VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

TOÁN 12

TRONG KHÔNG GIAN



2026

Chương trình mới thống nhất SGK

Sưu tầm các bài toán đa dạng giúp học sinh có kĩ năng tư duy và kỹ năng phản xạ đề.

1. Trắc nghiệm nhiều phương án
2. Trắc nghiệm đúng sai
3. Trả lời ngắn

MK LÊ MINH KHA - 0399653362

Mục lục

Chương I. VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN 3

§1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN 3
§2. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN 86
§3. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ 136

Chương II. BỘ ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG VECTƠ 196

Chương III. LỜI GIẢI CHI TIẾT BỘ ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG VECTƠ 238

THẦY KHA
DẠY TOÁN - THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay - Làm chủ tương lai ngày mai

Chương I

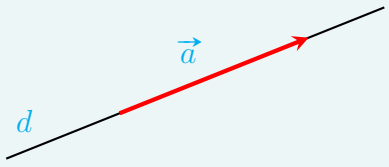
VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§1 VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

I. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.
Độ dài của vectơ trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

- Vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.
- Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ thì vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$
- Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$, độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.
- Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ đó (H.2.4).



Hình 2.4. Đường thẳng d là giá của vectơ $\vec{a}$.

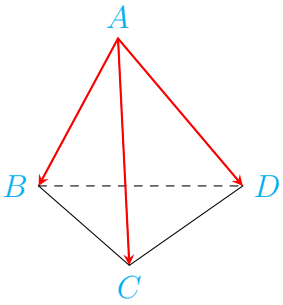
Ví dụ 1

Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 (H.2.5).

a) Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện?

b) Trong các vectơ tìm được ở câu a, những vectơ nào có giá nằm trong mặt phẳng (ABC)?

c) Tính độ dài của các vectơ tìm được ở câu a.



Hình 2.5

Lời giải.

a) Có ba vectơ là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$.

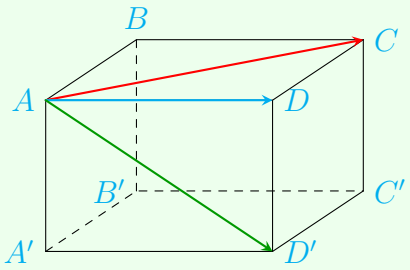
b) Trong ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$ chỉ có hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ có giá nằm trong mặt phẳng (ABC).

c) Vì tứ diện $ABCD$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 nên $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = 1$.

1 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (H.2.6).
Trong các vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AD'}$:

a) Hai vectơ nào có giá cùng nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$?

b) Hai vectơ nào có cùng độ dài?



Hình 2.6

- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, ta có tính chất và các quy ước sau đối với vectơ trong không gian:

– Trong không gian, với mỗi điểm O và vectơ $\vec{a}$ cho trước, có duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.

– Các vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ví dụ như $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \ldots$ gọi là các vectơ-không.

– Ta quy ước vectơ-không có độ dài là 0, cùng hướng (và vì vậy cùng phương) với mọi vectơ. Do đó, các vectơ-không đều bằng nhau và được kí hiệu chung là $\vec{0}$.

Ví dụ 2

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ (H.2.8).

a) Trong ba vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{B'B}$, vectơ nào bằng vectơ $\overrightarrow{AA'}$? Giải thích vì sao.

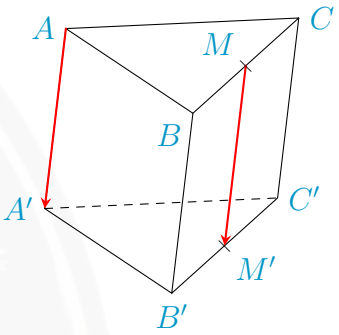
b) Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$.

Lời giải.

a) Hai đường thẳng AA' và BC chéo nhau nên hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương. Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$ không bằng nhau.

Tứ giác $ACC'A'$ là hình bình hành nên $AA'//CC'$ và $AA' = CC'$. Hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{CC'}$ có cùng độ dài và cùng hướng nên hai vectơ đó bằng nhau.

Tương tự, hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{B'B}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{B'B}$ không bằng nhau.



Hình 2.8

b) Gọi M' là trung điểm của cạnh $B'C'$. Vì tứ giác $BCC'B'$ là hình bình hành nên $MM'//BB'$ và $MM' = BB'$. Hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA'//BB'$ và $AA' = BB'$, suy ra $MM'//AA'$ và $MM' = AA'$. Hai vectơ $\overrightarrow{MM'}$ và $\overrightarrow{AA'}$ có cùng độ dài và cùng hướng nên $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$. Vậy trung điểm của cạnh $B'C'$ là điểm M' cần tìm.

2 ho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

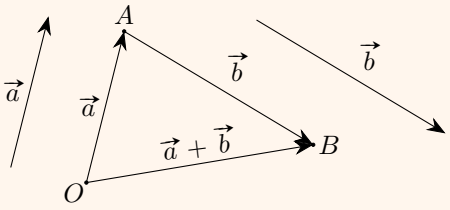
a) Trong ba vectơ $\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DC}$, vectơ nào bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$?

b) Gọi M là một điểm thuộc cạnh AD. Xác định điểm N sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$.

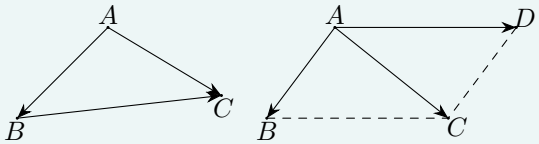
II. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

1) Tổng của hai vectơ trong không gian

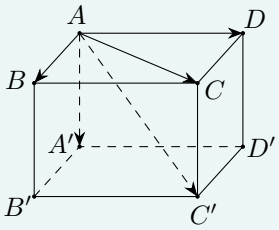
Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy ba điểm O, A, B sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Ta gọi $\overrightarrow{OB}$ là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ký hiệu $\vec{a} + \vec{b}$.
Phép lấy tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là phép cộng vectơ.



Nhận xét. Quy tắc ba điểm: Với ba điểm A, B, C, ta có
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
Quy tắc hình bình hành: Cho $ABCD$ là hình bình hành, ta có
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$



Quy tắc hình hộp: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Ta có
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$
Hệ thức tương tự: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$.



① Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

② Tính chất kết hợp: $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$;

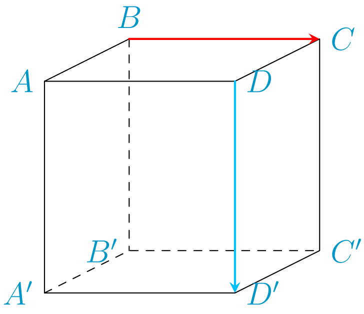
③ Với mọi vectơ $\vec{a}$, ta luôn có: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

④ Tổng của ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$.

Ví dụ 3

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 (H.2.12). Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD'}$.

Lời giải. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.
Do đó $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AD'}$.
Tứ giác $ADD'A'$ là hình vuông nên $AD' = \sqrt{AD^2 + DD'^2} = \sqrt{2}$, suy ra $|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD'}| = \sqrt{2}$.



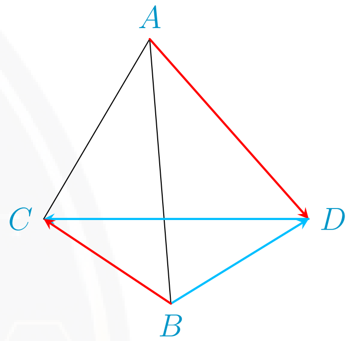
Hình 2.12

Ví dụ 4

Cho tứ diện $ABCD$ (H.2.13). Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

Lời giải. Theo quy tắc ba điểm trong không gian, ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$.
Từ đó lần lượt áp dụng tính chất của phép cộng vectơ trong không gian, ta được:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}) \\ &= \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$



Hình 2.13

(3) Cho tứ diện $ABCD$ (H.2.13). Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

....

....

....

....

....

(4) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD'}$

....

....

....

....

....

2) Hiệu của hai vectơ trong không gian

① Vectơ đối của $\vec{a}$ kí hiệu là $-\vec{a}$.

② Vectơ đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$, nghĩa là $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ (*dùng để làm mất dấu trừ trước vectơ*).

③ Vectơ $\vec{0}$ được coi là vectơ đối của chính nó.

Định nghĩa hiệu của hai vectơ: Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Ta gọi $\vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$ là **hiệu của hai vectơ** $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ký hiệu $\vec{a} - \vec{b}$.

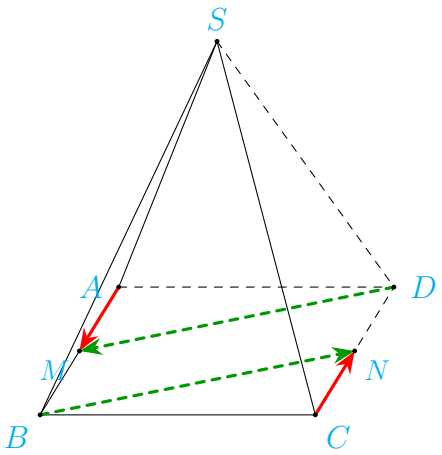
Phép lấy hiệu của hai vectơ được gọi là **phép trừ vectơ**.

① Với ba điểm A, B, C ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

② Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đối nhau thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

Ví dụ 5

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD (H.2.16). Chứng minh rằng:



Hình 2.16

a) $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CN}$ là hai vectơ đối nhau;

b) $\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{SA}$.

Lời giải. a) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $AB = CD$ và $AB//CD$, suy ra $AM = CN$ và $AM//CN$. Hai vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CN}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên chúng là hai vectơ đối nhau.

b) Từ câu a, ta có $\overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{AM}$.

Suy ra $\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{SN} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{SN} + \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{SA}$.

5 Trong Ví dụ 5, chứng minh rằng:
a) $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{DM}$ là hai vectơ đối nhau;
b) $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{SC}$.

3) TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Trong không gian, tích của một số thực $k \neq 0$ với một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

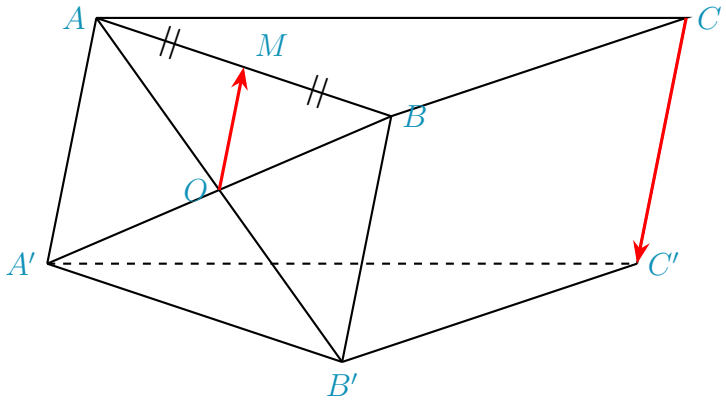
- Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k > 0$; ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k < 0$;
- Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

Trong không gian, phép lấy tích của một số thực với một vectơ được gọi là **phép nhân một số với một vectơ**.

- Quy ước $k\vec{a} = \vec{0}$ nếu $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.
- Nếu $k\vec{a} = \vec{0}$ thì $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.
- Trong không gian, điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $(\vec{b} \neq \vec{0})$ cùng phương là có một số thực k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

Ví dụ 6

Trong HĐ6, gọi O là giao điểm của AB' và $A'B$ (H.2.18).
Chứng minh rằng $\overrightarrow{CC'} = (-2)\overrightarrow{OM}$.



Hình 2.18

Lời giải. Vì O là trung điểm của AB' nên OM là đường trung bình của tam giác $AB'B$. Suy ra $B'B // OM$ và $B'B = 2OM$. Tứ giác $BCC'B'$ là hình bình hành nên $B'B // C'C$ và $B'B = C'C$. Do đó $C'C // OM$ và $C'C = 2OM$. Vì hai vectơ $\overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{OM}$ ngược hướng nên $\overrightarrow{CC'} = (-2)\overrightarrow{OM}$.

6 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi E, F lần lượt là các điểm thuộc các cạnh SA, SB sao cho $SE = \frac{1}{3}SA; SF = \frac{1}{3}SB$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.

....

....

....

....

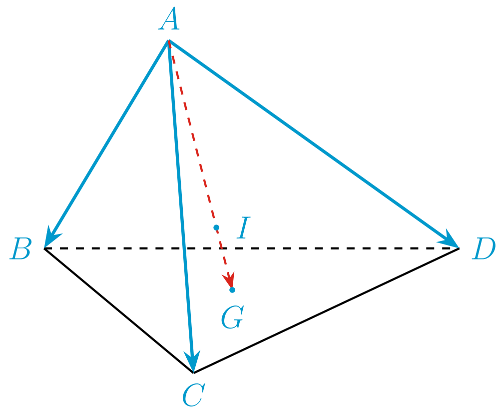
....

Tương tự như phép nhân một số với một vectơ trong mặt phẳng, phép nhân một số với một vectơ trong không gian có các tính chất sau:

- Tính chất kết hợp: Nếu h, k là hai số thực và $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$.
- Tính chất phân phối: Nếu h, k là hai số thực và $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vectơ bất kì thì $(h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$ và $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.
- Tính chất nhân với 1 và -1: Nếu $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $1\vec{a} = \vec{a}$ và $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Ví dụ 7

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD (H.2.19). Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.



Hình 2.19

(7) Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.
Do đó ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD}$
$= 3\overrightarrow{AG} + (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = 3\overrightarrow{AG} + \vec{0} = 3\overrightarrow{AG}$.

NHẬN XÉT. Tương tự như trong mặt phẳng, nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với điểm O tuỳ ý, ta có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}.$$

8 Trong Ví dụ 8, gọi I là điểm thuộc đoạn thẳng AG sao cho $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{IG}$ (H.2.19). Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}.$$

9 Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của bốn lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học (H.2.20). Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ 900 km/h lên 920 km/h, trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản của không khí khi máy bay đạt vận tốc 900 km/h và 920 km/h lần lượt được biểu diễn bởi hai vectơ $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$. Hãy giải thích vì sao $\vec{F}_1 = k\vec{F}_2$ với k là một số thực dương nào đó. Tính giá trị của k (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



Hình 2.20

III. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

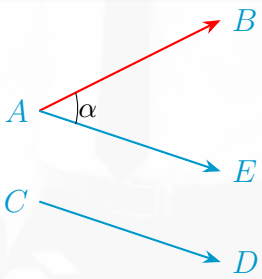
1) Góc của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O bất kì và gọi A, B là hai điểm sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó, góc AOB ($0° \leq \widehat{AOB} \leq 180°$) được gọi là **góc giữa hai vectơ** $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $(\vec{a}, \vec{b})$.

NHẬN XÉT. Nếu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $90°$ thì ta nói hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau và kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$.

– Để xác định góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ trong không gian ta có thể lấy điểm E sao cho $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$, khi đó $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \widehat{BAE}$ (H.2.23).

– Quy ước góc giữa một vectơ bất kì và $\vec{0}$ có thể nhận một giá trị tuỳ ý từ $0°$ đến $180°$.



Hình 2.23

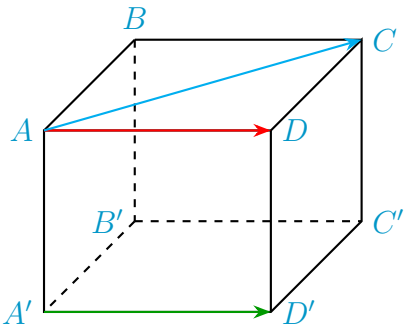
Ví dụ 8

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (H.2.24).

Tính góc giữa các cặp vectơ sau:

a) $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{B'C'}$;

b) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{A'D'}$.



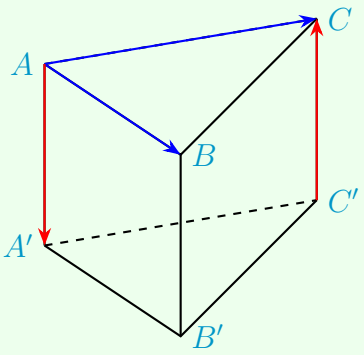
Hình 2.24

» Sưu tầm và Biên soạn: Lê Minh Kha 0399653362

Lời giải. a) Hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ cùng hướng nên $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{B'C'}) = 0°$.

b) Vì tứ giác $ADD'A'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'}$.
Do đó $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'D'}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \widehat{CAD}$. Tam giác ADC vuông cân tại D nên $\widehat{CAD} = 45°$, vì vậy $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'D'}) = 45°$.

10 Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ (H.2.25). Tính các góc $(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BC})$ và $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'})$.



Hình 2.25

2) Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. **Tích vô hướng** của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

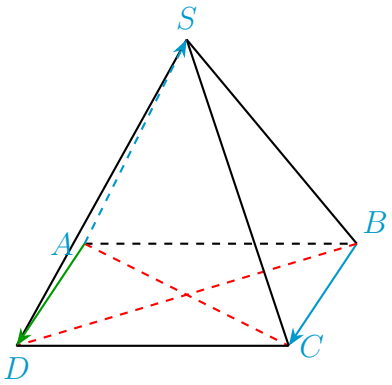
- Quy ước nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Khi đó: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- Với mọi vectơ $\vec{a}$, ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.
- Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$ thì $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Ví dụ 9

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a (H.2.26). Tính các tích vô hướng sau:

a) $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC}$;

b) $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC}$.



Hình 2.26

Lời giải.

a) Tam giác SAD có ba cạnh bằng nhau nên là tam giác đều, suy ra $\widehat{SAD} = 60°$. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, suy ra $(\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AD}) = \widehat{SAD} = 60°$. Do đó

$$\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AS}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos 60° = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

b) Tứ giác $ABCD$ là hình vuông có độ dài mỗi cạnh là a nên độ dài đường chéo AC là $\sqrt{2}a$. Tam giác SAC có $SA = SC = a$ và $AC = \sqrt{2}a$ nên tam giác SAC vuông cân tại S, suy ra $\widehat{SAC} = 45°$. Do đó $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AS}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \widehat{SAC} = a \cdot \sqrt{2}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$.

11 Trong Ví dụ 10, hãy tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{CD}$.

DẠY TOÁN THCS THPT 0399653362 Học hôm nay - Làm chủ tương lai

NHẬN XÉT. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian cũng có các tính chất giống như các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ trong mặt phẳng. Cụ thể, nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là các vectơ trong không gian và k là một số thực thì ta có:

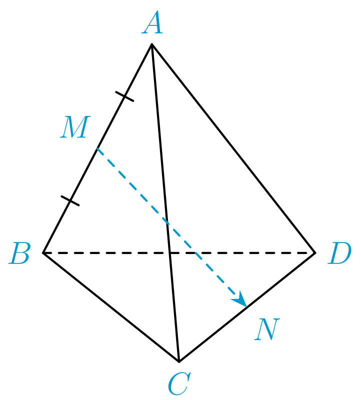
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- $k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$;
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Ví dụ 10

Cho tứ diện $ABCD$ có AC và BD cùng vuông góc với AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, CD (H.2.27). Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$;

b) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.



Hình 2.27

Lời giải. a) Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}$.

Do đó $2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN})$.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN} = \vec{0}$.

Suy ra $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$, hay $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

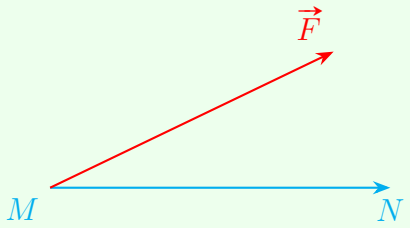
b) Từ giả thiết, ta có $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Vì vậy, $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

12 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{B'D'} = 0$.

13 Như đã biết, nếu có một lực $\vec{F}$ tác động vào một vật tại điểm M và làm cho vật đó di chuyển một quãng đường MN thì công A sinh ra được tính theo công thức $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MN}$, trong đó lực F có độ lớn tính bằng Newton, quãng đường MN tính bằng mét và công A tính bằng Jun (H.2.28). Do đó, nếu dùng một lực $\vec{F}$ có độ lớn không đổi để làm một vật di chuyển một quãng đường không đổi thì công sinh ra sẽ lớn nhất khi lực tác động cùng hướng với chuyển động của vật. Hãy giải thích vì sao.

Kết quả trên có thể được áp dụng như thế nào khi kéo (hoặc đẩy) các vật nặng?



Hình 2.28

DẠY TOÁN THCS THPT 0399653362 Học hôm nay – Làm chủ tương lai

IV. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

1) Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$.
Ⓒ $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$.
Ⓓ $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$.

B

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$. Gọi M là trung điểm của đoạn BC. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{DM}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c})$.
Ⓑ $\overrightarrow{DM}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})$.
Ⓒ $\overrightarrow{DM}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c})$.
Ⓓ $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$.

A

Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{MP}=\dfrac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}+\vec{b})$.
Ⓑ $\overrightarrow{MP}=\dfrac{1}{2}(\vec{d}+\vec{b}-\vec{c})$.
Ⓒ $\overrightarrow{MP}=\dfrac{1}{2}(\vec{c}+\vec{b}-\vec{d})$.
Ⓓ $\overrightarrow{MP}=\dfrac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b})$.

D

Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_0 là giao điểm của GA và mặt phẳng (BCD). Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{G_0G}$.
Ⓑ $\overrightarrow{GA}=4\overrightarrow{G_0G}$.
Ⓒ $\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{G_0G}$.
Ⓓ $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{G_0G}$.

C

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{SD}=\vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

Ⓐ $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$.
Ⓑ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.
Ⓒ $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$.
Ⓓ $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$.

Câu 6. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Vectơ $\overrightarrow{AG'}$ bằng?

Ⓐ $\dfrac{1}{3}(\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c})$.
Ⓑ $\dfrac{1}{3}(3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$.
Ⓒ $\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c})$.
Ⓓ $\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$.

Câu 7. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{B'C}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$?

Ⓐ $\overrightarrow{B'C}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.
Ⓑ $\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.
Ⓒ $\overrightarrow{B'C}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.
Ⓓ $\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Câu 8. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.
(B) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.
(C) $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.
(D) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.

C

Câu 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.
(B) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.
(C) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.
(D) $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.

B

Câu 10. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AC'}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$?

(A) $\overrightarrow{AC'} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
(B) $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.
(C) $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
(D) $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

C

Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$. Điểm N xác định bởi đẳng thức sau $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào đúng?

(A) N là trung điểm BD..
(B) N là đỉnh hình bình hành $BCDN$..
(C) N là đỉnh hình bình hành $CDBN$..
(D) $N \equiv A$..

C

Câu 12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm được xác định bởi đẳng thức sau $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MD'} = \vec{0}$. Mệnh đề nào đúng?

(A) M là tâm mặt đáy $ABCD$..
(B) M là tâm mặt đáy $A'B'C'D'$..
(C) M là trung điểm đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy..
(D) tập hợp điểm M là đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy..

C

Câu 13. Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Điều kiện nào dưới đây khẳng định $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng?

(A) Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m + n + p = 0$ và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.
(B) Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m + n + p \neq 0$ và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.
(C) Tồn tại ba số thực m, n, p sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.
(D) Giá của $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng qui.

B

Câu 14. Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ và $\vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

(A) $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ đồng phẳng.
(B) $\vec{x}$, $\vec{a}$ cùng phương.
(C) $\vec{x}$, $\vec{b}$ cùng phương.
(D) $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ đôi một cùng phương.

A

Câu 15. Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$ và $\vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}-6\vec{c}$ và $\vec{z}=-\vec{a}+3\vec{b}+6\vec{c}$ đồng phẳng.
Ⓑ $\vec{x}=\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}$ và $\vec{y}=3\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}$ và $\vec{z}=2\vec{a}-3\vec{b}-3\vec{c}$ đồng phẳng.
Ⓒ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ và $\vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ và $\vec{z}=-\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}$ đồng phẳng.
Ⓓ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ và $\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$ và $\vec{z}=-\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ đồng phẳng.

A

Câu 16. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

Ⓐ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng nếu một trong ba vectơ đó bằng $\vec{0}$.
Ⓑ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng nếu có hai trong ba vectơ đó cùng phương.
Ⓒ Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ba vectơ $\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng.
Ⓓ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ luôn đồng phẳng với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

D

Câu 17. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Ⓑ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{C'A'}$. Ⓒ $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{B'B}$. Ⓓ $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{B'D'}$.

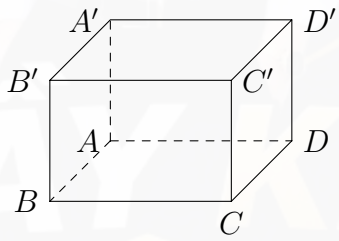
D

Câu 18. Cho ba điểm A, B, C tùy ý. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CA}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.
Ⓓ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BO}$.

D

Câu 19. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (xem hình dưới), tổng của $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD'}$ là vectơ nào dưới đây?



Ⓐ $\overrightarrow{DB'}$. Ⓑ $\overrightarrow{DB}$. Ⓒ $\overrightarrow{BD}$. Ⓓ $\overrightarrow{BD'}$.

A

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}$.

D

Câu 21. Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

Ⓐ Với 3 điểm M, N, P tùy ý ta luôn có $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$..
Ⓑ Với 3 điểm O, A, B tùy ý ta luôn có $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$..
Ⓒ Vectơ $\vec{b}$ là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$ nếu $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ và $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vectơ ngược hướng..
Ⓓ Mỗi vectơ đều có vectơ đối. Vectơ đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$, vectơ đối của $\vec{0}$ là $\vec{0}$..

B

Câu 22. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB' và CD'. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CJ}$. Ⓑ $\overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{IJ}$. Ⓒ $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{D'J}$. Ⓓ $\overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{JC}$.

D

Câu 23. Cho $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5$, góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $120°$. Khẳng định nào **sai** trong các khẳng định sau?

Ⓐ $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$. Ⓑ $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}$.
Ⓒ $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 9$. Ⓓ $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{139}$.

B

Câu 24. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 26; |\vec{b}| = 28; |\vec{a} + \vec{b}| = 48$. Độ dài vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ bằng

Ⓐ 25. Ⓑ $\sqrt{616}$. Ⓒ 9. Ⓓ $\sqrt{618}$.

B

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD. Khi đó, vectơ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{MN}$ là vectơ nào dưới đây?

Ⓐ $\overrightarrow{MA}$. Ⓑ $\overrightarrow{CD}$. Ⓒ $\overrightarrow{DB}$. Ⓓ $\overrightarrow{BD}$.

D

Câu 26. Cho tứ diện $ABCD$, O là trọng tâm tam giác BCD, M là trung điểm của AD. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$. Ⓑ $\overrightarrow{OM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.
Ⓒ $\overrightarrow{OM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$. Ⓓ $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.

C

Câu 27. Cho tứ diện $SABC$. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}, \overrightarrow{SB} = \vec{b}, \overrightarrow{SC} = \vec{c}$. Gọi M là trung điểm của SA, N là điểm trên cạnh BC sao cho $NC = 3NB$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ ta được

Ⓐ $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$. Ⓑ $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c}$. Ⓓ $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$.

A

Câu 28. Cho ba điểm A, B, C tùy ý. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

B

Câu 29. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$. Ⓑ $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$.
Ⓒ $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$. Ⓓ $\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$.

B

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Chọn mệnh đề đúng.

(A) $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$.
(B) $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=8\overrightarrow{SO}$.
(C) $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$.
(D) $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{OS}$.

A

Câu 31. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})$.
(B) $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})$.
(C) $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD})$.
(D) $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})$.

A

Câu 32. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây:

(A) $\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{BC'}$.
(B) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{A'D'}$.
(C) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.
(D) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{D'C'}$.

C

Câu 33. Cho tứ diện $ABCD$. Chọn đẳng thức đúng.

(A) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.
(B) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.
(C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.
(D) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

A

Câu 34. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=k\overrightarrow{AC_1}$.

(A) $k=4$.
(B) $k=1$.
(C) $k=0$.
(D) $k=2$.

B

Câu 35. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=k\overrightarrow{DG}$.

(A) $k=\frac{1}{3}$.
(B) $k=2$.
(C) $k=3$.
(D) $k=\frac{1}{2}$.

C

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$, gọi M,N lần lượt là điểm thuộc cạnh SB,SC sao cho $SM=3MB, CN=\frac{1}{3}NS$. Tìm số thực k thỏa mãn $\overrightarrow{MN}=k\overrightarrow{CB}$.

(A) $\frac{1}{3}$.
(B) $\frac{-1}{3}$.
(C) $\frac{-3}{4}$.
(D) $\frac{3}{4}$.

C

Câu 37. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của BB'. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}$.
(B) $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}$.
(C) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.
(D) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.

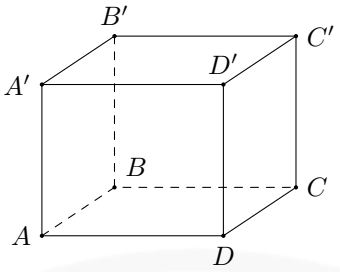
C

Câu 38. Cho ba điểm A,B,C tùy ý. Mệnh đề nào dưới đây sai?

(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$.
(B) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CA}$.

Ⓒ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$. Ⓓ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BO}$.

Câu 39. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (xem hình dưới), tổng của $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD'}$ là vectơ nào dưới đây?



Ⓐ $\overrightarrow{DB'}$. Ⓑ $\overrightarrow{DB}$. Ⓒ $\overrightarrow{BD}$. Ⓓ $\overrightarrow{BD'}$.

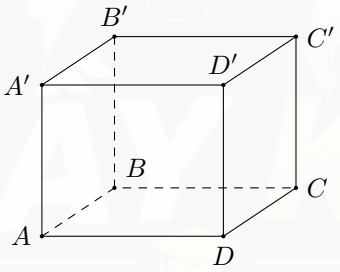
Câu 40. Cho tứ diện $ABCD.KhngØnhnodiØyØng$?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$. Ⓑ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$. Ⓓ $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}$.

Câu 41. Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau.

Ⓐ Với 3 điểm M,N,P tùy ý ta luôn có $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$.
Ⓑ Với 3 điểm O,A,B tùy ý ta luôn có $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$.
Ⓒ Vectơ $\vec{b}$ là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$ nếu $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ và $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vectơ ngược hướng.
Ⓓ Mỗi vectơ đều có vectơ đối. Vectơ đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$, vectơ đối của $\vec{0}$ là $\vec{0}$.

Câu 42. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AB' và CD'. Khẳng định nào dưới đây đúng?



Ⓐ $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{CJ}$. Ⓑ $\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{IJ}$. Ⓒ $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{D'J}$. Ⓓ $\overrightarrow{A'I}=\overrightarrow{JC}$.

Câu 43. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi O là trung điểm CH. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$. Ⓑ $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$.
Ⓒ $\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$. Ⓓ $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BF}$.

Câu 44. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

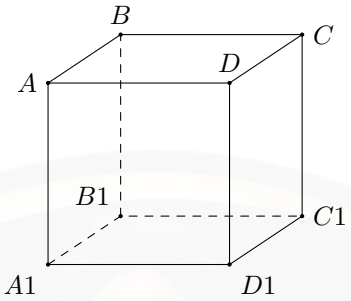
Ⓐ M trùng với G. Ⓑ M thuộc AG và $AM=3AG$.
Ⓒ G là trung điểm AM. Ⓓ M là trung điểm AG.

Câu 45. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G và I là trung điểm của BC. Tìm điểm M thoả

mãn $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$.

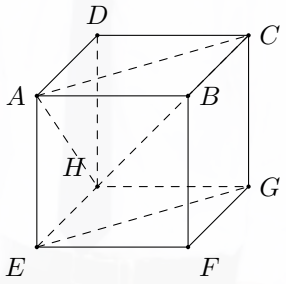
Ⓐ M trùng với G.
Ⓑ M là trung điểm của AI.
Ⓒ M là trung điểm AG.
Ⓓ M nằm trên mặt cầu tâm G.

Câu 46. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tính côsin của góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A_1C_1}$.



Ⓐ 0.
Ⓑ $\dfrac{1}{2}$.
Ⓒ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Ⓓ $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 47. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ cạnh a. Tính số đo góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{EG}$.



Ⓐ $30°$.
Ⓑ $45°$.
Ⓒ $60°$.
Ⓓ $90°$.

Câu 48. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$ bằng

Ⓐ $30°$.
Ⓑ $120°$.
Ⓒ $60°$.
Ⓓ $90°$.

Câu 49. Cho tứ diện đều $ABCD$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ bằng

Ⓐ 0.
Ⓑ $-\dfrac{a^2}{2}$.
Ⓒ $\dfrac{a^2}{2}$.
Ⓓ a^2.

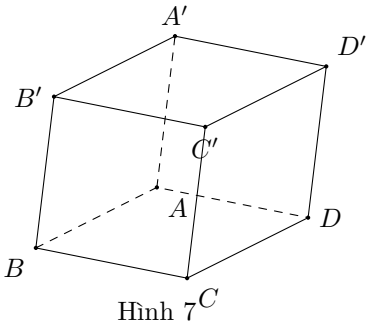
Câu 50. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ theo a.

Ⓐ $\dfrac{1}{2}a^2$.
Ⓑ a^2.
Ⓒ $-a^2$.
Ⓓ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

Câu 51. Cho tứ diện $ABCD$, gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Vectơ $\overrightarrow{AI}$ cùng hướng với vectơ nào sau đây?

Ⓐ $\overrightarrow{BI}$.
Ⓑ $\overrightarrow{CD}$.
Ⓒ $\overrightarrow{CI}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}$.

Câu 52. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (Hình 7).

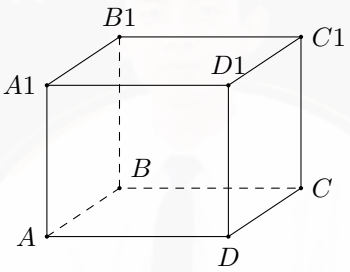


Hình 7

Khi đó, $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}$ bằng

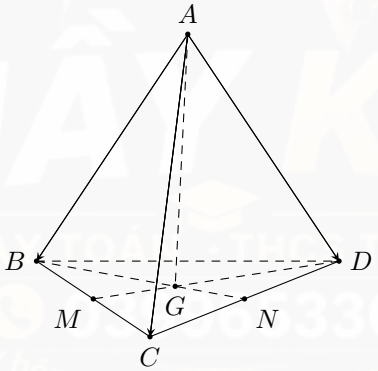
(A) $\overrightarrow{AD'}$. (B) $\overrightarrow{AB'}$. (C) $\overrightarrow{AC'}$. (D) $\overrightarrow{AC}$.

Câu 53. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Đẳng thức nào dưới đây sai?



(A) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_1A_1}$.
(B) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{DC}$.
(C) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BD_1}$.
(D) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BC}$.

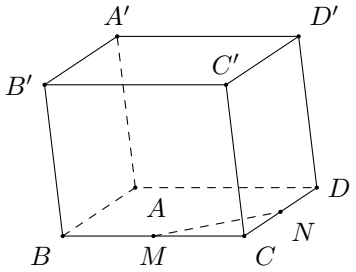
Câu 54. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BC,CD. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Khi đó, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ bằng



(A) $6\overrightarrow{AM}$. (B) $3\overrightarrow{AN}$. (C) $3\overrightarrow{AG}$. (D) $6\overrightarrow{AG}$.

Câu 55. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD.

Vectơ nào sau đây bằng $2\overrightarrow{MN}$?



Ⓐ $\overrightarrow{AD}$. Ⓑ $\overrightarrow{A'C'}$. Ⓒ $\overrightarrow{B'D'}$. Ⓓ $\overrightarrow{BC}$.

Câu 56. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 2. Khi đó, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$ bằng

Ⓐ 2. Ⓑ $-2\sqrt{3}$. Ⓒ $2\sqrt{3}$. Ⓓ -2.

Câu 57. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy G là trọng tâm của tam giác ABC. Phát biểu nào sau đây sai?

Ⓐ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Ⓑ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.
Ⓒ $\overrightarrow{GD}-\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{AD}$. Ⓓ $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{DG}$.

Câu 58. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm đoạn MN và P là 1 điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{IA}+(2k-1)\overrightarrow{IB}+k\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

Ⓐ $k=2$. Ⓑ $k=4$. Ⓒ $k=1$. Ⓓ $k=0$.

Câu 59. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+k(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D})=\vec{0}$.

Ⓐ $k=0$. Ⓑ $k=1$. Ⓒ $k=4$. Ⓓ $k=2$.

Câu 60. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$. Ⓑ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.
Ⓒ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$. Ⓓ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

Câu 61. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

Ⓐ $\alpha=180°$. Ⓑ $\alpha=0°$. Ⓒ $\alpha=90°$. Ⓓ $\alpha=45°$.

Câu 62. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$ và $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ⓐ $\alpha=30°$. Ⓑ $\alpha=45°$. Ⓒ $\alpha=60°$. Ⓓ $\alpha=120°$.

Câu 63. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và hai vectơ $\vec{u}=\frac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ⓐ $\alpha=90°$. Ⓑ $\alpha=180°$. Ⓒ $\alpha=60°$. Ⓓ $\alpha=45°$.

Câu 64. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn điều kiện $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$. Tính độ dài vectơ $3\vec{a}+5\vec{b}$.

Ⓐ $5\sqrt{5}$. Ⓑ $\sqrt{24}$. Ⓒ $\sqrt{124}$. Ⓓ 124.

Câu 65. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Chọn khẳng định đúng?

Ⓐ $\cos\alpha = \dfrac{3}{8}$. Ⓑ $\alpha = 30°$. Ⓒ $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. Ⓓ $\alpha = 60°$.

Câu 66. Cho $\vec{a}, \vec{b}$ có $(\vec{a}+2\vec{b})$ vuông góc với vectơ $(5\vec{a}-4\vec{b})$ và $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Ⓐ $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ⓑ $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$.

Ⓒ $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{1}{2}$.

Câu 67. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; \vec{a} \cdot \vec{b} = 10$. Xét hai vectơ $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{x}, \vec{y}$. Chọn khẳng định đúng.

Ⓐ $\cos\alpha = \dfrac{-2}{\sqrt{15}}$. Ⓑ $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{15}}$.

Ⓒ $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{15}}$. Ⓓ $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{15}}$.

Câu 68. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 26; |\vec{b}| = 28; |\vec{a} + \vec{b}| = 48$. Tính độ dài vectơ $\vec{a} - \vec{b}$.

Ⓐ 25. Ⓑ $\sqrt{616}$. Ⓒ 9. Ⓓ $\sqrt{618}$.

Câu 69. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$ và $|\vec{a} + \vec{b}| = 13$. Khi đó, cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{a} + \vec{b}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{12}{13}$. Ⓑ $\dfrac{5}{12}$. Ⓒ $-\dfrac{119}{169}$. Ⓓ $\dfrac{119}{169}$.

Câu 70. Cho $\vec{u} = \vec{a} + 3\vec{b}$ vuông góc với $\vec{v} = 7\vec{a} - 5\vec{b}$ và $\vec{x} = \vec{a} - 4\vec{b}$ vuông góc với $\vec{y} = 7\vec{a} - 2\vec{b}$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

Ⓐ $(\vec{a}, \vec{b}) = 75°$. Ⓑ $(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$.

Ⓒ $(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$. Ⓓ $(\vec{a}, \vec{b}) = 45°$.

Câu 71. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\angle BAC = \angle BAD = 60°$. Tính góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$.

Ⓐ 60°. Ⓑ 45°. Ⓒ 120°. Ⓓ 90°.

Câu 72. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSA$. Tính góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Ⓐ 120°. Ⓑ 90°. Ⓒ 60°. Ⓓ 45°.

Câu 73. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc (MN, SC) bằng:

Ⓐ 45°. Ⓑ 30°. Ⓒ 90°. Ⓓ 60°.

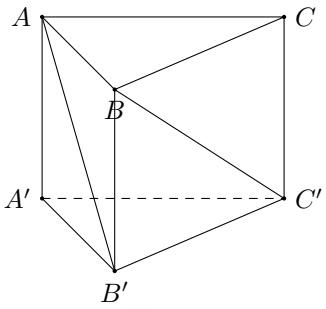
Câu 74. Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Góc giữa AO và CD bằng

Ⓐ 0°. Ⓑ 30°. Ⓒ 90°. Ⓓ 60°.

Câu 75. Cho tứ diện $ABCD$ với $AB \perp AC, AB \perp BD$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Góc giữa PQ và AB bằng

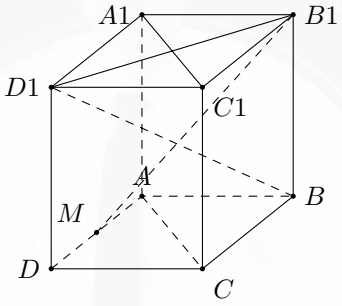
Ⓐ 90°. Ⓑ 60°. Ⓒ 30°. Ⓓ 45°.

Câu 76. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}a$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng



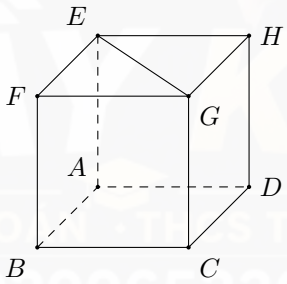
Ⓐ $60°$. Ⓑ $45°$. Ⓒ $90°$. Ⓓ $30°$.

Câu 77. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a. Gọi M là trung điểm AD. Giá trị $\overrightarrow{B_1M} \cdot \overrightarrow{BD_1}$ là:



Ⓐ $\dfrac{1}{2}a^2$. Ⓑ a^2. Ⓒ $\dfrac{3}{4}a^2$. Ⓓ $\dfrac{3}{2}a^2$.

Câu 78. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Tính góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$.



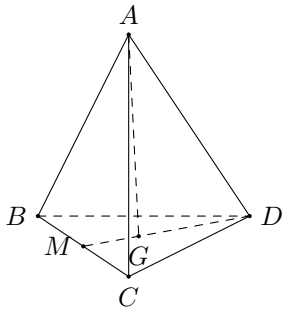
Ⓐ $90°$. Ⓑ $60°$. Ⓒ $45°$. Ⓓ $120°$.

Câu 79. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BB'. Côsin của góc hợp bởi MN và AC' bằng

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 80. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi G là trọng tâm tam giác

BCD. Đẳng thức nào sau đây đúng?

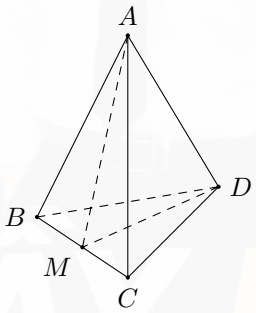


Ⓐ $\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$.
Ⓒ $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$.
Ⓓ $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$.

Câu 81. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Đẳng thức nào sau đây đúng?

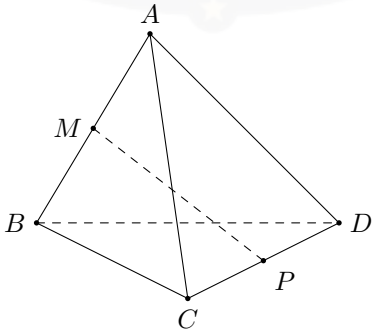
Ⓐ $\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})$.
Ⓑ $\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})$.
Ⓒ $\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})$.
Ⓓ $\overrightarrow{AO}=\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})$.

Câu 82. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b},\overrightarrow{AD}=\vec{c}$. Gọi M là trung điểm của đoạn BC. Đẳng thức nào dưới đây đúng?



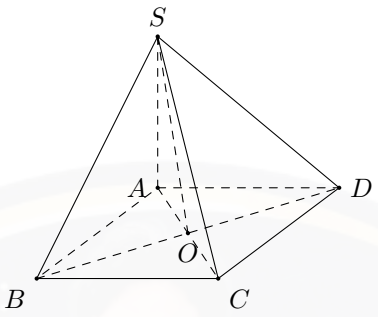
Ⓐ $\overrightarrow{DM}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c})$.
Ⓑ $\overrightarrow{DM}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})$.
Ⓒ $\overrightarrow{DM}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c})$.
Ⓓ $\overrightarrow{DM}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})$.

Câu 83. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?



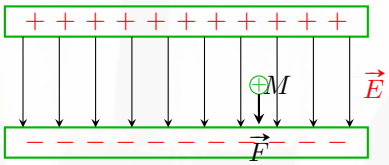
Ⓐ $\overrightarrow{MP}=\dfrac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}+\vec{b})$.
Ⓑ $\overrightarrow{MP}=\dfrac{1}{2}(\vec{d}+\vec{b}-\vec{c})$.
Ⓒ $\overrightarrow{MP}=\dfrac{1}{2}(\vec{c}+\vec{b}-\vec{d})$.
Ⓓ $\overrightarrow{MP}=\dfrac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b})$.

Câu 84. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{SD}=\vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?



Ⓐ $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$.
Ⓑ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.
Ⓒ $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$.
Ⓓ $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$.

Câu 85. Trong điện trường đều, lực tĩnh điện $\vec{F}$ (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $\vec{F}=q\vec{E}$, trong đó $\vec{E}$ là cường độ điện trường (đơn vị: V/m). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q=10^{-9}$ C và độ lớn điện trường $E=10^5$ (V/m).



Ⓐ 10^{-4} N.
Ⓑ $2\cdot 10^{-6}$ N.
Ⓒ 10^{-2} N.
Ⓓ $1{,}8\cdot 10^{-6}$ N.

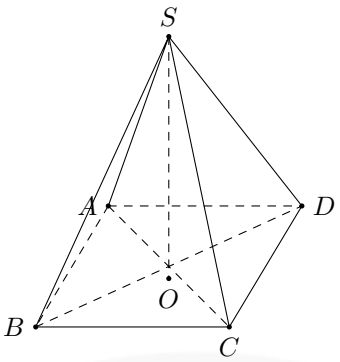
2) Trắc nghiệm đúng sai

Bài 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD và I là trung điểm của MN. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.
b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MN}$.
c) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.
d) $3\overrightarrow{AI}-2\overrightarrow{AG}=\vec{0}$.

Bài 2. Cho hình chóp đều $S.ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Xét tính đúng sai của

các khẳng định sau:



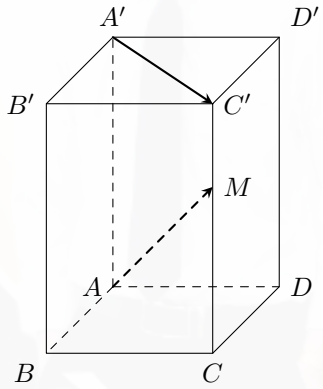
a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

c) $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$.

d) $(\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SC})\cdot(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD})=0$.

Bài 3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=1, AD=2, AA'=3$. Gọi M là một điểm trên đoạn CC' sao cho $CM=2MC'$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



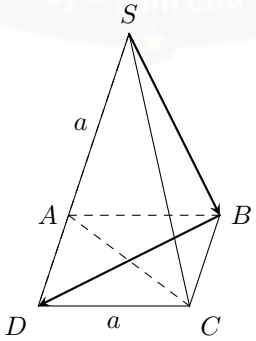
a) $\overrightarrow{AA'}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CM}$.

b) $\cos\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{A'C'}\right)=\frac{2}{3}$.

c) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$.

d) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{B'D}=0$.

Bài 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh đều bằng a. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



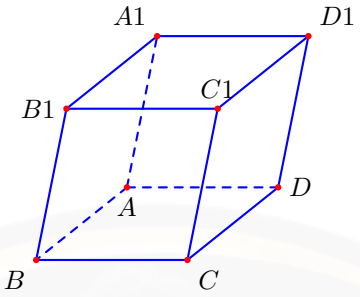
a) Tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

b) Tam giác SBD cân tại S.

c) $(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BD}) = 45°$.

d) $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{BD} = -a^2$.

Bài 5. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



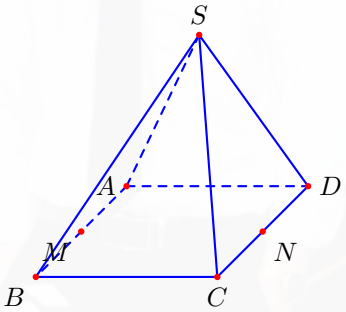
a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D_1C_1}$.

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$.

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AC_1}$.

d) Có tất cả 28 vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu điểm cuối là các đỉnh của hình hộp trên.

Bài 6. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



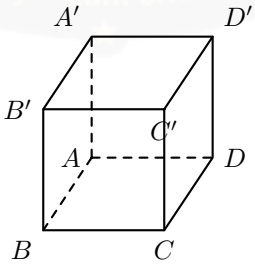
a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CN}$.

b) $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{DM}$ là hai vectơ đối nhau.

c) $\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{SA}$.

d) $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{SB}$.

Bài 7. Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{DB}$.

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB'}$.

c) $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD'}| = \sqrt{2}$.

d) $|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA'}|=1$.

Bài 8. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

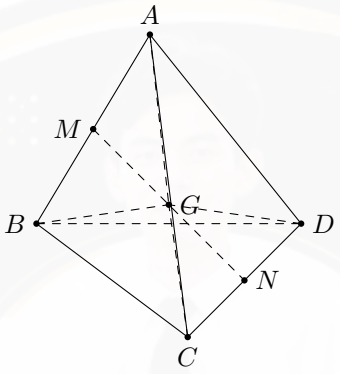
a) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$.

c) $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}$.

d) $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$.

Bài 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm MN. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



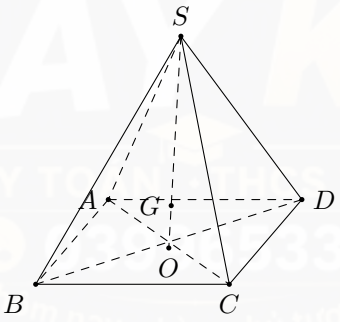
a) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$.

c) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})$.

d) $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

Bài 10. Trong không gian, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{SO}$.

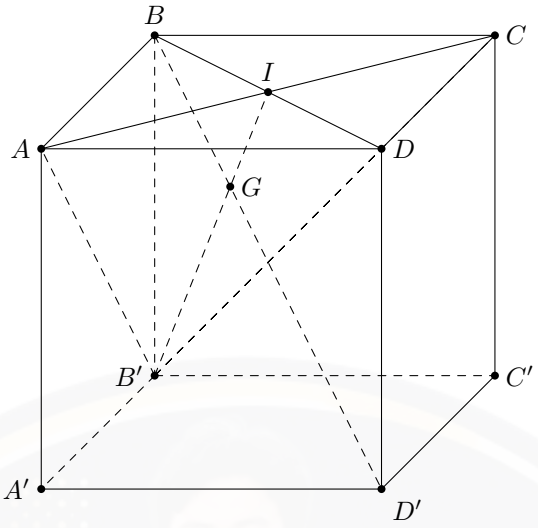
b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

c) $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$.

d) $\overrightarrow{GS}=3\overrightarrow{OG}$.

Bài 11. Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$, gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'C$. Xét tính đúng sai của các khẳng định

sau:



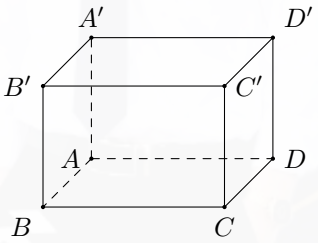
a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

b) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$.

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A'C'}$.

d) $\overrightarrow{BD'}=2\overrightarrow{BG}$.

Bài 12. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB=a$; $AD=a\sqrt{3}$; $AA'=2a$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



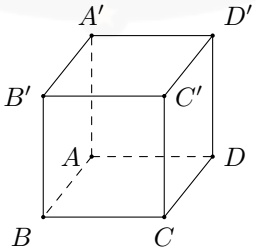
a) $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{CD'}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{A'D}+\overrightarrow{CB'}=\vec{0}$.

c) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=a\sqrt{5}$.

d) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{CC'}\right|=2\sqrt{2}a$.

Bài 13. Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $\overrightarrow{B'B}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{B'D}$.

b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD}$.

c) $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}\right|=a\sqrt{2}$.

d) $\left|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'A}\right|=a$.

Bài 14. Cho $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=5$ và góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 120°. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{19}$.

b) $|\vec{a}-\vec{b}|=8$.

c) $|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{139}$.

d) $|\vec{a}+2\vec{b}|=9$.

Bài 15. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai vectơ đó là 45°. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

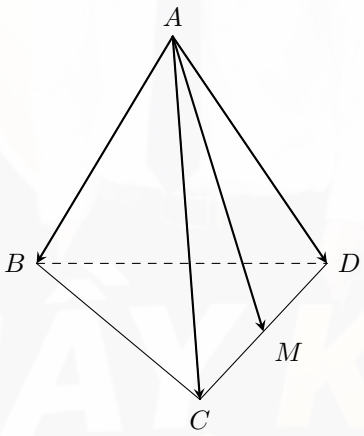
a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=-5+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $|\vec{a}+\vec{b}|=2+\sqrt{2}$.

d) $|\vec{a}-\sqrt{2}\vec{b}|=0$.

Bài 16. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

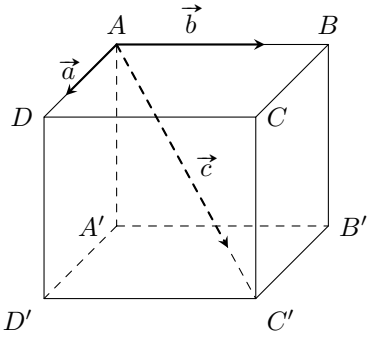
b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$.

c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

d) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=-\dfrac{a^2}{2}$.

Bài 17. Một chất điểm ở vị trí đỉnh A của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chất điểm chịu tác động bởi ba lực $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ lần lượt cùng hướng với $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC'}$ như hình vẽ. Độ lớn của các

lực $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ tương ứng là 10 N, 10 N và 20 N.

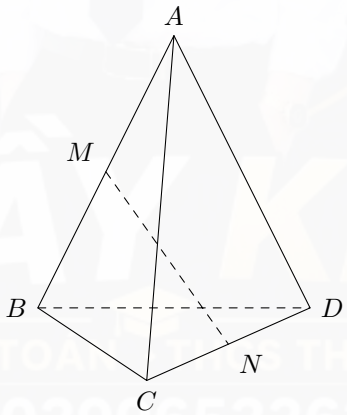


a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.
b) $|\vec{a} + \vec{b}| = 20$ N.
c) $|\vec{a} + \vec{c}| = |\vec{b} + \vec{c}|$.
d) $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| \approx 32,59$ N.

Bài 18. Trong không gian cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh là a. Gọi O là giao điểm của BD và AC.

a) Vectơ $\overrightarrow{A'C} - \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
b) Vectơ $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'C'}$
c) Vectơ $\overrightarrow{C'O} = \overrightarrow{C'A'} - \overrightarrow{OA'}$
d) $\overrightarrow{A'D} \cdot \overrightarrow{A'B} = 0$

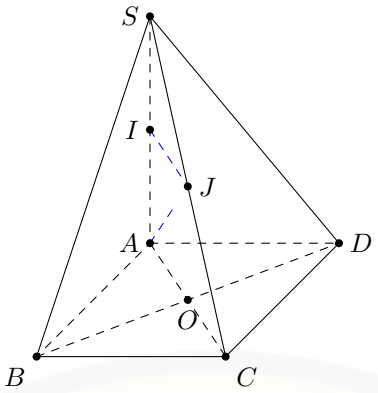
Bài 19. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi M, N, G, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD, MN, AC, BD.



a) $2\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$
b) Giá trị tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA})$ bằng $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$
c) Giá trị của $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GD}$
d) Góc giữa $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{MN}$ là 60°

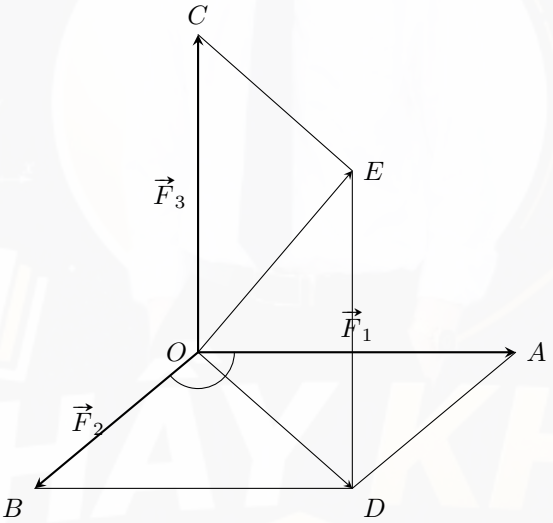
Bài 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng

$(ABCD)$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA, SC. G là trọng tâm tam giác SBD.



a) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$.
b) $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG}$.
c) $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{BD} = \vec{0}$.
d) $\overrightarrow{AG}^2 = \overrightarrow{AS}^2 + \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2$.

Bài 21. Một vật nặng O được kéo từ ba hướng như hình vẽ và chịu tác dụng của 3 lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, có độ lớn lần lượt là $24\,\text{N}, 12\,\text{N}, 6\,\text{N}$. Biết góc tạo bởi 2 lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ là 120° và lực thứ ba vuông góc với hai lực đầu tiên.



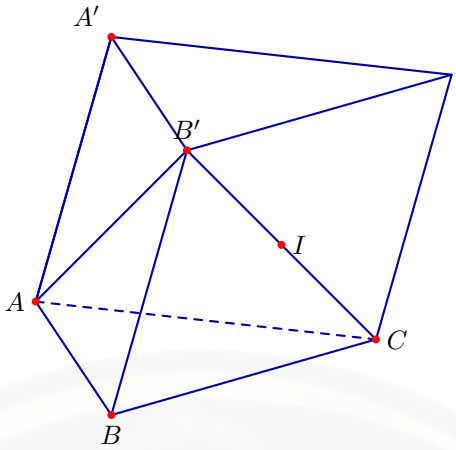
a) $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}$.
b) $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
c) Độ dài của vectơ $\overrightarrow{OD}$ là $|\overrightarrow{OD}| = 12\sqrt{7}$.
d) Độ lớn hợp lực tác dụng vào vật O là $6\sqrt{13}\,\text{N}$.

3) Câu trả lời ngắn

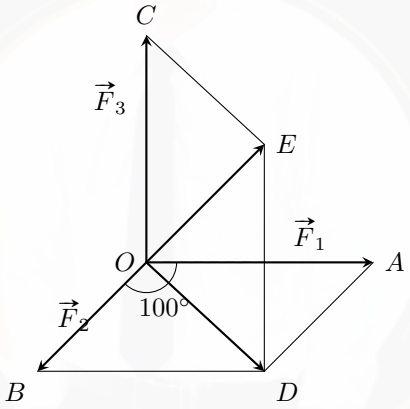
Bài 1. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ sao cho $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$ và hai vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Bài 2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}; \overrightarrow{AB} = \vec{b}; \overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Gọi I là trung

điểm của đoạn thẳng $B'C$. Tính $\overrightarrow{B'I}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.



Bài 3. Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc $100°$ và có độ lớn lần lượt là 25 N và 12 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 4 N. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên.



Hình 12

Bài 4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{MN} = k(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

Bài 5. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = k\overrightarrow{AC_1}$.

Bài 6. Cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$ và $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 2\sqrt{7}$. Tính $(\vec{a}, \vec{b})$.

Bài 7. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau góc $120°$ và $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5$. Tính $|\vec{a} + 2\vec{b}|$.

Bài 8. Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, |\vec{a} - \vec{b}| = 3$. Tính $(\vec{a} - 2\vec{b}).(2\vec{a} + \vec{b})$.

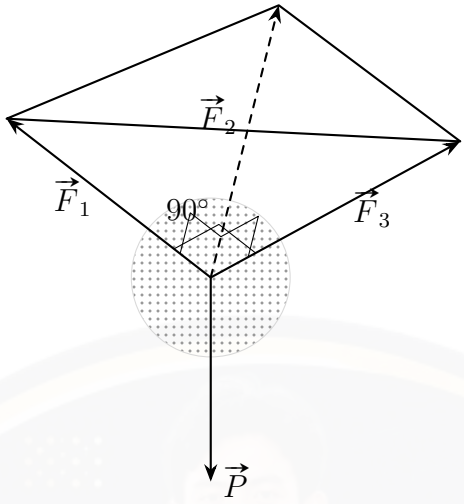
Bài 9. Trong không gian, cho tứ diện $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = 2, BC = 2\sqrt{2}$. Hãy tính $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Bài 10. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và $C'D'$. Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{A'B}$. Số đo của góc φ bằng bao nhiêu độ?

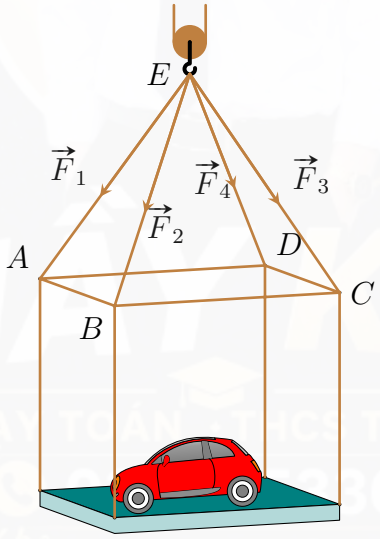
Bài 11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và $C'D'$. Tích vô hướng $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{C'B} = na^2$ (n là số thập phân). Giá trị của n bằng bao nhiêu?

Bài 12. Treo một vật nặng có trọng lượng 30 N bởi ba sợi dây giống hệt nhau, các sợi dây đôi

một tạo với nhau một góc 90°. Gọi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt là các lực căng của ba sợi dây nói trên. Độ lớn của lực $\vec{F}_1$ bằng bao nhiêu Niuton? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

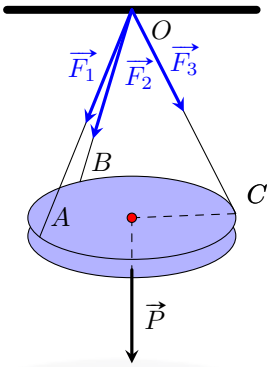


Bài 13. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình vuông $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiến cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45° như hình vẽ. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết lực căng $\left|\vec{F_1}\right| = \left|\vec{F_2}\right| = \left|\vec{F_3}\right| = \left|\vec{F_4}\right|$, trọng lượng khung sắt là 1 000 (N) và trọng lượng của chiếc xe ô tô là 4 000 (N). Tính cường độ lực căng của mỗi đoạn dây cáp (làm tròn đến hàng đơn vị).

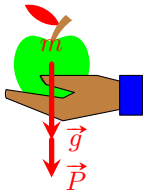


Bài 14. Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho tam giác ABC đều. Độ dài của ba đoạn dây OA, OB, OC đều bằng L. Trọng lượng của chiếc đèn là 27 N và bán kính của chiếc đèn là 0,5 m.Tìm chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây, biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 12 N. (Chiều dài tính theo đơn vị cm và

làm tròn đến hàng phần mười).



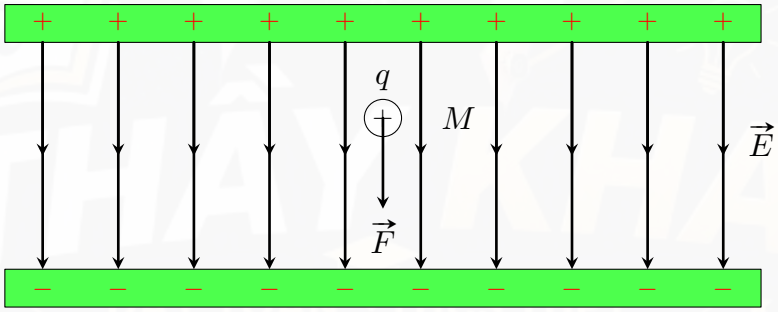
Bài 15. Nếu một vật có khối lượng m (kg) thì lực hấp dẫn $\vec{P}$ của Trái Đất tác dụng lên vật được xác định theo công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, trong đó $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9{,}8$ m/s^2. Tính độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên một quả táo có khối lượng 102 gam (Hình 27)



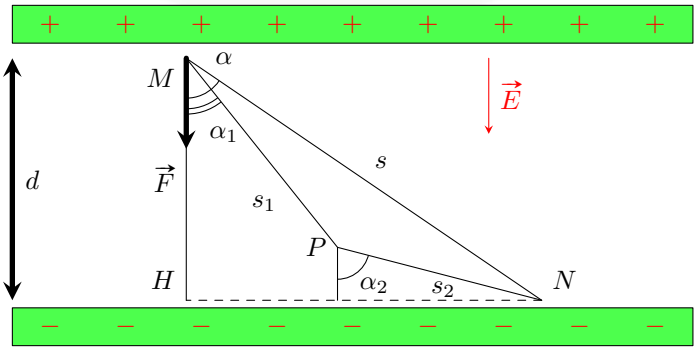
Bài 16. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ sao cho $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $\left|\vec{b}\right| = 2$ và hai véc-tơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ (đơn vị độ).

Bài 17. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng $B'C$. Biết rằng $\overrightarrow{B'I} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$, tính $S = m + n + p$.

Bài 18. Trong điện trường đều, lực tĩnh điện $\vec{F}$ (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, trong đó $\vec{E}$ là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q = 10^{-9}$ C và độ lớn điện trường $E = 10^5$ N/C (Hình vẽ).



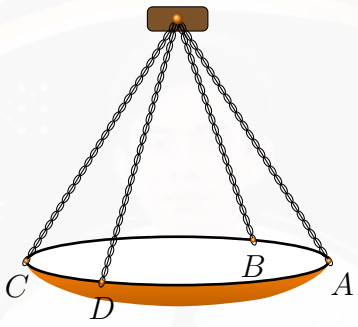
Bài 19. Một lực tĩnh điện $\vec{F}$ tác động lên điện tích điểm M trong điện trường đều làm cho M dịch chuyển theo đường gấp khúc MNP (Hình vẽ). Biết $q = 2 \cdot 10^{-12}$ C, vectơ điện trường có độ lớn $E = 1{,}8 \cdot 10^5$ N/C và $d = MH = 5$ mm. Tính công A sinh bởi lực tĩnh điện $\vec{F}$.



Bài 20. Một giỏ hoa treo trong nhà làm bằng 3 sợi dây không giãn, mỗi sợi dây dài 60 (cm)

miếng kê là một miếng gỗ cân đối hình tròn bán kính 20 (cm), ba sợi dây được thắt một đầu bên trên và đỡ giá gỗ tại 3 điểm tạo thành tam giác đều (giả sử mỗi thắt của 3 sợi dây và mỗi nối của mỗi sợi dây với miếng gỗ không đáng kể). Biết lực chịu đựng của mỗi sợi dây bằng nhau và mỗi sợi dây chịu không quá 15 (N) trọng lượng của miếng giá gỗ là 5 (N). Tính trọng lượng tối đa của các chậu hoa để dây treo không bị đứt (đơn vị N, kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Bài 21. Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 5\,\text{kg}$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 60^\circ$. Biết $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$, trong đó $\vec{g}$ là véctơ gia tốc rơi tự do có độ lớn 10 m/s^2, $\vec{P}$ là trọng lực tác dụng lên vật có đơn vị là N, m là khối lượng của vật có đơn vị kg. Độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích bằng bao nhiêu Niu-tơn (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



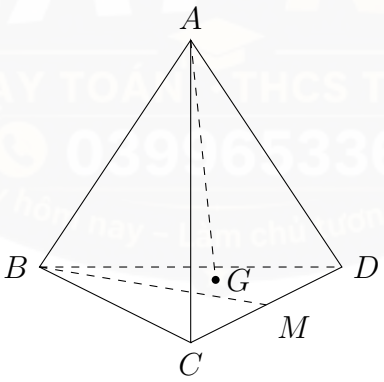
V. LỜI GIẢI CHI TIẾT

1) Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Đẳng thức nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
(B) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.
(C) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.
(D) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Hướng dẫn giải.



Gọi M là trung điểm của $CD \Rightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$.

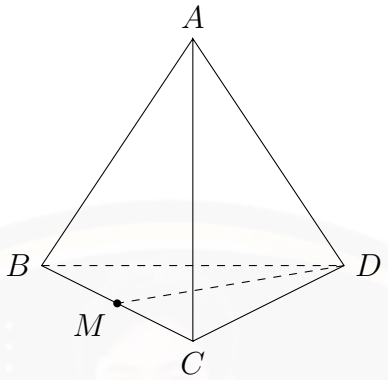
Mặt khác $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. B

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi M là trung điểm của đoạn BC. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{DM}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c})$.
Ⓑ $\overrightarrow{DM}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})$.
Ⓒ $\overrightarrow{DM}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c})$.
Ⓓ $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$.

Hướng dẫn giải.



Vì M là trung điểm của $BC \Rightarrow \overrightarrow{BM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

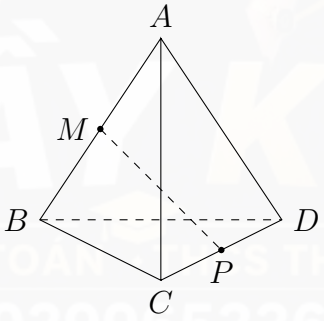
Mặt khác $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c})$. A

Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{MP}=\dfrac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}+\vec{b})$.
Ⓑ $\overrightarrow{MP}=\dfrac{1}{2}(\vec{d}+\vec{b}-\vec{c})$.
Ⓒ $\overrightarrow{MP}=\dfrac{1}{2}(\vec{c}+\vec{b}-\vec{d})$.
Ⓓ $\overrightarrow{MP}=\dfrac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b})$.

Hướng dẫn giải.



Vì M,P lần lượt là trung điểm của $AB,CD \Rightarrow \begin{cases}2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AP}\end{cases}$

$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AP}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$

$=-\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}+\dfrac{1}{2}\vec{d}=\dfrac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b})$. D

Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_0 là giao điểm của GA và mặt phẳng (BCD). Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{G_0G}$.
Ⓑ $\overrightarrow{GA}=4\overrightarrow{G_0G}$.
Ⓒ $\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{G_0G}$.
Ⓓ $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{G_0G}$.

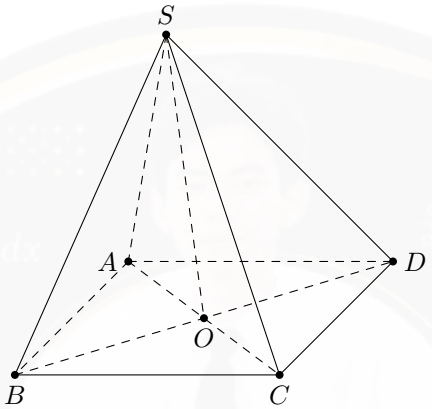
Hướng dẫn giải. Vì G_0 là giao điểm của AG và mặt phẳng $(BCD) \Rightarrow G_0$ là trọng tâm tam

giác BCD.
$\Rightarrow \overrightarrow{G_0B}+\overrightarrow{G_0C}+\overrightarrow{G_0D}=\vec{0}$ mà $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GG_0}+(\overrightarrow{G_0B}+\overrightarrow{G_0C}+\overrightarrow{G_0D})=\vec{0}$
Suy ra $\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GG_0}=\vec{0}\rightarrow\overrightarrow{GA}=-3\overrightarrow{GG_0}=3\overrightarrow{G_0G}$. C

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{SD}=\vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

(A) $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$.
(B) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.
(C) $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$.
(D) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$.

Hướng dẫn giải.

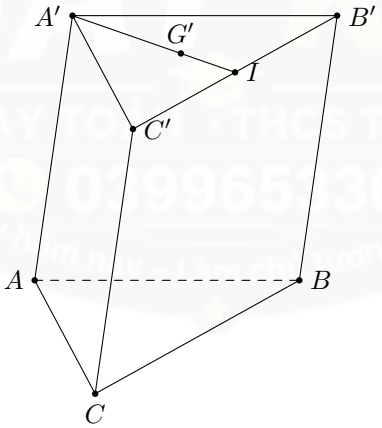


Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}=\vec{a}+\vec{c}\\ \overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}=\vec{b}+\vec{d}\end{cases}\Rightarrow\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$.

Câu 6. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Vectơ $\overrightarrow{AG'}$ bằng?

(A) $\frac{1}{3}(\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c})$.
(B) $\frac{1}{3}(3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$.
(C) $\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c})$.
(D) $\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$.

Hướng dẫn giải.

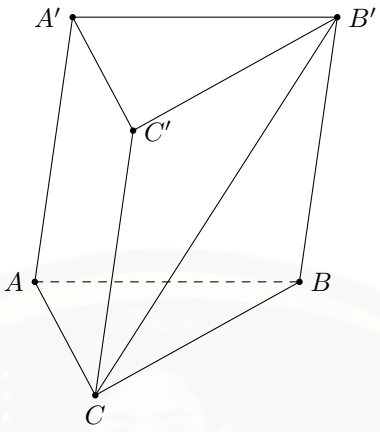


Gọi I là trung điểm $B'C'$. Vì G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'\Rightarrow\overrightarrow{A'G'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A'I}$.
Mặt khác $\overrightarrow{AG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'G'}=\overrightarrow{AA'}+\frac{2}{3}\overrightarrow{A'I}=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'C'}\right)$
$=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(3\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}(3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$.

Câu 7. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{B'C}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$?

Ⓐ $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.
Ⓑ $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.
Ⓒ $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
Ⓓ $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Hướng dẫn giải.



Vì $BB'C'C$ là hình bình hành nên $\Rightarrow \overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AA'}$
$= -\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Câu 8. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

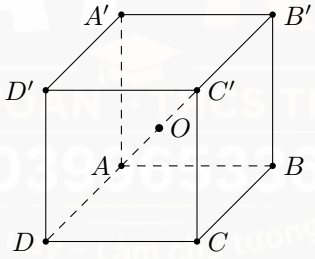
Ⓐ $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.
Ⓑ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.
Ⓒ $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.
Ⓓ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{d} = \vec{c} - \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. C

Câu 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.
Ⓑ $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.
Ⓒ $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.
Ⓓ $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.

Hướng dẫn giải.

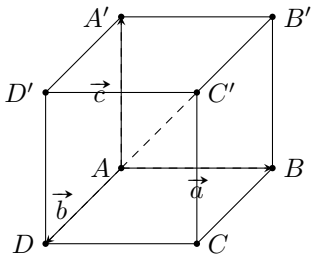


Ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ (quy tắc hình hộp).
Mặt khác O là trung điểm $AC' \Rightarrow \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$. B

Câu 10. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AC'}$ theo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

Ⓐ $\overrightarrow{AC'} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Hướng dẫn giải.



Ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. C

Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$. Điểm N xác định bởi đẳng thức sau $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào đúng?

(A) N là trung điểm BD..
(B) N là đỉnh hình bình hành $BCDN$..
(C) N là đỉnh hình bình hành $CDBN$..
(D) $N \equiv A$..

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{DC}$.
Suy ra N là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CDBN$. C

Câu 12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm được xác định bởi đẳng thức sau $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MD'} = \vec{0}$. Mệnh đề nào đúng?

(A) M là tâm mặt đáy $ABCD$..
(B) M là tâm mặt đáy $A'B'C'D'$..
(C) M là trung điểm đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy..
(D) tập hợp điểm M là đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy..

Hướng dẫn giải. Gọi $O = AC \cap BD$ và $O' = A'C' \cap B'D' \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \\ \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'} + \overrightarrow{O'C'} + \overrightarrow{O'D'} = \vec{0} \end{cases}$.

$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{MO} \\ \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MD'} = 4\overrightarrow{MO'} + \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'} + \overrightarrow{O'C'} + \overrightarrow{O'D'} = 4\overrightarrow{MO'} \end{cases}$.

$\Rightarrow 4\overrightarrow{MO} + 4\overrightarrow{MO'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO'} = \vec{0} \Rightarrow M$ là trung điểm của OO'. C

Câu 13. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Điều kiện nào dưới đây khẳng định $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng?

(A) Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m + n + p = 0$ và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.
(B) Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m + n + p \neq 0$ và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.
(C) Tồn tại ba số thực m, n, p sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.
(D) Giá của $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng qui.

Hướng dẫn giải. Xét $m = n = p = 0$ ta luôn có $m + n + p = 0$ và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ nhưng không thể suy ra được $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.
Xét $m + n + p \neq 0$ thì chắc chắn có một trong ba số m, n, p khác 0.
Giả sử $m \neq 0 \to m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0} \leftrightarrow \vec{a} = -\dfrac{n}{m}\vec{b} - \dfrac{p}{m}\vec{c} \to \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng. B

Câu 14. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ và $\vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

(A) $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng.
(B) $\vec{x}, \vec{a}$ cùng phương.
(C) $\vec{x}, \vec{b}$ cùng phương.
(D) $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đôi một cùng phương.

Hướng dẫn giải. Giả sử ba vectơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng khi đó $\to \vec{x} = m\vec{y} + n\vec{z}$.

$$\Leftrightarrow 2\vec{a} + \vec{b} = m\vec{a} - (m+3n)\vec{b} - (m+2n)\vec{c} \leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m + 3n = -1 \\ m + 2n = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = -1 \end{cases}.$$

Vậy $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng. A

Câu 15. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$ và $\vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 6\vec{c}$ và $\vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 6\vec{c}$ đồng phẳng.
(B) $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$ và $\vec{y} = 3\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$ và $\vec{z} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 3\vec{c}$ đồng phẳng.
(C) $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ và $\vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ và $\vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 3\vec{c}$ đồng phẳng.
(D) $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ và $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ và $\vec{z} = -\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ đồng phẳng.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $\exists m, n : \vec{x} = m\vec{y} + n\vec{z}$.

Với các vectơ ở đáp án A: $\begin{cases} \vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c} \\ \vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 6\vec{c} \\ \vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 6\vec{c} \end{cases} \Rightarrow \vec{x} = \frac{4}{3}\vec{y} + \frac{5}{3}\vec{z} \to \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng.

A

Câu 16. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

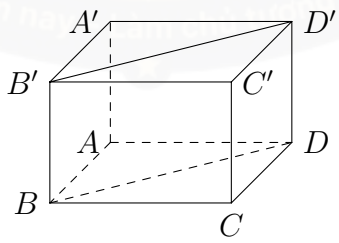
(A) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu một trong ba vectơ đó bằng $\vec{0}$.
(B) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu có hai trong ba vectơ đó cùng phương.
(C) Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ba vectơ $\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng.
(D) $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ luôn đồng phẳng với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Hướng dẫn giải. Xét đáp án D: Để $\vec{x}$ đồng phẳng với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thì $\vec{x}$ phải biểu diễn được dưới dạng $m\vec{a} + n\vec{b}$.
Ở đây $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, nếu $\vec{c}$ không đồng phẳng với $\vec{a}, \vec{b}$ thì $\vec{x}$ không thể đồng phẳng với $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
Ví dụ cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và gọi M là trung điểm $C'D'$, khi đó:
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{C'M} = \overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM}$ không đồng phẳng với $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$. D

Câu 17. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. (B) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C'A'}$. (C) $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{B'B}$. (D) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B'D'}$.

Hướng dẫn giải.



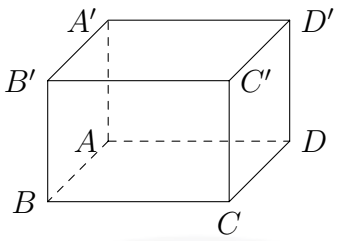
Ta có $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B'D'}$. D

Câu 18. Cho ba điểm A, B, C tùy ý. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

(A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.
(B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CA}$.
(C) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.
(D) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BO}$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ nên câu $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BO}$ sai. D

Câu 19. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (xem hình dưới), tổng của $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD'}$ là vectơ nào dưới đây?



Ⓐ $\overrightarrow{DB'}$. Ⓑ $\overrightarrow{DB}$. Ⓒ $\overrightarrow{BD}$. Ⓓ $\overrightarrow{BD'}$.

Hướng dẫn giải. Theo quy tắc hình hộp: $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{DB'}$. A

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$. Ⓑ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$. Ⓓ $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}$.

Hướng dẫn giải. **A** sai vì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}\Leftrightarrow\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC}$ (sai).
B sai vì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}\Leftrightarrow\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}$ (sai).
C sai vì $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DB}$ (sai).
D đúng vì $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}\Leftrightarrow\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}$ (đúng). D

Câu 21. Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

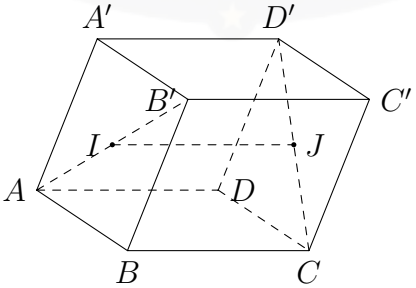
Ⓐ Với 3 điểm M,N,P tùy ý ta luôn có $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$..
Ⓑ Với 3 điểm O,A,B tùy ý ta luôn có $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$..
Ⓒ Vectơ $\vec{b}$ là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$ nếu $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ và $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vectơ ngược hướng..
Ⓓ Mỗi vectơ đều có vectơ đối. Vectơ đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$, vectơ đối của $\vec{0}$ là $\vec{0}$..

Hướng dẫn giải. Chọn **B** sai vì: Với 3 điểm O,A,B tùy ý ta luôn có $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$. B

Câu 22. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AB' và CD'. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{CJ}$. Ⓑ $\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{IJ}$. Ⓒ $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{D'J}$. Ⓓ $\overrightarrow{A'I}=\overrightarrow{JC}$.

Hướng dẫn giải.



Ta có $\overrightarrow{A'I}=\overrightarrow{JC}$. D

Câu 23. Cho $|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=5$, góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 120°. Khẳng định nào **sai** trong các

khẳng định sau?

Ⓐ $|\vec{a}-\vec{b}|=7$. Ⓑ $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{19}$.
Ⓒ $|\vec{a}+2\vec{b}|=9$. Ⓓ $|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{139}$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $|\vec{a}+\vec{b}|^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})=3^2+5^2+2\cdot3\cdot5\cdot\cos 120^\circ=19$.
Suy ra $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{19}$. B

Câu 24. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}|=26;|\vec{b}|=28;|\vec{a}+\vec{b}|=48$. Độ dài vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ bằng

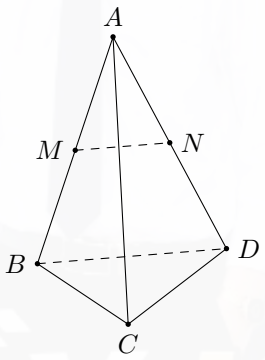
Ⓐ 25. Ⓑ $\sqrt{616}$. Ⓒ 9. Ⓓ $\sqrt{618}$.

Hướng dẫn giải. $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=2(\vec{a}^2+\vec{b}^2)-(\vec{a}+\vec{b})^2$
$=2\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2\right)-|\vec{a}+\vec{b}|^2=2(26^2+28^2)-48^2=616$
$\Rightarrow|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{616}$. B

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,AD. Khi đó, vectơ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{MN}$ là vectơ nào dưới đây?

Ⓐ $\overrightarrow{MA}$. Ⓑ $\overrightarrow{CD}$. Ⓒ $\overrightarrow{DB}$. Ⓓ $\overrightarrow{BD}$.

Hướng dẫn giải.



Vì MN là đường trung bình của tam giác ABD, nên $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BD}$ cùng hướng với nhau. D

Câu 26. Cho tứ diện $ABCD$, O là trọng tâm tam giác BCD, M là trung điểm của AD. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$. Ⓑ $\overrightarrow{OM}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.
Ⓒ $\overrightarrow{OM}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$. Ⓓ $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.

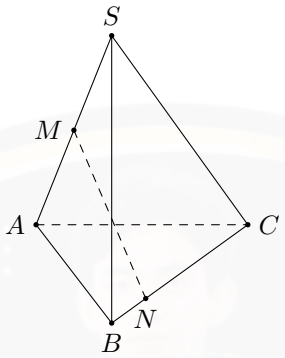
Hướng dẫn giải. Ta có O là trọng tâm tam giác BCD nên $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}=\vec{0}$ (1)
Ta có: $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}$; $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CO}$; $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}$
Từ (1) suy ra $3\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$
Suy ra $\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ (2)
Mà $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ (3)
Từ (2) và (3) suy ra $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.
C

Câu 27. Cho tứ diện $SABC$. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a},\overrightarrow{SB}=\vec{b},\overrightarrow{SC}=\vec{c}$. Gọi M là trung điểm của SA,

N là điểm trên cạnh BC sao cho $NC = 3NB$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ ta được

Ⓐ $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c}$.
Ⓓ $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$.

Hướng dẫn giải.



$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$
$= -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$. A

Câu 28. Cho ba điểm A, B, C tùy ý. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

Hướng dẫn giải. Theo quy tắc hiệu, ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. B

Câu 29. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$.
Ⓑ $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$.
Ⓒ $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$.
Ⓓ $\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$.

Hướng dẫn giải. Ta có G là trọng tâm tam giác BCD nên
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$
Vậy $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$. B

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Chọn mệnh đề đúng.

Ⓐ $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$.
Ⓑ $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 8\overrightarrow{SO}$.
Ⓒ $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$.
Ⓓ $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{OS}$.

Hướng dẫn giải. $ABCD$ là hình bình hành tâm $O \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SA}) + (\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SB}) + (\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SC}) + (\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SD}) = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = -4\overrightarrow{OS} = 4\overrightarrow{SO}$. A

Câu 31. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD})$.
Ⓑ $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA})$.

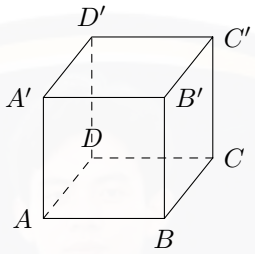
Ⓒ $\overrightarrow{CG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD})$. Ⓓ $\overrightarrow{CG}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GC}=-(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})\Leftrightarrow\overrightarrow{CG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})$. A

Câu 32. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây:

Ⓐ $\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{BC'}$. Ⓑ $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{A'D'}$. Ⓒ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Ⓓ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{D'C'}$.

Hướng dẫn giải.



Dựa vào hình vẽ, ta xác định được cặp vectơ bằng nhau là $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Vậy đáp án C sai. C

Câu 33. Cho tứ diện $ABCD$. Chọn đẳng thức đúng.

Ⓐ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$. Ⓓ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}$. A

Câu 34. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=k\overrightarrow{AC_1}$.

Ⓐ $k=4$. Ⓑ $k=1$. Ⓒ $k=0$. Ⓓ $k=2$.

Hướng dẫn giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AC_1}$. (Quy tắc hình hộp)
Nên $k=1$. B

Câu 35. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=k\overrightarrow{DG}$.

Ⓐ $k=\dfrac{1}{3}$. Ⓑ $k=2$. Ⓒ $k=3$. Ⓓ $k=\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải.

Ta có $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{DG}$. ($G$ là trọng tâm tam giác ABC). C

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$, gọi M,N lần lượt là điểm thuộc cạnh SB,SC sao cho $SM=3MB, CN=\dfrac{1}{3}NS$. Tìm số thực k thỏa mãn $\overrightarrow{MN}=k\overrightarrow{CB}$.

Ⓐ $\dfrac{1}{3}$. Ⓑ $\dfrac{-1}{3}$. Ⓒ $\dfrac{-3}{4}$. Ⓓ $\dfrac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải.

Xét tam giác SBC ta có: $\dfrac{SM}{SB}=\dfrac{SN}{SC}=\dfrac{3}{4}$

Nên theo định lý Talet ta có: $\begin{cases} MN // BC \\ MN = \dfrac{3}{4}BC \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = -\dfrac{3}{4}\overrightarrow{CB}.$ C

Câu 37. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của BB'. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.

Hướng dẫn giải.

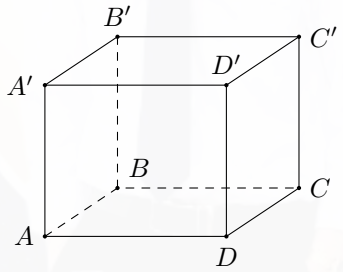
Vì M là trung điểm của BB' nên ta có:
$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$. C

Câu 38. Cho ba điểm A, B, C tùy ý. Mệnh đề nào dưới đây sai?

Ⓐ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CA}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.
Ⓓ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BO}$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ nên mệnh đề $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BO}$ là sai. Chọn đáp án D.

Câu 39. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (xem hình dưới), tổng của $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD'}$ là vectơ nào dưới đây?



Ⓐ $\overrightarrow{DB'}$.
Ⓑ $\overrightarrow{DB}$.
Ⓒ $\overrightarrow{BD}$.
Ⓓ $\overrightarrow{BD'}$.

Hướng dẫn giải. Theo quy tắc hình hộp, ta có: $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{DB'}$. Chọn đáp án A.

Câu 40. Cho tứ diện $ABCD.KhngØnhnodiØyØng$?

Ⓐ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}$.

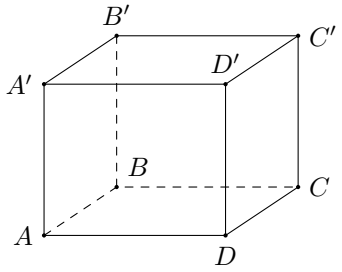
Hướng dẫn giải. Xét khẳng định D: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA}$ (luôn đúng). Chọn đáp án D.

Câu 41. Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau.

Ⓐ Với 3 điểm M, N, P tùy ý ta luôn có $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.
Ⓑ Với 3 điểm O, A, B tùy ý ta luôn có $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$.
Ⓒ Vectơ $\vec{b}$ là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$ nếu $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ và $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ ngược hướng.
Ⓓ Mỗi vectơ đều có vectơ đối. Vectơ đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$, vectơ đối của $\vec{0}$ là $\vec{0}$.

Hướng dẫn giải. Với 3 điểm O, A, B tùy ý ta luôn có $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$. Do đó khẳng định B là sai.

Câu 42. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB' và CD'. Khẳng định nào dưới đây đúng?



Ⓐ $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CJ}$. Ⓑ $\overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{IJ}$. Ⓒ $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{D'J}$. Ⓓ $\overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{JC}$.

Hướng dẫn giải. Ta có I là trung điểm AB' nên $\overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{A'A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB'}$.
Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên ta có thể chứng minh được $\overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{JC}$. Chọn đáp án D.

Câu 43. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi O là trung điểm CH. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$. Ⓑ $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$.
Ⓒ $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$. Ⓓ $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}$.

Hướng dẫn giải. Ta có O là trung điểm $CH \Rightarrow \overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BH})$.
Mà $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}$ (theo quy tắc hình hộp).
Suy ra $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$. Chọn đáp án A.

Câu 44. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ M trùng với G. Ⓑ M thuộc AG và $AM = 3AG$.
Ⓒ G là trung điểm AM. Ⓓ M là trung điểm AG.

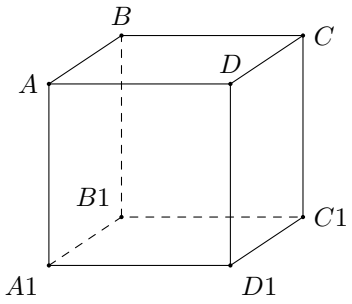
Hướng dẫn giải. Vì G là trọng tâm tam giác BCD nên với điểm A tùy ý ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.
Kết hợp giả thiết $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$, suy ra $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AG}$.
Diều này có nghĩa là ba điểm A, G, M thẳng hàng, M thuộc tia AG và độ dài $AM = 3AG$. Chọn đáp án B.

Câu 45. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G và I là trung điểm của BC. Tìm điểm M thoả mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

Ⓐ M trùng với G. Ⓑ M là trung điểm của AI.
Ⓒ M là trung điểm AG. Ⓓ M nằm trên mặt cầu tâm G.

Hướng dẫn giải. Ta có G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$.
Lại có I là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.
Khi đó giả thiết trở thành: $|4\overrightarrow{MG}| = |2\overrightarrow{AI}| \Leftrightarrow 4MG = 2AI \Leftrightarrow MG = \frac{1}{2}AI$.
Vì G, A, I cố định nên MG là một hằng số. Vậy tập hợp các điểm M nằm trên mặt cầu tâm G với bán kính $R = \frac{1}{2}AI$. Chọn đáp án D.

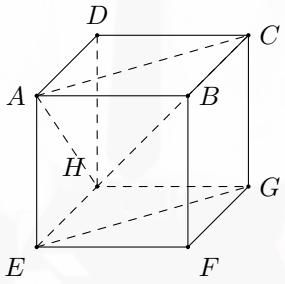
Câu 46. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tính côsin của góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A_1C_1}$.



Ⓐ 0. Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ⓓ $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải. Vì $A_1C_1 // AC$ nên $\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{AC}$.
Góc giữa $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1C_1}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \angle BAC$.
Vì $ABCD$ là hình vuông nên $\angle BAC = 45°$.
Vậy $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1C_1}) = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Chọn đáp án C.

Câu 47. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ cạnh a. Tính số đo góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{EG}$.



Ⓐ $30°$. Ⓑ $45°$. Ⓒ $60°$. Ⓓ $90°$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ (vì $ACGE$ là hình chữ nhật).
Nên $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{EG}) = (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AC}) = \angle HAC$.
Xét tam giác HAC, ta thấy HA, AC, CH đều là các đường chéo của các hình vuông cạnh a nên $HA = AC = CH = a\sqrt{2}$.
Do đó tam giác HAC là tam giác đều, suy ra $\angle HAC = 60°$. Chọn đáp án C.

Câu 48. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$ bằng

Ⓐ $30°$. Ⓑ $120°$. Ⓒ $60°$. Ⓓ $90°$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$.
Góc giữa $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EG}) = (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AC}) = \angle FAC$.
Tam giác FAC có $FA = AC = CF$ (đều là đường chéo của các hình vuông bằng nhau của hình lập phương) nên $\triangle FAC$ đều.
Suy ra $\angle FAC = 60°$. Chọn đáp án C.

Câu 49. Cho tứ diện đều $ABCD$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ $-\dfrac{a^2}{2}$. Ⓒ $\dfrac{a^2}{2}$. Ⓓ a^2.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Vì tứ diện đều nên tất cả các góc giữa các cạnh chung đỉnh đều bằng 60°.

Giả sử cạnh bằng a, ta có: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=a\cdot a\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{a^2}{2}$ và $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=a\cdot a\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{a^2}{2}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{a^2}{2}=0$. Chọn đáp án A.

Câu 50. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ theo a.

Ⓐ $\dfrac{1}{2}a^2$. Ⓑ a^2. Ⓒ $-a^2$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

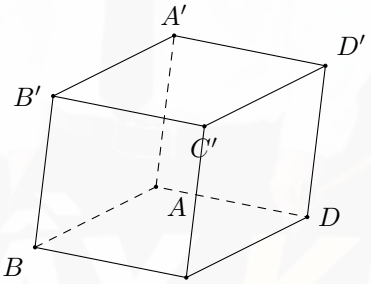
Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=a\cdot a\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}a^2$. Chọn đáp án A.

Câu 51. Cho tứ diện $ABCD$, gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Vectơ $\overrightarrow{AI}$ cùng hướng với vectơ nào sau đây?

Ⓐ $\overrightarrow{BI}$. Ⓑ $\overrightarrow{CD}$. Ⓒ $\overrightarrow{CI}$. Ⓓ $\overrightarrow{AB}$.

Hướng dẫn giải. Vì I là trung điểm của đoạn thẳng AB nên vectơ $\overrightarrow{AI}$ và vectơ $\overrightarrow{AB}$ là hai vectơ cùng hướng. Chọn đáp án D.

Câu 52. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (Hình 7).



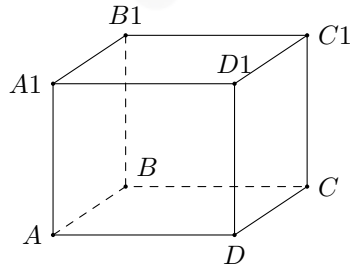
Hình 7

Khi đó, $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}$ bằng

Ⓐ $\overrightarrow{AD'}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB'}$. Ⓒ $\overrightarrow{AC'}$. Ⓓ $\overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn giải. Do tứ giác $ADD'A'$ là hình bình hành (mặt bên của hình hộp) nên theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD'}$. Chọn đáp án A.

Câu 53. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Đẳng thức nào dưới đây sai?



Ⓐ $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_1A_1}$. Ⓑ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{DC}$.

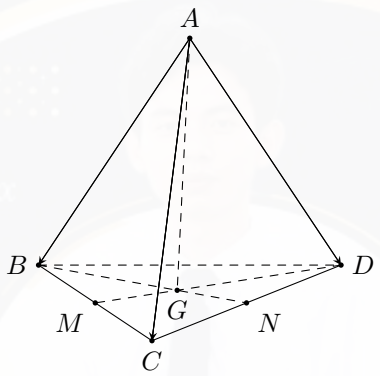
Ⓒ $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BD_1}$. Ⓓ $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BC}$.

Hướng dẫn giải. Ta xét các phương án:

- A đúng vì $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_1A_1}=\overrightarrow{B_1D_1}$, mà $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{B_1D_1}$.
- B đúng vì $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}$.
- C đúng theo quy tắc hình hộp: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BD_1}$.
- D sai vì $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{BD_1}\neq\overrightarrow{BC}$.

Chọn đáp án D.

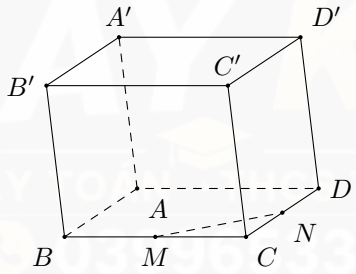
Câu 54. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BC,CD. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Khi đó, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ bằng



Ⓐ $6\overrightarrow{AM}$. Ⓑ $3\overrightarrow{AN}$. Ⓒ $3\overrightarrow{AG}$. Ⓓ $6\overrightarrow{AG}$.

Hướng dẫn giải. Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên theo tính chất trọng tâm, với điểm A tùy ý ta luôn có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$. Chọn đáp án C.

Câu 55. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Vectơ nào sau đây bằng $2\overrightarrow{MN}$?



Ⓐ $\overrightarrow{AD}$. Ⓑ $\overrightarrow{A'C'}$. Ⓒ $\overrightarrow{B'D'}$. Ⓓ $\overrightarrow{BC}$.

Hướng dẫn giải. Trong tam giác BCD, M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD nên MN là đường trung bình. Suy ra $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BD}$.
Mặt khác, trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ta có $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{B'D'}$.
Vậy $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{B'D'}$. Chọn đáp án C.

Câu 56. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 2. Khi đó, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$ bằng

Ⓐ 2. Ⓑ $-2\sqrt{3}$. Ⓒ $2\sqrt{3}$. Ⓓ -2.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

Do $ABCD$ là tứ diện đều nên $\angle BAC = 60^\circ$.
Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = -2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = -2$. Chọn đáp án D.

Câu 57. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy G là trọng tâm của tam giác ABC. Phát biểu nào sau đây sai?

Ⓐ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
Ⓑ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.
Ⓒ $\overrightarrow{GD} - \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{AD}$.
Ⓓ $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DG}$.

Hướng dẫn giải. Theo tính chất trọng tâm tam giác ABC, ta luôn có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
Câu B chỉ đúng khi G đồng thời là trọng tâm của tứ diện $ABCD$. Chọn đáp án B.

Câu 58. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm đoạn MN và P là 1 điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{IA} + (2k-1)\overrightarrow{IB} + k\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

Ⓐ $k = 2$. Ⓑ $k = 4$. Ⓒ $k = 1$. Ⓓ $k = 0$.

Hướng dẫn giải. Ta chứng minh được với I là trung điểm của đoạn nối hai trung điểm của các cạnh đối diện trong tứ diện (tức I là trọng tâm tứ diện) thì $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.
Đối chiếu với đẳng thức $\overrightarrow{IA} + (2k-1)\overrightarrow{IB} + k\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$, ta cần có:
$\begin{cases} 2k-1 = 1 \\ k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow k = 1$. Chọn đáp án C.

Câu 59. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + k(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D}) = \vec{0}$.

Ⓐ $k = 0$. Ⓑ $k = 1$. Ⓒ $k = 4$. Ⓓ $k = 2$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \overrightarrow{C'D} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{C'B}$.
Khi đó đẳng thức trở thành: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + k\overrightarrow{C'B} = \vec{0}$.
Với $k = 1$: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{C'B} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ (luôn đúng). Chọn đáp án B.

Câu 60. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
Ⓑ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
Ⓒ $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$.
Ⓓ $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Hướng dẫn giải. Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng nên góc giữa chúng bằng 0°, suy ra $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$.
Vậy $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Chọn đáp án A.

Câu 61. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Ⓐ $\alpha = 180^\circ$. Ⓑ $\alpha = 0^\circ$. Ⓒ $\alpha = 90^\circ$. Ⓓ $\alpha = 45^\circ$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{-|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = -1$.
Suy ra $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$. Chọn đáp án A.

Câu 62. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ⓐ $\alpha = 30^\circ$. Ⓑ $\alpha = 45^\circ$. Ⓒ $\alpha = 60^\circ$. Ⓓ $\alpha = 120^\circ$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{-3}{3\cdot 2}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow(\vec{a},\vec{b})=120^\circ$. Chọn đáp án D.

Câu 63. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và hai vectơ $\vec{u}=\dfrac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ⓐ $\alpha=90^\circ$. Ⓑ $\alpha=180^\circ$. Ⓒ $\alpha=60^\circ$. Ⓓ $\alpha=45^\circ$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}\right)(\vec{a}+\vec{b})=0\Leftrightarrow\dfrac{2}{5}\vec{a}^2-\dfrac{13}{5}\vec{a}\,\vec{b}-3\vec{b}^{\,2}=0$.
Vì $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ nên $\dfrac{2}{5}-\dfrac{13}{5}\vec{a}\,\vec{b}-3=0\Leftrightarrow-\dfrac{13}{5}\vec{a}\,\vec{b}=\dfrac{13}{5}\Leftrightarrow\vec{a}\,\vec{b}=-1$.
Suy ra $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=-1\Rightarrow(\vec{a},\vec{b})=180^\circ$. Chọn đáp án B.

Câu 64. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn điều kiện $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$. Tính độ dài vectơ $3\vec{a}+5\vec{b}$.

Ⓐ $5\sqrt{5}$. Ⓑ $\sqrt{24}$. Ⓒ $\sqrt{124}$. Ⓓ 124.

Hướng dẫn giải. Ta có: $(3\vec{a}+5\vec{b})^2=9\vec{a}^2+30\vec{a}\cdot\vec{b}+25\vec{b}^{\,2}=9+30(3)+25=124\Rightarrow|3\vec{a}+5\vec{b}|=\sqrt{124}$. Chọn đáp án C.

Câu 65. Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}|=4;|\vec{b}|=3;|\vec{a}-\vec{b}|=4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$. Chọn khẳng định đúng?

Ⓐ $\cos\alpha=\dfrac{3}{8}$. Ⓑ $\alpha=30^\circ$. Ⓒ $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$. Ⓓ $\alpha=60^\circ$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $(\vec{a}-\vec{b})^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}\Rightarrow16=16+9-2\vec{a}\cdot\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{9}{2}$.
Do đó: $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{\frac{9}{2}}{4\cdot3}=\dfrac{3}{8}$. Chọn đáp án A.

Câu 66. Cho $\vec{a},\vec{b}$ có $(\vec{a}+2\vec{b})$ vuông góc với vectơ $(5\vec{a}-4\vec{b})$ và $|\vec{a}|=|\vec{b}|$. Tính $\cos(\vec{a},\vec{b})$.

