đồ thị I.I.4



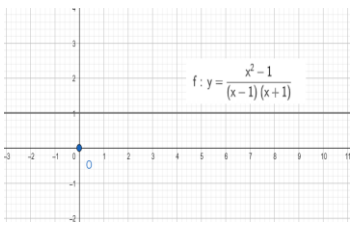
Hàm số $y=\tan x$

Đồ thị I.I.5



Hàm số $y=\cot x$

Đồ thị I.I.6



Đồ thị I.I.7

Những trường hợp đặc biệt:

Ta xét những hàm số tuần hoàn, hàm số lượng giác: $y=\sin x$ hay $y=\cos x$ sẽ có một số vô hạn điểm mà tại đó hàm số đạo hàm bằng không. Nhưng ta vẫn có thể kết luận rằng hàm số $y=\sin x$ đồng biến trên họ các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right),\forall k\in\mathbb{Z}$ và nghịch biến trên họ các khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right),\forall k\in\mathbb{Z}$.

(Xem **Đồ thị I.I.3**).

Một cách tương tự, ta có kết luận rằng hàm số:

$y=\cos x$ đồng biến trên họ các khoảng $(-\pi+k2\pi;k2\pi),\forall k\in\mathbb{Z}$ và nghịch biến trên họ các khoảng $(k2\pi;\pi+k2\pi),\forall k\in\mathbb{Z}$.

(Xem **Đồ thị I.I.4**).

$y=\tan x$ đồng biến trên họ các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right),\forall k\in\mathbb{Z}$.

(Xem **Đồ thị I.I.5**).

$y=\cot x$ nghịch biến trên họ các khoảng $(k\pi;\pi+k\pi),\forall k\in\mathbb{Z}$.

(Xem **Đồ thị I.I.6**).

Nhận xét : Khi xác định tính đơn điệu của đồ thị hàm số bằng đạo hàm ta phải đặc biệt lưu ý về câu chuyện phải có dấu bằng xảy ra tại **hữu hạn** điểm là bởi: Nếu dấu bằng xảy ra tại một số vô hạn điểm trên K hay xảy ra trên toàn tập K thì mảy may một trường hợp nào đó giống như hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[2;6]$ thì hàm số không đổi.

Hay hàm số $y=\frac{x^2-1}{(x-1)(x+1)}$ chẳng hạn, trên khoảng $(1;+\infty)$, hàm số liên tục và có đạo hàm bằng 0 do $y=\frac{x^2-1}{x^2-1}=1,\forall x\in(1;+\infty)$ nên khi đó: $y'=0,\forall x\in(1;+\infty)$. **Vậy hàm số có hay không tính đơn điệu?** Đáp án là **không**. (Xem **Đồ thị I.I.7**).

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Extra Techniques:

Remark:

Để đánh giá dấu trong khoảng (x_i, x_{i+1}) ta có thể dùng công cụ Casio để hỗ trợ bằng cách "CALC" một giá trị trung gian trong khoảng (x_i, x_{i+1}), dấu của $f'(x_0), \forall x_0 \in (x_i, x_{i+1})$ cũng chính là dấu của dấu của $f'(x)$ trong khoảng (x_i, x_{i+1}).

Ngoài ra, công cụ đạo hàm cũng khá hữu hiệu trong việc xác định dấu của $f'(x)$ trên từng khoảng con trên K.

3. Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số

Bước 1: Tìm tập xác định D.

Bước 2: Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Tìm tất cả các điểm $x_i, i = \overline{1,n}$ mà tại đó $f'(x_i) = 0$ hoặc $f'(x_i)$ không xác định.

Bước 3: Lập bảng biến thiên và sắp xếp các điểm vừa tìm được theo thứ tự tăng dần cùng các kí hiệu tương ứng.

Bước 4: Kết luận khoảng đơn điệu của hàm số.

B. Bài tập trong các đề thi thử

Dạng 1: Bài toán không chứa tham số

Câu 1. Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

(Trích đề tham khảo BGD&ĐT năm 2017)

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Đáp án: D

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Xét hàm số: $y = \dfrac{x-2}{x+1}$

Ta có: $y' = \dfrac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$

Vì vậy, hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$ đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$

Extra Techniques:

Tips:

Để đạo hàm hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ta có thể áp dụng công thức đạo hàm nhanh như sau:

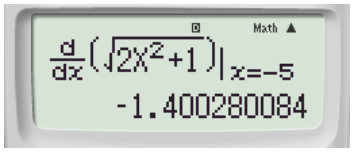
$$y' = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}$$

Extra Techniques:

Casio:

Cơ sở: Dựa vào đáp án ta có thể dễ dàng loại trừ các phương án sai:

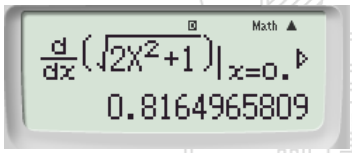
Đạo hàm tại $x=-5$



Vì: $y'(-5)<0$

Loại **B.**

Đạo hàm tại $x=0.5$



Vì: $y'(0.5)>0$

Loại **C, D.**

Chọn A.

Câu 2. Cho hàm số $y=\sqrt{2x^2+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

(Trích đề thi THPTQG năm 2017 MĐ 104)

Đáp án: A

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Xét hàm số: $y=\sqrt{2x^2+1}$

Ta có: $y'=\dfrac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}}=\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}=0\Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $y=\sqrt{2x^2+1}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Câu 3. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. $y=\dfrac{x-1}{x-2}$. **B.** $y=x^3+x$. **C.** $y=-x^3-3x$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{x+3}$.

(Trích đề thi THPTQG năm 2017 MĐ 110)

Đáp án: B

Lời giải

Extra Techniques:

Remark:

Cơ sở: Dựa vào đáp án ta có thể dễ dàng loại trừ các phương án sai:

Đáp án **A** và **D** đều là các hàm nhất biến vì thế đồ thị hoặc đồng biến hoặc nghịch biến hoặc không đổi trên từng khoảng xác định. Hay nói cách khác đồ thị hàm nhất biến không liên tục và không đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Loại **A, D.**

Đáp án **C** là một hàm bậc ba có hệ số $a<0$ nên:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-x^3-3x\right)=-\infty$$

Hay hàm số có **xu hướng đi theo chiều từ trên xuống dưới** khi x dần đến một khoảng đủ lớn.

Loại **C.**

Chọn **B.**

Ta xét từng đáp án:

+) Đáp án **A**:

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Vậy hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-2}$ không thể nào liên tục trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

Loại **A.**

+) Đáp án **B**:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=3x^2+1>0,\forall x\in\mathbb{R}$

Vậy hàm số $y=x^3+x$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Chọn **B.**

+) Đáp án **C:**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=-3x^2-3<0,\forall x\in\mathbb{R}$

Vậy hàm số $y=-x^3-3x$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Loại **C.**

+) Đáp án **D**:

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

Vậy hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+3}$ không thể nào liên tục trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

Loại **D.**

Câu 4. Hàm số $y=\dfrac{2}{x^2+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(-1;1)$.

(Trích đề thi THPTQG năm 2017 MĐ 123)

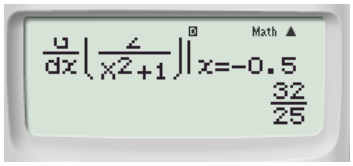
NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Extra Techniques:

Casio:

Cơ sở: Dựa vào đáp án ta có thể dễ dàng loại trừ các phương án sai:

Đạo hàm tại $x=-0.5$



Vì: $y'(-0.5)>0$

Loại **A, C, D.**

Chọn B.

Đáp án: B

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Xét hàm số: $y=\dfrac{2}{x^2+1}$

Ta có: $y'=\dfrac{-4x}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	2	↘	0

Từ bảng biến thiên của đồ thị hàm số ta nhận thấy rằng đồ thị hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

(Trích đề thi THPTQG năm 2019 MĐ 103)

Đáp án: C

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số ta thấy rằng: Hàm số đồng biến trên hai khoảng rời nhau: $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 6. Trong các hàm số sau hàm nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x^3+5x$.

B. $\dfrac{x+2}{x-7}$.

C. x^4-4x^2-6.

D. $\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$.

(Trích đề thi Nhóm toán anh Dúi 2020 - 2021)

Đáp án: A

Lời giải

Xét từng đáp án:

+) Đáp án **A**:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=3x^2+5>0$

Vì vậy hàm số: $y=x^3+5x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+) Đáp án **B**:

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{7\}$

Vì vậy hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-7}$ không liên tục trên $\mathbb{R}$

Loại **B.**

+) Đáp án **C**:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=4x^3-8x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\sqrt{2}\\x=0\\x=\sqrt{2}\end{array}\right.$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-10	↗	-6	↘	-10	↗	$+\infty$

Extra Techniques:

Remark:

Cơ sở: Dựa vào đáp án ta có thể dễ dàng loại trừ các phương án sai:

Đáp án **B** là hàm nhất biến vì thế đồ thị hoặc đồng biến hoặc nghịch biến hoặc không đổi trên từng khoảng xác định. Hay nói cách khác đồ thị hàm nhất biến không liên tục và không đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Loại **B.**

Đáp án **C** là một hàm bậc bốn trùng phương có tích hệ số $ab<0$ nên có 3 điểm cực trị, vì $a>0$ nên đồ thị hàm số có dạng hình chữ "W" Loại **C.**

Đáp án **D** có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$ vì vậy hàm không xác định trên toàn tập $\mathbb{R}$. Vì thế nó không thể nào đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Loại **D.**

Chọn **A.**

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Extra Techniques:

Tips:

Đối với các bài toán phân thức bậc hai trên bậc hai có dạng:

$$y=\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}$$

Ta có thể áp dụng công thức đạo hàm nhanh như sau:

$$y'=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}x^2+2\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}x+\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}}{\left(a_2x^2+b_2x+c_2\right)^2}$$
$$=\frac{\left(a_1b_2-a_2b_1\right)x^2+2\left(a_1c_2-a_2c_1\right)x+b_1c_2-b_2c_1}{\left(a_2x^2+b_2x+c_2\right)^2}$$

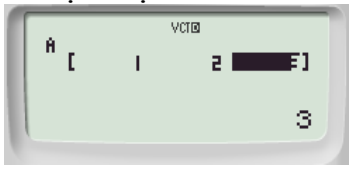
Extra Techniques:

Casio:

Ví dụ cần đạo hàm phân thức: $y=\frac{x^2+2x+3}{4x^2+5x+6}$ bằng Casio ta làm theo các bước sau:

B1: Vào mode **Vector**.

B2: Khai báo vector **A** với 3 kích thước lần lượt là hệ số của x^2, x và hệ số tự do của tử số.



Từ bảng biến thiên của đồ thị hàm số đã cho ta thấy rằng đồ thị hàm số nghịch biến trên hai khoảng rời nhau: $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$ và $\left(0;\sqrt{2}\right)$.

Vì vậy hàm số: $y=x^4-4x^2-6$ không thể nào đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Loại **C.**

+) Đáp án **D**:

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$

Vì vậy hàm số $y=\frac{x^2+1}{x^2-4}$ không liên tục trên $\mathbb{R}$.

Loại **D.**

Câu 7. Hàm số $y=\frac{3}{x^2+2}$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)$.

C. $(-\infty;+\infty)$. **D.** $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$.

(Trích đề thi Nhóm toán anh Dúi 2020 - 2021)

Đáp án: B

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=-\frac{3(2x)}{\left(x^2+2\right)^2}=-\frac{6x}{\left(x^2+2\right)^2}=0\Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\frac{3}{2}$	↘	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số $y=\frac{3}{x^2+2}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

B3: Thoát ra chế độ chờ bằng phím AC.

Nhấn liên tiếp hai phím SHIFT và phím VECTOR 5.

để khai báo tương tự cho vector **B** với ba kích thước x^2, x và hệ số tự do của mẫu số.



B4: Thoát ra chế độ chờ bằng phím AC.

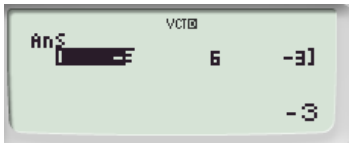
Nhấn liên tiếp ba phím SHIFT, phím VECTOR 5 và phím BASE 3 để xuất ra màn hình vector **A**.

B5: Nhấn phím nPr GCD ×.

B6: Nhấn liên tiếp ba phím SHIFT, phím VECTOR 5 và phím MATRIX 4 để xuất ra màn hình vector **B**.

B7: Nhấn phím =.

B8: Đọc kết quả từ sau ra trước, nhân thêm "-2" vào số thứ hai.



$$\Rightarrow y'=\frac{-3x^2-12x-3}{\left(4x^2+5x+6\right)^2}$$

Câu 8. Trên đoạn $[0;2\pi]$, hàm số $f(x)=\cos(2x+3)-2x^2-6x-\frac{9}{2}$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{\pi}{2};2\pi\right)$.

C. $(0;2\pi)$. **D.** $(\pi;2\pi)$.

(Trích đề thi Nhóm toán anh Dúi 2020 - 2021)

Đáp án: C

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $f(x)=\cos(2x+3)-2x^2-6x-\frac{9}{2}$

$$\Leftrightarrow f(x)=\cos(2x+3)-\frac{4x^2+12x+9}{2}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\cos(2x+3)-\frac{(2x+3)^2}{2}$$

Khi đó: $f'(x)=-2\sin(2x+3)-2(2x+3)=0$

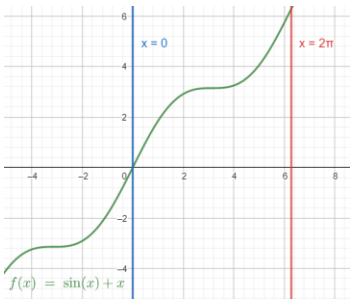
$$\Leftrightarrow \sin(2x+3)+2x+3=0$$

$$\Leftrightarrow 2x+3=0\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}\,(L)$$

x	0		2π
$f'(x)$	|	$-$	|
$f(x)$	$f(0)$	↘	$f(2\pi)$

Vậy hàm số: $f(x)=\cos(2x+3)-2x^2-6x-\frac{9}{2}$ nghịch biến trên khoảng $(0;2\pi)$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI



Đồ thị hàm số

$y = f(x) = \sin x + x$

Đồ thị I.I.8

Extra Techniques:

Remark:

Giả sử đồ thị hàm số $y = f(x)$ tăng ngặt (luôn đồng biến) hay giảm ngặt (luôn nghịch biến) trên khoảng K, khi đó trên khoảng K, phương trình $f(x) = 0$, nếu có nghiệm, thì tối đa chỉ có 1 nghiệm.

Một câu hỏi được đặt ra, rằng tại sao ta có:

$$\sin(2x+3) + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \text{ ???}$$

Ta xét một bài toán phụ như sau:

Tìm giá trị của x thỏa mãn: $\sin x + x = 0$???

Ta xét hàm số: $f(x) = \sin x + x$

Ta có: $f'(x) = \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$

Bảng biến thiên:

x	0		π		2π
$f'(x)$	|	+	0	+	|
$f(x)$	0	↗	$f(\pi)$	↗	$f(2\pi)$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x) = \sin x + x$ ta nhận thấy đồ thị là một hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nên phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm. Mà mặt khác ta lại có: $f(0) = 0$. Vậy $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình: $\sin x + x = 0$.

Câu 9. Hàm số nào có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây?

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		−	|	−	
$f(x)$	2	↘	||	↘	2
			$-\infty$		$+\infty$

A. $f(x) = \dfrac{2x-4}{x-2}$.

B. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-2}$.

C. $f(x) = \dfrac{2x-5}{x-2}$.

D. $\dfrac{4x-1}{2}$.

(Trích đề thi Nhóm toán anh Dúi 2020 - 2021)

Đáp án: B

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy rằng:

- Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên từng khoảng xác định, khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.
- Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=2$ làm tiệm cận đứng.
- Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y=2$ làm tiệm cận ngang.

Xét từng đáp án:

+) Đáp án **A**:

Ta lưu ý rằng tuy mới nhìn vào hàm số $f(x)=\dfrac{2x-4}{x-2}$ ta nhận thấy đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang và đứng lần lượt là $x=2,\ y=2$ thật. Tuy nhiên, sau một phép biến đổi thì:

$$f(x)=\frac{2x-4}{x-2}=2$$

Vì vậy đồ thị hàm số đơn giản chỉ là đường thẳng $y=2$ trên hai khoảng rời nhau $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$ (bị gián đoạn tại $x=2$).

Loại **A.**

+) Đáp án **B**:

- Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=2$ làm tiệm cận đứng.
- Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y=2$ làm tiệm cận ngang.

Ta có: $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-2}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-3}{(x-2)^2}<0$

- Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên từng khoảng xác định, khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Chọn **B.**

+) Đáp án **C**:

Ta có: $y'=\dfrac{1}{(x-2)^2}>0$.

Vì thế hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định, khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

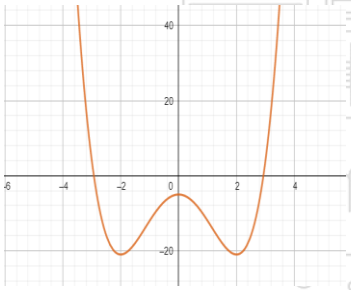
Loại **C.**

Đáp án **D**:

Dễ thấy rằng, đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{4x-1}{2}=2x-\dfrac{1}{2}$ là phương trình đường thẳng có $a=2>0$, nên hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Loại **D**.

Một số Tips để làm tốt các bài toán không chứa tham số



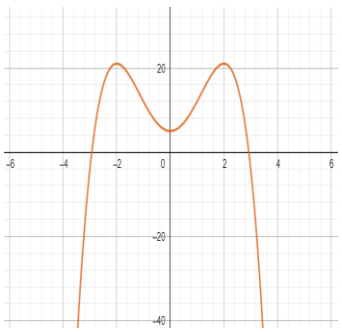
Đồ thị I.I.9

(1) Xét hàm số: $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$, ta có các nhận xét:

❖ Trường hợp 1: $\begin{cases}ab<0\\a>0\end{cases}$ hay $\begin{cases}a>0\\b<0\end{cases}$

Khi đó đồ thị hàm số có dạng hình chữ "W", ta có thể loại trừ các phương án với đồ thị có dạng hình chữ "M", "$\cup$", "$\cap$".

Minh họa hình dạng chung của đồ thị (Xem **Đồ thị I.I.9**).

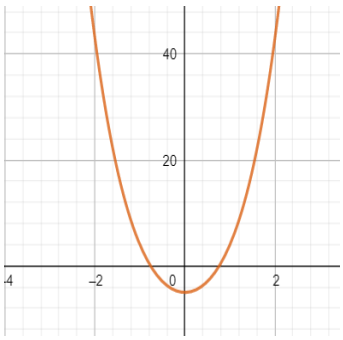


Đồ thị I.I.10

❖ Trường hợp 2: $\begin{cases}ab<0\\a<0\end{cases}$ hay $\begin{cases}a<0\\b>0\end{cases}$

Khi đó đồ thị hàm số có dạng hình chữ "M", ta có thể loại trừ các phương án với đồ thị có dạng hình chữ "W", "$\cup$", "$\cap$".

Minh họa hình dạng chung của đồ thị (Xem **Đồ thị I.I.10**).



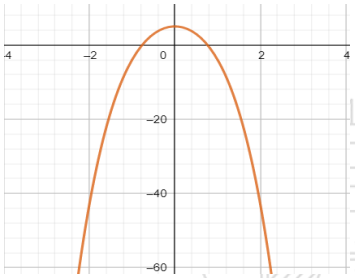
Đồ thị I.I.11

Trường hợp 3: $\begin{cases} ab \ge 0 \\ a > 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a > 0 \\ b \ge 0 \end{cases}$

Khi đó đồ thị hàm số có dạng giống hình chữ $\cup$ của Parabol ta có thể loại trừ các phương án với đồ thị có dạng hình chữ "W", "M", "$\cap$".

Minh họa hình dạng chung của đồ thị (Xem **Đồ thị I.I.11**).

❖ Trường hợp 4: $\begin{cases} ab \ge 0 \\ a < 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a < 0 \\ b \le 0 \end{cases}$



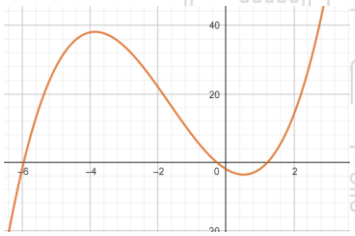
Đồ thị I.I.12

Khi đó đồ thị hàm số có dạng giống hình chữ $\cap$ của Parabol ta có thể loại trừ các phương án với đồ thị có dạng hình chữ "W", "M", "$\cup$".

Minh họa hình dạng chung của đồ thị (Xem **Đồ thị I.I.12**).

NHÓM TOÁN ANH DÚI

(2) Xét hàm số: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \ne 0)$

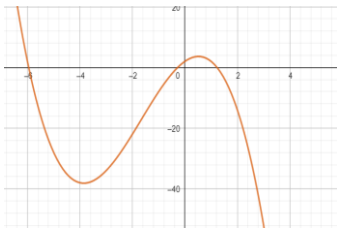


Đồ thị I.I.13

❖ Trường hợp 1: $\begin{cases} b^2 - 3ac > 0 \\ a > 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} b^2 > 3ac \\ a > 0 \end{cases}$

Khi đó đồ thị hàm số có dạng giống chữ "N" ta có thể loại trừ các phương án khác.

Minh họa hình dạng chung của đồ thị (Xem **Đồ thị I.I.13**).

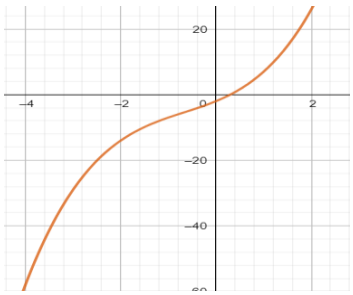


Đồ thị I.I.14

❖ Trường hợp 2: $\begin{cases} b^2 - 3ac > 0 \\ a < 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} b^2 > 3ac \\ a < 0 \end{cases}$

Khi đó đồ thị hàm số có dạng giống chữ "И" ta có thể loại trừ các phương án khác.

Minh họa hình dạng chung của đồ thị (Xem **Đồ thị I.I.14**).



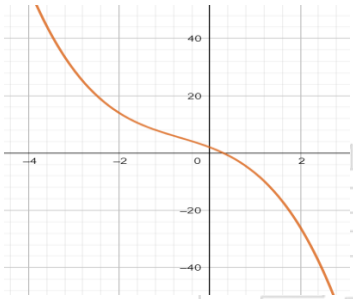
Đồ thị I.I.15

❖ Trường hợp 3: $\begin{cases} b^2-3ac\le 0 \\ a>0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} b^2\le 3ac \\ a>0 \end{cases}$

Đặc biệt rằng khi đó đồ thị hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

(Hàm số không có điểm cực trị).

Minh họa hình dạng chung của đồ thị (Xem **Đồ thị I.I.15**).



Đồ thị I.I.16

❖ Trường hợp 2: $\begin{cases} b^2-3ac>0 \\ a<0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} b^2>3ac \\ a<0 \end{cases}$

Đặc biệt rằng khi đó đồ thị hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$

(Hàm số không có điểm cực trị).

Minh họa hình dạng chung của đồ thị (Xem **Đồ thị I.I.16**).

NHÓM TOÁN ANH DÚI

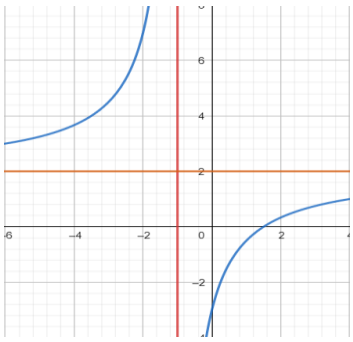
"Hai Tips trên đã chỉ rõ cho ta 8 trường hợp thường gặp của 2 dạng đồ thị, tiếp theo, chúng tôi xin trình bài các yếu tố có liên quan đến sự đồng biến, nghịch biến của các loại hàm cơ bản để áp loại trừ các hàm sai trong các bài toán thường gặp."

(3) Xét hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

❖ Trường hợp 1: $\dfrac{a}{c}\ne\dfrac{b}{d}$

Hàm số có đạo hàm: $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

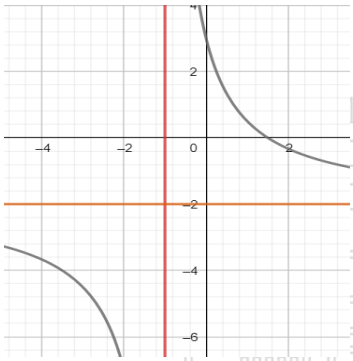
Khi đó sự đồng biến, nghịch biến (trên từng khoảng xác định) của đồ thị hàm số phụ thuộc duy nhất vào tính âm, dương của tử số. Hay nói cách khác, nếu:



Đồ thị I.I.17

- $ad-bc>0$ hay $ad>bc$ thì hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ đồng biến trên từng khoảng xác định (đồng biến trên hai khoảng rời nhau $\left(-\infty;-\dfrac{d}{c}\right)$ và $\left(-\dfrac{d}{c};+\infty\right)$).

Minh họa hình dạng chung của đồ thị (Xem **Đồ thị I.I.17**).



Đồ thị I.I.18

- $ad-bc<0$ hay $ad<bc$ thì hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định (nghịch biến trên hai khoảng rời nhau $\left(-\infty;-\dfrac{d}{c}\right)$ và $\left(-\dfrac{d}{c};+\infty\right)$).

Minh họa hình dạng chung của đồ thị (Xem **Đồ thị I.I.18**).

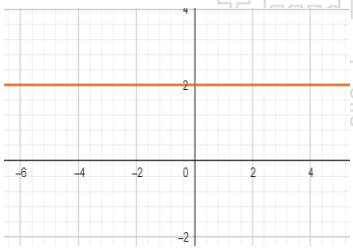
NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

❖ Trường hợp 2: $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}=k$

Hàm số: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{kcx+kd}{cx+d}=\dfrac{k\left(cx+d\right)}{cx+d}=k$

Hàm số có đạo hàm: $y'=0$

Khi đó sự đồng biến, nghịch biến (trên từng khoảng xác định) của đồ thị không tồn tại. Hay nói cách khác hàm số đã cho là một hàm không đổi (hàm hằng) trên hai khoảng rời nhau $\left(-\infty;-\dfrac{d}{c}\right)$ và $\left(-\dfrac{d}{c};+\infty\right)$.



Đồ thị I.I.19

Minh họa hình dạng chung của đồ thị (Xem **Đồ thị I.I.19**).

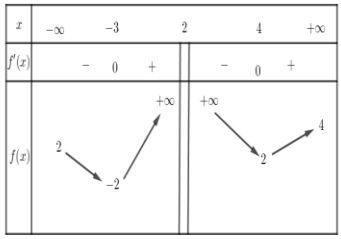
Hàm nhất biến chỉ hoặc đồng biến hoặc nghịch biến hoặc không đổi trên từng khoảng xác định. Trong thực tế nhiều câu hỏi lại dựa vào yếu tố không để ý vào vấn đề này mà có thể bẫy học sinh. Chẳng hạn, các nhận định được cho dưới đây là hoàn toàn sai.

× Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Extra Techniques:

Remark:

Sở dĩ ta không kết luận hàm số đồng biến, nghịch biến trên một tập $(\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ hay $\left(-\infty;-\frac{d}{c}\right)\cup\left(-\frac{d}{c};+\infty\right))$ vì theo chương trình biên soạn của Sách giáo khoa hiện hành không đề cập đến vấn đề biến thiên trên một tập, nên ta không có cơ sở để kết luận rằng hàm số đồng biến hoặc nghịch trên tập. Nói cách khác ta không thừa nhận việc kết luận sự biến thiên của hàm số cùng các phép toán trên tập hợp $(\cup,\cap,\setminus,...)$.



Minh họa sự đan dấu qua điểm mà tại đó hàm số không xác định.

× Hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

× Hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$

× Hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$

× Hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$

× Hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ đồng biến trên $\left(-\infty;-\frac{d}{c}\right)\cup\left(-\frac{d}{c};+\infty\right)$

× Hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ nghịch biến trên $\left(-\infty;-\frac{d}{c}\right)\cup\left(-\frac{d}{c};+\infty\right)$

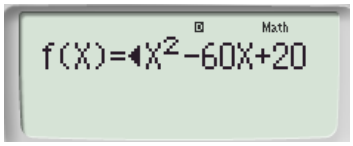
(4) Hàm số $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$

- Hàm số bậc bốn trùng phương có ít nhất một điểm cực trị là điểm $x=0$ do đó hàm số luôn có khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến. Đặc biệt hơn khi hàm số chỉ có một điểm cực trị thì hàm số trên chỉ có một khoảng nghịch biến và một khoảng đồng biến lần lượt là $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$ hoặc ngược lại.
- Hàm số bậc bốn trùng phương là một hàm chẵn vì thế đồ thị của chúng có điểm cực trị đối xứng nhau qua trục tung do đó có các khoảng đồng biến, nghịch biến cũng đối xứng nhau qua trục tung (các khoảng đối dấu nhau).

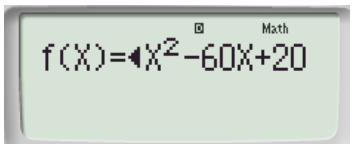
(5) Xét dấu đạo hàm giai đoạn bảng biến thiên

- Khi xét dấu ở giai đoạn bảng biến thiên ta chỉ cần chọn một điểm giữa mỗi khoảng để xét dấu đạo hàm trên khoảng đó.
- Điểm $x=x_0$ mà tại đó $f(x_0)$ không xác định cũng có thể làm thay đổi dấu của đạo hàm khi qua nó. (Một lỗi sai thường thấy của học sinh).

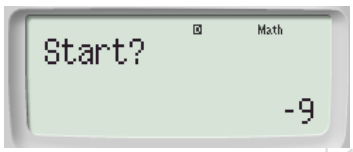
Xem bảng biến thiên như hình minh họa.



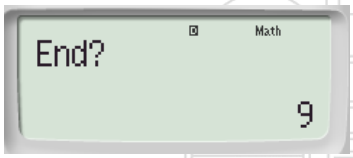
Hình 10.1



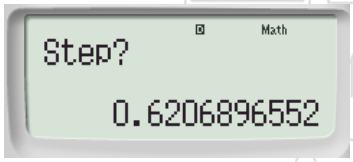
Hình 10.2



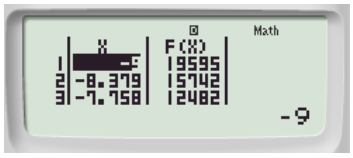
Hình 10.3



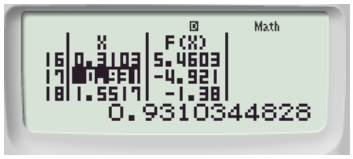
Hình 10.4



Hình 10.5



Hình 10.6



Hình 10.7

"Tiếp theo, chúng tôi xin trình bày một số Tips có thể hữu dụng với các bạn trong quá trình tính toán, lựa chọn những đáp án đúng bằng công cụ Casio."

(6) Đối với bài toán đồng biến, nghịch biến trên một khoảng cho trước.

Câu 10. Hàm số $y=x^4-12x^3+46x^2-60x+20$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(3;5)$.

C. $(2;4)$. **D.** $(7;9)$.

(Trích đề thi Nhóm toán anh Dúi 2020 - 2021)

Đáp án: D

Lời giải

Đối với dạng toán như thế này, ta nảy ra ý tưởng sử dụng công cụ Casio với mode **Table** để tìm khoảng đồng biến nghịch biến.

Ta vào mode **Table** và nhập biểu thức $f(x)$ đề bài đã cho

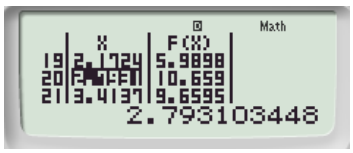
(Xem **Hình 10.1** và **Hình 10.2**.)

Chọn: $\begin{cases} Start:-9 \\ End:9 \\ Step:\dfrac{9-(-9)}{29} \end{cases}$ (Xem **Hình 10.3**, **Hình 10.4**, **Hình 10.5**.)

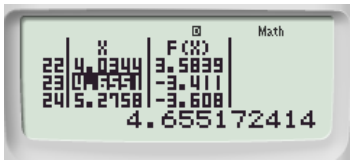
Màn hình Casio hiện thời sau khi nhấn phím $=$ (Xem **Hình 10.6**.)

Ta nhấn liên tục phím $\blacktriangledown$ để di chuyển con trỏ chuột xuống các giá trị bên dưới và note lại khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số. Chẳng hạn, ta thấy rằng trên khoảng $x\in(-9;0.931...)$ hàm số giảm từ một số rất lớn $(+\infty)$ về $-4.921...$ rồi có dấu hiệu tăng dần khi vượt qua $x=1$.

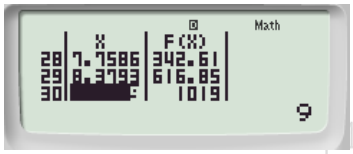
(Xem **Hình 10.7**)



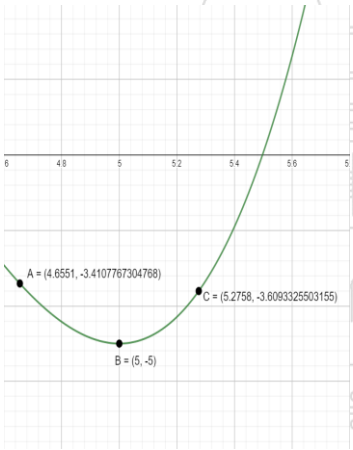
Hình 10.8



Hình 10.9



Hình 10.10



Hình 10.11

Extra Techniques:

Tips:

Sở dĩ, ta chọn khoảng $(-9;9)$ vì đáp án có điểm nhỏ nhất là $-\infty$ nên ta một số đủ nhỏ để xét, ta chọn (-9) và điểm lớn nhất là 9 thì hiển nhiên.

Một cách tương tự, trên khoảng $x\in(1.55...;2.79...)$ hàm số tăng từ $-1.38...$ đến $10.659...$ và có dấu hiệu giảm khi vượt qua điểm $x=3$.

(Xem **Hình 10.8**)

Một lần nữa, ta thấy trên khoảng $x\in(3.413...;4.655...)$ hàm số giảm từ $9.659...$ đến $-3.411...$ và có dấu hiệu tăng khi vượt qua điểm $x=5$.

(Xem **Hình 10.9**)

Cuối cùng, trên khoảng $x\in(5.27...;9)$ hàm số tăng từ $-3.608...$ đến một số rất lớn $(+\infty)$.

(Xem **Hình 10.10**)

Thống kê lại ta phát thảo được chiều đồng biến, nghịch biến của hàm số lên bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

Lưu ý: Ở đây nếu nhìn vào **Hình 10.9** chắc hẳn ai cũng có thắc mắc tại sao hàm số đi qua $x=5$ thì giá trị y vẫn còn giảm mà chúng tôi lại bảo có dấu hiệu tăng. Thực chất, chúng tôi đưa bài toán này để các bạn lưu ý hơn vì sự bất tiện của các dòng máy Casio đời cũ, vì **Step** khá lớn nên nó có thể gây một xíu sai lầm nếu chúng ta dùng phương pháp Casio. Lỗi sai được minh họa như **Hình 10.11**.

Một phương pháp Casio khác có thể giải quyết nhanh dạng toán này là công cụ **đạo hàm**. Xem **Câu 11.**

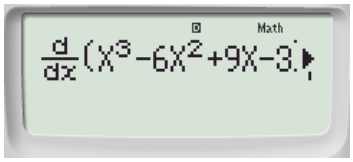
Câu 11. Hàm số $y=x^3-6x^2+9x-3$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(1;3)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(3;+\infty)$.

(Trích đề thi Nhóm toán anh Dúi 2020 - 2021)

Đáp án: A.

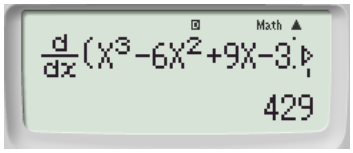
Lời giải



Hình 11.1

Bước 1: Gọi công cụ đạo hàm ra màn hình chính của Casio và nhập biểu thức $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ như hình minh họa.

(Xem **Hình 11.1**)



Hình 11.2

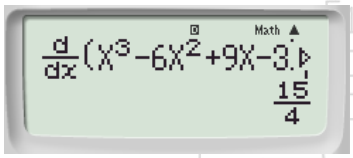
Bước 2: Sau biểu thức đạo hàm có vị trí để **CALC** giá trị của x.

- Ta nhập $x = -10$ (vì $-10 \in (-\infty;1)$) thu được kết quả như hình minh họa.

(Xem **Hình 11.2**.)

Vì $y'(-10) > 0$ nên khoảng $(-\infty;1)$ không thể nghịch biến.

Loại **B**.



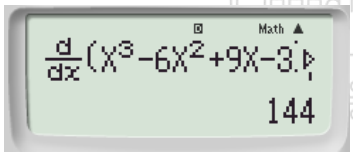
Hình 11.3

- Ta nhập $x = 3.5$ (vì $3.5 \in (2;4)$) thu được kết quả như hình minh họa.

(Xem **Hình 11.3**.)

Vì $y'(3.5) = \frac{15}{4} > 0$ nên khoảng $(2;4)$ không thể nghịch biến.

Loại **C**.



Hình 11.4

- Ta nhập $x = 9$ (vì $9 \in (3;+\infty)$) thu được kết quả như hình minh họa.

(Xem **Hình 11.4**.)

Vì $y'(9) = 144 > 0$ nên khoảng $(3;+\infty)$ không thể nghịch biến.

Loại **D.**

Dễ dàng ta chọn được phương án **A**.

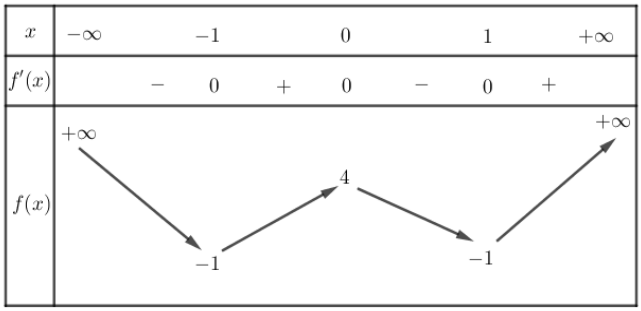
"Trên đây là một số Tips chúng tôi cảm thấy rất hữu dụng trong các bài toán hiện hành. Do mục đích phục vụ cho phần đông các bạn học sinh nên phần trình bày khá chi tiết và khá dài. Nhưng nếu bạn đọc hiểu bản chất vấn đề, thao tác sẽ ngắn gọn hơn, chuẩn xác hơn và quan trọng nhất vẫn là lợi thế về thời gian nếu biết các Tips này."

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

TỰ LUYỆN 4 MỨC ĐỘ

Câu 1. [Nhận biết].

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



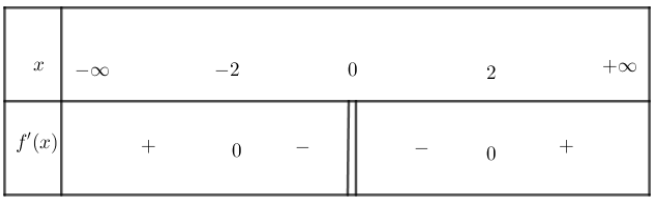
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(0;1)$.

C. $(-1;1)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 2. [Nhận biết].

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

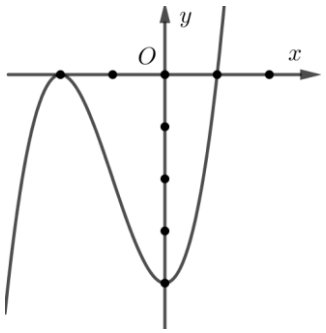
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 3. [Nhận biết].

Đồ thị của hàm số dưới đây nghịch biến trên khoảng nào?



A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-2;0)$.

C. $(2;+\infty)$. **D.** $(-2;1)$.

Câu 4. [Thông hiểu].

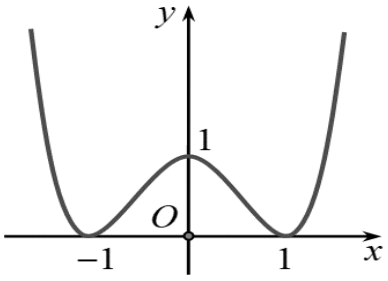
Hàm số $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-\infty;0)$.

C. $(1;+\infty)$. **D.** $(-2;1)$.

Câu 5. [Thông hiểu]

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào sao đây là **sai**?



NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never yet anywhere unless you try

A. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

B. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

C. Hàm số $y=f(x)$ là một hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Câu 6. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=\dfrac{-x+3}{x+2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y=\dfrac{-x+3}{x+2}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

B. Hàm số $y=\dfrac{-x+3}{x+2}$ nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

C. Hàm số $y=\dfrac{-x+3}{x+2}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$.

D. Hàm số $y=\dfrac{-x+3}{x+2}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Câu 7. [Nhận biết].

Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y=x^4$.

B. $y=x^3+2x-4$.

C. $y=\dfrac{1-x}{x+2}$.

D. $y=\sin x-x$.

Câu 8. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Nhận định nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $f'(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

B. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $f'(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

C. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f'(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

D. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f'(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 9. [Vận dụng].

Biết hàm số $y=x^3-6x^2+9x-2$ nghịch biến trên khoảng lớn nhất $(a;b)$. Khi đó tổng lập phương của a và b có giá trị là?

A. 64.

B. -27.

C. 28.

D. 27.

Câu 10. [Vận dụng].

Biết rằng hàm số $y=ax^4+bx^2+c,(a\neq 0)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$. Mệnh đề nào dưới đây chắc chắn **sai**?

A. $\begin{cases}a<0\\b=0\\c\in\mathbb{R}\end{cases}$.

B. $\begin{cases}a<0\\ab>0\\ac=0\end{cases}$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI Never stop learning, because life never stop teaching

C. $\begin{cases} a<0 \\ b>0 \\ c\in\mathbb{R} \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a<0 \\ ab\geq 0 \\ c<0 \end{cases}$.

Câu 11. [Nhận biết].

Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x-3$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(5;+\infty)$. **B.** $(1;5)$.

C. $(-\infty;5)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 12. [Nhận biết].

Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$?

A. $y=\frac{x+1}{x}$. **B.** $y=x^2$.

C. $y=\cos x$. **D.** $y=\tan x$.

Câu 13. [Vận dụng].

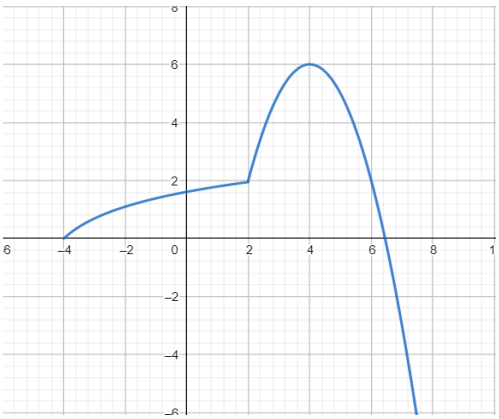
Giả sử hàm số $y=f(x)$ nghịch biến và có đạo hàm trên khoảng $(-9;9)$. Mệnh đề sau đây chắc chắn **sai**?

A. $f'(-1).f'(2)\geq 0$. **B.** $f'(-3)\leq 0$.

C. $f(3)=f(8)$. **D.** $f'(3)=f'(8)$.

Câu 14. [Nhận biết].

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên khoảng $(-4;+\infty)$. Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng nhất?



A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-4;2)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;6)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-4;4)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-4;2)$ và $(2;4)$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Câu 15. [Nhận biết].

Biết rằng hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$ nghịch biến trên đoạn có độ lớn bằng a. Giá trị a là?

A. $a=1$. **B.** $a=2$. **C.** $a=3$. **D.** $a=4$.

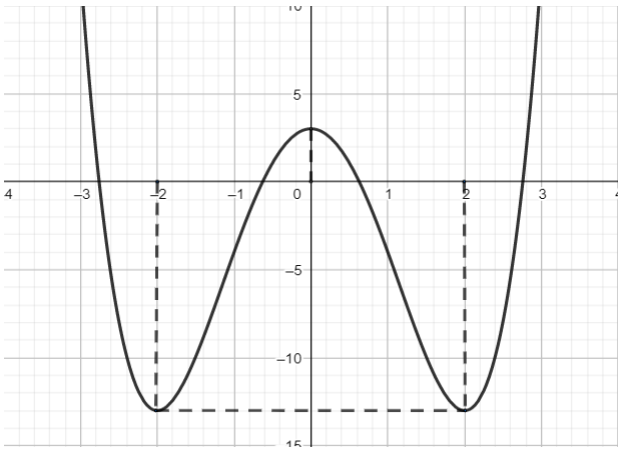
Câu 16. [Nhận biết].

Giả sử hàm số $y=\sqrt{6+5x-x^2}$ có đoạn đồng biến là $[a;b],(a,b\in\mathbb{Q})$ và đoạn nghịch biến là $[c;d],(c,d\in\mathbb{Q})$. Khi đó tổng $S=a+b+c+d$ bằng?

A. $S=10$. **B.** $S=5$. **C.** $S=\frac{15}{2}$. **D.** $S=0$.

Câu 17. [Nhận biết].

Hàm số $y=f(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây nghịch biến trên những khoảng nào?



A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

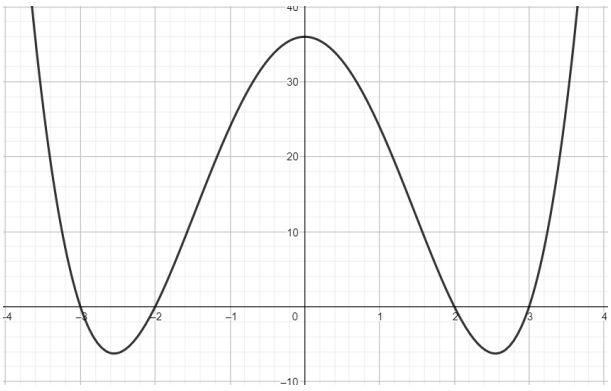
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

Câu 18. [Nhận biết].

Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Nhận định nào sau đây là **sai** về hàm số $y=f(x)$?



A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;-2)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

Câu 19. [Thông hiểu].

Biết hàm số $y=\dfrac{\ln x}{x}$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$. Tính giá trị biểu thức $S=a+\ln b$?

A. $S=0$. **B.** $S=1+\ln 2$.

C. $S=1$. **D.** $S=\ln 2$.

Câu 20. [Thông hiểu].

Hàm số $y=x\ln x-x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(1;+\infty)$.

C. $(-1;0)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Câu 21. [Vận dụng cao].

Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{2\sin^2 x+\cos 2x}-x\sqrt{3}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

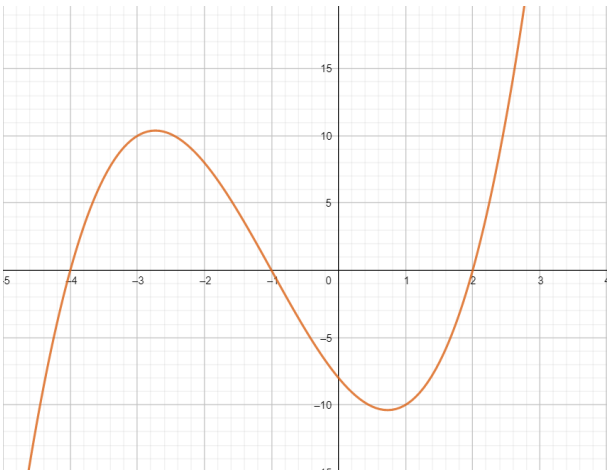
A. $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

C. $\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{\pi}{3};\pi\right)$.

Câu 22. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$, biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y=f\left(x^2-x\right)$ nghịch biến trong khoảng nào sau đây?

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try



A. $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(2;+\infty)$.

C. $(-\infty;-1)$. **D.** $(-1;2)$.

Câu 23. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $f'(0)=1$, $f'(2)=-2021$ và $f'(-1)=-2021$. Biết hàm số $y=f''(x)$ có bảng xét dấu như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y=g(x)=f(x+2022)+2021x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

x		0		2	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

A. $(-\infty;2)$. **B.** $(2;+\infty)$.

C. $(-\infty;-2023)$. **D.** $(-2023;+\infty)$.

Câu 24. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết rằng: $y=f'(x)=x(x-2)^2(x+3)$. Hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, giá trị biểu thức $S=b-a$ bằng?

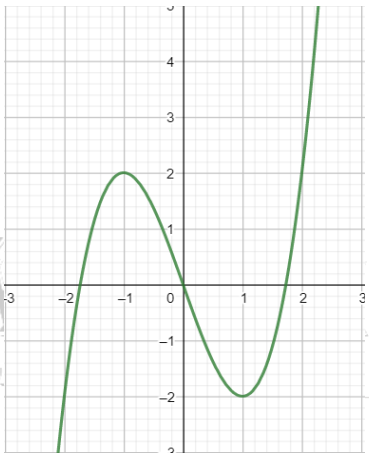
A. $S=-3$. **B.** $S=2$.

C. $S=-2$. **D.** $S=3$.

Câu 25. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số đạo hàm như hình vẽ dưới đây.

Hàm số $y=f(x)-2x+2021$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

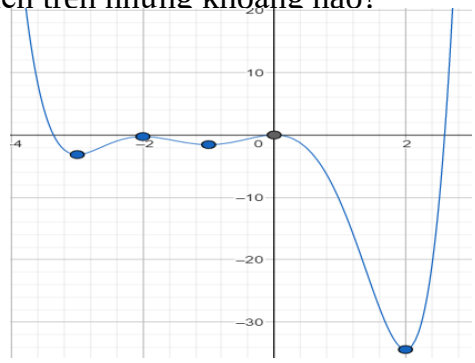


A. $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$.

C. $(-\infty;-1)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 26. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số như hình vẽ. Hàm số $y=f(x)+2021$ nghịch biến trên những khoảng nào?



A. Hàm số $y=f(x)+2021$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $y=f(x)+2021$ nghịch biến trên khoảng $(-2;-1)$.

C. Hàm số $y=f(x)+2021$ nghịch biến trên khoảng $(2019;2020)$.

D. Hàm số $y=f(x)+2021$ nghịch biến trên khoảng $(-3;-2)$.

Câu 27. [Thông hiểu].

Hàm số $y=\ln(x+2)+\dfrac{3}{x+2}$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;+\infty)$.

C. $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **D.** $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Câu 28. [Thông hiểu].

Hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm $f'(x)=-x^2-2021, \forall x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-\sqrt{2021}\right)$.

C. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\sqrt{2021};+\infty\right)$.

Câu 29. [Thông hiểu].

Hàm số $y=\cos x\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)$ đồng biến trên khoảng nào trên đoạn $[0;2\pi]$?

A. $\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{2\pi}{3}\right)$. **B.** $(0;\pi)$.

C. $\left(\dfrac{2\pi}{3};\pi\right)$. **D.** $\left(\dfrac{4\pi}{3};\dfrac{5\pi}{3}\right)$.

Câu 30. [Thông hiểu].

Biết hàm số $y=\dfrac{1}{4}x^2(2\ln x-1)$ nghịch biến trên khoảng lớn nhất là $(0;a)$ và đồng biến trên khoảng lớn nhất là $(b;+\infty)$. Khi đó giá trị của biểu thức $S=b-a$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 31. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Đặt $g(x)=2f(1-x)+\dfrac{1}{4}x^4-x^3+x^2-5$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Câu 32. [Vận dụng cao].

Hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm luôn không âm trên khoảng $(-2022;2022)$. Biết rằng trên khoảng $(-2022;2022)$ có duy nhất một đoạn con nào đó có độ lớn bằng 2021 mà trên đoạn đó đồ thị hàm số là một đường thẳng song song với trục hoành. Mệnh đề nào dưới đây có thể xảy ra?

A. Hàm số $y=f(x)$ là một hàm đồng biến trên khoảng $(-2022;2022)$.

B. $f(-2021)=f(2021)$.

C. $f'(2020)=f'(2021)=0$.

D. Có ít nhất 2021 điểm mà tại đó $f(x)=0$.

Câu 33. [Vận dụng cao].

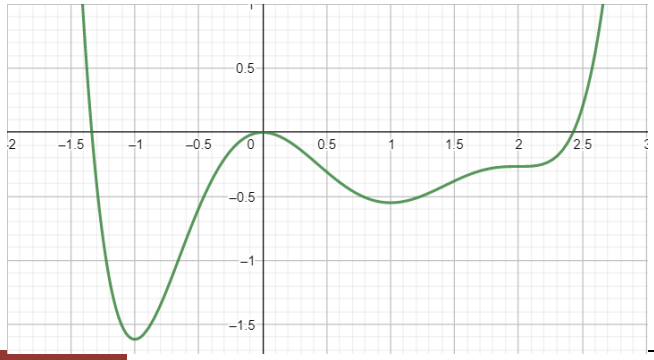
Hàm số $y=\dfrac{x^5+6x^4+3x^3-12x^2-6x+2}{x^4+2x^3-x^2-2x}-|x|$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-2;-1)$.

C. $(1;+\infty)$. **D.** Cả ba phương án đều sai.

Câu 34. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



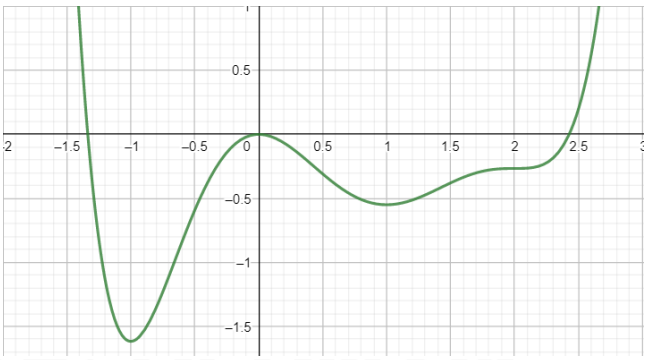
Hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;0)$. **B.** $(0;1)$.

C. $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Câu 35. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $y=f(|x|)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;0)$. **B.** $(0;1)$.

C. $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Câu 36. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm đến cấp hai. Biết rằng:

$f'(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$, $(m,n,p,q,r\in\mathbb{R})$.

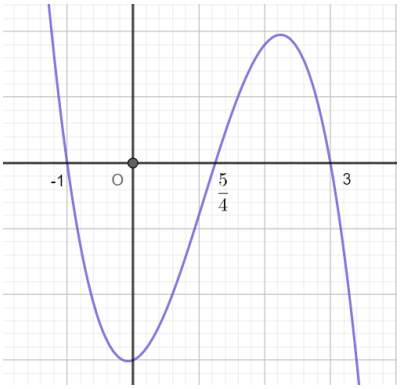
Hàm số $y=f''(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Biết đồ thị hàm số $y=g(x)=f(x)-rx$ đồng biến trên một khoảng duy nhất $(a;b)$.

Tích $S=ab$ bằng?

A. 5. **B.** -5.

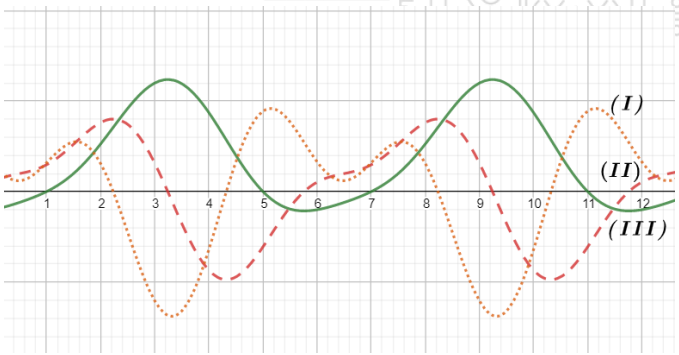
C. -3. **D.** 0.

NHÓM TOÁN ANH DUI
Never give up anywhere unless you try



Câu 37. [Vận dụng].

Để phục vụ công tác cho đề thi thử TN năm học $2021-2022$ của "**Nhóm toán anh Dúi**". Bạn Lành đã dùng phần mềm toán học vẽ ba đồ thị hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ trên cùng một hình biểu diễn (**Minh họa bằng hình vẽ bên dưới**). Vì bất cẩn, bạn Lành đã sơ ý quên ghi lại dấu hiệu để phân biệt ba đồ thị hàm số trên. Hãy giúp bạn Lành xác định chính xác các đồ thị hàm số $(I),(II),(III)$ bằng cách sắp xếp chúng theo thứ tự $y=f(x), y=f'(x)$ và $y=f''(x)$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm đến cấp hai.



A. $(I),(II),(III)$.

B. $(II),(I),(III)$.

C. $(II),(III),(I)$.

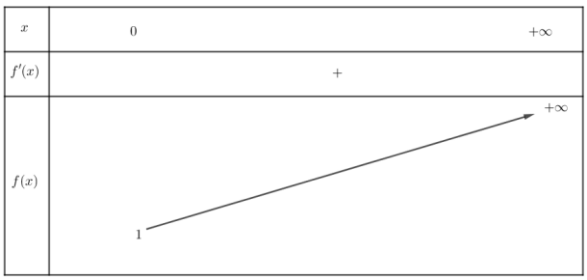
D. $(III),(II),(I)$.

Câu 38. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên nữa khoảng $[0;+\infty)$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới. Hàm số

$$y=g(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{2022-x}+\sqrt{2021-x}}$$

có khoảng đồng biến là khoảng nào dưới đây?

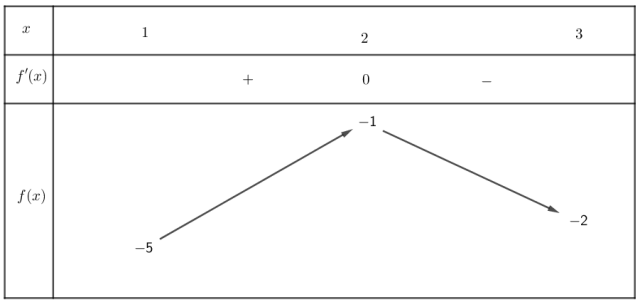


A. $(0;2022)$. **B.** $(0;2021)$.

C. $(2021;2022)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 39. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.



Xét hàm số: $y=g(x)=f(x-1).\left(x^2-6x+12\right)$ trên đoạn $[2;4]$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y=g(x)$ không liên tục trên $[2;4]$.

B. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên $(2;4)$.

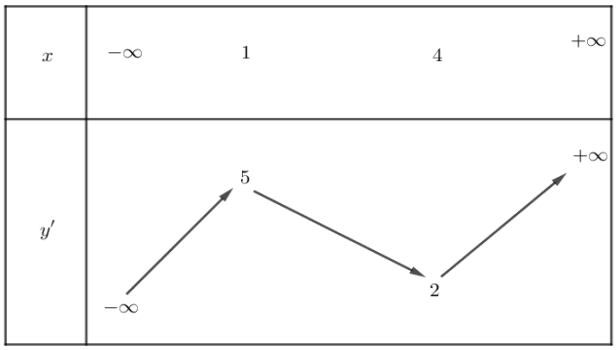
NHÓM TOÁN ANH DÚI Never get anywhere unless you try

C. Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên $(2;4)$.

D. Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên $(3;4)$.

Câu 40. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.



Hàm số: $y=f(x)-\cos\pi x+\frac{\pi^2}{4}+m,\ m\in\mathbb{R}$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$. Mệnh đề trên đúng hay sai?

A. Mệnh đề trên là sai, bởi vì $y=f(x)$ là một hàm số nghịch biến trên $(2;3)$.

B. Mệnh đề trên là sai, bởi vì trên khoảng $(2;3)$ $y=f(x)$ có cả khoảng đồng biến và nghịch biến.

C. Mệnh đề trên là đúng, vì: $y'>0,\forall x\in(2;3)$.

D. Mệnh đề trên là đúng, vì: $y'>0,\forall x\in(2;3)$ và $y>0,\forall x\in(2;3)$.

Câu 41. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng: $f'\left(-2x+\frac{7}{2}\right)=3x^2-12x+9$.

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây.

A. $\left(\frac{1}{4};\frac{9}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{9}{4};+\infty\right)$.

C. $\left(-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right)$.

Câu 42. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn:

$f'(2x+1)=2021-2x(2x+3).g(x),\ g(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$

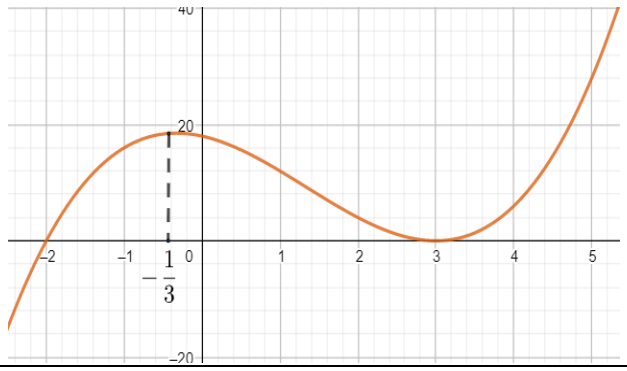
Khi đó hàm số: $y=f(1-x)+2021x+2022$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;3)$.

C. $(-\infty;3)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Câu 43. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Giả sử hàm số $f(2x-5)$ nghịch biến trên khoảng $(m;n)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=m-n$ là bao nhiêu?



NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

A. $S_{\min}=-\dfrac{5}{3}$. **B.** $S_{\min}=-\dfrac{5}{2}$.

C. $S_{\min}=\dfrac{5}{3}$. **D.** $S_{\min}=\dfrac{5}{2}$.

Câu 44. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các khoảng đồng biến của hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+1}\right)$.



A. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right),\left(0;\sqrt{3}\right)$.

B. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right),\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

C. $\left(-\sqrt{3};0\right),\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

D. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right),\left(0;+\infty\right)$.

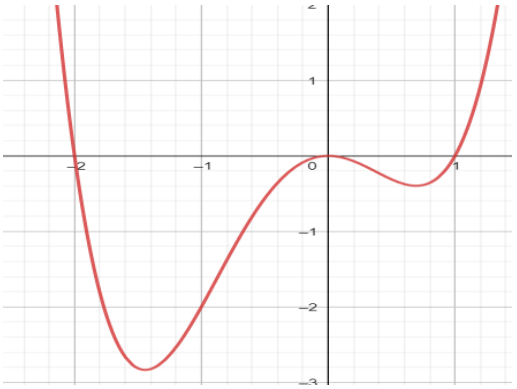
Câu 45. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.

Hàm số:

$$y=g(x)=f(x+1)+f(2-x)-x^2+6x-3$$

đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

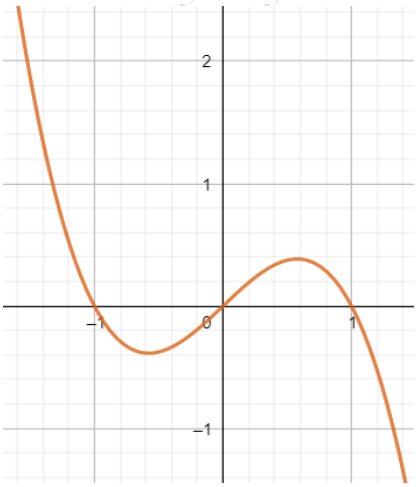


A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;3)$.

C. $(1;2)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 46. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên dưới.



Hàm số $g(x)=\left[f(2x-1)\right]^3$ nghịch biến trên các khoảng nào trong các khoảng sau.

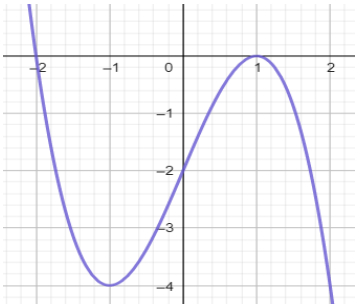
A. $(-1;0)$. **B.** $(0;1)$.

C. $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

HÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Câu 47. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên dưới.



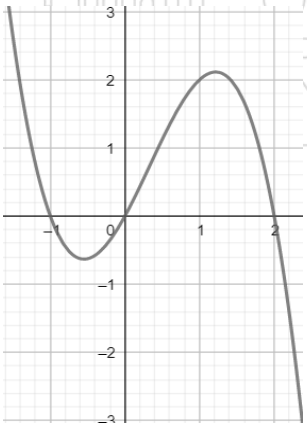
Hàm số $g(x)=\left[f(1-x)\right]^{2021}$ nghịch biến trên các khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-1;5)$. **B.** $(-2;1)$.

C. $(1;3)$. **D.** $(3;5)$.

Câu 48. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới và $f(-1)=f(2)=0$.



Hàm số $g(x)=\left[f(x^2-3)\right]^2$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

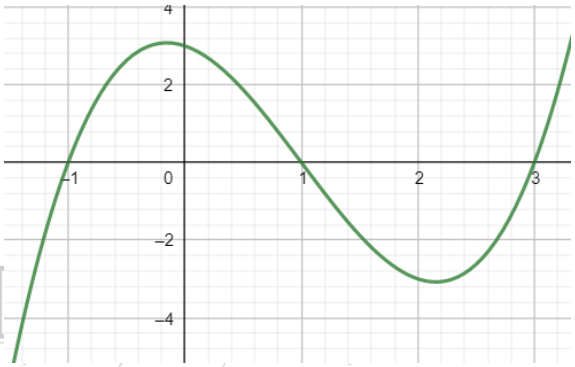
A. $(1;2)$. **B.** $(0;1)$.

C. $(-1;0)$. **D.** $(-2;-1)$.

Câu 49. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'\left(2x+\frac{3}{2}\right)$ như hình vẽ bên dưới.

Biết hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên hai khoảng rời nhau $(a;b)$ và $(c;+\infty)$ $(a,b,c\in\mathbb{Q})$. Khi đó biểu thức $S=a+b+2c$ có giá trị bằng?



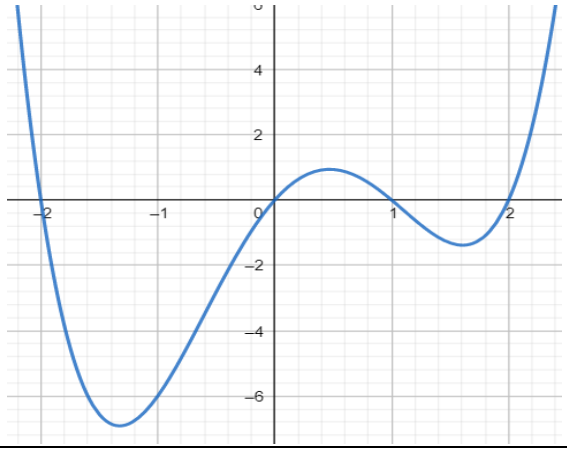
A. $S=18$. **B.** $S=12$.

C. $S=10$. **D.** $S=14$.

Câu 50. [Vận dụng].

Cho đồ thị hàm số $y=f'(x^3+1)$ như hình vẽ.

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trong khoảng nào trong các khoảng sau?

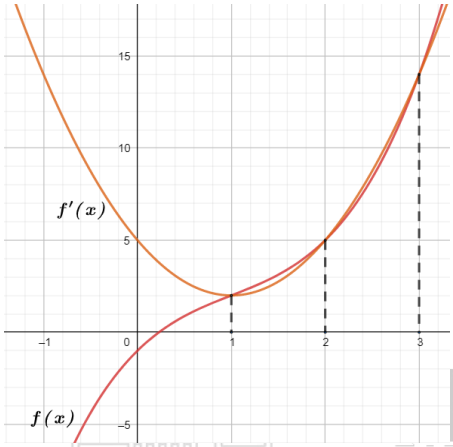


A. $(-2;2)$. **B.** $(2;5)$.

C. $(5;10)$. **D.** $(10;+\infty)$.

Câu 51. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=e^{-x}.f(x)$ có bao nhiêu khoảng đồng biến?



A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 52. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu của hàm số đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x)=f(x)-\ln\left(x^2+x+1\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;1)$.

C. $(-1;+\infty)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 53. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

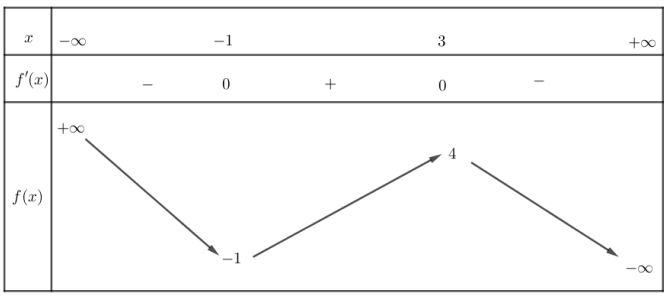
Hàm số $y=f\left(2-e^x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;4)$.

C. $(0;\ln 3)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 54. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.



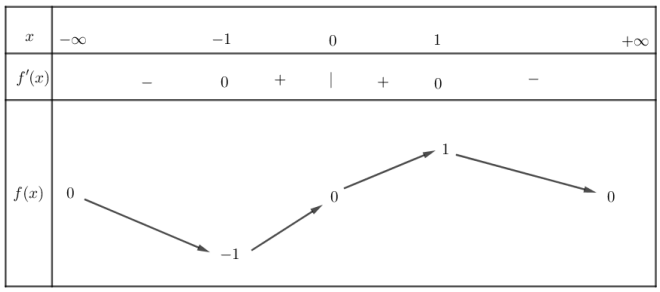
Hàm số $g(x)=f\left(|x-2|\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây.

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(2;3)$.

C. $(-1;2)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Câu 55. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ:



Hàm số $y=f\left(\left|f\left(x\right)\right|\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(-\infty;-2\right)$. **B.** $\left(-1;1\right)$.

C. $\left(2;+\infty\right)$. **D.** $\left(0;2\right)$.

Câu 56. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'\left(x\right)$ có bảng xét dấu như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g\left(x\right)=f\left(2\cos x+1\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

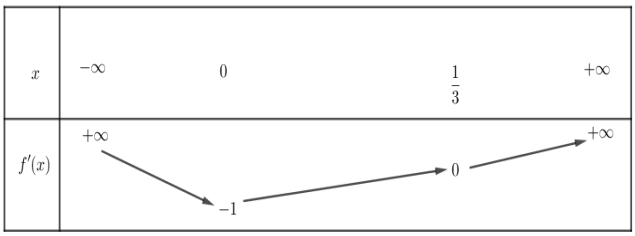
x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

A. $\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$. **B.** $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right)$.

C. $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

Câu 57. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(1-x^2+x^3\right)+x^3-x^2-5$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

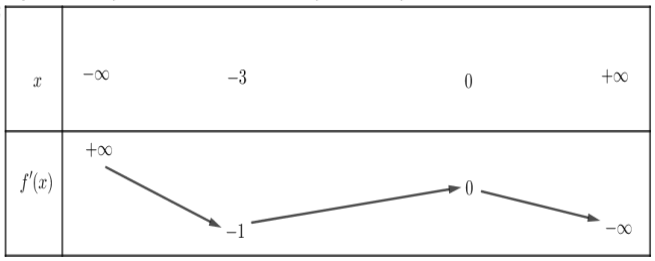


A. $\left(0;\frac{1}{3}\right)$. **B.** $\left(-\infty;0\right)$.

C. $\left(0;\frac{2}{3}\right)$. **D.** $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$.

Câu 58. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Biết rằng $f\left(0\right)=0$ và hàm số $y=f'\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y=xf\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng nào?



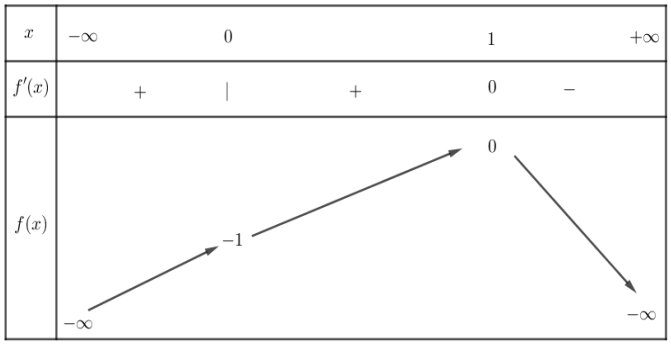
A. $\left(-\infty;0\right)$. **B.** $\left(-2;0\right)$.

C. $\left(0;2\right)$. **D.** $\left(-2;2\right)$.

Câu 59. [Vận dụng].

Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có $f\left(0\right)=-\frac{1}{3}$. Bảng biến thiên của hàm số $f'\left(x\right)$ như hình vẽ dưới đây. Hàm số $g\left(x\right)=\frac{f\left(x\right)}{e^x}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try



A. $(-\infty;1)$. **B.** $\left(2;2+\sqrt{3}\right)$.

C. $(4;+\infty)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 60. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm đến cấp ba trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn hệ thức sau:

$$f(x).f'''(x)=x(x-1)^2(x+4)^3,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Biết hàm số $g(x)=(f'(x))^2-2f(x).f''(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$. Tích $S=ab$ có giá trị bằng?

A. $S=3$. **B.** $S=1$.

C. $S=0$. **D.** $S=-4$.

Câu 61. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm $f'(x)=x(x-2)^3$. Khoảng nghịch biến của đồ thị hàm số $g(x)=f(x)+(2-x)^3$ là khoảng nào dưới đây? Chọn đáp án đúng nhất.

A. $(-1;2)$. **B.** $(-1;3)$.

C. $(2;3)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Câu 62. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm

$$f'(x)=(2-x)(x^2-8)^{2021},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Hàm số $y=f(x^2-2)+\frac{1}{2}x^4-4x^2+2021$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-2;0)$.

C. $(0;2)$. **D.** $\left(0;\sqrt{5}\right)$.

Câu 63. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm

$$f'(x)=(e^x-2)(e^x+x),\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Biết hàm số $y=g(x)=f(\ln x)-x+2\ln x$ nghịch biến trên khoảng $(a;b),(a,b\in\mathbb{Z})$. Mệnh đề sau đây là đúng về tổng $S=a+b$?

A. S là một số chính phương.

B. S là một số lẻ.

C. S là số nguyên tố chẵn duy nhất.

D. S là một số chẵn.

Câu 64. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm

$$f'(x)=4x^3+2x \text{ và } f(0)=1.$$

Hàm số $y=g(x)=f^3(x^2-2x-3)$ đồng biến trên khoảng nào sao đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(1;3)$.

C. $(-1;1)$. **D.** $(-1;3)$.

Câu 65. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x)=f(x)+x^3+3x^2-9x-5$ đồng biến trên các khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-3),(1;+\infty)$. **B.** $(-3;1)$.

C. $(-\infty;+\infty)$. **D.** $(-3;+\infty)$.

Câu 66. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $g(x)=f(x)-x^3+\frac{3}{2}x^2+6x+2020$ đồng biến trên các khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1),(2;+\infty)$. **B.** $(-1;2)$.

C. $(-\infty;+\infty)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Câu 67. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x)=f\left(e^{x^2-|x|-2}\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(2;+\infty)$.

C. $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

Câu 68. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=3f\left(-x^4+4x^2-6\right)+2x^6-3x^4-12x^2$ đồng biến trên các khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;0),\left(\sqrt{2};+\infty\right)$. **B.** $(-\infty;0)$.

C. $\left(-\sqrt{2};0\right),\left(\sqrt{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\sqrt{2};+\infty\right)$.

Câu 69. [Vận dụng].

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Cho hàm số $y=\log_{2021}\left(\frac{1}{x}\right)$ có đồ thị hàm số (C_1) và đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C_2).

Biết rằng hai đồ thị hàm số (C_1) và (C_2) đối xứng với nhau qua gốc tọa độ. Khi đó hàm số $y=|f(x)|$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;0)$.

C. $(0;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 70. [Vận dụng].

Tích tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số:

$$y=\frac{1}{5}m^2x^5-\frac{1}{3}mx^3+10x^2-\left(m^2-m-20\right)x+1$$

đồng biến trên $\mathbb{R}$ là?

A. $\frac{5}{2}$. **B.** -2.

C. -5. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 71. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ bên dưới:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

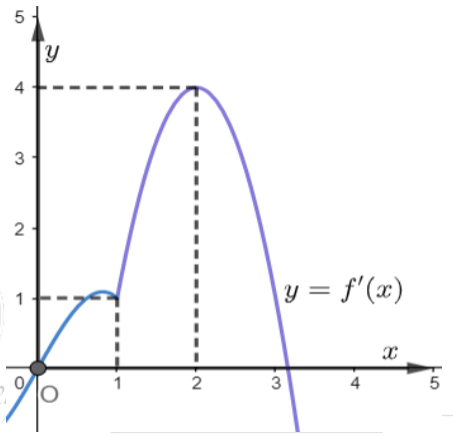
Hàm số $y=3f\left(-x^4+4x^2-6\right)+2x^6-3x^4-12x^2$ đồng biến trên những khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$ và $\left(0;\sqrt{2}\right)$.

C. $\left(-\sqrt{2};0\right)$. **D.** $\left(-\sqrt{2};0\right)$ và $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Câu 72. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(0)=0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $y=\left|3f(x)-x^3\right|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2)$.

C. $(0;2)$. **D.** $(1;3)$.

Câu 73. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-1)^2(x-3)$. Khi đó hàm số $g(x)=f(x)+\frac{1}{3}x^3-2021$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(0;2)$. **B.** $\left(2;\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

C. $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2};2\right)$. **D.** $\left(0;\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Câu 74. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có bảng xét dấu như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Hàm số $y=g(x)=f\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{4}{3};\frac{12}{5}\right)$. **B.** $\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$.

C. $\left(0;\frac{4}{3}\right)$. **D.** $(-\infty;0)$ và $\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$.

Câu 75. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $y=f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=g(x)=f\left(x^2-2x+1-|x-1|\right)$ đồng biến trên bao nhiêu khoảng hữu hạn?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 76. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(2x)+f(1-2x)=12x^2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $(-\infty;2)$.

C. $\left(\frac{1}{2};2\right)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 77. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(3x+5)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;8)$. **B.** $\left(-\frac{7}{3};+\infty\right)$.

C. $\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$. **D.** $(-\infty;10)$.

Câu 78. [Vận dụng].

Hàm số $y=f(x)=\left|x^3-3x^2-9x-5\right|$ đồng biến trên những khoảng nào dưới đây?

A. $(-32;0)$. **B.** $(-1;3)$ và $(5;+\infty)$.

C. $\mathbb{R}$. **D.** $(-\infty;-1)$ và $(3;5)$.

Câu 79. [Vận dụng].

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never give anywhere unless you try

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn đồng thời $f(0)=1$ và

$[f'(x)]^2+4(6x^2-1).f(x)=40x^6-44x^4+32x^2-4$, $\forall x\in[0;1]$ $(*)$.

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 80. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn đồng thời ba điều kiện:

$$\begin{cases} f(1)=1 \\ \int\limits_0^1 [f'(x)]^2 dx=9, \forall x\in[0;1]. \\ \int\limits_0^1 x^3.f(x)dx=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Mệnh đề nào sau đây là đúng về $y=f(x)$?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

ĐÁP ÁN

i \ j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	D	B	B	A	D	B	A	C
1	C	A	B	C	C	A	A	D	A	C
2	B	C	C	D	D	D	B	B	C	A
3	A	C	C	D	B	A	D	D	B	D
4	C	C	B	A	C	C	C	D	C	A
5	B	C	B	C	C	A	C	C	B	C
6	C	B	C	B	C	A	B	D	C	A
7	C	D	C	C	D	B	D	A	B	C
8	C									
9										

Ghi chú: Đáp án là sự kết hợp giữa dòng i và cột j. Ví dụ: **Câu 24D** (giao của dòng 2 và cột 4).

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số ta nhận thấy rằng: Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Đáp án: D

Câu 2. Theo bảng xét dấu thì $y'<0$ khi $x\in(-2;0)$ hoặc $x\in(0;2)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Đáp án: D

Câu 3. Dựa vào đồ thị hàm số, ta nhận thấy rằng hàm số có duy nhất một khoảng nghịch biến là khoảng $(-2;0)$.

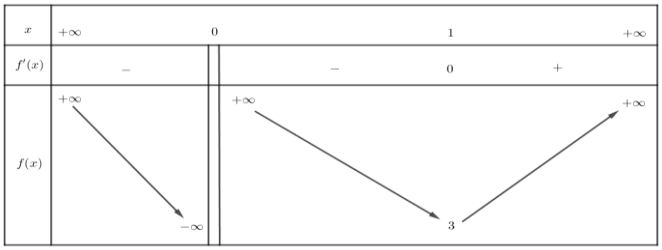
Đáp án: B

Câu 4. Xét hàm số: $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$

Ta có: $f'(x)=2x-\dfrac{2}{x^2}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^3-2}{x^2}=0\Leftrightarrow x=1$$

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;1)$.

Đáp án: B

Câu 5. Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta lưu ý một điều:

$$f'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$$

Và dấu "$=$" chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm (tại điểm $x=-1$ và điểm $x=1$).

Vì vậy, hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Thế nên, các kết luận về đồng biến ở nhận định **B, C, D** hoàn toàn đúng.

Đáp án: A

Câu 6. Xét hàm số: $y=\dfrac{-x+3}{x+2}$

Ta có: $y'=\dfrac{-5}{(x+2)^2}<0$.

Khi đó hàm số $y=\dfrac{-x+3}{x+2}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Loại **A**.

Nhận định **B**, **C** cũng bị loại vì ở phần lưu ý (3) đã chỉ ra lỗi sai.

Đáp án: D

Câu 7. Ta xét từng đáp án:

- Đáp án **A**: $y=x^4$.

Đây là hàm số bậc bốn trùng phương có $ab\ge 0$ và $a>0$. Khi đó: hàm số $y=x^4$ có dạng tương tự một Parabol với hệ số $a>0$. Vì thế hàm số $y=x^4$ vừa có khoảng nghịch biến vừa có khoảng đồng biến (Xem lại **Đồ thị I.I.11**).

Loại **A**.

❖ Đáp án **B**: $y=x^3+2x-4$

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2+2>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Vì vậy hàm số $y=x^3+2x-4$ đồng biến trên toàn tập xác định.

Chọn **B**.

❖ Đáp án **C**: $y=\dfrac{1-x}{x+2}$

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{-3}{(x+2)^2}<0,\forall x\in D$.

Vì thế, hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Loại **C**.

❖ Đáp án **D**: $y=\sin x-x$

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=\cos x-1\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$

Vì thế hàm số: $y=\sin x-x$ nghịch biến trên toàn tập xác định $\mathbb{R}$.

Loại **D**.

Đáp án: B

Câu 8. A. Ta xét từng nhận định:

❖ Nhận định **A**: Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $f'(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Đây là một nhận định đúng.

Vì theo lý thuyết: Trên một khoảng K bất kì, nếu ta có $f'(x)>0,\forall x\in K$ thì hàm số là một hàm đồng biến (**tăng ngặt**) trên K.

Chọn **A**.

❖ Nhận định **B**: Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $f'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Nhận định **B** chưa hẵn là đúng.

Lí do:

Giả sử ta xét hàm số cho bởi hai biểu thức:

$$y=f(x)=\begin{cases}2x+9 & ,\ x<0\\ 9 & ,\ 0\le x\le 100\\ 9x-891, & x>100\end{cases}$$

Khi đó: $y=f'(x)=\begin{cases}2 & ,x<0\\ 0 & ,0\le x\le 100\\ 9 & ,x>100\end{cases}$

Mặc dù $f'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nhưng hàm số trên đoạn $[0;100]$ là không đổi (dấu "=" xảy ra ở **vô hạn** điểm nên vi phạm nội dung **điều kiện đủ** để hàm số đơn điệu trên một khoảng).

Loại **B**.

❖ Nhận định **C**: Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Nhận định **C** chưa hẵn là đúng.

Ta phải nhận ra rằng mối quan hệ trong nhận định **C** là một **mối quan hệ hai chiều**, có nghĩa là hai nhận định dưới đây đều phải đúng.

NHÓM TOÁN ANH DÚI

$(\Rightarrow)$ Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $f'(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

$(\Leftarrow)$ Nếu $f'(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Tuy nhiên, do ta đã xác định được nhận định **B** là sai nên nhận định **C** cũng sai do nhận định **B** và nhận định $(\Leftarrow)$ là tương đương.

Loại **C**.

❖ Nhận định **D**: Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f'(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Nhận định **D** chưa hẳn là đúng.

Ta phải nhận ra rằng mối quan hệ trong nhận định **C** là một **mối quan hệ hai chiều**, có nghĩa là hai nhận định dưới đây đều phải đúng.

$(\Rightarrow)$ Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $f'(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

$(\Leftarrow)$ Nếu $f'(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nhận định $(\Leftarrow)$ đúng do tương đương với nhận định **A**.

Tuy nhiên, nhận định $(\Rightarrow)$ chưa hẳn là hoàn toàn đúng. Chẳng hạn, ta xét một hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ quen thuộc, hàm số $y=f(x)=x^3$. Tuy nhiên, $f'(x)=3x^2\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Loại **D**.

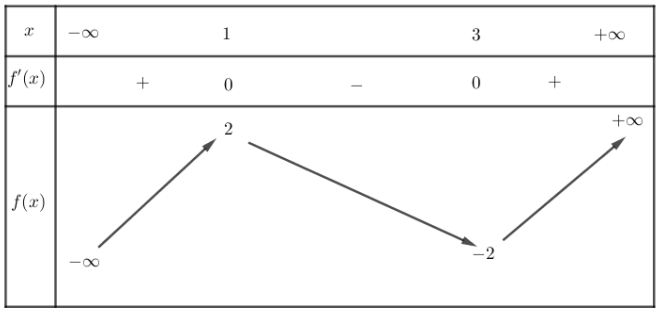
Đáp án: A

Câu 9. Xét hàm số: $y=x^3-6x^2+9x-2$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-12x+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy rằng, đồ thị hàm số $y=x^3-6x^2+9x-2$ nghịch biến trên khoảng lớn nhất là khoảng $(1;3)$.

Khi đó: $\left\{\begin{array}{l}a=1\\b=3\end{array}\right.\Rightarrow a^3+b^3=1^3+3^3=28$

Đáp án: C

Extra Techniques:

Confusing answers:

Nhiều bạn sẽ chọn đáp án **A**. Vì các bạn không phân biệt được hai khái niệm:

+) Tổng lập phương của a và b: a^3+b^3

+) Lập phương của một tổng: $(a+b)^3$

Câu 10. Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ thì hàm số $y=ax^4+bx^2+c$,$(a\neq 0)$ chỉ có duy nhất một cực trị và $a<0$.

(Xem **Đồ thị I.I.12**).

Khi đó ta có: $\begin{cases} ab \ge 0 \\ a < 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a < 0 \\ b \le 0 \end{cases}$ (*).

Như vậy trong bốn đáp án, duy chỉ có đáp án **C** không thể nào thỏa mãn (*) (do $b \le 0$).

Đáp án: C

Extra Techniques:

Tips:

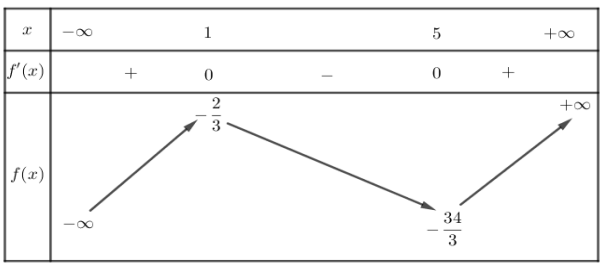
Ở đây, tham số c không ảnh hưởng đến tính đơn điệu hay chiều biến thiên của hàm số (do đạo hàm của hằng số bằng 0) nhưng thay vào đó, tham số c lại đóng vai trò là "**điểm trượt**" dọc theo trục Oy. Chẳng hạn, ta xét hàm số: $y = f(x)$ liên tục trên khoảng K. Khi đó ta thu được hàm số $y = f(x) + c$ bằng cách tịnh tiến đồ thị $y = f(x)$ lên c đơn vị đồ thị theo trục Oy nếu $c > 0$ và tịnh tiến đồ thị $y = f(x)$ xuống c đơn vị đồ thị theo trục Oy nếu $c < 0$.

Câu 11. Xét hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x - 3$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 5 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số ta nhận thấy rằng, hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ đồng biến trên hai khoảng rời nhau là $(-\infty;1)$ và $(5;+\infty)$.

Đáp án: A

Câu 12. Ta xét từng đáp án:

❖ Đáp án **A**: $y = \frac{x+1}{x}$

Ta có: $y' = \frac{-1}{x^2} < 0, \forall x \in (0;\pi)$.

Nên hàm số $y = \frac{x+1}{x}$ nghịch biến trên $(0;\pi)$.

Loại **A**.

❖ Đáp án **B**: $y = x^2$

Note: Hàm số $y = kx^2, (k > 0)$ là một Parabol nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Mà $(0;\pi) \subset (0;+\infty)$;

Nên hàm số $y = x^2$ đồng biến trên $(0;\pi)$.

Chọn **B**.

❖ Đáp án **C**: $y = \cos x$

Ta có: $y' = -\sin x < 0, \forall x \in (0;\pi)$;

Nên hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên $(0;\pi)$.

Loại **C**.

❖ Đáp án D: $y = \tan x$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

TĐX: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$.

Vì thế hàm số $y=\tan x$ không liên tục trên khoảng $(0;\pi)$ vì tại $x=\frac{\pi}{2}$, hàm số $y=\tan x$ không xác định.

Loại **D**.

Đáp án: B

Câu 13. Vì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-9;9)$ nên $\forall x\in(-9;9)$ ta luôn có: $f'(x)\le 0$. Mặt khác, cũng vì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-9;9)$ nên với mọi $x_1,x_2\in(-9;9), x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

Một số điểm đặc biệt: $\begin{cases} f'(-3)\le 0 \\ f'(-1)\le 0 \\ f'(2)\le 0 \\ f'(3)\le 0 \\ f'(8)\le 0 \\ f(3)>f(8) \end{cases}$ (*).

Từ (*) trên ta có thể suy ra được những kết quả có thể xảy ra như sau: $\begin{cases} f'(-1).f'(2)\ge 0 & (1) \\ f'(3)\le 0 & (2) \\ f(3)>f(8) & (3) \\ f'(3)=f'(8) & (4) \end{cases}$

Note: Kết quả (4), tuy không hẳn luôn đúng nhưng vẫn có thể xảy ra do $\begin{cases} f'(3)\le 0 \\ f'(8)\le 0 \end{cases}$.

Đáp án: C

Câu 14. Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy rằng đồ thị hàm số đồng biến trên khoảng $(-4;4)$ và nghịch biến trên khoảng $(4;+\infty)$.

Note: Nhận định **A, D** tuy đúng nhưng chưa đủ.

Đáp án: C

Câu 15.

Ta xét hàm số: $y=\sqrt{2x-x^2}$

TXĐ: $D=[0;2]$.

Ta có: $y'=\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên:

x	0		1		2
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖

Như vậy hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$ nghịch biến trên đoạn $[1;2]$.

Khi đó độ lớn của khoảng nghịch biến của hàm số là $a=|2-1|=1$.

Note: Tuy $f'(2)$ không xác định nhưng tại $x=2$, hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$ xác định.

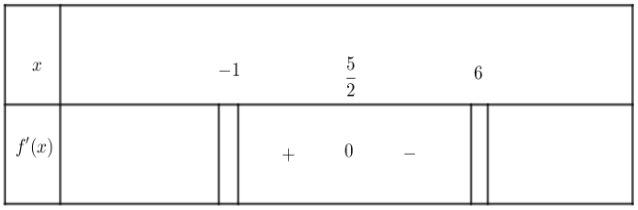
Đáp án: A

Câu 16. Xét hàm số: $y=\sqrt{6+5x-x^2}$

TXĐ: $D=[-1;6]$

Ta có: $y'=\frac{5-2x}{2\sqrt{6+5x-x^2}}=0\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$.

Bảng biến thiên:



Như vậy hàm số $y=\sqrt{6+5x-x^2}$ đồng biến trên đoạn $\left[-1;\frac{5}{2}\right]$ và hàm số nghịch biến trên đoạn $\left[\frac{5}{2};6\right]$.

Note: Tuy tại $x=-1$ và $x=6$, hàm số $f'(x)$ không xác định nhưng tại $x=-1$ và $x=6$, hàm số $y=\sqrt{6+5x-x^2}$ xác định.

Do đó: $\begin{cases} a=-1 \\ b=c=\frac{5}{2} \\ d=6 \end{cases} \Rightarrow S=a+b+c+d=10$.

Đáp án: A

Câu 17. Dựa vào đồ thị hàm số ta dễ dàng nhận thấy rằng, hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

Đáp án: D

Câu 18. Dựa vào đồ thị hàm số hàm $y=f'(x)$ ta nhận thấy: $f'(x)<0, \forall x\in(-3;-2)\cup(2;3)$.

Suy ra: Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3;-2)$ và $(2;3)$. Hơn thế nữa hàm số đồng biến trên ba khoảng rời nhau, $(-\infty;-3)$ và $(-2;2)$ và $(3;+\infty)$.

Vì $(0;2)\subset(-2;2)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$. Vì thế **A** sai.

Note: Tuy đồ thị là hàm số đạo hàm $y=f'(x)$ nhưng yêu cầu đề bài lại hỏi khoảng đơn điệu của hàm số $y=f(x)$ nên dễ gây nhầm lẫn cho một số bạn đọc.

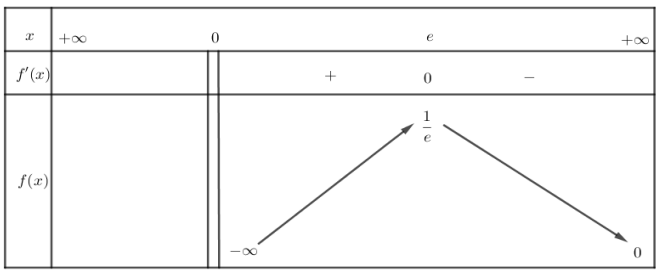
Đáp án: A

Câu 19. Xét hàm số $y=\frac{\ln x}{x}$.

TXĐ: $D=(0;+\infty)$.

Ta có: $y'=\frac{\frac{1}{x}.x-\ln x.1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}=0\Leftrightarrow x=e$.

Bảng biến thiên:



Như vậy hàm số $y=\frac{\ln x}{x}$ đồng biến trên khoảng $(0;e)$. Suy ra: $\begin{cases} a=0 \\ b=e \end{cases} \Rightarrow S=a+\ln b=1$.

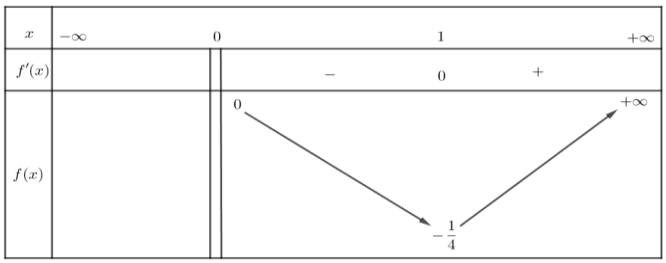
Đáp án: C

Câu 20. Xét hàm số: $y=x\ln x-x$.

TXĐ: $D=(0;+\infty)$

Loại **C, D**.

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy rằng, hàm số $y = x\ln x - x$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Đáp án: B

Câu 21. Xét hàm số: $y = \dfrac{\sqrt{3}\sin x - \cos x}{2\sin^2 x + \cos 2x} - x\sqrt{3}$

Vì: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \cos 2x = 1$.

Ta có: $y = \dfrac{\sqrt{3}\sin x - \cos x}{2\sin^2 x + \cos 2x} - x\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}\sin x - \cos x}{1} - x\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{3}\sin x - \cos x - x\sqrt{3}$$

Suy ra: $y' = \sqrt{3}\cos x + \sin x - \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow y' = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) - \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow y' = 2\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right).\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right).\sin x\right) - \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow y' = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy rằng hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Đáp án: C

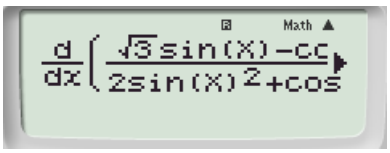
Note: Dựa trên bốn đáp án ta xen các điểm phụ $x = \dfrac{\pi}{6}$ và $x = \dfrac{\pi}{2}$ và $x = \pi$ vào bảng biến thiên để có một bảng biến thiên hoàn chỉnh.

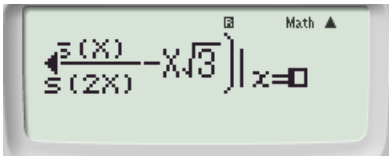
Extra Techniques:

Casio:

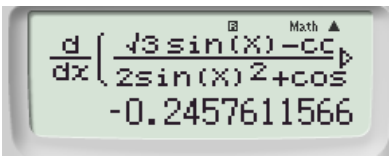
Cơ sở: Dựa vào đáp án ta có thể dễ dàng loại trừ các phương án sai.

Nhập vào màn hình như sau:





+) Đạo hàm tại $x = \dfrac{2\pi}{5}$



Ta có: $y'\left(\frac{2\pi}{5}\right)<0$

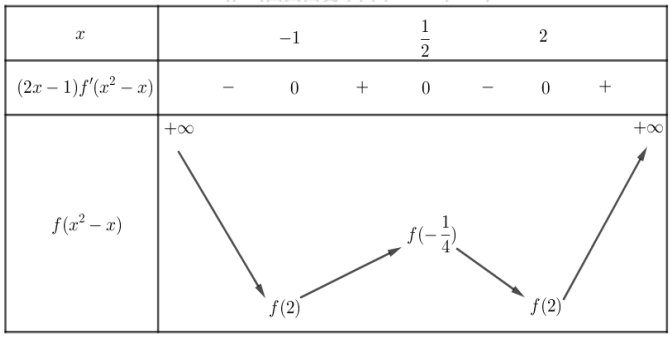
Suy ra hàm số không thể đồng biến trên cả ba khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{3};\pi\right)$ vì điểm $x=\frac{2\pi}{5}$ thuộc trong cả ba khoảng ấy mà đạo hàm tại điểm đó là một số âm (Nghịch biến).

Câu 22. Xét hàm số: $y=f\left(x^2-x\right)$.

Ta có: $y'=(2x-1).f'\left(x^2-x\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-1=0\\x^2-x=-4\\x^2-x=-1\\x^2-x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\x=-1\\x=2\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên, ta nhận thấy rằng hàm số $y=f\left(x^2-x\right)$ nghịch biến trên hai khoảng rời nhau $(-\infty;-1)$ và $\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Đáp án: C

Extra Techniques:

Tips:

Để xét dấu bảng biến thiên, ta chỉ cần chọn một số đủ lớn $\left(x\in(2;+\infty)\right)$, $x=10$ chẳng hạn để xét dấu biểu thức:

$$g'(x)=(2x-1)\,f'\left(x^2-x\right).$$

Ta có: $g'(10)=19.f'(90)>0$ do $f'(90)>0$.

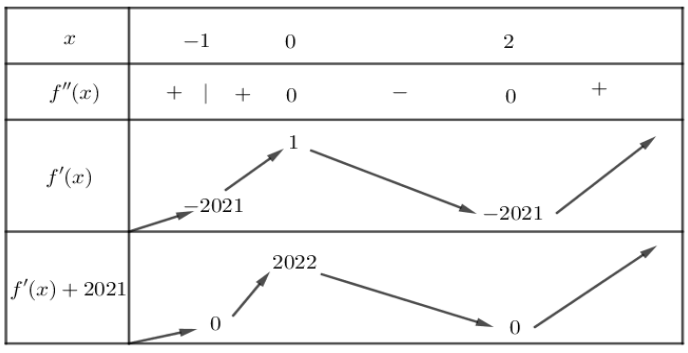
Vậy ta điền dấu "+" ở khoảng $(2;+\infty)$.

Note: Khi ta giải phương trình $g'(x)=0$ ta nhận được 3 **nghiệm bội lẻ**. Khi đó ta thừa nhận tính chất đổi dấu đạo hàm qua **nghiệm bội lẻ** của nó. Hay nói cách khác, ta chỉ cần đan dấu giữa các **điểm cực trị** (điểm mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định (nếu điểm đó cũng là **bội lẻ**)).

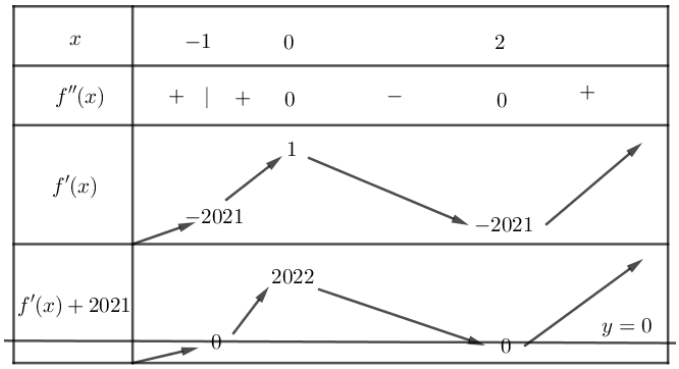
Câu 23. Ta xét hàm số: $h(x)=f(x)+2021x$.

Ta có: $h'(x)=f'(x)+2021$ và $h''(x)=f''(x)$.

Bảng biến thiên:



Kẻ thường thẳng $y=0$ như hình bên dưới.



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy rằng đồ thị hàm số $f'(x)+2021$ cắt đường thẳng $y=0$ tại hai điểm phân biệt là $x=-1$ và $x=2$.

Suy ra:

- Hàm số $y=f(x)+2021x$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ (do $\forall x\in(-\infty;-1)$ hàm số $f'(x)+2021<0$).
- Hàm số $y=f(x)+2021x$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$ (do $\forall x\in(-1;+\infty)$ hàm số $f'(x)+2021\geq 0$).

Bảng biến thiên:

x	-1		2	
$f'(x)+2021$	$-$	0	$+$	0 $+$
$f(x)+2021x$	↘		↗	

Vì: $h(x+2022)=f(x+2022)+2021(x+2022)$

Đặt: $t=x+2022$.

Khi đó ta có một biểu thức tương đương:

$$h(t)=f(t)+2021t$$

Vì: $y=f(x)+2021x$ đồng biến trên $(-1;+\infty)$

Nên hàm số $h(t)=f(t)+2021t$ cũng đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Khi đó: $t>-1\Leftrightarrow x+2022>-1\Leftrightarrow x>-2023$.

Như vậy, hàm số $y=h(x+2022)$ đồng biến trên khoảng $(-2023;+\infty)$.

Mặt khác, ta xét hàm:

$$h(x+2022)=f(x+2022)+2021(x+2022)$$

$$=f(x+2022)+2021x+4086462$$

Suy ra: $h(x+2022)-4086462=g(x)$.

Vì: hàm số $y=h(x+2022)$ đồng biến trên khoảng $(-2023;+\infty)$.

Nên hàm số $y=h(x+2022)-4086462$ cũng đồng biến trên khoảng $(-2023;+\infty)$.

Vậy hàm số $y=g(x)=f(x+2022)+2021x$ đồng biến trên khoảng $(-2023;+\infty)$.

Đáp án: D

Câu 24. Xét: $y=f'(x)=x(x-2)^2(x+3)$.

Khi đó: $f'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x=-3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	-3		0		2	
$f'(x)$	$+$	0 $-$		0 $+$		0 $+$

Như vậy hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[-3;0]$.

Suy ra: $\begin{cases} a=-3 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow S=b-a=0-(-3)=3$.

Đáp án: D

Extra Techniques:

Remark:

Đạo hàm $f'(x)$ của hàm số $y=f(x)$ đổi dấu qua nghiệm **bội lẻ** của phương trình $f'(x)=0$.

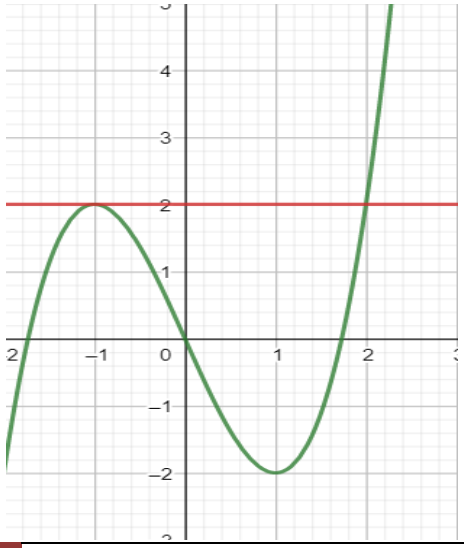
Đạo hàm $f'(x)$ của hàm số $y=f(x)$ không đổi dấu qua nghiệm **bội chẵn** của phương trình $f'(x)=0$.

Câu 25. Xét hàm số: $g(x)=f(x)-2x+2021$.

Ta có: $g'(x)=f'(x)-2=0 \Rightarrow f'(x)=2$.

Kẻ đường thẳng: $y=2$.

(Minh họa như hình vẽ)



Bảng biến thiên:

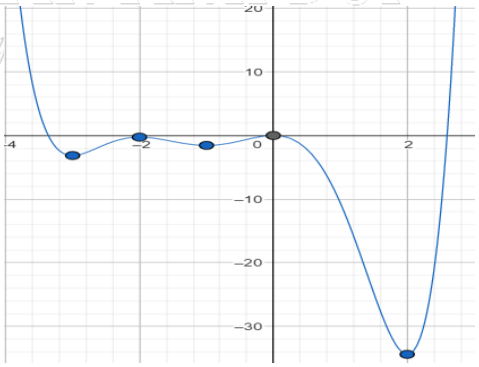
x		-1		2	
$g'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

Khi đó hàm số $y=g(x)=f(x)-2x+2021$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

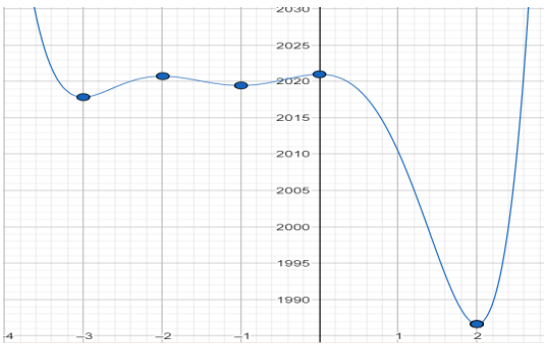
Đáp án: D

Note: Đề bài cho đồ thị minh họa là đồ thị đạo hàm của hàm số $f(x)$ có nghĩa là đồ thị hàm số $y=f'(x)$.

Câu 26. Hàm số: $y=f(x)$ có đồ thị như hình minh họa dưới đây.



Đồ thị hàm số $y=f(x)$.



Đồ thị hàm số $y=f(x)+2021$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get any

Note: Đồ thị hàm số $y=f(x)+2021$ là một đồ thị có hình dáng giống hệt với đồ thị hàm số $y=f(x)$ nhưng được tịnh tiến lên phía trên 2021 đơn vị.

Vì vậy khoảng đơn điệu của hàm số $y=f(x)$ và hàm số $y=f(x)+2021$ là như nhau.

Khi đó đồ thị hàm số $y=f(x)+2021$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-2;-1)$ và $(0;2)$.

Đáp án: B

Câu 27. Xét hàm số: $y=\ln(x+2)+\dfrac{3}{x+2}$.

TXĐ: $D=(-2;+\infty)$.

Ta có: $y'=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{3}{(x+2)^2}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+2)-3}{(x+2)^2}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{(x+2)^2}=0$

$\Leftrightarrow x=1$

Bảng biến thiên:

x	-2		1	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$

Khi đó hàm số $y=\ln(x+2)+\dfrac{3}{x+2}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

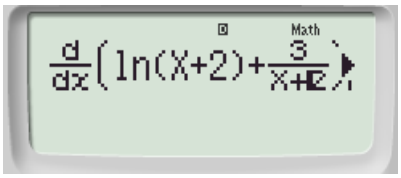
Đáp án: B

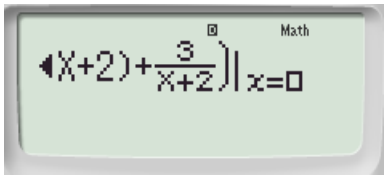
Extra Techniques:

Casio:

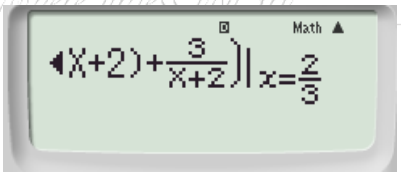
Cơ sở: Dựa vào đáp án ta có thể dễ dàng loại trừ các phương án sai.

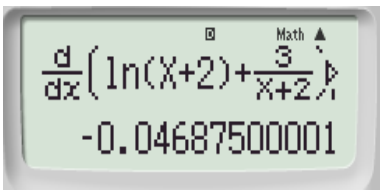
Nhập vào màn hình như sau:





+) Đạo hàm tại $x=\dfrac{2}{3}$





Vì $y'\left(\dfrac{2}{3}\right)<0$

Nên hàm số: $y=\ln(x+2)+\dfrac{3}{x+2}$ không thể đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ hoặc $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ hoặc $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Loại **A, C, D**.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Câu 28. Ta có: $y' = -x^2 - 2021 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Khi đó hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Đáp án: C

Câu 29. Vì: $\cos x\left(2\cos x - \sqrt{3}\right)\left(2\cos x + \sqrt{3}\right)$

$$= \cos x\left[\left(2\cos x\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2\right]$$
$$= \cos x\left(4\cos^2 x - 3\right)$$
$$= 4\cos^3 x - 3\cos x$$
$$= \cos 3x$$
$$\Rightarrow y = \cos 3x$$

Suy ra: $y' = -3\sin 3x = 0$

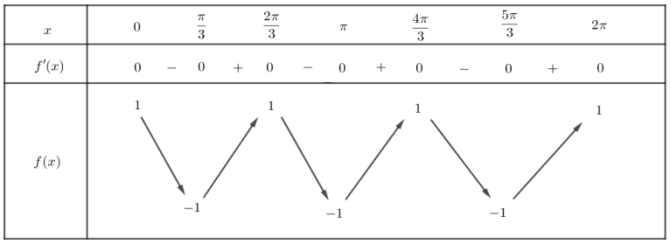
$$\Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Xét trong đoạn $[0;2\pi]$, ta có: $0 \le \frac{k\pi}{3} \le 2\pi$.

Hay: $0 \le k \le 6 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{2\pi}{3} \\ x = \pi \\ x = \frac{4\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{3} \\ x = 2\pi \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Vậy trên đoạn $[0;2\pi]$, đồ thị hàm số $y = \cos x\left(2\cos x - \sqrt{3}\right)\left(2\cos x + \sqrt{3}\right)$ đồng biến trên các khoảng rời nhau: $\left(\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right)$ và $\left(\pi;\frac{4\pi}{3}\right)$ và $\left(\frac{5\pi}{3};2\pi\right)$.

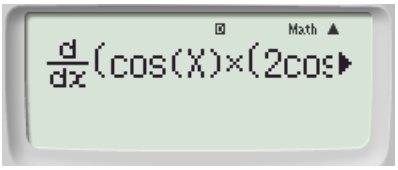
Đáp án: A

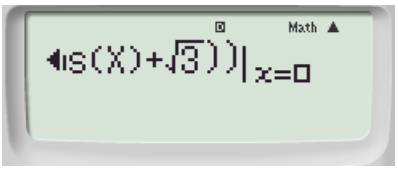
Extra Techniques:

Casio:

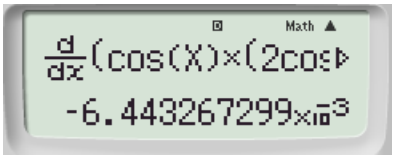
Cơ sở: Dựa vào đáp án ta có thể dễ dàng loại trừ các phương án sai.

Nhập vào màn hình như sau:





+) Đạo hàm tại $x = \frac{3\pi}{4}$.

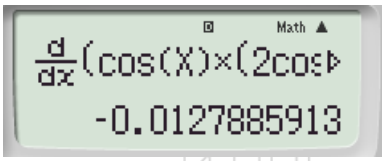


Vì $y'\left(\frac{3\pi}{4}\right)<0$. Nên hàm số:

$y=\cos x\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)$

không thể đồng biến trên các khoảng $(0;\pi)$ hoặc $\left(\frac{2\pi}{3};\pi\right)$.

+) Đạo hàm tại $x=\frac{3\pi}{2}$.



Vì $y'\left(\frac{3\pi}{2}\right)<0$. Nên hàm số:

$y=\cos x\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)$

không thể đồng biến trên khoảng $\left(\frac{4\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right)$.

Loại **A, B, C.**

Câu 30. Xét hàm số: $y=\frac{1}{4}x^2\left(2\ln x-1\right)$.

TXĐ: $D=(0;+\infty)$.

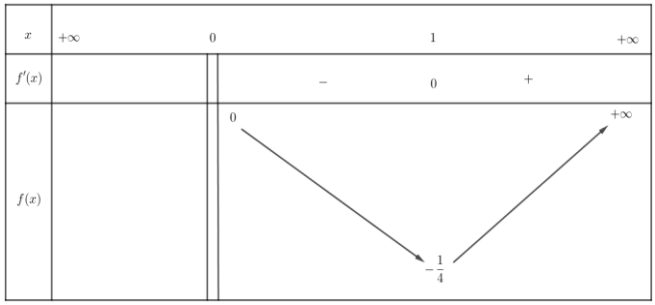
Ta có: $y=\frac{1}{4}x^2\left(2\ln x-1\right)=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2$.

Suy ra: $y'=\frac{1}{2}\left(2x\ln x+x^2.\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2}x$

$$y'=x\ln x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x=x\ln x=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \ln x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:



Như thế hàm số $y=\frac{1}{4}x^2\left(2\ln x-1\right)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Suy ra: $\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}\Rightarrow S=b-a=1-1=0$

Đáp án: A

Câu 31. Ta xét hàm số:

$$g(x)=2f(1-x)+\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2-5$$

Ta có: $g'(x)=-2f'(1-x)+x^3-3x^2+2x$

$$\Leftrightarrow g'(x)=-2f'(1-x)+\left(x^3-3x^2+3x-1\right)+(-x+1)$$

$$\Leftrightarrow g'(x)=-2f'(1-x)+(x-1)^3+(1-x)$$

$$\Leftrightarrow g'(x)=-2f'(1-x)-(1-x)^3+(1-x)$$

Đặt: $t=1-x$. Khi đó $g'(x)$ tương đương với:

$$h(t)=-2f'(t)-t^3+t$$

Ta xét điều kiện **lỏng** để $g'(x)>0$.

(Điều kiện **lỏng**: $\begin{cases}-2f'(t)>0\\ -t^3+t>0\end{cases}\Rightarrow h(t)>0$)

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(t)<0 \\ t^3-t<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -2<t<-1 \\ 0<t<1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} t<-1 \\ 0<t<1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<t<-1 \\ 0<t<1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<1-x<-1 \\ 0<1-x<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<x<3 \\ 0<x<1 \end{array}\right.$$

Vậy $g'(x)$ nhận giá trị dương (hàm số $g(x)$ đồng biến) trên khoảng $(0;1)$ và $(2;3)$.

Một cách tương tự, ta xét điều kiện **lỏng** để $g'(x)<0$.

(Điều kiện **lỏng**: $\begin{cases} -2f'(t)<0 \\ -t^3+t<0 \end{cases} \Rightarrow h(t)<0$).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(t)>0 \\ t^3-t>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t<-2 \\ -1<t<0 \\ t>1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -1<t<0 \\ t>1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<t<0 \\ t>1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<1-x<0 \\ 1-x>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<x<2 \\ x<0 \end{array}\right.$$

Vậy $g'(x)$ nhận giá trị âm (hàm số $g(x)$ nghịch biến) trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;2)$.

Đáp án: C

Câu 32. Một số nhận xét rút ra từ giả thuyết để bài:

Vì hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm luôn không âm trên khoảng $(-2022;2022)$ nên $\forall x\in(-2022;2022), f'(x)\ge 0$. (1)

Vì trên khoảng $(-2022;2022)$, hàm số $y=f(x)$, có duy nhất một đoạn con K nào đó có độ lớn bằng 2021 mà trên đoạn đó đồ thị hàm số là một đường thẳng song song với trục hoành nên trên đoạn con K, $f(x)=m\neq 0$. (2)

Vì (2), nên trên khoảng con K có độ lớn là 2021, ta luôn có: $f'(x)=0$. (3)

Note: Hàm số $y=f(x)=0$ là một đường thẳng "**trùng**" với trục hoành (Trục Ox).

Xét từng đáp án:

- Đáp án **A**: Do (3) nên ta không thể kết luận được rằng hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2022;2022)$.

Loại **A**.

Note: Theo lý thuyết đồng biến, nghịch biến, dấu "$=$" chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm.

- Đáp án **B**: Do (1) nên: $f(x_1)\le f(x_2)$ với mọi $-2022<x_1\le x_2<2022$. Dấu "$=$" **chỉ** xảy ra ở một đoạn con K nào đó có độ lớn là 2021. Vì thế:

$$f(-2021)<f(2021)$$

Loại **B**.

Note: Khoảng K chứa $x=-2021$ thì không thể chứa $x=2021$ và ngược lại.

- Đáp án **C**: Do (3), nên biểu thức:

$f'(2020)=f'(2021)=0$ hoàn toàn có thể xảy ra. Chẳng hạn, ta xét trên khoảng $K=[1;2021]$.

Theo (3), ta có: $f'(2020)=f'(2021)=0$.

Chọn **C**.

❖ Đáp án **D**: Do (2) nên trên K, ta luôn có $f(x)\neq 0$. Và ở "***các khoảng bù với khoảng K trong $(-2022;2022)$***", hàm số $y=f(x)$ đồng biến nên nếu có giao điểm với trục hoành ($f(x)=0$) thì số giao điểm, nếu có, tối đa là 1.

Loại **D**.

Đáp án: C

Câu 33. Xét hàm số:

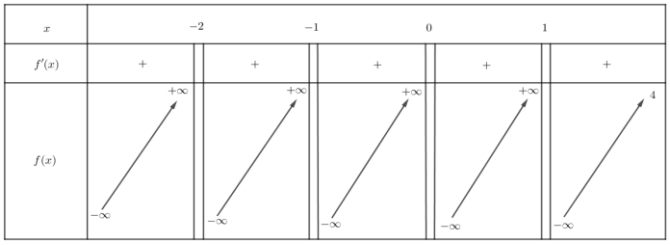
$$y=\frac{x^5+6x^4+3x^3-12x^2-6x+2}{x^4+2x^3-x^2-2x}-|x|$$

Ta có: $y=\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+x-|x|$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+1-\frac{x}{|x|}$$

Vì: $\begin{cases}\frac{1}{(x+1)^2}>0\\ \frac{1}{x^2}>0\\ \frac{1}{(x+1)^2}>0\\ \frac{1}{(x+2)^2}>0\\ 1-\frac{x}{|x|}>0\end{cases}\Rightarrow y'>0$.

Bảng biến thiên:



Dựa vào đồ thị bảng biến thiên, ta thấy rằng:

Hàm số $y=\frac{x^5+6x^4+3x^3-12x^2-6x+2}{x^4+2x^3-x^2-2x}-|x|$ đồng biến trên các khoảng rời nhau $(-\infty;-2)$ và $(-2;-1)$ và $(-1;0)$ và $(0;1)$ và $(1;+\infty)$.

Đáp án: D

Note: Kĩ thuật tách phân thức hữu tỉ (thực sự)

Ta có: $y=\frac{x^5+6x^4+3x^3-12x^2-6x+2}{x^4+2x^3-x^2-2x}-|x|$

$$=\frac{\left(x^5+2x^4-x^3-2x^2\right)+4x^4+4x^3-10x^2-6x+2}{x^4+2x^3-x^2-2x}-|x|$$

$$=\frac{x\left(x^4+2x^3-x^2-2x\right)+4x^4+4x^3-10x^2-6x+2}{x^4+2x^3-x^2-2x}-|x|$$

$$=x+\frac{4x^4+4x^3-10x^2-6x+2}{x^4+2x^3-x^2-2x}-|x|$$

$$=x+\frac{4\left(x^4+2x^3-x^2-2x\right)-4x^3-6x^2+2x+2}{x^4+2x^3-x^2-2x}-|x|$$

$$=x+4-\frac{4x^3+6x^2-2x-2}{x^4+2x^3-x^2-2x}-|x|$$

Ta tách biểu thức: $\frac{4x^3+6x^2-2x-2}{x^4+2x^3-x^2-2x}$

Ta có: $\frac{4x^3+6x^2-2x-2}{x^4+2x^3-x^2-2x}$

$$=\frac{4x^3+6x^2-2x-2}{(x+2)(x+1)x(x-1)}$$

$$=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x-1}$$

$$= \frac{A(x+1)x(x-1)+B(x+2)x(x-1)+...}{(x+2)(x+1)x(x-1)}$$
$$\frac{...+C(x+2)(x+1)(x-1)+D(x+2)(x+1)x}{(x+2)(x+1)x(x-1)}$$
$$= \frac{(A+B+C+D)x^3+(B+2C+3D)x^2+...}{(x+2)(x+1)x(x-1)}$$
$$\frac{...+(-A-2B-C+2D)x-2C}{(x+2)(x+1)x(x-1)}$$

Đồng nhất hệ số của x^3, x^2, x và hệ số tự do, được hệ bốn phương trình:

$$\begin{cases} A+B+C+D=4 \\ B+2C+3D=6 \\ -A-2B-C+2D=-2 \\ -2C=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \\ C=1 \\ D=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{4x^3+6x^2-2x-2}{x^4+2x^3-x^2-2x} = \frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}.$$

Suy ra: $y = x+4-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}-|x|$

$$= x+\left(1-\frac{1}{x-1}\right)+\left(1-\frac{1}{x}\right)+\left(1-\frac{1}{x+1}\right)+\left(1-\frac{1}{x+2}\right)-|x|$$
$$= \frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+x-|x|$$

Vậy: $y = \frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+x-|x|.$

Extra Techniques:

Tips:

Cho hàm số $y=f(x)$ có dạng phân thức hữu tỉ $f(x)=\frac{P(x)}{G(x)}$ trong đó $P(x), Q(x)$ là hai đa thức với hệ số thực theo biến x và $P(x)$ không chia hết cho $Q(x)$.

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là hàm phân thức hữu tỉ thực sự khi và chỉ khi:

$$\deg(P) < \deg(Q)$$

Nếu hàm số $y=f(x)$ chưa là hàm phân thức hữu tỉ thực sự.

Phương pháp: Thực hiện lấy phép chia tử thức cho mẫu thức để được:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}=S(x)+g(x)$$

Khi đó: ta thu được một hàm $S(x)$ là một đa thức và một phân thức hữu tỉ thực sự $g(x)$.

TOÁN ANH DÚI

Phương pháp phân tách một phân thức hữu tỉ thực sự thành tổng các phân thức hữu tỉ thực sự khác đơn giản hơn.

Trường hợp 1: Phương trình $Q(x)=0$ có các nghiệm thực đơn.

Giả sử đa thức $Q(x)$ có bậc n và có n nghiệm đơn. Khi đó: $Q(x)=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)...(a_nx+b_n)$

Nên hàm phân thức hữu tỉ $g(x)$ bằng:

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{a_2x+b_2}+...+\frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

Việc còn lại ta chỉ cần quy đồng và đồng nhất hệ số ở tử như ở kĩ thuật tách phân thức hữu tỉ (thực sự) như ở phần **Note** đã trình bày ở trên.

Trường hợp 2: Phương trình $Q(x)=0$ có các nghiệm thực bội.

Giả sử đa thức $Q(x)$ có bậc n và có các nghiệm thực là $a_1,a_2,a_3,...,a_k$ trong đó $x=a_1$ là một nghiệm bội m. Khi đó:

$$Q(x)=(x-a_1)^m(x-a_2)...(x-a_k)$$

Nên hàm phân thức hữu tỉ $g(x)$ bằng:

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{(x-a_1)^2}+...+\frac{A_m}{(x-a_1)^m}+\frac{B_1}{x-a_2}+\frac{B_2}{x-a_3}+...+\frac{B_{k-1}}{x-a_k}$$

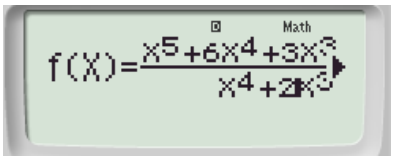
Việc còn lại ta chỉ cần quy đồng và đồng nhất hệ số ở tử như ở kĩ thuật tách phân thức hữu tỉ (thực sự) như ở phần **Note** đã trình bày ở trên.

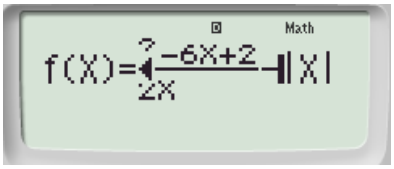
Extra Techniques:

Casio:

Cơ sở: Dựa vào sự tăng giảm của hàm số, ta có thể xác định trên một khoảng nào đó hàm số tăng hay giảm bằng mode **Table**.

Ta vào mode **Table** và nhập biểu thức $f(x)$ đề bài cho (như hình minh họa).





Chọn $\begin{cases} Start:-5 \\ End:5 \\ Step:\dfrac{5-(-5)}{29} \end{cases}$

Dựa vào kết quả hàm $f(x)$ (Lưu ý những điểm không xác định như điểm $x=-2$, $x=-1$, $x=0$, $x=1$). Ta thấy:

Trên đoạn $(-5;-2.241...)$ hàm số tăng từ -5.05 đến $5.2203...$.

Trên đoạn $(-1.896...;-1.206...)$ hàm số tăng từ $-7.471...$ đến $6.4403...$.

Trên đoạn $(-0.862...;-0,172...)$ hàm số tăng từ $-4.155...$ đến $8.5526...$.

Trên đoạn $(0.1724...;0.862...)$ hàm số tăng từ $-1.904...$ đến $9.2035...$.

Trên đoạn $(1.2068...;5)$ hàm số tăng từ $-2.426...$ đến $3.2404...$.

Ta để ý rằng hàm số đồng biến trên các khoảng rời nhau, và điểm phân cách các khoảng con đó chính là những điểm mà tại đó không xác định: $x=-2$, $x=-1$, $x=0$, $x=1$.

Vậy hàm số:

$$y=\frac{x^5+6x^4+3x^3-12x^2-6x+2}{x^4+2x^3-x^2-2x}-|x|$$

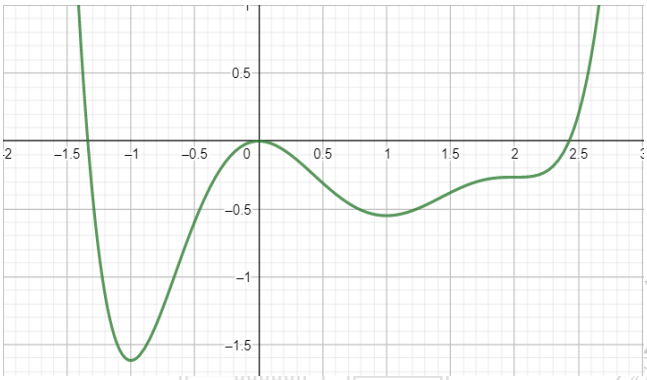
đồng biến trên các khoảng rời nhau $(-\infty;-2)$ và $(-2;-1)$ và $(-1;0)$ và $(0;1)$ và $(1;+\infty)$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

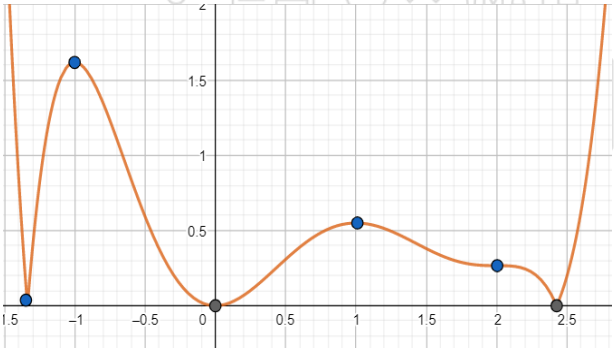
Câu 34. Vì $y=\left|f\left(x\right)\right|=\begin{cases}f\left(x\right), & f\left(x\right)\ge 0\\ -f\left(x\right), & f\left(x\right)<0\end{cases}$.

Nên phần hàm số nằm từ trục hoành (Trục Ox) (kể cả trục hoành) đi lên theo chiều của tia Oy, được giữ không đổi. Còn phần hàm số nằm từ trục hoành đi xuống theo chiều của tia đối tia Oy được lấy đối xứng qua trục Ox.

Theo lý thuyết được trình bày ở trên, ta có thể phác họa đồ thị hàm $\left|f\left(x\right)\right|$ như hình bên dưới:



Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$.



Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$.

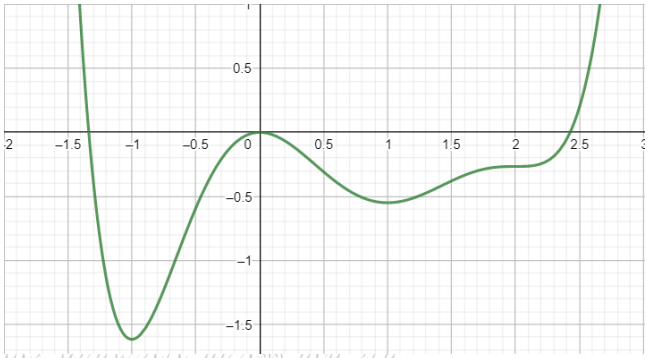
Dựa vào đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$, dễ dàng nhận ra rằng hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ đồng biến trên khoảng $\left(0;1\right)$.

Đáp án: B

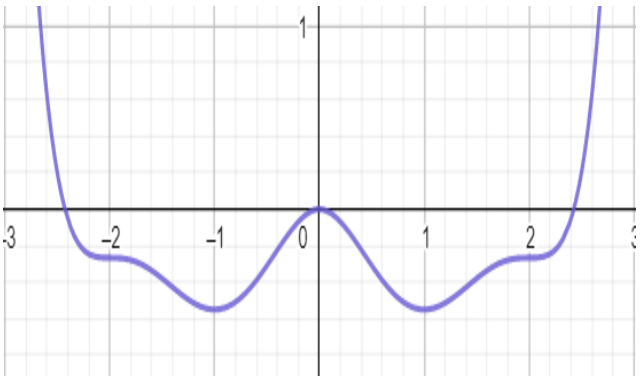
Câu 35. Vì $y=f\left(\left|x\right|\right)=\begin{cases}f\left(x\right), & x\ge 0\\ f\left(-x\right), & x<0\end{cases}$.

Nên phần hàm số nằm từ trục tung (Trục Oy) (kể cả trục tung) đi qua theo chiều của tia Ox, được giữ không đổi. Còn phần hàm số nằm từ trục tung đi qua theo chiều của tia đối tia Ox được thay bằng phần đối xứng của đồ thị nằm bên phải trục tung (Trục Oy).

Theo lý thuyết được trình bày ở trên, ta có thể phác họa đồ thị hàm $f\left(\left|x\right|\right)$ như hình bên dưới:



Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$.



Đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$, dễ dàng nhận ra rằng hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-1;0\right)$.

Đáp án: A

Câu 36. Xét hàm số:

$$y = f'(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$$

Ta có: $y = f''(x) = 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q \ (1)$

Vì đồ thị hàm $f''(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt (Phương trình $f''(x) = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt) lần lượt là: $x = -1$, $x = \frac{5}{4}$, $x = 3$.

Khi đó: $f''(x) = 4m(x+1)\left(x - \frac{5}{4}\right)(x-3)$

$$\Leftrightarrow f''(x) = m(x+1)(4x-5)(x-3)$$
$$\Leftrightarrow f''(x) = m(4x^3 - 13x^2 - 2x + 15)$$
$$\Leftrightarrow f''(x) = 4mx^3 - 13mx^2 - 2mx + 15m \ (2)$$

Đồng nhất hệ số giữa (1) và (2), ta có:

$$\begin{cases} 4m = 4m \\ 3n = -13m \\ 2p = -2m \\ q = 15m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -\frac{13}{3}m \\ p = -m \\ q = 15m \end{cases}$$

Suy ra: $f'(x) = mx^4 - \frac{13}{3}mx^3 - mx^2 + 15mx + r$.

Dễ thấy: $m < 0$. Do hàm số $f''(x)$ có hệ số $a = 4m < 0$ (Đồ thị hàm số $y = f''(x)$ có xu hướng đi xuống khi x đủ lớn).

Xét hàm số: $y = g(x) = f(x) - rx$

Ta có: $y' = f'(x) - r = mx^4 - \frac{13}{3}mx^3 - mx^2 + 15mx$

Khi đó: $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^4 - 13x^3 - 3x^2 + 45x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -\frac{5}{3} \\ x_2 = 0 \\ x_{3,4} = 3 \end{array}\right. \text{ (Nghiệm } x = 3 \text{ là nghiệm kép).}$$

Bảng biến thiên:

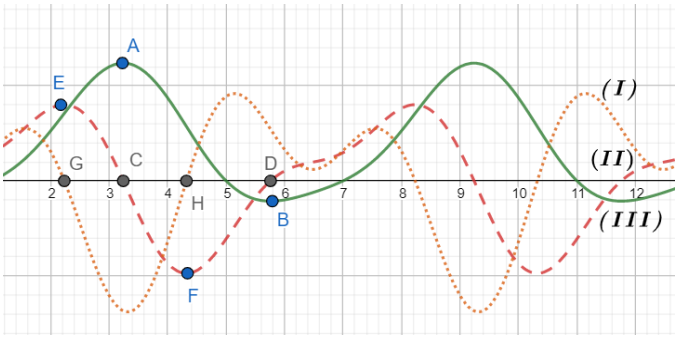
x	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		0		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Dựa vào bảng biến thiên được vẽ ở trên, ta nhận thấy trên khoảng $\left(-\frac{5}{4}; 0\right)$, đồ thị hàm số $y = g(x) = f(x) - rx$ đồng biến.

Khi đó: $\begin{cases} a = -\frac{5}{4} \Rightarrow S = ab = 0. \\ b = 0 \end{cases}$

Đáp án: D

Câu 37. Ta kí hiệu một số điểm đặc biệt lên đồ thị hàm số như hình vẽ.



Dễ thấy trên cung AB của đồ thị (III), hàm số giảm và đồng thời hàm số (II) nhận giá trị âm trên cung CD.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Như vậy hàm số (II) là đồ thị đạo hàm của hàm số (III).

Mặt khác: Trên cung EF của đồ thị (II), hàm số giảm và đồng thời hàm số (I) nhận giá trị âm trên cung GH.

Như vậy hàm số (I) là đồ thị đạo hàm của hàm số (II).

Khi đó: Hàm số (II) là đồ thị đạo hàm của hàm số (III) và hàm số (I) lại là đồ thị đạo hàm của hàm số (II).

Vậy hàm số $f(x)$ là đồ thị hàm số (III), hàm số $f'(x)$ là đồ thị hàm số (II) và hàm số $f''(x)$ là đồ thị hàm số (I).

Đáp án: D

Câu 38. Xét hàm số:

$$y=g(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{2022-x}+\sqrt{2021-x}}.$$

TXĐ: $D=[0;2021]$.

Ta có: $y'=\dfrac{f'(x).\left(\sqrt{2022-x}+\sqrt{2021-x}\right)-...}{\left(\sqrt{2022-x}+\sqrt{2021-x}\right)^2}$

$$\frac{...f(x).\left(\dfrac{-1}{2\sqrt{2022-x}}+\dfrac{-1}{2\sqrt{2021-x}}\right)}{\left(\sqrt{2022-x}+\sqrt{2021-x}\right)^2}$$

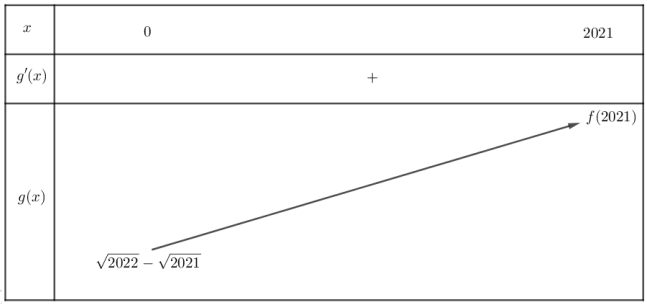
$$\Leftrightarrow y'=\frac{f'(x)\left(\sqrt{2022-x}+\sqrt{2021-x}\right)+...}{\left(\sqrt{2022-x}+\sqrt{2021-x}\right)^2}$$

$$\frac{...f(x).\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2022-x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{2021-x}}\right)}{\left(\sqrt{2022-x}+\sqrt{2021-x}\right)^2}>0,\forall x\in[0;2021]$$

Vì: $\begin{cases} f'(x)>0,\forall x\in[0;2021] \\ \sqrt{2022-x}+\sqrt{2021-x}>0,\forall x\in[0;2021] \\ f(x)>0,\forall x\in[0;2021] \\ \dfrac{1}{2\sqrt{2022-x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{2021-x}}>0,\forall x\in[0;2021] \end{cases}$

Khi đó: $y'=g'(x)>0,\forall x\in[0;2021]$.

Bảng biến thiên hàm $y=g(x)$.



Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y=g(x)$ ta thấy hàm số đồng biến trên một khoảng duy nhất là $(0;2021)$.

Đáp án: B

Câu 39. Xét hàm số:

$$y=g(x)=f(x-1).\left(x^2-6x+12\right),\forall x\in[2;4].$$

Ta có:

$$g'(x)=f'(x-1).\left(x^2-6x+12\right)+f(x-1).(2x-6)$$

Xét trên đoạn $[2;4]$, ta có:

+) **Trường hợp 1**: $x\in[2;3]$.

Khi đó: $\begin{cases}1\le x-1\le 2\\2x-6\le 0\\x^2-6x+12>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x-1)<0\\2x-6\le 0\\f'(x-1)>0\\x^2-6x+12>0\end{cases}$

Suy ra: $g'(x)>0,\forall x\in[2;3]$.

Vì thế hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

+) **Trường hợp 2**: $x\in(3;4]$.

Khi đó: $\begin{cases}2\le x-1\le 3\\2x-6>0\\x^2-6x+12>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x-1)<0\\2x-6>0\\f'(x-1)<0\\x^2-6x+12>0\end{cases}$

Suy ra: $g'(x)<0,\forall x\in(3;4]$.

Vì thế hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3;4)$.

Đáp án: D

Note: Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[1;3]$, nên hàm số $y=f(x-1)$ liên tục trên $[2;4]$. Vì vậy hàm số $g(x)=f(x-1)(x^2-6x+12)$ liên tục trên đoạn $[2;4]$.

Câu 40. Xét hàm: $y=f(x)-\cos\pi x+\frac{\pi^2}{4}+m$.

Ta có: $y'=f'(x)+\pi\sin\pi x$.

Dễ thấy: trên đoạn $(2;3)\subset(1;4)$, ta có:

$\begin{cases}f'(x)>0\\2\pi<x<3\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f'(x)>0\\\sin\pi x>0\end{cases}\Rightarrow y'>0,\forall x\in(2;3)$.

Như vậy, mệnh đề trên hoàn toàn đúng do $y=f'(x)>0,\forall x\in(2;3)$.

Đáp án: C

Note: Ta loại đáp án **D** bởi vì đồ thị hàm số $y=f(x)-\cos\pi x+\frac{\pi^2}{4}+m$ mang giá trị dương hay âm trên khoảng $(2;3)$ vẫn bị phụ thuộc bởi tham số m.

Câu 41. Xét hàm: $f'\left(-2x+\frac{7}{2}\right)=3x^2-12x+9$.

Ta có: $f'\left(-2x+\frac{7}{2}\right)<0\Leftrightarrow 3x^2-12x+9<0$

Suy ra: $f'\left(-2x+\frac{7}{2}\right)<0\Leftrightarrow 1<x<3$.

Đặt: $t=-2x+\frac{7}{2}\Rightarrow x=\frac{7-2t}{4}$.

Khi đó ta có: $f'(t)<0\Leftrightarrow 1<\frac{7-2t}{4}<3$

Suy ra: $f'(t)<0\Leftrightarrow -\frac{5}{2}<t<\frac{3}{2}$.

Vậy hàm số: $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Đáp án: C

Câu 42.

Ta có: $f'(2x+1)=2021-2x(2x+3).g(x)$

Đặt: $t=2x+1\Rightarrow x=\frac{t-1}{2}$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Hàm số đã cho trở thành:

$f'(t)=2021-2.\left(\frac{t-1}{2}\right).\left[2.\left(\frac{t-1}{2}\right)+3\right].g\left(\frac{t-1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow f'(t)=2021-(t-1)(t-1+3)g\left(\frac{t-1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow f'(t)=2021+(1-t)(t+2)g\left(\frac{t-1}{2}\right)$

Suy ra: $f'(x)=(1-x)(x+2)g\left(\frac{x-1}{2}\right)+2021.$

Ta xét hàm số: $y=f(1-x)+2021x+2022.$

Ta có: $y'=-f'(1-x)+2021$

$\Leftrightarrow y'=-\left[1-(1-x)\right]\left[(1-x)+2\right]g\left(\frac{1-x-1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow y'=-x(3-x)g\left(-\frac{x}{2}\right)$

$\Leftrightarrow y'=x(x-3)g\left(-\frac{x}{2}\right)$

Cho $y'>0\Leftrightarrow x(x-3)g\left(-\frac{x}{2}\right)>0$

Suy ra: $x(x-3)<0\Leftrightarrow 0<x<3.$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;3).$

Đáp án: B

Câu 43. Xét hàm số: $y=f(2x-5).$

Ta có: $y'=2f'(2x-5)$

Cho $y'<0\Leftrightarrow f'(2x-5)<0\Leftrightarrow -\frac{1}{3}<2x-5<3$

Suy ra: $y'<0\Leftrightarrow \frac{7}{3}<x<4.$

Hàm số $y=f(2x-5)$ đồng biến trên $(m;n).$

Suy ra: $S_{\min}=m_{\min}-n_{\max}=\frac{7}{3}-4=-\frac{5}{3}.$

Đáp án: A

Câu 44. Xét hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+1}\right)$

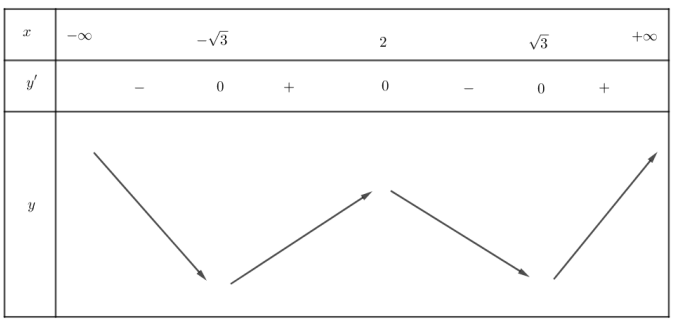
Ta có: $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)=0$

Khi đó:

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\\sqrt{x^2+1}=-1\\\sqrt{x^2+1}=0\\\sqrt{x^2+1}=1\\\sqrt{x^2+1}=2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\\sqrt{x^2+1}=1\\\sqrt{x^2+1}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2+1=1\\x^2+1=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\sqrt{3}.\\x=\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:



Vậy hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\sqrt{3};0\right),\left(\sqrt{3};+\infty\right).$

Đáp án: C

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Câu 45. Xét hàm số $y=g(x)$.

Ta có: $g'(x)=f'(x+1)-f'(2-x)+6-2x$.

Điều kiện lỏng: $\begin{cases} f'(x+1)\ge 0 \\ -f'(2-x)\le 0\ (*) \\ 6-2x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x)\ge 0$.

Khi đó: $(*)$ tương đương với: $\begin{cases} f'(x+1)\ge 0 \\ f'(2-x)\ge 0 \\ x\le 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+1\ge 1 \\ x+1\le -2 \end{array}\right. \\ -2\le 2-x\le 1 \\ x\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\ge 0 \\ x\le -3 \end{array}\right. \\ 1\le x\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1\le x\le 3.$$

Mà $(1;2)\subset[1;3]$.

Vậy hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Đáp án: C

Câu 46. Ta có: $g'(x)=6f^2(2x-1).f'(2x-1)$

Vì: $6f^2(2x-1)\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Nên: $g'(x)\le 0 \Leftrightarrow 6f^2(2x-1)f'(2x-1)\le 0$

Suy ra: $g'(x)\le 0 \Leftrightarrow f'(2x-1)\le 0$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta thấy rằng:

$$f'(2x-1)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1\ge 1 \\ -1\le 2x-1\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ 0\le x\le \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy hàm số $y=g(x)=\left[f(2x-1)\right]^3$ nghịch biến trên hai khoảng rời nhau $\left(0;\dfrac{1}{2}\right),(1;+\infty)$.

Đáp án: C

Câu 47. Xét hàm số $g(x)=\left[f(1-x)\right]^{2021}$.

Ta có: $g'(x)=-2021\left[f(1-x)\right]^{2020}.f'(1-x)$.

Khi đó: $g'(x)\le 0$

$\Leftrightarrow -2021\left[f(1-x)\right]^{2020}.f'(1-x)\le 0 \Leftrightarrow f'(1-x)\ge 0$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có:

$f'(1-x)\ge 0 \Rightarrow 1-x\le -2 \Leftrightarrow x\ge 3$.

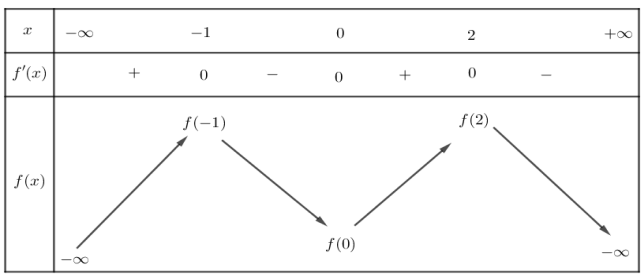
Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

Đáp án: D

Câu 48. Xét hàm số $g(x)=\left[f(x^2-3)\right]^2$.

Ta có: $g'(x)=4xf(x^2-3).f'(x^2-3)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta mô phỏng hình dạng đồ thị hàm số $y=f(x)$ dưới dạng bảng biến thiên như hình vẽ:



Vì $f(-1)=f(2)=0$ nên $f(x)\le 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(x^2-3)\le 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Hàm số $y=g(x)$ đồng biến khi và chỉ khi:

$$g'(x)=4xf\left(x^2-3\right).f'\left(x^2-3\right)\ge 0$$

Hay: $xf'\left(x^2-3\right)\le 0$.

- **Trường hợp 1:** $\begin{cases}x\ge 0\\ f'\left(x^2-3\right)\le 0\end{cases}(1)$.

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\le x^2-3\le 0\\ x^2-3\ge 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\sqrt{3}\le x\le -\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\le x\le\sqrt{3}\\ x\ge\sqrt{5}\\ x\le -\sqrt{5}\end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện (1), được: $\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\le x\le\sqrt{3}\\ x\ge\sqrt{5}\end{array}\right.$.

- **Trường hợp 2:** $\begin{cases}x\le 0\\ f'\left(x^2-3\right)\ge 0\end{cases}(2)$.

$$(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le x^2-3\le 2\\ x^2-3\le -1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\sqrt{5}\le x\le -\sqrt{3}\\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{5}\\ -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện (2), được: $\left[\begin{array}{l}-\sqrt{5}\le x\le -\sqrt{3}\\ -\sqrt{2}\le x\le 0\end{array}\right.$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $\left(-\sqrt{5};-\sqrt{3}\right),\left(-\sqrt{2};0\right),\left(\sqrt{2};\sqrt{3}\right),\left(\sqrt{5};+\infty\right)$.

Đáp án: C

Câu 49. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'\left(2x+\frac{3}{2}\right)$.

Ta có: $f'\left(2x+\frac{3}{2}\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x<1\\ x>3\end{array}\right.(*)$

Đặt: $t=2x+\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=\frac{2t-3}{4}$.

Khi đó: $(*)\Leftrightarrow f'(t)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<\frac{2t-3}{4}<1\\ \frac{2t-3}{4}>3\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{2}<t<\frac{7}{2}\\ t>\frac{15}{2}\end{array}\right.$$

Do đó hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right),\left(\frac{15}{2};+\infty\right)$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Khi đó: $\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\ b=\frac{7}{2}\\ c=\frac{15}{2}\end{cases}\Rightarrow S=a+b+2c=18$

Đáp án: A

Câu 50. Dựa vào đồ thị hàm số $f'\left(x^3+1\right)$.

Ta suy ra: $f'\left(x^3+1\right)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<x<0\\ 1<x<2\end{array}\right.$.

Đặt: $t=x^3+1\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{t-1}$.

Suy ra: $f'(t)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<\sqrt[3]{t-1}<0\\ 1<\sqrt[3]{t-1}<2\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-8<t-1<0\\ 1<t-1<8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-7<t<1\\ 2<t<9\end{array}\right.$$

Vậy hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-7;1),(2;9)$.

Đáp án: B

Câu 51. Xét hàm số $y=e^{-x}.f(x)$.

Ta có: $y'=-e^{-x}.f(x)+e^{-x}.f'(x)$

$$\Leftrightarrow y'=e^{-x}.(f'(x)-f(x))=0$$
$$\Leftrightarrow f'(x)-f(x)=0$$
$$\Leftrightarrow f'(x)=f(x)$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=f'(x)$, ta thấy $f(x)=f'(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2.\\x=3\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↗		↘		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số dễ dàng thấy hàm số $y=e^{-x}f(x)$ có hai khoảng đồng biến là $(-\infty;1)$ và $(2;3)$.

Đáp án: C

Câu 52. Tập xác định $g(x)$: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x)=f'(x)-\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

Đặt $h(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}\Rightarrow h'(x)=\dfrac{-2x^2-2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$

Khi đó: $h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\\x=\dfrac{-\sqrt{3}-1}{2}\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $y=h(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$\frac{-\sqrt{3}-1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	↘	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	↘	0

Ta có: $h(-1)=-1;h(0)=h(1)=1;h\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$.

Bảng biến thiên hàm số $y=h(x)$.

Ta có: $h(x)>1,\forall x\in(0;1)$.

Khi đó: $-h(x)<-1<0,\forall x\in(0;1)$.

Mặt khác dựa vào bảng xét dấu của đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$.

Ta có: $f'(x)<0,\forall x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$.

Vì vậy trên khoảng $(0;1)$, ta có:
$g'(x)=f'(x)-h(x)<0$.

Suy ra hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên $(0;1)$.

Đáp án: B

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Note: Lý do loại các phương án **A, C, D**.

Ta xét trên khoảng $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$.

Vì hàm số $y=h(x)$ đồng biến trên $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$.

Nên $h(-1)<h(x)<h\left(-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow -1<h(x)<0$

Suy ra: $h(x)<0$ hay $-h(x)>0$.

Ta có: $\forall x\in\left(-1;-\frac{1}{2}\right)\subset(-1;0), f'(x)>0$

Vậy: $g'(x)=f'(x)-h(x)>0, \forall x\in\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$.

Do đó hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$.

Mà $\begin{cases}\left(-1;-\frac{1}{2}\right)\subset(-\infty;0)\\ \left(-1;-\frac{1}{2}\right)\subset(-1;+\infty)\\ \left(-1;-\frac{1}{2}\right)\subset(-1;0)\end{cases}$ nên ta loại **A, C, D**.

Câu 53. Đặt $g(x)=f\left(2-e^x\right)$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x)=-e^x f'\left(2-e^x\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-e^x=-1\\ 2-e^x=1\\ 2-e^x=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\ln 3\\ x=0\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu đạo hàm của hàm số $y=g(x)$:

x	$-\infty$		0		$ln3$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(0;\ln 3)$.

Đáp án: C

Câu 54. Do $h(x)=f\left(|x|\right)$ là hàm chẵn, đồ thị hàm số $y=h(x)$ nhận trục tung làm trục đối xứng nên từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ suy ra bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$		-3		0		3	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	$f(0)$	↗	4	↘ $-\infty$

Tịnh tiến đồ thị hàm số $h(x)=f\left(|x|\right)$ sang phải (theo trục hoành) 2 đơn vị ta thu được đồ thị hàm số $g(x)=f\left(|x-2|\right)$.

Khi đó ta dễ dàng phác họa được bảng biến thiên của đồ thị hàm số $g(x)=f\left(|x-2|\right)$.

x	$-\infty$		-1		2		5	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	$f(0)$	↗	4	↘ $-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số $g(x)=f(|x-2|)$ ta thấy hàm số nghịch biến trên $(-1;2)$ và $(5;+\infty)$.

Đáp án: C

Câu 55. Đặt $g(x)=f(|f(x)|)$

Suy ra: $g'(x)=f'(|f(x)|).\dfrac{f(x).f'(x)}{|f(x)|}$.

Dễ thấy: $g'(x)$ không xác định khi và chỉ khi $f(x)=0$ hay $x=0$.

Mặt khác: $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f'(|f(x)|)=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\|f(x)|=1\\|f(x)|=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\f(x)=1\\f(x)=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm1.$

Từ bảng biến thiên của $f(x)$ ta có:

$$-1\le f(x)\le1\Leftrightarrow|f(x)|\in[0;1],\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Vì thế $f'(|f(x)|)\ge0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Bảng xét dấu của hàm số đạo hàm $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

Suy ra hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1),(0;1)$.

Đáp án: A

Câu 56. Xét hàm số: $y=g(x)=f(2\cos x+1)$.

Ta có: $g'(x)=-2\sin x.f'(2\cos x+1)$

Cho $g'(x)\ge0$.

Khi đó: $-2\sin x.f'(2\cos x+1)\ge0$

Ta xét trên khoảng $(0;\pi)$.

Vì $0<x<\pi$. Suy ra: $\sin x>0\Rightarrow-\sin x<0$.

Vì thế: $f'(2\cos x+1)\le0\ (*)$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$, ta suy ra: $(*)\Leftrightarrow1\le2\cos x+1\le2\Leftrightarrow0\le\cos x\le\dfrac{1}{2}$.

Hay $\dfrac{\pi}{3}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Đáp án: C

Note: Sở dĩ ta xét trên đoạn $(0;\pi)$ vì ta dựa vào khoảng nghiệm của bốn đáp án. Hay nói cách khác là do: $\left\{\begin{array}{l}\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)\subset(0;\pi)\\\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3}\right)\subset(0;\pi)\\\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right)\subset(0;\pi)\\\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)\subset(0;\pi)\end{array}\right.$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Câu 57. Xét hàm số $y=g(x)$.

Ta có:

$g'(x)=(3x^2-2x).f'(1-x^2+x^3)+3x^2-2x$

$\Leftrightarrow g'(x)=(3x^2-2x).\left[f'(1-x^2+x^3)+1\right]$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$.

Suy ra: $f'(x)\geq -1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Nên $f'(1-x^2+x^3)+1\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Khi đó: $g'(x)\leq 0\Leftrightarrow 3x^2-2x\leq 0\Leftrightarrow 0\leq x\leq \frac{2}{3}$.

Đáp án: C

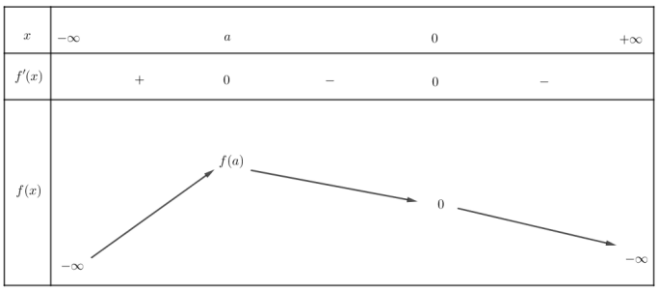
Câu 58. Xét hàm số $y=xf(x)$.

Ta có: $y'=f(x)+xf'(x)$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$.

Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=a,\ (a<-3) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$.



Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta luôn có $f(x)>0$ và $f'(x)<0$, $\forall x\in(-2;0)$.

Vì thế: $\begin{cases} f(x)>0 \\ xf'(x)>0 \end{cases},\forall x\in(-2;0)$.

Vậy hàm số $y=xf(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

Đáp án: B

Note: Sở dĩ ta không chọn các phương án **A, C, D** là vì:

+) Trên khoảng $(-\infty;0)$ ta không thể nào kết luận dấu của $f(x)+xf'(x)>0$ được vì $f(x)$ và $xf'(x)$ có thể âm hoặc dương trên khoảng $(-\infty;0)$. Vì thế đáp án **A** sai.

+) Trên khoảng $(0;2)$, hàm số $y=xf(x)$ nghịch biến. Thật vậy! $\forall x\in(0;2)$ ta luôn có: $\begin{cases} f(x)<0 \\ xf'(x)<0 \end{cases}\Rightarrow f(x)+xf'(x)<0$.

Vì thế đáp án **C** sai.

+) Vì $(0;2)\subset(-2;2)$ nên đáp án **D** sai.

Câu 59.

Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số.

Ta dễ dàng suy ra phương trình của cả ba hàm số: $f(x), f'(x), f''(x)$.

$$\begin{cases} f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2-x-\frac{1}{3} \\ f'(x)=-x^2+2x-1 \\ f''(x)=-2x+2 \end{cases}$$

Xét hàm số: $y=\dfrac{f(x)}{e^x}$.

Ta có: $y'=\dfrac{f'(x).e^x-f(x).e^x}{e^{2x}}=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}$

Khi đó: $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)-f(x)=0$

$\Leftrightarrow\left(-x^2+2x-1\right)-\left(-\dfrac{1}{3}x^3+x^2-x-\dfrac{1}{3}\right)=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x-\dfrac{2}{3}=0$

$\Leftrightarrow x^3-6x^2+9x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2-\sqrt{3}\\x=2\\x=2+\sqrt{3}\end{array}\right.$

Bảng xét dấu hàm $y=g'(x)$.

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		2		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu của hàm số $y=g'(x)$.

Khi đó hàm số đồng biến trên khoảng $\left(2-\sqrt{3};2\right)$ và $\left(2+\sqrt{3};+\infty\right)$.

Vì $(4;+\infty)\subset\left(2+\sqrt{3};+\infty\right)$.

Đáp án: C

Note: Vì hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc ba nên hàm số $y=f'(x)$ là một hàm số bậc hai (Parabol) và $y=f''(x)$ là một hàm số bậc nhất (đường thẳng).

Cách 1:

Ta hoàn toàn có thể giả sử:

$$y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,\ (a\neq 0).$$

Khi đó:

$$y=f'(x)=3ax^2+2bx+c.$$

Và

$$y''(x)=6ax+2b.$$

Từ giả thuyết ta có hệ: $\begin{cases}f(0)=-\dfrac{1}{3}\\f'(0)=-1\\f'(1)=0\\f''(1)=0\end{cases}$ $(*)$.

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}d=-\dfrac{1}{3}\\c=-1\\3a+2b+c=0\\6a+2b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{3}\\b=1\\c=-1\\d=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Suy ra: $\begin{cases}f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2-x-\dfrac{1}{3}\\f'(x)=-x^2+2x-1\\f''(x)=-2x+2\end{cases}$.

Cách 2:

Gọi $f'(x)=ax^2+bx+c,\ (a\neq 0)$.

Suy ra: $f''(x)=2ax+b$ Từ giả thuyết ta có hệ sau: $\begin{cases}f''(1)=0\\f'(1)=0\\f'(0)=-1\end{cases}$ $(**)$.

$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=0 \\ a+b+c=0 \\ c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=-1 \end{cases}$.

Vậy: $f'(x)=-x^2+2x-1$.

Ta có: $f(x)=\int f'(x)dx=-\frac{1}{3}x^3+x^2-x+C$.

Mà $f(0)=-\frac{1}{3} \Rightarrow C=-\frac{1}{3}$.

Hay $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2-x-\frac{1}{3}$.

Câu 60. Xét hàm số $y=g(x)$.

Ta có: $g'(x)=2f'(x)f''(x)-2[f'(x)f''(x)+$

$...+f(x).f'''(x)]$.

$\Rightarrow g'(x)=-2f(x)f'''(x)=-2x(x-1)^2(x+4)^3$.

Bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y=g(x)$.

x	$-\infty$		-4		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số đạo hàm $y=g'(x)$ ta có thể suy ra: Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4;0)$. Thế nên ta có: $\begin{cases} a=-4 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow S=ab=0$.

Đáp án: C

Câu 61. Xét hàm số $y=g(x)$.

Ta có: $y'=g'(x)=f'(x)-3(2-x)^2$

$\Leftrightarrow y'=x(x-2)^3-3(x-2)^2=(x-2)^2(x^2-2x-3)$

Ta có: $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$

($x=2$ là nghiệm kép).

Bảng biến thiên hàm số $g(x)$.

x	$-\infty$		-1		2		3	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$		↗		↘		↘		↗

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$.

Đáp án: B

Câu 62. Xét hàm số

$$g(x)=f(x^2-2)+\frac{1}{2}x^4-4x^2+2021$$

Ta có: $g'(x)=2x.f'(x^2-2)+2x^3-8x$.

Ta có: $g'(x)=0$

$\Leftrightarrow 2x.f'(x^2-2)+2x^3-8x=0$

$\Leftrightarrow 2x.\left[f'(x^2-2)+x^2-4\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2-2)+x^2-4=0\ (*) \end{array}\right.$

Giải phương trình $(*)$.

Đặt $t=x^2-2$.

Khi đó: $(*)\Leftrightarrow f'(t)+t-2=0$

$$\Leftrightarrow (2-t)\left(t^2-8\right)^{2021}+t-2=0$$
$$\Leftrightarrow (2-t)\left(t^2-8\right)^{2021}-(2-t)=0$$
$$\Leftrightarrow (2-t)\left[\left(t^2-8\right)^{2021}-1\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t^2-8=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-3 \\ t=3 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2=2 \\ x^2-2=-3 \\ x^2-2=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 2 \\ x=\pm\sqrt{5} \end{array}\right.$$

Suy ra $g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \\ x=\pm\sqrt{5} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y=g(x)$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{5}$	-2	0	2	$\sqrt{5}$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0 $-$	0 $+$	0 $-$	0 $+$	0 $-$	

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$ ta thấy rằng hàm số nghịch biến trên ba khoảng rời nhau lần lượt là $(-\sqrt{5};-2)$ và $(0;2)$ và $(\sqrt{5};+\infty)$.

Đáp án: C

Câu 63. Xét hàm số $g(x)=f(\ln x)-x+2\ln x$.

TXĐ: $D=(0;+\infty)$.

Ta có: $g'(x)=\frac{1}{x}.f'(\ln x)-1+\frac{2}{x}$

$$=\frac{1}{x}\left(e^{\ln x}-2\right)\left(e^{\ln x}+\ln x\right)-\frac{x-2}{x}$$
$$=\frac{1}{x}(x-2)(x+\ln x)-\frac{x-2}{x}$$
$$=\frac{x-2}{x}(x+\ln x-1)$$

Ta có: $g'(x)=0\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x>0 \\ \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ \ln x+x-1=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y=g(x)$.

x	0	1	2	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0 $-$	0 $+$	
$g(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y=g(x)$ ta suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

Hay: $\left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=2 \end{array}\right. \Rightarrow S=a+b=3$.

Khi đó tổng S là một số nguyên lẻ.

Đáp án: B

Note: Sở dĩ ta có: $\ln x+x-1=0\Rightarrow x=1$ là vì:

Hàm số $y=h(x)=\ln x+x-1$ là một hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$. Do $h'(x)=\frac{1}{x}+1>0,\ \forall x>0$.

Vì vậy nếu phương trình $\ln x+x-1=0$ có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Ta nhẩm thấy $x=1$ là một nghiệm của phương trình $\ln x+x-1=0$, nên nó là duy nhất.

Câu 64. Ta có: $f(x)=\int f'(x)dx$

Khi đó: $f(x)=\int\left(4x^3+2x\right)dx=x^4+x^2+C$

Vì $f(0)=1\Rightarrow C=1$.

Do đó ta có: $f(x)=x^4+x^2+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Xét hàm số $y=g(x)=f^3\left(x^2-2x-3\right)$.

$g'(x)=3(2x-2)f^2\left(x^2-2x-3\right)f'\left(x^2-2x-3\right)$

Ta có: $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\ f'\left(x^2-2x-3\right)=0\ (*)\end{array}\right.$

Do $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f^2\left(x^2-2x-3\right)>0$.

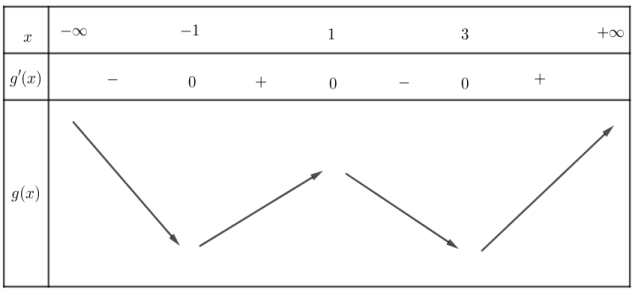
$(*)\Leftrightarrow 4\left(x^2-2x-3\right)^3+2\left(x^2-2x-3\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2-2x-3\right)\left[4\left(x^2-2x-3\right)^2+2\right]=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x-3=0\\ 4\left(x^2-2x-3\right)^2+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=3\end{array}\right.$

Do vậy: $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\\ x=3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y=g(x)$.



Từ bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$.

Đáp án: C

Câu 65. Từ bảng biến thiên của đồ thị hàm số $f'(x)$ ta dễ dàng suy ra dạng tổng quát nó:

$f'(x)=A(x)(x+3)^{2n+1}(x-1)^{2m+1},\ A(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$

Ta có: $g'(x)=f'(x)+3x^2+6x-9$.

$g'(x)=A(x)(x+3)^{2n+1}(x-1)^{2m+1}+3(x+3)(x-1)$

$g'(x)=(x+3)(x-1)\left[A(x)(x+3)^{2n}(x-1)^{2m}+3\right]$

Do $A(x)>0$

$\Rightarrow A(x)(x+3)^{2n}(x-1)^{2m}+3>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Khi đó: $g'(x)=0\Leftrightarrow(x+3)(x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\ x=1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y=g(x)$ ta nhận thấy hàm số đồng biến trên hai khoảng lần lượt là $(-\infty;-3)$ và $(1;+\infty)$.

Đáp án: A

Note: Sở dĩ ta chọn được hàm $f'(x)$ như trên là bởi phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=1\end{array}\right.$.

Mà hai nghiệm $x=-3$ và $x=1$ đều là những nghiệm mà qua nó đạo hàm đổi dấu (Nghiệm bội lẻ). Vì thế ý tưởng đặt hàm số có dạng:

$f'(x)=A(x)(x+3)^{2n+1}(x-1)^{2m+1},\ A(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$

hoàn toàn thỏa mãn do:

$\forall m,n\in\mathbb{Z},\ 2n+1,\ 2m+1$ đều là những số lẻ.

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=t>0$.

Do đó hàm số sẽ có hệ số $a>0$.

Nếu mở rộng thêm thì nếu $f'(x)=0\Rightarrow x=x_i$ và $x=x_i$ là một nghiệm bội chẵn thì qua nó đạo hàm không đổi dấu. Vì thế bảng biến thiên không thay đổi gì nhiều về khoảng đan dấu. Nên tổng quát nhất ta nhân thêm lượng $A(x)$ vào biểu thức $(x+3)^{2n+1}(x-1)^{2m+1}$ với

$A(x)=a(x-x_1)^{2p}(x-x_2)^{2q}...(x-x_n)^{2k}>0$.

Câu 66. Từ bảng biến thiên của đồ thị hàm số $f'(x)$ ta dễ dàng suy ra dạng tổng quát nó:

$f'(x)=A(x)(x+1)^{2n+1}(x-2)^{2m+1},\ A(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$

Ta có: $g'(x)=f'(x)-3x^2+3x+6$.

$g'(x)=A(x)(x+1)^{2n+1}(x-2)^{2m+1}-3(x-2)(x+1)$

$g'(x)=(x+1)(x-2)\left[A(x)(x+1)^{2n}(x-2)^{2m}-3\right]$

Do $A(x)<0$

$\Rightarrow A(x)(x+1)^{2n}(x-2)^{2m}-3<0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Khi đó: $g'(x)=0\Leftrightarrow(x+1)(x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y=g(x)$ ta nhận thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

Đáp án: B

Note: Sở dĩ ta chọn được hàm $f'(x)$ như trên là bởi phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$.

Mà hai nghiệm $x=-1$ và $x=2$ đều là những nghiệm mà qua nó đạo hàm đổi dấu (Nghiệm bội lẻ). Vì thế ý tưởng đặt hàm số có dạng:

$f'(x)=A(x)(x+1)^{2n+1}(x-2)^{2m+1},\ A(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$

hoàn toàn thỏa mãn do:

$\forall m,n\in\mathbb{Z},\ 2n+1,\ 2m+1$ đều là những số lẻ.

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=t<0$.

Do đó hàm số sẽ có hệ số $a<0$.

Nếu mở rộng thêm thì nếu $f'(x)=0\Rightarrow x=x_i$ và $x=x_i$ là một nghiệm bội chẵn thì qua nó đạo hàm không đổi dấu. Vì thế bảng biến thiên không thay đổi gì nhiều về khoảng đan dấu. Nên tổng quát nhất ta nhân thêm lượng $A(x)$ vào biểu thức $(x+1)^{2n+1}(x-2)^{2m+1}$ với

$A(x)=a(x-x_1)^{2p}(x-x_2)^{2q}...(x-x_n)^{2k}<0$.

Câu 67. Đặt $g(x)=f\left(e^{x^2-|x|-2}\right)$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $g(x)$ là một hàm chẵn thì thế $g(x)$ đối xứng nhau qua trục Oy.

Vì thế ta chỉ cần xét trên khoảng $(0;+\infty)$

Ta có: $g(x)=f\left(e^{x^2-|x|-2}\right)=f\left(e^{x^2-x-2}\right),\ \forall x>0$.

Suy ra: $g'(x)=(2x-1).e^{x^2-x-2}.f'\left(e^{x^2-x-2}\right)$

Ta có: $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-1=0\\ f'\left(e^{x^2-x-2}\right)=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-1=0\\ e^{x^2-x-2}=-2\\ e^{x^2-x-2}=0\\ e^{x^2-x-2}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ e^{x^2-x-2}=1\end{array}\right.$ (Do $e^{x^2-x-2}>0$)

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x^2-x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x=-1\ (L)\\ x=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x=2\end{array}\right.$

- **Trường hợp 1:** $x>2$

Khi đó: $x^2-x-2>0$.

Suy ra: $e^{x^2-x-2}>1\Rightarrow f'\left(e^{x^2-x-2}\right)>0$.

- **Trường hợp 2:** $0\le x<2$

Khi đó: $x^2-x-2<0$.

Suy ra: $0<e^{x^2-x-2}<1\Rightarrow f'\left(e^{x^2-x-2}\right)<0$.

Bảng xét dấu $g'(x)$ trên nữa khoảng $[0;+\infty)$.

x	0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x-1$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$f'(e^{x^2-x-2})$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$g'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Do đó bảng biến thiên đồ thị $y=g(x)$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0 $+$	0	$-$	$\|$	$+$ 0 $-$	0 $+$
$g(x)$		↘ ↗		↘ ↗		↘ ↗	

Dựa vào đồ thị hàm số $y=g(x)$ ta nhận thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và $\left(-\frac{1}{2};0\right)$ và $\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Đáp án: D

Note: Hàm số $y=g(x)$ là hàm số chẵn là vì:

$g(-x)=f\left(e^{(-x)^2-|-x|-2}\right)=f\left(e^{x^2-|x|-2}\right)=g(x)$.

Câu 68. Xét hàm số:

$$y=3f\left(-x^4+4x^2-6\right)+2x^6-3x^4-12x^2$$

Ta có: $y'=-12x\left(x^2-2\right).f'\left(-x^4+4x^2-6\right)+$

$...+12x\left(x^4-x^2-2\right)$

$\Leftrightarrow y'=-12x\left(x^2-2\right).f'\left(-x^4+4x^2-6\right)+$
$...+12x\left(x^2-2\right)\left(x^2+1\right).$

$\Leftrightarrow y'=-12x\left(x^2-2\right)\left[f'\left(-x^4+4x^2-6\right)-\left(x^2+1\right)\right]$

Ta có:

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-2=0\\f'\left(-x^4+4x^2-6\right)-\left(x^2+1\right)=0\ (*)\end{array}\right.$$

Xét phương trình $(*)$

Ta có: $-x^4+4x^2-6=\left(-x^4+4x^2-4\right)-2$

$=-\left(x^2-2\right)^2-2\le-2$

Suy ra: $f\left(-x^4+4x^2-6\right)\le f(-2)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Mặt khác: $x^2+1\ge1>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow-\left(x^2+1\right)<0$

Vì vậy $f'\left(-x^4+4x^2-6\right)-\left(x^2+1\right)<0$

Nên phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Vậy $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên ta nhận thấy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\sqrt{2};0\right)$ và $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Đáp án: C

Câu 69. Xét hàm số $y=\log_{2021}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Ta có: $(C_1):y=\log_{2021}\left(\frac{1}{x}\right)=-\log_{2021}x$.

Gọi đồ thị hàm số (C) là đồ thị đối xứng của đồ thị (C_1) qua trục hoành Ox.

$\Rightarrow(C)$ là đồ thị của hàm số $y=\log_{2021}x$.

Nhận thấy (C_2) đối xứng với đồ thị hàm số (C) qua trục tung Oy.

$\Rightarrow(C_2)$ là đồ thị của hàm số $y=\log_{2021}(-x)$ $,\forall x<0$.

Hay ta đặt: $f(x)=\log_{2021}(-x),\forall x<0$.

Do đó: $g(x)=|f(x)|=\left|\log_{2021}(-x)\right|$

$\Leftrightarrow g(x)=\sqrt{\log^2{}_{2021}(-x)}$.

Suy ra:

$$g'(x)=\sqrt{\log^2{}_{2021}(-x)}=\frac{2\log_{2021}(-x).\frac{-1}{-x.\ln2021}}{\sqrt{\log^2{}_{2021}(-x)}}$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{2\log_{2021}(-x)}{x\ln2021.\sqrt{\log^2{}_{2021}(-x)}}=0\Rightarrow x=-1$$

Bảng xét dấu đạo hàm:

x	-1		0
$g'(x)$	$-$	0	$+$ $\quad\vert$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Vì thế hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)$.

Đáp án A

Extra Techniques:

Remark:

Giả sử, ta xét đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)\left(C\right)$ liên tục trên khoảng K. Khi đó:

Đồ thị hàm số $y=-f\left(x\right)$ là đồ thị đối xứng với đồ thị $\left(C\right)$ qua trục hoành (trục Ox) trên khoảng K.

Đồ thị hàm số $y=f\left(-x\right)$ là đồ thị đối xứng với đồ thị $\left(C\right)$ qua trục tung (trục Oy) trên khoảng **đối** của khoảng K.

Đồ thị hàm số $y=-f\left(-x\right)$ là đồ thị đối xứng với đồ thị $\left(C\right)$ qua gốc tọa độ O trên khoảng **đối** của khoảng K.

Câu 70. TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Xét hàm số:

$$y=\frac{1}{5}m^2x^5-\frac{1}{3}mx^3+10x^2-\left(m^2-m-20\right)x+1.$$

Ta có: $y'=m^2x^4-mx^2+20x-m^2+m+20$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì khi đó:

$$y'=m^2x^4-mx^2+20x-m^2+m+20\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$$

Lưu ý: Dấu "=" chỉ đạt tại hữu hạn điểm.

Điều kiện cần:

Phương trình $y'=0$ có hiệu hệ số bậc chẵn và lẻ bằng 0 vì thế $y'=0$ có một nghiệm $x=-1$.

Nên để $y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ thì dấu của đạo hàm phải không đổi khi đi qua điểm $x=-1$.

Dùng lược đồ Hoocner chia đa thức, ta được:

$$y'=\left(x+1\right)\left(m^2x^3-m^2x^2+\left(m^2-m\right)x-m^2+m+20\right)$$

Như vậy: $g\left(-1\right)=0$, với:

$$g\left(x\right)=m^2x^3-m^2x^2+\left(m^2-m\right)x-m^2+m+20.$$

Khi đó:

$$g\left(-1\right)=-4m^2+2m+20=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=\frac{5}{2}\end{array}\right.$$

Điều kiện đủ:

+) Với $m=-2$, ta có: $y'=4x^4+2x^2+20x+14$

$$\Leftrightarrow y'=4\left(x+1\right)^2\left[\left(x-1\right)^2+\frac{5}{2}\right]\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Vì vậy hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nhận $m=-2$.

+) Với $m=\frac{5}{2}$, ta có: $y'=\frac{25}{4}x^4-\frac{5}{2}x^2+20x+\frac{65}{4}$

$$\Leftrightarrow y'=\frac{25}{4}\left(x+1\right)^2\left[\left(x-1\right)^2+\frac{8}{5}\right]\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Vì vậy hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nhận $m=\frac{5}{2}$.

Tích các giá trị thỏa mãn: $S=\left(-2\right).\frac{5}{2}=-5$.

Đáp án C

Câu 71. Ta có:

$$y'=-\left(12x^3-24x\right).f'\left(-x^4+4x^2-6\right)+12x^5-12x^3-24x$$
$$=-12x\left(x^2-2\right).f'\left(-x^4+4x^2-6\right)+12x\left(x^4-x^2-2\right)$$
$$=-12x\left(x^2-2\right).f'\left(-x^4+4x^2-6\right)+12x\left(x^2-2\right)\left(x^2+1\right)$$
$$=-12x\left(x^2-2\right).\left[f'\left(-x^4+4x^2-6\right)-\left(x^2+1\right)\right]$$

$$\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\sqrt{2}\\x=\sqrt{2}\\f'\left(-x^4+4x^2-6\right)=x^2+1\,(*)\end{array}\right.$$

Để giải quyết $(*)$, trước hết ta đánh giá:

$$\begin{cases}-x^4+4x^2-6=-\left(x^2-2\right)^2-2\le -2,\forall x\in\mathbb{R}\\x^2+1\ge 1,\ \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}f'\left(-x^4+4x^2-6\right)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}\\x^2+1\ge 1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Vậy phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

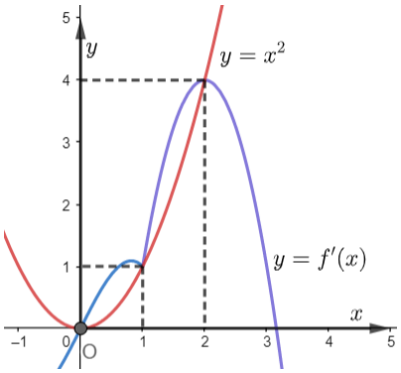
Vậy hàm số đã cho đồng biến trên hai khoảng rời nhau $\left(-\sqrt{2};0\right)$ và $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Đáp án D

Câu 72. Đặt: $g(x)=3f(x)-x^3$, ta có:

$$g'(x)=3\left[f'(x)-x^2\right]=0\Rightarrow f'(x)=x^2.$$

Vẽ đồ thị hàm số $y=x^2$ tương giao với đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên cùng một trục tọa độ.



Suy ra: $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Theo giả thuyết, ta có: $g(0)=3f(0)-0=0$.

Bảng biến thiên mở rộng:

x	$-\infty$		0		1		2		x_0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$\lvert g(x)\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$			$+\infty$

Từ bảng biến thiên mở rộng ta dễ dàng suy ra hàm số đã cho đồng biến trên hai khoảng rời nhau là $(0;2)$ và $\left(x_0;+\infty\right)$, $x_0>2$.

Đáp án C

Câu 73. Xét hàm số $g(x)=f(x)+\frac{1}{3}x^3-2021$.

$$\Rightarrow g'(x)=f'(x)+x^2=x^2(x-1)^2(x-3)+x^2.$$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x^2\left(x^3-5x^2+7x-2\right)=0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu đạo hàm $g'(x)$.

x	$-\infty$	0		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		2		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu đạo hàm $g'(x)$, ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên hai khoảng rời nhau: $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};2\right)$ và $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$.

Đáp án C

Câu 74. Xét hàm số $g(x)=f\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

Ta có: $g'(x)=\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right).f'\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

$$\Leftrightarrow g'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}.f'\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\sqrt{x^2+1}=1 \\ x+\sqrt{x^2+1}=3 \\ x+\sqrt{x^2+1}=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{4}{3} \\ x=\dfrac{12}{5} \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$:

x	$-\infty$	0		$\frac{4}{3}$		$\frac{12}{5}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		

Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y=g(x)$, ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $\left(\dfrac{4}{3};+\infty\right)$.

Đáp án D

Câu 75. Xét: $g(x)=f\left(x^2-2x+1-|x-1|\right)$.

$$\Rightarrow g'(x)=\left[2(x-1)-\frac{x-1}{|x-1|}\right].f'\left[(x-1)^2-|x-1|\right]$$

$$=(x-1)\left(2-\frac{1}{|x-1|}\right).f'\left[(x-1)^2-|x-1|\right],\ x\neq 1$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \dfrac{1}{|x-1|}=2 \\ f'\left(|x-1|^2-|x-1|\right)=0 \end{array}\right.$$

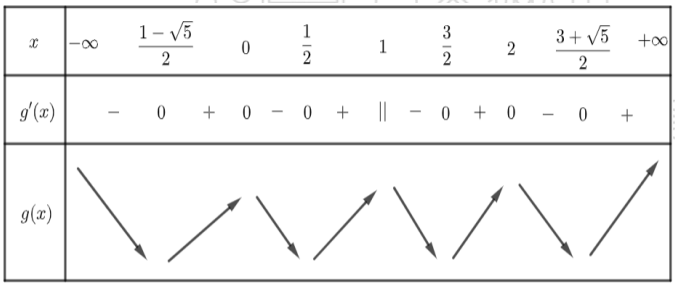
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\ (L) \\ |x-1|=\dfrac{1}{2} \\ |x-1|^2-|x-1|=-1 \\ |x-1|^2-|x-1|=0 \\ |x-1|^2-|x-1|=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ x=\dfrac{1}{2} \\ |x-1|=1 \\ |x-1|=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ x=\dfrac{1}{2} \\ x=2 \\ x=0 \\ x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. .$$

Tính toán tại một số điểm đặc biệt để xét dấu:

$$\begin{cases} g'(-1)=-3f'(2)<0 \\ g'\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{1}{2}.f'\left(-\dfrac{3}{16}\right)>0 \\ g\left(\dfrac{5}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}.f'\left(-\dfrac{3}{16}\right)<0 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên đồ thị hàm số $y=g(x)$.



Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y=g(x)$, ta thấy, hàm số đồng biến trên 4 khoảng rời nhau nhưng chỉ đồng biến trên 3 khoảng hữu hạn là: $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};0\right),\left(\dfrac{1}{2};1\right),\left(\dfrac{3}{2};2\right)$.

Đáp án B

Câu 76. Xét: $2f(2x)+f(1-2x)=12x^2\ (*)$.

Cho $x=0$ và $x=\dfrac{1}{2}$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2f(0)+f(1)=0 \\ f(0)+2f(1)=3 \end{cases}\Rightarrow f(1)=2.$$

Đạo hàm hai vế $(*)$ theo ẩn x, ta được:

$$4f'(2x)-2f'(1-2x)=24x.$$

Một lần nữa, cho $x=0$ và $x=\dfrac{1}{2}$, ta có:

$$\begin{cases} 4f'(0)-2f'(1)=0 \\ 4f'(1)-2f'(0)=12 \end{cases}\Rightarrow f'(1)=4.$$

Như vậy dễ dàng viết được phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $x=1$ là: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$.

Hay: $y=4(x-1)+2\Rightarrow y=4x-2$.

Tiếp tuyến là một đường thẳng có hệ số góc $k=4>0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Đáp án D

Câu 77. Đặt: $x=3t+5\Rightarrow t=\dfrac{x-5}{3}$.

Khi đó: $g(t)=f(3t+5)\Rightarrow g'(t)=3f'(3t+5)$.

Ta có: $g'(t)\le 0\Leftrightarrow f'(3t+5)\le 0\Leftrightarrow t\le 1$.

Do vậy: $f'(x)\le 0\Leftrightarrow \dfrac{x-5}{3}\le 1\Leftrightarrow x\le 8$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;8)$.

Đáp án A

Câu 78. TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

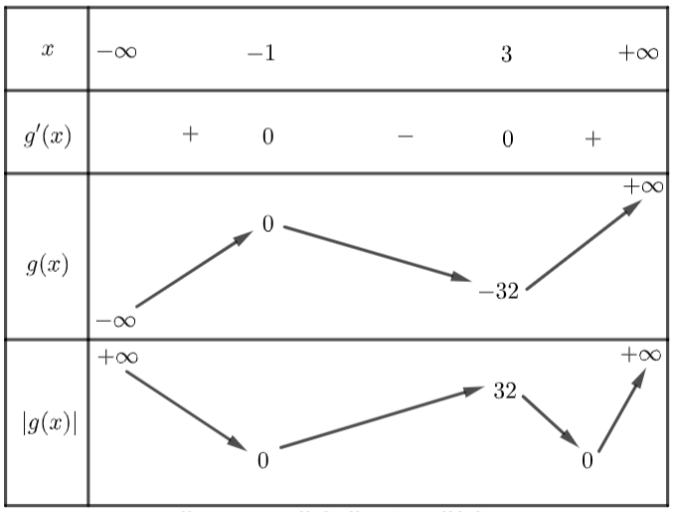
NHÓM TOÁN ANH DÚI

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x^2-9x-5$.

Ta có: $g'(x)=3x^2-6x-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$.

Ta có: $\left\{\begin{array}{l}g(-1)=0\\g(3)=-32\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên mở rộng:



Ta có: $g(5)=0$.

Dựa vào bảng biến thiên mở rộng ta thấy rằng, đồ thị hàm số $y=\left|x^3-3x^2-9x-5\right|$ đồng biến trên 2 khoảng rời nhau $(-1;3)$ và $(5;+\infty)$.

Đáp án B

Câu 79. Từ $(*)$, ta có:

$$\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx+4\int_0^1\left(6x^2-1\right).f(x)dx=$$

$$=\int_0^1\left(40x^6-44x^4+32x^2-4\right)dx=\frac{376}{105}\ (**)$$

Mặt khác: $\int_0^1\left(6x^2-1\right)f(x)dx=\int_0^1 f(x)d\left(2x^3-x\right)$

$$=\left(2x^3-x\right)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\left(2x^3-x\right).f'(x)dx$$

$$\Leftrightarrow\int_0^1\left(6x^2-1\right).f(x)dx=1-\int_0^1\left(2x^3-x\right).f'(x)dx$$

Thay vào $(*)$, ta được:

$$\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx+4\left[1-\int_0^1\left(2x^3-x\right).f'(x)dx\right]=\frac{376}{105}$$

$$\Leftrightarrow\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx-4\int_0^1\left(2x^3-x\right).f'(x)dx+\frac{44}{105}=0$$

$$\Leftrightarrow\int_0^1\left[f'(x)-2\left(2x^3-x\right)\right]^2dx=0$$

$$\left(Do:\int_0^1 4\left(2x^3-x\right)^2dx=\frac{44}{105}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x)=2\left(2x^3-x\right)=4x^3-2x,\forall x\in[0;1]$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ (L).\\x=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu hàm số $y=f'(x)$:

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	$\vert$

Dựa vào bảng xét dấu của hàm số $y=f'(x)$, ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ có độ dài bằng $L=\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-0\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Đáp án C

Câu 80. Tính: $I=\int_0^1 x^3.f\left(x\right)dx$.

