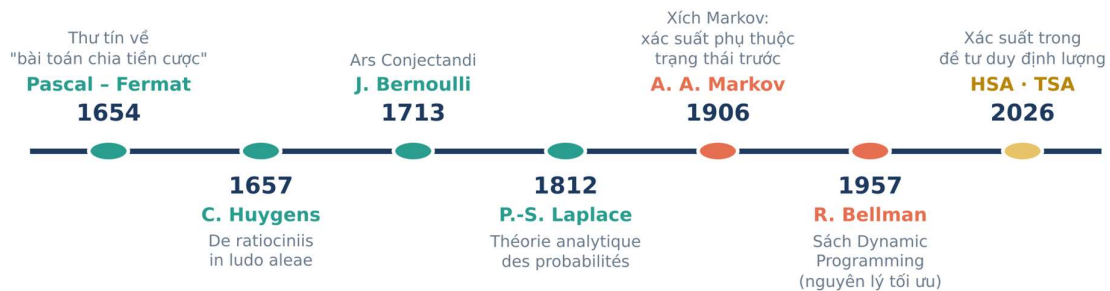




CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG TƯ DUY ĐỊNH LƯỢNG

QUY HOẠCH ĐỘNG TRONG BÀI TOÁN XÁC SUẤT

*Từ bài toán chia tiền cược của Pascal – Fermat (1654)
đến các câu hỏi xác suất trong đề HSA, TSA, AMC, AIME và đời sống*



Dành cho học sinh lớp 11 – 12 ôn thi Đánh giá năng lực (HSA – ĐHQG Hà Nội)
và Đánh giá tư duy (TSA – ĐH Bách khoa Hà Nội)

MỤC LỤC

I. ĐẶT VẤN ĐỀ	4
1. Một ván cờ bỏ dở năm 1654.....	4
2. Từ Huygens, Markov đến Bellman	4
3. Vì sao chuyên đề này cần cho HSA và TSA?	5
4. Cấu trúc tài liệu và cách sử dụng	6
II. CƠ SỞ LÝ THUYẾT	7
1. Công thức xác suất toàn phần – “động cơ” của mọi hệ thức	7
2. Hai đặc trưng của một bài toán quy hoạch động.....	7
3. Hai cách “cắt” bài toán.....	8
4. Hai cách tính: top-down và bottom-up.....	8
5. Quy trình bốn bước	8
6. Từ đếm đến xác suất – kĩ thuật “đếm có trọng số”	9
7. Nhận diện dạng bài.....	9
III. KHỞI ĐỘNG: QUY HOẠCH ĐỘNG TRONG BÀI TOÁN ĐẾM.....	10
1. Bài toán leo cầu thang	10
2. Đường đi trên lưới ô vuông.....	11
3. Lưới có điểm cấm.....	12
4. Quân hậu trên bàn cờ.....	12
5. Đòi tiền và bài toán “giỏ hàng”	13
6. Bài toán kiểm phiếu (Bertrand, 1887).....	13
IV. CÁC DẠNG TOÁN XÁC SUẤT VÀ VÍ DỤ MINH HOẠ.....	14
Dạng 1. Quy hoạch động hai chiều – bài toán chia tiền cược.....	14
Dạng 2. Quy hoạch động một chiều theo số bước	16
Dạng 3. Dây kết quả có ràng buộc “không liên tiếp”.....	17
Dạng 4. Xác suất hấp thụ – bài toán người chơi phá sản	18
Dạng 5. Quy hoạch động cho kì vọng.....	19
Dạng 6. Phân phối của tổng – quy hoạch động “tích chập”.....	20
Dạng 7. Tính chẵn – lẻ	21
Dạng 8. Xích Markov theo thời gian – bảng phân phối.....	21
Dạng 9. Đếm có trọng số – lưới thời gian $\times$ trạng thái	23
Dạng 10. Rút không hoàn lại – trạng thái phải “nhớ” những gì đã mất.....	24
Tổng kết các mẫu hệ thức.....	25
V. ỨNG DỤNG THỰC TẾ.....	26

VI. BÀI TẬP LUYỆN TẬP THEO ĐỊNH DẠNG HSA – TSA	31
A. Câu hỏi trắc nghiệm 4 lựa chọn.....	31
B. Câu hỏi điền đáp án	33
C. Câu hỏi Đúng/Sai.....	34
VII. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI.....	36
Bảng đáp án.....	36
Hướng dẫn giải	36
VIII. KẾT LUẬN VÀ LỜI KHUYÊN KHI LÀM BÀI.....	38
IX. TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	39

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

1. Một ván cờ bỏ dờ năm 1654

Mùa hè năm 1654, nhà quý tộc Pháp Antoine Gombaud – thường được biết tới với biệt danh *Chevalier de Méré* – mang đến cho Blaise Pascal một câu hỏi tưởng như chỉ dành cho sòng bạc: **hai người chơi một chuỗi ván công bằng, ai thắng trước một số ván nhất định sẽ được toàn bộ tiền cược; nếu cuộc chơi buộc phải dừng giữa chừng thì chia tiền thế nào cho công bằng?**

Câu hỏi này không mới. Năm 1494, Luca Pacioli trong *Summa de arithmetica* đề xuất chia theo tỉ lệ số ván đã thắng – một lời giải mà về sau bị chỉ ra là sai, vì nó chỉ nhìn *quá khứ* mà bỏ qua *tương lai*. Pascal và Pierre de Fermat đã trao đổi một loạt thư trong năm 1654 và đi tới cùng một đáp số bằng hai con đường khác nhau. Fermat liệt kê tất cả các kịch bản còn có thể xảy ra; còn Pascal làm một việc tinh tế hơn: ông **bắt đầu từ những tình huống đã ngã ngũ rồi lùi dần về tình huống hiện tại**, mỗi bước chỉ dùng kết quả của bước liền sau. Đó chính là hạt nhân của phương pháp mà ba thế kỉ sau được gọi là **quy hoạch động**.

Nhiều nhà sử học toán học, chẳng hạn Keith Devlin trong cuốn *The Unfinished Game* (2008) hay Anders Hald trong *A History of Probability and Statistics... before 1750* (1990), xem các lá thư này là thời điểm khai sinh của lí thuyết xác suất như một ngành toán học.

2. Từ Huygens, Markov đến Bellman

Ba năm sau, Christiaan Huygens viết *De ratiociniis in ludo aleae* (1657) – giáo trình xác suất in ấn đầu tiên. Cuối sách, Huygens nêu bài toán mà ngày nay được gọi là **bài toán người chơi phá sản** (gambler's ruin): hai người lần lượt chơi, mỗi ván người thua trả cho người thắng một đồng, hỏi xác suất mỗi người cuối cùng cạn túi. Lời giải tự nhiên nhất lại là: gọi xác suất thắng khi đang có i đồng, rồi liên hệ nó với trạng thái $i - 1$ và $i + 1$.

Năm 1906, A. A. Markov nghiên cứu các dãy phép thử mà kết quả mỗi lần chỉ phụ thuộc vào *trạng thái hiện tại* – nay gọi là xích Markov. Đến những năm 1950, khi làm việc tại tập đoàn RAND, Richard Bellman hệ thống hoá phương pháp “chia bài toán thành các bài toán con chồng lấp, giải mỗi bài toán con một lần, lưu kết quả lại” và đặt cho nó cái tên *dynamic programming* (cuốn sách cùng tên xuất bản năm 1957). Trong hồi kí *Eye of the Hurricane* (1984), Bellman kể rằng ông chọn chữ “dynamic” và “programming” phần nào vì chúng nghe ấn tượng và khó bị cấp trên phản đối – một chi tiết thú vị cho thấy tên gọi nhiều khi ra đời vì lí do rất đời thường.

Nhìn lại bằng con mắt lịch sử

Pascal (1654) lùi từ cuối về đầu → Huygens (1657) lập phương trình theo trạng thái → Markov (1906) chuẩn hoá khái niệm “trạng thái” → Bellman (1957) đặt tên và tổng quát hoá. Một ý tưởng xuyên suốt **hơn 300 năm**: *đừng tính cả con đường dài; hãy tính từng bước, và nhớ lại những gì đã tính.*

3. Vì sao chuyên đề này cần cho HSA và TSA?

Theo dạng thức bài thi áp dụng từ năm 2026 của Viện Đào tạo số và Khảo thí (ĐHQG Hà Nội), phần 1 của bài thi HSA là **Toán học và xử lý số liệu** gồm 50 câu trong 75 phút (35 câu trắc nghiệm 4 lựa chọn và 15 câu điền đáp án), với mạch kiến thức có *Thống kê và xác suất*. Với bài thi TSA của ĐH Bách khoa Hà Nội, phần **Tư duy Toán học** có 40 câu làm trong 60 phút, trên tổng điểm toàn bài là 100.

Như vậy thí sinh chỉ có trung bình **khoảng 1,5 phút cho mỗi câu**. Những câu xác suất “nhiều bước” – tung đồng xu đến khi..., đi ngẫu nhiên trên hình..., đấu nhiều ván... – nếu liệt kê trường hợp thì rất dễ sót hoặc quá giờ. Quy hoạch động biến chúng thành một **bảng số tính tuần tự**, vừa nhanh vừa ít sai, lại tận dụng tốt máy tính cầm tay.

Xu hướng này cũng thấy rõ trong các đề kiểm tra, khảo sát ở cấp tỉnh. Chẳng hạn đề môn Toán của Sở GD&ĐT Sơn La có câu hỏi mô phỏng trận đấu cờ vây giữa kì thủ Lee Sedol và AlphaGo (tháng 3/2016, AlphaGo thắng chung cuộc 4 – 1): xác suất để trận đấu kết thúc sau đúng 6 ván với chiến thắng của kì thủ. Lời giải gọn nhất chính là một bảng quy hoạch động (Ví dụ 15). Tương tự, các bộ đề luyện thi dạng Đúng/Sai thường đặt câu hỏi về robot di chuyển ngẫu nhiên giữa các vị trí – một xích Markov thu nhỏ (Ví dụ 14).

Lưu ý về nguồn bài tập

Các ví dụ quốc tế (AIME, AMC) và các ví dụ trích từ tư liệu trong nước đều được ghi rõ nguồn. Các bài luyện tập ở mục VI là **bài biên soạn theo định dạng** câu hỏi HSA/TSA (trắc nghiệm 4 lựa chọn, điền đáp án, Đúng/Sai), không phải câu hỏi trích nguyên văn từ đề thi chính thức. Mọi đáp số trong tài liệu đã được kiểm tra lại bằng tính toán phân số chính xác.

4. Cấu trúc tài liệu và cách sử dụng

Phần	Nội dung	Gợi ý sử dụng
II	Cơ sở lí thuyết: xác suất toàn phần, hai đặc trưng của quy hoạch động, top-down và bottom-up, đếm có trọng số	Đọc kĩ trước khi làm bài
III	Khởi động với bài toán đếm: cầu thang, lưới ô vuông, quân hậu, đổi tiền, kiểm phiếu	Rèn kĩ năng lập bảng
IV	10 dạng toán xác suất, mỗi dạng có ví dụ giải chi tiết	Trọng tâm ôn thi
V	8 tình huống thực tế: thời tiết, thị phần, bảo trì máy, thể thao, trò chơi, thi cử	Mở rộng, liên hệ đời sống
VI – VII	29 bài luyện tập theo ba định dạng câu hỏi, kèm đáp án và hướng dẫn	Tự luyện có bấm giờ

Độ khó các bài luyện tập được đánh dấu bằng sao: ★☆☆ cơ bản, ★★☆☆ vận dụng, ★★★ vận dụng cao.

II. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

1. Công thức xác suất toàn phần – “động cơ” của mọi hệ thức

Cho các biến cố $B_1, B_2, \dots, B_k$ đôi một xung khắc, có tổng xác suất bằng 1 (một hệ đầy đủ). Khi đó với mọi biến cố A :

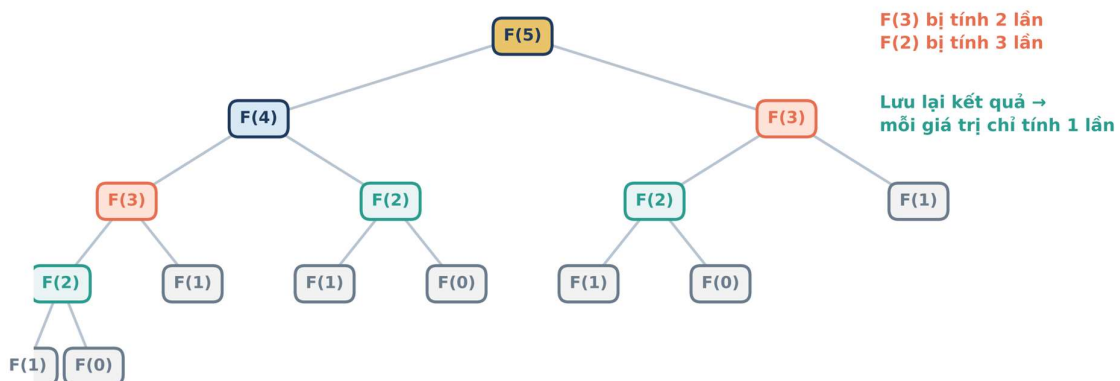
$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(B_i) \cdot P(A | B_i)$$

Công thức này có trong chương trình Toán 12 (Chương trình GDPT 2018). Trong quy hoạch động, “hệ đầy đủ” thường chính là **các kết quả có thể của một bước** – bước đầu tiên hoặc bước cuối cùng.