Ⓐ $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ⓑ $\cos(\vec{a},\vec{b})=90^\circ$.
Ⓒ $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải. Vì $(\vec{a}+2\vec{b})$ vuông góc với vectơ $(5\vec{a}-4\vec{b})$ nên:
$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(5\vec{a}-4\vec{b})=0\Leftrightarrow5\vec{a}^2-8\vec{b}^{\,2}+6\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.
Ta có $|\vec{a}|=|\vec{b}|\Leftrightarrow\vec{a}^2=\vec{b}^{\,2}$. Suy ra $5\vec{a}^2-8\vec{a}^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow6\vec{a}\cdot\vec{b}=3\vec{a}^2\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}\vec{a}^2$.
Suy ra $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{\frac{1}{2}\vec{a}^2}{\vec{a}^2}=\dfrac{1}{2}$. Chọn đáp án D.

Câu 67. Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}|=4;|\vec{b}|=3;\vec{a}\cdot\vec{b}=10$. Xét hai vectơ $\vec{y}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{x}=\vec{a}-2\vec{b}$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{x},\vec{y}$. Chọn khẳng định đúng.

Ⓐ $\cos\alpha=\dfrac{-2}{\sqrt{15}}$. Ⓑ $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{15}}$.

Ⓒ $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{15}}$. Ⓓ $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{15}}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{x}\cdot\vec{y} = (\vec{a}-2\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2-3\vec{a}\cdot\vec{b} = 16+18-30 = 4$.

$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{a}-2\vec{b})^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}} = \sqrt{16+36-40} = 2\sqrt{3}$.

$|\vec{y}| = \sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}} = \sqrt{16+9-20} = \sqrt{5}$.

Khi đó $\cos\alpha = \dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|} = \dfrac{4}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{15}}$. Chọn đáp án D.

Câu 68. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 26; |\vec{b}| = 28; |\vec{a}+\vec{b}| = 48$. Tính độ dài vectơ $\vec{a}-\vec{b}$.

Ⓐ 25. Ⓑ $\sqrt{616}$. Ⓒ 9. Ⓓ $\sqrt{618}$.

Hướng dẫn giải. Sử dụng công thức $|\vec{a}-\vec{b}|^2+|\vec{a}+\vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$, ta có:

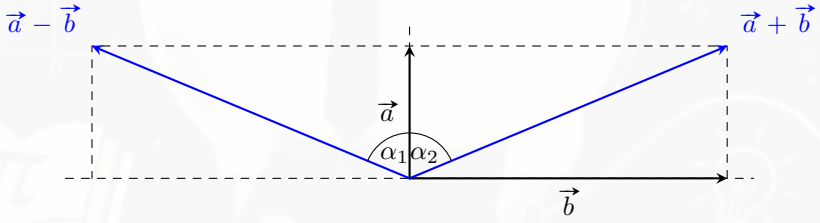
$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = 2(26^2+28^2)-48^2 = 2(676+784)-2304 = 2920-2304 = 616$.

Vậy $|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{616}$. Chọn đáp án B.

Câu 69. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$ và $|\vec{a}+\vec{b}| = 13$. Khi đó, cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ và $\vec{a}+\vec{b}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{12}{13}$. Ⓑ $\dfrac{5}{12}$. Ⓒ $-\dfrac{119}{169}$. Ⓓ $\dfrac{119}{169}$.

Hướng dẫn giải.



Nhận thấy $5^2+12^2 = 13^2$ suy ra $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Góc α_2 giữa $\vec{a}$ và $\vec{a}+\vec{b}$ thỏa mãn $\cos\alpha_2 = \dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{a}+\vec{b}|} = \dfrac{5}{13}$.

Do tính đối xứng, góc giữa $\vec{a}-\vec{b}$ và $\vec{a}+\vec{b}$ là $2\alpha_2$.

$\cos(2\alpha_2) = 2\cos^2\alpha_2-1 = 2\cdot\left(\dfrac{5}{13}\right)^2-1 = \dfrac{50}{169}-1 = -\dfrac{119}{169}$. Chọn đáp án C.

Câu 70. Cho $\vec{u} = \vec{a}+3\vec{b}$ vuông góc với $\vec{v} = 7\vec{a}-5\vec{b}$ và $\vec{x} = \vec{a}-4\vec{b}$ vuông góc với $\vec{y} = 7\vec{a}-2\vec{b}$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

Ⓐ $(\vec{a},\vec{b}) = 75°$. Ⓑ $(\vec{a},\vec{b}) = 60°$.
Ⓒ $(\vec{a},\vec{b}) = 120°$. Ⓓ $(\vec{a},\vec{b}) = 45°$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{v} = 0\\ \vec{x}\cdot\vec{y} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(\vec{a}+3\vec{b})(7\vec{a}-5\vec{b}) = 0\\ (\vec{a}-4\vec{b})(7\vec{a}-2\vec{b}) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7|\vec{a}|^2-15|\vec{b}|^2+16\vec{a}\cdot\vec{b}\\ 7|\vec{a}|^2+8|\vec{b}|^2-30\vec{a}\cdot\vec{b} =\end{cases}$

Lấy (2) trừ (1) ta được: $23|\vec{b}|^2-46\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = \dfrac{1}{2}|\vec{b}|^2$.

Thay vào (1): $7|\vec{a}|^2-15|\vec{b}|^2+8|\vec{b}|^2 = 0 \Leftrightarrow 7|\vec{a}|^2 = 7|\vec{b}|^2 \Leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Từ đó: $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{\frac{1}{2}|\vec{b}|^2}{|\vec{b}|^2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a},\vec{b}) = 60°$. Chọn đáp án B.

Câu 71. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\angle BAC = \angle BAD = 60^\circ$. Tính góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$.

Ⓐ 60°. Ⓑ 45°. Ⓒ 120°. Ⓓ 90°.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ - AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ$.
Vì $AB = AC = AD$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 90^\circ$. Chọn đáp án D.

Câu 72. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSA$. Tính góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Ⓐ 120°. Ⓑ 90°. Ⓒ 60°. Ⓓ 45°.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA} \cdot (\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}) = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \cdot SC \cdot \cos \angle ASC - SA \cdot SB \cdot \cos \angle ASB = 0$ (vì các cạnh bên bằng nhau và các góc ở đỉnh bằng nhau).
Suy ra $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}) = 90^\circ$. Chọn đáp án B.

Câu 73. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc (MN, SC) bằng:

Ⓐ 45°. Ⓑ 30°. Ⓒ 90°. Ⓓ 60°.

Hướng dẫn giải. Ta có M, N lần lượt là trung điểm của AD, SD nên $MN // SA \Rightarrow \cos(MN, SC) = \cos(SA, SC)$.
Xét $\triangle SAC$ có $SA = SC = a$, $AC = a\sqrt{2}$.
Ta thấy $SA^2 + SC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 = AC^2$, do đó $\triangle SAC$ vuông tại S.
Khi đó $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{SC}) = 90^\circ \Rightarrow (MN, SC) = 90^\circ$. Chọn đáp án C.

Câu 74. Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Góc giữa AO và CD bằng

Ⓐ 0°. Ⓑ 30°. Ⓒ 90°. Ⓓ 60°.

Hướng dẫn giải. Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD) là tâm O của tam giác đều BCD. Suy ra $AO \perp (BCD) \Rightarrow AO \perp CD$. Vậy góc giữa AO và CD bằng 90°. Chọn đáp án C.

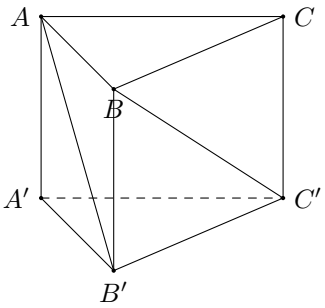
Câu 75. Cho tứ diện $ABCD$ với $AB \perp AC, AB \perp BD$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Góc giữa PQ và AB bằng

Ⓐ 90°. Ⓑ 60°. Ⓒ 30°. Ⓓ 45°.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{PQ} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.
Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$.
Vì $AB \perp AC$ và $AB \perp BD$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ và $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.
Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \Rightarrow AB \perp PQ$. Góc giữa chúng bằng 90°. Chọn đáp án A.

Câu 76. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}a$. Góc giữa hai đường

thẳng AB' và BC' bằng



Ⓐ $60°$. Ⓑ $45°$. Ⓒ $90°$. Ⓓ $30°$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Ta có $\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{BC'}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'})(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{BB'}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}\cdot\overrightarrow{CC'}$.

Vì lăng trụ đều nên ABC là tam giác đều cạnh a và các cạnh bên vuông góc với đáy.

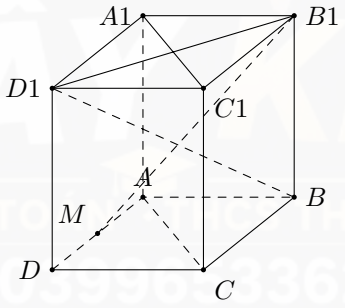
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=a\cdot a\cdot\cos 120°=-\dfrac{a^2}{2}$.
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC'}=0$ và $\overrightarrow{BB'}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ (do cạnh bên vuông góc cạnh đáy).
- $\overrightarrow{BB'}\cdot\overrightarrow{CC'}=(\sqrt{2}a)^2=2a^2$.

$\Rightarrow\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{BC'}=-\dfrac{a^2}{2}+0+0+2a^2=\dfrac{3a^2}{2}$.

Độ dài: $|\overrightarrow{AB'}|=\sqrt{a^2+(\sqrt{2}a)^2}=a\sqrt{3}$; $|\overrightarrow{BC'}|=\sqrt{a^2+(\sqrt{2}a)^2}=a\sqrt{3}$.

Suy ra $\cos(AB',BC')=\dfrac{|\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{BC'}|}{|\overrightarrow{AB'}|\cdot|\overrightarrow{BC'}|}=\dfrac{\frac{3a^2}{2}}{a\sqrt{3}\cdot a\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow(AB',BC')=60°$. Chọn đáp án A.

Câu 77. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a. Gọi M là trung điểm AD. Giá trị $\overrightarrow{B_1M}\cdot\overrightarrow{BD_1}$ là:



Ⓐ $\dfrac{1}{2}a^2$. Ⓑ a^2. Ⓒ $\dfrac{3}{4}a^2$. Ⓓ $\dfrac{3}{2}a^2$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Ta có: $\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}$.

$\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}$.

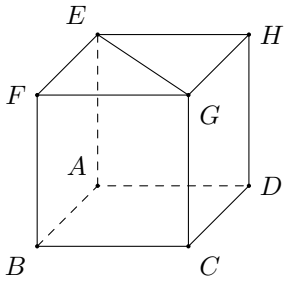
Khi đó: $\overrightarrow{B_1M}\cdot\overrightarrow{BD_1}=(\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM})(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1})$.

Do các trục tọa độ đôi một vuông góc, các tích vô hướng của các vectơ vuông góc sẽ bằng 0:

$=\overrightarrow{B_1B}\cdot\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AD}=-a^2+a^2+\dfrac{a}{2}\cdot a=\dfrac{a^2}{2}$.

Chọn đáp án A.

Câu 78. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Tính góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$.



Ⓐ $90°$. Ⓑ $60°$. Ⓒ $45°$. Ⓓ $120°$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $EG // AC$ (do $ACGE$ là hình chữ nhật) $\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \angle BAC = 45°$. Chọn đáp án C.

Câu 79. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BB'. Côsin của góc hợp bởi MN và AC' bằng

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Hướng dẫn giải. Xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA'} \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$.

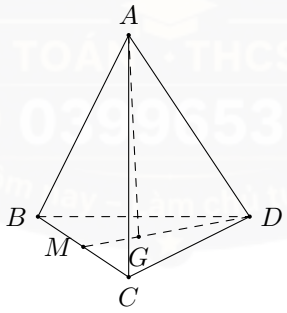
Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{AM} = \vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{c} \Rightarrow |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{a^2 + \dfrac{1}{4}a^2 + \dfrac{1}{4}a^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \Rightarrow |\overrightarrow{AC'}| = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

Ta có: $\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{MN} = a^2 - \dfrac{1}{2}a^2 + \dfrac{1}{2}a^2 = a^2$.

$\Rightarrow \cos(MN, AC') = |\cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC'})| = \dfrac{|\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC'}|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{AC'}|} = \dfrac{a^2}{\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. Chọn đáp án B.

Câu 80. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Đẳng thức nào sau đây đúng?



Ⓐ $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Ⓑ $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Ⓒ $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. Ⓓ $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Hướng dẫn giải. Vì G là trọng tâm tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \dfrac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. Chọn đáp án B.

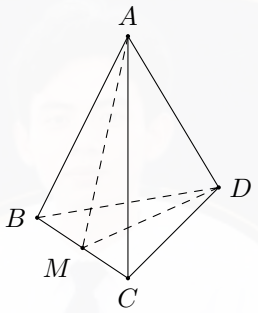
Câu 81. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})$.
Ⓑ $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})$.
Ⓒ $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})$.
Ⓓ $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})$.

Hướng dẫn giải. Theo quy tắc hình hộp: $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$.

Mà O là tâm của hình lập phương nên $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})$. Chọn đáp án B.

Câu 82. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b},\overrightarrow{AD}=\vec{c}$. Gọi M là trung điểm của đoạn BC. Đẳng thức nào dưới đây đúng?



Ⓐ $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c})$.
Ⓑ $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})$.
Ⓒ $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c})$.
Ⓓ $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})$.

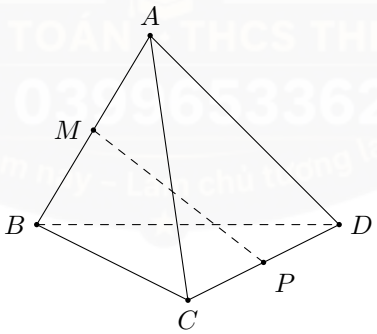
Hướng dẫn giải. Vì M là trung điểm của $BC\Rightarrow\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Mặt khác $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c})$.

Chọn đáp án A.

Câu 83. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c},\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

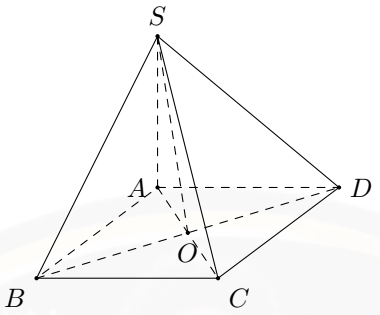


Ⓐ $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}+\vec{b})$.
Ⓑ $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{d}+\vec{b}-\vec{c})$.
Ⓒ $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{b}-\vec{d})$.
Ⓓ $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b})$.

Hướng dẫn giải. Vì M,P lần lượt là trung điểm của AB,CD nên ta có: $\begin{cases}2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AP}\end{cases}$

Ta có: $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b})$.
Chọn đáp án D.

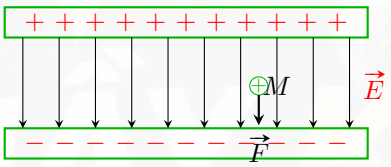
Câu 84. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{SD}=\vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?



(A) $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$.
(B) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.
(C) $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$.
(D) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$.

Hướng dẫn giải. Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$, theo tính chất trung điểm trong không gian ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}=\vec{a}+\vec{c}\\ \overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}=\vec{b}+\vec{d}\end{cases}\Rightarrow \vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$.
Chọn đáp án A.

Câu 85. Trong điện trường đều, lực tĩnh điện $\vec{F}$ (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $\vec{F}=q\vec{E}$, trong đó $\vec{E}$ là cường độ điện trường (đơn vị: V/m). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q=10^{-9}$ C và độ lớn điện trường $E=10^5$ (V/m).



(A) 10^{-4} N.
(B) $2\cdot 10^{-6}$ N.
(C) 10^{-2} N.
(D) $1{,}8\cdot 10^{-6}$ N.

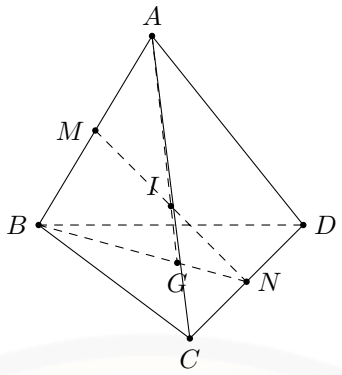
Hướng dẫn giải. Độ lớn của lực tĩnh điện là $|\vec{F}|=|q|\cdot E=10^{-9}\cdot 10^5=10^{-4}$ N. Chọn đáp án A.

2) Trắc nghiệm đúng sai

Bài 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD và I là trung điểm của MN. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.
b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MN}$.
c) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.
d) $3\overrightarrow{AI}-2\overrightarrow{AG}=\vec{0}$.

✍ *Hướng dẫn giải.*



a) Đúng.

Do M là trung điểm của đoạn thẳng AB nên theo tính chất trung điểm ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

b) Đúng.

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}\\ \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}\end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM})+2\overrightarrow{MN}+(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND})$.

Vì M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD nên $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$.

Do đó $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MN}$.

c) Đúng.

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MA}\\ \overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MB}\\ \overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IN}+\overrightarrow{NC}\\ \overrightarrow{ID}=\overrightarrow{IN}+\overrightarrow{ND}\end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=2(\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN})+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND})=\vec{0}$.

(Vì I là trung điểm MN, M là trung điểm AB, N là trung điểm CD).

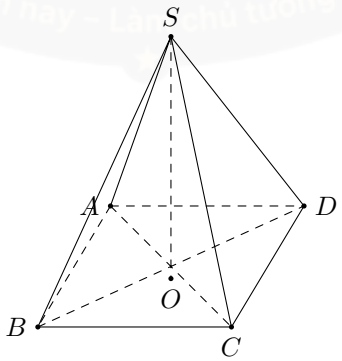
d) Sai.

Từ $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}\Rightarrow 4\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

Mặt khác, vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.

Suy ra $4\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{AG}$, hay $4\overrightarrow{AI}-3\overrightarrow{AG}=\vec{0}$.

Bài 2. Cho hình chóp đều $S.ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

c) $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$.

d) $(\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SC})\cdot(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD})=0$.

Hướng dẫn giải.

a) Đúng.

Do tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, suy ra $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.

b) Đúng.

Vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên O là trung điểm của đường chéo AC, suy ra $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

c) Sai.

Vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên O là trung điểm của các đường chéo AC và BD.

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}\\ \overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$.

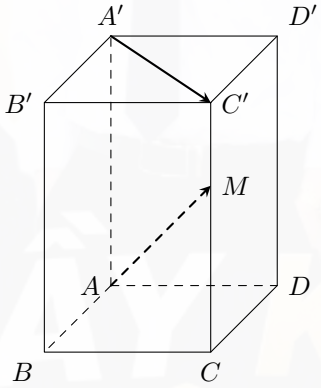
d) Đúng.

Ta có: $(\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SC})\cdot(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD})=\overrightarrow{CA}\cdot(2\overrightarrow{SO})=2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{SO}$.

Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO\perp(ABCD)$, suy ra $SO\perp CA\Rightarrow\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{SO}=0$.

Vậy $(\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SC})\cdot(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD})=0$.

Bài 3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=1, AD=2, AA'=3$. Gọi M là một điểm trên đoạn CC' sao cho $CM=2MC'$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $\overrightarrow{AA'}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CM}$.

b) $\cos\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{A'C'}\right)=\frac{2}{3}$.

c) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$.

d) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{B'D}=0$.

Hướng dẫn giải.

a) Đúng.

Ta có $\overrightarrow{AA'}$ cùng phương với $\overrightarrow{CM}$ và $AA'=3, CM=\frac{2}{3}CC'=\frac{2}{3}\cdot3=2\Rightarrow AA'=\frac{3}{2}CM$. Suy ra $\overrightarrow{AA'}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CM}$.

b) Sai.

Do $\overrightarrow{AC}$ cùng phương với $\overrightarrow{A'C'}$ nên $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{A'C'})=(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC})=\widehat{CAM}$.

Ta có $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

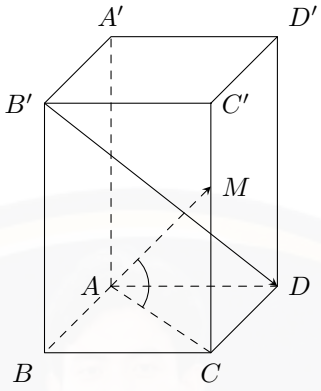
$AM=\sqrt{AC^2+CM^2}=\sqrt{5+2^2}=3$.

Suy ra $\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'C'}) = \cos\widehat{CAM} = \frac{AC}{AM} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

c) Sai.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

d) Sai.

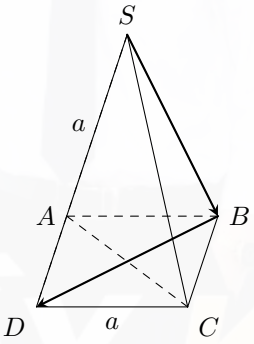


Ta có $\overrightarrow{B'D} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AD} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}) = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA'}$.

Do đó $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B'D} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA'}\right)$

$= -AB^2 + AD^2 - \frac{2}{3}AA'^2 = -1 + 4 - \frac{2}{3} \cdot 9 = -3$.

Bài 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh đều bằng a. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

b) Tam giác SBD cân tại S.

c) $(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BD}) = 45°$.

d) $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{BD} = -a^2$.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.**

Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên đáy $ABCD$ là hình vuông. Suy ra a) đúng.

b) Đúng.

Do $S.ABCD$ là hình chóp đều tất cả các cạnh bằng $a \Rightarrow SB = SD = a$. Suy ra b) đúng.

c) Sai.

Do tứ giác $ABCD$ là hình vuông có độ dài cạnh bằng a nên độ dài đường chéo $BD = a\sqrt{2}$.

Tam giác SBD có $SB = SD = a$ và $BD = a\sqrt{2}$ nên tam giác SBD vuông cân tại S, suy ra $\widehat{SBD} = 45°$.

Vì vectơ $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{BD}$ có hướng ngược nhau tại điểm B nên:

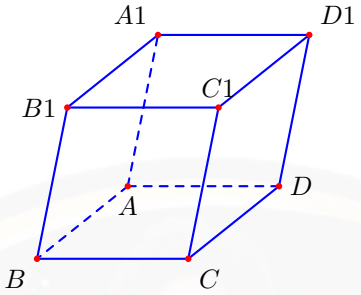
$(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BD}) = 180° - \widehat{SBD} = 180° - 45° = 135°$. Suy ra c) sai.

d) Đúng.

Ta có $\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{BD}=SB\cdot BD\cdot\cos(\overrightarrow{SB},\overrightarrow{BD})=a\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos 135^\circ=a^2\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-a^2$.

Suy ra d) đúng.

Bài 5. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{D_1C_1}$.

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$.

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AC_1}$.

d) Có tất cả 28 vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu điểm cuối là các đỉnh của hình hộp trên.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.**

Vì tứ giác ABC_1D_1 hoặc các tính chất hình hộp cho thấy $AB//D_1C_1$ và $AB=D_1C_1$, hướng từ $A\to B$ cùng hướng từ $D_1\to C_1$.

b) Sai.

Theo quy tắc hình bình hành cho đáy $ABCD$ ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\neq\overrightarrow{BD}$.

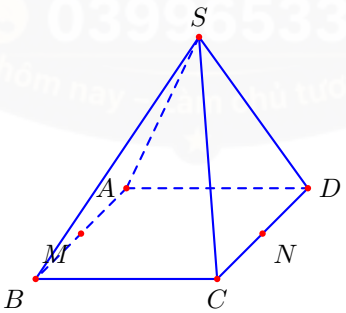
c) Đúng.

Theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AC_1}$.

d) Sai.

Hình hộp có 8 đỉnh phân biệt. Số các vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp là số chỉnh hợp chập 2 của 8 phần tử: $A_8^2=\dfrac{8!}{(8-2)!}=8\cdot 7=56$ vectơ.

Bài 6. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CN}$.

b) $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{DM}$ là hai vectơ đối nhau.

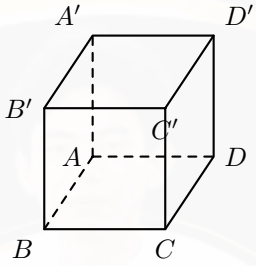
c) $\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{SA}$.

d) $\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{SB}$.

Hướng dẫn giải.

- **a) Sai.** Vì trong hình vuông $ABCD$, $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CN}$ là hai vectơ ngược hướng nên $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{CN}$.
- **b) Đúng.** Ta có $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$ và $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM}$. Vì $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{CN}$ nên $\overrightarrow{DM} = -(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}) = -\overrightarrow{BN}$.
- **c) Đúng.** Ta có $\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{SN} + \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{SA}$.
- **d) Sai.** Ta có $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{SA} \neq \overrightarrow{SB}$.

Bài 7. Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{DB}$.

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB'}$.

c) $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD'}| = \sqrt{2}$.

d) $|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA'}| = 1$.

Hướng dẫn giải.

- **a) Sai.** Theo quy tắc hình hộp: $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{DB'}$.
- **b) Đúng.** Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB'}$.
- **c) Sai.** $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD'}| = |\overrightarrow{DB'}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.
- **d) Đúng.** Ta có $|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA'}| = |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA'}| = |\overrightarrow{AA'}| = 1$.

Bài 8. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

c) $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$.

d) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

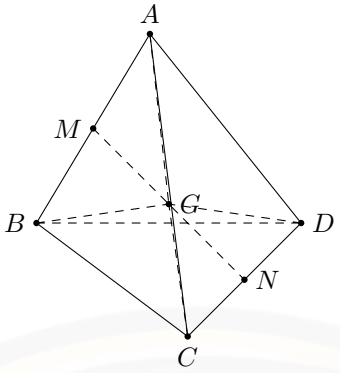
Hướng dẫn giải. **a) Đúng.** Theo định nghĩa trọng tâm tứ diện $ABCD \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

b) Đúng. Ta có: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OG}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DG})$ $= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \underbrace{\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DG}}_{\vec{0}}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

c) Đúng. Từ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = -\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{BG}$.

d) Sai. Ta có: $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{AO} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{AO} + \frac{1}{4}(4\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

Bài 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm MN. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$.

c) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})$.

d) $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.** Vì M, N là trung điểm $AB, CD \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}\\ \overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN}\end{cases}$

Mà G là trung điểm $MN \Rightarrow \overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

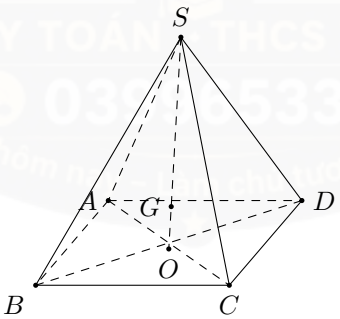
b) Đúng. Chèn điểm G vào: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD})=4\overrightarrow{MG}$.

c) Sai. Dễ chứng minh được $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.

d) Đúng. Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DN}\end{cases}$

Cộng vế theo vế: $2\overrightarrow{MN}=(\underbrace{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}}_{\vec{0}})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})+(\underbrace{\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{DN}}_{\vec{0}})=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

Bài 10. Trong không gian, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{SO}$.

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

c) $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$.

d) $\overrightarrow{GS}=3\overrightarrow{OG}$.

Hướng dẫn giải.

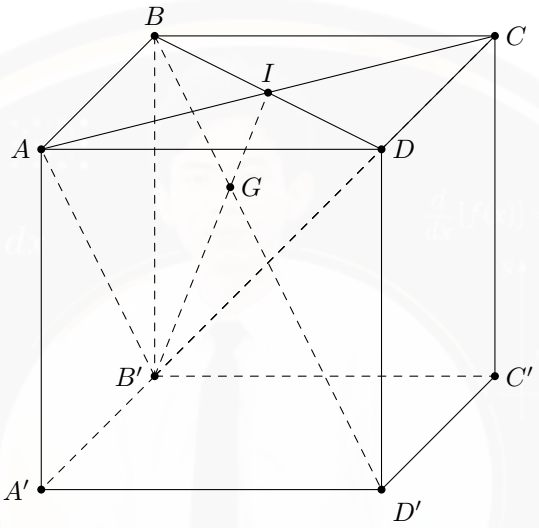
a) Sai. Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

b) Đúng. Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD \Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

c) Đúng. Ta có $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$; $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}$ nên $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$.

d) Sai. Ta có: $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GS}+4\overrightarrow{GO}+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=\vec{0}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{GS}+4\overrightarrow{GO}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GS}=4\overrightarrow{OG}$.

Bài 11. Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$, gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'C$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

b) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$.

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A'C'}$.

d) $\overrightarrow{BD'}=2\overrightarrow{BG}$.

Hướng dẫn giải.

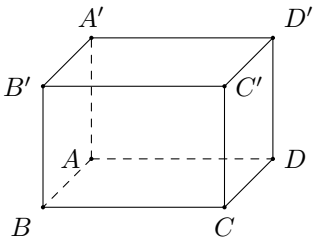
a) Đúng. Theo quy tắc hình hộp thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

b) Sai. Vì G là trọng tâm của tam giác $AB'C$ nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

c) Đúng. Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}$.

d) Sai. Ta có $\Delta BIG \sim \Delta D'B'G \Rightarrow \frac{BG}{D'G}=\frac{BI}{D'B'}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BG}{BD'}=\frac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{BD'}=3\overrightarrow{BG}$.

Bài 12. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB=a$; $AD=a\sqrt{3}$; $AA'=2a$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{CD'}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{A'D}+\overrightarrow{CB'}=\vec{0}$.

c) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=a\sqrt{5}$.

d) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{CC'}\right|=2\sqrt{2}a$.

✍ *Hướng dẫn giải.*

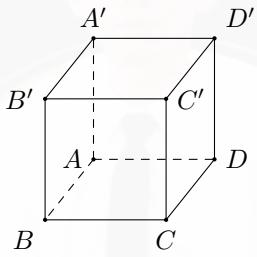
◈ **a) Sai:** $\overrightarrow{AB'}$ và $\overrightarrow{CD'}$ không đối nhau nên $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{CD'}\neq\vec{0}$.

◈ **b) Đúng:** $\overrightarrow{A'D}$ và $\overrightarrow{CB'}$ đối nhau nên $\overrightarrow{A'D}+\overrightarrow{CB'}=\vec{0}$.

◈ **c) Sai:** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{a^2+(a\sqrt{3})^2}=2a$.

◈ **d) Đúng:** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{CC'}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right|=AC'=\sqrt{AB^2+AD^2+AA'^2}=\sqrt{a^2+3a^2+4a^2}=2\sqrt{2}a$.

Bài 13. Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $\overrightarrow{B'B}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{B'D}$.

b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD}$.

c) $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}\right|=a\sqrt{2}$.

d) $\left|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'A}\right|=a$.

✍ *Hướng dẫn giải.*

◈ **a) Đúng:** Ta có $\overrightarrow{B'B}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{B'D}$.

◈ **b) Sai:** Áp dụng quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD'}$.

◈ **c) Sai:** $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}\right|=\left|\overrightarrow{BD'}\right|=BD'=a\sqrt{3}$.

◈ **d) Đúng:** Ta có $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'A}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C'A}=\overrightarrow{C'C}$. Do đó $\left|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'A}\right|=C'C=a$.

Bài 14. Cho $|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=5$ và góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $120°$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{19}$.

b) $|\vec{a}-\vec{b}|=8$.

c) $|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{139}$.

d) $|\vec{a}+2\vec{b}|=9$.

✍ *Hướng dẫn giải.*

◈ $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$
$=9+25+2\cdot3\cdot5\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=19\Rightarrow|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{19}$.

◈ $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$
$=9+25-2\cdot3\cdot5\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=49\Rightarrow|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{49}=7.$

◈ $|\vec{a}-2\vec{b}|^2=(\vec{a}-2\vec{b})^2=|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2-4|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$
$=9+4\cdot25-4\cdot3\cdot5\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=139\Rightarrow|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{139}.$

◈ $|\vec{a}+2\vec{b}|^2=(\vec{a}+2\vec{b})^2=|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+4|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$
$=9+4\cdot25+4\cdot3\cdot5\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=79\Rightarrow|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{79}.$

Bài 15. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai vectơ đó là 45°. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=-5+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $|\vec{a}+\vec{b}|=2+\sqrt{2}$.

d) $|\vec{a}-\sqrt{2}\vec{b}|=0$.

Hướng dẫn giải.

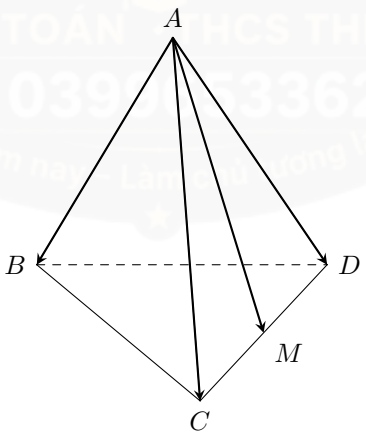
◈ **a) Đúng:** $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=1\cdot1\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

◈ **b) Đúng:** $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-6|\vec{b}|^2=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-6=-5+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

◈ **c) Sai:** $(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=1+2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1=2+\sqrt{2}\Rightarrow|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

◈ **d) Sai:** $(\vec{a}-\sqrt{2}\vec{b})^2=\vec{a}^2-2\sqrt{2}\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}^2=1-2\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+2=1-2+2=1\Rightarrow$
$|\vec{a}-\sqrt{2}\vec{b}|=\sqrt{1}=1.$

Bài 16. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$.

c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

d) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=-\dfrac{a^2}{2}$.

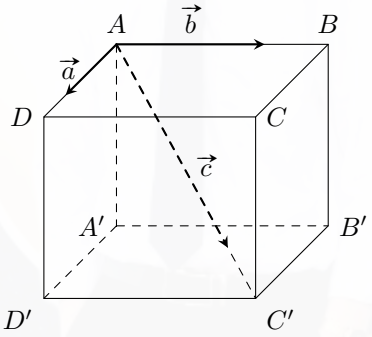
Hướng dẫn giải. **a) Đúng:** Tam giác ACD đều suy ra trung tuyến AM đồng thời là đường cao, nên $AM\perp CD\Rightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

b) Đúng: Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{BAC}=a\cdot a\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{a^2}{2}$.

c) Đúng: Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CD}$.
Mặt khác AM, BM là trung tuyến của các tam giác đều ACD, BCD nên $AM\perp CD$ và $BM\perp CD$.
Suy ra $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CD}=0\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

d) Sai: Ta có $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$.
Suy ra $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\cdot\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})$
$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^2}{2}\right)=\dfrac{a^2}{2}$.

Bài 17. Một chất điểm ở vị trí đỉnh A của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chất điểm chịu tác động bởi ba lực $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ lần lượt cùng hướng với $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC'}$ như hình vẽ. Độ lớn của các lực $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ tương ứng là 10 N, 10 N và 20 N.



a) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$.
b) $|\vec{a}+\vec{b}|=20$ N.
c) $|\vec{a}+\vec{c}|=|\vec{b}+\vec{c}|$.
d) $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\approx 32,59$ N.

Hướng dẫn giải.

Từ giả thiết ta có $\vec{a}\perp\vec{b}$; $\cos(\vec{a},\vec{c})=\cos\widehat{DAC'}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos(\vec{b},\vec{c})=\cos\widehat{BAC'}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

a) **Sai:** Giả sử $\vec{a}+\vec{b}=\vec{d}$. Theo quy tắc hình bình hành thì $\vec{d}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AC}$ suy ra $\vec{a}+\vec{b}\neq\vec{c}$ (vì $\vec{c}$ cùng hướng $\overrightarrow{AC'}$).

b) **Sai:** $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{10^2+10^2}=10\sqrt{2}\approx 14,14$ N $\neq 20$ N (đường chéo hình vuông cạnh bằng 10).

c) **Đúng:** Ta có $|\vec{a}+\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=10^2+2\cdot 10\cdot 20\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}+20^2=500+\dfrac{400\sqrt{3}}{3}$.
Suy ra $|\vec{a}+\vec{c}|=\sqrt{500+\dfrac{400\sqrt{3}}{3}}$.
Mặt khác $(\vec{b}+\vec{c})^2=|\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=10^2+2\cdot 10\cdot 20\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}+20^2=500+\dfrac{400\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $|\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{500+\dfrac{400\sqrt{3}}{3}}$. Vậy $|\vec{a}+\vec{c}|=|\vec{b}+\vec{c}|$.

d) **Đúng:** Giả sử lực tổng hợp là $\vec{m}$, tức là $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.
Do đó: $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\Leftrightarrow|\vec{m}|^2=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2\Leftrightarrow|\vec{m}|^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}$
$\Leftrightarrow|\vec{m}|^2=10^2+10^2+20^2+0+2\cdot10\cdot20\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}+2\cdot10\cdot20\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
$\Leftrightarrow|\vec{m}|^2=600+\dfrac{800}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow|\vec{m}|\approx32,59.$

Bài 18. Trong không gian cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh là a. Gọi O là giao điểm của BD và AC.

a) Vectơ $\overrightarrow{A'C}-\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

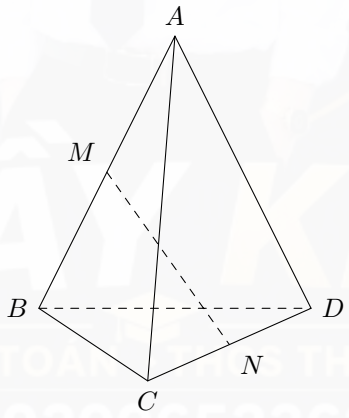
b) Vectơ $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{B'C'}$

c) Vectơ $\overrightarrow{C'O}=\overrightarrow{C'A'}-\overrightarrow{OA'}$

d) $\overrightarrow{A'D}\cdot\overrightarrow{A'B}=0$

Hướng dẫn giải. a) **Đúng:** Vì $\begin{cases}\overrightarrow{A'C}-\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{A'C}-\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}.$
b) **Sai:** Vì $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{B'C'}$.
c) **Đúng:** Vì $\overrightarrow{C'O}=\overrightarrow{C'A'}+\overrightarrow{A'O}=\overrightarrow{C'A'}-\overrightarrow{OA'}$.
d) **Sai:** Ta có: $\overrightarrow{A'D}\cdot\overrightarrow{A'B}=|\overrightarrow{A'D}|\cdot|\overrightarrow{A'B}|\cdot\cos(\overrightarrow{A'D},\overrightarrow{A'B})=a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos60^\circ=a^2$.

Bài 19. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi M,N,G,P,Q lần lượt là trung điểm của AB,CD,MN,AC,BD.



a) $2\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

b) Giá trị tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA})$ bằng $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

c) Giá trị của $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GD}$

d) Góc giữa $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{MN}$ là 60°

Hướng dẫn giải. a) **Sai:** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QB})+(\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QD})=(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{CP})+2\overrightarrow{PQ}+(\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QD})=2\overrightarrow{PQ}$.

b) **Sai:** Ta có: $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB^2+|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$
$=AB^2+AB\cdot AC\cdot\cos(\widehat{BAC})=a^2+a\cdot a\cdot\cos60^\circ=a^2+\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{3a^2}{2}.$

c) **Đúng:** Ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}$; $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN}$; $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0}$.

Suy ra: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ hay $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GD}$.

d) **Sai:** Ta có $\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN})=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{MN}|}$.

• $|\overrightarrow{AC}|=a$; $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})\Rightarrow|\overrightarrow{MN}|^2=\dfrac{1}{4}(AC^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}+BD^2)=\dfrac{1}{4}(2a^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD})$.

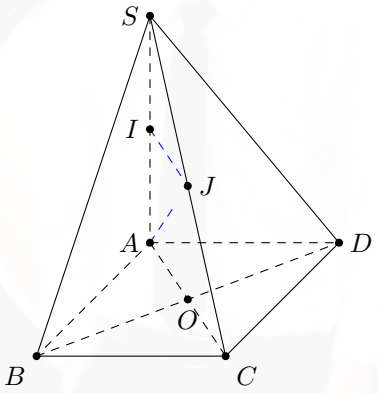
Mà $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=a^2\cos 60^\circ-a^2\cos 60^\circ=0$.

Vậy $|\overrightarrow{MN}|=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Ta có $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})=\dfrac{1}{2}(AC^2+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD})=\dfrac{a^2}{2}$.

$\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN})=\dfrac{a^2/2}{a\cdot a/\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN})=45^\circ$.

Bài 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của SA,SC. G là trọng tâm tam giác SBD.



a) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$.
b) $\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG}$.
c) $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{BD}=\vec{0}$.
d) $\overrightarrow{AG}^2=\overrightarrow{AS}^2+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2$.

Hướng dẫn giải. a) **Đúng:** Ta có $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ (quy tắc hình bình hành), suy ra $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$.

b) **Sai:** Do G là trọng tâm tam giác SBD nên: $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Rightarrow(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AS})+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AD})=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.

c) **Sai:** Ta có $ABCD$ là hình vuông nên $AC\perp BD\Rightarrow\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.

Vì I,J là trung điểm SA,SC nên $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.

Mệnh đề ghi $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{BD}=\vec{0}$ (vế phải là vectơ không), trong khi tích vô hướng phải là một số thực 0. Vì lỗi ký hiệu này nên mệnh đề sai.

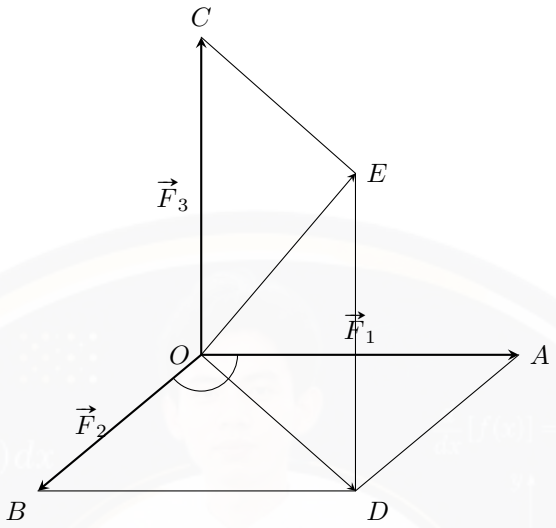
d) **Sai:** Do G là trọng tâm tam giác SBD nên $\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$

$\Rightarrow(3\overrightarrow{AG})^2=(\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2\Rightarrow 9AG^2=AS^2+AB^2+AD^2+2\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.

Vì $SA\perp(ABCD)\Rightarrow\begin{cases}SA\perp AB\\SA\perp AD\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$.

$ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$. Từ đó ta được $9AG^2=AS^2+AB^2+AD^2$.

Bài 21. Một vật nặng O được kéo từ ba hướng như hình vẽ và chịu tác dụng của 3 lực $\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3$, có độ lớn lần lượt là $24\,\text{N}, 12\,\text{N}, 6\,\text{N}$. Biết góc tạo bởi 2 lực $\vec{F}_1,\vec{F}_2$ là 120° và lực thứ ba vuông góc với hai lực đầu tiên.



a) $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}$.
b) $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.
c) Độ dài của vectơ $\overrightarrow{OD}$ là $|\overrightarrow{OD}|=12\sqrt{7}$.
d) Độ lớn hợp lực tác dụng vào vật O là $6\sqrt{13}\,\text{N}$.

Hướng dẫn giải. a) **Sai:** Theo quy tắc hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}$ (hoặc $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$).

b) **Đúng:** Theo quy tắc hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}$.

c) **Sai:** Ta có: $|\overrightarrow{OD}|^2=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2=OA^2+OB^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=OA^2+OB^2+2OA\cdot OB\cdot\cos(\vec{F}_1,\vec{F}_2)$.

Thay số: $|\overrightarrow{OD}|^2=24^2+12^2+2\cdot24\cdot12\cdot\cos120^\circ=576+144-288=432$.

Suy ra: $|\overrightarrow{OD}|=\sqrt{432}=12\sqrt{3}$.

d) **Đúng:** Độ lớn hợp lực tác dụng vào vật O là:

$|\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3|=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OE}|=\sqrt{OD^2+OC^2}=\sqrt{(12\sqrt{3})^2+6^2}=\sqrt{432+36}=6\sqrt{13}\,\text{N}$.

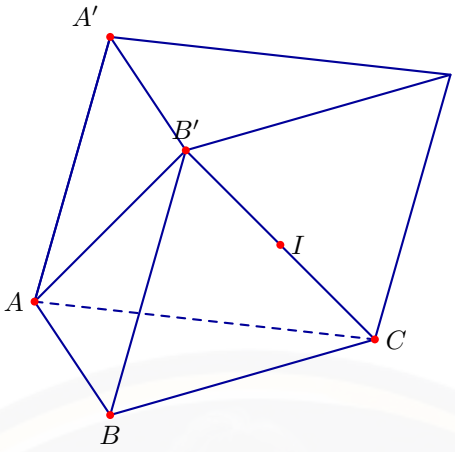
3) Câu trả lời ngắn

Bài 1. Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ sao cho $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=2$ và hai vectơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $(\vec{a}+\vec{b})(2\vec{a}-\vec{b})=0\Leftrightarrow2\vec{a}^2-\vec{b}^2+\vec{a}\,\vec{b}=0\Leftrightarrow2(2)-4+\sqrt{2}\cdot2\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})=0\Rightarrow\cos(\vec{a},\vec{b})=0\Rightarrow(\vec{a},\vec{b})=90^\circ$.

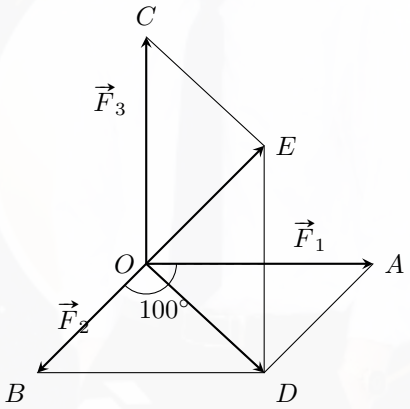
Bài 2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a};\overrightarrow{AB}=\vec{b};\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Gọi I là trung

điểm của đoạn thẳng $B'C$. Tính $\overrightarrow{B'I}$ theo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.



Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{B'I} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B'C} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB'}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

Bài 3. Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc $100°$ và có độ lớn lần lượt là 25 N và 12 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 4 N. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên.



Hình 12

Hướng dẫn giải. Gọi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ là ba lực tác động vào vật đặt tại điểm O lần lượt có độ lớn là 25 N, 12 N, 4 N.

Vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{F}_1$, $\overrightarrow{OB} = \vec{F}_2$, $\overrightarrow{OC} = \vec{F}_3$.
Dựng hình bình hành $OADB$ và hình bình hành $ODEC$.

Hợp lực tác động vào vật là

$$\vec{F} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE}$$

Áp dụng định lí côsin trong tam giác OBD, ta có:

$$OD^2 = BD^2 + OB^2 - 2 \cdot BD \cdot OB \cdot \cos\widehat{OBD} = OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 100°.$$

Vì $OC \perp (OADB)$ nên $OC \perp OD$, suy ra $ODEC$ là hình chữ nhật.

Do đó tam giác ODE vuông tại D.

Ta có $OE^2 = OC^2 + OD^2 = OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 100°$.

Suy ra $OE = \sqrt{OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 100^\circ}$

$= \sqrt{4^2 + 25^2 + 12^2 + 2 \cdot 25 \cdot 12 \cdot \cos 100^\circ} \approx 26{,}092.$

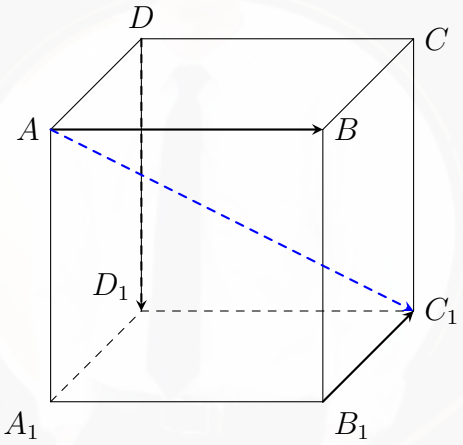
Vậy độ lớn của hợp lực là $F = OE \approx 26\,\text{N}$.

Bài 4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{MN} = k(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})$ (quy tắc trung điểm) $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD})$.
Mà $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ (vì M là trung điểm AB) $\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.
Vậy $k = \frac{1}{2}$.

Bài 5. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = k\overrightarrow{AC_1}$.

Hướng dẫn giải.



Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC_1}$. Nên $k = 1$.

Bài 6. Cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$ và $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 2\sqrt{7}$. Tính $(\vec{a}, \vec{b})$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 2\sqrt{7} \Leftrightarrow (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = 28 \Leftrightarrow \vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 + 4\vec{a}\,\vec{b} = 28$
$\Leftrightarrow |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 28$
$\Leftrightarrow 4^2 + 4.3^2 + 4.4.3.\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 28 \Leftrightarrow 48\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -24$
$\Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$.

Bài 7. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau góc 120° và $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5$. Tính $|\vec{a} + 2\vec{b}|$.

Hướng dẫn giải. **Cách 1:**
$|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})$
$= 3^2 + 4.5^2 + 4.3.5\cos(120^\circ) = 9 + 100 + 60\left(-\frac{1}{2}\right) = 79$
$\Rightarrow |\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{79}$.

Cách 2:
Vẽ hình bình hành $ABCD$ sao cho: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = 2\vec{b}$.
Theo quy tắc hình bình hành ta có: $|\vec{a} + 2\vec{b}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC$.
Áp dụng định lý hàm côsin trong tam giác ACD (với $AD = 10, CD = 3, \angle ADC = 60^\circ$):

$AC = \sqrt{CD^2 + AD^2 - 2CD.AD.\cos 60^\circ} = \sqrt{3^2 + 10^2 - 2.3.10.\dfrac{1}{2}} = \sqrt{79}.$

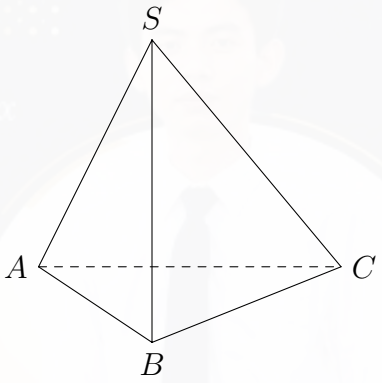
Bài 8. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, |\vec{a} - \vec{b}| = 3$. Tính $(\vec{a} - 2\vec{b}).(2\vec{a} + \vec{b})$.

Hướng dẫn giải.

Ta có: $|\vec{a} - \vec{b}| = 3 \Leftrightarrow (\vec{a} - \vec{b})^2 = 9 \Leftrightarrow \vec{a}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2 = 9 \Leftrightarrow 1 - 2\vec{a}.\vec{b} + 4 = 9 \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = -2$.
Ta có: $(\vec{a} - 2\vec{b}).(2\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a}^2 + \vec{a}.\vec{b} - 4\vec{a}.\vec{b} - 2\vec{b}^2 = 2\vec{a}^2 - 3\vec{a}.\vec{b} - 2\vec{b}^2$
$= 2.1^2 - 3.(-2) - 2.2^2 = 2 + 6 - 8 = 0.$

Bài 9. Trong không gian, cho tứ diện $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = 2, BC = 2\sqrt{2}$. Hãy tính $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

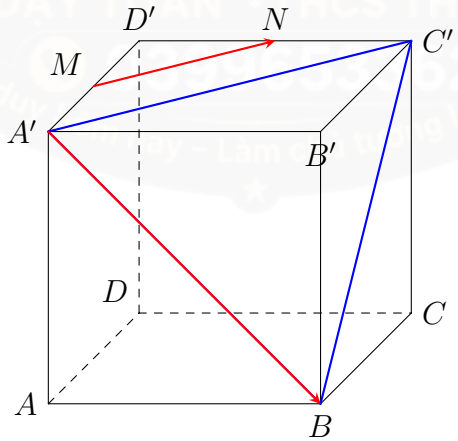
Hướng dẫn giải.



Ta có: $BC^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8; SB^2 + SC^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \Rightarrow BC^2 = SB^2 + SC^2 \Rightarrow \Delta SBC$ vuông cân tại S.
Mặt khác: $SA = AC = SC = 2 \Rightarrow \Delta SAC$ là tam giác đều.
$\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC}\cdot(\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}) = \overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SA} = 0 - SC\cdot SA\cdot\cos\widehat{ASC} = -2\cdot 2\cdot\cos 60^\circ = -\dfrac{2^2}{2} = -2.$
Vậy $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = -2$.

Bài 10. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và $C'D'$. Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{A'B}$. Số đo của góc φ bằng bao nhiêu độ?

Hướng dẫn giải.

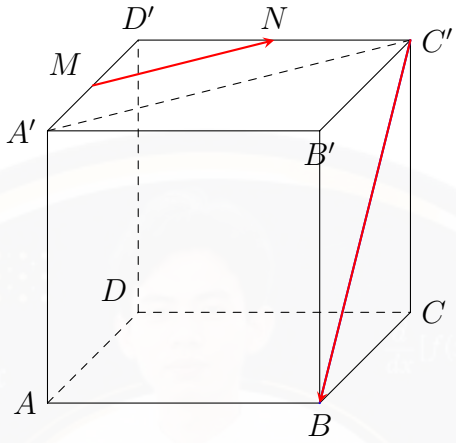


Vì $MN // A'C'$ nên $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{A'B}) = (\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B}) = \widehat{C'A'B}$.
Tam giác $C'A'B$ là tam giác đều vì $ABCD.A'B'C'D$ là hình lập phương.
Suy ra $\widehat{C'A'B} = 60^\circ$.

Vậy $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{A'B}) = \widehat{C'A'B} = 60°$.

Bài 11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và $C'D'$. Tích vô hướng $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{C'B} = na^2$ (n là số thập phân). Giá trị của n bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải.



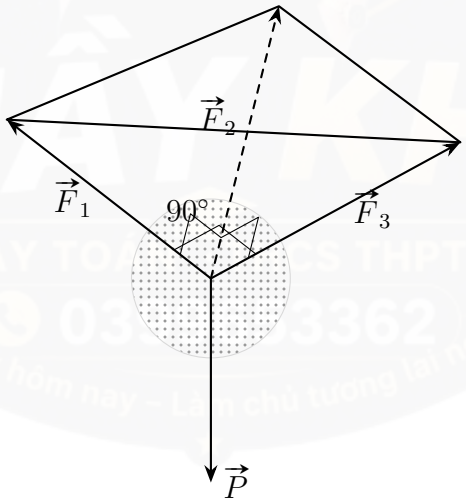
Vì $MN // A'C'$ nên $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{C'B}) = (\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{C'B}) = 180° - \widehat{A'C'B} = 120°$.

Ta có: $MN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, C'B = a\sqrt{2}$.

Suy ra: $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{C'B} = |\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{C'B}| \cdot \cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{C'B}) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 120° = -0,5a^2$.

Vậy $n = -0,5$.

Bài 12. Treo một vật nặng có trọng lượng 30 N bởi ba sợi dây giống hệt nhau, các sợi dây đôi một tạo với nhau một góc 90°. Gọi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt là các lực căng của ba sợi dây nói trên. Độ lớn của lực $\vec{F}_1$ bằng bao nhiêu Niuton? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Hướng dẫn giải. Xét tứ diện đều $SABC$ có cạnh SA, SB, SC biểu diễn độ lớn các lực căng dây và SP biểu diễn độ lớn của trọng lực tác dụng lên vật nặng S.

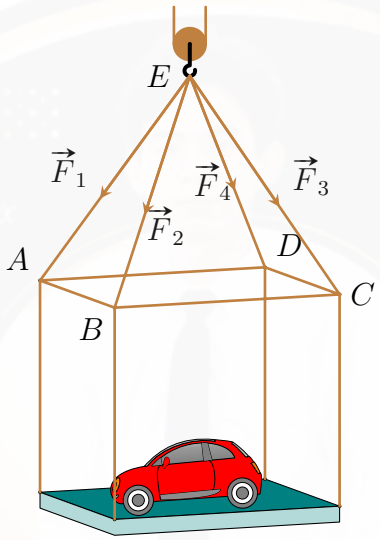
Ta có $|\vec{F}_1| = SA, |\vec{F}_2| = SC, |\vec{P}| = SG$ và $\overrightarrow{SG} + \overrightarrow{SP} = \vec{0}$, trong đó G là trọng tâm của tam giác đều ABC.

Đặt $x = SA, x > 0 \Rightarrow AC = x\sqrt{2}$.

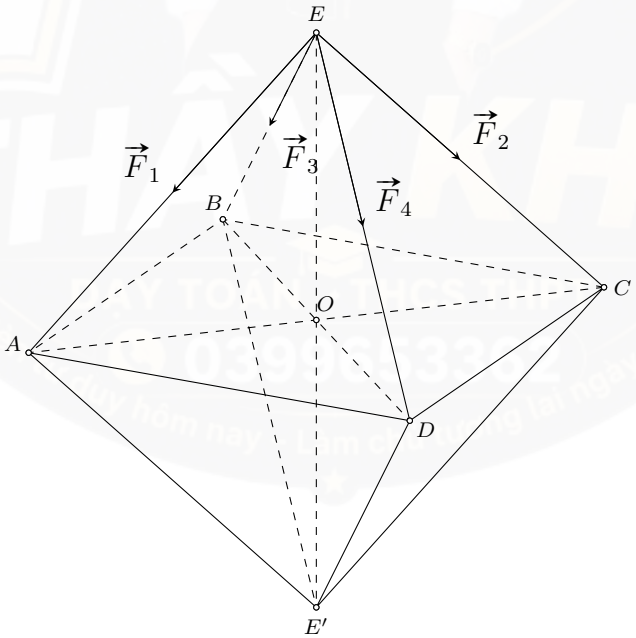
Khi đó $AG = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{AC\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{x\sqrt{6}}{3}$.

Mặt khác $SG = SP = 30$ nên xét tam giác SAG vuông tại G, ta có
$SA^2 = SG^2 + AG^2 \Leftrightarrow x^2 = 30^2 + \dfrac{2x^2}{3} \Leftrightarrow x = 30\sqrt{3} \approx 51,96$ (N).

Bài 13. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình vuông $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiến cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45° như hình vẽ. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết lực căng $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right| = \left|\overrightarrow{F_4}\right|$, trọng lượng khung sắt là 1 000 (N) và trọng lượng của chiếc xe ô tô là 4 000 (N). Tính cường độ lực căng của mỗi đoạn dây cáp (làm tròn đến hàng đơn vị).



Hướng dẫn giải.



Gọi O là giao của hai đường chéo AC và BD.
Hình chóp $E.ABCD$ là chóp có các cạnh bên bằng nhau và O là tâm của đáy là hình chữ nhật $ABCD$.Suy ra $EO \perp (ABCD)$.
Ta có $\overrightarrow{F_1} = k\overrightarrow{EA}$; $\overrightarrow{F_2} = k\overrightarrow{EB}$; $\overrightarrow{F_3} = k\overrightarrow{EC}$; $\overrightarrow{F_4} = k\overrightarrow{ED}$.
Lấy E' đối xứng với E qua O.

Áp dụng quy tắc hình bình hành ta có $\vec{F_1}+\vec{F_3}=k\overrightarrow{EE'}$; $\vec{F_2}+\vec{F_4}=k\overrightarrow{EE'}$ (k là hằng số)

$$\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_2}+\vec{F_4}=2k\overrightarrow{EE'}=4k\overrightarrow{EO}.$$

Vì ô tô được đặt ở vị trí cân bằng nên $\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_2}+\vec{F_4}=\vec{P}$, trong đó $\vec{P}$ là trọng lực tác dụng lên ô tô và khung sắt nên.

$$5\,000=4kOE\Rightarrow OE=\frac{5\,000}{4k}=\frac{1\,250}{k}\quad(N).$$

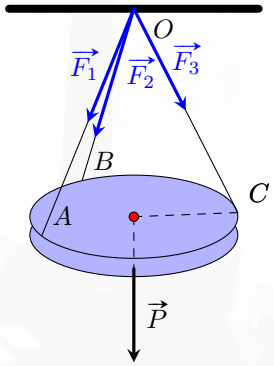
Vì EA tạo với $(ABCD)$ một góc $45^\circ\Rightarrow\widehat{EAO}=45^\circ$.

Xét $\triangle AEO$ vuông tại O ta có $EO=AE\cdot\sin 45^\circ\Rightarrow\dfrac{1\,250}{k}=AE\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow AE=1\,250k\sqrt{2}\quad(N)$.

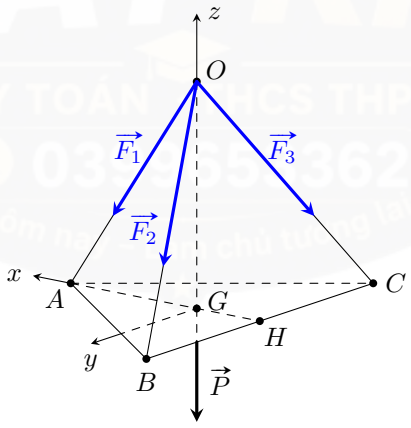
Từ giả thiết $EA=EB=EC=ED=k\left|\vec{F_1}\right|$.

Vậy cường độ lực căng của mỗi đoạn dây cáp là $\left|\vec{F_1}\right|=\dfrac{EA}{k}=\dfrac{1\,250k\sqrt{2}}{k}\quad(N)\approx 1\,768\quad(N)$.

Bài 14. Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà lần lượt buộc vào ba điểm A,B,C trên đèn tròn sao cho tam giác ABC đều. Độ dài của ba đoạn dây OA,OB,OC đều bằng L. Trọng lượng của chiếc đèn là 27 N và bán kính của chiếc đèn là 0,5 m.Tìm chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây, biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 12 N. (Chiều dài tính theo đơn vị cm và làm tròn đến hàng phần mười).



Hướng dẫn giải.



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

Vì $\triangle ABC$ đều nên G là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Do đó $GA=GB=GC=0{,}5$ m.

Gọi F là độ lớn của các lực căng $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$ trên mỗi sợi dây. Khi đó, $F=F(L)$ là một hàm số với biến số là L.

Theo bài ra ta có $OA=OB=OC=L$ nên $OG\perp(ABC)$ và $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=L$.

Do đó, $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right|$

Vì vậy, tồn tại hằng số $c \neq 0$ sao cho $\overrightarrow{F_1} = c\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{F_2} = c\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{F_3} = c\overrightarrow{OC}$.

Suy ra $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = c\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.

Theo quy tắc ba điểm ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$.

Gọi $\vec{P}$ là trọng lực tác dụng lên chiếc đèn thì $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = 3c\overrightarrow{OG}$.

Mà trọng lượng tác dụng lên chiếc đèn là 20 N nên

$$\left|\vec{P}\right| = 27 \Leftrightarrow 3c\left|\overrightarrow{OG}\right| = 27N \Leftrightarrow c = \frac{9}{OG}.$$

Tam giác OAG vuông tại G (do $OG \perp (ABC)$) nên ta

$$OG = \sqrt{OA^2 - GA^2} = \sqrt{L^2 - 0{,}5^2}\,\text{m với}\, L > 0{,}5.$$

Do đó $\left|\overrightarrow{OG}\right| = \sqrt{L^2 - 0{,}5^2} \Leftrightarrow c = \dfrac{9}{\sqrt{L^2 - 0{,}5^2}}$.

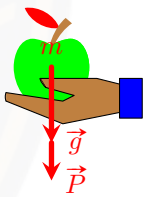
Khi đó $\left|\overrightarrow{F}\right| = \left|\overrightarrow{F_1}\right| = c\left|\overrightarrow{OA}\right| = \dfrac{9L}{\sqrt{L^2 - 0{,}5^2}}$ (với $L > 0{,}5$).

Ta có lực căng tối đa của mỗi sợi dây là 12 N nên

$$\begin{aligned} F(L) \leq 12 &\Leftrightarrow \frac{9L}{\sqrt{L^2 - 0{,}5^2}} \leq 12 \\ &\Leftrightarrow 3L \leq 4\sqrt{L^2 - 0{,}5^2} \\ &\Leftrightarrow 9L^2 \leq 16L^2 - 4 \\ &\Leftrightarrow 7L^2 \geq 4 \\ &\Rightarrow L \geq \frac{2}{\sqrt{7}} \approx 0{,}756\,(\text{m}). \end{aligned}$$

Vậy chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây là $L = 0{,}756$ m=75,6 cm.

Bài 15. Nếu một vật có khối lượng m (kg) thì lực hấp dẫn $\vec{P}$ của Trái Đất tác dụng lên vật được xác định theo công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, trong đó $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9{,}8$ m/s^2. Tính độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên một quả táo có khối lượng 102 gam (Hình 27)



Hướng dẫn giải. Đổi đơn vị 102 gam $= 102 \cdot 10^{-3}$ kg $= 0{,}102$ kg.

Từ công thức $\vec{P} = m\vec{g}$ suy ra $|\vec{P}| = m|\vec{g}|$

$$\begin{aligned} &= 0{,}102 \cdot 9{,}8 \\ &= 0{,}9996 \text{ N}. \end{aligned}$$

Vậy độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên quả táo xấp xỉ 1 N.

Bài 16. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ sao cho $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $\left|\vec{b}\right| = 2$ và hai véc-tơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ (đơn vị độ).

Hướng dẫn giải. Vì hai véc-tơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau nên ta có

$$\begin{aligned} \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(2\vec{a} - \vec{b}\right) = 0 &\Leftrightarrow 2\vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\,|\vec{a}|^2 - \left|\vec{b}\right|^2 + |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 - 2^2 + 2\sqrt{2} \cdot \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0 \end{aligned}$$

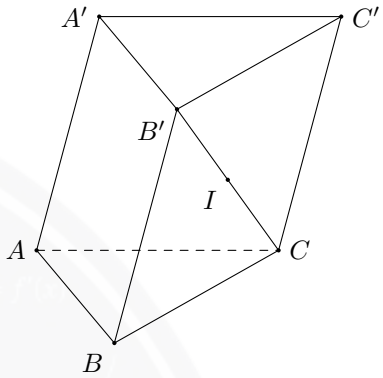
$$\Leftrightarrow \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\vec{a},\vec{b}\right)=90^\circ.$$

Bài 17. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$; $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$; $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng $B'C$. Biết rằng $\overrightarrow{B'I}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$, tính $S=m+n+p$.

Hướng dẫn giải.

Ta có

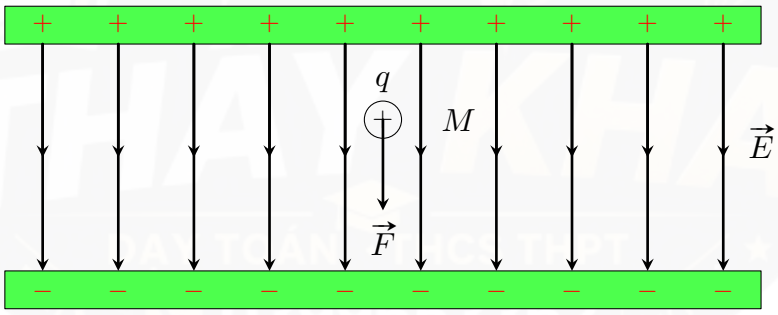
$$\begin{aligned}\overrightarrow{B'I}&=\frac{1}{2}\overrightarrow{B'C}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB'}\right)\\&=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AC}-\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}\right)\right]\\&=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\&=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}.\end{aligned}$$



Theo đề, ta có

$$\begin{cases}m=-\dfrac{1}{2}\\ n=-\dfrac{1}{2}\\ p=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow S=m+n+p=-0{,}5.$$

Bài 18. Trong điện trường đều, lực tĩnh điện $\vec{F}$ (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $\vec{F}=q\cdot\vec{E}$, trong đó $\vec{E}$ là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q=10^{-9}$ C và độ lớn điện trường $E=10^5$ N/C (Hình vẽ).



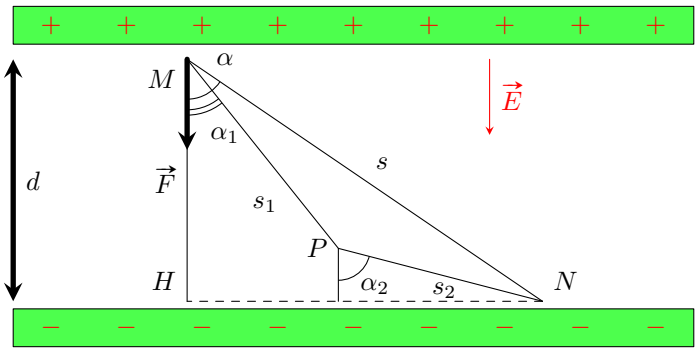
Hướng dẫn giải. Từ công thức $\vec{F}=q\cdot\vec{E}$ suy ra $|\vec{F}|=q|\vec{E}|$

$$\begin{aligned}&=10^{-9}\cdot 10^5\\&=10^{-4}\text{ N}.\end{aligned}$$

Vậy độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm là 10^{-4} N.

Bài 19. Một lực tĩnh điện $\vec{F}$ tác động lên điện tích điểm M trong điện trường đều làm cho M dịch chuyển theo đường gấp khúc MNP (Hình vẽ). Biết $q=2\cdot 10^{-12}$ C, vectơ điện trường có độ

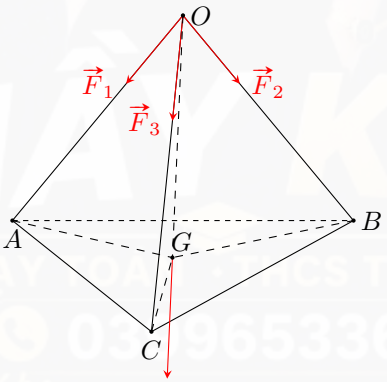
lớn $E = 1{,}8 \cdot 10^5$ N/C và $d = MH = 5$ mm. Tính công A sinh bởi lực tĩnh điện $\vec{F}$.



Hướng dẫn giải. Công A sinh bởi lực tĩnh điện $\vec{F}$ là $A = 2 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}8 \cdot 10^5 \cdot 5 = 18 \cdot 10^{-7}$ J.

Bài 20. Một giỏ hoa treo trong nhà làm bằng 3 sợi dây không giãn, mỗi sợi dây dài 60 (cm) miếng kê là một miếng gỗ cân đối hình tròn bán kính 20 (cm), ba sợi dây được thắt một đầu bên trên và đỡ giá gỗ tại 3 điểm tạo thành tam giác đều (giả sử mỗi thắt của 3 sợi dây và mỗi nối của mỗi sợi dây với miếng gỗ không đáng kể). Biết lực chịu đựng của mỗi sợi dây bằng nhau và mỗi sợi dây chịu không quá 15 (N) trọng lượng của miếng giá gỗ là 5 (N). Tính trọng lượng tối đa của các chậu hoa để dây treo không bị đứt (đơn vị N, kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

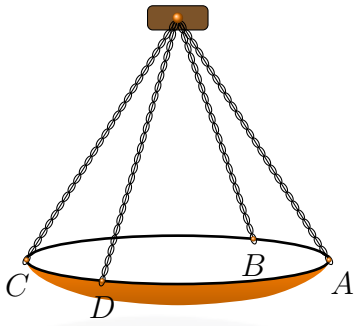
Hướng dẫn giải. Gọi điểm thắt một đầu bên trên là O và 3 điểm nối 3 sợi dây với giá gỗ tạo thành tam giác đều ABC. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.
Vì tam giác ABC đều nên G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Do đó, $GA = GB = GC = 20$ (cm).
Gọi F là độ lớn của các lực căng $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ trên mỗi sợi dây.
Đặt $F = x$ với $0 < x \leq 15$.
Theo bài ra ta có $OA = OB = OC = 60cm$ nên $OG \perp (ABC)$ và $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OC}\right| = 60$.



Do đó, $\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right| = \left|\vec{F}_3\right|$. Từ đó ta có $\vec{F}_1 = \dfrac{x}{60}\overrightarrow{OA}$, $\vec{F}_2 = \dfrac{x}{60}\overrightarrow{OB}$, $\vec{F}_3 = \dfrac{x}{60}\overrightarrow{OC}$.
Suy ra $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \dfrac{x}{60}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \dfrac{3x}{60}\overrightarrow{OG} = \dfrac{x}{20}\overrightarrow{OG}$.
Mặt khác, ta lại có $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{P}$ với $\vec{P}$ là trọng lượng của giá gỗ và các chậu hoa.
Nên ta có $\left|\vec{P}\right| = \dfrac{x}{20}\left|\overrightarrow{OG}\right| = \dfrac{x\sqrt{60^2 - 20^2}}{20} = x\sqrt{8} \leq 15\sqrt{8}$.
Vậy giá trị lớn nhất trọng lượng giá gỗ và chậu hoa là $\max\left|\vec{P}\right| = 15\sqrt{8}$.
Suy ra trọng lượng tối đa của các chậu hoa để dây treo không bị đứt là $15\sqrt{8} - 5 \approx 37{,}4$ (N).

Bài 21. Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 5$ kg được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 60°$. Biết $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$, trong đó $\vec{g}$ là véctơ gia tốc rơi tự do có độ lớn 10 m/s^2, $\vec{P}$ là trọng lực tác dụng

lên vật có đơn vị là N, m là khối lượng của vật có đơn vị kg. Độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích bằng bao nhiêu Niu-tơn (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

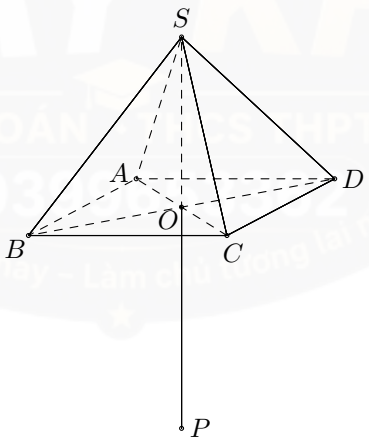


Hướng dẫn giải.

- Ta có $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$ nên $\left|\vec{P}\right| = m \cdot |\vec{g}| = 5 \cdot 10 = 50\,\text{N}$.
  Vậy độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm là 50 N.
- Gọi O là trọng tâm của chiếc đèn chùm cũng là chân đường cao hình chóp đều $S.ABCD$.
  Vẽ $\overrightarrow{OP}$ biểu diễn trọng lực tác động lên đèn chùm với $OP \perp (ABCD)$.
  Khi đó lực căng mỗi sợi xích sẽ là $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{BS}$, $\overrightarrow{CS}$, $\overrightarrow{DS}$.
  Chiếc đèn chùm đứng yên nên $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{DS} + \overrightarrow{OP} = \vec{0}$.

  Suy ra
  $$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}\\ &= 2\overrightarrow{SO} + 2\overrightarrow{SO} = 4\overrightarrow{SO}.\end{aligned}$$

  Suy ra $SO = \dfrac{1}{4} \cdot OP = \dfrac{50}{4} = \dfrac{25}{2}$.
  Tam giác SAC cân tại S có $\cos\widehat{OSA} = \dfrac{SO}{SA}$.
  Vậy lực căng mỗi sợi xích là $SA = \dfrac{SO}{\cos 30^\circ} = \dfrac{\frac{25}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{25\sqrt{3}}{3} \approx 14$.

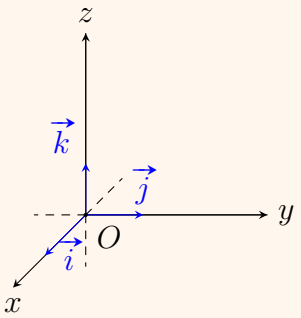


§2 HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

I. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Trong không gian, ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc với nhau tại gốc O của mỗi trục. Gọi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz.

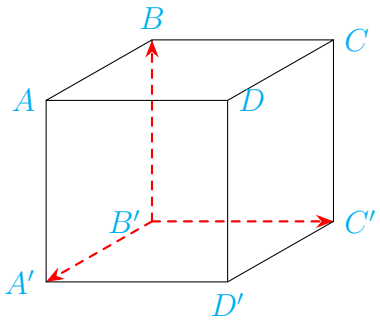
- Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục toạ độ Descartes vuông góc $Oxyz$, hay đơn giản là hệ toạ độ $Oxyz$. Điểm O được gọi là gốc toạ độ.
- Các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx) đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng toạ độ.
- $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$



Không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.

Ví dụ 1

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 (H.2.36). Có thể lập một hệ toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với đỉnh B' và các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là các vectơ $\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'B}$ không? Giải thích vì sao.



Hình 2.36

Lời giải. Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $B'A', B'C'$ và $B'B$ đôi một vuông góc với nhau.

Vì hình lập phương có độ dài mỗi cạnh bằng 1 nên các vectơ $\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'B}$ cùng có điểm đầu là B' và đều có độ dài bằng 1.

Từ các điều trên, suy ra có thể lập một hệ toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với đỉnh B' và các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là các vectơ $\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'B}$.

(1) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Có thể lập một hệ toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với đỉnh C và các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt cùng hướng với các vectơ $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CC'}$ không? Giải thích vì sao.

» Sưu tầm và Biên soạn: Lê Minh Kha 0399653362

II. TỌA ĐỘ ĐIỂM, TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

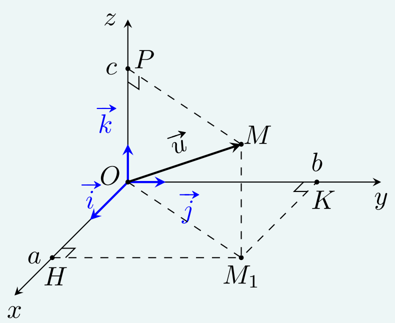
Trong không gian $Oxyz$, cho một điểm M tuỳ ý. Bộ ba số $(x; y; z)$ duy nhất sao cho $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là toạ độ của điểm M đối với hệ toạ độ $Oxyz$. Khi đó, ta viết $M = (x; y; z)$ hoặc $M(x; y; z)$, trong đó x là hoành độ, y là tung độ và z là cao độ của M.

- Toạ độ của điểm M cũng là toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$.
- Cho $\vec{u}$. Dựng điểm $M(a; b; c)$ thỏa $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ thì tọa độ của điểm M là tọa độ của $\vec{u}$. Theo hình vẽ thì

$$\vec{u} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OP} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$

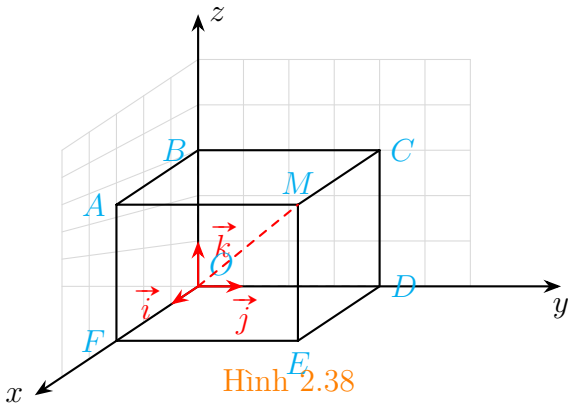
Suy ra

$$\vec{u} = (a; b; c) \Leftrightarrow \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$



Ví dụ 2

Hình 2.38 minh họa một hệ tọa độ $Oxyz$ trong không gian cùng với các hình vuông có cạnh bằng 1 đơn vị. Tìm tọa độ của điểm M.



Hình 2.38

Lời giải. Trong Hình 2.38, $ABCM.FODE$ là hình hộp chữ nhật.

Áp dụng quy tắc hình hộp suy ra

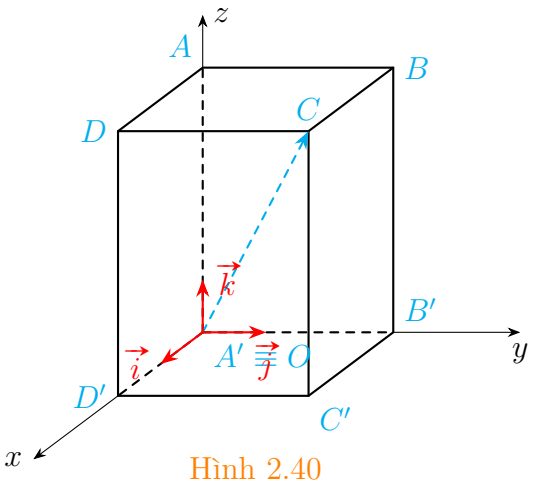
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Vì vậy, tọa độ của điểm M là $(3; 4; 3)$.

2 Tìm tọa độ của điểm N trong Hình 2.39.

Ví dụ 3

Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A' trùng với gốc O và các đỉnh D', B', A lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz (H.2.40). Giả sử đỉnh C có tọa độ là $(2;3;5)$ đối với hệ tọa độ $Oxyz$, hãy tìm tọa độ của các đỉnh D', B', A đối với hệ tọa độ đó.



Hình 2.40

Lời giải. Vì đỉnh D' thuộc tia Ox nên hai vectơ $\overrightarrow{OD'}$ và $\vec{i}$ cùng phương, suy ra có số thực m sao cho $\overrightarrow{OD'} = m\vec{i}$. Tương tự, có các số thực n, p sao cho $\overrightarrow{OB'} = n\vec{j}$ và $\overrightarrow{OA} = p\vec{k}$. Theo quy tắc hình hộp, suy ra $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OA} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ và do đó điểm C có tọa độ là $(m;n;p)$. Mặt khác, đỉnh C có tọa độ là $(2;3;5)$ nên $m = 2, n = 3, p = 5$, tức là $\overrightarrow{OD'} = 2\vec{i}, \overrightarrow{OB'} = 3\vec{j}$ và $\overrightarrow{OA} = 5\vec{k}$.

Từ đây suy ra $D'(2;0;0), B'(0;3;0)$ và $A(0;0;5)$.

3 Trong Ví dụ 3, hãy xác định tọa độ của các điểm B, D và C'.

Tọa độ các vectơ đơn vị lần lượt là: $\vec{i}=(1;0;0)$, $\vec{j}=(0;1;0)$, $\vec{k}=(0;0;1)$.
Trong không gian $Oxyz$, ta có:

- Toạ độ của điểm M là toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$, tức là
- Điều kiện để hai vectơ bằng nhau:

Cho $\vec{a}=(x;y;z)$, $\vec{b}=(x';y';z')$. Khi đó $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'\\y=y'\\z=z'.\end{cases}$

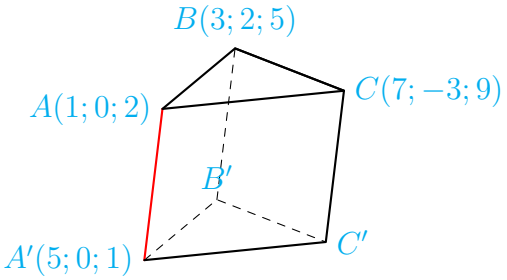
Nếu điểm M có tọa độ $(x;y;z)$ đối với hệ tọa độ $Oxyz$ thì:

- Hình chiếu vuông góc của M trên các trục Ox, Oy và Oz có tọa độ lần lượt là $(x;0;0)$, $(0;y;0)$ và $(0;0;z)$.
- Hình chiếu vuông góc của M trên các mặt phẳng (Oxy), (Oyz) và (Oxz) có tọa độ lần lượt là $(x;y;0)$, $(0;y;z)$ và $(x;0;z)$.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(x_M;y_M;z_M)$ và $N(x_N;y_N;z_N)$. Khi đó:
$$\overrightarrow{MN}=(x_N-x_M;y_N-y_M;z_N-z_M).$$

Ví dụ 4

Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $A(1;0;2)$, $B(3;2;5)$, $C(7;-3;9)$ và $A'(5;0;1)$.



Hình 2.42

a) Tìm toạ độ của $\overrightarrow{AA'}$.

b) Tìm toạ độ của các điểm B', C'.

Lời giải.

a) Ta có: $\overrightarrow{AA'}=(x_{A'}-x_A;y_{A'}-y_A;z_{A'}-z_A)=(4;0;-1)$.

b) Gọi toạ độ của điểm B' là $(x;y;z)$ thì $\overrightarrow{BB'}=(x-3;y-2;z-5)$. Vì $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ nên $ABB'A'$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$.

Do đó $\begin{cases}x-3=4\\y-2=0\\z-5=-1\end{cases}$ hay $x=7, y=2$ và $z=4$. Vậy $B'(7;2;4)$.

Lập luận tương tự suy ra $C'(11;-3;8)$.

4 Trong Ví dụ 5, hãy xác định toạ độ của các điểm D và D' sao cho $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp.

5 Để theo dõi hành trình của một chiếc máy bay, ta có thể lập hệ toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí của trung tâm kiểm soát không lưu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (được coi là phẳng) với trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (H.2.43). Sau khi cất cánh và đạt độ cao nhất định, chiếc máy bay duy trì hướng bay về phía nam với tốc độ không đổi là 890 km/h trong nửa giờ. Xác định toạ độ của vectơ biểu diễn độ dịch chuyển của chiếc máy bay trong nửa giờ đó đối với hệ toạ độ đã chọn, biết rằng đơn vị đo trong không gian $Oxyz$ được lấy theo kilômét.



Hình 2.43

....

....

....

....

....

III. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

1) Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;5)$ lên trục Ox có tọa độ là

Ⓐ $(0;2;0)$. Ⓑ $(0;0;5)$. Ⓒ $(1;0;0)$. Ⓓ $(0;2;5)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tọa độ hình chiếu của điểm $A(-2;-1;3)$ trên mặt phẳng Oyz là

Ⓐ $(0;-1;0)$. Ⓑ $(-2;0;0)$. Ⓒ $(0;-1;3)$. Ⓓ $(-2;-1;0)$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (Oxy). Tọa độ của H là

Ⓐ $H(-1;-2;3)$. Ⓑ $H(0;0;3)$.
Ⓒ $H(1;0;0)$. Ⓓ $H(1;2;0)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;3;2)$ và $\vec{b}=(1;1;-1)$. Vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ có tọa độ là

Ⓐ $(3;4;1)$. Ⓑ $(-1;-2;3)$. Ⓒ $(3;5;1)$. Ⓓ $(1;2;3)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oxz).

Ⓐ $(1;0;1)$. Ⓑ $(0;1;0)$. Ⓒ $(1;1;0)$. Ⓓ $(0;1;1)$.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Tọa độ của $\vec{a}$ là

Ⓐ $(-2;-1;-3)$. Ⓑ $(-3;2;-1)$.
Ⓒ $(2;-3;-1)$. Ⓓ $(-1;2;-3)$.

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{a}(1;1;-2)$, $\vec{b}=(-2;1;4)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u}=\vec{a}-2\vec{b}$.

Ⓐ $(5;-1;-10)$. Ⓑ $(0;3;0)$.
Ⓒ $(-3;3;6)$. Ⓓ $(5;-1;10)$.

Câu 8. Cho điểm $A(3;-1;1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

Ⓐ $M(3;0;0)$. Ⓑ $N(0;-1;1)$. Ⓒ $P(0;-1;0)$. Ⓓ $Q(0;0;1)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;5)$ trên mặt Oxz có tọa

độ là

Ⓐ $(0;2;5)$. Ⓑ $(0;2;0)$. Ⓒ $(1;0;5)$. Ⓓ $(0;0;5)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;-2;1)$, $\vec{b}=(0;1;3)$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}+\vec{b}$ là

Ⓐ $(2;-3;2)$. Ⓑ $\left(1;-\frac{1}{2};2\right)$. Ⓒ $(2;-1;4)$. Ⓓ $(-2;3;2)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$ và $B(2;1;-4)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ

Ⓐ $(3;0;-2)$. Ⓑ $(-1;-2;6)$. Ⓒ $(1;0;-6)$. Ⓓ $(1;2;-6)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;3)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

Ⓐ $(1;0;3)$. Ⓑ $(1;0;0)$. Ⓒ $(1;-2;0)$. Ⓓ $(0;-2;3)$.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ là $\vec{u}=(2;1;-1)$ và $\vec{v}=(1;3;1)$. Tọa độ của vectơ $(\vec{u}+2\vec{v})$ tương ứng là

Ⓐ $(3;4;0)$. Ⓑ $(1;-2;-2)$. Ⓒ $(4;7;1)$. Ⓓ $(5;5;-1)$.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;0)$ và điểm $B(3;1;1)$. Tọa độ điểm đối xứng với A qua B là

Ⓐ $(1;-2;-4)$. Ⓑ $(0;3;-1)$. Ⓒ $(4;3;2)$. Ⓓ $(0;-1;3)$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho biểu diễn của vectơ $\vec{a}$ qua các vectơ đơn vị là $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{k}-3\vec{j}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là

Ⓐ $(2;-3;1)$. Ⓑ $(1;-3;2)$. Ⓒ $(2;1;-3)$. Ⓓ $(1;2;-3)$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}+\vec{j}$. Tọa độ điểm M là

Ⓐ $M=(0;2;1)$. Ⓑ $M=(1;2;0)$.
Ⓒ $M=(2;1;0)$. Ⓓ $M=(2;0;1)$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Tọa độ của vecto $\vec{a}$ là

Ⓐ $(-1;2;-3)$. Ⓑ $(2;-3;-1)$. Ⓒ $(2;-1;-3)$. Ⓓ $(-3;2;-1)$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, giả sử $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, khi đó tọa độ véc tơ $\vec{u}$ là

Ⓐ $(-2;3;1)$. Ⓑ $(2;3;-1)$. Ⓒ $(2;-3;-1)$. Ⓓ $(2;3;1)$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Tọa độ của vecto $\vec{a}$ là:

Ⓐ $\vec{a}(-1;2;-3)$. Ⓑ $\vec{a}(2;-3;-1)$.
Ⓒ $\vec{a}(-3;2;-1)$. Ⓓ $\vec{a}(2;-1;-3)$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}+\vec{j}$. Tọa độ điểm M là

Ⓐ $M=(0;2;1)$. Ⓑ $M=(1;2;0)$.
Ⓒ $M=(2;1;0)$. Ⓓ $M=(2;0;1)$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA}=6\vec{j}+4\vec{i}-3\vec{k}$. Tọa độ của điểm A là

Ⓐ $(4;6;-3)$. Ⓑ $(-4;-6;3)$. Ⓒ $(-6;-4;3)$. Ⓓ $(6;4;-3)$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vecto đơn vị trên trục Ox, Oy, Oz tương ứng và vecto $\vec{a} = (1;0;1)$. Kết quả nào sau đây đúng?

Ⓐ $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Ⓑ $\vec{a} = \vec{j} + \vec{k}$.
Ⓒ $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$. Ⓓ $\vec{a} = \vec{i} + \vec{k}$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho các vecto $\overrightarrow{OA} = -\vec{i} + \vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. Khi đó tọa độ vecto $\overrightarrow{AB}$ là

Ⓐ $(-2;1;-1)$. Ⓑ $(2;-1;1)$. Ⓒ $(0;-1;3)$. Ⓓ $(0;-1;-1)$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho các véc tơ $\overrightarrow{OA} = -\vec{i} + \vec{j}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Khi đó tọa độ véc tơ $\overrightarrow{AB}$ là?

Ⓐ $(2;2;-2)$. Ⓑ $(2;1;-3)$. Ⓒ $(0;0;-1)$. Ⓓ $(2;0;-2)$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(x;y;z)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

Ⓐ Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxz) thì $M'(x;y;-z)$..
Ⓑ Nếu M' đối xứng với M qua Oy thì $M'(x;y;-z)$..
Ⓒ Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxy) thì $M'(x;y;-z)$..
Ⓓ Nếu M' đối xứng với M qua gốc tọa độ O thì $M'(2x;2y;2z)$..

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;5;2)$ trên trục Ox có tọa độ là

Ⓐ $(0;5;2)$. Ⓑ $(0;5;0)$. Ⓒ $(3;0;0)$. Ⓓ $(0;0;2)$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;1;-1)$ trên trục Oy có tọa độ là

Ⓐ $(3;0;-1)$. Ⓑ $(0;1;0)$. Ⓒ $(3;0;0)$. Ⓓ $(0;0;-1)$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;-1;1)$ trên trục Oz có tọa độ là

Ⓐ $(3;-1;0)$. Ⓑ $(0;0;1)$. Ⓒ $(0;-1;0)$. Ⓓ $(3;0;0)$.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

Ⓐ $(0;2;-3)$. Ⓑ $(1;0;-3)$. Ⓒ $(1;2;0)$. Ⓓ $(1;0;0)$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên mặt phẳng (Ozx) có tọa độ là

Ⓐ $(0;1;0)$. Ⓑ $(2;1;0)$. Ⓒ $(0;1;-1)$. Ⓓ $(2;0;-1)$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

Ⓐ $M(3;0;0)$. Ⓑ $N(0;-1;1)$. Ⓒ $P(0;-1;0)$. Ⓓ $Q(0;0;1)$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng tọa độ (Oyz)?

Ⓐ $M(3;4;0)$. Ⓑ $P(-2;0;3)$. Ⓒ $Q(2;0;0)$. Ⓓ $N(0;4;-1)$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho $M(4;5;6)$. Hình chiếu của M xuống mặt phẳng (Oyz)

là M'. Xác định tọa độ M'.

Ⓐ $M'(4;5;0)$. Ⓑ $M'(4;0;6)$. Ⓒ $M'(4;0;0)$. Ⓓ $M'(0;5;6)$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2025;2026;-2027)$. Tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxy) là:

Ⓐ $A'(-2025;-2026;2027)$. Ⓑ $A'(-2025;-2026;-2027)$.
Ⓒ $A'(-2025;2026;-2027)$. Ⓓ $A'(2025;2026;2027)$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-5;2;0)$. Tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oyz) là:

Ⓐ $A'(5;2;0)$. Ⓑ $A'(-5;-2;0)$.
Ⓒ $A'(5;-2;0)$. Ⓓ $A'(5;2;1)$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{ON}=-2\vec{i}+3\vec{k}$. Tìm tọa độ điểm K là hình chiếu của điểm N trên trục Ox.

Ⓐ $K(-2;0;0)$. Ⓑ $K(2;0;0)$.
Ⓒ $K(-2;0;-3)$. Ⓓ $K(2;0;3)$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$. Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu của điểm M lên mặt phẳng (Oxz).

Ⓐ $H(0;3;-4)$. Ⓑ $H(-2;-3;4)$.
Ⓒ $H(2;3;0)$. Ⓓ $H(2;0;-4)$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;3;5)$. Tọa độ của vecto $\overrightarrow{OA}$ là:

Ⓐ $(-2;3;5)$. Ⓑ $(2;-3;5)$. Ⓒ $(-2;-3;5)$. Ⓓ $(2;-3;-5)$.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$ và $B(2;1;-4)$. Vecto $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ

Ⓐ $(3;0;-2)$. Ⓑ $(-1;-2;6)$. Ⓒ $(1;0;-6)$. Ⓓ $(1;2;-6)$.

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $\overrightarrow{AB}=(1;3;1)$ thì tọa độ của điểm B là:

Ⓐ $B(2;5;0)$. Ⓑ $B(0;-1;-2)$.
Ⓒ $B(0;1;2)$. Ⓓ $B(-2;-5;0)$.

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;0;1)$. Tìm tọa độ điểm C thỏa mãn $\overrightarrow{AC}=(0;6;1)$

Ⓐ $C(-1;6;-1)$. Ⓑ $C(1;6;2)$.
Ⓒ $C(1;6;0)$. Ⓓ $C(-1;-6;-2)$.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;2;-3)$, N và vecto $\vec{v}=(2;-1;-2)$ thỏa mãn điều kiện $\vec{v}=\overrightarrow{MN}$. Tọa độ của điểm N là

Ⓐ $(-1;3;-1)$. Ⓑ $(3;1;-5)$. Ⓒ $(1;-3;1)$. Ⓓ $(-3;-1;5)$.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho véc tơ $\vec{a}=(-3;2;1)$ và điểm $A(4;6;-3)$. Tọa độ điểm B thỏa mãn $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ là:

Ⓐ $(-1;-8;2)$. Ⓑ $(7;4;-4)$. Ⓒ $(1;8;-2)$. Ⓓ $(-7;-4;4)$.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, gọi M' là hình chiếu vuông góc của điểm $M(1;3;-2)$ trên trục Oz. Khi đó vecto $\overrightarrow{MM'}$ có tọa độ là

Ⓐ $(1;3;0)$. Ⓑ $(0;0;2)$. Ⓒ $(-1;-3;0)$. Ⓓ $(0;0;-2)$.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OM}=(1;5;2)$, $\overrightarrow{ON}=(3;7;-4)$, $K(-1;3;1)$. Gọi P là điểm đối xứng với M qua N. Tìm tọa độ vecto $\overrightarrow{KP}$.

Ⓐ $\overrightarrow{KP}=(6;6;-11)$. Ⓑ $\overrightarrow{KP}=(8;6;-11)$.
Ⓒ $\overrightarrow{KP}=(6;6;-4)$. Ⓓ $\overrightarrow{KP}=(3;3;-2)$.

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình bình hành $ABCD$ và các đỉnh có tọa độ lần lượt là $A(3;1;2), B(1;0;1), C(2;3;0)$. Tọa độ đỉnh D là

Ⓐ $D(1;1;0)$. Ⓑ $D(0;2;-1)$. Ⓒ $D(4;4;1)$. Ⓓ $D(1;3;-1)$.

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-3;1;2), B(-2;4;-1), C(1;-3;3)$. Tọa độ điểm D là

Ⓐ $(0;-6;6)$. Ⓑ $(-6;7;-2)$. Ⓒ $(2;0;0)$. Ⓓ $(-4;2;5)$.

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;2;-1), B(2;-1;3), C(-3;5;1)$. Tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành là

Ⓐ $(-2;8;-3)$. Ⓑ $(-4;8;-3)$. Ⓒ $(-4;8;-5)$. Ⓓ $(-2;2;5)$.

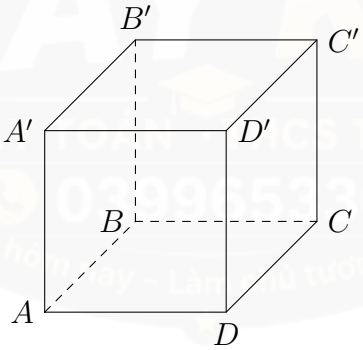
Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ tâm I có tọa độ các đỉnh $B(3;1;0)$, $D(0;4;-6)$. Tìm tọa độ điểm I.

Ⓐ $I\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2};-3\right)$. Ⓑ $I(3;5;-6)$.
Ⓒ $I\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2};-3\right)$. Ⓓ $I(-3;5;-6)$.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1), B(2;-1;3), C(-2;3;3)$. Điểm $M(a;b;c)$ là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$, khi đó biểu thức $P=a^2+b^2-c^2$ có giá trị bằng bao nhiêu?

Ⓐ 44. Ⓑ 6. Ⓒ -3. Ⓓ -1.

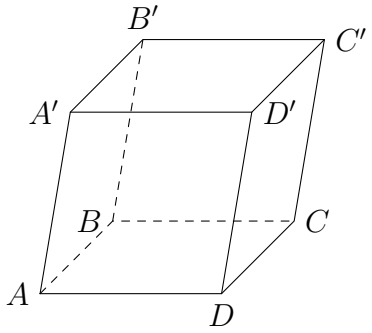
Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1), B(2;1;2), D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tính tọa độ đỉnh A' của hình hộp.



Ⓐ $A'(4;6;-5)$. Ⓑ $A'(2;0;2)$. Ⓒ $A'(3;5;-6)$. Ⓓ $A'(3;4;-6)$.

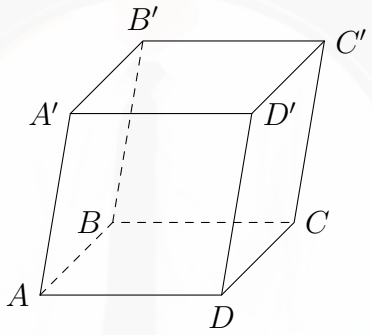
Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(-3;0;0)$,

$B(0;2;0)$, $D(0;0;1)$, $A'(1;2;3)$. Tìm tọa độ điểm C'.



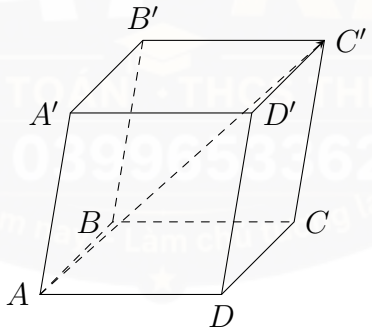
Ⓐ $C'(10;4;4)$.
Ⓑ $C'(-13;4;4)$.
Ⓒ $C'(13;4;4)$.
Ⓓ $C'(7;4;4)$.

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(2;4;0)$, $B(4;0;0)$, $C(-1;4;-7)$ và $D'(6;8;10)$. Tọa độ điểm B' là



Ⓐ $B'(8;4;10)$.
Ⓑ $B'(6;12;0)$.
Ⓒ $B'(10;8;6)$.
Ⓓ $B'(13;0;17)$.

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $\overrightarrow{AB}=(2;0;0)$, $\overrightarrow{AD}=(0;4;0)$ và $\overrightarrow{AA'}=(0;1;3)$. Tìm tọa độ vecto $\overrightarrow{AC'}$.

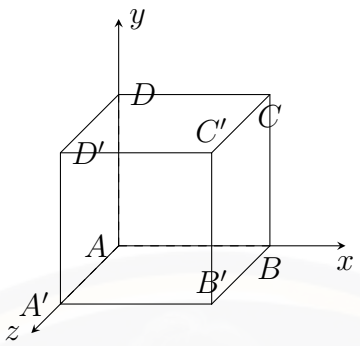


Ⓐ $\overrightarrow{AC'}=(2;4;3)$.
Ⓑ $\overrightarrow{AC'}=(2;3;5)$.
Ⓒ $\overrightarrow{AC'}=(2;5;3)$.
Ⓓ $\overrightarrow{AC'}=(1;5;3)$.

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có điểm A trùng với gốc tọa độ O, điểm B nằm trên tia Ox, điểm D nằm trên tia Oy, điểm A' nằm trên tia Oz. Biết $AB=2$, $AD=4$, $AA'=3$. Gọi tọa độ của C' là $(a;b;c)$, khi đó biểu thức $a+b-c$ có giá trị là.

Ⓐ -4. Ⓑ 9. Ⓒ 3. Ⓓ 6.

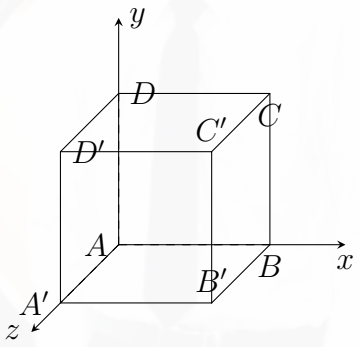
Câu 56. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài các cạnh bằng 1, điểm A trùng với gốc tọa độ (như hình vẽ).



Tọa độ vecto $\overrightarrow{A'C'}$ có tọa độ là

Ⓐ $(1;0;1)$. Ⓑ $(0;1;1)$. Ⓒ $(1;1;0)$. Ⓓ $(1;1;1)$.

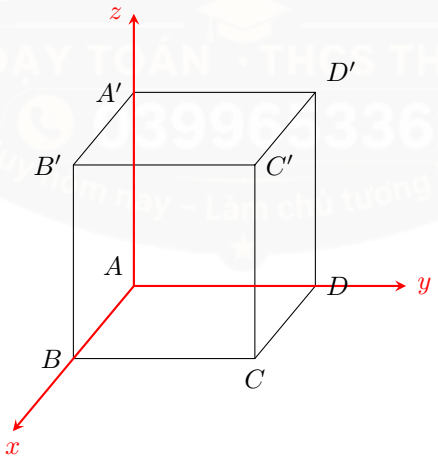
Câu 57. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với điểm A).