Đặt: $\begin{cases}u=f\left(x\right)\\dv=x^3dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'\left(x\right)dx\\v=\dfrac{x^4}{4}\end{cases}$.

Ta có: $I=\dfrac{1}{4}x^4.f\left(x\right)\Big|_0^1-\dfrac{1}{4}\int_0^1 x^4.f'\left(x\right)dx$.

$I=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\int_0^1 x^4.f'\left(x\right)dx\ \ \left(Do:\ f\left(1\right)=1\right)$.

Vì: $\int_0^1 x^3.f\left(x\right)dx=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\int_0^1 x^4.f'\left(x\right)dx$

$\Rightarrow\int_0^1 x^4.f'\left(x\right)dx=-1\Rightarrow 18\int_0^1 x^4.f'\left(x\right)dx=-18\ \left(1\right)$

Ta có: $\int_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2dx=9\ \left(2\right)$.

Lại có: $\int_0^1 x^8dx=\dfrac{x^9}{9}\Big|_0^1=\dfrac{1}{9}\Rightarrow 81\int_0^1 x^8dx=9\ \left(3\right)$.

Cộng vế theo vế ba đẳng thức $\left(1\right),\left(2\right),\left(3\right)$, ta được: $\int_0^1\left(\left[f'\left(x\right)\right]^2+18x^4.f'\left(x\right)+81x^8\right)dx=0$.

$\Leftrightarrow\int_0^1\left[f'\left(x\right)+9x^4\right]^2dx=0\Rightarrow f'\left(x\right)=-9x^4$.

Mà: $f'\left(x\right)=-9x^4\le 0,\ \forall x\in\left[0;1\right]$.

Vậy hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;1\right)$.

Đáp án C

Extra Techniques:

Remark:

Lý do nói hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;1\right)$ mà không phải nghịch biến trên toàn tập $\mathbb{R}$.

Cơ sở: Đề bài chỉ cho hàm số có đạo hàm và liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$. Vì thế ta chỉ có thể xét lận cận trong của đoạn $\left[0;1\right]$. Có thể đồ thị hàm số không có đạo hàm, hoặc hàm số không liên tục tại các khoảng $\left(-\infty;0\right)$ và khoảng $\left(1;+\infty\right)$. Vì thế ta không thể nào gộp chung kết luận hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ mặc dù $f'\left(x\right)=-9x^4\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

NHÓM TOÁN ANH DUI
Never get anywhere unless you try

Dạng 2: Bài toán chứa tham số

Lý thuyết cần nắm:

Tương tự với bài toán không chứa tham số. Ta xét hàm số theo biến x phụ thuộc tham số m xác định trên khoảng K, kí hiệu: $y=f(x,m)$.

(i) Hàm số đồng biến trên $K \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in K$ và dấu "=" chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm.

(ii) Hàm số nghịch biến trên $K \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in K$ và dấu "=" chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm.

Một số Tips để làm tốt các bài toán chứa tham số m

Đối với dạng bài tập cho hàm số $y=f(x)$ là phương trình bậc ba theo x có ẩn m. Khi đó: $y'=f'(x)$ là một hàm số bậc hai có dạng tổng quát như sau:

$$y=ax^2+bx+c,(a\neq 0).$$

Để xét dấu y' ta thường sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai, định lý Viéte,…

(1) Định lý về dấu của tam thức bậc hai:

Cho tam thức bậc hai $g(x)=ax^2+bx+c,(a\neq 0)$.

a. Nếu $\Delta<0$ (hoặc $\Delta'<0$) thì $a.g(x)>0,\forall x\in K$ hay nói cách khác, $g(x)$ cùng dấu với hệ số a.

b. Nếu $\Delta=0$ (hoặc $\Delta'=0$) thì $a.g(x)>0,\forall x\in K\setminus\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$ hay nói cách khác, $g(x)$ cùng dấu với hệ số a (trừ $x=-\frac{b}{2a}$) vì $g\left(-\frac{b}{2a}\right)=0$.

c. Nếu $\Delta>0$ (hoặc $\Delta'>0$) thì hiển nhiên hàm số có

x	$-\infty$		x_1		x_2	$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

Hình I.2.1.

x	$-\infty$		x_1		x_2	$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Hình I.2.2.

hai nghiệm (bội lẻ) thực phân biệt: $g(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \end{array}\right.$ nên qua $x=x_1$ và $x=x_2$ đạo hàm đổi dấu.

- **Trường hợp 1:** $a>0$.

(Xem **Hình I.2.1.**).

- **Trường hợp 2:** $a<0$.

(Xem **Hình I.2.2.**).

Nói cách khác, dấu của $g(x)$ trong khoảng hai nghiệm thì trái dấu với hệ số a và ở ngoài hai khoảng nghiệm thì cùng dấu với hệ số a. (**Trong trái - ngoài cùng**).

Extra Techniques:

Tips:

Cơ sở hình thành các điều kiện:

(1):Phương trình có hai nghiệm phân biệt nên $\Delta>0$ hoặc $\Delta'>0$. Do tổng của hai số âm là một số âm và tích của hai số âm là một số dương.

(2):Phương trình có hai nghiệm phân biệt nên $\Delta>0$ hoặc $\Delta'>0$. Do tổng của hai số dương là một số dương và tích của hai số dương là một số dương.

(2) Định lý về dấu kết hợp định lý Viéte cho tam thức bậc hai:

Đặt: $\begin{cases} S=x_1+x_2 \\ P=x_1.x_2 \end{cases}$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

a. **So sánh nghiệm với hằng số** 0.

(i) Điều kiện để: $x_1<x_2<0$ là: $\begin{cases} \Delta>0 \ (\Delta'>0) \\ S<0 \\ P>0 \end{cases}$ (1).

(ii) Điều kiện để: $0<x_1<x_2$ là: $\begin{cases} \Delta>0 \ (\Delta'>0) \\ S>0 \\ P>0 \end{cases}$ (2).

(iii) Điều kiện để: $x_1<0<x_2$ là: $P<0$ (3).

b. **So sánh nghiệm với hằng số** α,β (Với α,β là các tham số thực cho trước).

(i) Điều kiện để: $x_1<\alpha<x_2$ là: $a.f(\alpha)<0$ (4).

Extra Techniques:

Tips:

Cơ sở hình thành các điều kiện:

(3):Sỡ dĩ chỉ cần một điều kiện $P<0$ là vì khi $P<0\Rightarrow P=\frac{c}{a}<0$ hay $ac<0\Rightarrow -ac>0$. Khi đó: $\Rightarrow \Delta=b^2-4ac>0$. Đã thỏa mãn điều kiện cần và đủ để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt.

$(4),(7),(8),(9)$: $g(x)$ trong khoảng hai nghiệm thì trái dấu với hệ số a và ở ngoài hai khoảng nghiệm thì cùng dấu với hệ số a. Và tích của một số dương với một số âm là một số âm.

(5): Vì $x_2>x_1>\alpha$ nên $x_1+x_2>2x_1>2\alpha\Rightarrow\frac{S}{2}>\alpha$

(6): Vì $x_1<x_2<\alpha$ nên $x_1+x_2<2x_2<2\alpha\Rightarrow\frac{S}{2}<\alpha$

(6): Vì $\alpha<x_1<x_2<\beta$ nên $2x_1<x_1+x_2<2x_2$. Khi đó: $2\alpha<S<2\beta$ $\Rightarrow\alpha<\frac{S}{2}<\beta$.

(ii) Điều kiện để: $\alpha<x_1<x_2$ là: $\begin{cases}\Delta>0\ (\Delta'>0)\\ a.f(\alpha)>0\\ \frac{S}{2}>\alpha\end{cases}$ (5).

(iii) Điều kiện để: $x_1<x_2<\alpha$ là: $\begin{cases}\Delta>0\ (\Delta'>0)\\ a.f(\alpha)>0\\ \frac{S}{2}<\alpha\end{cases}$ (6).

(iv) Điều kiện để: $x_1<\alpha<\beta<x_2$ là: $\begin{cases}a.f(\alpha)<0\\ a.f(\beta)<0\end{cases}$ (7).

(v) Điều kiện để: $x_1<\alpha<x_2<\beta$ là: $\begin{cases}a.f(\alpha)<0\\ a.f(\beta)>0\end{cases}$ (8).

(vi) Điều kiện để: $\left[\begin{array}{l}x_1<\alpha<x_2<\beta\\ \alpha<x_1<\beta<x_2\end{array}\right.$ là: $f(\alpha).f(\beta)<0$ (9).

(vii) Điều kiện để: $\alpha<x_1<x_2<\beta$ là: $\begin{cases}\Delta>0\ (\Delta'>0)\\ a.f(\alpha)>0\\ a.f(\beta)>0\\ \alpha<\frac{S}{2}<\beta\end{cases}$ (10).

Để tiết kiệm thời gian cho một số bài toán ta có thể tính trực tiếp dựa trên hàm số bậc ba: $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$.

Khi đó:

- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases}a>0\\ \Delta'_{f'}=b^2-3ac\le 0\end{cases}$.
- Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases}a<0\\ \Delta'_{f'}=b^2-3ac\le 0\end{cases}$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI

Extra Techniques:

Tips:

Cơ sở hình thành các điều kiện:

Lưu ý: Ở các điều kiện $(5),(6),$ (10) thì dấu của các tích $a.f(\alpha)$, $a.f(\beta)$ đều được xét dấu tương tự với $(4),$ $(7),(8),(9)$. Và vì phương trình có hai nghiệm phân biệt nên $\Delta>0$ hoặc $\Delta'>0$.

Extra Techniques:

Remark:

Ngoài ra ta còn có thể **cô lập tham số** m để việc tính toán trở nên dễ dàng hơn.

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số

$$y=\frac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+(2m+1)x+m-2$$

đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. $1\le m\le 5$.

B. $\left[\begin{array}{l} m\ge 5 \\ m\le 1 \end{array}\right.$.

C. $m=0$.

D. $m\ne 0$.

(Trích đề thi Nhóm toán anh Dúi 2020 - 2021)

Đáp án: C

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Xét hàm số: $y=\frac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+(2m+1)x+m-2$.

Ta có: $y'=x^2-2(m+1)x+2m+1$.

Cách 1: Định lý về dấu.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ thì $\begin{cases} a_{y'}>0 \\ \Delta'_{y'}\le 0 \end{cases}(*)$.

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}1>0\\(m+1)^2-(2m+1)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1>0\\m^2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m=0 \text{ (Do } m^2\ge 0).$$

Vậy với $m=0$ hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+(2m+1)x+m-2$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Cách 2: Cô lập m.

Ta có: $y'=(x^2-2x+1)-2m(x-1)=(x-1)^2-2m(x-1)$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ thì: $y'\ge 0$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never quit anywhere unless you try

Extra Techniques:

Remark:

Không phải lúc nào cô lập tham số m cũng là phương án tối ưu cho bài toán đồng biến nghịch biến trên khoảng K cho trước. Vì thế ngoài việc biết giải một cách máy móc ta còn phải biết sử dụng các phương pháp một cách phù hợp.

Khi đó: $(x-1)^2 \ge 2m(x-1) \Leftrightarrow 2m(x-1) \le (x-1)^2 \ (**)$.

Ta xét các khả năng:

- **Trường hợp 1**: $x=1$. $(**) \Leftrightarrow 0 \le 0$ luôn đúng $\forall m \in \mathbb{R}$ (1).
- **Trường hợp 2**: $x>1 \Leftrightarrow x-1>0$.

Khi đó: $(**) \Leftrightarrow m \le \dfrac{x-1}{2}, \forall x>1 \Rightarrow m \le \min\limits_{(1;+\infty)} \dfrac{x-1}{2} = 0 \Rightarrow m \le 0$ (2).

- **Trường hợp 3**: $x<1 \Leftrightarrow x-1<0$.

Khi đó: $(**) \Leftrightarrow m \ge \dfrac{x-1}{2}, \forall x<1 \Rightarrow m \ge \max\limits_{(-\infty;1)} \dfrac{x-1}{2} = 0 \Rightarrow m \ge 0$ (3).

Từ $(1),(2),(3) \Rightarrow m=0$.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số

$$y=-\frac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+(m+1)x+1$$

nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. $-2 \le m \le -1$.

B. $\left[\begin{array}{l} m \ge -1 \\ m \le -2 \end{array}\right.$.

C. $-2 < m < -1$.

D. $\left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > -1 \end{array}\right.$.

(Trích đề thi Nhóm toán anh Dúi 2020 - 2021)

Đáp án: A

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Xét hàm số: $y=-\dfrac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+(m+1)x+1$.

Ta có: $y'=-x^2-2(m+1)x+(m+1)$.

Cách 1: Định lý về dấu

Extra Techniques:

Remark:

Cơ sở kết luận:

$$\begin{cases}\max\limits_{\left(\frac{1}{2};+\infty\right)}\left[\dfrac{-x^2-2x+1}{2x-1}\right]=-2\\ \min\limits_{\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)}\left[\dfrac{-x^2-2x+1}{2x-1}\right]=-1\end{cases}$$

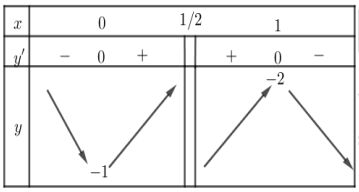
Ta xét hàm số:

$$y=\frac{-x^2-2x+1}{2x-1}$$

Khi đó: $y'=\dfrac{-2x^2+2x}{(2x-1)^2}$

Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta có ngay kết luận bên trên.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ thì $\begin{cases}a_{y'}<0\\ \Delta'\le 0\end{cases}$ $(*)$.

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}-1<0\\ (m+1)^2+m+1\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<0\\ m^2+3m+2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -2\le m\le -1.$$

Cách 2: Cô lập tham số m.

Ta có: $y'=\left(-x^2-2x+1\right)-m(2x-1)$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ thì: $y'\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow\left(-x^2-2x+1\right)-m(2x-1)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m(2x-1)\ge -x^2-2x+1.$$

Ta xét các trường hợp:

- **Trường hợp 1**: $x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 0\ge -\dfrac{1}{4},\forall m\in\mathbb{R}$ (1).
- **Trường hợp 2**: $x>\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow m\ge\max\limits_{\left(\frac{1}{2};+\infty\right)}\left[\dfrac{-x^2-2x+1}{2x-1}\right]=-2$.

Suy ra: $m\ge -2$ (2).

- **Trường hợp 3**: $x<\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow m\le\min\limits_{\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)}\left[\dfrac{-x^2-2x+1}{2x-1}\right]=-1$.

Suy ra: $m\le -1$ (3).

Từ $(1),(2),(3)\Leftrightarrow -2\le m\le -1$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x-\sqrt{x^2-x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. $m>\dfrac{1}{4}$.

B. $m=\dfrac{1}{4}$.

C. $m<\dfrac{1}{4}$.

D. Không có giá trị m thỏa mãn.

Đáp án: D

Lời giải

ĐKXĐ: $x^2-x+m\ge 0\Leftrightarrow \left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+-\left(\frac{1}{4}-m\right)\ge 0$.

Suy ra: $\left(\frac{1}{4}-m\right)\le \min\limits_{(-\infty;+\infty)}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0\Rightarrow m\ge \frac{1}{4}\,(1)$.

$\forall m\ge \frac{1}{4}$, ta có: $y'=1-\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+m}}$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ thì: $y'\le 0$ và dấu "=" đạt tại hữu hạn điểm. Vì thế ta cho $y'\le 0\Leftrightarrow \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+m}}\ge 1$.

Vì $2\sqrt{x^2-x+m}\ge 0$. Nên:

$\Rightarrow 2x-1\ge 2\sqrt{x^2-x+m}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{1}{2} \\ 4x^2-4x+1\ge 4x^2-4x+4m \end{cases}(*)$.

$(*)\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{1}{2} \\ m\le \frac{1}{4} \end{cases}(2)$.

Từ $(1)(2)\Rightarrow \begin{cases} x\ge \frac{1}{2} \\ m=\frac{1}{4} \end{cases}$.

Thử lại, với $m=\frac{1}{4}$, ta có:

$y=x-\sqrt{x^2-x+\frac{1}{4}}=x-\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=x-\left|x-\frac{1}{2}\right|=x-\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

Khi đó: $y'=0,\forall x\in(-\infty;+\infty)$ (Loại).

Vậy không tồn tại giá thực m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Extra Techniques:

Tips:

Cơ sở khẳng định:

$\min\limits_{(0;+\infty)}\left[x^2-2x\right]=-1$.

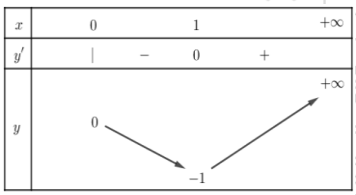
Ta xét hàm số:

$y=x^2-2x,\forall x\in(0;+\infty)$

Ta có:

$y'=2x-2=0\Rightarrow x=1$.

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số, ta dễ dàng kết luận được:

$\min\limits_{(0;+\infty)}\left[x^2-2x\right]=-1$

Câu 4. Tìm m để hàm số $y=-x^3+3x^2+3mx-1$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. $m\le -1$. **B.** $m\ge -1$.

C. $m<-1$. **D.** $m>-1$.

Đáp án: A

Lời giải

Xét hàm số: $y=-x^3+3x^2+3mx-1$.

Ta có: $y'=-3x^2+6x+3m$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ thì $y'\le 0,\forall x\in(0;+\infty)$.

Khi đó: $-3x^2+6x+3m\le 0,\forall x\in(0;+\infty)\Rightarrow m\le x^2-2x,\forall x\in(0;+\infty)$.

Suy ra: $m\le \min\limits_{(0;+\infty)}\left[x^2-2x\right]=-1\Leftrightarrow m\le -1$.

Câu 5. Tìm m để hàm số $y=\dfrac{x-m+2}{x+1}$ giảm trên từng khoảng mà nó xác định?

A. $m\le 1$. **B.** $m<1$.

C. $m\le -3$. **D.** $m<-3$.

Đáp án: B

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{m-1}{(x+1)^2}$.

Để hàm số $y=\dfrac{x-m+2}{x+1}$ nghịch biến (giảm) trên từng khoảng xác định thì $y'<0,\forall x\in(-\infty;-1),(-1;+\infty)\Leftrightarrow \dfrac{m-1}{(x+1)^2}<0$.

Hay: $m-1<0\Rightarrow m<1$.

Câu 6. Với giá trị nào của a thì hàm số $y=ax+x^3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $a\ge 0$. **B.** $a<0$.

C. $a=0$. **D.** Với mọi giá trị thực của tham số a.

Đáp án: A

Lời giải

Xét hàm số $y=ax+x^3$.

Ta có: $y'=a+3x^2$.

Để hàm số $y=ax+x^3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Hay $a+3x^2\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow a\ge -3x^2,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow a\ge \max\limits_{(-\infty;+\infty)}\left[-3x^2\right]=0$.

Suy ra: $a\ge 0$.

Extra Techniques:

Tips:

Cơ sở khẳng định:

$\max\limits_{(-\infty;+\infty)}\left[-3x^2\right]=0$ là vì:

$x^2\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -3x^2\le 0$

Câu 7. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$ với mọi m?

A. $y=-m^2x^3+m$. **B.** $y=-m^2x^3+mx^2-3x+1$.

C. $y=\dfrac{-mx+1}{x+m}$. **D.** $y=x^3-2mx+1$.

Đáp án: B

Lời giải

Xét từng đáp án:

- Đáp án **A** sai vì với $m=0\Rightarrow y=0$. Khi đó hàm số là hàm không đổi trên $\mathbb{R}$.

Loại **A**.

- Đáp án **B** đúng vì ta có:

$$y'=-3m^2x^2+2mx-3=\left(-3m^2x^2+2mx-\frac{1}{3}\right)-\frac{8}{3}=-\left(\sqrt{3}mx-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-\frac{8}{3}$$

Khi đó: $y'\le -\dfrac{8}{3}<0,\forall x,m\in\mathbb{R}$. Nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ với mọi giá trị thực m.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

- Đáp án **C** sai vì hàm số là hàm nhất biến nên hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$.

Loại **C**.

- Đáp án **D** sai vì với $m=0 \Rightarrow y=x^3+1$ là một hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Loại **D**.

Câu 8. Hàm số nào trong các hàm số sau chỉ có một chiều biến thiên trên tập xác định của nó?

A. $y=\dfrac{1}{x}$.

B. $y=\dfrac{1}{x^2}$.

C. $y=\dfrac{1}{|x|}$.

D. $y=\dfrac{x^2}{|x|}$.

Đáp án: A

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Lời giải

Xét từng đáp án:

- Đáp án **A** đúng vì trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$, ta có: $y'=-\dfrac{1}{x^2}<0$. Nên hàm số đã cho luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Chọn **A**.

- Đáp án **B** sai vì trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$, ta có: $y'=\dfrac{-2}{x^3}$. Và dấu của đạo hàm bị đổi khi x đi qua 0. Hay ta có thể kết luận do $y'=\begin{cases}-\dfrac{2}{x^3}<0,\ \forall x>0\\ -\dfrac{2}{x^3}>0,\forall x<0\end{cases}$.

Loại **B**.

- Đáp án **C** sai vì

$$y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0\\ -\dfrac{1}{x}, & x<0\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}-\dfrac{1}{x^2}<0, & x>0\\ \dfrac{1}{x^2}>0, & x<0\end{cases}.$$

Loại **C**.

- Đáp án **D** sai vì:

$$y=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x}=x, & x>0\\ \dfrac{x^2}{-x}=-x, & x<0\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}.$$

Loại **D**.

Câu 9. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{3x-1-2m}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(5;+\infty)$ là?

A. $[1;+\infty)$. **B.** $(1;5]$.

C. $(1;5)$. **D.** $(1;+\infty)$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Đáp án: B

Lời giải

Xét hàm số: $y=\dfrac{3x-1-2m}{x-m}$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{1-m}{(x-m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(5;+\infty)$ thì trước hết, trên khoảng $(5;+\infty)$, hàm số $y=\dfrac{3x-1-2m}{x-m}$ phải liên tục và có $y'<0$ $(*)$.

$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}1-m<0\\ m\le 5\end{cases}\Rightarrow 1<m\le 5$.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=2\sin^3 x-3\sin^2 x+m\sin x$ tăng trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $m>0$.

B. $m<\frac{3}{2}$.

C. $m\geq\frac{3}{2}$.

D. $m>\frac{3}{2}$.

Đáp án: C

Lời giải

Đặt: $t=\sin x$. Vì $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;1)$.

Ta biết rằng $\cos x>0,\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow y=\sin x$ là một hàm đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Vì thế tính đơn điệu của hàm số được giữ không đổi.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Xét hàm số: $y=2t^3-3t^2+mt,\left(t\in(0;1)\right)$.

Ta có: $y'=6t^2-6t+m$

Cách 1: Định lý về dấu.

Để hàm số $y=2t^3-3t^2+mt$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ thì phương trình $y'=0$ hoặc là vô nghiệm hay có nghiệm kép $(\Delta\leq 0)$ hoặc là có hai nghiệm thực phân biệt $(\Delta>0)$ nằm ngoài đoạn $(0;1)$ (có thể nằm về trái, hoặc nằm về phải).

Xét các khả năng:

- Trường hợp 1: Phương trình $y'=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép. Khi đó:

$$\Delta'=9-6m\leq 0\Rightarrow m\geq\frac{3}{2}.$$

- Trường hợp 2: Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm thỏa mãn:

$\left[\begin{array}{l} t_1 < t_2 < 0 < 1 \\ 0 < 1 < t_1 < t_2 \end{array}\right.$

Khi đó ta có: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta' > 0 \\ \dfrac{S}{2} > 1 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m < \dfrac{3}{2} \\ 1 < 0 \\ \dfrac{m}{6} > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m < \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{2} > 1 \\ \dfrac{m}{6} - 1 + 1 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow m = \varnothing.$

Vậy $m \ge \dfrac{3}{2}$.

Cách 2: Cô lập m.

Ta có: $6t^2 - 6t + m \ge 0, \forall t \in (0;1) \Rightarrow m \ge \max\limits_{(0;1)} \left[6t - 6t^2\right] = \dfrac{3}{2}$.

Vậy $m \ge \dfrac{3}{2}$.

Cách 3: Casio

Với $m = \dfrac{3}{2} \Rightarrow y' = 6t^2 - 6t + \dfrac{3}{2} = \left(t\sqrt{6} - \dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 \ge 0, \forall t \in (0;1)$ và dấu "=" chỉ xảy ra tại $t = \dfrac{1}{2} \in (0;1)$. Vì thế hàm số đồng biến trên $(0;1)$.

Loại **B**, **D**.

Với $m = 1 \Rightarrow y' = 6t^2 - 6t + 1 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

Theo định lý Viéte ta có: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 1 > 0 \\ t_1.t_2 = \dfrac{1}{6} > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < t_1 < t_2 < 1$ (Mâu thuẫn).

Extra Techniques:

Tips:

Cơ sở khẳng định: $\max\limits_{(0;1)}\left[6t - 6t^2\right] = \dfrac{3}{2}$ là do:

Hàm số $y = 6t - 6t^2$ trên khoảng $(0;1)$, có:

$y' = 6 - 12t = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}$

và: $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2} = \max\limits_{(0;1)} y. \\ y(1) = 0 \end{cases}$

Extra Techniques:

Remark:

Cơ sở xét $m = \dfrac{3}{2}$ là vì ở cả ba đáp án **B**, **C**, **D** giá trị $\dfrac{3}{2}$ đều thuộc vào các khoảng. Nếu **C** đúng thì **B**, **D** đều sai.

Cơ sở xét $m = 1$ là vì $1 \in (0;+\infty), 1 \notin \left[\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Loại **A**.

Chọn **B**.

Câu 11. Xác định giá trị của tham số m để hàm số

$$y=f(x)=(m+1)x^3-3(m+1)x^2+2mx+4$$

đồng biến trên khoảng có độ dài bằng 1.

A. $m=-9$. **B.** $m=-1$.

C. $\left[\begin{array}{l} m=-9 \\ m=-1 \end{array}\right.$. **D.** Không có giá trị m thỏa mãn.

Đáp án: A

Lời giải

Ta xét các khả năng:

- **Trường hợp 1:** $m=-1$, khi đó: $y=f(x)=-2x+4$ là một đường thẳng có hệ số góc $k=-2<0$. Nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- **Trường hợp 2:** $m>-1$, khi đó:

Nếu $f'(x)=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép thì hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. (Loại)

Nếu $f'(x)=0$ có hai nghiệm thực x_1,x_2 thì hàm số đồng biến trên hai khoảng $(-\infty;x_1)$ và $(x_2;+\infty)$. (Loại)

Như vậy ở **Trường hợp 2** không tồn tại giá trị thực m nào để cho hàm số đồng biến trên khoảng có độ dài bằng 1.

- **Trường hợp 3:** $m<-1$, khi đó:

Nếu $f'(x)=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép thì hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. (Loại)

Nếu $f'(x)=0$ có hai nghiệm thực x_1,x_2 thì hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1;x_2)$.

Như vậy để hàm số đồng biến trên khoảng có độ lớn bằng 1 thì:

$$\begin{cases} m<-1 \\ \Delta'_{f'(x)}>0 \quad (*). \\ |x_1-x_2|=1 \end{cases}$$

Ta có: $f'(x)=3(m+1)x^2-6(m+1)x+2m$.

$\Rightarrow \Delta'_{f'(x)}=9(m+1)^2-6m(m+1)=(m+1)(3m+9)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>-1 \\ m<-3 \end{array}\right.$.

Theo định lý Viéte, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=\dfrac{2m}{3(m+1)} \end{cases}$.

Mà $|x_1-x_2|=1 \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2=1 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=1$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m<-1 \\ \left[\begin{array}{l} m>-1 \\ m<-3 \end{array}\right. \\ 2^2-4.\dfrac{2m}{3(m+1)}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<-3 \\ 2^2-4.\dfrac{2m}{3(m+1)}=1 \end{cases} \Leftrightarrow m=-9.$$

Đáp án A.

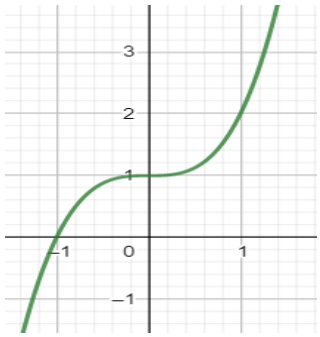
Một số Tips để làm tốt các bài toán chứa tham số m

(1) Xét hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$, $(a\neq 0)$, ta có các nhận xét:

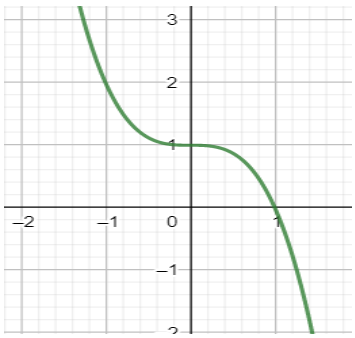
Hàm số có đạo hàm $y'=3ax^2+2bx+c$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

❖ Trường hợp 1: $\begin{cases} a>0 \\ \Delta'\leq 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a>0 \\ b^2\leq 3ac \end{cases}$

Khi đó phương trình $y'=0$ hoặc vô nghiệm, hoặc có nghiệm kép và hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.



Đồ thị I.2.1



Đồ thị I.2.2

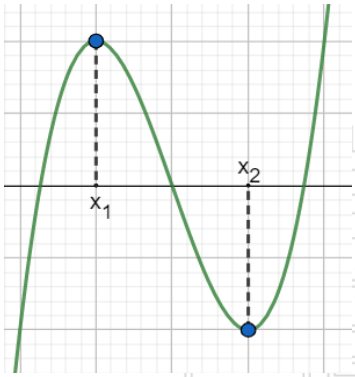
Minh họa hình dạng chung của đồ thị (Xem **Đồ thị I.2.1**).

❖ Trường hợp 2: $\begin{cases} a<0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a<0 \\ b^2 \le 3ac \end{cases}$

Khi đó phương trình $y'=0$ hoặc vô nghiệm, hoặc có nghiệm kép và hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Minh họa hình dạng chung của đồ thị (Xem **Đồ thị I.2.2**).

❖ Trường hợp 3: $\begin{cases} a>0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a>0 \\ b^2 > 3ac \end{cases}$

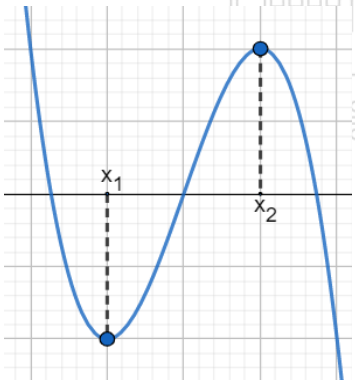


Đồ thị I.2.3

Khi đó phương trình $y'=0$ có hai nghiệm thực phân biệt $x_1<x_2$ và hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ nghịch biến trong khoảng giữa hai nghiệm $(x_1;x_2)$ và đồng biến trên hai khoảng không chứa x_1,x_2 là $(-\infty;x_1)$ và $(x_2;+\infty)$.

Minh họa hình dạng chung của đồ thị (Xem **Đồ thị I.2.3**).

❖ Trường hợp 4: $\begin{cases} a<0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a<0 \\ b^2 > 3ac \end{cases}$



Đồ thị I.2.4

Khi đó phương trình $y'=0$ có hai nghiệm thực phân biệt $x_1<x_2$ và hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ đồng biến trong khoảng giữa hai nghiệm $(x_1;x_2)$ và nghịch biến trên hai khoảng không chứa x_1,x_2 là $(-\infty;x_1)$ và $(x_2;+\infty)$.

Minh họa hình dạng chung của đồ thị (Xem **Đồ thị I.2.4**).

(2) Đối với một số hàm số đặc biệt như $\begin{cases} y=\sqrt{f(x)} \\ y=\tan\left(f(x)\right) \\ y=\cot\left(f(x)\right). \\ y=\dfrac{1}{f(x)} \\ .... \end{cases}$

Trước tiên ta cần phải xác định ĐKXĐ và đối chiếu lại với kết quả

vừa tính được để thu được kết quả chính xác.

(3) Đối với dạng câu hỏi về đồng biến, nghịch biến trên toàn tập $\mathbb{R}$ thì một số hàm phân thức, căn thức, hàm lượng giác có thể loại ngay, điển hình như một số hàm dưới đây:

$$\begin{cases} y=\dfrac{ax+b}{cx+d},\ (a\neq 0) \\ y=ax^4+bx^2+c,\ (a\neq 0) \\ y=ax^2+bx+c,\ (a\neq 0) \\ ..... \end{cases}.$$

(4) Đối với dạng toán tìm m để hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ đồng biến, nghịch biến trên một khoảng, đoạn $(\alpha;\beta)$ cho trước.

Nếu dấu của đạo hàm phụ thuộc vào dấu của tam thức bậc hai $y'=3ax^2+2bx+c$ thì ta phải chia thành hai trường hợp để xét.

❖ Trường hợp 1: $\Delta\le 0$ $(*)$.

Nếu $a>0$, hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên sẽ đồng biến trên khoảng $(\alpha;\beta)$. Nếu yêu cầu đề bài buộc hàm số đồng biến trên khoảng $(\alpha;\beta)$ thì ta nhận toàn bộ giá trị m giải được từ $(*)$, ngược lại ta sẽ loại trường hợp 1.

Nếu $a<0$, hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên sẽ nghịch biến trên khoảng $(\alpha;\beta)$. Nếu yêu cầu đề bài buộc hàm số nghịch biến trên khoảng $(\alpha;\beta)$ thì ta nhận toàn bộ giá trị m giải được từ $(*)$, ngược lại ta sẽ loại trường hợp 1.

❖ Trường hợp 2: $\Delta>0$ $(**)$.

Ta sẽ lập bảng biến thiên để tham chiếu và xác định khoảng biến thiên theo yêu cầu đề bài. Bên cạnh kết hợp sử dụng **định lý về dấu** và **định lý Viéte** như đã trình bài ở phần mở đầu để giải quyết bài toán.

(5) Đối với dạng toán có hệ số của bậc cao nhất thay đổi theo tham số m: $y=g(m)x^n+h(m)x^{n-1}+....+p(m)x+q(m)$.

Khi đó: $y' = n.g(m).x^{n-1} + (n-1).h(m).x^{n-2} + ... + p(m)$.

Ta xét hai trường hợp:

❖ Trường hợp 1: $g(m) = 0$.

❖ Trường hợp 2: $g(m) \neq 0$.

(6) Xét hàm số: $y = a\left[f(x)\right]^n + b\left[f(x)\right]^{n-1} + ... + cf(x) + d$.

Đối với một số bài toán tìm m để hàm số đồng biến, nghịch biến trên khoảng K phức tạp, hàm lồng hàm, để giải quyết bài toán một cách gọn gàng hơn, người ta thường dùng phương pháp đặt ẩn phụ.

Đặt: $t = f(x)$.

Khi đó hàm số đã cho trở thành: $y = at^n + bt^{n-1} + ... + ct + d$.

Tuy nhiên một số lỗi sai HS thường hay mắc phải là:

- Quên tìm tập giá trị của t.
- **Quên xét tính đơn điệu của hàm số $f(x)$ trên khoảng K.**
- Kết luận theo tập giá trị của x.

Tuy nhiên lỗi sai thứ hai là thường thấy nhất. Ta rút ra lưu ý như sau:

Xét hàm số $y = a\left[f(x)\right]^n + b\left[f(x)\right]^{n-1} + ... + cf(x) + d$ trên K_1. Đặt $t = f(x), t \in K_2$, trong đó K_2 là khoảng, nữa khoảng, hoặc đoạn được tính chặt chẽ theo $f(x)$ trên K_1.

Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K_1$ và dấu "=" xảy ra tại hữu hạn điểm (Hàm số đồng biến trên K_1) thì tính đơn điệu của hàm không đổi (**Đồng** $\rightarrow$ **Đồng**, **Nghịch** $\rightarrow$ **Nghịch**) sau khi đặt ẩn phụ.

Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in K_1$ và dấu "=" xảy ra tại hữu hạn điểm (Hàm số nghịch biến trên K_1) thì tính đơn điệu của hàm bị thay đổi (**Đồng** $\rightarrow$ **Nghịch**, **Nghịch** $\rightarrow$ **Đồng**) sau khi đặt ẩn phụ.

Nếu $f'(x)$ đan dấu trên K_1 thì ta xét từng trường hợp rồi áp dụng phương pháp ở trên. Thông thường dạng này ta sẽ dùng **cô lập** m.

(7) Đối với dạng toán hàm phân thức có mẫu số chứa m. Ta cần lưu ý một số điều sau:

Muốn hàm số đơn điệu trên khoảng K thì trước hết hàm số phải liên tục trên khoảng K.

Đối với hàm nhất biến $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, có: $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Nếu hàm số đồng biến thì $ad-bc>0$, nghịch biến thì $ad-bc<0$.

Tuy nhiên đối với hàm phân thức bậc hai trên bậc hai:

$y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$, có: $y'=\dfrac{(ae-bd)x^2+2(af-cd)x+bf-ce}{(dx^2+ex+f)^2}$

Nếu hàm số đồng biến thì $(ae-bd)x^2+2(af-cd)x+bf-ce\ge 0$

nghịch biến thì $(ae-bd)x^2+2(af-cd)x+bf-ce\le 0$.

(8) Đối với dạng toán tìm m để hàm số đồng biến, nghịch biến trên khoảng có độ lớn bằng k.

Ta thường sử dụng **định lý Viéte** kết hợp hằng đẳng thức để giải quyết một cách nhanh chóng.

Định lý Viéte mở rộng:

Cho phương trình:

$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0,(a_n\ne 0)$ $(*)$ có $x_1,x_2,...,x_n$ là n nghiệm của phương trình $(*)$. Khi đó:

$$\begin{cases} x_1+x_2+...+x_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2+x_2x_3+...+x_nx_1=\dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ ..... \\ x_1x_2x_3...x_n=(-1)^n.\dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}.$$

Extra Techniques:

Tips:

Định lý Viéte đối với phương trình bậc hai:

Nếu x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình:

$ax^2+bx+c=0,(a\ne 0)$

thì: $\begin{cases} x_1+x_2=S=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2=P=\dfrac{c}{a} \end{cases}$.

Extra Techniques:

Remarks:

Hàm số bậc ba đơn điệu (Hoặc đồng biến, hoặc nghịch biến) trên khoảng có độ dài k khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm thực phân biệt thỏa mãn: $S^2-4P=k^2$.

"Trên đây là một số Tips chúng tôi cảm thấy rất hữu dụng trong các bài toán hiện hành. Do mục đích phục vụ cho phần đông các bạn học sinh nên phần trình bày khá chi tiết và khá dài. Nhưng nếu bạn đọc hiểu bản chất vấn đề, thao tác sẽ ngắn gọn hơn, chuẩn xác hơn và quan trọng nhất vẫn là lợi thế về thời gian nếu biết các Tips này.

Một số đẳng thức cần lưu ý:

$\circ\ x_1^2+x_2^2=\left(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2\right)-2x_1x_2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=S^2-2P$

$\circ\ x_1^3+x_1^3=\left(x_1+x_2\right)\left(x_1^2-x_1x_2+x_2^2\right)=\left(x_1+x_2\right)\left[\left(x_1+x_2\right)^2-3x_1x_2\right]$

$=\left(x_1+x_2\right)^3-3x_1x_2\left(x_1+x_2\right)=S^3-3SP$

$\circ\ x_1^4+x_2^4=\left(x_1^2\right)^2+\left(x_2^2\right)^2=\left(x_1^2+x_2^2\right)^2-2x_1^2x_2^2$

$=\left[\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right]^2-2\left(x_1x_2\right)^2=\left(S^2-2P\right)^2-2P^2$

$\circ\ \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{S}{P}$

$\circ\ x_2-x_1=\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\sqrt{S^2-4P},\ \left(x_2>x_1\right)$

(9) Bài toán tịnh tiến đồ thị:

Giả sử hàm số: $y=f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng K.

Khi đó hàm số $y=f(x)+g(m)$ với $g(m)$ là một hàm theo tham số m, cũng đồng biến (nghịch biến) trên khoảng K.

Giả sử hàm số: $y=f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên $(a;b)$.

(i) Hàm số $y=f(x+m),\ m>0$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a-m;b-m)$.

(ii) Hàm số $y=f(x-m),m>0$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a+m,b+m)$.

Giả sử hàm số: $y=f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên $(a;b)$.

(i) Hàm số $y=f(mx+n),\ m>0$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $\left(\dfrac{a-n}{m};\dfrac{b-n}{m}\right)$.

(ii) Hàm số $y=f(mx+n),\ m<0$ nghịch biến (đồng biến) trên khoảng $\left(\dfrac{b-n}{m};\dfrac{a-n}{m}\right)$.

TỰ LUYỆN 4 MỨC ĐỘ

Câu 1. [Nhận biết].

Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+(m-2)x^2+(5m-4)x-\frac{2}{3}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $\left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>8 \end{array}\right.$. **B.** $1<m<8$.

C. $\left[\begin{array}{l} m\le 1 \\ m\ge 8 \end{array}\right.$. **D.** $1\le m\le 8$.

Câu 2. [Nhận biết].

Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+(m+1)x^2-(m+1)x+2$ đồng biến trên tập xác định của nó khi

A. $m>4$. **B.** $-2\le m\le -1$.

C. $m<2$. **D.** $m<4$.

Câu 3. [Thông hiểu].

Trong tất cả các giá trị thực của tham số m làm cho hàm số $f(x)=x^3-3mx^2+(m+2)x-m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, giá trị lớn nhất là?

A. 0. **B.** 1.

C. 2. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Câu 4. [Thông hiểu].

Trong tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2-mx-m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, giá trị nhỏ nhất của m là?

A. -4. **B.** -1.

C. 0. **D.** 1.

Câu 5. [Nhận biết].

Cho hàm số $y=-x^3-mx^2+(4m+9)x+5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$?

A. 7. **B.** 4.

C. 6. **D.** 5.

Câu 6. [Thông hiểu].

Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là?

A. $m\in(-\infty;1]$. **B.** $m\in(1;+\infty)$.

C. $m\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **D.** $m=1$.

Câu 7. [Vận dụng].

Điều kiện của tham số m để hàm số $f(x)=2x^3+3x^2+6mx-1$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ là?

A. $m\le -6$. **B.** $m<-6$.

C. $m\ge\frac{1}{4}$. **D.** $-6\le m\le\frac{1}{4}$.

Câu 8. [Vận dụng].

Tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x)=x^3-3mx^2+3(2m-1)x$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$ là?

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

A. $m<\frac{3}{2}$. **B.** $m>\frac{3}{2}$.

C. $m\le\frac{3}{2}$. **D.** $m\le\frac{3}{2};m\ne1$.

Câu 9. [Vận dụng].

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^4+(2-m)x^2+4-2m$ nghịch biến trên đoạn $[-1;0]$.

A. $m\ge4$. **B.** $m>4$.

C. $m\le2$. **D.** $m<2$.

Câu 10. [Nhận biết].

Điều kiện cần và đủ để hàm số $y=\frac{mx+5}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định là?

A. $m>-5$. **B.** $m\ge-5$.

C. $m\ge5$. **D.** $m>5$.

Câu 11. [Nhận biết].

Cho hàm số $y=\frac{mx+2-2m}{x+m}$. Tìm m để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định?

A. $-3\le m\le1$. **B.** $-3<m<1$.

C. $\begin{cases}m\ne1\\m\ne-3\end{cases}$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m>-1+\sqrt{3}\\m<-1-\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Câu 12. [Thông hiểu].

Tìm m để hàm số $y=\frac{x+2-2m}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-1;2)$?

A. $m>\frac{2}{3}$. **B.** $m\ge1$.

C. $-2<m<\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}<m<1$.

Câu 13. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=\frac{mx+2m-3}{x-m}$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

A. $m>\frac{2}{3}$. **B.** $m\ge1$.

C. $-2<m<\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}<m<1$.

Câu 14. [Vận dụng].

Giá trị của m để hàm số $y=x^3+3x^2+mx+m$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 2 là?

A. $m=2$. **B.** $m=4$.

C. $m=-1$. **D.** $m=0$.

Câu 15. [Vận dụng].

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+2x^2-mx-10$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1?

A. $m=2$. **B.** $m=-4$.

C. $m=-\frac{15}{4}$. **D.** $m=\frac{15}{4}$.

Câu 16. [Vận dụng].

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never quit anywhere unless you try

Tìm m để hàm số $y=-\frac{2}{3}x^3+(m+1)x^2+2mx+5$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

A. $m\ge -\frac{2}{3}$. **B.** $m\ge 0$.

C. $m<-\frac{2}{3}$. **D.** $m<0$.

Câu 17. [Vận dụng].

Tìm m để hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+mx^2+(m-2)x-\frac{1}{3}$ đồng biến trên đoạn có độ dài bằng 4.

A. $m=2$. **B.** $m=-2$.

C. $m=-3$. **D.** Cả **A** và **C** đều đúng.

Câu 18. [Thông hiểu].

Tìm m để hàm số $y=x^3-6x^2+mx+1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. $m\ge 0$. **B.** $m\ge 12$.

C. $m\le 0$. **D.** $m\le 12$.

Câu 19. [Nhận biết].

Tìm m để hàm số $y=\frac{x-m+2}{x+1}$ giảm trên các khoảng mà nó xác định?

A. $m\le 1$. **B.** $m<1$.

C. $m\le -3$. **D.** $m<-3$.

Câu 20. [Nhận biết].

Tìm m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+4$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $-2\le m\le 0$. **B.** $-2<m<0$.

C. $m>-2$. **D.** $m=0$.

Câu 21. [Thông hiểu].

Tìm m để hàm số $y=\frac{mx+4}{x+m}$ giảm trên khoảng $(-\infty;1)$?

A. $-2\le m<-1$. **B.** $-2<m<-1$.

C. $-2\le m\le -1$. **D.** $-2<m\le -1$.

Câu 22. [Nhận biết].

Tìm giá trị nhỏ nhất của m để hàm số $y=\frac{x^3}{3}+mx^2-mx-m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m=0$. **B.** $m=-4$.

C. $m=4$. **D.** $m=-1$.

Câu 23. [Nhận biết].

Hàm số $y=-\frac{x^3}{3}+(m-2)x^2-mx+3m$ nghịch biến trên khoảng xác định khi:

A. $m=0$. **B.** $m=-4$.

C. $m=4$. **D.** $m=-1$.

Câu 24. [Nhận biết].

Hàm số $y=\frac{x^3}{3}+mx^2+4x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi?

A. $-2\le m\le 2$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=2 \end{array}\right.$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

C. $m \le -2$. **D.** $m \ge 2$.

Câu 25. [Nhận biết].

Hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + mx^2 - 4x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi?

A. $-2 \le m \le 2$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 2 \end{array}\right.$.

C. $m \le -2$. **D.** $m \ge 2$.

Câu 26. [Nhận biết].

Tìm m để hàm số $y = (2m+1)\sin x + (3-m)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $-4 \le m \le \frac{2}{3}$. **B.** $-4 < m < \frac{2}{3}$.

C. $m < -4$. **D.** $m > \frac{2}{3}$.

Câu 27. [Vận dụng].

Với giá trị nào của tham số thực m thì hàm số $y = 2m + 1 + x + m\cos x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m > 1$. **B.** $m < -1$.

C. $-1 \le m \le 1$. **D.** $\forall m \in \mathbb{R}$.

Câu 28. [Thông hiểu].

Tìm m để hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 4mx - 2$ nghịch biến trên nữa khoảng $(-\infty; 0]$.

A. $m \le -\frac{3}{4}$. **B.** $m \ge -\frac{3}{4}$.

C. $m \ge \frac{3}{4}$. **D.** $m \le \frac{3}{4}$.

Câu 29. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y = -x^3 + (m+1)x^2 - (m^2+2)x + m$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $(-2; 4)$.

B. Hàm số có cả khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến.

C. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số nghịch biến trên $(-m; m^2+1)$.

Câu 30. [Nhận biết].

Với giá trị nào của tham số m để hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - mx + 2$ nghịch biến trên tập xác định?

A. $m \le 4$. **B.** $m \ge 4$.

C. $m > 4$. **D.** $m < 4$.

Câu 31. [Nhận biết].

Với điều kiện nào của m thì hàm số $y = x^3 + (m-2)x^2 + (m^2-4)x + 9$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $\left[\begin{array}{l} m \ge 1 \\ m \le -2 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m \ge 2 \\ m \le -4 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} m \ge 0 \\ m \le -1 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m \ge 3 \\ m \le -3 \end{array}\right.$.

Câu 32. [Nhận biết].

Với giá trị nào của tham số thực m để hàm số $y = \frac{(m-2)x + m}{x + m}$ đồng biến trên mỗi khoảng

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

xác định của nó?

A. $\left[\begin{array}{l} m \ge 2 \\ m \le 0 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m \ge 3 \\ m \le 0 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < 0 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < 0 \end{array}\right.$.

Câu 33. [Thông hiểu].

Với giá trị nào của tham số thực m thì hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ đồng biến trên $(0;+\infty)$?

A. $m \le -2$. **B.** $m \le -3$.

C. $m \le 0$. **D.** $m \le -4$.

Câu 34. [Nhận biết].

Tất cả các giá trị của số thực m để hàm số $f(x) = \dfrac{x-m}{x-1}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó là?

A. $m \le 1$. **B.** $m > 1$.

C. $m < 1$. **D.** $m \ge 1$.

Câu 35. [Nhận biết].

Tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + mx^2 + 4x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là?

A. $-2 < m < 2$. **B.** $-2 \le m \le 2$.

C. $m \le -2$. **D.** $m \ge 2$.

Câu 36. [Nhận biết].

Hàm số $y = \dfrac{(m+1)x + 2m + 2}{x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$ khi

A. $m < 1$. **B.** $m > 2$.

C. $1 \le m < 2$. **D.** $-1 < m < 2$.

Câu 37. [Thông hiểu].

Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{m}{2}x^2 - 2x + 1$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. $-1 \le m \le 1$. **B.** $m \le -1$.

C. $m \ge 1$. **D.** $m \le -2$.

Câu 38. [Nhận biết].

Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = \dfrac{-x^3}{3} + (2m+1)x^2 - mx - 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $\dfrac{1}{4} \le m \le 1$. **B.** $-1 \le m \le -\dfrac{1}{4}$.

C. $m = \varnothing$. **D.** $m \ge 1$.

Câu 39. [Vận dụng].

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{e^x - m - 2}{e^x - m^2}$ đồng biến trên khoảng $\left(\ln\dfrac{1}{4};0\right)$.

A. $m \in [-1;2]$. **B.** $m \in \left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$.

C. $m \in (1;2)$. **D.** $m \in \left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right] \cup [1;2)$.

Câu 40. [Nhận biết].

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never give up unless you try

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

A. $m<-3$. **B.** $m\le -3$.

C. $m\le 3$. **D.** $m>-3$.

Câu 41. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=\dfrac{(m-1)\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(17;37)$.

A. $-4\le m<-1$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m\le -6 \\ -4\le m<-1 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m\le -4 \end{array}\right.$. **D.** $-1<m<2$.

Câu 42. [Thông hiểu].

Xác định các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2-m$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$?

A. $m\ge \dfrac{1}{2}$. **B.** $m<\dfrac{1}{2}$.

C. $m\le 0$. **D.** $m\ge 0$.

Câu 43. [Nhận biết].

Để hàm số $y=x^3-3m^2x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì:

A. $m\le 0$. **B.** $m=0$.

C. $m\ge 0$. **D.** $m<0$.

Câu 44. [Nhận biết].

Cho hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3+mx^2+(3m+2)x+1$.

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $\left[\begin{array}{l} m\ge 2 \\ m\le -1 \end{array}\right.$. **B.** $m\le 2$.

C. $-2\le m\le -1$. **D.** $-1\le m\le 0$.

Câu 45. [Nhận biết].

Cho hàm số $y=\dfrac{(m+1)x-2}{x-m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

A. $-2<m<1$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m\ge 1 \\ m\le -2 \end{array}\right.$.

C. $-2\le m\le 1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-2 \end{array}\right.$.

Câu 46. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=x^3+3x^2-mx-4$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

A. $m\le 1$. **B.** $m>3$.

C. $m\le -3$. **D.** $m\le 3$.

Câu 47. [Vận dụng].

Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y=\sin x-\cos x+2021\sqrt{2}mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m\ge 2021$. **B.** $m>0$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

C. $m \ge \dfrac{1}{2021}$. **D.** $m \ge -\dfrac{1}{2017}$.

Câu 48. [Thông hiểu].

Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{2\sin x - 1}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m < -1$. **B.** $m \ge 1$.

C. $m \le 0$. **D.** $m > -1$.

Câu 49. [Thông hiểu].

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{\sin x + m}{\sin x - m}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$.

A. $\left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 1 \end{array}\right.$. **B.** $m < 0$.

C. $0 < m \le 1$. **D.** $m \ge 1$.

Câu 50. [Thông hiểu].

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số: $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+3)x - 10$ đồng biến trong khoảng $(0;3)$?

A. $m \ge \dfrac{12}{7}$. **B.** $m < \dfrac{12}{7}$.

C. $m \in \mathbb{R}$. **D.** $m > \dfrac{7}{12}$.

Câu 51. [Thông hiểu].

Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = mx^3 + mx^2 + m(m-1)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m \le \dfrac{4}{3}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m \le \dfrac{4}{3} \\ m \ne 0 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m \ge \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$. **D.** $m \ge \dfrac{4}{3}$.

Câu 52. [Thông hiểu].

Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = (m-1)x^3 - 3(m-1)x^2 + 3(2m-3)x + m$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là?

A. $m \le 1$. **B.** $m < 1$.

C. $m \ge -1$. **D.** $m = 1$.

Câu 53. [Nhận biết].

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (2m-3)x - \dfrac{2}{3}$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

A. $m > 2$. **B.** $m \le 2$.

C. $m < 1$. **D.** $m \ge 1$.

Câu 54. [Nhận biết].

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{mx^2}{2} + 2x + 2021$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $-2\sqrt{2} \le m \le 2\sqrt{2}$. **B.** $m \le 2\sqrt{2}$.

C. $m \ge -2\sqrt{2}$. **D.** $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$.

Câu 55. [Nhận biết].

Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số

NHÓM TOÁN ANH DÚI

m để hàm số: $y=x^3-(m+1)x^2+3x+1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $[-4;2]$. **B.** $(-\infty;-4)\cup(2;+\infty)$.

C. $(-4;2)$. **D.** $(-\infty;-4]\cup[2;+\infty)$.

Câu 56. [Vận dụng].

Tìm m để hàm số $y=-x^3+x^2-(2-m)x+1$ tăng trên đoạn có độ dài bằng 2.

A. $m=-\dfrac{11}{3}$. **B.** $m=\dfrac{7}{3}$.

C. $m=\dfrac{5}{3}$. **D.** $m=\dfrac{14}{3}$.

Câu 57. [Vận dụng].

Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3+3mx^2+3(m+1)x+2$ nghịch biến trên đoạn có độ dài lớn hơn 4 là?

A. $m=\{-1;2\}$.

B. $m\in\left(\dfrac{1-\sqrt{21}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

C. $m\in\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$.

D. $m\in\left(-\infty;\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1+\sqrt{21}}{2};+\infty\right)$.

Câu 58. [Thông hiểu].

Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+4}{x+m}$ luôn nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ là?

A. $m\in\{-2;-1\}$. **B.** $m\in[-2;2]$.

C. $m\in(-2;-1]$. **D.** $m\in(-2;-1)$.

Câu 59. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=\dfrac{m}{3}x^3-mx^2+3x+1$ (m là tham số thực). Tìm giá trị nhỏ nhất của m để hàm số trên luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m=1$. **B.** $m=0$.

C. $m=-2$. **D.** $m=3$.

Câu 60. [Vận dụng].

Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=m\sin x+7x-5m+3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-7\le m\le 7$. **B.** $m\le -1$.

C. $m\le -7$. **D.** $m\ge 7$.

Câu 61. [Nhận biết].

Hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3+(m-1)x^2+(2m-5)x-\dfrac{2}{3}$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì điều kiện của m là?

A. $m\le -2$. **B.** $-2\le m\le 2$.

C. $m\ge 2$. **D.** $-2<m<2$.

Câu 62. [Thông hiểu].

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. $-2\le m<1$. **B.** $m=-2$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI Never get anywhere unless you try

C. $m \ge 2$. **D.** $m \le -2$.

Câu 63. [Vận dụng].

Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx + (m+1)\sqrt{x-2} + 1$ nghịch biến trên nữa khoảng $[2;+\infty)$.

A. $m \ge 0$. **B.** $m \le -1$.

C. $m < -1$. **D.** $-2 \le m \le 1$.

Câu 64. [Nhận biết].

Tìm m để hàm số $y = \dfrac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên các khoảng xác định của nó.

A. $1 < m < 2$. **B.** $1 \le m \le 2$.

C. $\left[\begin{array}{l} m \ge 2 \\ m \le 1 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < 1 \end{array}\right.$.

Câu 65. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y = \dfrac{mx-3}{x+m-4}$. Tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định của nó là?

A. $m = 3$. **B.** $m = 1$.

C. $1 < m < 3$. **D.** $1 \le m \le 3$.

Câu 66. [Nhận biết].

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx^3 + mx^2 + m(m-1)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m \le \dfrac{4}{3}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m \le \dfrac{4}{3} \\ m \ne 0 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m \ge \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$. **D.** $m \ge \dfrac{4}{3}$.

Câu 67. [Vận dụng].

Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \dfrac{3^{-x}-3}{3^{-x}-m}$ nghịch biến trên $(-1;1)$.

A. $m < \dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{3} < m < 3$.

C. $m \le \dfrac{1}{3}$. **D.** $m > 3$.

Câu 68. [Vận dụng].

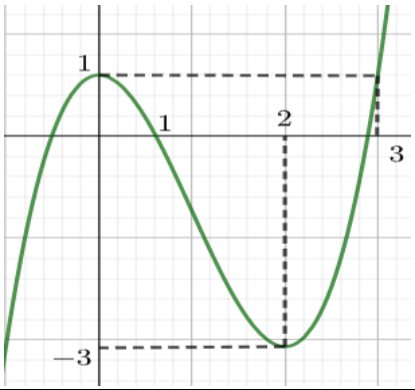
Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{m-2\sin x}{1+\cos^2 x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$.

A. $m \ge 1$. **B.** $m \le 0$.

C. $m \le \dfrac{9}{2}$. **D.** $3 < m \le 5$.

Câu 69. [Vận dụng].

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never stop when you try

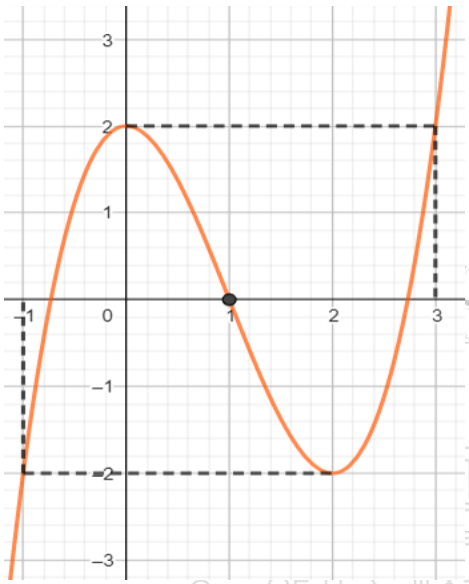
Tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f(x)+(m-1)x$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$ là?

A. $m>4$. **B.** $m\le 4$.

C. $m\ge 4$. **D.** $0<m<4$.

Câu 70. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Đặt: $g(x)=f(x-m)-\frac{1}{2}(x-m-1)^2+2021$ với m là tham số thực. Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$.

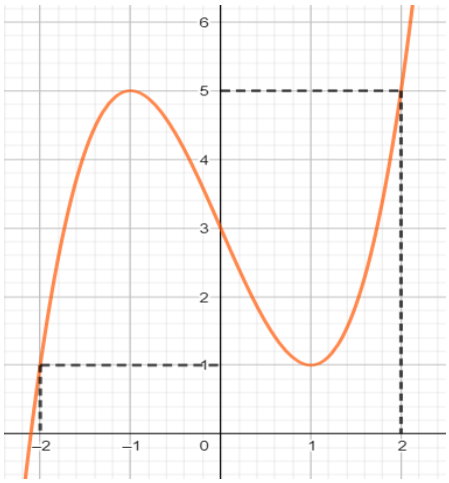
Tổng các phần tử của S bằng?

A. 4. **B.** 11.

C. 14. **D.** 20.

Câu 71. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Xét hàm số

$$g(x)=f(x)-\frac{1}{2}(x^2+m^2)-3(x+m).$$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Với mọi giá trị thực của m, hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$, đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

B. Có duy nhất một giá trị của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$, đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

C. Với mọi giá trị thực của m, hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

D. Có duy nhất một giá trị của m để hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

Câu 72. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	-2		1		2		4	$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (0;2021)$ để hàm số $g(x) = f\left(x^2 - x + m\right)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$?

A. 2016. **B.** 2021.

C. 2017. **D.** 2020.

Câu 73. [Vận dụng].

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f'(x) = (x-1)^2\left(x^2 - 2x\right), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m thỏa mãn $m < 2021$ và $g(x) = f\left(x^2 - 8x + m\right)$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$?

A. 2003. **B.** 2002.

C. 2004. **D.** 2021.

Câu 74. [Vận dụng].

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x+m)$ đồng biến trên $(0;2)$?

A. 3. **B.** 4.

C. 2. **D.** 1.

Câu 75. [Vận dụng].

Cho hàm số $y = f(x)$ là một hàm đa thức và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ:

x	$-\infty$		1		3	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f\left(\sqrt{x-2} + m\right)$ nghịch biến trên khoảng $(11;27)$?

A. 1. **B.** 0.

C. 2. **D.** 3.

Câu 76. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-1) = 2$. Biết $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x		-1		1		3	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$		0	↗	3	↘	0	↗

Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-2021;2021]$ để hàm số $y = \ln\left(f(x) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x + m\right)$ đồng biến trên $(-1;3)$?

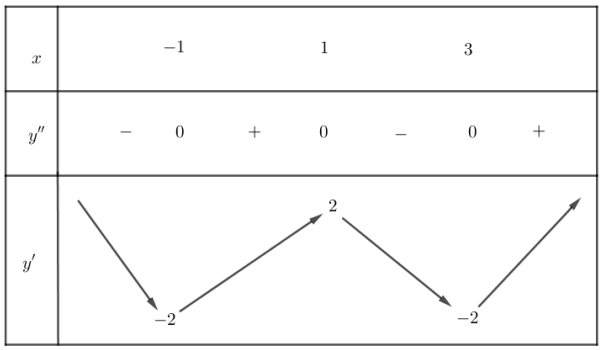
A. 2011. **B.** 2022.

C. 4042. **D.** 4043.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Câu 77. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x+2)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $y=f'(x+2)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.



Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in[-2021;2021]$ để hàm số

$$y=f(x)-\frac{1}{12}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-(2m-1)x+m$$

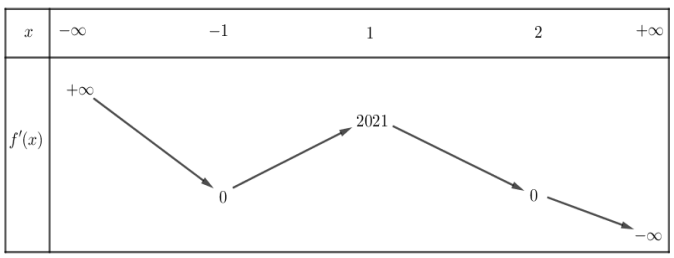
đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

A. 2023. **B.** 2022.

C. 4043. **D.** 4042.

Câu 78. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(-1)=0$. Biết bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây?



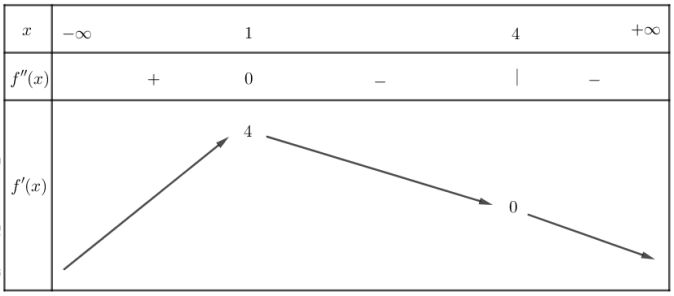
Hàm số $g(x)=(x^2-x-2)f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$.

C. $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $(-1;1)$.

Câu 79. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.



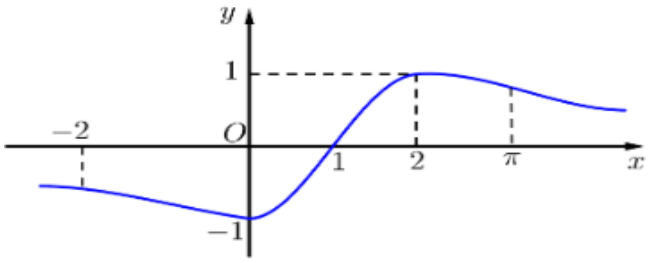
Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-2021;2021]$ để hàm số $y=e^{-x^2+mx+1}f(x)$ đồng biến trên $(1;4)$.

A. 2021. **B.** 4043.

C. 2013. **D.** 2014.

Câu 80. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số đạo hàm được cho hình hình vẽ bên dưới.



Biết rằng phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm và $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x)=-1$. Phương trình $f'(x)=0$ có một nghiệm duy nhất. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số

$$g(x)=\frac{(x-1)^2\left[\left(1-2m^2\right)x+m\right]}{f(x)}$$

luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 1. **B.** 2.

C. 0. **D.** 5.

Câu 81. [Vận dụng cao].

Cho Parabol $(P): y=f(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$ Biết rằng (P) đi qua điểm $M(4;3)$, cắt trục Ox tại $N(3;0)$ và Q sao cho diện tích tam giác ΔINQ bằng 1 và đồng thời hoành độ điểm Q nhỏ hơn 3. Khi đó hàm số $y=f(2x-1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $(0;2)$.

C. $(5;7)$. **D.** $(-\infty;2)$.

Câu 82. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)<0$ và $\left[f(x)-x\right].f(x)=x^6+3x^4+2x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x)+2x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;3)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{3}\right)$.

C. $\left(\frac{1}{3};1\right)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 83. [Vận dụng cao].

Cho đa thức $f(x)$ hệ số thực và thỏa điều kiện $2f(x)+f(1-x)=x^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=3x.f(x)+x^2+4x+1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **B.** $(0;+\infty)$.

C. $\mathbb{R}$. **D.** $(-\infty;0)$.

Câu 84. [Vận dụng cao].

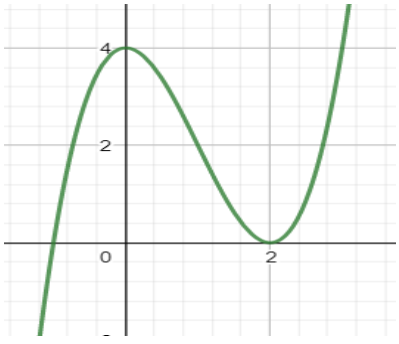
Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và thỏa mãn đồng thời: $f(1)=0$ và $\left[f'(x)\right]^2+4f(x)=8x^2+16x-8$. Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3-2x+3$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;2)$. **B.** $(0;3)$.

C. $(0;2)$. **D.** $(-2;2)$.

Câu 85. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị hàm số như hình bên dưới.



Hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)$. Khẳng định

nào sau đây là khẳng định đúng về $g(x)$?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

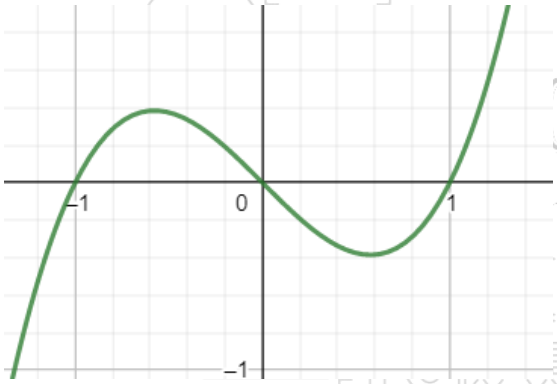
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Câu 86. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)=x^3+ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



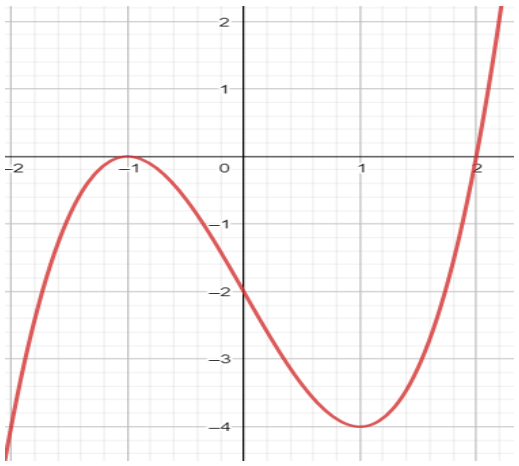
Hàm số $g(x)=f\left(f'(x)\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$.

C. $(-1;0)$. **D.** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Câu 87. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới:



Biết S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $m\in[-2021;2021]$ sao cho hàm số $g(x)=f(x-m)$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$. Số phần tử của tập S là?

A. 2017. **B.** 2019.

C. 2018. **D.** 2021.

Câu 88. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1		1		4	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

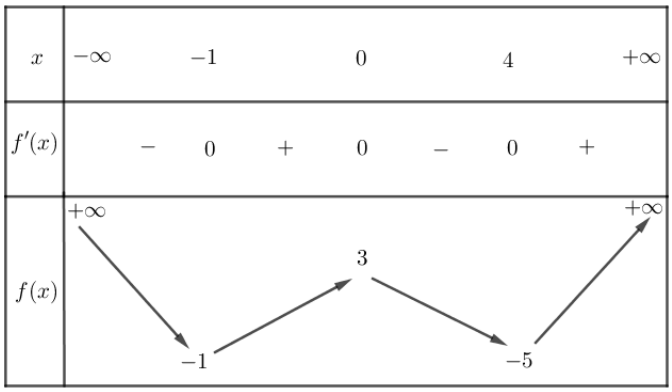
Hàm số $y=e^{3f(2-x)+1}+3^{f(2-x)}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-1;3)$.

C. $(-\infty;-2)$. **D.** $(-2;1)$.

Câu 89. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới:



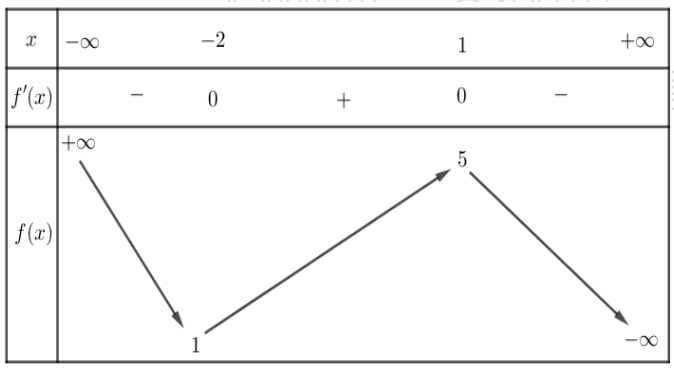
Hàm số $y=e^{f(x)-m^2+2}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

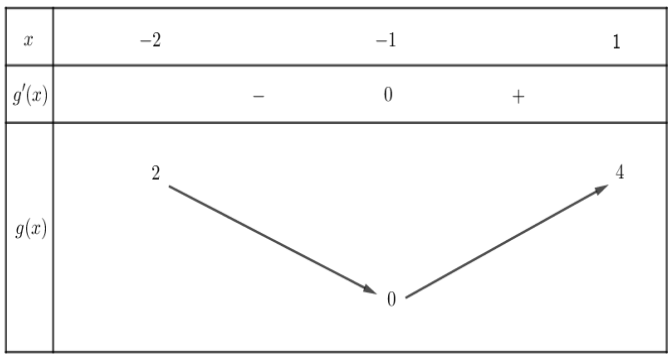
A. $(4;+\infty)$. **B.** $(-1;4)$.

C. $(1;2)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$.

Câu 90. [Vận dụng cao].

Cho bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ lần lượt là hai bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.





Hàm số $y=f(x).g(x)+\sqrt{2x+3}-\frac{1}{x+2}$ chắc chắn đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;1)$. **B.** $(-1;1)$.

C. $\left(-\frac{3}{2};1\right)$. **D.** $(1;4)$.

Câu 91. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, biết: $f'(x)=(x+1)(x-1)(x-4),\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m\le 2021$ để hàm số $g(x)=f\left(\frac{2-x}{1+x}-m\right)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$?

A. 2018. **B.** 2019.

C. 2020. **D.** 2021.

Câu 92. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f'(x)=(x+1)e^x$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-2021;2021]$ để hàm số

$$y=g(x)=f(\ln x)-mx^2+mx-2$$

nghịch biến trên $(1;e^2)$?

A. 2018. **B.** 2019.

C. 2020. **D.** 2021.

Câu 93. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=x(x+1)^3.(x-1)^4.(x-4)^5$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI

Giá trị của tham số m để hàm số

$$y=g(x)=f(1-x)+\frac{1}{x^2+mx+m^2+1}$$

chắc chắn luôn đồng biến trên khoảng $(-3;0)$.

A. $m\in(-2;-1)$. **B.** $m\in(-\infty;-2)$.

C. $m\in[-1;0]$. **D.** $m\in(-\infty;0]$.

Câu 94. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, biết $f'(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}},\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-20;20)$ để hàm số $g(x)=f(x+1)-mx+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 20. **B.** 19.

C. 17. **D.** 18.

Câu 95. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tục trên $\mathbb{R}$, biết $f'(x)=(x+1)(x-2)$. Tìm m để hàm số $y=g(x)=f(x+2)-mx$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$.

A. $m\le-\frac{9}{4}$. **B.** $-\frac{9}{4}\le m\le 10$.

C. $m\ge-\frac{9}{4}$. **D.** $m\ge 10$.

Câu 96. [Vận dụng cao].

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-20;20]$ để hàm số:

$$y=8^{\cot x}+(m-3).2^{\cot x}+3m-2$$

đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4};\pi\right)$?

A. 10. **B.** 12.

C. 11. **D.** 9.

Câu 97. [Vận dụng cao].

Cho họ đường cong

$$(C_m):y=\frac{(m-2)x-(m^2-2m+4)}{x-m}.$$

Gọi $f(x)=ax+b,\ g(x)=cx+d,\ (b<|d|)$ lần lượt là đồ thị hàm số của hai đường thẳng luôn tiếp xúc với (C_m).

Hàm số $f\left[g^3(x)-g(x)\right]$ đồng biến trên khoảng nào sau đây, chọn phương án đúng nhất?

A. $\left(\frac{18-\sqrt{3}}{3};\frac{18+\sqrt{3}}{3}\right)$.

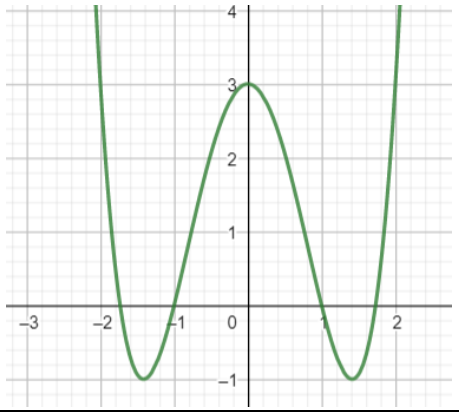
B. $\left(-\infty;\frac{18-\sqrt{3}}{3}\right)$ và $\left(\frac{18+\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$.

C. $\left(\frac{-6-\sqrt{3}}{3};\frac{-6+\sqrt{3}}{3}\right)$.

D. $\left(-\infty;\frac{-6-\sqrt{3}}{3}\right)$ và $\left(\frac{-6+\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$.

Câu 98. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Xét hàm số $y=g(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $(0;1)$, $g'(x)=\frac{f(x)}{48}+\frac{8\left(\sqrt{x+3}-2\right)}{x-1}-m$, với m là tham số thực. Giá trị thực m nào dưới đây làm cho hàm số $y=g(x)$ luôn tăng trên khoảng $(0;1)$.

A. $m<\frac{f(0)}{48}+\frac{8}{\sqrt{3}+2}$.

B. $m\le\frac{f(0)}{48}+\frac{8}{\sqrt{3}+2}$.

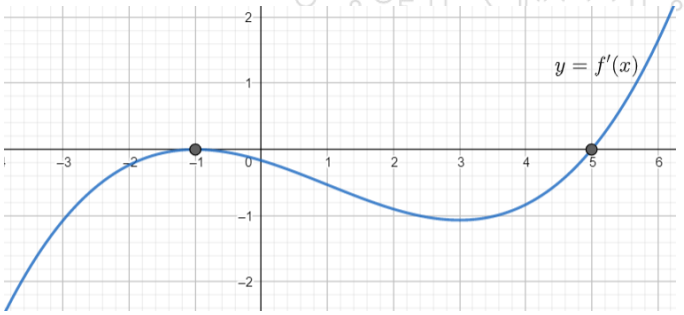
C. $m\le\frac{f(1)}{48}+2$.

D. $m<\frac{f(1)}{48}+2$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Câu 99. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Để hàm số $y=f\left(2x^3-6x+3\right)$ đồng biến với mọi $x>m(m\in R)$ thì $m\ge a\sin\frac{b\pi}{c}$, trong đó $a,b,c\in N^*, c>2b$. Tổng $S=2a+3b-c$ bằng?

A. -9.
B. 7.
C. 5.
D. -2.

ĐÁP ÁN

i \ j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	B	B	B	A	A	A	C	C
1	D	D	B	A	D	C	B	D	B	B
2	D	D	D	C	A	A	A	C	A	C
3	B	B	D	B	C	B	C	B	C	D
4	A	B	A	B	C	A	C	C	C	B
5	A	D	A	D	A	A	D	D	C	B
6	A	B	A	B	A	C	D	C	C	C
7	C	C	C	A	A	A	A	A	C	D
8	A	C	C	C	C	C	B	C	D	C
9	B	D	D	D	B	A	B	B	C	B

Ghi chú: Đáp án là sự kết hợp giữa dòng i và cột j. Ví dụ: **Câu 24A** (giao của dòng 2 và cột 4).

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Ta có: $y' = x^2 + 2(m-2)x + 5m - 4$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ thì:

$$\begin{cases} a = 1 > 0 \\ (m-2)^2 - 5m + 4 \le 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m^2 - 9m + 8 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le m \le 8$.

Đáp án D

Câu 2. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = x^3 + 2(m+1)x - m - 1$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì:

$$\begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' = (m+1)^2 + m + 1 \le 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m^2 + 3m + 2 \le 0 \Leftrightarrow -2 \le m \le -1$.

Đáp án B

Câu 3. Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + m + 2$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì:

$$\begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta' = 9m^2 - 3m - 6 \le 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} \le m \le 1 \Rightarrow m_{\max} = 1$.

Đáp án B

Câu 4. Ta có: $y = x^2 + 2mx - m$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì:

$$\begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' = m^2 + m \le 0 \end{cases}.$$

$\Leftrightarrow -1 \le m \le 0 \Rightarrow m_{\min} = -1$.

Đáp án B

Câu 5. Ta có: $y' = -3x^2 - 2mx + 4m + 9$.

Để hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$ thì:

$$\begin{cases} a = -3 < 0 \\ \Delta' = m^2 + 12m + 27 \le 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow -9 \le m \le -3 \Rightarrow m = \{-9;-8;...;-3\}$.

Như vậy có tất cả 7 giá trị m thỏa mãn.

Đáp án A

Câu 6. Ta có:

$$y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1).$$

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ thì:

$$y' \ge 0, \forall x \in (2;+\infty)$$

$\Leftrightarrow 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1) \ge 0, \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow x^2 - \left[m + (m+1)\right]x + m(m+1) \ge 0, \forall x \in (2;+\infty)$

Ta có: $x^2 - \left[m + (m+1)\right]x + m(m+1) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-m)(x-m-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = m+1 \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		m		$m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta suy ra: Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi:

$$m+1\le 2\Leftrightarrow m\le 1.$$

Đáp án A

Câu 7. Ta có: $y'=6x^2+6x+6m$.

Cách 1: Cô lập m.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ thì:

$$6x^2+6x+6m\le 0,\ \forall x\in(0;2).$$

$$\Leftrightarrow m\le -x^2-x,\ \forall x\in(0;2)\Leftrightarrow m\le \min_{(0;2)}\left(-x^2-x\right)$$

Ta xét hàm số: $y=-x^2-x,\ x\in(0;2)$.

Ta có: $y'=-2x-1=0\Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}\ (L)$.

Và: $\begin{cases} y(0)=0 \\ y(2)=-6=\min\limits_{[0;2]} y \end{cases}$.

Khi đó: $m\le -6$.

Đáp án A

Cách 2:

Ta có: $\Delta'_{y'}=9-36m$.

Trường hợp 1: $\Delta'_{y'}\le 0\Leftrightarrow m\ge\dfrac{1}{4}$.

Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ (loại).

Trường hợp 2: $\Delta'_{y'}>0\Leftrightarrow m<\dfrac{1}{4}$.

Hàm số có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2$.

Vì hàm số có hệ số $a=6>0$. Hàm số có một khoảng nghịch biến duy nhất là $(x_1;x_2)$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ thì:

$$x_1\le 0<2\le x_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6.f'(0)\le 0 \\ 6.f'(2)\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 36m\le 0 \\ 36m+216\le 0 \end{cases}\Rightarrow m\le -6\ .$$

Câu 8. Ta có: $y'=3x^2-6mx+3(2m-1)$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(2;3)$ thì:

$$3x^2-6mx+6m-3\ge 0,\forall x\in(2;3)$$

Khi đó: $6m(1-x)\ge 3-3x^2,\ \forall x\in(2;3)\ (*)$.

Vì với mọi $2<x<3\Rightarrow -2<1-x<-1<0$.

$$(*)\Leftrightarrow m\le\frac{3-3x^2}{6(1-x)}=\frac{x+1}{2},x\in(2;3)\Leftrightarrow m\ge\min_{[2;3]}\frac{x+1}{2}$$

Vì hàm số $y=\dfrac{x+1}{2}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $\min\limits_{[2;3]}\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{2+1}{2}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow m\le\dfrac{3}{2}$.

Đáp án C

Câu 9. Cách 1: Đặt ẩn phụ.

Đặt: $t=x^2$. Do $x\in[-1;0]\Rightarrow t\in[0;1]$.

Tuy nhiên ta hàm số: $y=x^2$ là một Parabol có đỉnh $I(0;0)$ và hệ số $a=1>0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$. Do đó trên đoạn $[-1;0]$ hàm số nghịch biến. Vì thế sau khi đặt ẩn phụ, tính đơn điệu của hàm số bị thay đổi. Như vậy, yêu cầu đề bài tương đương với:

Hàm số: $y=t^2+(2-m)t+4-2m$ đồng biến trên đoạn $[0;1]$.

Ta có: $y'=2t+2-m\ge 0,\ \forall x\in[0;1]$.

$\Leftrightarrow m\le \min\limits_{[0;1]}(2t+2)=2.0+2=2\Rightarrow m\le 2$ do hàm số $y=2t+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Đáp án C

Cách 2: Cô lập m.

Ta có: $y'=4x^3+4x-2mx$.

Để hàm số nghịch biến trên đoạn $[-1;0]$ thì:

$$4x^3+4x-2mx\le 0,\forall x\in[-1;0]\ (*)$$

$\Leftrightarrow 2mx\ge 4x^3+4x,\forall x\in[-1;0]$.

Xét các khả năng:

Trường hợp 1: $x=0\Rightarrow 0\ge 0$ (Hiển nhiên). Do đó $m\in\mathbb{R}$.

Trường hợp 2: $-1\le x<0$

$\Rightarrow m\le \dfrac{4x^3+4x}{2x}=2x^2+2,\forall x\in[-1;0)$

$\Rightarrow m\le \min\limits_{[-1;0]}(2x^2+2)=2.0^2+2=2\Rightarrow m\le 2$

Do hàm số $y=2x^2+2$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

Vậy $m\le 2$.

Cách 3: Vì $x\le 0$. Suy ra $(*)$ tương đương với:

$2x(2x^2+2-m)\le 0\Leftrightarrow 2x^2+2-m\ge 0,\forall x\in[-1;0]$

$\Rightarrow m\le \min\limits_{[-1;0]}(2x^2+2)=2.0^2+2=2\Rightarrow m\le 2$

Do hàm số $y=2x^2+2$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

Vậy $m\le 2$.

Câu 10. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{m-5}{(x+1)^2}>0\Rightarrow m-5>0\Rightarrow m>5$.

Đáp án D

Câu 11. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{m^2+2m-2}{(x+m)^2}>0$

$\Rightarrow m^2+2m-2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>-1+\sqrt{3}\\ m<-1-\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Đáp án D

Câu 12. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{m+2m-2}{(x+m)^2}=\dfrac{3m-2}{(x+m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$ thì trước hết hàm số phải liên tục trên $(-1;2)$ và $y'>0$. Điều đó tương đương với:

$$\begin{cases}3m-2>0\\ \left[\begin{array}{l}-m\le -1\\ -m\ge 2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>\dfrac{2}{3}\\ \left[\begin{array}{l}m\ge 1\\ m\le -2\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow m\ge 1.$$

Đáp án B

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never give anywhere unless you try

Câu 13. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{-m^2-2m+3}{(x-m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$ thì trước hết hàm số phải liên tục trên khoảng $(2;+\infty)$ và $y'<0$. Điều đó tương đương với:

$$\begin{cases}-m^2-2m+3<0\\ m\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-3\\ m>1\end{array}\right.\\ m\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-3\\ 1<m\le 2\end{array}\right.$$

Đáp án A.

Câu 14. Ta có: $y'=3x^2+6x+m$.

Để hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 2 thì phương trình: $y'=0$ có hai nghiệm thực phân biệt $x_1<x_2$ sao cho: $S^2-4P=k^2$. Điều đó tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases}\Delta'=9-3m>0\\ (-2)^2-4.\dfrac{m}{3}=2^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<3\\ m=0\end{cases}\Leftrightarrow m=0.$$

Đáp án D

Câu 15. Ta có: $y'=x^2+4x-m$.

Để hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1 thì phương trình: $y'=0$ có hai nghiệm thực phân biệt $x_1<x_2$ sao cho: $S^2-4P=k^2$. Điều đó tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases}\Delta'=4+m>0\\ (-4)^2-4.(-m)=1^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-4\\ m=-\dfrac{15}{4}\end{cases}\Leftrightarrow m=-\frac{15}{4}.$$

Đáp án C.

Câu 16. Ta có: $y'=-2x^2+2(m+1)x+2m$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$ thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm thực phân biệt $x_1<x_2$ thỏa mãn: $x_1\le 0<2\le x_2$. Điều đó tương đương với hệ:

$$\begin{cases}a.f(0)\le 0\\ a.f(2)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2.2m\le 0\\ -2m-12\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 0\\ m\ge -6\end{array}\right.\Rightarrow m\ge 0$$

Đáp án B

Câu 17. Ta có: $y'=-x^2+2mx^2+m-2$.

Để hàm số đồng biến trên đoạn có độ dài bằng 4 thì phương trình: $y'=0$ có hai nghiệm thực phân biệt $x_1<x_2$ sao cho: $S^2-4P=k^2$. Điều đó tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases}\Delta'=m^2+m-2>0\\ (2m)^2-4.(-m+2)=4^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-2\\ m>1\end{array}\right.\\ 4m^2+4m-24=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-2\\ m>1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}m=-3\\ m=2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-3\\ m=2\end{array}\right.$$

Đáp án D

Câu 18. Ta có: $y'=3x^2-12x+m,\ \forall x\in(0;+\infty)$

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ thì:

$$3x^2-12x+m\ge 0,\ \forall x\in(0;+\infty)$$
$$\Leftrightarrow m\ge\max_{[0;+\infty)}(-3x^2+12x)$$

Xét hàm số $y=-3x^2+12x,\ \forall x\in(0;+\infty)$.

Ta có: $y'=-6x+12=0\Leftrightarrow x=2$.

Và: $\begin{cases} y(0)=0 \\ y(2)=12 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty \end{cases}$.

Vì thế $\max\limits_{[0;+\infty)}\left(-3x^2+12x\right)=12$.

Vậy: $m\ge 12$.

Đáp án B

Câu 19. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{m-1}{(x+1)^2}<0\Rightarrow m-1<0\Leftrightarrow m<1$.

Đáp án B

Câu 20. Ta có: $y'=x^2+2mx$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì: $\begin{cases} a=1>0 \\ \Delta'=m^2\le 0 \end{cases}$.

Suy ra: $m=0$ vì $m^2\ge 0$.

Đáp án D

Câu 21. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ thì trước hết hàm số phải liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$ và $y'<0$. Điều đó tương đương với:

$$\begin{cases} m^2-4<0 \\ -m\ge 1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -2<m<2 \\ m\le -1 \end{cases}\Leftrightarrow -2<m\le -1.$$

Đáp án D

Câu 22. Ta có: $y'=x^2+2mx-m$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì:

$$\begin{cases} a=1>0 \\ \Delta'=m^2+m\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow -1\le m\le 0\Rightarrow m_{\min}=-1.$$

Đáp án D

Câu 23. Ta có: $y'=-x^2+2(m-2)x-m$.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì:

$$\begin{cases} a=-1<0 \\ \Delta'=(m-2)^2-m\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow m^2-5m+4\le 0$$

$$\Leftrightarrow 1\le m\le 4.$$

Đáp án C

Câu 24. Ta có: $y'=x^2+2mx+4$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì:

$$\begin{cases} a=1>0 \\ \Delta'=m^2-4\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow -2\le m\le 2.$$

Đáp án A

Câu 25. Ta có: $y'=-x^2+2mx-4$.

Để hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì:

$$\begin{cases} a=-1<0 \\ \Delta'=m^2-4\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow -2\le m\le 2.$$

Đáp án A

Câu 26. Ta có: $y'=(2m+1)\cos x+3-m$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì: $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$

Đặt: $t=\cos x\Rightarrow t\in[-1;1]$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI

Khi đó: $y' \ge 0 \Leftrightarrow (2m+1)t+3-m \ge 0$.

Cách 1:

Vì $y = f(t) = (2m+1)t+3-m, \forall t \in [-1;1]$ là phương trình đoạn thẳng. Khi đó: $f(t) \ge 0$ tương đương với: $\begin{cases} f(-1) \ge 0 \\ f(1) \ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3m+2 \ge 0 \\ m+4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \le m \le \frac{2}{3}$.

Cách 2:

Xét các khả năng:

Trường hợp 1: $m = -\frac{1}{2}$.

Ta có: $y' = \frac{7}{2} > 0, \forall t \in [-1;1]$ (Thỏa mãn).

Trường hợp 2: $m > -\frac{1}{2}$.

Khi đó hàm số $f(t) = (2m+1)t+3-m$ là một hàm đồng biến suy ra:

$f(t) \ge 0, \forall t \in [-1;1] \Leftrightarrow \min\limits_{[-1;1]} f(t) = f(-1) \ge 0$.

Suy ra: $-3m+2 \ge 0 \Leftrightarrow m \le \frac{2}{3}$.

Suy ra: $-\frac{1}{2} < m \le \frac{2}{3}$.

Trường hợp 3: $m < -\frac{1}{2}$.

Khi đó hàm số $f(t) = (2m+1)t+3-m$ là một hàm nghịch biến suy ra:

$f(t) \ge 0, \forall t \in [-1;1] \Leftrightarrow \min\limits_{[-1;1]} f(t) = f(1) \ge 0$.

Suy ra: $m+4 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge -4$.

Suy ra: $-4 \le m < -\frac{1}{2}$.

Kết hợp ba trường hợp, ta có: $-4 \le m \le \frac{2}{3}$.

Đáp án A

Câu 27. Ta có: $y' = 1 - m\sin x$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì: $y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Đặt: $t = \sin x, t \in [-1;1]$.

Khi đó: $y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1 - mt \ge 0, \forall t \in [-1;1]$.

Cách 1:

Vì $y = f(t) = 1 - mt, \forall t \in [-1;1]$ là phương trình đoạn thẳng. Khi đó: $f(t) \ge 0$ tương đương với: $\begin{cases} f(-1) \ge 0 \\ f(1) \ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+m \ge 0 \\ 1-m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le m \le 1$.

Cách 2:

Xét các khả năng:

Trường hợp 1: $m = 0$.

Ta có: $y' = 1 > 0, \forall t \in [-1;1]$ (Thỏa mãn).

Trường hợp 2: $m < 0$.

Khi đó hàm số $f(t) = 1 - mt$ là một hàm đồng biến suy ra:

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never go anywhere unless you're

$f(t)\ge 0,\forall t\in[-1;1]\Leftrightarrow \min\limits_{[-1;1]} f(t)=f(-1)\ge 0$.

Suy ra: $1+m\ge 0\Leftrightarrow m\ge -1$.

Suy ra: $-1\le m<0$.

Trường hợp 3: $m>0$.

Khi đó hàm số $f(t)=1-mt$ là một hàm nghịch biến suy ra:

$f(t)\ge 0,\forall t\in[-1;1]\Leftrightarrow \min\limits_{[-1;1]} f(t)=f(1)\ge 0$.

Suy ra: $1-m\ge 0\Leftrightarrow m\le 1$.

Suy ra: $0<m\le 1$.

Kết hợp ba trường hợp, ta có: $-1\le m\le 1$.

Cách 3:

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì:

$y'=1-m\sin x\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\sin x\le 1,\forall x\in\mathbb{R}\ (*)$

Ta thấy $m=0$, thỏa mãn $(*)$, ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m>0$.

Khi đó:

$(*)\Leftrightarrow \sin x\le\dfrac{1}{m},\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \dfrac{1}{m}\ge\max\limits_{\mathbb{R}}\sin x=1$.

Suy ra: $m\le 1$. Kết hợp với điều kiện, được:

$0<m\le 1$.

Trường hợp 2: $m<0$.

Khi đó:

$(*)\Leftrightarrow \sin x\ge\dfrac{1}{m},\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \dfrac{1}{m}\le\min\limits_{\mathbb{R}}\sin x=-1$.

Suy ra: $m\ge -1$. Kết hợp với điều kiện, được:

$-1\le m<0$.

Từ ba điều kiện trên ta có: $-1\le m\le 1$.

Đáp án C

Câu 28. Ta có: $y'=-3x^2-6x+4m$.

Cách 1: Cô lập m.

Để hàm số nghịch biến trên nữa khoảng $(-\infty;0]$ thì: $y'\le 0,\ \forall x\in(-\infty;0]\ (*)$.

$(*)\Leftrightarrow -3x^2-6x+4m\le 0,\forall x\in(-\infty;0]$

$\Rightarrow m\le\min\limits_{(-\infty;0]}\left(\dfrac{3x^2+6x}{4}\right)$

Ta có:

$\dfrac{3x^2+6x}{4}=\left(\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{4}\right)-\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{4}(x+1)^2-\dfrac{3}{4}\ge-\dfrac{3}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi $x=-1$.

Suy ra: $\min\limits_{(-\infty;0]}\left(\dfrac{3x^2+6x}{4}\right)=-\dfrac{3}{4}$.

Hay: $m\le-\dfrac{3}{4}$.

Cách 2:

Ta có: $\Delta'_{y'}=9+12m$.

Ta xét các khả năng:

Trường hợp 1: $\Delta'_{y'}\le 0$.

Vì: $a=-3<0$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó: $9+12m\le 0\Leftrightarrow m\le-\dfrac{3}{4}$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0]$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Trường hợp 2: $\begin{cases}\Delta'_{y'}>0\\0\le x_1<x_2\end{cases}$.

Khi đó: $\begin{cases}9+12m>0\\S=-2>0\\P=-\dfrac{4m}{3}\ge 0\end{cases}$ (Vô lý).

Vậy: $m\le -\dfrac{3}{4}$.

Đáp án A.

Câu 29. Ta có:

$y'=-3x^2+2(m+1)x-(m^2+2)$.

$\Delta'=(m+1)^2-3(m^2+2)=-2m^2+2m-5$.

Vì: $-2m^2+2m-5=-2\left(m^2-m+\dfrac{1}{4}\right)-\dfrac{9}{2}$

$=-2\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{9}{2}\le -\dfrac{9}{2}<0$.

Suy ra: $\Delta'<0$. Vì thế hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ (do $a=-3<0$).

Đáp án C

Câu 30. Ta có: $y'=-x^2+4x-m$.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì:

$\begin{cases}a=-1<0\\\Delta'=4-m\le 0\end{cases}\Rightarrow m\ge 4$.

Đáp án B

Câu 31. Ta có: $y'=3x^2+2(m-2)x+m^2-4$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì:

$\begin{cases}a=3>0\\\Delta'=(m-2)^2-3(m^2-4)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -2m^2-4m+16\le 0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -4\\m\ge 2\end{array}\right.$.

Đáp án B

Câu 32. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{m^2-3m}{(x+m)^2}>0$.

$\Rightarrow m^2-3m>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>3\\m<0\end{array}\right.$.

Đáp án D

Câu 33. Ta có: $y'=3x^2-6x-m$.

Để hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ thì:

$y'\ge 0,\forall x\in(0;+\infty)$

$3x^2-6x-m\ge 0,\forall x\in(0;+\infty)\Rightarrow m\le\min\limits_{(0;+\infty)}(3x^2-6x)$

Mà:

$3x^2-6x=(3x^2-6x+3)-3=3(x-1)^2-3\ge -3$

Và dấu "=" xảy ra tại $x=1\in(0;+\infty)$.

Vì thế $\min\limits_{(0;+\infty)}(3x^2-6x)=-3$.

Suy ra: $m\le -3$.

Đáp án B

Câu 34. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{m-1}{(x-1)^2}<0\Rightarrow m-1<0\Rightarrow m<1$.

Đáp án C

Câu 35. Ta có: $y' = x^2 + 2mx + 4$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì:

$$\begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' = m^2 - 4 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le m \le 2$$

Đáp án B

Câu 36. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{m^2 - m - 2}{(x+m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$ thì trước hết hàm số phải liên tục trên khoảng $(-1;+\infty)$ và $y' < 0$. Khi đó:

$$\begin{cases} \dfrac{m^2 - m - 2}{(x+m)^2} < 0 \\ -m \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 < 0 \\ m \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le m < 2$$

Đáp án C

Câu 37. Ta có: $y' = x^2 - mx - 2$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì:

$y' \ge 0,\ \forall x \in (1;+\infty)$. Khi đó:

$$x^2 - mx - 2 \ge 0,\ \forall x \in (1;+\infty)$$
$$\Rightarrow mx \le x^2 - 2,\ \forall x \in (1;+\infty)$$
$$\Rightarrow m \le \frac{x^2 - 2}{x},\ \forall x \in (1;+\infty) \Rightarrow m \le \min_{[1;+\infty)} \left(\frac{x^2 - 2}{x} \right)$$

Ta xét hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2}{x} = x - \dfrac{2}{x}$, có:

$$y' = 1 + \frac{2}{x^2} > 0,\ \forall x \in (1;+\infty).$$

Suy ra: $\min_{[1;+\infty)} y = y(1) = -1$.

Nên: $m \le -1$.

Đáp án B

Câu 38. Ta có: $y' = -x^2 + 2(2m+1)x - m$.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì:

$$\begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' = (2m+1)^2 - m \le 0 \end{cases} \Rightarrow 4m^2 + 3m + 1 \le 0 \Rightarrow m = \varnothing$$

Vậy không có giá trị thực nào của m thỏa mãn.

Đáp án C

Câu 39. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{\ln(m^2)\}$

Đặt: $t = e^x, t \in \left(\dfrac{1}{4};1\right)$.

Vì: $\ln\dfrac{1}{4} < x < 0 \Rightarrow e^{\ln\frac{1}{4}} < e^x < e^0 \Rightarrow \dfrac{1}{4} < e^x < 1$.

Hàm số đã cho trở thành:

$$y = \frac{t - m - 2}{t - m^2}, \left(t \in \left(\frac{1}{4};1\right) \right).$$

Ta có: $y' = \dfrac{-m^2 + m + 2}{(t - m^2)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{4};1\right)$ thì trước hết hàm số phải liên tục trên khoảng $\left(\dfrac{1}{4};1\right)$ và $y' > 0, \forall x \in \left(\dfrac{1}{4};1\right)$.

Khi đó, ta được:

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m^2\le\dfrac{1}{4}\\ m^2\ge 1\end{array}\right.\\ -m^2+m+2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}-\dfrac{1}{2}\le m\le\dfrac{1}{2}\\ m\le -1\\ m\ge 1\end{array}\right.\\ -1<m<2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\dfrac{1}{2}\le m\le\dfrac{1}{2}\\ 1\le m<2\end{array}\right.$$

Đáp án D

Extra Techniques:

Tips:

Sở dĩ hàm số sau khi đặt ẩn phụ không bị thay đổi tính đơn điệu là vì hàm số $y=e^x$ là một hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ (do $y'=e^x>0$).

Câu 40. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{-m-3}{(x-m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định thì: $y'>0,\forall x\in D$.

Khi đó: $\dfrac{-m-3}{(x-m)^2}>0\Rightarrow -m-3>0\Rightarrow m<-3$.

Đáp án A.

Câu 41. Đặt: $t=\sqrt{x-1},\ t\in(4;6)$.

Vì: $17<x<37\Rightarrow 16<x-1<36\Rightarrow 4<t<6$.

Khi đó hàm số đã cho trở thành:

$$y=\frac{(m-1)t+2}{t+m},\ t\in(4;6).$$

Ta có: $y'=\dfrac{m^2-m-2}{(t+m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(4;6)$ thì trước hết hàm số phải liên tục trên khoảng $(4;6)$ và thỏa mãn $y'>0,\forall t\in(4;6)$. Khi đó:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}-m\le 4\\ -m\ge 6\end{array}\right.\\ m^2-m-2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m\ge -4\\ m\le -6\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-4\le m<-1\\ m>2\\ m\le -6\\ m=\varnothing\end{array}\right.$$

Đáp án B

Extra Techniques:

Tips:

Sở dĩ hàm số sau khi đặt ẩn phụ không bị thay đổi tính đơn điệu là vì hàm số $y=\sqrt{x-1}$ là một hàm đồng biến trên nữa khoảng $[1;+\infty)$ (do trên khoảng $(1;+\infty)$, $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}>0$).

Để có: $\left[\begin{array}{l}-4\le m<-1\\ m>2\\ m\le -6\\ m=\varnothing\end{array}\right.$ ta thực hiện như sau:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m\ge -4\\ m\le -6\\ m<-1\\ m>2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\ge -4\\ m<-1\end{cases}\\ \begin{cases}m\ge -4\\ m>2\end{cases}\\ \begin{cases}m\le -6\\ m<-1\end{cases}\\ \begin{cases}m\le -6\\ m>2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-4\le m<-1\\ m>2\\ m\le -6\\ m=\varnothing\end{array}\right.$$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try!

Câu 42. Ta có: $y'=3x^2-6mx=0\,(*)$

$(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2m\end{array}\right.$.

Ta xét các khả năng:

Trường hợp 1: $m=0$, khi đó:

$y'=3x^2>0,\forall x\in(0;1)$.

Suy ra hàm số luôn đồng biến trên $(0;1)$ (Loại).

Trường hợp 2: $m>0$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ thì:

$(0;1)\subset(0;2m)\Rightarrow 1\le 2m\Rightarrow m\ge\dfrac{1}{2}$ (Nhận).

Trường hợp 3: $m<0$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ thì:

$(0;1)\subset(2m;0)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}2m\le 0\\1\le 0\end{array}\right.$ (Vô lý).

Vậy $m\ge\dfrac{1}{2}$.

Đáp án A

Extra Techniques:

Tips:

Vì hàm số là hàm số bậc ba có hệ số $a=3>0$. Vì thế, nếu có khoảng nghịch biến thì bắt buộc hàm số phải có dạng hình chữ "N". Hay khoảng nghịch biến là khoảng giữa hai cực trị của hàm số.

Câu 43. Ta có: $y'=3x^2-3m^2$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì: $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$

Hay $3x^2-3m^2\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow m^2\le x^2,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow m^2\le\min\limits_{\mathbb{R}}x^2=0\Rightarrow m^2\le 0$

Vì: $m^2\ge 0\Rightarrow m=0$.

Đáp án B

Extra Techniques:

Remark:

Vì $x^2\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên:

$\min\limits_{\mathbb{R}}\left(x^2\right)=0$.

Câu 44. Ta có: $y'=-x^2+2mx+3m+2$.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì: $\left\{\begin{array}{l}a=-1<0\\\Delta'\le 0\end{array}\right.$.

Khi đó: $\Delta'=m^2+3m+2\le 0\Leftrightarrow -2\le m\le -1$.

Đáp án C

Câu 45. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Ta có: $y=\dfrac{-m^2-m+2}{(x-m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định thì $y'>0,\forall x\in D$.

Hay: $-m^2-m+2>0\Rightarrow -2<m<1$.

Đáp án A

Câu 46. Ta có: $y'=3x^2+6x-m$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ thì:

$y'\ge 0,\forall x\in(-\infty;0)\,(*)$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

$(*) \Leftrightarrow 3x^2+6x-m \ge 0, \forall x \in (-\infty;0)$

$\Leftrightarrow m \le 3x^2+6x, \forall x \in (-\infty;0)$

$\Rightarrow m \le \min\limits_{(-\infty;0)} (3x^2+6x)$

Xét hàm số: $y=3x^2+6x, x \in (-\infty;0)$.

Ta có: $y'=6x+6=0 \Leftrightarrow x=-1$

Vì: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty \\ y(-1)=-3=\min\limits_{(-\infty;0)} y. \\ y(0)=0 \end{cases}$

Nên: $m \le -3$.

Đáp án C

Câu 47. Xét hàm số:

$$y=\sin x-\cos x+2021\sqrt{2}mx$$

Ta có: $y=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2021\sqrt{2}mx$.

Khi đó: $y'=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2021\sqrt{2}m$

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì: $y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2021\sqrt{2}m \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2021\sqrt{2}m \ge -\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right), \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow m \ge -\frac{1}{2021}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right), \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow m \ge \max\limits_{\mathbb{R}}\left[-\frac{1}{2021}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{1}{2021}$

$\Rightarrow m \ge \frac{1}{2021}$

Đáp án C

Extra Techniques:

Remark:

Vì: $-1 \le \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \le 1$.

Nên:

$-\frac{1}{2021} \le -\frac{1}{2021}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \le \frac{1}{2021}$

Suy ra:

$\max\limits_{\mathbb{R}}\left[-\frac{1}{2021}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{1}{2021}$

Câu 48. Đặt: $t=\sin x, (t \in (0;1))$.

Khi đó: $y=\frac{2t-1}{t-m}, (t \in (0;1))$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

Ta có: $y'=\frac{-2m+1}{(t-m)^2}$.

Để hàm số $y=\frac{2t-1}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ thì trước hết hàm số phải liên tục trên khoảng $(0;1)$ và $y'>0, x \in (0;1)$. Khi đó, ta có:

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 1 \end{array}\right. \\ -2m+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 1 \end{array}\right. \\ m<\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \le 0$.

Đáp án C

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Extra Techniques:

Tips:

Sở dĩ hàm số sau khi đặt ẩn phụ không bị thay đổi tính đơn điệu là vì hàm số $y=\sin x$ là một hàm đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ (do $y'=\cos x$ mà $\cos x>0,$ $\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$).

Câu 49. Đặt: $t=\sin x,\left(t\in(0;1)\right)$.

Khi đó: $y=\frac{t+m}{t-m},\left(t\in(0;1)\right)$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

Ta có: $y'=\frac{-2m}{(t-m)^2}$.

Để hàm số $y=\frac{t+m}{t-m}$ **đồng biến** trên khoảng $(0;1)$ thì trước hết hàm số phải liên tục trên khoảng $(0;1)$ và $y'>0, x\in(0;1)$. Khi đó, ta có:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge 1\end{array}\right.\\ -2m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge 1\end{array}\right.\\ m<0\end{cases}\Leftrightarrow m<0.$$

Đáp án B

Extra Techniques:

Tips:

Sở dĩ hàm số sau khi đặt ẩn phụ **bị thay đổi tính đơn điệu** là vì:

hàm số $y=\sin x$ là một hàm nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ (do $y'=\cos x$ mà $\cos x<0,$ $\forall x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$).

Câu 50. Ta có: $y'=-x^2+2(m-1)x+m+3$.

Để hàm số đồng biến trên $(0;3)$ thì phương trình: $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn: $x_1\le 0<3\le x_2$. Khi đó:

$$\begin{cases}\Delta'=(m-1)^2+m+3>0\\ (-1).f(0)\le 0\\ (-1).f(3)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2-m+4>0\\ f(0)\ge 0\\ f(3)\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\forall m\in\mathbb{R}\\ m+3\ge 0\\ 7m-12\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\forall m\in\mathbb{R}\\ m\ge -3\\ m\ge\frac{12}{7}\end{cases}\Leftrightarrow m\ge\frac{12}{7}$$

Đáp án A

Câu 51. Ta có: $y'=3mx^2+2mx+m^2-m$.

Xét các khả năng:

Trường hợp 1: Với $m=0$.

Khi đó: $y'=0,\forall x\in\mathbb{R}$. Nên hàm số không đổi hay hàm số không đồng biến trên $\mathbb{R}$ (Loại).

Trường hợp 2: Với $m\ne 0$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì:

$$\begin{cases}a=3m>0\\ \Delta'=m^2-3m(m^2-m)\le 0\end{cases}(*)$$

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\-3m^3+4m^2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\\left[\begin{array}{l}m=0\\m\ge\dfrac{4}{3}\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow m\ge\frac{4}{3}$$

Đáp án D

Câu 52. Ta có:

$y'=3(m-1)x^2-6(m-1)x+3(2m-3)$.

Xét các khả năng:

Trường hợp 1: Với $m=1$.

Khi đó: $y'=-3,\forall x\in\mathbb{R}$. Nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ (Nhận).

Trường hợp 2: Với $m\ne 1$.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì:

$$\begin{cases}a=3(m-1)<0\\\Delta'=9(m-1)^2-9(m-1)(2m-3)\le 0\end{cases}\quad(*)$$

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\9(m-1)(2-m)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\\left[\begin{array}{l}m\le 1\Rightarrow m<1\\m\ge 2\end{array}\right.\end{cases}$$

Từ hai trường hợp trên ta suy ra: $m\le 1$.

Đáp án A

Câu 53. Ta có: $y'=x^2+2(m-1)x+2m-3$.

Để hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ thì:

$$y'\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)$$

Hay: $x^2-2x-3+2m(x+1)\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)(*)$

$$(*)\Leftrightarrow m\ge\max_{(1;+\infty)}\left(\frac{-x^2+2x+3}{2x+2}\right)=1\Rightarrow m\ge 1.$$

Đáp án D

Note: Chứng minh: $\max\limits_{[1;+\infty)}\left(\dfrac{-x^2+2x+3}{2x+2}\right)=1$.

Xét hàm số: $y=\dfrac{-x^2+2x+3}{2x+2},x\in(1;+\infty)$

Ta có: $y'=\dfrac{-2x^2-4x-2}{(2x+2)^2}=0\Rightarrow x=-1$ (Loại).

Và: $\begin{cases}y(1)=1=\max\limits_{[1;+\infty)}\\\lim\limits_{x\to+\infty}y=-\infty\end{cases}$.

Suy ra: $\max\limits_{[1;+\infty)}\left(\dfrac{-x^2+2x+3}{2x+2}\right)=1$.

Câu 54. Ta có: $y'=x^2-mx+2$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì:

$$\begin{cases}a=1>0\\\Delta=m^2-8\le 0\end{cases}\Leftrightarrow-2\sqrt{2}\le m\le 2\sqrt{2}.$$

Đáp án A

Câu 55. Ta có: $y'=3x^2-2(m+1)x+3$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ thì:

$$\begin{cases}a=3>0\\\Delta'=(m+1)^2-9\le 0\end{cases}\Leftrightarrow-3\le m+1\le 3\Leftrightarrow-4\le m\le 2$$

Đáp án A

Câu 56. Ta có: $y'=-3x^2+2x+m-2$.

Để hàm số đồng biến trên một khoảng có độ lớn bằng 2 thì: $\begin{cases}\Delta'=1+3m-6>0\\S^2-4P=2^2=4\end{cases}(*)$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}m>\dfrac{5}{3}\\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^2-4.\left(\dfrac{m-2}{-3}\right)=4\end{cases}\Rightarrow m=\frac{14}{3}.$$

Đáp án D

Câu 57. Ta có: $y'=3x^2+6mx+3m+3$.

Để hàm số nghịch biến trên một khoảng có độ dài lớn hơn 4 thì:

$$\begin{cases}9m^2-9m-9>0\\ S^2-4P>4^2=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\ m>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\\ (-2m)^2-4(m+1)>16\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\ m>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}m<\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\\ m>\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\\ m>\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\end{array}\right.\\ m<\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\\ m>\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\end{array}\right.$$

Đáp án D

Câu 58. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ thì trước hết hàm số phải liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$ và $y'<0,\forall x\in(-\infty;1)$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases}-m\geq 1\\ m^2-4<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq -1\\ -2<m<2\end{cases}\Leftrightarrow -2<m\leq -1.$$

Đáp án C

Câu 59. Ta có: $y'=mx^2-2mx+3$.

Trường hợp 1: Với $m=0$, ta có:

$y'=3>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Vì thế hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ (Nhận).

Trường hợp 2: Với $m\neq 0$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì:

$$\begin{cases}a=m>0\\ \Delta'=m^2-3m\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ 0\leq m\leq 3\end{cases}\Rightarrow 0<m\leq 3.$$

Kết hợp hai trường hợp, ta được: $0\leq m\leq 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của m thỏa mãn yêu cầu đề bài là $m=0$.

Đáp án B

Câu 60. Ta có: $y'=m\cos x+7$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì: $y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$

Hay: $m\cos x+7\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ $(*)$.

Xét hàm số $y=m\cos x+7$.

Ta xét các khả năng:

Trường hợp 1: $m\geq 0$.

Khi đó: $-m+7\leq m\cos x+7\leq m+7$.

Để $(*)$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}$ thì: $-m+7\geq 0\Rightarrow m\leq 7$.

Khi đó: $0\leq m\leq 7$.

Trường hợp 2: $m<0$.

Khi đó: $m+7\leq m\cos x+7\leq -m+7$.

Để $(*)$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}$ thì: $m+7\geq 0\Rightarrow m\geq -7$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI

Khi đó: $-7 \le m < 0$.

Kết hợp hai trường hợp, ta được: $-7 \le m \le 7$.

Đáp án A

Câu 61. Ta có: $y' = -x^2 + 2(m-1)x + 2m - 5$.

Để hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì:

$$\begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 + 2m - 5 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 4 \le 0 \Leftrightarrow -2 \le m \le 2$$

Đáp án B

Câu 62. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{m-1}{(x+m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$ thì trước hết hàm số phải liên tục trên khoảng $(2;+\infty)$ và $y' < 0, \forall x \in (2;+\infty)$. Khi đó, ta có:

$$\begin{cases} -m \le 2 \\ m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge -2 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le m < 1.$$

Đáp án A

Câu 63. Ta có: $y' = m + \dfrac{m+1}{2\sqrt{x-2}}$.

Để hàm số nghịch biến trên nữa khoảng $[2;+\infty)$ thì: $y' \ge 0, \forall x \in [2;+\infty)$.

Cách 1: Cô lập m.

Khi đó: $y' = m + \dfrac{m+1}{2\sqrt{x-2}} \le 0, \forall x \in (2;+\infty)$.

$$y' = m\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x-2}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x-2}} \le 0, \forall x \in (2;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \le -\frac{1}{2\sqrt{x-2}+1}, \forall x \in [2;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \le \min_{[2;+\infty)}\left(-\frac{1}{2\sqrt{x-2}+1}\right).$$

Xét hàm số: $y = -\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}+1}, \forall x \in [2;+\infty)$.

Ta có: $x \ge 2 \Rightarrow \sqrt{x-2} \ge 0 \Rightarrow 2\sqrt{x-2} + 1 \ge 1$.

Suy ra: $\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}+1} \le 1 \Rightarrow -\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}+1} \ge -1$.

Vậy: $\min_{[2;+\infty)}\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}+1}\right) = -1 \Rightarrow m \le -1$.

Đáp án B

Cách 2:

Ta có: $y' = m + (m+1)\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$.

Điều kiện cần để: $y' \le 0, \forall x \ge 2 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2^+} y' \le 0$.

Khi đó: $m + 1 \le 0 \Rightarrow m \le -1$.

Thử lại: $m \le -1$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 64. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{3-m\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{m^2 - 3m + 2}{(x+m-3)^2}$.

Để hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định thì: $y' < 0, \forall x \in D$. Khi đó, ta có:

$m^2 - 3m + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$.

Đáp án A

Câu 65. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{4-m\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{m^2-4m+3}{(x+m-4)^2}$.

Để hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định thì: $y'<0,\forall x\in D$. Khi đó, ta có:

$m^2-4m+3<0\Leftrightarrow 1<m<3$.

Đáp án C

Câu 66. Ta có: $y'=3mx^2+2mx+m^2-m$.

Xét các trường hợp:

Trường hợp 1: $m=0$.

Khi đó: $y'=0,\forall x\in\mathbb{R}$. Nên hàm số không đổi hay hàm số không đồng biến trên $\mathbb{R}$ (Loại).

Trường hợp 2: $m\neq 0$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì:

$$\begin{cases}a=3m>0\\ \Delta'=4m^2-3m^3\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ \left[\begin{array}{l}m=0\\ m\ge\dfrac{4}{3}\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow m\ge\frac{4}{3}.$$

Vậy: $m\ge\dfrac{3}{4}$.

Đáp án D

Câu 67. Đặt: $t=3^{-x},\left(t\in\left(\dfrac{1}{3};3\right)\right)$.

Khi đó hàm số đã cho trở thành:

$$y=\frac{t-3}{t-m},\left(t\in\left(\frac{1}{3};3\right)\right).$$

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{3-m}{(t-m)^2}$.

Để hàm số $y=\dfrac{t-3}{t-m}$ **đồng biến** trên $\left(\dfrac{1}{3};3\right)$ thì hàm số trước hết phải liên tục trên $\left(\dfrac{1}{3};3\right)$ và $y'>0,\forall t\in\left(\dfrac{1}{3};3\right)$. Khi đó, ta có:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m\le\dfrac{1}{3}\\ m\ge 3\end{array}\right.\\ 3-m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m\le\dfrac{1}{3}\\ m\ge 3\end{array}\right.\\ m<3\end{cases}\Leftrightarrow m\le\frac{1}{3}.$$

Đáp án C

Extra Techniques:

Tips:

Sở dĩ hàm số sau khi đặt ẩn phụ **bị thay đổi tính đơn điệu** là vì: hàm số $y=e^{-x}$ là một hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$ (do $y'=-e^{-x}<0,\forall x\in\mathbb{R}$).

Câu 68. Ta có: $f(x)=\dfrac{m-2\sin x}{1+\cos^2 x}=\dfrac{m-2\sin x}{2-\sin^2 x}$

Đặt: $t=\sin x,\left(t\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)\right)$.

Khi đó hàm số đã cho có dạng: $f(t)=\dfrac{-2t+m}{-t^2+2}$.

TXĐ: $t\in\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\sqrt{2}\right\}$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{-2t^2+2mt-4}{\left(2-t^2\right)^2}$.

Để hàm số $f(t)=\dfrac{-2t+m}{-t^2+2}$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ thì $f'(t)\le 0,\forall t\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Hay: $-2t^2+2mt-4\le 0,\forall t\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$

Suy ra: $m\le \min\limits_{\left(0;\frac{1}{2}\right]}\left[\dfrac{2t^2+4}{2t}\right]=\min\limits_{\left(0;\frac{1}{2}\right]}\left[t+\dfrac{2}{t}\right]$.

Xét hàm số: $y=t+\dfrac{2}{t},t\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Ta có: $y'=1-\dfrac{2}{t^2}<0,\forall t\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Nên: $\min\limits_{\left(0;\frac{1}{2}\right]}\left[t+\dfrac{2}{t}\right]=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\frac{1}{2}}=\dfrac{9}{2}$.

Vậy: $m\le\dfrac{9}{2}$.

Đáp án C

Câu 69. Ta có: $y'=f'(x)+m-1$.

Để hàm số đồng biến trên $(0;3)$ thì:

$f'(x)+m-1\ge 0,\forall x\in(0;3)\Rightarrow 1-m\le\min\limits_{(0;3)}f'(x)$

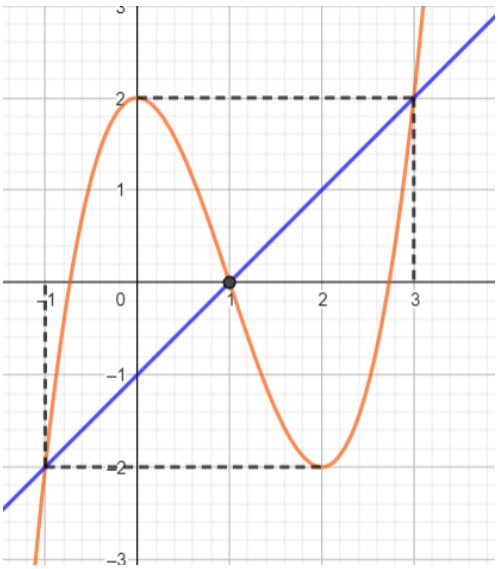
Suy ra: $1-m\le -3\Leftrightarrow m\ge 4$.

Đáp án C

Câu 70. Ta có: $g'(x)=f'(x-m)-(x-m-1)$.

Đặt: $h(x)=f'(x)-(x-1)=0\Rightarrow f'(x)=x-1$.

Kẻ đường thẳng: $y=x-1$ tương giao với đồ thị $y=f'(x)$.



Dựa vào sự tương giao hàm số ta thấy:

$h(x)\ge 0\Leftrightarrow f'(x)\ge x-1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 3\\-1\le x\le 1\end{array}\right.$.

Do đó: $g'(x)=h(x-m)\ge 0$.

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-m\ge 3\\-1\le x-m\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge m+3\\m-1\le x\le m+1\end{array}\right.$.

Vì hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$ nên ta có: $\left[\begin{array}{l}m+3\le 5\\\begin{cases}m-1\le 5\\m+1\ge 6\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le 2\\5\le m\le 6\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện ta có: $m=\{1;2;5;6\}$.

Suy ra: $S=1+2+5+6=14$.

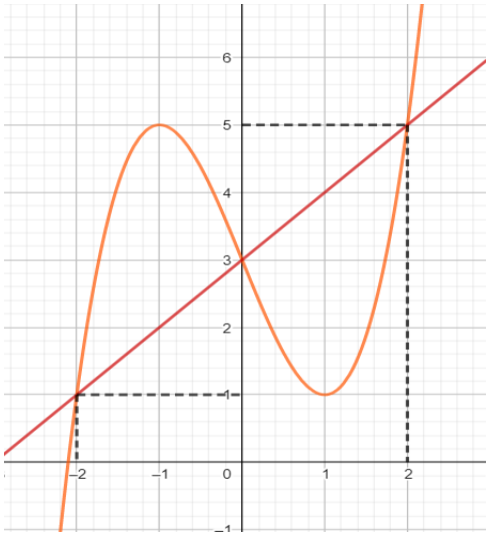
Đáp án C

Câu 71. Ta có: $g'(x)=f'(x)-x-3$.

Cho $g'(x)=0\Rightarrow f'(x)=x+3$.

Vẽ đường thẳng $y=x+3$ tương giao với đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never stop anywhere until you try



Dựa vào đồ thị tương giao ta có kết luận:

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên:

x	-2		0		2	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	$g(-2)$	$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	$g(2)$	$\nearrow$

Vậy: với mọi giá trị thực của m, hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

Đáp án C

Câu 72. Ta có: $g'(x)=(2x-1).f'\left(x^2-x+m\right)$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$ thì:

$g'(x)\le 0, \forall x\in(-1;0)$ $(*)$.

Ta có: $-1<x<0 \Rightarrow -3<2x-1<-1<0$.

Như vậy:

$g'(*) \Leftrightarrow f'\left(x^2-x+m\right)\ge 0, \forall x\in(-1;0)$ $(**)$.

Dựa vào bảng xét dấu của đồ thị đạo hàm ta có:

$$(**) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x+m\le 1, \forall x\in(-1;0) \\ x^2-x+m\ge 4, \forall x\in(-1;0) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le \min\limits_{[-1;0]}\left(-x^2+x+1\right)=-1 \\ m\ge \max\limits_{[-1;0]}\left(-x^2+x+4\right)=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ m\ge 4 \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện ta có: $4\le m<2021$.

$\Rightarrow m=\{4;5;6;...;2020\}$.

Vậy có 2017 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Đáp án C

Extra Techniques:

Tips:

Hai hàm số $y=-x^2+x+k$ với k là tham số thực là hai hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$ do $-2x+1>0$. Vì thế trên đoạn $[-1;0]$ giá trị nhỏ nhất đạt tại $x=-1$ và giá trị lớn nhất đạt tại $x=0$.

Câu 73. Ta có: $f'(x)=(x-1)^2\left(x^2-2x\right)>0$.

Khi đó: $\left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>2 \end{array}\right. (1)$.

Xét hàm số: $g(x)=f\left(x^2-8x+m\right)$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
You don't get anywhere unless you try

Ta có: $g'(x)=(2x-8).f'\left(x^2-8x+m\right)$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$ thì:

$g'(x)\ge 0,\forall x>4\ (*)$.

$(*)\Leftrightarrow (2x-8).f'\left(x^2-8x+m\right)\ge 0,\forall x>4$

$\Rightarrow f'\left(x^2-8x+m\right)\ge 0,\forall x>4\ (2)$

(Do $x>4\Rightarrow 2x-8>0$).

Từ $(1)(2)\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-8x+m\le 0,\forall x>4 \\ x^2-8x+m\ge 2,\forall x>4 \end{array}\right.$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le \min\limits_{[4;+\infty)}\left[-x^2+8x\right]\ (\#\#\#) \\ m\ge \max\limits_{[4;+\infty)}\left[-x^2+8x+2\right] \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{[4;+\infty)}\left[-x^2+8x+2\right]=18$

$\Rightarrow 18\le m<2021\Rightarrow m=\{18;19;...;2020\}$

Như vậy có tất cả 2003 giá trị m thỏa mãn.

Đáp án A

Extra Techniques:
Tips:
Bất $(\#\#\#)$ vô nghiệm là vì: Hàm số $y=-x^2+8x$ không có GTNN trên $[4;+\infty)$.

Câu 74. Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm ta nhận thấy: Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên hai khoảng rời nhau $(-1;1)$ và $(1;3)$ nhưng liên tục trên toàn khoảng $(-1;3)$.

Ta có: $g'(x)=f'(x+m)$.

Xét trên khoảng $(0;2)$, ta có:

$0<x<2\Rightarrow m<x+m<m+2$.

Để hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên $(0;2)$ thì:

$(m;m+2)\subset(-1;3)\Leftrightarrow \begin{cases} m\ge -1 \\ m+2\le 3 \end{cases}\Leftrightarrow -1\le m\le 1$

Do vậy: $m=\{-1;0;1\}$.

Đáp án A

Câu 75. Ta có:

$11<x<27\Rightarrow m+3<\sqrt{x-2}+m<m+5$.

Đặt: $t=\sqrt{x-2}+m,\left(t\in(m+3;m+5)\right)$.

Khi đó yêu cầu bài toán chuyển về việc tìm m để hàm số $y=f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(m+3;m+5)\ (*)$.

Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm, ta thấy rằng:

Hàm số $y=f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$. Do đó để $(*)$ xảy ra thì:

$\begin{cases} m+3\ge 1 \\ m+5\le 3 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m\ge -2 \\ m\le -2 \end{cases}\Leftrightarrow m=-2$.

Vậy chỉ có duy nhất một giá trị thực của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đáp án A

Câu 76. Tìm ĐKXĐ:

Để hàm số $y=\ln\left(f(x)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x+m\right)$

tồn tại thì: $g(x)=f(x)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x+m$

phải thỏa mãn: $g(x)>0,\forall x\in(-1;3)(*)$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Ta có:

$$g'(x)=f'(x)+\left(x^2-6x+9\right)=f'(x)+(x-3)^2$$

.

Dựa vào bảng xét dấu đồ thị đạo hàm ta thấy: $f'(x)>0,\forall x\in(-1;3)$.

Dễ thấy: $(x-3)^2>0,\forall x\in(-1;3)$.

Khi đó: $g'(x)>0,\forall x\in(-1;3)$. Hay nói cách khác trên khoảng $(-1;3)$ hàm số $y=g(x)$ đồng biến.

Suy ra: $\min\limits_{[-1;3]}g(x)=g(-1)=m-\dfrac{31}{3}$.

Để $(*)$ xảy ra thì: $m-\dfrac{31}{3}\ge 0\Rightarrow m\ge\dfrac{31}{3}$.

Mặt khác: $\forall m\ge\dfrac{31}{3}$, ta có:

$$y'=\frac{f'(x)+(x-3)^2}{f(x)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x+m}>0,\forall x\in(-1;3)$$

Vậy: $m\in\left[\dfrac{31}{3};2021\right]\Rightarrow m=\{11;12;...;2021\}$.

Hay có 2011 giá trị thực của tham số m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Đáp án A

Câu 77. Ta có:

$$y'=f'(x)-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x-2m+1.$$

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$ thì: $y'\ge 0,\forall x\in(1;3)\ (*)$.

Đặt: $x=t+2,\left(t\in(-1;1)\right)$.

Khi đó: $\forall t\in(-1;1)$, $(*)$ tương đương với:

$$f'(t+2)-\frac{1}{3}(t+2)^3+2(t+2)^2-3(t+2)-2m+1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow f'(t+2)-\frac{1}{3}t^3+t+\frac{1}{3}\ge 2m,\forall t\in(-1;1)(**).$$

Xét hàm số: $g(t)=f'(t+2)-\dfrac{1}{3}t^3+t+\dfrac{1}{3}$.

Ta có: $g'(t)=f''(t+2)-t^2+1$.

Dựa vào bảng xét dấu của đồ thị đạo hàm, ta thấy: $f''(t+2)>0,\forall t\in(-1;1)$.

Dễ thấy: $-1<t<1\Rightarrow t^2<1\Rightarrow -t^2+1>0$.

Vậy: $g'(t)=f''(t+2)-t^2+1>0,\forall t\in(-1;1)$.

Suy ra: Hàm số $y=g(t)$ đồng biến trên $(-1;1)$

Để $(**)$ xảy ra thì: $g(t)\ge 2m,\forall t\in(-1;1)$.

$$\Leftrightarrow m\le\frac{1}{2}\min_{[-1;1]}g(t)=\frac{1}{2}g(-1)=\frac{1}{2}\left[f'(1)+1\right]=\frac{3}{2}$$

Kết hợp điều kiện ta có: $-2021\le m\le\dfrac{3}{2}$.

Suy ra: $m=\{-2021;-2020;...;1\}$.

Vậy có tất cả 2023 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Đáp án A

Câu 78. Ta dễ dàng phát họa được bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ dựa trên bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như sau:

NHÓM TOÁN ANH DÚI

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↗		↗		↘	

Mặt khác:

$g'(x)=(2x-1)f(x)+(x^2-x+2)f'(x)$.

Bảng xét dấu của hàm số đạo hàm $g'(x)$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$?$	
$(2x-1)f(x)$		$+$	0	$-$		$+$		$+$	0	$?$	
x^2-x-2		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x^2-x-2)f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$		$-$		$?$		$?$		$?$	

Dựa vào bảng xét dấu của $y=g'(x)$ ta chỉ có thể chắc chắn được rằng: Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$.

Đáp án C

Câu 79. Ta có:

$$y'=e^{-x^2+mx+1}\left[(-2x+m)f(x)+f'(x)\right].$$

Hàm số đồng biến trên $(1;4)$ khi và chỉ khi:

$y'\geq 0,\forall x\in(1;4)\Leftrightarrow(-2x+m)f(x)+f'(x)\geq 0,$

$\forall x\in(1;4)$ $(*)$ (Do $e^{-x^2+mx+1}>0,\forall x,m\in\mathbb{R}$).

Vì: $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -2x+m\geq -\frac{f'(x)}{f(x)}$.

$\Rightarrow m\geq 2x-\frac{f'(x)}{f(x)},\forall x\in(1;4)\Rightarrow m\geq \max\limits_{(1;4)}\left[2x-\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$

Xét hàm số $g(x)=2x-\frac{f'(x)}{f(x)},(x\in(0;4))$.

Ta có: $g'(x)=2-\frac{f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{f^2(x)}$.

Vì: $f''(x)<0,\forall x\in(1;4)\Rightarrow f''(x).f(x)<0,\forall x\in(1;4)$

Khi đó: $\frac{f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{f^2(x)}<0,\forall x\in(1;4)$

$\Leftrightarrow g'(x)=2-\frac{f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{f^2(x)}>0,\forall x\in(1;4)$

Vậy hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên $(1;4)$.

Suy ra:

$$m\geq \max_{(1;4)}\left[2x-\frac{f'(x)}{f(x)}\right]=\max_{(1;4)}g(x)=g(4)=8.$$

Kết hợp điều kiện ta có: $m=\{8;9;10;...;2021\}$.

Vậy có tất cả 2014 giá trị thực m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Đáp án D

Câu 80. Dựa vào dữ kiện đã được cho ở đề bài ta có thể suy ra các "manh mối" sau:

- Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có giao điểm với trục hoành.
- Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

- $f(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$ (Vì: $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x)=-1$).

Ta có: $g'(x)=\dfrac{\left\{2(x-1)\left[\left(-2m^2+1\right)x+m\right]+...\right.}{f^2(x)}$

$$\frac{...+\left.(x-1)^2\left(-2m^2+1\right)\right\}.f(x)-...}{f^2(x)}$$

$$\frac{...(x-1)^2\left[\left(-2m^2+1\right)x+m\right].f'(x)}{f^2(x)}.$$

$$\Leftrightarrow g'(x)=\frac{(x-1)\left[\left(-2m^2+1\right)(3x-1)+2m\right]f(x)-...}{f^2(x)}$$

$$\frac{...(x-1)^2\left[\left(-2m^2+1\right)x+m\right].f'(x)}{f^2(x)}.$$

$$\Leftrightarrow g'(x)=\frac{(x-1)\left\{\left[\left(-2m^2+1\right)(3x-1)+2m\right]f(x)-...\right.}{f^2(x)}$$

$$\frac{\left....(x-1)\left[\left(-2m^2+1\right)x+m\right].f'(x)\right\}}{f^2(x)}.$$

Đặt: $h(x)=\left[\left(-2m^2+1\right)(3x-1)+2m\right]f(x)-...$

$$...(x-1)\left[\left(-2m^2+1\right)x+m\right].f'(x).$$

Vì: $g'(x)=0$ có một nghiệm bội lẻ $x=1$ nên điều kiện cần để $g'(x)\ge 0$ là: $h(1)=0$.

Ta có: $h(1)=2\left(-2m^2+m+1\right).f(1)=0$.

$$\Leftrightarrow -2m^2+m+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-\dfrac{1}{2}\\ m=1\end{array}\right..$$

Thử lại:

- Với $m=-\dfrac{1}{2}\,(L)$. Do:

$$g'(x)=\frac{1}{2}.\frac{3(x-1)^2.f(x)-(x-1)^3.f'(x)}{f^2(x)}<0,\forall x\in\mathbb{R}$$

- Với $m=1$.

$$g'(x)=\frac{-3(x-1)^2.f(x)+(x-1)^3.f'(x)}{f^2(x)}>0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Vậy có duy nhất một giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đáp án A

Extra Techniques:

Tips:

Sỡ dĩ ta có thể kết luận dấu của $g'(x)$ tại $m=-\dfrac{1}{2}$ và $m=1$ là do:

$$\begin{cases}(x-1)^2\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\\ f(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}\\ f^2(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\\ (x-1)^3\ge 0,\forall x\in[1;+\infty)\\ f'(x)\ge 0,\forall x\in[1;+\infty)\\ (x-1)^3\le 0,\forall x\in(-\infty;1)\\ f'(x)\le 0,\forall x\in(-\infty;1)\end{cases}$$

Câu 81. Ta có: $M\in(P)\Rightarrow 16a+4b+c=3\,(1)$.

Mặt khác: Giao điểm của đồ thị hàm số (P) với trục hoành là điểm $N(3;0)$ và $Q(t;0),(t<3)$.

Hay nói cách khác: Phương trình $f(x)=0$ có

hai nghiệm thực phân biệt: $\left[\begin{array}{l} x=t,\ (t<3) \\ x=3 \end{array}\right.$.

Theo định lý Viéte, ta có: $\begin{cases} t+3=-\dfrac{b}{a} \\ 3t=\dfrac{c}{a} \end{cases}$.

Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ $I\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ lên trục hoành.

Khi đó: $IH=d\left(I,Ox\right)=y\left(I\right)=-\dfrac{\Delta}{4a}$.

Ta có: $S_{\Delta INQ}=\dfrac{1}{2}IH.NQ=\dfrac{1}{2}.\left|-\dfrac{\Delta}{4a}\right|.\left(3-t\right)$.

Vì: $S_{\Delta INQ}=1$.

Suy ra: $\dfrac{1}{2}.\left|-\dfrac{\Delta}{4a}\right|.\left(3-t\right)=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right|.\left(3-t\right)=1\Leftrightarrow \left|\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right|.\left(3-t\right)=2$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{b^2}{4a}-c\right|.\left(3-t\right)=2\Leftrightarrow \left|\dfrac{b^2}{4a^2}-\dfrac{c}{a}\right|.\left(3-t\right)=\dfrac{8}{\left|a\right|}$

$\Leftrightarrow \left|\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{c}{a}\right|.\left(3-t\right)=\dfrac{2}{\left|a\right|}$

$\Leftrightarrow \left(3-t\right).\left|\dfrac{\left(t+3\right)^2}{4}-3t\right|=\dfrac{2}{\left|a\right|}\Leftrightarrow \left(3-t\right)^3=\dfrac{2}{\left|a\right|}\left(2\right)$

Vì: $f\left(3\right)=0\Rightarrow 9a+3b+c=0\left(3\right)$.

Từ $\left(1\right)\left(3\right)\Rightarrow \begin{cases} 16a+4b+c=3 \\ 9a+3b+c=0 \end{cases}\Rightarrow 7a+b=3$.

$\Rightarrow b=3-7a$.

Ta có: $t+3=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{7a-3}{a}=7-\dfrac{3}{a}\Rightarrow \dfrac{1}{a}=\dfrac{4-t}{3}$.

Thay vào $\left(2\right)$, ta được: $\left(3-t\right)^3=\dfrac{8\left(4-t\right)}{3}\left(*\right)$.

$\left(*\right)\Leftrightarrow 3t^3-27t^2+73t-49=0\Leftrightarrow t=1$.

Suy ra: $\begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=3 \end{cases}\Rightarrow y=f\left(x\right)=x^2-4x+3$.

Khi đó:

$f\left(2x-1\right)=\left(2x-1\right)^2-4\left(2x-1\right)+3=4x^2-12x+8$

Hàm số trở thành một Parabol có hệ số $a>0$ và đỉnh $I\left(\dfrac{3}{2};-1\right)$ nên hàm số có dạng hình chữ $\cup$.

Nên hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Mà: $\left(5;7\right)\subset\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(5;7\right)$.

Đáp án C

Câu 82. Ta có:

$$\left[f\left(x\right)-x\right].f\left(x\right)=x^6+3x^4+2x^2\left(*\right).$$

$\left(*\right)\Leftrightarrow f^2\left(x\right)-x.f\left(x\right)-x^6-3x^4-2x^2=0$.

Đặt: $t=f\left(x\right)$, phương trình đã cho trở thành:

$$t^2-xt-x^6-3x^4-2x^2=0\left(**\right).$$

Xem phương trình $\left(**\right)$ như một phương trình theo ẩn t, tham số x.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Ta có: $\Delta = 4x^6 + 12x^4 + 9x^2 = \left(2x^3 + 3x\right)^2$.

Suy ra: $t = \dfrac{x \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{x + 2x^3 + 3x}{2} = x^3 + 2x \\ \dfrac{x - 2x^3 - 3x}{2} = -x^3 - x \end{array}\right.$.

Vậy: $\left[\begin{array}{l} f(x) = x^3 + 2x \\ f(x) = -x^3 - x \end{array}\right.$.

Do $f(1) < 0 \Rightarrow f(x) = -x^3 - x$.

Ta có: $g'(x) = f'(x) + 4x = -3x^2 - 1 + 4x > 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3} < x < 1$.

Đáp án C

Câu 83. Xét biểu thức: $2f(x) + f(1-x) = x^2$.

Thay đổi vai trò của x và $1-x$ bằng cách đặt: $x = 1 - t$, ta được: $2f(1-t) + f(t) = (1-t)^2$.

Hay: $2f(1-x) + f(x) = (1-t)^2$.

Ta có hệ: $\begin{cases} 2f(x) + f(1-x) = x^2 \\ 2f(1-x) + f(x) = (1-x)^2 \end{cases}$.

$\Rightarrow \begin{cases} 4f(x) + 2f(1-x) = 2x^2 \ (1) \\ f(x) + 2f(1-x) = x^2 - 2x + 1 \ (2) \end{cases}$

Lấy $(1) - (2)$ theo từng vế, ta được:

$3f(x) = x^2 + 2x - 1$.

Do vậy:

$y = 3x.f(x) + x^2 + 4x + 1 = x\left(x^2 + 2x - 1\right) + x^2 + 4x + 1$

$\Rightarrow y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Rightarrow y = (x+1)^3$.

Ta có: $y' = 3(x+1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nên hàm số đồng biến trên toàn tập $\mathbb{R}$.

Đáp án C

Câu 84. Chọn hàm:

Chọn: $f(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$.

Khi đó: $f'(x) = 2ax + b$.

Ta có: $\left[f'(x)\right]^2 + 4f(x) = 8x^2 + 16x - 8$

$\Leftrightarrow (2ax + b)^2 + 4\left(ax^2 + bx + c\right) = 8x^2 + 16x - 8$

$\Leftrightarrow \left(4a^2 + 4a\right)x^2 + (4ab + 4b)x + b^2 + 4c = 8x^2 + 16x - 8$

Đồng nhất hai vế, ta có:

$\begin{cases} 4a^2 + 4a = 8 \\ 4ab + 4b = 16 \\ b^2 + 4c = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a(a+1) = 8 \\ 4b(a+1) = 16 \\ b^2 + 4c = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a^2 + 4a = 8 \\ b = 2a \\ c = \dfrac{-b^2 - 8}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = -2 \\ a = 1 \end{array}\right. \\ b = 2a \\ c = \dfrac{-b^2 - 8}{4} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \\ c = -6 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = -2x^2 - 4x - 6 \\ f(x) = x^2 + 2x - 3 \end{array}\right.$

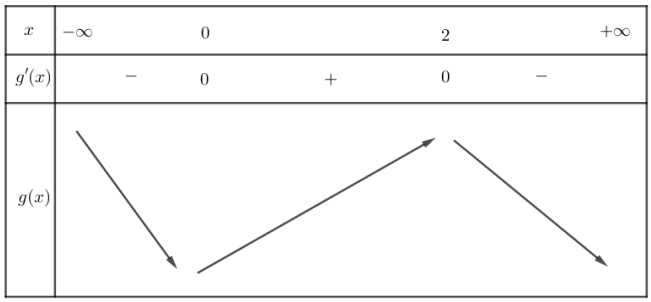
Vì: $f(1) = 0 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x - 3$.

Suy ra: $g(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 \Rightarrow g'(x) = -x^2 + 2x$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

NHÓM TOÁN ANH DÚI Never get anywhere unless you try



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Đáp án C

Câu 85. Dựa vào đồ thị hàm số được cho ở trên ta có một số điểm đáng lưu ý để tìm hàm:

Đặt: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

Suy ra: $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

$$\begin{cases} f(0)=4 \\ f(2)=0 \\ f'(0)=0 \\ f'(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=4 \\ 8a+4b+c+d=0 \\ c=0 \\ 12a+4b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=0 \\ d=4 \end{cases}.$$

Khi đó: $f(x)=x^3-3x^2+4$.

Suy ra: $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)=...$

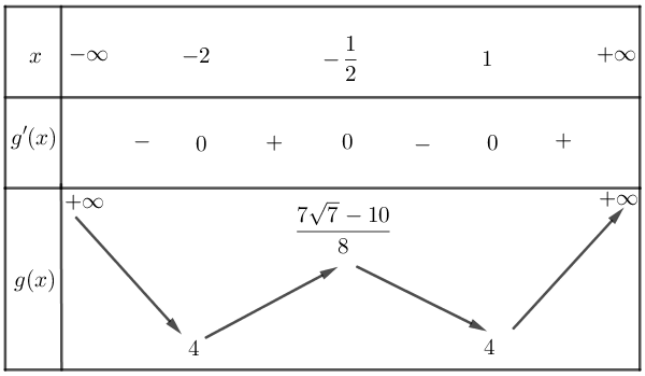
$$...\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)^3-3\left(x^2+x+2\right)+4 .$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{3}{2}(2x+1)\sqrt{x^2+x+2}-3(2x+1)$$

$$\Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow 3(2x+1)\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x+2}-1\right)=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2} \\ x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu của hàm số $y=g(x)$:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$ và khoảng $(1;+\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và khoảng $\left(-\frac{1}{2};1\right)$.

Vì: $\left(-\frac{1}{2};0\right)\subset\left(-\frac{1}{2};1\right)$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

Đáp án C

Câu 86. Dựa vào đồ thị hàm số ta có:

$$\begin{cases} f'(-1)=0 \\ f'(0)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1+a-b+c=0 \\ c=0 \\ 1+a+b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \\ c=0 \end{cases}.$$

Như thế: $f'(x)=x^3-x \Rightarrow f''(x)=3x^2-1$.

Xét hàm số: $y=g(x)=f\left(f'(x)\right)$.

Ta có: $g'(x)=f'\left(f'(x)\right).f''(x)=0$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

$$\Leftrightarrow f'\left(x^3-x\right).\left(3x^2-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-x=0\\x^3-x=1\\x^3-x=-1\\3x^2-1=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x=0\\x=\pm A,\left(A\approx1,325\right)\\x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-A$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	A	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$ 0	$-$	0	$+$	0	$-$	0 $+$ 0 $-$ 0 $+$

Vì: $\left(-\infty;-2\right)\subset\left(-\infty;-A\right)$.

Nên hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-2\right)$.

Đáp án B

Câu 87. Ta có: $g'\left(x\right)=f'\left(x-m\right)$.

Cho $g'\left(x\right)=0$, ta được:

$$\left[\begin{array}{l}x-m=-1\\x-m=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m-1\\x=m+2\end{array}\right.$$

Ta có:

$$g'\left(x\right)\geq0\Leftrightarrow f'\left(x-m\right)\geq0\Rightarrow x-m\geq2\Rightarrow x\geq m+2$$

Để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-2;0\right)$ thì:

$$g'\left(x\right)\geq0,\forall x\in\left(-2;0\right)\Rightarrow\min_{[-2;0]}\left[f\left(x-m\right)\right]\geq0$$

$$\Rightarrow m+2\leq\min_{[-2;0]}x=-2\Rightarrow m\leq-4$$

Kết hợp với điều kiện, ta có: $-2021\leq m\leq-4$.

Hay: $m=\left\{-2021;-2020;...;-4\right\}$.

Như vậy tập S có tất cả 2018 phần tử.

Đáp án C

Câu 88. Ta có:

$$y'=-3f'\left(2-x\right).e^{3f\left(2-x\right)+1}-f'\left(2-x\right).3^{f\left(2-x\right)}.\ln3$$

$$\Leftrightarrow y'=-f'\left(2-x\right).\left[3e^{3f\left(2-x\right)+1}+3^{f\left(2-x\right)}.\ln3\right].$$

Vì: $3e^{3f\left(2-x\right)+1}+3^{f\left(2-x\right)}.\ln3>0$.

Nên: $y'\geq0\Leftrightarrow-f'\left(2-x\right)\geq0\Rightarrow f'\left(2-x\right)\leq0$.

Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm $f'\left(x\right)$, ta có:

$$f'\left(2-x\right)\leq0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-x\leq-1\\1\leq2-x\leq4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq3\\-2\leq x\leq1\end{array}\right.$$

Đáp án D

Câu 89. Ta có: $y'=\left[f'\left(x\right)\right].e^{f\left(x\right)-m^2+2}$.

Để $y'\leq0$ thì: $\left[f'\left(x\right)\right].e^{f\left(x\right)-m^2+2}\leq0\left(*\right)$.

Vì: $e^{f\left(x\right)-m^2+2}>0,\forall x,m\in\mathbb{R}$.

Do đó: $\left(*\right)\Leftrightarrow f'\left(x\right)\leq0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\leq-1\\0\leq x\leq4\end{array}\right.$.

Mà: $\left(1;2\right)\subset\left[0;4\right]$.

Nên hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(1;2\right)$.

Đáp án C

Câu 90. Xét hàm số:

$$y=f(x).g(x)+\sqrt{2x+3}-\frac{1}{x+2}(*).$$

TXĐ: $D=\left[-\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Đoạn xét hàm số $(*)$: $D'=\left[-\frac{3}{2};1\right]$.

Vì: $\begin{cases}(-2;1)\not\subset\left[-\frac{3}{2};1\right]\\(1;4)\not\subset\left[-\frac{3}{2};1\right]\end{cases}$

Nên ta có thể loại ngay phương án **A**, **D**.

Ta có:

$$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)+\frac{1}{\sqrt{2x+3}}+\frac{1}{(x+2)^2}$$

Vì: $\frac{1}{\sqrt{2x+3}}+\frac{1}{(x+2)^2}>0,\forall x\in D'$. Nên ta chỉ có thể kết luận rằng: $y'>0$ trên khoảng con $K\subset D'$ nếu và chỉ nếu ta có được:

$$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)>0,\forall x\in K.$$

Dựa vào bảng biến thiên của hai đồ thị $y=f(x)$, $y=g(x)$ ta nhận thấy rằng:

Trên đoạn $[-1;1]$, ta có: $\begin{cases}f(x)>0\\f'(x)>0\\g(x)\ge 0\\g'(x)\ge 0\end{cases}$.

Do đó:

$$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\ge 0,\forall x\in[-1;1]$$

Vậy hàm số chắc chắn đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

Đáp án B

Extra Techniques:

Tips:

Sở dĩ ta có loại đáp án **C** là vì: $\begin{cases}f(x)>0,\forall x\in\left(-\frac{3}{2};-1\right)\\g'(x)<0,\forall x\in\left(-\frac{3}{2};-1\right)\\f'(x)>0,\forall x\in\left(-\frac{3}{2};-1\right)\\g(x)>0,\forall x\in\left(-\frac{3}{2};-1\right)\end{cases}$

Suy ra: $\begin{cases}f(x)g'(x)<0,\forall x\in\left(-\frac{3}{2};-1\right)\\f'(x)g(x)>0,\forall x\in\left(-\frac{3}{2};-1\right)\end{cases}$

Vì vậy ta không thể kết luận dấu của y'.

Câu 91. Xét hàm số: $y=g(x)=f\left(\frac{2-x}{1+x}-m\right)$.

Ta có: $g'(x)=-\frac{3}{(x+1)^2}.f'\left(\frac{2-x}{x+1}-m\right)$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$, thì:

$g'(x)\ge 0,\forall x\in(2;+\infty)\ (*)$.

$(*)\Leftrightarrow f'\left(\frac{2-x}{x+1}-m\right)\le 0,\forall x\in(2;+\infty)\ (**)$.

Mặt khác, xét hàm số: $y=f(x)$, có:

$y' = f'(x) = (x+1)(x-1)(x-4), \forall x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) \le 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x-4) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -1 \\ 1 \le x \le 4 \end{array}\right.$.

Từ hai điều trên ta suy ra:

$(**) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2-x}{x+1} - m \le -1 \ (1) \\ 1 \le \dfrac{2-x}{x+1} - m \le 4 \ (2) \end{array}\right., \forall x \in (2;+\infty)$.

Xét hàm số: $y = \dfrac{2-x}{x+1} - m, \forall x \in (2;+\infty)$.

Ta có: $y' = -\dfrac{3}{(x+1)^2} < 0, \forall x \in (2;+\infty)$.

Bảng biến thiên:

x	2	$+\infty$
y'	$\|$	$-$
y	$-m$ $\|$	$\searrow$ $-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số không tồn tại giá trị nhỏ nhất, vì thế (2) không thể xảy ra (Do $\min\limits_{x \to +\infty} y < 1$).

$(1) \Leftrightarrow -m \le -1 \Leftrightarrow m \ge 1$.

Kết hợp với điều kiện đề bài: $m \le 2021$.

Khi đó: $1 \le m \le 2021$.

Vậy có tất cả 2021 giá trị thực của tham số m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Đáp án D

Câu 92. Xét hàm số: $y = g(x)$ trên khoảng $(1;e^2)$, ta có:

$g'(x) = \dfrac{1}{x} f'(\ln x) - 2mx + m = \dfrac{1}{x}.(\ln x + 1).e^{\ln x} - 2mx + m$

$\Leftrightarrow g'(x) = \dfrac{1}{x}(\ln x + 1).x - m(2x-1) = \ln x + 1 - (2x-1)m$

Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;e^2)$ khi và chỉ khi: $\ln x + 1 - (2x-1)m \le 0, \ \forall x \in (1;e^2)$

$\Leftrightarrow \ln x + 1 \le (2x-1)m \Leftrightarrow \dfrac{\ln x + 1}{2x-1} \le m, \ \forall x \in (1;e^2)$.

(Do $x > 1 \Rightarrow 2x - 1 > 1 > 0$).

Vậy: $m \ge \max\limits_{[1;e^2]} \left(\dfrac{\ln x + 1}{2x-1}\right)$.

Xét hàm số: $y = \dfrac{\ln x + 1}{2x-1}, \ \forall x \in (1;e^2)$.

$\Rightarrow y' = \dfrac{\frac{1}{x}(2x-1) - 2(\ln x + 1)}{(2x-1)^2} = \dfrac{-\frac{1}{x} - 2\ln x}{(2x-1)^2} < 0, \forall x \in (1;e^2)$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;e^2)$ hay nói cách khác $\max\limits_{[1;e^2]} \left(\dfrac{\ln x + 1}{2x-1}\right) = \dfrac{\ln(1)+1}{2.1-1} = 1 \Rightarrow m \ge 1$.

Kết hợp với điều kiện đề bài, ta có: $1 \le m \le 2021$

Vậy có tất cả 2021 giá trị thực của tham số m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Đáp án D

Câu 93. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x) = -f'(1-x) - \dfrac{2x+m}{x^2+mx+m^2+1}$.

Điều kiện "lỏng" để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$ là:

$$\begin{cases} -f'(1-x)>0, \forall x\in(-3;0) \\ -\dfrac{2x+m}{x^2+mx+m^2+1}>0, \forall x\in(-3;0) \end{cases}$$

$(+)$ Hàm số $y=-f'(1-x)$ trên $(-3;0)$.

Ta đặt: $t=1-x\Rightarrow x=1-t$.

Vì: $-3<x<0\Leftrightarrow -3<1-t<0\Leftrightarrow 1<t<4$.

Suy ra:

$-f'(1-x)>0,\ \forall x\in(-3;0)\Leftrightarrow -f'(t)>0,\ \forall x\in(1;4)$

Hay $-t(t+1)^3(t-1)^4.(t-4)^5>0,\ \forall t\in(1;4)$ $(*)$.

$(*)$ hiển nhiên, do: $1<t<4\Leftrightarrow \begin{cases} -4<-t<-1<0 \\ 8<(t+1)^3<125 \\ 0<(t-1)^4<81 \\ -243<(t-4)^5<0 \end{cases}$

Như vậy, yêu cầu bài toán quay về việc định giá trị của tham số m để hàm số:

$$-\frac{2x+m}{x^2+mx+m^2+1}>0, \forall x\in(-3;0)\ (**)$$

Vì: $x^2+mx+m^2+1=\left(x^2+mx+\frac{1}{4}m^2\right)+\frac{3}{4}m^2+1$

$=\left(x+\frac{m}{2}\right)^2+\frac{3m^2}{4}+1>0, \forall m\in\mathbb{R}$.

$(**)\Leftrightarrow 2x+m<0,\ \forall x\in(-3;0)\Rightarrow m\le \min\limits_{[-3;0]}(-2x)$

Mà $\min\limits_{[-3;0]}(-2x)=(-2.0)=0\Rightarrow m\le 0$.

Đáp án D

Câu 94. Xét hàm $y=g(x)=f(x+1)-mx+1$,

ta có: $g'(x)=f'(x+1)-m$.

Để hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì:

$$g'(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\ (*)$$

$(*)\Leftrightarrow f'(x+1)-m\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\le f'(x+1)$

Nói cách khác: $m\le \min\limits_{\mathbb{R}} f'(x)=\min\limits_{\mathbb{R}} f'(x+1)$.

Mà $f'(x+1)=\dfrac{(x+1)+2}{\sqrt{(x+1)^2+1}}=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Xét hàm số $y=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Ta có: $y'=\dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}-(x+3).\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}}{(x^2+2x+2)}$

$=\dfrac{x^2+2x+2-(x+3)(x+1)}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}=\dfrac{-2x-1}{\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)^3}$

$y'=0\Leftrightarrow -2x-1=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

Và: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} y=-1\sim \min\limits_{\mathbb{R}}\left(\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\right) \\ y\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{5}=\max\limits_{\mathbb{R}}\left(\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\right) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=1 \end{cases}$.

Suy ra: $m\le -1$.

Kết hợp với điều kiện $m\in(-20;20)$.

Suy ra: $m=\{-19;-18;...;-1\}$.

Vậy có tất cả 19 giá trị thực của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Đáp án B

Câu 95. Ta có: $y=g(x)=f(x+2)-mx$.

Suy ra: $g'(x)=f'(x+2)-m$.

Để hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$ thì $g'(x)\ge 0,\forall x\in(-2;1)$.

Hay: $f'(x+2)-m\ge 0,\ \forall x\in(-2;1)\ (*)$.

$(*)\Leftrightarrow m\le f'(x+2),\ \forall x\in(-2;1)$

$\Leftrightarrow m\le (x+3)x=x^2+3x,\ \forall x\in(-2;1)$

$\Rightarrow m\le \min\limits_{[-2;1]}(x^2+3x)$

Xét hàm số $y=x^2+3x,\ \forall x\in(-2;1)$.

Ta có: $y'=2x+3=0\Rightarrow x=-\dfrac{3}{2}$.

Và $\begin{cases} y(-2)=-2 \\ y\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{9}{4}=\min\limits_{[-2;1]}y \\ y(1)=4 \end{cases}$.

Vậy $m\le -\dfrac{9}{4}$.

Đáp án B

Câu 96. Đặt $t=2^{\cot x}\in(0;2)$.

Để hàm số $y=8^{\cot x}+(m-3).2^{\cot x}+3m-2$ **đồng** biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\pi\right)$ thì hàm số

$y=t^3+(m-3)t+3m-2$ phải **nghịch** biến trên khoảng $(0;2)$.

Hay: $3t^2+m-3\le 0,\forall x\in(0;2)$.

$\Rightarrow m\le \min\limits_{[0;2]}(3-3t^2)=3-3.2^2=-9$.

Do $m\in[-20;20]$ nên $m\in\{-20;-19;...;-9\}$.

Vậy có tất cả 12 giá trị nguyên của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\pi\right)$.

Đáp án B

Extra Techniques:

Remark:

Sở dĩ hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$ thì $g'(x)\ge 0,\forall x\in(-2;1)$ là vì hàm số $y=2^{\cot x}$ là một hàm nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\pi\right)$. Thật vậy! Ta có:

$$y'=2^{\cot x}.\ln 2.\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)<0,\ \forall x\in\left(\frac{\pi}{4};\pi\right).$$

Câu 97. Giả sử (C_m) luôn tiếp xúc với đường thẳng $y=ax+b$, khi đó phương trình sau có nghiệm với mọi m:

$$\begin{cases} \dfrac{(m-2)x-\left(m^2-2m+4\right)}{x-m}=ax+b \\ \dfrac{4}{(x-m)^2}=a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(m-2)(x-m)-4}{x-m}=a(x-m)+am+b \\ \dfrac{4}{(x-m)^2}=a \end{cases}$$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-2-\dfrac{4}{x-m}=a(x-m)+am+b \\ \dfrac{4}{(x-m)^2}=a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-2-am-b=a(x-m)+\dfrac{4}{x-m} \\ \dfrac{4}{(x-m)}=a(x-m) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-2-am-b=\dfrac{8}{x-m} \\ \dfrac{4}{(x-m)^2}=a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[m(1-a)-(b+2)\right]^2=\dfrac{64}{(x-m)^2} \\ \dfrac{4}{(x-m)^2}=a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[m(1-a)-(b+2)\right]^2=16a\,(*) \\ \dfrac{4}{(x-m)^2}=a \end{cases}$$

$$(*)\Leftrightarrow (1-a)^2m^2-2(1-a)(b+2)m+$$
$$+\left[(b+2)^2-16a\right]=0$$

Để tìm được hệ số a,b không phụ thuộc vào tham số m thì:

$$\begin{cases} (1-a)^2=0 \\ -2(1-a)(b+2)=0 \\ (b+2)^2=16a \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ \left[\begin{array}{l} a=1 \\ b=-2 \end{array}\right. \\ (b+2)^2=16a \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ (b+2)^2=16a \end{cases} \\ \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ (b+2)^2=16a \end{cases} \end{array}\right. \quad (VN)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \\ \begin{cases} a=1 \\ b=-6 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=x+2 \\ y=x-6 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} f(x)=x+2 \\ g(x)=x-6 \end{cases}$$

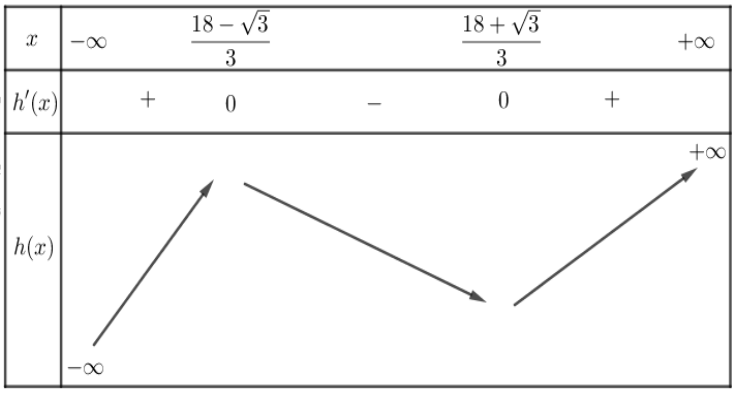
Như vậy:

$$h(x)=f\left(g^3(x)-g(x)\right)=(x-6)^3-(x-6)+2$$

Suy ra:

$$h'(x)=3(x-6)^2-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{18-\sqrt{3}}{3} \\ x=\dfrac{18+\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:



Đáp án B.

Câu 98. Để hàm số $y=g(x)$ luôn tăng trên khoảng $(0;1)$ thì $g'(x)>0,\forall x\in(0;1)$.

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{48}+\frac{8\left(\sqrt{x+3}-2\right)}{x-1}>m,\forall x\in(0;1).$$

Xét hàm số $h(x)=\dfrac{f(x)}{48}+\dfrac{8\left(\sqrt{x+3}-2\right)}{x-1}$ trên khoảng $(0;1)$.

Ta có: $h(x)=\dfrac{f(x)}{48}+\dfrac{8\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$

$$\Leftrightarrow h(x)=\frac{f(x)}{48}+\frac{8(x+3-4)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$

$$\Leftrightarrow h(x)=\frac{f(x)}{48}+\frac{8}{\sqrt{x+3}+2}$$

$$\Rightarrow h'(x)=\frac{f'(x)}{48}-8.\frac{\frac{1}{\sqrt{x+3}}}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow h'(x)=\frac{f'(x)}{48}-\frac{8}{\sqrt{x+3}\left(\sqrt{x+3}+2\right)^2}<0$$

$$,\forall x\in(0;1)$$

(do $0<\frac{f'(x)}{48}<\frac{1}{16}=0,0625$ và

$$0,25<\frac{8}{\sqrt{x+3}\left(\sqrt{x+3}+2\right)^2}<\frac{8}{7\sqrt{3}+12}\approx 0,3$$

với mọi $x\in(0;1)$).

$\Rightarrow h(x)<h(1),\forall x\in(0;1)$

Vậy để $g'(x)>0,\forall x\in(0;1)$, thì:

$$m\le h(1)=\frac{f(1)}{48}+2.$$

Đáp án C

Câu 99. Xét hàm số: $y=f\left(2x^3-6x+3\right)$.

Ta có: $y'=\left(6x^2-6\right).f'\left(2x^3-6x+3\right)$.

Dựa vào bảng biến thiên hàm số $y=f'(x)$, ta có:

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-1=0\\ \left[\left(2x^3-6x+3\right)-(-1)\right]^{2k}=0\\ 2x^3-6x+3=5\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\ \left[\left(2x^3-6x+3\right)-(-1)\right]^{2k}=0\left(k\in N^*\right)(*)\\ x^3-3x=1\,(**)\end{array}\right.$$

Xét phương trình $(*)$, nếu phương trình có nghiệm thì tất cả các nghiệm đều là nghiệm bội chẵn nên dấu đạo hàm khi đi qua các điểm đó không đổi dấu. Vì thế, ta không xét nghiệm $(*)$.

Xét phương trình: $x^3-3x=1$.

+) Với $|x|>2\Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm do $|VT|\ge 2>1=VP$.

+) Với $|x|\le 2$.

Đặt $x=2\cos t$. Khi đó phương trình trở thành :

$$8\cos^3 t-6\cos t=1\Leftrightarrow\cos 3t=\frac{1}{2}\,(***)$$

Phương trình $(***)$ có 3 nghiệm phân biệt:

$$x=2\cos\frac{\pi}{9},x=2\cos\frac{5\pi}{9},x=2\cos\frac{7\pi}{9}.$$

Suy ra phương trình $y'=0$ có 5 nghiệm bội lẻ,

lần lượt là: $\left\{\begin{array}{l}x_2=2\cos\frac{7\pi}{9}\\ x_3=-1\\ x_4=2\cos\frac{5\pi}{9}\\ x_5=1\\ x_6=2\cos\frac{7\pi}{9}\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu đạo hàm:

x	$2\cos(\frac{7\pi}{9})$		-1		$2\cos(\frac{5\pi}{9})$		1		$2\cos(\frac{\pi}{9})$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy:

Hàm số đồng biến trên các khoảng rời nhau:

$$\left(2\cos\frac{7\pi}{9};-1\right),\left(2\cos\frac{5\pi}{9};1\right),\left(2\cos\frac{\pi}{9};+\infty\right).$$

Do đó để hàm số đồng biến với mọi $x>m$,

$$\Rightarrow (m;+\infty)\subset\left(2\cos\frac{\pi}{9};+\infty\right)\Leftrightarrow m\geq 2\cos\frac{\pi}{9}=2\sin\frac{7\pi}{18}$$

Vậy $a=2,b=7,c=18\Rightarrow 2a+3b-c=7$.

Đáp án B

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Extra Techniques:

Tips:

Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng K và đạt cực trị tại điểm $x=x_0\in K$ thì hoặc đạo hàm của $y=f(x)$ bằng 0 hoặc đạo hàm của $y=f(x)$ không xác định.

Extra Techniques:

Remark:

Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng K và đạt cực đại tại điểm $x=a\in K$ và đạt cực tiểu tại điểm $x=b\in K$ thì ta gọi:

$x=a$ là điểm cực đại của **hàm số** $y=f(x)$.

$x=b$ là điểm cực tiểu của **hàm số** $y=f(x)$.

$A(a;f(a))$ là điểm cực đại của **đồ thị hàm số** $y=f(x)$.

$B(b;f(b))$ là điểm cực tiểu của **đồ thị hàm số** $y=f(x)$.

I.II. Cực trị - Điểm cực trị - Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất của hàm số

A. Lý thuyết cần nắm

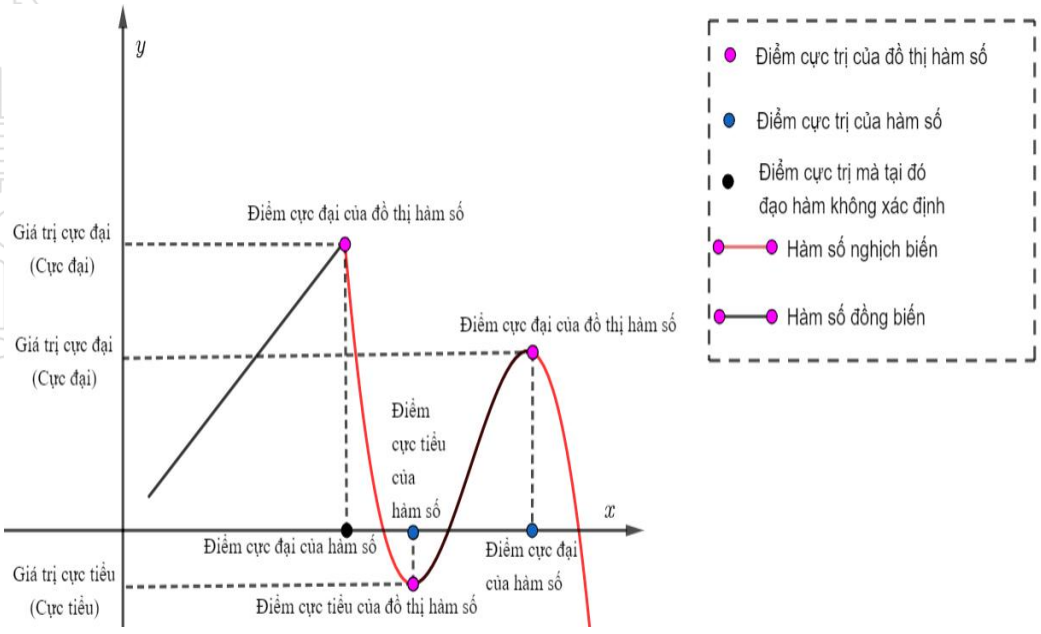
1. Định nghĩa

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$, $(a;b)$ có thể là khoảng hữu hạn hoặc vô hạn (∞) và điểm $x_0\in(a;b)$.

(i) Nếu tồn tại số $h>0$ sao cho $f(x)<f(x_0),\forall x\in(x_0-h;x_0+h)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $y=f(x)$ đạt **cực đại** tại điểm $x=x_0$.

(ii) Nếu tồn tại số $h>0$ sao cho $f(x)>f(x_0),\forall x\in(x_0-h;x_0+h)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $y=f(x)$ đạt **cực tiểu** tại điểm $x=x_0$.

(Minh họa **Đồ thị I.II.1**)



Đồ thị I.II.1

2. Giá trị cực trị (Cực trị)

Một cách đơn giản hóa khái niệm thế nào là cực trị hay giá trị cực trị đó là việc tính toán giá trị $f(x_0)$ với x_0 là điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$. Từ đây khi ta muốn xác định giá trị cực trị thì ta chỉ cần tính giá trị $f(x_0)$. Lưu ý: Giá trị cực trị là tên gọi khác của cực trị.

Extra Techniques:

Tips:

Mối quan hệ giữa cực trị và bảng biến thiên thực chất là **Định lý 1** dạng hình ảnh.

3. Định lý 1

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(x_0-h;x_0+h),(h>0)$ và có đạo hàm trên $(x_0-h;x_0+h),(h>0)$ hoặc $(x_0-h;x_0+h)\setminus\{x_0\}$.

Nếu $\left\{f'(x)>0\middle|\forall x\in(x_0-h;x_0),\ f'(x)<0\middle|\forall x\in(x_0;x_0+h)\right\}$ thì ta nói hàm số đạt **cực đại** tại điểm $x=x_0$.

Nếu $\left\{f'(x)<0\middle|\forall x\in(x_0-h;x_0),\ f'(x)>0\middle|\forall x\in(x_0;x_0+h)\right\}$ thì ta nói hàm số đạt **cực tiểu** tại điểm $x=x_0$.

4. Mối quan hệ giữa cực trị và bảng biến thiên của hàm số

x	x_0-h	x_0	x_0+h
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	$f_{CĐ}$	↘

x	x_0-h	x_0	x_0+h
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	f_{CT}	↗

5. Định lý 2

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên khoảng K, cụ thể: $K=(x_0-h;x_0+h),h>0$.

Nếu $\begin{cases}f'(x_0)=0\\f''(x_0)>0\end{cases}$ thì $x=x_0$ là điểm **cực tiểu** của hàm số $f(x)$

Nếu $\begin{cases}f'(x_0)=0\\f''(x_0)<0\end{cases}$ thì $x=x_0$ là điểm **cực đại** của hàm số $f(x)$

Tuy nhiên điều ngược lại không đúng.

(Xem thêm **Ví dụ I.II.1**, **Ví dụ I.II.2**).

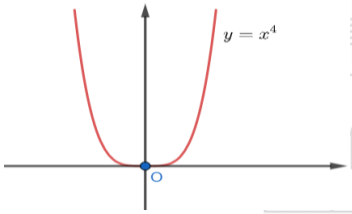
6. Nhận xét

Khi $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua điểm $x=x_0$ thì $x=x_0$ được gọi là điểm cực đại của hàm số.

Khi $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua điểm $x=x_0$ thì $x=x_0$ được gọi là điểm cực đại của hàm số.

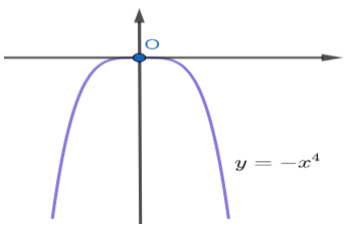
Ví dụ I.II.1.

Hàm số $y=x^4$ có: $\begin{cases}y'(0)=0\\y''(0)=0\end{cases}$ nhưng vẫn đạt cực tiểu tại điểm $x=0$.

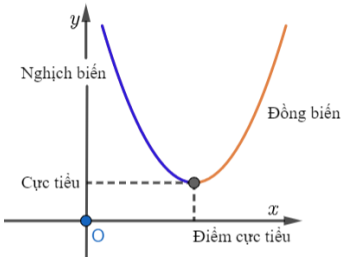


Ví dụ I.II.2.

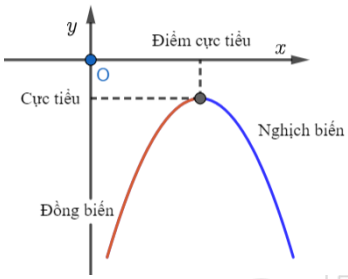
Hàm số $y=-x^4$ có: $\begin{cases}y'(0)=0\\y''(0)=0\end{cases}$ nhưng vẫn đạt cực đại tại điểm $x=0$.



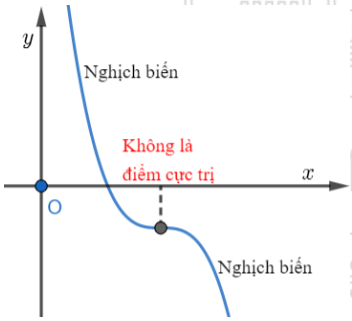
NHÓM TOÁN ANH DUI



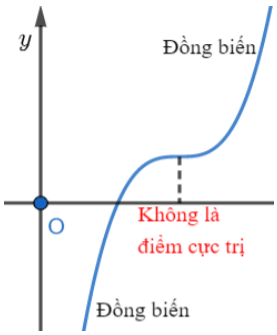
Đồ thị I.II.2.



Đồ thị I.II.3.



Đồ thị I.II.4.



Đồ thị I.II.5.

Tổng quát, từ các định lý và ví dụ trên ta thừa nhận định lý về điều kiện cần và đủ để hàm số có cực trị.

7. Định lý 3

Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $K(x_0-h;x_0+h)$ và có đạo hàm trên K hoặc $K\setminus\{x_0\}$, với $h>0$.

Nếu $f'(x)>0$ trên khoảng $(x_0-h;x_0)$ và $f'(x)<0$ trên khoảng $(x_0;x_0+h)$ thì $x=x_0$ là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

Nếu $f'(x)<0$ trên khoảng $(x_0-h;x_0)$ và $f'(x)>0$ trên khoảng $(x_0;x_0+h)$ thì $x=x_0$ là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

(Xem thêm **Đồ thị I.II.2**, **Đồ thị I.II.3**, **Đồ thị I.II.4**, **Đồ thị I.II.5**.)

8. Phương pháp xác định cực trị

1.Phương pháp 1. (Áp dụng cho dạng toán cổ điển).

Bước 1: Tìm tập xác định.

Bước 2: Tính đạo hàm $f'(x)$ và tìm tập các giá trị $x_i, i=\overline{1,n}$ thỏa mãn $f'(x_i)=0$ hoặc $f'(x_i)$ không xác định.

Bước 3: Lập bảng biến thiên, xét dấu đạo hàm.

Bước 4: Xác định cực trị của hàm số.

2. Phương pháp 2. (Áp dụng cho dạng toán tìm điểm cực trị với tham số m hoặc điều kiện đủ để $x=x_0$ là điểm cực trị của $y=f(x)$).

Bước 1: Tìm tập xác định.

Bước 2: Tính đạo hàm $f'(x)$ và tìm tập nghiệm $x_i, i=\overline{1,n}$ của phương trình $f'(x)=0$.

Bước 3: Tính đạo hàm cấp hai $f''(x)$ và đạo hàm cấp hai tại các điểm $x_i, i=\overline{1,n}$ vừa tìm được.

Bước 4: Xét dấu theo **Định lý 2**.

NHÓM TOÁN ANH DÚI

B. Bài tập trong các đề thi thử

Dạng 1. Xác định các vấn đề liên quan đến cực trị

Câu 1. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+\frac{1}{3}$ là?

A. $x=1$. **B.** $x=2$.

C. $A\left(1;\frac{7}{6}\right)$. **D.** $B(2;1)$.

Đáp án: D

Lời giải

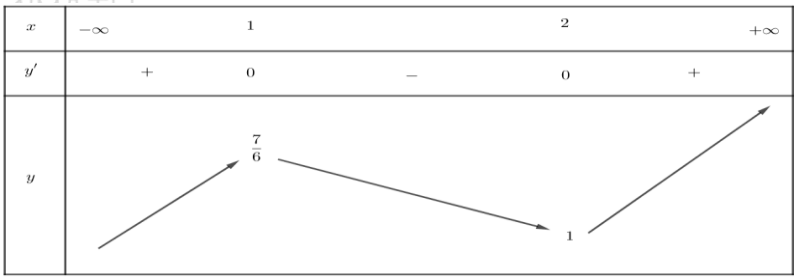
Xét hàm số: $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+\frac{1}{3}$.

Ta có: $y=x^2-3x+2$.

Khi đó: $y'=0\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta nhận thấy **điểm cực tiểu của đồ thị hàm số** là điểm $B(2;1)$.

Câu 2. Số cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+2$ là?

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Đáp án: A

Lời giải

Extra Techniques:

Tips:

Cực tiểu của hàm số chính là giá trị cực tiểu của hàm số. Các giá trị cực tiểu của hàm số thực ra là những hằng số, nếu các giá trị đó bằng nhau thì ta chỉ tính là 1.

Xét hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	-1		0		1	
y'	$-$ 0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	1	↗	2	↘	1	↗

Đồ thị hàm số có duy nhất một **cực tiểu** (**Giá trị cực tiểu**) là $y = 1$.

Câu 3. Cho hàm số $y = -x^4 + 2020x^2 + 2021$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số số có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

B. Hàm số có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.

C. Hàm số chỉ có một điểm cực đại.

D. Hàm số chỉ có một điểm cực tiểu.

Đáp án: A

Lời giải

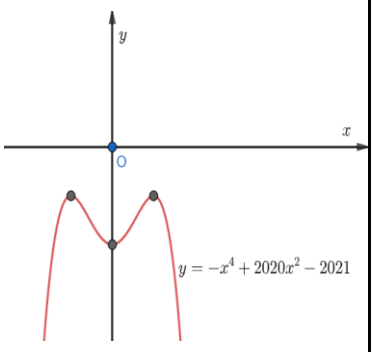
Đồ thị hàm số là hàm bậc bốn trùng phương có hệ số $a = -1 < 0$ nên hàm số có xu hướng đi xuống khi x dần đến một số đủ lớn.

Và tích hệ số $ab = -2020 < 0$ nên hàm số có ba điểm cực trị.

Khi đó đồ thị hàm số có dạng hình chữ "M".

Nên hàm số có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

(Xem thêm **Đồ thị I.II.6**).



Đồ thị I.II.6.

Extra Techniques:

Tips:

Ta cần đọc kĩ đề để tránh những sai phạm không đáng có đã được lưu ý ở phần **Remark** về cách gọi tên của điểm cực trị của hàm số và đồ thị hàm số.

Câu 4. Điểm cực tiểu của hàm số $y=x^2-2x+3$ là?

A. $x=0$. **B.** $x=1$.

C. $A(0;3)$. **D.** $B(1;2)$.

Đáp án: B

Lời giải

Ta có: $y'=2x-2=0\Leftrightarrow x=1$.

Vì $y''(1)=2>0$.

Nên $x=1$ là điểm cực tiểu của **hàm số**.

Câu 5. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0 khi và chỉ khi $f'(x_0)$.

B. Nếu $f''(x_0)>0$ và $f'(x_0)=0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0.

C. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi qua điểm x_0 và $f(x)$ liên tục tại x_0 thì hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0.

D. Nếu $f''(x_0)=0$ thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số.

Đáp án: C

Lời giải

Ta xét từng đáp án:

Đáp án **A** sai, vì tại những điểm mà đạo hàm không xác định, hàm số $y=f(x)$ vẫn có thể có cực trị.

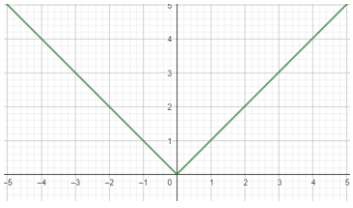
Chẳng hạn hàm số $y=|x|$ không có đạo hàm tại $x=0$ nhưng $x=0$ vẫn là điểm cực tiểu của hàm số.

Thật vậy: $y=|x|=\begin{cases}x, & x\ge 0\\ -x, & x<0\end{cases}$. Nên $y'=\begin{cases}1, & x\ge 0\\ -1, & x<0\end{cases}$.

Vì vậy hàm số không có đạo hàm tại $x=0$.

(Xem thêm **Đồ thị I.II.7**).

Đồ thị hàm số $y=|x|$.



Đồ thị I.II.7.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy: Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=0$.

Loại A.

Đáp án **B** sai, vì nếu $f''(x_0)>0$ và $f'(x_0)=0$ thì hàm số đạt **cực tiểu** tại x_0.

Loại B.

(Xem thêm **Định lý 2**).

Đáp án **C** đúng vì:

"Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi qua điểm x_0 và $f(x)$ liên tục tại x_0 thì hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0."

Chọn C.

Đáp án **D** sai, vì:

Hàm số $y=-x^4$ có một điểm cực đại là $x=0$. Mặc dù: $f''(0)=0$.

Loại D.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless

(Xem thêm **Ví dụ I.II.2**).

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	
y	0	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ 3	↗	5

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y=0$, $y=5$ và tiệm cận đứng là $x=1$.

B. Giá trị cực tiểu của hàm số là $y_{CT}=3$.

C. Giá trị cực đại của hàm số là $y_{CĐ}=5$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Extra Techniques:

Tips:

Theo định nghĩa:

Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=y_o$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y_o$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=y_o$.

Nếu $\lim\limits_{x\to x_o^+} f(x)=\pm\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_o^-} f(x)=\pm\infty$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=x_o$.

Đáp án: A

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên:

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} y=5$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y=0$ nên đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $y=0,\ y=5$.

Vì $\lim\limits_{x\to1^-} y=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

Do đó đáp án **A** đúng.

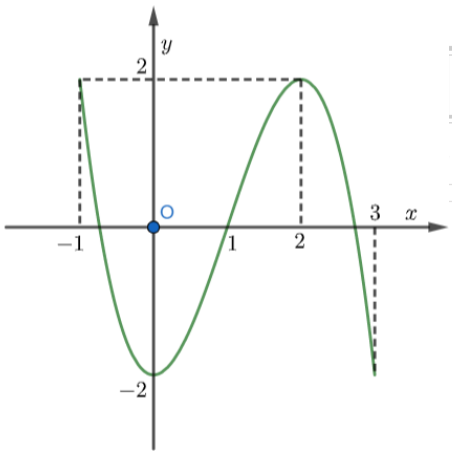
Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và giá trị cực đại $y_{CĐ}=2$.

Do đó đáp án **B, C** sai.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.

Do đó đáp án **D** sai.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ và $x=2$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0,\ x=3$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$, cực đại tại $x=2$.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$, cực đại tại $x=-1$.

Đáp án: C

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số như hình vẽ, ta nhận thấy:

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=0$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=2$.

Do đó đáp án **C** là đáp án đúng.

Câu 8. Xét hai hàm đa thức trên $\mathbb{R}$, $f(x)=-x^4+2x^2+1$ và hàm số $g(x)=-\frac{1}{4}x^4-x^2+\frac{5}{4}$.

Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực đại là $A(1;2)$ và $B(-1;2)$.

B. Hàm số $y=f(x)$ có điểm cực tiểu là $x=0$ và hàm số $y=g(x)$ có giá trị cực đại là $y=\frac{5}{4}$.

C. Hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại, hàm số $y=g(x)$ có duy nhất một điểm cực đại.

D. Hàm số $y=f(x)$ và hàm số $y=g(x)$ có cùng điểm cực tiểu là điểm $x=0$.

Đáp án: B

Lời giải

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Xét hàm số $f(x)=-x^4+2x^2+1$.