2. Hai đặc trưng của một bài toán quy hoạch động

Các giáo trình thuật toán (Cormen và cộng sự, *Introduction to Algorithms*) cũng như nhiều bài viết phổ biến bằng tiếng Việt, chẳng hạn bài “Quy hoạch động – một thuật toán thần thánh” trên Viblo (2017), đều nêu hai dấu hiệu nhận biết:

- **Bài toán con gối nhau** (overlapping subproblems): cùng một bài toán con xuất hiện nhiều lần khi ta phân rã bài toán lớn. Nếu tính lại mỗi lần gặp, khối lượng công việc tăng theo hàm mũ; nếu lưu kết quả, mỗi bài toán con chỉ tính một lần.
- **Cấu trúc con tối ưu** (optimal substructure): lời giải tối ưu của bài toán lớn được ghép từ lời giải tối ưu của các bài toán con. Đặc trưng này quan trọng với bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất; với bài toán *đếm* và *xác suất* trong tài liệu này, thứ ta cần là phép **cộng** (quy tắc cộng, xác suất toàn phần) và phép **nhân** (quy tắc nhân, xác suất có điều kiện).



Hình 1. Cây đệ quy tính $F(5)$ của dãy Fibonacci: các bài toán con lặp lại cùng màu

Cây ở Hình 1 cho thấy chỉ để tính $F(5)$ mà $F(3)$ đã bị tính 2 lần, $F(2)$ bị tính 3 lần; với $F(40)$ số lời gọi lên tới hàng trăm triệu. Lưu lại kết quả thì chỉ cần 40 phép cộng. Bài toán

xác suất nhiều bước cũng y như vậy: một trạng thái (chẳng hạn “còn 3 điểm, sau 4 ván”) có thể đạt được bằng rất nhiều con đường, nhưng ta chỉ cần nhớ *tổng xác suất* đi tới nó.

3. Hai cách “cắt” bài toán

- **Phân tích theo bước đầu** (first-step analysis – thuật ngữ quen thuộc trong giáo trình của Karlin & Taylor, Blitzstein & Hwang): xét xem bước đầu tiên đưa ta tới trạng thái nào, rồi dùng đáp số của bài toán “còn lại”. Thường dùng cho xác suất hấp thụ và kì vọng.
- **Phân tích theo bước cuối**: xét trạng thái trước bước cuối, rồi cộng dồn. Thường dùng khi hỏi “sau đúng n bước”.

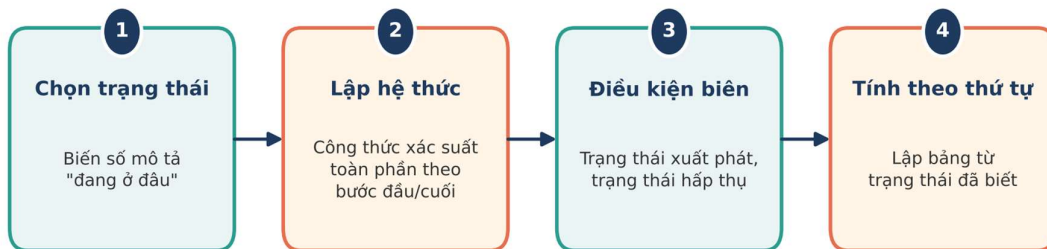
Cả hai đều dẫn tới một **hệ thức truy hồi** giữa các đại lượng cùng loại nhưng “nhỏ hơn”.

4. Hai cách tính: top-down và bottom-up

	Top-down (đệ quy có nhớ)	Bottom-up (lập bảng)
Ý tưởng	Từ bài toán lớn, gọi dần xuống bài toán con; mỗi kết quả tính xong được ghi nhớ	Tính từ các trạng thái cơ sở, lấp đầy bảng theo thứ tự đến trạng thái cần tìm
Ưu điểm	Dễ viết hệ thức; chỉ tính những trạng thái thật sự cần	Không đệ quy; rất hợp để làm tay hoặc dùng máy tính cầm tay
Khi nào dùng	Để tìm ra hệ thức	Để tính ra con số trong phòng thi

Tác giả Vũ Mạnh Quân, trong tài liệu “Ứng dụng tư duy quy hoạch động vào bài toán đếm tổ hợp”, mô tả cách lập bảng bottom-up bằng hình ảnh “**vết dầu loang**”: từ điểm xuất phát, con số lan dần sang các ô kề, mỗi ô chỉ cần cộng các ô liền trước nó mà không phải nhìn lại cả con đường. Trong tài liệu này, ta sẽ dùng top-down để *nghe* và bottom-up để *tính*.

5. Quy trình bốn bước



Hình 2. Quy trình bốn bước giải bài toán xác suất bằng quy hoạch động

Bước	Câu hỏi tự đặt ra	Ví dụ
1	Cần biết những gì ở thời điểm hiện tại để đi tiếp?	Số ván mỗi người còn thiếu; vị trí con bọ; đã có mấy mặt ngựa liên tiếp
2	Từ trạng thái này, một bước có thể dẫn đến đâu, với xác suất bao nhiêu?	Thắng ván $\rightarrow (i - 1, j)$; thua ván $\rightarrow (i, j - 1)$

Bước	Câu hỏi tự đặt ra	Ví dụ
3	Trạng thái nào đã biết chắc đáp số?	Đã thắng: xác suất 1; đã thua: xác suất 0; bước 0: vị trí xuất phát
4	Tính theo thứ tự nào để luôn có sẵn số liệu? Đáp số nằm ở ô nào?	Từ trạng thái gần đích ra xa; từ $n = 0$ tăng dần

6. Từ đếm đến xác suất – kĩ thuật “đếm có trọng số”

Khi mọi kết quả đồng khả năng, xác suất bằng **số kết quả thuận lợi chia tổng số kết quả**, nên mọi bảng đếm đều có thể đổi thành bảng xác suất. Khi các khả năng *không* đồng đều nhưng mọi xác suất một bước đều là bội của $\frac{1}{m}$, ta có một mẹo rất hiệu quả trong phòng thi:

Đếm có trọng số

Viết mỗi xác suất một bước dưới dạng $\frac{w}{m}$ với w nguyên, coi w là “số cách” đi theo bước đó. Lập bảng đếm như bình thường (mỗi ô bằng tổng các ô dẫn tới nhân với trọng số w). Sau n bước:

$$P = \frac{\text{tổng trọng số các đường thuận lợi}}{m^n}$$

Ví dụ: thắng $\frac{1}{4}$, hoà $\frac{1}{4}$, thua $\frac{1}{2}$ ứng với trọng số 1, 1, 2 trên mẫu 4. Cả bảng chỉ còn toàn số nguyên – đây chính là cách giải đề Sơn La ở Ví dụ 15.

7. Nhận diện dạng bài

Dấu hiệu trong đề	Đại lượng cần lập bảng	Dạng
“Ai thắng trước k ván...”, “đội nào vô địch...”	$P(i, j)$: xác suất thắng khi hai bên còn thiếu i, j ván	1
“Sau đúng n bước/lần...”	p_n : xác suất ở trạng thái X sau n bước	2, 8
“Không có ... liên tiếp”	Số dãy độ dài n kết thúc theo từng kiểu	3
“Cuối cùng / trước khi...”, “rơi xuống... hay thoát...”	p_i : xác suất hấp thụ từ trạng thái i	4
“Trung bình cần bao nhiêu lần...”	E_i : kì vọng số bước còn lại	5
“Tổng số chấm bằng...”	$N_k(s)$: số cách được tổng s với k con	6
“Số lần ... là số chẵn/lẻ”	e_n : xác suất chẵn sau n lần	7
Nhiều vị trí, ma trận/sơ đồ chuyển	Bảng phân phối theo thời gian	8
Xác suất là bội của $1/m$, hỏi “sau đúng n ván”	Bảng trọng số nguyên	9
“Lần lượt rút, không hoàn lại”	Số phần tử mỗi loại còn lại	10

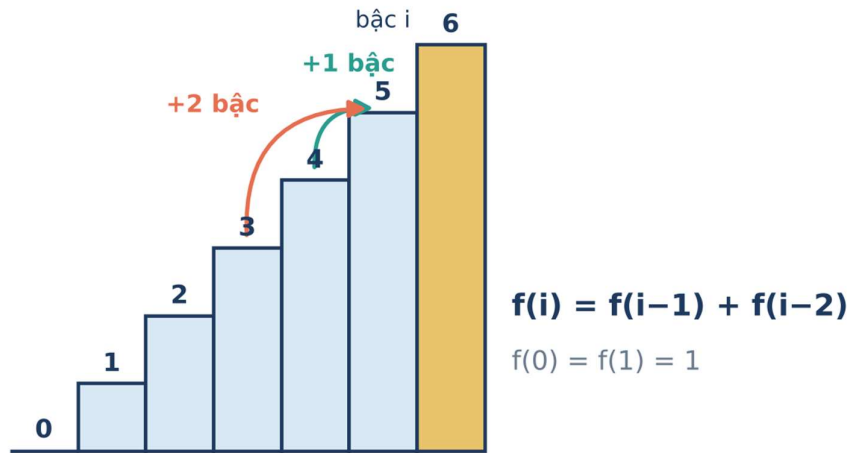
III. KHỞI ĐỘNG: QUY HOẠCH ĐỘNG TRONG BÀI TOÁN ĐẾM

Trước khi bước vào xác suất, ta luyện “cơ tay” với bài toán đếm. Đây là cách tiếp cận của nhiều tài liệu chuyên đề (chẳng hạn tài liệu “Ứng dụng quy hoạch động trong bài toán đếm và tính xác suất” và bộ bài giảng “Làm chủ tư duy quy hoạch động”): mọi bảng đếm đều trở thành bảng xác suất khi ta chia cho tổng số khả năng.

1. Bài toán leo cầu thang

Ví dụ 1 (bài toán kinh điển)

Một cầu thang có 10 bậc. Mỗi bước có thể bước lên 1 bậc hoặc 2 bậc. a) Có bao nhiêu cách leo hết cầu thang? b) Nếu mỗi bước người đó chọn ngẫu nhiên bước 1 bậc hoặc 2 bậc (xác suất $\frac{1}{2}$ mỗi loại), tính xác suất người đó đặt chân lên bậc thứ 10.



Hình 3. Muốn đến bậc i , bước cuối xuất phát từ bậc $i - 1$ hoặc bậc $i - 2$

a) Gọi f_i là số cách leo đến bậc i . Bước cuối là 1 bậc (từ $i - 1$) hoặc 2 bậc (từ $i - 2$), nên $f_i = f_{i-1} + f_{i-2}$ với $f_0 = f_1 = 1$.

Dãy 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, **89** cho $f_{10} = 89$ cách.

b) Gọi p_i là xác suất đặt chân lên bậc i . Muốn chạm bậc i thì phải chạm bậc $i - 1$ rồi bước 1, hoặc chạm bậc $i - 2$ rồi bước 2 – hai trường hợp xung khắc:

$$p_i = \frac{1}{2}p_{i-1} + \frac{1}{2}p_{i-2}, \quad p_0 = 1, p_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow p_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

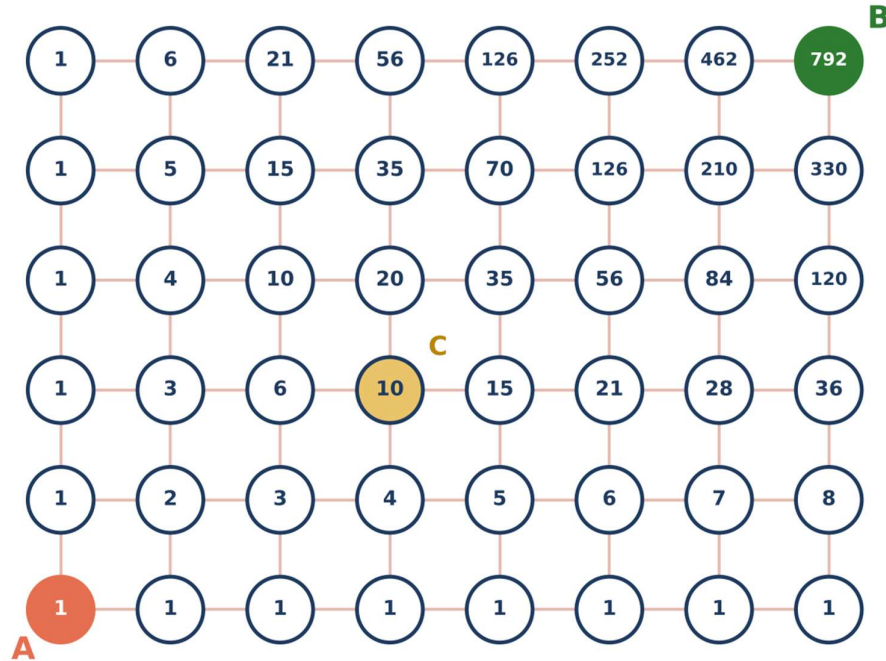
Do đó $p_{10} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 1024} = \frac{683}{1024}$. Lưu ý **hai câu a, b cùng một bảng nhưng khác bản chất**: câu a đếm *đường đi đến đúng bậc 10*, câu b tính xác suất *chạm* bậc 10 khi bước ngẫu nhiên – con số $\frac{89}{2^{10}}$ không phải đáp án câu b, vì các con đường có số bước khác nhau nên không đồng khả năng.

2. Đường đi trên lưới ô vuông

Ví dụ 2 (theo Vũ Mạnh Quân)

Một con kiến đi theo các cạnh của lưới ô vuông kích thước 7×5 từ góc A(0; 0) đến góc B(7; 5), mỗi bước sang phải hoặc lên trên một đơn vị (đường đi ngắn nhất). a) Có bao nhiêu đường đi? b) Chọn ngẫu nhiên một đường đi.

