

CHUYÊN ĐỀ 1
BÀI 5. TIẾP TUYẾN

Mục tiêu

❖ **Kiến thức**

- + Nắm được khái niệm đường tiếp tuyến của đồ thị hàm số, sự tiếp xúc của hai đồ thị.
- + Hiểu được ý nghĩa của đạo hàm liên quan đến hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm.
- + Biết cách viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị khi biết điểm tiếp xúc, biết trước hệ số góc và tiếp tuyến đi qua điểm cho trước.

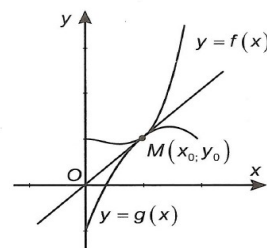
❖ **Kĩ năng**

- + Viết được phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm cho trước.
- + Biết cách viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số khi biết trước.
- + Biết cách viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm cho trước.
- + Giải được các bài toán liên quan đến tiếp tuyến của đồ thị hàm số.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 . Ta nói rằng hai đường cong $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$ tiếp xúc với nhau tại điểm $M(x_0; y_0)$ nếu M là một tiếp điểm chung của chúng.

(C) và (C') có tiếp tuyến chung tại M .

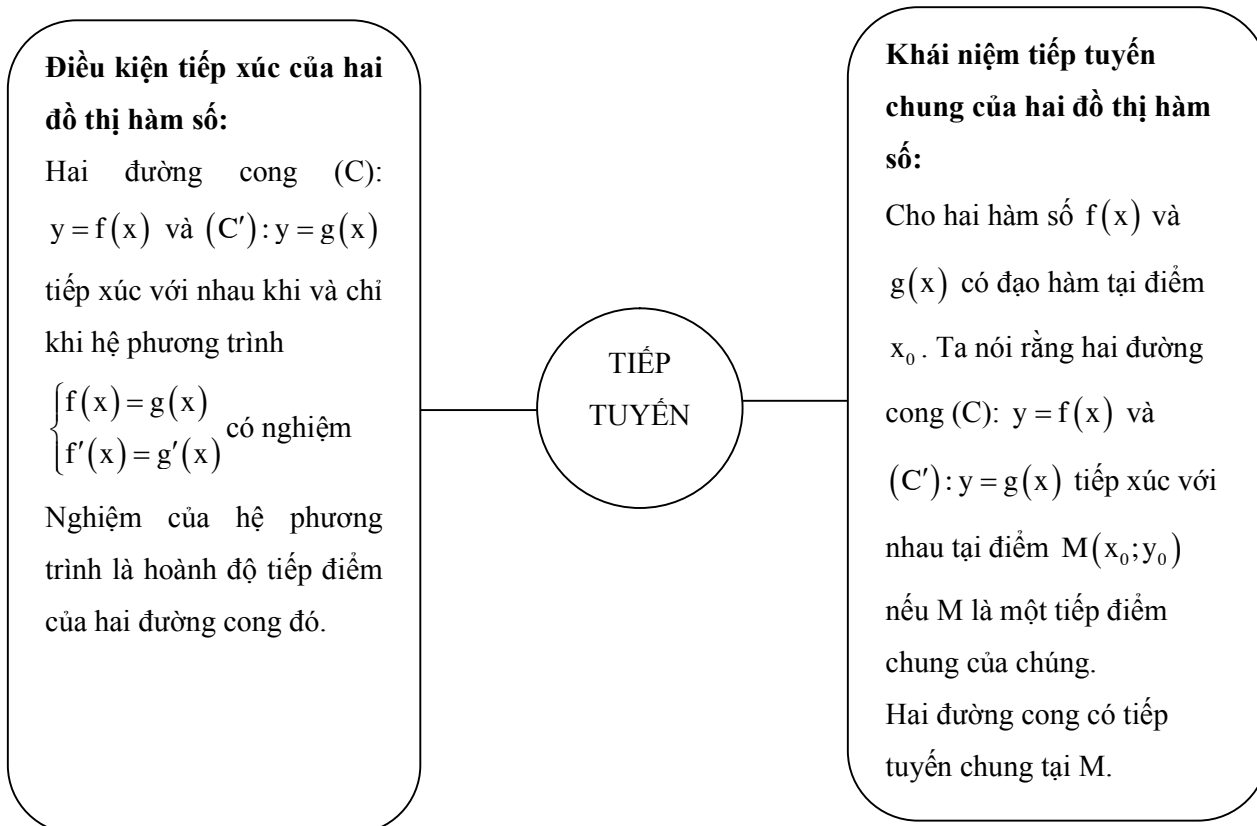


Điều kiện tiếp xúc:

Hai đường cong $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$ tiếp xúc với nhau $\Leftrightarrow$ hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

Nghiệm của hệ phương trình là hoành độ tiếp điểm của hai đường cong đó.



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm cho trước

Bài toán 1: Sự tiếp xúc của hai đường cong

Phương pháp giải

Cho hai đường cong (C): $y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$. Điều kiện để hai đường cong tiếp xúc với nhau là hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

- Nghiệm $x = x_0$ của hệ trên là hoành độ của tiếp điểm của hai đường cong đã cho.

- Hệ trên có bao nhiêu nghiệm thì hai đường cong (C) và (C') tiếp xúc với nhau tại bấy nhiêu điểm.

Ví dụ: Cho đồ thị hàm số (C): $y = -x^3 + 3x + 2$.

Hoành độ tiếp điểm của đồ thị (C) với trục Ox là

nghiệm của hệ
$$\begin{cases} -x^3 + 3x + 2 = 0 \\ -3x^2 + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; x = -1 \\ x = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow x = -1$$

Vậy tọa độ tiếp điểm của đồ thị (C) với trục hoành là $A(-1; 0)$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 1$ tiếp xúc với đường thẳng nào dưới đây?

A. $y = x + 1$.

B. $y = -2x + 1$.

C. $y = -x + 1$.

D. $y = 2x + 1$.

Hướng dẫn giải:

Áp dụng điều kiện tiếp xúc của hai đường cong $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$ là hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

Ta có $y' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên các phương án B, C bị loại.

Xét phương án A. $y = x + 1$. Ta có hệ $\begin{cases} x^3 + x + 1 = x + 1 \\ 3x^2 + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy đường thẳng $y = x + 1$ tiếp xúc với đồ thị hàm số đã cho.

Chọn A.

Ví dụ 2. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -2x + m$ tiếp xúc với đồ thị

hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ là

A. $\{7; -1\}$.

B. $\{-1\}$.

C. $\{6\}$.

D. $\{6; -1\}$.

Hướng dẫn giải:

Đường thẳng $y = -2x + m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} = -2x + m \\ \frac{-2}{(x-1)^2} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} = -2x + m \\ (x-1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} = -2x + m \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ m = -1 \\ x = 2 \\ m = 7 \end{cases}$$

Vậy $m \in \{-1; 7\}$ thì đường thẳng d tiếp xúc với (C) .

Chọn A.

Ví dụ 3: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C_m) của hàm số $y = x^3 - 4mx^2 + 7mx - 3m$ tiếp xúc với parabol $(P): y = x^2 - x + 1$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng

A. $\frac{11}{4}$.

B. $\frac{331}{4}$.

C. $\frac{9}{4}$.

D. -4 .

Hướng dẫn giải:

Để (C_m) tiếp xúc với (P) thì hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^3 - 4mx^2 + 7mx - 3m = x^2 - x + 1 \\ 3x^2 - 8mx + 7m = 2x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - (4m+1)x^2 + (7m+1)x - 3m - 1 = 0 & (1) \\ 3x^2 - 2(4m+1)x + 7m + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải (1), ta có (1) $\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 4mx + 3m + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 4mx + 3m + 1 = 0 \end{cases}$$

+ Với $x = 1$ thay vào (2) được $m = 2$

$$+ \text{Xét hệ } \begin{cases} x^2 - 4mx + 3m + 1 = 0 & (3) \\ 3x^2 - 2(4m+1)x + 7m + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (2m-1)x = m+1 & (4).$$

• Nếu $m = \frac{1}{2}$ thì (4) vô nghiệm.

• Nếu $m \neq \frac{1}{2}$ thì (4) $\Leftrightarrow x = \frac{m+1}{2m-1}$.

Thay $x = \frac{m+1}{2m-1}$ vào (3) ta được $\left(\frac{m+1}{2m-1}\right)^2 - 4m\left(\frac{m+1}{2m-1}\right) + 3m + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 4m^3 - 11m^2 + 5m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -\frac{1}{4} \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \\ m = 1 \end{cases}$$

Vậy $S = \left\{2; -\frac{1}{4}; 1\right\}$ nên tổng các phần tử trong S bằng $\frac{11}{4}$.

Chọn A.

Ví dụ 4: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số

$y = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}(m+2)x^2 + 2mx + 1$ tiếp xúc với đường thẳng $y = 1$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng

A. 10. B. $\frac{20}{3}$. C. $\frac{8}{3}$. D. $\frac{32}{3}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}(m+2)x^2 + 2mx + 1 = 1 & (1) \\ x^2 - (m+2)x + 2m = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải phương trình (2) ta được $\begin{cases} x = m \\ x = 2 \end{cases}$.

$$+ \text{ Với } x = m, \text{ thay vào (1) ta được } -\frac{m^3}{6} + m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 6 \end{cases}.$$

$$+ \text{ Với } x = 2, \text{ thay vào (1), ta được } m = \frac{2}{3}.$$

Vậy tập hợp các giá trị của tham số thực để đồ thị hàm số đã cho tiếp xúc với đường thẳng $y = 1$ là

$$S = \left\{ 0; 6; \frac{2}{3} \right\} \text{ nên tổng các phần tử trong } S \text{ bằng } \frac{20}{3}.$$

Chọn B.

Ví dụ 5. Biết đồ thị của hàm số $(C): y = x^3 + ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$), tiếp xúc với trục hoành tại gốc tọa độ và cắt đường thẳng $x = 1$ tại điểm có tung độ bằng 3. Tổng $a + 2b + 3c$ bằng

A. 4.

B. 2.

C. 6.

D. 3.

Hướng dẫn giải:

Vì (C) tiếp xúc với Ox tại gốc tọa độ nên $x = 0$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \\ 3x^2 + 2ax + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Mặt khác (C) đi qua điểm $A(1; 3)$ nên $a + b + c + 1 = 3 \Rightarrow a = 2$.

Vậy $a + 2b + 3c = 2$.

Chọn B.

Ví dụ 6. Họ parabol $(P_m): y = mx^2 - 2(m-3)x + m - 2$ ($m \neq 0$) luôn tiếp xúc với đường thẳng d cố định khi m thay đổi. Đường thẳng d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $A(1; -8)$.

B. $B(0; -2)$.

C. $C(0; 2)$.

D. $D(1; 8)$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y = mx^2 - 2(m-3)x + m - 2 = m(x^2 - 2x + 1) + 6x - 2$

$$\Leftrightarrow y = m(x-1)^2 + 6x - 2.$$

Xét đường thẳng $d: y = 6x - 2$ thì hệ phương trình

$$\begin{cases} m(x-1)^2 + 6x - 2 = 6x - 2 \\ 2m(x-1) + 6 = 6 \end{cases} \text{ luôn có nghiệm } x = 1 \text{ với mọi } m \neq 0.$$

Vậy (P_m) luôn tiếp xúc với đường thẳng $d: y = 6x - 2$.

Đường thẳng d đi qua điểm $B(0; -2)$.

Chọn B.

Nhận xét: Nếu có thể viết lại hàm số (P_m) theo dạng $y = m(ax+b)^2 + cx + d$ thì (P_m) luôn tiếp xúc với đường $y = cx + d$.

Bài toán 2. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0)$



Phương pháp giải

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1: Tính $y' = f'(x)$ và $f'(x_0)$.

Bước 2: Suy ra phương trình tiếp tuyến cần

Ví dụ: Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số

$y = -x^3 + x + 2$ tại điểm $M(-2; 8)$ bằng

A. -11.

B. 6.

C. 11.

D. -12.

tim là $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Bước 3: Thực hiện các yêu cầu còn lại của bài toán. Kết luận.

Chú ý:

- Nếu bài toán chỉ cho x_0 thì ta cần tìm

$$y_0 = f(x_0) \text{ và } f'(x_0).$$

- Nếu bài toán chỉ cho y_0 thì ta cần tìm x_0

bằng cách giải phương trình $f(x) = y_0$.

- Giá trị $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0)$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } y' = -3x^2 + 1 \Rightarrow y'(-2) = -11$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm

$$M(-2; 8) \text{ và } y = -11(x + 2) + 8.$$

Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến là $k = -11$.

Chọn A.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tiếp tuyến của đường cong $(C): y = x\sqrt{x+1}$ tại điểm $M(3; 6)$ có hệ số góc bằng

A. $-\frac{1}{4}$.

B. $\frac{11}{4}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $-\frac{11}{4}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } y' = \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}.$$

$$\text{Hệ số góc cần tìm là } y'(3) = \frac{3 \cdot 3 + 2}{2\sqrt{3+1}} = \frac{11}{4}.$$

Chọn B.

Ví dụ 2. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x + 3$ tại điểm $M(1; 2)$ là

A. $y = 2 - x$.

B. $y = x + 1$.

C. $y = 3x - 1$

D. $y = 2x + 2$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 2 \Rightarrow y'(1) = 1$$

Vậy phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số đã cho tại điểm $M(1; 2)$ là $y = (x - 1) + 2 = x + 1$.

Chọn B.

Ví dụ 3. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = x^3$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

A. $y = 3x - 3$.

B. $y = 3x + 2$.

C. $y = 3x - 2$.

D. $y = 3x$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 \Rightarrow y'(1) = 3.$$

$$\text{Do } x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = y(1) = 1.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ bằng 1 là

$$y = 3(x-1) + 1 \Leftrightarrow y = 3x - 2.$$

Chọn C.

Ví dụ 4. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 + x^2 + 1$ tại điểm có tung độ bằng 1 là

A. $y = 4$.

B. $y = 2$.

C. $y = 1$.

D. $y = 3$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

$$\text{Ta có } y_0 = 1 \Leftrightarrow x_0^4 + x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \Rightarrow M(0; 1).$$

$$\text{Lại có } y' = 4x^3 + 2x \Rightarrow y'(0) = 0$$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 1$.

Chọn C.

Ví dụ 5. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-4}{x-3}$ tại giao điểm của đồ thị với trục hoành là

A. $y = 2x - 4$.

B. $y = 3x + 1$.

C. $y = -2x + 4$.

D. $y = 2x$.

Hướng dẫn giải

Giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục hoành là nghiệm của phương trình $\frac{2x-4}{x-3} = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow$ đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $(2; 0)$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{-2}{(x-3)^2} \Rightarrow y'(2) = -2.$$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -2(x-2)$ hay $y = -2x + 4$.

Chọn C.

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung là

A. $y = 3x - 2$.

B. $y = 2x + 1$

C. $y = -2x + 1$

D. $y = -3x - 2$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } (C) \cap Oy = A(0; -2); y'(0) = 3.$$

Phương trình tiếp tuyến tại $A(0; -2)$ là $y = 3x - 2$.

Chọn A.

Ví dụ 7. Gọi đường thẳng $y = ax + b$ là phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại điểm có hoành độ $x = 1$. Giá trị $a - b$ bằng

A. 2.

B. -1.

C. 1.

D. $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Tọa độ tiếp điểm của đường thẳng $y = ax + b$ và đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ là

$$M\left(1; \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Vì } y' = \frac{3}{(x+1)^2} \text{ nên } y'(1) = \frac{3}{4}.$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số là $y = \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow a - b = 1$$

Chọn C.