Ta có: $f'(x)=-4x^3+4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=1\end{array}\right.$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	2	↘	$-\infty$

Bảng biến thiên hàm số $y=f(x)$.

Xét hàm số $g(x)=-\frac{1}{4}x^4-x^2+\frac{5}{4}$.

Ta có: $g'(x)=-x^3-2x=0\Rightarrow x=0$.

Bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$.

Extra Techniques:

Remark:

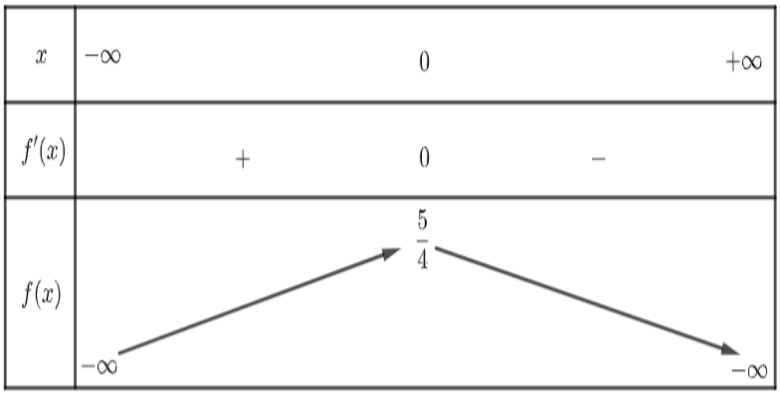
Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng K và đạt cực đại tại điểm $x=a\in K$ và đạt cực tiểu tại điểm $x=b\in K$ thì ta gọi:

$x=a$ là điểm cực đại của **hàm số** $y=f(x)$.

$x=b$ là điểm cực tiểu của **hàm số** $y=f(x)$.

$A(a;f(a))$ là điểm cực đại của **đồ thị hàm số** $y=f(x)$.

$B(b;f(b))$ là điểm cực tiểu của **đồ thị hàm số** $y=f(x)$.



Xét từng đáp án:

Đáp án A:

Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực đại là $A(1;2)$ và $B(-1;2)$.

Nhưng **hàm số** $f(x)$ lại có hai điểm cực đại là $x=-1$ và $x=1$.

Loại A.

Đáp án B:

Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$, ta thấy rằng:

Hàm số $y=f(x)$ có điểm cực tiểu là $x=0$ và hàm số $y=g(x)$ có giá trị cực đại là $y=\frac{5}{4}$.

Chọn B.

Đáp án C:

Hàm số $y=f(x)$ có **hai điểm cực đại** và **một điểm cực tiểu**, hàm số $y=g(x)$ có duy nhất một điểm cực đại.

Loại C.

Đáp án D:

Hàm số $y=f(x)$ nhận điểm $x=0$ làm điểm cực tiểu trong khi đó hàm số $y=g(x)$ lại nhận $x=0$ làm điểm cực đại.

Loại D.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Extra Techniques:

Remark:

Hàm số bậc bốn trùng phương có dạng tổng quát: $y=ax^4+bx^2+c$ có ba điểm cực trị khi và chỉ khi tích hệ số $ab<0$

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số bậc bốn trùng phương $y=(m+1)x^4-mx^2+3$ có ba điểm cực trị.

A. $m\in(-\infty;-1)\cup[0;+\infty)$. **B.** $m\in(-1;0)$.

C. $m\in(-\infty-1]\cup[0;+\infty)$. **D.** $m\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$.

Đáp án: D

Lời giải

Để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có ba điểm cực trị

$$\Rightarrow ab<0\Leftrightarrow(m+1)(-m)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>0\\m<-1\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow m\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty).$$

Câu 10. Đồ thị hàm số nào dưới đây luôn có một điểm cực trị với mọi giá trị m?

A. $y=(m^2+1)x^4-x^2+2m^2-1$. **B.** $y=x^4+(m^2-m)x^2+m-3$.

C. $y=-m^2x^4+x^2+m^2+m+1$. **D.** $y=x^4+(m^2+m+1)x^2+1-3m$.

Đáp án: D

Lời giải

Extra Techniques:

Remark:

Hàm số bậc bốn trùng phương có dạng tổng quát: $y=ax^4+bx^2+c$ $(a\neq0)$ có một điểm cực trị khi và chỉ khi tích hệ số $ab\geq0$.

Nếu $a=0$ thì hàm số có một điểm cực trị khi và chỉ khi $b\neq0$.

Xét từng đáp án:

Đáp án A:

Xét hàm số: $y=(m^2+1)x^4-x^2+2m^2-1$.

Ta có: $ab=(m^2+1).(-1)=-(m^2+1)\leq-1<0,\ \forall m\in\mathbb{R}$.

Vì thế hàm số có ba điểm cực trị.

Loại A.

Đáp án B:

Xét hàm số: $y=x^4+(m^2-m)x^2+m-3$.

Ta có: $ab=1.(m^2-m)=m^2-m$.

Ta không thể xác định được dấu của tích ab nên số cực trị của hàm

số không cố định.

Vì thế ta không thể xác định một cách chính xác số cực trị của hàm số.

Loại B.

Đáp án C:

Xét hàm số: $y=-m^2x^4+x^2+m^2+m+1$.

Ta có: $ab=\left(-m^2\right).\left(m^2+m+1\right)=-m^2\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]<0,\ \forall m\in\mathbb{R}$.

Vì thế hàm số có ba điểm cực trị.

Loại C.

Đáp án D:

Xét hàm số: $y=x^4+\left(m^2+m+1\right)x^2+1-3m$.

Ta có: $ab=1.\left(m^2+m+1\right)=\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,\forall m\in\mathbb{R}$.

Vì thế hàm số chỉ có một cực trị.

Chọn D.

Extra Techniques:

Remark:

Hàm số bậc bốn trùng phương có ít nhất một điểm cực trị: $x=0$.

Câu 11. Hàm số nào sau đây không có cực trị?

A. $y=x^3-3x+1$.

B. $y=\frac{28-x}{x+7}$.

C. $y=x^4-4x^3+3x+1$.

D. $y=x^{4m}+2021x,\ \forall\left(m\in\mathbb{N}^*\right)$.

Đáp án: B

Lời giải

Xét từng đáp án:

Đáp án A:

Xét hàm số: $y=x^3-3x+1$.

Ta có: $y'=3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.$.

Vậy hàm số có hai cực trị.

Loại A.

Đáp án B:

Xét hàm số: $y=\dfrac{28-x}{x+7}$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-7\}$.

Ta có: $y=\dfrac{28-x}{x+7}=\dfrac{-x+28}{x+7}\Rightarrow y'=\dfrac{-35}{(x+7)^2}<0$.

Vậy hàm số không có điểm cực trị.

Chọn B.

Extra Techniques:

Remark:

Hàm số nhất biến (Hàm bậc nhất trên bậc nhất).

$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ không có cực trị.

Đáp án C:

Xét hàm số: $y=x^4-4x^3+3x+1$.

Ta có: $y'=4x^3-12x^2+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\approx-0,46\\x=b\approx0,55\\x=c\approx2,91\end{array}\right.$.

Như vậy: Hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Loại C.

Đáp án D:

Xét hàm số: $y=x^{4m}+2021x,\ \forall\left(m\in\mathbb{N}^*\right)$.

Ta có: $y'=4mx^{4m-1}+2021=0\Rightarrow x=\sqrt[4m-1]{-\dfrac{2021}{4m}}$.

Như vậy hàm số có một điểm cực trị.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Loại D.

Câu 12. Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)=x(x-1)^2(x^2-1)(x^2+2)$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có một điểm cực tiểu.

B. Hàm số có hai điểm cực đại.

C. Hàm số có ba điểm cực trị.

D. Hàm số có một điểm cực trị.

Đáp án: C

Lời giải

Ta có: $f'(x)=x(x-1)^2(x^2-1)(x^2+2)=0$

$$\Leftrightarrow x(x-1)^3(x+1)(x^2+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. .$$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

Như vậy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Extra Techniques:

Tips:

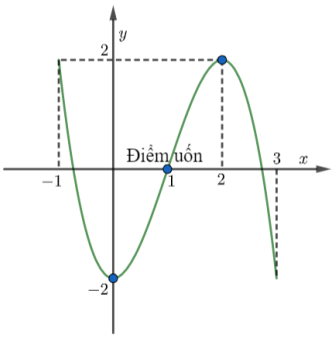
Số điểm cực trị của hàm đa thức chính bằng tổng số nghiệm bội lẻ của phương trình đạo hàm.

Một số Tips để làm tốt các bài toán cực trị

(1) Xét hàm số bậc ba: $y=ax^3+bx^2+cx+d,\ (a\neq 0)$.

Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c \Rightarrow \Delta'=b^2-3ac$.

- Trường hợp 1: $\Delta'_{y'}=b^2-3ac>0$:



Đồ thị I.II.8.

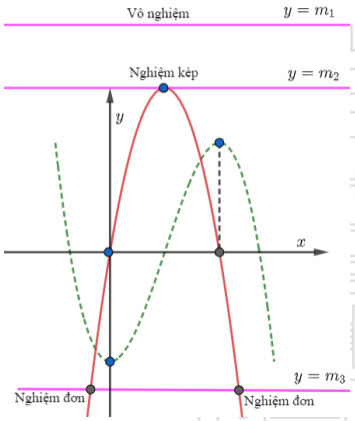
Khi đó đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị.

- Trường hợp 2: $\Delta'_{y'}=b^2-3ac\le 0$:

Khi đó đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ không có cực trị.

Mở rộng, hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ nhận điểm $x=-\dfrac{b}{3a}$ làm điểm uốn và hai điểm cực trị (nếu có) của hàm số trên cũng đối xứng qua điểm uốn. Và hoành độ điểm uốn chính là nghiệm của phương trình của đạo hàm cấp hai.

(Xem thêm **Đồ thị I.II.8**).



Đồ thị I.II.9.

- Hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ hoặc có 2 cực trị, hoặc không có cực trị. Vì hàm bậc ba đạo hàm cho hàm đa thức bậc hai có dạng Parabol.

(Xem thêm **Đồ thị I.II.9**).

Thật vậy, nếu ta kẻ các đường thẳng $y=m_1$, $y=m_2$, $y=m_3$ như hình vẽ minh họa, thì hoặc không có giao điểm (vô nghiệm), hoặc có một giao điểm (nghiệm kép), hoặc có hai giao điểm (hai nghiệm đơn).

- Qua nghiệm kép, dấu của đạo hàm không thay đổi.
- Qua nghiệm đơn (hoặc gọi chung nghiệm bội lẻ nếu xét các hàm khác), dấu của đạo hàm đổi dấu từ dương $(+)\to(-)$ sẽ tạo thành cực đại và từ $(-)\to(+)$ sẽ tạo thành cực tiểu.
- Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có phương trình $y=\left(\dfrac{2c}{3}-\dfrac{2b^2}{9a}\right)x+d-\dfrac{bc}{9a}$.

Thật vậy!

Giả sử ta xét hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,(a\ne 0)$.

Nếu $y=f(x)$ được phân tích thành $f(x)=g(x).f'(x)+h(x)$, thì

$y=h(x)$ *là* ***phương trình đi qua điểm cực trị*** *của hàm số* $f(x)$.

Do nếu hàm số $y=f(x)$ *nhận* x_1, x_2 *lần lượt là các điểm cực đại và cực tiểu của hàm số* $y=f(x)$ *thì:* $f'(x_1)=f'(x_2)=0$ $(*)$.

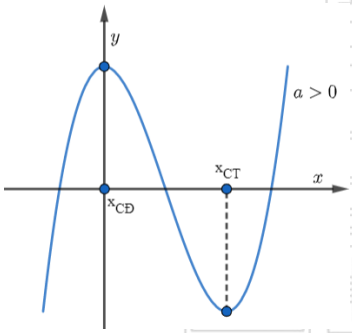
Ta có: $\begin{cases} f(x_1)=g(x_1).f'(x_1)+h(x_1)=h(x_1) \\ f(x_2)=g(x_2).f'(x_2)+h(x_2)=h(x_2) \end{cases}$ *(Do* $(*)$*).*

Đến đây ta thấy rằng hàm số $y=h(x)$ *đi qua hai điểm cực trị của hàm số* $y=f(x)$ *là* $A(x_1;f(x_1))$, $B(x_2;f(x_2))$.

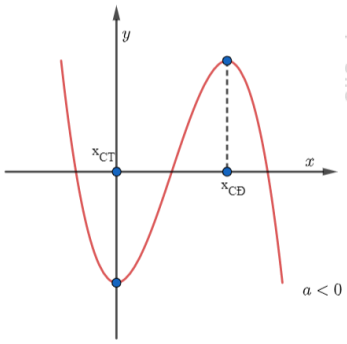
Nên $y=h(x)$ là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$.

Mà $h(x)$ có được trong phép chia lấy dư của $f(x)$ với $f'(x)$.

Từ đây, khi tìm đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số bậc ba, chúng tôi sẽ trình bày theo cách này, trong một số bài toán khác có thể mở rộng thêm ở cách viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị theo lý thuyết đường thẳng.



Đồ thị I.II.10.



Đồ thị I.II.11.

- Đối với hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ ta luôn có: $y_{CĐ}>y_{CT}$.
- Nếu $a>0$ thì: $x_{CĐ}<x_{CT}$.

(Xem thêm **Đồ thị I.II.10**).

- Nếu $a<0$ thì: $x_{CĐ}>x_{CT}$.

(Xem thêm **Đồ thị I.II.11**).

- Hàm số có 2 cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành khi và chỉ khi: $y_{CT}.y_{CĐ}<0$.
- Hàm số có 2 cực trị nằm về hai phía đối với trục tung khi và chỉ khi: $x_{CT}.x_{CĐ}<0$.
- Hàm số có hai cực trị nằm về phía trên đối với trục hoành khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} y_{CT}+y_{CĐ}>0 \\ y_{CT}.y_{CĐ}>0 \end{cases}.$$

- Hàm số có hai cực trị nằm phía dưới đối với trục hoành khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} y_{CT}+y_{CĐ}<0 \\ y_{CT}.y_{CĐ}>0 \end{cases}.$$

- Hàm số có cực trị tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi: $y_{CT}.y_{CĐ}=0$.

- Nếu tồn tại điểm $x=x_0$ thỏa mãn $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)>0 \end{cases}$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=x_0$. Điều ngược lại chưa chắc đúng.

(Xem lại **Ví dụ I.II.1**).

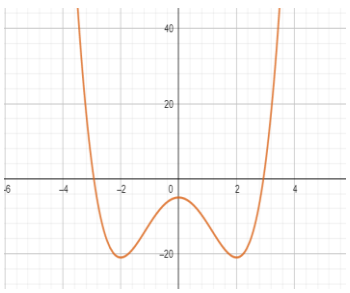
- Nếu tồn tại điểm $x=x_0$ thỏa mãn $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0 \end{cases}$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm $x=x_0$. Điều ngược lại chưa chắc đúng.

(Xem lại **Ví dụ I.II.2**).

(2) Xét hàm bậc bốn trùng phương $y=ax^4+bx^2+c,(a\neq 0)$.

Ta có: $y'=4ax^3+2bx=0=2x\left(2ax^2+b\right)=0\ (*)$.

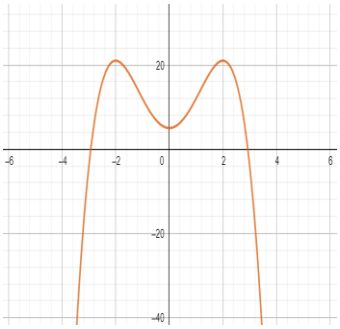
Số điểm cực trị của hàm số $y=ax^4+bx^2+c,(a\neq 0)$ phụ thuộc rất lớn vào phương trình $(*)$, nếu phương trình $(*)$ có bao nhiêu nghiệm bội lẻ thì phương trình bậc bốn trùng phương đang xét sẽ có bấy nhiêu nghiệm.



Đồ thị I.II.12.

- Trường hợp 1: $\begin{cases} ab<0 \\ a>0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a>0 \\ b<0 \end{cases}$.

Khi đó đồ thị hàm số có dạng hình chữ "W" nên hàm số sẽ có 3 điểm cực trị, 2 cực trị (giá trị cực trị, nếu trùng nhau, chỉ tính 1), 1 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu, 1 cực đại (giá trị cực đại), 1 cực tiểu (giá trị



Đồ thị I.II.13.

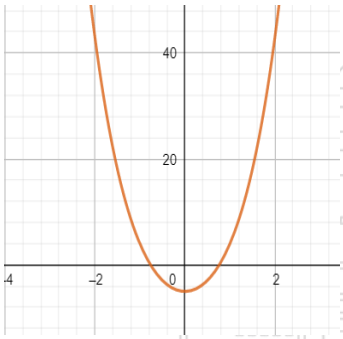
cực tiểu, nếu trùng nhau, chỉ tính 1).

(Xem thêm **Đồ thị I.II.12**).

- Trường hợp 2: $\begin{cases} ab<0 \\ a<0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a<0 \\ b>0 \end{cases}$.

Khi đó đồ thị hàm số có dạng hình chữ "M" nên hàm số sẽ có 3 điểm cực trị, 2 cực trị (giá trị cực trị, nếu trùng nhau, chỉ tính 1), 1 điểm cực tiểu, 2 điểm cực đại, 1 cực tiểu (giá trị cực tiểu) và 1 cực đại (giá trị cực đại, nếu trùng nhau, chỉ tính 1).

(Xem thêm **Đồ thị I.II.13**).

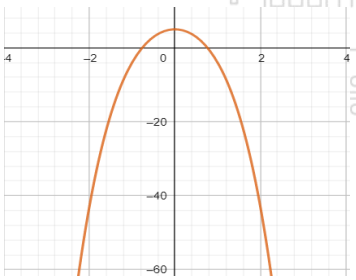


Đồ thị I.II.14.

- Trường hợp 3: $\begin{cases} ab\geq 0 \\ a>0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a>0 \\ b\geq 0 \end{cases}$.

Khi đó đồ thị hàm số có dạng hình chữ "$\cup$" của Parabol nên hàm số sẽ có 1 điểm cực trị, 1 cực trị (giá trị cực trị), chính xác hơn: 1 điểm cực tiểu và 1 cực tiểu (giá trị cực tiểu).

(Xem thêm **Đồ thị I.II.14**).



Đồ thị I.II.15.

- Trường hợp 4: $\begin{cases} ab\geq 0 \\ a<0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a<0 \\ b\leq 0 \end{cases}$.

Khi đó đồ thị hàm số có dạng hình chữ "$\cap$" của Parabol nên hàm số sẽ có 1 điểm cực trị, 1 cực trị (giá trị cực trị), chính xác hơn: 1 điểm cực đại và 1 cực đại (giá trị cực đại).

(Xem thêm **Đồ thị I.II.15**).

- Hàm số bậc bốn trùng phương có ít nhất một điểm cực trị là điểm $x=0$.
- Nếu tích hệ số $ab<0$, hàm số bậc bốn trùng phương có 3 điểm cực trị, lần lượt là: $x=-\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$, $x=0$, $x=\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$.
- Xét riêng trường hợp hàm số có 3 điểm cực trị $(ab<0)$.

Nếu $a<0$, thì $x=0$ là điểm cực tiểu, $x=\pm\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$ là hai điểm cực

đại của hàm số.

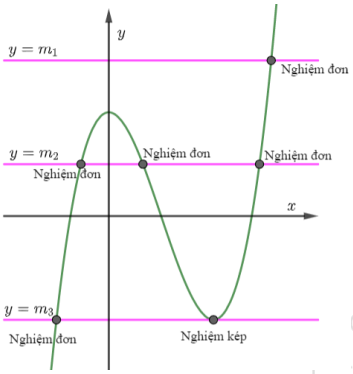
Ngược lại, nếu $a>0$, thì $x=0$ là điểm cực đại, $x=\pm\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$ là hai điểm cực tiểu của hàm số.

- Mở rộng lên hàm đa thức bậc 4 có dạng tổng quát:

Hàm số $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,\left(a\neq 0\right)$ hoặc có một cực trị hoặc có ba cực trị.

Do ta có: $y'=4ax^3+3bx^2+2cx+d=0\left(*\right)$ là một phương trình bậc ba theo ẩn x.

Xét các khả năng có nghiệm của phương trình $\left(*\right)$.



Đồ thị I.II.16.

(Xem thêm **Đồ thị I.II.16**).

Dựa vào **Đồ thị I.II.16** *ta thấy rằng với sự tương giao của đồ thị hàm số* $y=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ *với đường thẳng* $y=m_1$ *chỉ cắt duy nhất tại* 1 *điểm duy nhất (phương trình* $\left(*\right)$ *có* 1 *nghiệm đơn); sự tương giao của đồ thị hàm số* $y=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ *với đường thẳng* $y=m_2$ *cắt đồ thị tại* 3 *điểm phân biệt (phương trình* $\left(*\right)$ *có* 3 *nghiệm đơn); tương giao của đồ thị hàm số* $y=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ *với đường thẳng* $y=m_3$ *tại* 2 *điểm, tuy nhiên trong đó có một nghiệm đơn và một nghiệm kép. Nói tóm lại trong cả* 3 *sự tương giao được bàn ở trên, số* ***nghiệm đơn*** *của phương trình* $\left(*\right)$ *hoặc là* 1 *hoặc là* 3 *thì ta đã đủ điều kiện để suy ra điều cần chứng minh.*

(3) Xét một số hàm phân thức hữu tỉ.

❖ Hàm nhất biến (Bậc nhất trên bậc nhất): $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $x\neq -\dfrac{d}{c}$.

Ta có: $y'=\dfrac{ad-bc}{\left(cx+d\right)^2}$.

Vì: $ad-bc=const$ nên hàm số hoặc đồng biến hoặc nghịch biến trên từng khoảng xác định. Do đó hàm số không có cực trị.

Hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất: $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$, $a\neq 0$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{e}{d}\right\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{adx^2+2aex+be-cd}{\left(dx+e\right)^2}$.

Đặt $P\left(x\right)=adx^2+2aex+be-cd$.

Ta có: $\Delta'_P=\left(ae\right)^2-ad\left(be-cd\right)=a^2e^2+acd^2-abde$.

- Với $\Delta'_P\le 0\Leftrightarrow a^2e^2+acd^2\le abde$ thì hàm số không có cực trị
- Với $\Delta'_P>0\Leftrightarrow a^2e^2+acd^2>abde$ thì hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2.

x	$-\infty$	x_1		$-\dfrac{e}{d}$		x_2		$+\infty$
y'	Cùng dấu a	0	Trái dấu a	‖	Trái dấu a	0	Cùng dấu a	
y				‖				

Tóm lại hàm số có cực trị khi và chỉ khi: $\begin{cases}a^2e^2+acd^2>abde\\ a\neq 0\\ a\left(-\dfrac{e}{d}\right)^2+b\left(-\dfrac{e}{d}\right)+c\neq 0\end{cases}$.

- Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị (nếu có) có phương trình:

$$y=\frac{2ax+b}{d}.$$

Thật vậy!

Extra Techniques:

Tips:

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị có phương trình là hàm phân thức hữu tỉ của **đạo hàm tử trên đạo hàm mẫu**.

Ta giả sử hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ có hai điểm cực trị là $x_1,\ x_2$.

Ta có: $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$, với $\begin{cases}u(x)=ax^2+bx+c\\v(x)=dx+e\end{cases}$.

Khi đó: $y'=\dfrac{u'(x).v(x)-u(x).v'(x)}{v^2(x)}=0\Rightarrow u'(x).v(x)=u(x).v'(x)$.

Dấu "=" đạt tại $\left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_2\end{array}\right.$.

Suy ra: $\dfrac{u(x_1)}{v(x_1)}=\dfrac{u'(x_1)}{v'(x_1)}\Rightarrow y(x_1)=\dfrac{u(x_1)}{v(x_1)}=\dfrac{u'(x_1)}{v'(x_1)}=\dfrac{2ax_1+b}{d}$.

Một cách tương tự, ta có: $y(x_2)=\dfrac{2ax_2+b}{d}$.

Suy ra: đường thẳng $y=\dfrac{2ax+b}{d}$ đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $A(x_1;y(x_1)),\ B(x_2;y(x_2))$.

Như vậy từ các dữ kiện trên ta đã có thể suy ra điều cần chứng minh.

"Trên đây là một số Tips chúng tôi cảm thấy rất hữu dụng trong các bài toán hiện hành. Do mục đích phục vụ cho phần đông các bạn học sinh nên phần trình bày khá chi tiết và khá dài. Nhưng nếu bạn đọc hiểu được bản chất vấn đề, thao tác sẽ ngắn gọn hơn, chuẩn xác hơn và quan trọng nhất vẫn là lợi thế về thời gian nếu các bạn biết thêm một số Tips làm bài."

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never stop until you're unless you try

TỰ LUYỆN 4 MỨC ĐỘ

Câu 1. [Nhận biết].

Điểm cực trị của hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$ là các điểm nào dưới đây?

A. $x=-1,\ x=3$.

B. $x=-\frac{22}{3},\ x=\frac{10}{3}$.

C. $x=-1,\ x=5$.

D. $x=4,\ x=3$.

Câu 2. [Nhận biết].

Điểm cực trị của hàm số $f(x)=x^3+3x^2+3x+5$ là?

A. $x=-1,\ x=-3$.

B. $x=1,\ x=-3$.

C. $x=0,\ x=1$.

D. Hàm số không có điểm cực trị.

Câu 3. [Nhận biết].

Cho hàm số $y=-x^4+2x^2+1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có một cực đại và hai cực tiểu

B. Hàm số có hai cực đại và một cực tiểu.

C. Hàm số có một cực đại và không có cực tiểu.

D. Hàm số có một cực đại và một cực tiểu.

Câu 4. [Nhận biết].

Cho hàm số $y=-x^4+6x^2-8x+1$. Nhận định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

B. Hàm số có giá trị cực đại là $y=25$ và giá trị cực tiểu là $y=-2$.

C. Hàm số có duy nhất một điểm cực trị $x=-2$ là điểm cực đại.

D. Đồ thị hàm số đã cho có một điểm cực tiểu là $A(-2;25)$.

Câu 5. [Nhận biết].

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

Nhận định nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	-15	$\searrow$	$-\infty$

A. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=0$ và đạt cực tiểu tại điểm $x=4$.

B. Hàm số có đúng một điểm cực trị.

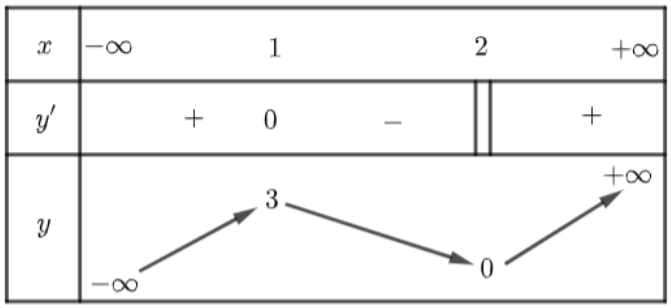
C. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và có giá trị nhỏ nhất bằng -15.

Câu 6. [Nhận biết].

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

Nhận định nào sau đây là đúng?



A. Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

B. Hàm số đã cho không có giá trị cực đại.

C. Hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị.

D. Hàm số đã cho không có giá trị cực tiểu.

Câu 7. [Nhận biết].

Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)=(x-1)^2(x-3)$.

Nhận định nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số đã cho có một điểm cực đại.

B. Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

C. Hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị.

D. Hàm số đã cho không có điểm cực trị.

Câu 8. [Nhận biết].

Hàm số nào dưới đây có ba điểm cực trị?

A. $y=x^4+2x^2+10$.

B. $y=-x^4+2x^2+3$.

C. $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+2$.

D. $y=2x^4-4$.

Câu 9. [Nhận biết].

Số điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=x^4+100$ là?

A. 0. **B.** 1.

C. 3. **D.** 2.

Câu 10. [Nhận biết].

Hàm số $y=x^4+2x^2+2021$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2.

C. 0. **D.** 3.

Câu 11. [Nhận biết].

Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+4x^2-8x+5$ có hai điểm cực trị là x_1, x_2. Hỏi tổng x_1+x_2 là bao nhiêu?

A. $x_1+x_2=8$. **B.** $x_1+x_2=-8$.

C. $x_1+x_2=5$. **D.** $x_1+x_2=-5$.

Câu 12. [Nhận biết].

Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn: $f'(x)=(x-1)^2(x-3)$.

Nhận định nào sau đây là nhận định đúng?

A. Hàm số có một điểm cực đại.

B. Hàm số có hai điểm cực trị.

C. Hàm số có đúng một điểm cực trị.

D. Hàm số không có điểm cực trị.

Câu 13. [Nhận biết].

Đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ có điểm cực đại là điểm nào dưới đây?

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

A. $I(2;-3)$. **B.** $I(0;1)$.

C. $I(0;2)$. **D.** Đáp án khác.

Câu 14. [Nhận biết].

Hàm số $y=x^4-2x^2+2021$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2.

C. 0. **D.** 3.

Câu 15. [Nhận biết].

Cho hàm số $y=x^3-3x^2+3x+1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

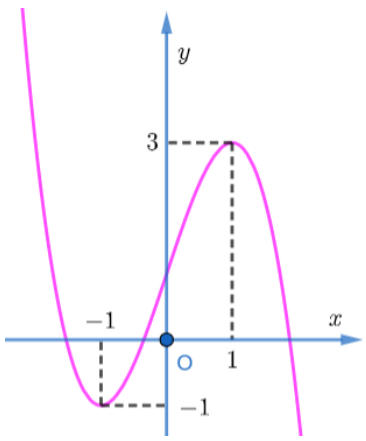
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

C. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=1$.

D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 16. [Nhận biết].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



A. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1 và đạt giá trị lớn nhất bằng 3.

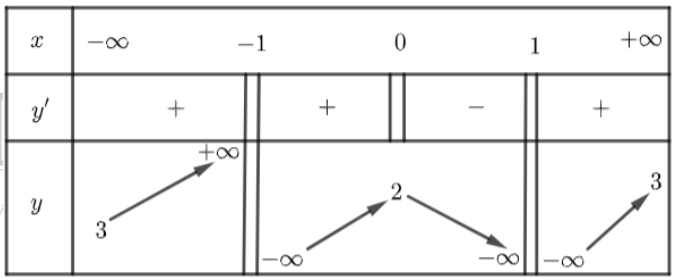
B. Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $A(-1;-1)$ và điểm cực đại $B(1;3)$.

C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 1.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $A(-1;-1)$ và cực đại tại $B(1;3)$.

Câu 17. [Nhận biết].

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định nào dưới đây là khẳng định sai?

A. Hàm số không có đạo hàm tại điểm $x=0$ nhưng vẫn đạt cực trị tại điểm $x=0$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

C. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng là các đường thẳng $x=-1$ và $x=1$.

D. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=-3$ và $y=3$.

Câu 18. [Nhận biết].

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số $y=2x-\dfrac{1}{x+1}$ có hai điểm cực trị.

B. Hàm số $y=3x^3+2021x+2022$ có hai điểm cực trị.

C. Hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ có một điểm cực trị.

D. Hàm số $y=-x^4-3x^2+2$ có một điểm cực trị.

Câu 19. [Thông hiểu].

Số điểm cực trị của hàm số $y=|x|^3-4x^2+3$ bằng?

A. 2. **B.** 0.

C. 3. **D.** 4.

Câu 20. [Nhận biết].

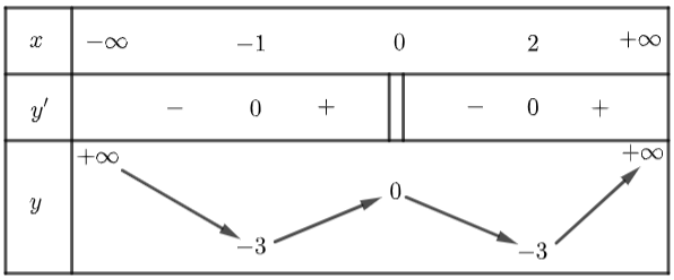
Hàm số $y=x^4+x^2+1$ đạt cực tiểu tại:

A. $x=-1$. **B.** $x=0$.

C. $x=-2$. **D.** $x=1$.

Câu 21. [Nhận biết].

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:



Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số có đúng hai cực trị.

B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1 hoặc 1.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -3.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

Câu 22. [Nhận biết].

Hàm số $y=x^3-3x^2-1$ đạt cực trị tại các điểm nào sau đây?

A. $x=\pm 2$. **B.** $x=\pm 1$.

C. $x=0;\ x=2$. **D.** $x=0;\ x=1$.

Câu 23. [Thông hiểu].

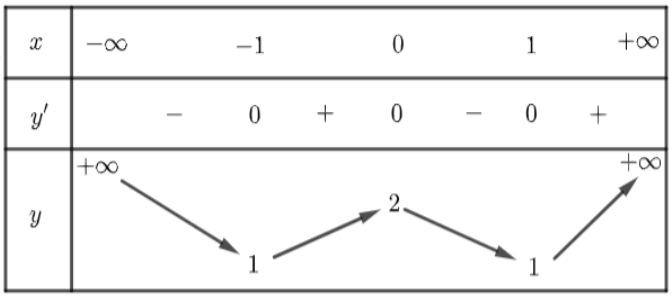
Hệ thức liên hệ giữa giá trị cực đại $y_{CĐ}$ và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y=x^3-2x$ là?

A. $y_{CT}+y_{CĐ}=0$. **B.** $2y_{CT}=3y_{CĐ}$.

C. $y_{CT}=2y_{CĐ}$. **D.** $y_{CT}=y_{CĐ}$.

Câu 24. [Nhận biết].

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $M(0;2)$ được gọi là điểm cực đại của hàm số.

B. $f(-1)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

và $(1;+\infty)$.

D. $x_0=1$ được gọi là điểm cực tiểu của hàm số.

Câu 25. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x-2\,(C)$. Đường thẳng đi qua điểm $A(-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C) là?

A. $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$. **B.** $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

C. $y=x+3$. **D.** $x-2y-3=0$.

Câu 26. [Thông hiểu].

Tính khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=2x^4-\sqrt{3}x^2+1$.

A. $2\sqrt[4]{3}$. **B.** $\sqrt{3}$.

C. $2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt[4]{3}$.

Câu 27. [Nhận biết].

Tìm tất cả các điểm cực đại của hàm số $y=-x^4+2x^2+1$.

A. $x=\pm 1$. **B.** $x=-1$.

C. $x=1$. **D.** $x=0$.

Câu 28. [Nhận biết].

Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

Trong các mệnh đề được cho dưới đây, mệnh đề nào đúng?

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

A. Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

B. Hàm số đã cho không có giá trị cực đại.

C. Hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị.

D. Hàm số đã cho không có giá trị cực tiểu.

Câu 29. [Nhận biết].

Cho hàm số $y=x^4-\frac{2}{3}x^3-x^2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có giá trị cực tiểu là 0.

B. Hàm số có hai giá trị cực tiểu là $-\frac{2}{3}$ và $-\frac{5}{48}$

C. Hàm số chỉ có một giá trị cực tiểu.

D. Hàm số có giá trị cực tiểu là $-\frac{2}{3}$ và giá trị cực đại là $-\frac{5}{48}$.

Câu 30. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=(x-1)(x+2)^2$. Trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm trên đường thẳng nào sau đây?

A. $2x+y+4=0$. **B.** $2x+y-4=0$.

C. $2x-y-4=0$. **D.** $2x-y+4=0$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Câu 31. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(x)=x(x-1)^2(x+2)^3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là?

A. 0. **B.** 1.

C. 2. **D.** 3.

Câu 32. [Nhận biết].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là sai?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

Câu 33. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(x)=(x-1)^2(x+2)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

B. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=-2$.

C. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

D. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$.

Câu 34. [Thông hiểu].

Kết luận nào sau đây về cực trị của hàm số $y=x.5^{-x}$ là đúng?

A. Hàm số có điểm cực đại là $x=\dfrac{1}{\ln 5}$.

B. Hàm số không có cực trị.

C. Hàm số có điểm cực tiểu là $x=\dfrac{1}{\ln 5}$.

D. Hàm số có điểm cực đại là $x=\ln 5$.

Câu 35. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây là sai?

A. Hàm số có ba điểm cực trị.

B. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3.

C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0.

D. Hàm số có 2 điểm cực tiểu.

Câu 36. [Thông hiểu].

Đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB?

A. $P(1;0)$. **B.** $M(0;-1)$.

C. $N(1;-10)$. **D.** $Q(-1;10)$.

Câu 37. [Thông hiểu].

Số cực trị của hàm số $f(x)=x^4-3x^2+2$ là:

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Câu 38. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức có bậc không vượt quá 3 có bảng xét dấu của hàm số đạo hàm như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f(x)+mx^2$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3.

C. 4 **D.** 5.

Câu 39. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-1	↗	3	↘	2

Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ là?

A. 5. **B.** 6.

C. 7. **D.** 8.

Câu 40. [Thông hiểu].

Giá trị cực đại của hàm số $f(x)=x-2\sqrt{x^2+1}$ là số nào dưới đây?

A. $y=\dfrac{3}{\sqrt{3}}$. **B.** $y=\dfrac{-3}{\sqrt{3}}$.

C. $y=\dfrac{-\sqrt{3}}{3}$. **D.** $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 41. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-1		0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là?

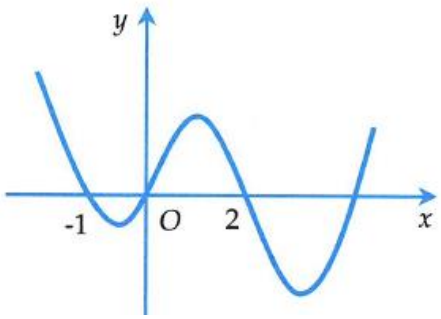
A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

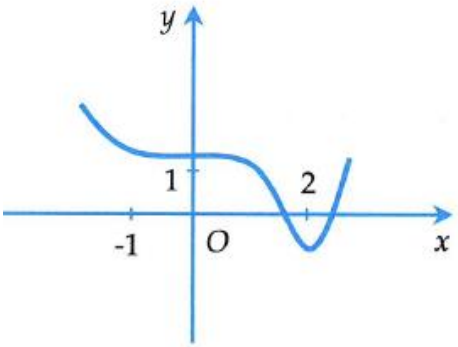
Câu 42. [Thông hiểu].

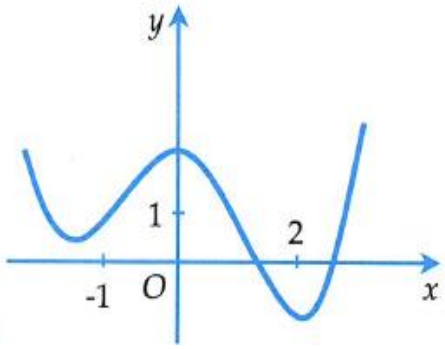
Một trong các đồ thị dưới đây là đồ thị của hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(0)=0$ và $f''(x)<0,\forall x\in(-1;2)$. Hỏi đó là đồ thị nào?

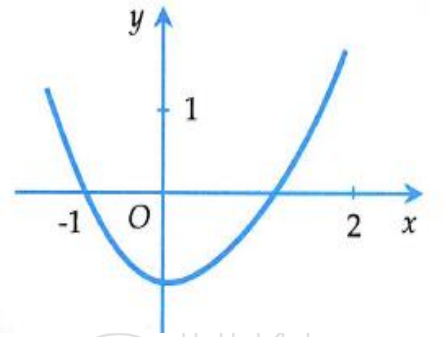
A.



B.

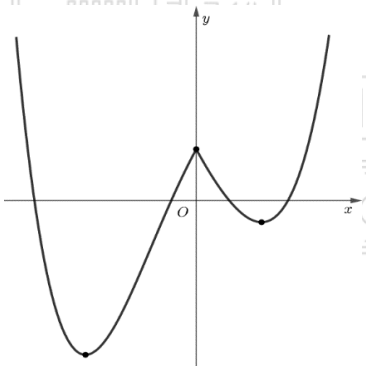


C. 

D. 

Câu 43. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số cực trị của hàm số $y=|f(x)|$ là?



A. 7. **B.** 6.

C. 3. **D.** 4.

Câu 44. [Thông hiểu].

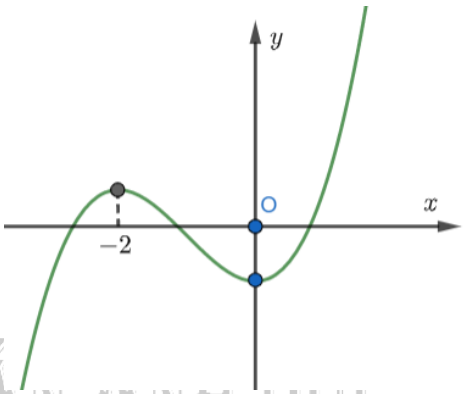
Cho đa thức $f(x)$ hệ số thực và thỏa mãn điền kiện $f(x)+2f(1-x)=x^2+1, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=6x.f(x)+11x^2-78x-78$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2, $(x_1<x_2)$. Tích $x_1.x_2$ bằng?

A. -12. **B.** $-\frac{1}{2}$.

C. 24. **D.** $\frac{8}{3}$.

Câu 45. [Thông hiểu].

Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(-2x^2+4x)$ là?



A. 3. **B.** 4.

C. 2. **D.** 5.

Câu 46. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=\frac{x^3}{3}+m^4x^2+(m^3-27)x+1$. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số có hai cực trị nằm về hai phía của trục tung.

A. $m>3$. **B.** $m\geq 3$.

C. $m\leq 3$. **D.** $m<3$.

Câu 47. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ với $a\neq 0$ có hai hoành độ cực trị là $x=1$ và $x=3$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x)=f(m)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là:

A. $(f(1);f(3))$. **B.** $(0;4)$.

C. $(1;3)$. **D.** $(0;4)\setminus\{1;3\}$.

Câu 48. [Thông hiểu].

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Cho hàm số $y=(m-1)x^3-5x^2+(m+3)x+3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 3.

C. 4. **D.** 0.

Câu 49. [Thông hiểu].

Nếu hàm số đa thức $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị thì hàm số $y=f(1-2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Câu 50. [Nhận biết].

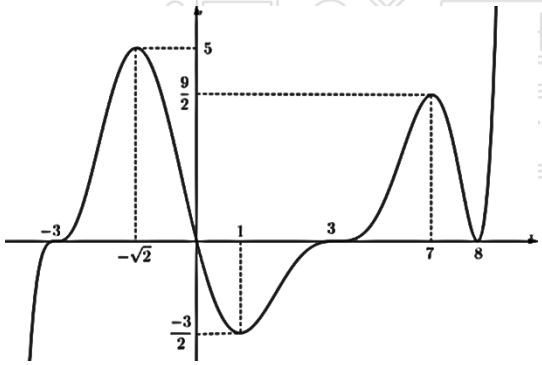
Cho hàm số $y=4x^4-6x^2-4x+2021$. Số điểm cực đại của hàm số là:

A. 0. **B.** 1.

C. 2. **D.** 3.

Câu 51. [Thông hiểu].

Cho đồ thị $y=f(x)$ xác định và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ:



Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là:

A. 3. **B.** 4.

C. 1. **D.** 2.

Câu 52. [Thông hiểu].

Cho đồ thị hàm số $(C): y=-x^3+3x^2-5x+2$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào không sai khi nói về (C)?

A. (C) không có điểm cực trị.

B. (C) có hai điểm cực trị.

C. (C) có ba điểm cực trị.

D. (C) có một điểm cực trị.

Câu 53. [Thông hiểu].

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^4+mx^2$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. $m=0$. **B.** $m>0$.

C. $m\geq 0$. **D.** $m\leq 0$.

Câu 54. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-3	↗	$+\infty$

Hàm số $y=|f(x)|$ có bao nhiêu cực tiểu?

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Câu 55. [Nhận biết].

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	2	↘	$-\infty$

Cực tiểu của hàm số đã cho là?

A. $x=-3$. **B.** $y=-3$.

C. $x=3$. **D.** $y=2$

Câu 56. [Nhận biết].

Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào có đúng 2 cực trị?

A. $y=x^4+3x^2+2$.

B. $y=x^3-5x^2+7$.

C. $y=\dfrac{2x^2-1}{3x}$.

D. $y=2017x^6+2016x^4$.

Câu 57. [Nhận biết].

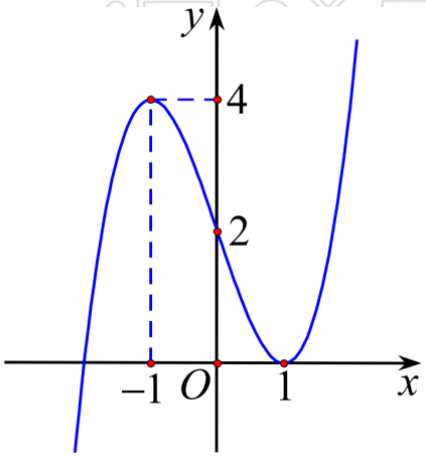
Cho hàm số $y=x^4-5x^2+3$ đạt cực trị tại x_1,x_2,x_3. Khi đó, giá trị của tích $x_1.x_2.x_3$ là?

A. 1. **B.** 3.

C. 5. **D.** 0.

Câu 58. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị đường cong trong hình vẽ bên dưới.



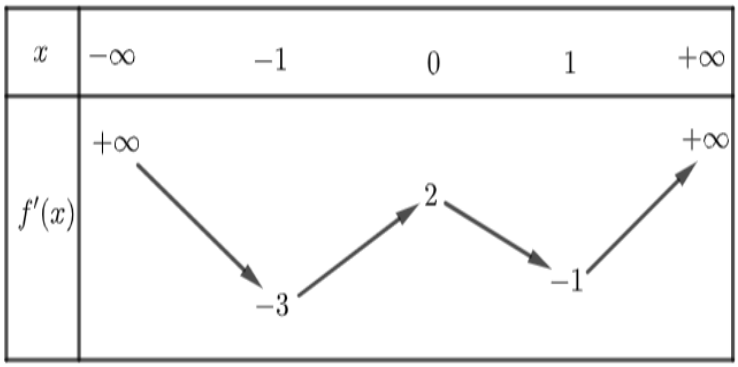
Đặt $g(x)=f\left(f(x)\right)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$ là?

A. 5. **B.** 6.

C. 7. **D.** 8.

Câu 59. [Vận dụng].

Cho hàm số $f(x)$, biết bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ là?

A. 3. **B.** 9.

C. 5. **D.** 7.

Câu 60. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=\left|x^4-2mx^2+2m-1\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2;2]$ để hàm số có đúng 3 điểm cực trị là:

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Câu 61. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn:

$f'(x)=\left(x^3+2x^2\right)\left(x^3-2x\right)$, với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Hàm số $y=\left|f\left(1-2018x\right)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

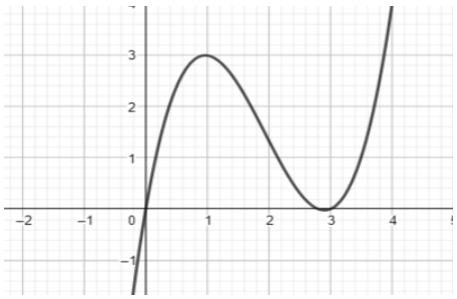
A. 9. **B.** 2018.

C. 2021. **D.** 2022.

Câu 62. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\left|f^2(x)+f(x)+m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị?

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

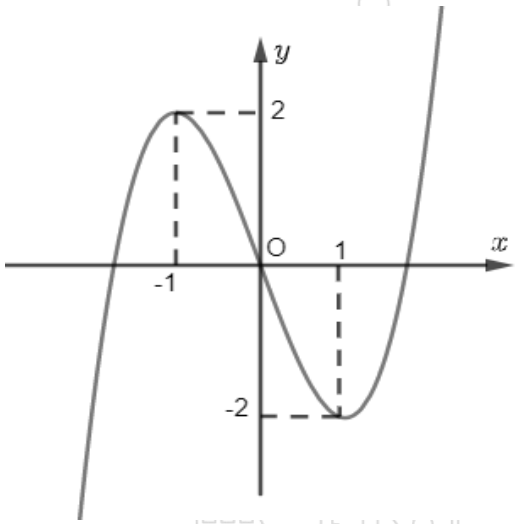


A. $m>\frac{1}{4}$. **B.** $m\ge\frac{1}{4}$.

C. $m<1$. **D.** $m\le 1$.

Câu 63. [Vận dụng].

Cho hàm số đa thức bậc ba có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $g(x)=\left|f\left(f\left(|x|\right)\right)-|x|\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 15. **B.** 17.

C. 18. **D.** 19.

Câu 64. [Vận dụng].

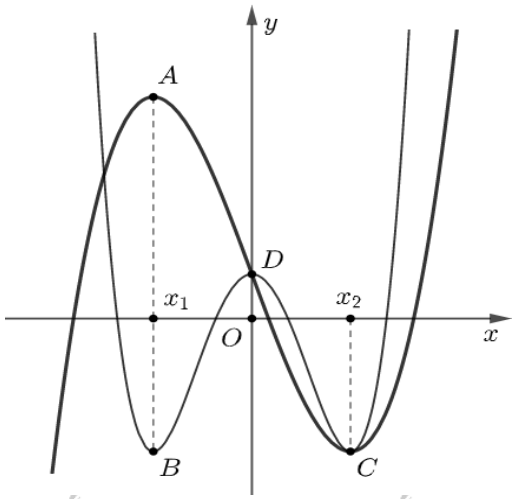
Cho hàm số $y=x^3-\left(\frac{2m+1}{2}\right)x^2+2x-2022$. Biết rằng tồn tại hai giá trị tham số $m_1>m_2$; $m_1-m_2=a\sqrt{b}+c$ thỏa mãn hàm số đạt cực trị tại hai điểm x_1,x_2 sao cho $2x_1-3x_2-3=m$. Giá trị của $A=12(a+b+c)$ bằng bao nhiêu biết a,b,c là các phân số tối giản.

A. 896. **B.** 825.

C. 887. **D.** 927.

Câu 65. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $\begin{cases}(C_1):y=f(x)=2x^4+ax^2+b\\(C_2):y=g(x)=x^3+cx^2+dx+e\end{cases}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi B, C là hai điểm cực tiểu của (C_1); A, C lần lượt là điểm cực đại và điểm cực tiểu của (C_2) (A, C đối xứng nhau qua $D\in Oy$). Biết hoành độ của A, B bằng nhau. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để $AB\le 2022$.

A. 113. **B.** 116.

C. 118. **D.** 114.

Câu 66. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm cấp 3 với $f'''(x)=0$ và thỏa mãn:

$$\left[f'(x)\right]^{2022}\left[1-f''(x)\right]=\frac{2x(x+1)^2(x-2022)^{2023}}{f''(x)},\forall x\in\mathbb{R}.$$

Hàm số $g(x)=\left[f'(x)\right]^{2023}\left[1-f''(x)\right]$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Câu 67. [Vận dụng].

Cho Parabol $y=f(x)=ax^2+bx+c,(a\neq 0)$ cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ bằng 1 và bằng 2, biết rằng hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(x_0;+\infty)$ và khoảng cách từ giao điểm của Parabol với trục tung đến điểm O bằng 4. Hàm số $y=\left|f(|x+1|)\right|$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3.
C. 5. **D.** 7.

Câu 68. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên hàm số đạo hàm như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là?

A. 3. **B.** 2.
C. 0. **D.** 1.

Câu 69. [Thông hiểu].

Hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ đạt cực đại tại $x=1$, $f(1)=2$; đạt cực tiểu tại $x=-2$, $f(-2)=-1$. Khi đó, giá trị của biểu thức $A=2a+b+c+2d$ là?

A. 1. **B.** 2.
C. 3. **D.** 4.

Câu 70. [Vận dụng].

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để hàm số:

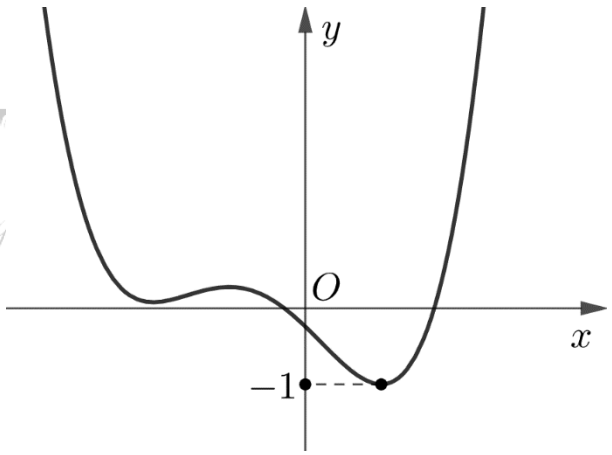
$$y=\frac{3}{2}x^3-4mx^2+(m-1)^2x+1$$

có hai điểm cực trị x_1,x_2 thỏa mãn bất phương trình: $x_1x_2>x_1+x_2$ là?

A. 12. **B.** 18.
C. 16. **D.** 15.

Câu 71. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y=3^{f(x)}-4^{f(x)}$ là?

A. 3. **B.** 4.
C. 5. **D.** 6.

Câu 72. [Vận dụng cao].

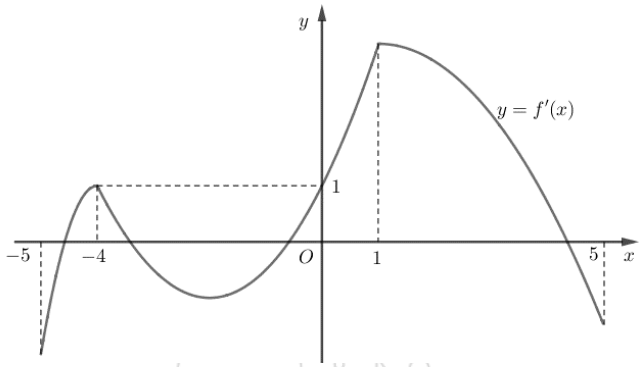
Biết đồ thị hàm số $y=2x^4-4mx^2+1$ có 3 điểm cực trị A (thuộc trục tung) và B,C. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{AB.AC}{BC^4}$ là:

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{16}$.

C. $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{3}{16}$.

Câu 73. [Vận dụng].

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=f\left(x^2+4x\right)-x^2-4x$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(-5;1)$?

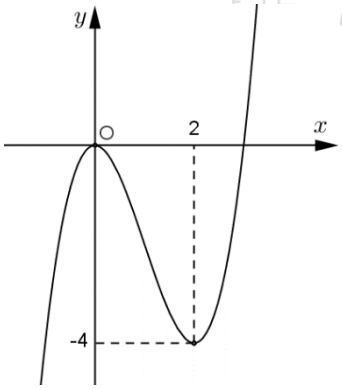


A. 5. **B.** 4.

C. 6. **D.** 3.

Câu 74. [Vận dụng].

Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left[f(x)\right]$.

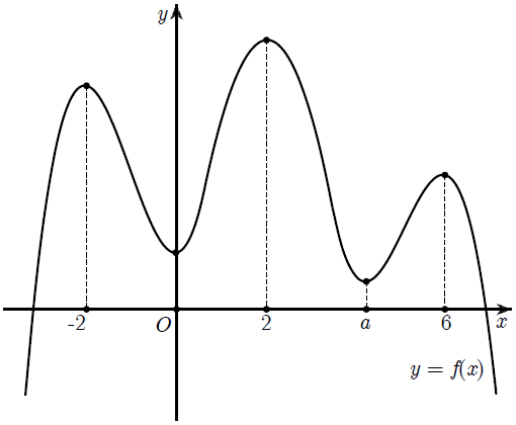


A. 5. **B.** 3.

C. 4. **D.** 6.

Câu 75. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



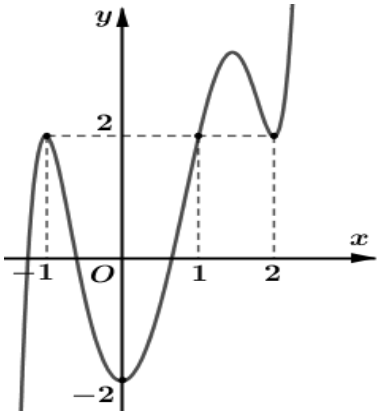
Biết tất cả các điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là $-2;\ 0;\ 2;\ a;\ 6$ với $4<a<6$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^6-3x^2\right)$ là?

A. 8. **B.** 11.

C. 9. **D.** 7.

Câu 76. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f'(x-1)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=\pi^{2f(x)-4x}$ đạt cực tiểu tại điểm nào?

A. $x=1$. **B.** $x=0$.

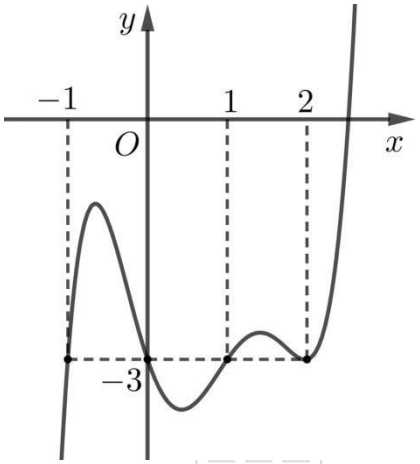
C. $x=2$. **D.** $x=-1$.

Câu 77. [Vận dụng cao].

Cho hàm số đa thức $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$,

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

$f(0)<0$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x)=|f(x)+3x|$ có bao nhiêu cực trị?

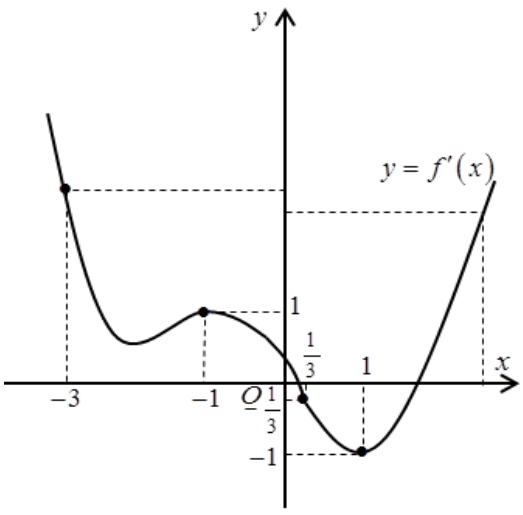


A. 4. **B.** 5.

C. 3. **D.** 6.

Câu 78. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$, biết hàm số đạo hàm $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x)=2f\left(\frac{5\sin x-1}{2}\right)+\frac{(5\sin x-1)^2}{4}+3$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0;2\pi)$?

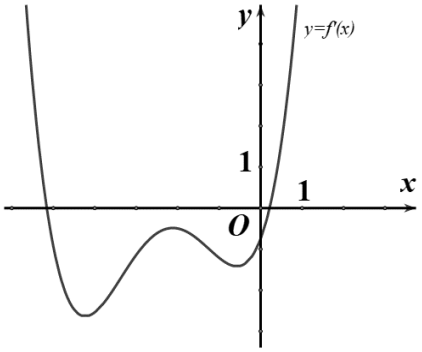


A. 9. **B.** 7.

C. 6. **D.** 8.

Câu 79. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$. Biết $y=f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong như hình bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3\right)-x\right|$ là?

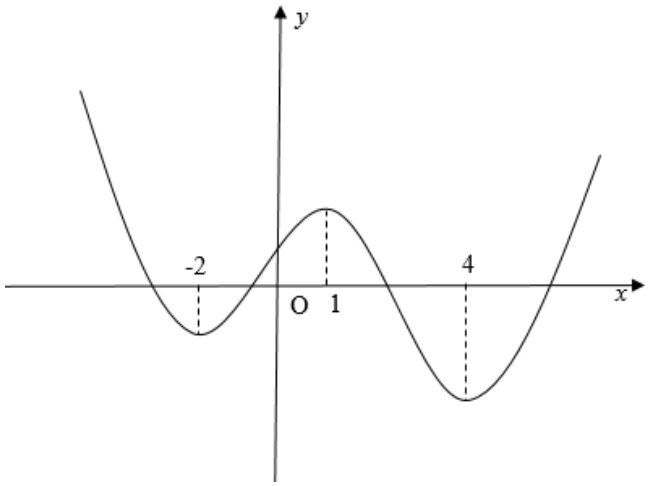


A. 5. **B.** 4.

C. 6. **D.** 3.

Câu 80. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f\left(e^x-\frac{x^2+2x}{2}\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



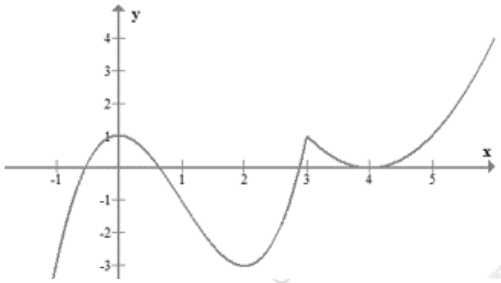
A. 3. **B.** 7.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

C. 6. **D.** 4.

Câu 81. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(4;+\infty)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(2|x|-2)$ bằng?



A. 7. **B.** 5.

C. 4. **D.** 9.

Câu 82. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn:

$f'(x)=x^2(x+2)^4(x+4)^3\left[x^2+2(m+3)x+6m+18\right]$

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị?

A. 7. **B.** 5.

C. 8. **D.** 6.

Câu 83. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(x)=x^2(x-a)(13x-15)^3$. Tập hợp các giá trị của a để hàm số $y=f\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)$ có 6 điểm cực trị là?

A. $\left[-\dfrac{5}{4};\dfrac{5}{4}\right]\setminus\left\{0;\dfrac{15}{13}\right\}$.

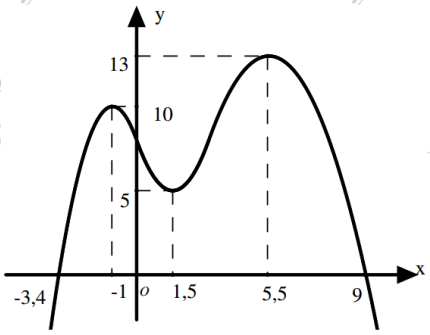
B. $\left(-\dfrac{5}{4};\dfrac{5}{4}\right)\setminus\left\{0;\dfrac{15}{13}\right\}$.

C. $\left(-\dfrac{5}{4};\dfrac{5}{4}\right)\setminus\{0\}$.

D. $\left(-\dfrac{5}{4};\dfrac{5}{4}\right)\setminus\left\{\dfrac{15}{13}\right\}$.

Câu 84. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Biết rằng $f'(x)<0\ ,\forall x\in(-\infty;-3,4)\cup(9;+\infty)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(x)-mx+5$ có đúng hai điểm cực trị?



A. 7. **B.** 8.

C. 6. **D.** 5.

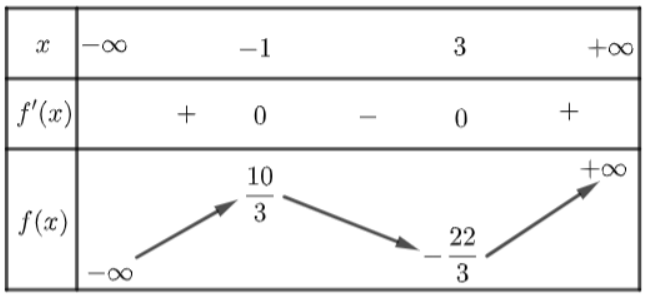
Câu 85. [Vận dụng cao].

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$.

Ta có: $f'(x)=x^2-2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số, ta nhận thấy hàm số đạt cực trị tại điểm $x=-1$ và $x=3$.

Đáp án A

Câu 2. Xét hàm số: $f(x)=x^3+3x^2+3x+5$.

Ta có: $f(x)=\left(x^3+3x^2+3x+1\right)+4$.

$\Leftrightarrow f(x)=(x+1)^3+4$

$\Rightarrow f'(x)=3(x+1)^2\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$

Nên hàm số $f(x)=x^3+3x^2+3x+5$ đồng biến trên toàn tập số thực $\mathbb{R}$.

Vậy hàm số không có điểm cực trị.

Đáp án D

Câu 3. Xét hàm số: $y=-x^4+2x^2+1$.

Dễ thấy hàm số có hệ số $a=-1<0$ và tích hệ số $ab=(-1).2=-2<0$. Nên theo phần Tips đã trình bày ở trên (xem thêm **Đồ thị I.II.13.**).

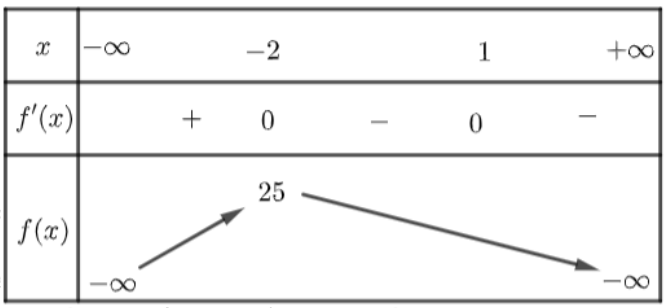
Đồ thị hàm số $y=-x^4+2x^2+1$ có dạng hình chữ "M" và có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

Đáp án B

Câu 4. Xét hàm số $y=-x^4+6x^2-8x+1$.

Ta có: $y'=-4x^3+12x-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên, ta nhận thấy điểm $x=-2$ là điểm cực đại của hàm số và hàm số chỉ có duy nhất một điểm cực trị.

Đáp án C

Câu 5. Xét từng nhận định:

+) Đáp án **A**:

Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số, ta thấy rằng hàm số đạt **cực tiểu** tại điểm $x=0$ và đạt **cực đại** tại điểm $x=4$.

Loại A.

+) Đáp án **B**:

Hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị là điểm $x=0$ và điểm $x=4$.

Loại B.

+) Đáp án **C**:

Hàm số $y=f(x)$ có giá trị cực tiểu là $y=1$ và giá trị cực đại là $y=-15$.

Chọn C.

+) Đáp án **D**:

Hàm số $y=f(x)$ không tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trân tập xác định.

Loại D.

Đáp án C

Extra Techniques:
Remark:
Giá trị cực đại không nhất thiết phải lớn hơn giá trị cực tiểu, bài tập trên là một ví dụ minh họa cụ thể.

Extra Techniques:
Tips:
Bài toán cho bảng biến thiên có các giá trị ở dạng các đại lượng ∞ ta cần phải lưu ý về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất. Nếu bài toán có giá trị là $+\infty$, thông thường, hàm số sẽ không có giá trị lớn nhất. Tương tự, nếu bài toán có giá trị là $-\infty$, thông thường, hàm số sẽ không có giá trị nhỏ nhất. Giá trị cực trị khác GTLN, GTNN

Câu 6. Ta xét các nhận định:

+) Đáp án **A**:

Mặc dù hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ **không liên tục** tại điểm $x=2$, tuy nhiên, tại điểm $x=2$, hàm số $y=f(x)$ vẫn liên tục nên hàm số vẫn có cực trị tại điểm $x=2$, nếu qua đó, đạo hàm hàm số đổi dấu.

Thật vậy! Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=1$ và đạt cực tiểu tại điểm $x=2$.

Vậy hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Chọn A.

+) Đáp án **B**:

Giá trị cực đại của đồ thị hàm số là: $y=3$.

Loại B.

+) Đáp án **C**:

Kết hợp với cách giải thích ở đáp án **A**, ta hoàn toàn kết luận được hàm số $y=f(x)$ có đúng **hai** điểm cực trị là $x=1$ và $x=2$.

Loại C.

+) Đáp án **D**:

Hàm số $y=f(x)$ có giá trị cực tiểu là $y=0$.

Loại D.

Đáp án A

Extra Techniques:
Remark:
Hàm số $y=\|x\|$ không có đạo hàm tại $x=0$, nhưng đạt cực tiểu tại $x=0$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never quit anywhere unless you try

Câu 7. Xét hàm: $f'(x)=(x-1)^2(x-3)$.

Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Nhưng trong đó nghiệm $x=1$ là nghiệm kép (nghiệm bội chẵn) nên qua $x=1$, đạo hàm không đổi dấu, còn $x=3$ là nghiệm đơn nên $x=3$ là điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$.

Vậy hàm số $y=f(x)$ có một cực trị duy nhất là điểm $x=3$ và nó là điểm cực tiểu do đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x=3$.

Đáp án C

Câu 8. Xét từng hàm số:

+) Đáp án **A**:

Xét hàm số: $y=x^4+2x^2+10$.

Ta có: $\left\{\begin{array}{l}a=1>0\\ab=1.2=2>0\end{array}\right.$.

Nên theo phần Tips đã trình bày ở trên (xem thêm **Đồ thị I.II.14.**).

Hàm số đã cho có duy nhất một điểm cực tiểu.

Loại A.

+) Đáp án **B**:

Xét hàm số: $y=-x^4+2x^2+3$.

Ta có: $\left\{\begin{array}{l}a=-1<0\\ab=(-1).2=-2<0\end{array}\right.$.

Nên theo phần Tips đã trình bày ở trên (xem thêm **Đồ thị I.II.13.**).

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị.

Chọn B.

+) Đáp án **C**:

Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+2$ là một hàm số bậc ba nên tối đa chỉ có hai cực trị.

Loại C.

+) Đáp án **D**:

Xét hàm số: $y=2x^4-4$.

Ta có: $\left\{\begin{array}{l}a=2>0\\ab=2.0=0\geq 0\end{array}\right.$.

Nên theo phần Tips đã trình bày ở trên (xem thêm **Đồ thị I.II.14.**).

Hàm số đã cho có duy nhất một điểm cực tiểu.

Loại D.

Đáp án B

Câu 9. Xét hàm số $y=x^4+100$.

Ta có: $\left\{\begin{array}{l}a=1>0\\ab=1.0=0\geq 0\end{array}\right.$.

Nên theo phần Tips đã trình bày ở trên (xem thêm **Đồ thị I.II.14.**).

Hàm số đã cho có duy nhất một điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.

Vậy số cực đại của đồ thị hàm số $y=x^4+100$ là 0.

Đáp án A

Câu 10. Xét hàm số $y=x^4+2x^2+2021$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Ta có: $\begin{cases} a=1>0 \\ ab=1.2=2\geq 0 \end{cases}$.

Nên theo phần Tips đã trình bày ở trên (xem thêm **Đồ thị I.II.14.**).

Hàm số đã cho có duy nhất một điểm cực tiểu.

Đáp án A

Câu 11. Xét hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+4x^2-8x+5$.

Ta có: $y'=x^2+8x-8\,(*)$.

Hai điểm cực trị $x=x_1$, $x=x_2$ là nghiệm của phương trình $(*)$.

Theo định lý Viéte, ta có:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{8}{1}=-8.$$

Vậy: $x_1+x_2=-8$.

Đáp án B

Câu 12. Ta có: $f'(x)=(x-1)^2(x-3)$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Trong đó, $x=1$ là nghiệm kép nên $x=1$ không là điểm cực trị và $x=3$ là nghiệm đơn nên $x=3$ là một điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$.

Vậy hàm số có đúng một điểm cực trị.

Đáp án C

Câu 13. Ta có: $y=x^3-3x^2+1$.

Suy ra: $y'=3x^2-6x=0\Leftrightarrow 3x(x-2)=0$.

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Nên theo phần Tips đã trình bày ở trên (xem thêm **Đồ thị I.II.10.**).

Vì $a=1>0\Rightarrow x_{CĐ}<x_{CT}\Rightarrow x_{CĐ}=0$.

Mà $y(0)=1\Rightarrow I(0;1)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$.

Đáp án B

Câu 14. Xét hàm số: $y=x^4-2x^2+2021$.

Ta có: $\begin{cases} a=1>0 \\ ab=1.(-2)=-2<0 \end{cases}$.

Nên theo phần Tips đã trình bày ở trên (xem thêm **Đồ thị I.II.12.**).

Hàm số $y=x^4-2x^2+2021$ có ba điểm cực trị.

Đáp án D

Câu 15. Xét hàm số: $y=x^3-3x^2+3x+1$.

Ta có: $y'=3x^2-6x+3=3(x^2-2x+1)$

$\Rightarrow y'=3(x-1)^2\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm số $y=x^3-3x^2+3x+1$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Đáp án D

Câu 16. Xét các phương án:

+) Đáp án **A**:

Hàm số bậc ba có dạng: $y=ax^3+bx^2+cx+d$ nên $\lim\limits_{x\to\infty}y=\infty$ vì thế hàm số không tồn tại giá

trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.

Tuy nhiên, nếu ta nói: $y_{CT}=-1$ và $y_{CĐ}=3$ thì đây là mệnh đề đúng.

Loại A.

+) Đáp án **B**:

Dựa vào đồ thị hàm số như hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $A(-1;-1)$ và điểm cực đại $B(1;3)$.

Chọn B.

+) Đáp án **C**:

Hàm số có giá trị cực đại là: $y_{CĐ}=3$.

Tuy nhiên, nếu ta nói: Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=1$ thì mệnh đề đúng.

Loại C.

+) Đáp án **D**:

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta thấy **đồ thị hàm số** đạt cực tiểu tại điểm $A(-1;-1)$ và đạt cực đại tại điểm $B(1;3)$.

Loại D.

Đáp án B.

Câu 17. Xét từng đáp án:

+) Đáp án **A**:

Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số ta dễ dàng thấy hàm số $y=f(x)$ không có đạo hàm tại điểm $x=0$ do tại $x=0$, y' có kí hiệu "||".

Loại A.

+) Đáp án **B**:

Hàm số $y=f(x)$ không liên tục tại điểm $x=1$ nên không thể đạt cực tiểu tại điểm $x=1$ mặc dù qua điểm $x=1$ đạo hàm của hàm số đổi dấu.

Chọn B.

+) Đáp án **C**:

Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số, ta thấy rằng: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-} y=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+} y=-\infty\end{cases}$.

Vì thế đồ thị hàm số $y=f(x)$ nhận đường thẳng $x=-1$ và $x=1$ làm tiệm cận đứng.

Loại C.

+) Đáp án **D**:

Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số, ta thấy rằng: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to -\infty} y=3\\ \lim\limits_{x\to +\infty} y=-3\end{cases}$.

Vì thế đồ thị hàm số $y=f(x)$ nhận đường thẳng $y=-3$ và $y=3$ làm tiệm cận ngang.

Loại D.

Đáp án B

Câu 18. Xét các nhận định:

+) Đáp án **A**:

Xét hàm số: $y=2x-\dfrac{1}{x+1}$.

Ta có: $y'=2+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never say impossible unless you try

Vậy hàm số là một hàm đồng biến trên hai khoảng rời nhau $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Vậy hàm số không có điểm cực trị.

Loại A.

+) Đáp án **B**:

Xét hàm số: $y=3x^3+2021x+2022$.

Ta có: $y'=9x^2+2021>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó hàm số $y=3x^3+2021x+2022$ không có điểm cực trị.

Loại B.

+) Đáp án **C**:

Hàm số nhất biến hoặc đồng biến hoặc nghịch biến hoặc không đổi trên từng khoảng xác định và không có cực trị.

Loại C.

+) Đáp án **D**:

Xét hàm số: $y=-x^4-3x^2+2$.

Ta có: $\begin{cases}a=-1<0\\ab=(-1).(-3)=3\geq 0\end{cases}$.

Nên theo phần Tips đã trình bày ở trên (xem thêm **Đồ thị I.II.15.**).

Suy ra hàm số $y=-x^4-3x^2+2$ có duy nhất một điểm cực trị, chính xác hơn là một điểm cực đại.

Chọn D.

Đáp án D

Câu 19. TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Cách 1:

Đặt: $t=|x|\geq 0$.

Khi đó: $y=t^3-4t^2+3$.

Và: $y'=3t^2-8t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=\dfrac{8}{3}\end{array}\right.$.

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}|x|=0\\|x|=\dfrac{8}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{8}{3}\\x=0\\x=\dfrac{8}{3}\end{array}\right.$.

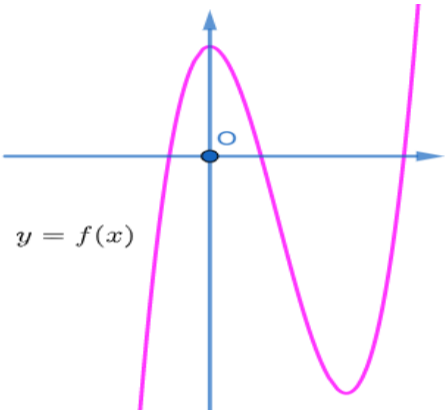
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{8}{3}$		0		$\frac{8}{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{175}{27}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\frac{175}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

Như vậy, hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Cách 2: Xét hàm số $y=x^3-4x^2+3$.

Vẽ phác họa đồ thị hàm số $y=x^3-4x^2+3$.



Xét hàm số: $y=f\left(|x|\right)$.

Ta có: $y=f\left(|x|\right)=\begin{cases} f(x), & x\ge 0 \ (1) \\ f(-x), & x<0 \ (2) \end{cases}$.

Mặt khác, hàm số $y=f\left(|x|\right)$ là hàm chẵn vì $f\left(|-x|\right)=f\left(|x|\right)$ nên hàm số $y=f\left(|x|\right)$ đối xứng nhau qua trục tung (3).

Suy ra cách vẽ đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ như sau:

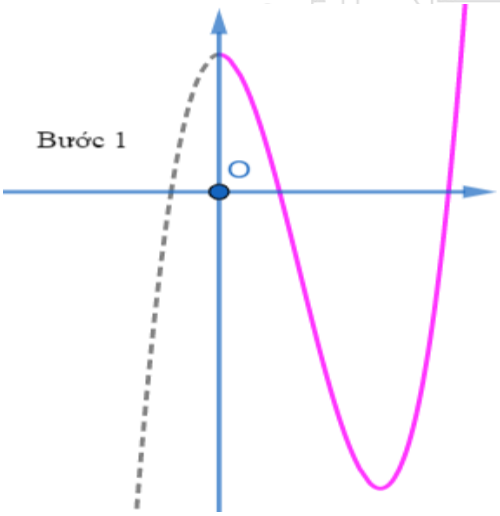
Cách vẽ:

+) Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y=f(x)$ nằm bên phải trục tung (do (1)).

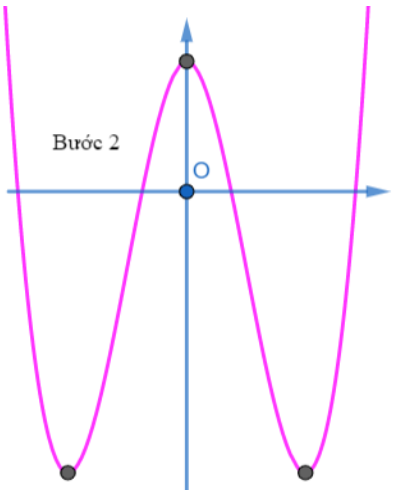
+) Lấy đối xứng qua trục tung phần đồ thị hàm số $y=f(x)$ nằm bên phải trục tung (do (3)).

Vẽ đồ thị hàm số $y=|x|^3-4\left(|x|\right)^2+3$.

Bước 1:



Bước 2:



Vậy hàm số có ba điểm cực trị.

Cách 3:

Nhận xét:

Do $y=f\left(|x|\right)$ là hàm chẵn nên hàm số đối xứng nhau qua trục Oy. Vì thế giả sử hàm số $y=f(x)$ có n điểm **cực trị dương** thì hàm số $y=f\left(|x|\right)$ sẽ có $2n+1$ điểm cực trị (Có thêm 1 điểm cực trị là $x=0$ vì nếu trên khoảng $(0;x_1)$ hàm số $y=f(x)$ đồng biến (nghịch biến) thì trên khoảng $(-x_1;0)$ hàm số $y=f\left(|x|\right)$ sẽ nghịch biến (đồng biến)).

Xét hàm số: $y=x^3-4x^2+3$.

Ta có: $y'=3x^2-8x=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{8}{3}>0 \end{array}\right.$.

Do đó: $n=1$.

Nên số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là $2.1+1=3$ điểm cực trị.

Vậy hàm số $y=|x|^3-4x^2+3$ có 3 điểm cực trị.

Đáp án C

Câu 20. Xét hàm số: $y = x^4 + x^2 + 1$.

Ta có: $\begin{cases} a = 1 > 0 \\ ab = 1.1 = 1 \geq 0 \end{cases}$.

Nên theo phần Tips đã trình bày ở trên (xem thêm **Đồ thị I.II.14.**).

Suy ra hàm số: $y = x^4 + x^2 + 1$ có duy nhất một điểm cực tiểu là điểm $x = 0$.

Đáp án B

Câu 21. Xét các nhận định:

+) Đáp án **A**:

Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số, ta dễ dàng nhận thấy:

Hàm số có ba điểm cực trị là: $x = -1,\ x = 0,\ x = 2$.

Loại A.

+) Đáp án **B**:

Hàm số có giá trị cực tiểu là $y = -3$.

Loại B.

+) Đáp án **C**:

Hàm số có giá trị nhỏ nhất trùng với giá trị cực tiểu là $y = -3$. Tuy nhiên hàm số không tồn tại giá trị lớn nhất do $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$.

Giá trị cực đại và giá trị lớn nhất không giống nhau.

Loại C.

+) Đáp án **D**:

Hàm số đạo hàm $y = f'(x)$ không xác định tại điểm $x = 0$ nhưng hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm khi qua điểm $x = 0$. Vì vậy $x = 0$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Chọn D.

Đáp án D

Câu 22. Xét hàm số: $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Vì $x = 0,\ x = 2$ đều là hai nghiệm bội lẻ nên đạo hàm đổi dấu khi qua hai điểm này.

Vậy $x = 0,\ x = 2$ là hai điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never ... where unless you try

Đáp án C

Câu 23. Xét hàm số: $y = x^3 - 2x$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\sqrt{6}}{3} \\ x = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \end{array}\right.$.

Nên theo phần Tips đã trình bày ở trên (xem thêm **Đồ thị I.II.10.**).

Ta suy ra: $\begin{cases} x_{CĐ} = -\dfrac{\sqrt{6}}{3} \\ x_{CT} = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \end{cases} \Rightarrow x_{CĐ} + x_{CT} = 0$.

Đáp án A

Câu 24. Xét các nhận định:

+) Đáp án **A**:

Điểm $M(0;2)$ được gọi là điểm cực đại của **đồ thị hàm số**.

Chọn A.

+) Đáp án **B**:

$f(-1)=f(1)=1$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số.

Loại B.

+) Đáp án **C**:

Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số, ta thấy rằng:

Hàm số nghịch biến trên hai khoảng rời nhau $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Hàm số đồng biến trên hai khoảng rời nhau $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Loại C.

+) Đáp án **D**:

$x=-1,\ x=1$ là hai điểm đều được gọi là điểm cực tiểu của **hàm số**.

Loại D.

Đáp án A

Câu 25. Xét hàm số: $y=x^3-6x^2+9x-2$.

Ta có: $y'=3x^2-12x+9$.

Thực hiện phép chia đa thức y cho y' ta được:

$$y=y'.\left(\frac{x}{3}-\frac{2}{3}\right)+(-2x+4).$$

Suy ra: $(\Delta): y=-2x+4$ là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số bậc ba.

Gọi (d) là đường thẳng đi qua điểm $A(-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng (Δ).

Khi đó đường thẳng (d) có dạng: $y=\frac{1}{2}x+c$.

Vì: $A(-1;1)\in(d)\Rightarrow 1=\frac{1}{2}.(-1)+c\Rightarrow c=\frac{3}{2}$.

Vậy đường thẳng đi qua điểm $A(-1;1)$ và vuông góc với đồ thị hàm số (C) có phương trình: $(d): y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

Đáp án B

Extra Techniques:

Tips:

Cho đường thẳng $y=ax+b,(a\neq 0)$. Khi đó một đường thẳng có phương trình $y=cx+d,(c\neq 0)$ được gọi là vuông góc với đường thẳng cho trước khi và chỉ khi: $ac=-1$.

Câu 26. Xét hàm số: $y=2x^4-\sqrt{3}x^2+1$.

Khi đó: $y'=8x^3-2\sqrt{3}x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\sqrt[4]{3}}{2}\\ x=0\\ x=\frac{\sqrt[4]{3}}{2}\end{array}\right.$.

Do: $\begin{cases}a=2>0\\ ab=2.\left(-\sqrt{3}\right)=-2\sqrt{3}<0\end{cases}$.

Nên theo phần Tips đã trình bày ở trên (xem thêm **Đồ thị I.II.12.**).

Suy ra: $\begin{cases} A\left(-\frac{\sqrt[4]{3}}{2};\frac{5}{8}\right) \\ B\left(\frac{\sqrt[4]{3}}{2};\frac{5}{8}\right) \end{cases}$ là hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=2x^4-\sqrt{3}x^2+1$.

Ta có: $AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$.

$\Leftrightarrow AB=\sqrt{\left(\frac{\sqrt[4]{3}}{2}--\frac{\sqrt[4]{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{8}-\frac{5}{8}\right)^2}$

$\Leftrightarrow AB=\sqrt[4]{3}$

Đáp án D

Câu 27. Xét hàm số: $y=-x^4+2x^2+1$.

Ta có: $y'=-4x^3+4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Do: $\begin{cases} a=-1<0 \\ ab=(-1).2=-2<0 \end{cases}$.

Nên theo phần Tips đã trình bày ở trên (xem thêm **Đồ thị I.II.13.**).

Suy ra: $x=\pm1$ là điểm cực trị của hàm số.

Đáp án A

Câu 28. Xét từng mệnh đề:

+) Đáp án **A**:

Hàm số đã cho nhận điểm $x=1$ và $x=2$ làm hai điểm cực trị.

Chọn A.

+) Đáp án **B**:

Hàm số $y=f(x)$ có giá trị cực đại là $y=3$.

Loại B.

+) Đáp án **C**:

Nếu **A** đúng thì chắc chắn **C** sai.

Loại C.

+) Đáp án **D**:

Hàm số $y=f(x)$ có giá trị cực tiểu là $y=0$.

Loại D.

Đáp án A

Câu 29. Xét hàm số: $y=x^4-\frac{2}{3}x^3-x^2$.

Ta có: $y'=4x^3-2x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2} \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$-\frac{5}{48}$	↗	0	↘	$-\frac{2}{3}$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số, ta xét từng mệnh đề:

+) Đáp án **A**:

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Hàm số có giá trị cực đại là $y=0$.

Loại A.

+) Đáp án **B**:

Hàm số có hai giá trị cực tiểu, lần lượt là $y=-\frac{2}{3}$ và $y=-\frac{5}{48}$.

Chọn B.

+) Đáp án **C**:

Vì đáp án **B** đúng nên hàm số có hai giá trị cực tiểu.

Loại C.

+) Đáp án **D**:

Hàm số có giá trị cực tiểu là $y=-\frac{2}{3}$, $y=-\frac{5}{48}$ và hàm số có giá trị cực đại là $y=0$.

Loại D.

Đáp án B

Câu 30. Xét hàm số: $y=(x-1)(x+2)^2$.

Cách 1: Chia đa thức.

Thực hiện phép chia đa thức y cho y' ta được:

$$y=x^3+3x^2-4=y'.\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\right)+(-2x-4).$$

Suy ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số $y=(x-1)(x+2)^2$ có phương trình là: $(d): y=-2x-4$.

Vì hai điểm cực trị của đồ thị hàm số thuộc đường thẳng (d) nên trung điểm của hai điểm cực trị của đồ thị hàm số cũng thuộc vào đường thẳng $(d): y=-2x-4$ hay $2x+y+4=0$.

Đáp án A

Cách 2: Tính toán trực tiếp bằng đạo hàm.

Ta có: $y=(x-1)(x+2)^2=x^3+3x^2-4$.

Khi đó: $y'=3x^2+6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\end{array}\right.$.

Suy ra: $A(-2;0)$ và $B(0;-4)$ là hai điểm cực trị của hàm số $y=(x-1)(x+2)^2$.

Trung điểm I của AB có tọa độ: $I(-1;-2)$.

+) Đáp án **A**:

Ta có: $2.(-1)+(-2)+4=0$.

Chọn A.

+) Đáp án **B**:

Ta có: $2.(-1)+(-2)-4=-8\neq 0$.

Loại B.

+) Đáp án **C**:

Ta có: $2.(-1)-(-2)-4=-4\neq 0$.

Loại C.

+) Đáp án **D**:

Ta có: $2.(-1)-(-2)+4=4\neq 0$.

Loại D.

Cách 3: CASIO.

Xét hàm số: $y=x^3+3x^2-4$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never give up anywhere unless you try

Ta có: $\begin{cases} y' = 3x^2 + 6x \\ y'' = 6x + 6 \end{cases}$.

Sử dụng máy tính cầm tay bằng cách nhập biểu thức $y - \dfrac{y'.y''}{18a}$ như sau:

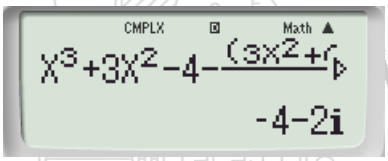
Chọn MODE 2.

Nhập vào màn hình:

$$X^3 + 3X^2 - 4 - \frac{(3X^2 + 6X).(6X + 6)}{18}.$$

Ấn CALC, nhập $x = i$ (i là đơn vị ảo, nhấn nút ENG để gọi i ra màn hình).

Màn hình xuất hiện kết quả:



Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị có phương trình là: $y = -4 - 2x$, hay $2x + y + 4 = 0$.

Vì hai điểm cực trị của đồ thị hàm số thuộc đường thẳng (d) nên trung điểm của hai điểm cực trị của đồ thị hàm số cũng thuộc vào đường thẳng (d): $y = -2x - 4$ hay $2x + y + 4 = 0$.

Extra Techniques:

Remark:

Sở dĩ ta có thể ứng dụng phương pháp CASIO ở trên vì ta có cơ sở toán học.

Chứng minh trình tự các bước CASIO trình bày ở **Cách 3** là hợp lý.

Theo Tips về phương pháp giải nhanh các bài toán về đường thẳng đi qua ba điểm cực trị của hàm số bậc ba, ta đã chứng minh rằng: Nếu sau khi thực hiện phép chia đa thức $f(x)$ cho $f'(x)$ ta được:

$$f(x) = g(x).f'(x) + h(x)$$

thì phương trình $y = h(x)$ là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

Một cách khác, ta có thể ghi dưới dạng:

$$f(x) = \left(\frac{x}{3} + \frac{b}{9a}\right).f'(x) + h(x)$$

$\Rightarrow h(x) = f(x) - \left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{b}{9a}\right).f'(x)$ là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Xét hàm số:

$$g(x) = \frac{x}{3} + \frac{b}{9a} = \frac{3ax + b}{9a} = \frac{6ax + 2b}{18a} = \frac{y''}{3.y'''}$$

Vì: $\begin{cases} y = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ y' = 3ax^2 + 2bx + c \\ y'' = 6ax + 2b \\ y''' = 6a \end{cases}$.

Như vậy: $h(x) = y - \dfrac{y'.y''}{3y'''} = y - \dfrac{y'.y''}{18a}$.

Ta CALC giá trị $x = i$ hợp lý là vì nếu ta CALC một giá trị thực thì kết quả ta sẽ nhận được một số thực. Ngược lại, khi CALC $x = i$, giá trị của x sẽ đóng vai trò là "biến" i trong kết quả, không hòa lẫn giá trị của hệ số tự do.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never go anywhere unless you try

Câu 31. Ta có: $f'(x)=x(x-1)^2(x+2)^3$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\ (NBC)\\x=-2\end{array}\right.$$

Nhận thấy trong ba nghiệm $x=-2,\ x=0,\ x=1$, chỉ có nghiệm $x=1$ là nghiệm kép (nghiệm bội chẵn). Do đó qua điểm $x=-2,\ x=0$, đạo hàm đổi dấu còn khi qua điểm $x=1$, đạo hàm không đổi dấu.

Vậy hàm số có hai điểm cực trị là các điểm $x=-2,\ x=0$.

Đáp án C

Câu 32. Xét các nhận định:

+) Đáp án **A**:

Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số, ta thấy hàm số đồng biến trên hai khoảng rời nhau $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.

Loại A.

+) Đáp án **B**:

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=0$ và đạt cực đại tại điểm $x=-2$.

Loại B.

Chọn C.

+) Đáp án **D**:

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

Loại D.

Đáp án C

Câu 33. Ta có: $f'(x)=(x-1)^2(x+2)$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\ (NBC)\\x=-2\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↗	

Xét các nhận định:

+) Đáp án **A**:

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

Chọn A.

+) Đáp án **B**:

Hàm số $y=f(x)$ không có điểm cực đại.

Loại B.

+) Đáp án **C**:

Điểm $x=1$ không là điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$.

Loại C.

+) Đáp án **D**:

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$.

Loại D.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never quit anywhere unless you try

Đáp án A

Câu 34. Xét hàm số: $y = x.5^{-x}$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 5^{-x} - x.5^{-x}.\ln 5 = 5^{-x}(1 - x\ln 5)$.

$y' = 0 \Rightarrow 1 - x\ln 5 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{\ln 5}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{ln5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\dfrac{1}{e.ln5}$	↘	0

Hàm số $y = x.5^{-x}$ có duy nhất một điểm cực đại là $x = \dfrac{1}{\ln 5}$.

Chọn A.

Loại B.

Loại C.

Loại D.

Đáp án A

Câu 35. Xét các mệnh đề:

+) Đáp án **A**:

Hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị lần lượt là $x = -1,\ x = 0,\ x = 1$.

Loại A.

+) Đáp án **B**:

Hàm số có giá trị cực đại là $y = 3$.

Loại B.

+) Đáp án **C**:

Hàm số có giá trị cực tiểu là $y = 0$.

Chọn C.

+) Đáp án **D**:

Hàm số có hai điểm cực tiểu là $x = -1,\ x = 1$.

Loại D.

Đáp án C

Câu 36. Ta có: $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

Suy ra: $y' = 3x^2 - 6x - 9$.

Thực hiện phép chia đa thức y cho y', ta được:

$y = y'.\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{3}\right) + (-8x - 2)$.

Vậy đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có phương trình là $y = -8x - 2$.

Xét từng đáp án:

+) Đáp án **A**:

Ta có: $0 \neq -8.(1) - 2$.

Loại A.

+) Đáp án **B**:

Ta có: $-1 \neq -8.(0) - 2$.

Loại B.

+) Đáp án **C**:

Ta có: $-10=-8.(1)-2$

Chọn C.

+) Đáp án **D**:

Ta có: $10\neq -8.(-1)-2$.

Loại D.

Đáp án C

Câu 37. Xét hàm số: $f(x)=x^4-3x^2+2$.

Ta có: $y'=4x^3-6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-\sqrt{6}}{2} \\ x=0 \\ x=\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$.

Ta có: $\begin{cases} f\left(\dfrac{-\sqrt{6}}{2}\right)=f\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)=\dfrac{-1}{4} \\ f(0)=2 \end{cases}$

Vì thế hàm số có 2 **cực trị**.

Đáp án B

Extra Techniques:
Remark:
Cực trị của hàm số, tức giá trị cực trị của hàm số.

Câu 38. Xét hàm số: $y=f(x)+mx^2$.

Ta có: $y'=f'(x)+2mx=0$.

Dựa vào sự tương giao ta thấy, đạo hàm là tổng của hàm đa thức bậc $2:(y_1=f'(x))$ với hàm đa thức bậc $1:(y_2=2mx)$.

Khi đó phương trình $y'=0$ có nhiều nhất 2 nghiệm.

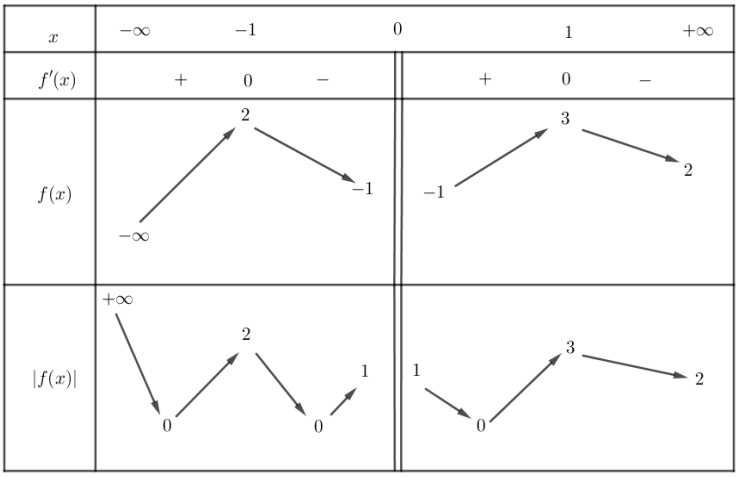
Do đó hàm số có nhiều nhất 2 điểm cực trị.

Đáp án A

Extra Techniques:
Tips:
Dựa vào bảng xét dấu của hàm số đạo hàm ta dễ dàng nhận ra hàm số $y=f(x)$ là một hàm đa thức bậc ba (Vì bậc cao nhất không quá 3 và hàm số có hai cực trị). Vì thế việc tìm số nghiệm tối đa của phương trình $f'(x)+2mx=0$ được quy về bài toán tìm số nghiệm tối đa của phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\,(*)$. Vì phương trình $(*)$ có tối đa hai nghiệm nên hàm số $y=f(x)+mx^2$ có tối đa 2 cực trị.

Câu 39. Từ bảng biến thiên, ta dễ dàng suy ra đồ thị $y=|f(x)|$ bằng hai bước sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị $y=f(x)$ phía trên Ox.
- Với phần đồ thị $y=f(x)$ phía dưới Ox, ta lấy đối xứng qua trục Ox.



Dựa vào bảng biến thiên mở rộng, ta thấy đồ thị có 5 điểm cực trị.

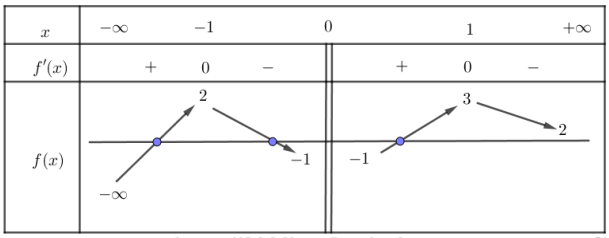
Đáp án A

Extra Techniques:

Remark:

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số có hai điểm cực trị. Mặt khác nếu ta kẻ đường thẳng $y=0$, thì đường thẳng sẽ tương giao với đồ thị hàm số tại 3 điểm phân biệt khác $x=\pm 1$.

Minh họa như hình vẽ.



Vậy hàm số: $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có tất cả 5 điểm cực trị.

Câu 40. TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $f'\left(x\right)=1-\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

$$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=2x\Leftrightarrow\begin{cases}2x\geq 0\\x^2+1=4x^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\3x^2=1\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\sqrt{3}$	↘	$-\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ và đại giá trị cực đại của hàm số $y=f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\sqrt{3}$.

Đáp án B

Câu 41. Dễ thấy, hàm số có 3 điểm cực trị là: $x=-1,x=2,x=3$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy rằng đạo hàm không xác định tại điểm $x=0$.

Và $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}f'\left(x\right)=m>0\\\lim\limits_{x\to 0^+}f'\left(x\right)=n<0\end{cases}$.

(Đạo hàm đổi dấu khi đi qua điểm $x=0$).

Hơn thế nữa, hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên tại $x=0$, hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục.

Vậy hàm số có tất cả 4 điểm cực trị.

Đáp án D

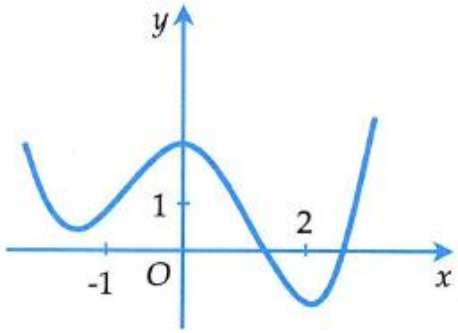
Câu 42. Ta có: $f''(x)<0,\forall x\in(-1;2)$.

Suy ra: $f''(0)<0$.

Như vậy theo giả thuyết ta có: $\begin{cases}f'(0)=0\\f''(0)<0\end{cases}$.

Do vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $x=0$.

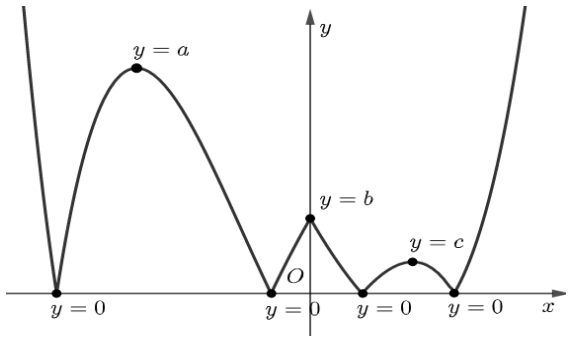
Trong bốn hình vẽ chỉ thấy đồ thị hàm số ở hình 3 thỏa mãn tính chất trên.



Đáp án C

Câu 43. Để vẽ đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$, ta chỉ cần giữ nguyên phần phía trên trục hoành của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và vẽ đối xứng phần phía dưới trục hoành lên phía trên.

Theo cách trên, ta thu được đồ thị sau:



Nhìn vào đồ thị trên, ta nhận được các giá trị cực trị là:

$$y=a;\ y=b;\ y=c;\ y=0.$$

Vậy hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có 4 **giá trị** cực trị.

Đáp án D

Câu 44. Thay x thành $1-x$, ta được:
$f\left(1-x\right)+2f\left(x\right)=2-2x+x^2\ (*).$

Theo giả thiết suy ra:
$f\left(1-x\right)=\frac{1}{2}\left(x^2+1-f\left(x\right)\right)$ thay vào phương trình $(*)$ ta có:

$$\frac{1}{2}\left(x^2+1-f\left(x\right)\right)+2f\left(x\right)-2+2x-x^2=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}f\left(x\right)+2f\left(x\right)-2+2x-x^2=0$$
$$\Rightarrow 3f\left(x\right)=x^2-4x+3\ (1)$$

Thay (1) vào giả thiết ta có:

$$y=6.x.f\left(x\right)+11x^2-78x-78$$
$$\Leftrightarrow y=2x\left(x^2-4x+3\right)+11x^2-78x-78$$
$$\Leftrightarrow y=2x^3-8x^2+6x+11x^2-78x-78$$
$$\Leftrightarrow y=2x^3+3x^2-72x-78=g(x)$$

Xét hàm số $y=g(x)$ ta có:

$$g'\left(x\right)=6x^2+6x-72=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4\\x=3\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	130	↘	-213	↗	$+\infty$

Vậy $x_1=-4,\ x_2=3\Rightarrow x_1.x_2=-12$.

Đáp án A

Câu 45. Quan sát đồ thị $y=f\left(x\right)$, ta thấy:
Hàm số có hai điểm cực trị $x=-2;\ x=0$.
Vì vậy: $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ có hai nghiệm $x=-2;\ x=0$ nên $f'(x)=3ax(x+2)$.
Ta có: $y'=\left[f\left(-2x^2+4x\right)\right]'$.

$$\Leftrightarrow y'=\left(-4x+4\right).f'\left(-2x^2+4x\right)$$
$$\Leftrightarrow y'=3a\left(-4x+4\right)\left(-2x^2+4x\right)\left(-2x^2+4x+2\right)$$
$$\Leftrightarrow y'=-48ax(x-2)(x-1)(x^2-2x-1)$$
$$y'=0\Leftrightarrow -48ax\left(x-2\right)\left(x-1\right)\left(x^2-2x-1\right)=0.$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\\x=1\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Đạo hàm của hàm số đổi dấu khi qua các điểm $x=0;\ x=2;\ x=1;\ x=1\pm\sqrt{2}$, vì cả năm giá trị đều là nghiệm bội lẻ.
Vậy hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Đáp án D

Câu 46. Ta có: $y'=x^2+2m^4x+m^3-27$.

Và: $y'=0\Leftrightarrow x^2+2m^4x+m^3-27=0$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never go anywhere unless you try

Để hàm số có hai cực trị nằm về phía của trục tung thì phương trình $x^2+2m^4x+m^3-27=0$ có hai nghiệm trái dấu

$\Rightarrow ac<0\Leftrightarrow m^3-27<0\Leftrightarrow m<3$.

Với $m<3$, hàm số có hai cực trị nằm về hai phía của trục tung.

Đáp án D

Câu 47. Xét hàm số:

$$y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d.$$

Ta có: $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Do hàm số có hoành độ hai điểm cực trị là: $x_1=1,\ x_2=3$ nên:

$$\begin{cases}4=x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}\\ 3=x_1x_2=\dfrac{c}{3a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-6a\\ c=9a\end{cases}.$$

Xét phương trình $f(x)=f(m)$, ta được:

$$ax^3+bx^2+cx+d=am^3+bm^2+cm+d$$
$$\Leftrightarrow a\left(x^3-m^3\right)+b\left(x^2-m^2\right)+c(x-m)=0$$
$$\Leftrightarrow a\left(x^3-m^3\right)-6a\left(x^2-m^2\right)+9a(x-m)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-m)\left(x^2+mx+m^2\right)-6(x-m)(x+m)+...$$
$$...+9(x-m)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-m)\left[x^2+mx+m^2-6x-6m+9\right]=0$$
$$\Leftrightarrow (x-m)\left[x^2+(m-6)x+m^2-6m+9\right]=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-m=0\\ x^2+(m-6)x+m^2-6m+9=0\end{array}\right.$$

Để phương trình $f(x)=f(m)$ có ba nghiệm phân biệt thì phương trình:

$x^2+(m-6)x+m^2-6m+9=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $x=m$ $(*)$.

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=(m-6)^2-4\left(m^2-6m+9\right)>0\\ m^2+(m-6)m+m^2-6m+9\neq 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3m^2+12m>0\\ 3m^2-12m+9\neq 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}0<m<4\\ m\neq 1,m\neq 3\end{cases}$$

Vậy $m\in(0;4)\setminus\{1,3\}$.

Đáp án D

Câu 48. Để hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có đúng 3 điểm cực trị thì hàm số

$$y=(m-1)x^3-5x^2+(m+3)x+3$$

có 2 cực trị trái dấu.

Trước hết cần điều kiện: $m-1\neq 0\Leftrightarrow m\neq 1$.

Ta có: $y'=3(m-1)x^2-10x+m+3$.

Để hàm số $y=(m-1)x^3-5x^2+(m+3)x+3$ có 2 cực trị trái dấu thì phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm trái dấu.

$$\Rightarrow 3(m-1)(m+3)<0\Leftrightarrow -3<m<1.$$

Kết hợp điều kiện $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-2;-1;0\}$.

Với $m=1$ thì hàm số trở thành:

$y=-5x^2+4x+3$ có 1 cực trị $x=\dfrac{2}{5}>0$.

Khi đó hàm số $f\left(|x|\right)$ có đúng 3 điểm cực trị.

Vậy $m\in\{-2;-1;0;1\}$.

Đáp án C

Extra Techniques:

Tips:

Xét hàm số: $y=f(x)$ liên tục trên K. Giả sử hàm số có n điểm cực trị

dương khi đó số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ là $2n+1$.

Câu 49. Xét hàm số: $y=f\left(1-2x\right)$.

Ta có: $y'=-2f'\left(1-2x\right)=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-2x=a\\1-2x=b\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1-a}{2}\\x=\dfrac{1-b}{2}\end{array}\right.$, với $x=a;\ x=b$ là hai điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)$.

Vậy hàm số $y=f\left(1-2x\right)$ có hai điểm cực trị là $x=\dfrac{1-a}{2};\ x=\dfrac{1-b}{2}$.

Đáp án B

Extra Techniques:

Remark:

Số điểm cực trị của hàm $f\left(ax+b\right)$ bằng số điểm cực trị của hàm $f\left(x\right)$ vì hàm $f\left(ax+b\right)$ được sinh ra bởi các phép tịnh tiến và co dãn hàm $f\left(x\right)$.

Câu 50. Ta có: $y'=16x^3-12x-4=0$.

$\Leftrightarrow (2x+1)^2(x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\ (NBC)\\x=1\end{array}\right.$.

Nhận thấy, hàm số có đúng một nghiệm bội lẻ và đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua nghiệm $x=1$ (do: $\left\{\begin{array}{l}y'\left(1^-\right)=a<0\\y'\left(1^+\right)=b>0\end{array}\right.$).

Nên hàm số có đúng một điểm cực tiểu.

Đáp án A

Câu 51. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)$ chính bằng tổng số nghiệm bội lẻ của phương trình $f'\left(x\right)=0$.

Ta có: $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-3\\x=0\\x=3\\x=8\ (NBC)\end{array}\right.$.

Như vậy chỉ có ba nghiệm $x=-3,\ x=0,\ x=3$ là ba nghiệm bội lẻ.

Vậy hàm số $y=f\left(x\right)$ có ba điểm cực trị.

Đáp án A

Extra Techniques:

Tips:

Dấu hiện để nhận biết nghiệm bội lẻ. Nghiệm bội lẻ của phương trình $f'\left(x\right)=0$ được hiểu đơn giản là nghiệm của phương trình $f'\left(x\right)=0$ mà tại đó dấu của $f'\left(x\right)$ thay đổi (Đổi từ âm sang dương hoặc ngược lại).

Câu 52. Xét hàm số: $y=-x^3+3x^2-5x+2$.

Ta có: $y'=-3x^2+6x-5$.

$\Leftrightarrow y'=-\left(3x^2-6x+3\right)-2$

$\Leftrightarrow y'=-3\left(x-1\right)^2-2\le -2<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Nên hàm số $y=-x^3+3x^2-5x+2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy hàm số $y=-x^3+3x^2-5x+2$ không có điểm cực trị.

Đáp án A

Câu 53. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định.

+) Nếu $\left\{\begin{array}{l}f'\left(x_0\right)=0\\f''\left(x_0\right)>0\end{array}\right.$ nên $x=x_0$ là điểm cực

tiểu của hàm số $y=f(x)$.

+) Nếu $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0 \end{cases}$ nên $x=x_0$ là điểm cực đại của hàm số $y=f(x)$.

+) Trường hợp $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)=0 \end{cases}$ thì ta cần phải kiểm tra lại lần nữa.

Hàm số $y=x^4+mx^2$ có: $\begin{cases} y'=4x^3+2mx \\ y''=12x^2+2m \end{cases}$. Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ thì điều kiện ban đầu, hàm số phải thỏa $\begin{cases} 4.0^3+2m.0=0 \\ 12.0^2+2m>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ m>0 \end{cases} \Rightarrow m>0$.

Với $\begin{cases} 4.0^3+2m.0=0 \\ 12.0^2+2m=0 \end{cases} \Rightarrow m=0$.

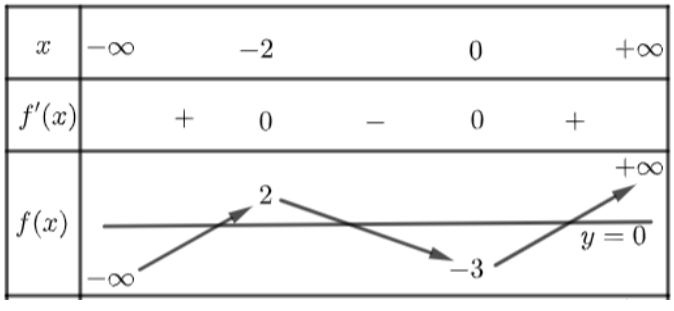
Thử lại, với $m=0 \Rightarrow f(x)=x^4$ là hàm số nhận điểm $x=0$ là điểm cực tiểu.

Vậy: $m\ge 0$.

Đáp án C

Câu 54.

Ta tiến hành kẻ đường thẳng $y=0$ trên bảng biến thiên khi đó ta có:



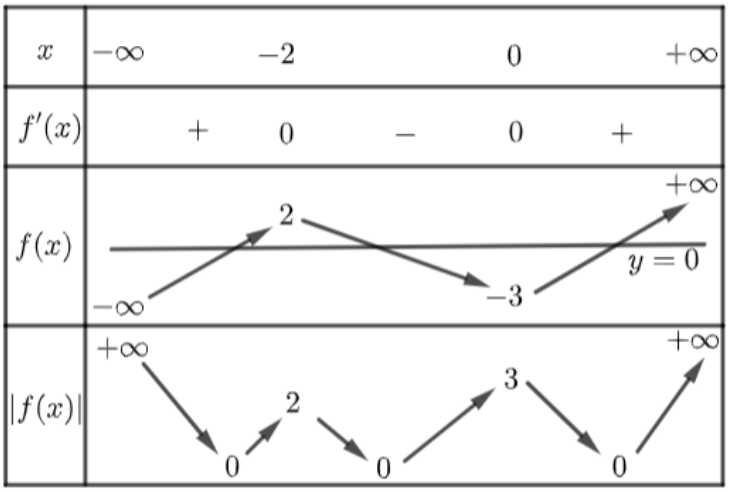
Ta có: $|f(x)|=\begin{cases} f(x), & f(x)\ge 0 \\ -f(x), & f(x)\le 0 \end{cases}$.

Do đó đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ gồm hai phần:

Phần 1: Là phần đồ thị nằm trên trục hoành.

Phần 2: Lấy đối xứng phần của đồ thị dưới trục Ox qua Ox.

Khi đó bảng biến thiên sẽ là:



Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có 5 điểm cực trị, trong đó có 3 cực tiểu.

Đáp án C

Câu 55. Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị cực tiểu là $y_{CT}=-3$.

Đáp án B.

Câu 56. Xét từng đáp án:

Đáp án A: Hàm số $y=x^4+3x^2+2$ có 1 cực trị.

Loại A.

Đáp án B: Đây là hàm số bậc 3 có $b^2-3ac=25>0$. Do đó, hàm số có 2 cực trị.

Chọn B.

Đáp án C: Ta có: $y'=\dfrac{2x^2+1}{3x^2}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Do đó, hàm số này đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

Vậy hàm số $y=\dfrac{2x^2-1}{3x}$ không có cực trị.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Loại C.

Đáp án D: Ta có: $y' = 2017.6x^5 + 2016.4x^3$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x^3\left(2017.6x^2 + 2016.4\right) \Leftrightarrow x = 0$

Do đó hàm số này có đúng 1 cực trị.

Loại D.

Đáp án B

Câu 57. Hàm số trùng phương luôn đạt cực trị tại $x = 0$. Do đó: $x_1.x_2.x_3 = 0$.

Đáp án D

Câu 58. Ta có:

$$g'(x) = f'\left(f(x)\right).f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f(x) = 1 \\ f(x) = -1 \end{array}\right.$$

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Phương trình $f(x) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a < -1 \\ x = b \in (0;1) \\ x = c > 1 \end{array}\right.$.

Phương trình $f(x) = -1 \Leftrightarrow x = d < -1$.

Như vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 6 nghiệm thực phân biệt.

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 6 cực trị.

Đáp án B

Câu 59. Ta có: $y' = (2x+2)\, f'\left(x^2 + 2x\right)$.

Suy ra: $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 2 = 0 \\ f'\left(x^2 + 2x\right) = 0 \end{array}\right.$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x^2 + 2x = a \in (-\infty;-1) \\ x^2 + 2x = b \in (-1;0) \\ x^2 + 2x = c \in (0;1) \\ x^2 + 2x = d \in (1;+\infty) \end{array}\right.$$

• $x^2 + 2x - a = 0$ có $\Delta' = 1 + a < 0 \ \ \forall a \in (-\infty;-1)$ nên phương trình vô nghiệm.

• $x^2 + 2x - b = 0$ có $\Delta' = 1 + b > 0 \ \ \forall b \in (-1;0)$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

• $x^2 + 2x - c = 0$ có $\Delta' = 1 + c > 0 \ \ \forall c \in (0;1)$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

• $x^2 + 2x - d = 0$ có $\Delta' = 1 + d > 0 \ \ \forall d \in (1;+\infty)$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Như vậy phương trình đạo hàm $y' = (2x+2)\, f'\left(x^2 + 2x\right) = 0$ có tất cả 7 nghiệm đơn.

Vậy hàm số $y = f\left(x^2 + 2x\right)$ có tất cả 7 điểm cực trị.

Đáp án D

Câu 60. Xét hàm số: $y = f(x) = x^4 - 2mx^2$, có:

$$y' = 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$$.

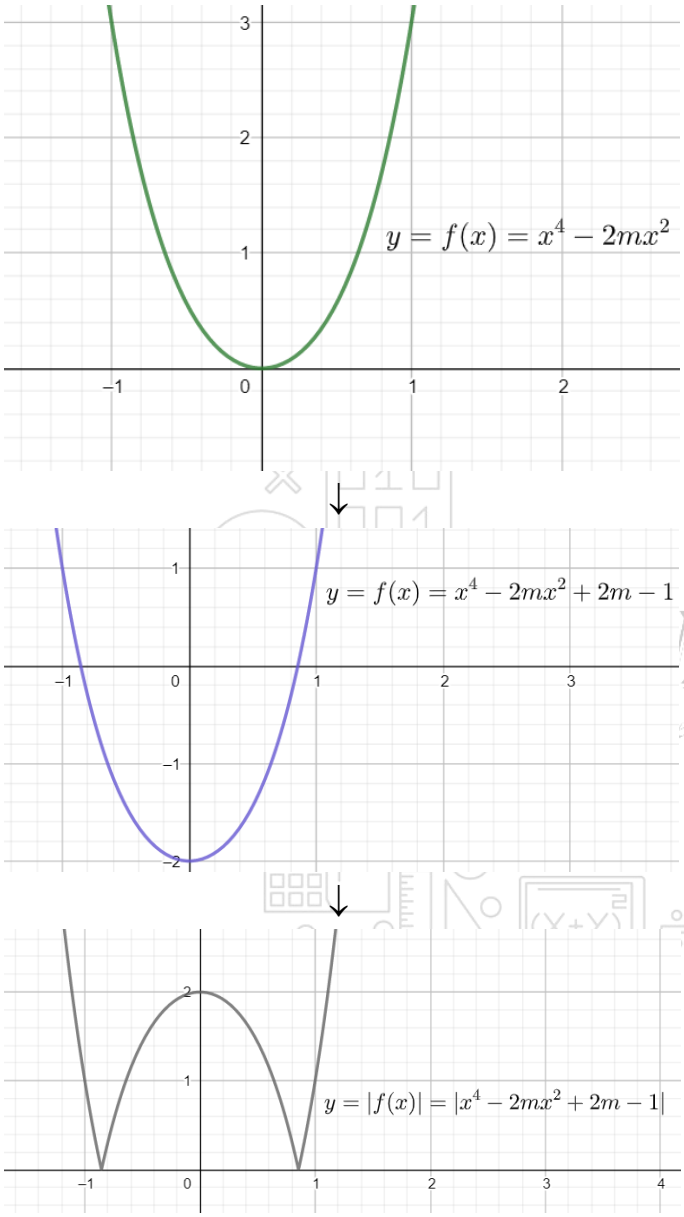
Ta xét các trường hợp:

Trường hợp 1: Hàm số $y = f(x) = x^4 - 2mx^2$ có đúng một cực trị là 0 tức là $m \le 0$.

(Vì hàm số bậc bốn trùng phương có một cực trị khi và chỉ khi tích $ab \ge 0$).

Do đó hàm số $y=\left|x^4-2mx^2+2m-1\right|$ có ba cực trị khi $2m-1<0\Leftrightarrow m<\frac{1}{2}$.

Minh họa bằng hình vẽ bên dưới:



Vậy: $m=\{-2;-1;0\}$.

Trường hợp 2: Hàm số $y=f(x)=x^4-2mx^2$ có đúng 3 điểm cực trị lần lượt là: $x=-\sqrt{m},\ x=0,\ x=\sqrt{m}$ tức là $m>0$.

Do đó hàm số $y=\left|x^4-2mx^2+2m-1\right|$ có ba cực trị khi:

$y_{CT}=y\left(-\sqrt{m}\right)=y\left(\sqrt{m}\right)=-m^2+2m-1\geq 0\Leftrightarrow m=1$ (thỏa mãn).

Vậy qua hai trường hợp trên ta thấy có 4 giá trị của m thỏa mãn.

Đáp án D

Câu 61. Xét hàm số $y=f(x)$, ta có:

$$f'(x)=x^3(x+2)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right).$$

Do đó hàm số $f(x)$ có 4 điểm cực trị là:

$x=0;\ x=-2;\ x=\pm\sqrt{2}$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗		↘		↗

Suy ra $f(x)=0$ có tối đa 5 nghiệm phân biệt.

Do đó hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có tối đa $4+5=9$ điểm cực trị.

Mặt khác:

Số điểm cực trị hàm số $y=\left|f(1-2018x)\right|$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(x)\right|$. Do đó hàm số $y=\left|f(1-2018x)\right|$ có tối đa 9 điểm cực trị.

Đáp án A

Extra Techniques:

Tips:

Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ và số điểm cực trị của hàm số $y=f(ax+b)$ là như nhau. Điều đó cũng đúng đối với hàm số: $y=\left|f(x)\right|$

và hàm số $y=\left|f\left(ax+b\right)\right|$. Do hàm số $y=f\left(ax+b\right)$ thực chất là hàm số $y=f\left(x\right)$ qua các phép co dãn đồ thị và tịnh tiến đồ thị sang ngang (trái, phải). Nên sẽ không làm ảnh hưởng đến số cực trị hàm trị tuyệt đối.

Câu 62. Ta có: $y=\sqrt{\left[f^2\left(x\right)+f\left(x\right)+m\right]^2}$.

$$\Rightarrow y'=\frac{\left[f^2\left(x\right)+f\left(x\right)+m\right]\left[2f'\left(x\right)f\left(x\right)+f'\left(x\right)\right]}{\sqrt{\left[f^2\left(x\right)+f\left(x\right)+m\right]^2}}$$

$y'=0$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(x\right)=0\\f\left(x\right)=\dfrac{-1}{2}\\f^2\left(x\right)+f\left(x\right)+m=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\\x=x_0<0\\f^2\left(x\right)+f\left(x\right)+m=0\ \left(1\right)\end{array}\right.$$

Đặt $t=f\left(x\right)$, $\left(1\right)\Leftrightarrow t^2+t+m=0\ \left(*\right)$.

Ta đã tìm được 3 điểm cực trị là $x=1;x=3;x=x_0<0$.

Nên để hàm số đã cho có đúng 3 điểm cực trị thì phương trình $\left(*\right)$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép là $t=\dfrac{-1}{2}$.

Suy ra: $\Delta=1-4m\le0\Leftrightarrow m\ge\dfrac{1}{4}$.

Thử lại, ta thấy:

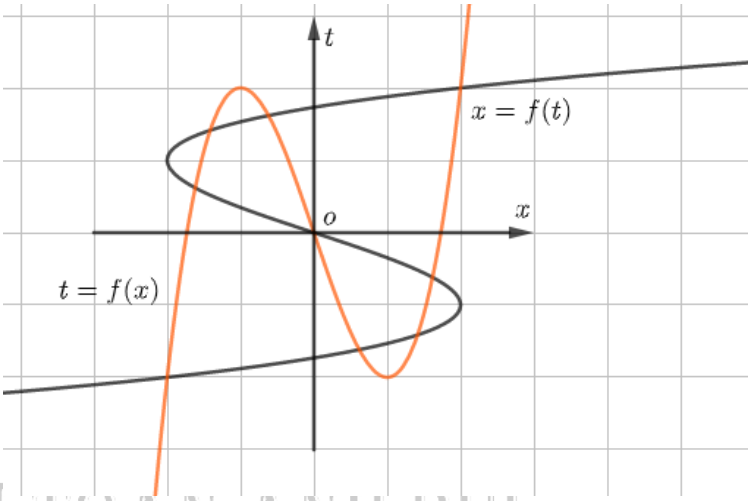
$m=\dfrac{-1}{4}\Rightarrow\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow t=\dfrac{-1}{2}$ (Thỏa mãn yêu cầu đề bài).

Vậy $m\ge\dfrac{1}{4}$.

Đáp án B

Câu 63. Cách 1:

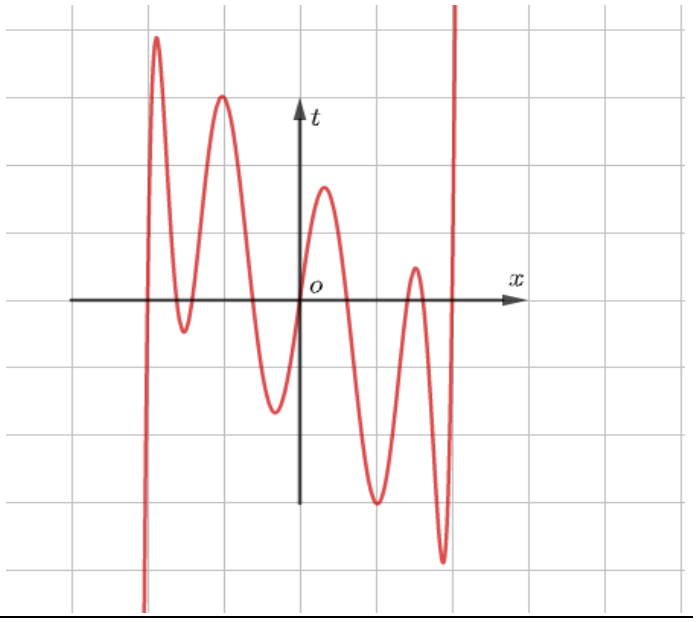
Đặt $k(x)=f(f(x))-x$ và $t=f(x)$. Bây giờ ta xét số nghiệm của phương trình $k(x)=0\Leftrightarrow f(t)=x$. Để khảo sát ta xét tương giao hàm $f\left(x\right)$ và hàm $f\left(t\right)$ trên hệ trục tọa độ Oxt.



Trong đó đường màu cam là đồ thị $t=f(x)$.

Từ đồ thị ta thấy được chúng có 9 giao điểm tức là phương trình $k\left(x\right)=0$ có 9 nghiệm và $k\left(x\right)$ là đa thức bậc 9 nên buộc có 8 cực trị.

Trong đó có 4 nghiệm dương, 4 nghiệm âm và một nghiệm bằng 0. Ta có thể phác họa đồ thị $y=k\left(x\right)$ như sau:



Rõ ràng $y=k(x)$ không chỉ có 4 nghiệm dương mà còn có 4 cực trị dương nên hàm $g(x)=\left|k(|x|)\right|$ có $2.8+1=17$ điểm cực trị.

Đáp án B

Extra Techniques:

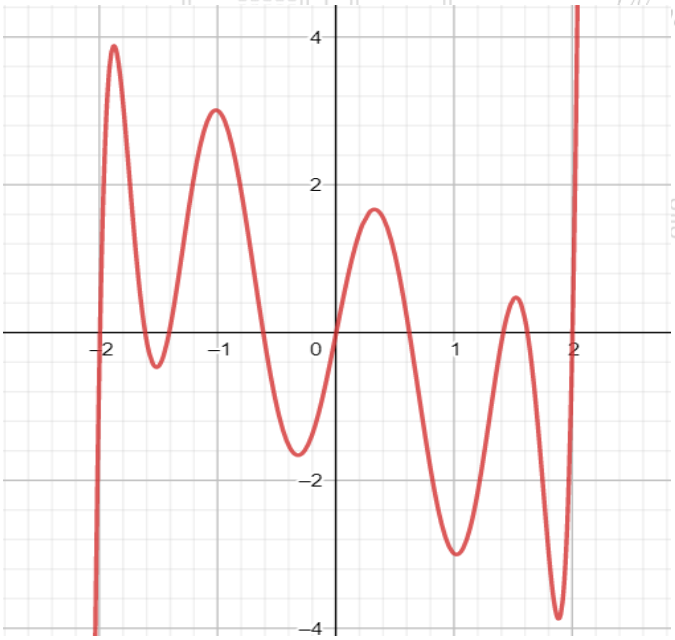
Remark:

Giả sử hàm số $y=f(x)$ có n điểm cực trị dương thì hàm số $y=f(|x|)$ có tất cả $S=2n+1$ điểm cực trị.

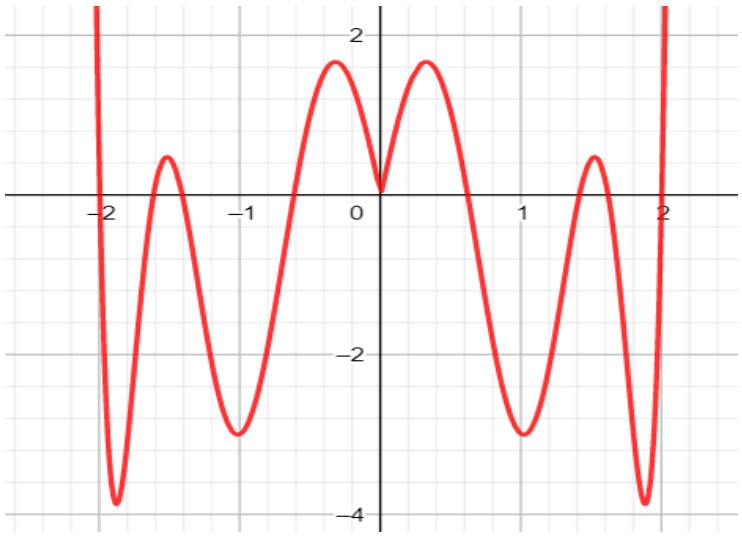
Giả sử hàm số $y=f(x)$ có m điểm cực trị và phương trình $f(x)=0$ có n nghiệm bội lẻ thì hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có tất cả $S=m+n$ điểm cực trị.

Cách 2:

Phác họa đồ thị hàm số: $y=k(x)$.



Khi đó đồ thị hàm số: $y=k(|x|)$ có được bằng cách lấy đối xứng phần bên phải trục tung sang trái (Bỏ phần đồ thị bên trái trục hoành). Minh họa như hình vẽ.



Tiếp đó, đồ thị hàm số: $y=\left|k(|x|)\right|$ có được bằng cách giữ lấy phần phần đồ thị nằm trên trục tung và lấy đối xứng phần đồ thị nằm ở dưới trục tung lên phía trên. Minh họa bằng đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Như vậy hàm số $y=\left|f\left(f(|x|)\right)-|x|\right|$ có tất cả 17 cực trị.

Câu 64. Xét: $y=x^3-\left(\dfrac{2m+1}{2}\right)x^2+2x-2022$.

Ta có: $y'=3x^2-(2m+1)x+2$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Delta' = \frac{1}{4}(2m+1)^2 - 6 > 0 \Leftrightarrow (2m+1)^2 > 24$ (*)

Theo định lý Viete ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m+1}{3} \\ x_1 x_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$.

Vì: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m+1}{3} \\ 2x_1 - 3x_2 - 3 = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}(3m-2) \\ x_2 = \frac{1}{15}(m+11) \end{cases}$.

Thế vào $x_1.x_2 = \frac{2}{3}$, ta được:

$x_1 x_2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left[\frac{1}{5}(3m-2)\right].\left[\frac{1}{15}(m+11)\right] = \frac{2}{3}$.

$\Leftrightarrow \frac{1}{75}(3m^2 + 31m - 22) = \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow 3m^2 + 31m - 22 = 50$

$\Leftrightarrow 3m^2 + 31m - 72 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{1}{6}(5\sqrt{73} - 31) \\ m_2 = -\frac{1}{6}(5\sqrt{73} + 31) \end{cases}$

$\Rightarrow m_1 - m_2 = \frac{5\sqrt{73}}{3}$

$\Rightarrow a = \frac{5}{3}, b = 73, c = 0$

$A = 12(a+b+c) = 896$.

Đáp án A

Câu 65. Dựa vào đồ thị ta có $b = e$ và $c = 0$. Khi đó $(C_2): y = g(x) = x^3 + dx + b$. Ta cần tìm tung độ của hai điểm A, B (theo a).

$\begin{cases} f'(x) = 2x(4x^2 + a) \\ g'(x) = 3x^2 + d \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ g'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{a}{4} \\ x^2 = -\frac{d}{3} \end{cases}$.

Theo đề bài ta có $\begin{cases} a < 0 \\ d < 0 \end{cases}$ và $\frac{-a}{4} = \frac{-d}{3} \Rightarrow d = \frac{3a}{4}$

Khi đó: $\begin{cases} y_B = f\left(-\sqrt{\frac{-a}{4}}\right) = b - \frac{a^2}{8} \\ y_A = f\left(-\sqrt{\frac{-d}{3}}\right) = b - \frac{a\sqrt{-a}}{4} \end{cases}$.

$\Rightarrow AB = \frac{a^2}{8} - a\frac{\sqrt{-a}}{4}$.

Đặt: $t = \sqrt{\frac{-a}{2}} > 0$.

$\Rightarrow AB = \frac{t^4}{2} + \frac{t^3\sqrt{2}}{2} \le 2022$

$\Rightarrow 0 < t \le 7.64311$

$\begin{cases} t > 0 \\ t \le 7.64 \end{cases} \Rightarrow a \in [-116.834; 0)$

$\Rightarrow a = \{-116; -115; ...; -1\}$

Suy ra có 116 giá trị nguyên của a thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Đáp án B

Câu 66. Ta có:

$g'(x) = 2023[f'(x)]^{2022} f''(x).[1 - f''(x)] - ...$

$...[f'(x)]^{2023} f'''(x)$

Do: $f'''(x) = 0$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

$\Rightarrow g'(x)=2023\left[f'(x)\right]^{2022}.f''(x).\left[1-f''(x)\right].$

Từ giả thuyết ta có: $\left[f'(x)\right]^{2022}\left[1-f''(x)\right]=$

$=\dfrac{2x(x+1)^2(x-2022)^{2023}}{f''(x)}.$

$\Rightarrow\left[f'(x)\right]^{2022}.\left[1-f''(x)\right].f''(x)=$

$=2x(x+1)^2(x-2022)^{2023}.$

$\Rightarrow g'(x)=2023.2x(x+1)^2(x-2022)^{2023}.$

Ta thấy: $x=0, x=2022$ là các nghiệm đơn nên hàm số $y=g(x)$ có 2 điểm cực trị.

Đáp án B

Câu 67. Do hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(x_0;+\infty)$ nên $a<0$.

Mặt khác, đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ là $x=1,\ x=2$ nên $\begin{cases}f(1)=0\\f(2)=0\end{cases}$, hay: $f(x)=a(x-1)(x-2)$.

Suy ra: $f(x)=ax^2-3ax+2a$.

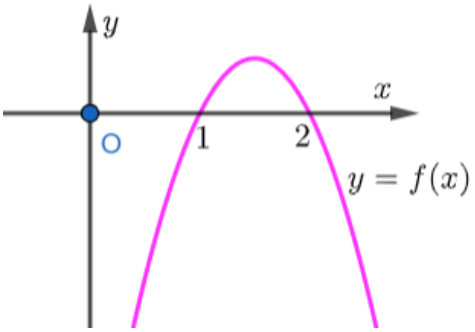
Khoảng cách từ giao điểm của Parabol với trục tung đến điểm O bằng 4 nên ta có:

$$|2a|=4\Rightarrow a=\pm 2.$$

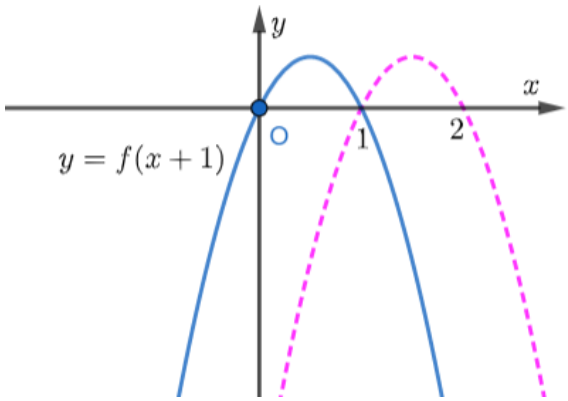
Vì: $a<0\Rightarrow a=-2$.

Vậy: $f(x)=-2x^2+6x-4$.

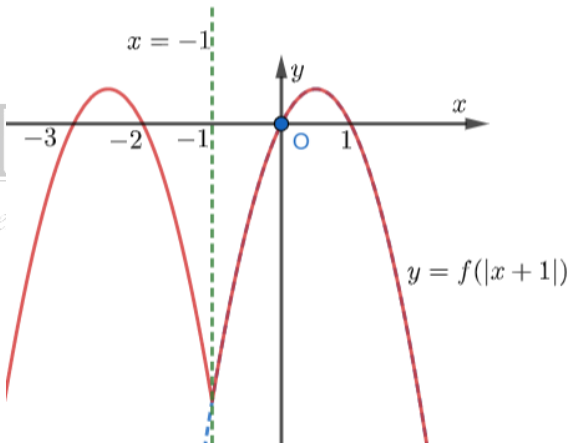
Vẽ đồ thị hàm số: $y=f(x)=-2x^2+6x-4$.



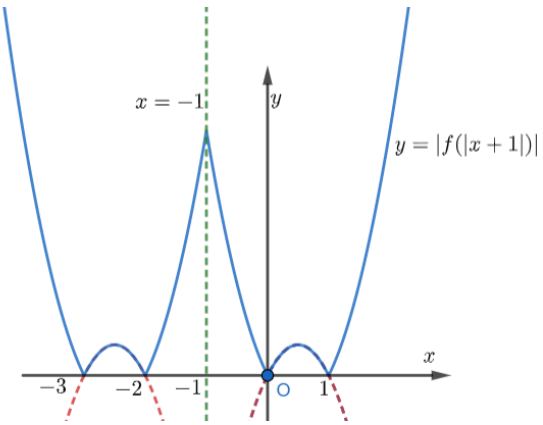
Tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f(x)$ sang trái 1 đơn vị, ta thu được đồ thị hàm số $y=f(x+1)$.



Giữ nguyên phần đồ thị phía bên phải đường thẳng $x=-1$, bỏ phần đồ thị phía bên trái đường thẳng $x=-1$, sau đó lấy đối xứng sang trái phần đồ thị nằm bên phải đường thẳng $x=-1$, ta thu được đồ thị hàm số $y=f(|x+1|)$



Giữ nguyên phần đồ thị phía trên trục hoành và lấy đối xứng phần đồ thị nằm bên dưới trục hoành lên trên, ta thu được đồ thị hàm số $y=\left|f(|x+1|)\right|$.



Vậy hàm số $y=\left|f\left(\left|x+1\right|\right)\right|$ có tất cả 7 điểm cực trị.

Đáp án D

Câu 68. Theo bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y=f'(x)$ chỉ chạm (tiếp xúc) trục hoành chứ không cắt qua trục hoành nên phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm bội chẵn là $x=-2$ và $x=2$, suy ra đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có điểm cực trị.

Đáp án C

Extra Techniques:

Remark:

Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại các điểm mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu và hàm số $y=f(x)$ liên tục.

Vì: $f'(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy hàm số $y=f(x)$ không có điểm cực trị.

Câu 69. Ta có: $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Theo giả thuyết, ta có: $\begin{cases} f(1)=2 \\ f'(1)=0 \\ f(-2)=-1 \\ f'(-2)=0 \end{cases}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c+d=2 \\ 3a+2b+c=0 \\ -8a+4b-2c+d=-1 \\ 12a-4b+c=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{2}{9} \\ b=-\dfrac{1}{3} \\ c=\dfrac{4}{3} \\ d=\dfrac{11}{9} \end{cases} \Rightarrow A=3.$$

Đáp án C

Câu 70. Ta có: $y'=\dfrac{9}{2}x^2-8mx+(m-1)^2$.

Hàm số y có hai điểm cực trị khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta'=m(23m+18)>9$.

Theo định lý Viéte ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{16m}{9} \\ x_1x_2=\dfrac{2(m-1)^2}{9} \end{cases}$.

Khi đó: $x_1x_2>x_1+x_2\Leftrightarrow \dfrac{2}{9}(m-1)^2>-\dfrac{16}{9}m$.

$$\Leftrightarrow m^2+6m+1>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2\sqrt{2}-3 \\ m<-2\sqrt{2}-3 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow m\in[-10;-6]\cup[0;10]$.

Vậy có 16 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Đáp án C

Câu 71. Đặt $y=g(x)=3^{f(x)}-4^{f(x)}$.

Quan sát đồ thị ta thấy hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị hay phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Ta có: $y' = f'(x).\left[3^{f(x)}.\ln 3 - 4^{f(x)}.\ln 4\right]$.

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ 3^{f(x)}.\ln 3 - 4^{f(x)}.\ln 4 = 0 \end{array}\right.$.

Ta có: $3^{f(x)}.\ln 3 - 4^{f(x)}.\ln 4 = 0$.

$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{f(x)} = \frac{\ln 4}{\ln 3}$

$\Leftrightarrow f(x) = \log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{\ln 4}{\ln 3}\right) \approx -0.8$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta thấy phương trình $f(x) = \log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{\ln 4}{\ln 3}\right)$ có 2 nghiệm phân biệt khác các nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ nên hàm số $y = 3^{f(x)} - 4^{f(x)}$ có tất cả 5 điểm cực trị.

Đáp án C

Câu 72. Ta có $y' = 8x^3 - 8mx$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$.

Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $m > 0$.

Khi đó tọa độ ba điểm cực trị là:

$$\left\{\begin{array}{l} A(0;1) \\ B\left(-\sqrt{m};-2m^2+1\right). \\ C\left(\sqrt{m};-2m^2+1\right) \end{array}\right.$$

$\Rightarrow AB = AC = \sqrt{m+4m^4}, BC = 2\sqrt{m}$.

Ta có: $T = \frac{AB.AC}{BC^4} = \frac{m+4m^4}{16m^2} = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{m}+4m^2\right)$.

$$T = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m}+4m^2\right).$$

Ta có: $T \overset{Cauchy}{\geq} \frac{1}{16}.3.\sqrt[3]{\frac{1}{2m}.\frac{1}{2m}.4m^2} = \frac{3}{16}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{1}{2m} = 4m^2 \Rightarrow m = \frac{1}{2} > 0$.

Đáp án D

Câu 73. Đặt: $g(x) = f\left(x^2+4x\right) - x^2 - 4x$.

$\Rightarrow g'(x) = (2x+4)\,f'\left(x^2+4x\right) - (2x+4)$

$\Leftrightarrow g'(x) = (2x+4)\left[f'\left(x^2+4x\right) - 1\right]$.

Ta có: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x+4 = 0 & \\ x^2+4x = -4 & (1) \\ x^2+4x = 0 & (2) \\ x^2+4x = a \in (1;5) & (3) \end{array}\right.$.

Xét phương trình $x^2+4x = a \in (1;5)$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = x^2+4x$ trên $(-5;1)$ như sau:

x	-5		-4		-2		0		1
y'			$-$		0		$+$		
y	5	$\searrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	5

Suy ra (1) có nghiệm kép $x = -2$, (2) có 2 nghiệm phân biệt $x = -4; x = 0$, (3) có 2 nghiệm phân biệt $x = x_1; x = x_2$ khác $-2; 0; -4$.

Do đó phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm trong đó có $x = -2$ là nghiệm bội ba, các nghiệm $x = -4; x = 0; x = x_1; x = x_2$ là các nghiệm đơn.

Vậy $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Đáp án A

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Câu 74.

Xét hàm số $y=f\left[f(x)\right]$.

Ta có: $y'=f'(x).f'\left[f(x)\right]$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\ f'\left[f(x)\right]=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\\ f(x)=0\\ f(x)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\\ x=a\in(2;+\infty)\\ x=b\in(a;+\infty)\end{array}\right.$$

Với $x>b$, ta có: $f(x)>2\Rightarrow f'\left[f(x)\right]>0$.

Với $a<x<b$, ta có: $0<f(x)<2$

$\Rightarrow f'\left[f(x)\right]<0$.

Với $0<x<a$ hoặc $x<0$, ta có: $f(x)<0$

$\Rightarrow f'\left[f(x)\right]>0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		a		b		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số $y=f\left[f(x)\right]$ có 4 điểm cực trị.

Đáp án C

Câu 75.

Từ đồ thị ta thấy: $-2;\ 0;\ 2;\ a;\ 6$ là tất cả các nghiệm của phương trình: $f'(x)=0$.

Ta có: $y'=f'\left(x^6-3x^2\right)=\left(6x^5-6x\right).f'\left(x^6-3x^2\right)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}6x^5-6x=0\\ f'\left(x^6-3x^2\right)=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,x=\pm1\\ x^6-3x^2=-2\\ x^6-3x^2=0\\ x^6-3x^2=2\\ x^6-3x^2=a\\ x^6-3x^2=6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\ x=\pm1\\ x=\pm1\\ x=0,\ x=\pm\sqrt[4]{3}\\ x=\pm\sqrt{2}\\ x=\pm m,\ m>\sqrt{2}\\ x=\pm n,\ n>m\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)=x^6-3x^2$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	0	↘	-2	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $g(x)=x^6-3x^2$, ta suy ra $x=\pm1$ là nghiệm kép của phương trình $x^6-3x^2=-2$ và $x=0$ là nghiệm kép của phương trình $x^6-3x^2=0$. Do đó $x=\pm1$ và $x=0$ là nghiệm kép của $f'\left(x^6-3x^2\right)$. Do vậy $x=\pm1$ và $x=0$ là nghiệm bội ba của phương trình $y'=0$.

Các nghiệm khác $x=\pm1$ và $x=0$ của y' đều là nghiệm đơn.

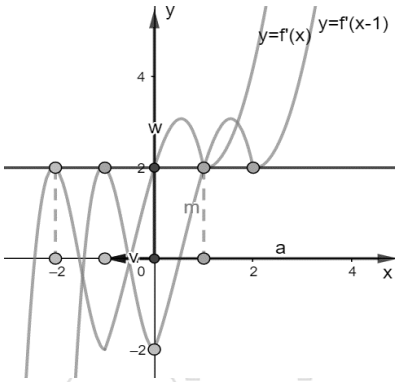
Vậy hàm số đã cho có 11 cực trị.

Đáp án B

Câu 76. Ta có: $y'=\left[2f'(x)-4\right]\pi^{2f(x)-4x}\ln\pi$.

Suy ra: $y'=0\Leftrightarrow 2f'(x)-4=0\Leftrightarrow f'(x)=2$.

Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nhận được từ việc tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f'(x-1)$ sang trái 1 đơn vị.



Nên: $f'(x)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Do $x=-2$ và $x=1$ là nghiệm bội chẵn nên ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↘		↗		↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

Đáp án B

Câu 77. Đặt $h(x)=f(x)+3x$.

Ta có: $h'(x)=f'(x)+3$.

$h'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)+3=0\Leftrightarrow f'(x)=-3$.

Theo đồ thị của hàm số $f'(x)$, thì phương trình $f'(x)=-3$ có 4 nghiệm $\{-1;0;1;2\}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘		↗	$f(0)$	↘		↗		↗	$+\infty$

Theo bảng biến thiên ta có phương trình $h(x)=0$ có hai nghiệm $x_1<-1$ và $x_2>1$ (do có $f(0)<0$).

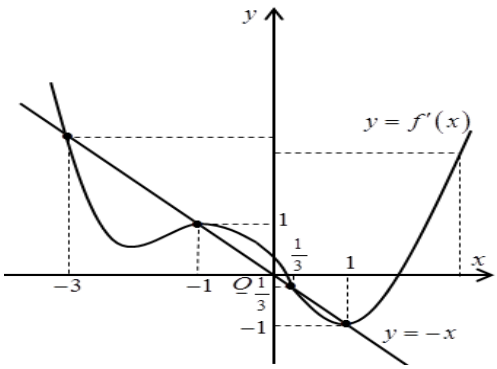
Khi đó ta có:

x	$-\infty$		x_1		-1		0		1		x_2		$+\infty$
$\lvert h(x)\rvert$	$+\infty$	↘	0	↗		↘	$\lvert f(0)\rvert$	↗		↘	0	↗	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)=\left|f(x)+3x\right|$ có 5 cực trị.

Đáp án B

Câu 78.



$$g'(x)=5\cos x f'\left(\frac{5\sin x-1}{2}\right)+\frac{5}{2}\cos x(5\sin x-1)$$

Ta có: $g'(x)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 5\cos x.f'\left(\frac{5\sin x-1}{2}\right)+\frac{5}{2}\cos x.(5\sin x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ f'\left(\frac{5\sin x-1}{2}\right)=-\frac{5\sin x-1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \frac{5\sin x-1}{2}=-3\\ \frac{5\sin x-1}{2}=-1\\ \frac{5\sin x-1}{2}=\frac{1}{3}\\ \frac{5\sin x-1}{2}=1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ 5\sin x-1=-6\\ 5\sin x-1=-2\\ 5\sin x-1=\frac{2}{3}\\ 5\sin x-1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=-1\\ \sin x=-\frac{1}{5}\\ \sin x=\frac{1}{3}\\ \sin x=\frac{3}{5}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}\vee x=\frac{3\pi}{2}\\ x=\frac{3\pi}{2}\\ x=\pi-arc\sin\left(-\frac{1}{5}\right)\vee x=2\pi+arc\sin\left(-\frac{1}{5}\right)\\ x=arc\sin\left(\frac{1}{3}\right)\vee x=\pi-arc\sin\left(\frac{1}{3}\right)\\ x=arc\sin\left(\frac{3}{5}\right)\vee x=\pi-arc\sin\left(\frac{3}{5}\right)\end{array}\right.$$

(Vì: $0<x<2\pi$).

Suy phương trình $g'(x)=0$ có 9 nghiệm,

trong đó có nghiệm $x=\frac{3\pi}{2}$ là nghiệm kép.

Vậy hàm số $y=g(x)$ có 7 cực trị.

Đáp án B

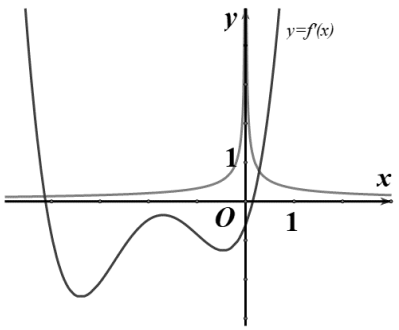
Câu 79. Xét hàm số: $h(x)=f\left(x^3\right)-x$.

Ta có: $h'(x)=3x^2.f'\left(x^3\right)-1=0$.

$$\Leftrightarrow 3x^2.f'\left(x^3\right)-1=0\Leftrightarrow f'\left(x^3\right)=\frac{1}{3x^2}\ (x\neq 0)\quad (1)$$

Đặt: $x^3=t\Rightarrow x^2=\sqrt[3]{t^2}$ phương trình (1) trở thành: $f'(t)=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\ (t\neq 0)\ (2)$.

Vẽ đồ thị hàm $y=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ trên cùng hệ trục tọa độ với hàm $y=f'(x)$.

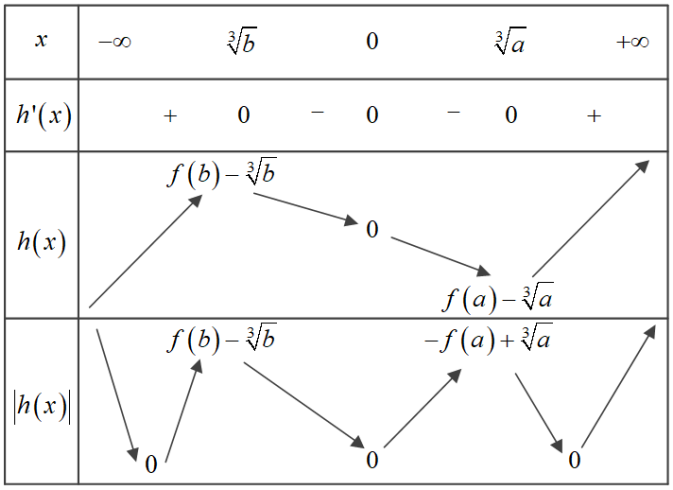


Dựa vào đồ thị ta có: $f'(t)=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=b<0\\ t=a>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3=b<0\\ x^3=a>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt[3]{b}<0\\ x=\sqrt[3]{a}>0\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3\right)-x\right|$ có 5 điểm cực trị.

Đáp án A

Câu 80.

Ta có: $g'(x)=\left(e^x-x-1\right)f'\left(e^x-\dfrac{x^2+2x}{2}\right)$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow\left(e^x-x-1\right)f'\left(e^x-\dfrac{x^2+2x}{2}\right)=0$.

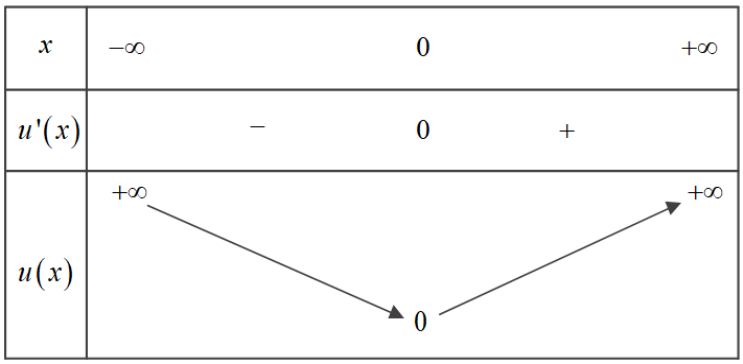
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}e^x-x-1=0\\ f'\left(e^x-\dfrac{x^2+2x}{2}\right)=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}e^x-x-1=0 & (1)\\ e^x-\dfrac{x^2+2x}{2}=-2 & (2)\\ e^x-\dfrac{x^2+2x}{2}=1 & (3)\\ e^x-\dfrac{x^2+2x}{2}=4 & (4)\end{array}\right.$$

Xét hàm số: $u(x)=e^x-x-1$.

Ta có: $u'(x)=e^x-1\Rightarrow u'(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên:

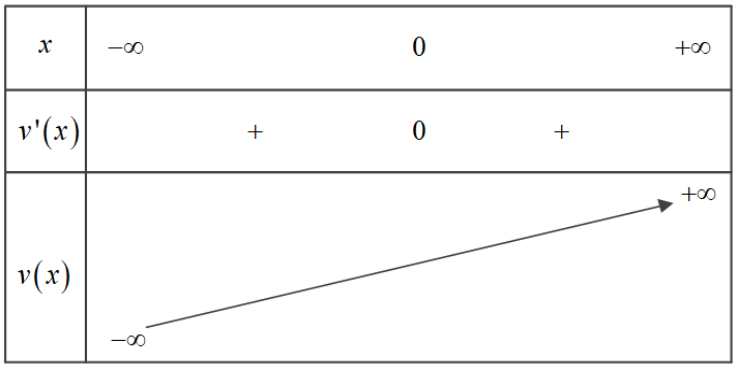


Vậy $u(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Xét hàm số: $v(x)=e^x-\dfrac{x^2+2x}{2}$.

Ta có $v'(x)=e^x-x-1\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bảng biến thiên:



Khi đó các phương trình $(2),(3),(4)$ có nghiệm duy nhất và $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm đó.

Vậy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Đáp án A

Câu 81. Xét hàm số: $g(x)=f\left(2|x|-2\right)$.

$\Rightarrow g'(x)=\left(2|x|-2\right)'f'\left(2|x|-2\right)$.

$=\left(2\sqrt{x^2}-2\right)'\ f'(2|x|-2)=\dfrac{x}{|x|}.f'(2|x|-2).$

Ta có: $g'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x}{|x|}.f'\left(2|x|-2\right)=0$

$\Leftrightarrow f'\left(2|x|-2\right)=0,(x\neq 0).$

Dựa vào đồ thị ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x=3\\x=4\end{array}\right.$.

$\Rightarrow f'(2|x|-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2|x|-2=0\\2|x|-2=2\\2|x|-2=3\\2|x|-2=4\end{array}\right.$.

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x|=1\\|x|=2\\|x|=\dfrac{5}{2}\\|x|=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x=\pm2\\x=\pm\dfrac{5}{2}\\x=\pm3\end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	-1	0	1	2	$\frac{5}{2}$	3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Suy ra hàm số $y=f\left(2|x|-2\right)$ có 9 điểm cực trị.

Đáp án D

Câu 82.

Ta có: $f'(x)=x^2(x+2)^4(x+4)^3...$

$...\left[x^2+2(m+3)x+6m+18\right].$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\(x+2)^4=0\\(x+4)^3=0\\x^2+2(m+3)x+6m+18=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\\x=-4\\x^2+2(m+3)x+6m+18=0\ (*)\end{array}\right.$.

Để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị thì phương trình $(*)$ vô nghiệm, có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có nghiệm là -4.

Trường hợp 1: Phương trình $(*)$ vô nghiệm.

$\Leftrightarrow\Delta=4m^2+24m+36-24m-72=4m^2-36<0$

$\Leftrightarrow-3<m<3\Rightarrow m\in\{-2;-1;0;1;2\}$.

Trường hợp 2: Phương trình $(*)$ có nghiệm kép.

$\Leftrightarrow\Delta=4m^2-36=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\m=-3\end{array}\right.$.

Trường hợp 3: Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Trong đó $x_1=-4$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_1,\ x_2\Leftrightarrow\Delta=4m^2-36>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-3\\m>3\end{array}\right.$.

Theo định lí Viéte ta có:

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -4 + x_2 = -2m - 6 \\ P = x_1.x_2 = -4.x_2 = 6m + 18 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2m - 2 \\ x_2 = -\frac{3}{2}m - \frac{9}{2} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow -2m - 2 = -\frac{3}{2}m - \frac{9}{2} \Leftrightarrow m = 5.$

Vậy $m \in \{-3;-2;-1;0;1;2;3;5\}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Đáp án C

Câu 83. Ta có: $y' = f'\left(\frac{5x}{x^2+4}\right) =$

$$= \left(\frac{5x}{x^2+4}\right)' \cdot \left(\frac{5x}{x^2+4}\right)^2 \left(\frac{5x}{x^2+4} - a\right)\left(13\frac{5x}{x^2+4} - 15\right)^3$$

$$= \frac{20-5x^2}{\left(x^2+4\right)^2} \cdot \frac{25x^2}{\left(x^2+4\right)^2}\left(\frac{-ax^2+5x-4a}{x^2+4}\right)\ldots$$

$$\ldots\left(\frac{-15x^2+65x-60}{x^2+4}\right)^3.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \pm 2 \\ x = 0 \text{ (Nghiệm kép)} \\ x = 3 \\ x = \frac{4}{3} \\ -ax^2 + 5x - 4a = 0 \quad (1) \end{bmatrix}.$$

Đặt: $g(x) = -ax^2 + 5x - 4a$.

Yêu cầu được thỏa mãn khi phương trình $y' = 0$ có 6 nghiệm bội lẻ hay phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $\{\pm 2;0;1;4\}$.

(Nếu $g(0) = 0$ thì $y' = 0$ chỉ có 5 nghiệm bội lẻ).

Điều kiện cần và đủ: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 5^2 - 4a.4a > 0 \\ g(2) \neq 0 \\ g(-2) \neq 0 \\ g(0) \neq 0 \\ g(3) \neq 0 \\ g\left(\frac{4}{3}\right) \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ -\frac{5}{4} < a < \frac{5}{4} \\ a \neq \pm\frac{5}{4} \\ a \neq 0 \\ a \neq \frac{15}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{4} < a < \frac{5}{4} \\ a \neq 0 \\ a \neq \frac{15}{13} \end{cases}.$$

Đáp án B

Câu 84. Ta có: $g'(x) = f'(x) - m$.

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng số nghiệm đơn (bội lẻ) của phương trình $f'(x) = m$.

Dựa và đồ thị ta có điều kiện: $\begin{bmatrix} 0 < m \leq 5 \\ 10 \leq m < 13 \end{bmatrix}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn.

Đáp án B

Dạng 2. Cực trị hàm số và mối ràng buộc về điều kiện.

Câu 1. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3+2x^2-3x+1$ là?

A. $y=-\frac{26}{9}x+\frac{15}{9}$.

B. $y=\frac{25}{9}x+\frac{15}{9}$.

C. $y=\frac{26}{9}x+\frac{15}{9}$.

D. $y=\frac{25}{9}x-\frac{15}{9}$.

Đáp án: A

Lời giải

Cách 1: Xét hàm số: $y=x^3+2x^2-3x+1$.

Ta có: $y'=3x^2+4x-3=0\Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{13}}{3}$.

Gọi A, B lần lượt là điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3+2x^2-3x+1$, khi đó, ta có: $\begin{cases}A\left(\frac{-2-\sqrt{13}}{3};\frac{97+26\sqrt{13}}{27}\right)\\ B\left(\frac{-2+\sqrt{13}}{3};\frac{97-26\sqrt{13}}{27}\right)\end{cases}$.

Vector chỉ phương đường thẳng AB: $\overrightarrow{AB}\left(\frac{2\sqrt{13}}{3};-\frac{52\sqrt{13}}{27}\right)$.

Hay: $\overrightarrow{AB}=\left(1;-\frac{26}{9}\right)\Rightarrow\vec{n}_{AB}\left(\frac{26}{9};1\right)$ là vector pháp tuyến của đường thẳng AB.

Khi đó đường thẳng đi qua hai điểm cực trị A, B của đồ thị hàm số có phương trình: (d): $\frac{26}{9}x+y+C=0$ mà $A\in(d)$.

Khi đó: $C=-\frac{26}{9}.\frac{-2-\sqrt{13}}{3}-\frac{97+26\sqrt{13}}{27}=-\frac{5}{3}$.

Vậy: (d): $y=-\frac{26}{9}x+\frac{5}{3}=-\frac{26}{9}x+\frac{15}{9}$ là đường thẳng cần tìm.

Extra Techniques:

Tips:

Theo Tips được trình bài ở phần **Lưu ý**, ta đã chứng minh được rằng: Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị (cực đại, cực tiểu) của đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có phương trình:

$$y=\left(\frac{2c}{3}-\frac{2b^2}{9a}\right)x+d-\frac{bc}{9a}$$

Cách 2: Dùng công thức.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số: $y=x^3+2x^2-3x+1$ có phương trình:

$$y=\left(\frac{2.(-3)}{3}-\frac{2.2^2}{9.1}\right)x+1-\frac{2.(-3)}{9.1}=-\frac{26}{9}x+\frac{5}{3}=-\frac{26}{9}x+\frac{15}{9}.$$

Cách 3: CASIO.

Xét hàm số: $y=x^3+2x^2-3x+1$.

Ta có: $\begin{cases}y'=3x^2+4x-3\\ y''=6x+4\end{cases}$.

Sử dụng máy tính cầm tay bằng cách nhập biểu thức $y-\frac{y'.y''}{18a}$ như sau:

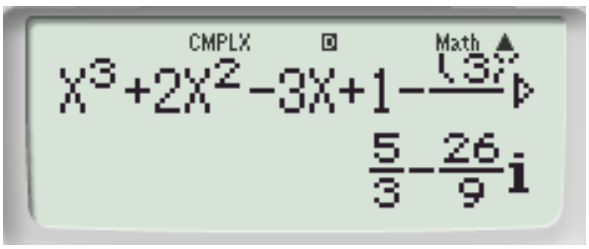
Chọn MODE 2.

Nhập vào màn hình:

$$X^3+2X^2-3X+1-\frac{(3X^2+4X-3).(6X+4)}{18.1}.$$

Ấn CALC, nhập $x=i$ (i là đơn vị ảo, nhấn nút ENG để gọi i ra màn hình).

Màn hình xuất hiện kết quả:



Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị có phương trình là: $y=-\frac{26}{9}x+\frac{5}{3}=-\frac{26}{9}x+\frac{15}{9}$.

(Xem thêm **Câu 30**).

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Câu 2. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+3(1-m)x+1+3m$, tìm m sao cho đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu, đồng thời tìm đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho?

A. $\begin{cases} m\ge 0 \\ (d):\ 2mx+y-2m-2=0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} m> 0 \\ (d):\ 2mx+y-2m-2=0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} m< 0 \\ (d):\ y=202-200x \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} m\ge 0 \\ (d):\ y=202-200x \end{cases}$.

Đáp án: B

Lời giải

Xét hàm số: $y=x^3-3x^2+3(1-m)x+1+3m$.

Ta có: $\begin{cases} y'=3x^2-6x+3-3m \\ y''=6x-6 \end{cases}$.

Để hàm số có hai điểm cực trị thì: $\Delta'_{y'}>0$.

Khi đó: $\Delta'_{y'}>0\Leftrightarrow 9-3(3-3m)>0\Leftrightarrow 9m>0\Leftrightarrow m>0$.

Sử dụng máy tính cầm tay và nhập biểu thức $y-\dfrac{y'.y''}{18a}$ như sau:

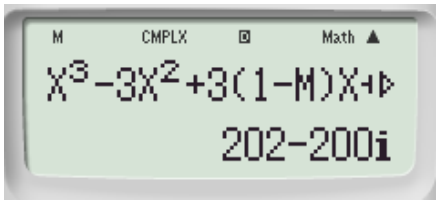
Chọn MODE 2.

Nhập vào màn hình:

$$X^3-3X^2+3(1-M)X+1+3M-\frac{(3X^2-6X+3-3M)(6X-6)}{18}.$$

Ấn CALC, nhập $X=i, M=100$ (i là đơn vị ảo, nhấn nút ENG để gọi i ra màn hình).

Màn hình xuất hiện kết quả:



Extra Techniques:

Tips:

Đối với một số bài toán có chứa tham số m ta thường gán cho $m=100$ khi CALC.

Đối với một số bài toán có chứa tham số m, n ta thường gán cho $m=100$ và $n=0,01$ khi CALC.

Đối với một số bài toán tìm đường thẳng đi qua hai điểm cực trị thì ta CALC giá trị của $x=i$.

Vì: $\begin{cases} 202 = 200 + 2 = 2.100 + 2 = 2m + 2 \\ -200 = -2.100 = -2m \end{cases}$.

Vậy: $y = -2mx + 2m + 2$ là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3(1-m)x + 1 + 3m$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (3m+1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

A. $m = \frac{1}{3}$. **B.** $m = -\frac{1}{6}$.

C. $m = \frac{1}{6}$. **D.** $m = -\frac{1}{3}$.

Đáp án: B

Lời giải

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$, $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' - 2x - 1$.

Do đó, đường thẳng Δ qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số này có phương trình là $y = -2x - 1$.

Để d vuông góc với Δ thì $(3m+1).(-2) = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{6}$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = -\frac{1}{6}$.

Câu 4. Tìm tổng tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng $y = -4x$ song song với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x$.

A. $m = -\frac{1}{3}$. **B.** $m = \frac{2}{3}$.

C. $m = -\frac{2}{3}$. **D.** $m = 1$.

Đáp án: A

Extra Techniques:

Tips:

Cho hai đường thẳng

$$\begin{cases}(d_1): y = a_1x + b_1\\ (d_2): y = a_2x + b_2\end{cases}$$

Hai đường thẳng cắt nhau khi và chỉ khi: $a_1 \neq a_2$.

Hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi: $\begin{cases}a_1 = a_2\\ b_1 \neq b_2\end{cases}$.

Hai đường thẳng trùng với nhau khi và chỉ khi: $\begin{cases}a_1 = a_2\\ b_1 = b_2\end{cases}$.

Hai đường thẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi: $a_1.a_2 = -1$.

Lời giải

Ta có: $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6m(1-2m)$.

Suy ra: $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = m\\ x = 1-2m\end{array}\right.$.

Để hàm số có hai cực trị thì: $m \neq 1-2m \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{3}$.

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$\begin{cases}A\left(m;-7m^3+3m^2\right)\\ B\left(1-2m;20m^3-24m^2+9m-1\right)\end{cases}.$$

Do đó $\overrightarrow{AB} = \left(1-3m;(3m-1)^3\right)$. Do đó AB có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left((3m-1)^2;1\right)$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI

Suy ra phương trình đường thẳng $AB: (3m-1)^2 x + y - 2m^3 + 3m^2 - m = 0$.

Hay: $AB: y = -(3m-1)^2 x + 2m^3 - 3m^2 + m$.

Để đường thẳng AB song song với đường thẳng $y = -4x$ thì:

$$\begin{cases}a_1 = a_2\\ b_1 \neq b_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = -4\\ b \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-(3m-1)^2 = -4\\ 2m^3 - 3m^2 + m \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m = 1\\ m = -\frac{1}{3}\end{array}\right.\\ \begin{cases}m \neq 0\\ m \neq \frac{1}{2}\\ m \neq 1\end{cases}\end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}.$$

Vậy: $m = -\frac{1}{3}$ là giá trị tham số thực duy nhất của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+2x^2+(m-3)x+m$ có hai điểm cực trị và điểm $M(9;-5)$ nằm trên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị.

A. $m=-1$. **B.** $m=-5$.

C. $m=3$. **D.** $m=2$.

Đáp án: C

Lời giải

Ta có: $y'=3x^2+4x+m-3$.

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow 4-3(m-3)>0 \Leftrightarrow m<\frac{13}{3}$ $(*)$.

Ta có: $y=y'.\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}\right)+\left(\frac{2m}{3}-\frac{26}{9}\right)x+\frac{7m}{9}+\frac{2}{3}$ nên phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là: $y=\left(\frac{2m}{3}-\frac{26}{9}\right)x+\frac{7m}{9}+\frac{2}{3}$. Theo giả thiết, đường thẳng này đi qua $M(9;-5)$ nên ta có:

$-5=\left(\frac{2m}{3}-\frac{26}{9}\right).9+\frac{7m}{9}+\frac{2}{3} \Rightarrow m=3$ (thỏa mãn điều kiện $(*)$).

Vậy: $m=3$ là giá trị thực của tham số m cần tìm.

Extra Techniques:

Tips:

Ngoài việc tìm đường thẳng đi qua hai điểm cực trị bằng công thức, ta thường chia đa thức y cho đa thức đạo hàm y' của chúng, khi đó số dư trong phép chia nêu trên chính là đường thẳng cần tìm.

Câu 6. Giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ và đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ. Giá trị nhỏ nhất của $P=abc+ab+c$ bằng?

A. $P=-\frac{16}{25}$. **B.** $P=-9$.

C. $P=-\frac{25}{9}$. **D.** $P=1$.

Đáp án: C

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x)=3x^2+2ax+b$.

Điều kiện để hàm số có hai điểm cực trị là $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow a^2-3b>0$.

Lấy $f(x)$ chia cho $f'(x)$.

Ta có: $f(x)=f'(x).\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}a\right)+\left(\frac{2}{3}b-\frac{2}{9}\right)x+c-\frac{1}{9}ab$.

Suy ra đường thẳng đi qua A, B là: $(d): y=\left(\frac{2}{3}b-\frac{2}{9}\right)x+c-\frac{1}{9}ab$.

Theo đầu bài (d) đi qua gốc tọa độ $\Rightarrow c-\frac{1}{9}ab=0\Leftrightarrow ab=9c$.

Khi đó: $P=abc+ab+c \Leftrightarrow P=9c^2+10c\Leftrightarrow P=\left(3c+\frac{5}{3}\right)^2-\frac{25}{9}$.

Suy ra: $\min P=-\frac{25}{9}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} ab=-5 \\ c=-\frac{5}{9} \end{cases}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức là: $P_{\min}=-\frac{25}{9}$.

Câu 7. Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA=OB$ (O là gốc tọa độ)?

A. $m=\frac{3}{2}$. **B.** $m=3$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m=\frac{5}{2}$.

Đáp án: D

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6x$, $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Do đó đồ thị hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị lần lượt có tọa độ

là $A(0;m)$ và $B(2;-4+m)$.

Ta có: $OA=OB \Leftrightarrow \sqrt{0^2+m^2}=\sqrt{2^2+(4-m)^2} \Leftrightarrow m^2=4+(4-m)^2$

$\Leftrightarrow 20-8m=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{5}{2}$.

Câu 8. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ (với m là tham số) có đồ thị (C_m). Tập tất cả các giá trị của m để hai điểm cực trị của đồ thị (C_m) đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: y=x$ là?

A. $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. **B.** $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}};-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

C. $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}};-\dfrac{1}{\sqrt{2}};0\right\}$. **D.** $\left\{0;-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

Đáp án: B

Lời giải

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Xét hàm số: $y=x^3-3mx^2+4m^3$.

Ta có: $y'=3x^2-6mx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$.

Để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu thì: $m\neq 0$.

Giả sử hàm số đạt cực trị tại: $\begin{cases} A(0;4m^3) \\ B(2m;0) \end{cases}$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB}(2m;-4m^3)$.

Ta có: $I(m;2m^3)$ là trung điểm đoạn thẳng AB,

Để A, B đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=x$ có vector chỉ phương là $\overrightarrow{u_d}(1;1)$, thì: $\begin{cases} 2m-4m^3=0 \\ 2m^3=m \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ m=0\ (\text{L}) \end{array}\right.$.

Extra Techniques:

Tips:

Cho đường thẳng (d): $ax+by+c=0$ và điểm $A(x;y)$, tọa độ điểm B được gọi là đối xứng với A qua (d) khi và chỉ khi: $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_d}=0 \\ I\in(d) \end{cases}$ với $I=\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$ là trung điểm đoạn thẳng AB và $\overrightarrow{u_d}$ là vector chỉ phương của đường thẳng (d).

Extra Techniques:

Tips:

Cho đường thẳng (d): $y=kx+e$ và điểm A, B là hai điểm cực trị của hàm số bậc ba (Q): $y=ax^3+bx^2+cx+d$ khi đó, A và B đối xứng nhau qua (Q) khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\frac{2}{3}.\left(c-\frac{b^2}{3a}\right).k=-1\\ I\in(d)\end{cases}$$

với $I=\left(-\frac{b}{3a};y\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$ là tọa độ điểm uốn của đồ thị (Q).

Lưu ý:

$y=\frac{2}{3}\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)x+d-\frac{bc}{9a}$ là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (Q).

Vậy $m=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

Câu 9. Xác định tất cả các giá trị của m để hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+mx$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $x-2y-5=0$?

A. $m=0$. **B.** $m=-2$.

C. $m=\varnothing$. **D.** $m=2$.

Đáp án: A

Lời giải

Xét hàm số: $y=x^3-3x^2+mx$.

Ta có: $y'=3x^2-6x+m\Rightarrow y''=6x-6=0\Rightarrow x=1$.

Suy ra: $I(1;m-2)$ là tâm đối xứng của đồ thị hàm số: $y=x^3-3x^2+mx$.

Đường thẳng $x-2y-5=0$ có thể viết lại thành: $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$.

Vì thế: $k=\frac{1}{2}$.

Để hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+mx$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $x-2y-5=0$ thì: $\begin{cases}\frac{2}{3}.\left(m-\frac{3^2}{3.1}\right).\frac{1}{2}=-1\\ 1-2(m-2)-5=0\end{cases}\Leftrightarrow m=0$.

Câu 10. Tất cả các giá trị của m để đồ thị $(C_m): y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3+m$ có hai điểm cực trị trong đó A là điểm cực đại và B là điểm cực tiểu sao cho $OA=\sqrt{2}OB$ là?

A. $m=3+2\sqrt{2}$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=-2-3\sqrt{2}\\ m=-2+3\sqrt{2}\end{array}\right.$.

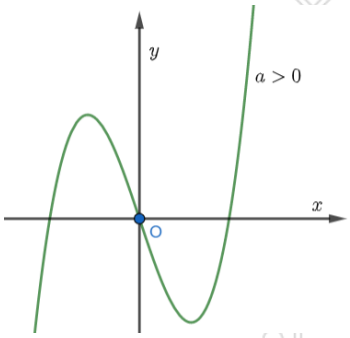
C. $m=-3-2\sqrt{3}$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=-3+2\sqrt{2}\\ m=-3-2\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Extra Techniques:

Tips:

Sở dĩ: $x_A < x_B$ khi $a > 0$ là vì đồ thị hàm số bậc ba có hai điểm cực trị và hệ số $a > 0$ thì khi đó đồ thị hàm số có dạng hình chữ N, do vậy $x_{CĐ} < x_{CT}$.

Xem **Đồ thị I.II.17.**



Đồ thị I.II.17.

Đáp án: D

Lời giải

Xét hàm số: $y = x^3 - 3mx^2 + 3\left(m^2 - 1\right)x - m^3 + m$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + 3\left(m^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$.

$\Leftrightarrow x^2 - \left[\left(m+1\right) + \left(m-1\right)\right]x + \left(m+1\right)\left(m-1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m+1 \\ x = m-1 \end{array}\right.$.

Vì hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3\left(m^2 - 1\right)x - m^3 + m$ có hệ số $a > 0$.

Nên: $x = m-1$ là điểm cực đại và $x = m+1$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Khi đó: $\left\{\begin{array}{l} A\left(m-1;2-2m\right) \\ B\left(m+1;-2-2m\right) \end{array}\right.$.

Để $OA = \sqrt{2}OB$ thì: $\left(m-1\right)^2 + \left(2-2m\right)^2 = 2.\left[\left(m+1\right)^2 + \left(-2-2m\right)^2\right]$

$\Leftrightarrow m^2 + 6m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -3 \pm 2\sqrt{2}$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Câu 11. Giá trị của m để đồ thị hàm số $\left(C_m\right): y = x^3 - 3mx + 1$ có hai điểm cực trị B, C sao cho tam giác ΔABC cân tại A với $A\left(2;3\right)$ là?

A. $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2 \end{array}\right.$.

C. $m = \dfrac{1}{2}$.

D. $m = 2$.

Đáp án: C

Lời giải

Xét hàm số: $y = x^3 - 3mx + 1$.

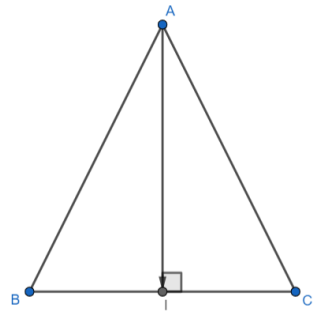
Ta có: $y' = 3x^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{m} \\ x = \sqrt{m} \end{array}\right.$, $\forall m \geq 0$.

Extra Techniques:

Tips:

Tam giác ΔABC cân tại A có I là trung điểm BC khi đó:

$AI \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC} = 0$



Để hàm số có hai điểm cực trị thì: $m > 0$.

Như vậy: $\begin{cases} B\left(-\sqrt{m};2\sqrt{m^3}+1\right) \\ C\left(\sqrt{m};-2\sqrt{m^3}+1\right) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BC}\left(2\sqrt{m};-4\sqrt{m^3}\right)$.

Ta có: $I\left(0;1\right)$ là trung điểm đoạn thẳng $BC \Rightarrow \overrightarrow{AI}\left(-2;-2\right)$.

ΔABC cân tại A khi và chỉ khi:

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow -4\sqrt{m} + 8\sqrt{m^3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \left(\text{L}\right) \\ m = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. .$$

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $\left(C_m\right): y = x^3 - 3mx^2 + 3\left(m^2-1\right)x - m^3 + 4m - 1$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ΔOAB vuông tại O?

A. $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 2 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -2 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 0 \end{array}\right.$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Đáp án: A

Lời giải

Xét hàm số: $y = x^3 - 3mx^2 + 3\left(m^2-1\right)x - m^3 + 4m - 1$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + 3\left(m^2-1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m-1 \\ x = m+1 \end{array}\right.$.

(Xem thêm **Câu 1**

Suy ra: $\begin{cases} A\left(m+1;m-3\right) \\ B\left(m-1;m+1\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA} = \left(m+1;m-3\right) \\ \overrightarrow{OB} = \left(m-1;m+1\right) \end{cases}$.

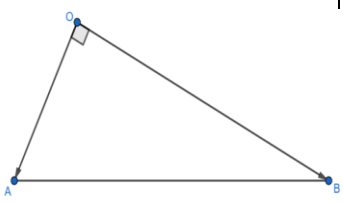
Do tam giác ΔOAB vuông tại O nên $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$.

Extra Techniques:

Tips:

Tam giác ΔOAB vuông tại O, khi đó:

$OA \perp OB \Rightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$



$\Leftrightarrow (m+1)(m-1)+(m-3)(m+1)=0 \Leftrightarrow (m+1)(2m-4)=0$.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Một số Tips để làm tốt các bài toán cực trị ràng buộc

(1) Xét hàm số bậc ba: $y=ax^3+bx^2+cx+d,\ (a\neq 0)$.

Dạng 1. Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị.

Phương trình hai đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số bậc ba là phần dư của phép chia của y cho y'.

◦ Phân tích (bằng cách chia đa thức y cho y'):

$$y=y'\cdot q(x)+h(x)\Rightarrow \begin{cases} y_1=h(x_1) \\ y_2=h(x_2) \end{cases}.$$

◦ Đường thẳng qua 2 điểm cực trị là $y=h(x)$.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có phương trình là: $y=\frac{2}{3}\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)x+d-\frac{bc}{9a}$.

Dạng 2. Tìm m để hàm số có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước.

★ Bài toán tổng quát:

Cho hàm số $y=f(x;m)=ax^3+bx^2+cx+d$. Tìm tham số m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị $x_1,\ x_2$ thỏa mãn điều kiện K cho trước?

▫▪ Phương pháp:

→ **Bước 1:** Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Tính đạo hàm: $y'=3ax^2+2bx+c$.

→ **Bước 2:** Để hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'}=3a\neq 0 \\ \Delta_{y'}=(2b)^2-4.3ac>0 \end{cases}$ và giải hệ này sẽ tìm được $m\in D_1$.

→ **Bước 3:** Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $y'=0$. Theo Viéte, ta có: $\begin{cases} S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$.

→ **Bước 4:** Biến đổi điều kiện K về dạng tổng S và tích P. Từ đó giải ra tìm được $m\in D_2$.

→ **Bước 5:** Kết luận các giá trị m thỏa mãn: $m=D_1\cap D_2$.

▫▪ Lưu ý:

→ Hàm số bậc ba không có cực trị $\Leftrightarrow$ $y'=0$ không có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_{y'}\le 0$.

→ Trong trường hợp điều kiện K liên quan đến hình học phẳng, tức là cần xác định tọa độ 2 điểm cực trị $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của $y'=0$. Khi đó có 2 **tình huống** thường gặp sau:

• Nếu giải được nghiệm của phương trình $y'=0$, tức tìm được x_1, x_2 cụ thể, khi đó ta sẽ thế vào hàm số đầu đề $y=f(x;m)$ để tìm tung độ y_1, y_2 tương ứng của A và B.

• Nếu tìm không được nghiệm $y'=0$, khi đó gọi 2 nghiệm là x_1, x_2 và tìm tung độ y_1, y_2 bằng cách thế vào phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị.

Để viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị, ta thường dùng phương pháp tách đạo hàm (phần dư bậc nhất trong phép chia y cho y'), nghĩa là:

◦ Phân tích (bằng cách chia đa thức y cho y'):

$$y=y'\cdot q(x)+h(x)\Rightarrow \begin{cases} y_1=h(x_1) \\ y_2=h(x_2) \end{cases}.$$

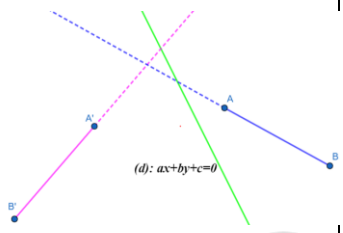
◦ Đường thẳng qua 2 điểm cực trị là $y=h(x)$.

Dạng toán: Tìm tham số m để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước (cùng phía, khác phía d):

Extra Techniques:

Tips:

Hai điểm được gọi là nằm cùng phía đối với đường thẳng nếu đường thẳng đi qua hai điểm đó cắt đường thẳng đã cho tại phần kéo dài của nó.

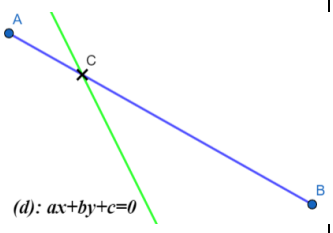


Đồ thị I.II.18.

Extra Techniques:

Tips:

Hai điểm được gọi là nằm khác phía đối với đường thẳng nếu đường thẳng đi qua hai điểm đó cắt đường thẳng đã cho tại một điểm nằm giữa (không nhất thiết phải "chính giữa") của hai điểm đã cho.



Đồ thị I.II.19.

Vị trí tương đối giữa 2 điểm với đường thẳng:

Cho 2 điểm $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ và đường thẳng $d: ax+by+c=0$. Khi đó:

• Nếu $(ax_A+by_A+c)\cdot(ax_B+by_B+c)<0$ thì A, B nằm về 2 phía so với đường thẳng d.

(Xem thêm **Đồ thị I.II.18.**).

• Nếu $(ax_A+by_A+c)\cdot(ax_B+by_B+c)>0$ thì A, B nằm cùng phía so với đường d.

(Xem thêm **Đồ thị I.II.19.**).

Trường hợp đặc biệt:

• Để hàm số bậc ba $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với trục tung $Oy \Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm trái dấu và ngược lại.

• Để hàm số bậc ba $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với trục hoành $Ox \Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt (áp dụng khi nhẩm được nghiệm).

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Dạng toán: Tìm m để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước (đối xứng và cách đều):

★ Bài toán 1. Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B đối xứng nhau qua đường d:

Phương pháp

▫▪ **Bước 1:** Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m\in D_1$.

▫▪ **Bước 2:** Tìm tọa độ 2 điểm cực trị A, B. Có 2 tình huống thường gặp:

+ Một là $y'=0$ có nghiệm đẹp x_1, x_2, tức có $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$.

+ Hai là $y'=0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là Δ và lấy $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)\in\Delta$

Extra Techniques:

Tips:

Đối với một số bài toán trắc nghiệm cần tính nhanh giá trị tham số m để điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số bậc ba tổng quát $y=ax^3+bx^2+cx+d$ với $a\neq 0$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y=kx+e$ thì m chính là nghiệm của hệ phương trình theo tham số m:

$$\begin{cases} y_I = kx_I + e \\ \dfrac{2}{3}.\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right).k=-1 \end{cases}$$

Trong đó:

$I\left(-\dfrac{b}{3a};y\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$ là tọa độ điểm uốn của đồ thị hàm số bậc ba đã cho.

▫▪ **Bước 3:** Gọi $I\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Do $A,\ B$ đối xứng qua d nên thỏa hệ:

$$\begin{cases} \Delta \perp d \\ I\in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{u_d}=0 \\ I\in d \end{cases} \Rightarrow m\in D_2.$$

▫▪ **Bước 4**. Kết luận $m=D_1\cap D_2$.

★ *Bài toán 2. Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị $A,\ B$ cách đều đường thẳng d:*

Phương pháp

▫▪ **Bước 1**. Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m\in D_1$.

▫▪ **Bước 2**. Tìm tọa độ 2 điểm cực trị $A,\ B$. Có 2 tình huống thường gặp:

+ Một là $y'=0$ có nghiệm đẹp $x_1,\ x_2$, tức có $A(x_1;y_1),\ B(x_2;y_2)$.