Tính xác suất đường đi qua điểm C(3; 2).



Hình 4. Bảng “vết dầu loang”: số ở mỗi nút bằng tổng nút bên trái và nút bên dưới

a) Mỗi nút $(x; y)$ chỉ đến được từ nút bên trái hoặc nút bên dưới, nên số đường

$N(x; y) = N(x - 1; y) + N(x; y - 1)$. Lan dần từ A, ta được tam giác Pascal xoay nghiêng và $N(7; 5) = 792 = C_{12}^5$.

b) Số đường qua C bằng (số đường $A \rightarrow C$) $\times$ (số đường $C \rightarrow B$) $= C_5^2 \cdot C_7^3 = 10 \cdot 35 = 350$. Xác suất cần tìm: $\frac{350}{792} = \frac{175}{396} \approx 0,44$.

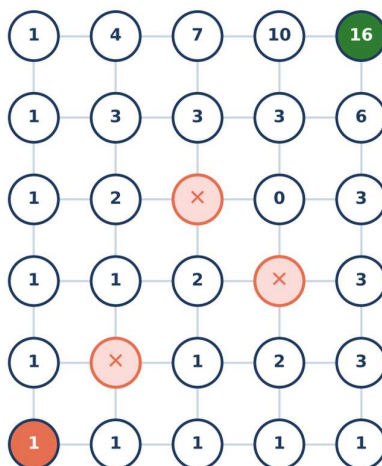
Cẩn thận: “chọn ngẫu nhiên một đường” khác “đi ngẫu nhiên từng bước”

Nếu thay vì chọn đều một trong 792 đường, con kiến ở mỗi nút tung đồng xu để chọn phải/lên (đến biên thì chỉ còn một hướng) thì các đường đi **không còn đồng khả năng**: đường men theo biên có xác suất lớn hơn. Khi đó phải lập bảng xác suất riêng – xem Bài 12, mục VI.

3. Lưới có điểm cấm

Ví dụ 3 (theo tài liệu chuyên đề “Ứng dụng quy hoạch động trong bài toán đếm và tính xác suất”)

Robot đi từ $(0; 0)$ đến $(4; 5)$ trên lưới, mỗi bước sang phải hoặc lên trên. Ba điểm $(1; 1)$, $(2; 3)$, $(3; 2)$ bị cấm. Đếm số đường đi hợp lệ.



Hình 5. Ô cấm được gán số 0, các ô khác vẫn cộng như cũ

Quy tắc lập bảng giữ nguyên, chỉ thêm điều kiện: **ô cấm có giá trị 0**. Lan dần ta được **16** đường. Nếu tính bằng phần bù (trừ đi các đường qua điểm cấm) ta phải dùng nguyên lý bao hàm – loại trừ với 3 tập, dễ nhầm hơn nhiều. Với robot chọn đều một trong $C_9^4 = 126$ đường đi không có ràng buộc, xác suất đường được chọn tránh hết các điểm cấm là $\frac{16}{126} = \frac{8}{63}$.

4. Quân hậu trên bàn cờ

Ví dụ 4 (theo Vũ Mạnh Quân)

Trên bàn cờ 4×4 , một quân hậu đứng ở ô dưới cùng bên trái, mỗi nước đi lên trên, sang phải hoặc chéo lên phải một số ô tùy ý. Có bao nhiêu cách để quân hậu đến ô trên cùng bên phải?

4	17	60	188
2	7	22	60
1	3	7	17
	1	2	4

Hình 6. Mỗi ô bằng tổng tất cả các ô cùng cột phía dưới, cùng hàng bên trái và cùng đường chéo phía dưới-trái

Điểm mới là một ô có thể đến từ ô *cách xa* chứ không chỉ ô kề. Quy tắc lập bảng vẫn vậy, chỉ là mỗi ô phải cộng nhiều ô hơn. Chẳng hạn ô (1; 1) nhận từ (0; 1), (1; 0) và (0; 0): $1 + 1 + 1 = 3$. Kết quả: **188** cách.

5. Đổi tiền và bài toán “giỏ hàng”

Ví dụ 5

Có các tờ tiền mệnh giá 1, 2, 5 nghìn đồng (số lượng không hạn chế). Có bao nhiêu cách đổi tờ 10 nghìn đồng (không tính thứ tự các tờ)?

Gọi d_x là số cách đổi số tiền x . Để không đếm lặp thứ tự, ta **đưa từng mệnh giá vào lần lượt**: với mỗi mệnh giá c , cập nhật $d_x \leftarrow d_x + d_{x-c}$ cho x từ c đến 10, xuất phát từ $d_0 = 1$.

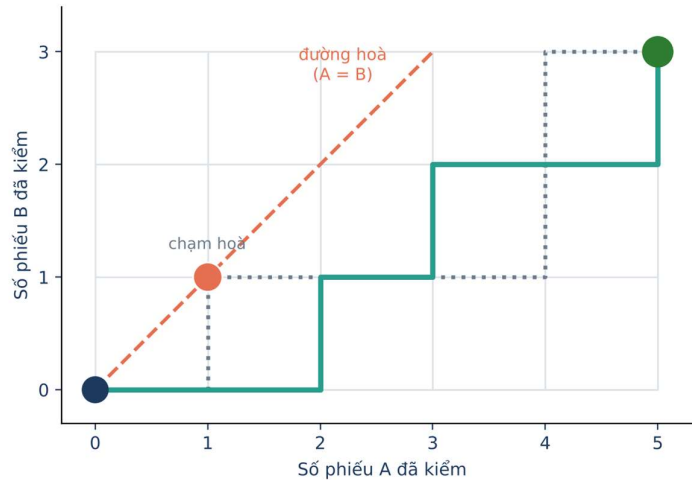
Mệnh giá	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
chỉ có 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
thêm 2	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6
thêm 5	1	1	2	2	3	4	5	6	7	8	10

Có **10** cách. Bộ bài giảng “Làm chủ tư duy quy hoạch động” mô tả hệ thức này bằng sơ đồ: mỗi ô d_x nhận “dòng chảy” từ các ô d_{x-c} – đúng tinh thần vết dầu loang.

6. Bài toán kiểm phiếu (Bertrand, 1887)

Ví dụ 6 (bài toán kiểm phiếu)

Trong một cuộc bầu chọn lớp trưởng, bạn A được 5 phiếu, bạn B được 3 phiếu. Các phiếu được rút ngẫu nhiên lần lượt để kiểm. Tính xác suất để trong suốt quá trình kiểm phiếu, số phiếu của A **luôn lớn hơn hẳn** số phiếu của B.



Hình 7. Mỗi thứ tự kiểm phiếu là một đường đi trên lưới; đường hợp lệ không được chạm đường hoà

Mỗi thứ tự kiểm là một đường từ $(0; 0)$ đến $(5; 3)$, mọi thứ tự đồng khả năng nên có $C_8^3 = 56$ đường. Đường hợp lệ phải bắt đầu bằng phiếu A rồi luôn nằm dưới hẳn đường $y = x$. Lập bảng như lưới có điểm cấm (các nút trên đường hoà, trừ gốc, có giá trị 0) ta đếm được 14 đường, nên xác suất là $\frac{14}{56} = \frac{1}{4}$.

Định lý kiểm phiếu

Năm 1887, Joseph Bertrand công bố kết quả: nếu A được a phiếu, B được b phiếu ($a > b$) thì xác suất A luôn dẫn trước là $\frac{a-b}{a+b}$. Kiểm tra: $\frac{5-3}{5+3} = \frac{1}{4}$. Feller (1968) trình bày định lý này cùng các ứng dụng vào bài toán đi ngẫu nhiên.

Mở rộng: Bài toán hai đội bóng bàn mỗi đội 7 người thi đấu theo thể thức “thua thì bị loại, thắng thì đấu tiếp” trong tài liệu của Vũ Mạnh Quân cũng được giải bằng một bảng 7×7 như vậy, cho $2 \cdot 1716 = 3432 = C_{14}^7$ cách diễn ra.

IV. CÁC DẠNG TOÁN XÁC SUẤT VÀ VÍ DỤ MINH HOẠ

Dạng 1. Quy hoạch động hai chiều – bài toán chia tiền cược

Ví dụ 7 (Bài toán Pascal – Fermat, 1654)

Hai người A và B chơi một chuỗi ván, mỗi ván mỗi người thắng với xác suất $\frac{1}{2}$, ai thắng đủ 3 ván trước sẽ nhận toàn bộ 64 đồng vàng. Cuộc chơi dừng khi A đã thắng 1 ván, B chưa thắng ván nào. Hỏi nên chia 64 đồng vàng thế nào cho công bằng?

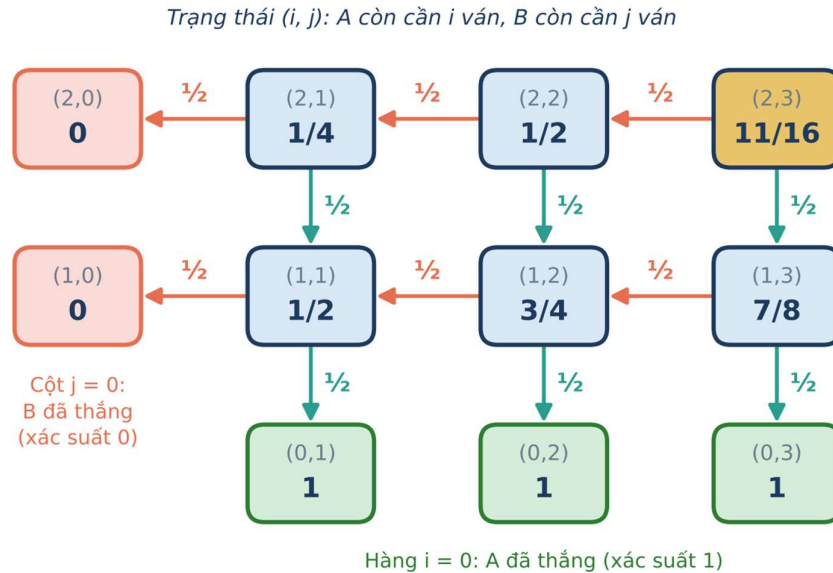
Bước 1 – Trạng thái. Gọi $P(i, j)$ là xác suất A thắng chung cuộc khi A còn thiếu i ván, B còn thiếu j ván. Hiện tại A thiếu 2, B thiếu 3, cần tìm $P(2, 3)$.

Bước 2 – Hệ thức. Ván tiếp theo A thắng (xác suất $\frac{1}{2}$) thì về $(i - 1, j)$, A thua thì về $(i, j - 1)$:

$$P(i, j) = \frac{1}{2}P(i - 1, j) + \frac{1}{2}P(i, j - 1)$$

Bước 3 – Biên. $P(0, j) = 1$ (A đã thắng), $P(i, 0) = 0$ (B đã thắng).

Bước 4 – Lập bảng. Mỗi ô bằng trung bình cộng của ô bên trái và ô bên dưới:



Hình 8. Bảng quy hoạch động của Pascal: mỗi ô là trung bình cộng của hai ô kề

Vậy $P(2, 3) = \frac{11}{16}$. Chia công bằng là A nhận $\frac{11}{16} \cdot 64 = 44$ đồng, B nhận 20 đồng

(tỉ lệ 11 : 5, chứ không phải chia theo số ván đã thắng như Pacioli).

Đối chiếu với cách của Fermat

Nhiều nhất cần 4 ván nữa là phân định. Giả sử chơi đủ 4 ván (thêm ván “ảo” không ảnh hưởng kết quả), A thắng chung cuộc khi thắng ít nhất 2 trong 4 ván:

$$P = \frac{C_4^2 + C_4^3 + C_4^4}{2^4} = \frac{6 + 4 + 1}{16} = \frac{11}{16}$$

Hai phương pháp cho cùng đáp số – điều khiến Pascal viết cho Fermat rằng “sự thật là như nhau ở Toulouse cũng như ở Paris”.

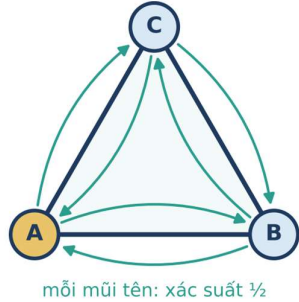
Tổng quát. Nếu A thắng mỗi ván với xác suất p , $q = 1 - p$ thì $P(i, j) = p \cdot P(i - 1, j) + q \cdot P(i, j - 1)$. Đây chính là khung của mọi câu hỏi “đội nào vô địch loạt trận thắng 4 trong 7 trận” (Bài 13, mục VI).

Dạng 2. Quy hoạch động một chiều theo số bước

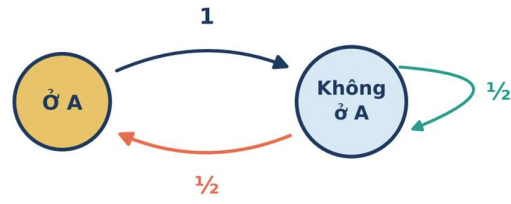
Ví dụ 8 (AIME II 2003, Bài 13)

Một con bọ xuất phát từ một đỉnh của tam giác đều. Mỗi bước, nó chọn ngẫu nhiên một trong hai đỉnh còn lại và bò sang đỉnh đó. Biết xác suất con bọ ở đúng đỉnh xuất phát sau bước thứ 10 là $\frac{m}{n}$ với m, n nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tính $m + n$.

Con bọ trên tam giác đều



Thu gọn thành 2 trạng thái



Hình 9. Nhờ tính đối xứng, 3 đỉnh thu gọn thành 2 trạng thái: “ở A” và “không ở A”

Trạng thái. Gọi p_n là xác suất con bọ ở đỉnh xuất phát A sau n bước; $p_0 = 1$.