Ví dụ 8. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \tan\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{\pi}{6}$ là

A. $y = -x - \frac{\pi}{6} + 6.$

B. $y = -x + \frac{\pi}{6} + 6.$

C. $y = -x - \frac{\pi}{6} - 6.$

D. $y = -6x + \pi - 1.$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } y' = \frac{-3}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)} \Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -6; x_0 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow y_0 = -1$$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -6x + \pi - 1$

Chọn D.

Ví dụ 9. Gọi M là điểm thuộc đồ thị hàm số $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$ có tung độ bằng 5. Tiếp tuyến của đồ thị (C)

tại M cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B. Diện tích tam giác OAB bằng

A. $\frac{125}{6}$ (đvdt).

B. $\frac{117}{6}$ (đvdt)

C. $\frac{121}{6}$ (đvdt)

D. $\frac{119}{6}$ (đvdt)

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } M(2; 5) \in (C); y' = \frac{-3}{(x-1)^2}; y'(2) = -3.$$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(2; 5)$ là $d: y = -3x + 11.$

Khi đó d cắt Ox, Oy tại $A\left(\frac{11}{3}; 0\right)$ và $B(0; 11) \Rightarrow OA = \frac{11}{3}; OB = 11.$

$$\text{Vậy } S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{3} \cdot 11 = \frac{121}{6} (\text{đvdt})$$

Chọn C.

Ví dụ 10. Cho hàm số $y = \frac{x+b}{ax-2} (ab \neq -2, a \neq 0)$. Biết rằng a và b là các giá trị thỏa mãn tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(1; -2)$ song song với đường thẳng $d: 3x + y - 4 = 0$. Khi đó giá trị của $a - 3b$ bằng

A. 5.

B. 4.

C. -1.

D. -2.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } y' = \frac{-2-ab}{(ax-2)^2} \Rightarrow y'(1) = \frac{-2-ab}{(a-2)^2}$$

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: 3x + y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = -3x + 4$ nên

$$y'(1) = -3 \Leftrightarrow \frac{-2-ab}{(a-2)^2} = -3.$$

Mặt khác $A(1; -2)$ thuộc đồ thị hàm số nên $-2 = \frac{1+b}{a-2} \Leftrightarrow b = -2a + 3$.

$$\text{Khi đó ta có hệ } \begin{cases} \frac{-2-ab}{(a-2)^2} = -3 \\ b = -2a + 3 \end{cases} \Rightarrow 5a^2 - 15a + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

+ Với $a = 2 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow ab = -2$ (loại)

+ Với $a = 1 \Rightarrow b = 1$ (thỏa mãn điều kiện).

Khi đó ta có hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$.

$$y' = \frac{-3}{(x-2)^2} \Rightarrow y'(1) = -3 \text{ nên phương trình tiếp tuyến là } y = -3x + 1 \text{ song song với đường thẳng}$$

$$y = -3x + 4.$$

$$\text{Vậy } a - 3b = -2.$$

Chọn D.

Ví dụ 11. Trong tất cả các đường thẳng tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ thì đường thẳng d có hệ số góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $y = 6x + 2$.

B. $y = 2x + 2$.

C. $y = 1$.

D. $y = 3x + 1$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } y' = -3x^2 - 6x + 3$$

Gọi $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số. Khi đó hệ số góc của tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0)$ là

$$k = -3x_0^2 - 6x_0 + 3 = -3(x_0 + 1)^2 + 6 \leq 6$$

$$\Rightarrow k_{\max} = 6 \Leftrightarrow x_0 = -1 \text{ hay } M(-1; -4).$$

Phương trình đường thẳng d là $y = 6(x + 1) - 4 \Leftrightarrow y = 6x + 2$.

Chọn A.

Nhận xét: Đối với hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thì tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất (nhỏ nhất) là tiếp tuyến tại điểm uốn của đồ thị $U(x_0; f(x_0))$, với x_0 là nghiệm của phương trình $y'' = 0$.

+ Nếu $a > 0$ thì hệ số góc $k = f'(x_0)$ là nhỏ nhất.

+ Nếu $a < 0$ thì hệ số góc $k = f'(x_0)$ là lớn nhất.

Ví dụ 12. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m$ có đồ thị (C_m) . Giá trị thực của tham số m để tiếp tuyến của đồ thị (C_m) tại điểm có hoành độ $x = 1$ song song với đường thẳng $y = 3x + 10$ là

A. $m = 2$.

B. $m = 4$.

C. $m = 0$.

D. không tồn tại m .

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = 3x^2 - 4x + m - 1 \Rightarrow y'(1) = m - 2$.

Tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ $x = 1$ có phương trình là

$$y = (m - 2)(x - 1) + 3m - 2 \Leftrightarrow y = (m - 2)x + 2m$$

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 3x + 10$ nên $\begin{cases} m - 2 = 3 \\ 2m \neq 10 \end{cases}$ (vô lí)

Vậy không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn D.

Ví dụ 13. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 2$ tại điểm M có hoành độ x_0 , biết rằng $f''(x_0) = -6$ là

A. $y = 9x + 6$.

B. $y = 9x - 6$.

C. $y = 6x + 9$.

D. $y = 6x - 9$.

Hướng dẫn giải

Ta có $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9$, $f''(x) = -6x + 6$

$$f''(x_0) = -6 \Leftrightarrow -6x_0 + 6 = -6 \Leftrightarrow x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 24 \text{ và } y'(2) = 9$$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(2; 24)$ là $y = 9(x - 2) + 24 \Leftrightarrow y = 9x + 6$.

Chọn A.

Ví dụ 14. Cho hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 + x + 1$. Gọi k là hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M có hoành độ $x = 1$. Tất cả các giá trị thực của tham số m để thỏa mãn $k \cdot f(-1) < 0$ là

A. $m \leq -2$.

B. $-2 < m < 1$.

C. $m \geq 1$.

D. $m > 2$

Hướng dẫn giải

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2mx + 1 \Rightarrow k = f'(1) = 4 + 2m$.

Do đó $k.f(-1) = (4 + 2m)(m - 1)$

Để $k.f(-1) < 0$ thì $(4 + 2m)(m - 1) < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 1$.

Chọn B.

Ví dụ 15. Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + (m + 1)x + 1$, với m là tham số thực, có đồ thị (C). Biết rằng khi $m = m_0$ thì tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ đi qua $A(1; 3)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $-2 < m_0 < -1$.

B. $-1 < m_0 < 0$

C. $0 < m_0 < 1$

D. $1 < m_0 < 2$

Hướng dẫn giải

Gọi B là tiếp điểm của tiếp tuyến đi qua $A(1; 3)$ khi $m = m_0$

Ta có $y' = 3x^2 + 6mx + m + 1$.

Với $x_0 = -1$ thì $y_0 = 2m - 1 \Rightarrow B(-1; 2m - 1)$ và $y'(-1) = -5m + 4$.

Tiếp tuyến tại B của (C) có phương trình là $y = (-5m + 4)(x + 1) + 2m - 1$.

Do tiếp tuyến đi qua $A(1; 3)$ nên $2(-5m + 4) + 2m - 1 = 3 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Vậy $m_0 = \frac{1}{2} \in (0; 1)$.

Chọn C.

Ví dụ 16. Cho hàm số $y = \frac{x^2}{2 - x}$ có đồ thị (C). Gọi M là một điểm thuộc (C) có khoảng cách từ M đến trục hoành bằng hai lần khoảng cách từ M đến trục tung, M không trùng với gốc tọa độ O và có tọa độ nguyên. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là

A. $y = -8$.

B. $y = -64$.

C. $y = -12$.

D. $y = -9$.

Hướng dẫn giải:

Giả sử $M\left(a; \frac{a^2}{2 - a}\right)$ là một điểm thuộc (C).

Do $d(M; Ox) = 2d(M; Oy)$ nên $\left|\frac{a^2}{2 - a}\right| = 2|a| \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2}{2 - a} = 2a \\ \frac{a^2}{2 - a} = -2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \frac{4}{3} \\ a = 4 \end{cases}$

Theo giả thiết thì M không trùng với gốc tọa độ O và có tọa độ nguyên nên $a = 4 \Rightarrow M(4; -8)$.

Khi đó $y' = \frac{4x - x^2}{(2-x)^2} \Rightarrow y'(4) = 0$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -8$.

Chọn A.

Ví dụ 17. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = -2x + m - 1$ (m là tham số thực).

Gọi k_1, k_2 là hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của d và (C). Tích $k_1.k_2$ bằng

- A. 4. B. $\frac{1}{4}$. C. 2. D. 3.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Ta có $y' = \frac{1}{(x+2)^2}$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d)

$$\frac{x+1}{x+2} = -2x + m - 1 \text{ (với } x \neq -2 \text{)}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + (6-m)x + 3-2m = 0 \quad (1)$$

Để đường thẳng (d) cắt đồ thị hàm số (C) tại hai điểm thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt khác -2 .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (6-m)^2 - 8(3-2m) > 0 \\ 8-2(6-m)+3-2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m + 12 > 0 \\ -1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \forall m \in \mathbb{R}$$

Vậy (C) luôn cắt (d) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$, với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1).

Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m-6}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{3-2m}{2} \end{cases}$

$$\text{Ta có } k_1.k_2 = \frac{1}{(x_1+2)^2} \cdot \frac{1}{(x_2+2)^2} = \frac{1}{[x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4]^2}$$

$$= \frac{1}{\left[\frac{3-2m}{2} + 2 \cdot \frac{m-6}{2} + 4 \right]^2} = 4$$

Chọn A.

Ví dụ 18. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$ có đồ thị (C) với m là tham số thực. Gọi A là điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ bằng 1. Giá trị của tham số thực m để tiếp tuyến Δ của đồ thị (C) tại A cắt đường tròn $(\gamma): x^2 + (y-1)^2 = 4$ tạo thành một dây cung có độ dài nhỏ nhất là

- A. $m = -\frac{13}{16}$. B. $m = \frac{13}{16}$. C. $m = -\frac{16}{13}$. D. $m = \frac{16}{13}$.

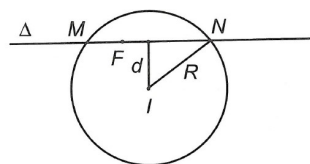
Hướng dẫn giải

Đường tròn $(\gamma): x^2 + (y-1)^2 = 4$ có tâm $I(0;1)$, $R=2$.

Ta có $A(1;1-m)$; $y' = 4x^3 - 4mx \Rightarrow y'(1) = 4 - 4m$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến $\Delta: y = (4 - 4m)(x - 1) + 1 - m$.

Dễ thấy Δ luôn đi qua điểm cố định $F\left(\frac{3}{4}; 0\right)$ và điểm F nằm trong đường tròn (γ) .



Giả sử Δ cắt (γ) tại M, N, Khi đó $MN = 2\sqrt{R^2 - d^2(I; \Delta)} = 2\sqrt{4 - d^2(I; \Delta)}$.

Do đó MN nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I; \Delta)$ lớn nhất $\Leftrightarrow d(I; \Delta) = IF \Rightarrow \Delta \perp IF$.

Khi đó đường thẳng Δ có 1 vectơ chỉ phương $\vec{u} \perp \overrightarrow{IF} = \left(\frac{3}{4}; -1\right)$; $\vec{u} = (1; 4 - 4m)$ nên

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{IF} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot \frac{3}{4} - (4 - 4m) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{13}{16}.$$

Chọn B.

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hai hàm số $(C_1): y = mx^3 + (1 - 2m)x^2 + 2mx$ và $(C_2): y = 3mx^3 + 3(1 - 2m)x + 4m - 2$ tiếp xúc với nhau. Tổng giá trị các phần tử của S bằng

- A. $\frac{11}{6}$. B. 3. C. 1. D. $\frac{7}{2}$.

Câu 2: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = 2x + m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$. Tích giá trị các phần tử của S bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. 4. C. -8. D. -4.

Câu 3: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - (m+1)x^2 + 4m(C_m)$ tiếp xúc với đường thẳng $d: y = 3$ tại hai điểm phân biệt. Tổng các phần tử của tập S bằng

- A. 14. B. 17. C. 15. D. 4.

Câu 4: Giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + 1$ tiếp xúc với đường thẳng $d: y = 5$ là

- A. $m = 2$. B. $m = 3$. C. $m = -1$. D. $m = -3$.

Câu 5: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 1 - m$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị tiếp xúc với trục hoành?

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 6: Giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ tiếp xúc với parabol $y = x^2 + m$ là

- A. $m = -2$. B. $m = 0$. C. $m = -1$. D. $m = 3$.

Câu 7: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2(m+1)x^2 - 5mx + 2m$ tiếp xúc với trục hoành?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 8: Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $x + y = 2m$ là tiếp tuyến của đường cong $y = -x^3 + 2x + 4$ bằng

- A. 2. B. -4. C. -2. D. 4.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 4$ có đồ thị là (C). Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) tiếp xúc với parabol (P): $y = x^2 + m$ bằng

- A. 6. B. 126. C. 34. D. -1.

Câu 10: Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - (m+3)x^2 + (3m+2)x - 2m$ tiếp xúc với trục hoành bằng

- A. 1. B. 3. C. -3. D. -1.

Câu 11: Trong ba đường thẳng $d_1 : y = 7x - 9$, $d_2 : y = 5x + 29$, $d_3 : y = -5x - 5$ có bao nhiêu đường thẳng là tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C): $y = x^3 + 3x^2 - 2x - 4$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 12: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ tại điểm có hoành độ bằng -3 có phương trình là

- A. $y = 9x + 25$. B. $y = 30x - 25$ C. $y = 9x - 25$ D. $y = 30x + 25$

Câu 13: Đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{3x+1}{x-1}$ cắt trục tung tại điểm A. Tiếp tuyến của (C) tại điểm A có phương trình là

- A. $y = -5x - 1$. B. $y = -4x - 1$ C. $y = 4x - 1$ D. $y = 5x - 1$

Câu 14: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x = 0$ là

- A. $y = 3x + 2$. B. $y = -3x - 2$ C. $y = 3x - 3$ D. $y = 3x - 2$

Câu 15: Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \sin x + 1$ tại điểm có hoành độ $\frac{\pi}{3}$ bằng

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 16: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ tại giao điểm với trục hoành, cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. -1.