+ Hai là $y'=0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là Δ và lấy $A(x_1;y_1),\ B(x_2;y_2)\in\Delta$.

▫▪ **Bước 3**. Do $A,\ B$ cách đều đường thẳng d nên $d(A;d)=d(B;d)\Rightarrow m\in D_2$.

▫▪ **Bước 4**. Kết luận $m=D_1\cap D_2$.

☞ **Lưu ý**: Để 2 điểm $A,\ B$ đối xứng nhau qua điểm $I\Leftrightarrow I$ là trung điểm AB.

★ *Bài toán 3. Tìm khoảng cách giữa hai điểm cực trị của hàm số bậc ba tổng quát $y=ax^3+bx^2+cx+d,\ (a\neq 0)$.*

Phương pháp

Xét hàm số: $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,\ (a\neq 0)$.

NHÓM TOÁN ANH DUI

Extra Techniques:

Tips:

Xét hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ với $a\neq 0$. Nếu biệt số $\Delta'_{y'}=b^2-3ac>0$ thì khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số được xác định nhanh thông qua độ lớn biểu thức:

$$d=2\sqrt{\frac{4k^3+k}{a}}$$

Trong đó, $k=\frac{\Delta'_{y'}}{9a}$.

Extra Techniques:

Tips:

Xét phương trình:

$f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$

Theo định lý Viéte

Ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{2b}{3a}\\ x_1x_2=\frac{c}{3a}\end{cases}$.

$f'(x)=3ax^2+2bx+c=0\ (*)$.

Ta có: $\Delta'_{y'}=b^2-3ac$.

Nếu $\Delta'_{y'}=b^2-3ac>0$ thì rõ ràng phương trình $(*)$ có hai nghiệm thực phân biệt và từ đó dẫn đến đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị lần lượt là $\begin{cases}A(x_1;y_1)\\ B(x_2;y_2)\end{cases}$.

Khi đó: $d_{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\ (**)$

Mặt khác, như tài liệu đã trình bày ở trước đó, phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ là đường thẳng có phương trình: $y=\left(\frac{2c}{3}-\frac{2b^2}{9a}\right)x+d-\frac{bc}{9a}$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Đặt: $k=\frac{b^2-3ac}{9a}$, khi đó:

$$\frac{2c}{3}-\frac{2b^2}{9a}=-2.\left(\frac{b^2}{9a}-\frac{c}{3}\right)=-2.\left(\frac{b^2-3ac}{9a}\right)=-2k\ (***).$$

Từ $(**)(***)\Rightarrow y=-2kx+d-\frac{bc}{9a}\Rightarrow\begin{cases}y_1=-2kx_1+d-\frac{bc}{9a}\\ y_2=-2kx_2+d-\frac{bc}{9a}\end{cases}$.

$\Rightarrow y_1-y_2=-2k(x_1-x_2)$.

Như vậy, dễ dàng ta thu được:

$$d^2_{AB}=AB^2=(x_1-x_2)^2+4k^2(x_1-x_2)^2=(x_1-x_2)^2(1+4k^2)$$

$$\Rightarrow AB^2=(1+4k^2)\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]=(1+4k^2)\left[\left(-\frac{2b}{3a}\right)^2-4.\left(\frac{c}{3a}\right)\right]$$

(Xem thêm **Định lý Viéte**).

$$\Rightarrow AB^2=\left(1+4k^2\right).\left(\frac{4b^2-12ac}{9a^2}\right)=\left(1+4k^2\right).\frac{4}{a}.\frac{b^2-3ac}{9a}$$

$$\Rightarrow AB^2=\frac{4}{a}.k\left(1+4k^2\right)=\frac{4\left(4k^3+k\right)}{a}\Rightarrow AB=2\sqrt{\frac{4k^3+k}{a}}$$

(2) Xét hàm số bậc bốn trùng phương: $y=ax^4+bx^2+c,\left(a\neq 0\right)$.

Trước khi đi vào các dạng toán, tôi xin trình bài một số tính chất, nội dung cần thiết và sẽ được áp dụng vào các bài toán bên dưới.

Xét hàm số: $y=ax^4+bx^2+c,\left(a\neq 0\right)$.

Ta có: $y'=4ax^3+2bx=0$.

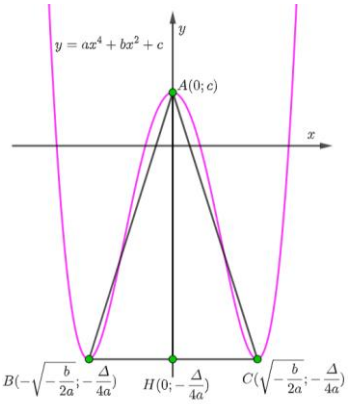
Đối với các dạng toán dưới đây, hầu hết chúng tôi chỉ trình bài một khía cạnh nhỏ về bài toán cực trị đó là trường hợp hàm số đã cho có đúng ba điểm cực trị (có thể hoặc là hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu hoặc là hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại), tương đương với $ab<0$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Khi đó: $\begin{cases}A\left(0;c\right)\\ B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)\\ C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)\end{cases}$ với $\Delta=b^2-4ac$ (i).

Thật vậy ta đã biết rằng khi $ab<0$ thì:

Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có ba điểm cực trị là $\begin{cases}x=0\\ x=-\sqrt{-\frac{b}{2a}}\\ x=\sqrt{-\frac{b}{2a}}\end{cases}$.



Đồ thị I.II.20.

Extra Techniques:

Tips:

Các kí hiệu:

R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC.

Khi đó: $f\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)=f\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)=a\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)^4+b\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)^2+c$

$\Rightarrow f\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)=a.\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{2a}+c=\frac{b^2-2b^2+4ac}{4a}=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{\Delta}{4a}.$

Suy ra: $\begin{cases} AB=AC=\sqrt{\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)^2+\left(-\frac{\Delta}{4a}-c\right)^2}=\sqrt{-\frac{b}{2a}+\frac{b^4}{16a^2}} \quad (ii) \\ BC=\left|x_C-x_B\right|=x_C-x_B=2\sqrt{-\frac{b}{2a}} \end{cases}$

Gọi H là trung điểm BC thì H đồng thời của nằm trên trục tung và có tung độ bằng tung độ của B, C. Hay nói cách khác: $H\left(0;-\frac{\Delta}{4a}\right)$ (iii).

(Xem thêm đồ thị **Đồ thị I.II.20.**).

Và $AH=\left|y_A-y_H\right|=\left|c+\frac{\Delta}{4a}\right|=\left|\frac{b^2-4ac}{4a}+c\right|=\left|\frac{b^2}{4a}\right|$ (iv).

Diện tích tam giác $\Delta ABC: S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AH.BC=AH.HB=AH.HC$ (v).

Hay: $S_{\Delta ABC}=pr=\frac{1}{2}\left(AB+AC+BC\right).r=\left(AB+\frac{1}{2}BC\right).r$ (vi).

Và: $S_{\Delta ABC}=\frac{AB.AC.BC}{4R}=\frac{AB^2.BC}{4R}$ (vii).

$MN\perp PQ\Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ}=0$ $(viii)$.

$\cos\alpha=\cos BAC=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}$ (ix).

Nếu $0^0<\alpha<90^0\Rightarrow\cos\alpha>0$ (x).

$G\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$ là tọa độ trọng tâm của ΔABC (xi).

Hai tam giác đồng dạng với tỉ lệ k thì tỉ số diện tích hai tam giác đó (theo thứ tự tỉ lệ tam giác như trên) là k^2 (xii).

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\left(-\sqrt{-\dfrac{b}{2a}};-\dfrac{b^2}{4a}\right)\\ \overrightarrow{AC}=\left(\sqrt{-\dfrac{b}{2a}};-\dfrac{b^2}{4a}\right)\\ \overrightarrow{BC}=\left(2\sqrt{-\dfrac{b}{2a}};0\right)\end{cases}\quad (xiii)$$

Dạng toán: Tìm m để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước (các yếu tố tam giác, góc, diện tích,…):

★ Bài toán 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,\ (a\neq 0)$ có ba điểm cực trị lập thành một tam giác vuông (có thể nói vuông cân).

Phương pháp

Do tam giác ΔABC cân tại A nên nếu vuông thì chắc chắn $BAC=90^o$.

Thật vậy, giả sử ngược lại: $ABC=90^o$.

$$\Rightarrow ACB=90^o\Rightarrow BAC+\left(ABC+ACB\right)>\left(ABC+ACB\right)=90^o+90^o=180^o$$

(Vô lý).

Suy ra: $AB\perp AC$, theo $(viii),(xiii)\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$.

$$\Leftrightarrow -\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)^2+\left(-\frac{b^2}{4a}\right)^2=0\Leftrightarrow \frac{b}{2a}+\frac{b^4}{16a^2}=0\Leftrightarrow b^3+8a=0\ (\alpha).$$

★ Bài toán 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,\ (a\neq 0)$ có ba điểm cực trị lập thành một tam giác đều.

Extra Techniques:

Remark:

Để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị lập thành một tam giác vuông thì: $b^3+8a=0$.

Extra Techniques:

Remark:

Để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị lập thành một tam giác đều thì: $b^3+24a=0$.

Extra Techniques:

Remark:

Đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị lập thành một tam giác có độ lớn diện tích bằng: $S_0=\sqrt{-\dfrac{b^5}{32a^3}}$.

Extra Techniques:

Remark:

Đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị A,B,C sao cho $B,C\in Ox$ (nằm trên trục hoành) thì $\begin{cases}b^2-4ac=0\\c\neq 0\end{cases}$.

Theo $(2)\Rightarrow \sqrt{\dfrac{b^4}{16a^2}-\dfrac{b}{2a}}=2\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$.

$\Leftrightarrow \dfrac{b^4}{16a^2}-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{4b}{2a}\Leftrightarrow b^3+24a=0\ (\beta)$.

★ *Bài toán 3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,\ (a\neq 0)$ có ba điểm cực trị lập thành một tam giác có diện tích bằng S_0.*

Phương pháp

Theo (ii), (iv) và **Đồ thị I.II.20** ta suy ra:

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AH.BC\Leftrightarrow 4S_0{}^2=AH^2.BC^2\Leftrightarrow 4S_0{}^2=\left(\dfrac{b^2}{4a}\right)^2.\left(2\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}\right)^2$.

$\Leftrightarrow S_0{}^2=\dfrac{b^4}{16a^2}.\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=-\dfrac{b^5}{32a^3}\Rightarrow S_0=\sqrt{-\dfrac{b^5}{32a^3}}\ (\chi)$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI

★ *Bài toán 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,\ (a\neq 0)$ có ba điểm cực trị lập thành một tam giác có diện tích lớn nhất, nhỏ nhất.*

Phương pháp

Như đã chứng minh ở trên và kết luận ở phần **Remark**, để giải quyết bài toán dạng này ta cần tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $f(m)=-\dfrac{b^5}{32a^3}$ theo biến m (tham số m được xem như biến đểm xét tính lớn nhất, nhỏ nhất của các giá trị có thể xảy ra).

★ *Bài toán 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,\ (a\neq 0)$ có ba điểm cực trị A,B,C sao cho $B,C\in Ox$ (nằm trên trục hoành).*

Phương pháp

Để $B,C\in Ox$ thì: $\begin{cases}c\neq 0\\ y_B=y_C=-\dfrac{\Delta}{4a}=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b^2-4ac=0\\c\neq 0\end{cases}(\delta)$.

Extra Techniques:

Remark:

Đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị A,B,C thỏa mãn: $BC=k.AB,\left(k\in\mathbb{R}^+\right)$ thì khi đó, giá trị k thỏa mãn: $b^3k^2=8a\left(k^2-4\right)$

Extra Techniques:

Remark:

Đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác cân có góc ở đỉnh bằng α khi và chỉ khi α thỏa mãn đẳng thức theo

$\cos:\cos\alpha=\dfrac{b^3+8a}{b^3-8a}$

hoặc theo $\tan$:

$8a+b^3.\tan^2\dfrac{\alpha}{2}$.

★ Bài toán 6. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,\ (a\neq 0)$ có ba điểm cực trị A,B,C thỏa mãn $BC=k.AB,\left(k\in\mathbb{R}^+\right)$.

Phương pháp

Theo $(ii)\Rightarrow BC=k.AB\Leftrightarrow 2\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}=k.\sqrt{\dfrac{b^4}{16a^2}-\dfrac{b}{2a}}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{4b}{2a}=k^2\left(\dfrac{b^4}{16a^2}-\dfrac{b}{2a}\right)\Leftrightarrow -32a=b^3k^2-8ak^2\Leftrightarrow b^3k^2=8a\left(k^2-4\right)\ (\varepsilon)$.

★ Bài toán 7. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,\ (a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác cân có góc ở đỉnh bằng α.

Phương pháp

Theo $(ix)\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos\alpha=AB^2.\cos\alpha$

Mặt khác theo $(ii),(xiii)$,

$\Rightarrow -\left(\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}\right)^2+\left(-\dfrac{b^2}{4a}\right)^2=\left(-\dfrac{b}{2a}+\dfrac{b^4}{16a^2}\right).\cos\alpha$

$\Leftrightarrow \dfrac{b}{2a}+\dfrac{b^4}{16a^2}=\left(\dfrac{b^4-8ab}{16a^2}\right).\cos\alpha$.

$\Leftrightarrow 8a+b^3=\left(b^3-8a\right)\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{b^3+8a}{b^3-8a}\ (\phi)$

Mặt khác, nếu ta dùng theo giá trị lượng giác $\tan$ cũng sẽ thu một điều khá thú vị:

Ta có: $\tan HAC=\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{HC}{AH}=\dfrac{BC}{2AH}$

Suy ra: $\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{BC^2}{4AH^2}\Leftrightarrow BC^2=4\tan^2\dfrac{\alpha}{2}.AH^2$.

Theo $(ii),(iv)\Rightarrow\left(2\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}\right)^2=4\tan^2\dfrac{\alpha}{2}.\left(\dfrac{b^2}{4a}\right)^2\Leftrightarrow -\dfrac{4b}{2a}=4\tan^2\dfrac{\alpha}{2}.\dfrac{b^4}{16a^2}$

$\Rightarrow 8a+b^3\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=0\ (\varphi)$.

Extra Techniques:

Remark:

Đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có ba góc đều nhọn thì ta có thể kiểm tra một trong hai cách sau:
Xét thương dương:

$$\frac{b^3+8a}{b^3-8a}>0;$$

Xét tích dương:

$$b\left(b^3+8a\right)>0.$$

Extra Techniques:

Remark:

Đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp là r khi và chỉ khi r thỏa mãn biểu thức:

$$r=\frac{b^2}{4|a|.\left(1+\sqrt{1-\frac{b^3}{8a}}\right)}.$$

★ Bài toán 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,\ (a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có ba góc nhọn.

Phương pháp

Như đã chứng minh ở trên và ở phần **Remark**, khi đó ta có góc ở đỉnh có độ lớn thỏa mãn đẳng thức đối với $\cos\alpha=\frac{b^3+8a}{b^3-8a}$.

Theo (x), nếu $0<\alpha<90^o$, thì: $\frac{b^3+8a}{b^3-8a}>0$ (γ).

Tuy nhiên, ta cũng có thể dùng lại cách chứng minh ở **Bài toán 7** để đưa ra kết quả đẹp hơn:

Ta có: $\cos\alpha>0\Leftrightarrow\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}>0\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}>0\Rightarrow\frac{b^4}{16a^2}+\frac{b}{2a}>0$

$b^4+8ab>0\Leftrightarrow b\left(b^3+8a\right)>0$ (η).

★ Bài toán 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,\ (a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp là r.

Phương pháp

Theo $(ii),(vi),(\chi)$ ta có: $r=\frac{S_{\Delta ABC}}{AB+\frac{1}{2}BC}=\frac{\sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}}{\sqrt{\frac{b^4}{16a^2}}-\frac{b}{2a}+\frac{1}{2}.2\sqrt{-\frac{b}{2a}}}$

$\Rightarrow r=\frac{\sqrt{-b^5}}{\sqrt{2ab^4-16a^2b}+\sqrt{-16a^2b}}=\frac{\sqrt{b^4}}{\sqrt{-2ab^3+16a^2}+\sqrt{16a^2}}$

$\Rightarrow\frac{b^2}{\sqrt{-2ab^3+16a^2}+4|a|}=\frac{b^2}{4|a|.\left(1+\sqrt{1-\frac{b^3}{8a}}\right)}$ (ι)

★ Bài toán 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,\ (a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp là R.

Phương pháp

Extra Techniques:

Remark:

Đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp là R khi và chỉ khi R thỏa mãn biểu thức: $R=\dfrac{b^3-8a}{8|a|.b}$.

Extra Techniques:

Tips:

Đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác ΔABC cân tại A, khi đó: $\begin{cases} m_0=2\sqrt{-\dfrac{b}{2a}} \\ n_0=\sqrt{\dfrac{b^4}{16a^2}-\dfrac{b}{2a}} \end{cases}$.

Extra Techniques:

Remark:

Đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận O làm trọng tâm khi: $b^2-6ac=0$.

Theo $(v),(vii)$, ta có: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}.AH.BC=\dfrac{AB^2.BC}{4R}$.

Suy ra: $2AH.R=AB^2\Leftrightarrow 4AH^2.R^2=AB^4$

$$\Leftrightarrow 4.\left(\frac{b^2}{4a}\right)^2.R^2=\left(\sqrt{\frac{b^4}{16a^2}-\frac{b}{2a}}\right)^4\Leftrightarrow R^2=\left(\frac{\dfrac{b^4-8ab}{16a^2}}{\dfrac{2b^2}{4a}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow R^2=\left(\frac{b^4-8ab}{8ab^2}\right)^2\Leftrightarrow R^2=\left(\frac{b^3-8a}{8ab}\right)^2\Rightarrow R=\frac{b^3-8a}{8|a|.b}\ (\kappa)$$

★ Bài toán 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,\ (a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác:

a) Có độ dài cạnh đáy $BC=m_0$;

b) Có độ dài cạnh bên $AB=AC=n_0$.

Phương pháp

Theo (ii), ta có: $\begin{cases} BC=m_0=2\sqrt{-\dfrac{b}{2a}} \\ AB=AC=n_0=\sqrt{\dfrac{b^4}{16a^2}-\dfrac{b}{2a}} \end{cases}(\lambda)$.

★ Bài toán 12. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,\ (a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác:

a) Có trọng tâm là gốc tọa độ O;

b) Có trực tâm là gốc tọa độ O;

c) Có tâm đường tròn ngoại tiếp là gốc tọa độ O.

Phương pháp

a) Theo $(i),(xi)$ ta có: $\begin{cases} x_A+x_B+x_C=3x_O \\ y_A+y_B+y_C=3y_O \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0+\left(-\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}\right)+\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}=3.0 \\ c+\left(-\dfrac{b^2}{4a}\right)+c+\left(-\dfrac{b^2}{4a}\right)+c=3.0 \end{cases}\Leftrightarrow 3c=\frac{b^2}{2a}\Leftrightarrow b^2-6ac=0\ (\mu).$$

Extra Techniques:

Remark:

Đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận O làm trực tâm khi: $b^3-4abc+8a=0$.

Extra Techniques:

Remark:

Đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận O làm tâm đường tròn ngoại tiếp khi: $b^3-8abc-8a=0$.

b) Do tam giác ΔABC cân tại A, hiển nhiên $AO\perp BC$.

Như thế, để tam giác ΔABC nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm thì $BO\perp AC$ hay $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AC}=0$.

Theo $(i),(xiii)$ ta suy ra: $\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right).\sqrt{-\frac{b}{2a}}+\left(-\frac{b^2-4ac}{4a}\right).\left(-\frac{b^2}{4a}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{2a}+\frac{b^4}{16a^2}-\frac{b^2c}{4a}=0\Leftrightarrow 8ab+b^4-4ab^2c=0\Leftrightarrow b^3-4abc+8a=0\ (v)$$

c) Do tam giác ΔOBC cân tại O (do O thuộc đường trung trực của BC) nên ta có: $OB=OC$.

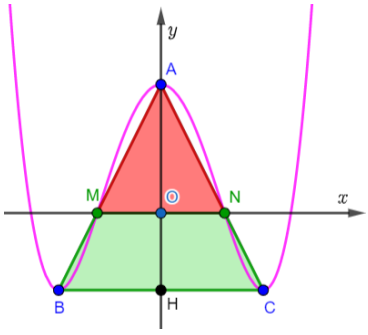
Để tam giác ΔABC nhận gốc tọa độ O làm tâm đường tròn ngoại tiếp thì $OA=OB$ là điều kiện đủ (do điều kiện cần và đủ là: $OA=OB=OC$).

Theo (i), ta suy ra: $OA=OB\Leftrightarrow c=\sqrt{\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)^2+\left(-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)^2}$

$$\Leftrightarrow c^2=-\frac{b}{2a}+\frac{b^4}{16a^2}-\frac{b^2c}{2a}+c^2\Leftrightarrow -\frac{b}{2a}+\frac{b^4}{16a^2}-\frac{b^2c}{2a}=0$$

$$\Leftrightarrow -8ab+b^4-8ab^2c=0\Leftrightarrow b^3-8abc-8a=0\ (o)$$

★ Bài toán 13. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,\ (a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận trục hoành trục hoành làm đường phân đôi diện tích (trục hoành chia tam giác thành hai bằng có diện tích bằng nhau).



Phương pháp

Gọi M,N là hai giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành.

(Xem thêm **Đồ thị I.II.21.**)

Dễ thấy: $\Delta AMN\sim\Delta ABC$.

Theo yêu cầu đề bài ta có: $S_{AMN}=S_{MNCB}\Rightarrow S_{AMN}=\frac{1}{2}S_{ABC}\Rightarrow\frac{S_{AMN}}{S_{MNCB}}=\frac{1}{2}$.

Theo (xii) ta suy ra:

Extra Techniques:

Remark:

Đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận trục hoành trục hoành làm đường phân đôi diện tích thì khi đó:

$$b^2=4\sqrt{2}|ac|.$$

$$\left(\frac{AO}{AH}\right)^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow AH^2=2AO^2\Leftrightarrow\frac{b^4}{16a^2}=2c^2$$

$$\Leftrightarrow b^4=32a^2c^2\Rightarrow b^2=4\sqrt{2}|ac|\ (\pi).$$

Một số bài tập áp dụng:

Câu 1. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m^2-2$. Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân?

Đáp số: $m=1$.

Câu 2. Cho hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2$. Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông?

Đáp số: $m=0$.

Câu 3. Cho hàm số $y=x^4+2(m-2)x^2+m^2-5m+5$. Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều?

Đáp số: $m=2-\sqrt[3]{3}$.

Câu 4. Cho hàm số $y=-mx^4+2mx^2-m$. Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều?

Đáp số: $m=\pm\sqrt{3}$.

Câu 5. Cho hàm số $y=x^4-2m^2x^2+1$. Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 32?

Đáp số: $m=\pm 2$.

Câu 6. Cho hàm số $y=x^4+2mx^2-m-1$. Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$?

Đáp số: $m=-2$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you tr

TỰ LUYỆN 4 MỨC ĐỘ

Câu 1. Đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có hai cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB?

A. $M(0;-1)$. **B.** $N(1;-10)$.

C. $P(1;0)$. **D.** $Q(-1;10)$.

Câu 2. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d:y=(2m-1)x+3+m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$.

A. $m=\frac{3}{2}$. **B.** $m=\frac{3}{4}$.

C. $m=-\frac{1}{2}$. **D.** $m=\frac{1}{4}$.

Câu 3. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=(2m-1)x+m+3$ song song với đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$.

A. $m=\frac{3}{4}$. **B.** $m=\frac{1}{2}$.

C. $m=-\frac{3}{4}$. **D.** $m=-\frac{1}{2}$.

Câu 4. Đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB.

A. $P(1;0)$. **B.** $M(0;-1)$.

C. $N(1;-10)$. **D.** $Q(-1;10)$.

Câu 5. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d:y=(3m+1)x+3+m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-1$.

A. $m=\frac{1}{3}$. **B.** $m=-\frac{1}{6}$.

C. $m=\frac{1}{6}$. **D.** $m=-\frac{1}{3}$.

Câu 6. Tìm tổng tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6m(1-2m)x$ song song đường thẳng $y=-4x$.

A. $m=-\frac{1}{3}$. **B.** $m=\frac{2}{3}$.

C. $m=-\frac{2}{3}$. **D.** $m=1$.

Câu 7. Biết đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ có hai điểm cực trị A, B. Khi đó phương trình đường thẳng AB là?

A. $y=2x-1$. **B.** $y=-2x+1$.

C. $y=-x+2$. **D.** $y=x-2$.

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+2x^2+(m-3)x+m$ có hai điểm cực trị và điểm $M(9;-5)$ nằm trên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị.

A. $m=-1$. **B.** $m=-5$.

C. $m=3$. **D.** $m=2$.

Câu 9. Đường thẳng nối hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-2x+m$ đi qua điểm $M(-3;7)$ khi m bằng bao nhiêu?

A. 1. **B.** -1.

C. 3. **D.** 0.

Câu 10. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d:y=(3m+1)x+3+m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-1$.

A. $m=\frac{1}{6}$. **B.** $m=-\frac{1}{3}$.

C. $m=\frac{1}{3}$. **D.** $m=-\frac{1}{6}$.

Câu 11. Giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ và đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=abc+ab+c$.

A. $-\frac{16}{25}$. **B.** -9.

C. $-\frac{25}{9}$. **D.** 1.

Câu 12. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+2$ có hai điểm cực trị A và B sao cho các điểm A, B và $M(1;-2)$ thẳng hàng.

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=-\sqrt{2}$.

C. $m=2$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=-\sqrt{2} \\ m=\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Câu 13. Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA=OB$ (O là gốc tọa độ)?

A. $m=\frac{3}{2}$. **B.** $m=3$.

C. $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m=\frac{5}{2}$.

Câu 14. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-1\right)x$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A,B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y=5x-9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 3. **B.** 6. **C.** -6. **D.** 0.

Câu 15. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{2}{3}x^3-mx^2-2\left(3m^2-1\right)x+\frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^3-(2m-1)x^2+2mx-m-1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 17. Cho đồ thị hàm số bậc ba có phương trình $y=x^3-\left(m+6\right)x^2+\left(2m+9\right)x-2$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành.

A. $\left[\begin{array}{l} m\ge -2 \\ m\le -6 \end{array}\right.$. **B.** $m\ge -2$.

C. $m\le -6$. **D.** $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m>-2 \\ m<-6 \end{array}\right. \\ m\ne \frac{-3}{2} \end{array}\right.$.

Câu 18. Cho hàm số bậc ba có phương trình $y=\frac{1}{3}mx^3-\left(m-1\right)x^2+3\left(m-2\right)x+2018$ với m là tham số. Tổng bình phương tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1+2x_2=1$ bằng?

A. $\frac{40}{9}$. **B.** $\frac{22}{9}$.

C. $\frac{25}{4}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Câu 19. Cho hàm số $y=-x^3+3mx^2-3m-1$ với m là một tham số thực. Giá trị của m thuộc tập hợp nào sau đây để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng

$d: x+8y-74=0$.

A. $m\in(-1;1]$. **B.** $m\in(-3;-1]$.

C. $m\in(3;5]$. **D.** $m\in(1;3]$.

Câu 20. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-8x^2+(m^2+11)x-2m^2+2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Ox.

A. 4. **B.** 5.

C. 6. **D.** 7.

Câu 21. Cho hàm số bậc ba có phương trình $y=x^3-(2m+1)x^2+(m+1)x+m-1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m<20$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?

A. 18. **B.** 19.

C. 21. **D.** 20.

Câu 22. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^3-(m+1)x^2+(m^2-2)x-m^2+3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về hai phía khác nhau đối với trục hoành?

A. 2. **B.** 1.

C. 3. **D.** 4.

Câu 23. Tìm tất cả cả các giá trị của tham số m để $y=x^3-3x^2+mx-1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=6$.

A. $m=-3$. **B.** $m=3$.

C. $m=-1$. **D.** $m=1$.

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)=2x^3-6x^2-m+1$ có các giá trị cực trị trái dấu?

A. 7. **B.** 9. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 25. Cho hàm số bậc ba có phương trình $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x-1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$.

A. $m\in(-1;4)\setminus\{3\}$. **B.** $m\in(3;4)$.

C. $m\in(1;3)$. **D.** $m\in(-1;4)$.

Câu 26. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^2-2$ có đồ thị (C) và điểm $C(1;4)$. Tính tổng các giá trị nguyên dương của m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 4.

A. 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 27. Cho hàm số bậc ba có phương trình $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x-1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$.

A. $m\in(-1;3)\cup(3;4)$. **B.** $m\in(1;3)$.

C. $m\in(3;4)$. **D.** $m\in(-1;4)$.

Câu 28. Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số bậc ba có phương trình: $y=3x^3+2(m+1)x^2-3mx+m-5$ có hai điểm cực trị $x_1;x_2$ đồng thời $y(x_1).y(x_2)=0$ là?

A. -21. **B.** -39.

C. -8. **D.** $3\sqrt{11}-13$.

Câu 29. Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số bậc ba $y=x^3-3mx^2+27x+3m-2$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1-x_2|\le 5$. Biết $S=(a;b]$. Tính $T=2b-a$.

A. $T=\sqrt{51}+6$. **B.** $T=\sqrt{61}+3$.

C. $T=\sqrt{61}-3$. **D.** $T=\sqrt{51}-6$.

Câu 30. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+mx+3$ có hai điểm cực trị $x_1,x_2\le 4$. Số phần tử của S bằng?

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 31. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3+4(m-2)x^2-7x+1$ có hai điểm cực trị $x_1;x_2\ (x_1<x_2)$ thỏa mãn $|x_1|-|x_2|=-4$.

A. $m=5$. **B.** $m=\frac{1}{2}$.

C. $m=3$. **D.** $m=\frac{7}{2}$.

Câu 32. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để điểm $M(2m^3;m)$ tạo với hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $(C):y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ một tam giác có diện tích nhỏ nhất?

A. 0. **B.** 1.

C. 2. **D.** Không tồn tại.

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số thực m để đường thẳng đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$, bán kính bằng 1 tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.

A. $m=\frac{2\pm\sqrt{3}}{3}$. **B.** $m=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$.

C. $m=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. **D.** $m=\frac{2\pm\sqrt{5}}{2}$.

Câu 34. Biết đồ thị hàm số bậc ba $y=x^3+ax^2+bx+c$ có hai điểm cực trị $M(x_1;y_1)$, $N(x_2;y_2)$ thỏa mãn biểu thức $x_1(y_1-y_2)=y_1(x_1-x_2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=abc+2ab+3c$ bằng?

A. $-\frac{49}{4}$. **B.** $-\frac{25}{4}$.

C. $-\frac{841}{36}$. **D.** $-\frac{7}{6}$.

Câu 35. Cho hàm số bậc ba có phương trình $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3-m$ (với m là tham số). Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và $I(2;-2)$. Tổng tất cả các giá trị của m để ba điểm I, A, B tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$ là?

A. $\frac{4}{17}$. **B.** $\frac{14}{17}$.

C. $-\frac{2}{17}$. **D.** $\frac{20}{17}$.

Câu 36. Cho hàm số $y=x^3-6mx+4$ có đồ thị (C_m). Gọi m_0 là giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của (C_m) cắt đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất. Chọn khẳng định đúng.

A. $m_0\in(3;4)$. **B.** $m_0\in(1;2)$.

C. $m_0\in(0;1)$. **D.** $m_0\in(2;3)$.

Câu 37. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3$, với m là tham số; gọi (C) là đồ thị của hàm số đã cho. Biết rằng khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định. Xác định hệ số góc k của đường thẳng d.

A. $k=-\frac{1}{3}$. **B.** $k=\frac{1}{3}$.

C. $k=-3$. **D.** $k=3$.

Câu 38. Biết m_o là giá trị của tham số m để

hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1,x_2 sao cho $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=13$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m_0\in(-1;7)$. **B.** $m_0\in(7;10)$.
C. $m_0\in(-15;-7)$. **D.** $m_0\in(-7;-1)$.

Câu 39. Biết rằng đồ thị hàm số bậc ba $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2+x-2$ có giá trị tuyệt đối của hoành độ hai điểm cực trị là độ dài hai cạnh của tam giác vuông có cạnh huyền là $\sqrt{7}$. Hỏi có mấy giá trị của m?

A. 3. **B.** 1.
C. Không có m. **D.** 2.

Câu 40. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)=-x^3+3x-4$ và $M(x_0;0)$ là điểm trên trục hoành sao cho tam giác MAB có chu vi nhỏ nhất, đặt $T=4x_0+2015$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?

A. $T=2017$. **B.** $T=2019$.
C. $T=2016$. **D.** $T=2018$.

Câu 41. Tổng tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ có điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là?

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$.
C. 0. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số bậc ba có phương trình $y=x^3-5x^2+(m+4)x-m$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành.

A. $\varnothing$. **B.** $(-\infty;3)\cup(3;4]$.
C. $(-\infty;3)\cup(3;4)$. **D.** $(-\infty;4)$.

Câu 43. Biết $\frac{a}{b}$ (trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và a, $b\in\mathbb{N}^*$) là giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{2}{3}x^3-mx^2-2(3m^2-1)x+\frac{2}{3}$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1x_2+2(x_1+x_2)=1$. Tính giá trị biểu thức $S=a^2+b^2$.

A. $S=13$. **B.** $S=25$.
C. $S=10$. **D.** $S=34$.

Câu 44. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3+x^2+mx-1$ nằm bên phải trục tung. Tìm số phần tử của tập hợp $(-5;6)\cap S$.

A. 2. **B.** 5.
C. 3. **D.** 4.

Câu 45. Cho hàm số bậc ba có phương trình $y=-x^3+3x^2+3(m^2-1)x-3m^2-1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu nằm bên trái đường thẳng $x=2$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 46. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+2$ có hai điểm cực trị A và B sao cho các điểm A, B và $M(1;-2)$ thẳng hàng.

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=-\sqrt{2}$.
C. $m=2$. **D.** $m=-\sqrt{2}$; $m=\sqrt{2}$.

Câu 47. Cho hàm số bậc ba có phương trình $y=\frac{m}{3}x^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+2$. Hàm số đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+2x_2=1$ khi $m=a$

và $m=b$. Hãy tính tổng $a+b$.

A. $-\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** $-\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 48. Cho hàm số bậc ba có phương trình $y=2x^3-3(m+1)x^2+6mx+m^3$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A,B sao cho độ dài $AB=\sqrt{2}$.

A. $m=0$. **B.** $m=0$ hoặc $m=2$.
C. $m=1$. **D.** $m=2$.

Câu 49. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^3-3mx^2+3m-3$ có hai điểm cực trị A,B thỏa $2AB^2-\left(OA^2+OB^2\right)=20$ (trong đó O là gốc tọa độ)

A. $m=-1$. **B.** $m=1$.
C. $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-\frac{17}{11} \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\frac{17}{11} \end{array}\right.$.

Câu 50. Cho hàm số $y=x^4-2x^2+2$. Diện tích S của tam giác có ba đỉnh là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho có giá trị là

A. $S=3$. **B.** $S=\frac{1}{2}$.
C. $S=1$. **D.** $S=2$.

Câu 51. Tìm m đề đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ có ba điểm cực trị $A(0;1)$, B, C thỏa mãn $BC=4$?

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=4$.
C. $m=\pm 4$. **D.** $m=\pm\sqrt{2}$.

Câu 52. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân

A. $m=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **B.** $m=1$.
C. $m=-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **D.** $m=-1$.

Câu 53. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^4-2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

A. $0<m<1$. **B.** $m>0$.
C. $0<m<\sqrt[3]{4}$. **D.** $m<1$.

Câu 54. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2-2m^2+m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C thỏa mãn $ABCD$ là hình thoi với $D(0;-3)$. Số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $m\in\left(\frac{1}{2};\frac{9}{5}\right)$. **B.** $m\in\left(\frac{9}{5};2\right)$.
C. $m\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $m\in(2;3)$.

Câu 55. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông. Số phần tử của tập hợp S là?

A. 2. **B.** 0.
C. 4. **D.** 1.

Câu 56. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+1\,(1)$. Tổng lập phương các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính $R=1$ bằng?

A. $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
C. $2+\sqrt{5}$. **D.** $-1+\sqrt{5}$.

Câu 57. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số

m để đồ thị hàm số $y=x^4-2m^2x^2+m+4$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều?

A. $m\in\left\{0;\sqrt{3};-\sqrt{3}\right\}$. **B.** $m\in\left\{0;\sqrt[6]{3};-\sqrt[6]{3}\right\}$.

C. $m\in\left\{\sqrt[6]{3};-\sqrt[6]{3}\right\}$. **D.** $m\in\left\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\right\}$.

Câu 58. Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4-2m^2x^2+1$ có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác vuông cân.

A. $m=1$. **B.** $m\in\left\{-1;1\right\}$.

C. $m\in\left\{-1;0;1\right\}$. **D.** $m\in\varnothing$.

Câu 59. Tìm tất cả các giá trị m sao cho đồ thị hàm số $y=x^4+(m+1)x^2-2m-1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác có một góc bằng $120°$.

A. $m=-1-\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$.

B. $m=-1-\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$, $m=-1$.

C. $m=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

D. $m<-1$.

Câu 60. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) của hàm số $y=x^4-2m^2x^2+m^4+5$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tứ giác nội tiếp. Tìm số phần tử của S.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 61. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2-2m^2+m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C và $ABDC$ là hình thoi trong đó $D(0;-3)$, A thuộc trục tung. Khi đó m thuộc khoảng nào?

A. $m\in\left(\dfrac{9}{5};2\right)$. **B.** $m\in\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$.

C. $m\in(2;3)$. **D.** $m\in\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{5}\right)$.

Câu 62. Cho hàm số $y=-x^4+2mx^2+2$ có đồ thị (C_m). Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông.

A. $m=\sqrt[3]{3}$. **B.** $-m=\sqrt[3]{3}$.

C. $0<x<\dfrac{5}{4}$. **D.** $m=1$.

Câu 63. Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng?

A. 1. **B.** $\sqrt{2}+1$. **C.** $\sqrt{2}-1$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 64. Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y=x^4+2(m-4)x^2+m+5$ có đồ thị (C_m). Tìm m để (C_m) có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

A. $m=1$ hoặc $m=\dfrac{17}{2}$. **B.** $m=1$.

C. $m=4$. **D.** $m=\dfrac{17}{2}$.

Câu 65. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^4-2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

A. $m<1$. **B.** $0<m<1$.

C. $0<m<\sqrt[3]{4}$. **D.** $m>0$.

Câu 66. Gọi m_0 là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4+2mx^2-1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $m_0\in(-1;0]$. **B.** $m_0\in(-2;-1]$.

C. $m_0 \in (-\infty;-2]$. **D.** $m_0 \in (-1;0)$.

Câu 67. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

A. $m=0$. **B.** $m=-1; m=0$.

C. $m=1$. **D.** $m=1; m=0$.

Câu 68. Cho hàm số: $y=x^4+2mx^2+m^2+m$. Tìm m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị lập thành tam giác có một góc bằng $120°$.

A. $m=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$. **B.** $m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

C. $m=\dfrac{-1}{\sqrt[3]{3}}$. **D.** $m=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 69. Đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2-m$ có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua ba điểm cực trị này có bán kính bằng 1 thì giá trị của m là:

A. $m=1; m=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

B. $m=1; m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

C. $m=-1; m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

D. $m=-1; m=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Câu 70. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+3}{2x+1}$.

A. $y=2x+2$. **B.** $y=x+1$.

C. $y=2x+1$. **D.** $y=1-x$.

Câu 71. Điều kiện của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2-mx}{1-x}$ có cực đại và cực tiểu là?

A. $m<1$. **B.** $m>-1$.

C. $m<2$. **D.** $m>-2$.

Câu 72. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+2m}{x+1}$ có hai điểm cực trị A, B và tam giác OAB vuông tại O. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 9. **B.** 1.

C. 4. **D.** 5.

Câu 73. Biết rằng đồ thị $(H): y=\dfrac{x^2+2x+m}{x-2}$ (với m là tham số thực) có hai điểm cực trị là A,B. Hãy tính khoảng cách từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng AB.

A. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

C. $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 74. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+m^2}{x-1}$ có hai điểm cực trị A,B. Khi $AOB=90°$ thì tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng:

A. $\dfrac{1}{16}$. **B.** 8.

C. $\dfrac{1}{8}$. **D.** 16.

Câu 75. Với tham số m, đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-mx}{x+1}$ có hai điểm cực trị A, B và $AB=5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m>2$. **B.** $0<m<1$.

C. $1<m<2$. **D.** $m<0$.

Câu 76. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-|m|x+4}{x-|m|}$. Biết rằng đồ thị hàm số có hai điểm cực trị phân biệt là A, B. Tìm số giá trị m sao cho ba điểm A, B, $C(4;2)$ phân biệt và thẳng hàng.

A. 0. **B.** 2.

C. 1. **D.** 3.

Câu 77. Giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại điểm $x_0=2$ là:

A. $m=-1$. **B.** $m=-3$.

C. $m=1$. **D.** $m=3$.

Câu 78. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2mx+m+2}{2x-2m}$. Để hàm số có cực đại và cực tiểu, điều kiện của tham số m là:

A. $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \end{array}\right.$ **B.** $-1<m<2$.

C. $-2<m<1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>1 \end{array}\right.$.

Câu 79. Để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại $x=2$ thì m thuộc khoảng nảo?

A. $(0;2)$. **B.** $(-4;-2)$.

C. $(-2;0)$. **D.** $(2;4)$.

Câu 80. Cho hàm số $y=x+p+\dfrac{q}{x+1}$ đạt cực đại tại điểm $A(-2;-2)$. Tính pq.

A. $pq=2$. **B.** $pq=\dfrac{1}{2}$.

C. $pq=\sqrt{3}$. **D.** $pq=1$.

Câu 81. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có giá trị cực đại là 7.

A. $m=7$. **B.** $m=5$.

C. $m=-9$. **D.** $m=-5$.

Câu 82. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số bậc ba

$$y=f(x)=mx^3+(m+2)x^2-(1-m)x+3$$

có hai điểm cực trị có hoành độ dương là?

A. $m\in\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$. **B.** $m\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

C. $m\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$. **D.** $m\in\left[-\dfrac{1}{2};0\right)$.

Câu 83. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để hàm số:

$$y=\frac{3}{2}x^3-4mx^2+(m-1)^2x+1$$

có hai điểm cực trị x_1,x_2 thỏa mãn $x_1x_2>x_1+x_2$ là?

A. 12. **B.** 18. **C.** 16. **D.** 15.

Câu 84. Cho phương trình bậc hai

$$(m-1)x^2-2(m+2)x+m+1=0$$

có hai nghiệm x_1, x_2. Định m để phương trình có nghiệm thỏa mãn: $x_1=2x_2$.

A. $m=16\pm3\sqrt{33}$. **B.** $m=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.

C. $m=\dfrac{29}{12}$. **D.** $m=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 85. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=mx^4-2x^2+2017m^3-2016$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có bán kính ngoại tiếp bằng 1.

A. $m=2$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

C. $m=-1$. **D.** $m=1$.

Câu 86. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(m+5)x^2+mx$ có cực đại, cực tiểu thỏa điều kiện $\left|x_{CD}-x_{CT}\right|=5$.

A. $m=0$. **B.** $m=6$.

C. $m=\{0;6\}$. **D.** $m=\{0;-6\}$.

Câu 87. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\ (|m|<5)$ để hàm số $y=\left|x^3-(m-2)x^2-mx-m^2\right|$ có ba điểm cực tiểu?

A. 6. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 88. Cho hàm số bậc ba có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-1	↗	$+\infty$

Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(x^3-3\left|x^2-1\right|+m\right)$ có 10 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 89. Cho hai đường cong hàm bậc bốn trùng phương $(C_1): y=x^4-(m+1)x^2+2$ và $(C_2): y=2(x+1)^4-4x^2-8x+3m$. Biết rằng mỗi đường cong $(C_1),(C_2)$ đều có ba điểm cực trị tạo thành tam giác, đồng thời hai tam giác đó đồng dạng với nhau. Hỏi m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(0;1)$.

C. $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

Câu 90. Có bao nhiêu số thực m để đường thẳng $y=(m-6)x-4$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+x^2-3x-1$ tại ba điểm phân biệt có tung độ y_1,y_2,y_3 thỏa mãn $\frac{1}{y_1+4}+\frac{1}{y_2+4}+\frac{1}{y_3+4}=\frac{2}{3}$?

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 91. Cho hàm số $y=x^4-2x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu đường thẳng d có đúng ba điểm chung với đồ thị (C) và các điểm chung có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-1$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 92. Biết rằng đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{1}{x}$ có ba điểm cực trị thuộc một đường tròn (C). Bán kính của (C) gần với giá trị nào dưới đây ?

A. 12,4. **B.** 6,4. **C.** 4,4. **D.** 11,4.

Câu 93. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số bậc ba

$$y=-x^3+3(m-1)x^2+3(4m-9)x-1$$

đạt cực trị tại các điểm lớn hơn -1 là

A. $\left(\sqrt{10}-1;4\right)$. **B.** $\left(-1-\sqrt{10};\sqrt{10}-1\right)$.

C. $\left(\sqrt{10}-1;+\infty\right)$. **D.** $\left[\sqrt{10}-1;+\infty\right)$.

Câu 94. Cho hàm số bậc ba

$$y=2x^3-3\left(m^2-m+1\right)x^2+\left(6m^2-6m\right)x,$$

với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị, đồng thời đường thẳng đi qua hai điểm cực

trị đó vuông góc với đường thẳng $y=x+2$. Số phần tử của tập hợp S là ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 95. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số a để đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương $y=x^4-2\left(a^2-2a-3\right)^2x^2+1$ có ba điểm cực trị và ba điểm cực trị đó tạo thành một tam giác có chu vi bằng $2\sqrt{2}+2$. Số tập hợp con của tập hợp S là?

A. 2. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 4.

Câu 96. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+2$ có đồ thị (C). Để đồ thị (C) có 3 điểm cực trị cùng với $M(2;-4)$ nằm trên một parabol thì m nằm trong khoảng nào?

A. $(-2;0)$. **B.** $(0;2)$.

C. $(2;4)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Bài tập tương tự

Câu 97. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x-4$ có đồ thị (C). Biết rằng trên (C) tồn tại hai điểm phân biệt M, N mà tiếp tuyến tại đó có cùng hệ số góc m, đồng thời đường thẳng MN đi qua điểm $A(1;-2018)$. Hỏi m nằm trong khoảng nào?

A. $(2017;\ 4000)$. **B.** $(-2019;0)$.

C. $(0;2017)$. **D.** $(4000;+\infty)$.

Câu 98. Biết đồ thị hàm số $y=x^2-3x+\dfrac{m}{x}+3$ (m là tham số) có ba điểm cực trị. Parabol $y=ax^2+bx+c$ đi qua ba điểm cực trị đó. Tính $a+2b+4c$.

A. $a+2b+4c=3$. **B.** $a+2b+4c=0$.

C. $a+2b+4c=-4$. **D.** $a+2b+4c=1$.

Câu 99. Cho hàm số bậc ba

$$y=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$$

đạt cực trị tại các điểm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1\in(-1;0)$; $x_2\in(1;2)$. Biết hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1;x_2)$, đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a<0,b>0,c>0,d>0$.

B. $a<0,b<0,c>0,d>0$.

C. $a>0,b>0,c>0,d>0$.

D. $a<0,b>0,c<0,d>0$.

ĐÁP ÁN

i \ j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		**B**	**B**	**D**	**C**	**B**	**A**	**B**	**C**	**C**
1	**D**	**C**	**D**	**D**	**D**	**A**	**C**	**D**	**A**	**D**
2	**D**	**B**	**B**	**A**	**A**	**A**	**C**	**A**	**A**	**C**
3	**D**	**B**	**B**	**B**	**A**	**D**	**C**	**C**	**C**	**D**
4	**A**	**C**	**C**	**A**	**D**	**D**	**D**	**B**	**B**	**D**
5	**C**	**B**	**D**	**A**	**A**	**D**	**D**	**C**	**B**	**A**
6	**C**	**D**	**D**	**C**	**B**	**B**	**C**	**A**	**C**	**B**
7	**B**	**A**	**A**	**A**	**A**	**B**	**A**	**B**	**B**	**B**
8	**D**	**C**	**A**	**A**	**A**	**D**	**D**	**D**	**C**	**C**
9	**D**	**B**	**B**	**A**	**D**	**C**	**B**	**D**	**A**	**A**

Ghi chú: Đáp án là sự kết hợp giữa dòng i và cột j. Ví dụ: **Câu 24A** (giao của dòng 2 và cột 4).

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$ thực hiện phép chia y cho y' ta được số dư là $y = -8x - 2$.

Như thế điểm $N(1;-10)$ thuộc đường thẳng AB.

Đáp án B

Câu 2. Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$. Từ đó ta có tọa độ hai điểm cực trị $A(0;1)$, $B(2;-3)$. Đường thẳng qua hai điểm cực trị có phương trình $y = -2x + 1$. Đường thẳng này vuông góc với đường thẳng $y = (2m-1)x + 3 + m$ khi và chỉ khi:

$$(2m-1)(-2) = -1 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}.$$

Đáp án B

Câu 3. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có TXĐ: $\mathbb{R}$;

$y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Suy ra đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là: $A(0;1)$, $B(2;-3) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2;-4)$.

Đường thẳng d đi qua hai điểm A, B có phương trình: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-4} \Leftrightarrow y = -2x + 1$.

Đường thẳng $y = (2m-1)x + m + 3$ song song với đường thẳng $d \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 = -2 \\ m + 3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

Đáp án D

Câu 4. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6x - 9$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow y = 6 \\ x = 3 \Rightarrow y = -26 \end{array}\right.$

Ta có: $A(-1;6)$, $B(3;-26) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (4;-32)$ nên chọn $x = -1$.

Phương trình đường thẳng AB là:

$$8(x+1) + 1(y-6) = 0 \Leftrightarrow 8x + y + 2 = 0.$$

Thay tọa độ các điểm P, M, N, Q vào phương trình đường thẳng AB ta có điểm $N(1;-10)$ thuộc đường thẳng.

Đáp án C

Câu 5. Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$, $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' - 2x - 1$.

Do đó, đường thẳng Δ qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số này có phương trình là $y = -2x - 1$.

Để d vuông góc với Δ thì $(3m+1).(-2) = -1$

$\Leftrightarrow m = -\frac{1}{6}$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = -\frac{1}{6}$.

Đáp án B

Câu 6. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6m(1-2m)$,

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = 1 - 2m \end{array}\right.$.

Để hàm số có hai cực trị thì $m \neq 1-2m$ $\Leftrightarrow m \neq \frac{1}{3}$.

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$A\left(m;-7m^3+3m^2\right),$$

$$B\left(1-2m;20m^3-24m^2+9m-1\right).$$

Do đó: $\overrightarrow{AB}=\left(1-3m;(3m-1)^3\right)$. Do đó AB có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left((3m-1)^2;1\right)$.

Do đó: $AB:(3m-1)^2 x+y-2m^3+3m^2-m=0$

$\Leftrightarrow y=-(3m-1)^2 x+2m^3-3m^2+m$.

Để đường thẳng AB song song với đường thẳng $y=-4x$ thì:

$$\begin{cases}-(3m-1)^2=-4\\ 2m^3-3m^2+m\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-\frac{1}{3}\end{array}\right.\\ \begin{cases}m\neq 0\\ m\neq \frac{1}{2}\\ m\neq 1\end{cases}\end{cases} \Leftrightarrow m=-\frac{1}{3}.$$

Câu 7. Thực hiện phép chia y cho y' ta được:

$$y=y'.\left(\frac{1}{3}x\right)+(-2x+1).$$

Giả sử hai điểm cực trị của đồ thị hàm số lần lượt là: $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$. Ta có:

$$y_1=y(x_1)=y'(x_1).\left(\frac{1}{3}x_1\right)+(-2x_1+1)=-2x_1+1$$

$$y_2=y(x_2)=y'(x_2).\left(\frac{1}{3}x_2\right)+(-2x_2+1)=-2x_2+1.$$

Ta thấy, toạ độ hai điểm cực trị A và B thoả mãn phương trình $y=-2x+1$.

Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị là: $y=-2x+1$.

Đáp án B

Câu 8. Ta có: $y'=3x^2+4x+m-3$, để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow m<\frac{13}{3}$ $(*)$

Ta có: $y=y'.\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}\right)+\left(\frac{2m}{3}-\frac{26}{9}\right)x+\frac{7m}{9}+\frac{2}{3}$ nên phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y=\left(\frac{2m}{3}-\frac{26}{9}\right)x+\frac{7m}{9}+\frac{2}{3}$. Theo giả thiết, đường thẳng này đi qua $M(9;-5)$ nên $m=3$ (thỏa mãn điều kiện $(*)$).

Đáp án C

Câu 9. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-2$.

$$y=x^3-2x+m=\frac{1}{3}x.y'+\left(-\frac{4}{3}x+m\right)$$

Suy ra đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình là $y=-\frac{4}{3}x+m$ đường thẳng này đi qua điểm $M(-3;7)$ khi và chỉ khi $7=-\frac{4}{3}.(-3)+m \Leftrightarrow m=3$.

Đáp án C

Câu 10. Xét hàm số $y=x^3-3x^2-1$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$, $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' - 2x - 1$.

Do đó, đường thẳng Δ qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số này có phương trình là $y = -2x - 1$.

Để d vuông góc với Δ thì $(3m+1).(-2) = -1$

$\Leftrightarrow m = -\frac{1}{6}$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = -\frac{1}{6}$.

Câu 11. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Điều kiện để hàm số có hai điểm cực trị là $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow a^2 - 3b > 0$.

Lấy $f(x)$ chia cho $f'(x)$.

Ta có: $f(x) = f'(x).\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}a\right) + ...$

$$... + \left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}\right)x + c - \frac{1}{9}ab.$$

Suy ra đường thẳng đi qua A, B là:

$y = \left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}\right)x + c - \frac{1}{9}ab$ (d).

Theo đầu bài (d) đi qua gốc tọa độ

$\Rightarrow c - \frac{1}{9}ab = 0 \Leftrightarrow ab = 9c$.

Khi đó: $P = abc + ab + c \Leftrightarrow P = 9c^2 + 10c$

$\Leftrightarrow P = \left(3c + \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9}$.

Suy ra: $\min P = -\frac{25}{9}$.

Đáp án C

Câu 12. Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx$; $y' = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $x = 2m$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó hai điểm cực trị là: $A(0;2)$, $B(2m; 2 - 4m^3)$.

Ta có: $\overrightarrow{MA} = (-1;4)$, $\overrightarrow{MB} = (2m-1; 4-4m^3)$.

Ba điểm A, B và $M(1;-2)$ thẳng hàng $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ cùng phương

$\Leftrightarrow \frac{2m-1}{-1} = \frac{4-4m^3}{4} \Leftrightarrow \frac{2m-1}{-1} = \frac{1-m^3}{1} \Leftrightarrow$

$2m - 1 = m^3 - 1 \Leftrightarrow m^3 = 2m$

$\Leftrightarrow m^2 = 2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$ (do $m \neq 0$).

Đáp án D

Câu 13. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Do đó đồ thị hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị lần lượt có tọa độ là $A(0;m)$ và $B(2;-4+m)$.

Ta có: $OA = OB \Leftrightarrow \sqrt{0^2 + m^2} = \sqrt{2^2 + (4-m)^2}$

$\Leftrightarrow m^2 = 4 + (4-m)^2 \Leftrightarrow 20 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}$.

Đáp án D

Câu 14. Ta có: $y' = x^2 - 2mx + (m^2 - 1)$

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m-1 \\ x = m+1 \end{array}\right. \Rightarrow A\left(m-1; \frac{m^3 - 3m + 2}{3}\right)$

và $B\left(m+1; \frac{m^3 - 3m - 2}{3}\right)$

Dễ thấy phương trình đường thẳng $AB: y = -\frac{2}{3}x + \frac{m(m^2-1)}{3}$ nên AB không thể song song hoặc trùng với $d \Rightarrow A, B$ cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$ nếu trung điểm I của AB nằm trên d.

$I\left(m; \frac{m^3 - 3m}{3}\right) \in d \Rightarrow \frac{m^3 - 3m}{3} = 5m - 9$

$\Leftrightarrow m^3 - 18m + 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Với $m = 3 \Rightarrow A, B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d.

Với $m = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow A, B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d.

Tổng các phần tử của S bằng 0.

Đáp án D

Câu 15. Ta có: $y' = 2x^2 - 2mx - 2(3m^2 - 1)$;

$y' = 2(x^2 - mx - 3m^2 + 1)$.

$g(x) = x^2 - mx - 3m^2 + 1$; $\Delta = 13m^2 - 4$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ $g(x)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ m < -\frac{2\sqrt{13}}{13} \end{array}\right.$. (*)

x_1, x_2 là các nghiệm của $g(x)$ nên theo định lý Vietè, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -3m^2 + 1 \end{cases}$.

Do đó: $x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$

$\Leftrightarrow -3m^2 + 2m + 1 = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \frac{2}{3} \end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện $(*)$, ta thấy chỉ $m = \frac{2}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đáp án A

Câu 16. Đồ thị hàm số bậc ba đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành khi và chỉ khi phương trình: $mx^3 - (2m-1)x^2 + 2mx - m - 1 = 0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có $(1) \Leftrightarrow (x-1)\left[mx^2 - (m-1)x + m + 1\right] = 0$

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phân biệt $mx^2 - (m-1)x + m + 1 = 0$ có

2 nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m-(m-1)+m+1 \neq 0 \\ (m-1)^2-4m(m-1)>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m+2 \neq 0 \\ -3m^2-6m+1>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -2 \\ \dfrac{-3-2\sqrt{3}}{3} < m < \dfrac{-3+2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m=-1$.

Đáp án C

Câu 17. $y'=3x^2-2(m+6)x+2m+9.$

$$y'=3x^2-2(m+6)x+2m+9=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{2m+9}{3} \end{array}\right.$$

Hàm số có 2 cực trị khi và chỉ khi: $\dfrac{2m+9}{3} \neq 1 \Leftrightarrow m \neq -3$ $(*)$

$$y(1)=m+2.$$

$$y\left(\frac{2m+9}{3}\right)=-m\frac{(2m+9)^2}{27}-2.$$

Yêu cầu đề bài $\Leftrightarrow y(1).y\left(\dfrac{2m+9}{3}\right)<0$

$$\Leftrightarrow (m+2).\left[-m\frac{(2m+9)^2}{27}-2\right]<0$$

$$\Leftrightarrow (m+2).\left(4m^3+36m^2+81m+54\right)>0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-6 \\ m>-2 \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{-3}{2} \end{cases}.$$

Kết hợp điều kiện $(*)$, ta có: $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>-2 \\ m<-6 \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{-3}{2} \end{cases}.$

Đáp án D

Câu 18. TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=mx^2-2(m-1)x+3(m-2).$

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $mx^2-2(m-1)x+3(m-2)=0$ phải có hai nghiệm phân biệt.

$$\Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta'=(m-1)^2-3m(m-2)>0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2m^2+4m+1>0 \end{cases}$$

Theo định lý Vietè, ta có: $\begin{cases} x_1.+x_2=\dfrac{2(m-1)}{m} \\ x_1.x_2=\dfrac{3(m-2)}{m} \end{cases}.$

Theo bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x_1.+x_2=\dfrac{2(m-1)}{m} \\ x_1+2x_2=1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3m-4}{m} \\ x_2 = 1 - \dfrac{2(m-1)}{m} = \dfrac{2-m}{m} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \frac{3m-4}{m}.\frac{2-m}{m} = \frac{3(m-2)}{m}$$
$$\Rightarrow 3(2-m)m + (3m-4)(2-m) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \text{(thỏa mãn)} \\ m = \dfrac{2}{3} \text{(thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy $m_1^2 + m_2^2 = \dfrac{40}{9}$.

Đáp án A

Câu 19. $y' = -3x^2 + 6mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$

Đồ thị có hai cực trị khi: $m \neq 0$.

Khi đó hai điểm cực trị là:
$A(0;-3m-1), B(2m;4m^3-3m-1)$.

Tọa độ trung điểm AB là: $I(m;2m^3-3m-1)$.

A và B đối xứng qua d khi và chỉ khi:
$\begin{cases} I \in d \\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}_d = 0 \end{cases}$.

$\overrightarrow{AB} = (2m;4m^3), \vec{u}_d = (8;-1)$.

+ $\overrightarrow{AB}.\vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 16m - 4m^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$.

Với $m = 0$, loại.

Với $m = 2$, ta có: $I(2;9) \Rightarrow I \in d$.

Với $m = -2$, ta có: $I(-2;-11) \Rightarrow I \notin d$.

Do đó $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu.

Đáp án D

Câu 20. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

$\Leftrightarrow x^3 - 8x^2 + (m^2+11)x - 2m^2 + 2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

$x^3 - 8x^2 + (m^2+11)x - 2m^2 + 2 = 0$
$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 6x + m^2 - 1) = 0;$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 6x + m^2 - 1 = 0 \ (*) \end{cases}$

Suy ra phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 2.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 10 - m^2 > 0 \\ m^2 - 8 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \neq \pm 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{10} < m < \sqrt{10} \end{cases}$

Vậy có 7 giá trị nguyên của tham số thỏa mãn đề bài.

Đáp án D

Câu 21. Ta có: $y = (x-1)(x^2 - 2mx + 1 - m)$.

+ Hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành khi và chỉ khi đồ thị y cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.
$\Leftrightarrow y = (x-1)(x^2 - 2mx + 1 - m) = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 1 - m = 0$ có hai nghiệm phân

biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2+m-1>0 \\ 2-3m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ m>\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ m\neq \dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

+ Do $m\in N, m<20$ nên $1\le m<20$.

Vậy có 19 số tự nhiên thỏa mãn bài toán.

Đáp án B

Câu 22. TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$y'=0\Leftrightarrow 3x^2-2(m+1)x+m^2-2=0$.

Để hàm số có hai điểm cực trị:

$$\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow -2m^2+2m+7>0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{15}}{2}<m<\frac{1+\sqrt{15}}{2}(*).$$

Ta lần lượt thử bốn giá trị nguyên của m thỏa mãn $(*)$ là $-1;0;1;2$.

Ta được bốn hàm số: $\begin{cases} y=x^3-x+2 \\ y=x^3-x^2-2x+3 \\ y=x^3-2x^2-x+2 \\ y=x^3-3x^2+x-1 \end{cases}$.

Khi đó ta nhận thấy chỉ có $m=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đáp án B

Câu 23. Ta có: $y'=3x^2-6x+m$.

Hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2.

Vậy x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $y'=0$.

Theo Vietè, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1.x_2=\dfrac{m}{3} \end{cases}$.

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4-\frac{2m}{3}$$
$$\Rightarrow 4-\frac{2m}{3}=6 \Rightarrow m=-3.$$

Đáp án A

Câu 24. Ta có: $f'(x)=6x^2-12x$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

$x=0\Rightarrow f(0)=-m+1$

$x=2\Rightarrow f(2)=-m-7$

Hàm số có các giá trị cực trị trái dấu

$$\Leftrightarrow (-m+1)(-m-7)<0$$
$$\Leftrightarrow (m-1)(m+7)<0 \Leftrightarrow -7<m<1.$$

Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Đáp án A

Câu 25. Ta có: $y'=6x^2+6(m-1)x+6(m-2)$.

$$y'=0\Leftrightarrow x^2+(m-1)x+(m-2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-m+2 \end{array}\right.$$

Để hàm số có điểm cực đại cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$ thì $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt nằm trong khoảng $(-2;3)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m+2\neq -1 \\ -2<-m+2<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 3 \\ -1<m<4 \end{cases}.$$

Đáp án A

Câu 26. Ta có: $y'=3x^2-6mx=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2m\end{array}\right.$.

Đồ thị (C) có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow 2m\neq 0\Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó: $A\left(0;4m^2-2\right),\ B\left(2m;-4m^3+4m^2-2\right)$.

$\Rightarrow AB=\sqrt{4m^2+16m^6}=2|m|\sqrt{4m^4+1}$.

Phương trình đường thẳng AB là:

$$\frac{x-0}{2m-0}=\frac{y-\left(4m^2-2\right)}{-4m^3}\Leftrightarrow 2m^2x+y-4m^2+2=0$$

$$d\left(C,AB\right)=\frac{\left|2m^2+4-4m^2+2\right|}{\sqrt{4m^4+1}}=\frac{2\left|m^2-3\right|}{\sqrt{4m^4+1}}.$$

Diện tích tam giác ABC là:

$$S=\frac{1}{2}.AB.d\left(C,AB\right)=4$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}.2|m|.\sqrt{4m^4+1}.\frac{2\left|m^2-3\right|}{\sqrt{4m^4+1}}=4$$

$$\Leftrightarrow\left|m\left(m^2-3\right)\right|=2\Leftrightarrow m^6-6m^4+9m^2-4=0$$

$$\Leftrightarrow\left(m^2-1\right)^2\left(m^2-4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm 1\\m=\pm 2\end{array}\right.$$

Do m nguyên dương nên ta được $m=1,m=2$, tổng thu được là 3.

Đáp án C

Câu 27. Ta có: $y'=6x^2+6(m-1)x+6(m-2)$

Để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$.

$\Leftrightarrow$ Phương trình: $y'=0$ có 2 nghiệm thuộc khoảng $(-2;3)$.

$\Leftrightarrow x^2+(m-1)x+(m-2)=0$ có 2 nghiệm thuộc khoảng $(-2;3)$.

$\Leftrightarrow(x+1)(x+m-2)=0$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\in(-2;3)\\x=2-m\end{array}\right.$$

$$YCBT\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2-m\neq -1\\-2<2-m<3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\neq 3\\-1<m<4\end{array}\right.$$

Đáp án A

Câu 28. +) Để hàm số có hai cực trị thì phương trình $y'=0$ phải có hai nghiệm phân biệt:

$y'=9x^2+4(m+1)x-3m$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\Delta'=4(m+1)^2+27m>0$

+) Xét $y(x_1).y(x_2)=0$ nên ta có $y=3x^3+2(m+1)x^2-3mx+m-5$ phải tiếp xúc với trục hoành

$\Rightarrow 3x^3+2(m+1)x^2-3mx+m-5=0$ phải có nghiệm kép

$\Leftrightarrow(x-1)\left[3x^2+(2m+5)x-m+5\right]=0(1)$ phải có nghiệm kép

+) TH1: Phương trình $3x^2+(2m+5)x-m+5=0$ có một nghiệm $x=1\Rightarrow m_1=-13$.

+) TH2: Phương trình $3x^2+(2m+5)x-m+5=0$ có nghiệm kép khác 1.

$\Rightarrow \Delta = (2m+5)^2 - 12(5-m) = 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 + 32m - 35 = 0$

$\Rightarrow m_2 + m_3 = -8$

$\Rightarrow m_1 + m_2 + m_3 = -21$.

Đáp án A

Câu 29. +) Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + 27$,

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 9 = 0 \ (1)$.

+) Theo giả thiết hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < -3 \end{array}\right. (*)$.

+) Với điều kiện $(*)$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2, theo Vietè, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = 9 \end{cases}$.

+) Ta lại có: $|x_1 - x_2| \le 5$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \le 25 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 25 \le 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 61 \le 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{61}}{2} \le m \le \dfrac{\sqrt{61}}{2} \ (**)$

+) Kết hợp $(*)$, $(**)$ và điều kiện $m > 0$, ta được: $3 < m \le \dfrac{\sqrt{61}}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \dfrac{\sqrt{61}}{2} \end{cases} \Rightarrow T = 2b - a = \sqrt{61} - 3$.

Đáp án C

Câu 30. TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + mx + 3 \Rightarrow y' = x^2 - 4x + m$.

Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4$.

Khi đó giả sử $x_1 < x_2$,

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 - \sqrt{4-m} \\ x_2 = 2 + \sqrt{4-m} \end{array}\right.$.

Yêu cầu bài toán trở thành:

$x_2 \le 4 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{4-m} \le 4 \Leftrightarrow 0 \le m \le 4$.

Kết hợp với $m < 4$ ta được $0 \le m < 4$. Do m nguyên nên $m \in \{0;1;2;3\}$. Vậy có 4 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đáp án D

Câu 31. Ta có $y = x^3 + 4(m-2)x^2 - 7x + 1 \ (1)$.

$\Rightarrow y' = 3x^2 + 8(m-2)x - 7$.

Xét phương trình $3x^2 + 8(m-2)x - 7 = 0 \ (2)$.

$\Delta' = [4(m-2)]^2 + 21 > 0$, với mọi m $\Rightarrow$ Hàm số (1) luôn có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ với mọi m.

*Ta thấy: $ac = -21 < 0 \Rightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm trái dấu.

$\Rightarrow x_1 < 0; x_2 > 0 \Rightarrow |x_1| = -x_1; |x_2| = x_2$.

*Ta có: $|x_1| - |x_2| = -4 \Rightarrow -x_1 - x_2 = -4$

$\Leftrightarrow -(x_1 + x_2) = -4 \Leftrightarrow \dfrac{8(m-2)}{3} = -4 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$.

Đáp án B

Câu 32. Ta có: $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=m+1\end{array}\right.\Rightarrow\forall m\in\mathbb{R}$, hàm số luôn có cực đại, cực tiểu.

Tọa độ các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị là $A\left(m;2m^3+3m^2+1\right),B\left(m+1;2m^3+3m^2\right)$.

Suy ra $AB=\sqrt{2}$ và phương trình đường thẳng $AB:x+y-2m^3-3m^2-m-1=0$.

Do đó, tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi khoảng cách từ M tới AB nhỏ nhất

Ta có: $d\left(M,AB\right)=\dfrac{3m^2+1}{\sqrt{2}}\geq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, dấu "=" khi $m=0$.

Đáp án B

Câu 33. Ta có: $y'=3x^2-3m$ suy ra đồ thị hàm số có điểm cực đại và cực tiểu khi $m>0$. Các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số là $C\left(-\sqrt{m};2+2m\sqrt{m}\right);D\left(\sqrt{m};2-2m\sqrt{m}\right)$.

Đường thẳng Δ đi qua các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số có phương trình là: $y=-2mx+2$.

Do: $d\left(I,\Delta\right)=\dfrac{\left|2m-1\right|}{\sqrt{4m^2+1}}<R=1$ (vì $m>0$)$\Rightarrow$ Δ luôn cắt đường tròn tâm $I\left(1;1\right)$, bán kính $R=1$ tại 2 điểm A,B phân biệt. Dễ thấy $m=\dfrac{1}{2}$ không thỏa mãn do A,I,B thẳng hàng.

Với $m\neq\dfrac{1}{2}$: Δ không đi qua I, ta có:

$S_{\Delta ABI}=\dfrac{1}{2}IA.IB.\sin AIB\leq\dfrac{1}{2}R^2=\dfrac{1}{2}$.

Do đó $S_{\Delta IAB}$ lớn nhất bằng $\dfrac{1}{2}$ khi $\sin AIB=1$ hay ΔAIB vuông cân tại $I\Leftrightarrow IH=\dfrac{R}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\Leftrightarrow\dfrac{\left|2m-1\right|}{\sqrt{4m^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$ (H là trung điểm của AB)

Đáp án B

Câu 34. Ta có: $y'=3x^2+2ax+b$.

Chia y cho y' ta được:

$y=y'\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{9}a\right)+\left(-\dfrac{a^2}{9}-\dfrac{2b}{3}\right)x+c-\dfrac{ab}{9}$.

Do $M\left(x_1;y_1\right),N\left(x_2;y_2\right)$ là hai điểm cực trị nên: $y'\left(x_1\right)=0,y'\left(x_2\right)=0$.

Do đó: $\begin{cases}y_1=\left(-\dfrac{a^2}{9}-\dfrac{2b}{3}\right)x_1+c-\dfrac{ab}{9};\\y_2=\left(-\dfrac{a^2}{9}-\dfrac{2b}{3}\right)x_2+c-\dfrac{ab}{9}\end{cases}$.

Theo giả thiết:

$$x_1\left(y_1-y_2\right)=y_1\left(x_1-x_2\right)\Leftrightarrow x_1y_2=x_2y_1$$

$$\Leftrightarrow x_1\left[\left(-\frac{a^2}{9}-\frac{2b}{3}\right)x_2+c-\frac{ab}{9}\right]=$$

$$=x_2\left[\left(-\frac{a^2}{9}-\frac{2b}{3}\right)x_1+c-\frac{ab}{9}\right]$$

$$\Leftrightarrow x_1\left(c-\frac{ab}{9}\right)=x_2\left(c-\frac{ab}{9}\right)$$

$$\Leftrightarrow c-\frac{ab}{9}=0\left(x_1\neq x_2\right)\Leftrightarrow ab=9c$$

Ta có: $P=abc+2ab+3c=9c^2+21c$.

$\Rightarrow P=\left(3c+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}\ge -\frac{49}{4}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=abc+2ab+3c$ bằng $-\frac{49}{4}$.

Đáp án A

Câu 35. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-1=0$.

Vì $\Delta'=1>0\ \forall m$ nên phương trình $y'=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x=m\pm 1$.

Gọi $A\left(m+1;-4m-2\right)$, $B\left(m-1;-4m+2\right)$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB}=\left(-2;4\right)=-2\left(1;-2\right)$,

$\overrightarrow{IA}=\left(m-1;-4m\right)$, $\overrightarrow{IB}=\left(m-3;-4m+4\right)$.

Phương trình đường thẳng AB qua $A\left(m+1;-4m-2\right)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left(2;1\right)$ là: $AB:2x+y+2m=0$.

Suy ra: $d\left(I,\ AB\right)=\frac{\left|2+2m\right|}{\sqrt{5}}$.

Khi đó: $S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}AB.d\left(I,\ AB\right)$

$=\frac{1}{2}2\sqrt{5}\frac{\left|2+2m\right|}{\sqrt{5}}=\left|2+2m\right|$.

Mặt khác: $S_{\Delta IAB}=\frac{AB.IA.IB}{4R}$

$\Leftrightarrow AB.IA.IB=4\sqrt{5}\left|2+2m\right|$.

$\Leftrightarrow \sqrt{20}\sqrt{17m^2-2m+1}\sqrt{17m^2-38m+25}$

$=4\sqrt{5}\left|2+2m\right|$

$\Leftrightarrow \left(17m^2-2m+1\right)\left(17m^2-38m+25\right)$

$=4\left(4m^2+8m+4\right)$

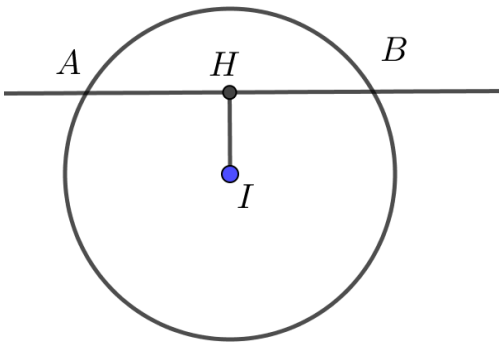
$\Leftrightarrow 289m^4-680m^3+502m^2-120m+9=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\frac{3}{17} \end{array}\right.$.

Vậy $m_1+m_2=\frac{20}{17}$.

Đáp án D

Câu 36.



Ta có: $y'=3x^2-6m$.

$y'=0\Leftrightarrow x^2=2m$.

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$

Gọi $A\left(\sqrt{2m};4-4m\sqrt{2m}\right)$ và $B\left(-\sqrt{2m};4+4m\sqrt{2m}\right)$

Phương trình đường thẳng $AB:4mx+y-4=0$.

Đặt $a=d\left(I,AB\right)\ \left(0<a<\sqrt{2}\right)\ \Rightarrow\ HB=\sqrt{2-a^2}$.

Suy ra: $S_{\Delta IAB}=a\sqrt{2-a^2}\le\frac{1}{2}\left(a^2+2-a^2\right)=1$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=\sqrt{2-a^2}\Leftrightarrow a=1$.

Khi đó: $d\left(I;AB\right)=\frac{\left|4m+0-4\right|}{\sqrt{16m^2+1}}=1$.

$\Leftrightarrow\sqrt{16m^2+1}=4\left|m-1\right|$

$\Leftrightarrow 16m^2+1=16m^2-32m+16\Leftrightarrow m=\frac{15}{32}$.

Đáp án C

Câu 37. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)$ và $y''=6x-6m$.

Khi đó: $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)=0$.

$\Delta'=9m^2-9\left(m^2-1\right)=9$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị $x=m+1$ và $x=m-1$.

$y''\left(m-1\right)=6\left(m-1\right)-6m=-6<0\Rightarrow x=m-1$ là điểm cực đại của hàm số.

$\Rightarrow A\left(m-1;-3m+2\right)$ là điểm cực đại của đồ thị $\left(C\right)$.

Ta có: $\begin{cases}x_A=m-1\\y_A=-3m+2\end{cases}\Rightarrow y_A=-3x_A-1$.

$\Rightarrow A$ luôn thuộc đường thẳng d có phương trình $y=-3x-1$.

Do đó hệ số góc k của đường thẳng d là -3.

Đáp án C

Câu 38. TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6x+m$.

Xét: $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6x+m=0$; $\Delta'=9-3m$.

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow\Delta'>0\Leftrightarrow m<3$.

Hai điểm cực trị $x_1;x_2$ là nghiệm của $y'=0$ nên:

$x_1+x_2=2;x_1.x_2=\frac{m}{3}$.

Để $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=13\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-3x_1.x_1=13$.

$\Leftrightarrow 4-m=13\Leftrightarrow m=-9$.

Vậy $m_0=-9\in\left(-15;-7\right)$.

Đáp án C

Câu 39. Ta có: $y'\left(x\right)=x^2-mx+1$;

$$y'=0\Leftrightarrow x^2-mx+1=0\ \ (1).$$

Để hàm số có cực trị thì (1) phải có hai nghiệm phân biệt. Điều này tương đương với $\Delta>0$

$\Leftrightarrow m^2-4>0\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>2\\m<-2\end{array}\right.$.

Gọi hai nghiệm của (1) là x_1, x_2. Khi đó, ta có:

$\begin{cases}x_1+x_2=m\\x_1.x_2=1\end{cases}$.

Độ dài hai cạnh của tam giác vuông đó là $\left|x_1\right|$, $\left|x_2\right|$.

Theo bài ra ta có phương trình:

$x_1^2+x_2^2=7\ \Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=7\ \Leftrightarrow m^2-2=7$

$\Leftrightarrow m^2=9\ \Leftrightarrow m=\pm3$

(Thỏa mãn).

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đáp án D

Câu 40. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $f'(x)=-3x^2+3$.

Xét $f'(x)=0\Leftrightarrow -3x^2+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=-2 \\ x=-1\Rightarrow y=-6 \end{array}\right.$.

Đặt $A(1;-2)$ và $B(-1;-6)$.

Ta thấy hai điểm A và B nằm cùng phía với trục hoành.

Gọi $A'(1;2)$ là điểm đối xứng với điểm A qua trục hoành. Chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi ba điểm B, M và A' thẳng hàng.

Ta có: $\overrightarrow{A'M}=(x_0-1;-2)$ và $\overrightarrow{A'B}=(-2;-8)$

$\Rightarrow \dfrac{x_0-1}{-2}=\dfrac{-2}{-8}\Leftrightarrow x_0=\dfrac{1}{2}\Rightarrow M\left(\dfrac{1}{2};0\right)$.

Vậy $T=4.\dfrac{1}{2}+2015=2017$.

Đáp án A

Câu 41. Ta có: $y'=3x^2-6mx$, $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$

Để hàm số có cực đại cực tiểu thì $m\neq 0$.

Khi đó các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0;4m^3)$, $B(2m;0)$.

Ta có: $I(m;2m^3)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là $d: x-y=0$.

Do đó để điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua d thì:

$$\left\{\begin{array}{l} 2m-4m^3=0 \\ m-2m^3=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow 1-2m^2=0\Leftrightarrow m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy tổng tất cả các giá trị của tham số thực m là 0.

Đáp án C

Câu 42. TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$y=x^3-5x^2+(m+4)x-m=(x-1)(x^2-4x+m)$.

Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành khi và chỉ khi phương trình $y=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x^2-4x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4-m>0 \\ 1-4+m\neq 0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m<4 \\ m\neq 3 \end{array}\right.$$

Đáp án C.

Câu 43. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y'=2x^2-2mx-6m^2+2$.

Hàm số có hai điểm cực trị:

$\Leftrightarrow \Delta'>0\Leftrightarrow m^2-2(-6m^2+2)>0\Leftrightarrow 13m^2-4>0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\dfrac{2\sqrt{13}}{13} \\ m<-\dfrac{2\sqrt{13}}{13} \end{array}\right.$$

Theo định lý Vietè, thì: $\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=m \\ x_1x_2=-3m^2+1 \end{array}\right.$.

Ta có: $x_1x_2+2(x_1+x_2)=1\Leftrightarrow -3m^2+1+2m=1$

$$\Leftrightarrow 3m^2-2m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Chỉ có giá trị $m=\dfrac{2}{3}$ thỏa điều kiện, khi đó $S=a^2+b^2=2^2+3^2=13$.

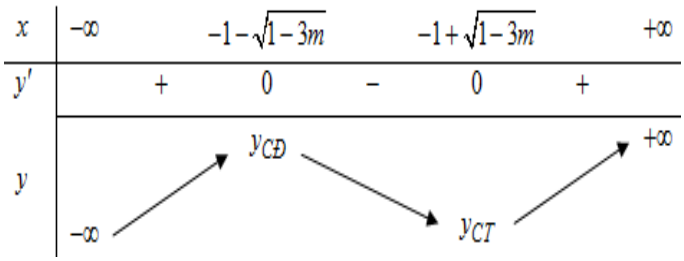
Đáp án A

Câu 44. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$; $y'=3x^2+2x+m$.

Hàm bậc ba có cực trị khi $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=1-3m>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{1}{3}$ (1).

Khi đó: $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1-\sqrt{1-3m} \\ x=-1+\sqrt{1-3m} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số nằm về phía bên phải trục tung khi

$$-1+\sqrt{1-3m}>0 \Leftrightarrow \sqrt{1-3m}>1 \Leftrightarrow m<0.$$

Kết hợp với (1), ta có: $m<0$ thì điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho nằm bên phải trục tung.

Khi đó S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên âm.

Vậy $(-5;6)\cap S=\{-4;-3;-2;-1\} \Rightarrow (-5;6)\cap S$ có 4 phần tử.

Đáp án D

Câu 45. $y=-x^3+3x^2+3\left(m^2-1\right)x-3m^2-1$

$\Rightarrow y'=-3x^2+6x+3\left(m^2-1\right)$.

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-m \\ x=1+m \end{array}\right.$.

Để đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu nằm bên trái đường thẳng $x=2$ thì:

$$\begin{cases} m\neq 0 \\ 1+m<2 \\ 1-m<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m<1 \\ m>-1 \end{cases}.$$

Vậy không có giá trị nguyên nào của m thỏa yêu cầu bài toán.

Đáp án D

Câu 46. Ta có: $y'=3x^2-6mx$;

$y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6mx=0 \Leftrightarrow x=0, x=2m$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó hai điểm cực trị là $A(0;2)$, $B\left(2m;2-4m^3\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{MA}=(-1;4)$, $\overrightarrow{MB}=\left(2m-1;4-4m^3\right)$.

Ba điểm A, B và $M(1;-2)$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \frac{2m-1}{-1}=\frac{4-4m^3}{4} \Leftrightarrow \frac{2m-1}{-1}=\frac{1-m^3}{1}$$

$\Leftrightarrow 2m-1=m^3-1 \Leftrightarrow m^3=2m$.

$\Leftrightarrow m^2=2 \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{2}$ (do $m\neq 0$).

Đáp án D

Câu 47. Ta có: $y'=mx^2-2(m-1)x+3(m-2)$.

Hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+2x_2=1$

suy ra $x_2=\dfrac{2-m}{m}$.

Do $x_2=\dfrac{2-m}{m}$ là nghiệm của phương trình $mx^2-2(m-1)x+3(m-2)=0$ nên

$$m\left(\frac{2-m}{m}\right)^2-2(m-1)\left(\frac{2-m}{m}\right)+3(m-2)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.\cdot$$

Thử lại thấy $\left[\begin{array}{l}m=2\\m=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$ đều thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $a+b=\dfrac{8}{3}$.

Đáp án B

Câu 48. Ta có: $y'=6x^2-6(m+1)x+6m$;

$$y'=0\Leftrightarrow x^2-(m+1)x+m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=m\end{array}\right.\cdot$$

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì $m\neq 1$.

Khi đó ta có: $A(1;m^3+3m-1),B(m;3m^2)$.

Ta có: $AB=\sqrt{2}$.

$$\Leftrightarrow(m-1)^2+(m^3-3m^2+3m-1)^2=2$$

$$\Leftrightarrow(m-1)^2+(m-1)^6=2$$

$$\Leftrightarrow(m-1)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=2\end{array}\right.$$ (thỏa mãn yêu cầu bài toán).

Đáp án B

Câu 49. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3mx^2-6mx$.

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow m\neq 0$

Khi đó $\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Tọa độ điểm cực trị: $A(0;3m-3),B(2;-m-3)$

Theo giả thiết: $2AB^2-(OA^2+OB^2)=20$

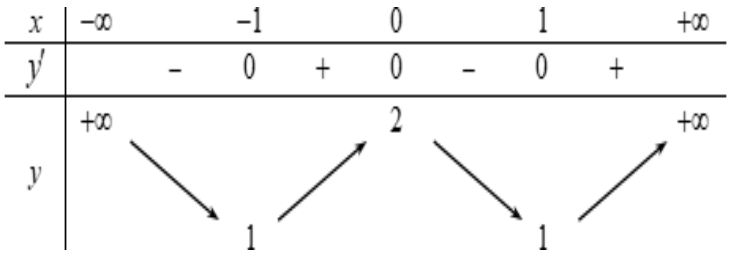
$$\Leftrightarrow 22m^2+12m-34=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-\dfrac{17}{11}\end{array}\right.\cdot$$

Đáp án D

Câu 50. Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\to y=2\\x=\pm1\to y=1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên



Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $A(0;2)$, $B(-1;1)$, $C(1;1)$.

Nhận xét ΔABC cân tại A. Vì vậy $S=\dfrac{1}{2}|y_A-y_B|.|x_C-x_B|=\dfrac{1}{2}.1.2=1$.

Đáp án C.

Câu 51. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y' = 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$.

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

Tọa độ điểm cực trị của đồ thị hàm số:

$A(0;1),\ B\left(\sqrt{m};\ -m^2+1\right),\ C\left(-\sqrt{m};\ -m^2+1\right).$

$BC = 4 \Leftrightarrow 4m = 16 \Leftrightarrow m = 4.$

Đáp án B.

Câu 52. Hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 + 4mx; y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4mx = 0$

$\Leftrightarrow 4x\left(x^2 + m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -m\ (*) \end{array}\right.$

Hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

$\Leftrightarrow -m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Vậy tọa độ 3 điểm lần lượt là:

$A(0;1); B\left(-\sqrt{-m};1-m^2\right); C\left(\sqrt{-m};1-m^2\right)$

Ta có: $\overrightarrow{AB} = \left(-\sqrt{-m};-m^2\right); \overrightarrow{AC} = \left(\sqrt{-m};-m^2\right).$

Vì ΔABC vuông cân tại

$A \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{m^2} + m^2.m^2 = 0$

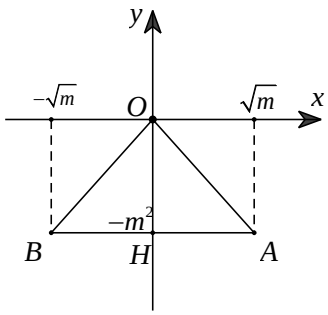
$\Leftrightarrow -|m| + m^4 = 0 \Leftrightarrow m + m^4 = 0$

$\Leftrightarrow m = -1$ (vì $m < 0$)

Vậy với $m = -1$ thì hàm số có 3 cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

Đáp án D

Câu 53. Tập xác định $D = \mathbb{R}$



Ta có: $y' = 4x^3 - 4mx$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$.

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 0$. Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là: $O(0;0),\ A\left(\sqrt{m};-m^2\right),\ B\left(-\sqrt{m};-m^2\right).$

Do đó: $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OH.AB = \frac{1}{2}m^2.2\sqrt{m}$

$\Leftrightarrow S_{\Delta OAB} = m^2\sqrt{m} < 1 \Leftrightarrow 0 < m < 1$

Đáp án A

Câu 54. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$.

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$A\left(0;-2m^2+m^4\right);\ B\left(\sqrt{m};m^4-3m^2\right);$$
$$C\left(-\sqrt{m};m^4-3m^2\right).$$

Gọi I trung điểm của $BC \Rightarrow I\left(0;m^4-3m^2\right)$

Vì $A,D\in Oy$, B và C đối xứng nhau qua Oy nên tứ giác $ABCD$ là hình thoi $\Leftrightarrow$ I là trung điểm của AD

$$\Leftrightarrow 2\left(m^4-3m^2\right)=-2m^2+m^4-3$$

$$\Leftrightarrow m^4-4m^2+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2=1\\m^2=3\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm1\\m=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.\xrightarrow{m>0}\left[\begin{array}{l}m=1\\m=\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Đáp án A

Câu 55. $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2$.

$$\Rightarrow y'=4x^3-4(m+1)x=4x\left(x^2-m-1\right)$$

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow x^2-m-1=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

$\Leftrightarrow -m-1>0\Leftrightarrow m<-1$.

Khi đó: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\sqrt{m+1}\\x=0\\x=\sqrt{m+1}\end{array}\right.$.

Giả sử A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}A\left(-\sqrt{m+1};-2m-1\right)\\B\left(0;m^2\right)\\C\left(\sqrt{m+1};-2m-1\right)\end{array}\right.$.

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{m+1};(m+1)^2\right)\\\overrightarrow{CB}=\left(-\sqrt{m+1};(m+1)^2\right)\end{array}\right.$$

ΔABC vuông tại $B\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}=0$

$$\Leftrightarrow-(m+1)+(m+1)^4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=0\end{array}\right.\Rightarrow m=0$$

.

Đáp án D

Câu 56. TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$$y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right).$$

Để đồ thị hàm số (1) có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m>0$.

Gọi $A(0;1),B\left(\sqrt{m};-m^2+1\right),C\left(-\sqrt{m};-m^2+1\right)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số (1), $I\left(0;-m^2+1\right)$ là trung điểm BC.

Ta có: $AI=m^2,AB=AC=\sqrt{m+m^4}$.

Suy ra: $\frac{1}{2}AI.BC=\frac{AB.AC.BC}{4R}\Leftrightarrow R=\frac{2AI}{AB.AC}$

$$\Leftrightarrow\frac{2m^2}{m+m^4}=1\Leftrightarrow m^4-2m^2+m=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}m=0 & (l)\\m=1 & (n)\\m=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} & (l)\\m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} & (n)\end{array}\right.$$

Ta có: $S=(1)^3+\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^3=\sqrt{5}-1$.

Đáp án D

Câu 57. Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m\neq0$.

Khi đó, 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$A(0;m+4)$, $B(|m|;-m^4+m+4)$,

$C(-|m|;-m^4+m+4)$.

Tam giác ABC có $AB=AC$ nên tam giác ABC cân tại A, suy ra tam giác ABC đều

$\Leftrightarrow AB=BC$

$\Leftrightarrow \sqrt{m^2+m^8}=2|m| \Leftrightarrow m^8+m^2=4m^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm\sqrt[6]{3} \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện ta được $m\in\left\{-\sqrt[6]{3};\sqrt[6]{3}\right\}$.

Đáp án C

Câu 58. $y=x^4-2m^2x^2+1$.

+ Cách 1:

Hàm số có 3 cực trị

$\Leftrightarrow ab<0 \Leftrightarrow -2m^2<0 \Leftrightarrow m\neq 0$.

$y'=4x^3-4m^2x$

$y'=0 \Leftrightarrow 4x^3-4m^2x=0$

$\Leftrightarrow 4x\left(x^2-m^2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=m \\ x_3=-m \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_1=1 \\ y_2=-m^4+1 \\ y_3=-m^4+1 \end{array}\right.$

Giả sử $A(0;1)$, $B\left(m;-m^4+1\right)$,

$C\left(-m;-m^4+1\right)$ là 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số.

$\overrightarrow{AB}=\left(m;-m^4\right) \Rightarrow AB=\sqrt{m^2+m^8}$.

$\overrightarrow{AC}=\left(-m;-m^4\right) \Rightarrow AC=\sqrt{m^2+m^8}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} AB=AC \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m\in\mathbb{R} \\ -m^2+m^8=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow -m^2\left(1-m^6\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \ (l) \\ m=1 \ (n) \\ m=-1(n) \end{array}\right.$.

Vậy $m\in\{-1;1\}$.

+ Cách 2: (Áp dụng công thức tính nhanh cực trị hàm trùng phương)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} ab<0 \\ \dfrac{-8a}{b^3}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2m^2<0 \\ \dfrac{-8}{\left(-2m^2\right)^3}=1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m\neq 0 \\ m^6=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m=1 \ (n) \\ m=-1(n) \end{array}\right. \end{array}\right.$.

Vậy $m\in\{-1;1\}$.

Đáp án B

Câu 59. Ta có:

$y'=4x^3+2(m+1)x=2x\left(2x^2+m+1\right)$.

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2x^2=-m-1 \end{array}\right.$

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m+1<0 \Leftrightarrow m<-1$.

$A(0;-2m-1)$, $B\left(-\sqrt{\dfrac{-m-1}{2}};-\dfrac{(m+1)^2}{4}-2m-1\right)$,

$$C\left(\sqrt{\frac{-m-1}{2}};-\frac{(m+1)^2}{4}-2m-1\right),$$

là các điểm cực trị của đồ thị.

Ta thấy: $AB=AC=\sqrt{-\frac{m+1}{2}+\frac{(m+1)^4}{16}}$ nên tam giác ABC cân tại A.

Từ giả thiết suy ra $A=120°$.

Gọi H là trung điểm BC, ta có:

$$H\left(0;-\frac{(m+1)^2}{4}-2m-1\right)$$

$$BH=AH\tan 60°\Leftrightarrow\frac{(m+1)^2}{4}.\sqrt{3}=\sqrt{-\frac{m+1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{3(m+1)^4}{16}=-\frac{m+1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3(m+1)^3=-8$$

$$\Leftrightarrow m=-1-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$$

Đáp án A

Câu 60. Ta có: $y'=4x^3-4m^2x$.

Hàm số có cực đại cực tiểu $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\neq 0$.

Gọi $A\left(0;m^4+5\right)$, $B\left(m;5\right)$, $C\left(-m;5\right)$ lần lượt là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABOC$ khi đó ta có ba điểm A, I, O thẳng hàng.

Mặt khác do hai điểm B và C đối xứng nhau qua AO nên AO là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABOC\Rightarrow AB\perp OB$ $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OB}=0$.

Trong đó: $\overrightarrow{AB}=\left(m;-m^4\right)$, $\overrightarrow{OB}=\left(m;5\right)$. Ta có phương trình: $m^2-5m^4=0\Leftrightarrow m=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Đáp án C

Câu 61. Ta có $y'=4x\left(x^2-m\right)$

$$\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m\end{array}\right.;$$

Với điều kiện $m>0$ đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A\left(0;m^4-2m^2\right)$; $B\left(-\sqrt{m};m^4-3m^2\right)$; $C\left(\sqrt{m};m^4-3m^2\right)$. Để $ABDC$ là hình thoi điều kiện là $BC\perp AD$ và trung điểm I của BC trùng với trung điểm J của AD. Do tính đối xứng ta luôn có $BC\perp AD$ nên chỉ cần $I\equiv J$ với $I\left(0;m^4-3m^2\right)$, $J\left(0;\frac{m^4-2m^2-3}{2}\right)$.

ĐK: $m^4-2m^2-3=2m^4-6m^2$

$$\Leftrightarrow m^4-4m^2+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow m\in\left(\frac{1}{2};\frac{9}{5}\right)$$

Đáp án D

Câu 62. Cách 1:

Ta có $y'=-4x^3+4mx=-4x\left(x^2-m\right)$.

Để hàm số có ba cực trị thì phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4x\left(x^2-m\right)=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Rightarrow m>0$.

Gọi $A(0;2)$, $B\left(-\sqrt{m},m^2+2\right), C\left(\sqrt{m},m^2+2\right)$ là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Vì ΔABC cân tại A nên ΔABC chỉ có thể vuông tại $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}=0$.

Với $\overrightarrow{AB}=\left(-\sqrt{m};m^2\right)$, $\overrightarrow{AC}=\left(\sqrt{m};m^2\right)$

$\Rightarrow -m+m^4=0 \Leftrightarrow m\left(m^3-1\right)=0 \Rightarrow m=1$.

Cách 2: Áp dụng công thức tính nhanh: Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ tạo thành một tam giác vuông khi $8a+b^3=0 \Leftrightarrow 8m^3-8=0 \Leftrightarrow m=1$.

Đáp án D

Câu 63. Ta có: $y'=4x^3-4x=0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow A(0;4) \\ x=-1 \Rightarrow B(-1;3) \\ x=1 \Rightarrow C(1;3) \end{array}\right.$$

$\overrightarrow{AB}=(-1;-1) \Rightarrow AB=\sqrt{2}$;

$\overrightarrow{AC}=(1;-1) \Rightarrow AC=\sqrt{2}$;

$\overrightarrow{BC}=(2;0) \Rightarrow BC=2$.

Ta có ΔABC vuông cân tại A có:

$S=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2=1$, $p=\frac{AB+AC+BC}{2}=\sqrt{2}+1$.

Vậy $r=\frac{S}{p}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$.

Đáp án C

Câu 64. Ta có $y'=4x^3+4(m-4)x$;

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=4-m \end{array}\right.$$

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m<4$. Khi đó các điểm cực trị của (C_m) là

$A(0;m+5)$, $B\left(\sqrt{4-m};m+5-(m-4)^2\right)$,

$C\left(-\sqrt{4-m};m+5-(m-4)^2\right)$.

Do O là trọng tâm tam giác ABC nên

$$3(m+5)=2(m-4)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\frac{17}{2} \end{array}\right.$$

Do $m<4$ nên $m=1$.

Đáp án B

Câu 65. Hàm số $y=x^4-2mx^2$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=4x^3-4mx$;

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m \end{array}\right.$$

Để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị thì $m>0$. Khi đó ba điểm cực trị là $O(0;0)$, $B\left(-\sqrt{m};-m^2\right)$, $C\left(\sqrt{m};-m^2\right)$. Ta giác OBC cân tại O, với $I\left(0;-m^2\right)$ trung điểm của BC

Theo yêu cầu bài toán, ta có:

$S_{ABC}=\frac{1}{2}OI.BC=\frac{1}{2}\left|-m^2\right|.2\sqrt{m}<1 \Leftrightarrow 0<m<1$.

Đáp án B

Câu 66. Ta có: $y=x^4+2mx^2-1$

$\Rightarrow y'=4x^3+4mx$.

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=-m \end{array}\right. (1).$$

Để đồ thị hàm số $y=x^4+2mx^2-1$ có ba điểm cực trị thì $y'=0$ phải có ba nghiệm phân biệt tức là $m<0$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{-m}\end{array}\right.$ nên ta gọi $A(0;-1)$, $B\left(-\sqrt{-m};-m^2-1\right)$, $C\left(\sqrt{-m};-m^2-1\right)$

Tam giác ABC cân tại A nên $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AH.BC$ với H là trung điểm của BC nên $H\left(0;-m^2-1\right)$.

Nên: $\left\{\begin{array}{l}AH=\sqrt{\left(-m^2\right)^2}=m^2\\BC=\sqrt{\left(2\sqrt{-m}\right)^2}=2\sqrt{-m}\end{array}\right.$.

Ta có: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.m^2.2\sqrt{-m}$ theo giả thiết $S_{\Delta ABC}=4\sqrt{2}$ nên $m^2\sqrt{-m}=4\sqrt{2}\Leftrightarrow m=-2$.

Đáp án C

Câu 67. Cách 1: Điều kiện để đồ thị hàm trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ có ba điểm cực trị là $ab<0\Leftrightarrow m>-1\Rightarrow$ loại **B**

Khi đó ba điểm cực trị lập thành tam giác vuông cân khi $b^3+8a=0$

$\Leftrightarrow -8(m+1)^3+8=0\Leftrightarrow m=0$

Cách 2: Ta có $y'=4x\left(x^2-m-1\right)$

Xét $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m+1\end{array}\right.$. Để đồ thị số có ba điểm cực trị thì $m>-1$ $(*)$

Tọa độ ba điểm cực trị là $A\left(0;m^2\right)$,

$B\left(\sqrt{m+1};-2m-1\right)$, $C\left(-\sqrt{m+1};-2m-1\right)$

Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BC thì $H\left(0;-2m-1\right)$

Khi đó ba điểm cực trị lập thành tam giác vuông cân khi $AH=BH\Leftrightarrow\sqrt{(m+1)^4}=\sqrt{m+1}$

$\Leftrightarrow m=0$: Thỏa mãn $(*)$.

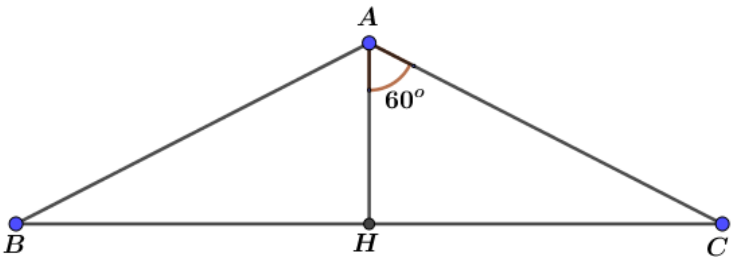
Đáp án A

Câu 68. $y'=4x^3+4mx=4x\left(x^2+m\right)$.

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m<0$.

Khi đó $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{-m}\end{array}\right.$.

Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(0;m^2+m\right)$, $B\left(\sqrt{-m};m\right)$, $C\left(-\sqrt{-m};m\right)$.



Do ΔABC cân tại A nên gọi $H\left(0;m\right)$ là trung điểm của BC thì ΔAHC vuông tại H.

ΔABC có một góc bằng $120°$ khi và chỉ khi $HAB=HAC=60°\Leftrightarrow HB=AH.\tan HAB$

$\Leftrightarrow\sqrt{-m}=m^2\sqrt{3}\Leftrightarrow m=-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Đáp án C

Câu 69. $y=x^4-2mx^2-m \Rightarrow y'=4x^3-4mx$.

Với $m>0$ ta có ba cực trị

$A(0;-m); B\left(-\sqrt{m};-m^2-m\right); C\left(\sqrt{m};-m^2-m\right)$

$S_{ABC}=\dfrac{abc}{4R} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}2\sqrt{m}\left|m^2\right|=2\dfrac{\sqrt{m}AB^2}{4}$

$\Leftrightarrow 2m^2=m^4+m \Leftrightarrow m^4-2m^2+m=0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0(l) \\ m=1(n) \\ m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}(n) \\ m=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}(l) \end{array}\right.$$

Đáp án B

Câu 70. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

$y'=\dfrac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}$, $y'=0 \Leftrightarrow 2x^2+2x-4=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1(\Rightarrow y=2) \\ x=-2(\Rightarrow y=-1) \end{array}\right.$$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $M(1;2)$ và $N(-2;-1)$.

Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị M,N của đồ thị hàm số đã cho là: $y=x+1$.

Đáp án B.

Cách khác:

Áp dụng tính chất: Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số hữu tỷ $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ thì giá trị cực trị tương ứng của hàm số là $y_0=\dfrac{u(x_0)}{v(x_0)}=\dfrac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$.

Suy ra với bài toán trên ta có phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=\dfrac{\left(x^2+2x+3\right)'}{(2x+1)'}=x+1$.

Câu 71. Điều kiện $x\neq 1$.

Ta có: $y=\dfrac{x^2-mx}{1-x} \Rightarrow y'=\dfrac{-x^2+2x-m}{(1-x)^2}$.

Hàm số $y=\dfrac{x^2-mx}{1-x}$ có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt và đổi dấu khi đi qua hai điểm đó $\Leftrightarrow -x^2+2x-m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ -1+2-m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m>0 \\ m\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m<1$.

Vậy $m<1$ thì hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu.

Đáp án A

Câu 72. $y'=\dfrac{x^2+2x-m}{(x+1)^2}, \forall x\neq -1$. Đặt

$f(x)=x^2+2x-m$, $h(x)=x^2+mx+2m$,

$g(x)=x+1$.

Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị A, B khi $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác -1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m+1>0 \\ f(-1)=-m-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m>-1\,(1)$.

Khi đó $\begin{cases} y(x_1)=\dfrac{h'(x_1)}{g'(x_1)}=2x_1+m \\ y(x_2)=\dfrac{h'(x_2)}{g'(x_2)}=2x_2+m \end{cases}$.

Suy ra: $A\left(x_1;2x_1+m\right)$, $B\left(x_2;2x_2+m\right)$.

Suy ra: $\overrightarrow{OA}=\left(x_1;2x_1+m\right)$, $\overrightarrow{OB}\left(x_2;2x_2+m\right)$.

ΔOAB vuông tại O khi

$\begin{cases} \overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}\ (2) \\ \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=x_1.x_2+\left(2x_1+m\right)\left(2x_2+m\right)=0\ (3) \end{cases}$.

$(3)\Leftrightarrow m^2+5x_1.x_2+2m\left(x_1+x_2\right)=0$. Kết hợp với định lí Vietè cho phương trình $f\left(x\right)=0$ ta được $m^2-5m-4m=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0\left(\text{không thỏa mãn}\left(2\right)\right) \\ m=9\left(\text{thỏa mãn }\left(1\right),\left(2\right)\right) \end{array}\right. \Rightarrow S=\{9\}$.

Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng 9.

Đáp án A

Câu 73. + Phương trình của đường thẳng AB là: $y=\dfrac{\left(x^2+2x+m\right)'}{\left(x-2\right)'}$

$\Leftrightarrow y=2x+2\Leftrightarrow 2x-y+2=0$.

+ Khoảng cách $d\left(O;AB\right)=\dfrac{\left|2.0-0+2\right|}{\sqrt{2^2+\left(-1\right)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Đáp án A

Câu 74. $y'=\dfrac{\left(2x+m\right)\left(x-1\right)-x^2-mx-m^2}{\left(x-1\right)^2}$

$=\dfrac{x^2-2x-\left(m+m^2\right)}{\left(x-1\right)^2}$

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A,B thì $y'=0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=1+m+m^2>0 \\ -1-m-m^2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m\in\mathbb{R}$.

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực đại, cực tiểu là $y_A=2x+m$.

Gọi x_A; x_B là hoành độ của A, B khi đó x_A; x_B là nghiệm của $x^2-2x-\left(m+m^2\right)$.

Theo định lí Vietè, ta có: $x_A+x_B=2$; $x_A.x_B=-m^2-m$.

$y_A=2x_A+m$; $y_B=2x_B+m$.

$AOB=90°\Rightarrow x_A.x_B+y_A.y_B=0$

$\Leftrightarrow x_Ax_B+4x_Ax_B+2m\left(x_A+x_B\right)+m^2=0$

$\Leftrightarrow 5\left(-m^2-m\right)+4m+m^2=0 \Leftrightarrow -4m^2-m=0$

$\Leftrightarrow m=0;m=-\dfrac{1}{4}$.

Tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng: $0^2+\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}$.

Đáp án A

Câu 75. Ta có: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Và có đạo hàm là $y'=\dfrac{x^2+2x-m}{\left(x+1\right)^2}$.

Để hàm số có hai điểm cực trị ta phải có:

$\begin{cases}1+m>0\\1-2-m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m>-1.$

Gọi hai hoành độ cực trị là x_1 và x_2 ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=-2\\x_1x_2=-m\end{cases}$.

Khi đó điểm $A\left(x_1,2x_1-m\right)$ và $B\left(x_2,2x_2-m\right)$.

$AB=\sqrt{4+4m}.\sqrt{5}=5\Leftrightarrow 4+4m=5\Leftrightarrow m=\frac{1}{4}$.

Đáp án B

Câu 76. Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{|m|\}$.

Ta có: $y=\frac{x^2-|m|x+4}{x-|m|}=x+\frac{4}{x-|m|}$.

$y'=1-\frac{4}{\left(x-|m|\right)^2}$, $\forall x\in D$, $y'=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2+|m|\\x=-2+|m|\end{array}\right.$.

Tọa độ hai điểm cực trị là $B\left(2+|m|;4+|m|\right)$, $A\left(-2+|m|;-4+|m|\right)$.

$\overrightarrow{AB}=(4;8)$, $\overrightarrow{AC}=\left(6-|m|;6-|m|\right)$.

Ba điểm A, B, $C(4;2)$ phân biệt và thẳng hàng $\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}\\6-|m|\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6-|m|=4k\\6-|m|=8k\\6-|m|\neq 0\end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy không có giá trị m nào thỏa mãn.

Đáp án A

Câu 77. $y'=1-\frac{1}{\left(x+m\right)^2};y''=\frac{2}{\left(x+m\right)^3}$.

Hàm số $y=\frac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại điểm $x_0=2$ khi $\begin{cases}y'(2)=0\\y''(2)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-\frac{1}{\left(2+m\right)^2}=0\\\frac{2}{\left(2+m\right)^3}<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow m=-3\text{. Thử lại thấy thỏa mãn.}\\m<-2\end{cases}$

Đáp án B

Câu 78. Điều kiện: $x\neq m$.

Đạo hàm: $y'=\frac{x^2-2mx+2m^2-m-2}{2\left(x-m\right)^2}$.

Để hàm số có cực đại và cực tiểu, thì $y'=0\Leftrightarrow x^2-2mx+2m^2-m-2=0$ có hai nghiệm phân biệt khác m.

Ta có: $\begin{cases}\Delta'=-m^2+m+2>0\\m^2-2m.m+2m^2-m-2\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-1<m<2\\m^2-m-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow -1<m<2$.

Đáp án B

Câu 79. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

$y'=\frac{x^2+2mx+m^2-1}{\left(x+m\right)^2},y''=\frac{2}{\left(x+m\right)^3}$

Hàm số đạt cực đại tại $x=2$ nên $\begin{cases}y'(2)=0\\y''(2)<0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m^2+4m+3}{(m+2)^2}=0 \\ \dfrac{2}{(m+2)^3}<0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-3 \text{ thuộc } (-4;-2).$$

Đáp án B

Câu 80. Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có: $y'=1-\dfrac{q}{(x+1)^2}$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$, suy ra:
$y'(-2)=0\Rightarrow 0=1-q\Leftrightarrow q=1$.

Lại có đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-2;-2)$ nên
$-2=-2+p-q\Leftrightarrow p-q=0$.

Do đó: $p=q=1$.

Thử lại: với $p=q=1$ ta được $y=x+1+\dfrac{1}{x+1}$.

Ta có: $y'=1-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}=0$

$$\Rightarrow x^2+2x=0\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \\ x=-2 \end{bmatrix}.$$

Từ đó có bảng biến thiên của hàm số:

x	-2	-1	0
y'	+ 0 -		- 0 +
y	-2 ; -∞ ; -∞		+∞ ; 2 ; +∞

Rõ ràng đồ thị hàm số đạt cực đại tại điểm $A(-2;-2)$. Vậy $p=q=1\Rightarrow pq=1$.

Đáp án D

Câu 81. Tập xác định của hàm số là:
$D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

$$y=\frac{x^2+mx+1}{x+m}\Rightarrow y'=\frac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}$$

$$y'=0\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -m \\ x^2+2mx+m^2-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -m \\ \left[\begin{array}{l} x=-m+1 \\ x=-m-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=-m+1 \\ x=-m-1 \end{bmatrix}$$

Bảng biến thiên

x	-∞	-m-1	-m	-m+1	+∞
y'		+ 0 −		− 0 +	
y	-∞	yCĐ	+∞ ; -∞	yCT	+∞

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=-m-1$.

Vậy $y(-m-1)=7\Leftrightarrow -m-2=7\Leftrightarrow m=-9$.

Đáp án C

Câu 82. $f'(x)=3mx^2+2(m+2)x-(1-m)$.

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị có hoành độ dương thì: $\begin{cases} \Delta'>0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases}$.

Khi đó, ta có thể suy ra:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)^2+3m(1-m)>0 \\ -\dfrac{2(m+2)}{3m}>0 \\ -\dfrac{1-m}{m}>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2}<m<4 \\ -2<m<0 \\ \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<m<0$$

Đáp án A

Câu 83. Ta có: $y'=\frac{9}{2}x^2-8mx+(m-1)^2$.

Hàm số y có hai điểm cực trị khi phương trình $y'=0$ có hai nhgiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta'=m(23m+18)>9.$$

Theo định lý Vietè, ta có: $x_1+x_2=\frac{16m}{9}$;

$x_1x_2=\frac{2(m-1)^2}{9}$, $x_1x_2>x_1+x_2$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{9}(m-1)^2>\frac{16}{9}m$$
$$\Leftrightarrow m^2-10m+1>0 \ .$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>5+2\sqrt{6} \\ m<5-2\sqrt{6} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow m\in[-10;0]\cup\{10\}$.

Vậy có 12 giá trị nguyên thỏa mãn.

Đáp án A

Câu 84. Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $\begin{cases} m\neq 1 \\ \Delta'=4m+5\geq 0 \end{cases} \Rightarrow m\geq -\frac{5}{4}, m\neq 1$.

Theo giả thuyết, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=3x_2 \\ x_1x_2=2{x_2}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=\dfrac{S}{3} \\ {x_2}^2=\dfrac{P}{2} \end{cases}$.

$$\Rightarrow \frac{S^2}{9}=\frac{P}{2}\Leftrightarrow \frac{(2m+4)^2}{9(m-1)^2}=\frac{m+1}{2(m-1)}.$$

$$\Leftrightarrow 2(2m+4)^2=9(m+1)(m-1)$$
$$\Leftrightarrow m^2-32m-41=0\Rightarrow m=16\pm 3\sqrt{33}$$

(thỏa mãn).

Vậy: $m=16\pm 3\sqrt{33}$ là các giá trị cần tìm.

Đáp án A

Câu 85. Áp dụng công thức giải nhanh:

$$R=\left|\frac{b^3-8a}{8ab}\right|.$$

Với: $a=m, b=-2$.

Hàm số có 3 cực trị là: $ab<0$, tức là phải có: $m.(-2)<0\Rightarrow m>0$.

$$R=\left|\frac{b^3-8a}{8ab}\right|\Leftrightarrow \left|\frac{(-2)^3-8m}{8m(-2)}\right|=1$$

$$\Leftrightarrow |1+m|=2|m|\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\dfrac{-1}{3}(l) \end{array}\right.$$

Vậy: $m=1$.

Đáp án D

Câu 86. Xét hàm số:

$y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(m+5)x^2+mx$, ta có:

$y'=x^2-(m+5)x+m, \forall x\in\mathbb{R}$.

Phương trình: $y'=x^2-(m+5)x+m=0$ $(*)$,

có: $\Delta=(m+5)^2-4m=m^2+6m+10$.

Để hàm số đã cho có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta = m^2+6m+10 = (m+3)^2+1, \forall m \in \mathbb{R}$.

Khi đó, gọi: x_{CD}, x_{CT} lần lượt là hoành độ điểm cực đại và cực tiểu của hàm số.

Theo Vietè, ta có: $\begin{cases} x_{CD}+x_{CT}=m+5 \\ x_{CD}.x_{CT}=m \end{cases}$.

Mặt khác: $|x_{CD}-x_{CT}|=5 \Leftrightarrow (x_{CD}-x_{CT})^2=25$.

$\Leftrightarrow (x_{CD}+x_{CT})^2-4x_{CD}.x_{CT}=25$

$\Rightarrow (m-5)^2-4m=25$

$\Leftrightarrow m^2+6m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-6 \end{array}\right.$

Vậy giá trị cần tìm của m là: $m=\{0;-6\}$.

Đáp án D

Câu 87. Hàm số $y=\left|x^3-(m-2)x^2-mx-m^2\right|$ có ba điểm cực tiểu khi và chỉ khi:

$y=x^3-(m-2)x^2-mx-m^2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành

$\Leftrightarrow x^3-(m-2)x^2-mx-m^2=0\ (1)$ có ba nghiệm phân biệt.

Ta có: $x^3-(m-2)x^2-mx-m^2=0$

$\Leftrightarrow (x-m)(x^2+2x-m)=0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x^2+2x-m=0\ (2) \end{array}\right.$.

Để (1) có ba nghiệm phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt khác m.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1>0 \\ m^2+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-1 \\ m\neq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow m\in(-1;0)\cup(0;+\infty)$.

Do m nguyên và $|m|<5$ nên suy ra $m\in\{1;2;3;4\}$.

Đáp án D

Câu 88. Ta có: $f'(x)=a(x+2)(x-1)$

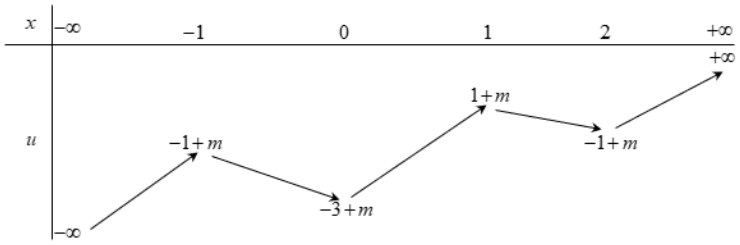
$\Rightarrow f(x)=a\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)+b$.

Đồ thị hàm số đi qua $A(-2;4)$, $B(1;-1)$ nên ta có: $\begin{cases} 4=\frac{10}{3}a+b \\ -1=-\frac{7}{6}a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{10}{9} \\ b=\frac{8}{27} \end{cases}$.

Hàm số ban đầu là: $f(x)=\frac{10}{9}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)+\frac{8}{27}$.

Đặt: $\begin{cases} u=x^3-3|x^2-1|+m \\ f(x)\to f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \end{array}\right. \end{cases}$.

Bảng biến thiên:



Yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi:

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2>-3+m \\ 1<-1+m \end{cases} \\ \begin{cases} -3+m<-2<-1+m \\ -1+m<1<1+m \end{cases} \\ \begin{cases} -2>-1+m \\ 1<1+m \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m<1 \\ m>2 \end{cases} \ (loai) \\ \begin{cases} -1<m<1 \\ 0<m<2 \end{cases} \\ \begin{cases} m<-1 \\ m>0 \end{cases} \ (loai) \end{array}\right.$.

Vậy $m\in(0;1) \Rightarrow$ không có giá trị nào của m thoả mãn.

Đáp án C

Câu 89. Xét $(C_1): y = x^4 - (m+1)x^2 + 2$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 2(m+1)x;$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = \dfrac{m+1}{2} \end{array}\right.\cdot$$

Đồ thị (C_1) có 3 điểm cực trị thì: $\dfrac{m+1}{2} > 0$

$\Leftrightarrow m > -1.$

Ba điểm cực trị của (C_1) là:

$$A(0;2), B\left(\sqrt{\frac{m+1}{2}}; -\frac{(m+1)^2}{4} + 2\right),$$

$$C\left(-\sqrt{\frac{m+1}{2}}; -\frac{(m+1)^2}{4} + 2\right)$$

.

Ta có: $\left\{\begin{array}{l} AB = AC = \sqrt{\dfrac{m+1}{2} + \dfrac{(m+1)^4}{16}} \\ BC = \sqrt{2(m+1)} \end{array}\right. \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A

Xét $(C_2): y = 2(x+1)^4 - 4x^2 - 8x + 3m.$

Ta có: $y' = 8(x+1)^3 - 8(x+1);$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1 = 0 \\ (x+1)^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow y = 4 + 3m \\ x = 0 \Rightarrow y = 2 + 3m \\ x = -2 \Rightarrow y = 2 + 3m \end{array}\right.$$

Ba điểm cực trị của (C_2) là:

$M(-1; 4+3m), N(0; 2+3m), P(-2; 2+3m).$

Ta có: $MN = \sqrt{5}, MP = \sqrt{5}, NP = 2 \Rightarrow \Delta MNP$ cân tại M.

$$\Delta ABC \sim \Delta MNP \Leftrightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{\dfrac{m+1}{2} + \dfrac{(m+1)^4}{16}}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2(m+1)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 + \frac{(m+1)^3}{8}} = \sqrt{5}$$

$\Leftrightarrow (m+1)^3 = 32 \Leftrightarrow m = 2\sqrt[3]{4} - 1$ và

$m = 2\sqrt[3]{4} - 1 \approx 2{,}17 \in (2;3).$

Đáp án C

Câu 90. Phương trình hoành độ giao điểm:

$x^3 + x^2 - 3x - 1 = (m-6)x - 4 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + (3-m)x + 3 = 0$

Gọi x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm phân biệt của phương trình này ta có $\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 3 - m \end{array}\right.$ và tung độ các giao điểm là:

$y_1 = (m-6)x_1 - 4;\ y_2 = (m-6)x_2 - 4;\ y_3 = (m-6)x_3 - 4$

Vậy điều kiện bài toán:

$$\frac{1}{y_1+4} + \frac{1}{y_2+4} + \frac{1}{y_3+4} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(m-6)x_1} + \frac{1}{(m-6)x_2} + \frac{1}{(m-6)x_3} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m-6}\left(\frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3}\right) = \frac{2}{3}$$

.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m-6}\left(\frac{3-m}{-3}\right) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow m = 9$$

Thử lại: $m = 9 \Rightarrow x^3 + x^2 - 6x + 3 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nên $m = 9$ thỏa mãn.

* **Note:** Phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thì $\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{array}\right.$

Đáp án D

Câu 91. Giả sử đường thẳng cần tìm có dạng $y = kx + m.$ Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - 2x^2 = kx + m \Leftrightarrow x^2 - 2x^2 - kx - m = 0.$

Theo giả thiết đường thẳng d có đúng ba điểm

chung với đồ thị (C) và các điểm chung có hoành độ x_1, x_2, x_3 nên:

$$x^4-2x^2-kx-m=(x-x_1)^2(x-x_2)(x-x_3).$$

Do đó d là tiếp tuyến của (C) có hoành độ

$$x=x_1 \Rightarrow d: y=\left(4x_1^3-4x_1\right)\left(x-x_1\right)+x_1^4-2x_1^2.$$

Phương trình hoành độ giao điểm lúc này là:

$$x^4-2x^2=\left(4x_1^3-4x_1\right)\left(x-x_1\right)+x_1^4-2x_1^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x-x_1\right)^2\left(x^2+2x_1x+3x_1^2-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x^2+2x_1x+3x_1^2-2=0\ (1) \end{array}\right.$$

Yêu cầu bài toán tương đương với (1) có hai nghiệm phân biệt $x_2, x_3 \neq x_1$ và $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-1$.

Vì vậy: $\left\{\begin{array}{c} \Delta'=x_1^2-\left(3x_1^2-2\right)>0 \\ x_1^2+2x_1^2+3x_1^2-2\neq 0 \\ x_1^3+\left(x_2+x_3\right)^3-3x_2x_3(x_2+x_3)=-1 \end{array}\right.$.

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -1<x_1<1 \\ x_1\neq \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ x_1^3-8x_1^3+6x_1\left(3x_1^2-2\right)=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x_1=\frac{-11+\sqrt{165}}{22}$$

Vì vậy có duy nhất một đường thẳng thoả mãn là tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=\dfrac{-11+\sqrt{65}}{22}$.

Đáp án B

Câu 92. Toạ độ ba điểm cực trị là nghiệm của hệ: $\left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{2}x^2-3x-\dfrac{1}{x} \\ y'=0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{2}x^2-3x-\dfrac{1}{x} \\ x-3+\dfrac{1}{x^2}=0\ (1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{2}x^2-3x-\dfrac{1}{x} \\ 0=x^2-3x+\dfrac{1}{x} \end{array}\right.$$

Cộng lại theo vế có:

$$y=\left(\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{1}{x}\right)+\left(x^2-3x+\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{2}x^2-6x.$$

Khi đó:

$$x^2+y^2=x^2+\left(\frac{3}{2}x^2-6x\right)^2=\frac{9}{4}x^4-18x^3+37x^2.$$

Mặt khác từ (1), có: $x^3-3x^2+1=0$, ta có:

$$x^2+y^2=\frac{9}{4}x^4-18x^3+37x^2$$

$$=\left(\frac{9}{4}x-\frac{45}{4}\right)\left(\underbrace{x^3-3x^2+1}_{0}\right)+\frac{1}{4}\left(13x^2-9x+45\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(13x^2-9x+45\right).$$

Biến đổi: $\dfrac{1}{4}\left(13x^2-9x+45\right)$ theo $y=\dfrac{3}{2}x^2-6x$.

Ta có: $\dfrac{1}{4}\left(13x^2-9x+45\right)$

$$=\frac{13}{6}\left(\underbrace{\frac{3}{2}x^2-6x}_{y}\right)+\frac{43}{4}x+\frac{45}{4}=\frac{13}{6}y+\frac{43}{4}x+\frac{45}{4}.$$

Vậy $x^2+y^2=\dfrac{13}{6}y+\dfrac{43}{4}x+\dfrac{45}{4}$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{43}{4}x-\frac{13}{6}y-\frac{45}{4}=0\ (*).$$

Vậy ba điểm cực trị cùng thuộc đường tròn có phương trình $(*)$ và bán kính của đường tròn này là $R=\sqrt{\left(\dfrac{43}{8}\right)^2+\left(\dfrac{13}{12}\right)^2+\dfrac{45}{4}}=\dfrac{\sqrt{23797}}{24}\approx 6,4$.

Note: Mẹo trắc nghiệm giải phương trình (1) sau khi quy đồng là phương trình bậc ba bấm máy phương trình bậc ba có ba nghiệm lẻ lưu vào các biến nhớ A – B – C.

Khi đó toạ độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là

$$M\left(A;\frac{1}{2}A^2-3A-\frac{1}{A}\right),\ N\left(B;\frac{1}{2}B^2-3B-\frac{1}{B}\right),$$

$P\left(C;\frac{1}{2}C^2-3C-\frac{1}{C}\right)$.

Sau đó tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác có toạ độ các đỉnh như trên.

Đáp án B

Câu 93. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=-3x^2+6(m-1)x+3(4m-9)$.

Hàm số đã cho đạt cực trị tại các điểm lớn hơn -1 khi và chỉ khi phương trình $-3x^2+6(m-1)x+3(4m-9)=0$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn -1

$\Leftrightarrow x^2-2(m-1)x-(4m-9)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 lớn hơn -1.

$$\begin{cases}\Delta'=(m-1)^2+4m-9>0\\ x_1+x_2+2=2m>0\\ (x_1+1)(x_2+1)=8-2m>0\end{cases}\Leftrightarrow \sqrt{10}-1<m<4.$$

Đáp án A

Câu 94. Đặt: $k=m^2-m$ thì:

$y'=6x^2-6(k+1)x+6k;y'=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=k$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi: $k\neq 1$.

Ta có: $A(1;3k-1);B\left(k;-k^3+3k^2\right)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

Hệ số góc của đường thẳng AB là: $-(k-1)^2$.

Đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng $y=x+2$ khi và chỉ khi $-(k-1)^2=-1\Leftrightarrow k=0$ hoặc $k=2$ (cả hai giá trị này đều thỏa mãn).

+) Với $k=0$ thì $m^2-m=0\Leftrightarrow m=0$ hoặc $m=1$;

+) Với $k=2$ thì $m^2-m=2\Leftrightarrow m=-1$ hoặc $m=2$.

Vậy $S=\{-1;0;1;2\}$.

Đáp án D

Câu 95. Đặt: $m=a^2-2a-3$.

Ta có: $y'=4x^3-4m^2x=4x\left(x^2-m^2\right)$.

$y'=0\Leftrightarrow x\left(x^2-m\right)=0\ (*)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=m^2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm|m|\end{array}\right.$.

Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $(*)$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\neq 0$.

Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$A(0;1),B\left(-|m|;1-m^4\right);C\left(|m|;1-m^4\right).$$

Chu vi tam giác ABC là:

$$AB+BC+CA=2|m|+2\sqrt{m^2+m^8}.$$

Theo giả thiết, ta có: $2|m|+2\sqrt{m^2+m^8}=2+2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |m|+\sqrt{m^2+m^8}=1+\sqrt{2}\Leftrightarrow |m|=1\Leftrightarrow m=\pm 1$.

- Với $m=1$, ta có:

$a^2-2a-3=1\Leftrightarrow a^2-2a-4=0\Leftrightarrow a=1\pm\sqrt{5}$.

- Với $m=-1$, ta có:

$a^2-2a-3=-1\Leftrightarrow a^2-2a-2=0\Leftrightarrow a=1\pm\sqrt{3}$.

Do đó, S có 4 phần tử. Vậy S có $2^4=16$ tập hợp con.

Đáp án C

Câu 96. $y'=4x^3-4mx, y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=m\end{array}\right.$

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi: $m>0$.

Gọi (x_o,y_o) là tọa độ điểm cực trị. Ta có: $y'(x_o)=0$

Ta lại có: $y=y'.\frac{x}{4}-mx^2+2$.

Vậy các điểm cực luôn nằm trên parabol có

phương trình $(P): y = -mx^2 + 2$.

$M \in (P) \Leftrightarrow -4 = -4m + 2 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$.

Đáp án B

Note: Phương pháp giải bài toán trên là cách làm gián tiếp, nó phù hợp cho nhiều bài toán mà việc tính toán phức tạp, thay vào đó ta sử dụng kết quả tổng quát dùng các giả thiết để biến đổi đi đến công thức hoặc phương trình mong muốn. Ta xét một số bài toán tương tự ở bên dưới.

Câu 97. Đáp án D

Câu 98. Đáp án A

Câu 99. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên: $d > 0$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$ nên: $a < 0$.

Vì $x_1 \in (-1;0); x_2 \in (1;2)$ nên $|x_2| > |x_1|$. Do đó, ta có: $x_1 x_2 < 0$.

Đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 x_2 < 0$ và

$x_1 + x_2 > 0$. Suy ra: $S = -\frac{2b}{3a} > 0$ và

$P = \frac{c}{3a} < 0$.

Do đó: $b > 0$ và $c > 0$ (do $a < 0$).

Vậy: $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

Đáp án A

Note: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị $x_1; x_2$.

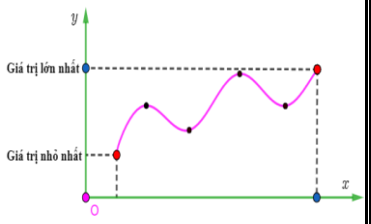
+ Nếu $a > 0$, đồ thị hàm số có dạng "dấu ngã", hàm số nghịch biến trên khoảng $(x_1; x_2)$;

+ Nếu $a < 0$, đồ thị hàm số có dạng "dấu đồng dạng", hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$.

I.II. Cực trị - Điểm cực trị - Giá trị lớn nhất – Giá trị nhỏ nhất của hàm số (Tiếp theo)

A. Lý thuyết cần nắm

1. Định nghĩa



Đồ thị I.II.1.1.

Minh họa giá trị lớn nhất & giá trị nhỏ nhất của hàm số

Giá trị M (Max) được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên K nếu $f\left(x\right)\le M,\forall x\in K$ và tồn tại một giá trị $x=x_0$ nào đó thuộc K thỏa mãn $f\left(x_0\right)=M$.

Kí hiệu: $M=\max\limits_{x\in K}f\left(x\right)$.

Giá trị m (min) được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên K nếu $f\left(x\right)\ge m,\forall x\in K$ và tồn tại một giá trị $x=x_0$ nào đó thuộc K thỏa mãn $f\left(x_0\right)=m$.

Kí hiệu: $m=\min\limits_{x\in K}f\left(x\right)$.

2. Định lý Weierstrass thứ nhất



Weierstrass

1815 –1897

Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì nó bị chặn trên đoạn đó.

Chứng minh

Giả sử hàm số không bị chặn trên đoạn $\left[a;b\right]$. Khi đó với mỗi số tự nhiên n luôn tồn tại $x_n\in\left[a;b\right]$ sao cho $f\left(x_n\right)\ge n$.

Cho n thay đổi ta được dãy $\left(x_n\right)$ bị chặn (do $x_n\in\left[a;b\right],\forall n\in\mathbb{N}$).

Theo bổ đề Bolzano – Weierstrass thì từ dãy $\left(x_n\right)$ bị chặn rút ra được một dãy con $\left(x_n\right)$ hội tụ. Giả sử $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0\in\left[a;b\right]$.

Do hàm $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$ và $x_0\in\left[a;b\right]$ nên $f\left(x\right)$ liên tục tại x_0. Suy ra: $\lim\limits_{k\to\infty}f\left(x_{n_k}\right)=f\left(x_0\right)$.

Điều này mâu thuẫn do $f\left(x_n\right)\ge n,\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow f\left(x_{n_k}\right)\ge n_k,\forall n\in\mathbb{N}^*$

$\Rightarrow\lim\limits_{k\to\infty}f\left(x_{n_k}\right)=\infty$.

Vậy hàm $y=f\left(x\right)$ "bị chặn trên" trên $\left[a;b\right]$.

Một cách tương tự, ta chứng minh được rằng hàm số $y=f\left(x\right)$ "bị chặn dưới" trên $\left[a;b\right]$.

Vậy hàm số $y=f\left(x\right)$ "bị chặn" trên $\left[a;b\right]$.

3. Định lý Weierstrass thứ 2

Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì nó đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

Tức là: $\begin{cases}\exists x_1\in\left[a;b\right]:f\left(x_1\right)=\sup\limits_{x\in\left[a;b\right]}f\left(x\right)\\\exists x_2\in\left[a;b\right]:f\left(x_2\right)=\inf\limits_{x\in\left[a;b\right]}f\left(x\right)\end{cases}$.

Chứng minh

Ta chứng minh hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $\left[a;b\right]$.

Do hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$ nên theo định lý Weierstrass thứ 1 thì hàm số bị chặn trên $\left[a;b\right]$.

Suy ra hàm số có cận trên đúng trên $\left[a;b\right]$.

Đặt $M=\sup\limits_{x\in\left[a;b\right]}f\left(x\right)$, khi đó: $f\left(x\right)\le M,\forall x\in\left[a;b\right]$.

Để chứng minh $f\left(x\right)$ đạt giá trị lớn nhất trên $\left[a;b\right]$ ta cần chứng minh tồn tại $x_1\in\left[a;b\right]$ sao cho $f\left(x_1\right)=M$.

Thật vậy! Bằng phản chứng ta giả sử $f\left(x\right)\le M,\forall x\in\left[a;b\right]$.

Khi đó, ta có:

$M - f(x) > 0, \forall x \in [a;b] \Rightarrow \dfrac{1}{M - f(x)} > 0, \forall x \in [a;b].$

Do hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ nên hàm số $\dfrac{1}{M - f(x)}$ cũng liên tục trên $[a;b]$. Theo định lý Weierstrass thứ 1 thì hàm số $\dfrac{1}{M - f(x)}$ bị chặn trên $[a;b]$, tức là tồn tại $c > 0$ sao cho

$$\frac{1}{M - f(x)} \le c \Rightarrow f(x) \le M - \frac{1}{c}, \forall x \in [a;b]$$

(Điều này mâu thuẫn với M là cận trên đúng).

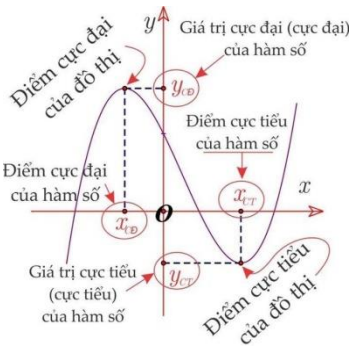
Vậy tồn tại $x_1 \in [a;b]$ sao cho $f(x_1) = M$ hay hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $[a;b]$.

Một cách tương tự, ta chứng minh hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên $[a;b]$.

Extra Techniques:

Tips:

Bên đây, chúng tôi nhắc lại cho bạn đọc những kiến thức liên quan đến cực trị để so sánh với một khái niệm mới – Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.



4. Cực trị và giá trị lớn nhất, nhỏ nhất liệu có giống?

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$, $(a;b)$ có thể là khoảng hữu hạn hoặc vô hạn (∞) và điểm $x_0 \in (a;b)$.

(i) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0), \forall x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \ne x_0$ thì ta nói hàm số $y = f(x)$ đạt **cực đại** tại điểm $x = x_0$.

(ii) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0), \forall x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \ne x_0$ thì ta nói hàm số $y = f(x)$ đạt **cực tiểu** tại điểm $x = x_0$.

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng K và đạt cực đại tại điểm $x = a \in K$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = b \in K$ thì ta gọi:

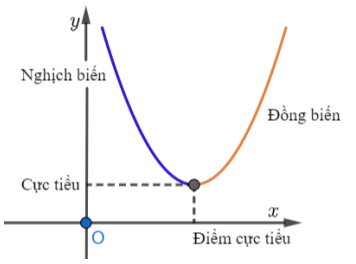
$x = a$ là điểm cực đại của **hàm số** $y = f(x)$.

$x = b$ là điểm cực tiểu của **hàm số** $y = f(x)$.

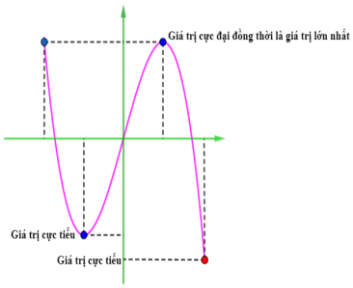
Extra Techniques:

Tips:

Giá trị cực trị hay cực trị chỉ đơn giản là giá trị tại điểm mà qua đó, đạo hàm đổi dấu hay hàm số đổi chiều biến thiên.



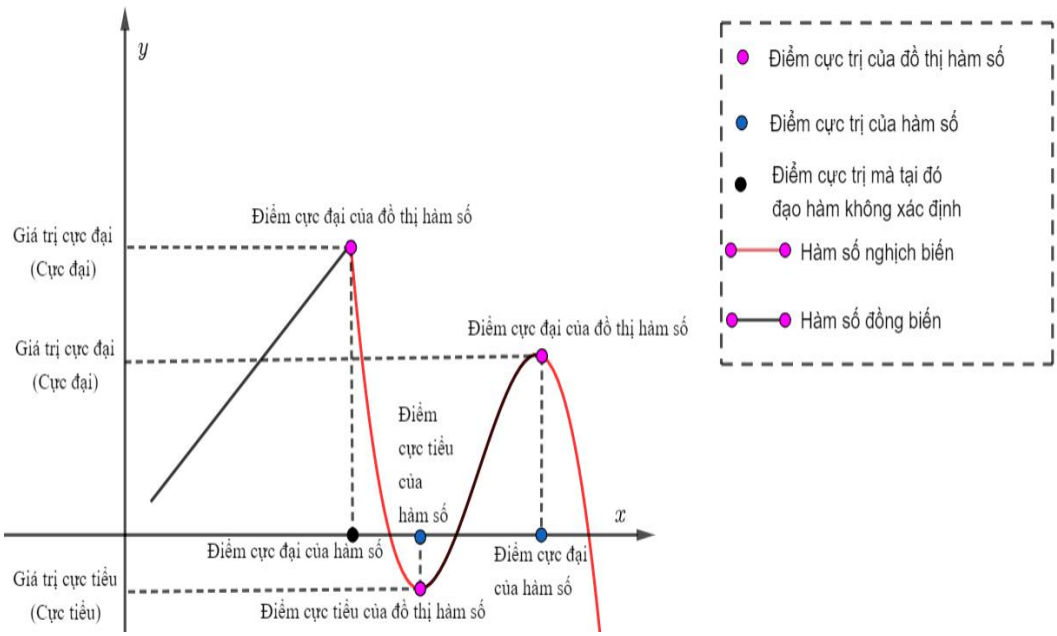
Trong trường hợp trên thì cực tiểu đồng thời là giá trị nhỏ nhất, tuy nhiên ví dụ dưới đây sẽ giúp chúng ta nhận ra rằng hai lý thuyết trên hoàn toàn khác nhau.



Hàm số không có cực trị vẫn có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên một đoạn liên tục nào đó.

$A\left(a;f\left(a\right)\right)$ là điểm cực đại của **đồ thị hàm số** $y=f\left(x\right)$.

$B\left(b;f\left(b\right)\right)$ là điểm cực tiểu của **đồ thị hàm số** $y=f\left(x\right)$.



Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên khoảng $\left(x_0-h;x_0+h\right),\left(h>0\right)$ và có đạo hàm trên $\left(x_0-h;x_0+h\right),\left(h>0\right)$ hoặc $\left(x_0-h;x_0+h\right)\setminus\left\{x_0\right\}$.

Nếu $\left\{f'\left(x\right)>0\middle|\forall x\in\left(x_0-h;x_0\right),f'\left(x\right)<0\middle|\forall x\in\left(x_0;x_0+h\right)\right\}$

thì ta nói hàm số đạt **cực đại** tại điểm $x=x_0$.

Nếu $\left\{f'\left(x\right)<0\middle|\forall x\in\left(x_0-h;x_0\right),f'\left(x\right)>0\middle|\forall x\in\left(x_0;x_0+h\right)\right\}$

thì ta nói hàm số đạt **cực tiểu** tại điểm $x=x_0$.

Như vậy, ta có thể khẳng định rằng: Cực trị (Giá trị cực trị) và giá trị lớn nhất, nhỏ nhất là những khái niệm hoàn toàn tách biệt, chỉ do sự nhầm lẫn trong cách hiểu hoặc trong những hình vẽ đặc biệt (hai khái niệm trên trùng nhau) mà ra. Các bạn đọc lưu ý, chúng ta nên tìm hiểu một cách tổng quát chứ không nên chỉ tham khảo một vài trường hợp có sẵn, để hiểu rõ về vấn đề này.

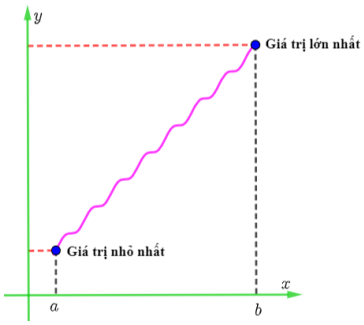
5. Quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số liên tục trên một đoạn

Một số quy tắc cũng như mẹo bên dưới đây có thể giúp đọc giả đốt cháy được một số giai đoạn trong việc thực hiện hàn lâm.

5.1. Nhận xét 3 trường hợp đặc biệt

Xét hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên $K=\left[a;b\right]$.

Trường hợp 1: Nếu $f'\left(x\right)>0,\forall x\in\left[a;b\right]$ thì hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=b$ và có giá trị là $f\left(b\right)$. Tương tự, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=a$ và có giá trị là $f\left(a\right)$

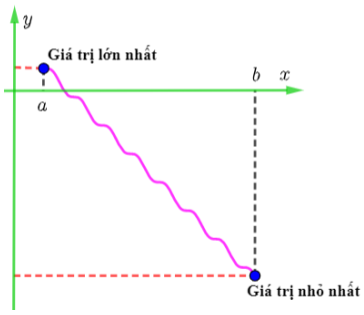


Đồ thị I.II.1.2.

Lưu ý: Nếu b là một đại lượng vô cùng $\left(+\infty\right)$ thì ta phải xét biểu thức $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)$, nhưng phần lớn đều không tồn tại giá trị lớn nhất ở phần này (mặc dù sau khi tính $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)$ cho ta một số hữu hạn nhưng nếu không tồn tại một giá trị $x=x_0$ nào đó thuộc K sao cho $f\left(x_0\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)$ thì vẫn vô nghĩa). Tương tự với a khi là một đại lượng âm vô cùng $\left(-\infty\right)$.

Xem thêm **Đồ thị I.II.1.2.**

Trường hợp 2: Nếu $f'\left(x\right)<0,\forall x\in\left[a;b\right]$ thì hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=b$ và có giá trị là $f\left(b\right)$. Tương tự, hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=a$ và có giá trị là $f\left(a\right)$



Đồ thị I.II.1.3.

Lưu ý: Nếu b là một đại lượng vô cùng $\left(+\infty\right)$ thì ta phải xét biểu thức $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)$, nhưng phần lớn đều không tồn tại giá trị lớn nhất ở phần này (mặc dù sau khi tính $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)$ cho ta một số hữu hạn nhưng nếu không tồn tại một giá trị $x=x_0$ nào đó thuộc K sao cho $f\left(x_0\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)$ thì vẫn vô nghĩa). Tương tự với a khi là một đại lượng âm vô cùng $\left(-\infty\right)$.

Xem thêm **Đồ thị I.II.1.3.**

Trường hợp 3: Nếu $f'\left(x\right)=0$ thì hàm số là một hàm hằng, không đổi, tuy nhiên ta vẫn có thể định nghĩa $\min\limits_{K}f\left(x\right)=\max\limits_{K}f\left(x\right)=const$ vì vẫn thỏa mãn định nghĩa của giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.



Đồ thị I.II.1.4.

Xem thêm **Đồ thị I.II.1.4.**

Extra Techniques:

Tips:

Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất không nhất thiết đạt tại các điểm cực trị, cũng không nhất thiết đạt tại hai biên của một đoạn liên tục, cũng không nhất thiết phải tồn tại (trường hợp có sự có mặt của các đại lượng vô cùng).

5.2. Quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Bước 1: Tìm tập tất cả các điểm $x_i, i=\overline{1,n}\left| x_i \in K=\left[a;b\right]\right.$ mà tại đó $f'\left(x\right)$ bị triệt tiêu (bằng 0) hoặc không xác định.

Bước 2: Tính các giá trị $\begin{cases} f\left(a\right) \\ f\left(x_1\right) \\ f\left(x_2\right) \\ ... \\ f\left(x_n\right) \\ f\left(b\right) \end{cases}$.

Bước 3: Tìm số lớn nhất M và nhỏ nhất m trong $n+2$ giá trị vừa tính được.

Bước 4: Kết luận: Vậy $M=\max\limits_{\left[a;b\right]} f\left(x\right), m=\min\limits_{\left[a;b\right]} f\left(x\right)$.

Extra Techniques:

Tips:

Điều kiện cần và đủ để tồn tại $M=\max\limits_{K}$ là:

$$\begin{cases} \forall x\in K, f\left(x\right)\le M \\ \exists x_0\in K, f\left(x_0\right)=M \end{cases}$$

Hoàn toàn tương tự:

Điều kiện cần và đủ để tồn tại $m=\min\limits_{K}$ là:

$$\begin{cases} \forall x\in K, f\left(x\right)\ge m \\ \exists x_0\in K, f\left(x_0\right)=m \end{cases}$$

B. Bài tập trong các đề thi thử

Dạng 1: Bài toán không chứa tham số

Câu 1. Cho hàm số $y=\dfrac{mx+n}{x^2+1}$. Giá trị của m, n sao cho giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ lần lượt là $4, -1$ là?

A. $\left(m;n\right)=\left(3;4\right)$. **B.** $\left(m;n\right)\in\left\{\left(-4;-3\right);\left(4;-3\right)\right\}$.

C. $\left(m;n\right)=\left(-3;-4\right)$. **D.** $\left(m;n\right)\in\left\{\left(4;3\right);\left(-4;3\right)\right\}$.

Đáp án: D

Lời giải

+) $\max\limits_{\mathbb{R}} y=4\Rightarrow\begin{cases} y\le 4, \forall x\in\mathbb{R} \\ \exists x_0\in\mathbb{R}, y\left(x_0\right)=4 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{mx+n}{x^2+1}\le 4, \forall x\in\mathbb{R} \\ \exists x_0\in\mathbb{R}, \dfrac{mx_0+n}{x_0^{\,2}+1}=4 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - mx + (4-n) \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ 4{x_0}^2 - mx_0 + (4-n) = 0\ (1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} \le 0 \\ \Delta_{(1)} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta_{(1)} = 0 \Leftrightarrow m^2 - 16(4-n) = 0\ (*)$$

Tương tự, ta có:

$$+)\ \min_{\mathbb{R}} y = -1 \Rightarrow \begin{cases} y \ge -1,\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ y(x_0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{mx+n}{x^2+1} \ge -1,\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \dfrac{mx_0+n}{{x_0}^2+1} = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx + (n+1) \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ {x_0}^2 + mx_0 + (n+1) = 0\ (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(2)} \le 0 \\ \Delta_{(2)} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta_{(2)} = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4(n+1) = 0\ (**).$$

$$\text{Từ } (1), (2) \Rightarrow \begin{cases} m^2 - 16(4-n) = 0 \\ m^2 - 4(n+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} m = 4 \\ n = 3 \end{cases} \right. \left. \begin{cases} m = -4 \\ m = 3 \end{cases} \right..$$

Câu 2. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $A = \dfrac{2x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1}$ trên tập xác định lần lượt là?

A. $\max A = \dfrac{5}{2}, \min A = \dfrac{2}{3}$. **B.** $\max A = 7, \min A = \dfrac{5}{2}$.

C. $\max A = 5, \min A = 1$. **D.** $\max A = \dfrac{1+3\sqrt{17}}{3}, \min A = \dfrac{1-3\sqrt{17}}{3}$.

Đáp án: D

Lời giải

Extra Techniques:

Tips:

Đối với dạng toán phương trình tổng quát

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$,

trong đó hệ số a_n có chứa tham số thì ta phải xét hai trường hợp như đã trình bày trong **Câu 2**

Để hàm số có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất thì A phải tồn tại, nhưng vì để A tồn tại thì phương trình bậc hai bên phải tồn tại nghiệm.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $A = \dfrac{2x^2+10x+3}{3x^2+2x+1} \Leftrightarrow (3A-2)x^2 + 2(A-5)x + A - 3 = 0\ (*)$.

Trường hợp 1: $3A-2=0 \Leftrightarrow A = \dfrac{2}{3} \Rightarrow x = -\dfrac{7}{26}$.

Trường hợp 2: $3A-2 \neq 0 \Leftrightarrow A \neq \dfrac{2}{3}$ thì ta xem $(*)$ như là một phương trình bậc hai theo x. Do đó, để phương trình $(*)$ có nghiệm thì: $\Delta'_{(*)} \geq 0 \Leftrightarrow (A-5)^2 - (3A-2)(A-3) \geq 0 \Leftrightarrow -2A^2 + A + 19 \geq 0$

Suy ra: $\dfrac{1-3\sqrt{17}}{4} \leq A \leq \dfrac{1+3\sqrt{17}}{4}$.

Do đó: $\max\limits_{\mathbb{R}} A = \dfrac{1+3\sqrt{17}}{4}$, $\min\limits_{\mathbb{R}} A = \dfrac{1-3\sqrt{17}}{4}$.

Câu 3. Hàm số $y = g(x) = \dfrac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất lần lượt là?

A. $\max\limits_{\mathbb{R}} g(x) = 1, \min\limits_{\mathbb{R}} g(x) = -2$. **B.** $\max\limits_{\mathbb{R}} g(x) = 0, \min\limits_{\mathbb{R}} g(x) = -1$.

C. $\max\limits_{\mathbb{R}} g(x) = 1, \min\limits_{\mathbb{R}} g(x) = 0$. **D.** $\max\limits_{\mathbb{R}} g(x) = 1, \min\limits_{\mathbb{R}} g(x) = -1$.

Đáp án: C

Lời giải

Ta có: $\sin^2 x + \sin x + 1 = \left(\sin x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt: $t = \sin x, t \in [-1;1]$. Lúc đó: $y = f(t) = \dfrac{t+1}{t^2+t+1}; t \in [-1;1]$.

$f'(t) = \dfrac{-t^2-2t}{(t^2+t+1)^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2 \notin [-1;1] \end{array}\right.$

Extra Techniques:

Remark:

Đối với dạng toán có hàm số quá phức tạp và không thấy miền cụ thể, ta có thể dựa vào TXĐ để tìm ra miền hay dùng phương pháp đổi biến số để đưa bài toán về dạng đã biết với cách thực hiện nhẹ nhàng hơn.

Lưu ý: Đổi biến – Tìm điều kiện miền theo biến mới

Tính toán tại một số điểm cần thiết: $\begin{cases} f\left(-1\right)=0 \\ f\left(0\right)=1 \\ f\left(1\right)=\dfrac{2}{3} \end{cases}$.

Khi đó, ta suy ra:

$$\begin{cases} \max\limits_{\mathbb{R}} g\left(x\right)=\max\limits_{\left[-1;1\right]} f\left(x\right)=1 \Leftrightarrow \sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ \min\limits_{\mathbb{R}} g\left(x\right)=\min\limits_{\left[-1;1\right]} f\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}.$$

Câu 4. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-4}}{5x}$ trên $\left[4;+\infty\right]$?

A. $\max\limits_{\left[4;+\infty\right]} y=\dfrac{1}{40}$.

B. $\max\limits_{\left[4;+\infty\right]} y=\dfrac{1}{30}$.

C. $\max\limits_{\left[4;+\infty\right]} y=\dfrac{1}{10}$.

D. $\max\limits_{\left[4;+\infty\right]} y=\dfrac{1}{20}$.

Đáp án: D

Lời giải

TXĐ: $D=\left[4;+\infty\right)$.

Ta có: $y=\dfrac{\sqrt{x-4}}{5x}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{x-4}{2}.2}}{5x}\le\dfrac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-4}{2}+2\right)}{5x}=\dfrac{\dfrac{x-4+4}{2}}{10x}=\dfrac{1}{20}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\dfrac{x-4}{2}=2\Rightarrow x=8$.

Vậy: $\max\limits_{\left[4;+\infty\right]} y=\dfrac{1}{20}$ khi $x=8$.

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{x^5+x^3+1}$ trên đoạn $\left[1;3\right]$?

A. $\max\limits_{\mathbb{R}} g(x)=\sqrt{271}, \min\limits_{\mathbb{R}} g(x)=\sqrt{3}$.

B. $\max\limits_{\mathbb{R}} g(x)=1, \min\limits_{\mathbb{R}} g(x)=-1$.

C. $\max\limits_{\mathbb{R}} g(x)=\sqrt{271}, \min\limits_{\mathbb{R}} g(x)=-\sqrt{3}$.

D. $\max\limits_{\mathbb{R}} g(x)=\sqrt{273}, \min\limits_{\mathbb{R}} g(x)=-\sqrt{3}$.

Đáp án: A

Lời giải

ĐKXĐ: $D=\left\{x\in\mathbb{R}\middle| x^5+x^3+1\ge 0\right\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{5x^4+3x^2}{2\sqrt{x^5+x^3+1}}\ge 0,\ \forall x\in D$.

Vậy hàm số đã cho luôn đồng biến trên đoạn $[1;3]$, từ đây suy ra:

$$\begin{cases}\min\limits_{[1;3]} f(x)=f(1)=\sqrt{3}\\ \max\limits_{[1;3]} f(x)=f(3)=\sqrt{271}\end{cases}$$

Extra Techniques:

Remark:

Thông thường, những hàm số là dãy tổng của những hàm cùng tính đơn điệu thì min và max đạt tại các đầu mút.

Thật vậy! Tổng những hàm đồng biến sẽ là một hàm đồng biến và tổng của những hàm nghịch biến sẽ là một hàm nghịch biến.

Câu 6. Cho hàm số $y=\dfrac{k\sin x+1}{\cos x+2}$. Điều kiện của k để $\min y<-1$ là?

A. $\left[\begin{array}{l}k<-1\\ k>1\end{array}\right.$.

B. $k\in\left\{-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right\}$.

C. $k\in\left\{-2\sqrt{2};-1;1;2\sqrt{2}\right\}$.

D. $\left[\begin{array}{l}k<-2\sqrt{2}\\ k>2\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Đáp án: D

Lời giải

Xét phương trình $y=\dfrac{k\sin x+1}{\cos x+2}\ (*)$

$(*)\Leftrightarrow k\sin x-y\cos x=2y-1$.

Phương trình $(*)$ có nghiệm khi và chỉ khi:

$$k^2+y^2\ge(2y-1)^2\Leftrightarrow 3y^2-4y+1-k^2\le 0.$$

Extra Techniques:

Tips:

Xét phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$ có dạng:

$$a\sin x+b\cos x=c\ (*)$$

Phương trình $(*)$ có nghiệm khi và chỉ khi:

$$a^2+b^2\ge c^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{3k^2+1}}{3} \le y \le \frac{2+\sqrt{3k^2+1}}{3}$$

Vậy: $\min y = \frac{2-\sqrt{3k^2+1}}{3}$.

Theo đề bài ta có: $\frac{2-\sqrt{3k^2+1}}{3} < -1 \Leftrightarrow \sqrt{3k^2+1} > 5 \Leftrightarrow 3k^2+1 > 25$

$\Leftrightarrow k^2 > 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k < -2\sqrt{2} \\ k > 2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Câu 7. Cho hàm số $y = \sin^4 x + \cos^4 x + m\sin x\cos x$. Điều kiện của m để $\min\limits_{\mathbb{R}} y = 1$ là?

A. $m \in \{-1;1\}$. **B.** $m < 1$.

C. $m \ge 1$. **D.** Không tồn tại.

Đáp án: D

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có:

$$y = \left(\sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x\right) - \frac{1}{2}\left(2\sin x\cos x\right)^2 + \frac{m}{2}\left(2\sin x\cos x\right).$$

$$\Leftrightarrow y = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{m}{2}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow y = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{m}{2}\sin 2x$$

Đặt $t = \sin 2x,\ t \in [-1;1]$.

Ta có: $y = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{m}{2}t + 1 \Rightarrow y' = -t + \frac{m}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{m}{2}$.

Trường hợp 1: $\frac{m}{2} \le -1 \Leftrightarrow m \le -2$.

Khi đó: $\left\{\begin{array}{l} f(-1) = \frac{-m+1}{2} = \max f(x) \\ f(1) = \frac{m+1}{2} = \min f(x) \end{array}\right.$

Trường hợp 2: $-1 < \frac{m}{2} < 1 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Extra Techniques:

Tips:

$\sin^4 x + \cos^4 x = \ldots$

$\ldots = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$2\sin x\cos x = \sin 2x$

Bảng biến thiên:

t	-1		$\frac{m}{2}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\frac{-m+1}{2}$	↗	$\frac{m^2+8}{8}$	↘	$\frac{m+1}{2}$

Dễ thấy, $\begin{cases} \min\limits_{[-1;1]} f(x) = \dfrac{-m+1}{2},\ \forall x \in [0;2) \\ \min\limits_{[-1;1]} f(x) = \dfrac{m+1}{2},\ \forall x \in (-2;0) \end{cases}$.

Trường hợp 3: $\frac{m}{2} \geq 1 \Rightarrow m \geq 2$.

Khi đó: $\begin{cases} f(-1) = \dfrac{-m+1}{2} = \min f(x) \\ f(1) = \dfrac{m+1}{2} = \max f(x) \end{cases}$.

Kết hợp cả ba trường hợp, ta có: $\begin{cases} \min f(x) = \dfrac{-m+1}{2},\ x \in [0;+\infty) \\ \max f(x) = \dfrac{m+1}{2},\ x \in (-\infty;0) \end{cases}$.

Khi đó việc tìm m thỏa mãn được chuyển sang việc giải hai phương trình: $\left[\begin{array}{l} \dfrac{-m+1}{2} = 1,\ m \geq 0 \\ \dfrac{m+1}{2} = 1,\ m < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1,\ m \geq 0 \\ m = 1,\ m < 0 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình vô nghiệm hay không tại giá trị thực của m nào để $\min\limits_{\mathbb{R}} y = 1$.

Extra Techniques:

Remark:

Đối với những bài toán ta không tổng quát được hoặc với từng khoảng, từng miền thì bài toán sẽ nhận những giá trị khác nhau thì ta phải chia nhỏ các trường hợp có thể một cách khoa học nhất.

Câu 8. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = f(x) = \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+15-8\sqrt{x-1}}$$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Đáp án: B

Lời giải

Ta có: $f\left(x\right)=\sqrt{x-1-4\sqrt{x-1}+4}+\sqrt{x-1-8\sqrt{x-1}+16}$.

$\Leftrightarrow f\left(x\right)=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-4\right)^2}=\left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-4\right|$.

$\Leftrightarrow f\left(x\right)=\left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|4-\sqrt{x-1}\right|\ge\left|\sqrt{x-1}-2+4-\sqrt{x-1}\right|=2$.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(4-\sqrt{x-1}\right)\ge 0\\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\le\sqrt{x-1}\le 4\\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow 5\le x\le 17.$$

Vậy $\min\limits_{[1;+\infty)}f\left(x\right)=2$.

Câu 9. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y=f\left(x\right)=\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x+2}$$

A. 0. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 4.

Đáp án: C

Lời giải

Ta có: $\begin{cases}x^2+2x+2=\left(x^2+2x+1\right)+1=\left(x+1\right)^2+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\\ x^2-2x+2=\left(x^2-2x+1\right)+1=\left(x-1\right)^2+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$.

Như vậy: $y=f\left(x\right)=\sqrt{\left(x+1\right)^2+1}+\sqrt{\left(x-1\right)^2+1}$.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét hai vector

$\vec{u}=\left(x+1;1\right),\ \vec{v}=\left(1-x;1\right)$.

Khi đó: $\begin{cases}\vec{u}+\vec{v}=\left(x+1;1\right)+\left(1-x;1\right)=\left(2;2\right)\\ \left|\vec{u}\right|=\sqrt{\left(x+1\right)^2+1}\\ \left|\vec{v}\right|=\sqrt{\left(x-1\right)^2+1}\\ \left|\vec{u}+\vec{v}\right|=2\sqrt{2}\end{cases}$.

Áp dụng bất đẳng thức $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|\le\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|$, ta có:

$y=f\left(x\right)=\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x+2}\ge 2\sqrt{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hai vector $\vec{u},\ \vec{v}$ cùng hướng.

Extra Techniques:

Remark:

Đối với những bài toán có chứa căn thức lồng căn thức, thì việc phá căn bằng lũy thừa là một điều tất yếu và thường thấy nhất.

Lưu ý: Đối với các căn bậc chẵn, ta phải lưu ý dấu của biểu thức sau khi phá trị tuyệt đối.

Extra Techniques:

Tips:

Bất đẳng thức vector:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|\quad(1)$$

Dấu " = " xảy ra khi $\vec{a},\ \vec{b}$ cùng hướng.

$$\left|\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|\right|\le\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\quad(2)$$

Dấu " = " xảy ra khi $\vec{a},\ \vec{b}$ cùng hướng.

$$\left|\vec{a}.\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\quad(3)$$

Dấu " = " xảy ra khi $\vec{a},\ \vec{b}$ cùng phương.

Vì hai vector $\vec{u}, \vec{v}$ có tung độ bằng nhau nên hoành độ cũng phải bằng nhau. Như vậy, ta có: $x+1=1-x \Leftrightarrow x=0$.

Vậy: $\min f(x)=2\sqrt{2}$ đạt tại $x=0$.

Câu 10. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y=f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -2.

Đáp án: A

Lời giải

Cách 1: Dùng hằng đẳng thức.

Ta có: $y=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=\left[(x+1)(x+4)\right]\left[(x+2)(x+3)\right]$.

$\Leftrightarrow y=\left(x^2+5x+4\right)\left(x^2+5x+6\right)$

$\Leftrightarrow y=\left[\left(x^2+5x+5\right)-1\right]\left[\left(x^2+5x+5\right)+1\right]$

$\Leftrightarrow y=\left(x^2+5x+5\right)^2-1=\left[\left(x^2+5x+\frac{25}{4}\right)-\frac{5}{4}\right]^2-1$

$\Leftrightarrow y=\left[\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right]^2-1\geq -1$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{4}\Leftrightarrow x=-\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ là -1.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x=-\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$.

Cách 2: Khảo sát hàm số.

Ta có: $y=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=\left(x^2+5x+5\right)^2-1$

(Do **Cách 1**).

Suy ra: $y'=2\left(x^2+5x+5\right).(2x+5)=0$.

Extra Techniques:

Remark:

Đối với những hàm số có dạng:

$y=(x+a)(x+b)...$
$...(x+c)(c+d)$

Với $a+d=b+c$, thì ta biến đổi phương trình về dạng:

$y=\left[(x+a)(x+d)\right]...$
$...\left[(x+b)(x+c)\right]$
$\Leftrightarrow y=\left(x^2+kx+ad\right)...$
$...\left(x^2+kx+bc\right)$

Với $k=a+d=b+c$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-5-\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{-5+\sqrt{5}}{2} \\ x=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$$

Tính toán tại một số điểm đặc biệt: $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty \\ y\left(\dfrac{-5-\sqrt{5}}{2}\right)=-1=\min\limits_{\mathbb{R}} y \\ y\left(-\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{9}{16} \\ y\left(\dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}\right)=-1=\min\limits_{\mathbb{R}} y \\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty \end{array}\right.$.

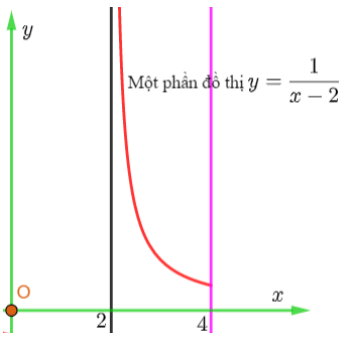
Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ là -1.

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi: $x=-\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$.

Extra Techniques:

Remark:

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{x-2}$ không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên khoảng $(2;4)$, mặc dù, đồ thị hàm số trên vẫn liên tục.



Đồ thị I.II.1.5.

Một số Tips để làm tốt các bài toán Min – Max

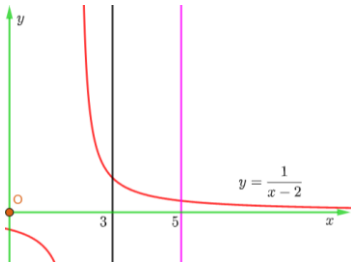
(1) Hàm số liên tục trên một khoảng chưa chắc đã có giá trị lớn nhất, nhỏ nhất tuy nhiên vẫn có trường hợp có cả giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Xem thêm **Đồ thị I.II.1.5.**

(2) Các hàm đa thức chỉ bao gồm các hạng tử có bậc lẻ và hệ số tự do có hệ số là các số cùng tính âm, dương thì luôn đơn điệu trên tập xác định nên sẽ đạt Min – Max tại những đầu mút.

Xem thêm **Câu 5.**

(3) Các hàm có dạng $\sqrt[n]{ax+b}$, $n\in\mathbb{N}$ thì thường đồng biến trên TXĐ



Đồ thị I.II.1.6.

Extra Techniques:

Ví dụ I.II.1.1.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $y=x+\frac{1}{x}$ trên đoạn $\left[2;3\right]$. Nếu ta dùng Cauchy cho hai số dương $x,\frac{1}{x}$ thì ta được:

$$y \overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{x.\frac{1}{x}}=2$$

Dấu "=" xảy ra khi: $x=1\notin\left[2;3\right]$.

Như vậy, bài toán không được chấp nhận.

Giá trị nhỏ nhất phải là: $m=\frac{5}{2}$, tại $x=2$.

khi $a>0$ và nghịch biến trên TXĐ khi $a<0$. Việc tìm Min – Max ta có thể lưu ý nhanh các giá trị tại đầu mút.

(4) Hàm số nhất biến $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên một đoạn liên tục nào đó (đoạn không chứa $-\frac{d}{c}$). Vì thế việc tìm Min – Max ta thường chỉ tính toán các giá trị ở đầu mút.

Xem thêm **Đồ thị I.II.1.6.**

(5) Các bài toán cho ta trước giá trị Min – Max cụ thể và yêu cầu ta định giá trị các tham số để $\min=a,\max=b$ thì ta nên dùng định nghĩa để giải quyết bài toán.

Giả sử f là một hàm xác định trên $K\left(K\subseteq\mathbb{R}\right)$.

$$M=\max_K f\left(x\right)\Leftrightarrow\begin{cases}f\left(x\right)\leq M,\forall x\in K\\\exists x_0\in K:f\left(x_0\right)=M\end{cases}$$

$$m=\min_K f\left(x\right)\Leftrightarrow\begin{cases}f\left(x\right)\geq m,\forall x\in K\\\exists x_0\in K:f\left(x_0\right)=m\end{cases}$$

(6) Với các bài toán có liên quan đến đánh giá hoặc dùng bất đẳng thức thì điều kiện đủ để kết luận bài toán đúng hay chưa là việc xem xét dấu đẳng thức có xảy ra hay không.

Xem thêm **Ví dụ I.II.1.1.**

(7) Một số phương pháp để giải quyết bài toán tìm Max – Min.

(*i*) Phương pháp miền giá trị:

Đối với hàm $y=f\left(x\right)$ một biến, xác định trên K:

$y_o\in f\left(K\right)\Leftrightarrow$ phương trình $y_0=f\left(x\right)$ có nghiệm $\left(*\right)$.

Giải phương trình $\left(*\right)$, suy ra: $\min_K f\left(x\right)\leq y_0\leq\max_K f\left(x\right)$.

Extra Techniques:

Tips:

Trong trường hợp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[a;b]$, ta có thể trình bày đơn giản như sau:

Bước 1: Tìm $f'(x)$ và tìm các điểm tới hạn $x_1,x_2,...,x_n$ của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$;

Bước 2: Tính $n+2$ giá trị: $f(x_1),f(x_2),f(x_3),$ $...,f(x_n),\ f(a),\ f(b)$.

Bước 3: Tìm số lớn nhất $M=\max f(x)$ trong $n+2$ số đó, và số nhỏ nhất $m=\min f(x)$ trong $n+2$ số đó.

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, thì giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất luôn tồn tại.

Đối với hàm số $y=f(x,y)$ hai biến, xác định trên K.

Xem $y=f(x,y)$ là phương trình đối với ẩn x và y là tham số.

Tìm điều kiện của y để phương trình $y=f(x)$ có nghiệm.

Từ điều kiện trêm, biến đổi đưa đến dạng $m\le y\le M$. Xét dấu "=" xảy ra và kết luận $\max\limits_K f(x)=M,\ \min\limits_K f(x)=m$.

Tổng quát lên bài toán như sau:

Cho các số thực $x,\ y$ thỏa mãn điều kiện $F(x,y)=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P=G(x,y)$.

Bước 1: Gọi T là tập giá trị của P. Khi đó $m\in T$ khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases}F(x;y)=0\\G(x,y)=m\end{cases}(1)$ có nghiệm.

Bước 2: Tìm các giá trị m để hệ (1) có nghiệm (thường đưa về điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai), rồi suy ra tập giá trị T của P. Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P=G(x;y)$.

(ii) Phương pháp đạo hàm

Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y=f(x)$;

Dựa vào bảng biến thiên để kết luận $\max f(x),\ \min f(x)$.

Dựa vào bảng biến thiên để kết luận min, max.

(iii) Phương pháp dùng bất đẳng thức

Dùng các bất đẳng thức quen thuộc để chứng minh $\left[\begin{array}{l}f(x)\le M\\f(x)\ge m\\m\le f(x)\le M\end{array}\right.$

Phải chỉ ra sự tồn tại của $x_0, x_1 \in K$ sao cho $f\left(x_0\right)=M, f\left(x_1\right)=m$.

Khi đó: $\max\limits_K f\left(x\right)=M, \min\limits_K f\left(x\right)=m$.

Các bất đẳng thức quen thuộc phải kể đến như:

Bất đẳng thức Cauchy:

Cho n số thực $a_1, a_2,...,a_n$ không âm. Thế thì:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \overset{Cauchy}{\geq} \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $a_1=a_2=...=a_n$.



Augustin Louis Cauchy

1789 – 1857

Bất đẳng thức Bunyakovsky

Cho n cặp số thực $\left(a_i,b_i\right), i=\overline{1,...,n}$.

Thế thì: $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2 \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\right).\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2\right)$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $k\in\mathbb{R}$ sao cho $b_i=k.a_i, i=\overline{1,...,n}$.

Hệ quả: $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)\geq 4abcd$.



Victor Yakovlevich Bunyakovsky

1804 - 1889

Bất đẳng thức về dấu giá trị tuyệt đối

$\left|a_1+a_2\right|\leq\left|a_1\right|+\left|a_2\right| \quad (1)$

$\left|\left|a_1\right|-\left|a_2\right|\right|\leq\left|a_1-a_2\right| \quad (2)$

$\left|a_1+a_2+...+a_n\right|\leq\left|a_1\right|+\left|a_2\right|+...+\left|a_n\right| \quad (3)$

Dấu "=" trong $(1), (2)$ xảy ra khi và chỉ khi $a_1.a_2\geq 0$.

Dấu "=" trong (3) xảy ra khi và chỉ khi $a_i\geq 0, i=\overline{1,n}$ hoặc $a_i\leq 0, i=\overline{1,n}$.

(iv) Phương pháp tọa độ vector

Bất đẳng thức vector:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right| \quad (1)$$

Dấu "=" xảy ra khi $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

$$\left|\left|\vec{a}\right| - \left|\vec{b}\right|\right| \le \left|\vec{a}-\vec{b}\right| \quad (2)$$

Dấu "=" xảy ra khi $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

$$\left|\vec{a}.\vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right| \quad (3)$$

Dấu "=" xảy ra khi $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương.

(v) Phương pháp đổi biến (đặt ẩn phụ) để tìm Min – Max.

+) Nếu đặt $t = x^2$ thì $t \ge 0$ và giả sử $x \in \left[-a;a\right] \Rightarrow t \in \left[0;a^2\right]$.

+) Nếu đặt $t = x^2$ thì $t \ge 0$ và giả sử $x \in \left[a;b\right] \Rightarrow t \in \left[a^2;b^2\right], a,b \ge 0$.

+) Nếu đặt $t = x^2$ thì $t \ge 0$ và giả sử $x \in \left[a;b\right] \Rightarrow t \in \left[0;a^2\right]$,

$ab < 0, \left|b\right| \le \left|a\right|$.

+) Nếu đặt $t = x^2$ thì $t \ge 0$ và giả sử $x \in \left[a;b\right] \Rightarrow t \in \left[0;b^2\right]$,

$ab < 0, \left|a\right| \le \left|b\right|$.

+) Nếu đặt $t = \sin x$ hoặc $t = \cos x$ thì ta suy ra $t \in \left[-1;1\right]$.

+) Nếu đặt $t = \sin^2 x, t = \cos^2 x$ thì suy ra $t \in \left[0;1\right]$.

+) Nếu đặt $t = \sin x \pm \cos x \Rightarrow t \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

+) Nếu đặt $t = x + \dfrac{1}{x}, x \ne 0 \Rightarrow \left|t\right| \ge 2$.

(vi) Phương pháp dùng CASIO.

Cách 1: Sử dụng **Table**.

Sử dụng **Table** xét hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b] \to \begin{cases} \min\limits_{x\in[a;b]} f(x) \\ \max\limits_{x\in[a;b]} f(x) \end{cases}$.

Chọn các giá trị nhập vào: **Start**, **End**, **Step**.

Start? Nhập giá trị a.

End? Nhập giá trị b.

Step? Nhập bước nhảy phù hợp với từng bài.

Dựa vào **Table** ta sẽ hình dung được hình dáng tổng quát của đồ thị hàm số trên đoạn $[a;b]$ để đưa ra những kết luận phù hợp.

Cách 2: Chức năng **Solve**, **Calc**.

Giải phương trình $f'(x)=0$ bằng cách sử dụng chức năng **Solve**, lưu ý ta chỉ lấy những giá trị trong đoạn $[a;b]$ để dò nghiệm, ta sẽ thu được tập các nghiệm của phương trình $f'(x)=0$.

Dùng **Calc** để tìm các giá trị của $f(x)$ tại $n+2$ điểm (2 điểm đầu mút và n nghiệm của phương trình đạo hàm) rồi so sánh, đưa ra kết luận về Max – Min.

(vii) Một số lưu ý khi giải các bài toán Max – Min.

Bước 1: Tính đạo hàm $f'(x)$.

Bước 2: Tìm tất cả các nghiệm $x_i \in (a;b)$ của phương trình $f'(x)=0$ và tất cả các điểm $\alpha_i \in (a;b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 3. Tính $A=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $B=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$, $f(x_i)$, $f(\alpha_i)$.

Bước 4. So sánh các giá trị tính được và kết luận Max – Min.

Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì ta kết luận không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).

$(viii)$ Định m để Max – Min của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối thỏa mãn điều kiện cho trước

Dạng 1: Tìm m để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y=\left|f\left(x\right)+m\right|=a\ \ (a>0)$.

Phương pháp:

Cách 1: Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f\left(x\right)=K;\qquad \min\limits_{[\alpha;\beta]} f\left(x\right)=k\ (K>k)$.

Kiểm tra:

$$\max\left\{\left|m+K\right|,\left|m+k\right|\right\}\ge\frac{\left|m+K\right|+\left|m+k\right|}{2}\ge\frac{\left|m+K-m-k\right|}{2}=\frac{\left|K-k\right|}{2}.$$

TH1: $\dfrac{\left|K-k\right|}{2}\le a$.

Để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y=a\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m+k=-a\\m+K=a\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-a-k\\m=a-K\end{array}\right.\Rightarrow m\in\left\{-a-k;a-K\right\}$.

TH2: $\dfrac{\left|K-k\right|}{2}>a\ \Rightarrow m\in\varnothing$.

Cách 2: Xét trường hợp

TH1: $Max=\left|m+K\right|\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left|m+K\right|=a\\\left|m+K\right|\ge\left|m+k\right|\end{array}\right.$

TH2: $Max=\left|m+k\right|\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left|m+k\right|=a\\\left|m+k\right|\ge\left|m+K\right|\end{array}\right.$

Dạng 2: Tìm m để $\min\limits_{[\alpha;\beta]} y=\left|f\left(x\right)+m\right|=a\ \ (a>0)$.

Phương pháp:

Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f\left(x\right)=K;\qquad \min\limits_{[\alpha;\beta]} f\left(x\right)=k\ (K>k)$.

Extra Techniques:

Remark:

Các dạng về trị tuyệt đối thường rất đa dạng, chúng ta nên tìm cho mình một số phương pháp phù hợp để có thể học tốt dạng này. Ở đây, chúng tôi trình bày cho bạn các dạng thường thấy và các công thức giúp các bạn có thể làm bài nhanh hơn, ở phần bày tập, chúng tôi sẽ đi theo hướng tự luận để khai thác nhiều khía cạnh hơn của dạng toán này.

NHÓM TOÁN ANH DÚI

$\min\limits_{[\alpha;\beta]} y = a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k=a \\ m+k>0 \end{cases} \vee \begin{cases} m+K=-a \\ m+K<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=a-k \\ m>-k \end{cases} \vee \begin{cases} m=-a-K \\ m<-K \end{cases}$.

Vậy $m \in S_1 \cup S_2$.

Dạng 3: Tìm m để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y = \left| f(x)+m \right|$ không vượt quá giá trị M cho trước.

Phương pháp: Trước tiên tìm:

$$\max_{[\alpha;\beta]} f(x) = K; \qquad \min_{[\alpha;\beta]} f(x) = k \ (K>k).$$

Để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y \le M \Rightarrow \begin{cases} m+k \ge -M \\ m+K \le M \end{cases} \Leftrightarrow -M-k \le m \le M-K.$

Dạng 4: Tìm m để $\min\limits_{[\alpha;\beta]} y = \left| f(x)+m \right|$ không vượt quá giá trị a cho trước.

Phương pháp: Trước tiên tìm:

$$\max_{[\alpha;\beta]} f(x) = K; \qquad \min_{[\alpha;\beta]} f(x) = k \ (K>k).$$

$\min\limits_{[\alpha;\beta]} y \le a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k \le a \\ m+k \ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m+K \ge -a \\ m+K \le 0 \end{cases} \vee (m+K)(m+k) < 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \le a-k \\ m \ge -k \end{cases} \vee \begin{cases} m \ge -a-K \\ m \le -K \end{cases} \vee -K < m < -k.$

Dang 5: Tìm m để $\max\limits_{[a;b]} y = \left| f(x)+m \right|$ đạt min.

Phương pháp:

Trước tiên tìm $\max\limits_{[a;b]} f(x) = K; \qquad \min\limits_{[a;b]} f(x) = k \ (K>k).$

Đề hỏi tìm $m \Rightarrow m = -\dfrac{K+k}{2}$. Đề hỏi tìm min của $\max\limits_{[a;b]} y \Rightarrow$ giá trị này là $\dfrac{K-k}{2}$.

Dạng 6: Tìm m để $\min\limits_{[a;b]} y = \left| f(x)+m \right|$ đạt min.

Phương pháp: Trước tiên tìm:

$$\max_{[a;b]} f(x)=K; \qquad \min_{[a;b]} f(x)=k\ (K>k).$$

Đề hỏi tìm $m \Rightarrow (m+K)(m+k)\le 0 \Leftrightarrow -K\le m\le -k$. Đề hỏi tìm min của $\min_{[a;b]} y \Rightarrow$ giá trị này là 0.

Dạng 7: Cho hàm số $y=|f(x)+m|$.

Tìm m để $\max_{[a;b]} y \le h.\min_{[a;b]} y\,(h>0)$ hoặc $\min+\max=....$

Phương pháp: Trước tiên tìm:

$$\max_{[a;b]} f(x)=K; \qquad \min_{[a;b]} f(x)=k\ (K>k).$$

TH1: $|K+m|\le h|k+m| \xrightarrow[K+m \text{ cùng dấu } k+m]{|K+m|\ge|k+m|} m\in S_1.$

TH2: $|k+m|\le h|K+m| \xrightarrow[K+m \text{ cùng dấu } k+m]{|k+m|\ge|K+m|} m\in S_2.$

Vậy $m\in S_1\cup S_2$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Dạng 8: Cho hàm số $y=|f(x)+m|$.

Phương pháp: Trước tiên tìm:

$$\max_{[a;b]} f(x)=K; \qquad \min_{[a;b]} f(x)=k\ (K>k).$$

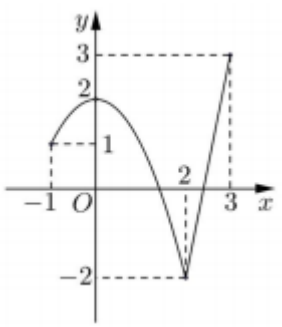
TH1: Tìm m để $\min_{[a;b]} y+\max_{[a;b]} y=\alpha \Leftrightarrow |m+K|+|m+k|=\alpha$.

TH2: Tìm m để $\min_{[a;b]} y.\max_{[a;b]} y=\beta \Leftrightarrow |m+K|.|m+k|=\beta$.

"Trên đây là một số Tips chúng tôi cảm thấy rất hữu dụng trong các bài toán hiện hành. Do mục đích phục vụ cho phần đông các bạn học sinh nên phần trình bày khá chi tiết và khá dài. Nhưng nếu bạn đọc hiểu bản chất vấn đề, thao tác sẽ ngắn gọn hơn, chuẩn xác hơn và quan trọng nhất vẫn là lợi thế về thời gian nếu biết các Tips này.

TỰ LUYỆN 4 MỨC ĐỘ

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M-m$ bằng?



A. 1. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 0.

Câu 2. (Đề Minh Họa 2017) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$		
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

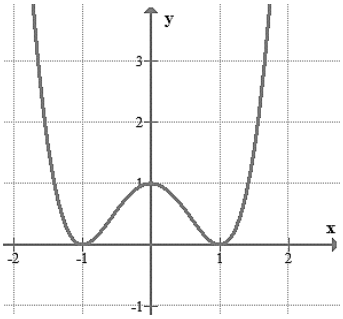
A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

D. Hàm số có đúng một cực trị.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;1]$. Giá trị của $M-m$ bằng?

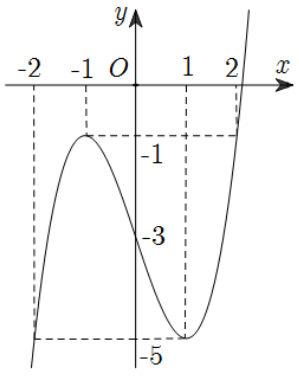
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như sau. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$. Tính $M+m$.

x	-3		-1		0		1		2
$f(x)$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$.



NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never yet anywhere unless you try

A. $m=-5;M=-1$. **B.** $m=-2;M=2$.

C. $m=-1;M=0$. **D.** $m=-5;M=0$.

Câu 6. Xét hàm số $y=f(x)$ với $x\in[-1;5]$ có bảng biến thiên như sau:

x	-1		0		2		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho không tồn tại GTLN trên đoạn $[-1;5]$.

B. Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x=-1$ và $x=2$ trên đoạn $[-1;5]$.

C. Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x=-1$ và đạt GTLN tại $x=5$ trên đoạn $[-1;5]$.

D. Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x=0$ trên đoạn $[-1;5]$.

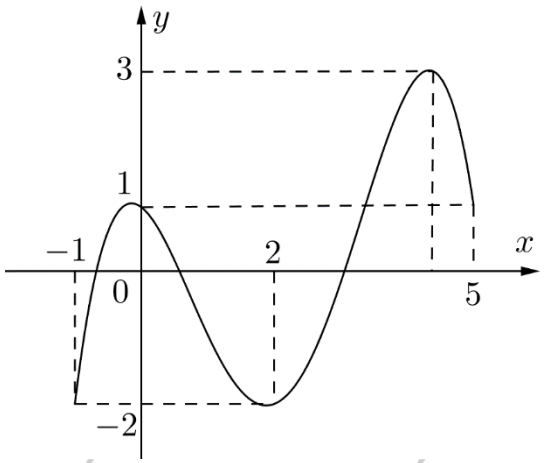
Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1;3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

x	-1		0		2		3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	↗	5	↘	1	↗	4

A. $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(0)$. **B.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(3)$.

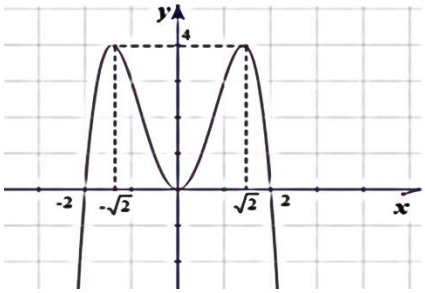
C. $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(2)$. **D.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(-1)$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;5]$ và có đồ thị trên đoạn $[-1;5]$ như hình vẽ bên dưới. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;5]$ bằng?