Hệ thức (theo bước cuối). Muốn ở A sau bước $n + 1$ thì sau bước n phải *không* ở A (xác suất $1 - p_n$) và chọn đúng A (xác suất $\frac{1}{2}$):

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - p_n)$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_n	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{11}{32}$	$\frac{21}{64}$	$\frac{43}{128}$	$\frac{85}{256}$	$\frac{171}{512}$

Vậy $p_{10} = \frac{171}{512}$ và $m + n = 683$. Đáp số này trùng với đáp án chính thức của AIME.

Mở rộng: công thức tổng quát

Đặt $u_n = p_n - \frac{1}{3}$ thì $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n$ (cấp số nhân), suy ra

$$p_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

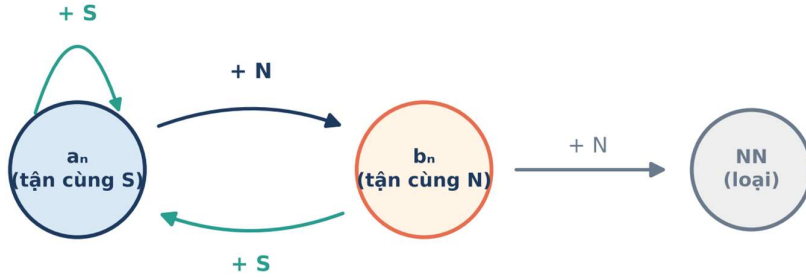
Khi n lớn, p_n dần tới $\frac{1}{3}$ – con bọ “quên” điểm xuất phát. Đây là ví dụ đầu tiên về *phân phối dừng* của xích Markov, sẽ gặp lại ở Dạng 8 và mục V.

Dạng 3. Dãy kết quả có ràng buộc “không liên tiếp”

Ví dụ 9

Tung một đồng xu cân đối 10 lần. Tính xác suất để không có hai lần ngửa (N) nào liên tiếp.

Trạng thái. Gọi a_n là số dãy “hợp lệ” độ dài n kết thúc bằng sấp (S), b_n là số dãy hợp lệ kết thúc bằng ngửa (N).



Hình 10. Sơ đồ chuyển trạng thái: sau N không được thêm N

Hệ thức. Thêm S vào mọi dãy hợp lệ đều được; thêm N chỉ được vào dãy tận cùng S:

$$a_{n+1} = a_n + b_n, \quad b_{n+1} = a_n$$

Đặt $T_n = a_n + b_n$ thì $T_{n+1} = T_n + T_{n-1}$ – chính là **dãy Fibonacci**, với $T_1 = 2, T_2 = 3$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
b_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
T_n	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Xác suất cần tìm: $\frac{144}{2^{10}} = \frac{144}{1024} = \frac{9}{64} \approx 0,14$.

Bình luận: Có thể đếm trực tiếp theo số lần ngửa k : chọn k vị trí đôi một không kề nhau trong 10 vị trí có C_{11-k}^k cách, nên

$$T_{10} = \sum_{k=0}^5 C_{11-k}^k = 1 + 10 + 36 + 56 + 35 + 6 = 144$$

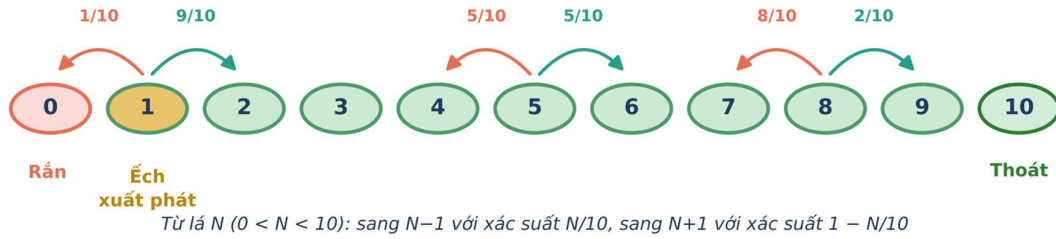
Cách này đòi hỏi nhớ bài toán “chọn không kề nhau”, còn quy hoạch động thì không cần mẹo và mở rộng ngay sang “không có ba ngửa liên tiếp” (Bài 1, mục VI) hay đồng xu không cân đối (Bài 11, mục VI): khi đó ta lập bảng *xác suất* thay cho bảng *số dãy*, với $a_{n+1} = q(a_n + b_n), b_{n+1} = pa_n$.

Dạng 4. Xác suất hấp thụ – bài toán người chơi phá sản

Ví dụ 10 (AMC 10B 2014, Bài 25 – cũng là AMC 12B 2014, Bài 22)

Trong ao có 11 lá súng xếp hàng, đánh số 0 đến 10. Một con ếch ngồi ở lá 1. Khi ở lá N ($0 < N < 10$), ếch nhảy sang lá $N - 1$ với xác suất $\frac{N}{10}$ và sang lá $N + 1$ với xác suất $1 - \frac{N}{10}$, các lần nhảy độc lập. Đến lá 0 ếch bị rắn ăn; đến lá 10 ếch thoát khỏi ao.

Tính xác suất ếch thoát.



Hình 11. Ếch trên 11 lá súng: hai trạng thái hấp thụ là lá 0 và lá 10

Trạng thái và hệ thức (phân tích theo bước đầu). Gọi p_N là xác suất thoát khi đang ở lá N :

$$p_N = \frac{N}{10}p_{N-1} + \left(1 - \frac{N}{10}\right)p_{N+1}, \quad p_0 = 0, \quad p_{10} = 1$$

Nhận xét đối xứng. Lá N và lá $10 - N$ đối xứng nhau nên $p_N + p_{10-N} = 1$, đặc biệt $p_5 = \frac{1}{2}$.

Giải bằng hiệu số. Đặt $d_N = p_N - p_{N-1}$. Hệ thức tương đương với $(10 - N)d_{N+1} = Nd_N$, nên với $d_1 = p_1$:

$$d_2 = \frac{d_1}{9}, \quad d_3 = \frac{d_1}{36}, \quad d_4 = \frac{d_1}{84}, \quad d_5 = \frac{d_1}{126}$$

$$\frac{1}{2} = p_5 = d_1 \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{84} + \frac{1}{126}\right) = d_1 \cdot \frac{73}{63}$$

Suy ra $p_1 = \frac{63}{146}$ (đáp án C của đề AMC).

Công thức kinh điển (Huygens; Ross, A First Course in Probability)

Nếu mỗi bước sang phải với xác suất p không đổi, sang trái với xác suất $q = 1 - p \neq p$, trạng thái hấp thụ là 0 và N , thì xác suất đạt N trước khi về 0, xuất phát từ i , là

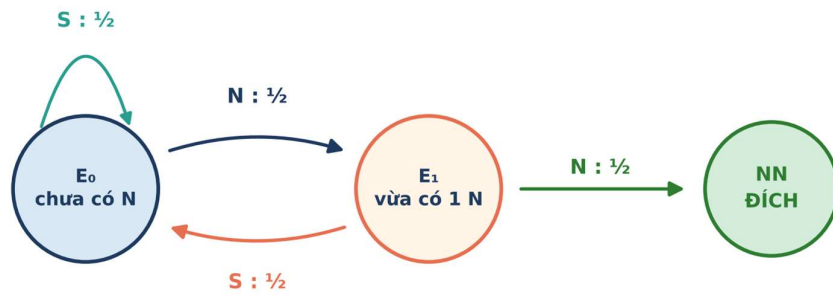
$$P_i = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}$$

và khi $p = q = \frac{1}{2}$ thì $P_i = \frac{i}{N}$. Trong trường hợp công bằng, kì vọng số ván đến khi kết thúc là $E_i = i(N - i)$ (Bài 24, mục VI).

Dạng 5. Quy hoạch động cho kì vọng

Ví dụ 11

Tung liên tiếp một đồng xu cân đối cho tới khi xuất hiện hai mặt ngửa liên tiếp thì dừng. Trung bình phải tung bao nhiêu lần?



Hình 12. Ba trạng thái: chưa có N ở cuối, vừa có một N, đã đạt NN

Trạng thái. E_0 là kì vọng số lần tung còn lại khi chưa có mặt N ở cuối (kể cả lúc bắt đầu); E_1 là kì vọng khi vừa tung được một N.

Hệ thức. Mỗi lần tung tốn 1 lượt rồi chuyển trạng thái:

$$E_0 = 1 + \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}E_0, \quad E_1 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2}E_0$$

Từ phương trình đầu: $E_0 = 2 + E_1$. Thay vào phương trình sau: $E_1 = 1 + \frac{1}{2}(2 + E_1)$ nên $E_1 = 4$, $E_0 = 6$.

Một kết quả bất ngờ

Nếu chờ dãy NS (ngửa rồi sấp) thay vì NN, kì vọng chỉ là 4. Lí do: khi đang chờ NN mà tung ra S, ta mất hết “tiến độ”; còn khi chờ NS mà tung ra N, ta vẫn giữ nguyên tiến độ. Đây là câu hỏi kinh điển trong giáo trình Stat 110 (Harvard) của J. Blitzstein và là chủ đề “trò chơi Penney” nổi tiếng.

Dạng 6. Phân phối của tổng – quy hoạch động “tích chập”

Ví dụ 12 (bài toán của Galileo)

Gieo đồng thời ba con xúc xắc cân đối. Tính xác suất tổng số chấm bằng 10.

Ghi chú lịch sử: Đầu thế kỉ XVII, những người chơi ở Florence thắc mắc vì sao tổng 10 ra nhiều hơn tổng 9, dù cả hai đều có 6 cách phân tích thành ba số từ 1 đến 6. Galileo giải thích trong ghi chép *Sopra le scoperte dei dadi*: phải đếm **bộ có thứ tự**, khi đó tổng 9 có 25 kết quả còn tổng 10 có 27.

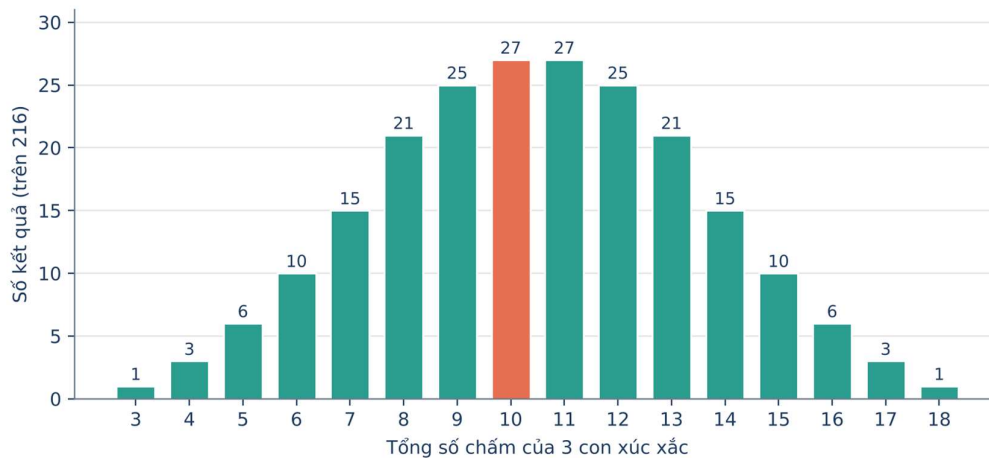
Trạng thái. Gọi $N_k(s)$ là số kết quả có thứ tự của k con xúc xắc có tổng s . Phân tích theo con xúc xắc cuối cùng (ra t chấm):

$$N_k(s) = \sum_{t=1}^6 N_{k-1}(s - t), \quad N_1(s) = 1 \quad (1 \leq s \leq 6)$$

s	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$N_2(s)$	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

$$N_3(10) = N_2(9) + N_2(8) + \dots + N_2(4) = 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 = 27$$

Xác suất cần tìm: $\frac{27}{216} = \frac{1}{8}$. Toàn bộ phân phối tổng của ba con xúc xắc được minh họa ở hình dưới.



Hình 13. Số kết quả theo tổng số chấm khi gieo ba con xúc xắc (tổng 10 tô màu cam)

Biến thể: Nếu chỉ hỏi tổng chia hết cho 3, ta không cần nhớ cả tổng mà chỉ cần nhớ **số dư** của tổng khi chia cho 3 – bảng chỉ còn 3 cột (Bài 6, mục VI). Chọn trạng thái “vừa đủ” là kỹ năng quan trọng nhất của quy hoạch động.

Dạng 7. Tính chẵn – lẻ

Ví dụ 13

Một đồng xu không cân đối có xác suất ra ngửa là p . Tung đồng xu n lần. Tính xác suất số lần ngửa là số chẵn.