B. 1.

C. 2.

D. -2.

Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{x^2}{8} + \frac{11}{2}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M có hoành độ $x_0 = -2$ là

A. $y = -\frac{1}{2}(x-2)+7.$

B. $y = -\frac{1}{2}(x+2)+6.$

C. $y = -\frac{1}{2}(x+2)-6$

D. $y = \frac{1}{2}(x+2)+7$

Câu 18: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 4$ (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(-2;2)$ có hệ số góc bằng

A. 45.

B. 0.

C. 24.

D. 9.

Câu 19: Cho hàm số $y = x^3 + 3x$ có đồ thị hàm số (C). Hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị tại điểm có tung độ bằng 4 là

A. 9.

B. 6.

C. 0.

D. -2.

Câu 20: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+2}{2x-3}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ có hệ số góc bằng

A. -5.

B. -13.

C. 13.

D. -1.

Câu 21: Cho đồ thị (H): $y = \frac{2x-4}{x-3}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (H) tại giao điểm của (H) và Ox là

A. $y = -2x + 4.$

B. $y = -2x - 4.$

C. $y = 2x - 4.$

D. $y = 2x.$

Câu 22: Cho hàm số $y = -x^2 + 5$, có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M có tung độ $y_0 = -1$ với hoành độ $x_0 < 0$ là

A. $y = 2\sqrt{6}(x - \sqrt{6}) - 1.$

B. $y = 2\sqrt{6}(x + \sqrt{6}) - 1$

C. $y = -2\sqrt{6}(x + 6) - 1$

D. $y = 2\sqrt{6}(x - 6) + 1$

Câu 23: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là

A. $x + 3y + 1 = 0.$

B. $x - 3y + 1 = 0.$

C. $x - 3y - 1 = 0.$

D. $x + 3y - 1 = 0$

Câu 24: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C): $y = x^4 - x^2 + 1$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

A. $y = 2x - 1.$

B. $y = 2x + 1.$

C. $y = 1.$

D. $y = 2x + 3.$

Câu 25: Phương trình đường tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2x}}$ tại điểm $A\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ là

A. $2x - 2y = 1.$

B. $2x + 2y = -3.$

C. $2x - 2y = -1.$

D. $2x + 2y = 3.$

Câu 26: Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x + 1$ tại điểm có hoành độ bằng 2 có phương trình là

A. $y = -8x + 17.$

B. $y = 8x - 16.$

C. $y = 8x + 15.$

D. $y = 8x - 15.$

Câu 27: Phương trình các đường tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 1$ tại điểm có tung độ bằng 5 là

A. $y = 2x + 3; y = -x + 7; y = 2x - 2.$

B. $y = 2x + 1; y = -x + 2; y = 2x - 2.$

C. $y = 2x + 3; y = -x + 7; y = 2x - 1.$

D. $y = 2x + 1; y = -x + 2; y = 2x - 1.$

Câu 28: Cho hàm số $y = x^2 + 5x + 4$ có đồ thị (C). Phương trình các đường tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của đồ thị với trục Ox là

A. $y = 3x + 3$ và $y = -3x - 12.$

B. $y = 3x - 3$ và $y = -3x + 12.$

C. $y = -3x + 3$ và $y = 3x - 12.$

D. $y = 2x + 3$ và $y = -2x - 12.$

Câu 29: Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^4 + x^3 - 2x^2 + 1$ tại điểm có hoành độ -1 bằng

A. 4.

B. 3.

C. -3.

D. 11.

Câu 30: Gọi M là giao điểm của trục tung với đồ thị hàm số (C): $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$. Tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình là

A. $y = \frac{1}{2}x + 1.$

B. $y = -\frac{1}{2}x + 1.$

C. $y = -x + 1.$

D. $y = x + 1.$

Câu 31: Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị $y = \tan x$ tại điểm có hoành độ $x = \frac{\pi}{4}$ bằng

A. 2.

B. $\frac{1}{2}.$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}.$

D. 1.

Câu 32: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 - \frac{1}{x}$ tại điểm có hoành độ $x = -1$ là

A. $y = 2x + 1.$

B. $y = -x + 1.$

C. $y = x - 1.$

D. $y = -x + 2.$

Câu 33: Cho hàm số $y = x^3 - x^2 + x + 1$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến tại điểm N của (C) cắt đồ thị (C) tại điểm thứ hai là $M(-1; -2)$. Tọa độ điểm N là

A. (2; 7).

B. (1; 2).

C. (0; 1).

D. (-1; 0).

Câu 34: Gọi d là tiếp tuyến của hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ tại điểm có hoành độ bằng -3. Khi đó d tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng

A. $\frac{169}{6}$ (đvdt).

B. $\frac{121}{6}$ (đvdt).

C. $\frac{25}{6}$ (đvdt).

D. $\frac{49}{6}$ (đvdt).

Câu 35: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ là

A. $y = x + \frac{11}{3}.$

B. $y = -x - \frac{1}{3}.$

C. $y = x + \frac{1}{3}.$

D. $y = -x + \frac{11}{3}.$

Câu 36: Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + mx + m + 1$ và d là tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ $x = -1$. Giá trị của tham số m để d đi qua điểm $A(0; 8)$ là

A. $m = 3.$

B. $m = 1.$

C. $m = 2.$

D. $m = 0.$

Dạng 2: Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi biết hệ số góc

Bài toán 1: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số khi biết hệ số góc dựa vào các quan hệ song song, vuông góc,...

Phương pháp giải

Thực hiện theo một trong hai cách sau:

Cách 1:

Bước 1. Xác định hệ số góc k của tiếp tuyến dựa vào giả thiết bài toán.

Bước 2. Giải phương trình $f'(x) = k$ để tìm $x = x_0$ là hoành độ của tiếp điểm.

Tính $y_0 = f(x_0) \Rightarrow M(x_0; y_0)$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến cần tìm là

$$y = k(x - x_0) + y_0$$

Điểm $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị hàm số đã cho.

Cách 2:

Bước 1. Xác định hệ số góc k của tiếp tuyến dựa vào giả thiết bài toán.

Bước 2. Vì tiếp tuyến có hệ số góc là k nên phương trình tiếp tuyến có dạng $y = kx + b$. Dựa vào điều kiện tiếp xúc của tiếp tuyến với (C) ta tìm giá trị của b .

Lưu ý:

- Phương trình $f'(x) = k$ có bao nhiêu nghiệm thì có bấy nhiêu tiếp điểm.

- Một số trường hợp xác định hệ số góc của đường thẳng thường gặp.

Cho hai đường thẳng

$$d_1: y = k_1x + b_1; d_2: y = k_2x + b_2.$$

+ Trường hợp 1: $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow k_1.k_2 = -1$.

+ Trường hợp 2: $d_1 // d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$

+ Trường hợp 3: Góc

Ví dụ: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: y = 9x + 2$.

Hướng dẫn giải

Vì tiếp tuyến song song với $\Delta: y = 9x + 2$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = 9$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$.

$$\text{Xét phương trình } 3x^2 - 6x = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

+ Với $x = -1 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow M(-1; -2)$ có phương trình tiếp tuyến là $y = 9(x + 1) - 2 \Leftrightarrow y = 9x + 7$.

+ Với $x = 3 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow N(3; 2)$ có phương trình tiếp tuyến là $y = 9(x - 3) + 2 \Leftrightarrow y = 9x - 25$.

Vì tiếp tuyến song song với $\Delta: y = 9x + 2$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = 9$.

Phương trình tiếp tuyến có dạng $(d): y = 9x + b$ với $b \neq 2$.

Vì $(d): y = 9x + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số

$$y = x^3 - 3x^2 + 2 \text{ nên } \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = 9x + b \\ 3x^2 - 6x = 9 \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ phương trình tìm được } \begin{cases} b = 7. \\ b = -25. \end{cases}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 9x + 7$

hoặc $y = 9x - 25$.

$$(d_1; d_2) = \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|.$$

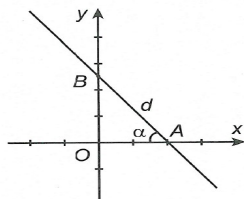
Đặc biệt:

1. Nếu góc giữa $d: y = kx + b$ với Ox bằng

$\alpha (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$ thì $|k| = \tan \alpha$.

2. Nếu đường thẳng d cắt Ox, Oy tại hai điểm A, B mà $OB = m \cdot OA$ thì

$$|k| = \tan \alpha = \frac{OB}{OA} = m.$$



+ Trường hợp 4: Nếu đường thẳng d đi qua hai

điểm $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ thì $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có hệ số góc của tiếp tuyến bằng 9 là

A. $y = 9x - 15$ hay $y = 9x + 1$.

B. $y = 9x - 15$ hay $y = 9x + 17$.

C. $y = 9x - 1$ hay $y = 9x + 17$.

D. $y = 9x - 1$ hay $y = 9x + 1$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = 3x^2 - 3$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Vì hệ số góc của tiếp tuyến bằng 9 nên $y'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$.

+ Với $x_0 = 2$ thì $y_0 = 3$. Phương trình tiếp tuyến là $y = 9(x - 2) + 3 = 9x - 15$.

+ Với $x_0 = -2$ thì $y_0 = -1$. Phương trình tiếp tuyến là $y = 9(x + 2) - 1 = 9x + 17$.

Chọn B.

Ví dụ 2: Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ song song với đường thẳng $\Delta: y = x + 1$?

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = \frac{1}{(x+1)^2}$. Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: y = x + 1$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là

$$k = 1.$$

Xét phương trình $\frac{1}{(x+1)^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

+ Với $x = 0$ thì $y = 1$. Phương trình tiếp tuyến là $y = x + 1$ (loại vì trùng với Δ).

+ Với $x = -2$ thì $y = 3$. Phương trình tiếp tuyến là $y = x + 5$.

Vậy có một tiếp tuyến song song với $\Delta: y = x + 1$.

Chọn D.

Ví dụ 3: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = x^4 + x$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d: x + 5y = 0$ có phương trình là

A. $y = x + 4$.

B. $y = 5x - 3$.

C. $y = 3x - 5$.

D. $y = 2x - 3$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = 4x^3 + 1$. Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến cần tìm.

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{5}x$ nên $k \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -1 \Leftrightarrow k = 5$.

Xét phương trình $4x^3 + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 5(x - 1) + 2 = 5x - 3$.

Chọn B.

Ví dụ 4: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ song song với trục Ox là

A. $y = 3, y = -1$.

B. $y = 3, y = -2$.

C. $x = 3, x = -1$.

D. $y = 2, y = -1$.

Hướng dẫn giải

Do tiếp tuyến song song với trục Ox nên tiếp tuyến có tiếp điểm là các điểm cực trị và có phương trình $y = y_0$ với y_0 là giá trị cực trị của hàm số đã cho.

Ta có $y' = 3x^2 - 3; y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Do hàm số đã cho là hàm bậc ba nên các điểm cực trị là $A(1; -1), B(-1; 3)$.

Vậy phương trình các đường tiếp tuyến cần tìm là $y = -1; y = 3$.

Chọn A.

Ví dụ 5: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ song song với đường thẳng $d: 12x + y = 0$ có dạng $y = ax + b$. Giá trị $2a + b$ bằng

A. 0.

B. -23.

C. -23 hoặc -24.

D. -24.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = 6x^2 - 6x - 12$. Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: 12x + y = 0 \Leftrightarrow y = -12x$ nên có hệ số góc $k = -12$.

$$\text{Xét phương trình } 6x^2 - 6x - 12 = -12 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

+ Với $x = 0$ thì $y = 1$. Phương trình tiếp tuyến là $y = -12x + 1$.

+ Với $x = 1$ thì $y = -12$. Phương trình tiếp tuyến là $y = -12(x - 1) - 12 = -12x$ (loại vì tiếp tuyến trùng với đường thẳng (d)).

Vậy tiếp tuyến cần tìm là $y = -12x + 1 \Rightarrow a = -12; b = 1 \Rightarrow 2a + b = -23$.

Chọn B.

Ví dụ 6: Trên đồ thị (C): $y = \frac{x-1}{x-2}$ có bao nhiêu điểm M mà tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng $d: x + y = 1$?

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 0.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } y' = \frac{-1}{(x-2)^2}.$$

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: x + y = 1 \Leftrightarrow y = -x + 1$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = -1$.

$$\text{Xét phương trình } -\frac{1}{(x-2)^2} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

+ Với $x = 1$ thì $y = 0$. Phương trình tiếp tuyến là $y = -x + 1$ (loại vì tiếp tuyến trùng với đường thẳng (d)).

+ Với $x = 3$ thì $y = 2$. Phương trình tiếp tuyến là $y = -(x - 3) + 2 = -x + 5$.

Vậy có một điểm $M(3; 2)$ thỏa mãn.

Chọn A.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến này cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A, B thỏa mãn $OA = 4OB$ là

A. $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} \\ y = -\frac{1}{4}x - \frac{13}{4} \end{cases}$

B. $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4} \\ y = -\frac{1}{4}x - \frac{13}{4} \end{cases}$

C. $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} \\ y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4} \end{cases}$

D. $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4} \\ y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4} \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Do tiếp tuyến cắt Ox, Oy tại hai điểm A, B mà $OA = 4OB$.

Khi đó $\triangle OAB$ vuông tại O và ta có $|k| = \tan \widehat{OAB} = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow k = \pm \frac{1}{4}$.

Ta có: $y' = -\frac{1}{(x-1)^2}$

Xét phương trình $-\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{4}$ (vô nghiệm).

Xét phương trình $-\frac{1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-1 \end{cases}$

+ Với $x=3$ thì $y = \frac{5}{2}$. Phương trình tiếp tuyến là

$$y = -\frac{1}{4}(x-3) + \frac{5}{2} = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}.$$

+ Với $x=-1$ thì $y = \frac{3}{2}$. Phương trình tiếp tuyến là

$$y = -\frac{1}{4}(x+1) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

Chọn C.

Ví dụ 8: Đường thẳng nào dưới đây là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x+2}$ chắn hai trục tọa độ một tam giác vuông cân?

A. $y = x + 2$.

B. $y = x - 2$.

C. $y = -x + 2$

D. $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải

Gọi A, B là giao điểm của tiếp tuyến lần lượt với Ox, Oy.

Vì $\triangle OAB$ vuông cân tại O nên $OA = OB$.

Do đó $|k| = \tan \widehat{OAB} = \frac{OB}{OA} = 1 \Leftrightarrow k = \pm 1$.

Ta có $y' = \frac{1}{(x+2)^2}$

Xét phương trình $\frac{1}{(x+2)^2} = -1$ (vô nghiệm).

Xét phương trình $\frac{1}{(x+2)^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \end{cases}$.

+ Với $x=-1$ thì $y=1$. Phương trình tiếp tuyến là $y = (x+1) + 1 = x + 2$.

+ Với $x = -3$ thì $y = 3$. Phương trình tiếp tuyến là $y = (x + 3) + 3 = x + 6$.

Chọn A.

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 + (4-3m)x + 1$ có đồ thị là (C_m) . Tất cả các giá trị thực của tham số m để trên đồ thị (C_m) tồn tại một điểm duy nhất có hoành độ âm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $d: x + 2y - 3 = 0$ là

A. $m < 12$ hoặc $m > \frac{2}{3}$.

B. $m < 0$ hoặc $m > 1$.

C. $m < 0$ hoặc $m > \frac{1}{3}$.

D. $m < 0$ hoặc $m > \frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $d: x + 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ nên hệ số góc của d là $-\frac{1}{2}$.

Do tiếp tuyến vuông góc với d nên hệ số góc của tiếp tuyến là k thì

$$k \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow k = 2.$$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với (C_m) thì x_0 là nghiệm của phương trình

$$y' = k \Leftrightarrow mx^2 + 2(m-1)x + 4 - 3m = 2.$$

$$\Leftrightarrow mx^2 + 2(m-1)x + 2 - 3m = 0 (*)$$

Theo bài toán thì ta phải tìm m để $(*)$ có duy nhất một nghiệm âm.

+ Trường hợp 1: Nếu $m = 0$ thì $(*) \Leftrightarrow -2x = -2 \Leftrightarrow x = 1$ (loại).

+ Trường hợp 2: Nếu $m \neq 0$. Ta thấy phương trình $(*)$ có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = \frac{2-3m}{m}$.

Do đó để $(*)$ có một nghiệm âm thì $\frac{2-3m}{m} < 0 \Leftrightarrow m < 0$ hoặc $m > \frac{2}{3}$.

Chọn D.

Ví dụ 10: Biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + 2$ tại điểm $A(-1; 1)$ vuông góc với đường thẳng $d: x - 2y + 3 = 0$. Giá trị $a^2 - b^2$ bằng

A. 13.

B. -2.

C. -5.

D. 10.

Hướng dẫn giải

Ta có: $d: x - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ nên $k_d = \frac{1}{2}$

Vì tiếp tuyến vuông góc với d nên phải có hệ số góc bằng -2 .

$$\text{Ta có } y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$$

Vì điểm $A(-1;1)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị nên $x = -1$ là nghiệm của phương trình

$$2x(2ax^2 + b) = -2 \Rightarrow -2(2a + b) = -2 \Leftrightarrow 2a + b = 1.$$

Mặt khác điểm A thuộc đồ thị hàm số nên $a + b + 2 = 1 \Leftrightarrow a + b = -1$.

$$\text{Vậy ta có hệ } \begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 = -5.$$

Chọn C.