A. -1. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;2]$ là:

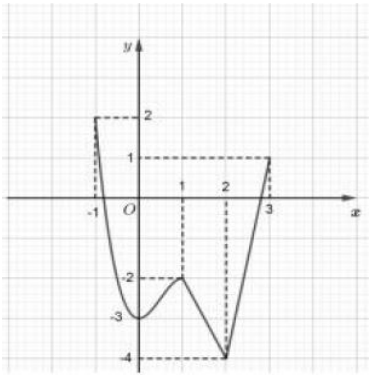


A. $\underset{[0;2]}{Max}\, f(x)=2$. **B.** $\underset{[0;2]}{Max}\, f(x)=\sqrt{2}$.

C. $\underset{[0;2]}{Max}\, f(x)=4$. **D.** $\underset{[0;2]}{Max}\, f(x)=0$.

Câu 10. (Sở Bắc Giang 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn

nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M+m$ là?



A. 2. **B.** -6. **C.** -5. **D.** -2.

Câu 11. (Sở Hà Nội 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên trên $[-5;7)$ như sau

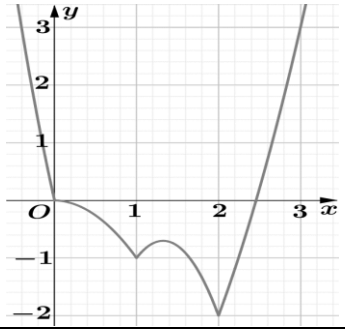
x	-5		1		7
y'		$-$	0	$+$	
y	6	↘	2	↗	9

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\underset{[-5;7)}{\text{Min}}\, f(x)=6$. **B.** $\underset{[-5;7)}{\text{Min}}\, f(x)=2$.

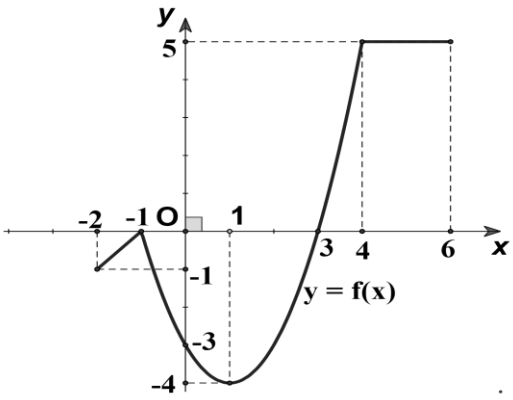
C. $\underset{[-5;7)}{\text{Max}}\, f(x)=9$. **D.** $\underset{[-5;7)}{\text{Max}}\, f(x)=6$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;3]$. Giá trị của $M+m$ bằng?



A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

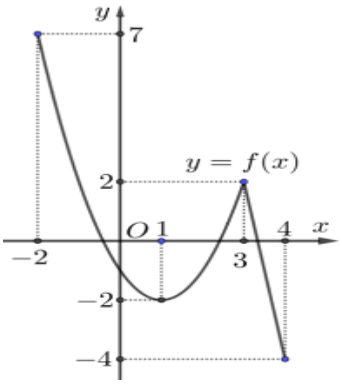
Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;6]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;6]$. Giá trị của $M-m$ bằng?

A. 9. **B.** -8. **C.** -9. **D.** 8.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đồ thị trên đoạn $[-2;4]$ như hình vẽ bên. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;4]$ bằng?



A. 5. **B.** 3. **C.** 0. **D.** -2.

Câu 15. Giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x)=-x^4+12x^2+1$$

trên đoạn $[-1;2]$ bằng?

A. 1. **B.** 37. **C.** 33. **D.** 12.

Câu 16. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-10x^2+2$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng?

A. 2. **B.** –23. **C.** –22. **D.** –7.

Câu 17. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-24x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng?

A. $32\sqrt{2}$. **B.** –40.

C. $-32\sqrt{2}$. **D.** –45.

Câu 18. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-12x^2-4$ trên đoạn $[0;9]$ bằng?

A. –39. **B.** –40. **C.** –36. **D.** –4.

Câu 19. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-12x^2-1$ trên đoạn $[0;9]$ bằng?

A. –28. **B.** –1. **C.** –36. **D.** –37.

Câu 20. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.

A. $\min\limits_{[2;4]} y=-3$. **B.** $\min\limits_{[2;4]} y=\dfrac{19}{3}$.

C. $\min\limits_{[2;4]} y=6$. **D.** $\min\limits_{[2;4]} y=-2$.

Câu 21. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^2+\dfrac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

A. $m=5$. **B.** $m=3$.

C. $m=\dfrac{17}{4}$. **D.** $m=10$.

Câu 22. (Chuyên Bắc Ninh 2018) Tìm tập giá trị của hàm số $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{9-x}$

A. $T=[1;\ 9]$. **B.** $T=\left[2\sqrt{2};\ 4\right]$.

C. $T=(1;\ 9)$. **D.** $T=\left[0;\ 2\sqrt{2}\right]$.

Câu 23. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^3-7x^2+11x-2$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $m=3$. **B.** $m=0$.

C. $m=-2$. **D.** $m=11$.

Câu 24. (Sở Quảng Trị 2019) Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $M=\dfrac{1}{3}$. **B.** $M=-\dfrac{1}{3}$.

C. $M=5$. **D.** $M=-5$.

Câu 25. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{4-x^2}$ là?

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 26. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^2 x-4\sin x-5$.

A. –20. **B.** –8. **C.** –9. **D.** 0.

Câu 27. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2}x-\sqrt{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$. Tính tổng $S=2m+3M$.

A. $S=-\dfrac{7}{2}$. **B.** $S=-\dfrac{3}{2}$.

C. –3. **D.** $S=4$.

Câu 28. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\sin x+\cos 2x$ trên $[0;\pi]$.

A. $\dfrac{9}{8}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 29. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=2\cos x-\dfrac{4}{3}\cos^3 x$ trên $[0;\pi]$.

A. $\max\limits_{[0;\pi]} y=\dfrac{2}{3}$. **B.** $\max\limits_{[0;\pi]} y=\dfrac{10}{3}$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never give anyone unless you try

C. $\max\limits_{[0;\pi]} y=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\max\limits_{[0;\pi]} y=0$.

Câu 30. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{3\sin x+2}{\sin x+1}$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Khi đó giá trị của M^2+m^2 là?

A. $\dfrac{31}{2}$. **B.** $\dfrac{11}{2}$. **C.** $\dfrac{41}{4}$. **D.** $\dfrac{61}{4}$.

Câu 31. Cho hàm số $y=\dfrac{\sin x+1}{\sin^2 x+\sin x+1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Chọn mệnh đề đúng.

A. $M=m+\dfrac{3}{2}$. **B.** $M=\dfrac{3}{2}m$.

C. $M=m+1$. **D.** $M=m+\dfrac{2}{3}$.

Câu 32. Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3x+\dfrac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $\min\limits_{(0;+\infty)} y=\dfrac{33}{5}$. **B.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=2\sqrt[3]{9}$.

C. $\min\limits_{(0;+\infty)} y=3\sqrt[3]{9}$. **D.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=7$.

Câu 33. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x-1+\dfrac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$. Tìm m?

A. $m=5$. **B.** $m=4$.

C. $m=2$. **D.** $m=3$.

Câu 34. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x-5+\dfrac{1}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ bằng bao nhiêu?

A. 0. **B.** -1. **C.** -3. **D.** -2.

Câu 35. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{4-x}+\sqrt{3}$ trên tập xác định của nó là

A. $2+\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 0. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 36. Với giá trị nào của x thì hàm số $y=x^2+\dfrac{1}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Câu 37. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\dfrac{2}{x}-\left(1+\sqrt{2}\right)^2$ trên khoảng $(0;+\infty)$

A. Không tồn tại. **B.** -3.

C. $-1+\sqrt{2}$. **D.** 0.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ với x thuộc $D=(-\infty;-1]\cup\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\max\limits_D f(x)=0;\min\limits_D f(x)=-\sqrt{5}$.

B. $\max\limits_D f(x)=0$; không tồn tại $\min\limits_D f(x)$.

C. $\max\limits_D f(x)=0;\min\limits_D f(x)=-1$.

D. $\min\limits_D f(x)=0$; không tồn tại $\max\limits_D f(x)$.

Câu 39. Mệnh đề nào sau đây là đúng về hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+5}}$ trên tập xác định của nó.

A. Hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

B. Hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

D. Hàm số có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 40. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m>4$. **B.** $3<m\le 4$.

C. $m<-1$. **D.** $1\le m<3$.

Câu 41. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-m^2}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[-3;-2]} y=\dfrac{1}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $3<m\le 4$. **B.** $-2<m\le 3$.

C. $m>4$. **D.** $m\le -2$.

Câu 42. Tìm giá trị dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{m^2x-1}{x+2}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 1.

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=\sqrt{3}$.

C. $m=4$. **D.** $m=2$.

Câu 43. Cho hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x+8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng -3. Giá trị m_0 thuộc khoảng nào trong các khoảng cho dưới đây?

A. $(2;5)$. **B.** $(1;4)$.

C. $(6;9)$. **D.** $(20;25)$.

Câu 44. Tìm giá trị của tham số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2x+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;4]$ bằng 3.

A. $m=3$. **B.** $m=1$.

C. $m=7$. **D.** $m=5$.

Câu 45. Tìm các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -2.

A. $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-2 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0.

A. $m=2$. **B.** $m=6$.

C. $m=0$. **D.** $m=4$.

Câu 47. Có một giá trị m_0 của tham số m để hàm số $y=x^3+\left(m^2+1\right)x+m+1$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[0;1]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $2018m_0-m_0^2\ge 0$. **B.** $2m_0-1<0$.

C. $6m_0-m_0^2<0$. **D.** $2m_0+1<0$.

Câu 48. Nếu hàm số $y=x+m+\sqrt{1-x^2}$ có giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{2}$ thì giá trị của m là.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $-\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 49. Biết S là tập giá trị của m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^4-m^2x^3-2x^2-m$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -16. Tính tích các phần tử của S.

A. 2. **B.** -2. **C.** -15. **D.** -17.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Câu 50. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ tại một điểm $x_0\in(0;2)$.

A. $0<m<1$. **B.** $m>1$.

C. $m>2$. **D.** $-1<m<1$.

Câu 51. Cho hàm số $y=\dfrac{1-m\sin x}{\cos x+2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;10]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số nhỏ hơn -2?

A. 1. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 52. Cho hàm số $y=ax^3+cx+d$, $a\neq 0$ có $\min\limits_{x\in(-\infty;0)} f(x)=f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;3]$bằng?

A. $d-11a$. **B.** $d-16a$.

C. $d+2a$. **D.** $d+8a$.

Câu 53. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+m}{x^2+x+1}$ có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$ nhỏ hơn hoặc bằng 1.

A. $m\le 1$. **B.** $m\ge 1$.

C. $m\ge -1$. **D.** $m\le -1$.

Câu 54. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x^3+x^2-m}{x+1}$ trên $[0;2]$ bằng 5. Tham số m nhận giá trị là?

A. -5. **B.** 1. **C.** -3. **D.** -8.

Câu 55. Cho hàm số $y=\left(x^3-3x+m\right)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1 là?

A. 1. **B.** -4. **C.** 0. **D.** 4.

Câu 56. Tìm tất cả các giá trị của $m>0$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x+1$ trên đoạn $[m+1;m+2]$ luôn bé hơn 3.

A. $m\in(0;2)$. **B.** $m\in(0;1)$.

C. $m\in(1;+\infty)$. **D.** $m\in(0;+\infty)$.

Câu 57. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=mx+\dfrac{36}{x+1}$ trên $[0;3]$ bằng 20. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0<m\le 2$. **B.** $4<m\le 8$.

C. $2<m\le 4$. **D.** $m>8$.

Câu 58. Cho hàm số bậc ba có phương trình $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x+2020$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 3.

Câu 59. Cho hàm số $f(x)=m\sqrt{x-1}$ (m là tham số thực khác 0). Gọi m_1,m_2 là hai giá trị của m thoả mãn:

$$\min_{[2;5]} f(x)+\max_{[2;5]} f(x)=m^2-10.$$

Giá trị của m_1+m_2 bằng?

A. 3. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 2.

Câu 60. Cho hàm số $y=\dfrac{m\sin x+1}{\cos x+2}$ có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5;5]$ để giá trị nhỏ nhất của y nhỏ hơn -1.

A. 4. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 61. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{34}{\sqrt{\left(x^3-3x+2m\right)^2+1}}$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng?

A. 8. **B.** −8. **C.** −6. **D.** 1.

Câu 62. Cho hàm số $y=\left(x^3-3x+m+1\right)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1 là?

A. −2. **B.** 4. **C.** −4. **D.** 0.

Câu 63. Cho hàm số

$y=f(x)=m^2\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)+4\sqrt{4-x^2}+m+1$

Tính tổng tất cả các giá trị của m để hàm số $y=f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng 4.

A. $-\dfrac{7}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 64. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x-m}{x+1}$ với $m\neq -2$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $\max\limits_{[1;3]} f(x)=\max\left\{\dfrac{2-m}{2};\dfrac{6-m}{4}\right\}$.

B. $\max\limits_{[1;3]} f(x)=\dfrac{6-m}{4}$ khi $m<-2$.

C. $\min\limits_{[1;3]} f(x)=\min\left\{\dfrac{2-m}{2};\dfrac{6-m}{4}\right\}$.

D. $\min\limits_{[1;3]} f(x)=\dfrac{2-m}{2}$ khi $m>-2$.

Câu 65. (Chuyên Sư Phạm Hà Nội - 2020) Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-20;20]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x+m+6}{x-m}$ trên đoạn $[1;3]$ là số dương?

A. 9. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 10.

Câu 66. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số phần tử của S là?

A. 0. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 67. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[0;1]}\left|f(x)\right|+\min\limits_{[0;1]}\left|f(x)\right|=2$. Số phần tử của S là?

A. 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 68. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x+2m-1\right|$ trên đoạn $[0;2]$ là nhỏ nhất. Giá trị của m thuộc khoảng nào?

A. $\left(-\dfrac{3}{2};-1\right)$. **B.** $\left(\dfrac{2}{3};2\right)$.

C. $[-1;0]$. **D.** $(0;1)$.

Câu 69. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 5.

A. −1. **B.** 2. **C.** −2. **D.** 1.

Câu 70. Cho hàm số $y=\left|x^2+2x+a-4\right|$ (a là tham số). Tìm a để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;1]$ đạt giá trị nhỏ nhất

A. $a=1$. **B.** $a=3$.
C. $a=2$. **D.** $a=5$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI

Câu 71. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{x^2+mx+m}{x+1}\right|$ trên $[1;2]$ bằng 2. Số phần tử của tập S?

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 72. Xét hàm số $f(x)=\left|x^2+ax+b\right|$, với a b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a+2b$.

A. 2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 3.

Câu 73. Cho hàm số

$$y=\left|x^3+x^2+\left(m^2+1\right)x+27\right|.$$

Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3;-1]$ có giá trị nhỏ nhất bằng?

A. 26. **B.** 18. **C.** 28. **D.** 16.

Câu 74. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2+2x+m-4\right|$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng 4?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 75. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x^2-9x+m\right|$ trên đoạn $[-2;4]$ bằng 16. Số phần tử của S là?

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 76. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{19}{2}x^2+30x+m-20\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng?

A. 210. **B.** -195. **C.** 105. **D.** 300.

Câu 77. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\sin^2 x-2\sin x+m\right|$ bằng 1. Số phần tử của S là?

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 78. Cho hàm số $y=\left|\dfrac{x^4+ax+a}{x+1}\right|$, với a là tham số thực. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[1;2]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để $M\geq 2m$?

A. 10. **B.** 14. **C.** 5. **D.** 20.

Câu 79. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 30. Tổng giá trị các phần tử của tập hợp S bằng bao nhiêu?

A. 120. **B.** 210. **C.** 108. **D.** 136.

Câu 80. Cho hàm số $f(x)=\left|3e^{4x}-4e^{3x}-24e^{2x}+48e^{x}+m\right|$. Gọi A, B lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;\ln 2]$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-23;10)$ thỏa mãn $A\leq 3B$. Tổng các phần tử của tập S bằng?

A. -33. **B.** 0. **C.** -111. **D.** -74.

Câu 81. Cho hàm số $y=\left|x^4-2x^3+x^2+a\right|$. Có bao nhiêu số thực a để $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=10$?

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 82. Cho hàm số $f(x)=\left|x^3-3x^2+m\right|$. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ không lớn hơn 2020?

A. 4045. **B.** 4046. **C.** 4044. **D.** 4042.

Câu 83. Xét hàm số $f(x)=\left|\dfrac{mx-2\sqrt{x+4}}{2x+4}\right|$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu số nguyên m thỏa mãn điều kiện $0<\min\limits_{[-1;1]} f(x)<1$?

A. 4. **B.** 8. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 84. Gọi S là tập hợp những giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^3-12x+m\right|$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 12 .Tổng tất cả các phần tử của tập S bằng

A. 25. **B.** 4. **C.** 15. **D.** 21.

Câu 85. Gọi S_0 là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m\right|$ trên đoạn $[2;4]$ không vượt quá 30. Số phần tử của S là

A. 50. **B.** 49. **C.** 66. **D.** 73.

Câu 86. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của ham số $f(x)=\left|e^{2x}-4e^x+m\right|$ trên đoạn $[0;\ln 4]$ bằng 6?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 87. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{1}{3}x^3-9x+m+10\right|$ trên đoạn $[0;3]$ không vượt quá 12. Tổng giá trị các phần tử của S bằng bao nhiêu?

A. -7. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 12.

Câu 88. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 30. Tổng tất cả các giá trị của S là?

A. 180. **B.** 136. **C.** 120. **D.** 210.

Câu 89. Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)=\left|2x^3-15x+m-5\right|+9x$ trên $[0;3]$ bằng 60. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số thực m.

A. 48. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 62.

Câu 90. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số phần tử của S là?

A. 2. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 91. Cho hàm số $f(x)=\left|x^4-2x^3+x^2+m\right|$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\min\limits_{[-1;2]} f(x)+\max\limits_{[-1;2]} f(x)=10$. Số phần tử của S là?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 1.

Câu 92. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số

NHÓM TOÁN ANH DÚI Never get anywhere unless you try

$f(x)=\left|\dfrac{2mx-2\sqrt{4x+8}}{x+2}\right|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ là a thỏa mãn $0<a<1$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 93. Cho hàm số $y=\left|x^4-2x^2+3m\right|$ với m là tham số. Biết rằng có đúng hai giá trị m_1,m_2 của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[-1;2]$ bằng 2021. Tính giá trị $\left|m_1-m_2\right|$.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{4052}{3}$. **C.** $\dfrac{8}{3}$. **D.** $\dfrac{4051}{3}$.

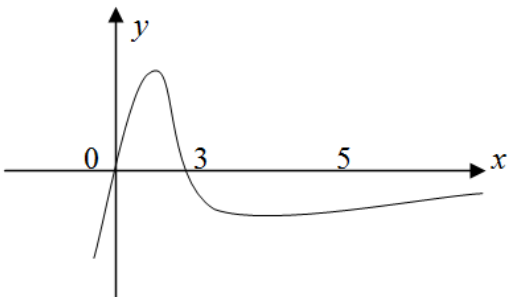
Câu 94. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+m+1$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ sao cho $\max\limits_{[1;4]}\left|f(x)\right|\le 3\min\limits_{[1;4]}\left|f(x)\right|$. Số phần tử của S là

A. 4003. **B.** 4002. **C.** 4004. **D.** 4001.

Câu 95. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng:

$$f(0)+f(1)-2f(3)=f(5)-f(4).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$.



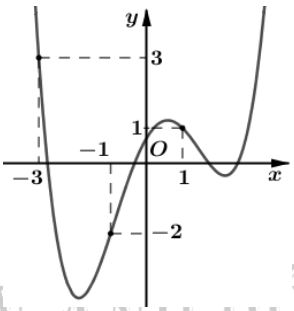
A. $m=f(5),M=f(3)$.

B. $m=f(5),M=f(1)$.

C. $m=f(0),M=f(3)$.

D. $m=f(1),M=f(3)$.

Câu 96. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ ở hình vẽ bên. Xét hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{3}{2}x+2018$, mệnh đề nào dưới đây đúng?



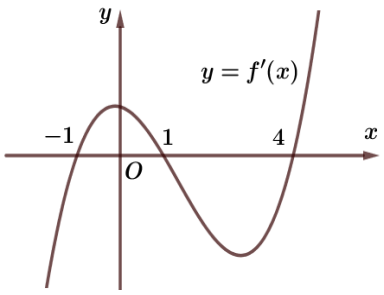
A. $\min\limits_{[-3;1]}g(x)=g(-1)$.

B. $\min\limits_{[-3;1]}g(x)=\dfrac{g(-3)+g(1)}{2}$.

C. $\min\limits_{[-3;1]}g(x)=g(-3)$.

D. $\min\limits_{[-3;1]}g(x)=g(1)$.

Câu 97. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình sau:



NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Cho bốn mệnh đề sau:

1) Hàm số $y=f(x)$ có hai cực trị.

2) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

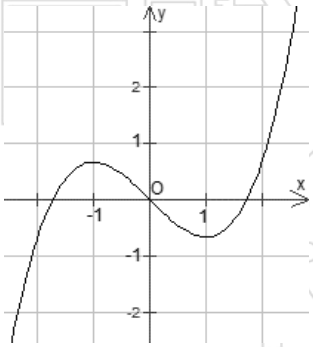
3) $f(1)>f(2)>f(4)$.

4) Trên đoạn $[-1;4]$, giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ là $f(1)$.

Số mệnh đề đúng trong bốn mệnh đề trên là:

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 98. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

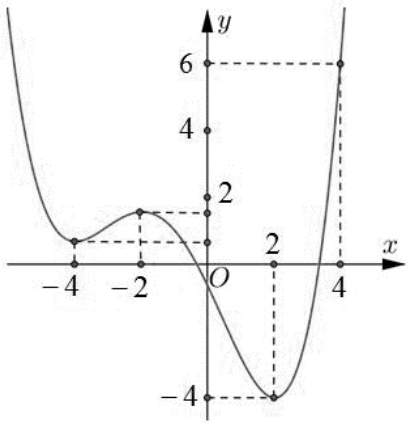


Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(\dfrac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{2}\right)$ trên đoạn $\left[-\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{\pi}{6}\right]$ bằng?

A. $f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$. **B.** $f(0)$.

C. $f\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$. **D.** $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Câu 99. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|f\left(\dfrac{8x}{x^2+1}\right)+m-1\right|$ có giá trị lớn nhất không vượt quá 2020?

A. 4029. **B.** 4035. **C.** 4031. **D.** 4041.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

ĐÁP ÁN

i \ j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	C	B	A	A	A	A	C	C
1	D	B	D	A	B	C	C	C	B	D
2	C	B	B	C	A	A	B	A	A	C
3	C	C	C	B	C	D	D	B	A	D
4	A	B	A	A	C	D	D	A	C	C
5	A	D	B	A	C	C	B	C	D	A
6	C	B	A	C	B	A	D	B	D	C
7	B	D	C	B	B	D	C	A	B	D
8	A	C	A	B	A	B	C	A	B	C
9	A	A	D	D	B	A	A	D	A	C

Ghi chú: Đáp án là sự kết hợp giữa dòng i và cột j. Ví dụ: **Câu 25A** (giao của dòng 2 và cột 5).

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Dựa và đồ thị suy ra:

$$M = f(3) = 3;\ m = f(2) = -2.$$

Vậy $M - m = 5$.

Đáp án C

Câu 2. Ta xét từng phương án:

Đáp án A sai vì hàm số có 2 điểm cực trị.

Đáp án B sai vì hàm số có giá trị cực tiểu $y = -1$ khi $x = 0$.

Đáp án C sai vì hàm số không có GTLN và GTNN trên $\mathbb{R}$.

Đáp án D đúng vì hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Đáp án C

Câu 3. Từ đồ thị ta thấy $M = 1, m = 0$ nên $M - m = 1$.

Đáp án B

Câu 4. Trên đoạn $[-1;2]$ ta có giá trị lớn nhất $M = 3$ khi $x = -1$ và giá trị nhỏ nhất $m = 0$ khi $x = 0$.

Khi đó: $M + m = 3 + 0 = 3$.

Đáp án A

Câu 5. Nhìn vào đồ thị ta thấy:

$M = \max\limits_{[-2;2]} f(x) = -1$ khi $x = -1$ hoặc $x = 2$.

$m = \min\limits_{[-2;2]} f(x) = -5$ khi $x = -2$ hoặc $x = 1$.

Đáp án A

Câu 6. Ta xét từng phương án:

A. Đúng. Vì $\lim\limits_{x \to 5^-} y = +\infty$ nên hàm số không có GTLN trên đoạn $[-1;5]$.

B. Sai. Hàm số đã cho chỉ đạt GTNN tại $x = 2$ trên đoạn $[-1;5]$.

C. Sai. Hàm số đã cho chỉ đạt GTNN tại $x = 2$ trên đoạn $[-1;5]$ và $\lim\limits_{x \to 5} y = +\infty$.

D. Sai. Hàm số đã cho chỉ đạt GTNN tại $x = 2$ trên đoạn $[-1;5]$.

Đáp án A

Câu 7. Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy:

$$\max_{[-1;3]} f(x) = f(0).$$

Đáp án A

Câu 8. Từ đồ thị ta thấy:

$$\begin{cases} M = \max\limits_{[-1;5]} f(x) = 3 \\ n = \min\limits_{[-1;5]} f(x) = -2 \end{cases} \Rightarrow M + n = 1.$$

Đáp án C

Câu 9. Dựa vào đồ thị ta thấy trên đoạn $[0;2]$ hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 4 khi $x = \sqrt{2}$

Suy ra: $\mathop{Max}\limits_{[0;2]} f(x) = 4$.

Đáp án C

Câu 10. Dựa vào đồ thị ta thấy GTLN của hàm số trên đoạn $[-1;3]$ là $M = 2$ đạt được tại $x = -1$ và GTNN của hàm số số trên đoạn $[-1;3]$ là $m = -4$ đạt được tại $x = 2$.

$\Rightarrow M + m = 2 + (-4) = -2$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Đáp án D

Câu 11. Dựa vào bảng biến thiên trên $[-5;7)$, ta có: $\underset{[-5;7)}{\text{Min}}\, f(x) = f(1) = 2$.

Đáp án B

Câu 12. Dựa vào hình vẽ ta có: $M = 3$, $m = -2$ nên $M + m = 1$.

Đáp án D

Câu 13. Từ đồ thị suy ra: $-4 \le f(x) \le 5$

$$\forall x \in [-2;6];\ f(1) = -4; f(4) = 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M = 5 \\ m = -4 \end{cases} \Rightarrow M - m = 9.$$

Đáp án A

Câu 14. Dựa vào đồ thị hàm số ta có:

$$m = \underset{x\in[-2;4]}{Min}\, f(x) = -4,\ M = \underset{x\in[-2;4]}{Max}\, f(x) = 7$$

Khi đó: $M + m = 3$.

Đáp án B

Câu 15. $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ liên tục trên $[-1;2]$ và

$$f'(x) = -4x^3 + 24x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = \sqrt{6} \quad (L) \\ x = -\sqrt{6} \quad (L) \end{bmatrix}$$

Ta có: $f(-1) = 12; f(2) = 33; f(0) = 1$

Vậy GTLN của hàm số $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 33 tại $x = 2$.

Đáp án C

Câu 16. Hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[-1;2]$.

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 20x,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{bmatrix}$.

Xét hàm số trên đoạn $[-1;2]$ có:

$$f(-1) = -7; f(0) = 2; f(2) = -22.$$

Vậy $\min\limits_{x\in[-1;2]} f(x) = -22$.

Đáp án C

Câu 17. Ta có:

$$f'(x) = 3x^2 - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 2\sqrt{2} \in [2;19] \\ x = -2\sqrt{2} \notin [2;19] \end{bmatrix}.$$

$f(2) = 2^3 - 24.2 = -40$;

$f(2\sqrt{2}) = (2\sqrt{2})^3 - 24.2\sqrt{2} = -32\sqrt{2}$;

$f(19) = 19^3 - 24.19 = 6403$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 24x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng $-32\sqrt{2}$.

Đáp án C

Câu 18. Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 24x$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Tính được: $f(0) = -4; f(9) = 5585$ và $f(\sqrt{6}) = -40$.

Suy ra: $\min\limits_{[0;9]} f(x) = -40$.

Đáp án B

Câu 19. Ta có $f'(x) = 4x^3 - 24x$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-24x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[0;9] \\ x=\sqrt{6}\in[0;9] \\ x=-\sqrt{6}\notin[0;9] \end{array}\right.$

$f(0)=-1,\ f\left(\sqrt{6}\right)=-37,\ f(9)=5588.$

Đáp án D

Câu 20. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ xác định và liên tục trên đoạn $[2;4]$.

Ta có: $y'=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2};$

$y'=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1(l) \end{array}\right.$

Suy ra: $y(2)=7; y(3)=6; y(4)=\dfrac{19}{3}$.

Vậy $\min\limits_{[2;4]} y=6$ tại $x=3$.

Đáp án C

Câu 21. Đặt: $y=f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$.

Ta có: $y'=2x-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2x^3-2}{x^2},$

$y'=0 \Rightarrow x=1\in\left[\dfrac{1}{2};2\right].$

Khi đó: $f(1)=3, f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{17}{4}, f(2)=5.$

Vậy $m=\min\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} f(x)=f(1)=3.$

Đáp án B

Câu 22. Tập xác định: $D=[1;9]$

$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{9-x}}=0 \Leftrightarrow \sqrt{9-x}=\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ 9-x=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow x=5.$

$f(1)=f(9)=2\sqrt{2};\ f(5)=4$

Vậy tập giá trị là $T=\left[2\sqrt{2};\ 4\right]$.

Đáp án B

Câu 23. Xét hàm số trên đoạn $[0\ ;2]$. Ta có $y'=3x^2-14x+11$ suy ra: $y'=0 \Leftrightarrow x=1$

Tính $f(0)=-2; f(1)=3, f(2)=0$. Suy ra $\min\limits_{[0;2]} f(x)=f(0)=-2=m$.

Đáp án C

Câu 24. Trên đoạn $[0;2]$, ta luôn có $y'=-\dfrac{8}{(x-3)^2}<0\ \forall x\in(0;2)$ (đạo hàm vô nghiệm trên $(0;2)$).

Vì $y(0)=\dfrac{1}{3}, y(2)=-5$ nên $M=\max\limits_{[0;2]} y=\dfrac{1}{3}$.

Đáp án A

Câu 25. Tập xác định: $D=[-2;2]$

• Ta có: $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$

$\Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow x=0\in(-2;2)$

• Ta có: $\begin{cases} y(-2)=y(2)=0 \\ y(0)=2 \end{cases} \Rightarrow \max\limits_{[-2;2]} y=2.$

Đáp án A

Câu 26. Đặt $t=\sin x, t\in[-1;1]$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Xét $f(t)=t^2-4t-5, t\in[-1;1]$.

$f'(t)=2t-4=0\Leftrightarrow t=2\notin[-1;1]$.

$f(1)=-8, f(-1)=0$.

Ta thấy $\min\limits_{[-1;1]} f(t)=f(1)=-8$. Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là -8.

Đáp án B

Câu 27. Khảo sát hàm số trên đoạn $[0;3]$.

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{x+1}-1}{2\sqrt{x+1}}$$

Cho: $f'(x)=0\Rightarrow\sqrt{x+1}=1\Leftrightarrow x=0\in[0;3]$.

Khi đó: $f(0)=-1,\ f(3)=-\frac{1}{2}$ nên $m=-1$ và $M=-\frac{1}{2}$.

Vậy $S=2m+3M=-\frac{7}{2}$.

Đáp án A

Câu 28. $f(x)=\sin x+\cos 2x=...$

$$...=\sin x+1-2\sin^2 x$$

Đặt: $\sin x=t\ (0\le t\le 1)$

$f(t)=-2t^2+t+1,\ f'(t)=-4t+1$

$f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{4}$

$f(0)=1,\ f(1)=0,\ f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{8}$.

Vậy $\max\limits_{[0;1]} f(x)=\frac{9}{8}$.

Đáp án A

Câu 29. Đặt: $t=\cos x\Rightarrow t\in[-1;1]$

$\Rightarrow y=2t-\frac{4}{3}t^3$.

$y'=2-4t^2;\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{-1}{\sqrt{2}}\in[-1;1]\\ x=\frac{1}{\sqrt{2}}\in[-1;1]\end{array}\right.$.

Tính các giá trị cần thiết: $\left\{\begin{array}{l}y(-1)=-\frac{2}{3}\\ y\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{-2\sqrt{2}}{3}\\ y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\\ y(1)=\frac{2}{3}\end{array}\right.$.

Vậy: $\max\limits_{[0;\pi]} y=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Đáp án C

Câu 30. Đặt: $t=\sin x,\ t\in[0;1]$.

Xét hàm $f(t)=\frac{3t+2}{t+1}$ liên tục trên đoạn $[0;1]$

có $f'(t)=\frac{1}{(t+1)^2}>0, t\in[0;1]$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $[0;1]$.

$\Rightarrow M=\operatorname{Max}\limits_{[0;1]} f(t)=f(1)=\frac{5}{2}$ và

$m=\operatorname{Min}\limits_{[0;1]} f(t)=f(0)=2$.

Khi đó: $M^2+m^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+2^2=\frac{41}{4}$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Đáp án C

Câu 31. Đặt: $\sin x = t$, $(-1 \le t \le 1)$ ta được

$y = \dfrac{t+1}{t^2+t+1}$.

Xét hàm số: $y = \dfrac{t+1}{t^2+t+1}$ trên đoạn $[-1;1]$ ta có

$y' = \dfrac{-t^2-2t}{\left(t^2+t+1\right)^2}$.

Giải phương trình: $y' = 0 \Leftrightarrow -t^2-2t = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \ (\text{thỏa mãn}) \\ t = -2 \ (\text{loại}) \end{array}\right.$.

Vì $y(-1) = 0$; $y(0) = 1$; $y(1) = \dfrac{2}{3}$ nên

$\max\limits_{[-1;1]} y = y(0) = 1 \Rightarrow M = 1$; $\min\limits_{[-1;1]} y = y(-1) = 0$

$\Rightarrow m = 0$.

Vậy $M = m+1$.

Đáp án C

Câu 32. Cách 1:

$y = 3x + \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{3x}{2} + \dfrac{3x}{2} + \dfrac{4}{x^2} \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{3x}{2}.\dfrac{3x}{2}.\dfrac{4}{x^2}} = 3\sqrt[3]{9}$

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{3x}{2} = \dfrac{4}{x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{8}{3}}$.

Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$.

Cách 2:

Xét hàm số: $y = 3x + \dfrac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có: $y = 3x + \dfrac{4}{x^2} \Rightarrow y' = 3 - \dfrac{8}{x^3}$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{8}{x^3} = 3 \Leftrightarrow x^3 = \dfrac{8}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{8}{3}}$.

x	0		$\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	$3\sqrt[3]{9}$	$\nearrow$	

$\Rightarrow \min\limits_{(0;+\infty)} y = y\left(\sqrt[3]{\dfrac{8}{3}}\right) = 3\sqrt[3]{9}$.

Đáp án C

Câu 33. Tập xác định $D = R \setminus \{1\}$.

$y' = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$			$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow m = \min\limits_{(1;+\infty)} y = 4$ khi $x = 3$.

Đáp án B

Câu 34. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$y = x + \dfrac{1}{x} - 5 \ge 2\sqrt{x.\dfrac{1}{x}} - 5 = -3$

Dấu bằng xảy ra khi $x = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$

(vì $x > 0$).

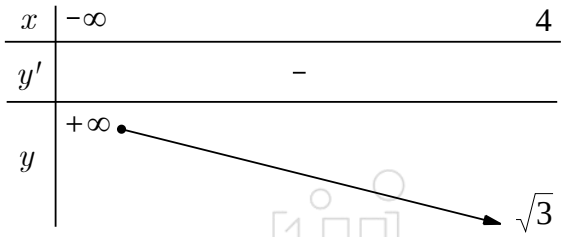
Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} y = -3$.

Đáp án C

Câu 35. Tập xác định của hàm số là: $D=(-\infty;4]$.

Ta có: $y'=\dfrac{-1}{2\sqrt{4-x}}<0,\forall x\in D$

Bảng biến thiên

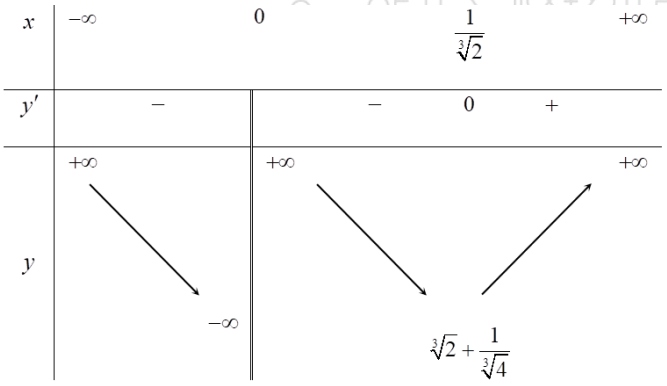


Từ bảng biến thiên suy ra $\min\limits_{(-\infty;4]} y=\sqrt{3}$ khi $x=4$. Vậy chọn D.

Đáp án D

Câu 36. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$y'=2x-\dfrac{1}{x^2}$, $y'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.



Dựa vào BBT thì $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên $(0;+\infty)$.

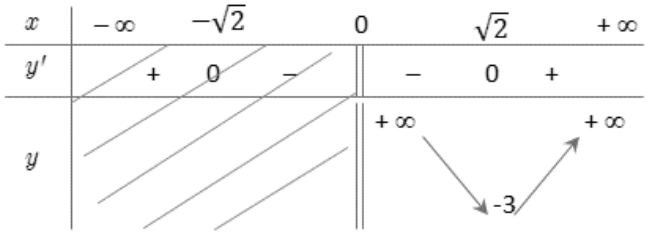
Đáp án D

Câu 37. Hàm số xác định và liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$.

$$y'=1-\frac{2}{x^2}=\frac{x^2-2}{x^2}.$$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2}\\x=-\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:



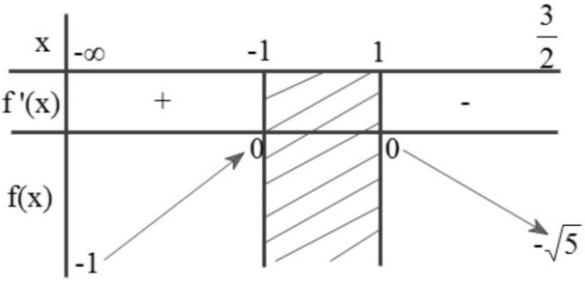
Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} y=f\left(\sqrt{2}\right)=-3$.

Đáp án B

Câu 38. Hàm số xác định và liên tục trên $D=(-\infty;-1]\cup\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$.

$$f'(x)=\frac{-2x+1}{(x-2)^2\sqrt{x^2-1}};$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\notin D$$



Vậy $\max\limits_{D} f(x)=0;\min\limits_{D} f(x)=-\sqrt{5}$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Đáp án A

Câu 39. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$$y'=\frac{\sqrt{x^2+5}-(x+1)\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+5}}}{x^2+5}$$

$$\Leftrightarrow y'=\frac{x^2+5-x^2-x}{\sqrt{x^2+5}\left(x^2+5\right)}=\frac{5-x}{\sqrt{x^2+5}\left(x^2+5\right)}$$

$$y'=0\Leftrightarrow\frac{5-x}{\sqrt{x^2+5}\left(x^2+5\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow 5-x=0\Leftrightarrow x=5$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		5		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	-1	↗	$\frac{\sqrt{30}}{5}$	↘	1

Từ bảng biến thiên có $\max\limits_{\mathbb{R}} y=y(5)=\dfrac{\sqrt{30}}{5}$ khi $x=5$.

Hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+5}}$ không có giá trị nhỏ nhất.

Vậy hàm số có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Đáp án D

Câu 40. Ta có: $y'=\dfrac{-1-m}{(x-1)^2}$.

*** TH1.** $-1-m>0\Leftrightarrow m<-1$ suy ra y đồng biến trên $[2;4]$ suy ra:

$$\min_{[2;4]} f(x)=f(2)=\frac{2+m}{1}=3\Leftrightarrow m=1 \text{ (loại)}$$

*** TH2.** $-1-m<0\Leftrightarrow m>-1$ suy ra y nghịch biến trên $[2;4]$ suy ra:

$$\min_{[2;4]} f(x)=f(4)=\frac{4+m}{3}=3\Leftrightarrow m=5 \text{ suy ra } m>4.$$

Đáp án A

Câu 41. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{m^2\},[-3;-2]\subset D$.

+ Ta có: $y'=\dfrac{-m^2-1}{(x-m^2)^2}<0,\forall x\in D$. Nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Nên: $\min\limits_{[-3;-2]} y=\dfrac{1}{2}=y(-2)=\dfrac{-2+1}{-2-m^2}$

$$\Rightarrow -2-m^2=-2\Leftrightarrow m=0\Rightarrow -2<m\le 3.$$

Đáp án B

Câu 42. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{2m^2+1}{(x+2)^2}>0,\forall x\neq -2$.

Hàm số đồng biến trên đoạn $[1;3]$ nên

$\max\limits_{[1;3]} y=y(3)\Leftrightarrow\dfrac{3m^2-1}{5}=1\Leftrightarrow m=\sqrt{2}$ (vì $m>0$).

Đáp án A

Câu 43. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-8\}$.

+ $y'=\dfrac{8+m^2}{(x+8)^2}>0,\forall x\in D$

Vậy hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x+8}$ đồng biến trên $[0;3]$.

$\Rightarrow \min\limits_{[0;3]} y = y(0) = \dfrac{-m^2}{8}$

Để $\min\limits_{[0;3]} y = -3 \Leftrightarrow \dfrac{-m^2}{8} = -3 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{6}.$

$\Rightarrow m_0 = 2\sqrt{6} \in (2;5)$. Vậy chọn **A**.

Đáp án A

Câu 44. Ta có: $y' = \dfrac{2-m}{(x+1)^2}$.

+ Xét $m = 2$.

$\Rightarrow$ Hàm số trở thành: $y = 2$ là hàm số hằng nên không đạt giá trị nhỏ nhất bằng 3

$\Rightarrow m = 2$ (loại)

+ Xét $m > 2$.

$\Rightarrow y' = \dfrac{2-m}{(x+1)^2} < 0 \ (\forall x \neq -1)$

$\Rightarrow \min\limits_{[0;4]} y = y(4) = \dfrac{8+m}{5}.$

$\Rightarrow \dfrac{8+m}{5} = 3 \Leftrightarrow m = 7$ (thoả mãn).

+ Xét $m < 2$.

$\Rightarrow y' = \dfrac{2-m}{(x+1)^2} > 0 \ (\forall x \neq -1)$

$\Rightarrow \min\limits_{[0;4]} y = y(0) = m \Rightarrow m = 3$ (loại).

Vậy $m = 7$.

Đáp án C

Câu 45. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Hàm số đã cho liên tục trên $[0;1]$.

$y' = \dfrac{1-(-m^2+m)}{(x+1)^2} = \dfrac{m^2-m+1}{(x+1)^2} > 0; \ \forall x \in D.$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[0;1]$.

Trên $[0;1]$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 0$.

Ta có: $y(0) = -2 \Leftrightarrow -m^2 + m = -2$

$\Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 2 \end{array}\right.$.

Đáp án D

Câu 46. Xét hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1;1]$, ta có:

$y' = -3x^2 - 6x; \ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;1] \\ x = -2 \notin [-1;1] \end{array}\right.$

Mà $\begin{cases} y'(-1) = m-2 \\ y'(0) = m \\ y'(1) = m-4 \end{cases}$

Do đó $\min\limits_{[-1;1]} y = -4 + m = 0 \Leftrightarrow m = 4.$

Vậy $m = 4$ thỏa yêu cầu bài toán.

Đáp án D

Câu 47. Đặt $f(x) = x^3 + (m^2+1)x + m + 1$.

+ Ta có: $y' = 3x^2 + m^2 + 1$. Dễ thấy rằng $y' > 0$ với mọi x, m thuộc $\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số đồng biến trên $[0;1]$. Vì thế $\min\limits_{[0;1]} y = \min\limits_{[0;1]} f(x) = f(0) = m + 1.$

+ Theo bài ra ta có: $m + 1 = 5$, suy ra $m = 4$.

+ Như vậy $m_0 = 4$ và mệnh đề đúng là $2018m_0 - m_0^2 \geq 0$.

Đáp án A

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Câu 48. Xét hàm số $y=x+m+\sqrt{1-x^2}$.

Tập xác định: $D=[-1;1]$.

Ta có: $y'=1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$y'=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{1-x^2}=x\\1-x^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1>x\ge 0\\\sqrt{1-x^2}=x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1>x\ge 0\\2x^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1>x\ge 0\\\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$y(-1)=-1+m,\ y(1)=1+m,\ y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}+m$$

Do hàm số $y=x+m+\sqrt{1-x^2}$ liên tục trên $[-1;1]$ nên $\underset{[-1;1]}{\text{Max}}y=m+\sqrt{2}$.

Theo bài ra thì $\underset{[-1;1]}{\text{Max}}y=2\sqrt{2}$, suy ra

$$m+\sqrt{2}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow m=\sqrt{2}.$$

Đáp án C

Câu 49. TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=4x^3-3m^2x^2-4x$.

$$y'=0\Leftrightarrow 4x^3-3m^2x^2-4x=0;$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\4x^2-3m^2x-4=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{3m^2+\sqrt{9m^4+64}}{8}>1\\x=\dfrac{3m^2-\sqrt{9m^4+64}}{8}<0\end{array}\right.$$

Nên hàm số đơn điệu trên $(0;1)$.

Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;1]$ bằng -16 nên:

$$y(0)+y(1)=-16\Leftrightarrow -m+\left(-m^2-m-1\right)=-16$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-5\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}m_1=3\\m_2=-5\end{cases}\Rightarrow m_1m_2=-15$$

Vậy $m_1.m_2=-15$.

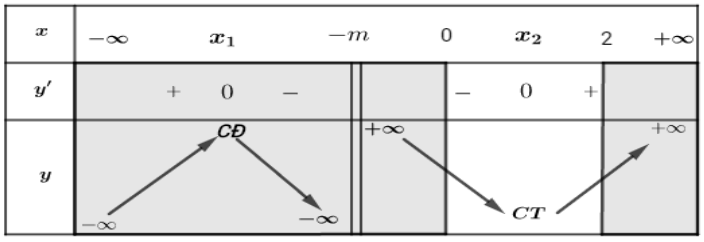
Đáp án C

Câu 50. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$. Hàm số liên tục trên $[0;2]$. $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-m<0\\-m>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>0\\m<-2\end{array}\right.$.

Ta có: $y'=\dfrac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}=\dfrac{(x+m)^2-1}{(x+m)^2}$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-m-1\\x_2=-m+1\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:



Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 \in (0;2)$ nên $0 < -m+1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1$

So với điều kiện hàm số liên tục trên đoạn $[0;2]$. Ta có $0 < m < 1$.

Ta cũng có thể giải như sau:

Điều kiện xác định: $x \neq -m$.

Hàm số liên tục trên đoạn $[0;2]$ nên

$$-m \notin [0;2] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -m < 0 \\ -m > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -2 \end{array}\right. \quad (*)$$

$$y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x+m)^2} = \frac{(x+m)^2 - 1}{(x+m)^2}.$$

$y' = 0$ có hai nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x_1 = -m+1 \\ x_2 = -m-1 \end{array}\right.$,

$x_1 - x_2 = 2$ nên chỉ có nhiều nhất một nghiệm thuộc $(0;2)$

Ta thấy $-m+1 > -m-1, \forall m \in \mathbb{R}$ và do đó để hàm số liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;2]$ tại một điểm $x_0 \in (0;2)$ thì $0 < -m+1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1 \ (**)$

Từ $(*),(**)$ ta có: $0 < m < 1$.

Đáp án A

Câu 51. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = \dfrac{1 - m\sin x}{\cos x + 2}$

$\Leftrightarrow y\cos x + m\sin x = 1 - 2y$.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$y^2 + m^2 \geq 1 - 4y + 4y^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 - m^2 \leq 0$.

$$\Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{1+3m^2}}{3} \leq y \leq \frac{2 + \sqrt{1+3m^2}}{3}.$$

Theo đề bài, ta có: $\begin{cases} \min\limits_{x \in \mathbb{R}} y = \dfrac{2 - \sqrt{1+3m^2}}{3} < -2 \\ m \in [0;10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+3m^2} > 8 \\ m \in [0;10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 > 63 \\ m \in [0;10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 21 \\ m \in [0;10]. \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m \in \{5,6,7,8,9,10\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Đáp án D

Câu 52. Vì $y = ax^3 + cx + d,\ a \neq 0$ là hàm số bậc ba và có $\min\limits_{x \in (-\infty;0)} f(x) = f(-2)$ nên $a < 0$ và $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Ta có $y' = 3ax^2 + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow ac < 0$.

Vậy với $a < 0,\ c > 0$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm đối nhau $x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{3a}}$

Từ đó suy ra $\min\limits_{x \in (-\infty;0)} f(x) = f\left(-\sqrt{-\dfrac{c}{3a}}\right)$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never go unanswered unless you shy

$\Leftrightarrow -\sqrt{-\frac{c}{3a}} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{-\frac{c}{3a}} = 2 \Leftrightarrow c = -12a$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		1		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$				$+$	0	$-$			
y	$+\infty$	$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$					$f(2)$	$\searrow$			$-\infty$

Ta suy ra:

$$\max_{x\in[1;3]} f(x) = f(2) = 8a + 2c + d = -16a + d.$$

Đáp án B

Câu 53. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

+ $\lim\limits_{x\to\infty} y = 0$.

+ $y' = \dfrac{-x^2 - 2mx + 1 - m}{\left(x^2 + x + 1\right)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2mx + 1 - m = 0 \ (*)$

$\Delta'_{(*)} = m^2 - m + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2, \forall m \in \mathbb{R}$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	
	0						0

Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất là:

$$f(x_2) = \frac{1}{2x_2 + 1} \text{ với } x_2 = -m + \sqrt{m^2 - m + 1}$$

$$YCBT \Leftrightarrow \frac{1}{-2m + 2\sqrt{m^2 - m + 1} + 1} \le 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2m + 2\sqrt{m^2 - m + 1} \ge 1.$$

(vì $f(x_2) > 0 \Rightarrow 2x_2 + 1 > 0$).

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2 - m + 1} \ge m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ \begin{cases} m \ge 0 \\ m^2 - m + 1 \ge m^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \le 1$$

Đáp án A

Câu 54. Cách 1:

Tập xác định của hàm số:
$D = \mathbb{R} \setminus \{1\} \Rightarrow [0;2] \subset D$.

Ta có:

$$y = \frac{x^3 + x^2 - m}{x + 1} \Rightarrow y' = \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x + m}{(x+1)^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + 2x + m = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -\left(2x^3 + 4x^2 + 2x\right) (1)$$

Ta có: $y(0) = -m; y(2) = 4 - \dfrac{m}{3}$.

Đặt : $g(x) = -\left(2x^3 + 4x^2 + 2x\right)$

$$\Rightarrow g'(x) = -\left(6x^2 + 8x + 2\right) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -\frac{1}{3}$$

Trên $[0;2]$ ta có bảng biến thiên:

x	0		2
$g'(x)$	$-$		
$g(x)$	0	$\searrow$	-36

Từ bảng biến thiên ta có:

$$g(x)\in[-36;0],\forall x\in[0;2].$$

Trường hợp 1: $m>0\Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ vô nghiệm.

Dễ thấy $y(0)=-m<y(2)=4-\dfrac{m}{3}$ *khi* $m>0$.

Khi đó: $\max\limits_{[0;2]}y=y(2)=4-\dfrac{m}{3}=5\Leftrightarrow m=-3$ loại do $m>0$.

Trường hợp 2: $m<-36\Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ vô nghiệm.

Dễ thấy $y(0)=-m>y(2)=4-\dfrac{m}{3}$ *khi* $m<-36$

Khi đó $\max\limits_{[0;2]}y=y(0)=-m=5\Leftrightarrow m=-5$ loại do $m<-36$.

Trường hợp 3: $m\in[-36;0]\Rightarrow$ phương trình $y'=0$ có nghiệm duy nhất (giả sử $x=x_0$).

Trên $[0;2]$ ta có bảng biến thiên:

x	0	x_0	2
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	$g(x_0)$; $y=m$	-36

Nhìn vào bảng biến thiên ta có:

$$x=x_0:g(x)=m\Leftrightarrow-\left(2x^3+4x^2+2x\right)=m$$

$$\Leftrightarrow 2x^3+4x^2+2x+m=0\Leftrightarrow y'=0$$

$$+)\ x\in(0;x_0):g(x)>m\Leftrightarrow-\left(2x^3+4x^2+2x\right)>m$$

$$\Leftrightarrow 2x^3+4x^2+2x+m<0\Leftrightarrow y'<0$$

$$+)\ x\in(x_0;2):g(x)<m\Leftrightarrow-\left(2x^3+4x^2+2x\right)<m$$

$$\Leftrightarrow 2x^3+4x^2+2x+m>0\Leftrightarrow y'>0$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	0	x_0	2
y'	$-$	0	$+$
y	$y(0)$ ↘	$y(x_0)$	↗ $y(2)$

Từ bảng biến thiên ta thấy:

$$\underset{[0;2]}{\text{Max}}\,y\in\{y(2);y(0)\}.$$

Nếu $m\in[-36;-6]\Rightarrow y(0)\geq y(2)$

$$\Rightarrow\max_{[0;2]}y=y(0)=-m=5\Leftrightarrow m=-5(l).$$

Nếu $m\in[-6;0]\Rightarrow y(0)\leq y(2)$

$$\Rightarrow\max_{[0;2]}y=y(2)=4-\frac{m}{3}=5\Leftrightarrow m=-3\ (n).$$

Vậy $m=-3$ thỏa đề.

Cách 2: TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}\Rightarrow[0;2]\subset D$.

Ta có:

$$y=\frac{x^3+x^2-m}{x+1}=x^2-\frac{m}{x+1}\Rightarrow y'=2x+\frac{m}{(x+1)^2}$$

Trường hợp 1: $m\geq 0\Rightarrow y'\geq 0,\forall x\in[0;2]\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $[0;2]$.

$$\Rightarrow\underset{[0;2]}{\text{Max}}\,y=y(2)=4-\frac{m}{3}=5\Leftrightarrow m=-3$$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

loại do $m>0$.

Trường hợp 2: $m<0$, giả sử $M=y(x_0)$.

$\Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=y(x_0)$ với $x_0\in(0;2)$.

Do hàm số liên tục trên $[0;2]$

$$\Rightarrow \begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y(x_0)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2x_0(x_0+1)^2 \\ \dfrac{x_0^3+x_0^2-m}{x_0+1}=5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow {x_0}^3+{x_0}^2+2x_0(x_0+1)^2=5(x_0+1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-\dfrac{5}{3}\ (l) \\ x_0=1\ (n) \end{array}\right. \Rightarrow m=-8$$

Khi đó: $y'=2x-\dfrac{8}{(x+1)^2}=\dfrac{2x^3+4x^2+2x-8}{(x+1)^2}$

$y'=0\Leftrightarrow x=1$.

Ta có bảng biên thiên:

x	0		1		2
y'		$-$	0	$+$	
y	8	$\searrow$	5	$\nearrow$	$\dfrac{20}{3}$

$\Rightarrow m=-8$ không thỏa yêu cầu đề.

Nên $\nexists x_0\in(0;2)$ để $\underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=y(x_0)$.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=y(2)\Rightarrow m=-5 \\ \underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=y(0)\Rightarrow m=-3 \end{array}\right.$$

Nếu $m=-5\Rightarrow \begin{cases} y(0)=-5 \\ y(2)=\dfrac{17}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow \underset{[0;2]}{\max}\, y=y(2)=\dfrac{17}{3}\neq 5\Rightarrow m=-5\ (l)$

Nếu $m=-3\Rightarrow \begin{cases} y(0)=3 \\ y(2)=5 \end{cases}$

$\Rightarrow \underset{[0;2]}{\max}\, y=y(2)=5\Rightarrow m=-3\ (n)$

Vậy $m=-3$ thỏa đề.

Đáp án C

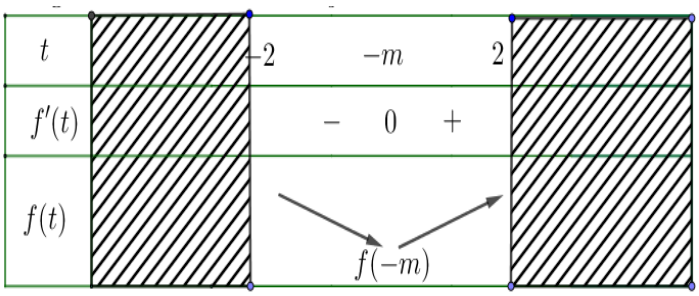
Câu 55. TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Đặt $t=x^3-3x,\ x\in[-1;1]\Rightarrow t\in[-2;2]$.

Khi đó ta có hàm số $f(t)=(t+m)^2$.

$$f'(t)=2(t+m);\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=-m.$$

Trường hợp 1: $-2<-m<2\Leftrightarrow -2<m<2$.

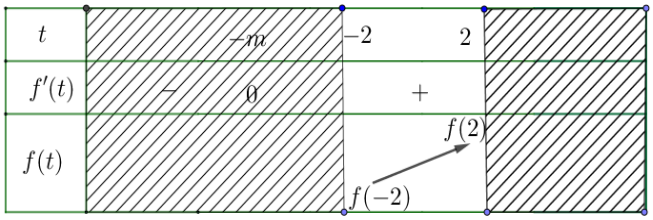


Từ bảng biến thiên ta thấy:

$$\min_{[-2;2]} f(t)=f(-m)=0$$

không thỏa mãn yêu cầu.

Trường hợp 2: $-m\le -2\Leftrightarrow m\ge 2$



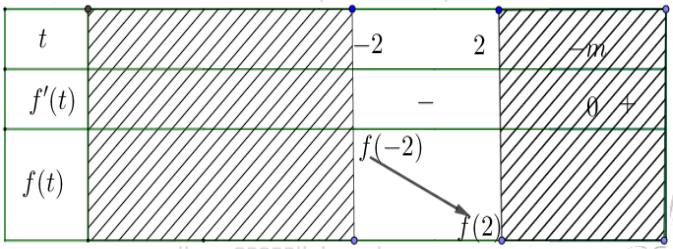
Từ bảng biến thiên ta thấy:

$\min\limits_{[-2;2]} f(t) = f(-2) = (m-2)^2$.

Theo yêu cầu bài toán:

$(m-2)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=1 \end{array}\right. \xrightarrow{m \geq 2} m = 3.$

Trường hợp 3: $-m \geq 2 \Leftrightarrow m \leq -2$



Từ bảng biến thiên ta thấy:

$\min\limits_{[-2;2]} f(t) = f(2) = (m+2)^2$.

Theo yêu cầu bài toán:

$(m+2)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=-1 \end{array}\right. \xrightarrow{m \leq -2} m = -3.$

Vậy tổng các giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu là: $3+(-3)=0$.

Đáp án C

Câu 56. Ta có: $y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Do đó: $y_{CT} = y(1) = -1$ và $y_{CĐ} = y(-1) = 3$.

Thấy ngay, với $m > 0$ thì trên đoạn $[m+1; m+2]$ hàm số luôn đồng biến.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[m+1; m+2]$ là:

$y(m+1) = (m+1)^3 - 3(m+1) + 1$.

Giá trị nhỏ nhất luôn bé hơn 3:

$\Leftrightarrow (m+1)^3 - 3(m+1) - 2 < 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m+1 < 2 \\ m+1 \neq -1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m < 1 \\ m \neq -2 \end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện $m > 0$ ta được $m \in (0;1)$.

Đáp án B

Câu 57. $y = mx + \dfrac{36}{x+1} \Rightarrow y' = m - \dfrac{36}{(x+1)^2}$

Trường hợp 1: $m = 0$, ta có:

$y' = -\dfrac{36}{(x+1)^2} < 0, \forall x \neq -1$.

Khi đó: $\min\limits_{x \in [0;3]} y = y(3) = 9$ (loại).

Trường hợp 2: $m \neq 0$

Nếu $m < 0$, ta có $y' < 0$, $\forall x \neq -1$.

Khi đó: $\min\limits_{x \in [0;3]} y = y(3)$

$\Leftrightarrow 20 = 3m + 9 \Leftrightarrow m = \dfrac{11}{3}$ (loại).

Nếu $m > 0$, khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow m - \dfrac{36}{(x+1)^2} = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 = \dfrac{36}{m} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{6}{\sqrt{m}} - 1 \\ x = -\dfrac{6}{\sqrt{m}} - 1 \ (l) \end{array}\right.$.

$0 < \dfrac{6}{\sqrt{m}} - 1 \leq 3 \Leftrightarrow \dfrac{4}{9} < m \leq 36$,

$\min\limits_{x\in[0;3]} y = y\left(\dfrac{6}{\sqrt{m}}-1\right) = 12\sqrt{m} - m = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = 100 (l) \end{array}\right.$

$\dfrac{6}{\sqrt{m}} - 1 > 3 \Leftrightarrow m < \dfrac{9}{4}$, $\min\limits_{x\in[0;3]} y = y(3)$

$\Leftrightarrow 20 = 3m + 9 \Leftrightarrow m = \dfrac{11}{3} (l)$.

Vậy $m = 4 \in (2;4]$.

Đáp án C

Câu 58. Ta có:

$y' = 3x^2 - 6mx + 3\left(m^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = m - 1 \\ x_2 = m + 1 \end{array}\right.$.

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$ thì $x_1 \le 0 < x_2$ hoặc $0 < x_1 < x_2$.

TH1: $x_1 \le 0 < x_2 \Leftrightarrow m - 1 \le 0 < m + 1$

$\Leftrightarrow -1 < m \le 1$. Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0;1\}$.

Bảng biến thiên của hàm số:

x	0		$m+1$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		↘		↗	

TH2: $0 < x_1 < x_2$.

Bảng biến thiên của hàm số

x	0		$m-1$		$m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↗	

Hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $\left\{\begin{array}{l} m - 1 > 0 \\ y(m+1) \le y(0) \end{array}\right.$.

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m > 1 \\ (m+1)^3 - 3m(m+1)^2 + 3\left(m^2 - 1\right)(m+1) + 2020 \le 2020 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m > 1 \\ (m+1)^2 (m-2) \le 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m > 1 \\ \left[\begin{array}{l} m \le 2 \\ m = -1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow 1 < m \le 2$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 2$.

Vậy $m \in \{0;1;2\}$.

Đáp án D

Câu 59. Ta có: $f'(x) = m.\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$;

Do $m \ne 0$ nên $f'(x)$ khác 0 và có dấu không thay đổi với $\forall x \in (1;+\infty)$.

Nếu $m > 0$ thì $f'(x) > 0, \forall x \in [2;5]$. Do đó:

$\min\limits_{[2;5]} f(x) = f(2) = m$; $\max\limits_{[2;5]} f(x) = f(5) = 2m$.

$\min\limits_{[2;5]} f(x) + \max\limits_{[2;5]} f(x) = m^2 - 10$

$\Leftrightarrow m + 2m = m^2 - 10$

$\Leftrightarrow m^2 - 3m - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1 = -2 \\ m_2 = 5 \end{array}\right.$

Do $m > 0$ nên nhận $m_2 = 5$.

Nếu $m < 0$ thì $f'(x) < 0, \forall x \in [2;5]$.

$\min\limits_{[2;5]} f(x) = f(5) = 2m$; $\max\limits_{[2;5]} f(x) = f(2) = m$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never give up anywhere unless you are

$\min\limits_{[2;5]} f(x)+\max\limits_{[2;5]} f(x)=m^2-10$

$\Leftrightarrow 2m+m=m^2-10$

$\Leftrightarrow m^2-3m-10=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1=-2 \\ m_2=5 \end{array}\right.$

Do $m<0$ nên nhận $m_1=-2.$

Vậy $m_1+m_2=3.$

Đáp án A

Câu 60. Điều kiện: $\cos x+2\neq 0$ luôn đúng $\forall x\in\mathbb{R}$.

$y=\dfrac{m\sin x+1}{\cos x+2}\Leftrightarrow y(\cos x+2)=m\sin x+1$

(do $\cos x+2\neq 0$ luôn đúng $\forall x\in\mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow m\sin x-y\cos x=2y-1\ (*).$

Phương trình $(*)$ có nghiệm

$m^2+y^2\geq (2y-1)^2\Leftrightarrow 3y^2-4y+1-m^2\leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2-\sqrt{1+3m^2}}{3}\leq y\leq \dfrac{2+\sqrt{1+3m^2}}{3}$

Vậy $\underset{\mathbb{R}}{Min}\, y=\dfrac{2-\sqrt{1+3m^2}}{3}.$

$\min\limits_{\mathbb{R}} y<-1\Leftrightarrow \dfrac{2-\sqrt{1+3m^2}}{3}<-1\Leftrightarrow \sqrt{1+3m^2}>5$

$\Leftrightarrow m^2-8>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2\sqrt{2}\approx 2,82 \\ m<-2\sqrt{2}\approx -2,82 \end{array}\right.$

Mà $m\in\mathbb{Z}, m\in[-5;5]$ nên $m\in\{-5;-4;-3;3;4;5\}.$

Đáp án C

Câu 61. Ta có: $\sqrt{(x^3-3x+2m)^2}=|x^3-3x+2m|$

Nhận thấy: $\min\limits_{[0;3]} f(x)=2$

$\Leftrightarrow \max\limits_{[0;3]}|x^3-3x+2m|=16\quad (1).$

Xét hàm số: $g(x)=x^3-3x+2m$ trên $[0;3]$, ta có:

+ $g'(x)=3x^2-3,\ g'(x)=3x^2-3=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in(0;3) \\ x=-1\notin(0;3) \end{array}\right.$

+ $g(0)=2m,\ g(1)=2m-2,\ g(3)=2m+18$

Do đó: $2m-2\leq g(x)\leq 2m+18, \forall x\in[0;3]$, tức:

$\max\limits_{[0;3]}|x^3-3x+2m|=\max\limits_{[0;3]}\{|2m-2|;|2m+18|\}.$

Từ đây ta có: $(1)\Leftrightarrow \max\limits_{[0;3]}\{|2m-2|;|2m+18|\}=16$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |2m+18|>|2m-2| \\ |2m+18|=16 \end{cases} \\ \begin{cases} |2m+18|\leq|2m-2| \\ |2m-2|=16 \end{cases} \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-7 \end{array}\right.$

Suy ra $S=\{-7;-1\}.$

Vậy, tổng các phần tử của S là -8.

Đáp án B

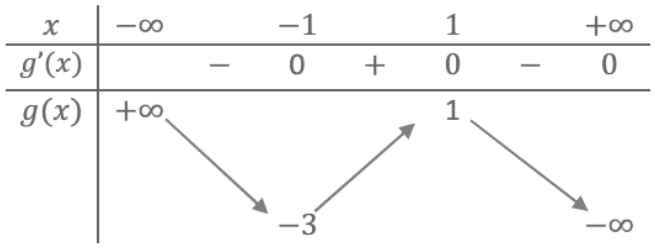
Câu 62. Đặt $y=f(x)=(x^3-3x+m+1)^2$ là hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-1;1]$.

Ta có: $y'=f'(x)=2(x^3-3x+m+1)(3x^2-3).$

$f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ m=-x^3+3x-1=g(x) \end{array}\right.$

Ta khảo sát hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-1;1]$.

Bảng biến thiên của $g(x)$



Nếu $m\in[-3;1]$ thì luôn tồn tại $x_0\in[-1;1]$ sao cho $m=g(x_0)$ hay $f(x_0)=0$. Suy ra

$\min\limits_{[-1;1]} y=0$, tức là không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $m\notin[-3;1]$ thì $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm1\in[-1;1]$.

Ta có: $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=\min\{f(1);f(-1)\}$;

$\Leftrightarrow \min\limits_{[-1;1]} f(x)=\min\left\{(m-1)^2;(m+3)^2\right\}$

Trường hợp 1: $m>1$ tức là $m+3>m-1>0$ suy ra:

$$\min_{[-1;1]} f(x)=(m-1)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\ (TM)\\ m=0\ (KTM)\end{array}\right.$$

Trường hợp 2: $m<-3$ tức là $m-1<m+3<0$ suy ra:

$$\min_{[-1;1]} f(x)=(m+3)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-4\ (TM)\\ m=-2\ (KTM)\end{array}\right.$$

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán: $m=2;m=-4$, từ đó tổng tất cả các giá trị của m là -2.

Đáp án A

Câu 63. TXĐ: $D=[-2;2]$.

Đặt: $t=\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}$; $t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$.

$\Leftrightarrow t^2=4+2\sqrt{4-x^2}\Leftrightarrow 2\sqrt{4-x^2}=t^2-4$.

$\Rightarrow y=g(t)=m^2t+2\left(t^2-4\right)+m+1$

$=2t^2+m^2t+m-7$ với $t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$.

Ta có: $g'(t)=4t+m^2$.

$g'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{-m^2}{4}<0;\forall m\in\mathbb{R}\Rightarrow g(t)$ đồng biến trên $\left[2;2\sqrt{2}\right]\Rightarrow\min\limits_{[2;2\sqrt{2}]} g(t)=g(2)=4$.

Mà $g(2)=2m^2+m+1$

$$\Leftrightarrow 2m^2+m+1=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$$

Tổng các giá trị của m thỏa mãn ycbt là $S=1+\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

Đáp án C

Câu 64. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{2x-m}{x+1}$ với $m\neq-2$.

Tập xác định: $x\neq-1$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{2+m}{(x+1)^2}$ suy đạo hàm không đổi dấu $x\in[1;3]$ suy ra:

$$\max_{[1;3]} f(x)=\max\{f(1);f(3)\}=\max\left\{\frac{2-m}{2};\frac{6-m}{4}\right\}$$

$$\min_{[1;3]} f(x)=\min\{f(1);f(3)\}=\min\left\{\frac{2-m}{2};\frac{6-m}{4}\right\}.$$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Xét với $m<-2 \Rightarrow f'(x)<0\ \forall x\in[1;3]$.

Vậy: $\forall x\in[1;3] \Rightarrow f(x)\le f(1)=\dfrac{2-m}{2}$.

$\Rightarrow \max\limits_{[1;3]} f(x)=\dfrac{2-m}{2}$.

Xét với $m>-2 \Rightarrow f'(x)>0\ \forall x\in[1;3]$. Vậy

$\forall x\in[1;3] \Rightarrow f(x)\ge f(1)=\dfrac{2-m}{2}$

$\Rightarrow \min\limits_{[1;3]} f(x)=\dfrac{2-m}{2}$.

Đáp án B

Câu 65. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Để hàm số có giá trị lớn nhất trên $[1;3]$ thì: $m\notin[1;3]$.

$$y'=\frac{-2m-6}{(x-m)^2}.$$

Trường hợp 1: $-2m-6>0\Leftrightarrow m<-3$.

Khi đó: $\max\limits_{x\in[1;3]} y=y(3)=\dfrac{m+9}{3-m}$.

Để giá trị lớn nhất trên đoạn $[1;3]$ là số dương thì: $\dfrac{m+9}{3-m}>0\Leftrightarrow m+9>0\Leftrightarrow m>-9$.

Vậy các số m thỏa là: $-8,\ -7,\ -6,\ -5,\ -4$.

Trường hợp 2: $-2m-6<0\Leftrightarrow m>-3$.

Khi đó $\max\limits_{x\in[1;3]} y=y(1)=\dfrac{m+7}{1-m}$.

Để giá trị lớn nhất trên đoạn $[1;3]$ là số dương thì: $\dfrac{m+7}{1-m}>0\Leftrightarrow 1-m>0\Leftrightarrow m<1$.

Vậy các số nguyên m thỏa mãn là $-2,\ -1,\ 0$.

Trường hợp 3: $-2m-6=0\Leftrightarrow m=-3$.

Khi đó: $y=1$. Nên $\max\limits_{x\in[1;3]} y=1$.

Vậy $m=-3$ thỏa.

Kết luận: có 9 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đáp án A

Câu 66. Xét hàm số $f(x)=x^3-3x+m$, ta có $f'(x)=3x^2-3$. Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	0		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	m	↘	$-2+m$	↗	$2+m$

TH1: $2+m<0\Leftrightarrow m<-2$.

Khi đó: $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=-(-2+m)=2-m$

$2-m=3\Leftrightarrow m=-1$ (loại).

TH2: $\begin{cases}2+m>0\\ m<0\end{cases}\Leftrightarrow -2<m<0$.

Khi đó: $|m-2|=2-m>2>2+m$.

$\Rightarrow \max\limits_{[0;2]}|f(x)|=-(-2+m)=2-m$

$2-m=3\Leftrightarrow m=-1$ (thỏa mãn).

TH3: $\begin{cases} m>0 \\ -2+m<0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<2$.

Khi đó: $|m-2|=2-m<2<2+m$.

$\Rightarrow \max\limits_{[0;2]}|f(x)|=2+m$

$2+m=3 \Leftrightarrow m=1$ (thỏa mãn).

TH4: $-2+m>0 \Leftrightarrow m>2$.

Khi đó: $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=2+m$.

$2+m=3 \Leftrightarrow m=1$ (loại).

Vậy: $m=\pm 1$.

Đáp án D

Câu 67. Do hàm số $f(x)=\dfrac{x+m}{x+1}$ liên tục trên đoạn $[0;1]$.

Khi $m=1$, hàm số là hàm hằng nên:

$$\max_{[0;1]} f(x)=\min_{[0;1]} f(x)=1.$$

Khi $m\neq 1$, hàm số đơn điệu trên $[0;1]$, nên:

+ Khi $f(0); f(1)$ cùng dấu thì:

$$\max_{[0;1]}|f(x)|+\min_{[0;1]}|f(x)|=|f(0)|+|f(1)|$$

$$=|m|+\left|\frac{m+1}{2}\right|$$

+ Khi $f(0); f(1)$ trái dấu thì: $\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=0$,

$$\max_{[0;1]}|f(x)|=\max\left\{|f(0)|;|f(1)|\right\}=\max\left\{|m|;\left|\frac{m+1}{2}\right|\right\}$$

TH1: $f(0).f(1)\geq 0$;

$$\Leftrightarrow m(m+1)\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq -1 \\ m\geq 0 \end{array}\right.$$

$\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=2$

$$\Leftrightarrow |m|+\left|\frac{m+1}{2}\right|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{5}{3} \end{array}\right. \text{ (thoả mãn).}$$

TH2: $f(0).f(1)<0$;

$\Leftrightarrow m(m+1)<0 \Leftrightarrow -1<m<0$

$\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=2$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} |m|=2 \\ \left|\dfrac{m+1}{2}\right|=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm 2 \\ m=-5 \\ m=3 \end{array}\right. \text{ (không thoả mãn).}$$

Số phần tử của S là 2.

Đáp án B

Câu 68. Xét hàm số:

$y=f(x)=x^3-3x+2m-1$ trên đoạn $[0;2]$.

Ta có: $f'(x)=3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\notin[0;2] \\ x=1 \end{array}\right.$.

Ta có: $\begin{cases} f(0)=2m-1 \\ f(1)=2m-3 \\ f(2)=2m+1 \end{cases}$.

Suy ra: $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=max\left\{|2m-1|;|2m-3|;|2m+1|\right\}$.

$$=max\left\{|2m-3|;|2m+1|\right\}=P$$

Trường hợp 1: Xét $|2m-3|\ge|2m+1|$;

$\Leftrightarrow -4(4m-2)\ge 0\Leftrightarrow m\le\frac{1}{2}$.

Khi đó: $P=|2m-3|\ge 2,\forall m\le\frac{1}{2}$.

Suy ra: $P_{\min}=2\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$.

Trường hợp 2: Xét $|2m-3|<|2m+1|$;

$\Leftrightarrow -4(4m-2)<0\Leftrightarrow m>\frac{1}{2}$.

Khi đó: $P=|2m+1|>2,\forall m>\frac{1}{2}$.

Suy ra: $P_{\min}$ không tồn tại.

Vậy $m=\frac{1}{2}$.

Đáp án D

Câu 69. Ta có: $y'=\frac{2x-2}{|x^2-2x+m|}$;

$y'=0\Rightarrow x=1$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương:

$$\max\{y(-1),y(2),y(1)\}=5.$$

$\Leftrightarrow \max\{|3+m|,|m|,|m-1|\}=5$.

+ Trường hợp $m\ge -1$, ta có:

$$\max\{|3+m|,|m|,|m-1|\}=5$$
$$\Leftrightarrow |3+m|=5\Rightarrow m=2$$

+ Trường hợp $m<-1$, ta có:

$\max\{|3+m|,|m|,|m-1|\}=5\Leftrightarrow |m-1|=5\Rightarrow m=-4$

Vậy tổng các giá trị m bằng -2.

Đáp án C.

Câu 70. Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-2;1]$.

Ta có: $y=|x^2+2x+a-4|=|(x+1)^2+a-5|$ $(*)$

Đặt: $t=(x+1)^2$, $x\in[-2;1]\Rightarrow a\in[0;4]$.

Lúc đó hàm số trở thành: $f(t)=|t+a-5|$ với $t\in[0;4]$.

Nên: $\max\limits_{x\in[-2;1]}y=\max\limits_{t\in[0;4]}f(t)=\max\limits_{t\in[0;4]}\{f(0);f(4)\}$

$=\max\limits_{t\in[0;4]}\{|a-5|;|a-1|\}$

$\ge\frac{|a-1|+|a-5|}{2}\ge\frac{|a-1+5-a|}{2}=2$

Đẳng thức xảy ra khi: $|a-1|=|a-5|=2\Leftrightarrow a=3$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của $\max\limits_{t\in[0;4]}f(t)$ là 2 khi $a=3$.

Đáp án B

Câu 71. Xét: $y=\frac{x^2+mx+m}{x+1}$.

Ta có: $f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$,

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin[1;2]\\x=-2\notin[1;2]\end{array}\right.$$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never stop learning until you die

Mà $f(1)=\dfrac{2m+1}{2}, f(2)=\dfrac{3m+4}{3}$;

$\Rightarrow \max\limits_{x\in[1;2]} y=\left\{\left|\dfrac{2m+1}{2}\right|;\left|\dfrac{3m+4}{3}\right|\right\}$.

Trường hợp 1:

$$\max_{x\in[1;2]} y=\left|\frac{2m+1}{2}\right|=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{3}{2} \\ m=-\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$$

• Với $m=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\left|\dfrac{3m+4}{3}\right|=\dfrac{17}{6}>2$ (loại).

• Với $m=-\dfrac{5}{2}\Rightarrow\left|\dfrac{3m+4}{3}\right|=\dfrac{7}{6}<2$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2:

$$\max_{x\in[1;2]} y=\left|\frac{3m+4}{3}\right|=2$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}3m+4=6\\3m+4=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{2}{3} \\ m=-\dfrac{10}{3}\end{array}\right.$$

• Với $m=\dfrac{2}{3}\Rightarrow\left|\dfrac{2m+1}{2}\right|=\dfrac{7}{6}<2$ (thỏa mãn)

• Với $m=-\dfrac{10}{3}\Rightarrow\left|\dfrac{2m+1}{2}\right|=\dfrac{17}{6}>2$ (loại)

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Đáp án D

Câu 72. Xét hàm số $f(x)=\left|x^2+ax+b\right|$.

Theo đề bài, M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$.

Suy ra: $\left\{\begin{array}{l}M\ge f(-1)\\M\ge f(3)\\M\ge f(1)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}M\ge|1-a+b|\\M\ge|9+3a+b|\\M\ge|1+a+b|\end{array}\right.$.

$\Rightarrow 4M\ge|1-a+b|+|9+3a+b|+2|-1-a-b|$

$\ge|1-a+b+9+3a+b+2(-1-a-b)|$

$\Rightarrow 4M\ge 8\Rightarrow M\ge 2$.

Nếu $M=2$ thì điều kiện cần là:

$|1-a+b|=|9+3a+b|=|-1-a-b|=2$ và $1-a+b$, $9+3a+b$, $-1-a-b$ cùng dấu

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-a+b=9+3a+b=-1-a-b=2\\1-a+b=9+3a+b=-1-a-b=-2\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=-2\\b=-1\end{array}\right.$.

Ngược lại, khi $\left\{\begin{array}{l}a=-2\\b=-1\end{array}\right.$ ta có, hàm số $f(x)=\left|x^2-2x-1\right|$ trên $[-1;3]$.

Xét hàm số $g(x)=x^2-2x-1$ xác định và liên tục trên $[-1;3]$.

$g'(x)=2x-2;\ g'(x)=0\Leftrightarrow x=1\in[-1;3]$

M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-1;3]\Rightarrow M=\max\left\{|g(-1)|;|g(3)|;|g(1)|\right\}=2$.

Vậy $\left\{\begin{array}{l}a=-2\\b=-1\end{array}\right.$. Ta có: $a+2b=-4$.

Đáp án C

Câu 73. Xét $u=x^3+x^2+\left(m^2+1\right)x+27$ trên

đoạn $[-3;-1]$, ta có:

$$u' = 3x^2 + 2x + m^2 + 1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó: $\begin{cases} A = \max\limits_{[-3;-1]} u = u(-1) = 26 - m^2 \\ a = \min\limits_{[-3;-1]} u = u(-3) = 6 - 3m^2 \end{cases}$;

Do $\begin{cases} M = \max\limits_{[-3;-1]} y = \max\left\{\left|26 - m^2\right|, \left|6 - 3m^2\right|\right\} \\ 4M \ge 3\left|26 - m^2\right| + \left|6 - 3m^2\right| \ge 72 \end{cases}$.

Vậy $M \ge 18$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$\left|26 - m^2\right| = \left|6 - 3m^2\right| = 18 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{2}.$$

Đáp án B

Câu 74. Xét hàm số $f(x) = x^2 + 2x + m - 4$.

Ta có: $f'(x) = 2x + 2$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Do đó: $\max\limits_{[-2;1]} \left|x^2 + 2x + m - 4\right|$;

$$= \max\left\{|m-1|; |m-4|; |m-5|\right\}$$

Ta thấy: $m - 5 < m - 4 < m - 1$ với mọi $m \in \mathbb{R}$, suy ra: $\max\limits_{[-2;1]} y$ chỉ có thể là $|m-5|$ hoặc $|m-1|$.

Nếu $\max\limits_{[-2;1]} y = |m-5|$ thì: $\begin{cases} |m-5| = 4 \\ |m-5| \ge |m-1| \end{cases}$

$\Leftrightarrow m = 1$.

Nếu $\max\limits_{[-2;1]} y = |m-1|$ thì: $\begin{cases} |m-1| = 4 \\ |m-1| \ge |m-5| \end{cases}$

$\Leftrightarrow m = 5$.

Vậy $m \in \{1; 5\}$.

Đáp án B

Câu 75. Xét hàm số: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ trên đoạn $[-2;4]$.

$$f' = 3x^2 - 6x - 9;\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

(thỏa mãn).

Ta tính được: $\begin{cases} f(-2) = -2 + m \\ f(-1) = 5 + m \\ f(3) = -27 + m \\ f(4) = -20 + m \end{cases}$

$\Rightarrow \min\limits_{[-2;4]} f(x) = m - 27; \max\limits_{[-2;4]} f(x) = m + 5$;

$\Rightarrow \max\limits_{[-2;4]} |f(x)| = \max\left\{|m-27|; |m+5|\right\}$.

+) Trường hợp 1: Nếu $|m-27| \le |m+5|$ $(*)$

$\Rightarrow \max\limits_{[-2;4]} |f(x)| = |m+5| \Rightarrow |m+5| = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 11 \\ m = -21 \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện $(*) \Rightarrow m = 11$.

+) Trường hợp 2: Nếu $|m-27| > |m+5|$ $(**)$

$\Rightarrow \max\limits_{[-2;4]} |f(x)| = |m-27| \Rightarrow |m-27| = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 43 \\ m = 11 \end{array}\right.$

(Không thỏa mãn điều kiện $(**)$).

Vậy $S = \{11\} \Rightarrow S$ có 1 phần tử.

Đáp án D

Câu 76. Xét hàm số:

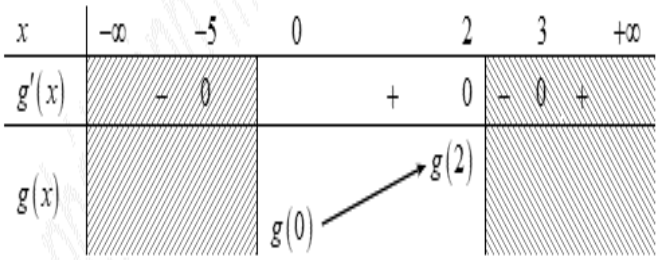
$$g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20$$

trên đoạn $[0;2]$.

Ta có: $g'(x)=x^3-19x+30$;

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5\notin[0;2]\\x=2\\x=3\notin[0;2]\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên



$g(0)=m-20$; $g(2)=m+6$.

Để $\max\limits_{[0;2]}|g(x)|\le 20$ thì $\begin{cases}g(0)\le 20\\g(2)\le 20\end{cases}$;

$\Leftrightarrow\begin{cases}|m-20|\le 20\\|m+6|\le 20\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m\le 14$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0;1;2;...;14\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là 105.

Đáp án C

Câu 77. Đặt: $\sin x=t\ (t\in[-1;1])$;

$\Rightarrow y=|t^2-2t+m|$.

Xét hàm số: $f(t)=t^2-2t+m$, ta có:

$$f'(t)=2t-2=0\Leftrightarrow t=1\in[-1;1].$$

Ta có: $f(-1)=m+3$, $f(1)=m-1$.

Khi đó $\begin{cases}\max\limits_{[-1;1]}f(x)=\max\{m+3;\ m-1\}=m+3\\\min\limits_{[-1;1]}f(x)=\min\{m+3;\ m-1\}=m-1\end{cases}$

TH1: $|m+3|\ge|m-1|\Leftrightarrow m\ge -1$

$\Rightarrow\max f(x)=|m+3|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\ (l)\\m=-4\ (l)\end{array}\right.$

TH2: $|m+3|<|m-1|\Leftrightarrow m<-1$

$\Rightarrow\max f(x)=|m-1|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\ (l)\\m=0\ (l)\end{array}\right.$

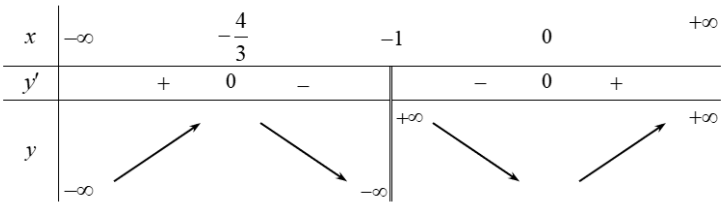
$\Rightarrow$ Không tồn tại m thỏa mãn.

Đáp án A

Câu 78. Xét hàm số $y=\dfrac{x^4+ax+a}{x+1}=\dfrac{x^4}{x+1}+a$.

Ta có: $y'=\dfrac{3x^4+4x^3}{(x+1)^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{4}{3}\\x=0\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên suy ra:

$$\begin{cases}M=\max\left\{\left|a+\dfrac{1}{2}\right|;\left|a+\dfrac{16}{3}\right|\right\}\\m=\min\left\{\left|a+\dfrac{1}{2}\right|;\left|a+\dfrac{16}{3}\right|\right\}\end{cases}.$$

Trường hợp 1. $a+\dfrac{1}{2}\ge 0\Leftrightarrow a\ge-\dfrac{1}{2}$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

$$\Rightarrow \begin{cases} M = \left|a+\frac{16}{3}\right| = a+\frac{16}{3} \\ m = \left|a+\frac{1}{2}\right| = a+\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Khi đó: $M \ge 2m \Leftrightarrow a+\frac{16}{3} \ge 2\left(a+\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow a \le \frac{13}{3}$.

Kết hợp điều kiện, ta có: $-\frac{1}{2} \le a \le \frac{13}{3} \Rightarrow$ có 5 giá trị nguyên thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 2. $a+\frac{16}{3} \le 0 \Leftrightarrow a \le -\frac{16}{3}$;

$$\Rightarrow \begin{cases} M = \left|a+\frac{1}{2}\right| = -a-\frac{1}{2} \\ m = \left|a+\frac{16}{3}\right| = -a-\frac{16}{3} \end{cases}$$

$$M \ge 2m \Leftrightarrow -a-\frac{1}{2} \ge 2\left(-a-\frac{16}{3}\right) \Leftrightarrow a \ge -\frac{61}{6}.$$

Kết hợp điều kiện ta có $-\frac{61}{6} \le a \le -\frac{16}{3}$.

Suy ra có 5 giá trị nguyên của a thỏa mãn.

Trường hợp 3. $\begin{cases} a+\frac{1}{2} < 0 \\ a+\frac{16}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{16}{3} < a < -\frac{1}{2}$.

Nếu $\left|a+\frac{1}{2}\right| > \left|a+\frac{16}{3}\right| \Leftrightarrow -a-\frac{1}{2} > a+\frac{16}{3}$

$\Leftrightarrow a < -\frac{35}{12}$ thì: $\begin{cases} M = -a-\frac{1}{2} \\ m = a+\frac{16}{3} \end{cases} \Rightarrow M \ge 2m$

$$\Leftrightarrow -a-\frac{1}{2} \ge 2\left(a+\frac{16}{3}\right) \Leftrightarrow a \le -\frac{67}{18}.$$

Kết hợp điều kiện, ta có $-\frac{16}{3} < a \le -\frac{67}{18}$.

Suy ra có 2 giá trị nguyên của a thỏa mãn điều kiện đề bài.

Nếu $\left|a+\frac{1}{2}\right| \le \left|a+\frac{16}{3}\right| \Leftrightarrow -a-\frac{1}{2} \le a+\frac{16}{3}$

$\Leftrightarrow a \ge -\frac{35}{12}$ thì: $\begin{cases} M = a+\frac{16}{3} \\ m = -a-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M \ge 2m$;

$$\Leftrightarrow a+\frac{16}{3} \ge 2\left(-a-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow a \ge -\frac{19}{9}.$$

Kết hợp điều kiện, ta có $-\frac{19}{9} \le a < -\frac{1}{2}$.

Suy ra có 2 giá trị nguyên của a thỏa mãn điều kiện.

Vậy có 14 giá trị nguyên của a thỏa mãn điều kiện.

Đáp án B

Câu 79. Đặt $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30$ là hàm số xác định và liên tục trên $[0;2]$.

Với mọi $x \in [0;2]$, ta có:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 28x + 48 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Suy ra: $\max\limits_{[0;2]} |f(x)| = \max\{|f(0)|;|f(2)|\}$.

Theo đề $\max\limits_{[0;2]} |f(x)| \le 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |m-30| \le 30 \\ |m+14| \le |m-30| \end{cases} \\ \begin{cases} |m+14| \le 30 \\ |m-30| \le |m+14| \end{cases} \end{array}\right.$

NHÓM TOÁN ANH DUI

$\Leftrightarrow \begin{cases} |m-30| \le 30 \\ |m+14| \le 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -30 \le m-30 \le 30 \\ -30 \le m+14 \le 30 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le m \le 60 \\ -44 \le m \le 16 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m \le 16.$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in S = \{0;1;2;...;16\}$.

Vậy tổng tất cả 17 giá trị trong tập S là 136.

Đáp án D

Câu 80. Đặt $t = e^x, x \in [0;\ln 2] \Rightarrow t \in [1;2]$

Xét hàm số: $h(t) = |3t^4 - 4t^3 - 24t^2 + 48t + m|$ trên đoạn $[1;2]$.

Đặt: $g(t) = 3t^4 - 4t^3 - 24t^2 + 48t + m$

$g'(t) = 12t^3 - 12t^2 - 48t + 48;$

$g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = -2 \notin [1;2] \\ t = 2 \\ t = 1 \end{bmatrix};$

$g(1) = m + 23,\ g(2) = m + 16.$

TH1: $-16 \le m < 10 \Rightarrow m + 23 \ge m + 16 \ge 0$

$\Rightarrow A = \max\limits_{[1;2]} h(t) = m + 23;\ B = \min\limits_{[1;2]} h(t) = m + 16.$

Suy ra: $\begin{cases} -16 \le m < 10 \\ m + 23 \le 3m + 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -16 \le m < 10 \\ m \ge \dfrac{-25}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{-25}{2} \le m < 10.$

Do đó: có 22 giá trị của m thỏa mãn.

TH2: $-23 \le m < -16$

$\Rightarrow |m + 23| = m + 23,\ |m + 16| = -m - 16.$

Dễ thấy $B = 0$.

Suy ra: $\begin{bmatrix} \begin{cases} m + 23 < -m - 16 \\ -m - 16 \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m + 23 \ge -m - 16 \\ m + 23 \le 0 \end{cases} \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -16 \le m < -19.5 \\ -19.5 \le m \le -23 \end{bmatrix}$ (Vô lý)

Vậy $S = \{-12;-11;...;0;1;...9\}$ và tổng các phần tử của tập S bằng $-12 + (-11) + (-10) = -33$.

Đáp án A

Câu 81. Đặt $y = |x^4 - 2x^3 + x^2 + a| = |f(x)|$.

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + a$

Khi đó: $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x = 0;$

$\Leftrightarrow 2x(2x^2 - 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0;\dfrac{1}{2};1\right\}.$

$\Rightarrow f'(x) \ge 0, \forall x \in [1;2]$ và $\begin{cases} f(1) = a \\ f(2) = a + 4 \end{cases}.$

Ta có: $\forall x \in [1;2]$ thì $\begin{cases} \max y \in \{|a|, |a+4|\} \\ \min y \in \{|a|, 0, |a+4|\} \end{cases}.$

Xét các trường hợp:

+ $a \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} \max y = a + 4 \\ \min y = a \end{cases} \Rightarrow 2a + 4 = 10 \Rightarrow a = 3.$

+ $a \le -4 \Rightarrow \begin{cases} \max y = -a \\ \min y = -a - 4 \end{cases},$

$\Leftrightarrow -a - 4 - a = 10 \Leftrightarrow -2a - 4 = 10 \Rightarrow a = -7$ nhận.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

+ $\begin{cases} a<0 \\ a+4>0 \end{cases} \Leftrightarrow -4<a<0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+4=10 \\ -a=10 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=6 \\ a=-10 \end{array}\right.$ (Loại).

Vậy tồn tại hai giá trị a thỏa mãn.

Đáp án C

Câu 82. Với $u=x^3-3x^2+m$, ta có:

$$u'=3x^2-6x;\ u'=0 \Leftrightarrow x=0;x=2$$

Do đó: $\begin{cases} \min\limits_{[1;3]} u=\min\{u(1);u(3);u(2)\} \\ \max\limits_{[1;3]} u=\max\{u(1);u(3);u(2)\} \end{cases}$

$$\begin{cases} \min\limits_{[1;3]} u=\min\{m-2;m;m-4\}=m-4 \\ \max\limits_{[1;3]} u=\max\{m-2;m;m-4\}=m \end{cases}$$

* Nếu $m-4\ge 0 \Leftrightarrow m\ge 4$;

$$\Rightarrow \min_{[1;3]} f(x)=m-4\le 2020$$
$$\Leftrightarrow m\le 2024 \Rightarrow m\in\{4,...,2024\}.$$

* Nếu $m\le 0 \Rightarrow \min\limits_{[1;3]} f(x)=-m\le 2020$;

$$\Leftrightarrow -2020\le m \Rightarrow m\in\{-2020;...;0\}.$$

* Nếu $0<m<4$ khi đó:

$\min\limits_{[1;3]} u<0;\ \max\limits_{[1;3]} u>0 \Rightarrow \min\limits_{[1;3]} f(x)=0$ (thỏa mãn).

Vậy $m\in\{-2020,...,2024\}$ có tất cả 4045 số nguyên thỏa mãn.

Đáp án A

Câu 83. Cách 1:

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{mx-2\sqrt{x+4}}{2x+4}$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $f(x)=|g(x)|$.

Ta có: $\begin{cases} g(0)=-1 \\ g(1)=\dfrac{m-2\sqrt{5}}{6} \\ g(-1)=\dfrac{-m-2\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

- Nếu $\left[\begin{array}{l} g(-1)\ge 0 \\ g(1)\ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 2\sqrt{5} \\ m\le -2\sqrt{3} \end{array}\right.$ thì $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=0$, không thỏa mãn bài toán.

- Nếu $\begin{cases} g(-1)<0 \\ g(1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow -2\sqrt{3}<m<2\sqrt{5}$

Mà m nguyên nên $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

Ta có: $g'(x)=\dfrac{4m+\dfrac{2x+12}{\sqrt{x+4}}}{(2x+4)^2}$.

TH1: $m\ge 0$.

Khi đó $g'(x)>0\ \forall x\in[-1;1]$. Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[-1;1]$.

Mà $g(0)=-1 \Rightarrow g(1)>-1$. Do đó $-1<g(1)<0$.

Vậy $0<\min\limits_{[-1;1]} f(x)<1$ hay $m\in\{0;1;2;3;4\}$ thỏa mãn bài toán.

TH2: $m<0$.

Xét hàm số $h(x)=\dfrac{2x+12}{\sqrt{x+4}}$ trên $[-1;1]$. Ta có:

$h'(x)=\dfrac{x+2}{(x+4)\sqrt{x+4}}>0\ \forall x\in[-1;1]$.

Khi đó dễ thấy $h(x)\in\left[\frac{10}{\sqrt{3}};\frac{14}{\sqrt{5}}\right]$.

* Khi $m=-1\Rightarrow 4m+h(x)>0,\ \forall x\in[-1;1]$

$\Rightarrow g'(x)>0\ \forall x\in[-1;1]$ hay hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[-1;1]$.

Khi đó $-1<g(1)<0$ nên $0<\min\limits_{[-1;1]} f(x)<1$. Vậy $m=-1$ thỏa mãn.

* Khi $m\in\{-3;-2\}$

$\Rightarrow 4m+h(x)<0\ \forall x\in[-1;1]\Rightarrow g'(x)<0\ \forall x\in[-1;1]$ hay hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $[-1;1]$.

Khi đó: $g(-1)>g(0)\Rightarrow -1<g(-1)<0$ nên $0<\min\limits_{[-1;1]} f(x)<1$.

Vậy $m\in\{-3;-2\}$ thỏa mãn.

Do đó $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$ hay có 8 giá trị nguyên của m.

Cách 2:

Nhận thấy $f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$ nên tồn tại giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[-1;1]$.

Ta có: $\begin{cases} f(x)\ge 0,\forall x\in[-1;1] \\ f(0)=1 \end{cases}$, nên suy ra:

$$0\le \min_{x\in[-1;1]} f(x)\le 1.$$

Vậy điều kiện:

$$0<\min_{x\in[-1;1]} f(x)<1\Leftrightarrow \begin{cases} \min\limits_{x\in[-1;1]} f(x)>0\ (1) \\ \min\limits_{x\in[-1;1]} f(x)\ne 1\ (2) \end{cases}.$$

Ta có $(1)\Leftrightarrow$ Phương trình $mx-2\sqrt{x+4}=0$ vô nghiệm trên $[-1;1]$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $m=\frac{2\sqrt{x+4}}{x}$ vô nghiệm trên $[-1;1]\setminus\{0\}$

Xét hàm số $g(x)=\frac{2\sqrt{x+4}}{x},\ \forall x\in[-1;1]\setminus\{0\}$

$g'(x)=\frac{-x-8}{x^2\sqrt{x+4}}<0,\forall x\in[-1;1]\setminus\{0\}$

Bảng biến thiên

x		-1		0		1	
$g'(x)$		$-$		$-$			
$g(x)$		$-2\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty$ / $+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{5}$	

Từ bảng biến thiên suy ra điều kiện phương trình $m=\frac{2\sqrt{x+4}}{x}$ vô nghiệm trên $[-1;1]\setminus\{0\}\Leftrightarrow -2\sqrt{3}<m<2\sqrt{5}$.

Do m nguyên nên $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

Để giải (2) trước hết ta đi tìm điều kiện để $\min\limits_{x\in[-1;1]} f(x)=1$.

Do $f(0)=1$ nên $\min\limits_{x\in[-1;1]} f(x)=f(0)$, mà $0\in(-1;1)$, suy ra $x=0$ là điểm cực trị của hàm số $f(x)$.

Đặt $h(x)=\frac{mx-2\sqrt{x+4}}{2x+4}\Rightarrow h'(0)=0\Leftrightarrow m=-\frac{3}{2}$.

Do đó với m nguyên thì (2) chắc chắn xảy ra.

Vậy $m \in \{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$ thỏa mãn điều kiện (2)

Kết luận: Có 8 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Đáp án B

Câu 84. Xét hàm số:

$$g(x) = x^3 - 12x + m \ (1 \le x \le 3)$$
$$g'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2,\ x = -2.$$

$$g(1) = m - 11,\ g(2) = m - 16,\ g(3) = m - 9$$

Suy ra: $\max\limits_{[1;3]} f(x) = \left\{\left|m-16\right|;\left|m-9\right|\right\}$.

Giả sử $\left|m-16\right| = 12 \Leftrightarrow m = 28,\ m = 4$ thử lại ta thấy $m = 4$ nhận.

Giả sử $\left|m-9\right| = 12 \Leftrightarrow m = 21,\ m = -3$ thử lại ta thấy $m = 21$ nhận.

Vậy $m = 4$ và $m = 21$.

Đáp án A

Câu 85. Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m$

$f'(x) = x^3 - 28x + 48$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6\,(ktm) \\ x = 4\,(tm) \\ x = 2\ (tm) \end{array}\right.$$

$f(2) = m + 44;\ f(4) = m + 32$.

$\Rightarrow \min\limits_{[2;4]} f(x) = m + 32;\ \max\limits_{[2;4]} f(x) = m + 4$.

$\Rightarrow \max\limits_{[2;4]} y = \max\left\{\left|m+44\right|;\left|m+32\right|\right\}$.

Để giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = \left|\frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m\right|$$

trên đoạn $[2;4]$ không vượt quá 30 thì:

$$\begin{cases} \left|m+44\right| \le 30 \\ \left|m+32\right| \le 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -74 \le m \le -14 \\ -62 \le m \le -2 \end{cases} \Leftrightarrow -62 \le m \le -14$$

Đáp án B

Câu 86. Đặt $t = \mathrm{e}^x$, vì $x \in [0;\ln 4] \Rightarrow t \in [1;4]$.

Khi đó yêu cầu bài toán trở thành tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(t) = \left|t^2 - 4t + m\right|$ trên đoạn $[1;4]$ bằng 6.

Đặt $s = t^2 - 4t$, vì $t \in [1;4] \Rightarrow s \in [-4;0]$.

Xét hàm số $g(s) = s + m$ với $s \in [-4;0]$ suy ra hàm số $g(s)$ đồng biến trên đoạn $[-4;0]$.

Khi đó giá trị nhỏ nhất của $f(s) = \left|s+m\right|$, $s \in [-4;0]$ chỉ đạt tại các đầu mút.

TH1: $\begin{cases} \min\limits_{[-4;0]} f(s) = \left|m-4\right| = 6 \\ \left|m\right| > \left|m-4\right| \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 10 \\ m = -2 \end{array}\right. \\ \left|m\right| > \left|m-4\right| \end{cases} \Leftrightarrow m = 10 \text{ thỏa mãn.}$$

TH2: $\begin{cases} \min\limits_{[-4;0]} f(s) = \left|m\right| = 6 \\ \left|m\right| < \left|m-4\right| \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 6 \\ m = -6 \end{array}\right. \\ \left|m\right| > \left|m-4\right| \end{cases} \Leftrightarrow m = -6 \text{ thỏa mãn.}$$

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đáp án C

Câu 87. Xét hàm số $g(x)=\frac{1}{3}x^3-9x+m+10$.

Dễ thấy hàm số $g(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$.

Ta có: $g'(x)=x^2-9$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-3\notin[0;3]\end{array}\right.$

Ta có: $g(0)=m+10$; $g(3)=m-8$.

Theo yêu cầu bài toán, $\max\limits_{[0;3]} y=\max\limits_{[0;3]}|g(x)|\le 12$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}|g(0)|\le 12\\|g(3)|\le 12\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}|m+10|\le 12\\|m-8|\le 12\end{array}\right.\Leftrightarrow -4\le m\le 2$$

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là -7.

Đáp án A

Câu 88. Xét $u=\frac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30$ trên đoạn $[0;2]$

$$u'=0\Leftrightarrow x^3-28x+48=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-6\notin[0;2]\\x=2\in[0;2]\\x=4\notin[0;2]\end{array}\right.$$

Khi đó: $\max\limits_{[0;2]} u=\max\{u(0),u(2)\}$

$$=\max\{m-30,m+14\}=m+14;$$

Suy ra: $\mathop{Max}\limits_{[0;2]} y=\max\{|m-30|,|m+14|\}$.

Trường hợp 1: $\mathop{Max}\limits_{[0;2]} y=|m+14|$

$$\left\{\begin{array}{l}|m+14|\ge|m-30|\\|m+14|\le 30\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}|m+14|^2\ge|m-30|^2\\-30\le m+14\le 30\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}88m\ge 704\\-44\le m\le 16\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\ge 8\\-44\le m\le 16\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow 8\le m\le 16$, mà $m\in\mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow m\in\{8;9;10;...;16\}$.

Trường hợp 2: $\mathop{Max}\limits_{[0;2]} y=|m-30|$.

$$\left\{\begin{array}{l}|m-30|\ge|m+14|\\|m-30|\le 30\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}|m+14|^2\le|m-30|^2\\-30\le m-30\le 30\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}88m\le 704\\0\le m\le 60\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\le 8\\0\le m\le 60\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow 0\le m\le 8$, mà $m\in\mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow m\in\{0;1;2;...;8\}$.

Vậy tổng các giá trị m thỏa mãn là: $0+1+2+...+16=136$.

Đáp án B

Câu 89. Ta có: $\max\limits_{[0;3]} f(x)=60\Leftrightarrow f(x)\le 60,\forall x\in[0;3]$ và $\exists x_0\in[0;3]$ sao cho $f(x_0)=60$.

Ta có: $f(x)\le 60\Leftrightarrow|2x^3-15x+m-5|+9x\le 60$

$\Leftrightarrow|2x^3-15x+m-5|\le 60-9x$.

$\Leftrightarrow 9x-60\le 2x^3-15x+m-5\le 60-9x$

$\Leftrightarrow -2x^3+24x-55\le m\le -2x^3+6x+65,\forall x\in[0;3]$.

Ta có: $-2x^3+6x+65\ge 29,\forall x\in[0;3]$ nên

$$m\le -2x^3+6x+65,\forall x\in[0;3]\Leftrightarrow m\le 29.$$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never set anywhere unless you try

Tương tự: $-2x^3+24x-55\le -23$ nên:

$$-2x^3+24x-55\le m,\forall x\in[0;3]\Leftrightarrow m\ge -23.$$

Vậy $-23\le m\le 29$ thì $f(x)\le 60,\forall x\in[0;3]$.

Để $\exists x_0\in[0;3]$ sao cho $f(x_0)=60$ thì:

$\left[\begin{array}{l}-2x^3+24x-55=m\\-2x^3+6x+65=m\end{array}\right.$ có nghiệm trên $[0;3]$.

Hay $\left[\begin{array}{l}m\ge 29\\m\le -23\end{array}\right.$.

Vậy $\left[\begin{array}{l}m=29\\m=-23\end{array}\right.$ thì $\max\limits_{[0;3]} f(x)=60$.

Khi đó tổng các giá trị của m là $29-23=6$.

Đáp án C

Câu 90. Xét hàm số $g(x)=x^3-3x+m$, ta có:

$$g'(x)=3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\notin[0;2]\\x=1\in[0;2]\end{array}\right.$$

$g(0)=m$, $g(1)=m-2$, $g(2)=m+2$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^3-3x+m\right|$ bằng max của $F=\{|m|;|m-2|;|m+2|\}$

TH1: $|m|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\m=-3\end{array}\right.$.

Với $m=3\Rightarrow F=\{3;1;5\}$ loại vì max bằng 5.

Với $m=-3\Rightarrow F=\{3;5;1\}$ loại vì max bằng 5.

TH2: $|m-2|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=5\\m=-1\end{array}\right.$.

Với $m=5\Rightarrow F=\{5;3;7\}$ loại vì max bằng 7.

Với $m=-1\Rightarrow F=\{1;3;1\}$ có max bằng 3. Chọn $m=-1$.

TH3: $|m+2|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-5\end{array}\right.$.

Với $m=1\Rightarrow F=\{1;1;3\}$ có max bằng 3. Chọn $m=1$.

Với $m=-5\Rightarrow F=\{5;7;3\}$ loại vì max bằng 7.

Vậy $S=\{-1;1\}\Rightarrow$ có 2 giá trị m thoả mãn yêu cầu đề bài.

Đáp án A

Câu 91. Đặt $g(x)=x^4-2x^3+x^2+m$

$$\Rightarrow g'(x)=4x^3-6x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{1}{2}\\x=1\end{array}\right.$$

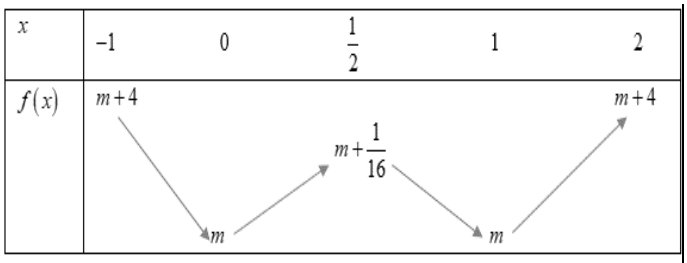
Bảng biến thiên của hàm $g(x)$

x	-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$m+4$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$m+\frac{1}{16}$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$m+4$

Dựa vào bảng biến thiên của $g(x)$ ta suy ra bảng biến thiên hàm số: $f(x)=\left|g(x)\right|=\left|x^4-2x^3+x^2+m\right|$.

Ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m\ge 0$. Bảng biến thiên của $f(x)=\left|g(x)\right|=\left|x^4-2x^3+x^2+m\right|$.



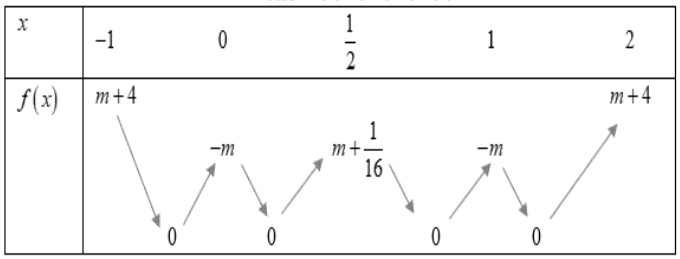
Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

$$\min_{[-1;2]} f(x)+\max_{[-1;2]} f(x)=10$$

$\Leftrightarrow m+m+4=10\Leftrightarrow m=3$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: $m<0<m+\frac{1}{16}\Leftrightarrow -\frac{1}{16}<m<0$.

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$$\min_{[-1;2]} f(x)+\max_{[-1;2]} f(x)=10$$

$\Leftrightarrow 0+m+4=10\Leftrightarrow m=6$ (loại)

Trường hợp 3: $m+\frac{1}{16}=0\Leftrightarrow m=-\frac{1}{16}$.

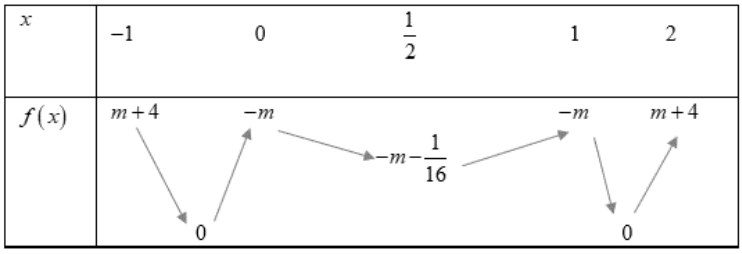
Tương tự ta có: $\min_{[-1;2]} f(x)+\max_{[-1;2]} f(x)=10$

$\Leftrightarrow 0+m+4=10\Leftrightarrow m=6$ (loại)

Trường hợp 4:

$$m+\frac{1}{16}<0<m+4\Leftrightarrow -4<m<-\frac{1}{16}.$$

Bảng biến thiên:



Dựa vào BBT, ta có: $\begin{bmatrix}\min\limits_{[-1;2]} f(x)+\max\limits_{[-1;2]} f(x)=10\\ \min\limits_{[-1;2]} f(x)+\max\limits_{[-1;2]} f(x)=10\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}0+m+4=10\\ 0+(-m)=10\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}m=6\\ m=-10\end{bmatrix}$ (loại).

Trường hợp 5: $m+4=0\Leftrightarrow m=-4$.

Ta có: $\min_{[-1;2]} f(x)+\max_{[-1;2]} f(x)=10$

$\Leftrightarrow 0-m=10\Leftrightarrow m=-10$ (loại)

Trường hợp 6: $m+4<0\Leftrightarrow m<-4$.

Ta có: $\min_{[-1;2]} f(x)+\max_{[-1;2]} f(x)=10$

$\Leftrightarrow -m-m-4=10\Leftrightarrow m=-7$ (thỏa mãn)

Vậy $m\in\{-7;3\}$.

Đáp án A

Câu 92. Đặt $t=\sqrt{x+2}, x\in[-1;1]\Rightarrow t\in\left[1;\sqrt{3}\right]$;

$x=t^2-2$.

Hàm số đã cho trở thành $g(t)=\left|\frac{2mt^2-4t-4m}{t}\right|$.

Xét hàm $h(t)=\frac{2mt^2-4t-4m}{t}$ trên đoạn $\left[1;\sqrt{3}\right]$.

Ta có: $h'(t)=\frac{2m\left(t^2+2\right)}{t^2}$

TH1: $m=0$ thì: $h(t)=-4$

$\Rightarrow g(t)=4,\ \forall t\in\left[1;\sqrt{3}\right]\Rightarrow a=4$ (loại).

TH2: $m\neq 0$ thì hàm số $h(t)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên $\left[1;\sqrt{3}\right]$

Ta có: $h(1)=-2m-4; h\left(\sqrt{3}\right)=\dfrac{2m-4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

Nếu $h(1).h\left(\sqrt{3}\right)\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -2\\ m\ge 2\sqrt{3}\end{array}\right.$ và hàm số $h(t)$ liên tục trên đoạn $\left[1;\sqrt{3}\right]$ suy ra đồ thị hàm số $h(t)$ trên đoạn $\left[1;\sqrt{3}\right]$ cắt trục hoành $\Rightarrow a=0$ (loại).

Nếu $h(1).h\left(\sqrt{3}\right)>0\Leftrightarrow -2<m<2\sqrt{3}$.

Khi đó, $h(1)<0; h\left(\sqrt{3}\right)<0$

$\Rightarrow a=\left|\dfrac{2m-4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right|$. Suy ra $\left[\begin{array}{l}m=3\\ m=4\end{array}\right.$ là các giá trị nguyên dương để $0<a<1$.

Đáp án D

Câu 93. Xét hàm số $f(x)=x^4-2x^2+3m$.

Ta có: $f'(x)=4x^3-4x=4x\left(x^2-1\right)$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm 1\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số trên $[-1;2]$:

x	-1		0		1		2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$3m-1$	↗	$3m$	↘	$3m-1$	↗	$3m+8$

Vì $\min\limits_{[-1;2]} y=2021\Rightarrow$ phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm thuộc $[-1;2]$.

Trường hợp 1 : $3m-1>0\Leftrightarrow m>\dfrac{1}{3}$.

Ta có: $\min\limits_{[-1;2]} y=|3m-1|=3m-1=2021$

$$\Leftrightarrow m=\frac{2022}{3}$$

Trường hợp 2 : $3m+8<0\Leftrightarrow m<-\dfrac{8}{3}$.

Ta có: $\min\limits_{[-1;2]} y=|3m+8|=-3m-8=2021$

$$\Leftrightarrow m=-\frac{2029}{3}.$$

Vậy $|m_1-m_2|=\left|\dfrac{2022}{3}+\dfrac{2029}{3}\right|=\dfrac{4051}{3}$.

Đáp án D

Câu 94. Xét hàm số: $y=f(x)=x^3-3x^2+m+1$

$\Rightarrow y'=f'(x)=3x^2-6x$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\ \ (l)\\ x=2\end{array}\right.$$

$f(1)=m-1;\ f(2)=m-3;\ f(4)=17+m$.

$\max\limits_{[1;4]} f(x)=m+17;\ \min\limits_{[1;4]} f(x)=m-3$.

+Nếu $m-3\ge 0\Leftrightarrow m\ge 3$ thì $\max\limits_{[1;4]}|f(x)|=m+17$, $\min\limits_{[1;4]}|f(x)|=m-3$.

Khi đó: $\max\limits_{[1;4]}|f(x)|\le 3\min\limits_{[1;4]}|f(x)|$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

+ Nếu $m+17\le 0\Leftrightarrow m\le -17$ thì:

$$\max_{[1;4]}|f(x)|=-m+3,\ \min_{[1;4]}|f(x)|=-17-m.$$

Khi đó: $\max_{[1;4]}|f(x)|\le 3\min_{[1;4]}|f(x)|$

$$\Leftrightarrow -m+3\le 3(-17-m)\Leftrightarrow m\le -27$$

+ Nếu $(m-3)(m+17)<0\Leftrightarrow -17<m<3$ thì:

$$\max_{[1;4]}|f(x)|=\max\{|m+17|,|m-3|\}$$

$$=\max\{m+17,3-m\}>0;\min_{[1;4]}|f(x)|=0.$$

Khi đó, không thỏa $\max_{[1;4]}|f(x)|\le 3\min_{[1;4]}|f(x)|$.

Do đó: $\left[\begin{array}{l} m\le -27 \\ m\ge 13 \end{array}\right.$ kết hợp với $m\in[-2020;2020]$, ta có: $m\in[-2020;-27]\cup[13;2020]$

Vậy 4002 giá trị nguyên của m cần tìm.

Đáp án B

Câu 95. Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$

x	0		3		5
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	↗	$f(3)$	↘	$f(5)$

$\Rightarrow M=f(3)$ và $f(1)<f(3), f(4)<f(3)$

$f(5)-f(0)=f(1)-f(3)+f(4)-f(3)<0$

$\Rightarrow f(5)<f(0)\Rightarrow m=f(5)$

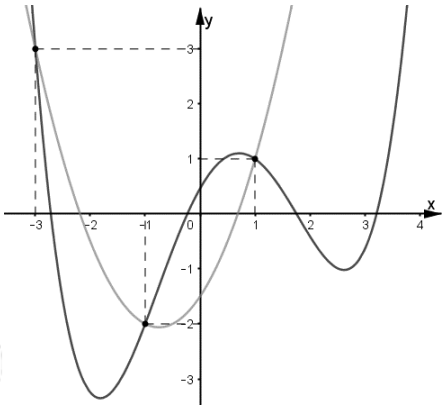
Đáp án A

Câu 96. Ta có: $g'(x)=f'(x)-x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}=...$

$$...=f'(x)-\left(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\right).$$

Vẽ parabol $(P):y=x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$.

Ta thấy (P) đi qua các điểm có toạ độ $(-3;3)$, $(-1;2)$, $(1;1)$.



Trên khoảng $(-3;-1)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía dưới (P) nên:

$$f'(x)<\left(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow g'(x)<0.$$

Trên khoảng $(-1;1)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên (P) nên:

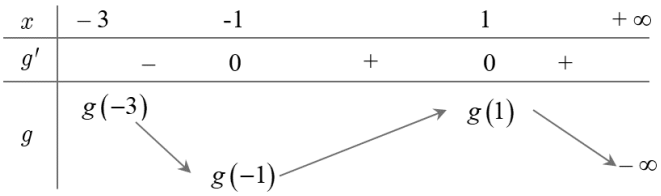
$$f'(x)>\left(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow g'(x)>0.$$

Trên khoảng $(1;+\infty)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía dưới (P) nên:

$$f'(x)<\left(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow g'(x)<0.$$

Bảng biến thiên

NHÓM TOÁN
Never set anywhere unless you try



Từ bảng biến thiên, ta có: $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

Đáp án A

Câu 97. Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, ta thấy: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-1) \cup (1;4)$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1;1) \cup (4;+\infty)$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			CT		$CĐ$		CT		

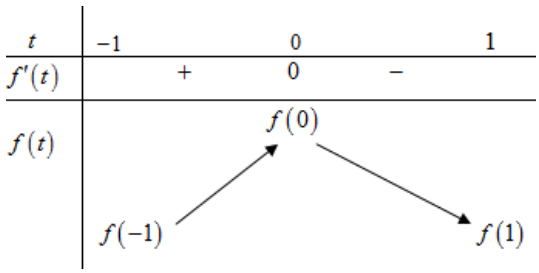
Dựa vào bảng biến thiên đáp án đúng là mệnh đề số 3 và 4.

Đáp án D

Câu 98. Đặt $t = \dfrac{\sin x + \sqrt{3}\cos x}{2} = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Vì $x \in \left[-\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{\pi}{6}\right] \Rightarrow x + \dfrac{\pi}{3} \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1;1]$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có bảng biến thiên



Ta có: $\max\limits_{\left[-\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]} f\left(\dfrac{\sin x + \sqrt{3}\cos x}{2}\right) = \max\limits_{[-1;1]} f(t)$

$$\Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3}.$$

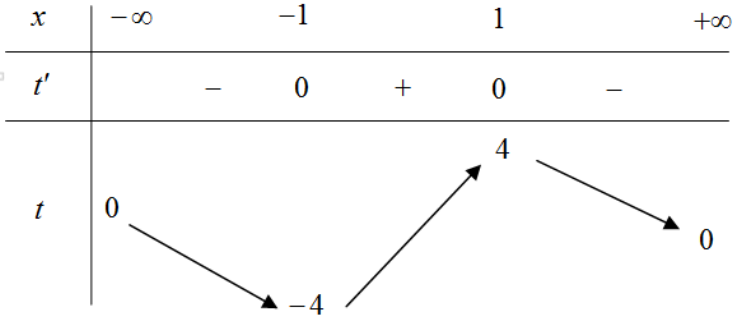
Vậy $\max\limits_{\left[-\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]} f\left(\dfrac{\sin x + \sqrt{3}\cos x}{2}\right) = f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Đáp án A

Câu 99. Đặt $t = \dfrac{8x}{x^2+1}$. Ta có: $t' = \dfrac{-8x^2+8}{\left(x^2+1\right)^2}$;

$t' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên:



$\Rightarrow t \in [-4;4]$.

Hàm số $y = \left|f\left(\dfrac{8x}{x^2+1}\right) + m - 1\right|$ trở thành $g(t) = |f(t) + m - 1|, t \in [-4;4]$.

Đặt $h(t) = f(t) + m - 1,\ t \in [-4;4]$, ta có:

$$h'(t)=f'(t).$$

$$h'(t)=0 \Leftrightarrow f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-4\in[-4;4] \\ t=-2\in[-4;4] \\ t=2\in[-4;4] \end{array}\right.$$

Ta có: $h(-4)\approx 0,8+m-1=m-0,2$;

$h(4)=6+m-1=m+5$;

$h(-2)\approx 1,6+m-1=m+0,6$;

$h(2)=-4+m-1=m-5$.

$$\underset{\mathbb{R}}{\text{Max}}\, y=\underset{[-4;4]}{\text{Max}}\left|h(t)\right|=\text{Max}\left\{\left|m+5\right|;\left|m-5\right|\right\}.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left|m+5\right|\le 2020 \\ \left|m-5\right|\le 2020 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2020\le m+5\le 2020 \\ -2020\le m-5\le 2020 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2025\le m\le 2015 \\ -2015\le m\le 2025 \end{array}\right. \Leftrightarrow -2015\le m\le 2015$.

Vậy có tất cả 4031 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đáp án C

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

I.III. Ứng dụng Min – Max trong toán tối ưu

Câu 1. Một người có một dải Ribbon dài $130\,cm$, người đó cần bọc dải Ribbon đỏ đó quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà, người này dùng $10\,cm$ của dải Ribbon để thắt nơ ở trên nắp hộp (như hình vẽ bên dưới). Hỏi dải Ribbon có thể bọc được hộp quà có thể tích lớn nhất là bao nhiêu?



A. $4000\pi\ cm^3$.

B. $32000\pi\ cm^3$.

C. $1000\pi\,cm^3$.

D. $16000\pi\ cm^3$.

Đáp án: C

Lời giải

Gọi h, r lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của hình trụ.

Tổng chiều dài dây sử dụng để gói phần quà hình trụ (không kể chiều dài dải Ribbon dùng để thắt nơ) là $130-10=120\ cm$.

Ta có đẳng thức liên hệ giữa h, r:

$2.2.(h+2.r)=120\Leftrightarrow h+2r=30\Rightarrow h=30-2r$.

Do đó, thể tính của hình hộp được tính bởi công thức:

$$V=Bh=\pi r^2h=\pi r^2.(30-2r)=30\pi r^2-2\pi r^3$$

Xem $V(r)$ là một hàm số bậc ba theo biến r, ta xét trên khoảng $(0;15)$.

Ta có: $V'(x)=60\pi r-6\pi r^2=0\Rightarrow r=10$.

Tính toán tại một số điểm cần thiết: $\begin{cases}V(0)=0\\V(10)=1000\pi=\max\limits_{[0;15]}V(r)\\V(15)=0\end{cases}$.

Extra Techniques:

Tips:

Sở dĩ có được đẳng thức $120=2.2.(h+2r)$ là do ta nhận thấy, dải Ribbon tạo thành hai hình chữ nhật bao quanh chiếc hộp, do đó tổng chiều dài cần thiết để bao quanh hộp (không kể phần dư để thắt nơ) là tổng chu vi của hai hình chữ nhật đó.

Vậy thể tích lớn nhất mà hộp quà có thể có là $1000\pi\ \left(cm^3\right)$.

Câu 2. Một vật chuyển động theo quy luật $S=-\frac{1}{2}t^3+9t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian $10s$, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng

A. $400\left(m/s\right)$. **B.** $216\left(m/s\right)$.

C. $30\left(m/s\right)$. **D.** $54\left(m/s\right)$.

Đáp án: C

Lời giải

Vận tốc của vật là $v=s'=-\frac{3}{2}t^2+18t$

Xét trên đoạn $[0,10]$, ta có: $v'=-3t+18$; $v'=0\Leftrightarrow t=6$

Mà $v(0)=0;\ v(6)=54$; $v(10)=30\Rightarrow \max\limits_{[0;10]} v=54$.

Vậy trong khoảng thời gian $10s$, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng $54\left(m/s\right)$.

Câu 3. Một sợi dây không giãn dài 1 mét được cắt thành hai đoạn. Đoạn thứ nhất được uốn thành tam giác đều có diện tích S_1, đoạn thứ hai được uốn thành đường tròn có diện tích S_2. Khi S_1+S_2 đạt giá trị nhỏ nhất, tính $\frac{S_1}{S_2}$.

A. $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$. **B.** $\frac{9\sqrt{3}}{\pi}$. **C.** $\frac{3}{\pi}$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$.

Đáp án: D

Lời giải

Giả sử sợi dây được cắt thành hai đoạn lần lượt là $x\left(\text{m}\right)$ và $1-x\left(\text{m}\right)$ với điều kiện $0<x<1$.

Extra Techniques:

Tips:

Vận tốc tức thời

Một chuyển động thẳng có phương trình dạng $s=s(t)$ là một hàm số có đạo hàm, khi đó vận tốc tức thời xác định bằng công thức

$$v(t_0)=s'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

trong đó nếu:

$$t\to t_0\Leftrightarrow |t-t_0|<\varepsilon$$

sẽ có độ chính xác càng cao.

Extra Techniques:

Remark:

Gia tốc tức thời

Với đạo hàm cấp hai $f''(t)$ ta có là gia tốc tức thời của chuyển động $s=f(t)$ tại thời điểm t.

Tất cả các kiến thức kể trên đều có trong SGK Đại số và Giải tích 11, Sách nâng cao Đại số và Giải tích 11 nâng cao và Sách Giáo viên Đại số Giải tích 11 nâng cao.

NHÓM TOÁN ANH DÚI

Extra Techniques:

Tips:

Diện tích tam giác đều có độ dài một cạnh là a có độ lớn là $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Đoạn $x(\text{m})$ được quấn thành tam giác đều có cạnh là $\frac{x}{3}$ nên có diện tích $S_1=\frac{x^2}{9}.\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{x^2\sqrt{3}}{36}$.

Đoạn $1-x\,(\text{m})$ được quấn thành đường tròn bán R nên ta có $1-x=2\pi R\Rightarrow R=\frac{1-x}{2\pi}$ nên có diện tích $S_2=\pi\left(\frac{1-x}{2\pi}\right)^2=\frac{(1-x)^2}{4\pi}$.

Đặt $f(x)=S_1+S_2=\frac{x^2\sqrt{3}}{36}+\frac{(1-x)^2}{4\pi}$, có

$f'(x)=\frac{x\sqrt{3}}{18}+\frac{x-1}{2\pi}=0\Leftrightarrow x=\frac{9}{\pi\sqrt{3}+9}$

x	0		$\frac{9}{\pi\sqrt{3}+9}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Never get anywhere unless you try

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x),\ x\in(0;1)$ ta thấy S_1+S_2 nhỏ nhất khi $x=\frac{9}{\pi\sqrt{3}+9}$.

Khi đó: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$.

Extra Techniques:

Remark:

Đối với hàm số bậc hai $y=ax^2+bx+c,\ (a\neq 0)$ có hệ số $a>0$ thì ta luôn đưa được về dạng $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}\geq-\frac{\Delta}{4a}$ khi đó hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=-\frac{b}{2a}$ và giá trị nhỏ nhất khi đó bằng $-\frac{\Delta}{4a}$.

Câu 4. Một công ty kinh doanh thực phẩm ước tính rằng số tiền thu được ở việc kinh doanh rau được tính xấp xỉ bằng công thức $h(x)=x^2-29000x+1000100000$ và tiền lãi được tính bằng công thức $g(x)=1000x+100000$ với x là số tiền cho mỗi kg rau. Tìm x để số tiền vốn bỏ ra là ít nhất.

A. 15000 đồng. **B.** 30000 đồng.

C. 10000 đồng. **D.** 20000 đồng.

Đáp án: A

Lời giải

Extra Techniques:

Remark:

Đối với hàm số bậc hai $y=ax^2+bx+c,(a\neq 0)$ có hệ số $a<0$ thì ta luôn đưa được về dạng $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}\le -\frac{\Delta}{4a}$ khi đó hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=-\frac{b}{2a}$ và giá trị lớn nhất khi đó bằng $-\frac{\Delta}{4a}$.

Extra Techniques:

Remark:

Đối với hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$.

Với $b^2-3ac>0$, ta gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số, khi đó với $x_1<x_2$, ta có nhận xét:

Trường hợp 1: $a>0$.

$f(x_1)$ là giá trị cực đại của hàm số và $f(x_2)$ là giá trị cực tiểu của hàm số.

Trường hợp 2: $a<0$.

$f(x_1)$ là giá trị cực tiểu của hàm số và $f(x_2)$ là giá trị cực đại của hàm số.

Số tiền vốn đầu tư vào việc mua rau được biểu thị bằng công thức $T(x)=h(x)-g(x)=x^2-30000x+100000000$.

Ta có: $T(x)=(x^2-30000x+225000000)+775000000$

$\Leftrightarrow T(x)=(x-15000)^2+775000000\ge 775000000$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=15000$ đồng.

Câu 5. Một công ty sản xuất khoai tây chiên giới hạn về kích thước hộp sao cho tổng chiều dài l của hộp khoai tây chiên và chu vi đường tròn đáy không vượt quá $84cm$ (để phù hợp với phương thức vận chuyển và chiều dài truyền thống của dòng sản phẩm này, minh họa như hình bên). Công ty đang tìm kích thước phù hợp để thiết kế hộp sao cho thể tích đựng khoai tây chiên là lớn nhất, thể tích đó là?



A. $\frac{21952}{\pi}cm^3$. **B.** $29152\ cm^3$.

C. $14576\ cm^3$. **D.** $\frac{14576}{\pi}cm^3$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try!

Đáp án: A

Lời giải

Do đề bài yêu cầu tìm thể tích lớn nhất của hộp khoai tây chiên và tổng chiều dài l và chu vi đường tròn đáy không vượt quá $84cm$ nên:

Nếu muốn thể tích lớn nhất ta sẽ lấy giới hạn max của tổng độ dài tức là $l+P=84\Leftrightarrow l+2\pi r=84$ với r là bán kính đường tròn đáy.

Khi đó: $l=84-2\pi r$.

Thể tích của hộp khoai tây chiên được tính bằng công thức:

$V=\pi r^2 l=\pi r^2(84-2\pi r)=84\pi r^2-2\pi^2 r^3=f(r)$.

Ta có: $f'(r)=168\pi r-6\pi^2 r^2=6\pi r(28-\pi r)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} r=0 \\ r=\frac{28}{\pi}\end{array}\right.$

Ta xét hàm số trên đoạn $\left[0;\frac{42}{\pi}\right]$, nên ta chỉ cần tính toán tại một số điểm đặc biệt: $\begin{cases} f(0)=0 \\ f\left(\frac{28}{\pi}\right)=\frac{21952}{\pi}=\max\limits_{\left[0;\frac{42}{\pi}\right]} f(r). \\ f\left(\frac{42}{\pi}\right)=0 \end{cases}$

Câu 5. Cần thiết kế các thùng dạng hình trụ có nắp đậy để đựng sản phẩm đã chế biến có dung tích $V\left(cm^3\right)$. Hãy xác định bán kính đường tròn đáy của hình trụ theo V để tiết kiệm vật liệu nhất.

A. $\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}\ cm$. **B.** $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\ cm$.

C. $\sqrt[3]{\frac{2V}{\pi}}\ cm$. **D.** $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\ cm$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI

Đáp án: D

Lời giải

Gọi hai kích thước của hình trụ lần lượt là r, h, trong đó r là bán kính đường tròn đáy và h là chiều cao của hình trụ.

Ta có mối quan hệ: $V=\pi r^2 h \Rightarrow h=\frac{V}{\pi r^2}$.

Để tiết kiệm chi phí nhất thì diện tích toàn phần của hình trụ phải nhỏ nhất .

Tức là: $f(r)=2\pi rh+2\pi r^2=2\pi r.\frac{V}{\pi r^2}+2\pi r^2=\frac{2V}{r}+2\pi r^2$

$=\frac{V}{r}+\frac{V}{r}+2\pi r^2 \overset{Cauchy}{\geq} 3.\sqrt[3]{\frac{V}{r}.\frac{V}{r}.2\pi r^2}=3\sqrt[3]{2\pi V^2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{V}{r}=2\pi r^2 \Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Extra Techniques:

Tips:

Đây là bài toán tổng quát, nên ta xét chi tiết bài toán này và ghi nhận công thức tổng quát để về sau có thể tối ưu hóa thời gian khi giải bài toán về hình trụ như thế này.

Extra Techniques:

Remark:

Bài giải bên không đi theo hướng dùng đạo hàm để khảo sát hàm số mà dùng bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm.

Review: *Bất đẳng thức Cauchy*

Với n số thực không âm $x_1,x_2,...,x_n$, bất đẳng thức Cauchy được định nghĩa theo công thức sau:

$x_1+x_2+...+x_n \geq n\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}$

Câu 6. Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2000000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ tăng thêm giá cho thuê mỗi căn hộ 100000 đồng một tháng thì sẽ có 2 căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất thì công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá là bao nhiêu một tháng?

A. 2225000. **B.** 2100000.

C. 2200000. **D.** 2250000.

Đáp án: D

Lời giải

Gọi số căn hộ bị bỏ trống là x, $\left(x\in[0;50]\right)$.

Số tiền 1 tháng thu được khi cho thuê nhà là:

$$S=(2000000+50000x)(50-x)=-50000x^2+500000x+100000000$$

Ta có: $S=-50000\left(x^2-10x+25\right)+101250000$

$$=-50000(x-5)^2+101250000\le 101250000$$

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $x=5$.

Như vậy, mỗi căn hộ được cho thuê với giá

$$2000000+5.50000=2250000$$

thì công ty sẽ nhận được thu nhập cao nhất.

Câu 7. Khi nuôi cá thí nghiệm trong một hồ, nếu trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ nuôi n con cá $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ thì trung bình sau mỗi vụ mỗi con cá nặng $P(n)=480-20n$ (gram). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ để sau mỗi vụ khối lượng cá thu được là nhiều nhất.

A. 10 con. **B.** 12 con.

C. 9 con. **D.** 15 con.

Extra Techniques:

Remark:

Bài bên thay vì dùng cách đánh giá theo bất đẳng thức ta cũng có thể thông qua đạo hàm để giải quyết bài toán.

Chẳng hạn ta có:

$S'=-100000x+500000$ và $S'=0\Leftrightarrow x=5$.

Tính toán tại một số điểm cần thiết, ta có:

$$\begin{cases}S(0)=100000000\\ S(5)=101250000=\max\limits_{[0;50]}S(x)\\ S(50)=0\end{cases}$$

Như vậy ta cũng thu được $x=5$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu đề bài, việc còn lại chỉ cần đi tính giá tiền cho thuê của mỗi một phòng là bao nhiêu.

Đáp án: D

Lời giải

Số lượng cá thu được trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ là:

$$f(n)=n.P(n)=n.(480-20n)=-20n^2+480n$$

$$\Leftrightarrow f(n)=-\left(20n^2-480n+2880\right)+2880=2880-20(n-12)^2$$

Mà $2880-20(n-12)^2\le 2880,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $n=12$.

Hay nói cách khác, ta cần phải thả 12 con cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ để sau mỗi vụ khối lượng cá thu được là nhiều nhất.

Câu 8. Một trang tại chăn nuôi dự định xây dựng một hầm biogas với thể tích 12 m^3 để chứa chất thải chăn nuôi và tạo khí sinh học. Dự kiến hầm chứa có dạng hình hộp chữ nhật có chiều sâu gấp rưỡi chiều rộng. Hãy xác định các kích thước đáy (dài, rộng) của hầm biogas để thi công tiết kiệm nguyên vật liệu nhất có thể (không tính đến ề dày của thành bể). Ta có kích thước (dài; rộng – tính theo đơn vị m, làm tròn đến một chữ số thập phân sau dấu phẩy) phù hợp yêu cầu là:

A. Dài $2,42m$ và rộng $1,82m$. **B.** Dài $2,74m$ và rộng $1,71m$.

C. Dài $2,26m$ và rộng $1,88m$. **D.** Dài $2,19m$ và rộng $1,91m$.

Đáp án: C

Lời giải

Nếu đặt chiều rộng của bể là $x\,(m)$ thì chiều sâu của bể sẽ có độ lớn là $1,5x\,(m)$. Lúc này chiều dài đáy của bể sẽ bằng:

$$l_d=\frac{V}{l_r.l_s}=\frac{12}{1,5x^2}=\frac{8}{x^2}\,(m)$$

Diện tích toàn phần của bể là: $S_{tp}=S_{xq}+2S_{đáy}=2.\left(x+\frac{8}{x^2}\right).1,5x+2.x.\frac{8}{x^2}$

$$\Rightarrow S_{tp}=3x^2+\frac{40}{x}=3x^2+\frac{20}{x}+\frac{20}{x}\overset{Cauchy}{\ge}3\sqrt[3]{3x^2.\frac{20}{x}.\frac{20}{x}}=3\sqrt[3]{1200}.$$

Extra Techniques:

Remark:

Do đề bài cho mối tương quan giữa chiều rộng và chiều sâu của bể, nên ta có thể quy hết về một ẩn, biểu diễn diện tích toàn phần của bể theo ẩn đó, từ đó xét hàm số để tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số này.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi: $3x^2 = \dfrac{20}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{20}{3}} \approx 1,88\ (m)$

Và chiều dài của bể có độ lớn bằng $\dfrac{8}{x^2} \approx 2,26\ (m)$.

Câu 9. Một xưởng sản xuất những thùng bằng kẽm hình hộp chữ nhật không có nắp và có các kích thước $x, y, z\ (dm)$. Biết tỉ số hai cạnh đáy là $x : y = 1 : 3$, thể tích của hộp bằng 18 lít. Để tốn ít vật liệu nhất thì kích thước của thùng là

A. $x = 2;\ y = 6;\ z = \dfrac{3}{2}$.

B. $x = 1;\ y = 3;\ z = 6$.

C. $x = \dfrac{3}{2};\ y = \dfrac{9}{2};\ z = \dfrac{8}{3}$.

D. $x = \dfrac{1}{2};\ y = \dfrac{3}{2};\ z = 24$.

Đáp án: A

Extra Techniques:

Remark:

Do đề bài cho mối tương quan giữa chiều rộng và chiều dài của đáy hình hộp chữ nhật và thể tích của hộp nên ta chỉ cần một biến để biểu thị sự biến thiên của chiều rộng (hoặc chiều dài) rồi dùng mối liên quan thứ nhất (tỉ lệ) để biểu diện chiều dài (chiều rộng) thông qua biến đã cho. Vận dụng mối liên quan trong công thức tính thể tích hình hộp $V = abc$ với a, b, c là độ dài ba kích thước là có thể biểu diễn cạnh còn lại theo ẩn ban đầu.

Lời giải

Ta có: $y = 3x$, lúc này theo đề bài ta có: $xyz = 18 \Leftrightarrow 3x^2 z = 18 \Leftrightarrow z = \dfrac{6}{x^2}$.

Khi đó: $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = 2\left(x + 3x\right).\dfrac{6}{x^2} + x.3x$

$\Rightarrow S_{tp} = \dfrac{48}{x} + 3x^2 = \dfrac{24}{x} + \dfrac{24}{x} + 3x^2 \overset{Cauchy}{\geq} 3\sqrt[3]{\dfrac{24}{x}.\dfrac{24}{x}.3x^2} = 36$.

Dấu " = " xảy ra khi $\dfrac{24}{x} = 3x^2 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \\ z = \dfrac{3}{2} \end{cases}$.

Một cách khác, ta có thể xét hàm $S_{tp}\left(x\right) = \dfrac{48}{x} + 3x^2$ trên khoảng $\left(0; +\infty\right)$.

Ta có: $S'_{tp} = -\dfrac{48}{x^2} + 6x = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (nhận).

Tính toán tại một số giá trị cần thiết: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} S_{tp}(x) = +\infty \\ S_{tp}(2) = 36 = \min\limits_{(0;+\infty)} S_{tp}(x). \\ \lim\limits_{x\to +\infty} S_{tp}(x) = +\infty \end{cases}$

Câu 10. Người ta cần xây một hồ bơi với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích là $\frac{500}{3}\ m^3$. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây hồ được tính theo mét vuông (gồm đáy hồ và bồn xung quanh thành hồ). Để chi phí thuê công nhân thấp nhất thì cần xây bờ hồ có chiều rộng là:

A. $5\ m$. **B.** $4\ m$. **C.** $10\ m$. **D.** $12\ m$.

Đáp án: A

Extra Techniques:

Remark:

Do chi phí thuê nhân công tính theo mét vuông, nên để chi phí thấp nhất thì ta đi tìm kích thước của hồ sao cho có tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi độ dài chiều rộng của bể bơi là $x\ (cm)$ khi đó chiều dài bể bơi là $2x\ (m)$. Chiều cao của bể bơi bằng: $h = \frac{500}{3.x.2x} = \frac{250}{3x^2}\ (m)$

Ta có biểu thức tính tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy theo x như sau:

$$S = f(x) = 2.(2x + x).\frac{250}{3x^2} + x.2x = \frac{500}{x} + 2x^2 = \frac{250}{x} + \frac{250}{x} + 2x^2$$

Khi đó: $S \overset{Cauchy}{\geq} 3.\sqrt[3]{\frac{250}{x}.\frac{250}{x}.2x^2} = 150\ (m^2)$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{250}{x} = 2x^2 \Rightarrow x = 5\ (m)$.

"Trên đây là một số Tips chúng tôi cảm thấy rất hữu dụng trong các bài toán hiện hành. Do mục đích phục vụ cho phần đông các bạn học sinh nên phần trình bày khá chi tiết và khá dài. Nhưng nếu bạn đọc hiểu bản chất vấn đề, thao tác sẽ ngắn gọn hơn, chuẩn xác hơn và quan trọng nhất vẫn là lợi thế về thời gian nếu biết các Tips này.

TỰ LUYỆN 4 MỨC ĐỘ

Câu 1. Cho số $a>0$. Trong số các tam giác vuông có tổng một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng a, tam giác có diện tích lớn nhất bằng?

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}a^2$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}a^2$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{9}a^2$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{18}a^2$.

Câu 2. Ông A dự định dùng hết $6,5m^2$ kính để làm một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

A. $2,26\ m^3$. **B.** $1,61\ m^3$.

C. $1,33\ m^3$. **D.** $1,50\ m^3$.

Câu 3. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{3}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 243 (m/s). **B.** 27 (m/s).

C. 144 (m/s). **D.** 36 (m/s).

Câu 4. Ông Nhân dự định sử dụng hết $5\ m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $1,01\ m^3$. **B.** $0,96\ m^3$.

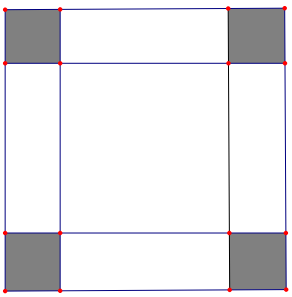
C. $1,33\ m^3$. **D.** $1,51\ m^3$.

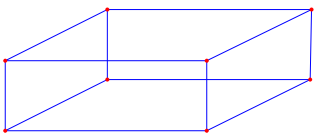
Câu 5. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được cho bởi công thức $c(t)=\frac{t}{t^2+1}\ (mg/L)$. Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

A. 4 giờ. **B.** 1 giờ.

C. 3 giờ. **D.** 2 giờ.

Câu 6. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.





A. $x=3$. **B.** $x=2$.

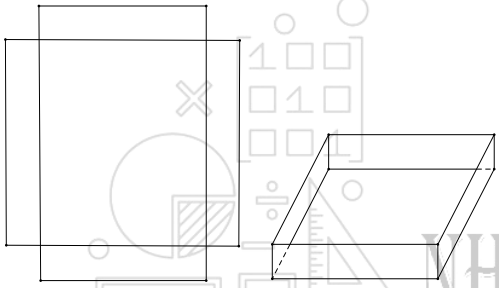
C. $x=4$. **D.** $x=6$.

Câu 7. Một sợi dây có chiều dài $28m$ được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài (theo đơn vị mét) của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất?

A. $\dfrac{56}{4+\pi}$. **B.** $\dfrac{112}{4+\pi}$.

C. $\dfrac{84}{4+\pi}$. **D.** $\dfrac{92}{4+\pi}$.

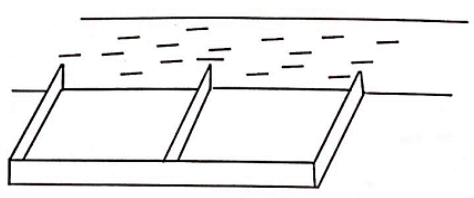
Câu 8. Cho một tấm nhôm hình chữ nhật có chiều dài bằng $10cm$ và chiều rộng bằng $8cm$. Người ta cắt bỏ ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(cm)$, rồi gập tấm nhôm lại (như hình vẽ) để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. $x=\dfrac{8-2\sqrt{21}}{3}$. **B.** $x=\dfrac{10-2\sqrt{7}}{3}$.

C. $x=\dfrac{9+\sqrt{21}}{9}$. **D.** $x=\dfrac{9-\sqrt{21}}{3}$.

Câu 9. Một người nông dân có 15.000.000 đồng muốn làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60.000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50.000 đồng một mét. Tìm diện tích lớn nhất của đất rào thu được



A. $3125m^2$. **B.** $50m^2$.

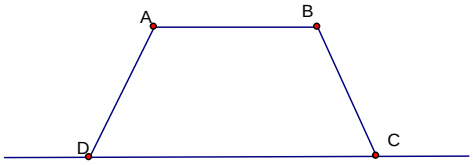
C. $1250m^2$. **D.** $6250m^2$.

Câu 10. Ông Khoa muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 288m^3. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/m^2. Nếu ông Khoa biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi ông Khoa trả chi phí thấp nhất để xây dựng bể đó là bao nhiêu (Biết độ dày thành bể và đáy bể không đáng kể)?

A. 90 triệu đồng. **B.** 168 triệu đồng.

C. 54 triệu đồng. **D.** 108 triệu đồng.

Câu 11. Một người nông dân có 3 tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài $12(m)$ và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ (bờ sông là đường thẳng DC không phải rào, mỗi tấm là một cạnh của hình thang). Hỏi ông ta có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu m^2?



A. $100\sqrt{3}$. **B.** $106\sqrt{3}$.

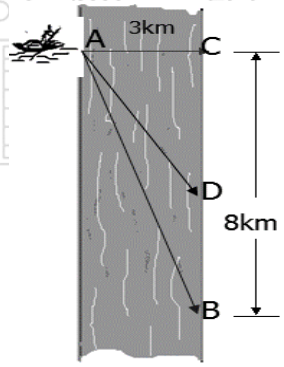
C. $108\sqrt{3}$. **D.** $120\sqrt{3}$.

Câu 12. Cho nửa đường tròn đường kính $AB=2$ và hai điểm C, D thay đổi trên nửa đường tròn đó sao cho $ABCD$ là hình thang. Diện tích lớn nhất của hình thang $ABCD$ bằng?

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

C. 1. **D.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

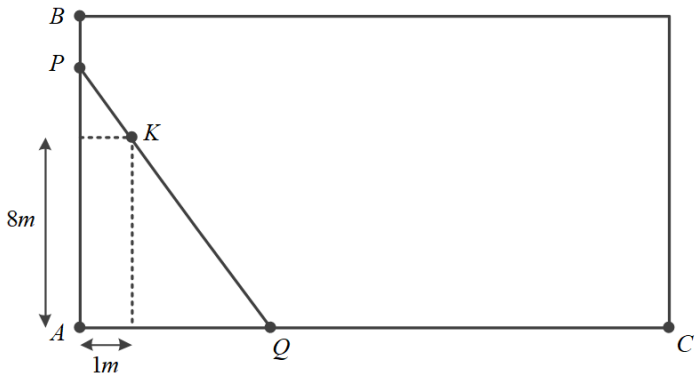
Câu 13. Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B, hay có thể chèo trực tiếp đến B, hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B. Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8$ km. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tính khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: giờ) để người đàn ông đến B.



A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{9}{\sqrt{7}}$.

C. $\dfrac{\sqrt{73}}{6}$. **D.** $1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}$.

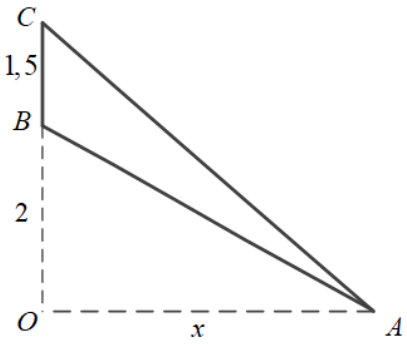
Câu 14. Một cái hồ rộng có dạng hình chữ nhật. Tại một góc nhỏ của hồ, người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB một khoảng có độ dài $1m$ và cách bờ AC $8m$, rồi dùng một cây sào ngăn một góc nhỏ của hồ để thả bèo (như hình vẽ bên dưới). Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB, AC và cây cọc K (giả thuyết đường kính cây sào không đáng kể).



A. $\dfrac{5\sqrt{65}}{4}$. **B.** $5\sqrt{5}$.

C. $9\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{71}}{4}$.

Câu 15. Một màn ảnh hình chữ nhật cao $1{,}5m$ được đặt trên cao $2m$ so với tầm mắt (tính từ mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng sao cho góc nhìn lớn nhất. Hãy xác định vị trí đó (Biết góc BAC được coi là góc nhìn)?

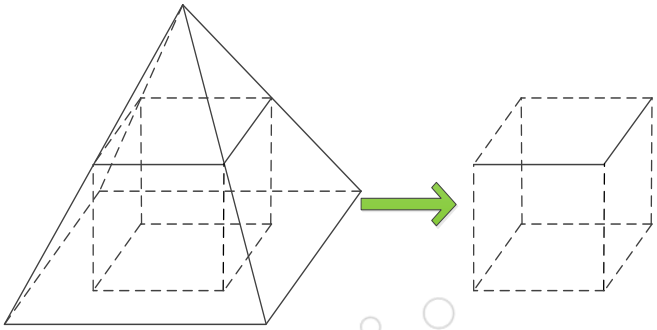


A. $\sqrt{5}\ m$. **B.** $2\ m$.

C. $\sqrt{7}\ m$. **D.** $3\ m$.

Câu 16. Bên trong một khối gỗ đồ chơi dạng hình chóp đều có thể tích V, người ta đục một khối hộp hình chữ nhật sao cho một mặt của

khối hộp đó nằm trên mặt đáy của khối chóp, các đỉnh còn lại của khối hộp lần lượt nằm trên các cạnh bên của khối chóp. Thể tích lớn nhất của khối hộp là?



A. $\frac{V}{2}$. **B.** $\frac{V}{4}$.

C. $\frac{4V}{9}$. **D.** $\frac{8V}{27}$.

Câu 17. Một cái ao hình $ABCDE$ (như hình vẽ), ở giữa ao có một mảnh vườn hình tròn có bán kính $10m$. Người ta muốn bắc một cầu từ bờ AB của ao đến vườn.

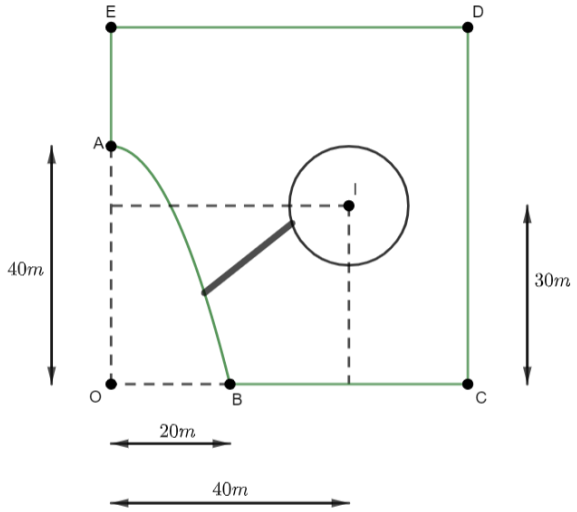
Tính gần đúng độ dài tối thiểu l của cây cầu biết:

- Hai bờ AE và BC nằm trên hai đường thẳng vuông góc với nhau, hai đường thẳng này cắt nhau tại điểm O;

- Bờ AB là một phần của một Parabol có đỉnh là điểm A và có trục đối xứng là đường thẳng OA.

- Độ dài đoạn OA và OB lần lượt là $40m$ và $20m$;

- Tâm I của mảnh vườn lần lượt cách đường thẳng AE và BC lần lượt $40m$ và $30m$.



A. $l \approx 17,7m$. **B.** $l \approx 25,7m$.

C. $l \approx 27,7m$. **D.** $l \approx 15,7m$.

Câu 18. Cho đường kính và chiều cao của hình trụ bằng 4. Một đường thẳng Δ thay đổi luôn cắt trục hình trụ và tạo với trục góc 30^o, đồng thời cắt hai hình tròn đáy. Quay Δ quanh trục hình trụ thu được một vật thể tròn xoay. Thể tích lớn nhất và nhỏ nhất của vật thể đó là?

A. 16π và $\frac{16\pi}{9}$. **B.** $\frac{\left(208-96\sqrt{3}\right)\pi}{9}$ và $\frac{16\pi}{9}$.

C. $\frac{64\pi}{9}$ và $\frac{16\pi}{9}$. **D.** $\frac{\left(209-96\sqrt{3}\right)\pi}{9}$ và $\frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$.

Câu 19. Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 (m/s) thì người lái xe phát hiện có hàng rào chắn ngang đường ở phía trước cách xe 45 m (tính từ đầu xe tới hàng rào) nên người lái đạp phanh. Từ thời điểm đó, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20$ (m/s), trong đó t là thời gian được tính từ lúc người lái đạp phanh. Khi xe dừng hẳn, khoảng cách từ xe đến hàng rào là bao nhiêu?

A. 4 m. **B.** 5 m. **C.** 3 m. **D.** 6 m.

NHÓM TOÁN ANH DÚI Never quit whatever makes you cry

Câu 20. Nhà thầy Hiếu trồng rất nhiều hoa ly để bán phục vụ tết. Trog ngày 29 tết âm lịch Thầy Hiếu bán hàng tại vườn từ lúc 6 giờ sáng đến 4 giờ chiều, cứ sau 1 tiếng thầy Hiếu lại đếm số cây hoa ly đã bán thì thấy số cây hoa ly bán được theo thời gian là $f(t)=15t^2-t^3$ (t: thời gian, đơn vị giờ). Giả sử $f'(t)$ là số cây bán được trong 1 giờ tại thời điểm t. Hỏi số cây hoa ly bán được nhiều nhất vào lúc mấy giờ?

A. 9 giờ sáng. **B.** 11 giờ trưa.

C. 2 giờ chiều. **D.** 4 giờ chiều.

Câu 21. Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm. Mỗi kg sản phẩm loại I cần 2 kg nguyên liệu và 30 giờ. Mỗi kg sản phẩm loại II cần 4 kg nguyên liệu và 15 giờ. Xưởng có 200 kg nguyên liệu và 1200 giờ làm việc, Biết rằng giá bán 1 kg sản phẩm loại I là 40 nghìn và 1 kg sản phẩm loại II là 30 nghìn. Xưởng sản xuất mỗi loại sản phẩm là bao nhiêu để thu được nhiều lợi nhuận nhất

A. 30 kg loại I và 40 kg loại II.

B. 20 kg loại I và 40 kg loại II.

C. 30 kg loại I và 20 kg loại II.

D. 25 kg loại I và 45 kg loại II.

Câu 22. Cho hình nón (N) có đường cao $SO=h$ và bán kính đáy bằng R, gọi M là điểm trên đoạn SO, đặt $OM=x\,(0<x<h)$. (C) là thiết diện của mặt phẳng (P) vuông góc với trục SO tại M, với hình nón (N). Giá trị x theo h để thể tích khối nón đỉnh O đáy là (C) lớn nhất là:

A. $x=\dfrac{h}{2}$. **B.** $x=\dfrac{h\sqrt{2}}{2}$.

C. $x=\dfrac{h\sqrt{3}}{2}$. **D.** $x=\dfrac{h}{3}$.

Câu 23. Khi sản xuất vỏ lon sữa bò có hình trụ với thể tích bằng V, nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon sữa bò là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ đó bằng V và diện tích toàn phần hình trụ là nhỏ nhất thì chiều cao h của lon sữa bò bằng bao nhiêu?

A. $h=\sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$. **B.** $h=\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi^3}}$.

C. $h=\sqrt[3]{\dfrac{V}{4\pi}}$. **D.** $h=\sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi^5}}$.

Câu 24. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kilogram thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi kilogram thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất $1,6\ kg$ thịt bò và $1,1\ kg$ thịt lợn. Giá tiền của một kg thịt bò là 160 nghìn đồng, một kg thịt lợn là 110 nghìn đồng. Gọi x, y lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó cần mua để tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipit trong thức ăn. Tính x^2+y^2?

A. $x^2+y^2=1,3$. **B.** $x^2+y^2=2,6$.

C. $x^2+y^2=1,09$. **D.** $x^2+y^2=0,58$.

Câu 25. Một cửa hàng bán cam với giá bán mỗi kg là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng

chỉ bán được khoảng $40kg$. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi kg 5000 đồng thì số kg bán được tăng thêm là $50kg$. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi kg là 30.000 đồng:

A. 44.000đ. **B.** 43.000đ.

C. 42.000đ. **D.** 41.000đ.

Câu 26. Một sợi dây có chiều dài $L\ (m)$ được chia thành ba phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình vuông, phần thứ hai được uốn thành tam giác đều có cạnh gấp hai lần cạnh của hình vuông, phần thứ ba được uốn thành hình tròn (như hình vẽ).



Hỏi độ dài cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để tổng diện tích 3 hình thu được là nhỏ nhất?

A. $\dfrac{7L}{49+\left(\sqrt{3}+1\right)\pi}\ (m)$.

B. $\dfrac{5L}{49+\left(\sqrt{3}+1\right)\pi}\ (m)$.

C. $\dfrac{5L}{25+\left(\sqrt{3}+1\right)\pi}\ (m)$.

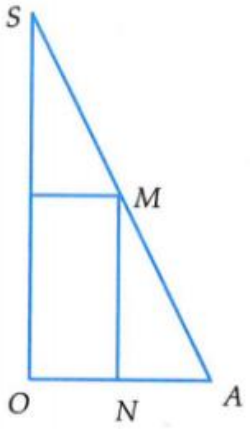
D. $\dfrac{7L}{25+\left(\sqrt{3}+1\right)\pi}\ (m)$.

Câu 27. Thầy Nhân dạy toán ở trường Đại học An Giang, tỉnh An Giang muốn xây dựng một hố ga dạng hình hộp chữ nhật có nắp bằng bê tông với thể tích $3m^3$, biết tỉ số chiều cao và chiều rộng của hố ga bằng $1,5$. Xác định chiều cao của hố ga để khi xây hố tiết kiệm được nguyên liệu nhất?

A. $1,2\ (\text{m})$. **B.** $\sqrt[3]{\dfrac{45}{8}}\ (\text{m})$.

C. $2\ (\text{m})$. **D.** $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{4}{9}}\ (\text{m})$.

Câu 28. Cho tam giác ΔSOA vuông tại O có $MN//SO$ với M, N lần lượt nằm trên cạnh SA, OA như hình vẽ bên dưới. Đặt $SO=h$ không đổi. Khi quay hình vẽ quanh SO thì tạo thành một hình trụ nội tiếp hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O bán kính $R=OA$. Tìm độ dài của MN theo h để thể tích khối trụ là lớn nhất.



A. $MN=\dfrac{h}{2}$. **B.** $MN=\dfrac{h}{3}$.

C. $MN=\dfrac{h}{4}$. **D.** $MN=\dfrac{h}{6}$.

Câu 29. Một thư viện nọ có 4 phương án cho thuê sách như sau

(1) Không cần mua thẻ mượn. Thuê mỗi cuốn

sách trả 5000đ.

(2) Mua thẻ mượn loại 20000đ/1 năm. Thuê mỗi cuốn sách trả 3000đ.

(3) Mua thẻ mượn loại 10000đ/1 năm. Thuê mỗi cuốn sách trả 4000đ.

(4) Mua thẻ mượn loại 60000đ/1 năm. Thuê mỗi cuốn sách trả 1000đ.

Nếu bạn mượn trên 20 cuốn sách trong 1 năm, nên chọn phương án nào để tốn ít tiền nhất?

A. Chọn (1). **B.** Chọn (2).

C. Chọn (3). **D.** Chọn (4).

Câu 30. Một xí nghiệp chế biến sữa muốn sản xuất những lon đựng sữa dạng hình trụ bằng vật liệu thiếc. Để giảm giá thành khi chế tạo một lon sữa người ta phải chọn kích thước phù hợp để ít tốn kém vật liệu nhưng đựng được nhiều sữa nhất. Hỏi phải chọn chiều cao h và bán kính đáy r của hình trụ theo tỉ lệ nào dưới đây để thỏa mãn yêu cầu đặt ra? (Thể tích khối trụ lớn nhất).

A. $2h=3r$. **B.** $h=r$.

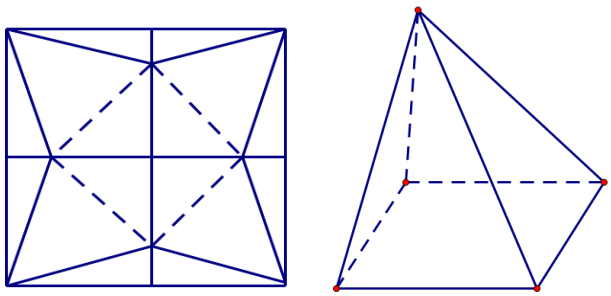
C. $h=3r$. **D.** $h=2r$.

Câu 31. Một vật chuyển động theo quy luật $S=-\frac{1}{2}t^3+9t^2+5$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và S (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 8 giây, kể từ khi vật bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu ?

A. 84 (m/s). **B.** 48(m/s).

C. 54(m/s). **D.** 104(m/s).

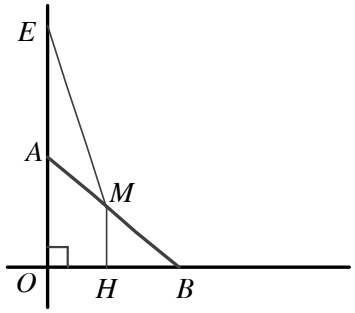
Câu 32. Một tấm nhôm hình vuông cạnh $10cm$. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn tam giác cân bằng nhau (xem hình vẽ), mỗi tam giác cân có chiều cao bằng x, rồi gấp tấm nhôm đó dọc theo đường nét đứt để được một hình chóp tứ giác đều. Tìm x để khối chóp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. $x=4$. **B.** $x=2$.

C. $x=1$. **D.** $x=\frac{3}{4}$.

Câu 33. Trên một đoạn đường giao thông có 2 con đường vuông góc với nhau tại O như hình vẽ. Một địa danh lịch sử có vị trí đặt tại M, vị trí M cách vị trí đường OE 125 m và cách đường OH $1km$. Vì lý do thực tiễn, người ta muốn làm một đoạn đường thẳng AB đi qua vị trí M, biết rằng giá để làm $100m$ đường là 150 triệu đồng.

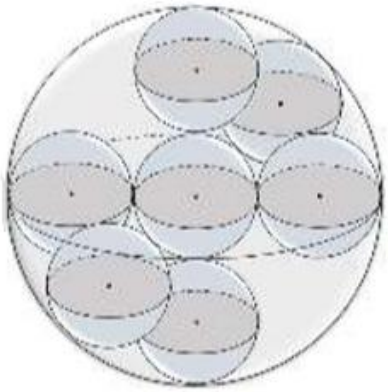


Chọn vị trí A và B để hoàn thành con đường với chi phí thấp nhất. Hỏi chi phí thấp nhất để hoàn thành con đường là bao nhiêu?

A. $1{,}9603$ (tỷ đồng). **B.** $2{,}3965$ (tỷ đồng).

C. $2{,}0963$ (tỷ đồng). **D.** 3 (tỷ đồng).

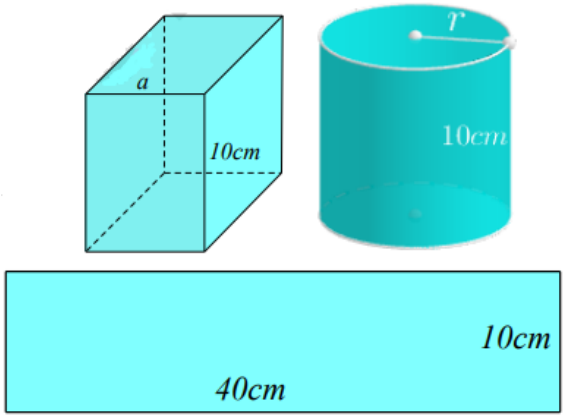
Câu 34. Hãng pha lê nổi tiếng Swarovski của Áo dự định thiết kế một viên pha lê hình cầu và đặt vào bên trong nó 7 viên ruby hình cầu nhỏ hơn, trong đó viên ruby ở chính giữa có tâm trùng với tâm của viên pha lê và tiếp xúc với 6 viên ruby còn lại, 6 viên ruby còn lại có kích thước bằng nhau và nằm ở các vị trí đối xứng nhau (qua tâm của viên pha lê) và tiếp xúc với viên pha lê (như hình vẽ). Biết viên pha lê có đường kính 10 cm và hãng này muốn thiết kế sao cho tổng thể tích các viên ruby bên trong là nhỏ nhất để tiết kiệm được lượng ruby. Khi đó bán kính của viên ruby ở giữa mà hãng pha lê cần thiết kế gần giá trị nào nhất sau đây?



A. $2{,}2\,\text{cm}$. **B.** $2{,}3\,\text{cm}$.

C. $2{,}4\,\text{cm}$. **D.** $2{,}5\,\text{cm}$.

Câu 35. Một tấm bìa hình chữ nhật có chiều dài 40cm và chiều rộng 10cm được cắt thành hai phần. Một phần được uốn thành hình hộp chữ nhật có hai đáy là hình vuông cạnh a, phần còn lại được uốn thành hình trụ có hai đáy là hình tròn bán kính r (không tính hai đáy của hình hộp chữ nhật và hình trụ) như hình vẽ sao cho tổng thể tích của khối hộp chữ nhật và khối trụ là nhỏ nhất. Khi đó tổng $(a+r)$ gần giá trị nào nhất trong các giá trị sau?



A. 8,3cm. **B.** 8,4cm.

C. 8,5cm. **D.** 8,6cm.

Câu 36. Nam muốn xây một bình chứa hình trụ có thể tích 72m^3. Đáy làm bằng bêtông giá 100 nghìn đồng $/\text{m}^2$, thành làm bằng tôn giá 90 nghìn đồng $/\text{m}^2$, nắp bằng nhôm giá 140 nghìn đồng $/\text{m}^2$. Vậy đáy của hình trụ có bán kính bằng bao nhiêu để chi phí xây dựng là thấp nhất ?

A. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$.

C. $\dfrac{3}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$. **D.** $\dfrac{3}{2\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$.

Câu 37. Người ta thiết kế một thùng chứa hình trụ (như hình vẽ) có thể tích V không đổi. Biết rằng giá của vật liệu làm mặt đáy và nắp của thùng bằng nhau và đắt gấp 3 lần so với giá vật liệu để làm mặt xung quanh của thùng (chi phí cho mỗi đơn vị diện tích). Gọi chiều cao của

thùng là h và bán kính đáy là r. Tính tỷ số $\frac{h}{r}$ sao cho chi phí vật liệu sản xuất thùng nhỏ nhất.



A. $\frac{h}{r}=1$.

B. $\frac{h}{r}=2$.

C. $\frac{h}{r}=6$.

D. $\frac{h}{r}=9$.

Câu 38. Công ty của ông Bình dự định đóng một thùng phi hình trụ (có đáy dưới và nắp đậy phía trên) bằng thép không rỉ để đựng nước. Chi phí trung bình cho 1m^2 thép không rỉ là 350000 đồng. Với chi phí không quá 6594000 đồng, hỏi công ty ông Bình có thể có được một thùng phi đựng được tối đa bao nhiêu tấn nước? (Lấy $\pi=3{,}14$)

A. $3{,}14$.

B. $6{,}28$.

C. $12{,}56$.

D. $9{,}52$.

Câu 39. Một nhà máy sản xuất bột trẻ em cần thiết kê bao bì cho một loại sản phẩm mới dạng khối trụ có thể tích $1dm^3$. Hỏi phải thiết kế hộp đựng này với diện tích toàn phần bằng bao nhiêu để tiết kiệm nguyên vật liệu nhất.

A. $3\sqrt[3]{2\pi}dm^2$.

B. $3\sqrt{2\pi}dm^2$.

C. $3\sqrt[3]{\pi}dm^2$.

D. $\sqrt[3]{4\pi}dm^2$.

Câu 40. Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa $24g$ hương liệu, 9 lít nước và $210g$ đường để pha chế nước cam và nước táo. Để pha chế 1 lít nước cam cần $30g$ đường, 1 lít nước và $1\,\text{g}$ hương liệu; pha chế 1 lít nước táo cần $10g$ đường, 1 lít nước và $4g$ hương liệu. Mỗi lít nước cam nhận được 60 điểm thưởng và mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Số điểm thưởng cao nhất mỗi đội chơi có thể nhận được bằng?

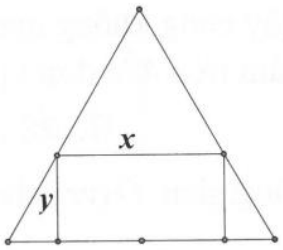
A. 620.

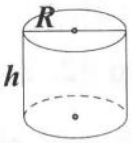
B. 640.

C. 660.

D. 600.

Câu 41. Từ một miếng tôn hình tam giác đều cạnh $\sqrt{3}m$, người ta dùng để chế tạo một thùng hình trụ không đáy có thể tích V bằng cách cắt ra một hình chữ nhật như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của V bằng bao nhiêu lít? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).





A. $45{,}92$.

B. $40{,}72$.

C. $65{,}03$.

D. $53{,}05$.

Câu 42. Một khối thủy tinh có dạng khối nón có chiều cao bằng $20\,\text{cm}$, bán kính đáy bằng 5 cm. Anh A cần cắt gọt khối thủy tinh trên để tạo thành một viên thủy tinh mới có dạng khối lăng trụ tứ giác đều. Thể tích lớn nhất của viên thủy tinh mới gần giá trị nào dưới đây?

A. $158{,}20\ cm^3$.

B. $148{,}15\ cm^3$.

C. $125\ cm^3$.

D. $150\ cm^3$.

Câu 43. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{2}t^3+9t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. $216(\text{m/s})$. **B.** $30(\text{m/s})$.

C. $400(\text{m/s})$. **D.** $54(\text{m/s})$.

Câu 44. Một ngôi biệt thự có 10 cây cột nhà hình trụ tròn, tất cả đều có chiều cao $4,2\,\text{m}$. Trong đó, 4 cây cột trước đại sảnh có đường kính $40\,\text{cm}$ và 6 cây cột còn lại bên thân nhà có đường kính $26\,\text{cm}$. Chủ nhà dùng loại sơn giả đá để sơn 10 cây cột đó. Nếu giá của một loại sơn giả đá là 380.000 đồng/m^2 (gồm cả tiền thi công) thì người chủ phải chi ít nhất bao nhiêu tiền để sơn 10 cây cột đó ? (Số tiền làm tròn đến hàng nghìn).

A. 14.647.000 (đồng). **B.** 13.627.000 (đồng).
C. 16.459.000 (đồng). **D.** 15.844.000 (đồng).

Câu 45. Người ta thiết kế một thùng chứa hình trụ có thể tích V cho trước. Biết rằng đơn giá của vật liệu làm mặt đáy và nắp của thùng bằng nhau và gấp 3 lần so với đơn giá vật liệu để làm mặt xung quanh của thùng (chi phí cho mỗi đơn vị diện tích). Gọi chiều cao của thùng là h và bán kính đáy là r. Tính tỉ số $\frac{h}{r}$ sao cho chi phí vật liệu sản xuất thùng là nhỏ nhất?

A. $\frac{h}{r}=\sqrt{2}$. **B.** $\frac{h}{r}=2$.

C. $\frac{h}{r}=6$. **D.** $\frac{h}{r}=3\sqrt{2}$.

Câu 46. Một nhà máy sản xuất bột trẻ em cần thiết kê bao bì cho một loại sản phẩm mới dạng khối trụ có thể tích $1dm^3$. Hỏi phải thiết kế hộp đựng này với diện tích toàn phần bằng bao nhiêu để tiết kiệm nguyên vật liệu nhất.

A. $3\sqrt[3]{2\pi}dm^2$. **B.** $3\sqrt{2\pi}dm^2$.

C. $3\sqrt[3]{\pi}dm^2$. **D.** $\sqrt[3]{4\pi}dm^2$.

Câu 47. Để cắt được 40 thanh sắt có chiều dài $2,5\,\text{m}$ và 60 thanh sắt có chiều dài $1,6\,\text{m}$ từ các thanh sắt có chiều dài $6\,\text{m}$ thì cần ít nhất bao nhiêu thanh sắt có chiều dài $6\,\text{m}$?

A. 33. **B.** 35. **C.** 34. **D.** 36.

Câu 48. Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa $24\,\text{g}$ hương liệu, 9 lít nước và $210\,\text{g}$ đường để pha chế nước cam và nước táo. Để pha chế 1 lít nước cam cần $30\,\text{g}$ đường, 1 lít nước và $1\,\text{g}$ hương liệu; pha chế 1 lít nước táo cần $10\,\text{g}$ đường, 1 lít nước và $4\,\text{g}$ hương liệu. Mỗi lít nước cam nhận được 60 điểm thưởng và mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Số điểm thưởng cao nhất mỗi đội chơi có thể nhận được bằng?

A. 620. **B.** 640. **C.** 660. **D.** 600.

Câu 49. Trong tất cả các hình nón tròn xoay mà đường sinh có độ dài bằng 1, hình nón có thể tích lớn nhất V_{max} bằng bao nhiêu?

A. $V_{max}=\frac{\pi}{6\sqrt{2}}$. **B.** $V_{max}=\frac{\pi}{24}$.

C. $V_{max}=\frac{\pi}{6}$. **D.** $V_{max}=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

Câu 50. Trong tất cả các hình trụ mà tổng độ dài đường sinh và bán kính đường tròn đáy bằng 1 thì hình trụ có thể tích lớn nhất $(V_{\max})$ bằng bao nhiêu?

A. $V_{\max}=\dfrac{\pi}{8}$. **B.** $V_{\max}=\dfrac{4\pi}{27}$.

C. $V_{\max}=\dfrac{\pi}{6}$. **D.** $V_{\max}=\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

Câu 51. Người ta cưa một cây gỗ hình trụ tròn dài $1\,\text{m}$, với đường kính cây gỗ là $60\,\text{cm}$ thành một hộp gỗ hình chữ nhật dài 1m. Người ta phải tìm cách để hộp đó có thể tích lớn nhất. Thể tích lớn nhất đó bằng bao nhiêu?

A. $V_{\max}=0{,}18\,m^3$. **B.** $V_{\max}=\dfrac{\pi}{12}m^3$.

C. $V_{\max}=\dfrac{\pi}{6}m^3$. **D.** $V_{\max}=0{,}2\,m^3$.

Câu 52. Xét các hình trụ có diện tích xung quanh bằng nhau và bằng 2π thì hình trụ có thể tích V lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $\text{V}_{\max}=\dfrac{\pi}{3}$. **B.** $\text{V}_{\max}=\pi$.

C. $\text{V}_{\max}=\dfrac{\pi^3}{9}$. **D.** $\text{V}_{\max}$ không tồn tại.

Câu 53. Trong các hình chóp lục giác đều nội tiếp trong mặt cầu bán kính bằng 1 thì hình chóp có thể tích V_{max} bằng bao nhiêu?

A. $\text{V}_{\max}=\dfrac{16\sqrt{3}}{27}$. **B.** $\text{V}_{\max}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\text{V}_{\max}=\sqrt{3}$. **D.** $\text{V}_{\max}=\dfrac{4}{3}$.

Câu 54. Xét các hình trụ tròn mà thiết diện với hình trụ với một mặt phẳng đi qua trục hình trụ là một hình chữ nhật có chu vi bằng 4. Tìm thể tích lớn nhất $(V_{\max})$ của hình trụ đó.

A. $V_{\max}=\dfrac{8\pi}{27}$. **B.** $V_{\max}=\dfrac{\pi}{8}$.

C. $V_{\max}=\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $V_{\max}=\dfrac{2\pi}{27}$.

Câu 55. Xét các hình nón có đường sinh $l=1$. Xác định thể tích lớn nhất của hình nón ($\text{V}_{\max}=?$).

A. $\text{V}_{\max}=\dfrac{\pi}{24}$. **B.** $\text{V}_{\max}=\dfrac{\pi}{6\sqrt{2}}$.

C. $\text{V}_{\max}=\dfrac{\pi}{6}$. **D.** $\text{V}_{\max}=\dfrac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

Câu 56. Xét các trụ tròn có tổng bình phương của đường sinh và bán kính đường tròn bằng 3, hình trụ có thể tích lớn nhất $(V_{\max})$ bằng bao nhiêu?

A. $(V_{\max})=\pi\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^3$. **B.** $(V_{\max})=2\pi$.

C. $(V_{\max})=2\pi\sqrt{3}$. **D.** $(V_{\max})=\pi\sqrt{2}$.

Câu 57. Trong các hình chóp tứ giác đều nội tiếp trong mặt cầu bán kính bằng 2 thì hình chóp có thể tích lớn nhất $(V_{\max})$ bằng bao nhiêu?

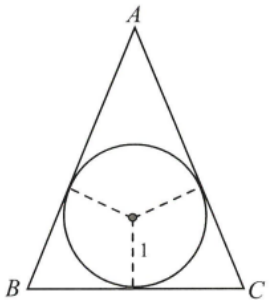
A. $V_{\max}=\left(\dfrac{8}{9}\right)^3$. **B.** $V_{\max}=\dfrac{2^9}{9^2}$.

C. $V_{\max}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^3$. **D.** $V_{\max}=\dfrac{256}{27}$.

Câu 58. Xét các tam giác cân ABC (đỉnh A)

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never give up anywhere unless you try

ngoại tiếp đường tròn có bán kính $r=1$. Tìm $S_{\Delta ABC_{\min}}$?



A. $\min S=\left(1+\sqrt{2}\right)^2$. **B.** $\min S=4$.

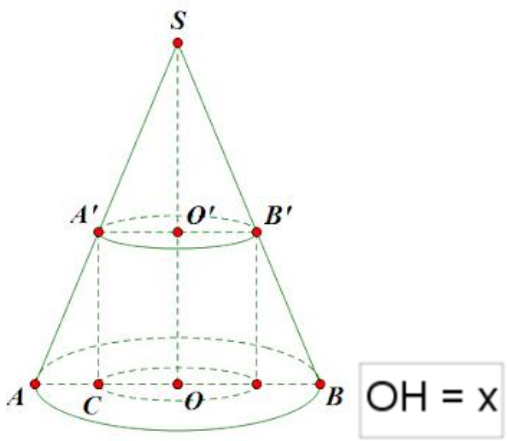
C. $\min S=3\sqrt{2}$. **D.** $\min S=3\sqrt{3}$.

Câu 59. Cho tứ diện $ABCD$ có $CD=2x$ $(x>0)$ các cạnh còn lại đều bằng 2. Xác định x để thể tích $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $x=2$. **B.** $x=1$.

C. $x=2\sqrt{2}$. **D.** $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Câu 60. Một nóc tòa nhà cao tầng có dạng hình nón. Người ta muốn xây một bể nước có dạng một hình trụ nội tiếp trong hình nón để chứa nước (như hình vẽ minh họa). Cho biết $SO=h; OB=R; OH=x, (0<x<h)$. Tìm thể tích lớn nhất của hình trụ.



A. $\frac{4\pi R^2h}{27}$. **B.** $\frac{2\pi R^2h}{9}$.

C. $\frac{2\pi R^2h}{27}$. **D.** $\frac{4\pi R^2h}{9}$.

Câu 61. Một nhà sản xuất cần thiết kế một thùng sơn dạng hình trụ có nắp đậy với dug tích là 20 lít. Cần phải thiết kế thùng sơn đó với bán kính nắp đậy là bao nhiêu (cm) để nhà sản xuất tiết kiệm được vật liệu nhất?

A. $\frac{200}{\pi}$. **B.** $\frac{100}{\sqrt[3]{\pi}}$.

C. $\sqrt[3]{\frac{10000}{\pi}}$. **D.** $\frac{200}{\sqrt{\pi}}$.

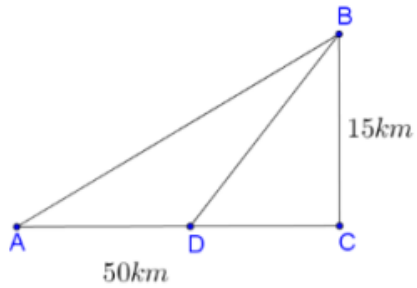
Câu 62. Đến mùa sinh sản, một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một quãng đường 240 km. Vận tốc dòng nước là 3 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước yên lặng là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của con cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v)=cv^3t$, trong đó c là hằng số, E được tính bằng jun. Tìm vận tốc của con cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.

A. 5 km/h. **B.** 6 km/h.

C. 9 km/h. **D.** $4,5$ km/h.

Câu 63. Một người cần đi từ địa điểm A bên bờ biển đến hòn đảo B. Biết rằng khoảng cách từ đảo B đến bờ biển là $BC=15km$ (như hình vẽ), khoảng cách $AC=50km$. Người đó có thể đi đường thủy hoặc đi đường bộ rồi đi đường thủy. Biết rằng kinh phí đi đường thủy là 7 (nghìn đồng/km), đi đường bộ là 5 (nghìn đồng/km). Hỏi người đó phải đi đường bộ một khoảng bằng bao nhiêu để kinh phí đi là nhỏ nhất? (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)

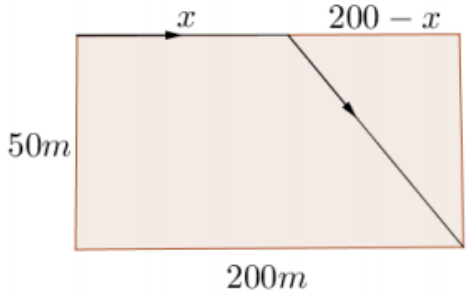
NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try



A. $35,5$. **B.** $34,7$.

C. $36,5$. **D.** $33,7$.

Câu 64. Có một cái hồ rộng $50\,\text{m}$, dài $200\,\text{m}$. Một vận động viên chạy phối hợp với bơi (bắt buộc cả hai) cần đi từ góc này qua góc đối diện bằng cách cả chạy và bơi (như hình vẽ). Hỏi rằng sau khi chạy được bao xa (quãng đường x) thì nên nhảy xuống bơi để đến đích nhanh nhất? Biết rằng vận tốc bơi là $1,5\,\text{m/s}$ và vận tốc chạy là $4,5\,\text{m/s}$.



A. $x \approx 197,5m$. **B.** $x \approx 183,3m$.

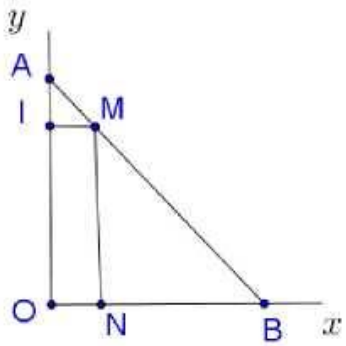
C. $x \approx 182,3m$. **D.** $x \approx 152,3m$.

Câu 65. Trong hội trại kỉ niệm ngày thành lập Đoàn thanh niên Cộng sản Hồ Chí Minh 26/3, ban tổ chức phát cho mỗi lớp một đoạn dây dài $16\,\text{m}$ không co dãn để khoanh trên một khoảng đất trống một hình chữ nhật có các cạnh là các đoạn của sợi dây đó. Phần đất để dựng trại chính là hình chữ nhật được tạo thành. Hỏi diện tích lớn nhất có thể của phần dựng trại là bao nhiêu mét vuông?