Gọi e_n là xác suất cần tìm, $e_0 = 1$. Số lần ngửa sau n lần chẵn khi: trước đó chẵn và lần này ra sấp, hoặc trước đó lẻ và lần này ra ngửa:

$$e_n = (1 - p)e_{n-1} + p(1 - e_{n-1}) \Rightarrow e_n - \frac{1}{2} = (1 - 2p) \left(e_{n-1} - \frac{1}{2} \right)$$

$$e_n = \frac{1}{2} [1 + (1 - 2p)^n]$$

Chẳng hạn $p = \frac{1}{3}, n = 5$ cho $e_5 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{243} \right) = \frac{122}{243}$. Đối chiếu bằng nhị thức Newton:

$$e_n = \frac{(q+p)^n + (q-p)^n}{2} - \text{hai cách gặp nhau.}$$

Dạng 8. Xích Markov theo thời gian – bảng phân phối

Khi đối tượng di chuyển giữa nhiều vị trí và đề hỏi về một thời điểm cụ thể, ta lập **bảng phân phối**: mỗi hàng là một thời điểm, mỗi cột là một vị trí, mỗi ô là xác suất đang ở vị trí đó. Hàng sau tính từ hàng trước theo công thức xác suất toàn phần:

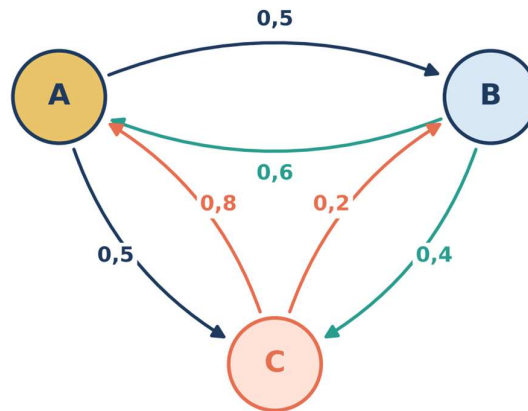
$$p_{t+1}(Y) = \sum_X p_t(X) \cdot P(X \rightarrow Y)$$

Kiểm tra nhanh: **tổng mỗi hàng luôn bằng 1** – nên với 3 vị trí chỉ cần tính 2 cột, cột thứ ba suy ra.

Ví dụ 14 (theo tư liệu luyện thi 29EDU, dạng Đúng/Sai)

Một robot di chuyển giữa 3 vị trí A, B, C. Mỗi lần di chuyển mất 1 phút, robot sang vị trí khác theo quy tắc: ở A thì sang B hoặc C với xác suất bằng nhau 0,5; ở B thì sang A với xác suất 0,6 và sang C với xác suất 0,4; ở C thì sang A với xác suất 0,8 và sang B với xác suất 0,2. Ban đầu ($t = 0$) robot ở A. Mỗi mệnh đề sau đúng hay sai?

- Xác suất robot ở A tại thời điểm $t = 1$ bằng 0.
- Xác suất robot ở A tại thời điểm $t = 2$ bằng 0,7.
- Tại $t = 3$, A là vị trí robot có khả năng ở cao nhất.
- Xác suất để robot trở về A lần đầu tiên tại thời điểm $t = 5$ là 0,0176.



Hình 14. Sơ đồ chuyển vị trí của robot (mỗi mũi tên ghi xác suất chuyển)

t	A	B	C	Kiểm tra tổng
0	1	0	0	1
1	0	0,5	0,5	1
2	0,7	0,1	0,2	1
3	0,22	0,39	0,39	1
4	0,546	0,188	0,266	1
5	0,3256	0,3262	0,3482	1

Chẳng hạn $p_2(A) = 0,5 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,8 = 0,7$ và $p_3(B) = 0,7 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,2 = 0,39$. Vậy a) **Đúng**, b) **Đúng**, c) **Sai** (tại $t = 3$, A chỉ có 0,22 trong khi B và C cùng 0,39).

Câu d) – “lần đầu tiên”. Đây là chỗ hay sai: *không* được dùng cột A của bảng trên, vì bảng đó tính cả những đường đã ghé A trước thời điểm 5. Ta lập bảng mới, trong đó **cấm đi vào A** ở các thời điểm 1 đến 4 (giống ô cấm của bài lưới):

t	1	2	3	4
B (chưa về A)	0,5	$0,5 \cdot 0,2 = 0,1$	$0,2 \cdot 0,2 = 0,04$	$0,04 \cdot 0,2 = 0,008$
C (chưa về A)	0,5	$0,5 \cdot 0,4 = 0,2$	$0,1 \cdot 0,4 = 0,04$	$0,04 \cdot 0,4 = 0,016$

$$P = 0,008 \cdot 0,6 + 0,016 \cdot 0,8 = 0,0048 + 0,0128 = 0,0176$$

Vậy d) **Đúng**. Nhận xét: sau khi rời A, robot chỉ có thể “né” A bằng cách đi qua lại $B \leftrightarrow C$, nên đường đi duy nhất có dạng $A \rightarrow (B \text{ hoặc } C) \rightarrow \dots \rightarrow A$ với các bước giữa luân phiên B, C – đúng như lời giải liệt kê ABCBCA, ACBCBA.

Dạng ma trận

Xếp xác suất chuyển thành ma trận M (hàng: vị trí hiện tại, cột: vị trí tiếp theo) thì phân phối sau t bước là $\pi_t = \pi_0 M^t$. Bảng phân phối ở trên chính là cách nhân ma trận “bằng tay” từng bước – một ví dụ đẹp về việc quy hoạch động giúp ta tránh tính M^5 trực tiếp.

Dạng 9. Đếm có trọng số – lưới thời gian $\times$ trạng thái

Ví dụ 15 (đề của Sở GD&ĐT Sơn La)

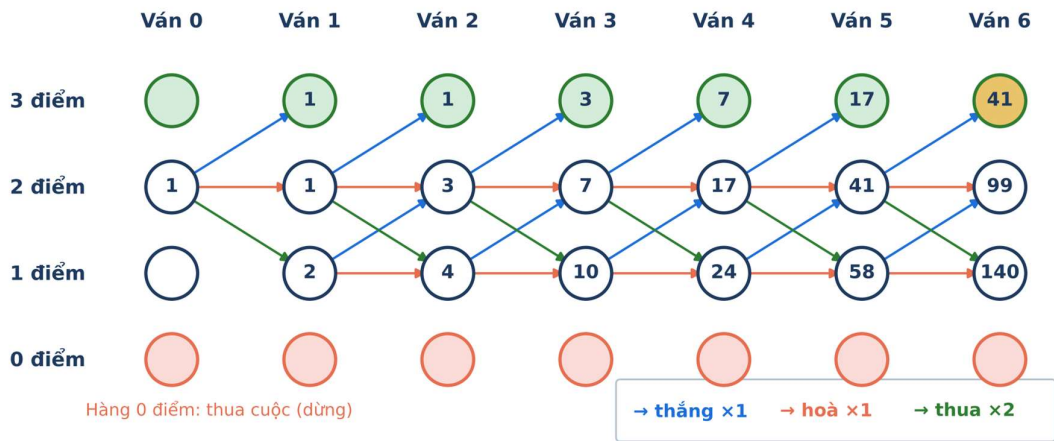
Năm 2016, trong chiến dịch mang tên “Niềm tự hào cuối cùng của loài người”, kì thủ cờ vây số một thế giới Lee Sedol đã có trận đấu lịch sử với trí tuệ nhân tạo AlphaGo. Một trò chơi mô phỏng trận đấu này có luật như sau: điểm khởi đầu của kì thủ là 2. Trong mỗi ván đấu, nếu thắng kì thủ được cộng 1 điểm, nếu hoà thì điểm số không đổi, nếu thua bị trừ 1 điểm. Trận đấu kết thúc ngay khi kì thủ đạt 3 điểm (giành chiến thắng) hoặc 0 điểm (thất bại). Giả sử xác suất mỗi ván thắng, hoà, thua của kì thủ lần lượt là $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ và kết quả các ván độc lập. Xác suất để trận đấu kết thúc sau đúng 6 ván và kì thủ giành chiến thắng là p . Tính $4096p$.

Quy đổi trọng số. Mẫu chung là 4: thắng $\frac{1}{4} \rightarrow$ trọng số 1; hoà $\frac{1}{4} \rightarrow$ trọng số 1; thua $\frac{2}{4} \rightarrow$ trọng số 2. Sau 6 ván, tổng trọng số của mọi kịch bản là $4^6 = 4096$ – chính là con số trong đề, một gợi ý rất rõ cho cách làm này.

Trạng thái. Gọi a_n, b_n là tổng trọng số các kịch bản sau ván n mà trận đấu *chưa kết thúc* và kì thủ đang có lần lượt 2 điểm, 1 điểm; w_n là tổng trọng số các kịch bản kết thúc bằng chiến thắng *đúng ở ván n* .

$$a_{n+1} = a_n + b_n, \quad b_{n+1} = 2a_n + b_n, \quad w_{n+1} = a_n$$

(Ở 2 điểm: hoà giữ nguyên $\times 1$, thua xuống 1 điểm $\times 2$, thắng lên 3 điểm $\times 1$. Ở 1 điểm: thắng lên 2 điểm $\times 1$, hoà giữ nguyên $\times 1$, thua về 0 – loại.) Bắt đầu $a_0 = 1, b_0 = 0$:



Hình 15. Lưới “ván $\times$ điểm số”: mỗi nút ghi tổng trọng số, hàng 3 điểm ghi số kịch bản thắng tại đúng ván đó

Ván n	0	1	2	3	4	5	6
2 điểm (a_n)	1	1	3	7	17	41	99
1 điểm (b_n)	0	2	4	10	24	58	140
Thắng tại ván n (w_n)	–	1	1	3	7	17	41

Vậy $p = \frac{41}{4096}$ và $4096p = 41$.

Vì sao cách này nhanh?

Không có phân số nào xuất hiện trong suốt quá trình tính. Mỗi bước chỉ là phép cộng và nhân đôi các số nguyên nhỏ – có thể làm nhẩm trong một phút. Hãy để ý các số 1, 1, 3, 7, 17, 41 của hàng chiến thắng thoả $w_{n+1} = 2w_n + w_{n-1}$ (dãy Pell) – một phần thưởng thâm mĩ cho người lập bảng.

Dạng 10. Rút không hoàn lại – trạng thái phải “nhớ” những gì đã mất

Ví dụ 16

Một bộ bài gồm 10 lá, trong đó có 3 lá cơ. Hai bạn An và Bình lần lượt rút từng lá (không hoàn lại), An rút trước. Ai rút được lá cơ đầu tiên thì thắng. Tính xác suất An thắng.

Trạng thái. Gọi $W(h, n)$ là xác suất **người đến lượt rút thắng**, khi còn h lá cơ và n lá không phải cơ. Người đến lượt rút được cơ thì thắng ngay; nếu không, lượt chuyển sang đối thủ với bộ bài ít hơn một lá, và người này thắng khi đối thủ *không* thắng:

$$W(h, n) = \frac{h}{h+n} + \frac{n}{h+n}(1 - W(h, n-1)), \quad W(h, 0) = 1$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$W(3, n)$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{22}{35}$	$\frac{17}{28}$	$\frac{25}{42}$	$\frac{7}{12}$

Vậy An thắng với xác suất $\frac{7}{12} \approx 0,583$. Người rút trước có lợi thế.

Sai lầm thường gặp: “quay về trạng thái ban đầu”

Với bộ bài 52 lá có 13 lá cơ, một lời giải hay gặp viết $P = \frac{13}{52} + \frac{39}{52} \cdot \frac{38}{51} (1 - P)$ (hoặc tương tự) với lập luận “sau hai lượt không ai rút được cơ thì trò chơi quay về như cũ”. Lập luận này **sai**: sau hai lượt bộ bài chỉ còn 50 lá với tỉ lệ cơ đã thay đổi, nên đó là một *trạng thái mới*, không phải trạng thái ban đầu. Phép “quay về” chỉ đúng với phép thử **có hoàn lại** (như ném bóng, tung đồng xu).

Lập bảng $W(13, n)$ với n từ 0 đến 39 theo hệ thức trên cho đáp số đúng $W(13, 39) \approx 0,5708$.

Tổng kết các mẫu hệ thức

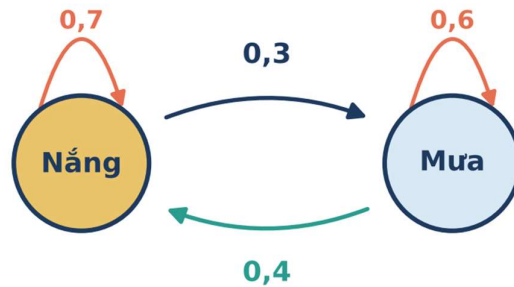
Dạng	Hệ thức mẫu	Điều kiện biên
1	$P(i, j) = pP(i - 1, j) + qP(i, j - 1)$	$P(0, j) = 1, P(i, 0) = 0$
2, 8	$p_{n+1}(Y) = \sum_x p_n(X)P(X \rightarrow Y)$	Phân phối ban đầu
3	Đếm theo “kiểu kết thúc” $\rightarrow$ Fibonacci, Tribonacci...	Dãy độ dài 1
4	$p_i = \sum_j P(i \rightarrow j)p_j$	Hấp thụ: 0 hoặc 1
5	$E_i = 1 + \sum_j P(i \rightarrow j)E_j$	$E_{\text{đích}} = 0$
6	$N_k(s) = \sum_t N_{k-1}(s - t)$	$N_0(0) = 1$
7	$e_n = qe_{n-1} + p(1 - e_{n-1})$	$e_0 = 1$
9	Như dạng 2 nhưng với trọng số nguyên	Trọng số ban đầu 1
10	$W(h, n) = \frac{h}{h+n} + \frac{n}{h+n}(1 - W(h, n-1))$	$W(h, 0) = 1$

V. ỨNG DỤNG THỰC TẾ

Quy hoạch động không chỉ là “mẹo giải đề”. Những tình huống dưới đây là phiên bản đơn giản hoá của các mô hình được dùng thật trong dự báo thời tiết, kinh doanh, kỹ thuật bảo trì, phân tích thể thao và thiết kế trò chơi. Đề thi HSA, TSA rất ưa chuộng những bối cảnh như vậy vì chúng kiểm tra khả năng **đọc hiểu tình huống và mô hình hoá** – chứ không chỉ kỹ năng tính toán.