Ví dụ 11: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có đồ thị là (C). Số tiếp tuyến của (C) tạo với đường thẳng

$$d: y = -x + 1 \text{ một góc } \alpha \text{ thỏa mãn } \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}} \text{ là}$$

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến cần tìm.

$$\text{Ta có } \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}} (0^\circ < \alpha < 90^\circ) \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Vì d có hệ số góc bằng } -1 \text{ nên } \tan \alpha = \left| \frac{k+1}{1-k} \right| = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -9 \\ k = -\frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 6x - 9.$$

$$+ \text{ Trường hợp 1: } k = -9 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Từ đó ta tìm được hai tiếp tuyến $y = -9x + 1$ và $y = -9x - 3$.

$$+ \text{ Trường hợp 2: } k = -\frac{1}{9} \Leftrightarrow 27x^2 - 54x - 80 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{321}}{9}$$

$$\text{Từ đó ta tìm được hai tiếp tuyến là } y = -\frac{1}{9} \left(x - \frac{9 \pm \sqrt{321}}{9} \right) + y(x_0)$$

Vậy có bốn tiếp tuyến cần tìm.

Chọn D.

Ví dụ 12: Cho hàm số $y = \frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1); N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 3(x_1 - x_2)$

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Do tiếp tuyến đi qua hai điểm $M(x_1; y_1); N(x_2; y_2)$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 3$.

Ta có $y' = \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{2}x$.

Xét phương trình $\frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{2}x = 3 \Leftrightarrow x = 3; x = -1; x = -2$.

Mặt khác để tiếp tuyến của hàm số trùng phương cắt được đồ thị tại hai điểm phân biệt thì tiếp điểm A chỉ có thể chạy trong phần đồ thị từ điểm cực tiểu thứ nhất sang điểm cực tiểu thứ hai (trừ hai điểm uốn).

Khi đó phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow x^3 - 7x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{7} \end{cases}$

Do đó hai điểm cực tiểu là $x = -\sqrt{7}$ và $x = \sqrt{7}$ nên hoành độ của tiếp điểm $x_0 \in (-\sqrt{7}; \sqrt{7})$

Vậy chỉ có $x_0 = -1; x_0 = -2$ thỏa mãn.

Chọn B.

Bài toán 2: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ khi biết mối quan hệ của tiếp tuyến với các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

 **Phương pháp giải**

Với hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (với

$c \neq 0; ad - bc \neq 0$) thì đồ thị hàm số có hai

tiệm cận là $x = -\frac{d}{c}; y = \frac{a}{c}$.

Gọi $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ là giao điểm của hai đường

tiệm cận (và cũng là tâm đối xứng của đồ thị).

Khi đó tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0)$ bất kì của đồ thị cắt tiệm cận đứng tại điểm

$A\left(-\frac{d}{c}; \frac{2bc - ad + acx_0}{c(cx_0 + d)}\right)$ và cắt tiệm cận

ngang tại điểm $B\left(2x_0 + \frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$.

Ta có $IA = \left| \frac{2(ad - bc)}{c(cx_0 + d)} \right|; IB = \left| \frac{2(cx_0 + d)}{c} \right|$

$\Rightarrow IA \cdot IB = \frac{4|ad - bc|}{c^2} = K$ là hằng số không

đổi.

Ví dụ: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C).

Phương trình tiếp tuyến tại điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến đó vuông góc với IM, I là tâm đối xứng của (C) là

A. $y = -x + 3, y = -x + 5$.

B. $y = -x + 1, y = -x + 3$.

C. $y = -x + 1, y = -x + 5$.

D. $y = -x + 1, y = -x + 4$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm,

Gọi A, B là giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị.

Theo lý thuyết trên thì M là trung điểm của AB. Do $\triangle IAB$ vuông tại I mà $IM \perp AB$ nên $\triangle IAB$ vuông cân tại I $\Leftrightarrow IA = IB$ khi đó hệ số góc của tiếp tuyến là $k = \pm 1$.

Mà $k = y'(x_0) = \frac{-1}{(x_0 - 1)^2} < 0$ nên $k = -1$.

Suy ra $S_{\Delta IAB} = \frac{2|ad-bc|}{c^2}$.

Khi đó các bài toán sau là tương đương:

Tìm điểm $M \in (C)$ hoặc viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến tạo với hai tiệm cận một tam giác vuông có

a) Cạnh huyền nhỏ nhất

$$AB = \sqrt{IA^2 + IB^2} \geq \sqrt{2IA \cdot IB} = \sqrt{2K}$$

Dấu bằng xảy ra khi $IA = IB$.

b) Chu vi nhỏ nhất

Ta có

$$IA + IB + AB \geq 2\sqrt{IA \cdot IB} + \sqrt{2IA \cdot IB} = 2\sqrt{K} + \sqrt{2K}$$

Dấu bằng xảy ra khi $IA = IB$.

c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp nhỏ nhất

Ta có $R = \frac{1}{2}AB \geq \sqrt{\frac{K}{2}}$.

Dấu bằng xảy ra khi $IA = IB$.

d) Bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất

Ta có $r = \frac{S}{p} = \frac{K}{IA + IB + AB}$

Vậy r lớn nhất khi $IA + IB + AB$ nhỏ nhất

và bằng $2\sqrt{K} + \sqrt{2K}$.

Dấu bằng xảy ra khi $IA = IB$.

e) Khoảng cách từ I đến tiếp tuyến lớn nhất

Gọi H là hình chiếu của I lên d , ta có

$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IB^2} \geq \frac{2}{IA \cdot IB} = \frac{2}{K} \Rightarrow IH \leq \sqrt{\frac{K}{2}}$$

Dấu bằng xảy ra khi $IA = IB$.

Nhận xét: Các câu hỏi trên thì đẳng thức đều xảy ra khi $IA = IB$ nên ΔIAB vuông cân tại I .

Gọi α là góc giữa tiếp tuyến d và tiệm cận ngang

Δ_2 thì $\alpha = (d; \Delta_2) = (d; Ox) = 45^\circ$ nên hệ số góc

của tiếp tuyến là $k = \pm \tan 45^\circ = \pm 1$.

Vậy ta có phương trình $\frac{-1}{(x_0 - 1)^2} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{cases}$

+ Với $x_0 = 0$ thì $y_0 = 1$. Do đó phương trình tiếp tuyến là $y = -x + 1$.

+ Với $x_0 = 2$ thì $y_0 = 3$. Do đó phương trình tiếp tuyến là $y = -x + 5$.

Chọn C.

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu cặp điểm A, B thuộc (C) mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau?

A. Không tồn tại cặp điểm đó.

B. Vô số cặp điểm.

C. 2.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Giả sử $A\left(a; \frac{a+1}{a-1}\right), B\left(b; \frac{b+1}{b-1}\right)$ với $a \neq b; a, b \neq 1$.

Do tiếp tuyến tại A, B song song với nhau nên $y'(a) = y'(b) \Leftrightarrow \frac{-2}{(a-1)^2} = \frac{-2}{(b-1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b = 2 \end{cases}$

Do $a \neq b$ nên chỉ có $a + b = 2$. Vậy có vô số cặp điểm A, B thỏa mãn.

Chọn B.

Nhận xét: Hai điểm A, B phân biệt thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau thì A, B đối xứng với nhau qua tâm đối xứng I.

Ví dụ 2: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4x-3}{2x+1}$ cùng với hai tiệm cận tạo thành một tam giác có diện tích bằng

A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị. Khi đó tiếp tuyến tại M cắt hai tiệm cận tại A, B và I là giao điểm của hai tiệm cận.

Theo lý thuyết đã nêu thì $S_{\Delta IAB} = \frac{2|4+6|}{4} = 5$.

Chọn C.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến tại điểm $M(a; b) \in (C)$, $a > 0$ tạo với hai tiệm cận của (C) một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\sqrt{2}$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

A. 2.

B. 4.

C. 8.

D. 5.

Hướng dẫn giải

Gọi A, B là giao điểm của tiếp tuyến với hai đường tiệm cận và I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Do

ΔIAB vuông tại I nên bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔIAB là $R = \frac{1}{2}AB = \sqrt{2} \Leftrightarrow AB = 2\sqrt{2}$.

Theo lý thuyết, ta có $IA \cdot IB = 4$, $AB = \sqrt{IA^2 + IB^2} \geq \sqrt{2IA \cdot IB} = 2\sqrt{2}$.

Dấu " $=$ " xảy ra khi $IA = IB$. Khi đó hệ số góc của tiếp tuyến $k = \pm 1$.

Mặt khác $k = y'(a) = -\frac{1}{(a-1)^2} < 0 \Rightarrow k = -1$.

Ta có $-\frac{1}{(a-1)^2} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=2 \end{cases}$. Do $a > 0 \Rightarrow a=2 \Rightarrow b=3$. Vậy $a+2b=8$.

Chọn C.

Ví dụ 4: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \frac{2x+m}{x-2}$, m là tham số khác -4 và d là một tiếp tuyến của (C).

Gọi S là tập các giá trị thực của tham số m để d tạo với hai đường tiệm cận của (C) một tam giác có diện tích bằng 2, tổng giá trị các phần tử của S bằng

- A. -11 . B. 8 . C. 3 . D. -8 .

Hướng dẫn giải

Gọi A, B lần lượt là các giao điểm của tiếp tuyến với hai đường tiệm cận và I là giao điểm của hai tiệm cận.

Theo lý thuyết, ta có $IA \cdot IB = 4|m+4| \Rightarrow S_{\triangle IAB} = 2|m+4|$

Vậy ta có $2|m+4| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = -5 \end{cases}$

$\Rightarrow S = \{-5; -3\}$ nên tổng các phần tử của S bằng -8 .

Chọn D.

Ví dụ 5: Gọi Δ là tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0), x_0 < 0$ thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ sao cho khoảng cách từ $I(-1; 1)$ đến A đạt giá trị lớn nhất. Giá trị $x_0 \cdot y_0$ bằng

- A. -1 . B. 0 . C. -2 . D. 2 .

Hướng dẫn giải

Gọi A, B là giao điểm của Δ với hai đường tiệm cận.

Theo lý thuyết $d(I; \Delta)$ lớn nhất khi $IA = IB \Rightarrow k = \pm 1$.

Mặt khác $k = y'(x_0) = -\frac{1}{(x_0+1)^2} < 0 \Rightarrow k = -1$.

Vậy $-\frac{1}{(x_0+1)^2} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{cases}$

Do $x_0 < 0 \Rightarrow x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow x_0 \cdot y_0 = 0$.

Chọn B.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tạo với hai tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất là

- A. $\Delta: y = -x-1$ và $\Delta: y = -x+17$
 B. $\Delta: y = -x-1$ và $\Delta: y = -x+7$
 C. $\Delta: y = -x-21$ và $\Delta: y = -x+7$

D. $\Delta: y = -x - 3$ và $\Delta: y = -x + 2$

Hướng dẫn giải

Gọi A, B là giao điểm của tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ với hai tiệm cận và I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Khi đó ΔIAB vuông tại I.

Theo lý thuyết, chu vi ΔIAB là $IA + IB + AB \geq 2\sqrt{IA \cdot IB} + \sqrt{2IA \cdot IB} = 8 + 4\sqrt{2}$ vì $IA \cdot IB = \frac{4|ad - bc|}{c^2} = 16$

Do đó chu vi nhỏ nhất bằng $8 + 4\sqrt{2}$ khi $IA = IB \Rightarrow k = \pm 1$.

Mặt khác $k = y'(x_0) = -\frac{4}{(x_0 - 1)^2} < 0 \Rightarrow k = -1$.

Vậy ta có $-\frac{4}{(x_0 - 1)^2} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_0 = -1 \end{cases}$

Với $x_0 = 3$ thì $y_0 = 4$. Do đó phương trình tiếp tuyến là $y = -(x - 3) + 4 = -x + 7$

Với $x_0 = -1$ thì $y_0 = 0$. Do đó phương trình tiếp tuyến là $y = -(x + 1) = -x - 1$

Chọn B.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = \frac{2x + 2}{x - 1}$ có đồ thị (C). Một tiếp tuyến bất kỳ với (C) cắt đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của (C) lần lượt tại A và B, biết $I(1; 2)$. Giá trị lớn nhất của bán kính đường tròn nội tiếp tam giác IAB bằng

A. $7 - 3\sqrt{2}$.

B. $8 - 4\sqrt{2}$.

C. $4 - 2\sqrt{2}$

D. $8 - 3\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Gọi A, B là giao điểm của tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ với hai tiệm cận và I là giao điểm của hai đường tiệm cận và ΔIAB vuông tại I.

Theo lý thuyết, ta có $IA \cdot IB = \frac{4|ad - bc|}{c^2} = 16 \Rightarrow S_{\Delta IAB} = 8$.

Khi đó bán kính đường tròn nội tiếp ΔIAB lớn nhất xảy ra khi

$$IA = IB = 4 \Rightarrow AB = 4\sqrt{2} \Rightarrow p = \frac{IA + IB + AB}{2} = 4 + 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow r_{\max} = \frac{8}{4 + 2\sqrt{2}} = 4 - 2\sqrt{2}$$

Chọn C.

Ví dụ 8: Cho hàm số $y = \frac{2x}{x + 2}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{1}{18}$ là

A. $y = \frac{9}{4}x + \frac{1}{2}; y = \frac{4}{9}x + \frac{2}{9}.$

B. $y = \frac{9}{4}x + \frac{31}{2}; y = \frac{4}{9}x + \frac{2}{9}.$

C. $y = \frac{9}{4}x + \frac{1}{2}; y = \frac{4}{9}x + \frac{4}{9}.$

D. $y = \frac{9}{4}x + \frac{1}{2}; y = \frac{4}{9}x + \frac{1}{9}.$

Hướng dẫn giải

Gọi $M\left(a; \frac{2a}{a+2}\right) (a \neq -2)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến. Khi đó phương trình tiếp tuyến d của (C) tại M là

$$y = y'(a)(x-a) + \frac{2a}{a+2} \Leftrightarrow y = \frac{4}{(a+2)^2}(x-a) + \frac{2a}{a+2}.$$

Gọi A, B lần lượt là các giao điểm của d với hai trục Ox, Oy.

Tọa độ các điểm A, B là $A\left(-\frac{a^2}{2}; 0\right), B\left(0; \frac{2a^2}{(a+2)^2}\right).$

Vậy $S_{OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{a^4}{2(a+2)^2} = \frac{1}{18} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 = a+2 \\ 3a^2 = -a-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-\frac{2}{3} \end{cases}$

Với $a=1 \Rightarrow d_1: y = \frac{4}{9}(x-1) + \frac{2}{3} = \frac{4}{9}x + \frac{2}{9}.$

Với $a=-\frac{2}{3} \Rightarrow d_2: y = \frac{9}{4}\left(x + \frac{2}{3}\right) - 1 = \frac{9}{4}x + \frac{1}{2}$

Chọn A.