Tọa độ điểm C' là

Ⓐ $C'(2;2;0)$. Ⓑ $C'(2;2;2)$. Ⓒ $C'(2;0;2)$. Ⓓ $C'(2;0;0)$.

Câu 58. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = 1, AD = 2, AA' = 3$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình dưới đây.

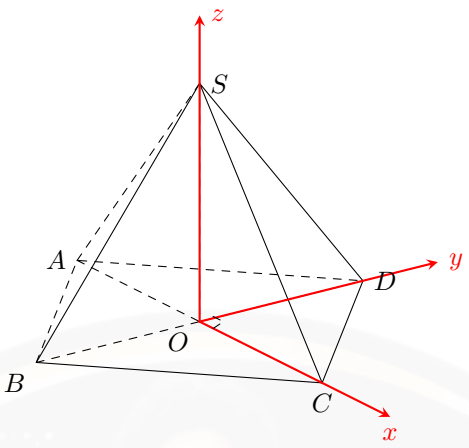


Tọa độ $\overrightarrow{B'D}$ là

Ⓐ $(1;2;3)$. Ⓑ $(-1;2;-3)$. Ⓒ $(1;2;-3)$. Ⓓ $(-1;2;3)$.

Câu 59. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Gọi

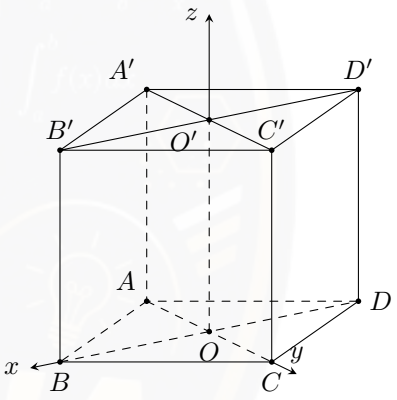
O là tâm của hình vuông $ABCD$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), tọa độ $\overrightarrow{SC}$ là:



Ⓐ $\overrightarrow{SC} = (2a; 0; -2a)$.
Ⓑ $\overrightarrow{SC} = (a; 0; -2a)$.
Ⓒ $\overrightarrow{SC} = (2a; -a; -2a)$.
Ⓓ $\overrightarrow{SC} = (a; 0; 2a)$.

2) Trắc nghiệm đúng sai

Bài 1. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi. Hai đường chéo AC, BD của đáy có chiều dài lần lượt là a, b. Cạnh bên $AA' = c$. Hệ tọa độ $Oxyz$ có gốc trùng với giao điểm O của hai đường chéo hình thoi $ABCD$, có tia Ox trùng với tia OB và tia Oy trùng với tia OC (Hình vẽ).



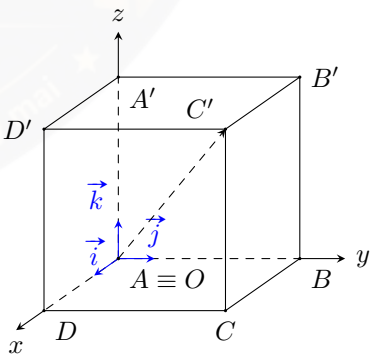
a) Mặt phẳng $(ABCD)$ vuông góc trục Oz.

b) Trục $Oy \perp B'D'$.

c) Tọa độ điểm B, D lần lượt là $\left(-\frac{b}{2}; 0; 0\right)$, $\left(\frac{b}{2}; 0; 0\right)$.

d) Tọa độ điểm C', D' lần lượt là $\left(0; \frac{a}{2}; c\right)$, $\left(-\frac{b}{2}; 0; c\right)$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O và các đỉnh D, B, A' có toạ độ lần lượt là $(2; 0; 0)$, $(0; 4; 0)$, $(0; 0; 3)$ (Hình vẽ).
Xác định toạ độ của các đỉnh còn lại của hình hộp chữ nhật.



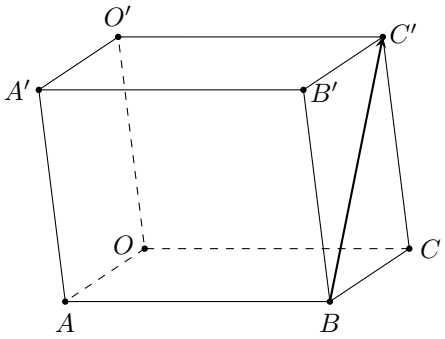
a) $C(2; 4; 0)$

b) $D'(3; 0; 2)$

c) $C'(0; 4; 3)$

d) $B'(0; 4; 3)$

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ có $A(1;1;-1)$, $B(0;3;0)$, $\overrightarrow{BC'} = (2;-6;6)$. Gọi H, K lần lượt là trọng tâm của tam giác $OA'O'$ và $CB'C'$.



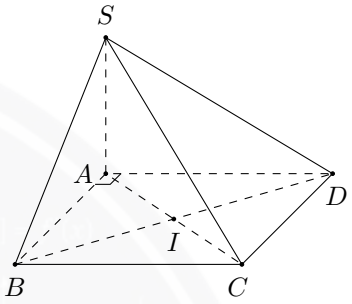
a) Tọa độ điểm C' là $(2;-3;6)$

b) Tọa độ điểm O' là $(3;-5;5)$

c) Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB'} = (-2;3;-6)$

d) Tọa độ vectơ $\overrightarrow{HK} = (-1;2;-1)$

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 1$, $AD = 2$, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 3$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như sau: Gốc tọa độ O trùng với điểm A, các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i}$, $\vec{j}$ và $\vec{k}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau



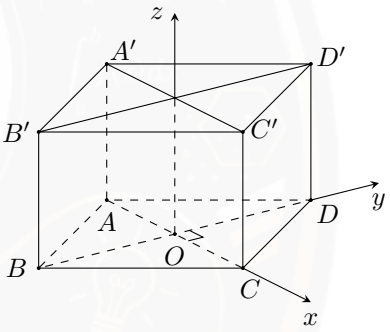
a) Tọa độ $D(0;2;0)$

b) Tọa độ $C(1;2;3)$

c) Tọa độ $S(2;0;0)$

d) Tọa độ $I(1;1;0)$

Bài 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



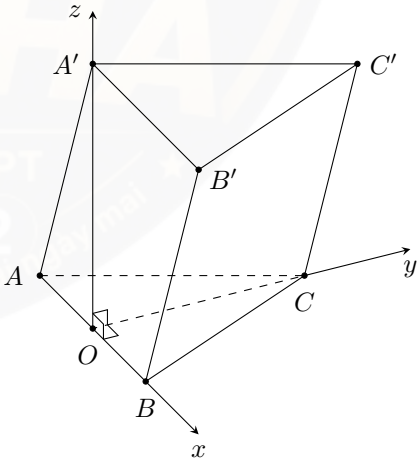
a) Tọa độ $A(-1;0;0)$

b) $\overrightarrow{AC'} = (2\sqrt{2};0;2)$

c) Tọa độ $D'(0;\sqrt{2};2)$

d) $\overrightarrow{BD'} = (0;0;2)$

Bài 6. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2 như hình vẽ. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trung điểm cạnh AB, góc $\widehat{A'AO} = 60°$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với trung điểm của đoạn BC), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Tọa độ điểm $A(-1;0;0)$

b) Tọa độ điểm $C(0;\sqrt{3};0)$

c) Tọa độ điểm $A'(0;-1;\sqrt{3})$

d) Tọa độ điểm $C'\left(1;\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (-2;1;-3)$, $\vec{b} = (-1;-3;2)$ và điểm $A(4;6;-3)$.

a) Tọa độ vectơ $\vec{a} - 2\vec{b} = (0;1;-1)$.

b) Tọa độ điểm $B(2;7;-6)$ thì $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

c) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương hướng.

d) Góc giữa vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 120°.

Bài 8. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (-1;1;0)$, $\vec{b} = (1;1;0)$, $\vec{c} = (1;1;1)$.

a) Độ dài vectơ $\vec{a}$ bằng $\sqrt{2}$.

b) Vectơ $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{a}$.

c) Vectơ $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{c}$.

d) Tọa độ vectơ $3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ bằng $(-2;4;-1)$.

Bài 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết rằng các điểm có tọa độ $A(2;1;0)$, $C(0;3;0)$, $C'(-1;2;1)$, $D'(0;-2;0)$.

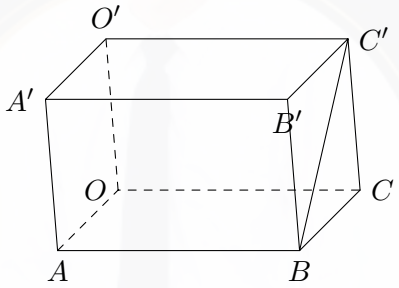
a) Tọa độ các điểm A', B' là $A'(1;0;-1)$, $B'(0;4;2)$.

b) Tọa độ các điểm B, D là $B(1;5;1)$, $D(1;-1;-1)$.

c) Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$.

d) Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{B'D} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Bài 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ có $A(1;1;-1)$, $B(0;3;0)$ và $\overrightarrow{BC'} = (2;-6;6)$.



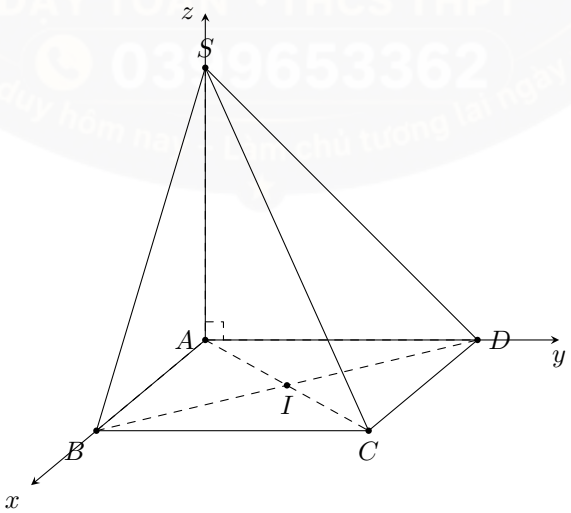
a) $C'(2;3;6)$.

b) $O'(3;-5;-5)$.

c) $\overrightarrow{AB'} = (2;-3;6)$.

d) Gọi H, K lần lượt là trọng tâm của tam giác $OA'O'$ và $CB'C'$. Khi đó $\overrightarrow{HK} = (1;2;1)$.

Bài 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I và $AB = 1, AD = 2$. Cạnh SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 3$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như sau: Gốc tọa độ O trùng với điểm A, các véc tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i}$, $\vec{j}$ và $\vec{k}$.



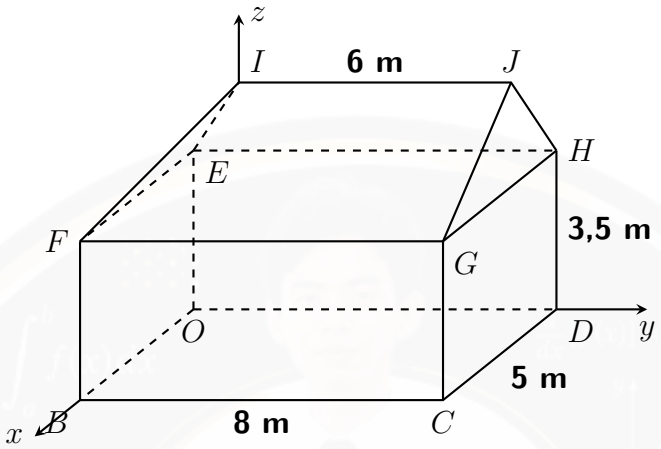
a) $D(2;0;0)$.

b) $\overrightarrow{OC} = (2;2;0)$.

c) $\overrightarrow{SC} = (2;2;-3)$.

d) $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}$.

Bài 12. Một ngôi nhà có hình dáng và kích thước được gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục là $1m$).



Biết rằng các bức tường và nền nhà đều là các hình chữ nhật; hai bên mái nhà $IJGF, IJHE$ là các hình thang cân và có diện tích bằng nhau; độ dốc của mái nhà số đo góc nhị diện $[J, FG, H]$ là $45°$.

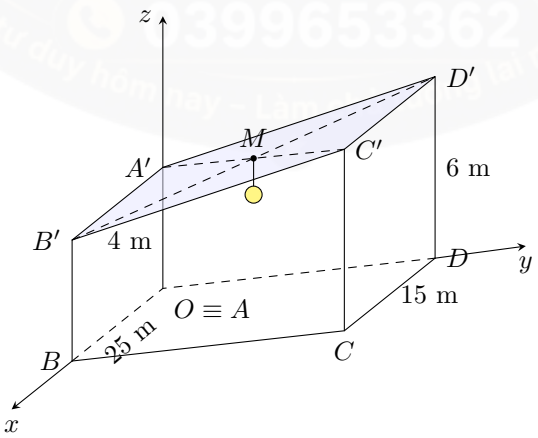
a) $B(5;0;0)$.

b) $\overrightarrow{BD} = (5;8;0)$.

c) $G(5;8;0)$.

d) Chiều cao ngôi nhà là $7m$.

Bài 13. Để chuẩn bị cho ngày hội thao, ban tổ chức trường Nguyễn Văn Trỗi dựng bốn chiếc cột AA', BB', CC', DD' lần lượt tại bốn góc của một sân bóng hình chữ nhật $ABCD$ với kích thước là $CD = 15m, AB = 25m$. Bốn chiếc cột AA', BB', CC', DD' vuông góc với mặt sân và có chiều cao là $AA' = BB' = 4m, CC' = DD' = 6m$. Một tấm bạt hình chữ nhật $A'B'C'D'$ được căng phẳng với bốn góc được cố định vào đầu bốn cột như hình vẽ. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét) sao cho $O \equiv A$ và các trục Ox, Oy, Oz trùng với AB, AD, AA' như hình vẽ bên dưới.



a) $A'(0;0;4)$.

b) $\overrightarrow{A'C'} = (15;25;2)$.

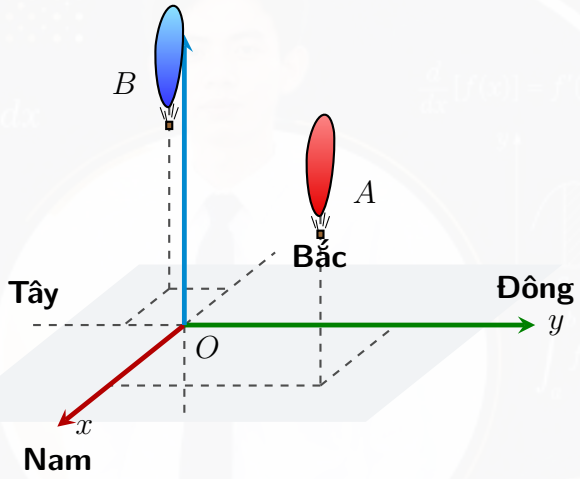
» Sưu tầm và Biên soạn: Lê Minh Kha 0399653362

c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DD'}=(15;25;0)$.

d) Ban tổ chức trường Nguyễn Văn Trỗi muốn treo một bóng đèn công suất lớn nằm ở chính giữa tấm bạt hình chữ nhật $A'B'C'D'$. Biết bóng đèn cách tại vị trí treo $0,4m$. Khi đó bóng đèn cách mặt sàn của sân là $4,6m$.

Bài 14. Hai chiếc khinh khí cầu A và B bay lên từ cùng một địa điểm. Sau một khoảng thời gian bay, chiếc A nằm cách điểm xuất phát 2 km về phía Nam và 1 km về phía Đông, đồng thời cách mặt đất $0,5$ km. Chiếc B nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía Bắc và $1,5$ km về phía Tây, đồng thời cách mặt đất $0,8$ km.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét.



a) $A\left(2;1;\dfrac{1}{2}\right)$.

b) $\overrightarrow{OB}=\left(-1;-\dfrac{3}{2};-\dfrac{4}{5}\right)$.

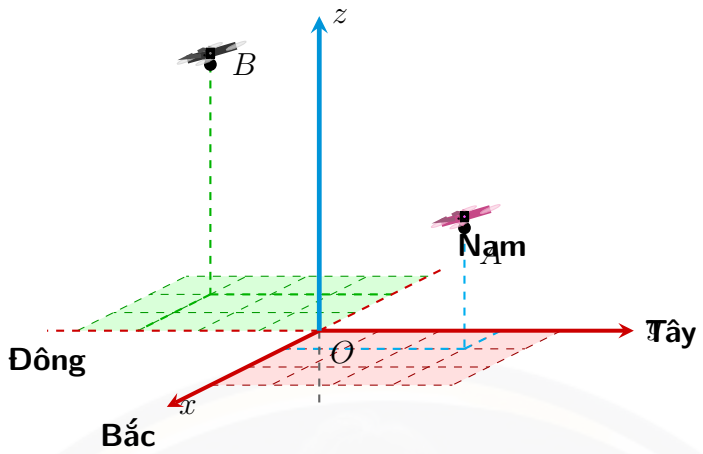
c) $\overrightarrow{AB}=-3\vec{i}+\dfrac{5}{2}\vec{j}+\dfrac{3}{10}\vec{k}$.

d) Hình chiếu của tọa độ chiếc khinh khí cầu B trên mặt đất là $(a;b;c)$, khi đó $a+b+c=2,5$.

Bài 15. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc $20(km)$ và về phía Tây $10(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,7(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông $30(km)$ và về phía Nam $25(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Xác định khoảng cách giữa hai chiếc máy bay (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị, đơn vị đo: km).

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng

thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



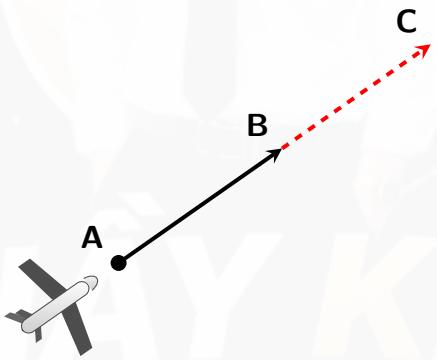
a) Chiếc máy bay thứ nhất có tọa độ $(10; 20; 0,7)$.

b) Chiếc máy bay thứ hai có tọa độ $(-30; -25; 1)$.

c) Tọa độ hình chiếu của chiếc máy bay thứ nhất trên trục Oy là $(0; 20; 0)$.

d) Tọa độ hình chiếu của chiếc máy bay thứ hai trên mặt đất là $(-30; -25; 0)$.

Bài 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo lấy theo km), một Radar phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với tốc độ và hướng không đổi từ điểm $A(920; 740; 5,2)$ đến điểm $B(980; 800; 6,8)$ trong 12 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên tốc độ và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 12 phút tiếp theo là $C(x; y; z)$.



a) $\overrightarrow{OA} = (920; 740; 5,2)$.

b) $\overrightarrow{AB} = (60; 60; -1,6)$.

c) $\overrightarrow{BC} = 60\vec{i} + 60\vec{j} - 1,6\vec{k}$.

d) $x + y + 10z = 1980$.

3) Câu trả lời ngắn

Bài 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các véc tơ $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = (m; 2; m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 1; -2)$, $B(2; -3; 5)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA = 2MB$, tọa độ điểm M là $(a; b; c)$. Khi đó $a + 3b + c$ bằng?

Bài 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(4; 2; 1)$, $B(-2; -1; 4)$. Tìm được tọa độ điểm $M(a; b; c)$ thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$. Khi đó $a + b + c =$?

Bài 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m -$

1; 2). Tìm m để tam giác MNP vuông tại N.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có điểm B trùng với gốc tọa độ O và tọa độ các điểm $A(3;0;0)$, $D(3;1;0)$, $B'(0;0;5)$. Gọi tọa độ $C'(m;n;p)$, khi đó $m^2+n^2+p^2$ bằng bao nhiêu?

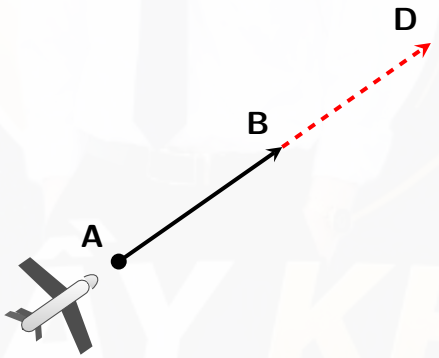
Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(0;1;-2)$, $B(x;y;z)$, $C(0;-2;1)$, $D(1;0;-1)$. Tính giá trị biểu thức $T=x+y+z$.

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Gọi tọa độ $A'(a;b;c)$ là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxz). Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c$.

Bài 8. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;1;4)$. Gọi H là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oyz) và K là điểm đối xứng với A qua trục Ox. Biết $\overrightarrow{HK}=(a;b;c)$, khi đó giá trị biểu thức $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

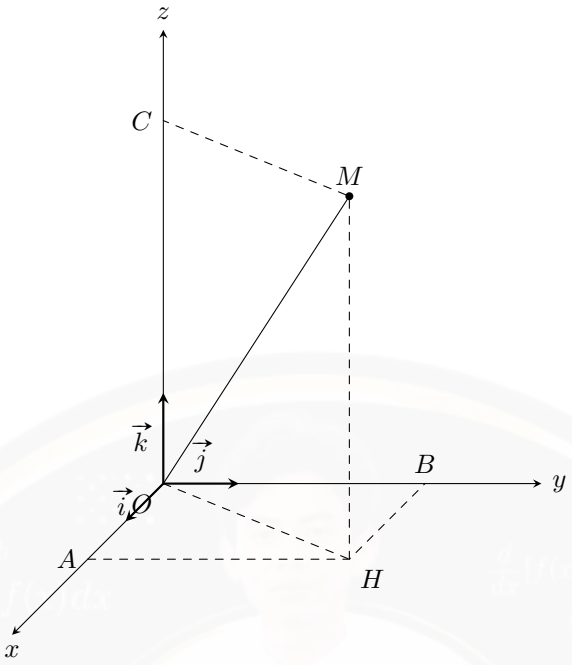
Bài 9. Cho tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau $OA=3$ và $OB=OC=2$. Gọi P là trung điểm của BC. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo được lấy 1 đơn vị) có các điểm A, B, C lần lượt thuộc các tia Oz, Oy, Ox như hình vẽ. Biết $\overrightarrow{AP}=(a;b;c)$, khi đó giá trị biểu thức $2026a-2027b+c$ bằng bao nhiêu?

Bài 10. Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo km), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;8)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo $D(x;y;z)$. Khi đó $x+y+z=$?

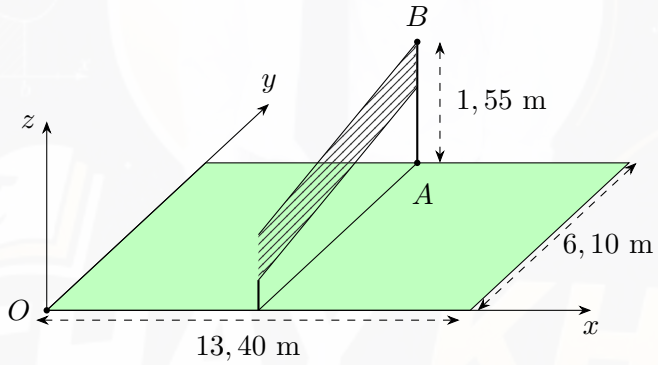


Bài 11. Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như hình vẽ. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy). Biết $OM=80$; $\left(\vec{i},\overrightarrow{OH}\right)=60°$; $\left(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OM}\right)=45°$. Gọi tọa độ điểm $M(a;b;c)$, khi đó giá trị của $a\sqrt{2}+b\sqrt{6}+c\sqrt{2}$

bằng bao nhiêu?



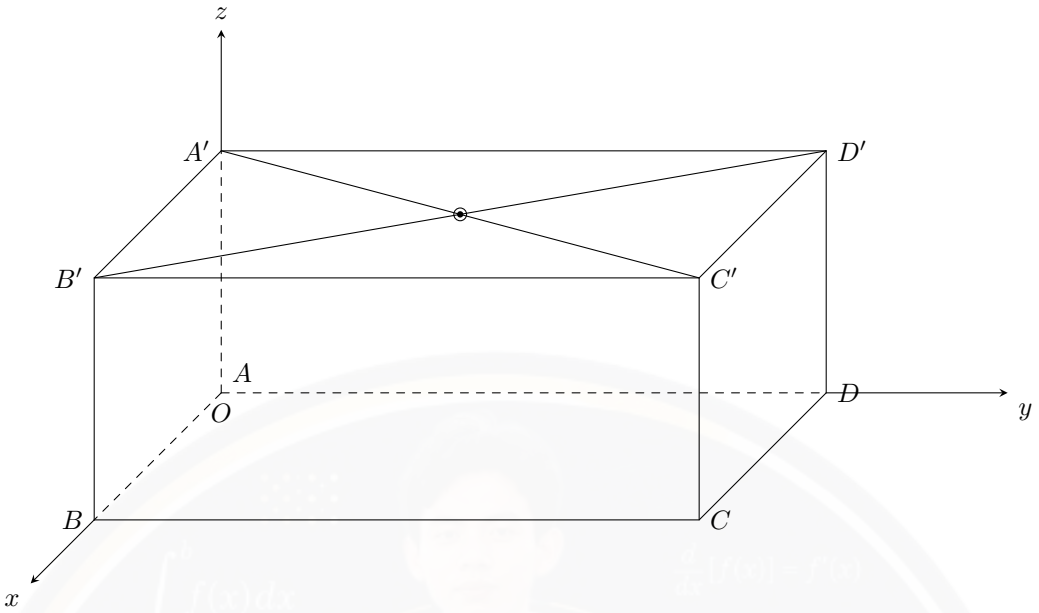
Bài 12. Hình bên mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên dưới (đơn vị trên mỗi trục là mét). Giả sử AB là một trụ cầu lông để căng lưới và có toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $(a;b;c)$. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+100c$.



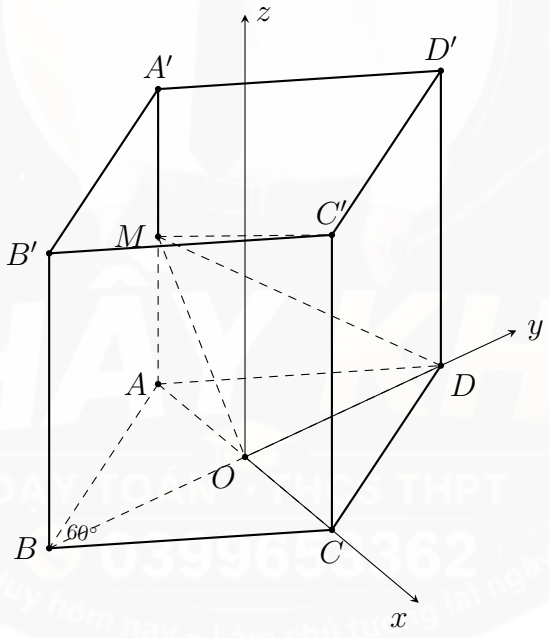
Bài 13. Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 10 m, chiều rộng là 6 m và chiều cao là 4 m. Một bóng đèn công suất lớn được treo trên trần nhà sao cho là điểm chính giữa của phòng học. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo được lấy theo mét) có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn. Gọi $I(a;b;c)$ là tọa độ của điểm treo

» Sưu tầm và Biên soạn: Lê Minh Kha 0399653362

quạt. Tính giá trị $a+b+c$.

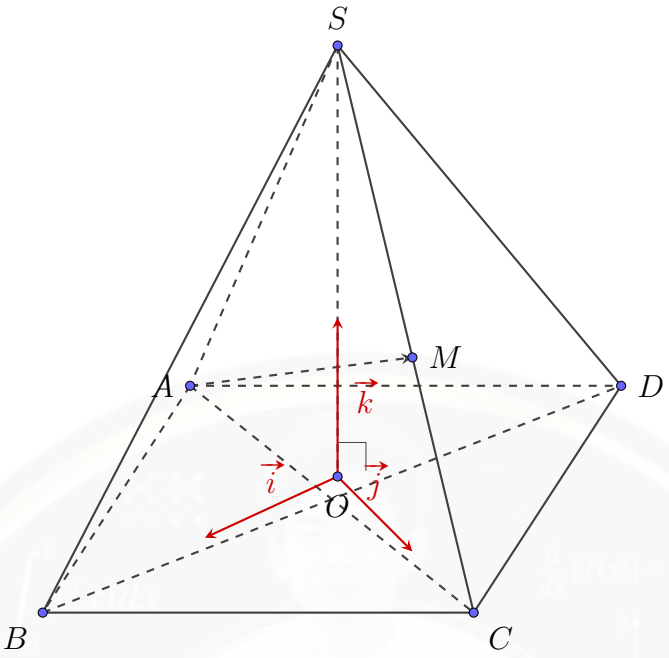


Bài 14. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O có cạnh bằng 1 và $AA'=1$, $\widehat{ABC}=60^\circ$. Gọi M là trung điểm của cạnh AA'. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo được lấy 1 đơn vị) có C, D lần lượt thuộc các tia Ox, Oy và trục Oz song song AA' như hình vẽ. Biết $\overrightarrow{MC'}=(a;b;c)$, khi đó giá trị biểu thức $2026a-2027b+2c$ bằng bao nhiêu?



Bài 15. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng 5, giao điểm hai đường chéo AC và BD trùng với gốc O. Các vectơ $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ và $OA=OS=4$ như hình bên dưới. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AM}=(a;b;c)$ với M là

trung điểm của cạnh SC, khi đó $a+b+c$ bằng bao nhiêu?



THAY KHA
DẠY TOÁN - THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay - Làm chủ tương lai ngày mai

IV. LỜI GIẢI CHI TIẾT

1) Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;5)$ lên trục Ox có tọa độ là

Ⓐ $(0;2;0)$. Ⓑ $(0;0;5)$. Ⓒ $(1;0;0)$. Ⓓ $(0;2;5)$.

Hướng dẫn giải. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;5)$ lên trục Ox có tọa độ là $(1;0;0)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tọa độ hình chiếu của điểm $A(-2;-1;3)$ trên mặt phẳng Oyz là

Ⓐ $(0;-1;0)$. Ⓑ $(-2;0;0)$. Ⓒ $(0;-1;3)$. Ⓓ $(-2;-1;0)$.

Hướng dẫn giải. Tọa độ hình chiếu của điểm $A(-2;-1;3)$ trên mặt phẳng Oyz là $(0;-1;3)$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (Oxy). Tọa độ của H là

Ⓐ $H(-1;-2;3)$. Ⓑ $H(0;0;3)$.
Ⓒ $H(1;0;0)$. Ⓓ $H(1;2;0)$.

Hướng dẫn giải. Tọa độ điểm H là $H(1;2;0)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;3;2)$ và $\vec{b}=(1;1;-1)$. Vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ có tọa độ là

Ⓐ $(3;4;1)$. Ⓑ $(-1;-2;3)$. Ⓒ $(3;5;1)$. Ⓓ $(1;2;3)$.

Hướng dẫn giải. Vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ có tọa độ $(1;2;3)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oxz).

Ⓐ $(1;0;1)$. Ⓑ $(0;1;0)$. Ⓒ $(1;1;0)$. Ⓓ $(0;1;1)$.

Hướng dẫn giải. Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oxz) là $H(1;0;1)$.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Tọa độ của $\vec{a}$ là

Ⓐ $(-2;-1;-3)$. Ⓑ $(-3;2;-1)$.
Ⓒ $(2;-3;-1)$. Ⓓ $(-1;2;-3)$.

Hướng dẫn giải. Do đó, $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}=(-1;2;-3)$.

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{a}(1;1;-2)$, $\vec{b}=(-2;1;4)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u}=\vec{a}-2\vec{b}$.

Ⓐ $(5;-1;-10)$. Ⓑ $(0;3;0)$.
Ⓒ $(-3;3;6)$. Ⓓ $(5;-1;10)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\begin{cases}\vec{a}(1;1;-2)\\ \vec{b}=(-2;1;4)\end{cases}$ $\Rightarrow \vec{u}=\vec{a}-2\vec{b}=(5;-1;-10)$.

Câu 8. Cho điểm $A(3;-1;1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là

điểm

Ⓐ $M(3;0;0)$. Ⓑ $N(0;-1;1)$. Ⓒ $P(0;-1;0)$. Ⓓ $Q(0;0;1)$.

Hướng dẫn giải. Ta có hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm $N(0;-1;1)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;5)$ trên mặt Oxz có tọa độ là

Ⓐ $(0;2;5)$. Ⓑ $(0;2;0)$. Ⓒ $(1;0;5)$. Ⓓ $(0;0;5)$.

Hướng dẫn giải. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;5)$ trên mặt Oxz có tọa độ là $(1;0;5)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;-2;1)$, $\vec{b}=(0;1;3)$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}+\vec{b}$ là

Ⓐ $(2;-3;2)$. Ⓑ $\left(1;-\dfrac{1}{2};2\right)$. Ⓒ $(2;-1;4)$. Ⓓ $(-2;3;2)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{a}+\vec{b}=(2;-1;4)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$ và $B(2;1;-4)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ

Ⓐ $(3;0;-2)$. Ⓑ $(-1;-2;6)$. Ⓒ $(1;0;-6)$. Ⓓ $(1;2;-6)$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2-1;1-(-1);-4-2)=(1;2;-6)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;3)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

Ⓐ $(1;0;3)$. Ⓑ $(1;0;0)$. Ⓒ $(1;-2;0)$. Ⓓ $(0;-2;3)$.

Hướng dẫn giải. Để tìm tọa độ hình chiếu của điểm $A(1;-2;3)$ lên mặt phẳng (Oyz) ta chỉ cần giữ nguyên tung độ và cao độ, cho hoành độ bằng 0.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ là $\vec{u}=(2;1;-1)$ và $\vec{v}=(1;3;1)$. Tọa độ của vectơ $(\vec{u}+2\vec{v})$ tương ứng là

Ⓐ $(3;4;0)$. Ⓑ $(1;-2;-2)$. Ⓒ $(4;7;1)$. Ⓓ $(5;5;-1)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{u}+2\vec{v}=(4;7;1)$.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;0)$ và điểm $B(3;1;1)$. Tọa độ điểm đối xứng với A qua B là

Ⓐ $(1;-2;-4)$. Ⓑ $(0;3;-1)$. Ⓒ $(4;3;2)$. Ⓓ $(0;-1;3)$.

Hướng dẫn giải. Gọi $A'(x;y;z)$ là điểm đối xứng với A qua $B \Leftrightarrow B$ là trung điểm đoạn thẳng

$$AA' \Leftrightarrow \begin{cases} 3=\dfrac{2+x}{2} \\ 1=\dfrac{-1+y}{2} \\ 1=\dfrac{0+z}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases}.$$ Suy ra $A'(4;3;2)$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho biểu diễn của vectơ $\vec{a}$ qua các vectơ đơn vị là $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{k}-3\vec{j}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là

Ⓐ $(2;-3;1)$. Ⓑ $(1;-3;2)$. Ⓒ $(2;1;-3)$. Ⓓ $(1;2;-3)$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{k}-3\vec{j}=2\vec{i}-3\vec{j}+1.\vec{k}\Rightarrow\vec{a}=(2;-3;1)$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}+\vec{j}$. Tọa độ điểm M là

Ⓐ $M=(0;2;1)$. Ⓑ $M=(1;2;0)$.
Ⓒ $M=(2;1;0)$. Ⓓ $M=(2;0;1)$.

Hướng dẫn giải. Vì điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}+\vec{j}$ nên tọa độ điểm $M=(2;1;0)$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Tọa độ của vecto $\vec{a}$ là

Ⓐ $(-1;2;-3)$. Ⓑ $(2;-3;-1)$. Ⓒ $(2;-1;-3)$. Ⓓ $(-3;2;-1)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\Rightarrow\vec{a}=(x;y;z)$. Với $\vec{a}=-1\cdot\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$, ta suy ra tọa độ của $\vec{a}$ là $(-1;2;-3)$. Đáp án A.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, giả sử $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, khi đó tọa độ véc tơ $\vec{u}$ là

Ⓐ $(-2;3;1)$. Ⓑ $(2;3;-1)$. Ⓒ $(2;-3;-1)$. Ⓓ $(2;3;1)$.

Hướng dẫn giải. $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}-1\vec{k}\Rightarrow\vec{u}=(2;3;-1)$. Đáp án B.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Tọa độ của vecto $\vec{a}$ là:

Ⓐ $\vec{a}(-1;2;-3)$. Ⓑ $\vec{a}(2;-3;-1)$.
Ⓒ $\vec{a}(-3;2;-1)$. Ⓓ $\vec{a}(2;-1;-3)$.

Hướng dẫn giải. $\vec{a}=-1\cdot\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}\Rightarrow\vec{a}=(-1;2;-3)$. Đáp án A.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}+\vec{j}$. Tọa độ điểm M là

Ⓐ $M=(0;2;1)$. Ⓑ $M=(1;2;0)$.
Ⓒ $M=(2;1;0)$. Ⓓ $M=(2;0;1)$.

Hướng dẫn giải. $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}+1\vec{j}+0\vec{k}\Rightarrow M(2;1;0)$. Đáp án C.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA}=6\vec{j}+4\vec{i}-3\vec{k}$. Tọa độ của điểm A là

Ⓐ $(4;6;-3)$. Ⓑ $(-4;-6;3)$. Ⓒ $(-6;-4;3)$. Ⓓ $(6;4;-3)$.

Hướng dẫn giải. $\overrightarrow{OA}=4\vec{i}+6\vec{j}-3\vec{k}\Rightarrow A(4;6;-3)$. Đáp án A.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, với $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ là các vecto đơn vị trên trục Ox,Oy,Oz tương ứng và vecto $\vec{a}=(1;0;1)$. Kết quả nào sau đây đúng?

Ⓐ $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. Ⓑ $\vec{a}=\vec{j}+\vec{k}$.
Ⓒ $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$. Ⓓ $\vec{a}=\vec{i}+\vec{k}$.

Hướng dẫn giải. $\vec{a}=(1;0;1)\Rightarrow\vec{a}=1\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}+1\cdot\vec{k}=\vec{i}+\vec{k}$. Đáp án D.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho các vecto $\overrightarrow{OA}=-\vec{i}+\vec{k}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$. Khi đó tọa độ vecto $\overrightarrow{AB}$ là

Ⓐ $(-2;1;-1)$. Ⓑ $(2;-1;1)$. Ⓒ $(0;-1;3)$. Ⓓ $(0;-1;-1)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $A(-1;0;1)$ và $B(1;-1;2)$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (1-(-1); -1-0; 2-1) = (2; -1; 1)$. Đáp án B.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho các véc tơ $\overrightarrow{OA} = -\vec{i} + \vec{j}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Khi đó tọa độ véc tơ $\overrightarrow{AB}$ là?

Ⓐ $(2; 2; -2)$. Ⓑ $(2; 1; -3)$. Ⓒ $(0; 0; -1)$. Ⓓ $(2; 0; -2)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $A(-1; 1; 0)$ và $B(1; 1; -2)$.

$\overrightarrow{AB} = (1-(-1); 1-1; -2-0) = (2; 0; -2)$. Đáp án D.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(x; y; z)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

Ⓐ Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxz) thì $M'(x; y; -z)$..
Ⓑ Nếu M' đối xứng với M qua Oy thì $M'(x; y; -z)$..
Ⓒ Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxy) thì $M'(x; y; -z)$..
Ⓓ Nếu M' đối xứng với M qua gốc tọa độ O thì $M'(2x; 2y; 2z)$..

Hướng dẫn giải. Điểm đối xứng với $M(x; y; z)$ qua mặt phẳng (Oxy) là điểm $M'(x; y; -z)$. Đáp án C.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 5; 2)$ trên trục Ox có tọa độ là

Ⓐ $(0; 5; 2)$. Ⓑ $(0; 5; 0)$. Ⓒ $(3; 0; 0)$. Ⓓ $(0; 0; 2)$.

Hướng dẫn giải. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(x; y; z)$ trên trục Ox là điểm có tọa độ $(x; 0; 0)$.

Áp dụng cho $A(3; 5; 2)$, ta có hình chiếu là $(3; 0; 0)$. Đáp án C.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; 1; -1)$ trên trục Oy có tọa độ là

Ⓐ $(3; 0; -1)$. Ⓑ $(0; 1; 0)$. Ⓒ $(3; 0; 0)$. Ⓓ $(0; 0; -1)$.

Hướng dẫn giải. Hình chiếu vuông góc của điểm $M(x; y; z)$ trên trục Oy là điểm có tọa độ $(0; y; 0)$.

Áp dụng cho $M(3; 1; -1)$, ta có hình chiếu là $(0; 1; 0)$. Đáp án B.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; -1; 1)$ trên trục Oz có tọa độ là

Ⓐ $(3; -1; 0)$. Ⓑ $(0; 0; 1)$. Ⓒ $(0; -1; 0)$. Ⓓ $(3; 0; 0)$.

Hướng dẫn giải. Hình chiếu vuông góc của điểm $M(x; y; z)$ trên trục Oz là điểm có tọa độ $(0; 0; z)$.

Áp dụng cho $M(3; -1; 1)$, ta có hình chiếu là $(0; 0; 1)$. Đáp án B.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

Ⓐ $(0; 2; -3)$. Ⓑ $(1; 0; -3)$. Ⓒ $(1; 2; 0)$. Ⓓ $(1; 0; 0)$.

Hướng dẫn giải. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(x; y; z)$ lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là $(x; y; 0)$.

Với $A(1;2;-3)$, hình chiếu là $(1;2;0)$. Đáp án C.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên mặt phẳng (Ozx) có tọa độ là

Ⓐ $(0;1;0)$. Ⓑ $(2;1;0)$. Ⓒ $(0;1;-1)$. Ⓓ $(2;0;-1)$.

Hướng dẫn giải. Hình chiếu vuông góc của điểm $M(x;y;z)$ trên mặt phẳng (Ozx) có tọa độ là $(x;0;z)$.

Với $M(2;1;-1)$, hình chiếu là $(2;0;-1)$. Đáp án D.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

Ⓐ $M(3;0;0)$. Ⓑ $N(0;-1;1)$. Ⓒ $P(0;-1;0)$. Ⓓ $Q(0;0;1)$.

Hướng dẫn giải. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(x;y;z)$ trên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là $(0;y;z)$.

Với $A(3;-1;1)$, hình chiếu là $N(0;-1;1)$. Đáp án B.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng tọa độ (Oyz)?

Ⓐ $M(3;4;0)$. Ⓑ $P(-2;0;3)$. Ⓒ $Q(2;0;0)$. Ⓓ $N(0;4;-1)$.

Hướng dẫn giải. Điểm thuộc mặt phẳng (Oyz) phải có hoành độ bằng 0.

Trong các điểm trên, chỉ có $N(0;4;-1)$ thỏa mãn. Đáp án D.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho $M(4;5;6)$. Hình chiếu của M xuống mặt phẳng (Oyz) là M'. Xác định tọa độ M'.

Ⓐ $M'(4;5;0)$. Ⓑ $M'(4;0;6)$. Ⓒ $M'(4;0;0)$. Ⓓ $M'(0;5;6)$.

Hướng dẫn giải. Hình chiếu của $M(x;y;z)$ lên mặt phẳng (Oyz) là $M'(0;y;z)$.

Vậy $M'(0;5;6)$. Đáp án D.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2025;2026;-2027)$. Tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxy) là:

Ⓐ $A'(-2025;-2026;2027)$. Ⓑ $A'(-2025;-2026;-2027)$.
Ⓒ $A'(-2025;2026;-2027)$. Ⓓ $A'(2025;2026;2027)$.

Hướng dẫn giải. Điểm đối xứng với $A(x;y;z)$ qua mặt phẳng (Oxy) là điểm $A'(x;y;-z)$.

Với $A(2025;2026;-2027)$, ta có $A'(2025;2026;2027)$. Đáp án D.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-5;2;0)$. Tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oyz) là:

Ⓐ $A'(5;2;0)$. Ⓑ $A'(-5;-2;0)$.
Ⓒ $A'(5;-2;0)$. Ⓓ $A'(5;2;1)$.

Hướng dẫn giải. Điểm đối xứng với $A(x;y;z)$ qua mặt phẳng (Oyz) là điểm $A'(-x;y;z)$.

Với $A(-5;2;0)$, ta có $A'(5;2;0)$. Đáp án A.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{ON} = -2\vec{i} + 3\vec{k}$. Tìm tọa độ điểm K là hình chiếu của điểm N trên trục Ox.

Ⓐ $K(-2;0;0)$. Ⓑ $K(2;0;0)$.

Ⓒ $K(-2;0;-3)$. Ⓓ $K(2;0;3)$.

Hướng dẫn giải. Từ giả thiết $\overrightarrow{ON} = -2\vec{i} + 3\vec{k}$ ta có $N(-2;0;3)$.
Hình chiếu của điểm $N(x;y;z)$ trên trục Ox là điểm $K(x;0;0)$.
Do đó $K(-2;0;0)$. Đáp án A.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$. Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu của điểm M lên mặt phẳng (Oxz).

Ⓐ $H(0;3;-4)$. Ⓑ $H(-2;-3;4)$.
Ⓒ $H(2;3;0)$. Ⓓ $H(2;0;-4)$.

Hướng dẫn giải. Từ $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ ta có $M(2;3;-4)$.
Hình chiếu của điểm $M(x;y;z)$ lên mặt phẳng (Oxz) là điểm $H(x;0;z)$.
Vậy $H(2;0;-4)$. Đáp án D.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;3;5)$. Tọa độ của vecto $\overrightarrow{OA}$ là:

Ⓐ $(-2;3;5)$. Ⓑ $(2;-3;5)$. Ⓒ $(-2;-3;5)$. Ⓓ $(2;-3;-5)$.

Hướng dẫn giải. Tọa độ của vecto $\overrightarrow{OA}$ chính là tọa độ của điểm A. Vậy $\overrightarrow{OA} = (-2;3;5)$. Đáp án A.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$ và $B(2;1;-4)$. Vecto $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ

Ⓐ $(3;0;-2)$. Ⓑ $(-1;-2;6)$. Ⓒ $(1;0;-6)$. Ⓓ $(1;2;-6)$.

Hướng dẫn giải. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (2-1;1-(-1);-4-2) = (1;2;-6)$.
Đáp án D.

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $\overrightarrow{AB} = (1;3;1)$ thì tọa độ của điểm B là:

Ⓐ $B(2;5;0)$. Ⓑ $B(0;-1;-2)$.
Ⓒ $B(0;1;2)$. Ⓓ $B(-2;-5;0)$.

Hướng dẫn giải. $\overrightarrow{AB} = B - A \Rightarrow B = A + \overrightarrow{AB} = (1+1;2+3;-1+1) = (2;5;0)$. Đáp án A.

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;0;1)$. Tìm tọa độ điểm C thỏa mãn $\overrightarrow{AC} = (0;6;1)$

Ⓐ $C(-1;6;-1)$. Ⓑ $C(1;6;2)$.
Ⓒ $C(1;6;0)$. Ⓓ $C(-1;-6;-2)$.

Hướng dẫn giải. $\overrightarrow{AC} = C - A \Rightarrow C = A + \overrightarrow{AC} = (1+0;0+6;1+1) = (1;6;2)$. Đáp án B.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;2;-3)$, N và vecto $\vec{v} = (2;-1;-2)$ thỏa mãn điều kiện $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$. Tọa độ của điểm N là

Ⓐ $(-1;3;-1)$. Ⓑ $(3;1;-5)$. Ⓒ $(1;-3;1)$. Ⓓ $(-3;-1;5)$.

Hướng dẫn giải. $\overrightarrow{MN} = \vec{v} \Rightarrow N - M = \vec{v} \Rightarrow N = M + \vec{v} = (1+2;2-1;-3-2) = (3;1;-5)$.
Đáp án B.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho véc tơ $\vec{a} = (-3;2;1)$ và điểm $A(4;6;-3)$. Tọa độ điểm B thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ là:

Ⓐ $(-1;-8;2)$. Ⓑ $(7;4;-4)$. Ⓒ $(1;8;-2)$. Ⓓ $(-7;-4;4)$.

Hướng dẫn giải. $\overrightarrow{AB} = \vec{a} \Rightarrow B - A = \vec{a} \Rightarrow B = A + \vec{a} = (4-3; 6+2; -3+1) = (1; 8; -2)$. Đáp án C.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, gọi M' là hình chiếu vuông góc của điểm $M(1; 3; -2)$ trên trục Oz. Khi đó vecto $\overrightarrow{MM'}$ có tọa độ là

Ⓐ $(1; 3; 0)$. Ⓑ $(0; 0; 2)$. Ⓒ $(-1; -3; 0)$. Ⓓ $(0; 0; -2)$.

Hướng dẫn giải. Hình chiếu của $M(1; 3; -2)$ trên Oz là $M'(0; 0; -2)$.

$\overrightarrow{MM'} = (0-1; 0-3; -2-(-2)) = (-1; -3; 0)$. Đáp án C.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OM} = (1; 5; 2)$, $\overrightarrow{ON} = (3; 7; -4)$, $K(-1; 3; 1)$. Gọi P là điểm đối xứng với M qua N. Tìm tọa độ vecto $\overrightarrow{KP}$.

Ⓐ $\overrightarrow{KP} = (6; 6; -11)$. Ⓑ $\overrightarrow{KP} = (8; 6; -11)$.
Ⓒ $\overrightarrow{KP} = (6; 6; -4)$. Ⓓ $\overrightarrow{KP} = (3; 3; -2)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $M(1; 5; 2)$ và $N(3; 7; -4)$.

Vì P đối xứng với M qua N nên N là trung điểm MP: $x_P = 2x_N - x_M = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ $y_P = 2y_N - y_M = 2 \cdot 7 - 5 = 9$ $z_P = 2z_N - z_M = 2 \cdot (-4) - 2 = -10$.

Vậy $P(5; 9; -10)$.

$\overrightarrow{KP} = (5-(-1); 9-3; -10-1) = (6; 6; -11)$. Đáp án A.

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình bình hành $ABCD$ và các đỉnh có tọa độ lần lượt là $A(3; 1; 2), B(1; 0; 1), C(2; 3; 0)$. Tọa độ đỉnh D là

Ⓐ $D(1; 1; 0)$. Ⓑ $D(0; 2; -1)$. Ⓒ $D(4; 4; 1)$. Ⓓ $D(1; 3; -1)$.

Hướng dẫn giải. Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BC} = (2-1; 3-0; 0-1) = (1; 3; -1)$.

$D = A + \overrightarrow{BC} = (3+1; 1+3; 2-1) = (4; 4; 1)$. Đáp án C.

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-3; 1; 2), B(-2; 4; -1), C(1; -3; 3)$. Tọa độ điểm D là

Ⓐ $(0; -6; 6)$. Ⓑ $(-6; 7; -2)$. Ⓒ $(2; 0; 0)$. Ⓓ $(-4; 2; 5)$.

Hướng dẫn giải. Trong hình bình hành $ABCD$, ta có $D = A + C - B$. $D = (-3+1-(-2); 1-3-4; 2+3-(-1)) = (0; -6; 6)$. Đáp án A.

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 2; -1), B(2; -1; 3), C(-3; 5; 1)$. Tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành là

Ⓐ $(-2; 8; -3)$. Ⓑ $(-4; 8; -3)$. Ⓒ $(-4; 8; -5)$. Ⓓ $(-2; 2; 5)$.

Hướng dẫn giải. $ABCD$ là hình bình hành nên $D = A + C - B = (1-3-2; 2+5-(-1); -1+1-3) = (-4; 8; -3)$. Đáp án B.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ tâm I có tọa độ các đỉnh $B(3; 1; 0)$, $D(0; 4; -6)$. Tìm tọa độ điểm I.

Ⓐ $I\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; -3\right)$. Ⓑ $I(3; 5; -6)$.
Ⓒ $I\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -3\right)$. Ⓓ $I(-3; 5; -6)$.

Hướng dẫn giải. Tâm I của hình bình hành $ABCD$ là trung điểm của đường chéo BD.

$I = \left(\dfrac{3+0}{2}; \dfrac{1+4}{2}; \dfrac{0-6}{2}\right) = \left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{2}; -3\right)$. Đáp án A.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-2;3;3)$. Điểm $M(a;b;c)$ là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$, khi đó biểu thức $P = a^2 + b^2 - c^2$ có giá trị bằng bao nhiêu?

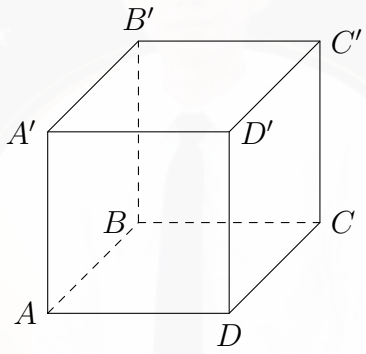
Ⓐ 44. Ⓑ 6. Ⓒ -3. Ⓓ -1.

Hướng dẫn giải. $ABCM$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{BC} = (-2-2; 3-(-1); 3-3) = (-4;4;0)$.

$M = A + \overrightarrow{BC} = (1-4; 2+4; -1+0) = (-3;6;-1). \Rightarrow a = -3, b = 6, c = -1.$

$P = (-3)^2 + 6^2 - (-1)^2 = 9 + 36 - 1 = 44$. Đáp án A.

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tính tọa độ đỉnh A' của hình hộp.



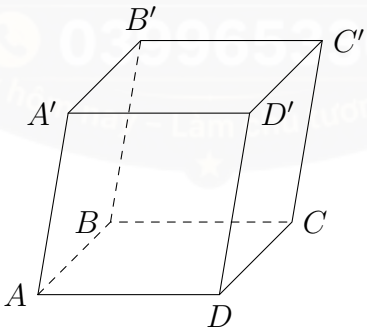
Ⓐ $A'(4;6;-5)$. Ⓑ $A'(2;0;2)$. Ⓒ $A'(3;5;-6)$. Ⓓ $A'(3;4;-6)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $C = B + D - A = (2+1-1; 1-1-0; 2+1-1) = (2;0;2)$.

$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'} = C' - C = (4-2; 5-0; -5-2) = (2;5;-7)$.

Tọa độ $A' = A + \overrightarrow{AA'} = (1+2; 0+5; 1-7) = (3;5;-6)$. Đáp án C.

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(-3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $D(0;0;1)$, $A'(1;2;3)$. Tìm tọa độ điểm C'.

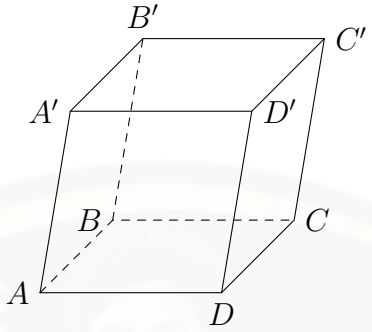


Ⓐ $C'(10;4;4)$. Ⓑ $C'(-13;4;4)$.
Ⓒ $C'(13;4;4)$. Ⓓ $C'(7;4;4)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

Với $\overrightarrow{AB}=(3;2;0)$, $\overrightarrow{AD}=(3;0;1)$, $\overrightarrow{AA'}=(4;2;3)$.
Suy ra $\overrightarrow{AC'}=(3+3+4;2+0+2;0+1+3)=(10;4;4)$.
Tọa độ điểm $C'=A+\overrightarrow{AC'}=(-3+10;0+4;0+4)=(7;4;4)$. Đáp án D.

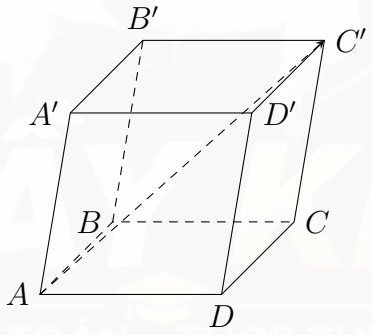
Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(2;4;0)$, $B(4;0;0)$, $C(-1;4;-7)$ và $D'(6;8;10)$. Tọa độ điểm B' là



Ⓐ $B'(8;4;10)$.
Ⓑ $B'(6;12;0)$.
Ⓒ $B'(10;8;6)$.
Ⓓ $B'(13;0;17)$.

Hướng dẫn giải. Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow D=C-B+A=(-3;8;-7)$.
Lại có $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{DD'}\Rightarrow B'=B+D'-D=(4+6-(-3);0+8-8;0+10-(-7))=(13;0;17)$. Đáp án D.

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $\overrightarrow{AB}=(2;0;0)$, $\overrightarrow{AD}=(0;4;0)$ và $\overrightarrow{AA'}=(0;1;3)$. Tìm tọa độ vecto $\overrightarrow{AC'}$.



Ⓐ $\overrightarrow{AC'}=(2;4;3)$.
Ⓑ $\overrightarrow{AC'}=(2;3;5)$.
Ⓒ $\overrightarrow{AC'}=(2;5;3)$.
Ⓓ $\overrightarrow{AC'}=(1;5;3)$.

Hướng dẫn giải. Quy tắc hình hộp: $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=(2+0+0;0+4+1;0+0+3)=(2;5;3)$. Đáp án C.

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có điểm A trùng với gốc tọa độ O, điểm B nằm trên tia Ox, điểm D nằm trên tia Oy, điểm A' nằm trên tia Oz. Biết $AB=2, AD=4, AA'=3$. Gọi tọa độ của C' là $(a;b;c)$, khi đó biểu thức $a+b-c$ có giá trị là.

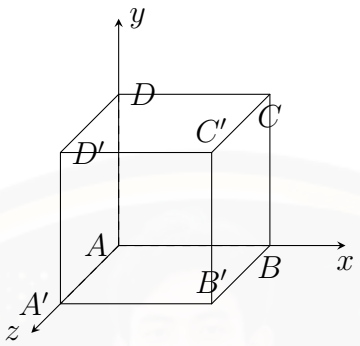
Ⓐ -4.
Ⓑ 9.
Ⓒ 3.
Ⓓ 6.

Hướng dẫn giải. Từ giả thiết ta có tọa độ các đỉnh: $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $D(0;4;0)$, $A'(0;0;3)$.

Vì đây là hình hộp chữ nhật có A là gốc tọa độ và các cạnh nằm trên các trục tọa độ nên C' có tọa độ $(2;4;3)$.

Vậy $a=2, b=4, c=3 \Rightarrow a+b-c=2+4-3=3$. Đáp án C.

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài các cạnh bằng 1, điểm A trùng với gốc tọa độ (như hình vẽ).



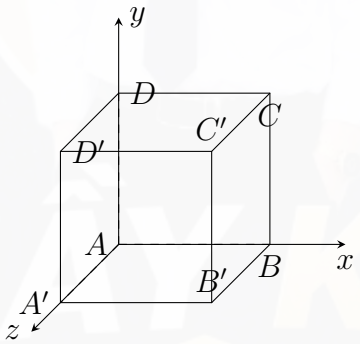
Tọa độ vecto $\overrightarrow{A'C'}$ có tọa độ là

Ⓐ $(1;0;1)$. Ⓑ $(0;1;1)$. Ⓒ $(1;1;0)$. Ⓓ $(1;1;1)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $A'(0;0;1)$ và $C'(1;1;1)$.

$\overrightarrow{A'C'}=(1-0;1-0;1-1)=(1;1;0)$. Đáp án C.

Câu 57. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với điểm A).



Tọa độ điểm C' là

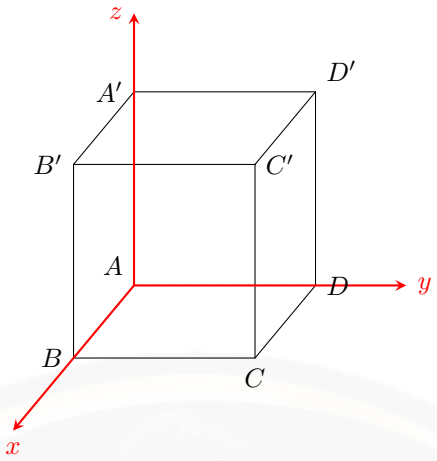
Ⓐ $C'(2;2;0)$. Ⓑ $C'(2;2;2)$. Ⓒ $C'(2;0;2)$. Ⓓ $C'(2;0;0)$.

Hướng dẫn giải. Với cạnh bằng 2 và A là gốc tọa độ, ta có $B(2;0;0)$, $D(0;2;0)$, $A'(0;0;2)$.

Điểm C' là đỉnh đối diện với A, có tọa độ là $(2;2;2)$. Đáp án B.

Câu 58. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB=$

$1, AD = 2, AA' = 3$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình dưới đây.



Tọa độ $\overrightarrow{B'D}$ là

Ⓐ $(1;2;3)$. Ⓑ $(-1;2;-3)$. Ⓒ $(1;2;-3)$. Ⓓ $(-1;2;3)$.

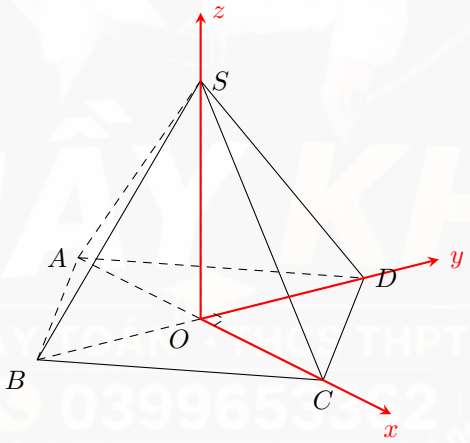
Hướng dẫn giải. Dựa vào hệ trục tọa độ $Oxyz$ với A là gốc tọa độ, ta có tọa độ các đỉnh:

$A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;2;0)$, $A'(0;0;3)$.

Vì B' là đỉnh trên của hình hộp chữ nhật nên $B'(1;0;3)$.

Khi đó $\overrightarrow{B'D} = (0-1;2-0;0-3) = (-1;2;-3)$.

Câu 59. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), tọa độ $\overrightarrow{SC}$ là:



Ⓐ $\overrightarrow{SC} = (2a;0;-2a)$. Ⓑ $\overrightarrow{SC} = (a;0;-2a)$.

Ⓒ $\overrightarrow{SC} = (2a;-a;-2a)$. Ⓓ $\overrightarrow{SC} = (a;0;2a)$.

Hướng dẫn giải. Đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2a$.

Suy ra $OC = \dfrac{AC}{2} = a$. Vì $C \in Ox \Rightarrow C(a;0;0)$.

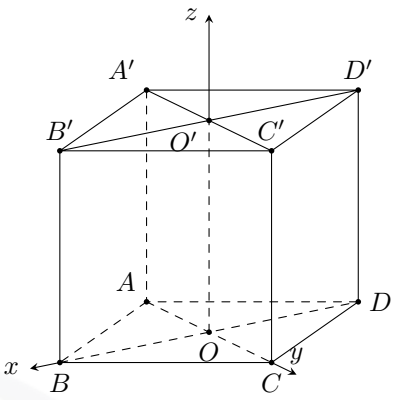
Trong tam giác vuông SOC: $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 - a^2} = 2a$.

Vì $S \in Oz \Rightarrow S(0;0;2a)$.

Vậy $\overrightarrow{SC} = (a-0;0-0;0-2a) = (a;0;-2a)$.

2) Trắc nghiệm đúng sai

Bài 1. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi. Hai đường chéo AC, BD của đáy có chiều dài lần lượt là a, b. Cạnh bên $AA' = c$. Hệ tọa độ $Oxyz$ có gốc trùng với giao điểm O của hai đường chéo hình thoi $ABCD$, có tia Ox trùng với tia OB và tia Oy trùng với tia OC (Hình vẽ).



a) Mặt phẳng $(ABCD)$ vuông góc trục Oz.

b) Trục $Oy \perp B'D'$.

c) Tọa độ điểm B, D lần lượt là $\left(-\frac{b}{2};0;0\right)$, $\left(\frac{b}{2};0;0\right)$.

d) Tọa độ điểm C', D' lần lượt là $\left(0;\frac{a}{2};c\right)$, $\left(-\frac{b}{2};0;c\right)$.

Hướng dẫn giải.

a) Hình hộp đứng nên $OO' \perp (ABCD)$ hay $Oz \perp (ABCD)$.

b) $\begin{cases} AC \perp BD \\ BD // B'D' \end{cases} \Rightarrow AC \perp B'D'$ hay $Oy \perp B'D'$.

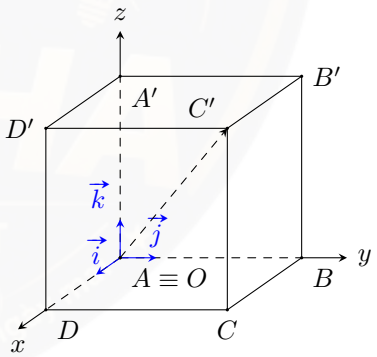
c) $B; D \in Ox \Rightarrow B\left(\frac{b}{2};0;0\right); D\left(-\frac{b}{2};0;0\right)$.

d) $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OC} = \frac{a}{2} \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k}$.

$\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OD} = -\frac{b}{2} \cdot \vec{i} + c \cdot \vec{k}$.

Vậy tọa độ điểm C', D' lần lượt là $\left(0;\frac{a}{2};c\right)$, $\left(-\frac{b}{2};0;c\right)$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O và các đỉnh D, B, A' có toạ độ lần lượt là $(2;0;0)$, $(0;4;0)$, $(0;0;3)$ (Hình vẽ).
Xác định toạ độ của các đỉnh còn lại của hình hộp chữ nhật.



a) $C(2;4;0)$

b) $D'(3;0;2)$

c) $C'(0;4;3)$

d) $B'(0;4;3)$

Hướng dẫn giải.

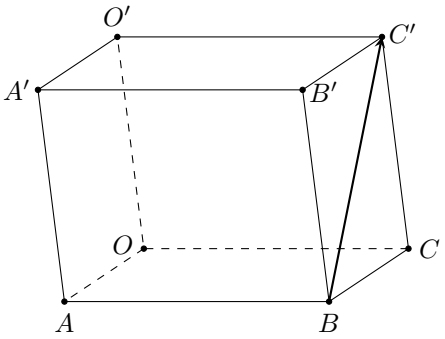
a) Điểm C nằm trên mặt phẳng Oxy nên có cao độ bằng 0. Vì D, B là hình chiếu của C trên trục hoành và trục tung nên $C(2;4;0)$.

b) Điểm D' nằm trên mặt phẳng Oxz nên có tung độ bằng 0. Vì D, A' là hình chiếu của D' trên trục hoành và trục cao nên $D'(2;0;3)$.

c) Vì $C(2;4;0)$ là hình chiếu của C' trên (Oxy) và $A'(0;0;3)$ là hình chiếu của C' trên trục Oz nên $C'(2;4;3)$.

d) Điểm B' nằm trên mặt phẳng Oyz nên có hoành độ bằng 0. Vì B, A' là hình chiếu của B' nên $B'(0;4;3)$.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ có $A(1;1;-1)$, $B(0;3;0)$, $\overrightarrow{BC'} = (2;-6;6)$. Gọi H, K lần lượt là trọng tâm của tam giác $OA'O'$ và $CB'C'$.



a) Tọa độ điểm C' là $(2;-3;6)$

b) Tọa độ điểm O' là $(3;-5;5)$

c) Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB'} = (-2;3;-6)$

d) Tọa độ vectơ $\overrightarrow{HK} = (-1;2;-1)$

Hướng dẫn giải.

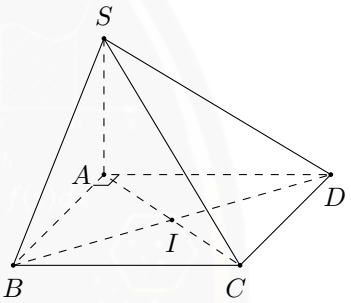
a) Gọi $C'(x;y;z)$. $\overrightarrow{BC'} = (x;y-3;z) = (2;-6;6) \Rightarrow C'(2;-3;6)$.

b) $\overrightarrow{AO'} = \overrightarrow{BC'} \Rightarrow (x-1;y-1;z+1) = (2;-6;6) \Rightarrow O'(3;-5;5)$.

c) $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{OC'} = (2;-3;6)$.

d) $\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{AB} = (-1;2;1)$.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 1$, $AD = 2$, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 3$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như sau: Gốc tọa độ O trùng với điểm A, các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i}$, $\vec{j}$ và $\vec{k}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau



a) Tọa độ $D(0;2;0)$

b) Tọa độ $C(1;2;3)$

c) Tọa độ $S(2;0;0)$

d) Tọa độ $I(1;1;0)$

Hướng dẫn giải.

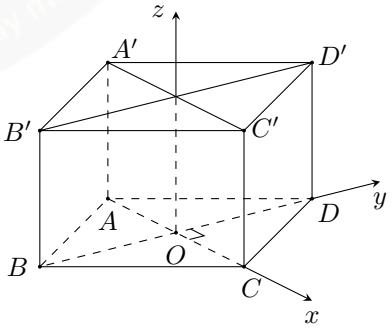
a) Điểm $D \in Oy$ và $AD = 2$ nên $D(0;2;0)$.

b) $AB = 1, AD = 2 \Rightarrow C(1;2;0)$.

c) $S \in Oz$ và $AS = 3$ nên $S(0;0;3)$.

d) I là hình chiếu lên Oxy là trung điểm AB, AD nên $I(0.5;1;0)$.

Bài 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Tọa độ $A(-1;0;0)$

b) $\overrightarrow{AC'} = (2\sqrt{2};0;2)$

c) Tọa độ $D'(0;\sqrt{2};2)$

d) $\overrightarrow{BD'} = (0;0;2)$

Hướng dẫn giải. Độ dài $AC = 2\sqrt{2}$.

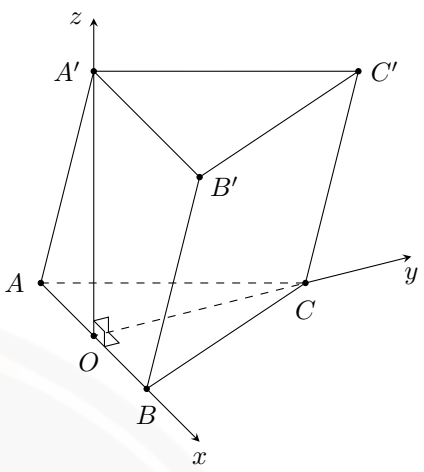
a) $A \in Ox$ ngược chiều dương, $OA = \sqrt{2} \Rightarrow A(-\sqrt{2};0;0)$.

b) $C'(\sqrt{2};0;2) \Rightarrow \overrightarrow{AC'} = (2\sqrt{2};0;2)$.

c) $D(0;\sqrt{2};0), DD'=2 \Rightarrow D'(0;\sqrt{2};2)$.

d) $B(0;-\sqrt{2};0), D'(0;\sqrt{2};2) \Rightarrow \overrightarrow{BD'}=(0;2\sqrt{2};2)$.

Bài 6. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2 như hình vẽ. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trung điểm cạnh AB, góc $\widehat{A'AO}=60^\circ$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với trung điểm của đoạn BC), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Tọa độ điểm $A(-1;0;0)$

b) Tọa độ điểm $C(0;\sqrt{3};0)$

c) Tọa độ điểm $A'(0;-1;\sqrt{3})$

d) Tọa độ điểm $C'\left(1;\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$

Hướng dẫn giải. $OC=\sqrt{3}, OA'=OA.\tan 60^\circ=\sqrt{3}$.

a) $A\in Ox$ ngược chiều dương, $OA=1 \Rightarrow A(-1;0;0)$.

b) $C\in Oy, OC=\sqrt{3} \Rightarrow C(0;\sqrt{3};0)$.

c) $A'\in Oz, OA'=\sqrt{3} \Rightarrow A'(0;0;\sqrt{3})$.

d) $\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{AC} \Rightarrow C'(1;\sqrt{3};\sqrt{3})$.

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(-2;1;-3)$, $\vec{b}=(-1;-3;2)$ và điểm $A(4;6;-3)$.

a) Tọa độ vectơ $\vec{a}-2\vec{b}=(0;1;-1)$.

b) Tọa độ điểm $B(2;7;-6)$ thì $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$.

c) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương hướng.

d) Góc giữa vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 120°.

Hướng dẫn giải.

a) Sai: Vì $\vec{a}-2\vec{b}=(0;7;-7)$.

b) Đúng : Vì $\vec{a}=\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases}-2=x_B-4\\1=y_B-6\\-3=z_B+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_B=2\\y_B=7\\z_B=-6\end{cases} \Rightarrow B(2;7;-6)$.

c) Sai: Vì $\dfrac{-2}{-1}\neq\dfrac{1}{-3}\neq\dfrac{-3}{2}$.

d) Đúng: Vì $\cos(\vec{a};\vec{b})=\dfrac{-2\cdot(-1)+1\cdot(-3)+(-3)\cdot 2}{\sqrt{(-2)^2+1^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+(-3)^2+2^2}}=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a};\vec{b})=120^\circ$.

Bài 8. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(-1;1;0)$, $\vec{b}=(1;1;0)$, $\vec{c}=(1;1;1)$.

a) Độ dài vectơ $\vec{a}$ bằng $\sqrt{2}$.

b) Vectơ $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{a}$.

c) Vectơ $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{c}$.

d) Tọa độ vectơ $3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$ bằng $(-2;4;-1)$.

Hướng dẫn giải.

a) Đúng: Vì $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0} = \sqrt{2}$.

b) Đúng: Vì $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 = 0$.

c) Sai: Vì $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 2$.

d) Sai: Vì $3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = (-2; 4; -1)$.

Bài 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết rằng các điểm có tọa độ $A(2;1;0)$, $C(0;3;0)$, $C'(-1;2;1)$, $D'(0;-2;0)$.

a) Tọa độ các điểm A', B' là $A'(1;0;-1)$, $B'(0;4;2)$.

b) Tọa độ các điểm B, D là $B(1;5;1)$, $D(1;-1;-1)$.

c) Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$.

d) Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{B'D} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Hướng dẫn giải.

a) Sai: Gọi tọa độ điểm A' là $(x;y;z) \Rightarrow \overrightarrow{A'C'} = (-1-x; 2-y; 1-z)$.
Khi đó $\overrightarrow{AC} = (-2;2;0)$. Vì $A'C'CA$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$

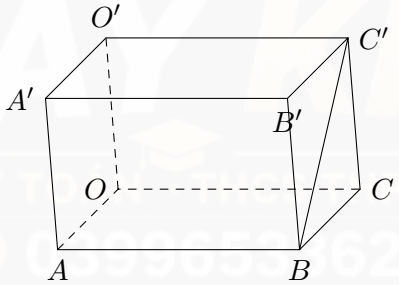
Suy ra $\begin{cases} -1-x=-2 \\ 2-y=2 \\ 1-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow A'(1;0;1)$. Làm tương tự ta có: $B'(0;4;2)$.

b) Đúng: $B(1;5;1); D(1;-1;-1)$.

c) Đúng: $\overrightarrow{AB} = (1;4;1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$.

d) Đúng: $\overrightarrow{B'D} = (1;-5;-3) \Rightarrow \overrightarrow{B'D} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Bài 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ có $A(1;1;-1)$, $B(0;3;0)$ và $\overrightarrow{BC'} = (2;-6;6)$.



a) $C'(2;3;6)$.

b) $O'(3;-5;-5)$.

c) $\overrightarrow{AB'} = (2;-3;6)$.

d) Gọi H, K lần lượt là trọng tâm của tam giác $OA'O'$ và $CB'C'$. Khi đó $\overrightarrow{HK} = (1;2;1)$.

Hướng dẫn giải.

a) Gọi $C'(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{BC'} = (2;-6;6) \Rightarrow \begin{cases} x-0=2 \\ y-3=-6 \\ z-0=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=6 \end{cases} \Rightarrow C'(2;-3;6)$.

Vậy **a) SAI**.

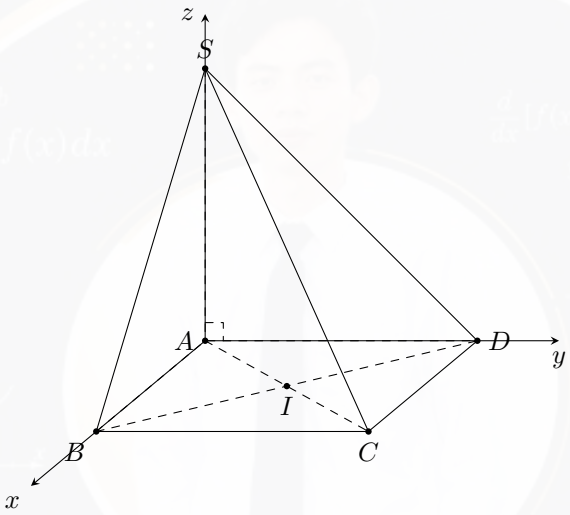
b) Gọi $O'(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{AO'}=\overrightarrow{BC'} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ y-1=-6 \\ z+1=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-5 \\ z=5 \end{cases} \Rightarrow O'(3;-5;5)$.

Vậy **b) SAI**.

c) Ta có: $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{OC'}=(2;-3;6)$. Vậy **c) ĐÚNG**.

d) Vì H,K lần lượt là trọng tâm của tam giác $OA'O'$ và $CB'C'$ nên $\overrightarrow{HK}=\overrightarrow{AB}$.
Mà $\overrightarrow{AB}=(-1;2;1)$. Suy ra $\overrightarrow{HK}=(-1;2;1)$. Vậy **d) SAI**.

Bài 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I và $AB=1, AD=2$. Cạnh SA vuông góc với mặt đáy và $SA=3$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như sau: Gốc tọa độ O trùng với điểm A, các véc tơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i}$, $\vec{j}$ và $\vec{k}$.



a) $D(2;0;0)$.

b) $\overrightarrow{OC}=(2;2;0)$.

c) $\overrightarrow{SC}=(2;2;-3)$.

d) $\overrightarrow{OI}=\dfrac{1}{2}\vec{i}+\vec{j}$.

Hướng dẫn giải. Chọn hệ trục như hình vẽ: Với $AB=1, AD=2, SA=3$ ta có:

a) Điểm $D\in Oy$ và $AD=2$ nên $D(0;2;0)$. Suy ra mệnh đề a) sai.

b) Điểm $C\in(Oxy)$ và có hình chiếu lên Ox, Oy lần lượt là điểm B và D. Do $AB=1$ và $AD=2$ nên $C(1;2;0) \Rightarrow \overrightarrow{OC}=(1;2;0)$.

c) Điểm $S\in Oz$ và $AS=3$ nên $S(0;0;3)$. Do đó $\overrightarrow{SC}=(1-0;2-0;0-3)=(1;2;-3)$.

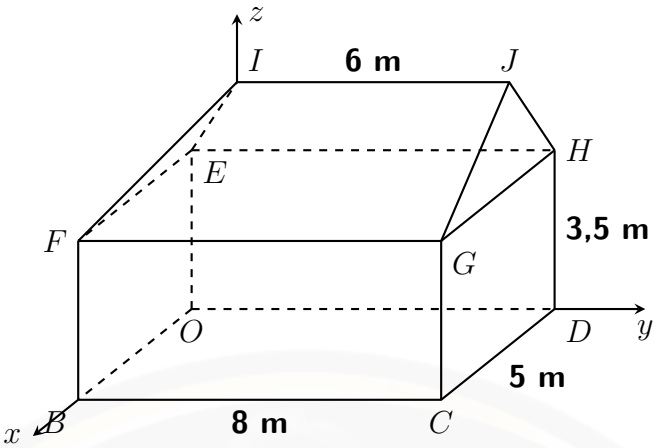
d) Điểm $I\in(Oxy)$ là tâm hình chữ nhật, có hình chiếu lên Ox, Oy lần lượt là trung điểm của AB và AD nên:

$$I\left(\frac{1}{2};1;0\right) \Rightarrow \overrightarrow{OI}=\left(\frac{1}{2};1;0\right) \Rightarrow \overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\vec{i}+\vec{j}.$$

Vậy mệnh đề d) đúng.

Bài 12. Một ngôi nhà có hình dáng và kích thước được gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ

(đơn vị trên mỗi trục là $1m$).



Biết rằng các bức tường và nền nhà đều là các hình chữ nhật; hai bên mái nhà $IJGF, IJHE$ là các hình thang cân và có diện tích bằng nhau; độ dốc của mái nhà số đo góc nhị diện $[J, FG, H]$ là $45°$.

a) $B(5;0;0)$.

b) $\overrightarrow{BD} = (5;8;0)$.

c) $G(5;8;0)$.

d) Chiều cao ngôi nhà là $7m$.

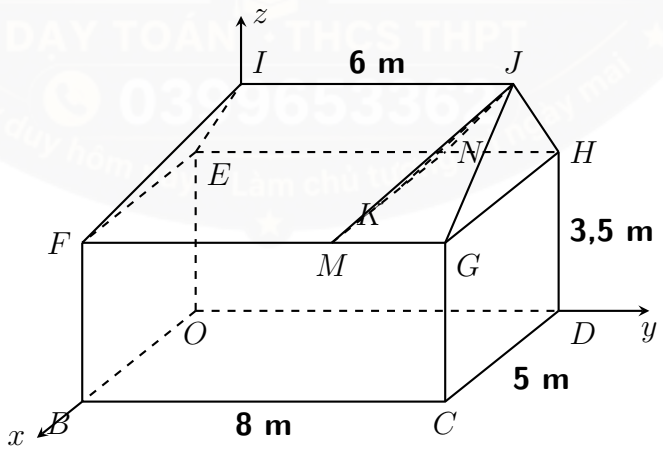
Hướng dẫn giải. Ngôi nhà gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ nên ta có:

a) Điểm $B \in Ox$ và $OB = CD = 5$ nên $\overrightarrow{OB} = 5\vec{i} \Rightarrow B(5;0;0)$. Khẳng định này đúng.

b) Điểm $D \in Oy$ và $AD = BC = 8$ nên $\overrightarrow{OD} = 8\vec{j} \Rightarrow D(0;8;0)$.
Suy ra $\overrightarrow{BD} = (0-5;8-0;0-0) = (-5;8;0)$. Khẳng định b) sai.

c) Điểm $E \in Oz$ và $OE = DH = 3{,}5 = \dfrac{7}{2}$ nên $\overrightarrow{OE} = \dfrac{7}{2}\vec{k}$.
Tọa độ điểm G là tổng các vectơ: $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = 5\vec{i} + 8\vec{j} + \dfrac{7}{2}\vec{k} \Rightarrow G\left(5;8;\dfrac{7}{2}\right)$.
Khẳng định c) sai.

d)



Kẻ $JM \perp FG$ và $JN \perp EH$. Khi đó số đo góc nhị diện $[J, FG, H]$ chính là số đo góc $\widehat{JMN} = 45°$.

Xét tam giác JMN cân tại J. Gọi K là hình chiếu của J trên cạnh MN. Khi đó tam giác JMK vuông cân tại K.

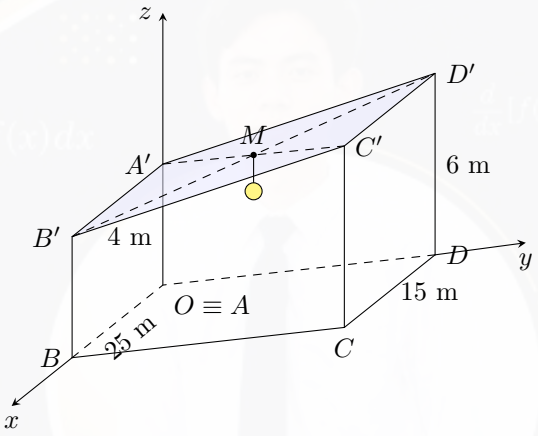
Ta có $KM = \dfrac{1}{2}MN = \dfrac{1}{2}EF = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$.

Vì tam giác JMK vuông cân nên $KJ = KM = 2{,}5$.

Độ cao của nóc nhà là: $z_I = z_J = 3{,}5 + 2{,}5 = 6$ m.

Vậy chiều cao ngôi nhà là $6m$. Khẳng định d) sai.

Bài 13. Để chuẩn bị cho ngày hội thao, ban tổ chức trường Nguyễn Văn Trỗi dựng bốn chiếc cột AA', BB', CC', DD' lần lượt tại bốn góc của một sân bóng hình chữ nhật $ABCD$ với kích thước là $CD = 15m, AB = 25m$. Bốn chiếc cột AA', BB', CC', DD' vuông góc với mặt sân và có chiều cao là $AA' = BB' = 4m, CC' = DD' = 6m$. Một tấm bạt hình chữ nhật $A'B'C'D'$ được căng phẳng với bốn góc được cố định vào đầu bốn cột như hình vẽ. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét) sao cho $O \equiv A$ và các trục Ox, Oy, Oz trùng với AB, AD, AA' như hình vẽ bên dưới.



a) $A'(0;0;4)$.

b) $\overrightarrow{A'C'} = (15;25;2)$.

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DD'} = (15;25;0)$.

d) Ban tổ chức trường Nguyễn Văn Trỗi muốn treo một bóng đèn công suất lớn nằm ở chính giữa tấm bạt hình chữ nhật $A'B'C'D'$. Biết bóng đèn cách tại vị trí treo $0,4m$. Khi đó bóng đèn cách mặt sàn của sân là $4,6m$.

Hướng dẫn giải. Từ hình vẽ và giả thiết thiết lập hệ trục tọa độ, ta có tọa độ các đỉnh: $O \equiv A(0;0;0), B(15;0;0), C(15;25;0), D(0;25;0), A'(0;0;4), B'(15;0;4), C'(15;25;6), D'(0;25;6)$.

a) Điểm A' nằm trên trục Oz và $AA' = 4$ nên tọa độ $A'(0;0;4)$. Khẳng định a) đúng.

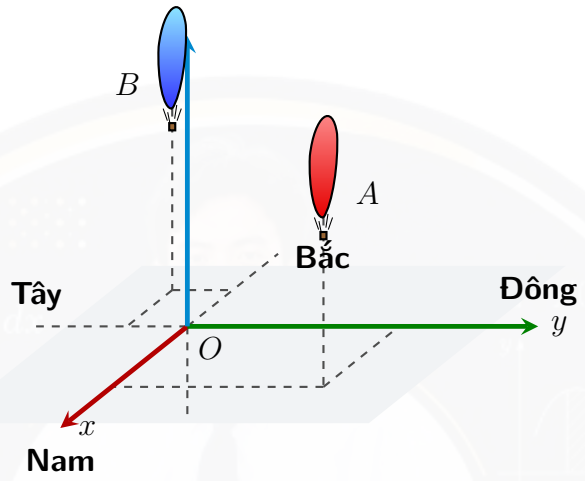
b) Ta có $\overrightarrow{A'C'} = (15-0;25-0;6-4) = (15;25;2)$. Khẳng định b) đúng.

c) Ta có $\overrightarrow{AC} = (15;25;0)$ và $\overrightarrow{DD'} = (0;0;6)$.
Suy ra $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DD'} = (15;25;6)$. So với khẳng định đề bài là $(15;25;0)$, vậy khẳng định c) sai.

d) Gọi $M(x,y,z)$ là điểm treo bóng đèn, suy ra M là trung điểm $A'C'$.
Tọa độ của M được tính bằng: $x_M = \dfrac{0+15}{2} = \dfrac{15}{2}$; $y_M = \dfrac{0+25}{2} = \dfrac{25}{2}$; $z_M = \dfrac{4+6}{2} = 5$.
Suy ra $M\left(\dfrac{15}{2};\dfrac{25}{2};5\right)$.
Vì bóng đèn treo dưới M một khoảng $0,4m$ nên cao độ của bóng đèn là: $h = z_M - 0,4 = 5 - 0,4 = 4,6m$.
Vậy khẳng định d) đúng.

Bài 14. Hai chiếc khinh khí cầu A và B bay lên từ cùng một địa điểm. Sau một khoảng thời gian bay, chiếc A nằm cách điểm xuất phát 2 km về phía Nam và 1 km về phía Đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc B nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía Bắc và 1,5 km về phía Tây, đồng thời cách mặt đất 0,8 km.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét.



a) $A\left(2;1;\dfrac{1}{2}\right)$.

b) $\overrightarrow{OB}=\left(-1;-\dfrac{3}{2};-\dfrac{4}{5}\right)$.

c) $\overrightarrow{AB}=-3\vec{i}+\dfrac{5}{2}\vec{j}+\dfrac{3}{10}\vec{k}$.

d) Hình chiếu của tọa độ chiếc khinh khí cầu B trên mặt đất là $(a;b;c)$, khi đó $a+b+c=2,5$.

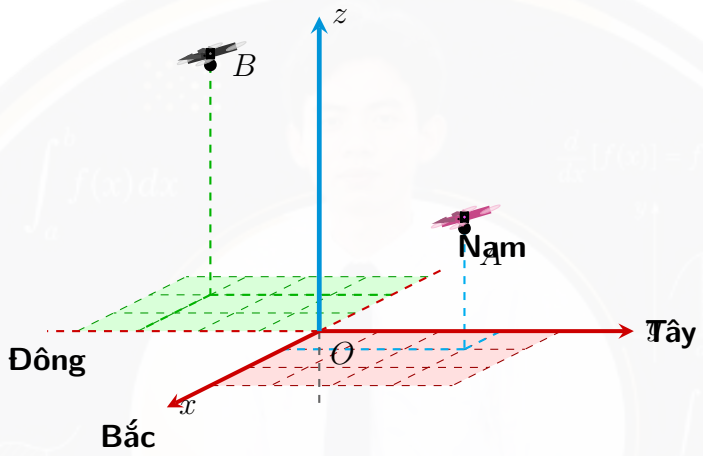
Hướng dẫn giải. Từ hệ trục tọa độ $Oxyz$ theo mô tả và hình vẽ, ta xác định tọa độ các điểm như sau:

- Chiếc khinh khí cầu A cách O về phía Nam 2 km ($x=2$), phía Đông 1 km ($y=1$) và cao 0,5 km ($z=0,5=1/2$).
  $\Rightarrow A\left(2;1;\dfrac{1}{2}\right)$. Vậy khẳng định **a) ĐÚNG**.
- Chiếc khinh khí cầu B cách O về phía Bắc 1 km ($x=-1$), phía Tây 1,5 km ($y=-1,5=-3/2$) và cao 0,8 km ($z=0,8=4/5$).
  $\Rightarrow B\left(-1;-\dfrac{3}{2};\dfrac{4}{5}\right)\Rightarrow \overrightarrow{OB}=\left(-1;-\dfrac{3}{2};\dfrac{4}{5}\right)$.
  Mệnh đề b) ghi $z=-4/5$ nên khẳng định **b) SAI**.
- Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\left(-1-2;-\dfrac{3}{2}-1;\dfrac{4}{5}-\dfrac{1}{2}\right)=\left(-3;-\dfrac{5}{2};\dfrac{3}{10}\right)$.
  $\Rightarrow \overrightarrow{AB}=-3\vec{i}-\dfrac{5}{2}\vec{j}+\dfrac{3}{10}\vec{k}$.
  Mệnh đề c) ghi $+\dfrac{5}{2}\vec{j}$ nên khẳng định **c) SAI**.
- Hình chiếu của $B\left(-1;-\dfrac{3}{2};\dfrac{4}{5}\right)$ trên mặt đất (Oxy) là điểm có tọa độ $(-1;-1,5;0)$.
  Khi đó $a=-1,b=-1,5,c=0\Rightarrow a+b+c=-2,5$.

Mệnh đề d) ghi $2,5$ nên khẳng định **d) SAI**.

Bài 15. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc $20(km)$ và về phía Tây $10(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,7(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông $30(km)$ và về phía Nam $25(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Xác định khoảng cách giữa hai chiếc máy bay (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị, đơn vị đo: km).

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



a) Chiếc máy bay thứ nhất có tọa độ $(10; 20; 0,7)$.

b) Chiếc máy bay thứ hai có tọa độ $(-30; -25; 1)$.

c) Tọa độ hình chiếu của chiếc máy bay thứ nhất trên trục Oy là $(0; 20; 0)$.

d) Tọa độ hình chiếu của chiếc máy bay thứ hai trên mặt đất là $(-30; -25; 0)$.

Hướng dẫn giải. Từ hệ trục tọa độ $Oxyz$ được thiết lập theo hình vẽ ta có:

a) Chiếc máy bay thứ nhất cách gốc tọa độ về phía Bắc 20 km ($x = 20$), phía Tây 10 km ($y = 10$) và cao $0,7$ km ($z = 0,7$). Vậy tọa độ chiếc máy bay thứ nhất là $A(20; 10; 0,7)$.

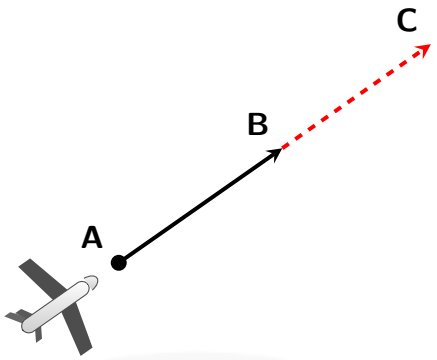
b) Chiếc máy bay thứ hai cách gốc tọa độ về phía Đông 30 km ($y = -30$), phía Nam 25 km ($x = -25$) và cao 1 km ($z = 1$). Theo lời giải được cung cấp, tọa độ máy bay thứ hai được xác định là $B(-30; -25; 1)$.

c) Tọa độ hình chiếu của chiếc máy bay thứ nhất trên trục Oy là $(0; 10; 0)$.

d) Tọa độ hình chiếu của chiếc máy bay thứ hai trên mặt đất (mặt phẳng (Oxy)) là $(-30; -25; 0)$.

Bài 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo lấy theo km), một Radar phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với tốc độ và hướng không đổi từ điểm $A(920; 740; 5,2)$ đến điểm $B(980; 800; 6,8)$ trong 12 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên tốc độ và hướng bay thì tọa độ

của máy bay sau 12 phút tiếp theo là $C(x;y;z)$.



a) $\overrightarrow{OA}=(920;740;5,2)$.

b) $\overrightarrow{AB}=(60;60;-1,6)$.

c) $\overrightarrow{BC}=60\,\vec{i}+60\,\vec{j}-1,6\,\vec{k}$.

d) $x+y+10z=1980$.

Hướng dẫn giải.

a) Ta có tọa độ điểm $A(920;740;5,2)\Rightarrow\overrightarrow{OA}=(920;740;5,2)$. Khẳng định này **Đúng**.

b) $\overrightarrow{AB}=(980-920;800-740;6,8-5,2)=(60;60;1,6)$. Khẳng định này **Sai** (do sai dấu ở cao độ).

c) Do chiếc máy bay di chuyển với tốc độ và hướng không đổi từ A đến B trong 12 phút và từ B đến C trong 12 phút nên quãng đường $AB=BC$ và ba điểm A,B,C thẳng hàng theo đúng thứ tự đó. Suy ra $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$.
Mà $\overrightarrow{AB}=(60;60;1,6)$ nên $\overrightarrow{BC}=(60;60;1,6)\Rightarrow\overrightarrow{BC}=60\,\vec{i}+60\,\vec{j}+1,6\,\vec{k}$. Khẳng định này **Sai**.

d) Gọi $C(x;y;z)\Rightarrow\overrightarrow{BC}=(x-980;y-800;z-6,8)$.
Vì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}x-980=60\\y-800=60\\z-6,8=1,6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1040\\y=860\\z=8,4\end{cases}\Rightarrow C(1040;860;8,4).$$

Tính tổng: $x+y+10z=1040+860+10\cdot 8,4=1900+84=1984$.
Khẳng định này **Sai**.

3) Câu trả lời ngắn

Bài 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các véc tơ $\vec{u}=2\,\vec{i}-2\,\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{v}=(m;2;m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}|=|\vec{v}|$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{u}=(2;-2;1)$.

Khi đó $|\vec{u}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3$ và $|\vec{v}|=\sqrt{m^2+2^2+(m+1)^2}=\sqrt{2m^2+2m+5}$.

Do đó $|\vec{u}|=|\vec{v}|\Leftrightarrow 9=2m^2+2m+5\Leftrightarrow 2m^2+2m-4=0\Leftrightarrow m^2+m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-2\end{array}\right.$

nên có hai giá trị.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-2)$, $B(2;-3;5)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA=2MB$, tọa độ điểm M là $(a;b;c)$. Khi đó $a+3b+c$ bằng?

Hướng dẫn giải. Gọi $M(x;y;z)$.

Vì M thuộc đoạn AB nên: $\overrightarrow{MA}=-2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x=-2(2-x) \\ 1-y=-2(-3-y) \\ -2-z=-2(5-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7}{3} \\ y=-\dfrac{5}{3} \\ z=\dfrac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow a+3b+c=0.$

Bài 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(4;2;1)$, $B(-2;-1;4)$. Tìm được tọa độ điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$. Khi đó $a+b+c=?$

Hướng dẫn giải. Gọi điểm $M(x;y;z)$. Khi đó: $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=2(-2-x) \\ y-2=2(-1-y) \\ z-1=2(4-z) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=3 \end{cases}$.

Vậy $M(0;0;3)$ nên $a+b+c=3$.

Bài 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N.

Hướng dẫn giải. $\overrightarrow{MN}=(-3;-2;2)$; $\overrightarrow{NP}=(2;m-2;1)$.

Tam giác MNP vuông tại $N \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{NP}=0 \Leftrightarrow -6-2(m-2)+2=0 \Leftrightarrow m-2=-2 \Leftrightarrow m=0$.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có điểm B trùng với gốc tọa độ O và tọa độ các điểm $A(3;0;0)$, $D(3;1;0)$, $B'(0;0;5)$. Gọi tọa độ $C'(m;n;p)$, khi đó $m^2+n^2+p^2$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải.

Vì tọa độ điểm $A(3;0;0) \Rightarrow \overrightarrow{BA}=3\vec{i}$; tọa độ điểm $D(3;1;0) \Rightarrow \overrightarrow{BD}=3\vec{i}+\vec{j}$.
Mặt khác: $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}=3\vec{i}+\vec{j}-3\vec{i}=\vec{j}$.
Vì tọa độ điểm $B'(0;0;5) \Rightarrow \overrightarrow{BB'}=5\vec{k}$.
Ta có $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\vec{j}+5\vec{k} \Rightarrow C'(0;1;5)$.
Vậy $m^2+n^2+p^2=0^2+1^2+5^2=26$.

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(0;1;-2)$, $B(x;y;z)$, $C(0;-2;1)$, $D(1;0;-1)$. Tính giá trị biểu thức $T=x+y+z$.

Hướng dẫn giải. Tọa độ điểm B là $(x;y;z)$.
$\overrightarrow{BA}=(-x;1-y;-2-z)$.
$\overrightarrow{CD}=(1;2;-2)$.
Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$.
Suy ra $\begin{cases} -x=1 \\ 1-y=2 \\ -2-z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases}$.
$\Rightarrow T=x+y+z=-2$.

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Gọi tọa độ $A'(a;b;c)$ là điểm đối xứng với

A qua mặt phẳng (Oxz). Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$.

Hướng dẫn giải. Tọa độ hình chiếu của điểm $A(1;2;3)$ qua mặt phẳng (Oxz) là $A'(1;-2;3) \Rightarrow T = a + b + c = 2$.

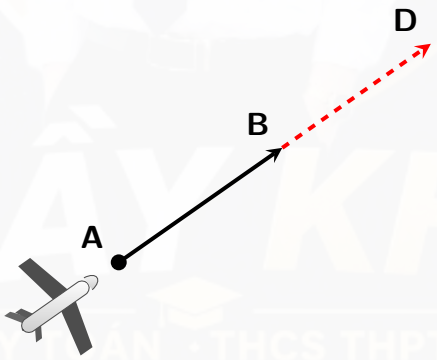
Bài 8. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;1;4)$. Gọi H là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oyz) và K là điểm đối xứng với A qua trục Ox. Biết $\overrightarrow{HK} = (a;b;c)$, khi đó giá trị biểu thức $a + b + c$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Tọa độ hình chiếu của điểm $A(-2;1;4)$ qua mặt phẳng (Oyz) là $H(2;1;4)$.
Tọa độ hình chiếu của điểm $A(-2;1;4)$ trục Ox là $K(-2;0;0)$.
Suy ra $\overrightarrow{HK} = (-4;-1;-4)$.
$\Rightarrow a + b + c = -9$.

Bài 9. Cho tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau $OA = 3$ và $OB = OC = 2$. Gọi P là trung điểm của BC. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo được lấy 1 đơn vị) có các điểm A, B, C lần lượt thuộc các tia Oz, Oy, Ox như hình vẽ. Biết $\overrightarrow{AP} = (a;b;c)$, khi đó giá trị biểu thức $2026a - 2027b + c$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Ta có: $O(0;0;0)$, $A(0;0;3)$, $B(0;2;0)$, $C(2;0;0)$.
P là trung điểm của BC nên $P(1;1;0)$.
Do đó $\overrightarrow{AP} = (1;1;-3) \Rightarrow 2026a - 2027b + c = -4$.

Bài 10. Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo km), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;8)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo $D(x;y;z)$. Khi đó $x + y + z =$?

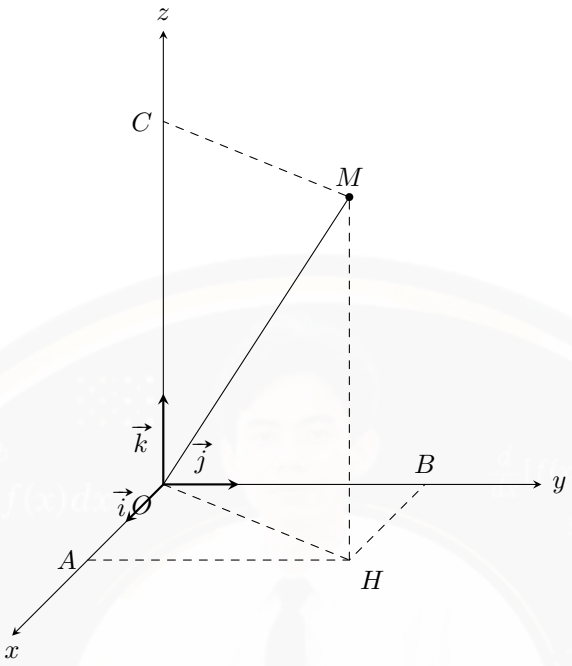


Hướng dẫn giải.

Gọi $D(x;y;z)$ là vị trí của máy bay sau 10 phút bay tiếp theo (tính từ thời điểm máy bay ở điểm B). Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BD}$ cùng hướng. Do vận tốc máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B bằng thời gian bay từ B đến D nên $AB = BD$.
Do đó, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} = (140;50;1)$.
Mặt khác: $\overrightarrow{BD} = (x - 940; y - 550; z - 8)$ nên $\begin{cases} x - 940 = 140 \\ y - 550 = 50 \\ z - 8 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1080 \\ y = 600 \\ z = 9 \end{cases}$.
Vậy $D(1080;600;9)$. Vậy tọa độ của máy bay trong 10 phút tiếp theo là $(1080;600;9)$.
Suy ra $x + y + z = 1080 + 600 + 9 = 1689$.

Bài 11. Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian

$Oxyz$ như hình vẽ. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy). Biết $OM = 80$; $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OH}\right) = 60°$; $\left(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}\right) = 45°$. Gọi tọa độ điểm $M(a; b; c)$, khi đó giá trị của $a\sqrt{2}+b\sqrt{6}+c\sqrt{2}$ bằng bao nhiêu?