Tình huống 1. Dự báo thời tiết

Thống kê cho thấy ở một địa phương: nếu hôm nay nắng thì ngày mai nắng với xác suất 0,7 và mưa với xác suất 0,3; nếu hôm nay mưa thì ngày mai mưa với xác suất 0,6 và nắng với xác suất 0,4. Hôm nay trời nắng. a) Tính xác suất ngày kia trời mưa. b) Về lâu dài, khoảng bao nhiêu phần trăm số ngày có mưa?



Hình 16. Xích Markov hai trạng thái của thời tiết

Ngày	Hôm nay	Ngày mai	Ngày kia	3 ngày sau
P(nắng)	1	0,7	0,61	0,583
P(mưa)	0	0,3	0,39	0,417

a) $P = 0,7 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,6 = 0,39$. b) Khi n lớn, phân phối ổn định tại π thoả $\pi_M = 0,3\pi_N + 0,6\pi_M$ và $\pi_N + \pi_M = 1$, suy ra $\pi_M = \frac{0,3}{0,3 + 0,4} = \frac{3}{7} \approx 43\%$. Quan sát bảng, xác suất mưa $0 \rightarrow 0,3 \rightarrow 0,39 \rightarrow 0,417$ đang tiến dần tới 0,4286.

Tình huống 2. Cạnh tranh thị phần của hai ví điện tử

Hai ví điện tử X và Y chia đều thị trường (mỗi ví 50% người dùng). Mỗi tháng, 10% người dùng X chuyển sang Y, còn 20% người dùng Y chuyển sang X; những người còn lại giữ nguyên. Tính thị phần của X sau 1 tháng, sau 2 tháng và về lâu dài.

Gọi x_n là thị phần của X sau n tháng. Thị phần mới = phần X giữ lại + phần Y chuyển sang:

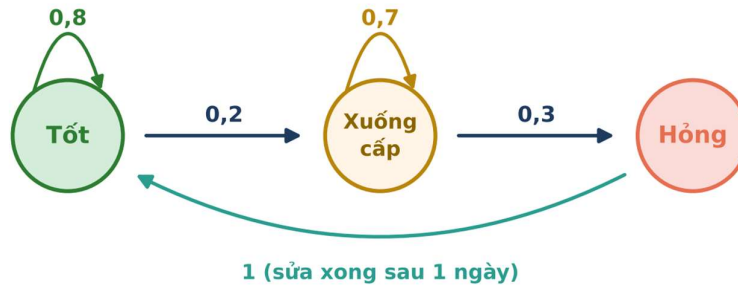
$$x_{n+1} = 0,9x_n + 0,2(1 - x_n) = 0,7x_n + 0,2$$

Do đó $x_1 = 0,55$, $x_2 = 0,585$. Điểm cân bằng $x^* = 0,7x^* + 0,2$ cho $x^* = \frac{2}{3} \approx 66,7\%$

và $x_n - \frac{2}{3} = 0,7^n \left(0,5 - \frac{2}{3}\right)$. Bài học kinh doanh: thị phần dài hạn **chỉ phụ thuộc vào tỉ lệ giữ chân khách hàng**, không phụ thuộc thị phần ban đầu.

Tình huống 3. Bảo trì máy móc

Một máy sản xuất mỗi ngày ở một trong ba trạng thái: Tốt, Xuống cấp, Hỏng. Máy đang Tốt thì ngày hôm sau vẫn Tốt với xác suất 0,8, chuyển sang Xuống cấp với xác suất 0,2. Máy đang Xuống cấp thì hôm sau vẫn Xuống cấp với xác suất 0,7, bị Hỏng với xác suất 0,3. Máy Hỏng được sửa xong trong 1 ngày và hôm sau trở lại Tốt. Về lâu dài, máy bị hỏng bao nhiêu phần trăm số ngày?



Hình 17. Ba trạng thái của máy và xác suất chuyển trạng thái mỗi ngày

Ở trạng thái cân bằng: dòng vào Xuống cấp bằng dòng ra, $0,2\pi_T = 0,3\pi_X$; dòng vào Hỏng bằng dòng ra, $0,3\pi_X = \pi_H$. Suy ra $\pi_X = \frac{2}{3}\pi_T$, $\pi_H = \frac{1}{5}\pi_T$. Từ $\pi_T + \pi_X + \pi_H = 1$:

$$\pi_T = \frac{15}{28}, \pi_X = \frac{10}{28}, \pi_H = \frac{3}{28} \approx 10,7\%$$

Nếu đầu tư để giảm xác suất hỏng từ 0,3 xuống 0,15, người quản lí có thể tính ngay hiệu quả bằng cách lặp lại phép tính – đây là cách các kĩ sư độ tin cậy dùng xích Markov trong thực tế.

Tình huống 4. Quân vợt – vì sao người giỏi hơn một chút lại thắng nhiều hơn hẳn?

Trong một game quần vợt, người thắng là người đầu tiên đạt 4 điểm và hơn đối thủ ít nhất 2 điểm (khi hoà 3 – 3, gọi là “deuce”, phải thắng hai điểm liên tiếp). Tay vợt A thắng mỗi điểm với xác suất $p = 0,6$ độc lập. Tính xác suất A thắng game.



Hình 18. Từ deuce: thắng hai điểm liên tiếp mới thắng game, thua một điểm thì quay lại deuce

Bước 1 – Từ deuce. Gọi D là xác suất A thắng khi đang deuce. Sau hai điểm: A thắng cả hai (p^2), thua cả hai (q^2) hoặc mỗi người một điểm – quay về deuce ($2pq$):

$$D = p^2 + 2pq \cdot D \Rightarrow D = \frac{p^2}{p^2 + q^2} = \frac{0,36}{0,52} = \frac{9}{13}$$

Bước 2 – Trước deuce. A thắng 4 – 0, 4 – 1, 4 – 2 (điểm cuối là của A) hoặc vào deuce (3 – 3):

$$P = p^4(1 + 4q + 10q^2) + 20p^3q^3 \cdot D = \frac{29889}{40625} \approx 0,736$$

Thắng mỗi điểm 60% nhưng thắng mỗi game gần 74%; cộng dồn qua set và trận, lợi thế còn khuếch đại hơn nữa. Đây là lí do các nhà phân tích thể thao dùng quy hoạch động (theo điểm – game – set) để ước lượng cơ hội thắng trận theo thời gian thực.

Tình huống 5. Loạt sút luân lưu “cái chết bất ngờ”

Sau 5 lượt sút luân lưu, hai đội vẫn hoà và bước vào loạt “cái chết bất ngờ”: mỗi lượt mỗi đội sút một quả; nếu một đội ghi bàn còn đội kia không thì trận đấu kết thúc. Cầu thủ đội A sút thành công với xác suất 0,7, đội B là 0,6, các cú sút độc lập. Tính xác suất đội A thắng.

Sau một lượt: A thắng ngay nếu A vào, B trượt ($0,7 \cdot 0,4 = 0,28$); B thắng ngay nếu A trượt, B vào ($0,3 \cdot 0,6 = 0,18$); còn lại (0,54) thì **quay về đúng trạng thái cũ** – ở đây “quay về” là hợp lệ vì mỗi lượt sút độc lập và như nhau (khác với Dạng 10):

$$x = 0,28 + 0,54x \Rightarrow x = \frac{0,28}{0,46} = \frac{14}{23} \approx 0,609$$

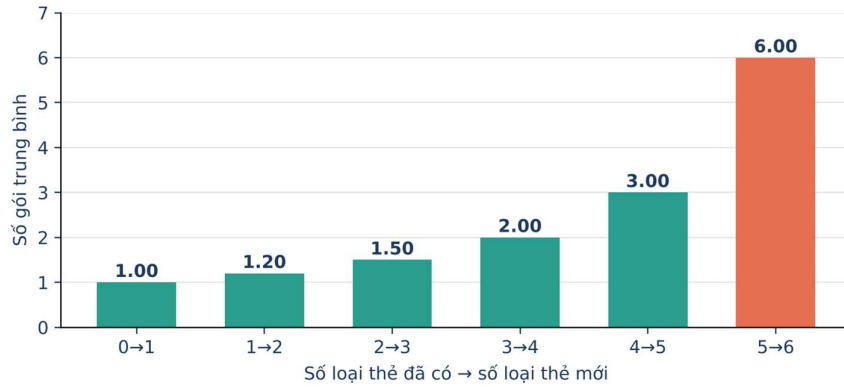
Tình huống 6. Sưu tập thẻ cầu thủ

Mỗi gói bim bim có kèm một thẻ cầu thủ, ngẫu nhiên trong 6 loại với khả năng như nhau. Trung bình phải mua bao nhiêu gói để sưu tập đủ 6 loại thẻ?

Gọi E_k là kì vọng số gói còn phải mua khi đã có k loại. Mỗi gói mới cho thẻ trùng với xác suất $\frac{k}{6}$:

$$E_k = 1 + \frac{k}{6}E_k + \frac{6-k}{6}E_{k+1} \Rightarrow E_k = \frac{6}{6-k} + E_{k+1}, \quad E_6 = 0$$

$$E_0 = 6 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) = 14,7$$

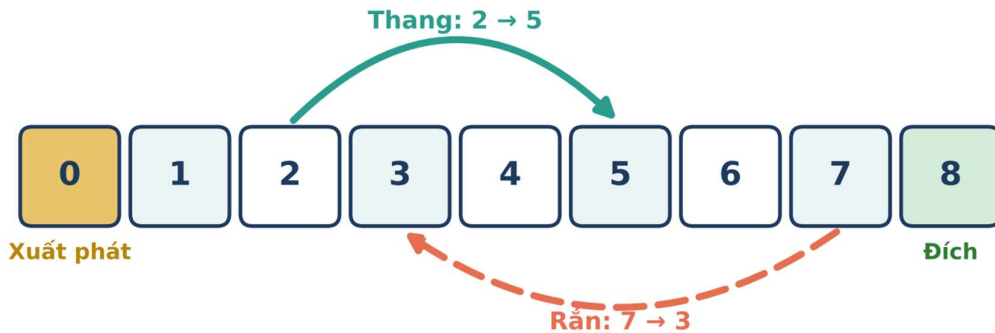


Hình 19. Số gói trung bình cho mỗi giai đoạn: thẻ cuối cùng “đắt” nhất

Riêng việc tìm thẻ thứ 6 đã tốn trung bình 6 gói – bằng tổng của ba giai đoạn đầu. Đây là “bài toán người sưu tập phiếu” (coupon collector) được Feller phân tích chi tiết, và cũng giải thích vì sao các chương trình khuyến mãi “sưu tập đủ bộ” luôn có lợi cho nhà sản xuất.

Tình huống 7. Trò chơi “Rắn và Thang” thu nhỏ

Bàn cờ có các ô 0, 1, ..., 8. Quân cờ xuất phát ở ô 0; mỗi lượt tung đồng xu, ngửa đi 1 ô, sấp đi 2 ô. Đến ô 8 (hoặc vượt quá) là về đích. Ô 2 có thang lên ô 5; ô 7 có rắn kéo xuống ô 3. Trung bình cần bao nhiêu lượt để về đích?



Hình 20. Bàn cờ thu nhỏ: thang 2 → 5 và rắn 7 → 3

Gọi E_i là kì vọng số lượt còn lại khi đứng ở ô i (ô 2 và ô 7 không bao giờ là nơi dừng). Phân tích theo lượt đầu:

$$E_6 = 1 + \frac{1}{2}E_3, \quad E_5 = 1 + \frac{1}{2}E_6 + \frac{1}{2}E_3, \quad E_4 = 1 + \frac{1}{2}E_5 + \frac{1}{2}E_6$$

$$E_3 = 1 + \frac{1}{2}E_4 + \frac{1}{2}E_5, \quad E_1 = 1 + \frac{1}{2}E_5 + \frac{1}{2}E_3, \quad E_0 = 1 + \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}E_5$$

Biểu diễn E_4, E_5, E_6 theo E_3 rồi thay vào phương trình của E_3 , ta được $E_3 = \frac{46}{5}$, $E_5 = \frac{42}{5}$, $E_1 = \frac{49}{5}$ và $E_0 = \frac{101}{10} = 10,1$ lượt. Các nhà thiết kế trò chơi dùng đúng phép tính này (trên bàn 100 ô) để cân chỉnh độ dài ván chơi.

Tình huống 8. Đoán mò trong bài thi trắc nghiệm

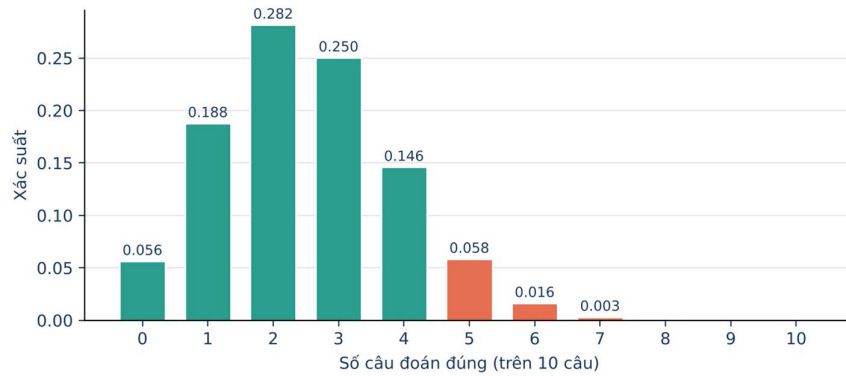
Một học sinh không biết làm 10 câu trắc nghiệm, mỗi câu có 4 phương án, và quyết định chọn ngẫu nhiên. Tính xác suất học sinh đó đoán đúng ít nhất 5 câu.