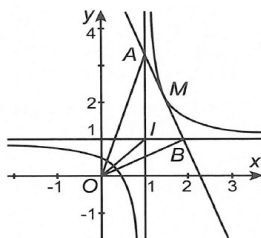
Ví dụ 9: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{2x-2}$ có đồ thị (C). Gọi $M(x_0; y_0), x_0 > 0$ là điểm thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A và B sao cho $S_{\Delta OIB} = 8S_{\Delta OIA}$ (I là giao hai đường tiệm cận). Giá trị biểu thức $S = x_0 - 4y_0$ bằng

A. $\frac{13}{4}.$

B. -2.

C. 2.

D. $\frac{7}{4}.$



Hướng dẫn giải

Do góc $\widehat{OIA} = \widehat{OIB}$ nên $\frac{S_{\Delta OIA}}{S_{\Delta OIB}} = \frac{IA}{IB} = \frac{1}{8}$.

Mà $|k| = \tan \widehat{IBA} = \frac{IA}{IB}$ nên $|k| = \frac{1}{8} \Leftrightarrow k = \pm \frac{1}{8}$.

Mặt khác $k = y'(x_0) = \frac{-2}{4(x_0-1)^2} < 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{8}$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2(x_0-1)^2} = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_0 = -1 \end{cases}$$

Do $x_0 > 0$ nên $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = \frac{5}{4} \Rightarrow S = x_0 - 4y_0 = -2$

Chọn B.

Ví dụ 10: Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến tại điểm M thuộc (C) cắt tiệm

cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A, B sao cho cosin góc $\widehat{ABI}$ bằng $\frac{4}{\sqrt{17}}$ với $I(2;2)$ là

A. $y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}; y = -\frac{1}{4}x - \frac{7}{2}$

B. $y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}; y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$

C. $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}; y = -\frac{1}{4}x - \frac{7}{2}$

D. $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}; y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$

Hướng dẫn giải:

Ta có $|k| = \tan \widehat{ABI} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \widehat{ABI}} - 1} = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \pm \frac{1}{4}$

Giả sử $M(x_0; y_0) \in (C)$ thì $k = y'(x_0) = \frac{-1}{(x_0-2)^2} < 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$.

Xét phương trình $\frac{-1}{(x_0-2)^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 4 \end{cases}$

+ Với $x_0 = 0$ thì $y_0 = \frac{3}{2}$. Phương trình tiếp tuyến là $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$.

+ Với $x_0 = 4$ thì $y_0 = \frac{5}{2}$. Phương trình tiếp tuyến là $y = -\frac{1}{4}(x-4) + \frac{5}{2} = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$

Chọn D.

 **Bài tập tự luyện dạng 2**

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $\Delta: 3x - 4y + 1 = 0$ là

A. $y = \frac{3}{4}x - 9$; $y = \frac{3}{4}x + 7$.

B. $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$; $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$

C. $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$; $y = \frac{3}{4}x + 1$.

D. $y = \frac{3}{4}x - 3$; $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$

Câu 2: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có hệ số góc của tiếp tuyến bằng 9 là

A. $y = 9x - 13$ hay $y = 9x + 1$

B. $y = 9x - 13$ hay $y = 9x + 17$

C. $y = 9x - 1$ hay $y = 9x + 17$

D. $y = 9x - 1$ hay $y = 9x + 1$

Câu 3: Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ song song với đường thẳng $\Delta: y = x + 1$?

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Câu 4: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = x^4 + x$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d: x + 5y = 0$ có phương trình là

A. $y = x + 4$

B. $y = 5x - 3$

C. $y = 3x - 5$

D. $y = 2x - 3$

Câu 5: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+2}$ song song với đường thẳng $3x - y + 2 = 0$ là

A. $y = 3x + 14$.

B. $y = 3x + 14$, $y = 3x + 2$.

C. $y = 3x + 5$, $y = 3x - 8$.

D. $y = 3x - 8$.

Câu 6: Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + 1$ sao cho tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M song song với đường thẳng $d: y = 3x - 1$?

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) có hệ số góc $k = -9$ là

A. $y = -9(x + 3)$. B. $y - 16 = -9(x + 3)$. C. $y + 16 = -9(x + 3)$ D. $y - 16 = -9(x - 3)$

Câu 8: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số vuông góc với đường thẳng $d: y = -\frac{1}{45}x + 2019$ là

A. $y = -45x + 83$.

B. $y = 45x + 173$

C. $y = 45x - 83$

D. $y = 45x - 173$

Câu 9: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 8x + 1$ song song với đường thẳng $\Delta: y = x + 2017$ là

A. $y = x - 2018$.

B. $y = x + 2018$.

C. $y = x + 4$.

D. $y = x - 4$; $y = x + 28$.

Câu 10: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + 2$ song song với đường thẳng $y = -2x + 5$ là

A. $y = -2x + \frac{10}{3}$ và $y = -2x + 2$

B. $y = -2x + 3$ và $y = -2x - 1$

C. $y = -2x + 4$ và $y = -2x - 2$

D. $y = -2x - \frac{4}{3}$ và $y = -2x - 2$

Câu 11: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ vuông góc với trục Oy là

A. $y = 3, y = -1$.

B. $y = 3, y = -2$.

C. $x = 3, x = -1$.

D. $y = 2, y = -1$.

Câu 12: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2}{2-x}$. Phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{4}{3}x + 1$ là

A. $x = -\frac{3}{4}x - \frac{9}{2}, y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$.

B. $x = -\frac{3}{4}x, y = -\frac{3}{4}x - 1$.

C. $x = \frac{3}{4}x - \frac{9}{2}, y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$.

D. $x = -\frac{3}{4}x - \frac{7}{2}, y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$.

Câu 13: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$ có hệ số góc bằng -2 là

A. $y = -2x + 2, y = -2x + 4$.

B. $y = -2x + 9, y = -2x$.

C. $y = -2x + 8, y = -2x$.

D. $y = -2x + 1, y = -2x$.

Câu 14: Cho hàm số $y = 2x^3 - 6x^2 + 3$ có đồ thị là (C). Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = 18x - 51$ có phương trình là

A. $y = 18x + 3$.

B. $\begin{cases} y = 18x - 13 \\ y = 18x + 51 \end{cases}$.

C. $y = 18x - 51$.

D. $\begin{cases} y = 18x + 13 \\ y = 18x - 51 \end{cases}$

Câu 15: Cho hàm số $y = \frac{x-m}{x+1}$ có đồ thị (C_m) . Giá trị tham số thực m để tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 0 song song với đường thẳng $y = 3x + 1$ là

A. $m = -2$.

B. $m = 3$.

C. $m = 2$.

D. $m = 1$.

Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 + (4-3m)x + 1$ có đồ thị là (C_m) . Tập hợp các giá trị thực của tham số m để trên đồ thị (C_m) tồn tại đúng hai điểm có hoành độ dương mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $d: x + 2y - 3 = 0$ là

A. $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{3}\right)$.

B. $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{8}{3}\right)$.

C. $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$

D. $\left(0; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$

Câu 17: Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 + (3m-4)x + 1$ có điểm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $x - y + 2019 = 0$ là

A. $-\frac{1}{2} < m < 1$.

B. $m \leq 1$.

C. $-\frac{1}{2} \leq m$.

D. $-\frac{1}{2} \leq m \leq 1$.

Câu 18: Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C). Biết tiếp tuyến tại một điểm M bất kỳ của (C) luôn cắt hai tiệm cận của (C) tại A và B. Độ dài ngắn nhất của đoạn thẳng AB bằng

- A. $2\sqrt{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. 4.

Câu 19: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để đường thẳng (d): $y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B lần lượt có hệ số góc là k_1, k_2 thỏa mãn $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + 2(k_1 + k_2) = 2019k_1^{2019}k_2^{2019}$. Tổng các giá trị tất cả các phần tử của S bằng

- A. 3. B. 0. C. 6. D. 2018.

Câu 20: Gọi (d) là tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = \frac{2x-3}{x-2}$ tại M. Đường thẳng (d) cắt các đường tiệm cận tại hai điểm phân biệt A, B. Tọa độ điểm M sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất, với I là giao điểm hai tiệm cận là

- A. $M(1;1); M\left(4;\frac{5}{3}\right)$. B. $M(1;1); M(3;3)$. C. $M(1;1); M\left(-1;\frac{5}{3}\right)$. D. $M\left(4;\frac{5}{3}\right); M(3;3)$

Câu 21: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến Δ của (C) tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất. Khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (C) đến Δ bằng

- A. $\sqrt{6}$. B. $2\sqrt{6}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $\sqrt{3}$

Câu 22: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{2x-3}$. Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận đồ thị hàm số. Khoảng cách từ I đến tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất bằng

- A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. B. 1. C. $\sqrt{2}$. D. $\sqrt{5}$.

Câu 23: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{2(x+1)}$ có đồ thị (C). Gọi điểm $M(x_0; y_0)$ với $x_0 > -1$ là điểm thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB có trọng tâm G nằm trên đường thẳng $d: 4x + y = 0$. Giá trị của $x_0 + 2y_0$ bằng

- A. $-\frac{5}{2}$. B. $\frac{7}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $-\frac{7}{2}$.

Câu 24: Cho hàm số $y = \frac{2mx+3}{x-m}$. Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C). Tất cả các giá trị thực của tham số m để tiếp tuyến tại một điểm bất kỳ của (C) cắt hai tiệm cận tại A và B sao cho ΔIAB có diện tích $S = 22$ là

- A. $m = \pm 5$. B. $m = \pm 6$. C. $m = \pm 2$. D. $m = \pm 4$

Câu 25: Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+1}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm $M \in (C)$ sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt Ox, Oy tại A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\frac{1}{4}$, với O là gốc tọa độ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 26: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$. Tất cả các điểm M, N trên hai nhánh của đồ thị (C) sao cho các tiếp tuyến tại M và N cắt hai đường tiệm cận tại bốn điểm lập thành một hình thang là

A. $M(2;5), N(0;-1)$. B. $M\left(3;\frac{7}{2}\right), N\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. C. $M(2;5), N\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. D. Với mọi M, N.

Câu 27: Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C). Một tiếp tuyến của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại hai điểm A, B thỏa mãn $AB = 2\sqrt{2}$. Hệ số góc của tiếp tuyến đó bằng

A. -2.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. -1.

D. $-\sqrt{2}$.

Dạng 3: Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm M cho trước

Bài toán 1. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ cho trước.

Phương pháp giải

Thực hiện một trong hai cách sau

Cách 1:

Bước 1. Giả sử tiếp tuyến có hệ số góc k, khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng $y = k(x - x_0) + y_0$.

Bước 2. Tìm k là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_0) + y_0 \\ f'(x) = k \end{cases}$$

Từ đó suy ra phương trình của tiếp tuyến.

Cách 2:

Bước 1. Giả sử $A(a; f(a))$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị hàm số đã cho nên phương trình tiếp tuyến tại điểm A là $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Bước 2. Do tiếp tuyến đi qua $M(x_0; y_0)$ nên a là nghiệm của phương trình

$$f'(a)(x_0 - a) + f(a) = y_0.$$

Tìm a và suy ra phương trình tiếp tuyến.

Ví dụ: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ đi qua điểm $N(0;1)$ là

A. $y = -\frac{33}{4}x + 2$.

B. $y = -\frac{33}{4}x + 11$

C. $y = -\frac{33}{4}x + 12$

D. $y = -\frac{33}{4}x + 1$

Hướng dẫn giải

Giả sử tiếp tuyến có hệ số góc k.

Vì tiếp tuyến đi qua $N(0;1)$ nên phương trình tiếp tuyến có dạng $y = kx + 1$.

k là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 - 6x + 1 = kx + 1 \\ k = 3x^2 + 6x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -6 \\ k = -\frac{33}{4} \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -6x + 1$ hoặc

$$y = -\frac{33}{4}x + 1.$$

Chọn D.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ

thị hàm số đã cho. Ta có $y' = 3x^2 + 6x - 6$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm có dạng

$$y = (3x_0^2 + 6x_0 - 6)(x - x_0) + x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 + 1.$$

Vì tiếp tuyến đi qua $N(0;1)$ nên ta có

$$(3x_0^2 + 6x_0 - 6)(-x_0) + x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x_0^3 + 3x_0^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

- Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1; y'(0) = -6$ nên phương trình tiếp tuyến là $y = -6x + 1$.

- Với $x_0 = -\frac{3}{2} \Rightarrow y_0 = \frac{107}{8}; y'(x_0) = -\frac{33}{4}$ nên phương trình tiếp tuyến là $y = -\frac{33}{4}x + 1$.

Chọn D.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho đồ thị hàm số $(C): y = \frac{-x+1}{x-2}$. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm

$A(2; -1)$?

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = \frac{1}{(x-2)^2}, \forall x \neq 2$.

Gọi tọa độ tiếp điểm là $M\left(x_0; \frac{-x_0+1}{x_0-2}\right)$ với $x_0 \neq 2$. Khi đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại

điểm M là $y = \frac{1}{(x_0-2)^2}(x-x_0) + \frac{-x_0+1}{x_0-2}$.

Do tiếp tuyến đi qua điểm $A(2; -1)$ nên ta có phương trình

$$\frac{(2-x_0)}{(x_0-2)^2} + \frac{-x_0+1}{x_0-2} = -1 \Leftrightarrow \frac{-x_0}{x_0-2} = -1 \text{ (vô nghiệm).}$$

Vậy không có tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn B.

Nhận xét: Đối với đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ thì không có tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số đi qua điểm

$I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 - \frac{3}{2}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua điểm

$A\left(0; \frac{3}{2}\right)$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A\left(0; \frac{3}{2}\right)$ và có hệ số góc k có dạng $y = kx + \frac{3}{2}$.

Để Δ tiếp xúc với (C) thì hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2} = kx + \frac{3}{2} & (1) \\ 2x^3 - 6x = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm x .

Thế (2) vào (1), ta có $\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2} = (2x^3 - 6x)x + \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}.$$

+ Với $x = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \Delta_1: y = \frac{3}{2}$.

+ Với $x = \sqrt{2} \Rightarrow k = -2\sqrt{2} \Rightarrow \Delta_2: y = -2\sqrt{2}x + \frac{3}{2}$.

+ Với $x = -\sqrt{2} \Rightarrow k = 2\sqrt{2} \Rightarrow \Delta_3: y = 2\sqrt{2}x + \frac{3}{2}$.

Vậy có ba tiếp tuyến thỏa mãn.

Chọn C.

Bài toán 2: Xác định các điểm M để có k tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C): $y = f(x)$ đi qua điểm M

 **Phương pháp giải**

Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Xây dựng tọa độ điểm $M(a; b)$.

Bước 2. Giả sử d là đường thẳng đi qua M và có hệ số góc k . Khi đó phương trình đường thẳng $d: y = k(x - a) + b$.

Bước 3. Để d là tiếp tuyến của (C) thì hệ

Ví dụ: Cho hàm số $y = \frac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và

điểm $A(a; 1)$. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số a để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. $\frac{3}{2}$.

phương trình (*) $\begin{cases} f(x) = k(x-a) + b \\ f'(x) = k \end{cases}$ có

nghiệm.

Dựa vào số nghiệm của hệ trên suy ra số tiếp tuyến tương ứng bài toán yêu cầu.

Nhận xét:

- Nếu $f(x)$ là hàm số bậc 2, bậc 3, bậc nhất trên bậc nhất thì hệ (*) có bao nhiêu nghiệm thì tương ứng với bấy nhiêu tiếp tuyến.

- Nếu $f(x)$ là hàm số trùng phương có 3 điểm cực trị thì nếu hệ (*) có nghiệm không phải là hoành độ của 2 điểm cực tiểu (cực đại) thì mỗi nghiệm ứng với một tiếp tuyến của đồ thị (C).

B. $\frac{5}{2}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = -\frac{1}{(x-1)^2}, x \neq 1; A(a;1)$.

Đường thẳng d qua $A(a;1)$ có hệ số góc k có phương trình là $y = k(x-a) + 1$.