Hướng dẫn giải. Ta có: $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OH}\right) = 60° \Rightarrow \widehat{AOH} = 60°$ và $\left(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}\right) = 45° \Rightarrow \widehat{HOM} = 45°$. Do đó:

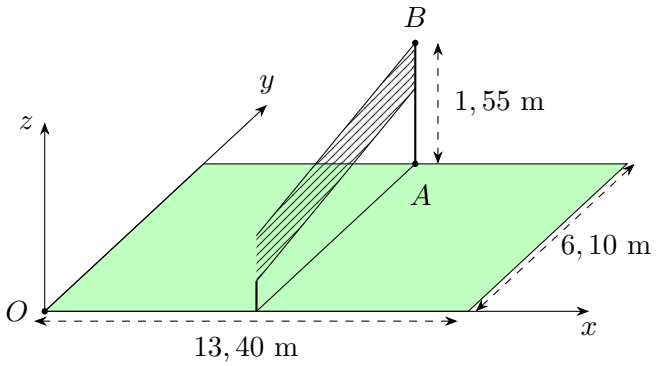
- $c = OC = MH = OM \cdot \sin \widehat{HOM} = 80 \cdot \sin 45° = 40\sqrt{2}$.
- $OH = OM \cdot \cos \widehat{HOM} = 80 \cdot \cos 45° = 40\sqrt{2}$.
- $a = OA = OH \cdot \cos \widehat{AOH} = 40\sqrt{2} \cdot \cos 60° = 40\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 20\sqrt{2}$.
- $b = OB = AH = OH \cdot \sin \widehat{AOH} = 40\sqrt{2} \cdot \sin 60° = 40\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{6}$.

Suy ra tọa độ điểm M là $\left(20\sqrt{2}; 20\sqrt{6}; 40\sqrt{2}\right)$, hay $\begin{cases} a = 20\sqrt{2} \\ b = 20\sqrt{6} \\ c = 40\sqrt{2} \end{cases}$.

Khi đó giá trị biểu thức là:

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{6} + c\sqrt{2} = 20\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + 20\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} + 40\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 40 + 120 + 80 = 240.$$

Bài 12. Hình bên mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên dưới (đơn vị trên mỗi trục là mét). Giả sử AB là một trụ cầu lông để căng lưới và có toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $(a; b; c)$. Tính giá trị biểu thức $T = a + b + 100c$.



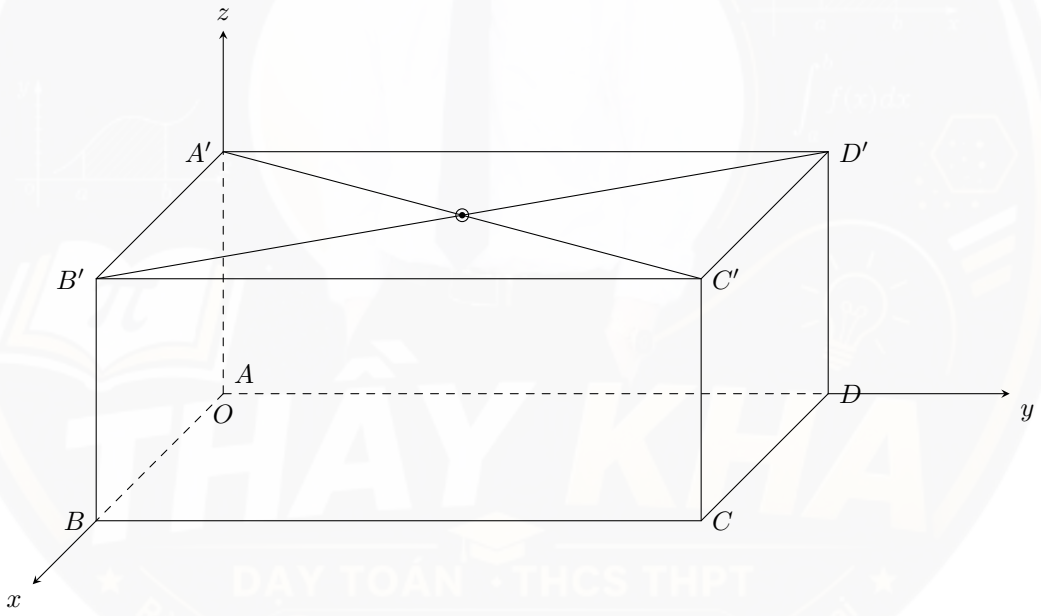
Hướng dẫn giải. Gọi tọa độ điểm A là $(x_A; y_A; z_A)$.

- Vì chiều rộng của sân là $6,1$ m nên hình chiếu của A lên trục Ox có giá trị $x_A = 6,1$.
- Do lưới nằm ở chính giữa chiều dài của sân (tổng chiều dài $13,4$ m) nên một nửa chiều dài sân là $6,7$ m, suy ra $y_A = 6,7$.
- Điểm A thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $z_A = 0$.

Vậy điểm A có tọa độ là $(6,1; 6,7; 0)$.
Trụ cầu lông AB vuông góc với mặt đất và có độ dài $1,55$ m, nên điểm B có tọa độ là $(6,1; 6,7; 1,55)$.
Khi đó, vectơ $\overrightarrow{AB} = (6,1-6,1; 6,7-6,7; 1,55-0) = (0; 0; 1,55)$.
Đối chiếu với giả thiết $\overrightarrow{AB} = (a; b; c)$, ta có: $a = 0$, $b = 0$, $c = 1,55$.
Giá trị biểu thức T là:

$$T = a + b + 100c = 0 + 0 + 100 \cdot 1,55 = 155.$$

Bài 13. Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 10 m, chiều rộng là 6 m và chiều cao là 4 m. Một bóng đèn công suất lớn được treo trên trần nhà sao cho là điểm chính giữa của phòng học. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo được lấy theo mét) có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn. Gọi $I(a; b; c)$ là tọa độ của điểm treo quạt. Tính giá trị $a + b + c$.



Hướng dẫn giải.

Dựa vào hình vẽ và giả thiết, ta có các tọa độ đỉnh của hình hộp chữ nhật trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ (với chiều rộng 6 m theo trục Ox, chiều dài 10 m theo trục Oy và chiều cao 4 m theo trục Oz):

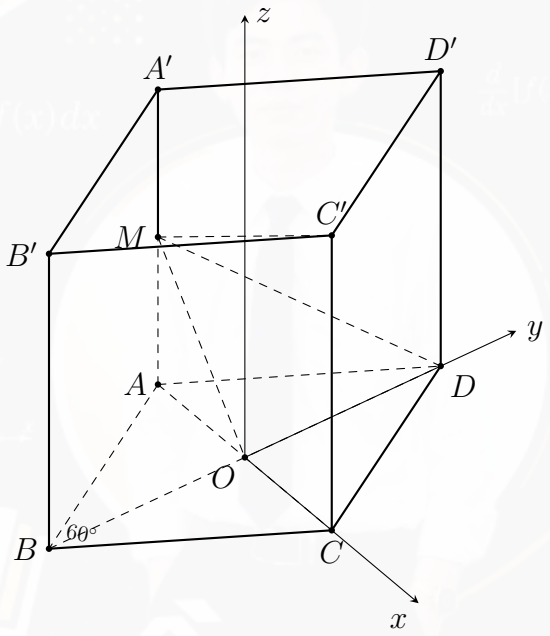
- Gốc tọa độ O trùng với điểm A, nên $A(0; 0; 0)$.
- A' nằm trên trục Oz với độ cao 4, nên $A'(0; 0; 4)$.
- C' là đỉnh đối diện với A' trên trần nhà, tọa độ là $C'(6; 10; 4)$.

Gọi $I(x,y,z)$ là trung điểm của $A'C'$. Do đó:

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{0+6}{2} = 3 \\ y_I = \dfrac{0+10}{2} = 5 \\ z_I = \dfrac{4+4}{2} = 4 \end{cases}$$

Vậy tọa độ của điểm treo bóng đèn là $I(3;5;4)$. Suy ra $a=3, b=5, c=4$. Giá trị cần tính: $a+b+c=3+5+4=12$.

Bài 14. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O có cạnh bằng 1 và $AA'=1$, $\widehat{ABC}=60^\circ$. Gọi M là trung điểm của cạnh AA'. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo được lấy 1 đơn vị) có C, D lần lượt thuộc các tia Ox, Oy và trục Oz song song AA' như hình vẽ. Biết $\overrightarrow{MC'}=(a;b;c)$, khi đó giá trị biểu thức $2026a-2027b+2c$ bằng bao nhiêu?



Hướng dẫn giải. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Vì $ABCD$ là hình thoi cạnh 1 và $\widehat{ABC}=60^\circ$ nên tam giác ABC là tam giác đều cạnh 1.

Suy ra $AC=1 \Rightarrow OC=OA=\dfrac{1}{2}$.

Dựa trên hệ trục tọa độ $Oxyz$ đã cho, ta xác định tọa độ các điểm như sau:

- $O(0;0;0)$.
- Vì C thuộc tia Ox và $OC=\dfrac{1}{2}$ nên $C\left(\dfrac{1}{2};0;0\right)$.
- Vì lăng trụ đứng có chiều cao $AA'=1$ nên $C'\left(\frac{1}{2};0;1\right)$.
- Vì A đối xứng với C qua O nên $A\left(-\dfrac{1}{2};0;0\right)$ và $A'\left(-\frac{1}{2};0;1\right)$.
- M là trung điểm của AA' nên tọa độ của M là: $M\left(-\dfrac{1}{2};0;\dfrac{1}{2}\right)$.

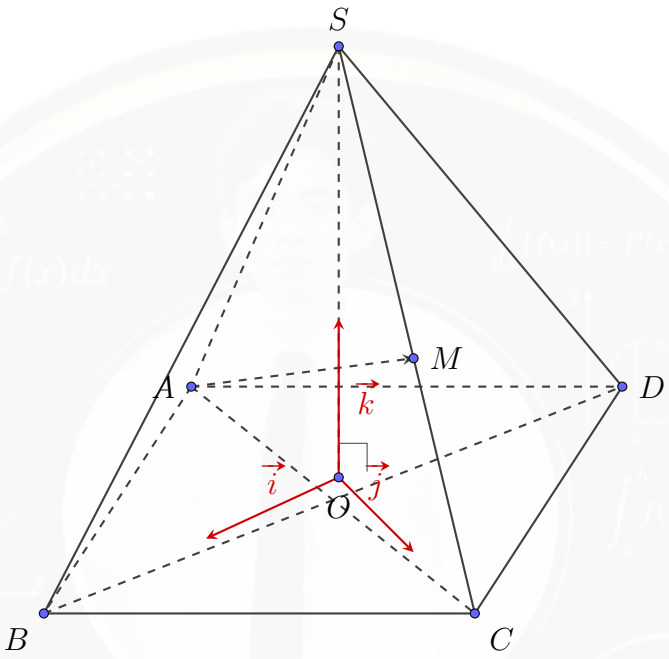
Tọa độ vectơ $\overrightarrow{MC'}$ là:

$$\overrightarrow{MC'}=\left(\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right);0-0;1-\frac{1}{2}\right)=\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$$

Từ đó ta có $a=1, b=0, c=\dfrac{1}{2}$.
Giá trị biểu thức cần tìm là:

$$2026a-2027b+2c=2026\cdot 1-2027\cdot 0+2\cdot\frac{1}{2}=2026+1=2027.$$

Bài 15. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng 5, giao điểm hai đường chéo AC và BD trùng với gốc O. Các vectơ $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ và $OA=OS=4$ như hình bên dưới. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AM}=(a;b;c)$ với M là trung điểm của cạnh SC, khi đó $a+b+c$ bằng bao nhiêu?



Hướng dẫn giải. Vì $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng 5, O là giao điểm của AC và BD nên O là trung điểm của AC và BD.
Xét ΔOAB vuông tại O, có $OB=\sqrt{AB^2-OA^2}=\sqrt{25-16}=3$.
Vì $\overrightarrow{OB}$ và $\vec{i}$ cùng hướng và $OB=3$ nên $\overrightarrow{OB}=3\vec{i}$.
Vì $\overrightarrow{OA}$ và $\vec{j}$ ngược hướng và $OA=4$ nên $\overrightarrow{OA}=-4\vec{j}$.
Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=3\vec{i}+4\vec{j}$.
Có $AC=2OA=8$ mà $\overrightarrow{AC}$ và $\vec{j}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{AC}=8\vec{j}$.
Có $\overrightarrow{OS}$ và $\vec{k}$ cùng hướng và $OS=4$ nên $\overrightarrow{OS}=4\vec{k}$.
Có $\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OS}=3\vec{i}-4\vec{k}$.
Lại có $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BS}=(3\vec{i}+4\vec{j})-(3\vec{i}-4\vec{k})=4\vec{j}+4\vec{k}$.
Vì M là trung điểm của SC nên $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AC})=\dfrac{1}{2}(4\vec{j}+4\vec{k}+8\vec{j})=6\vec{j}+2\vec{k}$.
Do đó $\overrightarrow{AM}=(0;6;2)$.
Suy ra $a+b+c=0+6+2=8$.

§3 BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

I. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA PHÉP CỘNG HAI VECTƠ, PHÉP TRỪ HAI VECTƠ, PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và số k. Khi đó

① $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$;

② $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$;

③ $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$.

Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, $\vec{b} \neq \vec{0}$. Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi tồn tại một số thực k sao cho $\begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3. \end{cases}$

Ví dụ 1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2; 1; 5)$ và $\vec{b} = (2; 2; 1)$. Tìm toạ độ của mỗi vectơ sau:

a) $\vec{a} - \vec{b}$; b) $3\vec{a} + 2\vec{b}$.

Lời giải. a) Vì $\vec{a} = (2; 1; 5)$ và $\vec{b} = (2; 2; 1)$ nên $\vec{a} - \vec{b} = (2 - 2; 1 - 2; 5 - 1) = (0; -1; 4)$.

b) Ta có $3\vec{a} = (3 \cdot 2; 3 \cdot 1; 3 \cdot 5) = (6; 3; 15)$ và $2\vec{b} = (2 \cdot 2; 2 \cdot 2; 2 \cdot 1) = (4; 4; 2)$.

Do đó $3\vec{a} + 2\vec{b} = (6 + 4; 3 + 4; 15 + 2) = (10; 7; 17)$.

① Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{u} = (1; 8; 6)$, $\vec{v} = (-1; 3; -2)$ và $\vec{w} = (0; 5; 4)$. Tìm toạ độ của vectơ $\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$.

» Sưu tầm và Biên soạn: Lê Minh Kha 0399653362

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$ và $C(x_C;y_C;z_C)$. Khi đó:

- Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng AB là $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$;
- Toạ độ trọng tâm của tam giác ABC là $\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3};\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$.

Ví dụ 2

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(3;2;1)$ và $C(2;-1;5)$. Tìm toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB và toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Lời giải. Vì M là trung điểm của đoạn thẳng AB nên toạ độ của điểm M là $\left(\dfrac{1+3}{2};\dfrac{2+2}{2};\dfrac{3+1}{2}\right)$, suy ra $M(2;2;2)$.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên toạ độ của điểm G là $\left(\dfrac{1+3+2}{3};\dfrac{2+2+(-1)}{3};\dfrac{3+1+5}{3}\right)$, suy ra $G(2;1;3)$.

2 Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;9;-1)$, $B(9;4;5)$ và $G(3;0;4)$. Tìm toạ độ điểm C sao cho tam giác ABC nhận G là trọng tâm.

II. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ được xác định bởi công thức

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

Lưu ý.

① $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$;

② $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$; $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

③ $\cos\left(\vec{a}; \vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ (với $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$).

Ví dụ 3

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 4; 2)$ và $\vec{b} = (-4; 1; 0)$.
a) Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$ và cho biết hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có vuông góc với nhau hay không.
b) Tính độ dài của vectơ $\vec{a}$.

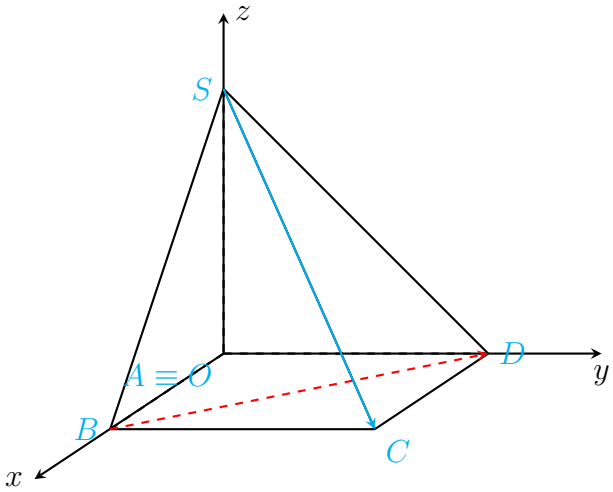
Lời giải. a) Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-4) + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 0$. Do đó, hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau.
b) Độ dài của vectơ $\vec{a}$ là $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{21}$.

3 Trong Ví dụ 3, tính $(\vec{a} + \vec{b})^2$.

DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

Ví dụ 4

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Giả sử $SA = 2, AB = 3, AD = 4$. Xét hệ toạ độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD, AS (H.2.48).



Hình 2.48

a) Xác định toạ độ của các điểm S, A, B, C, D.
b) Tính BD và SC.
c) Tính $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SC})$.

Lời giải. a) Vì A trùng gốc toạ độ nên $A(0;0;0)$. Vì B thuộc tia Ox và $AB = 3$ nên $B(3;0;0)$. Vì D thuộc tia Oy và $AD = 4$ nên $D(0;4;0)$. Vì S thuộc tia Oz và $AS = 2$ nên $S(0;0;2)$. Vì hình chiếu của C lên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là B, D, A nên $C(3;4;0)$.

b) Ta có $\overrightarrow{BD} = (0-3;4-0;0-0) = (-3;4;0)$, suy ra $BD = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{(-3)^2+4^2+0^2} = 5$.
Ta có $\overrightarrow{SC} = (3-0;4-0;0-2) = (3;4;-2)$, suy ra $SC = |\overrightarrow{SC}| = \sqrt{3^2+4^2+(-2)^2} = \sqrt{29}$.

c) Ta có $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SC}) = \dfrac{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{SC}}{|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{SC}|} = \dfrac{(-3)\cdot 3+4\cdot 4+0\cdot(-2)}{5\sqrt{29}} = \dfrac{7}{5\sqrt{29}}$, suy ra $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SC}) \approx 74,9°$.

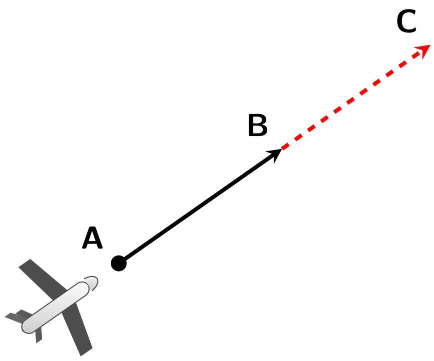
Nếu $A(x_A;y_A;z_A)$ và $B(x_B;y_B;z_B)$ thì $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

4 Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;2;1)$, $B(3;-2;1)$ và $C(-2;5;7)$.
a) Tính chu vi của tam giác ABC.
b) Tính $\widehat{BAC}$.

III. VẬN DỤNG TỌA ĐỘ VECTƠ TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN CÓ LIÊN QUAN ĐẾN THỰC TIỄN

Ví dụ 5

Trong không gian với một hệ trục toạ độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;8)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì toạ độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là gì?



Lời giải. Gọi $C(x;y;z)$ là vị trí của máy bay sau 5 phút tiếp theo. Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng. Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B gấp đôi thời gian bay từ B đến C nên $AB = 2BC$.

Do đó

$$\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{940-800}{2};\frac{550-500}{2};\frac{8-7}{2}\right) = (70;25;0{,}5).$$

Mặt khác, $\overrightarrow{BC} = (x-940;y-550;z-8)$ nên $\begin{cases} x-940 = 70 \\ y-550 = 25 \\ z-8 = 0{,}5. \end{cases}$

Từ đó $\begin{cases} x = 1010 \\ y = 575 \\ z = 8{,}5 \end{cases}$ và vì vậy $C(1010;575;8{,}5)$.

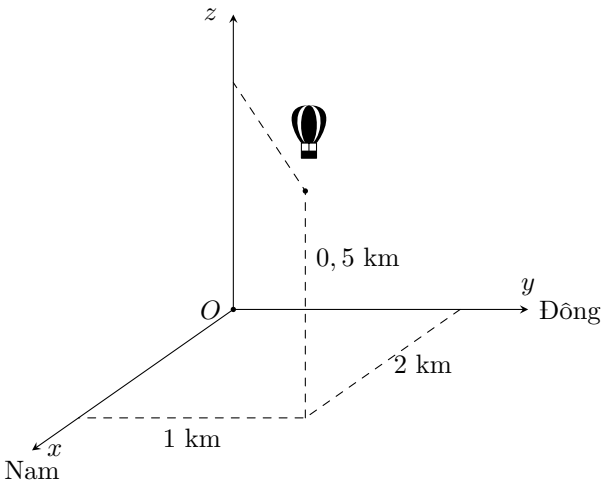
Vậy tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $(1010;575;8{,}5)$.

Ví dụ 6

Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc thứ hai năm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,5 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,8 km.

Chọn hệ trục $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng $(Oxyz)$ trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (H2.50), đơn vị đo lấy theo kilomet.

1. Tìm tọa độ của mỗi chiếc khinh khí cầu đối với hệ tọa độ đã chọn.
2. Xác định khoảng cách giữa hai khinh khí cầu (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

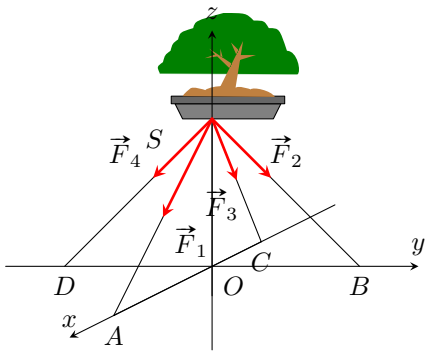


Lời giải.

1. Chiếc khinh khí cầu thứ nhất và thứ hai có có tọa độ lần lượt là $(2;1;0{,}5)$ và $(-1;-1{,}5;0{,}8)$.
2. Khoảng cách hai chiếc khinh khí cầu là
$$\sqrt{(-1-2)^2+(1{,}5-1)^2+(0{,}8-0{,}5)^2}=\sqrt{15{,}34}\approx 3{,}92 \text{ (km)}.$$

Ví dụ 7

Một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân với điểm đặt $S(0;0;20)$ và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là $A(20;0;0)$, $B(0;20;0)$, $C(-20;0;0)$, $D(0;-20;0)$ (đơn vị cm). Cho biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn 40(N) và được phân bố thành bốn lực $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$, $\vec{F_4}$ có độ lớn bằng nhau như hình bên. Tìm toạ độ của các lực nói trên (mỗi centimét biểu diễn 1 N).



Lời giải. Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình vuông.

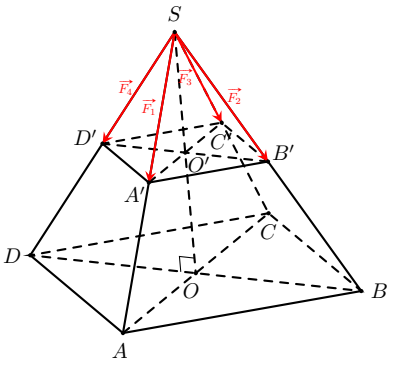
Ta có $\overrightarrow{SA}=(20;0;-20)$, $\overrightarrow{SB}=(0;20;-20)$, $\overrightarrow{SC}=(-20;0;-20)$, $\overrightarrow{SD}=(0;-20;-20)$.

Suy ra $SA=SB=SC=SD=20\sqrt{2}$. Do đó $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều.

Các véctơ $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$, $\vec{F_4}$ có điểm đầu tại S và điểm cuối lần lượt là A', B', C', D'.
Ta có $SA' = SB' = SC' = SD'$ nên $S.A'B'C'D'$ cũng là hình chóp tứ giác đều.
Gọi $\vec{F}$ là trọng lực tác dụng lên chậu cây và O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$. Ta có

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} = \overrightarrow{SA'} + \overrightarrow{SB'} + \overrightarrow{SC'} + \overrightarrow{SD'} = 4\overrightarrow{SO'}.$$

Ta có $\left|\vec{F}\right| = 40$, suy ra $\left|\overrightarrow{SO'}\right| = SO' = 10$.



Do tam giác $SO'A'$ vuông cân nên $SA' = \sqrt{2}SO' = 10\sqrt{2}$.
Suy ra $\vec{F_1} = \overrightarrow{SA'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{SA} = (10; 0; -10)$. Chứng minh tương tự ta cũng có

$$\vec{F_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} = (0; 10; -10), \vec{F_3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} = (-10; 0; -10), \vec{F_4} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SD} = (0; -10; -10).$$

IV. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

1) Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Tính độ dài của $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b}$

Ⓐ $\sqrt{74}$. Ⓑ $3\sqrt{6}$. Ⓒ $5\sqrt{2}$. Ⓓ $\sqrt{42}$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 5), B(5; -5; 7); M(x; y; 1)$. Khi A, B, M thẳng hàng thì giá trị của x, y là

Ⓐ $x = 4; y = -7$. Ⓑ $x = -4; y = 7$.
Ⓒ $x = 4; y = 7$. Ⓓ $x = -4; y = -7$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$ cho 3 điểm $A(1, 2, -1), B(2, -1, 3), C(-3, 5, 1)$. Tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành là

Ⓐ $(-2, 2, 5)$. Ⓑ $(-4, 8, -5)$. Ⓒ $(-4, 8, -3)$. Ⓓ $(-2, 8, -3)$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1; -4; 2), B(2; 1; -3), C(3; 0; -2)$ và $D(2; -5; -1)$. Điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ có tọa độ là:

Ⓐ $G(2; -1; -1)$. Ⓑ $G(2; -2; -1)$.
Ⓒ $G(0; -1; -1)$. Ⓓ $G(6; -3; -3)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; -1; -2)$ và trọng tâm $G(2; 1; -3)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ là

Ⓐ $(3; 6; 3)$. Ⓑ $(3; 6; -3)$. Ⓒ $(3; -3; 6)$. Ⓓ $(3; 2; 1)$.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -1), B(2; -1; 3)$. Tìm tọa độ điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Ⓐ $I\left(-\dfrac{5}{3}; 0; \dfrac{5}{3}\right)$. Ⓑ $I\left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{5}{3}; 0\right)$.
Ⓒ $I\left(\dfrac{5}{3}; 0; \dfrac{5}{3}\right)$. Ⓓ $I\left(0; \dfrac{5}{3}; \dfrac{5}{3}\right)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $E(1; 3; 2), F(0; -1; 5), K(2; 4; -1)$ và tam giác

ABC thỏa mãn $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CK}=\vec{0}$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ΔABC là

Ⓐ $G(1;2;2)$. Ⓑ $G(-1;-4;3)$.
Ⓒ $G(2;2;1)$. Ⓓ $G(1;1;-3)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0), B(0;2;0), C(0;0;2)$ và $D(2;2;2)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN là:

Ⓐ $I(1;1;0)$. Ⓑ $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$. Ⓒ $I(1;1;1)$. Ⓓ $I(1;-1;2)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$ và điểm $B(4;-3;1)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

Ⓐ $(6;-2;4)$. Ⓑ $(3;-1;2)$. Ⓒ $(1;-2;-1)$. Ⓓ $(2;-4;-2)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$; $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ và $k\in\mathbb{R}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $k\vec{a}=(ka_1;ka_2;ka_3)$.
Ⓑ $|\vec{a}|=a_1^2+a_2^2+a_3^2$.
Ⓒ $\vec{a}-\vec{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)$.
Ⓓ $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$ với $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz. Tính tọa độ của vectơ $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

Ⓐ $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(-1;-1;1)$. Ⓑ $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(-1;1;1)$.
Ⓒ $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(1;1;-1)$. Ⓓ $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(1;-1;1)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}=(1;-4;0)$ và $\vec{v}=(-1;-2;1)$. Vectơ $\vec{u}+3\vec{v}$ có tọa độ là

Ⓐ $(-2;-10;3)$. Ⓑ $(-2;-6;3)$.
Ⓒ $(-4;-8;4)$. Ⓓ $(-2;-10;-3)$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}=(1;3;-2)$ và $\vec{v}=(2;1;-1)$. Tọa độ vectơ $\vec{u}-\vec{v}$ là:

Ⓐ $(3;4;-3)$. Ⓑ $(-1;2;-3)$. Ⓒ $(-1;2;-1)$. Ⓓ $(1;-2;1)$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a}=(2;3;2)$ và $\vec{b}=(1;1;-1)$. Vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ có tọa độ là

Ⓐ $(3;4;1)$. Ⓑ $(-1;-2;3)$. Ⓒ $(3;5;1)$. Ⓓ $(1;2;3)$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}(1;2;3)$; $\vec{b}(2;2;-1)$; $\vec{c}(4;0;-4)$. Tọa độ của vectơ $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ là

Ⓐ $\vec{d}(-7;0;-4)$. Ⓑ $\vec{d}(-7;0;4)$.
Ⓒ $\vec{d}(7;0;-4)$. Ⓓ $\vec{d}(7;0;4)$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;-3;3)$, $\vec{b}=(0;2;-1)$, $\vec{c}=(3;-1;5)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}$.

Ⓐ $(10;-2;13)$. Ⓑ $(-2;2;-7)$. Ⓒ $(-2;-2;7)$. Ⓓ $(-2;2;7)$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(1;-1;2)$, $\vec{b}=(2;1;-3)$, $\vec{c}=(0;3;-2)$. Điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{OM}+\vec{a}=2\vec{b}-\vec{c}$, tổng $x+y+z$ bằng

Ⓐ 3. Ⓑ -3. Ⓒ 4. Ⓓ -2.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{x}=(2;1;-3)$ và $\vec{y}=(1;0;-1)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{a}=\vec{x}+2\vec{y}$.

Ⓐ $\vec{a}=(4;1;-1)$. Ⓑ $\vec{a}=(3;1;-4)$.
Ⓒ $\vec{a}=(0;1;-1)$. Ⓓ $\vec{a}=(4;1;-5)$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$. Tọa độ của vectơ $\vec{w}$ là

Ⓐ $\vec{w}=(3;-1;2)$. Ⓑ $\vec{w}=(3;1;-2)$.
Ⓒ $\vec{w}=(3;1;2)$. Ⓓ $\vec{w}=(3;-1;-2)$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(-2;2;0)$, $\vec{b}=(2;2;0)$, $\vec{c}=(2;2;2)$. Giá trị của $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ bằng

Ⓐ 6. Ⓑ 11. Ⓒ $2\sqrt{11}$. Ⓓ $2\sqrt{6}$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{u}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{v}=(m;2;m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}|=|\vec{v}|$.

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(2;m-1;3)$, $\vec{b}=(1;3;-2n)$. Tìm m,n để các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương.

Ⓐ $m=7;n=-\dfrac{3}{4}$. Ⓑ $m=7;n=-\dfrac{4}{3}$.
Ⓒ $m=4;n=-3$. Ⓓ $m=1;n=0$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=(3;0;1)$ và $\vec{v}=(2;1;0)$. Tính tích vô hướng $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Ⓐ $\vec{u}\cdot\vec{v}=8$. Ⓑ $\vec{u}\cdot\vec{v}=6$. Ⓒ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$. Ⓓ $\vec{u}\cdot\vec{v}=-6$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(1;-2;3)$, $\vec{b}=(-2;1;2)$. Khi đó, tích vô hướng $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}$ bằng

Ⓐ 12. Ⓑ 2. Ⓒ 11. Ⓓ 10.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u}=(2;-1;1)$ và $\vec{v}=(0;-3;-m)$. Tìm số thực m sao cho tích vô hướng $\vec{u}\cdot\vec{v}=1$.

Ⓐ $m=4$. Ⓑ $m=2$. Ⓒ $m=3$. Ⓓ $m=-2$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;1;0)$ và $\vec{b}=(-1;0;-2)$. Tính $\cos(\vec{a},\vec{b})$.

Ⓐ $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\dfrac{2}{25}$. Ⓑ $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\dfrac{2}{5}$.
Ⓒ $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{2}{25}$. Ⓓ $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{2}{5}$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{u}=(-\sqrt{3};0;1)$ là

Ⓐ 120°. Ⓑ 60°. Ⓒ 150°. Ⓓ 30°.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(-3;4;0)$, $\vec{b}=(5;0;12)$. Côsin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{3}{13}$. Ⓑ $\dfrac{5}{6}$. Ⓒ $-\dfrac{5}{6}$. Ⓓ $-\dfrac{3}{13}$.

Câu 29. Cho $\vec{u}=(-1;1;0)$, $\vec{v}=(0;-1;0)$, góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là

Ⓐ $120°$. Ⓑ $45°$. Ⓒ $135°$. Ⓓ $60°$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 vectơ $\vec{a}=(2;1;-1)$; $\vec{b}=(1;3;m)$. Tìm m để $(\vec{a};\vec{b})=90°$.

Ⓐ $m=-5$. Ⓑ $m=5$. Ⓒ $m=1$. Ⓓ $m=-2$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=(1;1;-2)$, $\vec{v}=(1;0;m)$. Tìm tất cả giá trị của m để góc giữa $\vec{u},\vec{v}$ bằng $45°$.

Ⓐ $m=2$. Ⓑ $m=2\pm\sqrt{6}$.
Ⓒ $m=2-\sqrt{6}$. Ⓓ $m=2+\sqrt{6}$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;2;1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA.

Ⓐ $OA=\sqrt{5}$. Ⓑ $OA=5$. Ⓒ $OA=3$. Ⓓ $OA=9$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;1)$, $B(3;0;-2)$. Tính độ dài AB.

Ⓐ 26. Ⓑ 22. Ⓒ $\sqrt{26}$. Ⓓ $\sqrt{22}$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;2)$ và $B(3;1;0)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

Ⓐ $(4;2;2)$. Ⓑ $(2;1;1)$. Ⓒ $(2;0;-2)$. Ⓓ $(1;0;-1)$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;5;3)$ và $M(2;1;-2)$. Tọa độ điểm B biết M là trung điểm của AB là

Ⓐ $B\left(\dfrac{1}{2};3;\dfrac{1}{2}\right)$. Ⓑ $B(-4;9;8)$.
Ⓒ $B(5;3;-7)$. Ⓓ $B(5;-3;-7)$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;3)$, $B(-1;2;5)$, $C(0;0;1)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Ⓐ $G(0;0;3)$. Ⓑ $G(0;0;9)$. Ⓒ $G(-1;0;3)$. Ⓓ $G(0;0;1)$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;-1;-2)$ và trọng tâm $G(2;1;-3)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ là

Ⓐ $(3;6;3)$. Ⓑ $(3;6;-3)$. Ⓒ $(3;-3;6)$. Ⓓ $(3;2;1)$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1;-4;2)$, $B(2;1;-3)$, $C(3;0;-2)$ và $D(2;-5;-1)$. Điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ có tọa độ là:

Ⓐ $G(2;-1;-1)$. Ⓑ $G(2;-2;-1)$.
Ⓒ $G(0;-1;-1)$. Ⓓ $G(6;-3;-3)$.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;1)$, $B(0;1;2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A,B,M thẳng hàng là

Ⓐ $M(4;-5;0)$. Ⓑ $M(2;-3;0)$. Ⓒ $M(0;0;1)$. Ⓓ $M(4;5;0)$.

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;-2;3)$, $B(0;3;1)$, $C(4;2;2)$. Cosin của góc $\widehat{BAC}$ là

Ⓐ $\dfrac{9}{\sqrt{35}}$. Ⓑ $-\dfrac{9}{\sqrt{35}}$. Ⓒ $-\dfrac{9}{2\sqrt{35}}$. Ⓓ $\dfrac{9}{2\sqrt{35}}$.

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;3); B(-1;2;1); C(3;-1;-2)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Ⓐ -6. Ⓑ -14. Ⓒ 14. Ⓓ 6.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, ba điểm $M(1;0;2), N(2;-3;0)$ và $P(2;3;2)$. Chu vi của tam giác MNP là:

Ⓐ $\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{40}$. Ⓑ $\sqrt{5}+\sqrt{13}+\sqrt{17}$.
Ⓒ 64. Ⓓ $\sqrt{20}+\sqrt{22}+\sqrt{24}$.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;2;1), B(1;-1;2), C(1;2;-1)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

Ⓐ $M(5;5;0)$. Ⓑ $M(-2;-6;4)$.
Ⓒ $M(-2;6;-4)$. Ⓓ $M(2;-6;4)$.

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1), B(-1;2;1)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là?

Ⓐ $I\left(\dfrac{1}{3};1;\dfrac{2}{3}\right)$. Ⓑ $I(-3;1;0)$.
Ⓒ $I\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2};0\right)$. Ⓓ $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2};1\right)$.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3), B(-2;-4;9)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA=2MB$. Độ dài đoạn thẳng OM là

Ⓐ 5. Ⓑ 3. Ⓒ $\sqrt{54}$. Ⓓ $\sqrt{17}$.

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $G(1;-2;3)$ và ba điểm $A(a;0;0); B(0;b;0); C(0;0;c)$. Biết G là trọng tâm của tam giác ABC thì $a+b+c$ bằng

Ⓐ 3. Ⓑ 9. Ⓒ 6. Ⓓ 0.

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(2;3;2), C(3;-1;3)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho bốn điểm A, B, C, D lập thành một hình chữ nhật.

Ⓐ $D(4;3;4)$. Ⓑ $D(4;-1;4)$. Ⓒ $D(2;-3;2)$. Ⓓ $D(4;1;4)$.

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;6;2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M. Tính tỉ số $\dfrac{AM}{BM}$.

Ⓐ $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $\dfrac{AM}{BM}=2$. Ⓒ $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{1}{3}$. Ⓓ $\dfrac{AM}{BM}=3$.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-4;1;5); B(1;5;-3)$. Gọi C là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (Oyz). Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AC}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB}=5\overrightarrow{BC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{BC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AC}=-4\overrightarrow{BC}$.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}=(1;1;-3)$; $\vec{b}=(2;2;-2)$; $\vec{c}=2\vec{i}+2\vec{j}-6\vec{k}$ và $\vec{d}=(1;1;-1)$. Cặp vectơ nào sau đây cùng phương?

Ⓐ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ⓑ $\vec{a}$ và $\vec{d}$. Ⓒ $\vec{a}$ và $\vec{c}$. Ⓓ $\vec{b}$ và $\vec{c}$.

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;-1), B(1;2;0), C(m;n;0)$. Tìm m, n sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Ⓐ $m=1; n=1$.
Ⓑ $m=1; n=2$.
Ⓒ $m=2; n=1$.
Ⓓ $m=2; n=2$.

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 vectơ $\vec{a}=(-1;2x-1;1-3z)$ và $\vec{b}=(2+3y;-1;-2)$. Khi $\vec{a}=\vec{b}$ thì tổng $T=x+2y^2+3z^3$ bằng

Ⓐ 2.
Ⓑ 5.
Ⓒ 1.
Ⓓ 4.

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1), B(2;-1;3), C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là

Ⓐ $(-2;11;1)$.
Ⓑ $\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right)$.
Ⓒ $\left(\frac{2}{3};\frac{11}{3};\frac{1}{3}\right)$.
Ⓓ $\left(\frac{11}{3};-2;1\right)$.

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1;4;2), B(3;2;1), C(-2;0;2)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và diện tích hình thang $ABCD$ gấp ba lần diện tích tam giác ABC.

Ⓐ $D(9;8;0)$.
Ⓑ $D(-11;0;4)$ và $D(9;8;0)$.
Ⓒ $D(-11;0;4)$.
Ⓓ $D(11;0;-4)$ và $D(-9;-8;0)$.

2) Trắc nghiệm đúng sai

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(4;2;1), B(2;1;3), C(-1;3;-2)$.

a) Tọa độ trọng tâm tam giác ABC bằng $\left(\frac{5}{3};2;\frac{2}{3}\right)$.

b) Tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB bằng $\left(3;\frac{3}{2};2\right)$.

c) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm $D=(1;4;-4)$.

d) Ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;5;-1), B(7;x;1), C(9;2;y)$.

a) Ba điểm A, B, C thẳng hàng thì $x+y=5$.

b) Điểm $G\left(\frac{19}{3};\frac{8}{3};3\right)$ là trọng tâm tam giác ABC thì $x=1; y=3$.

c) Tam giác ABC vuông tại A thì $x=13, y=-1$.

d) Tích vô hướng của $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-3x+2y+41$.

Bài 3. Cho các điểm $A(1;-2;3), B(-2;1;2), C(3;-1;2)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(-3;3;-1)$.

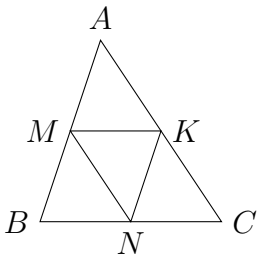
b) $\overrightarrow{AC}=(-2;-1;1)$.

c) $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$.

d) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Bài 4. Cho ba điểm $A(3;3;-6), B(1;3;2)$ và $C(-1;-3;1)$. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm

của AB, BC và CA.



a) Tọa độ $M(2;3;2)$.

b) Với G là trọng tâm tam giác ABC thì $GC = 2\sqrt{5}$.

c) Trọng tâm tam giác MNK là $E(1;1;-1)$.

d) Với $D(-3;-3;9)$ thì tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (2;-2;-4)$, $\vec{b} = (1;-1;1)$ và $\vec{c} = (-1;1;2)$.

a) $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

b) $|\vec{b}| = \sqrt{3}$.

c) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng.

d) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc.

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2;3;1)$, $\vec{b} = (-1;5;2)$, $\vec{c} = (4;-1;3)$ và $\vec{x} = (-3;22;5)$.

a) $|\vec{a}| = \sqrt{14}$.

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 19$.

c) $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \dfrac{2\sqrt{91}}{91}$.

d) $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (2;1;-3)$, $\vec{b} = (-4;-2;6)$, $\vec{c} = (m-1;2;0)$.

a) $\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{b}$.

b) $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$.

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

d) Nếu $\vec{b} \perp \vec{c}$ thì $m = 1$.

Bài 8. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (3;0;1)$, $\vec{b} = (1;-1;-2)$, $\vec{c} = (1;7;-3)$.

a) $|\vec{c}| = \sqrt{59}$.

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$.

c) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\sqrt{15}}{30}$.

d) Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{c}$ lớn hơn $90°$.

Bài 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(-1;1;2), B(1;0;3), C(0;2;-2)$.

a) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}$.

b) $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

c) Tọa độ tâm hình bình hành là $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}; 0\right)$.

d) $\overrightarrow{AD} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

Bài 10. Trong mặt phẳng $Oxyz$, tam giác ABC với $A(1;-3;3); B(2;-4;5), C(a;-2;b)$ nhận điểm $G(1;c;3)$ làm trọng tâm của nó.

a) Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là $\left(\frac{3}{2};-\frac{7}{2};4\right)$.

b) Tọa độ vectơ là $\overrightarrow{AB} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$.

c) $a+b+c=-2$.

d) $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = -\frac{14\sqrt{57}}{57}$.

Bài 11. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1), B(2;-1;3), C(-4;7;5)$.

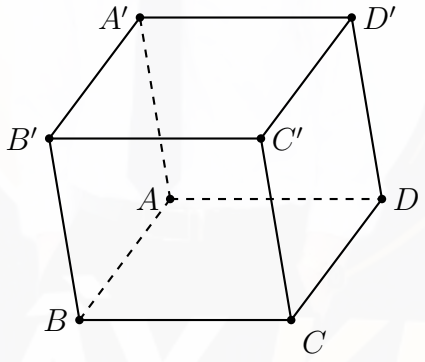
a) $AB=\sqrt{26}$.

b) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -26$.

c) Gọi $M(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MB}$. Khi đó $x+y+z=2$.

d) Gọi $D(a;b;c)$ là tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC. Khi đó $a+b+c=1$.

Bài 12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết điểm $A(0;0;0), B(1;0;0), C(1;2;0), D'(-1;3;5)$. Gọi M,N là tâm của các hình bình hành $ABB'A', ADD'A'$.



a) Tọa độ $D(0;2;0)$.

b) Tọa độ $A'(-1;1;5)$.

c) Tọa độ $\overrightarrow{MN} = (-1;1;0)$.

d) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CC'}| = \sqrt{29}$.

Bài 13. Trong không gian $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ có $A(0;0;1)$, $B(-1;-2;0)$ và $C(2;1;-1)$.

a) $\overrightarrow{BC} = (3;-3;-1)$

b) $\triangle ABC$ cân tại A

c) $AB \perp BC$

d) Gọi $H(a,b,c)$ là chân đường cao hạ từ A xuống BC. Khi đó $a+b+c=-\frac{17}{19}$

Bài 14. Trong không gian $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ có $A(1;0;0)$, $B(0;0;1)$, $C(2;1;1)$.

a) $\overrightarrow{AB} = (-1;0;1)$

b) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương

c) $AB \perp AC$

d) Diện tích tam giác ABC là $\sqrt{6}$

Bài 15. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1;-2;3)$ và $\vec{b} = (1;1;-1)$.

a) $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 3$

b) $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = 4$

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$

d) $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = -\dfrac{4}{\sqrt{42}}$

Bài 16. Trong không gian $Oxyz$, cho ba véc-tơ $\vec{a} = (-1;1;0)$, $\vec{b} = (1;1;0)$, $\vec{c} = (1;1;1)$.

a) $\vec{a} \cdot \vec{c} = 1$

b) $\vec{a}$ cùng phương $\vec{c}$

c) $\cos\left(\vec{b}, \vec{c}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$

d) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

Bài 17. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;2;-3), B(-2;4;5), C(7;-3;-5)$.

a) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng

b) $A'(-1;-2;3)$ là điểm đối xứng của A qua O

c) Điểm $G(2;1;-1)$ là trọng tâm của tam giác ABC

d) Điểm $D(10;-5;-13)$ thỏa tứ giác $ABCD$ là hình bình hành

Bài 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(-3;2;1)$, $C(4;2;0)$, $B'(-2;1;1)$, $D'(3;5;4)$.

a) $E\left(\dfrac{1}{2};3;\dfrac{5}{2}\right)$ là trung điểm của $B'D'$

b) $F\left(\dfrac{1}{2};2;\dfrac{1}{2}\right)$ là trung điểm của AC

c) Tọa độ điểm $A'(-3;3;3)$

d) Tọa độ điểm $B(-2;0;1)$

Bài 19. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

a) Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là $\vec{a} = (2;-3;4)$

b) Nếu vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ thì điểm A có tọa độ là $A(-2;3;-4)$

c) Biết $\vec{a} = \vec{b}$ và $\vec{b} = (3x - y; x - 4y; 4)$. Khi đó $x + y = 2$

d) Biết $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $A(1;2;-1)$ thì điểm B có tọa độ là $B(3;-1;3)$

Bài 20. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;-2;1)$, $B(-2;-2;-1)$, $C(3;1;-2)$.

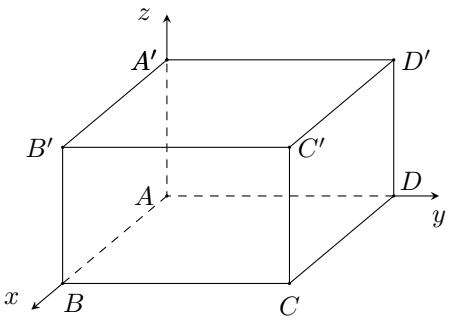
a) Hình chiếu của A lên mặt phẳng (Oxz) là $A'(0;0;1)$

b) Tam giác ABC là tam giác vuông tại A

c) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ của $D(5;1;4)$

d) Trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\dfrac{1}{3};1;\dfrac{-2}{3}\right)$

Bài 21. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc tọa độ O và các đỉnh B, C, D' có tọa độ lần lượt là $(2;0;0)$, $(2;4;0)$, $(0;4;3)$.



a) Tọa độ $D(0;4;0)$

b) Tọa độ $C'(2;3;4)$

c) Tọa độ của $\overrightarrow{AA'} = (0;0;3)$

d) Tọa độ của $\overrightarrow{B'D} = (-2;4;-3)$

Bài 22. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-2;1)$ và B nằm trên trục Oy sao cho $OB = 2$.

a) $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

b) Tọa độ điểm $B(2;0;0)$

c) Điểm $M(2;2;-1)$ đối xứng với A qua trục Ox

d) Tọa độ điểm $N(-2;2;1)$ đối xứng với A qua mặt phẳng tọa độ (Oxy)

Bài 23. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vecto $\vec{u} = (3;1;-2)$, $\vec{v} = (1;-1;1)$, $\vec{w} = (-1;-3;4)$.

a) $\vec{u} + \vec{v} = (4;0;-2)$

b) $\vec{u} \perp \vec{v}$

c) Hai vectơ $\vec{u} - 2\vec{v}$ và $\vec{w}$ cùng hướng

d) $|\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}| = \sqrt{41}$

Bài 24. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;0;-2)$, $B(-2;3;4)$, $C(4;-6;1)$.

a) Tọa độ trọng tâm G của tam giác là $(1;-1;1)$

b) $\overrightarrow{AB} = (3;-3;6)$, $\overrightarrow{AC} = (-3;6;-3)$

c) Tam giác ABC là tam giác cân

d) Nếu $ABDC$ là hình bình hành thì tọa độ điểm D là $(7;-9;-5)$

Bài 25. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(3;2;-1)$, $B(1;4;-2)$ và $C(0;-2;3)$. Khi đó

a) $\overrightarrow{AB} = (-2;2;-1)$

b) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 3$

c) Tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$ là $(1;-2;2)$

d) Tọa độ điểm N thuộc mặt phẳng (Oxy), sao cho A, B, N thẳng hàng là $(5;0;0)$

Bài 26. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(0;0;-1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;0;1)$ và M là điểm sao cho $3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó

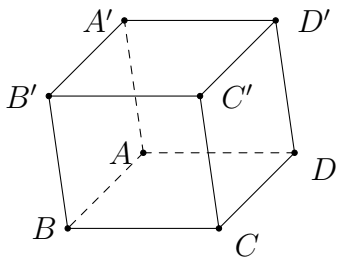
a) $\overrightarrow{AB} = (-1;\ 1;\ 1)$

b) $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{2\sqrt{15}}{15}$

c) Tọa độ điểm D là $(2;\ -1;\ 0)$

d) Tọa độ điểm M là $\left(\dfrac{3}{4};-\dfrac{1}{2};1\right)$

Bài 27. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết điểm $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;2;0)$, $D'(-1;3;5)$. Gọi M, N là tâm của các hình bình hành $ABB'A'$, $ADD'A'$.



a) Tọa độ $D(0;2;0)$

b) Tọa độ $A'(-1;1;5)$

c) Tọa độ $\overrightarrow{MN} = (-1;1;0)$

d) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'}\right| = \sqrt{29}$

Bài 28. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;3;1)$, $B(5;6;2)$, và $C(-2;2;4)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M. Xét tính đúng sai các khẳng định sau.

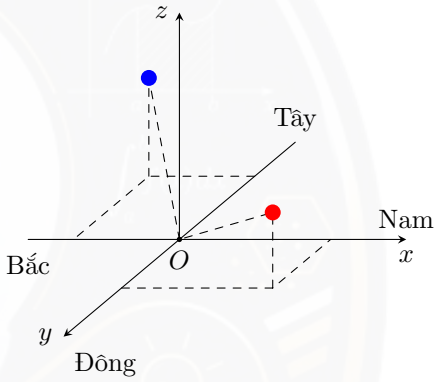
a) Tam giác ABC vuông tại A

b) Trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\frac{1}{3};\frac{11}{3};\frac{7}{3}\right)$

c) $\overrightarrow{AB} = (-7;3;1)$

d) Tọa độ của điểm M là $(-9;0;-2)$

Bài 29. Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,5 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,8 km. Chọn hệ trục $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng Oxy trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (Hình minh họa), đơn vị đo lấy theo kilomet.



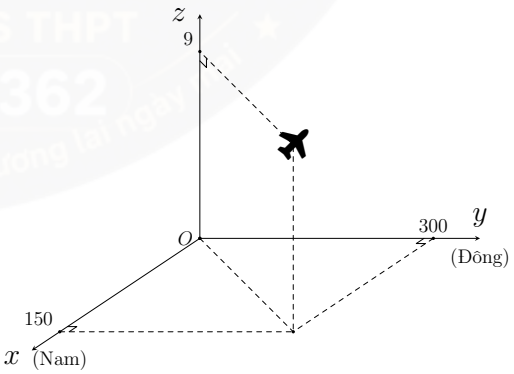
a) Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ nhất là $(2;1;0{,}5)$

b) Với hệ tọa độ đã chọn, toạ độ khinh khí cầu thứ hai là $(-1{,}5;-1;0{,}8)$

c) Khoảng cách từ điểm xuất phát đến khinh khí cầu thứ nhất bằng $\sqrt{21}$ km

d) Khoảng cách hai chiếc khinh khí cầu là 3,92 km (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*)

Bài 30. Hình vẽ sau mô tả vị trí của máy bay vào thời điểm 9 giờ 30 phút. Biết các đơn vị trên hình tính theo đơn vị km. Mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, O trùng với vị trí trung tâm điều khiển.



a) Tại thời điểm 9 giờ 30 phút, máy bay đang ở độ cao 9 km so với mặt đất

b) Tại thời điểm 9 giờ 30 phút, tọa độ của máy bay là $(300;150;9)$

c) Phi công để máy bay ở chế độ tự động bay thẳng theo hướng đông với vận tốc là 750 km/h, độ cao không đổi. Biết rằng gió thổi theo hướng đông với vận tốc 10 m/s. Giả sử vận tốc và hướng gió không thay đổi thì tại thời điểm 10 giờ 30 phút máy bay ở tọa độ $(150;1\,086;9)$

d) Tại thời điểm 9 giờ 30 phút, máy bay cách trung tâm điều khiểu một khoảng (làm tròn đến hàng phần mười) là 335,6 km

Bài 31. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy km, ra đa phát hiện một máy bay chiến đấu di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(500;200;10)$ đến điểm $N(800;300;10)$ trong 20 phút.

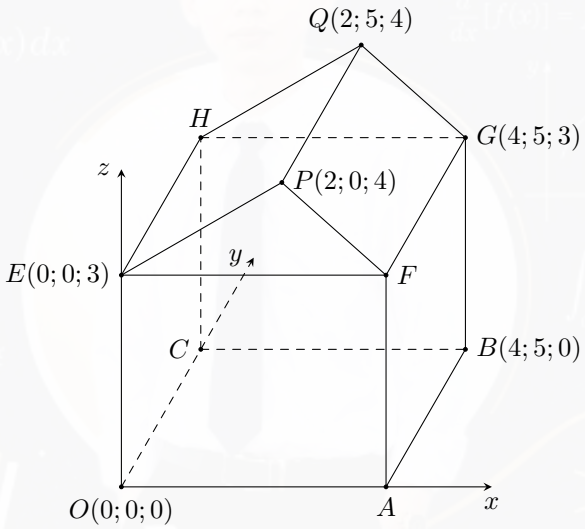
a) Máy bay đang di chuyển theo hướng tiến lại gần vị trí đặt ra đa

b) Khoảng cách $MN = 100\sqrt{10}$ km

c) Tốc độ của máy bay khi di chuyển từ M đến N là $150\sqrt{10}$ km/h

d) Nếu tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 4phút tiếp theo là $Q(a;b;c)$ với $a+b+c=1191$

Bài 32. Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong không gian $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



a) Toạ độ điểm $F(4;0;3)$

b) Toạ độ vectơ $\overrightarrow{AH} = (4;5;3)$

c) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AF} = 3$

d) Góc dốc của mái nhà, tức là số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG, hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ bằng 26,6° (làm tròn kết quả đến hàng phần mười với đơn vị độ.

3) Câu trả lời ngắn

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2;1;5)$ và $\vec{b} = (2;2;1)$. Biết vectơ $3\vec{a}+2\vec{b} = (x_0;y_0;z_0)$. Tính giá trị biểu thức $x_0+y_0+z_0$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (5;4;-1)$, $\vec{b} = (2;-5;3)$, $\vec{u} = (x;y;z)$ thỏa mãn $\vec{a}+2\vec{u} = \vec{b}$. Tính giá trị biểu thức $T = 2x+2y+z$.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (5;3;-2)$ và $\vec{b} = (m;-1;m+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù?

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (1;-1;0)$. Xác định k để vectơ $\vec{u} = (2;2k-1;0)$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N.

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác MNP có $M(3;7;2)$, $N(5;1;-1)$ và $P(4;-4;-2)$. Gọi $G(a;b;c)$ là trọng tâm của tam giác MNP. Tính giá trị biểu thức $T=a+3b+3c$.

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;5;3), B(a;b;c)$ và $M(2;1;-2)$. Biết M là trung điểm của AB, tính $T=a+b+c$.

Bài 8. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;5)$. Gọi tọa độ $A'(a;b;c)$ là điểm đối xứng với A qua trục Oy. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c$.

Bài 9. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;5), B(5;-5;7), M(x;y;1)$. Để ba điểm A,B,M thẳng hàng thì giá trị của $x+y$ bằng bao nhiêu?

Bài 10. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;2;-1), B(-1;-x;1), C(7;-1;y)$. Khi A,B,C thẳng hàng thì giá trị biểu thức $x+y$ bằng bao nhiêu?

Bài 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-2)$, $B(2;-3;5)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA=2MB$, biết tọa độ điểm M là $(a;b;c)$. Khi đó $a+3b+c$ bằng bao nhiêu?

Bài 12. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1), B(2;-1;3), C(-4;7;5)$. Gọi $D(a;b;c)$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC. Giá trị của $a+b+2c$ bằng bao nhiêu?

Bài 13. Trong không gian $Oxyz$, cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B. Ba đỉnh $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$ và hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$. Tính giá trị của biểu thức $a+b+c$.

Bài 14. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;1)$; $C(-3;6;4)$. Gọi M là điểm nằm trên đoạn BC sao cho $MC=2MB$. Tính độ dài đoạn AM (Kết quả được làm tròn ở chữ số thập phân thứ nhất).

Bài 15. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(3;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;3)$. Điểm $M(a;b;c)$ trong không gian thỏa mãn M không trùng với các điểm O, A, B, C và $\widehat{AMB}=\widehat{BMC}=\widehat{CMA}=90^\circ$. Khi đó tổng $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Bài 16. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-1;1), B(3;1;2)$ và $C(-1;0;3)$. Có bao nhiêu điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có 2 cạnh đáy AB, CD và có $\widehat{ADC}=45^\circ$.

Bài 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B. Ba đỉnh $A(1;2;1), B(2;0;-1), C($ có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$. Tính $a+b+c$.

Bài 18. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(-2;1;0), C(2;-3;1)$. Lấy điểm $S(a;b;c)$ sao cho biểu thức $SA^2+2SB^2+3SC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T=2a+b+3c$.

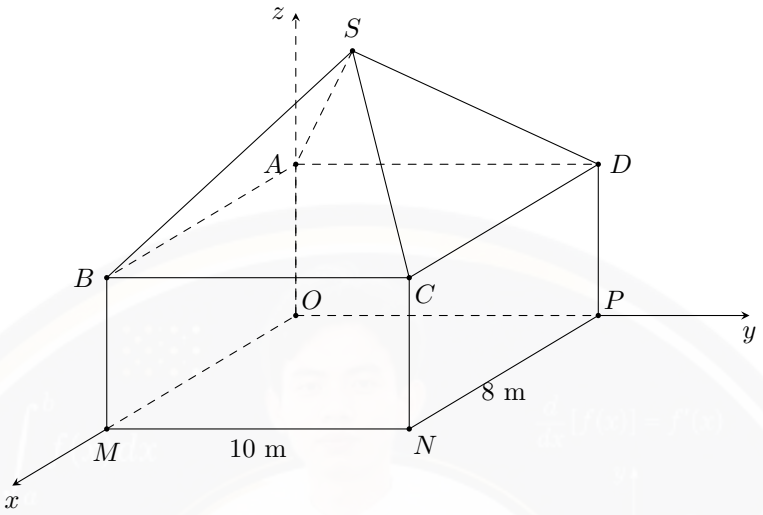
Bài 19. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5), B(3;4;0), C(2;-1;0)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm sao cho $MA^2+MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $S=a+b+c$.

Bài 20. Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1), B(1;4;-1), C(2;4;3), D(2;2;-1)$. Lấy điểm $M(x;y;z)$ sao cho $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $T=4x+2y+z$ bằng bao nhiêu?

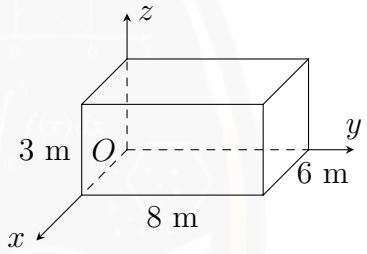
Bài 21. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1); B(2;-1;3)$ và điểm $M(a;b;0)$ sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất. Tính giá trị của $a+b$.

Bài 22. Một ngôi nhà gồm hai phần. Phần thân nhà dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.OMNP$

có chiều dài 10 m, chiều rộng 8 m, chiều cao 4,2 m. Phần mái nhà dạng hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau và cùng tạo với mặt đáy một góc α có $\tan\alpha = \dfrac{1}{6}$. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ sao cho M thuộc tia Ox, P thuộc tia Oy, A thuộc tia Oz (như hình vẽ). Biết $S(a,b,c)$ (đơn vị của a, b, c là mét). Tính giá trị của biểu thức $P = a+b+c$ (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



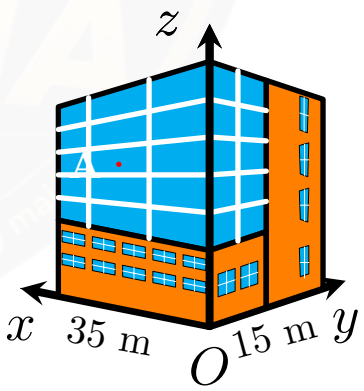
Bài 23. Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 8 m, chiều rộng là 6 m và chiều cao là 3 m. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét (hình vẽ). Hãy tìm toạ độ của điểm treo đèn.



Bài 24. Một tòa nhà có dạng hình hộp chữ nhật với kích thước chiều dài 35 m, chiều rộng 15 m, chiều cao 28 m. Người ta định vị các vị trí trong tòa nhà dựa vào một hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

a) Chị Hương đang đứng ở vị trí $A(20;5;20)$ và di chuyển đến thang máy để xuống sảnh chờ đón khách. Biết vị trí vào thang máy có hoành độ $x = 15$ và tung độ $y = 3$. Hỏi chị Hương mất bao nhiêu giây để di chuyển, nếu từ vị trí A có thể đi thẳng đến cửa thang máy và chị ấy đi bộ với tốc độ 1,5m/s?

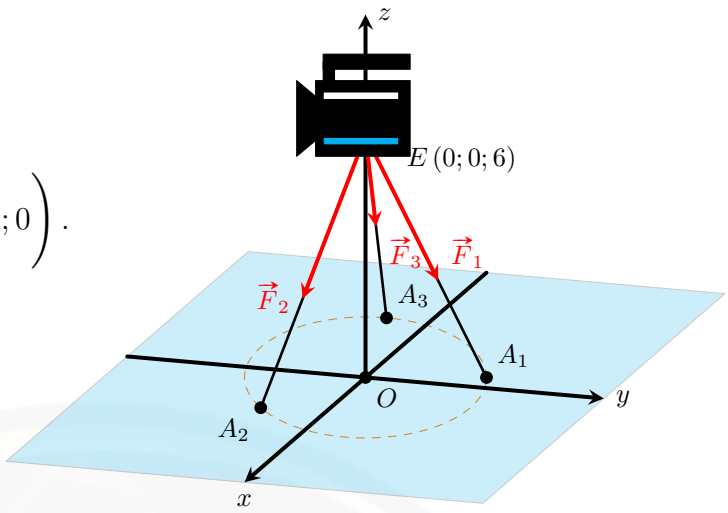
b) Chị Hương vừa đặt một bộ phát sóng wifi trong phòng làm việc của mình tại vị trí có tọa độ $(20;5;20)$. Do yêu cầu của công việc, sáng nay chị Hương phải đứng ở bàn lễ tân có tọa độ $(5;0;0)$ để đón khách thì điện thoại của chị có bắt được sóng wifi phát ra từ phòng làm việc của mình hay không? Biết vùng phủ sóng bộ phát wifi nói trên có bán kính 30 mét.



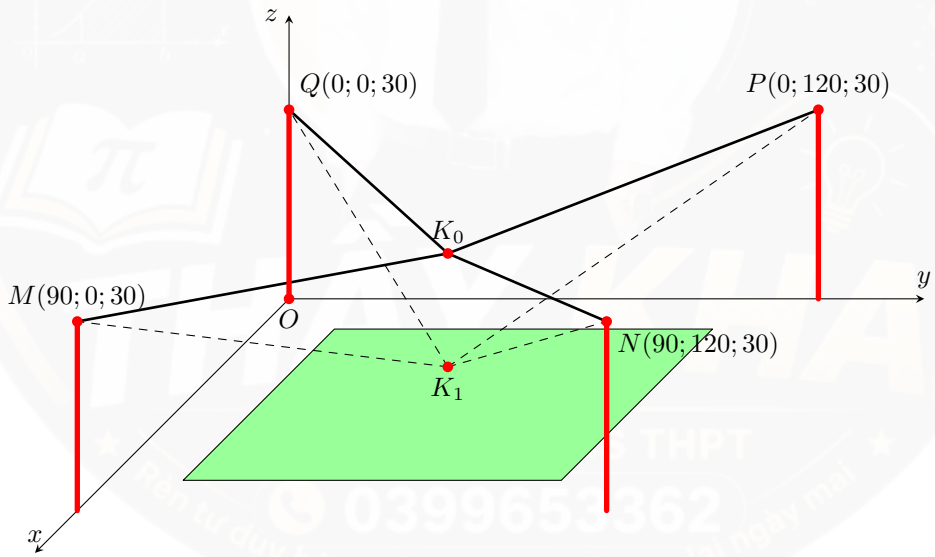
Bài 25. Một chiếc máy quay được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $E(0;0;6)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là

$$A_1(0;1;0), A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right), A_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right).$$

Biết rằng trọng lượng của chiếc máy là 300 N (hình vẽ). Tìm tọa độ của các lực tác dụng lên giá đỡ $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$.



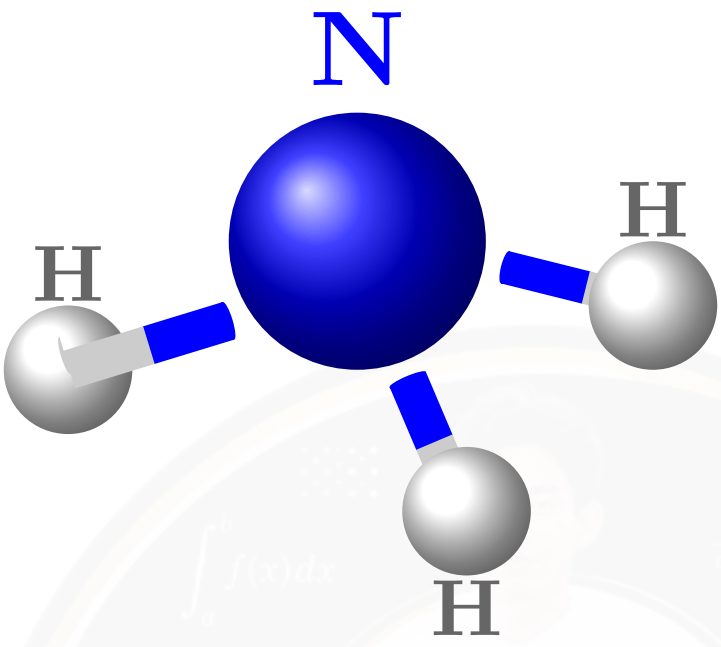
Bài 26. Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn. Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1 m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90;0;30)$, $N(90;120;30)$, $P(0;120;30)$, $Q(0;0;30)$ (Hình 34). Giả sử K_0 là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$. Để theo dõi quả bóng đến vị trí A, camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 cao độ bằng 19 *(Nguồn: https://www.abiturloesung.de; Abitur Bayern 2016 Geometrie VI).*

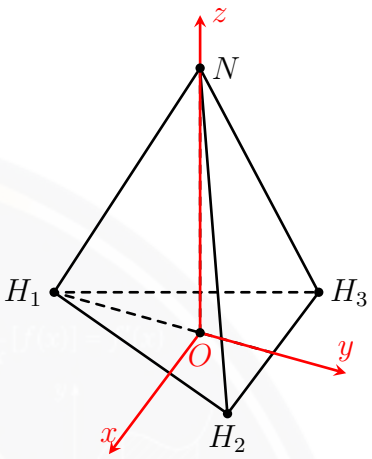


Tìm toạ độ của các điểm K_0, K_1 và của vectơ $\overrightarrow{K_0K_1}$.

Bài 27. Trong Hóa học, cấu tạo của phân tử ammoniac (NH_3) có dạng hình chóp tam giác đều mà đỉnh là nguyên tử nitrogen (N) và đáy là tam giác $H_1H_2H_3$ với H_1, H_2, H_3 là vị trí của ba nguyên tử hydrogen (H). Góc tạo bởi liên kết H – N – H, có hai cạnh là hai đoạn thẳng nối N với hai trong ba điểm H_1, H_2, H_3 (chẳng hạn $\widehat{H_1NH_2}$), gọi là góc liên kết của phân tử NH_3. Góc này

xấp xỉ 107°.





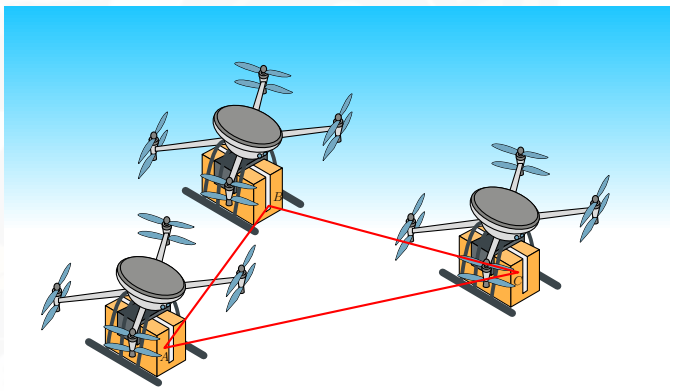
Trong không gian $Oxyz$, cho một phân tử NH_3 được biểu diễn bởi hình chóp tam giác đều $N.H_1H_2H_3$ với O là tâm của đáy. Nguyên tử nitrogen được biểu diễn bởi điểm N thuộc trục Oz, ba nguyên tử hydrogen ở các vị trí H_1, H_2, H_3 trong đó $H_1(0;-2;0)$ và H_2H_3 song song với trục Ox

a) Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử hydrogen.

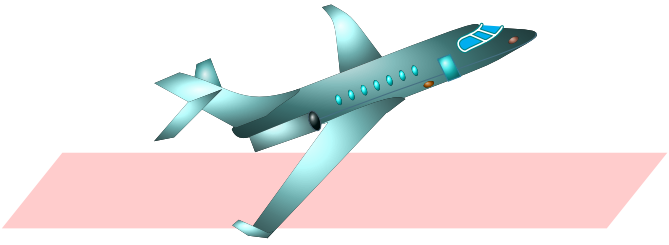
b) Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử nitrogen với mỗi nguyên tử hydrogen.

Bài 28. Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian $Oxyz$, một đội gồm ba drone giao hàng A, B, C đang có toạ độ là $A(1;1;1)$, $B(5;7;9)$, $C(9;11;4)$. Tính:

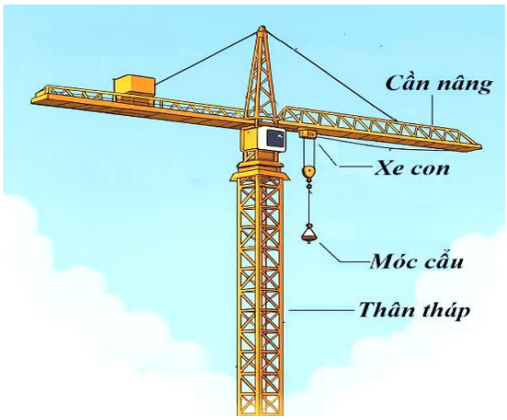
1. Các khoảng cách giữa mỗi cặp drone giao hàng.
2. Góc $\widehat{BAC}$.



Bài 29. Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;8)$ trong vòng 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là $C(x;y;z)$, hãy tính $x+y+z$.



Bài 30. Người ta thường dùng cẩu trục tháp (như hình vẽ) để vận chuyển vật liệu xây dựng; thân tháp vuông góc với mặt đất, cần nâng vuông góc thân tháp dùng để làm điểm tựa nâng vật liệu, trên cần nâng có bộ phận gọi là xe con, có thể chạy dọc cần nâng nhằm di chuyển vật liệu. Ban đầu vật liệu ở mặt đất, cẩu trục dùng móc cẩu nâng vật liệu lên cao theo phương thẳng đứng và cao hơn 1m so với vị trí cần đặt, sau đó giữ nguyên độ cao và cẩu trục quay cần nâng một góc $\alpha \in (0°; 180°)$ sao cho quỹ đạo tạo thành một cung tròn cho đến khi mặt phẳng (P) chứa cần nâng và điểm cần đặt vuông góc với mặt đất (vật liệu và điểm cần đặt cùng nằm trên một nửa mặt phẳng (P) so với thân tháp). Tiếp đến điều chỉnh xe con nhằm di chuyển và hạ vật liệu xuống 1m theo phương thẳng đứng đúng vị trí cần đặt. Giả sử rằng trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, thân tháp là trục Oz và mặt đất là mặt phẳng Oxy (đơn vị tính bằng mét); vị trí ban đầu của vật liệu là điểm $A(6; 8; 0)$ và vị trí cần đặt vật liệu là điểm $B(4; -3; 15)$. Tính quãng đường vật liệu đã di chuyển (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



V. LỜI GIẢI CHI TIẾT

1) Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Tính độ dài của $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b}$

Ⓐ $\sqrt{74}$. Ⓑ $3\sqrt{6}$. Ⓒ $5\sqrt{2}$. Ⓓ $\sqrt{42}$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b} = 2(2\vec{j} - 3\vec{k}) - (4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 4\vec{j} - 6\vec{k} - 4\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} = -4\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{v} = (-4; 3; -7) \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + (-7)^2} = \sqrt{74}$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 5), B(5; -5; 7); M(x; y; 1)$. Khi A, B, M thẳng hàng thì giá trị của x, y là

Ⓐ $x = 4; y = -7$. Ⓑ $x = -4; y = 7$.
Ⓒ $x = 4; y = 7$. Ⓓ $x = -4; y = -7$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3; -4; 2); \overrightarrow{AM} = (x - 2; y + 1; -4)$

Để ba điểm A, B, M thẳng hàng thì $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{-4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 7 \end{cases}$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$ cho 3 điểm $A(1, 2, -1), B(2, -1, 3), C(-3, 5, 1)$. Tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành là

Ⓐ $(-2,2,5)$. Ⓑ $(-4,8,-5)$. Ⓒ $(-4,8,-3)$. Ⓓ $(-2,8,-3)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{AB}=(1,-3,4);\overrightarrow{AC}=(-4,3,2)$. Suy ra $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.
Gọi $D(x,y,z);\overrightarrow{DC}=(-3-x,5-y,1-z)$

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow \begin{cases}-3-x=1\\5-y=-3\\1-z=4\end{cases}\Rightarrow D(-4,8,-3).$

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1;-4;2),B(2;1;-3),C(3;0;-2)$ và $D(2;-5;-1)$. Điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ có tọa độ là:

Ⓐ $G(2;-1;-1)$. Ⓑ $G(2;-2;-1)$.
Ⓒ $G(0;-1;-1)$. Ⓓ $G(6;-3;-3)$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\Leftrightarrow$
$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_G=\dfrac{1}{4}(1+2+3+2)=2\\y_G=\dfrac{1}{4}(-4+1+0-5)=-2\\z_G=\dfrac{1}{4}(2-3-2-1)=-1\end{cases}\Rightarrow G(2;-2;-1).$$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;-1;-2)$ và trọng tâm $G(2;1;-3)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ là

Ⓐ $(3;6;3)$. Ⓑ $(3;6;-3)$. Ⓒ $(3;-3;6)$. Ⓓ $(3;2;1)$.

Hướng dẫn giải. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Ta có: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}=2\cdot\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AG}=(3;6;-3)$.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1),B(2;-1;3)$. Tìm tọa độ điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Ⓐ $I\left(-\dfrac{5}{3};0;\dfrac{5}{3}\right)$. Ⓑ $I\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{3};0\right)$.
Ⓒ $I\left(\dfrac{5}{3};0;\dfrac{5}{3}\right)$. Ⓓ $I\left(0;\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải. Gọi $I(x,y,z)$. Ta có $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}(1-x)+2(2-x)=0\\(2-y)+2(-1-y)=0\\(-1-z)+2(3-z)=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}x=\dfrac{5}{3}\\y=0\\z=\dfrac{5}{3}\end{cases}$. Vậy $I\left(\dfrac{5}{3};0;\dfrac{5}{3}\right)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $E(1;3;2),F(0;-1;5),K(2;4;-1)$ và tam giác ABC thỏa mãn $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CK}=\vec{0}$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ΔABC là

Ⓐ $G(1;2;2)$. Ⓑ $G(-1;-4;3)$.
Ⓒ $G(2;2;1)$. Ⓓ $G(1;1;-3)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{GK}=\vec{0}$. Suy ra G là trọng tâm tam giác ΔEFK. Do

đó: $\begin{cases} x_G = \dfrac{1+0+2}{3} = 1 \\ y_G = \dfrac{3-1+4}{3} = 2 \\ z_G = \dfrac{2+5-1}{3} = 2 \end{cases} \Rightarrow G(1;2;2).$

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0), B(0;2;0), C(0;0;2)$ và $D(2;2;2)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN là:

Ⓐ $I(1;1;0)$. Ⓑ $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$. Ⓒ $I(1;1;1)$. Ⓓ $I(1;-1;2)$.

Hướng dẫn giải. Tọa độ điểm I được tính bằng trung bình cộng tọa độ của 4 điểm A, B, C, D:
$x_I = \dfrac{2+0+0+2}{4} = 1; y_I = \dfrac{0+2+0+2}{4} = 1; z_I = \dfrac{0+0+2+2}{4} = 1 \Rightarrow I(1;1;1).$

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$ và điểm $B(4;-3;1)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

Ⓐ $(6;-2;4)$. Ⓑ $(3;-1;2)$. Ⓒ $(1;-2;-1)$. Ⓓ $(2;-4;-2)$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $x_I = \dfrac{2+4}{2} = 3; y_I = \dfrac{1-3}{2} = -1; z_I = \dfrac{3+1}{2} = 2 \Rightarrow I(3;-1;2).$

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$; $\vec{b} = (b_1;b_2;b_3)$ và $k \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $k\vec{a} = (ka_1;ka_2;ka_3)$.
Ⓑ $|\vec{a}| = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.
Ⓒ $\vec{a} - \vec{b} = (a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)$.
Ⓓ $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3$.

Hướng dẫn giải. Theo định nghĩa phép nhân vectơ với một số trong không gian $Oxyz$, ta có $k\vec{a} = (ka_1;ka_2;ka_3)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$ với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz. Tính tọa độ của vectơ $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

Ⓐ $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1;-1;1)$. Ⓑ $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1;1;1)$.
Ⓒ $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1;1;-1)$. Ⓓ $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1;-1;1)$.

Hướng dẫn giải. Vì $\vec{i} = (1;0;0), \vec{j} = (0;1;0), \vec{k} = (0;0;1)$ nên $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1;1;-1)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (1;-4;0)$ và $\vec{v} = (-1;-2;1)$. Vectơ $\vec{u} + 3\vec{v}$ có tọa độ là

Ⓐ $(-2;-10;3)$. Ⓑ $(-2;-6;3)$.
Ⓒ $(-4;-8;4)$. Ⓓ $(-2;-10;-3)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $3\vec{v} = (-3;-6;3)$. Vậy $\vec{u} + 3\vec{v} = (1-3;-4-6;0+3) = (-2;-10;3)$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (1;3;-2)$ và $\vec{v} = (2;1;-1)$. Tọa độ vectơ $\vec{u} - \vec{v}$ là:

Ⓐ $(3;4;-3)$. Ⓑ $(-1;2;-3)$. Ⓒ $(-1;2;-1)$. Ⓓ $(1;-2;1)$.

Hướng dẫn giải. Tọa độ vectơ hiệu: $\vec{u} - \vec{v} = (1-2;3-1;-2-(-1)) = (-1;2;-1)$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a} = (2;3;2)$ và $\vec{b} = (1;1;-1)$. Vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ có tọa độ

là

Ⓐ $(3;4;1)$. Ⓑ $(-1;-2;3)$. Ⓒ $(3;5;1)$. Ⓓ $(1;2;3)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{a}-\vec{b}=(2-1;3-1;2-(-1))=(1;2;3)$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}(1;2;3)$; $\vec{b}(2;2;-1)$; $\vec{c}(4;0;-4)$. Tọa độ của vectơ $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ là

Ⓐ $\vec{d}(-7;0;-4)$. Ⓑ $\vec{d}(-7;0;4)$.
Ⓒ $\vec{d}(7;0;-4)$. Ⓓ $\vec{d}(7;0;4)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $2\vec{c}=(8;0;-8)$.
Khi đó $\vec{d}=(1-2+8;2-2+0;3-(-1)-8)=(7;0;-4)$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;-3;3)$, $\vec{b}=(0;2;-1)$, $\vec{c}=(3;-1;5)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}$.

Ⓐ $(10;-2;13)$. Ⓑ $(-2;2;-7)$. Ⓒ $(-2;-2;7)$. Ⓓ $(-2;2;7)$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $2\vec{a}=(4;-6;6)$, $3\vec{b}=(0;6;-3)$, $-2\vec{c}=(-6;2;-10)$.
Cộng các tọa độ tương ứng: $\vec{u}=(4+0-6;-6+6+2;6-3-10)=(-2;2;-7)$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(1;-1;2)$, $\vec{b}=(2;1;-3)$, $\vec{c}=(0;3;-2)$. Điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{OM}+\vec{a}=2\vec{b}-\vec{c}$, tổng $x+y+z$ bằng

Ⓐ 3. Ⓑ -3. Ⓒ 4. Ⓓ -2.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{OM}=2\vec{b}-\vec{c}-\vec{a}$.
$x=2(2)-0-1=3$.
$y=2(1)-3-(-1)=0$.
$z=2(-3)-(-2)-2=-6$.
Tọa độ $M(3;0;-6)$. Tổng $x+y+z=3+0-6=-3$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{x}=(2;1;-3)$ và $\vec{y}=(1;0;-1)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{a}=\vec{x}+2\vec{y}$.

Ⓐ $\vec{a}=(4;1;-1)$. Ⓑ $\vec{a}=(3;1;-4)$.
Ⓒ $\vec{a}=(0;1;-1)$. Ⓓ $\vec{a}=(4;1;-5)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $2\vec{y}=(2;0;-2)$.
$\vec{a}=(2+2;1+0;-3-2)=(4;1;-5)$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$. Tọa độ của vectơ $\vec{w}$ là

Ⓐ $\vec{w}=(3;-1;2)$. Ⓑ $\vec{w}=(3;1;-2)$.
Ⓒ $\vec{w}=(3;1;2)$. Ⓓ $\vec{w}=(3;-1;-2)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào các vectơ đơn vị: $\vec{u}=(1;2;-3)$ và $\vec{v}=(2;-1;1)$.
$\vec{w}=(1+2;2-1;-3+1)=(3;1;-2)$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(-2;2;0)$, $\vec{b}=(2;2;0)$, $\vec{c}=(2;2;2)$. Giá trị của $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ bằng

Ⓐ 6. Ⓑ 11. Ⓒ $2\sqrt{11}$. Ⓓ $2\sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(-2+2+2;2+2+2;0+0+2)=(2;6;2)$.

$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{2^2+6^2+2^2}=\sqrt{4+36+4}=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{u}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{v}=(m;2;m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}|=|\vec{v}|$.

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Hướng dẫn giải. Ta có $|\vec{u}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3$.
$|\vec{v}|=\sqrt{m^2+2^2+(m+1)^2}=\sqrt{2m^2+2m+5}$.
$|\vec{u}|=|\vec{v}|\Leftrightarrow 3=\sqrt{2m^2+2m+5}\Leftrightarrow 9=2m^2+2m+5\Leftrightarrow 2m^2+2m-4=0$.
Phương trình có 2 nghiệm phân biệt ($m=1$ hoặc $m=-2$). Vậy có 2 giá trị m.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(2;m-1;3)$, $\vec{b}=(1;3;-2n)$. Tìm m,n để các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương.

Ⓐ $m=7;n=-\dfrac{3}{4}$. Ⓑ $m=7;n=-\dfrac{4}{3}$.
Ⓒ $m=4;n=-3$. Ⓓ $m=1;n=0$.

Hướng dẫn giải. Hai vectơ cùng phương khi các tọa độ tương ứng tỉ lệ:

$$\frac{2}{1}=\frac{m-1}{3}=\frac{3}{-2n}\Rightarrow\begin{cases}m-1=6\\-4n=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=7\\n=-\dfrac{3}{4}\end{cases}.$$

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=(3;0;1)$ và $\vec{v}=(2;1;0)$. Tính tích vô hướng $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Ⓐ $\vec{u}\cdot\vec{v}=8$. Ⓑ $\vec{u}\cdot\vec{v}=6$. Ⓒ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$. Ⓓ $\vec{u}\cdot\vec{v}=-6$.

Hướng dẫn giải. $\vec{u}\cdot\vec{v}=3\cdot2+0\cdot1+1\cdot0=6$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(1;-2;3)$, $\vec{b}=(-2;1;2)$. Khi đó, tích vô hướng $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}$ bằng

Ⓐ 12. Ⓑ 2. Ⓒ 11. Ⓓ 10.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{a}+\vec{b}=(-1;-1;5)$.
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=(-1)(-2)+(-1)(1)+5(2)=2-1+10=11$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u}=(2;-1;1)$ và $\vec{v}=(0;-3;-m)$. Tìm số thực m sao cho tích vô hướng $\vec{u}\cdot\vec{v}=1$.

Ⓐ $m=4$. Ⓑ $m=2$. Ⓒ $m=3$. Ⓓ $m=-2$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{u}\cdot\vec{v}=2\cdot0+(-1)(-3)+1(-m)=3-m$.
Theo giả thiết: $3-m=1\Rightarrow m=2$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;1;0)$ và $\vec{b}=(-1;0;-2)$. Tính $\cos(\vec{a},\vec{b})$.

Ⓐ $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\dfrac{2}{25}$. Ⓑ $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\dfrac{2}{5}$.
Ⓒ $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{2}{25}$. Ⓓ $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{2}{5}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{a}\cdot\vec{b}=2(-1)+1(0)+0(-2)=-2$.
$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2+0^2}=\sqrt{5}$, $|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+0^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$.

Vậy $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=-\dfrac{2}{5}$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{u}=(-\sqrt{3};0;1)$ là

Ⓐ $120°$. Ⓑ $60°$. Ⓒ $150°$. Ⓓ $30°$.

Hướng dẫn giải. Vectơ đơn vị $\vec{i}=(1;0;0)$. Ta có $\vec{i}\cdot\vec{u}=1(-\sqrt{3})+0(0)+0(1)=-\sqrt{3}$.

$|\vec{i}|=1$, $|\vec{u}|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+0^2+1^2}=2$.

$\cos(\vec{i},\vec{u})=\dfrac{-\sqrt{3}}{1\cdot 2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow(\vec{i},\vec{u})=150°$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(-3;4;0)$, $\vec{b}=(5;0;12)$. Côsin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{3}{13}$. Ⓑ $\dfrac{5}{6}$. Ⓒ $-\dfrac{5}{6}$. Ⓓ $-\dfrac{3}{13}$.

Hướng dẫn giải. $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3(5)+4(0)+0(12)=-15$.

$|\vec{a}|=\sqrt{(-3)^2+4^2+0^2}=5$, $|\vec{b}|=\sqrt{5^2+0^2+12^2}=13$.

$\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{-15}{5\cdot 13}=-\dfrac{3}{13}$.

Câu 29. Cho $\vec{u}=(-1;1;0)$, $\vec{v}=(0;-1;0)$, góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là

Ⓐ $120°$. Ⓑ $45°$. Ⓒ $135°$. Ⓓ $60°$.

Hướng dẫn giải. $\vec{u}\cdot\vec{v}=-1(0)+1(-1)+0(0)=-1$.

$|\vec{u}|=\sqrt{2}$, $|\vec{v}|=1$.

$\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{-1}{\sqrt{2}\cdot 1}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow(\vec{u},\vec{v})=135°$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 vectơ $\vec{a}=(2;1;-1)$; $\vec{b}=(1;3;m)$. Tìm m để $(\vec{a};\vec{b})=90°$.

Ⓐ $m=-5$. Ⓑ $m=5$. Ⓒ $m=1$. Ⓓ $m=-2$.

Hướng dẫn giải. Để $(\vec{a};\vec{b})=90°$ thì $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow 2(1)+1(3)+(-1)m=0\Leftrightarrow 5-m=0\Leftrightarrow m=5$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=(1;1;-2)$, $\vec{v}=(1;0;m)$. Tìm tất cả giá trị của m để góc giữa $\vec{u},\vec{v}$ bằng $45°$.

Ⓐ $m=2$. Ⓑ $m=2\pm\sqrt{6}$.
Ⓒ $m=2-\sqrt{6}$. Ⓓ $m=2+\sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\cos 45°=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{|1-2m|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{1+m^2}}\Leftrightarrow\dfrac{1-2m}{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}}=1$ (do góc $45°$ nên tích vô hướng phải dương, $1-2m>0$).

$\Rightarrow(1-2m)^2=3(1+m^2)\Leftrightarrow 1-4m+4m^2=3+3m^2\Leftrightarrow m^2-4m-2=0$.

Giải phương trình ta được $m=2\pm\sqrt{6}$. Do điều kiện $1-2m>0\Rightarrow m<1/2$, chọn $m=2-\sqrt{6}$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;2;1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA.

Ⓐ $OA=\sqrt{5}$. Ⓑ $OA=5$. Ⓒ $OA=3$. Ⓓ $OA=9$.

Hướng dẫn giải. $OA=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=\sqrt{9}=3$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;1), B(3;0;-2)$. Tính độ dài AB.

Ⓐ 26. Ⓑ 22. Ⓒ $\sqrt{26}$. Ⓓ $\sqrt{22}$.

Hướng dẫn giải. $AB=\sqrt{(3-1)^2+(0-(-3))^2+(-2-1)^2}=\sqrt{2^2+3^2+(-3)^2}=\sqrt{4+9+9}=\sqrt{22}$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;2)$ và $B(3;1;0)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

Ⓐ $(4;2;2)$. Ⓑ $(2;1;1)$. Ⓒ $(2;0;-2)$. Ⓓ $(1;0;-1)$.

Hướng dẫn giải. Tọa độ trung điểm $M=\left(\dfrac{1+3}{2};\dfrac{1+1}{2};\dfrac{2+0}{2}\right)=(2;1;1)$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;5;3)$ và $M(2;1;-2)$. Tọa độ điểm B biết M là trung điểm của AB là

Ⓐ $B\left(\dfrac{1}{2};3;\dfrac{1}{2}\right)$. Ⓑ $B(-4;9;8)$.
Ⓒ $B(5;3;-7)$. Ⓓ $B(5;-3;-7)$.

Hướng dẫn giải. Tọa độ điểm $B=2M-A\Rightarrow B(2\cdot2-(-1);2\cdot1-5;2\cdot(-2)-3)=(5;-3;-7)$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;3), B(-1;2;5), C(0;0;1)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Ⓐ $G(0;0;3)$. Ⓑ $G(0;0;9)$. Ⓒ $G(-1;0;3)$. Ⓓ $G(0;0;1)$.

Hướng dẫn giải. $G=\left(\dfrac{1-1+0}{3};\dfrac{-2+2+0}{3};\dfrac{3+5+1}{3}\right)=(0;0;3)$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;-1;-2)$ và trọng tâm $G(2;1;-3)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ là

Ⓐ $(3;6;3)$. Ⓑ $(3;6;-3)$. Ⓒ $(3;-3;6)$. Ⓓ $(3;2;1)$.

Hướng dẫn giải. Gọi M là trung điểm BC, ta có $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$.

Mặt khác $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}\Rightarrow 2\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AG}$.

$\overrightarrow{AG}=(2-1;1-(-1);-3-(-2))=(1;2;-1)$.

Vậy $\vec{u}=3(1;2;-1)=(3;6;-3)$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1;-4;2), B(2;1;-3), C(3;0;-2)$ và $D(2;-5;-1)$. Điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ có tọa độ là:

Ⓐ $G(2;-1;-1)$. Ⓑ $G(2;-2;-1)$.
Ⓒ $G(0;-1;-1)$. Ⓓ $G(6;-3;-3)$.

Hướng dẫn giải. G là trọng tâm tứ diện $ABCD\Rightarrow G=\dfrac{A+B+C+D}{4}$.

$G=\left(\dfrac{1+2+3+2}{4};\dfrac{-4+1+0-5}{4};\dfrac{2-3-2-1}{4}\right)=(2;-2;-1)$.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;1), B(0;1;2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng là

Ⓐ $M(4;-5;0)$. Ⓑ $M(2;-3;0)$. Ⓒ $M(0;0;1)$. Ⓓ $M(4;5;0)$.

Hướng dẫn giải. $M\in(Oxy)\Rightarrow M(x;y;0)$. $\overrightarrow{AB}=(-2;3;1)$, $\overrightarrow{AM}=(x-2;y+2;-1)$.

Để A, B, M thẳng hàng thì $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Rightarrow \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{-1}{1}$.
$\Rightarrow x - 2 = 2 \Rightarrow x = 4$; $y + 2 = -3 \Rightarrow y = -5$. Vậy $M(4; -5; 0)$.

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; -2; 3), B(0; 3; 1), C(4; 2; 2)$. Cosin của góc $\widehat{BAC}$ là

Ⓐ $\dfrac{9}{\sqrt{35}}$. Ⓑ $-\dfrac{9}{\sqrt{35}}$. Ⓒ $-\dfrac{9}{2\sqrt{35}}$. Ⓓ $\dfrac{9}{2\sqrt{35}}$.

Hướng dẫn giải. $\overrightarrow{AB} = (1; 5; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (5; 4; -1)$.

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{1(5)+5(4)+(-2)(-1)}{\sqrt{1^2+5^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{5^2+4^2+(-1)^2}} = \frac{27}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{42}} = \frac{27}{6\sqrt{35}} = \frac{9}{2\sqrt{35}}.$$

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 2; 3); B(-1; 2; 1); C(3; -1; -2)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Ⓐ -6. Ⓑ -14. Ⓒ 14. Ⓓ 6.

Hướng dẫn giải. $\overrightarrow{AB} = (-2; 0; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (2; -3; -5)$.
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (-2)(2) + 0(-3) + (-2)(-5) = -4 + 10 = 6$.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, ba điểm $M(1; 0; 2), N(2; -3; 0)$ và $P(2; 3; 2)$. Chu vi của tam giác MNP là:

Ⓐ $\sqrt{10} + \sqrt{14} + \sqrt{40}$. Ⓑ $\sqrt{5} + \sqrt{13} + \sqrt{17}$.
Ⓒ 64. Ⓓ $\sqrt{20} + \sqrt{22} + \sqrt{24}$.

Hướng dẫn giải. $MN = \sqrt{(2-1)^2 + (-3-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{14}$.
$NP = \sqrt{(2-2)^2 + (3-(-3))^2 + (2-0)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.
$MP = \sqrt{(2-1)^2 + (3-0)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{10}$.
Chu vi $C = \sqrt{14} + \sqrt{40} + \sqrt{10}$.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 2; 1), B(1; -1; 2), C(1; 2; -1)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Ⓐ $M(5; 5; 0)$. Ⓑ $M(-2; -6; 4)$.
Ⓒ $M(-2; 6; -4)$. Ⓓ $M(2; -6; 4)$.

Hướng dẫn giải. $\overrightarrow{AB} = (-2; -3; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-2; 0; -2)$.
$\overrightarrow{OM} = 2(-2; -3; 1) - (-2; 0; -2) = (-4 + 2; -6 - 0; 2 + 2) = (-2; -6; 4)$.
Vậy $M(-2; -6; 4)$.

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 1; 1), B(-1; 2; 1)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là?

Ⓐ $I\left(\dfrac{1}{3}; 1; \dfrac{2}{3}\right)$. Ⓑ $I(-3; 1; 0)$.
Ⓒ $I\left(-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2}; 0\right)$. Ⓓ $I\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}; 1\right)$.

Hướng dẫn giải. Ta có tọa độ trung điểm I của AB là: $I\left(\dfrac{2-1}{2}; \dfrac{1+2}{2}; \dfrac{1+1}{2}\right) \Rightarrow I\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}; 1\right)$.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3), B(-2; -4; 9)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA = 2MB$. Độ dài đoạn thẳng OM là

Ⓐ 5. Ⓑ 3. Ⓒ $\sqrt{54}$. Ⓓ $\sqrt{17}$.

Hướng dẫn giải. Đặt $M(x;y;z)$, khi đó: $\overrightarrow{MA}=(1-x;2-y;3-z)$ và $\overrightarrow{MB}=(-2-x;-4-y;9-z)$.

Vì M thuộc đoạn AB và $MA=2MB$ nên $\overrightarrow{MA}=-2\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\begin{cases}1-x=-2(-2-x)\\2-y=-2(-4-y)\\3-z=-2(9-z)\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}x=-1\\y=-2\\z=7\end{cases}\Rightarrow M(-1;-2;7)$.

Khi đó $\overrightarrow{OM}=(-1;-2;7)$. Vậy $OM=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+7^2}=\sqrt{54}$.

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $G(1;-2;3)$ và ba điểm $A(a;0;0);B(0;b;0);C(0;0;c)$. Biết G là trọng tâm của tam giác ABC thì $a+b+c$ bằng

Ⓐ 3. Ⓑ 9. Ⓒ 6. Ⓓ 0.

Hướng dẫn giải. Ta có trọng tâm G của tam giác ABC: $\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}\\y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\\z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1=\dfrac{a}{3}\\-2=\dfrac{b}{3}\\3=\dfrac{c}{3}\end{cases}\Leftrightarrow$

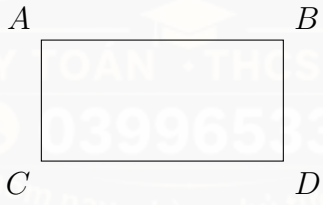
$\begin{cases}a=3\\b=-6\\c=9\end{cases}$.

Khi đó: $a+b+c=3+(-6)+9=6$.

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1),B(2;3;2),C(3;-1;3)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho bốn điểm A,B,C,D lập thành một hình chữ nhật.

Ⓐ $D(4;3;4)$. Ⓑ $D(4;-1;4)$. Ⓒ $D(2;-3;2)$. Ⓓ $D(4;1;4)$.

Hướng dẫn giải.



Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;2;1);\overrightarrow{AC}=(2;-2;2)$. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\cdot2+2\cdot(-2)+1\cdot2=0$ nên $AB\perp AC$.
Điều này cho thấy A,B,C không thẳng hàng và hình chữ nhật tạo ra phải là $ABDC$.
Gọi $D(x;y;z)$, ta có $\overrightarrow{CD}=(x-3;y+1;z-3)$.

Tứ giác $ABDC$ là hình chữ nhật khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3=1\\y+1=2\\z-3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=1\\z=4\end{cases}\Rightarrow$

$D(4;1;4)$.

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;6;2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M. Tính tỉ số $\dfrac{AM}{BM}$.

Ⓐ $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $\dfrac{AM}{BM}=2$. Ⓒ $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{1}{3}$. Ⓓ $\dfrac{AM}{BM}=3$.

Hướng dẫn giải. Điểm $M\in(Oxz)\Rightarrow M(x;0;z)$; $\overrightarrow{AB}=(7;3;1)$; $\overrightarrow{AM}=(x+2;-3;z-1)$.

A,B,M thẳng hàng $\Rightarrow \overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2=7k\\-3=3k\\z-1=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-1\\x=-9\\z=0\end{cases}\Rightarrow M(-9;0;0)$.

$\overrightarrow{BM}=(-14;-6;-2)$; $\overrightarrow{AM}=(-7;-3;-1)\Rightarrow\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{AM}$. Vậy $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-4;1;5);B(1;5;-3)$. Gọi C là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (Oyz). Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AC}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB}=5\overrightarrow{BC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{BC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AC}=-4\overrightarrow{BC}$.

Hướng dẫn giải. Gọi $C(0;a;b)$ là giao điểm của AB và (Oyz). Khi đó A,B,C thẳng hàng nên $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương.

$\overrightarrow{AB}=(5;4;-8)$; $\overrightarrow{AC}=(4;a-1;b-5)$. Ta có $\dfrac{4}{5}=\dfrac{a-1}{4}=\dfrac{b-5}{-8}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{21}{5}\\b=-\dfrac{7}{5}\end{cases}$.

Khi đó $\overrightarrow{AC}=\left(4;\dfrac{16}{5};-\dfrac{32}{5}\right)=\dfrac{4}{5}(5;4;-8)=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}$.

Mặt khác $\overrightarrow{BC}=\left(-1;\dfrac{21}{5}-5;-\dfrac{7}{5}+3\right)=\left(-1;-\dfrac{4}{5};\dfrac{8}{5}\right)$. Ta thấy $\overrightarrow{AC}=-4\overrightarrow{BC}$.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}=(1;1;-3)$; $\vec{b}=(2;2;-2)$; $\vec{c}=2\vec{i}+2\vec{j}-6\vec{k}$ và $\vec{d}=(1;1;-1)$. Cặp vectơ nào sau đây cùng phương?

Ⓐ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ⓑ $\vec{a}$ và $\vec{d}$. Ⓒ $\vec{a}$ và $\vec{c}$. Ⓓ $\vec{b}$ và $\vec{c}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{c}=(2;2;-6)=2(1;1;-3)=2\vec{a}$ nên hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{c}$ cùng phương.

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;-1),B(1;2;0),C(m;n;0)$. Tìm m,n sao cho ba điểm A,B,C thẳng hàng.

Ⓐ $m=1;n=1$. Ⓑ $m=1;n=2$.
Ⓒ $m=2;n=1$. Ⓓ $m=2;n=2$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;1;1)$; $\overrightarrow{AC}=(m;n-1;1)$.

Ba điểm A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}m=k\\n-1=k\\1=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=1\\m=1\\n=2\end{cases}$.

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 vectơ $\vec{a}=(-1;2x-1;1-3z)$ và $\vec{b}=(2+3y;-1;-2)$. Khi $\vec{a}=\vec{b}$ thì tổng $T=x+2y^2+3z^3$ bằng

Ⓐ 2. Ⓑ 5. Ⓒ 1. Ⓓ 4.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}-1=2+3y\\2x-1=-1\\1-3z=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1\\x=0\\z=1\end{cases}\Rightarrow T=0+2(-1)^2+3(1)^3=5$.

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1), B(2;-1;3), C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là

Ⓐ $(-2;11;1)$. Ⓑ $\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right)$.