A. 16m^2. **B.** 8m^2.

C. 10m^2. **D.** 12m^2.

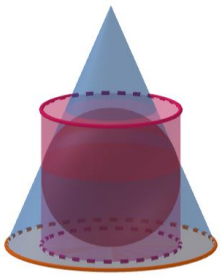
Câu 66. Trên một đoạn đường giao thông có hai con đường vuông góc với nhau tại O như hình vẽ. Một địa danh có vị trí đặt tại M, vị trí M cách đường Oy $216m$ và cách đường Ox $1000m$. Vì lý do thực tiễn, người ta muốn làm một đoạn đường thẳng AB đi qua vị trí M, biết rằng giá để làm $100\,\text{m}$ đường là 200 triệu đồng. Chọn vị trí A và B để hoàn thành con đường với chi phí thấp nhất. Hỏi chi phí thấp nhất để hoàn thành con đường là bao nhiêu?



A. $2,093$ tỷ đồng. **B.** $2,153$ tỷ đồng.

C. $1,967$ tỷ đồng. **D.** $3,172$ tỷ đồng.

Câu 67. Một hình cầu nội tiếp trong một hình nón tròn xoay. Một hình trụ ngoại tiếp hình cầu đó và có đáy dưới nằm trong mặt phẳng đáy của hình nón. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối nón và khối trụ. Giá trị nhỏ nhất của của $\dfrac{V_1}{V_2}$ là?



A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{3}{7}$.

C. $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Câu 68. Một xưởng làm cơ khí nhận làm những chiếc thùng phi với thể tích theo yêu cầu là 2000π lít mỗi chiếc. Hỏi bán kính đáy và chiều cao của thùng lần lượt bằng bao nhiêu để tiết kiệm vật liệu nhất?

A. 1 m và 2 m. **B.** 2 dm và 1 dm.

C. 2 m và 1 m. **D.** 1 dm và 2 dm.

Câu 69. Chi phí nhiên liệu của một chiếc tàu chạy trên sông được chia làm hai phần.

Phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc bằng 480 nghìn đồng trên 1 giờ.

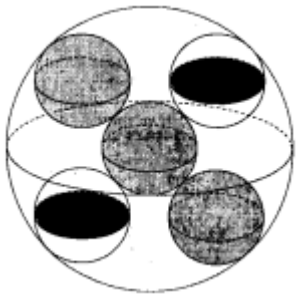
Phần thứ hai tỷ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v=10(km/h)$ thì phần thứ hai bằng 30 nghìn đồng/giờ.

Hãy xác định vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1km đường sông là nhỏ nhất (kết quả làm tròn đến số nguyên)

A. 10 (km/giờ). **B.** 25 (km/giờ).

C. 15 (km/giờ). **D.** 20 (km/giờ).

Câu 70. Bên trong một khối cầu có bán kính 1 m, người ta đặt 1 khối cầu A có tâm trùng với tâm của khối cầu ban đầu, khối cầu A có bán kính thay đổi. Tiếp đó người ta đặt 4 khối cầu B, C, D và E giống nhau và nằm ở các vị trí đối xứng nhau, tiếp xúc với khối cầu A và tiếp xúc với khối cầu ban đầu. Hỏi tổng thể tích của 5 khối cầu A, B, C, D, E nhỏ nhất là bao nhiêu?



A. $0,72m^3$. **B.** $0,70m^3$.

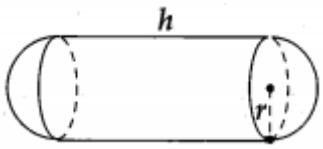
C. $0,68m^3$. **D.** $0,66m^3$.

Câu 71. Cho hình nón có chiều cao h. Tính chiều cao x của khối trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong hình nón theo h.

A. $x=\frac{h}{2}$. **B.** $x=\frac{h}{3}$.

C. $x=\frac{2h}{3}$. **D.** $x=\frac{h}{\sqrt{3}}$.

Câu 72. Một kĩ sư được một công ty xăng dầu thuê thiết kế một mẫu bồn cầu chứa xăng với thể tích V cho trước, hình dạng như hình bên, các kích thước r, h thay đổi sao cho nguyên vật liệu làm bồn xăng là ít nhất.



Người kĩ sư này phải thiết kế kích thước h như thế nào để đảm bảo được đúng yêu cầu mà công ty xăng dầu đã đưa ra

A. $h=0$. **B.** $h=\frac{\sqrt[3]{V}}{\pi}$.

C. $h=2\sqrt[3]{V}$. **D.** $h=\frac{\sqrt[3]{V}}{2}$.

ĐÁP ÁN

i \ j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	D	D	A	B	B	B	D	D
1	D	C	B	D	B	C	C	A	B	B
2	B	B	D	A	A	C	C	B	B	D
3	D	C	C	C	B	B	C	C	B	A
4	B	D	B	D	D	C	A	B	B	D
5	B	A	D	A	A	D	B	B	D	D
6	A	C	D	B	C	A	D	C	A	D
7	A	B	A							
8										
9										

Ghi chú: Đáp án là sự kết hợp giữa dòng i và cột j. Ví dụ: **Câu 24A** (giao của dòng 2 và cột 4).

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Giả sử tam giác ABC vuông ở A thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Giả sử $AB+BC=a \Rightarrow AB=a-BC$

Đặt $BC=x;\ 0<x<a$.

$\Rightarrow AB=a-x$ và

$AC=\sqrt{x^2-(a-x)^2}=\sqrt{2ax-a^2}$.

Diện tích tam giác ABC là:

$S=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-a^2}$.

Xét hàm số: $f(x)=\frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-a^2}$.

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2ax-a^2}+(a-x).\frac{a}{\sqrt{2ax-a^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-2ax+a^2+a^2-ax}{\sqrt{2x^2-a^2}}\right)=\frac{1}{2}.\frac{2a^2-3ax}{\sqrt{2x^2-a^2}}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{2a}{3}$.

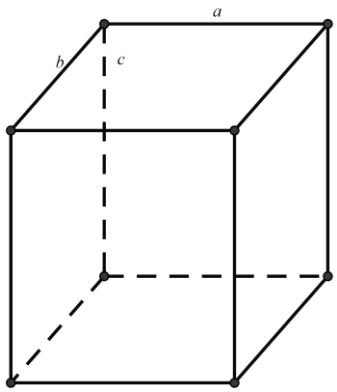
x	0		$\frac{2a}{3}$		a
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

Vậy diện tích lớn nhất của tam giác ABC là:

$S=f\left(\frac{2a}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{18}a^2$.

Đáp án D

Câu 2.



Giả sử hình hộp chữ nhật có kích thước như hình vẽ. Ta có dung tích của bể cá: $V=abc$

Mặt khác theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} ab+2bc+2ac=6,5 \\ a=2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2+6bc=6,5 \\ a=2b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=\frac{6,5-2b^2}{6b} \\ a=2b \end{cases}$$

Khi đó: $V=2b^2.\frac{6,5-2b^2}{6b} \Leftrightarrow V=\frac{6,5b-2b^3}{3}$.

Xét hàm số: $f(b)=\frac{6,5b-2b^3}{3}$.

Bảng biến thiên:

b	0		$\frac{\sqrt{39}}{6}$		$+\infty$
$f'(b)$		$+$	0	$-$	
$f(b)$	0	↗	$f\left(\frac{\sqrt{39}}{6}\right)$	↘	$-\infty$

Vậy bể cá có dung tích lớn nhất là:

$f\left(\frac{\sqrt{39}}{6}\right)=1,50\ m^3$.

Đáp án D

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Câu 3. Ta có: $v = s' = -t^2 + 12t$; $v' = -2t + 12$; $v' = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

Bảng biến thiên:

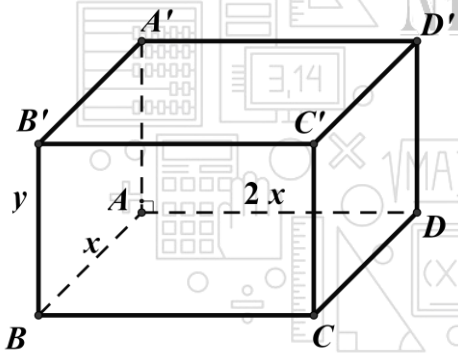
t	0		6		9
v'		+	0	−	
v		↗	36	↘	

Nhìn bảng biến thiên ta thấy vận tốc đạt giá trị lớn nhất khi $t = 6$.

Giá trị lớn nhất là $v(6) = 36\text{m/s}$.

Đáp án D

Câu 4.



Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và chiều cao của bể cá (điều kiện $x, y > 0$).

Ta có thể tích bể cá: $V = 2x^2 y$.

Theo đề bài ta có: $2xy + 2.2xy + 2x^2 = 5$

$\Leftrightarrow 6xy + 2x^2 = 5$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{5 - 2x^2}{6x}$ (Điều kiện kiện

$y > 0 \Leftrightarrow 5 - 2x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < \sqrt{\dfrac{5}{2}}$)

$\Rightarrow V = 2x^2 \dfrac{5 - 2x^2}{6x} = \dfrac{5x - 2x^3}{3} \Rightarrow V' = \dfrac{5 - 6x^2}{3}$

$\Rightarrow V' = 0 \Leftrightarrow 5 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{5}{6}}$

x	0		$\sqrt{\frac{5}{6}}$		$\sqrt{\frac{5}{2}}$
V'		+	0	−	
V	0	↗	$\frac{5\sqrt{30}}{27}$	↘	0

$\Rightarrow V_{\max} = \dfrac{5\sqrt{30}}{27} \approx 1{,}01\, m^3$.

Đáp án A

Câu 5. Xét hàm số: $c(t) = \dfrac{t}{t^2 + 1}$, $(t > 0)$.

$c'(t) = \dfrac{1 - t^2}{(t^2 + 1)^2}$.

$c'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \end{array}\right.$.

t	0		1		$+\infty$
$c'(t)$		+	0	−	
$c(t)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

Với $t = 1$ giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất.

Đáp án B

Câu 6. Ta có: $h = x\,(cm)$ là đường cao hình hộp

Vì tấm nhôm được gấp lại tạo thành hình hộp

nên cạnh đáy của hình hộp là: $12-2x\,(cm)$

Vậy diện tích đáy hình hộp có độ lớn bằng: $S=(12-2x)^2\,(cm^2)$.

Ta có: $\begin{cases}x>0\\12-2x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x<6\end{cases}\Leftrightarrow x\in(0;6)$

Thể tích của hình hộp là: $V=S.h=x.(12-2x)^2$

Xét hàm số: $y=x.(12-2x)^2$, $\forall x\in(0;6)$.

Ta có:

$y'=(12-2x)^2-4x(12-2x)=(12-2x)(12-6x)$

$y'=0\Leftrightarrow(12-2x).(12-6x)=0\Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=6$ (loại).

x	0		2		6
y'	▩	+	0	−	▩
y	▩	↗		↘	▩

Suy ra với $x=2$ thì thể tích hộp là lớn nhất và giá trị lớn nhất đó là $y(2)=128$.

Đáp án B

Câu 7. Gọi chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông là $x\,(m)$ $(0<x<28)$

→ chiều dài của đoạn dây làm thành hình tròn là $28-x\ (m)$

+) Diện tích hình vuông là: $\left(\frac{x}{4}\right)^2=\frac{x^2}{16}$.

+) Bán kính hình tròn là: $R=\frac{28-x}{2\pi}$.

→ Diện tích hình tròn:

$$\pi R^2=\pi.\left(\frac{28-x}{2\pi}\right)^2=\frac{784-56x+x^2}{4\pi}.$$

+) Tổng diện tích hai hình:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{784-56x+x^2}{4\pi}=\left(\frac{\pi+4}{16\pi}\right)x^2-\frac{14}{\pi}x+\frac{196}{\pi}.$$

Xét $f(x)=\left(\frac{\pi+4}{16\pi}\right)x^2-\frac{14}{\pi}x+\frac{196}{\pi}$.

Nhận thấy $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{14}{\pi}.\frac{16\pi}{2(\pi+4)}=\frac{112}{\pi+4}$$

Vậy chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông để tổng diện tích của hai hình đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{112}{4+\pi}\,m$.

Đáp án B

Câu 8. Ta có: $h=x\,(cm)$ là đường cao hình hộp.

Vì tấm nhôm được gấp lại tạo thành hình hộp nên cạnh đáy của hình hộp là: $10-2x\,(cm)$ và $8-2x\,(cm)$.

Vậy diện tích đáy hình hộp có độ lớn bằng:

$$S=(10-2x)(8-2x)\,(cm^2).$$

Ta có: $\begin{cases}x>0\\10-2x>0\\8-2x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x<4\end{cases}\Leftrightarrow x\in(0;4)$.

Thể tích của hình hộp là:

$$V=S.h=x.(10-2x).(8-2x).$$

Xét hàm số: $y=x.(10-2x).(8-2x)\forall x\in(0;4)$

Ta có: $y'=12x^2-72x+80;$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{9+\sqrt{21}}{3}>4\ (l)\\ x=\dfrac{9-\sqrt{21}}{3}\quad (n)\end{array}\right.$$

x	0		$\frac{9-\sqrt{21}}{3}$		4
y'		+	0	−	
y		↗		↘	

Suy ra với $x=\dfrac{9-\sqrt{21}}{3}$ thì thể tích hộp là lớn nhất và giá trị lớn nhất.

Đáp án D

Câu 9. Gọi x là chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E (trong ba mặt song song, $x>0$).

Gọi y là chiều dài mặt hàng rào hình chữ E song song với bờ sông ($y>0$).

Số tiền phải làm là:

$$x.3.50000+y.60000=15.000.000\Leftrightarrow y=\frac{500-5x}{2}$$

Diện tích đất:

$$S=x.y=x.\frac{500-5x}{2}=250x-\frac{5}{2}x^2$$

Ta có: $S'=250-5x.$

$$S'=0\Leftrightarrow 250-5x\Leftrightarrow x=50.$$

Bảng biến thiên:

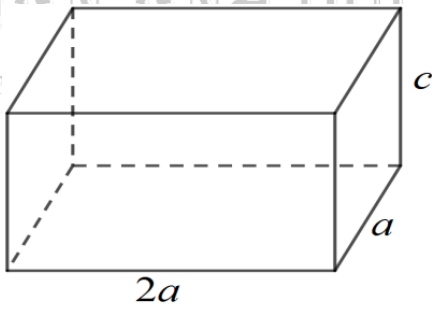
x	0		50		$+\infty$
S'		+	0	−	
S	0	↗	6250	↘	$-\infty$

Vậy: $\max\limits_{(0;+\infty)}S=6250\ (m^2)$ khi $x=50.$

Đáp án D

Câu 10. Theo bài ra ta có để chi phí thuê nhân công là thấp nhất thì ta phải xây dựng bể sao cho tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy là nhỏ nhất.

Gọi ba kích thước của bể là a, $2a$, c $\left(a(m)>0,c(m)>0\right).$



Ta có diện tích cách mặt cần xây là:
$S=2a^2+4ac+2ac=2a^2+6ac.$

Thể tích bể: $V=a.2a.c=2a^2c=288\Rightarrow c=\dfrac{144}{a^2}$

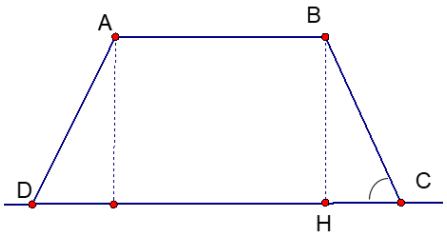
Suy ra: $S=2a^2+6a.\dfrac{144}{a^2}=2a^2+\dfrac{864}{a}$

$$S=2a^2+\frac{432}{a}+\frac{432}{a}\geq 3.\sqrt[3]{2a^2.\frac{432}{a}.\frac{432}{a}}=216.$$

Vậy $S_{\min}=216\text{m}^2$, khi đó chi phí thấp nhất là:
$216.500000=108$ triệu đồng.

Đáp án D

Câu 11.



Kẻ đường cao BH, gọi số đo 2 góc ở đáy CD của hình thang là $x, x \in (0°;90°)$.

Diện tích mảnh vườn là: $S = \frac{1}{2} BH(AB + CD)$

$$S = \frac{1}{2} BC.\sin x(2.AB + 2BC.\cos x)$$

$$S = \frac{1}{2} AB^2 (2\sin x + \sin 2x)$$

Xét hàm số $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ với $x \in (0^0;90^0)$ có $f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x$.

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos x + 2\cos 2x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -1 \end{array}\right.$$

Do $x \in (0^0;90^0)$ nên ta nhận

$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 60^0$.

Ta có bảng biến thiên:

x	0^0		60^0		90^0
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	

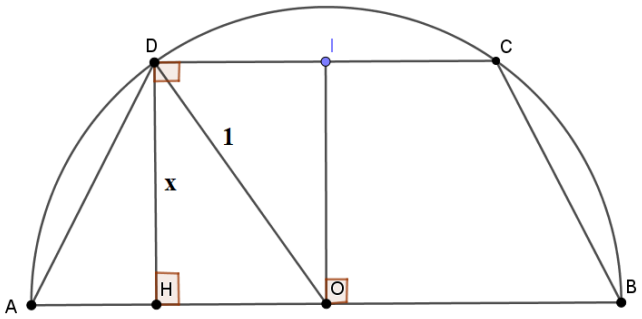
Từ bảng biến thiên ta thấy: $\max\limits_{(0^0;90^0)} f(x) \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$

đạt được tại $x = 60^0$.

$\Rightarrow \max S = 108\sqrt{3}(m^2)$ khi góc ở đáy CD của hình thang bằng 60^0 $(C = D = 60^0)$.

Đáp án C

Câu 12.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên AB, I là trung điểm của đoạn CD và O là trung điểm của AB. Đặt $DH = x$, $0 < x < 1$. Ta có $DC = 2DI = 2OH = 2\sqrt{OD^2 - DH^2} = 2\sqrt{1 - x^2}$.

Diện tích của hình thang $ABCD$ là

$$S = f(x) = \frac{(AB + CD)DH}{2} = \left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right)x.$$

Ta có $f'(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2} + 1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} + 1 - 2x^2 = 0$ (*)

Đặt $t = \sqrt{1 - x^2}$, (điều kiện $t \ge 0$) khi đó phương trình (*) trở thành $2t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Với $t=-1$ → loại.

Với $t=\dfrac{1}{2}$ ta có:

$$\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^2=\frac{3}{4}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	1

Vậy diện tích lớn nhất của hình thang $ABCD$ bằng $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

Đáp án B

Câu 13. Cách 1: Anh chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B

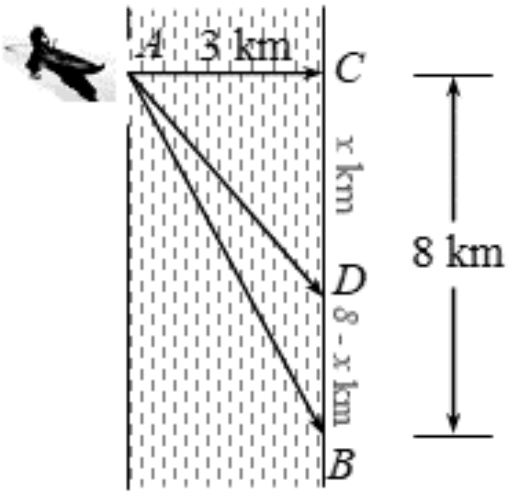
Thời gian chèo thuyền trên quãng đường AC: $\dfrac{3}{6}=0,5$ (giờ)

Thời gian chạy trên quãng đường CB: $\dfrac{8}{8}=1$ (giờ)

Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $1,5$ (giờ).

Cách 2: Chèo trực tiếp trên quãng đường $AB=\sqrt{3^2+8^2}=\sqrt{73}$ mất $\dfrac{\sqrt{73}}{6}\approx 1^{\text{h}}26'$.

Cách 3:



Gọi $x\,(\text{km})$ là độ dài quãng đường BD;

$8-x\,(\text{km})$ là độ dài quãng đường CD.

Thời gian chèo thuyền trên quãng đường $AD=\sqrt{x^2+9}$ là: $\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{6}$ (giờ)

Thời gian chạy trên quãng đường DB là: $\dfrac{8-x}{8}$ (giờ)

Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+9}}{6}+\frac{8-x}{8}$$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{6}+\dfrac{8-x}{8}$ trên khoảng $(0;8)$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{x}{6\sqrt{x^2+9}}-\dfrac{1}{8}$;

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+9}=4x\Leftrightarrow x=\frac{9}{\sqrt{7}}$$

Bảng biến thiên

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

x	0		$\frac{9}{\sqrt{7}}$		8
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$1+\frac{\sqrt{7}}{8}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{73}}{6}$

Dựa vào BBT ta thấy thời gian ngắn nhất để di chuyển từ A đến B là: $1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}\approx 1^{\text{h}}20'$.

Vậy khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến B là: $1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}\approx 1^{\text{h}}20'$.

Đáp án D

Câu 14. Phân tích hướng giải

- Hình chữ nhật không rõ kích thước dài và rộng nên ta không thể nào tính toán một cách hàn lâm theo độ dài cạnh được $\rightarrow$ Chuyển sang tọa độ hóa.

- Gắn trục tọa độ Oxy.

- Xác định tọa độ điểm A, K.

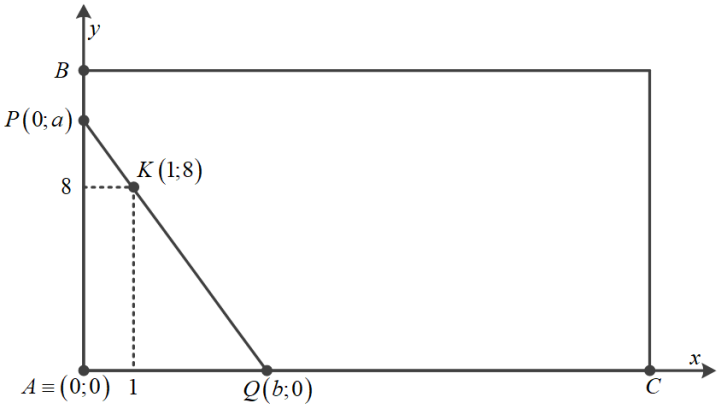
- Xác định phương trình đường thẳng: PQ.

- Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng PQ biết $PQ=\sqrt{AP^2+AQ^2}$.

- Các phương pháp: Dùng bất đẳng thức, dùng đạo hàm khảo sát hàm số.

Lời giải

Lắp trục Oxy, có Ox theo phương cạnh AC và Oy theo phương AB như hình vẽ dưới đây.



Phương trình đường thẳng AB theo đoạn chắn: $(d):\dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=1$.

Mặt khác, vì: $K\in(d)$, nên ta có:

$$\frac{1}{b}+\frac{8}{a}=1\Leftrightarrow\frac{8}{a}+\frac{1}{b}=1\ (*).$$

Cách 1: Bất đẳng thức Cauchy.

Ta có: $PQ^2=AP^2+AQ^2=a^2+b^2$.

Vì: $PQ=\max\Leftrightarrow PQ^2=\max$.

Ta có:

$$PQ^2=AP^2+AQ^2=a^2+b^2+k-k$$
$$=a^2+b^2+k.1-k=a^2+b^2+\frac{8k}{a}+\frac{k}{b}-k,\quad(k>0)$$

$$\Rightarrow PQ^2=\left(a^2+\frac{4k}{a}+\frac{4k}{a}\right)+\left(b^2+\frac{k}{2b}+\frac{k}{2b}\right)-k$$

$$\Rightarrow PQ^2\geq 3\sqrt[3]{a^2.\frac{4k}{a}.\frac{4k}{a}}+3\sqrt[3]{b^2.\frac{k}{2b}.\frac{k}{2b}}-k$$

$$\Rightarrow PQ^2\geq 3\sqrt[3]{16k^2}+3\sqrt[3]{\frac{k^2}{4}}-k$$

$$\Rightarrow PQ\geq\sqrt{3\sqrt[3]{16k^2}+3\sqrt[3]{\frac{k^2}{4}}-k}$$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never give up anywhere unless you try

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} a^2=\dfrac{4k}{a} \\ b^2=\dfrac{k}{2b} \\ \dfrac{8}{a}+\dfrac{1}{b}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\sqrt[3]{4k} \\ b=\sqrt[3]{\dfrac{k}{2}} \\ \dfrac{8}{a}+\dfrac{1}{b}=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\sqrt[3]{4k} \\ b=\sqrt[3]{\dfrac{k}{2}} \\ \dfrac{8}{\sqrt[3]{4k}}+\sqrt[3]{\dfrac{2}{k}}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\sqrt[3]{4k} \\ b=\sqrt[3]{\dfrac{k}{2}} \\ \dfrac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{k}}+\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{k}}=1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\sqrt[3]{4k} \\ b=\sqrt[3]{\dfrac{k}{2}} \\ \sqrt[3]{k}=\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=10 \\ b=5 \\ k=250 \end{cases}$$

Vậy $PQ_{\min}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5}$ là chiều dài ngắn nhất có thể của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB, AC và cây cọc K.

Đáp án B

Cách 2: Dùng đạo hàm để khảo sát hàm số.

Từ

$(*)\Rightarrow \dfrac{8}{a}+\dfrac{1}{b}=1\Leftrightarrow \dfrac{1}{b}=1-\dfrac{8}{a}=\dfrac{a-8}{a}\Rightarrow b=\dfrac{a}{a-8}>0\ (\Rightarrow a>8)$

.

Ta có: $PQ^2=a^2+b^2=a^2+\left(\dfrac{a}{a-8}\right)^2$.

Xét hàm: $f(a)=a^2+\left(\dfrac{a}{a-8}\right)^2,\ \forall a\in(8;+\infty)$.

Suy ra:

$$f'(a)=2a+\frac{2a}{a-8}.\frac{-8}{(a-8)^2}=2a-\frac{16a}{(a-8)^3}=0.$$

$$\Rightarrow (a-8)^3=8\Rightarrow a-8=2\Rightarrow a=10$$

Bảng biến thiên:

a	8		10		$+\infty$
$f'(a)$	|	$-$	0	$+$	
$f(a)$	$+\infty$	↘	125	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y=f(a)$, ta thấy:

$PQ^2_{\min}=\min\limits_{(8;+\infty)} f(a)=f(10)=125\Rightarrow PQ_{\min}=5\sqrt{5}$

Dấu "=" xảy ra tại $\begin{cases} AP=a=10 \\ AQ=b=5 \end{cases}$.

Câu 15. Phân tích hướng giải

- Thấy rằng góc nhìn BAC không thể tính trực tiếp vì tam giác thiếu yếu tố vuông góc, tuy nhiên ta hoàn toàn có thể gián tiếp biểu diễn BAC từ góc OAC và OAB.

- Dùng hàm lượng giác tan có thể giải quyết bài toán.

- $BAC=\max\Leftrightarrow \tan BAC=\max,\ \forall BAC\in\left(0;90^0\right)$.

- $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b}$.

- Các phương pháp: Đạo hàm, khảo sát hàm số và bất đẳng thức.

Lời giải

Ta có: $\tan BAC = \tan\left(OAC - OAB\right)$

$$= \frac{\tan OAC - \tan OAB}{1 + \tan OAC.\tan OAB}.$$

Mặt khác, vì: $\begin{cases} \tan OAC = \dfrac{OC}{OA} = \dfrac{3,5}{x} \\ \tan OAB = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{2}{x} \end{cases}$.

Suy ra: $\tan BAC = \dfrac{\tan OAC - \tan OAB}{1 + \tan OAC.\tan OAB}$

$$\tan BAC = \frac{\dfrac{3,5}{x} - \dfrac{2}{x}}{1 + \dfrac{3,5}{x}.\dfrac{2}{x}} = \frac{1,5x}{x^2 + 7} \quad (*)$$

Cách 1: Xét hàm số: $y = \dfrac{1,5x}{x^2 + 7}$.

Ta có:

$$y' = \frac{-1,5x^2 + 10,5}{\left(x^2 + 7\right)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{7} \Rightarrow x = \sqrt{7} \quad \left(\text{Do } x > 0\right).$$

Bảng biến thiên:

x	0		$\sqrt{7}$		$+\infty$
y'	|	$+$	0	$-$	
y	$\frac{3}{14}$	↗	$\frac{3\sqrt{7}}{28}$	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số, ta thấy rằng: $\max\left(\tan BAC\right) = \dfrac{3\sqrt{7}}{28}$

$$\Rightarrow \max\left(BAC\right) = \arctan\frac{3\sqrt{7}}{28}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x = \sqrt{7}$.

Đáp án C

Cách 2: Dùng bất đẳng thức Cauchy.

$$(*) \Leftrightarrow \tan BAC = \frac{1,5x}{x^2 + 7} = \frac{1,5}{x + \dfrac{7}{x}} \le \frac{1,5}{2\sqrt{7}}$$

$$\left(\text{Do } x + \frac{7}{x} \ge 2\sqrt{x.\frac{7}{x}} = 2\sqrt{7}\right)$$

Suy ra:

$$\max\left(\tan BAC\right) = \frac{1,5}{2\sqrt{7}} \Rightarrow \max\left(BAC\right) = \arctan\frac{1,5}{2\sqrt{7}}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$x = \frac{7}{x} \Rightarrow x = \sqrt{7} \ \left(\text{Do } x > 0\right).$$

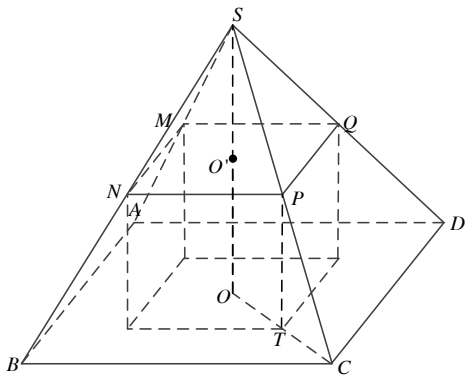
Câu 16. Phân tích hướng giải

- Bài toán không cho dữ kiện liên quan đến độ dài cạnh mà chỉ cho yếu tố thể tích. Và bài toán yêu cầu tính thể tích khối hộp nhỏ bên trong nên ta sẽ vận dụng hình học vào bài toán để tính thể tích theo phương pháp phân chia tỉ lệ.

- Dùng định lý Thales có thể giải quyết nhanh được bài toán.

Lời giải

Ta kí hiệu như hình vẽ bên dưới:



Đặt: $\frac{SP}{SC}=k,\ (0<k<1)$.

Ta có: $\begin{cases}\frac{NP}{BC}=\frac{SP}{SC}=k\\ \frac{CP}{SC}=\frac{SC-SP}{SC}=1-k\\ \frac{PT}{SO}=\frac{CP}{SC}=1-k\end{cases}$.

Suy ra: $\begin{cases}NP=k.BC\\ PT=(1-k).SO\end{cases}$

$\Rightarrow V_{\text{khối hộp chữ nhật}}=NP.PQ.PT=NP^2.PT$

$\Rightarrow V_{\text{khối hộp chữ nhật}}=k^2(1-k).BC^2.SO\ (1)$

Mặt khác:

$V_{\text{khối chóp}}=V=\frac{1}{3}BC.CD.SO=\frac{1}{3}BC^2.SO\ (2)$.

Từ $(1),(2)$ ta suy ra:

$V_{\text{khối hộp chữ nhật}}=3.k^2(1-k).\frac{1}{3}.BC^2.SO=3k^2(1-k).V$

Xét hàm số:

$f(k)=3k^2(1-k).V=(3k^2-3k^3).V,\ (0<k<1)$

Ta có: $f'(k)=(6k-9k^2).V=0\Rightarrow k=\frac{2}{3}$.

Bảng biến thiên:

k	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(k)$		$+$	0	$-$	
$f(k)$	0	↗	$\frac{4V}{9}$	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số, ta thấy rằng thể tích khối hộp lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{NP}{BC}=k=\frac{2}{3}$ và khi đó, thể tích khối hộp chữ nhật là $V_{\text{khối hộp chữ nhật}}=\frac{4V}{9}$.

Đáp án C

Câu 17. Phân tích hướng giải

- Đề bài không cho các dữ kiện về số quá nhiều, chỉ cho khoảng cách của một số điểm nào đó và những hình vẽ là những phần của các đồ thị hàm số nào đó (Parabol, đường tròn,…) → tọa độ hóa bài toán.

- Viết phương trình:

+ Parabol.

+ Đường tròn.

- Phương pháp áp dụng:

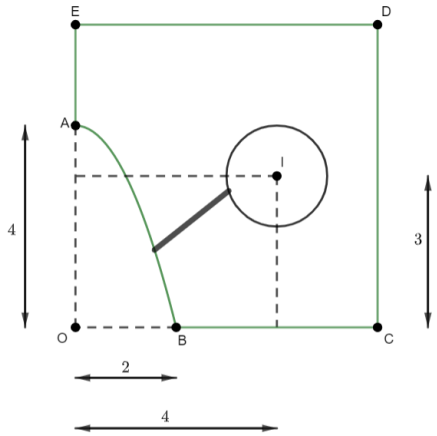
+ Bất đẳng thức trong tam giác.

+ Độ dài đoạn thẳng trong Oxy.

+ Khảo sát hàm số.

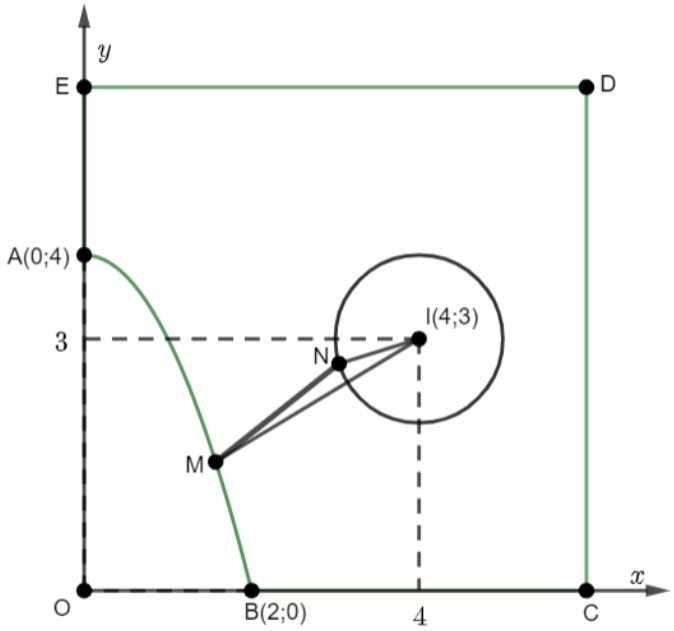
Giả sử: Ta lấy 1 đvđd $=10m$.

Khi đó ta có thể chuyển bài toán như hình vẽ sau:



NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never eat anywhere unless you try

Gắn hệ trục tọa độ Oxy với Ox theo phương của cạnh OC và trục Oy theo phương OE như hình vẽ, ta thu được:



- Phương trình Parabol:

Giả sử Parabol có dạng: $(P): y = ax^2 + bx + c$.

Vì: $\begin{cases} A(0;4) \in (P) \\ B(2;0) \in (P) \\ B'(-2;0) \in (P) \end{cases}$

(Do Parabol nhận trục Oy làm trục đối xứng $\Rightarrow$ hàm chẵn)

Nên ta có: $\begin{cases} c = 4 \\ 4a + 2b + c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow (P): y = -x^2 + 4$

Phương trình đường tròn tâm $I(4;3)$ bán kính $R = 1$ có phương trình:

$$((C), I, 1): (x-4)^2 + (y-3)^2 = 1.$$

Ta có: $MN \geq MI - NI = MI - 1$ (đvđd) (Bất đẳng thức trong tam giác).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: M, N, I thẳng hàng.

Suy ra: $MN_{\min} = MI - 1$.

Gọi $M(x; -x^2 + 4) \in (P)$.

Khi đó: $MI - 1 = \sqrt{(x-4)^2 + (-x^2+1)^2} - 1$

$= \sqrt{x^4 - x^2 - 8x + 17} - 1.$

Xét hàm số: $y = f(x) = \sqrt{x^4 - x^2 - 8x + 17} - 1.$

Ta có: $f'(x) = \dfrac{4x^3 - 2x - 8}{2\sqrt{x^4 - x^2 - 8x + 17}} = 0$

$\Rightarrow x \approx 1,39176... \to A.$

Tính toán tại một số điểm cần thiết:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ f(A) \approx 1,77(\text{đvđd}) = \min\limits_{\mathbb{R}} f(x). \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$$

Như vậy: $MN_{\min} = (MI - 1)_{\min} \approx 1,77(\text{đvđd})$

$\Rightarrow MN_{\min} \approx 17,7\,m.$

Đáp án A

Câu 18. Phân tích hướng giải

- Đề bài chỉ cho yếu tố độ dài cạnh nên ta nhất thiết phải "dồn" độ dài các cạnh cần thiết qua cùng một biến qua yếu tố góc đã được cho như giả thuyết đề bài.

- Dùng các giá trị lượng giác để tính toán các cạnh còn lại theo ẩn (ưu tiên sử dụng hàm $\tan$).

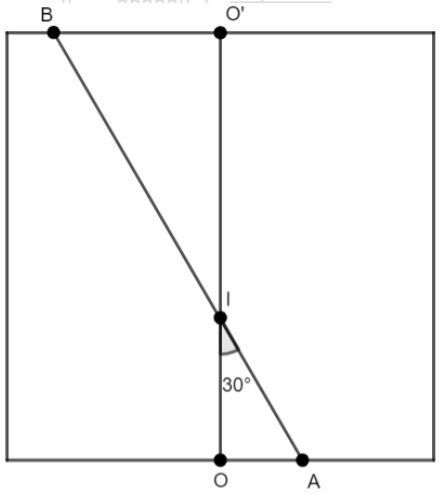
- Thể tích khối vật thể cần tính là hợp của hai khối nón.

- Khảo sát hàm số trên miền giá trị thỏa mãn:

Tìm điều kiện của ẩn để điều kiện đề bài (đường thẳng (Δ) cắt hai hình tròn đáy tại các điểm phân biệt).

Lời giải

Giả sử: (Δ) cắt trục (Δ) tại I và cắt hai hình tròn đáy tại A, B.



Đặt: $IO = x \Rightarrow \begin{cases} IO' = 4 - x \\ OA = IO.\tan 30^o = \dfrac{x}{\sqrt{3}} \\ OB = IO'.\tan 30^o = \dfrac{4-x}{\sqrt{3}} \end{cases}$.

Như vậy: Vật thể thu được là 2 khối nón có:

$$\begin{cases} (N_1): \begin{cases} r_1 = \dfrac{x}{\sqrt{3}} \\ h_1 = x \end{cases} \\ (N_2): \begin{cases} r_2 = \dfrac{4-x}{\sqrt{3}} \\ h_2 = 4 - x \end{cases} \end{cases}.$$

Điều kiện cần và đủ để đường thẳng cắt cả hai đường tròn đáy: $\begin{cases} OA \le R = 2 \\ O'B \le R = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{3}} \le 2 \\ \dfrac{4-x}{\sqrt{3}} \le 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2\sqrt{3} \\ x \ge 4 - 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow 4 - 2\sqrt{3} \le x \le 2\sqrt{3}.$$

Suy ra: $V = \dfrac{\pi}{3}.\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)^2.x + \dfrac{\pi}{3}.\left(\dfrac{4-x}{\sqrt{3}}\right)^2.(4-x)$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{9}\left[x^3 + (4-x)^3\right]$$

Xét hàm số:

$$f(x) = \frac{\pi}{9}.\left[x^3 + (4-x)^3\right],\ \left(4 - 2\sqrt{3} \le x \le 2\sqrt{3}\right)$$

Ta có: $f'(x) = \dfrac{\pi}{9}.\left[3x^2 - 3(4-x)^2\right] = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 = (4-x)^2 \Leftrightarrow x = 2.$$

Tính toán tại một số điểm cần thiết:

$$\begin{cases} f\left(4 - 2\sqrt{3}\right) = \dfrac{\left(208 - 96\sqrt{3}\right)\pi}{9} = \max\limits_{\left[4-2\sqrt{3};2\sqrt{3}\right]} f(x) \\ f(2) = \dfrac{16\pi}{9} = \min\limits_{\left[4-2\sqrt{3};2\sqrt{3}\right]} f(x) \\ f\left(2\sqrt{3}\right) = \dfrac{\left(208 - 96\sqrt{3}\right)\pi}{9} = \max\limits_{\left[4-2\sqrt{3};2\sqrt{3}\right]} f(x) \end{cases}$$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Vậy thể tích lớn nhất và nhỏ nhất của vật thể được tạo ra lần lượt là: $\frac{\left(208-96\sqrt{3}\right)\pi}{9}$ và $\frac{16\pi}{9}$.

Đáp án B

Câu 19. Xe dừng lại khi:
$v(t)=0 \Leftrightarrow -5t+20=0 \Leftrightarrow t=4(s)$.

Quãng đường xe đi được kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng lại là: $s(t)=\int_0^4 v(t)dt$.

$$s(t)=\int_0^4(-5t+20)dt=\left(20t-\frac{5t^2}{2}\right)\Big|_0^4=40m.$$

Khi xe dừng hẳn, khoảng cách từ xe đến hàng rào là: $45-40=5m$.

Đáp án B

Câu 20. Ta có: $f(t)=15t^2-t^3, t\in(0;10], t\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow f'(t)=30t-3t^2$.

Xét hàm $g(t)=f'(t)=30t-3t^2$

$\Rightarrow g'(t)=30-6t, g'(t)=0 \Leftrightarrow t=5$.

Bảng biến thiên:

t	0		5		10
$g'(t)$		+	0	−	
$g(t)$	0	↗	75	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Hàm số $f'(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t=5$ nên số cây hoa ly bán được nhiều nhất vào lúc 11 giờ trưa.

Đáp án B

Câu 21. Giả sử x, y $(x\ge 0; y\ge 0)$ lần lượt là số sản phẩm I và loại II được sản xuất.

Lợi nhuận thu được là: $T=40x+30y$ (nghìn).

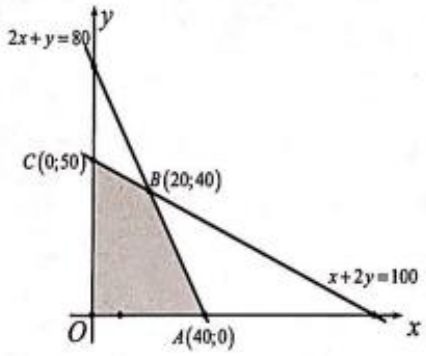
Khi đó: $2x+4y$ là số kg nhiên liệu

$30x+15y$ là số giờ làm việc

Theo đề bài: $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ 2x+4y\le 200 \\ 30x+15y\le 1200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ x+2y\le 100 \\ 2x+y\le 80 \end{cases}$

Vẽ trục tọa độ ta điểm được tọa độ các điểm:

$$A(40;0); B(20;40); C(0;50)$$



Nhận xét:

$$T(A)=1600, T(B)=2000, T(C)=1500$$

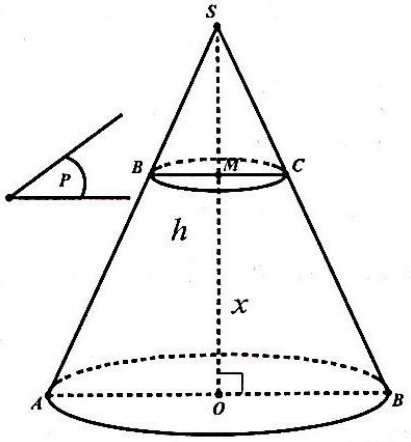
Vậy lợi nhuận lớn nhất là 2 triệu tại điểm $B(20;40)$ hay $x=20; y=40$.

Vậy để thu được lợi nhuận cao nhất thì cần sản xuất 20 sản phẩm loại I và 40 sản phẩm loại II.

Đáp án B

Câu 22. Ta có: BM là bán kính đường tròn (C).

$\frac{BM}{AO}=\frac{SM}{SO}\Leftrightarrow BM=\frac{AO.SM}{SO}\Leftrightarrow BM=\frac{R(h-x)}{h}$



Thể tích của khối nón đỉnh O đáy là (C) là:

$V=\frac{1}{3}\pi BM^2.OM=\frac{1}{3}\pi\left[\frac{R(h-x)}{h}\right]^2 x$

$\Rightarrow V=\frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)^2 x.$

Xét hàm số: $f(x)=(h-x)^2 x,(0<x<h)$

Ta có: $f'(x)=-2(h-x).x+(h-x)^2$

$\Leftrightarrow f'(x)=(h-x)(h-3x).$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=h\\x=\frac{h}{3}\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{h}{3}$		h
$f'(x)$		+	0	–	
$f(x)$	0	↗	$\frac{4}{27}h^3$	↘	0

Từ bảng biến thiên ta có thể tích khối nón đỉnh O đáy là (C) lớn nhất bằng $\frac{4hR^2}{81}$ khi $x=\frac{h}{3}$.

Đáp án D

Câu 23. Gọi r, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của lon sữa bò cần thiết kế.

Khi đó: $V=\pi r^2 h$ hay $h=\frac{V}{\pi r^2}$.

Diện tích toàn phần của hình trụ là:

$$S_{tp}=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi\left(r^2+\frac{V}{\pi r}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$r^2+\frac{V}{2\pi r}+\frac{V}{2\pi r}\geq 3\sqrt[3]{r^2.\frac{V}{2\pi r}.\frac{V}{2\pi r}}=3\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}.$$

Suy ra: $S_{tp}\geq 6\pi\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}$.

Đẳng thức xảy ra khi: $r^2=\frac{V}{2\pi r}\Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Đáp án A

Câu 24. Gọi a, b lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó cần mua đảm bảo lượng protein và lipit trong thức ăn. Theo bài ra ta có số tiền gia đình cần trả là $160a+110b$ với a, b thỏa mãn: $\begin{cases}0\leq a\leq 1,6\\0\leq b\leq 1,1\end{cases}$.

Số đơn vị protein gia đình có là:

$$0,8a+0,6b\geq 0,9\Leftrightarrow 8a+6b\geq 9\ (d_1)$$

Số đơn vị lipit gia đình có là:

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

$$0,2a+0,4b\ge 0,4\Leftrightarrow a+2b\ge 2\ \ (d_2)$$

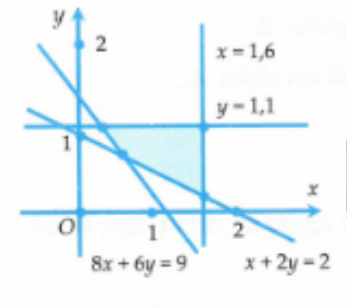
Bài toán đã cho trở thành bài toán:

Tìm $a,\ b$ thỏa mãn hệ bất phương trình

$$\begin{cases}0\le a\le 1,6\\0\le b\le 1,1\\8a+6b\ge 9\\a+2b\ge 2\end{cases}$$

sao cho $T(a;b)=160a+110b$ nhỏ nhất.

Vẽ hệ trục tọa độ ta tìm được tọa độ các điểm $A(1;6;1;1);\ B(1;6;0;2);\ C(0;6;0;7);\ D(0;3;1;1)$



Nhận xét $T(1;6;1;1)=377$ nghìn;
$T(1;6;0;2)=278$ nghìn; $T(0;6;0;7)=173$ nghìn; $T(0;3;1;1)=169$ nghìn

Do đó, tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipit trong thức ăn thì $x=a=0,3;\ y=b=1,1$

Vậy $x^2+y^2=1,3$.

Đáp án A

Câu 25. Gọi $5000t\ (0\le t\le 4;t\in\mathbb{R})$ là tổng số tiền giảm.

Lúc đó giá bán sẽ là $50000-5000t$, số kg bán ra là $40+50t$ suy ra tổng số tiền bán được cả vốn lẫn lãi là $(50000-5000t).(40+50t)$;

Số tiền vốn nhập ban đầu là $30000.(40+50t)$.
Ta có lợi nhuận thu được là:
$f(t)=(50000-5000t)(40+50t)-30000(40+50t)$
Ta tìm t để $f(x)$ lớn nhất:

$$f(t)=(4+5t)(20-5t).10000$$

$$\Rightarrow g(t)=\frac{f(t)}{10000}=-25t^2+80t+80$$

$$\Rightarrow g(t)=144-(5t-8)^2\le 144,\forall t\in\mathbb{R}$$

Để $f(t)$ lớn nhất khi $g(t)$ lớn nhất; $g(t)$ lớn nhất bằng 144 khi: $5t-8=0\Leftrightarrow t=\frac{8}{5}$.

$$t=\frac{8}{5}\Rightarrow 5000t=8000.$$

Do đó giảm số tiền 1 kg là 8000đ, tức giá bán ra 1 kg là $50000-8000=42000$ đ thì lợi nhuận thu được cao nhất.

Đáp án C

Câu 26. Gọi độ dài cạnh của hình vuông là $x\ (m)$ thì độ dài cạnh tam giác đều là $2x\ (m)$.
Chiều dài phần dây được uống thành hình vuông (chính là chu vi hình vuông) là $4x\ (m)$;
chiều dài phần dây được uốn thành tam giác đều (chính là chu vi hình tam giác đều) là $3.2x=6x\ (m)$.

Suy ra chiều dài phần dây được uốn thành hình tròn là $L-4x-6x=L-10x\ (m)$.

Từ đó ta có: $x\in\left(0;\frac{L}{10}\right)$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Gọi r là bán kính của đường tròn thì chu vi đường tròn là $P=2\pi r=L-10x\Leftrightarrow r=\dfrac{L-10x}{2\pi}$

Tổng diện tích của ba hình là:

$$S=x^2+\frac{(2x)^2\sqrt{3}}{4}+\pi\left(\frac{L-10x}{2\pi}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow S=\left(1+\sqrt{3}\right)x^2+\frac{(L-10x)^2}{4\pi}$$

Xét hàm số $f(x)=\left(1+\sqrt{3}\right)x^2+\dfrac{(L-10x)^2}{4\pi}$ trên $\left(0;\dfrac{L}{10}\right)$.

Ta có: $f'(x)=2\left(1+\sqrt{3}\right)x-\dfrac{5(L-10x)}{\pi}$;

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{5L}{2\left[25+\left(1+\sqrt{3}\right)\pi\right]}\in\left(0;\frac{L}{10}\right).$$

Lập bảng biến thiên ta thấy:

$$\min_{\left(0;\frac{L}{10}\right)}f(x)=f\left(\frac{5L}{2\left[25+\left(1+\sqrt{3}\right)\pi\right]}\right).$$

Vậy tổng diện tích của ba hình thu được nhỏ nhất khi $x=\dfrac{5L}{2\left[25+\left(1+\sqrt{3}\right)\pi\right]}$.

Suy ra độ dài cạnh của tam giác đều là:

$$2x=\frac{5L}{25+\left(1+\sqrt{3}\right)\pi}\ (m).$$

Đáp án C

Câu 27. Gọi x,y,h lần lượt là chiều rộng, chiều dài, chiều cao của hố ga $(x>0,y>0,h>0,m)$

Thể tích hố ga: $V=xyh\Leftrightarrow y=\dfrac{V}{xh}=\dfrac{3}{x.\left(\frac{3}{2}x\right)}=\dfrac{2}{x^2}$.

Diện tích cần xây dựng hố ga là:

$$S(x)=2xy+2xh+2yh=3x^2+\frac{10}{x}.$$

Bài toán trở thành tìm x để $S(x)$ nhỏ nhất

Ta có: $S'(x)=6x-\dfrac{10}{x^2}$, $S'(x)=0\Leftrightarrow x_0=\sqrt[3]{\dfrac{5}{3}}$.

Lập bảng xét dấu $S'(x)$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $S'(x)$, thấy $S(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{5}{3}}$.

Vậy $h=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{5}{3}}=\sqrt[3]{\dfrac{45}{8}}(m)$ là chiều cao xây hố ga tiết kiệm được nguyên liệu nhất.

Đáp án B

Câu 28. Đặt $MN=x$, $(0<x<h)$.

Ta có $MN//SO$ nên $\dfrac{MN}{SO}=\dfrac{NA}{OA}\Rightarrow$

$NA=\dfrac{MN.OA}{SO}=\dfrac{x.R}{h}\Rightarrow ON=R-\dfrac{xR}{h}$.

Khối trụ thu được có bán kính đáy và chiều cao

lần lượt là: $ON=\left(1-\frac{x}{h}\right).R$ và $MN=x$.

Thể tích khối trụ là: $V=\pi.ON^2.MN$

$$V=\pi.\left(1-\frac{x}{h}\right)^2R^2.x=\frac{\pi R^2}{2h^2}(h-x)(h-x).2x$$

$$\Rightarrow V\le\frac{\pi R^2}{2h^2}\left[\frac{(h-x)+(h-x)+2x}{3}\right]^3$$

$$\Rightarrow V=\frac{\pi R^2}{2h^2}.\frac{8h^3}{27}=\frac{4R^2h}{27}$$

Dấu bằng xảy ra khi $2x=h-x\Leftrightarrow x=\frac{h}{3}$.

Khi đó: $MN=\frac{h}{3}$.

Đáp án B

Extra Techniques:

Review:

Note: Với ba số dương $a,\ b,\ c$ thì: $abc\le\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$

(Bất đẳng thức Cauchy).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Câu 29. Gọi $A(x)$ là tổng số tiền phải trả để thuê x cuốn sách theo phương án (1):

$$A(x)=5x \text{ (nghìn đồng).}$$

Gọi $B(x)$ là tổng số tiền phải trả để thuê x cuốn sách theo phương án (2):

$$B(x)=3x+20 \text{ (nghìn đồng).}$$

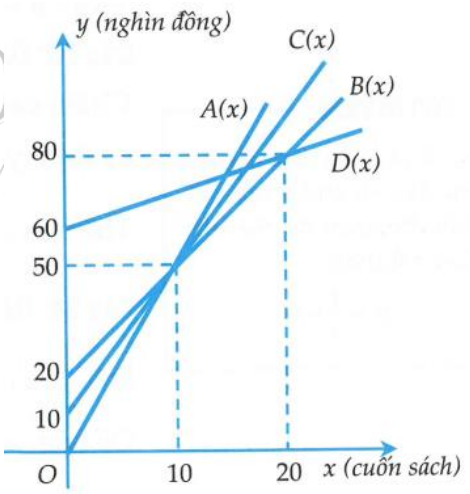
Gọi $C(x)$ là tổng số tiền phải trả để thuê x cuốn sách theo phương án (3):

$$C(x)=4x+10 \text{ (nghìn đồng)}$$

Tương tự, theo phương án (4) phải trả

$$D(x)=x+60 \text{ (nghìn đồng)}$$

Vẽ đồ thị các hàm số $(d_1):y=5x$;
$(d_2):y=3x+20$; $(d_3):y=4x+10$;
$(d_4):y=x+60$ trên cùng hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Dễ dàng nhận thấy khi $x>20$, đồ thị (d_4) nằm dưới các đồ thị kia.

Vậy chọn phương án (4) sẽ tốn ít tiền nhất.

Đáp án D

Câu 30. Diện tích toàn phần hình trụ là:

$$S=2\pi rh+2\pi r^2\Rightarrow h=\frac{S-2\pi r^2}{2\pi r}.$$

Do đó thể tích khối trụ là:

$$V=\pi r^2h=\frac{\pi r^2\left(S-2\pi r^2\right)}{2\pi r}=\frac{S}{2}r-\pi r^3.$$

Xem r là biến với $r\in(0;+\infty)$.

Ta có: $V'=\frac{S}{2}-3\pi r^2=0\Leftrightarrow r=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}>0$.

Lập bảng xét dấu V'

r	$-\infty$		$\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$		$+\infty$
V'		$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu V'.

Ta thấy V đạt giá trị lớn nhất khi:

$$r=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}\Leftrightarrow S=6\pi r^2$$

Khi đó:

$$6\pi r^2=2\pi rh+2\pi r^2\Rightarrow h=2r.$$

Đáp án D

Câu 31. Ta có: $v=s'=\frac{-3}{2}t^2+18t=0$

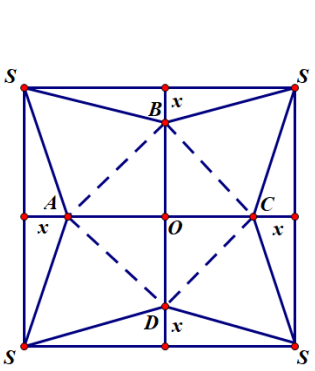
$\Rightarrow v'=-3t+18=0\Leftrightarrow t=6$ xét trên đoạn $[0;8]$.

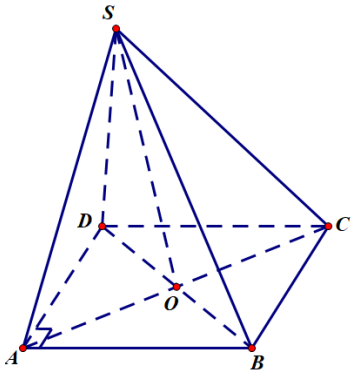
Ta có: $\begin{cases}v(0)=0\\v(6)=54\ (m/s)\\v(8)=48\ (m/s)\end{cases}$.

$\Rightarrow v\max=v(6)=54(m/s)\Rightarrow$ C

Đáp án C

Câu 32. Đặt tên các điểm như hình vẽ dưới đây





$AB^2=OA^2+OB^2$

$=(5-x)^2+(5-x)^2=2(5-x)^2$

$SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{5^2+x^2-(5-x)^2}=\sqrt{10x}$

$V=\frac{1}{3}.2.(5-x)^2.\sqrt{10x}$

$=\frac{2}{3}\sqrt{10.(5-x)^4.x}$

Đặt $y=(5-x)^4.x,\ (0<x<5)$

$y'=-4(5-x)^3.x+(5-x)^4$

$=(5-x)^3(5-5x)$

$y'=0\Leftrightarrow x=1$

Lập bảng biến thiên, ta thấy: $y_{\max}=y\ (1)$.

Vậy $x=1$.

Đáp án C

Câu 33. Gọi phương trình $AB:\ y=ax+b$

y qua $M(125;1000)\Rightarrow 125a+b=1000$

$\Rightarrow A(0;b),B\left(\frac{-b}{a};0\right)$

$\Rightarrow AB=\sqrt{\frac{b^2}{(\frac{1000-b}{125})^2}+b^2}\ \min\approx 1397,5$

$\Rightarrow S\approx 2,0963$

NHÓM TOÁN ANH DÚI

Đáp án C

Câu 34. Bán kính viên ở giữa: a.

Bán kính 6 viên còn lại: b.

$$\Rightarrow 4b+2a=10 \Rightarrow b=\frac{10-2a}{4}.$$

$$V_{bi}=\frac{4}{3}\pi\left(6b^3+a^3\right)=\frac{4}{3}\pi.\left[6.\left(\frac{10-2a}{4}\right)^3+a^3\right].$$

$$TABLE \Rightarrow V_{bi(\min)}=V\left(\approx 2,3\right).$$

Đáp án B

Câu 35.

$$4a+2\pi r=40 \Rightarrow a=\frac{40-2\pi r}{4}$$

$$V=10a^2+10\pi r^2=10.(\frac{40-2\pi r}{4})^2+10\pi r^2$$

$$\Rightarrow V\min \Leftrightarrow r\approx 2,75 \Rightarrow a\approx 5,68 \Rightarrow a+r\approx 8,4$$

Đáp án B

Câu 36. Ta có: $V=\pi r^2 h \longrightarrow h=\frac{V}{\pi r^2}=\frac{72}{\pi r^2}$.

Tổng chi phí xây dựng là:

$$P=100\pi r^2+90.2\pi rh+140\pi r^2$$

$$\Leftrightarrow P=240\pi r^2+90.2\pi r.\frac{72}{\pi r^2}$$

$$\Leftrightarrow P=240\pi r^2+\frac{12960}{r}$$

$$\Leftrightarrow P=240\pi r^2+\frac{6480}{r}+\frac{6480}{r}\geq 6480\sqrt[3]{\pi}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\Leftrightarrow 240\pi r^2=\frac{6480}{r} \Leftrightarrow r=\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m}).$$

Đáp án C

Câu 37. Ta có: $V=\pi r^2 h \longrightarrow h=\frac{V}{\pi r^2}$.

Gọi t là giá tiền của một đơn vị diện tích vật liệu để làm mặt xung quanh, suy ra giá tiền của một đơn vị diện tích vật liệu để làm mặt đáy là $3t$.

Diện tích mặt xung quanh $S_1=2\pi r.h \longrightarrow$ giá tiền mặt xung quanh là $T_1=2\pi rh\times t$.

Diện tích hai mặt đáy $S_2=2\pi r^2 \longrightarrow$ giá tiền hai mặt đáy là $T_2=2\pi r^2\times 3t$.

Tổng tiền hoàn thành sản phẩm:

$$T=T_1+T_2=2t\left(\pi rh+3\pi r^2\right)=2t\left(\frac{V}{r}+3\pi r^2\right)$$

$$=2t\left(\frac{V}{2r}+\frac{V}{2r}+3\pi r^2\right)\geq 2t\times 3\sqrt[3]{\frac{3}{4}\pi V^2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\Leftrightarrow \frac{V}{2r}=3\pi r^2 \xleftrightarrow{\text{do } V=\pi r^2 h} h=6r.$$

Đáp án C

Câu 38. Giả sử thùng phi có chiều cao h, bán kính đáy r.

Diện tích thép tối đa cần dùng là:

$$\frac{6594000}{350000}=18,84 \text{ suy ra } 2\pi r^2+2\pi rh=18,84$$

$$\Leftrightarrow r^2+rh=3 \Leftrightarrow rh=3-r^2.$$

Ta có: $V=\pi r^2 h=\pi r\left(3-r^2\right)$.

$$\Leftrightarrow V=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{2r^2\left(3-r^2\right)\left(3-r^2\right)}$$

$$\le \frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{2r^2+3-r^2+3-r^2}{3}\right)^3} = 2\pi = 6,28.$$

Đáp án B

Câu 39. Giả sử hộp trụ có bán kính đáy r, chiều cao là h. Theo giả thiết ta có:

$$V = \pi r^2 h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{\pi r^2}.$$

Để tiết kiệm nguyên vật liệu nhất thì diện tích toàn phần phải nhỏ nhất:

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{2day} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

$$S_{tp} = 2\pi r^2 + \frac{2}{r} = 2\pi r^2 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \ge 3\sqrt[3]{2\pi}$$

Dấu bằng đạt tại: $2\pi r^2 = \frac{1}{r}$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \approx 0,54dm \Rightarrow h \approx 1,084dm$$

Vậy phải thiết kế một khối trụ có bán kính đáy $0,54dm$ và chiều cao $1,084dm$.

Vậy $S_{tp} = 3\sqrt[3]{2\pi}dm^3$.

Đáp án A

Câu 40. Đặt a, b lần lượt là số lít nước cam và táo mỗi đội pha chế được:

$30a+10b$ là số g đường cần dùng

$a+b$ là số lít nước cần dùng

$a+4b$ là số g hương liệu cần dùng

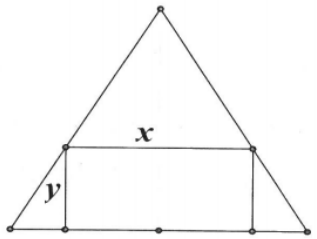
Theo giả thiết bài toán có:

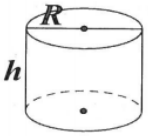
$$\begin{cases} 30a+10b \le 210 \\ a+b \le 9 \\ a+3b \le 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+b \le 21 \\ a+b \le 9 \\ a+3b \le 24 \end{cases} (*).$$

Số điểm thưởng mà mỗi đội nhận được là $F(a;b) = 60a+80b$ sẽ đạt giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh A, B, C. Kiểm tra trực tiếp có: $F_{(a,b)\max} = F(4,5) = 640.$

Đáp án B

Câu 41. Phân tích: Để tìm được giá trị lớn nhất của V, ta phải thiết lập được hàm tính V theo một ẩn đã chọn, để đưa bài toán về tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số một biến.





Hướng dẫn giải:

Cắt từ miếng tôn lấy một hình chữ nhật có kích thước x, y như hình vẽ. Sau đó, từ miếng tôn hình chữ nhật, chế tạo thành hình trụ không đáy có bán kính R, chiều cao bằng h.

Ta có: $\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\frac{3}{2}} = 1,\ x = 2\pi R,\ y = h$

$$\Rightarrow R = \frac{x}{2\pi},\ h = y = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{3}}\right).$$

Thể tích khối trụ đã cho có độ lớn là:

$$V = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 . \frac{3}{2}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{3}}\right)$$

$$V=\frac{3}{8\sqrt{3}\pi}\left(\sqrt{3}x^2-x^3\right),\ x\in\left(0;\sqrt{3}\right).$$

Khảo sát hàm số V, ta được $V_{\max}=\frac{1}{6\pi}\left(m^3\right)$ tại $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $V_{\max}=\frac{1}{6\pi}.1000\approx 53,05$ lít.

Đáp án D

Câu 42. Phân tích: Đây là dạng toán khối nón, khối trụ lồng khối đa diện nên chúng ta cần hiểu được bản chất của bài toán là xử lí các bài toán về đáy của các khối lồng nhau. Vì vậy chúng ta cần lưu ý các công thức bán kính đường tròn nội ngoại tiếp các đa giác thường gặp.

Lăng trụ nội tiếp nón, nên chúng ta cần đưa bài toán về khối trụ nội tiếp nón và ngoại tiếp lăng trụ.

Với bài toán khối xoay lồng nhau, thì chúng ta cần đưa về hình phẳng thể hiện các hình biểu diễn của các khối tròn xoay lồng nhau. Cụ thể, nón ngoại tiếp trụ có nghĩa là tam giác cân ngoại tiếp hình chữ nhật.

Một vấn đề đề cập trong bài toán này là tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất của một đại lượng. Chúng ta phải thiết lập được công thức tính đại lượng đó theo một ẩn do chúng ta chọn để đưa về bài toán tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất của hàm số.

Hướng dẫn giải.

Xét hình trụ (T) nội tiếp hình nón đã cho và ngoại tiếp khối lăng trụ tứ giác đều đã cho, có chiều cao là h, bán kính đáy bằng x với $x\in(0;5)$.

Theo định lý Thales:

$$\frac{x}{5}=\frac{20-h}{20}=1-\frac{h}{20}\Rightarrow h=20\left(1-\frac{x}{5}\right)$$

Đáy khối lăng trụ tứ giác đều là hình vuông nội tiếp đáy hình trụ (T) nên có cạnh bằng $\sqrt{2}x$.

Thể tích khối lăng trụ tứ giác đều bằng:

$$V=2x^2.20\left(1-\frac{x}{5}\right)=8x^2(5-x)=-8x^3+40x^2$$

Khảo sát hàm V trên $(0;5)$, ta được:

$$V_{max}=\frac{4000}{27}\ \text{tại}\ x=\frac{10}{3}.$$

Đáp án B

Câu 43. Vận tốc tại thời điểm t là:

$$v(t)=s'(t)=-\frac{3}{2}t^2+18t\ \text{với}\ t\in[0;10].$$

Ta tìm được $\max\limits_{[0;10]}v(t)=v(6)=54(\text{m/s}).$

Đáp án D

Câu 44. Diện tích cần sơn chính là tổng diện tích xung quanh của các hình trụ.

Tổng diện tích xung quanh của 4 cây cột đường kính 40 cm là $S_1=4\pi r_1h.$

Tổng diện tích xung quanh của 6 cây cột đường kính 26 cm là $S_2=6\times 2\pi r_2h.$

Số tiền cần dùng là $F=(S_1+S_2).380000$

$$F=2\pi\left(4.\frac{40}{2}+6.\frac{26}{2}\right).10^{-2}.4,2.380000\approx 15844000$$ (đồng).

Đáp án D

Câu 45. Thể tích khối trụ là:

$$V=\pi r^2h\Rightarrow h=\frac{V}{\pi r^2}.$$

Giả sử đơn giá làm mặt xung quanh là 1 thì đơn giá làm mặt đáy và nắp là 3.

Số tiền để làm thùng là:

$$T=2\pi rh\times 1+2\pi r^2\times 3=2\pi\left(\frac{V}{\pi r}+3r^2\right)$$

$$T=2\pi\left(\frac{V}{2\pi r}+\frac{V}{2\pi r}+3r^2\right)\geq 6\pi\sqrt[]{\frac{3V^2}{4\pi^2}}.$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\frac{V}{2\pi r}=3r^2\Leftrightarrow\frac{rh}{2}=2r^2\Leftrightarrow\frac{h}{r}=6.$$

Đáp án C

Câu 46. Giả sử hộp trụ có bán kính đáy r, chiều cao là h. Theo giả thiết có:

$$V=\pi r^2h=1\Rightarrow h=\frac{1}{\pi r^2}.$$

Để tiết kiệm nguyên vật liệu nhất thì diện tích toàn phần phải nhỏ nhất:

$$S_{tp}=S_{xq}+S_{2day}=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+\frac{2}{r}$$

$$S_{tp}=2\pi r^2+\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\geq 3\sqrt[3]{2\pi}.$$

Dấu bằng đạt tại:

$$2\pi r^2=\frac{1}{r}\Leftrightarrow r=\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\approx 0,54dm\Rightarrow h\approx 1,084dm.$$

Vậy phải thiết kế một khối trụ có bán kính đáy $0,54$ dm và chiều cao $1,084$ dm.

Vậy $S_{tp}=3\sqrt[3]{2\pi}dm^3$.

Đáp án A

Câu 47. Với thanh sắt 6 m có các cách cắt ra các thanh sắt có chiều dài $2,5$ m và $1,6$ m là

Cách 1: Cắt thành 2 thanh sắt chiều dài $2,5$ m;

Cách 2: Cắt thành 1 thanh sắt chiều dài $2,5$ m và 2 thanh sắt chiều dài $1,6$ m;

Cách 3: Cắt thành 3 thanh sắt có chiều dài $1,6$ m.

Gọi $x,y,z\left(x,y,z\in\mathbb{Z}^+\right)$ lần lượt là số thanh sắt chiều dài 6 m được cắt theo **cách 1**, **cách 2** và **cách 3**.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}2x+y=40\\2y+3z=60\end{cases}$.

Do đó: $2x+3y+3z=100\Leftrightarrow 3\left(x+y+z\right)-z=100.$

Số thanh sắt chiều dài 6 m cần sử dụng là:

$$M=x+y+z=\frac{100+x}{3}.$$

Do $x\in Z^+\Rightarrow M\geq\frac{100}{3}\approx 33,3.$

+) Nếu $M=34\Rightarrow x=2$

$$\Rightarrow\begin{cases}4+y=40\\2y+3x=60\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=36\\z=-4\end{cases}(l);$$

+) Nếu $M=35\Rightarrow x=5$

$$\Rightarrow\begin{cases}10+y=40\\2y+3z=60\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=30\\z=0\end{cases}(TM);$$

Vậy số thanh sắt chiều dài 6 m tối thiểu cần dùng là 35.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Đáp án B

Câu 48. Đặt a, b lần lượt là số lít nước cam và táo mỗi đội pha chế được:

$30a+10b$ là số g đường cần dùng

$a+b$ là số lít nước cần dùng

$a+4b$ là số g hương liệu cần dùng

Theo giả thiết bài toán có:

$$\begin{cases} 30a+10b\le 210 \\ a+b\le 9 \\ a+3b\le 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+b\le 21 \\ a+b\le 9 \\ a+3b\le 24 \end{cases} (*).$$

Số điểm thưởng mà mỗi đội nhận được là $F(a;b)=60a+80b$ sẽ đạt giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh A, B, C. Kiểm tra trực tiếp có

$F_{(a,b)\max}=F(4,5)=640.$

Đáp án B

Câu 49. Ta có: $l=1\Rightarrow r^2+h^2=1;$

$$\Rightarrow V=\frac{\pi}{3}r^2h=\frac{\pi}{3}\left(1-h^2\right).h$$

Ta có: $y'=0\Leftrightarrow h=\frac{1}{\sqrt{3}}$ khi đó $V=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

Đáp án D

Câu 50. Ta có: $V=\pi r^2h=\pi r^2(1-r);$

$$V'=0\Rightarrow r=\frac{2}{3}$$

Khi đó: $V_{\max}=1-h^2=V\left(\frac{2}{3}\right)=\pi.\frac{4}{9}.\frac{1}{3}=\frac{4\pi}{27}.$

Đáp án B

Câu 51. Hộp gỗ đó có thể tích lớn nhất khi và chỉ khi hình chữ nhật nội tiếp đường tròn có đường kính $0,6$ (mét) phải có diện tích lớn nhất. Gọi kích thước hai cạnh chữ nhật đó là a, b nên $(0,6)^2=a^2+b^2\ge 2ab$

$$\Rightarrow ab\le 0,18\Rightarrow V=abc=0,18.1=0,18\left(m^3\right)$$

Đáp án A

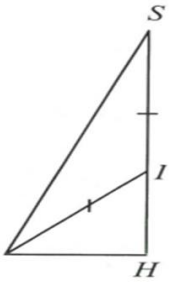
Câu 52. Ta có: $2\pi rh=2\pi\Rightarrow rh=1.$

$$\Rightarrow V=\pi r^2h=\frac{\pi r^2h^2}{h}=\frac{\pi}{h}\to+\infty \text{ khi } h\to 0^+$$

$\Rightarrow$ Không tồn tại V_{max}.

Đáp án D

Câu 53.



Gọi SH là đường cao hình chóp, a là độ dài cạnh đáy và cũng là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy.

Lúc đó tâm mặt cầu là $I\in SH\Rightarrow SH=1+IH$ hoặc $SH=1-IH$.

Đặt $IH=x\ (0<x<1)\Rightarrow a^2=1-x^2$, đáy hình chóp là ghép của 6 tam giác.

Như vậy: Diện tích lục giác đều đã cho bằng:

$$V=6.a^2.\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3\left(1-x^2\right)\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Rightarrow V=\frac{\sqrt{3}}{2}(1+x)(1-x^2)$$

(hoặc $V=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)(1-x^2)\Rightarrow$ loại khi phải tìm V_{max}).

Ta có: $V'=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$.

Khi đó:

$$V_{max}=V\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.\left(1+\frac{1}{3}\right).\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{16\sqrt{3}}{27}.$$

Đáp án A

Câu 54. Ta có: $2h+4r=4$.

$$\Rightarrow V=\pi r^2(2-2r)\Rightarrow V'=0\Leftrightarrow r=\frac{2}{3}$$

Khi đó: $V_{max}=V\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8\pi}{27}$.

Đáp án A

Câu 55. Ta có:

$$V=\frac{\pi}{3}r^2h=\frac{\pi}{3}(l^2-h^2)h=\frac{\pi}{3}(l-h^2)h,$$

$$V'=0\Rightarrow h=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Khi đó: $V_{max}=V\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

Đáp án D

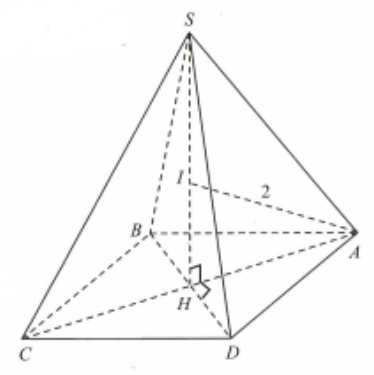
Câu 56. Ta có:

$$V=\pi r^2h=\pi(3-h^2)h,\ V'=0\Rightarrow h=1.$$

Khi đó: $V_{max}=V(1)=2\pi$.

Đáp án B

Câu 57.



Lưu ý: I thuộc đường thẳng SH, đặt $IH=x$, lúc đó:

$$AH^2=4-x^2, S_{ABCD}=\frac{AC.BD}{2}=2AH^2$$

Do $SH=2-x$ hoặc

$$SH=2+x\Rightarrow V=\frac{2}{3}(2-x)(4-x^2)$$

hoặc: $V=\frac{2}{3}(2+x)(4-x^2)$

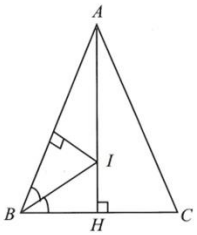
mà ta tìm V_{max} suy ra $SH=2-x$ bị loại.

Với $V=\frac{2}{3}(2+x)(4-x^2)$ thì $V'=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$.

Khi đó: $V_{max}=V\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{512}{81}=\frac{2^9}{9^2}$.

Đáp án B

Câu 58.



NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Hạ $AH \perp BC$

$\Rightarrow AH$ đi qua tâm I của đường tròn.

Đặt $IBH = \alpha,\ \left(0^o < \alpha < 45^o\right)$

$$\Rightarrow BH = \frac{IH}{\tan\alpha} = \frac{1}{x},\ (x = \tan\alpha).$$

$$AH = BH.\tan 2\alpha = BH.\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{AH.BC}{2} = HA.HB \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{2}{x\left(1-x^2\right)}.$$

Xét $g(x) = x\left(1-x^2\right)$ có $g'(x) = 0$ khi $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Khi đó: $S_{\min} = S\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3\sqrt{3}$.

Đáp án D

Câu 59. Gọi M, N lần lượt là trung điểm CD, AB, ta có: $CD \perp (ABM)$.

$$\Rightarrow V = \frac{CD}{3}.S_{\Delta ABM} = \frac{2x}{3}.\frac{MN.AB}{2} = \frac{2x}{3}.MN$$

$\left(\text{ Do } AM = BM = \sqrt{4-x^2}\right)$.

Ta có: $MN^2 = AM^2 - AN^2 = \left(4-x^2\right) - 1 = 3 - x^2$

$$\Rightarrow V = \frac{2}{3}x.\sqrt{3-x^2}.$$

$$V \le \frac{2}{3}\left[\frac{x^2 + \left(3-x^2\right)}{2}\right]^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow V_{\max} = \frac{3}{2} \text{ khi}$$

$$x = \sqrt{3-x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Đáp án D

Câu 60. Ta có: $\frac{SO'}{SO} = \frac{SB'}{SB}$.

$$\Rightarrow SB' = \frac{SO'.SB}{SO} = \frac{(h-x)\sqrt{R^2+h^2}}{h}$$

$$\Rightarrow O'B'^2 = SB'^2 - SO'^2 = \frac{R^2+h^2}{h^2}(h-x)^2 - (h-x)^2$$

Ta có: $V_{tru} = \pi.O'B'^2.OO'$

$$V_{tru} = \pi\left(\frac{h^2+R^2}{h^2} - 1\right)(h-x)^2.x$$

$$V'(x) = \pi\left(\frac{h^2+R^2}{h^2} - 1\right)\left(3x^2 - 4hx + h^2\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{h}{3}$$

Khi đó, dễ dàng tính được thể tích lớn nhất của hình trụ là:

$$V_{tru(\max)} = \pi\left(\frac{h^2+R^2}{h^2} - 1\right)\left(h - \frac{h}{3}\right)^2.\frac{h}{3}$$

$$V_{tru(\max)} = \pi.\frac{R^2}{h^2}.\frac{4h^2}{9}.\frac{h}{3} = \frac{4\pi R^2 h}{27}$$

Đáp án A

Câu 61. Đổi 20 lít $= 20000\ cm^3$.

Gọi bán kính nắp đậy của thùng sơn là x (cm), $x > 0$, chiều cao của thùng sơn là h (cm)

Khi đó thể tích của thùng sơn là:

$$V = \pi x^2 h = 20\ 000 \Rightarrow h = \frac{20\ 000}{\pi x^2}$$

Diện tích toàn phần của thùng sơn là:

$$S_{tp} = 2\pi xh + 2\pi x^2 = \frac{40\ 000}{x} + 2\pi x^2$$

Để nhà sản xuất tiết kiệm được vật liệu nhất tức

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get any free lunch on my

là S_{tp} nhỏ nhất.

Ta có: $S' = -\frac{40\,000}{x^2} + 4\pi x$.

$$S' = 0 \Leftrightarrow -\frac{40000}{x^2} + 4\pi x = 0 \Leftrightarrow 4\pi x^2 = 40000$$

$$\Leftrightarrow x^3 = \frac{10000}{\pi} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt[3]{\frac{10000}{\pi}} \\ x = -\sqrt[3]{\frac{10000}{\pi}} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	0	$\sqrt[3]{\frac{10000}{\pi}}$	$+\infty$
S'	$-$	0	$+$
S	↘	$4078,82$	↗

Vậy bán kính nắp đậy là $\sqrt[3]{\frac{10000}{\pi}}$ thì sẽ tiết kiệm vật liệu nhất.

Đáp án C

Câu 62. Vận tốc của con cá khi bơi ngược dòng được là $v-3(km/h)$.

Thời gian cá bơi được quãng đường $240\,\text{km}$ là $t = \frac{240}{v-3}(h)$.

Năng lượng tiêu hao của cá để vượt quãng đường đó là $E(v) = 240c.\frac{v^3}{v-3}$.

Bài toán trở thành tìm $v > 3$ để $E(v)$ là nhỏ nhất.

$$E'(v) = 240c.\left(\frac{3v^2(v-3)-v^3}{(v-3)^2}\right) = 240c.\left(\frac{2v^3-9v^2}{(v-3)^2}\right)$$

$$E'(v) = 0 \Leftrightarrow v^2(2v-9) = 0 \Leftrightarrow v = \frac{9}{2}\,(do\ v > 3).$$

Vậy $v = 4,5\ (km/h)$ thỏa mãn đề bài.

Đáp án D

Câu 63. Gọi x (km) là quãng đường bộ mà người đó đi, $0 \le x \le 50$.

Suy ra, người đó phải đi với quãng đường thủy là $\sqrt{(50-x)^2+15^2}$ (km)

Kinh phí cho cả quãng đường đi là:

$$S(x) = 5x + 7\sqrt{(50-x)^2+15^2}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ ta cần tìm x để $S(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Đạo hàm $S'(x) = 5 + 7.\frac{x-50}{\sqrt{(50-x)^2+15^2}}$

$$S'(x) = \frac{5\sqrt{x^2-100x+2725}+7(x-50)}{\sqrt{(50-x)^2+15^2}}$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 5\sqrt{x^2-100x+2725} = 7(50-x)$$

$$\Leftrightarrow 25(x^2-100x+2725) = 49(50^2-100x+x^2)$$

$\Rightarrow x \approx 34,7$ (km) thỏa mãn điều kiện $0 \le x \le 50$.

Lập bảng biến thiên ta được $x \approx 34,7$ thì $S(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;50]$.

Đáp án B

Câu 64. Gọi quãng đường vận động viên chạy

trên bờ là x (m).

Khi đó quãng đường vận động viên bơi dưới nước sẽ là $\sqrt{50^2+(200-x)^2}\,(m)$

Thời gian cho cả quãng đường đi (cả trên bờ và dưới nước) là $T(x)=\dfrac{x}{4,5}+\dfrac{\sqrt{50^2+(200-x)^2}}{1,5}$

$$T(x)=\frac{x}{4,5}+\frac{\sqrt{42500-400x+x^2}}{1,5}$$

Yêu cầu bài toán tương đương với: Tìm x để $T(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Xét hàm số $T(x)=\dfrac{x}{4,5}+\dfrac{\sqrt{42500-400x+x^2}}{1,5}$.

Ta có: $T'(x)=\dfrac{2}{9}+\dfrac{2}{3}.\dfrac{x-200}{\sqrt{42500-400x+x^2}}$

$T'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{42500-400x+x^2}+3(x-200)=0,\ (0\le x\le 200)$

$\Leftrightarrow 42500-400x+x^2=9(x^2-400x+40000)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\approx 217,7\ (L)\\ x\approx 182,3\ (N)\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên ta được $x\approx 182,3$ thì $T(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Đáp án C

Câu 65. Gọi $a,\ b$ lần lượt là chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật $(0<b\le a<16)$. Theo bài ra ta có: $2(a+b)=16\Leftrightarrow a+b=8\Rightarrow b=8-a.$

Diện tích của hình chữ nhật là $a(8-a)=8a-a^2.$

Ta tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(a)=8a-a^2.$

$$f'(a)=8-2a=0\Leftrightarrow a=4.$$

Ta có bảng biến thiên

x	0		4		16
f'		+	0	−	
f		↗	16	↘	

Vậy diện tích hình chữ nhật lớn nhất khi $a=b=4m$. Diện tích lớn nhất của hình chữ nhật bằng $16m^2$.

Đáp án A

Câu 66. Theo bài ra ta có $IM=216m,\ MN=1000m$.

Đặt $AM=x,\ (x>0)$.

Tam giác ΔAIM đồng dạng với tam giác ΔMNB nên $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{IM}{NB}\Leftrightarrow\dfrac{x}{MB}=\dfrac{216}{NB}$

$\Leftrightarrow\dfrac{x}{MB}=\dfrac{216}{\sqrt{MB^2-1000^2}}\Leftrightarrow\dfrac{x}{216}=\dfrac{MB}{\sqrt{MB^2-1000^2}}$

$\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{216^2}=\dfrac{MB^2}{MB^2-1000^2}\Leftrightarrow MB=\dfrac{1000x}{\sqrt{x^2-216^2}}\ (x>216)$

Vậy độ dài đoạn thẳng AB: $x+\dfrac{1000x}{\sqrt{x^2-216^x}}$.

Đặt $f(x)=x+\dfrac{1000x}{\sqrt{x^2-216^2}}$.

Để chi phí làm con đường nhỏ nhất thì độ dài AB là nhỏ nhất. Ta tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Ta có: $f'(x)=1+\dfrac{1000\sqrt{x^2-216^2}-\dfrac{1000x^2}{\sqrt{x^2-216^2}}}{x^2-216^2}$

$\Leftrightarrow f'(x)=1+\dfrac{1000\left(x^2-216^2\right)-1000x^2}{\left(x^2-216^2\right)\sqrt{x^2-216^2}}$.

$\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{\left(x^2-216^2\right)\sqrt{x^2-216^2}-1000.216^2}{\left(x^2-216^2\right)\sqrt{x^2-216^2}}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-216^2}=\sqrt[3]{1000.216^2}=360\Leftrightarrow x=72\sqrt{34}$.

Ta có bảng biến thiên

x	216		$72\sqrt{34}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1586	↘		↗	

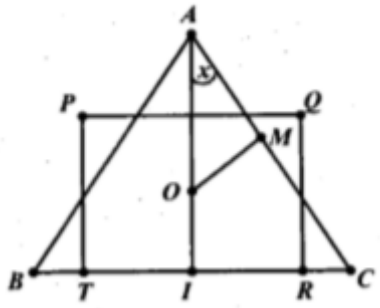
Vậy độ dài AB đạt cực tiểu khi $AM=72\sqrt{34}m$.

Chi phí phải sử dụng nhỏ nhất là

$S=\dfrac{1586}{100}.200=3172$ (triệu).

Đáp án D

Câu 67.



Hình nón có chiều cao $h=AI$, bán kính đáy $R=IC$, góc giữa đường sinh và trục là x, bán kính khối cầu nội tiếp khối nón là $OM=r$.

Ta có: $AI=AO+OI=\dfrac{OM}{\sin x}+OI$

$\Leftrightarrow AI=\dfrac{r}{\sin x}+r=\dfrac{r(\sin x+1)}{\sin x}$

$R=IC=AI.\tan x=\dfrac{\pi r^3(\sin x+1)^3}{3\sin x.\cos^2 x}=\dfrac{\pi r^3(\sin x+1)^2}{3\sin x.(1-\sin x)}$,

$V_2=2.\pi r^2\Rightarrow\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{(\sin x+1)^2}{6\sin x.(1-\sin x)}$.

Đặt $\sin x=t\in(0;1)$.

Xét hàm $f(t)=\dfrac{(t+1)^2}{6t.(1-t)},t\in(0;1)$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{18t^2+12t-6}{\left(6t-6t^2\right)^2}=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\notin(0;1)\\t=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$

Tính toán tại một số giá trị cần thiết:

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}f(t)=+\infty\\f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{3}=\min\limits_{(0;1)}f(t)\\\lim\limits_{x\to1^-}f(t)=+\infty\end{cases}$

Tìm được $Min\,f(x)=\dfrac{4}{3}$.

Đáp án C

Câu 68. Gọi R, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của thùng.

+ Gọi V,S_{tp} lần lượt là thể tích và diện tích toàn phần của thùng

$V = 2000\pi$ lít $= 2000\pi\ dm^3 = 2\pi m^3$.

$V = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R^2 + 2\pi R\dfrac{2}{R^2} = 2\left(\pi R^2 + \dfrac{2\pi}{R}\right)$.

$V = 2\left(\pi R^2 + \dfrac{\pi}{R} + \dfrac{\pi}{R}\right) \ge 2\sqrt[3]{\pi R^2.\dfrac{\pi}{R}.\dfrac{\pi}{R}} = 2\pi$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\pi R^2 = \frac{\pi}{R} \Rightarrow R = 1m \Rightarrow h = \frac{2}{R^2} = 2m$$

Đáp án A

Câu 69. Gọi $x(km/h)$ là vận tốc của tàu, $x > 0$

Thời gian tàu chạy quãng đường 1 km là $\dfrac{1}{x}(h)$

Chi phí tiền nhiên liệu cho phần thứ nhất là:

$$\frac{1}{x}.480 = \frac{480}{x} \text{ (ngàn đồng)}$$

Hàm chi phí cho phần thứ hai là $p = kx^3$ (ngàn đồng/giờ)

Mà khi $x = 10 \Rightarrow p = 30 \Rightarrow k = 0,03$ nên $p = 0,03x^2$ (ngàn đồng)

Vậy tổng chi phí $f(x) = \dfrac{480}{x} + 0,03x^2$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{240}{x} + \frac{240}{x} + 0,03x^2 \ge 3\sqrt[3]{1728} = 36$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 20$.

Đáp án D

Câu 70. Gọi bán kính của quả cầu A là R_1 của 4 quả cầu B, C, D và E là R_2.

Khi đó ta có: $R_1 = \dfrac{2-4R_2}{2} = 1-2R_2\ (0 < R_1 < 1)$.

Từ đó ta có: $(0 < 1-2R_2 < 1) \Leftrightarrow 0 < R < \dfrac{1}{2}$.

Tổng thể tích của 5 khối cầu là $S = S_A + 4S_{BCDE}$

$$\Leftrightarrow S = \frac{4}{3}\pi R_1^3 + 4.\frac{4}{3}\pi R_2^3 = \frac{4\pi}{3}\left(\left[(1-2R_2)^3\right] + 4R_2^3\right)$$

$$S = \frac{4\pi}{3}\left(-4R_2^3 + 12R_2^2 - 6R_2 + 1\right), \left(0 < R_2 < \frac{1}{2}\right)$$

Khảo sát hàm $f(t) = -4t^3 + 12t^2 - 6t + 1\left(0 < t < \dfrac{1}{2}\right)$

$$\Rightarrow f'(t) = 12t^2 + 24t - 6$$

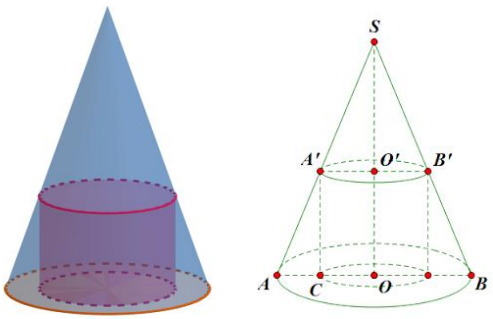
$$\Rightarrow f'(t) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \\ t = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên và từ bảng biến thiên ta thấy $f(t)$ đạt nhỏ nhất tại $t = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

Từ đó ta có $S_{\min} = \dfrac{4\pi}{3} f\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right) \approx 0,72m^3$.

Đáp án A

Câu 71.



Theo định lí Thales, ta có:

$$\frac{SO'}{SO'+x} = \frac{h-x}{h} = \frac{r'}{r'}\ (0 < x < h).$$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never, ever anywhere unless you try

Thể tích hình trụ là:

$$V=\pi r'^2 x=\pi\frac{\left[(h-x)r\right]^2}{h^2}.x=\frac{\pi r^2}{h^2}x(h-x)^2.$$

Xét hàm số: $M(x)=x(h-x)^2$, ta có:

$$M(x)=4.\frac{h-x}{2}.\frac{h-x}{2}x$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có thể suy ra:

$$M\overset{Cauchy}{\leq}4\left(\frac{\frac{h-x}{2}+\frac{h-x}{2}+x}{3}\right)^3=\frac{4h^2}{27}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{h-x}{2}=x\Leftrightarrow x=\frac{h}{3}$.

Đáp án B

Câu 72. Điều kiện: $h\geq 0$.

Ta có: $V=\frac{4}{3}\pi r^3+\pi r^2h\Rightarrow h=\frac{V-\frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2}$.

Diện tích toàn phần của bồn xăng là:

$$S(r)=4\pi r^2+2\pi rh\Rightarrow h=\frac{4\pi r^3+2V-\frac{8}{3}\pi r^3}{r}.$$

Ta có: $S'(r)=\frac{\frac{8}{3}\pi r^3-2V}{r^2}=0$

$$\Leftrightarrow\frac{8}{3}\pi r^3=2V\Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

Lập bảng biến thiên ta sẽ thấy:

$$S_{\min}\Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

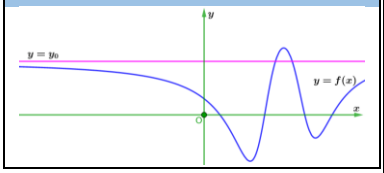
$$\Rightarrow h=\frac{4\pi.\frac{3V}{4\pi}+2V-\frac{8}{3}\pi.\frac{3V}{4\pi}}{r}=0$$

Để nguyên vật liệu làm bồn xăng là ít nhất $\Leftrightarrow S_{\min}\Leftrightarrow h=0$.

Đáp án A

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Minh họa đường tiệm cận ngang!



Extra Techniques:

Study tips:

Việc ôn tập nội dung "Giới hạn" của chương trình lớp 11 là một yêu cầu gần như là bắt buộc nếu độc giả muốn làm tốt dạng toán này!

Extra Techniques:

Remark:

Thực chất việc tìm tiệm cận của đồ thị hàm số là công đoạn đi tìm giới hạn hữu hạn tại vô cực.

Extra Techniques:

Study Tips:

Một số công thức giới hạn thường xuyên gặp bên đây có thể giúp các bạn tối ưu hóa thời gian của các bạn trong quá trình thực chiến đề!

I.IV. Đường tiệm cận

I. Đường tiệm cận ngang

1. Định nghĩa

Trên một khoảng $K = \begin{bmatrix} (a;+\infty) \\ (-\infty;b) \\ (-\infty;+\infty) \end{bmatrix}$ vô hạn nào đó, xét một hàm số xác định $y=f(x)$. Đường thẳng $y=y_0$ được gọi là **đường tiệm cận ngang** của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu **ít nhất** một trong hai điều kiện đưới đây được thỏa mãn:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=y_0;\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=y_0.$$

2. Một số giới hạn đặc biệt – dạng cơ bản

a. Giới hạn của hằng số tại vô cực

$$\lim_{x\to\pm\infty} c=c,\ \forall c\in\mathbb{R}\ (2.1).$$

b. Giới hạn của tỉ số giữa hằng và biến

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{c}{x^k}=0,\ c\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{Z}^+\ (2.2).$$

c. Ba trường hợp thường thấy của giới hạn hàm $y=x^k$

$$\lim_{x\to+\infty} x^k=+\infty,\ k\in\mathbb{Z}^+\ (2.3).$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^k=\begin{bmatrix} -\infty,\ k\in\mathbb{Z},\ k=2m+1\ (2.4) \\ +\infty,\ k\in\mathbb{Z},\ k=2m\ (2.5) \end{bmatrix}.$$

d. Giới hạn (2.2) dạng đặc biệt.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^k}=0,\ k\in\mathbb{Z}^+\ (2.6).$$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Extra Techniques:

Study Tips:

Giới hạn thường thấy trong các bài toán vận dụng tính chất đồ thị hàm số của Bộ giáo dục và Đào tạo hiện nay là giới hạn (2.9). Khi đó, $y=\frac{a}{c}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

e. Giới hạn hàm phân thức (đồng bậc tử mẫu)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_1x+b_0}=\frac{a_n}{b_n},\ n\in\mathbb{Z}^+\ (2.7).$$

f. Giới hạn hàm phân thức (bậc tử nhỏ hơn mẫu)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+...+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_1x+b_0}=0,\ k,n\in\mathbb{Z}^+,k<n\ (2.8).$$

g. Giới hạn (2.7) dạng đặc biệt

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c},\ c\neq 0,\ ad-bc\neq 0\ (2.9).$$

3. Một số giới hạn đặc biệt – dạng nâng cao

Extra Techniques:

Study Tips:

Giới hạn của dãy số (nếu có) là duy nhất.

a. Giới hạn của hàm số mũ

$$\lim_{x\to+\infty}a^x=\begin{cases}+\infty, & |a|>1\\ 1, & a=1\\ 0, & |a|<1\end{cases}\ (2.10).$$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never set anywhere unless you try

Extra Techniques:

Remark:

Những giới hạn chỉ đúng khi cả hai dãy a_n và b_n hội tụ.

Cho dù (a_n+b_n) hội tụ các công thức bên vẫn có trường hợp sai.

Chẳng hạn: $\begin{cases}a_n=(1)^n\\ b_n=(-1)^n\end{cases}$, khi đó: (a_n) hội tụ, (b_n) phân kỳ nhưng (a_n+b_n) hội tụ!!!

b. Giới hạn của các dãy (hội tụ) với các phép toán

Nếu các dãy số (a_n) và (b_n) hội tụ thì các dãy $(a_n\pm b_n),(a_nb_n),\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ với $b_n\neq 0,\forall n$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n\neq 0$ cũng hội tụ và khi đó:

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n\pm b_n)=\lim_{n\to+\infty}a_n\pm\lim_{n\to+\infty}b_n\ (2.11).$$

$$\lim_{n\to+\infty}(a_nb_n)=\lim_{n\to+\infty}(a_n).\lim_{n\to+\infty}(b_n)\ (2.12).$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty}b_n}\ (2.13).$$

c. Giới hạn của hằng số và dãy (hội tụ) trên các phép toán

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n\pm c)=\lim_{n\to+\infty}a_n\pm c\ (2.14).$$

$$\lim_{n\to+\infty}(ka_n)=k.\lim_{n\to+\infty}(a_n)\ (2.15).$$

Extra Techniques:

Study Tips:

Những công thức bên trên vẫn còn đúng nếu thay $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \to \lim\limits_{x\to x_0}$.

d. Giới hạn hữu hạn của các hàm (xác định) với các phép toán

Cho các hàm số $y=f(x), g(x)$ xác định trong một tập $X\subset\mathbb{R}$ nào đó. Nếu $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=A$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=B,\ A,B\in\mathbb{R}$, thì ta có:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)\pm g(x)\right]=A\pm B\ \ (2.16).$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x).g(x)\right]=A.B\ \ (2.17).$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{A}{B}\ \ (2.18).$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)^{g(x)}=A^B,\ (A>0)\ \ (2.19).$$

Extra Techniques:

Study Tips:

Cách xét dấu trên tương tự như xét dấu các hàm số với các phép toán cộng và nhân thông thường (âm cộng âm được âm, dương cộng dương thành dương, tích cùng dấu được dương, tích trái dấu được âm, lấy âm một số dương thu được số âm và ngược lại.

d. Giới hạn vô tận của các hàm (xác định) với các phép toán

Cho các hàm số $y=f(x), g(x)$ xác định trong một tập $X\subset\mathbb{R}$ nào đó. Nếu $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\pm\infty$, thì ta có:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)+g(x)\right]=\pm\infty\ \ (2.20).$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x).g(x)\right]=+\infty\ \ (2.21).$$

Cho các hàm số $y=f(x), g(x)$ xác định trong một tập $X\subset\mathbb{R}$ nào đó. Nếu $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\mp\infty$, thì ta có:

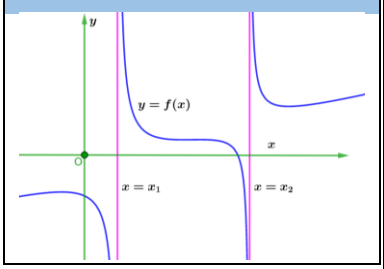
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-g(x)\right]=\pm\infty\ \ (2.22).$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x).g(x)\right]=-\infty\ \ (2.23).$$

II. Đường tiệm cận đứng

1. Định nghĩa

Minh họa đường tiệm cận đứng!



Đường thẳng $x=x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\pm\infty,\ \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\pm\infty.$$

Extra Techniques:

Remark:

Các quy tắc bên đây được áp dụng cho mọi trường hợp $x \to x_0$, $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$

2. Một số quy tắc tìm giới hạn tại một điểm

a. Quy tắc 1 – Quy tắc xác định dấu giới hạn của tích

Cho các hàm số $y = f(x), g(x)$ xác định trong một tập $X \subset \mathbb{R}$ nào đó. Khi đó:

$L = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x).g(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

b. Quy tắc 2 – Quy tắc xác định dấu giới hạn của thương

Cho các hàm số $y = f(x), g(x)$ xác định trong một tập $X \subset \mathbb{R}$ nào đó với $g(x) \neq 0$. Khi đó:

Extra Techniques:

Study Tips:

Ở quy tắc 2, chúng tôi dùng thuật ngữ "dấu" thể hiện tính "âm, dương" của hàm số trên khoảng $X \setminus \{x_0\}$ đang xét.

$L = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	$+$	$+\infty$
		$-$	$-\infty$
$L < 0$	0	$+$	$-\infty$
		$-$	$+\infty$

3. Một số giới hạn đặc biệt – dạng cơ bản

a. Giới hạn của hằng số tại một điểm

$$\lim_{x \to x_0} c = c, \forall c \in \mathbb{R} \quad (3.1).$$

b. Giới hạn của tỉ số giữa hằng và biến

$$\lim_{x \to x_0} \frac{c}{(x - x_0)^k} = \infty, c \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}^+ \quad (3.2).$$

d. Giới hạn (2.2) dạng đặc biệt.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{(x - x_0)^k} = 0, \ k \in \mathbb{Z}^+ \quad (3.3).$$

e. Đối với những hàm phân thức có dạng $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ thỏa mãn $\begin{cases} f(x_0)\neq 0 \\ g(x_0)=0 \end{cases}$ thì:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty, \quad (3.4)$$

f. Giới hạn phân thức bậc nhất trên bậc nhất (hàm nhất biến)

$$\lim_{x\to -\frac{d}{c}}\frac{ax+b}{cx+d}=\infty,\ c\neq 0,\ ad-bc\neq 0 \quad (3.5).$$

4. Một số giới hạn đặc biệt – dạng nâng cao

a. Giới hạn hữu hạn của các hàm (xác định) với các phép toán

Cho các hàm số $y=f(x), g(x)$ xác định trong một tập $X\subset\mathbb{R}$ nào đó. Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B,\ A,B\in\mathbb{R}$, thì ta có:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=A\pm B \quad (3.6).$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]=A.B \quad (3.7).$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{A}{B} \quad (3.8).$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=A^B,\ (A>0) \quad (3.9).$$

b. Giới hạn vô tận của các hàm (xác định) với các phép toán

Cho các hàm số $y=f(x), g(x)$ xác định trong một tập $X\subset\mathbb{R}$ nào đó.

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$, thì ta có:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=\pm\infty \quad (3.10).$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]=+\infty \quad (3.11).$$

Extra Techniques:

Study Tips:

Những công thức bên trên vẫn còn đúng nếu thay $\lim\limits_{x\to x_0}\to\lim\limits_{x\to\pm\infty}$.

Extra Techniques:

Study Tips:

Cách xét dấu trên tương tự như xét dấu các hàm số với các phép toán cộng và nhân thông thường (âm cộng âm được âm, dương cộng dương thành dương, tích cùng dấu được dương, tích trái dấu được âm, lấy âm một số dương thu được số âm và ngược lại.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Cho các hàm số $y=f(x), g(x)$ xác định trong một tập $X \subset \mathbb{R}$ nào đó. Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\mp\infty$, thì ta có:

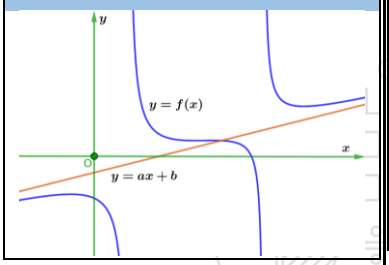
$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]=\pm\infty \quad (3.12).$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]=-\infty \quad (3.13).$$

III. Đường tiệm cận xiên

1. Định nghĩa

Minh họa đường tiệm cận xiên!



Đường thẳng $y=ax+b, a\neq 0$ được gọi là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax-b\right]=0,\ \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax-b\right]=0.$$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try.

2. Cách xác định hệ số của tiệm cận xiên

Để xác định hệ số a, b trong phương trình đường tiệm cận xiên $y=ax+b$, ta có thể áp dụng các công thức sau đây:

Extra Techniques:

Study Tips:

Nếu $a=0\Rightarrow$ Ta chỉ có đường tiệm cận ngang.

a. Hệ số a

Hệ số a được tính bởi: $a=\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}\end{array}\right.$.

Extra Techniques:

Study Tips:

Hàm phân thức chỉ có đường tiệm cận xiên khi bậc của tử lớn hơn bậc của mẫu một bậc!

b. Hệ số b

Hệ số b được xác định bằng cách: $b=\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]\end{array}\right.$.

3. Cách xác định đường tiệm cận xiên của hàm cơ bản

a. Hàm số bậc hai trên bậc nhất

Extra Techniques:

Study Tips:

Những dạng toán về đường tiệm cận xiên, tôi chỉ cung cấp thêm kiến thức cho độc giả. Bởi lẽ, rất hiếm khi thấy xuất hiện trong các đề thi thử đặc biệt đề thi tốt nghiệp THPTQG những năm gần đây!

Xét hàm số $y=\frac{ax^2+bx+c}{dx+e},\ a,d\neq 0$.

Thực hiện phép chia đa thức ax^2+bx+c cho $dx+e$, ta thu được thương và dư lần lượt là: $\frac{a}{d}x+\frac{bd-ae}{d^2}$ và $\frac{cd^2-bde+ae^2}{d^2}$.

Khi đó đường $y=\frac{a}{d}x+\frac{bd-ae}{d^2}$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\frac{ax^2+bx+c}{dx+e},\ a,d\neq 0$.

b. Căn thức bậc hai của hàm bậc hai

Xét hàm số $y=\sqrt{ax^2+bx+c},\ a\neq 0$.

Ta có: $y=\sqrt{a\left(x^2+2.x.\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a}}$

$$y=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}}=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}.\sqrt{1+\frac{c-\frac{b^2}{4a}}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}}$$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Khi đó, ta hoàn toàn có thể phân tích thành

$$y=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}+\varepsilon(x)=\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|+\varepsilon(x)$$

Với $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon(x)=0$.

Do thế ta thu được hai đường tiệm cận xiên là $y=\pm\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)$.

IV. Một số bài tập ứng dụng đường tiệm cận

Câu 1. Đồ thị hàm số $y=\frac{1}{x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Đáp án: B

Extra Techniques:

Study Tips:

Trong chương trình sách giáo khoa hiện thời, ta không định nghĩa đường tiệm cận (tiệm cận) của hàm số mà chỉ có đường tiệm cận của đồ thị hàm số!

Extra Techniques:

Study Tips:

Các bước sử dụng CASIO để tính giới hạn tại vô cực.

Bước 1: Nhập hàm số vào CASIO.

Bước 2: CALC một giá trị phù hợp, chẳng hạn:

Nếu dần về $+\infty$, ta CALC $x=10^a$ (Tùy bài có dạng phân thức, đa thức, hàm số mũ mà ta chọn $a\in[5;15]$ cho phù hợp, những trường hợp hiếm thấy có thể chọn số a ngoài khoảng trên.

Nếu dần về $-\infty$, ta CALC $x=-10^a$, với $a\in[5;15]$.

Lời giải

Cách 1: Tự luận thông thường.

Đồ thị hàm số xác định trên $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

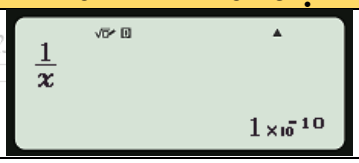
Dễ thấy: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Do vậy đường thẳng $y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{x}$.

Vậy đồ thị hàm số có duy nhất một đường tiệm cận ngang.

Cách 2: CASIO.

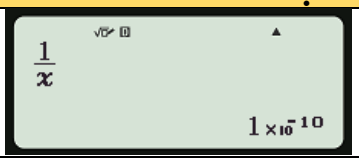
Nhập vào máy tính biểu thức $\dfrac{1}{x}$, sử dụng lệnh CALC để tính toán tại một giá trị có độ lớn giá trị tuyệt đối đủ lớn, 10^{10}.

Quy trình bấm máy	Màn hình hiển thị
1 ▭ x CALC 1 0 x^▪ 1 0 = =	

Kết quả máy tính thu được là một số khá nhỏ $10^{-10}=\dfrac{1}{10^{10}}\sim 0$.

Do vậy $y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{x}$.

Tiếp tục CALC một giá trị vô cùng nhỏ, -10^{10}.

Quy trình bấm máy	Màn hình hiển thị
CALC − 1 0 x^▪ 1 0 = =	

Kết quả máy tính thu được là một số khá nhỏ $10^{-10}=\dfrac{1}{10^{10}}\sim 0$.

Do vậy $y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{1}{x}$.

Hai đường thẳng trên giống nhau nên ta chỉ lấy một.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\frac{x-2}{x^2+mx+m}$ có đúng một đường tiệm cận đứng?

A. $m=\{\varnothing\}$.

B. $\left[\begin{array}{l} 0\le m\le 4 \\ m=-\frac{4}{3} \end{array}\right.$.

C. $m\in\left\{-\frac{4}{3};0;4\right\}$.

D. $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m\ge 4 \end{array}\right.$.

Đáp án: C

Lời giải

Để đồ thị hàm số $y=\frac{x-2}{x^2+mx+m}$ có một đường tiệm cận đứng thì:

Trường hợp 1: Mẫu số $x^2+mx+m=0$ có một nghiệm bội chẵn có thể trùng hoặc không trùng nghiệm của tử, $x=2$.

Hay $\Delta=m^2-4m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=4 \end{array}\right.$.

Trường hợp 2: Mẫu số có một nghiệm $x=2$ và một nghiệm khác, khác $x=2$. Hay: $\left\{\begin{array}{l} \Delta=m^2-4m>0 \\ 2^2+2m+m=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m>4 \\ m<0 \end{array}\right. \\ m=-\frac{3}{4} \end{array}\right.\Leftrightarrow m=-\frac{3}{4}$.

Vậy tập các giá trị m thỏa mãn yêu cầu đề bài là $m\in\left\{-\frac{4}{3};0;4\right\}$.

Mở rộng đề bài: Hàm số $y=\frac{x-2}{x^2+mx+m}$ luôn có một đường tiệm cận ngang là đường $y=0$. Do bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu! Ta có thể dùng những nhận xét ở phần lý thuyết để giải quyết bài toán!

Extra Techniques:

Study Tips:

Bài toán vẫn nhận trường hợp 1, mẫu số có nghiệm của tử là vì với $m=-\frac{4}{3}$ thì:

$$y=\frac{x-2}{x^2-\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}}$$

Hay:

$$y=\frac{x-2}{(x-2)\left(x+\frac{2}{3}\right)}$$

Khi đó:

$$\lim_{x\to\pm\infty}y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x+\frac{2}{3}}=0$$

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

Khẳng định nào dưới đây là chắc chắn đúng?

A. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

C. Đồ thị hàm số có duy nhất một đường tiệm cận.

D. Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận ngang.

Đáp án: D

Lời giải

Dựa vào lý thuyết đường tiệm cận, ta dễ dàng nhận thấy:

Đường $y=2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Tuy nhiên, ta không thể kết luận hàm số chỉ có một đường tiệm cận (Do còn có đường tiệm cận đứng chưa được kể vào).

➔ Loại **A**, **B**, **C**.

Đáp án đúng phải là **Đáp án D** vì: đồ thị hàm số có thể có nhiều hơn một đường tiệm cận (nếu tồn tại tiệm cận đứng).

Extra Techniques:

Study Tips:

Những bài toán không cho một hàm số cụ thể mà chỉ cho "kết quả" của các giới hạn thì công cụ hiểu quả nhất là định nghĩa và các quy tắc tìm đường tiệm cận đã được trình bày ở trên!

Câu 4. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+2x-15}$ là?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Đáp án: C

Lời giải

Cách giải sai:

Tìm tiệm cận ngang:

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+2x-15}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{15}{x}}=1$.

Vậy $y=1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Tìm tiệm cận đứng:

Extra Techniques:

Study Tips:

Những bài toán phân thức hữu tỉ thường "bẫy" Học sinh những điểm như bài toán được nêu ra ở bên! Để tối ưu cách giải, hay tìm ra dạng bên, ta có thể dùng CASIO để giải phương trình tìm nghiệm mẫu và tử. Nếu có nghiệm chung, chắc chắn sẽ được đưa về dạng bên.

Tìm nghiệm của mẫu:

Ta có: $x^2+2x-15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-5 \end{array}\right.$.

Vậy $x=-5,\ x=3$ là hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số trên.

Vậy có tất cả 3 đường tiệm cận của đồ thị hàm số!

~~**Đáp án D.**~~

Cách giải đúng:

Nhận xét: Tử số và mẫu số đều có lượng nhân tử $(x-3)$.

Do, $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$ và $x^2+2x-15=(x-3)(x+5)$.

Khi đó: $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+2x-15}=\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-3)(x+5)}=\dfrac{x-1}{x+5}$.

Như vậy đồ thị hàm số trở thành hàm số nhất biến $y=\dfrac{x-1}{x+5}$.

Hay đồ thị hàm số hai đường tiệm cận (một đường tiệm cận đứng $x=-5$ và một đường tiệm cận ngang $y=1$).

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-\sqrt{mx^2+2021}}{x-2022}$ có đúng hai đường tiệm cận ngang.

A. $m<0$. **B.** $\left[\begin{array}{l} 0<m<3 \\ m>3 \end{array}\right.$. **C.** $m>0$. **D.** $m=0$.

Đáp án: C

Lời giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x\neq 2022 \\ mx^2+2021\geq 0 \end{cases}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\sqrt{mx^2+2021}}{x-2022}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\sqrt{m+\dfrac{2021}{x^2}}}{1-\dfrac{2022}{x}}=2-\sqrt{m}$.

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-\sqrt{mx^2+2021}}{x-2022}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\sqrt{m+\dfrac{2021}{x^2}}}{1-\dfrac{2022}{x}}=2+\sqrt{m}$.

Để hai đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận thì điều kiện cần và đủ là:

$\begin{cases}m\ge 0\\ 2-\sqrt{m}\ne 2+\sqrt{m}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m\ge 0\\ m\ne 0\end{cases}\Rightarrow m>0$.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x-5}{x-m}$ có tiệm cận đứng nằm bên phải trục Oy.

A. $m<0$. **B.** $m\ne 0$. **C.** $m>0$. **D.** Đáp án khác.

Đáp án: D

Lời giải

Điều kiện cần để có đường tiệm cận đứng là:

$$4.(-m)-(-5).1\ne 0\Leftrightarrow -4m\ne -5\Leftrightarrow m\ne\frac{5}{4}.$$

Thật vậy! Vì với $m=\dfrac{5}{4}$ thì: $y=\dfrac{4x-5}{x-\dfrac{5}{4}}=4$ không có đường tiệm cận.

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường $x=m$. Để đường thẳng $x=m$ nằm bên phải trục Oy thì $m>0$.

Vậy $m\in(0;+\infty)\setminus\left\{\dfrac{5}{4}\right\}$.

Câu 7. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$ là?

A. $x=2$. **B.** $x=3$. **C.** $\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=3\end{array}\right.$. **D.** Đáp án khác.

Đáp án: B

Extra Techniques:

Remark:

Một trong những lỗi sai dễ thấy nhất của Học sinh chính là "quên" điều kiện cần để hàm số có tiệm cận.

Đối với đồ thị hàm số nhất biến $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ thì điều kiện cần và đủ để có đường tiệm cận đứng (ngang) là: $\begin{cases}a\ne 0\\ c\ne 0\\ ad-bc\ne 0\end{cases}$

Extra Techniques:

Remark:

Học sinh thường gặp rắc rối trong những dạng toán này, bởi lẻ, các bạn không quan tâm đến việc khử đi lượng nhân tử "chung" ở tử và mẫu. Dẫn đến có sự nhận sai đáp án!

Lời giải

Ta có: $y=\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=\dfrac{4x^2-4x+1-x^2-x-3}{\left(x^2-5x+6\right)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}$

$$\Leftrightarrow y=\frac{3x^2-5x-2}{\left(x^2-5x+6\right)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{(x-2)(3x+1)}{(x-2)(x-3)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{3x+1}{(x-3)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}$$

Extra Techniques:

Study Tips:

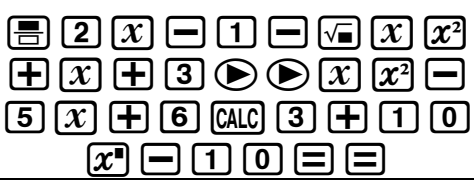
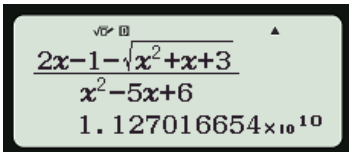
Những bài toán có chứa lượng $f(x)\pm\sqrt{g(x)}$, ta thường "trục" căn thức bằng cách nhân thêm lượng liên hợp cho cả tử và mẫu, lượng liên hợp đó là: $f(x)\mp\sqrt{g(x)}$.

Tìm nghiệm mẫu số:

$$(x-3)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ \sqrt{x^2+x+3}=1-2x\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ \begin{cases}x^2+x+3=1-4x+4x^2\\ x<\dfrac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ \begin{cases}3x^2-5x-2=0\\ x<\dfrac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.\cdot$$

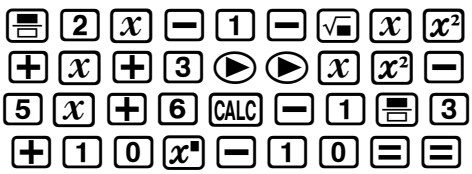
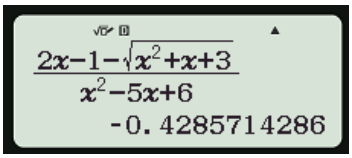
Tính giới hạn tại $x=3+10^{-10}$, $x=-\dfrac{1}{3}+10^{-10}$ bằng máy tính CASIO.

Quy trình bấm máy	Màn hình hiển thị
	

Màn hình hiển thị kết quả $1.127016654\times10^{10}\nearrow+\infty$.

Vì thế $x=3$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Một cách tương tự với $x=-\dfrac{1}{3}+10^{-10}$.

Quy trình bấm máy	Màn hình hiển thị
	

Vì màn hình cho ra kết quả là một giá trị hữu hạn, vì thế $x=-\dfrac{1}{3}$

Vậy chỉ có một đường tiệm cận đứng duy nhất là đường $x=3$.

Câu 8. Biết đồ thị hàm số $y=\dfrac{(a-2b)x^2+bx+1}{x^2+x-b}$ có đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang lần lượt là $x=1,\ y=0$. Tính $a+2b$.

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** Đáp án khác.

Đáp án: C

Lời giải

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Để $x=1$ là đường tiệm cận đứng thì: $1^2+1-b=0\Leftrightarrow b=2$.

Để đường tiệm cận ngang là $y=0$ thì:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(a-2b)x^2+bx+1}{x^2+x-b}=a-2b=0\Leftrightarrow a=2b=4.$$

Như vậy tổng $a+2b=4+2.2=8$.

Thử lại với $a=4,\ b=2$, ta có: $y=\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$ quả thật thỏa mãn yêu cầu đề bài!

Câu 9. Số giá trị m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx-1}{x-m}$ có tiệm cận đứng.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Đáp án: C

Lời giải

Để hàm số có tiệm cận đứng thì:

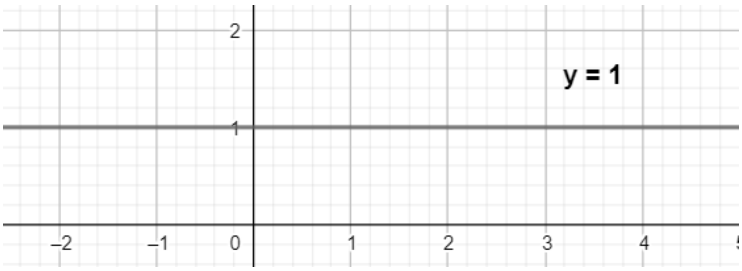
Extra Techniques:

Study Tips:

Tìm điều kiện để đồ thị hàm số có đường tiệm cận $x=x_0,\ y=y_0$ xác định thì việc định các giá trị của tham số thực $a,\ b$ được chuyển thành bài toán tìm nghiệm ẩn "tham số" và ẩn x được thay thế thành những hằng số cụ thể, x_0. Tương tự với y_0.

$$m.(-m)-(-1).1\neq 0 \Leftrightarrow -m^2+1\neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\neq -1 \\ m\neq 1 \end{array}\right. .$$

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm như hình vẽ dưới đây.



Tổng số tiệm cận của đồ thị hàm số:

$$y=g(x)=\frac{f(x)+1}{f(x)+1}+\frac{\sqrt{f^2(x)+2}}{f(x)+2}+...+\frac{\sqrt[2021]{f^{2021}(x)+2021}}{f(x)+2021}$$

A. 2022. **B.** 2. **C.** 2021. **D.** 0.

Đáp án: A

Lời giải

Dựa vào **đồ thị hàm số đạo hàm** ta thấy: $f'(x)=1\Rightarrow f(x)=x+C$.

Khi đó hàm số là một hàm đồng biến và

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}\left|f(x)\right|=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x-C) \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left|f(x)\right|=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+C) \end{cases}$$

Xét hàm số:

$$y=g(x)=\frac{f(x)+1}{f(x)+1}+\frac{\sqrt{f^2(x)+2}}{f(x)+2}+\frac{\sqrt[3]{f^3(x)+3}}{f(x)+3}+...+\frac{\sqrt[2021]{f^{2021}(x)+2021}}{f(x)+2021}$$

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2021-C;-2020-C;...;-1-C\}$.

Với mọi số $x_0=f(a)\in\{-2021-C;-2020-C;...;-2-C\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to x_0^-} g(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=\infty$.

Suy ra: $x=x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Như vậy hàm số $y=g(x)$ có tất cả 2020 tiệm cận đứng. (Lưu ý: $x=x_0=f(a)=-1$ không là tiệm cận đứng).

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\underbrace{1+1+...+1}_{2021\ elements\ of\ 1}=2021$

Bên cạnh đó:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{|f(x)|\sqrt{1+\frac{2}{f^2(x)}}}{f(x)+2}+...+\frac{f(x)\sqrt[2021]{1+\frac{2021}{f^{2021}(x)}}}{f(x)+2021}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{-f(x)\sqrt{1+\frac{2}{f^2(x)}}}{f(x)+2}+...+\frac{f(x)\sqrt[2021]{1+\frac{2021}{f^{2021}(x)}}}{f(x)+2021}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=1-1+1+...+1-1+1=1$$

Vì thế đồ thị hàm số $y=g(x)$ có hai tiệm cận ngang là đường $y=2021$ và $y=1$. Như vậy hàm số có tất cả 2022 đường tiệm cận.

Extra Techniques:

Study Tips:

Điều kiện **1** thực chất là dựa vào tính "đơn điệu" của đồ thị hàm số. Bởi lẽ, đồ thị hàm số không đơn điệu – hàm không đổi thì hàm số đạo hàm phải bằng 0. Như vậy, để hàm số không trở thành "đường thẳng song song hoặc trùng" với trục hoành – hàm hằng thì $y'\neq 0$.

Một số Tips để làm tốt các bài toán về đường tiệm cận

1. Điều kiện có tiệm cận của đồ thị hàm số nhất biến

Đồ thị hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, $a\neq 0, c\neq 0$ có đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang khi và chỉ khi: $y'\neq 0\Leftrightarrow ad-bc\neq 0$.

Khi đó, đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là $x=-\frac{d}{c}$ và đường tiệm cận ngang là $y=\frac{a}{c}$.

Extra Techniques:

Study Tips:

Mẹo bên cạnh đây sẽ là một công cụ hữu hiệu để các độc giả có thể hoàn thành bài tập một cách nhanh chóng và đầy hiệu quả.

2. Mẹo "nhìn" đường tiệm cận

a. Hàm phân thức hữu tỉ

Xét hàm số $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ với $f(x), g(x)$ là các đa thức. Khi đó:

Extra Techniques:

Study Tips:

Mẹo bên cạnh đây sẽ là một công cụ hữu hiệu để các độc giả có thể hoàn thành bài tập một cách nhanh chóng và đầy hiệu quả.

a.1. Hàm số có tiệm cận đứng là $x=c$ nếu $\begin{cases} f(c)\neq 0 \\ g(c)=0 \end{cases}$

(Xét sau khi đã thu gọn phân thức – nếu có lượng nhân tử chung).

a.2. Nếu bậc tử bằng bậc mẫu thì tiệm cận ngang chính là "tỉ lệ" của hệ số cao nhất của hạng tử ở tử và ở mẫu.

Chẳng hạn: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_1x+b_0}=\dfrac{a_n}{b_n}$.

a.3. Nếu bậc tử lớn hơn bậc mẫu thì tiệm cận ngang không tồn tại thay vào đó nếu bậc tử lớn hơn bậc mẫu đúng một bậc thì luôn tồn tại đường tiệm cận xiên theo định nghĩa "đường tiệm cận xiên" đã được trình bày ở trên.

Một ví dụ về đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm bậc hai trên bậc nhất tổng quát:

Extra Techniques:

Study Tips:

Khi làm những bài tập dạng tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm bậc hai trên bậc nhất, ta không nên "học thuộc" công thức bên, thay vào đó, công cụ "Lược đồ Hoocner" để tìm ra phần thương và phần dư, nhất là những hàm bậc cao.

Xét hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$, $a,d\neq 0$.

Thực hiện phép chia đa thức ax^2+bx+c cho $dx+e$, ta thu được thương và dư lần lượt là: $\dfrac{a}{d}x+\dfrac{bd-ae}{d^2}$ và $\dfrac{cd^2-bde+ae^2}{d^2}$.

Khi đó đường $y=\dfrac{a}{d}x+\dfrac{bd-ae}{d^2}$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$, $a,d\neq 0$.

a.4. Nếu bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu thì đồ thị hàm số có duy nhất một đường tiệm cận ngang, đó là đường thẳng $y=0$.

b. Các dạng hàm khác

b.1. Hàm số mũ

Hàm số $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$ có một đường tiệm cận duy nhất. Cụ thể hàm số $y=a^x$ có một tiệm cận ngang là đường $y=0$ - Trục hoành.

b.2. Hàm số logarit

Hàm số $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$ có một đường tiệm cận duy nhất.

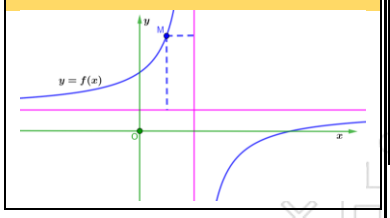
Cụ thể hàm số $y=\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1,\ x>0$ có một tiệm cận đứng là đường $x=0$ - Trục tung.

3. Một số dạng toán thường gặp liên quan đến đường tiệm cận của đồ thị hàm số

a. Khoảng cách từ một điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ thuộc đồ thị hàm nhất biến $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ đến các tiệm cận của nó

Công thức: $\begin{cases} d_1=\left|\dfrac{cx_0+d}{c}\right| \\ d_2=\left|\dfrac{ad-bc}{c\left(cx_0+d\right)}\right| \end{cases} \Rightarrow d_1.d_2=\left|\dfrac{ad-bc}{c^2}\right|.$

Minh họa khoảng cách từ một điểm đến các đường tiệm cận



Chứng minh:

Xét hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d},\left(a\neq 0,\ c\neq 0,\ ad-bc\neq 0\right).$

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Suy ra: $M\left(x_0;\dfrac{ax_0+b}{cx_0+d}\right).$

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng: $x=-\dfrac{d}{c}$ và đường tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$.

Khi đó, khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận lần lượt là:

$$\begin{cases} d_1=\left|x_0+\dfrac{d}{c}\right|=\left|\dfrac{cx_0+d}{c}\right| \\ d_2=\left|y_0-\dfrac{a}{c}\right|=\left|\dfrac{ad-bc}{c\left(cx_0+d\right)}\right| \end{cases}.$$

Nếu ta tính tích hai khoảng cách đến các đường tiệm cận trên, ta dễ dàng thu được: $d_1.d_2=\left|\dfrac{cx_0+d}{c}\right|.\left|\dfrac{ad-bc}{c\left(cx_0+d\right)}\right|=\left|\dfrac{ad-bc}{c^2}\right|.$

Extra Techniques:

Study Tips:

Một cách nhớ nhanh công thức tính tích khoảng cách từ một điểm đến hai đường tiệm cận (đứng và ngang) của đồ thị hàm số nhất biến.

Ta đưa ra một tương quan so sánh giữa công thức tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, tức là $y'=\dfrac{ad-bc}{\left(cx+d\right)^2}$ với công thức vừa được chứng minh: $\left|\dfrac{ad-bc}{c^2}\right|$ thì cách nhớ sẽ trở nên dễ dàng hơn rất nhiều.

Extra Techniques:

Study Tips:

Để ý một điều, khi chúng ta chứng minh để đưa ra công thức áp dụng cho các bài toán tổng quát, chúng ta luôn chỉ ra lượng không đổi $\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|$. Để công thức được gọn hơn, ta có thể gán biểu thức trên cho một ẩn nào đó, có thể là $p=\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|$ chẳng hạn.

b. Giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ một điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ thuộc đồ thị hàm nhất biến $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ đến các tiệm cận của nó

Giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ $M\left(x_0;y_0\right)$ đến các tiệm cận của nó bằng $2\sqrt{\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\left(cx_0+d\right)^2=\left|ad-bc\right|$.

Chứng minh:

Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ điểm M đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$.

Khi đó: $S=\sum d=d_1+d_2\overset{Cauchy}{\geq}2\sqrt{d_1.d_2}=2\sqrt{\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$d_1=d_2\Leftrightarrow\left|\frac{cx_0+d}{c}\right|=\left|\frac{ad-bc}{c\left(cx_0+d\right)}\right|\Leftrightarrow\left(cx_0+d\right)^2=\left|ad-bc\right|.$$

c. Khoảng cách từ một điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ thuộc đồ thị hàm nhất biến $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ đến đường tiệm cận đứng bằng k lần khoảng cách từ đó đến đường tiệm cận ngang.

Điều kiện của $M\left(x_0;y_0\right)$ để khoảng cách đến đường tiệm cận đứng bằng k lần khoảng cách đến đường tiệm cận ngang là:

$$x_0=-\frac{d}{c}\pm\sqrt{k.\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|}.$$

Chứng minh:

Theo kết quả đã chứng minh, ta có: $d_1=k.d_2\Leftrightarrow\left|\frac{cx_0+d}{c}\right|=k.\left|\frac{ad-bc}{c\left(cx_0+d\right)}\right|$

$$\Leftrightarrow\left(cx_0+d\right)^2=k.\left|ad-bc\right|\Rightarrow x_0=-\frac{d}{c}\pm\sqrt{k.\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|}.$$

d. Khoảng cách ngắn nhất từ một điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ thuộc đồ thị hàm nhất biến $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ đến giao điểm hai đường tiệm cận $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$.

Điều kiện của $M\left(x_0;y_0\right)$ để khoảng cách MI ngắn nhất là

$$x_0=-\frac{d}{c}\pm\sqrt{\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|}$$

Khi đó: $MI_{\min}=\sqrt{2.\left|\dfrac{ad-bc}{c^2}\right|}$.

Chứng minh:

Ta có: $\begin{cases}M\left(x_0;y_0\right)\\ I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)\end{cases}\Rightarrow MI^2=\left(x_0+\dfrac{d}{c}\right)^2+\left(y_0-\dfrac{a}{c}\right)^2=d_1^{\,2}+d_2^{\,2}$

Do đó: $MI^2=d_1^{\,2}+d_2^{\,2}\overset{Cauchy}{\geq}2d_1d_2=2\left|\dfrac{ad-bc}{c^2}\right|$.

Hay $MI_{\min}=\sqrt{2\left|\dfrac{ad-bc}{c^2}\right|}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $d_1=d_2\Leftrightarrow x_0=-\dfrac{d}{c}\pm\sqrt{\left|\dfrac{ad-bc}{c^2}\right|}$.

Extra Techniques:

Study Tips:

Bất đẳng thức Cauchy:

Cho hai số thực dương a,b khi đó:

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$$

Hoặc các "biến thể" khác có thể sử dụng như:

1. $a+b\geq2\sqrt{ab}$.

2. $a^2+b^2\geq2ab$.

3. $2\left(a^2+b^2\right)\geq\left(a+b\right)^2$.

4. $a^2+b^2\geq\dfrac{\left(a+b\right)^2}{2}$.

…

Extra Techniques:

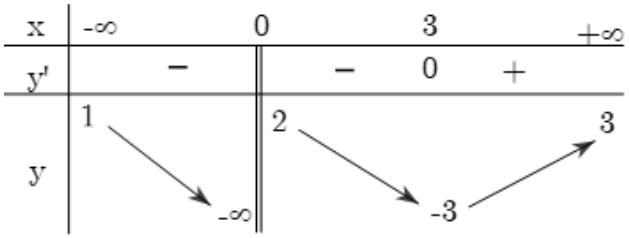
Study Tips:

"Trên đây là một số Tips chúng tôi cảm thấy rất hữu dụng trong các bài toán hiện hành. Do mục đích phục vụ cho phần đông các bạn học sinh nên phần trình bày khá chi tiết và khá dài. Nhưng nếu bạn đọc hiểu bản chất vấn đề, thao tác sẽ ngắn gọn hơn, chuẩn xác hơn và quan trọng nhất vẫn là lợi thế về thời gian nếu biết các Tips này.

TỰ LUYỆN 4 MỨC ĐỘ

Câu 1. [Nhận biết].

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



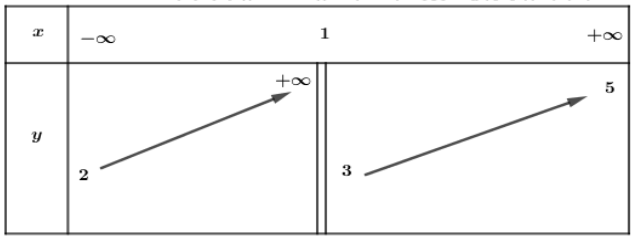
Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 2. **B.** 3.

C. 4. **D.** 1.

Câu 2. [Nhận biết].

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

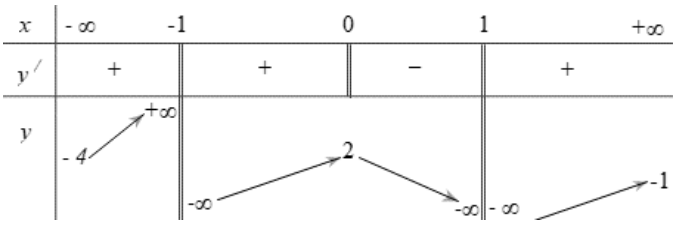


Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 3. [Nhận biết].

Cho hàm số có bảng biến thiên như hình sau

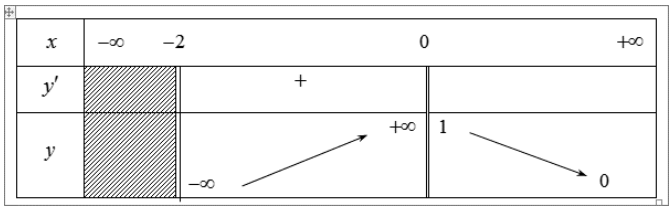


Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 4. [Nhận biết].

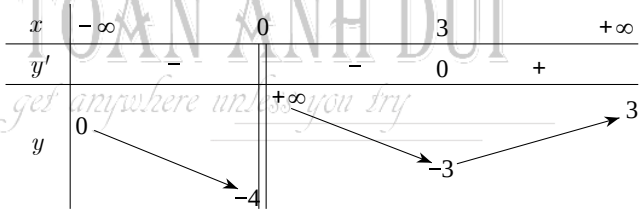
Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?



A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 5. [Nhận biết].

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

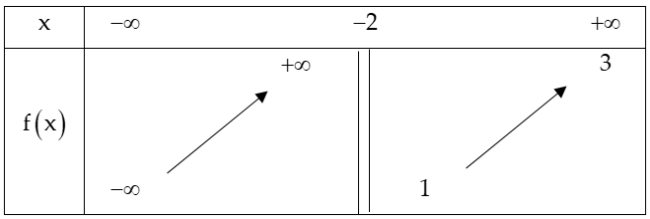


Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 6. [Nhận biết].

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

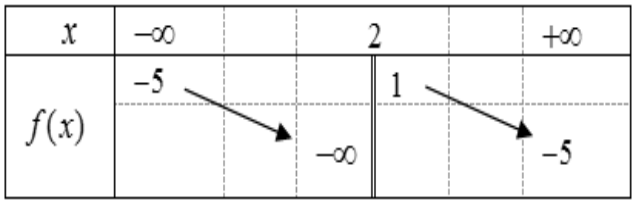


Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 7. [Nhận biết].

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

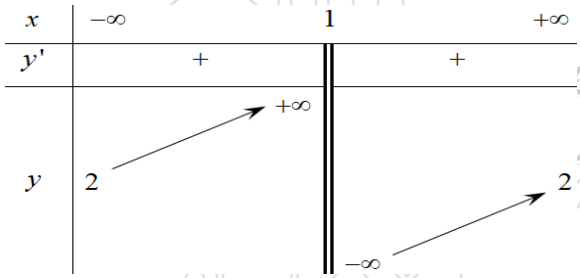


Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 8. [Nhận biết].

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

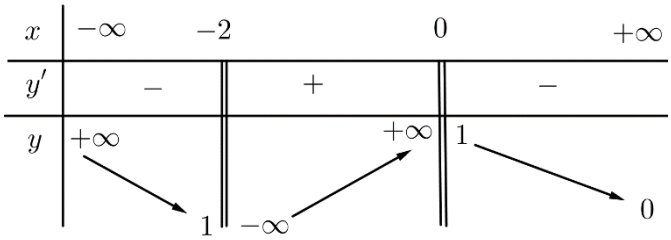


Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 9. [Nhận biết].

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

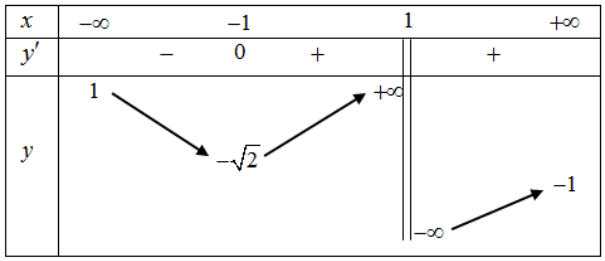


Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 10. [Nhận biết].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$



A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 11. [Nhận biết].

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 12. [Thông hiểu].

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

C. $y=\sqrt{x^2-1}$. **D.** $y=\dfrac{x}{x+1}$.

Câu 13. [Nhận biết].

Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 14. [Nhận biết].

Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số: $y=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}$

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 15. [Nhận biết].

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ có mấy tiệm cận.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 16. [Thông hiểu].

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 17. [Thông hiểu].

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 18. [Thông hiểu].

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 19. [Thông hiểu].

Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$.

A. $x=3$ và $x=2$. **B.** $x=3$.

C. $x=-3$ và $x=-2$. **D.** $x=-3$.

Câu 20. [Thông hiểu].

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+x}$ là?

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 21. [Thông hiểu].

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}$ là?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 22. [Thông hiểu].

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 23. [Thông hiểu].

Đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 24. [Thông hiểu].

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2}$ là?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 25. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$.

Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 26. [Thông hiểu].

Hàm số $y=\dfrac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x^3+x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 27. [Thông hiểu].

Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}$ là?

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 28. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=\dfrac{5\sqrt{x^2+6}+x-12}{4x^3-3x-1}$ có đồ thị (C)

Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**

A. Đồ thị (C) không có tiệm cận.

B. Đồ thị (C) chỉ có một tiệm cận ngang $y=0$.

C. Đồ thị (C) có một tiệm cận ngang $y=0$ và hai tiệm cận đứng $x=1; x=-\dfrac{1}{2}$.

D. Đồ thị (C) chỉ có một tiệm cận ngang $y=0$ và một tiện cận đứng $x=1$.

Câu 29. [Thông hiểu].

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 30. [Thông hiểu].

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-\sqrt{4-x^2}}{x^2-2x-3}$ có số đường tiệm cận đứng là m và số đường tiệm cận ngang là n Giá trị của $m+n$ là?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 31. [Thông hiểu].

Gọi n, d lần lượt là số đường tiệm cận ngang và số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $n=0, d=2$. **B.** $n=d=1$.

C. $n=1, d=2$. **D.** $n=0, d=1$.

Câu 32. [Thông hiểu].

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 33. [Thông hiểu].

Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 34. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 35. [Thông hiểu].

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 36. [Thông hiểu].

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 37. [Thông hiểu].

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never give up anywhere unless you try!

A. $m<0$. **B.** $m=0$.

C. $m>0$. **D.** $m\in\varnothing$.

Câu 38. [Vận dụng].

Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-6x+2m}}$ có hai đường tiệm cận đứng. Số phần tử của S là?

A. vô số. **B.** 12.

C. 14. **D.** 13.

Câu 39. [Thông hiểu].

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-8x+m}$ có 3 đường tiệm cận?

A. 14. **B.** 8. **C.** 15. **D.** 16.

Câu 40. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?

A. 4039. **B.** 4040.

C. 4038. **D.** 4037.

Câu 41. [Vận dụng].

Có bao nhiêu số nguyên của m thuộc đoạn $[-100;100]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{(x-m)\sqrt{2x-x^2}}$ có đúng hai đường tiệm cận?

A. 200. **B.** 2. **C.** 199. **D.** 0.

Câu 42. [Thông hiểu].

Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. $m=-1$. **B.** $m\in\{1;4\}$.

C. $m=4$. **D.** $m\in\{-1;-4\}$.

Câu 43. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2mx+4}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị có ba đường tiệm cận

A. $m>2$. **B.** $\begin{cases}m<-2\\ m\neq-\dfrac{5}{2}\end{cases}$.

C. $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>2\\ m<-2\end{array}\right.\\ m\neq-\dfrac{5}{2}\end{cases}$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m<-2\\ m>2\end{array}\right.$.

Câu 44. [Vận dụng].

Biết rằng đồ thị của hàm số $y=\dfrac{(n-3)x+n-2017}{x+m+3}$ (m,n là các số thực) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Tính tổng $m+n$.

A. 0. **B.** -3. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 45. [Vận dụng].

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{mx^2-8x+2}}$ có đúng bốn đường tiệm cận?

A. 8. **B.** 6. **C.** 7. **D.** Vô số.

Câu 46. [Vận dụng].

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Với giá trị nào của hàm số m để đồ thị hàm số $y=x-\sqrt{mx^2-3x+7}$ có tiệm cận ngang.

A. $m=1$. **B.** $m=-1$.

C. $m=\pm 1$. **D.** Không có m.

Câu 47. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$. Tìm a,b để đồ thị hàm số có $x=1$ là tiệm cận đứng và $y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.

A. $a=-1;b=2$. **B.** $a=4;b=4$.

C. $a=1;b=2$. **D.** $a=-1;b=-2$.

Câu 48. [Thông hiểu].

Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in[-10;10]$ sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{2x^2+6x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng?

A. 19. **B.** 15. **C.** 17. **D.** 18.

Câu 49. [Vận dụng].

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ bằng 3?

A. 4. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** 3.

Câu 50. [Thông hiểu].

Tổng các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$ có đúng một tiệm cận đứng.

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** -3. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 51. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-6;6]$ của tham số m để đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận?

A. 12. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 11.

Câu 52. [Thông hiểu].

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận đứng.

A. $m=1$. **B.** $m>1$.

C. $m=1$ và $m=0$. **D.** $m\neq 0$.

Câu 53. [Thông hiểu].

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2017;2017]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-4x+m}}$ có hai tiệm cận đứng.

A. 2019. **B.** 2021.

C. 2018. **D.** 2020.

Câu 54. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2019m$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2020m^4$ (với m là tham số thực). Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y=f(x)$ có duy nhất một tiệm cận ngang?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 55. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=\dfrac{1}{\left[x^2-(2m+1)x+2m\right]\sqrt{x-m}}$.

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ

thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

A. $\begin{cases} 0<m<1 \\ m\neq\dfrac{1}{2} \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} m<1 \\ m\neq\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

C. $m>1$. **D.** $\begin{cases} 0\le m\le 1 \\ m\neq\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Câu 56. [Vận dụng].

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{6x-3}{\left(mx^2-6x+3\right)\left(9x^2+6mx+1\right)}$ có đúng 1 đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 57. [Thông hiểu].

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x+\sqrt{mx^2+1}$ có tiệm cận ngang.

A. $0<m<1$. **B.** $m=1$.

C. $m=-1$. **D.** $m>1$.

Câu 58. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{mx^2-2x+4}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 59. [Vận dụng].

Gọi S là tập các giá trị nguyên của m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2019x}{\sqrt{17x^2-1}-m|x|}$ có bốn đường tiệm cận (bao gồm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang). Tính số phần tử của tập S.

A. Vô số. **B.** 3.

C. 5. **D.** 4.

Câu 60. [Vận dụng].

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^3+mx+1}-\sqrt[3]{x^4+x+1}+m^2x}$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó tổng các phần tử của S bằng?

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Câu 61. [Vận dụng].

Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}$ có đúng ba đường tiệm cận?

A. 12. **B.** 11. **C.** 0. **D.** 10.

Câu 62. [Vận dụng].

Tìm số giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019;2019]$ của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. 2007. **B.** 2010.

C. 2009. **D.** 2008.

Câu 63. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{mx^2-2x+3}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận.

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 64. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^3-3x^2+m-1}}$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có 4 đường thẳng tiệm cận.

A. $1<m<5$. **B.** $-1<m<2$.

C. $m<1$ hoặc $m>5$. **D.** $m>2$ hoặc $m<-1$.

Câu 65. [Vận dụng].

Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{3x+1}+ax+b}{(x-1)^2}$ không có tiệm cận đứng.

Khi đó hiệu $a-b$ bằng:

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{3}{4}$. **C.** $-\dfrac{5}{4}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 66. [Vận dụng].

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham để m đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{-x^2+2016x+2017}-24\sqrt{7}}{x-m}$ có tiệm cận đứng?

A. vô số. **B.** 2.

C. 2017 **D.** 2019.

Câu 67. [Thông hiểu].

Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}$ có đúng một đường tiệm cận.

A. $-1\le m<0$. **B.** $-1\le m\le 0$.

C. $m<-1$. **D.** $m>0$.

Câu 68. [Vận dụng].

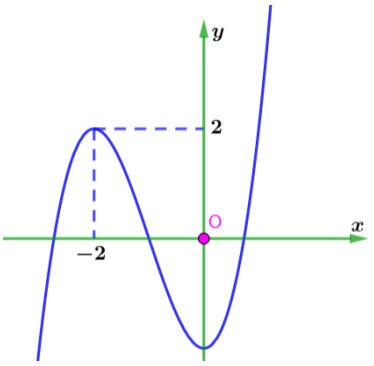
Cho đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{3x-1}{x-1}$. Khi đó đường thẳng nào sau đây là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-2}$?

A. $x=1$. **B.** $x=-2$.

C. $x=-1$. **D.** $x=2$.

Câu 69. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2019}{f(x)-1}$ là?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 70. [Vận dụng].

Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	2	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	-2
		$-\infty$			

Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 71. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=m$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)+2}$ có duy nhất một tiệm cận ngang.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** Vô số.

NHÓM TOÁN ANH DÚI

Câu 72. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(\tan x)=\cos^4 x$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2019}{f(x)-m}$ có hai tiệm cận đứng.

A. $m<0$. **B.** $0<m<1$.

C. $m>0$. **D.** $m<1$.

Câu 73. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-1}$ là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 74. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ $\mid$ $+\infty$	$\searrow$	0

Đồ thị $y=\dfrac{1}{2f(x)+3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 75. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

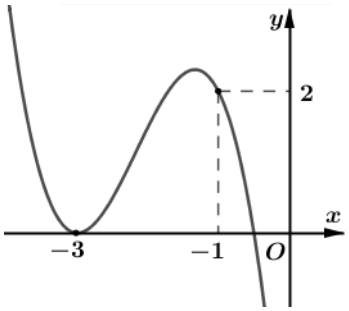
x	$-\infty$		$\dfrac{-1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-1}$ là?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 76. [Vận dụng].

Cho hàm bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(x^2+4x+3\right)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

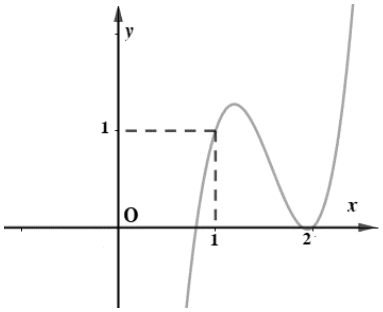


A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 77. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

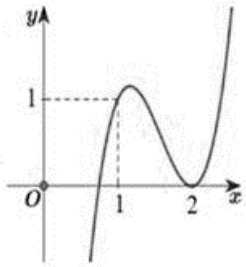
Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?



A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 78. [Vận dụng].

Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ sau.

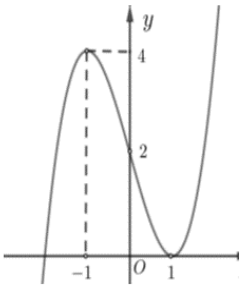


Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{x-1}}{(x+1)\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 79. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số đa thức có đồ thì như hình vẽ dưới đây, đặt $g(x)=\dfrac{x^2-x}{f^2(x)-2f(x)}$.



Hỏi đồ thị hàm số $y=g(x)$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 80. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới.

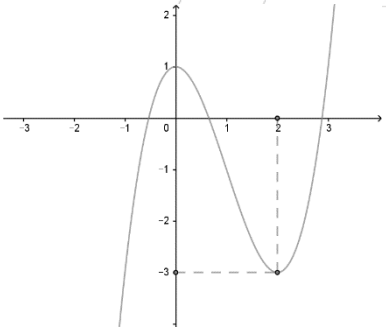
x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	3	↘ 0	↗ $+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x^3+x\right)+3}$ là?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 81. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như bên dưới.



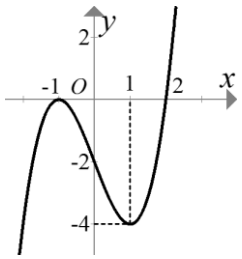
Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(x^2-2x\right)\sqrt{2-x}}{(x-3)\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 82. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$, $(a\neq 0)$ có đồ thị như hình dưới đây.

NHÓM TOÁN ANH DÚI Never stop learning unless you try

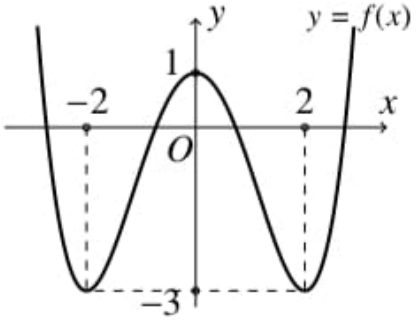


Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2(x^2-4x+3)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 83. [Vận dụng cao].

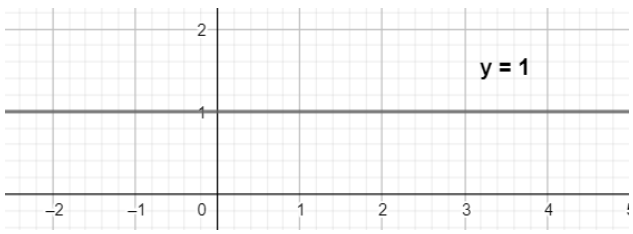
Cho hàm số trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x^2-4)(x^2+2x)}{[f(x)]^2+2f(x)-3}$ có tổng cộng bao nhiêu tiệm cận đứng?



A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 84. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm như hình vẽ dưới đây.



Số tiệm cận của đồ thị hàm số: $y=g(x)$ với

$$y=\frac{f(x)+1}{f(x)+1}+\frac{\sqrt{f^2(x)+2}}{f(x)+2}+\ldots+\frac{\sqrt[2021]{f^{2021}(x)+2021}}{f(x)+2021}$$

là bao nhiêu?

A. 2022. **B.** 2. **C.** 2021. **D.** 0.

Câu 85. [Vận dụng].

Cho hai số thực a và b thỏa mãn

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2-3x+1}{2x+1}-ax-b\right)=0.$$

Khi đó $a+2b$ bằng?

A. –4. **B.** –5. **C.** 4. **D.** –3.

Câu 86. [Vận dụng cao].

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-9;9]$ của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x^3+3mx^2+(2m^2+m)x+m^2}$ có đúng bốn đường tiệm cận?

A. 15. **B.** 14. **C.** 16. **D.** 17.

Câu 87. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x-m^2+1}$ (m là tham số; $m\neq\pm2$). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hình phẳng giới hạn bởi hai trục tọa độ và hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho là một hình vuông.

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 88. [Vận dụng].

Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;\ 2\}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		-		-	0	+		+	
y	$+\infty$	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	0	↗	$-\infty$	↗ -1

Gọi k, l lần lượt là số tiệm cận đứng và tiệm

cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-2018}$.

Tính $k+l$?

A. $k+l=2$. **B.** $k+l=3$.
C. $k+l=4$. **D.** $k+l=5$.

Câu 89. [Vận dụng].

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{2x+1}$ cùng với hai đường tiệm cận tạo thành tam giác có diện tích bằng?

A. 5. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 4.

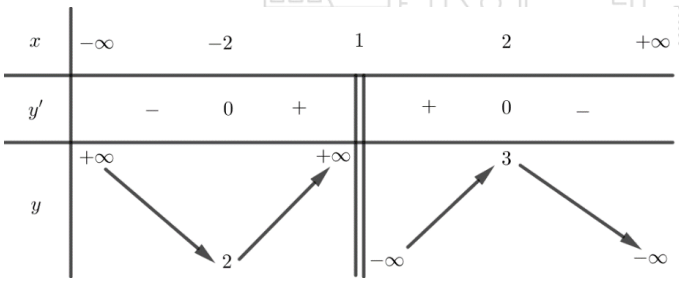
Câu 90. [Vận dụng cao].

Tính tổng S gồm tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{(4-m)x^2+2mx-3-m}}{x-2}$ có 2 tiệm cận ngang.

A. $S=5$. **B.** $S=3$.
C. $S=10$. **D.** $S=6$.

Câu 91. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:



Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 92. [Vận dụng cao].

Cho đường cong $(C): y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ và M là một điểm nằm trên (C). Giả sử d_1, d_2 tương ứng là các khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (C). Tính tích $d_1.d_2$.

A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 93. [Vận dụng cao].

Tìm hoành độ điểm M thuộc đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ biết rằng $x_M>0$ và tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của đồ thị hàm số (C) là nhỏ nhất.

A. $\sqrt{3}-1$. **B.** $1+\sqrt{3}$. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 94. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-3}$ có đồ thị là (C). Có tất cả bao nhiêu điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến đường tiệm cận ngang bằng 5 lần khoảng cách từ M đến đường tiệm cận đứng?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 95. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{3x+9}$ có đồ thị (C). Điểm M trên đồ thị (C) thỏa mãn khoảng cách từ M đến giao điểm I của hai đường tiệm cận ngắn nhất có tọa độ là?

A. $\left[\begin{array}{l} M\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{14}{51}\right) \\ M\left(-\dfrac{10}{3};\dfrac{4}{3}\right) \end{array}\right.$. **B.** $M\left(\dfrac{10}{3};\dfrac{16}{57}\right)$.

C. $M\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{14}{51}\right)$. **D.** $\left[\begin{array}{l} M\left(-\dfrac{9+\sqrt{3}}{3};\dfrac{1+\sqrt{3}}{3}\right) \\ M\left(\dfrac{-9+\sqrt{3}}{3};\dfrac{1-\sqrt{3}}{3}\right) \end{array}\right.$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

ĐÁP ÁN

i \ j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		**B**	**A**	**C**	**A**	**B**	**D**	**B**	**D**	**D**
1	**D**	**C**	**D**	**A**	**C**	**C**	**A**	**B**	**D**	**B**
2	**D**	**C**	**C**	**B**	**C**	**A**	**C**	**D**	**D**	**A**
3	**A**	**A**	**C**	**A**	**B**	**B**	**C**	**C**	**B**	**A**
4	**D**	**A**	**D**	**C**	**A**	**B**	**A**	**C**	**C**	**B**
5	**A**	**B**	**C**	**D**	**B**	**A**	**C**	**B**	**D**	**C**
6	**B**	**A**	**D**	**B**	**A**	**A**	**C**	**A**	**C**	**C**
7	**A**	**C**	**B**	**A**	**A**	**D**	**C**	**C**	**D**	**C**
8	**A**	**C**	**B**	**D**	**A**	**D**	**C**	**B**	**D**	**D**
9	**D**	**B**	**D**	**A**	**C**	**D**				

Ghi chú: Đáp án là sự kết hợp giữa dòng i và cột j. Ví dụ: **Câu 24C** (giao của dòng 2 và cột 4)

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Nhìn bảng biến thiên ta thấy $x=0$ hàm số không xác định nên $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3\Rightarrow y=3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1\Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Vậy hàm số có 3 tiệm cận

Đáp án B.

Câu 2. Từ bảng biến thiên ta có:

$\lim\limits_{x\to1^-} y=+\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=2,\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=5$ nên đường thẳng $y=2$ và $y=5$ là các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là 3.

Đáp án A.

Câu 3. Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} y=4,\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=-1\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y=-1$ và $y=4$.

$\lim\limits_{x\to-1^-} y=+\infty,\ \lim\limits_{x\to-1^+} y=-\infty\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to1^-} y=-\infty,\ \lim\limits_{x\to1^+} y=+\infty\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$.

Nên đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

Đáp án C.

Câu 4. Dựa vào bảng biến thiên ta có :

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=-\infty$, suy ra đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=+\infty$, suy ra đường thẳng $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, suy ra đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

Đáp án A.

Câu 5. Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ nên đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là các đường thẳng có phương trình $y=3$ và $y=0$.

Và $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ nên hàm số có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng có phương trình $x=0$.

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và ngang là 3.

Đáp án B.

Câu 6. Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ ta được tiệm cận ngang $y=3$.

Do $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=+\infty$ ta được tiệm cận đứng $x=-2$.

Vậy có tất cả 2 đường tiệm cận.

Đáp án D.

Câu 7. Từ bảng biến thiên ta có:

+ Tiệm cận ngang $y=-5$

NHÓM TOÁN ANH DÚI Never give up anywhere unless you try

+ Tiệm cận đứng $x=2$.

Vậy có tất cả 2 đường tiệm cận.

Đáp án B.

Câu 8. Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=2\Rightarrow y=2$ là một tiệm cận ngang

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty\Rightarrow x=1$ là một tiệm cận đứng

Vậy đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận là 2.

Đáp án D.

Câu 9. Ta có: $\lim\limits_{x\to -2^+} y=-\infty\Rightarrow x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^-} y=+\infty\Rightarrow x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=0\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tổng đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là 3.

Đáp án D.

Câu 10. Do $\lim\limits_{x\to 1^+} y=-\infty;\lim\limits_{x\to 1^-}=+\infty\Rightarrow$ Tiệm cận đứng: $x=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=-1;\lim\limits_{x\to-\infty} y=1\Rightarrow$ đồ thị có 2 tiệm cận ngang là $y=\pm 1$

Vậy, đồ thị hàm số đã cho có tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là 3.

Đáp án D.

Câu 11. Tiệm cận ngang:

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(5-\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5-\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=5$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y=5$.

Tiệm cận đứng:

Cho $x^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1} y=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$

$\lim\limits_{x\to 1} y=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(5x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x+1}{x+1}=\dfrac{6}{2}=3$

nên $x=1$ không là tiệm cận đứng.

Vì: $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to(-1)^+} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{5x^2-4x-1}{(x+1)(x-1)}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to(-1)^+} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(\dfrac{1}{x+1}.\dfrac{5x^2-4x-1}{x-1}\right)=-\infty$.

vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1}{x+1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{5x^2-4x-1}{x-1}=-4<0\end{cases}$.

Khi đó, đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x=-1$.

Tổng cộng đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

Đáp án C.

Câu 12. Ta có: $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x}{x+1}=+\infty$ và ta cũng có $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x}{x+1}=-\infty$ nên đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Đáp án D.

Câu 13. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=1\Rightarrow y=1$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Mặc khác: $\lim\limits_{x\to 1} y=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}$

$\lim\limits_{x\to 1} y=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-4)}{(x+1)}=-\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow x=1$ không là đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to(-1)^+} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{(x-4)}{(x+1)}=-\infty.$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} y=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to(-1)^-} y=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{(x-4)}{(x+1)}=+\infty.$

$\Rightarrow x=-1$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Đáp án A.

Câu 14. Ta có: $y=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}=\dfrac{x+1}{x+4}$ (với điều kiện xác định), do đó đồ thị hàm có 1 tiệm cận đứng.

Đáp án C.

Câu 15. Ta có: $x^2-4=0\Leftrightarrow x=\pm 2$

$\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right)=\dfrac{1}{4}$ nên đường thẳng $x=2$ không phải là tiệm cân đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to -2^+}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{1}{x+2}=+\infty,$

$\lim\limits_{x\to(-2)^-}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{1}{x+2}=-\infty,$ nên đường thẳng $x=-2$ là tiệm cân đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right)=0$ nên đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy có đồ thị có hai đường tiệm cận.

Đáp án C.

Câu 16. TXĐ: $D=[-9;+\infty)\setminus\{0;-1\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}=+\infty$ và

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} y=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}=-\infty.$

$\Rightarrow$ Tiệm cận đứng: $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} y=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\left(x^2+x\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never give up anywhere unless you try

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+9}+3\right)} = \dfrac{1}{6}.$

$\lim\limits_{x\to 0^-} y = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{\left(x^2+x\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+9}+3\right)} = \dfrac{1}{6}.$

$\Rightarrow$ $x=0$ không là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Đáp án A.

Câu 17. TXĐ: $D=[-4;+\infty)\setminus\{0;-1\}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0} y = \dfrac{1}{4}$.

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = +\infty$

Và $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y = \lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = -\infty$

$\Rightarrow$ Tiệm cận đứng: $x=-1$.

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Đáp án B.

Câu 18. Tập xác định: $D=[-1;+\infty)\setminus\{0\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\sqrt{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}}{1+\dfrac{2}{x}} = 0$

$\Rightarrow$ $y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(5x+1)^2-x-1}{\left(x^2+2x\right)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{25x^2+9x}{\left(x^2+2x\right)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{25x+9}{(x-2)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)} = \dfrac{-9}{4}$

$\Rightarrow$ $x=0$ **không** là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 1 đường tiệm cận.

Đáp án D.

Câu 19. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$.

$\lim\limits_{x\to 2^+} y = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$

$= \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(2x-1)^2-\left(x^2+x+3\right)}{\left(x^2-5x+6\right)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(2x-1)^2-\left(x^2+x+3\right)}{\left(x^2-5x+6\right)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(3x+1)}{(x-3)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)} = -\dfrac{7}{6}$

Tương tự: $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} = -\dfrac{7}{6}$.

(Học sinh tự chứng minh).

Suy ra đường thẳng $x=2$ **không** là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Ta có: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=-\infty\end{cases}$.

Suy ra đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Đáp án B.

Câu 20. Tập xác định: $D=[-25;+\infty)\setminus\{-1;0\}$.

Biến đổi $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+25}+5\right)}$.

Vì $\lim\limits_{x\to(-1)^+}y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+25}+5\right)}=+\infty$

nên đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng $x=-1$.

Đáp án D.

Câu 21. TXĐ: $D=[-16;+\infty)\setminus\{-1;0\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{(x+1)x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=\dfrac{1}{8}$.

Và $\lim\limits_{x\to(-1)^+}y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{(x+1)x}$

$=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=+\infty$.

Vì: $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(\sqrt{x+16}+4\right)=\sqrt{15}+4>0$,

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)=0$.

Và $x\to(-1)^+$ thì $x>-1\Rightarrow x+1>0$.

Tương tự : (Độc giả tự chứng minh).

$\lim\limits_{x\to(-1)^-}y=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=-\infty$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là $x=-1$.

Đáp án C.

Câu 22. TXĐ: $D=[-4;+\infty)\setminus\{-1;0\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to(-1)^+}y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}=-\infty$

Nên đường thẳng $x=-1$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x(x+1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\dfrac{1}{4}$.

Nên đường thẳng $x=0$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng $x=-1$.

Đáp án C.

Câu 23. TXĐ: $D=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Trường hợp 1: $x<-1\Rightarrow x+1<0$.

Khi đó: $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{-\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}$

Hay $f(x)=-\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

Suy ra hàm số tiệm cận ngang $y=-1$, không có tiệm cận đứng.

Trường hợp 2: $x>1\Rightarrow x+1>0$. Khi đó

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Suy ra hàm số tiệm cận ngang $y=1$, tiệm cận đứng $x=1$.

Vậy hàm số có 2 tiệm cận ngang và 1 tiệm cận đứng.

Đáp án B.

Câu 24. Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{6}{x}}-\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}}=2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\frac{6}{x}}-\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}}=-2$$

$$\lim_{x\to-2^{\pm}}\frac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2}=\lim_{x\to-2^{\pm}}\frac{(x+2)(4x-2)}{(x+2)\left(\sqrt{x(4x+6)}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to-2^{\pm}}\frac{4x-2}{\sqrt{x(4x+6)}+2}=\frac{-5}{2}.$$

Vậy hàm số có hai tiệm cận ngang $y=\pm2$.

Đáp án C.

Câu 25. TXĐ: $(-\infty;-\sqrt{2})\cup(-1;1)\cup(\sqrt{2};+\infty)$.

Do $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^4}}}=1$$

$\Rightarrow y=1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có: $\lim\limits_{x\to1^-}y=+\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng.

Ta có: $\lim\limits_{x\to(-1)^+}y=$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{(x+1)(x+2)}{\sqrt{(x+1)(x+\sqrt{2})(x-1)(x-\sqrt{2})}}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\sqrt{(x+1)}(x+2)}{\sqrt{(x+\sqrt{2})(x-1)(x-\sqrt{2})}}=0$$

Nên đường thẳng $x=-1$ không là đường tiệm cận đứng.

Ta có: $\lim\limits_{x\to(\sqrt{2})^+}y=+\infty$ nên đường thẳng $x=\sqrt{2}$ là đường tiệm cận đứng.

Ta có: $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{2})^-}y=+\infty$ nên đường thẳng $x=-\sqrt{2}$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận (1 tiệm cận ngang, 3 tiệm cận đứng).

Đáp án A.

Câu 26. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}.\frac{1-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x^2}}\right)=0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}.\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x^2}}\right)=0.$$

$\Rightarrow$ Tiệm cận ngang: $y=0$.

$\lim\limits_{x\to0^+} y=+\infty \Rightarrow$ Tiệm cận đứng: $x=0$.

Đáp án C.

Câu 27. ĐKXĐ: $\begin{cases}x-2\ge0\\x^2-3x+2\ne0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge2\\x\ne2,x\ne1\end{cases}\Leftrightarrow x>2.$

Ta có: $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\frac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}\right)=+\infty$ nên đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}\right)=0$ nên đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Đáp án D.

Câu 28. TXĐ: $D=R\setminus\left\{1;-\frac{1}{2}\right\}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to1^-} y=-\infty;\lim\limits_{x\to1^+} y=+\infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x=1$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y=0$.

Đáp án D.

Câu 29. Xét hàm số $y=\frac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}$ có tập xác định $D=(-\infty;0]\cup[1;+\infty)\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}$

$$=\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{3x^2+x}{(3x+1)\left(2x-\sqrt{x^2-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{x}{2x-\sqrt{x^2-x}}=\frac{1}{4};$$

$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}=0$ và $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}=\frac{1}{2}$ nên đồ thị không có tiệm cận đứng.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}=\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{2x-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{3x+1}$$

$$=\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{2-\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{3+\frac{1}{x}}=\frac{1}{3},$$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

và $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\dfrac{2x+x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{3x+1}$

$=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\dfrac{2+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{3+\frac{1}{x}}=1.$

Nên đồ thị có hai tiệm cận ngang là $y=\dfrac{1}{3}$ và $y=1.$

Vậy đồ thị hàm số có tất cả hai đường tiệm cận.

Đáp án A.

Câu 30. $D=[-2;2]\setminus\{-1\}.$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1-\sqrt{4-x^2}}{x^2-2x-3}=+\infty;$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-}y=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{1-\sqrt{4-x^2}}{x^2-2x-3}=-\infty$

$\Rightarrow x=-1$ là tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang.

Vậy $m+n=1.$

Đáp án A.

Câu 31. Tập xác định: $D=(0;1).$

Từ tập xác định suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang. $n=0.$

+ $\lim\limits_{x\to0^+}y=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-1}{\sqrt{1-x}\sqrt{x}}=-\infty$

+ $\lim\limits_{x\to1^-}y=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-1}{\sqrt{1-x}\sqrt{x}}=-\infty$

Suy ra đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng, $d=2.$

Đáp án A.

Câu 32. TXĐ: $D=[-1;0)\cup(2;+\infty).$

Ta có: $\lim\limits_{x\to0-}y=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{25x^2+9x}{(x^2-2x)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{25x+9}{(x-2)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)}=-\dfrac{9}{4}.$

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to2+}y=+\infty.$

Và $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}-\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}}{1-\frac{2}{x}}=0.$

Vậy đồ thị của hàm số có hai đường tiệm cận có phương trình $x=2$ và $y=0.$

Đáp án C.

Câu 33. Tập xác định: $D=\left[-\dfrac{1}{3};+\infty\right)\setminus\{1\}$

+ Ta có: $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}$

$=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)\left(4\sqrt{3x+1}+3x+5\right)}{-9(x-1)^2}$

$=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{4\sqrt{3x+1}+3x+5}{-9(x-1)}=-\infty.$

Do đó đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{4\sqrt{\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-3-\dfrac{5}{x}}=-\frac{1}{3}.$$

Do đó đường thẳng $y=-\dfrac{1}{3}$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Đáp án A.

Câu 34. Tập xác định của hàm số:

$$D=\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup(-1;1)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right).$$

$\lim\limits_{x\to\left(-\sqrt{2}\right)^-}y=\lim\limits_{x\to\left(\sqrt{2}\right)^+}y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}y=\lim\limits_{x\to(1)^-}y=+\infty$.

$\Rightarrow$ Các đường tiệm cận đứng của đồ thị là $x=\pm\sqrt{2}$, $x=\pm1$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}y=1\Rightarrow$ đồ thị có một tiệm cận ngang $y=1$.

Đáp án B.

Câu 35. Tập xác định: $D=(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-8}{x\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\dfrac{8}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}}=5$$

$\Rightarrow$ Đường thẳng $y=5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x-8}{-x\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{5-\dfrac{8}{x}}{-\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}}=-5.$$

$\Rightarrow$ Đường thẳng $y=-5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to0^-}y=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}}=-\infty$

Vì: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^-}(5x-8)=-8<0\\ \lim\limits_{x\to0^-}\sqrt{x^2-3x}=0;\sqrt{x^2-3x}>0\ \forall x\to0^-\end{cases}$.

Suy ra đường thẳng $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to3^+}y=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}}=+\infty$

Vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to3^+}(5x-8)=7>0;\lim\limits_{x\to3^+}\sqrt{x^2-3x}=0\\ \sqrt{x^2-3x}>0\ \forall x\to3^+\end{cases}$.

Suy ra đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Đáp án B.

Câu 36. Điều kiện xác định của hàm số:

$$\begin{cases}4x^2+2x-1\ge0\\ x+1\ne0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}\\ x\ge\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}\end{array}\right.\\ x\ne-1\end{cases}.$$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Tập xác định của hàm số đã cho là:

$$D=(-\infty;-1)\cup\left(-1;\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{4};+\infty\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+1}{1+\frac{1}{x}}=-1.$$

$\Rightarrow y=-1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+1}{1+\frac{1}{x}}=3$$

$\Rightarrow y=3$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to+\infty$.

Mặt khác, ta lại có:

$$\lim_{x\to-1}y=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{4x^2+2x-1-x^2}{(x+1)\left(\sqrt{4x^2+2x-1}-x\right)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(3x-1)}{(x+1)\left(\sqrt{4x^2+2x-1}-x\right)}=-2$$

Vậy đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}$ có 2 đường tiệm cận.

Đáp án C.

Câu 37. Xét các trường hợp sau:

Với $m=0$:

Hàm số trở thành $y=x+1$ nên không có tiệm cận ngang.

Với $m<0$:

Hàm số $y=\frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}=\frac{x+1}{\sqrt{1-|m|x^2}}$ có tập xác định là $D=\left(-\frac{1}{\sqrt{|m|}};\frac{1}{\sqrt{|m|}}\right)$ suy ra không tồn tại giới hạn $\lim_{x\to\pm\infty}y$ hay hàm số không có tiệm cận ngang.

Với $m>0$:

Ta có: $\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{|x|\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{-x\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}=-\frac{1}{\sqrt{m}}.$$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Và ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{|x|\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{m}}.$

Vậy hàm số có hai tiệm cận ngang là : $y=\dfrac{1}{\sqrt{m}}; y=-\dfrac{1}{\sqrt{m}}$ khi $m>0$.

Đáp án C.

Câu 38. Điều kiện xác định $\begin{cases} x+2\ge 0 \\ x^2-6x+2m>0 \end{cases}$.

Để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng thì phương trình $x^2-6x+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 lớn hơn -2

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9-2m>0 \\ x_1+x_2>-2 \\ (-2)^2-6\cdot(-2)+2m>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{9}{2} \\ 3>-2 \\ 4+12+2m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{9}{2} \\ m>-8 \end{cases}$.

Do đó tập $S=\{-7;-6;-5;...;4\}$ có 12 giá trị.

Đáp án B.

Câu 39. Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-1}{x^2-8x+m}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x^2-8x+m} = 0$ nên hàm số có một tiệm cận ngang $y=0$.

Hàm số có 3 đường tiệm cận khi và chỉ khi hàm số có hai đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $x^2-8x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 16-m>0 \\ m-7\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<16 \\ m\ne 7 \end{cases}$.

Kết hợp với điều kiện m nguyên dương ta có: $m\in\{1;2;3;...;6;8;...;15\}$.

Vậy có 14 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Đáp án A.

Câu 40. Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0, \lim\limits_{x\to-\infty} y=0$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận ngang.

Do đó đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi nó có 3 tiệm cận đứng $(*)$.

Ta có: $x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m$

$=(x-m)(x^2-2mx+1)$

$x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x^2-2mx+1=0 \quad (2) \end{array}\right.$

$(*) \Leftrightarrow x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m=0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 3.

$\Leftrightarrow m\ne 3$ và (2) có 2 nghiệm phân biệt khác

m và khác 3.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m^2 - 2m.m + 1 \neq 0 \\ 3^2 - 2m.3 + 1 \neq 0 \\ \Delta_2' = m^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3, m \neq \dfrac{5}{3} \\ \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Do đó tập tất cả giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu đề bài là:

$$\{-2020; -2019; ...; -2; 2; 4; 5; ...; 2020\}.$$

Vậy có 4037 giá trị m thỏa yêu cầu đề bài.

Đáp án D.

Câu 41. Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \neq m \\ x \in (0;2) \end{cases}$, khi đó đồ thị hàm số sẽ không có tiệm cận ngang.

Ta có: $\lim\limits_{x \to 0^+} y = \infty$, $\lim\limits_{x \to 2^-} y = \infty$.

Suy ra $x = 0$, $x = 2$ là hai đường tiệm cận đứng.

Vậy để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận thì $\left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ m \geq 2 \end{array}\right.$, theo bài m thuộc đoạn $[-100;100]$. Vậy có 200 số nguyên của m thỏa mãn đầu bài.

Đáp án A.

Câu 42. $y = \dfrac{x^2 + m}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{x^2 + m}{(x-1)(x-2)}$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ là đường tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + m}{x^2 - 3x + 2}$ có đúng hai đường tiệm cận.

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng.

$\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2 + m = 0$ nhận nghiệm $x = 1$ hoặc $x = 2$.

Khi đó: $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = -4 \end{array}\right.$.

Với $m = -1$ có một tiệm cận đứng $x = 2$.

Với $m = -4$ có một tiệm cận đứng $x = 1$.

Vậy $m \in \{-1; -4\}$.

Đáp án D.

Câu 43. Để đồ thị có ba đường tiệm cận thì $x^2 - 2mx + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\neq -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (-1)^2 - 2m(-1) + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right. \\ m \neq -\dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Đáp án C.

Câu 44. Theo công thức tìm nhanh tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ ta có:

Đồ thị hàm số nhận $x = -\dfrac{d}{c} = -m - 3 = 0$ làm tiệm cận đứng $\Rightarrow m = -3$.

Đồ thị hàm số nhận $y = \dfrac{a}{c} = n - 3 = 0$ làm tiệm cận ngang $\Rightarrow n = 3$.

Vậy $m + n = 0$.

Đáp án A.

Câu 45. Trường hợp 1: $m < 0$ suy ra tập xác định của hàm số là $D = (x_1; x_2)$, ($x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $mx^2 - 8x + 2 = 0$). Do đó $m < 0$ không thỏa yêu cầu của bài toán.

NHÓM TOÁN ANH DÚI

Trường hợp 2: $m=0 \Rightarrow y=\dfrac{x-1}{\sqrt{-8x+2}}$ suy ra tập xác định của hàm số là $D=(-\infty;4)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty;\ \lim\limits_{x\to4^-} y=-\infty$. Khi đó ta có $x=-4$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Do đó $m=0$ không thỏa yêu cầu của bài toán

Trường hợp 3: $m>0$ suy ra tập xác định của hàm số là $D=(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$ ($x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình $mx^2-8x+2=0$). Do đó đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận khi phương trình $mx^2-8x+2=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}16-2m>0\\ m>0;m\in\mathbb{Z}\\ m-8+2\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<8\\ m>0;m\in\mathbb{Z}\\ m\neq6\end{cases}$$

$\Rightarrow m=\{1;2;3;4;5;7\}$.

Suy ra có tất cả 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Đáp án B.

Câu 46. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang

$\Rightarrow$ Hàm số xác định trên một trong các miền $(-\infty;a)$, $(-\infty;a]$, $(a,+\infty)$ hoặc $[a;+\infty)$ khi $m\geq0$.

Trường hợp 1:

$m=0\Rightarrow y=x-\sqrt{-3x+7}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\pm\infty$ đồ thị không có tiệm cận ngang

Trường hợp 2: $m>0, y=x-\sqrt{mx^2-3x+7}$

Khi $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-x\sqrt{m-\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x^2}}\right)=\dfrac{3}{2}$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi và chỉ khi $m=1$.

Vậy $m=1$.

Đáp án A.

Cách trắc nghiệm:

Thay $m=1$.

$\Rightarrow y=x-\sqrt{x^2-3x+7}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3x+7}\right)=\dfrac{3}{2}$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3x+7}\right)=-\infty$ không có tiệm cận ngang.

Thay $m=-1$.

$\Rightarrow y=x-\sqrt{-x^2-3x+7}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{-x^2-3x+7}\right)$ không xác định.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{-x^2-3x+7}\right)$ không xác định.

Vậy $m=1$.

Đáp án A.

Câu 47. +) $b=0\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+1}{-2}$ không có tiệm cận.

+) $b\neq0$, tập xác định của hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$ là $D=R\setminus\left\{\dfrac{2}{b}\right\}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax+1}{bx-2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{a+\dfrac{1}{x}}{b-\dfrac{2}{x}}=\dfrac{a}{b}$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng

$y=\dfrac{a}{b}\Rightarrow\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow b=2a$.

$\lim\limits_{x\to\frac{2}{b}^+}y=\lim\limits_{x\to\frac{2}{b}^+}\dfrac{ax+1}{bx-2}=\left[\begin{array}{l}+\infty\\-\infty\end{array}\right.$.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=\dfrac{2}{b}$

$\Rightarrow\dfrac{2}{b}=1\Leftrightarrow b=2\Rightarrow a=1$.

Vậy $a=1;\ b=2$.

Đáp án C.

Câu 48. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{2x^2+6x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng khi phương trình $2x^2+6x-m-3=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$\Leftrightarrow\begin{cases}3^2-2(-m-3)>0\\2.1^2+6.1-m-3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-\dfrac{15}{2}\\m\neq 5\end{cases}$.

Từ đó ta suy ra tập các giá trị nguyên của m thỏa mãn là: $\{-7,...,3,\ 4,\ 6,...,10\}$.

Vậy có 17 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Đáp án C.

Câu 49. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ có nhiều nhất một tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.

Điều kiện để $y=\dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ có 3 tiệm cận là nó có đúng 1 tiệm cận đứng và 2 tiệm cận ngang.

* Xét điều kiện tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty}y$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}y$.

Trường hợp 1: $g(x)=mx^2+3mx+4\geq 0$ với

$\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\\begin{cases}m>0\\\Delta=9m^2-16m\leq 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow 0\leq m\leq\dfrac{16}{9}$

Trường hợp 2: $g(x)=mx^2+3mx+4\geq 0$ với $\forall x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$ với $x_1;\ x_2$ là nghiệm của $g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\\Delta=9m^2-16m>0\end{cases}\Leftrightarrow m>\dfrac{16}{9}$.

Vậy $m\geq 0$ thì tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty}y$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}y$.

Khi đó: $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{m+\dfrac{3m}{x}+\dfrac{4}{x^2}}}{1+\dfrac{2}{x}}=\sqrt{m}$.

Và $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{m+\dfrac{3m}{x}+\dfrac{4}{x^2}}}{1+\dfrac{2}{x}}=-\sqrt{m}$.

Vậy điều kiện để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $m>0$.

* Xét trường hợp $x=-2$ là nghiệm của tử số.

$\Rightarrow x=-2$ là nghiệm của $g(x)=0$ với $g(x)=mx^2+3mx+4$.

$\Rightarrow\ g(-2)=0\Rightarrow m=2$.

Khi đó: $y=\dfrac{\sqrt{2x^2+6x+4}}{x+2}$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI Never get anywhere unless you try

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -2^-} y = \dfrac{\sqrt{2(x+1)(x+2)}}{x+2}$

$= \lim\limits_{x\to -2^-}\left[-\sqrt{\dfrac{2(x+1)}{x+2}}\right] = -\infty$.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng $x=-2$.

$\Rightarrow$ $m=2$ thỏa mãn.

* Xét trường hợp $x=-2$ không là nghiệm của tử số.

Để $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì $\begin{cases} g(-2)\neq 0 \\ g(-2)\geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow g(-2)>0 \Leftrightarrow 4-2m>0 \Leftrightarrow m<2$.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng $x=-2$ với $\forall m\in(0;2]$.

Vậy điều kiện để đồ thị hàm số

$$y=\frac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$$

có 3 tiệm cận là $\forall m\in(0;2]$.

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài là $m=1;\ m=2$.

Đáp án B.

Câu 50. Đặt $f(x)=x^2+2(m-1)x+m^2-2$.

Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng khi và chỉ khi $f(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $x=1$ hoặc $f(x)=0$ có nghiệm kép.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases}\Delta'>0\\ f(1)=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}(m-1)^2-(m^2-2)>0\\ 1+2(m-1)+m^2-2=0\end{cases}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} m<\dfrac{3}{2}\\ m=1;m=-3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m=1\\ m=-3\end{cases}\right.$$
$$\Delta'=0 \qquad\qquad m=\frac{3}{2} \qquad\qquad m=\frac{3}{2}$$

Vậy tổng các giá trị m thỏa mãn là: $-\dfrac{1}{2}$.

Đáp án A.

Câu 51. Do $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} y=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$.

Do đó, đồ thị hàm số có tất cả bốn đường tiệm cận khi phương trình:

$$x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m=0$$

có 3 nghiệm phân biệt $x\neq 3$.

Xét phương trình:

$x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m=0$ $(*)$, ta có:

$$x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m=0$$
$$\Leftrightarrow (x-m)(x^2-2mx+1)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m\\ x^2-2mx+1=0\end{array}\right.$$

Phương trình $(*)$ có ba nghiệm phân biệt $x\neq 3$ khi và chỉ khi $m\neq 3$ và phương trình $x^2-2mx+1=0$ có hai nghiệm phân biệt $x\neq 3$.

Hay: $\begin{cases} m\neq 3\\ m^2-1>0\\ 3^2-2.3.m+1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 3,\ m\neq \dfrac{5}{3}\\ \left[\begin{array}{l} m>1\\ m<-1\end{array}\right.\end{cases}$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Do m nguyên và $m \in [-6;6]$ nên:

$$m \in \{-6;-5;-4;-3;-2;2;4;5;6\}.$$

Vậy có 9 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Đáp án B.

Câu 52. TXĐ: $\mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x \to m} \dfrac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$

$$= \lim_{x \to m} \left(2x + 2m - 3 + \frac{2m^2 - 2m}{x - m} \right).$$

Để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng thì phải tồn tại $\lim\limits_{x \to m} \dfrac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$.

$$\Rightarrow 2m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array} \right..$$

Vậy đáp án **C** là đáp án đúng.

Đáp án C.

Câu 53. Để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2 - 4x + m}}$ có hai tiệm cận đứng thì phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ 12 + m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2017 \le m < 4 \\ m \neq -12 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m \in \{-2017; -2016; ..; 3\} \setminus \{-12\}.$$

Do đó số giá trị nguyên của tham số m thỏa đề bài là: $3 - (-2017) + 1 - 1 = 2020$ giá trị.

Đáp án D.

Câu 54. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có duy nhất một tiệm cận ngang $\Leftrightarrow 2019m = 2020m^4$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \sqrt[3]{\dfrac{2019}{2020}} \end{array} \right..$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa bài toán.

Đáp án B.

Câu 55. Điều kiện: $x > m$.

Ta có: $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 0$

$\Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Xét phương trình:

$$\left[x^2 - (2m+1)x + 2m \right] \sqrt{x - m} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x^2 - (2m+1)x + 2m = 0 \quad (*) \end{array} \right..$$

Để hàm số có 4 đường tiệm cận thì phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $m < x_1 < x_2$.