Gọi $q_n(k)$ là xác suất đúng k câu trong n câu đầu. Câu thứ n đúng ($\frac{1}{4}$) hoặc sai ($\frac{3}{4}$):

$$q_n(k) = \frac{1}{4}q_{n-1}(k-1) + \frac{3}{4}q_{n-1}(k), \quad q_0(0) = 1$$

Đây là “tam giác Pascal có trọng số” – lập bảng 10 hàng (hoặc dùng công thức nhị thức

$C_{10}^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{10-k}$) ta được $P(\geq 5) = \frac{40961}{524288} \approx 7,8\%$.



Hình 21. Phân phối số câu đoán đúng trên 10 câu (vùng cam: từ 5 câu trở lên)

Kì vọng số câu đúng chỉ là 2,5. Thông điệp cho thí sinh: đoán mò không thay thế được việc nắm phương pháp – và quy hoạch động là một trong những phương pháp “đáng đồng tiền” nhất.

VI. BÀI TẬP LUYỆN TẬP THEO ĐỊNH DẠNG HSA – TSA

Kí hiệu: **TN** trắc nghiệm 4 lựa chọn; **ĐĐA** điền đáp án; **Đ/S** Đúng/Sai. Thời gian gợi ý: 2 phút cho câu TN, ĐĐA và 4 phút cho câu Đ/S.

A. Câu hỏi trắc nghiệm 4 lựa chọn

Bài 1. TN ★★★ Tung một đồng xu cân đối 8 lần. Xác suất để không có ba lần ngửa nào liên tiếp là

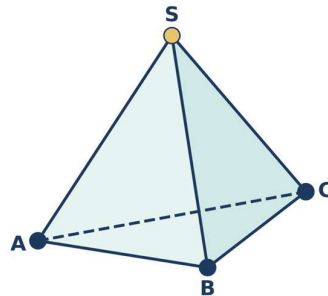
- A. $\frac{7}{16}$ B. $\frac{81}{256}$ C. $\frac{149}{256}$ D. $\frac{143}{256}$

Bài 2. TN ★★★ Một người có 2 triệu đồng, chơi một trò chơi: mỗi lượt thắng 1 triệu với xác suất 0,4 hoặc thua 1 triệu với xác suất 0,6. Người đó dừng khi có 5 triệu hoặc hết tiền. Xác suất người đó đạt 5 triệu là

- A. $\frac{4}{25}$ B. $\frac{40}{211}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{16}{81}$

Bài 3. TN ★★★ Một con kiến ở đỉnh S của tứ diện SABC. Mỗi bước, nó bò sang một trong ba đỉnh còn lại với xác suất như nhau. Xác suất kiến ở S sau đúng 4 bước là

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{7}{27}$ C. $\frac{2}{9}$ D. $\frac{20}{81}$



Mỗi bước: sang 1 trong 3 đỉnh còn lại (xác suất $\frac{1}{3}$)

Tứ diện SABC (Bài 3)

Bài 4. TN ★★★ An và Bình lần lượt ném bóng vào rổ, An ném trước. Mỗi lần ném, An trúng với xác suất 0,4, Bình trúng với xác suất 0,5; ai trúng trước thì thắng và trò chơi dừng. Xác suất An thắng là

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{4}{7}$ D. $\frac{5}{7}$

Bài 5. TN ★★★ Một đồng xu không cân đối có xác suất ra ngửa $\frac{1}{3}$. Tung đồng xu 5 lần. Xác suất số lần ra ngửa là số chẵn (kể cả 0) bằng

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{121}{243}$ C. $\frac{122}{243}$ D. $\frac{61}{81}$

Bài 6. TN ★★★ Gieo bốn con xúc xắc cân đối. Xác suất để tổng số chấm chia hết cho 3 là

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{35}{108}$ D. $\frac{433}{1296}$

Bài 7. TN ★★★ Viết ngẫu nhiên một dãy gồm 4 dấu “(” và 4 dấu “)” (mọi cách sắp xếp đồng khả năng). Xác suất để dãy thu được là một dãy ngoặc đúng (đọc từ trái sang, số dấu mở luôn không ít hơn số dấu đóng) là

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{7}$ D. $\frac{2}{7}$

Bài 8. TN ★★★ Một hộp có 3 bi đỏ và 2 bi xanh. An và Bình lần lượt lấy ngẫu nhiên từng viên (không hoàn lại), An lấy trước; ai lấy được bi đỏ trước thì thắng. Xác suất An thắng là

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{7}{10}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

Bài 9. TN ★★★ Trong một ván bóng bàn, hai đấu thủ đang hoà 10 – 10; từ đây ai dẫn trước 2 điểm thì thắng ván. Đấu thủ A thắng mỗi điểm với xác suất 0,55. Xác suất A thắng ván gần nhất với

- A. 0,55 B. 0,60 C. 0,65 D. 0,70

Bài 10. TN ★★★ Hai đội thi đấu loạt trận, đội nào thắng 3 trận trước là vô địch. Đội A thắng mỗi trận với xác suất $\frac{2}{3}$, không có hoà. Xác suất đội A vô địch là

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{20}{27}$ C. $\frac{64}{81}$ D. $\frac{8}{9}$

Bài 11. TN ★★★ Một đồng xu không cân đối có xác suất ra ngửa $\frac{1}{3}$. Tung đồng xu 5 lần. Xác suất để không có hai lần ngửa nào liên tiếp là

- A. $\frac{164}{243}$ B. $\frac{13}{32}$ C. $\frac{32}{243}$ D. $\frac{211}{243}$

Bài 12. TN ★★★ Trên lưới ô vuông, một con kiến đi từ (0; 0) đến (4; 4). Tại mỗi nút, nếu đi được cả hai hướng (sang phải, lên trên) thì nó chọn ngẫu nhiên mỗi hướng với xác suất $\frac{1}{2}$;

nếu đã chạm biên trên hoặc biên phải thì nó đi theo hướng duy nhất còn lại. Xác suất con kiến đi qua điểm (3; 1) là

A. $\frac{8}{35}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{3}{8}$

B. Câu hỏi điền đáp án

Bài 13. ĐDA ★★★ Hai đội A và B thi đấu loạt trận, đội nào thắng 4 trận trước sẽ vô địch. Mỗi trận A thắng với xác suất 0,6, các trận độc lập, không có hoà. Xác suất A vô địch là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trăm)

Bài 14. ĐDA ★★★ Gieo liên tiếp một con xúc xắc cân đối cho tới khi có hai lần liên tiếp ra mặt 6 thì dừng. Kỳ vọng số lần gieo là bao nhiêu?

Bài 15. ĐDA ★★★ Gieo bốn con xúc xắc cân đối. Có bao nhiêu kết quả (bộ có thứ tự) mà tổng số chấm bằng 14?

Bài 16. ĐDA ★★★ Tung liên tiếp một đồng xu cân đối cho tới khi xuất hiện một lần ngửa ngay sau đó là một lần sấp (dãy NS) thì dừng. Kỳ vọng số lần tung là bao nhiêu?

Bài 17. ĐDA ★★★ (Theo bài toán Pascal – Fermat) Hai người góp tổng cộng 64 đồng vàng, chơi các ván công bằng, ai thắng đủ 3 ván trước nhận tất cả. Khi người thứ nhất đã thắng 0 ván và người thứ hai đã thắng 1 ván thì cuộc chơi phải dừng. Chia công bằng, người thứ nhất nhận bao nhiêu đồng vàng?

Bài 18. ĐDA ★★★ Một cầu thang có 12 bậc, mỗi bước có thể bước lên 1, 2 hoặc 3 bậc. Có bao nhiêu cách leo hết cầu thang?

Bài 19. ĐDA ★★★ Có các tờ tiền mệnh giá 1, 3, 5 nghìn đồng với số lượng không hạn chế. Có bao nhiêu cách đổi 20 nghìn đồng (không tính thứ tự các tờ)?

Bài 20. ĐDA ★★★ Một hệ thống có ba trạng thái A, B, C. Mỗi bước, từ A hệ chuyển sang A, B, C với xác suất 0,2; 0,5; 0,3; từ B: 0,4; 0,1; 0,5; từ C: 0,3; 0,3; 0,4. Ban đầu hệ ở A. Xác suất hệ ở A sau đúng 6 bước là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần nghìn)

Bài 21. ĐDA ★★★ Trong cuộc bầu chọn, bạn A được 4 phiếu, bạn B được 2 phiếu; các phiếu được kiểm theo thứ tự ngẫu nhiên. Xác suất để trong suốt quá trình kiểm, A luôn có nhiều phiếu hơn hẳn B là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trăm)

Bài 22. ĐDA ★★★ Tung liên tiếp một đồng xu cân đối cho tới khi xuất hiện ba lần ngửa liên tiếp. Kỳ vọng số lần tung là bao nhiêu?

Bài 23. ĐDA ★★★ Gieo liên tiếp một con xúc xắc cân đối cho tới khi đã xuất hiện đủ cả ba mặt 2, 4, 6 (theo thứ tự bất kì). Kỳ vọng số lần gieo là bao nhiêu?

Bài 24. ĐDA ★★★ An có 3 viên bi, Bình có 5 viên bi. Mỗi ván tung một đồng xu cân đối, ngửa thì Bình đưa An 1 viên, sấp thì An đưa Bình 1 viên; trò chơi dừng khi một người hết bi. Kỳ vọng số ván là bao nhiêu?

Bài 25. ĐDA ★★★ Trong loạt “cái chết bất ngờ” (như Tình huống 5), cầu thủ đội A sút thành công với xác suất 0,8, đội B là 0,75. Xác suất đội A thắng là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trăm)

C. Câu hỏi Đúng/Sai

Bài 26. Đ/S ★★★ Ở một vùng, nếu hôm nay nắng thì ngày mai nắng với xác suất 0,8, mưa với xác suất 0,2; nếu hôm nay mưa thì ngày mai nắng hay mưa đều với xác suất 0,5. Hôm nay trời nắng.

Mệnh đề	Đúng	Sai
a) Xác suất ngày mai trời mưa là 0,2.	☐	☐
b) Xác suất ngày kia trời mưa là 0,26.	☐	☐
c) Xác suất ba ngày tới đều nắng là 0,64.	☐	☐
d) Về lâu dài, tỉ lệ số ngày mưa là $\frac{2}{7}$.	☐	☐

Bài 27. Đ/S ★★★ Trong trò chơi mô phỏng trận Lee Sedol – AlphaGo (Ví dụ 15), giả sử kì thủ khởi đầu với **1 điểm** (các luật khác giữ nguyên: thắng $\frac{1}{4}$, hoà $\frac{1}{4}$, thua $\frac{1}{2}$; dừng khi đạt 3 điểm hoặc 0 điểm).

Mệnh đề	Đúng	Sai
a) Xác suất kì thủ thua ngay ở ván đầu tiên là $\frac{1}{2}$.	☐	☐
b) Xác suất trận đấu kết thúc sau đúng 2 ván với chiến thắng của kì thủ là $\frac{1}{16}$.	☐	☐
c) Xác suất sau 2 ván trận đấu vẫn chưa kết thúc là $\frac{3}{8}$.	☐	☐
d) Xác suất kì thủ giành chiến thắng chung cuộc là $\frac{1}{7}$.	☐	☐

Bài 28. **Đ/S** ★★☆☆ Xét chiếc máy ở Tình huống 3 (Tốt $\rightarrow$ Tốt 0,8; Tốt $\rightarrow$ Xuống cấp 0,2; Xuống cấp $\rightarrow$ Xuống cấp 0,7; Xuống cấp $\rightarrow$ Hồng 0,3; Hồng $\rightarrow$ Tốt 1). Hôm nay máy Tốt.

Mệnh đề	Đúng	Sai
a) Xác suất ngày mai máy vẫn Tốt là 0,8.	☐	☐
b) Xác suất ngày kia máy Hồng bằng 0.	☐	☐
c) Về lâu dài, máy Hồng khoảng 10,7% số ngày.	☐	☐
d) Về lâu dài, máy ở trạng thái Tốt khoảng 60% số ngày.	☐	☐

Bài 29. **Đ/S** ★★☆☆ Gieo liên tiếp một con xúc xắc cân đối.

Mệnh đề	Đúng	Sai
a) Kỳ vọng số lần gieo đến khi xuất hiện mặt 6 lần đầu là 6.	☐	☐
b) Xác suất cần gieo nhiều hơn 3 lần mới thấy mặt 6 là $\frac{125}{216}$.	☐	☐
c) Kỳ vọng số lần gieo đến khi xuất hiện đủ cả 6 mặt là 14,7.	☐	☐
d) Kỳ vọng số lần gieo đến khi có hai lần liên tiếp ra mặt 6 là 36.	☐	☐

VII. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bảng đáp án

Bài	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	C	B	B	C	C	A	B	B	B	C	A	B

Bài	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Đáp án	0,71	42	146	4	20	927	20	0,300	0,33	14	11	15	0,57

Bài	a)	b)	c)	d)
26	Đ	Đ	S	Đ
27	Đ	Đ	S	Đ
28	Đ	S	Đ	S
29	Đ	Đ	Đ	S

Hướng dẫn giải

Bài 1. Gọi T_n là số dãy độ dài n không chứa NNN. Phân loại theo phần cuối là S, SN, SNN: $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$ với $T_0 = 1, T_1 = 2, T_2 = 4$. Ta được 7, 13, 24, 44, 81, 149, nên xác suất là $\frac{149}{256}$.

Bài 2. Công thức người chơi phá sản với $\frac{q}{p} = \frac{3}{2}, i = 2, N = 5: P_2 = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^5 - 1} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{211}{32}} = \frac{40}{211}$.