Ⓒ $\left(\frac{2}{3};\frac{11}{3};\frac{1}{3}\right)$. Ⓓ $\left(\frac{11}{3};-2;1\right)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $BA=\sqrt{(2-1)^2+(-1-2)^2+(3-(-1))^2}=\sqrt{26}$.

$BC=\sqrt{(-4-2)^2+(7-(-1))^2+(5-3)^2}=\sqrt{36+64+4}=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$.

Gọi D là chân đường phân giác trong góc B, ta có $\frac{DA}{DC}=\frac{BA}{BC}=\frac{1}{2}\Rightarrow DC=2DA$.

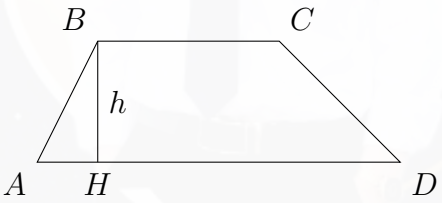
Vì D nằm trên đoạn AC nên $2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}x_D=\dfrac{2x_A+x_C}{3}=\dfrac{2-4}{3}=-\dfrac{2}{3}\\ y_D=\dfrac{2y_A+y_C}{3}=\dfrac{4+7}{3}=\dfrac{11}{3}\\ z_D=\dfrac{2z_A+z_C}{3}=\dfrac{-2+5}{3}=1\end{cases}\Rightarrow D\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right)$.

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1;4;2), B(3;2;1), C(-2;0;2)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và diện tích hình thang $ABCD$ gấp ba lần diện tích tam giác ABC.

Ⓐ $D(9;8;0)$. Ⓑ $D(-11;0;4)$ và $D(9;8;0)$.

Ⓒ $D(-11;0;4)$. Ⓓ $D(11;0;-4)$ và $D(-9;-8;0)$.

Hướng dẫn giải.



Giả sử $D(x_D;y_D;z_D)$. Khi đó $\overrightarrow{AD}=(x_D+1;y_D-4;z_D-2)$; $\overrightarrow{BC}=(-5;-2;1)$.

Do $AD//BC$ nên $\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{BC}(t\neq 0)\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=-1-5t\\ y_D=4-2t\\ z_D=2+t\end{cases}$.

Vì diện tích hình thang $ABCD$ gấp ba lần diện tích tam giác ABC nên

$\frac{1}{2}h(BC+AD)=3\cdot\frac{1}{2}h\cdot BC\Rightarrow BC+AD=3BC\Rightarrow AD=2BC$.

Suy ra $|\overrightarrow{AD}|=2|\overrightarrow{BC}|\Leftrightarrow(x_D+1)^2+(y_D-4)^2+(z_D-2)^2=4[(-5)^2+(-2)^2+1^2]$

$\Rightarrow(-5t)^2+(-2t)^2+t^2=4\cdot 30\Leftrightarrow 30t^2=120\Leftrightarrow t^2=4\Leftrightarrow\begin{cases}t=2\Rightarrow D(-11;0;4)\\ t=-2\Rightarrow D(9;8;0)\end{cases}$.

2) Trắc nghiệm đúng sai

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(4;2;1), B(2;1;3), C(-1;3;-2)$.

a) Tọa độ trọng tâm tam giác ABC bằng $\left(\frac{5}{3};2;\frac{2}{3}\right)$.

b) Tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB bằng $\left(3;\frac{3}{2};2\right)$.

c) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm $D=(1;4;-4)$.

d) Ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Hướng dẫn giải.

a) Đúng: Tọa độ trọng tâm tam giác ABC là $\left(\frac{4+2-1}{3}; \frac{2+1+3}{3}; \frac{1+3-2}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}; 2; \frac{2}{3}\right)$.

b) Đúng: Tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB là $\left(\frac{4+2}{2}; \frac{2+1}{2}; \frac{1+3}{2}\right) = \left(3; \frac{3}{2}; 2\right)$.

c) Đúng: Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-4 = -1-x_D \\ 1-2 = 3-y_D \\ 3-1 = -2-z_D \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = 4 \\ z_D = -4 \end{cases} \Rightarrow D(1; 4; -4)$.

d) Sai: Vì $\overrightarrow{AB} = (-2; -1; 2)$ và $\overrightarrow{AC} = (-5; 1; -3)$. Ta có: $\frac{-2}{-5} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{2}{-3} \Rightarrow A, B, C$ không thẳng hàng.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 5; -1), B(7; x; 1), C(9; 2; y)$.

a) Ba điểm A, B, C thẳng hàng thì $x + y = 5$.

b) Điểm $G\left(\frac{19}{3}; \frac{8}{3}; 3\right)$ là trọng tâm tam giác ABC thì $x = 1; y = 3$.

c) Tam giác ABC vuông tại A thì $x = 13, y = -1$.

d) Tích vô hướng của $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3x + 2y + 41$.

Hướng dẫn giải.

a) Đúng: Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; x-5; 2), \overrightarrow{AC} = (6; -3; y+1)$.

Để ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = k \cdot 6 \\ x-5 = k \cdot (-3) \\ 2 = k(y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2/3 \\ x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$. Vậy $x + y = 5$.

b) Đúng: Ta có $\begin{cases} \frac{3+7+9}{3} = \frac{19}{3} \\ \frac{5+x+2}{3} = \frac{8}{3} \\ \frac{-1+1+y}{3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 9 \end{cases}$.

c) Đúng: Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; x-5; 2), \overrightarrow{AC} = (6; -3; y+1)$.
Khi đó: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24 + (x-5)(-3) + 2(y+1) = -3x + 2y + 41$.
Với $x = 13, y = -1 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3(13) + 2(-1) + 41 = 0 \Rightarrow AB \perp AC$.

d) Đúng: Vì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24 + (x-5)(-3) + 2(y+1) = -3x + 2y + 41$.

Bài 3. Cho các điểm $A(1; -2; 3), B(-2; 1; 2), C(3; -1; 2)$.

a) $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; -1)$.

b) $\overrightarrow{AC} = (-2; -1; 1)$.

c) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.

d) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Hướng dẫn giải.

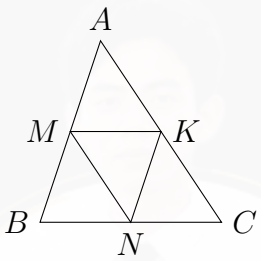
a) Đúng: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (-2-1; 1-(-2); 2-3) = (-3; 3; -1)$.

b) Sai: $\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A) = (3-1; -1-(-2); 2-3) = (2; 1; -1)$.

c) Sai: $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; -1), \overrightarrow{AC} = (2; 1; -1)$. Hai vectơ này không cùng phương nên không tồn tại k để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

d) Đúng: Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Bài 4. Cho ba điểm $A(3; 3; -6), B(1; 3; 2)$ và $C(-1; -3; 1)$. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của AB, BC và CA.



a) Tọa độ $M(2; 3; 2)$.

b) Với G là trọng tâm tam giác ABC thì $GC = 2\sqrt{5}$.

c) Trọng tâm tam giác MNK là $E(1; 1; -1)$.

d) Với $D(-3; -3; 9)$ thì tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.

Hướng dẫn giải.

a) Sai: M là trung điểm của $AB \Rightarrow M\left(\dfrac{3+1}{2}; \dfrac{3+3}{2}; \dfrac{-6+2}{2}\right) = (2; 3; -2)$.

b) Sai: Ta có $G(1; 1; -1)$. Suy ra $GC = \sqrt{(-1-1)^2 + (-3-1)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

c) Đúng: Hai tam giác ABC và MNK có cùng trọng tâm. Suy ra $E \equiv G(1; 1; -1)$.

d) Đúng: Ta có $\overrightarrow{AC} = (-4; -6; 7), \overrightarrow{BD} = (-4; -6; 7)$ suy ra $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Vậy $ABDC$ là hình bình hành.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (2; -2; -4)$, $\vec{b} = (1; -1; 1)$ và $\vec{c} = (-1; 1; 2)$.

a) $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

b) $|\vec{b}| = \sqrt{3}$.

c) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng.

d) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc.

Hướng dẫn giải.

a) Sai: $\vec{a} = (2; -2; -4) \Rightarrow \vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$.

b) Đúng: $|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

c) Sai: $\vec{a} = 2\vec{b}$ là sai (do tọa độ thứ ba $-4 \neq 2 \cdot 1$).

d) Đúng: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2(1) + (-2)(-1) + (-4)(1) = 2 + 2 - 4 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2;3;1)$, $\vec{b} = (-1;5;2)$, $\vec{c} = (4;-1;3)$ và $\vec{x} = (-3;22;5)$.

a) $|\vec{a}| = \sqrt{14}$.

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 19$.

c) $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \dfrac{2\sqrt{91}}{91}$.

d) $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.

Hướng dẫn giải.

a) Đúng: $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$.

b) Sai: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2(-1) + 3(5) + 1(2) = 15$.

c) Sai: $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|} = \dfrac{8 - 3 + 3}{\sqrt{14}\sqrt{26}} = \dfrac{4}{\sqrt{91}} = \dfrac{4\sqrt{91}}{91}$.

d) Đúng: $2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c} = (4 - 3 - 4; 6 + 15 + 1; 2 + 6 - 3) = (-3; 22; 5) = \vec{x}$.

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (2;1;-3)$, $\vec{b} = (-4;-2;6)$, $\vec{c} = (m-1;2;0)$.

a) $\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{b}$.

b) $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$.

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

d) Nếu $\vec{b} \perp \vec{c}$ thì $m = 1$.

Hướng dẫn giải.

a) Sai: Ta có $\vec{b} = -2\vec{a}$ nên hai vectơ ngược hướng.

b) Đúng: $|\vec{b}| = |-2||\vec{a}| = 2|\vec{a}|$.

c) Sai: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -8 - 2 - 18 = -28$.

d) Sai: $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow -4(m-1) - 4 + 0 = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Bài 8. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (3;0;1)$, $\vec{b} = (1;-1;-2)$, $\vec{c} = (1;7;-3)$.

a) $|\vec{c}| = \sqrt{59}$.

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$.

c) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\sqrt{15}}{30}$.

d) Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{c}$ lớn hơn $90°$.

Hướng dẫn giải.

a) Đúng: $|\vec{c}| = \sqrt{1 + 49 + 9} = \sqrt{59}$.

b) Sai: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 + 0 - 2 = 1$.

c) Đúng: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{1}{\sqrt{10}\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{60}} = \dfrac{\sqrt{60}}{60} = \dfrac{\sqrt{15}}{30}$.

d) Sai: $\vec{a} \cdot \vec{c} = 3 + 0 - 3 = 0 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{c}) = 90°$.

Bài 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(-1;1;2)$, $B(1;0;3)$, $C(0;2;-2)$.

a) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}$.

b) $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

c) Tọa độ tâm hình bình hành là $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$.

d) $\overrightarrow{AD} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

✍ *Hướng dẫn giải.*

a) Đúng: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}$.

b) Sai: $\overrightarrow{AB} = (2; -1; 1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

c) Sai: Tâm I là trung điểm $AC \Rightarrow I\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$.

d) Đúng: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = (-1; 2; -5) \Rightarrow \overrightarrow{AD} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$.

Bài 10. Trong mặt phẳng $Oxyz$, tam giác ABC với $A(1; -3; 3); B(2; -4; 5), C(a; -2; b)$ nhận điểm $G(1; c; 3)$ làm trọng tâm của nó.

a) Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là $\left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}; 4\right)$.

b) Tọa độ vectơ là $\overrightarrow{AB} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$.

c) $a + b + c = -2$.

d) $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{14\sqrt{57}}{57}$.

✍ *Hướng dẫn giải.*

a) Đúng: $M\left(\frac{1+2}{2}; \frac{-3-4}{2}; \frac{3+5}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}; 4\right)$.

b) Sai: $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

c) Đúng: $\begin{cases} (1+2+a)/3 = 1 \\ (-3-4-2)/3 = c \\ (3+5+b)/3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = -3 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = -2.$

d) Sai: $\overrightarrow{AC} = (0; 1; -2) \Rightarrow \cos = \frac{-1-4}{\sqrt{6}\sqrt{5}} = -\frac{5}{\sqrt{30}}$.

Bài 11. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1), B(2; -1; 3), C(-4; 7; 5)$.

a) $AB = \sqrt{26}$.

b) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -26$.

c) Gọi $M(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MB}$. Khi đó $x + y + z = 2$.

d) Gọi $D(a; b; c)$ là tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC. Khi đó $a + b + c = 1$.

✍ *Hướng dẫn giải.*

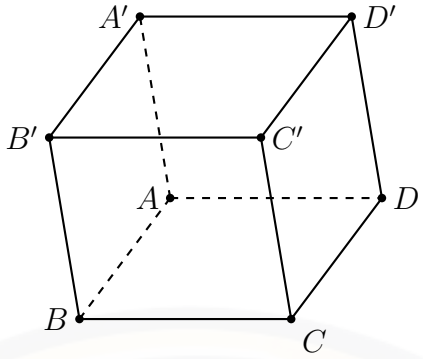
a) Đúng: $AB = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{26}$.

b) Sai: $\overrightarrow{BA} = (-1; 3; -4), \overrightarrow{BC} = (-6; 8; 2) \Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 6 + 24 - 8 = 22$.

c) Đúng: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MB} \Rightarrow M = 3B - A - C = (9; -12; 5) \Rightarrow x + y + z = 2$.

d) Sai: Chân phân giác D chia AC theo tỉ số $k = -BA/BC = -1/2 \Rightarrow D(-2/3; 11/3; 1) \Rightarrow a + b + c = 4$.

Bài 12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết điểm $A(0;0;0), B(1;0;0), C(1;2;0), D'(-1;3;5)$. Gọi M, N là tâm của các hình bình hành $ABB'A', ADD'A'$.



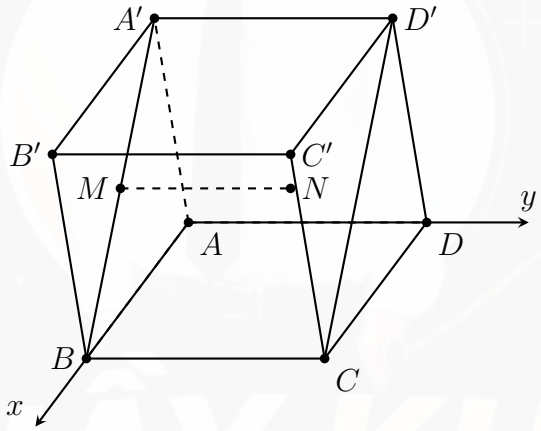
a) Tọa độ $D(0;2;0)$.

b) Tọa độ $A'(-1;1;5)$.

c) Tọa độ $\overrightarrow{MN} = (-1;1;0)$.

d) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'}| = \sqrt{29}$.

Hướng dẫn giải.



a) Đúng: Theo quy tắc hình bình hành đáy, ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (1;2;0) - (1;0;0) = (0;2;0) \Rightarrow D(0;2;0)$.

b) Đúng: Ta có $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{DD'} = (-1;1;5) \Rightarrow A'(-1;1;5)$.

c) Sai: Theo hình vẽ $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B'D'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \left(\frac{-1}{2};1;0\right)$.

d) Sai: Ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = (0;3;5)$.
Xét $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}| = |\overrightarrow{AC'}| = \sqrt{0^2+3^2+5^2} = \sqrt{34}$.

Bài 13. Trong không gian $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ có $A(0;0;1)$, $B(-1;-2;0)$ và $C(2;1;-1)$.

a) $\overrightarrow{BC} = (3;-3;-1)$

b) $\triangle ABC$ cân tại A

c) $AB \perp BC$

d) Gọi $H(a,b,c)$ là chân đường cao hạ từ A xuống BC. Khi đó $a+b+c = -\frac{17}{19}$

Hướng dẫn giải.

◈ $\overrightarrow{BC} = (3;3;-1)$.

◈ $AB=\sqrt{6}$, $AC=\sqrt{19}$ nên $\triangle ABC$ không cân tại A.

◈ Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-3-6+1=-8\neq 0$ nên AB không vuông góc với BC.

◈ Ta có $\overrightarrow{AH}=(x;y;z-1)$, $\overrightarrow{BC}=(3;3;-1)$, $\overrightarrow{BH}=(x+1;y+2;z)$.
Khi đó

$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{BC}//\overrightarrow{BH}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+3y-(z-1)=0\\ \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z}{-1}=k\end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases}x=3k-1\\ y=3k-2\\ z=-k\end{cases}$ khi đó $3x+3y-(z-1)=0\Leftrightarrow 9k-3+9k-6+k+1=0\Leftrightarrow k=\dfrac{8}{19}$.

$\Rightarrow H\left(\dfrac{5}{19};\dfrac{-14}{19};\dfrac{-8}{19}\right)$. Khi đó $a+b+c=-\dfrac{17}{19}$.

Bài 14. Trong không gian $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ có $A(1;0;0)$, $B(0;0;1)$, $C(2;1;1)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(-1;0;1)$

b) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương

c) $AB\perp AC$

d) Diện tích tam giác ABC là $\sqrt{6}$

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;0;1)$ và $\overrightarrow{AC}=(1;1;1)$ nên $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, suy ra $AB\perp AC$.
Khi đó diện tích $\triangle ABC$ là $\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Bài 15. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(1;-2;3)$ và $\vec{b}=(1;1;-1)$.

a) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=3$

b) $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=4$

c) $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$

d) $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\dfrac{4}{\sqrt{42}}$

Hướng dẫn giải. Ta có

◈ $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{(1+1)^2+(-2+1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{4+1+4}=3$.

◈ $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{(1-1)^2+(-2-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{0+9+16}=5$.

◈ $\vec{a}\cdot\vec{b}=1-2-3=-4$.

◈ $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{-4}{\sqrt{42}}$.

Bài 16. Trong không gian $Oxyz$, cho ba véc-tơ $\vec{a}=(-1;1;0)$, $\vec{b}=(1;1;0)$, $\vec{c}=(1;1;1)$.

a) $\vec{a}\cdot\vec{c}=1$

b) $\vec{a}$ cùng phương $\vec{c}$

c) $\cos\left(\vec{b},\vec{c}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$

d) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$

Hướng dẫn giải. Ta có

- $\vec{a} \cdot \vec{c} = -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{c}$.
- $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (1; 3; 1) \neq \vec{0}$.
- $\cos\left(\vec{b}, \vec{c}\right) = \dfrac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{\left|\vec{b}\right| \cdot |\vec{c}|} = \dfrac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1+1} \cdot \sqrt{1+1+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$.

Bài 17. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; 2; -3), B(-2; 4; 5), C(7; -3; -5)$.

a) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng

b) $A'(-1; -2; 3)$ là điểm đối xứng của A qua O

c) Điểm $G(2; 1; -1)$ là trọng tâm của tam giác ABC

d) Điểm $D(10; -5; -13)$ thỏa tứ giác $ABCD$ là hình bình hành

Hướng dẫn giải. a) Đúng. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; 2; 8), \overrightarrow{AC} = (6; -5; -2)$. Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương, nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Đúng. A' là điểm đối xứng của A qua O thì O là trung điểm $AA' \Rightarrow A'(-1; -2; 3)$.

c) Đúng. G là trọng tâm tam giác ABC, nên

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{1 + (-2) + 7}{3} = 2 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{2 + 4 + (-3)}{3} = 1 \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} = \dfrac{(-3) + 5 + (-5)}{3} = -1. \end{cases}$$

Vậy $G(2; 1; -1)$.

d) Đúng. Vì ba điểm A, B, C không thẳng hàng, nên tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 9 \\ y - 2 = -7 \\ z + 3 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = -5 \\ z = -13. \end{cases}$$

Vậy $D(10; -5; -13)$.

Bài 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(-3; 2; 1)$, $C(4; 2; 0)$, $B'(-2; 1; 1)$, $D'(3; 5; 4)$.

a) $E\left(\dfrac{1}{2}; 3; \dfrac{5}{2}\right)$ là trung điểm của $B'D'$

b) $F\left(\dfrac{1}{2}; 2; \dfrac{1}{2}\right)$ là trung điểm của AC

c) Tọa độ điểm $A'(-3; 3; 3)$

d) Tọa độ điểm $B(-2; 0; 1)$

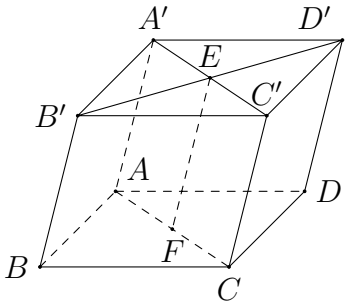
Hướng dẫn giải.

a) Đúng. E là trung điểm của $B'D'$ nên $E\left(\frac{1}{2};3;\frac{5}{2}\right)$.

b) Đúng. F là trung điểm của AC nên $F\left(\frac{1}{2};2;\frac{1}{2}\right)$

c) Đúng. Ta có

$$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AA'}\Rightarrow\begin{cases}x_{A'}+3=0\\y_{A'}-2=1\\z_{A'}-1=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{A'}=-3\\y_{A'}=3\\z_{A'}=3\end{cases}.$$ Vậy $A'(-3;3;3)$.



d) Sai. Ta có

$$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AA'}\Rightarrow\begin{cases}-2-x_B=0\\1-y_B=1\\1-z_B=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_B=-2\\y_B=0\\z_B=-1\end{cases}.$$ Vậy $B(-2;0;-1)$.

Bài 19. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$.

a) Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là $\vec{a}=(2;-3;4)$

b) Nếu vectơ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ thì điểm A có tọa độ là $A(-2;3;-4)$

c) Biết $\vec{a}=\vec{b}$ và $\vec{b}=(3x-y;x-4y;4)$. Khi đó $x+y=2$

d) Biết $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ và $A(1;2;-1)$ thì điểm B có tọa độ là $B(3;-1;3)$

Hướng dẫn giải. a) Có $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}\Leftrightarrow\vec{a}=(2;-3;4)$.

b) Ta có $\overrightarrow{OA}=\vec{a}=(2;-3;4)\Rightarrow A(2;-3;4)$.

c) Có $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-y=2\\x-4y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\Rightarrow x+y=2.$

d) Gọi $B(x;y;z)$. Ta có

$$\overrightarrow{AB}=\vec{a}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=2\\y-2=-3\\z+1=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=-1\\z=3.\end{cases}$$

Vậy $B(3;-1;3)$.

Bài 20. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;-2;1)$, $B(-2;-2;-1)$, $C(3;1;-2)$.

a) Hình chiếu của A lên mặt phẳng (Oxz) là $A'(0;0;1)$

b) Tam giác ABC là tam giác vuông tại A

c) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ của $D(5;1;4)$

d) Trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\frac{1}{3};1;\frac{-2}{3}\right)$

Hướng dẫn giải. a) Hình chiếu của A lên mặt phẳng (Oxz) là $A'(0;0;1)$.

b) Ta có $\overrightarrow{AC}=(3;3;-3)$, $\overrightarrow{AB}=(-2;0;-2)$.

Khi đó $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=3\cdot(-2)+3\cdot0+(-3)\cdot(-2)=0\Rightarrow AC\perp AB$.

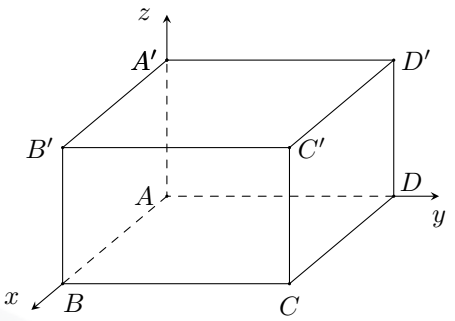
c) Giả sử $D(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{BA}=(2;0;2)$, $\overrightarrow{CD}=(x-3;y-1;z+2)$.

Để $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3=2\\y-1=0\\z+2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=1\\z=0.\end{cases}$

Vậy $D(5;1;0)$.

d) Trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\frac{1}{3};-1;\frac{-2}{3}\right)$.

Bài 21. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc tọa độ O và các đỉnh B, C, D' có tọa độ lần lượt là $(2;0;0)$, $(2;4;0)$, $(0;4;3)$.



a) Tọa độ $D(0;4;0)$

b) Tọa độ $C'(2;3;4)$

c) Tọa độ của $\overrightarrow{AA'}=(0;0;3)$

d) Tọa độ của $\overrightarrow{B'D}=(-2;4;-3)$

Hướng dẫn giải. Từ giả thiết, ta suy ra $\overrightarrow{AB}=(2;0;0)$, $\overrightarrow{AD}=(0;4;0)$ và $\overrightarrow{AA'}=(0;0;3)$.

a) Tọa độ của $D(0;4;0)$.

b) Tọa độ của $C'(2;4;3)$.

c) Tọa độ của $A'(0;0;3)$ nên $\overrightarrow{AA'}=(0;0;3)$.

d) Tọa độ của $B'(2;0;3)$ và $D(0;4;0)$ nên $\overrightarrow{B'D}=(-2;4;-3)$.

Bài 22. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-2;1)$ và B nằm trên trục Oy sao cho $OB=2$.

a) $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$

b) Tọa độ điểm $B(2;0;0)$

c) Điểm $M(2;2;-1)$ đối xứng với A qua trục Ox

d) Tọa độ điểm $N(-2;2;1)$ đối xứng với A qua mặt phẳng tọa độ (Oxy)

Hướng dẫn giải. a) Vì A có tọa độ $(2;-2;1)$ nên $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$.

b) Vì B nằm trên trục Oy sao cho $OB=2$ nên tọa độ của B có thể là $(0;2;0)$ hoặc $(0;-2;0)$.

c) Điểm đối xứng với A qua trục Ox có tọa độ là $(2;2;-1)$.

d) Tọa độ điểm đối xứng với A qua mặt phẳng tọa độ (Oxy) là $(2;-2;-1)$.

Bài 23. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vecto $\vec{u}=(3;1;-2)$, $\vec{v}=(1;-1;1)$, $\vec{w}=(-1;-3;4)$.

a) $\vec{u}+\vec{v}=(4;0;-2)$

b) $\vec{u}\perp\vec{v}$

c) Hai vectơ $\vec{u}-2\vec{v}$ và $\vec{w}$ cùng hướng

d) $|\vec{u}-\vec{v}+2\vec{w}|=\sqrt{41}$

Hướng dẫn giải. a) Vì $\vec{u}+\vec{v}=(3+1;1+(-1);-2+1)=(4;0;-1)$.

b) Vì $\vec{u}\cdot\vec{v}=3\cdot1+1\cdot(-1)+(-2)\cdot1=3-1-2=0$ nên $\vec{u}\perp\vec{v}$.

c) Ta có $\vec{u}-2\vec{v}=(3-2\cdot1;1-2\cdot(-1);-2-2\cdot1)=(1;3;-4)$.

Vì $\vec{w}=(-1;-3;4)$, ta thấy $\vec{u}-2\vec{v}=(1;3;-4)=-(-1;-3;4)=-\vec{w}$ nên hai vectơ ngược hướng.

d) Ta có $\vec{u}-\vec{v}+2\vec{w}=(3-1+2\cdot(-1);1-(-1)+2\cdot(-3);-2-1+2\cdot4)=(0;-4;5)$.

Suy ra $|\vec{u}-\vec{v}+2\vec{w}|=\sqrt{0^2+(-4)^2+5^2}=\sqrt{0+16+25}=\sqrt{41}$.

Bài 24. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;0;-2)$, $B(-2;3;4)$, $C(4;-6;1)$.

a) Tọa độ trọng tâm G của tam giác là $(1;-1;1)$

b) $\overrightarrow{AB}=(3;-3;6)$, $\overrightarrow{AC}=(-3;6;-3)$

c) Tam giác ABC là tam giác cân

d) Nếu $ABDC$ là hình bình hành thì tọa độ điểm D là $(7;-9;-5)$

Hướng dẫn giải. a) Gọi $G(x,y,z)$ là toạ độ trọng tâm của tam giác ABC, suy ra

$$\begin{cases} x=\dfrac{1+(-2)+4}{3} \\ y=\dfrac{0+3+(-6)}{3} \\ z=\dfrac{-2+4+1}{3} \end{cases} = \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=1. \end{cases}$$

Vậy $G(1;-1;1)$.

b)

$$\overrightarrow{AC}=(4-1;-6-0;1-(-2))=(3;-6;3).$$

c) Ta có

$$AC=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{3^2+(-6)^2+3^2}=\sqrt{9+36+9}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}.$$

Do $AB=AC=3\sqrt{6}$ nên tam giác ABC cân tại A.

d) Gọi $D(x;y;z)$. Vì $ABDC$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

Ta có

- $\overrightarrow{AB}=(-3;3;6)$.
- $\overrightarrow{CD}=(x-4;y-(-6);z-1)=(x-4;y+6;z-1)$. Do đó

$$\begin{cases} x-4=-3 \\ y+6=3 \\ z-1=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \\ z=7. \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm D là $D(1;-3;7)$.

Bài 25. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(3;2;-1)$, $B(1;4;-2)$ và $C(0;-2;3)$. Khi đó

a) $\overrightarrow{AB}=(-2;2;-1)$

b) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=3$

c) Toạ độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$ là $(1;-2;2)$

d) Toạ độ điểm N thuộc mặt phẳng (Oxy), sao cho A, B, N thẳng hàng là $(5;0;0)$

Hướng dẫn giải. a) $\overrightarrow{AB}=(1-3;4-2;-2-(-1))=(-2;2;-1)$.

b) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-1)^2}=3$.

c) Gọi $M(x;y;z)$ thì $\overrightarrow{MC}=(-x;-2-y,3-z)$. Vì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$, suy ra

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MC}\Rightarrow\begin{cases} -x=-2 \\ -2-y=2 \\ 3-z=-1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \\ z=4. \end{cases}$$

Suy ra $M(2;-4;4)$.

d) Vì N thuộc mặt phẳng (Oxy) nên tọa độ điểm N là $N(x;y;0)$.

Ta có $\overrightarrow{AN}=(x-3;y-2;1)$; $\overrightarrow{BN}=(x-1;y-4;2)$.

Để A, B, N thẳng hàng thì hai vectơ $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BN}$ cùng phương. Do đó, $\overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{BN}$ (với $k\neq 0$).

Suy ra $\begin{cases} x-3=k(x-1) \\ y-2=k(y-4) \\ 1=2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3=\dfrac{1}{2}(x-1) \\ y-2=\dfrac{1}{2}(y-4) \\ k=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=0. \end{cases}$

Vậy $N(5;0;0)$.

Bài 26. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(0;0;-1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;0;1)$ và M là điểm sao cho $3MA^2+2MB^2-MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó

a) $\overrightarrow{AB}=(-1;\ 1;\ 1)$

b) $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$

c) Tọa độ điểm D là $(2;\ -1;\ 0)$

d) Tọa độ điểm M là $\left(\dfrac{3}{4};-\dfrac{1}{2};1\right)$

Hướng dẫn giải. a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;\ 1;\ 1)$.

b) Ta có $\overrightarrow{AC}=(1;\ 0;\ 2)$, suy ra

$$\cos\widehat{BAC}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\cdot AC}=\frac{-1+0+2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{15}.$$

c) Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases} x_D-0=1+1 \\ y_D-0=0-1 \\ z_D+1=1-0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_D=2 \\ y_D=-1 \\ z_D=0. \end{cases}$

Vậy $D(2;\ -1;\ 0)$.

d) Gọi $M(x;y;z)\Rightarrow\begin{cases} \overrightarrow{AM}=(x;y;z+1) \\ \overrightarrow{BM}=(x+1;y-1;z) \\ \overrightarrow{CM}=(x-1;y;z-1) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} AM^2=x^2+y^2+(z+1)^2 \\ BM^2=(x+1)^2+(y-1)^2+z^2 \\ CM^2=(x-1)^2+y^2+(z-1)^2. \end{cases}$

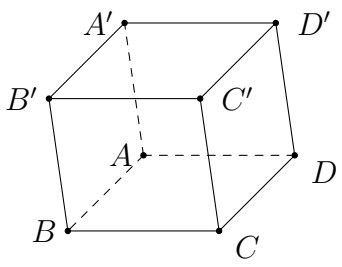
Ta có

$$\begin{aligned} 3MA^2+2MB^2-MC^2&=3\left[x^2+y^2+(z+1)^2\right]+2\left[(x+1)^2+(y-1)^2+z^2\right]-\left[(x-1)^2+y^2+(z-1)^2\right. \\ &=4x^2+4y^2+4z^2+6x-4y+8z+3 \\ &=\left(2x+\frac{3}{2}\right)^2+(2y-1)^2+(2z+2)^2-\frac{9}{4}\geq-\frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{4}$, $y=\dfrac{1}{2}$, $z=-1$.

Vậy $M\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2};-1\right)$.

Bài 27. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết điểm $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;2;0)$, $D'(-1;3;5)$. Gọi M, N là tâm của các hình bình hành $ABB'A'$, $ADD'A'$.



a) Tọa độ $D(0;2;0)$

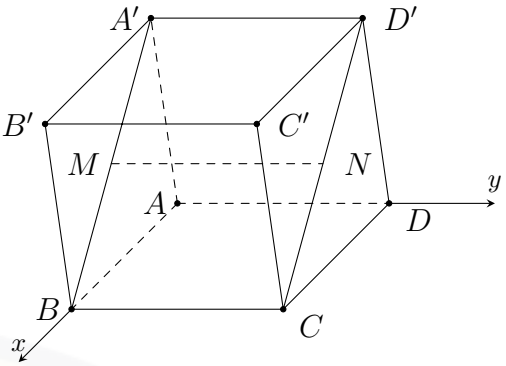
b) Tọa độ $A'(-1;1;5)$

c) Tọa độ $\overrightarrow{MN}=(-1;1;0)$

d) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CC'}\right|=\sqrt{29}$

Hướng dẫn giải.

Bài 27.



a) Theo qui tắc hình bình hành, ta có
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (0;2;0) \Rightarrow D(0;2;0).$$

b) Ta có
$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{DD'} = (-1;1;5) \Rightarrow A'(-1;1;5).$$

c) Theo hình vẽ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} = (0;2;0)$.

d) Ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = (0;3;5)$.
Xét
$$\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'}\right| = \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right| = \left|\overrightarrow{AC'}\right|$$
$$= \sqrt{0^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{34}.$$

Bài 28. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;3;1)$, $B(5;6;2)$, và $C(-2;2;4)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M. Xét tính đúng sai các khẳng định sau.

a) Tam giác ABC vuông tại A

b) Trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\frac{1}{3};\frac{11}{3};\frac{7}{3}\right)$

c) $\overrightarrow{AB} = (-7;3;1)$

d) Tọa độ của điểm M là $(-9;0;-2)$

Hướng dẫn giải. a) Đúng. Ta có

- $\overrightarrow{AB} = (7;3;1), \quad \overrightarrow{AC} = (0;-1;3)$.
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 7 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 0$.

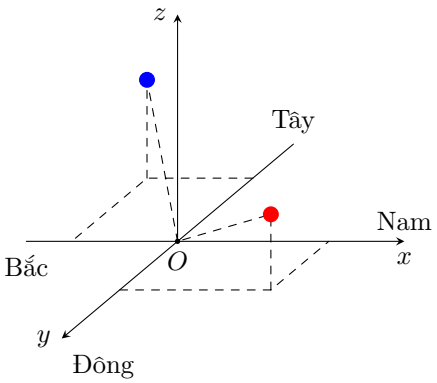
Do đó $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$. Hay tam giác ABC vuông tại A.

b) Đúng. Trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\frac{1}{3},\frac{11}{3},\frac{7}{3}\right)$.

c) Sai. $\overrightarrow{AB} = (7;3;1)$.

d) Sai. Vì $M \in (Oxz)$ nên $M(x;0;z)$.
Ta có $\overrightarrow{AM} = (x+2;-3;z-1)$.
Vì $M \in \overrightarrow{AB}$ nên
$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AM}, \quad k \in \mathbb{R}.$$
Khi đó
$$\begin{cases} 7 = (x+2)k \\ 3 = -3k \\ 1 = (z-1)k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -1 \\ x = -9 \\ z = 0. \end{cases}$$
Vậy $M(-9;0;0)$.

Bài 29. Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,5 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,8 km. Chọn hệ trục $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng Oxy trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (Hình minh họa), đơn vị đo lấy theo kilomet.



a) Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ nhất là $(2;1;0{,}5)$

b) Với hệ tọa độ đã chọn, toạ độ khinh khí cầu thứ hai là $(-1{,}5;-1;0{,}8)$

c) Khoảng cách từ điểm xuất phát đến khinh khí cầu thứ nhất bằng $\sqrt{21}$ km

d) Khoảng cách hai chiếc khinh khí cầu là 3,92 km (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*)

Hướng dẫn giải.

a) Chiếc khinh khí cầu thứ nhất có tọa độ là $(2;1;0{,}5)$.

b) Chiếc khinh khí cầu thứ hai có tọa độ là $(-1;-1{,}5;0{,}8)$.

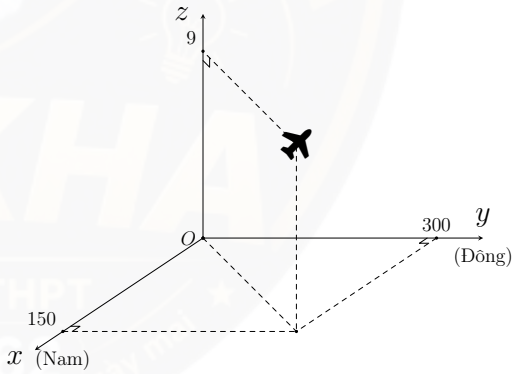
c) Khoảng cách từ điểm xuất phát đến khinh khí cầu thứ nhất bằng

$$\sqrt{2^2+1^2+0{,}5^2}=\frac{\sqrt{21}}{2}\text{ km}.$$

d) Khoảng cách hai chiếc khinh khí cầu là

$$\sqrt{(-1-2)^2+(1{,}5-1)^2+(0{,}8-0{,}5)^2}=\sqrt{15{,}34}\approx 3{,}92\,\text{km}.$$

Bài 30. Hình vẽ sau mô tả vị trí của máy bay vào thời điểm 9 giờ 30 phút. Biết các đơn vị trên hình tính theo đơn vị km. Mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, O trùng với vị trí trung tâm điều khiển.



a) Tại thời điểm 9 giờ 30 phút, máy bay đang ở độ cao 9 km so với mặt đất

b) Tại thời điểm 9 giờ 30 phút, tọa độ của máy bay là $(300;150;9)$

c) Phi công để máy bay ở chế độ tự động bay thẳng theo hướng đông với vận tốc là 750 km/h, độ cao không đổi. Biết rằng gió thổi theo hướng đông với vận tốc 10 m/s. Giả sử vận tốc và hướng gió không thay đổi thì tại thời điểm 10 giờ 30 phút máy bay ở tọa độ $(150;1\,086;9)$

d) Tại thời điểm 9 giờ 30 phút, máy bay cách trung tâm điều khiểu một khoảng (làm tròn đến hàng phần mười) là 335,6 km

Hướng dẫn giải.

a) **Đúng**.
Vì cao độ của máy bay bằng 9 km.

b) **Sai**.
Vì tại thời điểm 9 giờ 30 phút, tọa độ của máy bay là $(150; 300; 9)$.

c) **Đúng**.
Vận tốc thực của máy bay là $750\,\text{km/h}$, vận tốc gió là $10\,\text{m/s} = 36\,\text{km/h}$.
Suy ra vận tốc của máy bay là $750 + 36 = 786\,\text{km/h}$.
Tại thời điểm 10 giờ 30 phút, quãng đường di chuyển được của máy bay theo hướng đông là $786 \cdot 1 = 786\,\text{km}$.
Suy ra vị trí của máy bay cách trung tâm điều khiển theo hướng đông là $786 + 300 = 1\,086\,\text{km}$.
Vậy tọa độ của máy bay là $(150; 1\,086; 9)$.

d) **Sai**.
Gọi $M(150; 300; 9)$.
Tại thời điểm 9 giờ 30 phút, máy bay cách trung tâm điều khiển một khoảng là

$$OM = \sqrt{150^2 + 300^2 + 9^2} \approx 335{,}5 \text{ km}.$$

Bài 31. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy km, ra đa phát hiện một máy bay chiến đấu di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(500; 200; 10)$ đến điểm $N(800; 300; 10)$ trong 20 phút.

a) Máy bay đang di chuyển theo hướng tiến lại gần vị trí đặt ra đa

b) Khoảng cách $MN = 100\sqrt{10}$ km

c) Tốc độ của máy bay khi di chuyển từ M đến N là $150\sqrt{10}$ km/h

d) Nếu tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 4phút tiếp theo là $Q(a; b; c)$ với $a + b + c = 1191$

Hướng dẫn giải.

1. Máy bay đang di chuyển từ điểm $M(500; 200; 10)$ đến điểm $N(800; 300; 10)$.
Hoành độ x và tung y tăng lên, cao độ z không đổi. Máy bay đang di chuyển ra xa vị trí đặt ra đa.

2. Ta có $\overrightarrow{MN} = (300; 100; 0)$ suy ra $MN = \sqrt{300^2 + 100^2 + 0^2} = 100\sqrt{10}$ km.

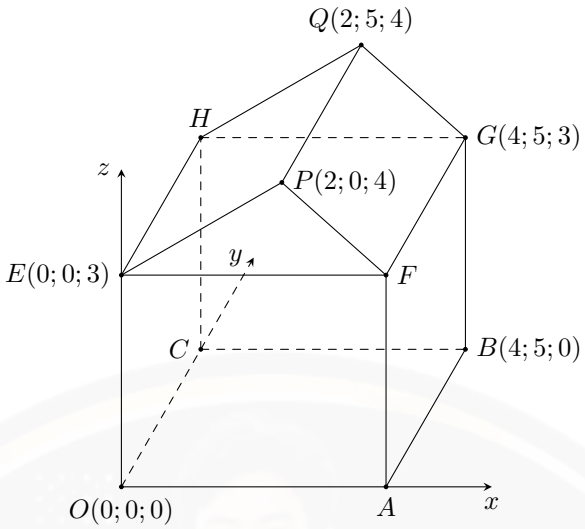
3. Ta có 20 phút $= \dfrac{1}{3}$ giờ.
Tốc độ của máy bay khi di chuyển từ M đến N là $\dfrac{100\sqrt{10}}{\frac{1}{3}} = 300\sqrt{10}$ km/h.

4. Trong 20 phút, máy bay di chuyển từ điểm $M(500; 200; 10)$ đến điểm $N(800; 300; 10)$.
Nếu giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì sau 4 phút tiếp theo máy bay di chuyển đến vị trí điểm $Q(a; b; c)$ sao cho $\overrightarrow{NQ} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{MN}$.

Suy ra $\begin{cases} a - 800 = \dfrac{1}{5} \cdot 300 \\ b - 300 = \dfrac{1}{5} \cdot 100 \\ c - 10 = \dfrac{1}{5} \cdot 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 860 \\ b = 320 \\ c = 10 \end{cases} \Rightarrow Q(860; 320; 10)$. Vậy $a + b + c = 1\,190$.

Bài 32. Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong không gian $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức

tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



a) Toạ độ điểm $F(4;0;3)$

b) Toạ độ vectơ $\overrightarrow{AH}=(4;5;3)$

c) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AF}=3$

d) Góc dốc của mái nhà, tức là số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG, hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ bằng $26{,}6^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười với đơn vị độ.

Hướng dẫn giải.

a) Vì nền nhà là hình chữ nhật nên $OABC$ là hình chữ nhật, suy ra $x_A=x_B=4$, $y_C=y_B=5$.
Do điểm A nằm trên trục Ox nên tọa độ điểm $A(4;0;0)$; điểm C nằm trên trục Oy nên tọa độ điểm $C(0;5;0)$.
Tường nhà là hình chữ nhật nên $OCHE$ là hình chữ nhật, suy ra $y_H=y_C=5$, $z_H=z_E=3$.
Do H nằm trên mặt phẳng (Oyz) nên tọa độ điểm $H(0;5;3)$.
Tứ giác $OAFE$ là hình chữ nhật nên $x_F=x_A=4$, $z_F=z_E=3$.
Do H nằm trên mặt phẳng (Oxz) nên tọa độ điểm $F(4;0;3)$.

b) Ta có toạ độ vectơ $\overrightarrow{AH}=(-4;5;3)$.

c) Ta có $\overrightarrow{AF}=(0;0;3)$. Suy ra $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AF}=0+0+9=9$.

d) Để tính góc dốc của mái nhà, ta tính số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG, hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$.
Do mặt phẳng (Ozx) vuông góc với hai mặt phẳng $(FGQP)$ và $(FGHE)$ nên $\widehat{PFE}$ là góc phẳng nhị diện cần tìm.
Ta có $\overrightarrow{FP}=(-2;0;1)$, $\overrightarrow{FE}=(-4;0;0)$.
Suy ra $\cos\widehat{PFE}=\cos\left(\overrightarrow{FP},\overrightarrow{FE}\right)=\dfrac{\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FE}}{\left|\overrightarrow{FP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{FE}\right|}=\dfrac{(-2)\cdot(-4)+0\cdot0+1\cdot0}{\sqrt{(-2)^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+0^2+0^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.
Do đó, $\widehat{PFE}\approx26{,}6^\circ$.
Vậy góc dốc mái nhà khoảng $26{,}6^\circ$.

3) Câu trả lời ngắn

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;1;5)$ và $\vec{b}=(2;2;1)$. Biết vectơ $3\vec{a}+2\vec{b}=(x_0;y_0;z_0)$. Tính giá trị biểu thức $x_0+y_0+z_0$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $3\vec{a}=(3\cdot 2;3\cdot 1;3\cdot 5)=(6;3;15)$ $2\vec{b}=(2\cdot 2;2\cdot 2;2\cdot 1)=(4;4;2)$.

Do đó $3\vec{a}+2\vec{b}=(6+4;3+4;15+2)=(10;7;17)\Rightarrow x_0+y_0+z_0=10+7+17=34$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(5;4;-1)$, $\vec{b}=(2;-5;3)$, $\vec{u}=(x;y;z)$ thỏa mãn $\vec{a}+2\vec{u}=\vec{b}$. Tính giá trị biểu thức $T=2x+2y+z$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $2\vec{u}=(2x;2y;2z)\Rightarrow \vec{a}+2\vec{u}=(5+2x;4+2y;-1+2z)$ $\vec{b}=(2;-5;3)$

Vì $\vec{a}+2\vec{u}=\vec{b}$ nên: $\begin{cases}5+2x=2\\4+2y=-5\\-1+2z=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{3}{2}\\y=-\dfrac{9}{2}\\z=2\end{cases}\Rightarrow \vec{u}=\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{9}{2};2\right)$

Do đó: $T=2x+2y+z=-3+(-9)+2=-10$.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(5;3;-2)$ và $\vec{b}=(m;-1;m+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù?

Hướng dẫn giải. Ta có $\cos(\vec{a};\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{3m-9}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{2m^2+6m+10}}$.

Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù khi và chỉ khi $\cos(\vec{a};\vec{b})<0\Leftrightarrow 3m-9<0\Leftrightarrow m<3$.

Vì m nguyên dương nên $m\in\{1;2\}$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}=(1;-1;0)$. Xác định k để vectơ $\vec{u}=(2;2k-1;0)$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\vec{u}=(2;2k-1;0)=2\left(1;\dfrac{2k-1}{2};0\right)$

Vectơ $\vec{u}$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$ khi $\dfrac{2k-1}{2}=-1\Leftrightarrow k=-\dfrac{1}{2}=-0,5$.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\overrightarrow{NM}=(3;2;-2)$, $\overrightarrow{NP}=(2;m-2;1)$.

Tam giác MNP vuông tại N khi và chỉ khi $\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NP}=0\Leftrightarrow 3\cdot 2+2\cdot(m-2)-2\cdot 1=0\Leftrightarrow m=0$.

Vậy $m=0$ là giá trị cần tìm.

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác MNP có $M(3;7;2)$, $N(5;1;-1)$ và $P(4;-4;-2)$. Gọi $G(a;b;c)$ là trọng tâm của tam giác MNP. Tính giá trị biểu thức $T=a+3b+3c$.

Hướng dẫn giải. Áp dụng công thức tính tọa độ trọng tâm theo tọa độ các đỉnh của tam giác MNP, ta có: $G\left(\dfrac{3+5+4}{3};\dfrac{7+1-4}{3};\dfrac{2-1-2}{3}\right)$, hay $G\left(4;\dfrac{4}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$

$\Rightarrow T = a + 3b + 3c = 4 + 3 \cdot \dfrac{4}{3} + 3 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) = 7.$

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;5;3), B(a;b;c)$ và $M(2;1;-2)$. Biết M là trung điểm của AB, tính $T = a + b + c$.

Hướng dẫn giải. Vì M là trung điểm của AB nên ta có: $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + a}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + b}{2} \\ z_M = \dfrac{z_A + c}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \dfrac{-1 + a}{2} \\ 1 = \dfrac{5 + b}{2} \\ -2 = \dfrac{3 + c}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a = 5 \\ b = -3 \\ c = -7 \end{cases} \Rightarrow T = a + b + c = -5.$

Bài 8. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;5)$. Gọi tọa độ $A'(a;b;c)$ là điểm đối xứng với A qua trục Oy. Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$.

Hướng dẫn giải. Gọi H là hình chiếu vuông góc của $A(2;-3;5)$ lên Oy. Suy ra $H(0;-3;0)$.

Khi đó H là trung điểm đoạn AA'.

$\begin{cases} a = 2x_H - x_A = -2 \\ b = 2y_H - y_A = -3 \\ c = 2z_H - z_A = -5 \end{cases} \Rightarrow A'(-2;-3;-5) \Rightarrow T = a + b + c = -10.$

Bài 9. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;5), B(5;-5;7), M(x;y;1)$. Để ba điểm A, B, M thẳng hàng thì giá trị của $x + y$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3;-4;2)$, $\overrightarrow{AM} = (x-2;y+1;-4)$. A, B, M thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{-4}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 7 \end{cases}$. $\Rightarrow x + y = -4 + 7 = 3.$

Bài 10. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;2;-1), B(-1;-x;1), C(7;-1;y)$. Khi A, B, C thẳng hàng thì giá trị biểu thức $x + y$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-4;-x-2;2)$; $\overrightarrow{AC} = (4;-3;y+1)$.

Để A, B, C thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = k \cdot 4 \\ -x - 2 = k \cdot (-3) \\ 2 = k \cdot (y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ x = -5 \\ y = -3 \end{cases}$.

Vậy $x + y = -5 - 3 = -8$.

Bài 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-2)$, $B(2;-3;5)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA = 2MB$, biết tọa độ điểm M là $(a;b;c)$. Khi đó $a + 3b + c$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Ta có $M(a;b;c)$.

Vì M thuộc đoạn AB nên $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - a = -2(2 - a) \\ 1 - b = -2(-3 - b) \\ -2 - c = -2(5 - c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{7}{3} \\ b = -\dfrac{5}{3} \\ c = \dfrac{8}{3} \end{cases}$

Suy ra $a+3b+c=\dfrac{7}{3}+3\left(-\dfrac{5}{3}\right)+\dfrac{8}{3}=0$.

Bài 12. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1), B(2;-1;3), C(-4;7;5)$. Gọi $D(a;b;c)$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC. Giá trị của $a+b+2c$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Ta có $AB=\sqrt{26}$, $BC=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$.

Gọi $D(x,y,z)$, theo tính chất đường phân giác ta có $\dfrac{DA}{DC}=\dfrac{BA}{BC}=\dfrac{1}{2}$. Suy ra $\overrightarrow{DA}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ (1).

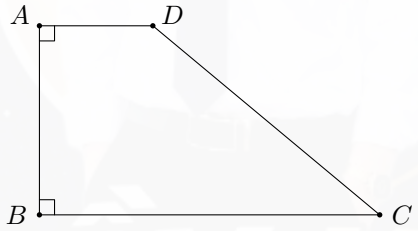
Ta có $\overrightarrow{DA}=(1-x;2-y;-1-z)$ và $\overrightarrow{DC}=(-4-x;7-y;5-z)$.

Do đó (1) $\Rightarrow \begin{cases} 1-x=-\dfrac{1}{2}(-4-x) \\ 2-y=-\dfrac{1}{2}(7-y) \\ -1-z=-\dfrac{1}{2}(5-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{11}{3} \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow D\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{11}{3};1\right)$.

Suy ra $a+b+2c=-\dfrac{2}{3}+\dfrac{11}{3}+2(1)=5$.

Bài 13. Trong không gian $Oxyz$, cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B. Ba đỉnh $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$ và hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$. Tính giá trị của biểu thức $a+b+c$.

Hướng dẫn giải.



Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-2;-2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|=3$; $\overrightarrow{BC}=(4;1;1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right|=3\sqrt{2}$.

Theo giả thiết $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B và có diện tích bằng $6\sqrt{2}$ nên

$$\frac{1}{2}\cdot AB\cdot(AD+BC)=6\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot 3\cdot(AD+3\sqrt{2})=6\sqrt{2}\Rightarrow AD=\sqrt{2}\Rightarrow AD=\frac{1}{3}BC.$$

Do $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B nên $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Giả sử $D(a;b;c)$. Khi đó ta có $\begin{cases} a-1=\dfrac{4}{3} \\ b-2=\dfrac{1}{3} \\ c-1=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{7}{3} \\ b=\dfrac{7}{3} \\ c=\dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow a+b+c=6$.

Bài 14. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;1)$; $C(-3;6;4)$. Gọi M là điểm nằm trên đoạn BC sao cho $MC=2MB$. Tính độ dài đoạn AM (Kết quả được làm tròn ở chữ số thập phân thứ nhất).

Hướng dẫn giải. Gọi tọa độ điểm $M(a;b;c)$, do M thuộc đoạn BC và $MC=2MB \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{MB}$ $(*)$.

Ta có $\overrightarrow{CM}=(a+3;b-6;c-4)$ và $\overrightarrow{MB}=(-a;3-b;1-c)$.

Do đó

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a+3=-2a \\ b-6=6-2b \\ c-4=2-2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \\ c=2 \end{cases} \Rightarrow M(-1;4;2) \Rightarrow \overrightarrow{AM}=(-3;4;2)$$

$\Rightarrow AM=\sqrt{29}\approx 5{,}4.$

Bài 15. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(3;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;3)$. Điểm $M(a;b;c)$ trong không gian thỏa mãn M không trùng với các điểm O, A, B, C và $\widehat{AMB}=\widehat{BMC}=\widehat{CMA}=90^\circ$. Khi đó tổng $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Gọi $M(a;b;c)$ vì $\widehat{AMB}=\widehat{BMC}=\widehat{CMA}=90^\circ$ nên $\begin{cases} \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0 \\ \overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{BM}=0 \\ \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CM}=0. \end{cases} (*)$

$\overrightarrow{AM}=(a-3;b;c)$, $\overrightarrow{BM}=(a;b-3;c)$, $\overrightarrow{CM}=(a;b;c-3)$.

Từ biểu thức $(*)$ ta có biểu thức tọa độ

$$\begin{cases} (a-3)a+b(b-3)+c^2=0 \\ a^2+(b-3)b+c(c-3)=0 \\ (a-3)a+b^2+(c-3)c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2-3a-3b=0\,(1) \\ a^2+b^2+c^2-3b-3c=0 \\ a^2+b^2+c^2-3a-3c=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3a+3b=3b+3c=3c+3a$$

$$\Leftrightarrow a=b=c.$$

Thay vào biểu thức (1) ta có $3a^2-6a=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(0;0;0)\,(l) \\ M(2;2;2)\,(TM). \end{array}\right.$

Vậy $a+b+c=6$.

Bài 16. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-1;1)$, $B(3;1;2)$ và $C(-1;0;3)$. Có bao nhiêu điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có 2 cạnh đáy AB, CD và có $\widehat{ADC}=45^\circ$.

Hướng dẫn giải. Gọi $D(x,y,z)$, khi đó $\overrightarrow{AB}=(2;2;1)$, $\overrightarrow{DC}=(-1-x;-y;3-z)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình thang có 2 cạnh đáy AB, CD nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ cùng phương.

$$\Rightarrow \frac{-1-x}{2}=\frac{-y}{2}=\frac{3-z}{1} \Rightarrow \begin{cases} x=2z-7 \\ y=2z-6 \end{cases}.$$

Ta có $\overrightarrow{AD}=(x-1;y+1;z-1)$ và $\overrightarrow{CD}=(x+1;y;z-3)$.

$$\cos(\widehat{ADC})=\frac{|\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}=\frac{9(z-3)^2}{\sqrt{9(z^2-6z+10)}\cdot\sqrt{9(z-3)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{(z-3)^2}}{\sqrt{z^2-6z+10}} \Rightarrow 2(z^2-6z+9)=z^2-6z+10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=4 \\ z=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1;y=2 \\ x=-3;y=-2 \end{array}\right..$$

Bài 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B. Ba đỉnh $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$. Tính $a+b+c$.

Hướng dẫn giải. Ta có $|\overrightarrow{AB}|=3$; $|\overrightarrow{BC}|=3\sqrt{2}$.

$$S=\frac{1}{2}AB(AD+BC)=6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot 3\cdot(AD+3\sqrt{2})=6\sqrt{2} \Rightarrow AD=\sqrt{2}=\frac{1}{3}BC.$$

Do $ABCD$ vuông tại A, B nên $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

$$\begin{cases} a-1=\dfrac{4}{3} \\ b-2=\dfrac{1}{3} \\ c-1=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{7}{3} \\ b=\dfrac{7}{3} \\ c=\dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow a+b+c=6.$$

Bài 18. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(-2;1;0), C(2;-3;1)$. Lấy điểm $S(a;b;c)$ sao cho biểu thức $SA^2+2SB^2+3SC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T=2a+b+3c$.

Hướng dẫn giải. Gọi G là điểm sao cho $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Rightarrow G\left(\dfrac{1}{2};-1;-\dfrac{1}{3}\right)$

$SA^2+2SB^2+3SC^2=6SG^2+GA^2+2GB^2+3GC^2 \geq 6SG^2$

Dấu bằng khi $S \equiv G \Rightarrow S\left(\dfrac{1}{2};-1;-\dfrac{1}{3}\right)$.

$T=2\left(\dfrac{1}{2}\right)+(-1)+3\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-1.$

Bài 19. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5), B(3;4;0), C(2;-1;0)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm sao cho $MA^2+MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $S=a+b+c$.

Hướng dẫn giải. Gọi I thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{OB}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OC}=(2;1;1) \Rightarrow I(2;1;1)$.

$T=5MI^2+IA^2+IB^2+3IC^2 \geq IA^2+IB^2+3IC^2$

Nhỏ nhất khi $M \equiv I(2;1;1) \Rightarrow a=2, b=1, c=1 \Rightarrow S=a+b+c=4$.

Bài 20. Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1), B(1;4;-1), C(2;4;3), D(2;2;-1)$. Lấy điểm $M(x;y;z)$ sao cho $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $T=4x+2y+z$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Gọi G là trọng tâm của $ABCD \Rightarrow G\left(\dfrac{7}{4};\dfrac{7}{2};0\right)$.

$S=4MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+GD^2$

Nhỏ nhất khi $M \equiv G\left(\dfrac{7}{4};\dfrac{7}{2};0\right) \Rightarrow T=4\left(\dfrac{7}{4}\right)+2\left(\dfrac{7}{2}\right)+0=14.$

Bài 21. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1); B(2;-1;3)$ và điểm $M(a;b;0)$ sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất. Tính giá trị của $a+b$.

Hướng dẫn giải. Gọi $I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2};2\right)$ là trung điểm của AB.

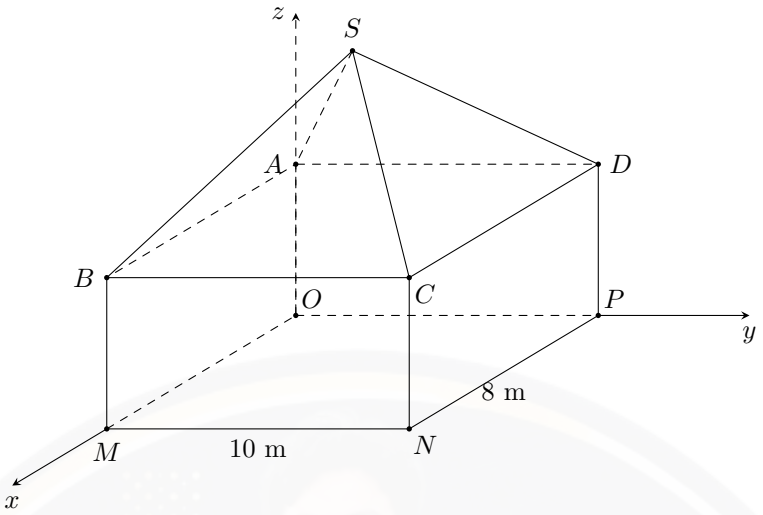
$MA^2+MB^2=2MI^2+\dfrac{AB^2}{2}$.

Nhỏ nhất khi M là hình chiếu của I lên $(Oxy) \Rightarrow M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$.

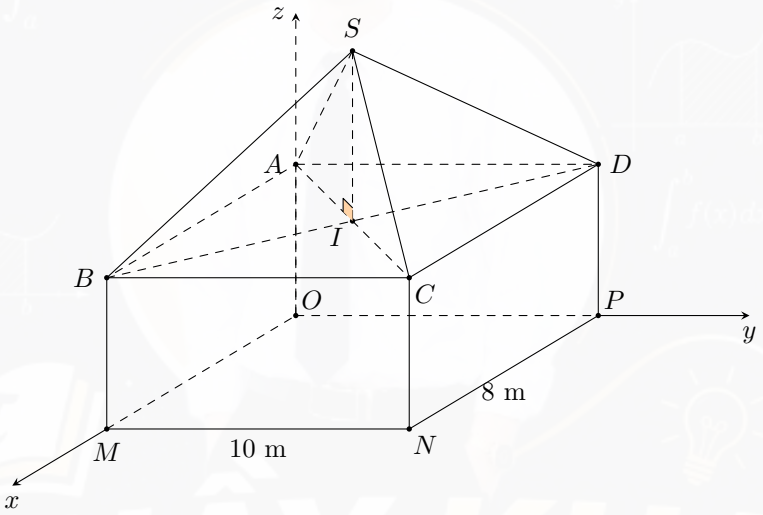
$\Rightarrow a=\dfrac{3}{2}, b=\dfrac{1}{2} \Rightarrow a+b=2.$

Bài 22. Một ngôi nhà gồm hai phần. Phần thân nhà dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.OMNP$ có chiều dài 10 m, chiều rộng 8 m, chiều cao 4,2 m. Phần mái nhà dạng hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau và cùng tạo với mặt đáy một góc α có $\tan\alpha=\dfrac{1}{6}$. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ sao cho M thuộc tia Ox, P thuộc tia Oy, A thuộc tia Oz (như hình vẽ). Biết $S(a,b,c)$ (đơn vị của

a, b, c là mét). Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$ (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

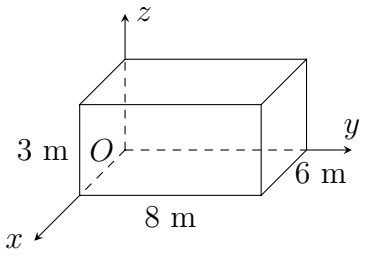


Hướng dẫn giải.



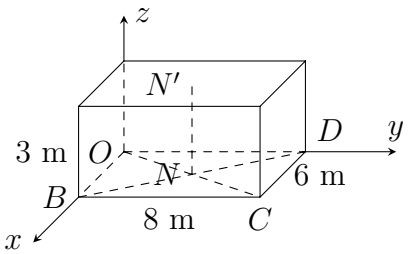
Ta có $A(0;0;4{,}2)$, $B(8;0;4{,}2)$, $C(8;10;4{,}2)$, $D(0;10;4{,}2)$.
Gọi I là giao điểm của AC và $BD \Rightarrow I(4;5;4{,}2)$.
Vì $SA = SB = SC = SD$ nên I là hình chiếu vuông góc của S lên $(ABCD) \Rightarrow S(4;5;c)(c > 4{,}2)$.
$SI \perp AI \Rightarrow (SA,(ABCD)) = (SA,AI) = \widehat{SAI} = \alpha$.
$IS = \sqrt{(4-4)^2 + (5-5)^2 + (c-4{,}2)^2} = c - 4{,}2$, $AI = \sqrt{(4-0)^2 + (5-0)^2 + (4{,}2-4{,}2)^2} = \sqrt{41}$.
$\tan\alpha = \dfrac{IS}{AI} \Rightarrow \dfrac{c-4{,}2}{\sqrt{41}} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow c - 4{,}2 = \dfrac{\sqrt{41}}{6} + 4{,}2 \approx 5{,}3$.
$a + b + c = 4 + 5 + 5{,}3 = 14{,}3$.

Bài 23. Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 8 m, chiều rộng là 6 m và chiều cao là 3 m. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét (hình vẽ). Hãy tìm toạ độ của điểm treo đèn.



Hướng dẫn giải.

Bài 23. Gọi các điểm $B(3;0;0)$, $C(3;6;0)$, $D(0;6;0)$ như hình vẽ.



Hình 2.51

N là trung điểm OC, N' là hình chiếu của N lên mặt phẳng trần nhà.

Suy ra N' là điểm treo đèn.

Ta có N có tọa độ là $\left(\dfrac{0+3}{2};\dfrac{0+6}{2};\dfrac{0+0}{2}\right)$, suy ra $N\left(\dfrac{3}{2};3;0\right)$.

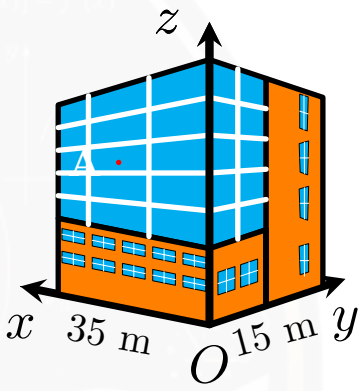
Suy ra $N'\left(\dfrac{3}{2};3;3\right)$.

Vậy tọa độ của điểm treo đèn là $\left(\dfrac{3}{2};3;3\right)$.

Bài 24. Một tòa nhà có dạng hình hộp chữ nhật với kích thước chiều dài 35 m, chiều rộng 15 m, chiều cao 28 m. Người ta định vị các vị trí trong tòa nhà dựa vào một hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

a) Chị Hương đang đứng ở vị trí $A(20;5;20)$ và di chuyển đến thang máy để xuống sảnh chờ đón khách. Biết vị trí vào thang máy có hoành độ $x=15$ và tung độ $y=3$. Hỏi chị Hương mất bao nhiêu giây để di chuyển, nếu từ vị trí A có thể đi thẳng đến cửa thang máy và chị ấy đi bộ với tốc độ 1,5m/s?

b) Chị Hương vừa đặt một bộ phát sóng wifi trong phòng làm việc của mình tại vị trí có tọa độ $(20;5;20)$. Do yêu cầu của công việc, sáng nay chị Hương phải đứng ở bàn lễ tân có tọa độ $(5;0;0)$ để đón khách thì điện thoại của chị có bắt được sóng wifi phát ra từ phòng làm việc của mình hay không? Biết vùng phủ sóng bộ phát wifi nói trên có bán kính 30 mét.



Hướng dẫn giải.

1. Do vị trí vào thang máy có hoành độ $x=15$ và tung độ $y=3$ nên tọa độ thang mấy là $M(15;3;20)$. Suy ra quãng đường cần di chuyển là $AM=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}\,\text{m}$.

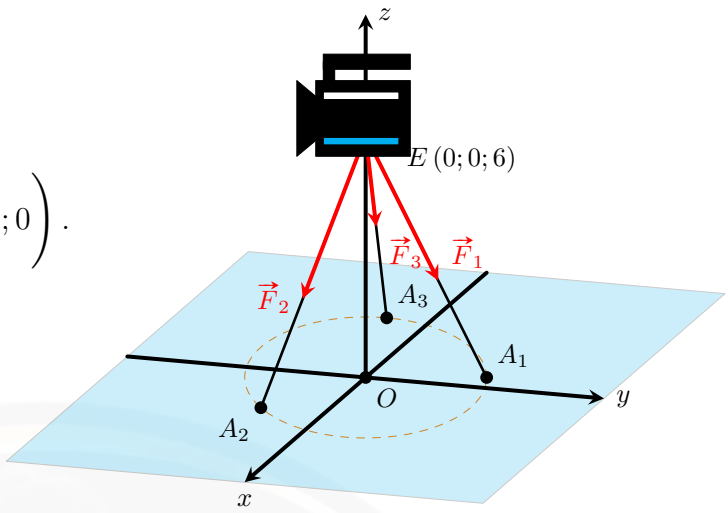
   Thời gian để chị Hương di chuyển là $t=\dfrac{\sqrt{29}}{1{,}5}=3{,}59(\text{s})$.

2. Tọa độ của bàn lễ tân là $B(5,0,0)$ nên $AB=\sqrt{15^2+5^2+20^2}=5\sqrt{26}\approx 25{,}495<30$ nên chị Hương vẫn bắt được sóng wifi.

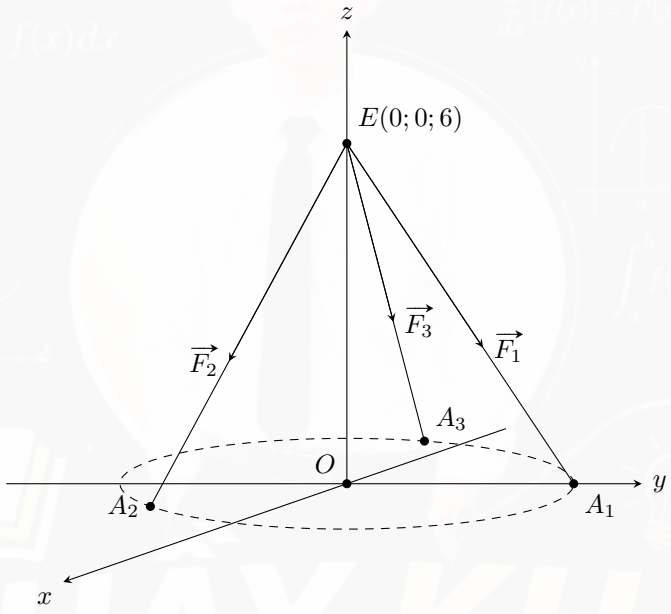
Bài 25. Một chiếc máy quay được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $E(0;0;6)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là

$$A_1(0;1;0), A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right), A_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right).$$

Biết rằng trọng lượng của chiếc máy là 300 N (hình vẽ). Tìm tọa độ của các lực tác dụng lên giá đỡ $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$.



Hướng dẫn giải.



Theo giả thiết ta suy ra $\overrightarrow{EA_1} = (0;1;-6)$; $\overrightarrow{EA_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};-6\right)$; $\overrightarrow{EA_3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};-6\right)$.

Suy ra $|\overrightarrow{EA_1}| = |\overrightarrow{EA_2}| = |\overrightarrow{EA_3}| = \sqrt{37}$. Do đó $|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}| = |\vec{F_3}|$.

Vì vậy, tồn tại hằng số $c \neq 0$ sao cho

$$\vec{F_1} = c \cdot \overrightarrow{EA_1} = (0;c;-6c);$$

$$\vec{F_2} = c \cdot \overrightarrow{EA_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c;-\frac{1}{2}c;-6c\right);$$

$$\vec{F_3} = c \cdot \overrightarrow{EA_3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c;-\frac{1}{2}c;-6c\right).$$

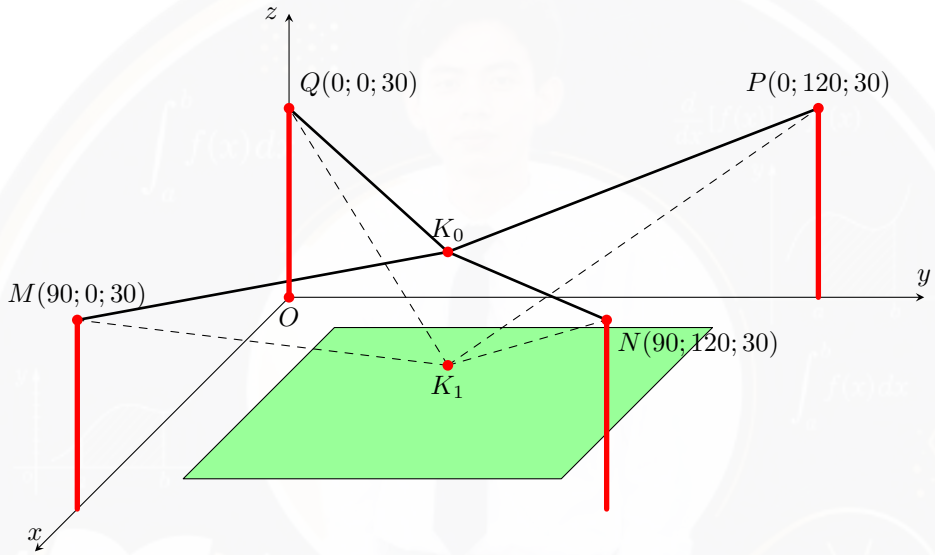
Suy ra $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = (0;0;-18c)$.

Mặt khác, ta có $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \vec{F}$, trong đó $\vec{F} = (0;0;-300)$ là trọng lực tác dụng lên máy quay.

Suy ra $-18c = -300$, tức là $c = \frac{50}{3}$.

Vậy $\overrightarrow{F_1} = \left(0; \dfrac{50}{3}; -100\right)$; $\overrightarrow{F_2} = \left(\dfrac{25\sqrt{3}}{3}; -\dfrac{25}{3}; -100\right)$; $\overrightarrow{F_3} = \left(-\dfrac{25\sqrt{3}}{3}; -\dfrac{25}{3}; -100\right)$

Bài 26. Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn. Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1 m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90;0;30)$, $N(90;120;30)$, $P(0;120;30)$, $Q(0;0;30)$ (Hình 34). Giả sử K_0 là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$. Để theo dõi quả bóng đến vị trí A, camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 cao độ bằng 19 *(Nguồn: https://www.abiturloesung.de; Abitur Bayern 2016 Geometrie VI).*

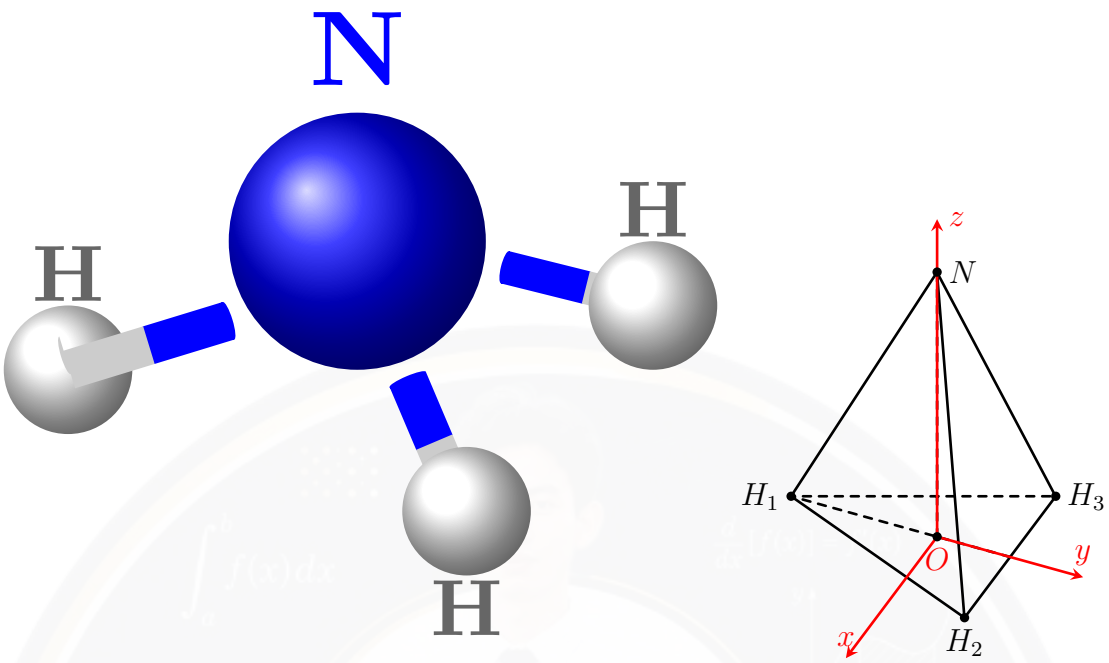


Tìm toạ độ của các điểm K_0, K_1 và của vectơ $\overrightarrow{K_0K_1}$.

Hướng dẫn giải. Tọa độ tâm của hình bình hành $MMNPQ$ là trung điểm H của MP nên $H(45;60;30)$.
Suy ra tọa độ $K_0(45;60;25)$; $K_1(45;60;19)$ và $\overrightarrow{K_0K_1} = (0;0;6)$.

Bài 27. Trong Hóa học, cấu tạo của phân tử ammoniac (NH_3) có dạng hình chóp tam giác đều mà đỉnh là nguyên tử nitrogen (N) và đáy là tam giác $H_1H_2H_3$ với H_1, H_2, H_3 là vị trí của ba nguyên tử hydrogen (H). Góc tạo bởi liên kết H – N – H, có hai cạnh là hai đoạn thẳng nối N với hai trong ba điểm H_1, H_2, H_3 (chẳng hạn $\widehat{H_1NH_2}$), gọi là góc liên kết của phân tử NH_3. Góc này

xấp xỉ 107°.



Trong không gian $Oxyz$, cho một phân tử NH_3 được biểu diễn bởi hình chóp tam giác đều $N.H_1H_2H_3$ với O là tâm của đáy. Nguyên tử nitrogen được biểu diễn bởi điểm N thuộc trục Oz, ba nguyên tử hydrogen ở các vị trí H_1, H_2, H_3 trong đó $H_1(0;-2;0)$ và H_2H_3 song song với trục Ox

a) Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử hydrogen.

b) Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử nitrogen với mỗi nguyên tử hydrogen.

Hướng dẫn giải.

1. Gọi $x = H_1H_2$, khi đó độ dài $OH_1 = x\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 2 = x\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3}$.

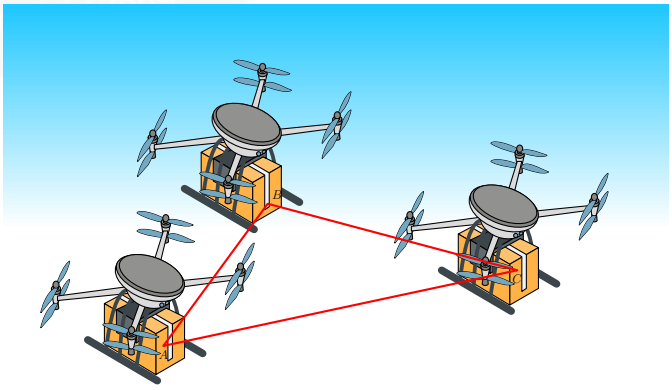
2. Gọi y là khoảng cách giữa hai nguyên tử nitrogen với mỗi nguyên tử hydrogen; khi đó $NH_2 = y$.
Áp dụng định lí cosin ta có

$$H_1H_2^2 = NH_1^2 + NH_2^2 - 2\cdot NH_1\cdot NH_2\cos\widehat{H_1NH_2} \Leftrightarrow 2y^2 - 2y^2\cos 107^\circ = 12$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{12}{2-2\cos 107} \Leftrightarrow y = 2{,}155$$

Bài 28. Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian $Oxyz$, một đội gồm ba drone giao hàng A, B, C đang có toạ độ là $A(1;1;1)$, $B(5;7;9)$, $C(9;11;4)$. Tính:

1. Các khoảng cách giữa mỗi cặp drone giao hàng.
2. Góc $\widehat{BAC}$.



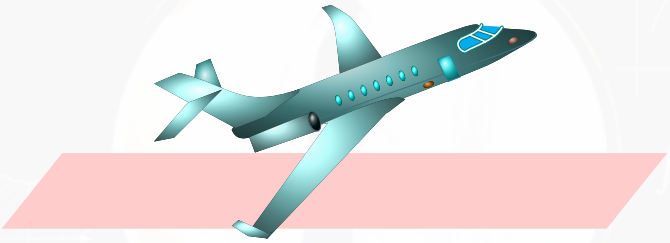
Hướng dẫn giải.

1. Các khoảng cách giữa mỗi cặp drone giao hàng là
   - $AB = \sqrt{(5-1)^2+(7-1)^2+(9-1)^2} = 2\sqrt{29}$;
   - $BC = \sqrt{(9-5)^2+(11-7)^2+(4-9)^2} = \sqrt{57}$;
   - $AC = \sqrt{(9-1)^2+(11-1)^2+(4-1)^2} = \sqrt{173}$.
2. Ta có $\overrightarrow{AB} = (4;6;8)$ và $\overrightarrow{AC} = (8;10;3)$.

$$\cos\widehat{BAC} = \cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\cdot AC} = \frac{4\cdot 8+6\cdot 10+8\cdot 3}{2\sqrt{29}\cdot\sqrt{173}} \approx 0{,}819.$$

Suy ra $\widehat{BAC} \approx 35°2'$.

Bài 29. Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;8)$ trong vòng 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là $C(x;y;z)$, hãy tính $x+y+z$.



Hướng dẫn giải. Gọi $C(x;y;z)$ là vị trí của máy bay sau 10 phút tiếp theo.

Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng.

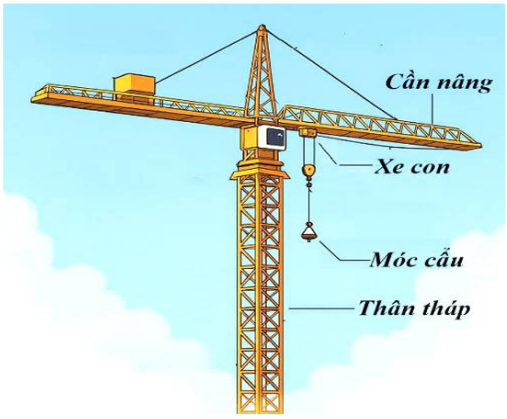
Vì vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B bằng thời gian từ B đến C nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (940-800;550-500;8-7) = (140;50;1)$; $\overrightarrow{BC} = (x-940;y-550;z-8)$.

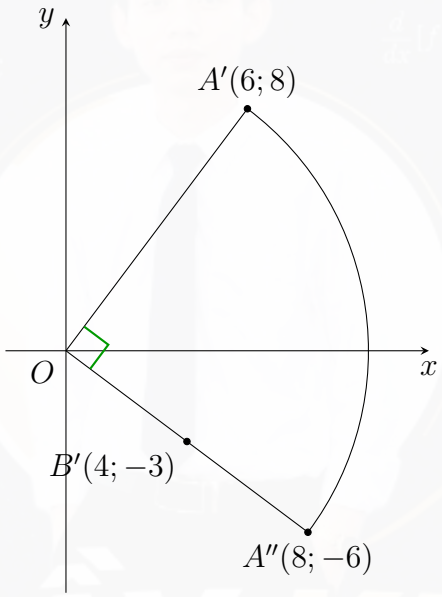
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} 140 = x-940 \\ 50 = y-550 \\ 1 = z-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1\,080 \\ y = 600 \\ z = 9. \end{cases}$$

Vậy $C = (1\,080;600;9) \Rightarrow x+y+z = 1\,080+600+9 = 1\,689$.

Bài 30. Người ta thường dùng cẩu trục tháp (như hình vẽ) để vận chuyển vật liệu xây dựng; thân tháp vuông góc với mặt đất, cần nâng vuông góc thân tháp dùng để làm điểm tựa nâng vật liệu, trên cần nâng có bộ phận gọi là xe con, có thể chạy dọc cần nâng nhằm di chuyển vật liệu. Ban đầu vật liệu ở mặt đất, cẩu trục dùng móc cẩu nâng vật liệu lên cao theo phương thẳng đứng và cao hơn 1m so với vị trí cần đặt, sau đó giữ nguyên độ cao và cẩu trục quay cần nâng một góc $\alpha \in (0°;180°)$ sao cho quỹ đạo tạo thành một cung tròn cho đến khi mặt phẳng (P) chứa cần nâng và điểm cần đặt vuông góc với mặt đất (vật liệu và điểm cần đặt cùng nằm trên một nửa mặt phẳng (P) so với thân tháp). Tiếp đến điều chỉnh xe con nhằm di chuyển và hạ vật liệu xuống 1m theo phương thẳng đứng đúng vị trí cần đặt. Giả sử rằng trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, thân tháp là trục Oz và mặt đất là mặt phẳng Oxy (đơn vị tính bằng mét); vị trí ban đầu của vật liệu là điểm $A(6;8;0)$ và vị trí cần đặt vật liệu là điểm $B(4;-3;15)$. Tính quãng đường vật liệu đã di chuyển (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



✍ *Hướng dẫn giải.* Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của điểm A và điểm B trên mặt phẳng (Oxy).



- Lúc đầu vật liệu ở vị trí $A'(6;8)$ di chuyển thẳng đứng theo phương song song với phương của trục Oz quãng đường 16m (phải cao hơn độ cao 15m của vị trí điểm đến 1m).
- Tiếp theo cẩu trục quay cần nâng di chuyển từ vị trí điểm A' đến vị trí điểm A'' (di chuyển một góc có độ lớn 90° vì $\overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{OB'} = 6 \cdot 4 + 8 \cdot (-3) = 0$), khi đó vật liệu di chuyển một quãng đường $l = R\alpha = OA' \cdot \dfrac{\pi}{2} = 10 \cdot \dfrac{\pi}{2} = 5\pi$.
- Tiếp đến điều chỉnh xe con nhằm di chuyển từ vị trí A'' đến vị trí B' (với B' là trung điểm của OA'' vì $OA'' = 10$m và $OB' = 5$m), tức là vật liệu di chuyển quãng đường $A''B' = 5$m.
- Cuối cùng mốc cẩu hạ vật liệu xuống 1m theo phương thẳng đứng đúng vị trí cần đặt là điểm $B(4;-3;15)$.

Vậy tổng quãng đường di chuyển của vật liệu là: $16 + 5\pi + 5 + 1 \approx 37,7$m.

Chương II

BỘ ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG VECTƠ

TOÁN THẦY KHA
ĐỀ SỐ 1
(Đề gồm có 5 trang)

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho $A(1;-2;0)$ và $B(-3;0;4)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

Ⓐ $(-2;-2;4)$. Ⓑ $(4;-2;-4)$. Ⓒ $(-2;1;2)$. Ⓓ $(-4;2;4)$.

D

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;-1;1)$ trên trục Oz có tọa độ là

Ⓐ $(3;0;0)$. Ⓑ $(3;-1;0)$. Ⓒ $(0;0;1)$. Ⓓ $(0;-1;0)$.

C

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox, Oy. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng M_1M_2?

Ⓐ $\vec{u}_4=(-1;2;0)$. Ⓑ $\vec{u}_1=(0;2;0)$.
Ⓒ $\vec{u}_2=(1;2;0)$. Ⓓ $\vec{u}_3=(1;0;0)$.

A

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$. Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là

Ⓐ $(1;2;0)$. Ⓑ $(1;0;0)$. Ⓒ $(0;2;-1)$. Ⓓ $(1;0;-1)$.

C

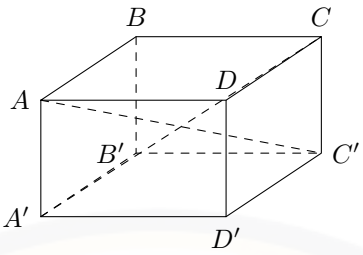
Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-3;5;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Ⓐ $D(-4;8;-5)$. Ⓑ $D(-2;2;5)$.

Ⓒ $D(-4;8;-3)$.
C

Ⓓ $D(-2;8;-3)$.

Câu 6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ dưới). Khẳng định nào dưới đây đúng?



Ⓐ $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{BD'}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng với $\overrightarrow{B'C'}$.
Ⓒ $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng với $\overrightarrow{D'C'}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AC'}$ cùng phương với $\overrightarrow{A'C'}$.

Câu 7. Cho $|\vec{a}| = 2; |\vec{b}| = 6$, góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $120°$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$.
Ⓑ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 40$.
Ⓒ $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6$.
Ⓓ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6\sqrt{3}$.

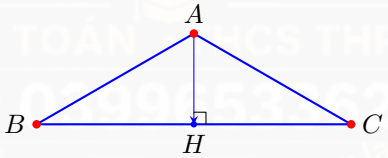
Câu 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình hộp, khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'} = \vec{0}$.
Ⓑ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC'} = \vec{0}$.
Ⓒ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$.
Ⓓ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Câu 9. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Khi đó biểu diễn $\overrightarrow{BC'}$ theo các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là

Ⓐ $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
Ⓑ $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.
Ⓒ $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
Ⓓ $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

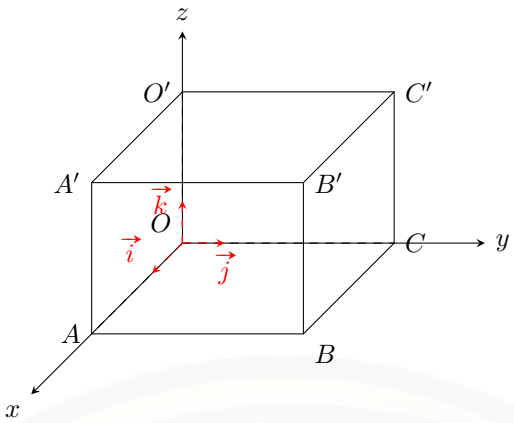
Câu 10. Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC = 5a$ và $\widehat{BAC} = 120°$. Độ dài của vectơ tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ bằng



Ⓐ $10a$.
Ⓑ $\dfrac{5a\sqrt{3}}{2}$.
Ⓒ $5a$.
Ⓓ $5a\sqrt{3}$.

Câu 11. Cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'B'C'$ có cạnh $OA = 4, OC = 6, OO' = 3$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tọa độ O; các điểm A, C, O' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz. Khi đó

tọa độ điểm B' là



Ⓐ $B'(6;3;4)$. Ⓑ $B'(6;4;3)$. Ⓒ $B'(4;6;3)$. Ⓓ $B'(4;3;6)$.

Câu 12. Cho điểm $M(3;-2;0); N(2;4;1)$. Tọa độ của $\overrightarrow{MN}$ là:

Ⓐ $(1;-6;-1)$. Ⓑ $(-1;6;1)$. Ⓒ $(1;0;6)$. Ⓓ $(-1;6;-1)$.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Bài 1. Trong không gian cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh là a. Gọi O là giao điểm của BD và AC.

a) $\overrightarrow{A'C} - \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'C'}$

c) $\overrightarrow{C'O} = \overrightarrow{C'A'} - \overrightarrow{OA'}$

d) $\overrightarrow{A'D} \cdot \overrightarrow{A'B} = 0$

Bài 2. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;-2;1); B(-2;-2;-1); C(3;1;-2)$.

a) Hình chiếu của A lên mặt phẳng (Oxz) là $A'(0;0;1)$.

b) Tam giác ABC là tam giác vuông tại A.

c) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ của $D(5;1;4)$.

d) Trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\frac{1}{3};1;\frac{-2}{3}\right)$.

Bài 3. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi M, N, G, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD, MN, AC, BD.

a) $2\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

b) Giá trị tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}\right)$ bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

c) Giá trị của $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GD}$.

d) Góc giữa $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{MN}$ là $60°$.

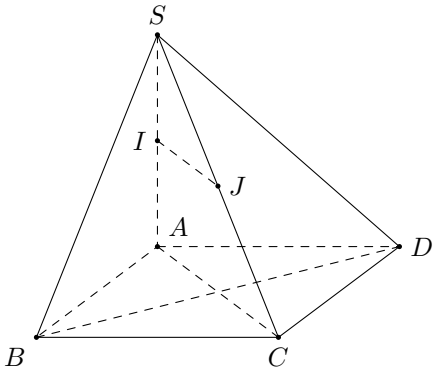
Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA, SC. G là trọng tâm tam giác SBD.

a) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$.

b) $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG}$.

c) $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{BD} = \vec{0}$.

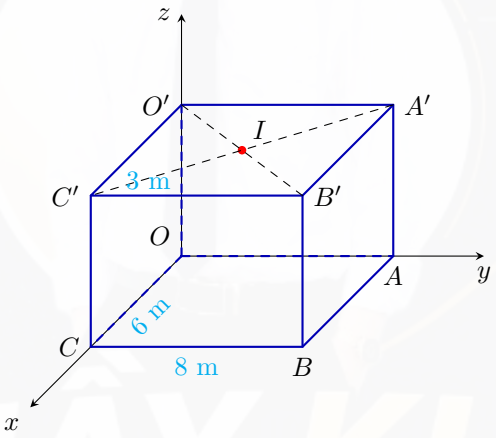
d) $\overrightarrow{AG}^2 = \overrightarrow{AS}^2 + \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2$.



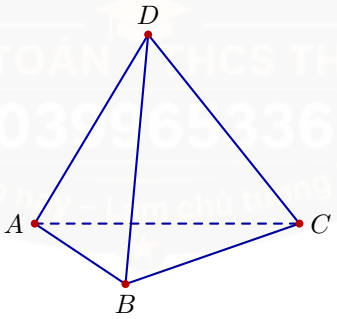
Phần III. Câu trả lời ngắn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6*

Bài 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ biết $A(2;0;0), B(0;2;0), C(1;1;3)$. Gọi $H(x_0;y_0;z_0)$ là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống BC. Khi đó $x_0+y_0+z_0$ bằng bao nhiêu? (Làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 2. Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài 8 m, chiều rộng 6 m và chiều cao 3 m. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét. Khi đó, tọa độ của điểm treo đèn là $I(x;y;z)$, hãy tính $x+y+z$.



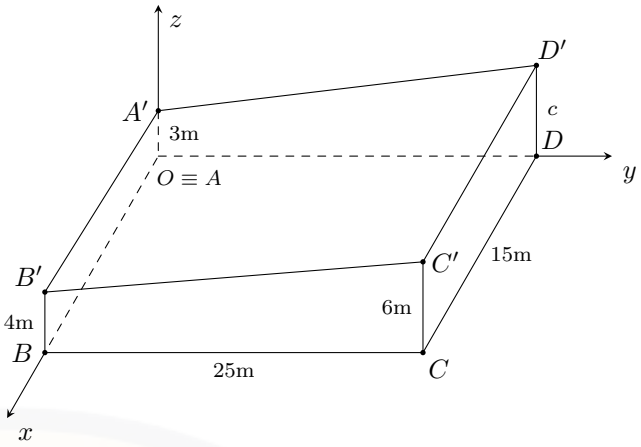
Bài 3. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot (2024\overrightarrow{BC} - 2025\overrightarrow{CD})$.



Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2;3;1)$, $\vec{b} = (-1;5;2)$, $\vec{c} = (4;-1;3)$ và $\vec{x} = (-3;22;5)$. Biết $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$, tính $m-n-p$.

Bài 5. Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo: ki-lô-mét), ra-đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;8)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là $D(x;y;z)$. Khi đó $x+y+z$ bằng bao nhiêu?

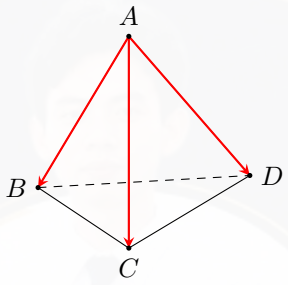
Bài 6. Để chuẩn bị cho ngày hội thao, người ta dựng bốn chiếc cột tại bốn góc của một sân bóng hình chữ nhật với kích thước là 15 m $\times$ 25 m. Bốn chiếc cột vuông góc với mặt sân và có chiều cao lần lượt là 3 mét, 4 mét, 6 mét và c mét. Một tấm bạt lớn được căng phẳng với bốn góc được cố định vào đầu bốn cột. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ bên (đơn vị trên các trục là mét) thì điểm D' có tọa độ là $(a;b;c)$. Tính $a-2b+c$.



THẦY KHA
DẠY TOÁN - THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay - Làm chủ tương lai ngày mai

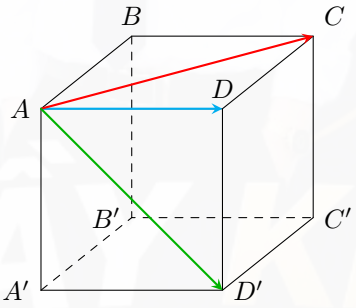
Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$. Có bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện?



Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Câu 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Hai vectơ nào có giá cùng nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$?

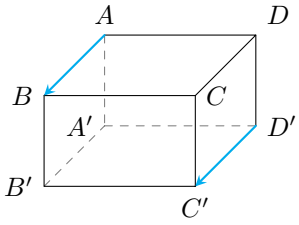


Ⓐ $\overrightarrow{DD'}, \overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{AD}$. Ⓒ $\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{AC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Câu 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a. Hai vectơ nào sau đây có cùng độ dài?

Ⓐ $\overrightarrow{DD'}, \overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{AD}$. Ⓒ $\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{AC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Câu 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ nào sau đây bằng vectơ $\overrightarrow{D'C'}$?



Ⓐ $\overrightarrow{DD'}$. Ⓑ $\overrightarrow{AD}$. Ⓒ $\overrightarrow{AB}$. Ⓓ $\overrightarrow{CD}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$ và $B(2;1;-4)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

Ⓐ $(1;2;-6)$. Ⓑ $(1;0;-6)$. Ⓒ $(-1;-2;6)$. Ⓓ $(3;0;-2)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho biểu diễn của vectơ $\vec{a}$ qua các vectơ đơn vị là $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k} - 3\vec{j}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là

Ⓐ $(2;-3;1)$. Ⓑ $(1;-3;2)$. Ⓒ $(2;1;-3)$. Ⓓ $(1;2;-3)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$ cho hình bình hành $ABCD$ và các đỉnh có tọa độ lần lượt là $A(3;1;2), B(1;0;1), C(2;3;0)$. Tọa độ đỉnh D là

Ⓐ $(1;1;0)$. Ⓑ $(0;2;-1)$. Ⓒ $(4;4;1)$. Ⓓ $(1;3;-1)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (-3;2;1)$ và điểm $A(4;6;-3)$. Tọa độ điểm B thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ là

Ⓐ $(-1;-8;2)$. Ⓑ $(7;4;-4)$. Ⓒ $(1;8;-2)$. Ⓓ $(-7;-4;4)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (1;2;3)$, $\vec{b} = (-2;0;1)$, $\vec{c} = (-1;0;1)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c} - 3\vec{i}$.

Ⓐ $\vec{n} = (6;2;6)$. Ⓑ $\vec{n} = (6;2;-6)$.
Ⓒ $\vec{n} = (0;2;6)$. Ⓓ $\vec{n} = (-6;2;6)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;5;-1), B(7;x;1)$ và $C(9;2;y)$. Để A, B, C thẳng hàng thì giá trị $x+y$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ 6. Ⓒ 4. Ⓓ 7.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, điểm M thuộc trục Ox và cách đều hai điểm $A(4;2;-1)$ và $B(2;1;0)$ là

Ⓐ $M(-4;0;0)$. Ⓑ $M(5;0;0)$. Ⓒ $M(4;0;0)$. Ⓓ $M(-5;0;0)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;3;4), B(1;0;-2)$ và $C(4;0;1)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

Ⓐ $G(3;0;2)$. Ⓑ $G(2;1;1)$. Ⓒ $G(1;1;3)$. Ⓓ $G(3;0;-1)$.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(-1;1;2)$; $B(1;0;3)$ và $\overrightarrow{OC} = 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

a) Tọa độ $C(0;2;-2)$.

b) Hình chiếu vuông góc của A lên Oz có tọa độ $A'(0;0;2)$.

c) Hình chiếu của B lên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ $B'(-1;0;0)$.

d) Tọa độ $D(-2;3;-3)$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{u} = (3;1;-2)$, $\vec{v} = (1;-1;1)$, $\vec{w} = (-1;-3;4)$.

a) $\vec{u} + \vec{v} = (4;0;-2)$.

b) $\vec{u} \perp \vec{v}$.

c) Hai vectơ $\vec{u} - 2\vec{v}$ và $\vec{w}$ cùng hướng.

d) $|\vec{u}-\vec{v}+2\vec{w}|=\sqrt{41}$.

Bài 3. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai vectơ đó là 45°.

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=-5+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $|\vec{a}+\vec{b}|=2+\sqrt{2}$.

d) $|\vec{a}-\sqrt{2}\vec{b}|=0$.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABC$. Điểm M thuộc cạnh SA và $SM=\dfrac{2}{3}SA$.

a) $\overrightarrow{SM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{SA}$.

b) $\overrightarrow{MA}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AS}$.

c) Điểm N nằm trên cạnh SB sao cho $SN=\dfrac{2}{3}SB$. Khi đó $\overrightarrow{SN}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{SB}$.

d) $\overrightarrow{MN}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BA}$.

Phần III. Câu trả lời ngắn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6*

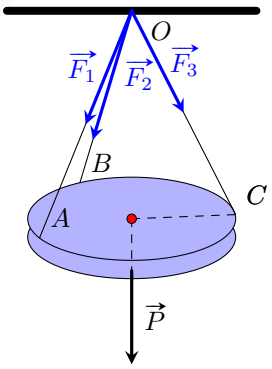
Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3;0;0)$, $B(0;-4;0)$. Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp của tam giác OAB. Tính độ dài đoạn thẳng IJ. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 2. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ sao cho $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=2$ và hai vectơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ (đơn vị độ).

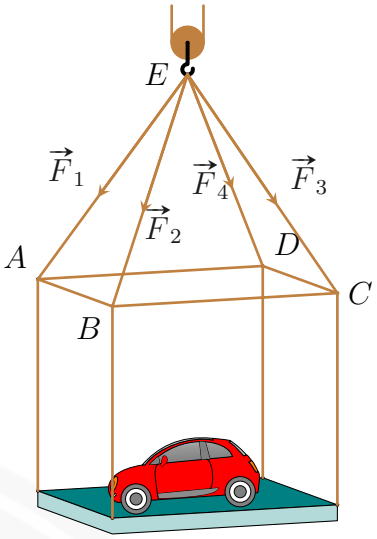
Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;3)$, $B(2;3;-4)$, $C(-3;1;2)$. Biết điểm $D(a;b;c)$ sao cho $ABCD$ là hình bình hành. Tính $a+b+c$.

Bài 4. các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA=OB=OC=1$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Côsin góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng $-\dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $Q=a\cdot b$.

Bài 5. Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho tam giác ABC đều. Độ dài của ba đoạn dây OA, OB, OC đều bằng L. Trọng lượng của chiếc đèn là 27 N và bán kính của chiếc đèn là 0,5 m.Tìm chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây, biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 12 N. (Chiều dài tính theo đơn vị cm và làm tròn đến hàng phần mười).



Bài 6. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình vuông $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiến cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45° như hình vẽ. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết lực căng $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right| = \left|\overrightarrow{F_4}\right|$, trọng lượng khung sắt là 1 000 (N) và trọng lượng của chiếc xe ô tô là 4 000 (N). Tính cường độ lực căng của mỗi đoạn dây cáp (làm tròn đến hàng đơn vị).

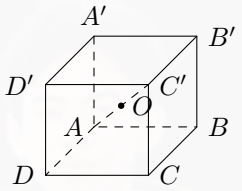


TOÁN THẦY KHA
ĐỀ SỐ 3
(Đề gồm có 5 trang)

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào sau đây là đúng?