Để có duy nhất một đường thẳng d là tiếp tuyến của (C) thì hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} k(x-a) + 1 = \frac{-x+2}{x-1} \quad (1) \\ k = \frac{-1}{(x-1)^2} \quad (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào (1) ta có $\frac{-1}{(x-1)^2}(x-a) + 1 = \frac{-x+2}{x-1}$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + a + 3 = 0 \quad (x \neq 1) \quad (3)$$

Để hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất thì phương trình (3) có nghiệm duy nhất khác 1.

+ Trường hợp 1: (3) có nghiệm kép khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9 - 2a - 6 = 0 \\ 2 - 6 + a + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

+ Trường hợp 2: (3) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm bằng 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 3 - 2a > 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1$$

Vậy $S = \left\{ \frac{3}{2}; 1 \right\}$ nên tổng các phần tử bằng $\frac{5}{2}$.

Chọn B.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = -x^3 + 6x^2 + 2$ có đồ thị (C) và điểm $M(m;2)$. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của m để qua M có hai tiếp tuyến với đồ thị (C).

Tổng các phần tử của S bằng

- A. $\frac{20}{3}$. B. $\frac{13}{2}$. C. 4. D. $\frac{16}{3}$.

Hướng dẫn giải

Gọi d là đường thẳng đi qua $M(m; 2)$ và có hệ số góc k.

Khi đó phương trình của d là $y = k(x - m) + 2$.

Để có đúng hai tiếp tuyến của (C) đi qua M thì hệ phương trình

$$\begin{cases} k = -3x^2 + 12x \\ -x^3 + 6x^2 + 2 = k(x - m) + 2 \end{cases} \text{ phải có hai nghiệm phân biệt.}$$

Từ hệ trên, ta có $-x^3 + 6x^2 + 2 = (-3x^2 + 12x)(x - m) + 2$

$$\Leftrightarrow x[2x^2 - 3(m + 2)x + 12m] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 3(m + 2)x + 12m = 0 (*) \end{cases}$$

Để hệ có đúng hai nghiệm, ta xét các trường hợp sau

+ Trường hợp 1: Phương trình (*) có nghiệm kép khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9(m + 2)^2 - 96m = 0 \\ 12m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = \frac{2}{3} \end{cases}$$

+ Trường hợp 2: Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9(m + 2)^2 - 96m > 0 \\ 12m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$$

Vậy $S = \left\{6; \frac{2}{3}; 0\right\}$ nên tổng các phần tử bằng $\frac{20}{3}$.

Chọn A.

Ví dụ 2: Cho hàm số $\sqrt{x^2 - 2x + 3}$ có đồ thị (C) và điểm $A(1; a)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để có đúng hai tiếp tuyến của (C) đi qua A ?

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Hướng dẫn giải

Ta có hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ xác định trên $\mathbb{R}$, $y' = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$.

Gọi k là hệ số góc của đường thẳng Δ đi qua $A(1; a)$.

Phương trình đường thẳng $\Delta: y = k(x - 1) + a$.

Đường thẳng Δ tiếp xúc với đồ thị (C) khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 3} = k(x-1) + a(1) \\ \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} = k(2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được $\sqrt{x^2 - 2x + 3} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}(x-1) + a$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + a\sqrt{x^2 - 2x + 3} \Leftrightarrow a\sqrt{x^2 - 2x + 3} = 2$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}(3).$$

Qua A có đúng hai tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$.

Ta có $f'(x) = \frac{-2(x-1)}{(x^2 - 2x + 3)\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\sqrt{2}$	0

Từ bảng biến thiên ta có (3) có hai nghiệm phân biệt thì $a \in (0; \sqrt{2}]$. Mà a nguyên nên $a = 1$.

Chọn C.

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1: Có bao nhiêu điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ thỏa mãn tiếp tuyến tại điểm đó của đồ thị có hệ số góc bằng 2019?

- A. Vô số. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 2: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có đồ thị là (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 3: Cho hàm số $y = -\frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x - 2$, gọi đồ thị của hàm số là (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $A(2; -2)$ là

- A. $y = -\frac{3}{4}x - \frac{7}{2}$. B. $y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{2}$. C. $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$. D. $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x-1}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $M(-1; 3)$ là

- A. $y = 3x - 1; y = -3x$. B. $y = 13; y = -3x$. C. $y = 3; y = -3x + 1$. D. $y = 3; y = -3x$.

Câu 5: Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x+2}$ đi qua giao điểm hai đường tiệm cận?

- A. Vô số. B. 2. C. 1. D. Không có.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2}{4} - x + 1$ có đồ thị (C). Phương trình các đường tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $M(2; -1)$ là

- A. $y = -x + 1$ và $y = x - 3$. B. $y = -x - 1$ và $y = -2x + 3$
C. $y = -x - 1$ và $y = -x + 3$ D. $y = x + 1$ và $y = -x - 3$

Câu 7: Cho hàm số $y = x^3 + x^2 + 3x + 1$ có đồ thị là (C). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để từ điểm $M(0; m)$ kẻ được ít nhất một tiếp tuyến đến đồ thị (C) mà hoành độ tiếp điểm thuộc đoạn $[1; 3]$?

- A. Vô số. B. 0. C. 60. D. 61.

Câu 8: Trên đường thẳng $x = 3$, tọa độ điểm M có tung độ là số nguyên nhỏ nhất mà qua đó có thể kẻ tới đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ đúng ba tiếp tuyến phân biệt là

- A. $(3; -5)$. B. $(3; -6)$. C. $(3; 2)$ D. $(3; 1)$

Câu 9: Giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2mx + 2m^2 - 1}{x - 1}$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến của (C_m) tại hai điểm này vuông góc với nhau là

- A. $m = 0$. B. $m = \frac{2}{3}$. C. $m = -1$. D. $m = \frac{2}{3}, m = -1$.

Câu 10: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \frac{x-2}{2x-1}$ và $M(0; m)$ là một điểm thuộc trục Oy. Tất cả các giá trị thực của tham số m để luôn tồn tại ít nhất một tiếp tuyến của (C) đi qua M và tiếp điểm của tiếp tuyến này với (C) có hoành độ dương là

- A. $m \geq 2$. B. $m < 2$. C. $m \leq 2$. D. $m > 2$.

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0; a)$. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số a để từ A kẻ được hai tiếp tuyến AM, AN đến (C) với M, N là các tiếp điểm và $MN = 4$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng

- A. 4. B. 3. C. 6. D. 1.

Dạng 4: Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số ẩn tại điểm có hoành độ $x = x_0$ cho trước

Phương pháp giải

Từ biểu thức của hàm ẩn, tìm cách tính các giá trị $y_0 = f(x_0)$ và $f'(x_0)$.

Áp dụng công thức viết phương trình tiếp

Ví dụ: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$[f(1+2x)]^2 = x - [f(1-3x)]^3, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tiếp tuyến}$$

tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = x_0$.

Chú ý công thức đạo hàm của hàm số hợp: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K , $u = u(x)$ là hàm số xác định và có đạo hàm trên K và có giá trị trên khoảng K . Khi đó $(f(u))' = u' \cdot f'(u)$.

của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ có phương trình là

A. $y = x - 2$.

B. $y = -\frac{x}{13} + 2$.

C. $y = -\frac{x}{13} + \frac{1}{13}$

D. $y = -\frac{x}{13} - \frac{12}{13}$

Hướng dẫn giải

Ta cần tính $f(1), f'(1)$.

Từ giả thiết

$$[f(1+2x)]^2 = x - [f(1-3x)]^3, \forall x \in \mathbb{R} (*)$$

Chọn $x = 0$ ta được $f^2(1) = -f^3(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(1) = -1 \end{cases}$

Lấy đạo hàm hai vế (*) ta được

$$2 \cdot f(1+2x) \cdot 2 \cdot f'(1+2x) = 1 + 9 \cdot f^2(1-3x) \cdot f'(1-3x).$$

Chọn $x = 0$ ta được $4 \cdot f(1) \cdot f'(1) = 1 + 9 \cdot f^2(1) \cdot f'(1)$.

+ Với $f(1) = 0$ ta được $0 = 1$ (vô lý nên loại).

+ Với $f(1) = -1 \Rightarrow f'(1) = -\frac{1}{13}$ nên phương trình

tiếp tuyến là $y = -\frac{x}{13} - \frac{12}{13}$.

Chọn D.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f(2x) + f(1-2x) = 12x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

A. $y = 2x + 2$.

B. $y = 4x - 6$.

C. $y = 2x - 6$.

D. $y = 4x - 2$.

Hướng dẫn giải

Ta cần tính $f(1), f'(1)$.

Từ giả thiết $2f(2x) + f(1-2x) = 12x^2, \forall x \in \mathbb{R} . (*)$

Chọn $x=0$ và $x=\frac{1}{2}$, ta được $\begin{cases} 2f(0)+f(1)=0 \\ 2f(1)+f(0)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0)=-1 \\ f(1)=2 \end{cases}$.

Lấy đạo hàm hai vế (*) ta được $4.f'(2x)-2.f'(1-2x)=24x, \forall x \in \mathbb{R}$

Chọn $x=0$ và $x=\frac{1}{2}$, ta được $\begin{cases} 4f'(0)-2f'(1)=0 \\ 4f'(1)-2f'(0)=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(0)=2 \\ f'(1)=4 \end{cases}$.

Vậy $f(1)=2; f'(1)=4$ nên phương trình tiếp tuyến là $y=4(x-1)+2=4x-2$.

Chọn D.

Ví dụ 2: Cho các hàm số $y=f(x), y=g(x)=f(f(x)), y=h(x)=f(x^3+2)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị lần lượt là $(C_1), (C_2), (C_3)$. Đường thẳng $x=2$ cắt $(C_1), (C_2), (C_3)$ lần lượt tại A, B, C. Biết phương trình tiếp tuyến của (C_1) tại A và của (C_2) tại B lần lượt là $y=3x+4$ và $y=6x+13$. Phương trình tiếp tuyến của (C_3) tại C là

A. $y=24x-23$.

B. $y=10x-21$.

C. $y=-12x+49$.

D. $y=2x-5$.

Hướng dẫn giải

Để giải bài toán, ta cần tính $h'(2)$ và $h(2)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C_1) tại A là

$$y=f'(2)(x-2)+f(2)=3x+4 \Rightarrow \begin{cases} f'(2)=3 \\ -2f'(2)+f(2)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(2)=3 \\ f(2)=10 \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C_2) tại B là

$$y=f'(2).f'(f(2))(x-2)+f(f(2))=f'(2).f'(10)(x-2)+f(10)=6x+13.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(2).f'(10)=6 \\ -2f'(2).f'(10)+f(10)=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(10)=2 \\ f(10)=25 \end{cases}$$

Ta có $h'(x)=(f(x^3+2))'=3x^2.f'(x^3+2)$ nên $h'(2)=12f'(10)=24$ và $h(2)=f(10)=25$.

Phương trình tiếp tuyến của (C_3) tại C là

$$y=h'(2)(x-2)+h(2)=24(x-2)+25=24x-23.$$

Chọn A.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định có đạo hàm và nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$. Biết tiếp tuyến của

hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)=\frac{f(x)}{f(x^2)}$ cùng tại điểm có hoành độ $x_0=1$ có hệ số góc lần lượt

là 12 và -3. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. 3.

B. 4.

C. 6.

D. 2.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } g'(x) = \left(\frac{f(x)}{f(x^2)} \right)' = \frac{f(x^2) \cdot f'(x) - f(x) \cdot 2x \cdot f'(x^2)}{f^2(x^2)}$$

Từ giả thiết ta có $f'(1) = 12$ và $g'(1) = -3$, $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{f(1) \cdot f'(1) - 2f(1) \cdot f'(1)}{f^2(1)} = -3 \Leftrightarrow -\frac{f'(1)}{f(1)} = -3 \Leftrightarrow f(1) = 4.$$

Chọn B.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi Δ_1, Δ_2 lần lượt là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x) = x^2 \cdot f(4x - 3)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$. Biết hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 vuông góc nhau và Δ_1 không song song với Ox, Oy. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sqrt{3} < |f(1)| < 2.$

B. $|f(1)| < 2.$

C. $|f(1)| \geq 2.$

D. $2 \leq |f(1)| < 2\sqrt{3}.$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } g'(x) = (x^2 \cdot f(4x - 3))' = 2x \cdot f(4x - 3) + 4x^2 \cdot f'(4x - 3).$$

Ta có hệ số góc của các tiếp tuyến Δ_1, Δ_2 lần lượt là $f'(1)$ và $g'(1) = 2f(1) + 4f'(1)$.

Theo giả thiết thì $f'(1) \cdot g'(1) = -1$ và $f'(1) \neq 0$.

$$\Leftrightarrow f'(1) \cdot (2f(1) + 4f'(1)) = -1$$

$$\Leftrightarrow 2f(1) = -\frac{1}{f'(1)} - 4f'(1) \Rightarrow 2|f(1)| = \frac{1}{|f'(1)|} + 4|f'(1)| \geq 4 \Leftrightarrow |f(1)| \geq 2.$$

Chọn C.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^3 + 3x + 1) = 2x - 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x = -3$ là

A. $y = \frac{1}{3}x.$

B. $y = \frac{1}{3}x - 2.$

C. $y = \frac{1}{3}x - 3.$

D. $y = \frac{1}{3}x + 2.$

Hướng dẫn giải

Để viết phương trình tiếp tuyến tại điểm $x = -3$, ta cần tính $f(-3)$ và $f'(-3)$.

Với $x = -1$ suy ra $f(-3) = -3$.

$$\text{Do } f(x^3 + 3x + 1) = 2x - 1 \Rightarrow (3x^2 + 3)f'(x^3 + 3x + 1) = 2.$$

$$\text{Với } x = -1 \Rightarrow 6f'(-3) = 2 \Rightarrow f'(-3) = \frac{1}{3}.$$

Do đó phương trình tiếp tuyến cần tìm là

$$y = f'(-3)(x+3) + f(-3) \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(x+3) - 3 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x - 2.$$

Chọn B.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Gọi $(C_1), (C_2)$ và (C_3) lần lượt là đồ thị của các hàm số $f(x), g(x) = f(x^2)$ và $h(x) = f(x^3)$. Biết $f(1) = 1$ và tổng hệ số góc của hai tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 1$ của $(C_1), (C_2)$ bằng -3 . Phương trình tiếp tuyến của (C_3) tại điểm có hoành độ $x = 1$ là

A. $y = -x + 2.$

B. $y = -3x - 2.$

C. $y = -x - 1.$

D. $y = -3x + 4.$

Hướng dẫn giải

Ta cần tính $h(1), h'(1)$.

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2), h'(x) = 3x^2f'(x^3)$.

Theo giả thiết, ta có $f'(1) + g'(1) = -3 \Leftrightarrow f'(1) + 2f'(1) = -3 \Leftrightarrow f'(1) = -1$.

Do đó $h'(1) = 3f'(1) = -3$ và $h(1) = f(1) = 1$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -3(x-1) + 1 = -3x + 4$.

Chọn D.

Ví dụ 7: Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ đều có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$f^3(2-x) - 2f^2(2+3x) + x^2g(x) + 36x = 0$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là

A. $y = -x.$

B. $y = 2x - 3.$

C. $y = -2x + 3.$

D. $y = x.$

Hướng dẫn giải

Ta có $f^3(2-x) - 2f^2(2+3x) + x^2g(x) + 36x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

Thay $x = 0$ vào (1) ta có $f^3(2) - 2f^2(2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 0 \\ f(2) = 2 \end{cases}$

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta được

$-3f^2(2-x).f'(2-x) - 12f(2+3x).f'(2+3x) + 2x.g(x) + x^2.g'(x) + 36 = 0$. (2)

Thay $x = 0$ vào (2) ta có $-3f^2(2).f'(2) - 12f(2).f'(2) + 36 = 0$. (3)

+ Với $f(2) = 0$ thay vào (3) thì $36 = 0$ (vô lý).