Khi đó, ta có điều kiện: $\begin{cases} (2m-1)^2 > 0 \\ (x_1 - m)(x_2 - m) > 0 \\ x_1 + x_2 > 2m \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \dfrac{1}{2} \\ x_1 x_2 - m(x_1 + x_2) - m^2 > 0 \\ 2m + 1 > 2m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \dfrac{1}{2} \\ m - m^2 > 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \dfrac{1}{2} \\ 0 < m < 1 \end{cases}.$$

Đáp án A.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never set anywhere unless you try!

Câu 56. Đặt $f(x)=mx^2-6x+3$ và

$$g(x)=9x^2+6mx+1.$$

Ta xét các trường hợp:

+ Trường hợp 1: $m=0$.

Khi đó ta có: $y=\dfrac{6x-3}{(-6x+3)(9x^2+1)}$ đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$ do đó $m=0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Trường hợp 2: $m\neq 0$ và cả hai tam thức $f(x)$ và $g(x)$ đều vô nghiệm.

Khi đó: $\begin{cases}\Delta'_f<0\\ \Delta'_g<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9-3m<0\\ 9m^2-9<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m>3\\ -1<m<1\end{cases}\Leftrightarrow m\in\varnothing.$

+ Trường hợp 3: Tam thức $g(x)$ nhận $x=\dfrac{1}{2}$ làm nghiệm $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow m=-\dfrac{13}{12}$ khi đó $f(x)$ luôn có 2 nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số đã cho có nhiều hơn 1 đường tiệm cận.

Vậy có 1 giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}$ có đúng 1 đường tiệm cận.

Đáp án C.

Câu 57. Điều kiện cần và đủ để đồ thị hàm số: $y=x+\sqrt{mx^2+1}$ có tiệm cận ngang là tồn tại số thực k sao cho:

$$\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{mx^2+1}\right)=k\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{mx^2+1}\right)=k\end{array}\right.$$

Hiển nhiên nếu $m\le 0$ thì giới hạn $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x+\sqrt{mx^2+1}\right)$ không hữu hạn.

Nếu $m>0$ ta có:

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{mx^2+1}\right)=+\infty.$

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{mx^2+1}\right)$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(1-m)-1}{x-\sqrt{mx^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(1-m)-\dfrac{1}{x}}{1+\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}}$$

Để giới hạn trên hữu hạn khi và chỉ khi $m=1$.

Đáp án B.

Câu 58. Với $m=0$, ta có: $y=\dfrac{x-2}{-2x+4}=-2$

$\Rightarrow$ Không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m\neq 0$, ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-2}{mx^2-2x+4}=0$

$\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow mx^2-2x+4=0$ có nghiệm duy nhất hoặc $mx^2-2x+4=0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x=2$.

Trường hợp 1:

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never stop here unless you try

$mx^2-2x+4=0$ có nghiệm duy nhất.

$$\Leftrightarrow \Delta'=0 \Leftrightarrow 1-4m=0 \Leftrightarrow m=\frac{1}{4}.$$

Trường hợp 2:

$mx^2-2x+4=0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x=2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ 4m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\frac{1}{4} \\ m=0 \end{cases} \Rightarrow m=0 \text{ không thỏa}$$

mãn điều kiện.

Vậy chỉ có một giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đáp án D.

Câu 59. $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\dfrac{2019}{m-\sqrt{17}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\dfrac{2019}{\sqrt{17}-m}$.

Với $m\neq\sqrt{17}$ thì đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{2019}{m-\sqrt{17}}$, $y=\dfrac{2019}{\sqrt{17}-m}$.

Khi đó đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi phương trình

$$\sqrt{17x^2-1}-m|x|=0 \ (1)$$

có hai nghiệm phân biệt khác 0.

Ta có: $(1)\Leftrightarrow \sqrt{17x^2-1}=m|x|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\geq 0 \\ 17x^2-1=m^2x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\geq 0 \\ \left(17-m^2\right)x^2=1 \ (2) \end{cases}.$$

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\geq 0 \\ 17-m^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\leq m<\sqrt{17}.$$

Suy ra $S=\{0,1,2,3,4\}$.

Đáp án C.

Câu 60. Ta có:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sqrt{x^3+mx+1}-\sqrt[3]{x^4+x+1}+m^2x}{x}}$$

Mà $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+mx+1}-\sqrt[3]{x^4+x+1}+m^2x}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x^3+mx+1}-1}{x}-\frac{\sqrt[3]{x^4+x+1}-1}{x}+\frac{m^2x}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^3+mx}{x\left(\sqrt{x^3+mx+1}+1\right)}\right.$$

$$\left.-\frac{x^4+x}{x\left(\sqrt[3]{\left(x^4+x+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^4+x+1}+1\right)}+m^2\right]$$

Đồ thị hàm số $f(x)$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(x^2+m\right)}{\left(\sqrt{x^3+mx+1}+1\right)}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(x^3+1\right)}{\sqrt[3]{(x^4+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^4+x+1}+1}+m^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{2}-\frac{1}{3}+m^2=0 \Leftrightarrow 6m^2+3m-2=0$$

Vậy $m_1+m_2=-\dfrac{1}{2}$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Đáp án B.

Câu 61. Xét $g(x)=\sqrt{x(x-m)}-1$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}=1$ và

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}=-1.$$

Nên đồ thị hàm số luôn có hai đường tiệm cận ngang $y=1$ và $y=-1$.

Trường hợp 1: $m=0$.

Khi đó hàm số là $y=\dfrac{|x|-1}{x+2}$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-2$.

Vậy $m=0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Trường hợp 2: $m>0$.

Hàm số $g(x)$ có tập xác định là:

$$D=(-\infty;0]\cup[m;+\infty).$$

Vì: $x=-2\in D$.

$g(-2)=\sqrt{2(m+2)}-1\neq 0$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy $m=1$, $m=2$, $m=9$ thỏa mãn.

Nên có 9 giá trị m.

Trường hợp 3: $m<0$.

Hàm số $g(x)$ có tập xác định là

$$D=(-\infty;m]\cup[0;+\infty).$$

Để $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì trước hết $x=-2\in D$ hay $m\geq -2$.

Nên chỉ có $m=-2$, $m=-1$ thỏa mãn.

Với $m=-1$ ta có $g(x)=\sqrt{x(x+1)}-1$,

$g(-2)=\sqrt{2}-1\neq 0$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Với $m=-2$ ta có: $g(x)=\sqrt{x(x+2)}-1$,

$g(-2)=\sqrt{x(x+2)}-1=-1\neq 0$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy 12 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu.

Đáp án A.

Câu 62. Điều kiện xác định: $\begin{cases}x-3\geq 0\\ x^2+x\neq m\end{cases}$.

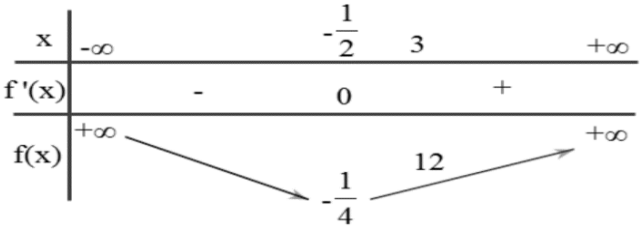
Dựa vào điều kiện xác định ta suy ra hàm số đã cho không có giới hạn khi $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}=0,\forall m.$$

$\Rightarrow y=0$ là phương trình đường tiệm cận ngang.

Xét hàm số $f(x)=x^2+x$.

$f'(x)=2x+1;\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Khi $m<12$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Khi $m\geq 12$ thì đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Do đó để hàm số có đúng 2 đường tiệm cận thì $m\in[12;2019]$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Vậy có 2008 giá trị nguyên của m.

Đáp án D.

Câu 63. Nhận xét:

+ $f(x)=mx^2-2x+3$ có bậc ≥ 1 nên đồ thị hàm số luôn có 1 tiệm cận ngang.

+ Do đó: Yêu cầu bài toán 9 đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng.

+ $m=0$, đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x=\dfrac{3}{2}\Rightarrow m=0$ thỏa bài toán.

+ $m\neq 0$, đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình

$$mx^2-2x+3=0$$

có nghiệm kép hoặc nhận $x=1$ làm nghiệm

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta_f=0\\ f(1)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{1}{3}\\ m=-1\end{array}\right..$$

+ Kết luận: $m\in\left\{0;\dfrac{1}{3};-1\right\}$.

Đáp án B.

Câu 64. Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3-3x^2+m-1}}=0.$$

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^3-3x^2+m-1}}$

không tồn tại.

Suy ra $y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Do đó, để đồ thị hàm số đã cho có 4 đường thẳng tiệm cận thì phương trình

$$x^3-3x^2+m-1=0$$

có 3 nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x^2+m-1$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$$g'(x)=3x^2-6x;\ g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$m-1$	↘	$m-5$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy phương trình $x^3-3x^2+m-1=0$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m-5<0<m-1\Leftrightarrow 1<m<5$.

Đáp án A.

Câu 65. Do hàm số không có tiệm cận đứng nên $f(x)=\sqrt{3x+1}+ax+b=(x-1)^2 g(x)$.

Suy ra $\left\{\begin{array}{l}f(1)=0\\ f'(1)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a+b+2=0\\ a+\dfrac{3}{4}=0\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=-\dfrac{3}{4}\\ b=-\dfrac{5}{4}\end{array}\right.\Rightarrow a-b=\frac{1}{2}$$

$\rightarrow$ Đáp án **A.**

Note: Với $f(x)=(x-x_0)^n g(x)$ thì ta luôn có $f(x_0)=f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$.

Đáp án A.

Câu 66. Biểu thức: $\sqrt{-x^2+2016x+2017}$ có

nghĩa khi:

$-x^2+2016x+2017\ge 0\Leftrightarrow -1\le x\le 2017$.

Đặt $f(x)=\sqrt{-x^2+2016x+2017}$.

Xét $x-m=0\Leftrightarrow x=m$.

Vậy đồ thị nếu có tiệm cận đứng chỉ có thể là $x=m$, khi đó điều kiện là: $\begin{cases}-1\le x\le 2017\\ f(m)\ne 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\in[-1;2017] & (1)\\ \sqrt{-m^2+2016m+2017}\ne 24\sqrt{7} & (*)\end{cases}.$$

Ta có: $(*)\Leftrightarrow m^2-2016m+2015\ne 0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne 1\\ m\ne 2015\end{cases}(2).$$

Từ $(1),(2)\Rightarrow m\in[-1;2017]\setminus\{1;2015\}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}$ có $2019-2=2017$ số nguyên m thỏa mãn bài toán $\rightarrow$ **Đáp án C.**

Đáp án C.

Câu 67. Nếu $m=0$ thì $y=\dfrac{1}{x+1}$.

Hàm số này có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1}{x+1}=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$.

Vậy với $m=0$ thì đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận (loại).

Nếu $m>0$ thì $mx^2+1>0$ với mọi x và tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}=\sqrt{m},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}=-\sqrt{m}.$$

Suy ra đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là :

$y=\sqrt{m}$ và $y=-\sqrt{m}$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}=+\infty$ nên $x=-1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy $m>0$ không thỏa mãn.

Nếu $m<0$ thì tập xác định của hàm số là $D=\left[-\sqrt{-\dfrac{1}{m}};\sqrt{-\dfrac{1}{m}}\right]\setminus\{-1\}$.

Trường hợp này đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Để đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có một tiệm cận đứng.

Điều này xảy ra khi: $-\sqrt{-\dfrac{1}{m}}\le -1$

$$\Leftrightarrow\sqrt{-\frac{1}{m}}\ge 1\Leftrightarrow -\frac{1}{m}\ge 1\Leftrightarrow m\ge -1.$$

Vậy với $-1\le m<0$ thì đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận.

Đáp án A.

Câu 68. $f(x)=2\Leftrightarrow\dfrac{3x-1}{x-1}=2$.

$\Rightarrow 3x-1=2x-2 \Leftrightarrow x=-1$.

Với $y=\dfrac{1}{f(x)-2}$ ta có:

$$\lim_{x\to(-1)^+} y=-\infty;\ \lim_{x\to(-1)^-} y=+\infty$$

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-2}$ có đường tiệm cận đứng $x=-1$.

Đáp án C.

Câu 69. Từ đồ thị của hàm số $y=f(x)$ suy ra tập xác định của hàm số $y=f(x)$ là $D=\mathbb{R}$

Do đó số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2019}{f(x)-1}$ đồng thời chính là số nghiệm của phương trình $f(x)=1$.

Qua đồ thị ta có: Đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $f(x)=1$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{2019}{f(x)-1}$ có 3 đường tiệm cận đứng.

Đáp án C.

Câu 70. Ta có:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=2\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-2\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=-\frac{1}{2}.$$

Suy ra đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)}$ có hai đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{1}{2}$ và $y=-\dfrac{1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta thấy phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<-1<x_2$.

Khi đó: $f(x_1)=f(x_2)=0$.

Ta có: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_1^-} f(x)=0\\ f(x)>0 \,khi\, x\to x_1^-\end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_1^-}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$.

Và $\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_2^-} f(x)=0\\ f(x)>0 \text{ khi } x\to x_2^-\end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_2^-}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)}$ có hai tiệm cận đứng là đường thẳng $x=x_1$ và $x=x_2$.

Đáp án A.

Câu 71. Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)+2}=1$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1$.

Trường hợp 1: Nếu $m=-1$ thì:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)+2}=1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)+2}=1$ thì đồ

thị hàm số có một tiệm cận.

Trường hợp 2: Nếu $m \neq -1$

Để đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)+2}$ không có giá trị hữu hạn

$\Leftrightarrow m+2=0 \Leftrightarrow m=-2$.

Vậy khi $m \in \{-2;-1\}$ thì đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận ngang.

Đáp án C.

Câu 72. Theo giả thuyết, ta có:

$$f(\tan x)=\cos^4 x \Leftrightarrow f(\tan x)=\frac{1}{\left(1+\tan^2 x\right)^2}$$

$$\Rightarrow f(t)=\frac{1}{\left(1+t^2\right)^2}.$$

Hàm số $g(x)=\dfrac{2019}{f(x)-m}$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{2019}{\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^2}-m}.$$

Hàm số $g(x)$ có hai tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^2}-m=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \left(1+x^2\right)^2=\frac{1}{m}>1 \Leftrightarrow 0<m<1.$$

Vậy $0<m<1$.

Đáp án B.

Câu 73. Đặt $h(x)=\dfrac{1}{2f(x)-1}$.

* Tiệm cận ngang:

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2f(x)-1}=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2f(x)-1}=0$.

Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y=0$.

* Tiệm cận đứng:

Xét phương trình:

$$2f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}.$$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x)=\dfrac{1}{2}$ có ba nghiệm phân biệt a, b, c thỏa mãn $a<1<b<2<c$.

Đồng thời, ta cũng có:

$$\lim_{x\to a^+} h(x)=\lim_{x\to b^-} h(x)=\lim_{x\to c^+} h(x)=+\infty$$

Nên đồ thị hàm số $y=h(x)$ có ba đường tiệm cận đứng là $x=a$, $x=b$ và $x=c$.

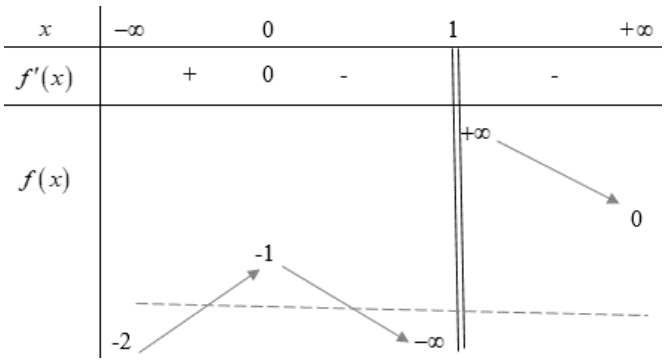
Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=h(x)$ là 4.

Đáp án A.

Câu 74. Đặt $y=g(x)=\dfrac{1}{2f(x)+3}$ có tử số là $1\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $2f(x)+3=0 \Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{3}{2}$ (1).

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never give up where unless you try



Từ bảng biến thiên có phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 \in (-\infty;0),\ x_2 \in (0;1)$.

Do đó đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)+3}$ có 2 đường tiệm cận đứng.

Đáp án A.

Câu 75. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-1}$ đúng bằng số nghiệm thực của phương trình $2f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}$.

Mà số nghiệm thực của phương trình $f(x)=\dfrac{1}{2}$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$.

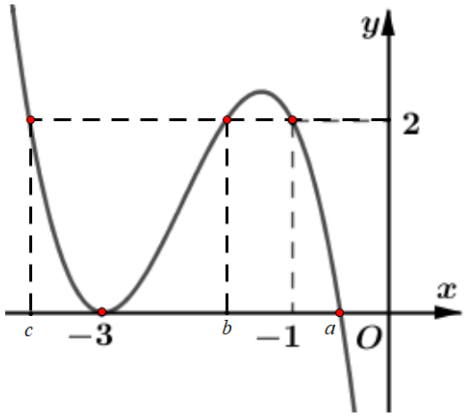
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 2 điểm phân biệt. Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-1}$ có 2 tiệm cận đứng.

Lại có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{2f(x)-1}=1 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y=1$.

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-1}$ là 3.

Đáp án D.

Câu 76.



$$y=\frac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}=\frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).\left[f(x)-2\right]}$$

Điều kiện tồn tại căn $\sqrt{x^2+x}$: $\left[\begin{array}{l} x\ge 0 \\ x\le -1 \end{array}\right.$.

Xét phương trình:

$$x\left[f^2(x)-2f(x)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \\ f(x)=2 \end{array}\right.$$

Với $x=0$ ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).\left[f(x)-2\right]}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}.f(x).\left[f(x)-2\right]}=+\infty .$$

Suy ra $x=0$ là tiệm cận đứng.

Với $f(x)=0 \Rightarrow x=-3$ (nghiệm bội 2) hoặc $x=a$ (loại vì $-1<a<0$).

Ta có: $\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).\left[f(x)-2\right]}=-\infty$ nên

$x=-3$ là tiệm cận đứng.

Với $f(x)=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=b(-3<b<-1)\\x=c(c<-3)\end{array}\right.$

(nghiệm bội 1).

Ta có: $\lim\limits_{x\to b^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).\left[f(x)-2\right]}=0$

Vì: $\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).\left[f(x)-2\right]}=0\\\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).\left[f(x)-2\right]}=0\end{array}\right.$.

Nên $x=-1$ không là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to b^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).\left[f(x)-2\right]}=+\infty$

(Do $x\to b^+$ thì $f(x)\to 2^+$)

Nên $x=b$ là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).\left[f(x)-2\right]}=+\infty$

(Do $x\to c^+$ thì $f(x)\to 2^-$)

Nên $x=c$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 4 tiệm cận đứng.

Đáp án C.

Câu 77. Nhận xét 1: Với $x_0\ge 1$ và $\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^-}g(x)$ có kết quả là $+\infty$ hoặc $-\infty$ thì $x=x_0$ là tiệm cận đứng của của đồ thị hàm số $g(x)$.

Nhận xét 2: Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$ ta có: $f(x)=a(x-x_1)(x-2)^2$.

Ta có: $x\left[f^2(x)-f(x)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f(x)=0\\f(x)=1\end{array}\right.$.

$f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1,0<x_1<1\\x=2\end{array}\right.$.

Vì: $f(x)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=x_2,1<x_2<2\\x=x_3,x_3>2\end{array}\right.$ suy ra:

$f(x)-1=a(x-1)(x-x_2)(x-x_3)$.

Khi đó ta có: $g(x)=\dfrac{(x^2-3x+2)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$

$=\dfrac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{x.f(x)\left[f(x)-1\right]}$

$=\dfrac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{x.a(x-x_1)(x-2)^2.a(x-1)(x-x_2)(x-x_3)}$

$=\dfrac{\sqrt{x-1}}{a^2x(x-x_1)(x-2)(x-x_2)(x-x_3)}$.

Do vậy, $x=0,x=x_1$ không phải tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=g(x)$ do không thỏa mãn điều kiện $x_0\ge 1$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng là: $x=2, x=x_2, x=x_3$.

Đáp án C.

Câu 78. Ta có: $g(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{(x+1)f(x)\left[f(x)-1\right]}$

ĐKXĐ: $\begin{cases} x\geq 1 \\ f(x)\neq 0 \\ f(x)\neq 1 \end{cases}$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta có:

$f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=x_1 \end{array}\right.$ với $x=2$ là nghiệm kép, $x_1\in(0;1)$.

$f(x)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=x_2 \\ x=x_3 \end{array}\right.$ với $x_2\in(1;2); x_3>2$.

Suy ra, ta có: $g(x)=$

$=\dfrac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{a^2(x+1)(x-2)^2(x-x_1)(x-1)(x-x_2)(x-x_3)}$

$=\dfrac{\sqrt{x-1}}{a^2(x+1)(x-2)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}$.

Vậy đồ thị hàm số có 3 tiệm cận đứng là:

$x=2;\ x=x_2;\ x=x_3$

(do $x\geq 1$ nên ta loại $x=-1; x=x_1$).

Đáp án D.

Câu 79. Ta xét phương trình

$f^2(x)-2f(x)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=x_1<-1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=x_2>1 \\ x=x_3<-1, x_3\neq x_1 \end{array}\right. \end{array}\right.$.

Nên $g(x)=\dfrac{x^2-x}{ax(x-1)^2(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}$

$=\dfrac{1}{a(x-1)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)};\ (a\neq 0)$.

Vậy đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 4 đường tiệm cận đứng.

Đáp án C.

Câu 80. Tính tiệm cận ngang.

Ta có: $x^3+x\xrightarrow{x\to+\infty}+\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x^3+x)+3}=0$.

Và $x^3+x\xrightarrow{x\to-\infty}-\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x^3+x)+3}=0$.

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y=0$.

Tính tiệm cận đứng.

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là số nghiệm của phương trình $f(x^3+x)+3=0$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$f(x^3+x)+3=0$

$\Leftrightarrow f(x^3+x)=-3 \Leftrightarrow x^3+x=x_0; x_0\in(-\infty;1)$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Vì hàm số $y=x^3+x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ do đó $x^3+x=x_0;\ x_0\in(-\infty;1)$ có một nghiệm duy nhất.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x^3+x\right)+3}$ có 1 tiệm cận đứng.

Đáp án A.

Câu 81. Ta có: $y'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy hàm số đạt cực trị tại $x=0$, $x=2$.

Do đó, ta có hệ: $\begin{cases}y(0)=1\\y(2)=-3\\y'(0)=0\\y'(2)=0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}d=1\\c=0\\12a+4b=0\\8a+4b=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-3\\c=0\\d=1\end{cases}$.

Vậy $y=f(x)=x^3-3x^2+1$.

Khi đó: $y=\dfrac{\left(x^2-2x\right)\sqrt{2-x}}{(x-3)\left[f^2(x)-f(x)\right]}$

$=\dfrac{\left(x^2-2x\right)\sqrt{2-x}}{(x-3)\left(x^3-3x^2+1\right)\left(x^3-3x^2\right)}$

$=\dfrac{\left(x^2-2x\right)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2\left(x^3-3x^2+1\right)}$.

Ta có: $x^2(x-3)^2\left(x^3-3x^2+1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\\x=x_1\in(-1;0).\\x=x_2\in(0;1)\\x=x_3\in(2;3)\end{array}\right.$

Hàm số $y=\dfrac{\left(x^2-2x\right)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2\left(x^3-3x^2+1\right)}$ có tập xác định $D=(-\infty;2]\setminus\{0;x_1;x_2\}$.

Và: $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\left(x^2-2x\right)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2\left(x^3-3x^2+1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x(x-2)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2\left(x^3-3x^2+1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(x-2)\sqrt{2-x}}{x(x-3)^2\left(x^3-3x^2+1\right)}=-\infty$.

Suy ra $x=0$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to x_1^+}\dfrac{\left(x^2-2x\right)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2\left(x^3-3x^2+1\right)}=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to x_2^+}\dfrac{\left(x^2-2x\right)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2\left(x^3-3x^2+1\right)}=+\infty$.

Suy ra $x=x_1$ và $x=x_2$ cũng là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Đáp án C.

Câu 82. Điều kiện xác định: $\begin{cases}f(x)\ge0\\x\ne-1\\x^2-4x+3\ne0\end{cases}$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anything for nothing

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x \ne -1 \\ x \ne 1 \\ x \ne 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x \ne 3 \end{cases}.$$

Ta có: $\lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2(x^2-4x+3)}$

$= +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 3^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2(x^2-4x+3)}$

$= -\infty$.

Vậy đồ thị $g(x) = \dfrac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2(x^2-4x+3)}$ có một đường tiệm cận đứng là: $x = 3$.

Đáp án B.

Câu 83. Ta có: $y = \dfrac{(x^2-4)(x^2+2x)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3}$

$= \dfrac{x(x+2)^2(x-2)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3}$.

Ta có: $[f(x)]^2 + 2f(x) - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 1 \\ f(x) = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m (m < -2) \\ x = 0 \\ x = n (n > 2) \\ x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right. .$$

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy các nghiệm $x = 0;\ x = \pm 2$ là các nghiệm kép (nghiệm bội 2) và đa thức $[f(x)]^2 + 2f(x) - 3$ có bậc là 8 nên $y = \dfrac{x(x+2)^2(x-2)}{a^2x^2(x+2)^2(x-2)^2(x-m)(x-n)}$.

Vậy hàm số có các tiệm cận đứng là:

$$x = 0; x = 2; x = m; x = n.$$

Đáp án D.

Câu 84. Dựa vào **đồ thị hàm số đạo hàm** ta thấy: $f'(x) = 1 \Rightarrow f(x) = x + C$.

Khi đó hàm số là một hàm đồng biến và

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} |f(x)| = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x - C) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)| = \lim\limits_{x \to +\infty} (x + C) \end{cases}$$

Xét hàm số: $y = g(x) =$

$$= \frac{f(x)+1}{f(x)+1} + \frac{\sqrt{f^2(x)+2}}{f(x)+2} + \ldots + \frac{\sqrt[2021]{f^{2021}(x)+2021}}{f(x)+2021}$$

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2021 - C; \ldots; -1 - C\}$.

Với mọi $x_0 = f(a) \in \{-2021 - C; \ldots; -2 - C\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x \to x_0^-} g(x) = \infty, \lim\limits_{x \to x_0^+} g(x) = \infty$.

Suy ra: $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Như vậy hàm số $y = g(x)$ có tất cả 2020 tiệm cận đứng.

(Lưu ý: đường thẳng $x = x_0 = f(a) = -1$ không là tiệm cận đứng).

Ta có: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{2021 \text{ elements of } 1} = 2021$

Bên cạnh đó: $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) =$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{|f(x)|\sqrt{1+\dfrac{2}{f^2(x)}}}{f(x)+2} + \ldots + \frac{f(x)\sqrt[2021]{1+\dfrac{2021}{f^{2021}(x)}}}{f(x)+2021} \right).$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{-f(x)\sqrt{1+\frac{2}{f^2(x)}}}{f(x)+2}+\frac{f(x)\sqrt[3]{1+\frac{3}{f^3(x)}}}{f(x)+3}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{-f(x)\sqrt[2020]{1+\frac{2020}{f^{2020}(x)}}}{f(x)+2020}+\frac{f(x)\sqrt[2021]{1+\frac{2021}{f^{2021}(x)}}}{f(x)+2021}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=1-1+1+\ldots+1-1+1=1$$

Vì thế đồ thị hàm số $y=g(x)$ có hai tiệm cận ngang là đường $y=2021$ và $y=1$.

Như vậy hàm số có tất cả 2022 đường tiệm cận.

Đáp án A.

Câu 85. Cách 1: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2-3x+1}{2x+1}-ax-b\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(4-2a)x^2-(a+2b+3)x-b+1}{2x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4-2a=0\\a+2b+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-\frac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow a+2b=-3.$$

Cách 2: Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2-3x+1}{2x+1}-ax-b\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(2x-\frac{5}{2}+\frac{7}{2(2x+1)}-ax-b\right).$$

Mà $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2-3x+1}{2x+1}-ax-b\right)=0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(2x-\frac{5}{2}+\frac{7}{2(2x+1)}-ax-b\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2-a=0\\-\frac{5}{2}-b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-\frac{5}{2}\end{cases}.$$

Khi đó $a+2b=-3$.

Đáp án D.

Lưu ý: Với $f(x), g(x)$ là các đa thức thì

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0\Leftrightarrow$ Bậc $f(x)<$ Bậc $g(x)$.

Câu 86. Xét hàm số

$$y=\frac{x+2}{x^3+3mx^2+(2m^2+m)x+m^2}\ (C)$$

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0$ nên đồ thị (C) luôn có một đường tiệm cận ngang $y=0$.

Do đó đồ thị (C) có đúng 4 đường tiệm cận

$\Leftrightarrow$ Đồ thị (C) có 3 đường tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ Phương trình

$$x^3+3mx^2+(2m^2+m)x+m^2=0\ (1)$$

có 3 nghiệm phân biệt khác -2.

Mặt khác, phương trình:

$$(1)\Leftrightarrow(x+m)(x^2+2mx+m)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-m\\x^2+2mx+m=0\ (2)\end{cases}$$

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khác

$$-2\Leftrightarrow\begin{cases}-m\neq-2\\\Delta'=m^2-m>0\\m^2-2m^2+m\neq0\\4-3m\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq2\\\left[\begin{array}{l}m>1\\m<0\end{array}\right.\\m\neq\frac{4}{3}\end{cases}.$$

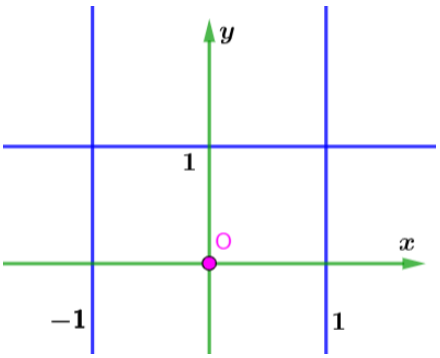
Do $m\in\mathbb{Z}$, $m\in[-9;9]$ nên có 16 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đáp án C.

Câu 87. Phân tích hướng giải.

Trước hết ta tìm các đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số theo tham số m.

Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y=1$ và trục hoành $y=0$ nên hình vuông có cạnh bằng 1.



Hướng dẫn giải.

Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\setminus\left\{m^2-1\right\}$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x-m^2+1}$ có đường tiệm cận ngang là $y=1$ và đường tiệm cận đứng là $x=m^2-1$ (do $m\neq\pm2$).

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\left|m^2-1\right|=1$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2-1=1\\m^2-1=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm\sqrt{2}\\m=0\end{array}\right.$.

Đáp án B.

Câu 88. Vì phương trình $f(x)=2018$ có ba nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số

$$y=\frac{1}{f(x)-2018}$$

có ba đường tiệm cận đứng.

Mặt khác, ta có:

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)-2018}=-\frac{1}{2019}$$

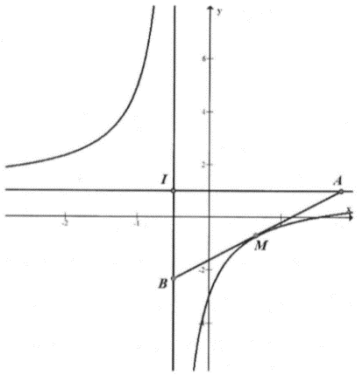
Nên đường thẳng $y=-\dfrac{1}{2019}$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-2018}$.

Và $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)-2018}=0$ nên đường thẳng $y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=-\dfrac{1}{2019}$.

Vậy $k+l=5$.

Đáp án D.

Câu 89.



Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc đồ thị hàm số là:

$$\Delta:y=\frac{8}{(2x_0+1)^2}(x-x_0)+1-\frac{4}{2x_0+1}.$$

Giao của đường tiếp tuyến với tiệm cận ngang là $A\left(\dfrac{4x_0+1}{2};1\right)$.

Giao của đường tiếp tuyến với tiệm cận đứng là $B\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{2x_0-7}{2x_0+1}\right)$.

Giao của hai tiệm cận là: $I\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$.

$\Rightarrow\overrightarrow{IA}=(2x_0+1;0);\overrightarrow{IB}=\left(0;-\dfrac{8}{2x_0+1}\right)$.

Diện tích tam giác ΔIAB là

$$S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}.IA.IB=\frac{1}{2}\left|2x_0+1\right|.\frac{8}{\left|2x_0+1\right|}=4.$$

Đáp án D.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Câu 90. Đặt $f(x)=(4-m)x^2+2mx-3-m$.

Để đồ thị hàm số đã cho có 2 tiệm cận ngang thì $4-m>0\Leftrightarrow m<4$.

Suy ra các giá trị nguyên dương của m là $m\in\{1;2;3\}$.

Vậy tổng các giá trị nguyên dương cần tìm của m là 6.

Đáp án D.

Câu 91. Ta có: $2f(x)-5=0\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{5}{2}\ (1)$

Khi đó, phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $x_1,x_2,x_3,x_4\neq 1$ và giới hạn của hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-5}$ tại các điểm x_1,x_2,x_3,x_4 đều bằng $\pm\infty$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 1^{\pm}}\dfrac{1}{2f(x)-5}=0$ nên $x=1$ không phải tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-5}$ có 4 đường tiệm cận đứng.

Đáp án B.

Câu 92. Áp dụng công thức tính nhanh, ta có:

$$d_1.d_2=\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|=\left|\frac{2.(-1)-3.1}{1^2}\right|=5.$$

Đáp án D.

Câu 93. Áp dụng công thức tính nhanh, ta có ngay điều kiện để tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận là nhỏ nhất: $(cx_0+d)^2=|ad-bc|$

$$\Leftrightarrow (x_0+1)^2=3\Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{3}.$$

Vì: $x_M>0\Rightarrow x_M=-1+\sqrt{3}$.

Đáp án A.

Câu 94. Ta chú ý, đề bài yêu cầu ngược lại với công thức ta chứng minh ở phần lý thuyết (Lý thuyết: Khoảng cách từ điểm M thuộc đồ thị đến đường tiệm cận đứng bằng k lần khoảng cách từ điểm M thuộc đồ thị đến đường tiệm cận ngang. Câu hỏi: Khoảng cách từ điểm M thuộc đồ thị đến đường tiệm cận ngang bằng k lần khoảng cách từ điểm M thuộc đồ thị đến đường tiệm cận đứng).

Do vậy: $k=\dfrac{1}{5}$.

Lúc này, lượng: $p=\left|\dfrac{ad-bc}{c^2}\right|=5$.

Và theo công thức đã được chứng minh, ta dễ dàng định được điều kiện thỏa mãn yêu cầu đề bài: $\left[\begin{array}{l}x_0=-\dfrac{d}{c}+\sqrt{kp}\\ x_0=-\dfrac{d}{c}-\sqrt{kp}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=3+\sqrt{\dfrac{1}{5}.5}=4\Rightarrow y_0=6\\ x_0=3-\sqrt{\dfrac{1}{5}.5}=2\Rightarrow y_0=-4\end{array}\right.$$

Vậy, có tất cả 2 điểm thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Đáp án C.

Câu 95. Áp dụng công thức tính nhanh, ta có:

$$\left[\begin{array}{l}x_0=-3+\sqrt{\left|\dfrac{9-6}{3^2}\right|}=\dfrac{-9+\sqrt{3}}{3}\Rightarrow y_0=\dfrac{1-\sqrt{3}}{3}\\ x_0=-3-\sqrt{\left|\dfrac{9-6}{3^2}\right|}=-\dfrac{9+\sqrt{3}}{3}\Rightarrow y_0=\dfrac{1+\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$$

Do vậy, ta có tất cả hai điểm M thỏa mãn là $M\left(\dfrac{-9\mp\sqrt{3}}{3};\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{3}\right)$.

Đáp án D.

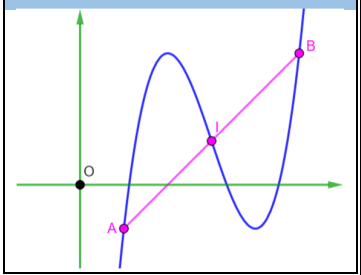
NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Extra Techniques:

Study tips:

Sở dĩ số giao điểm của đồ thị hàm số bậc ba với trục hoành ít nhất là 1 vì giả sử ta xét tổng quát đồ thị hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ với $a>0$. Khi đó, dễ thấy: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty\end{cases}$ do đó, tồn tại ít nhất hai khoảng "gần bù nhau", $(-\infty;x_0),(x_0;+\infty)$ sao cho $\alpha\in(-\infty;x_0)$ và $\beta\in(x_0;+\infty)$ thỏa mãn $y(\alpha).y(\beta)<0$. Theo định lý Bolzano – Cauchy thì tồn tại một điểm $x\in(\alpha;\beta)$ sao cho $y(x)=0$.

Minh họa tâm đối xứng (điểm uốn) của đồ thị hàm số bậc ba

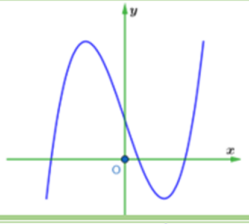
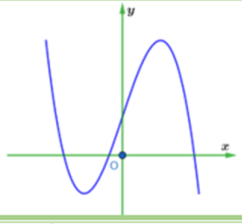
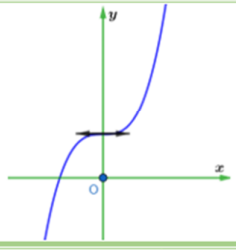
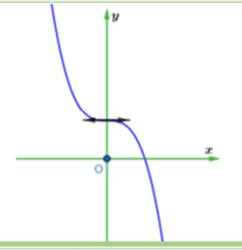
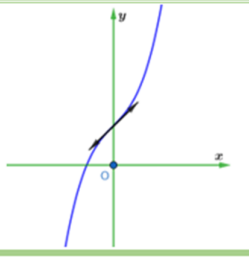
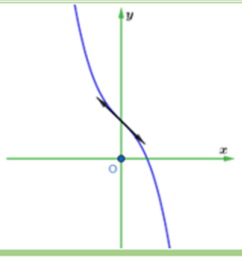


I. V. Các dạng đồ thị hàm số thường gặp

1. Hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$.

Sáu minh họa hình dáng các đồ thị hàm số bậc ba

$y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ ***thường gặp***

	$a>0$	$a<0$
Phương trình đạo hàm $y'=0$ có hai nghiệm thực phân biệt		
Phương trình đạo hàm $y'=0$ có nghiệm kép		
Phương trình đạo hàm $y'=0$ vô nghiệm		

Một số nhận xét về đồ thị hàm số bậc ba tổng quát

- Đồ thị hàm số bậc ba hoặc có hai cực trị (hoặc điểm cực trị) hoặc không có cực trị (hoặc điểm cực trị).

+ Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi $\Delta_{y'}=b^2-3ac>0$.

+ Đồ thị hàm số không có điểm cực trị khi $\Delta_{y'}=b^2-3ac\le 0$.

- Đồ thị hàm số bậc ba có ít nhất một giao điểm với trục hoành.

- Đồ thị hàm số bậc ba nhận điểm uốn làm tâm đối xứng.

- Tung độ giao điểm của đồ thị hàm số bậc ba với trục tung nằm trên trục hoành khi $d>0$ và nằm dưới trục hoành khi $d<0$.

Extra Techniques:

Study tips:

Những bước thực hiện bên đây vô cùng quan trọng, tuy cảm thấy khá dài và rắc rối, nhưng nếu các bạn hiểu được bản chất của sơ đồ tư duy bên thì việc tăng tốc là hoàn toàn có căn cứ.

Extra Techniques:

Study tips:

Ngoài ra, để làm trắc nghiệm, ta cần lưu ý các điều dưới đây để định dấu của các hệ số!

1. Xác định dấu của d: dựa vào vị trí (tung độ) của giao điểm giữa đồ thị hàm số với trục tung.

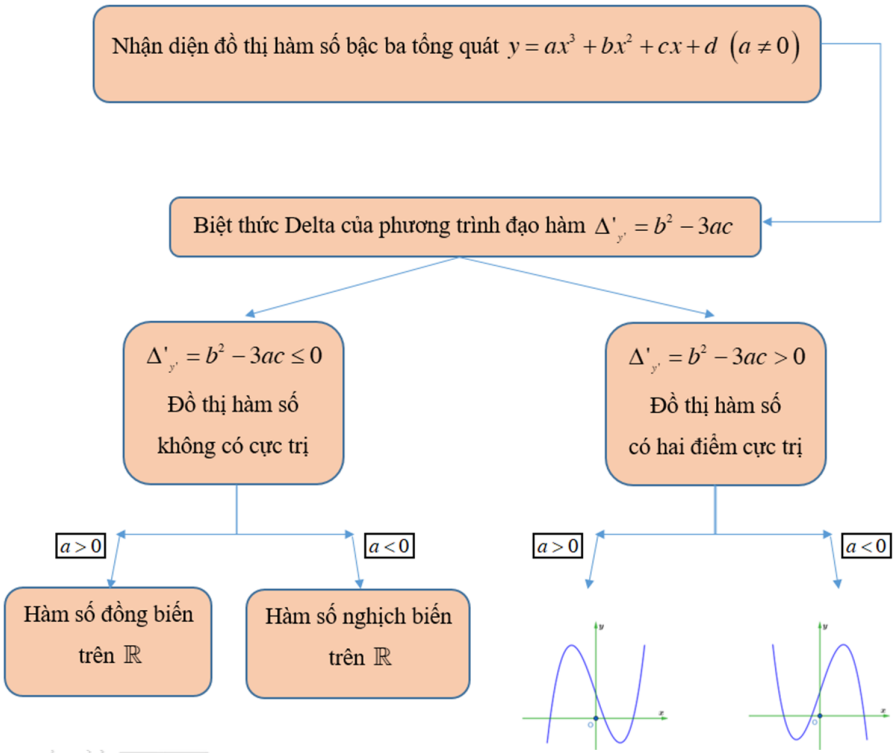
2. Xác định dấu của a: dựa vào "hướng lên, xuống" của đồ thị khi x dần đến một giá trị đủ lớn.

3. Định dấu của b, c: dựa vào hai điểm cực trị của "hàm số" kết hợp định lý Vietè để định dấu thông qua tổng và tích các điểm cực trị.

Các bước nhận dạng đồ thị hàm số bậc ba:

Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$.

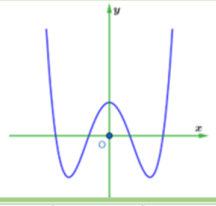
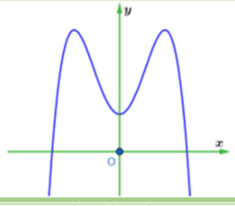
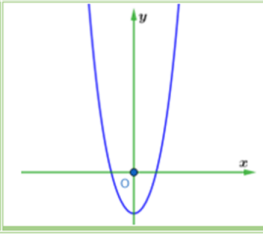
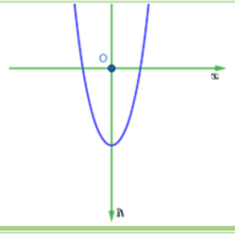
Để nhận biết được hình dáng đồ thị hàm số bậc ba, ta có thể tham khảo các bước được minh họa như hình vẽ dưới đây:



2. Hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c \ (a \neq 0)$.

Bốn minh họa hình dáng các đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương

$y = ax^4 + bx^2 + c \ (a \neq 0)$ ***thường gặp***

	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình đạo hàm $y' = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt		
Phương trình đạo hàm $y' = 0$ có một nghiệm		

Extra Techniques:

Study tips:

Đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương

$y = ax^4 + bx^2 + c,\ (a \neq 0)$

có hàm số là một hàm chẵn vì nếu ta đặt:

$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

thì dễ thấy rằng:

$f(x) = f(-x),\ \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó, đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương đối xứng với nhau qua trục tung!

Extra Techniques:

Study tips:

Những công thức ở bên chỉ mang tính chất gợi mở, không khuyến khích bạn đọc học thuộc lòng một cách sáo rỗng, rất dễ nhầm lẫn giữa các công thức mang tính tương tự nhau.

Một số nhận xét về đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương

- Đồ thị hàm số bậc bốn hoặc có một cực trị khi $ab \geq 0$, hoặc có ba cực trị khi $ab < 0$.

- Đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương nhận trục tung (trục Oy) làm trục đối xứng.

- Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \neq 0)$ với $ab < 0$ thì ta luôn luôn thu được một tam giác cân có đỉnh là $I(0;c)$, hai đỉnh còn lại là hai điểm cực trị còn lại của đồ thị hàm số.

- Một số công thức nhanh đáng lưu ý!

Yêu cầu bài toán	Điều kiện tương ứng ($ab<0$)
ΔABC vuông cân tại A	$b^3 + 8a = 0$
ΔABC đều	$b^3 + 24a = 0$
ΔABC có diện tích bằng S_0	$32a^3.(S_0)^2 + b^5 = 0$
ΔABC có độ dài cạnh $BC = m_0$	$am_0^2 + 2b = 0$
ΔABC có độ dài cạnh $AB = AC = n_0$	$16a^2n_0^2 - b^4 + 8ab = 0$
ΔABC có $B, C \in Ox$	$b^2 - 4ac = 0$
ΔABC có ba góc nhọn	$b(8a + b^3) > 0$
ΔABC nhận O làm trọng tâm	$b^2 - 6ac = 0$
ΔABC nhận O làm trực tâm	$b^3 + 8a - 4ac = 0$
Tứ giác $ABOC$ là hình thoi	$b^2 - 2ac = 0$
ΔABC nhận O làm tâm đường tròn nội tiếp	$b^3 - 8a - 4abc = 0$
ΔABC nhận O làm tâm đường tròn ngoại tiếp	$b^2 - 8a - 8abc = 0$
ΔABC có $BC = k.AB = k.AC$	$b^3.k^2 - 8a.(k^2 - 4) = 0$
Trục hoành chia ΔABC thành hai phần có diện tích bằng nhau	$b^2 - 4\sqrt{2}\lvert ac\rvert$
ΔABC có ba đỉnh cách đều trục hoành	$b^2 - 8ac = 0$
Đồ thị hàm số cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt lập thành một cấp số cộng	$9b^2 - 100ac = 0$
Hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị hàm số có diện tích phần trên (trục hoành) và diện tích phần dưới bằng nhau	$5b^2 - 36ac = 0$
Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC: $x^2 + y^2 - \left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a} + c\right)y + c\left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}\right) = 0$	

Extra Techniques:

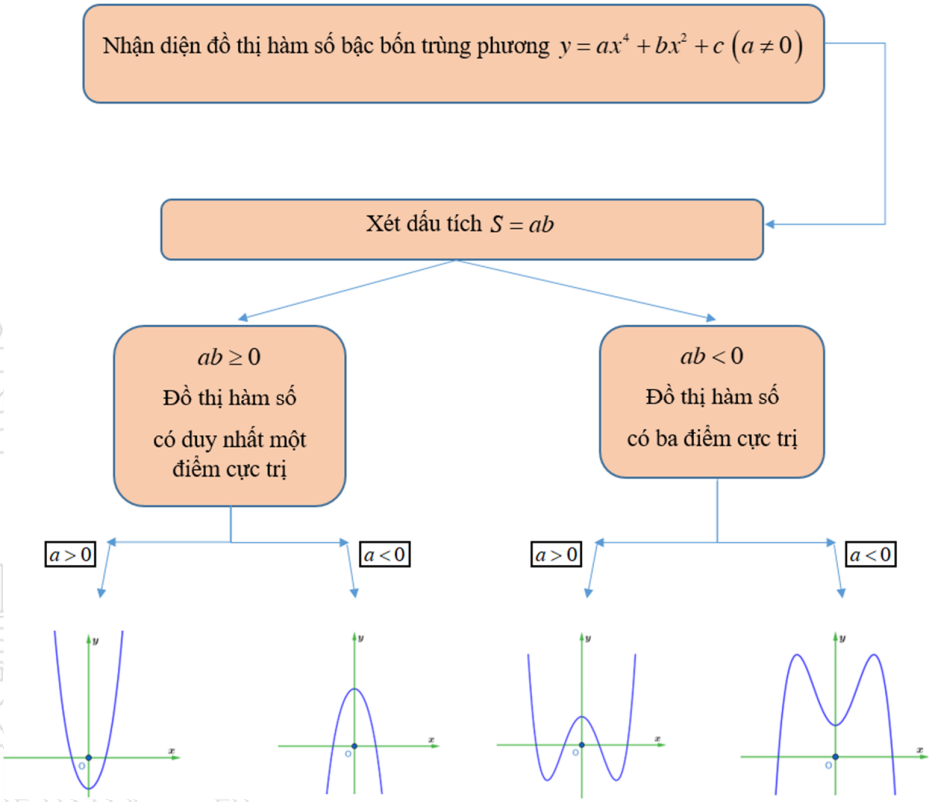
Study tips:

Những bước thực hiện bên đây vô cùng quan trọng, tuy cảm thấy khá dài và rắc rối, nhưng nếu các bạn hiểu được bản chất của sơ đồ tư duy bên thì việc tăng tốc là hoàn toàn có căn cứ.

Các bước nhận dạng đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương:

Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$.

Để nhận biết được hình dáng đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương, ta có thể tham khảo các bước được minh họa như hình vẽ dưới đây:



Extra Techniques:

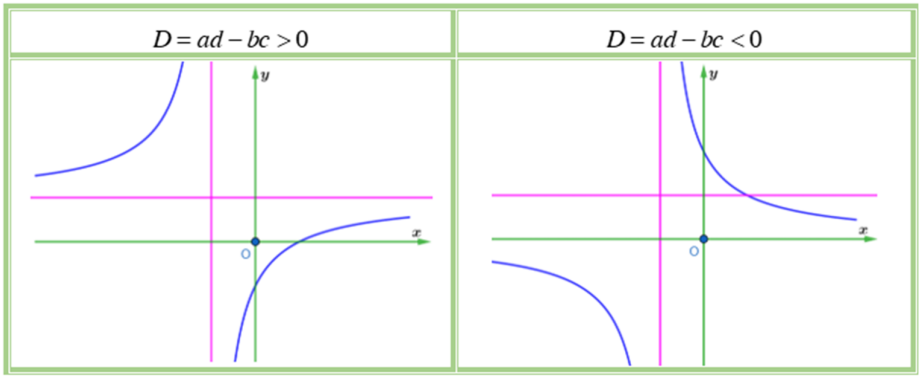
Study tips:

Đối với trường hợp $c=0$ thì đồ thị hàm số nhất biến bên sẽ được đưa về phương trình đường thẳng.

Hoặc đối với trường hợp $ad-bc=0$, thì đồ thị hàm số hàm nhất biến chỉ là một đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành.

3. Hàm số nhất biến $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ (c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$.

Hai minh họa hình dáng các đồ thị hàm số nhất biến (hàm bậc nhất trên bậc nhất) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ (c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$ ***thường gặp***



Extra Techniques:

Study tips:

Hàm số nhất biến là một trong những nguồn cảm hứng sáng tác rất lớn trong kỳ thi TN – THPT QG nhiều năm gần đây bởi những tính chất rất đẹp của nó, đơn giản hóa như những kiến thức nhận xét trong phần bên.

Extra Techniques:

Study tips:

Ngoài ra, các công thức có liên quan đến các tính chất đặc biệt và thường xuyên xuất hiện trong các kỳ thi cũng được đưa vào bảng thống kê các công thức nhanh ở trên. Nếu các bạn cảm thấy mất thời gian để giải đi giải lại những dạng Toán này, các bạn có quyền học thuộc, nhưng đó không phải là cách tối ưu nhất, các bạn nhé!

Một số nhận xét về đồ thị hàm số nhất biến

- Trong điều kiện $c\neq 0,\ ad-bc\neq 0$, thì hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ hoặc luôn đồng biến, hoặc luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định (Nói cách khác, hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ hoặc luôn đồng biến, hoặc luôn nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{d}{c}\right)$ và $\left(-\dfrac{d}{c};+\infty\right)$).

- Hàm số nhất biến, $y=\dfrac{ax+b}{cx+d},\ c\neq 0, \neq ad-bc\neq 0$, không có điểm cực trị.

- Đường thẳng $x=-\dfrac{d}{c}$ và đường thẳng $y=\dfrac{a}{c}$ lần lượt được gọi là đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d},\ c\neq 0,\ ad-bc\neq 0$.

- Điểm đối xứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d},\ c\neq 0,\ ad-bc\neq 0$, đồng thời là giao điểm $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

- Cho $M\left(x_0;y_0\right)$ là một điểm di động trên đồ thị hàm số hàm nhất biến, khi đó, tích hai khoảng cách từ điểm M đến hai đường tiệm cận là một hằng số không đổi, $\left|\dfrac{ad-bc}{c^2}\right|=const$.

- Một đường thẳng bất kỳ có dạng $y=mx+n$ tương giao với đồ thị hàm số hàm nhất biến tại hai điểm phân biệt, M, N. Đồng thời cắt hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số tại hai điểm A, B thì đẳng thức $MA=NB$.

- Dựa vào giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung ta xác định được dấu của tích bd (hoặc thương $\dfrac{b}{d}$) là âm hay dương.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

IV. Một số bài tập ứng dụng nhận diện đồ thị hàm số

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^4+mx^2$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. $m=0$. **B.** $m>0$. **C.** $m\ge 0$. **D.** $m\le 0$.

Đáp án: C

Lời giải

Extra Techniques:

Remark:

Đối với dạng toán này ta thường bỏ sót điều kiện $m=0$, do ta chưa thật sự hiểu được điều kiện cần và điều kiện đủ, hoặc chúng ta chưa thật sự nắm vững kiến thức về cực trị, điểm cực trị. Nhiều hàm số đạt cực trị tại điểm $x=x_0$ thỏa mãn $f(x_0)=f'(x_0)=f''(x_0)=0$ là đẳng khác, chẳng hạn hàm số $y=x^4$ hay hàm $y=-x^4$ là một ví dụ điển hình.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định.

+) Nếu $\begin{cases}f'(x_0)=0\\ f''(x_0)>0\end{cases}$ nên $x=x_0$ là điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$.

+) Nếu $\begin{cases}f'(x_0)=0\\ f''(x_0)<0\end{cases}$ nên $x=x_0$ là điểm cực đại của hàm số $y=f(x)$.

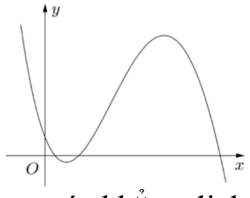
+) Trường hợp $\begin{cases}f'(x_0)=0\\ f''(x_0)=0\end{cases}$ thì ta cần phải kiểm tra lại lần nữa.

Hàm số $y=x^4+mx^2$ có: $\begin{cases}y'=4x^3+2mx\\ y''=12x^2+2m\end{cases}$. Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ thì điều kiện ban đầu, hàm số phải thỏa $\begin{cases}4.0^3+2m.0=0\\ 12.0^2+2m>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}0=0\\ m>0\end{cases}\Rightarrow m>0$. Với $\begin{cases}4.0^3+2m.0=0\\ 12.0^2+2m=0\end{cases}\Rightarrow m=0$.

Thử lại, với $m=0\Rightarrow f(x)=x^4$ là hàm số nhận điểm $x=0$ là điểm cực tiểu. Vậy: $m\ge 0$.

Câu 2. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $\begin{cases}a<0\\ b<0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}c>0\\ b>0\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}b>0\\ d>0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}ac>0\\ bd<0\end{cases}$.

Đáp án: C

Extra Techniques:

Remark:

Bài toán trên thuộc dạng toán nhận diện mới tư duy khá cao vì không có thêm một gợi ý số nào cả, tuy nhiên, bằng vị trí của đồ thị, ta có thể đoán được tổng và tích các điểm cực trị của hàm số là âm hay dương mà đưa ra những kết luận có lý dựa trên Định lý Vietè.

Extra Techniques:

Remark:

Bài toán cho bảng biến thiên của đồ thị hàm số hàm nhất biến thì trước hết ta cần phải xác định được những điều dưới đây để định dấu các hệ số:

1. Tiệm cận đứng.

2. Tiệm cận ngang.

3. Đồng biến/ Nghịch biến?

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty \Rightarrow a<0$.

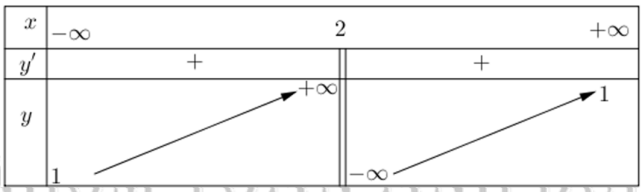
Gọi x_1,x_2 là hoành độ hai điểm cực trị của hàm số suy ra x_1,x_2 nghiệm phương trình $y'=3ax^2+2bx+c=0$ nên theo định lí Viéte, ta có:

+) Tổng hai nghiệm: $x_1+x_2=\dfrac{-2b}{3a}>0\Rightarrow\dfrac{b}{a}<0\Rightarrow b>0$.

+) Tích hai nghiệm: $x_1.x_2=\dfrac{c}{3a}>0\Rightarrow c<0$.

Lại có đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d>0$.

Câu 3. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ (Với a,b,c là các tham số) có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới



Xét các phát biểu sau:

$(1): c>1;\ (2): a+b<0;\ (3): a+b+c=0;\ (4): a>0$.

Số phát biểu đúng là?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Đáp án: B

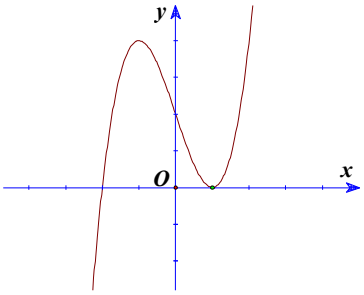
Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} -\dfrac{c}{b}=2 \\ \dfrac{a}{b}=1 \\ ac-b>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-2b \\ a=b \\ ac-b>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-2b \\ a=b \\ -2b^2-b>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<c<1 \\ -\dfrac{1}{2}<a<0 \\ -\dfrac{1}{2}<b<0 \\ a+b+c=0 \end{cases}$$

Dựa vào hệ trên ta có các phát biểu $(1),(4)$ là sai, $(2),(3)$ đúng.

Câu 4. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên dưới?



A. $y=-x^3+3x^2+2$. **B.** $y=x^4-2x^2+2$.

C. $y=x^3-3x+2$. **D.** $y=x^3-3x-2$.

Đáp án: C

Lời giải

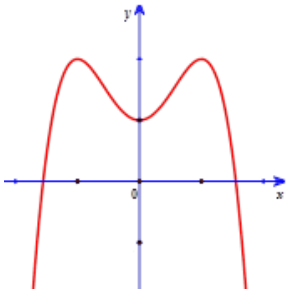
NHÓM TOÁN ANH DÚI
Nothing is impossible where unless you try

Đây là dạng của đồ thị hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hệ số $a>0$ nên loại phương án A, B.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên loại phương án D.

Vậy đồ thị trên là của hàm số $y=x^3-3x+2$.

Câu 5. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y=-x^4+2x^2+1$. **B.** $y=-x^3-3x^2+1$.

C. $y=x^3-3x^2+1$. **D.** $y=x^4-2x^2+1$.

Extra Techniques:

Remark:

Bài toán cho đồ thị hàm số bậc ba, bậc bốn trùng phương để xác định dấu của các hệ số của đồ thị, ta cần phải dựa vào các dấu hiệu dưới đây.

1. Dạng của đồ thị hàm số (có xu hướng đi lên hay xuống khi x dần đến một giá trị đủ lớn).

2. Tung độ giao điểm của đồ thị hàm số với trung tung.

3. Điểm cực trị.

4. Các điểm thuộc.

Extra Techniques:

Study tips:

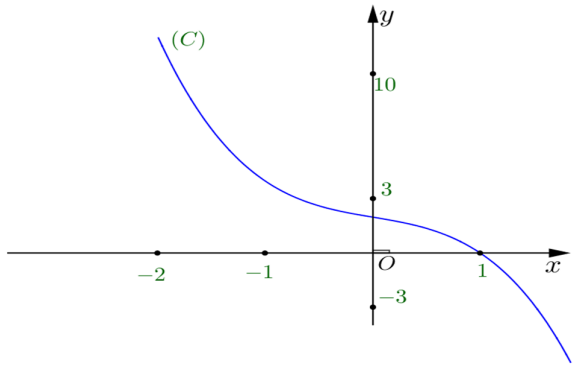
Đồ thị có dạng chữ "M" đặc trưng cho đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương có hệ số $a<0$.

Đáp án: A

Lời giải

- Gọi (C) là đồ thị đã cho.
- Thấy (C) là đồ thị của hàm trùng phương có $a<0$ và có 3 cực trị.
- Suy ra $\begin{cases} a<0 \\ a.b<0 \end{cases}$. Nên A (đúng).

Câu 6. Đường cong (C) hình bên là đồ thị của hàm số nào?



A. $y=x^3-3x^2+2$. **B.** $y=-x^3-x+2$.

C. $y=-x^3+3x-2$. **D.** $y=x^3-3x+2$.

Đáp án: B

Lời giải

Cách 1:

Đồ thị đi xuống trên toàn trục số nên hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Với $y=x^3-3x^2+2 \Rightarrow y'=3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow y'$ đổi dấu nên hàm số không nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Nên loại phương án **A.**

Ta có, $y=-x^3-x+2 \Rightarrow y'=-3x^2-1<0, \forall x \in \mathbb{R}$. Chọn phương án **B.**

Với $y=-x^3+3x-2 \Rightarrow y'=-3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Extra Techniques:

Study tips:

Đối với dạng toán trắc nghiệm, ta không nhất thiết phải giải tường tận từng giá trị. Phương pháp loại trừ sẽ phát huy được tác dụng khi ta ứng dụng vào dạng toán này.

$\Rightarrow y'$ đổi dấu nên hàm số không nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Nên loại phương án **C.**

Với $y=x^3-3x+2 \Rightarrow y'=3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \Rightarrow y'$ đổi dấu nên hàm số không nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Nên loại phương án **D**.

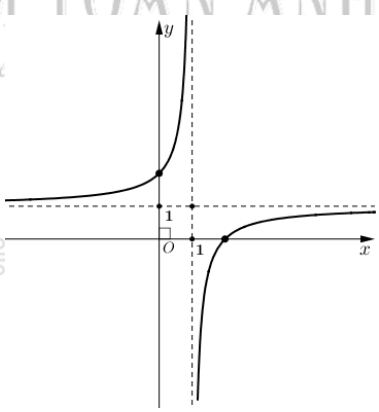
Cách 2:

Nhận thấy, đồ thị đã cho là đồ thị hàm số bậc 3:
$y=ax^3+bx^2+cx+d \ (a\neq 0)$.

Từ đồ thị ta có, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \Rightarrow$ hàm số có hệ số $a<0 \Rightarrow$ Loại phương án **A** và **D**.

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0;d)$ nằm phía trên trục hoành nên $d>0 \Rightarrow$ Loại phương án **C**.

Câu 7. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y=\dfrac{x-2}{x-1}$.

B. $y=\dfrac{x-2}{x+1}$.

C. $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

D. $y=-x^3+3x+2$.

Đáp án: A

Lời giải

Đường cong có dạng của đồ thị hàm số hữu tỉ bậc 1 trên bậc 1, đồ thị có các đường tiệm cận đứng $x=1$ và tiệm cận ngang $y=1$.

Extra Techniques:

Study tips:

Bài toán cho đồ thị hàm số nhất biến để xác định phương trình, ta cần phải dựa vào các dấu hiệu dưới đây.

1. Dạng của đồ thị hàm số (có xu hướng đi lên hay xuống khi x dần đến một giá trị đủ lớn).

2. Tung độ giao điểm của đồ thị hàm số với trung tung.

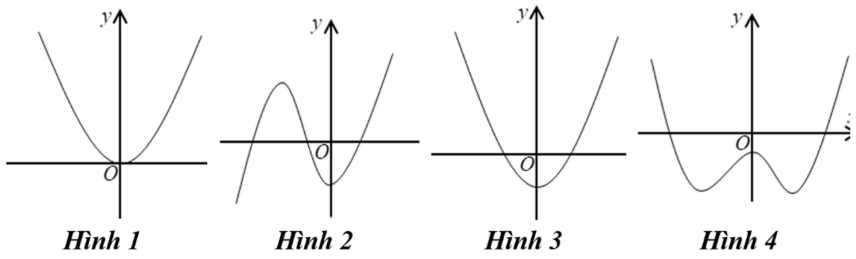
3. Tiệm cận đứng, ngang.

4. Tâm đối xứng.

5. Các điểm thuộc.

Nên chỉ có hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 8. Hàm số $y=x^4-1$ có đồ thi là hình nào dưới đây?



A. Hình 1. **B.** Hình 2. **C.** Hình 3. **D.** Hình 4.

Đáp án: C

Lời giải

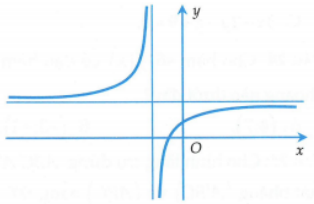
Ta có: $y'=4x^3$, $y'=0\Leftrightarrow 4x^3=0\Leftrightarrow x=0$.

Hàm số đã cho là hàm trùng phương, có một cực trị nên chỉ còn "phân vân" giữa đồ thị **hình 1** với **hình 3**.

Dễ thấy $I\left(0;-1\right)$ là giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^4-1$ với trục hoành Ox.

Như vậy, đồ thị hàm số chính xác phải là đồ thị hàm số ở **hình 3**.

Câu 9. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới, trong đó $d<0$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a<0,b>0,c<0$. **B.** $a<0,b<0,c<0$.

C. $a<0,b<0,c>0$. **D.** $a<0,b>0,c>0$.

Đáp án: B

Lời giải

Extra Techniques:

Study tips:

Bài toán dự đoán đồ thị hàm số trong các hình thì chúng ta chỉ cần để ý một cách logic về những tính chất của đồ thị, chẳng hạn:

1. Loại đồ thị (Bậc hai, ba, nhất biến, bậc bốn trùng phương,..).

2. Giao điểm với trục tung.

3. Cực trị, điểm cực trị.

4. Dấu của hệ số a hoặc xu hướng đồ thị (đối với hàm nhất biến).

Extra Techniques:

Study tips:

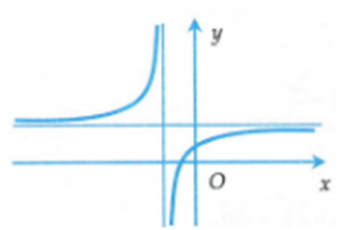
Dạng toán cho thêm một điều kiện về dấu của một trong các hệ số sẽ là manh mối đưa về đáp án. Tư duy như sau: Ta sẽ tìm những mối liên hệ kép, có chứa điều kiện ràng buộc lẫn nhau giữa các hệ số → tiệm cận, tung độ giao điểm với trục tung,…

Extra Techniques:

Study tips:

Dạng toán cho thêm một điều kiện về dấu của một trong các hệ số sẽ là manh mối đưa về đáp án. Tư duy như sau: Ta sẽ tìm những mối liên hệ kép, có chứa điều kiện ràng buộc lẫn nhau giữa các hệ số → tiệm cận, tung độ giao điểm với trục tung,…

Từ đồ thị hàm số



Ta có: giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung nằm phía trên trục hoành nên $\frac{b}{d}>0$. Tiệm cận đứng của đồ thị nằm bên phải trục tung nên $-\frac{d}{c}<0$.

Do $d<0$ nên $b<0, c<0$.

Có thể tìm được dấu của a thông qua tiệm cận ngang

$$y=\frac{a}{c}>0\Rightarrow a<0\ \left(\text{Do: } c<0\right).$$

Câu 10. Bảng biến thiên sau là bảng biến thiên của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	$-\infty$

A. $y=x^3-3x^2-1$.

B. $y=-x^3+3x^2-2$.

C. $y=-x^3+3x^2-1$.

D. $y=-x^3-3x-2$.

Đáp án: B

Lời giải

Từ bảng biến thiên suy ra hệ số của x^3 âm nên ta loại phương án **A**.

Tại $x=0$ thì $y=-2$ suy ra loại **C**.

$y'=0$ có hai nghiệm phân biệt nên loại **D**.

Do vậy phương án **B** thỏa mãn.

Như vậy những kiến thức về nhận dạng đồ thị hàm số đã được chúng tôi nhắc khá kỹ trước khi chúng ta chuyển sang phần tự luyện bốn mức độ, do dạng toán khá dễ nên những câu Vận dụng cao chỉ mang tính phân loại so với các câu "dễ" hơn trong dạng toán này.

Extra Techniques:

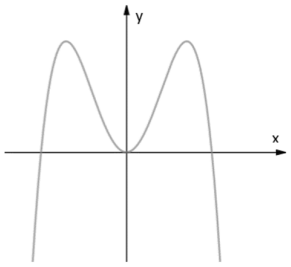
Study Tips:

"Trên đây là một số Tips chúng tôi cảm thấy rất hữu dụng trong các bài toán hiện hành. Do mục đích phục vụ cho phần đông các bạn học sinh nên phần trình bày khá chi tiết và khá dài. Nhưng nếu bạn đọc hiểu bản chất vấn đề, thao tác sẽ ngắn gọn hơn, chuẩn xác hơn và quan trọng nhất vẫn là lợi thế về thời gian nếu biết các Tips này.

TỰ LUYỆN 4 MỨC ĐỘ

Câu 1. [Nhận biết].

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong dưới đây?

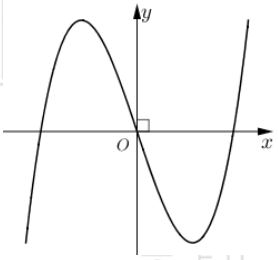


A. $y=-x^4+2x^2$. **B.** $y=x^4-2x^2$.

C. $y=x^3-3x^2$. **D.** $y=-x^3+3x^2$.

Câu 2. [Nhận biết].

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

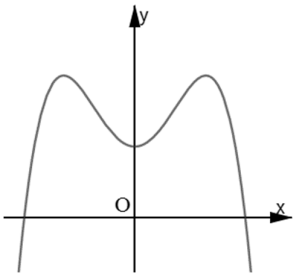


A. $y=x^3-3x$. **B.** $y=-x^3+3x$.

C. $y=x^4-2x^2$. **D.** $y=-x^4+2x^2$.

Câu 3. [Nhận biết].

Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

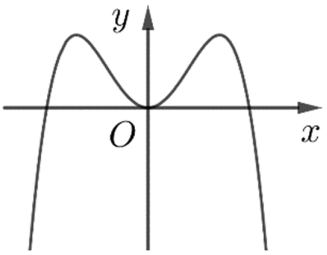


A. $y=x^3-3x^2+1$. **B.** $y=-x^3+3x^2+1$.

C. $y=-x^4+2x^2+1$. **D.** $y=x^4-2x^2+1$.

Câu 4. [Nhận biết].

Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

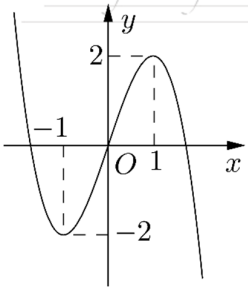


A. $y=-x^4+2x^2$. **B.** $y=-x^3+3x$.

C. $y=x^4-2x^2$. **D.** $y=x^3-3x$.

Câu 5. [Nhận biết].

Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.

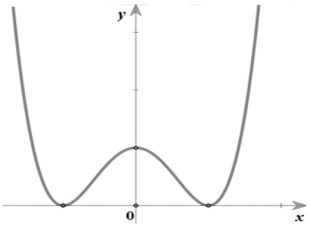


Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=1$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 6. [Nhận biết].

Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

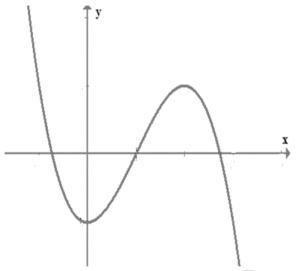


A. $y=x^4-2x^2+1$. **B.** $y=-x^3+3x^2+1$.

C. $y=x^3-3x^2+1$. **D.** $y=-x^4+2x^2+1$.

Câu 7. [Nhận biết].

Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong hình bên

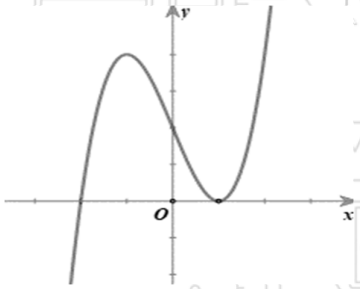


A. $y=x^4-2x^2-2$. **B.** $y=-x^3+2x^2-2$.

C. $y=x^3-3x^2-2$. **D.** $y=-x^4+2x^2-2$.

Câu 8. [Nhận biết].

Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

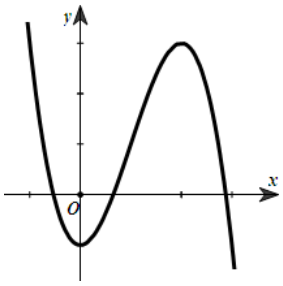


A. $y=-x^3+3x+2$. **B.** $y=x^4-x^2+1$.

C. $y=x^4+x^2+1$. **D.** $y=x^3-3x+2$.

Câu 9. [Nhận biết].

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

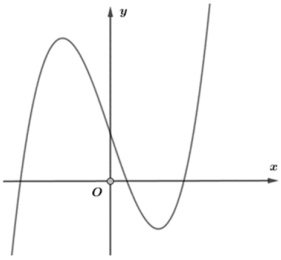


A. $y=-x^4+2x^2-1$. **B.** $y=x^4-2x^2-1$.

C. $y=x^3-3x^2-1$. **D.** $y=-x^3+3x^2-1$.

Câu 10. [Nhận biết].

Đồ thị của hàm số dưới đây có dạng như đường cong bên?

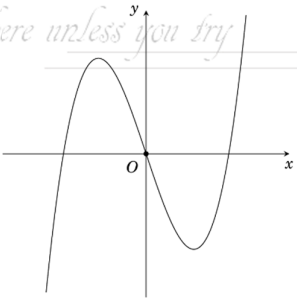


A. $y=x^3-3x+1$. **B.** $y=x^4-2x^2+1$.

C. $y=-x^4+2x^2+1$. **D.** $y=-x^3+3x+1$.

Câu 11. [Nhận biết].

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

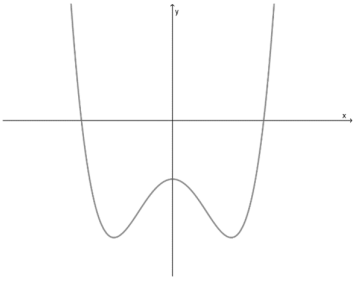


A. $y=x^4+2x^2$. **B.** $y=-x^3-3x$.

C. $y=x^3-3x$. **D.** $y=-x^4+2x^2$.

Câu 12. [Nhận biết].

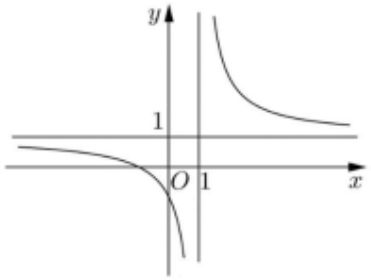
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=-x^3+x^2-1$. **B.** $y=-x^4+2x^2-1$.

C. $y=x^3-x^2-1$. **D.** $y=x^4-2x^2-1$.

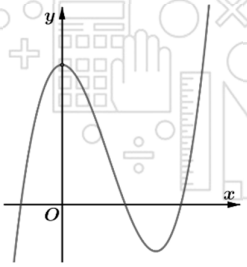
Câu 13. [Nhận biết].
Đường con trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

C. $y=x^4+x^2+1$. **D.** $y=x^3-3x-1$.

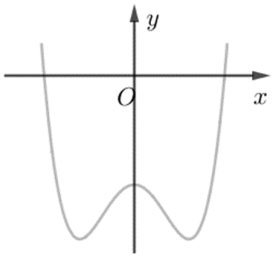
Câu 14. [Nhận biết].
Đường cong ở hình bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=-x^3+3x^2+1$. **B.** $y=x^3-3x^2+3$.

C. $y=-x^4+2x^2+1$. **D.** $y=x^4-2x^2+1$.

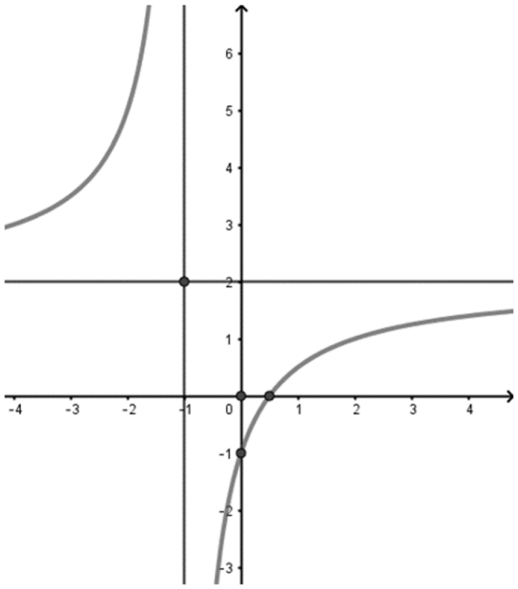
Câu 15. [Nhận biết].
Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



A. $y=x^3-3x^2-2$. **B.** $y=x^4-2x^2-2$.

C. $y=-x^3+3x^2-2$. **D.** $y=-x^4+2x^2-2$.

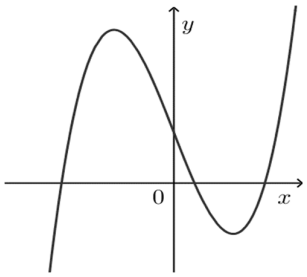
Câu 16. [Nhận biết].
Cho đường cong hình vẽ bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?



A. $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$.

C. $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{2x-2}{x-1}$.

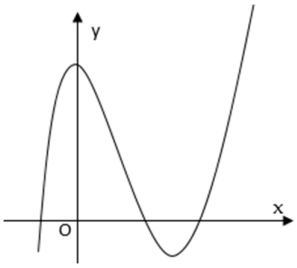
Câu 17. [Nhận biết].
Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số
được liệt kê ở bốn phương án A,B,C,D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=x^3-3x+1$. **B.** $y=-x^3+3x+1$.

C. $y=x^4-x^2+1$. **D.** $y=-x^2+x-1$.

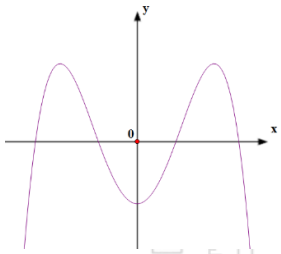
Câu 18. [Nhận biết].
Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



A. $y=x^3-3x^2+3$. **B.** $y=-x^3+3x^2+3$.

C. $y=x^4-2x^2+3$. **D.** $y=-x^4+2x^2+3$.

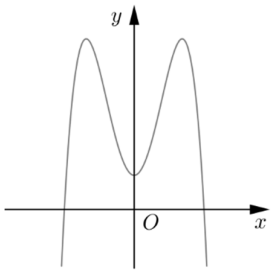
Câu 19. [Nhận biết].
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=x^3-3x^2-1$. **B.** $y=-x^3+3x^2-1$.

C. $y=-x^4+3x^2-1$. **D.** $y=x^4-3x^2-1$.

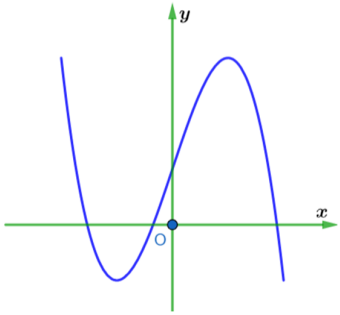
Câu 20. [Nhận biết].
Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



A. $y=2x^4-4x^2+1$. **B.** $y=-2x^3+3x+1$.

C. $y=2x^3-3x+1$. **D.** $y=-2x^4+4x^2+1$.

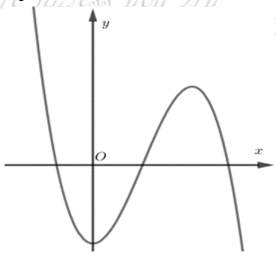
Câu 21. [Nhận biết].
Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên



A. $y=-x^3+3x+1$. **B.** $y=x^3-3x+1$.

C. $y=x^4-2x^2+1$. **D.** $y=-x^4+2x^2+1$.

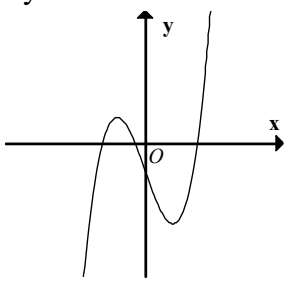
Câu 22. [Nhận biết].
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=x^4-x^2-2$. **B.** $y=-x^4+x^2-2$.

C. $y=-x^3+3x^2-2$. **D.** $y=x^3-3x^2-2$.

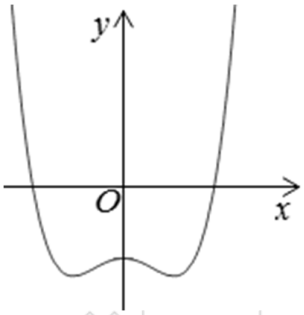
Câu 23. [Nhận biết].
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=x^3-3x-1$. **B.** $y=x^4-3x^2-1$.

C. $y=-x^3-3x-1$. **D.** $y=-x^4+x^2-1$.

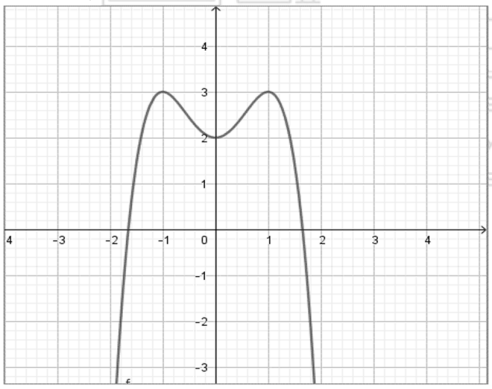
Câu 24. [Nhận biết].
Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây.
Hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=x^4-x^2-1$. **B.** $y=-x^4+x^2-1$.

C. $y=x^3-x^2-1$. **D.** $y=-x^3+x^2-1$.

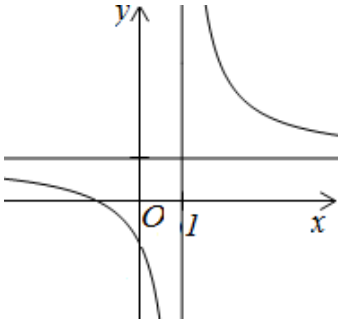
Câu 25. [Nhận biết].
Đường cong trong hình bên là của đồ thị hàm số nào dưới đây?



A. $y=x^3-3x^2+2$. **B.** $y=-x^3+3x^2+2$.

C. $y=-x^4+2x^2+2$. **D.** $y=x^4-2x^2+2$.

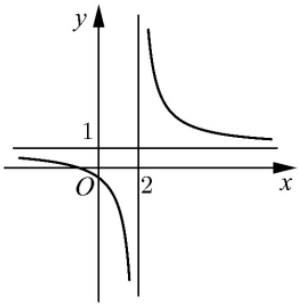
Câu 26. [Thông hiểu].
Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với a,b,c,d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $y'<0,\forall x\in\mathbb{R}$. **B.** $y'>0,\forall x\neq 1$.

C. $y'<0,\forall x\neq 1$. **D.** $y'>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

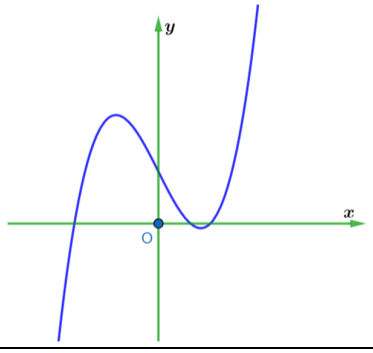
Câu 27. [Thông hiểu].
Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với a,b,c,d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $y'>0,\forall x\neq 1$. **B.** $y'<0,\forall x\neq 1$.

C. $y'<0,\forall x\neq 2$. **D.** $y'>0,\forall x\neq 2$.

Câu 28. [Thông hiểu].
Hình vẽ sau đây là đồ thị của một trong bốn hàm số cho ở các đáp án A,B,C,D.
Hỏi đó là hàm số nào?

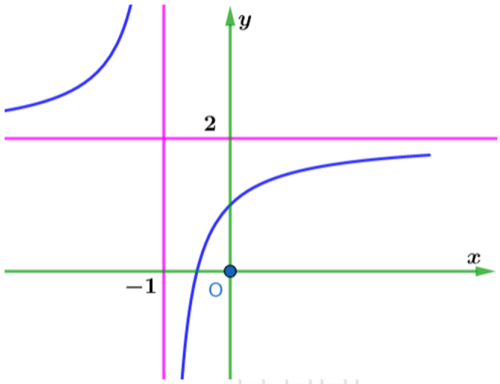


A. $y=x^3+2x+1$. **B.** $y=x^3-3x^2+1$.

C. $y=x^3-2x+1$. **D.** $y=-x^3+2x+1$.

Câu 29. [Nhận biết].

Hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào

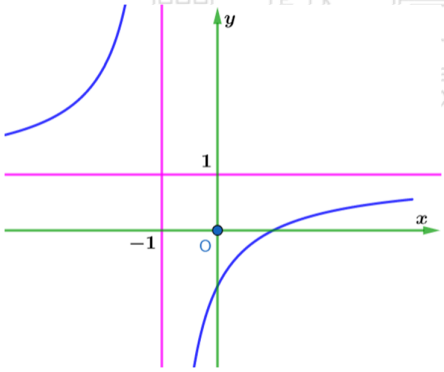


A. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

C. $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{2x+5}{x+1}$.

Câu 30. [Nhận biết].

Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

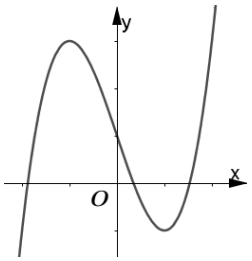


A. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{-2x+1}{x+2}$.

C. $y=x^4-3x^2$. **D.** $y=x^3-3x^2$.

Câu 31. [Nhận biết].

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

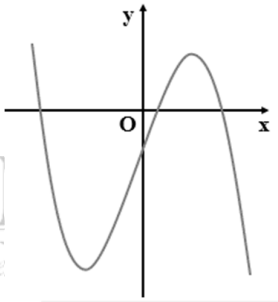


A. $y=-x^3+3x+1$. **B.** $y=x^4-x^2+1$.

C. $y=-x^2+x-1$. **D.** $y=x^3-3x+1$.

Câu 32. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=ax^3+3x+d\ (a;d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a>0,d>0$. **B.** $a<0,d>0$.

C. $a>0,d<0$. **D.** $a<0,d<0$.

Câu 33. [Vận dụng].

Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}\ (a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$\|$		$+$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	1

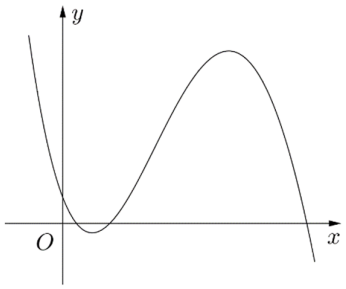
Trong các số a,b và c có bao nhiêu số dương?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 34. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$

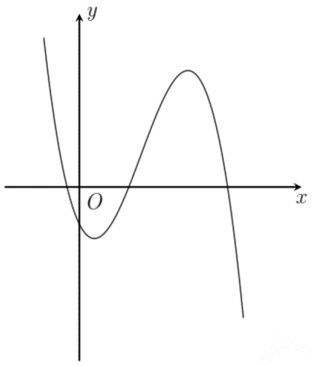
có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?



A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 35. [Vận dụng].

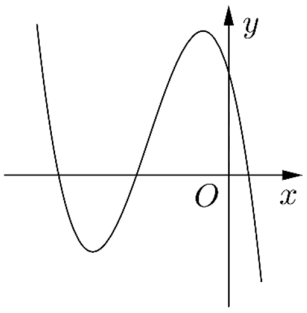
Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các hệ số a,b,c,d?



A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 36. [Vận dụng].

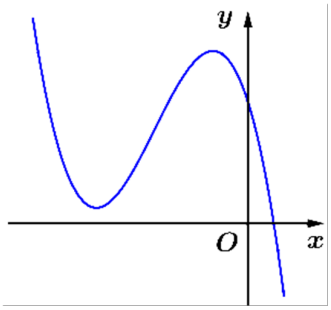
Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ trong đó, $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d?



A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 37. [Vận dụng].

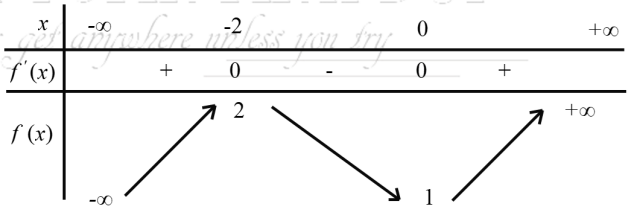
Cho hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$, trong đó, $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$, có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d?



A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 38. [Vận dụng].

Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau

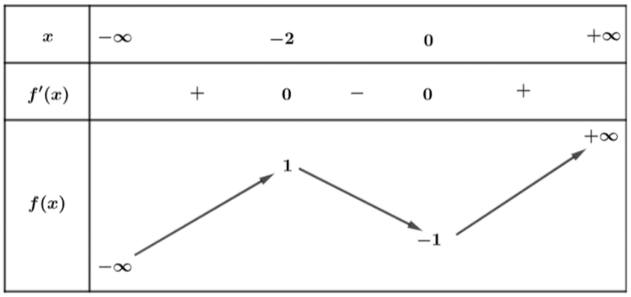


Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 39. [Vận dụng].

Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

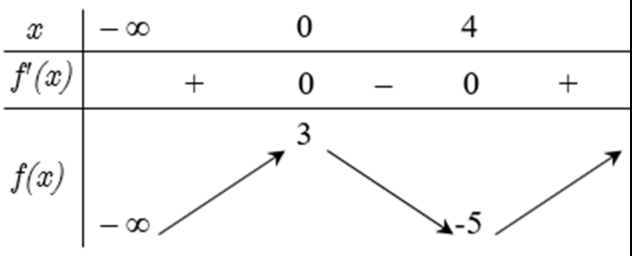


Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 40. [Vận dụng].

Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

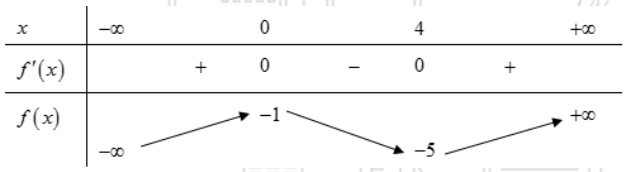


Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 41. [Vận dụng].

Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

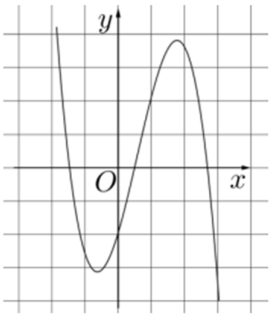


Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 42. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a<0,\ b>0,\ c>0,\ d<0$.

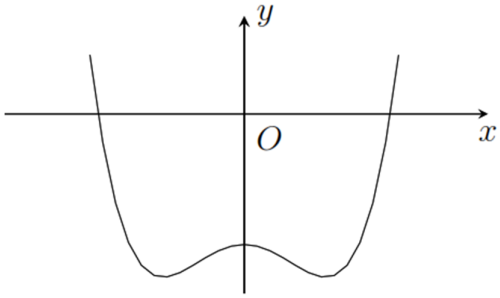
B. $a<0,\ b<0,\ c>0,\ d<0$.

C. $a>0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$.

D. $a<0,\ b>0,\ c<0,\ d<0$.

Câu 43. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

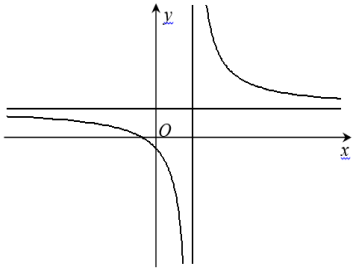


A. $a>0, b<0, c>0$. **B.** $a>0, b<0, c<0$.

C. $a>0, b>0, c<0$. **D.** $a<0, b>0, c<0$.

Câu 44. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như sau.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

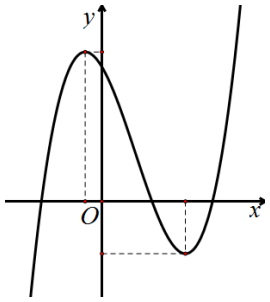
A. $ac>0;\ bd>0$. **B.** $ab<0;\ cd<0$.

C. $bc>0;\ ad<0$. **D.** $ad>0;\ bd<0$.

Câu 45. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.

Chọn khẳng định đúng về dấu của a, b, c, d?



A. $a>0, b>0, d>0, c>0$.

B. $a>0, c>0>b, d<0$.

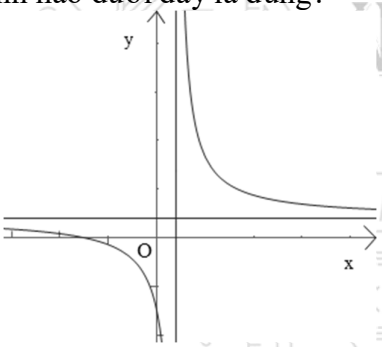
C. $a>0, b>0, c>0, d>0$.

D. $a>0, b<0, c<0, d>0$.

Câu 46. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=\dfrac{(a-1)x+b}{(c-1)x+d}, d<0$ có đồ thị như hình trên.

Khẳng định nào dưới đây là đúng?

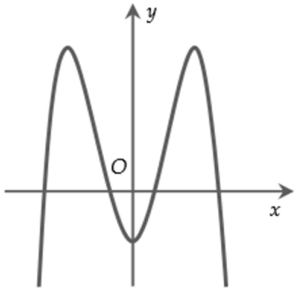


A. $a>1, b>0, c<1$. **B.** $a>1, b<0, c>1$.

C. $a<1, b>0, c<1$. **D.** $a>1, b>0, c>1$.

Câu 47. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



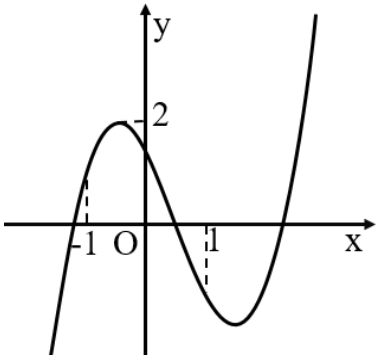
Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a<0, b>0, c<0$. **B.** $a<0, b<0, c>0$.

C. $a<0, b>0, c>0$. **D.** $a<0, b<0, c<0$.

Câu 48. [Vận dụng].

Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định nào là đúng?

A. $a<0, b<0, c<0, d<0$.

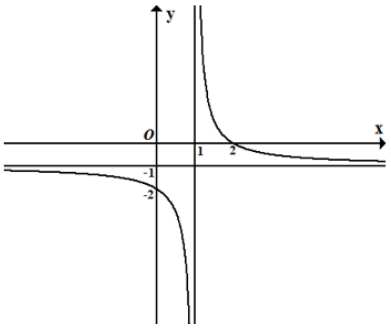
B. $a>0, b>0, c>0, d<0$.

C. $a>0, b>0, c<0, d>0$.

D. $a>0, b<0, c<0, d>0$.

Câu 49. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên dưới, với $a, b, c\in\mathbb{Z}$.

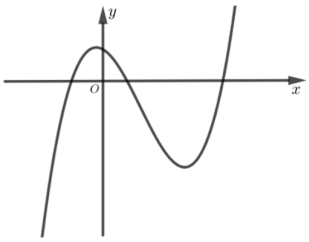


Tính giá trị của biểu thức $T=a+2b+3c$?

A. $T=-8$. **B.** $T=2$.

C. $T=6$. **D.** $T=0$.

Câu 50. [Vận dụng cao].
Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?



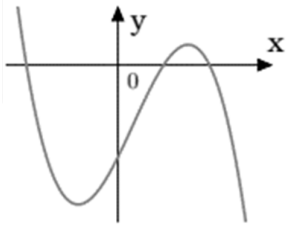
A. $ab<0,bc>0,cd<0$.

B. $ab<0,bc<0,cd>0$.

C. $ab>0,bc>0,cd<0$.

D. $ab>0,bc>0,cd>0$.

Câu 51. [Vận dụng].
Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình dưới. Khẳng định nào sau đây đúng ?



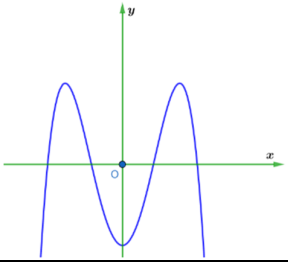
A. $a<0,b<0,c<0,d<0$.

B. $a<0,b>0,c>0,d>0$.

C. $a<0,b>0,c<0,d>0$.

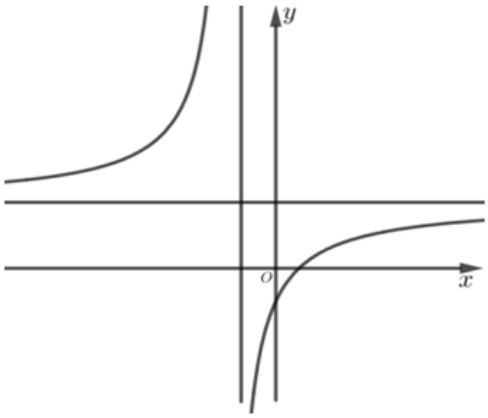
D. $a<0,b>0,c>0,d<0$.

Câu 52. [Vận dụng].
Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



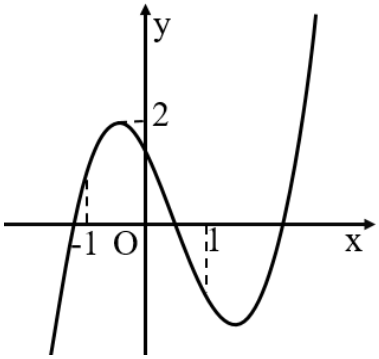
A. $a>0,b<0,c<0$. **B.** $a<0,b<0,c<0$.
C. $a<0,b>0,c<0$. **D.** $a>0,b<0,c>0$.

Câu 53. [Vận dụng].
Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như trong hình bên dưới. Biết rằng a là số thực dương, hỏi trong các số b,c,d có tất cả bao nhiêu số dương?



A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 54. [Vận dụng].
Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định nào là đúng?

A. $a<0$, $b<0$, $c<0$, $d<0$.

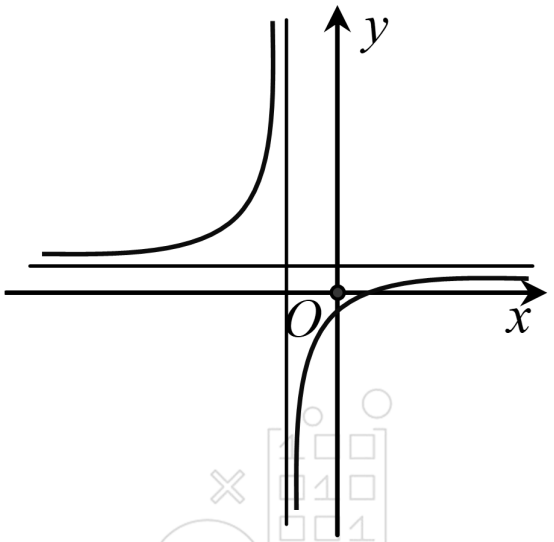
B. $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d<0$.

C. $a>0$, $b>0$, $c<0$, $d>0$.

D. $a>0$, $b<0$, $c<0$, $d>0$.

Câu 55. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

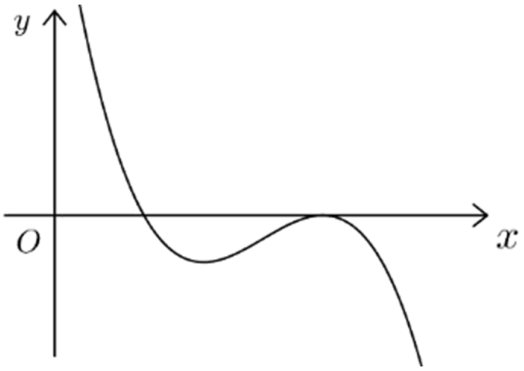
A. $\begin{cases} ad<0 \\ bc>0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} ad<0 \\ bc<0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} ad>0 \\ bc<0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} ad>0 \\ bc>0 \end{cases}$.

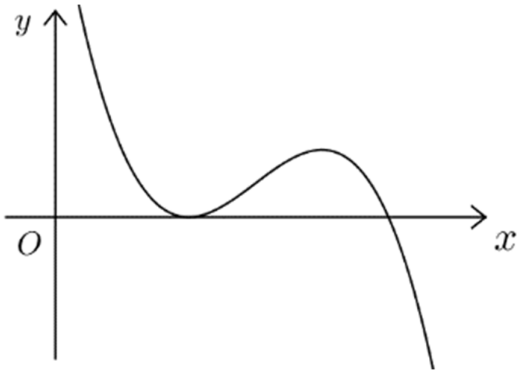
Câu 56. [Vận dụng].

Tìm đồ thị hàm số $y=f(x)$ được cho bởi một trong các phương án dưới đây, biết $f(x)=(a-x)(b-x)^2$ với $a<b$.

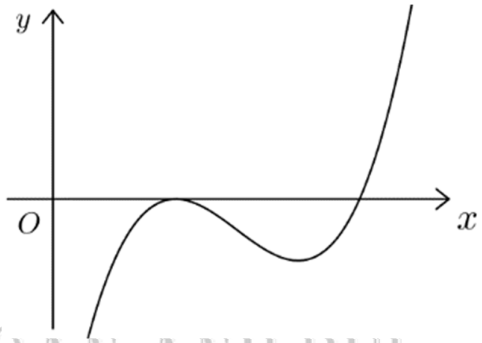
A.



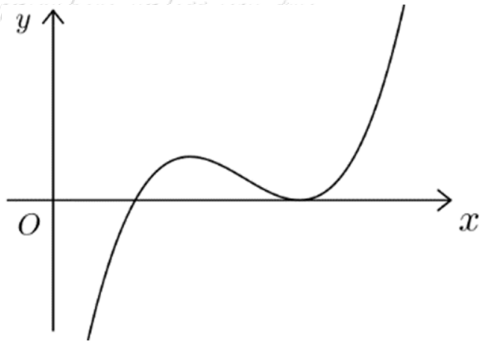
B.



C.

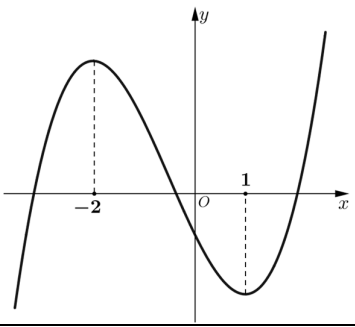


D.



Câu 57. [Vận dụng].

Cho đường cong $(C): y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

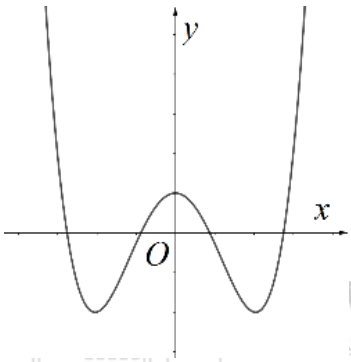
A. $a>0,\ b<0,\ c<0, d<0$.

B. $a>0,\ b>0,\ c<0,\ d>0$.

C. $a<0,\ b>0,\ c>0,\ d<0$.

D. $a>0,\ b>0,\ c<0,\ d<0$.

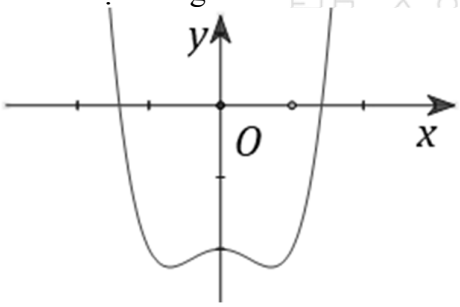
Câu 58. [Vận dụng].
Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a>0$, $b>0$, $c<0$. **B.** $a<0$, $b>0$, $c<0$.

C. $a>0$, $b<0$, $c>0$. **D.** $a>0$, $b<0$, $c<0$.

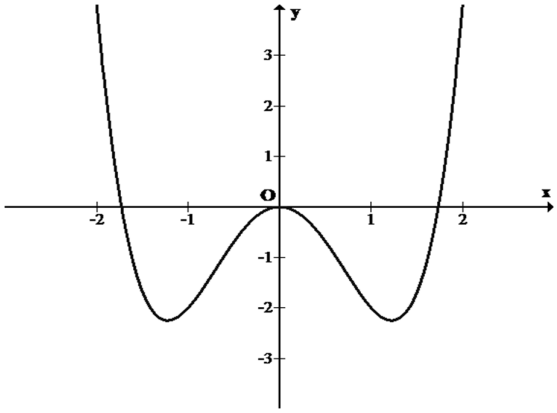
Câu 59. [Vận dụng].
Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm kết luận đúng



A. $a+b>0$. **B.** $bc>0$.

C. $ab>0$. **D.** $ac>0$.

Câu 60. [Vận dụng].
Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c\,(a\neq 0)$ có đồ thị như hình bên.

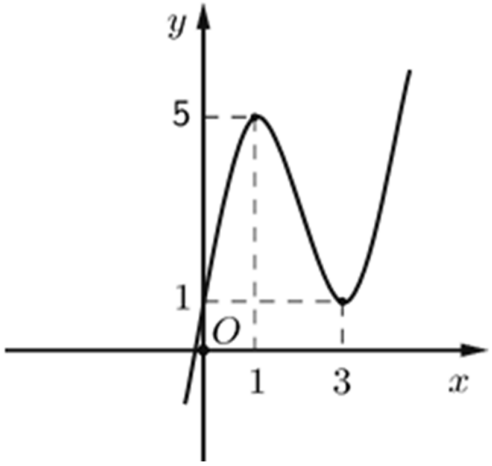


Hãy chọn mệnh đề đúng.

A. $a<0, b<0, c=0$. **B.** $a<0, b>0, c=0$.

C. $a>0, b<0, c=0$. **D.** $a>0, b<0, c>0$.

Câu 61. [Vận dụng].
Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ ở bên.
Mệnh đề nào sau đây đúng?



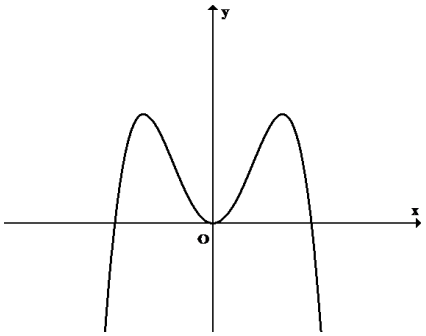
A. $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$.

B. $a>0$, $b>0$, $c<0$, $d>0$.

C. $a>0$, $b<0$, $c>0$, $d>0$.

D. $a<0$, $b<0$, $c>0$, $d<0$.

Câu 62. [Vận dụng].
Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên.



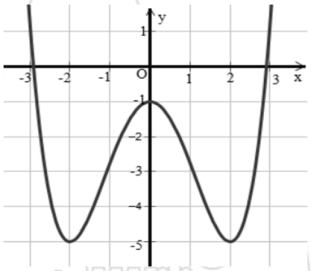
Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. $a<0,b>0,c>0$. **B.** $a>0,b<0,c>0$.

C. $a<0,b>0,c=0$. **D.** $a>0,b<0,c<0$.

Câu 63. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi khẳng định nào sau đây đúng?

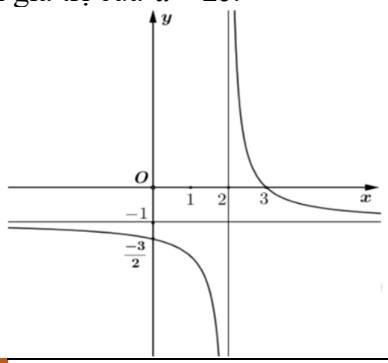


A. $a>0,b<0,c<0$. **B.** $a>0,b>0,c<0$.

C. $a>0,b<0,c>0$. **D.** $a<0,b>0,c<0$.

Câu 64. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=\dfrac{ax+3}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tính giá trị của $a-2c$.

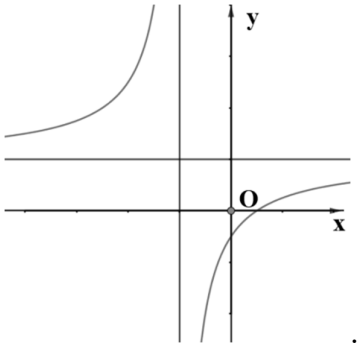


A. $a-2c=3$. **B.** $a-2c=-3$.

C. $a-2c=-1$. **D.** $a-2c=-2$.

Câu 65. [Vận dụng].

Hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.



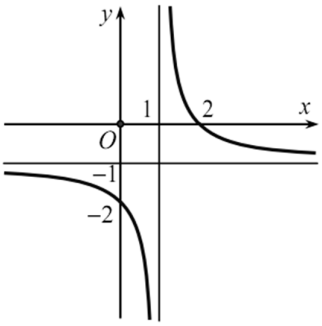
Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $ad>0$ và $bd>0$. **B.** $ad>0$ và $ab<0$.

C. $bd<0$ và $ab>0$. **D.** $ad<0$ và $ab<0$.

Câu 66. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=\dfrac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



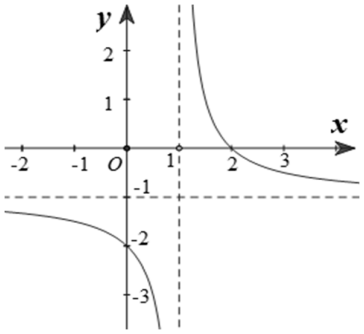
Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $b<a<0$. **B.** $a<b<0$.

C. $b>a$ và $a<0$. **D.** $a<0<b$.

Câu 67. [Vận dụng].

Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ (với $a,b,c\in\mathbb{R}$).



Khi đó tổng $a+b+c$ bằng?

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 68. [Vận dụng].

Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2-ax}{bx-c}\,(a,b,c\in\mathbb{R},b\neq 0)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$+$	$+$	
y	3 $\nearrow$ $+\infty$		$-\infty$ $\nearrow$ 3

Tổng các số $(a+b+c)^2$ thuộc khoảng nào sau đây

A. $(1;2)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $\left(0;\dfrac{4}{9}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{4}{9};1\right)$.

Câu 69. [Vận dụng].

Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R}$ và $c\neq 0)$. Biết rằng đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $(-1;7)$ và giao điểm hai tiệm cận là $(-2;3)$.

Giá trị biểu thức $\dfrac{2a+3b+4c+d}{7c}$ bằng?

A. 7. **B.** 4. **C.** 6. **D.** -5.

Câu 70. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ (a,b,c là các tham số) có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	$+$	$+$	
y	1 $\nearrow$ $+\infty$		$-\infty$ $\nearrow$ 1

Xét các phát biểu sau: $(1):c>1$; $(2):a+b<0$; $(3):a+b+c=0$; $(4):a>0$.

Số phát biểu đúng là?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 71. [Vận dụng].

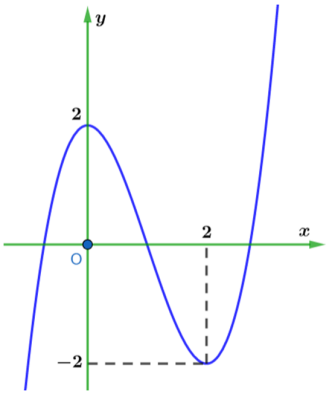
Ta xác định được các số a,b,c để đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ đi qua điểm $(1;0)$ và có điểm cực trị $(-2;0)$.

Tính giá trị biểu thức $T=a^2+b^2+c^2$.

A. 25. **B.** -1. **C.** 7. **D.** 14.

Câu 72. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $S=a+b$?

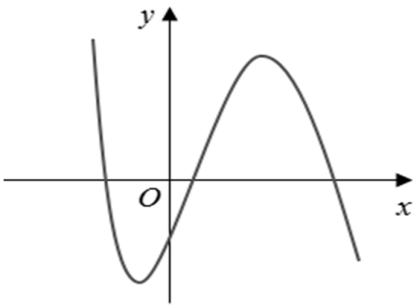


A. $S=-2$. **B.** $S=0$.

C. $S=1$. **D.** $S=-1$.

Câu 73. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. $a<0,b<0,c>0,d<0$.

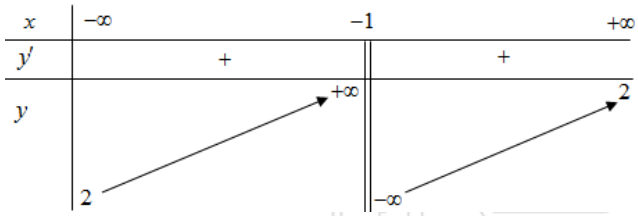
B. $a<0,b>0,c<0,d<0$.

C. $a>0,b<0,c<0,d>0$.

D. $a<0,b>0,c>0,d<0$.

Câu 74. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+1}\left(a,b,c\in\mathbb{R}\right)$ có bảng biến thiên như sau:



Tập các giá trị b là tập nghiệm của bất phương trình nào dưới đây?

A. $b^3-8\le 0$.

B. $-b^2+4>0$.

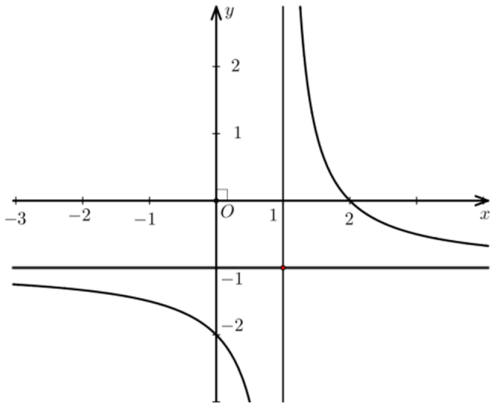
C. $b^2-3b+2<0$.

D. $b^3-8<0$.

Câu 75. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ (với a,b,c,d là số thực) có đồ thị như hình dưới đây.

Tính giá trị biểu thức $T=\dfrac{a-2b+3d}{c}$.



A. $T=6$.

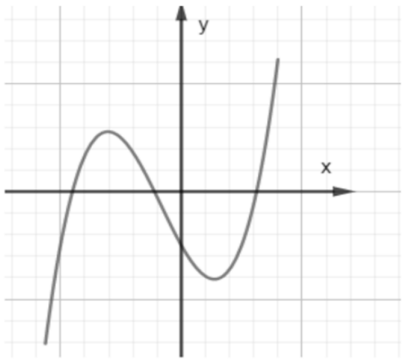
B. $T=0$.

C. $T=-8$.

D. $T=2$.

Câu 76. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Trong các số a,b,c và d có bao nhiêu số dương?



A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Câu 77. [Vận dụng].

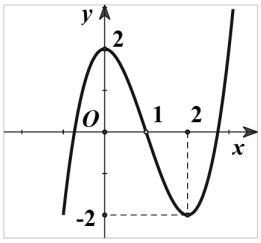
Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{ax-6}{bx-c}$ $\left(a,b,c\in\mathbb{R}\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	
$f(x)$	1	$+\infty$ / $-\infty$	1

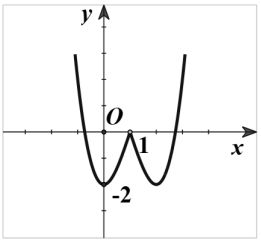
Trong các số a,b,c có bao nhiêu số âm?

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 78. [Vận dụng].
Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị như **hình 1**. Đồ thị **hình 2** là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

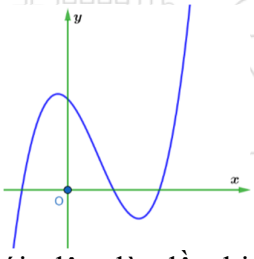
A. $y=\left|x^3-3x^2+2\right|$.

B. $y=\left|x\right|^3-3x^2+2$.

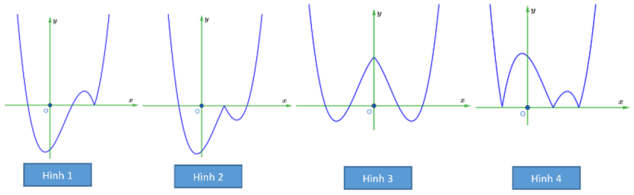
C. $y=\left|x-1\right|\left(x^2-2x-2\right)$.

D. $y=\left(x-1\right)\left|x^2-2x-2\right|$.

Câu 79. [Vận dụng].
Hàm số $y=\left(x-2\right)\left(x^2-1\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



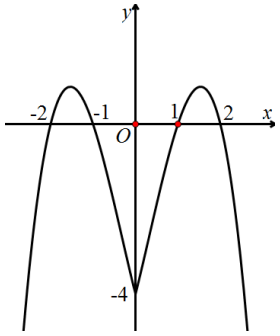
Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y=\left|x-2\right|\left(x^2-1\right)$?



A. Hình 1. **B.** Hình 2.

C. Hình 3. **D.** Hình 4.

Câu 80. [Vận dụng cao].
Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ như hình vẽ.



Chọn kết luận **đúng** trong các kết luận sau:

A. $f\left(x\right)=-x^3+x^2+4x-4$.

B. $f\left(x\right)=x^3-x^2-4x+4$.

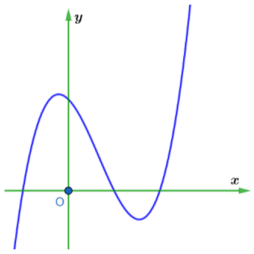
C. $f\left(x\right)=-x^3-x^2+4x-4$.

D. $f\left(x\right)=x^3+x^2-4x-4$.

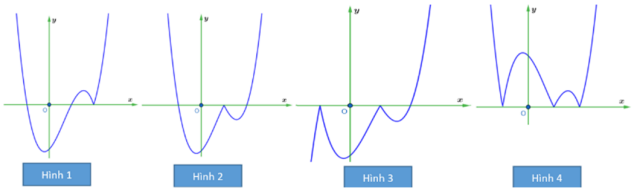
Câu 81. [Vận dụng cao].
Biết phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0\ \left(a\neq 0\right)$ có đúng hai nghiệm thực.
Hỏi đồ thị hàm số $y=\left|ax^3+bx^2+cx+d\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 82. [Vận dụng].
Cho hàm số $y=\left(x-2\right)\left(x^2-1\right)$ có đồ thị như hình vẽ



Một trong bốn hình dưới đây là đồ thị của hàm số $y=\left(x-2\right)\left|x^2-1\right|$. Hỏi đó là hình nào?

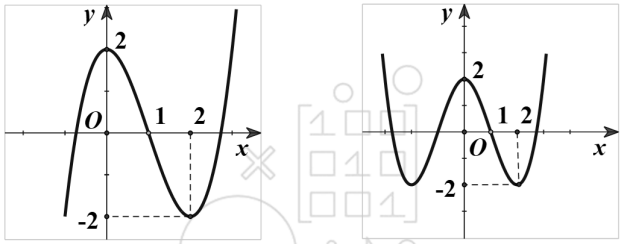


A. Hình 2. **B.** Hình 4.

C. Hình 3. **D.** Hình 1.

Câu 83. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị như **hình 1**. Đồ thị **hình 2** là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1 Hình 2

A. $y=\left|x^3-3x^2+2\right|$.

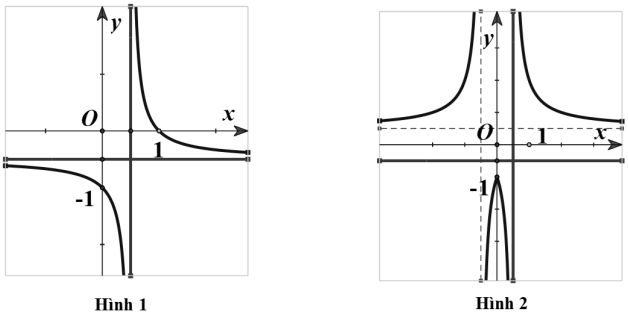
B. $y=\left|x\right|^3-3x^2+2$

C. $y=\left|x-1\right|\left(x^2-2x-2\right)$.

D. $y=\left(x-1\right)\left|x^2-2x-2\right|$.

Câu 84. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=\dfrac{-x+1}{2x-1}$ có đồ thị như **hình 1**. Đồ thị **hình 2** là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1 **Hình 2**

A. $y=\left|\dfrac{-x+1}{2x-1}\right|$.

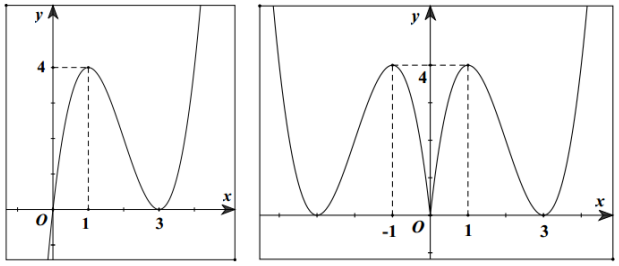
B. $y=\dfrac{\left|x\right|+1}{2\left|x\right|-1}$.

C. $y=\dfrac{\left|-x+1\right|}{2x-1}$.

D. $y=\dfrac{-x+1}{\left|2x-1\right|}$.

Câu 85. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x$ có đồ thị như **Hình 1**. Khi đó đồ thị **Hình 2** là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1 **Hình 2**

A. $y=-x^3+6x^2-9x$.

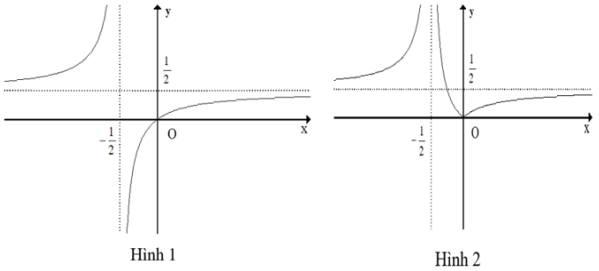
B. $y=\left|x^3-6x^2+9x\right|$.

C. $y=\left|x\right|^3-6x^2+9\left|x\right|$.

D. $y=\left|x\right|^3+6\left|x\right|^2+9\left|x\right|$.

Câu 86. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=\dfrac{x}{2x+1}$ có đồ thị như **Hình 1**. Đồ thị **Hình 2** là của hàm số nào trong các đáp án A, B, C, D dưới đây?



Hình 1 Hình 2

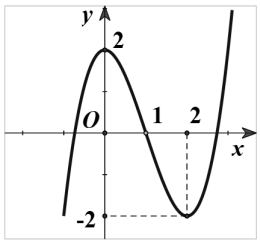
A. $y=\left|\dfrac{x}{2x+1}\right|$.

B. $y=\dfrac{\left|x\right|}{2\left|x\right|+1}$.

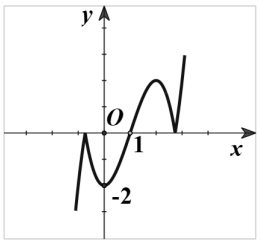
NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

C. $y=\dfrac{x}{2|x|+1}$. **D.** $y=\left|\dfrac{|x|}{2|x|+1}\right|$.

Câu 87. [Vận dụng].
Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị như **hình 1**. Đồ thị **hình 2** là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

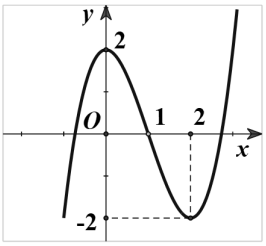
A. $y=\left|x^3-3x^2+2\right|$.

B. $y=|x|^3-3x^2+2$.

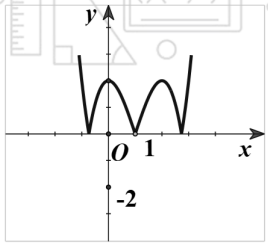
C. $y=|x-1|\left(x^2-2x-2\right)$.

D. $y=(x-1)\left|x^2-2x-2\right|$.

Câu 88. [Vận dụng].
Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị như **hình 1**. Đồ thị **hình 2** là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

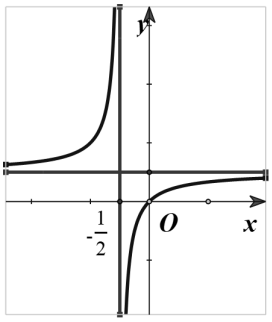
A. $y=\left|x^3-3x^2+2\right|$.

B. $y=|x|^3-3x^2+2$.

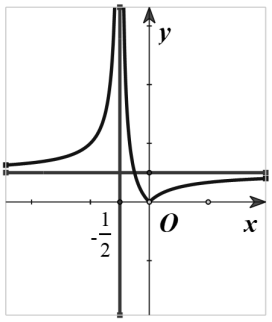
C. $y=|x-1|\left(x^2-2x-2\right)$.

D. $y=(x-1)\left|x^2-2x-2\right|$.

Câu 89. [Vận dụng].
Cho hàm số $y=\dfrac{x}{2x+1}$ có đồ thị như **hình 1**. Đồ thị **hình 2** là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1

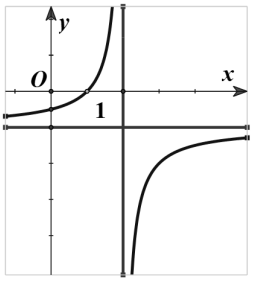


Hình 2

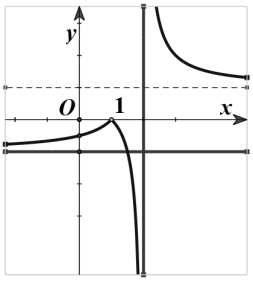
A. $y=\dfrac{x}{2|x|+1}$. **B.** $y=\dfrac{|x|}{2|x|+1}$.

C. $y=\left|\dfrac{x}{2x+1}\right|$. **D.** $y=\left|\dfrac{|x|}{2|x|+1}\right|$.

Câu 90. Cho hàm số $y=\dfrac{-x+1}{x-2}$ có đồ thị như **hình 1**. Đồ thị **hình 2** là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

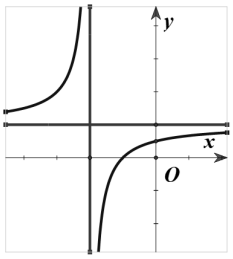
A. $y=\left|\dfrac{-x+1}{x-2}\right|$. **B.** $y=\dfrac{|x|+1}{|x|-2}$.

C. $y=\dfrac{|-x+1|}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{-x+1}{|x-2|}$.

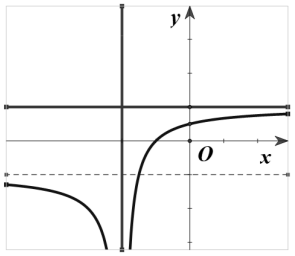
Câu 91. [Vận dụng].
Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$ có đồ thị như **hình 1**.

NHÓM TOÁN ANH DÚI

Đồ thị **hình 2** là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y=\left|\dfrac{x+1}{x+2}\right|$.

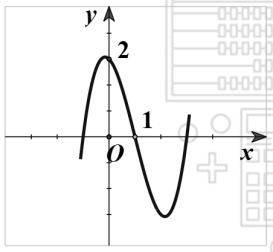
B. $y=\dfrac{|x|+1}{|x|+2}$.

C. $y=\dfrac{|x+1|}{x+2}$.

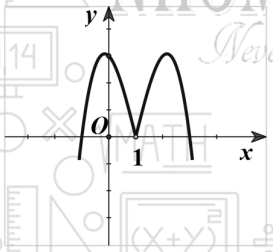
D. $y=\dfrac{x+1}{|x+2|}$.

Câu 92. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=(x-1)\left(x^2-2x-3\right)$ có đồ thị như **hình 1**. Đồ thị **hình 2** là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y=\left|(x-1)\left(x^2-2x-3\right)\right|$.

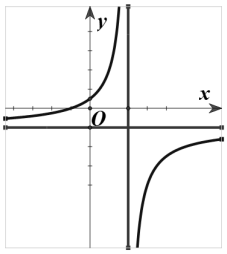
B. $y=|x-1|\left(x^2-2x-3\right)$.

C. $y=-|x-1|\left(x^2-2x-3\right)$.

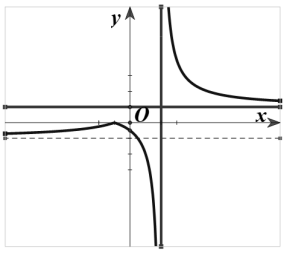
D. $y=(x-1)\left|x^2-2x-3\right|$.

Câu 93. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{-x+2}$ có đồ thị như **hình 1**. Đồ thị **hình 2** là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y=\left|\dfrac{x+1}{x+2}\right|$.

B. $y=\dfrac{|x+1|}{x-2}$.

C. $y=\dfrac{|x+1|}{-x+2}$.

D. $y=\dfrac{x+1}{|x+2|}$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

ĐÁP ÁN

i \ j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	A	C	A	D	A	B	D	D
1	A	C	D	B	B	B	C	A	A	C
2	D	A	C	A	A	C	C	C	C	B
3	A	D	D	C	C	C	C	C	D	C
4	A	D	A	B	C	D	D	A	D	D
5	A	D	C	B	D	C	A	D	C	B
6	C	C	C	A	A	B	A	D	C	C
7	B	A	A	D	D	C	D	D	C	A
8	A	D	C	B	B	C	A	D	A	C
9	C	D	C	B						

Ghi chú: Đáp án là sự kết hợp giữa dòng i và cột j. Ví dụ: **Câu 23A** (giao của dòng 2 và cột 3).

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Từ hình dạng của đồ thị (đồ thị hàm bậc bốn trùng phương) ta loại phương án **C** và **D**.

Nhận thấy $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$ suy ra hệ số của x^4 âm nên chọn phương án **A**.

Đáp án A.

Câu 2. Đường cong có dạng của đồ thị hàm số bậc 3 với hệ số $a > 0$ nên chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x$ thỏa yêu cầu bài toán.

Đáp án A.

Câu 3. Từ hình có đây là hình dạng của đồ thị hàm bậc 4.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow a < 0$.

Đáp án C.

Câu 4. Đường cong trong hình là đồ thị hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \neq 0)$ có hệ số $a < 0$.

Đáp án A.

Câu 5. Từ đồ thị hàm số ta có số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là 3.

Đáp án D.

Câu 6. Dựa vào hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên loại các đáp án **B** và **C**.

Mặt khác, ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^4 - 2x^2 + 1\right) = +\infty$ nên chọn đáp án **A**.

Đáp án A.

Câu 7. Qua đồ thị là hàm bậc 3 nên loại **A, D**.

Bên phải ngoài cùng của đồ thị đi xuống nên hệ số a < 0

$\Rightarrow$ Loại đáp án **C**.

Đáp án B.

Câu 8. Đồ thị hình vẽ là đồ thị hàm số bậc ba có hệ số $a > 0$ nên chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ thỏa mãn điều kiện trên.

Đáp án D.

Câu 9. Dựa vào đồ thị có dạng đồ thị của hàm số bậc 3 có hệ số $a < 0$ nên đáp án **D** đúng.

Đáp án D.

Câu 10. Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy ngay đây là dạng của đồ thị hàm số hàm bậc 3 → Loại đáp án **B**, **C**.

Hàm số có xu hướng đi lên khi x dần đến một giá trị đủ lớn → $a > 0$.

Đáp án A.

Câu 11. Đây là đồ thị của hàm số bậc ba với hệ số $a > 0$ nên chọn **C**.

Đáp án C.

Câu 12. Dựa vào hình vẽ suy ra hàm số đã cho có 3 cực trị $\rightarrow$ loại **A**, **C**.

Mặt khác nhánh bên tay phải của đồ thị hàm số đi lên suy ra hệ số $a > 0 \rightarrow$ Chọn **D**.

Đáp án D.

Câu 13. Vì từ đồ thị ta suy ra đồ thị của hàm phân thức có tiệm cận đứng và ngang $x = 1; y = 1$.

Đáp án B.

Câu 14. Dựa vào đồ thị ta thấy đây là hình ảnh đồ thị của hàm số bậc ba nên loại đáp án **C** và

NHÓM TOÁN ANH DÚI Never stop here unless you try

D; Mặt khác dựa vào đồ thị ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ nên hệ số của x^3 dương nên ta chọn đáp án $y=x^3-3x^2+3$.

Đáp án B.

Câu 15. Quan sát đồ thị ta thấy đây là đồ thị của hàm số $y=ax^4+bx^2+c\ (a>0)$.

Vậy chọn **B**.

Đáp án B.

Câu 16. Dựa vào đồ thị suy ra tiệm cận đứng $x=-1$ loại **A**, **D**.

Đồ thị hàm số giao với trục hoành có hoành độ dương suy ra chọn **C**.

Đáp án C.

Câu 17. Từ đồ thị: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ và đây là đồ thị hàm bậc ba nên ta chọn phương án $y=x^3-3x+1$.

Đáp án A.

Câu 18. Dạng hàm bậc ba nên loại **C**, **D**.

Từ đồ thị ta có $a>0$. Do đó loại **B**.

Đáp án A.

Câu 19. Ta có một số nhận xét sau:

+ Nhìn đồ thị khẳng định đồ thị hàm trùng phương loại **A**, **B**.

+ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=-\infty$ nên chọn **C**.

Đáp án C.

Câu 20. Dạng đồ thị hình bên là đồ thị hàm số trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ có hệ số $a<0$. Do đó, chỉ có đồ thị ở đáp án **D** là thỏa mãn.

Đáp án D.

Câu 21. Trong bốn hàm số đã cho thì chỉ có hàm số $y=-x^3+3x+1$ (hàm số đa thức bậc ba với hệ số $a<0$) có dạng đồ thị như đường cong trong hình.

Đáp án A.

Câu 22. Dựa trên hình dáng đồ thị, ta loại $y=-x^4+x^2-2$ và $y=x^4-x^2-2$.

Mặt khác từ đồ thị, ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$ nên loại $y=x^3-3x^2-2$.

Đáp án C.

Câu 23. Đồ thị hàm số là đồ thị của hàm số bậc ba nên loại **B** và **D**.

Đồ thi hàm số bậc ba có hệ số $a>0$ nên **A** đúng.

Đáp án A.

Câu 24. Đây là hình dáng của đồ thị hàm bậc bốn trùng phương có hệ số $a>0$.

Đáp án A.

Câu 25. Đồ thị hàm số trên là đồ thị hàm trùng phương có 3 cực trị và có $a<0$.

Đáp án C.

Câu 26. Dựa vào hình dáng của đồ thị ta được:

+ Điều kiện: $x\neq 1$.

+ Đây là đồ thị của hàm nghịch biến.

Từ đó ta được $y'<0,\forall x\neq 1$.

Đáp án C.

Câu 27. Dựa vào đồ thị ta nhận thấy tiệm cận đứng bằng 2 và hàm số nghịch biến vậy chọn **C**.

Đáp án C.

NHÓM TOÁN ANH DÚI

Câu 28. Dựa vào đồ thị, ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$, loại phương án **D**.

Xét phương án **A**, có: $y'=3x^2+2>0,\forall x\in\mathbb{R}$, hàm số không có cực tri, loại phương án **A**.

Xét phương án **B**, có: $y'=3x^2-6x$ và y' đổi dấu khi đi qua các điểm $x=0, x=2$ nên hàm số đạt cực tri tại $x=0$ và $x=2$, loại phương án **B**.

Vậy phương án đúng là **C**.

Đáp án C.

Câu 29. Đồ thị hàm số cắt trục Oy tai điểm có tọa độ $(0;y_0)$, $y_0\in(0;2)$ nên chọn phương án **B**.

Đáp án B.

Câu 30. Hình vẽ trên là đồ thị của hàm số dạng $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ (c\neq 0;\ ad-bc\neq 0)\Rightarrow$ Loại phương án **C**, **D**.

Ta thấy: Đồ thị có đường tiệm cận đứng là $x=-1$ và đường tiệm cận ngang là $y=1$.

Phương án B: Đồ thị có đường tiệm cận đứng là $x=-2\Rightarrow$ loại **B**.

$\Rightarrow$ **A** đúng.

Đáp án A.

Câu 31. Đồ thị đã cho có hình dạng của đồ thị hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ nên loại phương án **B** và **C**.
Dựa vào đồ thị, ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty\Rightarrow a>0$ nên loại phương án **D**.
Đáp án D.

Câu 32. Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}=-\infty\Rightarrow$ đồ thị nhánh ngoài cùng của hàm số hướng đi xuống nên hệ số $a<0$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung $Oy: x=0$ là điểm nằm bên dưới trục hoành nên khi $x=0\Rightarrow y=d<0$.

Đáp án D.

Câu 33. Hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-\dfrac{c}{b}$ và đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{a}{b}$.

Từ bảng biến thiên ta có:

$$\begin{cases}-\dfrac{c}{b}=2\\ \dfrac{a}{b}=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=-\frac{c}{2}\ (1)$$

Mặt khác: $f'(x)=\dfrac{ac-b}{(bx+c)^2}$.

Vì hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$ nên

$$f'(x)=\frac{ac-b}{(bx+c)^2}>0\Leftrightarrow ac-b>0\ (2)$$

Thay (1) vào (2), ta được:

$$-\frac{c^2}{2}+\frac{c}{2}>0\Leftrightarrow -c^2+c>0\Leftrightarrow 0<c<1.$$

Suy ra c là số dương và a, b là số âm.

Đáp án C.

Câu 34. Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty\Rightarrow a<0$.

Gọi x_1, x_2 là hoành độ hai điểm cực trị của hàm số suy ra x_1, x_2 nghiệm phương trình $y'=3ax^2+2bx+c=0$ nên theo Định lý Vietè:

+) Tổng hai nghiệm $x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}>0$

$\Rightarrow \frac{b}{a} < 0 \Rightarrow b > 0$.

+) Tích hai nghiệm $x_1 x_2 = \frac{c}{3a} > 0 \Rightarrow c < 0$.

Lại có đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Vậy có 2 số dương trong các số a, b, c, d.

Đáp án C.

Câu 35. Ta có: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow a < 0$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm cùng phía của trục tung nên $ac > 0 \Rightarrow c < 0$.

Đồ thị hàm số có điểm uốn nằm bên phải trục tung nên $ab < 0 \Rightarrow b > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung ở dưới trục hoành $\Rightarrow d < 0$.

Đáp án C.

Câu 36. Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Dựa vào đồ thị ta thấy $a < 0$.

Hàm số có 2 cực trị âm nên:

$$\begin{cases} \Delta'_{y'} > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 9ac > 0 \\ -\frac{2b}{3a} < 0 \\ \frac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} b < 0 \\ c < 0 \end{cases}.$$

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0;d)$ nên $d > 0$.

Vậy có đúng một số dương trong các số a,b,c,d.

Đáp án C.

Câu 37. Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $a < 0$.

Hàm số có 2 cực trị âm nên

$$\begin{cases} \Delta'_{y'} > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 9ac > 0 \\ -\frac{2b}{3a} < 0 \\ \frac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 0 \\ c < 0 \end{cases}.$$

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0;d)$ nên $d > 0$.

Vậy có đúng 1 số dương trong các số a, b, c, d.

Đáp án C.

Câu 38. Từ dáng điệu sự biến thiên hàm số ta có $a > 0$.

Khi $x = 0$ thì $y = d = 1 > 0$.

Mặt khác: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Từ bảng biến thiên ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \end{array}\right.$.

Từ đó suy ra $c = 0$; $\frac{-2b}{3a} = -2 \Rightarrow b = 3a > 0$.

Vậy có 3 số dương là a, b, d.

Đáp án D.

Câu 39. Một số nhận xét:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow a > 0$.
- $f(0) = -1 \Rightarrow d = -1 < 0$.
- $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{2b}{3a} = -2 \\ \frac{c}{3a} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3a > 0 \\ c = 0 \end{cases}$.

Có 2 số dương là a, b.

Đáp án C.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Câu 40. Từ bảng biến thiên, ta có:

$$\begin{cases} f(0)=3 \\ f(4)=-5 \\ f'(0)=0 \\ f'(4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=3 \\ 64a+16b+4c+d=-5 \\ c=0 \\ 48a+8b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=-\frac{3}{2} \\ c=0 \\ d=3 \end{cases}$$

.

Vậy trong các số a,b,c,d có 2 số dương.

Đáp án A.

Câu 41. Ta có: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$$(a,b,c,d\in\mathbb{R})$$

$\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c.$

Đồ thị hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị $A(0;-1)$, $B(4;-5)$ nên ta có hệ: $\begin{cases} f(0)=-1 \\ f(4)=-5 \\ f'(0)=0 \\ f'(4)=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d=-1 \\ 64a+16b+4c+d=-5 \\ c=0 \\ 48a+8b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{8} \\ b=-\frac{3}{4} \\ c=0 \\ d=-1 \end{cases}.$$

Trong các số a,b,c,d có 1 số dương.

Đáp án D.

Câu 42. Dựa vào đồ thị suy ra hệ số $a<0\Rightarrow$ loại phương án **C**.

$y'=3ax^2+2bx+c=0$ có 2 nghiệm x_1,x_2 trái dấu (do hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm hai phía với $Oy)\Rightarrow 3a.c<0\Rightarrow c>0\Rightarrow$ loại phương án **D**.

Do $(C)\cap Oy=D(0;d)\Rightarrow d<0.$

Dễ thấy: $x_1+x_2>0\Leftrightarrow -\frac{2b}{3a}>0\Leftrightarrow ab<0$

$\Rightarrow b>0$ $(\text{Do}: a<0)$.

Đáp án A.

Câu 43. Đồ thị trên có hình dạng hàm bậc bốn trùng phương có hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại nên $a>0, b<0$.

Giá trị cực đại nhỏ hơn 0 (giao điểm với trục tung nằm bên dưới trục hoành) nên $c<0$.

Đáp án B.

Câu 44. Theo đồ thị, ta có:

Tiệm cận ngang: $y=\frac{a}{c}>0$ (1)

Tiệm cận đứng: $x=-\frac{d}{c}>0\Rightarrow\frac{d}{c}<0$ (2)

$y=0\Rightarrow x=-\frac{b}{a}<0\Rightarrow\frac{b}{a}>0$ (3).

Mặt khác, giao điểm của đồ thị hàm số nằm bên dưới trục hoành, hay $\frac{b}{d}<0$ (4).

Lấy $\frac{(1)}{(2)}$ theo từng vế, ta được:

$\frac{a}{c}:\frac{d}{c}<0\Leftrightarrow\frac{a}{d}<0\Rightarrow ad<0.$

Lấy $(1).(3)$ theo từng vế, ta được:

$\frac{a}{c}.\frac{b}{a}>0\Rightarrow\frac{b}{c}>0\Rightarrow bc>0.$

Đáp án C.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Câu 45. Dựa vào đồ thị ta có $a>0$, đồ thị cắt Oy tại 1 điểm có tung độ dương nên $d>0$, đồ thị có 2 cực trị trái dấu nên $x_1.x_2<0$.

$\Rightarrow \frac{c}{a}<0\Rightarrow c<0$.

Dễ thấy: $x_1+x_2>0\Leftrightarrow -\frac{2b}{3a}>0\Leftrightarrow ab<0$

$\Rightarrow b<0\ (\text{Do}: a>0)$.

Vậy đáp án D.

Đáp án D.

Câu 46. Theo bài ra, đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x=-\frac{d}{c-1}$.

Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là: $y=\frac{a-1}{c-1}$.

Nhìn đồ thị ta thấy: $x=-\frac{d}{c-1}>0$ mà

$d<0\Rightarrow c-1>0\Rightarrow c>1$.

$y=\frac{a-1}{c-1}>0\Rightarrow a-1>0\Rightarrow a>1$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $\frac{b}{d}<0\Rightarrow b>0$.

Đáp án D.

Câu 47. Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0;c)$, từ đồ thị suy ra $c<0$.

Mặt khác đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt, hay $y'=4ax^3+2bx=2x\left(2ax^2+b\right)=0$ có ba nghiệm phân biệt. Suy ra a,b trái dấu.

Mà $a<0\Rightarrow b>0$.

Đáp án A.

Câu 48. Một số nhận xét quan trọng:

+ Dựa vào hình dạng đồ thị ta khẳng định được $a>0$.
+ Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $(0;d)$. Dựa vào đồ thị suy ra $d>0$.
+ Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$. Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ trái dấu nên phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 trái dấu. Vì thế $3a.c<0$, nên suy ra $c<0$.
+ Mặt khác từ đồ thị ta thấy $\begin{cases}x_1>-1\\x_2>1\end{cases}$ nên $x_1+x_2>0$.

Mà $x_1+x_2=\frac{-2b}{3a}$ nên suy ra $\frac{-2b}{3a}>0\Rightarrow b<0$.

Vậy $a>0$, $b<0$, $c<0$, $d>0$.

Đáp án D.

Câu 49. Từ đồ thị hàm số, ta suy ra:

+) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=-1$.

+) Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(2;0)$, $B(0;-2)$.

Từ biểu thức hàm số $y=\frac{ax+b}{x+c}$ (vì đồ thị hàm số là đồ thị hàm nhất biến nên $ac-b\neq 0$), ta suy ra:

+) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-c$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=a$.

+) Đồ thị hàm số đi qua $A\left(-\frac{b}{a};0\right)$, $B\left(0;\frac{b}{c}\right)$.

Đối chiếu lại, ta suy ra $c=-1$, $a=-1$, $b=2$.

Vậy $T=a+2b+3c=(-1)+2.2+3(-1)=0$.

Đáp án D.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never eat anywhere unless you try

Câu 50. Từ dáng điệu của đồ thị ta có ngay được:

+) $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty \Rightarrow a>0.$

+) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại một điểm có tung độ dương nên $d>0$.

Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$.

Mặt khác dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $y'=0$ có hai nghiệm trái dấu và tổng hai nghiệm này luôn dương nên $\begin{cases} ac<0 \\ -\dfrac{2b}{3a}>\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c<0 \\ b<0 \end{cases}$ (do $a>0$).

Do đó: $ab<0,\ bc>0,\ cd<0$.

Đáp án A.

Câu 51. Một số nhận xét quan trọng:

- Dựa vào hình dáng của đồ thị suy ra hệ số $a<0$.

- Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ âm nên $d<0$.

- Ta thấy đồ thị như hình vẽ có hai điểm cực trị, hoành độ các điểm cực trị trái dấu suy ra phương trình $y'=3ax^2+2bx+c=0$ có 2 nghiệm x_1,x_2 trái dấu kéo theo $3a.c<0\Rightarrow c>0$.

- Mặt khác $\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{b}{3a}>0\Rightarrow b>0$.

Đáp án D.

Câu 52. Một số nhận xét quan trọng:

- Dựa vào hình dạng đồ thị suy ra $a<0$.

- Hàm số có 3 điểm cực trị nên $ab<0\Rightarrow b>0$.

- Giao điểm với trục tung nằm dưới trục hoành nên $c<0$.

Đáp án C.

Câu 53. Nhìn vào đồ thị ta thấy

• Tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$ nằm trên trục hoành nên $c>0$ (vì $a>0$).

• Tiệm cận đứng $x=\dfrac{-d}{c}$ nằm bên trái trục tung nên $\dfrac{-d}{c}<0$. Suy ra $d>0$ (vì $c>0$).

• Giao điểm của đồ thị và trục tung nằm bên dưới trục hoành nên $\dfrac{b}{d}<0$.

Suy ra $b<0$ (vì $d>0$)

Vậy $c>0,\ d>0$.

Đáp án B.

Câu 54. Một số nhận xét quan trọng:

+) Dựa vào hình dạng đồ thị ta khẳng định được $a>0$.

+) Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $(0;d)$.

Dựa vào đồ thị suy ra $d>0$.

+) Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$.

Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ trái dấu nên phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 trái dấu.

Vì thế $3a.c<0$, nên suy ra $c<0$.

+ Mặt khác từ đồ thị ta thấy $\begin{cases} x_1>-1 \\ x_2>1 \end{cases}$ nên $x_1+x_2>0$.

Mà $x_1+x_2=\dfrac{-2b}{3a}$ nên suy ra $\dfrac{-2b}{3a}>0\Rightarrow b<0$.

Vậy $a>0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$.

Đáp án D.

Câu 55. Nhận xét từ đồ thị:

+ Giao với trục hoành tại $x_o = -\dfrac{b}{a} > 0 \Rightarrow$ a và b trái dấu (1).

+ Giao với trục tung tại $y_o = \dfrac{b}{d} < 0 \Rightarrow b$ và d trái dấu (2).

+ Tiệm cận đứng: $x = -\dfrac{d}{c} < 0 \Rightarrow d$ và c cùng dấu (3).

Từ (1) và (2) suy ra: a và d cùng dấu hay $ad > 0$.

Từ (2) và (3) suy ra: b và c trái dấu hay $bc < 0$.

Đáp án C.

Câu 56. Lấy đạo hàm hàm số $y = f(x)$.

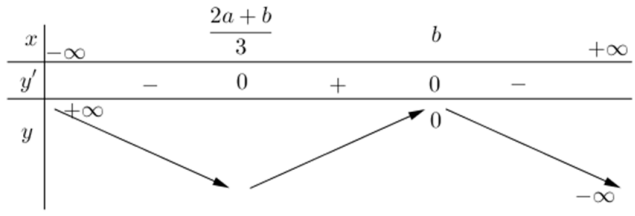
$f'(x) = -(b-x)^2 + (a-x).(-2)(b-x)$

$= -(b-x)(b-x+2a-2x) = -(b-x)(b+2a-3x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = b \\ x = \dfrac{2a+b}{3} \end{array}\right.$.

Ta có: $\dfrac{2a+b}{3} < \dfrac{2b+b}{3} = b$.

Ta có bảng biến thiên:



Đáp án A.

Câu 57. Từ đồ thị ta có: $x = 0 \Rightarrow y = d < 0$, từ dạng đồ thị suy ra $a > 0$.

Mặt khác $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ từ đồ thị ta có phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu suy ra $ac < 0$ mà $a > 0$ suy ra $c < 0$.

Hơn nữa phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} = -1$ suy ra

$3a = 2b \Rightarrow b > 0$.

Vậy chọn đáp án **D**.

Đáp án D.

Câu 58. Dựa vào đồ thị:

+ $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty \Rightarrow \boxed{a > 0}$.

+ Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Rightarrow ab < 0 \Rightarrow \boxed{b < 0}$.

+ Giao điểm của đồ thị hàm số và trục tung có tung độ dương $\Rightarrow \boxed{c > 0}$.

Vậy $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$.

Đáp án C.

Câu 59. Từ hình vẽ ta thấy:

Đồ thị hàm số có bề lõm hướng lên $\Rightarrow a > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow c < 0$.

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị

$\Rightarrow ab < 0 \Rightarrow b < 0$.

Vậy chỉ có $bc > 0$.

Đáp án B.

Câu 60. Dựa vào hình dạng đồ thị hàm số ta nhận thấy:

Hệ số $a > 0$.

Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa tọa $\Rightarrow c = 0$.

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Rightarrow a.b < 0 \Rightarrow b < 0$.

Đáp án C.

Câu 61. Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(0;1)$, $B(1;5)$ và $C(3;1)$ và đạt cực trị tại các điểm B

và C.

Đạo hàm: $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Ta có:

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=5 \\ f'(1)=0 \\ f'(3)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=1 \\ a+b+c+d=5 \\ 3a+2b+c=0 \\ 27a+6b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-6 \\ c=9 \\ d=1 \end{cases}.$$

Đáp án C.

Câu 62. Dựa vào hình dạng đồ thị hàm số ta nhận thấy:

Hệ số $a<0$.

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Rightarrow ab<0 \Rightarrow b>0$.

Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa tọa $\Rightarrow c=0$.

Vậy $a<0,\ b>0,\ c=0$.

Đáp án C.

Câu 63. Nhìn vào đồ thị ta có:

Khi $x\in(2;+\infty)$ hàm số đồng biến $\Rightarrow a>0$.

Hàm số có 3 điểm cực trị nên $ab<0$ mà $a>0\Rightarrow b<0$.

$y(0)=-1=c\Rightarrow c<0$.

Đáp án A.

Câu 64. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang:

$y=-1\Leftrightarrow \dfrac{a}{1}=-1\Leftrightarrow a=-1.$

Mặt khác Đồ thị hàm số có TCĐ $x=2$ nên $2+c=0\Leftrightarrow c=-2.$

$\Rightarrow a-2c=-1-2.(-2)=3.$

Dựa vào đồ thị ta thấy các điểm $(3;0)$ và $\left(0;-\dfrac{3}{2}\right)$ thuộc vào đồ thị hàm số đã cho nên ta được hệ phương trình $\begin{cases} 0=\dfrac{a.3+3}{3+c} \\ -\dfrac{3}{2}=\dfrac{a.0+3}{0+c} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a+3=0 \\ -3c=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ c=-2 \end{cases}$

$\Rightarrow a-2c=-1-2.(-2)=3.$

Đáp án A.

Câu 65. Đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm có hoành độ $x=-\dfrac{b}{a}$, giao với Oy tại điểm có tung độ $y=\dfrac{b}{d}$.

Dựa vào hình vẽ ta có: $\begin{cases} -\dfrac{b}{a}>0 \\ \dfrac{b}{d}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{b}{a}<0 \\ \dfrac{b}{d}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab<0 \\ bd<0 \end{cases} \Rightarrow ad>0.$

Trong các phương án chỉ có phương án **B** thỏa mãn.

Đáp án B.

Câu 66. Ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=-1$ suy ra $a=-1$.

Do đồ thị hàm số đi qua điểm $(2;0)$ nên $2a-b=0\Leftrightarrow -2-b=0\Leftrightarrow b=-2$.

Vậy $b<a<0$.

Đáp án A.

Câu 67. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ có đường tiệm cận ngang $y=a$, đường tiệm cận đứng $x=-c$ và cắt Oy tại điểm $\left(0;\dfrac{b}{c}\right)$.

Từ đồ thị hàm số ta có đường tiệm cận ngang $y=-1$, đường tiệm cận đứng $x=1$ và cắt Oy tại điểm $(0;-2)$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never give anyone access you my

Từ đó suy ra: $\begin{cases} a=-1 \\ -c=1 \\ \dfrac{b}{c}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ c=-1 \\ b=-2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ c=-1 \\ b=2 \end{cases}$.

Vậy $a+b+c=-1-1+2=0$.

Đáp án D.

Câu 68. Ta có: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-ax}{bx-c}=\dfrac{-a}{b}$, theo giả thiết suy ra: $\dfrac{-a}{b}=3\Leftrightarrow a=-3b$.

Hàm số không xác định tại $x=1\Rightarrow b-c=0\Leftrightarrow b=c$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định nên $f'(x)=\dfrac{ac-2b}{(bx-c)^2}>0$ với mọi x khác 1.

Suy ra:

$ac-2b>0\Leftrightarrow -3b^2-2b>0\Leftrightarrow -\dfrac{2}{3}<b<0\Leftrightarrow 0<-b<\dfrac{2}{3}$

Lại có: $a+b+c=-3b+b+b=-b$.

Suy ra $(a+b+c)^2=b^2\in\left(0;\dfrac{4}{9}\right)$

Vậy tổng $a+b+c$ thuộc khoảng $\left(0;\dfrac{4}{9}\right)$.

Đáp án C.

Câu 69. Một số nhận xét quan trọng:

+ Ta có đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{a}{c}$, đường tiệm cận đứng là $x=\dfrac{-d}{c}$.

Theo bài ra, ta có: $\begin{cases} \dfrac{a}{c}=3 \\ \dfrac{-d}{c}=-2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=3c \\ d=2c \end{cases}$.

+ Điểm $(-1;7)$ thuộc đồ thị hàm số $f(x)$ nên $\dfrac{-a+b}{-c+d}=7\Leftrightarrow\dfrac{-3c+b}{-c+2c}=7\Leftrightarrow b=10c$.

Vậy $\dfrac{2a+3b+4c+d}{7c}$

$=\dfrac{2.(3c)+3.(10c)+4c+2c}{7c}=6$.

Đáp án C.

Câu 70. Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$

nên ta có hệ $\begin{cases} -\dfrac{c}{b}=2 \\ \dfrac{a}{b}=1 \\ ac-b>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} c=-2b \\ a=b \\ ac-b>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} c=-2b \\ a=b \\ -2b^2-b>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 0<c<1 \\ -\dfrac{1}{2}<a<0 \\ -\dfrac{1}{2}<b<0 \\ a+b+c=0 \end{cases}$.

Dựa vào hệ trên ta có các phát biểu $(1),(4)$ là sai, $(2),(3)$ đúng.

Đáp án B.

Câu 71. Ta có: $y=x^3+ax^2+bx+c$

$\Rightarrow y'=3x^2+2ax+b$.

Theo đề, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} y(1)=0 \\ y(-2)=0 \\ y'(-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=1^3+a.1^2+b.1+c \\ 0=(-2)^3+a.(-2)^2+b.(-2)+c \\ 0=3.(-2)^2+2a.(-2)+b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=-1 \\ 4a-2b+c=8 \\ -4a+b=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=0 \\ c=-4 \end{cases}.$$

Vậy $T=a^2+b^2+c^2=3^2+0^2+(-4)^2=25.$

Đáp án A.

Câu 72. Vì đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $y=2$ nên $d=2$.

$y'=3ax^2+2bx+c$.

Hàm số đạt cực trị tại $x=0$ và $x=2$ nên:

$$\begin{cases} y'(0)=0 \\ y'(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ 12a+4b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ b=-3a \end{cases} (1)$$

Từ đồ thị ta nhận thấy

$y(2)=-2 \Leftrightarrow 8a+4b+d=-2 \Leftrightarrow 8a+4b=-4 \Leftrightarrow 2a+b=-1$ (2)

Thay (1) vào (2) ta tìm được $a=1, b=-3$.

Vậy $S=-2$.

Đáp án A.

Câu 73. Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$,

$y''=6ax+2b$

Từ đồ thị ta thấy:

+) $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$. Ta suy ra $a<0$.

+) $y(0)<0 \Rightarrow d<0$ loại **C**.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị với x_1, x_2 trái dấu và $x_1+x_2>0$. Ta suy ra phương trình $y'=0$ có hai nghiệm trái dấu và $x_1+x_2>0$.

Ta suy ra $x_1x_2=\dfrac{c}{3a}<0, \Rightarrow c>0$ loại **B**.

Hơn nữa, $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{3a}>0 \\ a<0 \end{cases} \Rightarrow b>0$. Loại **A**.

Đáp án D.

Câu 74. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+1}$ có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-\dfrac{1}{c}$ và đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{a}{c}$.

Nhìn vào bảng biến thiên, ta thấy $-\dfrac{1}{c}=-1 \Rightarrow c=1$ và $\dfrac{a}{c}=2 \Rightarrow a=2$ (vì $c=1$).

Ta có: $y'=\dfrac{a-bc}{(cx+1)^2}$.

Vì hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$ nên $y'=\dfrac{a-bc}{(bx+c)^2}>0$

$\Leftrightarrow a-bc>0 \Leftrightarrow 2-b>0 \Leftrightarrow b<2$.

Suy ra: $b^3<8 \Leftrightarrow b^3-8<0$.

Vậy tập các giá trị b là tập nghiệm của bất phương trình $b^3-8<0$.

Đáp án D.

Câu 75. Từ đồ thị ta có:

Tiệm cận đứng: $x=1 \Rightarrow \dfrac{-d}{c}=1 \Rightarrow \dfrac{d}{c}=-1$

$\Rightarrow d=-c$.

Tiệm cận ngang: $y=-1 \Rightarrow \dfrac{a}{c}=-1 \Rightarrow a=-c$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Đồ thị cắt trục hoành tại điểm: $x=2\Rightarrow\frac{-b}{a}=2\Rightarrow\frac{-b}{-c}=2\Rightarrow\frac{b}{c}=2\Rightarrow b=2c$.

Vậy $T=\frac{a-2b+3d}{c}=\frac{-c-4c-3c}{c}=-8$.

Đáp án C.

Câu 76. Từ hình dạng đồ thị hàm số ta có $a>0$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow d<0$

Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$.

Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu $\Rightarrow y'=0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ca<0$

Mà $a>0$ nên $c<0$.

Ta lại có: $y''=6ax+2b$.

$y''=0\Leftrightarrow 6ax+2b=0\Leftrightarrow x=-\frac{b}{3a}$.

Từ đồ thị hàm số ta thấy tâm đối xứng có hoành độ âm.

Do đó $-\frac{b}{3a}<0$.

Mà $a>0$ nên $b>0$.

Vậy trong các số a,b,c và d có 2 số dương là a và b.

Đáp án D.

Câu 77. Từ bảng biến thiên của hàm số, ta thấy đồ thị có hai đường tiệm cận, trong đó tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

Suy ra $\begin{cases}\frac{c}{b}=-2\\ \frac{a}{b}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}bc<0\\ ab>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b>0,c<0,a>0\ (1)\\ b<0,c>0,a<0\ (2)\end{array}\right.$.

Lại có hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định $f'(x)=\frac{-ac+6b}{(bx-c)^2}<0\Rightarrow ac>6b$.

Ta thấy (1) không thể xảy ra do nếu $b>0$ thì $ac>6b>0$; và (2) có thể xảy ra do nếu $c>0,a<0$ thì $6b<ac<0$.

Vậy trong các số a,b,c có hai số âm.

Đáp án D.

Câu 78. Ta có: $y=x^3-3x^2+2$

$=(x-1)(x^2-2x-2)$

Từ đồ thị ban đầu (**hình 1**) sang đồ thị thứ 2 (**hình 2**) ta thấy

Toàn bộ đồ thị ứng với $x\ge 1$ được giữ nguyên.

Phần đồ thị ứng với $x<1$ lấy đối xứng qua trục hoành.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Đáp án C.

Câu 79. Ta có nhận xét sau:

$y=|x-2|(x^2-1)=\begin{cases}(x-2)(x^2-1),x\ge 2\\ -(x-2)(x^2-1),x<2\end{cases}$.

Đồ thị gồm 2 phần:

+) Giữ nguyên phần đồ thị đã cho ứng với $x\ge 2$.

+) Lấy đối xứng phần đồ thị đã cho ứng với $x<2$ qua trục Ox.

Hình 1 nhận vì đồ thị là hàm $y=|x-2|(x^2-1)$.

NHÓM TOÁN ANH DUI Never go anywhere unless you try

Hình 2 loại vì đồ thị là hàm $y=(x-2)|x-1|(x+1)$.

Hình 3 loại vì đồ thị hàm số $y=(|x|-2)(x^2-1)$.

Hình 4 loại vì đồ thị hàm $y=|(x-2)(x^2-1)|$.

Đáp án A.

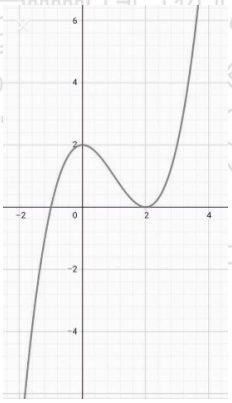
Câu 80. Do đồ thị giao với trục Oy tại điểm có tung độ bằng -4 và $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$ → Loại **B**, **D**.

Mặt khác: $A(1;0)\in f(x)$ → Loại **C**.

Đáp án A.

Câu 81. Phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$ có đúng hai nghiệm thực.

Nên đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ được minh họa như hình vẽ.



Gọi m là số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ và k là nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x)=0$.

$\Rightarrow$ Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ là $m+k$.

Vậy đồ thị hàm số $y=|ax^3+bx^2+cx+d|$ có số điểm cực trị là $2+1=3$.

Đáp án D.

Câu 82. Gọi (C) là đồ thị hàm số biểu diễn của hàm $y=(x-2)(x^2-1)$.

Ta có nhận xét khá quan trọng như sau:

$$y=(x-2)|x^2-1|=\begin{cases}(x-2)(x^2-1) & \text{khi } \left[\begin{array}{l}x\le -1\\ x\ge 1\end{array}\right.\\ -(x-2)(x^2-1) & \text{khi } -1<x<1\end{cases}$$

Cách vẽ đồ thi như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ (C) ứng với $x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$ ta được (C_1).

+ Lấy đối xứng phần (C) ứng với $x\in(-1;1)$ qua trục hoành ta được (C_2).

Khi đó đồ thị hàm số $y=(x-2)|x^2-1|$ gồm (C_1) và (C_2).

Đáp án C.

Câu 83. Từ đồ thị ban đầu (**hình 1**) sang đồ thị thứ 2 (**hình 2**) ta thấy

Toàn bộ đồ thị phía "phải" Oy sau đó lấy đối xứng sang trái.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Đáp án B.

Câu 84. Từ đồ thị ban đầu (**hình 1**) sang đồ thị thứ 2 (**hình 2**) ta thấy:

Toàn bộ đồ thị phía bên phải Oy được giữ nguyên.

Sau đó, được lấy đối xứng sang trái.

Đáp án B.

Câu 85. +) Loại đáp án **A** vì:

$y=-x^3+6x^2-9x=-(x^3-6x^2+9x)$.

+) Loại đáp án **B**, vì đồ thị của hàm số $y=|x^3-6x^2+9x|$ giữ lại phần đồ thị phía trên trục hoành và chỉ lấy đối xứng phần dưới trục

hoành của đồ thị **Hình 1**.

+) Loại đáp án **D** vì hệ số của x^2 khác -6.

+) Đồ thị ở đáp án C là đồ thị của hàm số dạng $y=f\left(|x|\right)$.

Chọn đáp án **C**.

Đáp án C.

Câu 86. Dễ thấy, phần đồ thị nằm trên trục hoành được giữ không đổi và phần đồ thị nằm bên dưới trục hoành được lấy đối xứng lên trên và bỏ đi phần bên dưới. Đây là cách vẽ của đồ thị hàm $y=\left|f\left(x\right)\right|$ từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$.

Đáp án A.

Câu 87. Ta có sự phân tích đa thức như sau:

$y=x^3-3x^2+2=\left(x-1\right)\left(x^2-2x-2\right)$.

Từ đồ thị ban đầu (**hình 1**) sang đồ thị thứ 2 (**hình 2**) ta thấy:

Toàn bộ đồ thị ứng với $\left[\begin{array}{l}x\ge 1+\sqrt{3}\\x\le 1-\sqrt{3}\end{array}\right.$ được giữ nguyên.

Phần đồ thị ứng với $1-\sqrt{3}\le x\le 1+\sqrt{3}$ lấy đối xứng qua trục hoành.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Đáp án D.

Câu 88. Ta có:

$y=x^3-3x^2+2=\left(x-1\right)\left(x^2-2x-2\right)$.

Từ đồ thị ban đầu (**hình 1**) sang đồ thị thứ 2 (**hình 2**) ta thấy:

Toàn bộ đồ thị nằm phía trên Ox được giữ nguyên.

Phần đồ thị phía dưới Ox được lấy đối xứng qua Ox.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Đáp án A.

Câu 89. Từ đồ thị ban đầu (**hình 1**) sang đồ thị thứ 2 (**hình 2**) ta thấy:

Toàn bộ đồ thị phía trên Ox giữ nguyên.

Toàn bộ phần phía dưới Ox được lấy đối xứng lên trên.

$\Rightarrow$ dạng $\left|f\left(x\right)\right|$.

Chọn đáp án C.

Đáp án C.

Câu 90. Từ đồ thị ban đầu (**hình 1**) sang đồ thị thứ 2 (**hình 2**) ta thấy

Toàn bộ đồ thị phía bên trái đường thẳng $x=1$ được giữ nguyên

Toàn bộ đồ thị phía bên phải đường thẳng $x=1$ lấy đối xứng qua Ox

Chọn đáp án C.

Chú ý: $y=\dfrac{\left|-x+1\right|}{x-2}=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{-x+1}{x-2},\boxed{x\le 1}\\-\dfrac{-x+1}{x-2},\boxed{x>1}\end{array}\right.$.

Đáp án C.

Câu 91. Từ đồ thị ban đầu (**hình 1**) sang đồ thị thứ 2 (**hình 2**) ta thấy:

Toàn bộ đồ thị phía bên phải đường thẳng $x=-2$ được giữ nguyên.

Toàn bộ đồ thị phía bên trái đường thẳng $x=-2$ lấy đối xứng qua Ox.

Chọn đáp án D.

Đáp án D.

Câu 92. Từ đồ thị ban đầu (**hình 1**) sang đồ thị thứ 2 (**hình 2**) ta thấy:

Toàn bộ đồ thị nằm bên trái (ứng với $x \le 1$) đường thẳng $x = 1$ được giữ nguyên.

Toàn bộ đồ thị nằm bên phải (ứng với $x > 1$) đường thẳng $x = 1$ được lấy đối xứng qua Ox.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Đáp án C.

Câu 93. Từ đồ thị ban đầu (**hình 1**) sang đồ thị thứ 2 (**hình 2**) ta thấy:

Toàn bộ đồ thị phía bên trái đường thẳng $x = -1$ (ứng với $x \le -1$) được giữ nguyên

Toàn bộ đồ thị phía bên phải đường thẳng $x = -1$ (ứng với $x \le -1$) được lấy đối xứng qua trục Ox.

Chọn đáp án B.

Đáp án B.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Extra Techniques:

Study tips:

Trong một số trường hợp để giải phương trình ta có thể làm một cách ngược lại để minh họa lời giải Logic hơn. Chẳng hạn:

Phương trình $h(x)=0$, ta khó để có thể giải được vì là phương trình bậc cao (phương trình có bậc từ 5 trở lên không có công thức nghiệm để giải một cách tổng quát) hoặc có thêm các tham số m, hàm nhiều ẩn,… ta cần tách hàm $h(x)=f(x)-g(x)$. Khi đó, việc giải phương trình $h(x)=0$ được quy về việc giải phương trình $f(x)=g(x)$.

Extra Techniques:

Study tips:

Trong quyển tài liệu **Nghiên cứu định lý Vietè** của tác giả Nguyễn Thành Nhân đã trình bày rất chi tiết về cơ sở cũng như ứng dụng. Nếu có cơ hội, các bạn tìm đọc nhé!

VI. Sự tương giao của hai đồ thị hàm số

Xét vấn đề tổng quát:

Xét sự tương giao giữa hai đồ thị hàm số tổng quát $y=f(x)$ và $y=g(x)$.

Phương pháp giải

Bước 1: Lập phương trình hoành độ giao điểm: $f(x)=g(x)$.

Bước 2: Xét nghiệm phương trình $f(x)=g(x)$.

Ta có ba khả năng có thể xảy ra sau:

Thứ 1: Phương trình $f(x)=g(x)$ vô nghiệm. Điều đó có nghĩa hai đồ thị hàm số là rời nhau, tức không có điểm chung,

Thứ 2: Phương trình $f(x)=g(x)$ có nghiệm kép. Điều đó có nghĩa là tại điểm $A(x_0;f(x_0))$ (trong đó $f(x_0)=g(x_0)$) hai đồ thị hàm số tiếp xúc với nhau.

Thứ 3: Phương trình $f(x)=g(x)$ có n nghiệm (không nhất thiết nghiệm bội lẻ hay chẵn). Điều đó có nghĩa là hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ khi biểu diễn trên cùng một hệ trục tọa độ thì chúng cắt nhau tại n điểm. Lưu ý: $n\in\mathbb{N}^*$.

VI. 1. Sự tương giao giữa đồ thị hàm số bậc ba tổng quát $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,\ (a\neq 0)$ với trục hoành.

Cách 1: Sử dụng phương pháp đại số (Phương pháp giải phương trình bằng các phương pháp thường gặp).

Ta biết rằng số giao điểm của đồ thị hàm số bậc ba với trục hoành bằng đúng với số nghiệm của phương trình $f(x)=0$.

Giả sử ta xét phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$. Ta có một số mẹo giải như sau:

Thứ 1: Hàm số có dấu hiệu nhận biết bằng **Hệ quả của Định lý Vietè.** Tổng các hệ số của phương trình bằng 0 thì phương trình chắc chắn có nghiệm $x=1$ hoặc hiệu của các tổng hệ số bậc chẵn và lẻ bằng 0 thì phương trình có một nghiệm $x=-1$.

Extra Techniques:

Study tips:

Khi biết một nghiệm cụ thể nào đó của phương trình đa thức thì ta luôn có thể dùng **Lược đồ Horner** để phân tích và giải phương trình như bình thường.

Thứ 2: Nếu phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ có một nghiệm $x=\alpha$ thì ta hoàn toàn có thể đưa về một phương trình tương đương như sau:

$$(x-\alpha)\left[\underbrace{ax^2+(\alpha.a+b)x+\alpha^2.a+\alpha.b+c}_{g(x)}\right]=0$$

Khi đó: $\left[\begin{array}{l} x=\alpha \\ g(x)=0\ (*) \end{array}\right.$.

Việc giải phương trình $(*)$ ta hoàn toàn dùng được công thức nghiệm.

Một số trường hợp có thể xảy ra như sau:

Thứ 1: Đồ thị hàm số bậc ba cắt trục hoành tại một điểm duy nhất khi và chỉ khi phương trình $g(x)=0$ vô nghiệm thực. Hoặc nếu có nghiệm thì bắt buộc $x=\alpha$ chính là nghiệm kép. Trường hợp này ta gọi $x=\alpha$ là nghiệm bội ba.

Thứ 2: Đồ thị hàm số bậc ba cắt trục hoành tại hai điểm khi và chỉ khi phương trình $g(x)=0$ có một nghiệm kép khác $x=\alpha$. Hoặc có một nghiệm $x=\alpha$ và một nghiệm $x=\beta\neq\alpha$.

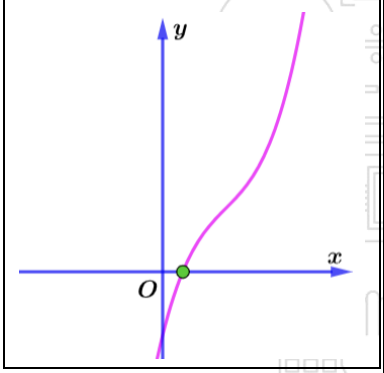
Thứ 3: Đồ thị hàm số bậc ba cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $g(x)=0$ có hai nghiệm thực phân biệt thỏa mãn $g(\alpha)\neq 0$.

Cách 2: Sử dụng phương pháp hàm số.

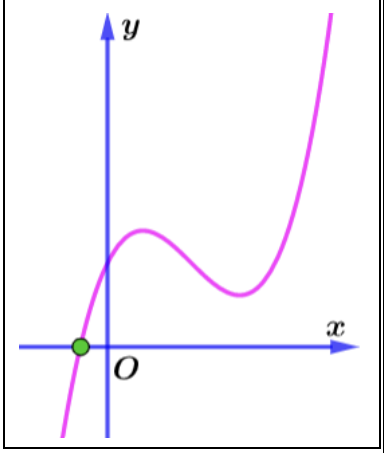
Đối với những trường hợp đã trình bày ở **Study tips** trên, ta luôn có những phương trình nghiệm "xấu", không thể nhẩm được nghiệm là bao nhiêu (Điều kiện không dùng CASIO để giải phương trình bậc ba) thì ta sẽ có một số tips như sau:

Thứ nhất: Đồ thị hàm số bậc ba có một giao điểm duy nhất với trục hoành. Khi đó, hai khả năng có thể xảy ra: Hoặc đồ thị hàm số không có cực trị (**Hình VI.1.1**), hoặc đồ thị hàm số có hai điểm cực trị cùng nằm về một phía (**Hình VI.1.2**).

Hình VI.1.1.



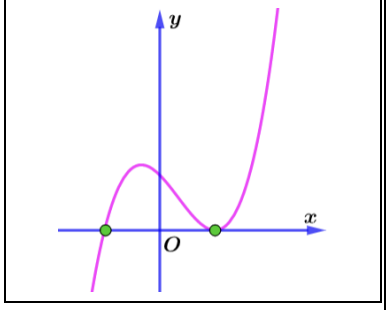
Hình VI.1.2.



Xem thêm Hình VI.1.1.

Xem thêm Hình VI.1.2.

Hình VI.1.3.



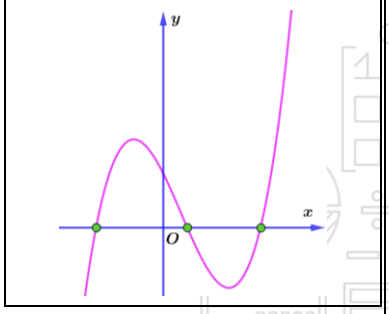
Thứ hai: Đồ thị hàm số bậc ba có hai giao điểm với trục hoành. Khi đó đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành tại một điểm $x = x_0$ nào đó thỏa mãn $f(x_0) = 0$.

Hay nói cách khác, một điểm cực trị của đồ thị hàm số thuộc trục hoành. Khi đó, ta có thể "Hàm số hóa" thành dạng: $y_{CD}.y_{CT} = 0$.

Xem thêm Hình VI.1.3.

Thứ ba: Đồ thị hàm số bậc ba có ba giao điểm với trục hoành khi hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm ở hai phía đối với trục hoành. Khi đó, ta có thể "Hàm số hóa" thành dạng: $y_{CD}.y_{CT} < 0$.

Hình VI.1.4.

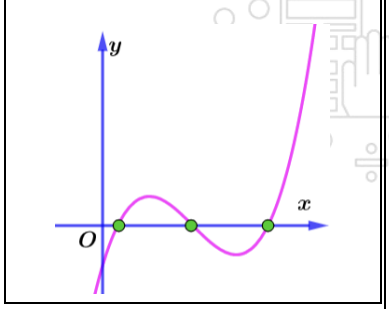


Xem thêm Hình VI.1.4.

Thứ tư: Đồ thị hàm số bậc ba cắt trục hoành tại ba điểm có hoành độ dương khi và chỉ khi: Đồ thị hàm số bậc ba có hai điểm cực trị thỏa mãn $\begin{cases} y_{CD}.y_{CT} < 0 \\ x_{CD} > 0,\ x_{CT} > 0 \\ a.f(0) = ad < 0 \end{cases}$.

Xem thêm Hình VI.1.5.

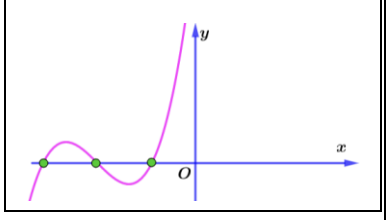
Hình VI.1.5.



Thứ năm: Đồ thị hàm số bậc ba cắt trục hoành tại ba điểm có hoành độ âm khi và chỉ khi: Đồ thị hàm số bậc ba có hai điểm cực trị thỏa mãn $\begin{cases} y_{CD}.y_{CT} < 0 \\ x_{CD} < 0,\ x_{CT} < 0 \\ a.f(0) = ad > 0 \end{cases}$.

Xem thêm Hình VI.1.6.

Hình VI.1.6.



VI. 2. Sự tương giao giữa đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c,\ (a \neq 0)$ với trục hoành.

Ta biết rằng số giao điểm của đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương với trục hoành bằng đúng với số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Giả sử ta xét phương trình $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Ta có một số mẹo giải như sau:

Thứ 1: Hàm số có dấu hiệu nhận biết bằng **Hệ quả của Định lý Vietè.** Tổng các hệ số của phương trình bằng 0 thì phương trình chắc

chắn có nghiệm $x=1$ hoặc hiệu của các tổng hệ số bậc chẵn và lẻ bằng 0 thì phương trình có một nghiệm $x=-1$.

Thứ 2: Nếu phương trình $ax^4+bx^2+c=0$ có một nghiệm $x=\alpha$ thì chắc chắn $x=-\alpha$ cũng là một nghiệm. Khi đó ta hoàn toàn có thể tách thành

$$(x-\alpha)\left(\underbrace{ax^3+\alpha.ax^2+\left(\alpha^2.a+b\right)x+\alpha^3.a+\alpha.b}_{g(x)}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-\alpha^2\right)\left[\underbrace{ax^2+\left(\alpha^2.a+b\right)}_{h(x)}\right]=0$$

Khi đó: $\left[\begin{array}{l} x=\alpha \\ h(x)=0\ (*) \end{array}\right.$.

Việc giải phương trình $(*)$ ta hoàn toàn dùng được công thức nghiệm.

Một số trường hợp có thể xảy ra như sau:

Trường hợp 1: Đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương không có bất cứ giao điểm nào với trục hoành khi và chỉ khi phương trình $ax^4+bx^2+c=0$ vô nghiệm.

Trường hợp 2: Đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương có một giao điểm duy nhất đối với trục hoành khi và chỉ khi $\alpha=0$ và phương trình $h(x)=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép (trường hợp này ta thu được phương trình: $ax^4=0$, khi đó, nghiệm $x=0$ được gọi là nghiệm bội bậc bốn).

Trường hợp 3: Đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương có hai giao điểm với trục hoành khi và chỉ khi $\alpha\neq 0$ và phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Trường hợp 4: Đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương có ba giao điểm với trục hoành khi và chỉ khi $\alpha=0$ và $h(x)=0$ có hai nghiệm thực phân biệt. Hoặc $\alpha\neq 0$ và $b=-\alpha^2.a$.

Trường hợp 5: Đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương có bốn giao điểm với trục hoành khi và chỉ khi $\alpha\neq 0$ và phương trình $h(x)=0$ có hai nghiệm thực phân biệt khác $x=\pm\alpha$.

Extra Techniques:

Study tips:

Khi biết một nghiệm cụ thể nào đó của phương trình đa thức thì ta luôn có thể dùng **Lược đồ Horner** để phân tích và giải phương trình như bình thường.

Extra Techniques:

Study tips:

Một số trường hợp thường thấy ở đây đưa ta về bài toán biện luận phương trình bậc bốn trùng phương. Để làm tốt dạng này ta nên mô phỏng những trường hợp trên với những hình ảnh minh họa để khắc sâu hơn trong đầu những dạng đồ thị hàm số đó.

Extra Techniques:

Study tips:

Trong một vài trường hợp khác, ta có thể đưa dạng trùng phương về dạng bậc hai theo một ẩn khác để tiện lợi hơn trong quá trình giải bài tập.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Thứ 3: Xét phương trình hoành độ giao điểm $ax^4+bx^2+c=0\ (*)$.

Đặt: $t=x^2\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Khi đó: $(*)\Leftrightarrow at^2+bt+c=0\ (**)$

Trường hợp 1: Đồ thị hàm số không cắt trục hoành khi và chỉ khi phương trình $(*)$ vô nghiệm hay phương trình $(**)$ vô nghiệm hoặc có hai nghiệm âm.

Trường hợp 2: Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại duy nhất một điểm, khi đó, phương trình $(*)$ có duy nhất một nghiệm thực, hay nói cách khác, phương trình $(**)$ có một nghiệm kép $t=0$ hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $t=0$ và nghiệm còn âm, $t<0$.

Trường hợp 3: Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt, khi đó phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt, hay nói cách khác phương trình $(**)$ có một nghiệm kép dương hoặc có hai nghiệm phân biệt trái dấu.

Trường hợp 4: Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt, khi đó phương trình $(*)$ có ba nghiệm phân biệt, hay nói cách khác phương trình $(**)$ có một nghiệm $t>0$ và một nghiệm $t=0$.

Trường hợp 5: Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt, khi đó phương trình $(*)$ có bốn nghiệm thực phân biệt, hay nói cách khác phương trình $(**)$ có hai nghiệm thực dương phân biệt.

Extra Techniques:

Study tips:

Quá trình lựa chọn các trường hợp được nêu ở bên được ghi nhận qua quá trình giải toán và nhận xét, có thể còn một số trường hợp ngoại lệ, chúng ta có thể kết hợp các điều kiện với nhau trong những bài toán phức hợp. Chúng tôi không yêu cầu các bạn thuộc lòng, tuy nhiên, quá trình ngẫm và hiểu là một yêu cầu cấp thiết đối với bài toán loại này.

VI. 3. Sự tương giao giữa đồ thị hàm số hàm nhất biến $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d},\ (ad-bc\ne 0, c\ne 0)$ với đường thẳng $d: y=kx+m$.

Bài toán tổng quát:

Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d},\ (ad-bc\ne 0, c\ne 0)$ có đồ thị (C). Tìm điều kiện của tham số m để đường thẳng $d: y=kx+m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt thỏa mãn một điều kiện nào đó…

Phương pháp chung

Extra Techniques:

Study Tips:

Nhắc lại định lý Vietè đối với hai nghiệm phân biệt của phương trình bậc hai: $ax^2+bx+c=0$ là: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$.

Một số biểu thức cần lưu ý:

1. $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

2. $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$

3. $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}$.

…

Bước 1: Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=kx+m$ và đồ thị hàm số (C), ta có:

$$\frac{ax+b}{cx+d}=kx+m \Leftrightarrow ax+b=(cx+d)(kx+m)\ (*),\ x\neq -\frac{d}{c}$$

$$\Leftrightarrow g(x)=kcx^2+(mc+kd-a)x+md-b=0,\ \forall x\neq -\frac{d}{c}.$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{d}{c} \Leftrightarrow \begin{cases} c.k\neq 0 \\ \Delta>0 \\ g\left(-\dfrac{d}{c}\right)\neq 0 \end{cases}$.

Giải hệ này ta tìm được $m\in D_1$ (1).

Gọi $A(x_1;kx_1+m)$, $B(x_2;kx_2+m)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $g(x)=0$.

Áp dụng định lý Vietè, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{mc+kd-a}{ck} \\ x_1x_2=\dfrac{md-b}{kc} \end{cases}$ (2).

Bước 2: Biến đổi điều kiện đề bài về dạng có chứa tổng và tích của hai điểm x_1, x_2 (3).

Kết hợp ba điều kiện (1), (2), (3), ta thu được điều kiện của tham số thực m.

Extra Techniques:

Study Tips:

Mẹo bên cạnh đây sẽ là một công cụ hữu hiệu để các độc giả có thể hoàn thành bài tập một cách nhanh chóng và đầy hiệu quả.

Một Tip để làm tốt các bài toán về tương giao hàm

Đối với dạng toán tương giao giữa đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương, ta có thể kết hợp với bảng công thức tính nhanh để luận điều kiện của tham số m!

Bảng công thức tính nhanh (Nhắc lại).