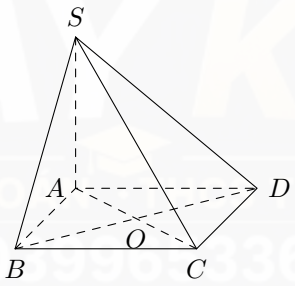


Ⓐ $\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.
Ⓑ $\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.
Ⓒ $\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.
Ⓓ $\overrightarrow{AO}=\dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

Câu 2. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.
Ⓑ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.
Ⓒ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$.
Ⓓ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

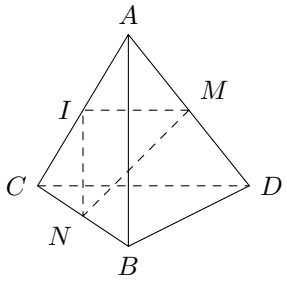
Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a},\overrightarrow{SB}=\vec{b},\overrightarrow{SC}=\vec{c},\overrightarrow{SD}=\vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?



Ⓐ $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$.
Ⓑ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.
Ⓒ $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$.
Ⓓ $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$.

Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=2a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AD và

BC. Biết $MN = \sqrt{3}a$, góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ bằng



Ⓐ $30°$. Ⓑ $60°$. Ⓒ $90°$. Ⓓ $120°$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$ thỏa mãn $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$. Tọa độ của $\vec{a}$ là

Ⓐ $(2;1;-3)$. Ⓑ $(2;-3;1)$. Ⓒ $(-3;1;2)$. Ⓓ $(1;2;-3)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;5)$. Hình chiếu vuông góc của A lên trục Ox có tọa độ là

Ⓐ $(1;0;0)$. Ⓑ $(0;-2;0)$. Ⓒ $(0;0;5)$. Ⓓ $(0;-2;5)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;-1), B(-3;2;-2)$. Tọa độ của $\overrightarrow{AB}$ là

Ⓐ $(5;-3;1)$. Ⓑ $(-5;3;-1)$. Ⓒ $(-5;1;-1)$. Ⓓ $(5;-3;-1)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(2;1;-3), B(0;-2;2), C(4;-3;0)$. Tọa độ điểm D là

Ⓐ $(2;0;5)$. Ⓑ $(6;0;-5)$. Ⓒ $(2;0;-5)$. Ⓓ $(6;0;5)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (2;1;3)$ và $\vec{b} = (-1;2;1)$. Tọa độ của vectơ $\vec{a} + \vec{b}$ là

Ⓐ $\vec{a} + \vec{b} = (1;3;4)$. Ⓑ $\vec{a} + \vec{b} = (-1;3;4)$.
Ⓒ $\vec{a} + \vec{b} = (2;1;2)$. Ⓓ $\vec{a} + \vec{b} = (3;-1;2)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;4), B(-1;3;2)$ và $C(0;4;-3)$. Trọng tâm G của tam giác ABC là

Ⓐ $G(1;3;1)$. Ⓑ $G(0;3;1)$. Ⓒ $G(0;9;3)$. Ⓓ $G(-1;9;3)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (-4;2;-3)$ và điểm $A(1;2;3)$. Tọa độ điểm B thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ là

Ⓐ $B(3;2;-4)$. Ⓑ $B(-3;4;0)$.
Ⓒ $B(3;-4;0)$. Ⓓ $B(-3;-4;-4)$.

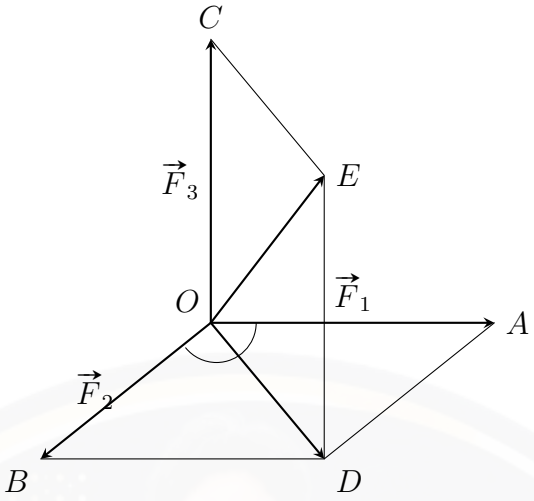
Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;3;-1), N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N.

Ⓐ $m = 0$. Ⓑ $m = 2$. Ⓒ $m = -6$. Ⓓ $m = -2$.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Bài 1. Một vật nặng O được kéo từ ba hướng như hình vẽ và chịu tác dụng của 3 lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, có độ lớn lần lượt là $24\text{N}, 12\text{N}, 6\text{N}$. Biết góc tạo bởi 2 lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ là $120°$ và lực thứ ba vuông góc

với hai lực đầu tiên.



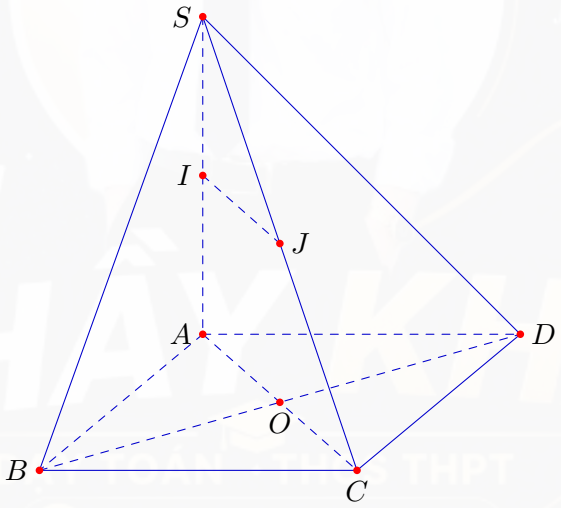
a) $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}$.

b) $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

c) Độ dài của vectơ $\overrightarrow{OD}$ là $|\overrightarrow{OD}|=12\sqrt{7}$.

d) Độ lớn hợp lực tác dụng vào vật O là $6\sqrt{13}$N.

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA, SC. G là trọng tâm tam giác SBD.



a) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$.

b) $\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG}$.

c) $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{BD}=\vec{0}$.

d) $\overrightarrow{AG}^2=\overrightarrow{AS}^2+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2$.

Bài 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M là giao điểm của CD' và $C'D$.

a) $\overrightarrow{DC'}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD'}$.

b) $\overrightarrow{AD'}\cdot\overrightarrow{CC'}=a^2$.

c) $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.

d) Góc giữa $A'C$ và BD là $60°$.

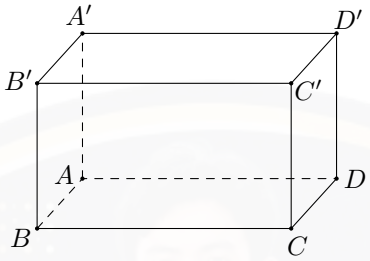
Bài 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$; $AA' = 2a$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{CD'} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{CB'} = \vec{0}$

c) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = a\sqrt{5}$

d) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'}\right| = 2\sqrt{2}a$



Phần III. Câu trả lời ngắn *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 6 .*

Bài 1. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ vuông góc với nhau và $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 4$. Tính $(\vec{a} - \vec{b})(2\vec{a} + \vec{b})$.

Bài 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh $\sqrt{6}$ và các góc $\widehat{BAA'} = \widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = 60°$. Tính độ dài AC'.

Bài 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;2;1), B(-2;-1;4)$. Tìm được tọa độ điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$. Khi đó $a + b + c =$?

Bài 4. Một giỏ hoa treo trong nhà làm bằng 3 sợi dây không giãn, mỗi sợi dây dài 60 (cm) miếng kê là một miếng gỗ cân đối hình tròn bán kính 20 (cm), ba sợi dây được thắt một đầu bên trên và đỡ giá gỗ tại 3 điểm tạo thành tam giác đều (giả sử mỗi thắt của 3 sợi dây và mỗi nối của mỗi sợi dây với miếng gỗ không đáng kể). Biết lực chịu đựng của mỗi sợi dây bằng nhau và mỗi sợi dây chịu không quá 15 (N) trọng lượng của miếng giá gỗ là 5 (N). Tính trọng lượng tối đa của các chậu hoa để dây treo không bị đứt (đơn vị N, kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Bài 5. Hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc $20(km)$ và về phía Tây $10(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,7(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông $30(km)$ và về phía Nam $25(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Xác định khoảng cách giữa hai chiếc máy bay (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh $A(2;3;4)$, $B(0;2;2)$ và $C(3;-1;5)$. Điểm $H(a;b;c)$ là chân đường cao đỉnh A. Khi đó giá trị biểu thức $S = a + 2b - 5c$ bằng.

TOÁN THẦY KHA
ĐỀ SỐ 4
(Đề gồm có 5 trang)

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$. Hỏi có bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{0}$ mà mỗi vectơ có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện $ABCD$?

Ⓐ 12. Ⓑ 4. Ⓒ 10. Ⓓ 8.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a} = (2;3;2)$ và $\vec{b} = (1;1;-1)$. Vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ có tọa độ là?

Ⓐ $(3;4;1)$. Ⓑ $(1;2;3)$. Ⓒ $(-1;-2;3)$. Ⓓ $(3;5;1)$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$; $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\vec{a} + \vec{c} = \vec{d} + \vec{b}$. Ⓑ $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$.
Ⓒ $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$. Ⓓ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

Câu 4. Cho ba véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng. Xét các véc tơ $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{y} = -4\vec{a} + 2\vec{b}$; $\vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$. Chọn khẳng định đúng?

Ⓐ Hai véc tơ $\vec{y}, \vec{z}$ cùng phương. Ⓑ Hai véc tơ $\vec{x}, \vec{y}$ cùng phương.
Ⓒ Hai véc tơ $\vec{x}, \vec{z}$ cùng phương. Ⓓ Ba véc tơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;5;-1), B(7;x;1)$ và $C(9;2;y)$. Để A, B, C thẳng hàng thì giá trị $x+y$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ 6. Ⓒ 4. Ⓓ 7.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;5)$. Hình chiếu vuông góc của A lên trục Ox có tọa độ là

Ⓐ $(1;0;0)$. Ⓑ $(0;-2;0)$. Ⓒ $(0;0;5)$. Ⓓ $(0;-2;5)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;-1), B(-3;2;-2)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

Ⓐ $(5;-3;1)$. Ⓑ $(-5;3;-1)$. Ⓒ $(-5;1;-1)$. Ⓓ $(5;-3;-1)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(2;1;-3), B(0;-2;2), C(4;-3;0)$. Tọa độ điểm D là

Ⓐ $(2;0;5)$. Ⓑ $(6;0;-5)$. Ⓒ $(2;0;-5)$. Ⓓ $(6;0;5)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (2;1;3)$ và $\vec{b} = (-1;2;1)$. Tọa độ của vectơ $\vec{a} + \vec{b}$ là

Ⓐ $(1;3;4)$. Ⓑ $(-1;3;4)$. Ⓒ $(2;-1;2)$. Ⓓ $(3;-1;2)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;4), B(-1;3;2)$ và $C(0;4;-3)$. Trọng tâm G của tam giác ABC là

Ⓐ $G(1;3;1)$. Ⓑ $G(0;3;1)$. Ⓒ $G(0;9;3)$. Ⓓ $G(-1;9;3)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=(-4;2;-3)$ và điểm $A(1;2;3)$. Tọa độ điểm B thỏa mãn $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ là

Ⓐ $B(3;2;-4)$. Ⓑ $B(-3;4;0)$.
Ⓒ $B(3;-4;0)$. Ⓓ $B(-3;-4;-4)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;3;-1), N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N.

Ⓐ $m=0$. Ⓑ $m=2$. Ⓒ $m=-6$. Ⓓ $m=-2$.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(8;9;2)$, $B(3;5;1)$ và $C(11;10;4)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điểm D thỏa mãn $ABCD$ là hình bình hành có tọa độ là $D(6;6;3)$.

b) Độ dài trung tuyến AM của tam giác ABC bằng $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

c) $\widehat{BAC}=30^\circ$.

d) Điểm N thuộc mp(Oxy) sao cho ba điểm A,B,N thẳng hàng có tọa độ là $N(-2;1;0)$.

Bài 2. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=2a, CD=2b$. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AB,CD và $IJ=2c$, M là một điểm bất kỳ và G là trọng tâm của tứ diện. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.

c) $MA^2+MB^2=2MI^2$.

d) Giá trị nhỏ nhất của $P=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ bằng $2(a^2+b^2+2c^2)$.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(0;0;-1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;0;1)$ và M là điểm sao cho $3MA^2+2MB^2-MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\overrightarrow{AB}=(-1;1;1)$.

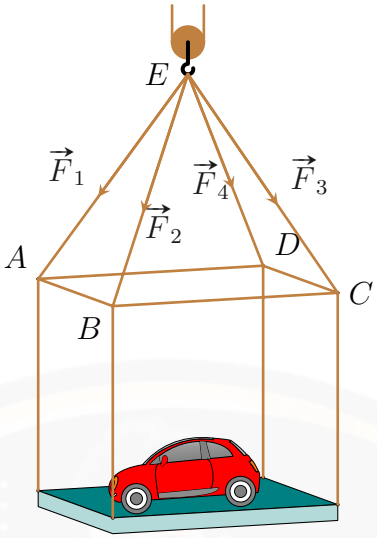
b) $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$.

c) Tọa độ điểm D là $(2;-1;0)$.

d) Tọa độ điểm M là $\left(\dfrac{3}{4};-\dfrac{1}{2};1\right)$.

Bài 4. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60°. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng $\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3,\vec{F}_4$ đều có cường độ là

4500 N và trọng lượng của khung sắt là 2900 N. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:



a) $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_3 + \vec{F}_4$.

b) $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_2 + \vec{F}_4$.

c) $|\vec{F}_1 + \vec{F}_3| = 8000$ N (làm tròn đến hàng đơn vị).

d) Trọng lượng của chiếc xe ô tô là 12688 N (làm tròn đến hàng đơn vị).

Phần III. Câu trả lời ngắn *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 6 .*

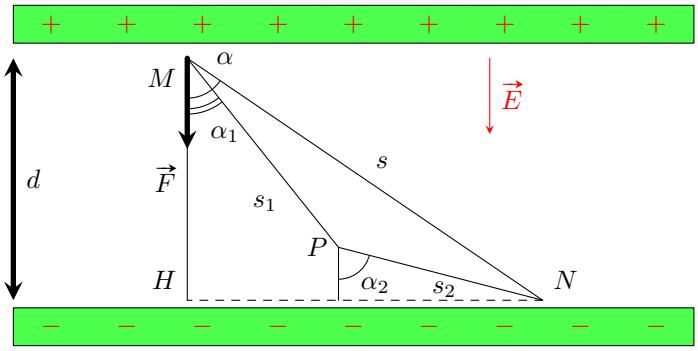
Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-2;-1), B(1;-1;2)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc đoạn thẳng AB thỏa mãn $MA = 2MB$. Tính giá trị của biểu thức $T = a - b + c$?

Bài 2. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của CD; G là trung điểm của AM biết $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{AC} = na^2$ (n là số thập phân). Giá trị của n bằng. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Bài 3. Trong hệ trục tọa độ $(Oxyz)$, một thiết bị âm thanh được phát từ vị trí $A(1;5;8)$. Người ta dự định đặt một máy thu tín hiệu trên mặt phẳng (Oxy). Biết máy thu đặt ở vị trí $M(a;b;c)$ sẽ nhận được tín hiệu sớm nhất. Khi đó $a + 2b + 3c$ bằng.

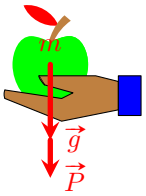
Bài 4. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau một góc $120°$. Biết rằng $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3$, tính giá trị của biểu thức $A = |\vec{a} - \vec{b}| + |\vec{a} + \vec{b}|$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Bài 5. Một lực tĩnh điện $\vec{F}$ tác động lên điện tích điểm M trong điện trường đều làm cho M dịch chuyển theo đường gấp khúc MNP (Hình vẽ). Biết $q = 2 \cdot 10^{-12}$ C, vectơ điện trường có độ lớn $E = 1{,}8 \cdot 10^5$ N/C và $d = MH = 5$ mm. Tính công A sinh bởi lực tĩnh điện $\vec{F}$.



Bài 6. Nếu một vật có khối lượng m (kg) thì lực hấp dẫn $\vec{P}$ của Trái Đất tác dụng lên vật được

xác định theo công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, trong đó $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9{,}8$ m/s^2. Tính độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên một quả táo có khối lượng 102 gam (Hình 27)



THẦY KHA
DẠY TOÁN - THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay - Làm chủ tương lai ngày mai

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.
Ⓑ $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.
Ⓒ $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.
Ⓓ $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

Câu 2. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.
Ⓑ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.
Ⓒ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$.
Ⓓ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a},\overrightarrow{SB}=\vec{b},\overrightarrow{SC}=\vec{c},\overrightarrow{SD}=\vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$.
Ⓑ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.
Ⓒ $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$.
Ⓓ $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$.

Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=2a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết $MN=\sqrt{3}a$, góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ bằng

Ⓐ $30°$.
Ⓑ $60°$.
Ⓒ $90°$.
Ⓓ $120°$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$ thỏa mãn $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$. Tọa độ của $\vec{a}$ là

Ⓐ $(2;1;-3)$.
Ⓑ $(2;-3;1)$.
Ⓒ $(-3;1;2)$.
Ⓓ $(1;2;-3)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;5)$. Hình chiếu vuông góc của A lên trục Ox có tọa độ là

Ⓐ $(1;0;0)$.
Ⓑ $(0;-2;0)$.
Ⓒ $(0;0;5)$.
Ⓓ $(0;-2;5)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;-1),B(-3;2;-2)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

Ⓐ $(5;-3;1)$.
Ⓑ $(-5;3;-1)$.
Ⓒ $(-5;1;-1)$.
Ⓓ $(5;-3;-1)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(2;1;-3),B(0;-2;2),C(4;-3;0)$. Tọa độ điểm D là

Ⓐ $(2;0;5)$.
Ⓑ $(6;0;-5)$.
Ⓒ $(2;0;-5)$.
Ⓓ $(6;0;5)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}=(2;1;3)$ và $\vec{b}=(-1;2;1)$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}+\vec{b}$ là

Ⓐ $(1;3;4)$.
Ⓑ $(-1;3;4)$.
Ⓒ $(2;-1;2)$.
Ⓓ $(3;-1;2)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;4),B(-1;3;2)$ và $C(0;4;-3)$. Trọng tâm

G của tam giác ABC là

Ⓐ $G(1;3;1)$. Ⓑ $G(0;3;1)$. Ⓒ $G(0;9;3)$. Ⓓ $G(-1;9;3)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=(-4;2;-3)$ và điểm $A(1;2;3)$. Tọa độ điểm B thỏa mãn $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ là

Ⓐ $B(3;2;-4)$. Ⓑ $B(-3;4;0)$.
Ⓒ $B(3;-4;0)$. Ⓓ $B(-3;-4;-4)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;3;-1), N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N.

Ⓐ $m=0$. Ⓑ $m=2$. Ⓒ $m=-6$. Ⓓ $m=-2$.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Bài 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AC'}$.
b) $\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{AC'}$.
c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{AC'}$.
d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{AC'}$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(8;9;2)$, $B(3;5;1)$ và $C(11;10;4)$.

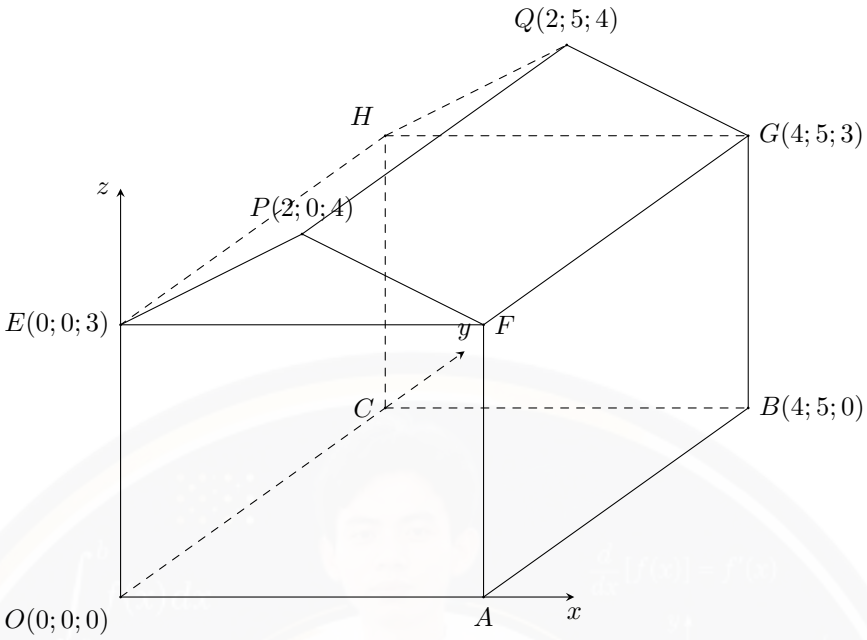
a) Điểm D thỏa mãn $ABCD$ là hình bình hành có tọa độ là $D(6;6;3)$.
b) Độ dài trung tuyến AM của tam giác ABC bằng $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.
c) $\widehat{BAC}=30^\circ$.
d) Điểm N thuộc mp(Oxy) sao cho ba điểm A, B, N thẳng hàng có tọa độ là $N(-2;1;0)$.

Bài 3. Cho ba điểm $A(3;3;-6), B(1;3;2)$ và $C(-1;-3;1)$. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của AB, BC và CA.

a) Tọa độ $M(2;3;2)$.
b) Với G là trọng tâm tam giác ABC thì $GC=2\sqrt{5}$.
c) Trọng tâm tam giác MNK là $E(1;1;-1)$.
d) Với $D(-3;-3;9)$ thì tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.

Bài 4. Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn

bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



a) Tọa độ của các điểm $A(5;0;0)$.

b) Tọa độ của các điểm $H(0;5;3)$.

c) Góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG, hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ gọi là góc dốc của mái nhà. Số đo của góc dốc của mái nhà bằng $26,6°$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).

d) Chiều cao của ngôi nhà là 4.

Phần III. Câu trả lời ngắn *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 6 .*

Bài 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Gọi D là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC. Độ dài đoạn $AD=\dfrac{\sqrt{a}}{3}$, giá trị của a là?

Bài 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $C(4;0;0)$ và $B(2;0;0)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho diện tích tam giác MBC bằng 3.

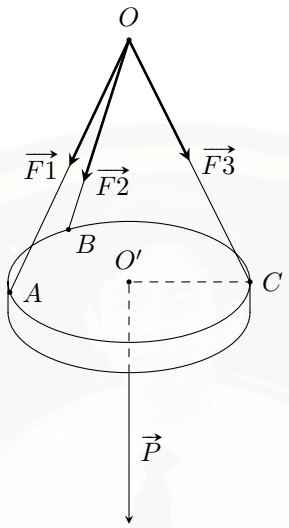
Bài 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(2;-1;1)$, $B(3;0;-1)$, $C(2;-1;3)$, $D\in Oy$ và thể tích tứ diện $ABCD$ bằng 5. Tổng tung độ của các điểm D thỏa mãn yêu cầu bài toán bằng

Bài 4. Có hai trạm thu phát sóng tín hiệu mặt đất đặt ở hai điểm O, A và vệ tinh thu phát tín hiệu tại ở vị trí M, biết vệ tinh di chuyển luôn cách mặt đất 35000km. Tín hiệu tại O phát lên vệ tinh M rồi truyền đến trạm thu tại A. Xét hệ trục $Oxyz$ được chọn thỏa $O(0;0;0)$, $A(30;40;0)$, $M(x;y;35)$ (đơn vị tọa độ là ngàn km). Biết vận tốc trung bình truyền tín hiệu giữa vệ tinh với trạm thu phát khoảng 270000km/s. Một tín hiệu phát từ O đến M, rồi truyền về A mất ít nhất bao nhiêu giây (làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 5. Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của bốn lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học. Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ 900 km/h lên 920 km/h, trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản không khí khi máy bay đạt vận tốc 900 km/h và 920 km/h lần

lượt được biểu diễn bởi hai vectơ $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$. Biết $\vec{F}_1 = k\vec{F}_2$ với k là một số thực dương nào đó. Tính giá trị của k (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Bài 6. Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn, xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15$ (N). Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.



TOÁN THẦY KHA
ĐỀ SỐ 6
(Đề gồm có 5 trang)

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Toạ độ của vectơ $\vec{a}$ là

Ⓐ $(2;-1;-3)$. Ⓑ $(-3;2;-1)$. Ⓒ $(-1;2;-3)$. Ⓓ $(2;-3;-1)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;-1;3)$. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các mặt phẳng toạ độ $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$. Tìm toạ độ các điểm A_1, A_2, A_3.

Ⓐ $A_1(-2;-1;0), A_2(0;-1;3), A_3(-2;0;3)$.
Ⓑ $A_1(-2;0;3), A_2(0;-1;3), A_3(-2;-1;0)$.
Ⓒ $A_1(-2;-1;0), A_2(-2;0;3), A_3(0;-1;3)$.
Ⓓ $A_1(-2;0;3), A_2(0;-1;3), A_3(-2;1;0)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2;-2;-4)$ và $\vec{b} = (1;-1;1)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

Ⓐ $\vec{a} + \vec{b} = (3;-3;-3)$. Ⓑ $\vec{a} \perp \vec{b}$.
Ⓒ $|\vec{b}| = \sqrt{3}$. Ⓓ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (1;1;-1)$ và điểm $B(2;3;2)$. Tìm toạ độ điểm C sao cho $\overrightarrow{BC} = \vec{u}$.

Ⓐ $(3;4;1)$. Ⓑ $(-3;-2;-1)$.
Ⓒ $(3;2;1)$. Ⓓ $(2;3;1)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1;2;3)$, $\vec{b} = (4;5;6)$. Toạ độ $\vec{a} + \vec{b}$ là

Ⓐ $(3;3;3)$. Ⓑ $(2;5;9)$. Ⓒ $(5;7;9)$. Ⓓ $(4;10;18)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ và điểm A. Biết $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$. Tìm toạ độ điểm A.

Ⓐ $(3;4;-5)$. Ⓑ $(3;4;5)$. Ⓒ $(-3;-4;5)$. Ⓓ $(-3;4;5)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;5;-2), B(1;1;3), C(3;3;-1)$. Tìm toạ độ điểm E sao cho C là trọng tâm của tam giác ABE.

Ⓐ $(6;3;4)$. Ⓑ $(6;3;-4)$.
Ⓒ $(6;-3;-4)$. Ⓓ $(-6;-3;-4)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (2;m-1;3)$, $\vec{b} = (1;3;-2n)$. Tìm m, n để các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng.

Ⓐ $m = 7, n = -\dfrac{3}{4}$. Ⓑ $m = 1, n = 0$.
Ⓒ $m = 7, n = -\dfrac{4}{3}$. Ⓓ $m = 4, n = -3$.

Câu 9. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, |\vec{a} + \vec{b}| = 6$. Tính $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Ⓐ $\sqrt{14}$. Ⓑ $\sqrt{11}$. Ⓒ $2\sqrt{3}$. Ⓓ 3.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;3), B(-2;0;1), C(-1;0;1)$. Tính $\cos\widehat{ABC}$.

Ⓐ $\dfrac{3}{\sqrt{17}}$. Ⓑ $\dfrac{-3}{\sqrt{17}}$. Ⓒ $\dfrac{7}{\sqrt{17}}$. Ⓓ $\dfrac{3}{17}$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(1;0;-2)$; $\vec{b}=(-1;1;4)$, $\vec{u}=(-5;3;16)$. Tìm cặp số $(x;y)$ để $\vec{u}=x\vec{a}+y\vec{b}$.

Ⓐ $(x;y)=(2;-3)$. Ⓑ $(x;y)=(-2;3)$.
Ⓒ $(x;y)=(2;3)$. Ⓓ $(x;y)=(2;-1)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-1), B(2;1;2)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

Ⓐ $\sqrt{10}$. Ⓑ $\sqrt{14}$. Ⓒ 9. Ⓓ 10.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Bài 1. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$ và $AA'=a\sqrt{2}$.

a) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

b) Gọi M là trung điểm BC và $\overrightarrow{A'M}=\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{A'B'}-\overrightarrow{CM}$.

c) $\overrightarrow{A'M}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

d) Góc giữa vectơ $\overrightarrow{AB'}$ và $\overrightarrow{BC'}$ bằng $60°$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(-1;2;1), C(1;2;-1)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(2;-1;0)$.

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(0;1;-2)$.

c) $AB=5$.

d) $\left|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}\right|=2\sqrt{5}$.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(3;2;-1), B(1;4;-2)$ và $C(0;-2;3)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\overrightarrow{AB}=(-2;2;-1)$.

b) $|\overrightarrow{AB}|=3$.

c) Toạ độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$ là $(1;-2;2)$.

d) Toạ độ điểm N thuộc mặt phẳng (Oxy), sao cho A,B,N thẳng hàng là $(5;0;0)$.

Bài 4. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho ba vectơ $\vec{a}(1;1;0)$, $\vec{b}(2;-1;1)$, $\vec{c}(-3;1;3)$.

a) Toạ độ của vectơ $\vec{a}+\vec{b}$ là $(3;0;1)$.

b) Giả sử $\vec{a}+\vec{x}=2\vec{b}-\vec{c}$. Toạ độ của $\vec{x}$ là $(6;-4;-1)$.

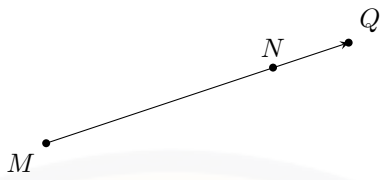
c) Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}-2\vec{c}$. Khi đó $\cos\varphi=\dfrac{5}{14}$.

d) Giả sử $\vec{v}=(-14;9;14)$ và $\vec{v}=k\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$. Khi đó $k+m+n=9$.

Phần III. Câu trả lời ngắn *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 6 .*

Bài 1. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đa phát hiện một máy bay chiến đấu X di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(1000;600;14)$ đến điểm N trong 30 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo bằng $Q(1400;800;16)$. Tọa độ vị trí điểm $N(a;b;c)$, tính $S=a+b+2c$.

Hướng dẫn giải.



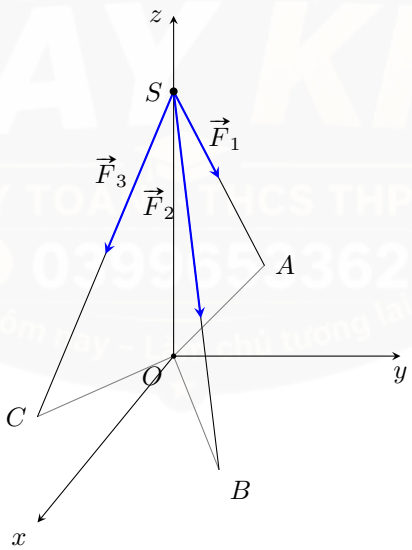
Gọi $N(x;y;z)$ là tọa độ của máy bay sau 30 phút. Ta có $\overrightarrow{MQ}=(400;200;2)$.
$\overrightarrow{NQ}=(1400-x;800-y;16-z)$.
Vì máy bay giữ nguyên hướng bay nên $\overrightarrow{MQ}$ và $\overrightarrow{NQ}$ cùng hướng.
Do máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và thời gian bay từ $M\to Q$ gấp 4 lần thời gian bay từ $N\to Q$ (tổng cộng 40 phút so với 10 phút) nên $\overrightarrow{MQ}=4\overrightarrow{NQ}$.

Suy ra $\overrightarrow{MQ}=4\overrightarrow{NQ}\Leftrightarrow\begin{cases}400=4(1400-x)\\200=4(800-y)\\2=4(16-z)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1300\\y=750\\z=15,5\end{cases}\Rightarrow N(1300;750;15,5)$.

Tọa độ vị trí điểm N là $(1300;750;15,5)$.
Suy ra $S=a+b+2c=1300+750+2\cdot 15,5=2081$.

Bài 2. Một chiếc máy đo đạc trắc địa được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $S(0;0;4)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $A(-2;0;0), B(1;\sqrt{3};0), C(1;-\sqrt{3};0)$. Biết rằng trọng lực tác dụng lên chiếc máy có độ lớn là 30N và được phân bố thành ba lực $\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3$ có độ lớn bằng nhau như hình dưới. Tính tích vô hướng của $\vec{F}_1\cdot\vec{F}_2$.

Hướng dẫn giải.



Ta có: $\overrightarrow{SA}=(-2;0;-4)$; $\overrightarrow{SB}=(1;\sqrt{3};-4)$; $\overrightarrow{SC}=(1;-\sqrt{3};-4)\Rightarrow SA=SB=SC=\sqrt{20}$.
Lại có $\overrightarrow{AB}=(3;\sqrt{3};0)$; $\overrightarrow{AC}=(3;-\sqrt{3};0)$; $\overrightarrow{BC}=(0;-2\sqrt{3};0)\Rightarrow AB=AC=BC=\sqrt{12}$. Dẫn đến hình chóp $S.ABC$ đều có đường cao là $SO=4$, với $O(0;0,0)$ là trọng tâm tam giác ABC.
Mặt khác,
Giả sử $\vec{F}_1=k\overrightarrow{SA}=(-2k;0;-4k)$, $\vec{F}_2=k\overrightarrow{SB}=(k;\sqrt{3}k;-4k)$, $\vec{F}_3=k\overrightarrow{SC}=(k;-\sqrt{3}k;-4k)$.

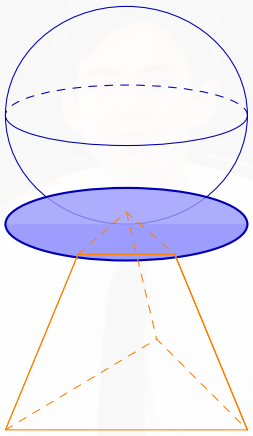
Khi đó $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=(0;0;-12k)$.

Vì trọng lực $\vec{P}=(0;0;-30)$ nên $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=\vec{P}\Rightarrow -12k=-30\Leftrightarrow k=\dfrac{5}{2}=2,5$.

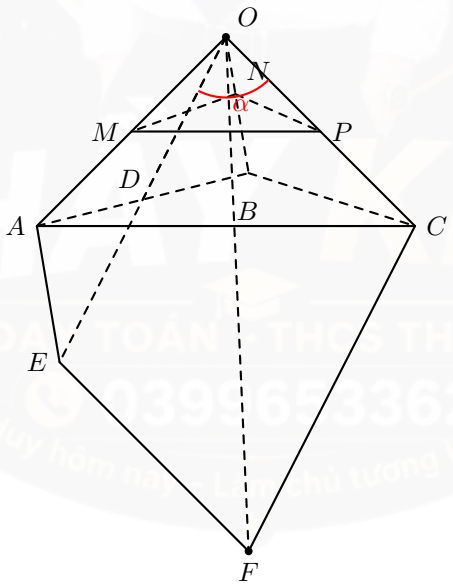
Suy ra $\vec{F}_1=(-5;0;-10)$, $\vec{F}_2=\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{5\sqrt{3}}{2};-10\right)$.

Vậy, $\vec{F}_1\cdot\vec{F}_2=(-5)\cdot\dfrac{5}{2}+0+(-10)(-10)=-12,5+100=87,5$.

Bài 3. Một bình cá cảnh có dạng một chỏm cầu được đặt trên một chân đế (tham khảo hình vẽ). Biết tổng khối lượng bể cá là 20 kg, ba chân đế là ba cạnh bên của một hình chóp cụt đều có độ dài cạnh bên bằng 50 cm, hai đáy có độ dài lần lượt là 30 cm và 20 cm. Biết gia tốc trọng trường bằng 10 m/s^2, tính độ lớn lực tác dụng của bể cá lên từng chân đế (Kết quả làm tròn đến chữ số thứ nhất phần thập phân).



Hướng dẫn giải.



Giả sử các vectơ lực của bể cá tác dụng lên các chân đế là $\vec{F}_1=\overrightarrow{OA},\vec{F}_2=\overrightarrow{OB},\vec{F}_3=\overrightarrow{OC}$.

Dễ thấy ba lực này có độ lớn bằng nhau và $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=\overrightarrow{OF}$; $|\overrightarrow{OF}|=F=200$ N.

Tính được $OM=ON=OP=100$; $OE=2\cdot OD=2\sqrt{150^2-15^2}=90\sqrt{11}$; $DC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot AB=15\sqrt{3}$.

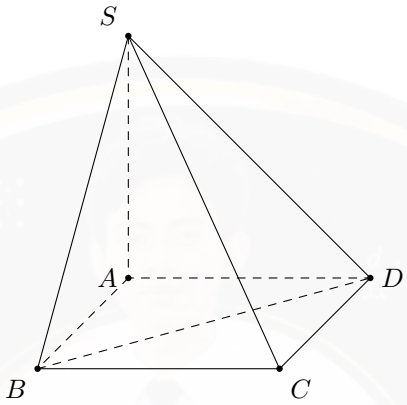
$\cos\alpha=\dfrac{OD^2+OC^2-DC^2}{2\cdot OD\cdot OC}=\sqrt{\dfrac{2401}{2475}}$;

$OF^2 = OE^2 + EF^2 + 2 \cdot OE \cdot EF \cdot \cos\alpha = 199800 \Rightarrow OF = 30\sqrt{222}$.

Ta có $\dfrac{F_1}{F} = \dfrac{OA}{OF} \Rightarrow F_1 = \dfrac{OA}{OF} \cdot F \approx 67,1$.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 3; AD = 4; SA$ vuông góc với mặt đáy $SA = 2\sqrt{6}$. Tính $(\overrightarrow{SC}; \overrightarrow{BD})$ theo đơn vị đo góc bằng độ? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Hướng dẫn giải.



Do $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 3; AD = 4$ nên $AC = BD = 5, SC = \sqrt{AC^2 + SA^2} = 7$.

$\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = AD^2 - AB^2 = 4^2 - 3^2 = 7$.

$\cos\left(\overrightarrow{SC}; \overrightarrow{BD}\right) = \dfrac{\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{BD}}{SC \cdot BD} = \dfrac{7}{7 \cdot 5} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow \left(\overrightarrow{SC}; \overrightarrow{BD}\right) \approx 78,5°$.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1), B(2;-1;3)$ và điểm $M(a;b;0)$ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất. Giá trị của $a + b$ bằng

Hướng dẫn giải. Ta có: $MA^2 + MB^2 = (1-a)^2 + (2-b)^2 + 1^2 + (2-a)^2 + (-1-b)^2 + 3^2$

$= 2a^2 - 6a + 2b^2 - 2b + 20 = 2\left(a - \dfrac{3}{2}\right)^2 + 2\left(b - \dfrac{1}{2}\right)^2 + 15 \geq 15$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ khi đó $a + b = 2$.

Bài 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3), B(-2;-4;9)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA = 2MB$. Bình phương độ dài đoạn thẳng OM bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Gọi $M(x;y;z)$.

Vì điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA = 2MB$ nên

$\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot (-2 - x) = -3 \\ 3 \cdot (-4 - y) = -6 \\ 3 \cdot (9 - z) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \\ z = 7 \end{cases}$

$\Rightarrow M(-1;-2;7) \Rightarrow OM = \sqrt{1 + 4 + 49} = \sqrt{54} \Rightarrow OM^2 = 54$.

TOÁN THẦY KHA
ĐỀ SỐ 7
(Đề gồm có 5 trang)

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Cho vectơ $\vec{a}=(1;3;4)$, tìm vectơ $\vec{b}$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$.

(A) $\vec{b}=(-2;-6;-8)$.
(B) $\vec{b}=(-2;-6;8)$.
(C) $\vec{b}=(-2;6;8)$.
(D) $\vec{b}=(2;-6;-8)$.

Câu 2. Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}=(1;2;0)$ và $\vec{b}=(2;0;-1)$, khi đó $\cos\varphi$ bằng:

(A) 0.
(B) $\dfrac{2}{5}$.
(C) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.
(D) $-\dfrac{2}{5}$.

Câu 3. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}=(-2;2;5)$, $\vec{b}=(0;1;2)$ bằng:

(A) 10.
(B) 13.
(C) 12.
(D) 14.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;-3), B(2;4;-1), C(2;-2;0)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là:

(A) $\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{2}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$.
(B) $\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3}\right)$.
(C) $(5;2;4)$.
(D) $\left(\dfrac{5}{2};1;-2\right)$.

Câu 5. Cho điểm $M(1;2;-3)$, hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (Oxy) là điểm:

(A) $M'(1;2;0)$.
(B) $M'(1;0;-3)$.
(C) $M'(0;2;-3)$.
(D) $M'(1;2;3)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1), B(2;-1;2)$. Điểm M trên trục Ox và cách đều hai điểm A, B có tọa độ là:

(A) $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.
(B) $M\left(\dfrac{1}{2};0;0\right)$.
(C) $M\left(\dfrac{3}{2};0;0\right)$.
(D) $M\left(0;\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;5;3), B(3;7;4), C(x;y;6)$. Giá trị của x, y để ba điểm A, B, C thẳng hàng là:

(A) $x=5, y=11$.
(B) $x=-5, y=11$.
(C) $x=-11, y=-5$.
(D) $x=11, y=5$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(2;-1;3)$, $\vec{b}=(1;-3;2)$ và $\vec{c}=(3;2;-4)$. Gọi $\vec{x}$ là vectơ thỏa mãn: $\vec{x}\cdot\vec{a}=-5$, $\vec{x}\cdot\vec{b}=-11$, $\vec{x}\cdot\vec{c}=20$. Tọa độ của vectơ $\vec{x}$ là:

(A) $(2;3;1)$.
(B) $(2;3;-2)$.
(C) $(3;2;-2)$.
(D) $(1;3;2)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;3;-1), N(-1;1;1), P(1;m-1;2)$. Với giá trị nào của m thì tam giác MNP vuông tại N?

Ⓐ $m=3$. Ⓑ $m=2$. Ⓒ $m=1$. Ⓓ $m=0$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-4;-1;2), B(3;5;-10)$. Biết trung điểm cạnh AC thuộc trục tung, trung điểm cạnh BC thuộc mặt phẳng (Oxz). Tọa độ đỉnh C là:

Ⓐ $C(4;-5;-2)$. Ⓑ $C(4;5;2)$.
Ⓒ $C(4;-5;2)$. Ⓓ $C(4;5;-2)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;0;0), B(0;0;1), C(2;1;1)$. Diện tích của tam giác ABC bằng:

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;5;1), B(-2;-6;2), C(1;2;-1)$ và $M(m;m;m)$, để $MA^2-MB^2-MC^2$ đạt giá trị lớn nhất thì m bằng:

Ⓐ 3. Ⓑ -4. Ⓒ 2. Ⓓ 1.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(-2;1;-3)$, $\vec{b}=(-1;-3;2)$ và điểm $A(4;6;-3)$.

a) Tọa độ vectơ $\vec{a}-2\vec{b}=(0;1;-1)$.

b) Tọa độ điểm $B(2;7;-6)$ thì $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$.

c) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương hướng.

d) Góc giữa vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $120°$.

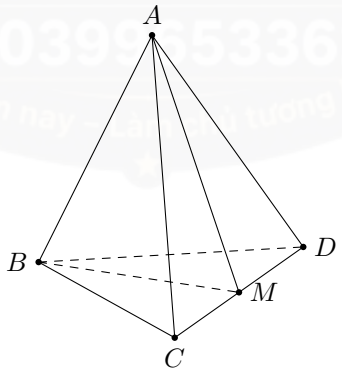
Bài 2. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD.

a) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$.

c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

d) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=-\dfrac{a^2}{2}$.



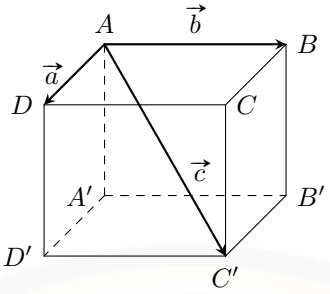
Bài 3. Một chất điểm ở vị trí đỉnh A của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chất điểm chịu tác động bởi ba lực $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ lần lượt cùng hướng với $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC'}$ như hình vẽ. Độ lớn của các lực $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ tương ứng là 10 N, 10 N và 20 N.

a) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$.

b) $|\vec{a}+\vec{b}|=20\,\text{N}$.

c) $|\vec{a}+\vec{c}|=|\vec{b}+\vec{c}|$.

d) $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=32,59\,\text{N}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(5;0;-3)$ và $B(-2;7;1)$.

a) $\overrightarrow{OA}+3\vec{k}=5\vec{i}+\vec{j}$.

b) $\overrightarrow{AB}=(-7;7;4)$.

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(-3;-7;2)$.

d) Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là $\left(-\dfrac{7}{2};\dfrac{7}{2};2\right)$.

Phần III. Câu trả lời ngắn *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 6 .*

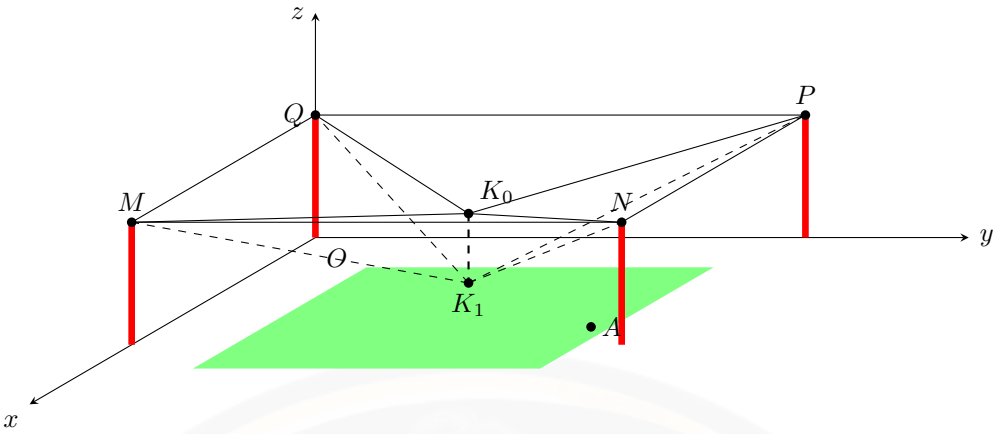
Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $A'(\sqrt{3};-1;1)$, hai đỉnh B,C thuộc trục Oz và $AA'=1$ (C không trùng với O). Biết vectơ $\vec{u}=(a;b;2)$ (với $a,b\in\mathbb{R}$) cùng phương với $\overrightarrow{A'C}$. Tính $T=a^2+b^2$.

Bài 2. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng 4. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho gốc tọa độ O trùng với B, điểm D thuộc tia Oy, vectơ $\vec{i}$ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{NC}$ với N là trung điểm BD, tia Oz hướng lên trên như hình vẽ. Khi đó tọa độ vectơ $\overrightarrow{BM}$ với M trung điểm của CD có dạng $(a;b;0)$. Tính giá trị $S=a+b$.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hình thang cân $ABCD$ có các đáy lần lượt là AB,CD. Biết $A(3;1;-2),B(-1;3;2),C(-6;3;6)$. Tính tổng bình phương các tọa độ của điểm D.

Bài 4. Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn. Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1 m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90;0;30)$, $N(90;120;30)$, $P(0;120;30)$, $Q(0;0;30)$. Giả sử K_0 là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và $K_0M=K_0N=K_0P=K_0Q$. Để theo dõi quả bóng đến vị trí A, camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 có cao độ bằng 19. Biết trung điểm đoạn K_0K_1 có tọa độ là

$(a;b;c)$. Khi đó hãy tính giá trị biểu thức $T=5a+7b+9c$.



Bài 5. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có cùng độ dài bằng 6. Biết độ dài của vectơ $\vec{a}+2\vec{b}$ bằng $6\sqrt{3}$. Biết số đo góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là x độ. Giá trị của x là bao nhiêu?

Bài 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AB, CD; tọa độ ba đỉnh $A(1;2;0), B(2;0;-2), C(6;1;-1)$. Biết hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$. Tính $P=3a+b-c$.

THẦY KHA
DẠY TOÁN - THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay - Làm chủ tương lai ngày mai

TOÁN THẦY KHA
ĐỀ SỐ 8
(Đề gồm có 5 trang)

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

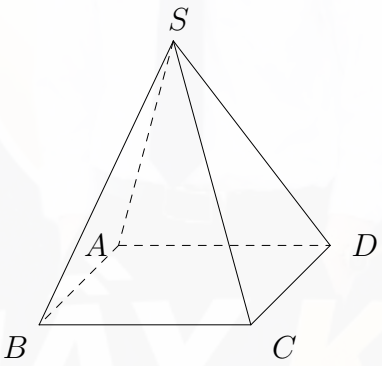
Câu 1. Cho $|\vec{a}|=2; |\vec{b}|=6$, góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 120°. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $\vec{a}\cdot\vec{b}=12$.
(B) $\vec{a}\cdot\vec{b}=40$.
(C) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$.
(D) $\vec{a}\cdot\vec{b}=6\sqrt{3}$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, điểm đối xứng với điểm $M(2;2;-1)$ qua mặt phẳng (Oyz) là

(A) $M'(2;-2;1)$.
(B) $M'(-2;0;0)$.
(C) $M'(-2;-2;1)$.
(D) $M'(-2;2;-1)$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành (như hình vẽ minh họa). Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

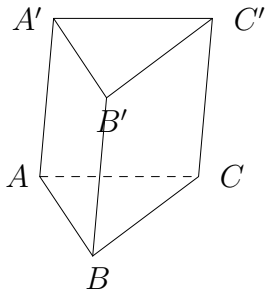


(A) $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$.
(B) $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{DC}$.
(C) $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BC}$.
(D) $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}$.

Câu 4. Trong không gian $(Oxyz)$, cho $\overrightarrow{OA}=3\vec{k}-\vec{i}$. Tọa độ của điểm A là

(A) $A(3;-1;0)$.
(B) $A(-1;3;0)$.
(C) $A(3;0;-1)$.
(D) $A(-1;0;3)$.

Câu 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có hai đáy là các tam giác đều như hình vẽ. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{A'C'}$ bằng



Ⓐ $150°$. Ⓑ $120°$. Ⓒ $60°$. Ⓓ $30°$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây thuộc trục Oz?

Ⓐ $M(1;0;0)$. Ⓑ $M(1;0;2)$. Ⓒ $M(1;2;0)$. Ⓓ $M(0;0;-2)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho $M(-4;-5;5)$. Tìm tọa độ điểm M' trên trục Ox sao cho MM' ngắn nhất.

Ⓐ $M'(0;-5;5)$. Ⓑ $M'(-4;5;-5)$.
Ⓒ $M'(4;-5;5)$. Ⓓ $M'(-4;0;0)$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(-1;1;0)$, $\vec{b}=(1;1;0)$, $\vec{c}=(1;1;1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

Ⓐ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương. Ⓑ $\vec{a}\cdot\vec{c}=1$.
Ⓒ $\cos(\vec{b},\vec{c})=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$. Ⓓ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

Câu 9. Cho hình bình hành $OADB$ có $\overrightarrow{OA}=(-1;1;0)$, $\overrightarrow{OB}=(1;1;0)$ (O là gốc tọa độ). Tọa độ giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $OADB$ là

Ⓐ $(1;1;0)$. Ⓑ $(1;0;1)$. Ⓒ $(1;0;0)$. Ⓓ $(0;1;0)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(2;0;1)$, $B(-1;3;0)$, $C(8;6;2)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Độ dài vectơ $\overrightarrow{OG}$ bằng

Ⓐ $\sqrt{19}$. Ⓑ 3. Ⓒ 9. Ⓓ 19.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;-3;3)$, $\vec{b}=(0;2;-1)$, $\vec{c}=(3;-1;5)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}$.

Ⓐ $(-2;2;7)$. Ⓑ $(-2;2;-7)$. Ⓒ $(10;-2;13)$. Ⓓ $(-2;-2;7)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng tọa độ (Oyz)?

Ⓐ $N(0;4;-1)$. Ⓑ $Q(2;0;0)$. Ⓒ $P(-2;0;3)$. Ⓓ $M(3;4;0)$.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-2;3)$, $B(-2;1;2)$, $C(3;-1;2)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(-3;3;1)$.

b) $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$.

c) Ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

d) Tọa độ chân đường cao vẽ từ A của tam giác ABC là $\left(-\dfrac{47}{29};\dfrac{13}{29};2\right)$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $OBCD.O'B'C'D'$ có $B(2;0;0)$, $D(0;1;0)$, $O'(0;0;1)$.

a) $C(2;1;0)$.

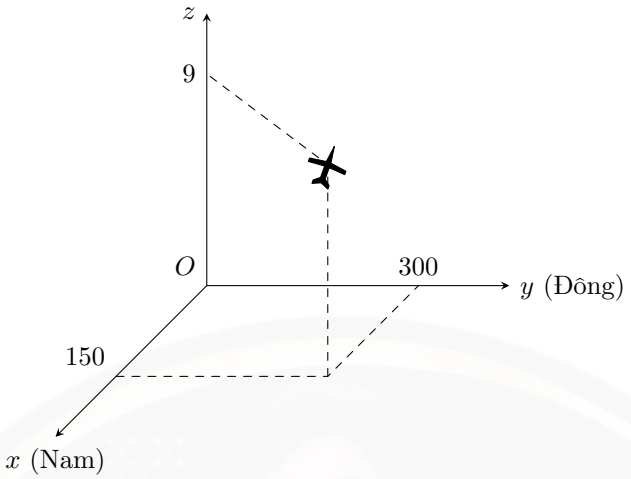
b) $B'(2;0;1)$.

c) $\overrightarrow{OC'}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$.

d) $\overrightarrow{OD'}=(1;1;1)$.

Bài 3. Hình vẽ sau mô tả vị trí của máy bay vào thời điểm 9 giờ 30 phút. Biết các đơn vị trên

hình tính theo đơn vị km. Mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, O trùng với vị trí trung tâm điều khiển.



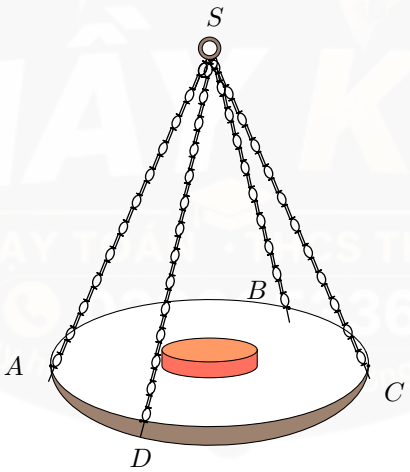
a) Tại thời điểm 9 giờ 30 phút, máy bay đang ở độ cao 9 km so với mặt đất.

b) Tại thời điểm 9 giờ 30 phút, tọa độ của máy bay là $(300; 150; 9)$.

c) Phi công để máy bay ở chế độ tự động bay thẳng theo hướng đông với vận tốc là 750 km/h, độ cao không đổi. Biết rằng gió thổi theo hướng đông với vận tốc 10 m/s. Giả sử vận tốc và hướng gió không thay đổi thì tại thời điểm 10 giờ 30 phút máy bay ở tọa độ $(150; 1086; 9)$.

d) Tại thời điểm 9 giờ 30 phút, máy bay cách trung tâm điều khiển một khoảng (làm tròn đến hàng phần mười) là 335, 6 km.

Bài 4. Một vật là chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 6$ kg được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều, có $\widehat{ASC} = 60°$. Biết $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$ trong đó $\vec{g}$ là véc-tơ gia tốc rơi tự do có độ lớn 10 m/s^2, $\vec{P}$ là trọng lực tác động lên vật có đơn vị là N, m là khối lượng của vật có đơn vị kg. Khi đó:



a) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$

b) $|\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}| = 0$

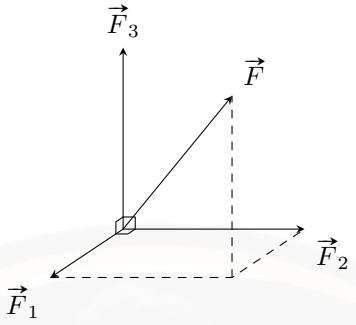
c) Độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm bằng 60 N

d) Độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích bằng $10\sqrt{3}$ N

Phần III. Câu trả lời ngắn *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 6 .*

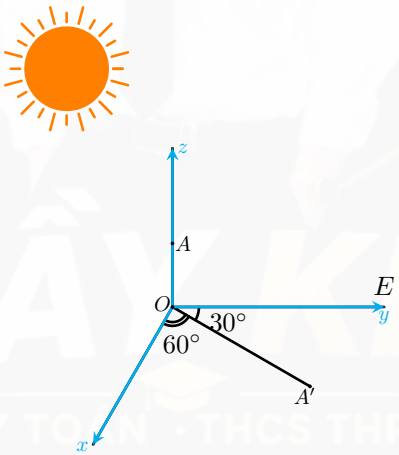
Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 2; -3)$, $B(1; 0; 2)$, $C(x; y; 1)$ thẳng hàng. Tính giá trị của $12^{\frac{x}{y}}$.

Bài 2. Ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ có giá đôi một vuông góc, cùng tác động vào một chất điểm M và $|\vec{F}_1| = 3$ N, $|\vec{F}_2| = 4$ N, $|\vec{F}_3| = 10$ N (tham khảo hình bên). Gọi $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ là tổng hợp của ba lực trên. Góc tạo bởi giá của $\vec{F}$ và mặt phẳng chứa hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

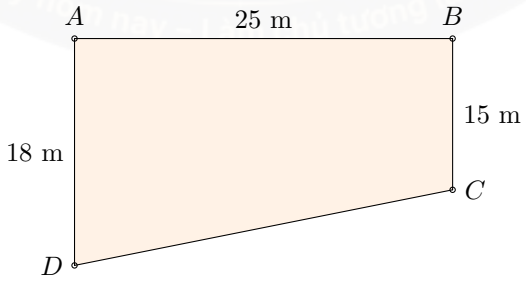


Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1;0;3)$ và $M(6;1;3)$ là trung điểm BC. Gọi G là trọng tâm ΔABC. Tính cao độ của điểm G.

Bài 4. Trên mặt đất phẳng, người ta dựng một cột cờ thẳng cao 6 m vuông góc với mặt đất, có chân cột đặt tại vị trí O trên mặt đất. Tại một thời điểm, dưới ánh nắng mặt trời, bóng của đỉnh cột dưới mặt đất cách chân cột 3 m về hướng S60°E (hướng tạo với hướng nam một góc 60° và tạo với hướng đông một góc 30°). Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc là O, tia Ox chỉ hướng nam, tia Oy chỉ hướng đông, tia Oz chứa cột, đơn vị đo là mét. Đường thẳng chứa tia nắng mặt trời đi qua đỉnh cột tại thời điểm đang xét đi qua $B(a;b;-1)$. Tính giá trị $a + 2b$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

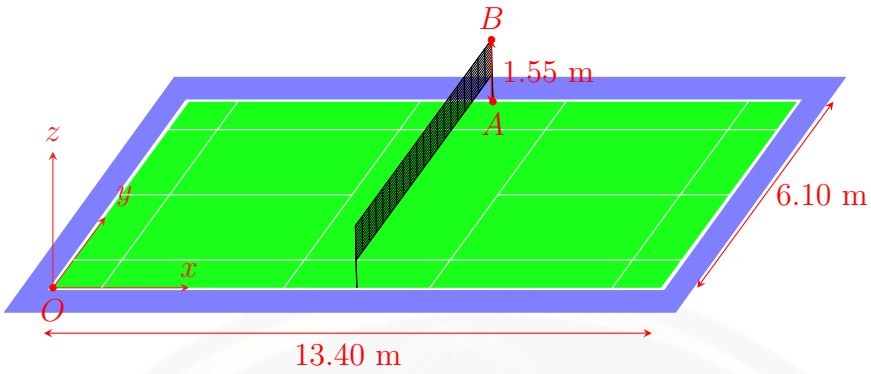


Bài 5. Một phần của sân trường được định vị bởi các điểm A, B, C, D như hình vẽ



Bước đầu chúng được lấy "thăng bằng" để có cùng độ cao, biết $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B với độ dài $AB = 25$ m, $AD = 18$ m, $BC = 15$ m. Do yêu cầu kĩ thuật, khi lát phẳng phần sân trường phải thoát nước về góc sân ở C nên người ta lấy độ cao ở các điểm B, C, D thấp xuống hơn so với độ cao ở A lần lượt là 10 cm, a cm, 6 cm. Hỏi giá trị của a bằng bao nhiêu?

Bài 6. Hình vẽ dưới đây mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Ta chọn hệ trục $Oxyz$ cho sân đó như hình dưới (đơn vị trên mỗi trục là mét). Giả sử AB là một trụ cầu lông để căng lưới. Biết tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB} = (a; b; c)$. Khi đó $S = a - b + 2c$ bằng bao nhiêu?



THẦY KHA
DẠY TOÁN - THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay - Làm chủ tương lai ngày mai

TOÁN THẦY KHA
ĐỀ SỐ 9
(Đề gồm có 5 trang)

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ nào dưới đây là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AB}$?

Ⓐ $\overrightarrow{A'B'}$. Ⓑ $\overrightarrow{BC}$. Ⓒ $\overrightarrow{CD}$. Ⓓ $\overrightarrow{D'C'}$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;-2;1)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

Ⓐ $(0;0;1)$. Ⓑ $(2;0;1)$. Ⓒ $(2;-2;0)$. Ⓓ $(0;-2;1)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-2)$ và $B(2;2;1)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

Ⓐ $(3;3;-1)$. Ⓑ $(-1;-1;-3)$.
Ⓒ $(1;1;3)$. Ⓓ $(3;1;1)$.

Câu 4. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của $B'C'$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BM}$. Ⓓ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'M}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}=(2;-1;3)$ và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$. Khi đó điểm M có tọa độ là

Ⓐ $(2;-1;0)$. Ⓑ $(2;-1;3)$. Ⓒ $(2;0;3)$. Ⓓ $(2;1;3)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\overrightarrow{OA}=\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ và A' là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (Oxy). Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{OA'}=-\vec{j}+2\vec{k}$. Ⓑ $\overrightarrow{OA'}=\vec{i}-\vec{j}$.
Ⓒ $\overrightarrow{OA'}=-\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$. Ⓓ $\overrightarrow{OA'}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$.

Câu 7. Cho hình lập phương $MNPQ.M'N'P'Q'$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{MP'}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{M'M}$. Ⓑ $\overrightarrow{MP'}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{Q'M}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MP'}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{MM'}$. Ⓓ $\overrightarrow{MP'}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MM'}$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OH}=-8\vec{i}+4\vec{j}$. Tọa độ của điểm H là

Ⓐ $H(-8;4;0)$. Ⓑ $H(8;4;0)$. Ⓒ $H(0;-8;4)$. Ⓓ $H(-8;0;4)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(800;500;7)$; $B(940;550;9)$, gọi $C(x;y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}=\vec{0}$. Tính $x+y+z$.

Ⓐ 1559. Ⓑ 2025. Ⓒ 1595. Ⓓ 1955.

Câu 10. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{a},\overrightarrow{CB}=\vec{b},\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AM}=\vec{a}-\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AM}=\vec{b}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AM}=\vec{b}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$.

Câu 11. Cho điểm $A(1;2;-1)$, $\overrightarrow{AB}=(1;3;1)$ thì tọa độ của điểm B là

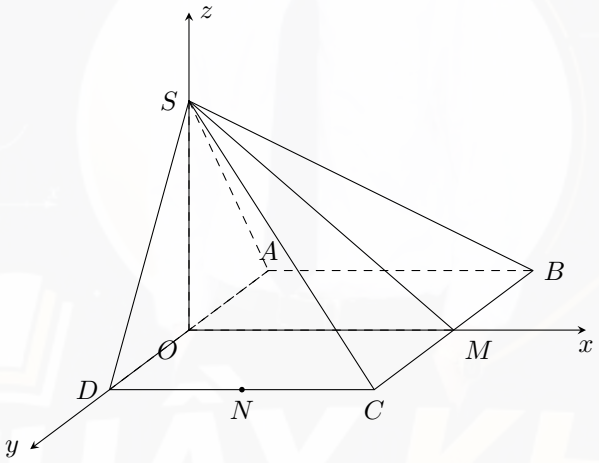
Ⓐ $B(0;-1;-2)$.
Ⓑ $B(0;1;2)$.
Ⓒ $B(-2;-5;0)$.
Ⓓ $B(2;5;0)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;5)$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

Ⓐ $\cos(\overrightarrow{OA};\vec{i}-\vec{j})=\frac{-1}{\sqrt{76}}$.
Ⓑ $\cos(\overrightarrow{OA};\vec{i})=\frac{2}{\sqrt{38}}$.
Ⓒ $\cos(\overrightarrow{OA};\vec{k})=\frac{5}{\sqrt{38}}$.
Ⓓ $\cos(\overrightarrow{OA};\vec{j})=-\frac{3}{\sqrt{38}}$.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có các cạnh bằng 1, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi O, M và N lần lượt là trung điểm của AD, BC và CD. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



a) Tọa độ các điểm A, B là $A\left(0;-\frac{1}{2};0\right), B\left(1;-\frac{1}{2};0\right)$.

b) Tọa độ các điểm C, D là $C\left(1;\frac{1}{2};0\right), D\left(0;\frac{1}{2};0\right)$.

c) Tọa độ điểm S là $S\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

d) Tọa độ các điểm M, N là $M(1;0;0), N\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-2;3)$, $B(-2;1;2)$, $C(3;-1;2)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(-3;3;1)$.

b) $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$.

c) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

d) Tọa độ chân đường cao vẽ từ A của tam giác ABC là $\left(-\frac{47}{29};\frac{13}{29};2\right)$.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $OBCD.O'B'C'D'$ có $B(2;0;0)$, $D(0;1;0)$,

$O'(0;0;1)$.

a) $C(2;1;0)$.

b) $B'(2;0;1)$.

c) $\overrightarrow{OC'} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$.

d) $\overrightarrow{OD'} = (1;1;1)$.

Bài 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;2;4)$, $B(0;-2;3)$ và $C(4;-2;3)$.

a) Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ bằng $\sqrt{42}$.

b) Diện tích của tam giác ABC bằng $2\sqrt{17}$.

c) Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm D là $(5;-2;-4)$.

d) Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 14$.

Phần III. Câu trả lời ngắn *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 6 .*

Bài 1. Hệ thống định vị toàn cầu GPS (Global Positioning System) là một hệ thống cho phép xác định vị trí của một vật thể trong không gian. Trong cùng một thời điểm, vị trí của một điểm M trong không gian sẽ đươc xác định bởi bốn vệ tinh cho trước nhờ các bộ thu phát tín hiệu đặt trên các vệ tinh. Giả sử trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, có bốn vệ tinh đặt tại các điểm có tọa độ lần lượt là $A(0;4;5)$, $B(-3;-1;3)$, $C(-2;8;9)$, $D(-7;2;-3)$ đang tiến hành theo dõi vật thể M (coi là một chất điểm). Tại một thời điểm, cả bốn vệ tinh đồng thời phát tín hiệu về điểm M và ngay lập tức nhận lại tín hiệu phản hồi sau những khoảng thời gian lần lượt là $t_A = 0{,}2$ ms, $t_B = \dfrac{1}{3}$ ms, $t_C = 0{,}6$ ms, $t_D = \dfrac{2}{3}ms$. Biết rằng vận tốc của sóng điện từ bằng vận tốc ánh sáng $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. Tính khoảng cách từ M đến O biết một đơn vị độ dài trên các trục bằng 10 km thực tế (đơn vị: km, kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(0;1;5)$ và chuyển động đều theo hướng vectơ $\vec{u} = (1;2;2)$ với tốc độ 6 m/s. Sau 6 giây kể từ lúc xuất phát, cabin đến điểm $B(a;b;c)$. Tìm c.

Bài 3. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, |\vec{a} + \vec{b}| = 6$. Tính $|\vec{a} - \vec{b}|$. (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bài 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Gọi D là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC. Độ dài đoạn $AD = \dfrac{\sqrt{a}}{3}$, giá trị của a bằng bao nhiêu?

Bài 5. Cho tứ diện đều $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 1 (đơn vị độ dài). Gọi M là trung điểm của cạnh AB và N thuộc cạnh CD thỏa mãn $ND = 2NC$. Tính độ dài đoạn thẳng MN? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bài 6. Trong hệ trục $Oxyz$ cho trước (đơn vị trên trục là mét), cho một trạm thu phát sóng 5G có bán kính vùng phủ sóng của trạm ở ngưỡng 600 m được đặt ở vị trí $I(200;450;60)$. Tìm giá trị lớn nhất cúa m (làm tròn đên hàng đơn vị) để một người dùng điện thoại ở vị trí $A(m+100;m+370;0)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm nói trên.

TOÁN THẦY KHA
ĐỀ SỐ 10
(Đề gồm có 5 trang)

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ là các vectơ đơn vị. Tích vô hướng của $\vec{u}=(1;2;3)$ và $\vec{k}$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;-2)$, $B(2;3;2)$ và $C(3;-1;6)$. Gọi $M(a;b;c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$, tính $T=a+b+c$

Ⓐ 3. Ⓑ 5. Ⓒ 7. Ⓓ 21.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1;2;-3), B(1;0;2), C(x;y;-2)$ thẳng hàng. Khi đó $x+y$ bằng

Ⓐ $x+y=-\dfrac{11}{5}$. Ⓑ $x+y=17$.
Ⓒ $x+y=\dfrac{11}{5}$. Ⓓ $x+y=1$.

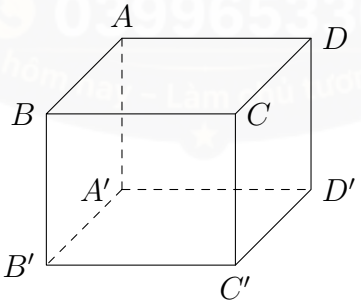
Câu 4. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}=(1;0;0)$ và $\vec{u}=(-\sqrt{3};0;1)$ bằng

Ⓐ 120°. Ⓑ 30°. Ⓒ 60°. Ⓓ 150°.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;3;1), B(5;6;2)$ và I là trung điểm AB. Tọa độ điểm I là

Ⓐ $I(1;3;1)$. Ⓑ $I\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.
Ⓒ $I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. Ⓓ $I\left(\dfrac{-7}{2};\dfrac{-3}{2};\dfrac{-1}{2}\right)$.

Câu 6. Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài các cạnh bằng 1, điểm A trùng với gốc tọa độ (như hình vẽ bên dưới). Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{B'C}$ là



Ⓐ $(0;1;1)$. Ⓑ $(0;1;-1)$. Ⓒ $(1;1;1)$. Ⓓ $(1;0;1)$.

Câu 7. Cho ba vectơ $\vec{a}=(-1;1;0)$, $\vec{b}=(1;1;0)$ và $\vec{c}=(1;1;1)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $|\vec{c}|=\sqrt{3}$. Ⓑ $\vec{a}\perp\vec{b}$. Ⓒ $\vec{c}\perp\vec{b}$. Ⓓ $|\vec{a}|=\sqrt{2}$.

Câu 8. Cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ thỏa mãn $|\vec{u}|=5, |\vec{v}|=8$ và $(\vec{u},\vec{v})=60°$. Tính $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Ⓐ $\vec{u}\cdot\vec{v}=20$. Ⓑ $\vec{u}\cdot\vec{v}=20\sqrt{3}$.
Ⓒ $\vec{u}\cdot\vec{v}=-20$. Ⓓ $\vec{u}\cdot\vec{v}=40$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, cho hai vectơ $\vec{a}=(1;2;3)$ và $\vec{b}=2\vec{i}-4\vec{k}$. Tính tọa độ vectơ $\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}$

Ⓐ $\vec{u}=(-1;2;-1)$. Ⓑ $\vec{u}=(-1;-2;3)$.
Ⓒ $\vec{u}=(-1;6;3)$. Ⓓ $\vec{u}=(-1;2;7)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $M(2;0;0); N(0;-3;0); P(0;0;4)$. Nếu $MNPQ$ là hình bình hành thì tọa độ điểm Q là

Ⓐ $(-2;-3;4)$. Ⓑ $(-2;-3;-4)$.
Ⓒ $(2;3;4)$. Ⓓ $(3;4;2)$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1), B(-1;2;1)$. Tìm tọa độ của điểm A' đối xứng với điểm A qua điểm B?

Ⓐ $A'(3;4;-3)$. Ⓑ $A'(-4;3;1)$. Ⓒ $A'(1;3;2)$. Ⓓ $A'(5;0;1)$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(5;-1;2)$, $C(3;2;-4)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Ⓐ $M\left(4;-\frac{3}{2};-\frac{9}{2}\right)$. Ⓑ $M\left(4;\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right)$.
Ⓒ $M\left(4;-\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right)$. Ⓓ $M\left(-4;-\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right)$.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có điểm A trùng với gốc tọa độ, các điểm B, D, S lần lượt thuộc Ox, Oy, Oz như hình bên dưới. Biết rằng $AB=2, AD=4$ và $SA=6$.

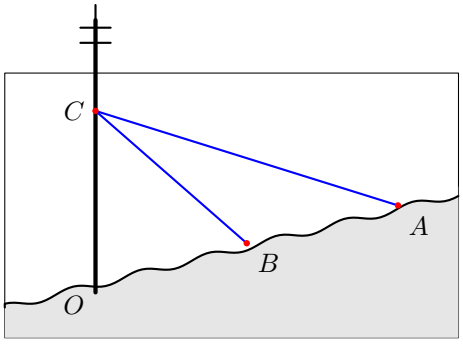
a) Tích vô hướng $\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{CD}$ bằng -4.

b) Tọa độ của điểm S là $(0;0;6)$.

c) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{BD}$ lớn hơn $70°$.

d) Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng BD là $(1;2;3)$.

Bài 2. Trên một sườn đồi, người ta trồng một trụ điện và muốn giữ nó thẳng đứng bằng hai sợi dây neo AC và BC. Hai sợi dây này được kéo căng thành hai đoạn thẳng có chung điểm C trên trụ điện và hai đầu A, B được neo trên sườn đồi (tham khảo hình minh họa).



Giả sử trong một hệ trục tọa độ $Oxyz$ phù hợp, gốc trụ điện đặt tại gốc tọa độ O, đầu các sợi dây

neo có tọa độ lần lượt là $A(-3;4;2), B(4;2;1)$ và $C(0;0;5)$.

a) Trụ điện cao hơn 5 mét.

b) Tổng chiều dài hai sợi dây neo là gần bằng 11,83 mét.

c) Hai sợi dây neo tạo với nhau một góc gần bằng $76{,}8°$.

d) Để gia cố trụ điện, người ta cần thêm sợi dây neo thứ ba CD thỏa ba điểm A, B, D thẳng hàng. Sợi dây neo thứ 3 có độ dài ngắn nhất bằng $\dfrac{2\sqrt{435}}{9}$ mét.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;1;1), B(1;2;1)$ và $C(2;-1;3)$.

a) Gọi D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$ thì $D(3;-2;3)$.

b) Chu vi của tam giác ABC lớn hơn 8.

c) $G\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{5}{3}\right)$ là tọa độ trọng tâm tam giác ABC.

d) Góc $\widehat{BAC}$ là góc tù.

Bài 4. Cho ba vectơ $\vec{a}=(-1;1;0)$, $\vec{b}=(1;1;0)$ và $\vec{c}=(1;1;1)$.

a) $|\vec{a}|=2$.

b) $|\vec{c}|=\sqrt{3}$.

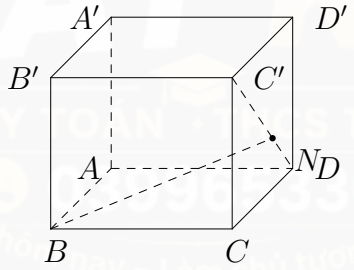
c) $\cos(\vec{a},\vec{c})=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

d) $\vec{b}\perp\vec{c}$.

Phần III. Câu trả lời ngắn *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 6 .*

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-5;2;3)$ và B là điểm đối xứng với A qua trục Oy. Độ dài đoạn thẳng AB bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?

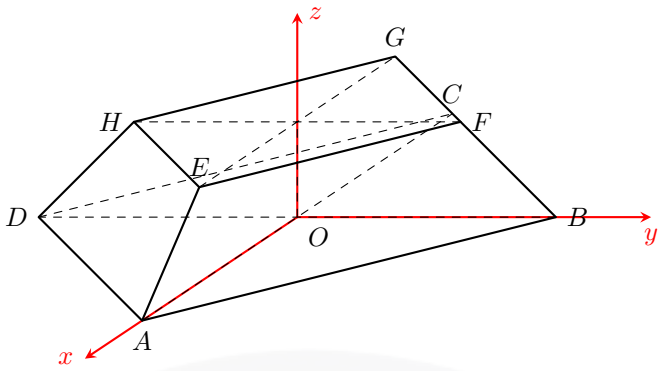
Bài 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi N là điểm trên đoạn $C'D$ sao cho $DN=\dfrac{1}{3}DC'$. Khi phân tích $\overrightarrow{BN}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}+z\overrightarrow{BB'}$ thì giá trị $3x+2y+3z$ bằng bao nhiêu?



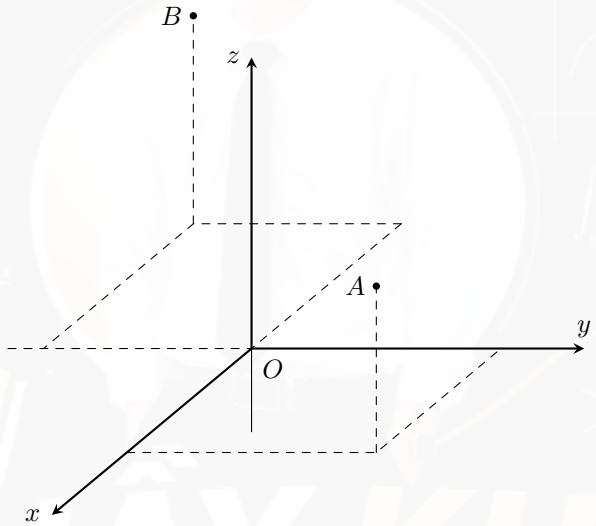
Bài 3. Một máy bay đang bay với vận tốc $\vec{a}=(630;600;18)$ (km/h) thì gặp gió. Máy bay bị lệch và đi từ $M(100;200;8)$ đến $N(210;303;12)$ trong 10 phút. Tính tốc độ của gió (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Bài 4. Trong không gian với hệ $Oxyz$, cho các điểm $A(19;0;0)$, $B(0;19;0)$, $E(12;0;7)$ và $F(0;12;7)$. Biết rằng mặt đáy hình vuông $ABCD$ song song với mặt đỉnh hình vuông $EFGH$ (như hình vẽ). Điểm $S(0;0;k)$ là đỉnh của hình chóp $S.EFGH$ kết hợp với khối đa diện $ABCD.EFGH$ tạo thành một khối chóp lớn $S.ABCD$. Hỏi thể tích của khối chóp $S.EFGH$ bằng bao nhiêu m^3?

Biết rằng mỗi đơn vị tương ứng với 1 mét trong thực tế (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Bài 5. Hai chiếc Flycam được điều khiển cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc flycam thứ nhất bay đến vị trí điểm A, chiếc flycam thứ hai bay đến điểm B. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc flycam, mặt phẳng Oxy trùng với mặt đất (coi như phẳng) có trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (đơn vị đo mỗi trục là mét).



Biết điểm A cách mặt đất 4m, cách điểm xuất phát 5m về phía nam và 6m về phía đông.
Vectơ $\overrightarrow{OB}$ có độ dài bằng 10 và hợp với các vectơ đơn vị trên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz các góc lần lượt là $135°, 120°, 60°$. Khoảng cách giữa hai chiếc flycam lúc đó là bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng phần mười).

Bài 6. Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo km), một ra-đa phát hiện một máy bay không người lái tại điểm $A(800; 500; 7)$. Từ điểm A, máy bay này di chuyển với vận tốc và hướng không đổi đến điểm $B(940; 550; 8)$ trong 10 phút để tiếp cận mục tiêu. Sau khi đến B, máy bay nhanh chóng quay bay ngược từ B về A để trở lại căn cứ $C(a; b; c)$ với vận tốc như lúc ban đầu. Biết rằng trong hành trình quay về, máy bay này cũng không đổi hướng thì sau 30 phút, máy bay đã về căn cứ C. Hãy xác định $T = 3a + 2b + c - 339$.

Chương III

LỜI GIẢI CHI TIẾT BỘ ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG VECTƠ

TOÁN THẦY KHA
ĐỀ SỐ 1
(Đề gồm có 5 trang)

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho $A(1;-2;0)$ và $B(-3;0;4)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

Ⓐ $(-2;-2;4)$. Ⓑ $(4;-2;-4)$. Ⓒ $(-2;1;2)$. Ⓓ $(-4;2;4)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{AB}=(-4;2;4)$. D

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;-1;1)$ trên trục Oz có tọa độ là

Ⓐ $(3;0;0)$. Ⓑ $(3;-1;0)$. Ⓒ $(0;0;1)$. Ⓓ $(0;-1;0)$.

Hướng dẫn giải. Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;-1;1)$ lên trục Oz có tọa độ $(0;0;1)$. C

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox, Oy. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng M_1M_2?

Ⓐ $\vec{u}_4=(-1;2;0)$. Ⓑ $\vec{u}_1=(0;2;0)$.
Ⓒ $\vec{u}_2=(1;2;0)$. Ⓓ $\vec{u}_3=(1;0;0)$.

Hướng dẫn giải. Hình chiếu vuông góc của M lên trục Ox là $M_1(1;0;0)$.
Hình chiếu vuông góc của M lên trục Oy là $M_2(0;2;0)$.
Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng M_1M_2 là $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1;2;0)$. A

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$. Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là

Ⓐ $(1;2;0)$. Ⓑ $(1;0;0)$. Ⓒ $(0;2;-1)$. Ⓓ $(1;0;-1)$.

Hướng dẫn giải. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(x,y,z)$ lên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ

$(0, y, z)$. Vậy hình chiếu của $A(1;2;-1)$ là $(0;2;-1)$. C

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-3;5;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Ⓐ $D(-4;8;-5)$.
Ⓑ $D(-2;2;5)$.
Ⓒ $D(-4;8;-3)$.
Ⓓ $D(-2;8;-3)$.

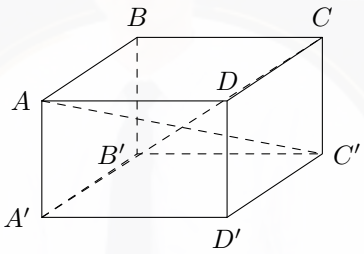
Hướng dẫn giải. Đặt $D(x;y;z)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành suy ra $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, khi đó ta có

$$\begin{cases} 1 = -3 - x \\ -3 = 5 - y \\ 4 = 1 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 8 \\ z = -3 \end{cases} \Rightarrow D(-4;8;-3).$$

C

Câu 6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ dưới). Khẳng định nào dưới đây đúng?



Ⓐ $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{BD'}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng với $\overrightarrow{B'C'}$.
Ⓒ $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng với $\overrightarrow{D'C'}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AC'}$ cùng phương với $\overrightarrow{A'C'}$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào hình vẽ của hình hộp chữ nhật, ta thấy $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ là hai vectơ cùng hướng (cùng song song với cạnh chiều dài của hình hộp và hướng từ trái sang phải).
Chọn B.

Câu 7. Cho $|\vec{a}| = 2; |\vec{b}| = 6$, góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $120°$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$.
Ⓑ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 40$.
Ⓒ $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6$.
Ⓓ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải. Áp dụng công thức tích vô hướng của hai vectơ:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 6 \cdot \cos 120° = 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -6.$$

Chọn C.

Câu 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình hộp, khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'} = \vec{0}$.
Ⓑ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC'} = \vec{0}$.
Ⓒ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$.
Ⓓ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Hướng dẫn giải. Vì O là tâm của hình hộp nên O là trung điểm của đường chéo AC', do đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC'} = \vec{0}$.

Câu 9. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Khi đó

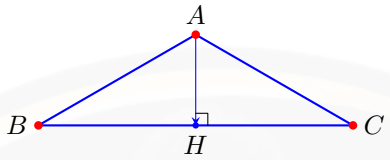
biểu diễn $\overrightarrow{BC'}$ theo các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là

Ⓐ $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
Ⓑ $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.
Ⓒ $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
Ⓓ $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

Hướng dẫn giải. Do $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ nên $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

Ta có: $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C'} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C'} = -\vec{b} + \vec{a} + \vec{c} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Câu 10. Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC = 5a$ và $\widehat{BAC} = 120°$. Độ dài của vectơ tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ bằng



Ⓐ $10a$.
Ⓑ $\dfrac{5a\sqrt{3}}{2}$.
Ⓒ $5a$.
Ⓓ $5a\sqrt{3}$.

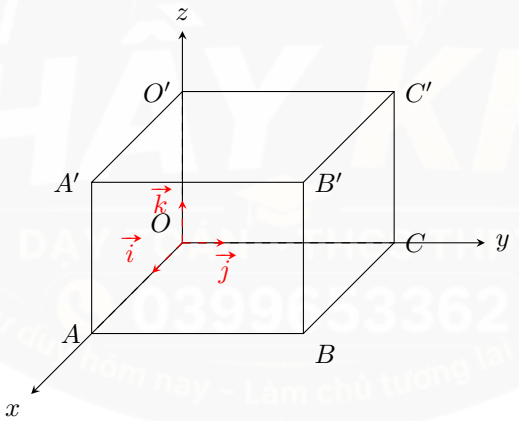
Hướng dẫn giải. Gọi H là trung điểm của BC, suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AH} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{AH}| = 2AH$.

Trong $\triangle ABC$ cân tại A, ta có $\widehat{B} = \widehat{C} = \dfrac{180° - 120°}{2} = 30°$.

Xét tam giác vuông AHC (tại H): $AH = AC \cdot \sin 30° = 5a \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{5a}{2}$.

Vậy $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2 \cdot \dfrac{5a}{2} = 5a$.

Câu 11. Cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'B'C'$ có cạnh $OA = 4, OC = 6, OO' = 3$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tọa độ O; các điểm A, C, O' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz. Khi đó tọa độ điểm B' là



Ⓐ $B'(6;3;4)$.
Ⓑ $B'(6;4;3)$.
Ⓒ $B'(4;6;3)$.
Ⓓ $B'(4;3;6)$.

Hướng dẫn giải. Vì các điểm A, C, O' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz và $OA = 4, OC = 6, OO' = 3$ nên tọa độ của chúng là $A(4;0;0)$, $C(0;6;0)$, $O'(0;0;3)$.

Áp dụng quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OO'} = (4;6;3) \Rightarrow B'(4;6;3)$.

Chọn C.

Câu 12. Cho điểm $M(3;-2;0); N(2;4;1)$. Tọa độ của $\overrightarrow{MN}$ là:

Ⓐ $(1;-6;-1)$. Ⓑ $(-1;6;1)$. Ⓒ $(1;0;6)$. Ⓓ $(-1;6;-1)$.

Hướng dẫn giải. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{MN}$ được tính bằng công thức: $\overrightarrow{MN}=(x_N-x_M;y_N-y_M;z_N-z_M)=(2-3;4-(-2);1-0)=(-1;6;1)$.
Chọn B.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Bài 1. Trong không gian cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh là a. Gọi O là giao điểm của BD và AC.

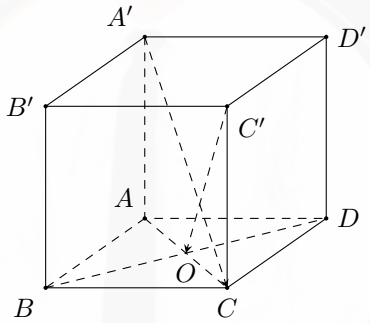
a) $\overrightarrow{A'C}-\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{B'C'}$

c) $\overrightarrow{C'O}=\overrightarrow{C'A'}-\overrightarrow{OA'}$

d) $\overrightarrow{A'D}\cdot\overrightarrow{A'B}=0$

Hướng dẫn giải.



a) Đúng.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{A'C}-\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{A'C}-\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}.$

b) Sai.

Ta có $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{B'C'}.$

c) Đúng.

Ta có $\overrightarrow{C'O}=\overrightarrow{C'A'}+\overrightarrow{A'O}=\overrightarrow{C'A'}-\overrightarrow{OA'}.$

d) Sai.

Ta có $\overrightarrow{A'D}\cdot\overrightarrow{A'B}=\left|\overrightarrow{A'D}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A'B}\right|.\cos\left(\overrightarrow{A'D},\overrightarrow{A'B}\right)=a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos60^\circ=a^2.$

Bài 2. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;-2;1);B(-2;-2;-1);C(3;1;-2)$.

a) Hình chiếu của A lên mặt phẳng (Oxz) là $A'(0;0;1)$.

b) Tam giác ABC là tam giác vuông tại A.

c) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ của $D(5;1;4)$.

d) Trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\frac{1}{3};1;\frac{-2}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải.

a) Đúng.

Hình chiếu của $A(0;-2;1)$ lên mặt phẳng (Oxz) là $A'(0;0;1)$ (giữ nguyên hoành độ x và cao độ z,

tung độ $y=0$).

b) Đúng.

Ta có: $\overrightarrow{AC}=(3;3;-3)$; $\overrightarrow{AB}=(-2;0;-2)$.

Khi đó $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=3\cdot(-2)+3\cdot0+(-3)\cdot(-2)=-6+0+6=0\Rightarrow AC\perp AB$. Vậy tam giác ABC vuông tại A.

c) Sai.

Giả sử $D(x;y;z)$. Ta có: $\overrightarrow{BA}=(2;0;2)$; $\overrightarrow{CD}=(x-3;y-1;z+2)$.

Để $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3=2\\y-1=0\\z+2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=1\\z=0\end{cases}$.

Vậy $D(5;1;0)$.

d) Sai.

Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ: $x_G=\dfrac{0+(-2)+3}{3}=\dfrac{1}{3}$; $y_G=\dfrac{-2+(-2)+1}{3}=-1$; $z_G=\dfrac{1+(-1)+(-2)}{3}=\dfrac{-2}{3}$.

Vậy $G\left(\dfrac{1}{3};-1;\dfrac{-2}{3}\right)$.

Bài 3. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi M, N, G, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD, MN, AC, BD.

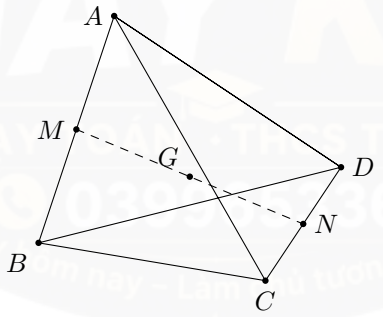
a) $2\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.

b) Giá trị tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}\right)$ bằng $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

c) Giá trị của $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GD}$.

d) Góc giữa $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{MN}$ là 60°.

Hướng dẫn giải.



a) **Sai.** Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QB})+(\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QD})=(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{CP})+2\overrightarrow{PQ}+(\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QD})$.

Vì P,Q lần lượt là trung điểm của AC,BD nên $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QD}=\vec{0}$.

Vậy $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{PQ}=-2\overrightarrow{QP}$.

b) **Sai.** Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=a^2+|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos60^\circ=a^2+a^2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3a^2}{2}$.

c) **Đúng.** Vì M là trung điểm AB nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}$.

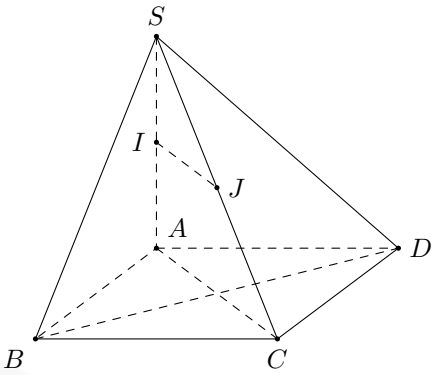
Vì N là trung điểm CD nên $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN}$.

Mà G là trung điểm MN nên $2\overrightarrow{GM}+2\overrightarrow{GN}=\vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GD}$.

d) **Sai.** Tính toán chỉ ra $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, suy ra góc giữa chúng bằng $45°$.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA, SC. G là trọng tâm tam giác SBD.



a) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$.

b) $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG}$.

c) $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{BD} = \vec{0}$.

d) $\overrightarrow{AG}^2 = \overrightarrow{AS}^2 + \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2$.

Hướng dẫn giải. a) **Đúng.** Tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (quy tắc hình bình hành). Suy ra $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$.

b) **Sai.** Vì G là trọng tâm tam giác SBD nên $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.
Chèn điểm A vào: $(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AS}) + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD}) = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

c) **Sai.** Do IJ là đường trung bình của $\triangle SAC$ nên $IJ // AC$. Mà $AC \perp BD$ (hai đường chéo hình vuông). Suy ra $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ (là số 0, không phải vectơ $\vec{0}$).

d) **Sai.** Từ kết quả câu b: $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
Bình phương hai vế: $9\overrightarrow{AG}^2 = \overrightarrow{AS}^2 + \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + 2(\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD})$.
Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ và $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.
Vì $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.
Vậy $9\overrightarrow{AG}^2 = \overrightarrow{AS}^2 + \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2$, khẳng định đề bài thiếu hệ số 9.

Phần III. Câu trả lời ngắn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6*

Bài 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ biết $A(2;0;0), B(0;2;0), C(1;1;3)$. Gọi $H(x_0;y_0;z_0)$ là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống BC. Khi đó $x_0 + y_0 + z_0$ bằng bao nhiêu? (Làm tròn đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải.

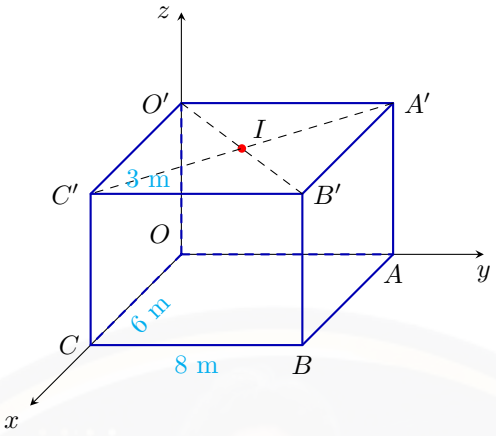
Ta có $\overrightarrow{BC} = (1;-1;3)$.
Vì H là chân đường cao hạ từ A xuống BC nên $H \in BC$, do đó $\overrightarrow{BH}$ cùng phương với $\overrightarrow{BC}$, tức là $\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC} = (t;-t;3t)$ với $t \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow (x_0 - 0; y_0 - 2; z_0 - 0) = (t;-t;3t) \Rightarrow \begin{cases} x_0 = t \\ y_0 = 2 - t \\ z_0 = 3t \end{cases}.$$

Suy ra $H(t;2-t;3t)$. Khi đó $\overrightarrow{AH} = (t-2;2-t;3t)$.
Vì $AH \perp BC$ nên $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (t-2)\cdot 1 + (2-t)\cdot(-1) + 3t \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow 11t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{4}{11}$.
Với $t = \dfrac{4}{11}$, ta có $H\left(\dfrac{4}{11}; \dfrac{18}{11}; \dfrac{12}{11}\right)$.
Vậy $x_0 + y_0 + z_0 = \dfrac{4}{11} + \dfrac{18}{11} + \dfrac{12}{11} = \dfrac{34}{11} \approx 3,09$.

Bài 2. Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài 8 m, chiều rộng 6 m và chiều cao 3 m. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục tọa độ

$Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét. Khi đó, tọa độ của điểm treo đèn là $I(x;y;z)$, hãy tính $x+y+z$.



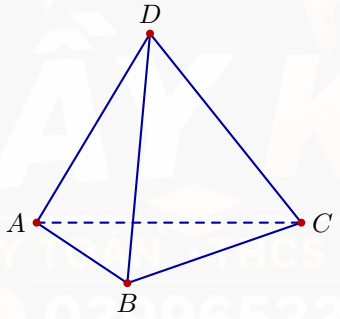
Hướng dẫn giải.

Giả sử căn phòng hình hộp chữ nhật được mô phỏng như hình vẽ.
Khi đó ta có tọa độ các đỉnh của trần nhà là $O'(0;0;3)$ và $B'(6;8;3)$.
Gọi $I(x;y;z)$ là điểm chính giữa trần nhà của phòng học, nên I là trung điểm của đường chéo $O'B'$. Khi đó $\overrightarrow{O'I}=\overrightarrow{IB'}$.
Ta có $\overrightarrow{O'I}=(x-0;y-0;z-3)=(x;y;z-3)$, $\overrightarrow{IB'}=(6-x;8-y;3-z)$.

$$\overrightarrow{O'I}=\overrightarrow{IB'}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6-x\\y=8-y\\z-3=3-z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=4\\z=3\end{cases}.$$

Vậy tọa độ điểm treo đèn là $I(3;4;3)\Rightarrow x+y+z=3+4+3=10$.

Bài 3. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot(2024\overrightarrow{BC}-2025\overrightarrow{CD})$.



Hướng dẫn giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB}\cdot(2024\overrightarrow{BC}-2025\overrightarrow{CD})=2024\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}-2025\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$.
Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên $AB\perp CD$, suy ra $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.
Lại có: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-BA\cdot BC\cdot\cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=-1\cdot1\cdot\cos60^\circ=-\dfrac{1}{2}$.
Vậy $\overrightarrow{AB}\cdot(2024\overrightarrow{BC}-2025\overrightarrow{CD})=2024\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)-2025\cdot0=-1012$.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;3;1)$, $\vec{b}=(-1;5;2)$, $\vec{c}=(4;-1;3)$ và $\vec{x}=(-3;22;5)$. Biết $\vec{x}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$, tính $m-n-p$.

Hướng dẫn giải.

Đặt $\vec{x} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b} + p \cdot \vec{c}$ với $m, n, p \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow (-3; 22; 5) = m(2; 3; 1) + n(-1; 5; 2) + p(4; -1; 3)$.

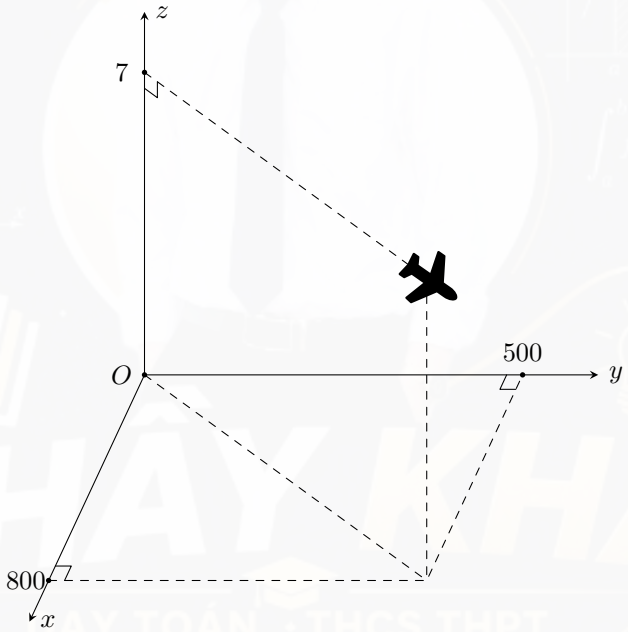
Điều này dẫn đến hệ phương trình: $\begin{cases} 2m - n + 4p = -3 \\ 3m + 5n - p = 22 \\ m + 2n + 3p = 5 \end{cases}$ (I).

Giải hệ phương trình (I) bằng phương pháp cộng đại số hoặc dùng máy tính bỏ túi, ta được: $\begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \\ p = -1 \end{cases}$.

Vậy $m - n - p = 2 - 3 - (-1) = 0$.

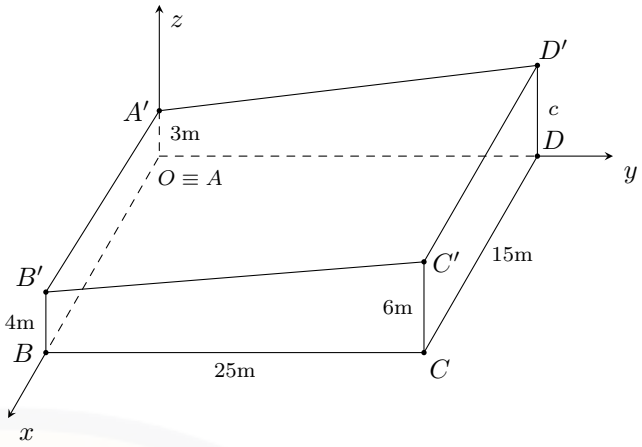
Bài 5. Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo: ki-lô-mét), ra-đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800; 500; 7)$ đến điểm $B(940; 550; 8)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là $D(x; y; z)$. Khi đó $x + y + z$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải.



- Vị trí của máy bay sau 10 phút tiếp theo là $D(x; y; z)$.
- Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BD}$ cùng hướng.
- Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B bằng thời gian bay từ B đến D nên $AB = BD$.
- Do đó $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} = (940 - 800; 550 - 500; 8 - 7) = (140; 50; 1)$.
- Mặt khác, $\overrightarrow{BD} = (x - 940; y - 550; z - 9)$ nên $\begin{cases} x - 940 = 140 \\ y - 550 = 50 \\ z - 8 = 1 \end{cases}$.
- Giải hệ phương trình trên ta được $\begin{cases} x = 1080 \\ y = 600 \\ z = 9 \end{cases}$ nên $x + y + z = 1080 + 600 + 9 = 1689$.

Bài 6. Để chuẩn bị cho ngày hội thao, người ta dựng bốn chiếc cột tại bốn góc của một sân bóng hình chữ nhật với kích thước là 15 m $\times$ 25 m. Bốn chiếc cột vuông góc với mặt sân và có chiều cao lần lượt là 3 mét, 4 mét, 6 mét và c mét. Một tấm bạt lớn được căng phẳng với bốn góc được cố định vào đầu bốn cột. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ bên (đơn vị trên các trục là mét) thì điểm D' có tọa độ là $(a;b;c)$. Tính $a-2b+c$.



Hướng dẫn giải. Theo hệ trục tọa độ đã chọn, ta có $A'(0,0,3)$; $B'(15,0,4)$; $C'(15,25,6)$.
Vì $A'B'C'D'$ là hình bình hành nên

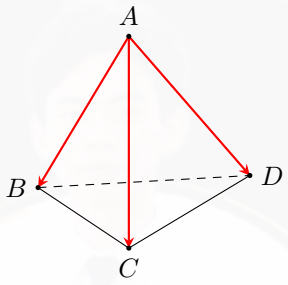
$$\begin{cases} x_{D'} = x_{A'} + x_{C'} - x_{B'} = 0 + 15 - 15 = 0 \\ y_{D'} = y_{A'} + y_{C'} - y_{B'} = 0 + 25 - 0 = 25 \\ z_{D'} = z_{A'} + z_{C'} - z_{B'} = 3 + 6 - 4 = 5. \end{cases}$$

Suy ra $a=0$, $b=25$ và $c=5$.
Vậy $a-2b+c = 0-2\cdot 25+5 = 45$.

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

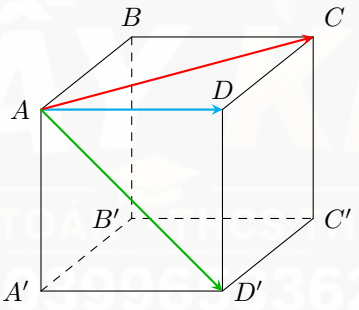
Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$. Có bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện?



Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Hướng dẫn giải. Các vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện $ABCD$ là: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$. Vậy có tất cả 3 vectơ.
Chọn C.

Câu 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Hai vectơ nào có giá cùng nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$?



Ⓐ $\overrightarrow{DD'}, \overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{AD}$. Ⓒ $\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{AC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Hướng dẫn giải. Mặt phẳng $(ABCD)$ chứa các đỉnh A, B, C, D. Do đó, các vectơ có điểm đầu và điểm cuối thuộc tập hợp các điểm này sẽ có giá nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$.
Trong các phương án, chỉ có cặp vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ thỏa mãn.
Chọn D.

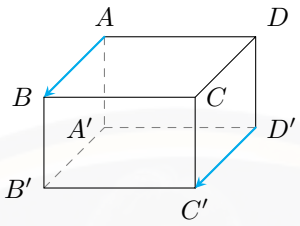
Câu 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a. Hai vectơ nào sau đây có cùng độ dài?

Ⓐ $\overrightarrow{DD'}, \overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{AD}$. Ⓒ $\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{AC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Hướng dẫn giải. Xét hình lập phương cạnh a:
- Độ dài cạnh: $|\overrightarrow{DD'}| = |\overrightarrow{AD}| = a$.
- Độ dài đường chéo của một mặt (hình vuông cạnh a): $|\overrightarrow{AD'}| = |\overrightarrow{AC}| = a\sqrt{2}$.

Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{AD'}$ và $\overrightarrow{AC}$ có cùng độ dài.
Chọn C.

Câu 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ nào sau đây bằng vectơ $\overrightarrow{D'C'}$?



Ⓐ $\overrightarrow{DD'}$. Ⓑ $\overrightarrow{AD}$. Ⓒ $\overrightarrow{AB}$. Ⓓ $\overrightarrow{CD}$.

Hướng dẫn giải. Vì trong hình lập phương, tứ giác $ABC'D'$ là hình chữ nhật (hoặc xét các mặt là hình vuông), vectơ $\overrightarrow{AB}$ có cùng hướng và cùng độ dài với vectơ $\overrightarrow{D'C'}$ nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D'C'}$.
Chọn C.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$ và $B(2;1;-4)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

Ⓐ $(1;2;-6)$. Ⓑ $(1;0;-6)$. Ⓒ $(-1;-2;6)$. Ⓓ $(3;0;-2)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (2-1; 1-(-1); -4-2) = (1;2;-6)$.
Chọn A.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho biểu diễn của vectơ $\vec{a}$ qua các vectơ đơn vị là $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k} - 3\vec{j}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là

Ⓐ $(2;-3;1)$. Ⓑ $(1;-3;2)$. Ⓒ $(2;1;-3)$. Ⓓ $(1;2;-3)$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 1\vec{k} \Rightarrow \vec{a} = (2;-3;1)$.
Chọn A.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$ cho hình bình hành $ABCD$ và các đỉnh có tọa độ lần lượt là $A(3;1;2), B(1;0;1), C(2;3;0)$. Tọa độ đỉnh D là

Ⓐ $(1;1;0)$. Ⓑ $(0;2;-1)$. Ⓒ $(4;4;1)$. Ⓓ $(1;3;-1)$.

Hướng dẫn giải. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành suy ra $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
Ta có $\overrightarrow{BC} = (2-1; 3-0; 0-1) = (1;3;-1)$.
Gọi $D(x_D; y_D; z_D)$, ta có $\overrightarrow{AD} = (x_D - 3; y_D - 1; z_D - 2)$.

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 3 = 1 \\ y_D - 1 = 3 \\ z_D - 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = 4 \\ z_D = 1 \end{cases} \Rightarrow D(4;4;1).$$

Chọn C.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (-3;2;1)$ và điểm $A(4;6;-3)$. Tọa độ điểm B thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ là

Ⓐ $(-1;-8;2)$. Ⓑ $(7;4;-4)$. Ⓒ $(1;8;-2)$. Ⓓ $(-7;-4;4)$.

Hướng dẫn giải. Gọi $B(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(x-4;y-6;z+3)$.

Khi đó $\overrightarrow{AB}=\vec{a}\Leftrightarrow\begin{cases}x-4=-3\\y-6=2\\z+3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=8\\z=-2\end{cases}\Rightarrow B(1;8;-2)$.

Chọn C.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(1;2;3)$, $\vec{b}=(-2;0;1)$, $\vec{c}=(-1;0;1)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{n}=\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}-3\vec{i}$.

Ⓐ $\vec{n}=(6;2;6)$. Ⓑ $\vec{n}=(6;2;-6)$.
Ⓒ $\vec{n}=(0;2;6)$. Ⓓ $\vec{n}=(-6;2;6)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{i}=(1;0;0)$.

$\vec{n}=(1-2+2(-1)-3(1);2+0+2(0)-3(0);3+1+2(1)-3(0))=(-6;2;6)$.

Chọn D.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;5;-1)$, $B(7;x;1)$ và $C(9;2;y)$. Để A,B,C thẳng hàng thì giá trị $x+y$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ 6. Ⓒ 4. Ⓓ 7.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;x-5;2)$, $\overrightarrow{AC}=(6;-3;y+1)$.

A,B,C thẳng hàng khi $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ cùng phương:

$\Leftrightarrow\dfrac{4}{6}=\dfrac{x-5}{-3}=\dfrac{2}{y+1}\Leftrightarrow\begin{cases}6(x-5)=-12\\4(y+1)=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-5=-2\\y+1=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$.

Vậy $x+y=3+2=5$.

Chọn A.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, điểm M thuộc trục Ox và cách đều hai điểm $A(4;2;-1)$ và $B(2;1;0)$ là

Ⓐ $M(-4;0;0)$. Ⓑ $M(5;0;0)$. Ⓒ $M(4;0;0)$. Ⓓ $M(-5;0;0)$.

Hướng dẫn giải. $M\in Ox\Rightarrow M(x;0;0)$.

Ta có: $MA^2=(4-x)^2+2^2+(-1)^2=x^2-8x+21$.

$MB^2=(2-x)^2+1^2+0^2=x^2-4x+5$.

M cách đều hai điểm A,B khi $MA=MB\Leftrightarrow MA^2=MB^2$:

$\Leftrightarrow x^2-8x+21=x^2-4x+5\Leftrightarrow 4x=16\Leftrightarrow x=4\Rightarrow M(4;0;0)$.

Chọn C.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;3;4)$, $B(1;0;-2)$ và $C(4;0;1)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

Ⓐ $G(3;0;2)$. Ⓑ $G(2;1;1)$. Ⓒ $G(1;1;3)$. Ⓓ $G(3;0;-1)$.

Hướng dẫn giải. Tọa độ trọng tâm G là:

$x_G=\dfrac{1+1+4}{3}=2$; $y_G=\dfrac{3+0+0}{3}=1$; $z_G=\dfrac{4+0-2}{3}=1$.

Vậy $G(2;1;1)$.

Chọn B.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh*

chọn đúng hoặc sai.

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(-1;1;2)$; $B(1;0;3)$ và $\overrightarrow{OC}=2\vec{j}-2\vec{k}$.

a) Tọa độ $C(0;2;-2)$.

b) Hình chiếu vuông góc của A lên Oz có tọa độ $A'(0;0;2)$.

c) Hình chiếu của B lên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ $B'(-1;0;0)$.

d) Tọa độ $D(-2;3;-3)$.

Hướng dẫn giải.

a) **Đúng**.
Từ giả thiết $\overrightarrow{OC}=2\vec{j}-2\vec{k}=0\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$, theo định nghĩa tọa độ điểm ta có $C(0;2;-2)$.

b) **Đúng**.
Hình chiếu vuông góc của $A(-1;1;2)$ lên trục Oz giữ nguyên tọa độ z, các tọa độ x,y bằng 0. Vậy $A'(0;0;2)$.

c) **Sai**.
Hình chiếu của $B(1;0;3)$ lên mặt phẳng (Oyz) giữ nguyên tọa độ y,z và cho tọa độ $x=0$. Vậy $B'(0;0;3)$.

d) **Đúng**.
Gọi tọa độ điểm D là $(x;y;z)$.
Ta có $\overrightarrow{AB}=(1-(-1);0-1;3-2)=(2;-1;1)$.
$\overrightarrow{DC}=(0-x;2-y;-2-z)=(-x;2-y;-2-z)$.
Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}-x=2\\2-y=-1\\-2-z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=3\\z=-3\end{cases}$.
Vậy tọa độ điểm D là $D(-2;3;-3)$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{u}=(3;1;-2)$, $\vec{v}=(1;-1;1)$, $\vec{w}=(-1;-3;4)$.

a) $\vec{u}+\vec{v}=(4;0;-2)$.

b) $\vec{u}\perp\vec{v}$.

c) Hai vectơ $\vec{u}-2\vec{v}$ và $\vec{w}$ cùng hướng.

d) $|\vec{u}-\vec{v}+2\vec{w}|=\sqrt{41}$.

Hướng dẫn giải.

a) **Sai**.
Ta có $\vec{u}+\vec{v}=(3+1;1-1;-2+1)=(4;0;-1)$.

b) **Đúng**.
Ta có tích vô hướng $\vec{u}\cdot\vec{v}=3\cdot1+1\cdot(-1)+(-2)\cdot1=3-1-2=0$. Suy ra $\vec{u}\perp\vec{v}$.

c) **Sai**.
Ta có $\vec{u}-2\vec{v}=(3-2\cdot1;1-2\cdot(-1);-2-2\cdot1)=(1;3;-4)$.
Dễ thấy $\vec{u}-2\vec{v}=-(-1;-3;4)=-\vec{w}$.
Vì hệ số $k=-1<0$ nên hai vectơ này ngược hướng.

d) **Đúng**.

Ta có $\vec{u}-\vec{v}+2\vec{w}=(3-1+2(-1);1-(-1)+2(-3);-2-1+2(4))=(0;-4;5)$.
Khi đó $|\vec{u}-\vec{v}+2\vec{w}|=\sqrt{0^2+(-4)^2+5^2}=\sqrt{16+25}=\sqrt{41}$.

Bài 3. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai vectơ đó là $45°$.

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=-5+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $|\vec{a}+\vec{b}|=2+\sqrt{2}$.

d) $|\vec{a}-\sqrt{2}\vec{b}|=0$.

Hướng dẫn giải.

a) **Đúng**.

Ta có $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=1\cdot1\cdot\cos45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) **Đúng**.

$(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+3\vec{b}\cdot\vec{a}-6\vec{b}^2=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-6|\vec{b}|^2=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-6=-5+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) **Sai**.

Ta có $(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=1+2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1=2+\sqrt{2}$.

Suy ra $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{2+\sqrt{2}}\neq2+\sqrt{2}$.

d) **Sai**.

$(\vec{a}-\sqrt{2}\vec{b})^2=\vec{a}^2-2\sqrt{2}\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}^2=1-2\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+2\cdot1=1-2+2=1$.

Suy ra $|\vec{a}-\sqrt{2}\vec{b}|=1\neq0$.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABC$. Điểm M thuộc cạnh SA và $SM=\dfrac{2}{3}SA$.

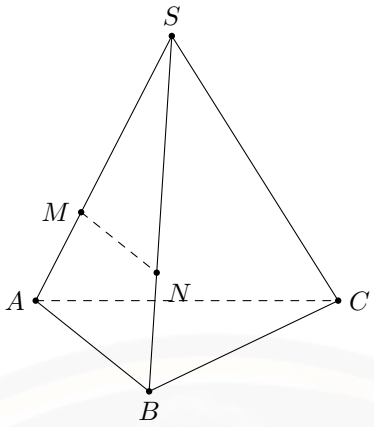
a) $\overrightarrow{SM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{SA}$.

b) $\overrightarrow{MA}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AS}$.

c) Điểm N nằm trên cạnh SB sao cho $SN=\dfrac{2}{3}SB$. Khi đó $\overrightarrow{SN}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{SB}$.

d) $\overrightarrow{MN}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BA}$.

Hướng dẫn giải.



a) **Đúng**. Vì M thuộc đoạn SA nên $\overrightarrow{SM}$ và $\overrightarrow{SA}$ cùng hướng. Theo giả thiết $SM = \dfrac{2}{3}SA$ nên $\overrightarrow{SM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{SA}$.

b) **Sai**. Ta có M nằm giữa S và A với $SM = \dfrac{2}{3}SA$ nên $MA = \dfrac{1}{3}SA$. Tuy nhiên $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{AS}$ cùng hướng, nên $\overrightarrow{MA} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SA} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AS}$.

c) **Đúng**. Tương tự câu a, vì N thuộc đoạn SB nên $\overrightarrow{SN} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{SB}$.

d) **Đúng**.

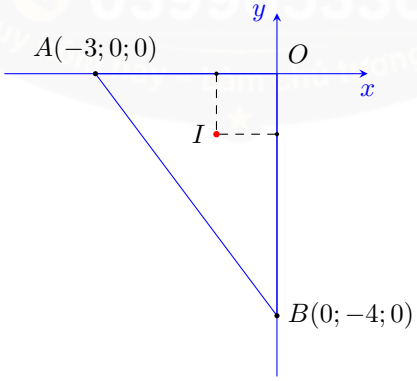
Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{SN} - \overrightarrow{SM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{SB} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{SA} = \dfrac{2}{3}(\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}) = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BA}$.

Phần III. Câu trả lời ngắn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6*

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3;0;0)$, $B(0;-4;0)$. Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp của tam giác OAB. Tính độ dài đoạn thẳng IJ. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải.

Ta có: $\overrightarrow{OA} = (-3;0;0) \Rightarrow OA = 3$; $\overrightarrow{OB} = (0;-4;0) \Rightarrow OB = 4$.
$\overrightarrow{AB} = (3;-4;0) \Rightarrow AB = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} = 5$.
$\triangle OAB$ vuông tại O, nằm trong mặt phẳng (Oxy).



Diện tích tam giác OAB là: $S_{OAB} = \dfrac{1}{2}OA \cdot OB = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$.

Nửa chu vi: $p = \dfrac{OA + OB + AB}{2} = \dfrac{3+4+5}{2} = 6$.

Bán kính đường tròn nội tiếp: $r = \dfrac{S_{OAB}}{p} = \dfrac{6}{6} = 1$.

Do $\triangle OAB$ nằm ở góc phần tư thứ III của mặt phẳng (Oxy) nên tâm nội tiếp I có tọa độ $I(-1;-1;0)$.

Do $\triangle OAB$ vuông tại O nên tâm đường tròn ngoại tiếp J là trung điểm của cạnh huyền AB.

$\Rightarrow J\left(\dfrac{-3+0}{2};\dfrac{0-4}{2};\dfrac{0+0}{2}\right) \Rightarrow J\left(-\dfrac{3}{2};-2;0\right)$.

Ta có $\overrightarrow{IJ} = \left(-\dfrac{1}{2};-1;0\right) \Rightarrow IJ = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,12$.

Bài 2. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ sao cho $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$ và hai vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ (đơn vị độ).

Hướng dẫn giải.

Vì hai vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau nên:

$$\begin{aligned}(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 0 &\Leftrightarrow 2\vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0\\ &\Leftrightarrow 2|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 + |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0\\ &\Leftrightarrow 2 \cdot (\sqrt{2})^2 - 2^2 + \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0\\ &\Leftrightarrow 4 - 4 + 2\sqrt{2} \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0\\ &\Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ.\end{aligned}$$

Vậy góc giữa hai vectơ là 90°.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;3)$, $B(2;3;-4)$, $C(-3;1;2)$. Biết điểm $D(a;b;c)$ sao cho $ABCD$ là hình bình hành. Tính $a+b+c$.

Hướng dẫn giải.

Gọi $D(x;y;z)$. Để $ABCD$ là hình bình hành ta cần $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2-1;3-0;-4-3) = (1;3;-7)$.

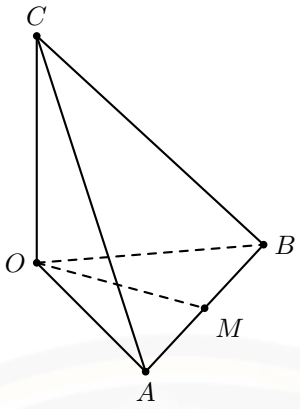
$\overrightarrow{DC} = (-3-x;1-y;2-z)$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases}-3-x=1\\1-y=3\\2-z=-7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-4\\y=-2\\z=9\end{cases} \Rightarrow D(-4;-2;9).$$

Suy ra: $a=-4, b=-2, c=9 \Rightarrow a+b+c=-4-2+9=3$.

Bài 4. các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = 1$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Côsin góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng $-\dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $Q = a \cdot b$.

✍ *Hướng dẫn giải.*



Đặt $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c}$.
Theo giả thiết, ta có $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ và $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=0$.
Ta có: $\cos(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{AC})=\dfrac{\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}$.
Mặt khác, do M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$.
Và $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\vec{c}-\vec{a}$.
Khi đó:

$$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=\frac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}^2+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{a})=\frac{1}{2}(0-1+0-0)=-\frac{1}{2}.$$

Tính độ dài các vectơ:

$$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{\overrightarrow{OM}^2}=\sqrt{\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b})^2}=\sqrt{\frac{1}{4}(1+0+1)}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

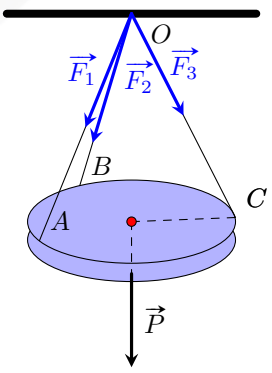
$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{\overrightarrow{AC}^2}=\sqrt{(\vec{c}-\vec{a})^2}=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}.$$

Do đó:

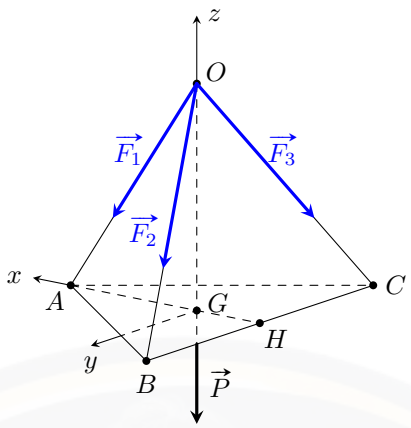
$$\cos(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{AC})=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{-\frac{1}{2}}{1}=-\frac{1}{2}.$$

Theo đề bài $\cos(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{AC})=-\dfrac{a}{b}\Rightarrow\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow a=1,b=2$.
Vậy $Q=a\cdot b=1\cdot 2=2$.

Bài 5. Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà lần lượt buộc vào ba điểm A,B,C trên đèn tròn sao cho tam giác ABC đều. Độ dài của ba đoạn dây OA,OB,OC đều bằng L. Trọng lượng của chiếc đèn là 27 N và bán kính của chiếc đèn là 0,5 m.Tìm chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây, biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 12 N. (Chiều dài tính theo đơn vị cm và làm tròn đến hàng phần mười).



✍ *Hướng dẫn giải.*



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.
Vì $\triangle ABC$ đều nên G là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
Do đó $GA = GB = GC = 0{,}5$ m.
Gọi F là độ lớn của các lực căng $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$ trên mỗi sợi dây. Khi đó, $F = F(L)$ là một hàm số với biến số là L.
Theo bài ra ta có $OA = OB = OC = L$ nên $OG \perp (ABC)$ và $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OC}\right| = L$.
Do đó, $\left|\vec{F_1}\right| = \left|\vec{F_2}\right| = \left|\vec{F_3}\right|$
Vì vậy, tồn tại hằng số $c \neq 0$ sao cho $\vec{F_1} = c\overrightarrow{OA}$, $\vec{F_2} = c\overrightarrow{OB}$, $\vec{F_3} = c\overrightarrow{OC}$.
Suy ra $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = c\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.
Theo quy tắc ba điểm ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$.
Gọi $\vec{P}$ là trọng lực tác dụng lên chiếc đèn thì $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = 3c\overrightarrow{OG}$.
Mà trọng lượng tác dụng lên chiếc đèn là 20 N nên

$$\left|\vec{P}\right| = 27 \Leftrightarrow 3c\left|\overrightarrow{OG}\right| = 27N \Leftrightarrow c = \frac{9}{OG}.$$

Tam giác OAG vuông tại G (do $OG \perp (ABC)$) nên ta

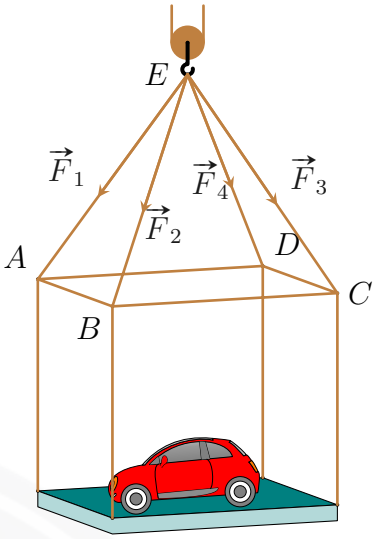
$$OG = \sqrt{OA^2 - GA^2} = \sqrt{L^2 - 0{,}5^2}\text{ m với } L > 0{,}5.$$

Do đó $\left|\overrightarrow{OG}\right| = \sqrt{L^2 - 0{,}5^2} \Leftrightarrow c = \dfrac{9}{\sqrt{L^2 - 0{,}5^2}}$.
Khi đó $\left|\vec{F}\right| = \left|\vec{F_1}\right| = c\left|\overrightarrow{OA}\right| = \dfrac{9L}{\sqrt{L^2 - 0{,}5^2}}$ (với $L > 0{,}5$).
Ta có lực căng tối đa của mỗi sợi dây là 12 N nên

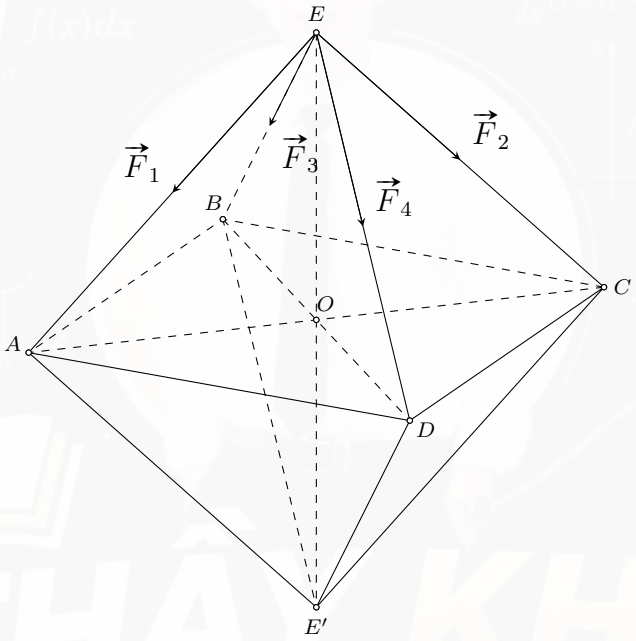
$$\begin{aligned} F(L) \leq 12 &\Leftrightarrow \frac{9L}{\sqrt{L^2 - 0{,}5^2}} \leq 12 \\ &\Leftrightarrow 3L \leq 4\sqrt{L^2 - 0{,}5^2} \\ &\Leftrightarrow 9L^2 \leq 16L^2 - 4 \\ &\Leftrightarrow 7L^2 \geq 4 \\ &\Rightarrow L \geq \frac{2}{\sqrt{7}} \approx 0{,}756\,(\text{m}). \end{aligned}$$

Vậy chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây là $L = 0{,}756$ m=75,6 cm.

Bài 6. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình vuông $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiến cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc $45°$ như hình vẽ. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết lực căng $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right| = \left|\overrightarrow{F_4}\right|$, trọng lượng khung sắt là 1 000 (N) và trọng lượng của chiếc xe ô tô là 4 000 (N). Tính cường độ lực căng của mỗi đoạn dây cáp (làm tròn đến hàng đơn vị).



Hướng dẫn giải.



Gọi O là giao của hai đường chéo AC và BD.

Hình chóp $E.ABCD$ là chóp có các cạnh bên bằng nhau và O là tâm của đáy là hình chữ nhật $ABCD$.Suy ra $EO \perp (ABCD)$.

Ta có $\overrightarrow{F_1} = k\overrightarrow{EA}$; $\overrightarrow{F_2} = k\overrightarrow{EB}$; $\overrightarrow{F_3} = k\overrightarrow{EC}$; $\overrightarrow{F_4} = k\overrightarrow{ED}$.

Lấy E' đối xứng với E qua O.

Áp dụng quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3} = k\overrightarrow{EE'}$; $\overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_4} = k\overrightarrow{EE'}$ (k là hằng số)

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_4} = 2k\overrightarrow{EE'} = 4k\overrightarrow{EO}.$$

Vì ô tô được đặt ở vị trí cân bằng nên $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_4} = \overrightarrow{P}$, trong đó $\overrightarrow{P}$ là trọng lực tác dụng lên ô tô và khung sắt nên.

$$5\,000 = 4kOE \Rightarrow OE = \frac{5\,000}{4k} = \frac{1\,250}{k} \quad (N).$$

Vì EA tạo với $(ABCD)$ một góc $45° \Rightarrow \widehat{EAO} = 45°$.

Xét $\triangle AEO$ vuông tại O ta có $EO = AE \cdot \sin 45° \Rightarrow \dfrac{1\,250}{k} = AE \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AE = 1\,250k\sqrt{2} \quad (N)$.

Từ giả thiết $EA = EB = EC = ED = k\left|\overrightarrow{F_1}\right|$.

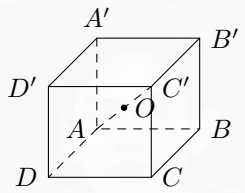
Vậy cường độ lực căng của mỗi đoạn dây cáp là $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \dfrac{EA}{k} = \dfrac{1\,250k\sqrt{2}}{k} \quad (N) \approx 1\,768 \quad (N)$.

TOÁN THẦY KHA
ĐỀ SỐ 3
(Đề gồm có 5 trang)

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào sau đây là đúng?



Ⓐ $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.
Ⓑ $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.
Ⓒ $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.
Ⓓ $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$ (quy tắc hình hộp).

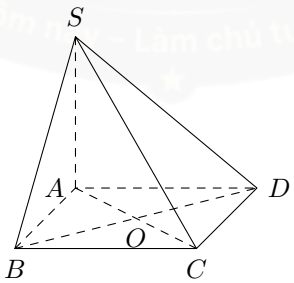
Vì O là tâm của hình lập phương nên O là trung điểm của AC', suy ra $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.
Chọn B.

Câu 2. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.
Ⓑ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.
Ⓒ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$.
Ⓓ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

Hướng dẫn giải. Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng nên $(\vec{a},\vec{b})=0^\circ\Rightarrow\cos(\vec{a},\vec{b})=1$.
Vậy $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.
Chọn A.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a},\overrightarrow{SB}=\vec{b},\overrightarrow{SC}=\vec{c},\overrightarrow{SD}=\vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

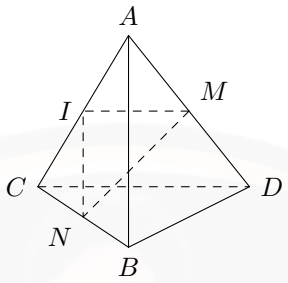


Ⓐ $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$.
Ⓑ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.
Ⓒ $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$.
Ⓓ $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$.

Hướng dẫn giải. Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Khi đó O là trung điểm của AC và

BD.
Ta có $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}=\vec{a}+\vec{c}$ và $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}=\vec{b}+\vec{d}$.
Suy ra $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$.
Chọn A.

Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=2a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết $MN=\sqrt{3}a$, góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ bằng



Ⓐ $30°$. Ⓑ $60°$. Ⓒ $90°$. Ⓓ $120°$.

Hướng dẫn giải. Gọi I là trung điểm của AC. Khi đó $IM=\dfrac{1}{2}CD=a$ và $IN=\dfrac{1}{2}AB=a$.
Mặt khác $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=(\overrightarrow{NI},\overrightarrow{IM})=180°-\widehat{MIN}$ (hoặc tính trực tiếp qua $\cos\widehat{MIN}$).
Trong $\triangle MIN$: $\cos\widehat{MIN}=\dfrac{IM^2+IN^2-MN^2}{2\cdot IM\cdot IN}=\dfrac{a^2+a^2-3a^2}{2a^2}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{MIN}=120°$.
Vì góc giữa hai vectơ phải $\in[0°,180°]$, góc $\widehat{MIN}$ chính là góc cần tìm nếu xét hướng phù hợp hoặc lấy bù nếu cần. Trong trường hợp này $\widehat{MIN}=120°$ thỏa mãn.
Chọn D.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$ thỏa mãn $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$. Tọa độ của $\vec{a}$ là

Ⓐ $(2;1;-3)$. Ⓑ $(2;-3;1)$. Ⓒ $(-3;1;2)$. Ⓓ $(1;2;-3)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}\Rightarrow\vec{a}=(2;-3;1)$.
Chọn B.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;5)$. Hình chiếu vuông góc của A lên trục Ox có tọa độ là

Ⓐ $(1;0;0)$. Ⓑ $(0;-2;0)$. Ⓒ $(0;0;5)$. Ⓓ $(0;-2;5)$.

Hướng dẫn giải. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(x;y;z)$ lên trục Ox là điểm $A'(x;0;0)$.
Vậy $A'(1;0;0)$.
Chọn A.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;-1),B(-3;2;-2)$. Tọa độ của $\overrightarrow{AB}$ là

Ⓐ $(5;-3;1)$. Ⓑ $(-5;3;-1)$. Ⓒ $(-5;1;-1)$. Ⓓ $(5;-3;-1)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3-2;2-(-1);-2-(-1))=(-5;3;-1)$.
Chọn B.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(2;1;-3),B(0;-2;2),C(4;-3;0)$. Tọa độ điểm D là

Ⓐ $(2;0;5)$. Ⓑ $(6;0;-5)$. Ⓒ $(2;0;-5)$. Ⓓ $(6;0;5)$.

Hướng dẫn giải. Gọi $D(x_0;y_0;z_0)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;-3;5)$ và $\overrightarrow{DC}=(4-x_0;-3-y_0;-z_0)$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}4-x_0=-2\\-3-y_0=-3\\-z_0=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=6\\y_0=0\\z_0=-5\end{cases}\Rightarrow D(6;0;-5)$.

Chọn B.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}=(2;1;3)$ và $\vec{b}=(-1;2;1)$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}+\vec{b}$ là

Ⓐ $\vec{a}+\vec{b}=(1;3;4)$. Ⓑ $\vec{a}+\vec{b}=(-1;3;4)$.
Ⓒ $\vec{a}+\vec{b}=(2;1;2)$. Ⓓ $\vec{a}+\vec{b}=(3;-1;2)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{a}+\vec{b}=(2+(-1);1+2;3+1)=(1;3;4)$.

Chọn A.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;4),B(-1;3;2)$ và $C(0;4;-3)$. Trọng tâm G của tam giác ABC là

Ⓐ $G(1;3;1)$. Ⓑ $G(0;3;1)$. Ⓒ $G(0;9;3)$. Ⓓ $G(-1;9;3)$.

Hướng dẫn giải. Tọa độ trọng tâm G là $\left(\dfrac{1-1+0}{3};\dfrac{2+3+4}{3};\dfrac{4+2-3}{3}\right)=(0;3;1)$.

Chọn B.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=(-4;2;-3)$ và điểm $A(1;2;3)$. Tọa độ điểm B thỏa mãn $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ là

Ⓐ $B(3;2;-4)$. Ⓑ $B(-3;4;0)$.
Ⓒ $B(3;-4;0)$. Ⓓ $B(-3;-4;-4)$.

Hướng dẫn giải. Gọi $B(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(x-1;y-2;z-3)$.

$\overrightarrow{AB}=\vec{u}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=-4\\y-2=2\\z-3=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\y=4\\z=0\end{cases}\Rightarrow B(-3;4;0)$.

Chọn B.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;3;-1),N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N.

Ⓐ $m=0$. Ⓑ $m=2$. Ⓒ $m=-6$. Ⓓ $m=-2$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{NM}=(3;2;-2)$ và $\overrightarrow{NP}=(2;m-2;1)$.

Tam giác MNP vuông tại N khi $\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NP}=0$.

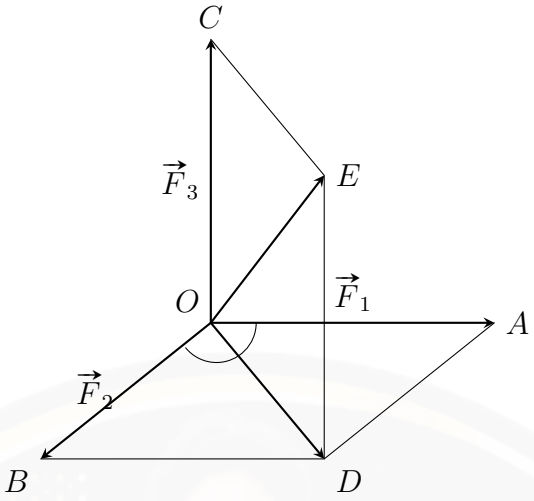
$\Leftrightarrow 3\cdot 2+2(m-2)+(-2)\cdot 1=0\Leftrightarrow 6+2m-4-2=0\Leftrightarrow 2m=0\Leftrightarrow m=0$.

Chọn A.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Bài 1. Một vật nặng O được kéo từ ba hướng như hình vẽ và chịu tác dụng của 3 lực $\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3$, có độ lớn lần lượt là $24\text{N},12\text{N},6\text{N}$. Biết góc tạo bởi 2 lực $\vec{F}_1,\vec{F}_2$ là 120° và lực thứ ba vuông góc

với hai lực đầu tiên.



a) $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}$.

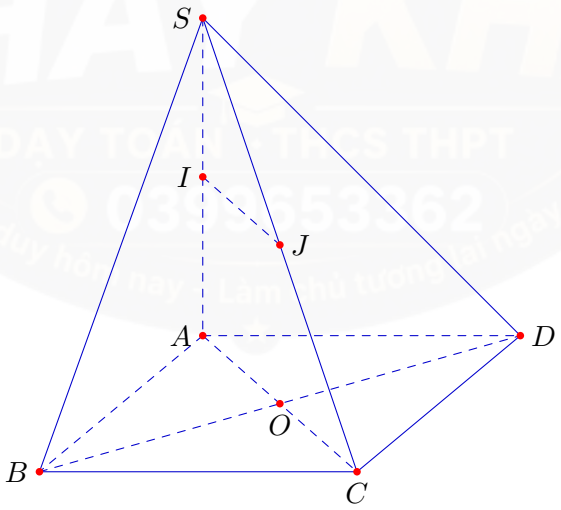
b) $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

c) Độ dài của vectơ $\overrightarrow{OD}$ là $|\overrightarrow{OD}|=12\sqrt{7}$.

d) Độ lớn hợp lực tác dụng vào vật O là $6\sqrt{13}$N.

Hướng dẫn giải. **a) sai:** Theo quy tắc hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}$ là sai, đúng phải là $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$.
b) đúng: Theo quy tắc hình hộp: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}$.
c) sai: Ta có: $|\overrightarrow{OD}|^2=OA^2+OB^2+2OA\cdot OB\cdot\cos 120^\circ=24^2+12^2+2\cdot 24\cdot 12\cdot(-0.5)=432$.
Suy ra: $|\overrightarrow{OD}|=\sqrt{432}=12\sqrt{3}$.
d) đúng: Vì $\overrightarrow{OC}\perp(OADB)$ nên $OE^2=OD^2+OC^2=(12\sqrt{3})^2+6^2=432+36=468$.
Hợp lực: $|\overrightarrow{OE}|=\sqrt{468}=6\sqrt{13}$N.

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của SA,SC. G là trọng tâm tam giác SBD.



a) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$.

b) $\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG}$.

c) $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{BD}=\vec{0}$.

d) $\overrightarrow{AG}^2=\overrightarrow{AS}^2+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2$.

Hướng dẫn giải.

a) đúng: $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$. Do $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$.
b) sai: G là trọng tâm $\triangle SBD \Rightarrow \overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.
c) sai: $IJ//AC$ (đường trung bình), mà $AC\perp BD$ nên $\overrightarrow{IJ}\perp\overrightarrow{BD}\Rightarrow\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{BD}=0$. (Mệnh đề trong hình ghi $\vec{0}\neq 0$ là để chỉ sự nhầm lẫn giữa số và véc tơ).
d) sai: Từ $3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, bình phương lên ta được $9AG^2=AS^2+AB^2+AD^2$ (do các véc tơ đôi một vuông góc).

Bài 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M là giao điểm của CD' và $C'D$.

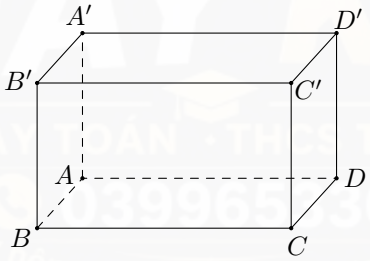
a) $\overrightarrow{DC'}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD'}$.
b) $\overrightarrow{AD'}\cdot\overrightarrow{CC'}=a^2$.
c) $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.
d) Góc giữa $A'C$ và BD là $60°$.

Hướng dẫn giải.

a) đúng: Quy tắc hình bình hành trong mặt phẳng $(DCC'D')$.
b) đúng: $\overrightarrow{AD'}\cdot\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD'}\cdot\overrightarrow{AA'}=|\overrightarrow{AD'}|\cdot|\overrightarrow{AA'}|\cdot\cos 45°=a\sqrt{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=a^2$.
c) đúng: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC'}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'})$.
d) sai: Sử dụng tích vô hướng $\overrightarrow{A'C}\cdot\overrightarrow{BD}=0\Rightarrow$ Góc bằng $90°$.

Bài 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB=a$; $AD=a\sqrt{3}$; $AA'=2a$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{CD'}=\vec{0}$
b) $\overrightarrow{A'D}+\overrightarrow{CB'}=\vec{0}$
c) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=a\sqrt{5}$
d) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{CC'}\right|=2\sqrt{2}a$



Hướng dẫn giải.

a) $\overrightarrow{AB'}$ và $\overrightarrow{CD'}$ không đối nhau nên $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{CD'}\neq\vec{0}$
b) $\overrightarrow{A'D}$ và $\overrightarrow{CB'}$ đối nhau nên $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{CD'}=\vec{0}$
c) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=\sqrt{AB^2+AD^2}=2a$
d) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{CC'}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right|=AC'=\sqrt{AB^2+AD^2+AA^2}=2\sqrt{2}a$

Phần III. Câu trả lời ngắn *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 6 .*

Bài 1. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ vuông góc với nhau và $|\vec{a}|=6, |\vec{b}|=4$. Tính $(\vec{a}-\vec{b})(2\vec{a}+\vec{b})$.

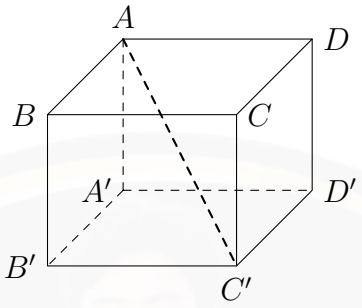
Hướng dẫn giải.

$\vec{a}, \vec{b}$ vuông góc nên $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Ta có $(\vec{a} - \vec{b})(2\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a}^2 + \vec{a}\,\vec{b} - 2\vec{b}\,\vec{a} - \vec{b}^2 = 2\vec{a}^2 - \vec{b}^2 - \vec{a}\,\vec{b} = 2 \cdot 6^2 - 4^2 - 0 = 56$.

Bài 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh $\sqrt{6}$ và các góc $\widehat{BAA'} = \widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = 60°$. Tính độ dài AC'.

Hướng dẫn giải.



Ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Xét $AC'^2 = \overrightarrow{AC'}^2 = \left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)^2$

$= AA'^2 + AB^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

$= 3(\sqrt{6})^2 + 3 \cdot 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cdot \cos 60° = 18 + 18 = 36$.

Vậy $AC' = 6$.

Bài 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;2;1), B(-2;-1;4)$. Tìm được tọa độ điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$. Khi đó $a+b+c=$?

Hướng dẫn giải. Gọi điểm $M(x,y,z)$. Khi đó: $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 = 2(-2-x) \\ y-2 = 2(-1-y) \\ z-1 = 2(4-z) \end{cases} \Leftrightarrow$

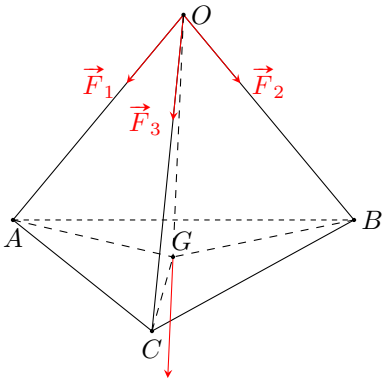
$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 3. \end{cases}$

Vậy $M(0;0;3)$ nên $a+b+c = 3$.

Bài 4. Một giỏ hoa treo trong nhà làm bằng 3 sợi dây không giãn, mỗi sợi dây dài 60 (cm) miếng kê là một miếng gỗ cân đối hình tròn bán kính 20 (cm), ba sợi dây được thắt một đầu bên trên và đỡ giá gỗ tại 3 điểm tạo thành tam giác đều (giả sử mỗi thắt của 3 sợi dây và mỗi nối của mỗi sợi dây với miếng gỗ không đáng kể). Biết lực chịu đựng của mỗi sợi dây bằng nhau và mỗi sợi dây chịu không quá 15 (N) trọng lượng của miếng giá gỗ là 5 (N). Tính trọng lượng tối đa của các chậu hoa để dây treo không bị đứt (đơn vị N, kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Hướng dẫn giải.

Gọi điểm thắt một đầu bên trên là O và 3 điểm nối 3 sợi dây với giá gỗ tạo thành tam giác đều ABC. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.



Vì tam giác ABC đều nên G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Do đó, $GA = GB = GC = 20$ (cm).

Gọi F là độ lớn của các lực căng $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ trên mỗi sợi dây.

Đặt $F = x$ với $0 < x \leq 15$.

Theo bài ra ta có $OA = OB = OC = 60cm$ nên $OG \perp (ABC)$ và $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OC}\right| = 60$.

Do đó, $\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right| = \left|\vec{F}_3\right|$. Từ đó ta có $\vec{F}_1 = \dfrac{x}{60}\overrightarrow{OA}$, $\vec{F}_2 = \dfrac{x}{60}\overrightarrow{OB}$, $\vec{F}_3 = \dfrac{x}{60}\overrightarrow{OC}$.

Suy ra $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \dfrac{x}{60}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \dfrac{3x}{60}\overrightarrow{OG} = \dfrac{x}{20}\overrightarrow{OG}$.

Mặt khác, ta lại có $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{P}$ với $\vec{P}$ là trọng lượng của giá gỗ và các chậu hoa.

Nên ta có $\left|\vec{P}\right| = \dfrac{x}{20}\left|\overrightarrow{OG}\right| = \dfrac{x\sqrt{60^2 - 20^2}}{20} = x\sqrt{8} \leq 15\sqrt{8}$.

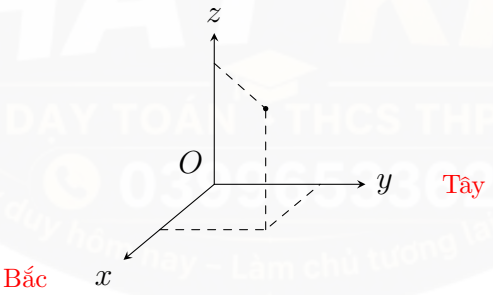
Vậy giá trị lớn nhất trọng lượng giá gỗ và chậu hoa là $\max\left|\vec{P}\right| = 15\sqrt{8}$.

Suy ra trọng lượng tối đa của các chậu hoa để dây treo không bị đứt là $15\sqrt{8} - 5 \approx 37{,}4$ (N).

Bài 5. Hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc $20(km)$ và về phía Tây $10(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,7(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông $30(km)$ và về phía Nam $25(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Xác định khoảng cách giữa hai chiếc máy bay (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Hướng dẫn giải.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



Chiếc máy bay thứ nhất có tọa độ $(20; 10; 0,7)$.

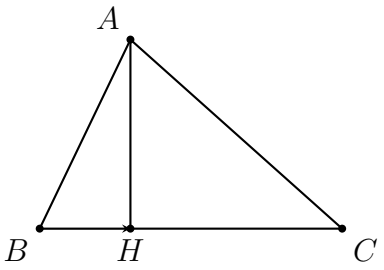
Chiếc máy bay thứ hai có tọa độ $(-30; -25; 1)$.

Do đó khoảng cách giữa hai chiếc máy bay là:

$$d = \sqrt{(20+30)^2 + (10+25)^2 + (0,7-1)^2} = \sqrt{50^2 + 35^2 + (-0,3)^2} \approx 61\,(km)$$

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh $A(2;3;4)$, $B(0;2;2)$ và $C(3;-1;5)$. Điểm $H(a;b;c)$ là chân đường cao đỉnh A. Khi đó giá trị biểu thức $S = a + 2b - 5c$ bằng.

✍ *Hướng dẫn giải.*



+) $\overrightarrow{BC}=(3;-3;3)$; $\overrightarrow{BH}=(a;b-2;c-2)$. Do B,C,H thẳng hàng nên $\overrightarrow{BH}=\frac{t}{3}\overrightarrow{BC}$ hay

$$(a;b-2;c-2)=\frac{t}{3}(3;-3;3)=(t;-t;t)\implies\begin{cases}a=t\\b=2-t\\c=2+t\end{cases}\quad\text{từ đó được } H(t;2-t;2+t)$$

+) $\overrightarrow{AH}=(t-2;-1-t;t-2)$, do H là chân đường cao nên

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AH}=0&\iff 3(t-2)-3(-1-t)+3(t-2)=0\\&\iff (t-2)-(-1-t)+(t-2)=0\\&\iff 3t-3=0\iff t=1\end{aligned}$$

Từ đó $H(1;1;3)$ tính được $S=a+2b-5c=1+2(1)-5(3)=-12$.

THẦY KHA
DẠY TOÁN - THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay - Làm chủ tương lai ngày mai

TOÁN THẦY KHA
ĐỀ SỐ 4
(Đề gồm có 5 trang)

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$. Hỏi có bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{0}$ mà mỗi vectơ có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện $ABCD$?

Ⓐ 12. Ⓑ 4. Ⓒ 10. Ⓓ 8.

Hướng dẫn giải. Số vectơ khác vectơ $\vec{0}$ mà mỗi vectơ có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện $ABCD$ là số các chỉnh hợp chập 2 của 4 phần tử $\Rightarrow$ số vectơ là $A_4^2 = 12$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a} = (2;3;2)$ và $\vec{b} = (1;1;-1)$. Vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ có tọa độ là?

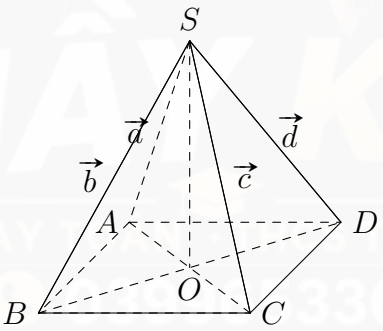
Ⓐ $(3;4;1)$. Ⓑ $(1;2;3)$. Ⓒ $(-1;-2;3)$. Ⓓ $(3;5;1)$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\vec{a} - \vec{b} = (2-1;3-1;2+1) = (1;2;3)$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$; $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\vec{a} + \vec{c} = \vec{d} + \vec{b}$. Ⓑ $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$.
Ⓒ $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$. Ⓓ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

Hướng dẫn giải.



Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$. Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO} \\ \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO} \end{cases}$ (theo tính chất đường trung tuyến) $\Rightarrow \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$.

Câu 4. Cho ba véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng. Xét các véc tơ $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{y} = -4\vec{a} + 2\vec{b}$; $\vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$. Chọn khẳng định đúng?

Ⓐ Hai véc tơ $\vec{y}, \vec{z}$ cùng phương. Ⓑ Hai véc tơ $\vec{x}, \vec{y}$ cùng phương.
Ⓒ Hai véc tơ $\vec{x}, \vec{z}$ cùng phương. Ⓓ Ba véc tơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng.

Hướng dẫn giải. Nhận thấy $\vec{y} = -2\vec{x}$ nên hai véc tơ $\vec{x}, \vec{y}$ cùng phương.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;5;-1), B(7;x;1)$ và $C(9;2;y)$. Để A, B, C thẳng hàng thì giá trị $x+y$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ 6. Ⓒ 4. Ⓓ 7.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;x-5;2)$, $\overrightarrow{AC}=(6;-3;y+1)$. A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{4}{6}=\frac{x-5}{-3}=\frac{2}{y+1}\Leftrightarrow \begin{cases}x-5=-2\\ y+1=3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases}$. Vậy $x+y=5$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;5)$. Hình chiếu vuông góc của A lên trục Ox có tọa độ là

Ⓐ $(1;0;0)$. Ⓑ $(0;-2;0)$. Ⓒ $(0;0;5)$. Ⓓ $(0;-2;5)$.

Hướng dẫn giải. Hình chiếu vuông góc của $A(x;y;z)$ lên trục Ox là $A'(x;0;0)$. Vậy $A'(1;0;0)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;-1),B(-3;2;-2)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

Ⓐ $(5;-3;1)$. Ⓑ $(-5;3;-1)$. Ⓒ $(-5;1;-1)$. Ⓓ $(5;-3;-1)$.

Hướng dẫn giải. $\overrightarrow{AB}=(-3-2;2-(-1);-2-(-1))=(-5;3;-1)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(2;1;-3),B(0;-2;2),C(4;-3;0)$. Tọa độ điểm D là

Ⓐ $(2;0;5)$. Ⓑ $(6;0;-5)$. Ⓒ $(2;0;-5)$. Ⓓ $(6;0;5)$.

Hướng dẫn giải. Gọi $D(x;y;z)$. $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$$\Leftrightarrow (-2;-3;5)=(4-x;-3-y;-z)\Leftrightarrow \begin{cases}x=6\\ y=0\\ z=-5\end{cases}\Rightarrow D(6;0;-5).$$

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}=(2;1;3)$ và $\vec{b}=(-1;2;1)$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}+\vec{b}$ là

Ⓐ $(1;3;4)$. Ⓑ $(-1;3;4)$. Ⓒ $(2;-1;2)$. Ⓓ $(3;-1;2)$.

Hướng dẫn giải. $\vec{a}+\vec{b}=(2-1;1+2;3+1)=(1;3;4)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;4),B(-1;3;2)$ và $C(0;4;-3)$. Trọng tâm G của tam giác ABC là

Ⓐ $G(1;3;1)$. Ⓑ $G(0;3;1)$. Ⓒ $G(0;9;3)$. Ⓓ $G(-1;9;3)$.

Hướng dẫn giải. $x_G=\dfrac{1-1+0}{3}=0;y_G=\dfrac{2+3+4}{3}=3;z_G=\dfrac{4+2-3}{3}=1\Rightarrow G(0;3;1)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=(-4;2;-3)$ và điểm $A(1;2;3)$. Tọa độ điểm B thỏa mãn $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ là

Ⓐ $B(3;2;-4)$. Ⓑ $B(-3;4;0)$.
Ⓒ $B(3;-4;0)$. Ⓓ $B(-3;-4;-4)$.

Hướng dẫn giải. Gọi $B(x;y;z)$, ta có $\overrightarrow{AB}=(x-1;y-2;z-3)$.

$$\overrightarrow{AB}=\vec{u}\Leftrightarrow \begin{cases}x-1=-4\\ y-2=2\\ z-3=-3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=-3\\ y=4\\ z=0\end{cases}\Rightarrow B(-3;4;0).$$

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;3;-1), N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N.

Ⓐ $m=0$. Ⓑ $m=2$. Ⓒ $m=-6$. Ⓓ $m=-2$.

Hướng dẫn giải. $\overrightarrow{NM}=(3;2;-2), \overrightarrow{NP}=(2;m-2;1)$.

Tam giác vuông tại $N \Leftrightarrow \overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NP}=0 \Leftrightarrow 3\cdot 2+2(m-2)-2\cdot 1=0 \Leftrightarrow 2m=0 \Leftrightarrow m=0$.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(8;9;2)$, $B(3;5;1)$ và $C(11;10;4)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điểm D thỏa mãn $ABCD$ là hình bình hành có tọa độ là $D(6;6;3)$.

b) Độ dài trung tuyến AM của tam giác ABC bằng $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

c) $\widehat{BAC}=30^\circ$.

d) Điểm N thuộc mp(Oxy) sao cho ba điểm A,B,N thẳng hàng có tọa độ là $N(-2;1;0)$.

Hướng dẫn giải. **a) Sai.**

Gọi $D(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(-5;-4;-1)$, $\overrightarrow{DC}=(11-x;10-y;4-z)$.

Để $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases}-5=11-x\\-4=10-y\\-1=4-z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=16\\y=14\\z=5\end{cases}$.

Vậy $D(16;14;5)$.

b) Đúng.

Tọa độ trung điểm M của BC là $M\left(7;\dfrac{15}{2};\dfrac{5}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=\left(-1;-\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$. Suy ra $AM=\sqrt{(-1)^2+\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1+\dfrac{9}{4}+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

c) Sai.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-5;-4;-1)$ và $\overrightarrow{AC}=(3;1;2)$.

$\cos\widehat{BAC}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{(-5)\cdot 3+(-4)\cdot 1+(-1)\cdot 2}{\sqrt{25+16+1}\cdot\sqrt{9+1+4}}=\dfrac{-21}{\sqrt{42}\cdot\sqrt{14}}=\dfrac{-21}{14\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\widehat{BAC}=150^\circ$.

d) Đúng.

Vì $N\in(Oxy)$ nên $N(x;y;0)$. Ta có $\overrightarrow{AN}=(x-8;y-9;-2)$ và $\overrightarrow{AB}=(-5;-4;-1)$.

Ba điểm A,B,N thẳng hàng khi $\overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{AB} \Rightarrow \dfrac{x-8}{-5}=\dfrac{y-9}{-4}=\dfrac{-2}{-1}=2$.

$\Rightarrow \begin{cases}x-8=-10\\y-9=-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases}$. Vậy $N(-2;1;0)$.

Bài 2. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=2a, CD=2b$. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AB,CD và $IJ=2c$, M là một điểm bất kỳ và G là trọng tâm của tứ diện. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

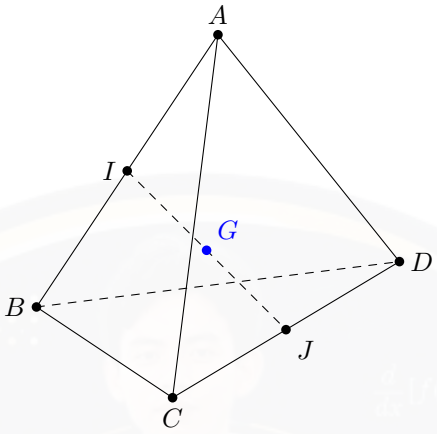
a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.

c) $MA^2+MB^2=2MI^2$.

d) Giá trị nhỏ nhất của $P=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ bằng $2(a^2+b^2+2c^2)$.

Hướng dẫn giải.



a) Đúng.

Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})+(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\vec{0}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

b) Sai.

Vì G là trọng tâm tứ diện nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA})+(\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GA})+(\overrightarrow{GD}-\overrightarrow{GA})=(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD})-3\overrightarrow{GA}$.

Mà $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=-\overrightarrow{GA}$, do đó $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GA}=-4\overrightarrow{GA}=4\overrightarrow{AG}$.

c) Sai.

Ta có $MA^2+MB^2=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2=2MI^2+IA^2+IB^2+2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})$.

Vì I là trung điểm AB nên $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ và $IA=IB=a$.

$\Rightarrow MA^2+MB^2=2MI^2+2a^2$.

d) Đúng.

Tương tự câu c, $MC^2+MD^2=2MJ^2+2b^2$ (với J là trung điểm CD, $JC=JD=b$).

Khi đó $P=2(MI^2+MJ^2)+2a^2+2b^2$.

Vì G là trung điểm IJ (tính chất trọng tâm tứ diện), tương tự ta có $MI^2+MJ^2=2MG^2+2\left(\dfrac{IJ}{2}\right)^2=2MG^2+2c^2$.

$\Rightarrow P=2(2MG^2+2c^2)+2a^2+2b^2=4MG^2+2(a^2+b^2+2c^2)$.

P đạt giá trị nhỏ nhất khi $MG=0\Leftrightarrow M\equiv G$. Khi đó $P_{\min}=2(a^2+b^2+2c^2)$.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(0;0;-1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;0;1)$ và M là điểm sao cho $3MA^2+2MB^2-MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\overrightarrow{AB}=(-1;1;1)$.

b) $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$.

c) Tọa độ điểm D là $(2;-1;0)$.

d) Tọa độ điểm M là $\left(\dfrac{3}{4};-\dfrac{1}{2};1\right)$.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.**

Ta có $A(0;0;-1)$, $B(-1;1;0) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1-0;1-0;0-(-1)) = (-1;1;1)$.

b) Sai.

Ta có $\overrightarrow{AC} = (1-0;0-0;1-(-1)) = (1;0;2)$.

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\cdot AC} = \frac{(-1)\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot 2}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{15}.$$

c) Đúng.

Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 0 = 1-(-1) \\ y_D - 0 = 0-1 \\ z_D + 1 = 1-0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = -1 \\ z_D = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$D(2;-1;0)$.

d) Sai.

Gọi $M(x;y;z)$, ta có:

$AM^2 = x^2+y^2+(z+1)^2$;

$BM^2 = (x+1)^2+(y-1)^2+z^2$;

$CM^2 = (x-1)^2+y^2+(z-1)^2$.

Xét biểu thức $P = 3MA^2+2MB^2-MC^2$:

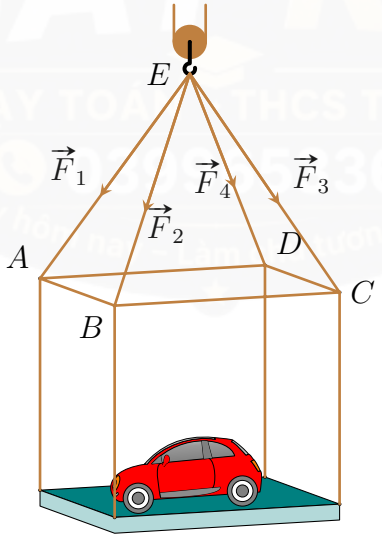
$P = 3[x^2+y^2+(z+1)^2]+2[(x+1)^2+(y-1)^2+z^2]-[(x-1)^2+y^2+(z-1)^2]$

$P = 4x^2+4y^2+4z^2+6x-4y+8z+6$

$P = \left(2x+\frac{3}{2}\right)^2+(2y-1)^2+(2z+2)^2-\frac{9}{4}-\frac{9}{4} \geq -\frac{9}{4}$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = -\frac{3}{4}, y = \frac{1}{2}, z = -1$. Vậy $M\left(-\frac{3}{4};\frac{1}{2};-1\right)$.

Bài 4. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng $60°$. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ đều có cường độ là 4500 N và trọng lượng của khung sắt là 2900 N. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:



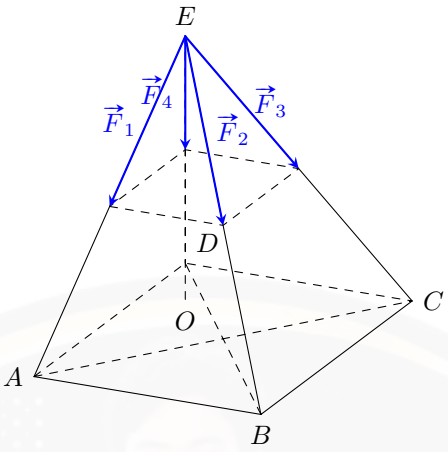
a) $\vec{F}_1+\vec{F}_2 = \vec{F}_3+\vec{F}_4$.

b) $\vec{F}_1+\vec{F}_3 = \vec{F}_2+\vec{F}_4$.

c) $|\vec{F}_1+\vec{F}_3| = 8000$ N (làm tròn đến hàng đơn vị).

d) Trọng lượng của chiếc xe ô tô là 12688 N (làm tròn đến hàng đơn vị).

Hướng dẫn giải.



Lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt trên các tia EA, EB, EC, ED sao cho $\overrightarrow{EM} = \vec{F}_1, \overrightarrow{EN} = \vec{F}_2, \overrightarrow{EP} = \vec{F}_3, \overrightarrow{EQ} = \vec{F}_4$. Do các lực căng đều có cường độ 4500 N nên $EM = EN = EP = EQ = 4500$.

a) Sai.

Ta có $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN} = 2\overrightarrow{EH}$, với H là trung điểm MN.

$\vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \overrightarrow{EP} + \overrightarrow{EQ} = 2\overrightarrow{EK}$, với K là trung điểm PQ.

Hai véc tơ này ngược hướng nhau nên không bằng nhau.

b) Đúng.

Ta có $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EP} = 2\overrightarrow{EO}$, với O là trung điểm của MP (cũng là tâm đáy).

$\vec{F}_2 + \vec{F}_4 = \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{EQ} = 2\overrightarrow{EO}$, với O là trung điểm của NQ.

Suy ra $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_2 + \vec{F}_4 = 2\overrightarrow{EO}$.

c) Sai.

$|\vec{F}_1 + \vec{F}_3| = 2EO$. Theo giả thiết, góc giữa dây cáp và đáy là $60°$, suy ra $\widehat{EMO} = 60°$.

Xét $\triangle EMO$ vuông tại O, ta có $EO = EM \cdot \sin 60° = 4500 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2250\sqrt{3}$.

Vậy $|\vec{F}_1 + \vec{F}_3| = 2 \cdot 2250\sqrt{3} = 4500\sqrt{3} \approx 7794$ N.

d) Đúng.

Tổng lực kéo lên là $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4| = |4\overrightarrow{EO}| = 4 \cdot 2250\sqrt{3} = 9000\sqrt{3} \approx 15588$ N.

Đây là tổng trọng lượng của ô tô và khung sắt.

Vậy trọng lượng ô tô là $15588 - 2900 = 12688$ N.

Phần III. Câu trả lời ngắn *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 6 .*

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; -2; -1), B(1; -1; 2)$. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc đoạn thẳng AB thỏa mãn $MA = 2MB$. Tính giá trị của biểu thức $T = a - b + c$?

Hướng dẫn giải.

Do điểm $M(a; b; c)$ thuộc đoạn thẳng AB thỏa mãn $MA = 2MB$ nên $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$.

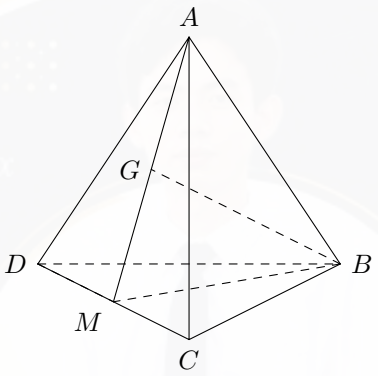
Ta có: $\overrightarrow{MA} = (-a; -2 - b; -1 - c)$ và $\overrightarrow{MB} = (1 - a; -1 - b; 2 - c)$.

Khi đó ta có: $\begin{cases} -a=-2(1-a) \\ -2-b=-2(-1-b) \\ -1-c=-2(2-c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2}{3} \\ b=-\dfrac{4}{3} \\ c=1 \end{cases}$.

Vậy $T=a-b+c=\dfrac{2}{3}-\left(-\dfrac{4}{3}\right)+1=3$.

Bài 2. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của CD; G là trung điểm của AM biết $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{AC}=na^2$ (n là số thập phân). Giá trị của n bằng. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Hướng dẫn giải.



Xét tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a, ta có: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA}=a\cdot a\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{a^2}{2}$.

Do M là trung điểm của CD; G là trung điểm của AM nên ta có:

$\overrightarrow{BG}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM})=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}\right)$.

Khi đó: $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BD}\right)(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{a^2}{8}+\dfrac{a^2}{8}-\dfrac{a^2}{8}=-\dfrac{a^2}{8}$.

Vậy $n=-0,125\approx -0,1$.

Bài 3. Trong hệ trục tọa độ $(Oxyz)$, một thiết bị âm thanh được phát từ vị trí $A(1;5;8)$. Người ta dự định đặt một máy thu tín hiệu trên mặt phẳng (Oxy). Biết máy thu đặt ở vị trí $M(a;b;c)$ sẽ nhận được tín hiệu sớm nhất. Khi đó $a+2b+3c$ bằng.

Hướng dẫn giải.

Người ta đặt máy thu trên mặt phẳng (Oxy) sao cho nhận được tín hiệu sớm nhất nên bài toán trở thành: Tìm $M\in(Oxy)$ sao cho MA đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oxy). Do đó $M(1;5;0)$.

Vậy $a+2b+3c=1+2\cdot 5+3\cdot 0=11$.

Bài 4. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau một góc 120°. Biết rằng $|\vec{a}|=4;|\vec{b}|=3$, tính giá trị của biểu thức $A=|\vec{a}-\vec{b}|+|\vec{a}+\vec{b}|$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Hướng dẫn giải.

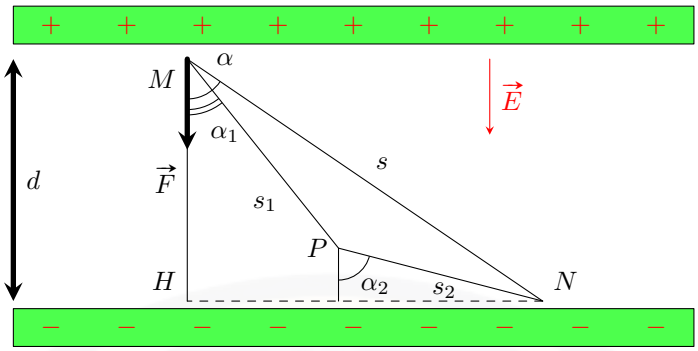
Ta có: $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=16-2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 120^\circ+9=37$.

Tương tự $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=16+2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 120^\circ+9=13$.

Do đó $A=|\vec{a}-\vec{b}|+|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{37}+\sqrt{13}\approx 9,69$.

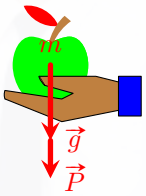
Vậy $P=a+b+c=50(\cos 43^\circ\cdot\cos 65^\circ+\cos 43^\circ\cdot\cos 25^\circ+\sin 43^\circ)\approx 82,7$.

Bài 5. Một lực tĩnh điện $\vec{F}$ tác động lên điện tích điểm M trong điện trường đều làm cho M dịch chuyển theo đường gấp khúc MNP (Hình vẽ). Biết $q = 2 \cdot 10^{-12}$ C, vectơ điện trường có độ lớn $E = 1{,}8 \cdot 10^5$ N/C và $d = MH = 5$ mm. Tính công A sinh bởi lực tĩnh điện $\vec{F}$.



Hướng dẫn giải. Công A sinh bởi lực tĩnh điện $\vec{F}$ là $A = 2 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}8 \cdot 10^5 \cdot 5 = 18 \cdot 10^{-7}$ J.

Bài 6. Nếu một vật có khối lượng m (kg) thì lực hấp dẫn $\vec{P}$ của Trái Đất tác dụng lên vật được xác định theo công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, trong đó $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9{,}8$ m/s^2. Tính độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên một quả táo có khối lượng 102 gam (Hình 27)



Hướng dẫn giải. Đổi đơn vị 102 gam $= 102 \cdot 10^{-3}$ kg $= 0{,}102$ kg.

Từ công thức $\vec{P} = m\vec{g}$ suy ra $|\vec{P}| = m|\vec{g}|$

$= 0{,}102 \cdot 9{,}8$

$= 0{,}9996$ N.

Vậy độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên quả táo xấp xỉ 1 N.

THẦY KHA
DẠY TOÁN - THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay - Làm chủ tương lai ngày mai

TOÁN THẦY KHA
ĐỀ SỐ 5
(Đề gồm có 5 trang)

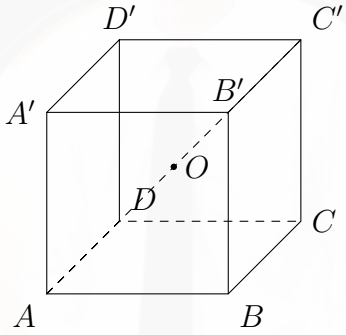
ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.
Ⓑ $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.
Ⓒ $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.
Ⓓ $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

Hướng dẫn giải.



Theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.
Vì O là tâm hình lập phương nên O là trung điểm đường chéo $AC' \Rightarrow \overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

Câu 2. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

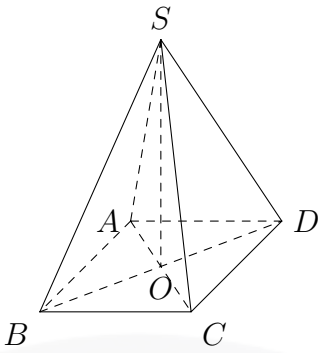
Ⓐ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.
Ⓑ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.
Ⓒ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$.
Ⓓ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

Hướng dẫn giải. Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng nên góc giữa chúng bằng $0^\circ \Rightarrow \cos(\vec{a},\vec{b})=1$.
Theo định nghĩa tích vô hướng: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a},\overrightarrow{SB}=\vec{b},\overrightarrow{SC}=\vec{c},\overrightarrow{SD}=\vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$.
Ⓑ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.
Ⓒ $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$.
Ⓓ $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$.

✍ *Hướng dẫn giải.*

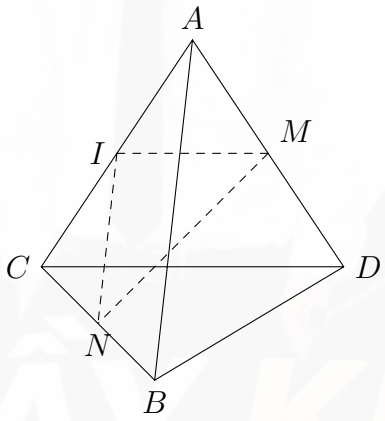


Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Theo tính chất đường trung tuyến trong các tam giác SAC và SBD, ta có: $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}$ và $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$.
Từ đó suy ra $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}\Leftrightarrow\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$.

Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=2a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết $MN=\sqrt{3}a$, góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ bằng

Ⓐ 30°. Ⓑ 60°. Ⓒ 90°. Ⓓ 120°.

✍ *Hướng dẫn giải.*



Gọi I là trung điểm của AC. Ta có IM là đường trung bình $\triangle ACD\Rightarrow IM//CD, IM=\dfrac{1}{2}CD=a$.
IN là đường trung bình $\triangle ABC\Rightarrow IN//AB, IN=\dfrac{1}{2}AB=a$.
Khi đó góc giữa $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=(\overrightarrow{IN},\overrightarrow{IM})=\widehat{MIN}$.
Xét $\triangle MIN$ có $IM=a, IN=a, MN=a\sqrt{3}$. Áp dụng hệ quả định lý côsin: $\cos\widehat{MIN}=\dfrac{IM^2+IN^2-MN^2}{2IM\cdot IN}=\dfrac{a^2+a^2-3a^2}{2\cdot a\cdot a}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{MIN}=120^\circ$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$ thỏa mãn $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$. Tọa độ của $\vec{a}$ là

Ⓐ $(2;1;-3)$. Ⓑ $(2;-3;1)$. Ⓒ $(-3;1;2)$. Ⓓ $(1;2;-3)$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Trong không gian $Oxyz$, nếu $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ thì tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là $(x;y;z)$.
Với $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+1\vec{k}$, ta có tọa độ $\vec{a}=(2;-3;1)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;5)$. Hình chiếu vuông góc của A lên trục Ox có tọa độ là

Ⓐ $(1;0;0)$. Ⓑ $(0;-2;0)$. Ⓒ $(0;0;5)$. Ⓓ $(0;-2;5)$.

Hướng dẫn giải. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(x;y;z)$ lên trục Ox là điểm có tọa độ $(x;0;0)$.
Vậy với $A(1;-2;5)$, hình chiếu lên Ox là $A'(1;0;0)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;-1), B(-3;2;-2)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

Ⓐ $(5;-3;1)$. Ⓑ $(-5;3;-1)$. Ⓒ $(-5;1;-1)$. Ⓓ $(5;-3;-1)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)=(-3-2;2-(-1);-2-(-1))=(-5;3;-1)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(2;1;-3), B(0;-2;2), C(4;-3;0)$. Tọa độ điểm D là

Ⓐ $(2;0;5)$. Ⓑ $(6;0;-5)$. Ⓒ $(2;0;-5)$. Ⓓ $(6;0;5)$.

Hướng dẫn giải. Gọi $D(x_0;y_0;z_0)$. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;-3;5)$ và $\overrightarrow{DC}=(4-x_0;-3-y_0;-z_0)$.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}4-x_0=-2\\-3-y_0=-3\\-z_0=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=6\\y_0=0\\z_0=-5\end{cases}.$$ Vậy $D(6;0;-5)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}=(2;1;3)$ và $\vec{b}=(-1;2;1)$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}+\vec{b}$ là

Ⓐ $(1;3;4)$. Ⓑ $(-1;3;4)$. Ⓒ $(2;-1;2)$. Ⓓ $(3;-1;2)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{a}+\vec{b}=(2+(-1);1+2;3+1)=(1;3;4)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;4), B(-1;3;2)$ và $C(0;4;-3)$. Trọng tâm G của tam giác ABC là

Ⓐ $G(1;3;1)$. Ⓑ $G(0;3;1)$. Ⓒ $G(0;9;3)$. Ⓓ $G(-1;9;3)$.

Hướng dẫn giải. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là: $x_G=\dfrac{1-1+0}{3}=0;\quad y_G=\dfrac{2+3+4}{3}=3;\quad z_G=\dfrac{4+2-3}{3}=1$.
Vậy $G(0;3;1)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=(-4;2;-3)$ và điểm $A(1;2;3)$. Tọa độ điểm B thỏa mãn $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ là

Ⓐ $B(3;2;-4)$. Ⓑ $B(-3;4;0)$.
Ⓒ $B(3;-4;0)$. Ⓓ $B(-3;-4;-4)$.

Hướng dẫn giải. Gọi $B(x;y;z)$, ta có $\overrightarrow{AB}=(x-1;y-2;z-3)$.

$$\overrightarrow{AB}=\vec{u}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=-4\\y-2=2\\z-3=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\y=4\\z=0\end{cases}\Rightarrow B(-3;4;0).$$

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;3;-1), N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N.

Ⓐ $m=0$. Ⓑ $m=2$. Ⓒ $m=-6$. Ⓓ $m=-2$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{NM}=(3;2;-2)$ và $\overrightarrow{NP}=(2;m-2;1)$.

Tam giác MNP vuông tại $N \Leftrightarrow \overrightarrow{NM}\perp\overrightarrow{NP} \Leftrightarrow \overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NP}=0$.

$\Leftrightarrow 3\cdot 2+2(m-2)+(-2)\cdot 1=0 \Leftrightarrow 6+2m-4-2=0 \Leftrightarrow 2m=0 \Leftrightarrow m=0$.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Bài 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AC'}$.

b) $\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{AC'}$.

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{AC'}$.

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{AC'}$.

Hướng dẫn giải. a) **Đúng.** Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

b) **Sai.** Do $\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{A'C'}+\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{A'C}$.

c) **Sai.** Do $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{A'A}=(\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{A'D}$.

d) **Sai.** Do $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{A'A}=(\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{A'C}$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(8;9;2)$, $B(3;5;1)$ và $C(11;10;4)$.

a) Điểm D thỏa mãn $ABCD$ là hình bình hành có tọa độ là $D(6;6;3)$.

b) Độ dài trung tuyến AM của tam giác ABC bằng $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

c) $\widehat{BAC}=30^\circ$.

d) Điểm N thuộc mp(Oxy) sao cho ba điểm A,B,N thẳng hàng có tọa độ là $N(-2;1;0)$.

Hướng dẫn giải.

a) **Sai.** Gọi $D(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(-5;-4;-1)$, $\overrightarrow{DC}=(11-x;10-y;4-z)$.

Để $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}-5=11-x\\-4=10-y\\-1=4-z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=16\\y=14\\z=5\end{cases}$. Vậy $D(16;14;5)$.

b) **Đúng.** Tọa độ trung điểm M của BC là $M\left(7;\dfrac{15}{2};\dfrac{5}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=\left(-1;-\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$. Suy ra $AM=\sqrt{(-1)^2+\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

c) **Sai.** Ta có $\overrightarrow{AB}=(-5;-4;-1)$; $\overrightarrow{AC}=(3;1;2)$.

Ta có $\cos\widehat{BAC}=\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\cdot AC}=\dfrac{(-5)\cdot 3+(-4)\cdot 1+(-1)\cdot 2}{\sqrt{(-5)^2+(-4)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2+2^2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\widehat{BAC}=150^\circ$.

d) **Đúng.** Vì $N\in(Oxy)$ nên $N(x;y;0)$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(-5;-4;-1)$; $\overrightarrow{AN}=(x-8;y-9;-2)$.

Vì 3 điểm A,B,N thẳng hàng nên $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AN}$. Khi đó:

$$\begin{cases}\dfrac{x-8}{-5}=2\\\dfrac{y-9}{-4}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-8=-10\\y-9=-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases}.$$ Vậy $N(-2;1;0)$.

Bài 3. Cho ba điểm $A(3;3;-6)$, $B(1;3;2)$ và $C(-1;-3;1)$. Gọi M,N,K lần lượt là trung điểm của AB,BC và CA.

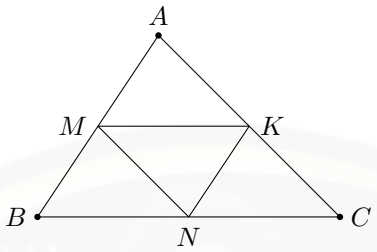
a) Tọa độ $M(2;3;2)$.

b) Với G là trọng tâm tam giác ABC thì $GC = 2\sqrt{5}$.

c) Trọng tâm tam giác MNK là $E(1;1;-1)$.

d) Với $D(-3;-3;9)$ thì tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.

Hướng dẫn giải.



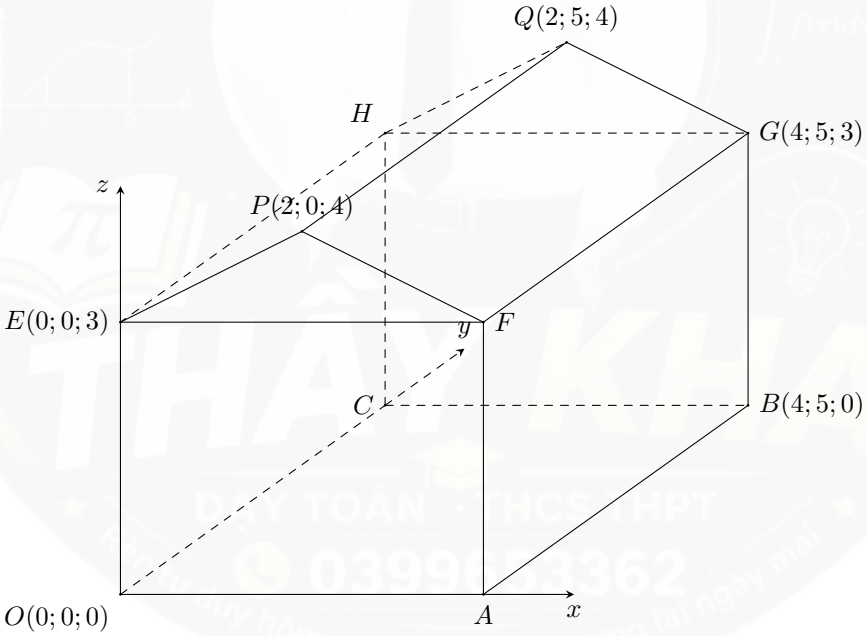
a) **Sai:** M là trung điểm của AB, suy ra $M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$ hay $M(2;3;-2)$.

b) **Sai:** Ta có $G(1;1;-1)$. Suy ra $GC = \sqrt{(-1-1)^2+(-3-1)^2+(1+1)^2} = 2\sqrt{6}$.

c) **Đúng:** Hai tam giác ABC và MNK có cùng trọng tâm. Suy ra E trùng với $G(1;1;-1)$.

d) **Đúng:** Ta có $\overrightarrow{AC} = (-4;-6;7)$, $\overrightarrow{BD} = (-4;-6;7)$ suy ra $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Bài 4. Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



a) Tọa độ của các điểm $A(5;0;0)$.

b) Tọa độ của các điểm $H(0;5;3)$.

c) Góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG, hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ gọi là góc dốc của mái nhà. Số đo của góc dốc của mái nhà bằng $26,6°$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).

d) Chiều cao của ngôi nhà là 4.

Hướng dẫn giải.

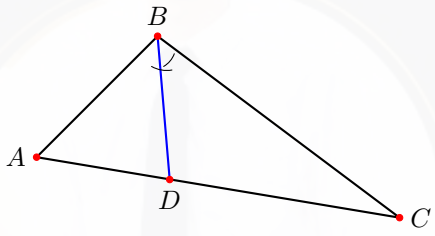
a) **Sai:** Vì nền nhà là hình chữ nhật nên tứ giác $OABC$ là hình chữ nhật, suy ra $x_A = x_B = 4, y_C = y_B = 5$. Do A nằm trên trục Ox nên tọa độ điểm A là $(4;0;0)$.

b) **Sai:** Tường nhà là hình chữ nhật, suy ra $y_H = y_C = 5, z_H = z_E = 3$. Do H nằm trên mặt phẳng (Oyz) nên tọa độ điểm H là $(0;5;3)$.
c) **Sai:** Để tính góc dốc của mái nhà, ta đi tính số đo góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG, hai mặt phẳng lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$. Do mặt phẳng (Ozx) vuông góc với hai mặt phẳng $(FGQP)$ và $(FGHE)$ nên góc $\widehat{PFE}$ là góc phẳng nhị diện ứng với góc nhị diện đó. Ta có $\overrightarrow{FP} = (-2;0;1)$, $\overrightarrow{FE} = (-4;0;0)$. Suy ra $\cos\widehat{PFE} = \cos(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FE}) = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. Do đó, $\widehat{PFE} \approx 26,6°$. Vậy góc dốc của mái nhà khoảng $26,6°$.
d) **Sai:** Chiều cao bằng cao độ của điểm P suy ra $h = 4$.

Phần III. Câu trả lời ngắn *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 6 .*

Bài 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Gọi D là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC. Độ dài đoạn $AD = \dfrac{\sqrt{a}}{3}$, giá trị của a là?

Hướng dẫn giải.



Ta có $AB = \sqrt{26}$, $BC = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$.
Gọi $D(x;y;z)$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC, theo tính chất phân giác ta có $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{1}{2}$. Suy ra $\overrightarrow{DA} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ (*).
Ta có $\overrightarrow{DA} = (1-x;2-y;-1-z)$ và $\overrightarrow{DC} = (-4-x;7-y;5-z)$.

Do đó (*) $\Rightarrow \begin{cases} 1-x = -\dfrac{1}{2}(-4-x) \\ 2-y = -\dfrac{1}{2}(7-y) \\ -1-z = -\dfrac{1}{2}(5-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{11}{3} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow D\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{11}{3};1\right)$.

$\overrightarrow{AD} = \left(-\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{3};2\right)$.

Vậy $AD = \dfrac{\sqrt{86}}{3} = \dfrac{\sqrt{a}}{3} \Rightarrow a = 86$.

Bài 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $C(4;0;0)$ và $B(2;0;0)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho diện tích tam giác MBC bằng 3.

Hướng dẫn giải. Vì M thuộc trục tung nên: $M(0;y_M;0)$. Ta có: $\overrightarrow{BM} = (-2;y_M;0)$; $\overrightarrow{BC} = (2;0;0)$.
Khi đó: $\left[\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}\right] = (0;0;-2y_M)$.
Diện tích hình bình hành $ABCD$ là: (Dựa theo ảnh gốc: thực tế là diện tích tam giác MBC)
$S_{MBC} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}\right]\right| \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sqrt{4y_M^2} = 3 \Leftrightarrow |y_M| = 3 \Leftrightarrow y_M = \pm 3$.

Bài 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(2;-1;1)$, $B(3;0;-1)$, $C(2;-1;3)$, $D \in Oy$ và thể tích tứ diện $ABCD$ bằng 5. Tổng tung độ của các điểm D thỏa mãn yêu cầu bài toán bằng

Hướng dẫn giải. Do $D \in Oy \Rightarrow D(0;y;0)$.

Khi đó $\overrightarrow{DA}=(2;-1-y;1)$, $\overrightarrow{DB}=(3;-y;-1)$, $\overrightarrow{DC}=(2;-1-y;3)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right]=(1+2y;5;y+3)$.

$\left[\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right]\cdot\overrightarrow{DC}=2+4y-5-5y+3y+9=2y+6$.

Và $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right]\cdot\overrightarrow{DC}\right|=5\Leftrightarrow\begin{cases}2y+6=30\\2y+6=-30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=12\\y=-18\end{cases}$.

Vậy $y_1+y_2=12-18=-6$.

Bài 4. Có hai trạm thu phát sóng tín hiệu mặt đất đặt ở hai điểm O, A và vệ tinh thu phát tín hiệu tại ở vị trí M, biết vệ tinh di chuyển luôn cách mặt đất 35000km. Tín hiệu tại O phát lên vệ tinh M rồi truyền đến trạm thu tại A. Xét hệ trục $Oxyz$ được chọn thỏa $O(0;0;0)$, $A(30;40;0)$, $M(x;y;35)$ (đơn vị tọa độ là ngàn km). Biết vận tốc trung bình truyền tín hiệu giữa vệ tinh với trạm thu phát khoảng 270000km/s. Một tín hiệu phát từ O đến M, rồi truyền về A mất ít nhất bao nhiêu giây (làm tròn đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải. Ta có, độ dài quãng đường truyền tín hiệu

$T=OM+MA=\sqrt{x^2+y^2+35^2}+\sqrt{(30-x)^2+(40-y)^2+35^2}$

$\geq\sqrt{(x+30-x)^2+(y+40-y)^2+(35+35)^2}=10\sqrt{74}$ (ngàn km).

Thời gian ít nhất để A nhận được tín hiệu từ O là: $\dfrac{10\sqrt{74}}{270}\approx 0,32$ (s).

Bài 5. Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của bốn lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học. Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ 900 km/h lên 920 km/h, trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản không khí khi máy bay đạt vận tốc 900 km/h và 920 km/h lần lượt được biểu diễn bởi hai vectơ $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$. Biết $\vec{F}_1=k\vec{F}_2$ với k là một số thực dương nào đó. Tính giá trị của k (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Hướng dẫn giải.

Vì trong quá trình máy bay tăng vận tốc từ 900 km/h lên 920 km/h máy bay giữ nguyên hướng bay nên vectơ $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ có cùng hướng. Do đó, $\vec{F}_1=k\vec{F}_2$ với k là một số thực dương nào đó (1).

Gọi v_1, v_2 lần lượt là vận tốc của chiếc máy bay khi đạt 900 km/h và 920 km/h.

Suy ra $v_1=900$(km/h), $v_2=920$(km/h).

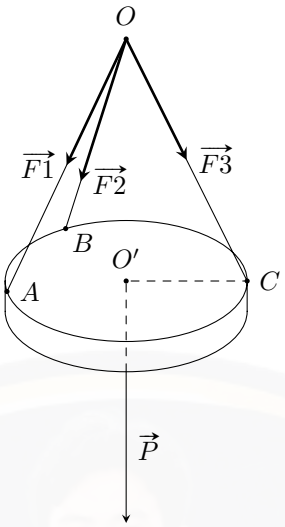
Vì lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay nên

$\dfrac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}_2|}=\dfrac{v_1^2}{v_2^2}=\dfrac{900^2}{920^2}=\dfrac{2025}{2116}\Rightarrow|\vec{F}_1|=\dfrac{2025}{2116}|\vec{F}_2|$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $\vec{F}_1=\dfrac{2025}{2116}\vec{F}_2\Rightarrow k=\dfrac{2025}{2116}\approx 0,96$.

Bài 6. Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn, xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và

$|\overrightarrow{F_1}| = |\overrightarrow{F_2}| = |\overrightarrow{F_3}| = 15$ (N). Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.

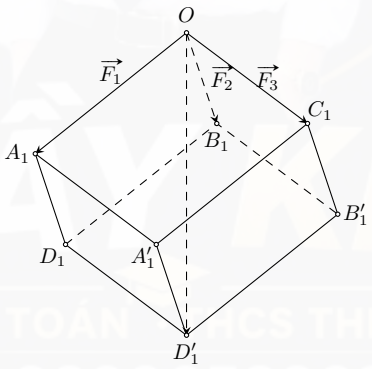


Hướng dẫn giải.

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{F_3}$.
Lấy các điểm D_1, A_1', B_1', D_1' sao cho $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1'B_1'$ là hình hộp.
Khi đó áp dụng quy tắc hình hộp, ta có:

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OD_1'}.$$

Mặt khác, do các lực căng $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ đôi một vuông góc và $|\overrightarrow{F_1}| = |\overrightarrow{F_2}| = |\overrightarrow{F_3}| = 15$ (N) nên hình hộp $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1'B_1'$ có ba cạnh OA_1, OB_1, OC_1 bằng nhau và đôi một vuông góc. Vì thế hình hộp đó là hình lập phương có độ dài cạnh bằng 15. Suy ra độ dài đường chéo OD_1' của hình lập phương đó bằng $15\sqrt{3}$.



Do chiếc đèn treo ở vị trí cân bằng nên $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{P}$, ở đó $\overrightarrow{P}$ là trọng lực tác dụng lên chiếc đèn. Suy ra trọng lượng chiếc đèn là $|\overrightarrow{P}| = |\overrightarrow{OD_1'}| = 15\sqrt{3}$ (N).

TOÁN THẦY KHA
ĐỀ SỐ 6
(Đề gồm có 5 trang)

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Toạ độ của vectơ $\vec{a}$ là

Ⓐ $(2;-1;-3)$. Ⓑ $(-3;2;-1)$. Ⓒ $(-1;2;-3)$. Ⓓ $(2;-3;-1)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{a} = -1\cdot\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k} \Rightarrow$ Toạ độ của vectơ $\vec{a} = (-1;2;-3)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;-1;3)$. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các mặt phẳng toạ độ $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$. Tìm toạ độ các điểm A_1, A_2, A_3.

Ⓐ $A_1(-2;-1;0), A_2(0;-1;3), A_3(-2;0;3)$.
Ⓑ $A_1(-2;0;3), A_2(0;-1;3), A_3(-2;-1;0)$.
Ⓒ $A_1(-2;-1;0), A_2(-2;0;3), A_3(0;-1;3)$.
Ⓓ $A_1(-2;0;3), A_2(0;-1;3), A_3(-2;1;0)$.

Hướng dẫn giải. Hình chiếu của điểm $A(-2;-1;3)$ trên các mặt phẳng toạ độ là:
Trên (Oxy) là $A_1(-2;-1;0)$.
Trên (Oyz) là $A_2(0;-1;3)$.
Trên (Ozx) là $A_3(-2;0;3)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2;-2;-4)$ và $\vec{b} = (1;-1;1)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

Ⓐ $\vec{a} + \vec{b} = (3;-3;-3)$. Ⓑ $\vec{a} \perp \vec{b}$.
Ⓒ $|\vec{b}| = \sqrt{3}$. Ⓓ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

Hướng dẫn giải. Vì $\dfrac{2}{1} = \dfrac{-2}{-1} \neq \dfrac{-4}{1}$ nên $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Do đó mệnh đề D sai.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (1;1;-1)$ và điểm $B(2;3;2)$. Tìm toạ độ điểm C sao cho $\overrightarrow{BC} = \vec{u}$.

Ⓐ $(3;4;1)$. Ⓑ $(-3;-2;-1)$.
Ⓒ $(3;2;1)$. Ⓓ $(2;3;1)$.

Hướng dẫn giải. Gọi $C(a;b;c) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (a-2;b-3;c-2) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2=1 \\ b-3=1 \\ c-2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a=3 \\ b=4 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow C(3;4;1).$$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1;2;3)$, $\vec{b} = (4;5;6)$. Toạ độ $\vec{a} + \vec{b}$ là

Ⓐ $(3;3;3)$. Ⓑ $(2;5;9)$. Ⓒ $(5;7;9)$. Ⓓ $(4;10;18)$.

Hướng dẫn giải. $\vec{a} + \vec{b} = (1+4;2+5;3+6) = (5;7;9)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ và điểm A. Biết $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$. Tìm toạ độ điểm A.

Ⓐ $(3;4;-5)$. Ⓑ $(3;4;5)$. Ⓒ $(-3;-4;5)$. Ⓓ $(-3;4;5)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{u} = (3;4;-5) = \overrightarrow{OA} \Rightarrow A(3;4;-5)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;5;-2), B(1;1;3), C(3;3;-1)$. Tìm toạ độ điểm E sao cho C là trọng tâm của tam giác ABE.

Ⓐ $(6;3;4)$. Ⓑ $(6;3;-4)$.
Ⓒ $(6;-3;-4)$. Ⓓ $(-6;-3;-4)$.

Hướng dẫn giải. Gọi $E(x;y;z)$. Vì C là trọng tâm của tam giác ABE nên

$$\begin{cases} \dfrac{2+1+x}{3} = 3 \\ \dfrac{5+1+y}{3} = 3 \\ \dfrac{-2+3+z}{3} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \\ z = -4 \end{cases} \Rightarrow E(6;3;-4).$$

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (2; m-1; 3)$, $\vec{b} = (1; 3; -2n)$. Tìm m, n để các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng.

Ⓐ $m = 7, n = -\dfrac{3}{4}$. Ⓑ $m = 1, n = 0$.
Ⓒ $m = 7, n = -\dfrac{4}{3}$. Ⓓ $m = 4, n = -3$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \exists k > 0$ sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

Từ đó, suy ra $\begin{cases} 2 = k \cdot 1 \\ m - 1 = 3k \\ 3 = -2nk \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ m - 1 = 6 \\ 3 = -4n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 > 0 \\ m = 7 \\ n = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$.

Câu 9. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, |\vec{a} + \vec{b}| = 6$. Tính $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Ⓐ $\sqrt{14}$. Ⓑ $\sqrt{11}$. Ⓒ $2\sqrt{3}$. Ⓓ 3.

Hướng dẫn giải. Ta có: $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\,\vec{b} + |\vec{b}|^2 \Rightarrow 2\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 6^2 - 3^2 - 4^2 = 11$.
$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\,\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 9 - 11 + 16 = 14 \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{14}$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;3), B(-2;0;1), C(-1;0;1)$. Tính $\cos \widehat{ABC}$.

Ⓐ $\dfrac{3}{\sqrt{17}}$. Ⓑ $\dfrac{-3}{\sqrt{17}}$. Ⓒ $\dfrac{7}{\sqrt{17}}$. Ⓓ $\dfrac{3}{17}$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\overrightarrow{BA} = (3;2;2), \overrightarrow{BC} = (1;0;0) \longrightarrow \cos \widehat{ABC} = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{3}{\sqrt{17}}$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (1;0;-2)$; $\vec{b} = (-1;1;4)$, $\vec{u} = (-5;3;16)$. Tìm cặp số $(x;y)$ để $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Ⓐ $(x;y) = (2;-3)$. Ⓑ $(x;y) = (-2;3)$.
Ⓒ $(x;y) = (2;3)$. Ⓓ $(x;y) = (2;-1)$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$ nên $\begin{cases} x - y = -5 \\ y = 3 \\ -2x + 4y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow (x; y) = (-2; 3)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -1), B(2; 1; 2)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

Ⓐ $\sqrt{10}$. Ⓑ $\sqrt{14}$. Ⓒ 9. Ⓓ 10.

Hướng dẫn giải. Ta có $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (1-1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{10}$.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Bài 1. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = a\sqrt{2}$.

a) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

b) Gọi M là trung điểm BC và $\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{CM}$.

c) $\overrightarrow{A'M} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

d) Góc giữa vectơ $\overrightarrow{AB'}$ và $\overrightarrow{BC'}$ bằng $60°$.

Hướng dẫn giải.

a) Đúng. Đây là quy tắc cộng vectơ cơ bản.

b) Đúng. Ta có: $\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{A'M}$.

c) Sai. Ta có: $\overrightarrow{A'M} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AM}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'A} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 + AM \cdot AC \cdot \cos 30° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a^2}{4}$.

d) Đúng. Ta có: $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}\right)\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CC'}$

$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + 0 + 0 + 2a^2 = -\dfrac{a^2}{2} + 2a^2 = \dfrac{3a^2}{2}$.

Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'}}{\left|\overrightarrow{AB'}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC'}\right|} = \dfrac{\frac{3a^2}{2}}{a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}\right) = 60°$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 1), B(-1; 2; 1), C(1; 2; -1)$.

a) $\overrightarrow{AB} = (2; -1; 0)$.

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (0; 1; -2)$.

c) $AB = 5$.

d) $\left|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}\right| = 2\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải.

a) Sai vì $\overrightarrow{AB} = (-2; 1; 0)$.

b) Đúng vì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = (0; 1; -2)$.

c) Sai vì $AB = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$.

d) Đúng vì $\left|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}\right| = \left|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}\right| = 2 \cdot BA = 2\sqrt{5}$.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(3;2;-1), B(1;4;-2)$ và $C(0;-2;3)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\overrightarrow{AB} = (-2;2;-1)$.

b) $|\overrightarrow{AB}| = 3$.

c) Toạ độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$ là $(1;-2;2)$.

d) Toạ độ điểm N thuộc mặt phẳng (Oxy), sao cho A, B, N thẳng hàng là $(5;0;0)$.

Hướng dẫn giải.

a) Đúng. $\overrightarrow{AB} = (1-3; 4-2; -2-(-1)) = (-2;2;-1)$.

b) Đúng. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$.

c) Sai. Gọi $M(x;y;z)$ thì $\overrightarrow{MC} = (-x; -2-y; 3-z)$.

Vì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC} \Rightarrow \begin{cases} -x = -2 \\ -2-y = 2 \\ 3-z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow M(2;-4;4)$.

d) Đúng. Vì N thuộc mặt phẳng (Oxy) nên toạ độ điểm N là $N(x;y;0)$.

Ta có: $\overrightarrow{AN}(x-3; y-2; 1); \overrightarrow{BN}(x-1; y-4; 2)$.

Để A, B, N thẳng hàng thì hai vectơ $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{BN}$ cùng phương. Do đó, $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{BN}$ (với $k \neq 0$).

Suy ra, $\begin{cases} x-3 = k(x-1) \\ y-2 = k(y-4) \\ 1 = 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ x-3 = \frac{1}{2}(x-1) \\ y-2 = \frac{1}{2}(y-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases}$. Vậy $N(5;0;0)$.

Bài 4. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho ba vectơ $\vec{a}(1;1;0), \vec{b}(2;-1;1), \vec{c}(-3;1;3)$.

a) Toạ độ của vectơ $\vec{a} + \vec{b}$ là $(3;0;1)$.

b) Giả sử $\vec{a} + \vec{x} = 2\vec{b} - \vec{c}$. Toạ độ của $\vec{x}$ là $(6;-4;-1)$.

c) Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b} - 2\vec{c}$. Khi đó $\cos\varphi = \dfrac{5}{14}$.

d) Giả sử $\vec{v} = (-14;9;14)$ và $\vec{v} = k\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}$. Khi đó $k + m + n = 9$.

Hướng dẫn giải.

a) Đúng. Ta có: $\vec{a} + \vec{b} = (1+2; 1+(-1); 0+1) = (3;0;1)$.

b) Đúng. $\vec{x} = 2\vec{b} - \vec{c} - \vec{a} = (4;-2;2) - (-3;1;3) - (1;1;0) = (6;-4;-1)$.

c) Đúng. Đặt $\vec{u} = \vec{b} - 2\vec{c} \Rightarrow \vec{u} = (8;-3;-5) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$.

$\vec{a} \cdot \vec{u} = 5, |\vec{a}| = \sqrt{2}$.

Khi đó: $\cos\varphi = \cos(\vec{a}, \vec{u}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{u}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{u}|} = \dfrac{5}{\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2}} = \dfrac{5}{14}$.

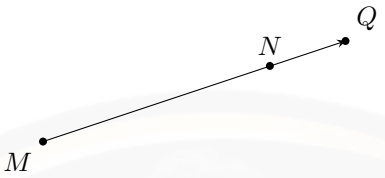
d) Sai. Ta có $k\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c} = (k + 2m - 3n; k - m + n; m + 3n)$. Khi đó:

$\vec{v} = k\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} k + 2m - 3n = -14 \\ k - m + n = 9 \\ m + 3n = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ m = -1 \\ n = 5 \end{cases} \Rightarrow k + m + n = 7.$

Phần III. Câu trả lời ngắn *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 6 .*

Bài 1. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đa phát hiện một máy bay chiến đấu X di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(1000;600;14)$ đến điểm N trong 30 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo bằng $Q(1400;800;16)$. Tọa độ vị trí điểm $N(a;b;c)$, tính $S=a+b+2c$.

Hướng dẫn giải.



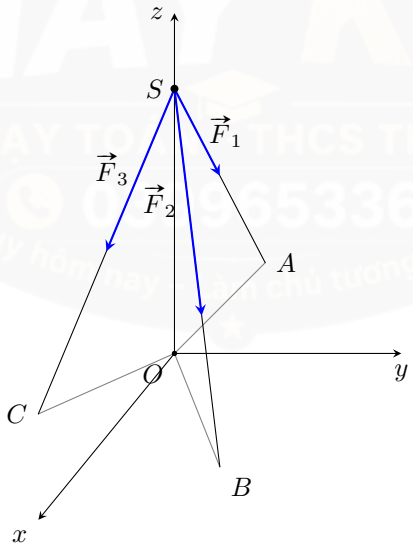
Gọi $N(x;y;z)$ là tọa độ của máy bay sau 30 phút. Ta có $\overrightarrow{MQ}=(400;200;2)$.
$\overrightarrow{NQ}=(1400-x;800-y;16-z)$.
Vì máy bay giữ nguyên hướng bay nên $\overrightarrow{MQ}$ và $\overrightarrow{NQ}$ cùng hướng.
Do máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và thời gian bay từ $M\to Q$ gấp 4 lần thời gian bay từ $N\to Q$ (tổng cộng 40 phút so với 10 phút) nên $\overrightarrow{MQ}=4\overrightarrow{NQ}$.

Suy ra $\overrightarrow{MQ}=4\overrightarrow{NQ}\Leftrightarrow\begin{cases}400=4(1400-x)\\200=4(800-y)\\2=4(16-z)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1300\\y=750\\z=15,5\end{cases}\Rightarrow N(1300;750;15,5)$.

Tọa độ vị trí điểm N là $(1300;750;15,5)$.
Suy ra $S=a+b+2c=1300+750+2\cdot 15,5=2081$.

Bài 2. Một chiếc máy đo đạc trắc địa được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $S(0;0;4)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $A(-2;0;0), B(1;\sqrt{3};0), C(1;-\sqrt{3};0)$. Biết rằng trọng lực tác dụng lên chiếc máy có độ lớn là 30N và được phân bố thành ba lực $\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3$ có độ lớn bằng nhau như hình dưới. Tính tích vô hướng của $\vec{F}_1\cdot\vec{F}_2$.