+ Với $f(2) = 2$ thay vào (3) thì $f'(2) = 1$ nên phương trình tiếp tuyến là $y = x$.

Chọn D.

Ví dụ 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $[f(x)]^3 + 6f(x) = -3x + 10$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là

- A. $y = -x + 2$. B. $y = x$. C. $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. D. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Ta cần tính $f(1)$, $f'(1)$.

Thay $x = 1$ vào đẳng thức $[f(x)]^3 + 6f(x) = -3x + 10$, ta có

$$[f(1)]^3 + 6f(1) = -3 + 10 \Leftrightarrow [f(1)]^3 + 6f(1) - 7 = 0 \Leftrightarrow f(1) = 1.$$

Theo bài ra ta có $[f(x)]^3 + 6f(x) = -3x + 10$ đúng với mọi x nên đạo hàm hai vế ta được

$$3[f(x)]^2 \cdot f'(x) + 6f'(x) = -3, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay $x = 1$ vào ta có $3[f(1)]^2 \cdot f'(1) + 6f'(1) = -3$.

$$\text{Vì } f(1) = 1 \text{ nên } f'(1) = -\frac{1}{3}.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.

Chọn D.

 Bài tập tự luyện dạng 4

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$2f(2x) + f(1-2x) = 4x^3 - x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 và bằng 0 lần lượt có dạng $y = ax + b$ và $y = a_1x + b_1$. Giá trị biểu thức $\frac{2a-5b}{3b_1+2a_1}$ bằng

- A. $\frac{5}{46}$. B. $\frac{46}{3}$. C. $\frac{3}{46}$. D. $\frac{46}{5}$.

Câu 2: Biết đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ có tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 0$

và có cùng hệ số góc khác 0. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $f(0) < \frac{1}{4}$. B. $f(0) \leq \frac{1}{4}$. C. $f(0) > \frac{1}{4}$. D. $f(0) \geq \frac{1}{4}$.

Câu 3: Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và $y = f(x) \cdot g(x)$. Biết tiếp tuyến của đồ thị các hàm số đã cho tại điểm $x = 0$ có cùng hệ số góc và khác 0. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $f(0) - g(0) = 1$. B. $f(0) - g(0) = -1$. C. $f(0) + g(0) = 1$. D. $f(0) + g(0) = -1$.

Câu 4: Hệ số góc của các tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 1$ của đồ thị các hàm số $y = f(x)$; $y = g(x)$ và $y = \frac{f(x)+3}{g(x)+3}$ bằng nhau và khác 0. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f(1) \leq -\frac{11}{4}$. B. $f(1) < -\frac{11}{4}$. C. $f(1) \geq \frac{11}{4}$. D. $f(1) > \frac{11}{4}$.

Câu 5: Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $g(0) \neq -1$. Biết tiếp tuyến tại điểm $x_0 = 0$ của ba đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x), y = \frac{f(x)+1}{g(x)+1}$ có cùng hệ số góc và khác 0. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f(0) \leq -\frac{3}{4}, f(0) \neq -1$. B. $f(0) \geq -\frac{3}{4}, f(0) \neq 1$.
C. $f(0) \leq \frac{3}{4}, f(0) \neq -1$. D. $f(0) \geq \frac{3}{4}, f(0) \neq 1$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x), y = f[f(x)], y = f(x^4 + 2)$ có đồ thị lần lượt là $(C_1), (C_2), (C_3)$. Biết tiếp tuyến của $(C_1), (C_2)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ có phương trình lần lượt là $y = 2x + 1, y = 6x + 1$. Phương trình tiếp tuyến của (C_3) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là

A. $y = 12x - 5$. B. $y = 6x - 3$. C. $y = 24x - 21$. D. $y = 12x - 9$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Gọi $(C_1), (C_2), (C_3)$ lần lượt là đồ thị của các hàm số $y = f(x), y = f(f(x)), y = f(x^2 + 1)$. Các tiếp tuyến của $(C_1), (C_2)$ tại điểm $x_0 = 2$ có phương trình lần lượt là $y = 2x + 1, y = 4x + 3$. Hỏi tiếp tuyến của (C_3) tại điểm $x_0 = 2$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $Q(2; -11)$. B. $M(-2; 11)$. C. $N(-2; -21)$. D. $P(2; -21)$.

Câu 8: Cho các hàm số $y = f(x), y = f(x^2), y = \frac{f(x)}{f(x^2)}$ có đồ thị lần lượt là $(C_1), (C_2), (C_3)$. Hệ số góc các tiếp tuyến của $(C_1), (C_2), (C_3)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ lần lượt là k_1, k_2, k_3 thỏa mãn $k_1 + 2k_2 = 3k_3 \neq 0$. Giá trị $f(1)$ bằng

A. $-\frac{1}{5}$. B. $-\frac{2}{5}$. C. $-\frac{3}{5}$. D. $-\frac{4}{5}$.

Câu 9: Cho các hàm số $y = f(x); y = f(f(x)); y = f(x^2 + 4)$ có đồ thị lần lượt là $(C_1), (C_2), (C_3)$. Đường thẳng $x = 1$ cắt $(C_1); (C_2); (C_3)$ lần lượt tại M, N, P. Biết phương trình tiếp tuyến của (C_1) tại M và của (C_2) tại N lần lượt là $y = 3x + 2$ và $y = 12x - 5$ và phương trình tiếp tuyến của (C_3) tại P có dạng $y = ax + b$. Giá trị $a + b$ bằng

A. 6. B. 9. C. 8. D. 7.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $[f(2x+1)]^2 + [f(1-x)]^3 = x$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

A. $y = -\frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$. B. $y = \frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$. C. $y = -\frac{1}{7}x + \frac{8}{7}$. D. $y = \frac{1}{7}x - \frac{5}{7}$.

Câu 11: Gọi $k_1; k_2; k_3$ lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị các hàm số $y = f(x); y = g(x); y = \frac{f(x)}{g(x)}$ tại $x = 2$ và thỏa mãn $k_1 = k_2 = 2k_3 \neq 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $f(2) < \frac{1}{2}$. B. $f(2) \leq \frac{1}{2}$. C. $f(2) \geq \frac{1}{2}$. D. $f(2) > \frac{1}{2}$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$. Gọi d_1, d_2 lần lượt là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x) = xf(2x-1)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$. Biết rằng hai đường thẳng d_1, d_2 vuông góc với nhau, mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $|f(1)| \leq \sqrt{2}$. B. $|f(1)| \geq 2\sqrt{2}$. C. $2 \leq |f(1)| < 2\sqrt{2}$. D. $\sqrt{2} < |f(1)| < 2$.

Dạng 5: Một số bài toán tiếp tuyến khác

Bài toán 1. Tìm các điểm trên đồ thị hàm số $y = f(x)$ mà tiếp tuyến tại các điểm đó song song với nhau hoặc có cùng hệ số góc k .

Phương pháp giải

Giả sử hai điểm

$A(x_A; f(x_A)), B(x_B; f(x_B)) (x_A \neq x_B)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$ mà tiếp tuyến tại hai điểm đó song song với nhau hoặc có cùng hệ số góc k thì x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình $f'(x) = k$.

Khi đó ta có biểu thức liên hệ giữa x_A, x_B .

Từ đó giải quyết yêu cầu bài toán đưa ra.

Đối với hàm số

$y = \frac{ax+b}{cx+d} (c \neq 0; ad-bc \neq 0)$ có tâm đối xứng

là $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$. Nếu A, B là hai điểm thuộc đồ

thị có tiếp tuyến tại A, B song song với nhau thì I là trung điểm của AB.

Ví dụ: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$ có đồ thị (H). Gọi

$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là hai điểm phân biệt thuộc (H) sao cho tiếp tuyến của (H) tại A, B song song với nhau. Tổng $x_1 + x_2$ bằng

- A. 0. B. -1.
C. 2. D. 1.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)' = \frac{-3}{(2x-1)^2}$

Do tiếp tuyến của (H) tại A, B song song với nhau, nên ta có

$$\frac{-3}{(2x_1-1)^2} = \frac{-3}{(2x_2-1)^2} \Leftrightarrow (2x_1-1)^2 = (2x_2-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1-1 = 2x_2-1 \\ 2x_1-1 = -2x_2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Vì $A \neq B$ nên $x_1 + x_2 = 1$.

Chọn D.

Nhận xét: Hai điểm A, B thuộc đồ thị hàm số

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $c \neq 0; ad-bc \neq 0$ mà tiếp tuyến tại

A, B song song với nhau thì hai điểm A, B đối

xứng với nhau qua điểm $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ nên

$$x_A + x_B = 2x_I = -\frac{2d}{c}.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$ có đồ thị (H). Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là hai điểm phân biệt thuộc (H)

sao cho tiếp tuyến của (H) tại A, B song song với nhau. Độ dài nhỏ nhất của đoạn thẳng AB bằng

A. $3\sqrt{2}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. $\sqrt{6}$.

D. $2\sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = \frac{-3}{(2x-1)^2}$. Do tiếp tuyến của (H) tại A, B song song với nhau nên

$$y'(x_1) = y'(x_2) \Leftrightarrow \frac{-3}{(2x_1-1)^2} = \frac{-3}{(2x_2-1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Vì $x_1 \neq x_2$ nên $x_1 + x_2 = 1$.

Khi đó do vai trò của A, B như nhau nên ta có thể giả sử $x_1 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}, a > 0$ thì

$$A\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}; \frac{a+3}{2a}\right), B\left(-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}; \frac{a-3}{2a}\right).$$

Gọi $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Ta thấy $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 = 2x_I \\ y_1 + y_2 = 1 = 2y_I \end{cases}$ nên I là trung điểm của AB.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{IA} = \left(\frac{a}{2}; \frac{3}{2a}\right) \Rightarrow IA = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{9}{4a^2}} \geq \sqrt{2\sqrt{\frac{a^2}{4} \cdot \frac{9}{4a^2}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Vì I là trung điểm của AB nên $AB = 2IA \geq 2\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{6}$.

$$\text{Vậy } AB_{\min} = \sqrt{6} \text{ khi } \frac{a^2}{4} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

Chọn C.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$ có đồ thị (H). Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là hai điểm phân biệt thuộc (H) sao cho tiếp tuyến của (H) tại A, B có cùng hệ số góc k. Biết diện tích tam giác OAB bằng $\frac{1}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $k < -9$.

B. $-9 \leq k < -6$.

C. $-6 \leq k < -3$.

D. $-3 \leq k < 0$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = -\frac{3}{(2x-1)^2}$

Tiếp tuyến tại A, B của (H) có cùng hệ số góc k nên x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình

$$-\frac{3}{(2x-1)^2} = k \Rightarrow k < 0.$$

Suy ra $4kx^2 - 4kx + k + 3 = 0(*)$ nên $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{k+3}{4k} \end{cases}$

Khi đó do vai trò của A, B như nhau nên ta có thể giả sử $x_1 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}, a > 0$ thì

$$A\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}; \frac{a+3}{2a}\right), B\left(-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}; \frac{a-3}{2a}\right).$$

Áp dụng công thức tính diện tích tam giác ABC nếu có $\overline{AB} = (a; b), \overline{AC} = (c; d)$ thì $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|ad - bc|$.

Ta có $\overline{OA} = \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}; \frac{a+3}{2a}\right), \overline{OB} = \left(-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}; \frac{a-3}{2a}\right)$

$$\Rightarrow S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \left| \left(\frac{a+1}{2}\right) \frac{a-3}{2a} - \left(-\frac{a+1}{2}\right) \cdot \frac{a+3}{2a} \right| = \frac{1}{4} \left| \frac{a^2-3}{a} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{a^2-3}{a} \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a - 3 = 0 \\ a^2 + 2a - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = 1 \end{cases} \text{ (vì } a > 0).$$

+ Với $a = 3 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = -1 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$.

+ Với $a = 1 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 0 \Rightarrow k = -3$.

Vậy giá trị của k là $k = -3; k = -\frac{1}{3}$.

Chọn D.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị (C). Gọi $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ với $x_A > x_B$ là các điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến tại A, B song song với nhau và $AB = 6\sqrt{37}$. Giá trị $2x_A - 3x_B$ bằng

A. 15.

B. 90.

C. -15.

D. -90.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = 3x^2 - 3$.

Do tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau nên $y'(x_A) = y'(x_B)$

$$\Leftrightarrow 3x_A^2 - 3 = 3x_B^2 - 3 \Leftrightarrow x_A + x_B = 0 \text{ (do } x_A > x_B \text{)}.$$

Giả sử $A(a, a^3 - 3a + 1)$, $B(-a, -a^3 + 3a + 1)$ với $a > 0$ thuộc (C).

$$\text{Khi đó } AB^2 = 4a^2 + (2a^3 - 6a)^2 = 4a^6 - 24a^4 + 40a^2 = 6\sqrt{37}$$

$$\Leftrightarrow 4a^6 - 24a^4 + 40a^2 - 1332 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \text{ (vì } a > 0 \text{)}$$

$$\Rightarrow x_A = 3; x_B = -3 \text{ nên } 2x_A - 3x_B = 15.$$

Chọn A.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi A, B là hai điểm phân biệt thuộc (C) và tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau. Đường thẳng AB cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại M, N diện tích tam giác OMN bằng $\frac{1}{4}$. Độ dài đoạn MN bằng

A. $\sqrt{10}$.

B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

C. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$. Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

$$\text{Khi đó } y'(x_1) = y'(x_2) \Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2.$$

Do đó tâm đối xứng $I(1;1)$ của (C) là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Gọi hệ số góc của đường thẳng AB là k.

Phương trình đường thẳng AB là $y = k(x-1) + 1$.

Điều kiện để đường thẳng $d: y = k(x-1) + 1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B là phương trình

$$\frac{x+2}{x-1} = k(x-1) + 1 (*) \text{ có hai nghiệm phân biệt } x \neq 1.$$

Ta có $(*) \Leftrightarrow kx^2 - 2kx + k - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x \neq 1$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} k \neq 0 \\ k^2 - k(k-3) > 0 \Leftrightarrow k > 0 \\ k - 2k + k - 3 \neq 0 \end{cases}$$

Vì M, N là giao điểm của AB với Ox, Oy nên $M\left(\frac{k-1}{k}; 0\right), N(0; 1-k)$.

$$\text{Suy ra } S_{\Delta OMN} = \frac{(k-1)^2}{2|k|} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2(k-1)^2 = |k| \Leftrightarrow \begin{cases} k=2 \\ k=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } MN^2 = (k-1)^2 + \frac{(k-1)^2}{k^2} = (k-1)^2 \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$$

$$+ \text{ Với } k=2 \Rightarrow MN = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$+ \text{ Với } k=\frac{1}{2} \Rightarrow MN = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Vậy trong cả hai trường hợp thì } MN = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Chọn B.

Bài toán 2: Một số dạng toán khác

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Gọi A là điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$ và có hoành độ a. Có bao nhiêu số nguyên a sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt B, C khác A?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 5.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}.$$

$$y'' = 12x^2 - 6; y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tọa độ các điểm có hoành độ a nguyên để tiếp tuyến tại điểm đó cắt trục hoành tại hai điểm thỏa mãn

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{6}}{2} < a < \frac{\sqrt{6}}{2} \\ a \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}; a \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a \in \{-1; 0; 1\}.$$

Vậy có ba giá trị nguyên của a thỏa mãn.