Yêu cầu bài toán	Điều kiện tương ứng ($ab<0$)
ΔABC vuông cân tại A	$b^3+8a=0$
ΔABC đều	$b^3+24a=0$
ΔABC có diện tích bằng S_0	$32a^3.\left(S_0\right)^2+b^5=0$
ΔABC có độ dài cạnh $BC=m_0$	$am_0^{\,2}+2b=0$
ΔABC có độ dài cạnh $AB=AC=n_0$	$16a^2n_0^{\,2}-b^4+8ab=0$
ΔABC có $B,C\in Ox$	$b^2-4ac=0$
ΔABC có ba góc nhọn	$b\left(8a+b^3\right)>0$
ΔABC nhận O làm trọng tâm	$b^2-6ac=0$
ΔABC nhận O làm trực tâm	$b^3+8a-4ac=0$
Tứ giác $ABOC$ là hình thoi	$b^2-2ac=0$
ΔABC nhận O làm tâm đường tròn nội tiếp	$b^3-8a-4abc=0$
ΔABC nhận O làm tâm đường tròn ngoại tiếp	$b^2-8a-8abc=0$
ΔABC có $BC=k.AB=k.AC$	$b^3.k^2-8a.\left(k^2-4\right)=0$
Trục hoành chia ΔABC thành hai phần có diện tích bằng nhau	$b^2-4\sqrt{2}\left\|ac\right\|$
ΔABC có ba đỉnh cách đều trục hoành	$b^2-8ac=0$
Đồ thị hàm số cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt lập thành một cấp số cộng	$9b^2-100ac=0$
Hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị hàm số có diện tích phần trên (trục hoành) và diện tích phần dưới bằng nhau	$5b^2-36ac=0$
Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC: $x^2+y^2-\left(\frac{2}{b}-\frac{\Delta}{4a}+c\right)y+c\left(\frac{2}{b}-\frac{\Delta}{4a}\right)=0$	

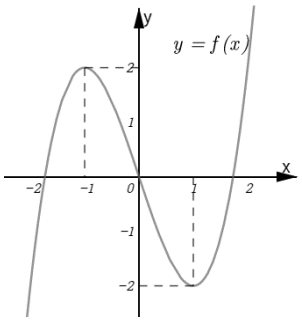
Extra Techniques:

Study Tips:

Đây là một trong số ít những bài toán được khai thác mạnh ở khía cạnh CASIO, nên nếu các bạn nhớ được một vài công thức cơ bản thì việc vượt tốc độ đối thủ chỉ còn thuộc về kỹ năng của các bạn với nhau thôi.

IV. Một số bài tập ứng dụng nhận diện đồ thị hàm số

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right)=-1$ là:



A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Extra Techniques:

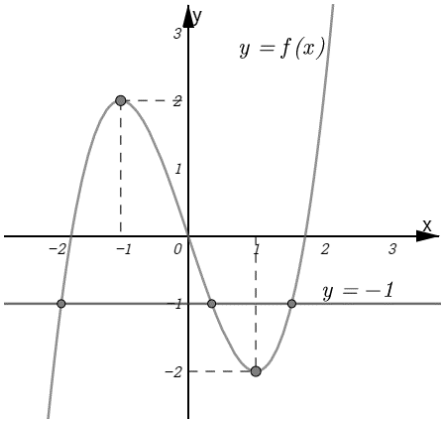
Study Tips:

Để giải tương giao hàm $af\left(x\right)+b=0$, ta vẽ đường thẳng $y=-\frac{b}{a}$ và cho cắt đồ thị hàm số, bảng biến thiên đồ thị hàm số… rồi đưa ra kết luận theo yêu cầu đề bài.

Đáp án: A

Lời giải

Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=-1$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-1$.



Từ hình vẽ suy ra 3 nghiệm.

Câu 2. [Nhận biết].
Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x)-3=0$ là

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0

Extra Techniques:

Study Tips:

Một cách tương tự cho bảng biến thiên, ta vẫn vẽ đường $y=-\dfrac{b}{a}$ lên trên bảng biến thiên và kết luận giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

Đáp án: A

Lời giải

Ta có: $f(x)-3=0 \Leftrightarrow f(x)=3$, theo bảng biến thiên ta có phương trình có 3 nghiệm.

Lưu ý: Ta kẻ đường thẳng $y=3$ lên bảng biến thiên để xét!

Câu 3. [Nhận biết].

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3+3x^2-2=m$ có ba nghiệm phân biệt.

A. $m\in(2;+\infty]$. **B.** $m\in(-\infty;-2]$.

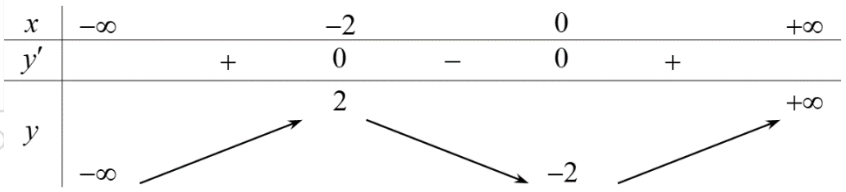
C. $m\in(-2;2)$. **D.** $m\in[-2;2]$.

Đáp án: C

Lời giải

Xét hàm số $y=x^3+3x^2-2$, $y'=3x^2+6x$.

Lập bảng biến thiên



Số nghiệm của phương trình $x^3+3x^2-2=m(*)$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-2$ và đường thẳng $y=m$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $(*)$ có 3 nghiệm phân biệt khi $-2<m<2$.

Extra Techniques:

Study Tips:

Thay vì ta giải phương trình bậc ba theo công thức nghiệm thì bài toán vô cùng phức tạp và dường như không có điểm ra, ta nảy ra ý tưởng tương giao với đồ thị hàm số theo ẩn x với đường thẳng tham số.

Câu 4. [Nhận biết].

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2018;2019]$ để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+3$ và đường thẳng $y=3x+1$ có duy nhất một điểm chung?

A. 1. **B.** 2019. **C.** 4038. **D.** 2018.

Đáp án: D

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3-3mx+3=3x+1\Leftrightarrow x^3-3x+2=3mx\Leftrightarrow 3m=\frac{x^3-3x+2}{x}\ (1).$$

Extra Techniques:

Remark:

Sở dĩ ta chỉ thu được điều kiện là $m<0$ là do nghiệm bội kép vẫn được xem là một nghiệm nên ta không nhận giá trị $m=0$.

Extra Techniques:

Remark:

Đối với những điểm không xác định, ta rất dễ quên không điền vào bảng xét dấu, đó là lý do hơn 40% học sinh giải các bạn toán dạng này bị sai!

Xét hàm $f(x)=\dfrac{x^3-3x+2}{x}=x^2-3+\dfrac{2}{x}$; $f'(x)=2x-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2x^3-2}{x^2}$;

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	‖ $-\infty$ / $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m<0$. Mà m nguyên và $m\in[-2018;2019]$ nên có 2018 giá trị thỏa mãn.

Câu 5. [Vận dụng].

Gọi A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng

A. $4\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

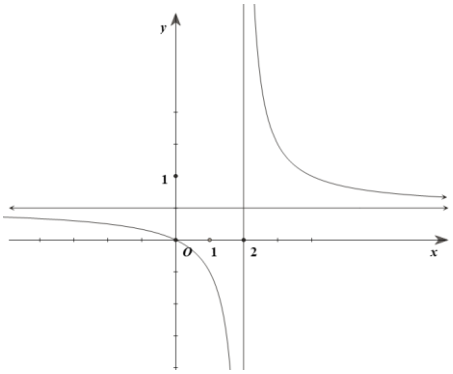
Đáp án: B

Extra Techniques:

Study Tips:

Đối với dạng toán tìm khoảng cách $AB_{\min}$ như vầy, ta có một mẹo như sau (tối ưu khoảng 80% dạng toán hiện tại, tuy nhiên vẫn còn một số trường hợp chưa chuẩn xác do gài điều kiện). Chúng ta kẻ một đường thẳng $y=x+k$ đi qua tâm đối xứng của đồ thị hàm số nhất biết, xác định đoạn thẳng nối hai giao điểm. Đó là đoạn thẳng ngắn nhất.

Lời giải



Hàm số $y=\dfrac{x}{x-2}$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Gọi $A\left(a;\dfrac{a}{a-2}\right)$ và $B\left(b;\dfrac{b}{b-2}\right)$ là hai điểm thuộc hai nhánh của (C) $(a<2<b)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=\left(b-a;\dfrac{b}{b-2}-\dfrac{a}{a-2}\right)=\left(b-a;\dfrac{b-a}{(b-2)(2-a)}\right)$.

Extra Techniques:

Study Tips:

Ví dụ: Đường thẳng được giới thiệu ở trên có dạng $(d): y = x + k$. Vì

$I(2;1) \in (d) \Rightarrow k = -1.$

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{x}{x-2} = x - 1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 - \sqrt{2} \\ x = 2 + \sqrt{2} \end{array}\right.$.

Khi đó hai giao điểm được hoàn toàn xác định:

$\left\{\begin{array}{l} A'\left(2-\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right) \\ B'\left(2+\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right) \end{array}\right.$.

Hay $AB_{\min} = A'B' = 4.$

Extra Techniques:

Remark:

Giả sử ta có tam giác ΔABC, khi đó trọng tâm O của tam giác ΔABC có tọa độ là: $G(x_G, y_G)$, trong đó x_G, y_G được xác định bởi công thức:

$\left\{\begin{array}{l} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{array}\right.$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có: $(b-2)(2-a) \le \dfrac{(b-a)^2}{4}$.

Suy ra: $AB^2 = (b-a)^2 + \dfrac{(b-a)^2}{\left[(b-2)(2-a)\right]^2} \ge (b-a)^2 + \dfrac{64}{(b-a)^2} \ge 16$

$\Rightarrow AB \ge 4$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = 2 - \sqrt{2}$ và $b = 2 + \sqrt{2}$.

Vậy $AB_{\min} = 4$.

Câu 6. [Vận dụng].

Giả sử $m = -\dfrac{b}{a}$, $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $(a,b) = 1$ là giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = -3x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $\Delta: x - 2y - 2 = 0$, với O là gốc toạ độ. Tính $a + 2b$.

A. 2. **B.** 5. **C.** 11. **D.** 21.

Đáp án: D

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x+1}{x-1} = -3x + m$, $x \ne 1$.

$\Rightarrow 3x^2 - (m+1)x + m + 1 = 0$ $(*)$.

Để (C) cắt d tại hai điểm phân biệt thì $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1.

Suy ra: $\left\{\begin{array}{l} (m+1)^2 - 12(m+1) > 0 \\ 3.1^2 - (m+1).1 + (m+1) \ne 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m+1 < 0 \\ m+1 > 12 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 11 \end{array}\right.$.

Khi đó $A(x_1; -3x_1 + m)$, $B(x_2; -3x_2 + m)$, với x_1 và x_2 là nghiệm của phương trình $(*)$ đồng thời thoả mãn $x_1 + x_2 = \dfrac{m+1}{3}$.

Gọi G là trọng tâm của ΔOAB, ta có $G\left(\dfrac{m+1}{9}; \dfrac{m-1}{3}\right)$.

Mà $G \in \Delta$ nên $\dfrac{m+1}{9} - 2\dfrac{m-1}{3} - 2 = 0 \Rightarrow m = -\dfrac{11}{5}$. Suy ra $\left\{\begin{array}{l} a = 11 \\ b = 5 \end{array}\right.$.

Vậy $a + 2b = 21$.

Extra Techniques:

Remark:

Nếu A và B là hai điểm đối xứng với nhau qua M thì M là trung điểm của đoạn thẳng AB hay nói cách khác, ta có: $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$.

Câu 7. [Vận dụng].

Cho hàm số $y = \dfrac{2x}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm tập hợp tất cả các giá trị $a \in \mathbb{R}$ để qua điểm $M(0;a)$ có thể kẻ được đường thẳng cắt (C) tại hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua điểm M.

A. $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$. **B.** $(3;+\infty)$.

C. $(-\infty;0)$. **D.** $(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$.

Đáp án: A

Lời giải

Đường thẳng có hệ số góc k đi qua điểm $M(0;a)$ có dạng $y = kx + a$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $y = kx + a$ là: $\dfrac{2x}{x-1} = kx + a \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 2x = kx^2 - kx + ax - a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ kx^2 + (a-k-2)x - a = 0 (*) \end{cases}$.

Ta cần tìm điều kiện của a để phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2 khác 1 và thỏa mãn $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$.

Extra Techniques:

Remark:

Đối với một số bài toán điều kiện của mẫu số đã bị loại khỏi nhờ yêu cầu đề bài, tuy nhiên, không nên dựa vào số đông bài tập không "bẫy" về điều kiện này mà quên mất những điều kiện đủ để logic các vấn đề toán học trong việc trình bày nhé!

Điều kiện này tương đương với $\begin{cases} k \neq 0 \\ (a-k-2)^2 + 4ka > 0 \\ k.1^2 + (a-k-2).1 - a \neq 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ (a-k-2)^2 + 4ka > 0 \\ -2 \neq 0 \\ \dfrac{k+2-a}{k} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k = a-2 \\ 4(a-2)a > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2 \neq 0 \\ k = a-2 \\ a \in (-\infty;0)\cup(2;+\infty) \end{cases} \Rightarrow a \in (-\infty;0)\cup(2;+\infty)$.

Vậy đáp án A là đáp án chính xác.

Câu 8. [Vận dụng].
Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đườngthẳng $d: y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB\le 2\sqrt{2}$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng

A. -6. **B.** -27. **C.** 9. **D.** 0.

Đáp án: A

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{-2x+1}{x+1}=-x+m\ (1)$

Điều kiện: $x\neq -1$.

Phương trình $(1)\Rightarrow \dfrac{-2x+1}{x+1}=-x+m$

$$\Leftrightarrow -2x+1=(-x+m)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow -x^2+(m+1)x+m-1=0\ (2).$$

Để đường thẳng $d: y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A,B thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác $-1\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ -3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m^2+6m-3>0.$

$\Leftrightarrow m\in\left(-\infty;-3-2\sqrt{3}\right)\cup\left(-3+2\sqrt{3};+\infty\right)\ (3).$

Gọi $A\left(x_A;-x_A+m\right), B\left(x_B;-x_B+m\right)$ là tọa độ giao điểm:

Theo đề ta có: $AB\le 2\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(x_B-x_A\right)^2}\le 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2\left(x_B-x_A\right)^2=8\Leftrightarrow x_B^2-2x_A.x_B+x_A^2-4\le 0$

$\Leftrightarrow \left(x_A+x_B\right)^2-4x_A.x_B-4\le 0.$

$\Leftrightarrow (m+1)^2-4(1-m)-4<0$

$\Leftrightarrow m^2+6m-7<0\Leftrightarrow m\in(-7;1)\ (4)$

Từ (3) và (4), ta có: $m\in\left(-7;-3-2\sqrt{2}\right)\cup\left(-3+2\sqrt{2};1\right).$

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-6;0\}$

Đáp án A.

Extra Techniques:

Remark:

Đối với dạng toán này, không đơn thuần là định giá trị của tham số m để độ dài đoạn thẳng đạt một độ lớn nhất định, đây là một khoảng, đoạn,… Tuy nhiên, phương pháp chung vẫn thế, ta lưu ý những kỹ năng tách, thêm, bớt để đưa về việc ứng dụng **Định lý Vietè** trong giải bài toán dạng này.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Extra Techniques:

Remark:

Những dạng toán yêu cầu định giá trị tham số m để các "nghiệm" hay những hoành độ tương giao thỏa mãn một tính chất số học nào đó, công cụ tương giao giữa hàm số biến thiên với hàm hằng là không thể thiếu, bên đây là một ý tưởng ứng dụng kỹ năng ấy!

Extra Techniques:

Remark:

Đối với một số bài toán dạng hàm số bậc bốn trùng phương có chứa tham số, không bắt buộc lúc nào cũng đặt ẩn phụ, cô lập m vẫn là một hướng đi rất khả thi, tuy nhiên, khi cô lập và chia hai vế cho một biểu thức nào đó, ta cần xem xét khi chia có đưa phương trình trước đó thành **phương trình hệ quả** hay không? Đó là một sai lầm trong giải phương trình. Tác giả **Nguyễn Thành Nhân** có một bài viết về sai lầm phương trình được đăng trên tạp chí giáo dục, các bạn có thời gian có thể xem thêm những lưu ý quan trọng khi giải toán.

Câu 9. [Vận dụng].

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=x^4-4x^3+(m-2)x^2+8x+4$ cắt trục hoành tại đúng hai điểm có hoành độ lớn hơn 1.

A. 8. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 3.

Đáp án: A

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4-4x^3+(m-2)x^2+8x+4=0$

Đồ thị hàm số $y=x^4-4x^3+(m-2)x^2+8x+4$ cắt trục hoành tại đúng hai điểm có hoành độ lớn hơn 1 $\Leftrightarrow$ có đúng hai nghiệm lớn hơn 1.

$(*)\Leftrightarrow x^4-4x^3+8x+4=(2-m)x^2$

$\Leftrightarrow 2-m=x^2-4x+\dfrac{8}{x}+\dfrac{4}{x^2}$

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của $(C):y=x^2-4x+\dfrac{8}{x}+\dfrac{4}{x^2}\ (x>1)$ với đường thẳng $y=2-m$ song song với trục hoành.

Xét hàm số $y=x^2-4x+\dfrac{8}{x}+\dfrac{4}{x^2}\ (x>1)$.

$y'=2x-4-\dfrac{8}{x^2}-\dfrac{8}{x^3}=\dfrac{2x^4-4x^3-8x-8}{x^2}$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-\sqrt{3}\ (\text{l})\\ x=1+\sqrt{3}\ (\text{n})\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	9	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$y=2-m$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, yêu cầu đề bài $\Leftrightarrow 0<2-m<9$ $\Leftrightarrow -7<m<2$.

Vì m nguyên nên $m\in\{-6,-5,...,1\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên của m thỏa bài toán.

Câu 10. [Vận dụng].

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=(m+1)x^4-2(2m-3)x^2+6m+5$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có các hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1<x_2<x_3<1<x_4$.

A. $m\in\left(-1;\frac{-5}{6}\right)$. **B.** $m\in(-3;-1)$.

C. $m\in(-3;1)$. **D.** $m\in(-4;-1)$.

Đáp án: D

Lời giải

Extra Techniques:

Remark:

Phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\Delta>0\\ x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}>0.\\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}>0\end{cases}$$

Cách 1: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là

$$(m+1)x^4-2(2m-3)x^2+6m+5=0 \qquad (1)$$

Đặt $t=x^2\geq 0$, phương trình đã cho trở thành

$$(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5=0 \qquad (2)$$

$$g(t)=(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5$$

Để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt thì phương trình (2) phải có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\text{Hay } \begin{cases}m+1\neq 0\\ \Delta'>0\\ t_1.t_2>0\\ t_1+t_2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq -1\\ (2m-3)^2-(m+1)(6m+5)>0\\ \dfrac{6m+5}{m+1}>0\\ \dfrac{2m-3}{m+1}>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}m\neq -1\\ \dfrac{-23-\sqrt{561}}{4}<m<\dfrac{-23+\sqrt{561}}{4}\\ m<-1\vee m>-\dfrac{5}{6}\\ m<-1\vee m>\dfrac{3}{2}\end{cases} \qquad (*)$$

Để phương trình (1) có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1<x_2<x_3<1<x_4$ thì phương trình (2) phải có 2 nghiệm thỏa $0<t_1<1<t_2$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 - 1 < 0 \\ t_2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{6m+5}{m+1} - \dfrac{2(2m-3)}{m+1} + 1 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{3m+12}{m+1} < 0 \Leftrightarrow -4 < m < -1$

Kết hợp với $(*)$ ta có $m \in (-4;-1)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Cách 2:

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là

$$(m+1)x^4 - 2(2m-3)x^2 + 6m + 5 = 0 \qquad (1)$$

Đặt $t = x^2 \geq 0$, phương trình đã cho trở thành

$$(m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m + 5 = 0 \qquad (2)$$

Để phương trình (1) có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1 < x_2 < x_3 < 1 < x_4$ thì phương trình (2) phải có 2 nghiệm thỏa $0 < t_1 < 1 < t_2$

Phương trình $(2) \Leftrightarrow m = \dfrac{-t^2 - 6t - 5}{t^2 - 4t + 6}$ (biểu thức $t^2 - 4t + 6 \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$)

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{-t^2 - 6t - 5}{t^2 - 4t + 6}$, với $t \in (0;+\infty)$

Ta có $f(t)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ và có

$$f'(t) = \frac{10t^2 - 2t - 56}{(t^2 - 4t + 6)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1 - \sqrt{561}}{10} < 0 \\ t = \dfrac{1 + \sqrt{561}}{10} > 1 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

t	0		1		$\frac{1+\sqrt{561}}{10}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$-\frac{5}{6}$	$\searrow$	-4	$\searrow$	-1	$\nearrow$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $f(t) = \dfrac{-t^2 - 6t - 5}{t^2 - 4t + 6}$ tại hai giao điểm có hoành độ thỏa $0 < t_1 < 1 < t_2$ khi $-4 < m < -1$.

Extra Techniques:

Remark:

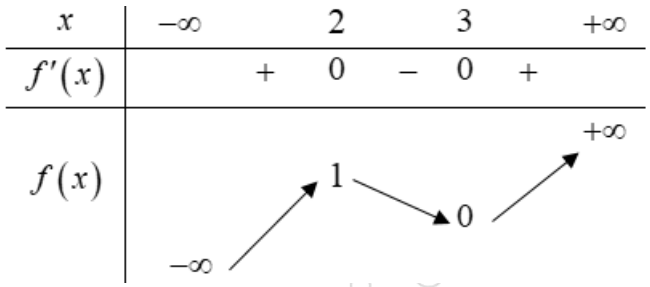
Cách làm bên đây rất thích hợp cho các bạn có kiến thức nền khá rộng, chúng ta có thể xử lý điều kiện một cách trực tiếp bằng việc khảo sát hàm số ngay vấn đề. Tuy nhiên, để làm được bài toán này, ta phải biết được cách cô lập tham số m cũng như xem xét điều kiện của mẫu và mức độ khả thi để cô lập m. Một bất lợi của dạng này là chỉ sử dụng cho một vài trường hợp đặc biệt, không thể tổng quát hóa thành phương pháp chung.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

TỰ LUYỆN 4 MỨC ĐỘ

Câu 1. [Nhận biết].

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

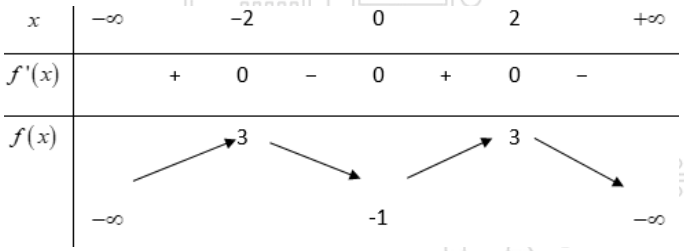


Số nghiệm của phương trình $3f(x)-2=0$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 2. [Nhận biết].

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

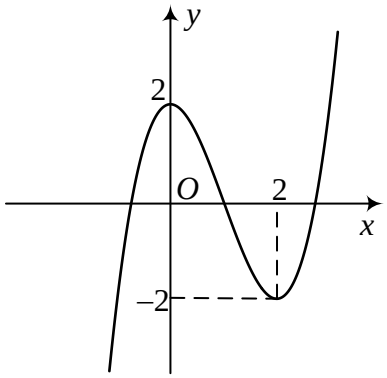


Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)-3=0$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 3. [Nhận biết].

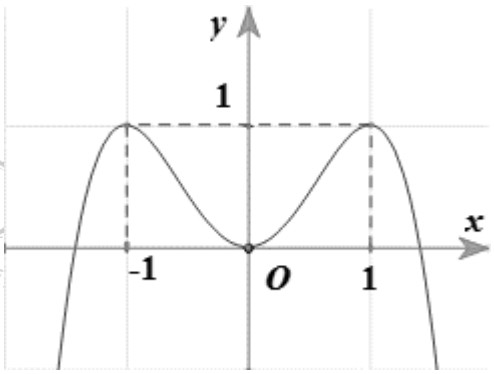
Cho hàm số bậc ba có dạng tổng quát $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x)+4=0$ là?



A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 4. [Nhận biết].

Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R})$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên.

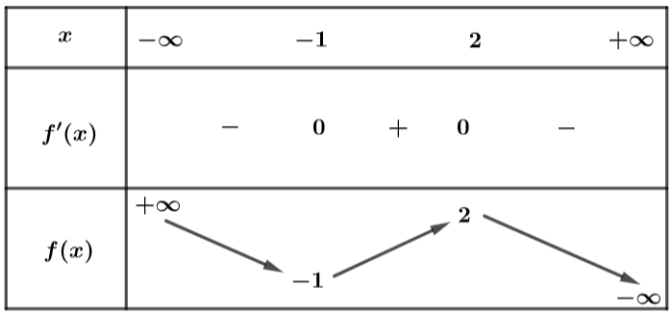


Số nghiệm của phương trình $4f(x)-3=0$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 5. [Nhận biết].

Cho hàm số $f(x)$ bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)-3=0$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 6. [Nhận biết].

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

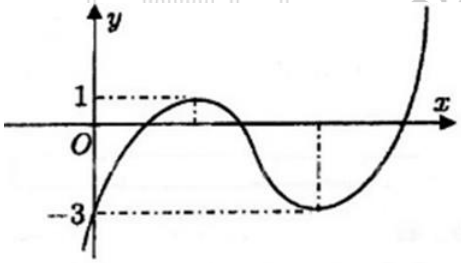
x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $3f(x)-5=0$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 7. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.

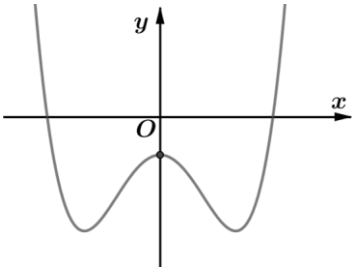


Số nghiệm của phương trình $|f(x)|=2$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 8. [Thông hiểu].

Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y=ax^4+bx^2+c$, với a,b,c là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. Phương trình $y'=0$ vô nghiệm trên tập số thực.

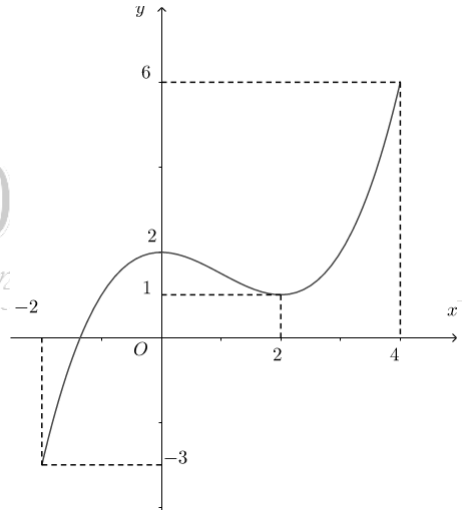
B. Phương trình $y'=0$ có đúng một nghiệm thực.

C. Phương trình $y'=0$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt.

D. Phương trình $y'=0$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt.

Câu 9. [Nhận biết].

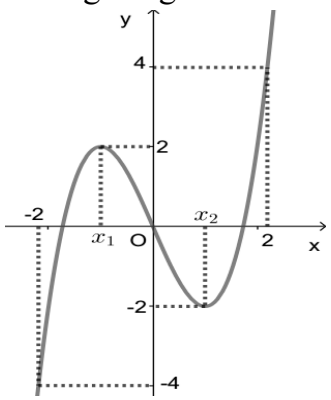
Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x)-5=0$ trên đoạn $[-2;4]$ là



A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 10. [Nhận biết].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên.

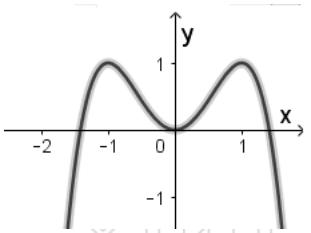


Tìm số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=1$ trên đoạn $\left[-2;2\right]$.

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 11. [Nhận biết].

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right)=\frac{1}{2}$ là



A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 12. [Thông hiểu].

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ và trục hoành là

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 13. [Thông hiểu].

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ và đồ thị hàm số $y=3x^2+3x$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 14. [Thông hiểu].

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+3x$ với trục hoành là

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 15. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=\left(x-2\right)\left(x^2+1\right)$ có đồ thị $\left(C\right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\left(C\right)$ cắt trục hoành tại một điểm.

B. $\left(C\right)$ cắt trục hoành tại ba điểm.

C. $\left(C\right)$ cắt trục hoành tại hai điểm.

D. $\left(C\right)$ không cắt trục hoành.

Câu 16. [Thông hiểu].

Biết rằng đường thẳng $y=-2x+2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+x+2$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0

A. $y_0=4$. **B.** $y_0=0$.

C. $y_0=2$. **D.** $y_0=-1$.

Câu 17. [Thông hiểu].

Gọi P là số giao điểm của hai đồ thị $y=x^3-x^2+1$ và $y=x^2+1$. Tìm P.

A. $P=0$. **B.** $P=2$.

C. $P=1$. **D.** $P=3$.

Câu 18. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=x^4-3x^2$ có đồ thị $\left(C\right)$. Số giao điểm của đồ thị $\left(C\right)$ và đường thẳng $y=2$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 4.

Câu 19. [Thông hiểu].

Đồ thị của hàm số $y=-x^4-3x^2+1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bao nhiêu

A. -3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 20. [Thông hiểu].

Số giao điểm của đường cong $y=x^3-2x^2+2x+1$ và đường thẳng $y=1-x$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 21. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=-2x^3+5x$ có đồ thị $\left(C\right)$ Tìm số giao điểm của $\left(C\right)$ và trục hoành.

NHÓM TOÁN ANH DÚI

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 22. [Thông hiểu].

Biết rằng đường thẳng $y=x+2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-x^2+x+4$ tại điểm duy nhất, kí hiệu $(x_0;y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0.

A. $y_0=1$. **B.** $y_0=3$.

C. $y_0=-2$. **D.** $y_0=4$.

Câu 23. [Thông hiểu].

Đồ thị hàm số nào sau đây cắt trục tung tại điểm có tung độ âm?

A. $y=\dfrac{x-1}{x-3}$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{x+4}$.

C. $y=\dfrac{x-1}{x+2}$. **D.** $y=\dfrac{2x-1}{x+5}$.

Câu 24. [Thông hiểu].

Gọi M,N là giao điểm của đường thẳng $y=x+1$ và đường cong $y=\dfrac{2x+4}{x-1}$. Khi đó hoành độ x_I của trung điểm I của đoạn MN bằng bao nhiêu?

A. $x_I=2$. **B.** $x_I=1$.

C. $x_I=-5$. **D.** $x_I=-\dfrac{5}{2}$.

Câu 25. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-3}$ có đồ thị (C) và các đường thẳng $d_1:y=2x$, $d_2:y=2x-2$, $d_3:y=3x+3$, $d_4:y=-x+3$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng trong bốn đường thẳng d_1,d_2,d_3,d_4 đi qua giao điểm của (C) và trục hoành.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 26. [Thông hiểu].

Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x^4-4}+5$ và đường thẳng $y=x$

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 27. [Thông hiểu].

Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+2m$. Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 28. [Thông hiểu].

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ (C) cắt đường thẳng $d:y=m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt x_1,x_2,x_3.

A. $m>-2$. **B.** $m=-2$.

C. $m>-3$. **D.** $m=-3$.

Câu 29. [Thông hiểu].

Đường thẳng Δ có phương trình $y=2x+1$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-x+3$ tại hai điểm A và B với tọa độ được kí hiệu lần lượt là $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ trong đó $x_B<x_A$. Tìm x_B+y_B?

A. $x_B+y_B=-5$. **B.** $x_B+y_B=-2$.

C. $x_B+y_B=4$. **D.** $x_B+y_B=7$.

Câu 30. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=x^3+3mx^2-m^3$ có đồ thị (C_m) và đường thẳng $d:y=m^2x+2m^3$. Biết rằng $m_1,m_2\,(m_1>m_2)$ là hai giá trị thực của m để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^4+x_2^4+x_3^4=83$. Phát biểu nào sau đây là ***đúng*** về quan hệ giữa hai giá trị m_1, m_2?

NHÓM TOÁN ANH DÚI

A. $m_1+m_2=0$. **B.** ${m_1}^2+2m_2>4$.

C. ${m_2}^2+2m_1>4$. **D.** $m_1-m_2=0$.

Câu 31. [Vận dụng].
Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$ cắt đường thẳng $y=m$ tại ba điểm phân biệt.

A. $m\in(-\infty;-4)$. **B.** $m\in(-4;0)$.

C. $m\in(0;+\infty)$. **D.** $m\in(-\infty;-4)\cup(0;+\infty)$.

Câu 32. [Thông hiểu].
Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=mx-m+1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+x+2$ tại ba điểm A,B,C phân biệt sao $AB=BC$.

A. $m\in\left(-\frac{5}{4};+\infty\right)$. **B.** $m\in(-2;+\infty)$.

C. $m\in\mathbb{R}$. **D.** $m\in(-\infty;0)\cup[4;+\infty)$.

Câu 33. [Vận dụng].
Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+\left(m^2-2\right)x+2m^2+4$ cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 8 là

A. $m=\pm2$. **B.** $m=\pm1$.

C. $m=\pm\sqrt{3}$. **D.** $m=\pm\sqrt{2}$.

Câu 34. [Vận dụng].
Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=-mx$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-m+2$ tại ba điểm phân biệt A,B,C sao cho $AB=BC$.

A. $m\in(-\infty;-1)$. **B.** $m\in(-\infty:+\infty)$.

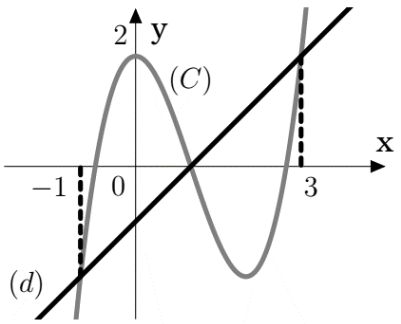
C. $m\in(1:+\infty)$. **D.** $m\in(-\infty;3)$.

Câu 35. [Vận dụng].
Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=-x+5$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+3(m-1)x+5$ tại 3 điểm phân biệt.

A. $\left[\begin{array}{l}m<1\\m>2\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}m\neq\frac{2}{3}\\m\le1\end{array}\right.\\m\ge2\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}m\neq\frac{2}{3}\\m<1\end{array}\right.\\m>2\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m\le1\\m\ge2\end{array}\right.$.

Câu 36. [Vận dụng].
Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ, đường thẳng d có phương trình $y=x-1$. Biết phương trình $f(x)=0$ có ba nghiệm $x_1<x_2<x_3$. Giá trị của x_1x_3 bằng



A. -3. **B.** $-\frac{7}{3}$. **C.** -2. **D.** $-\frac{5}{2}$.

Câu 37. [Vận dụng].
Tính tổng tất cả các giá trị của m biết đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ và đường thẳng $y=x+4$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C sao cho diện tích tam giác IBC bằng $8\sqrt{2}$ với $I(1;3)$.

A. 3. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 5.

Câu 38. [Vận dụng].
Đường thẳng d có phương trình $y=x+4$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ tại 3

điểm phân biệt $A(0;4)$, B và C sao cho diện tích của tam giác MBC bằng 4, với $M(1;3)$. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

A. $m=3$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=3 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=-3 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=3 \end{array}\right.$.

Câu 39. [Vận dụng].

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=-x+5$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+3(m-1)x+5$ tại ba điểm phân biệt.

A. $\left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>2 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} m\neq \dfrac{2}{3} \\ m\le 1 \end{array}\right. \\ m\ge 2 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} m\neq \dfrac{2}{3} \\ m<1 \end{array}\right. \\ m>2 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\le 1 \\ m\ge 2 \end{array}\right.$.

Câu 40. [Vận dụng].

Giá trị lớn nhất của m để đường thẳng $(d): y=x-m+1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2(m-2)x^2+(8-5m)x+m-5$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2+x_3^2=20$ là?

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Câu 41. [Vận dụng].

Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $y=-2x^3-3m^2x^2+(m^3+2m)x+2$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 42. [Vận dụng].

Tìm m để đồ thị (C) của $y=x^3-3x^2+4$ và đường thẳng $y=mx+m$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt $A(-1;0)$, B, C sao cho ΔOBC có diện tích bằng 64.

A. $m=14$. **B.** $m=15$.

C. $m=16$. **D.** $m=17$.

Câu 43. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=x^3-8x^2+8x$ có đồ thị (C) và hàm số $y=x^2+(8-a)x-b$ (với $a,b\in\mathbb{R}$) có đồ thị (P). Biết đồ thị hàm số (C) cắt (P) tại ba điểm có hoành độ nằm trong $[-1;5]$. Khi a đạt giá trị nhỏ nhất thì tích ab bằng

A. -729. **B.** 375.

C. 225. **D.** -384.

Câu 44. [Vận dụng].

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y=-mx+m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+mx^2+m$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $-1<x_1+x_2+x_3<3$?.

A. 6. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 45. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ (C_m). Tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y=x+4$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$ với điểm $K(1;3)$ là:

A. $m=\dfrac{1+\sqrt{137}}{2}$. **B.** $m=\dfrac{\pm 1+\sqrt{137}}{2}$.

C. $m=\dfrac{1\pm\sqrt{137}}{2}$. **D.** $m=\dfrac{1-\sqrt{137}}{2}$.

Câu 46. [Vận dụng].

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never yet anywhere unless you try

Cho đồ thị hàm số $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}+\dfrac{1}{f'(x_3)}$.

A. $P=3+2b+c$. **B.** $P=0$.

C. $P=b+c+d$. **D.** $P=\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{c}$.

Câu 47. [Vận dụng].

Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị đi qua điểm $A(1;1),B(2;4),C(3;9)$. Các đường thẳng AB,AC,BC lại cắt đồ thị lần lượt tại các điểm M,N,P (M khác A và B, N khác A và C, P khác B và C. Biết rằng tổng các hoành độ của M,N,P bằng 5, giá trị của $f(0)$ là

A. -6. **B.** -18. **C.** 18. **D.** 6.

Câu 48. [Vận dụng].

Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ cắt đường thẳng $d:y=m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_2^2>5$.

A. $m\ge -3$. **B.** $m\ge -2$.

C. $m>-3$. **D.** $m>-2$.

Câu 49. [Vận dụng].

S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-9x+2m+1$ và trục Ox có đúng hai điểm chung phân biệt. Tính tổng T của các phần tử thuộc tập S

A. $T=-10$. **B.** $T=10$.

C. $T=-12$. **D.** $T=12$.

Câu 50. [Vận dụng].

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2020;2020]$ của tham số m để đường thẳng $y=x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt?

A. 4036. **B.** 4040.

C. 4038. **D.** 4034.

Câu 51. [Vận dụng].

Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x}{1-x}$ cắt đường thẳng $y=x-m$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng 60^0 (với O là gốc tọa độ)?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 52. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=\dfrac{2x-m^2}{x+1}$ có đồ thị (C_m), trong đó m là tham số thực. Đường thẳng $d:y=m-x$ cắt (C_m) tại hai điểm $A(x_A;y_A),B(x_B;y_B)$ với $x_A<x_B$; đường thẳng $d':y=2-m-x$ cắt (C_m) tại hai điểm $C(x_C;y_C),D(x_D;y_D)$ với $x_C<x_D$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $x_A.x_D=-3$. Số phần tử của tập S là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 53. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=x^4-3x^2-2$. Tìm số thực dương m để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O, trong đó O là gốc tọa độ.

A. $m=2$. **B.** $m=\dfrac{3}{2}$.

C. $m=3$. **D.** $m=1$.

Câu 54. [Vận dụng].

Cho hàm số $y=x^4+2mx^2+m$ (với m là tham số thực). Tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y=-3$ tại

bốn điểm phân biệt, trong đó có một điểm có hoành độ lớn hơn 2 còn ba điểm kia có hoành độ nhỏ hơn 1, là khoảng $(a;b)$ (với $a,b\in\mathbb{Q}$, a, b là phân số tối giản).

Khi đó, $15ab$ nhận giá trị nào sau đây?

A. -63. **B.** 63.

C. 95. **D.** -95.

Câu 55. [Vận dụng cao].

Cho hai hàm số $y=\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}$ và $y=|x+2|-x-m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là $(C_1),(C_2)$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $(-2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2]$.

C. $[-2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Câu 56. [Vận dụng].

Cho hai hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x+1}{x}+\dfrac{x+2}{x+1}$ và $y=e^x+2020+3m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Có bao nhiêu số nguyên m thuộc $(-2019;2020)$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại 3 điểm phân biệt?

A. 2692. **B.** 2691.

C. 2690. **D.** 2693.

Câu 57. [Vận dụng cao].

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hai hàm số $y=\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}$ và $y=\dfrac{11}{3x-4}-\dfrac{1}{2-x}+11+m$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-\infty;1)$.

C. $(-\infty;1]$. **D.** $(-\infty;2]$.

Câu 58. [Vận dụng cao].

Cho hai hàm số $y=\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}$ và $y=2^{1-x}+2m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng năm điểm phân biệt là

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2]$.

C. $(-\infty;2)$. **D.** $(-\infty;4)$.

Câu 59. [Vận dụng cao].

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2x^4-(m+2)x^3+x^2+\left(m^2-1\right)x\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Số phần tử của tập S là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 60. [Vận dụng cao].

Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ để bất phương trình $(x-1)(x+2)\left(ax^2+bx+2\right)\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 61. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

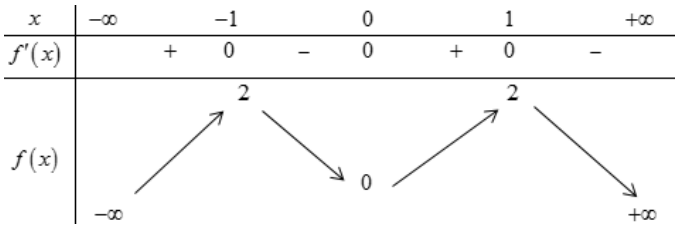
Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$ của phương

trình $2f\left(\sin x\right)+3=0$ là

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 8.

Câu 62. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

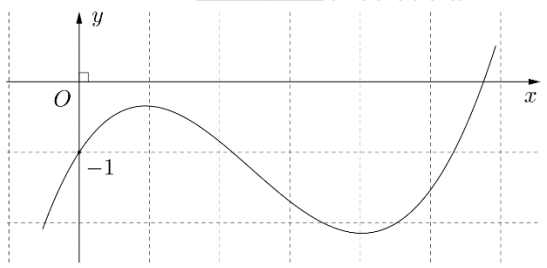


Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f\left(\sin x\right)=1$ là

A. 7. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 63. [Vận dụng cao].

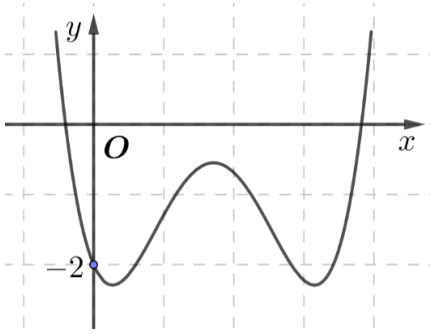
Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^3f\left(x\right)\right)+1=0$ là



A. 8. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 64. [Vận dụng cao].

Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.

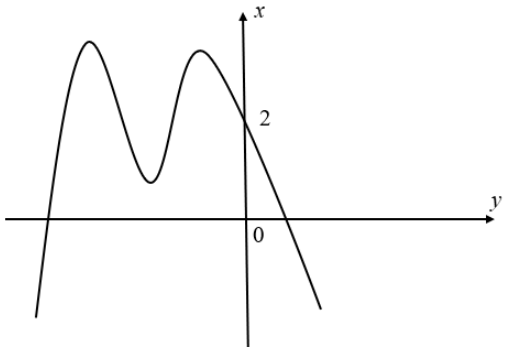


Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^2f\left(x\right)\right)+2=0$ là

A. 8. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 9.

Câu 65. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.

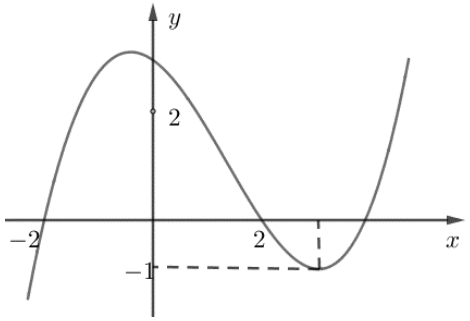


Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x^2f\left(x\right)\right)=2$ là:

A. 6. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 66. [Vận dụng cao].

Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.

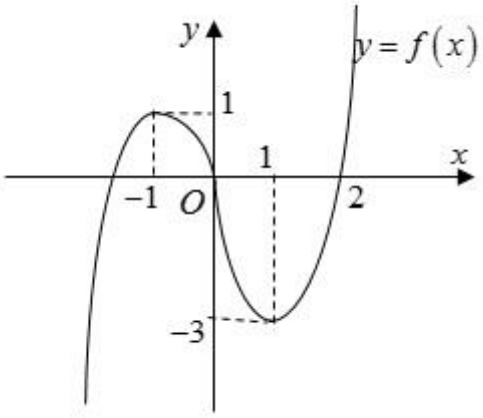


Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\frac{3}{2}$ là

A. 7. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 67. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau

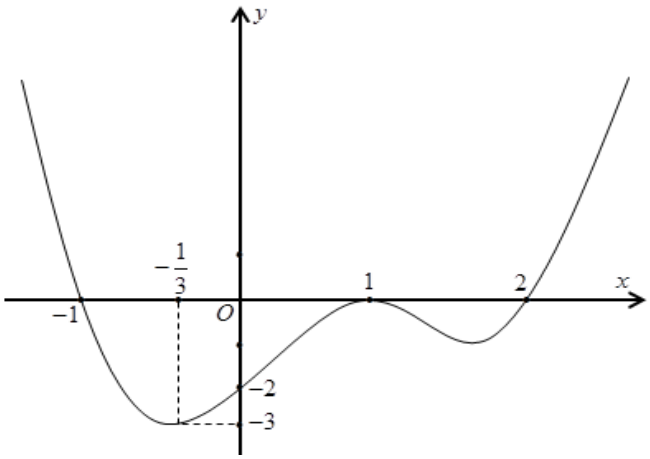


Số nghiệm của phương trình $f\left(2+f\left(e^x\right)\right)=1$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 68. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.

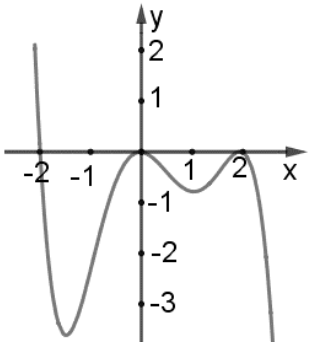


Đặt $g(x)=f\left(f'(x)-1\right)$. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $g'(x)=0$. Số phần tử của tập S là

A. 8. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 69. [Vận dụng cao].

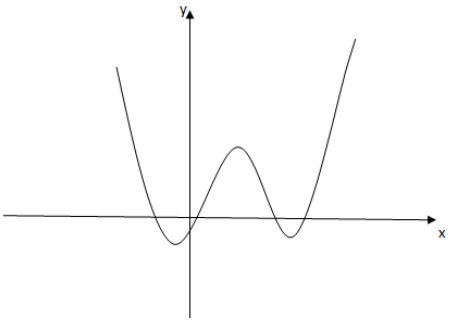
Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x)=f\left(f(x)\right)$. Hỏi phương trình $g'(x)=0$ có mấy nghiệm thực phân biệt?



A. 14. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 12.

Câu 70. [Vận dụng cao].

Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ được cho như hình vẽ sau

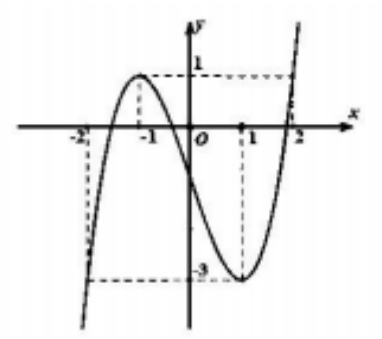


Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left[f'(x)\right]^2-f''(x).f(x)$ và trục Ox là:

A. 4. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 71. [Vận dụng cao].

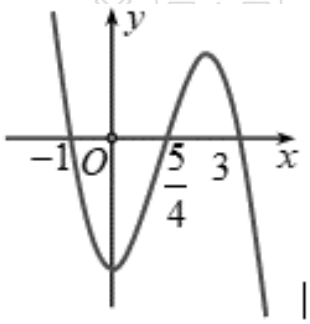
Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f\left(f(x)-1\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

Câu 72. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$,. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:

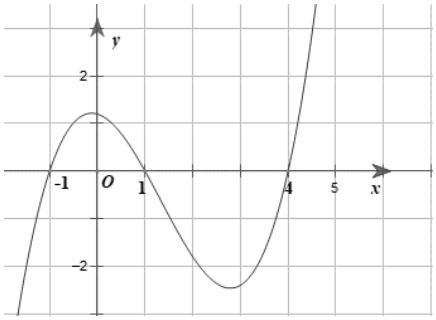


Tập nghiệm của phương trình $f(x)=r$ có số phần tử là

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 73. [Vận dụng cao].

Cho hàm số bậc bốn tổng quát như sau $y=f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$, trong đó $m,n,p,q,r\in\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ như hình vẽ dưới.

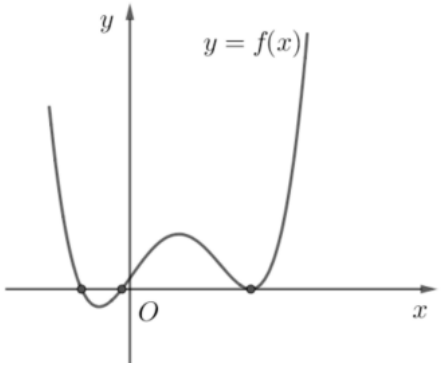


Tập nghiệm của phương trình $f(x)=16m+8n+4p+2q+r$ có tất cả bao nhiêu phần tử.

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 74. [Vận dụng cao].

Cho $f(x)$ là một hàm đa thức bậc bốn có đồ thị như hình dưới đây.

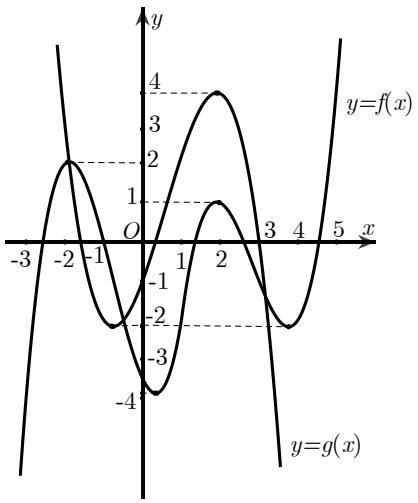


Tập nghiệm của phương trình $\left[f'(x)\right]^2=f(x).f''(x)$ có số phần tử là

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 0.

Câu 75. [Vận dụng cao].

Cho hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ có đồ thị như hình sau:

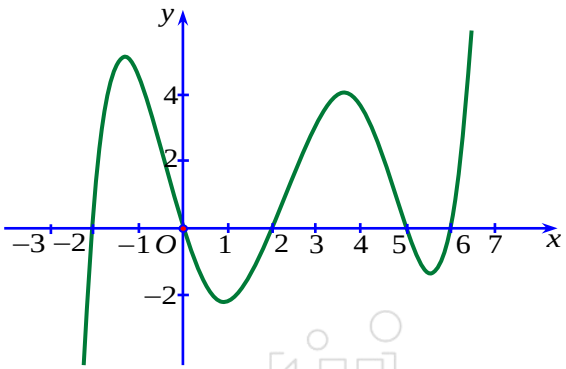


Khi đó tổng số nghiệm của hai phương trình $f(g(x))=0$ và $g(f(x))=0$ là

A. 25. **B.** 22. **C.** 21. **D.** 26.

Câu 76. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:

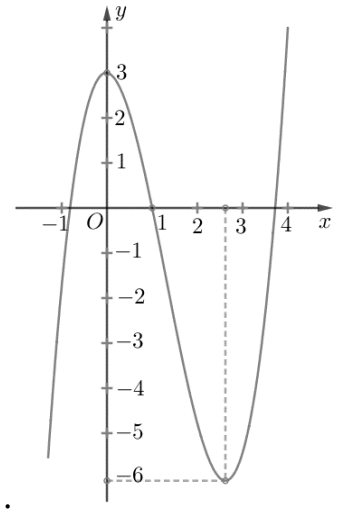


Số nghiệm thuộc đoạn $[-2;6]$ của phương trình $f(x)=f(0)$ là

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 77. [Vận dụng cao].

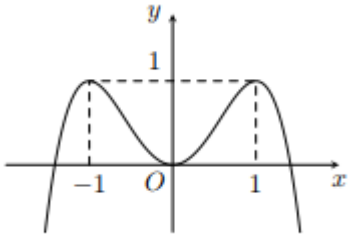
Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới. Đặt $g(x)=f\left[f(x)\right]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$.



A. 2. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 78. [Vận dụng cao].

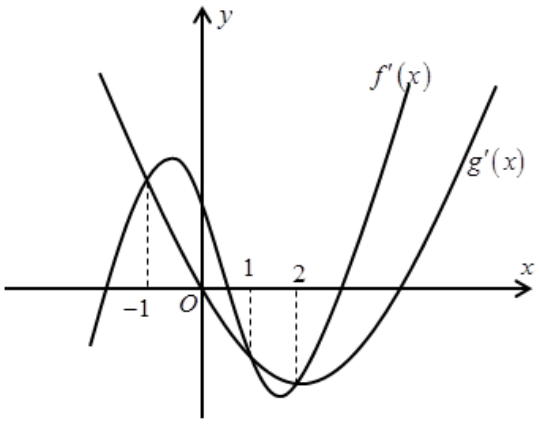
Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có đồ thị như hình vẽ bên đây, trong đó a,b,c,d,e là các hệ số thực. Số nghiệm của phương trình $f\left(\sqrt{f(x)}\right)+f(x)+2\sqrt{f(x)}-1=0$ là



A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 79. [Vận dụng cao].

Cho các hàm số bậc bốn có phương trình $f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$ và hàm số bậc ba có phương trình $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $(n,n,p,q,r,a,b,c,d\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $f(0)=g(0)$. Các hàm số $f'(x),g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây

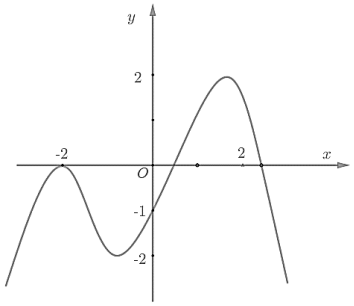


Tập nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ có số phần tử là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 80. [Vận dụng cao].

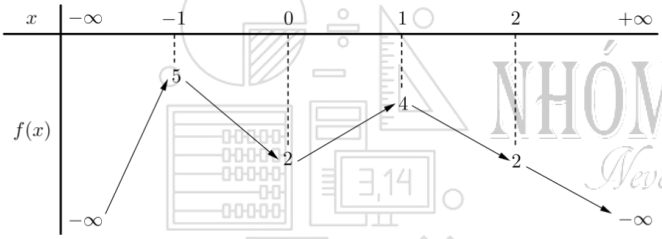
Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp nghiệm của phương trình $f\left(f(x)\right)+1=0$ có bao nhiêu phần tử?



A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 9.

Câu 81. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên

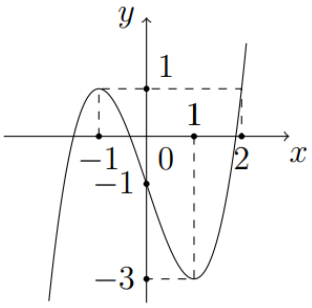


Phương trình $f\left(\sqrt{2x-x^2}\right)=3$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 82. [Vận dụng cao].

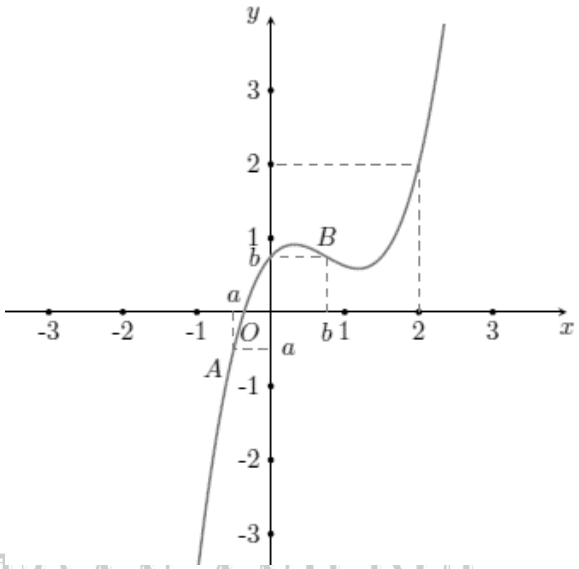
Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $f\left[f(\cos x)-1\right]=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$?



A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 83. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ:

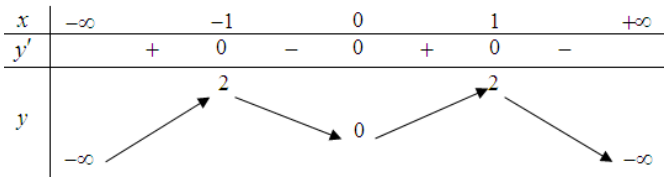


Số nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};3\pi\right)$ của phương trình $f(\cos x+1)=\cos x+1$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 84. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



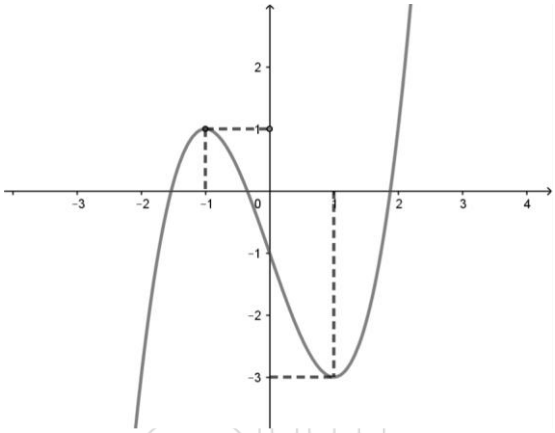
Số nghiệm thuộc khoảng $(-\infty;\ln 2)$ của phương trình $2019f\left(1-e^x\right)-2021=0$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

NHÓM TOÁN ANH DUI
Never get anywhere unless you try

Câu 85. [Vận dụng cao].

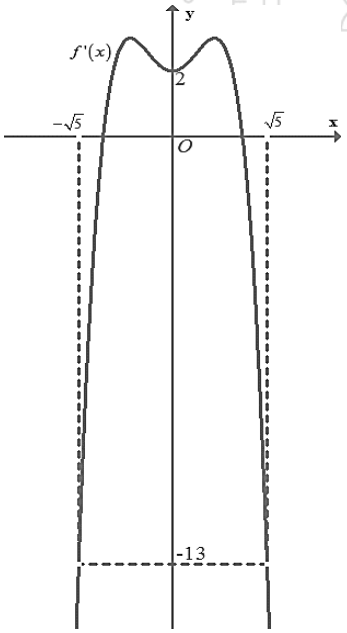
Cho $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc 3 và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi phương trình $f\left(f(\cos x)-1\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0;3\pi]$?



A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 86. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x)=2f(x)+2x^3-4x-3m-6\sqrt{5}$ với m là số thực. Để $g(x)\le 0,\forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ thì điều kiện của m là



A. $m\ge\frac{2}{3}f\left(-\sqrt{5}\right)-4\sqrt{5}$.

B. $m\le\frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$.

C. $m\le\frac{2}{3}f(0)-2\sqrt{5}$.

D. $m\ge\frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$.

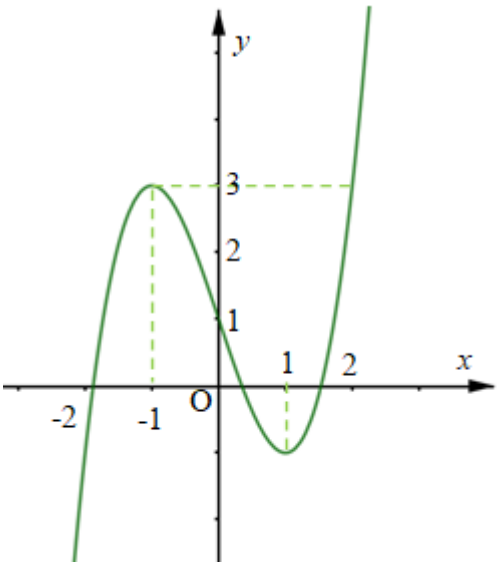
Câu 87. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x)=f\left(f(x)-1\right)$. Số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là

A. 6. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 8.

Câu 88. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên

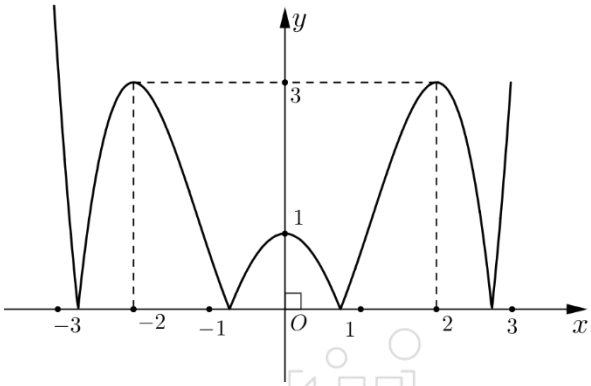


Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{7\pi}{2}\right]$ của phương trình $f\left(f(\cos x)\right)=0$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 89. [Vận dụng cao].

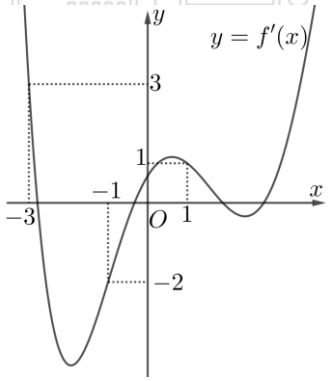
Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm thuộc đoạn $[2017\pi;2020\pi]$ của phương trình $3f(2\cos x)=8$.



A. 8. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 90. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình sau.



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình

$$2f(\sin x-2)-\frac{2\sin^3 x}{3}+\sin x>m+\frac{5\cos 2x}{4}$$

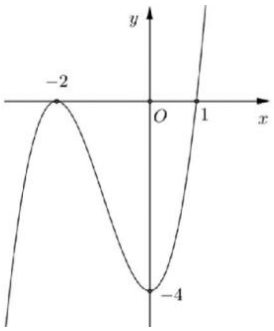
nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $m\le 2f(-3)+\frac{11}{12}$. **B.** $m<2f(-1)+\frac{19}{12}$.

C. $m\le 2f(-1)+\frac{19}{12}$. **D.** $m<2f(-3)+\frac{11}{12}$.

Câu 91. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình dưới đây

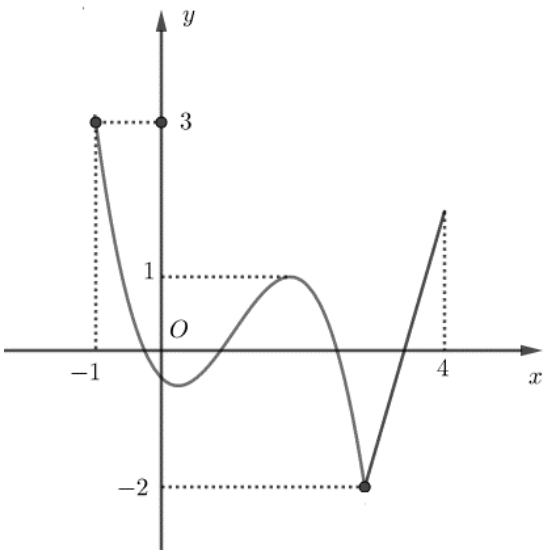


Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-5;5)$ để phương trình $f^2(x)-(m+4)|f(x)|+2m+4=0$ có 6 nghiệm phân biệt

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 92. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;4]$ và có đồ thị như hình vẽ.

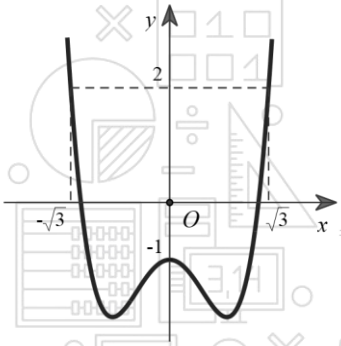


Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10;10]$ để bất phương trình $|f(x)+m|<2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1;4]$.

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 93. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Cho bất phương trình $3f(x)\ge x^3-3x+m$ (m là tham số thực). Điều kiện cần và đủ để bất phương trình $3f(x)\ge x^3-3x+m$ đúng với mọi $x\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ là



A. $m\ge 3f(1)$. **B.** $m\ge 3f\left(-\sqrt{3}\right)$.

C. $m\le 3f(0)$. **D.** $m\le 3f\left(\sqrt{3}\right)$.

Câu 94. [Vận dụng cao].

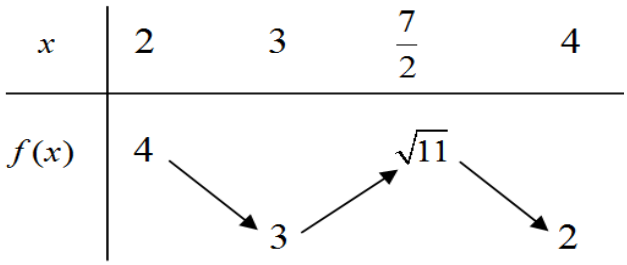
Cho hàm số $f(x)=x^3+x+2$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m}\right)=-x^3-x+2$ có nghiệm $x\in[-1;2]$?

A. 1750. **B.** 1748.

C. 1747. **D.** 1746.

Câu 95. [Vận dụng cao].

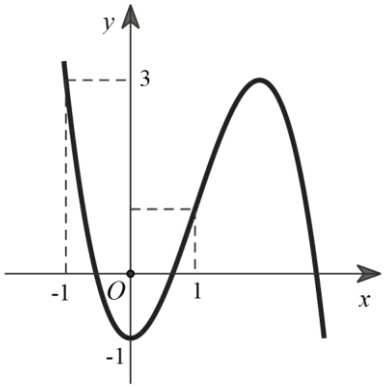
Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[2;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x+2\sqrt{x^2-2x}=m.f(x)$ có nghiệm thuộc đoạn $[2;4]$?



A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 96. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



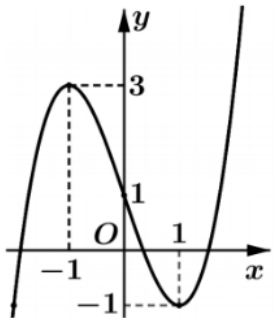
Số giá trị nguyên của m để phương trình $f^2(\cos x)+(m-2019)f(\cos x)+m-2020=0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;2\pi]$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Câu 97. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết $f(-1)=1; f\left(-\frac{1}{e}\right)=2$. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $f(x)<\ln(-x)+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-1;\frac{-1}{e}\right)$.

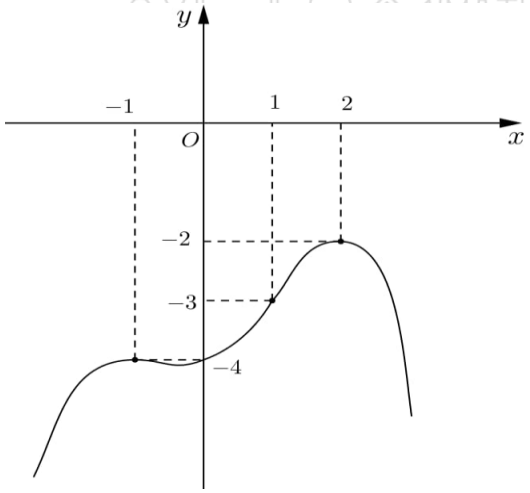


A. $m\geq 2$. **B.** $m\geq 3$.

C. $m>2$. **D.** $m>3$.

Câu 98. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Số các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$$16.8^{f(x)}\leq\left(-m^2+5m\right).4^{f(x)}-\left(4-f^2(x)\right).16^{f(x)}$$

nghiệm đúng với mọi số thực x là

A. 3. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 99. [Vận dụng cao].

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[-2;4]$ và có bảng biến thiên như sau

x	-2		0		1		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	2	↘		↘		↗	6
	-3				$1{,}5$		1		

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases}\frac{9}{x^2}-4\geq 0\\ 6f(-2x+1)-8x^3+6x-m=0\end{cases}$ có ba nghiệm phân biệt?

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never give up anywhere unless you try

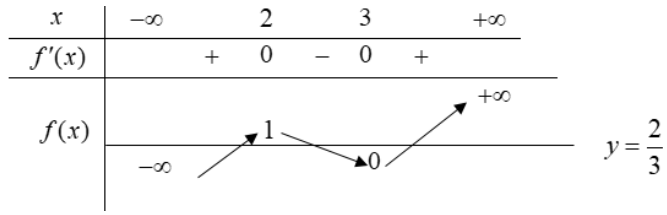
ĐÁP ÁN

i \ j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	C	D	C	A	B	C	D	D
1	C	A	A	A	C	A	C	B	A	C
2	A	B	A	C	B	A	B	B	C	A
3	A	B	B	D	D	C	C	C	A	C
4	A	C	C	B	C	C	B	B	D	C
5	A	A	B	A	C	B	A	C	C	D
6	C	B	C	C	D	D	C	B	C	B
7	D	C	B	C	A	B	B	B	B	B
8	D	B	C	C	B	D	D	C	B	D
9	C	C	C	D	A	C	C	B	D	D

Ghi chú: Đáp án là sự kết hợp giữa dòng i và cột j. Ví dụ: **Câu 23C** (giao của dòng 2 và cột 3).

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Ta có: $3f(x)-2=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2}{3}$



Căn cứ vào bảng biến thiên thì phương trinh $3f(x)-2=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2}{3}$ có 3 nghiệm phân biệt.

Đáp án C.

Câu 2. Ta có: $2f(x)-3=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{3}{2}$.

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên của $f(x)$ ta có số giao điểm của đồ thị là 4.

Đáp án C.

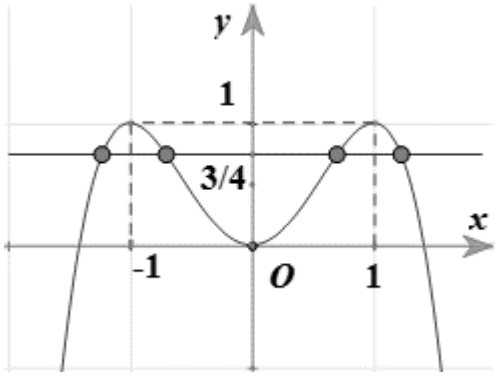
Câu 3. Ta có: $3f(x)+4=0 \Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{4}{3}$ $(*)$

$(*)$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-\dfrac{4}{3}$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy $(*)$ có 3 nghiệm.

Đáp án D.

Câu 4. Ta có: $4f(x)-3=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{3}{4}$



Đường thẳng $y=\dfrac{3}{4}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 4 điểm phân biệt nên phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Đáp án C.

Câu 5. Ta có: $2f(x)-3=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{3}{2}$.

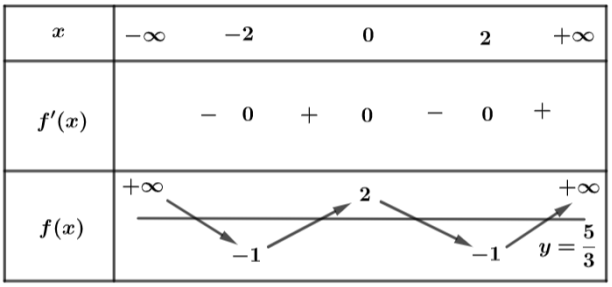
Số nghiệm thực của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$.

Từ bảng biến thiên đã cho của hàm số $f(x)$, ta thấy đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt.

Do đó phương trình (1) có ba nghiệm thực phân biệt.

Đáp án A.

Câu 6. Bảng biến thiên



Xét phương trình $3f(x)-5=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{5}{3}$.

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ và đường thẳng $d: y = \frac{5}{3}$. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt.

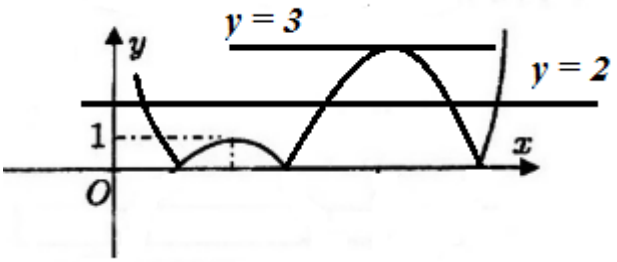
Đáp án B.

Câu 7. *Đồ thị $y = |f(x)|$

- Bước 1: Giữ nguyên phần đồ thị của $y = f(x)$ nằm phía trên Ox

- Bước 2: Lấy đối xứng phần đồ thị của $y = f(x)$ nằm phía dưới Ox qua trục hoàn.

- Bước 3: Xóa phần đồ thị của $y = f(x)$ nằm phía dưới trục hoành



Số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 2$ cũng chính là số giao điểm cũng đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = 2$. Dựa vào hình vẽ trên, ta thấy có 4 giao điểm.

***Cách giải khác:**

$|f(x)| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 2 \\ f(x) = -2 \end{array}\right.$, dựa vào đồ thị suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Đáp án C.

Câu 8. Dựa vào hình dáng của đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ta thấy đây là đồ thị của hàm số bậc bốn trùng phương có 3 điểm cực trị nên phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

Đáp án D.

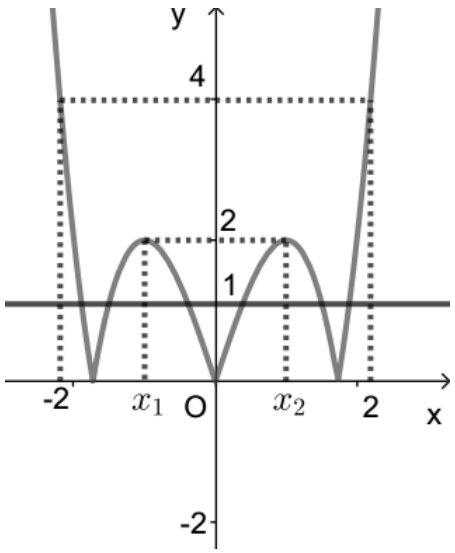
Câu 9. Ta có: $3f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{3}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y = \frac{5}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt thuộc đoạn $[-2;4]$.

Do đó phương trình $3f(x) - 5 = 0$ có ba nghiệm thực.

Đáp án D.

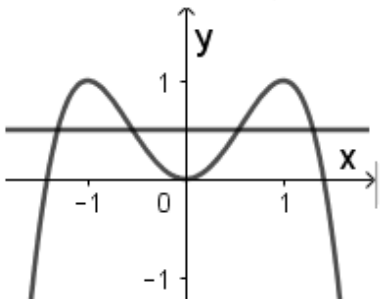
Câu 10. Ta có số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 1$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ với đường thẳng $y = 1$.



Từ hình vẽ ta thấy đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ tại 6 điểm. Vậy số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 1$ là 6.

Đáp án C.

Câu 11. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=\frac{1}{2}$ bằng số giao điểm của đường thẳng $y=\frac{1}{2}$ và có đồ thị hàm số $y=f(x)$.



Ta thấy đường thẳng $y=\frac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số tại 4 điểm nên phương trình $f(x)=\frac{1}{2}$ có 4 nghiệm.

Đáp án A.

Câu 12. Tập xác định: $\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-3=3\left(x^2-1\right); y'=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$y'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$y(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Đáp án A.

Câu 13. Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:

$$x^3+3x^2=3x^2+3x\Leftrightarrow x^3-3x=0.$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt{3}\\x=-\sqrt{3}\end{array}\right..$$

Hai đồ thị đã cho cắt nhau tại 3 điểm.

Đáp án A.

Câu 14. Xét phương trình hoành độ giao điểm $-x^3+3x=0$.

$$\Leftrightarrow x\left(-x^2+3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right..$$

Vậy có 3 giao điểm.

Đáp án C.

Câu 15. Dễ thấy phương trình $(x-2)\left(x^2+1\right)=0$ có 1 nghiệm $x=2\Rightarrow(C)$ cắt trục hoành tại một điểm.

Đáp án A.

Câu 16. Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$-2x+2=x^3+x+2\Leftrightarrow x^3+3x=0\Leftrightarrow x=0$$

Với $x_0=0\Rightarrow y_0=2$.

Đáp án C.

Câu 17. Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y=x^3-x^2+1$ và $y=x^2+1$:

$$x^3-x^2+1=x^2+1\Leftrightarrow x^3-2x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$$

Với $x=0\Rightarrow y=1$.

Với $x=2\Rightarrow y=5$.

Nên hai đồ thị trên có hai giao điểm là $(0;1)$ và $(2;5)$.

Vậy $P=2$.

Đáp án B.

Câu 18. Số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $y=2$ là số nghiệm của phương trình sau:

$$x^4-3x^2=2 \Leftrightarrow x^4-3x^2-2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \\ x^2=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}}.$$

Phương trình hoành độ giao điểm có 2 nghiệm nên số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng là 2.

Đáp án A.

Câu 19. Trục tung có phương trình: $x=0$. Thay $x=0$ vào $y=-x^4-3x^2+1$ được: $y=1$.

Đáp án C.

Câu 20. Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^3-2x^2+2x+1=1-x$.

$$\Leftrightarrow x^3-2x^2+3x=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2-2x+3\right)=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Đáp án A.

Câu 21. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành là:

$$-2x^3+5x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}} \end{array}\right. \text{ có } 3 \text{ giao điểm.}$$

Chú ý: Ở bài toán này hoàn toàn có thể giải trực tiếp bằng Casio với phương trình $-2x^3+5x=0$, nhưng chắc chắn thao tác bấm máy sẽ chậm hơn việc tính tay (thậm chí bài này không cần nháp khi mà kết quả đã hiện ra luôn khi ta đọc đề xong). Vì vậy, Casio là điều không cần thiết với câu hỏi này.

Đáp án B.

Câu 22. Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x+2=x^3-x^2+x+4 \Leftrightarrow x^3-x^2+2=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow y_0=1$$

Đáp án A.

Câu 23. Trục tung có phương trình $x=0$, ta thay $x=0$ lần lượt vào các phương án thì chỉ có phương án C cho ta $y=-\dfrac{1}{2}<0$.

Đáp án C.

Câu 24. Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{2x+4}{x-1}=x+1\left(x\neq 1\right) \Leftrightarrow x^2-2x-5=0 \ (*)$$

Khi đó $x_I=\dfrac{x_M+x_N}{2}=1$.

Chú ý: có thể giải $(*)$, tìm được

$$x_M=1+\sqrt{6}, x_N=1-\sqrt{6} \Rightarrow x_I=1.$$

Đáp án B.

Câu 25. Ta có (C) cắt trục hoành $(y-0)$ tại điểm $M(-1;0)$.

Trong các đường thẳng d_1,d_2,d_3,d_4 chỉ có $M\in d_3$, có nghĩa là có 1 đường thẳng đi qua $M(-1;0)$.

Đáp án A.

Câu 26. Cách 1: Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{x^4-4}+5=x \Leftrightarrow \sqrt{x^4-4}=x-5$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never eat anywhere you can't try

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 5 \\ x^4 - 4 = (x-5)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 5 \\ x^4 - x^2 + 10x - 29 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Do $x \ge 5$ nên $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) > 0$ và $10x - 29 > 0$.

Vì vậy $(*)$ vô nghiệm.

Như vậy phương trình $\sqrt{x^4 - 4} + 5 = x$ vô nghiệm hay đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^4 - 4} + 5$ và đường thẳng $y = x$ không có giao điểm nào.

Cách 2:

Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{x^4 - 4} + 5 = x$.

Ta có điều kiện xác định $\left[\begin{array}{l} x \ge \sqrt{2} \\ x \le -\sqrt{2} \end{array}\right.$

Với điều kiện trên ta có:

$$\sqrt{x^4 - 4} + 5 = x \Leftrightarrow \sqrt{x^4 - 4} + 5 - x = 0$$

Xét hàm số $h(x) = \sqrt{x^4 - 4} + 5 - x$.

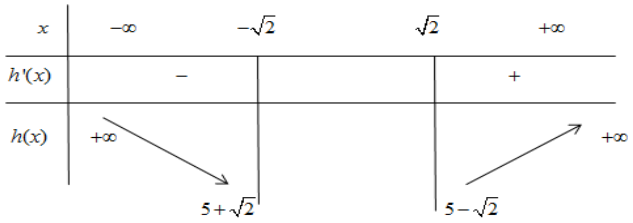
Ta có: $h'(x) = \dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4 - 4}} - 1;$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 = \sqrt{x^4 - 4}$

Với $x \ge \sqrt{2}$ ta có $2x^3 > \sqrt{x^4 - 4}$.

Với $x \le -\sqrt{2}$ ta có $2x^3 < \sqrt{x^4 - 4}$

Ta có bảng biến thiên:



Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^4 - 4} + 5 = x$ là số giao điểm của đồ thị $y = h(x) = \sqrt{x^4 - 4} + 5 - x$ và trục hoành $y = 0$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình $\sqrt{x^4 - 4} + 5 = x$ vô nghiệm hay đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^4 - 4} + 5$ và đường thẳng $y = x$ không có giao điểm nào.

Đáp án B.

Câu 27. Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3mx^2 + 2m = 0 \quad (*)$

Phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có ba nghiệm lập thành cấp số cộng $\longrightarrow$ phương trình có một nghiệm $x_0 = -\dfrac{b}{3a}$.

Suy ra phương trình $(*)$ có một nghiệm $x = m$.

Thay $x = m$ vào phương trình $(*)$, ta được:

$$m^3 - 3m.m^2 + 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow -2m^3 + 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \pm 1 \\ m = 0 \end{array}\right.$$

Thử lại:

- Với $m = 1$, ta được

$$x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 - \sqrt{3} \\ x = 1 \\ x = 1 + \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Do đó $m=1$ thỏa mãn.

● Với $m=-1$, ta được

$$x^3+3x^2-2=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1+\sqrt{3} \\ x=-1 \\ x=-1-\sqrt{3} \end{array}\right. .$$

Do đó $m=-1$ thỏa mãn.

● Với $m=0$, ta được $x^3=0 \Leftrightarrow x=0$.

Do đó $m=0$ không thỏa mãn.

Vậy $m=\pm 1$ là hai giá trị cần tìm.

Đáp án B.

Câu 28. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là $x^3-3x^2+2=m(x-1)\ (1)$

Phương trình $(1) \Leftrightarrow x^3-3x^2-mx+2+m=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-2x-m-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ f(x)=x^2-2x-m-2=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ f(x)=x^2-2x-m-2=0 \quad (2) \end{array}\right.$$

Phương trình (1) luôn có nghiệm $x=1$, vậy để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt thì phương trình (2) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta'=1+m+2>0 \\ f(1)\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m>-3 \\ m\neq -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow m>-3.$$

Vậy $m>-3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đáp án C.

Câu 29. Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và $y=x^3-x+3$:

$$x^3-x+3=2x+1 \Leftrightarrow x^3-3x+2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \Rightarrow y=-3 \\ x=1 \Rightarrow y=3 \end{array}\right.$$

Vậy $A(1;3); B(-2;-3) \Rightarrow x_B+y_B=-5$.

Đáp án A.

Câu 30. Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (C_m)

$$x^3+3mx^2-m^3=m^2x+2m^3$$

$$\Leftrightarrow x^3+3mx^2-m^2x-3m^3=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3-m^2x\right)+\left(3mx^2-3m^3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2-m^2\right)+3m\left(x^2-m^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+3m)\left(x^2-m^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3m \\ x=m \\ x=-m \end{array}\right.$$

Để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1,x_2,x_3 \Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó,

$$x_1^4+x_2^4+x_3^4=83 \Leftrightarrow m^4+(-m)^4+(-3m)^4=83$$

$$\Leftrightarrow 83m^4=83 \Leftrightarrow m=\pm 1$$

Vậy $m_1=1, m_2=-1$ hay $m_1+m_2=0$.

Đáp án A.

Câu 31. Ta có: $y=x^3-3x^2$

$$\Rightarrow y'=3x^2-6x;$$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$ cắt đường thẳng $y=m$ tại ba điểm phân biệt khi $-4<m<0$.

Đáp án B.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never quit anywhere unless you try

Câu 32. Ta có phương trình hoành độ giao điểm là: $x^3-3x^2+x+2=mx-m+1$

$\Leftrightarrow x^3-3x^2+x-mx+m+1=0 \quad (1)$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-2x-m-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x-m-1=0 \end{array}\right.$.

Để đường thẳng cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt thì phương trình $x^2-2x-m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

Hay $\left\{\begin{array}{l} 1+m+1>0 \\ 1-2-m-1\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m>-2 \\ m\neq -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow m>-2$.

Với $m>-2$ thì phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt là $1, x_1, x_2$ (x_1, x_2 là nghiệm của $x^2-2x-m-1=0$).

Mà $\dfrac{x_1+x_2}{2}=1$ suy ra điểm có hoành độ $x=1$ luôn là trung điểm của hai điểm còn lại. Nên luôn có 3 điểm A,B,C thoả mãn $AB=BC$. Vậy $m>-2$.

Đáp án B.

Câu 33. Giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục tung là $B\left(0;2m^2+4\right)$

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị đã cho với trục hoành là:

$$x^3+\left(m^2-2\right)x+2m^2+4=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)\left(x^2-2x+m^2+2\right)=0$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ (x-1)^2+m^2+1=0 \quad (vn) \end{array}\right.$

Giao điểm của đồ thị đã cho với trục hoành là $A(-2;0)$.

Diện tích tam giác ABC là: $S=\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{1}{2}.2.\left(2m^2+4\right)=8\Rightarrow m=\pm\sqrt{2}$.

Đáp án D.

Câu 34. Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình $x^3-3x^2-m+2=-mx$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-2x+m-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x+m-2=0 \end{array}\right.$

Đặt nghiệm $x_2=1$. Từ giải thiết bài toán trở thành tìm m để phương trình có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng.

Khi đó phương trình $x^2-2x+m-2=0$ phải có 2 nghiệm phân biệt (vì theo Vietè rõ ràng: $x_1+x_3=2=2x_2$).

Vậy ta chỉ cần $\Delta'=1-(m-2)>0\Leftrightarrow m<3$.

Đáp án D.

Câu 35. Phương trình hoành độ giao điểm chung là: $x^3+2mx^2+3(m-1)x+5=-x+5$

$\Leftrightarrow x^3+2mx^2+(3m-2)x=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+2mx+3m-2=0 \ (1) \end{array}\right.$

Đường thẳng $y=-x+5$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+3(m-1)x+5$ tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta'=m^2-3m+2>0 \\ 3m-2\neq 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<1 \end{array}\right. \\ m\neq \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} m\neq \dfrac{2}{3} \\ m<1 \end{array}\right. \\ m>2 \end{array}\right.$.

Đáp án C.

Câu 36. +) Ta có: $f(x)=x-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Vì: $f(x)$ là hàm bậc ba nên:

$f(x)-(x-1)=a(x+1)(x-1)(x-3)$

$\Rightarrow f(x)=a(x+1)(x-1)(x-3)+x-1;$

Mà: $f(0)=2\Leftrightarrow a=1.$

$\Rightarrow f(x)=(x+1)(x-1)(x-3)+x-1.$

+) $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1=x_2\\(x+1)(x-3)+1=0\ (2)\end{array}\right.$.

Vì: x_1,x_3 là các nghiệm của (2) nên ta có $x_1x_3=-2$.

Đáp án C.

Câu 37. +) Gọi đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ là (C_m) và đồ thị hàm số $y=x+4$ là (d).

+) Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và (d) là

$x^3+2mx^2+(m+3)x+4=x+4$

$\Leftrightarrow x^3+2mx^2+(m+2)x=0\ (*)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2+2mx+m+2=0\end{array}\right.$

+) Gọi $g(x)=x^2+2mx+m+2$.

+) (d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\Delta'_g>0\\g(0)\neq0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m^2-m-2>0\\m+2\neq0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>2\end{array}\right.\ (a).\\m\neq-2\end{array}\right.$

+) $x=0$ là hoành độ điểm A, hoành độ điểm B, C là hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình $g(x)=0$.

+) $BC^2=(x_2-x_1)^2+\left[(x_2+4)-(x_1+4)\right]^2$

$=2(x_2-x_1)^2$ (do B, C thuộc đường thẳng (d).

$=2\left[(x_2+x_1)^2-4x_1x_2\right]=8(m^2-m-2)$

+) Viết phương trình đường thẳng (d) dưới dạng $x-y+4=0$, ta có

$d(I,(d))=\dfrac{|1-3+4|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$

+) $S_{IBC}=8\sqrt{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}BC.d(I,(d))=8\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{4}BC^2.\left[d(I,(d))\right]^2=128$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{4}8(m^2-m-2).2=128.$

$\Leftrightarrow m^2-m-34=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{1+\sqrt{137}}{2}\\m=\dfrac{1-\sqrt{137}}{2}\end{array}\right.$ (thỏa điều kiện (a))

+) Vậy tổng tất cả các giá trị m là 1.

Đáp án C.

Câu 38. Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình

NHÓM TOÁN ANH DÚI

$$x^3+2mx^2+(m+3)x+4=x+4$$
$$\Leftrightarrow x^3+2mx^2+(m+2)x=0 \quad .$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+2mx+(m-2)=0\ (*) \end{array}\right.$$

Đường thẳng d cắt đồ thị hàm số (1) tại 3 điểm phân biệt khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 .

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m^2-m-2>0 \\ m+2\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \\ m\neq -2 \end{array}\right. .$$

Giả sử $B(x_1;x_1+4);\ C(x_2;x_2+4)$ với $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình $(*)$ khi đó:

$$BC=\sqrt{2(x_1-x_2)^2}=\sqrt{2(x_1+x_2)^2-8x_1.x_2}$$
$$=\sqrt{8m^2-8m-16} .$$

$$S_{MBC}=\frac{1}{2}BC.d(M,d)=\frac{1}{2}.BC.\frac{|1-3+4|}{\sqrt{2}}=4$$
$$\Rightarrow BC=4\sqrt{2}$$

Ta có: $m^2-m-6=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=3 \end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện ta có $m=3$.

Đáp án A.

Câu 39. Ta có phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3+2mx^2+3(m-1)x+5=-x+5$$
$$\Leftrightarrow x^3+2mx^2+(3m-2)x=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+2mx+3m-2=0\ (1) \end{array}\right. .$$

Yêu cầu bài toán tương đương phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, khác 0.

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0^2+2m.0+3m-2\neq 0 \\ \Delta'=m^2-3m+2>0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m\neq \frac{2}{3} \\ \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} m\neq \frac{2}{3} \\ m<1 \end{array}\right. \\ m>2 \end{array}\right. .$$

Đáp án C.

Câu 40. Hoành độ giao điểm của (d) và đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình:

$$x^3+2(m-2)x^2+(8-5m)x+m-5=x-m+1$$
$$\Leftrightarrow (x-2)\left[x^2+(2m-2)x-m+3\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_3=2 \\ x^2+(2m-2)x-m+3=0\ (1) \end{array}\right. .$$

Đường thẳng (d) cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ khác 2

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta'=(m-1)^2+(m-3)>0 \\ 4+(2m-2).2-m+3\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \\ m\neq -1 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \end{array}\right. (2).$$

Khi đó, $\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=-(2m-2) \\ x_1x_2=-m+3 \end{array}\right.$.

Theo giả thiết $x_1^2+x_2^2+x_3^2=20$

$$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2+x_3^2=20$$
$$\Leftrightarrow (2m-2)^2+2(m-3)+4=20$$
$$\Leftrightarrow 2m^2-3m-9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-\frac{3}{2} \end{array}\right. \text{(thỏa mãn).}$$

NHÓM TOÁN ANH DÚI Never get anywhere unless you try

Vậy giá trị lớn nhất của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là 3.

Đáp án A.

Câu 41. Hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là nghiệm của phương trình

$$-2x^3-3m^2x^2+\left(m^3+2m\right)x+2=0.\ (*)$$

Giả sử đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm có hoành độ $x_1,\ x_2,\ x_3$.

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} y&=-2\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\\ &=-2x^3+2\left(x_1+x_2+x_3\right)x^2-\ldots\\ &\quad\ldots-2\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)x+2x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Đồng nhất thức ta được

$$\begin{cases} 2\left(x_1+x_2+x_3\right)=-3m^2\\ -2\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)=m^3+2m\\ 2x_1x_2x_3=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{3m^2}{2} & (1)\\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-\dfrac{m^3+2m}{2} & (2)\\ x_1x_2x_3=1 & (3) \end{cases}$$

Vì $x_1,\ x_2,\ x_3$ lập thành cấp số nhân nên

$$x_1x_3=x_2^2. \qquad (4)$$

Từ (2) và (3): $x_2=1$. Thay vào phương trình $(*)$ rút ra được $\left[\begin{array}{l} m=0\\ m=1\\ m=2 \end{array}\right.$.

Với $m=0\Rightarrow$ phương trình $(*)$:

$-2x^3+2=0\Leftrightarrow x=1$ (không thỏa mãn).

Với $m=1\Rightarrow$ phương trình $(*)$:

$$-2x^3-3x^2+3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_1=-2\\ x_2=1\\ x_3=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$ (thỏa mãn).

Với $m=2\Rightarrow$ phương trình $(*)$:

$$x^3+6x^2-6x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-7-\sqrt{45}}{2}\\ x_2=1\\ x_3=\dfrac{-7+\sqrt{45}}{2} \end{array}\right.$$

(thỏa mãn).

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn.

Đáp án C.

Câu 42. Cách 1:

$$d\left(O,BC\right)=\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$\begin{aligned} BC&=\sqrt{\left(x_B-x_C\right)^2+\left(y_b-y_c\right)^2}\\ &=\sqrt{\left(m^2+1\right)\left(x_B-x_C\right)^2}\\ &=\sqrt{\left(m^2+1\right)\left[\left(x_B+x_C\right)^2-4x_Bx_C\right]}\\ &=\sqrt{\left(m^2+1\right)4m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{\Delta OBC}&=\frac{1}{2}d\left(O,BC\right).BC\\ &=m\sqrt{m}=64\Leftrightarrow m=16. \end{aligned}$$

Cách 2:

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\begin{aligned} &x^3-3x^2+4=mx+m\\ \Leftrightarrow&\left(x+1\right)\left(x^2-4x+4-m\right)=0\\ \Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l} x=-1\\ \left(x-2\right)^2=m(*) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Để d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt phương trình

$(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m\neq 9 \end{cases}$

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2-\sqrt{m} \Rightarrow B\left(2-\sqrt{m};3m-m\sqrt{m}\right) \\ x=2+\sqrt{m} \Rightarrow C\left(2+\sqrt{m};3m+m\sqrt{m}\right) \end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{OB}=\left(2-\sqrt{m};3m-m\sqrt{m}\right)$$

$$\overrightarrow{OC}=\left(2+\sqrt{m};3m+m\sqrt{m}\right)$$

$$\Rightarrow S_{\Delta OBC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]\right|=m\sqrt{m}=64\Rightarrow m=16.$$

Đáp án C.

Câu 43. Cách 1:

Phương trình hoành độ giao điểm là

$$x^3-8x^2+8x=x^2+(8-a)x-b$$
$$\Leftrightarrow x^3-9x^2+ax+b=0 \ (1)$$

Gọi m,n,p là 3 nghiệm của phương trình (1)

ta có $\begin{cases} m+n+p=9 \\ mn+np+pm=a \\ mnp=-b \end{cases}$

Do (C) cắt (P) tại ba điểm có hoành độ nằm trong $[-1;5]$ nên $\begin{cases} (m+1)(n+1)(p+1)\geq 0 \\ (5-m)(5-n)(5-p)\geq 0 \end{cases}$.

Hay:

$$\begin{cases} mnp+(mn+np+pm)+(m+n+p)+1\geq 0 \\ -mnp+5(mn+np+pm)-25(m+n+p)+125\geq 0 \end{cases}$$

Cộng vế theo vế của hệ phương trình trên ta có

$$6(mn+np+pm)-24(m+n+p)-124\geq 0$$
$$\Leftrightarrow mn+np+pm\geq 15\Rightarrow a\geq 15.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} mnp\geq -25 \\ mnp\leq -25 \end{cases}\Leftrightarrow mnp=-25\Rightarrow b=25$$

Vậy tích $ab=375$.

Đáp án B.

Cách 2: Phương trình hoành độ giao điểm là

$$x^3-8x^2+8x=x^2+(8-a)x-b$$
$$\Leftrightarrow x^3-9x^2+ax+b=0 \ (1)$$

Khi đó phương trình (1) có 3 nghiệm nằm trong $[-1;5]$.

Đặt $f(x)=x^3-9x^2+ax+b$ suy ra $f'(x)=3x^2-18x+a$. Để phương trình (1) có 3 nghiệm nằm trong $[-1;5]$ thì $f'(x)=3x^2-18x+a=0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[-1;5]\Leftrightarrow a=-3x^2+18x$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[-1;5]$.

Xét hàm số $g(x)=-3x^2+18x$ suy ra $g'(x)=-6x+18$, ta có: $g'(x)=0\Leftrightarrow x=3$.

Bảng biến thiên của $y=g(x)$

x	-1		3		5
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	21	↗	27	↘	15

Từ bảng biến thiên, ta có: $15\leq a<27$ suy ra giá trị nhỏ nhất của a bằng 15 khi $x=5$, khi đó $b=25$.

Vậy tích $ab=375$.

Đáp án B.

Câu 44. $(d):y=-mx+m$, $(C):y=x^3+mx^2+m$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C): $x^3+mx^2+mx=0 \ (1)$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+mx+m=0 \ (2) \end{array}\right.$.

Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (2), $x_3=0$.

(1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt và khác 0.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0, \Delta=m^2-4m \\ m\neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$.

(1) có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa $-1<x_1+x_2+x_3<3$, với $x_1+x_2=-m$, $x_3=0$.

$\Leftrightarrow -1<-m<3$

$\Leftrightarrow -3<m<1$, mà $m\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$, $m\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow m\in\{-2;-1\}$. Vậy có 2 giá trị m.

Đáp án C.

Câu 45. Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và (d) là:

$$x^3+2mx^2+(m+3)x+4=x+4 \ (1)$$

$\Leftrightarrow x^3+2mx^2+(m+2)x=0$

$\Leftrightarrow x.\left[x^2+2mx+(m+2)\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=4 \\ x^2+2mx+m+2=0 \ (2) \end{array}\right.$.

(d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow (1)$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ 0^2+2m.0+m+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m-2>0 \\ m+2\neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-1 \end{array}\right. \\ m\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ \begin{cases} m<-1 \\ m\neq -2 \end{cases} \end{array}\right.$

Khi đó, (2) có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 tương ứng cũng là hoành độ của B và C.

$\Rightarrow B(x_1;x_1+4)$ và $C(x_2;x_2+4)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{KB}=(x_1-1;x_2+1)$ và $\overrightarrow{KC}=(x_2-1;x_2+1)$

$\Rightarrow S_{\Delta KBC}=\dfrac{\left|(x_1-1)(x_2+1)-(x_2-1)(x_1+1)\right|}{2}=|x_1-x_2|$.

Theo đề bài: $S_{\Delta KBC}=8\sqrt{2}\Leftrightarrow |x_1-x_2|=8\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2=128\Leftrightarrow S^2-4P=128$

$\Leftrightarrow (-2m)^2-4(m+2)=128\Leftrightarrow m=\dfrac{1\pm\sqrt{137}}{2}$

(nhận).

Vậy tất cả các giá trị m thỏa đề là $m=\dfrac{1\pm\sqrt{137}}{2}$

Đáp án C.

Câu 46. Vì x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình bậc ba $f(x)=0$

$\Rightarrow f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Ta có: $f'(x)=(x-x_1)(x-x_2)+...$

$...+(x-x_2)(x-x_3)+(x-x_1)(x-x_3).$

Khi đó: $\begin{cases} f'(x_1)=(x_1-x_2)(x_1-x_3) \\ f'(x_2)=(x_2-x_3)(x_2-x_1) \\ f'(x_3)=(x_3-x_1)(x_3-x_2) \end{cases}$

Suy ra $P=\dfrac{1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+...$

$...+\dfrac{1}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\dfrac{1}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$

$=\dfrac{(x_2-x_3)-(x_1-x_3)+(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)}=0.$

Đáp án B.

Câu 47. Từ giả thuyết bài toán ta giả sử $f(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)+x^2\ (a\neq 0)$

Ta có: $AB: y=3x-2$, $AC: y=4x-3$, $BC: y=5x-6$.

Khi đó:

Hoành độ của M là nghiệm của phương trình:

$$a(x_M-1)(x_M-2)(x_M-3)+{x_M}^2=3x_M-2$$

$$\Leftrightarrow a(x_M-1)(x_M-2)(x_M-3)+...$$
$$...+(x_M-1)(x_M-2)=0$$

$$\Leftrightarrow a(x_M-3)+1=0 \Leftrightarrow x_M=3-\frac{1}{a}.$$

Hoành độ của N là nghiệm của phương trình:

$$a(x_N-1)(x_N-2)(x_N-3)+{x_N}^2=4x_N-3$$

$$\Leftrightarrow a(x_N-1)(x_N-2)(x_N-3)+...$$
$$...+(x_N-1)(x_N-3)=0$$

$$\Leftrightarrow a(x_N-2)+1=0 \Leftrightarrow x_N=2-\frac{1}{a}.$$

Hoành độ của P là nghiệm của phương trình:

$$a(x_P-1)(x_P-2)(x_P-3)+{x_P}^2=5x_P-6$$

$$\Leftrightarrow a(x_P-1)(x_P-2)(x_P-3)+(x_P-2)(x_P-3)=0$$

$$\Leftrightarrow a(x_P-1)+1=0 \Leftrightarrow x_P=1-\frac{1}{a}.$$

Từ giả thuyết ta có:

$$x_M+x_N+x_P=5 \Leftrightarrow 6-\frac{3}{a}=5 \Leftrightarrow a=3.$$

Do đó: $f(x)=3(x-1)(x-2)(x-3)+x^2$

$f(0)=-18$.

Đáp án B.

NHÓM TOÁN ANH DÚI

Câu 48. Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3-3x^2+2=m(x-1)$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x^2-mx+m+2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-2x-m-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ g(x)=x^2-2x-(m+2)=0\ (*) \end{array}\right.$$

Để hai đồ thị cắt nhau tại ba điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ g(1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1^2+(m+2)>0 \\ 1-2-m-2\neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>-3 \\ m\neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m>-3.$$

Gọi x_2, x_3 là hai nghiệm phương trình $(*)$.

Theo định lý Vietè, ta có: $\begin{cases} x_2+x_3=2 \\ x_2.x_3=-(m+2) \end{cases}$.

Theo bài ta có: $x_1^2+x_2^2+x_3^2>5$.

$$\Leftrightarrow 1+x_2^2+x_3^2>5 \Leftrightarrow x_2^2+x_3^2>4$$

$$\Leftrightarrow (x_2+x_3)^2-2x_2x_3>4$$
$$\Leftrightarrow 4+2(m+2)>4 \Leftrightarrow m>-2.$$

So sánh với điều kiện ở trên suy ra $m>-2$.

Kết luận: $m>-2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đáp án D.

Câu 49. Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-9x+2m+1$ với trục Ox chính là nghiệm của phương trình:

$$x^3+3x^2-9x+2m+1=0.$$

$$\Leftrightarrow -x^3-3x^2+9x=2m+1$$

Xét hàm số $f(x)=-x^3-3x^2+9x$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$$f'(x)=-3x^2-6x+9,\ f'(x)=0$$
$$\Leftrightarrow -3x^2-6x+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-27	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-9x+2m+1$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y=2m+1$ cắt đồ thị hàm số $f(x)=-x^3-3x^2+9x$ tại hai điểm phân biệt.

Từ bảng biến thiên suy ra : $\left[\begin{array}{l} 2m+1=5 \\ 2m+1=-27 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-14 \end{array}\right. \Rightarrow S=\{-14;2\}.$$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Tổng của các phần tử thuộc tập S là :

$T=-14+2=-12$.

Đáp án C.

Câu 50. Ta có phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y=x+m$ và đường cong $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$. Tức là nghiệm của phương trình:

$$x+m=\frac{2x-3}{x-1}\Leftrightarrow (x+m)(x-1)=2x-3\ (x\neq 1)$$

$$\Leftrightarrow x^2+mx-x-m=2x-3\Leftrightarrow x^2+(m-3)x-m+3=0\ \ (*)$$

Ta có: $\Delta=(m-3)^2-4(-m+3)$

$=m^2-6m+9+4m-12=m^2-2m-3$.

Để đường thẳng $y=x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ 1^2+(m-3).1-m+3\neq 0\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2m-3>0\\ 1\neq 0\ \ (ld)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<-1\\ m>3\end{cases}$$

Theo giả thiết: $-2020\le m\le 2020$ và $\begin{cases}m<-1\\ m>3\end{cases}$

nên $\begin{cases}-2020\le m<-1\\ 3<m\le 2020\end{cases}$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ và $-2020\le m<-1$, suy ra có $\dfrac{-2-(-2020)}{1}+1=2019$ giá trị nguyên m.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ và $3<m\le 2020$, suy ra có $\dfrac{2020-4}{1}+1=2017$ giá trị nguyên m.

Tóm lại có tất cả $2019+2017=4036$ giá trị nguyên của tham số m.

Đáp án A.

Câu 51. Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x}{1-x}=x-m\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ x^2-mx+m=0\end{cases}\ \ (*)$$

Để có hia điểm phân biệt A,B thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\begin{cases}1-m+m\neq 0\\ m^2-4m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>4\\ m<0\end{cases}$$

Khi đó phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn: $\begin{cases}x_1+x_2=m\\ x_1x_2=m\end{cases}$

Giả sử $A(x_1;x_1-m),B(x_2;x_2-m)$, suy ra:

$\overrightarrow{OA}(x_1;x_1-m),\overrightarrow{OB}(x_2;x_2-m)$

Theo giả thiết góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng 60^0 suy ra: $\cos(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=\cos 60^0$

$$\Leftrightarrow\frac{\left|x_1x_2+(x_1-m)(x_2-m)\right|}{\sqrt{x_1^2+(x_1-m)^2}\sqrt{x_2^2+(x_2-m)^2}}=\frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|2x_1x_2-m\left(x_1+x_2\right)+m^2\right|}{\sqrt{x_1^2x_2^2+\left(x_1x_2-mx_2\right)^2+x_1^2\left(x_1x_2-m\right)^2+\left[\left(x_1-m\right)\left(x_2-m\right)\right]^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|2m-m^2+m^2\right|}{\sqrt{m^2+\left(m-mx_2\right)^2+\left(m-mx_1\right)^2+\left[x_1x_2-m\left(x_1+x_2\right)+m^2\right]^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|2m\right|}{\sqrt{m^2+\left(m-mx_2\right)^2+\left(m-mx_1\right)^2+\left[m-m^2+m^2\right]^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{2+\left(1-x_2\right)^2+\left(1-x_1\right)^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2+\left(1-x_2\right)^2+\left(1-x_1\right)^2=16$$

$$\Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2-2\left(x_1+x_2\right)=12$$

$$\Leftrightarrow m^2-4m-12=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=6\\m=-2\end{array}\right.$$

Đáp án A.

Câu 52. Hoành độ điểm A và B là nghiệm phương trình: $2x-m^2=\left(x+1\right)\left(m-x\right)$

$\Leftrightarrow x^2+\left(3-m\right)x-m^2-m=0$ suy ra:

$x_A.x_B=-m^2-m;\ x_A+x_B=m-3$

Hoành độ điểm C và D là nghiệm phương trình: $2x-m^2=\left(x+1\right)\left(2-m-x\right)$

$\Leftrightarrow x^2+\left(m+1\right)x-m^2+m-2=0$ suy ra

$x_C.x_D=-m^2+m-2;x_C+x_D=-m-1.$

Mặc khác x_A và x_D là nghiệm của phương trình: $x^2-2x+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_A=-3\\x_D=1\end{array}\right.$. Suy ra:

$m^2+6m+9=5m^2-2m+9\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\\m=2\end{array}\right.$.

Đáp án B.

Câu 53. Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình:

$$x^4-3x^2-2=m\Leftrightarrow x^4-3x^2-2-m=0\quad (1).$$

Vì $m>0\Leftrightarrow -2-m<0$ hay phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn:

$x^2=\frac{3+\sqrt{4m+17}}{2}\Rightarrow x_1=\sqrt{\frac{3+\sqrt{4m+17}}{2}}$ và $x_2=-\sqrt{\frac{3+\sqrt{4m+17}}{2}}$.

Khi đó: $A\left(x_1;m\right)$, $B\left(x_2;m\right)$.

Ta có tam giác OAB vuông tại O, trong đó O là gốc tọa độ $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow x_1.x_2+m^2=0$.

$$\Leftrightarrow \frac{3+\sqrt{4m+17}}{2}=m^2$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}2m^2-3\ge 0\\4m^4-12m^2-4m-8=0\end{array}\right.$$

$$\xleftarrow[2m^2-3\ge 0]{m>0} m=2$$

Vậy $m=2$ là giá trị cần tìm.

Đáp án A.

Câu 54. Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^4+2mx^2+m=-3$. Đặt $x^2=t$, $t\ge 0$. Khi đó phương trình trở thành $t^2+2mt+m+3=0\ (1)$ và đặt $f(t)=t^2+2mt+m+3$.

Để đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y=-3$ tại 4 điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm thỏa mãn $0<t_1<t_2$ và khi đó hoành độ bốn giao điểm là $-\sqrt{t_2}<-\sqrt{t_1}<\sqrt{t_1}<\sqrt{t_2}$.

Do đó, từ điều kiện của bài toán suy ra $\begin{cases}\sqrt{t_2}>2\\ \sqrt{t_1}<1\end{cases}$

hay $0<t_1<1<4<t_2$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}f(0)>0\\ f(1)<0\\ f(4)<0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m+3>0\\ 3m+4<0\\ 9m+19<0\end{cases}\Leftrightarrow -3<m<-\frac{19}{9}.$$

Vậy $a=-3$, $b=-\frac{19}{9}$ nên $15ab=95$.

Đáp án C.

Câu 55. Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}=|x+2|-x-m$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}-|x+2|+x=-m\ (1)$$

Xét hàm số:

$$f(x)=\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}-|x+2|+x$$

$$x\in D=\mathbb{R}\setminus\{-3;-2;-1;0\}$$

Ta có:

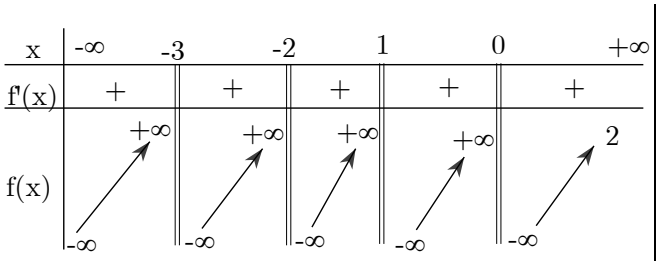
$$f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}-2, x\in D_1\\ \frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}+2x+2, x\in D_2\end{cases}$$

Trong đó: $\begin{cases}(-2;+\infty)\cup D=D_1\\ (-\infty;-2)\cup D=D_2\end{cases}$.

Ta có: $f'(x)=$

$$\begin{cases}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}, \forall x\in D_1\\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+2, \forall x\in D_2\end{cases}$$

Dễ thấy $f'(x)>0, \forall x\in D_1\cup D_2$, ta có bảng biến thiên



Hai đồ thị cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biện khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 4 nghiệm phân biệt, từ bảng biến thiên ta có: $-m \ge 2 \Leftrightarrow m \le -2$.

Đáp án B.

Câu 56. Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x}{x-1}+\frac{x+1}{x}+\frac{x+2}{x+1}=e^x+2020+3m$$

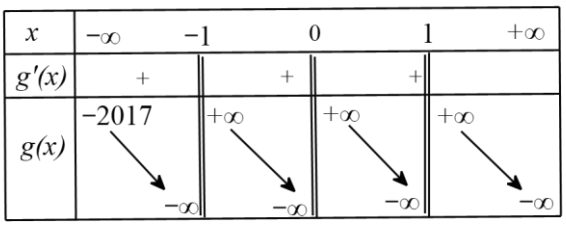
$$\Leftrightarrow \frac{x}{x-1}+\frac{x+1}{x}+\frac{x+2}{x+1}-e^x-2020=3m \ (1).$$

Đặt $g(x)=\frac{x}{x-1}+\frac{x+1}{x}+\frac{x+2}{x+1}-e^x-2020$.

Ta có $g'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}-e^x<0$ với mọi x thuộc các khoảng sau $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$ và $(1;+\infty)$ nên hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-2017$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

Bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$



Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có ba nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y=3m$ cắt đồ thị hàm số $y=g(x)$ tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi

$$3m \ge -2017 \Leftrightarrow m \ge -\frac{2017}{3} \approx -672,3.$$

Do m nguyên thuộc $(-2019;2020)$ nên $m \in \{-672;-671;...;2019\}$. Vậy có tất cả 2692 giá trị m thỏa mãn.

Đáp án A.

Câu 57. Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$(2x^2+1)\sqrt{x-1}=\frac{11}{3x-4}-\frac{1}{2-x}+11+m \quad (*)$$

Điều kiện: $\begin{cases} x-1\ge 0 \\ x\ne\frac{4}{3} \\ x\ne 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x\ne\frac{4}{3} \\ x\ne 2 \end{cases}$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

$(*) \Leftrightarrow \left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}-\dfrac{11}{3x-4}+\dfrac{1}{2-x}-11=m$

Xét hàm số

$f(x)=\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}-\dfrac{11}{3x-4}+\dfrac{1}{2-x}-11$ trên

$[1;+\infty)\setminus\left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$.

Nhận thấy, hàm số $f(x)$ liên tục trên các

khoảng $\left[1;\dfrac{4}{3}\right),\left(\dfrac{4}{3};2\right),(2;+\infty)$

Ta có:

$f'(x)=\left(\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}-\dfrac{11}{3x-4}+\dfrac{1}{2-x}-11\right)'$

$=4x\sqrt{x-1}+\left(2x^2+1\right)\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}+\dfrac{33}{(3x-4)^2}+\dfrac{1}{(2-x)^2}$

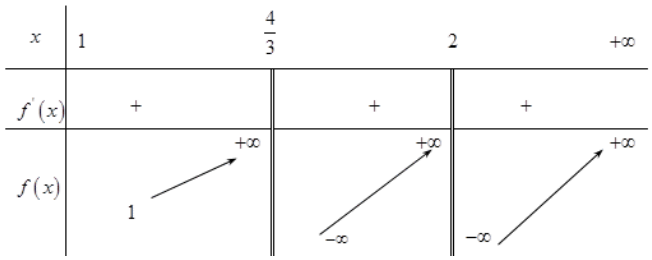
$=\dfrac{10x^2-8x+1}{2\sqrt{x-1}}+\dfrac{33}{(3x-4)^2}+\dfrac{1}{(2-x)^2}>0$ với

$\forall x\in[1;+\infty)\setminus\left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$.

Suy ra, đồ thị hàm số $f(x)$ đồng biến trên

$[1;+\infty)\setminus\left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta suy ra đồ thị hai hàm số

$y=\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}$ và $y=\dfrac{11}{3x-4}-\dfrac{1}{2-x}+11+m$

cắt nhau tại 2 điểm phân biệt khi $m\in(-\infty;1]$.

Đáp án C.

Câu 58. Xét phương trình hoành độ giao điểm

$\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}=2^{1-x}+2m$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{x+3}{x+4}-2^{1-x}=2m.$

Đặt $g(x)=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{x+3}{x+4}-2^{1-x}$.

Ta có: $g'(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+...$

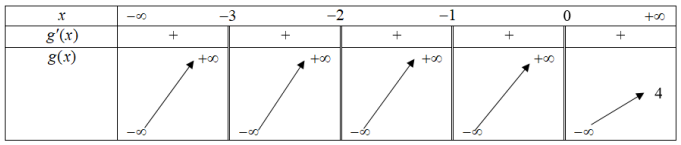
$...+\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{(x+3)^2}+2^{1-x}\ln 2>0$

với mọi x thuộc các khoảng sau $(-\infty;-3)$, $(-3;-2)$ $(-2;-1)$, $(-1;0)$ và $(0;+\infty)$ nên hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng đó.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=4$ và và $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$.

Bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$



Do đó (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng năm điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có 5 nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y=2m$ cắt đồ thị hàm số $y=g(x)$ tại 5 điểm phân biệt khi và chỉ khi $2m<4\Leftrightarrow m<2$.

Đáp án C.

Câu 59. Đặt hàm số:

$f(x)=m^2x^4-(m+2)x^3+x^2+(m^2-1)x$

Ta có: $f(x)=m^2x^4-(m+2)x^3+x^2+(m^2-1)x$

$=x\left[m^2x^3-(m+2)x^2+x+(m^2-1)\right]$.

Giả sử $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình $g(x)=m^2x^3-(m+2)x^2+x+(m^2-1)=0$ thì hàm số bậc bốn $y=f(x)$ với $f(x)=m^2x^4-(m+2)x^3+x^2+(m^2-1)x$ sẽ đổi dấu khi qua điểm $x=0$, nghĩa là $m^2x^4-(m+2)x^3+x^2+(m^2-1)x\ge 0$ không có nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Do đó, để yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì một điều kiện cần là:

$$g(x)=m^2x^3-(m+2)x^2+x+(m^2-1)=0$$

phải có nghiệm $x=0$, suy ra $m^2-1=0\Leftrightarrow m=\pm1$

Điều kiện đủ:

Với $m=1$:

$f(x)=x^4-3x^3+x^2=x^2(x^2-3x+1)$ khi đó $f(1)=-1<0$ không thỏa mãn điều kiện $m^2x^4-(m+2)x^3+x^2+(m^2-1)x\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. (loại)

Với $m=1$:

$f(x)=x^4-x^3+x^2=x^2(x^2-x+1)\ge 0,\ x\in\mathbb{R}$

Vậy $S=\{-1\}$.

Đáp án D.

Câu 60. Đặt

$f(x)=(x-1)(x+2)(ax^2+bx+2)$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Giả sử $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình $g(x)=(x+2)(ax^2+bx+2)=0$ thì hàm số $f(x)=(x-1)(x+2)(ax^2+bx+2)$ sẽ đổi dấu khi qua điểm $x=1$, nghĩa là $(x-1)(x+2)(ax^2+bx+2)\ge 0$ không có nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Do đó, để yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì một điều kiện cần là

$g(x)=(x+2)(ax^2+bx+2)=0$ có nghiệm $x=1$ suy ra $a+b+2=0\ (1)$

Lí luận tương tự có:

$h(x)=(x-1)(ax^2+bx+2)=0$ cũng phải nhận $x=-2$ là nghiệm, suy ra $4a-2b+2=0\ (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ

$$\begin{cases}a+b+2=0\\4a-2b+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$$

Điều kiện đủ:

Với $\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$, ta có:

$f(x)=(x-1)(x+2)(-x^2-x+2)$

$=-(x-1)^2(x+2)^2\le 0,\ x\in\mathbb{R}$.

Vậy không tồn tại cặp số thực $(a;b)$ nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đáp án C.

Câu 61. Đặt $t=\sin x$. Do $x\in[-\pi;2\pi]$ nên $t\in[-1;1]$.

Khi đó ta có phương trình

$$2f(t)+3=0\Leftrightarrow f(t)=-\frac{3}{2}.$$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(t)=-\frac{3}{2}$ có 2 nghiệm $t=a\in(-1;0)$ và $t=b\in(0;1)$.

Trường hợp 1: $t=a\in(-1;0)$

Ứng với mỗi giá trị $t\in(-1;0)$ thì phương trình có 4 nghiệm thỏa mãn:

$$-\pi<x_1<x_2<0<\pi<x_3<x_4<2\pi.$$

Trường hợp 2: $t=b\in(0;1)$

Ứng với mỗi giá trị $t\in(0;1)$ thì phương trình có 4 nghiệm $0<x_5<x_6<\pi$.

Hiển nhiên cả 6 nghiệm trong 2 trường hợp trên đều khác nhau.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$.

Đáp án B.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Câu 62. Đặt $t=\sin x,\ x\in\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]\Rightarrow t\in[-1;1]$

Khi đó phương trình $f(\sin x)=1$ trở thành

$f(t)=1,\forall t\in[-1;1]$

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $y=f(t)$ và đường thẳng $y=1$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

$$f(t)=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=a\in(-1;0)\\t=b\in(0;1)\end{array}\right.$$

Trường hợp 1: $t=a\in(-1;0)$

Ứng với mỗi giá trị $t\in(-1;0)$ thì phương trình $\sin x=t$ có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $\pi<x_1<x_2<2\pi$.

Trường hợp 2: $t=b\in(0;1)$

Ứng với mỗi giá trị $t\in(0;1)$ thì phương trình có 3 nghiệm x_1,x_2,x_3 thỏa mãn

$$0<x_3<x_4<\pi;\ 2\pi<x_5<\frac{5\pi}{2};$$

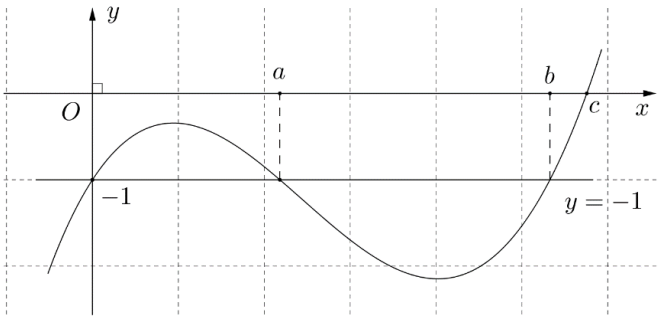
Hiển nhiên cả 5 nghiệm trong 2 trường hợp trên đều khác nhau.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Đáp án C.

Câu 63. $f\left(x^3f(x)\right)+1=0\Leftrightarrow f\left(x^3f(x)\right)=-1$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3f(x)=0\\x^3f(x)=a>0\\x^3f(x)=b>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f(x)=0\\f(x)=\dfrac{a}{x^3}(\text{do } x\neq0)\\f(x)=\dfrac{b}{x^3}(\text{do } x\neq0)\end{array}\right.$$



$f(x)=0$ có một nghiệm dương $x=c$.

Xét phương trình $f(x)=\dfrac{k}{x^3}$ với $x\neq0,\ k>0$.

Đặt $g(x)=f(x)-\dfrac{k}{x^3},\ g'(x)=f'(x)+\dfrac{3k}{x^4}$.

Với $x>c$, nhìn hình ta ta thấy $f'(x)>0$

$$\Rightarrow g'(x)=f'(x)+\frac{3k}{x^4}>0$$

$\Rightarrow g(x)=0$ có tối đa một nghiệm.

Mặt khác $\begin{cases} g(c)<0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty \end{cases}$ và $g(x)$ liên tục trên $(c;+\infty)$

$\Rightarrow g(x)=0$ có duy nhất nghiệm trên $(c;+\infty)$.

□ Với $0<x<c$ thì $f(x)<0<\dfrac{k}{x^3}\Rightarrow g(x)=0$ vô nghiệm.

□ Với $x<0$, nhìn hình ta ta thấy $f'(x)>0$

$\Rightarrow g'(x)=f'(x)+\dfrac{3k}{x^4}>0$

$\Rightarrow g(x)=0$ có tối đa một nghiệm.

Mặt khác $\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^-} g(x)>0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty \end{cases}$ và $g(x)$ liên tục trên $(-\infty;0)$.

$\Rightarrow g(x)=0$ có duy nhất nghiệm trên $(-\infty;0)$.

Tóm lại $g(x)=0$ có đúng hai nghiệm trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Suy ra hai phương trình $f(x)=\dfrac{a}{x^3}$,

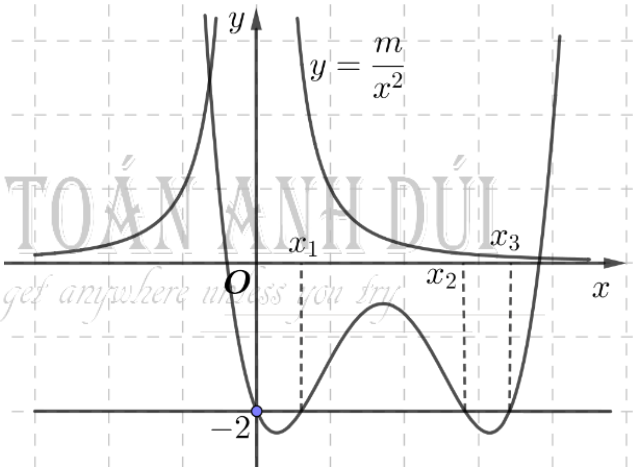
$f(x)=\dfrac{b}{x^3}$ có 4 nghiệm phân biệt khác 0 và khác c.

Vậy phương trình $f\left(x^3 f(x)\right)+1=0$ có đúng 6 nghiệm.

Đáp án C.

Câu 64. $f\left(x^2 f(x)\right)+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x^2 f(x)=0 \\ x^2 f(x)=a\,(1) \\ x^2 f(x)=b\,(2) \\ x^2 f(x)=c\,(3) \end{array}\right.$

với $0<a<b<c$.



Xét phương trình $f(x)=\dfrac{m}{x^2}(1)\quad(m>0)$.

Gọi α,β là hoành độ giao điểm của $(C):y=f(x)$ và Ox; $\alpha<0<\beta$.

$(1)\Leftrightarrow f(x)-\dfrac{m}{x^2}=0$. Đặt $g(x)=f(x)-\dfrac{m}{x^2}$

Đạo hàm $g'(x)=f'(x)+\dfrac{2m}{x^3}$.

Trường hợp 1:

$x<\alpha; f'(x)<0; \frac{2m}{x^3}<0 \Rightarrow g'(x)<0$

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty, g(\alpha)=-\frac{m}{\alpha^2}<0.$

Phương trình $g(x)=0$ có một nghiệm thuộc $(-\infty;\alpha)$.

Trường hợp 2: $\alpha<x<\beta$

$f(x)<0,\ \frac{m}{x^2}>0 \Rightarrow g(x)<0 \quad \forall x\in(\alpha,\beta).$

Trường hợp 3:

$x>\beta; f'(x)>0; \quad \frac{2m}{x^3}>0 \Rightarrow g'(x)>0$

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty, g(\beta)=-\frac{m}{\beta^2}<0.$

Phương trình $g(x)=0$ có một nghiệm thuộc $(\beta;+\infty)$.

Vậy phương trình $f(x)=\frac{m}{x^2}$ có hai nghiệm $\forall m>0$.

Ta có: $x^2 f(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee f(x)=0$: có ba nghiệm.

Vậy phương trình (1) có 9 nghiệm.

Đáp án D.

Câu 65. Ta có: $f\left(x^2 f(x)\right)=2$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 f(x)=0 \\ x^2 f(x)=a<0 \\ x^2 f(x)=b<0 \\ x^2 f(x)=c<0 \end{array}\right.$$

Xét phương trình: $x^2 f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right.$

mà $f(x)=0$ có hai nghiệm $\Rightarrow x^2.f(x)=0$ có ba nghiệm.

Xét phương trình: $x^2 f(x)=a<0$

Do $x^2\geq 0$; $x=0$ không là nghiệm của phương trình $\Rightarrow f(x)=\frac{a}{x^2}<0.$

Xét $g(x)=\frac{a}{x^2} \Rightarrow g'(x)=\frac{-2a}{x^3}.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$	$\nearrow$	0

Từ bảng biến thiên với $f(x)<0 \Rightarrow f(x)=\frac{a}{x^2}$ có 2 nghiệm.

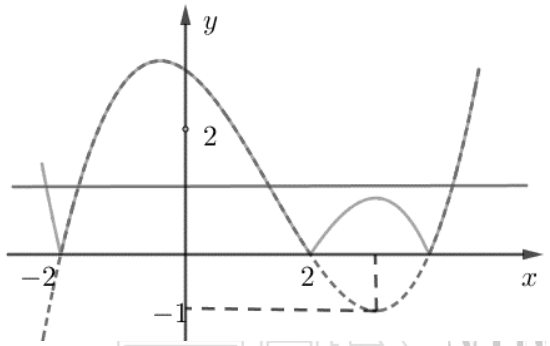
Tương tự: $x^2 f(x)=b$ và $x^2 f(x)=c\ (b,c<0)$ mỗi phương trình cũng có hai nghiệm.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Vậy số nghiệm của phương trình $f\left(x^2 f\left(x\right)\right)=2$ là 9 nghiệm.

Đáp án D.

Câu 66. Đặt $t=x^3-3x$ ta có phương trình $\left|f\left(t\right)\right|=\frac{3}{2}\ \ (*)$.



Từ đồ thị hàm số $y=\left|f\left(t\right)\right|$ và đường thẳng $y=\frac{3}{2}$ ta suy ra phương trình $(*)$ có 4 nghiệm $t_1<-2<t_2<0<t_3<2<t_4$

Xét hàm $t=x^3-3x$.

Ta có $t'=3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	-∞		-1		0		1		+∞
t'		+		-		-		+	
t	-∞	↗	2	↘	0	↘	-2	↗	+∞

Với $t_1<-2$ phương trình: $t_1=x^3-3x$ cho ta 1 nghiệm.

Với $-2<t_2<0$ phương trình: $t_2=x^3-3x$ cho ta 3 nghiệm.

Với $0<t_3<2$ phương trình: $t_3=x^3-3x$ cho ta 3 nghiệm.

Với $2<t_4$ phương trình: $t_4=x^3-3x$ cho ta 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có tất cả 8 nghiệm.

Đáp án C.

Câu 67. Đặt $u=\mathrm{e}^x>0$, từ đồ thị suy ra:

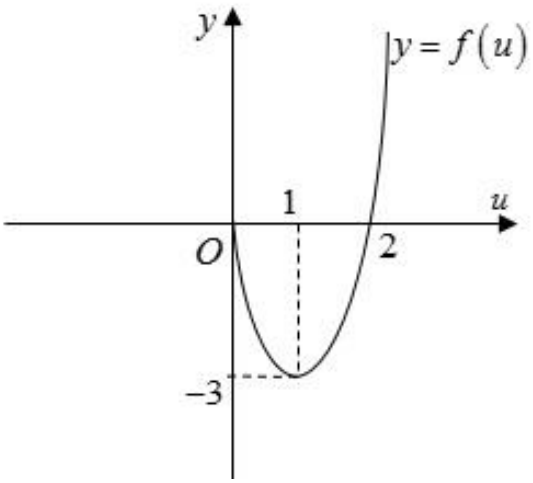
$$f\left(u\right)\ge-3,\forall u>0.$$

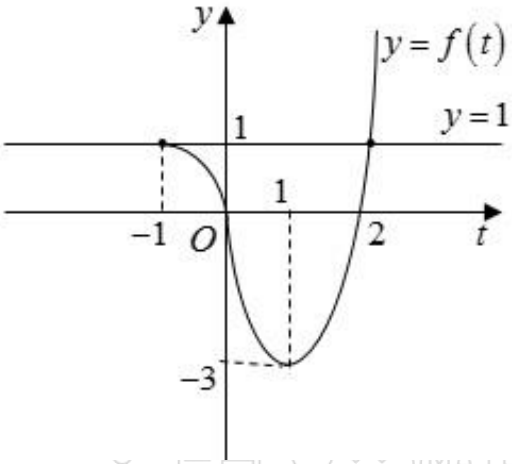
Đặt $t=2+f\left(u\right)$, $t\ge-1$.

Ứng với mỗi nghiệm $t=-1$, có một nghiệm $u=1$.

Ứng với mỗi nghiệm $t\in\left(-1;2\right)$, có hai nghiệm $u\in\left(0;2\right)$.

Ứng với mỗi nghiệm $t>2$, có một nghiệm $u>2$.





Phương trình $f(t)=1$ có một nghiệm $t=-1$ và một nghiệm $t>2$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Đáp án B.

Câu 68. Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ và $f'(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Do đó, TXĐ của hàm số $g(x)$ là $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x)=f''(x).f'\left(f'(x)-1\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f''(x)=0\\f'\left(f'(x)-1\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1}{3}\\x=1\\x=x_0\in(1;2)\\f'(x)-1=-1\\f'(x)-1=1\\f'(x)-1=2\end{array}\right.$$

Từ đồ thị ta cũng có:

$$\square\ f'(x)-1=-1\Leftrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\\x=2\end{array}\right..$$

$$\square\ f'(x)-1=1\Leftrightarrow f'(x)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\in(-\infty;-1)\\x=x_2\in(2;+\infty)\end{array}\right..$$

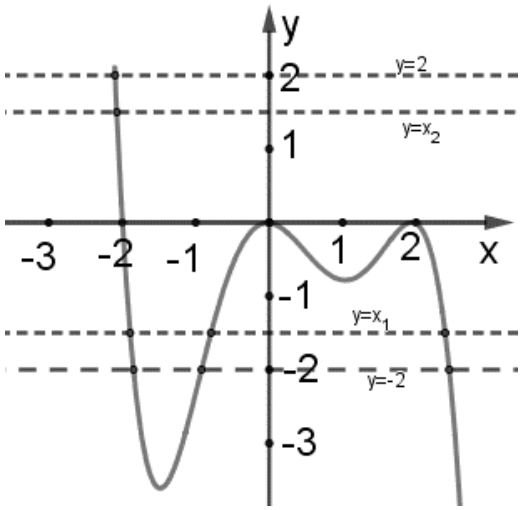
$$f'(x)-1=2\Leftrightarrow f'(x)=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_3\in(-\infty;x_1)\\x=x_4\in(x_2;+\infty)\end{array}\right..$$

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 9 nghiệm.

Đáp án C.

Câu 69. Ta có: $g'(x)=f'\left(f(x)\right).f'(x)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(f(x)\right)=0\\f'(x)=0\end{array}\right.$$



Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1,(-2<x_1<-1) \\ x=0 \\ x=x_2,(1<x_2<2) \\ x=2 \end{array}\right.$;

$f'(f(x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=x_1 \\ f(x)=0 \\ f(x)=x_2 \\ f(x)=2 \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị ta thấy:

$f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt là $x=-2,\ x=0,\ x=2$, trong đó có 2 nghiệm trùng với nghiệm của $f'(x)=0$.

$f(x)=x_1$ có 3 nghiệm phân biệt $x_3\in(-2;-1),\ x_4\in(-1;1),\ x_5\in(2;+\infty)$.

$f(x)=x_2$ có 1 nghiệm duy nhất $x_6\in(-\infty;-2)$.

$f(x)=2$ có 1 nghiệm duy nhất $x_7\in(-\infty;-2)$.

Cũng từ đồ thị có thể thấy các nghiệm $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,-2,0,2$ đôi một khác nhau.

Vậy $g'(x)=0$ có tất cả10 nghiệm phân biệt.

Đáp án B.

Câu 70. Với mọi $a\neq 0, x_1<x_2<x_3<x_4$, đặt: $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4),.$

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left[f'(x)\right]^2-f''(x).f(x)$ và trục Ox là:

$$\left[f'(x)\right]^2-f''(x).f(x)=0\Rightarrow\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]'=0$$

$$\Rightarrow\left[\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4}\right]'=0$$

$$-\frac{1}{(x-x_1)^2}-\frac{1}{(x-x_2)^2}-\frac{1}{(x-x_3)^2}-\frac{1}{(x-x_4)^2}=0$$

vô nghiệm.

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left[f'(x)\right]^2-f''(x).f(x)$ và trục Ox là 0.

Đáp án D.

Câu 71. Ta có: $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=x_1\in(-2;-1) \\ x=x_2\in(-1;0) \\ x=x_3\in(1;2) \end{array}\right.$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Khi đó: $f\left(f\left(x\right)-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)-1=x_1\in\left(-2;-1\right) \\ f\left(x\right)-1=x_2\in\left(-1;0\right) \\ f\left(x\right)-1=x_3\in\left(1;2\right) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=1+x_1\in\left(-1;0\right) \\ f\left(x\right)=1+x_2\in\left(0;1\right) \\ f\left(x\right)=1+x_3\in\left(2;3\right) \end{array}\right.$$

+ Ta thấy hai phương trình

$f\left(x\right)=1+x_1\in\left(-1;0\right)$; $f\left(x\right)=1+x_2\in\left(0;1\right)$

đều có ba nghiệm phân biệt.

Phương trình $f\left(x\right)=1+x_3\in\left(2;3\right)$ có một nghiệm.

Vậy phương trình $f\left(f\left(x\right)-1\right)=0$ có 7 nghiệm.

Đáp án C.

Câu 72. Ta có: $f'\left(x\right)=4mx^3+3nx^2+2px+q$ (1)

Dựa vào đồ thị $y=f'\left(x\right)$ ta thấy phương trình $f'\left(x\right)=0$ có ba nghiệm đơn là -1, $\frac{5}{4}$, 3.

Do đó $f'\left(x\right)=m\left(x+1\right)\left(4x-5\right)\left(x-3\right)$ và $m\neq 0$.

Hay $f'\left(x\right)=4mx^3-13mx^2-2mx+15m$ $\left(2\right)$.

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra $n=-\frac{13}{3}m$, $p=-m$ và $q=15m$.

Khi đó phương trình $f\left(x\right)=r$

$$\Leftrightarrow mx^4+nx^3+px^2+qx=0$$

$$\Leftrightarrow m\left(x^4-\frac{13}{3}x^3-x^2+15x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3x^4-13x^3-3x^2+45x=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(3x+5\right)\left(x-3\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow x=0\vee x=-\frac{5}{3}\vee x=3.$$

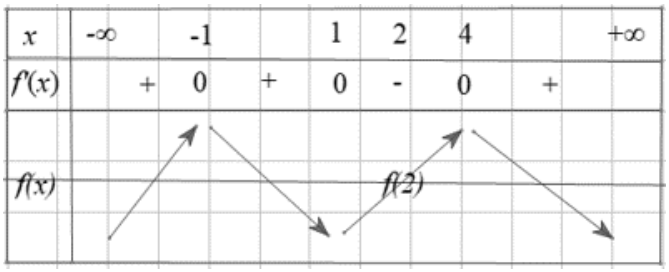
Vậy tập nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=r$ là $S=\left\{-\frac{5}{3};0;3\right\}$.

Đáp án B.

Câu 73. Từ đồ thị ta thấy $f'\left(x\right)=0$

$\Leftrightarrow x=-1\vee x=1\vee x=4$.

Ta có bảng biến thiên



NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never go anywhere unless you fly

Phương trình $f(x)=16m+8n+4p+2q+r$

$\Leftrightarrow f(x)=f(2)$.

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có 4 nghiệm.

Câu 74. Xét phương trình

$$\left[f'(x)\right]^2=f(x).f''(x) \quad (1)$$

Do $f(x)=0$ có ba nghiệm $x_1,x_2,x_2\left(x_1<x_2<x_3\right)$ và $f'(x_3)=0$ suy ra x_3 là một nghiệm của (1).

Ta có: $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)^2$ $,(a\neq 0)$

Với $x\neq x_3\Rightarrow (1)\Leftrightarrow\left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)'=0$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{x-x_1}+\dfrac{1}{x-x_2}+\dfrac{2}{x-x_3}\right)'=0$.

$\Leftrightarrow-\dfrac{1}{(x-x_1)^2}-\dfrac{1}{(x-x_2)^2}-\dfrac{2}{(x-x_3)^2}=0$ vô nghiệm.

Vậy, phương trình (1) có đúng một nghiệm $x=x_3$.

Đáp án A.

Câu 75. Quan sát đồ thị ta thấy:

$$f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\left(-3<x_1<-2\right)\\x=-1\\x=x_2\left(1<x_2<2\right)\\x=x_3\left(2<x_3<3\right)\\x=x_4\left(4<x_4<5\right)\end{array}\right.$$

Do đó: $f\left(g(x)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}g(x)=x_1(1)\\g(x)=-1(2)\\g(x)=x_2(3)\\g(x)=x_3(4)\\g(x)=x_4(5)\end{array}\right.$

Phương trình (1) có đúng 1 nghiệm; Phương trình (2) có đúng 3 nghiệm; Phương trình (3) có đúng 3 nghiệm; Phương trình (4) có đúng 3 nghiệm; Phương trình (5) có đúng 1 nghiệm. Tất cả các nghiệm trên đều phân biệt nên phương trình $f\left(g(x)\right)=0$ có đúng 11 nghiệm.

Quan sát đồ thị ta thấy: $g(x)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_5\left(-2<x_5<-1\right)\\x=x_6\left(0<x_6<1\right)\\x=3\end{array}\right.$$

Do đó: $g\left(f(x)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=x_5(6)\\f(x)=x_6(7)\\f(x)=3(8)\end{array}\right.$

Phương trình (6) có 5 nghiệm;

Phương trình (7) có 5 nghiệm;

NHÓM TOÁN ANH DÚI

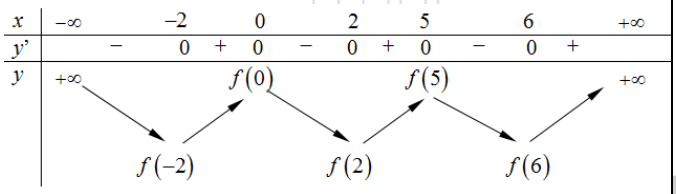
Phương trình (8) có 1 nghiệm.

Tất cả các nghiệm này đều phân biệt nên phương trình $g(f(x))=0$ có đúng 11 nghiệm.

Vậy tổng số nghiệm của hai phương trình $f(g(x))=0$ và $g(f(x))=0$ là 22 nghiệm.

Đáp án B.

Câu 76. Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ ta có bảng biến thiên của đồ thị hàm số như sau:



Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x);y=0;x=0;x=2$.

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x);y=0;x=2;x=5$.

Gọi S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x);y=0;x=5;x=6$.

$$S_1=-\int_0^2 f'(x)dx=f(0)-f(2);$$

$$S_2=\int_2^5 f'(x)dx=f(5)-f(2);$$

$$S_3=-\int_5^6 f'(x)dx=f(5)-f(6)$$

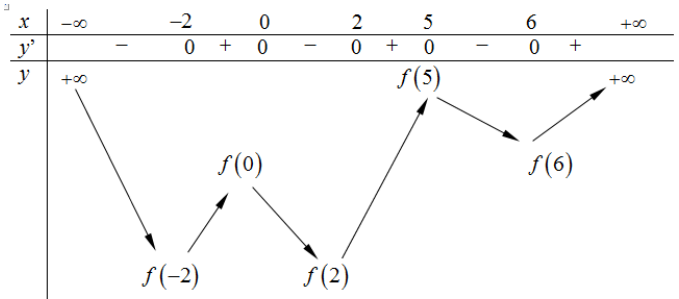
Từ đồ thị ta thấy $S_2>S_1$

$$\Rightarrow f(5)-f(2)>f(0)-f(2)\Rightarrow \boxed{f(5)>f(0)}$$

và $S_1+S_3<S_2$

$$\Rightarrow f(0)-f(2)+f(5)-f(6)<f(5)-f(2)\Rightarrow \boxed{f(6)>f(0)}$$

Khi đó ta có bảng biến thiên chính xác (dạng đồ thị chính xác) như sau:



Vậy phương trình $f(x)=f(0)$ có 2 nghiệm thuộc đoạn $[-2;6]$.

Đáp án B.

Câu 77. Ta có: $g'(x)=f'(x)f'[f(x)]=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'[f(x)]=0 \end{array}\right. (*).$$

Theo đồ thị hàm số suy ra.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=a_1 \end{array}\right., \text{ với } 2<a_1<3.$$

$$f'\left[f(x)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\ ,(1)\\ f(x)=a_1\ ,(2)\end{array}\right.\ .$$

Phương trình (1): $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt khác nghiệm phương trình $(*)$.

Phương trình (2): $f(x)=a_1$ có 3 nghiệm phân biệt khác nghiệm phương trình (1) và phương trình $(*)$.

Vậy phương trình ban đầu có 8 nghiệm phân biệt.

Đáp án B.

Câu 78. Từ hình vẽ ta có dạng đồ thị của hàm trùng phương nên $b=d=0$

$$\Rightarrow f(x)=ax^4+cx^2+e$$

Ta có $f'(x)=4ax^3+2cx.$

Từ đồ thị $\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}f'(1)=0\\ f(0)=0\\ f(1)=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}4a+2c=0\\ e=0\\ a+c+e=1\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=1\\ e=0\\ c=2\end{array}\right.\Rightarrow f(x)=x^4+2x^2.$$

$\Rightarrow f\left(\sqrt{x}\right)=x^2+2x$ và

$f\left(\sqrt{f(x)}\right)=f^2(x)+2f(x).$

Như vậy phương trình

$$f\left(\sqrt{f(x)}\right)+f(x)+2\sqrt{f(x)}-1=0.$$

$\Leftrightarrow f^2(x)+2f(x)+f(x)+2\sqrt{f(x)}-1=0$ với $f(x)\geq 0.$

Đặt $t=f(x)(t\geq 0)$ ta được phương trình $g(t)=0$ với $g(t)=t^2-3t-2\sqrt{t}+1.$

Nhận thấy: Hàm số $g(t)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $g(0).g(1)<0$

$\Rightarrow g(t)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0;1)$.

Hàm số $g(t)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và $g(1).g(4)<0$

$\Rightarrow g(t)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(1;4)$.

Mà $g(t)=0$ là phương trình bậc hai chỉ có tối hai nghiệm nên $g(t)=0$ có duy nhất một nghiệm thuộc $(0;1)$.

Suy ra: $f\left(\sqrt{f(x)}\right)+f(x)+2\sqrt{f(x)}-1=0$ có duy nhất một nghiệm $f(x)\in(0;1).$

Suy ra phương trình $f(x)=a$ với $a\in(0;1)$ luôn có 4 nghiệm x phân biệt.

Đáp án B.

Câu 79. +) Từ giả thiết $f(0)=g(0)$ suy ra $r=d$ do đó phương trình $f(x)=g(x)$ tương đương với:

$$x\left[mx^3+(n-a)x^2+(p-b)x+(q-c)\right]=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\mx^3+(n-a)x^2+(p-b)x+(q-c)=0\end{array}\right.$$

+) Từ đồ thị của các hàm số $f'(x), g'(x)$ suy ra $m\neq 0$ và $\begin{cases}f'(-1)=g'(-1)\\f'(1)=g'(1)\\f'(2)=g'(2)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-4m+3(n-a)-2(p-b)+q-c=0\\4m+3(n-a)+2(p-b)+q-c=0\\32m+12(n-a)+4(p-b)+q-c=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}n-a=-\dfrac{8}{3}m\\p-b=-2m\\q-c=8m\end{cases}$$

Từ đó ta có phương trình:

$$mx^3-\frac{8}{3}mx^2-2mx+8m=0$$
$$\Leftrightarrow x^3-\frac{8}{3}x^2-2x+8=0.$$

Sử dụng máy tính Casio ta được phương trình có 1 nghiệm và nghiệm đó khác 0.

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ có 2 phần tử.

Đáp án B.

Câu 80. Dựa vào đồ thị ta có $f\left(f(x)\right)+1=0$

$$f\left(f(x)\right)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=a<-2\\f(x)=b\in(-2;-1)\\f(x)=0\\f(x)=c>2\end{array}\right.$$

+ Với $f(x)=a<-2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1<-2\\x=x_2>2\end{array}\right.$.

+ Với $f(x)=b\in(-2;-1)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_3<-2\\x=x_4\in(-2;-1)\\x=x_5\in(-1;0)\\x=x_6>2\end{array}\right.$$

+ Với $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_7=-2\\x=x_8\in(0;1)\\x=x_9\in(2;3)\end{array}\right.$.

+ Với $f(x)=c>2$ vô nghiệm.

Ta thấy hàm số $y=f(x)$ đơn điệu trên $(-\infty;-2)$, $f(x_1)=a\neq b=f(x_3)$ nên $x_1\neq x_3$.

Hàm số $y=f(x)$ đơn điệu trên $(2;+\infty)$, $f(x_6)=b\neq 0=f(x_9)$ nên $x_6\neq x_9$.

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm phân biệt.

Đáp án D.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

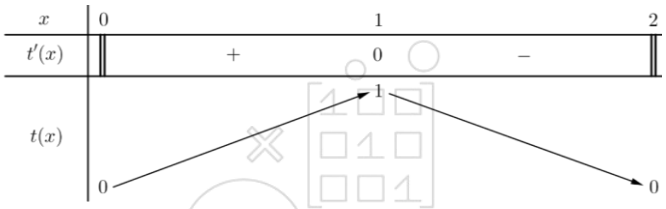
Câu 81. Trước hết, xét hàm số

$t = t(x) = \sqrt{2x - x^2}$, $x \in [0;2]$.

Ta có $t'(x) = \dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}$, $x \in (0;2)$.

$t'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in (0;2)$.

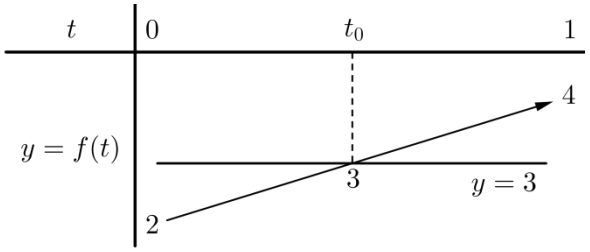
Bảng biến thiên của $t(x)$:



$\Rightarrow 0 \le t \le 1$, $\forall x \in [0;2]$.

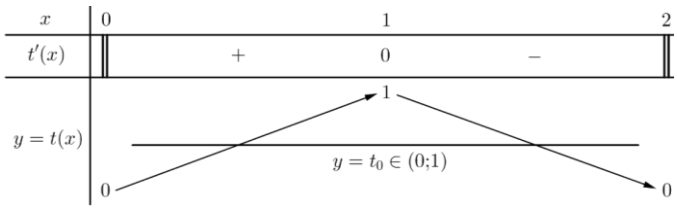
Lúc này, phương trình $f\left(\sqrt{2x-x^2}\right) = 3$ trở thành $f(t) = 3$ (1) với $t \in [0;1]$.

Theo bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên đoạn $[0;1]$ thì đường thẳng $y = 3$ cắt đồ thị hàm số $y = f(t)$ tại đúng 1 điểm có hoành độ thuộc khoảng $(0;1)$ nên phương trình (2) có đúng 1 nghiệm $t = t_0$ với $t_0 \in (0;1)$.



Khi đó, phương trình $(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x-x^2} = t_0$ (2), $t_0 \in (0;1)$.

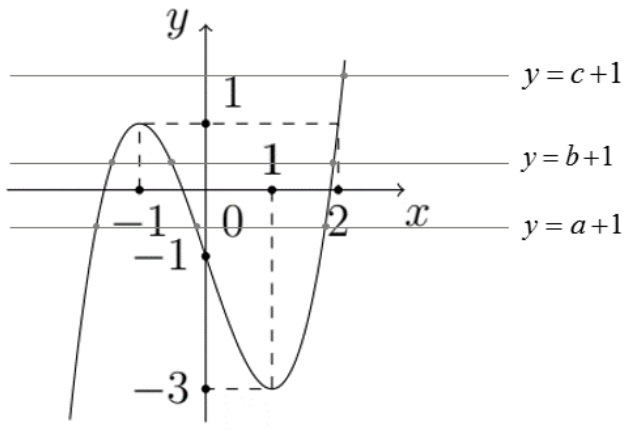
Mặt khác, theo bảng biến thiên của hàm số $t(x)$, với mỗi $t_0 \in (0;1)$ thì đường thẳng $y = t_0$ cắt đồ thị hàm số $y = t(x)$ tại đúng 2 điểm phân biệt nên phương trình (2) có đúng 2 nghiệm phân biệt.



Vậy phương trình $f\left(\sqrt{2x-x^2}\right) = 3$ có đúng 2 nghiệm.

Đáp án B.

Câu 82. Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy:



NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

$$f\left[f\left(\cos x\right)-1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f\left(\cos x\right)-1=a\in\left(-2;-1\right) \\ f\left(\cos x\right)-1=b\in\left(-1;0\right) \\ f\left(\cos x\right)-1=c\in\left(1;2\right) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f\left(\cos x\right)=a+1\in\left(-1;0\right) \\ f\left(\cos x\right)=b+1\in\left(0;1\right) \\ f\left(\cos x\right)=c+1\in\left(2;3\right) \end{array}\right.$$

• Xét phương trình $f\left(\cos x\right)=a+1$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} \cos x=\alpha_1<-1 & (1) \\ \cos x=\alpha_2\in\left(-1;0\right) & (2) \\ \cos x=\alpha_3>1 & (3) \end{array}\right.$$

Vì $\cos x\in\left[-1;1\right]$ nên phương trình $(1),(3)$ vô nghiệm và phương trình (2) có 2 nghiệm thuộc đoạn $\left[0;2\pi\right]$.

• Xét phương trình $f\left(\cos x\right)=b+1$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} \cos x=\beta_1<-1 & (4) \\ \cos x=\beta_2\in\left(-1;0\right) & (5) \\ \cos x=\beta_3>1 & (6) \end{array}\right.$$

Vì $\cos x\in\left[-1;1\right]$ nên phương trình $(4),(6)$ vô nghiệm và phương trình (5) có 2 nghiệm thuộc đoạn $\left[0;2\pi\right]$.

• Xét phương trình $f\left(\cos x\right)=c+1$

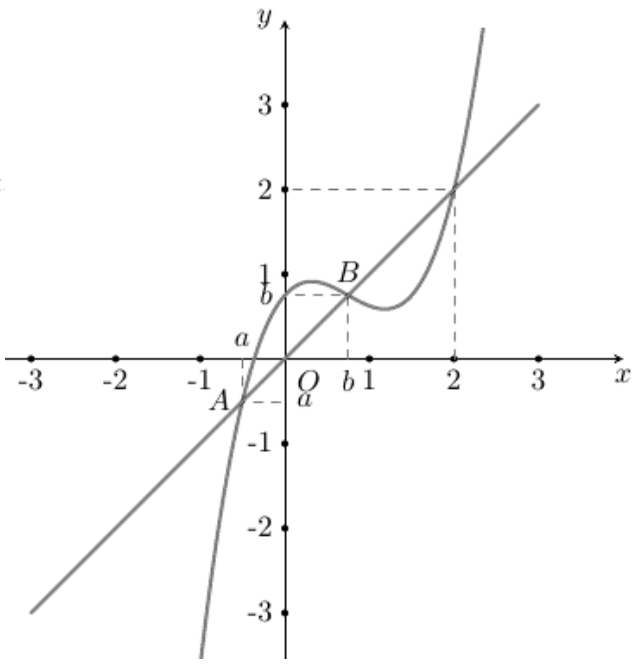
$\Leftrightarrow \cos x=t>2$ (vô nghiệm)

Nhận xét hai nghiệm của phương trình (5) không trùng với nghiệm nào của phương trình (2) nên phương trình $f\left[f\left(\cos x\right)-1\right]=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Đáp án C.

Câu 83. Từ đồ thị ta có:

$$f\left(x\right)=x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=a\in\left(-\infty;0\right) \\ x=b\in\left(0;1\right) \\ x=2 \end{array}\right.$$



Do đó $f\left(\cos x+1\right)=\cos x+1$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \cos x+1=a\in\left(-\infty;0\right) \\ \cos x+1=b\in\left(0;1\right) \\ \cos x+1=2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = a-1 = t_1 \in (-\infty;-1) & (VN) \\ \cos x = b-1 = t_2 \in (-1;0) & (1) \\ \cos x = 1 & (2) \end{cases}$$

Dựa vào đường tròn lượng giác, phương trình (1) có 3 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};3\pi\right)$.

Phương trình (2) có 2 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};3\pi\right)$.

Vậy phương trình ban đầu có tất cả 5 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};3\pi\right)$.

Đáp án C.

Câu 84. Đặt $t = 1-e^x$; $x \in (-\infty;\ln 2)$

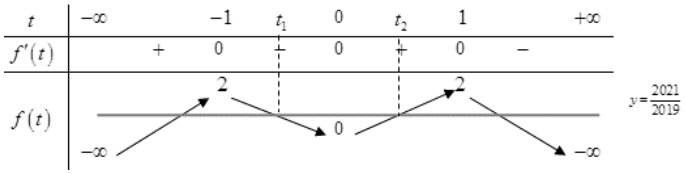
$\Rightarrow t \in (-1;1)$.

Nhận xét: $x = \ln(1-t)$

$\Rightarrow$ với mỗi giá trị của $t \in (-1;1)$ ta được một giá trị của $x \in (-\infty;\ln 2)$.

Phương trình tương đương: $f(t) = \frac{2021}{2019}$.

Sử dụng bảng biến thiên của $f(x)$ cho $f(t)$ như sau:



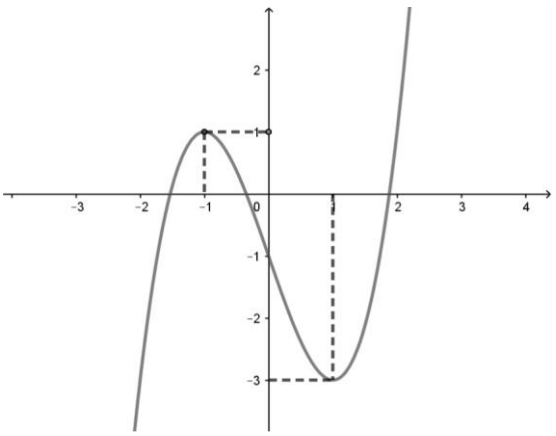
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(t) = \frac{2021}{2019}$ có 2 nghiệm $t_1, t_2 \in (-1;1)$.

Vậy phương trình $2019 f\left(1-e^x\right) - 2021 = 0$ có 2 nghiệm $x \in (-\infty;\ln 2)$.

Đáp án B.

Câu 85. Đặt $t = \cos x$, với $x \in [0;3\pi]$.

Khi đó: $t \in [-1;1]$.



Với $t = 1$, phương trình $t = \cos x$ có hai nghiệm $x \in [0;3\pi]$.

Với $t = -1$, phương trình $t = \cos x$ có hai nghiệm $x \in [0;3\pi]$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never yes anywhere unless you try

Với $-1<t<1$, phương trình $t=\cos x$ có ba nghiệm $x\in[0;3\pi]$.

Thay $t=\cos x$ vào phương trình $f\left(f\left(\cos x\right)-1\right)=0$, ta được phương trình:

$$f\left(f\left(t\right)-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(t\right)-1=a\in\left(-2;-1\right)\\f\left(t\right)-1=b\in\left(-1;0\right)\\f\left(t\right)-1=c\in\left(1;2\right)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f\left(t\right)=a+1\in\left(-1;0\right) & (1)\\f\left(t\right)=b+1\in\left(0;1\right) & (2).\\f\left(t\right)=c+1\in\left(2;3\right) & (3)\end{array}\right.$$

Từ đồ thị ta có:

+) Phương trình (1) có 1 nghiệm $t\in(-1;0)$, suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm.

+) Phương trình (2) có 1 nghiệm $t\in(-1;0)$, suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm.

+) Phương trình (3) có 1 nghiệm $t>1$, suy ra phương trình đã cho vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm.

Đáp án D.

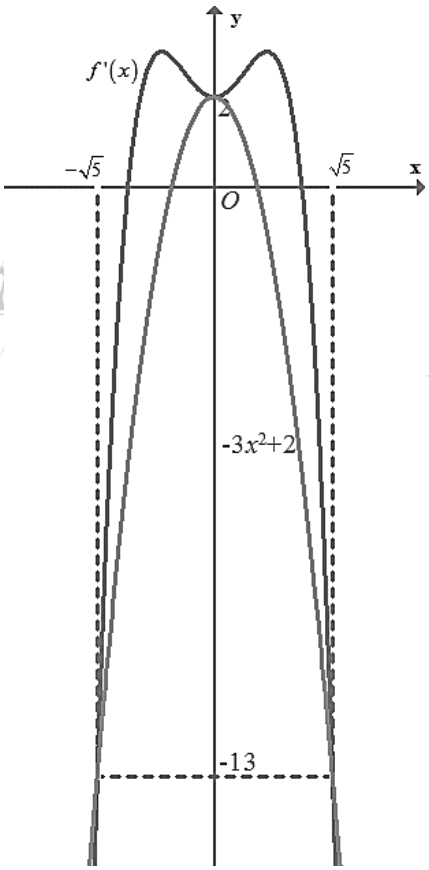
Câu 86. Ta có: $g\left(x\right)\le 0$

$$\Leftrightarrow 2f\left(x\right)+2x^3-4x\le 3m+6\sqrt{5}.$$

Đặt $h\left(x\right)=2f\left(x\right)+2x^3-4x$ thì bất phương trình $g\left(x\right)\le 0\Leftrightarrow h\left(x\right)\le 3m+6\sqrt{5}$

$$\begin{aligned}h'\left(x\right)&=2f'\left(x\right)+2.3x^2-4\\&=2\left(f'\left(x\right)-\left(-3x^2+2\right)\right).\end{aligned}$$

Vẽ đồ thị hàm số $y=-3x^2+2$ trên cùng hệ trục tọa độ với hàm số $y=f'\left(x\right)$.



Ta thấy $f'\left(x\right)\ge -3x^2+2\ \forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ nên $h'\left(x\right)\ge 0,\forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$.

Suy ra $h\left(x\right)\le h\left(\sqrt{5}\right),\forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$.

Hay $\max\limits_{[-\sqrt{5};\sqrt{5}]} h(x)=h\left(\sqrt{5}\right)=2f\left(\sqrt{5}\right)+6\sqrt{5}$

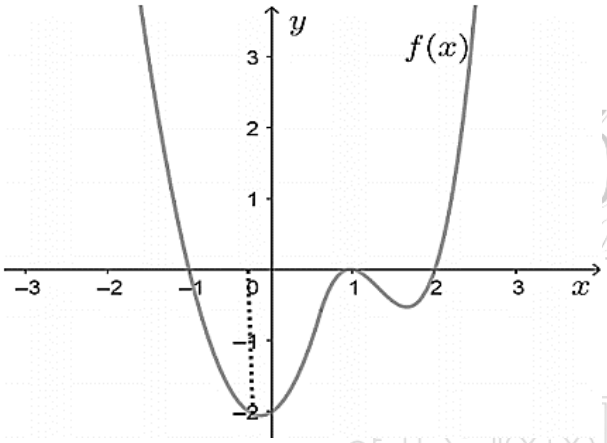
Do đó $h(x)\le 3m+6\sqrt{5},\forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$

$\Leftrightarrow \max\limits_{[-\sqrt{5};\sqrt{5}]} h(x)\le 3m+6\sqrt{5}$.

$\Leftrightarrow 2f\left(\sqrt{5}\right)+6\sqrt{5}\le 3m+6\sqrt{5}\Leftrightarrow m\ge\frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$

Đáp án D.

Câu 87. Ta có: $g'(x)=f'(x).f'\left(f(x)-1\right)$



$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x).f'\left(f(x)-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'\left(f(x)-1\right)=0 \end{array}\right.$.

+) $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=a_1\left(a_1\in(-1;0)\right) \\ x=1 \\ x=a_2\left(a_2\in(1;2)\right) \end{array}\right.$

+) $f'\left(f(x)-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)-1=a_1 \\ f(x)-1=1 \\ f(x)-1=a_2 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} f(x)=a_1+1\in(0;1) & (1) \\ f(x)=2 & (2) \\ f(x)=a_2+1\in(2;3) & (3) \end{array}\right.$

Từ đồ thị suy ra:

□ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $b_1\in(-2;-1);b_2\in(2;3)$

□ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $c_1\in(-2;b_1);c_2\in(b_2;3)$

□ Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt $d_1\in(-2;c_1);d_2\in(c_2;3)$

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm phân biệt.

Đáp án C.

Câu 88. Đặt $f(\cos x)=t$ ta được phương trình $f(t)=0$.

Quan sát đồ thị $y=f(x)$ ta suy ra $f(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=t_1\in\in(-2;-1) \\ t=t_2\in(0;1) \\ \mathrm{t}=\mathrm{t}_3\in(1;2) \end{array}\right.$.

* Với $t=t_1$ ta có $f(\cos x)=t_1$.

Xét tương giao giữa hai đồ thị $y=f(x)$ và

$y=t_1\in(-2;-1)\Rightarrow f(\cos x)=t_1$

$\Leftrightarrow \cos x=x_1<-1$

nên phương trình vô nghiệm.

* Với $t=t_2$ ta có $f(\cos x)=t_2$.

Xét tương giao giữa hai đồ thị $y=f(x)$ và

$$y=t_2\in(0;1)\Rightarrow f(\cos x)=t_2$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=x_2<-1\\ \cos x=x_3\in(0;1).\\ \cos x=x_4\in(1;2)\end{array}\right.$$

Chỉ có $\cos x=x_3$ thỏa mãn.

Khi đó tồn tại 3 giá trị $x\in\left[0;\dfrac{7\pi}{2}\right]$ tương ứng để $\cos x=x_3$.

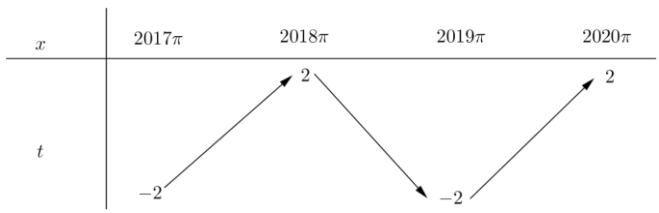
* Với $t=t_3$ tương tự ta có $\left[\begin{array}{l}\cos x=x_5<-1\\ \cos x=x_6\in(-1;0).\\ \cos x=x_7>1\end{array}\right.$

Chỉ có $\cos x=x_6$ thỏa mãn. Khi đó tồn tại 2 giá trị $x\in\left[0;\dfrac{7\pi}{2}\right]$ tương ứng để $\cos x=x_6$.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{7\pi}{2}\right]$.

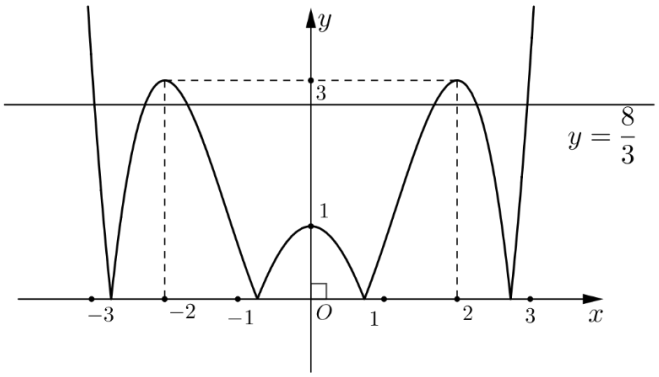
Đáp án B.

Câu 89. Đặt $t=2\cos x$, ta có bảng biến thiên của t như sau



Khi đó: $3f(2\cos x)=8\Leftrightarrow f(t)=\dfrac{8}{3}$.

Vẽ thêm đường thẳng $y=\dfrac{8}{3}$ trên đồ thị $y=f(x)$ đã cho.



Xét trên đoạn $[-2;2]$, đường thẳng $y=\dfrac{8}{3}$ cắt đồ thị hàm số $f(t)$ tại hai điểm $t_1\in(-2;-1)$ và $t_2\in(1;2)$.

Từ bảng biến thiên của t, ứng với giá tị t_1, ta tìm được 3 nghiệm x thỏa $2\cos x=t_1$, tương tự, ta cũng tìm được 3 nghiệm x thỏa $2\cos x=t_2$.

Vậy phương trình $3f(2\cos x)=8$ có 6 nghiệm x thuộc đoạn $[2017\pi;2020\pi]$.

Đáp án D.

Câu 90. Ta có

$$2f(\sin x-2)-\frac{2\sin^3 x}{3}+\sin x>m+\frac{5\cos 2x}{4}$$

$$\Leftrightarrow m<2f(\sin x-2)-\frac{2\sin^3 x}{3}+\sin x-\frac{5(1-2\sin^2 x)}{4}$$

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never get anywhere unless you try

Đặt $t=\sin x-2$ (với $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ thì $t\in(-3;-1)$, khi đó bất phương trình được viết lại thành:

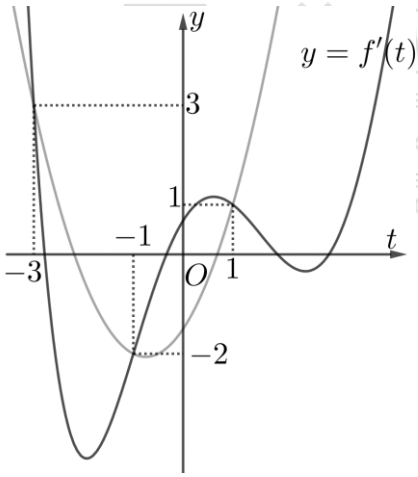
$$m<2f(t)-\frac{2(t+2)^3}{3}+(t+2)-\frac{5\left[1-2(t+2)^2\right]}{4}$$

hay $m<2f(t)-\frac{2}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+3t+\frac{65}{12}\quad(*)$.

Xét hàm số $g(t)=2f(t)-\frac{2}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+3t+\frac{65}{12}$ trên đoạn $[-3;-1]$.

Ta có $g'(t)=2f'(t)-2t^2-3t+3$.

Do đó $g'(t)=0\Leftrightarrow f'(t)=t^2+\frac{3}{2}t-\frac{3}{2}$.



Dựa vào sự tương giao của đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và Parabol $y=t^2+\frac{3}{2}t-\frac{3}{2}$ trên đoạn $[-3;-1]$ thì $g'(t)=0\Leftrightarrow t\in\{-3;-1\}$.

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(t)$ trên đoạn $[-3;-1]$ như sau:

t	-3		-1
$g'(t)$	0	$-$	0
$g(t)$	$g(-3)$	↘	$g(-1)$

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi bất phương trình $(*)$ nghiệm đúng với mọi $t\in(-3;-1)$. Điều đó tương đương với $m\le g(-1)=2f(-1)+\frac{19}{12}$ dựa vào tính liên tục của hàm số $g(t)$.

Đáp án C.

Câu 91. Ta có: $f^2(x)-(m+4)|f(x)|+2m+4=0$

$\Leftrightarrow|f(x)|^2-m|f(x)|-4|f(x)|+2m+4=0$

$\Leftrightarrow\left(|f(x)|-2\right)^2-m\left(|f(x)|-2\right)=0$

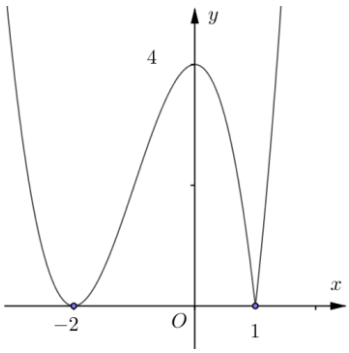
$\Leftrightarrow\left(|f(x)|-2\right)\left(|f(x)|-2-m\right)=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}|f(x)|-2=0\\|f(x)|-2-m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|f(x)|=2\quad(1)\\|f(x)|=m+2\quad(2)\end{cases}$

Dựa vào đồ thị hàm số bậc ba

$$y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

ta có đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ như sau:



Dựa vào đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ suy ra phương trình $\left(1\right)$ có 4 nghiệm phân biệt.

Suy ra phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt $\left(2\right)$ có 2 nghiệm phân biệt khác các nghiệm của phương trình $\left(1\right)$.

Ta có phương trình $\left(2\right)$ là phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y=\left|f\left(x\right)\right|$ và $y=m+2$. Số nghiệm phương trình $\left(2\right)$ là số giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ và $y=m+2$. Dựa vào hình vẽ đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ ta được phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=m+2$ có 2 nghiệm phân biệt khác các nghiệm của phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=2$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m+2=0\\m+2>4\\m+2\neq 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\m>2\end{array}\right.$$

Do $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in\left(-5;5\right)\Rightarrow m\in\left\{-2;3;4\right\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên $m\in\left(-5;5\right)$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Đáp án C.

Câu 92. Để bất phương trình $\left|f\left(x\right)+m\right|<2m$ có nghiệm ta suy ra điều kiện $m>0$.

$$\left|f\left(x\right)+m\right|<2m\Leftrightarrow -2m<f\left(x\right)+m<2m$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}f\left(x\right)>-3m\\f\left(x\right)<m\end{array}\right..$$

Bất phương trình $\left|f\left(x\right)+m\right|<2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $\left[-1;4\right]\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}f\left(x\right)>-3m\\f\left(x\right)<m\end{array}\right.$ đúng với mọi x thuộc đoạn $\left[-1;4\right]$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-3m<\min\limits_{\left[-1;4\right]}f\left(x\right)\\m>\max\limits_{\left[-1;4\right]}f\left(x\right)\end{array}\right..$$

Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta suy ra $\min\limits_{\left[-1;4\right]}f\left(x\right)=-2;\ \max\limits_{\left[-1;4\right]}f\left(x\right)=3$.

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}-3m<\min\limits_{\left[-1;4\right]}f\left(x\right)\\m>\max\limits_{\left[-1;4\right]}f\left(x\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-3m<-2\\m>3\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m>\dfrac{2}{3}\\m>3\end{array}\right.\Leftrightarrow m>3$$

(thỏa mãn điều kiện $m>0$)

Vậy trên đoạn $\left[-10;10\right]$ có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện bài toán.

Đáp án C.

Câu 93. Ta có:

$3f(x) \ge x^3 - 3x + m \Leftrightarrow 3f(x) - x^3 + 3x \ge m$

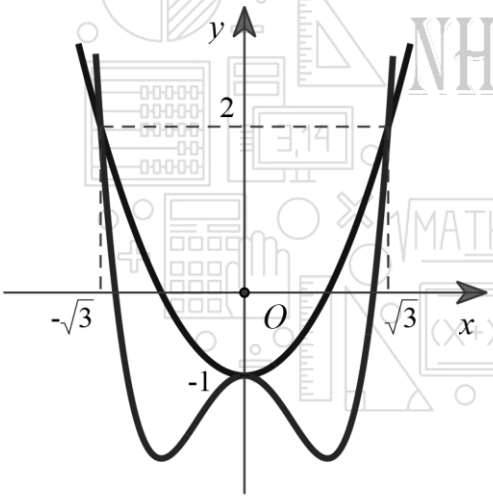
Đặt $g(x) = 3f(x) - x^3 + 3x$.

Tính $g'(x) = 3f'(x) - 3x^2 + 3$

Ta có: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - 1$

Nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và parabol $y = x^2 - 1$.

Minh họa sự tương giao giữa đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và Parabol $y = x^2 - 1$.



Dựa vào đồ thị hàm số ta có:

$$f'(x) = x^2 - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{3} \\ x = 0 \\ x = \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\sqrt{3}$		-1		$\sqrt{3}$
$g'(x)$	0	–	0	–	0
$g(x)$	$g(-\sqrt{3})$	↘		↘	$g(\sqrt{3})$

Để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \left[-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right]$ thì:

$$m \le \min_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} g(x) = g(\sqrt{3}) = 3f(\sqrt{3}).$$

Đáp án D.

Câu 94. Xét hàm số $f(t) = t^3 + t + 2$, ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f\left(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}\right) = f(-x)$

$\Leftrightarrow -x = \sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}$

$\Leftrightarrow f^3(x) + f(x) + x^3 + m = 0 \quad (1)$

Xét $h(x) = f^3(x) + f(x) + x^3 + m$ trên đoạn $[-1;2]$.

Ta có: $h'(x) = 3f'(x) \cdot f^2(x) + f'(x) + 3x^2$

$= f'(x)\left[3f^2(x)+1\right]+3x^2.$

Ta có: $f'(x)=3x^2+1>0,\forall x\in[-1;2]$

$\Rightarrow h'(x)>0,\forall x\in[-1;2].$

Hàm số $h(x)$ đồng biến trên $[-1;2]$ nên

$$\begin{cases}\min\limits_{[-1;2]} h(x)=h(-1)=m-1\\ \max\limits_{[-1;2]} h(x)=h(2)=m+1748.\end{cases}$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\min_{[-1;2]} h(x)\cdot\max_{[-1;2]} h(x)\le 0 \Leftrightarrow h(-1)\cdot h(2)$$
$$\Leftrightarrow (m-1)(1748+m)\le 0$$
$$\Leftrightarrow -1748\le m\le 1.$$

Do m nguyên nên tập các giá trị m thỏa mãn là $S=\{-1748;-1747;\ldots;0;1\}$.

Vậy có tất cả 1750 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Đáp án A.

Câu 95. Dựa vào bảng biến thiên ta có $\underset{[2;4]}{Min}\, f(x)=f(4)=2$ và $\underset{[2;4]}{Max}\, f(x)=f(2)=4$

Hàm số $g(x)=x+2\sqrt{x^2-2x}$ liên tục và đồng biến trên $[2;4]$.

Suy ra: $\underset{[2;4]}{Min}\, g(x)=g(2)=2$ và

$\underset{[2;4]}{Max}\, g(x)=g(4)=4+4\sqrt{2}$

Ta có $x+2\sqrt{x^2-2x}=m.f(x)$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+2\sqrt{x^2-2x}}{f(x)}=m \Leftrightarrow \dfrac{g(x)}{f(x)}=m.$

Xét hàm số $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ liên tục trên $[2;4]$.

Vì $g(x)$ nhỏ nhất và $f(x)$ lớn nhất đồng thời xảy ra tại $x=2$ nên:

$$\underset{[2;4]}{Min}\, h(x)=\frac{\underset{[2;4]}{Min}\, g(x)}{\underset{[2;4]}{Max}\, f(x)}=\frac{g(2)}{f(2)}=h(2)=\frac{1}{2}$$

Vì $g(x)$ lớn nhất và $f(x)$ nhỏ nhất đồng thời xảy ra tại $x=4$ nên

$$\underset{[2;4]}{Max}\, h(x)=\frac{\underset{[2;4]}{Max}\, g(x)}{\underset{[2;4]}{Min}\, f(x)}=\frac{g(4)}{f(4)}=h(4)=2+2\sqrt{2}$$

Từ đó suy ra phương trình $h(x)=m$ có nghiệm khi và chỉ khi: $\dfrac{1}{2}\le m\le 2+2\sqrt{2}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm.

Đáp án C.

Câu 96. Ta có:

$$f^2(\cos x)+(m-2019)f(\cos x)+m-2020=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f(\cos x)=-1\\ f(\cos x)=2020-m\end{array}\right. (1)$$

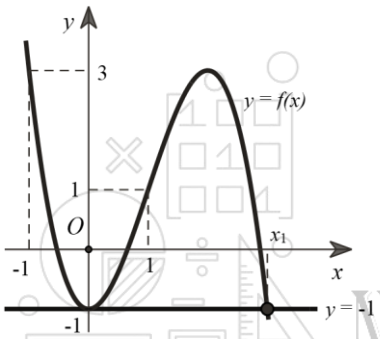
NHÓM TOÁN ANH DUI
Never get anywhere unless you try

* Với $f(\cos x)=-1$

Dựa vào đồ thị ta có $f(\cos x)=-1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=x_1\ (x_1>1)(VN)\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi .$$

Vì $x\in[0;2\pi]\Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\}$



* Với $f(\cos x)=2020-m$

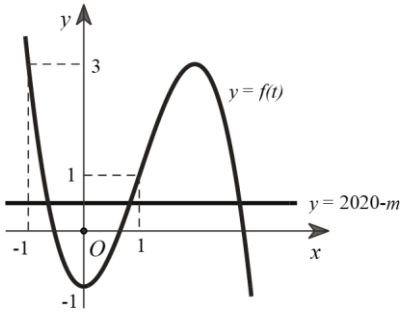
Đặt $t=\cos x\ (t\in[-1;1])$

Với $t\in(-1;1]$ thì phương trình $t=\cos x$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[0;2\pi]$.

Với $t=-1$ thì phương trình $t=\cos x$ có một nghiệm thuộc $[0;2\pi]$

Phương trình trở thành $f(t)=2020-m$

Để phương trình (1) có tất cả 6 nghiệm phân biệt thì phương trình $f(\cos x)=2020-m$ có 4 nghiệm phân biệt, hay phương trình $f(t)=2020-m$ có hai nghiệm $t\in(-1;1]$



Dựa vào đồ thị ta có để phương trình $f(t)=2020-m$ có hai nghiệm $t\in(-1;1]$ thì $-1<2020-m\le 1\Leftrightarrow 2019\le m<2021$

Vì m nguyên nên $m\in\{2019;2020\}$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Đáp án C.

Câu 97. Ta có: $f(x)<\ln(-x)+m$

$\Leftrightarrow m>f(x)-\ln(-x)$.

Xét hàm số $g(x)=f(x)-\ln(-x)$ trên $\left(-1;-\frac{1}{e}\right)$.

Ta có: $g'(x)=f'(x)-\frac{1}{x}$.

Trên $\left(-1;-\frac{1}{e}\right)$ có $f'(x)>0$ và $\frac{1}{x}<0$ nên $g'(x)>0,\forall x\in\left(-1;-\frac{1}{e}\right)$.

$\Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left(-1;-\frac{1}{e}\right)$.

Vậy nên $f(x)<\ln(-x)+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-1;-\frac{1}{e}\right)$.

NHÓM TOÁN ANH DÚI
Never quit anything unless you try

$\Leftrightarrow m \ge g(x), \forall x \in \left(-1; -\frac{1}{e}\right)$

$\Leftrightarrow m \ge g\left(-\frac{1}{e}\right) \Leftrightarrow m \ge 3.$

Đáp án B.

Câu 98. Ta có :

$16.8^{f(x)} \le \left(-m^2+5m\right).4^{f(x)} - \left(4-f^2(x)\right).16^{f(x)}$

$\Leftrightarrow -m^2+5m \ge 16.2^{f(x)} + \left(4-f^2(x)\right).4^{f(x)}$

Vì $f(x) \le -2,\ \forall x \in \mathbb{R}$ nên ta có:

$16.2^{f(x)} + \left(4-f^2(x)\right).4^{f(x)} \le 16.2^{-2} + 0 = 4,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow -m^2+5m \ge 4 \Leftrightarrow m^2-5m+4 \le 0$

$\Leftrightarrow 1 \le m \le 4.$

Đáp án D.

Câu 99. Ta có: $\frac{9}{x^2} - 4 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{9-4x^2}{x^2} \ge 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9-4x^2 \ge 0 \\ x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \le x \le \frac{3}{2} \\ x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right] \setminus \{0\}$

Xét phương trình $6f(-2x+1) - 8x^3 + 6x - m = 0$

$\Leftrightarrow m = 6f(-2x+1) - 8x^3 + 6x \ (1)$

Xét hàm số $g(x) = 6f(-2x+1) - 8x^3 + 6x$,

với $x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right] \setminus \{0\}$.

Ta có: $g'(x) = -12f'(-2x+1) - 24x^2 + 6$

$= -6\left[2f'(-2x+1) + 4x^2 - 1\right]$

Từ giả thiết ta suy ra: $f'(-2x+1) < 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+1 < 2 \\ -2x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2};$

$f'(-2x+1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < -2x+1 < 0 \\ 2 < -2x+1 < 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2} \end{cases}.$

Bảng biến thiên của hàm số

$g(x) = 6f(-2x+1) - 8x^3 + 6x$

trên $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right] \setminus \{0\}$.

x	$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$
$f'(-2x+1)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$4x^2-1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	54			$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			4		9		14		-36

Từ bảng biến thiên ta suy ra hệ có đúng ba nghiệm $\Leftrightarrow (1)$ có đúng ba nghiệm

$x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right] \setminus \{0\} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 < m < 14 \\ m \ne 9 \end{cases}.$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 5;6;7;8;10;11;12;13.$

Vậy có 8 số nguyên m.

Đáp án D.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Sách giáo khoa Toán cơ bản lớp 10, 11, 12, NXB Giáo Dục.

2. Sách giáo khoa Toán nâng cao lớp 10, 11, 12, NXB Giáo Dục.

3. Sách bài tập Toán cơ bản lớp 10, 11, 12, NXB Giáo Dục.

4. Sách bài tập Toán nâng cao lớp 10, 11, 12, NXB Giáo Dục.

5. Công phá Toán 3 – Ngọc Huyền LB.

6. Tài liệu Thầy Nguyễn Bảo Vương.

7. Tài liệu của tác giả Phan Thành Tường – Đồng chủ biên.

8. Tài liệu của tác giả Nguyễn Thành Nhân – Đồng chủ biên.

Lời kết

Thật ra, đây là quyển tài liệu lớn đầu tiên, tôi và người bạn thân Phan Thành Tường cùng kết hợp để viết. Một tài liệu hết sức tâm huyết của một cậu học sinh năm nhất trường Đại học An Giang gửi gắm đến các thế hệ học sinh "đàn em" sau này.

Ngay từ khi vừa kết thúc kỳ thi THPTQG năm 2020, tôi đã lên ý tưởng và sắp xếp lại bố cục trong đầu của mình về một "quyển sách" nhỏ tầm 1000 trang gửi đến các bạn đọc làm tài liệu tham khảo. Những câu hỏi liên tiếp được đặt ra trong đầu tôi ngay lúc đó, chẳng có một phương tiện nào có thể hỗ trợ, bản thân lại chưa đủ trình độ chuyên môn. Tuy nhiên, sau một năm gắn bó với các thành viên của đại gia đình "Nhóm Toán anh Dúi", tôi đã tự tin hơn rất nhiều, và đem hết tâm huyết mình vào những dự án mang tính nhân văn này đến tất cả các "em học sinh" của tôi. Hơn thế nữa, tôi muốn đưa đến các bạn, một nguồn tài liệu mở, mang tinh thần giúp đỡ nhau trong học tập đến rộng khắp trái tim của những nhân tài đất nước sau này, một nguồn tài liệu về Hàm số, gồm những nội dung Lý thuyết cơ bản, nâng cao, thử sức với bốn dạng mức độ của bài tập cũng như tự luyện nâng khả năng tư duy và phản xạ. Sau 6 tháng, miệt mài nghiên cứu các dạng tài liệu phổ biến, dạng câu hỏi thường gặp và sáng tạo nội dung. Tôi và người bạn, Phan Thành Tường (Kaito Tường) đã cho ra mắt cuốn sách "Phá đường dây Hàm số" này.

Không lấy lý do còn non trẻ và là bài đầu tay để biện hộ cho những sai sót trong quá trình thực hiện. Nhưng thật sự, để đạt được một sự hoàn hảo tuyệt đối thì cá nhân tôi chưa đảm bảo được. Tôi thực sự rất biết ơn các độc giả phát hiện và tích cực chỉ ra những lỗi sai còn tồn đọng trong quyển tài liệu này. Tôi xin đặt tình cảm của các độc giả vào những lần sửa chữa tiếp theo.

Các độc giả có những góp ý, vui lòng mail cho tôi vào tài khoản cá nhân:

nhannguyen.6760@gmail.com

ntnhan_21to@student.agu.edu.vn

tuongkaito@gmail.com