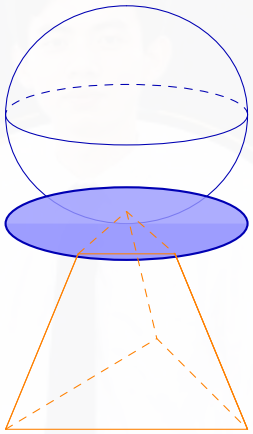
Hướng dẫn giải.



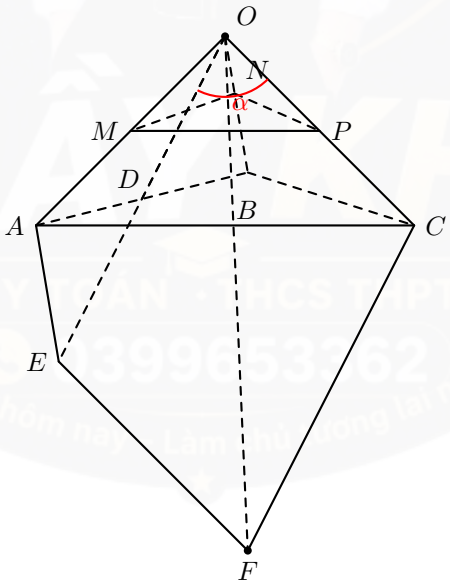
Ta có: $\overrightarrow{SA}=(-2;0;-4)$; $\overrightarrow{SB}=(1;\sqrt{3};-4)$; $\overrightarrow{SC}=(1;-\sqrt{3};-4)\Rightarrow SA=SB=SC=\sqrt{20}$.
Lại có $\overrightarrow{AB}=(3;\sqrt{3};0)$; $\overrightarrow{AC}=(3;-\sqrt{3};0)$; $\overrightarrow{BC}=(0;-2\sqrt{3};0)\Rightarrow AB=AC=BC=\sqrt{12}$. Dẫn đến hình chóp $S.ABC$ đều có đường cao là $SO=4$, với $O(0;0,0)$ là trọng tâm tam giác ABC. Mặt khác,

Giả sử $\vec{F}_1 = k\overrightarrow{SA} = (-2k; 0; -4k)$, $\vec{F}_2 = k\overrightarrow{SB} = (k; \sqrt{3}k; -4k)$, $\vec{F}_3 = k\overrightarrow{SC} = (k; -\sqrt{3}k; -4k)$.
Khi đó $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (0; 0; -12k)$.
Vì trọng lực $\vec{P} = (0; 0; -30)$ nên $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{P} \Rightarrow -12k = -30 \Leftrightarrow k = \dfrac{5}{2} = 2,5$.
Suy ra $\vec{F}_1 = (-5; 0; -10)$, $\vec{F}_2 = \left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{5\sqrt{3}}{2}; -10\right)$.
Vậy, $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = (-5) \cdot \dfrac{5}{2} + 0 + (-10)(-10) = -12,5 + 100 = 87,5$.

Bài 3. Một bình cá cảnh có dạng một chỏm cầu được đặt trên một chân đế (tham khảo hình vẽ). Biết tổng khối lượng bể cá là 20 kg, ba chân đế là ba cạnh bên của một hình chóp cụt đều có độ dài cạnh bên bằng 50 cm, hai đáy có độ dài lần lượt là 30 cm và 20 cm. Biết gia tốc trọng trường bằng 10 m/s^2, tính độ lớn lực tác dụng của bể cá lên từng chân đế (Kết quả làm tròn đến chữ số thứ nhất phần thập phân).



Hướng dẫn giải.



Giả sử các vectơ lực của bể cá tác dụng lên các chân đế là $\vec{F}_1 = \overrightarrow{OA}, \vec{F}_2 = \overrightarrow{OB}, \vec{F}_3 = \overrightarrow{OC}$.

Dễ thấy ba lực này có độ lớn bằng nhau và $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \overrightarrow{OF}$; $|\overrightarrow{OF}| = F = 200$ N.

Tính được $OM = ON = OP = 100$; $OE = 2 \cdot OD = 2\sqrt{150^2 - 15^2} = 90\sqrt{11}$; $DC = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = 15\sqrt{3}$.

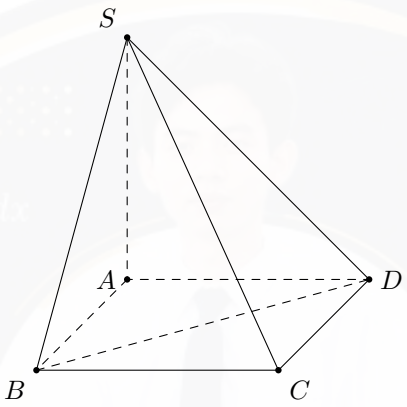
$\cos\alpha = \dfrac{OD^2 + OC^2 - DC^2}{2 \cdot OD \cdot OC} = \sqrt{\dfrac{2401}{2475}}$;

$OF^2 = OE^2 + EF^2 + 2 \cdot OE \cdot EF \cdot \cos\alpha = 199800 \Rightarrow OF = 30\sqrt{222}$.

Ta có $\dfrac{F_1}{F} = \dfrac{OA}{OF} \Rightarrow F_1 = \dfrac{OA}{OF} \cdot F \approx 67,1$.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 3; AD = 4; SA$ vuông góc với mặt đáy $SA = 2\sqrt{6}$. Tính $(\overrightarrow{SC}; \overrightarrow{BD})$ theo đơn vị đo góc bằng độ? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Hướng dẫn giải.



Do $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 3; AD = 4$ nên $AC = BD = 5, SC = \sqrt{AC^2 + SA^2} = 7$.

$\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = AD^2 - AB^2 = 4^2 - 3^2 = 7$.

$\cos\left(\overrightarrow{SC}; \overrightarrow{BD}\right) = \dfrac{\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{BD}}{SC \cdot BD} = \dfrac{7}{7 \cdot 5} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow \left(\overrightarrow{SC}; \overrightarrow{BD}\right) \approx 78,5°$.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1), B(2;-1;3)$ và điểm $M(a;b;0)$ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất. Giá trị của $a + b$ bằng

Hướng dẫn giải. Ta có: $MA^2 + MB^2 = (1-a)^2 + (2-b)^2 + 1^2 + (2-a)^2 + (-1-b)^2 + 3^2$

$= 2a^2 - 6a + 2b^2 - 2b + 20 = 2\left(a - \dfrac{3}{2}\right)^2 + 2\left(b - \dfrac{1}{2}\right)^2 + 15 \geq 15$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ khi đó $a + b = 2$.

Bài 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3), B(-2;-4;9)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA = 2MB$. Bình phương độ dài đoạn thẳng OM bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Gọi $M(x;y;z)$.

Vì điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA = 2MB$ nên

$\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot (-2 - x) = -3 \\ 3 \cdot (-4 - y) = -6 \\ 3 \cdot (9 - z) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \\ z = 7 \end{cases}$

$\Rightarrow M(-1;-2;7) \Rightarrow OM = \sqrt{1 + 4 + 49} = \sqrt{54} \Rightarrow OM^2 = 54$.

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Cho vectơ $\vec{a}=(1;3;4)$, tìm vectơ $\vec{b}$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$.

Ⓐ $\vec{b}=(-2;-6;-8)$. Ⓑ $\vec{b}=(-2;-6;8)$.
Ⓒ $\vec{b}=(-2;6;8)$. Ⓓ $\vec{b}=(2;-6;-8)$.

Hướng dẫn giải. Hai vectơ cùng phương khi vectơ này bằng k lần vectơ kia. Ta thấy $(-2;-6;-8)=-2(1;3;4)$, do đó $\vec{b}=(-2;-6;-8)$ cùng phương với $\vec{a}$.

Câu 2. Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}=(1;2;0)$ và $\vec{b}=(2;0;-1)$, khi đó $\cos\varphi$ bằng:

Ⓐ 0. Ⓑ $\dfrac{2}{5}$. Ⓒ $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Ⓓ $-\dfrac{2}{5}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{1\cdot2+2\cdot0+0\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+2^2+0^2}\cdot\sqrt{2^2+0^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{2}{5}$.

Câu 3. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}=(-2;2;5)$, $\vec{b}=(0;1;2)$ bằng:

Ⓐ 10. Ⓑ 13. Ⓒ 12. Ⓓ 14.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{a}\cdot\vec{b}=(-2)\cdot0+2\cdot1+5\cdot2=0+2+10=12$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;-3)$, $B(2;4;-1)$, $C(2;-2;0)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là:

Ⓐ $\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{2}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$. Ⓑ $\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3}\right)$.
Ⓒ $(5;2;4)$. Ⓓ $\left(\dfrac{5}{2};1;-2\right)$.

Hướng dẫn giải. Tọa độ trọng tâm G là $x_G=\dfrac{1+2+2}{3}=\dfrac{5}{3}$, $y_G=\dfrac{0+4-2}{3}=\dfrac{2}{3}$, $z_G=\dfrac{-3-1+0}{3}=-\dfrac{4}{3}$. Vậy $G\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{2}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$.

Câu 5. Cho điểm $M(1;2;-3)$, hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (Oxy) là điểm:

Ⓐ $M'(1;2;0)$. Ⓑ $M'(1;0;-3)$.
Ⓒ $M'(0;2;-3)$. Ⓓ $M'(1;2;3)$.

Hướng dẫn giải. Hình chiếu của điểm $M(x;y;z)$ lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ $(x;y;0)$. Do đó $M'(1;2;0)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$, $B(2;-1;2)$. Điểm M trên trục Ox và cách đều hai điểm A,B có tọa độ là:

Ⓐ $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. Ⓑ $M\left(\frac{1}{2};0;0\right)$.

Ⓒ $M\left(\frac{3}{2};0;0\right)$. Ⓓ $M\left(0;\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Điểm $M \in Ox \Rightarrow M(x;0;0)$. Vì $MA = MB \Rightarrow MA^2 = MB^2$

$\Leftrightarrow (1-x)^2 + 2^2 + 1^2 = (2-x)^2 + (-1)^2 + 2^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 6 = x^2 - 4x + 9 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

Vậy $M\left(\frac{3}{2};0;0\right)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;5;3), B(3;7;4), C(x;y;6)$. Giá trị của x, y để ba điểm A, B, C thẳng hàng là:

Ⓐ $x = 5, y = 11$. Ⓑ $x = -5, y = 11$.

Ⓒ $x = -11, y = -5$. Ⓓ $x = 11, y = 5$.

✍ *Hướng dẫn giải.* $\overrightarrow{AB} = (1;2;1)$, $\overrightarrow{AC} = (x-2;y-5;3)$. Để A, B, C thẳng hàng thì $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{3}{1} = 3 \Rightarrow x = 5$ và $y = 11$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (2;-1;3)$, $\vec{b} = (1;-3;2)$ và $\vec{c} = (3;2;-4)$. Gọi $\vec{x}$ là vectơ thỏa mãn: $\vec{x} \cdot \vec{a} = -5$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -11$, $\vec{x} \cdot \vec{c} = 20$. Tọa độ của vectơ $\vec{x}$ là:

Ⓐ $(2;3;1)$. Ⓑ $(2;3;-2)$. Ⓒ $(3;2;-2)$. Ⓓ $(1;3;2)$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Gọi $\vec{x} = (x;y;z)$. Ta có hệ: $\begin{cases} 2x - y + 3z = -5 \\ x - 3y + 2z = -11 \\ 3x + 2y - 4z = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}$. Vậy $\vec{x} = (2;3;-2)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;3;-1), N(-1;1;1), P(1;m-1;2)$. Với giá trị nào của m thì tam giác MNP vuông tại N?

Ⓐ $m = 3$. Ⓑ $m = 2$. Ⓒ $m = 1$. Ⓓ $m = 0$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Tam giác MNP vuông tại $N \Leftrightarrow \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} = 0$.

Ta có $\overrightarrow{NM} = (3;2;-2)$ và $\overrightarrow{NP} = (2;m-2;1)$.

$\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (m-2) + (-2) \cdot 1 = 6 + 2m - 4 - 2 = 2m = 0 \Rightarrow m = 0$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-4;-1;2), B(3;5;-10)$. Biết trung điểm cạnh AC thuộc trục tung, trung điểm cạnh BC thuộc mặt phẳng (Oxz). Tọa độ đỉnh C là:

Ⓐ $C(4;-5;-2)$. Ⓑ $C(4;5;2)$.

Ⓒ $C(4;-5;2)$. Ⓓ $C(4;5;-2)$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Gọi $C(x;y;z)$. Trung điểm AC thuộc trục tung nên $x_A + x_C = 0$ và $z_A + z_C = 0 \Rightarrow x = 4, z = -2$.

Trung điểm BC thuộc (Oxz) nên $y_B + y_C = 0 \Rightarrow y = -5$. Vậy $C(4;-5;-2)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;0;0), B(0;0;1), C(2;1;1)$. Diện tích của tam giác ABC bằng:

Ⓐ $\frac{\sqrt{7}}{2}$. Ⓑ $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Ⓒ $\frac{\sqrt{6}}{2}$. Ⓓ $\frac{\sqrt{11}}{2}$.

Hướng dẫn giải. $\overrightarrow{AB}=(-1;0;1)$, $\overrightarrow{AC}=(1;1;1)$. Tích có hướng $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=(-1;2;-1)$.

Diện tích $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;5;1)$, $B(-2;-6;2)$, $C(1;2;-1)$ và $M(m;m;m)$, để $MA^2-MB^2-MC^2$ đạt giá trị lớn nhất thì m bằng:

Ⓐ 3. Ⓑ -4. Ⓒ 2. Ⓓ 1.

Hướng dẫn giải. Đặt $P=MA^2-MB^2-MC^2=(m-2)^2+(m-5)^2+(m-1)^2-[(m+2)^2+(m+6)^2+(m-2)^2]-[(m-1)^2+(m-2)^2+(m+1)^2]$

$P=-3m^2-24m-20$. Đây là parabol quay bề lõm xuống dưới, đạt cực đại tại $m=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{24}{-6}=-4$.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(-2;1;-3)$, $\vec{b}=(-1;-3;2)$ và điểm $A(4;6;-3)$.

a) Tọa độ vectơ $\vec{a}-2\vec{b}=(0;1;-1)$.

b) Tọa độ điểm $B(2;7;-6)$ thì $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$.

c) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương hướng.

d) Góc giữa vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $120°$.

Hướng dẫn giải. a) Sai: Vì $\vec{a}-2\vec{b}=(0;7;-7)$.

b) Đúng: Vì $\vec{a}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}-2=x_B-4\\1=y_B-6\\-3=z_B+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_B=2\\y_B=7\\z_B=-6\end{cases}\Rightarrow B(2;7;-6)$.

c) Sai: Vì $\dfrac{-2}{-1}\neq\dfrac{1}{-3}\neq\dfrac{-3}{2}$.

d) Đúng: Vì $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{-2\cdot(-1)+1\cdot(-3)+(-3)\cdot 2}{\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow(\vec{a},\vec{b})=120°$.

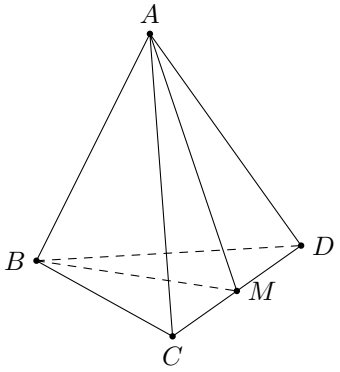
Bài 2. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD.

a) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$.

c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

d) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=-\dfrac{a^2}{2}$.



✍ *Hướng dẫn giải.* a) Đúng: Tam giác ACD đều suy ra AM vuông góc với CD nên $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

b) Đúng: Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{BAC}=a\cdot a\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{a^2}{2}$.

c) Đúng: Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CD}$.
Mặt khác AM, BM là trung tuyến của các tam giác đều ACD, BCD nên $AM\perp CD, MB\perp CD$.
Suy ra $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CD}=0\Rightarrow(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=90^\circ$.

d) Sai: Ta có $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$

Suy ra $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\cdot\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^2}{2}\right)=\dfrac{a^2}{2}$.

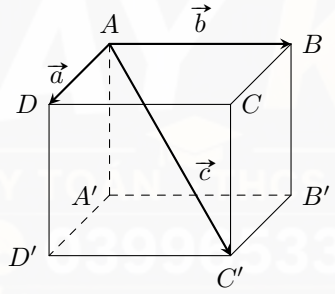
Bài 3. Một chất điểm ở vị trí đỉnh A của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chất điểm chịu tác động bởi ba lực $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ lần lượt cùng hướng với $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC'}$ như hình vẽ. Độ lớn của các lực $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ tương ứng là $10\,\text{N}, 10\,\text{N}$ và $20\,\text{N}$.

a) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$.

b) $|\vec{a}+\vec{b}|=20\,\text{N}$.

c) $|\vec{a}+\vec{c}|=|\vec{b}+\vec{c}|$.

d) $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=32,59\,\text{N}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



✍ *Hướng dẫn giải.* Từ giả thiết ta có $\vec{a}\perp\vec{b}$; $\cos(\vec{a},\vec{c})=\cos\widehat{DAC'}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos(\vec{b},\vec{c})=\cos\widehat{BAC'}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

a) Sai: Giả sử $\vec{a}+\vec{b}=\vec{d}$. Theo quy tắc hình bình hành thì $\vec{d}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AC}$ suy ra $\vec{a}+\vec{b}\neq\vec{c}$.

b) Sai: $|\vec{a}+\vec{b}|=10\sqrt{2}$ (đường chéo hình vuông cạnh bằng 10).

c) Đúng: Ta có $|\vec{a}+\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=10^2+2\cdot10\cdot20\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}+20^2=500+\dfrac{400\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $|\vec{a}+\vec{c}|=\sqrt{500+\dfrac{400\sqrt{3}}{3}}$.

Mặt khác $(\vec{b}+\vec{c})^2 = |\vec{b}|^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{c}|^2 = 10^2 + 2\cdot 10\cdot 20\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}} + 20^2 = 500 + \dfrac{400\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $|\vec{b}+\vec{c}| = \sqrt{500+\dfrac{400\sqrt{3}}{3}}$. Vậy $|\vec{a}+\vec{c}| = |\vec{b}+\vec{c}|$.

d) Giả sử lực tổng hợp là $\vec{m}$, tức là $\vec{m} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

Do đó: $\vec{m} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c} \Leftrightarrow |\vec{m}|^2 = (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2 \Leftrightarrow |\vec{m}|^2 = \vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}$

$\Leftrightarrow |\vec{m}|^2 = 10^2+10^2+20^2+0+2\cdot 10\cdot 20\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}+2\cdot 10\cdot 20\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow |\vec{m}|^2 = 10^2+10^2+20^2+0+2\cdot 10\cdot 20\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}+2\cdot 10\cdot 20\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow |\vec{m}| \approx 32,59.$

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(5;0;-3)$ và $B(-2;7;1)$.

a) $\overrightarrow{OA}+3\vec{k} = 5\vec{i}+\vec{j}$.

b) $\overrightarrow{AB} = (-7;7;4)$.

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB} = (-3;-7;2)$.

d) Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là $\left(-\dfrac{7}{2};\dfrac{7}{2};2\right)$.

Hướng dẫn giải. a) **Sai**: Ta có $\overrightarrow{OA} = (5;0;-3)$ và $3\vec{k} = (0;0;3)$ nên $\overrightarrow{OA}+3\vec{k} = (5;0;0)$.

Mặt khác $5\vec{i}+\vec{j} = (5;1;0)$. Do đó $\overrightarrow{OA}+3\vec{k} \neq 5\vec{i}+\vec{j}$.

b) **Đúng**: $\overrightarrow{AB} = (x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A) = (-2-5;7-0;1-(-3)) = (-7;7;4)$.

c) **Sai**: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB} = (5+(-2);0+7;-3+1) = (3;7;-2)$.

d) **Sai**: Gọi M là trung điểm của AB, tọa độ của M là:

$x_M = \dfrac{5+(-2)}{2} = \dfrac{3}{2}$; $y_M = \dfrac{0+7}{2} = \dfrac{7}{2}$; $z_M = \dfrac{-3+1}{2} = -1$.

Vậy tọa độ trung điểm là $M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{7}{2};-1\right)$.

Phần III. Câu trả lời ngắn *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 6 .*

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $A'(\sqrt{3};-1;1)$, hai đỉnh B, C thuộc trục Oz và $AA' = 1$ (C không trùng với O). Biết vectơ $\vec{u} = (a;b;2)$ (với $a, b \in \mathbb{R}$) cùng phương với $\overrightarrow{A'C}$. Tính $T = a^2+b^2$.

Hướng dẫn giải. Lấy M là trung điểm BC.

Khi đó ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ AA' \perp BC \end{cases}$ nên $BC \perp (AA'M) \Rightarrow BC \perp A'M$ tại M.

Suy ra M là hình chiếu của A' trên trục $Oz \Rightarrow M(0;0;1)$ và

$A'M = \sqrt{(\sqrt{3}-0)^2+(-1-0)^2+(1-1)^2} = 2$.

Mặt khác $AM = \sqrt{A'M^2-AA'^2} = \sqrt{2^2-1^2} = \sqrt{3}$.

Lại có ΔABC đều nên $AM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}BC \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}BC \Rightarrow BC = 2 \Rightarrow MC = 1$.

Gọi $C(0;0;c), c \neq 0$ suy ra $MC = |c-1|$.

$MC = 1 \Leftrightarrow |c-1| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = 2 \end{array}\right.$. Vì C không trùng O nên chọn $c = 2 \Rightarrow C(0;0;2)$.

Suy ra $\overrightarrow{A'C} = (-\sqrt{3};1;1)$.

Vì $\vec{u} = (a;b;2)$ cùng phương với $\overrightarrow{A'C}$ nên $\vec{u} = 2\overrightarrow{A'C} = (-2\sqrt{3};2;2)$.

Vậy $a = -2\sqrt{3}; b = 2$. Suy ra $T = a^2+b^2 = (-2\sqrt{3})^2+2^2 = 12+4 = 16$.

Bài 2. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng 4. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho gốc tọa độ O trùng với B, điểm D thuộc tia Oy, vectơ $\vec{i}$ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{NC}$ với N là trung điểm BD, tia Oz hướng lên trên như hình vẽ. Khi đó tọa độ vectơ $\overrightarrow{BM}$ với M trung điểm của CD có dạng $(a;b;0)$. Tính giá trị $S=a+b$.

Hướng dẫn giải. Ta có $B\equiv O(0;0;0)$. Do $D\in Oy$ và $BD=4$ nên $D(0;4;0)$.

N là trung điểm của BD nên $N(0;2;0)$.

ΔBCD là tam giác đều cạnh 4 nên đường cao $CN=\dfrac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.

Vectơ $\vec{i}$ cùng hướng với $\overrightarrow{NC}$ nên $C(2\sqrt{3};2;0)$.

M là trung điểm của CD nên tọa độ của M là:

$x_M=\dfrac{x_C+x_D}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}+0}{2}=\sqrt{3};\ y_M=\dfrac{y_C+y_D}{2}=\dfrac{2+4}{2}=3;\ z_M=0.$

Vậy $\overrightarrow{BM}=(\sqrt{3};3;0)\Rightarrow a=\sqrt{3},b=3.$

Giá trị $S=a+b=3+\sqrt{3}$.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hình thang cân $ABCD$ có các đáy lần lượt là AB,CD. Biết $A(3;1;-2),B(-1;3;2),C(-6;3;6)$. Tính tổng bình phương các tọa độ của điểm D.

Hướng dẫn giải. Gọi $D(x;y;z)$. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-4;2;4)$; $\overrightarrow{CD}=(x+6;y-3;z-6)$.

Do $ABCD$ là hình thang $(AB//CD)$ nên $\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$ $(k\neq 0)$.

$$\Leftrightarrow \frac{x+6}{-4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-6}{4}=k\Leftrightarrow \begin{cases} x=-6-4k \\ y=3+2k \\ z=6+4k \end{cases} \Rightarrow D(-6-4k;3+2k;6+4k).$$

Lại có $ABCD$ là hình thang cân nên $AC=BD\Leftrightarrow AC^2=BD^2$.

$AC^2=(-6-3)^2+(3-1)^2+(6-(-2))^2=(-9)^2+2^2+8^2=149.$

$BD^2=(-6-4k-(-1))^2+(3+2k-3)^2+(6+4k-2)^2=36k^2+72k+41.$

$$AC^2=BD^2\Leftrightarrow 36k^2+72k-108=0\Leftrightarrow k^2+2k-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=1 \\ k=-3 \end{array}\right.$$

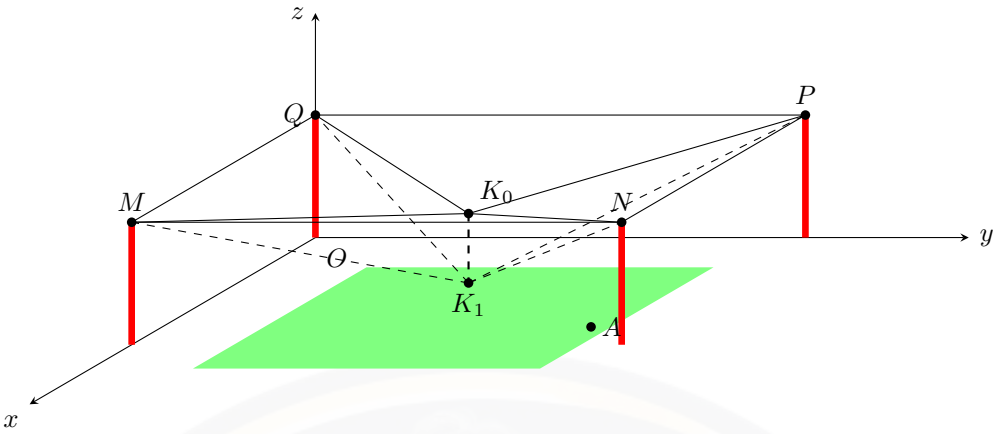
+) Với $k=1\Rightarrow D(-10;5;10)$. Khi đó $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow ABCD$ là hình bình hành. Kiểm tra thấy $AD=\sqrt{329}\neq BC=\sqrt{41}$ nên loại.

+) Với $k=-3\Rightarrow D(6;-3;-6)$. Kiểm tra thấy thỏa mãn $ABCD$ là hình thang cân.

Vậy tổng bình phương các tọa độ điểm D là: $6^2+(-3)^2+(-6)^2=81$.

Bài 4. Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn. Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1 m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90;0;30)$, $N(90;120;30)$, $P(0;120;30)$, $Q(0;0;30)$. Giả sử K_0 là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và $K_0M=K_0N=K_0P=K_0Q$. Để theo dõi quả bóng đến vị trí A, camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 có cao độ bằng 19. Biết trung điểm đoạn K_0K_1 có tọa độ là

$(a;b;c)$. Khi đó hãy tính giá trị biểu thức $T=5a+7b+9c$.



Hướng dẫn giải.

- Vì K_0 cách đều 4 đỉnh M,N,P,Q của hình chữ nhật nằm trong mặt phẳng $z=30$ nên hình chiếu của K_0 lên mặt phẳng này là tâm của hình chữ nhật $MNPQ$.
- Tọa độ tâm hình chữ nhật là trung điểm của MP (hoặc NQ):
$$x_0=\frac{x_M+x_P}{2}=\frac{90+0}{2}=45;\quad y_0=\frac{y_M+y_P}{2}=\frac{0+120}{2}=60.$$
Theo giả thiết, cao độ của K_0 là $z_0=25$. Suy ra $K_0(45;60;25)$.
- Điểm K_1 nằm dưới K_0 theo phương thẳng đứng nên có cùng hoành độ và tung độ, cao độ $z_1=19$. Suy ra $K_1(45;60;19)$.
- Trung điểm $I(a;b;c)$ của đoạn K_0K_1 có tọa độ là:
$$a=\frac{45+45}{2}=45;\quad b=\frac{60+60}{2}=60;\quad c=\frac{25+19}{2}=22.$$
- Tính giá trị biểu thức T:
$$T=5a+7b+9c=5\cdot45+7\cdot60+9\cdot22=225+420+198=843.$$

Bài 5. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có cùng độ dài bằng 6. Biết độ dài của vectơ $\vec{a}+2\vec{b}$ bằng $6\sqrt{3}$. Biết số đo góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là x độ. Giá trị của x là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Ta có $|\vec{a}|=|\vec{b}|=6$. Theo giả thiết: $|\vec{a}+2\vec{b}|=6\sqrt{3}\Rightarrow|\vec{a}+2\vec{b}|^2=(6\sqrt{3})^2=108$. $\Leftrightarrow|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=108\Leftrightarrow6^2+4\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})+4\cdot6^2=108$ $\Leftrightarrow36+4\cdot6\cdot6\cdot\cos x^\circ+144=108\Leftrightarrow144\cos x^\circ=-72\Leftrightarrow\cos x^\circ=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow x^\circ=120^\circ$. Vậy giá trị của x là 120.

Bài 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AB,CD; tọa độ ba đỉnh $A(1;2;0),B(2;0;-2),C(6;1;-1)$. Biết hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$. Tính $P=3a+b-c$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-2;-2)\Rightarrow AB=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}=3$.

$\overrightarrow{AC}=(5;-1;-1)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(0;-9;9)$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{0^2+(-9)^2+9^2}=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$.

Chiều cao của hình thang là $h=d(C,AB)=\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{AB}=\dfrac{9\sqrt{2}}{3}=3\sqrt{2}$.

Diện tích hình thang $S_{ABCD}=\dfrac{(AB+CD)h}{2}=6\sqrt{2}\Leftrightarrow\dfrac{(3+CD)\cdot 3\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}\Rightarrow CD=1.$

Vì $AB//CD$ nên $\overrightarrow{DC}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ (do thứ tự các đỉnh hình thang $ABCD$).

Mặt khác $\dfrac{CD}{AB}=\dfrac{1}{3}$, suy ra $\overrightarrow{DC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right).$

Tọa độ điểm D thỏa mãn: $\overrightarrow{DC}=(6-a;1-b;-1-c)=\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right)\Rightarrow\begin{cases}6-a=\dfrac{1}{3}\\1-b=-\dfrac{2}{3}\\-1-c=-\dfrac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}a=\dfrac{17}{3}\\b=\dfrac{5}{3}\\c=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$. Vậy $P=3a+b-c=3\cdot\dfrac{17}{3}+\dfrac{5}{3}-\left(-\dfrac{1}{3}\right)=17+\dfrac{6}{3}=19.$

THẦY KHA
DẠY TOÁN - THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay - Làm chủ tương lai ngày mai

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Cho $|\vec{a}|=2; |\vec{b}|=6$, góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 120°. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $\vec{a}\cdot\vec{b}=12$.
(B) $\vec{a}\cdot\vec{b}=40$.
(C) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$.
(D) $\vec{a}\cdot\vec{b}=6\sqrt{3}$.

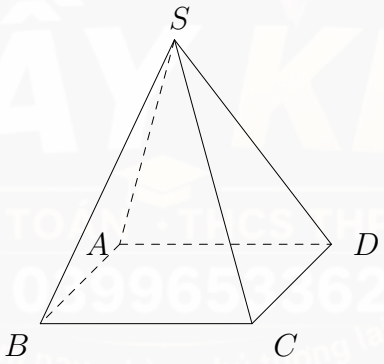
Hướng dẫn giải. Ta có công thức tính tích vô hướng của hai vectơ: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})=2\cdot 6\cdot\cos 120^\circ=12\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-6$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, điểm đối xứng với điểm $M(2;2;-1)$ qua mặt phẳng (Oyz) là

(A) $M'(2;-2;1)$.
(B) $M'(-2;0;0)$.
(C) $M'(-2;-2;1)$.
(D) $M'(-2;2;-1)$.

Hướng dẫn giải. Điểm đối xứng với điểm $M(x;y;z)$ qua mặt phẳng (Oyz) (có phương trình $x=0$) sẽ giữ nguyên tung độ, cao độ và lấy đối số của hoành độ.
Vậy điểm đối xứng với $M(2;2;-1)$ qua mặt phẳng (Oyz) là $M'(-2;2;-1)$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành (như hình vẽ minh họa). Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.



(A) $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$.
(B) $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{DC}$.
(C) $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BC}$.
(D) $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}$.

Hướng dẫn giải. Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$, khi đó O là trung điểm của AC và BD.
Xét điểm S bất kỳ, ta có tính chất trung điểm:
$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}$
$\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$
Suy ra $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$.

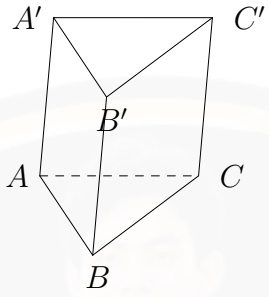
Câu 4. Trong không gian $(Oxyz)$, cho $\overrightarrow{OA} = 3\vec{k} - \vec{i}$. Tọa độ của điểm A là

Ⓐ $A(3;-1;0)$. Ⓑ $A(-1;3;0)$. Ⓒ $A(3;0;-1)$. Ⓓ $A(-1;0;3)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{OA} = -1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k} = (-1;0;3)$.

Vì O là gốc tọa độ nên tọa độ điểm A chính là tọa độ vectơ $\overrightarrow{OA}$. Vậy $A(-1;0;3)$.

Câu 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có hai đáy là các tam giác đều như hình vẽ. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{A'C'}$ bằng



Ⓐ $150°$. Ⓑ $120°$. Ⓒ $60°$. Ⓓ $30°$.

Hướng dẫn giải. Vì $A'C' // AC$ nên $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$.

Góc giữa hai vectơ $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{ACB}$.

Do tam giác ABC đều nên $\widehat{ACB} = 60°$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây thuộc trục Oz?

Ⓐ $M(1;0;0)$. Ⓑ $M(1;0;2)$. Ⓒ $M(1;2;0)$. Ⓓ $M(0;0;-2)$.

Hướng dẫn giải. Các điểm thuộc trục Oz có hoành độ và tung độ bằng 0, tức là có dạng $(0;0;z)$.

Dựa vào các phương án, điểm $M(0;0;-2)$ thỏa mãn.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho $M(-4;-5;5)$. Tìm tọa độ điểm M' trên trục Ox sao cho MM' ngắn nhất.

Ⓐ $M'(0;-5;5)$. Ⓑ $M'(-4;5;-5)$.
Ⓒ $M'(4;-5;5)$. Ⓓ $M'(-4;0;0)$.

Hướng dẫn giải. Khoảng cách MM' ngắn nhất khi M' là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox.

Tọa độ hình chiếu của điểm $M(x;y;z)$ lên trục Ox là $(x;0;0)$.

Vậy $M'(-4;0;0)$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (-1;1;0)$, $\vec{b} = (1;1;0)$, $\vec{c} = (1;1;1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

Ⓐ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương. Ⓑ $\vec{a} \cdot \vec{c} = 1$.
Ⓒ $\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$. Ⓓ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 2$.

$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$, $|\vec{c}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

Khi đó: $\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \dfrac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \dfrac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$.

Vậy khẳng định C đúng.

Câu 9. Cho hình bình hành $OADB$ có $\overrightarrow{OA}=(-1;1;0)$, $\overrightarrow{OB}=(1;1;0)$ (O là gốc tọa độ). Tọa độ giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $OADB$ là

Ⓐ $(1;1;0)$. Ⓑ $(1;0;1)$. Ⓒ $(1;0;0)$. Ⓓ $(0;1;0)$.

Hướng dẫn giải. Giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $OADB$ là trung điểm của đoạn thẳng AB.
Vì O là gốc tọa độ nên tọa độ các điểm là $A(-1;1;0)$ và $B(1;1;0)$.
Tọa độ trung điểm I của AB: $x_I=\dfrac{-1+1}{2}=0$, $y_I=\dfrac{1+1}{2}=1$, $z_I=\dfrac{0+0}{2}=0$.
Vậy tọa độ giao điểm là $(0;1;0)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(2;0;1)$, $B(-1;3;0)$, $C(8;6;2)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Độ dài vectơ $\overrightarrow{OG}$ bằng

Ⓐ $\sqrt{19}$. Ⓑ 3. Ⓒ 9. Ⓓ 19.

Hướng dẫn giải. Tọa độ trọng tâm G là: $G\left(\dfrac{2-1+8}{3};\dfrac{0+3+6}{3};\dfrac{1+0+2}{3}\right)=G(3;3;1)$.
Khi đó $\overrightarrow{OG}=(3;3;1)\Rightarrow|\overrightarrow{OG}|=\sqrt{3^2+3^2+1^2}=\sqrt{19}$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;-3;3)$, $\vec{b}=(0;2;-1)$, $\vec{c}=(3;-1;5)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}$.

Ⓐ $(-2;2;7)$. Ⓑ $(-2;2;-7)$. Ⓒ $(10;-2;13)$. Ⓓ $(-2;-2;7)$.

Hướng dẫn giải. $2\vec{a}=(4;-6;6)$
$3\vec{b}=(0;6;-3)$
$-2\vec{c}=(-6;2;-10)$
$\vec{u}=(4+0-6;-6+6+2;6-3-10)=(-2;2;-7)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng tọa độ (Oyz)?

Ⓐ $N(0;4;-1)$. Ⓑ $Q(2;0;0)$. Ⓒ $P(-2;0;3)$. Ⓓ $M(3;4;0)$.

Hướng dẫn giải. Mặt phẳng (Oyz) có phương trình $x=0$. Điểm thuộc mặt phẳng này phải có hoành độ bằng 0.
Vậy điểm $N(0;4;-1)$ thuộc mặt phẳng (Oyz).

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-2;3)$, $B(-2;1;2)$, $C(3;-1;2)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(-3;3;1)$.

b) $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$.

c) Ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

d) Tọa độ chân đường cao vẽ từ A của tam giác ABC là $\left(-\dfrac{47}{29};\dfrac{13}{29};2\right)$.

Hướng dẫn giải. a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2-1;1-(-2);2-3)=(-3;3;-1)$. Khẳng định này sai.
b) Ta có $\overrightarrow{AC}=(3-1;-1-(-2);2-3)=(2;1;-1)$.
Vì $\dfrac{-3}{2}\neq\dfrac{3}{1}$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương, do đó không tồn tại số thực k sao cho $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

Khẳng định này sai.
c) Vì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương (đã chứng minh ở câu b) nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Khẳng định này đúng.
d) Gọi $H(x;y;z)$ là chân đường cao từ A xuống BC. Vì $H \in BC$ nên $\overrightarrow{BH} = k\overrightarrow{BC} = k(5;-2;0)$. Suy ra $H(-2+5k; 1-2k; 2)$. Khi đó $\overrightarrow{AH} = (5k-3; 3-2k; -1)$.
Vì $AH \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 5(5k-3) - 2(3-2k) + 0(-1) = 0 \Leftrightarrow 29k = 21 \Rightarrow k = \dfrac{21}{29}$.
Tọa độ H là: $x = -2 + 5 \cdot \dfrac{21}{29} = \dfrac{47}{29}$, $y = 1 - 2 \cdot \dfrac{21}{29} = -\dfrac{13}{29}$, $z = 2$. Vậy $H\left(\dfrac{47}{29}; -\dfrac{13}{29}; 2\right)$. Khẳng định này sai.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $OBCD.O'B'C'D'$ có $B(2;0;0)$, $D(0;1;0)$, $O'(0;0;1)$.

a) $C(2;1;0)$.

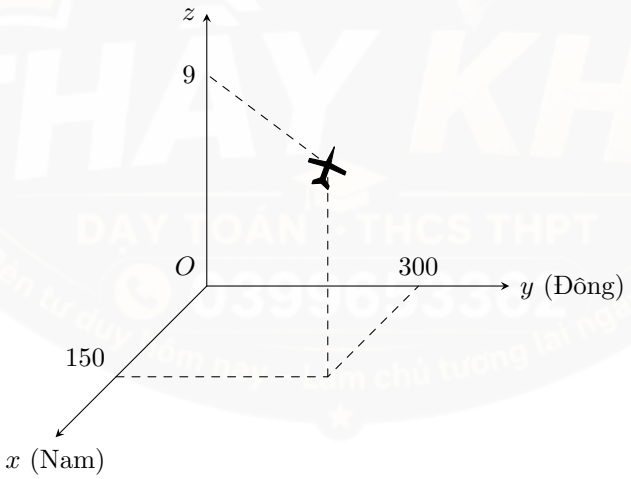
b) $B'(2;0;1)$.

c) $\overrightarrow{OC'} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$.

d) $\overrightarrow{OD'} = (1;1;1)$.

Hướng dẫn giải. Vì $OBCD.O'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật có O là gốc tọa độ, $B \in Ox, D \in Oy, O' \in Oz$ nên:
a) C thuộc mặt phẳng (Oxy), có tọa độ $C(2;1;0)$. Khẳng định này đúng.
b) B' là điểm sao cho $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OO'}$, suy ra $B'(2;0;1)$. Khẳng định này đúng.
c) C' là điểm sao cho $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OO'} = (2;1;1) = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Khẳng định này sai.
d) D' là điểm sao cho $\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OO'} = (0;1;1)$. Khẳng định này sai.

Bài 3. Hình vẽ sau mô tả vị trí của máy bay vào thời điểm 9 giờ 30 phút. Biết các đơn vị trên hình tính theo đơn vị km. Mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, O trùng với vị trí trung tâm điều khiển.



a) Tại thời điểm 9 giờ 30 phút, máy bay đang ở độ cao 9 km so với mặt đất.

b) Tại thời điểm 9 giờ 30 phút, tọa độ của máy bay là $(300;150;9)$.

c) Phi công để máy bay ở chế độ tự động bay thẳng theo hướng đông với vận tốc là 750 km/h, độ cao không đổi. Biết rằng gió thổi theo hướng đông với vận tốc 10 m/s. Giả sử vận tốc và hướng gió không thay đổi thì tại thời điểm 10 giờ 30 phút máy bay ở tọa độ $(150;1086;9)$.

d) Tại thời điểm 9 giờ 30 phút, máy bay cách trung tâm điều khiển một khoảng (làm tròn đến hàng phần mười) là 335,6 km.

✍ *Hướng dẫn giải.* a) Dựa vào hình vẽ, cao độ của máy bay trên trục Oz là 9 km. Khẳng định này đúng.

b) Dựa vào hình vẽ, hình chiếu của máy bay lên trục Ox là 150 và lên trục Oy là 300. Do đó tọa độ máy bay là $(150; 300; 9)$. Khẳng định này sai.

c) Tại thời điểm 9h30, máy bay ở $(150; 300; 9)$.

Vận tốc gió: 10 m/s = 36 km/h.

Vận tốc tổng hợp theo hướng Đông (trục Oy): $v = 750 + 36 = 786$ km/h.

Sau 1 giờ (đến 10h30), máy bay đi thêm quãng đường 786 km theo hướng Đông.

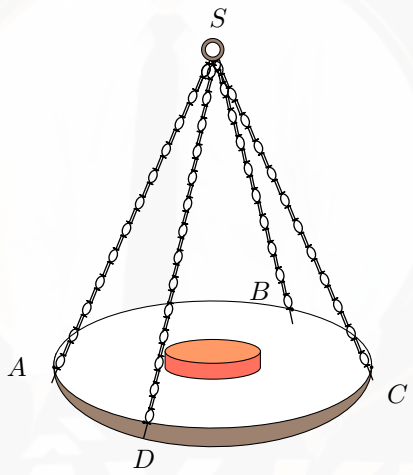
Tung độ mới: $y' = 300 + 786 = 1086$.

Tọa độ mới là $(150; 1086; 9)$. Khẳng định này đúng.

d) Khoảng cách từ máy bay $P(150; 300; 9)$ đến gốc O là:

$OP = \sqrt{150^2 + 300^2 + 9^2} = \sqrt{112581} \approx 335,53 \approx 335,5$ km. Khẳng định này sai.

Bài 4. Một vật là chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 6$ kg được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều, có $\widehat{ASC} = 60°$. Biết $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$ trong đó $\vec{g}$ là véc-tơ gia tốc rơi tự do có độ lớn 10 m/s^2, $\vec{P}$ là trọng lực tác động lên vật có đơn vị là N, m là khối lượng của vật có đơn vị kg. Khi đó:



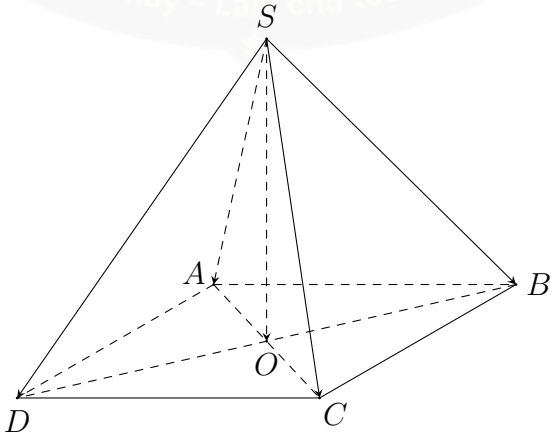
a) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$

b) $|\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}| = 0$

c) Độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm bằng 60 N

d) Độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích bằng $10\sqrt{3}$ N

✍ *Hướng dẫn giải.*



a) **Sai**.
Gọi lực căng dây của chiếc cân đòn lần lượt là $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{SD}$ và O là giao điểm của AC và BD.
Ta có $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{BA}\neq\vec{0}$.

b) **Sai**.
$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$.

c) **Đúng**.
Ta có trọng lực tác dụng lên chiếc cân là $P=m\cdot g=\cdot 10=60$ N.

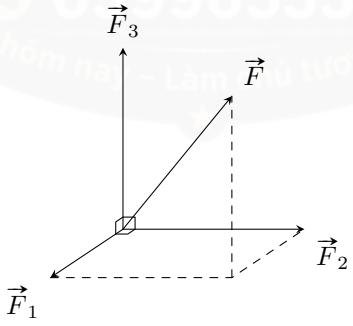
d) **Đúng**.
Ta có $|\vec{P}|=4|\overrightarrow{SO}|$, suy ra $SO=15$ N.
Ta có $\triangle SAC$ là tam giác đều có $SO=15$ nên $SC=10\sqrt{3}$.
Suy ra $SA=\dfrac{15\sqrt{2}}{2}=\dfrac{30\sqrt{2}}{4}$.
Vậy độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích bằng $10\sqrt{3}$ N.

Phần III. Câu trả lời ngắn *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 6 .*

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;2;-3)$, $B(1;0;2)$, $C(x;y;1)$ thẳng hàng. Tính giá trị của $12^{\frac{x}{y}}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-2;5)$.
Ba điểm A,B,C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương.
Ta có $\overrightarrow{AC}=(x-0;y-2;1-(-3))=(x;y-2;4)$.
Khi đó, tồn tại số thực k sao cho $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}x=k\cdot 1\\ y-2=k\cdot(-2)\\ 4=k\cdot 5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\frac{4}{5}\\ x=\frac{4}{5}\\ y=2-\frac{8}{5}=\frac{2}{5}\end{cases}$.
Suy ra $\dfrac{x}{y}=\dfrac{4/5}{2/5}=2$.
Vậy $12^{\frac{x}{y}}=12^2=144$.

Bài 2. Ba lực $\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3$ có giá đôi một vuông góc, cùng tác động vào một chất điểm M và $|\vec{F}_1|=3$ N, $|\vec{F}_2|=4$ N, $|\vec{F}_3|=10$ N (tham khảo hình bên). Gọi $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3$ là tổng hợp của ba lực trên. Góc tạo bởi giá của $\vec{F}$ và mặt phẳng chứa hai lực $\vec{F}_1,\vec{F}_2$ bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



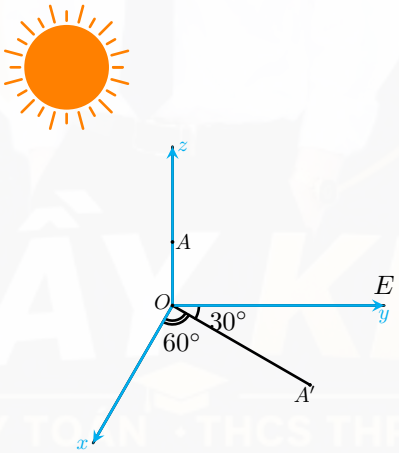
Hướng dẫn giải. Đặt hệ trục tọa độ $Mxyz$ sao cho các lực $\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3$ lần lượt nằm trên các tia Mx,My,Mz.
Khi đó: $\vec{F}_1=(3;0;0)$, $\vec{F}_2=(0;4;0)$, $\vec{F}_3=(0;0;10)$.
Lực tổng hợp là $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=(3;4;10)$.

Mặt phẳng chứa hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ là mặt phẳng (Mxy) có phương trình $z = 0$.
Góc α giữa giá của $\vec{F}$ và mặt phẳng (Mxy) là góc giữa vectơ $\vec{F}$ và hình chiếu của nó lên (Mxy) là $\vec{F}_{12} = (3; 4; 0)$.
Ta có $\tan\alpha = \dfrac{|\vec{F}_3|}{|\vec{F}_{12}|} = \dfrac{10}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{10}{5} = 2$.
Suy ra $\alpha = \arctan(2) \approx 63,43° \approx 63,4°$.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1; 0; 3)$ và $M(6; 1; 3)$ là trung điểm BC. Gọi G là trọng tâm ΔABC. Tính cao độ của điểm G.

Hướng dẫn giải. Trong tam giác ABC, do M là trung điểm của BC nên trọng tâm G nằm trên trung tuyến AM và thỏa mãn $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.
Tọa độ trọng tâm G được tính theo công thức: $G = \dfrac{A + 2M}{3}$.
Khi đó, cao độ của điểm G là: $z_G = \dfrac{z_A + 2z_M}{3} = \dfrac{3 + 2 \cdot 3}{3} = \dfrac{9}{3} = 3$.

Bài 4. Trên mặt đất phẳng, người ta dựng một cột cờ thẳng cao 6 m vuông góc với mặt đất, có chân cột đặt tại vị trí O trên mặt đất. Tại một thời điểm, dưới ánh nắng mặt trời, bóng của đỉnh cột dưới mặt đất cách chân cột 3 m về hướng S60°E (hướng tạo với hướng nam một góc 60° và tạo với hướng đông một góc 30°). Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc là O, tia Ox chỉ hướng nam, tia Oy chỉ hướng đông, tia Oz chứa cột, đơn vị đo là mét. Đường thẳng chứa tia nắng mặt trời đi qua đỉnh cột tại thời điểm đang xét đi qua $B(a; b; -1)$. Tính giá trị $a + 2b$ (làm tròn đến hàng phần trăm).



Hướng dẫn giải. Theo đề bài, đỉnh cột cờ là điểm $A(0; 0; 6)$.
Gọi A' là điểm trên mặt đất biểu thị cho bóng của đỉnh cột.
Vì A' nằm trên mặt phẳng (Oxy) nên có tọa độ $A'(x; y; 0)$.
Bóng của đỉnh cột cách chân cột 3 m, tức là $OA' = 3$.
Hướng của bóng là S60°E, nghĩa là véc-tơ $\overrightarrow{OA'}$ tạo với tia Ox (hướng Nam) một góc 60°.
Ta có tọa độ của A' là

$$\begin{cases} x_{A'} = OA' \cdot \cos 60° = 3 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} \\ y_{A'} = OA' \cdot \sin 60° = 3 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Vậy $A'\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{3\sqrt{3}}{2}; 0\right)$.

Đường thẳng chứa tia nắng mặt trời đi qua hai điểm $A(0;0;6)$ và $A'\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3\sqrt{3}}{2};0\right)$, nên có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AA'}=\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3\sqrt{3}}{2};-6\right)$.

Ta có thể chọn véc-tơ chỉ phương khác đơn giản hơn là $\vec{u}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}=(1;\sqrt{3};-4)$.

Phương trình tham số của đường thẳng chứa tia nắng là $\begin{cases}x=t\\y=t\sqrt{3}\\z=6-4t.\end{cases}$

Điểm $B(a;b;-1)$ thuộc đường thẳng này, do đó

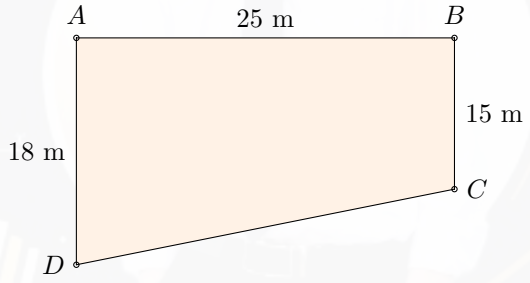
$$-1=6-4t\Leftrightarrow 4t=7\Leftrightarrow t=\frac{7}{4}.$$

Suy ra $a=t=\dfrac{7}{4}$ và $b=t\sqrt{3}=\dfrac{7\sqrt{3}}{4}$.

Do đó

$$a+2b=\frac{7}{4}+2\left(\frac{7\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{7}{4}+\frac{14\sqrt{3}}{4}=\frac{7+14\sqrt{3}}{4}\approx 7{,}81.$$

Bài 5. Một phần của sân trường được định vị bởi các điểm A, B, C, D như hình vẽ



Bước đầu chúng được lấy "thăng bằng" để có cùng độ cao, biết $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B với độ dài $AB=25$ m, $AD=18$ m, $BC=15$ m. Do yêu cầu kĩ thuật, khi lát phẳng phần sân trường phải thoát nước về góc sân ở C nên người ta lấy độ cao ở các điểm B, C, D thấp xuống hơn so với độ cao ở A lần lượt là 10 cm, a cm, 6 cm. Hỏi giá trị của a bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Chọn hệ trục toạ độ $Axzy$ sao cho B thuộc tia Ax, D thuộc tia Ay.

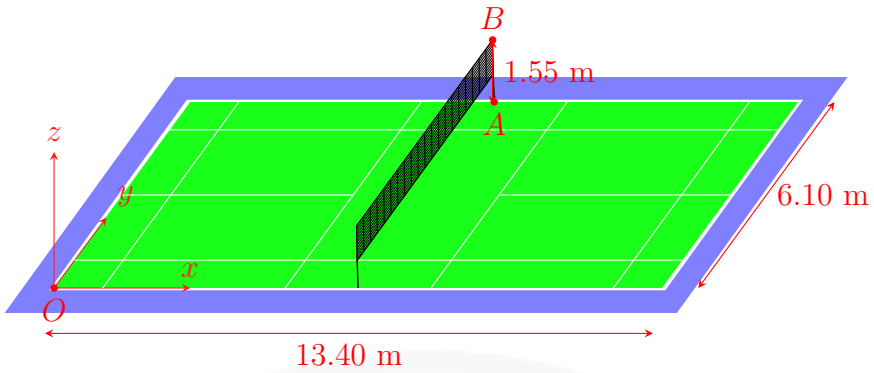
Ta có $A(0;0;0)$, $B(25;0;-10)$, $D(0;18;-a)$, $C(25;15;-6)$. $\overrightarrow{AB}=(25;0;-10)$, $\overrightarrow{AD}=(0;18;-6)$, $\overrightarrow{AC}=(25;15;-a)$, $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]=(180;150;450)$.

Vì A, B, C, D đồng phẳng nên

$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}=0\Rightarrow 180\cdot 25+150\cdot 15+450\cdot(-a)=0\Rightarrow a=15$ (cm).

Bài 6. Hình vẽ dưới đây mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Ta chọn hệ trục $Oxyz$ cho sân đó như hình dưới (đơn vị trên mỗi trục là mét). Giả sử AB là một trụ

cầu lông để căng lưới. Biết tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}=(a;b;c)$. Khi đó $S=a-b+2c$ bằng bao nhiêu?



Hướng dẫn giải. Vì véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với véc-tơ đơn vị $\vec{k}$ của trục Oz và độ dài $AB=1{,}55$ nên $\overrightarrow{AB}=1{,}55\vec{k}$. Do đó $\overrightarrow{AB}=(0;0;1{,}55)\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=0\\c=1{,}55\end{cases}\Rightarrow S=a-b+2c=3{,}1.$

THẦY KHA
DẠY TOÁN - THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay - Làm chủ tương lai ngày mai

TOÁN THẦY KHA
ĐỀ SỐ 9
(Đề gồm có 5 trang)

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ nào dưới đây là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AB}$?

Ⓐ $\overrightarrow{A'B'}$. Ⓑ $\overrightarrow{BC}$. Ⓒ $\overrightarrow{CD}$. Ⓓ $\overrightarrow{D'C'}$.

Hướng dẫn giải. Vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là vectơ $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$.
Trong hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, mặt $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$ (cùng độ dài và cùng hướng với $\overrightarrow{BA}$, ngược hướng với $\overrightarrow{AB}$).
Vậy vectơ đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{CD}$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;-2;1)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

Ⓐ $(0;0;1)$. Ⓑ $(2;0;1)$. Ⓒ $(2;-2;0)$. Ⓓ $(0;-2;1)$.

Hướng dẫn giải. Hình chiếu vuông góc của điểm $M(x;y;z)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $M'(x;y;0)$.
Với $M(2;-2;1)$, hình chiếu trên (Oxy) là $(2;-2;0)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-2)$ và $B(2;2;1)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

Ⓐ $(3;3;-1)$. Ⓑ $(-1;-1;-3)$.
Ⓒ $(1;1;3)$. Ⓓ $(3;1;1)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)=(2-1;2-1;1-(-2))=(1;1;3)$.

Câu 4. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của $B'C'$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BM}$. Ⓓ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'M}$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào quy tắc cộng vectơ (quy tắc nối đuôi), ta có:
$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'M}$.
Đây là một đẳng thức vectơ luôn đúng.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}=(2;-1;3)$ và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$. Khi đó điểm M có tọa độ là

Ⓐ $(2;-1;0)$. Ⓑ $(2;-1;3)$. Ⓒ $(2;0;3)$. Ⓓ $(2;1;3)$.

Hướng dẫn giải. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, tọa độ của điểm M chính là tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$.
Vì $\overrightarrow{OM}=\vec{a}=(2;-1;3)$ nên $M(2;-1;3)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\overrightarrow{OA}=\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ và A' là điểm đối xứng của A

qua mặt phẳng (Oxy). Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{OA'} = -\vec{j} + 2\vec{k}$.
Ⓑ $\overrightarrow{OA'} = \vec{i} - \vec{j}$.
Ⓒ $\overrightarrow{OA'} = -\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.
Ⓓ $\overrightarrow{OA'} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

Hướng dẫn giải. Từ $\overrightarrow{OA} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ suy ra tọa độ điểm $A(1;-1;-2)$.
Điểm A' đối xứng với $A(1;-1;-2)$ qua mặt phẳng (Oxy) sẽ giữ nguyên hoành độ, tung độ và đổi dấu cao độ, ta được $A'(1;-1;2)$.
Do đó $\overrightarrow{OA'} = 1\vec{i} - 1\vec{j} + 2\vec{k} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

Câu 7. Cho hình lập phương $MNPQ.M'N'P'Q'$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{MP'} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{M'M}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MP'} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{Q'M}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MP'} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{MM'}$.
Ⓓ $\overrightarrow{MP'} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MM'}$.

Hướng dẫn giải. Theo quy tắc hình hộp, vectơ đường chéo của hình hộp xuất phát từ một đỉnh bằng tổng ba vectơ cạnh xuất phát từ đỉnh đó:
$\overrightarrow{MP'} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MM'}$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OH} = -8\vec{i} + 4\vec{j}$. Tọa độ của điểm H là

Ⓐ $H(-8;4;0)$.
Ⓑ $H(8;4;0)$.
Ⓒ $H(0;-8;4)$.
Ⓓ $H(-8;0;4)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{OH} = -8\vec{i} + 4\vec{j} + 0\vec{k} = (-8;4;0)$.
Vậy tọa độ điểm H là $(-8;4;0)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(800;500;7)$; $B(940;550;9)$, gọi $C(x;y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$. Tính $x + y + z$.

Ⓐ 1559.
Ⓑ 2025.
Ⓒ 1595.
Ⓓ 1955.

Hướng dẫn giải. Tính $\overrightarrow{AB} = (940 - 800; 550 - 500; 9 - 7) = (140;50;2)$.
$\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (70;25;1)$.
Mà $\overrightarrow{BC} = (x - 940; y - 550; z - 9) \Rightarrow \begin{cases} x - 940 = 70 \Rightarrow x = 1010 \\ y - 550 = 25 \Rightarrow y = 575 \\ z - 9 = 1 \Rightarrow z = 10 \end{cases}$.
Suy ra $x + y + z = 1010 + 575 + 10 = 1595$.

Câu 10. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \dfrac{1}{2}\vec{b}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{c}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \dfrac{1}{2}\vec{b}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \dfrac{1}{2}\vec{a}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$.
Do tính chất của hình lăng trụ nên $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$.
Thay các vectơ đã cho vào: $\overrightarrow{AM} = (\vec{b} - \vec{a}) + \dfrac{1}{2}\vec{c} = \vec{b} - \vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{c}$.

Câu 11. Cho điểm $A(1;2;-1), \overrightarrow{AB} = (1;3;1)$ thì tọa độ của điểm B là

Ⓐ $B(0;-1;-2)$.
Ⓑ $B(0;1;2)$.
Ⓒ $B(-2;-5;0)$.
Ⓓ $B(2;5;0)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

Suy ra $\begin{cases} x_B - 1 = 1 \Rightarrow x_B = 2 \\ y_B - 2 = 3 \Rightarrow y_B = 5 \\ z_B - (-1) = 1 \Rightarrow z_B = 0 \end{cases}$. Vậy $B(2;5;0)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;5)$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

Ⓐ $\cos(\overrightarrow{OA};\vec{i}-\vec{j}) = \dfrac{-1}{\sqrt{76}}$.
Ⓑ $\cos(\overrightarrow{OA};\vec{i}) = \dfrac{2}{\sqrt{38}}$.
Ⓒ $\cos(\overrightarrow{OA};\vec{k}) = \dfrac{5}{\sqrt{38}}$.
Ⓓ $\cos(\overrightarrow{OA};\vec{j}) = -\dfrac{3}{\sqrt{38}}$.

Hướng dẫn giải. $\overrightarrow{OA} = (2;-3;5) \Rightarrow |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{2^2+(-3)^2+5^2} = \sqrt{38}$.

Góc giữa vectơ $\overrightarrow{OA}$ và các vectơ đơn vị $\vec{i}(1;0;0)$, $\vec{j}(0;1,0)$, $\vec{k}(0;0,1)$ lần lượt thỏa mãn:
$\cos(\overrightarrow{OA};\vec{i}) = \dfrac{2}{\sqrt{38}}$ (B đúng); $\cos(\overrightarrow{OA};\vec{j}) = \dfrac{-3}{\sqrt{38}}$ (D đúng); $\cos(\overrightarrow{OA};\vec{k}) = \dfrac{5}{\sqrt{38}}$ (C đúng).

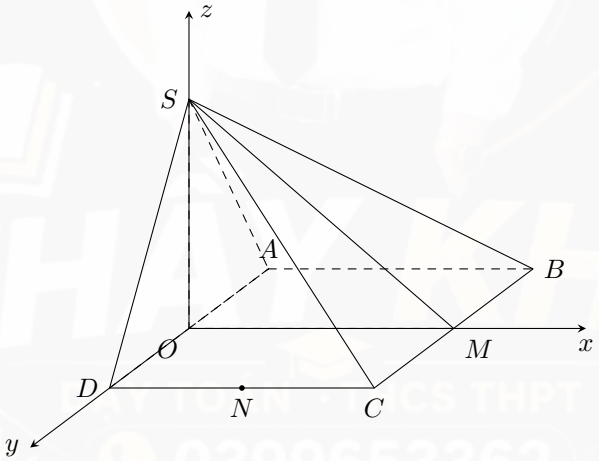
Xét đáp án A: Đặt $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} = (1;-1;0) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{2}$.

$\cos(\overrightarrow{OA};\vec{u}) = \dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\vec{u}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\vec{u}|} = \dfrac{2(1)+(-3)(-1)+5(0)}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{5}{\sqrt{76}}$.

Khẳng định A là sai.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có các cạnh bằng 1, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi O, M và N lần lượt là trung điểm của AD, BC và CD. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



a) Tọa độ các điểm A, B là $A\left(0;-\dfrac{1}{2};0\right), B\left(1;-\dfrac{1}{2};0\right)$.

b) Tọa độ các điểm C, D là $C\left(1;\dfrac{1}{2};0\right), D\left(0;\dfrac{1}{2};0\right)$.

c) Tọa độ điểm S là $S\left(0;0;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

d) Tọa độ các điểm M, N là $M(1;0;0), N\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$.

Hướng dẫn giải. Vì đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh 1, O là trung điểm AD nên $OA = OD = \dfrac{1}{2}$.

Dựa trên hình vẽ:

- Điểm D nằm trên tia Oy nên $D\left(0;\frac{1}{2};0\right)$.

- Điểm A nằm ngược tia Oy nên $A\left(0;-\frac{1}{2};0\right)$.

- $OM=1$ và nằm trên tia Ox nên $M(1;0;0)$.

- Từ A và M suy ra $B\left(1;-\frac{1}{2};0\right)$.

- Từ D và M suy ra $C\left(1;\frac{1}{2};0\right)$.

- Tam giác SAD đều cạnh 1, đường cao $SO=\frac{1\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, S nằm trên tia Oz nên $S\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

- N là trung điểm $CD\Rightarrow N\left(\frac{0+1}{2};\frac{1/2+1/2}{2};0\right)=N\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$.

Vậy cả 4 khẳng định a, b, c, d đều đúng.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-2;3)$, $B(-2;1;2)$, $C(3;-1;2)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(-3;3;1)$.

b) $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$.

c) Ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

d) Tọa độ chân đường cao vẽ từ A của tam giác ABC là $\left(-\frac{47}{29};\frac{13}{29};2\right)$.

Hướng dẫn giải. a) $\overrightarrow{AB}=(-2-1;1-(-2);2-3)=(-3;3;-1)$. Khẳng định này **Sai**.
b) $\overrightarrow{AC}=(3-1;-1-(-2);2-3)=(2;1;-1)$. Ta thấy $\overrightarrow{AB}\neq 3\overrightarrow{AC}$. Khẳng định này **Sai**.
c) Do $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên A,B,C không thẳng hàng. Khẳng định này **Đúng**.
d) Gọi H là chân đường cao từ A. $H\in BC\Rightarrow\overrightarrow{BH}=k\overrightarrow{BC}=k(5;-2;0)\Rightarrow H(5k-2;1-2k;2)$.
$\overrightarrow{AH}=(5k-3;3-2k;-1)$. $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow 5(5k-3)-2(3-2k)=0\Leftrightarrow 29k=21\Rightarrow k=\frac{21}{29}$.
Tọa độ $H\left(\frac{47}{29};-\frac{13}{29};2\right)$. Khẳng định này **Sai**.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $OBCD.O'B'C'D'$ có $B(2;0;0)$, $D(0;1;0)$, $O'(0;0;1)$.

a) $C(2;1;0)$.

b) $B'(2;0;1)$.

c) $\overrightarrow{OC'}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$.

d) $\overrightarrow{OD'}=(1;1;1)$.

Hướng dẫn giải. a) $C(x_B;y_D;z_O)=(2;1;0)$. Khẳng định này **Đúng**.
b) $B'(x_B;y_O;z_{O'})=(2;0;1)$. Khẳng định này **Đúng**.
c) $C'(x_B;y_D;z_{O'})=(2;1;1)\Rightarrow\overrightarrow{OC'}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. Khẳng định này **Sai**.
d) $D'(x_O;y_D;z_{O'})=(0;1;1)\Rightarrow\overrightarrow{OD'}=(0;1;1)$. Khẳng định này **Sai**.

Bài 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;2;4)$, $B(0;-2;3)$ và

$C(4;-2;3)$.

a) Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$ bằng $\sqrt{42}$.

b) Diện tích của tam giác ABC bằng $2\sqrt{17}$.

c) Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm D là $(5;-2;-4)$.

d) Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=14$.

✍ *Hướng dẫn giải.* a) $\overrightarrow{AB}=(-1;-4;-1)$, $\overrightarrow{BC}=(4;0;0)\Rightarrow\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=(-5;-4;-1)$.
$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}|=\sqrt{25+16+1}=\sqrt{42}$. Khẳng định này **Đúng**.
b) $\overrightarrow{AC}=(3;-4;-1)\Rightarrow[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=(0;-4;16)$.
$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{0^2+(-4)^2+16^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{272}=2\sqrt{17}$. Khẳng định này **Đúng**.
c) $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Rightarrow D(5;2;4)$. Khẳng định này **Sai**.
d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1)(3)+(-4)(-4)+(-1)(-1)=14$. Khẳng định này **Đúng**.

Phần III. Câu trả lời ngắn *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 6 .*

Bài 1. Hệ thống định vị toàn cầu GPS (Global Positioning System) là một hệ thống cho phép xác định vị trí của một vật thể trong không gian. Trong cùng một thời điểm, vị trí của một điểm M trong không gian sẽ đươc xác định bởi bốn vệ tinh cho trước nhờ các bộ thu phát tín hiệu đặt trên các vệ tinh. Giả sử trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, có bốn vệ tinh đặt tại các điểm có tọa độ lần lượt là $A(0;4;5)$, $B(-3;-1;3)$, $C(-2;8;9)$, $D(-7;2;-3)$ đang tiến hành theo dõi vật thể M (coi là một chất điểm). Tại một thời điểm, cả bốn vệ tinh đồng thời phát tín hiệu về điểm M và ngay lập tức nhận lại tín hiệu phản hồi sau những khoảng thời gian lần lượt là $t_A=0{,}2$ ms, $t_B=\dfrac{1}{3}$ ms, $t_C=0{,}6$ ms, $t_D=\dfrac{2}{3}ms$. Biết rằng vận tốc của sóng điện từ bằng vận tốc ánh sáng $c=3\cdot10^8$ m/s. Tính khoảng cách từ M đến O biết một đơn vị độ dài trên các trục bằng 10 km thực tế (đơn vị: km, kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

✍ *Hướng dẫn giải.* Gọi $M(x;y;z)$.
Do mỗi vệ tinh gửi tín hiệu đến M và nhận lại phản hồi sau thời gian t, tức tín hiệu đi từ vệ tinh đến M và quay về nên quãng đường đi được là gấp đôi nên

$$MA=\frac{0{,}2\cdot10^{-3}\cdot3\cdot10^8}{2}=30\ 000\text{ m}=30\text{ km};$$

$$MB=\frac{\frac{1}{3}\cdot10^{-3}\cdot3\cdot10^8}{2}=50\ 000\text{ m}=50\text{ km};$$

$$MC=\frac{0{,}6\cdot10^{-3}\cdot3\cdot10^8}{2}=90\ 000\text{ m}=90\text{ km};$$

$$MD=\frac{\frac{2}{3}\cdot10^{-3}\cdot3\cdot10^8}{2}=100\ 000\text{ m}=100\text{ km}.$$

Do mỗi đơn vị độ dài trên các trục bằng 10 km nên

$$\begin{cases}x^2+(y-4)^2+(z-5)^2=3^2\\(x+3)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=5^2\\(x+2)^2+(y-8)^2+(z-9)^2=9^2\\(x+7)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=10^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2-8y-10z=-32\\x^2+y^2+z^2+6x+2y-6z=6\\x^2+y^2+z^2+4x-16y-18z=-68\\x^2+y^2+z^2+14x-4y+6z=38\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-6x-10y-4z=-38\\-4x+8y+8z=36\\-14x-4y-16z=-70\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\\z=3\end{cases}.$$

Suy ra $OM = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.
Vậy khoảng cách từ O đến M là $\sqrt{14} \cdot 10 \approx 37{,}4$km.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(0;1;5)$ và chuyển động đều theo hướng vectơ $\vec{u} = (1;2;2)$ với tốc độ 6 m/s. Sau 6 giây kể từ lúc xuất phát, cabin đến điểm $B(a;b;c)$. Tìm c.

Hướng dẫn giải. Ta có

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3.$$

Suy ra mỗi giây cabin di chuyển được một quãng đường bằng 2 lần độ dài vectơ $\vec{u}$.
Khi đó, ta có

$$\overrightarrow{AB} = 12\vec{u} = (12;24;24).$$

Suy ra

$$c - 5 = 24 \Leftrightarrow c = 29.$$

Bài 3. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, |\vec{a} + \vec{b}| = 6$. Tính $|\vec{a} - \vec{b}|$. (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải. Ta sử dụng công thức hình bình hành đối với độ dài vectơ: $|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2 = 2\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2\right)$.
Thay các giá trị đã cho vào ta có: $6^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2\left(3^2 + 4^2\right) = 2(9 + 16) = 50$.
$\Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 50 - 36 = 14$.
$\Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{14} \approx 3{,}74$.

Bài 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Gọi D là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC. Độ dài đoạn $AD = \dfrac{\sqrt{a}}{3}$, giá trị của a bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Tính độ dài các cạnh BA và BC: $\overrightarrow{BA} = (1-2;2-(-1);-1-3) = (-1;3;-4) \Rightarrow BA = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{26}$.
$\overrightarrow{BC} = (-4-2;7-(-1);5-3) = (-6;8;2) \Rightarrow BC = \sqrt{(-6)^2 + 8^2 + 2^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$.
Theo tính chất đường phân giác trong góc B, ta có: $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{\sqrt{26}}{2\sqrt{26}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
Độ dài đoạn AC là: $\overrightarrow{AC} = (-4-1;7-2;5-(-1)) = (-5;5;6) \Rightarrow AC = \sqrt{(-5)^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{86}$.
Khi đó $AD = \dfrac{1}{3}AC = \dfrac{\sqrt{86}}{3}$.
So sánh với giả thiết $AD = \dfrac{\sqrt{a}}{3}$, ta được $a = 86$.

Bài 5. Cho tứ diện đều $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 1 (đơn vị độ dài). Gọi M là trung điểm của cạnh AB và N thuộc cạnh CD thỏa mãn $ND = 2NC$. Tính độ dài đoạn thẳng MN? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{AC} = \vec{v}, \overrightarrow{AD} = \vec{w}$. Vì $ABCD$ là tứ diện đều cạnh 1 nên:
$|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = 1$ và $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{u} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$.
Ta có $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\vec{u}$.
$N \in CD$ và $ND = 2NC \Rightarrow \overrightarrow{CN} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CD} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \dfrac{1}{3}(\vec{w} - \vec{v})$.

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \vec{v} + \dfrac{1}{3}(\vec{w} - \vec{v}) = \dfrac{2}{3}\vec{v} + \dfrac{1}{3}\vec{w}.$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\vec{v} + \dfrac{1}{3}\vec{w} - \dfrac{1}{2}\vec{u}.$

$MN^2 = \left(\dfrac{2}{3}\vec{v} + \dfrac{1}{3}\vec{w} - \dfrac{1}{2}\vec{u}\right)^2 = \dfrac{4}{9}v^2 + \dfrac{1}{9}w^2 + \dfrac{1}{4}u^2 + \dfrac{4}{9}\vec{v}\cdot\vec{w} - \dfrac{2}{3}\vec{v}\cdot\vec{u} - \dfrac{1}{3}\vec{w}\cdot\vec{u}.$

$MN^2 = \dfrac{19}{36}.$

$\Rightarrow MN = \dfrac{\sqrt{19}}{6} \approx 0{,}73.$

Bài 6. Trong hệ trục $Oxyz$ cho trước (đơn vị trên trục là mét), cho một trạm thu phát sóng 5G có bán kính vùng phủ sóng của trạm ở ngưỡng 600 m được đặt ở vị trí $I(200; 450; 60)$. Tìm giá trị lớn nhất cúa m (làm tròn đến hàng đơn vị) để một người dùng điện thoại ở vị trí $A(m+100; m+370; 0)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm nói trên.

Hướng dẫn giải. Để một người dùng điện thoại ở vị trí $A(m+100; m+370; 0)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng 5G có bán kính vùng phủ sóng của trạm ở ngưỡng 600 m được đặt ở vị trí $I(200; 450; 60)$ thì

$$\begin{aligned} IA \le 600 &\Leftrightarrow (m-100)^2 + (m-80)^2 + (-60)^2 \le 600^2 \\ &\Leftrightarrow 2m^2 - 360m - 340000 \le 0 \\ &\Leftrightarrow 90 - 10\sqrt{1781} \le m \le 90 + 10\sqrt{1781}. \end{aligned}$$

Vậy giá trị lớn nhất của m là $90 + 10\sqrt{1781} \approx 512$.

THẦY KHA
DẠY TOÁN - THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay - Làm chủ tương lai ngày mai

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ là các vectơ đơn vị. Tích vô hướng của $\vec{u}=(1;2;3)$ và $\vec{k}$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Hướng dẫn giải. Ta có vectơ đơn vị $\vec{k}=(0;0;1)$.

Tích vô hướng $\vec{u}\cdot\vec{k}=1\cdot 0+2\cdot 0+3\cdot 1=3$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;-2)$, $B(2;3;2)$ và $C(3;-1;6)$. Gọi $M(a;b;c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$, tính $T=a+b+c$

Ⓐ 3. Ⓑ 5. Ⓒ 7. Ⓓ 21.

Hướng dẫn giải. Đẳng thức $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ chứng tỏ M là trọng tâm của tam giác ABC.

Tọa độ của M là: $a=\dfrac{1+2+3}{3}=2$; $b=\dfrac{1+3-1}{3}=1$; $c=\dfrac{-2+2+6}{3}=2$.

Vậy $M(2;1;2)\Rightarrow T=a+b+c=2+1+2=5$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1;2;-3)$, $B(1;0;2)$, $C(x;y;-2)$ thẳng hàng. Khi đó $x+y$ bằng

Ⓐ $x+y=-\dfrac{11}{5}$. Ⓑ $x+y=17$.

Ⓒ $x+y=\dfrac{11}{5}$. Ⓓ $x+y=1$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-2;5)$.

Vectơ $\overrightarrow{AC}=(x+1;y-2;1)$.

Ba điểm A,B,C thẳng hàng khi $\overrightarrow{AC}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{1}{5}\Rightarrow\begin{cases}x+1=\frac{2}{5}\Rightarrow x=-\frac{3}{5}\\ y-2=-\frac{2}{5}\Rightarrow y=\frac{8}{5}\end{cases}.$$

Vậy $x+y=-\dfrac{3}{5}+\dfrac{8}{5}=\dfrac{5}{5}=1$.

Câu 4. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}=(1;0;0)$ và $\vec{u}=(-\sqrt{3};0;1)$ bằng

Ⓐ 120°. Ⓑ 30°. Ⓒ 60°. Ⓓ 150°.

Hướng dẫn giải. Gọi θ là góc giữa hai vectơ. Ta có:

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{u}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{u}|}=\frac{1\cdot(-\sqrt{3})+0\cdot 0+0\cdot 1}{1\cdot\sqrt{(-\sqrt{3})^2+0^2+1^2}}=\frac{-\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra $\theta=150°$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;3;1)$, $B(5;6;2)$ và I là trung điểm AB. Tọa độ điểm I là

Ⓐ $I(1;3;1)$. Ⓑ $I\left(\frac{7}{2};\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.

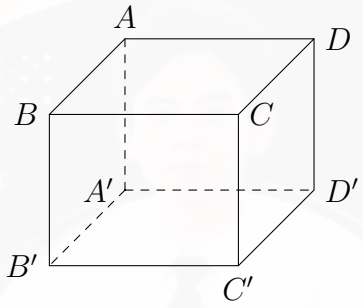
Ⓒ $I\left(\frac{3}{2};\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$. Ⓓ $I\left(\frac{-7}{2};\frac{-3}{2};\frac{-1}{2}\right)$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là:

$x_I=\dfrac{-2+5}{2}=\dfrac{3}{2}$; $y_I=\dfrac{3+6}{2}=\dfrac{9}{2}$; $z_I=\dfrac{1+2}{2}=\dfrac{3}{2}$.

Vậy $I\left(\frac{3}{2};\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Câu 6. Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài các cạnh bằng 1, điểm A trùng với gốc tọa độ (như hình vẽ bên dưới). Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{B'C}$ là



Ⓐ $(0;1;1)$. Ⓑ $(0;1;-1)$. Ⓒ $(1;1;1)$. Ⓓ $(1;0;1)$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Dựa vào hình vẽ và giả thiết cạnh bằng 1, ta có tọa độ các điểm:

$A(0;0;0), B(1;0;0), D(0;1;0), C(1;1;0), A'(0;0,1), B'(1;0,1), C'(1;1,1), D'(0,1,1)$.

Khi đó $\overrightarrow{B'C}=(1-1;1-0;0-1)=(0;1;-1)$.

Câu 7. Cho ba vectơ $\vec{a}=(-1;1;0)$, $\vec{b}=(1;1;0)$ và $\vec{c}=(1;1;1)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $|\vec{c}|=\sqrt{3}$. Ⓑ $\vec{a}\perp\vec{b}$. Ⓒ $\vec{c}\perp\vec{b}$. Ⓓ $|\vec{a}|=\sqrt{2}$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Kiểm tra các phương án:

A. $|\vec{c}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$ (Đúng).

B. $\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\cdot1+1\cdot1+0\cdot0=0\Rightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$ (Đúng).

C. $\vec{c}\cdot\vec{b}=1\cdot1+1\cdot1+1\cdot0=2\neq0$. Vậy khẳng định $\vec{c}\perp\vec{b}$ là sai.

D. $|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$ (Đúng).

Câu 8. Cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ thỏa mãn $|\vec{u}|=5, |\vec{v}|=8$ và $(\vec{u},\vec{v})=60°$. Tính $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Ⓐ $\vec{u}\cdot\vec{v}=20$. Ⓑ $\vec{u}\cdot\vec{v}=20\sqrt{3}$.

Ⓒ $\vec{u}\cdot\vec{v}=-20$. Ⓓ $\vec{u}\cdot\vec{v}=40$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Ta có công thức tích vô hướng: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$.

Thay số vào: $\vec{u}\cdot\vec{v}=5\cdot8\cdot\cos60°=40\cdot\dfrac{1}{2}=20$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, cho hai vectơ $\vec{a}=(1;2;3)$ và $\vec{b}=2\vec{i}-4\vec{k}$. Tính tọa độ vectơ $\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}$

Ⓐ $\vec{u}=(-1;2;-1)$. Ⓑ $\vec{u}=(-1;-2;3)$.

Ⓒ $\vec{u}=(-1;6;3)$. Ⓓ $\vec{u}=(-1;2;7)$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Ta có $\vec{b}=2\vec{i}+0\vec{j}-4\vec{k}\Rightarrow\vec{b}=(2;0;-4)$.

Khi đó $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b} = (1-2; 2-0; 3-(-4)) = (-1; 2; 7)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $M(2;0;0); N(0;-3;0); P(0;0;4)$. Nếu $MNPQ$ là hình bình hành thì tọa độ điểm Q là

Ⓐ $(-2;-3;4)$. Ⓑ $(-2;-3;-4)$.
Ⓒ $(2;3;4)$. Ⓓ $(3;4;2)$.

Hướng dẫn giải. Gọi $Q(x;y;z)$.
Tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành khi $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.
Ta có $\overrightarrow{MN} = (0-2; -3-0; 0-0) = (-2;-3;0)$.
Và $\overrightarrow{QP} = (0-x; 0-y; 4-z) = (-x; -y; 4-z)$.
Đẳng thức vectơ tương đương với hệ: $\begin{cases} -x = -2 \\ -y = -3 \\ 4-z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow Q(2;3;4)$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1), B(-1;2;1)$. Tìm tọa độ của điểm A' đối xứng với điểm A qua điểm B?

Ⓐ $A'(3;4;-3)$. Ⓑ $A'(-4;3;1)$. Ⓒ $A'(1;3;2)$. Ⓓ $A'(5;0;1)$.

Hướng dẫn giải. Điểm A' đối xứng với điểm A qua điểm B nên B là trung điểm của đoạn thẳng AA'.
Theo công thức trung điểm ta có:
$x_{A'} = 2x_B - x_A = 2(-1) - 2 = -4$
$y_{A'} = 2y_B - y_A = 2(2) - 1 = 3$
$z_{A'} = 2z_B - z_A = 2(1) - 1 = 1$
Vậy $A'(-4;3;1)$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(5;-1;2)$, $C(3;2;-4)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Ⓐ $M\left(4; -\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}\right)$. Ⓑ $M\left(4; \frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$.
Ⓒ $M\left(4; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$. Ⓓ $M\left(-4; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải. Gọi $M(a;b;c)$.
Ta có: $\overrightarrow{MA} = (1-a; 1-b; 1-c)$, $\overrightarrow{MB} = (5-a; -1-b; 2-c)$, $\overrightarrow{MC} = (3-a; 2-b; -4-c)$.
Đẳng thức $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ tương đương với hệ phương trình:

$$\begin{cases} (1-a) + 2(5-a) - (3-a) = 0 \\ (1-b) + 2(-1-b) - (2-b) = 0 \\ (1-c) + 2(2-c) - (-4-c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 8 = 0 \\ -2b - 3 = 0 \\ -2c + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm M là $M\left(4; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có điểm A trùng với gốc tọa độ, các điểm B, D, S lần lượt thuộc Ox, Oy, Oz như hình bên dưới. Biết rằng $AB = 2$, $AD = 4$ và $SA = 6$.

a) Tích vô hướng $\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{CD}$ bằng -4.

b) Tọa độ của điểm S là $(0;0;6)$.

c) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{BD}$ lớn hơn $70°$.

d) Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng BD là $(1;2;3)$.

Hướng dẫn giải. Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ. Khi đó: $A(0;0;0), B(2;0;0), D(0;4;0), S(0;0;6), C($

a) $\overrightarrow{SB}=(2;0;-6), \overrightarrow{CD}=(0-2;4-4;0-0)=(-2;0;0)$.
$\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{CD}=2(-2)+0+0=-4$. Khẳng định này **Đúng**.

b) S nằm trên trục Oz và $AS=6$ nên $S(0;0;6)$. Khẳng định này **Đúng**.

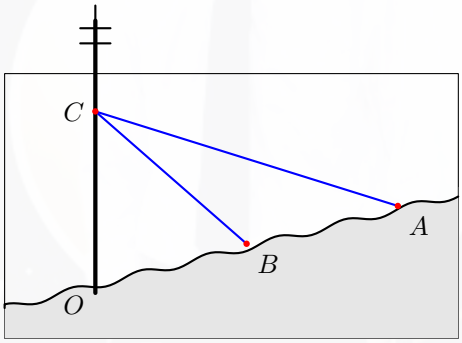
c) $\overrightarrow{SC}=(2;4;-6), \overrightarrow{BD}=(-2;4;0)$.

$$\cos(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{BD})=\frac{|2(-2)+4\cdot4+0|}{\sqrt{2^2+4^2+(-6)^2}\sqrt{(-2)^2+4^2+0^2}}=\frac{12}{\sqrt{56}\sqrt{20}}=\frac{12}{4\sqrt{70}}=\frac{3}{\sqrt{70}}\approx 0{,}358.$$

Suy ra góc $\approx 69°$. Khẳng định này **Sai**.

d) Trung điểm BD là $M\left(\frac{2+0}{2};\frac{0+4}{2};\frac{0+0}{2}\right)=(1;2;0)$. Khẳng định này **Sai**.

Bài 2. Trên một sườn đồi, người ta trồng một trụ điện và muốn giữ nó thẳng đứng bằng hai sợi dây neo AC và BC. Hai sợi dây này được kéo căng thành hai đoạn thẳng có chung điểm C trên trụ điện và hai đầu A, B được neo trên sườn đồi (tham khảo hình minh họa).



Giả sử trong một hệ trục tọa độ $Oxyz$ phù hợp, gốc trụ điện đặt tại gốc tọa độ O, đầu các sợi dây neo có tọa độ lần lượt là $A(-3;4;2), B(4;2;1)$ và $C(0;0;5)$.

a) Trụ điện cao hơn 5 mét.

b) Tổng chiều dài hai sợi dây neo là gần bằng 11,83 mét.

c) Hai sợi dây neo tạo với nhau một góc gần bằng $76{,}8°$.

d) Để gia cố trụ điện, người ta cần thêm sợi dây neo thứ ba CD thỏa ba điểm A, B, D thẳng hàng. Sợi dây neo thứ 3 có độ dài ngắn nhất bằng $\frac{2\sqrt{435}}{9}$ mét.

Hướng dẫn giải. a) Độ cao trụ điện là $OC=\sqrt{0^2+0^2+5^2}=5$ m. Khẳng định này **Sai**.

b) $AC=\sqrt{(-3-0)^2+4^2+(2-5)^2}=\sqrt{9+16+9}=\sqrt{34}\approx 5{,}83$.
$BC=\sqrt{4^2+2^2+(1-5)^2}=\sqrt{16+4+16}=6$.
Tổng chiều dài $\approx 5{,}83+6=11{,}83$ m. Khẳng định này **Đúng**.

c) $\overrightarrow{CA}=(-3;4;-3), \overrightarrow{CB}=(4;2;-4)$.

$$\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{|-12+8+12|}{\sqrt{34}\cdot 6}=\frac{8}{6\sqrt{34}}\approx 0{,}228\Rightarrow \text{góc}\approx 76{,}8°.$$

Khẳng định này **Đúng**.

d) Độ dài ngắn nhất của dây CD khi D là hình chiếu của C trên đường thẳng AB.

Khoảng cách $d(C,AB)=\frac{|[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}]|}{|\overrightarrow{AB}|}$. Ta tính được $CD=\frac{2\sqrt{435}}{9}$. Khẳng định này **Đúng**.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;1;1), B(1;2;1)$ và $C(2;-1;3)$.

a) Gọi D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$ thì $D(3;-2;3)$.

b) Chu vi của tam giác ABC lớn hơn 8.

c) $G\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right)$ là tọa độ trọng tâm tam giác ABC.

d) Góc $\widehat{BAC}$ là góc tù.

Hướng dẫn giải. a) $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (x_D-2;y_D-1;z_D-1)=(2-1;-1-2;3-1)=(1;-3;2)$.
Suy ra $D(3;-2;3)$. Khẳng định này **Đúng**.
b) $AB=\sqrt{2}\approx 1{,}41; BC=\sqrt{14}\approx 3{,}74; AC=\sqrt{8}\approx 2{,}82$.
Chu vi $\approx 1{,}41+3{,}74+2{,}82=7{,}97<8$. Khẳng định này **Sai**.
c) $x_G=\frac{2+1+2}{3}=\frac{5}{3}; y_G=\frac{1+2-1}{3}=\frac{2}{3}; z_G=\frac{1+1+3}{3}=\frac{5}{3}$. Khẳng định này **Đúng**.
d) $\overrightarrow{AB}=(-1;1;0), \overrightarrow{AC}=(0;-2;2)$.
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1)\cdot 0+1\cdot(-2)+0\cdot 2=-2<0$.
Vì tích vô hướng âm nên góc $\widehat{BAC}$ là góc tù. Khẳng định này **Đúng**.

Bài 4. Cho ba vectơ $\vec{a}=(-1;1;0)$, $\vec{b}=(1;1;0)$ và $\vec{c}=(1;1;1)$.

a) $|\vec{a}|=2$.

b) $|\vec{c}|=\sqrt{3}$.

c) $\cos(\vec{a},\vec{c})=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

d) $\vec{b}\perp\vec{c}$.

Hướng dẫn giải. a) Ta có $|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$. Khẳng định này **Sai**.
b) Ta có $|\vec{c}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$. Khẳng định này **Đúng**.
c) Ta có $\vec{a}\cdot\vec{c}=(-1)\cdot 1+1\cdot 1+0\cdot 1=0$.
Do đó $\cos(\vec{a},\vec{c})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|}=\frac{0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}=0$. Khẳng định này **Sai**.
d) Ta có $\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot 1+1\cdot 1+0\cdot 1=2\neq 0$. Suy ra $\vec{b}$ không vuông góc với $\vec{c}$. Khẳng định này **Sai**.

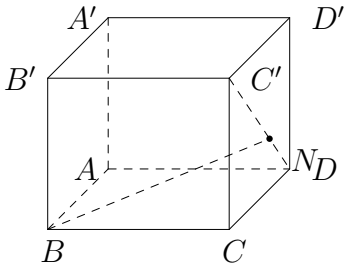
Phần III. Câu trả lời ngắn *Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 6 .*

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-5;2;3)$ và B là điểm đối xứng với A qua trục Oy. Độ dài đoạn thẳng AB bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?

Hướng dẫn giải. Điểm B đối xứng với $A(-5;2;3)$ qua trục Oy nên B có tọa độ $B(5;2;-3)$ (giữ nguyên tung độ, lấy đối hoành độ và cao độ).
Độ dài đoạn thẳng AB là: $AB=\sqrt{(5-(-5))^2+(2-2)^2+(-3-3)^2}=\sqrt{10^2+0^2+(-6)^2}=\sqrt{136}\approx 11,7$.

Bài 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi N là điểm trên đoạn $C'D$ sao cho $DN=\frac{1}{3}DC'$.

Khi phân tích $\overrightarrow{BN} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC} + z\overrightarrow{BB'}$ thì giá trị $3x + 2y + 3z$ bằng bao nhiêu?

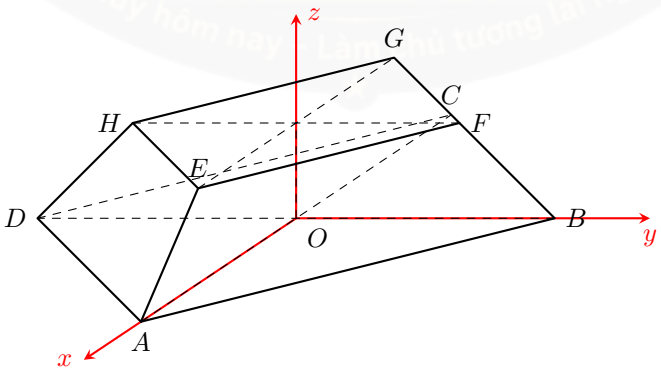


Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DC'}$.
Mặt khác $\overrightarrow{DC'} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC'} = -(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}) = -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'}$.
Thay vào biểu thức trên: $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \dfrac{1}{3}(-\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'}) = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BA} + 1\overrightarrow{BC} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BB'}$.
Suy ra $x = \dfrac{2}{3}, y = 1, z = \dfrac{1}{3}$.
Giá trị $3x + 2y + 3z = 3\left(\dfrac{2}{3}\right) + 2(1) + 3\left(\dfrac{1}{3}\right) = 2 + 2 + 1 = 5$.

Bài 3. Một máy bay đang bay với vận tốc $\vec{a} = (630; 600; 18)$ (km/h) thì gặp gió. Máy bay bị lệch và đi từ $M(100; 200; 8)$ đến $N(210; 303; 12)$ trong 10 phút. Tính tốc độ của gió (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Hướng dẫn giải. Vectơ vận tốc của máy bay khi không có gió là $\vec{v}_m = \vec{a} = (630; 600; 18)$.
Độ dời thực tế của máy bay là $\overrightarrow{MN} = (210 - 100; 303 - 200; 12 - 8) = (110; 103; 4)$ (km).
Thời gian bay thực tế là 10 phút $= \dfrac{1}{6}$ giờ.
Vectơ vận tốc thực tế của máy bay dưới tác động của gió là: $\vec{v} = \dfrac{\overrightarrow{MN}}{t} = 6 \cdot (110; 103; 4) = (660; 618; 24)$ (km/h).
Gọi $\vec{v}_g$ là vectơ vận tốc của gió. Ta có phương trình: $\vec{v} = \vec{v}_m + \vec{v}_g$.
$\Rightarrow \vec{v}_g = \vec{v} - \vec{v}_m = (660 - 630; 618 - 600; 24 - 18) = (30; 18; 6)$.
Tốc độ của gió là: $|\vec{v}_g| = \sqrt{30^2 + 18^2 + 6^2} = \sqrt{900 + 324 + 36} = \sqrt{1260} \approx 35,5$ (km/h).

Bài 4. Trong không gian với hệ $Oxyz$, cho các điểm $A(19; 0; 0)$, $B(0; 19; 0)$, $E(12; 0; 7)$ và $F(0; 12; 7)$. Biết rằng mặt đáy hình vuông $ABCD$ song song với mặt đỉnh hình vuông $EFGH$ (như hình vẽ). Điểm $S(0; 0; k)$ là đỉnh của hình chóp $S.EFGH$ kết hợp với khối đa diện $ABCD.EFGH$ tạo thành một khối chóp lớn $S.ABCD$. Hỏi thể tích của khối chóp $S.EFGH$ bằng bao nhiêu m^3? Biết rằng mỗi đơn vị tương ứng với 1 mét trong thực tế (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Hướng dẫn giải. Mặt đáy $ABCD$ là hình vuông có hai đường chéo AC và BD nằm trên các trục tọa độ Ox, Oy cắt nhau tại gốc $O(0; 0; 0)$.

Do $A(19;0;0)$ và $B(0;19;0)$ nên $OA = OB = 19$. Độ dài cạnh của hình vuông đáy là:

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 19\sqrt{2}.$$

Tương tự, mặt đỉnh $EFGH$ là hình vuông có tâm $O'(0;0;7)$, các đỉnh $E(12;0;7)$ và $F(0;12;7)$ nên cạnh của hình vuông này là:

$$EF = \sqrt{12^2 + 12^2} = 12\sqrt{2}.$$

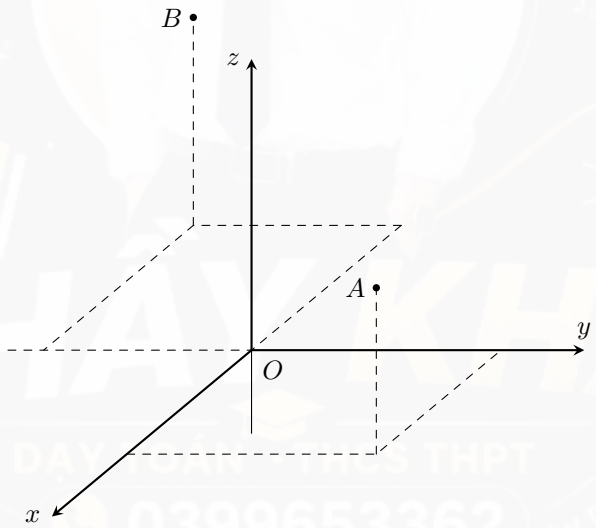
Hai hình chóp $S.EFGH$ và $S.ABCD$ đồng dạng với nhau theo tỉ số đồng dạng $q = \dfrac{EF}{AB} = \dfrac{12}{19}$.
Gọi h' là chiều cao của khối chóp $S.EFGH$, chiều cao của khối chóp cụt là $h = OO' = 7$.
Khi đó chiều cao của khối chóp lớn $S.ABCD$ là $h' + 7$.
Ta có tỉ số chiều cao:

$$\frac{h'}{h'+7} = \frac{12}{19} \Leftrightarrow 19h' = 12h' + 84 \Leftrightarrow 7h' = 84 \Leftrightarrow h' = 12.$$

Diện tích mặt đáy của khối chóp $S.EFGH$ là $S_{EFGH} = EF^2 = (12\sqrt{2})^2 = 288$.
Thể tích của khối chóp $S.EFGH$ là:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{EFGH} \cdot h' = \frac{1}{3} \cdot 288 \cdot 12 = 1152 \text{ m}^3.$$

Bài 5. Hai chiếc Flycam được điều khiển cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc flycam thứ nhất bay đến vị trí điểm A, chiếc flycam thứ hai bay đến điểm B. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc flycam, mặt phẳng Oxy trùng với mặt đất (coi như phẳng) có trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (đơn vị đo mỗi trục là mét).



Biết điểm A cách mặt đất 4m, cách điểm xuất phát 5m về phía nam và 6m về phía đông.
Vectơ $\overrightarrow{OB}$ có độ dài bằng 10 và hợp với các vectơ đơn vị trên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz các góc lần lượt là $135°, 120°, 60°$. Khoảng cách giữa hai chiếc flycam lúc đó là bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng phần mười).

Hướng dẫn giải. Từ giả thiết của bài toán, ta xác định được tọa độ của điểm A:

- Cách điểm xuất phát 5m về phía nam (theo chiều dương trục Ox) $\Rightarrow x_A = 5$.
- Cách điểm xuất phát 6m về phía đông (theo chiều dương trục Oy) $\Rightarrow y_A = 6$.
- Cách mặt đất 4m (theo chiều dương trục Oz) $\Rightarrow z_A = 4$.

Vậy $A(5;6;4)$.
Gọi $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz. Vectơ $\overrightarrow{OB} = (x_B; y_B; z_B)$ có độ dài

$OB = 10$ và hợp với các trục các góc đã cho nên: $\begin{cases} x_B = OB \cdot \cos(\overrightarrow{OB}, \vec{i}) = 10 \cdot \cos 135^\circ = -5\sqrt{2} \\ y_B = OB \cdot \cos(\overrightarrow{OB}, \vec{j}) = 10 \cdot \cos 120^\circ = -5 \\ z_B = OB \cdot \cos(\overrightarrow{OB}, \vec{k}) = 10 \cdot \cos 60^\circ = 5 \end{cases}$

Vậy $B(-5\sqrt{2}; -5; 5)$.

Khoảng cách giữa hai chiếc flycam chính là độ dài đoạn thẳng AB:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$AB = \sqrt{(-5\sqrt{2} - 5)^2 + (-5 - 6)^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{(50 + 50\sqrt{2} + 25) + 121 + 1} = \sqrt{197 + 50\sqrt{2}} \approx 16,36$ m.

Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất (hàng phần mười), ta được khoảng cách là $16,4$ mét.

Bài 6. Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo km), một ra-đa phát hiện một máy bay không người lái tại điểm $A(800; 500; 7)$. Từ điểm A, máy bay này di chuyển với vận tốc và hướng không đổi đến điểm $B(940; 550; 8)$ trong 10 phút để tiếp cận mục tiêu. Sau khi đến B, máy bay nhanh chóng quay bay ngược từ B về A để trở lại căn cứ $C(a; b; c)$ với vận tốc như lúc ban đầu. Biết rằng trong hành trình quay về, máy bay này cũng không đổi hướng thì sau 30 phút, máy bay đã về căn cứ C. Hãy xác định $T = 3a + 2b + c - 339$.

Hướng dẫn giải. Vectơ dịch chuyển ban đầu là $\overrightarrow{AB} = (140; 50; 1)$. Thời gian đi là $t_1 = 10$ phút.

Vận tốc của máy bay là $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{AB}}{t_1} = (14; 5; 0,1)$ đơn vị/phút.

Hành trình quay về từ B ngược hướng $\overrightarrow{AB}$ với cùng tốc độ, nên vận tốc lúc quay về là $\vec{v}' = -\vec{v} = (-14; -5; -0,1)$.

Sau $t_2 = 30$ phút quay về từ B, máy bay đến căn cứ C. Vectơ dịch chuyển $\overrightarrow{BC}$ là: $\overrightarrow{BC} = \vec{v}' \cdot t_2 = 30 \cdot (-14; -5; -0,1) = (-420; -150; -3)$.

Tọa độ căn cứ C là: $C = B + \overrightarrow{BC} = (940 - 420; 550 - 150; 8 - 3) = (520; 400; 5)$.

Vậy $a = 520, b = 400, c = 5$.

Giá trị $T = 3(520) + 2(400) + 5 - 339 = 1560 + 800 + 5 - 339 = 2026$.

THẦY KHA
DẠY TOÁN - THCS THPT
0399653362
Bạn tự duy hơn mọi - Làm chủ tương lai ngay hôm nay