Bài 3. Như Ví dụ 8: $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n), p_0 = 1$ cho $p_1 = 0, p_2 = \frac{1}{3}, p_3 = \frac{2}{9}, p_4 = \frac{7}{27}$. (Phương án D là p_5 – bẫy đếm thừa một bước.)

Bài 4. Gọi x là xác suất An thắng ở đầu một “vòng”. Vòng đầu không ai trúng thì quay về trạng thái cũ (phép thử lặp lại như nhau): $x = 0,4 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot x$ nên $x = \frac{0,4}{0,7} = \frac{4}{7}$.

Bài 5. Công thức Dạng 7: $e_5 = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{3} \right)^5 \right] = \frac{122}{243}$.

Bài 6. Chỉ cần nhớ số dư của tổng khi chia cho 3. Mỗi con xúc xắc cho số dư 0, 1, 2 với cùng xác suất $\frac{1}{3}$ (mỗi số dư có 2 mặt), nên ngay sau con thứ nhất, phân phối số dư đã đều $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right)$ và giữ nguyên ở các bước sau. Đáp số $\frac{1}{3}$.

Bài 7. Gọi $c_i(j)$ là số dãy độ dài i có (số mở – số đóng) bằng $j \geq 0: c_i(j) = c_{i-1}(j-1) + c_{i-1}(j+1)$. Bảng cho $c_8(0) = 14$ (số Catalan thứ tư), trên tổng $C_8^4 = 70$ dãy: $\frac{14}{70} = \frac{1}{5}$.

Bài 8. Dạng 10: An lấy đỏ ngay ($\frac{3}{5}$); hoặc An lấy xanh ($\frac{2}{5}$), Bình lấy xanh ($\frac{1}{4}$) rồi An chắc chắn lấy đỏ. $P = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{10}$.

Bài 9. Như quân vọt từ deuce: $D = \frac{p^2}{p^2 + q^2} = \frac{0,3025}{0,505} = \frac{121}{202} \approx 0,599$. Chọn B.

Bài 10. Bảng Dạng 1 với $p = \frac{2}{3}$, hoặc đếm theo số trận thua k trước trận thắng cuối: $P = \sum_{k=0}^2 C_{2+k}^k \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{8}{27} \left(1 + 1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{64}{81}$.

Bài 11. Lập bảng xác suất: a_n (hợp lệ, kết thúc S), b_n (hợp lệ, kết thúc N) với $a_{n+1} = \frac{2}{3}(a_n + b_n)$, $b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$, $a_1 = \frac{2}{3}$, $b_1 = \frac{1}{3}$. Đến $n = 5$: $a_5 + b_5 = \frac{164}{243}$.

Bài 12. Lập bảng xác suất đến từng nút: $P(x; y) = P(x-1; y) \cdot r_{x-1,y} + P(x; y-1) \cdot u_{x,y-1}$, trong đó r, u bằng $\frac{1}{2}$ ở nút trong và bằng 1 ở nút biên. Ta được $P(3; 1) = \frac{1}{4}$. Phương án A ($\frac{8}{35}$) là đáp số nếu chọn đều một trong 70 đường – đúng cái bẫy đã cảnh báo ở mục III.2.

Bài 13. $P(i, j) = 0,6 \cdot P(i-1, j) + 0,4 \cdot P(i, j-1)$; bảng 4×4 cho $P(4, 4) = \frac{11097}{15625} \approx 0,7102$. Hoặc $P = \sum_{k=0}^3 C_{3+k}^k \cdot 0,6^4 \cdot 0,4^k$. Đáp số **0,71**.

Bài 14. $E_0 = 1 + \frac{5}{6}E_0 + \frac{1}{6}E_1$, $E_1 = 1 + \frac{5}{6}E_0$. Suy ra $E_0 = 6 + E_1$, $E_1 = 36$, $E_0 = 42$.

Bài 15. Từ bảng N_3 ở Dạng 6: $N_4(14) = N_3(13) + \dots + N_3(8) = 21 + 25 + 27 + 27 + 25 + 21 = 146$.

Bài 16. $E_0 = 1 + \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}E_0$, $E_1 = 1 + \frac{1}{2}E_1$ (đã có N, tung N tiếp vẫn ở trạng thái “có N”). Được $E_1 = 2$, $E_0 = 4$.

Bài 17. Người thứ nhất thiếu 3 ván, người thứ hai thiếu 2 ván: $P(3, 2) = \frac{5}{16}$ (đối xứng với $P(2, 3) = \frac{11}{16}$). Nhận $\frac{5}{16} \cdot 64 = 20$ đồng vàng.

Bài 18. $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3}$, $f_0 = f_1 = 1$, $f_2 = 2$: 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, **927**.

Bài 19. Đưa lần lượt các mệnh giá 1, 3, 5 vào như Ví dụ 5. Sau mệnh giá 1: mọi $d_x = 1$; sau mệnh giá 3: $d_x = \lfloor x/3 \rfloor + 1$; sau mệnh giá 5: $d_{20} = 7 + 6 + 4 + 2 + 1 = 20$ (ứng với 0, 1, 2, 3, 4 từ 5 nghìn).

Bài 20. Lập bảng phân phối 6 hàng như Dạng 8 (mỗi hàng 3 ô, tổng bằng 1): $\pi_6(A) = 0,300243 \approx 0,300$.

Bài 21. Định lý kiểm phiếu: $\frac{4-2}{4+2} = \frac{1}{3} \approx 0,33$. Kiểm lại bằng bảng: 5 đường hợp lệ trên $C_6^2 = 15$.

Bài 22. $E_2 = 1 + \frac{1}{2}E_0$, $E_1 = 1 + \frac{1}{2}E_0 + \frac{1}{2}E_2$, $E_0 = 1 + \frac{1}{2}E_0 + \frac{1}{2}E_1$. Giải: $E_0 = 14$. (Tổng quát: chờ k ngửa liên tiếp cần trung bình $2^{k+1} - 2$ lần.)

Bài 23. Như Tình huống 6 với 3 “thẻ”, mỗi lần gieo trúng một mặt còn thiếu với xác suất $\frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}$: $E = 2 + 3 + 6 = 11$.

Bài 24. Người chơi phá sản công bằng, $i = 3, N = 8$: $E_i = 1 + \frac{1}{2}E_{i-1} + \frac{1}{2}E_{i+1}$, $E_0 = E_8 = 0$ có nghiệm $E_i = i(8 - i)$, nên $E_3 = 15$.

Bài 25. Một lượt: A thắng ngay $0,8 \cdot 0,25 = 0,2$, B thắng ngay $0,2 \cdot 0,75 = 0,15$, còn lại $0,65$ thì lặp lại: $x = 0,2 + 0,65x \Rightarrow x = \frac{0,2}{0,35} = \frac{4}{7} \approx 0,57$.

Bài 26. a) Đ. b) $0,8 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,5 = 0,26$ – Đ. c) $0,8^3 = 0,512$ – S. d) $\pi_M = \frac{0,2}{0,2 + 0,5} = \frac{2}{7}$ – Đ.

Bài 27. a) Đ. b) Thắng – thắng: $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ – Đ. c) Chưa kết thúc sau 2 ván ứng với các kịch bản (thắng, hoà), (thắng, thua), (hoà, thắng), (hoà, hoà): $\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$ – S. d) Gọi x_1, x_2 là xác suất thắng chung cuộc từ 1 điểm, 2 điểm: $x_1 = \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_1$, $x_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_1$, cho $x_1 = \frac{1}{7}$ – Đ.

Bài 28. a) Đ. b) Tốt $\rightarrow$ Xuống cấp $\rightarrow$ Hồng: $0,2 \cdot 0,3 = 0,06 \neq 0$ – S. c) $\frac{3}{28} \approx 10,7\%$ – Đ. d) $\frac{15}{28} \approx 53,6\%$ – S.

Bài 29. a) Đ (kì vọng của phân phối hình học $\frac{1}{p} = 6$). b) Ba lần đầu đều không ra 6: $\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$ – Đ. c) Tình huống 6 – Đ. d) Bài 14 cho 42 – S.

VIII. KẾT LUẬN VÀ LỜI KHUYẾN KHI LÀM BÀI

- **Luôn hỏi “trạng thái là gì?” trước khi tính.** Phần lớn sai sót đến từ chọn trạng thái thiếu thông tin (quên ghi “đang có mấy N liên tiếp”, quên rằng bộ bài đã vơi đi) hoặc thừa thông tin (nhớ cả tổng trong khi chỉ cần số dư).
- **Phân biệt “có hoàn lại” và “không hoàn lại”.** Chỉ khi phép thử lặp lại y hệt thì mới được lập phương trình “quay về trạng thái cũ”.
- **Phân biệt “chọn đều một đường” và “đi ngẫu nhiên từng bước”.** Hai mô hình cho đáp số khác nhau (Bài 12).

- **Tận dụng đối xứng để thu gọn trạng thái** (tam giác $\rightarrow$ 2 trạng thái; lá súng $\rightarrow$ chỉ cần giải tới lá 5).
- **Đổi xác suất thành trọng số nguyên** khi mọi xác suất có chung mẫu – bảng chỉ còn số nguyên, tính nhẩm được (Ví dụ 15).
- **Viết bảng thay vì liệt kê.** Mỗi ô một phép tính đơn giản, dễ kiểm tra lại; khi được phép dùng máy tính cầm tay, chức năng lập hoặc lập bảng giúp tính nhanh các dãy truy hồi.
- **Kiểm tra bằng giới hạn và trường hợp nhỏ:** xác suất phải nằm trong $[0; 1]$, tổng mỗi hàng của bảng phân phối bằng 1, các xác suất hấp thụ cộng lại bằng 1, $n = 1, 2$ phải khớp với cách đếm trực tiếp.
- **Cảnh giác phương án nhiễu:** đề trắc nghiệm hay đặt đáp số của bước liền trước/liền sau (Bài 3), đáp số của mô hình “gần giống” (Bài 12) hoặc đáp số “chia theo tỉ lệ” kiểu Pacioli.

Từ những lá thư năm 1654 tới các câu hỏi trên máy tính của kì thi HSA, TSA hôm nay, ý tưởng vẫn giữ nguyên: *một bài toán lớn là chuỗi các bài toán nhỏ biết cách nối với nhau.* Như bộ bài giảng “Làm chủ tư duy quy hoạch động” tóm lại: đừng giải lại những gì đã biết – hãy xây tiếp trên nó. Nắm được tư duy này, học sinh không chỉ giải nhanh câu xác suất mà còn có một công cụ dùng được trong tin học, kinh tế, kĩ thuật và khoa học dữ liệu.

IX. TÀI LIỆU THAM KHẢO

Văn bản và thông tin kì thi trong nước

- [1] Viện Đào tạo số và Khảo thí, ĐHQG Hà Nội (2026). *Dạng thức và đề cương chi tiết bài thi HSA* (QĐ 01/QĐ-ĐTSKT, áp dụng từ năm 2026). hsa.edu.vn.
- [2] Viện Đào tạo số và Khảo thí, ĐHQG Hà Nội (2026). *Phổ điểm thi và phân vị HSA năm 2026*. vnu.edu.vn.
- [3] Đại học Bách khoa Hà Nội (2026). *Thông tin kì thi Đánh giá tư duy TSA 2026*. tsa.hust.edu.vn.
- [4] Bộ Giáo dục và Đào tạo (2018). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán*; SGK Toán 11, Toán 12 (phần Xác suất, Xác suất có điều kiện).
- [5] Sở GD&ĐT Sơn La. *Đề thi môn Toán*, Câu 3 (tình huống trận đấu Lee Sedol – AlphaGo).

Kì thi quốc tế

- [6] Mathematical Association of America. *2003 AIME II, Problem 13*. Lời giải: AoPS Wiki.
- [7] Mathematical Association of America. *2014 AMC 10B, Problem 25 / 2014 AMC 12B, Problem 22*. Lời giải: AoPS Wiki.

Giáo trình nước ngoài

- [8] Ross, S. M. *A First Course in Probability*, 10th ed. Pearson, 2019 (gambler's ruin, phương pháp điều kiện hoá).
- [9] Blitzstein, J. K. & Hwang, J. *Introduction to Probability*, 2nd ed. CRC Press, 2019 (first-step analysis; giáo trình Stat 110, Harvard).
- [10] Grinstead, C. M. & Snell, J. L. *Introduction to Probability*. American Mathematical Society, 1997 (bản điện tử miễn phí).
- [11] Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. I, 3rd ed. Wiley, 1968 (định lý kiểm phiếu, bài toán người sưu tập phiếu).
- [12] Kemeny, J. G. & Snell, J. L. *Finite Markov Chains*. Van Nostrand, 1960.
- [13] Karlin, S. & Taylor, H. M. *A First Course in Stochastic Processes*, 2nd ed. Academic Press, 1975.
- [14] Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L. & Stein, C. *Introduction to Algorithms*, 4th ed. MIT Press, 2022 (chương Dynamic Programming).
- [15] Zeitz, P. *The Art and Craft of Problem Solving*, 3rd ed. Wiley, 2017.

Lịch sử toán học

- [16] Bellman, R. *Dynamic Programming*. Princeton University Press, 1957.
- [17] Bellman, R. *Eye of the Hurricane: An Autobiography*. World Scientific, 1984.
- [18] Bertrand, J. *Solution d'un problème*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 105 (1887), 369.
- [19] Devlin, K. *The Unfinished Game: Pascal, Fermat, and the Seventeenth-Century Letter that Made the World Modern*. Basic Books, 2008.
- [20] Hald, A. *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*. Wiley, 1990 (Pacioli, Galileo, Pascal – Fermat, Huygens).
- [21] Huygens, C. *De ratiociniis in ludo aleae*, 1657.