Chọn B.

Nhận xét: Đối với đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ mà đồ thị có ba điểm cực trị (khi $ab < 0$) thì tiếp tuyến của đồ thị tại các điểm có hoành độ nằm giữa hai điểm cực tiểu (cực đại), trừ điểm uốn sẽ luôn cắt đồ thị tại hai điểm khác nữa.

Ví dụ 2: Gọi A là điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$ và có hoành độ a. Có bao nhiêu số nguyên a sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt B, C khác A và diện tích tam giác OBC bằng $2\sqrt{3}$?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 5.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}.$$

$$y'' = 12x^2 - 6; y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tọa độ các điểm có hoành độ a nguyên để tiếp tuyến tại điểm đó cắt trục hoành tại hai điểm nữa thì

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{6}}{2} < a < \frac{\sqrt{6}}{2} \\ a \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow a \in \{-1; 0; 1\}$$

+ Với $a = -1 \Rightarrow A(-1; 0)$. Khi đó phương trình tiếp tuyến là $y = 2(x + 1)$.

$$\text{Xét phương trình } x^4 - 3x^2 + 2 = 2(x + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \text{ nên } B(0; 2), C(2; 6) \Rightarrow S_{\Delta OBC} = 2 \text{ (loại)} \\ x = 2 \end{cases}$$

+ Với $a = 0 \Rightarrow A(0; 2)$. Khi đó phương trình tiếp tuyến là $y = 2$ nên $B(-\sqrt{3}; 2), C(\sqrt{3}; 2) \Rightarrow S_{\Delta OBC} = 2\sqrt{3}$ (thỏa mãn).

+ Với $a = 1 \Rightarrow A(1; 0)$. Khi đó phương trình tiếp tuyến là $y = -2(x - 1)$ nên

$$B(0; 2), C(-2; 6) \Rightarrow S_{\Delta OBC} = 2 \text{ (loại)}.$$

Vậy $a = 0$.

Chọn A.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m sao cho tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = m - 2$ cắt tiệm cận đứng tại $A(x_1; y_1)$, cắt tiệm cận ngang tại $B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $x_2 + y_1 = -5$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng

A. 4.

B. -2.

C. -4.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Đồ thị (C) có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là $x = -2$ và $y = 1$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{3}{(x+2)^2}, y'(m-2) = \frac{3}{m^2}.$$

Gọi $M\left(m-2; \frac{m-3}{m}\right) \in (C), m \neq 0$, tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình là

$$y = \frac{3}{m^2}(x-m+2) + \frac{m-3}{m}.$$

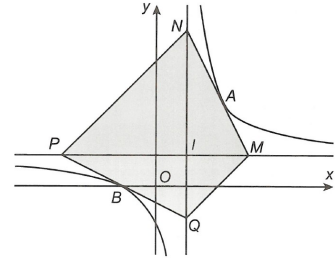
Giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận đứng là $A\left(-2; \frac{m-6}{m}\right)$ và tiệm cận ngang là $B(2m-2; 1)$.

Theo giả thiết ta có $\frac{m-6}{m} + 2m - 2 = -5 \Leftrightarrow 2m^2 + 4m - 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-3 \end{cases}$.

Vậy $m_1 + m_2 = -2$.

Chọn B.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi A, B là hai điểm nằm trên hai nhánh của (C) và các tiếp tuyến của (C) tại A, B cắt các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng lần lượt tại các cặp M, N và P, Q. Diện tích tứ giác MNPQ nhỏ nhất bằng



A. 16.

B. 32.

C. 8.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Theo tính chất của tiếp tuyến đồ thị hàm số bậc nhất trên bậc nhất thì $IM \cdot IN = IP \cdot IQ = 8$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S_{MNPQ} &= \frac{1}{2} MP \cdot NQ = \frac{1}{2} (IM + IP)(IN + IQ) = \frac{1}{2} (IM \cdot IN + IP \cdot IQ + IM \cdot IQ + IN \cdot IP) \\ &= \frac{1}{2} (8 + 8 + IM \cdot IQ + IN \cdot IP) = 8 + \frac{1}{2} \left(\frac{64}{IN \cdot IP} + IN \cdot IP \right) \geq 8 + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{64} = 16. \end{aligned}$$

Vậy $S_{\min} = 16$ khi $\frac{64}{IN \cdot IP} = IN \cdot IP \Rightarrow IN \cdot IP = 8$ hay $IN = IQ = IM = IP = 2\sqrt{2}$ tức là MNPQ là hình vuông.

Chọn A.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - 6x^2 + 7$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để có ít nhất hai tiếp tuyến của (C) song song hoặc trùng với đường thẳng $d: y = mx$?

A. 27.

B. 28.

C. 26.

D. 25.

Hướng dẫn giải

Giả sử $M(a; b)$ là tiếp điểm. Ta có $y' = 2x^3 - 3x^2 - 12x$.

Tiếp tuyến của (C) tại M song song hoặc trùng với đường thẳng $d: y = mx$ nên a là nghiệm của phương trình $2x^3 - 3x^2 - 12x = m(*)$.

Để có ít nhất hai tiếp tuyến của (C) song song hoặc trùng với đường thẳng d thì phương trình (*) có ít nhất hai nghiệm.

$$\text{Xét } f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x \text{ có } y' = 6x^2 - 6x - 12; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	7	-20	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên, để phương trình (*) có ít nhất hai nghiệm thì $-20 \leq m \leq 7$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-20, -19, \dots, 6, 7\}$.

Vậy có 28 giá trị m thỏa mãn.

Chọn B.

Ví dụ 6: Cho đường cong (C): $y = \frac{x+1}{x-1}$ và điểm $I(1;1)$. Hai điểm A và B thuộc cùng một nhánh của đồ thị sao cho $IA = IB$. Gọi k_1 và k_2 lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến tại A và B. Khi tiếp tuyến tại A và B của (C) tạo với nhau một góc 15° , giá trị biểu thức $|k_1 + k_2|$ bằng

- A. $2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}$. B. $4(2 - \sqrt{3})$. C. $2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}$. D. $4(2 + \sqrt{3})$.

Hướng dẫn giải

Do $IA = IB$ nên $k_1 \cdot k_2 = 1$.

$$\text{Ta có } \tan 15^\circ = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|$$

$$\Leftrightarrow |k_1 - k_2| = 2(2 - \sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow (k_1 - k_2)^2 = 28 - 16\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (k_1 + k_2)^2 = 32 - 16\sqrt{3} \Rightarrow |k_1 + k_2| = 4\sqrt{2 - \sqrt{3}} = 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}.$$

Chọn A.

Nhận xét: Đối với đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có tâm đối xứng là I. Cho A, B là hai điểm thuộc cùng một nhánh của đồ thị hàm số thỏa mãn $IA = IB$.

Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại A, B.

$$\text{Ta có } k_1 k_2 = \frac{1}{c}.$$

Bài tập tự luyện dạng 5

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3$ có đồ thị (C). Trên (C) có hai điểm phân biệt A và B sao cho tiếp tuyến tại A, B có cùng hệ số góc k và O, A, B thẳng hàng. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $-3 < k < 0$. B. $0 < k < 3$. C. $8 < k < 12$. D. $4 < k < 8$.

Câu 2: Cho hàm số $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$ có đồ thị (C). Tồn tại hai tiếp tuyến của (C) phân biệt và có cùng hệ số góc k, đồng thời đường thẳng đi qua các tiếp điểm của hai tiếp tuyến đó cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $OA = 2020 \cdot OB$. Có bao nhiêu giá trị của k thỏa mãn yêu cầu bài toán?

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 3: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có đồ thị (C). Trên đồ thị (C) có ba điểm phân biệt A, B, C sao cho tiếp tuyến của (C) tại A, B, C có cùng hệ số góc k. Tập hợp tất cả các giá trị thực của k là

- A. $\left(\frac{-8\sqrt{3}}{2}; \frac{8\sqrt{3}}{2}\right)$. B. $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. C. $\left(\frac{-8}{3}; \frac{8}{3}\right)$. D. $\left(\frac{-8\sqrt{3}}{9}; \frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có đồ thị (C). Trên (C) có ba điểm A, B, C sao cho tiếp tuyến của (C) tại A, B, C có cùng hệ số góc k. Biết rằng ba điểm A, B, C cùng thuộc một parabol và đỉnh I của parabol có hoành độ là $\frac{1}{6}$. Tung độ của I bằng

- A. $\frac{-4}{3}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{36}$. D. $\frac{-1}{6}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C). Gọi A, B là hai điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau, đường thẳng AB có hệ số góc dương và tạo với hai trục tọa độ tam giác vuông cân. Giá trị $x_A \cdot x_B$ bằng

- A. -3. B. -1. C. -2. D. 2.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi A, B là hai điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau. Khoảng cách lớn nhất từ điểm $M(2;3)$ đến đường thẳng AB bằng

- A. $\sqrt{13}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $3\sqrt{2}$. D. $\sqrt{11}$.

Câu 7: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ có đồ thị (C). Hai điểm A, B phân biệt trên (C) có hoành độ lần lượt là $a, b (a > b)$. Tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau và $AB = 2$. Giá trị $2a + 3b$ bằng

- A. 4. B. 6. C. 7. D. 8.

Câu 8: Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để trên đồ thị hàm số

$$y = -\frac{2}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (3m-2)x - \frac{5}{3} \text{ tồn tại hai điểm } M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2) \text{ có tọa độ thỏa mãn}$$

$x_1 \cdot x_2 > 0$ sao cho tiếp tuyến với đồ thị tại hai điểm đó cùng vuông góc với đường thẳng $x - 2y + 1 = 0$. Số nguyên âm lớn nhất thuộc tập S là

- A. -1. B. -3. C. -2. D. -4.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{-x+2}$ có đồ thị (C). Hai điểm phân biệt A, B của (C) trong đó hoành độ của A âm sao cho tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau và diện tích tam giác OAB bằng 1. Độ dài đoạn thẳng OA bằng

- A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{89}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{89}}{2}$.

Câu 10: Gọi A, B là hai điểm phân biệt thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau. Khoảng cách giữa A và B lớn nhất bằng

- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{35}}{2}$. D. $\sqrt{6}$.

Câu 11: Cho hàm số $y = x^3 - 2018x$ có đồ thị (C). Xét điểm A_1 có hoành độ $x_1 = 1$ thuộc (C). Tiếp tuyến của (C) tại A_1 cắt (C) tại điểm thứ hai $A_2 \neq A_1$ có tọa độ $(x_2; y_2)$. Tiếp tuyến của (C) tại A_2 cắt (C) tại điểm thứ hai $A_3 \neq A_2$ có tọa độ $(x_3; y_3)$. Cứ tiếp tục như thế, tiếp tuyến của (C) tại A_{n-1} cắt (C) tại điểm thứ hai $A_n \neq A_{n-1}$ có tọa độ $(x_n; y_n)$. Giá trị x_{2019} bằng

- A. -2^{2019} . B. 2^{2018} . C. 2^{2020} . D. -2^{2017} .

Câu 12: Có bao nhiêu tiếp tuyến của đường cong (C): $y = \frac{2x+4}{x-1}$ mà tiếp điểm có tọa độ nguyên?

- A. 6. B. 8. C. 4. D. 3.

Câu 13: Có một tiếp tuyến tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = x^4 + 3x^3 + 2x^2$ tại đúng hai điểm phân biệt M và N với $x_M < x_N$. Giá trị biểu thức $x_N - x_M$ bằng

- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{\sqrt{11}}{2}$. C. $2\sqrt{2}$. D. 6.

Câu 14: Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2(x+1)}{x-2}$ mà tiếp điểm cách đều các trục tọa độ?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 15: Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ cách đều hai điểm $A(1; -3)$, $B(2; -6)$?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 16: Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ cách đều hai điểm $A(1; 2)$, $B(-3; -6)$?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 5.

Câu 17: Cho đường thẳng $y = m$ cắt đường cong (C): $y = x^4 - 3x^2 - 2$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho tam giác OAB vuông tại O với m là số thực dương. Khi đó tiếp tuyến của (C) tại A và B cắt nhau tại điểm nào dưới đây?

- A. $M(0; 40)$. B. $N(0; -42)$. C. $P(0; -38)$. D. $Q(0; -40)$.

Câu 18: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C). Xét điểm A thuộc (C). Gọi S là tập hợp các giá trị thực của a sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại điểm thứ hai B ($B \neq A$) thỏa mãn $a.b = -\frac{1}{2}$, trong đó a, b lần lượt là hoành độ của A và B. Tổng giá trị các phần tử của S bằng

A. $\frac{5}{4}$.

B. $-\frac{3}{4}$.

C. $-\frac{5}{4}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Câu 19: Gọi A là điểm thuộc đồ thị hàm số (C): $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{5}{2}$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt B; C khác A thỏa mãn $AC = 3AB$ (với B nằm giữa A ;C). Độ dài đoạn thẳng OA bằng

A. $\sqrt{2}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{14}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Câu 20: Cho đồ thị hàm số (C): $y = \frac{x-1}{2x}$ và d_1, d_2 là hai tiếp tuyến của (C) song song với nhau. Khoảng cách lớn nhất giữa d_1, d_2 là

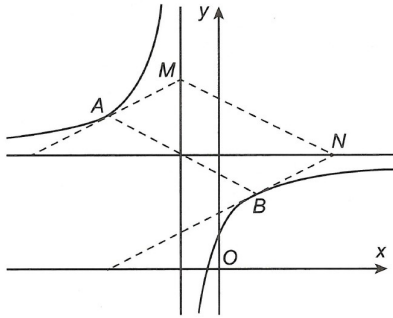
A. 3.

B. $2\sqrt{3}$.

C. 2.

D. $2\sqrt{2}$.

Câu 21: Cho hàm số $y = \frac{3x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi A, B là hai điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau. Các tiếp tuyến này lần lượt cắt tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của (C) tại M, N (tham khảo hình vẽ). Tứ giác MNBA có chu vi nhỏ nhất bằng



A. 16.

B. 12.

C. 20.

D. 24.

ĐÁP ÁN

DẠNG 1. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm cho trước

1 – C	2 – C	3 – A	4 – D	5 – C	6 – C	7 – B	8 – D	9 – D	10 – B
11 – B	12 – A	13 – B	14 – D	15 – D	16 – D	17 – B	18 – D	19 – B	20 – B
21 – A	22 – B	23 – C	24 – A	25 – D	26 – D	27 – C	28 – A	29 – B	30 – A
31 – A	32 – B	33 – B	34 – A	35 – D	36 – D				

DẠNG 2. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi biết hệ số góc

1 – B	2 – B	3 – D	4 – B	5 – A	6 – A	7 – B	8 – D	9 – D	10 – A
11 – A	12 – A	13 – C	14 – A	15 – C	16 – C	17 – D	18 – A	19 – C	20 – B
21 – A	22 – C	23 – D	24 – C	25 – B	26 – D	27 – C			

DẠNG 3. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm M cho trước

1 – B	2 – C	3 – C	4 – D	5 – D	6 – A	7 – D	8 – A	9 – B	10 – B
11 – D									

DẠNG 4. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số ẩn tại điểm có hoành độ $x = x_0$ cho trước

1 – D	2 – B	3 – C	4 – A	5 – A	6 – A	7 – C	8 – C	9 – D	10 – C
11 – B	12 – B								

Dạng 5. Một số bài toán tiếp tuyến khác

1 – C	2 – B	3 – D	4 – C	5 – A	6 – A	7 – A	8 – D	9 – A	10 – B
11 – B	12 – B	13 – B	14 – C	15 – A	16 – B	17 – C	18 – D	19 – D	20 – C
21 – D									